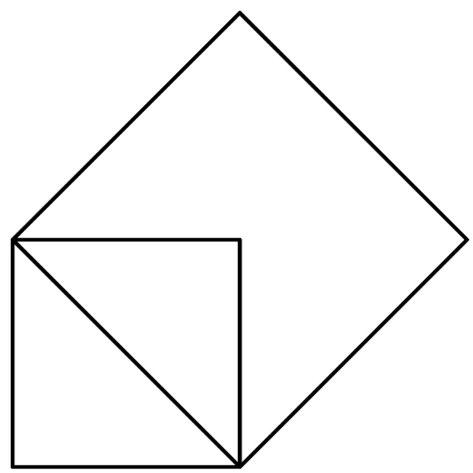
Πανεπιστήμιο Κρήτης
Σχολή Θετικών και Τεχνολογικών Επιστημών
Τμήμα Μαθηματικών

Μεταπτυχιακή Εργασία

Ιστορικά Σημειώματα και Τεχνικές Κλασικών Μαθηματικών για Αξιοποίηση στην Τάξη



Κωνσταντίνος Καλαφάτης

Επιβλέπων Καθηγητής: Μιχάλης Λάμπρου

Ηράκλειο 2015

Η εργασία αυτή πραγματοποιήθηκε στα πλαίσια του Διατμηματικού Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών των Τμημάτων Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών της Σχολής Θετικών και Τεχνολογικών Επιστημών του Πανεπιστημίου Κρήτης με επιβλέποντα καθηγητή τον κ. Μιχάλη Λάμπρου.

Την επιτροπή αξιολόγησης αποτέλεσαν οι κ.κ.:

Μιχάλης Λάμπρου, Χρήστος Κουρουνιώτης και Νικόλαος Τζανάκης

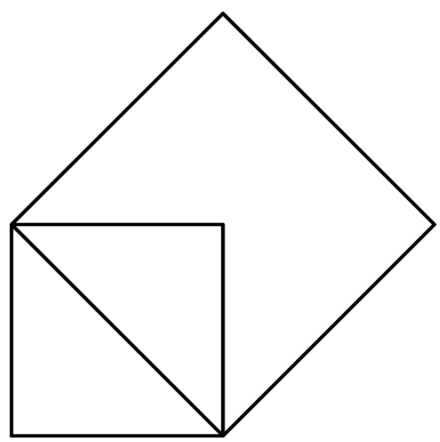
University of Crete

School of Sciences and Engineering

Department of Mathematics

Master Thesis

Historical Notes and Techniques Of Classics Mathematics for Utilization in the Classroom



Kalafatis Konstantinos

Thesis Advisor

Michalis Lambrou

Heraklion 2015

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Όταν διδάσκει κανείς Μαθηματικά βρίσκεται πολλές φορές απέναντι στην ερώτηση από τους μαθητές του: «Πού θα μου χρειαστούν αυτά που μαθαίνω στην καθημερινή μου ζωή;». Απέναντι στο ίδιο ερώτημα βρέθηκε και ο Ευκλείδης, όπως μας αναφέρει ο Ιωάννης Στοβαίος (5ος μ.Χ. αιώνας) στην *Ανθολογία του,* όταν ξεκίνησε να διδάσκει σε μαθητή του τα θεωρήματα της Γεωμετρίας, «...και τώρα τι κέρδος θα έχω, αφού το έμαθα;». Όλοι όσοι έχουνε ουσιαστική σχέση με τα Μαθηματικά μπορούνε να καταλάβουνε ότι τα ερωτήματα αυτά δημιουργούνται στους μαθητές λόγω της ιδιαίτερης φύση που αυτά έχουν. Τα Μαθηματικά ουσιαστικά είναι μια θεωρητική επιστήμη η οποία όμως έχει βρει εφαρμογές σε κάθε ανθρώπινη δραστηριότητα. Αν δεν υπήρχαν αυτές οι εφαρμογές ελάχιστοι άνθρωποι θα μπορούσαν να αναγνωρίσουν την αξία της Μαθηματικής επιστήμης. Από τον Ιάμβλιχο τα Μαθηματικά, τοποθετούνται ως εξής: *«κάλλει τε καί τάξει και ἀκριβείᾳ προέχοντα τῶν ὁρατῶν, ἀπολειπόμενα δέ τῶν νοητῶν, συμμετρίᾳ τε ὡσαύτως καί ὁμολογίᾳ μέσῃ χρώμενα, δύναμίν τε ἒχοντα διαπορθεύειν καί διαβιβάζειν ἐπί τά ἀμέριστα εἲδη ἅτε συγγενῆ πρός αὐτά ὑπάρχοντα».* Δηλαδή, «Τα Μαθηματικά υπερέχουν από τα ορατά και υστερούν από τα νοητά σε κάλος, τάξη και ακρίβεια. Βρίσκονται σε μια ενδιάμεση συμμετρία και συμφωνία, έχουν την δύναμη να μας προωθούν, στέλνοντάς μας στις ιδέες τις αδιαίρετες μια και είναι συγγενής με αυτές». Οι μαθητές όμως που πρέπει να εργάζονται με την σκέψη προς τα νοητά αναζητούν την αξία των Μαθηματικών στο ορατό και στο χειροπιαστό. Η αναζήτηση αυτής της ενδιάμεσης συμμετρίας όταν διδάσκονται θα ήταν ο τρόπος για την αποφυγή προβλημάτων που αντιμετωπίζονται στις σχολικές τάξεις. Μια τέτοια συμμετρική λογική θα διαμόρφωνε την διδακτέα ύλη στα σχολικά προγράμματα έτσι ώστε να περιέχονται σ΄αυτά οι διάφορες Μαθηματικές έννοιες ανάλογα με την ιστορική τους βαρύτητα. Από την ανακάλυψη της ασυμμετρίας μέχρι τη θεμελίωση του συνόλου των πραγματικών αριθμών υπάρχει μια καταγεγραμμένη ιστορία 2400 χιλιάδων χρόνων προβληματισμού και δημιουργικότητας. Στην δική μας σχολική πραγματικότητα ποια θέση έχουν οι έννοιες αυτές; Στο σχολικό βιβλίο της Β΄ Γυμνασίου που διδάσκονται οι άρρητοι αριθμοί και το σύνολο των πραγματικών αριθμών αφιερώνονται οι «πολλές» 2 σελίδες από το σύνολο των 254 του σχολικού εγχειρίδιου. Όπως καταλαβαίνουμε η ποσότητα της ύλης και η προσπάθεια για την ολοκλήρωσή της στον σύντομο σχολικό χρόνο δεν αφήνει περιθώρια για παραπέρα εμβάθυνση σε αυτό το τόσο σημαντικό κομμάτι της θεωρίας. Αυτή η επιλογή διαταράσσει την ενδιάμεση συμμετρία για την οποία μιλήσαμε πριν. Η αξιοποίηση της ιστορίας για την διδασκαλία των Μαθηματικών έχει τονιστεί από πολλούς ερευνητές στην Ελλάδα αλλά και διεθνώς. Η χρησιμότητά της για την νοητική εμβάθυνση κατά την διδασκαλία των Μαθηματικών εννοιών έχει φανεί όπου η διδασκαλία δεν έχει περιοριστεί μόνο στην δημιουργικότητα των τελευταίων 2 αιώνων. Με την εργασία αυτή δεν θα επιχειρηματολογήσω για την ανάγκη χρήσης της ιστορίας στην καθημερινή πρακτική της τάξης των Μαθηματικών, το έχουν κάνει όπως είπα πριν αρκετοί και πολύ πετυχημένα. Στην εργασία αυτή θα παρουσιαστούν σημειώματα και τεχνικές από την ιστορία, που άπτονται των σχολικών Μαθηματικών. Η παρουσίαση αυτή, όσο είναι δυνατόν, θα ακολουθήσει την χρονολογική αλληλουχία. Πιο συγκεκριμένα θα ξεκινήσουμε από την αρχαία Αίγυπτο και Μεσοποταμία. Εκεί τα Μαθηματικά (ή Μαθηματικές τέχνες κατά τον Αριστοτέλη) είναι γήινα, εκεί ξεκινά και ο όρος Γεωμετρία (Γεωμετρία = Μέτρηση της γης), εκεί εμφανίστηκαν οι πρώτες καταγεγραμμένες ανάγκες για μετρήσεις καλλιεργήσιμων εκτάσεων. Εκεί εμφανίστηκαν και οι πρώτοι «τύποι» για την μέτρηση του εμβαδού, αλλά και οι πρώτες προσεγγιστικές διαδικασίες για το εμβαδόν του τετραπλεύρου και κύκλου. Η συνέχεια θα μας φέρει στην αρχαία Ελλάδα εκεί που οι Μαθηματικές τέχνες θα μπολιαστούν με την φιλοσοφική σκέψη των αρχαίων Ελλήνων και θα τις οδηγήσουν στον χώρο των ιδεών (αξιωματική θεμελίωση). Εκεί ουσιαστικά θα δημιουργηθεί η Μαθηματική επιστήμη. Μέσα στο περιβάλλον αυτό θα παρουσιαστεί η ανακάλυψη της ασυμμετρίας, η θεωρία των αναλογιών του Ευδόξου και η μέθοδος της εξάντλησης των Ευδόξου και Αρχιμήδη. Από την εποχή αυτή θα αντλήσουμε τεχνικές με τις οποίες τετραγωνίστηκαν τα πολυγωνικά χωρία αλλά και ο κύκλος. Από την περίοδο αυτή θα παρουσιαστεί και η Τριγωνομετρία η οποία αναπτύσσεται ως εργαλείο για την μελέτη της κίνησης των πλανητών και των άστρων. Στην συνέχεια θα ασχοληθούμε με την Τριγωνομετρία που αναπτύσσεται από Ινδούς και Άραβες μέχρι την Ευρώπη την εποχή του Regiomontanus (15^{ος} αιώνας). Θα δούμε πώς μεταβαίνουμε από τον υπολογισμό τόξων στις χορδές κύκλου, καθώς και στην σύγχρονη μορφή των τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Για τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις θα προστεθούν και άλλοι τρόποι ορισμού χωρίς την χρήση γωνιών ή τόξων κύκλου, αφού θα έχει παρουσιαστεί η σύγχρονη μορφή του απειροστικού λογισμού. Από την Ευρώπη πριν από τον απειροστικό λογισμό (17^{ος} αιώνας) μας έρχεται η μέθοδος του Cavalieri με την οποία θα μετρηθεί το εμβαδό της κυκλοειδούς καμπύλης. Από την σύγχρονη περίοδο (19^{ος} αιώνας) θα παρουσιάσουμε το ολοκλήρωμα του Riemann για το υπολογισμό του εμβαδού χωρίων. Εκεί θα δούμε ότι το ολοκλήρωμα αυτό αναδύεται από την αρχαία μέθοδο της εξάντλησης, χρησιμοποιώντας και σύγχρονα επιχειρήματα, όπως αυτό του ορίου. Επίσης την ίδια αυτή περίοδο έχουμε την θεμελίωση των πραγματικών αριθμών ως αντιμεταθετικό σώμα με αρχή πληρότητας. Η θεμελίωση των πραγματικών αριθμών μέσω των τομών Dedekind θα μας θυμίσει την θεωρία αναλογιών του Ευδόξου. Η εργασία ολοκληρώνεται με την διερεύνηση της έννοιας του εμβαδού στα σχολικά Μαθηματικά. Στην τελευταία αυτή ενότητα δίνεται μια πλήρη θεμελίωση της έννοιας του εμβαδού ευθύγραμμων σχημάτων με χρήση της τριγωνοποίησης.

ABSTRACT

When one teaches Maths, he frequently comes across the question asked by his pupils: "Where am I going to use the things I keep learning in my daily life?". The same question was also put to Euclid by one of his disciples, as it is quoted by Ioannis Stovaios in his Anthology (5th century A.D.), when Euclid started teaching his disciple the theorems of Geometry with the latter expressing his agony by asking "…and now what will my benefit be, after I have learnt it?". Those people who have a substantial relation with Maths can realize that the questions are caused to the pupils due to its special nature. In essence Maths is a theoretical science which has many applications on every human activity, though. So long as these applications were inexistent, very few people would be able to acknowledge the value of the Mathematical Science. Iamvlichos considers that "Maths excels among visible and lacks among intelligible in beauty, order and precision. It lies within an intermediate symmetry and concordance and possesses the power to forward us by sending us to the indivisible ideas, since it is akin to them". The pupils, however, who must work with their thinking lying on the conceivable, seek after the value of Maths within the visible and the tangible. Therefore, when it is taught, the pursuit of the actual intermediate symmetry would be the means for the avoidance of the problems encountered in the school classes. Such a symmetrical logic would form the syllabus in the curricula so as for the miscellaneous mathematical concepts to be included in the latter according to their historical significance. From the discovery of asymmetry to the foundation of the total of real numbers there has been a recorded history of 2400 years of speculation and creativity. But what is the importance these concepts have in our school reality? The irrational numbers and the total of the real ones are taught in the school book of the 2nd grade of Junior High occupying only two pages from a total of 254. Therefore, it can be easily realised that the quantity of the syllabus and the effort made for its completion in a very short time does not allow for further consolidation of that particularly important piece of theory. This choice disrupts the aforementioned intermediate symmetry.

The exploitation of history in Maths teaching has been emphasized by many researchers in Greece and internationally. Its usefulness for the mental deepening during the teaching of mathematical concepts has been evident exactly where teaching has not been confined only to the creativity of the last two centuries.

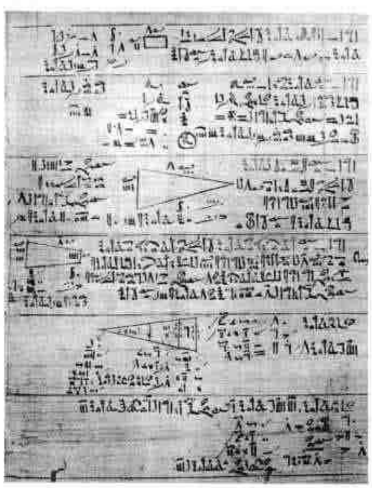
In this dissertation I am not going to argue over the issue of the need for history use in the daily practice of Maths classes, which has already been done by a large number of very successful researchers. Instead, notes and techniques closely related to school Maths, collected from historical sources, are going to be presented in a chronological sequence, as far as this is possible.

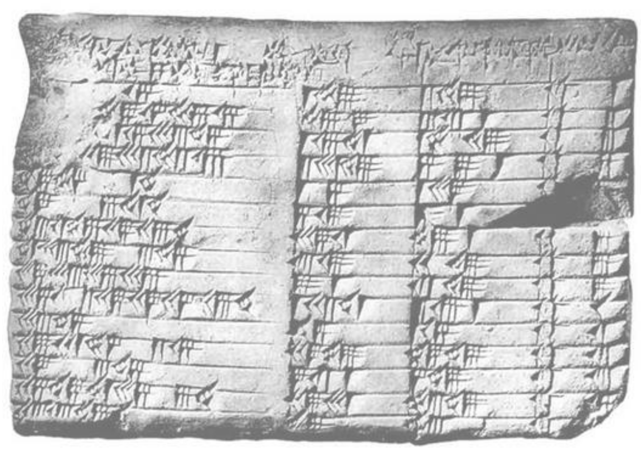
More specifically this sequence will start from ancient Egypt. There, Maths, or Mathematical Arts according to Aristotle, is terrestrial. It is where the term “Geometry” – the measurement of Earth - starts off and the first recorded needs for the measurement of croplands came up. It is also there where the first formulae for the measurement of the area and the first approximative procedures for the area of the quadrilateral and the cycle came up. Next in sequence comes Greece, where the Mathematical technicals was engrafted with the philosophical thought of the ancient Greeks and was led to the sphere of concepts (axiomatic foundation). It was actually there where the Mathematical Science was created. Within this setting the discovery of asymmetry, Eudoxu’s theory of ratios and the method of exhaustion of Eudoxus and Archimedes were presented. Right from that era we are going to draw the techniques of the quadrature of the polygonal passages and the cycle, as well as Trigonometry, which was developed as a tool for the study of the movement of planets and stars. Next we are going to deal with the trigonometry which was developed by Indian, Arabian even European mathematicians covering a span until the years of Regiomontanus in the 15th century. We are also going to see the transition from the calculation of the arcs to that of the strings of the cycle along with the transition to the modern forms of trigonometric functions. With regards to the latter some other ways of their definition without the use of angles and arcs are going to be added, after the presentation of the modern form of infinitesimal calculus will have been completed. From the 17th century Europe, just before the introduction of the infinitesimal calculus, Cavalieri’s method for the calculation of the area of the cycloid curve will be presented along with Riemann’s integral for the calculation of the area dating back from the 19th century. By using modern argumentation, including that of the limit, it will eventually become evident that this particular integral emerged from the ancient method of exhaustion. Right from that period the foundation of real numbers as a commutative body with a principle of completeness came up. In addition, the foundation of real numbers through Dedekind’s cats will remind us of the theory of proportions of Eudoxus. Finally, the dissertation is completed with the exploration of the concept of the area in school Maths, where a full foundation of this particular concept with the use of triangulation is provided.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{Ο} ΑΝΑΖΗΤΩΝΤΑΣ ΤΗΝ ΑΡΧΗ

1.1 Αναζητώντας την αρχή από γραπτές πηγές

Τα Μαθηματικά είναι η επιστήμη με τις πιο βαθιές ρίζες μέσα στην ανθρώπινη ιστορία γιατί έχουν εμφανιστεί από τότε που ο άνθρωπος άρχισε να δημιουργεί έναν οργανωμένο τρόπο ζωής. Θα αναζητήσουμε αυτή την αρχή μέσα από κείμενα γραπτού λόγου που έχουν φτάσει σε εμάς. Η μέτρηση της επιφάνειας της γης ήταν μια από τις πρώτες καταγεγραμμένες ανάγκες που προέκυψαν από τις δραστηριότητες των ανθρώπων, κυρίως για την καλλιέργεια της γης, την κατασκευή λατρευτικών χώρων, ανακτόρων, αποθηκών, οικιών. Τα πιο παλιά κείμενα που μας δίνουν σχετικές πληροφορίες έχουν φτάσει σε μας είτε από την αρχαία Αίγυπτο είτε από την αρχαία Μεσοποταμία. Από την αρχαία Αίγυπτο έχουμε τους παπύρους με πιο γνωστούς αυτούς του *Rhind*, χρονολογείται γύρω στο 1650 π.Χ. και της *Μόσχας* γύρω στο 1850 π.Χ. Πιθανότατα οι πάπυροι αυτοί να είναι αντιγραφές παλαιότερων κειμένων. Από την αρχαία Μεσοποταμία έχουν φτάσει σε εμάς οι διάφορες επιγραφές σφηνοειδούς γραφής (περίπου στην 2^{η} χιλιετία π.Χ.) με πλήθος Μαθηματικών υπολογισμών και προβλημάτων. Παρακάτω βλέπουμε ένα τμήμα από τον πάπυρο του *Rhind* και την πλάκα *Plimpton 322*





Αρκετούς αιώνες αργότερα έχουμε σχετικές αναφορές και από αρχαίους Έλληνες συγγραφείς. Οι συγγραφείς αυτοί αποδίδουν την ανακάλυψη της Γεωμετρίας στους αρχαίους Αιγύπτιους. Ο Ηρόδοτος (485 - 415 π.Χ.) που γνώριζε πολύ καλά την Αίγυπτο μας πληροφορεί στο παρακάτω απόσπασμα από την ιστορία του (2^{ο} βιβλίο 109)
«κατανεῖμαι δὲ τὴν χώρην Αἰγυπτίοισι ἅπασι τοῦτον ἔλεγον τὸν βασιλέα, κλῆρον ἴσον ἑκάστῳ τετράγωνον διδόντα, καὶ ἀπὸ τούτου τὰς προσόδους ποιήσασθαι, ἐπιτάξαντα ἀποφορὴν ἐπιτελέειν κατ᾽ ἐνιαυτόν. εἰ δὲ τινὸς τοῦ κλήρου ὁ ποταμός τι παρέλοιτο, ἐλθὼν ἂν πρὸς αὐτὸν ἐσήμαινε τὸ γεγενημένον· ὁ δὲ ἔπεμπε τοὺς ἐπισκεψομένους καὶ ἀναμετρήσοντας ὅσῳ ἐλάσσων

ὁ χῶρος γέγονε, ὅκως τοῦ λοιποῦ κατὰ λόγον τῆς τεταγμένης ἀποφορῆς τελέοι. δοκέει δέ μοι ἐνθεῦτεν γεωμετρίη εὑρεθεῖσα ἐς τὴν Ἑλλάδα ἐπανελθεῖν»

«Λένε ότι αυτός ο Βασιλιάς μοίρασε τη χώρα σε όλους τους Αιγυπτίους δίνοντας στον καθένα έναν ίσο τετράγωνο κλήρο για τον οποίο θα πληρώνει ετήσιο φόρο και με αυτό τον τρόπο δημιούργησε εισοδήματα. Και όποιος έχανε από πλημμύρα μέρος της γης του, πήγαινε στον Βασιλιά και έλεγε τι είχε συμβεί. Τότε ο Βασιλιάς έστελνε ανθρώπους που εξέταζαν και μετρούσαν το τμήμα κατά το οποίο μειώθηκε η γη, ώστε να πληρώνει αναλογικά μικρότερο φόρο από εκείνον που αρχικά του είχε επιβληθεί. Έτσι νομίζω βρέθηκε η Γεωμετρία και ήλθε στην Ελλάδα»

Παράσταση στους τοίχους του τάφου κάποιου Methen στη Saqqara της Αιγύπτου, όπου δηλώνεται επίσης ότι όσα του ανήκουν έχουν καταχωρηθεί στο βασιλικό αρχείο. Στην εικόνα δύο άτομα μετρούν το σπαρμένο χωράφι, ώστε να υπολογισθεί η σοδειά. Τρεις γραφείς ελέγχουν το τεντωμένο σχοινί ενώ ένας ηλικιωμένος που περπατά με τη βοήθεια ενός παιδιού πιστοποιεί τα όρια.

Αλλά και από τον Αριστοτέλη (384 - 322 π.Χ.) έχουμε αναφορές για τις Μαθηματικές τέχνες, οι οποίες μας λέει ότι γεννήθηκαν πρώτα στην Αίγυπτο, γιατί εκεί αφέθηκε διαθέσιμος χρόνος στην τάξη των ιερέων. Ας προσέξουμε τον χαρακτηρισμό «Μαθηματικαί τέχναι» που είναι στο παρακάτω απόσπασμα από το έργο του Αριστοτέλη *Μετά τα φυσικά (Α 981b).*

«ὅθεν ἤδη πάντων τῶν τοιούτων κατεσκευασμένων αἱ μὴ πρὸς ἡδονὴν μηδὲ πρὸς τἀναγκαῖα τῶν ἐπιστημῶν εὑρέθησαν, καὶ πρῶτον ἐν τούτοις τοῖς τόποις οὗ πρῶτον ἐσχόλασαν· διὸ περὶ Αἴγυπτον αἱ μαθηματικαὶ πρῶτον τέχναι συνέστησαν, ἐκεῖ γὰρ ἀφείθη σχολάζειν τὸ τῶν ἱερέων ἔθνος. εἴρηται μὲν οὖν ἐν τοῖς ἠθικοῖς τίς διαφορὰ τέχνης καὶ ἐπιστήμης καὶ τῶν ἄλλων τῶν ὁμογενῶν· οὗ δ' ἕνεκα νῦν ποιούμεθα τὸν λόγον τοῦτ' ἐστίν, ὅτι τὴν ὀνομαζομένην σοφίαν περὶ τὰ πρῶτα αἴτια καὶ τὰς ἀρχὰς ὑπολαμβάνουσι πάντες· ὥστε, καθάπερ εἴρηται πρότερον, ὁ μὲν ἔμπειρος τῶν ὁποιανοῦν ἐχόντων αἴσθησιν εἶναι δοκεῖ σοφώτερος, ὁ δὲ τεχνίτης τῶν ἐμπείρων, χειροτέχνου δὲ ἀρχιτέκτων, αἱ δὲ θεωρητικαὶ τῶν ποιητικῶν μᾶλλον. ὅτι μὲν οὖν ἡ σοφία περί τινας ἀρχὰς καὶ αἰτίας ἐστὶν ἐπιστήμη, δῆλον.»

Επίσης μερικούς αιώνες αργότερα σχετικά μας πληροφορεί και ο Κλήμης ο Αλεξανδρεύς (200 μ.Χ.) για τον Δημόκριτο που έζησε γύρω στο 450 π.Χ. Το απόσπασμα που ακολουθεί είναι από το έργο του *Στρωματείς (I, 15)*

«*Ἐγὼ δὲ τῶν κατ΄ ἐμαυτὸν ἀνθρώπων γῆν πλείστην ἐπεπλανησάμην, ἱστορέων τὰ μήκιστα, καὶ ἀέρας τε καὶ γέας πλείστας εἶδον, καὶ λογίων ἀνθρώπων πλείστων ἐπήκουσα, καὶ γραμμέων συνθέσι μετὰ ἀποδείξεως οὐδείς κώ με παρήλλαξεν, οὐδ΄ οἱ Αἰγυπτίων καλεόμενοι Ἀρπεδονάπται.*»

«Εγώ, λοιπόν περιπλανήθηκα σε περισσότερους τόπους της γης απ' τους ανθρώπους της εποχής μου, ερευνώντας τα πιο μακρινά μέρη, και γνώρισα πάρα πολλές χώρες και κλίματα και άκουσα πάρα πολλούς μορφωμένους ανθρώπους, αλλά στη σύνθεση σχημάτων που συνοδεύονται από απόδειξη κανείς ως τώρα δε με ξεπέρασε, ούτε ακόμη και αυτοί από τους Αιγυπτίους που ονομάζονται Αρπεδονάπτες.».

Αν παρατηρήσουμε μια φωτογραφία της καλλιεργήσιμης γης από ψηλά θα δούμε ότι αυτή είναι κατακερματισμένη λόγω ανθρώπινων δραστηριοτήτων. Όπως είδαμε από τις προηγούμενες αναφορές η μέτρηση της επιφάνειας που καλλιεργούσαν οι άνθρωποι ήταν αναγκαία. Γιατί με την μέτρηση αυτή γινόταν διαχρονικά η επιβολή των φόρων από τους Βασιλείς ή από τους κρατικούς μηχανισμούς. Αλλά με τις μετρήσεις αυτές γίνονταν και οι αγοραπωλησίες της γης.

Αναφορές σε μετρήσεις ορίων ιδιοκτησιών έχουμε και σε άλλα αρχαία Ελληνικά κείμενα, όπως αυτή του Ομήρου (7ος αιώνας π.Χ.), που περιγράφει με αυτόν τον τρόπο τη διαμάχη του Αίαντα με τον Οδυσσέα για τα όπλα του Αχιλλέα.

«ἀλλ᾽ ὥς τ᾽ ἀμφ᾽ οὔροισι δύ᾽ ἀνέρε δηριάασθον

μέτρ᾽ ἐν χερσὶν ἔχοντες ἐπιξύνῳ ἐν ἀρούρῃ,

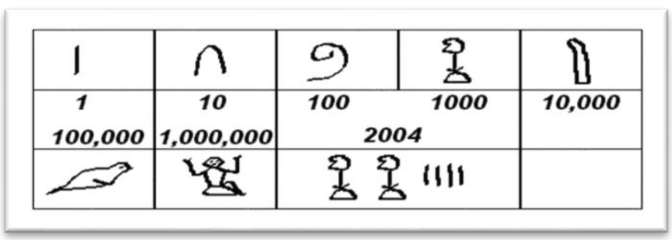
ὥ τ᾽ ὀλίγῳ ἐνὶ χώρῳ ἐρίζητον περὶ ἴσης,»

«όπως δυο χωριάτες για το σύνορο μαλώνουν, και στα χέρια
κρατούν κορδέλα για το μέτρημα, σε μεσιακό χωράφι,
σε μια της γης λουρίδα στέκοντας, πως να μοιράσουν δίκαια.»
Ομήρου *Ιλιάδα*, Μ.421 -23, Μετ. Ν. Καζαντζάκη, Ι. Κακριδή

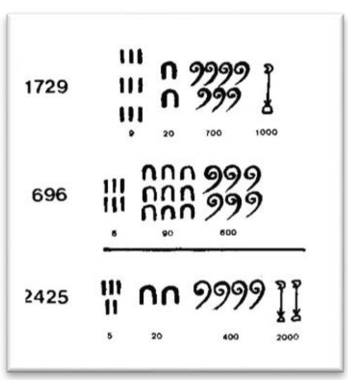
Για να μπορέσουν να αναπτυχθούν οι Μαθηματικές τέχνες που μας αναφέρει ο Αριστοτέλης ή ακόμη περισσότερο να θεμελιωθεί η Μαθηματική επιστήμη οι άνθρωποι υιοθέτησαν ένα σύστημα κωδικοποίησης με βάση το οποίο θα έκαναν τις μετρήσεις, τις καταγραφές αυτών καθώς και την επεξεργασία τους. Αυτή η κωδικοποίηση αργότερα ονομάστηκε σύστημα αρίθμησης. Η κωδικοποίηση αυτή περιελάμβανε την χρήση συμβόλων και κάποιων μηχανισμών για την επεξεργασία τους. Τέτοια σύμβολα ήταν η τελεία, κάποια γραμμή, κάποιο σχήμα του χεριού του και άλλα. Τα σύμβολα αυτά άρχισαν να τα χαράσσουν όπου μπορούσαν σε κόκκαλα ζώων σε τοίχους σπηλαίων και αργότερα σε πήλινες πλάκες και παπύρους. Στις πρώτες αυτές προσπάθειες έχουμε την επανάληψη ενός συμβόλου τόσες φορές όσο ήταν το πλήθος που μετρούσαν κάθε φορά. Όταν το πλήθος αυτό άρχισε να αυξάνει υιοθετήθηκαν και άλλα σύμβολα. Η εξέλιξη των προσπαθειών αυτών οδήγησε τους ανθρώπους στο να δημιουργήσουν τα πρώτα οργανωμένα συστήματα αρίθμησης, που έφτασαν σε μας, από τους αρχαίους Αιγύπτιους και Βαβυλώνιους.

1.2 Το αρχαίο Αιγυπτιακό σύστημα αρίθμησης

Πηγές για το αρχαίο Αιγυπτιακό σύστημα είναι ο Πάπυρος *Rhind* και ο πάπυρος της *Μόσχας*. Σημαντικοί επίσης είναι και οι πάπυροι *Kahun* και του *Βερολίνου*, που είναι του 1850 π.Χ. περίπου και περιέχουν Μαθηματικές πράξεις και προβλήματα. Το αριθμητικό σύστημα των Αιγυπτίων είχε τα παρακάτω σύμβολα.

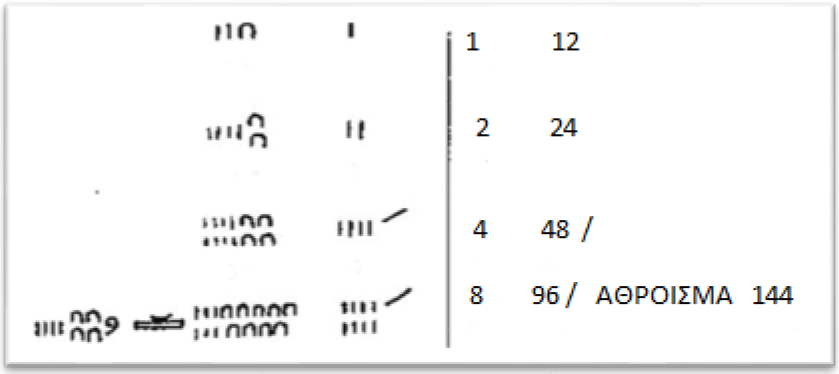


Στο σύστημα αυτό οι αριθμοί δημιουργούνται με φυσιολογικό τρόπο με απλή παράθεση των κατάλληλων συμβόλων. Στον παραπάνω πίνακα βλέπουμε πως παριστάνεται ο αριθμός 2004. Με τον ίδιο απλό τρόπο γίνεται και η πρόσθεση των αριθμών. Στον παρακάτω πίνακα έχουμε την πρόσθεση του 1729 με το 696 με άθροισμα 2425.

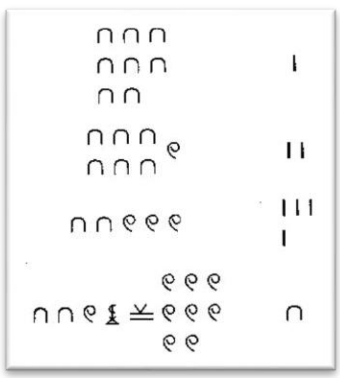


Η μέθοδος αυτή μπορεί να διδαχθεί σε πρώιμο στάδιο διδασκαλίας των πράξεων μια και είναι πιο εύκολη στην κατανόησή της από τους μαθητές σε σχέση την αντίστοιχη με αριθμούς του δεκαδικού μας συστήματος.

Ο πολλαπλασιασμός εκτελείται με διπλασιασμούς και πρόσθεση των επιμέρους αποτελεσμάτων. Στον παρακάτω πίνακα έχουμε τον πολλαπλασιασμό του 12 με το 12, η ιδέα είναι η εξής $12 \cdot 12 = (4 + 8)12 = 4 \cdot 12 + 8 \cdot 12 = 48 + 96 = 144$. Άρα η αναζήτηση του αποτελέσματος γίνεται με διαδοχικούς διπλασιασμούς μέχρι να βρεθούν τα κατάλληλα πολλαπλάσια και να προστεθούν (εδώ είναι το $4 \cdot 12$ και $8 \cdot 12$ που σημειώνονται με πλάγιες γραμμές ⁄).



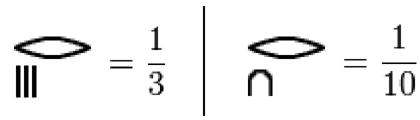
Πολλές φορές για να γίνουν πιο γρήγορα οι πολλαπλασιασμοί, χρησιμοποιούν τεχνάσματα όπως π.χ για να υπολογίσουν το $16 \cdot 16$ πολλαπλασίαζαν με το 10 και στη συνέχεια υποδιπλασίαζαν $1 \cdot 16 = 16$, $10 \cdot 16 = 160$, $5 \cdot 16 = 80$ άρα $16 \cdot 16 = 16 + 160 + 80 = 256$.



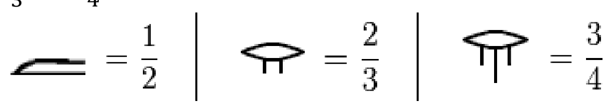
Για τη διαίρεση οι αρχαίοι Αιγύπτιοι εφάρμοζαν αντίστροφα τον πολλαπλασιασμό. Ας δούμε για παράδειγμα τη διαίρεση του 1120 με το 80. Ξεκινούσαν με πολλαπλάσια του 80 μέχρι να βρεθεί ο κατάλληλος συνδυασμός, ώστε να προκύψει άθροισμα 1120. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα $1 \cdot 80 = 80$, $2 \cdot 80 = 160$, $4 \cdot 80 = 320$, $10 \cdot 80 = 800$. Επειδή $1120 = 320 + 800$ τότε $1120 : 80 = 4 + 10 = 14$. Για τους Αιγύπτιους το βασικό ζητούμενο στη διαίρεση ήταν να βρεθεί το άθροισμα 1120. Τι γινόταν όμως στην περίπτωση που η διαίρεση δεν έφτανε στο τέλος; Έκαναν ότι ακριβώς κάνουμε σήμερα και εμείς, χρησιμοποιούσαν κλάσματα.

1.3 Τα κλάσματα στους αρχαίους Αιγυπτίους

Τα κλάσματα στους αρχαίους Αιγυπτίους είχαν την μορφή που εμείς σήμερα ονομάζουμε κλασματικές μονάδες. Εκτός από αυτά χρησιμοποίησαν το $\frac{2}{3}$ και $\frac{3}{4}$. Κάθε άλλο κλάσμα εκφραζόταν ως άθροισμα των κλασμάτων αυτών. Για να δηλωθούν τα κλάσματα χρησιμοποιήθηκε το ιερογλυφικό σύμβολο  . Για παράδειγμα



Για τα κλάσματα $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ και $\frac{3}{4}$ έχουμε τα παρακάτω σύμβολα.



Ας δούμε πως μπορεί να γίνει τώρα η διαίρεση π.χ. $19:8$ που υπάρχει στον πάπυρο του *Rhind* (αρ.24).

	1	8
/	2	16
	$\overline{2}$	4
/	$\overline{4}$	2
/	$\overline{8}$	1

Άρα το πηλίκο είναι $2 + \overline{4} + \overline{8}$ (ο αριθμός με την παύλα σημαίνει το αντίστοιχο μοναδιαίο κλάσμα, δηλαδή $\overline{4} = \frac{1}{4}$, $\overline{8} = \frac{1}{8}$, κ.λπ.). Ενδιαφέρον για τους υπολογισμούς των αρχαίων Αιγυπτίων είχε ο διπλασιασμός των κλασματικών μονάδων. Παρακάτω ακολουθεί ένας πίνακας κλασμάτων της μορφής $\frac{2}{n}$ ως άθροισμα κλασματικών μονάδων από τον πάπυρο του *Rhind.* Στον πίνακα αυτό έχουμε π.χ.

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}, \qquad \frac{2}{13} = \frac{1}{8} + \frac{1}{52} + \frac{1}{104}$$

$\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$	$\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$	$\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$
$\frac{2}{9} = \frac{1}{6} + \frac{1}{18}$	$\frac{2}{11} = \frac{1}{6} + \frac{1}{66}$	$\frac{2}{13} = \frac{1}{8} + \frac{1}{52} + \frac{1}{104}$
$\frac{2}{15} = \frac{1}{10} + \frac{1}{30}$	$\frac{2}{17} = \frac{1}{12} + \frac{1}{51} + \frac{1}{68}$	$\frac{2}{19} = \frac{1}{12} + \frac{1}{76} + \frac{1}{114}$
$\frac{2}{21} = \frac{1}{14} + \frac{1}{42}$	$\frac{2}{23} = \frac{1}{12} + \frac{1}{276}$	$\frac{2}{25} = \frac{1}{15} + \frac{1}{75}$
$\frac{2}{27} = \frac{1}{18} + \frac{1}{54}$	$\frac{2}{29} = \frac{1}{24} + \frac{1}{58} + \frac{1}{174} + \frac{1}{232}$	$\frac{2}{31} = \frac{1}{20} + \frac{1}{124} + \frac{1}{155}$
$\frac{2}{33} = \frac{1}{22} + \frac{1}{66}$	$\frac{2}{35} = \frac{1}{30} + \frac{1}{42}$	$\frac{2}{37} = \frac{1}{24} + \frac{1}{111} + \frac{1}{296}$

$\frac{2}{39}=\frac{1}{26}+\frac{1}{78}$	$\frac{2}{41}=\frac{1}{24}+\frac{1}{246}+\frac{1}{328}$	$\frac{2}{43}=\frac{1}{42}+\frac{1}{86}+\frac{1}{129}+\frac{1}{301}$
$\frac{2}{45}=\frac{1}{30}+\frac{1}{90}$	$\frac{2}{47}=\frac{1}{30}+\frac{1}{141}+\frac{1}{470}$	$\frac{2}{49}=\frac{1}{28}+\frac{1}{196}$
$\frac{2}{51}=\frac{1}{34}+\frac{1}{102}$	$\frac{2}{53}=\frac{1}{30}+\frac{1}{318}+\frac{1}{795}$	$\frac{2}{55}=\frac{1}{30}+\frac{1}{330}$ …

Πραγματικά προκαλεί έκπληξη ο τρόπος με τον οποίο τα κλάσματα αυτά εκφράστηκαν ως αθροίσματα κλασματικών μονάδων. Ήταν απλά μια περίπλοκη, στο ύφος της, γραφή που παρέμεινε για τόσους πολλούς αιώνες, λόγω του σεβασμού στις παραδοσιακές μορφές, ή μήπως είναι έκφραση ενός πραγματικού τρόπου σκέψης που έκτοτε έχει ξεχαστεί; Οι σύγχρονοι ιστορικοί των Μαθηματικών που έχουν μελετήσει τον πάπυρο του *Rhind* και άλλες αρχαίες πηγές, προσπάθησαν να προσδιορίσουν κανόνες που να δικαιολογούν την ανάλυση αυτή. Για παράδειγμα η πρώτη καταχώρηση στον πίνακα είναι $\frac{2}{3}$ στην οποία αποδίδεται η έκφραση $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$. Σε κάθε άλλη καταχώρηση στον πίνακα της μορφής $\frac{2}{3\kappa}$ αποδίδεται η έκφραση $\frac{1}{2\kappa}+\frac{1}{6\kappa}$, γεγονός που υποδηλώνει ότι αντιμετωπίζονται συνειδητά όλοι οι παρονομαστές που διαιρούνται με το 3 ως μια ενιαία οικογένεια, όπως ακριβώς όλοι οι παρονομαστές που διαιρούνται με το 2. Για τους παρανομαστές που δίνονται από μικρούς πρώτους αριθμούς p $(3,5,7,11)$ έχει παρατηρηθεί ότι ισχύει ο παρακάτω τύπος

$$\frac{2}{p}=\frac{1}{\frac{p+1)}{2}}+\frac{1}{\frac{p(p+1)}{2}}$$

Για παρανομαστές με μεγαλύτερους πρώτους αριθμούς $(13,17,19,\ldots)$ έχει παρατηρηθεί ότι ισχύει ο τύπος

$$\frac{2}{p}=\frac{1}{a}+\frac{2a-p}{ap}$$

Όπου a είναι ένας «βολικός» αριθμός μεγαλύτερος από το $\frac{p}{2}$ και μικρότερος του p. Για να συνεχίσει η διαδικασία της μετατροπής, πρέπει η διαφορά $2a-p$ να χωριστεί σε δύο ή τρεις προσθετέους καθένας από τους οποίους είναι διαιρέτης του a. Για παράδειγμα ας δούμε την ανάλυση του $\frac{2}{89}$. Ας επιλέξουμε ως a το 60, μια και είναι μεγαλύτερος από το μισό του 89 και ταυτόχρονα έχει αρκετούς διαιρέτες. Η διαφορά $2a-p$ ισούται με 31 το οποίο μπορεί να γραφεί ως άθροισμα $31 = 15+10+6$ άρα

$$\frac{2}{89}=\frac{1}{60}+\frac{31}{60\cdot 89}=\frac{1}{60}+\frac{15}{60\cdot 89}+\frac{10}{60\cdot 89}+\frac{6}{60\cdot 89}=\frac{1}{60}+\frac{1}{4\cdot 89}+\frac{1}{6\cdot 89}+\frac{1}{10\cdot 89}$$

Τελικά έχουμε την παρακάτω μορφή που είναι και αυτή του πίνακα του *Rhind*.

$$\frac{2}{89}=\frac{1}{60}+\frac{1}{356}+\frac{1}{534}+\frac{1}{890}$$

Ένα ερώτημα που τίθεται για τον παραπάνω τύπο είναι η επιλογή του a, αλλά και των προσθετέων που είναι και διαιρέτες του a. Για παράδειγμα ας δούμε όλες τις δυνατές επιλογές αν $p = 43$. Στον παρακάτω πίνακα στην τελευταία στήλη έχουμε το πηλίκο $\frac{a}{x}$ όπου x είναι ο μικρότερος προσθετέος του αθροίσματος που δίνει a.

p	a	2a-p	x	y	z	a/x
43	24	5	2	3		12
43	28	13	2	4	7	14
43	30	17	2	15		15
43	30	17	2	5	10	15
43	36	29	2	9	18	18
43	42	41	6	14	21	7

Παρατηρούμε ότι η επιλογή στον πίνακα του παπύρου του *Rhind* είναι η τελευταία σειρά που επιτυγχάνει το ελάχιστο $\frac{a}{x}$.

Η ανάλυση του $\frac{2}{101}$ μπορεί να προκύψει από τον προηγούμενο τύπο με $a = 606$ αλλά μπορεί να εφαρμοστεί και ο τύπος που προκύπτει από την ανάλυση του 12 σε άθροισμα όλων των διαιρετών του $12 = 6 + 3 + 2 + 1$

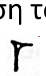
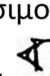
$$\frac{2}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{6n} \quad \xRightarrow{n=101} \quad \frac{2}{101} = \frac{1}{101} + \frac{1}{202} + \frac{1}{303} + \frac{1}{606}.$$

Ενδιαφέρον παρουσιάζουν και οι αναλύσεις του $35 = 5 \cdot 7$ και $91 = 7 \cdot 13$. Ενώ θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ο τύπος $\frac{2}{5\kappa} = \frac{1}{3\kappa} + \frac{1}{15\kappa}$ με $\kappa = 7$ θα έδινε $\frac{2}{35} = \frac{1}{21} + \frac{1}{105}$, στον πίνακα έχουμε $\frac{2}{35} = \frac{1}{30} + \frac{1}{42}$ μια ερμηνεία για την επιλογή αυτή είναι ο τύπος

$$\frac{2}{pq} = \frac{2}{A(p,q)H(p,q)} = \left(\frac{2}{p+q}\right)\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)$$

Όπου $A(p,q)$ και $H(p,q)$ είναι ο αριθμητικός και αρμονικός μέσος των αριθμών p, q.

1.4 Βαβυλωνιακό και αρχαίο Ελληνικό σύστημα αρίθμησης

Παράλληλα με το Αιγυπτιακό σύστημα αρίθμησης αναπτύχθηκε και το Βαβυλωνιακό σύστημα το οποίο είχε ως βάση του το 60. Μέχρι το 59 χρησιμοποιούσαν κατάλληλους συνδυασμούς των συμβόλων  (1) και  (10) π.χ.  = 8,  = 11,  = 30. Για τους αριθμούς από το 60 και πάνω το σύστημα αυτό ήταν θεσιακό, μια και η τιμή του συμβόλου εξαρτιόταν από την θέση του συμβόλου μέσα στον αριθμό. Οι ανώτερες δυνάμεις του 60 τοποθετούνται στην αρχή του αριθμού και οι κατώτερες στο τέλος. Δηλαδή παρατηρούμε μια τεχνική πολύ κοντά στην σύγχρονη μορφή αναπαράστασης των αριθμών. Το σύστημα αυτό είχε τεράστια πλεονεκτήματα στην εκτέλεση των πράξεων αλλά και σοβαρό μειονέκτημα ότι για να εκφραστεί το 60 το 3600 κ.λπ. αλλά και το $\frac{1}{60}$ χρησιμοποιούσαν το ίδιο σύμβολο. Για παράδειγμα ο αριθμός  μπορεί να αντιστοιχεί στο 70 ή στο 3610 ή και ακόμη και στο 216010.

Το αρχαίο Ελληνικό σύστημα αρίθμησης είχε ως βάση το δέκα και ήταν θεσιακό. Η διαφορά με το σύγχρονο δεκαδικό σύστημα είναι ότι αντί για ψηφία είχαμε τη χρήση γραμμάτων σύμφωνα με την παρακάτω αντιστοιχία…

Α	Β	Γ	Δ	Ε	Ϛ	Ζ	Η	Θ
α	β	γ	δ	ε	ϛ	ζ	η	θ
1	2	3	4	5	6	7	8	9

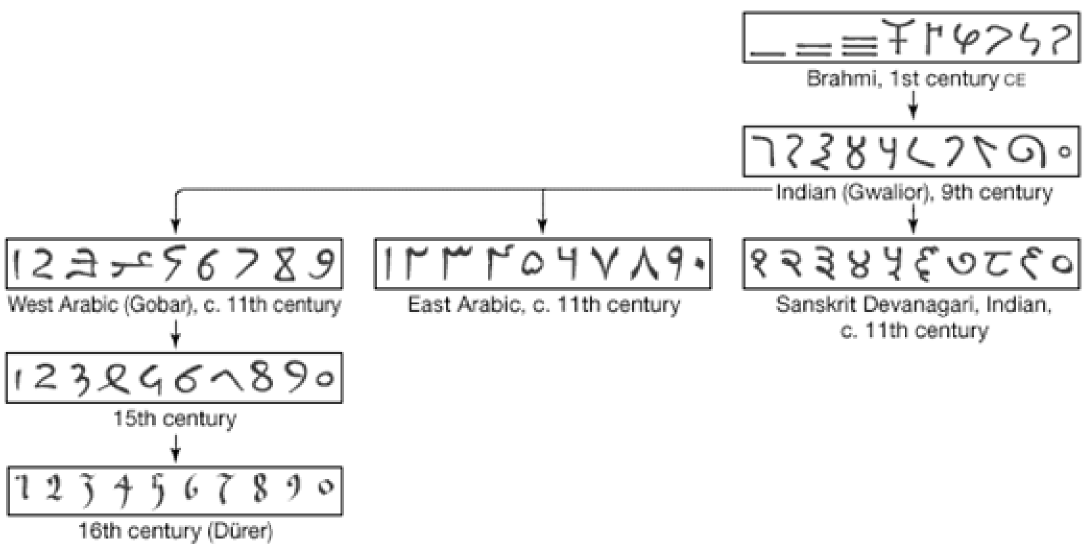
Ι	Κ	Λ	Μ	Ν	Ξ	Ο	Π	Ϙ
ι	κ	λ	μ	ν	ξ	ο	π	ϙ
10	20	30	40	50	60	70	80	90

Ρ	Σ	Τ	Υ	Φ	Χ	Ψ	Ω	Ϡ
ρ	σ	τ	υ	φ	χ	ψ	ω	ϡ
100	200	300	400	500	600	700	800	900

1.5 Τα κλάσματα στην αρχαία Ελλάδα

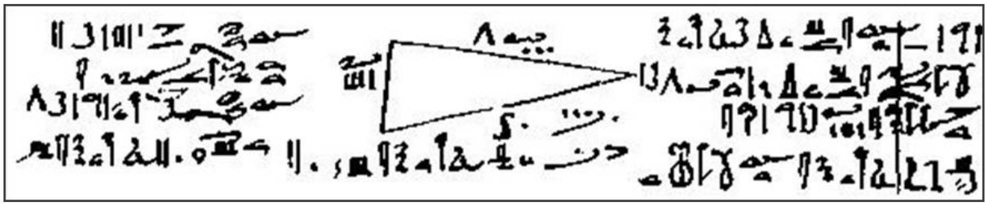
Πριν από τον Αρχιμήδη τα κλάσματα απουσίαζαν παντελώς από τα επίσημα Μαθηματικά κείμενα. Η αιτία είναι ότι τα Μαθηματικά την περίοδο αυτή εξελίσσονται σε άμεση σχέση με τη φιλοσοφία. Τα κυρίαρχα φιλοσοφικά συστήματα την περίοδο αυτή είναι αυτά που πηγάζουν από την Σχολή του Πυθαγόρα και την Ακαδημία του Πλάτωνα. Στους Πυθαγόρειους διάχυτη ήταν η άποψη ότι ακέραιοι αριθμοί είναι αυτοί που κυριαρχούν στο σύμπαν και καθορίζουν την αρμονία. Την περίοδο αυτή στα κλάσματα δε δίνεται καμία ιδιαίτερη σημασία τα αφήνουν στη χρήση των εμπόρων και των λογιστών. Ο Πλάτωνας, όπως θα δούμε και στο παρακάτω χωρίο από την *Πολιτεία* (525E), θεωρούσε την μονάδα αδιαίρετη.
«οἶσθα γάρ που τοὺς περὶ ταῦτα δεινοὺς αὖ ὡς, ἐάν τις αὐτὸ τὸ ἓν ἐπιχειρῇ τῷ λόγῳ τέμνειν, καταγελῶσί τε καὶ οὐκ ἀποδέχονται, ἀλλ᾽ ἐὰν σὺ κερματίζῃς αὐτό, ἐκεῖνοι πολλαπλασιοῦσιν, εὐλαβούμενοι μή ποτε φανῇ τὸ ἓν μὴ ἓν ἀλλὰ πολλὰ μόρια». «Γνωρίζεις βέβαια τι κάνουν οι δεινοί Μαθηματικοί, αν προσπαθήσει κανείς να χωρίσει νοερά το ένα. Τότε τον καταγγέλλουν και τον αποπέμπουν. Αλλά εσύ αν το κατακερματίσεις, τότε αυτοί το πολλαπλασιάζουν φροντίζοντας πάντα, ώστε το ένα να μην φανεί ως κάτι το οποίο δεν είναι ένα, αλλά ένα σύνολο από μέρη». Για το παραπάνω χωρίο μας αναφέρει ο H. Scholz, ότι οι Μαθηματικοί της εποχής εκείνης ήθελαν οπωσδήποτε να αποφύγουν τα κλάσματα. Με την σημερινή συμβολική γλώσσα αν α, β είναι δύο μεγέθη τέτοια ώστε $\alpha = \frac{3}{4}\beta$ οι δεινοί Μαθηματικοί της αρχαίας Ελλάδας αντί αυτού θα έγραφαν $4\alpha = 3\beta$.

Αντί να χρησιμοποιούν κλάσματα οι αρχαίοι Έλληνες έκαναν χρήση των λόγων ακεραίων αριθμών. Στην Πυθαγόρεια θεωρία της αρμονίας συναντάμε τους λόγους 4:3 (επίτριτος) ή 9:8 (επόγδοος) κ.λπ. Σύμφωνα με τον B. L. Van der Waerden (1903 – 1996) στην *Αφύπνιση της Επιστήμης* οι Έλληνες γνώριζαν τα κλάσματα από την απώτατη αρχαιότητα, τον 5ο π.Χ. αιώνα γνώριζαν τις πράξεις με αυτά όπως μετατροπή σε ανάγωγα αλλά και ομώνυμα (αναφορές για αυτά έχουμε στο 7ο βιβλίο των *Στοιχείων* του Ευκλείδη). Άρα για τους Έλληνες ο λογισμός με κλάσματα είναι τετριμμένος και δεν αποτελεί εμπόδιο στη θεωρητική ανάπτυξη των Μαθηματικών.
Στους επόμενους αιώνες εκείνο που αλλάζει στα συστήματα αρίθμησης είναι η χρήση ψηφίων στην θέση των γραμμάτων που χρησιμοποίησαν οι αρχαίοι Έλληνες. Παρακάτω βλέπουμε έναν πίνακα από τον K. Menninger (1893 – 1990) στο βιβλίο του *Zahlwort und Ziffer: Eine Kulturgeschichte der Zahlen* (Γκαίττινγκεν 1958) Αγγλική μετάφραση από τον P. Broneer με τίτλο *Number Words and Number Symbols. A Cultural History of Numbers* (Καίμπριτζ 1969) στον οποίο φαίνεται η εξελικτική πορεία των ψηφίων αυτών από τους Ινδούς Βράχμι (1ο αιώνας π.Χ.) μέχρι την Ευρώπη (16ο αιώνας).

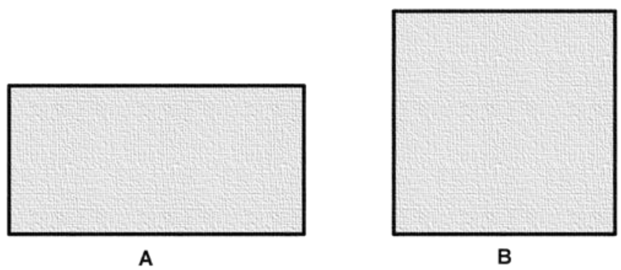


1.6 Μέτρηση επιφανειών – που έφτασαν στην αρχαία Αίγυπτο

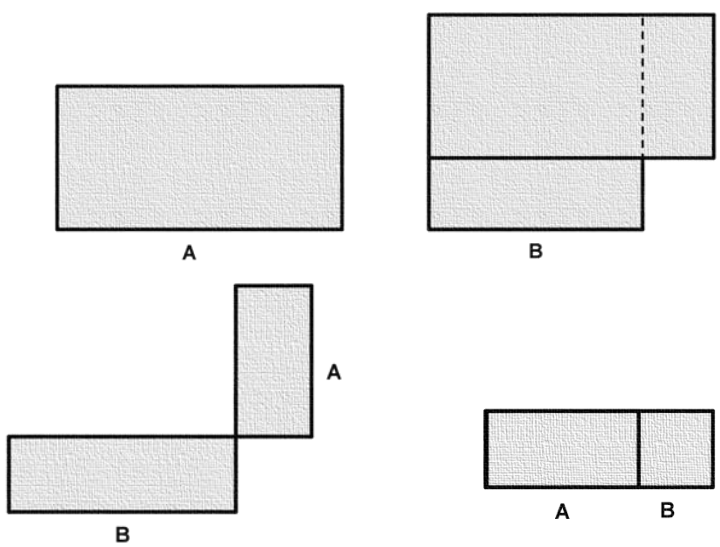
Ο Πάπυρος *Rhind,* που είδαμε και πριν, είναι μια συλλογή 84 προβλημάτων κάποια από αυτά αναφέρονται σε υπολογισμούς μισθών, ποσοτήτων ψωμιού ή ζύθου. Στα υπόλοιπα προβλήματα ζητείται να προσδιοριστούν εμβαδά ή όγκοι. Στις απαντήσεις των προβλημάτων αυτών δεν υπάρχει καμμιά γεωμετρική προσέγγιση, οι λύσεις δίνονται ως κανόνες εφαρμοσμένης αριθμητικής. Ας δούμε για παράδειγμα το πρόβλημα 51 του πάπυρου *Rhind*: «Να υπολογιστεί η επιφάνεια ενός τριγωνικού χωραφιού με βάση 4 (μονάδες μέτρησης) και πλευρά 10».



Το αποτέλεσμα βρίσκεται με τον πολλαπλασιασμό του μισού του 4 επί 10, δηλ. 20. Από την μελέτη των προβλημάτων αυτών συμπεραίνουμε ότι οι αρχαίοι Αιγύπτιοι ήξεραν να υπολογίζουν το εμβαδόν του τριγώνου, του ορθογωνίου και του τραπεζίου. Στην συνέχεια θα δούμε μια γεωμετρική προσέγγιση, που θα μπορούσε να δικαιολογήσει τον τρόπο εύρεσης του τύπου για το εμβαδόν του ορθογωνίου. Παρακάτω έχουμε αποτυπώσει δύο επιφάνειες σε σχήμα ορθογώνιου παραλληλόγραμμου. Το ζητούμενο είναι να βρούμε ποιο από τα δύο ορθογώνια έχει την μεγαλύτερη επιφάνεια.



Ελλείψει κάποιου κανόνα ας δούμε μια αρχική μέθοδο σύγκρισης που βασίζεται στην χαρτοκοπτική.

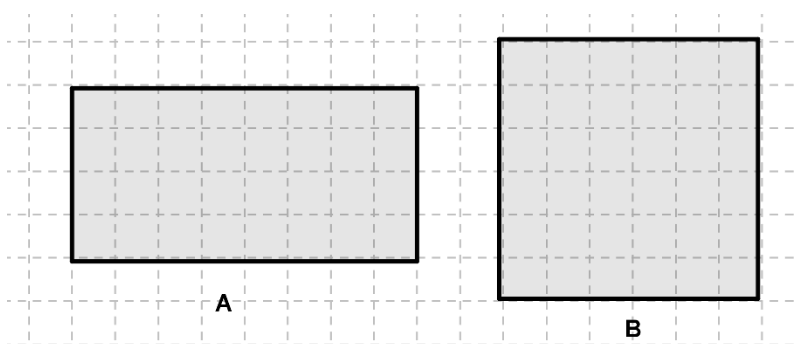


Δηλαδή να τοποθετήσουμε τις επιφάνειες την μία πάνω στην άλλη και να αφαιρούμε κάθε φορά την κοινή επιφάνεια. Η σύγκριση κάθε φορά που εφαρμόζουμε την μέθοδο θα γίνεται σε μικρότερες από τις αρχικές επιφάνειες μια και θα αφαιρούμε κάθε φορά το κοινό τμήμα των δύο επιφανειών.

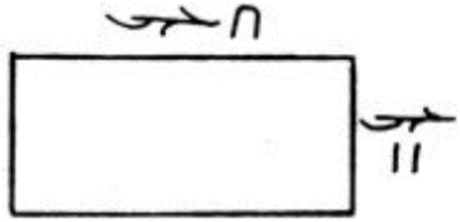
Παρατηρούμε ότι μετά από διαδοχικές εφαρμογές της αρχικής διαδικασίας καταλήγουμε σε μια σαφή οπτική σχέση μεταξύ των υπολοίπων των αρχικών επιφανειών στην οποία φαίνεται ξεκάθαρα η ότι η επιφάνεια Α είναι μέρος της επιφάνειας Β. Εκείνο που έχει ενδιαφέρον από την παραπάνω προσπάθεια σύγκρισης των δύο επιφανειών είναι η συνειδητοποίηση ότι το ασφαλές συμπέρασμα προέκυψε μικραίνοντας τις επιφάνειες που συγκρίναμε (αφαιρώντας κάθε φορά την κοινή επιφάνεια). Τελικά καταλήξαμε σε επιφάνειες που η μία μπορούσε να χωρέσει μέσα στην άλλη έτσι ώστε να δημιουργηθεί ένα κοινό μέτρο. Δηλαδή με την διαδικασία αυτή φάνηκε η ανάγκη να βρεθεί μια «μικρή» επιφάνεια που να μπορεί να χωρά μέσα σε μεγαλύτερες και να τις μετρά. Κάπως έτσι από την έννοια επιφάνεια φτάνουμε στην έννοια εμβαδόν.

ΤΟ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ

Δεν είναι κανείς σίγουρος για το πώς ακριβώς σκέφτηκαν οι πρώτοι άνθρωποι που βρέθηκαν στην ανάγκη να κάνουν τέτοιες συγκρίσεις πάντως μπορούμε να πούμε σίγουρα πως μετά από πολλές προσπάθειες κατέληξαν στο να υιοθετήσουν μια «μικρή» επιφάνεια ως μονάδα μέτρησης των υπολοίπων. Η μικρή αυτή μονάδα δε θα μπορούσε να είναι άλλη από το τετράγωνο, μια και αυτό είναι που μπορεί να καλύπτει άλλες μεγαλύτερες με τον καλύτερο τρόπο, επειδή έχει όλες τις πλευρές του ίσες και τις γωνίες του ορθές. Δηλαδή για την προηγούμενη σύγκριση σε επόμενα στάδια εφαρμογής μπορεί να καταλήξουμε σε μία μορφή που βλέπουμε στο παρακάτω σχήματα.

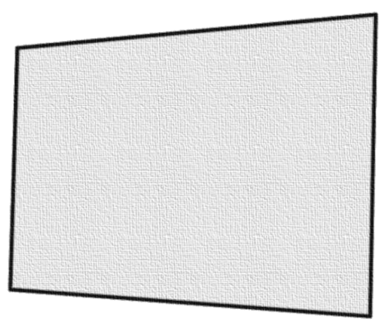


Δηλαδή στο σχήμα A έχουμε $8 \cdot 4 = 32$, ενώ στο B $6 \cdot 6 = 36$ μονάδες. Με άλλα λόγια από την εφαρμογή της παραπάνω διαδικασίας αρκετές φορές κατακτήθηκε ένα εργαλείο σύγκρισης. Σύμφωνα με το εργαλείο αυτό οι επιφάνειες των ορθογωνίων αντιπροσωπεύονται από έναν αριθμό που προκύπτει από το γινόμενο των δυο διαστάσεών του. Έτσι η σύγκριση των επιφανειών ανάγεται στην σύγκριση δύο αριθμών διαδικασία που ήταν ήδη γνωστή. Η διαδικασία αυτή όπως είπαμε είχε κατακτηθεί από τους αρχαίους Αιγυπτίους.

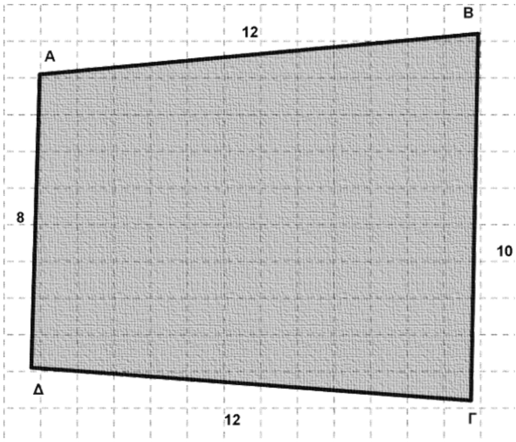


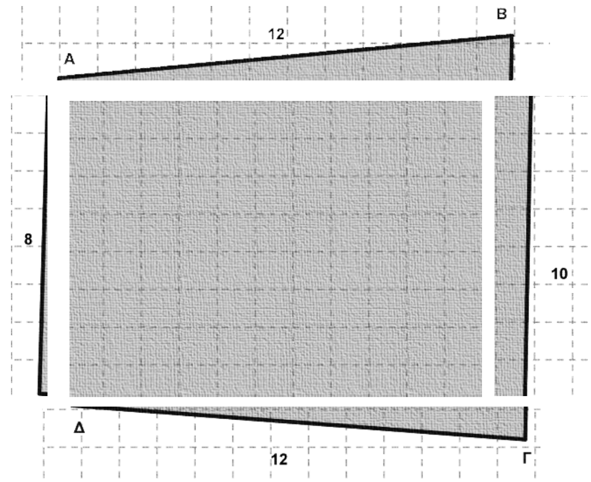
ΤΟ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΟ

Όπως ήταν φυσικό την μεθοδολογία αυτή οι αρχαίοι Αιγύπτιοι προσπάθησαν να την εφαρμόσουν και σε άλλα πιο τυχαία σχήματα που εμφανίστηκαν στην καθημερινότητά τους όπως το τετράπλευρο. Για το πώς υπολόγιζαν το εμβαδόν του τετραπλεύρου μας πληροφορεί ο G. Loria (1862 – 1954), στο έργο του *Ιστορία των Μαθηματικών* (τόμος I σελ. 34). Εκεί μας αναφέρει ότι οι αρχαίοι Αιγύπτιοι υπολόγιζαν το εμβαδόν του τετράπλευρου ως εξής: πολλαπλασίαζαν το ημιάθροισμα των δυο απέναντι πλευρών με το ημιάθροισμα των δύο άλλων. Ο τύπος αυτός είναι χαραγμένος στο ναό του Oro στην πόλη Edfu της Αιγύπτου. Τον τύπο αυτό αποκρυπτογράφησε ο διάσημος Γερμανός R. Lepsius (1775-1853) ο οποίος ήταν ο πρώτος που αποκρυπτογράφησε την ιερατική γραφή των Αιγυπτίων. Η ιερατική γραφή ήταν προνόμιο της ιερατικής τάξης των αρχαίων Αιγυπτίων και διέφερε από την κοινή ιερογλυφική γραφή. Τον παραπάνω τύπο τον συναντάμε και σε βιβλία ινδικών Μαθηματικών του 700-900 μ.Χ. (Brahmagupta , Bhascara), όπως αναφέρει ο G. Loria *Ιστορία των Μαθηματικών* (τόμος I σελ. 245).



