ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΗΣ ΑΓΩΓΗΣ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΚΥΡΙΑΚΗ Α. ΘΕΟΛΟΓΙΤΟΥ

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΤΩΝ ΔΥΝΑΤΟΤΗΤΩΝ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΣΤ΄ ΤΑΞΗΣ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΣΤΗΝ ΑΝΕΥΡΕΣΗ ΚΑΙ ΛΟΓΙΚΗ ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΣΗ ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ (ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ) ΜΕΣΩ ΑΝΑΚΑΛΥΠΤΙΚΩΝ ΕΝΕΡΓΕΙΩΝ (ΜΙΑ ΜΕΛΕΤΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗΣ)

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΡΕΘΥΜΝΟ
ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ 1998

ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΑ ΜΟΥ

ΕΥΧΑΡΙΣΤΗΡΙΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Νιώθω την ανάγκη να ευχαριστήσω θερμά όλα εκείνα τα πρόσωπα που με υποστήριξαν ηθικά και με βοήθησαν με κάθε τρόπο στην ολοκλήρωση των μεταπτυχιακών μου σπουδών και στην συγγραφή της παρούσας εργασίας.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον επόπτη μου κ. Κωνσταντίνο Τζανάκη του οποίου η συμβολή ήταν καθοριστική για την ολοκλήρωση της εργασίας αυτής. Ιδιαίτερα τον ευχαριστώ γιατί με την επιστημονική του κατάρτιση και την πολύπλευρη συμπαράστασή του, με βοήθησε τόσο σε θεωρητικά όσο και σε πρακτικά ζητήματα, καθ' όλη την διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών.

Ευχαριστώ, επίσης, τον κ. Γεώργιο Τρούλη ο οποίος μου παρείχε πολύτιμες συμβουλές και παρατηρήσεις διαθέτοντάς μου αρκετό από τον πολύτιμο χρόνο του και προσφέροντάς μου βιβλία από την προσωπική του βιβλιοθήκη.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κύριο Μιχάλη Κούρκουλο, ο οποίος με το ενδιαφέρον του και τις εύστοχες παρατηρήσεις του συνέβαλε ουσιαστικά τόσο στην διεξαγωγή της έρευνας, όσο και στην συγγραφή της παρούσας εργασίας. Τον ευχαριστώ, επίσης, για την βιβλιογραφική υποστήριξη καθώς και για την πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγησή του στην στατιστική επεξεργασία.

Ευχαριστώ, επίσης, τους διευθυντές, τους εκπαιδευτικούς και τους μαθητές του 6ου και 9ου δημοτικού σχολείου Ρεθύμνου για την συνεργασία τους και για τον πολύτιμο χρόνο που μου διέθεσαν για την διεξαγωγή της έρευνας.

Επίσης, ευχαριστώ όλους τους φίλους και συναδέλφους που με βοήθησαν και μου συμπαραστάθηκαν σε διάφορα στάδια της εργασίας μου: Την Μαρία Θεοδωρακάκου, την Ελπίδα Γύπαρη, τον Σίμο Αναγνωστάκη, τον Μιχάλη Παπαδάκη, τον Ανδρέα Κουτρουμπά, την Μαρία Μονιάκη. Ιδιαίτερα ευχαριστώ την Κατερίνα Μαυραντωνάκη για την ηθική συμπαράσταση και την βιβλιογραφική υποστήριξη.

Τέλος, ευχαριστώ την οικογένειά μου, της οποίας η αμέριστη συμπαράσταση μου έδωσε την δυνατότητα να ολοκληρώσω όλη αυτή την προσπάθεια.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ
ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 ΓΕΝΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Για πολλούς αιώνες τα μαθηματικά θεωρούνταν ως το κατεξοχήν αντικείμενο στο οποίο μπορούσε να γυμναστεί η δύναμη του «συλλογισμού». Η πιο κοινή απάντηση στο ερώτημα, γιατί να υπάρχουν τόσα πολλά μαθηματικά στο σχολείο ήταν -και συχνά είναι ακόμη- «μαθαίνουν κάποιον να σκέφτεται»...(Γ. Θωμαΐδης, 1993β, σσ. 344-45).

Η αντίληψη αυτή φαίνεται να διέπει τους σκοπούς της διδασκαλίας των μαθηματικών τόσο στα αναλυτικά προγράμματα της πρωτοβάθμιας, όσο και της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Ειδικότερα στην πρωτοβάθμια, ως γενικός σκοπός της διδασκαλίας των Μαθηματικών στο Δημοτικό σχολείο αναφέρεται «**η ανάπτυξη της λογικομαθηματικής σκέψης** και η κατανόηση του περιβάλλοντος από άποψη ποσοτικών μεγεθών και σχέσεων, ώστε να αντιμετωπίζουν με επιτυχία προβληματικές καταστάσεις». Συγκεκριμένα, επιδιώκεται «να κατανοήσουν [οι μαθητές] βασικές μαθηματικές έννοιες, όπως... αριθμός, ...ο χώρος, το σχήμα, οι επιφάνειες, ο όγκος κ.α.,... να εδραιώσουν βασικές λογικομαθηματικές δομές και μηχανισμούς,... να καλλιεργήσουν την ικανότητα για την λύση προβλημάτων,... να εκμάθουν με ακρίβεια την μαθηματική γλώσσα,... να αναπτύξουν την δύναμη ... αφαίρεσης, γενίκευσης και να εθισθούν στην κριτική σκέψη...» (ΑΠ μαθημάτων του ΔΣ 1987, σελ.109).

Όμως, τα παραπάνω με τον τρόπο που είναι διατυπωμένα δεν συγκεκριμενοποιούνται, και μάλιστα σε επίπεδο μεθόδου και διδακτέας ύλης, παραμένουν γενικόλογα, αόριστα και ασαφή (βλ. Θωμαΐδης Γ., 1993β, σελ.335). Ο όρος λογικομαθηματική σκέψη αναφέρεται πολλές φορές στα προγράμματα εκπαίδευσης, εν τούτοις πολύ λίγο έχει γίνει λόγος για την ουσία και το περιεχόμενό της αναλυτικά.

Τι είναι όμως λογικομαθηματική σκέψη; Σύμφωνα με τον Gardner, χαρακτηριστικό της λογικομαθηματικής σκέψης είναι η ευαισθησία και η ικανότητα στη διάκριση λογικών ή αριθμητικών παραστάσεων και στο χειρισμό μεγάλης αλυσίδας λογικών σκέψεων (Γ. Φλουρή, 1996, σελ. 248). Άλλα, βασικά χαρακτηριστικά στοιχεία της λογικομαθηματικής σκέψης είναι:

• *η συγκλίνουσα σκέψη*: η εξέλιξη της συγκλίνουσας σκέψης πρέπει να είναι ανάλογη με την ψυχοπνευματική ωρίμανση του μαθητή και διακρίνεται από την ικανότητά του για συγκρίσεις, ταξινομήσεις, αντιστοιχίες, μετρήσεις, αριθμήσεις, ομαδοποιήσεις, κατατάξεις των διαφόρων μαθηματικών δεδομένων.

• *αξιολόγηση της διαδικασίας*: η ιδιότητα αυτή αναφέρεται στη δυνατότητα των μαθητών να ελέγχουν ανά πάσα στιγμή το αποτέλεσμα μιας μαθηματικής μαθησιακής διεργασίας, με το να αναστρέφουν το πρόβλημα και να χρησιμοποιήσουν το αποτέλεσμα σαν γνωστό στοιχείο και κάποιο από τα δεδομένα του προβλήματος ως ζητούμενο.

•*δημιουργική σκέψη*: γνωρίσματα της δημιουργικής σκέψης είναι το παράδοξο, το παράλογο, το μοναδικό, το πολυδιάστατο, το πρακτικό, το θεωρητικό, η σύλληψη της επιστημονικής αλήθειας και των δομών της πραγματικότητας.. Το στοιχείο αυτό της λογικομαθηματικής σκέψης δεν αναπτύσσεται μόνο με τη μαθηματική μαθησιακή διεργασία, αλλά και με τα υπόλοιπα μαθησιακά ερεθίσματα, που παρέχονται από τα άλλα γνωστικά αντικείμενα.

•*οι εναλλακτικές λύσεις*: όπως και στην καθημερινότητα κάθε πρόβλημα έχει πολλές λύσεις, έτσι και στα μαθηματικά έχουμε την δυνατότητα να προσεγγίσουμε το ζητούμενο από πολλές πλευρές και απόψεις, γιατί απλά κάθε μαθηματικό πρόβλημα έχει περισσότερες από μια λύσεις.

•*ο κατά προσέγγιση υπολογισμός του αποτελέσματος*: δεν μπορούμε να μιλάμε για ύπαρξη λογικομαθηματικής σκέψης, αν ο μαθητής δεν έχει τη στοιχειώδη ικανότητα να προσεγγίσει (να υπολογίσει χονδρικά) το αποτέλεσμα ενός μαθηματικού δεδομένου

•*λειτουργικότητα*: η λειτουργικότητα της λογικομαθηματικής σκέψης χαρακτηρίζεται από δύο κυρίως στοιχεία: την οικονομία δυνάμεων και την κοινή αποδοχή. Η οικονομία δυνάμεων αναφέρεται στον ευκολότερο για τα μαθηματικά τρόπο επίλυσης ενός μαθηματικού προβλήματος, ενώ η αποδοχή αναφέρεται στην κοινή αναγνώριση του τρόπου εργασίας προς το τελικό αποτέλεσμα από τη μαθησιακά ομάδα, η οποία συνεργάζεται για την επίλυση του προβλήματος (Μ. Φουντόπουλος, 1987, σελ. 169).

Απαραίτητη προϋπόθεση για την ανάπτυξη της λογικομαθηματικής σκέψης, αποτελεί η **παροχή μαθηματικής παιδείας** (κατ' αναλογία με τη γλωσσική ή την αισθητική παιδεία), που θα λέγαμε ότι αποτελεί το μέγιστο στόχο της διδασκαλίας των Μαθηματικών και εκφράζεται από τα ακόλουθα (βλ. Τζανάκης Κ., Κούρκουλος Μ., 1998, παρ. 1):

«(α) Απόκτηση ενδιαφέροντος για την επίλυση προβλημάτων και απάντηση ερωτημάτων, που έχουν χαρακτήρα «γρίφου» π.χ. «πώς θα φτιάξω ένα κανονικό εξάγωνο;»

(β) Δυνατότητα εκτίμησης καταστάσεων σε τάξη μεγέθους π.χ. νοητή εκτέλεση πράξεων, προσεγγιστική εκτίμηση διαστάσεων, εμβαδών, όγκων κλπ.

(γ) Δυνατότητα σύλληψης, διατύπωσης και εμπειρικής επαλήθευσης εικασιών· π.χ. «η διάμεσος από την κορυφή ισοσκελούς τριγώνου είναι ύψος και διχοτόμος του».

(δ) Μέριμνα για εμπειρική και νοητική αιτιολόγηση εικασιών· π.χ. «με απασχολεί το πώς θα σιγουρέψω τις ενδείξεις που έχω για το ότι «κάθε ισόπλευρο τρίγωνο είναι και ισογώνιο» (εμπειρική και νοητική αιτιολόγηση).

(ε) Δυνατότητα άρθρωσης και ελέγχου συλλογισμών· π.χ. για το ότι κάθε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει ίσες διαγώνιους».

(στ) Δυνατότητα ορθολογικής οργάνωσης και ακριβούς διατύπωσης της σκέψης· π.χ. «ποιά είναι και πώς αιτιολογείται η βασική ιδιότητα της μεσοκαθέτου ευθυγράμμου σχήματος;»

(ζ) Μοντελοποίηση καταστάσεων, βάσει της αναζήτησης και εύρεσης σχέσεων μεταξύ νοητικών ή εμπειρικών αντικειμένων, αφαιρώντας τα επί μέρους χαρακτηριστικά και διατηρώντας μόνον εκείνα που προσδιορίζουν τις σχέσεις αυτές· π.χ. «αφαιρώ τα επί μέρους χαρακτηριστικά τριγώνων (ως προς τις γωνίες ή τις πλευρές τους) και διατυπώνω τα 3 κριτήρια ισότητας τριγώνων. Έχω έτσι ένα μοντέλο περιγραφής των ομοιοτήτων και διαφοροποιήσεων τους».

Βλέπουμε λοιπόν, ότι **Μαθηματική Παιδεία** δεν είναι μόνον η κατοχή μαθηματικών γνώσεων, αλλά και **ένας συγκεκριμένος τρόπος αντιμετώπισης εμπειρικών ή νοητικών δεδομένων**. Με αυτήν την έννοια, η Μαθηματική Παιδεία είναι απαραίτητη προϋπόθεση για την ανάπτυξη της λογικομαθηματικής σκέψης και κατ' επέκταση για την ανάπτυξη των θετικών επιστημών.

Κεντρική άποψη της παρούσας εργασίας είναι ότι προνομιακό πεδίο για την ανάπτυξη της λογικομαθηματικής σκέψης αποτελεί η Γεωμετρία, τόσο για μεθοδολογικούς όσο και για παιδευτικούς λόγους (για περισσότερες λεπτομέρειες βλ. Τζανάκης Κ., Κούρκουλος Μ., 1998, παρ. 2-3, παρούσα εργασία, παρ. 2.2 και 2.3). Συνοπτικά, όμως, θα λέγαμε τα εξής:

(α) Οι γεωμετρικές καταστάσεις συχνά αποτελούν ερμηνευτικά μοντέλα άλλων καταστάσεων (π.χ. στην κατανόηση των πράξεων των κλασμάτων).

(β) Πρόκειται για γνωστικό αντικείμενο όπου κυριαρχεί η εποπτεία και συνεπώς δίδεται εύκολα η δυνατότητα πειραματισμού και μέσω αυτού, η σύλληψη και διατύπωση εικασιών με επαγωγικό και αναλογικό τρόπο (βλ. Polya, 1954).

(γ) Εξαιτίας της κυριαρχίας της εποπτείας, για λόγους και μόνο καθαρά αισθητικούς, οι μαθητές, στις μικρές ιδιαίτερα ηλικίες μπορούν να αποκτήσουν μια θετική στάση απέναντι στη γεωμετρία (π.χ. αν τους δοθούν προβλήματα κατασκευών, ερωτήματα συμμετρίας).

Ενώ, λοιπόν, η γεωμετρία προσφέρεται για την ανάπτυξη της λογικομαθηματικής σκέψης, δυστυχώς είναι υποβαθμισμένη στο δημοτικό σχολείο. Παρακάτω, (βλ. αναλυτικά σσ. 8-10, Η γεωμετρία στα σχολικά εγχειρίδια), θα δείξουμε καθαρά ότι η παρουσίαση της γεωμετρίας στο δημοτικό σχολείο, είναι υποταγμένη σε μια «αριθμητική λογική».

1.2 ΕΙΔΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Η διδασκαλία και μάθηση της γεωμετρίας σε όλα τα επίπεδα της εκπαίδευσης αποτελεί εδώ και πολλά χρόνια αντικείμενο συστηματικής έρευνας στη Διδακτική των Μαθηματικών. Όμως, η κριτική που έχει ασκηθεί από τους ερευνητές της Διδακτικής στην παραδοσιακή διδασκαλία της Ευκλείδειας

Γεωμετρίας, με βάση τα δεδομένα πολλών εμπειρικών ερευνών, είναι σχεδόν κατηγορηματική: Ελάχιστοι μόνο μαθητές είναι σε θέση να κατανοήσουν την παραγωγική δομή του μαθήματος, να επινοήσουν αποδείξεις γεωμετρικών προτάσεων κατασκευάζοντας μια ακολουθία συλλογισμών από τα δεδομένα στα ζητούμενα.

Από την άλλη, γίνεται διεθνώς συζήτηση σχετικά με τον ρόλο που η γεωμετρία μπορεί να παίξει στην εισαγωγή και ανάπτυξη ενός μαθηματικού τρόπου σκέψης και ειδικότερα, δεξιοτήτων για την σύλληψη, διατύπωση, εμπειρική επαλήθευση και λογική αιτιολόγηση (απόδειξη) εικασιών και υποθέσεων κυρίως όμως σε ότι αφορά την δευτεροβάθμια εκπαίδευση (βλ. π.χ. Hershkowitz et al. 1996, ICME 1995, Θωμαΐδης, 1996 σσ.84, 88).

Αυτό όμως προϋποθέτει την **θεώρηση των μαθηματικών** όχι μόνο ως τελικού προϊόντος μαθηματικής δημιουργίας, αλλά και **ως διαδικασίας**. Τα μαθηματικά δεν είναι μόνο αξιώματα, θεωρήματα, αποδείξεις, αλλά και διαδικασία, η οποία περιλαμβάνει σύλληψη ιδεών, ανακαλυπτικές ενέργειες, λάθη, οπισθοδρομήσεις στην ανάπτυξη ενός θέματος, λανθασμένες ή ασαφείς αντιλήψεις κλπ (I. Lakatos 1976, introduction). Το νόημα των Μαθηματικών γνώσεων δεν καθορίζεται μόνο από το σύνολο των καταστάσεων όπου οι γνώσεις αυτές αποκτούν υπόσταση ως μαθηματικές θεωρίες, αναπτυσσόμενες απαγωγικά, αλλά και από αυτήν καθεαυτή την διαδικασία που οδήγησε αρχικά ή μπορεί να οδηγήσει σ' αυτές (Brousseau, 1983, σελ. 170). Έτσι, δεχόμενοι τα Μαθηματικά, όχι μόνον ως πληροφοριακό περιεχόμενο, αλλά και ως διαδικασία σύλληψης, τεκμηρίωσης και οργάνωσης του περιεχομένου αυτού, σε κάθε προσπάθεια παρουσίασης / διδασκαλίας τους, τόσο η επιλογή των περιεχομένων, όσο και της μεθόδου, είναι άρρηκτα συνδεδεμένες με την κατανόηση αυτών των διαδικασιών σύλληψης, τεκμηρίωσης και οργάνωσης των επί μέρους μαθηματικών γνώσεων (βλ. Τζανάκης Κ., Κούρκουλος Μ., 1998, παρ. 4, παρούσα εργασία, παρ. 2.4).

1.3 ΣΚΟΠΟΣ ΚΑΙ ΣΤΟΧΟΙ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι να διερευνήσει τις δυνατότητες των μαθητών ΣΤ΄ τάξης δημοτικού στην μάθηση νέων γι' αυτούς μαθηματικών γνώσεων, βάσει ενός τρόπου παρουσίασης / διδασκαλίας της γεωμετρίας, όπου στην διαδικασία μάθησης οι **ανακαλυπτικές ενέργειες** και η **κατανόηση της ανάγκης σαφούς διατύπωσης** παρατηρήσεων και συμπερασμάτων και της **λογικής τους αιτιολόγησης,** είναι κεντρικής σημασίας. Ψυχολογικά, βασίζεται στην θεωρία του κονστρουκτιβισμού[1] (οικοδομισμού), σύμφωνα με την οποία το παιδί κατασκευάζει ενεργητικά τη γνώση, κατανοώντας τη σύμφωνα με τα δικά του γνωστικά αποθέματα (Μ. Τουμάσης, 1994, σελ. 154)

[1] Για τη θεωρία του κονστρουκτιβισμού, βλ. αναλυτικότερα παρ. 3.6.

Στόχος μας ήταν να διερευνήσουμε ορισμένα χαρακτηριστικά της συμπεριφοράς των μαθητών της ΣΤ΄ δημοτικού όσον αφορά τις δυνατότητες τους:

(α) να χωρίζουν ένα Γεωμετρικό σχήμα σε άλλα ίσα σχήματα και να ενώνουν ίσα σχήματα προκειμένου να δημιουργήσουν ένα νέο όλο.

(β) να θεωρούν ένα σχήμα ως μέρη και ως όλο και να ανακαλύπτουν Γεωμετρικές ιδιότητες με τη χρήση αυτής της διπλής θεώρησης.

(γ) να επεκτείνουν επαγωγικά και αναλογικά τις ιδιότητες που ανακαλύπτουν στα σχήματα της ίδιας ή παρεμφερούς κατηγορίας.

(δ) να κάνουν τους απαραίτητους συλλογισμούς ώστε να μετασχηματίσουν τις ιδιότητες που ανακαλύπτουν σε κατασκευαστικές διαδικασίες (ιδιότητες), προκειμένου να αντιμετωπίσουν προβλήματα κατασκευών.

(ε) να προχωρήσουν κατασκευαστικά στη μελέτη ιδιοτήτων, ώστε να διαπιστώσουν αν ισχύουν ή να διερευνήσουν το πεδίο εφαρμογής (ισχύος) τους.

1.4 ΣΗΜΑΣΙΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Δεδομένου ότι η γεωμετρία στο δημοτικό σχολείο είναι υποβαθμισμένη, αλλά και ότι η γεωμετρία είναι προνομιακή γνωστική περιοχή για την υλοποίηση του γενικού σκοπού των μαθηματικών στο δημοτικό σχολείο, θελήσαμε με την έρευνά μας αυτή, να εξετάσουμε κατά πόσο μπορούν τα παιδιά πράγματι να αναπτύξουν την λογικομαθηματική σκέψη. Και αν όχι, να εντοπίσουμε τα σημεία δυσκολίας τους (των μαθητών).

Είναι γνωστό ότι στην πρακτική του δημοτικού σχολείου, δεν ενισχύεται η παρουσίαση/ διδασκαλία των μαθηματικών μέσω ανακαλυπτικών διαδικασιών, τα οποία τελικά θέτουν και ερωτήματα για την λογική αιτιολόγηση παρατηρήσεων ή εικασιών. Αποτέλεσμα, η επικράτηση μιας χαοτικής κατάστασης, όταν τα παιδιά φτάνουν στην Α΄ Λυκείου όπου αντιμετωπίζουν για πρώτη φορά τη θεωρητική γεωμετρία, καθώς επίσης και σοβαρά προβλήματα κατανόησης της μαθηματικής (τυπικής) απόδειξης θεωρημάτων.

Η έρευνα στο χώρο αυτό έχει δείξει ότι **οι μαθητές έχουν λίγη ή καθόλου εμπειρία σε γεωμετρικές δραστηριότητες επαγωγικής σκέψης κατά την περίοδο της στοιχειώδους εκπαίδευσης και εισάγονται για πρώτη φορά στο Λύκειο στην παραγωγική γεωμετρία, όταν το πραγματικό τους υπόβαθρο δεν περιλαμβάνει καν την χρήση βασικών ιδιοτήτων των σχημάτων** (Kynigos, 1993, σελ.178).

Με την έρευνά μας, λοιπόν, εξετάζουμε **μέχρι ποιου σημείου μπορεί η διδασκαλία της γεωμετρίας μέσω ανακαλυπτικών διαδικασιών και η παρουσίαση γεωμετρικών ενοτήτων να ενισχυθεί στο δημοτικό σχολείο**, θέτοντας έτσι καλές βάσεις για τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

Τέλος, όπως θα δούμε στη βιβλιογραφική επισκόπηση, υπάρχει έλλειψη ανάλογης με το θέμα βιβλιογραφίας στον ελληνικό κυρίως χώρο αλλά και στον διεθνή (για το δημοτικό σχολείο).

1.5 ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Όπως σε κάθε ποιοτική έρευνα, έτσι και στην παρούσα εργασία, υπάρχουν μεθοδολογικοί και άλλοι περιορισμοί, τους οποίους ο αναγνώστης θα πρέπει να λάβει υπ'όψιν προκειμένου να κατανοήσει την ιδιαιτερότητά της και να ερμηνεύσει τα αποτελέσματα.

Ο περιορισμένος αριθμός των υποκειμένων της παρούσας έρευνας (23 μαθητές), καθιστά τα αποτελέσματά της μη γενικεύσιμα. Ωστόσο, η έρευνα είχε ως στόχο την βαθύτερη εξέταση/ μελέτη της συμπεριφοράς των υποκειμένων, πράγμα το οποίο δεν θα μπορούσε να επιτευχθεί ακολουθώντας έναν εμπειρικό τρόπο μελέτης.

Ένας άλλος βασικός περιορισμός της έρευνας, αποτελεί η απουσία σχετικής με το θέμα μας βιβλιογραφίας στον ελληνικό, κυρίως, χώρο. Έτσι, δεν υπάρχει δυνατότητα σύγκρισης της μεθοδολογίας, του τρόπου αξιολόγησης των αποτελεσμάτων ή της σύγκρισης κάποιων συμπερασμάτων, δυσχεραίνοντας με αυτό τον τρόπο την διυποκειμενική διάσταση της παρούσας μελέτης.

1.6 Η ΔΟΜΗ ΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Μετά το πρώτο, (εισαγωγικό κεφάλαιο), ακολουθεί το κεφάλαιο 2, το οποίο ασχολείται με την κριτική των σχολικών εγχειριδίων ως προς τις ενότητες της Γεωμετρίας, καθώς και με τα μεθοδολογικά και παιδευτικά πλεονεκτήματα της διδασκαλίας αυτού του αντικειμένου.

Στο κεφάλαιο 3, τεκμηριώνεται θεωρητικά το πρόβλημα της έρευνας.

Στο κεφάλαιο 4, τίθεται το πρόβλημα, διατυπώνονται τα ερωτήματα, περιγράφεται η μέθοδος και αναλύεται η διαδικασία έρευνας που ακολουθήθηκε.

Στο κεφάλαιο 5 πραγματοποιείται η παρουσίαση των αποτελεσμάτων και η στατιστική ανάλυση των δεδομένων.

Στο κεφάλαιο 6 παρατίθεται η ερμηνεία των αποτελεσμάτων και τα συμπεράσματα. Επίσης, επισημαίνονται μελλοντικές προεκτάσεις της παρούσας έρευνας.

Τέλος, παρατίθεται το παράρτημα και η βιβλιογραφία.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ

Η ΘΕΣΗ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΣΤΑ ΣΧΟΛΙΚΑ ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΑ – ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΚΑ / ΠΑΙΔΕΥΤΙΚΑ ΠΛΕΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Στο παρόν κεφάλαιο θα αναπτυχθεί προβληματισμός σχετικά με τη «υποτίμηση» του μαθήματος της γεωμετρίας στα σχολικά εγχειρίδια και τους λόγους που οδήγησαν σ' αυτή. Κυρίως, όμως, θα δοθεί έμφαση, τόσο στα μεθοδολογικά πλεονεκτήματά της (της γεωμετρίας), όσο και στην παιδευτική της αξία.

2.1 Η ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΣΤΑ ΣΧΟΛΙΚΑ ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΑ

2.1.1 ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ.

Κατά την διάρκεια του δεύτερου μισού του αιώνα μας (δεκαετία '50-'60), η Γεωμετρία άρχισε να χάνει την κεντρική της θέση στην διδασκαλία των μαθηματικών, τόσο στην Στοιχειώδη, όσο και στην Μέση Εκπαίδευση. Πρόσφατες εθνικές και διεθνείς διαγνώσεις των μαθηματικών γνώσεων των μαθητών, έδειξαν ότι η μείωση αυτή ήταν ποιοτική και ποσοτική. Συχνά η Γεωμετρία αγνοείται ολοκληρωτικά, ενώ τα πολύ λίγα θέματα που αναφέρονται σε αυτή, περιλαμβάνουν ερωτήσεις οι οποίες τείνουν να περιορίζονται σε κάποια στοιχειώδη «γεγονότα» για απλά σχήματα και τις ιδιότητές τους. Την ίδια χρονική περίοδο υπήρξε και ποσοτική μείωση στα μαθηματικά, αφού ο αριθμός των σχολικών ωρών που ήταν αφιερωμένος σ' αυτά, μειώθηκε (I.C.M.E[2]., 1996, σελ.55). Η κρίση αυτή της Γεωμετρίας, οφείλεται κυρίως στην εισαγωγή των «μοντέρνων μαθηματικών».

Το «κίνημα των μοντέρνων μαθηματικών» είχε συμβάλει έμμεσα και στην υποτίμηση του ρόλου της ευκλείδειας Γεωμετρίας προωθώντας νέες πλευρές των μαθηματικών[3] και άλλους τρόπους θεώρησης για την διδασκαλία της, π.χ. ανάγοντάς την στην αναλυτική γεωμετρία. Αυτή η υποτίμηση συμπαρέσυρε κυρίως το ρόλο των οπτικών χαρακτηριστικών της γεωμετρίας, τόσο αυτής των τριών διαστάσεων, όσο και της δισδιάστατης καθώς και όλα εκείνα τα θέματα τα οποία αφορούν στην μελέτη των κωνικών τομών και άλλων αξιόλογων καμπυλών.[4] (I.C.M.E., 1996,σσ.55-56).

Επίσης, τα τελευταία χρόνια έγινε μια στροφή προς θέματα που αφορούν στην επίλυση και διαμόρφωση προβλημάτων. Προσπάθειες που έγιναν με σκοπό την επαναφορά της κλασικής ευκλείδειας γεωμετρίας, δεν είχαν μεγάλη επιτυχία. Το πρόβλημα είναι, ότι με τον παραδοσιακό τρόπο διδασκαλίας της ευκλείδειας γεωμετρίας **η ύλη** συνήθως **παρουσιαζόταν** στους μαθητές ως ένα **ήδη διαμορφωμένο υλικό** για μαθηματική δραστηριότητα και έτσι **οι μαθητές δεν μπορούσαν**

[2] International Committee for Mathematics Education. . (I.C.M.E)

[3] [3] Τα «μοντέρνα» μαθηματικά εισάγουν νέα θέματα/ ενότητες στα προγράμματα (των μαθηματικών) όπως π.χ. πιθανότητες, στατιστική, διανυσματικό λογισμό, αφηρημένες αλγεβρικές δομές κ.λ.π Για το κίνημα των «μοντέρνων» μαθηματικών, βλ. αναλυτικότερα στο Μ. Τουμάσης, 1994, σελ.56.

[4] Σε συνέδριο του I.C.M.E., ο μεγάλος Άγγλος μαθηματικός M. Atyiah, καταγγέλει ότι με τον εκθρονισμό του Ευκλείδη εξαφανίστηκε συνολικά η γεωμετρία από το σχολείο και μαζί της η εποπτική και διαισθητική λειτουργία της μαθηματικής δραστηριότητας (Φ. Καλαβάσης, 1997, σελ. 50).

να παίξουν δραστήριο ρόλο στην ανάπτυξη της μαθηματικής τους γνώσης. (I.C.M.E., 1996,σελ.55).

Στην Ελλάδα, η κατάσταση αυτή εμφανίζεται στα τέλη της δεκαετίας του 1960 και αφορά κυρίως στην Μέση Εκπαίδευση. Στο Δημοτικό Σχολείο μέχρι τα τέλη της δεκαετίας του '60, έχομε διαχωρισμό εγχειριδίων (άρα και διδασκαλίας) αριθμητικής και γεωμετρίας. Σύμφωνα με το αναλυτικό πρόγραμμα του 1977 (ΦΕΚ 347/12-11-77) τα εγχειρίδια Μαθηματικών Ε', ΣΤ' τάξης είναι ενιαία, αλλά με σαφή διαχωρισμό αριθμητικής και γεωμετρίας, γεγονός που έχει εμφανισθεί ήδη από τις αρχές '70. Στις μικρότερες τάξεις εμφανίζεται μια διαπλοκή των ενοτήτων αριθμητικής και γεωμετρίας (Τζανάκης Κ., 1998β, παρ. 1).

Μετά τις εκπαιδευτικές αλλαγές του 1982 (Π.Δ. 583/1982, ΦΕΚ 107Α), η διδασκαλία των Μαθηματικών στο Δημοτικό σχολείο είναι ενιαία, χωρίς διαχωρισμό αριθμητικής-γεωμετρίας σε επίπεδο διδακτικού εγχειριδίου ή διδασκαλίας, με σαφή όμως υποβάθμιση της γεωμετρίας. Η γεωμετρία παύει να αποτελεί αυτοτελές διδακτικό αντικείμενο και σταδιακά άρχισε να περιορίζεται έναντι της αριθμητικής, φτάνοντας στο σημείο να αφαιρεθούν βασικές γεωμετρικές ενότητες από τα σύγχρονα μαθηματικά σχολικά εγχειρίδια (π.χ. ενότητες που αφορούν στα πρίσματα, στις πυραμίδες, στον κώνο και στην σφαίρα, τα οποία όμως υπήρχαν στα αντίστοιχα βιβλία της δεκαετίας του '70).

2.1.2 Η ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΣΤΑ ΣΧΟΛΙΚΑ ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΑ (ΚΡΙΤΙΚΗ ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ).

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, μετά τις εκπαιδευτικές αλλαγές του 1982, παύει ο διαχωρισμός αριθμητικής και γεωμετρίας στο δημοτικό σχολείο, πράγμα το οποίο είχε δυσάρεστες συνέπειες. Στα διδακτικά εγχειρίδια, οι ενότητες αριθμητικής και γεωμετρίας διαδέχονται η μια την άλλη, σε μια **γραμμική** παρουσίαση. Ομοειδείς ενότητες (π.χ. γεωμετρίας), μπορεί να απέχουν χρονικά μεταξύ τους αρκετούς μήνες στην διάρκεια του ίδιου σχολικού έτους (βλ. π.χ. $ΣΤ_1$ παρ.29-40 και $ΣΤ_2$ παρ.21-26, ή $Ε_1$ παρ.Γ1-Γ8, Δ1-Δ5 και $Ε_2$ παρ.Ζ1-Ζ12 και Η1-Η3)[5].

Για να εκτιμήσουμε την παρουσία γεωμετρικών ενοτήτων στην διδακτέα ύλη του δημοτικού σχολείου, ταξινομήσαμε[6] την ύλη των 4 τελευταίων τάξεων[7] στις ακόλουθες 6 κατηγορίες:

---

[5] Η αναφορά στα εγχειρίδια γίνεται ως εξής: $ΣΤ_1$ για το τεύχος 1 των μαθηματικών της ΣΤ΄ τάξης κ.ο.κ.

[6] Η ταξινόμηση αυτή είναι από επιστημολογικής πλευράς, συμβατή με την διεθνώς χρησιμοποιούμενη ταξινόμηση της American Mathematical Society (Mathematical Subject Classification (MSC) στο Annual Index 1996 των Mathematical Reviews απ' όπου και οι κωδικοί του πίνακα 1 · πρβλ. επίσης Οικονόμου κ.α. 1993).

[7] Στην ταξινόμηση αυτή δεν συμπεριλάβαμε την ύλη των δύο πρώτων τάξεων του δημοτικού, ακριβώς διότι δεν έχομε και δεν πρέπει να έχομε σαφή διαχωρισμό των διαφορετικών ενοτήτων (π.χ., με την μέθοδο Cuisennaire, η πρώτη αρίθμηση δεν είναι καθαρά ενότητα αριθμητικής, αλλά ούτε και γεωμετρίας. Επίσης, τα παιδιά των τάξεων αυτών διδάσκονται την γεωμετρία «διαισθητικά». Το αρχικό πρόγραμμα περιλαμβάνει δραστηριότητες γεωμετρίας που δίνουν έμφαση στον πειραματισμό των παιδιών με την χρήση εποπτικών υλικών, γιατί οι μαθητές στο στάδιο αυτό αναγνωρίζουν τις γεωμετρικές έννοιες με όρους της φυσικής τους εμφάνισης. Τα σχήματα αναγνωρίζονται από το περίγραμμά τους ως ενιαίο σύνολο και όχι από τις ιδιότητές τους (R.Hershkowitz,1996, σελ.97). Όπως αναφέρεται στο βιβλίο του δασκάλου της Α΄ δημοτικού (σελ.254), «...το παιδί από την προσχολική ηλικία, εξαιτίας της συναναστροφής του με τα πράγματα, έχει σχηματίσει διαισθητική

-*Αριθμητική*: Ιδιότητες και αλγόριθμοι αριθμητικών πράξεων, προβλήματα πρακτικής αριθμητικής.
-*Προαλγεβρικές έννοιες*: Ενότητες όπου άμεσα ή έμμεσα εμφανίζεται ο αλγεβρικός συμβολισμός (εξισώσεις 1ου βαθμού, αναλογίες, ποσοστά, δυνάμεις αριθμών κλπ.).
-*Θεωρητική αριθμητική*: Ενότητες που το μαθηματικό περιεχόμενο τους ανήκει στην στοιχειώδη θεωρία αριθμών (ΕΚΠ, ΜΚΔ, ανάλυση σε πρώτους παράγοντες, κριτήρια διαιρετότητας κλπ).
-*Μετρική γεωμετρία*: Μέτρηση γωνιών, εμβαδά σχημάτων, όγκοι στερεών κλπ.
-*Τοπολογική γεωμετρία*: Ενότητες που δεν προϋποθέτουν μετρήσεις και χρήση μονάδων μέτρησης (καθετότητα και παραλληλία ευθειών, κατασκευές με κανόνα και διαβήτη κλπ).
-*Μεικτές ενότητες*: Ενότητες που συνδυάζουν έννοιες από τις προηγούμενες κατηγορίες (π.χ. κατασκευή πολυγώνων υπό κλίμακα).
-*Πιθανότητες/Στατιστική.*

Σύμφωνα με το παράρτημα 1, καταλήγομε στον πίνακα 1 για την ποσοστιαία εμφάνιση των διαφόρων κατηγοριών στην διδακτέα ύλη. Κάθε υποπαράγραφος των περιεχομένων των διδακτικών εγχειριδίων (δηλ. α/α στο παράρτημα 1) θεωρείται ως μια μονάδα διδακτέας ύλης. Κατά συνέπεια, ο πίνακας 1 εκφράζει αρκετά καλά και την κατανομή του διδακτικού χρόνου.

Πίνακας 1 (ποσοστιαία εμφάνιση των κατηγοριών της διδακτέας ύλης)

	ΣΤ	**Ε**	**Δ**	**Γ**
Αριθμητική (MSC: 11Y)	42,25%	53,84%	86,5%	84,6%
Προαλγεβρικές έννοιες (MSC: 08)	21,15%	0%	0%	0%
Θεωρητική Αριθμητική (MSC: 11A)	4,2%	3,84%	0%	0%
Μετρική Γεωμετρία (MSC: 51F, 51K, 51N20)	21,15%	14,1%	4,5%	7,7%
Τοπολογική γεωμετρία (MSC: 51H)	4,2%	23,07%	7,5%	3,07%
Μεικτές ενότητες	7,05%	1,3%	1,5%	1,56%
Πιθανότητες / Στατιστική (MSC: 60, 62)	0%	3,85%	0%	3,07%

(Κούρκουλος Μ., Τζανάκης Κ., Θεολογίτου Κ., 1998, παρ.2)

Συνολικά, στις 4 τελευταίες τάξεις, η γεωμετρία καταλαμβάνει το 21,3% της διδακτέας ύλης. Με εξαίρεση την Ε' τάξη, όπου το ποσοστό είναι 37,17%, για τις υπόλοιπες τάξεις, ο πίνακας 1 είναι μια πρώτη ένδειξη ότι η γεωμετρία είναι αρκετά υποβαθμισμένη στα εγχειρίδια και κατ' επέκταση και

αντίληψη για τα σχήματα γενικά και τις γραμμές στις οποίες καταλήγουν .Έχει δει και έχει αγγίξει σώματα που οι επιφάνειές τους είναι κύκλοι (όπως είναι οι επιφάνειες σε δίσκους γραμμοφώνου, σε νομίσματα κ.λ.π.) ή τετράγωνα (όπως είναι οι επιφάνειες σε ορισμένα πλακάκια της κουζίνας, σε ορισμένα τζάμια των παραθύρων κ.λ.π.)».Επίσης, στην Β΄ δημοτικού, γίνεται αναφορά σε βασικά επίπεδα γεωμετρικά σχήματα με σκοπό τον πειραματισμό των παιδιών πάνω σε αυτά, έτσι ώστε να βοηθηθούν στην ανακάλυψη των ιδιοτήτων τους (βλ. βιβλίο δασκάλου Β΄ δημοτικού , σελ.325).

στην διδασκαλία, αν μάλιστα ληφθεί υπ’ όψιν (βλ. παράρτημα 1) ότι σημαντικό μέρος της στις Γ', Ε', ΣΤ' τάξεις θα πρέπει να διδαχθεί στο τέλος του σχολικού έτους, με ό,τι περιορισμούς συνεπάγεται τούτο. Η υποβάθμιση αυτή φαίνεται να είναι διεθνές φαινόμενο (ICME 1995 παρ.3, Davis et al.1992 σελ.300).

2.2 ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΚΑ ΠΛΕΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ (ΑΠΟ ΤΗΝ ΣΚΟΠΙΑ ΤΗΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ)

Όπως τονίσαμε και σε άλλο σημείο της εργασίας μας (βλ. παρ.1.2), η γεωμετρία αποτελεί προνομιακό πεδίο για την παροχή μαθηματικής παιδείας. Όμως, έχει και από διδακτικής πλευράς σημαντικά μεθοδολογικά πλεονεκτήματα (βλ. Τζανάκης Κ., Κούρκουλος Μ., 1998, παρ.2):

1. *Είναι γνωστικό αντικείμενο στο οποίο κυριαρχεί η εποπτεία.* Κάνοντας ένα τυπικό σχήμα, κατά την άρθρωση συλλογισμών, τα βήματα μπορεί να γίνουν αναπαραστάσιμα, πράγμα που δεν είναι εφικτό σε άλλες περιοχές των μαθηματικών.[8]

2. *Είναι γνωστικό αντικείμενο με εύκολη πρόσβαση σε κατασκευαστικά προβλήματα*: (1) Πρακτικού ενδιαφέροντος π.χ. «πώς θα κατασκευάσω μοιρογνωμόνιο μεγάλης ακρίβειας». (2) Αισθητικού περιεχομένου· π.χ. «μπορώ να καλύψω ένα δεδομένο ευθύγραμμο σχήμα με δεδομένου σχήματος πολύγωνα;» (3) Με έμφαση στον πειραματισμό· π.χ. «πώς μπορώ να φτιάξω τρίγωνο από τα μήκη των πλευρών του;» Αναφερόμενοι στον πειραματισμό εννοούμε, τόσο το σύνηθες (εμπειρικό) πείραμα, όσο και το νοητικό πείραμα, καλά παραδείγματα του οποίου παρέχει η διερεύνηση γεωμετρικών κατασκευών με κανόνα και διαβήτη. Οι γεωμετρικές κατασκευές με κανόνα και διαβήτη αποτελούν ίσως το καλύτερο παράδειγμα παροχής Μαθηματικής παιδείας για το δημοτικό σχολείο, και αυτό για διάφορους λόγους:

(1) Η γεωμετρική εποπτεία γίνεται σαφέστερη καθώς το γεωμετρικό σχήμα **κατασκευάζεται** επ’ ακριβώς, παρέχοντας στο παιδί τη δυνατότητα χειρισμού με άνεση των γεωμετρικών οργάνων καθώς και την μεγαλύτερη εξοικείωση με το προς εξέταση μαθηματικό αντικείμενο. Έτσι, συντελεί και στην απομάκρυνση τυχόν φοβίας που μπορεί να το διακατέχει.

(2) Οποιοδήποτε πρόβλημα κατασκευής είναι πάντα πιο χειροπιαστό, άρα ελκυστικότερο και πιο διασκεδαστικό.

(3) Συχνά, οι γεωμετρικές κατασκευές είναι ακριβέστερες από άλλες πρακτικές μεθόδους βασιζόμενες σε μετρήσεις.

(4) Το κυριότερο όμως -ενισχυόμενο από τα παραπάνω- είναι ότι μέσα από το **παιγνίδι** της γεωμετρικής κατασκευής μπορεί να υποβληθεί στο παιδί η αναγκαιότητα της λογικής αιτιολόγησης,

[8] Για παράδειγμα, στη θεωρητική αριθμητική, απαιτείται μεγαλύτερη αφαίρεση: π.χ. τα επιχειρήματα για την αιτιολόγηση των κριτηρίων διαιρετότητας είναι αναπαραστάσιμα μόνο με συγκεκριμένα παραδείγματα και όχι στην γενικότητα τους.

καθώς μπορεί να του εκμαιεύσει ερωτήματα της μορφής: Γιατί όταν κάνω αυτές τις φαινομενικά άσχετες με τον στόχο μου ενέργειες, πάντα καταλήγω στο επιθυμητό αποτέλεσμα;»

Συνοψίζοντας, θα λέγαμε ότι από μεθοδολογικής πλευράς, η γεωμετρία είναι προνομιακή γνωστική περιοχή, επειδή με αφετηρία **εποπτικά σαφή**, αλλά συχνά και **κατασκευαστικά προφανή** δεδομένα, μπορεί να οδηγηθεί κανείς σε **λογικά μη προφανή** συμπεράσματα, υποβάλλοντας έτσι την αναγκαιότητα της εμπειρικής τους επαλήθευσης, αλλά και της λογικής τους αιτιολόγησης (Κ. Τζανάκης, 1998β).

2.3 Η ΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗ ΑΞΙΑ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Η αξία της διδασκαλίας του μαθήματος της γεωμετρίας, είναι αδιαμφισβήτητη για τους εξής βασικούς λόγους (Μ. Τουμάσης, 1994, σελ. 325):

1. Η γεωμετρία παρέχει πρακτικά χρήσιμες γνώσεις: τα παιδιά μαθαίνουν να αναγνωρίζουν ιδιότητες σχημάτων, να υπολογίζουν εμβαδά, όγκους κλπ.

2. Βοηθάει στην ικανότητα αντίληψης του χώρου.

3. Καλλιεργεί την ικανότητα νοερής σύλληψης των αντικειμένων.

4. Συνδέει άμεσα τα μαθηματικά με τον πραγματικό κόσμο.

5. Οι γεωμετρικές καταστάσεις αποτελούν ερμηνευτικά μοντέλα άλλων καταστάσεων, οι οποίες είναι a priori διαφορετικής υφής, κάτι γόνιμο τόσο διδακτικά, όσο και ιστορικά (βλ. παραδείγματα στο Nelsen, 1996). Από διδακτικής πλευράς, για παράδειγμα:

(1) Πολλά θέματα της γεωμετρίας, χρησιμοποιούνται ως μέσο για την κατανόηση του πολλαπλασιασμού ή των κλασματικών αριθμών (Γ. Φιλίππου-Κ. Χρίστου, 1995, σελ.287).

(2) Είναι δυνατόν να διδάξει κανείς τους αλγεβρικούς κανόνες προσήμων χωρίς αναφορά σε αρνητικούς αριθμούς, βασιζόμενος σε γεωμετρικά μοντέλα, πράγμα που απεικονίζει και την ιστορική εξέλιξη του θέματος (Γ. Θωμαΐδης 1991, 1993α).

(3) Οι αλγεβρικές ταυτότητες μπορούν να αποδειχθούν και γεωμετρικά.

6. Η γεωμετρία δίνει σημαντικές ευκαιρίες για μια καλή εισαγωγή σε πειραματικές διαδικασίες και προβληματικές, σε διάφορα συμπληρωματικά μεταξύ τους επίπεδα (Μ. Τουμάσης, 1994, σελ.345, Τζανάκης Κ., Κούρκουλος Μ., 1998, παρ.3).

7. Η γεωμετρία είναι προνομιακό πεδίο για μια, έστω σε πρώιμη μορφή, *ανάπτυξη μαθηματικού σκέπτεσθαι*, προσφέροντας πληθώρα καταστάσεων οι οποίες (Κ. Τζανάκης, Μ. Κούρκουλος, 1998, παρ. 3):

(1) Οδηγούν με αυθόρμητο, ή κατευθυνόμενο τρόπο σε συναρπαστικές απορίες και γόνιμα ερωτήματα. Π.χ. «αφού ξέρω απλό τρόπο να διχοτομώ με κανόνα και διαβήτη οποιαδήποτε γωνία, μπορώ να βρω τέτοιο τρόπο και για να την τριχοτομώ;»

(2) Οδηγούν στην σύλληψη και διατύπωση υποθέσεων και εικασιών (όχι απαραίτητα ορθών) με επαγωγικό ή αναλογικό τρόπο. Π.χ. επαγωγική διαπίστωση του πλήθους των διαγωνίων πολυγώνου συναρτήσει του αριθμού των πλευρών του.

(3) Οδηγούν στην συνειδητοποίηση της ανάγκης, άρα και στην προσπάθεια, απαγωγικής αιτιολόγησης εικασιών και υποθέσεων. Π.χ. «πώς μπορώ να είμαι σίγουρος ότι η έκφραση που βρήκα για το πλήθος των διαγωνίων πολυγώνου συναρτήσει του αριθμού των πλευρών του, είναι σωστός σε κάθε περίπτωση;»

(4) Τέλος, οδηγούν σε εξοικείωση με αφαιρετικές διαδικασίες. Τα γεωμετρικά αντικείμενα, αν και εποπτικά σαφή, αποτελούν ενδιάμεση περίπτωση μεταξύ πραγματικών και νοητικών αντικειμένων. Π.χ. παρ' ότι μια ευθεία χαραγμένη στο χαρτί έχει πραγματικές διαστάσεις, το παιδί μαθαίνει να την σκέφτεται χωρίς πλάτος».

2.4 ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΩΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ

Στο ερώτημα «τί είναι Μαθηματικά», η συνήθης απάντηση -έντονα επηρεασμένη από τον φορμαλισμό ως φιλοσοφική θέση για τα Μαθηματικά[9], και τις απ' αυτόν απορρέουσες απόψεις του ρεύματος των «Μοντέρνων Μαθηματικών»-, αναφέρεται στο **τελικό προϊόν** της μαθηματικής δημιουργίας. Τα μαθηματικά ταυτίζονται με την τυπική αξιωματική τους οργάνωση: είναι δηλαδή, ό,τι είναι κατασταλαγμένο σε τυπική, απαγωγικά δομημένη μορφή. (P. J. Davis et al., 1992, σελ. 326, I. Lakatos, 1996, σελ. 17).

Ο I. Lakatos, στο βιβλίο του Proofs and Refutations, αναφέρει: «Η ευκλείδεια μεθοδολογία έχει επιβάλλει ένα συγκεκριμένο ύφος παρουσίασης (παραγωγικό ύφος)….Στο παραγωγικό ύφος όλες οι προτάσεις είναι αληθείς και όλες οι συνεπαγωγές είναι έγκυρες. Τα μαθηματικά παρουσιάζονται σαν ένα αιωνίως αυξανόμενο σύνολο από αμετάβλητες αλήθειες. Δεν υπάρχει χώρος για αντιπαραδείγματα, ανασκευές ή κριτικές. Μια ατμόσφαιρα αυθεντίας εξασφαλίζεται για το σχετικό αντικείμενο με μεταμφιεσμένους ορισμούς που προήλθαν από αποδείξεις και αποκλείουν τις εξαιρέσεις, και με ένα πλήρως αναπτυγμένο θεώρημα που αποκρύπτει την αρχική εικασία, τις ανασκευές και την κριτική της απόδειξης. Αυτό το παραγωγικό ύφος αποκρύπτει την ερευνητική πάλη, αποκρύπτει την εξερευνητική περιπέτεια. Η όλη διαδικασία των διαδοχικών δοκιμαστικών αναδιατυπώσεων του θεωρήματος κατά την εξέλιξη της αποδεικτικής διαδικασίας καταδικάζεται σε λήθη, ενώ το τελικό εξαγόμενο καθαγιάζεται και εξαίρεται το αλάθητό του» (I. Lakatos, 1996, σελ. 211-212).

Φυσικά, το τελικό προϊόν της μαθηματικής δημιουργίας αποτελεί σημαντικό κομμάτι των Μαθηματικών, αφού αποτυπώνεται διαχρονικά και μπορεί να κοινοποιηθεί και να ελεγχθεί

---

[9] Για τον φορμαλιστή, τα Μαθηματικά είναι η επιστήμη της τυπικής παραγωγής συμπερασμάτων, από τα αξιώματα στα θεωρήματα (P.J. Davis et al., p. 325).

υφιστάμενο κριτική ώστε να γίνει τελικά αποδεκτό ή όχι. Όμως, **τα μαθηματικά δεν πρέπει να τα δεχόμαστε ως πληροφοριακό περιεχόμενο**, αλλά και **ως διαδικασία η οποία περιλαμβάνει σύλληψη ιδεών**, **ανακαλυπτικές ενέργειες, λάθη, οπισθοδρομήσεις στην ανάπτυξη ενός θέματος, λανθασμένες ή ασαφείς αντιλήψεις**. Η ανάλυση της διαδικασίας «κάνω Μαθηματικά», περιλαμβάνει την ανάδειξη ερωτημάτων, γόνιμων αποριών. Κυρίως, όμως, εστιάζεται στο πώς προσεγγίζουμε και εργαζόμαστε πάνω σε αυτό που μας προβληματίζει. Η ανάδειξη διαφορετικών διαδικασιών προσέγγισης και τρόπων εργασίας είναι κεντρικής σημασίας για την παρούσα εργασία.