Ας εφαρμόσουμε την τεχνική της διαμέρισης σε μικρές τετραγωνικές μονάδες, όπως πριν στο τετράπλευρο, με την βοήθεια ενός προγράμματος δυναμικής Γεωμετρίας. Στην παρακάτω εικόνα στο σχήμα αριστερά, έχουμε διαμερίσει το τετράπλευρο σε τετραγωνικές μονάδες. Όπως παρατηρούμε η καταμέτρηση των μονάδων αυτών δεν είναι εύκολη, γιατί εκτός από ολόκληρες τετραγωνικές μονάδες, μέσα στο τετράπλευρο υπάρχουν και υποδιαιρέσεις από αυτές. Ας κάνουμε μια προσπάθεια με τη βοήθεια της χαρτοκοπτικής να μετρήσουμε τις τετραγωνικές μονάδες διαμερίζοντας εκ νέου την επιφάνεια με στόχο να είναι πιο εύκολη η μέτρηση.

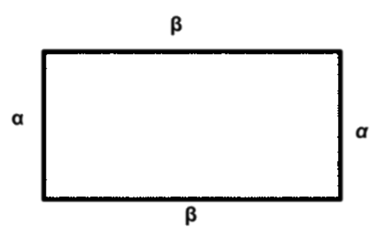




Στην παραπάνω εικόνα δεξιά βλέπουμε μια τέτοια διαμέριση σε πέντε επιφάνειες, μία κεντρική ορθογώνια επιφάνεια στην οποία υπάρχουν $8 \cdot 11 = 88$ τετραγωνικές μονάδες. Για τις υπόλοιπες τέσσερεις επιφάνειες μπορούμε να θεωρήσουμε ότι, οι πάνω και κάτω μαζί συμπληρώνουν περίπου 12 τετραγωνικές μονάδες, ενώ η αριστερή και δεξιά επιφάνεια μαζί περίπου 8. Δηλαδή συνολικά έχουμε περίπου 108 τετραγωνικές μονάδες. Η τιμή αυτή των περίπου 108 τετραγωνικών μονάδων προκύπτει και από τον τύπο που χρησιμοποίησαν οι αρχαίοι Αιγύπτιοι.

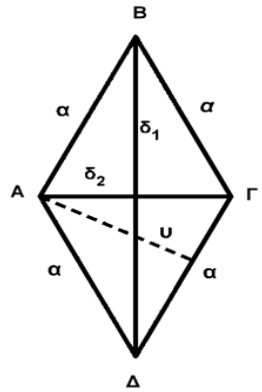
$$\frac{8+10}{2} \cdot \frac{12+12}{2} = 9 \cdot 12 = 108.$$

Από ότι φαίνεται μέχρι τώρα ο παραπάνω τύπος είναι προσεγγιστικός. Είδαμε κατά την πορεία της καταμέτρησης των τετραγωνικών μονάδων χρησιμοποιήσαμε την λέξη περίπου, η μέθοδος αυτή της χαρτοκοπτικής δεν μπορεί να μας δώσει ασφαλή αποτέλεσμα. Μας βοηθάει ίσως να καταλάβουμε τον τρόπο σκέψης των αρχαίων Αιγυπτίων.

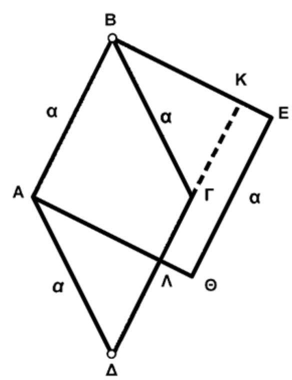


Ας δείξουμε με ένα ασφαλή τρόπο ότι ο παραπάνω τύπος που κατέληξαν οι αρχαίοι Αιγύπτιοι δεν είναι σωστός. Αν εφαρμόσουμε τον παραπάνω τύπο για το ορθογώνιο που είναι μια ειδική μορφή τετράπλευρου, θα δούμε ότι μας δίνει σωστή τιμή για το εμβαδόν μία και ισχύει $\frac{\alpha+\alpha}{2} \cdot \frac{\beta+\beta}{2} = \alpha \cdot \beta$ που είναι το ο γνωστός από πριν τύπος για το εμβαδόν ορθογωνίου. Ας εφαρμόσουμε τον παραπάνω τύπο και στο ρόμβο.

Ο ΡΟΜΒΟΣ



Στο τετράπλευρο αυτό θα εφαρμόσουμε τον τύπο των αρχαίων Αιγυπτίων για να δούμε αν και εδώ μας δίνει, όπως στο ορθογώνιο, σωστά αποτελέσματα. Από την εφαρμογή του τύπου και με δεδομένο ότι όλες οι πλευρές του ρόμβου είναι ίσες, έχουμε ότι το εμβαδόν του ρόμβου με τον τύπο αυτό θα ήταν $E_{\rho όμβου} = \frac{\alpha+\alpha}{2} \cdot \frac{\alpha+\alpha}{2} = \alpha^2$. Δηλαδή όσο και του τετραγώνου πλευράς α. Αν κατασκευάσουμε και ένα τετράγωνο πλευράς α και το τοποθετήσουμε πάνω στον ρόμβο πρέπει αυτές οι δύο επιφάνειες τελικά να ταυτίζονται. Στο παρακάτω σχήμα έχουμε τοποθετήσει πάνω στον ρόμβο $ΑΒΓΔ$ το τετράγωνο $ΑΒΕΘ$ το οποίο έχει ίδια πλευρά με αυτή του ρόμβου. Αν μεταφέρουμε το τρίγωνο $ΑΛΔ$ στο ίσο του $ΒΓΚ$ ο ρόμβος τελικά καλύπτει μέρος του τετραγώνου $ΑΒΕΘ$. Η επιφάνεια του ορθογώνιου $ΚΕΘΛ$ είναι το λάθος του τύπου των αρχαίων Αιγυπτίων από το κανονικό εμβαδόν.



Το λάθος του τύπου για το εμβαδόν τετράπλευρου από τους αρχαίους Αιγυπτίους θα μπορούσε να έχει φανεί εξισώνοντας το α^2 με το τύπο του εμβαδού παραλληλογράμμου $\beta \cdot \upsilon$. Δηλαδή στον πιο πάνω ρόμβο $ΑΒΓΔ$ αν πάρουμε σαν βάση την πλευρά $AB = \alpha$ και ως ύψος το υ θα είχαμε ότι το εμβαδόν του ρόμβου θα ήταν $\alpha\upsilon = \alpha^2$ δηλαδή τελικά θα είχαμε $\alpha = \upsilon$ κάτι το οποίο δεν μπορεί να ισχύει, μια και το $\upsilon < \alpha$. Άρα τελικά ο τύπος ήταν λανθασμένος. Γιατί ο τύπος «λειτούργησε» στο αρχικό τετράπλευρο και στο ορθογώνιο που τον εφαρμόσαμε; Η απάντηση στο ερώτημα αυτό προκύπτει πολύ εύκολα μετά από αυτά που έχουμε ήδη δει. Στο αρχικό τετράπλευρο οι γωνίες ήταν σχεδόν ορθές. Όσο ο ρόμβος μεταβάλλεται και τείνει προς το τετράγωνο, δηλαδή οι γωνίες του τείνουν να γίνουν ορθές, το ορθογώνιο $ΚΕΘΛ$ θα τείνει να μηδενιστεί και στην τελική θέση που οι γωνίες του ρόμβου γίνουν ορθές θα έχουμε το σωστό εμβαδόν. Άρα όταν οι γωνίες του τετράπλευρου ξεφεύγουν από τις ορθές ο τύπος αποτυγχάνει πλήρως. Άρα λοιπόν ο τύπος του στο ναό του Oro λειτουργούσε προσεγγιστικά μια και με τα δεδομένα των Μαθηματικών τεχνών των αρχαίων Αιγυπτίων δεν μπορούσε να βρεθεί κάτι καλύτερο.

Ο ΚΥΚΛΟΣ

Ένα γεωμετρικό σχήμα του οποίου ο υπολογισμός της επιφάνειάς του συνάντησε δυσκολίες μεγαλύτερες από αυτές των ευθυγράμμων σχημάτων ήταν ο κύκλος. Ας δούμε τον τρόπο με τον οποίο οι αρχαίοι Αιγύπτιοι προσπάθησαν να μετρήσουν την επιφάνεια του κύκλου.

Το πρόβλημα 48 του πάπυρου Rhind.

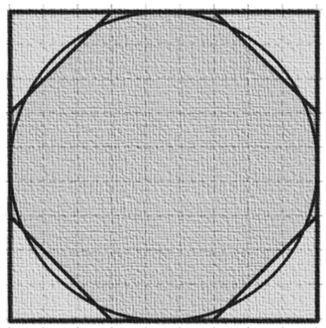
Πληροφορίες για αυτό μας δίνουν τα προβλήματα 48 και 50 στον πάπυρο του *Rhind* τον οποίο μνημονεύσαμε και πριν. Ας δούμε τι μας λένε τα προβλήματα αυτά. Το πρόβλημα 50 λέει τα εξής «Ένας κυκλικός αγρός έχει διάμετρο 9 μονάδες, πόσο είναι το εμβαδόν του;» Η απάντηση: «Κάνε έτσι[1] πάρε το $\frac{1}{9}$ της διαμέτρου που είναι 1 αφαίρεσε από την διάμετρο το υπόλοιπο είναι 8. Βρες το εμβαδόν τετραγώνου πλευράς 8 άρα το εμβαδόν το αγρού είναι 64».

Αν προσπαθήσουμε να βρούμε τον τύπο που κρύβεται πίσω από τις οδηγίες αυτές πολύ εύκολα θα δούμε ότι αν συμβολίσουμε με δ την διάμετρο του κύκλου τότε το εμβαδόν του είναι

$$E = (\delta - \frac{\delta}{9})^2.$$

[1] Έχουμε αναφέρει και παραπάνω ότι στους αρχαίους Αιγύπτιους δεν υπάρχει καταγεγραμμένη κάποια μορφή αποδεικτικής διαδικασίας αλλά μόνο απλή παράθεση οδηγιών.

Εκείνο που είναι πολύ σημαντικό για την διαδικασία μέτρησης της επιφάνειας του κύκλου από τους αρχαίους Αιγυπτίους είναι ότι γίνεται προσπάθεια να συνδεθεί με την επιφάνεια τετραγώνου, δηλαδή ουσιαστικά ξεκινά η διαδικασία για τον τετραγωνισμό του κύκλου (η κατασκευή ενός τετραγώνου που να έχει εμβαδόν ίσο με αυτό ενός κύκλου). Περισσότερες πληροφορίες όμως, για τον τρόπο με τον οποίο κατέληξαν στο συμπέρασμα αυτό μας δίνει το Πρόβλημα 48 από τον ίδιο πάπυρο. Στο πρόβλημα αυτό τριχοτομείται η πλευρά ενός τετραγώνου με μήκος 9 μονάδες και στο εσωτερικό του κατασκευάζεται ένας κύκλος σε μορφή περίπου κανονικού οκτάγωνου όπως βλέπουμε στο σχήμα που ακολουθεί.



Προσθέσαμε στο σχήμα αυτό και τον εγγεγραμμένο κύκλο στο τετράγωνο. Στην συνέχεια λέει «σύγκρινε την επιφάνεια ενός κύκλου με την επιφάνεια του περιγεγραμμένου στον κύκλο τετραγώνου». Προφανώς ακολουθείται η τακτική που εφαρμόστηκε και στο τετράπλευρο, δηλαδή προσεγγίζεται η επιφάνεια του κύκλου με αυτή του κανονικού οκταγώνου. Στο σχήμα που βλέπουμε παραπάνω το οκτάγωνο προσεγγίζει τον κύκλο μια και σε κάποιες περιοχές είναι μεγαλύτερο από αυτόν και σε κάποιες άλλες περιέχεται μέσα σ΄ αυτόν. Μετρώντας τις τετραγωνικές μονάδες που είναι στο εσωτερικό που οκταγώνου θα δούμε ότι είναι 63 δηλαδή περίπου 64 ή αλλιώς είναι το εμβαδόν τετραγώνου πλευράς 8. Οπότε έχουμε τον τύπο για το εμβαδόν του κύκλου που είδαμε να περιγράφεται και στο πρόβλημα 50. Το βέβαιο είναι ότι υπάρχει λάθος στην εύρεση του εμβαδού αυτού, γιατί κι αν υποθέσουμε ότι το οκτάγωνο προσεγγίζει ακριβώς τον κύκλο, (στην πραγματικότητα ο κύκλος έχει λίγο μεγαλύτερη επιφάνεια από το οκτάγωνο) το να θεωρήσουμε το 63 περίπου 64 έχει εισαγάγει στον τύπο $(\delta - \frac{\delta}{9})^2$ σφάλμα. Ένα μέτρο προσέγγισης της τιμής του εμβαδού του κύκλου, όπως θα δούμε και στην συνέχεια, είναι η τιμή του π που προκύπτει από την προσέγγιση αυτή. Για τον συγκεκριμένο τύπο θα έχουμε: $E = (\delta - \frac{\delta}{9})^2 = \pi\frac{\delta^2}{4} \Longrightarrow \frac{64}{81} = \frac{\pi}{4} \Longrightarrow \pi = \frac{256}{81}$. Δηλαδή $\pi \cong 3{,}16$. Στην συνέχεια θα δούμε ποια τιμή έδωσε για το π ο Αρχιμήδης αφού προσθέσουμε νέα εργαλεία που προέκυψαν από το διαφορετικό τρόπο σκέψης των αρχαίων Ελλήνων. Αυτά είναι τα δεδομένα που έχουμε για την μέτρηση επιφανειών την εποχή αυτή (2000-1700 π.Χ.) και θα έχουμε για πολλούς αιώνες αργότερα. Ακόμη και σε άλλους λαούς, (Βαβυλώνιους, Κινέζους, Ινδούς) τα πράγματα δεν διαφέρουν σημαντικά. Οι μέθοδοι και οι πρακτικές που εφάρμοσαν οι λαοί αυτοί δεν έδωσαν κάποιο καινούργιο εργαλείο σκέψης αλλά μόνο αποσπασματικούς κανόνες. Σίγουρα είχαν δημιουργήσει μια τεράστια συλλογή δεδομένων, μετρήσεων και καταγραφών αλλά το καινούργιο στην σκέψη ήρθε στην συνέχεια από τους αρχαίους Έλληνες φιλοσόφους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{ο}: ΜΕΤΡΗΣΗ ΕΥΓΡΑΜΜΩΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ - ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΕΞΕΛΙΞΗ

2.1 Μέτρηση ευθυγράμμων επιφανειών στην αρχαιά Ελλάδα

Οι αρχαίοι Έλληνες Φιλόσοφοι στην προσπάθειά τους να απαντήσουν στα ερωτήματα που αφορούν την προέλευση του κόσμου, θα παράγουν τις δομές που θα οδηγήσουν, τις αποσπασματικές γνώσεις, τις Μαθηματικές τέχνες κατά τον Αριστοτέλη που υπήρχαν μέχρι τότε, σε μια καινούργια επιστήμη που θα ονομαστεί Μαθηματικά. Ο Θαλής (γύρω στο 600 π.Χ.) και οι Ίωνες Φιλόσοφοι (Αναξίμανδρος, Αναξιμένης) ήταν από τους πρώτους αρχαίους Έλληνες που ήρθαν σε επαφή με την Αίγυπτο και μπόλιασαν την φιλοσοφική σκέψη με τα δεδομένα που είχαν συλλέξει οι λαοί αυτοί. Ο Θαλής κέρδισε μάλιστα τον θαυμασμό των Αιγυπτίων μετρώντας το ύψος των πυραμίδων, βασιζόμενος στο μήκος της σκιάς τους και της σκιάς μιας ράβδου που έμπηγε στο έδαφος. Γνωστό επίσης είναι το Θεώρημα του Θαλή. Οι πληροφορίες που ακολουθούν και αφορούν τον Θαλή παρατίθενται από τον Πρόκλο (412 - 485 μ.Χ.), σχολιαστή των Στοιχείων του Ευκλείδη, ο οποίος τις άντλησε από την Ιστορία της Γεωμετρίας του Ευδήμου (350-290 π.Χ).

- Ήταν ο πρώτος που απέδειξε ότι η διάμετρος χωρίζει τον κύκλο σε δύο ίσα μέρη.
- Ανακάλυψε, επίσης, ότι οι παρά την βάση γωνίες ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες.
- Απέδειξε ότι οι γωνίες δύο τεμνόμενων ευθειών είναι ίσες (κατακορυφήν).
- Η πρόταση που αφορά την ισότητα δύο τριγώνων με μία πλευρά και δύο γωνίες ίσες αποδίδεται από τον Εύδημο στον Θαλή, με την παρατήρηση ότι ο Θαλής χρησιμοποίησε αυτό το θεώρημα ισότητας των τριγώνων για να αποδείξει την ορθότητα της μεθόδου του με βάση την οποία υπολόγιζε την απόσταση δύο πλοίων μέσα στη θάλασσα.

Από το Διογένη τον Λαέρτιο (3^{ος} αιώνας μ.Χ.) στο έργο του *Βίοι και γνώμαι των εν φιλοσοφία ευδοκιμησάντων,* αναφέρεται ότι, ο Θαλής ήταν ο πρώτος που κατασκεύασε τον περιγεγραμμένο κύκλο ενός ορθογωνίου τριγώνου. Επομένως, η πρόταση ότι η εγγεγραμμένη σε ημιπεριφέρεια γωνία είναι ορθή, αποδίδεται στον Θαλή.

Εκείνο που είναι εντελώς νέο και χαρακτηρίζει τα Ελληνικά Μαθηματικά είναι η μετάβαση από θεώρημα σε θεώρημα διά μέσου της απόδειξης. Το υλικό από το οποίο οικοδομήθηκαν τα ελληνικά Μαθηματικά όπως είπαμε δεν ήταν νέο. Οι δομικοί λίθοι μπορούν να αναγνωριστούν στα κατάλοιπα των παλαιών πολιτισμών. Αλλά η μορφή που δόθηκε στο οικοδόμημα ήταν νέα. Αυτό μαρτυρεί την καθαρή σκέψη των Ελλήνων, μια σκέψη που δεν ανέχεται ασάφειες ούτε αμφιβολίες σε ό,τι αφορά την ορθότητα των συμπερασμάτων που έχουν εξαχθεί. Ο Θαλής δημιούργησε το θεωρητικό υπόβαθρο το οποίο αξιοποίησαν αργότερα ο Πυθαγόρας και οι μαθητές του (γύρω στο 500 π.Χ.), ώστε να θεμελιώσουν έναν καινούργιο τρόπο σκέψης που εκφράστηκε μέσα από την επιστήμη των Μαθηματικών. Η επιστήμη αυτή θα φτάσει στο απόγειο της με την σχολή των Πλατωνικών φιλοσόφων (Πλάτωνας, Θεαίτητος, Εύδοξος) και την γνωστή Ακαδημία του Πλάτωνα στην οποία δέσποζε το ρητό «Μηδείς αγεωμέτρητος εισίτω».

> Ὁ Πλάτων εἶχε γράψει εἰς τὸ ὑπέρθυρον τῆς Ἀκαδημίας του·
> Κανεὶς ἀγεωμέτρητος δὲν ἐπιτρέπεται νὰ εἰσέλθῃ ἐδῶ·
> Δηλαδὴ κανεὶς ἄδικος νὰ μὴ περάσῃ τὸ κατώφλι·
> Διότι ἰσότης καὶ δίκαιον εἶναι γεωμετρία.
>
> *Πρὸ τῶν θυρῶν τῶν αὐτοῦ γράψας ὑπῆρχε Πλάτων·*
> *Μηδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω μου τὴν στέγην·*
> *Τουτέστιν, ἄδικος μηδεὶς παρεισερχέσθω τῇδε·*
> *Ἰσότης γὰρ καὶ δίκαιόν ἐστι γεωμετρία. (Τζέτζης, χιλιάδες VIII 972)*

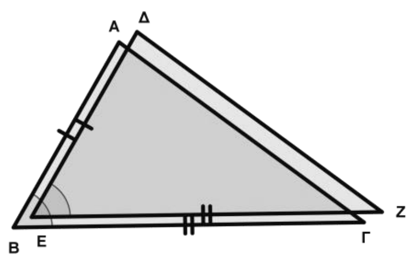
Όλα αυτά που δημιουργήθηκαν στους αιώνες αυτούς θα τα συλλέξει ο Ευκλείδης ένας μεγάλος δάσκαλος της Αλεξανδρινής σχολής, αργότερα (300 π.Χ.) σ΄ ένα μεγαλειώδες έργο κόσμημα της ανθρώπινης σκέψης, τα *Στοιχεία*. Εκεί θα μπούνε οι βάσεις για ό,τι μέχρι σήμερα ονομάζουμε Μαθηματικά. Στο βιβλίο αυτό εμφανίζεται για πρώτη φορά στην γραπτή παράδοση η αξιωματική θεμελίωση. Αυτό που γράφει ο Αριστοτέλης στο έργο του *Ἀναλυτικά Ὕστερα* «*πᾶσα γὰρ ἀποδεικτικὴ ἐπιστήμη περὶ τρία ἐστίν, ὅσα τε εἶναι τίθεται (ταῦτα δ' ἐστὶ τὸ γένος, οὗ τῶν καθ' αὑτὰ παθημάτων ἐστὶ θεωρητική), καὶ τὰ κοινὰ λεγόμενα ἀξιώματα, ἐξ ὧν πρώτων αποδείκνυσι, καὶ τρίτον τὰ πάθη, ὧν τι σημαίνει*». «Κάθε λοιπόν αποδεικτική επιστήμη στρέφεται κυρίως γύρω από τρία πράγματα. Εκείνα που θεωρεί ότι υπάρχουν (αυτά είναι το γένος του οποίου εξετάζει τις καθ' αυτές ιδιότητες), τα λεγόμενα κοινά αξιώματα με βάση τα οποία πραγματοποιείται η απόδειξη (ως πρώτα προκείμενα) και τρίτον τις ιδιότητες, για τις οποίες η επιστήμη θεωρεί ως δεδομένο το τι σημαίνουν». Μέσα από το βιβλίο αυτό προέκυψαν εργαλεία σκέψης και δομές που έδωσαν και δίνουν έμπνευση στους Μαθηματικούς μέχρι τις μέρες μας. Μέσα από το βιβλίο αυτό θα αντλήσουμε και εμείς τον τρόπο με τον οποίο έγινε κατορθωτό να τετραγωνιστεί μια πολυγωνική επιφάνεια.

Ας δούμε λοιπόν θεωρήματα από τα δύο πρώτα βιβλία των *Στοιχείων* που θα μας οδηγήσουν στον τετραγωνισμό της πολυγωνικής επιφάνειας. Όπως μας αναφέρει B. L. Van der Waerden στην *Αφύπνιση της Επιστήμης,* σύμφωνα με τον Εύδημο τα δύο πρώτα βιβλία των *Στοιχείων* είναι ανακάλυψη των Πυθαγορείων. Στα *Στοιχεία* η μέτρηση των επιφανειών δεν γίνεται μέσω τύπων αλλά μέσω του γεωμετρικού μετασχηματισμού τους σε ισοδύναμο τετράγωνο. Στις δύο προτάσεις που ακολουθούν η σύγκριση γίνεται μέσω της ισότητάς τους, στην πρόταση 4 η ισότητα προκύπτει μέσω της ταύτισης των δύο σχημάτων, όταν το ένα μεταφερθεί πάνω στο άλλο. Στα πλαίσια που ακολουθούν δίνεται το πρωτότυπο κείμενο από την ιστοσελίδα http://www.physics. ntua.gr/~mourmouras/euclid/book1/postulate4.html. Η απόδοση στα νέα Ελληνικά έγινε από εμένα με βάση την μετάφραση του Ε. Σταμάτη από το βιβλίο του *Ευκλείδου Στοιχεία.*

Πρόταση 4^{η} (βιβλίο Ι)

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς [ταῖς] δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἕξει, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

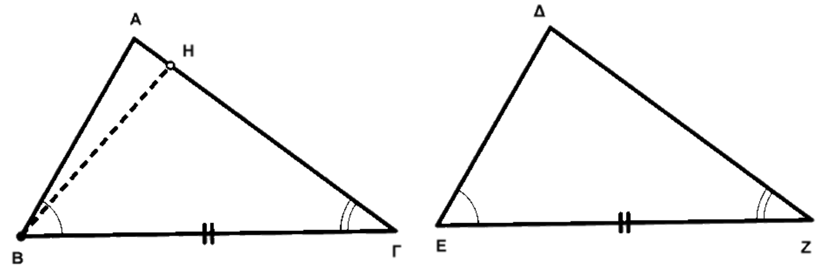
Αν δύο τρίγωνα έχουν τις δύο πλευρές τους ίσες και έχουν την γωνία που περιέχεται από τις ίσες πλευρές ίση, θα έχουν και την τρίτη πλευρά ίση και το ένα τρίγωνο θα είναι ίσο με το άλλο και οι υπόλοιπες γωνίες θα είναι αντίστοιχα ίσες αυτές που είναι απέναντι από τις ίσες πλευρές.



Πρόταση 26^{η} (βιβλίο Ι)

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο γωνίας δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην ἤτοι τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις ἢ τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν, καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει [ἑκατέραν ἑκατέρᾳ] καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ.

Εάν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες αντίστοιχα ίσες και μία πλευρά ίση ή την πλευρά πάνω στην οποία πρόσκεινται οι γωνίες αυτές ή μία πλευρά που βρίσκεται απέναντι από την μία από τις ίσες γωνίες τότε τα τρίγωνα αυτά θα έχουν τις άλλες πλευρές ίσες και την τρίτη γωνία ίση.

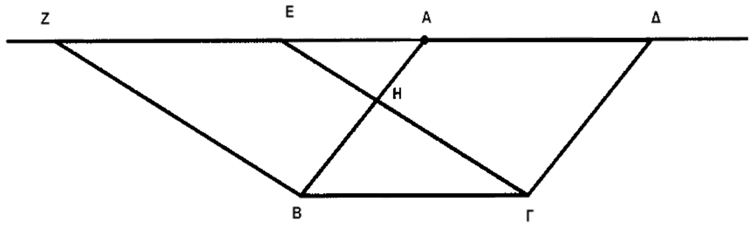


Πρόταση 35η (βιβλίο Ι)

Τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Τα παραλληλόγραμμα που έχουν την ίδια βάση και ευρισκόμενα μεταξύ των ίδιων παραλλήλων είναι μεταξύ τους ίσα.

Έστω τα παραλληλόγραμμα $ΑΒΓΔ$ και $ΕΖΒΓ$ που έχουν κοινή βάση $ΒΓ$ και τις παράλληλες σε αυτήν πλευρές $ΕΖ$ και $ΑΔ$ πάνω στην ίδια παράλληλη της $ΒΓ$ θα δείξουμε ότι τα δύο παραλληλόγραμμα έχουν την ίδια επιφάνεια.



Οι πλευρές $ΑΔ$ και $ΒΓ$ είναι ίσες όπως επίσης και οι $ΒΓ$ με την $ΕΖ$ άρα θα είναι ίσες και οι $ΕΖ$ με την $ΑΔ$ και αν προσθέσουμε στις ίσες αυτές πλευρές την $ΕΑ$ θα έχουμε ότι $ΖΕ + ΕΑ = ΑΔ + ΕΑ$ δηλαδή $ΖΑ = ΕΔ$. Τα τρίγωνα $ΑΒΖ \ και \ ΕΓΔ$ είναι ίσα. Αν από τα ίσα τρίγωνα αφαιρέσουμε το κοινό τρίγωνο $ΑΕΗ$, τα τραπέζια $ΕΖΒΗ \ και \ ΑΗΓΔ$ θα έχουν την ίδια επιφάνεια. Αν στα τραπέζια αυτά προσθέσουμε το τρίγωνο $ΒΗΓ$, θα έχουμε ότι τα παραλληλόγραμμα $ΕΖΒΓ$ και $ΑΒΓΔ$ θα έχουν την ίδια επιφάνεια.

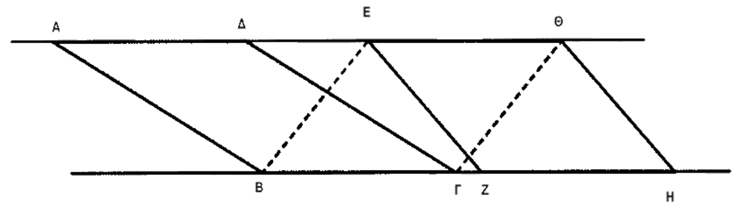
Εκείνο το στοιχείο που πρέπει να προσέξουμε εδώ είναι ότι τα παραλληλόγραμμα που ο Ευκλείδης ονομάζει ίσα, δεν έχουν την ιδιότητα της ταύτισής τους με κατάλληλη μεταφορά που είχαν τα τρίγωνα των προηγούμενων προτάσεων 4 και 26. Εδώ όπως βλέπουμε η ταύτιση δεν είναι δεδομένη, μπορεί να επιτευχθεί μόνο με κατάλληλη διαμέριση των σχημάτων. Όπως θα δούμε στη συνέχεια αυτή η ιδιότητα θα αποδειχθεί για οποιεσδήποτε πολυγωνικές επιφάνειες έχουν το ίδιο εμβαδόν. Τις επιφάνειες με το ίδιο εμβαδόν θα τις ονομάζουμε ισοδύναμες**.**

Πρόταση 36η (βιβλίο Ι)

Τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Τα παραλληλόγραμμα που έχουν ίσες βάσεις και βρίσκονται μεταξύ των ίδιων παραλλήλων είναι ίσα (ισοδύναμα).

Στο επόμενο σχήμα βλέπουμε ότι τα παραλληλόγραμμα $ΑΔΓΒ$ και $ΕΖΗΘ$ είναι ισοδύναμα με το παραλληλόγραμμο $ΕΘΓΒ$ άρα είναι και μεταξύ τους ισοδύναμα.

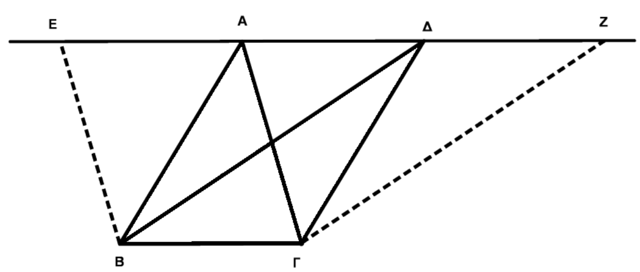


Πρόταση 37η (βιβλίο Ι)

Τὰ τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Τα τρίγωνα που έχουν κοινή βάση και οι κορυφές τους είναι πάνω σε ευθεία παράλληλη προς τη βάση είναι ίσα (ισοδύναμα).

Φέρνοντας τις παράλληλες EB στην $A\Gamma$ και ΓZ στην ΔB δημιουργούνται δύο ισοδύναμα παραλληλόγραμμα $EA\Gamma B$ και $B\Gamma Z\Delta$. Τα τρίγωνα είναι τα μισά αυτών των παραλληλογράμμων άρα και αυτά είναι ισοδύναμα. Στην ίδια λογική είναι και η παρακάτω πρόταση.



Πρόταση 38η (βιβλίο Ι)

Τὰ τρίγωνα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

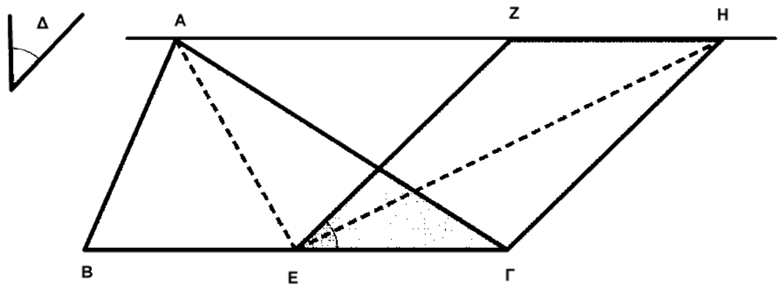
Τα τρίγωνα που έχουν ίσες βάσεις και οι κορυφές τους είναι σε παράλληλη προς την βάση ευθεία είναι ισοδύναμα.

Πρόταση 42η (βιβλίο Ι)

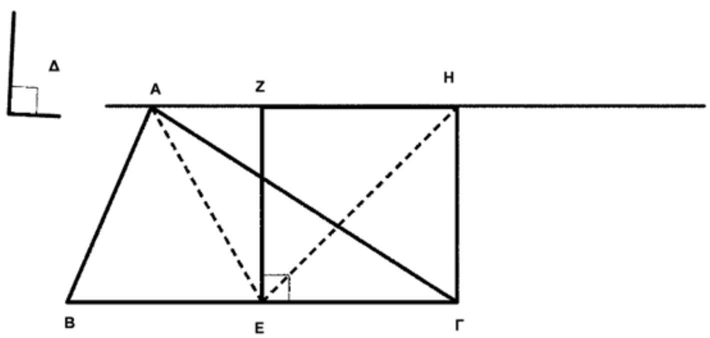
Τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

Προς δοθέν τρίγωνο να κατασκευαστεί ίσο (ισοδύναμο) παραλληλόγραμμο σε δεδομένη γωνία.

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και γωνία Δ ζητάμε να κατασκευάσουμε παραλληλόγραμμο με γωνία Δ, ισοδύναμο με το τρίγωνο. Αρχικά θα βρούμε το μέσο της $B\Gamma$ (έστω E) και θα φέρουμε από την κορυφή A ευθεία παράλληλη προς την $B\Gamma$. Στην συνέχεια θα κατασκευάσουμε γωνία με πλευρά την ΓE ίση με την Δ η οποία ας τέμνει την παράλληλη από το A προς την $B\Gamma$ στο Z. Τέλος από το Γ φέρνουμε παράλληλη προς την EZ που τέμνει την παράλληλη από το A προς την $B\Gamma$ στο H.



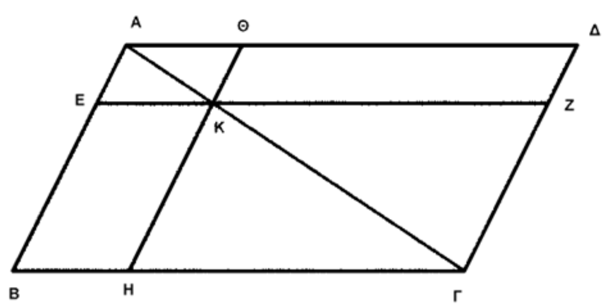
Το παραλληλόγραμμο $E\Gamma ZH$ είναι ισοδύναμο με το τρίγωνο $AB\Gamma$ γιατί αν φέρουμε την διάμεσο AE και την διαγώνιο EH τότε τα τρίγωνα ABE και $E\Gamma H$ είναι ισοδύναμα (πρόταση 38) αλλά αυτά είναι το μεν ABE το μισό του τριγώνου $AB\Gamma$ και το $E\Gamma H$ το μισό του παραλληλογράμμου $E\Gamma HZ$ και επειδή τα μισά αυτών είναι ίσα θα είναι και τα ολόκληρα σχήματα ίσα δηλαδή τελικά κατασκευάστηκε το παραλληλόγραμμο $E\Gamma HZ$ ισοδύναμο με το τρίγωνο $AB\Gamma$. Παρατηρούμε ότι αν η γωνία Δ γίνει ορθή τότε το τρίγωνο μετασχηματίζεται σε ισοδύναμο ορθογώνιο.



Πρόταση $43^{η}$ (βιβλίο Ι)

Παντὸς παραλληλογράμμου τῶν περὶ τὴν διάμετρον παραλληλογράμμων τὰ παραπληρώματα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

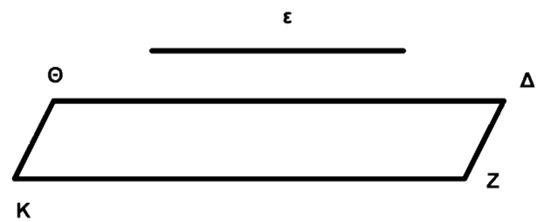
Σε κάθε παραλληλόγραμμο τα παραπληρώματα παραλληλόγραμμα που σχηματίζονται από την διαγώνιό του είναι ίσα.



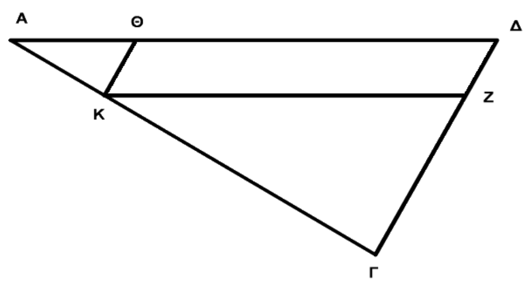
Αν σ΄ ένα παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ φέρουμε την διαγώνιο $A\Gamma$ και δύο παράλληλες ΕΖ$//A\Delta//B\Gamma$ και $\Theta H//AB//\Delta\Gamma$ τα δύο παραλληλόγραμμα $EBHK$ και $\Theta KZ\Delta$ που σχηματίζονται είναι αυτά που ο Ευκλείδης ονομάζει παραπληρώματα ως προς την διαγώνιο $ΑΓ$. Το ότι αυτά είναι ισοδύναμα φαίνεται εύκολα, αφού σχηματίζονται ως διαφορές ίσων επιφανειών.

Με την παραπάνω πρόταση ο Ευκλείδης καταφέρνει να κατασκευάσει ένα παραλληλόγραμμο ισοδύναμο με ένα δεδομένο, που έχει ίσες γωνίες με αυτό και μια πλευρά του ίση με δεδομένο τμήμα.

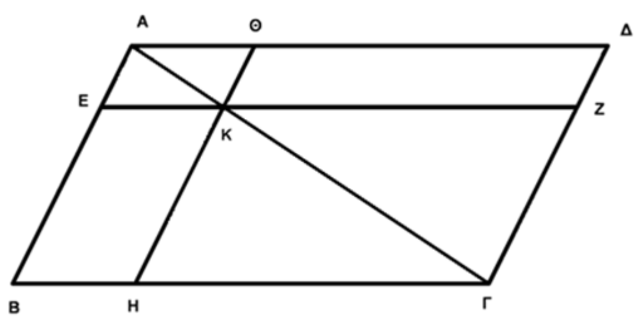
Ας παρακολουθήσουμε βήμα προς βήμα την παραπάνω κατασκευή. Υποθέτουμε πως έχουμε το παραλληλόγραμμο $ΘΚΖΔ$ και το τμήμα $ε$ θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα παραλληλόγραμμο ισοδύναμό του με ίσες γωνίες και μια πλευρά του να είναι το τμήμα $ε$.



Με βάση την προηγούμενη πρόταση προεκτείνουμε μια πλευρά του παραλληλογράμμου έστω την $ΔΖ$ και στην προέκταση παίρνουμε τμήμα $ΖΓ$ ίσο με ε . Στην συνέχεια φέρνουμε το τμήμα $ΓΚ$ και το προεκτείνουμε μέχρι να τμήσει την προέκταση της $ΘΔ$ στο σημείο $Α$.



Για τη συνέχεια μας καθοδηγεί η προηγούμενη πρόταση. Από τα σημεία $Α$ και $Γ$ θα φέρουμε παράλληλες προς τις $ΔΓ$ και $ΑΔ$ αντίστοιχα που τέμνονται στο σημείο $Β$ σχηματίζοντας το παραλληλόγραμμο $ΑΔΓΒ$ και από το σημείο $Κ$ θα φέρουμε παράλληλες προς τις $ΔΓ$ και $ΑΔ$ που τέμνουν τις πλευρές $ΒΓ$ και $ΑΒ$ του παραλληλογράμμου $ΑΒΓΔ$ στα σημεία $Η$ και $Ε$ αντίστοιχα σχηματίζοντας το ζητούμενο παραλληλόγραμμο $ΕΒΗΚ$.



Για την ισότητα των γωνιών όπως βλέπουμε η γωνία $ΘΚΖ$ είναι ίση με την γωνία $ΕΚΗ$ οπότε και οι υπόλοιπες γωνίες είναι ίσες. Η πλευρά $ΚΗ = ΖΓ$, άρα λοιπόν το παραλληλόγραμμο $ΕΒΚΗ$ είναι το ζητούμενο.

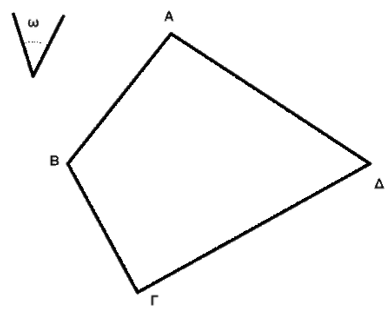
Σκοπός των παραπάνω προτάσεων είναι να μετασχηματιστεί το τετράπλευρο σε ισοδύναμο παραλληλόγραμμο. Στην επόμενη πρόταση έχουμε την κατασκευή αυτή.

Πρόταση 45η (βιβλίο Ι)

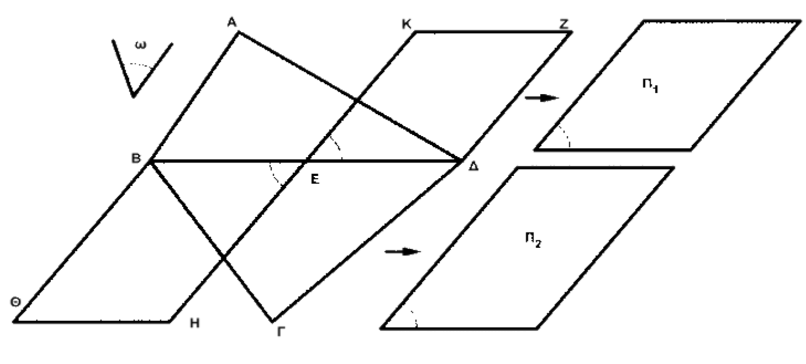
Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

Να κατασκευαστεί παραλληλόγραμμο ίσο προς δοθέν ευθύγραμμο σχήμα (τετράπλευρο) υπό δοθείσα γωνία.

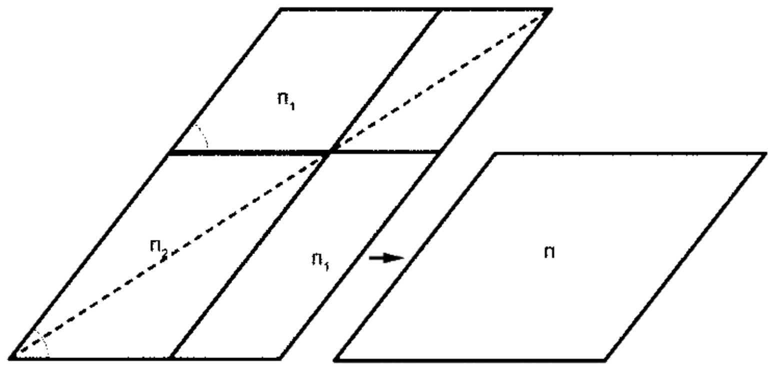
Στο παρακάτω σχήμα έχουμε το τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ και την γωνία ω και θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα παραλληλόγραμμο ισοδύναμο με το τετράπλευρο όπου μία του γωνία να είναι ίση με ω. Θα αποδώσουμε την κατασκευή (χωρίς να ξεφεύγουμε από τον Ευκλείδη) με λίγο πιο σύγχρονη ορολογία. Αρχικά θα χωρίσουμε το τετράπλευρο με μια διαγώνιό του σε δύο τρίγωνα και για καθένα από αυτά θα κατασκευάσουμε το ισοδύναμο παραλληλόγραμμο σύμφωνα με την πρόταση 42.



Χωρίσαμε αρχικά το τετράπλευρο στα τρίγωνα $ΑΒΔ$ και $ΒΓΔ$ και κατασκευάσαμε τα ισοδύναμα παραλληλόγραμμα $ΚΖΔΕ$ και $ΕΒΘΗ$ υπό γωνία ω σύμφωνα με την πρόταση 42 τα οποία μεταφέραμε κατασκευάζοντας δυο ίσα προς αυτά παραλληλόγραμμα τα $Π_1$ και $Π_2$.



Το επόμενο βήμα θα είναι η κατασκευή ενός παραλληλογράμμου ακολουθώντας την πρόταση 43 (κατασκευή γνώμονα) . Όπως βλέπουμε στο παρακάτω σχήμα τα δύο παραλληλόγραμμα Π_1 και Π_2 ενώθηκαν στο παραλληλόγραμμο Π.



Ήδη με την πρόταση αυτή ο Ευκλείδης έχει καταφέρει να μετατρέψει το τετράπλευρο σε μετρήσιμη επιφάνεια όπως αυτή του παραλληλογράμμου και μάλιστα αν διαλέξουμε όπως και πριν γωνία ω ίση με μία ορθή τότε θα σχηματίσει ισοδύναμο ορθογώνιο. Η διαδικασία όμως δεν σταματά μια και στόχος είναι να κατασκευαστεί ισοδύναμο τετράγωνο.

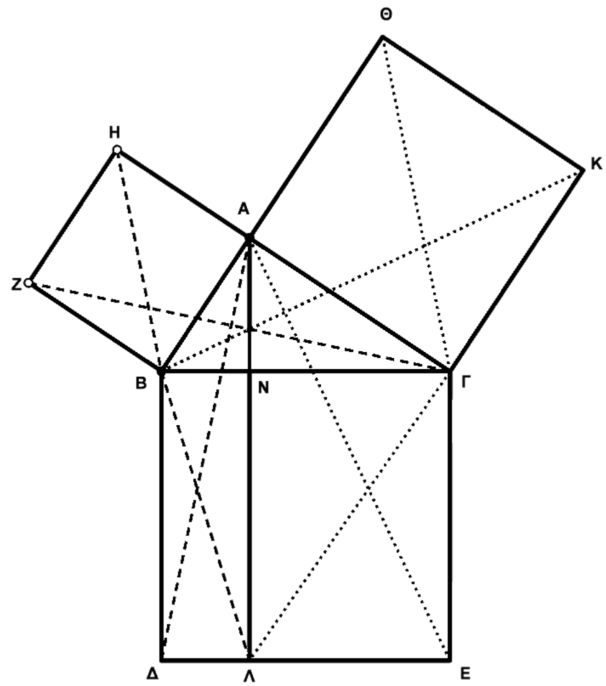
2.2 Τετραγωνισμός πολυγωνικής επιφάνειας - Γεωμετρική Άλγεβρα

Το δεύτερο βιβλίο των στοιχείων περιέχει θεωρήματα στα οποία γίνεται η κατασκευή τετραγώνων από τετράγωνα ή από τετράγωνα και ορθογώνια σε διάφορους συνδυασμούς. Αν στα δέκα πρώτα θεωρήματα παραστήσουμε τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων που συμμετέχουν σ΄ αυτά με μεταβλητές θα δούμε ότι εμφανίζονται πολύ γνωστές αλγεβρικές ταυτότητες. Για τον λόγο αυτό το τμήμα αυτό των στοιχείων από τους μελετητές των *Στοιχείων* έχει χαρακτηριστεί με τον όρο Γεωμετρική Άλγεβρα. Η πρόταση 11 περιέχει το πρόβλημα της διαίρεσης ευθυγράμμου τμήματος σε μέσο και άκρο λόγο που αργότερα ονομάστηκε ως χρυσή τομή. Ενώ η τελευταία πρόταση 14 μελετά την κατασκευή τετραγώνου ισοδύναμου προς ένα δοθέν ευθύγραμμο σχήμα, κατασκευή που ολοκληρώνει την μέτρηση των επιφανειών αυτών. Πριν ξεκινήσουμε τις προτάσεις από το δεύτερο βιβλίο, θα δούμε και την πρόταση 47 του πρώτου βιβλίου γνωστή και ως Πυθαγόρειο Θεώρημα με την ξεχωριστή απόδειξη του Ευκλείδη.

Πρόταση 47^{η} (βιβλίο Ι)

Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις.

Στα ορθογώνια τρίγωνα το τετράγωνο το αναγραφόμενο στην υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου είναι ίσο προς τα τετράγωνα τα οποία αναγράφονται στις πλευρές που περιέχουν την ορθή γωνία (κάθετες πλευρές)



Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ έχουμε κατασκευάσει τα τετράγωνα $ΓΒΕΔ, ΑΓΚΘ, ΑΒΖΗ$ στην υποτείνουσα $ΒΓ$ και στις κάθετες πλευρές $ΑΓ$ και $ΑΒ$ αντίστοιχα. Θα δείξουμε ότι

$$E_{ΒΓΕΔ} = E_{ΑΓΚΘ} + E_{ΑΒΖΗ}.$$

Φέρνουμε την $ΑΛ$ κάθετη στην $ΔΕ$, φέρνουμε τις $ΖΓ, ΒΚ, ΑΔ, ΑΕ$ επίσης φέρνουμε τις διαγώνιους $ΑΖ, ΓΘ, ΓΛ, ΒΛ$. Τα τρίγωνα $ΒΖΓ$ και $ΑΒΔ$ είναι ίσα $ΖΒ = ΑΒ, ΒΓ = ΒΔ$ και οι γωνίες $ΖΒΓ, ΑΒΔ$ είναι ίσες μια και καθεμία είναι ίση με γωνία $ΑΒΓ + 1^{\llcorner}$ επίσης τα τρίγωνα $ΖΒΗ$ (μισό τετράγωνο) και $ΖΒΓ$ είναι ισοδύναμα όπως επίσης το $ΑΒΖ \text{ και } ΒΔΛ$ (Πρόταση 37) άρα το μισό τετράγωνο $ΑΒΖΗ$ είναι ισοδύναμο με το μισό ορθογώνιο $ΒΔΛΝ$. Με όμοιο τρόπο τα τρίγωνα $ΓΚΘ, ΚΓΒ, ΓΑΕ, ΓΛΕ$ είναι ισοδύναμα άρα το μισό τετράγωνο $ΑΓΚΘ$ είναι ίσο με το μισό ορθογώνιο $ΓΕΛΝ$. Άρα συνολικά έχουμε ότι :

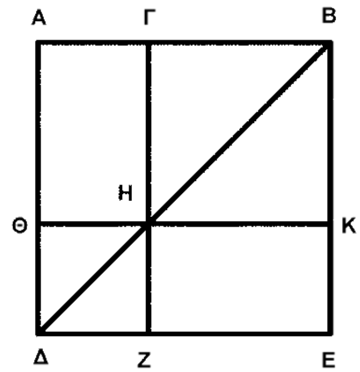
$$\frac{E_{ΑΒΖΗ}}{2} + \frac{E_{ΑΓΚΘ}}{2} = \frac{E_{ΒΝΛΔ}}{2} + \frac{E_{ΝΓΕΛ}}{2}$$

ή $$E_{ΒΓΕΔ} = E_{ΑΓΚΘ} + E_{ΑΒΖΗ}.$$

Πρόταση 4^{η} (βιβλίο ΙΙ)

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὸ ὑπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνῳ.

Αν ευθεία τμηθεί τυχαία, το τετράγωνο που σχηματίζει όλη είναι ίσο προς τα τετράγωνα με πλευρές τα τμήματα στα οποία χωρίζεται και το διπλάσιο ορθογώνιο που σχηματίζουν τα τμήματα αυτά.



Έστω τμήμα AB το οποίο χωρίζεται τυχαία από το σημείο Γ. Θα δείξουμε ότι το τετράγωνο με πλευρά την AB είναι ίσο με τα τετράγωνα με πλευρές τα $A\Gamma$, ΓB και το διπλάσιο ορθογώνιο που σχηματίζουν τα τμήματα $A\Gamma$, ΓB. Σχηματίζουμε το τετράγωνο $ABE\Delta$, φέρουμε την διαγώνιο ΔB και από το Γ φέρουμε παράλληλη στις $A\Delta$, BE που τέμνει την διαγώνιο ΔB στο H και την πλευρά ΔE στο Z, από το H φέρνουμε παράλληλη προς τις AB, ΔE που τέμνει τις πλευρές $A\Delta$, BE στα Θ, K αντίστοιχα. Επειδή η διαγώνιος του τετραγώνου είναι και διχοτόμος των γωνιών του ($\Gamma\widehat{B}H = H\widehat{B}K = \frac{1}{2}\llcorner$) και οι γωνίες $\Gamma\widehat{B}H = B\widehat{H}K = \frac{1}{2}\llcorner$. Τα τρίγωνα $B\Gamma H$ και BKH ως ορθογώνια και ισοσκελή είναι ίσα δηλαδή $H\Gamma = \Gamma B = BK = HK$ δηλαδή το $B\Gamma HK$ είναι τετράγωνο. Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται και ότι το $\Theta HZ\Delta$ είναι τετράγωνο. Επίσης τα δύο ορθογώνια $A\Gamma H\Theta$ και $HZEK$ όπως γνωρίζουμε είναι ίσα. Οπότε τελικά ισχύει όπως βλέπουμε και από το παραπάνω σχήμα ότι:

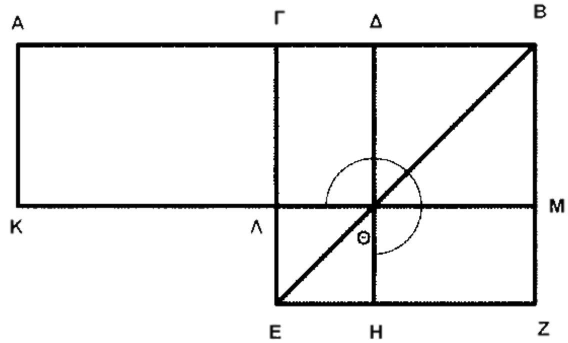
$$E_{ABE\Delta} = E_{\Gamma BKH} + E_{\Theta HZ\Delta} + 2 \cdot E_{A\Gamma H\Theta}$$

Αν τα τμήματα $A\Gamma = H\Theta$ έχουν μήκος α και $\Gamma B = \Gamma H = \beta$ οπότε $A\Gamma = \alpha + \beta$ τότε η παραπάνω σχέση γίνεται $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta$, πολύ χρήσιμη ιδιότητα του αλγεβρικού λογισμού.

Πρόταση $5^{η}$ (βιβλίο II)

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὸ ὑπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνῳ.

Αν ευθεία γραμμή (τμήμα) τμηθεί σε ίσα και άνισα τμήματα, το ορθογώνιο με πλευρές τα άνισα τμήματα μαζί με το τετράγωνο που έχει ως πλευρά το τμήμα που είναι ανάμεσα στα ίσα και στα άνισα τμήματα, είναι ίσο με το τετράγωνο που έχει ως πλευρά το μισό του αρχικού ευθυγράμμου τμήματος.



Έστω τμήμα AB το οποίο χωρίζεται σε δύο ίσα μέρη από το Γ και σε δύο άνισα μέρη από το Δ θα δείξουμε ότι το ορθογώνιο με πλευρές τα άνισα μέρη $A\Delta, \Delta B$ μαζί με το τετράγωνο με πλευρά ανάμεσα στα ίσα και άνισα μέρη $\Gamma\Delta$ ισούται με το τετράγωνο του ΓB.

Σχηματίζουμε το τετράγωνο ΓEZB με πλευρά την ΓB και φέρνουμε την διαγώνιο EB, από το Δ φέρνουμε παράλληλη στην BZ που τέμνει την διαγώνιο στο Θ και την πλευρά EZ στο H. Από το Θ φέρνουμε παράλληλη στο AB που τέμνει την παράλληλη από το A στην BZ στο K και τις πλευρές του τετραγώνου στα Λ, M. Με βάση το παραπάνω σχήμα έχουμε $E_{\Gamma\Delta\Theta\Lambda} = E_{\Theta HZM}$, προσθέτουμε στα μέλη της ισότητας το $E_{\Delta BM\Theta}$ οπότε $E_{\Gamma\Delta\Theta\Lambda} + E_{\Delta BM\Theta} = E_{\Theta HZM} + E_{\Delta BM\Theta}$ δηλαδή $E_{\Gamma BM\Lambda} = E_{\Delta BZH}$ αλλά $E_{\Gamma BM\Lambda} = E_{A\Gamma\Lambda K}$ οπότε $E_{A\Gamma\Lambda K} = E_{\Delta BZH}$ προσθέτουμε στα μέλη της ισότητας το $E_{\Gamma\Delta\Theta\Lambda}$ οπότε $E_{A\Gamma\Lambda K} + E_{\Gamma\Delta\Theta\Lambda} = E_{\Delta BZH} + E_{\Gamma\Delta\Theta\Lambda}$. Το πρώτο μέλος της προηγούμενης σχέσης μας δίνει το εμβαδόν του ορθογωνίου $A\Delta\Theta K$ και το δεύτερο μέλος το εμβαδόν του πολύγωνου $\Gamma\Lambda\Theta HZB$ που έχουμε σημειώσει στο σχήμα με το τεταρτοκύκλιο, άρα αν στα δύο παραπάνω εμβαδά προσθέσουμε το εμβαδόν του τετραγώνου $\Lambda\Theta HE$ θα έχουμε $E_{A\Delta\Theta K} + E_{\Lambda\Theta HE} = E_{\Gamma BZE}$. Αν την παραπάνω σχέση την εκφράσουμε με την βοήθεια των τύπων των εμβαδών του ορθογωνίου και του τετραγώνου θα έχουμε ότι $A\Delta \cdot AK + \Gamma\Delta^2 = \Gamma B^2$ (1) αν τα άνισα μήκη $A\Delta$ και ΔB είναι ίσα με α, β αντίστοιχα τότε $A\Delta = \alpha, AK = \Gamma\Lambda = \Delta\Theta = \Delta B = \beta, \Gamma\Delta + \Delta B = \Gamma B = \frac{\alpha+\beta}{2}$ δηλαδή $2\Gamma\Delta + 2\beta = \alpha + \beta$ άρα τελικά

$$\Gamma\Delta = \frac{\alpha - \beta}{2} \; \kappa\alpha\iota \; \Gamma B = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

η παραπάνω σχέση (1) γίνεται

$$\alpha\beta + (\frac{\alpha - \beta}{2})^2 = (\frac{\alpha + \beta}{2})^2 \text{ ή } (\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2 = 4\alpha\beta$$

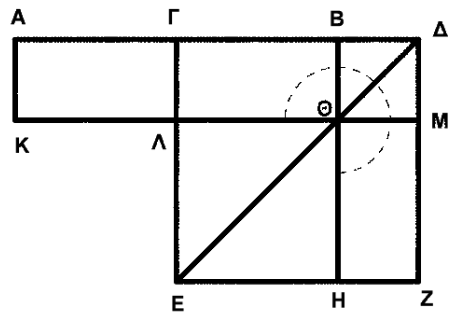
η οποία αποτελεί μια πολύ χρήσιμη ιδιότητα στις αλγεβρικές πράξεις. Επίσης αν στην παραπάνω σχέση θέσουμε με

$$\alpha + \beta = A \; \kappa\alpha\iota \; \alpha - \beta = B \; \tau\acute{o}\tau\varepsilon \; \alpha = \frac{A + B}{2} \; \kappa\alpha\iota \; \beta = \frac{A - B}{2}$$

οπότε η παραπάνω σχέση γίνεται

$$A^2 - B^2 = (A + B)(A - B).$$

Παρόμοια είναι και η επόμενη πρόταση 6^{η} βιβλίο ΙΙ. Σύμφωνα με την πρόταση αυτή αν ευθεία γραμμή τμηθεί στο μέσο και προστεθεί στην προέκτασή της τμήμα τότε το ορθογώνιο που σχηματίζεται από όλη την ευθεία και το προστεθέν τμήμα μαζί με το τετράγωνο της μισής ευθείας ισούται με το τετράγωνο που έχει πλευρά το μισό της ευθείας μαζί με το προστεθέν τμήμα.



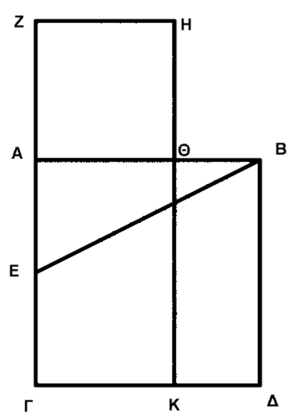
Έστω ευθεία AB το μέσο Γ και στην προέκταση παίρνουμε τμήμα $B\Delta$ τότε το ορθογώνιο με πλευρές $A\Delta$ και $B\Delta$ μαζί με το τετράγωνο της $B\Gamma$ ισούται με το τετράγωνο της $\Gamma\Delta$. Αν μεταφράσουμε και εδώ την παραπάνω πρόταση με χρήση τύπων εμβαδού θα έχουμε ότι:

$$A\Delta \cdot B\Delta + A\Gamma^2 = \Gamma\Delta^2.$$

Πρόταση 11^{η} (βιβλίο ΙΙ) (Χρυσή τομή)

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τεμεῖν ὥστε τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ ἑτέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.

Να τμηθεί δοθείσα ευθεία, έτσι ώστε το ορθογώνιο που περιέχεται απ’ όλη την ευθεία και από ένα από τα τμήματα στα οποία χωρίζεται να είναι ίσο με το τετράγωνο που σχηματίζεται από το άλλο τμήμα.



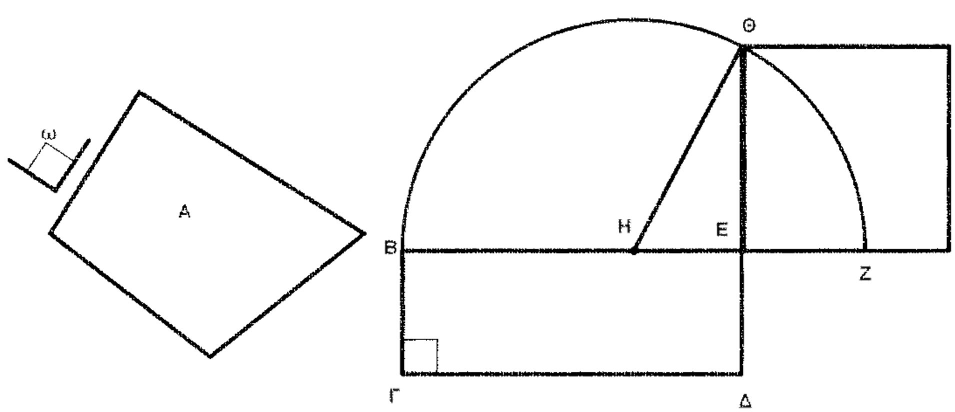
Έστω τμήμα AB θέλουμε να το χωρίσουμε, έτσι ώστε το ορθογώνιο που θα σχηματιστεί από το AB και από ένα τμήμα του να είναι ίσο με το τετράγωνο του άλλου. Κατασκευάζουμε το τετράγωνο $AB\Delta\Gamma$ με πλευρά το AB και θεωρούμε το μέσο E της $A\Gamma$, φέρνουμε το τμήμα EB και προεκτείνουμε το τμήμα $A\Gamma$ κατά τμήμα AZ έτσι ώστε $EZ = EB$. Στη συνέχεια κατασκευάζουμε το τετράγωνο $AZH\Theta$ με πλευρά AZ και προεκτείνουμε την πλευρά $H\Theta$ μέχρι να τμήσει την $\Gamma\Delta$ στο σημείο K. Τα τμήματα που ζητάμε είναι τα $A\Theta$, ΘB γιατί, Η πλευρά $A\Gamma$ έχει χωριστεί στη μέση από το σημείο Γ και έχει προστεθεί τμήμα AZ άρα σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση το ορθογώνιο με πλευρές $AZ\ και\ \Gamma Z$ μαζί με το τετράγωνο της AE θα ισούται με το τετράγωνο της $EZ = EB$. Από πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο AEB έχουμε ότι το τετράγωνο της EB ισούται με το τετράγωνο της AE και AB. Άρα το ορθογώνιο των $AZ\ (= ZH)$, ΓZ μαζί με το τετράγωνο της AE ισούται με τα τετράγωνα με πλευρές AB, AE $(ZH \cdot \Gamma Z + AE^2 = AB^2 + AE^2)$. Αν αφαιρέσουμε το τετράγωνο της AE από την παραπάνω ισότητα τότε προκύπτει ότι το ορθογώνιο $Z\Gamma KH$ ισούται με το τετράγωνο $AB\Delta\Gamma$, αν αφαιρεθεί το κοινό ορθογώνιο $A\Theta K\Gamma$ τότε προκύπτει ότι το τετράγωνο $ZH\Theta A$ ισούται με το ορθογώνιο $\Theta B\Delta K$. Άρα το ορθογώνιο που έχει ως πλευρές το $AB\ (= \Delta B)$ και το ΘB ισούται με το τετράγωνο με πλευρά την $A\Theta$. Η σχέση που μας δίνει η προηγούμενη πρόταση είναι $AB \cdot \Theta B = A\Theta^2$. Αν θέσουμε $AB = \alpha$ και $A\Theta = x$ τότε η $\Theta B = \alpha - x$ τότε η προηγούμενη σχέση παίρνει την μορφή $\alpha(\alpha - x) = x^2$ δηλαδή αν υποθέσουμε ότι γνωρίζουμε το μήκος του τμήματος AB και θέλουμε να βρούμε το μήκος των $A\Theta$ και ΘB πρέπει να λυθεί η παραπάνω δευτεροβάθμια εξίσωση.

Στο σημείο αυτό έχουμε στην διάθεσή μας όλα τα απαραίτητα εργαλεία για να προχωρήσουμε στον τετραγωνισμό της επιφάνεια ενός τετράπλευρου.

Πρόταση 14η (βιβλίο ΙΙ)

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον τετράγωνον συστήσασθαι.

Να κατασκευαστεί τετράγωνο ίσο προς δοθέν ευθύγραμμο (τετράπλευρο)



Αρχικά δίνεται ένα τετράπλευρο A το οποίο με την βοήθεια της Πρότασης 45 βιβλίο Ι και υπό ορθή γωνία, θα το μετατρέψουμε στο ορθογώνιο $B\Gamma\Delta E$ αν τώρα οι πλευρές $B\Gamma$ και BE είναι ίσες η κατασκευή έχει ολοκληρωθεί μια και το ορθογώνιο που κατασκευάστηκε είναι τετράγωνο. Έστω όπως συμβαίνει και στο παραπάνω σχήμα η μία πλευρά (εδώ η BE) είναι μεγαλύτερη της άλλης θα προεκτείνουμε την μεγαλύτερη πλευρά κατά τμήμα ίσο με την άλλη πλευρά του ορθογωνίου. Στο σχήμα που ακολουθεί έχουμε προεκτείνει την ΒΕ κατά $EZ = B\Gamma$. Ας είναι H το μέσο της BZ. Τότε το τμήμα BZ έχει χωριστεί σε ίσα μέρη από το H και σε άνισα από το E άρα σύμφωνα με την Πρόταση 5 βιβλίο II ισχύει ότι το ορθογώνιο $B\Gamma\Delta E$ (που σχηματίζεται από τα άνισα μέρη) μαζί με το τετράγωνο με πλευρά HE θα είναι ίσο με το τετράγωνο με πλευρά την BH. Αλλά $BH = H\Theta$ οπότε με βάση το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΗΘΕ το τετράγωνο με πλευρά την $H\Theta$ θα είναι ίσο με τα άθροισμα των τετραγώνων με πλευρά την HE και $E\Theta$. Άρα το ορθογώνιο $B\Gamma\Delta E$ θα είναι ίσο με το τετράγωνο με πλευρά τη ΘE.