Αναφορικά με τους τρόπους προσέγγισης κατά τη σύλληψη και σταδιακή διατύπωση και αιτιολόγηση, μπορούμε να εντάξουμε τις προτάσεις της στοιχειώδους ευκλείδειας γεωμετρίας σε δύο μεγάλες κατηγορίες[10] (βλ. Κούρκουλος Μ., Τζανάκης Κ., Θεολογίτου Κ., 1998, παρ. 3):

-*Προτάσεις που συλλαμβάνονται, διατυπώνονται και τεκμηριώνονται μέσα σε ερευνητικές ή διδακτικές καταστάσεις που ευνοούν εμπειρική και πειραματική διερεύνηση*. Ειδικότερα:

Α. Προτάσεις που υποβάλλονται άμεσα από το σχήμα ή και επιδέχονται άμεση από το σχήμα εμπειρική επαλήθευση.

Β. Προτάσεις που υποβάλλονται από το σχήμα ή και επιδέχονται εμπειρική επαλήθευση μετά από προσεκτική κατασκευή του, ή μετρήσεις πάνω σ' αυτό.

-*Προτάσεις που συλλαμβάνονται, διατυπώνονται και τεκμηριώνονται μέσα σε διδακτικές ή ερευνητικές καταστάσεις που ευνοούν την χρήση συλλογισμών*. Ειδικότερα:

Γ. Προτάσεις των οποίων η αρχική σύλληψη και τελική διατύπωση ευνοούν ή και απαιτούν μετασχηματισμούς του σχήματος και συλλογισμούς.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ
ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΤΕΚΜΗΡΙΩΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

3.1 ΑΝΑΚΑΛΥΠΤΙΚΕΣ ΕΝΕΡΓΕΙΕΣ ΚΑΙ ΣΥΛΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ

Τα μαθηματικά θεωρούνται ως η επιστήμη της απόδειξης. Παρουσιάζονται σε μια τελειωμένη μορφή, αποτελούμενα μόνο από αποδείξεις. Όμως αυτή είναι μόνο η μια όψη τους. Τα μαθηματικά ως προς την κατασκευή μοιάζουν με κάθε άλλη γνώση στην κατασκευή. Πρέπει να μαντέψεις ένα θεώρημα προτού το αποδείξεις ·πρέπει να μαντέψεις την ιδέα της απόδειξης, προτού προχωρήσεις στις λεπτομέρειες. Πρέπει να συνδυάσεις να παρατηρήσεις και να ακολουθήσεις αναλογίες· Πρέπει να προσπαθήσεις και να ξαναπροσπαθήσεις (Polya, preface, p. v-vi).

[10] Προφανώς η κατηγοριοποίηση αυτή είναι πολύ χονδρική και υπάρχουν λεπτότερες διαβαθμίσεις. Γι' αυτό τον λόγο, μαζί με τις «αμιγείς» κατηγορίες **Α, Β, Γ**, μπορούμε να χρησιμοποιούμε και τις ενδιάμεσες κατηγορίες **ΑΓ**, **ΒΓ**, με προφανή ερμηνεία.

Σύμφωνα με τον Polya, το αποτέλεσμα της δημιουργικής εργασίας του μαθηματικού είναι η αποδεικτική αιτιολόγηση, η απόδειξη· Αλλά η απόδειξη ανακαλύπτεται από την ευλογοφανή (plausible) αιτιολόγηση. Αν η μάθηση των μαθηματικών αντανακλά σε οποιοδήποτε βαθμό την επινόηση των μαθηματικών, θα πρέπει να έχει θέση για εικασίες, για ευλογοφανή συμπεράσματα.

Υπάρχουν δύο είδη αιτιολόγησης: η αποδεικτική και η ευλογοφανής. Αυτές οι δύο δεν συγκρούονται μεταξύ τους. Αντιθέτως, αλληλοσυμπληρώνονται. Στην αυστηρή αιτιολόγηση, το πρωταρχικό πράγμα είναι να ξεχωρίσεις μια αποδεδειγμένη πρόταση από μια εικασία, μια λογική εικασία από μια λιγότερη λογική εικασία.

Στην κατηγορία των συλλογιστικών διαδικασιών, συμπεριλαμβάνονται οι απαγωγικοί, επαγωγικοί και αναλογικοί συλλογισμοί.

Βάσει των **απαγωγικών συλλογισμών**, δίνονται πλήρεις μαθηματικές αποδείξεις και αποσαφηνίζονται τα θεμέλια μιας μαθηματικής θεωρίας. Έτσι, διασφαλίζεται η εγκυρότητα των αποτελεσμάτων μιας έρευνας και η αποδοχή τους από την επιστημονική κοινότητα.

Με βάση τους **επαγωγικούς συλλογισμούς,** διατυπώνονται εικασίες σχετικά με τη γενικότητα συμπερασμάτων, μέσω της εξέτασης πολλών **ομοίων** περιπτώσεων.

Βάσει των **αναλογικών συλλογισμών**, οδηγείται κανείς σε νέες έννοιες ή θεωρίες, διευρύνει ήδη υπάρχουσες για εμπειρικά ή νοητικά προσδιοριζόμενα αντικείμενα, με την βοήθεια της μελέτης, εν μέρει **αναλόγων** καταστάσεων για άλλα αντικείμενα.

Οι ανακαλυπτικές ενέργειες σχετίζονται κυρίως με επαγωγικούς και αναλογικούς συλλογισμούς, ενώ η εκ των υστέρων τακτοποίηση και διασφάλιση της εγκυρότητάς τους γίνεται κυρίως με απαγωγικούς συλλογισμούς. Η ουσιώδης διαφορά επαγωγής και αναλογίας, συνίσταται στο ότι η πρώτη στηρίζεται στην εξέταση **ομοειδών** αντικειμένων, ως προς κάποια θεσπισμένα κριτήρια, ενώ η δεύτερη αφορά στην εξέταση **μη ομοειδών** αντικειμένων (Κ. Τζανάκης, 1998α, παρ. 2). Με τροποποίηση κριτηρίων, ένας αναλογικός συλλογισμός, μπορεί ενδεχομένως να εμφανισθεί ως επαγωγικός.

Στην παραδοσιακή προσέγγιση της διδασκαλίας της Γεωμετρίας, η διδασκαλία της επαγωγικής ανακάλυψης -στη μορφή υποθέσεων- είχε σχεδόν παραμεληθεί. Αυτό ήταν αποτέλεσμα της κλασικής διδασκαλίας της Ευκλείδειας γεωμετρίας ως τυπικού παραδείγματος, ενός παραγωγικού συστήματος, μια αντίληψη η οποία έχει υποστεί έντονη κριτική. Σύμφωνα με τον Freudental, «η παραγωγική δομή της παραδοσιακής γεωμετρίας ποτέ δεν είχε μια πειστική διδακτική επιτυχία...Απέτυχε γιατί ο παραγωγικός χαρακτήρας της δεν μπορούσε να επινοηθεί εκ νέου από τον μαθητή, αλλά μόνο να επιβληθεί σε αυτόν» (Γ. Θωμαΐδης, 1996, σ.83).

Όμως, είναι κοινή πεποίθηση τώρα ότι οι επαγωγικοί και οι αναλογικοί συλλογισμοί στη γεωμετρία είναι αναγκαίοι. Η γεωμετρική σκέψη ανωτέρου επιπέδου, σχετίζεται με την επαγωγική διαδικασία της παραγωγής γενικεύσεων, δηλαδή της παραγωγής υποθέσεων και όλων των μορφών αιτιολογημένων (αποδεδειγμένων) γενικεύσεων. Οι επαγωγικοί και αναλογικοί συλλογισμοί, επίσης:

(α) εισάγουν ένα κλίμα ανακάλυψης,

(β) θεωρώντας τη γενίκευση ως μια εικασία από μόνη της, ο μαθητής αισθάνεται την αναγκαιότητα να αποδείξει ότι αυτό που έχει υποθέσει είναι αληθινό·

(γ) οι επαγωγικές εμπειρίες είναι η διαισθητική βάση πάνω στην οποία μπορεί να οικοδομηθεί η κατανόηση και η παραγωγή μιας παραγωγικής απόδειξης.

Έτσι, επιβάλλεται κατά την διδασκαλία, η ενισχυμένη παρουσία επαγωγικών και αναλογικών συλλογισμών για την εξήγηση κινήτρων, ερωτημάτων και προβλημάτων που οδηγούν σε νέα μαθηματικά συμπεράσματα μέσω ανακάλυψης.

Τέλος, οι απαγωγικοί συλλογισμοί συνεισφέρουν σε ανακαλυπτικές διαδικασίες, οδηγώντας σε νέα συμπεράσματα που αποτελούν παραπροϊόντα της απαγωγικής διαδικασίας. Για παράδειγμα, η προσπάθεια απόδειξης ενός συμπεράσματος, συχνά οδηγεί στην απόδειξη ενδιάμεσων προτάσεων, που αποκτούν αυτόνομη ύπαρξη και μαθηματική αξία, ανεξάρτητη από το συμπέρασμα, για την απόδειξη του οποίου διατυπώθηκαν αρχικά (Κ. Τζανάκης, 1998α, παρ. 2).

Η γνωστική έρευνα διερευνά την πραγματοποίηση των παραπάνω απόψεων και θέτει ερωτήματα όπως:

1. Με ποιο τρόπο οι μαθητές πραγματοποιούν την μετάβαση από το ειδικό στο γενικό στην Γεωμετρία;
2. Με ποιο τρόπο οι μαθητές διαμορφώνουν τις γενικεύσεις και τις υποθέσεις τους;
3. Αισθάνονται οι μαθητές την αναγκαιότητα να αιτιολογήσουν τις υποθέσεις που έχουν κάνει;
4. Ποιες είναι οι διαδικασίες και ποιες οι δυσκολίες των μαθητών κατά την απόδειξη;
5. Πως αντιλαμβάνονται οι μαθητές τον ρόλο της απόδειξης και την εγκυρότητά της;
6. Ποιο είναι το γενικό πλαίσιο στο οποίο μπορεί η μαθηματική απόδειξη να λειτουργήσει ως αποδοτικό και κατάλληλο εργαλείο για την επίλυση προβλημάτων, που οι ίδιοι οι μαθητές έχουν αποδεχτεί; (R.Hershkowitz, 1996, σελ.121).

3.2 ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΚΑΙ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ ΑΠΟΔΕΙΞΕΩΝ

3.2.1 ΓΕΝΙΚΑ ΣΧΟΛΙΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Στην Ευκλείδεια Γεωμετρία, απόδειξη σημαίνει ένα τυπικό παραγωγικό επιχείρημα. Η πράξη του ***αποδεικνύειν*** μπορεί να έχει πολλές σημασίες. Συνεπώς, **κάθε διδακτική προσέγγιση της απόδειξης** απαιτεί μια επιστημολογική σκέψη που **περνά από δύο ερωτήσεις**: ποια είναι η σημασία αυτή για τον μαθητή και ποια για τον διδάσκοντα; Αν η **απόδειξη έχει ως σημασία να φωτίζει**, να κάνει **προφανές** και **βέβαιο**, τότε η μέθοδος της επίλυσης μπορεί να έχει ισχύ ως απόδειξη. Έτσι, ένας μαθητής που ακολούθησε μια μέθοδο για να λύσει ένα πρόβλημα μπορεί να αρκεστεί σε αυτό. Ενώ,

αν ο διδάσκων πιστεύει ότι **η σημασία της απόδειξης είναι να πείθει**, θα περιμένει από τους μαθητές ένα άλλο διάβημα (Evelyne Barbin, 1989, σελ.13).

Η απόδειξη για τον Lakatos δεν σημαίνει μια μηχανική διαδικασία η οποία μεταφέρει την αλήθεια μέσω μιας αλυσίδας υποθέσεων και συμπερασμάτων. Απεναντίας, η απόδειξη σημαίνει εξηγήσεις, αιτιολογήσεις, επεξεργασίες, οι οποίες κάνουν την εικασία πιο ευλογοφανή, πιο πειστική, ενώ γίνεται πιο λεπτομερειακή και ακριβής κάτω από την πίεση των αντιπαραδειγμάτων (I.Lakatos, 1984).

Σε ένα άρθρο του με τίτλο «Preuve et demostration au Coll θge» (απόδειξη και τεκμηρίωση στο Κολέγιο), ο Nicolas Balacheff, τονίζει ότι «η ανάγκη του να αποδεικνύεις συνδέεται με την κατάσταση στην οποία βρίσκεσαι» και ότι «η απόδειξη είναι μια κοινωνική πράξη που απευθύνεται σε ένα άτομο (ενδεχομένως και στον εαυτό σου) το οποίο θέλουμε να πείσουμε» (E. Barbin, 1989, σελ.15).

Ο Michel Mante χρησιμοποιεί αυτούς τους ορισμούς στο άρθρο του «L' initation au raisonnement d__…ιB_»ιB_Δί__οΛΕ_____m□__F___H__________», πράγμα που του επιτρέπει να διακηρύξει ότι η απόδειξη που παράγει ένας μαθητής είναι πειστήριο (preuve), αλλά δεν είναι απόδειξη (demonstration). Οι υποστηριχτές της ισοδυναμίας «απόδειξη= απαγωγικός συλλογισμός» τη συσχετίζουν με τη σημασία της απόδειξης ως κοινωνικής πράξης, προορισμένης να πείσει. Ο Michel Mante γράφει ότι η αναγκαιότητα του να αποδείξεις, έχει δύο λόγους: «για να πείσεις τον άλλο και να πειστείς και ο ίδιος».

Ο Michael Bridenne ο οποίος έχει προσδιορίσει ότι «μια πρόταση λέγεται αποδεδειγμένη αν είναι η τελευταία πρόταση μιας πεπερασμένης ακολουθίας προτάσεων που έχουν κατασκευαστεί σύμφωνα με τους κανόνες ενός συστήματος της φορμαλιστικής λογικής», εκτιμάει ότι η πράξη του αποδεικνύειν «δεν είναι ανεξάρτητη από την επιθυμία του πείθειν» (E. Barbin, 1989, σσ.16-22).

Ο Bachelard γράφει σχετικά με την απόδειξη στην γεωμετρία: «η απόδειξη έχει μια αυτονομία τόσο καθαρή που δεν μπορούμε να την δεχτούμε απ' έξω, που δεν αρκεί να διαπιστώσουμε το αποτέλεσμα για να συλλάβουμε τη σημασία (…). Για να καταλάβουμε, πρέπει εδώ να συμμετέχουμε σε μια ανάδυση» (E. Barbin, 1989, σελ 23). Παρόμοια είναι και η άποψη των Battista-Clements, σύμφωνα με τους οποίους, η ανάγκη για αποδείξεις πρέπει να προέλθει μέσα από τις εμπειρίες των μαθητών στην κατασκευή και τον έλεγχο των υποθέσεων, μια διαδικασία στην οποία φαίνεται ότι θα παίξει ρόλο η εισαγωγή νέων τεχνολογιών.

Ο Balacheff (1982), διέκρινε ανάμεσα στην **απόδειξη** -κάθε μέσου με το οποίο κάποιος πείθεται ότι μια ορισμένη πρόταση ή δήλωση είναι ορθή-και στη **μαθηματική απόδειξη** (demonstration). Χρησιμοποιώντας αυτή την ορολογία, οι Braccone και Dionne (1987), ερεύνησαν την κατανόηση της απόδειξης από μαθητές και διδάσκοντες. Επιπλέον, εξέτασαν αν υπάρχει σχέση ανάμεσα στην κατανόηση της μαθηματικής απόδειξης εκ μέρους των μαθητών και της επιτυχίας τους στα μαθηματικά ή τα επίπεδα των Van Hiele στα οποία ανήκουν. Όπως ο Balacheff, έτσι και οι Braccone και Dionne έκαναν διάκριση στα διάφορα είδη των γεωμετρικών αποδείξεων, αρχίζοντας με την απλοϊκή απόδειξη (1ο επίπεδο Van Hiele) και καταλήγοντας στην μαθηματική απόδειξη.

Σήμερα, στα προγράμματα και για πολλούς διδάσκοντες, η ιδέα της απόδειξης είναι συνώνυμη με τον απαγωγικό συλλογισμό. Στο βιβλίο του Rostand «Sur la clart__R.__□/__T/__\1__^1__¶4__Έ4__p5__», (γύρω από τη διαύγεια των μαθηματικών αποδείξεων), δεν τίθεται θέμα, παρά σχεδόν μόνο για τον λογικο-απαγωγικό συλλογισμό. Σε ένα ερωτηματολόγιο που μοιράστηκε σε καθηγητές Γυμνασίου στη διάρκεια μιας επιμόρφωσης I.R.E.M., ζητήθηκε να δώσουν έναν ορισμό για τη λογική απόδειξη: 14 στις 17 απαντήσεις, οδηγούσαν στην ιδέα μιας λογικής αλληλουχίας (E. Barbin, σελ.16).

3.2.2 ΟΙ ΔΥΣΚΟΛΙΕΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΣΤΙΣ ΑΠΟΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ

Το μεγαλύτερο πρόβλημα που συναντούν οι μαθητές στο μάθημα της γεωμετρίας, είναι ο μηχανισμός απόδειξης των γεωμετρικών προτάσεων. Ακόμη και στην τελευταία τάξη της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, οι μαθητές έχουν δυσκολία στην αναγνώριση και κατασκευή έγκυρων αποδείξεων. Σε μια έρευνα που έγινε στις Η.Π.Α. με μαθητές 16 χρονών αποκαλύφθηκαν τα εξής (Τουμάσης Μ., 1994, σελ. 332):

- λιγότερο από 30% έδειξαν κάποια κατανόηση γύρω από τη σημασία της απόδειξης.
- γύρω στο 50% δεν αισθάνθηκαν την ανάγκη να αποδείξουν κάτι το οποίο έβλεπαν ότι ήταν προφανές.
- τουλάχιστον το 70% δεν μπόρεσαν να διακρίνουν τον παραγωγικό από τον επαγωγικό συλλογισμό και επομένως δεν ήταν σε θέση να κατανοήσουν ότι η επαγωγή είναι ανεπαρκής για να υποστηρίξει μαθηματικές γενικεύσεις.
- γύρω στο 80% δεν μπόρεσαν να συνειδητοποιήσουν τη σημασία των υποθέσεων και των ορισμών σε ένα μαθηματικό συλλογισμό.
- γύρω στο 60% αρνιόταν να σκεφτούν ξεκινώντας από μια υπόθεση την οποία θεωρούσαν ψευδή.
- λιγότερο από 20% κατανόησαν την έμμεση απόδειξη (π.χ. απαγωγή σε άτοπο).
- οι περισσότεροι μαθητές είχαν προβλήματα με την κατανόηση της έννοιας της ισοδυναμίας.

Υπάρχει μια συμφωνία στο ότι η αποτυχία των μαθητών να επινοήσουν εκ νέου αποδείξεις ή ακόμη μεγαλύτερα τμήματα ενός παραγωγικού συστήματος έχει δύο κύριες αιτίες:

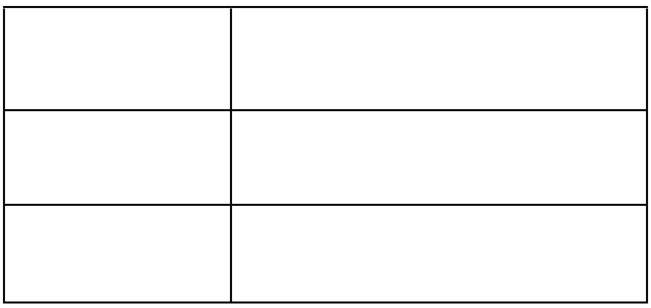
(α) το λογικό σύστημα με τον τρόπο που συνήθως διδάσκεται «δίνει μόνο το **τελικό** προϊόν της μαθηματικής ανακάλυψης (η έμφαση δική μας) και αποτυγχάνει να προκαλέσει στον μαθητή εκείνες τις διαδικασίες με τις οποίες γίνονται οι μαθηματικές ανακαλύψεις» (Skemp, 1971, p.13).

(β) ο μαθητής δεν έχει την λογική ωριμότητα για αποδείξεις ή την συναίσθηση της αναγκαιότητας των αποδείξεων [11](Balacheff, 1987).

Οι μαθητές αδυνατούν να κατανοήσουν την αναγκαιότητα και το νόημα των αυστηρών αποδείξεων στο πλαίσιο μιας μαθηματικής θεωρίας, όπως είναι η ευκλείδεια γεωμετρία, ιδιαίτερα όταν αυτή εμφανίζεται να επικυρώνει «προφανή» αποτελέσματα της παρατήρησης και της διαίσθησης. Ο Balacheff λέει: «πρέπει εδώ να αντιληφθούμε ότι τις περισσότερες φορές **οι μαθητές δεν ενεργούν ως θεωρητικοί,** αλλά ως **πρακτικά άτομα**…Το πρόβλημα του **πρακτικού ατόμου** είναι η **αποτελεσματικότητα** όχι η **αυστηρότητα** (η έμφαση δική μας)**.** Λύση πρέπει να παράγει και όχι γνώση. Έτσι, ο λύτης του προβλήματος δεν αισθάνεται την ανάγκη να απαιτήσει περισσότερη λογική από αυτήν που είναι απαραίτητη στην πράξη» (Γ. Θωμαΐδης, 1998).

Η αναγκαιότητα για αποδείξεις δεν προβάλλει με αφηρημένο τρόπο, αλλά αναδύεται μέσα από εικασίες για τις ιδιότητες των σχημάτων, γεωμετρικές κατασκευές και γενικά μέσα από ανακαλυπτικές δραστηριότητες που δυστυχώς, δεν αποτελούν μέρος της παραδοσιακής διδασκαλίας. Οι έρευνες της διδακτικής των Μαθηματικών έχουν δείξει ότι η αναζήτηση των κρίσιμων χαρακτηριστικών των σχημάτων και η διατύπωση ορισμών, προϋποθέτει ικανότητα αναλυτικής σκέψης και όχι απομνημόνευσης. Η σύγχυση, για παράδειγμα, ανάμεσα στους «ορισμούς» και στα «κριτήρια» των παραλληλογράμμων δείχνει ότι η ιεραρχική ταξινόμηση των τετραπλεύρων θα πρέπει να δημιουργηθεί από τους μαθητές και όχι να επιβληθεί σε αυτούς με προκαθορισμένο τρόπο (Γ. Θωμαΐδης, 1996, σελ.88).

Ο Balacheff, (βλ. Ε. Barbin, σελ.26) έστησε ένα πειραματικό υλικό που σκοπό είχε να θέσει τις ομάδες των μαθητών σε καταστάσεις αλληλεπίδρασης και επικοινωνίας. Το πρόβλημα που τέθηκε στους μαθητές ήταν να βρουν πόσα ορθογώνια υπάρχουν στο παρακάτω σχήμα:



σχ. 1

[11] Ο Piaget αναφέρει ότι: «η λογική αιτιολόγηση μιας κρίσης γίνεται σε ένα άλλο επίπεδο από ότι η «εφεύρεση» αυτής της κρίσης. Ενώ αυτή είναι ασυνείδητη και είναι αποτέλεσμα επανασυνδυασμού προηγούμενων εμπειριών, η άλλη απαιτεί τη σκέψη και το λόγο, εν συντομία μια ενδοσκόπηση που κατασκευάζεται πάνω από την αυθόρμητη σκέψη, μια «σκέψη της σκέψης» η οποία από μόνη της είναι ικανή για λογική αναγκαιότητα» (Ε. Barbin, σελ. 26).

Πολλοί ακολούθησαν την καρτεσιανή μέθοδο: έκαναν μια γενική επιθεώρηση, μια απαρίθμηση, μια κωδικοποίηση αριστοτεχνική. Ο ερευνητής όμως λέει πως τα παραπάνω είναι «εξηγήσεις» και όχι «αποδείξεις». Γι' αυτόν η απόδειξη του αποτελέσματος εμπλέκει τη διαδικασία της εξάντλησης και του μη πλεονασμού της διαδικασίας της απαρίθμησης. Οι μαθητές της τρίτης τάξης (γυμνασίου) περιορίστηκαν στη διατύπωση μιας διαδικασίας απαρίθμησης που εμφανίζει το συστηματικό του χαρακτήρα. Ο ερευνητής περίμενε αναιρέσεις: «μπορεί να έχω ξεχάσει ένα ορθογώνιο;» και «είμαι σίγουρος ότι δεν έχω μετρήσει 2 φορές κάποιο ορθογώνιο;». Θα ήθελε αυτές οι ερωτήσεις να έχουν τεθεί από τους μαθητές. Για τον Balacheff «στην έννοια της αντίφασης βρίσκεται το κλειδί κάθε προβληματικής επικύρωσης» (E. Barbin, σσ. 14-15).

Σε μια έρευνα που έγινε στις Η.Π.Α. (Γ. Θωμαΐδης, 1998), μεταξύ 1520 μαθητών που είχαν ολοκληρώσει 1 έτος διδασκαλίας της θεωρητικής Ευκλείδειας Γεωμετρίας, διαπιστώθηκε ότι μόνο το 30% είχε φτάσει σε ένα επίπεδο που μπορεί να χαρακτηριστεί από 75% επιτυχία στην απόδειξη απλών γεωμετρικών προτάσεων (π.χ. οι διαγώνιες του ορθογωνίου είναι ίσες). Το ποσοστό των μαθητών που είχαν 100% επιτυχία δεν ξεπέρασε το 3%.

Οι έρευνες του A. Schoenfeld (Γ. Θωμαΐδης, 1998), με φοιτητές κολλεγίου που είχαν παρακολουθήσει στο Λύκειο μια ετήσια διδασκαλία θεωρητικής γεωμετρίας, αποκάλυψαν την αδυναμία χρησιμοποίησης βασικών γεωμετρικών γνώσεων με συνεπή τρόπο. Οι φοιτητές μπορούσαν να δώσουν ικανοποιητικές αποδείξεις σε διάφορες γεωμετρικές προτάσεις, αλλά όταν αντιμετώπιζαν αμέσως μετά ένα πρόβλημα γεωμετρικής κατασκευής που στηριζόταν στην χρήση των ίδιων ακριβώς προτάσεων, κατέφευγαν στην τακτική του «πρακτικού ατόμου». Έκαναν υποθέσεις για τα ζητούμενα σχήματα με βάση την εμπειρία και την διαίσθηση, χρησιμοποιούσαν τον κανόνα και τον διαβήτη καθοδηγούμενοι από το χέρι ή το μάτι. Σωστές λύσεις απορρίπτονταν γιατί δεν φαίνονταν αρκετά ακριβείς, ενώ λαθεμένες λύσεις γίνονταν δεκτές επειδή φαίνονταν καλές. Η διαδικασία μιας κατασκευής ήταν σωστή, όχι γιατί στηρίζονται στο θεωρητικό οικοδόμημα της ευκλείδειας γεωμετρίας, αλλά γιατί παρήγαγε ένα ακριβές σχήμα.

Σε μια έρευνα που έγινε στη χώρα μας (Γ. Θωμαΐδης, 1998), καταγράφηκαν οι απαντήσεις 66 μαθητών της Β΄ τάξης Λυκείου και 60 μαθητών της Α΄ τάξης Λυκείου σε 3 «κλασικές» ασκήσεις γεωμετρίας. Παρά το γεγονός ότι οι ασκήσεις δόθηκαν στη μορφή ανοιχτών προβλημάτων, οι ερευνητές κατέληξαν στα ακόλουθα συμπεράσματα:

- οι μαθητές αρκούνται στην οπτική αντίληψη (δηλαδή στηρίζονται στο σχήμα και όχι σε γεωμετρικές προτάσεις που συνδέονται με τα ζητούμενα του προβλήματος).
- οι δυνατότητες σωστής διατύπωσης και επικύρωσης αφορούν μικρό σχετικά μέρος από το σύνολο των μαθητών.
- συγχέουν έννοιες κατάλληλες για άλλο τύπο προβλημάτων που δεν λειτουργούν στη συγκεκριμένη περίπτωση και τις χρησιμοποιούν απλά και μόνο για να δώσουν μια απάντηση.

Ένα από τα ερωτήματα που σχετίζονται με την έννοια της μαθηματικής απόδειξης είναι, αν ένα άτομο που προσπαθεί να κάνει μια μαθηματική απόδειξη, κατανοεί πλήρως ότι η τυπική απόδειξη μιας μαθηματικής πρότασης δίνει σε αυτήν το χαρακτηριστικό μιας εκ των προτέρων καθολικής εγκυρότητας και με τον τρόπο αυτό αποκλείει την αναγκαιότητα για περαιτέρω ελέγχους. Για να ελέγξουν την παραπάνω υπόθεση οι Fischbein και Keden κατασκεύασαν ένα αλγεβρικό και ένα γεωμετρικό ερωτηματολόγιο. Το γεωμετρικό περιείχε την εξής πρόταση:

«Το ΑΒΓΔ είναι ένα τετράπλευρο και Π,Κ,Ρ,Σ, τα μέσα των πλευρών του. Να αποδειχθεί ότι το ΠΚΡΣ είναι παραλληλόγραμμο».

Μετά ακολούθησε η απόδειξη της πρότασης. Ζητήθηκε ,έπειτα, από τους μαθητές να απαντήσουν αν αποδέχονται την γενική της εγκυρότητα. Κατόπιν, τους τέθηκε το ακόλουθο ερώτημα:

«Ο Χ είναι αμφισβητίας. Σκέπτεται ότι πρέπει να ελέγξουμε τουλάχιστον 100 τετράπλευρα για να βεβαιωθούμε ότι το ΠΚΡΣ είναι παραλληλόγραμμο. Ποια είναι η γνώμη σας!». Οι απαντήσεις των μαθητών (10ης έως 12^{ης} τάξης) αναλύθηκαν και βρέθηκαν 3 βασικές κατηγορίες απαντήσεων:

1. <u>Με συνέπεια τυπικές</u>: οι μαθητές κατανοούν ορθά τη φύση της μαθηματικής απόδειξης.
2. <u>Με συνέπεια εμπειρικές</u>: οι μαθητές αυτής της κατηγορίας έχουν εμπειρική προσέγγιση στις μαθηματικές αποδείξεις. Πιστεύουν ότι επιπλέον έλεγχοι προσδίδουν εγκυρότητα στην πρόταση που αποδείχθηκε.
3. <u>Βασικά ασυνεπείς</u>: οι μαθητές αυτής της κατηγορίας επιδεικνύουν ασυνεπή συμπεριφορά, αποδεχόμενοι την απόλυτη εγκυρότητα της απόδειξης από τη μια μεριά, χωρίς όμως να απορρίπτουν την ανάγκη επιπρόσθετων ελέγχων από την άλλη (R. Hershkowitz, 1996, σσ. 125-26).

Ένας ερευνητής έκανε μαζί με τους μαθητές του γυμνασίου μια απόδειξη, που αφορούσε μια ιδιότητα του τριγώνου. Ένας μαθητής δεν ήθελε να πιστέψει ότι αυτή η απόδειξη ίσχυε για όλα τα τρίγωνα, ειδικά για τα πολύ πεπλατυσμένα από αυτό πάνω στο οποίο πραγματοποιήθηκε η απόδειξη και χρειάστηκε να ξανακάνει την απόδειξη πάνω σε ένα πεπλατυσμένο τρίγωνο, πριν συναινέσει (Ε. Barbin, σελ.25).

Σε μια άλλη έρευνα που έγινε στην Θεσσαλονίκη (Γ. Θωμαΐδης, 1998), μελετήθηκαν τα γραπτά των προαγωγικών εξετάσεων του Ιουνίου του 1997, 130 μαθητών Α΄ Λυκείου. Τα βασικά συμπεράσματα της έρευνας ήταν:

- πολλοί μαθητές συγχέουν τις ικανές με τις αναγκαίες συνθήκες και αποδεικνύουν ακριβώς το αντίστροφο αυτού που ζητείται.
- το 45% των μαθητών, σε επίσημες και προγραμματισμένες εξετάσεις, αδυνατεί να αναπαραγάγει με σωστό τρόπο τις αποδείξεις γεωμετρικών προτάσεων που αποτελούν τα 2/3 της διδαχθείσας ύλης του σχολικού βιβλίου.

Βασικοί παράγοντες αποτυχίας είναι η σχεδίαση λαθεμένου σχήματος, καθώς και η αδυναμία των μαθητών να χρησιμοποιήσουν με αποτελεσματικό τρόπο τα δεδομένα του προβλήματος.

Η μεγάλη πλειοψηφία των μαθητών της Α΄ Λυκείου, ύστερα από ένα χρόνο διδασκαλίας της θεωρητικής γεωμετρίας, δεν έχει ξεπεράσει το 2ο ή 3ο επίπεδο Van Hiele, ενώ σύμφωνα με τις απαιτήσεις του αναλυτικού προγράμματος και του διδακτικού βιβλίου, θα έπρεπε να είχαν κατακτήσει το 4ο επίπεδο.

Τέλος, η έρευνα αυτή έδειξε την τεράστια δυσκολία που παρουσιάζει η κατάκτηση από τους μαθητές της έννοιας της μαθηματικής απόδειξης, ιδιαίτερα της συνθετικής μορφής που χαρακτηρίζει τις αποδείξεις των περισσότερων γεωμετρικών προτάσεων.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω, μπορούμε να πούμε ότι οι εμπειρικές έρευνες που έχουν γίνει σε διάφορες χώρες, καταλήγουν στο ίδιο **συμπέρασμα**: η καθιερωμένη διδασκαλία αδυνατεί να οδηγήσει τους μαθητές στην κατάκτηση των ανώτερων επιπέδων γεωμετρικής σκέψης, με αποτέλεσμα οι μαθητές να αντιμετωπίζουν σημαντικές δυσκολίες στις αποδεικτικές διαδικασίες.

3.3 ΤΟ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟ ΣΧΗΜΑ

3.3.1 ΤΟ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟ ΣΧΗΜΑ (ΓΕΝΙΚΑ)

Το γεωμετρικό σχήμα αποτελεί για την διδακτική της Γεωμετρίας το αναγκαίο εργαλείο για την θεμελίωση των γεωμετρικών εννοιών. Δεδομένου ενός γεωμετρικού σχήματος, μπορούμε να κατανοήσουμε την ιδέα μιας λύσης ή μιας περίπλοκης γεωμετρικής απόδειξης. Έτσι, σε πολλές περιπτώσεις, τα γεωμετρικά σχήματα βοηθούν την διαίσθηση και λειτουργούν ως ευρετικό εργαλείο στην αναζήτηση λύσης ενός προβλήματος.

Το γεωμετρικό σχήμα συχνά αναπαρίσταται. Η αναπαράσταση αυτή μπορεί να είναι δισδιάστατη (σχέδιο), αν το σχήμα ανήκει στην επίπεδη γεωμετρία ή τρισδιάστατο (μοντέλο) αν ανήκει στη γεωμετρία του χώρου. Διακρίνονται 2 επίπεδα αναπαράστασης:

Επίπεδο 1 (στενή αναπαράσταση): η αναπαράσταση «μοιάζει» με το σχήμα: ίδιες διαστάσεις, εκτός από τη μετατόπιση από το αφηρημένο στο συγκεκριμένο.

Επίπεδο 2 (μακρινή αναπαράσταση): οι διαστάσεις της αναπαράστασης είναι αυστηρά κατώτερες από αυτές του γεωμετρικού σχήματος.

Στο σημείο αυτό πρέπει να τονίσουμε ότι υπάρχει αναγκαστικά απώλεια πληροφοριών εξαιτίας της μετατόπισης από το πρώτο στο δεύτερο επίπεδο (B. Parzysz, 1988, p. 80)

Ο πίνακας παρακάτω σχηματοποιεί τη σχέση μεταξύ του γεωμετρικού σχήματος και των διαφόρων αναπαραστάσεών του:

Πίνακας 2 (σχέση μεταξύ ενός γεωμετρικού σχήματος και των αναπαραστάσεών του)

		Γεωμετρία	
		2D	3D
	Επίπεδο 0	Γεωμετρικό σχήμα	
Στενή αναπαράσταση	Επίπεδο 1	Σχέδιο	μοντέλο
μακρινή αναπαράσταση	Επίπεδο 2		σχέδιο

(B. Parzysz, 1988, p. 80).

Το γεωμετρικό σχήμα παρέχει ένα ευρετικό βοήθημα, όταν μια από αυτές τις τροποποιήσεις δείχνει την «ιδέα» μιας λύσης ή απόδειξης. Ο επιστημολογικός ρόλος της λειτουργικής μάθησης είναι ευρετικός.

Αν θελήσουμε να καταδείξουμε τον ρόλο και την χρησιμότητα των γεωμετρικών σχημάτων, πρέπει να επικεντρωθούμε σε δύο βασικές τους λειτουργίες:

(α) το **σχήμα** μας δίνει μια **οπτική /σχηματική αναπαράσταση** της γεωμετρικής κατάστασης η οποία είναι συντομότερο και **ευκολότερο να κατανοηθεί** με αυτό τον τρόπο **παρά με μια αναπαράσταση στηριζόμενη στον λόγο** (προφορικό ή γραπτό). Με ένα σχήμα αναπαρίστανται όλες οι σχέσεις ενός αντικειμένου με τα άλλα αντικείμενα.

(β) τα σχήματα **βοηθούν τη διαίσθηση** κατά την διάρκεια της έρευνας, κάνοντας αντιληπτές τις σχέσεις ενός οπτικού αντικειμένου. Αντιθέτως, αυτές οι σχέσεις δεν είναι φανερές σε μια προφορική ή γραπτή απαγγελία.

Οι ιδιότητες των γεωμετρικών σχημάτων επιβάλλονται ή παράγονται από τον ορισμό μέσω του πλαισίου ενός αξιωματικού συστήματος. Για παράδειγμα, το ορθογώνιο που είναι σχεδιασμένο σε ένα φύλλο χαρτί, δεν είναι απλά μια εικόνα, αλλά είναι ένα σχήμα που καθορίζεται από τον μαθηματικό του ορισμό: *ένα ορθογώνιο είναι ένα παραλληλόγραμμο με μια τουλάχιστον ορθή γωνία.* Βασιζόμενοι σε αυτούς τους ορισμούς, μπορούμε να δώσουμε, επίσης, και άλλους λογικά ισοδύναμους ορισμούς, για παράδειγμα ότι οι διαγώνιοι είναι ίσοι και διχοτομούνται ή ότι όλες οι γωνίες είναι ορθές. Έτσι, τα γεωμετρικά σχήματα είναι ιδανικά, αφηρημένα, αλλά απολύτως τέλεια.

Το σχήμα δεν πρέπει να θεωρηθεί σαν μια δραστηριότητα ιχνογράφησης, ούτε σαν ένα υποκατάστατο διανοητικής απόδειξης. Η σχεδίαση ενός σχήματος είναι ήδη μια διανοητική δραστηριότητα, καθώς αναπαριστούμε αντικείμενα καθαρώς νοητικά: τρίγωνα, διάμεσοι, μέσο ευθυγράμμου τμήματος κ.λ.π. Ο ορθολογισμός συνίσταται εδώ στο να συλλάβουμε ότι το σχεδιασμένο τρίγωνο δεν είναι παρά η αναπαράσταση ενός τριγώνου. Αυτός επιτρέπει την κατανόηση του γιατί είναι τυχαίο (E. Barbin, σελ. 26).

Ένα άλλο χαρακτηριστικό των γεωμετρικών σχημάτων είναι η γενικότητά τους. Όταν **σχεδιάζουμε ένα γεωμετρικό σχήμα**, γνωρίζουμε ότι δεν **αναφερόμαστε** μόνο στο συγκεκριμένο σχήμα που είναι σχεδιασμένο αλλά σε μια **κλάση άπειρων σχημάτων** που διέπονται από τις ιδιότητες που προσδιορίζονται από τον ορισμό του σχήματος. Αυτή η γενικότητα και ο άπειρος αριθμός των εν δυνάμει σχημάτων -που μπορούν να αναπαραστήσουν τα χαρακτηριστικά που ο αντίστοιχος ορισμός προσδιορίζει- ενισχύονται από κάποιες «συμφωνίες» του γεωμετρικού σχήματος που χρησιμοποιούμε. Συγκεκριμένα, στην Ευκλείδεια γεωμετρία ξέρουμε ότι:

(α) τα γεωμετρικά σχήματα δεν εξαρτώνται από τη θέση και τον προσανατολισμό, όταν τα σχεδιάζουμε σε ένα φύλλο χαρτί. Δηλαδή, η θέση και ο προσανατολισμός των σχημάτων δεν επηρεάζουν τα χαρακτηριστικά τους.

(β) στο Ευκλείδειο αξιωματικό σύστημα, δεν ενδιαφερόμαστε για συγκεκριμένες διαστάσεις του σχήματος· μπορούμε να το μεγεθύνουμε ή να το σμικρύνουμε αν θέλουμε. Ενδιαφερόμαστε όμως για σχέσεις και αναλογίες.

Αυτά τα χαρακτηριστικά των γεωμετρικών σχημάτων επισημαίνονται από τον E.Fischbein (1993), ο οποίος θεωρεί ότι αυτά ανήκουν στην περιοχή των εννοιών: «ιδανικότητα, αφαιρετικότητα, απόλυτη τελειότητα, καθολικότητα, είναι ιδιότητες που αποκτούν σημασία στο πεδίο των εννοιών». Οι μαθηματικοί θεωρούν ότι τα γεωμετρικά σχήματα έχουν χαρακτηριστικά που ανήκουν αποκλειστικά στο πεδίο των εννοιών. Μπορούν, όμως, ταυτόχρονα να απεικονιστούν στο χαρτί ή να ανακληθούν από τη μνήμη ως οπτική εικόνα. Αυτά τα σχήματα, όπως σημειώνει ο E.Fischbein, έχουν μια ιδιότητα που οι συνήθεις έννοιες δεν έχουν. Δηλαδή, περιλαμβάνουν την νοητική αναπαράσταση της ιδιότητα του χώρου. Έτσι, **τα γεωμετρικά σχήματα** έχουν **διπλή** ύπαρξη: από τη μια μεριά **αποτελούν αφηρημένες έννοιες** που **προσδιορίζονται από το μαθηματικό αξιωματικό σύστημα**, και από την άλλη, έχουν την ικανότητα να αναπαρίστανται από εικόνες που λειτουργούν στο χώρο της εμπειρίας. Πολλές έρευνες, αναδεικνύουν και διαχωρίζουν αυτές τις δύο λειτουργίες των γεωμετρικών σχημάτων. Ο E.Fischbein μιλώντας γι' αυτό το θέμα εισάγει τον όρο «σχηματικές έννοιες» Σύμφωνα με αυτόν, όταν κάποιος αναφέρεται σε γεωμετρικά σχήματα, θα πρέπει να λάβει υπ' όψιν του τρεις κατηγορίες νοητικών οντοτήτων: τον ορισμό, την εικόνα (βασισμένη στην αντιληπτική-αισθητηριακή εμπειρία, όπως η εικόνα ενός σχεδίου) και την σχηματική έννοια.

«Τα αντικείμενα έρευνας και επεξεργασίας στην γεωμετρική απόδειξη, είναι νοητικές οντότητες που τις ονομάζουμε σχηματικές έννοιες, που αντανακλούν ιδιότητες χώρου (σχήμα, θέση, μέγεθος), αλλά παράλληλα έχουν και εννοιακές ιδιότητες όπως ιδανικότητα, αφαιρετικότητα, τελειότητα, καθολικότητα» (C. Lemonidis, 1997).

Ο R. Duval στην προσπάθειά του να ερμηνεύσει την ευρετική λειτουργία του γεωμετρικού σχήματος σε ένα γεωμετρικό πρόβλημα, υποστηρίζει ότι υπάρχουν 4 δυνατές μαθήσεις (R. Duval, 1994). Στον μαθηματικό τρόπο με τον οποίο εξετάζουμε ένα σχήμα, δύο ή τρεις από αυτές τις τέσσερις δυνατές μαθήσεις παρεμβαίνουν ταυτόχρονα ή διαδοχικά. Συνοπτικά οι τέσσερις λειτουργίες είναι:

«Αντιληπτική κατανόηση» (perceptive apprehension): αυτή η λειτουργία μας επιτρέπει να αναγνωρίσουμε αμέσως τη μορφή ενός αντικειμένου (δισδιάστατου ή τρισδιάστατου) και βασίζεται στους νόμους της μορφολογικής ψυχολογίας. Η επιστημολογική λειτουργία της αντιληπτικής κατανόησης είναι η **αναγνώριση**.

«Ορθολογική κατανόηση» (discursive apprehension): Οι μαθηματικές ιδιότητες ενός σχήματος, δεν μπορούν να προσδιοριστούν με μια απλή οπτική επιβεβαίωση. Το σχήμα εξετάζεται βάσει της ονομασίας, της εξήγησης ή της υπόθεσης, τα οποία καθορίζουν μερικές ιδιότητες επακριβώς. Για να εξηγήσουμε άλλες ιδιότητες σύμφωνα με τις δεδομένες, χρησιμοποιούμε ορισμούς, αξιώματα, θεωρήματα, κ.λ.π. Η επιστημολογική λειτουργία της ορθολογικής κατανόησης είναι η **απόδειξη.**

«ακολουθιακή κατανόηση» (sequential apprehension): υπάρχει μια συγκεκριμένη σειρά με την οποία λαμβάνουμε υπ' όψιν τα στοιχεία του σχήματος που συμμετέχουν στην δομή του σχήματος. Αυτή η σειρά εξαρτάται είτε από τις μαθηματικές ιδιότητες που αναπαριστώνται ή / και τα τεχνικά όρια των εργαλείων που χρησιμοποιούνται. Η επιστημολογική λειτουργία της ακολουθιακής κατανόησης είναι το **μοντέλο**.

«Λειτουργική κατανόηση» (operative apprehension): Ένα δεδομένο σχήμα μπορεί να τροποποιηθεί υλικά ή νοητικά με πολλούς τρόπους. Ξεχωρίζουν τρία σημαντικά είδη τροποποιήσεων.

Η <u>μερολογική τροποποίηση</u> (*mereologic modification*), η οποία συνίσταται στον χωρισμό ενός γεωμετρικού σχήματος σε μέρη (υπο-σχήματα) για να ξανα-συνδυαστούν σε ένα άλλο σχήμα.

Οι <u>οπτικές τροποποιήσεις</u> (*optical modifications*), που αποτελούνται από την μεγέθυνση, σμίκρυνση ή παραμόρφωση του σχήματος.

Η <u>θεσιακή τροποποίηση</u> (*positional modification*), η οποία συνίσταται από την αλλαγή θέσης και προσανατολισμού στο επίπεδο (περιστροφή, μετατόπιση).

3.3.2 ΟΙ ΔΥΣΚΟΛΙΕΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΣΤΗΝ ΘΕΩΡΗΣΗ ΤΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

Όπως δείχνει η καθημερινή εμπειρία στην τάξη, οι μαθητές έχουν δυσκολίες όχι μόνο με τα θεωρήματα που αναφέρονται στα γεωμετρικά σχήματα, αλλά και με τα σχήματα καθαυτά, όσον αφορά στην αντίληψη της μορφής τους και τη λογική τους ταξινόμηση. Ιδιαίτερη δυσκολία παρουσιάζουν τα τετράπλευρα και ειδικά τα «παραλληλόγραμμα». Σε έρευνα που έχει γίνει από τον Δ. Σπανό, διαπιστώθηκε ότι οι παραπάνω δυσκολίες παραμένουν στους μαθητές τουλάχιστον μέχρι την Α΄ Λυκείου. (Α. Γαγάτσης, 1993, σελ. 204).

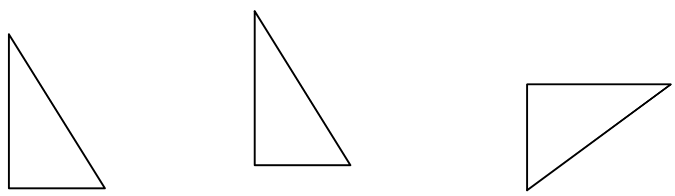
Η πρώτη δυσκολία αφορά στο *τετράγωνο* και στο *ρόμβο*. Πολλοί μαθητές θεωρούν ως ρόμβο ένα τετράγωνο στραμμένο 45 ή 25% από την κανονική του θέση. Έτσι, **δεν μπορούν να συλλάβουν το τετράγωνο ως ειδική περίπτωση ρόμβου.**

Η δεύτερη δυσκολία αφορά πάλι στο τετράγωνο σε σχέση με το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και το παραλληλόγραμμο γενικότερα: οι μαθητές **αντιλαμβάνονται το τετράγωνο ως τελείως διαφορετικό σχήμα** από το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και δυσκολεύονται να «δουν» το τελευταίο σαν ειδική περίπτωση μιας γενικότερης έννοιας του παραλληλογράμμου. Η έρευνα του Δ. Σπανού (T. Patronis, D. Spanos, 1991) έδειξε ότι οι αντιλήψεις και δυσκολίες αυτές, επιμένουν τουλάχιστον μέχρι την Α΄ Λυκείου –μετά και από την διδασκαλία των παραλληλογράμμων σε αυτή την τάξη.

Όπως αναφέραμε σε προηγούμενο σημείο της εργασίας μας (βλ. παρ. 3.3.1) η θέση και ο προσανατολισμός των γεωμετρικών σχημάτων στην επιφάνεια του χαρτιού είναι ένας ανεξάρτητος παράγοντας που δεν επηρεάζει τις ιδιότητες του σχήματος. Οι διάφορες, όμως, έρευνες έχουν δείξει πως οι μαθητές επηρεάζονται από συγκεκριμένο προσανατολισμό των σχημάτων.

Ένα παράδειγμα της επιρροής του προσανατολισμού που έχει ένα σχήμα, όσον αφορά στην αναγνώρισή του από τους μαθητές ($5^{ης}$–$8^{ης}$) και από εν ενεργεία δασκάλους στο Ισραήλ, αναφέρεται στα αποτελέσματα της έρευνας των Hershkowitz, Bruckheimer και Vinner. Ο παρακάτω πίνακας μας δείχνει μια σύγκριση μεταξύ των δασκάλων και των μαθητών ως προς την αναγνώριση ενός ορθογωνίου τριγώνου με τρεις διαφορετικούς προσανατολισμούς. Στη δραστηριότητα αυτή, έπρεπε να αναγνωρίσουν όλα τα ορθογώνια τρίγωνα από μια δεδομένη συλλογή τριγώνων.

Πιν. 3 (επιτυχία των μαθητών και δασκάλων στην αναγνώριση των ορθογωνίων τριγώνων)



Πέμπτη τάξη	80%	50%	30%
Β΄ Γυμνασίου	95%	72%	22%
Δάσκαλοι	100%	97%	77%

Παρατηρούμε ότι το ποσοστό επιτυχίας αναγνώρισης του τελευταίου ορθογωνίου τριγώνου έπεσε δραματικά όταν η ορθή γωνία ήταν «στην κορυφή». Η Hershkowitz κ.α., παρουσιάζει και άλλες δυσκολίες που έχουν οι μαθητές, οφειλόμενες στην επιρροή των αντιπροσωπευτικών παραδειγμάτων στις εννοιακές εικόνες που δημιουργούν. Αυτές οι εικόνες εννοιών περιλαμβάνουν λανθασμένα στοιχεία, που είναι τα άσχετα χαρακτηριστικά των αντιπροσωπευτικών παραδειγμάτων. Συγκεκριμένα, οι μαθητές και οι δάσκαλοι:

• είχαν πολύ καλύτερη επίδοση στην αναγνώριση ισοσκελών τριγώνων που «στέκονται στη βάση» παρά στα ισοσκελή που είχαν περιστραφεί.

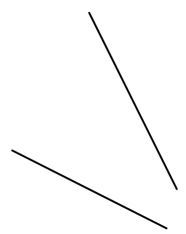
• δεν γνωρίζουν ότι ο σχεδιασμός μιας γωνίας σε ένα φύλλο χαρτί αναπαριστά μέρος της γωνίας.

• είναι απρόθυμοι να φέρουν τα εξωτερικά ύψη αμβλυγωνίων τριγώνων.

Τα άσχετα χαρακτηριστικά του προτύπου συνήθως έχουν **δυνατά οπτικά χαρακτηριστικά** και συνεπώς πρώτα επιβάλλονται και μετά δρουν ως εμπόδια. Οι μαθητές προσπαθούν να αποδώσουν αυτά τα άσχετα χαρακτηριστικά των αντιπροσωπευτικών σχημάτων, στα σχήματα της ίδιας τάξης. Αυτό, όμως, τους οδηγεί σε λάθη. Η έρευνα για την κατανόηση των γεωμετρικών εννοιών έδειξε ότι τα παιδιά δυσκολεύονται στην αναγνώριση και τον προσδιορισμό των γεωμετρικών σχημάτων οργανώνοντας ή ακόμα χρησιμοποιώντας τις ιδιότητές τους. Για παράδειγμα, αποτελέσματα ερευνών στην Αγγλία έδειξαν ότι 85% μαθητών ηλικίας 11 χρονών μπορούσαν να αναγνωρίσουν ένα κανονικό εξάγωνο. Τα ποσοστά, ωστόσο, έπεσαν δραματικά όταν τους δόθηκαν πεντάγωνα ή όταν το εξάγωνο δεν ήταν κανονικό. Τα ποσοστά κυμαίνονταν μεταξύ 25% με 43%, ανάλογα με τη δραστηριότητα.

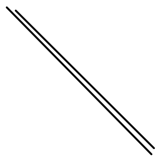
Επίσης, αποτελέσματα πολλών ερευνών συμφωνούν στο ότι ένα πολύ υψηλό ποσοστό 85-90% παιδιών έκτης δημοτικού αναγνωρίζουν τα γεωμετρικά σχήματα χρησιμοποιώντας την αντίληψή τους. Αυτό τα τοποθετεί στο επίπεδο 0 του μοντέλου γεωμετρικής σκέψης των Van Hiele. Έρευνα που έγινε από τον Fuys σε μαθητές έκτης τάξης, διαπιστώθηκε ότι όλοι εκτός από 3 μαθητές, σημείωσαν σημαντική πρόοδο, η οποία χαρακτηριζόταν από την παρουσία επαγωγικής σκέψης και την απουσία παραγωγικής (Kynigos, 1993, p. 178).

Μια άλλη έρευνα μελέτησε με ποιο τρόπο οι μαθητές διαστρεβλώνουν τις γεωμετρικές έννοιες λόγω της επίδρασης των εικόνων. Ειδικότερα, μελέτησε το είδος της διαστρέβλωσης κατά την οποία οι μαθητές συνδέουν ουσιώδη χαρακτηριστικά μιας έννοιας με ιδιαίτερες οπτικές μορφές και προσανατολισμούς. Η έρευνα έδειξε ότι οι μαθητές συνδέουν τις γεωμετρικές έννοιες με σχήματα τα οποία είναι όρθια και όχι πλαγιαστά. Έτσι, ο κατακόρυφος-οριζόντιος προσανατολισμός (που θα ονομάζουμε κανονικό), ενδέχεται να συνδεθεί στο μυαλό των παιδιών με την έννοια της καθετότητας, με αποτέλεσμα οι μαθητές να μη θεωρούν κάθετες τις παρακάτω ευθείες:

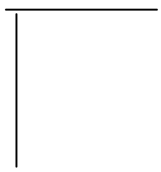


σχ. 3

Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειωθεί ότι το γεγονός αυτό συνδέεται (α) με τις προϋπάρχουσες αντιλήψεις των παιδιών, δεδομένου ότι στην καθημερινή ζωή οι περισσότερες ευθείες ή επίπεδα έχουν κανονικό προσανατολισμό και (β) από την έντονη καλλιέργεια μιας τέτοιας αντίληψης από το σχολείο. Έτσι, αφ' ενός τα τυπικά σχήματα που ζωγραφίζει το σχολικό βιβλίο ή ο δάσκαλος έχουν κανονικό προσανατολισμό και αφ' ετέρου η κατακόρυφη εκτέλεση των αριθμητικών πράξεων, ονομάζεται **κάθετη**, αντιδιαστελλόμενη προς την **οριζόντια** εκτέλεσή της. Προφανώς οι έτσι προκύπτουσες δυσκολίες των παιδιών για την ορθή σύλληψη της έννοιας της καθετότητας, είναι καθαρά **διδακτικής** υφής, δημιουργώντας λανθασμένες αντιλήψεις των μαθητών, τις λεγόμενες«πλάνες του διδακτικού συμβολαίου»[12] » (βλ. Γ. Τρούλης, 1996α, σσ. 92-107). Για παράδειγμα, η παρουσίαση από το δάσκαλο της καθετότητας δύο ευθειών με τη μια οριζόντια και την άλλη κατακόρυφη κάνει πολλούς μαθητές να θεωρούν ότι οι παρακάτω ευθείες δεν τέμνονται κάθετα:

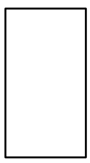


(α)



(β)

Επίσης, πολλοί μαθητές δεν θεωρούν το σχήμα (γ) ορθογώνιο, επειδή δεν έχει οριζόντια θέση στο επίπεδο κατά τη μεγαλύτερη διάστασή του:



(γ)

Τέλος, η παρουσίαση δύο παραλλήλων ευθειών στο χώρο με την οριζόντια πάντα θέση κάνει πολλούς μαθητές να νομίζουν ότι οι παράλληλες ευθείες έχουν πάντα οριζόντια θέση στο επίπεδο ενώ αν παρουσιαστούν με κατακόρυφη θέση τις θεωρούν κάθετες (Γ. Τρούλης, 1996β, σσ. 99-100).

[12] Η έννοια του διδακτικού συμβολαίου εισήχθηκε από τον G. Brousseau και αναφέρεται «στο σύνολο των συμπεριφορών του εκπαιδευτικού που αναμένονται από το μαθητή και το σύνολο των συμπεριφορών του μαθητή που αναμένονται από τον εκπαιδευτικό. Σε όλες τις διδακτικές καταστάσεις γίνεται διαπραγμάτευση ενός διδακτικού συμβολαίου, που καθορίζει επεξηγηματικά κατά ένα μικρό μέρος, αλλά κυρίως με υπονοούμενο τρόπο, αυτό που κάθε «παρτενέρ» διαχειρίζεται και για το οποίο, με τον ένα ή τον άλλο τρόπο, είναι υπεύθυνος μπροστά στον άλλο…» (Α. Γαγάτσης, 1993, σελ. 26). Οι πλάνες του «διδακτικού συμβολαίου» είναι μια κατηγορία πλανών που δημιουργούνται όταν πιθανές παρεξηγήσεις στις αμοιβαίες προσδοκίες δασκάλου-μαθητή πάνω σε συγκεκριμένες καταστάσεις δεν έχουν προληφθεί (Γ. Τρούλης, 1996, σελ. 99).

3.4 ΓΛΩΣΣΑ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Έχει επισημανθεί ότι η γλώσσα παίζει σημαντικό ρόλο σε όλα τα είδη της μάθησης και ότι η επιτυχία στα μαθηματικά εξαρτάται κατά πολλούς τρόπους από τους γλωσσικούς παράγοντες (Μ. Τουμάσης, 1994, σσ.413-414).

Τα μαθηματικά αρθρώνονται πρώτα ως γλώσσα. Προτού ο μαθητής εξοικειωθεί με τα αντικείμενα των μαθηματικών όρων και συνειδητοποιήσει τις έννοιες και τις σχέσεις τους, είναι δύσκολο να προχωρήσει στο μαθηματικό συλλογισμό. Η κατοχή λεξιλογίου, που αναφέρεται σε βασικές μαθηματικές έννοιες και σχέσεις που συνδέουν δύο ή περισσότερα αντικείμενα ή σύνολα, παίζει σπουδαίο ρόλο στην κατάκτηση των μαθηματικών εννοιών και της ικανότητας εκτέλεσης απλών αριθμητικών πράξεων και επίλυσης σχετικών προβλημάτων.

Ευρήματα αρκετών ερευνών, επισημαίνουν ότι, οι δυσκολίες μεταβίβασης των μαθηματικών πληροφοριών οφείλονται στην ακαταληψία του νοήματος των μαθηματικών όρων (Γ. Τρούλης, 1991, σελ. 67). Συχνά τα λάθη και οι ελλείψεις των μικρών μαθητών οφείλονται στην ανικανότητά τους να αναπαραστούν νοητικά τις σχέσεις μεταξύ των δεδομένων του προβλήματος, λόγω ελλιπούς αντίληψης και «εσωτερίκευσης» της έννοιας όρων που αναφέρονται σε σχέσεις (ισότητας, ισοδυναμίας, ανισότητας) αντικειμένων ή συνόλων, σε εκτίμηση αυξήσεων, μειώσεων και ισοτήτων διαφόρων μεγεθών (Μ. Βάμβουκας κ.α., 1997).

Έχουν γίνει διάφορες εργασίες που αφορούν στις γλωσσικής υφής δυσκολίες των μαθηματικών. Για παράδειγμα, η εργασία «Σημαίνον και σημαινόμενο στα σχολικά μαθηματικά» (βλ. Λιναρδάκη Π., 1992, σελ.170) που παρουσιάστηκε στην «Πρώτη σχολική εκδρομή στα μαθηματικά» στο πανεπιστήμιο Αιγαίου, τον Δεκέμβριο του 1990. Το αντικείμενο εκείνης της εργασίας ήταν η προσπάθεια προσέγγισης, με τη βοήθεια της γλωσσολογίας, προβλημάτων που άπτονται της διδασκαλίας των Μαθηματικών. Επειδή η αφετηρία της εργασίας εκείνης ήταν η προσπάθεια να ερευνηθούν οι αιτίες των λαθών που γίνονται από τους μαθητές στα Μαθηματικά και που δεν αρκούν τα μαθηματικά εργαλεία για να ερμηνευθούν, ήταν φυσικό να τεθεί προς απάντηση το εξής ερώτημα:

«Υπάρχουν αντιστοιχίες στα φαινόμενα και στους νόμους που διέπουν την «φυσική» και την «μαθηματική» γλώσσα έτσι ώστε να υπάρχει δυνατότητα ερμηνείας λαθών στα μαθηματικά που έχουν γλωσσολογική προέλευση;»

Πολύ συχνά λέγεται ότι η εκπαιδευτική επιτυχία σχετίζεται στενά με την πρόσβαση την οποία έχει το παιδί στην γλώσσα που χρησιμοποιείται στο σχολείο. Έτσι, κάθε προσπάθεια εξέτασης του τρόπου με τον οποίο η γλώσσα αλληλεπιδρά με την μάθηση στο περιβάλλον του σχολείου και ειδικότερα με οποιοδήποτε σχολικό γνωστικό αντικείμενο, θα πρέπει να επικεντρωθεί στην κοινωνική διάσταση της γλώσσας. Για να γίνει κατανοητή η κοινωνική διάσταση της γλώσσας, θα πρέπει να θεωρήσουμε την γλώσσα ως μέσο αλληλεπίδρασής μας με άλλους ανθρώπους και κατασκευής κοινών νοημάτων, για παράδειγμα, η γλώσσα ως μέσο επικοινωνίας. Η ανθρώπινη επικοινωνία δεν είναι απλά ζήτημα παραγωγής προτάσεων, αλλά και η ικανότητα κατανόησης και χρήσης της γλώσσας σε συγκεκριμένα περιβάλλοντα (H. Sakonidis, 1996, p. 248).

Η σπουδαιότητα της γλώσσας είναι δύσκολο να παραβλεφθεί, αφού ένας από τους βασικότερους στόχους της εκπαίδευσης είναι η παρουσίαση, μετάδοση και ανάπτυξη της γνώσης, πράγμα το οποίο παραπέμπει στη χρήση της γλώσσας. Η γλώσσα είναι το κυριότερο μέσο βάσει του οποίου οι δάσκαλοι και οι μαθητές οργανώνουν την αλληλεπίδρασή τους και ανταλλάσσουν τα μηνύματα και τις προθέσεις τους. Είναι, όμως, γνωστό ότι διδασκαλία των μαθηματικών στο δημοτικό σχολείο παρουσιάζει ιδιαίτερα προβλήματα (Γ. Τρούλης, 1991, σελ. 80):

- το παιδί με τον ερχομό του στο σχολείο, καλείται να μάθει έννοιες και να τις γράφει (π.χ. **λιγότερο, περισσότερο, μεγαλύτερο κ.λ.π.)**, ενώ ο προφορικός του λόγος δεν έχει πλήρως αναπτυχθεί ακόμα..
- πολλές φορές ένα μαθηματικό σύμβολο αντιστοιχεί σε εντελώς διαφορετικές προφορικές εκφράσεις (π.χ. το σύμβολο (-): 3-2, 2^{-2}, κ.λ.π.).
- πολλές λέξεις έχουν στα μαθηματικά διαφορετικό νόημα απ' αυτό που έχουν στην κοινή γλώσσα (π.χ. λόγος, ρίζα, βάση, εκθέτης, κ.λ.π.).

Έρευνα που έγινε σε μαθητές ΣΤ΄ δημοτικού (Γ. Τρούλης, 1991, σελ. 80), και η οποία είχε ως στόχο την διαπίστωση του αν τα παιδιά υποφέρουν από ένα είδος «μαθηματικού αναλφαβητισμού», έδειξε ότι το 60% αγνοεί την σημασία στοιχειωδών μαθηματικών εννοιών. Όσον αφορά στην γεωμετρία, ιδιαίτερη δυσκολία για τους μαθητές παρουσίασαν:

- η διάκριση του ύψους τριγώνων
- η ονομασία γεωμετρικών σχημάτων
- η αντιστοίχηση τύπου εύρεσης εμβαδού και επίπεδου σχήματος.

Επίσης, σε μια άλλη έρευνα που έγινε σε μαθητές Β΄ δημοτικού (Μ. Βάμβουκας κ.α., 1997) και είχε ως στόχο να διαπιστώσει αν οι μαθητές αυτοί μπορούσαν να κατανοήσουν προμαθηματικές έννοιες ποσοτήτων και των σχέσεών τους, έδειξε ότι μόνο το 2,5% των μαθητών του δείγματος κατέχουν πλήρως την ικανότητα κατανόησης των προμαθηματικών εννοιών. Ένα υψηλά σημαντικό ποσοστό μαθητών (25%) κατέχει τη σχετική μαθηματική ύλη σε ποσοστά που κυμαίνονται από 1 έως 75%. Συγκεκριμένα:

- Η έννοια της ισότητας και οι φράσεις που χρησιμοποιούνται για την δήλωσή της φάνηκε να κατανοούνται πιο **δύσκολα** από την έννοια της ανισότητας.
- Οι φράσεις-ερωτήσεις που περιέχουν τους όρους μεγάλος-μικρός και πολύς-λίγος απαντώνται σε υψηλότερα ποσοστά επιτυχίας παρά οι φράσεις που περιέχουν τους όρους ψηλός, χαμηλός, βαρύς, ελαφρύς.
- Ένα ποσοστό 29% του δείγματος δεν μπόρεσε να διαβάσει και να κατανοήσει περισσότερο από το 75% των προμαθηματικών εννοιών και σχέσεων.

Ο H. Maier αναφέρει ότι η γλώσσα των μαθηματικών στην αίθουσα της διδασκαλίας των μαθηματικών, είναι μια «ξένη» γλώσσα για τους μαθητές. Ο **πρώτος** παράγοντας που συντελεί σ΄ αυτό είναι σύμφωνα με τον Maier, το άγνωστο λεξιλόγιο. Συγκεκριμένα, στην τάξη των μαθηματικών χρησιμοποιούνται πολλοί τεχνικοί όροι και το πλήθος τους συχνά υποτιμάται από τους δασκάλους.

Ο **δεύτερος** παράγοντας αφορά στις γλωσσικές συμβάσεις που αλλάζουν. Υπάρχουν πολλές διαφορές στις συμβάσεις της μαθηματικής και τις καθημερινής γλώσσας. Αλλά οι δάσκαλοι και τα εγχειρίδια κάνουν συχνά χρήση των τεχνικών συμβάσεων σιωπηρά, ενώ οι μαθητές τις ερμηνεύουν σύμφωνα με τις καθοδηγητικές γραμμές των **καθημερινών** γλωσσικών συμβάσεων. Αυτό, σύμφωνα με τον συγγραφέα προκαλεί συχνά προβλήματα κατανόησης.

Τέλος, ο **τρίτος** παράγοντας αφορά στην ανάμειξη των τεχνικών σημασιών και των σημασιών που έχουν οι ίδιες οι λέξεις στην καθημερινή γλώσσα. Ένας μαθητής που θέλει να κατανοήσει την γλώσσα των μαθηματικών, πρέπει να αποδώσει σωστά τους τεχνικούς όρους και εκφράσεις. Από την άλλη, οι μαθητές έχουν να αντιμετωπίσουν μαθηματικούς όρους παρμένους από την καθημερινή γλώσσα, τους οποίους θα μάθουν να χρησιμοποιούν με μια αρκετά διαφορετική και συχνά στενότερη σημασία από αυτή με την οποία τους είχαν συνδέσει στην καθημερινή επικοινωνία (Α. Γαγάτσης, 1993, σελ.55).

3.5 ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΩΝ VAN HIELE

Η θεωρία των Van Hiele (1959), αποτελεί μια αξιόλογη προσπάθεια της κατανόησης των προβλημάτων μάθησης στην γεωμετρία. Σύμφωνα με αυτό, η πρόοδος των μαθητών επιτυγχάνεται μέσα από τη σταδιακή ανάπτυξη των γεωμετρικών εννοιών.

Ο Pierre Van Hiele υπογραμμίζει ότι πολλοί από τους μαθητές δεν καταλαβαίνουν τη σημασία των αξιωμάτων και των ορισμών. Καταβάλλουν κάθε δυνατή προσπάθεια, αλλά αυτό δεν βοηθάει. Όταν τελικά καταλάβουν, λένε: «τώρα καταλάβαμε, αλλά γιατί τα εξηγείτε σε τόσο δύσκολη γλώσσα;».

Βασιζόμενος σε αυτές τις δυσκολίες, ο Van Hiele άρχισε να σκέφτεται ότι υπήρχαν διαφορετικά επίπεδα σκέψης στην ανάπτυξη των γεωμετρικών εννοιών, που είναι συνάρτηση της γλώσσας και της γνώσης (Ν. Ζαράνης, 1997, σελ. 283). Η θεωρία διακρίνει διαδοχικά επίπεδα γεωμετρικής σκέψης, ξεκινώντας από μια ολική αντίληψη των γεωμετρικών σχημάτων φτάνοντας μέχρι την κατανόηση μιας τυπικής γεωμετρικής απόδειξης. Μια σύντομη περιγραφή αυτών των επιπέδων είναι:

1^{o} επίπεδο: οπτική αντίληψη του χώρου

Οι γεωμετρικές οντότητες γίνονται αντιληπτές μάλλον σαν ολικές οντότητες παρά σαν οντότητες οι οποίες απαρτίζονται από διάφορα μέρη και έχουν κάποιες ιδιότητες. Οι γεωμετρικές οντότητες, για παράδειγμα, αναγνωρίζονται από το σχήμα τους ως ένα όλο, δηλαδή από την φυσική τους εμφάνιση και όχι από τα μέρη τα οποία τις απαρτίζουν.

2^{o} επίπεδο: ανάλυση

Στο δεύτερο επίπεδο αρχίζει να γίνεται μια ανάλυση των γεωμετρικών εννοιών. Οι μαθητές διακρίνουν τα σχήματα από τα συστατικά τους και τα αναγνωρίζουν από τα μέρη τους. Βρίσκουν ιδιότητες των σχημάτων, τις οποίες χρησιμοποιούν για την ταξινόμησή τους.

3^{o} επίπεδο: άτυπη σκέψη

Στο επίπεδο αυτό οι μαθητές είναι σε θέση να διακρίνουν τις σχέσεις μεταξύ των ιδιοτήτων των σχημάτων αυτών καθ' αυτών και μεταξύ των σχημάτων. Οι ορισμοί, επίσης, γίνονται κατανοητοί και άτυποι – χαλαροί συλλογισμοί μπορεί να δοθούν και να γίνουν αντιληπτοί από τους μαθητές.

4^{o} επίπεδο: τυπική σκέψη

Στο επίπεδο αυτό μπορεί να γίνει κατανοητή η σημασία της παραγωγικής σκέψης ως ένας τρόπος να ενταχθεί η γεωμετρική θεωρία μέσα σε ένα αξιωματικό σύστημα.

5^{o} επίπεδο: αυστηρότητα

Σε αυτό το επίπεδο ο μαθητής είναι σε θέση να εργαστεί με ένα πλήθος αξιωματικά συστήματα. Για παράδειγμα, μπορεί να μελετηθούν μη Ευκλείδειες γεωμετρίες και να συγκριθούν διαφορετικά συστήματα (Μ. Τουμάσης, 1994, σ.σ. 333-34).

Αργότερα, οι Van Hiele συνοψίζουν το μοντέλο τους σε τρία επίπεδα σκέψης: οπτικό, περιγραφικό και θεωρητικό. Τα ερευνητικά αποτελέσματα έδειξαν ότι ο αρχικός διαχωρισμός και σφαιρικότητα των επιπέδων ήταν αμφίβολη. Αυτό σημαίνει ότι ο μαθητής μπορεί να λειτουργεί σε διαφορετικά επίπεδα με διαφορετικά πλαίσια και μπορεί να αλλάξει επίπεδο μέσα στην ίδια την δραστηριότητα. Επίσης, η θέση του 5ου επιπέδου Van Hiele στην κυριαρχία δεν ήταν ξεκάθαρη (βλ. R. Hershkowitz, 1996, σελ. 99).

Στο πρόσφατο αυτό μοντέλο, αυτά τα επίπεδα επιτυγχάνονται με το πέρασμα από διαφορετικές περιόδους μάθησης. Στην διάρκεια κάθε περιόδου οι μαθητές ερευνούν τα κατάλληλα αντικείμενα μελέτης, αναπτύσσουν ειδικό λεξιλόγιο που σχετίζεται με αυτά και μυούνται σε αλληλεπιδραστικές δραστηριότητες μάθησης, σχεδιασμένες έτσι ώστε να τους ωθήσουν στην προσπάθεια επίτευξης ενός υψηλότερου επιπέδου σκέψης.

Θεωρητικό
(Επίπεδο 3)

• χρήση παραγωγικής αιτιολόγησης
για την απόδειξη γεωμετρικών σχέσεων.

Φάσεις μάθησης:
-ενοποίηση
-ελεύθερος προσανατολισμός
-επεξήγηση
-κατατευθυνόμενος προσανατολισμός
-πληροφορία/ αναζήτηση

Περιγραφικό
(επίπεδο 2)

• αναγνώριση των αντικειμένων από τις
γεωμετρικές τους ιδιότητες.

Φάσεις μάθησης:
-ενοποίηση
-ελεύθερος προσανατολισμός
-επεξήγηση
-κατευθυνόμενος προσανατολισμός
-πληροφορία/ αναζήτηση

Οπτικό
(επίπεδο 1)

• ολική αναγνώριση των γεωμετρικών

αντ

σχ. 4

(Anne Teppo, 1991, pp. 210-11).

Ο ίδιος ο Van Hiele τόνισε την σημασία της διδασκαλίας φτάνοντας στο σημείο να δηλώσει ότι: «Η μετάβαση από το ένα επίπεδο στο επόμενο, εξαρτάται πιο πολύ από τις εκπαιδευτικές εμπειρίες παρά από την ηλικία ή την ωρίμανση».

Φάσεις της μάθησης

Το παραπάνω μοντέλο τονίζει την σπουδαιότητα της διαδικασίας διδασκαλίας-μάθησης. Οι μαθητές προχωρούν από το ένα επίπεδο στο επόμενο, ύστερα από προγραμματισμένη διδασκαλία, οργανωμένης σε 5 φάσεις διαδοχικών δραστηριοτήτων. Το μοντέλο, επίσης, τονίζει ότι οι 5 αυτές φάσεις διδασκαλίας είναι απαραίτητες για να καταστήσουν τους μαθητές ικανούς -σε κάθε περίοδο μάθησης- να αναπτύξουν ένα υψηλότερο επίπεδο γεωμετρικής σκέψης.

Πρώτη φάση: αναζήτηση-πληροφορία

Παρουσιάζεται στους μαθητές υλικό σχετικό με το τρέχον επίπεδο μάθησης.

Δεύτερη φάση: κατευθυνόμενος προσανατολισμός

Ο μαθητής εξερευνά το πεδίο έρευνας μέσω προσεκτικά κατευθυνόμενων, δομημένων δραστηριοτήτων.

Τρίτη φάση: επεξήγηση

Οι μαθητές και ο δάσκαλος συζητούν για τα αντικείμενα μελέτης. Ο ρόλος του δασκάλου σε αυτή τη φάση, είναι να βοηθά τους μαθητές στην χρησιμοποίηση συγκεκριμένης και κατάλληλης γλώσσας.

Τέταρτη φάση: ελεύθερος προσανατολισμός

Οι μαθητές ασχολούνται με πιο πολλές και σύνθετες εργασίες, οι οποίες μπορούν να προσεγγισθούν με πολλούς τρόπους.

Πέμπτη φάση: ενοποίηση

Δάσκαλος και μαθητές συνοψίζουν ό,τι έχουν μάθει, με σκοπό να σχηματίσουν μια γενική άποψη του νέου πλέγματος των αντικειμένων και των σχέσεων.

Οι διδακτικές πλευρές της θεωρίας

Σύμφωνα με το μοντέλο Van Hiele, κάθε περίοδος μάθησης, χτίζει και επεκτείνει τη σκέψη του προηγούμενου επιπέδου. Αποτελεσματική μάθηση επιτυγχάνεται όταν οι μαθητές έχουν ενεργητική ενασχόληση με τα αντικείμενα μελέτης, σε κατάλληλα περιβάλλοντα γεωμετρικής σκέψης, καθώς και όταν συζητούν, χρησιμοποιώντας τη γλώσσα (λεξιλόγιο) της εκάστοτε περιόδου μάθησης.

Η γλώσσα αποτελεί ένα σημαντικό κομμάτι της μάθησης. Κάθε ένα από τα τρία επίπεδα του μοντέλου, χαρακτηρίζεται από ένα λεξιλόγιο που χρησιμοποιείται για να αναπαραστήσει τις έννοιες, δομές και διασυνδέσεις εντός του επιπέδου γεωμετρικής κατανόησης:

«Η γλώσσα είναι χρήσιμη, γιατί με την αναφορά μιας λέξης, μέρη μιας δομής μπορούν να ανακληθούν. Νέο λεξιλόγιο εισάγεται σε κάθε περίοδο μάθησης για να αποσαφηνιστούν και να συζητηθούν καινούρια αντικείμενα μελέτης».

Μια σημαντική διδακτική άποψη της θεωρίας είναι ότι οι μαθητές χαμηλότερου επιπέδου σκέψης, δεν μπορούν να κατανοήσουν διδασκαλία υψηλότερου επιπέδου σκέψης. Σύμφωνα με τον Van Hiele: *«Αυτή είναι η πιο σημαντική αιτία των κακών αποτελεσμάτων στην μαθηματική εκπαίδευση».* Οι μαθητές πρέπει να περάσουν μέσω των περιόδων μάθησης που οδηγούν σε κάθε επίπεδο διαδοχικά, έτσι ώστε να είναι ικανοί να αναπτύξουν μια κατάλληλη κατανόηση των μαθηματικών εννοιών που εκφράζονται σε κάθε επίπεδο. Με αυτό τον τρόπο οι μαθητές αναπτύσσουν την ικανότητα να καταλαβαίνουν και να χρησιμοποιούν την γεωμετρική σκέψη και ενόραση.

Το πέρασμα των μαθητών από το οπτικό και περιγραφικό επίπεδο στο θεωρητικό, συντελείται μετά από μεγάλο χρονικό διάστημα. Το μάθημα της γεωμετρίας είναι ένα πλούσιο και περίπλοκο πεδίο, του οποίου τα θέματα πρέπει να συνοψίζονται αποτελεσματικά κατά τη διάρκεια κάθε περιόδου μάθησης. Ένα συστηματικά αναπτυγμένο πεδίο γνώσης πρέπει να αποκτηθεί προτού ο μαθητής φτάσει στο θεωρητικό επίπεδο. Για να φτάσει σε αυτό το επίπεδο *«χρειάζεται σχεδόν 2 χρόνια συνεχούς εκπαίδευσης για να αποκτήσουν οι μαθητές την εμπειρία της εσωτερικής αξίας της* ***παραγωγής*** *και ακόμη περισσότερος χρόνος είναι απαραίτητος για την κατανόηση της εσωτερικής σημασίας αυτής της έρευνας»,* σχολιάζει ο Van Hiele.

Άλλα χαρακτηριστικά της θεωρίας είναι:

•Η απομνημόνευση δεν θεωρείται χαρακτηριστικό κανενός επιπέδου.

•Τα επίπεδα είναι συγκεκριμένα και σφαιρικά, δηλαδή ο μαθητής βρίσκεται στο ίδιο επίπεδο από όλες τις απόψεις.

•Ο μαθητής προχωρά από το ένα επίπεδο στο άλλο, χωρίς να υπερπηδά κανένα επίπεδο (R. Hershkowitz, 1996, σελ. 98).

Τα παραπάνω έχουν υποστηριχθεί και επιβεβαιωθεί από την έρευνα, η οποία έχει διεξαχθεί γύρω από τη μάθηση της γεωμετρίας και την ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης στο παιδί. Το βασικό συμπέρασμα είναι ότι η διδασκαλία μπορεί να βοηθήσει στη δημιουργία και επιτάχυνση της γεωμετρικής; σκέψης των παιδιών. Οι Van Hiele βρήκαν ότι είναι αναγκαίο να σχεδιάζονται από τους δασκάλους πολλές δραστηριότητες που θα περιλαμβάνουν ανακάλυψη, πειραματισμό και εξοικείωση με τα γεωμετρικά σχήματα, πριν διδαχθεί η παραγωγική σκέψη (Μ. Τουμάσης, 1994, σ.σ. 344-45).

3.6 Η ΘΕΩΡΙΑ ΤΟΥ ΚΟΝΣΤΡΟΥΚΤΙΒΙΣΜΟΥ (ΟΙΚΟΔΟΜΙΣΜΟΣ)

Ο κονστρουκτιβισμός, θεωρεί ότι η μάθηση είναι διαδικασία δόμησης εμπειρίας. Υπάρχει ένας γνωστικός μηχανισμός που συντελεί στη μάθηση διαμέσου μιας διαρκούς κατασκευής. Πράξεις κατασκευής θεωρούνται όλα όσα βλέπουμε, ακούμε, θυμόμαστε, δηλαδή ερεθίσματα και πληροφορίες που δεχόμαστε από το περιβάλλον (Γ. Φιλίππου, Κ. Χρίστου, 1995, σελ. 74). **Η γνώση δεν είναι απλά πρόσληψη πληροφοριών,** αλλά έχει να κάνει και με τη **δημιουργία ερμηνειών του κόσμου**, βασισμένων στις προηγούμενες εμπειρίες και αλληλεπιδράσεις στον κόσμο (Duffy & Jonassen, 1991, Cunningham, 1991, Perkins, 1991).

Ειδικά για τα μαθηματικά, (ο οικοδομισμός) βασίζεται πάνω στη βασική εμπειρική και θεωρητική εργασία του Piaget και στην πιο πρόσφατη εργασία θεωρητικών και ερευνητών παιδαγωγών στην περιοχή της μαθηματικής εκπαίδευσης.

Οι βασικές παραδοχές του κονστρουκτιβισμού είναι οι ακόλουθες (βλ. Γ. Τρούλης, 1996β, σσ.88-92):

1) *Ο μαθητής κατασκευάζει τις γνώσεις του.* Το παιδί κατασκευάζει ενεργητικά τη γνώση, κατανοώντας τη σύμφωνα με τα δικά του γνωστικά αποθέματα.: «δεν υπάρχει πραγματικότητα που να μοιράζεται, η μάθηση είναι προσωπική ερμηνεία του κόσμου», «η μάθηση είναι μια ενεργός διαδικασία στην οποία το νόημα αναπτύσσεται με βάση την εμπειρία» (D. Merrill, 1991, p. 45).

Από ό,τι δείχνουν οι έρευνες στη διδακτική των μαθηματικών, οι μαθητές χρησιμοποιούν τις προηγούμενές τους γνώσεις για να αναπτύξουν τις προσωπικές τους λύσεις. Τα παιδιά αναπτύσσουν μόνα τους τις μαθηματικές έννοιες, καθώς συμμετέχουν στις μαθηματικές δραστηριότητες (Μ. Τουμάσης, 1994, σελ. 155)

2) *Για να μπει ο μαθητής σε δραστηριότητα κατασκευής γνώσεων, πρέπει να έχει πρόβλημα να λύσει.* Το ερέθισμα για την κατασκευή της νέας γνώσης ξεκινάει από μια προβληματική κατάσταση, η οποία αρχικά φαίνεται ότι δεν μπορεί να συμβιβαστεί με την ενυπάρχουσα οργάνωση της γνώσης στο μαθητή. Αυτή η ασυμφωνία ή έλλειψη ισορροπίας, προκαλείται όταν οι ενυπάρχουσες γνωστικές δομές του μαθητή δεν επαρκούν για να εξηγήσουν την νέα κατάσταση. Στη συνέχεια, η αστάθεια αυτή οδηγεί σε διανοητική δράση και σε τροποποίηση των προηγούμενων αντιλήψεων προκειμένου να ερμηνευθεί η νέα εμπειρία. (Μ. Τουμάσης, 1994, σελ. 154). Έτσι, για να κινητοποιηθεί το γνωστικό σύστημα του μαθητή, απαραίτητη προϋπόθεση είναι το πρόβλημα να είναι επαρκώς κοντά στις διαθέσιμες γνώσεις του μαθητή ώστε να μπορεί να «αφομοιωθεί» και επαρκώς μακριά για να προκαλεί τη σκέψη να μετασχηματίσει και να αναδιατάξει τον τρόπο σκέψης και εργασίας. Επίσης, το πρόβλημα πρέπει να έχει νόημα γι' αυτόν (Γ. Τρούλης, 1996β, σελ. 89).

3) *Η λύση του προβλήματος πρέπει να γίνεται ερευνητικά:* ο μαθητής θα κάνει υποθέσεις, θα τις διερευνά, θα δοκιμάζει, θα επαληθεύει και θα προχωρεί.

4) *Ο ρόλος της κοινωνικής αλληλεπίδρασης στη μάθηση των μαθηματικών είναι καθοριστικής σημασίας.* Η κατασκευαστική προσέγγιση στη μάθηση, βασίζεται στην άποψη ότι τα μαθηματικά είναι μια ζωντανή, ανθρώπινη δραστηριότητα και η κοινωνική αλληλεπίδραση μέσα στην τάξη παίζει καθοριστικό ρόλο στον τρόπο με τον οποίο τα παιδιά μαθαίνουν μαθηματικά (Μ. Τουμάσης, 1994, σελ. 156). Η αλληλεπίδραση μεταξύ δασκάλου και μαθητή, αλλά και μεταξύ των ίδιων των μαθητών, επιδρούν σημαντικά ως προς τι μαθαίνεται και το πώς μαθαίνεται. Μέσα από ανταλλαγές διαφορετικών απόψεων, ο μαθητής βλέπει το πρόβλημα και από άλλη σκοπιά και έτσι αναδομεί την γνωστική του δραστηριότητα (Γ. Τρούλης, 1996β, σελ. 90).

Ο βασικός στόχος της διδασκαλίας των μαθηματικών μέσα από το πρίσμα του κονστρουκτιβισμού, είναι η παροχή ευκαιριών και η καλλιέργεια των κινήτρων για να κατασκευάσει το παιδί μόνο του τις θεμελιώδεις μαθηματικές ιδέες και έτσι να συνηδειτοποιήσει τις δυνατότητές του για μαθηματική σκέψη και μάθηση (Μ. Τουμάσης, 1994, σελ. 157). Έτσι, οι μαθητές θα πρέπει να ασχολούνται με την εξερεύνηση μαθηματικών προβληματικών καταστάσεων, να σχηματίζουν υποθέσεις και να τις αξιολογούν, να γενικεύουν και να αιτιολογούν τις ιδέες που δημιουργούν. Σημαντικός είναι ο ρόλος της εποπτείας, της επεξεργασίας από μέρους των μαθητών, διαφόρων μαθηματικών υλικών. Με τον τρόπο αυτό, οι μαθητές αποκτούν εμπειρίες δραστήριας συμμετοχής τους στην κατασκευή της μαθηματικής γνώσης, χωρίς να δέχονται παθητικά τις μεταδιδόμενες πληροφορίες.

3.7 ΕΞΕΡΕΥΝΗΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΚΑΙ ΣΤΑΣΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Τα μαθηματικά είναι μια ανθρώπινη κοινωνική δραστηριότητα και κατασκευή που μοιάζει περισσότερο με μια μαγευτική περιπέτεια, παρά με μια θεία αποκάλυψη (Μ. Τουμάσης, 1994, σελ. 242). Έτσι, **βασικό χαρακτηριστικό στην διδασκαλία των μαθηματικών είναι η εξερευνητική εργασία**. Ο μαθητής πρέπει να ψάξει, να ερευνήσει, να αναζητήσει, να μαντέψει, να δοκιμάσει, να αναθεωρήσει, να ξαναπροσπαθήσει, μέχρι να φτάσει σε ένα αποτέλεσμα. Η κατασκευαστική άποψη για τη μάθηση των Μαθηματικών –όπως είδαμε παραπάνω- βασίζεται στην ενεργητική συμμετοχή, στην οικοδόμηση της νέας γνώσης. Δίνοντας την ευκαιρία να αυτενεργήσει ο μαθητής, συμβάλλουμε στην αφύπνιση της πρωτοβουλίας του, απαραίτητη προϋπόθεση για την συμμετοχή του σε ερευνητική εργασία.

Η λογική της μαθηματικής ανακάλυψης ή ευρετική, διαμορφώνει το μηχανισμό για τη γέννηση της μαθηματικής γνώσης (Μ. Τουμάσης, 1994, σελ. 87). Στην διαδικασία αυτή οι ορισμοί, οι υποθέσεις, οι εικασίες, οι μη τυπικές αποδείξεις, τίθενται σε κριτική και επαναδιατυπώνονται. **Το πρότυπο της μαθηματικής ανακάλυψης** αποτελείται από τα **4 ακόλουθα στάδια**: i) Αρχική εικασία,

ii) Απόδειξη, η οποία έχει ως σκοπό να αναλύσει την αρχική εικασία σε υποεικασίες, iii) Εμφάνιση αντιπαραδειγμάτων στην αρχική εικασία, iv) Η απόδειξη επανεξετάζεται.

Επειδή σήμερα δίνεται έμφαση στην ποιοτική και όχι στην ποσοτική διάσταση της μάθησης, οι ανακαλυπτικές δραστηριότητες κατέχουν την πρώτη θέση στο μεθοδολογικό οπλοστάσιο των μαθηματικών, γιατί καλλιεργούν θετικές στάσεις των μαθητών απέναντι στα μαθηματικά. Η έρευνα έχει δείξει ότι θετικές στάσεις αποκτώνται όταν οι δάσκαλοι χρησιμοποιούν σύγχρονες μεθόδους διδασκαλίας, όπως είναι η ευρετική μέθοδος, η συνεργατική μάθηση. Επίσης, θετικές στάσεις αναπτύσσονται όταν οι δραστηριότητες με τις οποίες ασχολούνται οι μαθητές, προσελκύουν το ενδιαφέρον τους και είναι δημιουργικές (Φιλίππου Χ., Χρίστου Κ., 1995, σελ. 23-24).

Ο χώρος της Γεωμετρίας, όπως τονίσαμε και σε άλλο σημείο της εργασίας μας, είναι πρόσφορος για την ανάπτυξη ανακαλυπτικών δεξιοτήτων και την καλλιέργεια θετικών στάσεων απέναντι στα Μαθηματικά.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΕΤΑΡΤΟ
ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

4.1 ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Η παρούσα εργασία συνιστά μια προσπάθεια διερεύνησης των δυνατοτήτων των μαθητών ΣΤ΄ τάξης δημοτικού στην μάθηση νέων γι' αυτών μαθηματικών γνώσεων, βάσει ενός τρόπου παρουσίασης / διδασκαλίας της γεωμετρίας, όπου στην διαδικασία μάθησης οι **ανακαλυπτικές ενέργειες** και η **κατανόηση της ανάγκης σαφούς διατύπωσης** παρατηρήσεων και συμπερασμάτων και της **λογικής τους αιτιολόγησης,** είναι κεντρικής σημασίας.

Τα ερωτήματα τα οποία απασχολούν την έρευνα είναι τα εξής:

1. Μπορούν οι μαθητές να χωρίζουν ένα γεωμετρικό σχήμα σε άλλα ίσα σχήματα και να ενώνουν ίσα σχήματα προκειμένου να δημιουργήσουν ένα νέο όλο;
2. Μπορούν οι μαθητές να ανακαλύπτουν γεωμετρικές ιδιότητες θεωρώντας ένα σχήμα ως μέρη και όλο; Επίσης, μπορούν να επεκτείνουν επαγωγικά τις ιδιότητες που ανακαλύπτουν στα σχήματα της ίδιας ή παρεμφερούς κατηγορίας;
3. Μπορούν οι μαθητές να «δουν» τις αναλογίες με προηγούμενες καταστάσεις και να κάνουν υποθετικο-απαγωγικούς συλλογισμούς;
4. Μπορούν οι μαθητές να κάνουν τους απαραίτητους συλλογισμούς ώστε να μετασχηματίσουν τις ιδιότητες που ανακαλύπτουν σε κατασκευαστικές διαδικασίες, προκειμένου να αντιμετωπίσουν προβλήματα κατασκευών;

Σε αυτό το σημείο, θα θέλαμε να επισημάνουμε ότι επειδή η έρευνά μας ήταν ανιχνευτικού τύπου, δεν προχωρήσαμε στη διατύπωση ερευνητικών υποθέσεων.

Για την προσέγγιση του θέματος της εργασίας μας διεξήγαμε την έρευνά μας σε μαθητές που βρίσκονταν στη ΣΤ΄ δημοτικού. Οι μαθητές της ΣΤ΄ τάξης είναι περίπου στο 11^{o} έτος της ηλικίας τους. σύμφωνα με την εξελικτική ψυχολογία του Piaget, τα παιδιά της ηλικίας αυτής, έχουν ολοκληρώσει το στάδιο των συγκεκριμένων νοητικών ενεργειών και έχουν αρχίσει να περνούν στην περίοδο της τυπικής σκέψης. Μερικά χαρακτηριστικά της περιόδου αυτής που συνδέονται με την μάθηση των μαθηματικών είναι:

«-Η σκέψη απαλλάσσεται από το βάρος του συγκεκριμένου και στηρίζεται στις πνευματικές εικόνες, στις έννοιες, στα σύμβολα. Η γλώσσα μπορεί να είναι **λεκτική, συμβολική, παραστατική.**
-Η σκέψη γίνεται υποθετικο-απαγωγική. Το παιδί μπορεί να κάνει υποθέσεις και να τις επαληθεύει με καθαρά λογική μέθοδο.
-Ολοκληρώνεται η κατανόηση των τριών μορφών του χώρου (τοπολογικός, προβολικός, ευκλείδειος), όπως επίσης, η αιτιότητα και το τυχαίο.
-Η σκέψη είναι προβλεπτική του αποτελέσματος και διορθωτική της συμπεριφοράς. Αναπαριστά νοερά μια λύση, ελέγχει την ορθότητά της, την απορρίπτει και επιστρέφει στην αφετηρία ζητώντας νέα» (Γ. Τρούλης, 1992, σσ. 83-84).

Τα παραπάνω χαρακτηριστικά της νοημοσύνης των μαθητών αυτής της ηλικίας μας επέτρεψαν να διεξάγουμε την έρευνά μας στην ΣΤ΄ δημοτικού. Άλλωστε, από τα πορίσματα των περιορισμένων, έστω, διδακτικών ερευνών που είχαν γίνει (βλ. Hershkowitz, 1996), η ηλικία αυτή φαινόταν η κατάλληλη για το είδος των δραστηριοτήτων της έρευνά μας.

4.2 ΤΑ ΥΠΟΚΕΙΜΕΝΑ

Τα υποκείμενα της προκαταρκτικής έρευνας (α΄ φάση διεξαγωγής συνεντεύξεων) αποτέλεσαν 17 μαθητές (9 κορίτσια και 8 αγόρια) δύο τμημάτων ΣΤ' τάξης του 6ου δημοτικού σχολείου Ρεθύμνου. Τα δύο αυτά τμήματα είχαν τον ίδιο δάσκαλο. Τα υποκείμενα της β΄ φάσης αποτέλεσαν 23 μαθητές ενός τμήματος του 9ου δημοτικού σχολείου Ρεθύμνου.

Και στις δύο φάσεις της έρευνας, οι συγκεκριμένοι μαθητές επιλέχθηκαν να λάβουν μέρος στην παρούσα έρευνα με μοναδικό κριτήριο την εθελοντική προσφορά των δασκάλων των τριών τμημάτων, αλλά και των ίδιων των μαθητών. Λόγω του ότι η παρούσα έρευνα αποτέλεσε μια μελέτη περίπτωσης, δεν συνέτρεχαν λόγοι δειγματοληψίας.

4.3 ΤΑ ΟΡΓΑΝΑ ΜΕΤΡΗΣΗΣ

4.3.1 ΟΙ ΣΥΝΕΝΤΕΥΞΕΙΣ

Για την διερεύνηση του θέματος που μας απασχόλησε, ακολουθήσαμε την περιπτωσιολογική κλινική μέθοδο (case study). Θεωρήσαμε ότι είναι η καταλληλότερη μέθοδος για την προσέγγιση του ερευνητικού μας προβλήματος, γιατί μας ενδιέφερε η συλλογή ποιοτικών πληροφοριών όσον αφορά στους μαθητές. Είναι γνωστό πως η μελέτη περίπτωσης εφαρμόζεται με σκοπό τη βαθιά και πλατιά μελέτη των ατόμων με τα οποία καταγίνεται ο ερευνητής (Μ. Βάμβουκας, 1991, σελ. 225)[13]. Εξ άλλου, η έρευνα που πραγματοποιήσαμε ήταν ανιχνευτικού τύπου. Για να μπορέσουμε να καταγράψουμε όσο γινόταν περισσότερες πληροφορίες για το θέμα μας, χρησιμοποιήσαμε την τεχνική της ημικατευθυνόμενης συνέντευξης (Μ. Βάμβουκας, 1991, σελ.232).

Χρονοδιάγραμμα των συνεντεύξεων

Οι συνεντεύξεις με τους μαθητές και των δύο σχολείων, ξεκίνησαν κατόπιν συνεννοήσεως με τους διευθυντές των σχολείων και τους δασκάλους των τάξεων. Οι αναγραφόμενοι ενημερώθηκαν για τους στόχους της έρευνας, καθώς και για τον τρόπο διεξαγωγής της.

Οι συνεντεύξεις ολοκληρώθηκαν σε δύο κύκλους: Ο α΄ κύκλος είχε συνολική διάρκεια τριών εβδομάδων και είχε ως στόχο να εντοπίσει τα βασικά χαρακτηριστικά της συμπεριφοράς των μαθητών. Ο β΄ κύκλος είχε διάρκεια περίπου ενός μηνός και είχε στόχο την περαιτέρω εμβάθυνση της διερεύνησης της συμπεριφοράς των μαθητών, λαμβάνοντας υπ' όψιν τα στοιχεία που προέκυψαν από τον α΄ κύκλο. Ένα συνοπτικό χρονοδιάγραμμα των συνεντεύξεων που έλαβαν χώρα, είναι το παρακάτω:

Πίνακας 4 (Χρονοδιάγραμμα των συνεντεύξεων)

Α΄ ΚΥΚΛΟΣ		**Β΄ ΚΥΚΛΟΣ**	
Ημερομηνία	**Υποκείμενα** [14]	**Ημερομηνία**	**Υποκείμενα**
9/12/96 έως 13/12/96	6	15/10/97 έως 31/10/97	8
16/12/96 έως 18/12/96	4	3/11/97 έως 13/11/97	15
13/1/97 έως 17/1/97	7		
Σύνολο	17		23

4.3.2 ΕΓΚΥΡΟΤΗΤΑ ΤΗΣ ΣΥΝΕΝΤΕΥΞΗΣ

Για να περιορίσουμε στο ελάχιστο σφάλματα που πιθανόν να προέκυπταν από την χρήση της συνέντευξης, εξασφαλίσαμε τις παρακάτω προϋποθέσεις:

(α) οι ερωτήσεις που τέθηκαν στα υποκείμενα, είχαν δοκιμαστεί πειραματικά σε άλλους μαθητές για να διαπιστωθεί αν κατανοούνταν πλήρως από αυτούς.

[13] Σύμφωνα με τον οικοδομισμό, η ανάγκη προσδιορισμού και περιγραφής διαφόρων γνωστικών δομών στις διάφορες φάσεις κατασκευής, αναδεικνύει μεθόδους όπως είναι η κλινική συνένευξη και η παρατεταμένη παρατήρηση (Γ. Φιλίππου, Κ. Χρίστου, 1994, σελ. 74).

[14] Αριθμός των υποκειμένων που εξετάστηκαν την αναγραφόμενη ημερομηνία.

(β) ο ερευνητής και τα υποκείμενα της έρευνας ήταν άγνωστοι μεταξύ τους.
(γ) προτού ξεκινήσει η συνέντευξη, τα υποκείμενα ενημερώθηκαν για την σημαντικότητα της συμβολής τους στην έρευνα. Επίσης, ερωτήθηκαν αν ήθελαν να συμμετάσχουν ή όχι.
(δ) για να εξασφαλιστεί η εγκυρότητα και αξιοπιστία των απαντήσεων των υποκειμένων χρησιμοποιήθηκε κασετόφωνο (δημοσιογραφικό), μετά από συμφωνία με τους μαθητές.
(ε) ενημερώθηκαν, επίσης, τα υποκείμενα ότι θα κρατούνται από τον ερευνητή γραπτές σημειώσεις για πληροφορίες που δεν μπορούσαν να καταγραφούν στο κασετόφωνο (π.χ. πως οι μαθητές κατασκευάζουν ορθή γωνία, φέρουν κάθετο κ.λ.π.).
(στ) προσπαθήσαμε, όσο γινόταν, να δημιουργήσουμε ένα ζεστό, φιλικό και αρμονικό κλίμα κατά τη διάρκεια της συνέντευξης.

4.4 Η ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ

4.4.1 ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Η συνάντηση του ερευνητή με κάθε μαθητή ήταν κατά μέσο όρο διάρκειας 45 λεπτών για τον α΄ κύκλο και περίπου 1 ώρας και 15 λεπτών για τον β΄ κύκλο.

<u>Τα θέματα που συζητήθηκαν με τους μαθητές</u>

Με τους μαθητές του πρώτου κύκλου συζητήθηκαν δύο θέματα:
-Το πρώτο θέμα (δραστηριότητα α΄)αφορούσε στο χωρισμό ενός ισοσκελούς τριγώνου σε δύο ίσα τρίγωνα και την διερεύνηση των ιδιοτήτων που μπορούν να ανακαλυφθούν εξαιτίας αυτού του χωρισμού.
-Το δεύτερο θέμα (δραστηριότητα β΄)αφορούσε στην δημιουργία τετραπλεύρων από ζεύγη ίσων τριγώνων που δόθηκαν στους μαθητές καθώς και την διερεύνηση των ιδιοτήτων των παραλληλογράμμων που σχηματίζονται.

Τα τρίγωνα και τα παραλληλόγραμμα αποτελούν ενότητες οικείες για τους μαθητές, αφού η διδασκαλία τους αρχίζει συστηματικά από την Γ΄ τάξη του δημοτικού.