Εδώ ολοκληρώνεται η απόδειξη του Ευκλείδη. Αν χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις που προκύπτουν από την Πρόταση 5 βιβλίο II, το Πυθαγόρειο θεώρημα και με βάση τους γνωστούς τύπους για το εμβαδόν ορθογωνίου και τετραγώνου θα έχουμε ότι $B\Gamma \cdot BE + HE^2 = BH^2$ και $\Theta E^2 + HE^2 = H\Theta^2$ αλλά $BH = H\Theta$ άρα $B\Gamma \cdot BE + \cancel{HE^2} = \Theta E^2 + \cancel{HE^2}$. Δηλαδή το εμβαδόν του ορθογωνίου ισούται με το εμβαδόν τετραγώνου με πλευρά την ΘE οπότε τελικά η επιφάνεια του τετράπλευρου A έγινε ίση με την επιφάνεια του τετραγώνου με πλευρά την ΘE.

Βλέπουμε λοιπόν ότι οι αρχαίοι Έλληνες κατάφεραν να ξεφύγουν από τις ασάφειες και λάθη που υπήρχαν στους υπολογισμούς των εμβαδών και ταυτόχρονα να δημιουργήσουν μια καινούργια θεωρητική βάση για την παραπέρα ανάπτυξη των Μαθηματικών. Είδαμε ότι ο Ευκλείδης, δεν χρησιμοποίησε τύπους για να εκφράσει το εμβαδόν της επιφάνειας που καταλαμβάνει ένα σχήμα, παρόλο που ήταν γνωστοί. Ο λόγος είναι ότι έχει ήδη ανακαλυφθεί η ασυμμετρία, άρα δεν ήθελε να εμφανίσει τα μεγέθη αυτά στους υπολογισμούς του. Προτίμησε την ακρίβεια που του έδωσαν οι γεωμετρικοί μετασχηματισμοί των επιφανειών. Για τον ίδιο λόγο και στην απόδειξη του πυθαγορείου θεωρήματος δεν χρησιμοποιεί την σύντομη απόδειξη με τους λόγους που υπάρχει στα σύγχρονα σχολικά βιβλία. Με το θέμα της ασυμμετρίας θα ασχοληθούμε περισσότερο στην συνέχεια. Αυτό που απέφυγε ο Ευκλείδης έγινε στην συνέχεια από άλλους Μαθηματικούς. Ας δούμε συνοπτικά την εξέλιξη των τύπων που αφορούν το εμβαδόν ευθυγράμμων σχημάτων ξεκινώντας από τον πολύ γνωστό τύπο του Ήρωνα για το εμβαδό του τριγώνου.

2.3 Ο τύπος του Ήρωνα

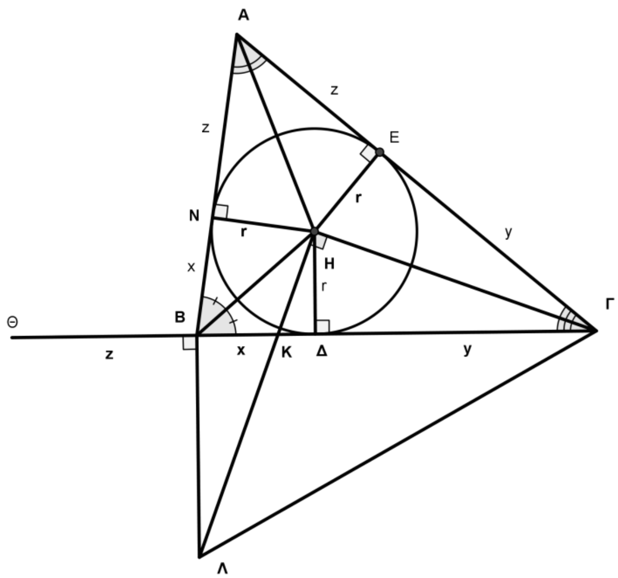
Ένας αξιόλογος Μαθηματικός της αρχαιότητας (~100 μ.Χ.) ήταν και ο Ήρων ο Αλεξανδρεύς. Δεν υπάρχουν πληροφορίες σχετικές για την ζωή του αλλά έχουν σωθεί πολλά αξιόλογα έργα που αφορούν τα Μαθηματικά, την Φυσική και την *Μηχανική*. Ένα σημαντικό έργο του είναι και τα *Μετρικά* εκεί συναντάμε διαφόρους τύπους για το εμβαδόν επίπεδων σχημάτων αλλά και όγκους στερεών αντικειμένων. Ένας από τους τύπους για το εμβαδόν είναι αυτός που μας δίνει το εμβαδόν τριγώνου από τα μήκη των πλευρών του, απαλλάσοντάς μας από την ανάγκη να βρούμε κάποιο ύψος του. Ο τύπος αυτός βρήκε πολλές πρακτικές εφαρμογές. Το βιβλίο αυτό του Ήρωνα βρέθηκε το 1896 σε βυζαντινό χειρόγραφο του 1100. Αρχικά ο τύπος αυτός αποδόθηκε από τον Cantor στον Ήρωνα. Ο Γερμανός Μαθηματικός C. Schoy (1877 -1925) μελέτησε το έργο των Αράβων Μαθηματικών και πιο συγκεκριμένα του Al Biruni, τα αποτελέσματα της έρευνας αυτής περιέχονται στο βιβλίο του με πρωτότυπο τίτλο *Die trigonometrischen Lehren des Persischen astronomen Al Biruni.* Στο βιβλίο αυτό αναφέρεται ότι ο Al Biruni αποδίδει τον τύπο στον Αρχιμήδη. Ο τύπος αυτός βρισκόταν με απόδειξη σε χαμένο σήμερα έργο του μεγάλου Συρακούσιου Μαθηματικού. Το κείμενο και η απόδειξη που ακολουθεί είναι από τα *Μετρικά* του Ήρωνα.

«*Ἔστι δὲ καθολικὴ μέθοδος ὥστε τριῶν πλευρῶν δοθεισῶν οἱουδηποτοῦν τριγώνου τὸ ἐμβαδὸν εὑρεῖν χωρὶς καθέτου· οἷον ἔστωσαν αἱ τοῦ τριγώνου πλευραὶ μονάδων ζ, η, θ. σύνθες τὰ ζ καὶ τὰ η καὶ τὰ θ· γίγνεται κδ. τούτων λαβὲ τὸ ἥμισυ· γίγνεται ιβ. ἄφελε τὰς ζ μονάδας· λοιπαὶ ε. πάλιν ἄφελε ἀπὸ τῶν ιβ τὰς η· λοιπαὶ δ. καὶ ἔτι τὰς θ· λοιπαὶ γ. ποίησον τὰ ιβ ἐπὶ τὰ ε· γίγνονται ξ. ταῦτα ἐπὶ τὸν δ· γίγνονται σμ· ταῦτα ἐπὶ τὸν γ· γίγνεται ψκ· τούτων λαβὲ πλευρὰν καὶ ἔσται τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου. ἐπεὶ οὖν αἱ ψκ ῥητὴν τὴν πλευρὰν οὐκ ἔχουσι,*»

Στο κείμενο περιγράφεται η εύρεση του εμβαδού τριγώνου με πλευρές $7, 8, 9$ ως εξής: «πρόσθεσε $7 + 8 + 9 = 24$ και διαίρεσε διά 2 δηλαδή 12 και αφαίρεσε από το 12 καθεμία πλευρά $12 - 7 = 5$, $12 - 8 = 4$ και $12 - 9 = 3$. Πολλαπλασίασε $12 \cdot 5 = 60$ στην συνέχεια $60 \cdot 4 = 240$ και τέλος $240 \cdot 3 = 720$. Βρες την πλευρά (τετραγωνική ρίζα) και άρα έχεις βρει το εμβαδόν του τριγώνου. Εδώ επειδή το 720 δεν έχει ρητή πλευρά θα προσεγγίσουνε την τιμή με έλλειψη ο 729 με πλευρά 27 είναι το πιο κοντινό τέλειο τετράγωνο μερίζουμε το 729 με το 27 και έχουμε πηλίκο $26\frac{2}{3}$ βρίσκουμε το ημιάθροισμα του 27 και $26\frac{2}{3}$ που μας δίνει $26\frac{5}{6}$ το τετράγωνό του είναι $720\frac{1}{36}$ τιμή που διαφέρει από αυτήν που θέλαμε κατά $\frac{1}{36}$ αν μας ικανοποιεί η ακρίβεια αυτή σταματάμε και ως εμβαδόν έχουμε το $26\frac{5}{6}$. Αν θέλουμε καλύτερη προσέγγιση, συνεχίζουμε την παραπάνω διαδικασία με το $720\frac{1}{36}$».

Στο παραπάνω κείμενο περιγράφεται ο τύπος $E = \sqrt{\tau(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)}$ για το εμβαδόν τριγώνου. Όπου α, β, γ είναι τα μήκη των πλευρών του τριγώνου και τ η ημιπερίμετρός του. Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη που δίνει ο Ήρων για τον παραπάνω τύπο, ας σημειώσουμε τον αξιόλογο τύπο για τη βελτίωση της προσέγγισης της τετραγωνικής ρίζας αριθμού που χρησιμοποιεί ο Ήρων στους προηγούμενους υπολογισμούς. Αν υποθέσουμε ότι $\sqrt{\kappa} \cong \alpha$, τότε μια καλύτερη προσέγγιση για το $\sqrt{\kappa}$ προκύπτει από τον τύπο: $\frac{1}{2}(\alpha + \frac{\kappa}{\alpha})$. Στην συνέχεια θα δούμε την απόδειξη του τύπου που μας δίνει ο Ήρωνας.

Στο τρίγωνο $ΑΒΓ$ φέρνουμε τις διχοτόμους $ΑΗ, ΒΗ, ΓΗ$ και από το έκκεντρο $Η$ φέρνουμε τις καθέτους $ΗΕ, ΗΝ, ΗΔ$ στις πλευρές του τριγώνου, όπως γνωρίζουμε ο κύκλος με κέντρο $Η$ και ακτίνα $ΗΕ$ είναι ο εγγεγραμμένος στο τρίγωνο $ΑΒΓ$.



Επίσης γνωρίζουμε ότι τα τμήματα $ΑΝ, ΑΕ$ είναι ίσα (στο σχήμα τα συμβολίζουμε με z) όπως επίσης $ΒΝ = ΒΔ = x\ και\ ΓΕ = ΓΔ = y$. Επίσης ισχύει $2x + 2y + 2z = 2τ\ άρα\ \ x = τ - (x + y)$ ή $x = τ - α\,, y = τ - β\ και\ z = τ - γ$. Αν φέρουμε τις καθέτους στην $ΓΗ$ (στο $Η$) και στην $ΒΓ$ (στο $Γ$) και θεωρήσουμε το σημείο τομής τους $Λ$ έχουμε ότι $ΓΗΒΛ$ είναι εγγράψιμο τετράπλευρο άρα $\angle ΒΛΓ + \angle ΒΗΓ = 180^o$ και $\angle ΝΗΑ + \angle ΒΗΓ = 180o$ $(\angle ΝΗΑ = 90^0 - Α/2, \angle ΒΗΓ = 90^0\ + Α/2)$ $άρα\ \angle ΝΗΑ = \angle ΒΛΓ$. Άρα τα τρίγωνα $ΑΝΗ$ και $ΒΛΓ$ είναι όμοια όπως και $ΒΚΛ$ με $ΗΚΔ$. Έτσι

$$\frac{ΒΓ}{ΒΛ} = \frac{ΑΝ}{r} = \frac{ΒΘ}{r} \text{ ή } \frac{ΒΓ}{ΒΘ} = \frac{ΒΛ}{r} = \frac{ΒΛ}{ΗΔ} = \frac{ΒΚ}{ΚΔ}.$$

Οπότε

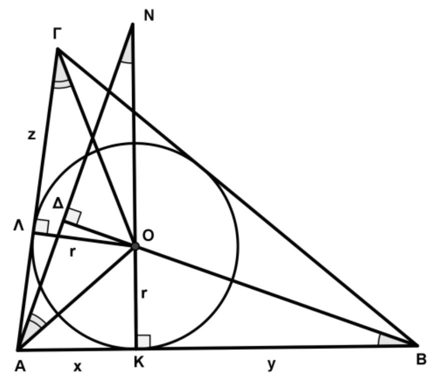
$$\frac{ΒΓ}{ΒΘ} + 1 = \frac{ΒΚ}{ΚΔ} + 1 \text{ ή } \frac{ΓΘ}{ΒΘ} = \frac{ΒΔ}{ΚΔ}$$

τελικά $Γθ \cdot ΚΔ = ΒΘ \cdot ΒΔ$. Το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΒΓ$ ισούται με το άθροισμα των εμβαδών των τριγώνων $ΑΗΒ, ΒΗΓ, ΓΗΑ$ οπότε $Ε_{ΑΒΓ} = τr$ αλλά $ΓΘ = x + y + z = τ$ και $ΗΔ = r$ και από το ορθογώνιο τρίγωνο $ΗΚΔ$: $ΗΔ^2 = ΚΔ \cdot ΔΓ$ άρα

$$Ε_{ΑΒΓ} = ΓΘ \cdot ΗΔ \Longrightarrow Ε^2{}_{ΑΒΓ} = ΓΘ^2 \cdot ΗΔ^2 = ΓΘ^2 \cdot ΚΔ \cdot ΓΔ = ΓΘ \cdot (ΓΘ \cdot ΚΔ) \cdot ΓΔ$$
$$= ΓΘ \cdot ΒΘ \cdot ΒΔ \cdot ΓΔ = τzxy = τ(τ - γ)(τ - α)(τ - β).$$

Είναι ενδιαφέρον για τον τύπο του Ήρωνα να ανατρέξουμε και σε άλλες αποδείξεις. Να δούμε πώς έχει αλλάξει και ο τρόπος που μπορούμε να τον αποδείξουμε χρησιμοποιώντας Μαθηματικά εργαλεία που έχουν ανακαλυφθεί σε μεταγενέστερες εποχές. Πρίν όμως ας δούμε στην συνέχεια μια απόδειξη που έδωσε ο Euler και γράφτηκε το 1748 σε μια γενικότερη εργασία με τον τίτλο *Variae demonstrations geometriae*. Στην εργασία αυτή όπως μας λέει και ο ίδιος προσπαθεί να εργαστεί με τον τρόπο των αρχαίων Ελλήνων. Στην συνέχεια θα δούμε την απόδειξη αυτή πού περιέχεται στο βιβλίο του C. E. Sandifer *The Early Mathematics of Leonhard Euler*.

Στο παρακάτω σχήμα στο τρίγωνο $ΑΒΓ$ έχουμε φέρει τις διχοτόμους $ΓΟ, ΑΟ, ΒΟ$ και τα κάθετα τμήματα $ΟΛ$ και $ΟΚ$ από το έκκεντρο $Ο$ προς τις πλευρές $ΑΓ, ΑΒ$ του τριγώνου.



Στην συνέχεια φέρνουμε το τμήμα $ΑΔ \perp ΒΟ$ και προεκτείνουμε μέχρι να τμήσει την προέκταση της $ΟΚ$ στο $Ν$. Οι γωνίες $ΑΝΟ$ και $ΔΒΑ$ είναι ίσες (έχουν τις πλευρές τους κάθετες) όπως και οι γωνίες $ΑΓΟ$, $ΟΑΝ$ ($\angle ΟΑΝ = 90^o - \angle ΔΟΑ = 90^o - \angle Α/2 - \angle Β/2 = \angle Γ/2 = \angle ΑΓΟ$).

Τα τρίγωνα $ΓΟΛ$ και $ΔΟΑ$ είναι όμοια όπως και τα $ΑΔΒ$ και $ΔΟΝ$ άρα

$$\frac{\mathrm{ΑΔ}}{\mathrm{ΔΟ}} = \frac{\mathrm{ΓΛ}}{\mathrm{ΛΟ}} = \frac{\mathrm{z}}{\mathrm{r}}\ (1)$$

και

$$\frac{\mathrm{ΑΔ}}{\mathrm{ΑΒ}} = \frac{\mathrm{ΟΔ}}{\mathrm{ΟΝ}} \Longrightarrow \frac{\mathrm{ΑΔ}}{\mathrm{ΟΔ}} = \frac{\mathrm{ΑΒ}}{\mathrm{ΟΝ}} =^{(1)} \frac{\mathrm{z}}{\mathrm{r}} \Longrightarrow \frac{\mathrm{x+y}}{\mathrm{NK-r}} = \frac{\mathrm{z}}{\mathrm{r}} \Longrightarrow$$

$$zNK = r(x + y + z) = \tau r\ (2).$$

Επίσης τα τρίγωνα $ΑΝΚ$ και $ΟΚΒ$ είναι όμοια άρα:

$$\frac{\mathrm{NK}}{\mathrm{AK}} = \frac{\mathrm{BK}}{\mathrm{OK}} \Longrightarrow \frac{\mathrm{NK}}{\mathrm{x}} = \frac{\mathrm{y}}{\mathrm{r}} \Longrightarrow \mathrm{NK} = \frac{\mathrm{xy}}{\mathrm{r}}\ (3).$$

Οπότε αν εκφράσουμε το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΒΓ$ όπως και πριν

$$E_{ΑΒΓ} = \mathrm{\tau r} = \sqrt{(\mathrm{\tau r})^2} = \sqrt{\mathrm{\tau r \tau r}} =^{(2)} \sqrt{\mathrm{zNK\tau r}} =^{(3)} \sqrt{\mathrm{z}\frac{\mathrm{xy}}{\mathrm{r}}\mathrm{\tau r}}$$

δηλαδή έχουμε τελικά ότι $E_{ΑΒΓ} = \sqrt{\mathrm{\tau xyz}}$ και αν θέσουμε όπως πριν

$$x = \tau - \alpha\ , y = \tau - \beta, z = \tau - \gamma$$

θα έχουμε τον ζητούμενο τύπο

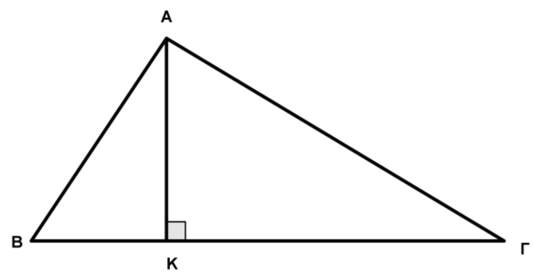
$$E_{ΑΒΓ} = \sqrt{\tau(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)}.$$

Μια σύγχρονη κλασική απόδειξη, για τον τύπο του Ήρωνα, είναι αυτή που έδωσε ο H. Coxeter το 1980 στο βιβλίο του *Introduction to Geometry*. Στην απόδειξη αυτή χρησιμοποιείται ο γνωστός νόμος συνημιτόνων από την τριγωνομετρία.

Έστω τρίγωνο $ΑΒΓ$ με πλευρές α, β, γ από το νόμο των συνημιτόνων για το τρίγωνο ισχύει

$$\sigma\upsilon\nu Γ = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}{2\alpha\beta}$$

επίσης



$$\eta\mu Γ = \sqrt{1 - \sigma\upsilon\nu^2 Γ} = \frac{\sqrt{4\alpha^2\beta^2 - (\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)^2}}{2\alpha\beta}$$

Το ύψος $ΑΚ$ του τριγώνου με βάση α έχει μήκος $\beta\eta\mu Γ$, και έτσι έχουμε:

$$E = \frac{1}{2}(\beta\acute{\alpha}\sigma\eta)(\acute{\upsilon}\psi o\varsigma) = \frac{1}{2}\alpha\beta\eta\mu Γ =$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{4\alpha^2\beta^2 - (\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)^2} =$$

$$= \sqrt{\tau(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)}.$$

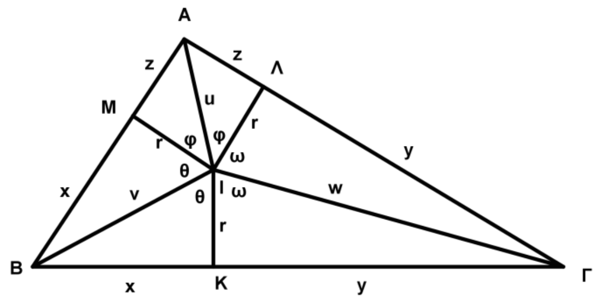
Στη παραπάνω απόδειξη στο νόμο συνημιτόνων έχει «απορροφηθεί» το πυθαγόρειο θεώρημα με την βοήθεια του οποίου υπολογίζονται τα ύψη ενός τριγώνου από τις πλευρές του.

Ο τύπος του Ήρωνα αποδείχθηκε και από τον M. Edwards το 2007. Στην απόδειξη αυτή χρησιμοποιούνται σύγχρονα εργαλεία από την θεωρία μιγαδικών αριθμών. Επίσης χρησιμοποιείται ο πολύ γνωστός τύπος του Euler.

$$e^{i\varphi} = \sigma\upsilon\nu\varphi + i\eta\mu\varphi$$

δημοσιεύθηκε από τον M. Edwards στο Mathematical Association of America Monthly το Δεκέμβρη του 2007.

Στο παρακάτω τρίγωνο έστω I το έκκεντρο όπως και στις προηγούμενες αποδείξεις $x = \tau - \alpha$, $y = \tau - \beta, z = \tau - \gamma$ και για τις γωνίες φ, θ, ω ισχύει $2\varphi + 2\theta + 2\omega = 360^o$ άρα $\varphi + \theta + \omega = 180^o$.



Επίσης

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{r}{u}, \eta\mu\varphi = \frac{z}{u},$$

άρα $r = u\sigma\upsilon\nu\varphi$ και $u = u\eta\mu\varphi$ οπότε

$$r + iz = u(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta) = ue^{i\varphi},$$

όμοια έχουμε

$$r + iy = we^{i\omega} \; \kappa\alpha\iota \;\; r + ix = ve^{i\theta}$$

άρα για το παρακάτω γινόμενο έχουμε:

$(r + iz)(r + iy)(r + ix) = \ (ue^{i\varphi})(\ we^{i\omega})\ (ve^{i\theta}) = \ uwv\ e^{i\varphi+i\omega+i\theta} =$
$uwv\ e^{i(\varphi+\omega+\theta)} = uwv\ e^{i\pi} = \ -uwv$ άρα για το γινόμενο $(r + iz)(r + iy)(r + ix)$ έχουμε ότι

$$im[(r + iz)(r + iy)(r + ix)] = 0 \;\; => \;\; r^2(x + y + z) - xyz = o$$

δηλαδή

$$r = \sqrt{\frac{\mathrm{xyz}}{\mathrm{x+y+z}}} = \sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau}}$$

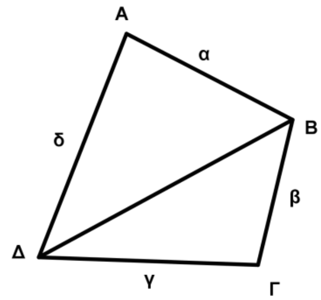
από τον τύπο του εμβαδού τριγώνου $E = \tau r$ έχουμε τον ζητούμενο τύπο.

2.4 Εμβαδόν τετραπλεύρου

Τύπος για το εμβαδόν τετραπλεύρου πρωτοεμφανίστηκε στο έργο του Ινδού Μαθηματικού Brahmagupta (~600 μ.Χ.) και θα μπορούσαμε να πούμε ότι αποτελεί γενίκευση στον τύπο του Ήρωνα. Ο τύπος αυτός αφορά μόνο εγγράψιμα τετράπλευρα. Αν τα μήκη των πλευρών του είναι $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ έχει την μορφή

$$E = \sqrt{(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)(\tau - \delta)}$$

όπου τ είναι η ημιπερίμετρος του τετραπλεύρου. Στο έργο του ο Brahmagupta δε δίνει απόδειξη του τύπου αυτού και δεν αναφέρει ρητά ότι αφορά εγγράψιμα τετράπλευρα. Το έργο του, όπως και άλλων Ινδών Μαθηματικών, είναι στηριγμένο σε αρχαιότερες αυθεντίες και παρόλο που περιέχει και πρωτότυπες δημιουργίες όπως ο παραπάνω τύπος συντηρεί λάθη από τα προελληνικά Μαθηματικά όπως π.χ. ήταν ο τύπος για το εμβαδόν τετραπλεύρου από τους αρχαίους Αιγυπτίους.
Ας δούμε στη συνέχεια σύγχρονες αποδείξεις για τον παραπάνω τύπο.



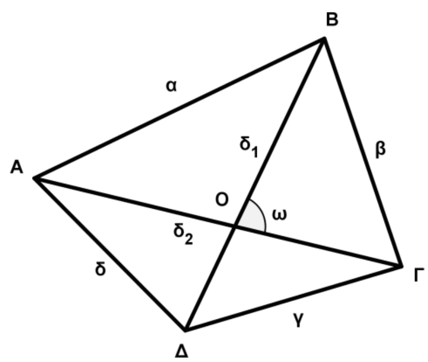
Ας ξεκινήσουμε με το εμβαδόν για ένα τυχαίο τετράπλευρο και ας το τριγωνοποιήσουμε φέρνοντας μια διαγώνιό του έστω τη $ΒΔ$ τότε έχουμε

$$2E_{ΑΒΓΔ} = 2E_{ΑΔΒ} + 2E_{ΔΒΓ} = αδημΑ + βγημΓ$$

δηλαδή τελικά θα έχουμε

$$E_{ΑΒΓΔ} = \frac{1}{2}(αδημΑ + βγημΓ)(1).$$

Αν φέρουμε και τις δύο διαγωνίους $ΑΓ, ΒΔ$ τότε το τετράπλευρο χωρίζεται σε τέσσερα τρίγωνα όπως βλέπουμε στο παρακάτω σχήμα οπότε



$$2E_{ΑΒΓΔ} = 2E_{ΑΟΒ} + 2E_{ΒΟΓ} + 2E_{ΔΟΓ} + 2E_{ΑΟΔ} =$$
$$= ΑΟ \cdot ΒΟ \cdot ημ(180^{O} - ω) + ΒΟ \cdot ΓΟ \cdot ημω + ΓΟ \cdot ΔΟ \cdot ημ(180^{0} - ω) + ΔΟ \cdot ΑΟ \cdot ημω = [ΑΟ(ΒΟ + ΔΟ) + ΓΟ(ΒΟ + ΔΟ)]ημω = ΒΔ \cdot ΑΓ \cdot ημω$$

δηλαδή τελικά έχουμε

$$E_{ΑΒΓΔ} = \frac{1}{2}δ_1δ_2ημω \ (2).$$

Με τη βοήθεια των παραπάνω τύπων αλλά και άλλων γνωστών τύπων και εργαλείων μπορούμε να προχωρήσουμε στην απόδειξη του τύπου του Brahmagupta. Ας θεωρήσουμε ένα εγγράψιμμο τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ και ας φέρουμε την διαγώνιο $ΒΔ$ σύμφωνα με τον προηγούμενο τύπο (1) για το εμβαδόν του τετραπλεύρου έχουμε $E_{ΑΒΓΔ} = \frac{1}{2}(αδημΑ + βγημΓ)$ επειδή οι γωνίες $Α, Γ$ είναι παραπληρωματικές $ημΑ = ημΓ$ άρα θα έχουμε

$$E^2{}_{ΑΒΓΔ} = \frac{1}{4}(αδ+βγ)^2 ημ^2 Α = \frac{1}{4}(αδ+βγ)^2(1-συν^2 Α).$$

Αν εφαρμόσουμε το νόμο των συνημιτόνων σε καθένα από τα δύο τρίγωνα $ΑΔΒ$ και $ΑΔΓ$ θα έχουμε $ΒΔ^2 = α^2 + δ^2 - 2αδσυνΑ$ και $ΒΔ^2 = β^2 + γ^2 - 2βγσυνΓ$ επειδή οι γωνίες $Α, Γ$ είναι παραπληρωματικές θα ισχύει $συνΑ = -συνΓ$ άρα από τις προηγούμενες σχέσεις έχουμε

$$α^2 + δ^2 - β^2 - γ^2 = 2(αδ+βγ)συνΑ$$

$$1-συν^2 Α = 1 - \frac{(α^2+δ^2-β^2-γ^2)^2}{4(αδ+βγ)^2} = \frac{4(αδ+βγ)^2-(α^2+δ^2-β^2-γ^2)^2}{4(αδ+βγ)^2}$$

οπότε ο αρχικός τύπος του εμβαδού μας δίνει :

$$\begin{aligned}
E^2{}_{ΑΒΓΔ} &= \frac{1}{16}[4(αδ+βγ)^2-(α^2+δ^2-β^2-γ^2)^2] \\
&= \frac{1}{16}(2αδ+2βγ-α^2-δ^2+β^2+γ^2)(2αδ+2βγ+α^2+δ^2-β^2 \\
&\quad -γ^2) = \frac{1}{16}[(β+γ)^2-(α-δ)^2][(α+δ)^2-(β-γ)^2] = \\
&= \frac{1}{16}(β+γ-α+δ)(β+γ+α-δ)(α+δ-β+γ)(α+δ+β-γ) \\
&= \frac{1}{16}(2τ-2α)(2τ-2β)(2τ-2γ)(2τ-2δ) \\
&= (τ-α)(τ-β)(τ-γ)(τ-δ)
\end{aligned}$$

δηλαδή έχουμε το ζητούμενο τύπο.

Αν το τετράπλευρο δεν είναι εγγράψιμο δηλαδή είναι τυχαίο τότε μπορούμε να βρούμε το εμβαδόν από τον τύπο (1) υψώνοντας στο τετράγωνο ως εξής

$$4E^2{}_{ΑΒΓΔ} = α^2δ^2ημ^2Α + β^2γ^2ημ^2Γ + 2αδβγημΑημΓ.$$

Από το νόμο των Συνημιτόνων για την διαγώνιο $ΒΔ$ που έχουμε γράψει πριν (χωρίς να λάβουμε υπόψιν την σχέση των γωνιών $Α, Γ$) έχουμε

$$α^2 + δ^2 - 2αδσυνΑ = β^2 + γ^2 - 2βγσυνΓ \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{(α^2+δ^2-β^2-γ^2)^2}{4} = α^2δ^2συν^2Α + β^2γ^2συν^2Β - 2αδβγσυνΑσυνΒ.$$

Αν προσθέσουμε κατά μέλη την προηγούμενη σχέση με την σχέση του εμβαδού έχουμε ότι

$$4E^2{}_{ΑΒΓΔ} + \frac{(α^2+δ^2-β^2-γ^2)^2}{4} = α^2δ^2 + β^2γ^2 - 2αδβγσυν(Α+Γ) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 4E^2{}_{ΑΒΓΔ} + \frac{(α^2+δ^2-β^2-γ^2)^2}{4} = (αδ-βγ)^2 + 2αβγδ - 2αδβγσυν(Α+Γ) =$$

$$= (αδ-βγ)^2 + 2αβγδ[1-συν(Α+Γ)] = (αδ-βγ)^2 - 4αβγδσυν^2\left(\frac{Α+Γ}{2}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 16E^2{}_{ΑΒΓΔ} = 4(αδ-βγ)^2 - (α^2+δ^2-β^2-γ^2)^2 - 16αβγδσυν^2\left(\frac{Α+Γ}{2}\right).$$

Αν κάνουμε τις παραγοντοποιήσεις όπως πριν θα έχουμε τελικά

$$E^2{}_{ABΓΔ} = (\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)(\tau-\delta) - \alpha\beta\gamma\delta\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{A+Γ}{2}\right).$$

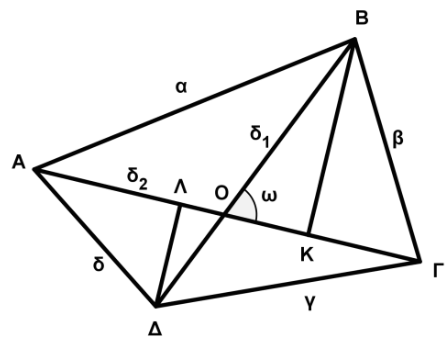
Ο τύπος αυτός είναι γνωστός ως τύπος του Bretschneider και εμφανίστηκε το 1842 από τον Γερμανό Μαθηματικό C. Bretschneider (1808 – 1878). Όπως εύκολα μπορούμε να δούμε αν εφαρμόσουμε τον παραπάνω τύπο για εγγράψιμο τετράπλευρο ($A + Γ = 180^o \implies \sigma\upsilon\nu(\frac{A+Γ}{2}) = 0$) έχουμε το τύπο του Brahmagupta.

Αν ξεκινήσουμε από το τύπο (2) για το εμβαδόν του τριγώνου έχουμε ότι

$$E_{ABΓΔ} = \frac{1}{2}\delta_1\delta_2\eta\mu\omega \quad (2)$$

$$4E^2{}_{ABΓΔ} = \delta_1^2\delta_2^2(1-\sigma\upsilon\nu^2\omega) = \delta_1^2\delta_2^2 - (\delta_1^2\delta_2^2\sigma\upsilon\nu\omega)^2.$$

Αλλά αν δούμε το παρακάτω τετράπλευρο στο οποίο έχουμε φέρει τις, προβολές $K\ Λ$ των κορυφών $B, Δ$ έχουμε ότι



$$ΔΓ^2 - ΔA^2 = ΓΛ^2 - AΛ^2 = (ΓΛ + AΛ)(ΓΛ - AΛ) = AΓ(ΓΛ - AΛ)$$

και

$$AB^2 - BΓ^2 = AK^2 - KΓ^2 = (AK + KΓ)(AK - KΓ) = AΓ(AK - KΓ)$$

αν προσθέσουμε κατά μέλη τις δύο προηγούμενες σχέσεις θα έχουμε

$$ΔΓ^2 + AB^2 - ΔA^2 - BΓ^2 = \mathrm{AΓ}((\mathrm{ΓΛ} - \mathrm{AΛ} + \mathrm{AK} - \mathrm{KΓ}) = \mathrm{AΓ}\cdot 2\mathrm{KΛ}$$

$$= 2\mathrm{AΓ}(\mathrm{OΛ} + \mathrm{OK}) =$$

$$= 2AΓ(OΔ\sigma\upsilon\nu\omega + OB\sigma\upsilon\nu\omega) = 2AΓ\cdot BΔ\cdot\sigma\upsilon\nu\omega$$

δηλαδή έχουμε ότι

$$\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2 - \delta^2 = 2\delta_1\delta_2\sigma\upsilon\nu\omega.$$

Αν επιστρέψουμε στον τύπο του εμβαδού και αντικαταστήσουμε έχουμε

$$4E^2{}_{ABΓΔ} = \delta_1^2\delta_2^2 - \frac{1}{4}(\alpha^2+\gamma^2-\beta^2-\delta^2)^2 \implies$$

$$E_{ABΓΔ} = \frac{1}{4}\sqrt{4\delta_1^2\delta_2^2 - (\alpha^2+\gamma^2-\beta^2-\delta^2)^2}.$$

Καταλήγουμε σε ένα τύπο για το εμβαδόν τετραπλεύρου χωρίς να χρησιμοποιήσουμε τριγωνομετρικούς αριθμούς κάποιας γωνίας.

Αν στην τελευταία σχέση χρησιμοποιήσουμε το γνωστό θεώρημα του Πτολεμαίου (~150 μ.Χ.) $\alpha\gamma + \beta\delta = \delta_1\delta_2$ θα έχουμε

$$E_{ΑΒΓΔ} = \frac{1}{4}\sqrt{4(\alpha\gamma + \beta\delta)^2 - (\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2 - \delta^2)^2}$$

σχέση που, όπως είδαμε και πριν, μας οδηγεί στον τύπο του Brahmagupta.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^{Ο} Η ΜΕΤΡΗΣΗ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ

3.1 Η μέτρηση του κύκλου στην αρχαία Ελλάδα

Ένα ακόμη σχήμα, που όπως είδαμε, προσέγγισαν το εμβαδόν του οι αρχαίοι Αιγύπτιοι είναι ο κύκλος. Ας δούμε πώς αντιμετώπισαν το πρόβλημα της μέτρησης του κύκλου στην αρχαία Ελλάδα. Μεγάλο μέρος της προσπάθειας αυτής αποδίδεται στους αρχαίους Μαθηματικούς Ιπποκράτη τον Χίο (470 - 410 π.Χ.) και τον Εύδοξο τον Κνίδιο (404 - 335 π.Χ.). Ο τελευταίος εισήγαγε την περίφημη μέθοδο της εξάντλησης. Βασικό εργαλείο για την προσέγγιση του εμβαδού του κύκλου είναι τα πολύγωνα που μπορούν να εγγραφούν ή να περιγραφούν σ΄ αυτόν. Όπως έχουμε δει μέχρι τώρα το εμβαδόν των πολυγώνων αυτών είναι ήδη μετρήσιμο. Στο βιβλίο IV των *Στοιχείων* ο Ευκλείδης ορίζει τις έννοιες της εγγραφής και περιγραφής σχημάτων σε άλλα σχήματα και στον κύκλο.

α΄ [1]. Σχῆμα εὐθύγραμμον εἰς σχῆμα εὐθύγραμμον ἐγγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη τῶν τοῦ ἐγγραφομένου σχήματος γωνιῶν ἑκάστης πλευρᾶς τοῦ, εἰς ὃ ἐγγράφεται, ἅπτηται.

β΄ [2].Σχῆμα δὲ ὁμοίως περὶ σχῆμα περιγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη πλευρὰ τοῦ περιγραφομένου ἑκάστης γωνίας τοῦ, περὶ ὃ περιγράφεται, ἅπτηται.

γ΄ [3]. Σχῆμα εὐθύγραμμον εἰς κύκλον ἐγγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη γωνία τοῦ ἐγγραφομένου ἅπτηται τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας.

δ΄ [4].Σχῆμα δὲ εὐθύγραμμον περὶ κύκλον περιγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη πλευρὰ τοῦ περιγραφομένου ἐφάπτηται τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας.

ε΄ [5]. Κύκλος δὲ εἰς σχῆμα ὁμοίως ἐγγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια ἑκάστης πλευρᾶς τοῦ, εἰς ὃ ἐγγράφεται, ἅπτηται.

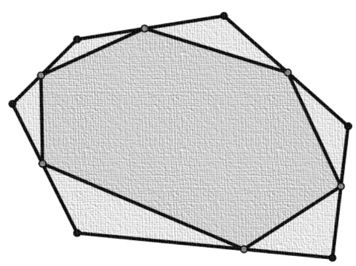
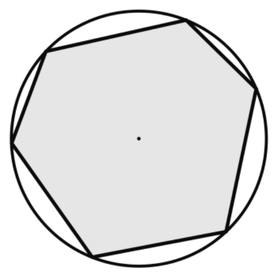
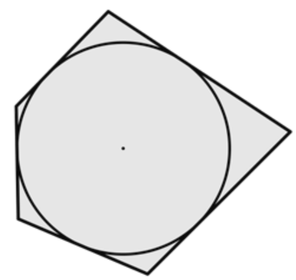
ς΄ [6]. Κύκλος δὲ περὶ σχῆμα περιγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια ἑκάστης γωνίας τοῦ, περὶ ὃ περιγράφεται, ἅπτηται.

ζ΄ [7]. Εὐθεῖα εἰς κύκλον ἐναρμόζεσθαι λέγεται, ὅταν τὰ πέρατα αὐτῆς ἐπὶ τῆς περιφερείας ᾖ τοῦ κύκλου.

1. Σχήμα ευθύγραμμο λέγεται ότι εγγράφεται σε ευθύγραμμο σχήμα, όταν κάθε γωνία (κορυφή) του εγγραφόμενου σχήματος ακουμπά κάθε πλευρά του σχήματος στο οποίο εγγράφεται.
2. Ομοίως λέμε ότι σχήμα περιγράφεται σε σχήμα όταν κάθε πλευρά του περιγραφόμενου ακουμπά κάθε γωνία (κορυφή) του σχήματος περί το οποίο περιγράφεται. Σχήμα ευθύγραμμο λέγεται ότι εγγράφεται σε κύκλο, όταν κάθε κορυφή του είναι σημείο της περιφέρειας του κύκλου

3. Σχήμα περιγράφεται σε κύκλο όταν κάθε πλευρά του εφάπτεται της περιφέρειας του κύκλου.
4. Ομοίως λέγεται ότι κύκλος εγγράφεται σε σχήμα, όταν η περιφέρεια του κύκλου εφάπτεται σε κάθε πλευρά του σχήματος στο οποίο εγγράφεται.
5. Κύκλος λέγεται ότι περιγράφεται σε σχήμα, όταν η περιφέρεια του κύκλου εφάπτεται σε κάθε γωνία του σχήματος στο οποίο περιγράφεται.
6. Ευθεία (τμήμα) εναρμονίζεται σε κύκλο, όταν τα άκρα της είναι στην περιφέρεια του κύκλου.

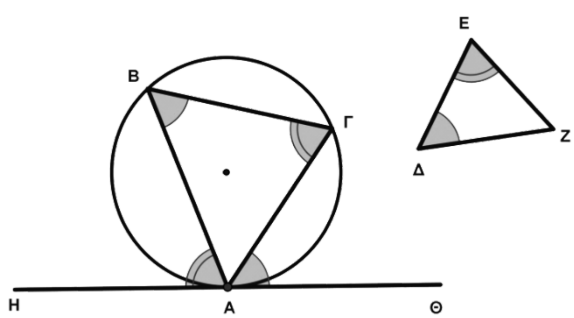
Στην συνέχεια βλέπουμε τα σχήματα που προκύπτουν από τους παραπάνω ορισμούς. Επίσης θα δούμε προτάσεις από το βιβλίο αυτό που μας περιγράφουν τον τρόπο εγγραφής και περιγραφής κανονικών πολυγώνων στον κύκλο.

Πρόταση 2η (βιβλίο IV)

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον ἐγγράψαι.

Σε δοθέντα κύκλο να εγγραφεί τρίγωνο ισογώνιο με δοθέν τρίγωνο.



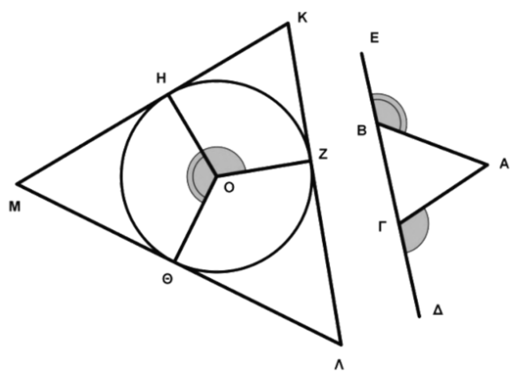
Όπως βλέπουμε και στο προηγούμενο σχήμα η κατασκευή μπορεί να γίνει ως εξής: σ΄ ένα σημείο A του κύκλου φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα $H\Theta$ και σχηματίζουμε τη γωνία $\Theta A\Gamma$ ίση με γωνία $E\Delta Z$, την γωνία HAB ίση με γωνία ΔEZ φέρνουμε και την χορδή $B\Gamma$. Τότε (από Πρόταση 32 βιβλίο III των *Στοιχείων*) οι γωνίες $\Theta A\Gamma$ και $AB\Gamma$ είναι ίσες όπως και οι γωνίες HAB με $A\Gamma B$. Άρα τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ έχουν τις δύο γωνίες τους ίσες, δηλαδή τα δύο τρίγωνα είναι ισογώνια και το $AB\Gamma$ είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο.

Πρόταση $3^η$ (βιβλίο IV)

Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον περιγράψαι.

Σε δοθέντα κύκλο να περιγραφεί τρίγωνο ισογώνιο προς δοθέν τρίγωνο.

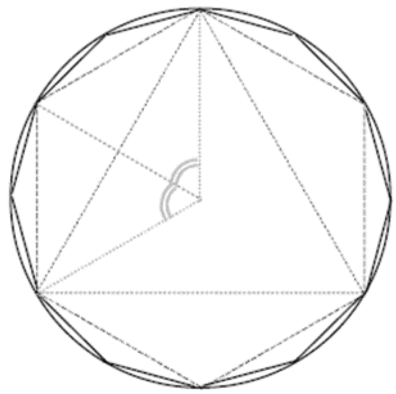
Στο παρακάτω σχήμα έχουμε το τρίγωνο $AB\Gamma$, τον κύκλο με κέντρο το O και ακτίνα OZ και θέλουμε να περιγράψουμε στον κύκλο ένα τρίγωνο ισογώνιο με το $AB\Gamma$.
Αρχικά προεκτείνουμε την πλευρά $B\Gamma$ κατά τμήματα BE και $\Gamma\Delta$ (τυχαία) στην συνέχεια κατασκευάζουμε εντός του κύκλου δύο επίκεντρες γωνίες ZOH και $HO\Theta$ ίσες αντίστοιχα με τις $A\Gamma\Delta$ και ABE. Στα σημεία H, Z, Θ φέρνουμε τις εφαπτόμενες του κύκλου οι οποίες σχηματίζουν το τρίγωνο $K\Lambda M$.



Αν παρατηρήσουμε το τετράπλευρο $KHOZ$ θα δούμε ότι οι γωνίες KHO και OZK είναι ορθές, επειδή το άθροισμα των γωνιών του τετράπλευρου είναι 4 ορθές το άθροισμα των γωνιών HKZ και HOZ θα είναι δύο ορθές όσο και των γωνιών $A\Gamma B$ και $A\Gamma\Delta$ και επειδή η $A\Gamma\Delta$ ίση με την HOZ θα είναι αναγκαστικά και οι γωνίες HKZ και $A\Gamma B$ ίσες. Τέλος, οι τρίτες γωνίες θα είναι αναγκαστικά και αυτές ίσες άρα κατασκευάστηκε το τρίγωνο $K\Lambda M$ περιεγραμμένο στο κύκλο και ισογώνιο με το $AB\Gamma$.
Όπως περιμένουμε η διαδικασία θα συνεχιστεί με την εγγραφή και περιγραφή πολυγώνων με όλο και μεγαλύτερο αριθμό πλευρών και μάλιστα τα πολύγωνα που θα εγγράφονται και θα περιγράφονται στο κύκλο θα είναι κανονικά πολύγωνα. Η εγγραφή και περιγραφή του ισοπλεύρου τριγώνου στον κύκλο γίνεται με τις προηγούμενες κατασκευές αρκεί το αρχικό τρίγωνο να είναι ισόπλευρο.
Το τετράγωνο εγγράφεται και περιγράφεται εύκολα, αν θεωρήσουμε δύο κάθετες διαμέτρους στον κύκλο και στην πρώτη περίπτωση ενώσουμε τα άκρα τους, ενώ στη δεύτερη περίπτωση φέρουμε τις εφαπτόμενες στα άκρα τους. Θεωρητικά όλα τα κανονικά πολύγωνα μπορούν να εγγραφούν στον κύκλο αν καταφέρουμε να τον χωρίσουμε σε τόσα ίσα μέρη όσες είναι και οι πλευρές του κανονικού πολυγώνου. Το κανονικό πεντάγωνο εγγράφεται και περιγράφεται σε κύκλο στις προτάσεις 11,12 του IV βιβλίου των *Στοιχείων* (αφού πρώτα κατασκευαστεί ισοσκελές τρίγωνο με ίσες γωνίες στη βάση διπλάσιες από αυτήν της κορυφής). Στην πρόταση 12 το κανονικό

πεντάγωνο περιγράφεται στον κύκλο. Στις προτάσεις 15 και 16 εγγράφεται σε κύκλο κανονικό εξάγωνο και κανονικό δεκαπεντάγωνο. Αργότερα όπως θα δούμε ο Αρχιμήδης έδειξε τον τρόπο εύρεσης κανονικών πολυγώνων με διπλάσιο αριθμό πλευρών από κάποιο πολύγωνο που ήδη έχουμε κατασκευάσει. Ο C. F. Gauss (1777-1855) σε ηλικία 19 ετών, απέδειξε ότι το κανονικό δεκαεπτάγωνο μπορεί να κατασκευαστεί με κανόνα και διαβήτη. Στη συνέχεια έλυσε το πρόβλημα στη γενική του μορφή του αποδεικνύοντας ότι ένα κανονικό πολύγωνο είναι κατασκευάσιμο με κανόνα και διαβήτη αν και μόνο αν το πλήθος των πλευρών του είναι της μορφής 2^{ν}, ή $2^{\nu}F_aF_b \dots F_n$, όπου $F_n = 2^{2^n} + 1, n = 0,1,2, \dots$ είναι πρώτοι αριθμοί και διαφορετικοί μεταξύ τους. Οι αριθμοί F_n είναι γνωστοί ως (πρώτοι) αριθμοί του Fermat. Ο P. Fermat (1601-1665) ισχυρίστηκε ότι όλοι αυτοί οι αριθμοί είναι πρώτοι. Πράγματι για $n = 0,1,2,3,4$ προκύπτουν οι αριθμοί, $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$, $F_4 = 65537$ που είναι όλοι πρώτοι. Όμως για $n = 5$ ο αριθμός που προκύπτει, ο $F_5 = 4294967297$, δεν είναι πρώτος αφού διαιρείται με το 641, όπως απέδειξε ο L. Euler το 1732. Η απόδειξη του C. Gauss (1777 – 1855) παρουσιάστηκε το 1801 στο βιβλίο του *Disquisitiones Arithmeticae.* Τελικά τα κανονικά πολύγωνα με πλήθος πλευρών λιγότερο ή ίσο το 20 που κατασκευάζονται με κανόνα και διαβήτη είναι αυτά με πλήθος πλευρών $3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20$. Από αυτά μόνο το δεκαεπτάγωνο δεν είχαν κατασκευάσει οι αρχαίοι Έλληνες. Ο Gauss αν και απέδειξε ότι το κανονικό δεκαεπτάγωνο μπορεί να κατασκευαστεί με κανόνα και διαβήτη, δεν έδωσε μέθοδο κατασκευής του. Ο πρώτος που έδωσε μία μέθοδο για την κατασκευή του ήταν ο J. Erchinger το 1825, 29 χρόνια μετά την απόδειξη του Gauss. Τα υπόλοιπα κανονικά πολύγωνα μπορούν να κατασκευαστούν με γενικότερες μεθόδους (τριχοτόμηση γωνίας, νεύση) μεθόδους που θα δούμε στην συνέχεια. Για το κανονικό επτάγωνο έχει διασωθεί η πραγματεία του Αρχιμήδη Περί του κανονικού επταγώνου από Αραβική μετάφραση. Η κατασκευή όμως εκεί γίνεται με νεύση.

Με την εγγραφή των κανονικών πολυγώνων άρχισε μια διαδικασία προσέγγισης της επιφάνειας του κύκλου. Ένας από τους πρώτους που ξεκίνησε την προσπάθεια αυτή ήταν ο Αντιφώντας και στη συνέχεια ο Βρύσωνα (γύρω στο 450 π.Χ.). Για τις μεθόδους του Αντιφώντα μας πληροφορούν ο Θεμίστιος (317 – 387) και ο Σιμπλίκιος (490 – 560) στα σχόλια που έγραψαν στα *Φυσικά* του Αριστοτέλη. Εκεί αναφέρουν ότι ο Αντιφώντας αρχικά ενέγραψε ισόπλευρο τρίγωνο στον κύκλο. Στη συνέχεια διχοτομώντας την αντίστοιχη επίκεντρη γωνία, ενέγραψε πολύγωνο με διπλάσιες ως προς το πλήθος πλευρές. Τη διαδικασία αυτή την επανέλαβε συνεχώς, εγγράφοντας κανονικά πολύγωνα περισσότερων πλευρών με μήκος πλευράς όλο και μικρότερο. Αυτό που θεώρησε ο Αντιφώντας, είναι ότι συνεχίζοντας την διαδικασία το μήκος των πλευρών του πολυγώνου θα γίνει τόσο μικρό που στο σύνολό τους οι πλευρές του θα συμπέσουν με την περιφέρεια του κύκλου. Αφού λοιπόν ο τετραγωνισμός του πολυγώνου ήταν γνωστός στον Αντιφώντα, θεώρησε ότι κατ' αυτόν τον τρόπο είναι δυνατόν να τετραγωνιστεί και ο κύκλος. Ουσιαστικά έχουμε από τον Αντιφώντα την σύλληψη της έννοιας του ορίου. Για τον Βρύσωνα αναφέρεται ότι έγραψε στον κύκλο δύο τετράγωνα ένα εγγεγραμμένο και ένα περιγγεγραμμένο σε αυτόν. Στην συνέχεια ισχυρίστηκε ότι, όταν μπορείς να βρεις ένα τετράγωνο μεγαλύτερο και ένα μικρότερο του κύκλου, μπορείς να βρεις και ένα ενδιάμεσο σε αυτά που να είναι ίσο με τον κύκλο. Ο τρόπος κατασκευής του ενδιάμεσου τετραγώνου του Βρύσωνα δεν αναφέρεται.



Πιθανό θεωρείται το τετράγωνο αυτό να ήταν ο αριθμητικός ή ο γεωμετρικός μέσος του εγγεγραμμένου και περιγεγραμμένου τετραγώνου στο κύκλο. Οι προσπάθειες αυτές συνάντησαν αντιδράσεις και θεωρήθηκαν «σοφιστικές» μια και ήταν μέθοδοι «κατά προσέγγιση» και όχι απόλυτα καθορισμένες, γιατί εμπεριείχαν την επ΄ άπειρον διαίρεση ενός ευθυγράμμου τμήματος. Η αρνητική κριτική του Αριστοτέλη αποδίδεται από τους σχολιαστές του στο ότι με την μέθοδο αυτή δεν θα υπολογιστεί ποτέ ολόκληρη η επιφάνεια του κυκλικού δίσκου, αφού σαν όλα τα μεγέθη έτσι και αυτή διαιρείται επ' άπειρον. Την παρατήρηση αυτή θεωρείται ότι πρώτος έκανε ο Εύδημος που υπήρξε μαθητής του Αριστοτέλη. Παρόλα αυτά είναι προφανές ότι οι Μαθηματικές ιδέες του Αντιφώντα και Βρύσωνα αποτέλεσαν αφετηρία για αυτό που στη συνέχεια θα αποτελέσει δόκιμη μέθοδο τετραγωνισμού και θα ονομαστεί μέθοδος της εξάντλησης. Η ονομασία αυτή, σύμφωνα με τον H. Scholz, δόθηκε πολύ αργότερα από τον G. Vincentio (1584 – 1667).

3.2 Η μέθοδος της εξάντλησης (Ευδόξου - Αρχιμήδη)

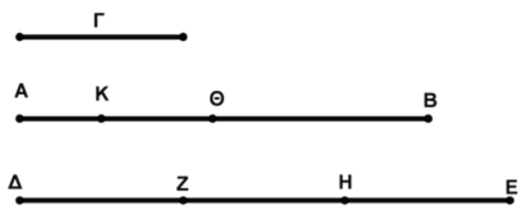
Στο πρόβλημα της άπειρης διαίρεσης έδωσε λύση ο Εύδοξος. Με την μέθοδο της εξάντλησης έδειξε ότι δεν είναι ανάγκη να υποθέσουμε την ύπαρξη απείρως μικρών ποσοτήτων όπως ισχυρίστηκε ο Αντιφώντας, αλλά για τους σκοπούς των Μαθηματικών σημασία έχει να μπορεί να φτάσει κάποιος σε ένα μέγεθος όσο μικρό θέλει, με συνεχιζόμενη διαίρεση ενός δοθέντος μεγέθους. Το σκεπτικό αυτό του Ευδόξου υλοποιείται στην περίφημη πρόταση 1 στο βιβλίο X των *Στοιχείων*, η οποία μας λέει:

Δύο μεγεθῶν ἀνίσων ἐκκειμένων, ἐὰν ἀπὸ τοῦ μείζονος ἀφαιρεθῇ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ καὶ τοῦ καταλειπομένου μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γίγνηται, λειφθήσεταί τι μέγεθος, ὃ ἔσται ἔλασσον τοῦ ἐκκειμένου ἐλάσσονος μεγέθους.

Με την βοήθεια της πρότασης αυτής όπως θα δούμε και στην συνέχεια θα υπολογιστεί το εμβαδόν πολλών καμπυλόγραμμων σχημάτων μεταξύ των οποίων και του κύκλου. Αν αποδώσουμε το νόημα της παραπάνω πρότασης θα λέγαμε:

Αν μας δοθούν δύο άνισα μεγέθη και από το μεγαλύτερο αφαιρέσουμε περισσότερο από το μισό (ή το μισό) και από αυτό το μέγεθος που μένει περισσότερο από το μισό (ή το μισό) και αυτή η διαδικασία επαναλαμβάνεται συνεχώς θα μείνει ένα μέγεθος που θα είναι μικρότερο από το αρχικά δοθέν μικρότερο μέγεθος.

Για την απόδειξη στα *Στοιχεία* από τον Ευκλείδη θεωρούνται δυο μεγέθη με μορφή ευθυγράμμων τμημάτων το Γ και το AB όπου ισχύει η προφανής σχέση $AB > \Gamma$ όπως βλέπουμε στο παρακάτω σχήμα. Η συνέχεια του συλλογισμού περιέχει την παρακάτω αρχή :



«*Τὸ Γ γὰρ πολλαπλασιαζόμενον ἔσται ποτὲ τοῦ ΑΒ μεῖζον*». Δηλαδή μπορεί το τμήμα Γ να πολλαπλασιαστεί και να γίνει μεγαλύτερο από το AB. Για την αρχή αυτή θα μιλήσουμε στην συνέχεια. Οπότε ο Ευκλείδης θεωρεί ένα πολλαπλάσιο του τμήματος Γ που να υπερβαίνει το AB έστω ότι αυτό είναι το ΔE. Για το τμήμα ΔE ισχύει όπως βλέπουμε και στο σχήμα ότι είναι τριπλάσιο του Γ. Χωρίζουμε το τμήμα αυτό στα τρία ίσα μέρη $\Delta Z = ZH = HE$. Το τμήμα AB το χωρίζουμε με το Θ σε δύο μέρη έτσι ώστε $B\Theta > A\Theta$. Και το τμήμα $A\Theta$ σε δυο μέρη με $K\Theta > AK$. Δηλαδή το $B\Theta$ μεγαλύτερο από το μισό του AB και το $K\Theta$ μεγαλύτερο από το μισό $A\Theta$. Τώρα έχουμε $AB < \Delta E$ και από το AB αποκόπτουμε το $B\Theta$ μεγαλύτερο από το μισό, ενώ από το μεγαλύτερο ΔE αποκόπτουμε το HE μικρότερο από το μισό, άρα διευρύνεται η παραπάνω ανίσωση και έχουμε $A\Theta < \Delta H$ συνεχίζουμε με την ίδια λογική τη διαδικασία και από το $A\Theta$ αποκόπτουμε το τμήμα $K\Theta$ μεγαλύτερο από το μισό και από το ΔH το HZ που είναι ίσο με το μισό άρα έχουμε ότι $AK < \Delta Z$ αλλά το ΔZ είναι ίσο με το Γ άρα αποδείχθηκε το ζητούμενο, δηλαδή αν από το μεγαλύτερο μέγεθος αφαιρέσουμε τμήμα μεγαλύτερο από το μισό και αυτό συνεχιστεί θα προκύψει μέγεθος (εδώ το AK) που θα είναι μικρότερο του αρχικού μικρότερου μεγέθους (εδώ είναι το Γ).

3.3 Αξίωμα συνέχειας-πρόταση 2 βιβλίο XII στα *Στοιχεία*

Το αξίωμα «*Τὸ Γ γὰρ πολλαπλασιαζόμενον ἔσται ποτὲ τοῦ ΑΒ μεῖζον*» που διατύπωσε ο Ευκλείδης κατά την απόδειξη της προηγούμενης πρότασης είναι γνωστό σήμερα ως αξίωμα της συνέχειας των Ευδόξου – Αρχιμήδη και έχει διατυπωθεί και από τον Αρχιμήδη (250 π.Χ.) στα έργα του *Περί σφαίρας και κυλίδρου, Περί Ελίκων, Τετραγωνισμός Παραβολής.*

> *ε΄. Ἔτι δὲ τῶν ἀνίσων γραμμῶν καὶ τῶν ἀνίσων ἐπιφανειῶν καὶ τῶν ἀνίσων στερεῶν τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάσσονος ὑπερέχειν τοιούτῳ, ὃ συντιθέμενον αὐτὸ ἑαυτῷ δυνατόν ἐστιν ὑπερέχειν παντὸς τοῦ προτεθέντος τῶν πρὸς ἄλληλα λεγομένων.*

Δηλαδή για οποιεσδήποτε άνισες γραμμές ή επιφάνειες ή στερεά αντικείμενα (μεγέθη) το μεγαλύτερο υπερέχει του μικρότερου κατά τέτοια ποσότητα η οποία επαναλαμβανόμενη πολλές φορές μπορεί να γίνει μεγαλύτερη και από τα δύο αρχικά μεγέθη. Με σύγχρονο συμβολισμό το αξίωμα αυτό μπορεί να διατυπωθεί ως εξής: Όταν δοθούν δύο άνισα μεγέθη A, B με $A < B$, του ιδίου είδους, τότε υπάρχει θετικός ακέραιος n έτσι ώστε $nA > B$. Η αρχή αυτή ουσιαστικά οφείλεται στον Εύδοξο (404 - 335 π.Χ.) ο οποίος κατάφερε με ιδιοφυείς παρεμβάσεις (όπως 5ος ορισμός στο βιβλίο V των *Στοιχείων* για την έννοια της αναλογίας) να καλύψει τα προβλήματα που δημιούργησε η ανακάλυψη των ασύμμετρων μεγεθών. Οι αρχές αυτές αποτέλεσαν την βάση για την θεμελίωση των πραγματικών αριθμών από τους σύγχρονους Μαθηματικούς R. Dedekind, A. Cauchy και K. Weierstrass τον 19ο αιώνα που θα δούμε αργότερα. Οι αρχαίοι Έλληνες δεν χρησιμοποίησαν την έννοια της συνέχειας (τουλάχιστον με την σύγχρονη μορφή) αλλά με διάφορες αναφορές προσέγγισαν την έννοια αυτή. Αναφορές σχετικές με την έννοια αυτή έχουμε από τον Αναξαγόρα (5ος αιώνας π.Χ.) «*οὔτε γάρ τοῦ σμικροῦ ἐστι τὸ γε ἐλάχιστον, ἀλλ᾽ ἔλασσον ἀεί (τὸ γάρ ἐόν οὐκ ἐστι τὸ μὴ οὐκ εἶναι) ἀλλὰ καὶ τοῦ μεγάλου ἀεί ἐστι μεῖζον, καὶ ἴσον ἐστὶ τῷ σμικρῷ πλῆθος, πρὸς ἑαυτὸ δὲ ἕκαστόν ἐστί καὶ μέγα καὶ σμικρόν*». «Διότι ούτε του μικρού υπάρχει ελάχιστο αλλά πάντα υπάρχει μικρότερο, διότι το υπάρχον είναι αδύνατο να γίνει μη υπάρχον με την συνεχή διαίρεση, αλλά και του μεγάλου υπάρχει πάντα μεγαλύτερο. Και αυτό αποτελείται από πολλά μικρά, ως προς τον εαυτό του όμως κάθε μέγεθος είναι και μεγάλο και μικρό». Η αναφορά αυτή ανήκει στην πραγματεία του *Περί Φύσεως* της οποία σώζονται ελάχιστα αποσπάσματα από αναφορές του Σιμπλίκιου. Επίσης από τον Δημόκριτο (460 - 370 π.Χ.), στο έργο του Πλούταρχου *Περί τῶν κοινών ἐννοιῶν πρός τούς Στωϊκούς* «*Ἄνισοι μὲν γὰρ οὖσαι τὸν κῶνον ἀνώμαλον παρέξουσι, πολλὰς ἀποχαράξεις λαμβάνοντα βαθμοειδεῖς καὶ τραχύτητας· ἴσων δ΄ οὐσῶν ἴσα τμήματα ἔσται καὶ* *φανεῖται τὸ τοῦ κυλίνδρου πεπονθὼς ὁ κῶνος, ἐξ ἴσων συγκείμενος καὶ οὐκ ἀνίσων κύκλων, ὅπερ ἐστὶν ἀτοπώτατον*». Δηλαδή «Αν κώνος τμηθεί από επίπεδο παράλληλο προς την βάση σε άπειρα λεπτά τμήματα τι θα είναι οι επιφάνειες που αποτέμνονται ίσες ή άνισες; Αν είναι άνισες τότε η κυρτή επιφάνεια θα έχει βαθμίδες, αν είναι ίσες το σχήμα θα είναι κύλινδρος και όχι κώνος. Άρα δεν είναι ούτε ίσες ούτε άνισες». Επίσης ο Αριστοτέλη (384 - 322 π.Χ.), στο έργο του *Φυσικῆς ἀκροάσεως* μας αναφέρει «*λέγω δέ συνεχές τό διαιρετόν εἰς ἀεί διαιρετά*». Ως πόρισμα του αξιώματος του Ευδόξου-Αρχιμήδη με σύγχρονο συμβολισμό προκύπτει ότι: Για κάθε θετικό αριθμό θ το σύνολο $\theta N = \{0, \theta, 2\theta, 3\theta, \dots, n\theta, \dots\}$ δεν είναι άνω φραγμένο. Ο Ε. Σταμάτης στην εισαγωγή του έργου του *Ευκλείδου Γεωμετρία* μας αναφέρει ότι το προηγούμενο αξίωμα το χρησιμοποίησε και ο διάσημος Έλληνας Μαθηματικός Κ. Καραθεοδωρής (1873 –1950) στην εξής μορφή: Εάν ε και α δύο τυχαίοι θετικοί αριθμοί, τότε η ακολουθία $\varepsilon, 2\varepsilon, 3\varepsilon, \dots$ περιέχει αριθμούς που υπερβαίνουν το α. Στον Εύδοξο αποδίδεται και η επόμενη πρόταση 12 βιβλίο XII των *Στοιχείων* σε αυτή γίνεται εφαρμογή της μεθόδου της εξάντλησης που περιγράψαμε πριν.

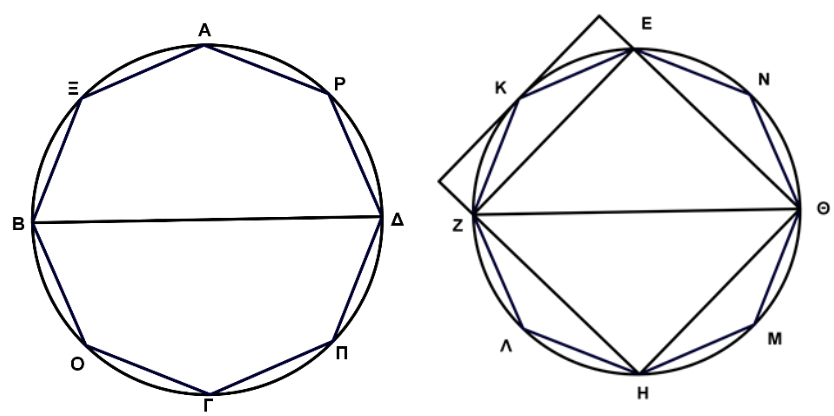
Πρόταση 2 βιβλίο XII

Οἱ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα.

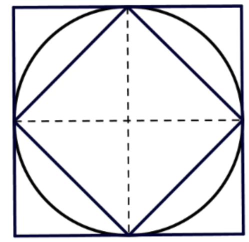
Ο λόγος δυό κύκλων είναι όπως ο λόγος των τετραγώνων των διαμέτρων τους.

Έστω οι κύκλοι $ΑΒΓΔ$ και $ΕΖΗΘ$ με διαμέτρους $ΒΔ$ και $ΖΘ$ αντίστοιχα θα δείξουμε ότι ο λόγος του $ΒΔ^2$ προς το $ΖΘ^2$ πρέπει να είναι ίσος με τον λόγο του $Κύκλου_{ΑΒΓΔ}$ προς τον $Κύκλο_{ΕΖΗΘ}$. Δηλαδή:

$$\frac{Κύκλος_{ΑΒΓΔ}}{Κύκλος_{ΕΖΗΘ}} = \frac{ΒΔ^2}{ΖΘ^2}.$$



Έστω ότι δεν ισχύει η παραπάνω σχέση, τότε ο λόγος $\frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2}$ θα ισούται με το λόγο του πρώτου κύκλου προς μια επιφάνεια Σ η οποία θα είναι είτε μεγαλύτερη είτε μικρότερη της επιφάνειας του δεύτερου κύκλου. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι $\frac{Κύκλος_{ΑΒΓΔ}}{\Sigma} = \frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2}$ και Σ μια επιφάνεια μικρότερη του κύκλου $EZH\Theta$. Εγγράφουμε κατά τη γνωστή διαδικασία στον κύκλο $EZH\Theta$ τετράγωνο. Η επιφάνεια του τετράγωνου αυτού είναι μεγαλύτερη από το μισό της επιφάνειας του κύκλου γιατί: Αν στα σημεία Z, H, θ, E φέρουμε εφαπτομένες στο κύκλο σχηματίζουν το περιγεγραμμένο τετράγωνο. Το εγγεγραμμένο τετράγωνο είναι το μισό του περιγεγραμμένου και ο κύκλος είναι ανάμεσά τους, άρα είναι μικρότερος από το περιγεγραμμένο τετράγωνο. Αν θέσουμε τ το εγγεγραμμένο τετράγωνο και κ τον κύκλο, τότε 2τ θα είναι το περιγεγραμμένο τετράγωνο και έχουμε $2\tau > \kappa$**,** άρα $\tau > \frac{\kappa}{2}$.



Αν διχοτομήσουμε τα τόξα $EZ, ZH, H\Theta, \Theta E$ με τα σημεία K, Λ, M, N και φέρουμε τα τμήματα $KE, KZ, Z\Lambda, \Lambda H, HM, M\Theta, \Theta N, NE$, τότε τα τρίγωνα EKZ, $Z\Lambda H$, $HM\Theta$, ΘNE είναι μεγαλύτερα από το μισό του αντίστοιχου κυκλικού τμήματος, γιατί αν φέρουμε τις εφαπτόμενες στα σημεία K, Λ, M, N και σχηματίσουμε τα ορθογώνια, όπως βλέπουμε στο αρχικό σχήμα, τα τρίγωνα είναι ίσα με το μισό του ορθογωνίου και το κυκλικό τμήμα είναι μικρότερο του ορθογωνίου (το σκεπτικό είναι το ίδιο με πριν). Άρα, αν συνεχίσουμε να διχοτομούμε τα τόξα KE, KZ,... θα καταλήξουμε να πάρουμε τμήματα του κύκλου με άθροισμα επιφανειών μικρότερο από τη διαφορά της επιφάνειας του κύκλου $EZH\Theta$ από τη μικρότερη επιφάνεια Σ (Πρόταση 1 βιβλίο X στα *Στοιχεία)*. Ας υποθέσουμε ότι τα τα τμήματα του κύκλου για τα οποία επιτυγχάνεται η παραπάνω διαδικασία είναι τα $EK, KZ, Z\Lambda, \Lambda H, HM, M\Theta, \Theta N, NE$, δηλαδή η επιφάνειά τους είναι μικρότερη από την διαφορά του κύκλου $EZH\Theta$ από την επιφάνεια Σ. Τότε το πολύγωνο $EKZ\Lambda HM\Theta N$ (εδώ οκτάγωνο) που απομένει είναι μεγαλύτερο από το χωρίο Σ. Γιατί

$$κυκλικά\ τμήματα\ +\ πολύγωνο\ =\ κύκλος\ EZH\Theta\quad και$$
$$κυκλικά\ τμήματα\ <\ κύκλου\ EZH\Theta\ -\ \Sigma\quad άρα$$
$$κυκλικά\ τμήματα\ <\ κυκλικά\ τμήματα\ +πολύγωνο - \Sigma, δηλαδή\ \Sigma\ <\ πολυγώνου.$$

Εγγράφουμε στον πρώτο κύκλο $AB\Gamma\Delta$ ένα πολύγωνο όμοιο με το πολύγωνο που έχουμε στον κύκλο $EZH\Theta$ (εδώ είναι οκτάγωνο οπότε εγγράφουμε με την γωστή διαδικασία ένα οκτάγωνο και στον κύκλο $AB\Gamma\Delta$). Επειδή τα πολύγωνα είναι όμοια από την Πρόταση 18 βιβλίο VIII των *Στοιχείων* θα ισχύει

$$\frac{E_{A\Xi BO\Gamma\Pi\Delta P}}{E_{EKZ\Lambda HM\Theta N}} = \frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2}$$

αλλά γνωρίζουμε ότι

$$\frac{Κύκλος_{ΑΒΓΔ}}{\Sigma} = \frac{B\Delta^2}{Z\Theta^2}$$

άρα

$$\frac{E_{ΑΞΒΟΓΠΔΡ}}{E_{ΕΚΖΛΗΜΘΝ}} = \frac{Κύκλος_{ΑΒΓΔ}}{Σ}$$

ή αλλάζοντας τους άκρους όρους της αναλογίας θα έχουμε

$$\frac{Κύκλος_{ΑΒΓΔ}}{E_{ΑΞΒΟΓΠΔΡ}} = \frac{Σ}{E_{ΕΚΖΛΗΜΘΝ}}$$

αλλά στο σημείο αυτό έχουμε καταλήξει στην ισότητα δύο λόγων που ο πρώτος είναι μεγαλύτερος της μονάδας μιά και $Κύκλος_{ΑΒΓΔ} > E_{ΑΞΒΟΓΠΔΡ}$ και ο δεύτερος μικρότερος της μονάδας μια και $Σ < E_{ΕΚΖΛΗΜΘΝ}$ άρα καταλήξαμε σε κάτι άτοπο. Στα ίδια αποτελέσματα θα καταλήγαμε, αν παίρναμε την επιφάνεια $Σ$ μεγαλύτερη από τον κύκλο $ΕΖΗΘ$. Οπότε η υπόθεση που κάναμε είναι λάθος, άρα τελικά ισχύει ότι ο λόγος των κύκλων είναι όπως ο λόγος των τετραγώνων των διαμέτρων τους.

Πώς θα μας βοηθήσει η προηγούμενη πρόταση στην μέτρηση του κύκλου; Ας θεωρήσουμε δύο κύκλους K_1, K_2 εκ των οποίων ο ένας (ο K_2) ας έχει διάμετρο ίση με την μονάδα και ο άλλος ας έχει διάμετρο δ, τότε θα ισχύει σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{\delta^2}{1^2}$$

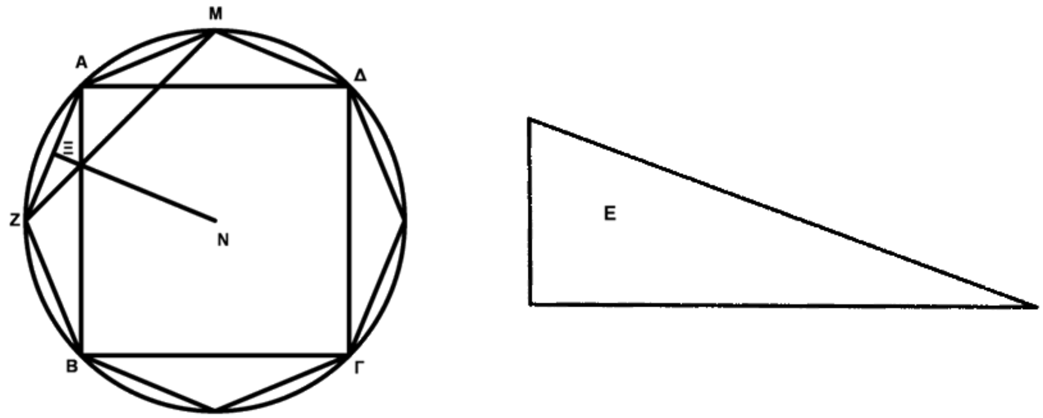
δηλαδή $K_1 = K_2\delta^2$ με άλλα λόγια η προηγούμενη πρόταση μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι το εμβαδόν ενός κύκλου είναι ανάλογο του τετραγώνου της διαμέτρου του. Από εκεί και μετά αρχίζει η προσπάθεια για την εύρεση αυτού του συντελεστή αναλογίας K_2. Στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη δεν γίνεται προσπάθεια για υπολογισμό της σταθεράς. Τη σκυτάλη στην προσπάθεια αυτή θα πάρει ένας άλλος μεγάλος Μαθηματικός της αρχαιότητας ο Αρχιμήδης (287 - 212 π.Χ.) με το έργο του *Κύκλου Μέτρησις.* Στο βιβλίο αυτό ο Αρχιμήδης αναπτύσσει τρείς προτάσεις με στόχο την εύρεση του εμβαδού του κύκλου. Ας δούμε στην συνέχεια τα επιχειρήματα που ξετυλίγει ο Αρχιμήδης στο παραπάνω έργο *Κύκλου Μέτρησις*:

3.4 Η μέτρηση του κύκλου από τον Αρχιμήδη

> *Πᾶς κύκλος ἴσος ἐστὶ τριγώνῳ ὀρθογωνίῳ, οὗ ἡ μὲν ἐκ τοῦ κέντρου ἴση μιᾷ τῶν περὶ τὴν ὀρθήν, ἡ δὲ περίμετρος τῇ βάσει.*

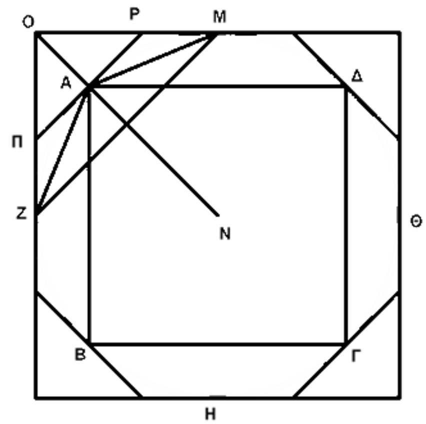
Κάθε κύκλος είναι ισοδύναμος με ορθογώνιο τρίγωνο του οποίου η μία κάθετη πλευρά είναι ίση με την ακτίνα και η άλλη κάθετη πλευρά είναι ίση με την περιφέρεια του κύκλου.

Έστω λοιπόν ο κύκλος $ΑΒΓΔ$ (ας τον ονομάσουμε T) και το ορθογώνιο τρίγωνο E για το οποίο ισχύει ότι η μία κάθετη πλευρά είναι ίση με την ακτίνα του κύκλου και η άλλη ίση με την περιφέρειά του.



Ανάμεσα στα δύο αυτά σχήματα θα ισχύει ότι ή θα είναι ίσα ($T = E$) ή κάποιο από τα δύο θα είναι μεγαλύτερο από το άλλο ($T > E$ ή $T < E$). Ας υποθέσουμε, λοιπόν, πρώτα ότι ο κύκλος είναι μεγαλύτερος από το τρίγωνο ($T > E$) και ας ονομάσουμε δ την διαφορά τους ($\delta = T - E$). Στην περίπτωση αυτή εγγράφουμε στον κύκλο τετράγωνο $ΑΒΓΔ$ και χωρίζουμε στην μέση τα αντίστοιχα τόξα των πλευρών του και ενώνουμε τα μέσα με τις κορυφές του τετραγώνου σχηματίζοντας ένα κανονικό οκτάγωνο. Αν συνεχίσουμε την διαμέριση αυτή κατασκευάζοντας κανονικό δεκαεξάγωνο κ.λπ. όπως έχουμε ήδη δει στα *Στοιχεία* (Πρόταση 1 βιβλίο Χ) θα μπορέσουμε να πετύχουμε διαμέριση τέτοια, ώστε τα κυκλικά τμήματα $ΑΖ, ΖΒ$, κ.λπ. (που θα μείνουν αν από τον κύκλο αφαιρέσουμε το κανονικό πολύγωνο που θα έχουμε κατασκευάσει) να έχουν ως άθροισμα επιφάνεια μικρότερη του δ. Η επιφάνεια του τελευταίου πολυγώνου που κατασκευάσαμε (ας την ονομάσουμε Z_1) θα είναι μεγαλύτερη από το E γιατί : $T - E = \delta$ και $T - Z_1 < \delta$ δηλαδή $T - Z_1 < T - E$ με άλλα λόγια $Z_1 > E$. Αν από το κέντρο N φέρουμε κάθετη $NΞ$ στην πλευρά $ΑΖ$ τότε ισχύει ότι αυτή είναι μικρότερη από την ακτίνα του κύκλου, άρα από και τη μια κάθετη πλευρά του E. Επίσης μικρότερη του κύκλου είναι και η περίμετρος του κανονικού πολυγώνου μία και περιέχεται μέσα σ΄αυτόν, άρα είναι μικρότερη και από την άλλη κάθετη πλευρά του τριγώνου E. Με άλλα λόγια το πολύγωνο Z_1 (που αποτελείται από τρίγωνα με πλευρές τις πλευρές του κανονικού πολυγώνου και ύψη ίσα με την $NΞ$) έχει επιφάνεια μικρότερη από το E. Αυτό μπορούμε εύκολα να το φανταστούμε αν κατασκευάσουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο με βάση την περίμετρο του πολυγώνου και ύψος ίσο με το $NΞ$. Το τρίγωνο αυτό θα έχει εμβαδόν όσο έχουν μαζί όλα τα τρίγωνα στα οποία χωρίζεται το κανονικό πολύγωνο, δηλαδή θα έχει εμβαδόν ίσο με αυτό, αλλά θα είναι μικρότερο του E μια και οι δύο πλευρές του είναι μικρότερες από αυτό.

Αυτό όμως είναι άτοπο μια και από τη διαδικασία της διαμέρισης έχουμε ότι το πολύγωνο Z_1 είναι μεγαλύτερο από το E.



Ας εξετάσουμε τώρα την περίπτωση ο κύκλος T να είναι μικρότερος του τριγώνου E $(\delta = E - T)$. Κατασκευάζουμε το περιγεγραμμένο τετράγωνο στον κύκλο και στα μέσα των τόξων $ZM, M\Theta, \Theta H, HZ$ φέρουμε τις εφαπτόμενες τότε μπορούμε να σχηματίσουμε το περιγεγραμμένο κανονικό οκτάγωνο. Αν φέρουμε την ON (αυτή θα περάσει από το A) θα σχηματιστεί το ορθογώνιο τρίγωνο OAP (το $O\Pi P$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές και OA είναι διχοτόμος άρα και ύψος) επίσης $OP > PM$ γιατί $PM = PA$ και $PA < OP$ (OP υποτείνουσα). Το τρίγωνο ΠOP είναι μεγαλύτερο από το μισό του ευθυγράμμου σχήματος $OZAM$, γιατί το τρίγωνο OAP είναι μεγαλύτερο από το τρίγωνο PAM (έχουν τα ίδια ύψη και $OP > PM$) και για τον ίδιο λόγο το τρίγωνο $OA\Pi$ είναι μεγαλύτερο από το τρίγωνο $A\Pi Z$ οπότε και το τρίγωνο ΠOP θα είναι μεγαλύτερο και από το μισό του σχήματος που σχηματίζεται από τα τμήματα OZ, OM και τα τόξα ZA, AM το οποίο περιέχεται μέσα στο ευθύγραμμο σχήμα $OZAM$. Τα τμήματα ΠZA APM κλπ. προκύπτουν από την αφαίρεση επιφάνειας μεγαλύτερης από το μισό της αρχικής ($OZAM - OAP$), άρα σύμφωνα με την αρχή της εξάντλησης (Πρόταση 1 βιβλίο Χ) αν συνεχίσουμε την διαδικασία περιγραφής κανονικών πολυγώνων το άθροισμα των επιφανειών αυτών θα γίνει μικρότερο από το δ $(\delta = E - T)$. Αν συμβολίσουμε με Σ την επιφάνεια που σχηματίζει το άθροισμα των τμημάτων $\Pi AZ, APM, \ldots$ και με Π την επιφάνεια του κανονικού πολυγώνου για το οποίο επετεύχθη το Σ να είναι μικρότερο του δ τότε έχουμε $\Sigma < E - K$ $\kappa\alpha\iota$ $\Pi = \Sigma + K$ οπότε αν συνδυάσουμε τις δύο αυτές σχέσεις θα προκύψει $\Pi - K < E - K$ ή πιο απλά $\Pi < E$ το οποίο είναι άτοπο, γιατί αν σχηματίσουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο με μια κάθετη πλευρά την NA (που είναι ίση με την ακτίνα άρα ίση και με την μια κάθετη πλευρά του E) και η άλλη κάθετη πλευρά να είναι ίση με την περίμετρο του περιγεργαμμένου κανονικού πολυγώνου (που είναι μεγαλύτερη από την περιφέρεια του κύκλου δηλαδή την άλλη πλευρά του E), τότε το εμβαδόν αυτού του τριγώνου θα ήταν ίσο με το εμβαδόν του πολυγώνου Π αλλά μεγαλύτερο του E. Άρα τελικά το εμβαδόν του κύκλου K είναι ίσο με το εμβαδόν του τριγώνου E.

Ας δούμε με σύγχρονους συμβολισμούς τι έχουμε βρει μέχρι τώρα για το εμβαδόν του κύκλου. Από τα *Στοιχεία* είχαμε καταλήξει στην σχέση

$$E_{\text{κύκλου}} = K\delta^2$$

όπου K μια σταθερά, από την παραπάνω πρόταση καταλήγουμε στην σχέση

$$E_{\text{κύκλου}} = \frac{1}{2}\, Μήκος \cdot \rho$$

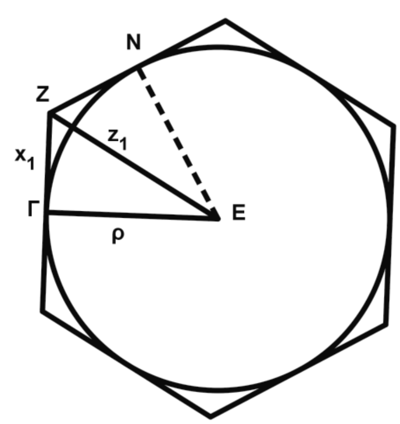
(όπου Π η περιφέρεια του κύκλου). Άρα αν συνδυάσουμε τους δύο αυτούς τύπους θα έχουμε ότι $K\delta^2 = \frac{1}{2}\, Μήκος \cdot \rho \Longrightarrow \frac{K}{4} = \frac{Μήκος}{\delta}$ με άλλα λόγια η σταθερά που αναζητούμε είναι ίση με το πηλίκο του μήκους του κύκλου προς την διάμετρό του.
Η σχέση του μήκους του κύκλου προς την διάμετρό του παρουσίασε ο Αρχιμήδης στο τρίτο θεώρημα του βιβλίου *Κύκλου Μέτρησις* που διατυπώνεται ως εξής:

> *Παντὸς κύκλου ἡ περίμετρος τῆς διαμέτρου τριπλασίων ἐστὶ καὶ ἔτι ὑπερέχει ἐλάσσονι μὲν ἢ ἑβδόμῳ μέρει τῆς διαμέτρου, μείζονι δὲ ἢ δέκα ἑβδομηκοστομόνοις.*

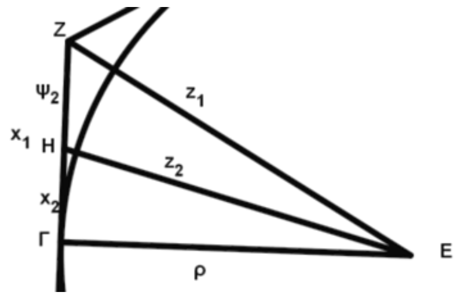
Δηλαδή σε κάθε κύκλο η περιφέρεια είναι μικρότερη από τα $3\frac{1}{7}$ της διαμέτρου και μεγαλύτερη από τα $3\frac{10}{71}$ αυτής.

Για την απόδειξη του παραπάνω θεωρούμε κύκλο με ακτίνα $E\Gamma$ και περιγράφουμε σε αυτόν κανονικά πολύγωνα αρχίζοντας από εξάγωνο. Η γωνία $\Gamma E Z$ είναι ίση με το $\frac{1}{3}$ της ορθής γιατί είναι το μισό της γωνίας $\Gamma E N$ που με την σειρά της αντιστοιχεί στο τόξο ΓN που είναι ίσο με το $\frac{1}{6}$ του κύκλου. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ZE\Gamma$ η κάθετη πλευρά $Z\Gamma$ ισούται με το μισό της υποτείνουσας ZE άρα $\frac{ZE}{Z\Gamma} = \frac{z_1}{\chi_1} = \frac{2}{1} = \frac{306}{153}$ (1).

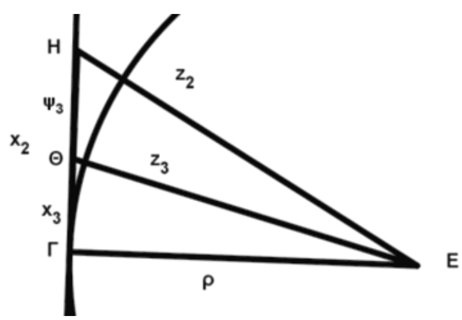
Η επιλογή αυτή σχετίζεται με την προσέγγιση $\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$.



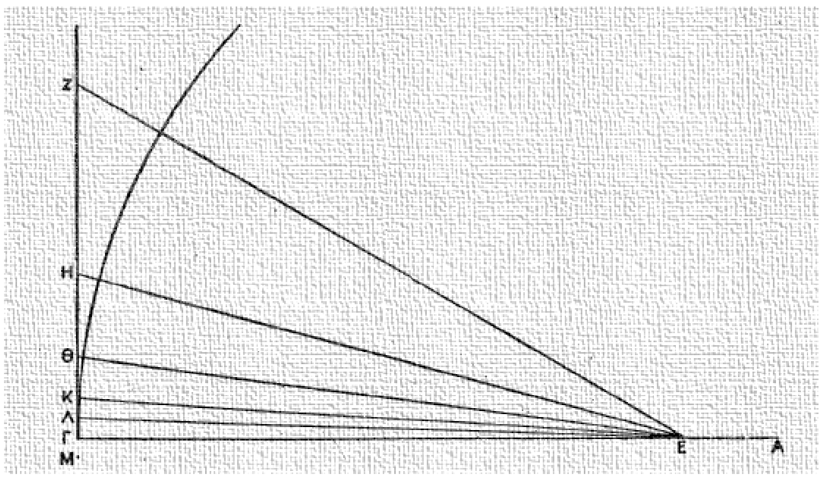
Από Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο $ZEΓ$ έχουμε: $z_1^2 = x_1^2 + \rho^2$ αλλά $z_1 = 2x_1$ οπότε $3x_1^2 = \rho^2$ ή $\frac{\rho}{\chi_1} > \frac{265}{153}$ (2) προσθέτοντας τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε $\frac{z_1+\rho}{\chi_1} > \frac{571}{153}$ *ή* $\frac{ZE+ΓE}{ZΓ} > \frac{571}{153}$ (3). Αν φέρουμε τη διχοτόμο EH της γωνίας $ZEΓ$ τότε η πλευρά $ΓH$ θα αντιστοιχεί στο μισό της πλευρά κανονικού $12\,\gamma\omega\nu o\upsilon$ που είναι περιγεγραμμένο στον κύκλο.



Για τους παραπέρα υπολογισμούς ο Αρχιμήδης εφάρμοσε στο τρίγωνο $ZEΓ$ το θεώρημα των διχοτόμων (πρόταση 3 βιβλίο VI των *Στοιχείων*) $\frac{ZE}{EΓ} = \frac{ZH}{HΓ}$ από το οποίο προκύπτει $\frac{ZE+EΓ}{EΓ} = \frac{ZH+HΓ}{HΓ}$ ή εναλλάσοντας τους μέσους όρους έχουμε $\frac{ZE+EΓ}{ZH+HΓ} = \frac{EΓ}{HΓ}$. Αλλά $ZH + HΓ = ZΓ$ οπότε η προηγούμενη σχέση γίνεται $\frac{ZE+EΓ}{ZΓ} = \frac{EΓ}{HΓ}$, από τη σχέση (3) $\frac{ZE+ΓE}{ZΓ} > \frac{571}{153}$ οπότε $\frac{EΓ}{HΓ} > \frac{571}{153}$ ή $\frac{\rho}{\chi_2} > \frac{571}{153}$. Αν υψώσουμε τη διπλανή σχέση στο τετράγωνο θα έχουμε $\frac{\rho^2}{\chi_2^2} > \frac{326041}{23409}$. Προσθέτοντας στους αριθμητές τους παρονομαστές έχουμε $\frac{\rho^2+\chi_2^2}{\chi_2^2} > \frac{349450}{23409}$ αλλά $\rho^2 + \chi_2^2 = z_2^2$ άρα $\frac{z_2^2}{\chi_2^2} > \frac{349450}{23409} > \frac{349428\frac{49}{64}}{23409}$ δηλαδή $\frac{HE}{HΓ} > \frac{591\frac{1}{8}}{153}$. Αν προσθέσουμε τη σχέση $\frac{EΓ}{HΓ} > \frac{571}{153}$ με την προηγούμενη κατά μέλη θα έχουμε $\frac{HE+EΓ}{HΓ} > \frac{1162\frac{1}{8}}{153}$ (4).



Η διαδικασία συνεχίζεται με τον ίδιο τρόπο δηλαδή φέρνουμε την $EΘ$ διχοτόμο της γωνίας $ΓEH$ οπότε σχηματίζεται η πλευρα $ΓΘ$ που αντιστοιχεί στο μισό της πλευράς κανονικό $24\gamma\omega\nu o\upsilon$ που είναι περιγεγραμμένο στο ίδιο κύκλο. Από το θεώρημα διχοτόμων στο τρίγωνο $EΓH$ έχουμε $\frac{HE}{EΓ} = \frac{ΘH}{ΘΓ}$ με τις ίδιες ενέργειες όπως πριν θα προκύψει ότι $\frac{ΗΕ+ΓΕ}{ΗΓ} = \frac{ΓΕ}{ΘΓ}$ και με την βοήθεια της σχέσης (4) $\frac{ΓΕ}{ΘΓ} > \frac{1162\frac{1}{8}}{153}$ (5) δηλαδή $\frac{\rho}{\chi_3} > \frac{1162\frac{1}{8}}{153}$. Με ύψωση στο τετράγωνο, πρόσθεση παρονομαστών στους αριθμητές και χρήση Πυθαγόρειου θεωρήματος $\rho^2 + \chi_3^2 = z_3^2$ θα προκύψει ότι $\frac{z_3^2}{\chi_3^2} > \frac{1373943\frac{33}{64}}{23409} > \frac{1373877\frac{1}{64}}{23409}$ και τελικά $\frac{ΘΕ}{ΘΓ} > \frac{1172\frac{1}{8}}{153}$ προσθέτοντας στα μέλη της προηγούμενης σχέσης την σχέση (5) θα έχουμε $\frac{ΘΕ+ΓΕ}{ΘΓ} > \frac{2334\ ¼}{153}$. Συνεχίζοντας την διαδικασία ο Αρχιμήδης διχοτομόντας την γωνία $ΓΕΘ$, φέρνοντας την



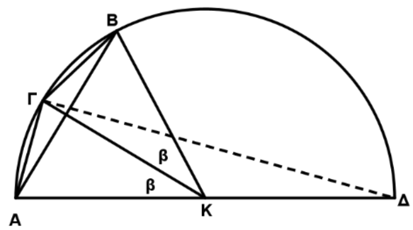
διχοτόμο $ΕΚ$ και στην συνέχεια ξανά διχοτομόντας την γωνία $ΓΕΚ$, φέρνοντας την διχοτόμο $ΕΛ$ κατέληξε σε σχήμα όπως το παραπάνω. Όπου το τμήμα $ΓΛ$ αντιστοιχεί στο μισό της πλευράς κανονικού $96γωνου$ (μια και $ΓΘ$ ήταν $24γωνου$ και $ΓΚ$ $48γωνου$). Οι σχέσεις που προκύπτουν για τα τμήματα $ΓΚ$ και $ΓΛ$ είναι $\frac{ΓΕ}{ΓΚ} = \frac{\rho}{\chi_4} > \frac{2334\ ¼}{153}$ (6) και $\frac{ΓΕ}{ΓΛ} = \frac{\rho}{\chi_5} > \frac{4673\ ½}{153}$ (7) . Από την τελευταία σχέση (7) έχουμε ότι $\frac{\chi_5}{\rho} < \frac{153}{4673\ ½}$ ή $2 \cdot 96 \cdot \frac{\chi_5}{2 \cdot \rho} < \frac{153}{4673\ ½} \cdot 96$ οπότε αν $96 \cdot 2 \cdot \chi_5 = Περίμετρος$ κανονικού $96γωνου = Π_{96}$ και $2\rho = \delta$ θα έχουμε:

$$\frac{Π_{96}}{\delta} < \frac{14688}{4673\frac{1}{2}} = 3\frac{667\frac{1}{2}}{4673\frac{1}{2}} < 3\frac{667\frac{1}{2}}{4672\frac{1}{2}} = 3\frac{1}{7}$$

δηλαδή απεδείχθει το ζητούμενο.

Για τη συνέχεια της απόδειξης ο Αρχιμήδης εγγράφει κανονικά πολύγωνα στον κύκλο ξεκινώντας από κανονικό εξάγωνο. Για την εγγραφή κατασκευάζει σε κύκλο με διάμετρο ΑΓ εγγεγραμμένη γωνία ίση με $\frac{1}{3}$ της ορθής. Οπότε η χορδή ΒΓ αντιστοιχεί στο μισό της πλευράς κανονικού εξαγώνου. Με διαδοχικές διχοτομήσεις της γωνίας ΑΒΓ θα εμφανιστούν οι πλευρές του κανονικού 12γωνου, 24γωνου, 48γωνου και 96γωνου οπότε μας δείχνει με παρόμοια διαδικασία ότι $\frac{\Pi'_{96}}{\delta} > 3\frac{10}{71}$ όπου Π'_{96} συμβολίζει την περίμετρο του κανονικού 96γωνου που είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο.

Με το έργο του αυτό ο Αρχιμήδης ουσιαστικά λύνει το πρόβλημα μέτρησης του κύκλου. Εκείνο που μένει για τους μεταγενέστερους είναι να βελτιώσουν τον υπολογισμό του π με τον τρόπο που έδειξε ο Αρχιμήδης εγγράφοντας και περιγράφοντας στον κύκλο πολύγωνα με μεγαλύτερο πλήθος πλευρών. Ο Πέρσης αστρονόμος Jamshīd al-Kāshī παρήγαγε 16 ψηφία το 1424 χρησιμοποιώντας ένα πολύγωνο με $3 \cdot 2^{28}$ πλευρές. Το 1539 ο Ολλανδός Μαθηματικός Van Roomen παρήγαγε 16 ψηφία του π χρησιμοποιώντας ένα πολύγωνο με $3 \cdot 5 \cdot 2^{24} = 251.658.240$ πλευρές (G. Loria *Ιστορία των Μαθηματικών* τόμος ΙΙ σελ.136). Ο F. Viète (1540 - 1603), αξιοποιώντας τις σκέψεις του Αντιφώντα που είδαμε πριν, συνέκρινε τα εμβαδά των πολυγώνων με $n, 2n, 2n^2$ πλευρές.



Η μέθοδος στηρίχτηκε στους τύπους που προκύπτουν από τις διαδοχικές διχοτομήσεις των γωνιών. Η μέθοδος αυτή όπως ισχυρίστηκε και ο Αντιφών μπορεί να συνεχιστεί απεριόριστα. Από την εφαρμογή της μεθόδου αυτής για $n = 4$ προέκυψε η παρακάτω έκφραση του π ως άπειρου γινομένου

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdot \ldots$$

Σύμφωνα με G. Loria (*Ιστορία των Μαθηματικών* τόμος ΙΙ σελ.137) η παραπάνω μορφή του π σε άπειρο γινόμενο είναι η πρώτη δοθείσα. Καλύτερες προσεγγίσεις για το π θα προκύψουν αργότερα με την ανακάλυψη των απείρων σειρών που θα δούμε και στην συνέχεια. Σήμερα με την εξέλιξη των υπολογιστών αλλά και των αλγορίθμων υπολογισμού ψηφίων του π έχουμε φτάσει σε υπολογισμούς που δίνουν το π με πάνω από 10 τρισεκατομμύρια (10^{13}) ψηφία. Βέβαια όλα αυτά δεν θα σταματήσουν τις προσπάθειες τετραγωνισμού του κύκλου όπως ακριβώς έγινε και με τις πολυγωνικές επιφάνειες.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^{Ο} Ο ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ - ΠΑΡΑΒΟΛΗΣ

Από την εποχή των αρχαίων Αιγυπτίων είδαμε τις προσπάθειες που καταβλήθηκαν για να μπορέσει να μετρηθεί το εμβαδόν του κύκλου με την βοήθεια ενός τετραγώνου που θα έχει την ίδια επιφάνεια με αυτόν. Το πρόβλημα αυτό, στην πορεία της ιστορίας των Μαθηματικών, αποδεσμεύτηκε από την διαδικασία εύρεσης του εμβαδού του κύκλου. Είναι από τα σημαντικότερα προβλήματα που έχουν καταγραφεί στην ιστορία των Μαθηματικών και έχει τον τίτλο «τετραγωνισμός του κύκλου». Η συνειδητοποίηση ότι αυτή η κατασκευή αποτελεί ένα ξεχωριστό πρόβλημα για τα Μαθηματικά έγινε από τους αρχαίους Έλληνες Μαθηματικούς, μάλιστα τα εργαλεία με τα οποία αρχικά προσπάθησαν να το λύσουν ήταν ο κανόνας και ο διαβήτης που αποτελούν τα βασικά εργαλεία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου ήταν τόσο διαδεδομένο στους κύκλους της διανόησης στο τέλος 5^{ου} στην αρχαία Ελλάδα σε σημείο που να βλέπουμε ότι όχι μόνο οι Φιλόσοφοι και οι Μαθηματικοί να ασχολούνται με αυτό αλλά και ο κωμικός Αριστοφάνης κάνει αναφορά στο έργο του λέγοντας: «ὀρθῷ *μετρήσω κανόνι προστιθείς, ἵνα* ὁ *κύκλος γένηται σοι τετράγωνος κἀν μέσῳ ἀγορά, φέρουσαι δ᾽ ὦσιν εἰς αὐτὴν* ὁδοὶ ὀρθαὶ *πρὸς αὐτὸ τὸ μέσον, ὥσπερ δ᾽ ἀστέρος αὐτοῦ κυκλοτεροῦς ὄντος* ὀρθαὶ *πανταχῇ ἀκτῖνες ἀπολάμπωσιν*» , (*Όρνιθες*-1005, 450 π.Χ.). Από τις προσπάθειες που έγιναν για τη λύση του προβλήματος την περίοδο εκείνη θα δούμε: α) Εκείνη του Ιπποκράτη του Χίου που περιορίστηκε στις κατασκευές με κανόνα και διαβήτη. β) Εκείνη του Δεινοστράτου που χρησιμοποίησε μια καινούργια καμπύλη, την τετραγωνίζουσα του Ιππία, η οποία δεν κατασκευάζεται με τις Γεωμετρικές μεθόδους της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. γ) Εκείνη του Αρχιμήδη με την έλικα.

4.1 Οι μηνίσκοι του Ιπποκράτη

Ο Ιπποκράτης (470 - 410 π.Χ.) γεννήθηκε στο νησί της Χίου. Όπως μας πληροφορεί ο Αριστοτέλης στα *Ηθικά Ευδήμεια* (8^{ο} βιβλίο), το επάγγελμα που εξάσκησε αρχικά ήταν αυτό του εμπόρου ή του εφοπλιστή. Στην Αθήνα όμως αργότερα εξελίχθηκε σε κορυφαίο Μαθηματικό. Ο Πλούταρχος (45 - 120) στο έργο του *Βίοι παράλληλοι* (και συγκεκριμένα στον «Βίο του Σόλωνος») αναφέρει τον Ιπποκράτη τον Χίο ως «Μαθηματικό και έμπορο». Για την ιδιότητα του σπουδαίου Μαθηματικού γράφει και πάλι ο Αριστοτέλης στα *Μετεωρολογικά* του, όπου τον κατατάσσει ως ισάξιο των Αναξαγόρα, Δημοκρίτου και των κορυφαίων Πυθαγορείων φιλοσόφων. Αλλά και ο Πρόκλος χαρακτηρίζει τον Ιπποκράτη τον Χίο σπουδαίο Μαθηματικό και τον τοποθετεί στον κατάλογο των Μαθηματικών μετά τον Οινοπίδη. Ο Ιπποκράτης λέγεται από τον Πρόκλο ότι συνέγραψε *Στοιχεία* (Γεωμετρίας), ενώ σ' αυτόν αποδίδεται ο πρώτος τετραγωνισμός καμπυλόγραμμου σχήματος με όρους της επίπεδης Γεωμετρίας:

«Ἱπποκράτης ὁ Χῖος
ὁ τὸν τοῦ μηνίσκου τετραγωνισμὸν εὑρών
(...) πρῶτος γὰρ ὁ Ἱπποκράτης
τῶν μνημονευομένων καὶ στοιχεῖα συνέγραψεν»

Για τις προσπάθειες του Ιπποκράτη μας πληροφορεί επίσης ο Σιμπλίκιος (6ος μ.Χ. αιώνας) σχολιαστής του έργου του Αριστοτέλη όπως έχουμε δει και πριν. Ο Σιμπλίκιος έχει ως πηγή του, τον δάσκαλό του Αλέξανδρο τον Αφροδισιέα. Ο Αλέξανδρος με την σειρά του έχει ως βάση το έργο του Εύδημου (400, π.Χ) *Ιστορία της Γεωμετρία* το οποίο έχει απολεσθεί. Σχετικό είναι το παρακάτω απόσπασμα.

"Καὶ οἱ τῶν μηνίσκων δὲ τετραγωνισμοὶ δόξαντες εἶναι τῶν
οὐκ ἐπιπολαίων διαγραμμάτων διὰ τὴν οἰκειότητα τὴν πρὸς τὸν
κύκλον ὑφ' Ἱπποκράτους ἐγράφησάν τε πρώτου καὶ κατὰ τρόπον
ἔδοξαν ἀποδοθῆναι· διόπερ ἐπὶ πλέον ἁψώμεθά τε καὶ διέλθωμεν

Σιμπλίκιος, εις Αριστοτέλους Φυσικά 9, 61, 1-5

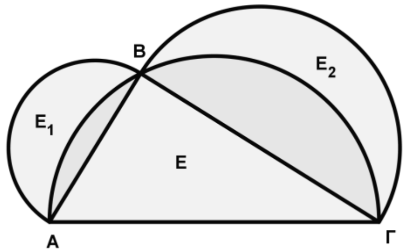
Από τους παραπάνω συγγραφείς και από σύγχρονους (Diels, Tannery, Becker, Hieberg) που προσπάθησαν να αποκαταστήσουν το αρχικό κείμενο του Ευδήμου προκύπτει ότι ο Ιπποκράτης ήταν γνώστης του θεωρήματος «τα όμοια τμήματα των κύκλων έχουν τον αυτό λόγο με τα από της βάσης τους τετράγωνα» το οποίο προκύπτει από το θεώρημα των *Στοιχείων* του Ευκλείδη (πρόταση 2 βιβλίο XII) «Ο λόγος δύο κύκλων είναι όπως ο λόγος των τετραγώνων των διαμέτρων τους». Σχετικό είναι το παρακάτω σχόλιο του Σιμπλίκιου.

«ἀρχὴν μὲν οὖν ἐποιήσατο καὶ πρῶτον ἔθετο τῶν πρὸς αὐτοὺς χρησίμων,
ὅτι τὸν αὐτὸν λόγον ἔχει τά τε ὅμοια τῶν κύκλων τμήματα πρὸς ἄλληλα
καὶ αἱ βάσεις αὐτῶν δυνάμει.
(τοῦτο δὲ ἐδείκνυεν ἐκ τοῦ τὰς διαμέτρους δεῖξαι τὸν αὐτὸν
λόγον ἐχούσας δυνάμει τοῖς κύκλοις)"»

(9, 61, 5-9)

Το παραπάνω θεώρημα, όπως έχουμε ήδη αναφέρει, προέρχεται από τον Εύδοξο. Παραμένει ανοικτό το ζήτημα αν ο Ιπποκράτης είχε αποδείξει αυστηρά το θεώρημα αυτό ή χρησιμοποιεί την έννοια της αναλογίας με την πυθαγόρεια θεωρία αναλογιών που μας λέει ότι: «τέσσερα μεγέθη είναι ανάλογα αν το πρώτο είναι το ίδιο μέρος ή το ίδιο πολλαπλάσιο του δεύτερου όπως το τρίτο είναι του τέταρτου» ο οποίος εφαρμόζεται μόνο σε ρητούς λόγους όπως θα δούμε και στην συνέχεια.

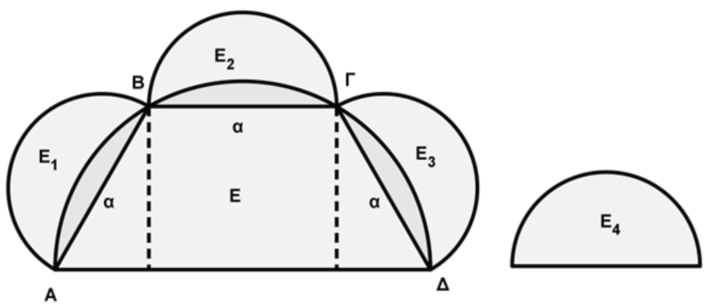
Ο Ιπποκράτης στην προσπάθειά του να τετραγωνίσει τον κύκλο ξεκίνησε από τις επιφάνειες που είναι ανάμεσα σε δύο τόξα κύκλου και ονομάζονται μηνίσκοι. Προσδοκία του ήταν ότι αν κατάφερνε αυτό, θα μπορούσε να το καταφέρει και για το γενικότερο σχήμα που είναι ο κύκλος.



Πράγματι κατάφερε να τετραγωνίσει τους μηνίσκους όπως βλέπουμε στο παραπάνω σχήμα: $\frac{E_{\eta\mu\iota\kappa.AB}}{E_{\eta\mu\iota\kappa.A\Gamma}} = \frac{AB^2}{A\Gamma^2}$ και $\frac{E_{\eta\mu\iota\kappa.\Gamma B}}{E_{\eta\mu\iota\kappa.A\Gamma}} = \frac{\Gamma B^2}{A\Gamma^2}$ προσθέτοντας τις δύο αναλογίες κατά μέλη θα έχουμε

$$\frac{E_{\eta\mu\iota\kappa.AB}}{E_{\eta\mu\iota\kappa.A\Gamma}} + \frac{E_{\eta\mu\iota\kappa.\Gamma B}}{E_{\eta\mu\iota\kappa.A\Gamma}} = \frac{AB^2}{A\Gamma^2} + \frac{\Gamma B^2}{A\Gamma^2} = \frac{AB^2 + \Gamma B^2}{A\Gamma^2} = 1$$

οπότε προκύπτει η σχέση (που γνωρίζουμε και από το πυθαγόρειο θεώρημα) $E_{\eta\mu\iota\kappa.AB} + E_{\eta\mu\iota\kappa.\Gamma B} = E_{\eta\mu\iota\kappa.A\Gamma}$. Αναλύουμε το εμβαδόν των ημικυκλίων $AB, B\Gamma$ στα αθροίσματα των μηνίσκων και των κυκλικών τμημάτων, του ημικυκλίου $A\Gamma$ στο άθροισμα του ορθογωνίου τριγώνου και των κυκλικών τμημάτων. Αφαιρώντας τα κοινά τμήματα θα έχουμε ότι $E = E_1 + E_2$. Ο Ιπποκράτης, βέβαια, ενέγραψε στον κύκλο τετράγωνο, οπότε στο ημικύκλιο το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι και ισοσκελές δηλαδή οι δύο μηνίσκοι E_1 και E_2 είναι ίσοι άρα τετραγωνίζεται και ο καθένας μόνος του.



Μετά από αυτή την πρώτη επιτυχία ακολούθησε ο τετραγωνισμός τριών μηνίσκων που σχηματίζονται από τρεις διαδοχικές πλευρές κανονικού εξαγώνου (ισοσκελές τραπέζιο) εγγεργαμμένου σε ημικύκλιο. Για την απόδειξη αυτή έχουμε ότι

$$\frac{\mathrm{E}_{\eta\mu\iota\kappa.\mathrm{AB}}}{\mathrm{E}_{\eta\mu\iota\kappa.\mathrm{A\Delta}}} = \frac{\alpha^2}{(2\alpha)^2} = \frac{1}{4}$$

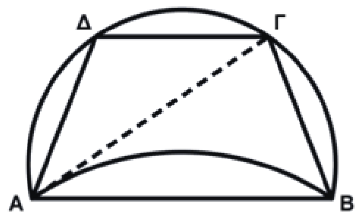
άρα

$$4E_{\eta\mu\iota\kappa.AB} = E_{\eta\mu\iota\kappa.A\Delta}$$

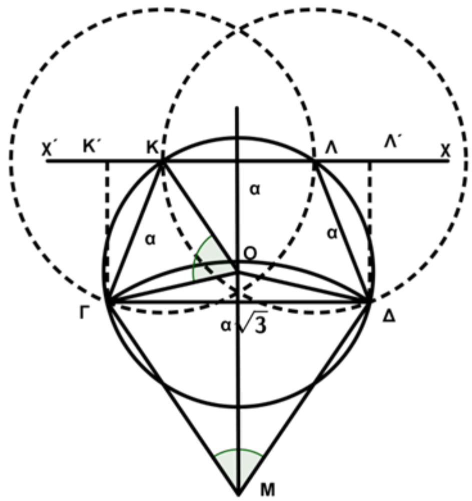
αφαιρώντας από την παραπάνω σχέση τα κοινά κυκλικά τμήματα $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta$ θα προκύψει ότι

$$E = E_1 + E_2 + E_3 + E_4$$

δηλαδή οι τρεις μηνίσκοι (που είναι ίσοι μεταξύ τους) μαζί με το ημικύκλιο τελικά τετραγωνίζονται, μια και το τραπέζιο τετραγωνίζεται. Η παραπάνω σχέση γίνεται: $3\,E_{ημικυκλίου} + E_{ημικυκλίου} = E_{τραπεζίου}$. Σύμφωνα με την σχέση αυτή αν ο Ιπποκράτης κατάφερνε να τετραγωνίσει έναν από τους παραπάνω μηνίσκους θα μπορούσε να τετραγωνίσει το ημικύκλιο, άρα και ολόκληρο τον κύκλο. Όμως, η περίπτωση του μηνίσκου αυτού δεν είναι ίδια με τον μηνίσκο του τετραγώνου που ο Ιπποκράτης μπόρεσε να τετραγωνίσει πριν. Ο Ιπποκράτης συνέχισε να τετραγωνίζει μηνίσκους προσδοκώντας ότι θα μπορέσει να καταφέρει τον πολυπόθητο τετραγωνισμό του κύκλου. Κατάφερε να τετραγωνίσει μηνίσκο στον οποίο το εξωτερικό τόξο ήταν μεγαλύτερο του ημικυκλίου.



Στην περίπτωση αυτή του τετραγωνισμού ο Ιπποκράτης κατασκεύασε ισοσκελές τραπέζιο (όπως και πριν) στο οποίο μάλιστα ισχύει ότι $ΑΔ = ΓΔ = ΓΒ$ και $ΑΒ^2 = 3ΑΔ^2$ και περιέγραψε στο τραπέζιο κύκλο. Το τόξο $ΑΔΓΒ$ είναι μεγαλύτερο του ημικυκλίου γιατί η γωνία $Δ$ είναι αμβλεία άρα στο τρίγωνο $ΑΔΓ$ θα έχουμε $ΑΓ^2 > 2ΑΔ^2$ (1) επίσης $ΑΒ^2 = 3ΑΔ^2 = 2ΑΔ^2 + ΒΓ^2$ δηλαδή $2ΑΔ^2 = ΑΒ^2 - ΒΓ^2$ αν αντικαταστήσουμε στην (1) θα έχουμε $ΑΓ^2 > ΑΒ^2 - ΒΓ^2$ ή $ΑΒ^2 < ΑΓ^2 + ΒΓ^2$ που σημαίνει ότι η γωνία $ΑΓΒ$ είναι μικρότερη της ορθής, άρα και το τόξο που είναι εγγεγραμμένη είναι μικρότερο του ημικυκλίου δηλαδή το τόξο $ΑΔΓΒ$ είναι μεγαλύτερο του ημικυκλίου. Στη συνέχεια ενέγραψε στο εσωτερικό του τραπεζίου τόξο $ΑΒ$, έτσι ώστε τα κυκλικά τμήματα $ΑΒ$ και $ΑΔ$ να είναι όμοια δηλαδή οι επίκεντρες γωνίες που αντιστοιχούν σ'αυτά να είναι ίσες. Ας δούμε πώς μπορούμε να υλοποιήσουμε την παραπάνω κατασκευή. Υποθέτουμε ότι $ΑΔ = ΔΓ = ΓΒ = α$ κατασκευάζουμε ως υποτείνουσες ορθογωνίων τριγώνων πρώτα το τμήμα $α\sqrt{2}$ και στην συνέχεια το $α\sqrt{3}$. Στη συνέχεια πάνω σε μια ευθεία xx' παίρνουμε σημεία $Κ, Λ$ και $Κ', Λ'$ έτσι ώστε το $ΚΛ$ να έχει μήκος $α$, το $Κ'Λ'$να έχει μήκος $α\sqrt{3}$ και τα τμήματα αυτά να έχουν κοινό μέσο. Με κέντρα $Κ'$, $Λ'$ κατασκευάζουμε κύκλους με ακτίνα α και από τα σημεία $Κ'$ και $Λ'$ φέρνουμε καθέτους που τέμνουν τους κύκλους στα σημεία $Γ$ και $Δ$ αντίστοιχα το ζητούμενο τραπέζιο είναι το $ΓΚΛΔ$. Σχηματίζουμε τον περιγεγραμμένο κύκλο (το κέντρο του $Ο$ είναι πάνω στην τομή της μεσοκαθέτου των βάσεων και της διχοτόμου της γωνίας $Κ$) και με πλευρά την $ΓΔ$ κατασκευάζουμε γωνία ίση με την γωνία $ΚΓΟ$. Αν $Μ$ είναι το σημείο που τέμνει η πλευρά της γωνίας αυτής την μεσοκάθετο τότε με κέντρο το σημείο αυτό κατασκευάζουμε το τόξο $ΓΔ$ το οποίο ορίζει το κυκλικό τμήμα $ΓΔ$ που είναι όμοιο με καθένα από τα κυκλικά τμήματα $ΓΚ, ΚΛ, ΛΔ$. Ο μηνίσκος που περικλείεται από το τόξο $ΓΚΛΔ$ και το τόξο $ΓΔ$ τετραγωνίζεται, γιατί



$$\frac{E_{κυκλ.\ τμηματος\ ΓΔ}}{E_{κυκλ.\ τμηματος\ ΚΓ}} = \frac{ΓΔ^2}{ΚΓ^2} = 3$$

δηλαδή

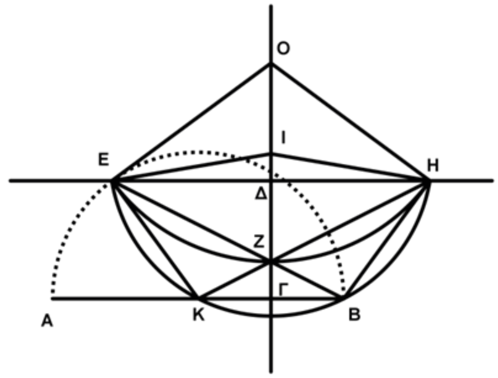
$$\begin{aligned} E_{κυκλ.\ τμηματος\ ΓΔ} &= 3E_{κυκλ.\ τμηματος\ ΚΓ} \\ &= E_{κυκλ.\ τμηματος\ ΚΓ} + E_{κυκλ.\ τμηματος\ ΚΛ} + E_{κυκλ.\ τμηματος\ ΛΔ} \\ &= E_{κυκλ.\ τομεα\ ΟΓΚΛΔ} + E_{τριγωνου\ ΓΟΔ} - E_{τραπεζιου\ ΓΚΛΔ} \end{aligned}$$

άρα τελικά έχουμε

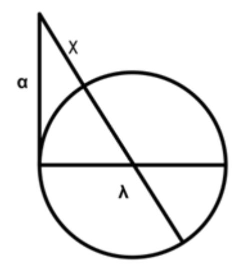
$$E_{κυκλ.\ τμηματος\ ΓΔ} = E_{κυκλ.\ τμηματος\ ΓΔ} + E_{μηνισκου} - E_{τραπεζιου\ ΓΚΛΔ}$$

απ΄ όπου έχουμε ότι ο μηνίσκος είναι ίσος με το τραπέζιο δηλαδή τετραγωνίζεται.

Ο Ιπποκράτης τετραγώνισε μια ακόμα περίπτωση μηνίσκου όπου το εξωτερικό του τόξο είναι μικρότερο του ημικυκλίου με την μέθοδο της «νεύσης», δηλαδή κατασκευή ευθυγράμμου τμήματος με γνωστό μήκος του οποίου τα άκρα είναι πάνω σε δυο ευθείες ή καμπύλες και το οποίο προεκτεινόμενο διέρχεται από δεδομένο σημείο. Πρώτα κατασκεύασε ημικύκλιο με διάμετρο $ΑΒ$ και κέντρο $Κ$ και $ΓΔ$ τη μεσοκάθετο του $ΚΒ$. Στην συνέχεια κατασκεύασε ευθύγραμμο τμήμα τέτοιο ώστε το τετράγωνό του να ισούται με τα $\frac{3}{2}$ του τετραγώνου της ακτίνας του ημικυκλίου ($ΕΖ^2 = \frac{3}{2}ΚΕ^2$ η κατασκευή μπορεί να γίνει εύκολα με κατασκευή μέσης αναλόγου πρόταση 14 βιβλίο ΙΙ στα *Στοιχεία*). Το τμήμα που προκύπτει από την κατασκευή αυτή μπορεί να τοποθετηθεί στην θέση $ΕΖ$ όπως βλέπουμε στο παρακάτω σχήμα με έναν «ρυθμιζόμενο» κανόνα που έχει το κέντρο του στο $Β$ και δύο μεταβλητά άκρα στα οποία μπορεί να τοποθετηθεί η ζητούμενη απόσταση. Περιστρέφοντας τον κανόνα μας δίνει την θέση των σημείων $Ε, Ζ$ πάνω στον κύκλο και την μεσοκάθετο.



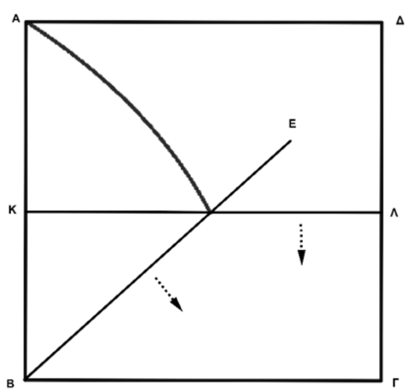
Υπάρχει και ένας δεύτερος τρόπος με τον οποίο μπορεί να γίνει η κατασκευή αυτή (με χρήση κανόνα και διαβήτη). Κατά την δεύτερη αυτή μέθοδο θα κατασκευαστεί το τμήμα BZ. Τα τρίγωνα KZB και KEB είναι όμοια άρα $\frac{\mathrm{EB}}{\mathrm{KB}} = \frac{\mathrm{KB}}{\mathrm{ZB}}$. Αν θέσουμε $ZB = x, EB = \psi, EZ = \lambda, KB = \alpha$ θα έχουμε $ότι$ $KB^2 = EB \cdot ZB$ δηλαδή $a^2 = (\lambda + x)x$ ή τελικά $x^2 + \lambda x - a^2 = 0$. Η κατασκευή αυτή μπορεί να γίνει με τη βοήθεια κύκλου με διάμετρο λ στον οποίο έχουμε φέρει εφαπτομένη σ΄ένα σημείο του, πάνω σ΄αυτήν έχουμε πάρει τμήμα με μήκος α. Φέρνουμε την τέμνουσα του κύκλου που διέρχεται από το κέντρο του κύκλου και ξεκινά από το άκρο του εφαπτόμενου τμήματος. Το ζητούμενο μήκος x είναι το τμήμα της τέμνουσας από το άκρο του εφαπτόμενου τμήματος μέχρι τον κύκλο. Από τις αναφορές που έχουμε δεν είναι σίγουρο ποιόν ακριβώς από τους παραπάνω δύο τρόπους χρησιμοποίησε ο Ιπποκράτης για την κατασκευή του τμήματος EZ. Αν τελικά χρησιμοποίησε τον δεύτερο αυτό τρόπο η κατασκευή συνέχισε ως εξής (προηγούμενο σχήμα) με κέντρο το B και ακτίνα x βρίσκουμε το τμήμα BZ (το Z είναι πάνω στην μεσοκάθετο του KB) και προεκτείνοντας βρίσκουμε το σημείο τομής E πάνω στον κύκλο. Η συνέχεια της κατασκευής είναι κοινή και για τις δύο περιπτώσεις κατασκευής του EZ. Από το E φέρνουμε παράλληλη προς την KB, με κέντρο το B και ακτίνα KB εντοπίζουμε το σημείο Η πάνω στην παράλληλη. Κατασκευάζουμε τον περιγεγραμμένο κύκλο στο ισοσκελές τραπέζιο $EKBH$ με κέντρο I και τον περιγεγραμμένο κύκλο στο τρίγωνο EZH με κέντρο Ο. Ο μηνίσκος που σχηματίζεται έχει το εξωτερικό τόξο $EKBH$ μικρότερο του ημικυκλίου, γιατί στο τρίγωνο EKZ η πλευρά $EZ > EK$ άρα η γωνία EZK είναι οξεία οπότε η παραπληρωματική γωνία KZB είναι αμβλεία, άρα από το τρίγωνο KZB θα έχουμε $KE^2 > 2BZ^2$ επίσης $EZ^2 = \frac{3}{2}EK^2 = EK^2 + \frac{1}{2}EK^2 > EK^2 + KZ^2$ δηλαδή η γωνία EKZ είναι αμβλεία.

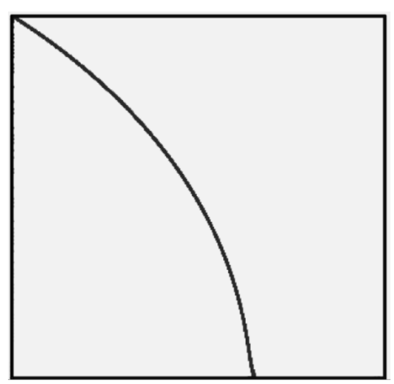


Ο τετραγωνισμός των μηνίσκων του Ιπποκράτη απασχόλησε τη Μαθηματική κοινότητα για αιώνες μετά τον Ιπποκράτη. Το ζητούμενο πλέον είναι να βρεθούν όλοι οι μηνίσκοι που είναι τετραγωνίσιμοι. Το 1840 ο Γερμανός Μαθηματικός T. Claussen απέδειξε ότι εκτός από τις τρεις περιπτώσεις τετραγωνισμού που έκανε ο Ιπποκράτης υπάρχουν δύο ακόμα περιπτώσεις τετραγωνίσιμων μηνίσκων. Επίσης διατύπωσε την εικασία ότι δεν υπάρχει άλλη περίπτωση τετραγωνίσιμων μηνίσκων. Το 1934 ο Ρώσος Μαθηματικός *N. G.* Tschebatorew και στην συνέχεια, το 1947, ο μαθητής του A. W. Dorodnow με χρήση της θεωρίας του E. Galois (1811 – 1832) έδωσαν λύση στο θέμα αποδεικνύοντας ότι υπάρχουν μόνο πέντε τετραγωνίσιμοι μηνίσκοι (περισσότερα M. Postnikov, *The problem of squarable lunes*, American Mathematical Monthly 107 (7). Μεταφρασμένο από το Ρώσικο βιβλίο του M. Postnikov στην θεωρία Galois που έγραψε το 1963.

4.2 Η τετραγωνίζουσα του Ιππία

Στην Μαθηματική Συναγωγή του Πάππου (300 μ.Χ.) αναφέρεται ότι ο Δεινόστρατος, αδελφός του Μεναίχμου (γεννήθηκε 375 π.Χ.) και ο Νικομήδης χρησιμοποίησαν για τον τετραγωνισμό του κύκλου μια καμπύλη την οποία είχε ανακαλύψει ο σοφιστής Ιππίας ο Ηλείος (420 π.Χ.). Για τον λόγο αυτό η καμπύλη ονομάστηκε τετραγωνίζουσα. Η καμπύλη κατασκευάζεται με την ταυτόχρονη ομαλή κίνηση δύο ευθυγράμμων τμημάτων του $ΚΛ$ και του $ΒΕ$. Το ευθύγραμμο τμήμα $ΚΛ$ αρχικά ήταν πάνω στην πλευρά $ΑΔ$ τετραγώνου $ΑΒΓΔ$ και το τμήμα $ΒΕ$ πάνω στην πλευρά $ΑΒ$ του ίδιου τετραγώνου. Το τμήμα $ΚΛ$ κινείται με σταθερή ταχύτητα προς την πλευρά $ΒΓ$ κρατώντας πάντα παράλληλη θέση προς αυτό και το τμήμα $ΒΕ$ κινείται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα προς την πλευρά $ΒΓ$. Η τομή των δύο αυτών τμημάτων είναι ο γεωμετρικός τόπος της καμπύλης. Αν τα $Κ, Λ$ είναι τα μέσα των πλευρών $ΑΒ$ και $ΔΓ$ τότε το $ΒΕ$ θα έχει διαγράψει τη μισή ορθή γωνία. Άρα ένα σημείο της τετραγωνίζουσας είναι το σημείο τομής της διχοτόμου με το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των απέναντι πλευρών $ΑΒ$ και $ΔΓ$ του τετραγώνου.





Με παρόμοιο τρόπο μπορούν να βρεθούν και άλλα σημεία της τετραγωνίζουσας. Η τελική μορφή της τετραγωνίζουσας είναι αυτή που βλέπουμε στο παραπάνω σχήμα.

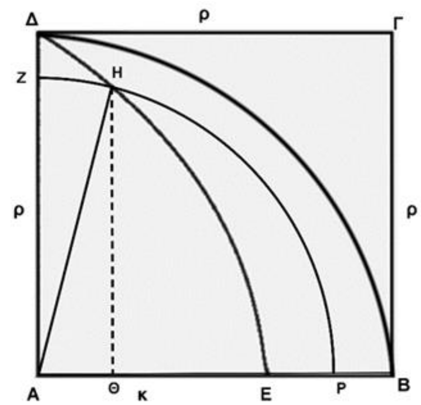
Το σημείο τομής της τετραγωνίζουσας με την πλευρά AB μπορεί να προσδιοριστεί με οριακές διαδικασίες μια και οι $K\Lambda$ και BE στην θέση αυτή θα είναι παράλληλες.

Ο Πρόκλος, στα σχόλια που έγραψε για τα *Στοιχεία,* αναφέρει ότι η καμπύλη αυτή αρχικά είχε χρησιμοποιηθεί από τον Ιππία για την τριχοτόμηση μιας γωνίας, καθώς μεταφέρει το σχετικό πρόβλημα στην τριχοτόμηση της πλευράς του τετραγώνου. Η τριχοτόμηση της πλευράς είναι εφικτή με χρήση του θεωρήματος του Θαλή.

Στην συνέχεια θα δούμε πως μπορεί να τετραγωνιστεί ο κύκλος με την βοήθεια της καμπύλης αυτής. Σε ένα τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ σχηματίζουμε την τετραγωνίζουσα και ένα τεταρτοκύκλιο ΔB, στην συνέχεια θα δείξουμε ότι

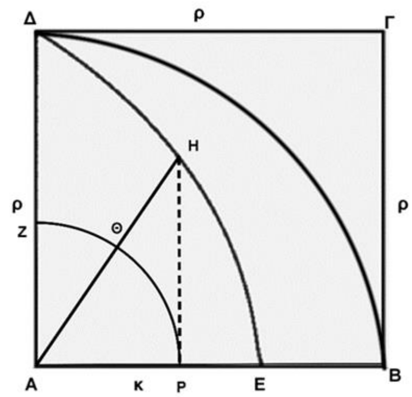
$$\frac{\mu\acute{\eta}\kappa o\varsigma\ \tau\acute{o}\xi o\upsilon(\Delta B)}{AB} = \frac{AB}{AE}$$

Για την απόδειξη ας θέσουμε το μήκος του τόξου ΔB ίσο με s, την απόσταση $AE = \kappa$ και την πλευρά του τετραγώνου ίση με ρ. Τότε η παραπάνω σχέση γίνεται $\frac{s}{\rho} = \frac{\rho}{\kappa}$. Θα δείξουμε την παραπάνω σχέση αποκλείοντας τις περιπτώσεις $\frac{s}{\rho} > \frac{\rho}{\kappa}$ και $\frac{s}{\rho} < \frac{\rho}{\kappa}$. Έστω $\frac{s}{\rho} < \frac{\rho}{\kappa}$. Τότε θα υπάρχει ποσότητα $\alpha > \kappa$ έτσι ώστε $\frac{s}{\rho} = \frac{\rho}{\alpha}$. Επειδή $\frac{s}{\rho} = \frac{\rho}{\alpha} > 1$ θα ισχύει α < ρ δηλαδή $\kappa < \alpha < \rho$. Από αυτό συνάγεται ότι υπάρχει σημείο P ανάμεσα στα σημεία E και B έτσι ώστε $AP = \alpha$ όπως βλέπουμε στο επόμενο σχήμα. Σχηματίζουμε το τεταρτοκύκλιο AZP με ακτίνα $AP = \alpha$. Έστω s' το μήκος του τόξου ZP και H το σημείο τομής του τόξου με την τετραγωνίζουσα. Έχουμε ότι $\frac{s}{s'} = \frac{\rho}{\alpha} = \frac{s}{\rho}$ απ΄ όπου τελικά συμπεραίνουμε ότι $s' = \rho$.