Οι ερωτήσεις και οι παρεμβάσεις του ερευνητή στο δεύτερο κύκλο τροποποιήθηκαν λαμβάνοντας υπ’ όψη τα φαινόμενα που παρατηρήθηκαν κατά την διάρκεια του πρώτου κύκλου. Έτσι, με τους μαθητές του δεύτερου κύκλου συζητήθηκαν τα δύο προηγούμενα θέματα, έχοντας κάνει απλά προσθαφαιρέσεις και τροποποιήσεις ορισμένων ερωτημάτων. Στη συνέχεια συζητήθηκαν οι ιδιότητες του ορθογωνίου παραλληλογράμμου και το πρόβλημα της κατασκευής του περιγεγραμμένου κύκλου σε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, σε ορθογώνιο τρίγωνο και στο τετράγωνο (γ΄ δραστηριότητα).

Η οργάνωση των δραστηριοτήτων έγινε με βάση την κατηγοριοποίηση των προτάσεων της στοιχειώδους ευκλείδειας γεωμετρίας (βλ. παρούσα εργασία, παρ.2.4).

Παρακάτω, περιγράφουμε αναλυτικά τις δραστηριότητες στις οποίες οι μαθητές κλήθηκαν να λάβουν μέρος.

Υλικά και εργαλεία που χρησιμοποιήθηκαν

Για τις δραστηριότητες α΄ και γ΄, οι μαθητές δούλεψαν πάνω σε κόλλες Α4 -φύλλα εργασίας όπου είχαν σχεδιαστεί από τον ερευνητή γεωμετρικά σχήματα- (βλ. παράρτημα 2). Στο θρανίο υπήρχαν όλα τα απαραίτητα γεωμετρικά όργανα: χάρακας, γνώμονας, διαβήτης, μοιρογνωμόνιο.

Για την δραστηριότητα β΄ δόθηκαν στα παιδιά διάφορα ζεύγη ίσων τριγώνων κομμένα από χαρτόνι.

Α΄ δραστηριότητα

Α΄ κύκλος

Στην α΄ δραστηριότητα, δόθηκε στα υποκείμενα ένα ισοσκελές, οξυγώνιο τρίγωνο, σχεδιασμένο σε χαρτί (βλ. παράρτημα 2) και τους ζητήθηκε να το χωρίσουν με μια ευθεία σε δύο ίσα τρίγωνα. Αφού το χώρισαν, ζητήθηκε από τους μαθητές να πουν τι ίσα στοιχεία βλέπουν να έχουν τα δύο ίσα τρίγωνα.

Στη συνέχεια, δώσαμε ένα δεύτερο ισοσκελές, οξυγώνιο τρίγωνο, αλλά διαφορετικών διαστάσεων και ζητήσαμε από τα υποκείμενα να κάνουν πρόβλεψη για τα όσα είχαν βρει στο πρώτο οξυγώνιο τρίγωνο: ρωτήσαμε αν το τρίγωνο μπορεί να χωριστεί σε άλλα δύο ίσα και αν η απάντηση ήταν «ναι», ποια από αυτά που βρήκαν στο πρώτο ισχύουν στο δεύτερο (σε περίπτωση αρνητικής απάντησης, γινόταν υπενθύμιση του πότε δύο τρίγωνα είναι ίσα). Αφού το υποκείμενο έκανε την πρόβλεψη, του ζητήσαμε να χωρίσει το τρίγωνο σε άλλα δύο ίσα και να πει ποια είναι τα ίσα στοιχεία που έχουν τα δύο τρίγωνα.

Τέλος, δόθηκε ένα ισοσκελές αμβλυγώνιο τρίγωνο, στο οποίο ζητήσαμε από τους μαθητές να κάνουν πρόβλεψη για τα όσα βρήκαν στα προηγούμενα τρίγωνα (αν μπορεί να χωριστεί σε δύο άλλα ίσα, καθώς και τα ίσα στοιχεία τους). Η διαφορά με τα προηγούμενα, ήταν ότι ζητήσαμε από τα υποκείμενα να <u>φανταστούν</u> την ευθεία με την οποία θα χώριζαν το τρίγωνο και έπειτα να πουν τα ίσα στοιχεία των τριγώνων. Αν βλέπαμε ότι τα παιδιά είχαν δυσκολία σε αυτό, τους επιτρέπαμε να χαράξουν την ευθεία και μετά να κατονομάσουν τα ίσα στοιχεία.

Αφού πραγματοποιήθηκαν τα παραπάνω, τοποθετήσαμε μπροστά τους τα τρία χαρτιά με τα διαφορετικά ισοσκελή τρίγωνα που είχαν επεξεργαστεί και τους ζητήσαμε να τα παρατηρήσουν. Έπειτα, να απαντήσουν στο αν μπορούν να διακρίνουν ποιο χαρακτηριστικό των τριών τριγώνων παραμένει ίδιο και στα τρία τρίγωνα. Αν ο μαθητής δεν καταλάβαινε τη λέξη «χαρακτηριστικό», διευκρινίζαμε ότι αναφερόμαστε στις γωνίες και στις πλευρές των τριγώνων.

Όταν έβρισκαν πως οι ορθές ήταν αυτές που παρέμεναν ίσες και στα τρία τρίγωνα, ρωτήσαμε γιατί νομίζουν ότι είναι ίσες και στις τρεις περιπτώσεις. Για να έχουμε σαφέστερη άποψη για τις απαντήσεις τους, ζητούσαμε από τα υποκείμενα να μας πουν τι είναι ορθή γωνία και πως κατασκευάζεται. Αφού γινόταν αυτό, εξηγούσαν γιατί οι ορθές παραμένουν ίσες (το οποίο προέκυπτε από την κατασκευή τους).

Β΄ κύκλος

Στον β΄ κύκλο είχαμε και κάποιες επιπρόσθετες δραστηριότητες. Αρχικά, ρωτήσαμε τους μαθητές να μας πουν τι ονομάζουμε ισοσκελές τρίγωνο και τους δώσαμε ένα φυλλάδιο για να το ξεχωρίσουν ανάμεσα σε άλλα είδη τριγώνων. Σε περίπτωση που οι μαθητές δεν μπορούσαν να το ορίσουν τους λέγαμε να το δείξουν στο φυλλάδιο.

Επίσης, όταν τους ζητήσαμε να εντοπίσουν ποιο χαρακτηριστικό των τριγώνων παραμένει ίδιο και στα τρία τρίγωνα, αφού έβρισκαν τη σωστά απάντηση, ότι δηλαδή πρόκειται για τις ορθές, τους ρωτούσαμε να μας πουν γιατί οι γωνίες αυτές είναι ορθές.

Έπειτα, δώσαμε ένα τρίγωνο σκαληνό και ζητήσαμε από τους μαθητές να απαντήσουν στην ερώτηση αν μπορεί το τρίγωνο να χωριστεί σε δύο άλλα ίσα. Στην συνέχεια, ζητήσαμε από τους μαθητές να μας πουν τι είναι γωνία (μπροστά τους είχαν ένα φυλλάδιο στο οποίο ήταν σχεδιασμένα διάφορα είδη γωνιών). Έπειτα, ζητήσαμε να μας περιγράψουν τι είναι αμβλεία, οξεία και ορθή γωνία. Για κάθε κατηγορία τους λέγαμε να αναγνωρίσουν από το φυλλάδιο με τις διαφορετικές γωνίες, τις γωνίες της κατηγορίας αυτής. Σε περίπτωση που οι μαθητές δεν μπορούσαν με λόγια να μας περιγράψουν, τους λέγαμε πρώτα να δείξουν και μετά να μας πουν.

Η επόμενη ερώτηση αφορούσε στην περιγραφή του τι είναι κορυφή μιας γωνίας. Αν οι μαθητές δεν απαντούσαν, τους ζητήσαμε να δείξουν την κορυφή του τριγώνου ή της γωνίας (σε ένα άλλο φυλλάδιο ήταν σχεδιασμένα ένα τρίγωνο, μια γωνία και ένα ημιτελές τρίγωνο). Επίσης, τους ρωτήσαμε να μας πουν τι είναι σημείο και μετά να κάνουν ένα σημείο.

Τέλος, ακολούθησαν περιγραφές των μαθητών για το τι είναι ευθεία, ευθύγραμμο τμήμα και ημιευθεία. Υπήρχε ειδικό φυλλάδιο, το οποίο δώσαμε στους μαθητές για να αναγνωρίσουν τα παραπάνω.

Β΄ δραστηριότητα

Α΄ κύκλος

Η δεύτερη δραστηριότητα ουσιαστικά ήταν αντίστροφη της πρώτης: δώσαμε στους μαθητές 4 ζεύγη ίσων τριγώνων (εκτός ορθογωνίων) και ζητήσαμε να τα ενώσουν έτσι ώστε να φτιάξουν ένα τετράπλευρο. Τα ζεύγη των τριγώνων που δόθηκαν ήταν:

•***σκαληνά οξυγώνια***: με αυτά έφτιαχναν πλάγια παραλληλόγραμμα και τυχόντα τετράπλευρα.

•***σκαληνά αμβλυγώνια***: έφτιαχναν πλάγια παραλληλόγραμμα και τυχόντα τετράπλευρα.

•***ισοσκελή οξυγώνια***: έφτιαχναν πλάγια παραλληλόγραμμα, ρόμβο, τυχόν τετράπλευρο.

•***ισοσκελή αμβλυγώνια***: έφτιαχναν πλάγιο παραλληλόγραμμο, ρόμβο, τυχόν τετράπλευρο.

Όταν έφτιαχναν το 1ο τετράπλευρο, τους ζητούσαμε να μας πουν την ονομασία του τετραπλεύρου. Αν απαντούσαν σωστά, τους ζητούσαμε να μας πουν τα χαρακτηριστικά του τετραπλεύρου (ίσα στοιχεία, παραλληλία ή μη παραλληλία των πλευρών). Αν πάλι, δεν μας έδιναν την σωστή ονομασία τους λέγαμε να μας πουν πρώτα τα χαρακτηριστικά και μετά την ονομασία του τετραπλεύρου. Όταν έφτιαχναν για δεύτερη φορά ή τρίτη κ.λ.π. τετράπλευρο που είχαν ξαναφτιάξει προηγουμένως, τους ζητούσαμε απλά την ονομασία του. Αν έδιναν λάθος απάντηση, τους ζητούσαμε να μας πουν τα χαρακτηριστικά του τετραπλεύρου και μετά να ξαναπροσπαθήσουν να βρουν τι τετράπλευρο είναι.

Στην περίπτωση του πλαγίου παραλληλογράμμου, όταν αναφέρονταν στην παραλληλία των πλευρών, ρωτούσαμε τους μαθητές να περιγράψουν τι είναι παράλληλες ευθείες και μετά να δείξουν με ένα απλό τρόπο ότι οι δύο παράλληλες ευθείες δεν θα συναντηθούν ποτέ.

Το τελικό ερώτημα που θέσαμε στους μαθητές, είναι να σκεφθούν σε ποια περίπτωση αν ενώσουν δύο ίσα τρίγωνα, θα φτιάξουν τρίγωνο (εδώ οι μαθητές έπρεπε να σκεφθούν αναλογικά με την πρώτη δραστηριότητα και να απαντήσουν ότι τα τρίγωνα θα πρέπει να έχουν ορθή γωνία). Σε περίπτωση που δεν το έβρισκαν τους δίναμε σε πρώτη φάση ένα ζευγάρι από ισοσκελή σχεδόν ορθογώνια και αν πάλι δεν το έβρισκαν τους δίναμε ζεύγη ισοσκελών ή σκαληνών ορθογωνίων τριγώνων.

Β΄ κύκλος

Στον β΄ κύκλο, μειώσαμε τον αριθμό των ζευγαριών των τριγώνων που δώσαμε στους μαθητές ώστε να φτιάξουν τετράπλευρα. Έτσι, δώσαμε πρώτα ένα ζεύγος από σκαληνά οξυγώνια (με αυτά έφτιαχναν παραλληλόγραμμα και τυχόντα τετράπλευρα) και μετά ένα άλλο από ισοσκελή οξυγώνια (με αυτά έφτιαχναν πλάγια παραλληλόγραμμα, ρόμβο και τυχόντα τετράπλευρα).

Επίσης, στο τελευταίο ερώτημα - σε ποια περίπτωση από την ένωση 2 ίσων τριγώνων θα πάρουμε πάλι τρίγωνο- ,σε περίπτωση που δεν έβρισκαν αμέσως την απάντηση, τους δίναμε ένα ζευγάρι από ορθογώνια σκαληνά και αν πάλι δεν το έβρισκαν, τους λέγαμε την σωστή απάντηση (αυτό έγινε για να μπορέσουν οι μαθητές να προχωρήσουν στα ερωτήματα της Γ΄ δραστηριότητας).

Έπειτα, δίναμε σε όλους τους μαθητές το ζευγάρι με τα ορθογώνια σκαληνά και τους ζητήσαμε να φτιάξουν με αυτά άλλα τετράπλευρα. Μας ενδιέφερε να φτιάξουν το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και να το αναγνωρίσουν. Όταν το αναγνώριζαν τους ρωτούσαμε γιατί είναι ορθογώνιο και αμέσως μετά τους ζητούσαμε να μας πουν από τι έφτιαξαν το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο (αναμέναμε να μας πουν ότι έχει ορθές γωνίες και ότι το έφτιαξαν από δύο ορθογώνια τρίγωνα).

Στην συνέχεια, περνούσαμε στην Γ΄ δραστηριότητα.

Γ΄ δραστηριότητα[15]

Αρχικά, δώσαμε στους μαθητές το 1ο φυλλάδιο για την γ΄ δραστηριότητα, στο οποίο ήταν σχεδιασμένο ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με την μια του διαγώνιο και ζητήσαμε να κατασκευάσουν και την άλλη. Κατόπιν, τους ζητήσαμε να πουν τι παρατηρούν (ότι οι διαγώνιοι είναι ίσοι και ότι χωρίζονται σε 4 ίσα τμήματα).

Στην συνέχεια, ζητήσαμε από τους μαθητές να μας περιγράψουν τι είναι κύκλος, καθώς και να κατασκευάσουν ένα ή δύο κύκλους με τον διαβήτη. Έπειτα, υπενθυμίσαμε στους μαθητές τα βασικά στοιχεία του κύκλου (κέντρο, ακτίνα, χορδή, διάμετρος, όλα τα σημεία του κύκλου ισαπέχουν από το κέντρο) καθώς και το ότι οι διαγώνιοι του ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι ίσες.

Στην συνέχεια, ζητήσαμε από τους μαθητές να κατασκευάσουν τον περιγεγραμμένο κύκλο ορθογωνίου παραλληλογράμμου και να εξηγήσουν το γιατί ο κύκλος περνάει και από τις τέσσερις κορυφές του. Αφού γίνει αυτό, ζητήσαμε από τους μαθητές να σχεδιάσουν τις διαγώνιους στο πλάγιο παραλληλόγραμμο και να κάνουν παρατηρήσεις σ' αυτό το σχήμα. Στην συνέχεια τους ζητήσαμε να ψάξουν αν μπορούν να κατασκευάσουν ένα κύκλο που να περνάει και από τις 4 κορυφές του παραλληλογράμμου. Αναμέναμε να παρατηρήσουν ότι δεν περνάει και από τις τέσσερις κορυφές και να το δικαιολογήσουν. Έπειτα, ζητήσαμε το αντίστροφο δηλαδή, να κατασκευάσουν μέσα στον κύκλο ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

Μετά, ακολούθησε το δεύτερο φυλλάδιο, στο οποίο ήταν σχεδιασμένο ένα τετράγωνο και ακριβώς από κάτω ένας κύκλος. Ζητήσαμε από τους μαθητές να κατασκευάσουν τον περιγεγραμμένο κύκλο του τετραγώνου, ενώ στο επόμενο στάδιο, να κατασκευάσουν το τετράγωνο μέσα στον κύκλο.

Έπειτα, δώσαμε το τρίτο φυλλάδιο στο οποίο ήταν σχεδιασμένο ένα ορθογώνιο τρίγωνο και πιο κάτω πάλι ένας κύκλος. Ζητήσαμε από τους μαθητές να κατασκευάσουν τον περιγεγραμμένο κύκλο του ορθογωνίου τριγώνου. Σαν πρώτη βοήθεια τους υπενθυμίζαμε ότι το ορθογώνιο τρίγωνο είναι το μισό του ορθογωνίου παραλληλογράμμου και αν χρειάζονταν και δεύτερη, τους δίναμε ένα τέταρτο φυλλάδιο στο οποίο ήταν σχεδιασμένα ο περιγεγραμμένος κύκλος του ορθογωνίου παραλληλογράμμου και ο περιγεγραμμένος κύκλος του ορθογωνίου τριγώνου, (δίναμε δηλαδή στους μαθητές τους κατασκευασμένους περιγεγραμμένους κύκλους). Φυσικά, αφού τον κατασκευάσουν τους ρωτήσαμε να μας εξηγήσουν γιατί ο κύκλος πέρασε και από τις τρεις κορυφές του ορθογωνίου τριγώνου. Μετά από αυτήν την κατασκευή, δώσαμε στους μαθητές σχεδιασμένο τον κύκλο και τους

[15] Η γ΄ δραστηριότητα περιλαμβάνεται μόνο στον β΄ κύκλο.

ζητήσαμε να κατασκευάσουν το ορθογώνιο τρίγωνο μέσα σε αυτόν. Αν δεν τα κατάφερναν, τους δίναμε σαν πρώτη βοήθεια ένα πέμπτο φυλλάδιο στο οποίο υπήρχαν: α) σε πρώτη φάση σχεδιασμένος ο κύκλος με την μια χορδή, β) αν παρ' όλα αυτά δεν τα κατάφερναν, σχεδιασμένος ο κύκλος με την διάμετρο.

Τελευταία ερώτηση που κάναμε στους μαθητές ήταν εάν μπορούν να φτιάξουν μέσα στον κύκλο τρίγωνο που η μια του πλευρά να μην περνάει από το κέντρο του / ή εάν είναι απαραίτητο- σε περίπτωση που κατασκευάζουμε μέσα σε έναν κύκλο τρίγωνο- να περνάει η μια του πλευρά από το κέντρο του (βλ. αποτελέσματα, σελ.). Μετά από αυτή την ερώτηση, τελείωνε η συνέντευξη.

4.4.2 Η ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ ΠΡΩΤΟΚΟΛΛΩΝ

Όπως αναφέραμε σε προηγούμενο σημείο της εργασίας μας, οι συνεντεύξεις με τους μαθητές μαγνητοφωνήθηκαν κατόπιν συνεννοήσεως του ερευνητή με τους ίδιους. Κάθε συνέντευξη καταγράφηκε σε ξεχωριστή κασέτα.

Οι κασέτες αυτές απομαγνητοφωνήθηκαν και ο διάλογος του μαθητή με τον ερευνητή καταγράφηκε πάνω στο ίδιο το πρωτόκολλο του μαθητή. Έτσι, σε κάθε πρωτόκολλο είχαμε τις κατασκευές που έκανε κάθε μαθητής συνοδευόμενες από τις περιγραφές του, αλλά και από τις παρεμβάσεις του ερευνητή.

Έπειτα, από τα πρωτόκολλα συγκεντρώσαμε και ταξινομήσαμε τις απαντήσεις των μαθητών σύμφωνα με τις ερωτήσεις των δραστηριοτήτων της έρευνας. Από αυτήν την ταξινόμηση, κωδικοποιήσαμε τις απαντήσεις των μαθητών. Για παράδειγμα, δώσαμε τον αριθμό 3 ή 4 για κάθε σωστή απάντηση, τον αριθμό 2 για ημιτελή απάντηση ή για απάντηση σωστή μετά από παρέμβαση του παρατηρητή, τον αριθμό 1 για κάθε λανθασμένη απάντηση και τον αριθμό 0 όταν δεν δινόταν καμμιά απάντηση από το μαθητή. Οι αριθμοί αυτοί έπαιρναν δείκτες, π.χ. 3_1 , για να φανεί το είδος των διαφορετικών απαντήσεων. Τα δεδομένα από τις κωδικοποιήσεις περάστηκαν στο πρόγραμμα EXCEL του Η/Υ όπου έγινε η στατιστική τους επεξεργασία.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΕΜΠΤΟ
ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Στο κεφάλαιο αυτό, περιγράφονται τα αποτελέσματα από την επεξεργασία των πρωτοκόλλων των μαθητών, σύμφωνα με τα ερωτήματα της έρευνας (βλ. παρ. 4.1). Σε κάθε ερώτημα παρουσιάζουμε ξεχωριστά τις απαντήσεις των μαθητών του α΄ κύκλου συνεντεύξεων και ξεχωριστά τις απαντήσεις των μαθητών του β΄ κύκλου συνεντεύξεων. Αυτό γίνεται, κυρίως, για να γίνουν κατανοητές οι όποιες τροποποιήσεις των ερωτήσεων του ερευνητή στο β΄ κύκλο, ώστε να μπορούν να γίνουν συγκρίσεις μεταξύ των 2 ομάδων.

Μετά την περιγραφή των απαντήσεων των μαθητών στα ερωτήματα της έρευνας, ακολουθούν τα αποτελέσματα της στατιστικής επεξεργασίας των δεδομένων της έρευνας. Η στατιστική επεξεργασία αποβλέπει στη παρουσίαση συσχετίσεων μεταξύ των απαντήσεων των μαθητών στα ερωτήματα της έρευνας.

Τέλος, ακολουθεί μια σύντομη αναφορά στα προβλήματα που αντιμετώπισαν οι μαθητές ως προς τη χρήση των γεωμετρικών όρων.

5.1 Ερώτημα 1ο: Μπορούν οι μαθητές να χωρίζουν ένα γεωμετρικό σχήμα σε άλλα ίσα σχήματα και να ενώνουν ίσα σχήματα προκειμένου να δημιουργήσουν ένα νέο όλο;

5.1.1 Ικανότητα μαθητών να χωρίζουν ένα γεωμετρικό σχήμα σε άλλα σχήματα.

Ο χωρισμός ενός γεωμετρικού σχήματος σε άλλα 2 ίσα, φάνηκε να είναι **μια εύκολη διαδικασία** και για τις 2 ομάδες μαθητών. Στο σύνολο των 17 μαθητών της α΄ ομάδας, όταν τους ζητήθηκε να χωρίσουν με μια ευθεία το 1ο ισοσκελές οξυγώνιο τρίγωνο σε άλλα 2 ίσα τρίγωνα (βλ. παράρτημα 2), οι 12 με την πρώτη τους απόπειρα το χώρισαν επιτυχώς. Αναλυτικότερα:
-7 μαθητές, με την πρώτη τους απόπειρα, σχεδίασαν διαισθητικά, αλλά με ικανοποιητική ακρίβεια, την ευθεία που χωρίζει το τρίγωνο σε 2 ίσα μέρη. Ο ερευνητής τους ρώτησε πως ξέρουν ότι τα τρίγωνα στα οποία χωρίσθηκε το αρχικό είναι ίσα. Στην ερώτηση αυτή του ερευνητή, οι 6 μέτρησαν με τον χάρακα τα τμήματα στα οποία χωρίσθηκε η βάση του αρχικού τριγώνου και επιβεβαίωσαν ότι είναι ίσα.[16], ενώ ο έβδομος έδωσε ως εξήγηση το ότι «*αν διπλώσουμε το φύλλο θα δούμε ότι είναι ίσα τα τρίγωνα*».

[16] Κανείς εκ των 6 δεν αναζήτησε την επιβεβαίωση της ισότητας άλλων στοιχείων των τριγώνων.

-5 μαθητές ως πρώτη απόπειρα μέτρησαν το μήκος της βάσης, βρήκαν το μέσο της και στην συνέχεια ένωσαν την κορυφή με αυτό (το μέσο της βάσης).[17]

-5 μαθητές αρχικά σχεδίασαν διαισθητικά μία ευθεία που στόχο είχε να χωρίσει το τρίγωνο σε 2 ίσα μέρη. (Ο χάρακας χρησιμοποιήθηκε μόνο για την χάραξη της ευθείας και όχι για μέτρηση). Η ευθεία ήταν αρκετά πλάγια ώστε βλέποντας το αποτέλεσμα (2 μη ίσα τρίγωνα), να θεωρήσουν ότι δεν πέτυχαν το ζητούμενο. Έτσι, την έσβησαν και έκαναν μια δεύτερη απόπειρα.

•2 εκ των 5 στην δεύτερη προσπάθειά τους βρήκαν το μέσον της βάσης με μέτρηση του μήκους της και στην συνέχεια το ένωσαν με την κορυφή.

•1 εκ των 5, στην δεύτερη απόπειρα, μέτρησε κατ' αρχήν διάφορα γραμμικά στοιχεία του τριγώνου (τις πλευρές του τριγώνου, την «απόσταση» των πλευρών σε διάφορες θέσεις) και έπειτα βρήκε το μέσον της βάσης με μέτρηση του μήκους της και ένωσε την κορυφή με το μέσο της βάσης.

•Οι άλλοι 2 έσβησαν την πρώτη πλάγια και κατασκεύασαν, διαισθητικά, μία δεύτερη πλάγια. Επανέλαβαν αυτή τη διαδικασία αρκετές φορές, χωρίς την χρήση μετρήσεων, και χωρίς να επιτύχουν ένα αποτέλεσμα που να το θεωρούν ικανοποιητικό. Σε αυτούς παρενέβη, έπειτα, ο ερευνητής και τους ρώτησε αν μπορούν να βρουν κάποιο τρόπο χωρισμού του τριγώνου σε 2 ίσα «χωρίς να χρειάζεται να σχεδιάζουν και να σβήνουν συνέχεια». Μετά απ' αυτή την παρέμβαση σκέφθηκαν να βρουν το μέσο της βάσης, με μέτρηση και να το ενώσουν με την απέναντι κορυφή.

Στο σύνολο των 23 μαθητών της β΄ ομάδας, όταν τους ζητήθηκε να χωρίσουν με μια ευθεία το 1ο ισοσκελές οξυγώνιο τρίγωνο, οι 16 με την πρώτη τους απόπειρα το χώρισαν σε άλλα 2 ίσα τρίγωνα. Αναλυτικότερα:

-11 μαθητές με την πρώτη τους απόπειρα, σχεδίασαν διαισθητικά και με ικανοποιητική ακρίβεια, την ευθεία που χωρίζει το τρίγωνο σε 2 ίσα μέρη. Σε αντίθεση με την α΄ ομάδα, στους μαθητές αυτούς δεν τέθηκε η ερώτηση πως γνωρίζουν ότι τα τρίγωνα που έφτιαξαν είναι ίσα.

-5 μαθητές ως πρώτη απόπειρα μέτρησαν τη βάση, βρήκαν το μέσον της και στην συνέχεια ένωσαν την κορυφή με το μέσον της βάσης (ούτε σε αυτούς τους μαθητές τέθηκε η ερώτηση «πως γνωρίζουν ότι τα τρίγωνα στα οποία χωρίσθηκε το αρχικό είναι ίσα»).

-Τέλος, 7 μαθητές έφεραν την ευθεία διαισθητικά, χωρίς να καταφέρουν να φτιάξουν 2 ίσα τρίγωνα. Στους μαθητές αυτούς τέθηκε η ερώτηση «έφτιαξες 2 ίσα τρίγωνα;». Οι 5 από τους 7 μαθητές απάντησαν θετικά σ' αυτή την ερώτηση. Οι άλλοι 2 απάντησαν πως τα τρίγωνα που έφτιαξαν δεν είναι ίσα. Έτσι, προσπάθησαν άλλη μια φορά να φέρουν την ευθεία έτσι ώστε να φτιάξουν 2 ίσα τρίγωνα, χωρίς όμως να καταφέρουν. Όταν αυτοί οι μαθητές για δεύτερη φορά ρωτήθηκαν αν τα τρίγωνα που έφτιαξαν είναι ίσα, απάντησαν θετικά.

Όσον αφορά στο χωρισμό του 2ου ισοσκελούς τριγώνου (βλ. παράρτημα 2), η συμπεριφορά των μαθητών της α΄ ομάδας ήταν η εξής:

[17] Σ' αυτούς δεν τέθηκε η ερώτηση « πως γνωρίζουν ότι τα τρίγωνα στα οποία χωρίσθηκε το αρχικό είναι ίσα».

Και οι 17 μαθητές βρήκαν το μέσο της βάσης μετρώντας το μήκος της και στην συνέχεια σχεδίασαν μία ευθεία ή ένα τμήμα που ένωνε την απέναντι κορυφή με το μέσο της βάσης. Μεταξύ αυτών ήταν και οι 7 μαθητές που με την πρώτη τους απόπειρα σχεδίασαν διαισθητικά, αλλά με ικανοποιητική ακρίβεια, την ευθεία που χώριζε το πρώτο τρίγωνο σε 2 ίσα μέρη. Παρατηρούμε ότι, ενώ αυτοί οι μαθητές χρησιμοποίησαν μια μέθοδο χωρισμού του τριγώνου η οποία ήταν επιτυχής, στο 2ο τρίγωνο την άλλαξαν. Μια εξήγηση για την αλλαγή της κατασκευαστικής τους διαδικασίας, μπορεί να δώσει το γεγονός ότι σ' αυτούς ο ερευνητής ρώτησε «πως γνωρίζουν ότι τα τρίγωνα στα οποία χωρίστηκε το αρχικό ήταν ίσα. Ίσως, η παρέμβαση τους προκάλεσε κάποιου είδους «ανασφάλεια» για τον αρχικό τρόπο κατασκευής τους. για να ελέγξουμε το παραπάνω, στους μαθητές της β΄ ομάδας δεν έγινε καμμιά παρέμβαση σε όσους χώρισαν το τρίγωνο με διαισθητικό τρόπο.

Στο σύνολο των μαθητών της β΄ ομάδας (23 μαθητές), οι 7 μαθητές σχεδίασαν διαισθητικά και με ικανοποιητική ακρίβεια, την ευθεία που χωρίζει το τρίγωνο σε 2 ίσα μέρη.

-10 μαθητές σχεδίασαν διαισθητικά αλλά όχι με ικανοποιητική ακρίβεια, την ευθεία που χωρίζει το τρίγωνο σε 2 ίσα μέρη.

-Τέλος, 6 μαθητές βρήκαν το μέσο της βάσης μετρώντας το μήκος της και στην συνέχεια σχεδίασαν μία ευθεία ή ένα τμήμα που ένωνε την απέναντι κορυφή με το μέσο της βάσης.

Από τους 11 μαθητές, οι οποίοι με την πρώτη τους απόπειρα χώρισαν το τρίγωνο διαισθητικά και με ικανοποιητική ακρίβεια, μόνο ένας άλλαξε τον τρόπο που χώρισε το τρίγωνο (μέτρησε τη βάση, βρήκε το μέσον της και στην συνέχεια ένωσε την κορυφή με το μέσον της βάσης). Αυτό στηρίζει την παραπάνω υπόθεση που κάναμε, ότι δηλαδή οι 7 μαθητές της α΄ ομάδας άλλαξαν τον τρόπο χωρισμού του τριγώνου εξαιτίας της παρέμβασης του παρατηρητή.

Πίνακας 5α (Τρόπος χωρισμού ισοσκελών τριγώνων)

Α΄ ΟΜΑΔΑ

Συμπεριφορά	**1ο ισοσκελές**	**2ο ισοσκελές**
Διαισθητικά (ακριβώς στη μέση)	7	17
Διαισθητικά (πλάγια)	5	0
Με μέτρηση	5	0
Σύνολο	17	17

Πίνακας 5β (Τρόπος χωρισμού ισοσκελών τριγώνων)

Β΄ ΟΜΑΔΑ

Συμπεριφορά	**1ο ισοσκελές**	**2ο ισοσκελές**
Διαισθητικά (ακριβώς στη μέση)	11	7
Διαισθητικά (πλάγια)	7	10
Με μέτρηση	5	6
Σύνολο	23	23

5.1.2. Ικανότητα των μαθητών να ενώνουν ίσα σχήματα και να δημιουργούν ένα νέο όλο (νέο σχήμα).

Στους μαθητές δόθηκαν διάφορα ζεύγη ίσων τριγώνων και τους ζητήθηκε να τα ενώσουν ώστε να φτιάξουν τετράπλευρα. Η δραστηριότητα αυτή έδειξε ότι το σύνολο των μαθητών ήταν ικανό να ενώσει αυτά τα σχήματα και να φτιάξει άλλα. Αναλυτικότερα, η α΄ ομάδα:

-Από το ζεύγος των ίσων σκαληνών οξυγωνίων τριγώνων, και οι 17 μαθητές έφτιαξαν πλάγιο παραλληλόγραμμο, ενώ οι 16 έφτιαξαν και τυχόν τετράπλευρο.

-Από το ζεύγος των ίσων σκαληνών αμβλυγωνίων τριγώνων και οι 17 έφτιαξαν πλάγιο παραλληλόγραμμο και 16 τυχόν τετράπλευρο.

-Από το ζεύγος των ισοσκελών οξυγωνίων και οι 17 έφτιαξαν τυχόν τετράπλευρο και ρόμβο, ενώ οι 16 έφτιαξαν πλάγιο παραλληλόγραμμο.

-Τέλος, από το ζεύγος των ισοσκελών αμβλυγωνίων, και οι 17 έφτιαξαν ρόμβο, ενώ οι 16 έφτιαξαν πλάγιο παραλληλόγραμμο και τυχόν τετράπλευρο.

Η β΄ ομάδα:

-Από το ζεύγος των ίσων σκαληνών οξυγωνίων τριγώνων, και οι 23 μαθητές έφτιαξαν πλάγιο παραλληλόγραμμο και τυχόν τετράπλευρο.

-Από το ζεύγος των ισοσκελών οξυγωνίων οι 19 έφτιαξαν τυχόν τετράπλευρο, οι 22 ρόμβο, ενώ οι 21 έφτιαξαν πλάγιο παραλληλόγραμμο.

5.2 Ερώτημα 2ο: Μπορούν οι μαθητές να ανακαλύπτουν γεωμετρικές ιδιότητες θεωρώντας ένα σχήμα ως μέρη και όλο; Επίσης, μπορούν να επεκτείνουν επαγωγικά τις ιδιότητες που ανακαλύπτουν στα σχήματα της ίδιας ή παρεμφερούς κατηγορίας;

5.2.1 Ικανότητα των μαθητών να ανακαλύπτουν γεωμετρικές ιδιότητες.

1. Ίσα στοιχεία τριγώνων

Όταν οι μαθητές -αφού χώρισαν το 1ο ισοσκελές τρίγωνο- ρωτήθηκαν «τι πράγματα βλέπουν να έχουν ίσα τα 2 τρίγωνα», οι συμπεριφορά τους ήταν η εξής:

-7 μαθητές της α΄ ομάδας αναγνώρισαν όλες τις ίσες πλευρές και γωνίες των τριγώνων.

-6 μαθητές αναγνώρισαν όλες τις ίσες πλευρές και γωνίες των τριγώνων εκτός από τις γωνίες που σχηματίζονται στο μέσο της βάσης.

-3 δεν ανέφεραν την κοινή πλευρά.

-1 δεν ανέφερε την κοινή πλευρά και τις γωνίες που σχηματίζονται στο μέσο της βάσης.

Στους 10 μαθητές που δεν βρήκαν όλες τις ίσες πλευρές και γωνίες ο παρατηρητής ρώτησε αν υπάρχουν και άλλα ίσα στοιχεία των 2 τριγώνων (1η παρέμβαση)[18] Η ερώτηση αυτή ήταν αρκετή για 3 απ' αυτούς ώστε να βρουν και τα υπόλοιπα ίσα στοιχεία των τριγώνων.

Η δεύτερη παρέμβαση του παρατηρητή υποδείκνυε το είδος του στοιχείου που δεν έχει εντοπισθεί, αλλά και ένα τρόπο συλλογισμού για τον προσδιορισμό των στοιχείων που πρέπει να εντοπισθούν. Έτσι σ' αυτούς που δεν ανέφεραν την κοινή πλευρά ρώτησε αρχικά πόσες «πλευρές έχει ένα τρίγωνο» και έπειτα «πόσες ίσες πλευρές έχει βρει στα 2 τρίγωνα». Μετά απ' αυτή την παρέμβαση και οι 3 μαθητές κατάφεραν να εντοπίσουν την κοινή πλευρά των 2 τριγώνων.

Αντίστοιχη παρέμβαση έγινε και σε αυτούς που δεν είχαν αναφέρει τις γωνίες που σχηματίζονται στο μέσο της βάσης. Έτσι, 2 μαθητές κατάφεραν να εντοπίσουν και το τρίτο ζευγάρι ίσων γωνιών των 2 τριγώνων.

Τέλος, υπήρχαν 2 μαθητές για τους οποίους η προηγούμενη παρέμβαση δεν ήταν αρκετή Χρειάσθηκε, επιπλέον, ο παρατηρητής να τους ζητήσει να βρουν τις 3 γωνίες του κάθε τριγώνου και μόνο αφού συνειδητοποίησαν τις γωνίες στο μέσον της βάσης τις ανέφεραν ως ίσα στοιχεία των 2 τριγώνων.

Στη β΄ ομάδα:

-8 μαθητές αναγνώρισαν όλες τις ίσες πλευρές και γωνίες των τριγώνων αμέσως.

-9 μαθητές, αναγνώρισαν όλες τις πλευρές και τις γωνίες με κάποια καθυστέρηση.

-Τέλος, 6 μαθητές αναγνώρισαν όλες τις πλευρές και τις γωνίες, μετά από παρέμβαση του παρατηρητή.

[18] Στόχος της έρευνας δεν ήταν μόνο η παρατήρηση της συμπεριφοράς των μαθητών ανεξάρτητα από παρεμβάσεις, αλλά και η διερεύνηση του είδους και της έκτασης των παρεμβάσεων που απαιτούνται προκειμένου οι μαθητές να οδηγηθούν στην επαρκή διερεύνηση του θέματος.

Από τους εννέα μαθητές, οι τρεις καθυστέρησαν να δουν την κοινή πλευρά, ένας καθυστέρησε να δει τις γωνίες τις προερχόμενες από την διχοτόμηση της κορυφής, τρεις τις παρά τη βάση γωνίες, ένας τις γωνίες με κορυφή το μέσον της βάσης και ένας καθυστέρησε στο να δει και την κοινή πλευρά και τις γωνίες με κορυφή το μέσον της βάσης. Και στους εννέα αυτούς μαθητές έγινε η ερώτηση «τελείωσες με τα ίσα στοιχεία των τριγώνων;». Και για τους εννέα η ερώτηση ήταν αρκετή για να δουν τα υπόλοιπα στοιχεία.

Από τους έξι μαθητές που χρειάστηκε να παρέμβει πιο πολύ ο παρατηρητής, δύο δεν είχαν δει την κοινή πλευρά, δύο τις γωνίες με κορυφή το μέσον της βάσης και δύο τις πλευρές τις βάσης. Ο παρατηρητής ρώτησε αν υπάρχουν και άλλα ίσα στοιχεία των 2 τριγώνων. Η ερώτηση αυτή ήταν αρκετή για τέσσερις απ' αυτούς ώστε να βρουν και τα υπόλοιπα ίσα στοιχεία των τριγώνων.

Τους άλλους δύο μαθητές ο ερευνητής τους ρώτησε αρχικά πόσες «πλευρές έχει ένα τρίγωνο» και έπειτα «πόσες ίσες πλευρές έχει βρει στα 2 τρίγωνα». Μετά απ' αυτή την παρέμβαση, ο ένας βρήκε τα υπόλοιπα ίσα στοιχεία.

Ο τελευταίος εντόπισε τα ίσα στοιχεία που δεν είχε βρει, αφού ο παρατηρητής του ζήτησε να βρει τις 3 γωνίες του κάθε τριγώνου και να δει ποια δεν είχε εντοπίσει.

Πίνακας 6α (Ίσα στοιχεία τριγώνων)

Α΄ ΟΜΑΔΑ

Συμπεριφορά	**1ο ισοσκελές**	**2ο ισοσκελές**	**3ο ισοσκελές**
Όλα αμέσως	7	17	15
Όλα μετά από παρέμβαση	10	0	2
Σύνολο	17	17	17

Πίνακας 6β (Ίσα στοιχεία τριγώνων)

Β΄ ΟΜΑΔΑ

Συμπεριφορά	**1ο ισοσκελές**	**2ο ισοσκελές**	**3ο ισοσκελές**
Όλα αμέσως	8	19	22
Όλα μετά από χρόνο	9	0	1
Όλα μετά από παρέμβαση	6	4	
Σύνολο	23	23	23

Αυτό που παρατηρήσαμε από τη συμπεριφορά των μαθητών ήταν ότι εντόπιζαν με σχετική ευκολία τα ίσα στοιχεία των τριγώνων (το 60% των μαθητών αναγνώρισε αμέσως όλα τα ίσα στοιχεία των τριγώνων). Όμως, **ιδιαίτερη δυσκολία** παρουσίασε γι' αυτούς **ο εντοπισμός της κοινής πλευράς** (για 10 μαθητές και των 2 ομάδων) και **των γωνιών με κορυφή το μέσον της βάσης** (για 11 μαθητές και των 2 ομάδων).

Το **τμήμα** που χώρισε το αρχικό σε άλλα 2 ίσα μέρη **είναι ταυτόχρονα η κοινή πλευρά** των 2 ίσων τριγώνων πράγμα που φάνηκε ότι δημιούργησε σύγχυση στους μαθητές. Το τμήμα αυτό δεν υπήρχε, αλλά σχεδιάστηκε από τους μαθητές. Αυτό εξηγεί, επίσης, τον μη εντοπισμό των γωνιών που σχηματίζονται από αυτό το τμήμα. Είναι γωνίες που παρήχθησαν έμμεσα από την σχεδίαση της ευθείας, δεν είναι γωνίες του αρχικού τριγώνου. Έτσι, πολλοί μαθητές χρειάστηκαν **μεθοδική καθοδήγηση από τον παρατηρητή** για να εντοπίσουν τα στοιχεία αυτά.

Οι δυσκολίες αυτές φάνηκαν ιδιαίτερα στο ερώτημα του παρατηρητή «στα τρία παραδείγματα των διαφορετικών ισοσκελών τριγώνων, μπορείς να πεις ποιο χαρακτηριστικό αυτών των τριγώνων παραμένει ίσο και στα 3 τρίγωνα». Οι αντιδράσεις των μαθητών ήταν οι εξής:

-3 μαθητές της α΄ ομάδας, απάντησαν αμέσως ότι το κοινό στοιχείο που παραμένει ίσο και στα τρία τρίγωνα είναι οι ορθές γωνίες.

-2 μαθητές έδειξαν κατευθείαν τις γωνίες στο μέσον της βάσης, αλλά δεν τις αναγνώρισαν ως ορθές. Σε ερώτηση του παρατηρητή «τι γωνίες είναι αυτές», απάντησαν πως δεν γνωρίζουν.

-7 μαθητές μετά από παρέμβαση του παρατηρητή (βλ, αμέσως παρακάτω), αναφέρθηκαν στην ισότητα των γωνιών στο μέσον της βάσης και τις αναγνώρισαν ως ορθές. Οι μαθητές αυτοί προφανώς δεν κατανόησαν την ερώτηση του παρατηρητή και αναφέρθηκαν σε σχέσεις μεγεθών που ισχύουν και στα 3 τρίγωνα. Για παράδειγμα, είπαν πως και τα 3 τρίγωνα είναι ισοσκελή ή ότι η γωνία Β είναι σε όλα τα τρίγωνα ίση με τη Γ είτε ότι η πλευρά ΑΒ είναι ίση με την ΑΓ. Σε αυτές τις περιπτώσεις ο παρατηρητής παρενέβη και τους είπε να κοιτάξουν να είναι ακριβώς ίσα τα μήκη των αντίστοιχων πλευρών ή το άνοιγμα των αντίστοιχων σε κάθε τρίγωνο γωνιών. Και οι 7 μαθητές μετά από αυτού του είδους την παρέμβαση, αναγνώρισαν τις ορθές γωνίες ως κοινό στοιχείο των 3 τριγώνων.

-4 μαθητές, ύστερα από παρέμβαση του παρατηρητή, «είδαν» μόνο την ισότητα των γωνιών στο μέσον της βάσης. Δεν αναγνώρισαν τι είδους γωνίες είναι. Αυτοί οι μαθητές δεν γνώριζαν πώς να συγκρίνουν γωνίες και πλευρές για να διαπιστώσουν την ισότητά τους. Για παράδειγμα, έλεγαν πως η γωνία Α του πρώτου τριγώνου είναι ίση με τη γωνία Β του άλλου τριγώνου ή η πλευρά ΑΒ του ενός τριγώνου είναι ίση με την πλευρά ΑΓ του άλλου τριγώνου. Η παρέμβαση του παρατηρητή και σε αυτή την περίπτωση ήταν να τους υποδείξει πώς να συγκρίνουν τις γωνίες και τις πλευρές των τριγώνων.

-Τέλος, 1 μαθητής δεν κατόρθωσε να «δει» ισότητα ούτε να αναγνωρίσει τις ορθές γωνίες, παρά την παρέμβαση του ερευνητή. Αρχικά, αναφέρθηκε σε σχέσεις μεγεθών στα 3 ισοσκελή τρίγωνα (ότι είναι ισοσκελή και έπειτα άρχισε να κάνει λανθασμένες συγκρίσεις γωνιών και πλευρών. Και στις 2 περιπτώσεις, ο παρατηρητής παρενέβη και του υπέδειξε πώς να συγκρίνει τις γωνίες και τις πλευρές των τριγώνων, αλλά ο μαθητής απέτυχε στο να δει τις ορθές ή να τις αναγνωρίσει ως ίσες.

Στους μαθητές της α΄ ομάδας, ο παρατηρητής ζήτησε να του περιγράψουν τι είναι ορθή γωνία και πως κατασκευάζουμε μια ορθή γωνία. Όσον αφορά στο πρώτο ερώτημα οι απαντήσεις ήταν οι ακόλουθες:

-8 μαθητές είπαν πως ορθή γωνία είναι αυτή που έχει 90^0.

-2 μαθητές είπαν πως ορθή είναι η γωνία που σχηματίζεται από 2 κάθετες ευθείες.

-1 μαθητής είπε πως ορθή είναι η γωνία που βάζουμε από κάτω.

-1 μαθητής είπε πως ορθή είναι μια ίσια γραμμή.

-1 μαθητής είπε πως ορθή είναι αυτή που τη βάζουμε από την κάτω μεριά.

-4 μαθητές δεν δίνουν καμμιά απάντηση.

Στην ερώτηση πως κατασκευάζουμε μια ορθή:

-10 μαθητές με την βοήθεια του γνώμονα χαράσσουν 2 κάθετες ευθείες.

-6 φτιάχνουν μόνο την κάθετη ευθεία και μετά από ερώτηση του παρατηρητή αν αυτό που έφτιαξαν είναι ορθή γωνία, τη σβήνουν, χαράσσουν την ευθεία και μετά φέρουν κάθετη πάνω σε αυτή.

-1 φέρει μια «παράλληλη» -όπως είπε-ευθεία και την ονόμασε ορθή γιατί όπως είπε είναι ίσια. Μετά από ερώτηση του παρατηρητή αν αυτό που έφτιαξε είναι γωνία, απάντησε θετικά και δεν έκανε καμμιά άλλη προσπάθεια.

Πίνακας 7α (πόσοι και πως βρήκαν ότι η ορθή γωνία είναι το κοινό στοιχείο των 3 τριγώνων)

Α΄ ΟΜΑΔΑ

Συμπεριφορά	**Μαθητές**
Αμέσως ίσες και ορθές	3
Ίσες, όχι ορθές	2
Ίσες και ορθές, μετά από παρέμβαση	7
Μόνο ίσες μετά από παρέμβαση	4
Δεν τις βλέπουν μετά από παρέμβαση	1
Σύνολο	17

Όσον αφορά στη β΄ ομάδα:

-2 μαθητές απάντησαν αμέσως ότι το κοινό στοιχείο που παραμένει ίσο και στα τρία τρίγωνα είναι οι ορθές γωνίες.

-2 μαθητές έδειξαν κατευθείαν τις γωνίες στο μέσον της βάσης, αλλά δεν τις αναγνώρισαν ως ορθές. Σε ερώτηση του παρατηρητή «τι γωνίες είναι αυτές», απάντησαν πως δεν γνωρίζουν.

-1 μαθητής μετά από παρέμβαση του παρατηρητή, αναφέρθηκε στην ισότητα των γωνιών στο μέσον της βάσης και τις αναγνώρισε ως ορθές. Ο μαθητής αυτός δεν κατανόησε την ερώτηση του παρατηρητή και είπε ότι τα 3 τρίγωνα είναι ισοσκελή. Ο παρατηρητής παρενέβη και του είπε να κοιτάει να είναι ακριβώς ίσα τα μήκη των αντίστοιχων πλευρών ή το άνοιγμα των αντίστοιχων σε κάθε τρίγωνο γωνιών.

-5 μαθητές, ύστερα από παρέμβαση του παρατηρητή, «είδαν» μόνο την ισότητα των γωνιών στο μέσον της βάσης. Δεν αναγνώρισαν τι είδους γωνίες είναι. Αυτοί οι μαθητές δεν γνώριζαν πώς να συγκρίνουν γωνίες και πλευρές. Για παράδειγμα, έλεγαν πως η γωνία Α του πρώτου τριγώνου είναι ίση με τη γωνία Β του άλλου τριγώνου ή η πλευρά ΑΒ του ενός τριγώνου είναι ίση με την πλευρά ΑΓ του άλλου τριγώνου. Η παρέμβαση του παρατηρητή και σε αυτή την περίπτωση ήταν να τους υποδείξει πώς να συγκρίνουν τις γωνίες και τις πλευρές των τριγώνων.

-Τέλος, 13 μαθητές δεν κατόρθωσαν να «δουν» ισότητα ούτε να αναγνωρίσουν τις ορθές γωνίες, παρά τις παρεμβάσεις του ερευνητή. Οι μαθητές αυτοί είτε αναφέρονταν σε σχέσεις μεγεθών στα 3 ισοσκελή τρίγωνα, είτε έκαναν λανθασμένες συγκρίσεις γωνιών και πλευρών. Και στις 2 περιπτώσεις, ο παρατηρητής παρενέβαινε και τους υποδείκνυε πώς να συγκρίνουν τις γωνίες και τις πλευρές των τριγώνων, αλλά οι μαθητές απέτυχαν στο να δουν τις ορθές ή να τις αναγνωρίσουν ως ίσες.

Η **στατιστική επεξεργασία έδειξε ότι ο εντοπισμός του κοινού στοιχείου** και στα 3 τρίγωνα, **συσχετίζεται** με την **σωστή διατύπωση ορισμού της ορθής γωνίας** (0,049). Πράγματι, οι μαθητές που περιέγραψαν σωστά την ορθή γωνία, εντόπισαν εύκολα τις ορθές ως κοινό στοιχείο των 3 τριγώνων.

Σε 11 από τους 23 μαθητές ζητήθηκε να εξετάσουν ξανά τα τρίγωνα, αφού είχε τελειώσει η δραστηριότητα που σχετιζόταν με τις περιγραφές γωνιών (αμβλεία, οξεία, ορθή).

-Από τους 11, οι 5 αναγνώρισαν αμέσως και ισότητα μεταξύ των γωνιών και ότι ήταν ορθές. Και οι 5 αυτοί μαθητές όρισαν και κατέδειξαν σωστά την ορθή.

-1 μαθητής είδε μόνο την ισότητα γωνιών.

-5 μαθητές δεν έκαναν πάλι καμμιά διαπίστωση.

Στους 10 μαθητές που τελικά εντόπισαν ως κοινό ίσο στοιχείο των τριών τριγώνων τις ορθές γωνίες, ο παρατηρητής ρώτησε **«γιατί είναι ορθές». Πέντε από τους δέκα μαθητές, αναφέρθηκαν στην καθετότητα** των πλευρών, ενώ οι άλλοι πέντε έδειξαν ότι κατανοούν γιατί είναι ορθές οι γωνίες με κορυφή το μέσον της βάσης, αλλά δεν μπορούσαν να το εκφράσουν.

-Γιατί είναι ίσες και έχουν 90^0. Η μια είναι ίσια και η άλλη κάθετη στην πρώτη και αυτό συμβαίνει και στα τρία ισοσκελή τρίγωνα.

-Γιατί δεν παρακάμπτουν, η γραμμή τους είναι ορθή.

-Γιατί είναι ίσες και από τη μια και από την άλλη.

-Γιατί ανοίγουν και οι 2 το ίδιο.