Από το H φέρουμε την $H\theta$ κάθετη στην AB. Από τον ορισμό της τετραγωνίζουσας έχουμε ότι $\frac{\widehat{BAH}}{\widehat{BA\Delta}} = \frac{H\Theta}{A\Delta}$ ή $\frac{\mu\acute{\eta}\kappa o\varsigma\ \tau\acute{o}\xi o\upsilon\ HP}{\mu\acute{\eta}\kappa o\varsigma\ \tau o\xi o\upsilon\ ZP} = \frac{H\Theta}{A\Delta}$ όμως έχουμε δείξει ότι μήκος τόξου $ZP = s' = \rho = A\Delta$ άρα έχουμε ότι μήκος τόξου $HP = H\Theta$. Αυτό είναι άτοπο, μια και το $H\Theta$ είναι το κάθετο τμήμα και είναι άρα μικρότερο από οποιοδήποτε άλλο τμήμα που συνδέει το H με το τμήμα AB. Άρα, λοιπόν, η υπόθεση $\frac{s}{\rho} < \frac{\rho}{\kappa}$ δεν ισχύει.

Θα δείξουμε ότι δεν ισχύει και η υπόθεση $\frac{s}{\rho} > \frac{\rho}{\kappa}$. Αν ίσχυε, θα υπήρχε κάποιο α όπως πριν, έτσι ώστε $\frac{s}{\rho} = \frac{\rho}{\alpha}$ με $\alpha < \kappa$. Άρα θα υπάρχει ευθύγραμμο τμήμα $AP = \alpha$ με το σημείο P να είναι ανάμεσα στο A και στο σημείο E που τέμνει η τετραγωνίζουσα την πλευρά AB όπως βλέπουμε στο σχήμα που ακολουθεί. Φέρνουμε την κάθετο στο P που τέμνει την τετραγωνίζουσα στο H. Κατασκευάζουμε το τεταρτοκύκλιο με κέντρο A και ακτίνα AP και έστω s' το μήκος του. Έχουμε ότι $\frac{s}{s'} = \frac{\rho}{\alpha} = \frac{s}{\rho}$. Τελικά συμπεραίνουμε ότι $s' = \rho$. Έχουμε από τον ορισμό της τετραγωνίζουσας ότι $\frac{\widehat{BAH}}{\widehat{BA\Delta}} = \frac{HP}{A\Delta}$ ή $\frac{\mu ήκος\ τόξου\ \Theta P}{\mu ήκος\ τοξου\ ZP} = \frac{HP}{A\Delta}$. Αλλά $\mu ήκος\ τόξου\ ZP = s' = \rho = A\Delta$ οπότε



$$\mu ήκος\ τόξου\ \Theta P = \mu ήκος\ \ HP,$$ αν πολλαπλασιάσουμε με $\frac{1}{2}AP$ θα έχουμε

$$\frac{1}{2}AP \cdot \mu ήκος\ τόξου\ \Theta P = \frac{1}{2}AP \cdot \mu ήκος\ \ HP.$$

Δηλαδή

$$Εμβαδόν\ τομέα\ A\Theta P = Εμβαδόν\ τριγώνου\ AHP$$

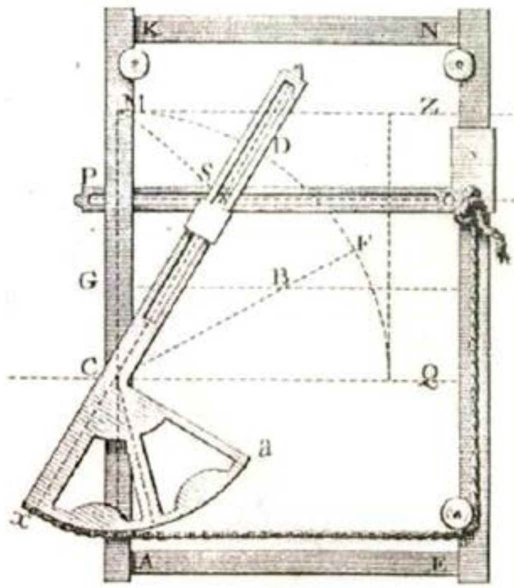
το οποίο είναι άτοπο. Άρα τελικά ισχύει το ζητούμενο.

Ο τετραγωνισμός του κύκλου υλοποιείται σύμφωνα με την παρακάτω διαδικασία: Ισχύει

$$\frac{\mu ήκος\ τόξου(\Delta B)}{AB} = \frac{AB}{AE}$$

στην αναλογία αυτή μας είναι γνωστά τα AB και AE (από την τετραγωνίζουσα) άρα μπορεί να κατασκευαστεί (ως τέταρτη ανάλογος) το ευθύγραμμο τμήμα που έχει μήκος ίσο με το μήκος του τεταρτοκυκλίου ΔB (ευθειοποίηση του κύκλου). Στη συνέχεια αν τετραπλασιάσουμε το μήκος αυτό μας δίνει το μήκος όλου του κύκλου. Για τον τετραγωνισμό θα στηριχτούμε στο θεώρημα του Αρχιμήδη ότι «Κάθε κύκλος είναι ισοδύναμος με ορθογώνιο τρίγωνο του οποίου η μία κάθετη πλευρά είναι ίση με την ακτίνα και η άλλη κάθετη πλευρά είναι ίση με την περιφέρεια του κύκλου». Άρα κατασκευάζοντας ένα ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές την ακτίνα και το μήκος του κύκλου που κατασκευάσαμε πριν, έχουμε κατασκευάσει ορθογώνιο τρίγωνο με εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν του κύκλου. Το ορθογώνιο τρίγωνο μπορεί να μετασχηματιστεί σε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και το ορθογώνιο μπορεί να μετασχηματιστεί σε τετράγωνο (κατασκευή μέσης αναλόγου). Έτσι, λοιπόν, ο κύκλος τετραγωνίστηκε.

Ο Ιταλός Μαθηματικός G. B. Suardi (1711-1767) ο οποίος συνέγραψε το 1752 ένα ενδιαφέρον έργο που παρουσιάζει μία συλλογή σύγχρονων Μαθηματικών μηχανικών οργάνων που περιγράφουν την κατασκευή αρχαίων και νεότερων καμπυλών, με τίτλο *Nuovi istromenti per la descrizione di diverse curve antiche e moderne*, στη οποία περιλαμβάνεται ένα όργανο που κατασκεύαζε την τετραγωνίζουσα του Ιππία.



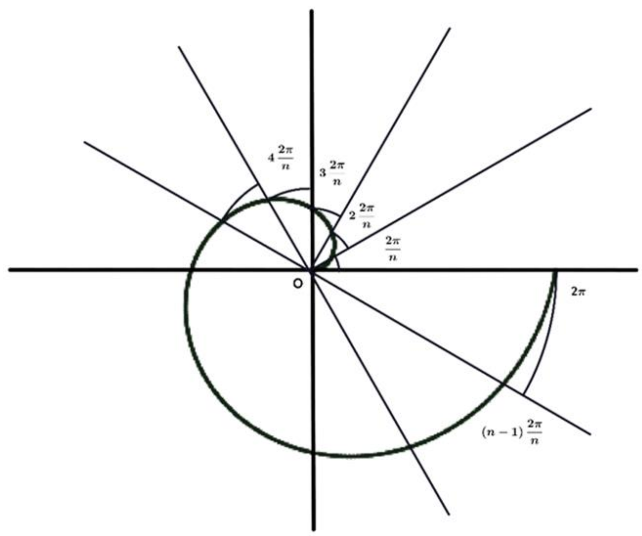
4.3 Εμβαδόν έλικας – τετραγωνισμός κύκλου από τον Αρχιμήδη

> α΄. Εἴ κα εὐθεῖα ἐπιζευχθῇ γραμμὰ ἐν ἐπιπέδῳ καὶ μένοντος τοῦ ἑτέρου πέρατος αὐτᾶς ἰσοταχέως περιενεχθεῖσα ὁσακισοῦν ἀποκατασταθῇ πάλιν, ὅθεν ὥρμασεν, ἅμα δὲ τᾷ γραμμᾷ περιαγομένᾳ φέρηταί τι σαμεῖον ἰσοταχέως αὐτὸ ἑαυτῷ κατὰ τᾶς εὐθείας ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ μένοντος πέρατος, τὸ σαμεῖον ἕλικα γράψει ἐν τῷ ἐπιπέδῳ.

Η έλικα του Αρχιμήδη είναι μια καμπύλη γραμμή η οποία παράγεται από ένα σημείο το οποίο κινείται με σταθερή ταχύτητα πάνω σε μια ευθεία η οποία περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα. Ο Μαθηματικός τύπος σε πολικές συντεταγμένες που δίνει την καμπύλη αυτή είναι $r = \theta$. Ο Αρχιμήδης μελέτησε με μεγάλη λεπτομέρεια τις ιδιότητες της επίπεδης έλικας στο έργο του *Περί Ελίκων*. Στο έργο αυτό ο Αρχιμήδης προσδιόρισε και το εμβαδόν που καταλαμβάνει η έλικα όταν αυτή κάνει μια πλήρη περιστροφή. Στο Θεώρημα 24 μας λέει

> Τὸ περιλαφθὲν χωρίον ὑπό τε τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς πρώτας τᾶν ἐν τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ κύκλου τοῦ πρώτου.

Δηλαδή το εμβαδόν της επιφάνειας που σχηματίζει η έλικα κατά την πρώτη περιστροφή ισούται με το ένα τρίτο του πρώτου κύκλου, δηλαδή του κύκλου που έχει κέντρο Ο την αρχή της έλικας και ακτίνα ΟΑ. Στην συνέχεια με σύγχρονη μορφή θα δούμε την απόδειξη, στο πνεύμα πάντα του Αρχιμήδη.



Για την απόδειξη της πρόταση αυτή μπορούμε να κάνουμε την ισοδιαμέριση της επιφάνειας του επιπέδου με ευθείες που ξεκινούν από την αρχή Ο της έλικας. Στη συνέχεια μπορούμε να φέρουμε τους κυκλικούς τομείς με γωνία ίση με $\frac{2\pi}{n}$ ακτίνια ο καθένας. Η κατασκευή των κυκλικών τομέων γίνεται από τα σημεία τομής των ευθειών αυτών με την έλικα, έτσι ώστε οι τομείς αυτοί να περιέχουν την επιφάνεια που ορίζει η έλικα. Επειδή είδαμε ότι η εξίσωση της έλικας είναι $r = \theta$, η ακτίνα του πρώτου κυκλικού τομέα θα είναι $\frac{2\pi}{n}$ του δεύτερου $2\frac{2\pi}{n}$ και ούτω καθεξής. Άρα το εμβαδόν της έλικας θα είναι μικρότερο του αθροίσματος των κυκλικών τομέων.

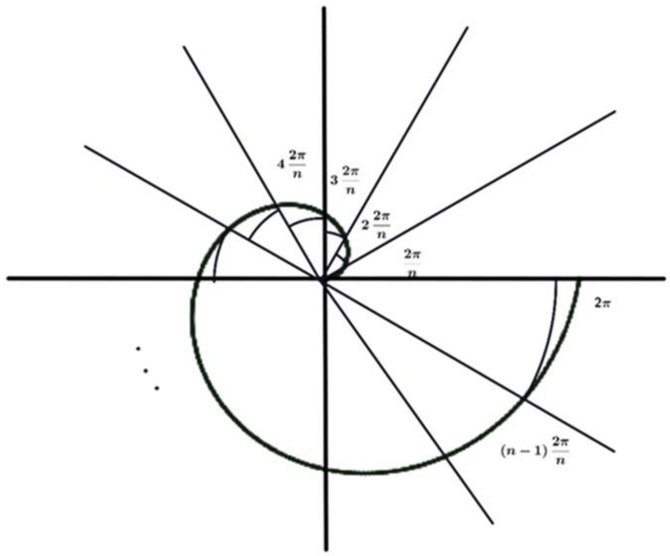
$$E < \frac{1}{2}\frac{2\pi}{n}\left[\left(\frac{2\pi}{n}\right)^2 + 2^2\left(\frac{2\pi}{n}\right)^2 + \cdots + n^2 + \left(\frac{2\pi}{n}\right)^2\right] \quad \text{ή}$$

$$E < \frac{\pi}{n}\frac{4\pi^2}{n^2}(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2).$$

Αλλά, γνωρίζουμε ότι

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \text{ οπότε } E < \frac{4\pi^3}{n^3}\frac{1}{6}\, n(n+1)(2n+1).$$

Στη συνέχεια σχηματίζουμε τους κυκλικούς τομείς που βρίσκονται εσωτερικά της έλικας, οπότε σ’ αυτή την περίπτωση το εμβαδόν της έλικας είναι μεγαλύτερο από το άθροισμα των εμβαδών των εσωτερικών κυκλικών τομέων.



$$E > \frac{1}{2}\frac{2\pi}{n}[(\frac{2\pi}{n})^2 + 2^2(\frac{2\pi}{n})^2 + \cdots + (n-1)^2(\frac{2\pi}{n})^2] \text{ ή}$$

$$E > \frac{4\pi^3}{n^2}[1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2]$$

δηλαδή

$$E > \frac{4\pi^3}{n^3}\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1).$$

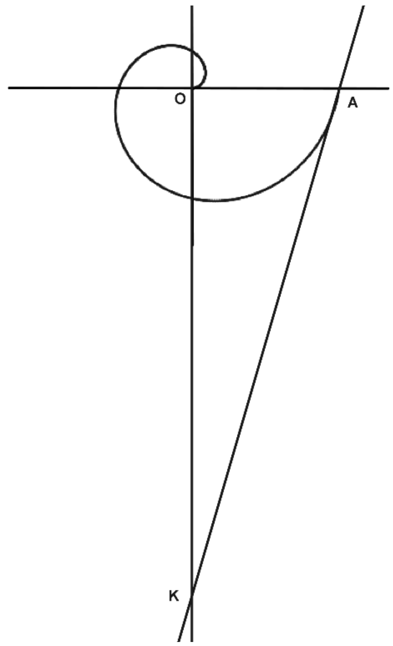
Άρα

$$\frac{4\pi^3}{n^2}\frac{1}{6}(n-1)(2n-1) < E < \frac{4\pi^3}{n^2}\frac{1}{6}(n+1)(2n+1)$$

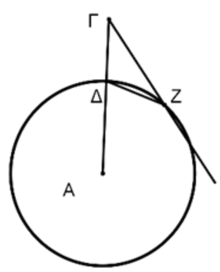
και όταν το n τείνει στο άπειρο, το εμβαδόν των μέσα κυκλικών τομέων και το εμβαδόν των έξω κυκλικών τομέων τείνουν προς την τιμή $\frac{4\pi^3}{3}$, δηλαδή το ένα τρίτο του εμβαδού κύκλου με ακτίνα το 2π. Ο Αρχιμήδης δεν χρησιμοποιεί όρια, δείχνει και εδώ τις ανισώσεις με τρόπο που θα δούμε στην συνέχεια στον τετραγωνισμό της παραβολής.

Όπως γνωρίζουμε στο έργο του *Κύκλου Μέτρησις* ο Αρχιμήδης έχει αποδείξει ότι κάθε κύκλος είναι ισοδύναμος με ορθογώνιο τρίγωνο του οποίου η μία κάθετη πλευρά είναι ίση με την ακτίνα και η άλλη κάθετη πλευρά είναι ίση με την περιφέρεια του κύκλου.
Με την έλικα ο Αρχιμήδης κατάφερε επίσης να τετραγωνίσει τον κύκλο. Στο Θεώρημα 18 του έργου του *Περί Ελίκων* απέδειξε ότι, αν φέρουμε την εφαπτόμενη της έλικας στο σημείο Α όπου ολοκληρώνεται η πρώτη περιστροφή, και θεωρήσουμε το σημείο

Κ στο οποίο τέμνει αυτή τον κατακόρυφο άξονα, τότε το μήκος ΟΚ είναι ίσο με το μήκος του πρώτου κύκλου.



Για την απόδειξη ο Αρχιμήδης χρησιμοποίησε τα παρακάτω επιχειρήματα. Πρώτα δείχνει ότι αν σε κύκλο με κέντρο Α φέρουμε μια χορδή ΔZ και προεκτείνουμε την ακτίνα $A\Delta$ υπάρχει σημείο Γ στην προέκταση της τέτοιο ώστε αν φέρουμε την τέμνουσα ΓZ να ισχύει $\frac{\Gamma\Delta}{\Delta Z}$ = δοθέντα λόγο.



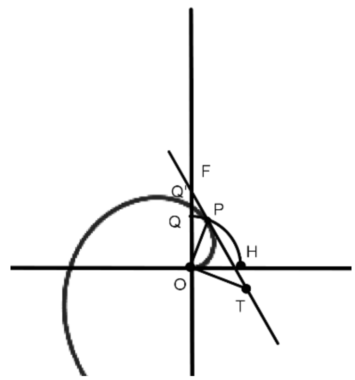
Στη συνέχεια αποδεικνύει (επόμενο σχήμα) ότι αν φέρουμε την εφαπτόμενη στην έλικα σ΄ ένα σημείο της P, την κάθετη στην OP στο O που τέμνει την εφαπτομένη στο T, τότε το μήκος του OT ισούται με το μήκος του τόξου PH (τόξο κύκλου με κέντρο O και ακτίνα OP).

Πράγματι αν δεν ήταν ίσα θα ήταν $OT > \text{τόξου } PH$ ή $OT < \text{τόξου } PH$. Έστω $OT > \text{τόξου } PH$ θα υπάρχει σημείο F στην προέκταση της OQ (σύμφωνα με το προηγούμενο συμπέρασμα) έτσι ώστε $\frac{FQ}{QP} = \frac{OP}{OT}$ ή $\frac{FQ}{OP} = \frac{QP}{OT}$ αλλά $OP = OQ$ οπότε

$$\frac{FQ}{OQ} = \frac{OP}{OT} < \frac{OP}{\widehat{HP}} < \frac{\widehat{QP}}{\widehat{HP}}$$

άρα

$$\frac{FQ}{QP}+1=\frac{\widehat{QP}}{\widehat{HP}}+1 \Rightarrow \frac{FO}{OQ}< \frac{\widehat{HQ}}{\widehat{HP}}$$



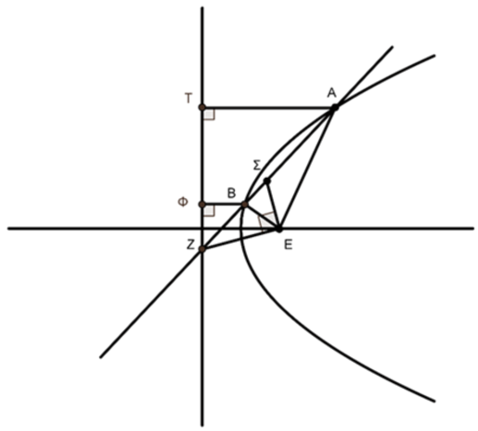
αλλά από τον ορισμό της έλικας τόξο $HQ = OQ'$ και τόξο $HP = OP$ άρα $\frac{FO}{OQ}<\frac{OQ'}{OP}$ δηλαδή $FO < OQ'$ το οποίο είναι άτοπο. Με όμοιο τρόπο μας οδηγήσει σε άτοπο και η άλλη ανίσωση ($OT < τόξου\, PH$) άρα τελικά $OT = τόξο\, PH$. Από το συμπέρασμα αυτό, συνάγεται ότι το τμήμα OT θα έχει μήκος ίσο με το μήκος του πρώτου κύκλου όταν το σημείο επαφής P είναι στο τέλος της πρώτης περιστροφής της έλικας.
Έχοντας σχηματίσει το μήκος του κύκλου ο τετραγωνισμός υλοποιείται με τον τρόπο που περιγράψαμε και πιο πριν στην τετραγωνίζουσα του Ιππία.

Παραμένοντας στον Αρχιμήδη μετά τον τετραγωνισμό του κύκλου ας δούμε πως μπορεί να τετραγωνιστεί ένα άλλο χωρίο, αυτό που σχηματίζει η παραβολή όταν αυτή τμηθεί από μια ευθεία.

4.4 Τετραγωνισμός παραβολής

Παραβολικό χωρίο είναι το τμήμα του επιπέδου που περικλείεται ανάμεσα σε μια παραβολή και μια ευθεία που την τέμνει. Ο Αρχιμήδης ήταν αυτός που κατάφερε να τετραγωνίσει το χωρίο αυτό. Πρώτα χρησιμοποίησε μια ευρετική μέθοδο που βασιζόταν στην μηχανική (κέντρο βάρους) και στη συνέχεια απέδειξε γεωμετρικά με τη βοήθεια της μεθόδου εξάντλησης που μας είναι ήδη γνωστή. Η περιγραφή των μεθόδων του Αρχιμήδη υπάρχει σε αρκετές μελέτες όπως του T. Heath (1861 – 1940), *Works of Archimedes* αλλά και Ε. Σταμάτη (1898-1990), *Αρχιμήδους Τετραγωνισμός παραβολής*, (εμπεριέχεται στο *Επιστημονικαί Εργασίαι – άρθρα,* τόμος Α'). Επίσης μια σύντομη περιγραφή των μεθόδων του Αρχιμήδη εμπεριέχεται και στο έργο του B. L. van der Waerden, *Αφύπνιση της Επιστήμης.*

Στη συνέχεια παρατίθεται η μέθοδος αυτή του τετραγωνισμού με ένα σύγχρονο τρόπο που θα μπορούσε να αποτελέσει και τμήμα των σχολικών Μαθηματικών που διδάσκονται στην θετική και τεχνολογική κατεύθυνση της β΄ Λυκείου.
Θα ξεκινήσουμε με τον ορισμό της εφαπτομένης παραβολής. Συγκεκριμένα θα θεωρήσουμε εφαπτομένη της παραβολής σ΄ ένα σημείο της A την θέση που παίρνει μια τέμνουσα AB όταν το σημείο B τείνει να ταυτιστεί με το σημείο A. Στο σημείο αυτό μπορούμε να αποδείξουμε την παρακάτω πρόταση.



Πρόταση: Το τμήμα AZ της εφαπτομένης της παραβολής που είναι μεταξύ του σημείου επαφής A και του σημείου τομής Z της εφαπτομένης με τη διευθετούσα φαίνεται από την εστία υπό ορθή γωνία.

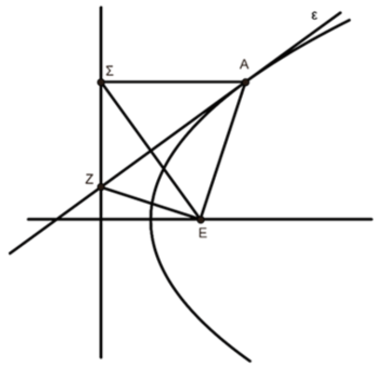
Απόδειξη

Για την απόδειξη της προηγούμενης πρότασης θεωρούμε τα σημεία A, B στην παραβολή και τις προβολές τους T, Φ πάνω στην διευθετούσα όπως βλέπουμε στο προηγούμενο σχήμα, ισχύει ότι $\frac{AE}{AT} = \frac{BE}{B\Phi} = 1$ και από τα όμοια τρίγωνα ZAT και $Z\Phi B$ έχουμε $\frac{ZA}{ZB} = \frac{AT}{B\Phi} = \frac{EA}{EB}$ δηλαδή η EZ είναι εξωτερική διχοτόμος στο τρίγωνο AEB. Η εσωτερική διχοτόμος $E\Sigma$ είναι κάθετη σ΄αυτή και όταν το σημείο B τείνει να συμπέσει με το A τότε και το σημείο Σ θα συμπέσει με το A οπότε η γωνία ZEA θα είναι ορθή.

Πρόταση: Αν Σ η προβολή του σημείου A της παραβολής πάνω στην διευθετούσα, τότε ισχύει ότι το A είναι πάνω στην μεσοκάθετο του ΣE (E η εστία της παραβολής) και μάλιστα η μεσοκάθετος αυτή είναι εφαπτόμενη της παραβολής (επόμενο σχήμα).

Απόδειξη

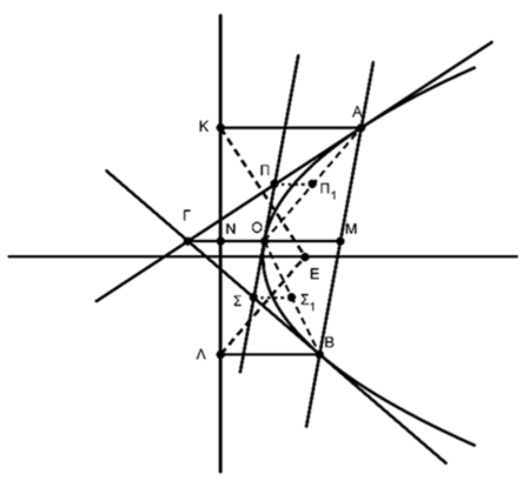
Το A είναι πάνω στην μεσοκάθετο του ΣE μια και ισχύει $A\Sigma = AE$. Επειδή ε είναι μεσοκάθετος του ΣE τα τρίγωνα ΣZA και ZEA είναι ίσα άρα η γωνία ZEA είναι ορθή οπότε σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση η ευθεία ε είναι εφαπτομένη της παραβολής. Στη συνέχεια θα ορίσουμε ως Αρχιμήδειο τρίγωνο, το τρίγωνο που έχει πλευρές τις εφαπτόμενες της παραβολής σε δύο σημεία A, B και η τρίτη πλευρά είναι η ευθεία AB.



Πρόταση: Αν φέρουμε το Αρχιμήδειο τρίγωνο $ΑΒΓ$ με σημεία επαφής τα $Α$, $Β$ και από το $Γ$ φέρουμε παράλληλη προς τον άξονα της παραβολής, τότε αυτή θα τμήσει το τμήμα $ΑΒ$ στο μέσο $Μ$ της $ΑΒ$ και την παραβολή στο μέσο $Ο$ του τμήματος $ΓΜ$. Αν φέρουμε την εφαπτόμενη στην παραβολή στο $Ο$, αυτή θα είναι παράλληλη στην $ΑΒ$.

Απόδειξη

Πράγματι το σημείο $Γ$ είναι το περίκεντρο του τριγώνου $ΚΛΕ$ στο παρακάτω σχήμα, μια και όπως έχουμε δείξει παραπάνω οι εφαπτόμενες είναι μεσοκάθετοι των πλευρών του $ΚΕ$ και $ΛΕ$. Άρα αν φέρουμε από το $Γ$ κάθετη στην $ΚΛ$ αυτή θα είναι μεσοκάθετη της πλευράς $ΚΛ$ δηλαδή το $Ν$ θα είναι μέσο της $ΚΛ$. Τώρα έχουμε $ΚΑ$ // $ΜΝ$ // $ΛΒ$ και $Ν$ μέσο της $ΚΛ$ άρα $Μ$ μέσο της $ΑΒ$. Φέρουμε την εφαπτόμενη στην παραβολή στο σημείο $Ο$ και ας είναι $Π$ το σημείο τομής με την $ΑΓ$ και $Σ$ με την $ΒΓ$ τότε έχουμε δύο νέα Αρχιμήδεια τρίγωνα, τα $ΠΟΑ$ και $ΣΟΒ$ για τα οποία ισχύει η ιδιότητα που αποδείξαμε πριν, δηλαδή αν $ΠΠ1$ // $ΓΜ$ τότε $Π_1$ μέσο της $ΟΑ$ και αν $ΣΣ_1$// $ΟΜ$ τότε $Σ_1$ μέσο της $ΟΒ$.

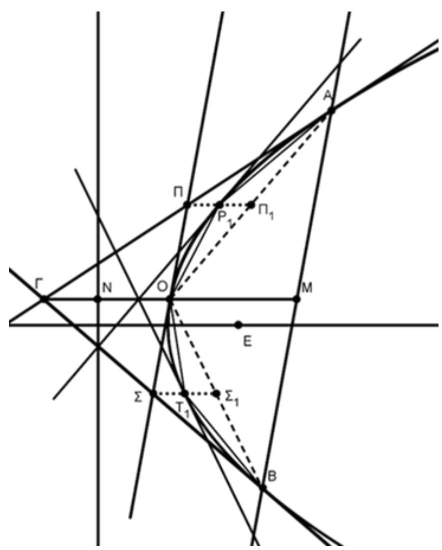


Στο τρίγωνο $ΓΟΑ$ από το μέσο της πλευράς $ΟΑ$ έχουμε παράλληλη προς την $ΟΓ$ άρα $Π$ μέσο $ΑΓ$ και όμοια $Σ$ μέσο $ΒΓ$ οπότε στο τρίγωνο $ΑΒΓ$ *το* $ΠΣ$ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών. Άρα είναι παράλληλο στην $ΑΒ$ *κ*αι θα περνά και από το μέσο Ο της διαμέσου $ΓΜ$. Επίσης τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ *και* $ΑΟΒ$ έχουν την ίδια βάση και το ύψος του ενός είναι ίσο με το μισό του άλλου, άρα την ίδια σχέση έχουν και τα εμβαδά τους δηλαδή $(ΑΒΓ) = 2(ΑΟΒ)$. Επίσης το τρίγωνο $ΓΠΣ$ που σχηματίζεται από τα μέσα των δύο πλευρών του $ΑΒΓ$ θα έχει εμβαδόν ίσο με το $\frac{1}{4}(ΑΒΓ)$ ή $(ΓΠΣ) = \frac{1}{2}(ΑΟΒ)$.

Πρόταση: Το εμβαδόν του παραβολικού χωρίου που ορίζεται από την παραβολή και την ευθεία $ΑΒ$ είναι τα $\frac{2}{3}$ του Αρχιμήδειου τριγώνου $ΑΒΓ$ ή τα $\frac{4}{3}$ του τριγώνου $ΑΟΒ$.

Απόδειξη

Θα προσεγγίσουμε το εμβαδόν του παραβολικού χωρίου μέσω των τριγώνων που μπορούμε να εγγράψουμε μέσα σ΄ αυτό. Θα ξεκινήσουμε από το Αρχιμήδειο τρίγωνο $ΑΒΓ$ (επόμενο σχήμα), Από το τρίγωνο αυτό θα αφαιρέσουμε το τρίγωνο $ΣΠΓ$ που είναι έξω από το χωρίο της παραβολής και θα κρατήσουμε το $ΑΟΒ$ που είναι εντός. Επειδή ισχύει $(ΓΠΣ) = \frac{1}{2}(ΑΟΒ)$, το τρίγωνο που αφαιρείται είναι το μισό αυτού που παραμένει.



Αν δούμε στο παραπάνω σχήμα όταν φέρουμε την εφαπτομένη της παραβολής στο $Ο$ σχηματίζονται τα τρίγωνα $ΑΟΠ$ και $ΣΟΒ$ που είναι και αυτά Αρχιμήδεια. Άρα έχουν και αυτά τις ιδιότητες που δείξαμε πριν. Αν και σ΄ αυτά διώξουμε τα τρίγωνα που είναι έξω από το παραβολικό χωρίο και κρατήσουμε τα τρίγωνα που είναι μέσα σε αυτό OP_1A και OT_1B τότε έχουμε την ίδια σχέση με πριν, δηλαδή τα τρίγωνα που αφαιρούμε έχουν το μισό εμβαδόν των τριγώνων που παραμένουν. Αν συνεχίσουμε την ίδια διαδικασία, δηλαδή φέρουμε την εφαπτομένη στην παραβολή στα σημεία P_1 και T_1 σχηματίζονται τέσσερα νέα Αρχιμήδεια τρίγωνα στα οποία κάνουμε τον ίδιο διαχωρισμό. Τα τρίγωνα που είναι μέσα στην παραβολή $\varepsilon(\kappa)$ συμπληρώνουν τα προηγούμενα, έτσι ώστε να προσεγγίσουν καλύτερα την παραβολή και έχουν εμβαδόν διπλάσιο από το εμβαδόν των τριγώνων που είναι έξω από την παραβολή $\varepsilon(\delta)$. Αν αυτό συνεχιστεί επ΄ άπειρο, στο όριο της άπειρης αυτής διαδικασίας, τα τρίγωνα που είναι μέσα στην παραβολή θα καλύψουν πλήρως το παραβολικό χωρίο οπότε το εμβαδόν του παραβολικού χωρίου, θα είναι το άθροισμα των εμβαδών των εσωτερικών τριγώνων τα οποία έχουν εμβαδόν διπλάσιο από τα εξωτερικά τρίγωνα που αποκόπτουμε. Τα τρίγωνα αυτά όλα μαζί συμπληρώνουν το Αρχιμήδειο τρίγωνο $AB\Gamma$ δηλαδή $(AB\Gamma) = \varepsilon(\kappa) + \varepsilon(\delta)$ αλλά $\frac{1}{2}\varepsilon(\kappa) = \varepsilon(\delta)$, άρα έχουμε $(AB\Gamma) = \varepsilon(\kappa) + \frac{1}{2}\varepsilon(\kappa)$ οπότε $\varepsilon(\kappa) = \frac{2}{3}(AB\Gamma)$. ‘Ομως έχουμε ότι $\varepsilon(\kappa)$ ισούται με το εμβαδόν του παραβολικού χωρίου στο όριο της άπειρης διαδικασίας. Άρα δείξαμε ότι τελικά το εμβαδόν του παραβολικού χωρίου είναι τα $\frac{2}{3}(AB\Gamma)$.

Η απόδειξη που είδαμε παραπάνω για τον υπολογισμό του παραβολικού χωρίου έχει γίνει με σύγχρονο συμβολισμό αλλά τα επιχειρήματα που χρησιμοποιούμε ουσιαστικά είναι τα ίδια με αυτά του Αρχιμήδη. Το επιχείρημα που υπάρχει στην απόδειξη αυτή είναι το άθροισμα απείρων όρων γεωμετρικής προόδου. Ας συμβολίσουμε με Δ το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$, δηλαδή αν $(AB\Gamma) = \Delta\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ (AOB) = \frac{1}{2}\Delta$, επίσης τα τρίγωνα $OA\Pi$ και $OA\Gamma$ έχουν ίδιο ύψος και η βάση του ενός είναι διπλάσια του άλλου. Το ίδιο συμβαίνει και με τα τρίγωνα $OA\Gamma$ και $MA\Gamma$ όπως επίσης και με τα τρίγωνα $MA\Gamma$ και $AB\Gamma$. Άρα θα έχουμε ότι $(OAP_1) = \frac{1}{2}(OA\Pi) = \frac{1}{4}(OA\Gamma) = \frac{1}{8}(MA\Gamma) = \frac{1}{16}(AB\Gamma) = \frac{1}{16}\Delta$. Το εμβαδόν του παραβολικού χωρίου θα ισούται με το παρακάτω άθροισμα

$$E = (OAB) + (O\Pi_1 A) + (OT_1 B) + \cdots = \frac{1}{2}\Delta + \frac{2}{16}\Delta + \frac{4}{2}\cdot\frac{1}{8^2}\Delta + \ldots$$
$$= \frac{1}{2}\Delta\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots\right) = \frac{1}{2}\Delta\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}\Delta.$$

Στον υπολογισμό του προηγούμενου αθροίσματος χρησιμοποιήσαμε το άθροισμα απείρων όρων φθίνουσας γεωμετρικής προόδου το οποίο υπολογίζεται σήμερα με χρήση ορίων. Ο Αρχιμήδης φυσικά δεν χρησιμοποίησε την έννοια του ορίου αλλά προσέγγισε το άθροισμα αυτό με το επιχείρημα: «Εάν δίνεται μια σειρά μεγεθών με λόγο $\frac{1}{4}$, τότε το άθροισμα των μεγεθών αυτών συν το ένα τρίτο του μεγαλύτερου όρου θα ισούται με τα τέσσερα τρίτα του πρώτου όρου». Αυτό μπορεί εύκολα να αποδειχθεί στο προηγούμενο άθροισμα δηλαδή

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4^n} = \frac{4}{3}.$$

Για την απόδειξη μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την σχέση

$$\frac{1}{4^\kappa} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4^\kappa} = \frac{4}{3\cdot 4^\kappa} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4^{\kappa-1}}$$

οπότε

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^{n-1}} + \left(\frac{1}{4^n} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4^n}\right)$$
$$= 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \left(\frac{1}{4^{n-1}} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4^{n-1}}\right) = \ldots$$
$$1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4^2}\right) = 1 + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\right) = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}.$$

Στη συνέχεια ο Αρχιμήδης με την μέθοδο της εξάντλησης μεταφέρει την παραπάνω ιδιότητα στα τρίγωνα που είναι μέσα στην παραβολή. Αποδεικνύει ότι το παραβολικό χωρίο αν και μεγαλύτερο από κάθε μερικό άθροισμα της γεωμετρικής προόδου διαφέρει από αυτό λιγότερο από οποιαδήποτε δεδομένη επιφάνεια. Ας θυμηθούμε από τα *Στοιχεία* την μέθοδο εξάντλησης του Ευδόξου «Αν μας δοθούν δύο άνισα μεγέθη και από το μεγαλύτερο αφαιρέσουμε περισσότερο από το μισό (ή το μισό) και από αυτό το μέγεθος που μένει περισσότερο από το μισό (ή το μισό) και αυτή η διαδικασία επαναλαμβάνεται συνεχώς θα μείνει ένα μέγεθος που θα είναι μικρότερο από το αρχικά δοθέν μικρότερο μέγεθος οσοδήποτε μικρό κι αν είναι αυτό». Τέλος, με χρήση ανισοτήτων δείχνει ότι το εμβαδόν του παραβολικού χωρίου δεν μπορεί να είναι ούτε μεγαλύτερο ούτε μικρότερο από τα $\frac{4}{3}(OAB)$. Αν συμβολίσουμε με S_p το εμβαδόν του παραβολικού χωρίου και με S_n το άθροισμα των εμβαδών των τριγώνων που εγγράψαμε στο παραβολικό χωρίο ισχύει ότι $S_p - S_n < \varepsilon$ για οποιαδήποτε μικρή επιφάνεια ε. Ο συλλογισμός εξελίσσεται ως εξής: έστω $S_p > \frac{4}{3}(OAB)$ τότε και το $\varepsilon > S_p - S_n > \frac{4}{3}(OAB) - S_n$, οπότε $S_n + \varepsilon > \frac{4}{3}(OAB)$. Επίσης $S_n + \theta = \frac{4}{3}(OAB)$ όπου θ είναι το ένα τρίτο του εμβαδού του μεγαλύτερου όρου του αθροίσματος S_n άρα $\varepsilon > \theta$ κάτι το οποίο είναι άτοπο. Αν το $S_p < \frac{4}{3}(OAB)$, τότε αν αθροίσουμε τρίγωνα, έτσι ώστε το τελευταίο από αυτά να έχει εμβαδόν μικρότερο από την διαφορά $\frac{4}{3}(OAB) - S_p$ θα έχουμε ότι η υπεροχή του $\frac{4}{3}(OAB) - S_p > E$ όπου E το τελευταίο τρίγωνο που αθροίσαμε. Αλλά $\frac{4}{3}(OAB) - S_n = \frac{E}{3} < E$ άρα ισχύει $S_p < S_n$ το οποίο είναι αδύνατο άρα τελικά $S_p = \frac{4}{3}(OAB)$.

Στο σημείο αυτό για να μελετήσουμε περισσότερο τις μεθόδους που εφάρμοσε ο Αρχιμήδης για την μέτρηση επιφανειών, θα φύγουμε από το επίπεδο για να πάμε στον χώρο και πιο συγκεκριμένα στην μέτρηση της επιφάνειας σφαίρας. Εκεί θα δούμε τον ιδιοφυή τρόπο με τον οποίο μπόρεσε να μετρήσει την επιφάνεια αυτή ο μεγάλος Έλληνας Μαθηματικός.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^{Ο} ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΣΤΟ ΧΩΡΟ

5.1 Μέτρηση επιφάνειας σφαίρας από τον Αρχιμήδη

Από τον Αρχιμήδη στο *Περί σφαίρας και κυλίνδρου* έχουμε τον υπολογισμό της επιφάνειας σφαίρας. Στην πρόταση 33 (λγ΄) διαβάζουμε:

λγ′

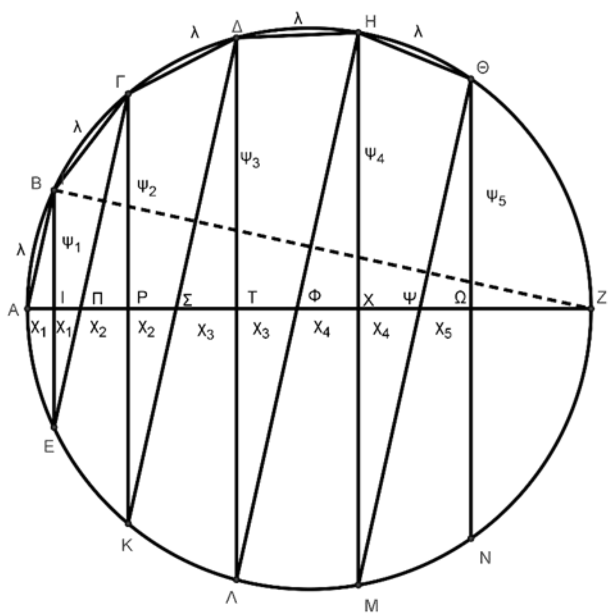
Πάσης σφαίρας ἡ ἐπιφάνεια τετραπλασία ἐστὶ τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν αὐτῇ.

Η επιφάνεια κάθε σφαίρας είναι τετραπλάσια του μέγιστου κύκλου αυτής.

Στη συνέχεια θα δείξουμε την πρόταση αυτή σύμφωνα με τον Αρχιμήδη. Θα μας χρειαστεί ο τύπος $E = \pi\lambda(r + R)$ που δίνει το εμβαδόν κόλουρου κώνου με ακτίνες βάσεων r, R και γενέτειρα λ. Θα υπολογίσουμε το εμβαδόν του σφαιρικού τμήματος που προκύπτει από την περιστροφή του τόξου $AB\Theta$ κατά 360^{o} ως προς την διάμετρο AZ. Για τον λόγο αυτό χωρίζουμε το τόξο $AB\Theta$ σε ίσα μέρη. Στο παρακάτω σχήμα, για λόγους εποπτείας, το τόξο $AB\Theta$ έχει χωριστεί σε 5 ίσα τόξα $AB,\ B\Gamma,\ \Gamma\Delta,\ \Delta H,\ H\Theta,$ αλλά γενικότερα θα χρειαστούν n. Από τα σημεία $B,\ \Gamma,\ \Delta,\ H,\ \Theta,$ φέρνουμε κάθετους στην διάμετρο AZ. Από την ισότητα των τριγώνων AIB και $I\Pi E$ έχουμε $AI = I\Pi = x_1$. Όμοια από την ισότητα των τριγώνων $\Pi P\Gamma$ και $P\Sigma K,\ \Sigma\Delta T$ και $T\Lambda\Phi, \Phi HX$ και $XM\Psi$ έχουμε

$$\Pi P = \Pi\Sigma = x_2, \Sigma T = T\Phi = x_3, \Phi X = X\Psi = x_4.$$

Τα τρίγωνα $AIB, \Pi P\Gamma, \Sigma T\Delta, \Phi XH, \Psi\Omega H, ABZ$ είναι όμοια άρα



$$\frac{\psi_1}{x_1} = \frac{\psi_2}{x_2} = \frac{\psi_3}{x_3} = \frac{\psi_4}{x_4} = \frac{\psi_5}{x_5} = \frac{BZ}{\lambda} \ (1)$$

Κατά την περιστροφή του σχήματος ως προς τη διάμετρο AZ, το ημικύκλιο AZ θα δημιουργήσει την επιφάνεια μιας σφαίρας. Η χορδή AB θα δημιουργήσει επιφάνεια κώνου και οι υπόλοιπες χορδές επιφάνειες κόλουρων κώνων. Το άθροισμα όλων των παράπλευρων επιφανειών των κώνων Σ, προσεγγίζει το εμβαδόν του σφαιρικού τμήματος που δημιουργεί το τόξο $AB\Theta$.

$$\Sigma = \pi\lambda\psi_1 + \pi\lambda(\psi_1 + \psi_2) + \pi\lambda(\psi_2 + \psi_3) + \pi\lambda(\psi_3 + \psi_4) + \pi\lambda(\psi_3 + \psi_4) =$$
$$= \pi\lambda(2\psi_1 + 2\,\psi_2 + 2\,\psi_3 + 2\psi_4 + \psi_5).\ (2)$$

Αλλά από την σχέση (1) έχουμε

$$\frac{\psi_1}{x_1} = \frac{\psi_2}{x_2} = \frac{\psi_3}{x_3} = \frac{\psi_4}{x_4} = \frac{\psi_5}{x_5} = \frac{2\psi_1}{2x_1} = \frac{2\psi_2}{2x_2} = \frac{2\psi_3}{2x_3} = \frac{2\psi_4}{2x_4} = \frac{\psi_5}{x_5} =$$

$$\frac{2\psi_1 + 2\psi_2 + 2\psi_3 + 2\psi_4 + \psi_5}{2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5} = \frac{BZ}{\lambda}.$$

Οπότε έχουμε ότι

$$\lambda(2\psi_1 + 2\psi_2 + 2\psi_3 + 2\psi_4 + \psi_5) = BZ(2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5) = BZ \cdot A\Omega.$$

Αν αντικαταστήσουμε στο άθροισμα (2) των παράπλευρων επιφανειών των κώνων θα έχουμε

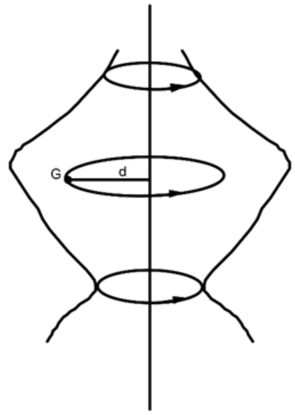
$$\Sigma = \pi \cdot AB \cdot A\Omega.$$

Αν τώρα γενικεύσουμε με n τόξα τον χωρισμό του τόξου $AB\Theta$, όπου $n \to \infty$ τότε το μήκος λ→ 0. Η πλευρά $BZ \to 2\rho$. Άρα το εμβαδόν της σφαιρικού τμήματος $A\Theta$ με ύψος $A\Omega = h$ θα ισούται με $E_{\sigma\varphi\alpha\iota\rho\iota\kappa o\acute{u}\ \tau\mu\acute{\eta}\mu\alpha\tau o\varsigma} = 2\pi\rho h$, ειδικά αν το ύψος $h = 2\rho$ τότε έχουμε ότι το συνολικό εμβαδόν της σφαιρικής επιφάνειας

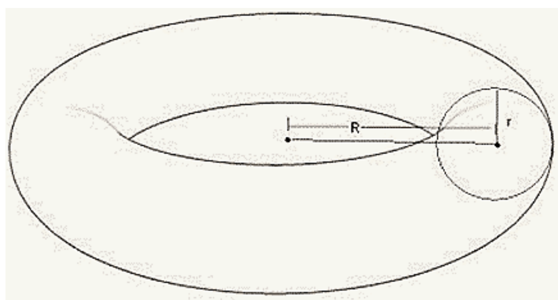
$$E_{\varepsilon\pi\iota\varphi.\ \sigma\varphi\alpha\acute{\iota}\rho\alpha\varsigma} = 4\pi\rho^2.$$

5.2 Το θεώρημα του Πάππου

Με την μέτρηση της επιφάνειας που δημιουργεί μια καμπύλη όταν περιστρέφεται γύρω από άξονα ασχολήθηκε και ο Πάππος από την Αλεξάνδρεια (290 – 350 μ.Χ.), μερικούς αιώνες αργότερα από τον Αρχιμήδη. Σύμφωνα με το θεώρημα του Πάππου το εμβαδόν της επιφάνειας που σχηματίζει μια καμπύλη, όταν περιστρέφεται γύρω από έναν άξονα κατά 360^o, ισούται με το μήκος της καμπύλης επί το μήκος που διαγράφει το κέντρο βάρους της καμπύλης κατά την περιστροφή αυτή. Δηλαδή αν στο παρακάτω σχήμα η καμπύλη έχει μήκος λ και το κέντρο βάρους απέχει απόσταση d από τον άξονα, τότε η επιφάνεια που σχηματίζεται από την περιστροφή θα έχει εμβαδόν $E = 2\lambda\pi d.$



Η επιφάνεια της σφαίρας μπορούμε να πούμε ότι προκύπτει από την περιστροφή ενός κύκλου κατά 360^o ως προς άξονα μια διάμετρό του. Με το θεώρημα αυτό μπορεί πια εύκολα να βρεθεί ο τύπος που είδαμε πριν από τον Αρχιμήδη. Με τη μέθοδο αυτή μπορεί εύκολα να υπολογιστεί το εμβαδόν της επιφάνειας της σπείρας. Σπείρα είναι το στερεό εκ περιστροφής που παράγεται από την περιστροφή ενός κύκλου στον τρισδιάστατο χώρο γύρω από άξονα συν επίπεδο με τον κύκλο. Συνήθως θεωρείται ότι ο άξονας δεν τέμνει ούτε εφάπτεται με τον κύκλο. Η επιφάνεια του, έχει σχήμα δακτυλιοειδές.



Όπως βλέπουμε στο παραπάνω σχήμα περιστρέφουμε κύκλο με ακτίνα r ως προς άξονα που βρίσκεται σε απόσταση R από το κέντρο του κύκλου. Σύμφωνα με το θεώρημα του Πάππου το εμβαδόν της επιφάνειας θα ισούται με $E = 2\pi r \cdot 2\pi R = 4\pi^2 rR$. Το θεώρημα του Πάππου διατυπώθηκε το 1640 και από τον Ελβετό Μοναχό P. Guldin (1577 – 1643).

Στο σημείο αυτό ολοκληρώνεται, για την εργασία αυτή, η παρουσίαση των μεθόδων που χρησιμοποίησαν οι αρχαίοι Έλληνες Μαθηματικοί για την μέτρηση επιφανειών. Από την εποχή όμως των Πυθαγορείων έχει αρχίσει ένα «καινούργιο» θέμα, που παρουσιάστηκε παράλληλα με τα προηγούμενα επιτεύγματα, να απασχολεί την Μαθηματική και γενικότερα Φιλοσοφική σκέψη των αρχαίων Ελλήνων. Αυτό δεν είναι άλλο από το θέμα της ανακάλυψης της ασυμμετρίας. Το θέμα αυτό θα μας απασχολήσει στην συνέχεια της εργασίας αυτής.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6^{ο} Η ΑΝΑΚΑΛΥΨΗ ΤΗΣ ΑΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ

6.1 Η ασυμμετρία στα *Στοιχεία*

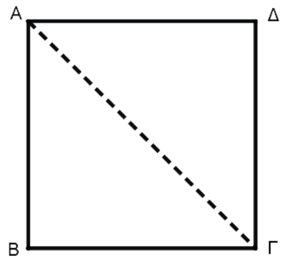
Η ανακάλυψη της ασυμμετρίας από τους αρχαίους Έλληνες αποτέλεσε ένα από τα μεγαλύτερα επιτεύγματα στην ιστορία των Μαθηματικών. Η ανακάλυψη αυτή έρχεται ως απόρροια του ερευνητικού τρόπου σκέψης των αρχαίων Ελλήνων. Η χρονολογία αλλά και ο τρόπος με τον οποίο συνέβη αποτελούν ερωτήματα στα οποία οι υπάρχουσες μαρτυρίες δεν μας επιτρέπουν να απαντήσουμε με απόλυτη βεβαιότητα. Από το Χ βιβλίο των *Στοιχείων* έχουμε τον παρακάτω ορισμό: «*Σύμμετρα μεγέθη λέγεται τὰ τῷ αὐτῷ μέτρῳ μετρούμενα, ἀσύμμετρα δέ, ὧν μηδὲν ἐνδέχεται κοινὸν μέτρον γενέσθαι*». Η γενεσιουργός αιτία για την ανακάλυψη της ασυμμετρίας δεν μας είναι γνωστή. Είναι αρκετές οι υποψήφιες αιτίες, όπως για παράδειγμα η προσπάθεια να βρεθεί το κοινό μέτρο της διαγώνιου τετραγώνου με την πλευρά του. Άλλη αιτία; Η διερεύνηση των ιδιοτήτων του κανονικού πενταγώνου, μια και η πλευρά με τη διαγώνιό του είναι μεγέθη ασύμμετρα. Γενεσιουργός αιτία μπορεί να ήταν και η προσπάθεια να χωριστούν τα μουσικά διαστήματα (οκτάτονος $2:1$, τετράτονος $4:3$ και πεντάτονος $3:2$) με τον γεωμετρικό μέσο ή ακόμη και η κατασκευή τετραγώνου με διπλάσιο εμβαδόν από ένα δεδομένο. Θα αναζητήσουμε την ανακάλυψη αυτή από αναφορές που έχουμε από αρχαίους Έλληνες συγγραφείς.

Σχετική αναφορά έχουμε από τον Αριστοτέλη (384 - 322 π.Χ.) στα *Αναλυτικά Πρότερα* (41α, 26) όπου μας λέει *«Ἀσύμμετρος ἡ διάμετρος διά το γίγνεσθαι τά περιττά ἴσα τοῖς ἀρτίοις συμμέτρους τεθείσης».* Δηλαδή η διάμετρος (η διαγώνιος του τετραγώνου) είναι ασύμμετρος (προς την πλευρά), διότι αν την δεχτούμε ως σύμμετρη θα φτάσουμε σε ισότητα, η οποία θα εξισώνει έναν άρτιο με έναν περιττό αριθμό. Σχετικές αναφορές για αυτό μας δίνει ο Πάππος ο Αλεξανδρεύς (4^{ος} αιώνας μ.Χ.) σε σχόλια που έγραψε για το Χ βιβλίο των *Στοιχείων,* δηλώνει ότι η θεωρία των ασύμμετρων έλαβε την αρχή στη σχολή των Πυθαγορείων και μάλιστα η θεωρία περί του αρτίου και περιττού έδωσε στους Πυθαγόρειους τα μέσα, για να αποδείξουν την αρρητότητα της διαγωνίου του τετραγώνου ως προς την πλευρά του. Για τους Πυθαγόρειους η αντίθεση άρτιου περιττού δεν είναι μόνο μια θεμελιώδης αρχή της αριθμητικής αλλά μια βασική αρχή όλης της φύσης. Η σχετική θεωρία και ιδιότητες των αριθμών αυτών υπάρχουν στα *Στοιχεία* βιβλία VII όροι, και IX προτάσεις 21-34. Η πλήρης απόδειξη αυτού που λακωνικά μας ανέφερε ο Αριστοτέλης υπάρχει στο παράρτημα του Χ βιβλίου των *Στοιχείων* σε σχόλιο άγνωστου συγγραφέα.

Πρόταση: *Ἀσύμμετρος ἡ διάμετρος τῇ πλευρᾷ μήκει.*

Αν αποδώσουμε την απόδειξη με σύγχρονο συμβολισμό θα έχουμε: Έστω ότι η διαγώνιος $ΑΓ$ και η πλευρά $ΑΒ$ ενός τετραγώνου είναι σύμμετρες, και έστω ο λόγος

$ΑΓ: ΑΒ$ σε ανάγωγη μορφή είναι $m: n$ όπου ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των m, n είναι μονάδα. Από την ισότητα $ΑΓ: ΑΒ = m: n$ θα έχουμε ότι $ΑΓ^2 : ΑΒ^2 = m^2 : n^2$.



Από Πυθαγόρειο θεώρημα $ΑΓ^2 = 2ΑΒ^2$οπότε ο λόγος $ΑΓ^2 : ΑΒ^2$ ισούται με 2 άρα και $m^2 = 2\,n^2$ (1). Η τελευταία αυτή σχέση μας λέει ότι ο m^2 είναι άρτιος. Από αυτό συνάγεται ότι και ο m είναι άρτιος, γιατί αν ήταν περιττός και το τετράγωνό του θα ήταν περιττός. Επειδή m, n δεν έχουν κοινούς διαιρέτες n, αναγκαστικά θα είναι περιττός. Αν h το μισό του m τότε $m = 2h$ και $m^2 = 4h^2$ και σύμφωνα με την (1) $n^2 = 4h^2$. Η προηγούμενη σχέση μας λέει ότι ο n^2 είναι άρτιος, δηλαδή ο n άρτιος κάτι το οποίο είναι αδύνατο, ο ίδιος αριθμός να είναι άρτιος και περιττός.

6.2 Η ασυμμετρία στον πλατωνικό διάλογο «Θεαίτητο»

Άλλη αναφορά για τους ασύμμετρους αριθμούς στην αρχαία Ελληνική γραμματεία βρίσκουμε στον Πλατωνικό διάλογο *Θεαίτητος*. Ο *Θεαίτητος* είναι ένας από τους διαλόγους του Πλάτωνα σχετικά με τη φύση της γνώσης. Στο διάλογο αυτό ο Θεαίτητος απαριθμεί μερικές περιπτώσεις δυνάμεων (πλευρές τετραγώνων) με εμβαδά 3, 4, …, 17 μονάδες που δεν είναι σύμμετρες με την μονάδα, ώσπου καταλήγει σε ένα γενικότερο ορισμό των σύμμετρων και ασύμμετρων πλευρών τετραγώνων ως προς την διαγώνιό του.

Θεαίτητος: περὶ δυνάμεών τι ἡμῖν Θεόδωρος ὅδε ἔγραφε, τῆς τε τρίποδος πέρι καὶ πεντέποδος [ἀποφαίνων] ὅτι μήκει οὐ σύμμετροι τῇ ποδιαίᾳ, καὶ οὕτω κατὰ μίαν ἑκάστην προαιρούμενος μέχρι τῆς ἑπτακαιδεκάποδος: ἐν δὲ ταύτῃ πως ἐνέσχετο. ἡμῖν οὖν εἰσῆλθέ τι τοιοῦτον, ἐπειδὴ ἄπειροι τὸ πλῆθος αἱ δυνάμεις ἐφαίνοντο, πειραθῆναι συλλαβεῖν εἰς ἕν, ὅτῳ πάσας [147e] ταύτας προσαγορεύσομεν τὰς δυνάμεις.

Σωκράτης: ἦ καὶ ηὕρετέ τι τοιοῦτον;

Θεαίτητος: ἔμοιγε δοκοῦμεν: σκόπει δὲ καὶ σύ.

Σωκράτης: λέγε.

Θεαίτητος: τὸν ἀριθμὸν πάντα δίχα διελάβομεν: τὸν μὲν δυνάμενον ἴσον ἰσάκις γίγνεσθαι τῷ τετραγώνῳ τὸ σχῆμα ἀπεικάσαντες τετράγωνόν τε καὶ ἰσόπλευρον προσείπομεν.

Σωκράτης: καὶ εὖ γε.

Θεαίτητος: τὸν τοίνυν μεταξὺ τούτου, ὧν καὶ τὰ τρία καὶ τὰ πέντε καὶ πᾶς ὃς ἀδύνατος ἴσος ἰσάκις γενέσθαι, ἀλλ' ἢ πλείων ἐλαττονάκις ἢ ἐλάττων πλεονάκις γίγνεται, μείζων δὲ καὶ ἐλάττων ἀεὶ *πλευρὰ αὐτὸν περιλαμβάνει, τῷ προμήκει αὖ σχήματι ἀπεικάσαντες προμήκη ἀριθμὸν ἐκαλέσαμεν.*

Σωκράτης: κάλλιστα. ἀλλὰ τί τὸ μετὰ τοῦτο;

Θεαίτητος: ὅσαι μὲν γραμμαὶ τὸν ἰσόπλευρον καὶ ἐπίπεδον ἀριθμὸν τετραγωνίζουσι, μῆκος ὡρισάμεθα, ὅσαι δὲ τὸν ἑτερομήκη, [148b] δυνάμεις, ὡς μήκει μὲν οὐ συμμέτρους ἐκείναις, τοῖς δ' ἐπιπέδοις ἃ δύνανται. καὶ περὶ τὰ στερεὰ ἄλλο τοιοῦτον.

Σωκράτης: ἄριστά γ' ἀνθρώπων

Σε νεοελληνική μετάφραση:

Θεαίτητος: Για τις δυνάμεις (πλευρές τετραγώνου) με εμβαδόν τρία και του πέντε κάτι σχεδίαζε αυτός εδώ ο Θεόδωρος (αποδεικνύων) ότι δεν είναι σύμμετρες με την μονάδα. Και εξακολούθησε να κάνει το ίδιο για καθένα τετράγωνο μέχρι αυτό με εμβαδόν 17 μονάδες, σε αυτό κάπως σταμάτησε. Μας ήρθε λοιπόν στον νου κάτι σαν αυτό εδώ, επειδή οι δυνάμεις (πλευρές των τετραγώνων) φαίνονται να είναι άπειρες το πλήθος, να δοκιμάσουμε να τις συμπεριλάβουμε σε μία έννοια, και μ΄ αυτή να προσαγορεύσουμε όλες αυτές τις πλευρές (δυνάμεις).

Σωκράτης: Και ευρήκατε, λοιπόν κάποια τέτοια έννοια;

Θεαίτητος: Νομίζω. Πρόσεξε όμως και εσύ ο ίδιος.

Σωκράτης: Λέγε.

Θεαίτητος: Τους αριθμούς όλους τους χωρίσαμε σε δύο ήδη. Όσους μπορούν να γίνουν (από τον πολλαπλασιασμό) ίσων με ίσα, τους παριστάνουμε με το τετράγωνο σχήμα και τους ονομάζουμε τετραγώνους και ισοπλεύρους.

Σωκράτης: Και πολύ σωστά.

Θεαίτητος: Τους αριθμούς πάλι, τους ενδιάμεσους, αυτούς στους οποίους ανήκει και το τρία και το πέντε και κάθε άλλος αριθμός που δεν μπορεί να προκύψει (από τον πολλαπλασιασμό) ίσων με ίσα, αλλά γίνεται η με περισσότερα επί λιγότερα ή με λιγότερα επί περισσότερα και περιέχεται, πάντοτε, από μία πλευρά μεγαλύτερη και μία πλευρά μικρότερη, τους προσομοιάσαμε με το σχήμα του ορθογωνίου (προμήκους) και τους ονομάσαμε ορθογώνιους (προμήκεις) αριθμούς.

Σωκράτης: Λαμπρά. Αλλά τι κάματε έπειτα;

Θεαίτητος: Όσες λοιπόν, γραμμές σχηματίζουν στο επίπεδο τετράγωνο με επιφάνεια τετράγωνο αριθμό τις ονομάσαμε μήκος, όσες πάλι σχηματίζουν τετράγωνο με επιφάνεια τον ετερομήκη τις ονομάζουμε δυνάμεις, επειδή δεν είναι σύμμετρες κατά μήκος με τον ετερομήκη αλλά μόνο κατά το εμβαδόν. Το ίδιο εκάμαμε και με τα στερεά.

Σωκράτης: Άριστα παιδιά μου!

Π.χ. αν έχουμε τετράγωνο με εμβαδόν, τετράγωνο αριθμό $E = 9$ τότε η πλευρά του τετραγώνου αυτού ονομάζεται μήκος (μήκει σύμμετρος). Αν έχουμε τετράγωνο με εμβαδόν ετερομήκη αριθμό $E = 6$ τότε η πλευρά του ονομάζεται δύναμη και είναι δυνάμει σύμμετρος. Σήμερα την πλευρά αυτή θα την σημειώναμε με το $\sqrt{6}$.

Ο W. Knorr (1945 – 1997) για την χρήση των όρων «μήκος» και «δυνάμεις» που χρησιμοποιεί ο Πλάτωνας προτείνει μια περιγραφή των όρων. Δηλαδή εκεί που αναφέρει «μήκος» εννοεί «γραμμή μήκει σύμμετρος με την ποδιαία», ενώ εκεί που αναφέρει «δύναμις» εννοεί «γραμμή ου σύμμετρος, αλλά δυνάμει μόνο σύμμετρος με την ποδιαία». Οι ορισμοί μήκει σύμμετρος και δυνάμει σύμμετρος εμφανίζονται στα *Στοιχεία* όροι δ στο Χ βιβλίο:

1.Σύμμετρα μεγέθη λέγεται τὰ τῷ αὐτῷ μέτρῳ μετρούμενα, ἀσύμμετρα δέ, ὧν μηδὲν ἐνδέχεται κοινὸν μέτρον γενέσθαι.

2.Εὐθεῖαι δυνάμει σύμμετροί εἰσίν, ὅταν τὰ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα τῷ αὐτῷ χωρίῳ μετρῆται, ἀσύμμετροι δέ, ὅταν τοῖς ἀπ' αὐτῶν τετραγώνοις μηδὲν ἐνδέχηται χωρίον κοινὸν μέτρον γενέσθαι.

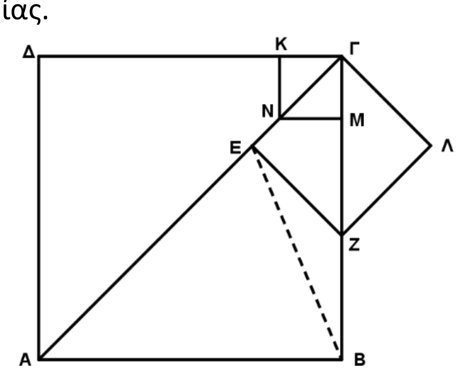
3.Τούτων ὑποκειμένων δείκνυται, ὅτι τῇ προτεθείσῃ εὐθείᾳ ὑπάρχουσιν εὐθεῖαι πλήθει ἄπειροι σύμμετροί τε καὶ ἀσύμμετροι αἱ μὲν μήκει μόνον, αἱ δὲ καὶ δυνάμει. καλείσθω οὖν ἡ μὲν προτεθεῖσα εὐθεῖα ῥητή, καὶ αἱ ταύτῃ σύμμετροι εἴτε μήκει καὶ δυνάμει εἴτε δυνάμει μόνον ῥηταί, αἱ δὲ ταύτῃ ἀσύμμετροι ἄλογοι καλείσθωσαν.

Στον δεύτερο ορισμό ορίζονται τα τμήματα που είναι δυνάμει σύμμετρα π.χ. με σύγχρονο συμβολισμό τα τμήματα με μήκη 6 και $\sqrt{2}$ ή $\sqrt{3}$ και $\sqrt{6}$. Επίσης ορίζονται τα τμήματα που είναι δυνάμει ασύμμετρα όπως π.χ. τα τμήματα με μήκη $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $\sqrt[4]{3}$. Στον τρίτο ορισμό οι ευθείες χωρίζονται σε δύο κατηγορίες ως προς μία δοθείσα ευθεία α) τις ρητές, που είτε είναι σύμμετρες με την δοθείσα ευθεία είτε είναι δυνάμει σύμμετρες με αυτήν και β) τις άλογες που είναι όλες οι υπόλοιπες (δυνάμει ασύμμετρες). Η φράση «*ὑπάρχουσιν εὐθεῖαι πλήθει ἄπειροι σύμμετροί τε καὶ ἀσύμμετροι*» που υπάρχει στον τρίτο ορισμό, αλλά και η βεβαιότητα του Θεαίτητου «*ἄπειροι τὸ πλῆθος αἱ δυνάμεις ἐφαίνοντο*» στον παραπάνω Πλατωνικό διάλογο προκύπτει από την θεωρία που παραθέτει ο Ευκλείδης στο Χ βιβλίο των *Στοιχείων.* Το βιβλίο αυτό σύμφωνα με τους ερευνητές ανήκει εξ ολοκλήρου στον αρχαίο Έλληνα Μαθηματικό Θεαίτητο. Ο Θεαίτητος (417 - 369 π.Χ) όπως φαίνεται και από τον παραπάνω Πλατωνικό διάλογο υπήρξε μαθητής του Θεόδωρου του Κυρηναίου (470 – 400 π.Χ.). Στην αναφορά του Θεαίτητου που μας παραθέτει ο Πλάτωνας, δεν υπάρχει απόδειξη για την ασυμμετρία του $\sqrt{2}$, αυτό σημαίνει ότι ήταν ήδη γνωστή η απόδειξη της ασυμμετρίας του. Στο σημείο αυτό θα επανέλθουμε στην απόδειξη της ασυμμετρία του $\sqrt{2}$ δηλαδή της πρότασης «*Ἀσύμμετρος ἡ διάμετρος τῇ πλευρᾷ μήκει.*» που είδαμε πριν ότι υπάρχει στο παράρτημα του Χ βιβλίου των *Στοιχείων*. Εάν ήταν αυτή η απόδειξη της ασυμμετρίας εξ' αρχής τότε δε θα ανέφερε ο Πλάτωνας στον *Θεαίτητο* ότι ο Θεόδωρος ανακάλυψε τις ασυμμετρίες των μεγεθών $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \dots$, $\sqrt{17}$ αφού θα μπορούσαν να περιλαμβάνονταν στην παραπάνω απόδειξη με μια μικρή τροποποίηση. Άρα κάποια άλλη απόδειξη πρέπει να υπήρχε για την ασυμμετρία του $\sqrt{2}$. Έχουν δοθεί πολλές ερμηνείες σχετικά με το ποια θα μπορούσε να είναι η αρχική απόδειξη της ασυμμετρίας του $\sqrt{2}$, όπως επίσης και για τον τρόπο με τον οποίο ο Θεόδωρος απέδειξε την ασυμμετρία των ριζών από το 3 μέχρι το 17. Υπάρχουν πολλές μελέτες που έγιναν από διακεκριμένους Μαθηματικούς όπως H. G. Zeuthen, W. R. Knorr, M. F. Burnyeat, V.d.Waerden, G. Hardy, E. Wright, H. Rademacher, O. Töplitz, Σ. Νεγρεπόντης, T. Heath, που έγιναν για να αποκαταστήσουν την απόδειξη αυτή ή να βρουν την πρώτη απόδειξη που έγινε για την ασυμμετρία της διαγωνίου ως προς την πλευρά του τετραγώνου. Εκείνο που σε γενικές γραμμές είναι δεκτό, είναι ότι ο Θεόδωρος χρησιμοποίησε μια μέθοδο που βασίστηκε στις διαδοχικές αφαιρέσεις άνισων μεγεθών (ανθυφαίρεση), που εμφανίζεται στα *Στοιχεία* ως Πρόταση 2 στο X βιβλίο και διατυπώνεται ως εξής:

Ἐὰν δύο μεγεθῶν [ἐκκειμένων] ἀνίσων ἀνθυφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος τὸ καταλειπόμενον μηδέποτε καταμετρῇ τὸ πρὸ ἑαυτοῦ, ἀσύμμετρα ἔσται τὰ μεγέθη.

Δηλαδή εάν δοθούν δύο άνισα μεγέθη και ανθυφαιρείται πάντοτε το μικρότερο από του μεγαλύτερου, το εκάστοτε δε υπόλοιπο ουδέποτε καταμετρεί το προηγούμενο αυτού, τα μεγέθη τότε θα είναι ασύμμετρα.

Οι H. Rademacher και O. Töeplitz στο βιβλίο τους *Von Zahlen und Figuren* παρουσιάζουν μια γεωμετρική απόδειξη για την ασυμμετρία της πλευρά ως προς την διαγώνιο του τετραγώνου με βάση την πρόταση 2 στο X βιβλίο. Η απόδειξη αυτή μπορεί να αποτελέσει μέρος του διδακτικού υλικού στα σχολικά Μαθηματικά για την κατανόηση της ασυμμετρίας.



Στο τετράγωνο $ΑΒΓΔ$ πάνω στην διαγώνιο θεωρούμε σημείο $Ε$ έτσι ώστε η $ΑΕ$ να είναι ίση με την πλευρά $ΒΓ$ του τετραγώνου. Φέρνουμε στο $Ε$ κάθετη στην διαγώνιο που τέμνει την πλευρά $ΒΓ$ στο $Ζ$. Τα τρίγωνα $ΓΕΖ, ΑΕΒ$ και $ΕΖΒ$ είναι ισοσκελή. Άρα $ΓΕ = ΕΖ = ΖΒ$. Στην συνέχεια σχηματίζουμε το τετράγωνο $ΕΖΛΓ$, πάνω στην πλευρά $ΒΓ$ θεωρούμε σημείο $Μ$ τέτοιο ώστε $ΖΜ = ΖΒ = ΕΓ$ και σχηματίζουμε το τετράγωνο $ΜΝΚΓ$. Οπότε αν ξεκινήσουμε την διαδικασία της ανθυφαίρεσης και αφαιρέσουμε από την διαγώνιο $ΑΓ$ την πλευρά $ΒΓ$ θα έχουμε ως υπόλοιπο το τμήμα $ΕΓ$. Με την σειρά του το τμήμα $ΕΓ$ είναι πλευρά του τετραγώνου $ΕΖΛΓ$ αν συνεχίσουμε την διαδικασία της ανθυφαίρεσης και αφαιρέσουμε από την διαγώνιο $ΓΖ$ του τετραγώνου $ΓΕΖΛ$, το τμήμα $ΜΖ$ που είναι ίσο με την πλευρά $ΓΕ$ θα προκύψει υπόλοιπο το τμήμα $ΓΜ$. Τα $ΓΜ$ τώρα είναι πλευρά ενός νέου τετραγώνου. Δηλαδή μετά από δύο αφαιρέσεις έχουμε επιστρέψει στην αρχική διάταξη, δηλαδή σ΄ ένα τετράγωνο με μικρότερες διαστάσεις. Η διαδικασία στο επόμενο βήμα θα συνεχίσει όπως και στο πρώτο βήμα. Στην διαγώνιο $ΝΓ$ θα κάνουμε ότι κάναμε με την αρχική διαγώνιο $ΑΓ$, το υπόλοιπο που θα προκύψει, όπως και στο δεύτερο βήμα, θα είναι πλευρά ενός νέου τετραγώνου και ούτω καθεξής. Η διαδικασία αυτή της ανθυφαίρεσης συνεχίζεται επ΄ άπειρον και πάντα από μια διαγώνιο τετραγώνου αφαιρείται η πλευρά του, άρα βάση της πρότασης 2 που αναφέραμε πριν αποδεικνύεται η ασυμμετρία της διαγωνίου του τετραγώνου ως προς την πλευρά του. Μετά την απόδειξη μένει το ερώτημα γιατί μια τέτοια απόδειξη δεν μας ήρθε από την αρχαιότητα; Η απάντηση δίνεται από τον Α. Szabo στο βιβλίο του *Απαρχαί των Ελληνικών Μαθηματικών*. «Οι Έλληνες με την γραμμική ασυμμετρία διέγνωσαν ένα Μαθηματικό γεγονός, η ύπαρξη του οποίου δεν αποδεικνύεται επιτακτικά με πρακτικά μέσα. Αντίθετα! Πρακτική εφαρμογή, παράσταση και εμπειρισμός υποστηρίζουν την συμμετρία όλων των μεγεθών και αντιτίθενται προς την δυνατότητα της ασυμμετρίας. Γι' αυτό η πρόταση 2 στο Χ βιβλίο των *Στοιχείων* δεν ήταν κατά την αρχαιότητα πολύ πρόσφορη για να χρησιμοποιηθεί ως απόδειξη της ασυμμετρία. Έπρεπε να απομακρυνθούν τελείως από την παραστατικότητα και τον εμπειρισμό». Κάτι αντίστοιχο είχαμε δει και στις προσπάθειες του Αντιφώντα για το τετραγωνισμό του κύκλου.

6.3 Πλευρικοί και διαμετρικοί αριθμοί

Μια άλλη αναφορά η οποία σχετίζεται με την ασυμμετρία αφορά τους λεγόμενους πλευρικούς και διαμετρικούς αριθμούς και είναι αυτή που έχουμε από την *Πολιτεία* του Πλάτωνα(546c):

«καὶ ῥητὰ πρὸς ἄλληλα ἀπέφηναν· ὧν ἐπίτριτος πυθμὴν πεμπάδι συζυγεὶς δύο ἁρμονίας παρέχεται τρὶς αὐξηθείς, τὴν μὲν ἴσην ἰσάκις, ἑκατὸν τοσαυτάκις, τὴν δὲ ἰσομήκη μὲν τῇ, προμήκη δέ, ἑκατὸν μὲν ἀριθμῶν ἀπὸ διαμέτρων ῥητῶν πεμπάδος, δεομένων ἑνὸς ἑκάστων, ἀρρήτων δὲ δυοῖν, ἑκατὸν δὲ κύβων τριάδος. σύμπας δὲ οὗτος ἀριθμὸς γεωμετρικός»

Στο προηγούμενο χωρίο γίνεται αναφορά και χρήση δύο αριθμών, των πλευρικών που αφορούν την πλευρά τετραγώνου και των διαμετρικών που αφορούν την διάμετρο (διαγώνιο) τετραγώνου. Μάλιστα έχουμε και την αναφορά στην ρητή προσέγγιση της ασύμμετρης διαμέτρου τετραγώνου με πλευρά 5. Η προσέγγιση αυτή γίνεται αφαιρώντας από το 50 (που είναι το διπλάσιο τετράγωνο της πλευράς) το 1, δηλαδή $\delta = \sqrt{50-1} = \sqrt{49} = 7$.

Ο Θέων ο Αλεξανδρεύς (4^{ος} μ.Χ. αιώνας) σε σχόλιά του στη *Μαθηματική Σύνταξη* του Πτολεμαίου, αναφέρει μια μέθοδο υπολογισμού του $\sqrt{2}$ με την βοήθεια των αριθμών αυτών την οποία αποδίδει στον Αρχύτα τον Ταραντίνο (5^{ος} π.Χ. αιώνας).

Ο Θέων ο Σμυρναίος (τέλος 1^{ου} μ.Χ. αιώνα) για να παρουσιάσει τα Μαθηματικά, τη Μουσική και την Αστρονομία που είναι απαραίτητα για την ανάγνωση του Πλάτωνα, έγραψε το ενδιαφέρον βιβλίο με τίτλο *Των κατά το Μαθηματικόν χρησίμων εις την Πλάτωνος ανάγνωσιν*. Σύμφωνα με το Θέωνα «*ἐκ γάρ τούτων ῥυθμίζεται τα σχήματα. ὥσπερ οὗν πάντων τῶν σχημάτων κατά τόν ἀνωτάτω καί σπερματικόν λόγον ἡ μονάς ἄρχει, οὗτος καί τῆς διαμέτρου καί τῆς πλευρᾶς λόγος ἐν τῆ μονάδι εὑρίσκεται*».

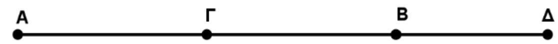
Έτσι λοιπόν αν συμβολίσουμε με α_ν και δ_ν τις ακολουθίες των πλευρικών και διαμετρικών αριθμών αντίστοιχα θα έχουμε και για τις δύο $\alpha_1 = \delta_1 = 1$. Για να σχηματίσουμε τον επόμενο πλευρικό αριθμό προσθέτουμε τους δύο προηγούμενους (πλευρικό + διαμετρικό) και για τον επόμενο διαμετρικό λαμβάνουμε το διπλάσιο του προηγούμενου πλευρικού αριθμού αυξημένο με τον προηγούμενο διαμετρικό. Οπότε $\alpha_2 = \alpha_1 + \delta_1 = 1 + 1 = 2$ και $\delta_2 = 2\alpha_1 + \delta_1 = 2 + 1 = 3$. Αν χρησιμοποιήσουμε σύγχρονο συμβολισμό θα έχουμε ότι οι ακολουθίες:

$$\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + \delta_\nu \quad \kappa\alpha\iota \quad \delta_{\nu+1} = 2\alpha_\nu + \delta_\nu \quad \mu\varepsilon\ \nu = 1,2,3,\ldots$$

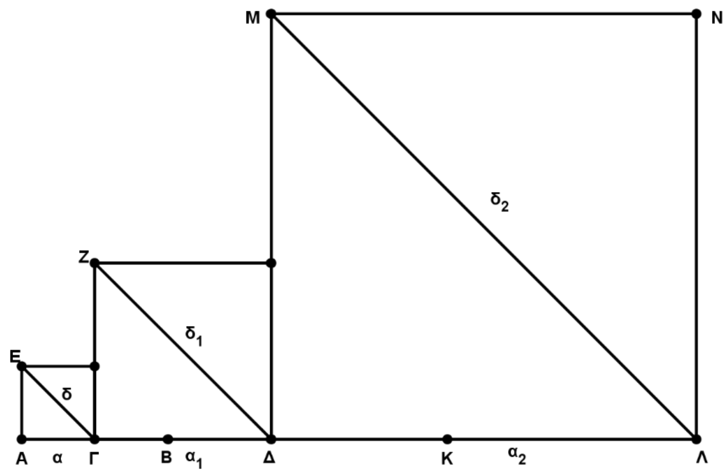
Παρακάτω ακολουθεί πίνακας με τους αριθμούς αυτούς μέχρι $\nu = 6$.

Τιμή ν	Πλευρικός α_ν	Διαμετρικός δ_ν	Λόγος $\delta_\nu : \alpha_\nu$	Κλάσμα
1	1	1	1	1
2	2	3	1,5	$1+\frac{1}{2}$
3	5	7	1,4	$1+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}$
4	12	17	1,416666…	$1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}$
5	29	41	1,4137931…	$1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}}$
6	70	99	1,4142857…	$1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}}}$

Σύμφωνα με τον Ε. Σταμάτη τους πλευρικούς και διαγώνιους αριθμούς μας αναφέρει και ο Πρόκλος (412 - 485 μ.Χ.) στο *Είς Πλάτωνος Πολιτείαν.* Εκεί μνημονεύει και μια γεωμετρική κατασκευή των αριθμών αυτών που στηρίζεται στην πρόταση 10 βιβλίο ΙΙ των *Στοιχείων*. Σύμφωνα με την πρόταση αυτή αν δοθεί ευθύγραμμο τμήμα AB με μέσο Γ και προεκταθεί κατά τυχαίο τμήμα $B\Delta$ τότε ισχύει η σχέση $A\Delta^2 + B\Delta^2 = 2A\Gamma^2 + 2\Gamma\Delta^2$



Ξεκινάμε την κατασκευή ενός τετραγώνου με πλευρά $ΑΓ = α$ προεκτείνουμε την πλευρά αυτή κατά τμήμα $ΓΒ = ΑΓ$ και στην προέκταση παίρνουμε τμήμα $ΒΔ = ΓΕ$. Στην συνέχεια σχηματίζουμε ένα δεύτερο τετράγωνο με πλευρά ΓΔ.



Επειδή $ΒΔ = ΓΕ$ και $ΓΕ^2 = 2ΑΓ^2$ από την προηγούμενη σχέση $ΑΔ^2 + ΒΔ^2 = 2ΑΓ^2 + 2ΓΔ^2$ θα έχουμε $ΑΔ^2 = 2ΓΔ^2$. Η τελευταία αυτή σχέση μας δηλώνει ότι το τμήμα $ΑΔ$ είναι διάμετρος τετραγώνου με πλευρά $ΓΔ$ δηλαδή $ΑΔ = ΖΔ$. Η $ΑΔ$ αποτελείται από τα τμήματα $ΑΓ + ΓΒ + ΒΔ = 2α + ΒΔ$ άρα αν θέσουμε $δ$ την διάμετρο $ΕΓ$, $δ_1$ την την διάμετρο $ΖΔ$ και $α_1$ την πλευρά $ΓΔ$ θα έχουμε $δ_1 = 2α + δ,\ α_1 = α + δ$. Συνεχίζουμε την κατασκευή προεκτείνοντας την πλευρά $ΓΔ$ κατά ίσο τμήμα $ΔΚ$ και στην προέκταση πάρουμε τμήμα $ΚΛ$ ίσο με την διάμετρο $ΖΔ$. Αν κάνουμε τις ίδιες πράξεις με πριν και θέσουμε την πλευρά $ΔΛ = α_2$ και την διάμετρο $ΜΛ = δ_2$ θα έχουμε τελικά ότι $δ_2 = 2\ α_1 + \ δ_1,\quad α_2 = \ α_1 + \ δ_1$. Συνεχίζοντας την κατασκευή θα έχουμε τις παρακάτω τιμές για τις πλευρές και τις διαμέτρους των τετραγώνων που σχηματίζονται:

Τετράγωνο	Πλευρά $α_ν$	Διάμετρος $δ_ν$
$1^ο$	α	δ
$2^ο$	α+δ	2α+δ
$3^ο$	3α+2δ	4α+3δ
$4^ο$	7α+5δ	10α+7δ
$5^ο$	17α+12δ	24α+17δ
$6^ο$	41α+29δ	58α+41δ

Εύκολα βλέπουμε ότι αν θέσουμε $\alpha = \delta = 1$ στον παραπάνω πίνακα θα έχουμε τους αριθμούς του Θέωνα που βρήκαμε πριν.
Αν επεξεργαστούμε λίγο περισσότερο τους αριθμούς αυτούς ξεκινώντας από $\alpha_3 = 5$ και $\delta_3 = 7$ που εμφανίζονται στην *Πολιτεία* του Πλάτωνα έχουμε:

$$\delta_3 = 7 = \sqrt{49} = \sqrt{50-1} = \sqrt{2\cdot 5^2 - 1} = \sqrt{2\alpha_3^2 - 1} \quad \acute{\alpha}\rho\alpha \quad \delta_3^2 = 2\alpha_3^2 - 1$$

$$\delta_4 = 17 = \sqrt{289} = \sqrt{288+1} = \sqrt{2\cdot 12^2 + 1} = \sqrt{2\alpha_4^2 + 1} \quad \acute{\alpha}\rho\alpha \quad \delta_4^2 = 2\alpha_4^2 + 1$$

Με άλλα λόγια αφαιρώντας ή προσθέτοντας μια μονάδα από το διπλάσιο τετράγωνο ενός πλευρικού αριθμού έχουμε μια ρητή προσέγγιση της ασύμμετρης διαμέτρου. Ο γενικός τύπος που συνδέει τους πλευρικούς και διαμετρικούς αριθμούς είναι

$$\delta_\nu^2 = 2\alpha_\nu^2 + (-1)^\nu \quad \mu\varepsilon\ \nu = 1,2,3,\dots \qquad (1)$$

Αν θεωρήσουμε τους πλευρικού και τους διαγώνιους αριθμούς ως δύο ακολουθίες $(\alpha_\nu), (\delta_\nu)$ αντίστοιχα και χρησιμοποιήσουμε την σύγχρονη θεωρία για το όριο των ακολουθιών θα έχουμε ότι, οι δύο αυτές ακολουθίες είναι γνησίως αύξουσες και όχι φραγμένες άρα τείνουν στο $+\infty$. Αν διαιρέσουμε την (1) με α_ν^2 θα έχουμε

$$\frac{\delta_\nu^2}{\alpha_\nu^2} = 2 + \frac{(-1)^\nu}{\alpha_\nu^2} \quad o\pi\acute{o}\tau\varepsilon \quad \lim\frac{\delta_\nu^2}{\alpha_\nu^2} = \lim\left(2 + \frac{(-1)^\nu}{\alpha_\nu^2}\right) = 2 + \lim\frac{(-1)^\nu}{\alpha_\nu^2} = 2$$

Άρα

$$\lim\frac{\delta_\nu}{\alpha_\nu} = \sqrt{2}$$

Η προηγούμενη σχέση γνωρίζοντας την ασυμμετρία της διαγωνίου του τετραγώνου προς την πλευρά του είναι αναμενόμενη, την είδαμε και στον πρώτο πίνακα που είχαμε τον λόγο $\delta_\nu : \alpha_\nu$ οποίος μας έδινε διαδοχικές προσεγγίσεις για την τιμή του $\sqrt{2}$ πρώτα με έλλειψη και στην συνέχεια με υπεροχή $\sqrt{2} \cong 1{,}4137931\dots$, $\sqrt{2} \cong 1{,}4142857\dots$ σύμφωνα με τις δύο τελευταίες τιμές του προηγούμενου πίνακα. Κάτι που επίσης είναι σημαντικό και προέκυψε από την γραφή του πηλίκου $\delta_\nu : \alpha_\nu$ με μορφή συνεχών κλασμάτων που είδαμε στην τελευταία στήλη του προηγούμενου πίνακα είναι ότι τελικά μπορούμε να γράψουμε το τη ρίζα του 2 με την μορφή συνεχούς κλάσματος όπως βλέπουμε παρακάτω.

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}$$

6.4 Ο διπλασιασμός του τετραγώνου στον πλατωνικό διάλογο «Μένων»

Στην αρχή του σημειώματος για την ασυμμετρία είδαμε ότι μια πιθανή γενεσιουργός αιτία ήταν και το πρόβλημα του διπλασιασμού του τετραγώνου. Το πρόβλημα αυτό εμφανίζεται από τον Σωκράτη στον Πλατωνικό διάλογο *Μένων*. Στον διάλογο αυτό ο Σωκράτης ισχυρίζεται ότι η ψυχή του ανθρώπου είναι αθάνατη. «Επειδή λοιπόν η ψυχή είναι αθάνατη, και έχει γεννηθεί επανειλημμένως, και έχει δει όλα τα πράγματα, και εδώ και εις τον Άδη, δεν υπάρχει τίποτε που να μη το έχει μάθει· ώστε δεν πρέπει ν' απορήσουμε εάν της είναι δυνατόν να θυμηθεί και ως προς την αρετή, και ως προς άλλα πράγματα, αυτά που γνώριζε και από πριν. Διότι επειδή όλα τα πράγματα συγγενεύουν μεταξύ των, και αφού η ψυχή τα έχει μάθει κάποτε όλα, τίποτε δεν εμποδίζει τον άνθρωπο, μόλις ενθυμηθεί το ένα, πράγμα που οι άνθρωποι ονομάζουν μόλις το μάθει, να ξαναβρεί πάλι όλα τα άλλα, εάν έχει κανείς θάρρος και δεν κουράζεται με την αναζήτηση, διότι και η αναζήτηση και η εύρεση είναι όλα μαζί μία ανάμνηση». Για να το δείξει αυτό χρησιμοποίησε τα Μαθηματικά στην πράξη, προκειμένου να αποδείξει ότι ο δούλος δεν μπορούσε να είχε μάθει τον διπλασιασμό του τετραγώνου σε αυτή τη ζωή παρά σε κάποια άλλη:

Σωκράτης: πρόσεχε δὴ τὸν νοῦν ὁπότερ᾽ ἄν σοι φαίνηται, ἢ ἀναμιμνῃσκόμενος ἢ μανθάνων παρ᾽ ἐμοῦ.

Μένων: ἀλλὰ προσέξω.

Σωκράτης: εἰπὲ δή μοι, ὦ παῖ, γιγνωςκεις τετράγωνον χωρίον ὅτι τοιοῦτόν ἐστιν;

Παῖς: ἔγωγε.

Σωκράτης: ἔστιν οὖν τετράγωνον χωρίον ἴσας ἔχον τὰς γραμμὰς ταύτας πάσας, τέτταρας οὔσας;

Παῖς: πάνυ γε.

Σωκράτης: οὐ καὶ ταυτασὶ τὰς διὰ μέσου ἐστὶν ἴσας ἔχον;

Παῖς: ναί.

Σωκράτης: οὐκοῦν εἴη ἂν τοιοῦτον χωρίον καὶ μεῖζον καὶ ἔλαττον;

Παῖς: πάνυ γε.

Σωκράτης: εἰ οὖν εἴη αὕτη ἡ πλευρὰ δυοῖν ποδοῖν καὶ αὕτη δυοῖν, πόσων ἂν εἴη ποδῶν τὸ ὅλον; ὧδε δὲ σκόπει: εἰ ἦν ταύτῃ δυοῖν ποδοῖν, ταύτῃ δὲ ἑνὸς ποδὸς μόνον, ἄλλο τι ἅπαξ ἂν ἦν δυοῖν ποδοῖν τὸ χωρίον;

Παῖς: ναί.

Σωκράτης: ἐπειδὴ δὲ δυοῖν ποδοῖν καὶ ταύτῃ, ἄλλο τι ἢ δὶς δυοῖν γίγνεται;

Παῖς: γίγνεται.

Σωκράτης: δυοῖν ἄρα δὶς γίγνεται ποδῶν;

Παῖς: ναί.

Σωκράτης: πόσοι οὖν εἰσιν οἱ δύο δὶς πόδες; λογισάμενος εἰπέ.

Παῖς: τέτταρες, ὦ Σώκρατες.

Σωκράτης: οὐκοῦν γένοιτ᾽ ἂν τούτου τοῦ χωρίου ἕτερον διπλάσιον, τοιοῦτον δέ, ἴσας ἔχον πάσας τὰς γραμμὰς ὥσπερ τοῦτο;

Παῖς: ναί.

Σωκράτης: πόσων οὖν ἔσται ποδῶν;

Παῖς: ὀκτώ.

Σωκράτης: φέρε δή, πειρῶ μοι εἰπεῖν πηλίκη τις ἔσται ἐκείνου ἡ γραμμὴ ἑκάστη. ἡ μὲν γὰρ τοῦδε δυοῖν ποδοῖν: τί δὲ ἡ ἐκείνου τοῦ διπλασίου;

Παῖς: δῆλον δή, ὦ Σώκρατες, ὅτι διπλασία.

Σωκράτης: ὁρᾷς, ὦ Μένων, ὡς ἐγὼ τοῦτον οὐδὲν διδάσκω, ἀλλ᾽ ἐρωτῶ πάντα; καὶ νῦν οὗτος οἴεται εἰδέναι ὁποία ἐστὶν ἀφ᾽ ἧς τὸ ὀκτώπουν χωρίον γενήσεται: ἢ οὐ δοκεῖ σοι;

Μένων: ἔμοιγε.

Σωκράτης: οἶδεν οὖν;

Μένων: οὐ δῆτα.

Σωκράτης: οἴεται δέ γε ἀπὸ τῆς διπλασίας;

Μένων: ναί.

Σωκράτης: θεῶ δὴ αὐτὸν ἀναμιμνῃσκόμενον ἐφεξῆς, ὡς δεῖ ἀναμιμνῄσκεσθαι.

σὺ δέ μοι λέγε: ἀπὸ τῆς διπλασίας γραμμῆς φῂς τὸ διπλάσιον χωρίον γίγνεσθαι; τοιόνδε λέγω, μὴ ταύτῃ μὲν μακρόν, τῇ δὲ βραχύ, ἀλλὰ ἴσον πανταχῇ ἔστω ὥσπερ τουτί, διπλάσιον δὲ τούτου, ὀκτώπουν: ἀλλ᾽ ὅρα εἰ ἔτι σοι ἀπὸ τῆς διπλασίας δοκεῖ ἔσεσθαι.

Παῖς: ἔμοιγε.

Σωκράτης: οὐκοῦν διπλασία αὕτη ταύτης γίγνεται, ἂν ἑτέραν τοσαύτην προσθῶμεν ἐνθένδε;

Παῖς: πάνυ γε.

Σωκράτης: ἀπὸ ταύτης δή, φῄς, ἔσται τὸ ὀκτώπουν χωρίον, ἂν τέτταρες τοσαῦται γένωνται;

Παῖς: ναί.

Σωκράτης: ἀναγραψώμεθα δὴ ἀπ᾽ αὐτῆς ἴσας τέτταρας. ἄλλο τι ἢ τουτὶ ἂν εἴη ὃ φῂς τὸ ὀκτώπουν εἶναι;

Παῖς: πάνυ γε.

Σωκράτης: οὐκοῦν ἐν αὐτῷ ἐστιν ταυτὶ τέτταρα, ὧν ἕκαστον ἴσον τούτῳ ἐστὶν τῷ τετράποδι;

Παῖς: ναί.

Σωκράτης: πόσον οὖν γίγνεται; οὐ τετράκις τοσοῦτον;

Παῖς: πῶς δ᾽ οὔ;

Σωκράτης: διπλάσιον οὖν ἐστιν τὸ τετράκις τοσοῦτον;

Παῖς: οὐ μὰ Δία.

Σωκράτης: ἀλλὰ ποσαπλάσιον;

Παῖς: τετραπλάσιον.

Σωκράτης: ἀπὸ τῆς διπλασίας ἄρα, ὦ παῖ, οὐ διπλάσιον ἀλλὰ τετραπλάσιον γίγνεται χωρίον.

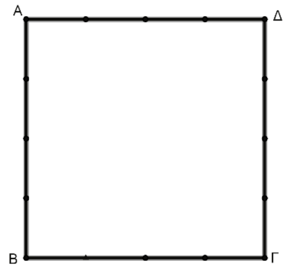
Παῖς: ἀληθῆ λέγεις.

Σωκράτης: τεττάρων γὰρ τετράκις ἐστὶν ἑκκαίδεκα. οὐχί;

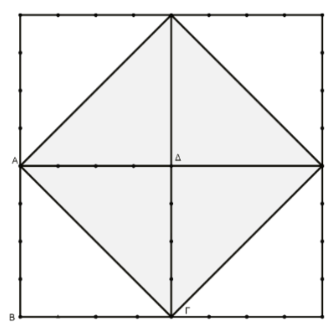
Παῖς: ναί.

Σωκράτης: ὀκτώπουν δ᾽ ἀπὸ ποίας γραμμῆς; οὐχὶ ἀπὸ μὲν ταύτης τετραπλάσιον;
Παῖς: φημί.
Σωκράτης: τετράπουν δὲ ἀπὸ τῆς ἡμισέας ταυτησὶ τουτί;
Παῖς: ναί.
Σωκράτης: εἶεν: τὸ δὲ ὀκτώπουν οὐ τοῦδε μὲν διπλάσιόν ἐστιν, τούτου δὲ ἥμισυ;<
Παῖς: ναί.>
Σωκράτης: οὐκ ἀπὸ μὲν μείζονος ἔσται ἢ τοσαύτης γραμμῆς, ἀπὸ ἐλάττονος δὲ ἢ τοσησδί; ἢ οὔ;
Παῖς: ἔμοιγε δοκεῖ οὕτω.
Σωκράτης: καλῶς: τὸ γάρ σοι δοκοῦν τοῦτο ἀποκρίνου. καί μοι λέγε: οὐχ ἥδε μὲν δυοῖν ποδοῖν ἦν, ἡ δὲ τεττάρων;
Παῖς: ναί.
Σωκράτης: δεῖ ἄρα τὴν τοῦ ὀκτώποδος χωρίου γραμμὴν μείζω μὲν εἶναι τῆσδε τῆς δίποδος, ἐλάττω δὲ τῆς τετράποδος.
Παῖς: δεῖ.
Σωκράτης: πειρῶ δὴ λέγειν πηλίκην τινὰ φῂς αὐτὴν εἶναι.
Παῖς: τρίποδα.
Σωκράτης: οὐκοῦν ἄνπερ τρίπους ᾖ, τὸ ἥμισυ ταύτης προσληψόμεθα καὶ ἔσται τρίπους; δύο μὲν γὰρ οἵδε, ὁ δὲ εἷς: καὶ ἐνθένδε ὡσαύτως δύο μὲν οἵδε, ὁ δὲ εἷς: καὶ γίγνεται τοῦτο τὸ χωρίον ὃ φῄς.
Παῖς: ναί.
Σωκράτης: οὐκοῦν ἂν ᾖ τῇδε τριῶν καὶ τῇδε τριῶν, τὸ ὅλον χωρίον τριῶν τρὶς ποδῶν γίγνεται;
Παῖς: φαίνεται.
Σωκράτης: τρεῖς δὲ τρὶς πόσοι εἰσὶ πόδες;
Παῖς: ἐννέα.
Σωκράτης: ἔδει δὲ τὸ διπλάσιον πόσων εἶναι ποδῶν;
Παῖς: ὀκτώ.
Σωκράτης: οὐδ᾽ ἄρ᾽ ἀπὸ τῆς τρίποδός πω τὸ ὀκτώπουν χωρίον γίγνεται.
Παῖς: οὐ δῆτα.
Σωκράτης: ἀλλ᾽ ἀπὸ ποίας; πειρῶ ἡμῖν εἰπεῖν ἀκριβῶς: καὶ εἰ μὴ βούλει ἀριθμεῖν, ἀλλὰ δεῖξον ἀπὸ ποίας.
Παῖς: ἀλλὰ μὰ τὸν Δία, ὦ Σώκρατες, ἔγωγε οὐκ οἶδα.
Σωκράτης: ἐννοεῖς αὖ, ὦ Μένων, οὗ ἐστιν ἤδη βαδίζων ὅδε τοῦ ἀναμιμνῄσκεσθαι; ὅτι τὸ μὲν πρῶτον ᾔδει μὲν οὔ, ἥτις ἐστὶν ἡ τοῦ ὀκτώποδος χωρίου γραμμή, ὥσπερ οὐδὲ νῦν πω οἶδεν, ἀλλ᾽ οὖν ᾤετό γ᾽ αὐτὴν τότε εἰδέναι, καὶ θαρραλέως ἀπεκρίνετο ὡς εἰδως, καὶ οὐχ ἡγεῖτο ἀπορεῖν: νῦν δὲ ἡγεῖται ἀπορεῖν ἤδη, καὶ ὥσπερ οὐκ οἶδεν, οὐδ᾽ οἴεται εἰδέναι.
Μένων: ἀληθῆ λέγεις (Μένων 82α- 84α).

Στον παραπάνω διάλογο ο Σωκράτης θέτει στον δούλο το εξής πρόβλημα: Από ένα τετράγωνο με πλευρά 4 πόδια να κατασκευαστεί ένα νέο τετράγωνο που να έχει διπλάσια επιφάνεια από το αρχικό. Η αρχική απάντηση του δούλου προτείνει τον διπλασιασμό της πλευράς του τετραγώνου, δηλαδή να γίνει 8 πόδια.



Αυτό βέβαια οδηγεί σε τετραπλασιασμό της επιφάνειας του τετραγώνου και όχι σε διπλασιασμό, όπως είναι σε θέση να διαπιστώσει και ο δούλος μετά από τις κατάλληλες ερωτήσεις που θέτει σε αυτόν ο Σωκράτης. Στη συνέχεια του διαλόγου με κατάλληλες ερωτήσεις ο Σωκράτης οδηγεί το δούλο να συνειδητοποιήσει ότι το μήκος της πλευράς του τετραγώνου δεν μπορεί να βρεθεί με τους αριθμούς που γνωρίζει ο δούλος. Ουσιαστικά έχουμε την συνειδητοποίηση ότι η πλευρά του ζητούμενου τετραγώνου είναι ασύμμετρη με την πλευρά του τετραγώνου που έχουμε. Στην συνέχεια ο Σωκράτης διδάσκει στο Μένωνα και στο δούλο τη λύση του προβλήματος με την βοήθεια της διαγώνιου του αρχικού τετραγώνου. Η μέθοδος αυτή παρακάμπτει το αριθμητικό πρόβλημα και δίνει την λύση γεωμετρικά. Σύμφωνα με τα όσα είδαμε πριν η πλευρά που είναι ασύμμετρη στο μήκος (μήκη ασύμμετρος), έχει σύμμετρο τετράγωνο (είναι δυνάμει σύμμετρος).



Ουσιαστικά η επίλυση αυτή του Σωκράτη μας δείχνει τον τρόπο με το οποίο οι αρχαίοι Έλληνες αποκατέστησαν την ισορροπία μετά την ανακάλυψη της ασυμμετρίας. Ο τρόπος αυτός όπως είδαμε και πιο πριν είναι διάχυτος στα *Στοιχεία.* Η λύση του Σωκράτη παρουσιάζεται στο παραπάνω σχήμα.

Τελειώνοντας την αναφορά αυτή για την ανακάλυψη της ασυμμετρίας είναι φυσικό να προσπαθήσουμε να απαντήσουμε στο ερώτημα: ποιο ήταν πραγματικά το πρόσωπο που ανακάλυψε την ασυμμετρία; Για το θέμα αυτό έχουν γραφεί πολλά και αντικρουόμενα. Δύο είναι τα πρόσωπα που διεκδικούν την πατρότητα της ανακάλυψης αυτής ο Πυθαγόρας και ο Ίππασος (5ος -6ος αιώνας π.Χ.). Για τον Ίππασο γράφει ο Ιάμβλιχος στο *Περί τῆς κοινῆς Μαθηματικῆς ἐπιστήμης* «*ὀλίγοι τε πάνυ τῆς γνώσεως*

αὐτῶν ἐκοινώνουν, καί εἰ πού τι ἔκφορον γένοιτο εἰς τούς πολλούς, ἀφωσιοῦντο τοῦτο ὡς ἀσέβημα, διόπερ ἀπωθοῦντο καί τούς ἔξω τῆς συνηθείας, ὡς ἀναξίους ὄντας αὐτῶν μεταλαμβάνειν». Σε άλλο σημείο λίγο αργότερα μας αναφέρει «*περί δ᾽ Ἱππάσου λέγουσιν, ὡς ἦν μέν τῶν Πυθαγορείων, διά τό ἐξενεγκεῖν καί γράψασθαι πρῶτος σφαῖραν τήν ἐκ δώδεκα πενταγώνων ἀπόλοιτο κατά θάλατταν ὡς ἀσεβήσας, δόξαν δέ λάβοι ὡς <εὑρών> εἶναι δέ πάντα ἐκείνου τοῦ ἀνδρός, προσαγορεύουσι γάρ οὕτω τόν Πυθαγόραν καί οὐ καλοῦσιν ὀνοματι*». Από τις δυο παραπάνω αναφορές συμπεραίνουμε ότι ο Ίππασος γνώριζε την εγγραφή στη σφαίρα του δωδεκαγώνου που αποτελείται από δώδεκα πεντάγωνα. Άρα μπορεί να ήταν και γνώστης της ασυμμετρίας της πλευράς με την διαγώνιο του πενταγώνου. Με κάποιο τρόπο ο Ίππασος παρέβει τον νόμο της μυστικότητας των διδαχών της σχολής και δημοσιοποίησε αυτές τις διδαχές. Αποτέλεσμα αυτής της «ασέβειας» ήταν να χαθεί στην θάλασσα ίσως σε κάποιο ναυάγιο. Στην συνέχεια της αναφοράς του ο Ίάμβλιχος λέει ότι τελικά δοξάστηκε αυτός που πραγματικά τα βρήκε αυτά και είναι ο Πυθαγόρας του οποίου δεν έλεγαν το όνομα. Γνωστή είναι η έκφραση που λέγεται «αὐτός ἔφα». Μια ακόμη αναφορά έχουμε και από τον Πρόκλο στο έργο του *Εἴς Εὐκλείδη* εκεί μας αναφέρει «*ἐπί δέ τούτοις Πυθαγόρας, ὃς δή καί τήν τῶν ἀλόγων πραγματείαν καί τήν τῶν κοσμικῶν σχημάτων σύστασιν ἀνεῦρεν*». Όλα αυτά γράφονται περίπου εννιακόσια με χίλια χρόνια μετά από τότε που συνέβησαν. Άρα όλοι καταλαβαίνουμε ότι είναι δύσκολο να ξεχωρίσει κανείς το πραγματικό γεγονός από τον θρύλο ή τον μύθο. Χωρίς να κάνουμε μεγάλο λάθος θα μπορούσαμε να πούμε ότι η ανακάλυψη της ασυμμετρίας ίσως δεν είναι προϊόν της σκέψης ενός ανθρώπου αλλά αποτέλεσμα μιας συλλογικής προσπάθειας που καλλιεργήθηκε στην σχολή των Πυθαγορείων. Η ανακάλυψη της ασυμμετρίας από τους αρχαίους Έλληνες έφερε μια πραγματική επανάσταση στο χώρο των Μαθηματικών και της
Φιλοσοφίας γενικότερα. Δημιούργησε κρίσεις οι οποίες έβαλαν τα θεμέλια για την δημιουργία καινούργιων δομών τις οποίες θα δούμε στην συνέχειας της εργασίας.

6.5 Η θεωρία αναλογιών του Ευδόξου

Το πρώτο πρόβλημα που παρουσιάστηκε με την ανακάλυψη της ασυμμετρίας είχε να κάνει με τον λόγο δύο μεγεθών. Οι Πυθαγόρειοι αρχικά θεωρούσαν ότι οποιαδήποτε δύο ευθύγραμμα τμήματα (αριθμοί) είναι σύμμετρα μεγέθη. Δηλαδή αν A, B είναι δυο ευθύγραμμα τμήματα, τότε αν X το μοναδιαίο ευθύγραμμο τμήμα, υπάρχουν θετικοί ακέραιοι μ, ν έτσι ώστε $A = \mu X$ και $B = \nu X$. Ο παλαιός ορισμός για την αναλογία από το VII βιβλίο των *Στοιχείων* είναι «*Ἀριθμοὶ ἀνάλογόν εἰσιν, ὅταν ὁ πρῶτος τοῦ δευτέρου καὶ ὁ τρίτος τοῦ τετάρτου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιος ἢ τὸ αὐτὸ μέρος ἢ τὰ αὐτὰ μέρη ὦσιν*». Οπότε όριζαν ως αναλογία των μεγεθών $\frac{A}{B} = \frac{\Gamma}{\Delta}$, αν το A είναι το ίδιο πολλαπλάσιο ή το ίδιο μέρος ή τα ίδια μέρη του B όπως το Γ είναι του Δ. Για το προηγούμενο παράδειγμα θα έχουμε ότι $\frac{A}{B}=\frac{\Gamma}{\Delta}$ αν $\Gamma=\mu X$ και $\Delta=\nu X$. Προφανώς ο ορισμός αυτός δεν μπορεί να εφαρμοστεί όταν τα μεγέθη που έχουμε είναι ασύμμετρα. Αυτό ακριβώς μας δηλώνει και Ευκλείδης με την πρόταση 7 στο X βιβλίο «*Τὰ ἀσύμμετρα μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον οὐκ ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν*». Είδαμε όμως πως στην Πυθαγόρεια Γεωμετρία υπήρχαν παντού λόγοι και αναλογίες. Δεν νοούνταν Μαθηματικά την εποχή εκείνη χωρίς την χρήση λόγων. Ο Εύδοξος συνέβαλε, έτσι ώστε η πρώτη κρίση των Μαθηματικών στην αρχαία Ελλάδα να αποδειχθεί όχι ανησυχητική αλλά βαθύτατα γόνιμη και δημιουργική. Με την θεωρία αναλογιών που ανέπτυξε βοήθησε να ξεπεραστεί το πρόβλημα των ασύμμετρων μεγεθών και ουσιαστικά συνέβαλε στην θεωρητική σύλληψη των πραγματικών αριθμών, η οποία όμως θα συμβεί πολύ αργότερα.

Αλλά ας γυρίσουμε στο V βιβλίο να δούμε τους ορισμούς αυτούς.

α΄. Μέρος ἐστὶ μέγεθος μεγέθους τὸ ἔλασσον τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρῇ τὸ μεῖζον.

β΄. Πολλαπλάσιον δὲ τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάττονος, ὅταν καταμετρῆται ὑπὸ τοῦ ἐλάττονος.

γ΄. Λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν ἡ κατὰ πηλικότητά ποία σχέσις.

δ΄. Λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα μεγέθη λέγεται, ἃ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν.

ε΄. Ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ μεγέθη λέγεται εἶναι πρῶτον πρὸς δεύτερον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ὅταν

τὰ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου ἰσάκις πολλαπλασίων καθ' ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν ἑκάτερον ἑκατέρου ἢ ἅμα ὑπερέχῃ ἢ ἅμα ἴσα ᾖ ἢ ἅμα ἐλλείπῃ ληφθέντα κατάλληλα..

Στην συνέχεια θα δούμε τους ορισμούς αυτούς χρησιμοποιώντας μεταβλητές και σύμβολα και μια σύγχρονη ορολογία.

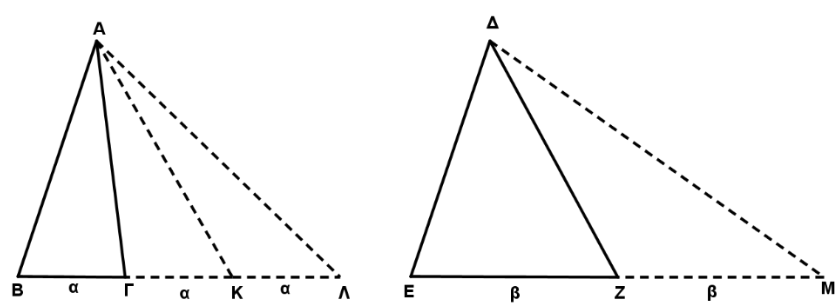
1. Ένα μέγεθος A μικρότερο ενός μεγέθους B, τότε και μόνο τότε θα ονομάζεται μέρος του B αν υπάρχει θετικός ακέραιος ν έτσι ώστε $\nu A=B$.
2. Έστω ένα μέγεθος A μεγαλύτερο από ένα άλλο μέγεθος B. Το A τότε και μόνο τότε θα λέγεται πολλαπλάσιο του B, αν υπάρχει θετικός ακέραιος μ τέτοιος ώστε $A=\mu B$.
3. Λόγος δύο μεγεθών είναι μια ποσοτική σχέση που υπάρχει μεταξύ δύο ομογενών μεγεθών.
4. Λέμε ότι δύο μεγέθη A,B έχουν μεταξύ τους λόγο $\frac{A}{B}$ όταν υπάρχουν θετικοί ακέραιοι ν,μ τέτοιοι ώστε $\mu A>\nu B$ ή $\mu A<\nu B$
5. Έστω A,B,Γ,Δ τέσσερα μεγέθη, αν έχουμε δύο λόγους μεγεθών $\frac{A}{B}$ και $\frac{\Gamma}{\Delta}$ ισχύει ότι $\frac{A}{B}=\frac{\Gamma}{\Delta}$ αν και μόνο αν για οποιουσδήποτε δύο φυσικούς αριθμούς μ,ν ισχύει μία από τις παρακάτω σχέσεις.
   i) $\mu A>\nu B$ και συγχρόνως $\mu\Gamma>\nu\Delta$ ή
   ii) $\mu A=\nu B$ και συγχρόνως $\mu\Gamma=\nu\Delta$ ή

iii) $\mu A < \nu B$ και συγχρόνως $\mu\Gamma < \nu\Delta$.

Με τον ορισμό αυτό δεν μας ενδιαφέρει ποια αν τα μεγέθη που μετέχουν στην αναλογία είναι σύμμετρα ή ασύμμετρα, εκείνο που μας ενδιαφέρει είναι αν τα ίδια πολλαπλάσια αυτών των μεγεθών διατηρούν την ίδια σχέση διάταξης μεταξύ τους. Ο ορισμός αυτός «νομιμοποίησε» την Μαθηματική κληρονομιά και έδωσε ισχυρή επιστημονική βάση σε αυτή. Ο Thomas Heath, το 1906 έδωσε μια γενικά αποδεκτή ερμηνεία για τον ορισμό αυτό. Αυτή έχει ως εξής: Ο αριθμός $\frac{A}{B}$ (μπορεί να είναι ρητός ή ασύμμετρος) χωρίζει το πλήθος των θετικών ρητών σε δύο σύνολα. Στο σύνολο των ρητών $\frac{\nu}{\mu}$ που είναι τέτοιοι, ώστε $\frac{A}{B} > \frac{\nu}{\mu}$ ή $\mu A > \nu B$ και στο σύνολο των ρητών $\frac{\nu}{\mu}$ που είναι τέτοιοι ώστε $\frac{A}{B} \leq \frac{\nu}{\mu}$ ή $\mu A \leq \nu B$. Η τομή - κατά την σύγχρονη ορολογία του Dedekind – των δύο συνόλων προσδιορίζει το ρητό ή ασύμμετρο αριθμό $\frac{A}{B}$. Ο αριθμός $\frac{\Gamma}{\Delta}$ (ρητός ή ασύμμετρος) χωρίζει ομοίως το πλήθος των θετικών ρητών $\frac{\nu}{\mu}$ σε τέτοιους, ώστε $\frac{\Gamma}{\Delta} > \frac{\nu}{\mu}$ ή $\mu\Gamma > \nu\Delta$ και στο σύνολο των ρητών $\frac{\nu}{\mu}$ που είναι τέτοιοι ώστε $\frac{\Gamma}{\Delta} \leq \frac{\nu}{\mu}$ ή $\mu\Gamma \leq \nu\Delta$. Η τομή προσδιορίζει το ρητό ή ασύμμετρο αριθμό $\frac{\Gamma}{\Delta}$. Εάν οι δύο αυτές τομές συμπίπτουν, (δηλαδή αν $\mu A > \nu B \text{ και } \mu\Gamma > \nu\Delta$ ή $\mu A = \nu B \text{ και } \mu\Gamma = \nu\Delta$ ή $\mu A < \nu B \text{ και } \mu\Gamma < \nu\Delta$) τότε θα έχουμε $\frac{A}{B} = \frac{\Gamma}{\Delta}$.

Για να γίνει κατανοητός ο ορισμός αυτός, ας δούμε ένα γεωμετρικό παράδειγμα από τα *Στοιχεία*. Η παρακάτω πρόταση είναι η 1η στο VI βιβλίο.

Τὰ τρίγωνα τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις.



Στο παραπάνω σχήμα έχουμε τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ τα οποία έχουν το ίδιο ύψος. θέλουμε να δείξουμε ότι $\frac{(AB\Gamma)}{(\Delta EZ)} = \frac{B\Gamma}{EZ}$. Έστω μ, ν δύο τυχαίοι θετικοί ακέραιοι αριθμοί. Σχηματίζουμε με επανάληψη των τμημάτων $B\Gamma = \alpha$ και $EZ = \beta$ τα τμήματα $B\Lambda = \mu B\Gamma$ και $EM = \nu EZ$. Στο προηγούμενο σχήμα είναι $\mu = 3, \nu = 2$, δηλαδή $B\Lambda = 3B\Gamma, EM = 2EZ$. Σύμφωνα με την πρόταση 38 του I βιβλίου των *Στοιχείων*, τα τρίγωνα $AB\Gamma, A\Gamma K, AK\Lambda$, είναι ισοδύναμα. Όπως επίσης ισοδύναμα είναι και τα τρίγωνα AEZ, ΔZM. Άρα $(AB\Lambda) = 3(AB\Gamma)$ και $(\Delta EM) = 2(\Delta EZ)$. Έστω ότι ισχύει $B\Lambda < EM$ ή

$Β\Lambda = EM$ ή $Β\Lambda > EM$ δηλαδή $3ΒΓ < 2EZ$ ή $3ΒΓ = 2EZ$ ή $3ΒΓ > 2EZ$. Τότε θα έχουμε ότι $(ΑΒ\Lambda) < (\Delta EM)$ ή $(ΑΒ\Lambda) = (\Delta EM)$ ή $(ΑΒ\Lambda) > (\Delta EM)$ δηλαδή $3(ΑΒΓ) < 2(\Delta EZ)$ ή $3(ΑΒΓ) = 2(\Delta EZ)$ ή $3(ΑΒΓ) > 2(\Delta EZ)$. Ότι ισχύει για $\mu = 3$ και $\nu = 2$ ισχύει για οποιουσδήποτε θετικούς ακέραιους, άρα σύμφωνα με τον ορισμό 5 του Ευδόξου θα ισχύει ότι $\frac{(ΑΒΓ)}{(\Delta EZ)} = \frac{ΒΓ}{EZ}$.

Όπως είδαμε ο ορισμός του Ευδόξου μας ζητά για οποιουσδήποτε δύο φυσικούς αριθμούς μ, ν να ισχύει μία από τις παρακάτω σχέσεις.

i) $\mu A > \nu B$ και συγχρόνως $\mu\Gamma > \nu\Delta$ ή
ii) $\mu A = \nu B$ και συγχρόνως $\mu\Gamma = \nu\Delta$ ή
iii) $\mu A < \nu B$ και συγχρόνως $\mu\Gamma < \nu\Delta$.

Η διατύπωση αυτή μας παραπέμπει σε επίλυση ενός μη πεπερασμένου προβλήματος μιας και το πλήθος των ζευγών των θετικών ακεραίων μ, ν είναι άπειρο. Είδαμε όμως με την προηγούμενη απόδειξη ότι αυτό τελικά το καταφέραμε με πεπερασμένο πλήθος βημάτων. Το κρίσιμο σημείο της μετάβασης από το πεπερασμένο στο άπειρο πραγματοποιήθηκε με το ότι μετά την απόδειξη για ένα τυχαίο ζεύγος αριθμών μ, ν μπορέσαμε να ισχυριστούμε την αλήθεια για κάθε ζεύγος θετικών ακεραίων μ, ν.

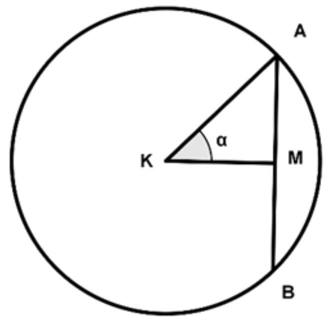
Ένα άλλο τμήμα των Μαθηματικών που ξεκίνησε από την αρχαία Ελλάδα και αναπτύχθηκε παράλληλα με την εξέλιξη της Αστρονομίας είναι η Τριγωνομετρία. Η Τριγωνομετρία αποτελεί μέρος των αναλυτικών προγραμμάτων των Σχολικών Μαθηματικών. Για τον λόγο αυτό θα ερευνήσουμε την πλούσια ιστορία της και θα αντλήσουμε τεχνικές που ανακαλύφθηκαν κατά την περίοδο αυτή.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7$^{\text{Ο}}$ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

7.1 Ιστορικά στοιχεία

Η Τριγωνομετρία εμφανίζεται στα Σχολικά Μαθηματικά στις πρώτες τάξεις του Γυμνασίου ως εργαλείο για την επίλυση τριγώνων. Στο Λύκειο στα πλαίσια της ανάλυσης οι μαθητές διδάσκονται και την μελέτη των τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Στόχος είναι η εφαρμογή και σ΄ αυτές των μεθόδων του Απειροστικού Λογισμού. Οι πρακτικές εφαρμογές της Τριγωνομετρίας στην Τοπογραφία, τη Ναυσιπλοΐα και την Αστρονομία είναι πολλές και σημαντικές. Τα πρώτα στοιχεία Τριγωνομετρίας εμφανίζονται στα έργα αρχαίων Ελλήνων Μαθηματικών κυρίως για τη μελέτη ουράνιων φαινομένων. Το σημαντικότερο και παλαιότερο κείμενο από την αρχαία Ελληνική εποχή που έφτασε σε εμάς και περιέχει τους πρώτους πίνακες με υπολογισμούς χορδών κύκλου είναι η *Μαθηματική Σύνταξη* του Κλαύδιου Πτολεμαίου που γράφτηκε γύρω στο 150 μ.Χ. στην Αλεξάνδρεια της Αιγύπτου. Η *Μαθηματική Σύνταξη* ανήκει στην κατηγορία των συγγραμμάτων Αστρονομικού περιεχομένου. Σε αυτήν υπάρχουν υπολογισμοί όπως η θέση ενός πλανήτη στην ουράνια σφαίρα. Στη *Μαθηματική Σύνταξη* ο προσδιορισμός της θέσης των πλανητών πλέον μπορεί να γίνει με τη βοήθεια Γεωμετρικών μοντέλων, αρκεί να υπολογίζονταν αριθμητικά οι παράμετροι που περιγράφουν ποσοτικά την τροχιά τους. Ένα προαπαιτούμενο για το σκοπό αυτό ήταν ο ακριβής υπολογισμός τόξων και χορδών κύκλων, ο οποίος με τη σειρά του απαιτούσε Τριγωνομετρία σε σφαιρικά τρίγωνα. Ο ίδιος ο Πτολεμαίος αναφέρει ότι μεγάλο μέρος από τις αστρονομικές θεωρίες που αναπτύσσει ήταν παλαιότερες και αναφέρει κυρίως τον Ίππαρχο. Ο Θέων ο Αλεξανδρεύς που έζησε δύο αιώνες αργότερα έγραψε βιβλίο με σχόλια στην *Μαθηματική Σύνταξη*. Σε αυτό αναφέρει «*Δέδεικται μὲν οὖν καὶ Ἱππάρχῳ πραγματεία τῶν ἐν κύκλῳ εὐθειῶν ἐν ιβ βιβλίοις, ἔτι τε καὶ Μενελάῳ ἐν ς*». Δηλαδή ότι ο Ίππαρχος που έζησε περίπου το 150 π.Χ. και ο Αλεξανδρινός Μαθηματικός Μενέλαος που έζησε γύρω στο 100 μ.Χ., είχαν γράψει έργα σχετικά με υπολογισμό των χορδών ενός κύκλου. Κανένα όμως από αυτά τα έργα που αναφέρει ο Θέων δε σώζεται σήμερα. Από τον Μενέλαο σώζεται το έργο του *Σφαιρικά,* στο οποίο υπάρχει και η γνωστή πρόταση των διατεμνουσών την οποία χρησιμοποιεί κατ΄ επανάληψη ο Πτολεμαίος. Ένα έργο που σώζεται από την εποχή αυτή είναι το *Περί της ζωδίων αναφοράς – Αναφορικόν* το οποίο αποδίδεται στον Υψικλή τον Αλεξανδρέα (2ος αιώνας μ.Χ.). Στο έργο αυτό δεν υπάρχουν ακριβείς τριγωνομετρικοί υπολογισμοί αλλά έχουμε την διαίρεση της ημέρας σε 360 «χρονικές μοίρες». Η περιφέρεια ενός κύκλου διαιρείται σε 360^{o} και η διάμετρος διαιρείται σε 120 τμήματα. Κάθε τμήμα της περιφέρειας και της διαμέτρου διαιρείται επίσης σε 60 τμήματα και κάθε ένα από αυτά σε 60 επιπλέον και ούτω καθεξής σύμφωνα με το Βαβυλωνιακό σύστημα των εξηκονταδικών κλασμάτων. Στην *Αφύπνιση της Επιστήμης,* ο B.L. Van Der Waerden μας αναφέρει ότι οι μέθοδοι του Υψικλή δεν είχαν ακριβείς τριγωνομετρικούς υπολογισμούς, αλλά περισσότερο υπολογιστικές μεθόδους από την Βαβυλωνιακή Αστρονομία.

Ο Πτολεμαίος αντί του ημιτόνου, χρησιμοποίησε χορδές κυκλικών τόξων. Στο παρακάτω σχήμα σε ένα κύκλο με ακτίνα 60 (1 για το εξηκονταδικό σύστημα) έχουμε τόξο AB ο Πτολεμαίος, στους πίνακές του, δίνει τον αριθμό των μονάδων που αντιστοιχούν στη χορδή AB. Αν Μ το μέσο της χορδής τότε έχουμε:



$$AM = \frac{χορδή\ AB}{2}$$

Εάν 2α είναι η επίκεντρη γωνία του τόξου AB, τότε με τον σύγχρονο ορισμό του ημιτόνου έχουμε:

$$ημα = \frac{AM}{KA} = \frac{χορδήAB}{2}$$

επειδή $KA = 60$ δηλαδή 1 για το εξηκονταδικό σύστημα. Δηλαδή σήμερα ότι ονομάζουμε ημίτονο μιας γωνίας, σε ένα μοναδιαίο κύκλο, είναι το μισό της χορδής του διπλάσιου τόξου από αυτό που βαίνει η γωνία. Ο Πτολεμαίος υπολόγιζε το διπλάσιο ημίτονο της επίκεντρης γωνίας που αντιστοιχεί στο μισό του αντίστοιχου τόξου της χορδής.

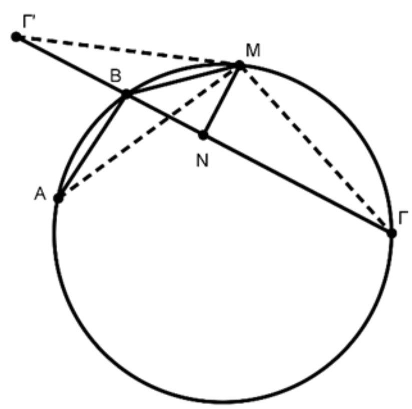
Από τις παραπάνω σχέσεις φαίνεται καθαρά ότι η κατασκευή ενός πίνακα χορδών ισοδυναμεί με την κατασκευή ενός πίνακα ημιτόνων. Δεν υπάρχουν ασφαλείς αποδείξεις για το αν ο Ίππαρχος ήταν ο πρώτος που επινόησε την Τριγωνομετρία. Ο B. L. Van Der Vaerden στην *Αφύπνιση της Επιστήμης* μας αναφέρει ότι ορισμένοι ιστορικοί, έχουν διατυπώσει την άποψη ότι εκτός από τον Ίππαρχο, το Μενέλαο και τον Πτολεμαίο μπορεί και άλλοι πριν από αυτούς, να είχαν συντάξει πίνακα χορδών. Για παράδειγμα, ο P.Tannery, στο έργο του *Recherches sur l' histoire de l' astronomie ancienne* (Παρίσι, 1893), ισχυρίζεται ότι τόσο ο Αρχιμήδης όσο και ο Απολλώνιος, μπορεί να κατασκεύασαν πίνακα χορδών ή τουλάχιστον να έδειξαν τον τρόπο κατασκευής του, ο μεν Αρχιμήδης στην πραγματεία του *Κύκλου μέτρησις* ο δε Απόλλώνιος στο έργο του *'Ωκυτόκιον*. Ορισμένα ειδικά προβλήματα είχαν λυθεί πριν από τον Ίππαρχο, με προσεγγιστικές μεθόδους. Χρησιμοποιήθηκαν ανισότητες που μπορούν με σύγχρονη ορολογία να διατυπωθούν ως εξής:

$$\frac{\eta\mu\alpha}{\eta\mu\beta} < \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\varepsilon\varphi\alpha}{\varepsilon\varphi\beta} \quad \acute{o}\pi o\upsilon\ \beta < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

Τις ανισότητες αυτές, που ήδη εμφανίζονται στα *Κατοπτρικά* του Ευκλείδη (Πρόταση 8) τις χρησιμοποίησε ο Αρίσταρχος ο Σάμιος στο έργο του *Περί μεγεθών και απόστημάτων Ηλίου και Σελήνης* για την απόδειξη της πρότασης: η απόσταση Γης-Ηλίου είναι μεγαλύτερη από το 18-πλάσιο και μικρότερη από το 20-πλάσιο της απόστασης Γης- Σελήνης, χωρίς να μπορέσει, όμως, να προσδιορίσει με αριθμητική ακρίβεια αυτές τις αποστάσεις. Ο Αρίσταρχος μάλιστα είχε προτείνει την τολμηρή για την εποχή του υπόθεση ότι η Γη περιστρέφεται σε κύκλο γύρω από την Ήλιο. Κάτι που δεν έγινε γενικότερα δεκτό.

7.2 Το θεώρημα «σπασμένης χορδής» από τον Αρχιμήδη

Ένα από τα θεωρήματα που μπορεί να αποδειχθεί ισοδύναμο με τον τύπο του ημιτόνου διαφοράς δύο γωνιών είναι αυτό της Σπασμένης χορδής. Το θεώρημα αυτό εμφανίζεται στο βιβλίο *On Determination of Chords in a Circle* του μεγάλου Άραβα Μαθηματικού και Αστρονόμου Abu Raihan al-Biruni (1027). Στο βιβλίο αυτό μας δίνει πολλές αποδείξεις για το θεώρημα αυτό και αποδίδει την πατρότητά του στον Αρχιμήδη. Το θεώρημα αυτό ήταν μέρος μιας ευρύτερης εργασίας του αρχαίου Έλληνα Μαθηματικού σχετικά με τις χορδές η οποία έχει χαθεί. Σχετικά μας πληροφορεί ο G. Van Brummelen στο βιβλίο του *The Mathematics of the Heavens and the Earth: The Early History of Trigonometry, Princeton University Press,* 2009 και ο Roger Herz-Fischler στο *A Mathematical History of Division in Extreme and Mean Ratio, Wilfrid Laurier Univ. Press, 1987*. Το θεώρημα αναφέρει ότι αν οι AB και $B\Gamma$ απαρτίζουν μια σπασμένη χορδή ενός κύκλου, με $B\Gamma > AB$, και αν το Μ είναι το μέσο του τόξου ΑΒΓ, τότε το ίχνος Ν της καθέτου από το Μ πάνω στην ΒΓ είναι το μέσον της σπασμένης χορδής $AB\Gamma$, δηλαδή το μέσο της διαδρομής $AB + B\Gamma$.



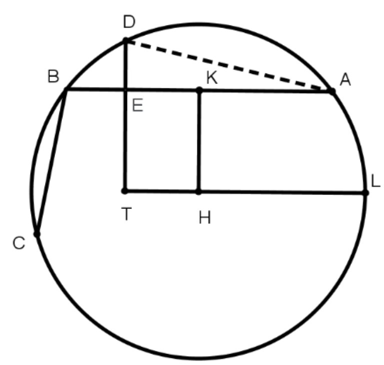
Για να αποδείξουμε το θεώρημα αυτό προεκτείνουμε τη χορδή ΒΓ κατά τμήμα ΒΓ′, έτσι ώστε το τμήμα $N\Gamma = N\Gamma'$. Θα ισχύει $M\Gamma = M\Gamma' = MA$. Επίσης τα τρίγωνα MAB και $MB\Gamma'$ είναι ίσα γιατί έχουν: $MA = M\Gamma'$, MB κοινή πλευρά, οι γωνίες A, Γ' είναι ίσες μια και οι δύο είναι ίσες με τη γωνία Γ. Η ισότητα των τριγώνων MAB και $MB\Gamma'$

απορρέει από την πρόταση, η οποία αναφέρει ότι «αν δύο τρίγωνα έχουν δυο πλευρές τους και δυο γωνίες τους (όχι τις περιεχόμενες στις ίσες πλευρές) ίσες, τότε οι άλλες γωνίες θα είναι ίσες ή παραπληρωματικές». Άρα σύμφωνα με την πρόταση αυτή οι γωνίες $MBA\ και\ MB\Gamma'$ θα είναι παραπληρωματικές ή ίσες, αλλά εδώ θα ισχύει η ισότητα μια και οι γωνίες αυτές είναι αμβλείες, άρα τα τρίγωνα MAB και $MB\Gamma'$ είναι ίσα οπότε $AB = B\Gamma'$. ‘Αρα το Ν είναι το μέσο του $\Gamma\Gamma'$ οπότε ΓΝ = $N\Gamma' = NB + B\Gamma' = NB + AB$. Άρα το Ν είναι το μέσο της σπασμένης χορδής $AB\Gamma$.