-Γιατί φέραμε προς τη βάση του τριγώνου κάθετη. Αυτό έγινε και στα τρία τρίγωνα (αυτή την απάντηση έδωσαν 4 μαθητές).

-Γιατί στις βάσεις των τριγώνων φέραμε κάθετη και έτσι σχηματίστηκαν ίσες γωνίες.

Πίνακας 7β (πόσοι και πως βρήκαν ότι η ορθή γωνία είναι το κοινό στοιχείο των 3 τριγώνων)

Β΄ ΟΜΑΔΑ

Συμπεριφορά	**Μαθητές**
Αμέσως ίσες και ορθές	2
Ίσες, όχι ορθές	2
Ίσες και ορθές, μετά από παρέμβαση	1
Μόνο ίσες μετά από παρέμβαση	5
Δεν τις βλέπουν μετά από παρέμβαση	13
Σύνολο	23

2. Ίσα στοιχεία τετραπλεύρων

Όπως διαπιστώσαμε παραπάνω (βλ. παρ.5.1.2), οι μαθητές είχαν την ικανότητα να ενώνουν σχήματα (τρίγωνα) και να δημιουργούν καινούρια (τετράπλευρα) με τη ένωση αυτή. Μέσα από αυτή τη δραστηριότητα, επίσης, φάνηκε ότι οι περισσότεροι μαθητές είχαν την ικανότητα να ανακαλύπτουν τις ιδιότητες των τετραπλεύρων που έφτιαχναν κάθε φορά. Έτσι, «σπάζοντας τα τετράπλευρα σε τρίγωνα», σύγκριναν τα στοιχεία τους και με αυτό τον τρόπο έβρισκαν τα χαρακτηριστικά τους. Ας εξετάσουμε κάθε τετράπλευρο ξεχωριστά.

Α) Πλάγιο παραλληλόγραμμο

-2 μαθητές της α΄ ομάδας στην ερώτηση του ερευνητή «τι χαρακτηριστικά έχει το τετράπλευρο που έφτιαξαν», απάντησαν πως το τετράπλευρο έχει απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες και απέναντι γωνίες ίσες. Στην ερώτηση πως ονομάζεται το τετράπλευρο απάντησαν πλάγιο παραλληλόγραμμο.

-5 μαθητές απάντησαν πως το τετράπλευρο έχει απέναντι πλευρές ίσες και απέναντι γωνίες ίσες. Στην ερώτηση πως ονομάζεται το τετράπλευρο απάντησαν πλάγιο παραλληλόγραμμο. Όταν ο ερευνητής ρώτησε «γιατί το λέμε παραλληλόγραμμο», τότε αναφέρθηκαν στην παραλληλία των απέναντι πλευρών.

-3 μαθητές απάντησαν πως το τετράπλευρο έχει απέναντι πλευρές ίσες και απέναντι γωνίες ίσες. Στην ερώτηση πως ονομάζεται το τετράπλευρο έδωσαν λανθασμένη απάντηση. Ο ερευνητής τους είπε ότι ονομάζεται πλάγιο παραλληλόγραμμο. Έπειτα, ο ερευνητής ρώτησε «γιατί το λέμε παραλληλόγραμμο» και τότε αναφέρθηκαν στην παραλληλία των απέναντι πλευρών.

-1 μαθητής αναφέρθηκε στην ισότητα των απέναντι πλευρών και γωνιών, όχι όμως στην παραλληλία. Στην ερώτηση πως ονομάζεται το τετράπλευρο έδωσε λανθασμένη απάντηση (ρόμβος). Ο παρατηρητής του είπε να πει ξανά τα χαρακτηριστικά του τετραπλεύρου και ύστερα να το ονομάσει. Ο μαθητής είπε πως πρόκειται για πλάγιο παραλληλόγραμμο. Όταν ο ερευνητής ρώτησε «γιατί το λέμε παραλληλόγραμμο», τότε αναφέρθηκε στην παραλληλία των απέναντι πλευρών.

-1 μαθητής αναφέρθηκε στην ισότητα των απέναντι πλευρών και γωνιών, όχι όμως στην παραλληλία. Στην ερώτηση πως ονομάζεται το τετράπλευρο έδωσε λανθασμένη απάντηση, αλλά το διόρθωσε αμέσως μόνος του και είπε πως το τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο. Όταν ο ερευνητής ρώτησε «γιατί το λέμε παραλληλόγραμμο», τότε αναφέρθηκε στην παραλληλία των απέναντι πλευρών.

-1 μαθητής αναφέρθηκε στην ισότητα των απέναντι πλευρών και γωνιών, όχι όμως στην παραλληλία. Στην ερώτηση πως ονομάζεται το τετράπλευρο έδωσε λανθασμένη απάντηση (τετράγωνο). Ο παρατηρητής του είπε να πει ξανά τα χαρακτηριστικά του τετραπλεύρου και ύστερα να το ονομάσει. Ο μαθητής είπε πως πρόκειται για πλάγιο παραλληλόγραμμο. Όταν ο ερευνητής ρώτησε «γιατί το λέμε παραλληλόγραμμο», τότε απάντησε ότι το τετράπλευρο έχει ευθείες ίσες.

-1 μαθητής αρχικά έδωσε λανθασμένη ονομασία αλλά το διόρθωσε αμέσως μόνος του. Είπε πως το τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο επειδή έχει απέναντι πλευρές παράλληλες. Σε ερώτηση του παρατηρητή τι άλλα χαρακτηριστικά έχει το τετράπλευρο, αναφέρθηκε στην ισότητα των απέναντι γωνιών και πλευρών.

-1 μαθητής αναφέρθηκε στην ισότητα των απέναντι πλευρών και γωνιών, αλλά είπε ότι οι γωνίες του είναι ορθές γι' αυτό είναι ορθογώνιο. Μόνος του αμέσως το διόρθωσε και είπε πως είναι παραλληλόγραμμο και δεν έχει ορθές γωνίες. Όταν ο ερευνητής ρώτησε «γιατί το λέμε παραλληλόγραμμο», τότε αναφέρθηκε στην παραλληλία των απέναντι πλευρών.

-1 μαθητής έδωσε διάφορες λανθασμένες απαντήσεις ως προς την ονομασία του τετραπλεύρου. Ο ερευνητής του είπε ότι ονομάζεται πλάγιο παραλληλόγραμμο. Έπειτα, ο ερευνητής ρώτησε «γιατί το λέμε παραλληλόγραμμο» και τότε αναφέρθηκε στην παραλληλία των απέναντι πλευρών.

-1 μαθητής έδωσε αρχικά διάφορες λανθασμένες απαντήσεις ως προς την ονομασία του τετραπλεύρου, αλλά διόρθωσε μόνος του και είπε πως είναι παραλληλόγραμμο. Έπειτα, ο ερευνητής ρώτησε «γιατί το λέμε παραλληλόγραμμο» και τότε αναφέρθηκε στην παραλληλία των απέναντι πλευρών.

Πίνακας 8α (Πόσοι μαθητές είπαν ότι το τετράπλευρο που έφτιαξαν είναι παραλληλόγραμμο)

Α΄ ΟΜΑΔΑ

Συμπεριφορά	1ο παραλ/μο	2ο παραλ/μο	3ο παραλ/μο	4ο παραλ/μο
Παρ/μο αμέσως	7	17	14	14
Αρχικά λανθ. Ονομ [9]. τελικά παρ/μο	6	0	0	0
Την ονομασία την είπε ο ερευνητής	4	0	2	0
Δεν το έφτιαξαν	0	0	1	3
Σύνολο	17	0	17	17

Από τους 23 μαθητές της β΄ ομάδας, μόνο οι 2 είπαν -κατευθείαν και μόνοι τους-πως το τετράπλευρο που έφτιαξαν λέγεται παραλληλόγραμμο, αφού πρώτα είπαν τα χαρακτηριστικά που έχει το τετράπλευρο το οποίο ονόμασαν παραλληλόγραμμο. Και οι δυο είπαν πως το τετράπλευρο έχει ίσες τις απέναντι πλευρές και τις απέναντι γωνίες, χωρίς όμως να δείξουν τα ίσα στοιχεία. Την παραλληλία την ανέφεραν μόνο όταν ο παρατηρητής τους ρώτησε «τι άλλο έχει ένα παραλληλόγραμμο;». Και οι 2 μαθητές απάντησαν «έχει πλευρές παράλληλες».

-4 μαθητές είπαν την ονομασία του παραλληλογράμμου μετά από ερώτηση του παρατηρητή «τι τετράπλευρο έφτιαξες;» Έπειτα, παρατηρητής τους ζήτησε να πουν τι χαρακτηριστικά έχει το τετράπλευρο και το ονόμασαν παραλληλόγραμμο. Οι 2 είπαν πως το τετράπλευρο έχει ίσες τις απέναντι πλευρές και τις απέναντι γωνίες. Την παραλληλία την ανέφεραν μετά από ερώτηση του παρατηρητή «τι άλλο έχει ένα παραλληλόγραμμο;». Από τους υπόλοιπους 2 στην ίδια ερώτηση, ο 1 μαθητής απάντησε ότι το παραλληλόγραμμο έχει τις απέναντι πλευρές παράλληλες, ενώ ο άλλος δεν απάντησε παρά μόνο όταν τον ρώτησε ο παρατηρητής «γιατί το λέμε παραλληλόγραμμο;».

-3 μαθητές αρχικά δεν απάντησαν και ο παρατηρητής τους ζήτησε να πουν τα χαρακτηριστικά του τετραπλεύρου. Και οι 3 είπαν πως το τετράπλευρο έχει ίσες τις απέναντι πλευρές και τις απέναντι γωνίες,. Αφού είπαν τα χαρακτηριστικά, ο παρατηρητής τους ρώτησε τι τετράπλευρο είναι αυτό. Και οι 3 απάντησαν ότι είναι ορθογώνιο. Ο παρατηρητής τους ρώτησε «έχει ορθές γωνίες;». Μετά από αυτή την παρέμβαση είπαν πως είναι παραλληλόγραμμο. Την παραλληλία την ανέφεραν όταν ο παρατηρητής τους ρώτησε «τι άλλο έχει ένα παραλληλόγραμμο;». Στην ερώτηση αυτή 2 μαθητές απάντησαν ότι το παραλληλόγραμμο έχει τις απέναντι πλευρές παράλληλες, ενώ ο τρίτος απάντησε όταν τον ρώτησε ο παρατηρητής «γιατί το λέμε παραλληλόγραμμο;».

-2 μαθητές αρχικά δεν απάντησαν στην ερώτηση του παρατηρητή «τι τετράπλευρο είναι αυτό που έφτιαξες;» και έτσι τους ζήτησε να του πουν τα χαρακτηριστικά. Και οι δυο απάντησαν πως το τετράπλευρο έχει ίσες τις απέναντι πλευρές και τις απέναντι γωνίες. Αφού είπαν τα χαρακτηριστικά ο

[19] Οι λανθασμένες απαντήσεις των μαθητών ως προς την ονομασία του παραλληλογράμμου συγκεντρωτικά ήταν οι εξής: ρόμβος, ορθογώνιο τραπέζιο, ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, τετράγωνο, ορθογώνιο, τυχόν τετράπλευρο, ισόπλευρο παραλληλόγραμμο, πλάγιο ορθογώνιο τετράγωνο, σκέτο ισόπλευρο.

παρατηρητής τους ρώτησε τι τετράπλευρο είναι αυτό. Και οι 2 απάντησαν ότι είναι τετράγωνο. Ο παρατηρητής τους ρώτησε «έχει 4 πλευρές ίσες και 4 γωνίες ορθές;». Μετά από αυτή την παρέμβαση, οι μαθητές είπαν πως πρόκειται για παραλληλόγραμμο. Την παραλληλία την ανέφερε ο ένας όταν ο παρατηρητής τον ρώτησε «τι άλλο έχει ένα παραλληλόγραμμο;», ενώ η άλλη απάντησε όταν την ρώτησε ο παρατηρητής «γιατί το λέμε παραλληλόγραμμο;».

-1 μαθητής αρχικά είπε ότι το τετράπλευρο έχει απέναντι πλευρές και απέναντι γωνίες ίσες και όταν ο παρατηρητής τον ρώτησε τι τετράπλευρο έφτιαξε, είπε πως ήταν ρόμβος. Ο παρατηρητής τον ρώτησε «έχει 4 πλευρές ίσες;». Τότε ο μαθητής είπε πως είναι παραλληλόγραμμο. Την παραλληλία δεν την ανέφερε όταν ο παρατηρητής τον ρώτησε «τι άλλο έχει ένα παραλληλόγραμμο;», αλλά όταν τον ρώτησε ο παρατηρητής «γιατί το λέμε παραλληλόγραμμο;».

-1 μαθήτρια αρχικά είπε πως το τετράπλευρο ονομάζεται τετράγωνο. Ο παρατηρητής την ρώτησε «έχει 4 πλευρές ίσες και 4 γωνίες ορθές;». Μετά από αυτό είπε πως είναι παραλληλεπίπεδο. Ο παρατηρητής την ρώτησε «είναι στερεό;». Εκείνη απάντησε αρνητικά και τότε της ζήτησε να βρει τα ίσα στοιχεία. Η μαθήτρια έδειξε το ένα ζευγάρι ίσων πλευρών (των απέναντι) και το ένα ζευγάρι γωνιών (των απέναντι) και απάντησε πως πρόκειται για πλάγιο παραλληλόγραμμο. Την παραλληλία δεν την ανέφερε όταν ο παρατηρητής την ρώτησε «τι άλλο έχει ένα παραλληλόγραμμο;», αλλά όταν την ρώτησε ο παρατηρητής «γιατί το λέμε παραλληλόγραμμο;».

-2 μαθήτριες αρχικά είπαν πως είναι τετράγωνο. Ο παρατηρητής τις ρώτησε «έχει 4 πλευρές ίσες και 4 γωνίες ορθές;». Μετά από αυτό είπαν πως είναι ορθογώνιο. Ο παρατηρητής τις ρώτησε «έχει ορθές γωνίες;». Εκείνες απάντησαν αρνητικά και τότε τους είπε να του πουν τα ίσα στοιχεία. Και οι δυο αναφέρθηκαν στην ισότητα των απέναντι γωνιών και πλευρών. Όταν ο παρατηρητής τις ρώτησε τι τετράπλευρο έφτιαξαν, είπαν πως είναι παραλληλόγραμμο. Την παραλληλία των πλευρών την ανέφεραν, όταν τις ρώτησε ο παρατηρητής «γιατί το λέμε παραλληλόγραμμο;».

-1 μαθήτρια αρχικά δεν απάντησε στην ερώτηση του παρατηρητή «τι τετράπλευρο είναι αυτό που έφτιαξες;» και έτσι της ζήτησε να του πει τα χαρακτηριστικά. Είπε πως το τετράπλευρο έχει ίσες τις απέναντι πλευρές και τις απέναντι γωνίες. Αφού είπε τα χαρακτηριστικά ο παρατηρητής την ρώτησε τι τετράπλευρο είναι αυτό. Απάντησε ότι είναι τετράγωνο. Ο παρατηρητής την ρώτησε «έχει 4 πλευρές ίσες και 4 γωνίες ορθές;». Μετά από αυτή την παρέμβαση, η μαθήτρια δεν απάντησε και ο παρατηρητής της είπε πως πρόκειται για παραλληλόγραμμο. Την παραλληλία την ανέφερε όταν ο παρατηρητής την ρώτησε «γιατί το λέμε παραλληλόγραμμο;».

-1 μαθήτρια αρχικά δεν απάντησε στην ερώτηση του παρατηρητή «τι τετράπλευρο είναι αυτό που έφτιαξες;» και έτσι της ζήτησε να του πει τα χαρακτηριστικά. Είπε πως το τετράπλευρο έχει ίσες τις απέναντι πλευρές και τις απέναντι γωνίες. Αφού είπε τα χαρακτηριστικά ο παρατηρητής την ρώτησε τι τετράπλευρο είναι αυτό. Απάντησε ότι είναι τετράγωνο. Ο παρατηρητής την ρώτησε «έχει 4 πλευρές ίσες και 4 γωνίες ορθές;». Μετά από αυτό είπε πως είναι ορθογώνιο. Ο παρατηρητής τη ρώτησε «έχει ορθές γωνίες;». Μετά από αυτή την παρέμβαση, η μαθήτρια δεν απάντησε και ο παρατηρητής της είπε πως πρόκειται για παραλληλόγραμμο. Την παραλληλία των πλευρών την ανέφερε όταν ο παρατηρητής την ρώτησε «γιατί το λέμε παραλληλόγραμμο;».

-1 μαθήτρια αρχικά δεν απάντησε στην ερώτηση του παρατηρητή «τι τετράπλευρο είναι αυτό που έφτιαξες;» και έτσι της ζήτησε να του πει τα χαρακτηριστικά. Έδειξε όλες τις ίσες πλευρές και τις ίσες γωνίες. Αφού είπε τα χαρακτηριστικά ο παρατηρητής την ρώτησε τι τετράπλευρο είναι αυτό. Απάντησε ότι είναι τετράγωνο. Ο παρατηρητής την ρώτησε «έχει 4 πλευρές ίσες και 4 γωνίες ορθές;». Μετά από αυτό είπε πως είναι ορθογώνιο. Ο παρατηρητής τη ρώτησε «έχει ορθές γωνίες;». Μετά από αυτή την παρέμβαση, η μαθήτρια είπε πως είναι τρίγωνο. Ο παρατηρητής την ρώτησε: «έχει 3 πλευρές και 3 γωνίες;». Μετά από αυτή την παρέμβαση, η μαθήτρια δεν απάντησε και ο παρατηρητής της είπε πως πρόκειται για παραλληλόγραμμο. Την παραλληλία των πλευρών την ανέφερε όταν ο παρατηρητής την ρώτησε «γιατί το λέμε παραλληλόγραμμο;».

-1 μαθητής αρχικά είπε πως το τετράπλευρο είναι ρόμβος. Ο παρατηρητής τον ρώτησε «έχει 4 πλευρές ίσες;». Μετά από αυτό είπε πως είναι ορθογώνιο. Ο παρατηρητής τον ρώτησε «έχει ορθές γωνίες;». Μετά από αυτή την παρέμβαση, ο μαθητής ξαναείπε πως είναι ρόμβος. Μετά από αυτή την απάντηση, ο παρατηρητής του ζήτησε να πει τα ίσα στοιχεία. Ο μαθητής αναφέρθηκε στην ισότητα των απέναντι πλευρών και γωνιών. Αφού είπε τα χαρακτηριστικά ο παρατηρητής τον ρώτησε τι τετράπλευρο είναι αυτό. Ο μαθητής δεν απάντησε και ο παρατηρητής του είπε πως πρόκειται για παραλληλόγραμμο. Την παραλληλία την ανέφερε όταν ο παρατηρητής τον ρώτησε «τι άλλο έχει ένα παραλληλόγραμμο;».

-1 μαθήτρια όταν ο παρατηρητής την ρώτησε «τι τετράπλευρο είναι αυτό;» είπε ότι είναι ένα τρίγωνο. Ο παρατηρητής την ρώτησε «τρίγωνο σου φαίνεται αυτό;». Η μαθήτρια απάντησε ότι είναι ρόμβος, μετά το αναίρεσε και είπε ότι είναι ένας στραβός ρόμβος και 2 τρίγωνα. Ο παρατηρητής την ρώτησε αν έχει τίποτα ίσο αυτό το τετράπλευρο; Η μαθήτρια είπε πως είναι τετράγωνο. Ο παρατηρητής της είπε να του πει ένα-ένα τα ίσα στοιχεία. Είπε πως έχει τις απέναντι πλευρές και τις απέναντι γωνίες ίσες. Ο παρατηρητής την ρώτησε πως ονομάζεται το τετράπλευρο που έχει τις απέναντι πλευρές και τις απέναντι γωνίες ίσες. Η μαθήτρια απάντησε πως λέγεται τετράγωνο. Ο παρατηρητής την ρώτησε, «ένα τετράγωνο έχει μόνο τις απέναντι πλευρές και γωνίες ίσες;». Η μαθήτρια είπε πως το τετράγωνο έχει όλες τις πλευρές και τις γωνίες ίσες, άρα αυτό που έχει μπροστά της είναι τετράπλευρο. Μετά, ο παρατηρητής την ρώτησε τι τετράπλευρο είναι και αυτή απάντησε πως είναι παραλληλόγραμμο. Την παραλληλία των πλευρών την ανέφερε όταν ο παρατηρητής την ρώτησε «γιατί το λέμε παραλληλόγραμμο;».

-3 μαθητές πρώτα έδειξαν τα ίσα στοιχεία, αλλά μόνο το ένα ζεύγος ίσων γωνιών και πλευρών. Αφού είπαν τα χαρακτηριστικά ο παρατηρητής τις ρώτησε τι τετράπλευρο είναι αυτό. Οι 2 δεν έδωσαν καμιά απάντηση και τους το είπε ο παρατηρητής. Η άλλη απάντησε ότι είναι τετράγωνο. Ο παρατηρητής την ρώτησε «έχει 4 πλευρές ίσες και 4 γωνίες ορθές;». Μετά από αυτό είπε πως είναι ορθογώνιο. Ο παρατηρητής τη ρώτησε «έχει ορθές γωνίες;». Έπειτα, δεν έδωσε καμιά απάντηση και ο παρατηρητής της το είπε. Την παραλληλία των πλευρών δεν την ανέφεραν. Όταν ο παρατηρητής τις ρώτησε «τι άλλο έχει ένα παραλληλόγραμμο;», δεν απάντησε καμμιά από τις τρεις. Οι 2 το βρήκαν μόνο όταν τις ρώτησε ο παρατηρητής «γιατί το λέμε παραλληλόγραμμο;», ενώ η τρίτη δεν το βρήκε ούτε μετά από αυτή την ερώτηση και έτσι της το είπε ο ερευνητής.

Πίνακας 8β (Πόσοι μαθητές είπαν ότι το τετράπλευρο που έφτιαξαν είναι παραλληλόγραμμο)

Β΄ ΟΜΑΔΑ

Συμπεριφορά	**1ο παραλ/μο**	**2ο παραλ/μο**	**3ο παραλ/μο**	**4ο παραλ/μο**
Παρ/μο αμέσως	6	18	16	14
Αρχικά λανθ. Ονομ. τελικά παρ/μο	11	5	5	7
Την ονομασία την είπε ο ερευνητής	6	0	0	0
Δεν το έφτιαξαν	0	0	2	2
Σύνολο	23	23	23	23

Η συμπεριφορά των μαθητών είναι ενδεικτική **της ύπαρξης δυσκολιών στην αναγνώριση της παραλληλίας αλλά και του παραλληλογράμμου**, παρ' ότι πρόκειται για ένα σχήμα οικείο στους μαθητές της ΣΤ΄ τάξης. Αυτό ίσως οφείλεται στον τρόπο διδασκαλίας της ενότητας των παραλληλογράμμων (βλ. αναλυτικότερα συμπεράσματα, παρ. 6.1). Ενώ αναζητούν και εντοπίζουν με μεγάλη ευκολία τα ίσα στοιχεία των τετραπλεύρων, τα ποσοστά επιτυχίας τους στην αναγνώριση της παραλληλίας, είναι πολύ χαμηλά:

-το 7,5% των μαθητών αναγνώρισε αμέσως την παραλληλία των πλευρών του παραλληλογράμμου.

-το 22,5% των μαθητών ανέφερε την παραλληλία μετά από ερώτηση του ερευνητή «τι άλλο έχει ένα παραλληλόγραμμο;».

-το 65% χρειάστηκε και δεύτερη ερώτηση του παρατηρητή «γιατί το λέμε παραλληλόγραμμο;» για να συνειδητοποιήσει την παραλληλία.

-το 5% δεν ανέφερε παραλληλία.

Στην ερώτηση του παρατηρητή ποιες ευθείες ονομάζουμε παράλληλες, οι μαθητές της α΄ ομάδας απάντησαν:

-14 είπαν πως παράλληλες είναι οι ευθείες που όσο και να τις προεκτείνουμε δεν θα συναντηθούν.

-2 μαθητές δεν έδωσαν καμμιά απάντηση.

-1 έδωσε απαντήσεις όπως: όταν δεν είναι ίσες, όταν δεν είναι απέναντι.

Όσον αφορά στη Β΄ ομάδα, οι απαντήσεις έδειξαν ότι οι μαθητές δεν γνώριζαν τι είναι παράλληλες ευθείες:

-7 μαθητές απάντησαν ότι παράλληλες είναι αυτές που δεν ενώνονται.
-5 μαθητές απάντησαν ότι παράλληλες είναι αυτές που είναι ίσιες.
-4 μαθητές απάντησαν ότι παράλληλες είναι αυτές που είναι ίσιες. και δεν ενώνονται
-4 μαθητές απάντησαν ότι παράλληλες είναι αυτές που είναι ίσες και απέναντι.
-1 μαθητής είπε ότι παράλληλες είναι «όταν είναι παραλληλόγραμμο».
-2 μαθητές απάντησαν πως δεν ξέρουν και τους το είπε ο ερευνητής.

Τελικά, ο παρατηρητής είπε σε όλους τι είναι οι παράλληλες ευθείες.

Στο ερώτημα του ερευνητή «πως μπορείς με ένα απλό τρόπο να διαπιστώσεις ότι οι παράλληλες δεν συναντιούνται ποτέ;», αρκετοί μαθητές προσπάθησαν να απαντήσουν με την βοήθεια **κατασκευαστικών** διαδικασιών (με μετρήσεις):
-7 μαθητές της α΄ ομάδας, αρχικά απάντησαν πως θα τις προεκτείνουμε και δεν θα συναντηθούν. Ο ερευνητής τους ρώτησε «πως ξέρεις ότι αν τις προεκτείνουμε δεν θα συναντηθούν σε κάποιο σημείο;». Οι απαντήσεις των μαθητών ήταν οι εξής:
(α) Θα μετρήσουμε την απόσταση των 2 παραλλήλων ευθειών: είναι σταθερή σε οποιοδήποτε σημείο.
(β) Θα δούμε αν σε κάθε σημείο είναι ίδια η απόσταση. Για το λόγο αυτό θα φέρουμε κάθετες στις παράλληλες και θα μετρήσουμε το μήκος τους. Αν είναι το ίδιο τότε οι ευθείες είναι παράλληλες.
(γ), (δ), (ε), (στ) Θα μετρήσουμε την απόσταση. Αν είναι ίδια τότε οι ευθείες είναι παράλληλες.
(ζ) (ο μαθητής έφερε κάθετες προς τις παράλληλες*). Σε όλα τα σημεία των παραλλήλων ευθειών, η γραμμούλα θα είναι ίδια.*
-2 μαθητές αρχικά είπαν πως *θα τις προεκτείνουμε και δεν θα συναντηθούν*. Ο ερευνητής τους ρώτησε «πως ξέρεις ότι αν τις προεκτείνουμε δεν θα συναντηθούν σε κάποιο σημείο;». Τότε ο 1 μαθητής είπε πως *είναι μια γραμμούλα ανάμεσά τους η οποία είναι ίδια παντού*. Παρόμοια ήταν η απάντηση του άλλου: έφερε 2 κάθετες και είπε *πως είναι σαν να υπάρχει κάτι που δεν τις αφήνει να συναντηθούν*.
-1 μαθητής, επίσης, απάντησε *πως οι γραμμές είναι ευθύγραμμες, γι' αυτό πηγαίνουν ίσια...είναι σαν να είναι μια γραμμή ανάμεσά τους που τις κρατάει μακριά.*
-1 μαθητής απάντησε πως *αν πάρουμε το χάρακα και προεκτείνουμε, οι παράλληλες ευθείες θα πηγαίνουν ίσια.*
-4 μαθητές είπαν πως *θα τις προεκτείνουμε και δεν θα συναντηθούν*. Ο ερευνητής τους ρώτησε «πως ξέρεις ότι αν τις προεκτείνουμε δεν θα συναντηθούν σε κάποιο σημείο;». Οι μαθητές δεν έδωσαν καμμιά απάντηση.
-1 μαθητής απάντησε ότι *είναι ευθείες (οι παράλληλες), οι οποίες δεν γίνεται να συναντηθούν γιατί δεν πάνε στραβά.*
-Τέλος, 1 απάντησε *πως η απόστασή τους είναι μακρινή*.

Έντεκα από τους μαθητές της β΄ ομάδας,[20] απάντησαν ότι *θα τις προεκτείνουμε*. Στην ερώτηση του παρατηρητή «πως ξέρεις ότι αν τις προεκτείνουμε δεν θα συναντηθούν σε κάποιο σημείο;», οι απαντήσεις των μαθητών ήταν οι εξής:

•*Γιατί εδώ είναι κενό* (δείχνει την απόσταση ανάμεσα στις παράλληλες).*Όσο και να προχωράμε, το κενό ούτε μεγαλώνει ούτε μικραίνει, παραμένει το ίδιο.*

•*Στις παράλληλες ευθείες το κενό ανάμεσά τους είναι ίσο, είναι ίδιο παντού.*

•*Αυτά εδώ* (δείχνει τις αποστάσεις) *στις παράλληλες είναι ίδια παντού.*

•(φέρει κάθετη στις παράλληλες) *αυτή η γραμμή ανάμεσά τους είναι ίδια παντού.*

•*γιατί στις παράλληλες υπάρχει κενό που τις χωρίζει και αυτό το κενό είναι ίδιο παντού. Η επιφάνεια του κενού είναι ίση.*

•*πάνε ίσια και η διαφορά μεταξύ τους είναι ίση.*

•*είναι ίσιες οι γραμμές* (δείχνει τις αποστάσεις), *έχουν κάποια διαφορά οι παράλληλες η οποία είναι ίδια παντού ανάμεσά τους.*

•*πρέπει να υπάρχει ανάμεσά τους το ίδιο ύψος.*

•*έχουν ίση απόσταση.*

•(έφτιαξε γραμμές ανάμεσα στις 2 παράλληλες και είπε *πως είναι ίδιες παντού*).

•*Στις παράλληλες σε όποιο σημείο και να τις μετρήσουμε θα είναι ίδια η απόσταση.*

-1 μαθήτρια είπε ότι *πάνε ίσια, ευθεία, δεν έχουν ούτε αρχή ούτε τέλος.*

-1 μαθητής είπε ότι *πάνε ίσια.*

-1 μαθήτρια δεν δίνει καμιά απάντηση.

-1 μαθητής είπε *τραβάνε ευθεία και δεν ενώνονται.*

-1 μαθητής είπε *ότι η μια με την άλλη δεν είναι κοντά.*

Ως προς την **ονομασία του παραλληλογράμμου** τα **ποσοστά επιτυχίας ήταν, εξίσου χαμηλά**:

-μόνο το 32,5% των μαθητών αναγνώρισαν το τετράπλευρο που έφτιαξαν ως παραλληλόγραμμο.

-το 42,5% έδωσε διάφορες λανθασμένες ονομασίες και μετά από παρέμβαση του παρατηρητή το αναγνώρισε ως παραλληλόγραμμο.

-το 25% απέτυχε στο να το αναγνωρίσει.

Η συμπεριφορά αυτή των μαθητών είναι ακόμη ενδεικτική του γεγονότος ότι και **αυτοί που είναι σε θέση να αναγνωρίσουν το παραλληλόγραμμο και την παραλληλία, οδηγούνται δυσκολότερα στην αναζήτησή τους από ό,τι στην αναζήτηση των ίσων στοιχείων.** Επίσης, διαπιστώνουμε ότι **η αναγνώριση του παραλληλογράμμου δεν συνεπάγεται την άμεση αναγνώριση της παραλληλίας των πλευρών του**. Αυτό, ίσως, συμβαίνει επειδή οι μαθητές δεν γνώριζαν τι είναι παράλληλες ευθείες.

[20] Δεν ερωτήθηκαν όλοι οι μαθητές της Β΄ ομάδας.

• Πλάγιο παραλληλόγραμμο (2ο)

Σε αυτή την περίπτωση ο ερευνητής ζήτησε από τους μαθητές να πουν μόνο την ονομασία του τετραπλεύρου. Οι 18 από τους 23 μαθητές απάντησαν κατευθείαν ότι πρόκειται για παραλληλόγραμμο. Οι άλλοι 5 αρχικά έδωσαν μια λανθασμένη απάντηση και ο παρατηρητής τους ζήτησε να πουν τα χαρακτηριστικά του τετραπλεύρου που έφτιαξαν. Οι 3 αρχικά είπαν ότι είναι ορθογώνιο. Οι άλλοι 2, ανέφεραν πως είναι ρόμβος. Ο παρατηρητής τους ζήτησε να πουν τα χαρακτηριστικά και οι μαθητές αναφέρθηκαν στην ισότητα των απέναντι γωνιών και πλευρών (χωρίς να δείχνουν), καθώς και στην παραλληλία των πλευρών. Μετά από αυτό, όλοι είπαν πως είναι παραλληλόγραμμο.

• Πλάγιο παραλληλόγραμμο (3ο)

Και σε αυτή την περίπτωση ο ερευνητής ζήτησε από τους μαθητές να πουν μόνο την ονομασία του τετραπλεύρου. Οι 17 από τους 23 μαθητές απάντησαν κατευθείαν ότι πρόκειται για παραλληλόγραμμο. Οι 4 αρχικά έδωσαν μια λανθασμένη απάντηση και ο παρατηρητής τους ζήτησε να πουν τα χαρακτηριστικά του τετραπλεύρου που έφτιαξαν. Η μια αρχικά είπε πως είναι ρόμβος, η δεύτερη πως είναι ορθογώνιο, η τρίτη ότι είναι ισοσκελές, και η τέταρτη ότι είναι τυχόν τετράπλευρο. Ο παρατηρητής τους ζήτησε να πουν πρώτα τα χαρακτηριστικά και μετά την ονομασία. Και οι 4 μαθητές αναφέρθηκαν στην ισότητα των απέναντι γωνιών και πλευρών (χωρίς να δείχνουν), καθώς και στην παραλληλία των πλευρών. Μετά από αυτό, όλοι είπαν πως είναι παραλληλόγραμμο. Τέλος, 2 μαθητές δεν το έφτιαξαν καθόλου.

• Πλάγιο παραλληλόγραμμο (4ο)

Και σε αυτή την περίπτωση ο παρατηρητής ζήτησε από τους μαθητές να δώσουν την ονομασία του τετραπλεύρου (22 μαθητές). Σε μια μαθήτρια, δεν δόθηκε ζευγάρι ισοσκελών οξυγωνίων.

• 15 μαθητές απάντησαν κατευθείαν ότι πρόκειται για παραλληλόγραμμο.

• 4 μαθήτριες αρχικά είπαν πως πρόκειται για ορθογώνιο. Ο παρατηρητής τις ρώτησε «έχει ορθές γωνίες;» Τότε οι μαθήτριες απάντησαν πως είναι παραλληλόγραμμο.

• 2 μαθήτριες αρχικά είπαν πως είναι τυχόν τετράπλευρο Ο παρατηρητής τους ρώτησε «έχει αυτό το τετράπλευρο παράλληλες πλευρές;». Τότε οι μαθήτριες απάντησαν πως είναι παραλληλόγραμμο.

• 1 μαθητής δεν το έφτιαξε καθόλου.

Β) Τυχόν τετράπλευρο

-7 μαθητές της α΄ ομάδας απάντησαν πως είναι ένα «απλό» ή «σκέτο» τετράπλευρο.

•4 από αυτούς αιτιολόγησαν την απάντησή τους λέγοντας ότι δεν μπορούσαν να του δώσουν κάποια ονομασία από τα γνωστά τους τετράπλευρα.

•οι υπόλοιποι 3 είπαν ότι το τετράπλευρο έχει 4 πλευρές οι οποίες δεν είναι παράλληλες.

-7 μαθητές έδωσαν στο τετράπλευρο χαρακτηρισμούς όπως: τραπέζιο, κώνος, τυχόν τραπέζιο, παραλληλόγραμμο, τρίγωνο, πυραμίδα, παραλληλεπίπεδο.

-Οι υπόλοιποι 3 είπαν ότι δεν μπορούν να δώσουν καμμιά ονομασία στο τετράπλευρο.

Σε όλους τους μαθητές ο παρατηρητής εξήγησε τι είναι το τυχόν τετράπλευρο και τους είπε την ονομασία, γιατί οι μαθητές δεν γνώριζαν την λέξη «τυχόν».

Πίνακας 9α (Πόσοι μαθητές είπαν το τετράπλευρο που έφτιαξαν τυχόν τετράπλευρο)

Α΄ ΟΜΑΔΑ

Συμπεριφορά	**1ο**	**2ο**	**3ο**	**4ο**
Τυχόν τετράπλευρο	0	15	16	16
Απλό τετράπλευρο	7	0	0	0
Λανθασμένη ονομασία	7	1	1	0
Δεν ξέρουν	3	0	0	0
Δεν το έφτιαξαν	0	1	0	1
Σύνολο	17	17	17	17

Όσον αφορά στη β΄ ομάδα:

-7 μαθητές απάντησαν πως είναι ένα *«απλό» ή «σκέτο» τετράπλευρο*.

-2 είπαν ότι είναι πυραμίδα. Μετά από ερώτηση του παρατηρητή «είναι στερεό;», οι μαθητές αυτοί δεν έδωσαν καμμιά απάντηση.

-2 μαθητές απάντησαν πως είναι ρόμβος. Ο παρατηρητής ρώτησε «έχει 4 πλευρές ίσες». Οι μαθητές δεν απάντησαν.

-3 μαθητές απάντησαν πως είναι παραλληλόγραμμο. Ο παρατηρητής τους ρώτησε αν το τετράπλευρο έχει παράλληλες πλευρές. Οι μαθητές απάντησαν αρνητικά και ότι δεν ξέρουν τι τετράπλευρο είναι.

-2 μαθητές είπαν ότι το τετράπλευρο είναι τρίγωνο. Ο παρατηρητής τους υπενθύμισε ότι έφτιαξαν τετράπλευρο. Τότε ο 1 είπε πως είναι πυραμίδα και ο άλλος είπε ότι δεν γνωρίζει τι είναι. Σε αυτόν που μίλησε για πυραμίδα, ο παρατηρητής ρώτησε «είναι στερεό;». Ο μαθητής δεν έδωσε καμμιά απάντηση.

-6 μαθητές απάντησαν ότι δεν γνωρίζουν τι τετράπλευρο είναι. Οι 2 από αυτούς, μάλιστα, είπαν πως σίγουρα δεν είναι παραλληλόγραμμο, αλλά δεν ξέρουν τι είναι.

-1 μαθητής είπε πως είναι χαρταετός.

Σε όλους τους μαθητές ο παρατηρητής εξήγησε τι είναι το τυχόν τετράπλευρο και τους είπε την ονομασία.

•***<u>Τυχόν τετράπλευρο (2ο)</u>***

•10 μαθητές απάντησαν πως είναι τυχόν τετράπλευρο.

•6 μαθητές απάντησαν ότι είναι απλό τετράπλευρο.

• 4 μαθητές αρχικά απάντησαν πως είναι παραλληλόγραμμο, μετά από ερώτηση του ερευνητή «έχει παράλληλες πλευρές;», είπαν ότι είναι τυχόν τετράπλευρο.

•1 μαθητής αρχικά είπε ότι είναι παραλληλόγραμμο. Ο παρατηρητής τον ρώτησε αν το τετράπλευρο έχει παράλληλες πλευρές. Ο μαθητής απάντησε αρνητικά και ότι δεν θυμάται τι τετράπλευρο είναι. Του το είπε ο ερευνητής.

•1 μαθήτρια αρχικά είπε ότι είναι ρόμβος, γιατί έχει ίσες πλευρές. Μετά από ερώτηση του παρατηρητή αν είναι σίγουρη για την ισότητα των πλευρών, απάντησε πως το συγκεκριμένο τετράπλευρο έχει 2 συνεχόμενες ίσες πλευρές και ότι είναι απλό τετράπλευρο.

•1 μαθητής απάντησε ότι είναι ρόμβος (σταμάτησε εκεί).

•***<u>Τυχόν τετράπλευρο (3ο)</u>***

•14 μαθητές απάντησαν κατευθείαν ότι το τετράπλευρο που έφτιαξαν είναι τυχόν τετράπλευρο).

•1 μαθητής είπε πως δεν θυμάται.

•1 μαθήτρια πρώτα είπε πως είναι τετράγωνο, μετά παραλληλόγραμμο (σταμάτησε εκεί).

•6 μαθητές απάντησαν πως είναι απλό τετράπλευρο.

•1 μαθητής δεν το έφτιαξε.

• ***<u>Τυχόν τετράπλευρο (4ο)</u>***

•11 μαθητές απάντησαν κατευθείαν πως πρόκειται για τυχόν τετράπλευρο.

•3 μαθητές απάντησαν ότι είναι ένα σκέτο τετράπλευρο.

•2 μαθητές αρχικά είπαν ότι είναι παραλληλόγραμμο, αλλά το αναίρεσαν αμέσως και είπαν πως είναι τυχόν τετράπλευρο.

•3 μαθητές αρχικά είπαν ότι είναι παραλληλόγραμμο. Ο παρατηρητής τους ρώτησε αν το τετράπλευρο έχει παράλληλες πλευρές. Οι μαθητές απάντησαν αρνητικά και ότι δεν θυμούνται τι τετράπλευρο είναι. Τους το είπε ο ερευνητής.

•3 μαθητές δεν το έφτιαξαν.

<u>Τυχόν τετράπλευρο (5^{ο}).</u>

•13 μαθητές αναγνώρισαν κατευθείαν ότι είναι τυχόν τετράπλευρο.

•1 μαθητής είπε ότι είναι απλό τετράπλευρο.

•2 μαθητές αρχικά είπαν ότι είναι παραλληλόγραμμο. Ο παρατηρητής τους ρώτησε αν το τετράπλευρο έχει παράλληλες πλευρές. Οι μαθητές απάντησαν αρνητικά και ότι δεν θυμούνται τι τετράπλευρο είναι. Τους το είπε ο ερευνητής.

•7 μαθητές δεν το έφτιαξαν.

<u>Τυχόν τετράπλευρο (6ο).</u>

- 9 μαθητές είπαν πως είναι τυχόν τετράπλευρο.
- Οι υπόλοιποι 14 δεν το έφτιαξαν.

Πίνακας 9β (Πόσοι μαθητές είπαν το τετράπλευρο που έφτιαξαν τυχόν τετράπλευρο)

Β΄ ΟΜΑΔΑ

Συμπεριφορά	1ο	2ο	3ο	4ο	5ο	6ο
Τυχόν τετράπλευρο	0	10	14	14	13	9
Απλό τετράπλευρο	7	6	6	3	1	0
Λανθασμένη ονομασία	10	7	1	3	2	0
Δεν ξέρουν	6	0	1	0	0	0
Δεν το έφτιαξαν	0	0	1	3	7	14
Σύνολο	23	23	23	23	23	23

Γ) Ρόμβος

-8 μαθητές της α΄ ομάδας απάντησαν πως το τετράπλευρο έχει απέναντι γωνίες ίσες και όλες τις πλευρές ίσες. Και οι 8 αναφέρθηκαν στην παραλληλία των απέναντι πλευρών και στο ότι το τετράπλευρο ονομάζεται ρόμβος

-8 μαθητές απάντησαν πως το τετράπλευρο έχει απέναντι γωνίες ίσες και όλες τις πλευρές ίσες. Και οι 8 αναφέρθηκαν στην παραλληλία των απέναντι πλευρών, αλλά δεν γνώριζαν ότι το τετράπλευρο ονομάζεται ρόμβος. Τους το είπε ο ερευνητής.

-1 μαθητής ανέφερε σωστά τα χαρακτηριστικά και την παραλληλία, αλλά είπε πως είναι τετράγωνο. Ο παρατηρητής τον ρώτησε τα χαρακτηριστικά του τετραγώνου, αλλά ο μαθητής δεν απάντησε. Την απάντηση του την έδωσε ο ερευνητής.

Όσον αφορά στον δεύτερο ρόμβο, οι 16 είπαν αμέσως πως πρόκειται για ρόμβο, ενώ ο 1 δεν θυμόταν την ονομασία.

Πίνακας 10α (Πόσοι μαθητές είπαν το τετράπλευρο που έφτιαξαν ρόμβο)

Α΄ ΟΜΑΔΑ

Συμπεριφορά	**1ος ρόμβος**	**2ος ρόμβος**
Ρόμβος	8	16
Ίσα στοιχεία σωστά **Δεν θυμούνται ονομασία**	1	0
Ίσα στοιχεία σωστά **Λανθασμένη ονομασία**	8	1
Δεν το έφτιαξαν	0	0
Σύνολο	17	17

Στη β΄ ομάδα:

-5 μαθητές (από τους 22) αναγνώρισαν πως το τετράπλευρο που έφτιαξαν ονομάζεται ρόμβος. Οι 3 από αυτούς, είπαν πρώτα τα χαρακτηριστικά του ρόμβου -έχει τις απέναντι γωνίες ίσες και όλες τις πλευρές ίσες, επίσης έχει τις απέναντι πλευρές παράλληλες-και έπειτα είπαν την ονομασία. 1 μαθητής είπε τα ίσα χαρακτηριστικά και την παραλληλία δείχνοντάς τα ταυτόχρονα και μετά είπε την ονομασία. 1 μαθητής αρχικά είπε ότι το τετράπλευρο λέγεται ρόμβος γιατί έχει όλες τις πλευρές ίσες και τις απέναντι γωνίες ίσες. Την παραλληλία την ανέφερε μετά από ερώτηση του παρατηρητή «έχει τίποτε άλλο;».

-1 μαθήτρια είπε ότι το τετράπλευρο έχει τις απέναντι γωνίες ίσες και όλες τις πλευρές ίσες, επίσης έχει τις απέναντι πλευρές παράλληλες. Την ονομασία την είπε μετά από ερώτηση του παρατηρητή «τι τετράπλευρο είναι αυτό;».

-5 μαθητές αρχικά είπαν πως το τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο. Ο παρατηρητής τους ζήτησε να του πουν τα χαρακτηριστικά. Οι 2 μαθητές είπαν ότι το τετράπλευρο έχει τις απέναντι γωνίες ίσες και όλες τις πλευρές ίσες, επίσης έχει τις απέναντι πλευρές παράλληλες. Όταν ο παρατηρητής τους ρώτησε τι παραλληλόγραμμο είναι αυτό τότε απάντησαν ότι είναι ρόμβος. Δύο μαθητές είπαν πως το τετράπλευρο έχει τις απέναντι πλευρές και τις απέναντι γωνίες ίσες και τις απέναντι πλευρές παράλληλες δείχνοντας ταυτόχρονα τα ίσα στοιχεία. Ο παρατηρητής τους ρώτησε «μόνο οι απέναντι πλευρές είναι ίσες;». Τότε οι μαθητές διαπίστωσαν πως όλες οι πλευρές είναι ίσες. Ο παρατηρητής τους ρώτησε «πως λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει όλες τις πλευρές ίσες;». Τότε οι μαθητές απάντησαν πως πρόκειται για τον ρόμβο. Τέλος, 1 μαθητής είπε ότι το τετράπλευρο έχει τις απέναντι γωνίες ίσες και όλες τις πλευρές ίσες, επίσης έχει τις απέναντι πλευρές παράλληλες και ότι είναι παραλληλόγραμμο. Ο παρατηρητής του επισήμανε ότι αυτό το παραλληλόγραμμο -όπως και ο ίδιος ανέφερε-έχει όλες τις πλευρές ίσες και τον ρώτησε πως ονομάζεται το παραλληλόγραμμο που έχει όλες τις πλευρές ίσες. Τότε ο μαθητής απάντησε πως λέγεται ρόμβος.

-3 μαθητές αρχικά είπαν πως το τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο. Ο παρατηρητής τους ζήτησε να του πουν τα χαρακτηριστικά. Οι 2 μαθήτριες είπαν ότι το τετράπλευρο έχει τις απέναντι γωνίες ίσες και όλες τις πλευρές ίσες, επίσης έχει τις απέναντι πλευρές παράλληλες. Όταν ο παρατηρητής τους ρώτησε τι παραλληλόγραμμο είναι αυτό τότε δεν απάντησαν (τους το είπε ο παρατηρητής). Ένας μαθητής είπε πως το τετράπλευρο έχει τις απέναντι πλευρές, τις απέναντι γωνίες ίσες και τις απέναντι πλευρές παράλληλες. Ο παρατηρητής τον ρώτησε «μόνο οι απέναντι πλευρές είναι ίσες;». Τότε ο μαθητής διαπίστωσε πως όλες οι πλευρές είναι ίσες. Ο παρατηρητής τον ρώτησε «πως λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει όλες τις πλευρές ίσες;». Ο μαθητής δεν απάντησε (του το είπε ο παρατηρητής).

-5 μαθήτριες είπαν ότι το τετράπλευρο έχει τις απέναντι γωνίες ίσες και όλες τις πλευρές ίσες, επίσης έχει τις απέναντι πλευρές παράλληλες. Όταν ο παρατηρητής τους ρώτησε τι τετράπλευρο είναι αυτό, οι μαθητές δεν απάντησαν (τους το είπε ο παρατηρητής).

-1 μαθητής αρχικά είπε ότι είναι τυχόν τετράπλευρο Ο παρατηρητής του ζήτησε να πει τα ίσα στοιχεία. Ο μαθητής είπε ότι το τετράπλευρο έχει τις απέναντι γωνίες ίσες και όλες τις πλευρές ίσες. Ο παρατηρητής τον ρώτησε τι άλλο έχει και ο μαθητής ανέφερε την παραλληλία των πλευρών. Όταν τον ξαναρώτησε τι τετράπλευρο είναι ο μαθητής δεν απάντησε (του το είπε ο παρατηρητής).

-1 μαθήτρια είπε ότι το τετράπλευρο έχει τις απέναντι πλευρές και τις απέναντι γωνίες ίσες, καθώς και τις απέναντι πλευρές παράλληλες. Ο παρατηρητής την ρώτησε «μόνο οι απέναντι πλευρές είναι ίσες;». Τότε η μαθήτρια διαπίστωσε πως όλες οι πλευρές είναι ίσες. Ο παρατηρητής την ρώτησε «πως λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει όλες τις πλευρές ίσες;». Η μαθήτρια δεν απάντησε (της το είπε ο παρατηρητής).

-1 μαθητής είπε ότι το τετράπλευρο έχει τις απέναντι πλευρές και τις απέναντι γωνίες ίσες, καθώς και τις απέναντι πλευρές παράλληλες. Ο παρατηρητής τον ρώτησε «μόνο οι απέναντι πλευρές είναι ίσες;». Τότε ο μαθητής διαπίστωσε πως όλες οι πλευρές είναι ίσες. Ο παρατηρητής τον ρώτησε «πως λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει όλες τις πλευρές ίσες;». Ο μαθητής δεν απάντησε (του το είπε ο παρατηρητής).

<u>Ρόμβος (2^{ος})</u>

-17 από τους 22 μαθητές ξαναέφτιαξαν τον ρόμβο και τον αναγνώρισαν αμέσως. Οι υπόλοιποι 5 δεν τον έφτιαξαν.