Ας δούμε με σύγχρονους τριγωνομετρικούς συμβολισμούς το συμπέρασμα από το προηγούμενο θεώρημα. Ονομάζουμε το $τόξο\ M\Gamma = 2x$ και το $τόξο\ MB = 2\psi$, τότε έχουμε διαδοχικά ότι $M\Gamma = 2ημx, BM = 2ημ\psi\ AB = 2ημ(x - \psi)$. Από τα ορθογώνια τρίγωνα $MN\Gamma$ και MBN έχουμε $N\Gamma = 2ημx\ συνy,\ NB = 2ημy\ συνx$.

Αν επιστρέψουμε στο προηγούμενο θεώρημα θα έχουμε: $AB + NB = N\Gamma$ $2ημ(x - \psi) + 2ημ\psi\ συνx = 2ημx\ συν\psi$ ή $ημ(x - \psi) = ημx\ συν\psi - ημ\psi\ συνx$ η οποία είναι η γνωστή τριγωνομετρική σχέση που μας δίνει το ημίτονο της διαφοράς δύο γωνιών.

Ο Abu Raihan al- Biruni (973- 1048), χρησιμοποίησε το θεώρημα της σπασμένης χορδής για να υπολογίσει το μήκος της χορδής που αντιστοιχεί στο ημιάθροισμα των χορδών δύο τόξων.



Στο παραπάνω σχήμα D είναι το μέσο του τόξου ABC. Ας υποθέσουμε ότι $τόξο\ AB = \alpha$ και $τόξο\ BC = \beta$, θέλουμε να βρούμε το μήκος της $χορδής\ (\frac{\alpha+\beta}{2}) = AD$. Από το κέντρο H του κύκλου και από το μέσο D φέρνουμε κάθετη $HK,\ DE$ στην $χορδ$ή AB. Από το κέντρο H φέρνουμε παράλληλη στην AB η οποία τέμνει την προέκταση της DE στο T και τον κύκλο στο L. Τα τμήματα KH και ET είναι ίσα με $\frac{1}{2}\ χορδ$ή $(180^0 - \alpha)$. Από το θεώρημα της σπασμένης χορδής έχουμε $AE = \frac{AB+BC}{2}$, οπότε $KE = AE - AK = \frac{AB+BC}{2} - \frac{AB}{2} = \frac{BC}{2}$ το οποίο είναι γνωστό. Άρα ξέρουμε και το TH οπότε και το TL. Ξέροντας το TL μπορούμε να βρούμε και το τετράγωνο του DT μια και αυτό ισούται με το γινόμενο του TL και του υπολοίπου αυτού από την διάμετρο του κύκλου. Αφαιρώντας από το DT το ET έχουμε το DE. Τέλος με πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο DEA βρίσκουμε την χορδή DA που αναζητούσαμε.

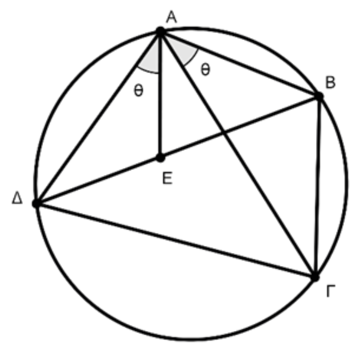
7.3 Το $\eta\mu 1^0$ κατά τον Πτολεμαίο

Ο Πτολεμαίος στην *Μαθηματική Σύνταξη* για να κατασκευάσει πίνακα χορδών ακολουθεί την παρακάτω διαδικασία.

1. Αποδεικνύει το λεγόμενο σήμερα θεώρημα του Πτολεμαίου. Σε εγγράψιμο τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ ισχύει $ΑΒ \cdot ΓΔ + ΒΓ \cdot ΑΔ = ΑΓ \cdot ΒΔ$

Απόδειξη

Φέρνουμε το τμήμα $ΑΕ$ (το Ε σημείο της ΒΔ) έτσι ώστε γωνία $ΔΑΕ = γωνία\ ΓΑΒ = \theta$. Τα τρίγωνα $ΑΔΕ$ και $ΑΒΓ$ είναι όμοια άρα



$$\frac{ΑΔ}{ΔΕ} = \frac{ΑΓ}{ΒΓ} \text{ ή } ΑΔ \cdot ΒΓ = ΑΓ \cdot ΔΕ \ (1).$$

Επίσης τα τρίγωνα $ΑΒΕ$ και $ΑΔΓ$ είναι όμοια άρα

$$\frac{ΑΒ}{ΒΕ} = \frac{ΑΓ}{ΔΓ} \text{ ή } ΑΒ \cdot ΔΓ = ΑΓ \cdot ΒΕ \ (2).$$

Προσθέτοντας τις (1) και (2) κατά μέλη έχουμε την ζητούμενη σχέση.

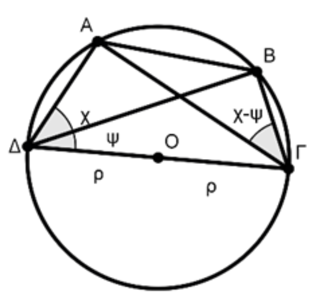
Με τη βοήθεια αυτού του θεωρήματος ο Πτολεμαίος υπολογίζει τη χορδή του αθροίσματος και της διαφοράς δύο τόξων, όταν είναι γνωστή η χορδή του καθενός. Θεωρεί την ειδική περίπτωση που η πλευρά ΔΓ είναι διάμετρος του κύκλου. Με χρήση τριγωνομετρικών αριθμών θα έχουμε

$ΑΓ = 2\rho\eta\mu\chi, ΒΓ = 2\rho\eta\mu\psi, ΑΒ = 2\rho\eta\mu(\chi - \psi), ΑΔ = 2\rho\sigma\upsilon\nu\chi, ΒΔ = 2\rho\sigma\upsilon\nu\psi.$

Οπότε με αντικατάσταση στο θεώρημα θα έχουμε

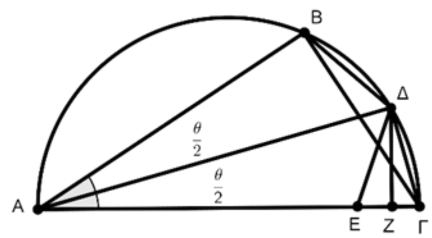
$$2\rho\eta\mu(\chi - \psi) \cdot 2\rho + 2\rho\eta\mu\psi \cdot 2\rho\sigma\upsilon\nu\chi = 2\rho\eta\mu\chi \cdot 2\rho\sigma\upsilon\nu\psi\omega$$

$$\text{ή } \eta\mu(\chi - \psi) = \eta\mu\chi\,\sigma\upsilon\nu\psi - \eta\mu\psi\,\sigma\upsilon\nu\chi.$$



Βλέπουμε ότι εμφανίστηκε ο τύπος για το ημίτονο της διαφορά δύο τόξων που είδαμε και πριν στο θεώρημα της σπασμένης χορδής. Ο Πτολεμαίος φυσικά χρησιμοποιούσε τη σχέση αυτή με την ισοδύναμη μορφή των τόξων όπως είδαμε στην αρχή $\chi o\rho\delta ή(2\chi - 2\psi) = 2\chi o\rho\delta ή(\chi)\, \chi o\rho\delta ή(180^0 - 2\psi) - 2\chi o\rho\delta ή(180^0 - 2\chi)\chi o\rho\delta ή(2\psi)$.

2. Στη συνέχεια ο Πτολεμαίος αναπτύσσει μια μέθοδο υπολογισμού της χορδής ενός τόξου, όταν είναι γνωστή η χορδή του διπλάσιου τόξου με το παρακάτω θεώρημα. Έστω ημικύκλιο $AB\Gamma$ με εγγεγραμμένη γωνία $BA\Gamma$ και $A\Delta$ διχοτόμος, αν ΔZ κάθετη στην $A\Gamma$ τότε η $Z\Gamma$ ισούται με το μισό της διαφοράς του AB από το $A\Gamma$ δηλαδή $Z\Gamma = \frac{1}{2}(A\Gamma - AB)$.



Για να αποδείξουμε το θεώρημα, παίρνουμε σημείο E πάνω στην $A\Gamma$ έτσι ώστε $AE = AB$. Τα τρίγωνα $A\Delta B$ και $A\Delta E$ είναι ίσα άρα $B\Delta = \Delta E$. Αλλά $B\Delta = \Delta\Gamma$ οπότε $\Gamma\Delta = \Delta E$ δηλαδή τρίγωνο $\Delta E\Gamma$ ισοσκελές άρα

$$Z\Gamma = \frac{1}{2} E\Gamma = \frac{1}{2}(A\Gamma - AE) = \frac{1}{2}(A\Gamma - AB).$$

Επίσης από το ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ έχουμε ότι $\Delta\Gamma^2 = Z\Gamma \cdot A\Gamma$ δηλαδή $\Delta\Gamma^2 = \frac{1}{2}(A\Gamma - AB)\, A\Gamma$. Αν κάνουμε την αντιστοίχιση με σύγχρονο συμβολισμό στον προηγούμενο τύπο έχουμε $\Delta\Gamma = 2\rho\eta\mu\,\frac{\theta}{2}, AB = 2\rho\sigma\upsilon\nu\theta, A\Gamma = 2\rho$
οπότε προκύπτει ο γνωστός τύπος αποτετραγωνισμού του ημιτόνου της μισής γωνίας

$$\eta\mu^2\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}(1 - \sigma\upsilon\nu\theta).$$

3. Ο Πτολεμαίος θεωρεί γνωστές τις χορδές που αντιστοιχούν στα τόξα των 60^o και 72^o μια και αντιστοιχούν στις πλευρές κανονικού εξαγώνου (ίση με την ακτίνα) και του κανονικού πενταγώνου (κατασκευάζεται με χρυσή τομή). Άρα με τον τύπο της διαφοράς βρίσκει την χορδή του τόξου $12^0 = 72^0 - 60^0$. Κατόπιν με τον τύπο του μισού υπολογίζει τις χορδές που αντιστοιχούν στα τόξα των $6^0, 3^0, (1\frac{1}{2})^0, (\frac{3}{4})^0$. Για την χορδή του τόξου των $(1\frac{1}{2})^0$ (α∠′) σε κύκλο διαμέτρου 120 μονάδων δίνει τιμή όπως βλέπουμε από τον διπλανό πίνακα $\alpha\ \lambda\delta\ \iota\varepsilon$ δηλαδή στο δεκαδικό σύστημα 1+$\frac{34}{60}$+$\frac{15}{60^2}$ ή περίπου 1,5707.

ια'. Κανόνιον τῶν ἐν κύκλῳ εὐθειῶν.

περιφερειῶν	εὐθειῶν			ἑξηκοστῶν			
∠'	ο	λα	κε	ο	α	β	ν
α	α	β	ν	ο	α	β	ν
α∠'	α	λδ	ιε	ο	α	β	ν

Η τρίτη στήλη που βλέπουμε στον πίνακα με τον τίτλο ἑξηκοστῶν είναι το μήκος που πρέπει να προστεθεί, για να βρεθεί το μήκος χορδής μισής μοίρας μεγαλύτερης.

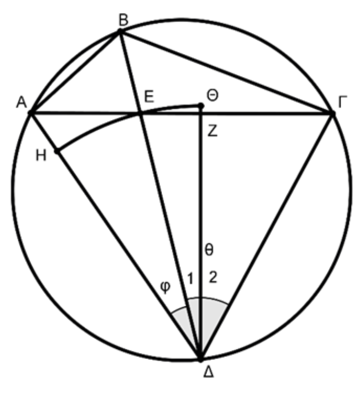
4. Για τον υπολογισμό της χορδής μιας μοίρας ο Πτολεμαίος συνεχίζει με την απόδειξη μιας ανισότητας.

λέγω γάρ, ὅτι, ἐὰν ἐν κύκλῳ διαχθῶσιν ἄνισοι δύο εὐθεῖαι, ἡ μείζων πρὸς τὴν ἐλάσσονα ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ἐπὶ τῆς μείζονος εὐθείας περιφέρεια πρὸς τὴν ἐπὶ τῆς ἐλάσσονος.

Με σύγχρονη γραφή το παραπάνω θεώρημα μας λέει ότι αν δοθούν δύο γωνίες

$$0 < \varphi < \theta < \pi \;\; \text{τότε ισχύει} \;\; \frac{\text{χορδή}\ \theta}{\text{χορδή}\ \varphi} < \frac{\widehat{\theta}}{\widehat{\varphi}}$$

Για την απόδειξη του θεωρήματος αυτού θεωρούμε δύο χορδές AB και $\Gamma\Delta$ στις οποίες βαίνουν οι εγγεγραμμένες γωνίες φ και θ αντίστοιχα, όπως βλέπουμε στο παρακάτω σχήμα. Φέρνουμε την διχοτόμο $B\Delta$ της γωνίας $AB\Gamma$ και την ΔZ κάθετη στην $A\Gamma$. Επειδή τα τόξα $A\Delta$ και $\Delta\Gamma$ είναι ίσα το τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές άρα η AZ είναι διάμεσος και διχοτόμος οπότε $AZ = Z\Gamma$ και γωνίες $\varphi + \theta_1 = \theta_2$. Κατασκευάζουμε το τόξο $HE\Theta$ με κέντρο Δ και ακτίνα ΔE. Έχουμε τρίγωνο $\Delta EZ \; < \; \text{τομέα}\ \Delta E\Theta$ και



$\text{τρίγωνο}\ AE\Delta \; > \; \text{τομέα}\ HE\Delta$ άρα

$\frac{\text{τρίγωνο}\ \Delta EZ}{\text{τρίγωνο}\ AE\Delta} < \frac{\text{τομέα}\ \Delta E\theta}{\text{τομέα}\ HE\Delta}$ $\text{άρα}\ \frac{ZE}{AE} < \frac{\widehat{\theta_1}}{\widehat{\varphi}}$ $\text{οπότε}\ \frac{ZE+AE}{AE} < \frac{\widehat{\theta}_1+\widehat{\varphi}}{\widehat{\varphi}}$ ή $\frac{AZ}{AE} < \frac{\widehat{\theta}_2}{\widehat{\varphi}}$.

Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της τελευταίας σχέσης με το 2 οπότε θα έχουμε

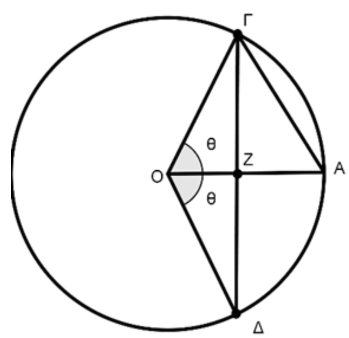
$2\frac{AZ}{AE} < 2\frac{\widehat{\theta}_2}{\widehat{\varphi}}$ $\text{δηλαδή}\ \frac{A\Gamma}{AE} < \frac{\widehat{AB\Gamma}}{\widehat{\varphi}}$ $\text{οπότε}\ \frac{A\Gamma - AE}{AE} < \frac{\widehat{AB\Gamma}-\widehat{\varphi}}{\widehat{\varphi}}$ ή $\frac{E\Gamma}{AE} < \frac{\widehat{B\Delta\Gamma}}{\widehat{\varphi}}$.

Από το θεώρημα διχοτόμων στο τρίγωνο $ΒΑΓ$ έχουμε $\frac{ΕΓ}{ΑΕ} = \frac{ΒΓ}{ΑΒ}$ σε σύγκριση με την προηγούμενη σχέση θα έχουμε $\frac{ΒΓ}{ΑΒ} < \frac{\widehat{ΒΔΓ}}{\widehat{\varphi}}$ $άρα$ $\frac{χορδή\, \theta}{χορδή\, \varphi} < \frac{\widehat{\theta}}{\widehat{\varphi}}$.

Με τη βοήθεια της προηγούμενης ανίσωσης ο Πτολεμαίος προσέγγισε την τιμή της χορδής1^0 ως εξής: εφάρμοσε την ανίσωση για τις γωνίες $\varphi = 1^0$ και θ = $(\frac{3}{4})^0$ άρα $\frac{χορδή\, 1^0}{χορδή\, (\frac{3}{4})^0} < \frac{1^0}{(\frac{3}{4})^0}$ άρα $χορδή$ 1^0 < $\frac{4}{3}\, χορδή$ $(\frac{3}{4})^0$, το ίδιο ακριβώς έκανε για τις γωνίες 1^0 και $(\frac{3}{2})^0$ οπότε προέκυψε $χορδή$ 1^0 > $\frac{3}{2}\, χορδή$ $(\frac{3}{4})^0$, δηλαδή συνδυάζοντας τις δύο σχέσεις έχουμε ότι $\frac{3}{2}\, χορδή$ $(\frac{3}{2})^0 < χορδή$ $1^o < \frac{4}{3}\, χορδή$ $(\frac{3}{4})^0$, αλλά οι τιμές δεξιά και αριστερά της ανίσωσης με την προσέγγιση που υπολόγισε ο Πτολεμαίος σε κύκλο ακτίνας 60 μονάδων είναι ίσες με $1 + \frac{2}{60} + \frac{50}{60^2}$ οπότε αυτή αποτέλεσε και την τιμή $\alpha\ \beta\ \nu$ που έδωσε ο Πτολεμαίος για τη χορδή 1^0 .

7.4 Η τριγωνομετρία στους Ινδούς - Άραβες και στη Δύση μέχρι τον 15^o αιώνα

Το έργο του Πτολεμαίου για πολλούς αιώνες θα αποτελέσει το βασικό εργαλείο για τους Αστρονόμους και Μαθηματικούς. Τρεις αιώνες μετά τον Πτολεμαίο τριγωνομετρικοί πίνακες με υπολογισμούς χορδών, παρόμοιοι με αυτούς του Πτολεμαίου.



θα εμφανιστούν στα έργα Ινδών Μαθηματικών και Αστρονόμων. Το καινούργιο στοιχείο που εισάγουν οι Ινδοί είναι ότι δεν υπολογίζουν την χορδή $ΑΓ$ που χρησιμοποιούσαν οι Έλληνες αλλά το μισό της χορδής του διπλασίου τόξου $ΓΖ$. Κάτι τέτοιο σε μοναδιαίο κύκλο, όπως έχουμε ήδη αναφέρει, μας δίνει αυτό που σήμερα ονομάζουμε ημίτονο. Επίσης χρησιμοποίησαν και το μήκος $ΟΖ$ του αποστήματος της χορδής $ΓΔ$ που αντιστοιχεί πάλι σε μοναδιαίο κύκλο με το σημερινό συνημίτονο. Όπως βλέπουμε οι αλλαγές αυτές των Ινδών μας έφεραν κοντά στην σημερινή μορφή των τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Στα έργα των Aryabhata, Brahmagupta και Bhascara συναντάμε τύπους όπως ψ≈ $\frac{4\delta\alpha(\chi-\alpha)}{\frac{5}{4}\chi^2-\alpha(\chi-\alpha)}$ όπου ψ είναι η χορδή τόξου α σε περιφέρεια μήκους χ και διαμέτρου δ. Με σύγχρονο συμβολισμό ο παραπάνω τύπος παίρνει την μορφή

$$\eta\mu\chi \approx \frac{16\chi(\pi-\chi)}{5\pi^2-4\chi(\pi-\chi)} \;, \qquad 0 \le \chi \le \pi$$

Άλλος τύπος που εμφανίστηκε την περίοδο αυτή με σύγχρονη μορφή είναι αυτός που γνωρίζουμε ως βασική τριγωνομετρική ταυτότητα $1-\eta\mu^2\chi = \sigma\upsilon\nu^2\chi = \eta\mu^2(\frac{\pi}{2}-\chi)$. Αξιοσημείωτος τύπος είναι και αυτός που επινόησε ο Brahmagupta το 665 και είναι αυτός που παρεμβάλει την τιμή του $\eta\mu(\alpha + xh)$, όταν είναι γνωστά τα $\eta\mu(\alpha-h)$, $\eta\mu\alpha$, $\eta\mu(\alpha+h)$

$$\eta\mu(\alpha+xh) \approx \eta\mu\alpha + x\left(\frac{\Delta\eta\mu\alpha + \Delta\eta\mu(\alpha-h)}{2}\right) + \frac{\chi^2\Delta^2\eta\mu(\alpha-h)}{2!}$$

όπου $\Delta\eta\mu\alpha = \eta\mu(\alpha+h)-\eta\mu\alpha$. Ο προηγούμενος τύπος αποτελεί μερική περίπτωση του γενικότερου τύπου των Newton–Stirling.

$$f(a+xh) \cong f(a) + x\left(\frac{\Delta f(a) + \Delta f(a-h)}{2}\right) + \frac{x^2\Delta^2 f(a-x)}{2!}$$

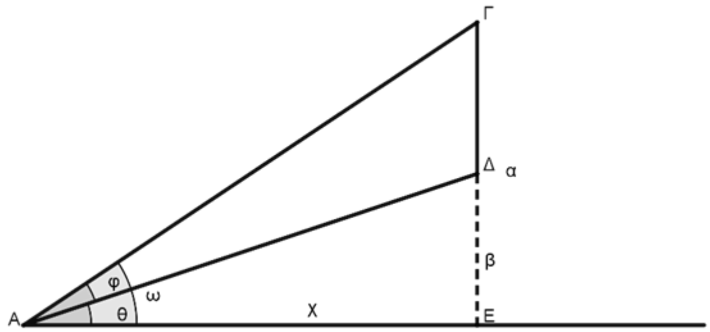
$$\acute{o}\pi o\upsilon \quad \Delta f(a) = f(a+h) - f(a)$$

Η Τριγωνομετρία αναπτύχθηκε και από τους Άραβες Μαθηματικούς (9^{ος} – 14^{ος} αιώνας). Οι Άραβες όπως είναι γνωστό μετέφρασαν μεγάλο αριθμό από τα έργα των αρχαίων Ελλήνων και Ινδών Μαθηματικών. Εξέλιξαν και την Τριγωνομετρία καθιστώντας την έναν ανεξάρτητο κλάδο των Μαθηματικών. Ενδεικτικά ο Abū al-Wafā' al-Būzjānī προσθέτει άλλες τέσσερις τριγωνομετρικές συναρτήσεις εκτός από το ημίτονο και συνημίτονο. Προσθέτει την εφαπτομένη, συνεφαπτομένη, τέμνουσα και συντέμνουσα προσπαθώντας να λύσει προβλήματα με υπολογισμούς σκιάς αντικειμένων. Επίσης κατασκευάζει πίνακες ημιτόνων γωνιών ανά 0,25^{o} με 8 δεκαδικά ψηφία. Στις αρχές του 11^{ου} αιώνα ένας Αιγύπτιος Αστρονόμος, ο Ibn Yunus, παρουσιάζει τον τύπο $\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu B = \frac{\sigma\upsilon\nu(A+B)+\sigma\upsilon\nu(A-B)}{2}$. Ο πρώτος από τους Άραβες Αστρονόμους και Μαθηματικούς που έγραψε έργο Τριγωνομετρίας ανεξάρτητα από τις ανάγκες της Αστρονομίας είναι ο Nasīr al-Dīn al-Tūsī. Στο έργο *Περί σχημάτων και διατεμνουσών* έχει συλλέξει και παρουσιάζει τις γνώσεις της εποχής του. Στο έργο αυτό αποδεικνύει και το γνωστό νόμο ημιτόνων και εφαπτομένων σε επίπεδο τρίγωνο. Τέλος, τον 15^{o} αιώνα ο Jamshīd al-Kāshī αποδεικνύει τον νόμο συνημιτόνων για επίπεδο τρίγωνο. Μια σημαντική μορφή που επέδρασε στην ανάπτυξη της Τριγωνομετρίας στη δύση είναι ο Γερμανός Μαθηματικός J. Müller γνωστός ως Regiomontanus (1436-1476). Ο Regiomontanus ταξίδεψε στην Ελλάδα και την Ιταλία, όπου επισκέφθηκε την Πάντοβα, τη Βενετία και τη Ρώμη. Στη Βενετία ολοκλήρωσε, το 1464, το πιο γνωστό του έργο, το *De triangulis omnimodis* (*Περί των πάσης φύσεως τριγώνων*). Επιπλέον των δραστηριοτήτων αυτών, ο Regiomontanus εργαζόταν και ως αστρολόγος, χωρίς να θεωρεί ότι έτσι έρχεται σε αντίθεση με το επιστημονικό του έργο. Θαύμαζε τον Πτολεμαίο και έμαθε Ελληνικά, για να μπορέσει να διαβάσει την *Μαθηματική Σύνταξη* από το πρωτότυπο. Σχεδίαζε να μεταφράσει το έργο αυτό και τα σχόλια του Θέωνα στα Λατινικά. Ο Regiomontanus ήταν ο πρώτος που εξέδωσε Μαθηματικά και Αστρονομικά βιβλία για εμπορικούς σκοπούς. Το 1474 εξέδωσε τις *Εφημερίδες,* που περιείχαν πίνακες με τις θέσεις του Ήλιου, της Σελήνης και των πλανητών για κάθε ημέρα, από το 1475 μέχρι το 1506. Ήρθε σε επαφή με πολλούς λόγιους της εποχής του ένας από αυτούς ήταν και ο Γεώργιος Τραπεζούντιος. Ο Γεώργιος Τραπεζούντιος καταγόταν από την Τραπεζούντα και γεννήθηκε στον Χάνδακα της Κρήτης (το σημερινό Ηράκλειο), θεωρούνταν αυθεντία στο έργο του Πτολεμαίου το οποίο είχε μεταφράσει στα Λατινικά. Σε ηλικία περίπου 30 ετών πήγε στη Βενετία, όπου εργάσθηκε ως αντιγραφέας και στη συνέχεια ως δάσκαλος των Ελληνικών. Απέκτησε γρήγορα φήμη, και για ένα διάστημα υπηρέτησε ως σύμβουλος του πάπα Ευγένιου του Δ' και στη συνέχεια του Νικολάου του Ε', οι οποίοι του ανέθεσαν τη μετάφραση αρχαίων Ελληνικών κειμένων στα λατινικά. Έλαβε μέρος στη σύνοδο της Φλωρεντίας (1439). Οι προσπάθειές του, μετά την Άλωση, να πείσει τον Μωάμεθ να ιδρύσει μια Ελληνοθωμανική αυτοκρατορία είχαν ως αποτέλεσμα να πέσει σε δυσμένεια και να αποπεμφθεί από την Αυλή του Πάπα. Επιστρέφοντας στο έργο του Regiomontanus θα βρούμε να εμφανίζεται για πρώτη φορά, με έμμεσο τρόπο, ο τύπος για τον υπολογισμό του εμβαδού τριγώνου από δυο πλευρές και την περιεχόμενη σε αυτές γωνία. Ο Regiomontanus σε μια επιστολή του προς τον Christian Roder, καθηγητή του Πανεπιστημίου της Ερφούρτης, θέτει το ακόλουθο πρόβλημα: «Από ποιο σημείο του εδάφους φαίνεται μεγαλύτερη μια ράβδος αναρτημένη κατακόρυφα (δηλαδή φαίνεται υπό τη μεγαλύτερη γωνία);»

Ας δούμε την λύση αυτού του όμορφου προβλήματος. Έστω μια ράβδος $ΓΔ$ και φ η γωνία υπό την οποία φαίνεται η ράβδος αυτή από το σημείο A του οριζόντιου επιπέδου.

Θέλουμε να βρούμε την απόσταση $AE = x$, έτσι ώστε η γωνία φ να γίνει μέγιστη. Αν θέσουμε τις γωνίες $ΔAE$ και $ΓAE$ ίσες με θ και ω αντίστοιχα και τα τμήματα $ΓE = \alpha, ΔE = \beta$ θα έχουμε:

$$\sigma\varphi\varphi = \sigma\varphi(\omega - \theta) = \frac{\sigma\varphi\omega\sigma\varphi\theta + 1}{\sigma\varphi\theta - \sigma\varphi\omega} = \frac{\frac{x}{\alpha}\frac{x}{\beta} + 1}{\frac{x}{\beta} - \frac{x}{\alpha}} = \frac{x}{\alpha - \beta} + \frac{\alpha\beta}{(\alpha - \beta)x}.$$



Πρόκειται για ένα κλασικό πρόβλημα μεγιστοποίησης το οποίο ο Regiomontanus το έλυσε με τη βοήθεια της ανισοτικής σχέσης αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου

$$\frac{u+v}{2} \geq \sqrt{uv}\,, \qquad αν\ u = v\ τότε\ \frac{u+v}{2} = \sqrt{uv}\,,$$

Αν θέσουμε

$$\frac{x}{\alpha-\beta} = u\,, \qquad \frac{\alpha\beta}{(\alpha-\beta)x} = v$$

θα έχουμε

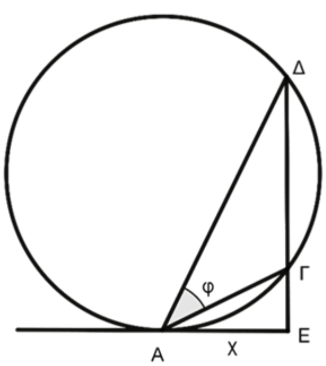
$$\sigma\varphi\varphi = u + v \geq 2\sqrt{uv} = \sqrt{\frac{x}{\alpha-\beta}\frac{\alpha\beta}{(\alpha-\beta)x}} = \frac{2\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha-\beta}$$

με την ισότητα να ισχύει όταν

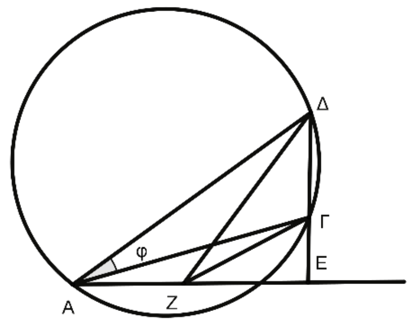
$$\frac{x}{\alpha-\beta} = \frac{\alpha\beta}{(\alpha-\beta)x} \Longrightarrow x = \sqrt{\alpha\beta}.$$

Δηλαδή η μέγιστη γωνία θα επιτευχθεί όταν το A απέχει από το E απόσταση ίση με τον γεωμετρικό μέσο των αποστάσεων των άκρων της ράβδου $ΓΔ$ από το έδαφος.

Το προηγούμενο πρόβλημα δέχεται και μια πολύ όμορφη γεωμετρική λύση αν φέρουμε τον κύκλο που διέρχεται από τα σημεία $Γ, Δ$ και εφάπτεται στο οριζόντιο επίπεδο EA.



Επειδή τα μήκη $ΔE$ και $ΓE$ είναι γνωστά και το μήκος EA μια και $EA^2 = ΓE \cdot EΔ$. Άρα μπορεί να προσδιοριστεί η θέση του σημείου A ως μέση ανάλογος των $ΓE, EΔ$. Η κατασκευή αυτή δίνει τη μέγιστη γωνία, γιατί αν ο κύκλος έτεμνε το οριζόντιο επίπεδο, τότε οποιαδήποτε γωνία $ΔΖΓ$ θα ήταν μεγαλύτερη από την φ.



Το πρόβλημα αυτό γενικεύεται ως εξής: «Να γραφεί κύκλος που εφάπτεται σε τρία αντικείμενα.» Τα αντικείμενα αυτά μπορεί να είναι κύκλος, σημείο, ευθεία και προκύπτουν συνολικά 10 επιμέρους προβλήματα. Τα προβλήματα αυτά τέθηκαν από αρχαίο Μαθηματικό Απόλλώνιο τον Περγαίο στο σύγγραμμά του *Επαφαί* το οποίο δεν έφτασε στις μέρες μας.

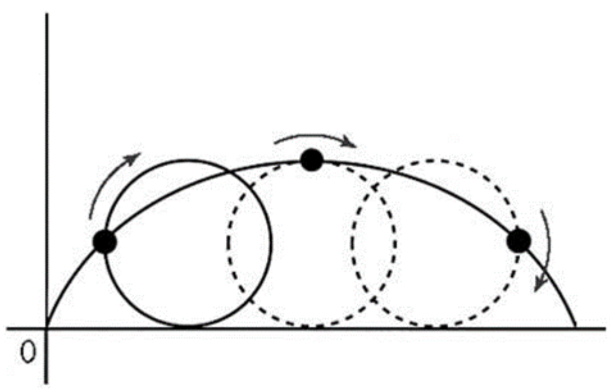
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8^{ο} ΣΤΗΝ ΕΥΡΩΠΗ ΠΡΙΝ ΤΟΝ ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟ ΛΟΓΙΣΜΟ

Στην ενότητα αυτή θα δούμε τεχνικές που χρησιμοποιήθηκαν στην Ευρώπη την περίοδο πριν την ανακάλυψη του απειροστικού λογισμού. Σκοπός μας είναι να δούμε πάντα στα πλαίσια των σχολικών Μαθηματικών πώς διαχειρίστηκαν το πρόβλημα της μέτρησης της επιφάνειας την περίοδο αυτή. Κυρίαρχο ρόλο την περίοδο αυτή έχει η αρχή του Cavalieri, αρχή η οποία όπως θα δούμε εδράζεται στις διδαχές των αρχαίων Ελλήνων.

8.1 Εμβαδόν κυκλοειδούς καμπύλης

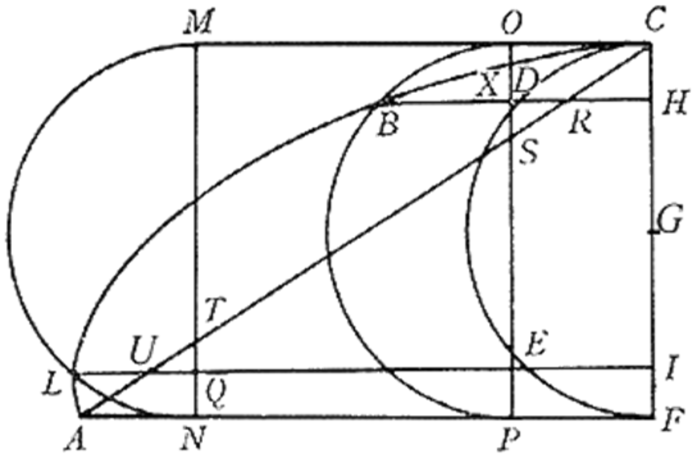
Η Κυκλοειδής καμπύλη είναι η καμπύλη που διαγράφει ένα σημείο της περιφέρειας ενός κύκλου, ο οποίος κυλίεται σε οριζόντιο επίπεδο. Η εύρεσή της χρονολογείται στις αρχές του 17^{ου} αιώνα. Σύμφωνα με τον C. Dati (1619 – 1676), ο Γαλιλαίος ήταν ο πρώτος που μελέτησε την καμπύλη γύρω στο 1600 (E. A. Whitman, *Some Historical Notes on the Cycloid*, The American Mathematical Monthly, Vol. 50, 1943).

Ένα από τα προβλήματα που απασχόλησαν τον Γαλιλαίο αλλά και άλλους Μαθηματικούς αργότερα, ήταν η εύρεση του εμβαδού της επιφάνειας που περικλείεται από την καμπύλη και το οριζόντιο επίπεδο.



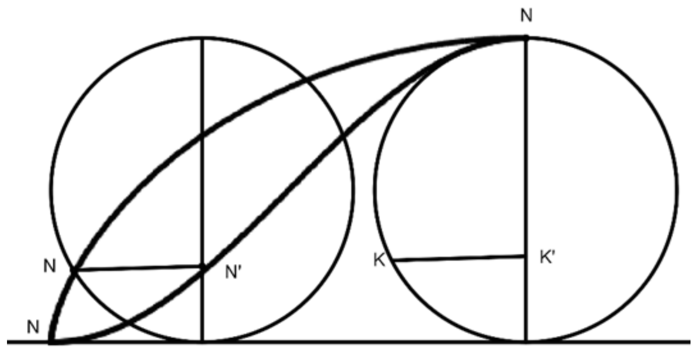
Σε μια επιστολή του προς τον B. Cavalieri το 1640 έγραψε ότι η επιφάνεια αυτή θα μπορούσε να είναι τριπλάσια του εμβαδού του κύκλου που τη δημιουργεί. Το πρόβλημα αυτό το έλυσε ο E. Torricelli (1608–1647) μετά τον θάνατο του Γαλιλαίου τον Ιανουάριο του 1642 δείχνοντας ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείει η κυκλοειδής ήταν όσο το είχε προβλέψει ο Γαλιλαίος. Στη συνέχεια παρουσιάζεται η απόδειξη που έδωσε ο Torricelli. Στο παρακάτω σχήμα έχουμε, για λόγους απλότητας στο σχήμα, τη μισή κυκλοειδή καμπύλη ABC που δημιουργείται από το σημείο C του κύκλου $CDEF$ που και εδώ για λόγους απλότητας του σχήματος βλέπουμε το μισό του.

Θα δείξουμε, λοιπόν, ότι το εμβαδόν του χωρίου $ABCF$ είναι τριπλάσιο από το εμβαδόν του ημικυκλίου $CDEF$.

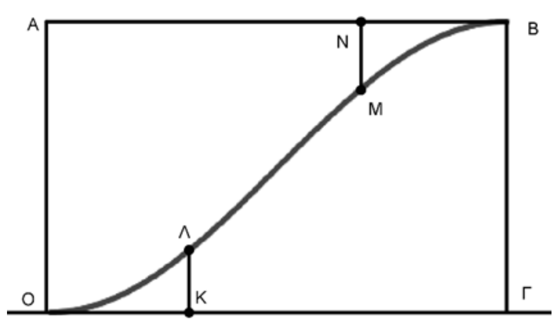


Για τον λόγο αυτό θεωρούμε δύο σημεία H, I συμμετρικά ως προς το κέντρο G. Φέρνουμε από τα σημεία αυτά παράλληλες προς την βάση FA που τένουν η πρώτη το ημικύκλιο OP στο B και η δεύτερη το ημικύκλιο MN στο σημείο L. Είναι φανερό ότι τα τμήματα HD, IE, XB, QL είναι ίσα όπως επίσης και τα τόξα OB και LN. Το ίδιο συμβαίνει με τα τμήματα CR και AU τα οποία είναι ίσα, επειδή είναι τμήματα ανάμεσα σε παράλληλες και έχουν αντίστοιχα τμήματα τα CH και IF που είναι ίσα. Από τον ορισμό της κυκλοειδούς καμπύλης το μήκος του ημικυκλίου NLM είναι ίσο με το μήκος του τμήματος AF όπως επίσης και το μήκος του τόξου LN είναι ίσο με το μήκος του τμήματος AN. Για τον ίδιο λόγο το μήκος του τόξου BP θα είναι ίσο με το τμήμα AP και το τόξο BO ίσο με το τμήμα PF. Επειδή τα τόξα LN και BO είναι ίσα, θα είναι ίσα και τα τμήματα AN και PF και από τις παράλληλες θα είναι ίσα και τα τμήματα AT και CS. Γνωρίζουμε ότι τα τμήματα CR και AU είναι ίσα, άρα και τα τμήματα SR και UT θα είναι ίσα ως διαφορές ίσων τμημάτων. Έτσι τα τρίγωνα SRX και UQT είναι ίσα με ίσες πλευρές την UQ και XR. Συμπεραίνουμε ότι αν προσθέσουμε τα τμήματα LU και BP θα πάρουμε το ίδιο άθροισμα με την πρόσθεση των τμημάτων LQ και BX ή των τμημάτων DH και EI. Δηλαδή για όλες τις θέσεις των σημείων H και I το άθροισμα των αποστάσεων LU και BX θα είναι όσο το άθροισμα των DH και EI, αλλά στην περίπτωση αυτή τα τμήματα LU και BX γράφουν την επιφάνεια $ALBCA$ και τα τμήματα DH και EI γράφουν την επιφάνεια του ημικύκλιου $CDEF$. Άρα αυτές οι δύο επιφάνειες είναι ίσες. Τέλος το ορθογώνιο τρίγωνο ACF από την γνωστή πρόταση του Αρχιμήδη (έχει ως μια κάθετη πλευρά το μήκος του ημικύκλιου και ως άλλη κάθετη την διάμετρο του κύκλου) έχει εμβαδόν διπλάσιο του εμβαδού του ημικυκλίου $CDEF$. Άρα τελικά η κυκλοειδής καμπύλη έχει εμβαδόν τριπλάσιο του κύκλου που την παράγει.

Με τη λύση του παραπάνω προβλήματος ασχολήθηκε και ένας άλλος μεγάλος Μαθηματικός του 17ου αιώνα, ο G. de Roberval (1602 – 1675). Σχεδόν παράλληλα με το Torricelli έλυσε το πρόβλημα του υπολογισμού του εμβαδού της κυκλοειδούς καμπύλης. Για τον σκοπό αυτό χρησιμοποίησε μια δεύτερη καμπύλη που την ονόμασε συνοδή καμπύλη της κυκλοειδούς (companion of the cycloid).



Η καμπύλη αυτή σχηματίζεται, αν σε κάθε θέση του σημείου N που ορίζει την κυκλοειδή καμπύλη φέρουμε την προβολή του πάνω στην διάμετρο που είναι κάθε φορά κάθετη στο επίπεδο που κυλά ο κύκλος. Οι προβολές αυτές σχηματίζουν τη συνοδή καμπύλη. Στο παραπάνω σχήμα βλέπουμε την μισή κυκλοειδή και την συνοδή της. Από τον ορισμό της συνοδούς καμπύλης, όπως βλέπουμε στο παραπάνω σχήμα, κάθε τμήμα NN' παράλληλο προς το επίπεδο που κυλά ο κύκλος, το οποίο έχει τα άκρα του πάνω στην κυκλοειδή καμπύλη και την συνοδή της, είναι ίσο με το αντίστοιχο τμήμα KK' που είναι και αυτό παράλληλο με το επίπεδο κύλισης του κύκλου και έχει τα άκρα του πάνω στον κύκλο και στην κάθετη διάμετρό του. Άρα η επιφάνεια ανάμεσα στην κυκλοειδή και την συνοδή της έχει εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν του ημικυκλίου $\frac{1}{2}\pi\rho^2$.



Αν σχηματίσουμε το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο που περιέχει τη συνοδή καμπύλη της κυκλοειδούς, θα παρατηρήσουμε ότι το ορθογώνιο χωρίζεται από την καμπύλη σε δύο ισεμβαδικά χωρία, μια και για οποιοδήποτε κάθετο τμήμα και αν φέρουμε σε ίσες αποστάσεις από τα άκρα του ορθογωνίου ($OK = ON$) θα ισχύει $K\Lambda = MN$. Άρα το εμβαδόν της επιφάνειας $ΟΛΜΒΓ$ θα είναι ίσο με το μισό εμβαδόν του ορθογωνίου $ΟΑΒΓ$ δηλαδή

$$(ΟΛΜΒΓ) = \frac{ΟΓ \cdot ΟΑ}{2} = \frac{\pi\rho 2\rho}{2} = \pi\rho^2.$$

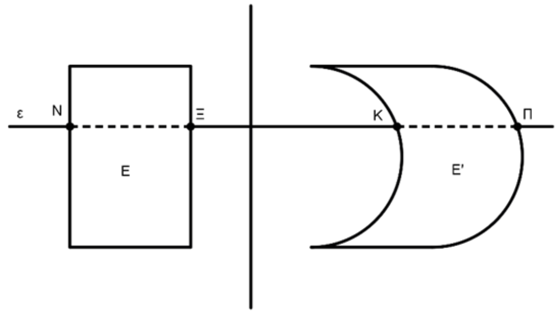
Άρα αν γυρίσουμε στο προηγούμενο σχήμα θα δούμε ότι το εμβαδόν της επιφάνειας που ορίζει η κυκλοειδής με το οριζόντιο επίπεδο ισούται με το άθροισμα των εμβαδών των επιφανειών που σχηματίζει η κυκλοειδής με την συνοδή της και του μισού ορθογωνίου δηλαδή $\frac{1}{2}\pi\rho^2 + \pi\rho^2 = \frac{3}{2}\pi\rho^2$. Τελικά το ζητούμενο εμβαδόν θα ισούται με $3\pi\rho^2$ ή το τριπλάσιο του εμβαδού του κύκλου που παράγει την κυκλοειδή.

8.2 Η αρχή του Cavalieri

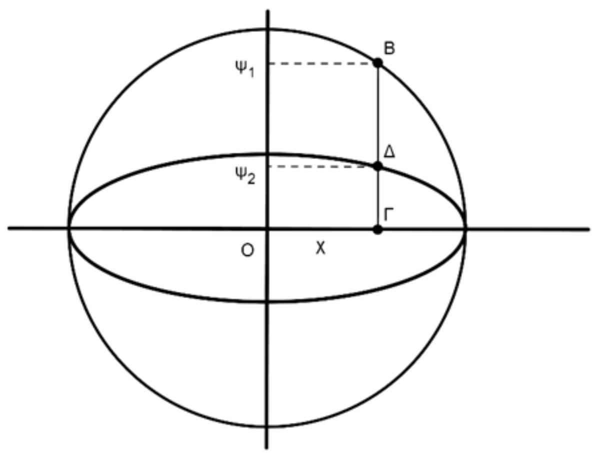
Στις παραπάνω αποδείξεις βλέπουμε ότι η επιφάνεια αντιμετωπίζεται ως άθροισμα απείρων ευθυγράμμων τμημάτων. Την έννοια αυτή εισήγαγε ο B. Cavalieri (1598-1647) στο έργο του «*Μέθοδος για την ανάπτυξη της νέας Γεωμετρίας των συνεχών αδιαιρέτων*» (*Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota).* Στην εργασία αυτή ισχυριζόταν ότι κάθε γραμμή αποτελείται από άπειρο πλήθος σημείων από τα οποία κανένα δεν έχει μέγεθος, κάθε επιφάνεια από άπειρο πλήθος γραμμών από τις οποίες καμία δεν έχει εύρος και κάθε στερεό από άπειρο πλήθος επιφανειών από τις οποίες καμία δεν έχει πάχος. Επιπλέον υπέθετε ότι κάθε επιφάνεια και γενικότερα κάθε μέγεθος μπορεί να διαιρεθεί σε άπειρο αριθμό αδιαίρετων ποσοτήτων. Οι ισχυρισμοί αυτοί του Cavalieri από όσα είδαμε και πριν έχουν την βάση τους στους ισχυρισμούς του Δημόκριτου, Πλάτωνα, Αριστοτέλη αλλά και στην μέθοδο της εξάντλησης του Αρχιμήδη. Ο Cavalieri θεωρούσε τον εαυτό του μαθητή του Γαλιλαίου και είχε συχνή αλληλογραφία μαζί του. Η αρχή που διατύπωσε για τα εμβαδά είναι η εξής:

Έχουμε δύο χωρία E και E' που ανήκουν στο ίδιο επίπεδο και φέρουμε όλες τις ευθείες του επιπέδου που είναι παράλληλες προς μια σταθερή ευθεία του επιπέδου και τέμνουν τα χωρία αυτά. Αν για κάθε μία από τις παράλληλες αυτές τα ευθύγραμμα τμήματα της τομής με καθένα χωρίο έχουν ίσα μήκη τότε $E = E'$.

Δηλαδή για το παρακάτω σχήμα, αν για κάθε ευθεία του επιπέδου που είναι παράλληλη προς την ε και τέμνει τα χωρία E και E' και τα τμήματα $ΝΞ$ και $ΚΠ$ που ορίζονται από την τομή της ε με τα χωρία είναι ίσα τότε τα χωρία αυτά είναι ισεμβαδικά. Η αρχή ισχύει και στην περίπτωση όπου το ένα από τα δύο τμήματα της τομής είναι ανάλογο του άλλου. Η ίδια σχέση αναλογίας ισχύει και για τα εμβαδά. Δηλαδή για το προηγούμενο σχήμα, αν $ΝΞ = \lambda ΚΠ$ για κάθε ευθεία παράλληλη στην ε τότε $Εμβαδόν\ E = \lambda(Εμβαδόν\ E')$.



Ας δούμε πώς μπορούμε με την αρχή του Cavalieri να υπολογίσουμε το εμβαδόν της έλλειψης. Στο παρακάτω σχήμα έχουμε μια έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{\psi^2}{\beta^2}=1$ και ένα κύκλο με διάμετρο τον μεγάλο άξονα της έλλειψης και εξίσωση $x^2 + \psi^2 = \alpha^2$. Άρα $\psi_1 = \sqrt{\alpha^2 - x^2}$ και $\psi_2 = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - x^2}$.



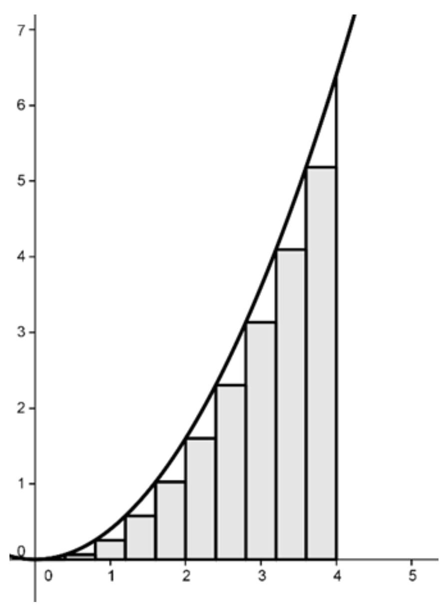
Επομένως για όλες τις ευθείες που είναι παράλληλες προς την ΒΓ, οι τομές με τον κύκλο και την έλλειψη ορίζουν τμήματα ψ_1 και ψ_2 έτσι ώστε $\psi_1 = \frac{\beta}{\alpha}\psi_2$. Άρα σύμφωνα με την αρχή Cavalieri θα ισχύει

$$E_{\acute{\varepsilon}\lambda\lambda\varepsilon\iota\psi\eta\varsigma} = \frac{\beta}{\alpha} E_{\kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda o\upsilon} = \frac{\beta}{\alpha}\pi\alpha^2 = \pi\alpha\beta.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9^{Ο} ΣΤΗΝ ΕΥΡΩΠΗ ΤΟΥ 19^{ΟΥ} ΑΙΩΝΑ

9.1 Τα αθροίσματα του Riemann

Τα έργα του Αρχιμήδη άρχισαν στα μέσα του 15^{ου} αιώνα να μεταφράζονται στη λατινική γλώσσα. Οι μέθοδοι και οι τεχνικές του Αρχιμήδη επηρέασαν σε μεγάλο βαθμό την εξέλιξη των Μαθηματικών στην Ευρώπη. Μια πρώτη μετάφραση έγινε από τον κληρικό Ιάκωβο της Κρεμόνας στα μέσα του 15^{ου} αιώνα, με σημαντικά όμως Μαθηματικά λάθη. Η πρώτη έκδοση με τα Ελληνικά πρωτότυπα και την βελτιωμένη Λατινική μετάφραση έγινε το 1544 από τον T. Gechauff. Από την περίοδο αυτή και μετά χωρίς διακοπή όλο και πιο συχνά εμφανίζεται ο Αρχιμήδης στα έργα των Μαθηματικών που θεμελίωσαν τον Απειροστικό Λογισμό όπως Kepler, Cavalieri, Fermat, Wallis, Pascal αλλά και Barrow, Νεύτωνα και Leibniz. Εκείνο που έχει αλλάξει είναι η οπτική γωνία σε σχέση με τη αρχαία περίοδο. Το κίνητρο τώρα δεν είναι φιλοσοφικό με σκοπό την αυστηρότητα και την εσωτερική αρμονία, είναι η αναζήτηση της γνώσης που θα χρησιμεύσει για πρακτικές εφαρμογές (Αστρονομία, Μηχανική, Φυσική, Ναυσιπλοΐα, Εμπόριο) και γενικότερα για την επερχόμενη τεχνολογική ανάπτυξη. Οι εργασίες αυτές μας οδήγησαν στον Απειροστικό Λογισμό ένα τμήμα του οποίου είναι και τα αθροίσματα Riemann. Τα αθροίσματα αυτά εκφράζονται από το ομώνυμο ολοκλήρωμα. Η θεωρία αυτή προτάθηκε από τον B. Riemann (1826 – 1866). Στα σύγχρονα Μαθηματικά ο υπολογισμός του εμβαδού ενός χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f, τον οριζόντιο άξονα xx' και τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$ γίνεται με τον υπολογισμό του ορισμένου ολοκληρώματος $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$. Αλλά αυτό το ολοκλήρωμα, όπως θα δούμε στην συνέχεια, έχει την βάση του στην μέθοδο της εξάντλησης που εφάρμοσε ο Αρχιμήδης για τον υπολογισμό εμβαδών.

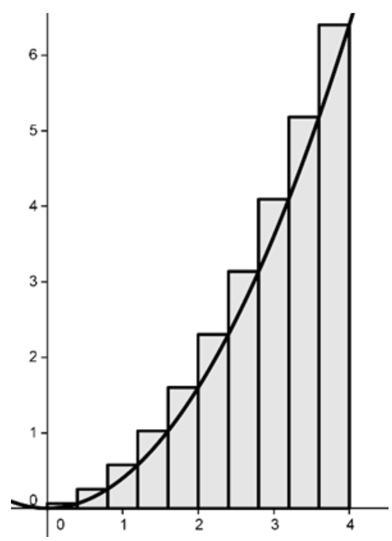


Ας δούμε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα με την παραβολή $f(x) = \frac{4}{10}x^2$. Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να βρούμε το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τον οριζόντιο άξονα xx', την αρχή των αξόνων και την ευθεία $x = 4$. Αρχικά θα ορίσουμε μια διαμέριση του διαστήματος $[0,4]$ σε n ίσα μέρη το πλάτος κάθε διαστήματος θα είναι $\frac{4}{n}$ δηλαδή

$$\left[0,\frac{4}{n}\right],\left[\frac{4}{n},2\cdot\frac{4}{n}\right],\dots\left[\frac{(i-1)4}{n},\frac{i4}{n}\right],\dots\left[\frac{(n-1)4}{n},4\right].$$

Στη συνέχεια θα σχηματίσουμε n ορθογώνια παραλληλόγραμμα τα οποία θα έχουν ως βάση το $\frac{4}{n}$ και ύψος τη μικρότερη τιμή της παραβολής στο διάστημα αυτό (δηλαδή την τιμή στο κάτω άκρο του διαστήματος) όπως βλέπουμε στο παραπάνω σχήμα. Το εμβαδόν της επιφάνειας που ορίζουν τα ορθογώνια αυτά προσεγγίζει με έλλειψη το εμβαδόν της ζητούμενης επιφάνειας Ω. Το εμβαδόν της επιφάνειας που ορίζουν τα ορθογώνια αυτά θα ισούται με το άθροισμα

$$\sum_{i=1}^{n} f[(i-1)\frac{4}{n}]\frac{4}{n} = \frac{4}{10}\frac{4^3}{n^3}[1^2+2^2+\dots+(n-1)^2] = \frac{256}{60n^3}n(n-1)(2n-1),$$



όταν το n τείνει στο άπειρο τότε το όριο του αθροίσματος θα είναι το $\frac{256}{30}$. Το εμβαδόν της επιφάνειας Ω μπορεί όμως να προσεγγιστεί και από την επιφάνεια που ορίζουν τα ορθογώνια που έχουν ως βάση πάλι το $\frac{4}{n}$ και ως ύψος τη μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει η παραβολή στο διάστημα αυτό (δηλαδή την τιμή στο άνω άκρο του διαστήματος). Οπότε στην περίπτωση αυτή το εμβαδόν της επιφάνειας που ορίζουν τα ορθογώνια όπως βλέπουμε και στο διπλανό σχήμα προσεγγίζει το εμβαδόν της επιφάνειας Ω με υπεροχή και θα ισούται με

$$\sum_{i=1}^{n} f[(i)\frac{4}{n}]\frac{4}{n} = \frac{4}{10}\frac{4^3}{n^3}[1^2 + 2^2 + \cdots + n^2] =$$

$$\frac{256}{60n^3}\mathrm{n(n+1)(2n+1)},$$

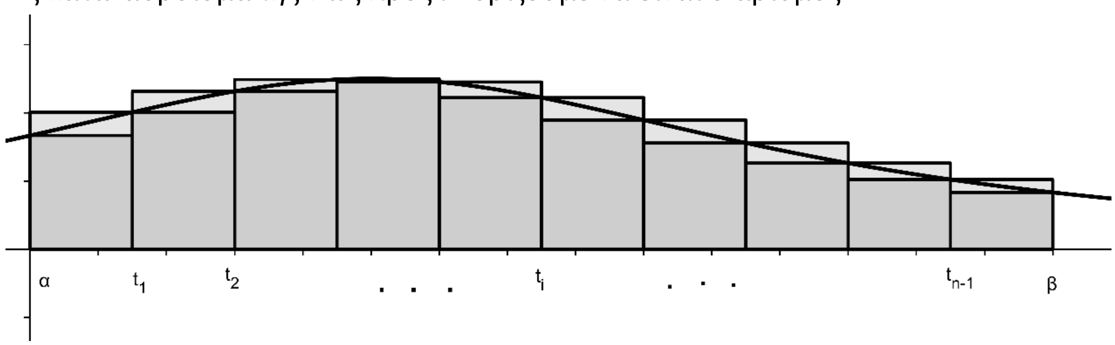
όταν και εδώ το n τείνει στο άπειρο το όριο αυτό γίνεται ίσο με $\frac{256}{30}$. Τελικά έχουμε ότι

$$\frac{256}{30} \leq E(\Omega) \leq \frac{256}{30}.$$

Το παραπάνω συμπέρασμα μας λέει ότι το εμβαδόν του χωρίου Ω ισούται τελικά με $\frac{256}{30}$. Η μέθοδος με την οποία υπολογίσαμε το εμβαδόν του χωρίου Ω είναι αυτή των αθροισμάτων Riemann και όπως βλέπουμε έχει κοινή βάση με την μέθοδο της εξάντλησης που εφάρμοσε ο Αρχιμήδης με σκοπό να υπολογίσει το εμβαδόν του κύκλου, της παραβολής, της έλικας αλλά και το εμβαδόν πολλών άλλων σχημάτων και επιφανειών. Στην συνέχεια ας δούμε τα γενικότερα χαρακτηριστικά της μεθόδου αυτής.

Ορισμός : Έστω $f : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ μια φραγμένη συνάρτηση και $P = \{\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1}, t_n = \beta\}$ μια διαμέριση του $[\alpha,\beta]$. Θέτουμε $m_i = \inf\{f(t): t_{i-1} \leq t \leq t_i\}$, $M_i = \sup\{f(t):): t_{i-1} \leq t \leq t_i\}$ $\gamma\iota\alpha\ i = 1,2,\ldots,n$. Προφανώς οι αριθμοί m_i, M_i εξαρτώνται από την διαμέριση $\mathcal{P}$.

Ως κάτω άθροισμα *της* f ως προς $\mathcal{P}$ ορίζουμε να είναι ο αριθμός



$$L(f,\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1})$$

και ως άνω άθροισμα της f ως προς $\mathcal{P}$ τον αριθμό

$$U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1})$$

Προφανώς $L(\mathrm{f},\mathcal{P}) \leq U(\mathrm{f},\mathcal{P})$. Έστω $f : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ μια φραγμένη συνάρτηση ορίζουμε ως *κάτω ολοκλήρωμα (Riemann)* της f στο [α,β] τον αριθμό $L\int_{\alpha}^{\beta} f = sup_{\mathcal{P}}L(\mathrm{f},\mathcal{P})$ και ως *άνω ολοκλήρωμα* της f στο [α,β] τον αριθμό $U\int_{\alpha}^{\beta} f = inf_{\mathcal{P}}U(\mathrm{f},\mathcal{P})$. Αν οι δύο αυτές ποσότητες είναι ίσες, τότε λέμε ότι η συνάρτηση f είναι κατά Riemann ολοκληρώσιμη στο $[\alpha,\beta]$ και ο κοινός αυτός αριθμός είναι το ολοκλήρωμα Riemann το οποίο συμβολίζεται με $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$. Προφανώς δεν είναι όλες οι φραγμένες συναρτήσεις ολοκληρώσιμες κατά Riemann, ένα κριτήριο για να συμβεί αυτό είναι το παρακάτω θεώρημα: Αν f είναι φραγμένη συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[\alpha,\beta]$ αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει μια διαμέριση $\mathcal{P}$ του $[\alpha,\beta]$, έτσι ώστε $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$.

Επίσης αποδεικνύεται ότι κάθε συνεχής συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση.

Για τις συνεχείς συναρτήσεις μπορούμε να ορίσουμε το ορισμένο ολοκλήρωμα και ως εξής: Έστω $f : [\alpha,\beta] \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση και $P = \{\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1}, t_n = \beta\}$ μια διαμέριση του $[\alpha,\beta]$. Έστω ξ_κ τυχαία τιμή που ανήκει στο διάστημα $[t_{\kappa-1}, t_\kappa]$ σχηματίζουμε το άθροισμα

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_\kappa)(t_k - t_{k-1})$$

αποδεικνύεται ότι για συνεχείς f, το όριο του αθροίσματος αυτού υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός. Ο αριθμός αυτός ισούται με το ολοκλήρωμα της f στο $[\alpha,\beta]$. Δηλαδή αν $\|P\|$ η λεπτότητα της διαμέρισης ισχύει

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \lim_{\|P\|\to 0}\Big(\sum_{\kappa=1}^{n} f(\xi_\kappa)\,(t_k - t_{k-1})\Big).$$

Με την ανακάλυψη του θεμελιώδους θεωρήματος του ολοκληρωτικού λογισμού από τους Νεύτωνα και Leibniz έγινε κατορθωτό να συνδεθεί το ορισμένο ολοκλήρωμα με την παράγωγο με την παρακάτω σχέση.

Θεώρημα (Θεμελιώδες Θεώρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού): Έστω f συνεχής συνάρτηση σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν $G(x)$ είναι μια αρχική συνάρτηση της f στο $[\alpha,\beta]$ τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = G(\beta) - G(a)$$

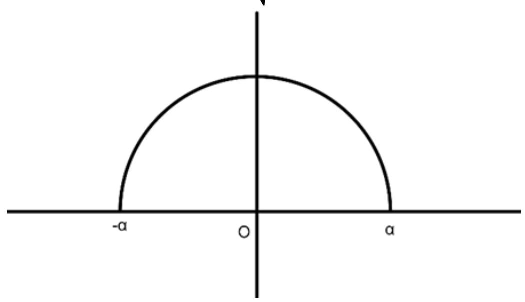
Στη συνέχεια θα βρούμε τα εμβαδά των επιφανειών που έχουμε ήδη υπολογίσει με τη μέθοδο της εξάντλησης με το νέο εργαλείο του ολοκληρώματος Riemann.

9.2 Υπολογισμός εμβαδών με χρήση του ολοκληρώματος Riemann

Εμβαδόν κύκλου

Έστω κύκλος με εξίσωση $x^2 + \psi^2 = \alpha^2$. Θα υπολογίσουμε το εμβαδόν του ημικυκλίου με εξίσωση

$$\psi = \alpha\sqrt{1-\frac{\chi^2}{\alpha^2}}$$



Το εμβαδόν ισούται με

$$E = \int_{-\alpha}^{\alpha} \alpha\sqrt{1-\frac{x^2}{\alpha^2}}\,dx.$$

Το ολοκλήρωμα αυτό υπολογίζεται, αν θέσουμε

$$\eta\mu t = \frac{x}{a} \text{ οπότε } \frac{dx}{dt} = \alpha\sigma\upsilon\nu t$$

και άρα

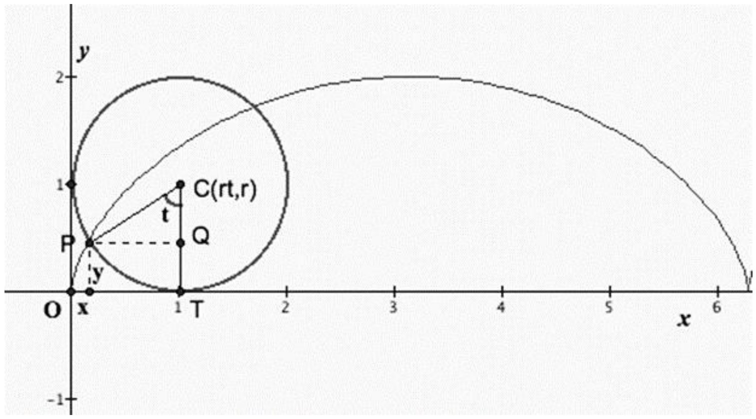
$$E = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \alpha^2\sqrt{1-\eta\mu^2 t}\,\sigma\upsilon\nu t dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \alpha^2\sigma\upsilon\nu^2 t dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \alpha^2\frac{\sigma\upsilon\nu(2t)+1}{2}dt$$

$$= a^2\ \frac{1}{2}\left[\frac{\eta\mu(2t)}{2}+t\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\pi\alpha^2.$$

Δηλαδή το εμβαδόν του κύκλου θα ισούται με $\pi\alpha^2$.

Εμβαδόν κυκλοειδούς

Όπως αναφέραμε νωρίτερα κυκλοειδής είναι η καμπύλη που διαγράφει ένα σημείο του κύκλου, όταν αυτός περιστρέφεται σε οριζόντιο επίπεδο.



Στο παραπάνω σχήμα έχουμε την κυκλοειδή καμπύλη που παράγεται από το σημείο P του κύκλου με σημείο εκκίνησης την αρχή των αξόνων ενός καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων. Θέτουμε (x,y) τις συντεταγμένες του σημείου P οπότε ισχύουν τα παρακάτω:

$$OT = \tau \acute{o} \xi o\ PT = rt.$$

Επίσης

$$CQ = r\sigma \upsilon \nu t, PQ = r\eta \mu t.$$

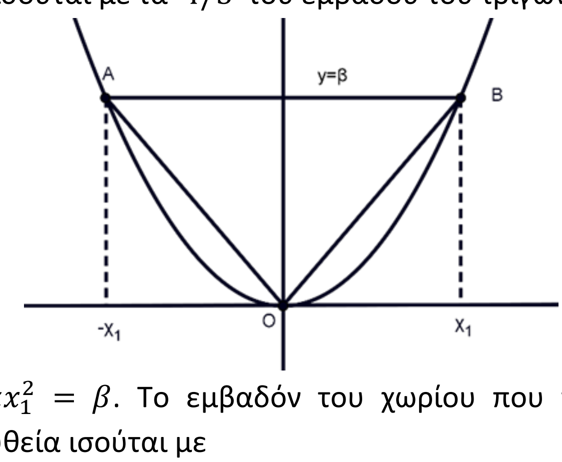
Άρα $x = OT - PQ = r(t - \eta \mu t)\ \kappa \alpha \iota\ y = CT - CQ = r(1 - \sigma \upsilon \nu t)$. Οπότε το ζητούμενο εμβαδόν θα ισούται

$$E = \int_0^{2\pi} y dx = \int_0^{2\pi} r(1 - \sigma \upsilon \nu t) r(1 - \sigma \upsilon \nu t) dt = r^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\sigma \upsilon \nu t + \sigma \upsilon \nu^2 t) dt$$

$$= r^2 \left(\int_0^{2\pi} dt - 2\int_0^{2\pi} \sigma \upsilon \nu t dt + \int_0^{2\pi} \frac{1 + \sigma \upsilon \nu 2t}{2} dt \right) = r^2 (2\pi + \pi) = 3\pi r^2.$$

Εμβαδόν χωρίου που ορίζεται από ευθεία και παραβολή

Θα δείξουμε ότι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την ευθεία $y = \beta$ και την παραβολή $y = \alpha x^2$ ισούται με τα $4/3$ του εμβαδού του τριγώνου OAB.