Πίνακας 10β (Πόσοι μαθητές είπαν το τετράπλευρο που έφτιαξαν ρόμβο)

Β΄ ΟΜΑΔΑ

Συμπεριφορά	1ος ρόμβος	2ος ρόμβος
Ρόμβος	6	17

Αρχ.λανθ.ονομασία, έπειτα ρόμβος	5	0
Ίσα στοιχεία σωστά Δεν θυμούνται ονομασία	7	0
Ίσα στοιχεία σωστά Λανθασμένη ονομασία	4	0
Δεν το έφτιαξαν	0	5
Σύνολο	22[21]	22

3. Σε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, οι διαγώνιοι είναι ίσες

Είχε δοθεί στους μαθητές ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο σε ένα φύλλο χαρτί με σχεδιασμένη τη μια διαγώνιο. Πρώτα ζητήθηκε από τους μαθητές να φέρουν την άλλη διαγώνιο και μετά να κάνουν παρατηρήσεις για τις διαγωνίους του ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Μας ενδιέφερε να αναγνωρίσουν οι μαθητές ότι οι διαγώνιοι του ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι ίσες. Όλοι οι μαθητές το διαπίστωσαν αυτό, άλλοι κατευθείαν και άλλοι μετά από διάφορες άλλες, σωστές απαντήσεις. Αξίζει επίσης να δούμε τι είπαν αρχικά αυτοί που δεν το διαπίστωσαν κατευθείαν:

•11 μαθητές απάντησαν κατευθείαν ότι *οι διαγώνιοι είναι ίσες.*

•1 μαθήτρια είπε *ότι είναι ίσες και συναντιούνται στη μέση.*

•1 μαθήτρια είπε *ότι είναι ίσες και φτιάχνουν 4 τρίγωνα.*

•6 μαθητές απάντησαν ότι οι διαγώνιοι είναι ίσες με την δεύτερη προσπάθεια. Ο παρατηρητής στην περίπτωση αυτή, μετά την πρώτη απάντησή τους, τους ρωτούσε «τι άλλο παρατηρείς για τις διαγώνιους;». Έτσι, είχαμε απαντήσεις όπως: *«ενώνονται στη μέση», «κόβουνε το τρίγωνο σε 4 τρίγωνα», «φτιάχνουν 4 τρίγωνα», «φτιάχνουν 2 ίσα τρίγωνα από εδώ και 2 ίσα τρίγωνα από την άλλη», «φτιάχνουν γωνίες», «είναι χιαστές».*

•1 μαθήτρια έδωσε αρχικά λανθασμένη απάντηση: οι διαγώνιοι είναι παράλληλες. Στην περίπτωση αυτή παρενέβη ο παρατηρητής και την ρώτησε «ποιες ευθείες ονομάζονται παράλληλες;». Η μαθήτρια απάντησε πως παράλληλες είναι οι ευθείες που δεν συναντιούνται. Ο παρατηρητής την ρώτησε «αυτές οι διαγώνιοι συναντιούνται;». Η μαθήτρια απαντάει θετικά και είπε πως οι διαγώνιοι δεν είναι παράλληλες, είναι όμως ίσες.

•1 μαθητής έδωσε αρχικά 2 απαντήσεις πριν πει ότι είναι ίσες*: έχουν σχηματίσει τρίγωνα, ενώνονται στη μέση.*

•Τέλος, 1 μαθητής έδωσε 4 απαντήσεις*: «ενώνουν τις 2 γωνίες* (δείχνει τις κατακορυφήν)*», «χωρίζει το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο σε 4 τρίγωνα», «σχηματίζουν 2 οξείες γωνίες», «είναι ίσες».*

[21] Σε μια μαθήτρια δεν δόθηκε ζεύγος ισοσκελών τριγώνων.

4. Σε ένα παραλληλόγραμμο, οι διαγώνιοι διχοτομούνται.

Αφού οι μαθητές διαπίστωσαν ότι οι διαγώνιοι είναι ίσες, ο παρατηρητής τους ρώτησε που συναντιούνται οι διαγώνιοι. Σε αυτή την ερώτηση είχαμε 3 κατηγοριών απαντήσεις:

α) 13 μαθητές απάντησαν ότι οι διαγώνιοι *ενώνονται* *στη μέση* και δείχνουν με το μολύβι τους το σημείο τομής των διαγωνίων (1 μαθήτρια είπε ότι *ενώνονται* *στο μέσον).*

β) 6 μαθητές απάντησαν ότι οι διαγώνιοι *ενώνονται* *στο κέντρο* και δείχνουν το σημείο τομής των διαγωνίων.

γ) 4 μαθητές απλώς έδειξαν το σημείο τομής των διαγωνίων.

Ακολούθησε η ερώτηση «πόσα τμήματα φτιάχνουν οι διαγώνιοι με την ένωσή τους στο κέντρο;» και «τι παρατηρείς γι' αυτά τα τμήματα;»

Όλοι οι μαθητές απάντησαν ότι *οι διαγώνιοι φτιάχνουν 4 τμήματα και ότι αυτά είναι μεταξύ τους ίσα.1 μαθητής μάλιστα είπε: «είναι 4 ίσα ευθύγραμμα τμήματα».*

5.2.2 Ικανότητα των μαθητών να επεκτείνουν επαγωγικά τις ιδιότητες τις οποίες ανακαλύπτουν.

Α) Τρίγωνα

Οι ιδιότητες που μπόρεσαν οι μαθητές να επεκτείνουν επαγωγικά είναι: α) τα ίσα στοιχεία των τριγώνων β) αν μπορούν τα άλλα 2 ισοσκελή τρίγωνα να χωριστούν σε 2 ίσα γ) τι θα ισχύει (ίσο) στα τρίγωνα αυτά. Μάλιστα, στους μαθητές της Β΄ ομάδας δόθηκε ένα σκαληνό τρίγωνο και ρωτήθηκαν αν μπορούν να το χωρίσουν σε 2 ίσα τρίγωνα.

Όταν δόθηκε στους μαθητές το 2ο ισοσκελές οξυγώνιο τρίγωνο, τους ζητήθηκε να προβλέψουν αν το τρίγωνο μπορεί να χωριστεί σε 2 ίσα τρίγωνα. Όλοι οι μαθητές απάντησαν ότι μπορεί. Κατόπι, ζητήθηκε από τους μαθητές να προβλέψουν «τι πράγματα απ' αυτά που βρήκαμε ίσα στο πρώτο τρίγωνο είναι ίσα και στο δεύτερο;». Οι μαθητές αναφέρθηκαν σε ισότητες γωνιών και πλευρών:

-2 από τους 17 μαθητές της α΄ ομάδας, έδωσαν απαντήσεις που αναφέρονταν στο πλήθος των ίσων γωνιών και πλευρών (π.χ. *«...πάλι θα έχουν ίσες τις 3 πλευρές και τις 3 γωνίες...»).*

-Άλλοι 2 προσδιόρισαν στις εκφράσεις τους το που ανήκουν οι πλευρές και οι γωνίες στις οποίες αναφέρονται. (π.χ. *« ...τα 2 τρίγωνα που θα γίνουν θα έχουν ίσες τις πλευρές και τις γωνίες τους...»*).

-13 μαθητές έδωσαν απαντήσεις που δεν προσδιόριζαν ούτε το που ανήκουν οι πλευρές και οι γωνίες ούτε το πλήθος τους (π.χ. *«Όλα, οι γωνίες και οι πλευρές», «Οι γωνίες και οι πλευρές θα είναι ίσες «, «Όλα όσα είπαμε στο πρώτο, θα έχει ίσες πλευρές και γωνίες»).*

Στην Β΄ ομάδα, όλοι οι μαθητές έδωσαν την απάντηση: *«οι γωνίες και οι πλευρές».*

Στη συνέχεια ζητήθηκε από τους μαθητές να προσδιορίσουν τι ίσα στοιχεία έχουν ίσα τα 2 ίσα τρίγωνα στα οποία χωρίσθηκε το δεύτερο ισοσκελές.

Όλοι οι μαθητές της Α΄ ομάδας προσδιόρισαν χωρίς δυσκολία όλες τις ίσες πλευρές και τις ίσες γωνίες του σχήματος. Ωστόσο, και εδώ οι περισσότεροι μαθητές δείχνουν τα ίσα στοιχεία των 2 τριγώνων με το δάχτυλο και συνοδεύουν την κατάδειξη με ελλειπτικές λεκτικές εκφράσεις.

Η **συμπεριφορά των μαθητών δείχνει ότι με ευκολία μεταφέρουν στο δεύτερο ισοσκελές τις ιδιότητες που ανακάλυψαν στο πρώτο ισοσκελές**.

Από τη Β΄ ομάδα 19 μαθητές προσδιόρισαν αμέσως όλες τις ίσες πλευρές και τις ίσες γωνίες του σχήματος, ενώ οι άλλοι 4 χρειάστηκαν την παρέμβαση του παρατηρητή για να εντοπίσουν όλα τα στοιχεία (ο παρατηρητής ρώτησε αν υπάρχουν και άλλα ίσα στοιχεία των 2 τριγώνων).

Οι δυνατότητες των μαθητών στο να επεκτείνουν επαγωγικά ιδιότητες τις οποίες ανακαλύπτουν εμφανίζονται και στις δραστηριότητες που αφορούν στο τρίτο ισοσκελές τρίγωνο.

Το τρίτο ισοσκελές τρίγωνο που τους δόθηκε ήταν αμβλυγώνιο. Ο παρατηρητής ρώτησε τους μαθητές αν το τρίγωνο αυτό μπορεί να χωρισθεί σε 2 ίσα τρίγωνα. Όλοι οι μαθητές απάντησαν καταφατικά Στην συνέχεια ο παρατηρητής ρώτησε τι ίσα πράγματα βλέπουν να έχουν τα 2 ίσα τρίγωνα. Εδώ οι μαθητές έπρεπε να φαντασθούν την ευθεία που χωρίζει το τρίγωνο σε 2 ίσα τρίγωνα και να περιγράψουν τα ίσα στοιχεία 2 τριγώνων που δεν ήταν ορατά στο σχήμα:

-Οι 15 από τους 17 μαθητές της πρώτης ομάδας και οι 22 από τους 23 της δεύτερης, προσδιόρισαν σωστά όλα τα ίσα στοιχεία των 2 τριγώνων.

Για ορισμένα απ' αυτά (κοινή πλευρά, γωνίες στο μέσο της βάσης,...) οι 11 μαθητές της πρώτης ομάδας και οι 19 της δεύτερης, «έδειξαν» με το δάχτυλο την νοητή ευθεία που χωρίζει το ισοσκελές ή το νοητό μέσο της βάσης. Μόνο 1 μαθητής στους 17 ανέφερε τις γωνίες στο μέσο τις βάσης ως ορθές, αλλά κανένας από τους 23.

-2 από τους 17 μαθητές δεν αναγνώρισαν τις γωνίες στο μέσο της βάσης στην πρώτη τους απόπειρα..

Στην συνέχεια ο παρατηρητής έκανε μία πρώτη παρέμβαση στον πρώτο μαθητή και τον ρώτησε πόσες γωνίες έχει ένα τρίγωνο και αν τις έχει βρει όλες. Η παρέμβαση αυτή ήταν αρκετή ώστε ο μαθητής αυτός να δώσει την σωστή απάντηση. Στον δεύτερο μαθητή έκανε την προηγούμενη ερώτηση και επειδή ο μαθητής δυσκολεύτηκε ξανά, ο παρατηρητής του ζήτησε να σκεφθεί την νοητή ευθεία που χωρίζει το μεγάλο τρίγωνο σε 2 ίσα . Μετά απ' αυτή την παρέμβαση και οι 2 μαθητές εντόπισαν και ανέφεραν τις ίσες γωνίες στο μέσο της βάσης. Στη μια μαθήτρια από τους 23 που δεν αναγνώρισε αρχικά την κοινή πλευρά, της έγινε η πρώτη παρέμβαση και την αναγνώρισε αμέσως.

Στους μαθητές της Β΄ ομάδας δόθηκε ένα σκαληνό τρίγωνο και ρωτήθηκαν αν μπορούν να το χωρίσουν σε 2 ίσα τρίγωνα. Με αυτή την ερώτηση θέλαμε να διαπιστώσουμε αν οι μαθητές θεωρούν δεδομένο ότι όλα τα τρίγωνα χωρίζονται σε 2 άλλα ίσα. Την πιθανότητα της υπερεπαγωγής την ελέγξαμε και για άλλες περιπτώσεις (βλ. παρακάτω, παρ. 5.2.2 Α, 5.4 Α, 5.4 ΣΤ).

-13 μαθητές είπαν πως το τρίγωνο δεν μπορεί να χωριστεί γιατί δεν είναι ισοσκελές.

-9 μαθητές αρχικά είπαν πως μπορούν να φέρουν την ευθεία και να το χωρίσουν σε 2 ίσα τρίγωνα, αλλά μόλις την έφεραν αναίρεσαν την αρχική απάντησή τους και είπαν πως το τρίγωνο δεν είναι ισοσκελές.

-1 μαθήτρια είπε πως το τρίγωνο χωρίζεται και επέμενε στην απάντησή της και μετά το χωρισμό του τριγώνου.

Β) Τετράπλευρα

Όπως είδαμε από τους πίνακες 8α και β (παρ. 5.2.1), οι μαθητές και των 2 ομάδων επέκτειναν επαγωγικά τις ιδιότητες που είχαν ανακαλύψει στο 1^o πλάγιο παραλληλόγραμμο και έτσι αναγνώρισαν τα υπόλοιπα παραλληλόγραμμα που έφτιαξαν.

5.3 Ερώτημα 3ο: Μπορούν οι μαθητές να «δουν» τις αναλογίες με προηγούμενες καταστάσεις και να κάνουν υποθετικο-απαγωγικούς συλλογισμούς;

Στην ερώτηση του παρατηρητή «σε ποια περίπτωση αν ενώσουμε 2 ίσα τρίγωνα, θα φτιάξουμε πάλι τρίγωνο», οι μαθητές έδωσαν ποικίλες απαντήσεις. Βέβαια, σ' αυτή την ερώτηση αναμέναμε να απαντήσουν με μεγαλύτερη ευκολία οι μαθητές που γνώριζαν τι είναι ορθή γωνία. Πραγματικά, η στατιστική επεξεργασία έδειξε ότι οι απαντήσεις στη διατύπωση ορισμού της ορθής γωνίας, συσχετίζεται με την εύρεση σωστής απάντησης στο παραπάνω ερώτημα. (0,049).

Αναλυτικότερα:

-5 μαθητές της α΄ ομάδας, απάντησαν αμέσως πως τα τρίγωνα θα πρέπει να έχουν ορθές γωνίες και αιτιολόγησαν τις απαντήσεις τους ως εξής:

(α) τρίγωνα που έχουν ορθή γωνία, γιατί όταν ενωθούν τα 2 τρίγωνα θα ενωθεί μια ευθεία με μια κάθετη. ***Όταν χωρίζεται ένα τρίγωνο σε 2 ίσα μέρη, παίρνουμε τρίγωνα με ορθή γωνία.***

(β) να έχει το καθένα μια ορθή γωνία, γιατί αν πάρουμε ένα ισοσκελές τρίγωνο και το χωρίσουμε σε 2 ίσα τρίγωνα, θα σχηματιστούν τρίγωνα με ορθές γωνίες. ***Οι κάθετες πλευρές των γωνιών ενώνονται και οι 2 πλευρές των γωνιών θα είναι σε ευθεία.***

(γ), (δ) τρίγωνα που έχουν ορθή γωνία, γιατί οι ορθές φτιάχνουν από κάτω ευθεία.

(ε) τα τρίγωνα θα πρέπει να έχουν ορθή γωνία: ***είναι σαν να έχω φτιάξει ένα τρίγωνο και το χώρισα στη μέση****…οι πλευρές των ορθών γωνιών βρίσκονται σε ευθεία γι' αυτό φτιάχνουμε τρίγωνο.*

-4 μαθητές, καθυστερημένα, αλλά με δική τους προσπάθεια, είπαν πως τα τρίγωνα θα πρέπει να έχουν ορθές γωνίες και αιτιολόγησαν την απάντησή τους:

*(α) Να είναι ισοσκελές…να έχουν 3 πλευρές…****να είναι σαν το χαρτί που έφτιαχνα, να είναι η βάση****…τα τρίγωνα πρέπει να έχουν ορθή γωνία,* ***γιατί οι πλευρές των ορθών γωνιών φτιάχνουν ευθεία****.*

(β) Να είναι ισοσκελές…η μια τους γραμμή να είναι κάθετη…οι γραμμές τους να φτιάχνουν ευθεία…να έχουν ορθές γωνίες…θα μεγαλώσει έτσι η γωνία και θα γίνει 180^0 και θα φτιαχτεί ευθεία.

(γ) Να είναι ίσια…να έχουν το ίδιο άνοιγμα οι γωνίες τους…να έχουν ορθές γωνίες.

(δ) Πρέπει να έχουν γωνία βάση…να έχουν κάθετη γωνία…να έχουν ορθές γωνίες ***γιατί θα φτιάξουν τη βάση του μεγάλου τριγώνου.***

-7 μαθητές είπαν πως τα τρίγωνα θα πρέπει να έχουν ορθές γωνίες μετά από παρέμβαση του παρατηρητή και μερικοί από αυτούς αιτιολόγησαν την απάντησή τους:

•2 είπαν αρχικά πως *τα τρίγωνα πρέπει να είναι ισόπλευρα.* Ο παρατηρητής τους έδωσε ένα ζευγάρι ισόπλευρων τριγώνων και διαπίστωσαν πως δεν φτιάχνεται με αυτά τρίγωνο. Και οι 2 αμέσως μετά απάντησαν *πως τα τρίγωνα θα πρέπει να έχουν ορθή γωνία.* Ο ένας το αιτιολόγησε λέγοντας πως είναι ***σαν να έχουμε ένα μεγάλο τρίγωνο και το κόβουμε στη μέση.*** *Οι πλευρές των ορθών γωνιών είναι σε ευθεία.* Ο άλλος είπε πως τα τρίγωνα *πρέπει να έχουν ορθή γωνία,* ***γιατί έτσι οι πλευρές των ορθών γωνιών βρίσκονται σε ευθεία.***

•3 μαθητές αρχικά έλεγαν διάφορες λανθασμένες απαντήσεις και απάντησαν αφού τους δόθηκαν να ενώσουν ζεύγη ορθογωνίων τριγώνων:

(α) Να έχουν 3 γωνίες…ίσες βάσεις. Οι γωνίες θα πρέπει να είναι παράλληλες…(σε αυτό το σημείο του δόθηκε ένα ζεύγος από ορθογώνια ισοσκελή τρίγωνα). Τότε είπε*: να έχει ίσες πλευρές. Όχι, η βάση πρέπει να αλλάξει και οι 2 πλευρές να γίνουν μια, θα πρέπει γι' αυτό να έχουν ορθή γωνία.*

(β) Θα πρέπει να έχει 3 γωνίες…να είναι ισοσκελή…δεν ξέρω (σε αυτό το σημείο του δόθηκε ένα ζεύγος από ορθογώνια ισοσκελή τρίγωνα). Τότε είπε: *θα πρέπει να φτιάχνουν ευθεία, να έχουν ορθές γωνίες.*

(γ) Πρέπει να είναι ίσια προς τα κάτω…να έχουν γωνίες παραλληλόγραμμες (σε αυτό το σημείο του δόθηκε ένα ζεύγος από ορθογώνια ισοσκελή τρίγωνα). Τότε είπε: *να έχουν ορθές γωνίες, γιατί έτσι φτιάχνουν τη βάση.*

•2 μαθητές αρχικά δεν έδωσαν καμμιά απάντηση. Όταν ο παρατηρητής τους έδωσε ζεύγος ισοσκελών ορθογωνίων τριγώνων, τότε βρήκαν πως τα τρίγωνα θα πρέπει να έχουν ορθές γωνίες:

(α) Πρέπει να έχουν ορθή γωνία γιατί τότε φτιάχνεται η ευθεία, η βάση του μεγάλου τριγώνου.

(β) Τα τρίγωνα πρέπει να έχουν από μια ορθή γωνία, γιατί τότε φτιάχνουν μια ευθεία, τη βάση του μεγάλου τριγώνου.

-Τέλος, 1 μαθητής δεν μίλησε καθόλου παρόλο που του δώσαμε 2 ζεύγη από διαφορετικά ορθογώνια τρίγωνα (σκαληνά και ισοσκελή).

Πίνακας 11α (πόσοι και πως βρήκαν ποια ίσα τρίγωνα όταν ενωθούν φτιάχνουν τρίγωνο)

Α΄ ΟΜΑΔΑ

Συμπεριφορά	**Μαθητές**
Αμέσως	5
Μετά από δική τους προσπάθεια (χωρίς πείραμα και χωρίς	4

βοήθεια	
Μετά από παρέμβαση	7
Δεν το βρήκαν	1
Σύνολο	17

Όσον αφορά στη β΄ ομάδα, υπήρξαν μαθητές που σε αυτό το ερώτημα, βρήκαν την απάντηση αμέσως ή μετά από λίγο χρόνο, μαθητές που χρειάστηκε να τους δοθεί και ένα ζευγάρι από σκαληνά ορθογώνια για να βρουν την απάντηση και μαθητές που αφού τους δόθηκε το ζευγάρι με τα σκαληνά ορθογώνια δεν κατόρθωσαν να βρουν την απάντηση. Τελικά με ή χωρίς παρέμβαση 14 από τους 23 μαθητές κατόρθωσαν να βρουν την απάντηση. Ας δούμε αναλυτικότερα τι έγινε:

•1 μαθητής μόνο απάντησε κατευθείαν *ότι για να φτιάξουμε τρίγωνο από τρίγωνα θα πρέπει τα τρίγωνα να έχουν ορθές γωνίες,* ***γιατί έτσι φτιάχνουν την κάτω πλευρά***.

•4 μαθητές φαντάστηκαν τα 2 τρίγωνα ενωμένα που κάνουν ένα μεγάλο τρίγωνο και είπαν πως τα 2 αυτά τρίγωνα *θα πρέπει να φτιάχνουν μία γραμμή από κάτω, ένα ισοσκελές.* Ο παρατηρητής τους ρώτησε τι τρίγωνα είναι αυτά που όταν τα ενώσουμε φτιάχνουν ένα ισοσκελές και αμέσως οι 2 μαθητές απάντησαν *πως θα πρέπει να έχουν ορθές γωνίες.* Οι άλλοι 2 αρχικά είπαν πως *θα πρέπει να έχουν ίσες πλευρές* (ο παρατηρητής τους έδωσε ένα ζευγάρι από ισόπλευρα τρίγωνα και διαπίστωσαν ότι έκαναν λάθος) και έπειτα, είπαν πως *θα πρέπει να είναι ορθογώνια.*

•4 μαθητές αρχικά είπαν αρχικά πως τα τρίγωνα *θα πρέπει να είναι ίσα* (ο παρατηρητής τους υπενθύμισε πως και τα προηγούμενα ήταν ίσα αλλά δεν έφτιαχναν τρίγωνο). Μετά φαντάστηκαν τα 2 τρίγωνα ενωμένα που κάνουν ένα μεγάλο τρίγωνο και είπαν πως τα 2 αυτά τρίγωνα *θα πρέπει να φτιάχνουν μία γραμμή από κάτω.* Ο παρατηρητής τους ρώτησε τι τρίγωνα είναι αυτά που όταν τα ενώσουμε φτιάχνουν μια γραμμή από κάτω και απάντησαν κατευθείαν *πως τα τρίγωνα θα πρέπει να είναι ορθογώνια.*

•3 μαθητές φαντάστηκαν τα 2 τρίγωνα ενωμένα που κάνουν ένα μεγάλο τρίγωνο και είπαν πως τα 2 αυτά τρίγωνα *θα πρέπει να φτιάχνουν μία γραμμή από κάτω.* Ο παρατηρητής τους ρώτησε τι τρίγωνα είναι αυτά που όταν τα ενώσουμε φτιάχνουν μια γραμμή από κάτω, και αυτοί έδωσαν λανθασμένη απάντηση. Η μια είπε πως δεν μπορεί να σκεφτεί κάτι. Ο δεύτερος και η ο τρίτος είπαν *πως τα τρίγωνα θα πρέπει να έχουν ίσες γωνίες* (ο παρατηρητής τους υπενθύμισε πως και τα προηγούμενα ήταν ίσα αλλά δεν έφτιαχναν τρίγωνο). Ο παρατηρητής τους έδωσε ορθογώνια σκαληνά. Ο ένας δεν μπόρεσε να δώσει καμιά απάντηση, ενώ οι άλλες 2 το βρήκαν όχι όμως αμέσως: η μια αρχικά είπε *πως το τρίγωνο που θα φτιαχτεί θα πρέπει να είναι ισοσκελές* (ο παρατηρητής τη ρώτησε τι τρίγωνα είναι αυτά που όταν τα ενώσουμε φτιάχνουν ένα ισοσκελές) και τότε το βρήκε. Η άλλη είπε αρχικά πως τα τρίγωνα *θα πρέπει να έχουν παράλληλες γωνίες* και μετά είπε για ορθές.

•1 μαθήτρια αρχικά δεν έδωσε καμιά απάντηση. Όταν ο παρατηρητής της έδωσε το ζευγάρι των ορθογωνίων σκαληνών τότε απάντησε πως *τα τρίγωνα θα πρέπει να έχουν αμβλείες γωνίες*. Ο παρατηρητής την ρώτησε αν είναι σίγουρη γι' αυτό που είπε και εκείνη απάντησε πως έκανε λάθος. Διορθώνοντάς το, απάντησε πως *τα τρίγωνα θα πρέπει να έχουν ορθές γωνίες*.

•4 μαθητές δίνουν αρχικά 2 λανθασμένες απαντήσεις. Η μια, είπε ότι τα τρίγωνα *θα πρέπει να έχουν ίσες πλευρές* (ο παρατηρητής της υπενθύμισε πως και τα προηγούμενα ήταν ίσα αλλά δεν έφτιαχναν τρίγωνο) και ότι θα πρέπει να έχουν παράλληλες πλευρές. Ο άλλος είπε πως τα τρίγωνα *θα πρέπει να είναι ίσα και* (ο παρατηρητής του υπενθύμισε πως και τα προηγούμενα ήταν ίσα αλλά δεν έφτιαχναν τρίγωνο) *μετά ότι θα πρέπει οι απέναντι πλευρές του τριγώνου να είναι ίσες*. Η άλλη είπε ότι θα πρέπει να έχουν 3 πλευρές ίσες και μετά ξαναείπε το ίδιο λέγοντας πως *τα τρίγωνα θα πρέπει να είναι ίσα* (ο παρατηρητής της υπενθύμισε πως και τα προηγούμενα ήταν ίσα αλλά δεν έφτιαχναν τρίγωνο).Ο τέταρτος είπε αρχικά πως τα τρίγωνα *θα πρέπει να είναι ίσα* (ο παρατηρητής του υπενθύμισε πως και τα προηγούμενα ήταν ίσα αλλά δεν έφτιαχναν τρίγωνο) και μετά είπε *πως τα τρίγωνα δεν θα πρέπει να πηγαίνουνε λοξά*. Μετά την παρέμβαση του παρατηρητή (ο οποίος τους έδωσε σκαληνά ορθογώνια), οι 2 από αυτούς είπαν κατευθείαν πως τα τρίγωνα *θα πρέπει να έχουν ορθές γωνίες*, ο 1 έδωσε πάλι λανθασμένη απάντηση λέγοντας πως το τρίγωνο *θα πρέπει να είναι ισοσκελές* και ο άλλος δεν έδωσε καμιά απάντηση.

•1 μαθήτρια φαντάστηκε τα 2 τρίγωνα ενωμένα που κάνουν ένα μεγάλο τρίγωνο και είπε πως τα 2 αυτά τρίγωνα *θα πρέπει να φτιάχνουν μία γραμμή από κάτω,* αλλά δεν ήξερε το πως. Δεν έδωσε καμιά απάντηση ούτε όταν της δόθηκαν τα σκαληνά ορθογώνια.

•3 μαθητές απέτυχαν και στην πρώτη και στην δεύτερή τους προσπάθεια. Αρχικά αναφέρουν πως τα *τρίγωνα πρέπει να είναι ίσα, να έχουν ίσες πλευρές και γωνίες*. Ο παρατηρητής τους έδωσε τα οξυγώνια τρίγωνα που είχαν χρησιμοποιήσει προηγουμένως και τους είπε πως και εκείνα είναι ίσα. Μετά από αυτή την παρέμβαση, η μια μαθήτρια είπε πως δεν γνωρίζει, ο 1 απάντησε πως δεν γίνεται από 2 τρίγωνα να πάρουμε τρίγωνο και ο τρίτος, δεν έδωσε καμιά απάντηση. Σε αυτούς, ο παρατηρητής έδωσε ένα ζευγάρι από σκαληνά ορθογώνια. Η μια απάντησε πως τα τρίγωνα *θα πρέπει να έχουν οξείες γωνίες*, ο άλλος απάντησε ξανά ότι *τα τρίγωνα έχουν ίσες γωνίες,* τις οποίες μετά τις ονόμασε *παράλληλες* και κατόπιν *ισόπλευρες*. Ο άλλος είπε πως δεν μπορεί να απαντήσει.

•1 μαθητής αρχικά είπε πως τα τρίγωνα *θα πρέπει να είναι ίσα* (ο παρατηρητής του υπενθύμισε πως και τα προηγούμενα ήταν ίσα αλλά δεν έφτιαχναν τρίγωνο), μετά είπε πως *θα πρέπει να φτιάχνουν μια γραμμή από κάτω* (ο παρατηρητής τον ρώτησε τι τρίγωνα είναι αυτά που όταν τα ενώσουμε φτιάχνουν μια γραμμή από κάτω) και τέλος είπε πως *θα πρέπει να έχουν 3 γωνίες*. Όταν ο παρατηρητής του έδωσε τα ορθογώνια σκαληνά είπε πως τα τρίγωνα για να φτιάξουν τρίγωνο *θα πρέπει να έχουν οξείες ή αμβλείες*.

•1 μαθήτρια δεν έδωσε καμιά απάντηση, ούτε και όταν της δόθηκε ζευγάρι από ορθογώνια σκαληνά.

Πίνακας 11β (πόσοι και πως βρήκαν ποια ίσα τρίγωνα όταν ενωθούν φτιάχνουν τρίγωνο)

Β΄ ΟΜΑΔΑ

Συμπεριφορά	Μαθητές
Αμέσως	1
Μετά από δική τους προσπάθεια	6
Μετά από παρέμβαση	7
Δεν το βρήκαν	9
Σύνολο	23

5.4 Ερώτημα 4ο: Μπορούν οι μαθητές να κάνουν τους απαραίτητους συλλογισμούς ώστε να μετασχηματίσουν τις ιδιότητες που ανακαλύπτουν σε κατασκευαστικές διαδικασίες, προκειμένου να αντιμετωπίσουν προβλήματα κατασκευών ;[22]

Α) Κατασκευή περιγεγραμμένου κύκλου ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

Κατά την 1η κατασκευαστική δραστηριότητα οι μαθητές κλήθηκαν να φέρουν γύρω από το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ένα κύκλο ο οποίος να περνάει από τις 4 κορυφές του. Η κατασκευή αυτή **αποδείχθηκε εύκολη** για τους **μαθητές**, δεδομένου ότι πρώτα **είχαν προετοιμαστεί κατάλληλα** (βλ. γ΄ δραστηριότητα, παρ. 4.4.1).

Όλοι οι μαθητές πήραν ως κέντρο το σημείο τομής των διαγωνίων (Ο) και με ακτίνα ΟΓ έφεραν τον κύκλο ο οποίος περνούσε από τις 4 κορυφές του ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Μετά από την κατασκευή τους, ο παρατηρητής τους ρώτησε: «γιατί ο κύκλος πέρασε και από τις 4 κορυφές του ορθογωνίου παραλληλογράμμου;». Οι 22 από τους 23 μαθητές αιτιολόγησαν την απάντησή τους (1 μαθήτρια δεν μπόρεσε να το αιτιολογήσει):

-7 μαθητές αναφέρθηκαν στα ίσα τμήματα που προκύπτουν από τη διχοτόμηση των διαγωνίων. Π.χ. *«γιατί τα τμήματα από τις διαγώνιους είναι ίσα.», «γιατί, επειδή έχει ίσες γωνίες έχει ίσα τμήματα.».*

-5 μαθητές αναφέρθηκαν στο γεγονός ότι είναι ορθογώνιο και έχει ίσες διαγωνίους. Π.χ. *«γιατί το ορθογώνιο έχει ίσες γωνίες και ίσες διαγώνιους.», «γιατί οι διαγώνιοι εδώ είναι ίσες, επειδή είναι ορθές οι γωνίες».*

-4 μαθητές αναφέρθηκαν στις ορθές γωνίες. Π.χ. *«γιατί αυτό το παραλληλόγραμμο είναι ορθογώνιο», «γιατί έχει ορθές γωνίες».*

[22] Οι κατασκευές που αναφέρονται παρακάτω, έγιναν με την σειρά που περιγράφονται.

-4 μαθητές αναφέρθηκαν στην ισότητα γωνιών και διαγωνίων. Π.χ. *«γιατί οι γωνίες του και οι διαγώνιές του είναι ίσες».*

-2 μαθητές συνδύασαν το γεγονός ότι είναι ορθογώνιο, έχει ίσες διαγωνίους με την ιδιότητα των ακτίνων που ισαπέχουν από τον κύκλο:

•***γιατί στο ορθογώνιο οι διαγώνιες είναι ίσες και φτιάχνουν ίσες ακτίνες*** *και έτσι ο κύκλος περνάει και από τις 4 κορυφές.*

•*γιατί οι γωνίες του είναι ίσες και τα τμήματα των διαγωνίων είναι ίσα και ο κύκλος έχει ίσες ακτίνες.*

Οι 2 τελευταίοι μαθητές προσπάθησαν να διατυπώσουν ένα «ολοκληρωμένο» συλλογισμό για να δικαιολογήσουν την κατασκευή τους, φανερά επηρεασμένοι από τον εισαγωγικό διάλογο που είχαν με τον παρατηρητή. Ο πρώτος μάλιστα, «είδε» τα ίσα τμήματα που προήλθαν από την διχοτόμηση των διαγωνίων και ως ακτίνες του κύκλου που κατασκεύασε και αυτό το διατύπωσε με λόγια. Ο δεύτερος φάνηκε έμμεσα ότι το κατανόησε έτσι, αλλά δεν μπόρεσε να το εκφράσει το ίδιο ξεκάθαρα όπως ο άλλος μαθητής.

Για να ελέγξουμε την τυχόν εσφαλμένη επαγωγική επέκταση των μαθητών που οδηγεί στο ότι σε κάθε παραλληλόγραμμο μπορούμε να περιγράψουμε κύκλο ο οποίος θα περνάει από όλες τις κορυφές του, τους δώσαμε σχεδιασμένο ένα πλάγιο παραλληλόγραμμο και τους ζητήσαμε: α) να φέρουν και σε αυτό τις διαγώνιους και να κάνουν παρατηρήσεις γι' αυτές και β) να κατασκευάσουν τον περιγεγραμμένο κύκλο. Στο α΄ ζητούμενο είχαμε τις εξής συμπεριφορές:

-12 μαθητές απάντησαν πως *οι διαγώνιοι δεν είναι ίσες, γιατί το παραλληλόγραμμο δεν είναι ορθογώνιο.*

-6 μαθητές απάντησαν πως *οι διαγώνιοι δεν είναι ίσες, γιατί το παραλληλόγραμμο δεν έχει όλες του τις γωνίες ίσες.*

-2 μαθητές απάντησαν *πως η μια διαγώνιος είναι πιο μεγάλη από την άλλη, γιατί το παραλληλόγραμμο δεν έχει όλες τις γωνίες ίσες.*

-1 μαθητής απάντησε πως *οι διαγώνιοι ενώνονται στη μέση, φτιάχνουν 4 τρίγωνα, αλλά δεν είναι ίσες, γιατί αυτό το παραλληλόγραμμο έχει μόνο τις απέναντι γωνίες ίσες.*

-1 μαθήτρια αρχικά είπε ότι είναι ίσες. Μετά από ερώτηση του παρατηρητή αν είναι σίγουρη, πήρε το χάρακα, μέτρησε το μήκος τους και διαπίστωσε ότι δεν είναι ίσες. Μετά από ερώτηση του παρατηρητή γιατί δεν είναι ίσες, η μαθήτρια απάντησε πως *το παραλληλόγραμμο δεν έχει όλες τις γωνίες ίσες.*

Οι αντιδράσεις των μαθητών σχετικά με την κατασκευή του περιγεγραμμένου κύκλου στο πλάγιο παραλληλόγραμμο, έδειξαν ότι **είχαν αφομοιώσει τις προηγούμενες γνώσεις τους σχετικά με τις ιδιότητες του ορθογωνίου παραλληλογράμμου** και του κύκλου και τις εφάρμοσαν. Έτσι:

-8 μαθητές απάντησαν πως *η κατασκευή αυτή δεν γίνεται,* ***γιατί το πλάγιο παραλληλόγραμμο δεν έχει ίσες διαγώνιους.***

-8 μαθητές απάντησαν πως *η κατασκευή αυτή δεν γίνεται, γιατί αυτό δεν είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.*

-6 μαθητές απάντησαν πως *η κατασκευή δεν γίνεται, γιατί το παραλληλόγραμμο δεν έχει ίσες γωνίες.*

-1 μαθήτρια αρχικά είπε πως η κατασκευή γίνεται, αλλά αμέσως το αναιρεί και είπε πως το *παραλληλόγραμμο δεν έχει ίσες γωνίες.*

Β) Εγγραφή ορθογωνίου παραλληλογράμμου σε κύκλο[23].

Στην συνέχεια, ζητήθηκε από τους μαθητές να εγγράψουν σε κύκλο ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Σε αυτή την κατασκευή παρατηρήσαμε ότι οι μαθητές ακολούθησαν 2 μεθόδους: μερικοί σκέφθηκαν **αναλογικά** με τον τρόπο κατασκευής του περιγεγραμμένου κύκλου στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και έφεραν διαγωνίους, ακολουθώντας την αντίστροφη διαδικασία, ενώ κάποιοι άλλοι προσπάθησαν να φτιάξουν τις πλευρές του παραλληλογράμμου. Αναλυτικότερα:

•5 μαθητές είδαν το κέντρο του κύκλου και είπαν πως **οι διαγώνιοι πρέπει να περνάνε από αυτό και να είναι ίσες.** Έτσι, έφεραν τις διαγώνιους και ένωσαν τα άκρα τους, φτιάχνοντας ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

•1 μαθήτρια έφτιαξε τις πλευρές του ορθογωνίου (φέρνοντας καθέτους) και μέτρησε ώστε οι απέναντι πλευρές να έχουν το ίδιο μήκος. Στο τέλος, **για επιβεβαίωση έφερε τις διαγώνιους**, μέτρησε το μήκος τους και είπε ότι είναι ίσες.

•1 μαθητής έφερε τις διαγωνίους (φρόντισε ώστε να περνάνε από το κέντρο και να είναι ίσες). Μετά, από λάθος κατασκευαστικό δεν το βγήκε σωστό το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο (δεν ένωσε ακριβώς στα άκρα των διαγωνίων)

•1 μαθητής αρχικά έφτιαξε τη μια πλευρά (τη μεγάλη) και μετά μετακίνησε τον χάρακα προς τα κάτω και παράλληλα και έφερε την απέναντί της πλευρά. Στην συνέχεια, ενώνοντας τα άκρα των απέναντι πλευρών, διαπίστωσε μόνος του πως δεν σχηματίζονται ορθές γωνίες (οι πλευρές που έφτιαξε δεν είχαν το ίδιο μήκος). Ξανάσβησε το σχήμα που είχε φτιάξει και έφερε τις διαγώνιους (φροντίζοντας να έχουν το ίδιο μήκος), και ενώνοντας τα άκρα των διαγωνίων έφτιαξε το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

•1 μαθήτρια έφερε πρώτα την μια πλευρά (τη μεγάλη) και μετά την απέναντί της. Δεν ένωσε τα άκρα των 2 πλευρών σωστά και έτσι δεν έφτιαξε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Παρατήρησε το παραπάνω ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, έφερε τις διαγώνιους και έτσι το έφτιαξε.

•3 μαθητές προσπάθησαν να φτιάξουν τις πλευρές του ορθογωνίου παραλληλογράμμου, κοιτάζοντας έτσι ώστε οι άκρες τους να είναι σημεία του κύκλου. Όμως, απέτυχαν γιατί δεν τις έφεραν κάθετα. Ο

[23] Στην κατασκευή αυτή συμμετείχαν οι 17 από τους 23 μαθητές.

παρατηρητής τους είπε να εκμεταλλευτούν το κέντρο του κύκλου. Τότε έφεραν τις διαγώνιους και το έφτιαξαν.

• 1 μαθήτρια πρώτα έφτιαξε την μια μεγάλη πλευρά. Έπειτα έφερε κάθετη σε αυτή. Μέτρησε το μήκος της κάθετης και μετά έφερε την απέναντί της ώστε να έχει το ίδιο μήκος. Μετά ενώνει τα άκρα των 2 καθέτων και φτιάχνει την άλλη μεγάλη πλευρά. Από λάθος όμως κατασκευαστικό, δεν έφερε σωστά τις καθέτους και έτσι δεν προέκυψε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

•1 μαθήτρια έφερε πρώτα τη μια μεγάλη πλευρά, μετά τις 2 κάθετες σε αυτή και τέλος την απέναντι της μεγάλης πλευράς. Μετά, έφερε τις διαγώνιους για να δει αν είναι ίσες και διαπίστωσε ότι δεν είναι ίσες. Σταμάτησε όμως εκεί.

•1 μαθήτρια έφερε διαγώνιους, αλλά οι 2 άκρες αυτών δεν ήταν σημεία του κύκλου (δεν το διαπίστωσε όμως αυτό η μαθήτρια και σταμάτησε εκεί).

•1 μαθητής προσπάθησε να φέρει κάθετες, αλλά απέτυχε γιατί δεν τις έφερε σωστά και έτσι δεν μπόρεσε να φτιάξει το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

•Τέλος, 1 μαθήτρια έφερε 4 ακτίνες του κύκλου.

Αυτό που διαπιστώσαμε, είναι ότι **εκείνοι που προσπάθησαν να φτιάξουν τις πλευρές του παραλληλογράμμου χωρίς να τα καταφέρουν, ακολούθησαν έπειτα τη «μέθοδο» των διαγωνίων**. Προφανώς, θεώρησαν ότι αυτός ήταν ο ασφαλέστερος τρόπος για να επιτύχουν το στόχο τους. Αυτό κυρίως φάνηκε από την συμπεριφορά της μαθήτριας εκείνης που αφού έφτιαξε το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, έφερε τις διαγωνίους και μέτρησε το μήκος τους για επιβεβαίωση.

Γ) Κατασκευή περιγεγραμμένου κύκλου τετραγώνου.

Η επόμενη δραστηριότητα για τους (17 τους 23) μαθητές, ήταν να κατασκευάσουν τον περιγεγραμμένο κύκλο στο τετράγωνο:

•9 μαθητές είπαν πως οι διαγώνιοι θα περνάνε από το κέντρο του κύκλου. Με κέντρο το σημείο τομής των διαγωνίων και ακτίνα ΟΓ, έφεραν τον κύκλο.

•2 μαθητές βρήκαν **τα μέσα των πλευρών και έφεραν καθέτους**. Μετά πήραν ως κέντρο το σημείο τομής των καθέτων και με ακτίνα ΟΓ έφεραν τον κύκλο.

•1 μαθητής τοποθέτησε τον χάρακα διαγώνια και βρήκε το μέσον της υποθετικής –όπως είπε- διαγωνίου ΔΒ. Αυτό, είπε, πως θα ήταν το κέντρο του κύκλου, αφού αυτό το σημείο θα ήταν το σημείο τομής της ΔΒ με τη ΓΑ αν τις είχε φέρει. Έπειτα, με ακτίνα ΟΔ κατασκεύασε τον περιγεγραμμένο κύκλο.

•1 μαθητής αρχικά πήρε διαισθητικά ως κέντρο ένα τυχαίο σημείο στον κύκλο, αλλά διαπίστωσε μόνος του πως ο κύκλος δεν περνούσε και από τις 4 κορυφές. Έτσι, έφερε τις διαγώνιους και τον έφτιαξε.

•1 μαθήτρια μέτρησε το μήκος των καθέτων πλευρών, βρήκε το μέσον της κάθε μιας και πήρε ως κέντρο το σημείο τομής τους (των μέσων). Μετά από ερώτηση του παρατηρητή αν ήταν σίγουρη ότι αυτό ήταν το κέντρο, έφερε τις διαγώνιους και έφτιαξε τον κύκλο.

•2 μαθητές αρχικά πήραν διαισθητικά ένα σημείο μέσα στο τετράγωνο που φαινόταν να είναι στο κέντρο. Μετά από ερώτηση του παρατηρητή αν ήταν σίγουροι ότι αυτό ήταν το κέντρο, έφεραν τις διαγώνιους και έφτιαξαν τον κύκλο.

•1 μαθήτρια αρχικά δεν κάνει καμιά κίνηση. Ο παρατηρητής την ρώτησε πως θα βρει το κέντρο του κύκλου. Η μαθήτρια πάλι δεν απάντησε. Ο παρατηρητής την ρώτησε τι έκανε για να βρει το κέντρο στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Τότε, η μαθήτρια έφερε τις διαγώνιους και έφτιαξε τον κύκλο.

Σε αυτή την κατασκευή **είχαμε 3 μαθητές οι οποίοι ακολούθησαν ένα δικό τους** –πρωτότυπο θα λέγαμε- **τρόπο**. Οι 2 βρήκαν τα μέσα των πλευρών και έφεραν καθέτους. Η άλλη μαθήτρια βρήκε το μέσον καθεμιάς από τις 2 κάθετες πλευρές και πήρε ως κέντρο το σημείο τομής τους. Θεωρούμε αυτούς τους 2 τρόπους πρωτότυπους, γιατί οι μαθητές δεν ακολούθησαν τη χάραξη των διαγωνίων, την οποία είχαν κατά κάποιο τρόπο διδαχθεί.

Δ) Εγγραφή τετραγώνου σε κύκλο.

Στους ίδιους μαθητές (17 από τους 23), ζητήθηκε να εγγράψουν τετράγωνο μέσα σε κύκλο. Η δυσκολία σε αυτή την κατασκευή ήταν ότι έπρεπε να σκεφθούν ότι οι διαγώνιοι του τετραγώνου είναι κάθετοι μεταξύ τους. Έξι μαθητές το σκέφθηκαν αμέσως, 4 χρειάστηκε να συγκρίνουν -μετά από παρέμβαση του ερευνητή- τις διαγώνιους του ορθογωνίου παραλληλογράμμου και του τετραγώνου για να κάνουν την κατασκευή και 4 χρειάστηκε να συγκρίνουν -μετά από παρέμβαση του ερευνητή- αρχικά τις διαγώνιους του ορθογωνίου παραλληλογράμμου και του τετραγώνου, έπειτα τις γωνίες που σχηματίζουν οι διαγώνιοι και στα 2 τετράπλευρα και έπειτα να κάνουν την κατασκευή. Τέλος, 3 δεν μπόρεσαν να την κάνουν:

•1 μαθήτρια έφερε καθέτους (χωρίς να το πει) και έφτιαξε το τετράγωνο.

•5 μαθητές είπαν πως θα πρέπει να φέρουν τις διαγώνιους κάθετα ώστε να φτιάξουν ορθές γωνίες οι οποίες είναι ίσες (το έφτιαξαν).

•3 μαθητές αρχικά έφεραν διαγώνιους αλλά έφτιαξαν ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Ο παρατηρητής τους ζήτησε να παρατηρήσουν τις διαγώνιους του ορθογωνίου παραλληλογράμμου και του τετραγώνου. Μόνοι τους είπαν πως στο τετράγωνο οι διαγώνιοι φτιάχνουν ορθές γωνίες γι' αυτό θα πρέπει να φέρουν τις διαγώνιους κάθετα (το έφτιαξαν).

•2 μαθήτριες προσπάθησαν αρχικά να φτιάξουν τις πλευρές του τετραγώνου, αλλά δεν τα κατάφεραν. Έφεραν διαγώνιους, αλλά έφτιαξαν ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Ο παρατηρητής τους είπε να κοιτάξουν τις διαγώνιους και του ορθογωνίου παραλληλογράμμου και του τετραγώνου. Οι μαθήτριες είπαν ότι είναι διαφορετικές αλλά δεν μπορούν να προσδιορίσουν τι ήταν το διαφορετικό. Τότε ο παρατηρητής τους είπε να παρατηρήσουν τις γωνίες που φτιάχνουν οι διαγώνιοι στο τετράγωνο και στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Διαπίστωσαν πως στο τετράγωνο ήταν όλες ίσες, έφεραν τις διαγώνιους κάθετα και το έφτιαξαν.

•1 μαθήτρια έφερε διαγώνιους, αλλά έφτιαξε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Ο παρατηρητής της ζήτησε να παρατηρήσει τις διαγώνιους του τετραγώνου και του ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Η μαθήτρια απάντησε πως οι διαγώνιοι είναι πιο μεγάλες στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Ο παρατηρητής της είπε να κοιτάξει τις γωνίες που σχηματίζουν οι διαγώνιοι στα 2 τετράπλευρα. Η μαθήτρια απάντησε πως στο τετράγωνο οι διαγώνιοι σχηματίζουν ορθές γωνίες, γιατί είναι κάθετες και το έφτιαξε.

•1 μαθήτρια αρχικά έφερε διαγώνιους και έφτιαξε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Ο παρατηρητής της ζήτησε να παρατηρήσει τις διαγώνιους του ορθογωνίου παραλληλογράμμου και του τετραγώνου. Η μαθήτρια απάντησε πως στο τετράγωνο οι διαγώνιοι φτιάχνουν 4 ίσα τρίγωνα. Ο παρατηρητής την ρώτησε πως θα γίνει αυτό και η μαθήτρια απάντησε πως θα πρέπει να φτιάξει ορθές γωνίες. Έφερε τις διαγώνιους κάθετα και το έφτιαξε.

•1 μαθήτρια αρχικά έφτιαξε με τις διαγώνιους ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Ο παρατηρητής της ζήτησε να παρατηρήσει τα 2 τετράπλευρα. Η μαθήτρια δεν απάντησε. Έπειτα, της είπε να παρατηρήσει τις διαγώνιους των 2 τετραπλεύρων. Η μαθήτρια απάντησε πως στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο οι διαγώνιοι φτιάχνουν μια μεγάλη και μια μικρή πλευρά. Ο παρατηρητής της είπε να κοιτάξει τις γωνίες που φτιάχνουν οι διαγώνιοι στα 2 τετράπλευρα. Η μαθήτρια είπε πως στο τετράγωνο όλες οι γωνίες είναι ορθές. Έφερε τις διαγώνιους κάθετα και το έφτιαξε.

•1 μαθητής αρχικά προσπάθησε να φτιάξει πλευρές, αλλά δεν τα κατάφερε. Του είπε ο παρατηρητής να παρατηρήσει το τετράγωνο και το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, αλλά ο μαθητής είπε πως δεν μπορεί να το φτιάξει και σταμάτησε εκεί.

•1 μαθητής έφερε πλευρές κάθετες, αλλά έφτιαξε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Είπε πως δεν μπορεί να το φτιάξει και σταμάτησε εκεί.

•1 μαθήτρια προσπάθησε να φτιάξει τις πλευρές, αλλά απέτυχε. Έφερε τις διαγώνιους, αλλά έφτιαξε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Σταμάτησε εκεί.

Ε) Κατασκευή περιγεγραμμένου κύκλου ορθογωνίου τριγώνου.

Η επόμενη δραστηριότητα αφορούσε στην κατασκευή του περιγεγραμμένου κύκλου σε ορθογώνιο τρίγωνο. Σε όλους τους μαθητές αρχικά **υπενθυμίσαμε πως το ορθογώνιο τρίγωνο είναι το μισό του ορθογωνίου παραλληλογράμμου** και τους δείξαμε το φυλλάδιο που ήταν κατασκευασμένος ο περιγεγραμμένος κύκλος στο ορθογώνιο τρίγωνο. Η **υπενθύμιση αυτή ήταν αρκετή ώστε 13 μαθητές,** να κάνουν την κατασκευή. Οι υπόλοιποι 10 την έκαναν αφού ο παρατηρητής τους ζήτησε να φανταστούν ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο για να βρουν που είναι το κέντρο του κύκλου. **Τελικά, και οι 23 μαθητές έκαναν την κατασκευή:**

•11 μαθητές εντόπισαν το κέντρο του κύκλου στο μέσον της υποτείνουσας και φτιάχνουν τον κύκλο.

•2 μαθητές έβαλαν το κέντρο στην υποτείνουσα του τριγώνου, αλλά όχι στο μέσον. Όταν πήγαν να φτιάξουν τον κύκλο, συνειδητοποίησαν μόνοι τους πως πρέπει να το βάλουν στο μέσον. Έτσι, βρήκαν το μέσον και έφτιαξαν τον κύκλο.

•7 μαθητές αρχικά πήραν ένα τυχαίο σημείο μέσα στο τρίγωνο, αλλά διαπίστωσαν πως ο κύκλος δεν περνούσε από τις 3 κορυφές του κύκλου. Ο παρατηρητής τότε τους ρώτησε αν ήταν ορθογώνιο παραλληλόγραμμο που θα ήταν το κέντρο του κύκλου. Τότε, βρήκαν το μέσον της υποτείνουσας και έφτιαξαν τον περιγεγραμμένο κύκλο.

•1 μαθήτρια αρχικά δεν έδωσε καμιά απάντηση. Όταν ο παρατηρητής της είπε να το φανταστεί ως ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και να βρει το κέντρο, τότε βρήκε το μέσον της υποτείνουσας και το έφτιαξε.

•1 μαθήτρια έφερε τη διχοτόμο της γωνίας Γ και μετά άλλη μια ευθεία που ένωνε τα μέσα των πλευρών ΓΑ και ΓΒ. Είπε πως το κέντρο θα βρίσκεται στο σημείο τομής των 2 ευθυγράμμων τμημάτων. Όταν, όμως, δοκίμασε να φέρει τον κύκλο διαπίστωσε πως δεν περνάει από τις 3 κορυφές. Ο παρατηρητής την ρώτησε που θα ήταν το κέντρο αν ήταν ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Τότε η μαθήτρια βρήκε κατευθείαν το μέσον της υποτείνουσας και έφτιαξε τον κύκλο.

•1 μαθήτρια αρχικά πήρε ως κέντρο την κορυφή Α, αλλά διαπίστωσε πως ο κύκλος δεν περνούσε από τις 3 κορυφές του τριγώνου. Ο παρατηρητής την ρώτησε που θα ήταν το κέντρο αν ήταν ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Τότε, η μαθήτρια πήρε το κέντρο στο μέσον της υποτείνουσας και έφερε τον κύκλο.

Σε 14 από τους μαθητές αυτούς, επίσης, έγινε η ερώτηση **«γιατί πήρες σε αυτό το σημείο ως κέντρο του κύκλου;»**. Οι περισσότερες από τις απαντήσεις των μαθητών έδειξαν ότι **«είδαν» την υποτείνουσα ως τη μια διαγώνιο του ορθογωνίου παραλληλογράμμου**. Παρακάτω παραθέτουμε τις ακριβείς απαντήσεις των μαθητών:

•γιατί είναι το μισό του ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

*•γιατί το **κέντρο θα ήταν στην πλευρά ΒΓ στο μέσον της, αν ήταν ορθογώνιο παραλληλόγραμμο**. Το ορθογώνιο τρίγωνο είναι το μισό του ορθογωνίου παραλληλογράμμου.*

*•το βάζω στο μέσο της ΒΓ, γιατί είναι **σαν να έχω τραβήξει τη μια διαγώνιο και εδώ θα ήταν το κέντρο στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.***

•γιατί η απόσταση προς όλες τις γωνίες από αυτό το σημείο, θα είναι ίδια και έτσι θα περνάει και από τις 3 κορυφές.

*•**αν ήταν ορθογώνιο παραλληλόγραμμο το κέντρο θα ήταν εδώ**. Έχει και αυτό ορθή γωνία γι' αυτό και πέρασε κι από τις 3 κορυφές.*

•γιατί είναι σαν να έχουμε ένα νοητό παραλληλόγραμμο και βρήκαμε το μέσον της μεγάλης πλευράς που είναι η 1η διαγώνιος του νοητού παραλληλογράμμου.

•γιατί, επειδή το τρίγωνο είναι ορθογώνιο και η ΒΓ είναι η διαγώνιος, πρέπει το κέντρο να είναι στο μέσον για να περάσει και από τις 3 κορυφές.

*•γιατί **είναι η μια διαγώνιος του ορθογωνίου παραλληλογράμμου και αν φέρναμε την άλλη**, θα ενώνονταν στο κέντρο και αυτό είναι το μισό του ορθογωνίου παραλληλογράμμου.*

•αν ήταν ορθογώνιο παραλληλόγραμμο το κέντρο θα ήταν εκεί που συναντιούνται οι 2 διαγώνιοι. Το ορθογώνιο τρίγωνο είναι το μισό του και αφού έχει ορθή γωνία ο κύκλος θα περνάει και από τις 3 κορυφές.

Στ) Εγγραφή ορθογωνίου τριγώνου σε κύκλο.

Ακολούθησε η αντίστροφη δραστηριότητα, όπου ζητήθηκε από τους μαθητές να εγγράψουν ορθογώνιο τρίγωνο σε κύκλο. Από τους 23 μαθητές τελικά, με ή χωρίς την παρέμβαση του παρατηρητή, οι 22 έκαναν την κατασκευή:

•10 μαθητές αξιοποίησαν το κέντρο του κύκλου φέροντας τη διάμετρο, και μετά τις 2 καθέτους.

•3 μαθητές έφεραν πρώτα τις καθέτους και μετά την διάμετρο.

•3 μαθητές έφεραν την διάμετρο θεωρώντας την ως την 1η διαγώνιο και μετά έφεραν άλλη μια διαγώνιο. Πήραν ως σημείο τομής τους το κέντρο του κύκλου. Αφού έφεραν τις 2 καθέτους, έσβησαν το μισό της 2ης διαγωνίου και έτσι έμεινε το ορθογώνιο τρίγωνο.

•1 μαθητής αρχικά έφτιαξε ένα ισοσκελές τρίγωνο. Μετά από ερώτηση του παρατηρητή αν αυτό είναι ορθογώνιο τρίγωνο, ο μαθητής αναγνώρισε ότι έκανε λάθος. Ο παρατηρητής του έδωσε το φυλλάδιο, στο οποίο ήταν σχεδιασμένος ο κύκλος με τη μια κάθετο (δεν έγινε γνωστό στο μαθητή ότι πρόκειται για κάθετο).Ο μαθητής έφερε την άλλη κάθετο και μετά τη διάμετρο και το έφτιαξε.

•2 μαθητές έφεραν καθέτους και μετά τη διάμετρο, η οποία όμως δεν περνούσε ακριβώς από το κέντρο. Μόνοι τους την έσβησαν και την έφτιαξαν ώστε να περνάει από το κέντρο.

•2 μαθητές έφτιαξαν αρχικά ένα τυχαίο τρίγωνο. Μετά από παρέμβαση του παρατηρητή, αν αυτό που έφτιαξαν είναι ορθογώνιο τρίγωνο, οι μαθητές απάντησαν αρνητικά. Ο παρατηρητής τους έδωσε το βοηθητικό φυλλάδιο, όπου ήταν σχεδιασμένος ο κύκλος με τη μια κάθετο. Οι μαθητές έφεραν την διάμετρο και μετά την άλλη κάθετο.

•1 μαθήτρια αρχικά έφερε καθέτους και μετά τη διάμετρο, η οποία δεν περνούσε από το κέντρο του κύκλου. Ο παρατηρητής ρώτησε την μαθήτρια αν οι κορυφές του ορθογωνίου τριγώνου που έφτιαξε είναι σημεία του κύκλου. Η μαθήτρια απάντησε αρνητικά. Ο παρατηρητής της έδωσε το βοηθητικό φυλλάδιο με τον κύκλο και τη μια κάθετο. Η μαθήτρια έφερε την άλλη κάθετο, της οποίας η άκρη πάλι δεν ακουμπούσε στον κύκλο, όπως επίσης τη διάμετρο, η οποία δεν περνούσε από το κέντρο.

Ξανάγινε η ερώτηση από τον παρατηρητή, αν οι κορυφές του ορθογωνίου τριγώνου είναι σημεία του κύκλου και της έδωσε το σχ.2 , στο οποίο ήταν σχεδιασμένος ο κύκλος και η διάμετρός του (το κέντρο του κύκλου δεν φαίνεται).Τότε η μαθήτρια έφερε τις 2 καθέτους και το έφτιαξε.

•Τέλος, 1 μαθήτρια έφερε τη μια κάθετο, μετά την άλλη, αλλά δεν έφερε σωστά τη διάμετρο (δεν ενωνόταν ακριβώς στα άκρα των 2 καθέτων και έτσι δεν περνούσε και από το κέντρο). Δεν έκανε καμιά άλλη προσπάθεια, λέγοντας πως αυτό που έφτιαξε είναι ορθογώνιο τρίγωνο.

Μετά την ολοκλήρωση της κατασκευής, οι 20 από τους 23 μαθητές κλήθηκαν να απαντήσουν στην ερώτηση «Μπορούμε να φτιάξουμε σε ένα κύκλο τρίγωνο που να μην περνάει η μια του πλευρά από το κέντρο;». Με την ερώτηση αυτή θέλαμε να ελέγξουμε μήπως οι μαθητές γενικεύσουν την ιδιότητα που είχαν ανακαλύψει στο ορθογώνιο τρίγωνο και θεωρήσουν ότι σε οποιαδήποτε εγγραφή τριγώνου σε κύκλο, η μια πλευρά του τριγώνου περνάει οπωσδήποτε από το κέντρο του κύκλου. Οι 15 από τους 20 μαθητές, είχαν συνειδητοποιήσει ότι αυτό γίνεται μόνο για το ορθογώνιο τρίγωνο:

•15 μαθητές είπαν πως **η 1 πλευρά θα περνάει από το κέντρο μόνο όταν το τρίγωνο είναι ορθογώνιο** και ότι μπορούν να φτιάξουν σε κύκλο τρίγωνο που να μην περνάει καμιά πλευρά του από το κέντρο.

•1 μαθητής αρχικά είπε πως δεν γίνεται να φτιαχτεί τρίγωνο που η μια του πλευρά να μην περνάει από το κέντρο. Ο παρατηρητής του έφτιαξε σε κύκλο ένα τυχαίο τρίγωνο και έτσι ο μαθητής ανακάλεσε την προηγούμενη απάντησή του. Είπε πως μόνο όταν το τρίγωνο είναι ορθογώνιο η μια του πλευρά θα περνάει απαραίτητα από το κέντρο του κύκλου.

•Τέλος, 4 μαθητές είπαν πως όποιο τρίγωνο και να φτιάξουμε θα πρέπει η μια του πλευρά να περνάει από το κέντρο. Όταν ο παρατηρητής τους έφτιαξε τρίγωνο που δεν περνούσε από το κέντρο καμιά του πλευρά και πάλι δεν μπόρεσαν να πουν σε ποια περίπτωση τριγώνου θα περνάει απαραίτητα η μια πλευρά του από το κέντρο.

Παρακάτω παραθέτουμε τα ποσοστά επιτυχίας των μαθητών στις γεωμετρικές κατασκευές. Στην πρώτη στήλη αναφέρουμε τα ποσοστά επιτυχίας χωρίς να έχει υπάρξει παρέμβαση του παρατηρητή, ενώ στη δεύτερη στήλη, αναφέρουμε τα ποσοστά μετά την παρέμβαση του παρατηρητή.

Πίνακας 12 (Ποσοστά επιτυχίας μαθητών στις κατασκευές)

Κατασκευές	Χωρίς παρέμβαση	Μετά από παρέμβαση
κατασκευή περιγ.κυκλ.ορθ.παρ/μου	100%	100%
εγγραφή ορθ.παρ/μου σε κύκλο	47,1%	64,7%
κατασκευή περιγ.κυκλ.τετραγ.	76,4%	100%
εγγραφή τετραγ. σε κύκλο	35,3%	82,3%
κατασκευή	56,5%	100%

περιγ.κυκλ.ορθογ.τριγ.		
εγγραφή ορθογ.τριγ. σε κύκλο	69,5%	95,7%

5.5 Γεωμετρία και χρήση της γλώσσας - Η χρήση των Γεωμετρικών όρων.

Η διερεύνηση των γλωσσικών δυνατοτήτων των μαθητών ως προς τη συμβολική γλώσσα των μαθηματικών, δεν ήταν μέσα στους αρχικούς στόχους της έρευνάς μας, αλλά από παρατηρήσεις της συμπεριφοράς των 17 μαθητών της 6ης Δημοτικού (α΄ κύκλος συνεντεύξεων) είχαμε την ευκαιρία να διαπιστώσουμε ότι οι μαθητές εμφανίζουν σημαντικές αδυναμίες όσον αφορά στην κατανόηση και στη χρήση των γεωμετρικών όρων[24]. Έτσι, έχοντας υπ' όψιν μας αυτό το φαινόμενο, αποφασίσαμε να διερευνήσουμε συστηματικότερα το θέμα, προσθέτοντας ένα κύκλο ερωτήσεων, όπου ζητήσαμε να περιγραφούν και να καταδειχθούν τα παρακάτω γεωμετρικά αντικείμενα:

-η γωνία, η οξεία γωνία , η αμβλεία γωνία και η ορθή γωνία

-η κορυφή μιας γωνίας ή τριγώνου, το σημείο

-η ευθεία , το ευθύγραμμο τμήμα , η ημιευθεία

Για κάθε αντικείμενο ο παρατηρητής ζήτησε αρχικά την περιγραφή του (π.χ. «Μπορείς να μου πεις τι είναι η κορυφή της γωνίας ;») και στην συνέχεια την κατάδειξη[25] του πάνω σ' ένα φύλλο χαρτί (βλ. παράρτημα 2) όπου υπήρχαν σχεδιασμένα τα παραπάνω αντικείμενα.

Οι ερωτήσεις αυτές έφεραν στην επιφάνεια το ότι οι μαθητές μας έχουν εκτεταμένα και σημαντικά προβλήματα όσον αφορά στην κατανόηση και στην περιγραφή των βασικών γεωμετρικών αντικειμένων.

Αξίζει να σημειωθεί ότι τα **ποσοστά επιτυχίας** των μαθητών στις ερωτήσεις περιγραφής των γεωμετρικών αντικειμένων είναι **τα χαμηλότερα στο σύνολο των δραστηριοτήτων και των ερωτημάτων που τέθηκαν κατά την διάρκεια των ατομικών συνεντεύξεων**. Ο παρακάτω πίνακας είναι ενδεικτικός της έκτασης των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές:

[24] Για παράδειγμα, μαθητής της α΄ ομάδας σε ερώτηση του ερευνητή τι είναι ορθή γωνία απάντησε: *ορθή είναι αυτή που τη βάζουμε από την κάτω μεριά.* Άλλος μαθητής σε ερώτηση τι ονομάζουμε παράλληλες ευθείες είπε: *παράλληλες είναι όταν δεν είναι ίσες, όταν δεν είναι απέναντι.*

[25] -Στα 5 από τα οκτώ αντικείμενα η ερώτηση του παρατηρητή ήταν του τύπου: « Δείξε μου ένα ευθύγραμμο τμήμα».

-Για την κορυφή γωνίας ζητήθηκε η κατάδειξη των κορυφών τριών γωνιών. Η ερώτηση του παρατηρητή ήταν: «Δείξε μου με ακρίβεια την κορυφή αυτής της γωνίας»

Το αίτημα ακρίβειας του παρατηρητή και το μικρό μέγεθος του αντικειμένου είχε ως αποτέλεσμα οι περισσότεροι μαθητές να σημειώνουν , αυτό που θεωρούν κορυφή, με το μολύβι και όχι να το δείχνουν με το δάχτυλο.

-Για το σημείο ζητήθηκε κατασκευή (« Μπορείς να φτιάξεις ένα σημείο;»)

-Για την γωνία δεν ζητήθηκε κατάδειξη, διότι προηγούμενες διερευνήσεις που είχαμε πραγματοποιήσει έδειχναν ότι στην περίπτωση της γωνίας οι καταδείξεις (και οι σημειώσεις) που πραγματοποιούν οι μαθητές είναι ασαφής σε βαθμό που δεν μας προσφέρουν εκμεταλλεύσιμες πληροφορίες.

Πίνακας 13 (Ποσοστά επιτυχίας των μαθητών ως προς τον ορισμό και κατάδειξη των γεωμετρικών αντικειμένων).

Γεωμετρικά αντικείμενα	Ορισμός	Κατάδειξη
Γωνία	0%	_
Αμβλεία	26%	57%
Οξεία	26%	52%
Ορθή	49%	52%
Ευθεία γωνία	0%	_
Κορυφή	22%	35%
Σημείο	0%	35%
Ευθεία	17%	26%
Ευθύγραμμο τμήμα	35%	65%
Ημιευθεία	47%	57%

Η διαδικασία της κατάδειξης αναφέρεται στο στοιχειωδέστερο επίπεδο κατανόησης των γεωμετρικών αντικειμένων μια που δεν περιλαμβάνει: λεκτική διατύπωση, κατασκευαστικές διαδικασίες, χρήση του γεωμετρικού αντικειμένου ως εργαλείου επεξεργασίας άλλων προβλημάτων. Για το λόγο αυτό, παρατηρούμε στον παραπάνω πίνακα ότι οι μαθητές σημείωσαν υψηλότερα ποσοστά επιτυχίας στις καταδείξεις των γεωμετρικών αντικειμένων.

Αυτό που αξίζει να αναφέρουμε είναι ότι **εμφανίζεται μία ιδιαίτερα αυστηρή ιεραρχική σχέση ανάμεσα στην ικανότητα των μαθητών να καταδεικνύουν ένα αντικείμενο και στην ικανότητα τους να το περιγράφουν**. Στα 7 από τα οκτώ ζεύγη ερωτήσεων περιγραφής -κατάδειξης δεν εμφανίζεται κανένας μαθητής που να καταδεικνύει εσφαλμένα ένα αντικείμενο και να το περιγράφει σωστά. Στον πίνακα συσχετίσεων (βλ. πίνακα 14), μπορούμε να δούμε τις συσχετίσεις που υπάρχουν μεταξύ της περιγραφής των αντικειμένων και της κατάδειξής τους. Αυτό που διαπιστώνουμε από τον πίνακα, είναι τα υψηλά ποσοστά συσχετίσεων μεταξύ της περιγραφής ενός γεωμετρικού αντικειμένου και της κατάδειξής του. Για παράδειγμα, η σωστή διατύπωση ορισμού της αμβλείας γωνίας, συσχετίζεται με την σωστή κατάδειξή της (0,017). Το ίδιο συμβαίνει και με την οξεία γωνία (0,009).

Συσχετίσεις, όμως, υπάρχουν και **μεταξύ των περιγραφών και μεταξύ των καταδείξεων όλων των γεωμετρικών αντικειμένων** (βλ. πίνακα 14). Για παράδειγμα, η σωστή διατύπωση ορισμού της αμβλείας γωνίας, συσχετίζεται με τη σωστή διατύπωση ορισμού της οξείας (0,002) και της ορθής (0,018).

Ο ακριβής υπολογισμός της πιθανοτήτων που παρουσιάζονται στους πίνακες 14, 15, έγινε με την εφαρμογή του τεστ του Fischer, που χρησιμοποιείται για μικρά δείγματα. Οι πιθανότητες είναι στρογγυλοποιημένες στο δεύτερο δεκαδικό ψηφίο.

Πίνακας 14. Συσχετίσεις μεταξύ των ορισμών και καταδείξεων των γεωμετρικών αντικειμένων (Τεστ του Fischer)

	ορ. ευθ.	*ορ. ημιευθ.*	*ορ.ευθ. τμημ.*	*ορ. οξείας*	*ορ. ορθ.*	*ορ. αμβλ.*	*ορ. κορυφ.*	*κατ. ευθ.*	*κατ. ημιευθ.*	*κατ.ευθ. τμημ.*	*κατ. οξείας*	*κατ. ορθ.*	*κατ. αμβλ.*	*κατ. κορυφ.*
ορ.ευθ.	1	0,049							0,049					
ορ. ημιευθ.	*	1							0,001					
ορ.ευθ. τμημ.			1	0,037										0,038
ορ. οξείας			*	1	0,018	0,002				0,038	0,009	0,009		
ορ.ορθ.				*	1	0,018								
ορ. αμβλ.				*	*	1					0,009	0,009	0,017	
ορ. κορυφ.							1							
κατ.ευθ.								1	0,019					
κατ. ημιευθ.	*	*							1	*			0,035	
κατ.ευθ. τμημ.				*						1	0,008		0,037	0,038
κατ. οξείας				*		*				*	1	0,029	0,0001	
κατ.ορθ.				*		*					*	1	0,033	
κατ. αμβλ.						*			*	*		*	1	
κατ. κορυφ.			*							*				1

Αυτό που κυρίως μας ενδιέφερε ήταν να διερευνήσουμε το είδος των γλωσσικών σφαλμάτων που έκαναν οι μαθητές. Έτσι, καταλήξαμε στις παρακάτω 4 κατηγορίες μη σωστών περιγραφών των μαθητών:

1) Εσφαλμένες περιγραφές που προέρχονται από ελλιπή ή εσφαλμένη κατανόηση του αντικειμένου που περιγράφεται.

Σ' αυτήν την κατηγορία, αναφέρουμε παραδείγματα που αφορούν στην περιγραφή της γωνίας (γενικά), της αμβλείας γωνίας, της οξείας και της ορθής. Έτσι, έχουμε μαθητές που δίνουν τις παρακάτω περιγραφές, οι οποίες δείχνουν ότι οι μαθητές είτε δεν έχουν κατανοήσει το γεωμετρικό αντικείμενο, είτε ότι το έχουν κατανοήσει εσφαλμένα:

Γωνία

-«Αν κάνεις μία γραμμή αυτό που τελειώνει»

-«Είναι σαν 2 ποταμάκια που ενώνονται σ' ένα μεγάλο ποτάμι.»

«Είναι 2 γραμμές που σ' ένα σημείο συνεχίζουν μαζί.»

Οι 2 τελευταίοι μαθητές δείχνουν ότι περιγράφουν ένα σχήμα πλησιέστερο σ' ένα παρά σ' ένα πράγμα το οποίο φανερώνει εσφαλμένη κατανόηση του τι είναι γωνία.

-«Είναι 2 πλευρές που ενώνουν μαζί και την άλλη»

Ο μαθητής αυτός ταυτίζει τη γωνία με το ζεύγος των πλευρών ενός τριγώνου. Συγγενής είναι και η περιγραφή του επόμενου μαθητή: «Γωνία είναι ένα ισοσκελές».

Υπάρχουν, επίσης, 6 μαθητές (στους 23) των οποίων οι περιγραφές δείχνουν σαφώς ότι θεωρούν την γωνία ως μια περιορισμένη περιοχή κοντά στην κορυφή. Για παράδειγμα:

-«Γωνία είναι η άκρη του τριγώνου».

«Γωνία είναι ένα κομματάκι από τρίγωνο».

Αμβλεία γωνία

-«Όταν είναι 2 γραμμές και ενώνονται και η μία βγαίνει προς τα έξω λίγο» (δείχνει μία οξεία)

Ορθή γωνία

Ο ίδιος μαθητής λέει για την ορθή: «Όταν είναι μία γραμμή και η πάνω βγαίνει προς τα έξω πιο πολύ»

(δείχνει την ορθή

οξεία γωνία

-«Αυτή που είναι το μισό ενός τριγώνου»

2) <u>Περιγραφές που προέρχονται από εσφαλμένη αντιστοίχηση ανάμεσα στον όρο και το αντικείμενο που εκφράζει.</u>

2α) Το αντικείμενο που αντιστοιχείται εσφαλμένα στον όρο, υπάρχει στην «επίσημη» Γεωμετρία και είναι καλά προσδιορισμένο.

Αμβλεία γωνία

-«η γωνία που έχει λιγότερες μοίρες από την ορθή».

-«η γωνία που έχει παρακάτω μοίρες από την ορθή»

-«η γωνία που πάει να κλείσει».

-«αυτή που είναι ακριβώς στο 90^0».

οξεία γωνία

«Οξεία είναι η πολύ ανοιχτή γωνία.»

«μια γωνία κάθετη που πάει να ανοίξει»

ορθή γωνία

«είναι αυτή που έχει 45^0»

ευθεία

Αυτό το είδος σφάλματος εμφανίζεται σε μεγαλύτερη έκταση όσον αφορά στην ευθεία:

-13 μαθητές λένε ότι ευθεία είναι μία γραμμή (ή μια ίσια γραμμή) που έχει αρχή αλλά δεν έχει τέλος

-2 μαθητές λένε ότι είναι μία ίσια γραμμή που αρχίζει και τελειώνει.

Ευθύγραμμο τμήμα

Αντίστοιχα σφάλματα εμφανίζουν 6 μαθητές για το ευθύγραμμο τμήμα:

-3 μαθητές αναφέρουν ότι ευθύγραμμο τμήμα είναι «η γραμμή που αρχίζει, αλλά δεν έχει τέλος».

-2 μαθητές είπαν «δεν έχει αρχή, ούτε τέλος».

-1 μαθήτρια είπε «η γραμμή που είναι τετράγωνη».

Ημιευθεία

Αντίστοιχα παραδείγματα έχουμε και για την ημιευθεία:

«έχει αρχή, μέση, αλλά δεν έχει τέλος» (1 μαθητής).

«μια γραμμή που δεν έχει αρχή ούτε τέλος» (2 μαθητές).

«είναι μια ευθεία γραμμή» (1 μαθητής).

«μια γραμμή που έχει αρχή και τέλος» (1 μαθητής).

2β) Το αντικείμενο που αντιστοιχείται εσφαλμένα στον όρο, δεν υπάρχει στην «επίσημη» Γεωμετρία και ενδεχομένως δεν είναι καλά προσδιορισμένο.

Παραδείγματα για την κορυφή της γωνίας:

-Ο μαθητής περιγράφει ως εξής την κορυφή της γωνίας: «Κορυφή είναι το κομμάτι κοντά στην άκρη» (ο μαθητής και στις 3 γωνίες σημειώνει ένα τόξο κοντά στο σημείο της κορυφής). Όπως περιγράφει και δείχνει , θεωρεί ως κορυφή της γωνίας μία περιοχή της γωνίας κοντά στην κορυφή.

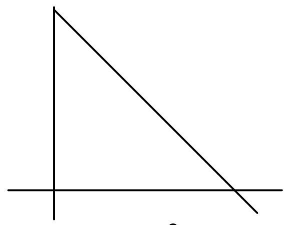
6 από τους μαθητές εμφανίζουν αυτού του είδους την παρερμηνεία. Η περιγραφή 2 εξ' αυτών είναι ασαφής, διότι μπορεί να ερμηνευθεί με 2 τρόπους («κορυφή είναι η μύτη της γωνίας», «κορυφή είναι το πάνω μέρος της γωνίας»). Ωστόσο τα τόξα που σημειώνουν και στις 3 γωνίες αποσαφηνίζουν την ιδέα που έχουν για την κορυφή της γωνίας. Στις περιπτώσεις αυτές, οι περιγραφές εκτός του ότι προέρχονται από μια εσφαλμένη ιδέα εμφανίζουν και το χαρακτηριστικό της ασάφειας.

Δύο μαθητές εμφανίζουν ασάφεια στην περιγραφή της κορυφής («κορυφή είναι το πάνω μέρος της γωνίας», «κορυφή είναι η άκρη της γωνίας»), αλλά η ασάφεια αυτή αντανακλά την αβεβαιότητα τους ως προς το τι είναι η κορυφή της γωνίας: σημειώνουν σωστά την κορυφή σε μία από τις 3 γωνίες ενώ στις άλλες 2 σημειώνουν τόξα.

Μαθητής δίνει την περιγραφή «κορυφή είναι το πάνω μέρος της γωνίας» και στο σχ. 3 (βλ. παράρτημα 2) σημειώνει ένα σημείο που βρίσκεται στην άκρη του σχήματος, αλλά δεν είναι κορυφή γωνίας:

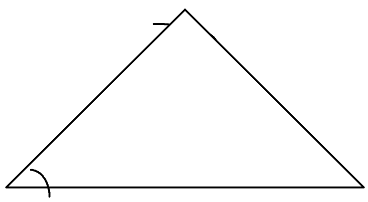
Άλλος 1 μαθητής σημειώνει την κορυφή (στα σχήματα 2 και 3) με τον ίδιο τρόπο. Ο μαθητής αυτός περιέγραψε την κορυφή της γωνίας με την έκφραση «κορυφή είναι το τέλος της γωνίας».

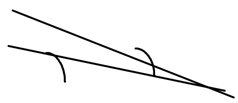
σχ. 2



σχ. 3

Ενώ 1 μαθητής ως απάντηση στην ερώτηση « Δείξε μου με ακρίβεια την κορυφή αυτής της γωνίας», σημειώνει 2 κορυφές στα άκρα του σχήματος. Επίσης, μια μαθήτρια στα σχήματα 1 και 3, σημειώνει τόξα στις κορυφές Α και Β αντίστοιχα, ενώ στο σχήμα 2 σημειώνει 2 κορυφές στην Α με τόξα:





Η μια είχε περιγράψει την κορυφή της γωνίας με την έκφραση «κορυφή είναι το πάνω μέρος της γωνίας», ενώ ο άλλος είχε δώσει την περιγραφή: « κορυφή είναι η πάνω γωνία του τριγώνου»

3) Περιγραφές στις οποίες υπάρχει εσφαλμένη χρήση Γεωμετρικών όρων ή λέξεων της φυσικής γλώσσας.

3α) Σε ορισμένες περιπτώσεις οι εσφαλμένες χρήσεις των όρων παρεμποδίζουν σε μεγάλο βαθμό την κατανόηση του τι εννοούν οι μαθητές. Παραδείγματα περιγραφών της γωνίας, αυτού του είδους:

-«τη κάνουμε με το μήκος και το πλάτος»

-«γωνία είναι η κλίση που έχει ένα τρίγωνο»

-«γωνία είναι εκεί που χωρίζεται το τρίγωνο»

-«ευθείες που φτιάχνουν ένα σχήμα»

-«2 πλευρές που φτιάχνουν μαζί και την άλλη»

Στην ίδια κατηγορία ανήκουν και οι επόμενες περιγραφές.

<u>Παράδειγμα περιγραφής της ορθής:</u>

«Η γωνία που η μία της πλευρά είναι οξεία και η άλλη ορθή» (ο μαθητής δεν έδειξε τίποτε στην αντίστοιχη ερώτηση κατάδειξης)

<u>Παράδειγμα περιγραφής της αμβλείας:</u>

-«Η γωνία που είναι λοξή» (δείχνει σωστά)

<u>Παράδειγμα περιγραφής της οξείας:</u>

-«Είναι η γωνία που πάει λοξά» (πρόκειται για διαφορετικό μαθητή από τον προηγούμενο και στην αντίστοιχη ερώτηση κατάδειξης δείχνει την αμβλεία γωνία).

Οι 3 προηγούμενες περιγραφές είναι ενδεικτικές του ότι η εσφαλμένη χρήση μιας λέξης στην περιγραφή του αντικειμένου μπορεί να συνυπάρχει ή όχι με σφάλμα (ή ελλείψεις) στην κατανόηση του αντικειμένου.

3β) Σε άλλες περιπτώσεις οι εσφαλμένες χρήσεις λέξεων δημιουργούν ασάφειες ως προς το τι εννοεί ο μαθητής, αλλά δεν καθιστούν ακατανόητη την περιγραφή.

<u>Παράδειγμα περιγραφής της γωνίας:</u>

-«Κάνεις μία διαγώνια λοξή και μία οριζόντια»

Με την λέξη «διαγώνιο» είναι σαφές ότι ο μαθητής εννοεί μία ίσια γραμμή. Παραμένει αδιευκρίνιστο αν αυτή η ίσια γραμμή έχει αρχή και τέλος. Τα προηγούμενα ισχύουν και για την «οριζόντια».Επιπλέον, τίθεται το ερώτημα αν ο μαθητής εννοεί την οριζόντια με την συνηθισμένη της σημασία (οπότε στο αντικείμενο που περιγράφει η διεύθυνση της μιας ίσιας γραμμής είναι δεσμευμένη) ή αν εννοεί κάποιο είδος βάσης της γωνίας ως προς την οποία «κάνουμε» μία «διαγώνιο λοξή».

<u>4α) Περιγραφές των οποίων τα στοιχεία είναι σωστά αλλά όχι επαρκή.</u>

<u>Παράδειγμα περιγραφής της γωνίας:</u>

-«Η γωνία έχει 2 ίσιες γραμμές που συναντιούνται»

Τα στοιχεία που αναφέρει ο μαθητής είναι μέρος του προσδιορισμού του τι είναι γωνία αλλά δεν είναι επαρκή. Πέραν του ότι δεν αναφέρεται στην επιφάνεια μεταξύ των 2 «ίσιων γραμμών», δεν διευκρινίζει το αν αυτές συνεχίζουν και μετά που θα συναντηθούν καθώς και το αν είναι πεπερασμένες ή όχι.

-«Η γωνία έχει 2 ίσιες γραμμές που ενώνονται στο τέλος»

Και εδώ ο μαθητής δεν αναφέρει τίποτε όσον αφορά στην επιφάνεια[26] μεταξύ των 2 «ίσιων γραμμών» και το πεπερασμένο ή όχι της γωνίας. Ωστόσο αναφέρεται έμμεσα στο ότι οι ίσιες γραμμές δεν συνεχίζουν μετά την τομή τους.

Δύο άλλοι μαθητές δίνουν παρεμφερείς περιγραφές με τους προηγούμενους. Ωστόσο χρησιμοποιούν το ρήμα «είναι» αντί το ρήμα «έχει» , με αποτέλεσμα στην περιγραφή να ταυτίζεται η γωνία με τις 2 ίσιες γραμμές. («Γωνία είναι 2 ίσιες γραμμές ενωμένες στην αρχή τους»).

Δύο μαθητές δίνουν τις εξής περιγραφές:

-«Όταν 2 γραμμές ενωθούν στην αρχή τους»

-«2 γραμμές που ενώνονται»

Εκτός των άλλων εδώ λείπει και το στοιχείο «ίσιες» όσον αφορά τις γραμμές.[27]

4β) <u>Περιγραφές που περιέχουν ασάφειες.</u>

Θα δούμε στην συνέχεια, περιγραφές των μαθητών στις οποίες η ασάφεια δημιουργείται με τη χρήση λέξεων ή εκφράσεων πολύσημων, οι οποίες στην φυσική γλώσσα εκφράζουν πράγματα ποιοτικά διαφορετικά. Η ασάφεια των λέξεων (ή των εκφράσεων) αυτών είναι λειτουργική με την έννοια ότι δίνουν την δυνατότητα του να μιλήσουμε με όχι απόλυτα προσδιορισμένο τρόπο, πράγμα που είναι συχνά αναγκαίο στην καθημερινή ζωή. Στην περίπτωση μας πρόκειται για τοπολογικές αναφορές: άκρη, πάνω μέρος , μύτη.

Οι λέξεις και οι εκφράσεις αυτές στην φυσική γλώσσα μπορούν να σημαίνουν μία συνοριακή περιοχή ή ένα σημείο. (Η άκρη μπορεί επίσης να σημαίνει μία γραμμή όταν πρόκειται για μια τρισδιάστατη κατάσταση: π.χ. η έκφραση «η άκρη του ορίζοντα» μπορεί να σημαίνει την γραμμή του ορίζοντα ή μία περιοχή κοντά σ' αυτή).

Αυτές οι λέξεις και εκφράσεις χρησιμοποιήθηκαν σε ασαφείς περιγραφές 10 μαθητών από τους 23 στην προσπάθεια τους να περιγράψουν την κορυφή της γωνίας[28]. Όσον αφορά στην ασάφεια των εκφράσεων των μαθητών είναι χαρακτηριστικά τα παρακάτω στοιχεία :

-6 μαθητές χρησιμοποιούν την έκφραση «κορυφή είναι το πάνω μέρος της γωνίας»[29]. Από αυτούς οι 2 δείχνουν σωστά τις κορυφές και των τριών γωνιών που τους ζητήθηκαν. 1 κυκλώνει την περιοχή γύρω από την κορυφή και στα 3 σχήματα. Π.χ.

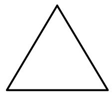
---

[26] Μόνο 1 στους 23 μαθητές αναφέρεται στην επιφάνεια με την φράση : « Γωνία είναι αυτό που είναι ανάμεσα σε 2 πλευρές»

[27] Αντίστοιχη έλλειψη παρατηρείται σε 1 μαθητή όσον αφορά την ευθεία, σε 2 μαθητές όσον αφορά το ευθ. τμήμα, και σε 4 μαθητές όσον αφορά την ημιευθεία («..είναι μία γραμμή που έχει αρχή αλλά δεν έχει τέλος»).

[28] Η μεγάλη συχνότητα χρήσης αμφίσημων εκφράσεων στην περίπτωση της κορυφής πρέπει μάλλον να αποδοθεί στο ότι η λέξη κορυφή στην φυσική γλώσσα είναι επίσης αμφίσημη (έτσι για παράδειγμα με την έκφραση «κορυφή του βουνού» μπορεί να εννοούμε το ψηλότερο σημείο του ή μία περιοχή κοντά στο ψηλότερο σημείο του)

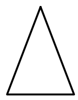
[29] Η έκφραση αυτή του μαθητή εκτός από ασάφεια περιέχει και σφάλμα, όσον αφορά στο «πάνω».



Ένας, επίσης, στα σχήματα 1και 3 σημειώνει τόξα, ενώ στο σχήμα 2, σημειώνει **2** κορυφές με τόξα.

Ένας, στα σχήματα 2 και 3 βάζει σημεία, ενώ στο 3ο τοποθετεί σημείο στο άκρο του ευθυγράμμου τμήματος. Τέλος, ένας άλλος βάζει σημάδια και στα 3 σχήματα.

-Δύο μαθητές χρησιμοποιούν την έκφραση «κορυφή είναι το σημείο στο πάνω μέρος της γωνίας». Ο ένας σημειώνει και στα 3 σχήματα τόξα, ενώ ο άλλος βάζει στα σχήματα 2 και 3 σημεία και στο 1ο βάζει σημάδι.



Δύο μαθητές χρησιμοποιούν την έκφραση «κορυφή είναι η πάνω γωνία του τριγώνου». Ο ένας από αυτούς κυκλώνει τις περιοχές γύρω από την κορυφή και στα τρία σχήματα. Ο άλλος στο 1ο σχήμα βάζει σημάδι, ενώ στα σχήματα 2 και 3 σημειώνει 2 κορυφές σε κάθε γωνία στα άκρα των ευθυγράμμων τμημάτων.

5.6 Συσχετίσεις μεταξύ των απαντήσεων των μαθητών στα ερωτήματα των δραστηριοτήτων.

Θεωρήσαμε ότι θα ήταν ενδιαφέρον να εξετάσουμε κατά πόσο συσχετίζονται οι απαντήσεις των μαθητών στο εσωτερικό κάθε δραστηριότητας, αλλά και ανάμεσα δραστηριότητες. Για το λόγο αυτό κατηγοριοποιήσαμε χονδρικά τις απαντήσεις και τις ενέργειες των μαθητών στα ερωτήματα των δραστηριοτήτων της έρευνάς μας καταλήγοντας στις εξής κατηγορίες:

α) Σχεδίαση

β) Εντοπισμός στοιχείων / σχέσεων ή ιδιοτήτων με απλή παρατήρηση του σχήματος.

γ) Εντοπισμός στοιχείων / σχέσεων ή ιδιοτήτων όπου απαιτείται συλλογισμός ή / και κατασκευαστική παρέμβαση.

δ) Καταδείξεις ίσων στοιχείων ή τμημάτων.

ε) Περιγραφές γεωμετρικών αντικειμένων.

Ψάξαμε για συσχετίσεις τόσο στο εσωτερικό κάθε κατηγορίας, όσο και ανάμεσα στις κατηγορίες. Οι συσχετίσεις που βρήκαμε στο εσωτερικό κάθε δραστηριότητας ήταν κατά κάποιο τρόπο αναμενόμενες. Ενδιαφέρον, όμως παρουσιάζουν οι συσχετίσεις ανάμεσα στις δραστηριότητες. Στο σημείο αυτό πρέπει να υπενθυμίσουμε ότι η επεξεργασία έγινε στο πρόγραμμα EXCEL και αναφέρεται στον υπολογισμό πιθανότητας με το τεστ του Fischer. Τα αποτελέσματα της

Το σφάλμα αυτό προέρχεται κατά πάσα πιθανότητα από το ότι στην καθημερινή ζωή λέγοντας κορυφή σπάνια εννοούμε κάτι που είναι «κάτω» ή στο «πλάι» επεξεργασίας αυτής παρουσιάζονται στον πίνακα 15 (παράρτημα 3). Πρώτα θα παρουσιάσουμε τις συσχετίσεις[30] στο εσωτερικό κάθε κατηγορίας και στη συνέχεια, τις συσχετίσεις ανάμεσα στις κατηγορίες. Σε παρένθεση, αναφέρουμε την πιθανότητα της κάθε συσχέτισης, η οποία είναι στρογγυλοποιημένη στο δεύτερο δεκαδικό ψηφίο. Θεωρούμε στατιστικά σημαντικές τις πιθανότητες που βρίσκονται σε επίπεδο κάτω του 5% ($\rho<0{,}05$)[31]και θα αναφερθούμε μόνο σ' αυτές. (Με Italics, τονίζουμε συσχετίσεις μη αναμενόμενες που νομίζουμε ότι παρουσιάζουν ενδιαφέρον).

1) Σχεδίαση.

-Ο επιτυχής χωρισμός του πρώτου ισοσκελούς τριγώνου, συσχετίζεται με τον επιτυχή χωρισμό του δεύτερου ισοσκελούς τριγώνου (0,024).

2) Εντοπισμός στοιχείων με απλή παρατήρηση (του σχήματος).

-Η εύρεση των ίσων στοιχείων των 2 ισοσκελών τριγώνων, συσχετίζεται με την εύρεση του κοινού στοιχείου των τριών ισοσκελών τριγώνων (0,038).

-Η εύρεση των ίσων στοιχείων των 2 ισοσκελών τριγώνων, συσχετίζεται με την εύρεση των ίσων στοιχείων του ρόμβου (0,043).

-Η εύρεση των ίσων στοιχείων του ρόμβου, συσχετίζεται με την εύρεση των ίσων στοιχείων των 2 ισοσκελών τριγώνων (0,043).

-Η αναγνώριση ενός τετραπλεύρου ως παραλληλογράμμου, συσχετίζεται με την εύρεση του κοινού στοιχείου των τριών ισοσκελών τριγώνων (0,021).

-Η αναγνώριση ενός τετραπλεύρου ως παραλληλογράμμου, συσχετίζεται με την αναγνώριση ενός τετραπλεύρου ως ρόμβου (0,049).

-Η αναγνώριση του δεύτερου τυχόντος τετραπλεύρου, συσχετίζεται με την αναγνώριση του δεύτερου (0,048) και του τέταρτου παραλληλογράμμου (0,039).

-Η αναγνώριση του δεύτερου τυχόντος τετραπλεύρου, συσχετίζεται με την αναγνώριση του τρίτου (0,0008), του τέταρτου (0,033) και του πέμπτου τυχόντος τετραπλεύρου (0,007).

-Η αναγνώριση του τρίτου τυχόντος τετραπλεύρου, συσχετίζεται με την αναγνώριση του τέταρτου (0,014), και του πέμπτου τυχόντος τετραπλεύρου (0,012).

-Η αναγνώριση του τέταρτου τυχόντος τετραπλεύρου, συσχετίζεται με την αναγνώριση του πέμπτου τυχόντος τετραπλεύρου (0,003).

3) Εντοπισμός στοιχείων ή ιδιοτήτων όπου απαιτείται συλλογισμός ή / και κατασκευαστική παρέμβαση.

---

[30] Οι συσχετίσεις που θα παρουσιάσουμε είναι οι πιο σημαντικές κατά τη γνώμη μας.

[31] Στις παιδαγωγικές επιστήμες το όριο στατιστικής σημαντικότητας θεωρείται το 5%.

-Η απάντηση των μαθητών ότι δεν μπορεί να κατασκευαστεί περιγεγραμμένος κύκλος σε πλάγιο παραλληλόγραμμο, συσχετίζεται με την απάντησή τους ότι ένα σκαληνό τρίγωνο δεν μπορεί να χωριστεί σε δύο ίσα τρίγωνα (0,043).

-Η απάντηση των μαθητών ότι δεν μπορεί να κατασκευαστεί περιγεγραμμένος κύκλος σε πλάγιο παραλληλόγραμμο, συσχετίζεται με την σωστή κατασκευή του περιγεγραμμένου κύκλου του ορθογωνίου τριγώνου (0,023).

-Η επιτυχής εγγραφή ορθογωνίου παραλληλογράμμου σε κύκλο, συσχετίζεται με την επιτυχή κατασκευή του περιγεγραμμένου κύκλου του ορθογωνίου τριγώνου (0,049).

-Η επιτυχής εγγραφή τετραγώνου σε κύκλο, συσχετίζεται με την επιτυχή κατασκευή του περιγεγραμμένου κύκλου του ορθογωνίου τριγώνου (0,049).

-Η επιτυχής εγγραφή τετραγώνου σε κύκλο, συσχετίζεται με την επιτυχή εγγραφή του ορθογωνίου τριγώνου σε κύκλο (0,006).

4) Καταδείξεις ίσων στοιχείων ή τμημάτων.

-Η σωστή κατάδειξη της αμβλείας γωνίας, συσχετίζεται με την σωστή κατάδειξη της οξείας γωνίας (0,0001).

-Η σωστή κατάδειξη της αμβλείας γωνίας, συσχετίζεται με την σωστή κατάδειξη της ορθής γωνίας (0,033).

-Η σωστή κατάδειξη της αμβλείας γωνίας, συσχετίζεται με την σωστή κατάδειξη του ευθυγράμμου τμήματος (0,037).

-Η σωστή κατάδειξη της αμβλείας γωνίας, συσχετίζεται με την σωστή κατάδειξη της ημιευθείας (0,035).

-Η σωστή κατάδειξη της οξείας γωνίας, συσχετίζεται με την σωστή κατάδειξη της ορθής γωνίας (0,029).

-Η σωστή κατάδειξη της οξείας γωνίας, συσχετίζεται με την σωστή κατάδειξη του ευθυγράμμου τμήματος (0,008).

-Η σωστή κατάδειξη της κορυφής μιας γωνίας, συσχετίζεται με την σωστή κατάδειξη του ευθυγράμμου τμήματος (0,038).

-Η σωστή κατάδειξη της ευθείας, συσχετίζεται με την σωστή κατάδειξη της ημιευθείας (0,019).

-Η σωστή κατάδειξη των ίσων στοιχείων του παραλληλογράμμου, συσχετίζεται με την σωστή κατάδειξη του ευθυγράμμου τμήματος (0,019).

5) Περιγραφές γεωμετρικών αντικειμένων

-Η σωστή διατύπωση ορισμού του ισοσκελούς τριγώνου, συσχετίζεται με τη σωστή διατύπωση ορισμού της αμβλείας γωνίας (0,045).

-Η σωστή διατύπωση ορισμού του ισοσκελούς τριγώνου, συσχετίζεται με τη σωστή διατύπωση ορισμού της οξείας γωνίας (0,045).

-Η σωστή διατύπωση ορισμού της αμβλείας γωνίας, συσχετίζεται με τη σωστή διατύπωση ορισμού της οξείας γωνίας (0,002).

-Η σωστή διατύπωση ορισμού της αμβλείας γωνίας, συσχετίζεται με τη σωστή διατύπωση ορισμού της ορθής γωνίας (0,018).

-Η σωστή διατύπωση ορισμού της οξείας γωνίας, συσχετίζεται με τη σωστή διατύπωση ορισμού της ορθής γωνίας (0,018).

-Η σωστή διατύπωση ορισμού της ευθείας, συσχετίζεται με τη σωστή διατύπωση ορισμού της ημιευθείας (0,049).

6) Σχεδίαση - Εντοπισμός στοιχείων με απλή παρατήρηση (του σχήματος)

-Ο επιτυχής χωρισμός των 2 ισοσκελών τριγώνων, συσχετίζεται με τον εντοπισμό του κοινού στοιχείου των τριών ισοσκελών τριγώνων (0,048).

-Ο επιτυχής χωρισμός των 2 ισοσκελών τριγώνων, συσχετίζεται με την αναγνώριση του παραλληλογράμμου (0,049).

7) Σχεδίαση - Εντοπισμός στοιχείων ή ιδιοτήτων όπου απαιτείται συλλογισμός ή / και κατασκευαστική παρέμβαση.

-Ο επιτυχής χωρισμός του πρώτου ισοσκελούς τριγώνου, συσχετίζεται με την επιτυχή εγγραφή τετραγώνου σε κύκλο (0,037).

-Ο επιτυχής χωρισμός του πρώτου ισοσκελούς τριγώνου, συσχετίζεται με την επιτυχή κατασκευή του περιγεγραμμένου κύκλου του ορθογωνίου τριγώνου (0,025).

-Ο επιτυχής χωρισμός των 2 ισοσκελών τριγώνων, συσχετίζεται με την επιτυχή εγγραφή τετραγώνου σε κύκλο (0,043).

8) Σχεδίαση – Καταδείξεις ίσων στοιχείων ή τμημάτων.

-Ο επιτυχής χωρισμός του πρώτου ισοσκελούς τριγώνου, συσχετίζεται με την σωστή κατάδειξη της ευθείας (0,049).

-Ο επιτυχής χωρισμός του δεύτερου ισοσκελούς τριγώνου, συσχετίζεται με την σωστή κατάδειξη της ευθείας (0,045).

-Ο επιτυχής χωρισμός του πρώτου ισοσκελούς τριγώνου, συσχετίζεται με την σωστή κατάδειξη των ίσων στοιχείων του παραλληλογράμμου (0,045).

9) Σχεδίαση – περιγραφή γεωμετρικών αντικειμένων.

-Ο επιτυχής χωρισμός των 2 ισοσκελών τριγώνων, συσχετίζεται με την σωστή διατύπωση ορισμού της αμβλείας γωνίας (0,009), της οξείας (0,009) και της ορθής (0,009).

-Ο επιτυχής χωρισμός των 2 ισοσκελών τριγώνων, συσχετίζεται με την σωστή διατύπωση ορισμού του ισοσκελούς τριγώνου (0,044).

10) Εντοπισμός στοιχείων με απλή παρατήρηση (του σχήματος) - Εντοπισμός στοιχείων ή ιδιοτήτων όπου απαιτείται συλλογισμός ή / και κατασκευαστική παρέμβαση.

-Η εύρεση του κοινού στοιχείου των τριών ισοσκελών τριγώνων, συσχετίζεται με την εύρεση σωστής απάντησης στο ερώτημα «σε ποια περίπτωση αν ενώσουμε 2 ίσα τρίγωνα, θα φτιάξουμε πάλι τρίγωνο» (0,038).

-Η αναγνώριση ενός τετραπλεύρου ως παραλληλογράμμου, συσχετίζεται με την επιτυχή εγγραφή ορθογωνίου παραλληλογράμμου σε κύκλο (0,037).

-Η εύρεση των ίσων στοιχείων του παραλληλογράμμου, συσχετίζεται με την εύρεση σωστής απάντησης στο ερώτημα «σε ποια περίπτωση αν ενώσουμε 2 ίσα τρίγωνα, θα φτιάξουμε πάλι τρίγωνο» (0,049).

-Η εύρεση των ίσων στοιχείων του ρόμβου, συσχετίζεται με την επιτυχή εγγραφή τετραγώνου σε κύκλο (0,025).

-Η εύρεση των ίσων στοιχείων του ρόμβου, συσχετίζεται με την επιτυχή κατασκευή του περιγεγραμμένου κύκλου του ορθογωνίου τριγώνου (0,023).

-Η αναγνώριση της παραλληλίας του παραλληλογράμμου, συσχετίζεται με την επιτυχή κατασκευή του περιγεγραμμένου κύκλου του ορθογωνίου τριγώνου (0,038).

-Η εύρεση των ίσων στοιχείων του πρώτου ισοσκελούς τριγώνου, συσχετίζεται με τη σωστή απάντηση στο ερώτημα «γιατί όσο και να προεκτείνουμε τις παράλληλες ευθείες, αυτές δεν συναντιούνται» (0,029).

11) Εντοπισμός στοιχείων με απλή παρατήρηση (του σχήματος) - Καταδείξεις ίσων στοιχείων ή τμημάτων.

-Η εύρεση των ίσων στοιχείων των 2 ισοσκελών τριγώνων, συσχετίζεται με την σωστή κατάδειξη των γεωμετρικών αντικειμένων[32] (0,038).

-Η εύρεση του κοινού στοιχείου των τριών ισοσκελών τριγώνων, συσχετίζεται με την κατάδειξη των ίσων στοιχείων του ρόμβου (0,023).

-Η εύρεση των ίσων στοιχείων του παραλληλογράμμου, συσχετίζεται με την σωστή κατάδειξη της ορθής γωνίας (0,013).

[32] Με την φράση γεωμετρικά αντικείμενα, εννοούμε την αμβλεία γωνία, την οξεία, την ορθή, την κορυφή, ευθεία, ευθύγραμμο τμήμα, την ημιευθεία.

-Η εύρεση των ίσων στοιχείων του παραλληλογράμμου, συσχετίζεται με την σωστή κατάδειξη του ευθυγράμμου τμήματος (0,033).

12) Εντοπισμός στοιχείων με απλή παρατήρηση (του σχήματος) - περιγραφή γεωμετρικών αντικειμένων.

-Η εύρεση των ίσων στοιχείων των 2 ισοσκελών τριγώνων, συσχετίζεται με την σωστή διατύπωση ορισμών των γεωμετρικών αντικειμένων (0,038).

-Η εύρεση του κοινού στοιχείου των τριών ισοσκελών τριγώνων, συσχετίζεται με την σωστή διατύπωση ορισμού της ορθής γωνίας (0,049).

-Η εύρεση των ίσων στοιχείων του παραλληλογράμμου, συσχετίζεται με την σωστή διατύπωση ορισμού της ορθής γωνίας (0,049).

-Η εύρεση των ίσων στοιχείων του ρόμβου, συσχετίζεται με την σωστή διατύπωση ορισμών των γεωμετρικών αντικειμένων (0,049).

-Η αναγνώριση της παραλληλίας του παραλληλογράμμου, συσχετίζεται με την σωστή διατύπωση ορισμών των γεωμετρικών αντικειμένων (0,037).

13) Εντοπισμός στοιχείων ή ιδιοτήτων όπου απαιτείται συλλογισμός ή / και κατασκευαστική παρέμβαση - Καταδείξεις ίσων στοιχείων ή τμημάτων.

-Η εύρεση σωστής απάντησης στο ερώτημα «σε ποια περίπτωση αν ενώσουμε 2 ίσα τρίγωνα, θα φτιάξουμε πάλι τρίγωνο», συσχετίζεται με την σωστή κατάδειξη της ορθής γωνίας (0,006).

-Η επιτυχής εγγραφή τετραγώνου σε κύκλο, συσχετίζεται με την επιτυχή κατάδειξη των ίσων στοιχείων του παραλληλογράμμου (0,038).

-Η επιτυχής εγγραφή τετραγώνου σε κύκλο, συσχετίζεται με την σωστή κατάδειξη των γεωμετρικών αντικειμένων (0,049).

-Η επιτυχής εγγραφή ορθογωνίου τριγώνου σε κύκλο, συσχετίζεται με την σωστή κατάδειξη των γεωμετρικών αντικειμένων (0,026).

-Η απάντηση των μαθητών ότι ένα σκαληνό τρίγωνο δεν μπορεί να χωριστεί σε δύο ίσα τρίγωνα, συσχετίζεται με την σωστή κατάδειξη της ορθής γωνίας (0,026).

14) Εντοπισμός στοιχείων ή ιδιοτήτων όπου απαιτείται συλλογισμός ή / και κατασκευαστική παρέμβαση - περιγραφή γεωμετρικών αντικειμένων.

-Η σωστή απάντηση στο ερώτημα «γιατί όσο και να προεκτείνουμε τις παράλληλες ευθείες, αυτές δεν συναντιούνται», συσχετίζεται με τη σωστή διατύπωση ορισμού των παραλλήλων ευθειών (0,019).

-Η εύρεση σωστής απάντησης στο ερώτημα «σε ποια περίπτωση αν ενώσουμε 2 ίσα τρίγωνα, θα φτιάξουμε πάλι τρίγωνο», συσχετίζεται με την σωστή διατύπωση ορισμού της ορθής γωνίας (0,041).

-Η επιτυχής κατασκευή του περιγεγραμμένου κύκλου του ορθογωνίου τριγώνου, συσχετίζεται με την σωστή διατύπωση ορισμών των γεωμετρικών αντικειμένων (0,016).

15) Καταδείξεις ίσων στοιχείων ή τμημάτων - περιγραφή γεωμετρικών αντικειμένων.

-Η σωστή κατάδειξη της αμβλείας γωνίας, συσχετίζεται με τη σωστή διατύπωση ορισμού της αμβλείας γωνίας (0,017).

-Η σωστή κατάδειξη της αμβλείας γωνίας, συσχετίζεται με τη σωστή διατύπωση ορισμού της οξείας γωνίας (0,017).

-Η σωστή κατάδειξη της αμβλείας γωνίας, συσχετίζεται με τη σωστή διατύπωση ορισμού της ορθής γωνίας (0,026).

-Η σωστή κατάδειξη της αμβλείας γωνίας, συσχετίζεται με τη σωστή διατύπωση ορισμού του ευθυγράμμου τμήματος (0,037).

-Η σωστή κατάδειξη της αμβλείας γωνίας, συσχετίζεται με τη σωστή διατύπωση ορισμού της ημιευθείας (0,035).

-Η σωστή κατάδειξη της οξείας γωνίας, συσχετίζεται με τη σωστή διατύπωση ορισμού της οξείας γωνίας (0,009).

-Η σωστή κατάδειξη της οξείας γωνίας, συσχετίζεται με τη σωστή διατύπωση ορισμού της ορθής γωνίας (0,049).

-Η σωστή κατάδειξη της οξείας γωνίας, συσχετίζεται με τη σωστή διατύπωση ορισμού της ευθείας (0,049)

-Η σωστή κατάδειξη της οξείας γωνίας, συσχετίζεται με τη σωστή διατύπωση ορισμού του ευθυγράμμου τμήματος (0,008).

-Η σωστή κατάδειξη της ορθής γωνίας, συσχετίζεται με τη σωστή διατύπωση ορισμού της ορθής γωνίας (0,007).

-Η σωστή κατάδειξη της ευθείας, συσχετίζεται με τη σωστή διατύπωση ορισμού της ευθείας (0,005).

-Η σωστή κατάδειξη της ευθείας, συσχετίζεται με τη σωστή διατύπωση ορισμού της ημιευθείας (0,019).

-Η σωστή κατάδειξη του ευθυγράμμου τμήματος συσχετίζεται με τη σωστή διατύπωση ορισμού του ευθυγράμμου τμήματος.

-Η σωστή κατάδειξη της ημιευθείας, συσχετίζεται με τη σωστή διατύπωση ορισμού της ευθείας (0,049).

-Η σωστή κατάδειξη της ημιευθείας, συσχετίζεται με τη σωστή διατύπωση ορισμού της ημιευθείας (0,001).

-Η σωστή κατάδειξη των ίσων στοιχείων του παραλληλογράμμου, συσχετίζεται με τη σωστή διατύπωση ορισμού του ευθυγράμμου τμήματος (0,019).

-Η σωστή κατάδειξη των ίσων στοιχείων του παραλληλογράμμου, συσχετίζεται με τη σωστή διατύπωση ορισμού των παραλλήλων ευθειών (0,029).
-Η σωστή κατάδειξη των ίσων στοιχείων του παραλληλογράμμου, συσχετίζεται με τη σωστή διατύπωση ορισμού του ισοσκελούς τριγώνου (0,045).

Όπως αναφέραμε αρχικά (σελ. 96), οι συσχετίσεις στο εσωτερικό κάθε κατηγορίας, ήταν αναμενόμενες. Για παράδειγμα, είναι λογικό και αναμενόμενο κάποιος μαθητής που χώρισε επιτυχώς το πρώτο ισοσκελές τρίγωνο, να χωρίσει επιτυχώς και το δεύτερο ισοσκελές τρίγωνο. Ενδιαφέρον, όμως, παρουσιάζουν, οι συσχετίσεις που βρέθηκαν **ανάμεσα** στις κατηγορίες. Ειδικότερα, αναφερόμαστε σε συσχετίσεις που βρέθηκαν ανάμεσα στις κατηγορίες της σχεδίασης και της περιγραφής γεωμετρικών αντικειμένων (βλ. σελ. 100), της σχεδίασης και του εντοπισμού ιδιοτήτων που απαιτείται συλλογισμός ή / και κατασκευαστική παρέμβαση (βλ. σελ. 99), της περιγραφής γεωμετρικών αντικειμένων και του εντοπισμού ιδιοτήτων που απαιτείται συλλογισμός ή / και κατασκευαστική παρέμβαση (βλ. σελ. 102). Για παράδειγμα, βρέθηκε υψηλή συσχέτιση ανάμεσα **στον επιτυχή χωρισμό των τριγώνων** και στη **σωστή διατύπωση** ορισμών της ορθής γωνίας, της οξείας και της αμβλείας (0,009), πράγμα που πιθανόν να σημαίνει ότι οι μαθητές που μπορούν να σχεδιάζουν επιτυχώς, μπορούν να διατυπώνουν σωστά ορισμούς. Με ανάλογο τρόπο μπορούμε να ερμηνεύσουμε και άλλες συσχετίσεις. Επειδή, όμως, το δείγμα μας είναι μικρό, δεν μπορούμε να το θεωρήσουμε γενικεύσιμο συμπέρασμα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΚΤΟ
ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ-ΣΥΖΗΤΗΣΗ

6.1 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ – ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Στη μελέτη αυτή, επιδιώξαμε να διερευνήσουμε τις δυνατότητες των μαθητών της ΣΤ΄ τάξης δημοτικού στην ανεύρεση και λογική αιτιολόγηση ιδιοτήτων γεωμετρικών σχημάτων μέσω ανακαλυπτικών ενεργειών. Αρχική μας άποψη ήταν ότι οι μαθητές της ηλικίας αυτής (11-12 ετών), όταν προετοιμασθούν κατάλληλα και όταν ακολουθείται μια ευρετική διαδικασία μάθησης, μπορούν να ανακαλύψουν διάφορες ιδιότητες γεωμετρικών σχημάτων και να τις επεκτείνουν επαγωγικά. Επίσης, ότι μπορούν να κάνουν επαγωγικούς, αναλογικούς και απαγωγικούς συλλογισμούς για να αιτιολογήσουν τα ευρήματά τους.

Σε αυτό το σημείο, οφείλουμε να υπενθυμίσουμε ότι η εργασία μας ήταν μια μελέτη περίπτωσης και τα αποτελέσματά της δεν πρέπει να θεωρηθούν γενικεύσιμα. Αποτελούν, όμως, σοβαρές ενδείξεις ώστε να αναθεωρήσουμε απόψεις που θέλουν τα παιδιά της ηλικίας αυτής να μην μπορούν να χρησιμοποιήσουν «συλλογισμούς» για να αιτιολογούν τα ευρήματά τους.

Οι συνεντεύξεις που πήραμε από τους μαθητές, μας έδωσαν την ευκαιρία να εντοπίσουμε τι είναι εύκολο για τους μαθητές, αλλά κυρίως το είδος των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν. Όπως αναφέραμε σε προηγούμενο σημείο της εργασίας μας (βλ. παρ. 4.4.1), οι δραστηριότητες της έρευνάς μας, οργανώθηκαν με βάση την κατάταξη των προτάσεων της ευκλείδειας γεωμετρίας (βλ. παρ. 2.4). Έτσι, οι μαθητές ασχολήθηκαν με δραστηριότητες που είχαν να κάνουν με χωρισμό και αναδιοργάνωση σχημάτων, μέχρι δραστηριότητες που απαιτούσαν χρήση συλλογισμών και κατασκευαστικές διαδικασίες. Με βάση την οργάνωση αυτή, θα παρουσιάσουμε παρακάτω τα συμπεράσματα της παρούσας μελέτης.

1. Αρχικός μας στόχος ήταν να δούμε αν οι μαθητές μπορούν να χωρίσουν ένα γεωμετρικό σχήμα σε άλλα δύο ίσα και αν μπορούν να ενώσουν δύο ίσα σχήματα ώστε να φτιάξουν ένα άλλο σχήμα. Όπως είδαμε (βλ. παρ. 5.1.1), **οι δραστηριότητες αυτές** φαίνεται **να είναι αρκετά εύκολες για τους μαθητές**.

2. Ο επόμενος στόχος της έρευνάς μας ήταν να διερευνήσουμε αν μπορούν οι μαθητές να ανακαλύψουν γεωμετρικές ιδιότητες θεωρώντας ένα σχήμα ως μέρη και όλο.

(α) Όσον αφορά στα τρίγωνα, ένα υψηλό ποσοστό μαθητών[33] (60%), αναγνώρισε αμέσως όλα τα ίσα στοιχεία των τριγώνων (πλευρές και γωνίες) που προέκυψαν από το χωρισμό ενός ισοσκελούς με μια ευθεία (βλ. παρ.5.2.1 (1)). Ωστόσο, σημαντικές δυσκολίες παρουσίασε ένα 35% των μαθητών στον εντοπισμό των γωνιών που σχηματίζονται στο μέσον της βάσης (20%), καθώς και στον εντοπισμό της κοινής πλευράς (12,5%)[34]. Ως προς την αναγνώριση της κοινής πλευράς έχουμε αναφέρει αλλού (βλ. παρ. 5.2.1 (1)) ότι προκαλεί σύγχυση στους μαθητές αφού αυτή έχει διπλό καθεστώς - είναι η ευθεία που χωρίζει το τρίγωνο σε δύο ίσα, αλλά και κοινή πλευρά των δύο αυτών τριγώνων- και δεν ήταν μέρος του αρχικού τριγώνου (σχεδιάστηκε από τους ίδιους τους μαθητές). Το ίδιο συνέβη και με τις γωνίες με κορυφή το μέσον της βάσης. Αυτές παρήχθησαν έμμεσα, δεν ήταν μέρη του αρχικού τριγώνου, αλλά προέκυψαν από το τμήμα που χώρισε το αρχικό τρίγωνο σε άλλα δύο ίσα. Οι δυσκολίες αυτές φάνηκαν εντονότερα όταν ο ερευνητής ζήτησε από τους μαθητές να εντοπίσουν το κοινό στοιχείο των τριών (χωρισμένων) ισοσκελών τριγώνων. Οι μαθητές αναμενόταν να εντοπίσουν τις ορθές γωνίες που σχηματίζονταν από τη διάμεσο των τριγώνων. Τελικά, το 65% των μαθητών[35] κατόρθωσε να τις εντοπίσει ως ίσες και ορθές (μερικοί από αυτούς μόνο ίσες), ενώ το υπόλοιπο 35% δεν κατόρθωσε να τις εντοπίσει ως ίσες, παρά τις παρεμβάσεις του ερευνητή (βλ. παρ. 5.2.1 (1)). Αυτή η δυσκολία των μαθητών πιθανώς να αποδίδεται στον τρόπο που έχουν διδαχθεί οι μαθητές την έννοια της ορθής γωνίας. Συνήθως κατά τη διδασκαλία δεν δίδεται έμφαση στον τρόπο κατασκευής της ορθής, αλλά στο γεγονός είτε ότι ορθή γωνία είναι αυτή που έχει 90^0, με αποτέλεσμα να συνδέεται στο μυαλό των μαθητών η έννοια αυτή με ένα αριθμό ή ότι μια γωνία είναι ορθή όταν οι πλευρές της ταυτίζονται με τις πλευρές του γνώμονα[36]. Πιθανώς, όμως, να οφείλεται στο ότι οι μαθητές δεν έχουν διαμορφώσει ακριβώς την έννοια της ορθής (βλ. Μ. Κούρκουλος κ.α, 1998., παρ. 4 Α1).

Σημαντικό ρόλο στην αναζήτηση των ίσων στοιχείων των τριγώνων έπαιξε **το είδος της παρέμβασης** του παρατηρητή. Διαπιστώσαμε ότι ο τρόπος που θα τεθεί η ερώτηση στο μαθητή επηρεάζει τη δυνατότητα των μαθητών να εντοπίσουν ιδιότητες γεωμετρικών σχημάτων. Έτσι στους μαθητές αυτούς που δεν εντόπισαν αμέσως τα ίσα στοιχεία, η ερώτηση «υπάρχουν άλλα ίσα στοιχεία;» βοήθησε το 17,5% των μαθητών αυτών να βρει με μεγαλύτερη ευκολία τα υπόλοιπα στοιχεία. Το 15% χρειάστηκε δεύτερη παρέμβαση (πιο εξειδικευμένη) «πόσες γωνίες / πλευρές έχει ένα τρίγωνο και πόσες έχεις βρει σε κάθε τρίγωνο», ενώ στο 7,5% από αυτούς χρειάστηκε να ζητήσει ο ερευνητής να του δείξουν τις τρεις γωνίες ή πλευρές κάθε τριγώνου.

(β) Όσον αφορά στα παραλληλόγραμμα, όλοι οι μαθητές αναγνώρισαν με ευκολία ότι:

[33] Στο κεφάλαιο αυτό αναφερόμαστε στους μαθητές και των δύο ομάδων μαζί (σύνολο 40 μαθητών).
[34] Επίσης, το 2,5% δεν εντόπισε αρχικά και τις γωνίες στο μέσον της βάσης και την κοινή πλευρά.
[35] Όπως, είδαμε πολλοί μαθητές δεν γνώριζαν πώς να συγκρίνουν πλευρές και γωνίες τριγώνων, πράγμα το οποίο δυσχέραινε τον εντοπισμό του κοινού στοιχείου των τριών τριγώνων.
[36] Στο βιβλίο του δασκάλου της Γ΄ τάξης, αναφέρεται: «…Στη συνέχεια πληροφορούνται (οι μαθητές) ότι η γωνία της οποίας οι πλευρές ταυτίζονται με τις πλευρές του γνώμονα, ονομάζεται **ορθή** γωνία (σελ. 207).

(1) Σε ένα παραλληλόγραμμο, οι απέναντι πλευρές και οι απέναντι γωνίες είναι ίσες.

(2) Σε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, οι διαγώνιοί του είναι ίσες.

(3) Σε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

Δυσκολίες, όμως, **παρουσίασαν οι μαθητές στον εντοπισμό της παραλληλίας** των πλευρών του παραλληλογράμμου, αλλά και στην αναγνώριση ενός τετραπλεύρου ως παραλληλογράμμου.[37] Η συμπεριφορά των μαθητών έδειξε ότι ακόμα και αυτοί που είναι σε θέση να αναγνωρίσουν το παραλληλόγραμμο και την παραλληλία, οδηγούνται δυσκολότερα στην αναζήτησή τους απ' ό,τι στην αναζήτηση των ίσων στοιχείων του σχήματος (βλ. παρ. 5.2.1 (2)). Μόνο το 7,5% του συνόλου των μαθητών αναγνώρισε και ανέφερε αμέσως την παραλληλία των πλευρών του παραλληλογράμμου. Αυτό δεν είναι περίεργο αν ανατρέξουμε στο βιβλίο του μαθητή της Ε΄ τάξης δημοτικού (β΄ τόμος) στην ενότητα «Τα παραλληλόγραμμα – Ιδιότητες των παραλληλογράμμων». Στην ενότητα αυτή, θα παρατηρήσουμε ότι δεν αναφέρεται πουθενά ο ορισμός του παραλληλογράμμου, ο οποίος προκύπτει εύκολα από την ετυμολογία την ίδιας της λέξης. Όμως, στην ίδια ενότητα, στις ασκήσεις, ζητείται από τους μαθητές να σημειώσουν με ένα Χ τα χαρακτηριστικά των παραλληλογράμμων, μέσα στα οποία αναφέρεται ότι οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες. Δεν είναι, λοιπόν, περίεργο που οι μαθητές δεν έβλεπαν την συνεπαγωγή παραλληλόγραμμο $\Leftrightarrow$ παράλληλες πλευρές.

Γενικά, όμως το να «δουν» οι μαθητές την παραλληλία είναι κάτι που παρουσιάζει ιδιαιτερότητες. Τούτο οφείλεται στο ότι η **παραλληλία** είναι μια **ολική ιδιότητα ευθειών** υπό την έννοια ότι η διαπίστωσή της δεν διασφαλίζεται από τις ιδιότητες των ευθειών σε μια πεπερασμένη περιοχή τους (όπως π.χ. η καθετότητα δύο ευθειών διασφαλίζεται από τη συμπεριφορά τους σε μια περιοχή του σημείου τομής τους), αλλά απαιτεί χρήση συλλογισμών, στηριγμένων σε άλλες μαθηματικές προτάσεις ή πειράματα (Μ. Κούρκουλος κ..α., παρ. 4 Α3, 1998).

Και η **αναζήτηση της παραλληλίας** από τους μαθητές που δεν την είχαν εντοπίσει, **επηρεάσθηκε από το είδος της παρέμβασης του ερευνητή**. Έτσι, όταν οι μαθητές ρωτήθηκαν «τι άλλο έχει ένα παραλληλόγραμμο» ανέφεραν την παραλληλία (22,5%), ενώ ένα πολύ υψηλότερο ποσοστό την ανέφερε όταν η ερώτηση πήρε την μορφή «γιατί το λέμε παραλληλόγραμμο» (65%).

Η εύκολη αναζήτηση των ίσων στοιχείων ή σχέσεων εξαρτάται από το κατά πόσο τα στοιχεία αυτά έχουν εγγραφεί ως βασικά στη μαθηματική παιδεία των μαθητών, αλλά και από άλλους παράγοντες όπως: (α) το σχήμα, (β) το αν έχει διαμορφώσει την έννοια του στοιχείου ή της σχέσης και (γ) το συνολικό πρόβλημα είναι ενδιαφέρον γι' αυτόν (βλ. Μ.. Κούρκουλος κ.α., παρ. 4 Α1, 1998).

3. Βασικός, επίσης, στόχος της έρευνας ήταν να διερευνήσει το κατά πόσο μπορούν οι μαθητές να επεκτείνουν επαγωγικά και αναλογικά τις ιδιότητες που ανακαλύπτουν στα σχήματα της ίδιας ή παρεμφερούς κατηγορίας. Η συμπεριφορά των μαθητών, έδειξε ότι **μεταφέρουν με ευκολία τις**

[37] Οι δυσκολίες που παρουσιάζουν οι μαθητές στα παραλληλόγραμμα, έχουν επισημανθεί από πολλούς ερευνητές (βλ. παρ. 3.3.2).

ιδιότητες που έχουν ανακαλύψει σε προηγούμενα σχήματα και σε άλλα (σχήματα), πράγμα το οποίο ήταν ενθαρρυντικό (βλ. παρ. 5.3). Ας υπενθυμίσουμε ότι (στις δραστηριότητες που αφορούσαν στα τρίγωνα) είχαν να αντιμετωπίσουν δυσκολίες. Τα άλλα δύο ισοσκελή τρίγωνα που δόθηκαν στους μαθητές, **δεν είχαν οριζόντιο προσανατολισμό στο επίπεδο**, ενώ στο τρίτο ισοσκελές τρίγωνο, οι μαθητές έπρεπε να **φαντασθούν** την ευθεία που το χώριζε σε δύο ίσα τρίγωνα. Στο θεωρητικό μέρος της εργασίας μας (βλ. παρ. 3.3.2), είχε αναφερθεί ότι -από έρευνες που έχουν γίνει- ο προσανατολισμός του σχήματος επηρέαζε σημαντικά τα ποσοστά επιτυχίας στη λύση ενός προβλήματος. Όμως, **ένα σημαντικά υψηλό ποσοστό** των συγκεκριμένων μαθητών (92,5%), **επέκτεινε χωρίς παρέμβαση του παρατηρητή τις ιδιότητες**[38] **που είχε ανακαλύψει στο 1ο ισοσκελές τρίγωνο**. Το γεγονός ότι οι μαθητές μεταφέρουν με ευκολία τις ιδιότητες που έχουν ανακαλύψει σε προηγούμενα σχήματα, φάνηκε και στις δραστηριότητες που αφορούσαν στα παραλληλόγραμμα (βλ. παρ. 5.2.1 (2)), καθώς και στις δραστηριότητες που αφορούσαν στις κατασκευές (βλ. παρ. 5.4).

Θα μπορούσε κάποιος να αποδώσει την ικανότητα της επαγωγικής επέκτασης των μαθητών στην τάση τους για «αυθαίρετη» γενίκευση, (γενίκευση χωρίς περιορισμούς). Αυτό θα ήταν σωστό, αν για παράδειγμα οι μαθητές **γενίκευαν** τις ιδιότητες που ανακάλυψαν στο ισοσκελές σε **οποιοδήποτε** είδος τριγώνου, πράγμα το οποίο δε συνέβη. Στις ατομικές συνεντεύξεις που κάναμε με τους μαθητές, είχαμε ερωτήματα και δραστηριότητες με τις οποίες θέλαμε να ελέγξουμε την τάση αυτή των μαθητών για υπερεπαγωγή[39] (βλ. παρ. 5.2.2 Α, 5.4 Α, 5.4 ΣΤ). Διαπιστώσαμε ότι η συντριπτική πλειοψηφία των μαθητών **δεν γενίκευσε** ιδιότητες που είχε ανακαλύψει, σε σχήματα παρεμφερούς κατηγορίας, ενώ οι ίδιοι μαθητές αιτιολόγησαν το «γιατί».

4. Η έρευνά μας, επίσης, έδειξε ότι οι **αρκετοί** από τους συγκεκριμένους **μαθητές μπορούσαν να κάνουν υποθετικο-απαγωγικούς συλλογισμούς**, βλέποντας **αναλογίες** με προηγούμενες καταστάσεις. Είναι αξιοσημείωτο ότι ένα υψηλό ποσοστό των μαθητών (52,5%) -που στην ερώτηση του παρατηρητή «σε ποια περίπτωση, αν ενώσουμε 2 ίσα τρίγωνα θα φτιάξουμε τρίγωνο» απάντησαν πως τα τρίγωνα θα έχουν ορθές γωνίες- **αιτιολόγησε την απάντηση αυτή σκεπτόμενο αναλογικά** με την πρώτη δραστηριότητα: υπέθεσαν ότι αφού ένα ισοσκελές τρίγωνο όταν το χωρίσουμε με μια ευθεία, μας δίνει 2 ίσα ορθογώνια τρίγωνα, τότε θα ισχύει και το αντίστροφο. Δηλαδή, για να φτιάξουμε ένα τρίγωνο, θα ενώσουμε δύο ορθογώνια τρίγωνα (βλ. παρ. 5.3). Εδώ δεν πρόκειται για αυστηρό απαγωγικό συλλογισμό, αλλά για αναλογικό (παρ.3.1) ο οποίος δείχνει τον τρόπο με τον οποίο τέτοιοι συλλογισμοί οδηγούν στη **διατύπωση** νέων εικασιών που απαιτούν περαιτέρω διερεύνηση για επαλήθευση ή διάψευση.

---

[38] Με τη λέξη ιδιότητες αναφερόμαστε στην πρόβλεψη ότι και τα άλλα δύο ισοσκελή τρίγωνα μπορούν να χωριστούν σε ίσα τρίγωνα, ότι θα έχουν και αυτά ίσες πλευρές και γωνίες, καθώς και στην κατάδειξη των ίσων στοιχείων.

[39] Τα ερωτήματα και οι δραστηριότητες αυτές αφορούσαν μόνο στους μαθητές της β΄ ομάδας.

Η ικανότητα αυτή για επαγωγικό, αναλογικό και απαγωγικό τρόπο σκέψης στους συγκεκριμένους μαθητές φάνηκε και στις δραστηριότητες των κατασκευών. Σε μερικές, περιπτώσεις δεν χρειάστηκε να διατυπώσουν οι μαθητές προφορικά το συλλογισμό τους, αφού η σωστή κατασκευή προϋπέθετε σωστό συλλογισμό εκ μέρους του μαθητή (π.χ. βλ. κατασκευή περιγεγραμμένου κύκλου τετραγώνου, παρ. 5.4 Γ). Αυτό που παρατηρήσαμε ως προς την ικανότητα των μαθητών για συλλογισμό, ήταν ότι είχαν πολύ **μεγαλύτερη ευκολία στο να σκεφθούν επαγωγικά απ' ό,τι αναλογικά**. Για παράδειγμα, στη κατασκευή του περιγεγραμμένου κύκλου του τετραγώνου, είχαμε πολύ υψηλότερα ποσοστά επιτυχίας (76,4%, χωρίς την παρέμβαση του ερευνητή), απ' ό,τι στην εγγραφή του ορθογωνίου παραλληλογράμμου σε κύκλο (47,1%, χωρίς την παρέμβαση του ερευνητή). Η τελευταία κατασκευή, απαιτούσε από τους μαθητές να δουν την **αναλογία** με την κατασκευή του περιγεγραμμένου κύκλου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου και να προχωρήσουν αντίστροφα, πράγμα που δυσκόλεψε τους περισσότερους μαθητές. Η δυσκολία αυτή έγινε μεγαλύτερη, όταν τους ζητήθηκε να εγγράψουν τετράγωνο μέσα σε κύκλο, όπου εκεί δεν είχαν μόνο να σκεφθούν αναλογικά, αλλά και το πώς θα φέρουν τις διαγωνίους ώστε να κατασκευάσουν τετράγωνο και όχι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Αυτό στάθηκε παγίδα για τους περισσότερους μαθητές, κατεβάζοντας τα ποσοστά επιτυχίας αυτής της κατασκευής στο 35,3%.

Όπως και σε προηγούμενες δραστηριότητες, έτσι και στις κατασκευές, η **μεθοδική καθοδήγηση** των μαθητών από τον παρατηρητή, τους **βοήθησε** ώστε να φτάσουν στη σωστή πορεία κατασκευής. Για παράδειγμα, στην εγγραφή του τετραγώνου σε κύκλο, η προτροπή του παρατηρητή προς τους μαθητές εκείνους που δεν μπόρεσαν αρχικά να κάνουν την κατασκευή, να παρατηρήσουν τις διαγωνίους του ορθογωνίου παραλληλογράμμου και του τετραγώνου[40], βοήθησε το 23,5% ώστε να κάνει την σωστή κατασκευή. Υπήρχε όμως ένα ποσοστό μαθητών (23,5%) στο οποίο ο παρατηρητής έπρεπε να εξειδικεύσει ακόμα περισσότερο την παρέμβασή του (για να κάνουν τη σωστή κατασκευή) και να ζητήσει να παρατηρήσουν τις γωνίες που σχηματίζουν οι διαγώνιοι στις 2 περιπτώσεις τετραπλεύρων.

Σημαντικό, επίσης, ήταν ότι μερικοί μαθητές ακολούθησαν **δικούς τους,** αλλά **σωστούς τρόπους κατασκευής**, πράγμα το οποίο δείχνει δεν ακολούθησαν μια «συνταγή» που τους υποδείχθηκε, αλλά προσπάθησαν να βρουν τον δικό τους τρόπο για την επίλυση του προβλήματος που τους τέθηκε (π.χ. βλ. κατασκευή περιγεγραμμένου κύκλου τετραγώνου, παρ. 5.4 (Δ)).

5. Μια πολύ **σημαντική αδυναμία** των μαθητών, η οποία ήταν «διάχυτη» σε όλες τις δραστηριότητες, είναι η ***γλωσσική***. Οι μαθητές εμφάνισαν σημαντικές ελλείψεις τόσο στην σωστή διατύπωση ορισμών των γεωμετρικών αντικειμένων (βλ. παρ. 5.5), όσο και στη χρησιμοποίηση των

[40] Οι μαθητές είχαν κατασκευάσει προηγουμένως τους περιγεγραμμένους κύκλους του ορθογωνίου παραλληλογράμμου και του τετραγώνου και έτσι μπορούσαν να εντοπίσουν τη διαφορά.

κατάλληλων λέξεων[41] για τη διατύπωση της σκέψης τους. Οι ελλείψεις αυτές, κατά τη γνώμη μας, είναι πολύ σημαντικές, καθώς «μπλοκάρουν» τους μαθητές στο να γίνουν κατανοητοί είτε όταν απλώς περιγράφουν ένα γεωμετρικό αντικείμενο, είτε όταν προσπαθούν να διατυπώσουν κάποιο συλλογισμό τους. Τα γλωσσικά προβλήματα των μαθητών έχουν μελετηθεί από αρκετούς ερευνητές και έχουν δοθεί διάφορες ερμηνείες γι' αυτά (βλ. παρ. 3.4). Εμείς, θα θέλαμε να τονίσουμε **την επιτακτική ανάγκη εξάσκησης των μαθητών στη σαφή γλωσσική διατύπωση**. Για παράδειγμα, εξάσκηση των μαθητών στο **να γράφουν ρητά τη σκέψη τους** που εξηγεί **τη λύση που έδωσαν σε ένα πρόβλημα**. Η γεωμετρία, αποτελεί προνομιακό πεδίο για τέτοιου είδους δραστηριότητες (βλ. Κ. Τζανάκης κ.α, 1998, παρ. 2).

6. Βασικό, ωστόσο, συμπέρασμα της έρευνάς μας είναι το γεγονός ότι οι μαθητές **μαθαίνουν εύκολα**. Αυτό το διαπιστώσαμε τόσο στις δραστηριότητες των κατασκευών, όσο και στις δραστηριότητες που αφορούσαν την εύρεση ίσων στοιχείων. Για παράδειγμα, οι μαθητές δεν γνώριζαν την ονομασία «τυχόν τετράπλευρο». Αφού τους το είπε ο ερευνητής, 25 από τους μαθητές, όταν το ξανασυνάντησαν, το ονόμασαν «τυχόν τετράπλευρο» (βλ. παρ. 5.2.1 (2 Β)). Το ίδιο συνέβη και με το παραλληλόγραμμο (βλ. παρ. 5.2.1 (2 Α)). Αυτό φάνηκε και στις κατασκευές, όπου η «διδασκαλία» που τους κάναμε αρχικά σχετικά με τον κύκλο και τις διαγωνίους του ορθογωνίου παραλληλογράμμου (βλ. παρ. 4.4.1, γ΄ δραστηριότητα), τους οδήγησε να διατυπώσουν μαθηματικές προτάσεις βάσει ήδη γνωστών συλλογισμών.

7. Αρκετά ενδιαφέροντα ήταν – όπως είδαμε- τα αποτελέσματα της στατιστικής επεξεργασίας. Οι **μη αναμενόμενες συσχετίσεις** που βρέθηκαν στις κατηγορίες των απαντήσεων των μαθητών στα ερωτήματα και δραστηριότητες της έρευνας (βλ παρ. 5.6), έχουν και ερευνητικό και διδακτικό ενδιαφέρον. Για το λόγο αυτό αξίζει να διερευνηθούν πιο συστηματικά σε μεγαλύτερο δείγμα μαθητών.

Τέλος, ενθαρρυντικό είναι το γεγονός ότι οι μαθητές τήρησαν μια **θετική στάση** απέναντι σε αυτόν **τον ανακαλυπτικό τρόπο μάθησης**. Αυτό δεν διερευνήθηκε συστηματικά μέσω ενός ερωτηματολογίου, αλλά προέκυψε από προσωπική συζήτηση που είχαμε με κάθε μαθητή μετά το τέλος της συνέντευξης. Όλοι οι μαθητές εξέφρασαν την άποψη ότι θα ήθελαν να γίνεται με αυτό τον τρόπο η διδασκαλία των μαθηματικών, γιατί έτσι καταλαβαίνουν μόνοι τους την κάθε κίνηση που κάνουν για να λύσουν ένα πρόβλημα. Επίσης, τόνισαν πως ο ανακαλυπτικός τρόπος προσέγγισης είναι πιο **διασκεδαστικός** και δεν τους κάνει να βαριούνται τα μαθηματικά.

9. Ένα γενικό συμπέρασμα, που αφορά όμως στη διδασκαλία του μαθήματος της γεωμετρίας στο δημοτικό σχολείο, είναι το γεγονός ότι οι μαθητές πρέπει να **αποκτήσουν ευχέρεια στο χειρισμό βασικών και απλών γεωμετρικών καταστάσεων**. Για παράδειγμα, οι μαθητές πρέπει να ασκηθούν

[41] Για παράδειγμα, είχαμε μαθητές που τις πλευρές του τριγώνου τις ονόμαζαν «γραμμές» (σελ. 74), αντί να πουν «ίσα» έλεγαν «ίσια» (σελ. 74), επίσης εκφράσεις όπως «παράλληλες γωνίες» (σσ. 74, 75, 76), «ισόπλευρες γωνίες» (σελ. 76) ή περιγραφές του τύπου: «τα τρίγωνα δεν θα πρέπει να πηγαίνουν λοξά» (σελ. 76).

στη χρήση γεωμετρικών οργάνων και κατασκευή γεωμετρικών σχημάτων, όπως επίσης στην άμεση αναγνώριση ορισμένων στοιχειωδών γεωμετρικών συνεπαγωγών (Μ. Κούρκουλος κ.α., παρ. 6.3, 1998). Με τέτοιου είδους δραστηριότητες, οι μαθητές θα διευκολυνθούν σε κάθε προσπάθειά τους να διερευνούν γεωμετρικές καταστάσεις και να ανακαλύπτουν γεωμετρικές ιδιότητες.

6.2 ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΕΣ ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΕΣ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

Η παρούσα μελέτη μας έδωσε ενδιαφέροντα στοιχεία για τη συμπεριφορά των μαθητών στο μάθημα της Γεωμετρίας, όταν ακολουθείται ένας ανακαλυπτικός τρόπος προσέγγισης των γεωμετρικών εννοιών. Ειδικότερα, διαπιστώσαμε πως τα υποκείμενα της έρευνάς μας, μπόρεσαν (μόνοι τους ή με βοήθεια) να ανακαλύψουν ιδιότητες γεωμετρικών σχημάτων, να κάνουν επαγωγικές επεκτάσεις των ιδιοτήτων αυτών, να κάνουν –μέσα στα πλαίσια της ψυχοπνευματικής τους ωρίμανσης και των δυνατοτήτων τους- συλλογισμούς (επαγωγικούς, αναλογικούς, απαγωγικούς). Διαπιστώσαμε, επίσης, ότι οι συγκεκριμένοι μαθητές είχαν την δυνατότητα γρήγορης μάθησης. Για τους παραπάνω λόγους, και επειδή η παρούσα εργασία αποτελούσε μελέτη περίπτωσης, πιστεύουμε πως τα παραπάνω πρέπει να τεκμηριωθούν εμπειρικά, με μεγαλύτερο δείγμα μαθητών. Μια πρόταση θα ήταν να πραγματοποιηθούν διδασκαλίες, όπου οι μαθητές θα ασκηθούν σε γεωμετρικές ενότητες για κάποιο χρονικό διάστημα μέσω του ευρετικού τρόπου προσέγγισης. Έπειτα, να γίνει σύγκριση τη επίδοσης των μαθητών αυτών με μαθητές που θα διδαχθούν τις ίδιες έννοιες με τον παραδοσιακό τρόπο διδασκαλίας. Πιστεύουμε ότι μια τέτοιου είδους έρευνα, θα δώσει αξιόλογα στοιχεία για τον τρόπο διδασκαλίας του μαθήματος της γεωμετρίας στο δημοτικό σχολείο.

Τέλος, πιστεύουμε ότι πρέπει να διερευνήσουμε σε μεγαλύτερο δείγμα μαθητών, τις μη αναμενόμενες συσχετίσεις που παρατηρήσαμε και να βρούμε αν οι συσχετίσεις που βρήκαμε ανάμεσα σε διαφορετικές δεξιότητες που απαιτούνται για την ανακάλυψη γεωμετρικών εννοιών, ήταν τυχαίες ή όχι.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ξενόγλωσση

Arsac, G. (1987), L'origine de la dιmonstration: Essai d'ιpistιmologie didactique, Recherches en Didactique des Mathιmatiques (R.D.M.), **8**, 267-312.

Arsac, G. (1988), Les rechearches actualles sur l' apprentissage de la demonstration et les phenomenes de la validation en France, Recherches en Didactique des Mathιmatiques, **3,** 247-280.

Austin, J.L. et al. (1979), Language and Mathematical Education, Educational Studies in Mathematics, **10,** 161-197.

Ballachef, N. (1982), Preuve et dιmonstration en mathιmatiques au collθge, Recherches en Didactique des Mathιmatiques, **3**, 261-304.

Battista, M. (1990), Spatial visualization and Gender differences in high school geometry, Journal for Research in Mathematics Education, vol. 21, No 1, 47-60.

Brousseau, G. (1983), Les obstacles ιpistιmologiques et les problθmes en mathιmatiques, Recherches en Didactique des Mathιmatiques, **4**, 165-198.

Cunninghum, D. J. (1991). Assessing Constructions and Constructing Assessments: A dialogue. Educational Technology, May, 13-17.

De Block-Docq, C. (1994), Modalitιs de la pensιe mathιmatique d'ιlθves de douze ans devant des problθmes de pavages Educational Studies in Mathematics, **27,** 165-189.

De Villers, M. (1994), The role and function of a Hierarchical classification of Quadrilaterals, For the learning of Mathematics, **14,** 11-18.

Duffy, T. M. & Jonassen, D. H. (1991). Constructivism: New implications for Instructional Technology? Educational Technology, May, 7-11.

Duval, R. (1994), Les diffırentes fonctionnements d'une figure dans un dımarche Gıomıtrique, Repıres-IREM, **17**.

Fischbein, E. (1993), The theory of figural concepts, Educational Studies in Mathematics, **24,** 139-162.

Gutierez, A. & Jaime, A. (1991), An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the Van Hiele levels, Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 22, No 3 237-251.

Kynigos, H. (1993), Children's inductive thinking during intrinsic and euclidean geometrical activities in a computer environment, Educational Studies in Mathematics, **24,** 177-197.

Lakatos, I. (1976), Proofs and Refutations, Cambridge: Cambridge University Press.

Lemonidis, C. (1997), A few remarks regarding the teaching of geometry through a theoretical analysis of the geometrical figure, Non Linear Analysis: Theory, Method and Applications, **30**, 4.

Mc Donald, J. (1989), Cognitive development and Structuring of geometric content, Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 20, No. 1, 76-94.

Mc Intosh, M. (1994), Word roots in Geometry, The Mathematics Teacher, Vol. 87, No 7, 510-515.

Mendozz, L. (1993), What is a Quadrilateral?, The Mathematics Teacher, Vol. 86, No 9, 774-776.

Merrill, D. C. (1991), Constructivism and Instructional Design. Educational Technology, May, 45-53.

Padilla, V. (1990), Les figures aident-elles a voir en Gıomıtrie ? Annales de Didactique et des Sciences Cognitives, **3**, 223-252.

Patronis, T. & Spanos, D. (1991), On Squares, rhombuses…and the Influence of Culture and Language on students' conceptions, International Journal Of Mathematical Education in Science and Technology, Vol.22, No 6, 927-935.

Parzysz, B. (1988), Knowing vs seeing: Problems of the plane representation of space geometry figures, Educational Studies in Mathematics, **19**, 79-92.

Perkins, D. N. (1991). Technology Meets Constructivism: Do They Make a Marriage? Educational Technology, May, 18-23.

Polya, G. (1954), Induction and analogy in Mathematics, Princeton: Princeton University Press.

Polya, G. (1968), Patterns of plausible inference, Princeton: Princeton University Press.

Presmeg, N. (1986), Visualisation and mathematical giftedness, Educational Studies in Mathematics, **17**, 297-311.

Rahim, M.H., Sawada, D. (1990), The duality of qualitative and quantitative knowing in school geometry, Int. J. Math.Educ. Sci. Technol,. **21**, No2, 303-308, section 1.

Rauscher, J. C. (1994), Les travaux Gιomιtriques en sixiθme: une transition entre une gιomιtrie de l'observation et une gιomιtrie de dιmonstration, Activitιs Mathιmatiques, **23**, 1-23, Editions Mission Laique Franηaise.

Sakonidis, H. (1996), Mathematics and Language: A Sociolinguistic Approach. Didactics and History of Mathematics, Thessaloniki: A. Gagatsis-L. Rongers, 248-253.

Senk, S. (1989), Van Hiele levels and Achievement in writing geometry proofs, Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 20, No. 3, 309-321.

Skemp, R. (1971), The Psychology of learning Mathematics : Penguin.

Teppo, A. (1991), Van Hiele levels of geometric thought revisited, Mathematics Teacher, 210-221.

Vergnaund, G. (1991), Langage et pensıe dans l' apprentissage des mathematiques, Revenue Francaise de Pedagogie, **96**, 79-86.

Ελληνόγλωσση

Αναλυτικά Προγράμματα μαθημάτων του Δημοτικού Σχολείου, 1987, Αθήνα: ΟΕΔΒ.

Βάμβουκας, Μ. (1984), Εισαγωγή στην ψυχοπαιδαγωγική έρευνα και μεθοδολογία, Αθήνα: Γρηγόρης.

Βάμβουκας, Μ. κ.α (1997), Η ικανότητα κατανόησης προμαθηματικών εννοιών και σχέσεων σε μαθητές Β΄ τάξης δημοτικού σχολείου, Γλώσσα, **42.**

Barbin, E. (1989), Η μαθηματική απόδειξη : επιστημολογικές σημασίες και διδακτικά ζητήματα (Υλικά της ελληνογαλλικής συνεδρίασης), Όμιλος για την Ιστορία των μαθηματικών, **18,** 1-31.

Γαγάτσης, Α. (1993), Θέματα διδακτικής Μαθηματικών, Θεσσαλονίκη: Αδελφοί Κυριακίδη.

Davis, P. J. and Hersh, R. (1992), *Η μαθηματική εμπειρία,* Αθήνα: Τροχαλία.

Ζαράνης, Η. (1997), Ανάπτυξη και υλοποίηση των επιπέδων Van Hiele στην γεωμετρία με την βοήθεια υπολογιστή, *14ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας,* ΕΜΕ, 281-291.

Ζάχος, Ι. (1997), Η ικανότητα διατύπωσης λογικών συλλογισμών που εξηγούν γεωμετρικές σχέσεις «πρώτης» και «δεύτερης» τάξης και ο ρόλος της στην ανάπτυξη ειδίκευσης στη γεωμετρία, *14ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας,* ΕΜΕ, 452-459.

Θωμαΐδης, Γ. (1993α), Aspects of negative numbers in the early 17th century: An approach for didactic reasons, Science and Education, **2**, 69-86.

Θωμαΐδης, Γ. (1993β), Κριτική σκέψη, Μαθηματικά και κριτική εκπαίδευση, *Πρακτικά 9ου Πανελληνίου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας*, Αθήνα: ΕΜΕ, 333-350.

Θωμαΐδης, Γ. (1996), Η διδασκαλία της θεωρητικής γεωμετρίας και το νέο αναλυτικό πρόγραμμα από την σκοπιά της διδακτικής των Μαθηματικών, *ΕΔΔΜ,* **1,** 72-92.

Θωμαΐδης, Γ. (1998), Μερικές όψεις της αποτυχίας των μαθητών στην κατανόηση βασικών εννοιών της Ευκλείδειας Θεωρητικής Γεωμετρίας, *Διημερίδα διδακτικής μαθηματικών,* Παν/μιο Κρήτης.

Fort, M. (1992), Τα μαθηματικά στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση, *Θέματα Διδακτικής μαθηματικών,* Αθήνα: Προτάσεις, 351-368.

Hershkowitz, R. et al. (1990), Ψυχολογικές όψεις της μάθησης της γεωμετρίας in Mathematics and Cognition P. Nester, J. Kilpatrick (eds.), Cambridge: Cambridge University Press/ (μετ.) Ερευνητική Διάσταση της Διδακτικής των Μαθηματικών *(ΕΔΔΜ)*, **1** (1996), 93-135.

International Committee for Mathematics Education (I.C.M.E.), (1995), Προοπτικές για την διδασκαλία της γεωμετρίας στον 21ο αιώνα, Educational Studies in Mathematics**,** **28**, No1 / (μετ.) Διάσταση, **3-4,** (1995), 52-64.

Κούρκουλος, Μ., Τζανάκης Κ., Θεολογίτου Κ. (1998), Η Ευκλείδεια Γεωμετρία στο Δημοτικό σχολείο: παραδείγματα και πειραματική διερεύνηση, προδημοσίευση, Παν/μιο Κρήτης.

Λιναρδάκης, Π. (1992), Τα μαθηματικά στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση, *Θέματα Διδακτικής μαθηματικών,* Αθήνα: Προτάσεις, 171-180.

Μουζάκης, Χ. Μήταλας, Θ. (1997), Ανάπτυξη λογισμικού για τη διδασκαλία του τρόπου κατασκευής τριγώνων σε μαθητές δημοτικού, *14ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας,* ΕΜΕ, 263-272.

Nelsen, R.B. (1996), *Αποδείξεις χωρίς λόγια*, Αθήνα: Σαββάλας.

Ντζιαχρήστος, Β. (1989), Η επιμόρφωση των δασκάλων και η διδασκαλία της Γεωμετρίας, *6ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας,* ΕΜΕ, 160-168.

Pinxten, R. (1994), Γεωμετρική εκπαίδευση και πολιτισμικό υπόβαθρο, *Κοινωνιο-γνωστική προσέγγιση και διδακτικές διαδικασίες της μάθησης των Φυσικών και Λογικο-Μαθηματικών Εννοιών στο σχολείο,* Αθήνα: Gutenberg, 173-193.

Τα Μαθηματικά μου, Γ' Τάξη Δημοτικού, 1994, 1995, Αθήνα: ΟΕΔΒ.

Τα Μαθηματικά μου, Δ' Τάξη Δημοτικού, 1995, Αθήνα: ΟΕΔΒ.

Τα Μαθηματικά μου, Ε' Τάξη Δημοτικού, 1994, 1995, Αθήνα: ΟΕΔΒ.

Τα Μαθηματικά μου, ΣΤ' Τάξη Δημοτικού, 1994, 1995, Αθήνα: ΟΕΔΒ.

Τζανάκης, Κ. (1992), Αναζητώντας τη βέλτιστη μαθηματική παιδεία του δασκάλου: μερικά παραδείγματα, Σύγχρονη Εκπαίδευση, **65**, 65-72.

Τζανάκης, Κ. (1993), Η διδασκαλία της μέτρησης γωνιών, μήκους περιφέρειας και εμβαδού κύκλου στο Δημοτικό Σχολείο, Σύγχρονη Εκπαίδευση, **71**, 64-70.

Τζανάκης, Κ. (1998α), Όροι και προϋποθέσεις ενός εποικοδομητικού ρόλου της ιστορίας των Μαθηματικών στην κατανόηση και την διδασκαλία τους, υπό δημοσίευση στην *ΕΔΔΜ*

Τζανάκης, Κ. (1998β), Η παιδευτική αξία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στο Δημοτικό Σχολείο, *Διημερίδα διδακτικής Μαθηματικών*, Παν/μιο Κρήτης.

Τζανάκης, Κ., Κούρκουλος, Μ., (1998), Η παροχή μαθηματικής παιδείας και τα χαρακτηριστικά του μαθηματικού σκέπτεσθαι: Η περίπτωση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στο Δημοτικό Σχολείο, προδημοσίευση, Παν/μιο Κρήτης.

Τουμάσης, Μ. (1994), *Σύγχρονη Διδακτική των Μαθηματικών*, Αθήνα: Gutenberg.

Τρούλης, Γ. (1991), Πόσο ξέρουν οι μαθητές της έκτης δημοτικού τη γλώσσα των μαθηματικών (ερευνητική προσέγγιση), Ευκλείδης Γ΄, **29**, 67-91.

Τρούλης, Γ.(1992), Τα Μαθηματικά στο Δημοτικό Σχολείο (Διδακτική προσέγγιση), Αθήνα:

Γρηγόρης.

Τρούλης, Γ.(1996α), Ανάλυση και θεραπεία της πλάνης στα μαθηματικά, Νέα Παιδεία, **77**, 92-107.

Τρούλης, Γ.(1996β), Αναπαραστάσεις των εκπαιδευτικών για τα Μαθηματικά και τη διδακτική τους, Παιδαγωγική Επιθεώρηση, **24**, 81-100.

Φιλίππου, Γ.- Χρίστου, Κ. (1995), Διδακτική Μαθηματικών, Αθήνα: Δάρδανος.

Φλουρής, Γ. (1996), Αρχιτεκτονική της νόησης και της διδασκαλίας προς ένα διδακτικό σύστημα, *Εξέλιξη της διδακτικής (επιστημολογική θεώρηση),* Αθήνα: Gutenberg, 231-269.

Φουντόπουλος, Μ. (1987), Στόχοι των Μαθηματικών στο Δημοτικό Σχολείο και η κατάλληλη μεθοδολογία για την ανάπτυξη των νοητικών ικανοτήτων του μαθητή, *Πρακτικά 4ου Πανελληνίου Συνεδρίου Μαθηματικής παιδείας*, Αθήνα: ΕΜΕ, 164-179.