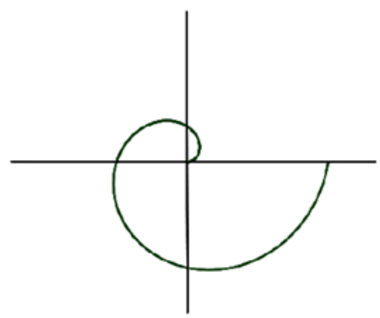
Προφανώς ισχύει $\alpha x_1^2 = \beta$. Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την παραβολή και την ευθεία ισούται με

$$E = \int_{-\chi_1}^{\chi_1} (\beta - \alpha x^2)dx = \left[\beta x - \alpha \frac{x^3}{3}\right]_{-x_1}^{x_1} = \frac{4\beta x_1}{3}.$$

Το εμβαδόν του τριγώνου OAB ισούται με $\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} -x_1 & \beta \\ x_1 & \beta \end{vmatrix}\right| = \beta x_1$. Προκύπτει ότι το εμβαδόν του χωρίου ανάμεσα στην ευθεία και την παραβολή ισούται με τα $\frac{4}{3}$ του εμβαδού του τριγώνου OAB. Σχέση που είχαμε βρει προηγούμενα κατά τον τετραγωνισμό της παραβολής με την μέθοδο του Αρχιμήδη.

Εμβαδόν έλικας

Όπως έχουμε ήδη δει η έλικα σε πολικές συντεταγμένες έχει την μορφή $r = \theta$. Το εμβαδόν της επιφάνειας που ορίζει η έλικα με τον οριζόντιο άξονα σε μία περιστροφή δίνεται από το ολοκλήρωμα



$$E = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \theta^2 d\theta = \frac{1}{2}\left[\frac{\theta^3}{3}\right]_0^{2\pi} = \frac{4\pi^3}{3}.$$

Δηλαδή επαληθεύουμε το συμπέρασμα του Αρχιμήδη ότι το εμβαδόν της ισούται με το $\frac{1}{3}$ του εμβαδού του κύκλου με ακτίνα 2π.

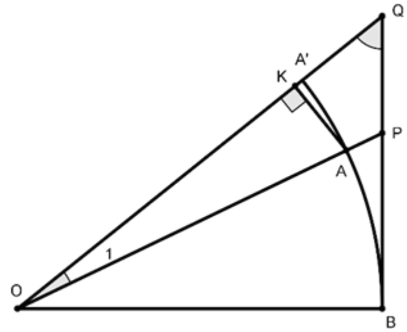
9.3 Η σειρά του Talakulattura

Το 1432 περίπου ο Ινδός Talakulattura οδηγήθηκε σε μία σειρά που έδινε μια γωνία θ ως άπειρο άθροισμα της εφαπτομένης της. Η σειρά αυτή ανακαλύφθηκε αργότερα το 1671 από τον Gregory και λίγο αργότερα από τον Leibniz. Σχετικά μας πληροφορεί η M.E. Baron στην εργασία της *The Origins of the Infinitesimal Calculus*. Η σειρά αυτή με σύγχρονη γραφή είναι η εξής:

$$\theta = \varepsilon\varphi\theta - \frac{1}{3}\varepsilon\varphi^3\theta + \frac{1}{5}\varepsilon\varphi^5\theta - \cdots, \qquad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

Η μέθοδος που χρησιμοποίησε ο Talakulattura με σύγχρονο συμβολισμό είναι η παρακάτω. Θεωρούμε τόξο BA' με ακτίνα OB και την εφαπτομένη BQ στο B. Δύο ακτίνες OA και OA' τέμνουν την εφαπτομένη BQ στα σημεία P και Q αντίστοιχα.

Φέρνουμε την κάθετη AK από το σημείο A στην OQ. Αν οι ακτίνες OB, OA, OA' είναι ίσες με την μονάδα, τότε από νόμο ημιτόνων στο τρίγωνο OPQ έχουμε:



$$\frac{PQ}{OP} = \frac{\eta\mu O_1}{\eta\mu Q} \Rightarrow \frac{PQ}{OP} = \frac{AK}{\frac{1}{OQ}} \Rightarrow AK = \frac{PQ}{OP \cdot OQ}$$

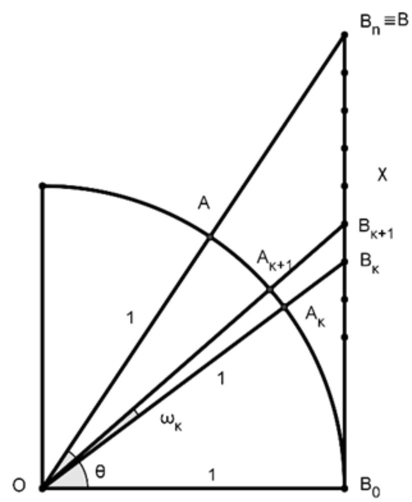
Αν πάρουμε μικρή απόσταση PQ τότε το AK σχεδόν ισούται με το τόξο AA' και το OP ισούται με OQ άρα

$$AK = \frac{PQ}{OP^2} = \frac{PQ}{1 + BP^2} \cong \tau\acute{o}\xi o AA'.$$

Αλλά $\eta\mu O_1 = AK$, οπότε

$$\eta\mu O_1 \cong \frac{PQ}{1 + BP^2}$$

Στην συνέχεια σε ένα τεταρτοκύκλιο με ακτίνα OB_o φέρνουμε εφαπτομένη $B_oB = x$ και την χωρίζουμε σε n ίσα μέρη δηλαδή $B_oB_\kappa = \kappa\frac{x}{n}$.



Αν εφαρμόσουμε το προηγούμενο συμπέρασμα στο τρίγωνο $OB_\kappa B_{\kappa+1}$ θα έχουμε

$$\eta\mu\omega_\kappa \cong \frac{B_\kappa B_{\kappa+1}}{1 + B_0 B_\kappa{}^2} = \frac{x}{n} \cdot \frac{1}{1 + (\frac{\kappa x}{n})^2}$$

Άρα

$$\theta = \tau\acute{o}\xi o\ B_0A = \sum_{\kappa=0}^{n-1} \tau\acute{o}\xi\omega\nu\ A_\kappa A_{\kappa+1} \cong \sum_{\kappa=0}^{n} \ \eta\mu\omega_\kappa \cong \sum_{\kappa=0}^{n} \frac{x}{n}\cdot \frac{1}{1+(\frac{\kappa x}{n})^2} \quad (1)$$

Το άθροισμα αυτό μπορεί να υπολογιστεί καλύτερα ως εξής

$$\eta\mu\omega_\kappa = 2(E\mu\beta\alpha\delta\acute{o}\nu\ \tau\rho\iota\gamma\acute{\omega}\nu o\upsilon\ OA_\kappa A_{\kappa+1})$$

Άρα

$$\sum_{\kappa=0}^{n} \ \eta\mu\omega_\kappa = 2\sum_{\kappa=0}^{n-1}(E\mu\beta\alpha\delta\acute{o}\nu\ \tau\rho\iota\gamma\acute{\omega}\nu o\upsilon\ OA_\kappa A_{\kappa+1}).$$

Αλλά το άθροισμα των εμβαδών των τριγώνων $OA_\kappa A_{\kappa+1}$ όταν το n τείνει στο άπειρο τείνει στο $2(E\mu\beta\alpha\delta\acute{o}\nu\ \tau o\mu\acute{\varepsilon}\alpha\ OB_0A) \ = \ 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\theta = \theta$. Οπότε ισχύει

$$\sum_{\kappa=0}^{n} \ \eta\mu\omega_\kappa \to \theta.$$

Από την σχέση (1) το άθροισμα

$$\sum_{\kappa=0}^{n} \frac{x}{n}\cdot \frac{1}{1+(\frac{\kappa x}{n})^2}$$

μπορεί να υπολογιστεί ως άθροισμα Riemann το οποίο τείνει στο

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x (1-t^2+t^4-\cdots)dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$$

άρα

$$\theta = \ x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$$

οπότε με $x = \varepsilon\varphi\theta$ έχουμε την άπειρη σειρά του Talakulattura. Η σειρά αυτή, όταν ανακαλύφθηκε από τους Leibniz-Gregory, αποτέλεσε την απαρχή μιας πολυάριθμης συλλογής από αντίστοιχες απειροσειρές. Μια ενδιαφέρουσα εφαρμογή της προηγούμενης απειροσειράς είναι αυτή που προκύπτει αν θέσουμε $x = 1$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

Ο τύπος αυτός μας δίνει το π ως άθροισμα μιας άπειρης σειράς και ήρθε στο φως το 1671 από τον σκωτσέζο Μαθηματικό James Gregory (1638-1675) λίγο μετά από το άπειρο γινόμενο

$$\frac{4}{\pi} = \frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{9}{8}\dots$$

που ανακάλυψε ο John Wallis το 1655. Η ανακάλυψη των άπειρων αυτών σειρών έδωσε την δυνατότητα ενός διαφορετικού τρόπου προσέγγισης του π σε σχέση με αυτόν που ανακάλυψε ο Αρχιμήδης. Ο τρόπος αυτός όπως είδαμε και πριν έδωσε την δυνατότητα να βρεθεί το π με πολύ καλύτερες προσεγγίσεις.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10^{Ο} ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΟΥ ΣΥΝΟΛΟΥ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

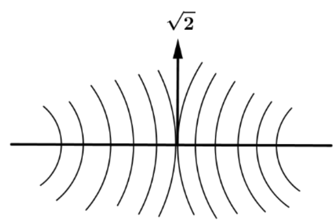
Στα σχολικά βιβλία δεν έχει δοθεί ιδιαίτερη έμφαση στην κατασκευή του συνόλου των πραγματικών αριθμών. Σε παλαιότερα σχολικά βιβλία (Π.χ. *Μαθηματικά Α΄ Λυκείου Άλγεβρα* Βαρουχάκης Ν., Αδαμόπουλος Λ., Αλεξανδρής Ν., Παπακωνσταντίνου Δ., Παπαμικρούλης Α. ΟΕΔΒ 1983) γινόταν αναφορά στο σύνολο των πραγματικών ως αντιμεταθετικό σώμα μαζί με το αξίωμα του κιβωτισμού αλλά πάλι δεν υπήρχε τρόπος κατασκευής του συνόλου αυτού. Στην συνέχεια θα δοθούν τρείς διαφορετικοί τρόποι κατασκευής του συνόλου των πραγματικών αριθμών.

10.1 Κατασκευή του συνόλου των πραγματικών αριθμών από τους ρητούς με τομές Dedekind

Πολλές φορές έχει υποστηριχθεί από πολλούς Μαθηματικούς αλλά και από τον ίδιο τον R. Dedekind (1831 –1916) ότι μεταξύ της θεωρίας αναλογιών του Ευδόξου και στην θεμελίωση των πραγματικών με «τομές Dedekind» υπάρχει κάποια συγγένεια. Σύμφωνα με τον H. Scholz (1884 –1956) στην πραγματεία του *Η κρίση των Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών (και η υπερνίκησή της)* οι Εύδοξος και Dedekind έχουν τις παρακάτω αντίστοιχες μεθόδους:

1. Στους ακέραιους λόγους και στους νόμους της διατάξεώς τους αντιστοιχούν οι ρητοί αριθμοί, οι οποίοι παριστάνονται ως πηλίκα δύο ακεραίων.
2. Χρησιμοποιούν αντίστοιχες μεθόδους διάταξης $(>, =, <)$.
3. Στην αφετηρία του Ευδόξου είναι ο ορισμός του λόγου ασύμμετρων μεγεθών (π.χ. πλευρά/διαγώνιο τετραγώνου) αντίστοιχα για τον Dedekind είναι η λύση εξισώσεων που είναι αδύνατες στο σύνολο των ρητών αριθμών (π.χ. $x^2 = 2$).

Η συνέχεια όμως είναι διαφορετική για τις δύο μεθόδους μια και υπάρχει διαφορετικός σκοπός. Ο Εύδοξος επιδιώκει να συγκρίνει τους ασύμμετρους λόγους δηλαδή τους λόγους μη ακέραιων αριθμών με την αναγωγή αυτών στη θεωρία των ακεραίων λόγων. Ο Dedekind επιδιώκει να συμπληρώσει τα κενά που υπάρχουν στο σύνολο των ρητών αριθμών. Για τον λόγο αυτό ο Dedekind προχωρά θεωρώντας δύο σύνολα ρητών. Θεωρεί τα σύνολα $\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{R}''$ έτσι ώστε κάθε στοιχείο του $\mathfrak{R}'$ να είναι μικρότερο από κάθε στοιχείο του $\mathfrak{R}''$. Με τον τρόπο αυτό ορίζονται δύο τάξεις $\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{R}''$ που παριστάνουν έναν τέλειο χωρισμό του συνόλου των ρητών αριθμών. Στο τέλος εισάγει την έννοια της τομής στο σύνολο των ρητών αριθμών. Με την έννοια τομή εννοεί την διαίρεση των ρητών αριθμών στις δύο τάξεις που είδαμε πριν. Αν η κλάση $\mathfrak{R}'$ έχει μέγιστο στοιχείο ή η $\mathfrak{R}''$ έχει ελάχιστο στοιχείο, τότε η τομή $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'')$ αντιπροσωπεύει αυτόν τον ρητό αριθμό. Αν η κλάση $\mathfrak{R}'$ δεν έχει μέγιστο και η $\mathfrak{R}''$ ελάχιστο στοιχείο, τότε ο Dedekind έθεσε ως αξίωμα ότι υπάρχει ένας αριθμός που στην περίπτωση αυτήν είναι άρρητος και είναι μεγαλύτερος όλων των αριθμών της κλάσης $\mathfrak{R}'$ και μικρότερος όλων των αριθμών της κλάσης $\mathfrak{R}''$. Τον μοναδικό αυτό αριθμό ορίζουμε να τον αντιπροσωπεύει η τομή $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'')$. Για παράδειγμα αν θεωρήσουμε την τάξη $\mathfrak{R}'$ που περιέχει όλους τους ρητούς που είναι μικρότεροι του $\frac{2}{3}$ και $\mathfrak{R}''$ οι ρητοί που είναι μεγαλύτεροι ή ίσοι του $\frac{2}{3}$, η τομή σ΄αυτήν την περίπτωση ορίζει τον ρητό $\frac{2}{3}$ μια και είναι το ελάχιστο της άνω τάξης $\mathfrak{R}''$. Αν θεωρήσουμε την τάξη $\mathfrak{R}'$ που περιέχει όλους τους ρητούς που είναι μικρότεροι ή ίσοι με το $\frac{1}{2}$ και $\mathfrak{R}''$ οι ρητοί που είναι μεγαλύτεροι του $\frac{1}{2}$, η τομή σ΄αυτήν την περίπτωση θα ορίσει το ρητό $\frac{1}{2}$ ο οποίος είναι το μέγιστο της κάτω τάξης. Τέλος αν θεωρήσουμε την τάξη $\mathfrak{R}'$ που περιέχει όλους τους αρνητικούς ρητούς το μηδέν και τους θετικούς ρητούς που το τετράγωνό τους είναι μικρότερο του 2 και $\mathfrak{R}''$ οι θετικοί ρητοί που το τετράγωνό τους είναι μεγαλύτερο του 2, η τομή σ΄αυτήν την περίπτωση ορίζει ένα καινούργιο αριθμό τον άρρητο αριθμό ($\sqrt{2}$ όπως θα δείξουμε παρακάτω).



Στην συνέχεια ας δώσουμε λίγο πιο αυστηρά την θεμελίωση αυτή του Dedekind. Ας ορίσουμε το σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Ορισμός: Πραγματικός αριθμός είναι ένα σύνολο α από ρητούς αριθμούς με τις εξής ιδιότητες:

1. Αν $x \in \alpha$ και ψ ρητός αριθμός με $\psi < x$ τότε $\psi \in \alpha$.
2. $\alpha \neq \emptyset$.
3. $\alpha \neq \mathbb{Q}$.
4. Αν $x \in \alpha$, τότε υπάρχει $\psi \in \alpha$ τέτοιο ώστε $\psi > x$ (το α δεν έχει μέγιστο στοιχείο).

Το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών το συμβολίζουμε με το $\mathbb{R}$.

Παρατηρούμε ότι στον παραπάνω ορισμό γίνεται χρήση μόνο της μιας τάξης $\mathfrak{R}'$ με βάση τα προηγούμενα. Η άλλη τάξη ορίζεται αυτόματα ως $\mathfrak{R}'' = \mathbb{Q} - \alpha$. Αν η τάξη αυτή έχει ελάχιστο στοιχείο τότε ο οριζόμενος πραγματικός θα είναι ρητός αλλιώς θα είναι άρρητος.

Στην συνέχεια θα ορίσουμε τις πράξεις και την διάταξη στο καινούργιο αυτό σύνολο. Το σύνολο αυτό θα είναι εφοδιασμένο με δύο εσωτερικές πράξεις την πρόσθεση « $+$ » και τον πολλαπλασιασμό « $\cdot$ ».

Ορισμός: Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ τότε $\alpha + \beta = \{x \ / \ x = \psi + \zeta \ \ \mu\varepsilon \ \psi \in \alpha \ \kappa\alpha\iota \ \zeta \in \beta\}$.

Πρέπει να βεβαιωθούμε ότι $(\alpha + \beta) \in \mathbb{R}$. Δηλαδή

1. Αν $\omega \in (\alpha + \beta)$ και $\omega' < \omega$ πρέπει να δείξουμε ότι $\omega' \in (\alpha + \beta)$. Πράγματι $\omega = x + \psi$ με $x \in \alpha$ και $\psi \in \beta$ έτσι $\omega' < x + \psi$ άρα $\omega' - x < \psi \in \beta$ δηλαδή $(\omega' - x) \in \beta$. Άρα $\omega' = x + (\omega' - x) \in (\alpha + \beta)$ μια και $x \in \alpha$, $(\omega' - x) \in \beta$.
2. $(\alpha + \beta) \neq \emptyset$ ισχύει μια $\alpha, \beta \neq \emptyset$.
3. Επίσης $(\alpha + \beta) \neq \mathbb{Q}$. Ισχύει μια και $\alpha, \beta \neq \mathbb{Q}$, θα υπάρχουν $\kappa, \lambda \in \mathbb{Q}\ \kappa\alpha\iota\ \kappa \notin \alpha, \lambda \notin \beta$. Κάθε $x \in \alpha$ ικανοποιεί την σχέση $x < \kappa$ γιατί αν $\kappa < x$ θα έδινε $\kappa \in \alpha$. Ομοίως κάθε $y \in \beta$ ικανοποιεί την σχέση $y < \lambda$. Άρα $x + y < \kappa + \lambda$ για κάθε $x \in \alpha, y \in \beta$. Αυτό μας δείχνει ότι $(\kappa + \lambda) \notin (\alpha + \beta)$. Δηλαδή υπάρχει το στοιχείο $(\kappa + \lambda) \in \mathbb{Q}$ και $(\kappa + \lambda) \notin (\alpha + \beta)$. Επομένως το $(\alpha + \beta) \neq \mathbb{Q}$.
4. Έστω $\omega \in (\alpha + \beta)$, $\omega = \psi + \zeta$ με $\psi \in \alpha$ και $\zeta \in \beta$. Από την ιδιότητα 4 για τα α, β θα έχουμε ότι υπάρχουν $\alpha' \in \alpha$, $\beta' \in \beta$ με $\psi < \alpha'\ \kappa\alpha\iota\ \zeta < \beta'$. Άρα $\omega = \psi + \zeta < \alpha' + \beta' \in (\alpha + \beta)$. Θέτουμε $\omega' = \alpha' + \beta'$, οπότε $\omega' \in (\alpha + \beta)$ και $\omega < \omega'$.

Ορίζουμε ως $0 = \{\mathrm{x} \in \mathbb{Q} \ / \ \mathrm{x} < 0\}$ εύκολα μπορεί να δειχθεί ότι $0 \in \mathbb{R}$.

Ορίζουμε ως $-\alpha = \{x \in \mathbb{Q} \ / \ \exists\ \ \kappa > 0\ \ \mu\varepsilon\ \ (-x - \kappa) \notin \alpha\ \}$. Το $-\alpha \in \mathbb{R}$ γιατί $\alpha \neq \mathbb{Q}$ άρα $\exists x \notin \alpha$ οπότε $-(-x - 1) - 1 \notin \alpha$ άρα $(-x - 1) \in -\alpha$ δηλαδή $-\alpha \neq \emptyset$. Επίσης $-\alpha \neq \mathbb{Q}$ διότι $\alpha \neq \emptyset$ οπότε υπάρχει $x \in \alpha$ και $-x \notin \alpha$. Αν $\omega \in -\alpha\ \kappa\alpha\iota\ \psi < \omega$ τότε $\exists\ \kappa\ \mu\varepsilon - \omega - \kappa \notin \alpha$ αλλά $\psi < \omega\ \ \acute{\alpha}\rho\alpha - \psi - \kappa > -\omega - \kappa$ δηλαδή $-\psi - \kappa \notin \alpha$ άρα $\psi \in -\alpha$. Επίσης το $-\alpha$ δεν έχει μέγιστο στοιχείο μια και το α δεν έχει άρα το $-\alpha \in \mathbb{R}$.

Ορισμός: Αν $\alpha, \beta\ \in \mathbb{R}$ τότε ορίζουμε το $\alpha \cdot \beta$ ως εξής: Αν $\alpha, \beta > 0$ τότε ορίζουμε

$\alpha \cdot \beta = \{x\ \in\ \mathbb{Q}/\ \exists\ \psi \in \alpha\ \ \kappa\alpha\iota\ \ \zeta \in \beta\ \ \mu\varepsilon\ \ \psi,\ \zeta > 0\ \ \kappa\alpha\iota\ \ x < \psi\zeta\}$

Αν α ή $\beta = 0$ τότε ορίζουμε $\alpha \cdot \beta = 0$

Αν $\alpha, \beta\ < 0$ τότε ορίζουμε $\alpha \cdot \beta = (-\alpha) \cdot (-\beta)$.

Αν $\alpha < 0, \beta > 0$ τότε ορίζουμε $\alpha \cdot \beta = (-\alpha) \cdot \beta$. Τέλος

Αν $\alpha > 0,\ \beta < 0$ τότε ορίζουμε $\alpha \cdot \beta = \alpha \cdot (-\beta)$.

Με τα $-\alpha$, $-\beta$ όπως ορίστηκαν πριν. Μένει και εδώ να επαληθεύσουμε ότι η πράξη που ορίσαμε είναι κλειστή στο σύνολο των πραγματικών αριθμών δηλαδή ότι $\alpha \cdot \beta \in \mathbb{R}$. Θα θεωρήσουμε την περίπτωση $\alpha, \beta\ > 0$.

1. Αν $\omega \in (\alpha \cdot \beta)\ \kappa\alpha\iota\ \omega' < \omega$ πρέπει να δείξουμε ότι $\omega' \in (\alpha \cdot \beta)$. Πράγματι $\omega < x\ \cdot \psi\ \ \mu\varepsilon\ x \in \alpha, \psi \in \beta$ έτσι και $\omega' < x \cdot \psi \Longrightarrow \omega' \in (\alpha \cdot \beta)$.
2. $(\alpha \cdot \beta) \neq \emptyset$ ισχύει μια $\alpha, \beta \neq \emptyset$.
3. Επίσης $(\alpha \cdot \beta) \neq \mathbb{Q}$. Ισχύει μια και $\alpha, \beta \neq \mathbb{Q}$, θα υπάρχουν $\kappa, \lambda \in \mathbb{Q}\ \kappa\alpha\iota\ \kappa \notin \alpha, \lambda \notin \beta$. Άρα $\kappa > \alpha, \lambda > \beta \Longrightarrow \kappa\lambda > \alpha\beta$. Δηλαδή υπάρχει το στοιχείο $(\kappa \cdot \lambda) \in \mathbb{Q}\ \kappa\alpha\iota\ (\kappa \cdot \lambda) \notin (\alpha \cdot \beta)$.
4. Έστω $\omega \in (\alpha \cdot \beta)$, $\omega < \psi\zeta\ \mu\varepsilon\ \psi \in \alpha,\ \zeta \in \beta$. Από την ιδιότητα 4 για τα α, β θα έχουμε ότι υπάρχουν $\alpha' \in \alpha$, $\beta' \in \beta\ \mu\varepsilon\ \psi < \alpha'\kappa\alpha\iota\ \zeta < \beta'$ άρα $\omega < \psi\zeta < \alpha' \cdot \beta' \in (\alpha \cdot \beta)$. Θέτουμε $\omega' = \alpha' \cdot \beta',\ \ o\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \omega' \in (\alpha \cdot \beta)\ \kappa\alpha\iota\ \omega < \omega'$.

Ορίζουμε $1 = \{x \in Q\ /\ x < 1\}$,

Ορίζουμε Αν $\alpha > 0$, $\alpha^{-1} = \{x \in \mathbb{Q} \ / \ \exists\ \ \kappa > 0\ \ \mu\varepsilon\ \ (x\kappa)^{-1} \notin \alpha\ \}$.

Αν $\alpha < 0\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ \ \alpha^{-1} = -(-\alpha)^{-1}$.

Εύκολα μπορεί να δειχθεί ότι $1, \alpha^{-1} \in \mathbb{R}$.
Το σύνολο των πραγματικών θα είναι εφοδιασμένο με σχέση διάταξης « $<$ ». Αν α, β είναι δύο στοιχεία του $\mathbb{R}$, θα λέμε ότι $\alpha < \beta$ $\alpha\nu$ $\alpha \subset \beta$. Επίσης $\alpha \leq \beta$ $\alpha\nu$ $\alpha \subseteq \beta$.
Οι πράξεις και η διάταξη ικανοποιούν τις παρακάτω ιδιότητες, για α, β, γ τυχαία στοιχεία του $\mathbb{R}$.

- $\mathbb{R}_1$: $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$.
- $\mathbb{R}_2$: $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.
- $\mathbb{R}_3$: $\upsilon\pi\acute{\alpha}\rho\chi\varepsilon\iota$ στοιχείο $0 \in \mathbb{R}$ $\mu\varepsilon$ $\alpha + 0 = \alpha$ $\gamma\iota\alpha$ $\kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon$ $\alpha \in \mathbb{R}$.
- $\mathbb{R}_4$: $\upsilon\pi\acute{\alpha}\rho\chi\varepsilon\iota$ στοιχείο $(-\alpha) \in \mathbb{R}$ $\mu\varepsilon$ $\alpha + (-\alpha) = 0$ $\gamma\iota\alpha$ $\kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon$ $\alpha \in \mathbb{R}$.

Με την πράξη της πρόσθεσης και τις παραπάνω ιδιότητες το $\mathbb{R}$ γίνεται αβελιανή ομάδα.

- $\mathbb{R}_5$: $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$.
- $\mathbb{R}_6$: $\alpha\beta = \beta\alpha$.
- $\mathbb{R}_7$: $\upsilon\pi\acute{\alpha}\rho\chi\varepsilon\iota$ $\sigma\tau o\iota\chi\varepsilon\acute{\iota}o$ $1 \in \mathbb{R}$ $\mu\varepsilon$ $1 \neq 0$ $\kappa\alpha\iota$ $1 \cdot \alpha = \alpha$.
- $\mathbb{R}_8$: $\Gamma\iota\alpha$ $\alpha \neq 0$ $\tau\acute{o}\tau\varepsilon$ $\upsilon\pi\acute{\alpha}\rho\chi\varepsilon\iota$ $\alpha^{-1} \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $\alpha^{-1}\alpha = 1$.

Με την πράξη του πολλαπλασιασμού και τις παραπάνω ιδιότητες, το $\mathbb{R}$ είναι επίσης αβελιανή ομάδα.

- $\mathbb{R}_9$: $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$
- $\mathbb{R}_{10}$: $\alpha < \beta$ ή $\beta < \alpha$ ή $\alpha = \beta$
- $\mathbb{R}_{11}$: $(\alpha < \beta$ $\kappa\alpha\iota$ $\beta < \gamma) \Longrightarrow \alpha < \gamma$
- $\mathbb{R}_{12}$: $\alpha < \beta \Longrightarrow \alpha + \gamma < \beta + \gamma$
- $\mathbb{R}_{13}$: $(\alpha < \beta$ $\kappa\alpha\iota$ $\gamma > 0) \Longrightarrow \alpha\gamma < \beta\gamma$
- $\mathbb{R}_{14}$: ($A\rho\chi\acute{\eta}$ $\Pi\lambda\eta\rho\acute{o}\tau\eta\tau\alpha$ $\tau o\upsilon$ $\mathbb{R}$)

Κάθε μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ έχει ελάχιστο άνω φράγμα.

Απόδειξη

Έστω $\beta = \{x / x$ $\alpha\nu\acute{\eta}\kappa\varepsilon\iota$ $\sigma\varepsilon$ $\kappa\acute{\alpha}\pi o\iota o$ α $\sigma\tau o$ $A\}$. Θα δείξουμε ότι ο β είναι πραγματικός αριθμός. Αυτό απαιτεί να δείξουμε τις τέσσερις αρχικές προϋποθέσεις που πρέπει να ικανοποιούνται.

1. Έστω $x \in \beta$ $\kappa\alpha\iota$ $\psi < x$. Από την πρώτη συνθήκη θα υπάρχει κάποιο α έτσι ώστε $x \in \alpha$ αυτό σημαίνει ότι $x < \alpha$ και από την δεύτερη συνθήκη $\psi < x$ θα έχουμε ότι και $\psi < \alpha$ δηλαδή τελικά $\psi \in \alpha$ άρα και $\psi \in \beta$.
2. Αφού $A \neq \emptyset$ θα υπάρχει κάποιο α στο A. Επειδή το α πραγματικός αριθμός υπάρχει x στο α άρα και στο β δηλαδή $\beta \neq \emptyset$.
3. Αφού το A είναι άνω φραγμένο υπάρχει πραγματικός γ έτσι ώστε $\alpha < \gamma$ για κάθε α ανήκει στο A και επειδή το γ είναι πραγματικός αριθμός υπάρχει x που δεν ανήκει στο γ. Επειδή $\alpha < \gamma$ σημαίνει ότι α ανήκει στο γ άρα το x δεν ανήκει στο α για κάθε $\alpha \in A$ άρα $A \neq \mathbb{Q}$.

4. Ας υποθέσουμε ότι $x \in \beta$ δηλαδή το $x \in \alpha$ για κάποιο $\alpha \in A$. Το α όμως δεν έχει μέγιστο στοιχείο άρα υπάρχει $\psi \in A$ $\mu\varepsilon$ $x < \psi$. Αυτό σημαίνει ότι $\psi \in \beta$ άρα το β δεν έχει μέγιστο στοιχείο.

   Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι το β είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του A. Αν ανήκει στο A, τότε α περιέχεται στο β δηλαδή $\alpha \leq \beta$ δηλαδή το β είναι άνω φράγμα του A. Από την άλλη αν γ είναι άνω φράγμα του A τότε $\alpha \leq \gamma$ για κάθε $\alpha \in A$. Δηλαδή το α περιέχεται στο γ για κάθε $\alpha \in A$ αυτό εξασφαλίζει ότι το β περιέχεται στο γ δηλαδή $\beta \leq \gamma$ επομένως το β είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του A.

Η απόδειξη των υπόλοιπων ιδιοτήτων αυτών είναι άμεση απόρροια των προηγούμενων ορισμών. Με τις παραπάνω ιδιότητες το σύνολο των πραγματικών αριθμών καθίσταται διατεταγμένο σώμα με αρχή πληρότητας.

Τέλος θα αποδείξουμε ότι το σύνολο των πραγματικών αριθμών περιέχει ένα σύνολο ισόμορφο του συνόλου των ρητών αριθμών.

Απόδειξη

Ορίζουμε το σύνολο $A_\rho = \{x \in \mathbb{Q}/x < \rho\}$. Με βάση τα όσα έχουμε δείξει προηγουμένως το A_ρ είναι στοιχείο του $\mathbb{R}$. Θα αποδείξουμε ότι το σύνολο $\{A_\rho/\rho \in \mathbb{Q}\}$ είναι ισόμορφο του $\mathbb{Q}$. Η ισομορφία είναι $\rho \to A_\rho$. Συγκεκριμένα θα δείξουμε ότι

1. $A_\rho + A_\sigma = A_{\rho+\sigma}$
2. $A_\rho \cdot A_\sigma = A_{\rho\cdot\sigma}$
3. $A\nu$ $\rho < \sigma$ τότε $A_\rho \subset A_\sigma$.

Για το (1) έχουμε: αν $x \in A_\rho + A_\sigma$, τότε υπάρχει $\alpha \in A_\rho$ $\kappa\alpha\iota$ $\beta \in A_\sigma$ $\mu\varepsilon$ $x = a + \beta$. Αλλά $\alpha < \rho$ $\kappa\alpha\iota$ $\beta < \sigma$ οπότε $\alpha + \beta < \rho + \sigma$ δηλαδή $x \in A_{\rho+s}$ άρα $A_\rho + A_\sigma \subseteq A_{\rho+\sigma}$. Ανάποδα αν $x \in A_{\rho+\sigma}$ θα ισχύει ότι $x < \rho + \sigma$. Ορίζουμε $\tau = \frac{\rho+\sigma-x}{2}$ $(\in \mathbb{Q})$. Προφανώς $\rho - \tau \in A_\rho$ $\kappa\alpha\iota$ $\sigma - \tau \in A_\sigma$. Αυτά σημαίνουν ότι το $x = \left(\rho - \frac{\rho+\sigma-x}{2}\right) + \left(\sigma - \frac{\rho+\sigma-x}{2}\right) \in A_\rho + A_\sigma$ δηλαδή $A_{\rho+\sigma} \subseteq A_\rho + A_\sigma$. Η (2) μπορεί να δειχθεί με τον ίδιο τρόπο και η (3) είναι απλή.

Με το παραπάνω αποδείχθηκε ότι το σύνολο των ρητών είναι ένα διατεταγμένο υπόσωμα του συνόλου των πραγματικών αριθμών.

Στο σημείο αυτό έχει ολοκληρωθεί η κατασκευή των πραγματικών αριθμών και μπορούμε να δούμε κάποιο συγκεκριμένο παράδειγμα. Το ότι δεν υπάρχει ρητός του οποίου το τετράγωνο να ισούται με το 2 το έχουμε γνωστό από τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη.

Θα αποδείξουμε στην συνέχεια ότι υπάρχει μοναδικός θετικός πραγματικός αριθμός α τέτοιος ώστε $\alpha^2 = 2$.

Απόδειξη

Θεωρούμε το σύνολο $A = \{x \in \mathbb{R}: x^2 < 2\}$. Το A είναι μη κενό και φραγμένο άρα από την ιδιότητα της πληρότητας $(\mathbb{R}_{14})$, το A θα έχει άνω φράγμα. Έστω $\alpha = supA$, επειδή

$1 \in A$ ισχύει $\alpha > 0$ και φυσικά $\alpha \leq 2$ (αν $\alpha > 2$ τότε $\alpha^2 > 4$ άρα $\alpha \notin A$). Θα δείξουμε ότι $\alpha^2 = 2$. Αν $\alpha^2 \neq 2$, τότε $\alpha^2 > 2$ ή $\alpha^2 < 2$ θα δείξουμε ότι οι δύο τελευταίοι ισχυρισμοί δεν ισχύουν.
i) Έστω ότι $\alpha^2 < 2$, επιλέγουμε έναν αριθμό θ έτσι ώστε $0 < \theta < 1$ και $\alpha^2 < \alpha^2 + \theta < 2$. Θεωρούμε τον αριθμό $\alpha + \frac{\theta}{10}$ ισχύει ότι $\alpha < \alpha + \frac{\theta}{10}$ και επειδή $\alpha = supA$ ισχύει ότι $(\alpha + \frac{\theta}{10}) \notin A$ δηλαδή $(\alpha + \frac{\theta}{10})^2 \geq 2$ αλλά $(\alpha + \frac{\theta}{10})^2 = \alpha^2 + 2\alpha\frac{\theta}{10} + \frac{\theta^2}{100} = \alpha^2 + \theta\left(\frac{2\alpha}{10} + \frac{\theta}{100}\right) < \alpha^2 + \theta\left(\frac{4}{10} + \frac{1}{100}\right) < \alpha^2 + \theta$. Άρα $(\alpha + \frac{\theta}{10})^2 < \alpha^2 + \theta < 2$ άτοπο.
ii) Έστω ότι $\alpha^2 > 2$, επιλέγουμε έναν αριθμό θ έτσι ώστε $0 < \theta < 1$ και $2 < \alpha^2 - \theta < \alpha^2$. Θεωρούμε τον αριθμό $\alpha - \frac{\theta}{10}$ ισχύει ότι $0 < \alpha - \frac{\theta}{10} < \alpha$. Επειδή $\alpha = supA$ υπάρχει $x \in A$ έτσι ώστε $\alpha - \frac{\theta}{10} = x$. Άρα $(\alpha - \frac{\theta}{10})^2 = x^2 < 2$. Επίσης $(\alpha - \frac{\theta}{10})^2 = \alpha^2 - 2\alpha\frac{\theta}{10} + \frac{\theta^2}{100} > \alpha^2 - \frac{\alpha\theta}{5} > \alpha^2 - \theta > 2$ άτοπο. Άρα τελικά έχουμε ότι $\alpha^2 = 2$.

Από την αρχή της πληρότητας μπορούμε να αποδείξουμε την Αρχιμήδεια ιδιότητα. Η απόδειξη οφείλεται στον O. Stolz (1842- 1905).
Αρχιμήδεια ιδιότητα: Για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ υπάρχει φυσικός αριθμός $n > a$.

Απόδειξη

Έστω ότι υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ να ισχύει $n \leq a$. Άρα το σύνολο $\mathbb{N}$ είναι φραγμένο οπότε έχει supremum. Έστω $\sigma = sup\mathbb{N}$ $άρα\ n \leq \sigma\ για\ κάθε\ n \in \mathbb{N}$. Επειδή $\sigma = sup\mathbb{N}$ υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $\sigma - 1 < m \Longrightarrow \sigma < m + 1$ άτοπο. Άρα για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ $με$ $n > a$.
Με την αρχή της πληρότητας μπορούμε να αποδείξουμε ότι κάθε γνησίως αύξουσα και φραγμένη άνω ακολουθία συγκλίνει.

Απόδειξη

Έστω $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, a_n, \dots\}$ το σύνολο που περιέχει όλους τους όρους της ακολουθίας. Επειδή a_n είναι φραγμένη τότε και το A είναι φραγμένο, έστω $\sigma = supA$.
Ισχύει ότι

- $a_n \leq \sigma$
- Για κάθε $\varepsilon > 0$ $\exists\, n_0 : \sigma - \varepsilon < \alpha_{n_0} < \sigma$

Άρα για κάθε $n > n_0$ επειδή a_n γνησίως αύξουσα θα ισχύει $\sigma - \varepsilon < \alpha_{n_0} < \alpha_n \leq \sigma < \sigma + \varepsilon$.
Άρα τελικά $lim\alpha_n = \sigma$.

Εκτός από την παραπάνω κατασκευή των πραγματικών αριθμών που οφείλεται στον R. Dedekind υπάρχουν και άλλοι τρόποι κατασκευής. Εκείνο το στοιχείο που αλλάζει είναι η αρχή της πληρότητας ($\mathbb{R}_{14}$). Σχεδόν ταυτόχρονα με τον Dedekind, το 1872 ο A.

Cauchy (1789 – 1857) κατασκεύασε τους πραγματικούς αριθμούς, χρησιμοποιώντας τις λεγόμενες βασικές ακολουθίες ή ακολουθίες Cauchy.

10.2 Κατασκευή του συνόλου των πραγματικών αριθμών από τους ρητούς με ακολουθίες Cauchy

Η ιδέα της μεθόδου αυτής ξεκινά από την παρατήρηση ότι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί μπορούν να είναι όρια ακολουθιών ρητών αριθμών. Αλλά η έννοια της σύγκλισης ακολουθίας προϋποθέτει ότι γνωρίζουμε τα στοιχεία του συνόλου στο οποίο αναφερόμαστε. Πώς μπορούμε να ξεπεράσουμε την δυσκολία αυτή; Στο σημείο αυτό μας βοηθούν οι ακολουθίες του Cauchy. Μια ακολουθία χαρακτηρίζεται ως βασική ακολουθία (ή ακολουθία Cauchy) όταν οι όροι της ακολουθίας τελικά βρίσκονται «κοντά» ο ένας στον άλλο. Αν δεχτούμε την αρχή ότι κάθε τέτοια ακολουθία συγκλίνει μπορούμε να έχουμε μια ισοδύναμη αρχή πληρότητας των πραγματικών αριθμών με αυτή του Supremum (Κάθε μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ έχει ελάχιστο άνω φράγμα). Οπότε μπορούμε να κάνουμε την εξής αντιστοίχιση, αν $lima_n = a \in \mathbb{Q}$, τότε η ακολουθία αντιστοιχεί στον ρητό αυτό αριθμό. Αν $lima_n \notin \mathbb{Q}$ τότε η ακολουθία προσδιορίζει τον πραγματικό αριθμό στον οποίο συγκλίνει. Το πρόβλημα που δημιουργείται σ΄ αυτή την περίπτωση είναι ότι υπάρχουν περισσότερες από μία βασικές ακολουθίες που συγκλίνουν στον ίδιο αριθμό. Η λύση στο πρόβλημα αυτό είναι να ορίσουμε τους πραγματικούς αριθμούς ως κλάση ισοδυναμίας που θα περιέχει όλες τις βασικές ακολουθίες που είναι ισοσυγκλίνουσες.
Ας έρθουμε να δούμε όλα αυτά που περιγράψαμε με πιο αυστηρούς ορισμούς.

Ορισμός: Μία ακολουθία ρητών $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στον ρητό αριθμό ρ αν για κάθε ρητό $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $|a_n - \rho| < \varepsilon$ για κάθε $n > n_0$.
Ορισμός: Μία ακολουθία ρητών $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ονομάζεται βασική (Cauchy) αν για κάθε ρητό $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $|a_n - a_m| < \varepsilon$ για κάθε $n, m > n_0$.

Θα συμβολίζουμε με A το σύνολο όλων των βασικών ακολουθιών. Στο σύνολο αυτό θα ορίσουμε μια σχέση ισοδυναμίας $" \sim "$ ως εξής: Αν a_n, β_n είναι δυο βασικές ακολουθίες θα ισχύει $a_n \sim \beta_n$ αν η ακολουθία $(a_n - \beta_n)$ συγκλίνει στο 0. Εύκολα αποδεικνύεται ότι η σχέση που ορίσαμε είναι σχέση ισοδυναμίας (ισχύουν $a_n \sim a_n$, αν $a_n \sim \beta_n$ και $\beta_n \sim a_n$, αν $a_n \sim \beta_n$ και $\beta_n \sim \gamma_n$ τότε $a_n \sim \gamma_n$). Ορίζουμε ως σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ το σύνολο πηλίκο $A/\sim$.
Το σύνολο αυτό το εφοδιάζουμε με τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού ως εξής: αν $\alpha = [(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}]$, $\beta = [(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ είναι δύο πραγματικοί αριθμοί ορίζουμε ως $\alpha + \beta = [(\alpha_n + \beta_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ και $\alpha \cdot \beta = [(\alpha_n \cdot \beta_n)_{n\in\mathbb{N}}]$. Οι πράξεις αυτές είναι καλώς ορισμένες και έχουν ως μοναδιαία στοιχεία τα $0 = [(0_n)_{n\in\mathbb{N}}]$, $1 =$

$[(1_n)_{n\in\mathbb{N}}]$. Ως αντίθετο στοιχείο ορίζουμε το στοιχείο $-\alpha = [(-\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}]$. Για το αντίστροφο στοιχείο $\alpha^{-1}, \alpha \neq 0$ πρέπει από την ακολουθία $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ να εξαιρέσουμε τα στοιχεία που είναι 0. Για τον λόγο αυτό θεωρούμε το σύνολο $K = \{n \in \mathbb{N}: \alpha_n = 0\}$ το σύνολο αυτό είναι πεπερασμένο γιατί αν ήταν άπειρο θα έπρεπε και όλη η ακολουθία $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ να ήταν μηδέν (είμαστε στο σύνολο πηλίκο) κάτι που δεν συμβαίνει. Έστω n_0 το μέγιστο στοιχείο του συνόλου. Ορίζουμε την ακολουθία $\beta_n = a_{n+n_0+1}$ και έτσι $\alpha^{-1} = [(\beta_n{}^{-1})_{n\in\mathbb{N}}]$. Για τα στοιχεία α, α^{-1} ισχύει η γνωστή ιδιότητα $\alpha \cdot \alpha^{-1} = 1$ μια και $\alpha \cdot \alpha^{-1} = [(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}} \cdot (\beta_n{}^{-1})_{n\in\mathbb{N}}] = [(1)_{n\in\mathbb{N}}]$. Ορίζουμε και την διάταξη στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$. Αν $\alpha = [(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}]$, $\beta = [(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ είναι δύο στοιχεία του συνόλου των πραγματικών θα λέμε

$$\alpha < \beta \ \alpha\nu \ \exists\ \theta > 0, \theta \in \mathbb{Q}, n_0 \in \mathbb{N}, \text{ έτσι ώστε } \beta_n = a_n + \theta \text{ για κάθε } n > n_0.$$

Για τις πράξεις και την διάταξη που ορίσαμε στο σύνολο των πραγματικών αριθμών ισχύουν όλες οι ιδιότητες $\mathbb{R}_1 - \mathbb{R}_{13}$ οι οποίες καθιστούν το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ διατεταγμένο σώμα. Μας μένει η αρχή της πληρότητας. Για την αρχή αυτή θα δείξουμε με το επόμενο θεώρημα ότι, αν δεχθούμε την Αρχιμήδεια ιδιότητα των πραγματικών όπως επίσης και το ότι κάθε ακολουθία Cauchy συγκλίνει τότε κάθε φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έχει ελάχιστο άνω φράγμα. Δηλαδή την αρχή της πληρότητας που είχαμε στον προηγούμενο τρόπο κατασκευής των πραγματικών με τις τομές Dedekind.

Θεώρημα: Έστω $\mathbb{R}$ ένα διατεταγμένο σώμα που περιέχει το $\mathbb{Q}$ και έχει επιπλέον τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. Αν $\alpha \in \mathbb{R}\ \kappa\alpha\iota\ \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, τότε υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $n\varepsilon > \alpha$. (Αρχιμήδεια ιδιότητα)
2. Κάθε ακολουθία Cauchy στοιχείων του $\mathbb{R}$ συγκλίνει σε στοιχείο του $\mathbb{R}$.

Τότε, κάθε μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έχει ελάχιστο άνω φράγμα.

Απόδειξη

Έστω A μη κενό και φραγμένο άνω υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Το σύνολο αυτό θα έχει κάποιο στοιχείο α_0 αφού είναι διάφορο του κενού. Έστω β το άνω φράγμα του A. Από την Αρχιμήδεια ιδιότητα (συνθήκη 1) θα υπάρχει $\kappa \in \mathbb{N}$ για το οποίο θα ισχύει $\alpha_0 + \kappa > \beta$. Άρα για κάθε $\alpha \in A$ ισχύει $\alpha < \alpha_0 + \kappa$. Ας υποθέσουμε ότι από όλους τους φυσικούς που έχουν αυτή την ιδιότητα ο κ_1 είναι ο ελάχιστος. Τότε

- Για κάθε $\alpha \in A\ \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota\ \alpha < \alpha_0 + \kappa_1$ και
- Υπάρχει $\alpha_1 \in A\ \acute{\omega}\sigma\tau\varepsilon\ \ \alpha_0 + (\kappa_1 - 1) \leq \alpha_1$.

Επαγωγικά μπορούμε να βρούμε $\alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots\ \sigma\tau o\ A\ \kappa\alpha\iota\ \kappa_n \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε

- Για κάθε $\alpha \in A\ \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\varepsilon\iota\ \alpha < \alpha_{n-1} + \frac{\kappa_n}{2^{n-1}}$
- Και $a_{n-1} + \frac{\kappa_n - 1}{2^{n-1}} \leq a_n$.

Απόδειξη του επαγωγικού βήματος: ‘Εχουμε ότι $\alpha_n \in A$ άρα από την συνθήκη 1 υπάρχει ελάχιστος φυσικός αριθμός κ_{n+1} με την ιδιότητα ότι για κάθε $\alpha \in A$, $\alpha < \alpha_n + \frac{\kappa_{n+1}}{2^n}$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει α_{n+1} με

$$a_n + \frac{\kappa_{n+1} - 1}{2^n} \leq a_{n+1}.$$

Η ακολουθία (a_n) που ορίζεται με αυτόν τον τρόπο είναι ακολουθία Cauchy. Πράγματι, έχουμε

$$a_{n-1} + \frac{\kappa_n - 1}{2^{n-1}} \leq a_n < a_{n-1} + \frac{\kappa_n}{2^{n-1}}.$$

Άρα

$$|a_n - a_{n-1}| < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Αν $m, n \in \mathbb{N}$ και $m > n$, τότε

$$\begin{aligned} |a_m - a_n| &= |a_m - a_{m-1} + a_{m-1} - a_{m-2} + \cdots + a_{n+1} - a_n| \\ &\leq |a_m - a_{m-1}| + |a_{m-1} - a_{m-2}| + \cdots + |a_{n+1} - a_n| \\ &< \frac{1}{2^{m-1}} + \frac{1}{2^{m-2}} + \cdots + \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^{n-1}}. \end{aligned}$$

Αν τα m, n είναι αρκετά μεγάλα τότε το $\frac{1}{2^{n-1}}$ γίνεται όσο μικρό θέλουμε. Άρα για $\varepsilon > 0$ υπάρχει n_0 έτσι ώστε $\frac{1}{2^{n_0-1}} < \varepsilon$. Άρα για κάθε $m, n > n_0$ *έχουμε* $|a_m - a_n| < \varepsilon$. Άρα από την δεύτερη συνθήκη η ακολουθία αυτή (ως ακολουθία Cauchy) συγκλίνει σε κάποιο πραγματικό αριθμό έστω α^*. Θα δείξουμε ότι ο α^* είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του A. α) Θα δείξουμε πρώτα ότι το α^* είναι άνω φράγμα του A. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει $\alpha \in A \ \mu\varepsilon \ \alpha > \alpha^*$. Τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $\alpha = \alpha^* + \varepsilon$ όμως από επαγωγικό βήμα

$$\alpha < \alpha_{n-1} + \frac{\kappa_n}{2^{n-1}} \leq a_n + \frac{1}{2^{n-1}} \ \ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ n \in \mathbb{N}.$$

Άρα

$$\alpha^* + \varepsilon = \alpha < a_n + \frac{1}{2^{n-1}} \ \ \acute{\alpha}\rho\alpha \ \ \alpha^* + \varepsilon < \lim\left(a_n + \frac{1}{2^{n-1}}\right) \ o\pi\acute{o}\tau\varepsilon \ \ \alpha^* + \varepsilon < \alpha^*,$$

το οποίο είναι άτοπο.

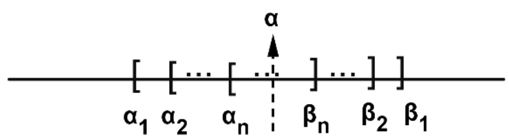
β) Αν υποθέσουμε ότι α^{**} είναι άνω φράγμα του Α, θα δείξουμε ότι $\alpha^{**} > \alpha$ έχουμε

$$\alpha^{**} > a_n \ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ \ n \in \mathbb{N} \ \ \acute{\alpha}\rho\alpha \ \ \alpha^{**} \geq \lim(a_n) = \alpha^*.$$

Από τα (α), (β) είναι φανερό ότι το α^* είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του Α. Άρα δείξαμε τελικά ότι κάθε φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έχει ελάχιστο άνω φράγμα (supremum).

10.3 Κατασκευή του συνόλου των πραγματικών αριθμών από τους ρητούς με αρχή κιβωτισμού.

Η αρχή του κιβωτισμού αναπτύχθηκε σε επιστολές ανάμεσα στον R. Dedekind και τον G. Cantour (1845 – 1918) και είναι αυτή που είπαμε ανέφερε παλαιό σχολικό βιβλίο της Α΄ Λυκείου. Η αρχή αυτή είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι ισχύει στους πραγματικούς αριθμούς όπως τους κατασκευάσαμε με την αρχή της πληρότητας (supremum).
Αν έχουμε διαστήματα $[a_n, \beta_n] \subseteq [a_{n-1}, \beta_{n-1}]$ για κάθε $\in \mathbb{N}^*$ και $(\beta_n - a_n) \to 0$ όταν $n \to \infty$ τότε τα κλειστά διαστήματα $[\alpha_1, \beta_1]$, $[\alpha_2, \beta_2]$, $\dots, [a_n, \beta_n], \dots$ ονομάζονται κιβωτισμένα.



Αρχή κιβωτισμού: Αν

$$\mathbb{R} \supset [\alpha_1, \beta_1] \supset [\alpha_2, \beta_2] \supset \cdots \supset [a_n, \beta_n] \supset [a_{n+1}, \beta_{n+1}] \supset \cdots$$

κιβωτισμένα διαστήματα

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, \beta_n] \neq \emptyset.$$

τότε το σύνολο που ορίζει η προηγούμενη τομή αποτελείται από έναν ακριβώς πραγματικό αριθμό.

Απόδειξη

Παρατηρούμε ότι τα άκρα των κιβωτισμένων διαστημάτων ορίζουν δύο ακολουθίες

$$(a_n), (\beta_n) \; \mu\varepsilon \; \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots \leq \beta_{n+1} \leq \beta_n \leq \cdots \leq \beta_2 \leq \beta_1.$$

Δηλαδή η (a_n) είναι αύξουσα και άνω φραγμένη και η (β_n) φθίνουσα και κάτω φραγμένη άρα από την αρχή της πληρότητας θα υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί, α, β έτσι ώστε α ελάχιστο άνω φράγμα της (a_n) και β μέγιστο κάτω φράγμα της (β_n). Δηλαδή προφανώς $a_n \leq \alpha \leq \beta \leq \beta_m \; \gamma\iota\alpha \; \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon \; n, m \in \mathbb{N}$. Άρα

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, \beta_n] = [\alpha, \beta] \neq \emptyset.$$

Αν υποθέσουμε ότι $(\beta_n - a_n) \to 0$ τότε $\beta - \alpha = \lim(\beta_n - a_n) = 0 \; \acute{\alpha}\rho\alpha \; \beta = \alpha$.

Για την συνέχεια θα θεωρήσουμε ότι έχουμε ένα διατεταγμένο σώμα $\mathbb{R}$ (έχει τις ιδιότητες $\mathbb{R}_1 - \mathbb{R}_{13}$) που περιέχει το σύνολο των ρητών αριθμών. Θα αποδείξουμε την αρχή της πληρότητας με βάση την αρχή του κιβωτισμού.

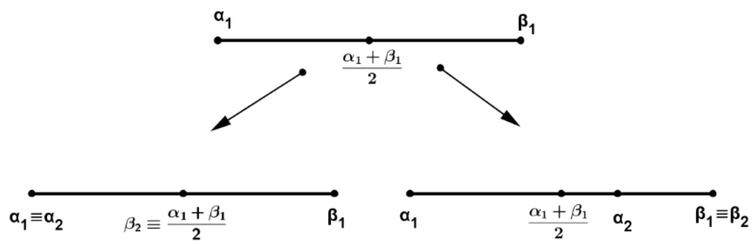
Θεώρημα: Έστω A μη κενό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ (για το οποίο ισχύει η αρχή του κιβωτισμού). Θα αποδείξουμε ότι το σύνολο αυτό έχει ελάχιστο άνω φράγμα δηλαδή ότι υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}$ με

$i) \; x \leq \alpha \; \gamma\iota\alpha \; \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon \; x \in A$

$ii)\ \alpha\nu\ x \le \beta\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x \in A\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ \alpha \le \beta.$

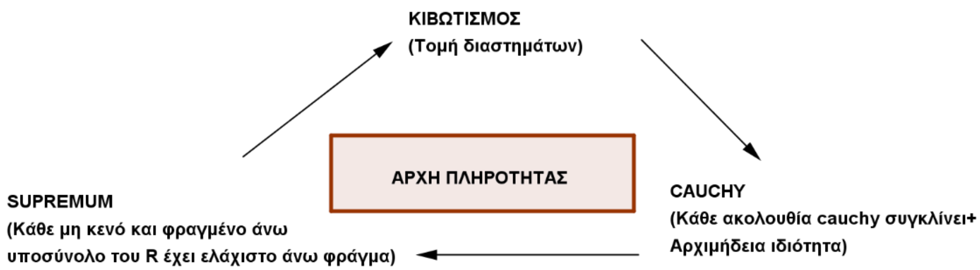
Απόδειξη

Έστω $\alpha_1 \in A$ και β_1 ένα άνω φράγμα του A. Εξετάζουμε τον αριθμητικό μέσο $\frac{\alpha_1+\beta_1}{2}$. Αν αυτός είναι άνω φράγμα του A τότε θέτουμε $\alpha_2 = \alpha_1, \beta_2 = \frac{\alpha_1+\beta_1}{2}$. Αν αντίθετα ο $\frac{\alpha_1+\beta_1}{2}$ δεν είναι άνω φράγμα του A, τότε υπάρχει $\alpha_2 \in A$ με $\frac{\alpha_1+\beta_1}{2} < \alpha_2$. Σε αυτή την περίπτωση θέτουμε $\beta_2 = \beta_1$.



Και στις δύο περιπτώσεις ορίσαμε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha_2, \beta_2]$ που περιέχεται στο κλειστό διάστημα $[\alpha_1, \beta_1]$. Επίσης και στις δύο περιπτώσεις το μήκος του $[\alpha_2, \beta_2]$ είναι μικρότερο ή ίσο του μισού μήκους του $[\alpha_1, \beta_1]$, δηλαδή $\beta_2 - a_2 \le \frac{1}{2}(\beta_1 - a_1)$. Διχοτομώντας το $[\alpha_2, \beta_2]$ με μία ανάλογη διαδικασία, ορίζουμε το κλειστό διάστημα $[\alpha_3, \beta_3]$ με $\beta_3 - a_3 \le \frac{1}{2}(\beta_2 - a_2) \le \frac{1}{2^2}(\beta_1 - a_1)$ και $[\alpha_1, \beta_1] \supset [\alpha_2, \beta_2] \supset [\alpha_3, \beta_3]$. Γενικά ορίζουμε $[\alpha_1, \beta_1] \supset [\alpha_2, \beta_2] \supset \cdots \supset [\alpha_n, \beta_n]$ και $\beta_n - a_n \le \frac{1}{2^{n-1}}(\beta_1 - a_1)$. Παρατηρούμε ότι το κάθε a_n είναι στοιχείο του A και το κάθε β_n είναι άνω φράγμα A. Τα διαστήματα $[\alpha_n, \beta_n]$ είναι κιβωτισμένα. Έστω α το μοναδικό κοινό στοιχείο θα δείξουμε ότι $\alpha = supA$ (ελάχιστο άνω φράγμα του A). Το α είναι άνω φράγμα του A γιατί αν δεν ήταν τότε θα υπήρχε $x \in A\ \mu\varepsilon\ a < x$. Επειδή όμως η τομή $\cap [\alpha_n, \beta_n]$ περιέχει μόνο το α, θα υπάρχει $n \in \mathbb{N}\ \ \mu\varepsilon\ x \notin [\alpha_n, \beta_n]$. Όμως $\alpha_n \le \alpha < x\ , \acute{\alpha}\rho\alpha\ \beta_n < x$ (αν $\beta_n > x$ τότε θα έπρεπε $x \in [\alpha_n, \beta_n]$). Αλλά το $\beta_n < x$ είναι αδύνατο αφού β_n άνω φράγμα του A και $x \in A$. Το α είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του A. Γιατί, έστω ψ άνω φράγμα του A με $\psi < \alpha$. Αφού $\psi \ne \alpha\ \ \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ \psi \notin \cap [\alpha_n, \beta_n],\ \ \acute{\alpha}\rho\alpha\ \exists\ n \in \mathbb{N}\ \mu\varepsilon\ \psi \notin [\alpha_n, \beta_n]$. Όμως $\psi < \alpha \le \beta_n$ οπότε και $\psi < \alpha_n$ (αν $\alpha_n < \psi$ τότε θα έπρεπε $\psi \in [\alpha_n, \beta_n]$). Αλλά το $\psi < \alpha_n$ είναι αδύνατο αφού $\alpha_n \in A$ και ψ άνω φράγμα του A.

Είδαμε ουσιαστικά, ότι η 14η ιδιότητα στην κατασκευή των πραγματικών αριθμών, γνωστή ως «αρχή της πληρότητας» έχει τρεις ισοδύναμες μορφές. Από καθεμιά από τις τρεις αυτές αρχές μπορούμε, όπως δείξαμε, ισοδύναμα να μεταβούμε στις άλλες.



Ένα σημαντικό θεώρημα της σύγχρονης ανάλυσης είναι αυτό των Bolzano – Weierstrass. Το θεώρημα αυτό πρωτοεμφανίστηκε το 1817 από τον B. Bolzano (1781 – 1848) ως λήμμα του θεωρήματος ενδιαμέσων τιμών. Πενήντα χρόνια αργότερα το θεώρημα αυτό αποδεικνύεται ξανά από τον K. Weierstrass (1815 – 1897) έκτοτε παραμένει ένα σημαντικό θεώρημα που φέρει τα ονόματα των δύο δημιουργών του.
Θεώρημα (Bolzano – Weierstrass): Κάθε φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Θα δούμε την απόδειξη του θεωρήματος αυτού με την βοήθεια των κιβωτισμένων διαστημάτων που είδαμε πριν.

Απόδειξη

Έστω (α_n) φραγμένη ακολουθία, τότε υπάρχει διάστημα $[b_0, c_0]$ στο οποίο θα ανήκουν όλοι οι όροι της ακολουθίας. Χωρίζουμε το διάστημα αυτό σε δύο διαστήματα $\left[b_0\,, \ \frac{b_0+c_0}{2}\right], \left[\frac{b_0+c_0}{2}\ , \ c_0\right]$ με πλάτος $\frac{c_0-b_0}{2}$. Κάποιο από τα δύο διαστήματα θα περιέχει άπειρους όρους της ακολουθίας α_n, έστω ότι είναι το $[b_1, c_1] \subset [b_0, c_0]$. Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο χωρίζοντας το $[b_1, c_1]$ σε δύο διαστήματα πλάτους $\frac{c_1-b_1}{2}$ δηλαδή τα $\left[b_1\,, \ \frac{b_1+c_1}{2}\right], \left[\frac{b_1+c_1}{2}\ , \ c_1\right]$. Κάποιο από αυτά τα διαστήματα πάλι θα περιέχει άπειρους όρους της ακολουθίας και ούτω καθεξής. Ορίζουμε μια ακολουθία διαστημάτων $([b_m, c_m])$ $m \in \mathbb{N}$ η οποία ικανοποιεί τις εξής προϋποθέσεις:

i) για κάθε $m \in \mathbb{N}$ $[b_{m+1}, c_{m+1}] \subset [b_m, c_m]$,

ii) για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ισχύει $c_m - b_m = \frac{c_0-b_0}{2^m}$ και

iii) για κάθε $m \in \mathbb{N}$ υπάρχουν άπειροι όροι της α_n στο διάστημα $[b_m, c_m]$.

Άρα μπορούμε να βρούμε υπακολουθία της α_n την (α_{k_n}) $n \in \mathbb{N}$ με $\alpha_{k_n} \in [b_{n-1}, c_{n-1}]$.
Δηλαδή $\alpha_{k_1} \in [b_0, c_0]$ (στην πραγματικότητα όλοι οι όροι της υπακολουθίας ανήκουν εκεί). Στο διάστημα $[b_1, c_1]$ επειδή υπάρχουν άπειροι όροι της ακολουθίας κάποιος από αυτούς θα έχει δείκτη $k_2 > k_1$ δηλαδή $\alpha_{k_2} \in [b_1, c_1]$ με $k_2 > k_1$ με το ίδιο τρόπο έχουμε $k_1 < k_2 < \cdots < k_\lambda$ ώστε $\alpha_{k_\lambda} \in [b_{\lambda-1}, c_{\lambda-1}]$, $\lambda = 1,2, \dots m$. Με τον τρόπο αυτό σχηματίζονται οι όροι της υπακολουθίας που ορίσαμε πριν. Θα δείξουμε ότι η υπακολουθία αυτή συγκλίνει. Τα διαστήματα $[b_m, c_m]$ που ορίσαμε πριν είναι κιβωτισμένα άρα από την αρχή του κιβωτισμού θα ισχύει $\lim b_m = \lim c_m = \alpha$ επίσης

ισχύει $b_m \leq \alpha_{k_m} \leq c_m$ άρα από το κριτήριο ισοσυκλινουσών ακολουθιών θα ισχύει $\lim \alpha_{k_n} = \alpha$.

Το θεώρημα των Bolzano-Weierstrass οδήγησε σε μια ευρύτερη έννοια που αφορά τα κλειστά και φραγμένα υποσύνολα του συνόλου των πραγματικών αριθμών. Η έννοια αυτή είναι η συμπάγεια. Τυπικά, ένα σύνολο X καλείται συμπαγές αν κάθε ένα από τα ανοικτά καλύμματά του, έχει ένα κλειστό υποκάλυμμα. Σε αντίθετη περίπτωση καλείται μη-συμπαγές. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε αυθαίρετη συλλογή $\{U_a\}_{a\in A}$ των ανοικτών υποσυνόλων του X τέτοια ώστε

$$X = \bigcup_{a\in A} U_a$$

υπάρχει ένα πεπερασμένο υποσύνολο J του A τέτοιο ώστε

$$X = \bigcup_{i\in J} U_i$$

Πιο συγκεκριμένα, ένα σύνολο είναι συμπαγές αν, κάθε φορά που μια συλλογή των ανοικτών συνόλων καλύπτει το σύνολο, κάποια υποσυλλογή αποτελείται μόνο από πεπερασμένα ανοιχτά σύνολα που καλύπτουν επίσης το σύνολο. Αυτή η μορφή του συμπαγούς ισχύει για κλειστά και για φραγμένα υποσύνολα του ευκλείδειου χώρου και είναι γνωστή ως το θεώρημα Heine-Borel. Η ιστορία του θεωρήματος ξεκινά τον 19^{ο} αιώνα από τον E. Heine (1821, 1881). Ο E. Borel (1871-1956) ήταν ο πρώτος που έθεσε και απέδειξε το θεώρημα. Στην συνέχεια θα δούμε το θεώρημα αυτό με ανοικτά διαστήματα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Θεώρημα (Heine-Borel): Αν (α_n, β_n), $\quad n = 1,2,\ldots$ είναι μια ακολουθία ανοικτών διαστημάτων του $\mathbb{R}$ ώστε

$$[\alpha, \beta] \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (\alpha_n, \beta_n)$$

τότε υπάρχει φυσικός αριθμός n_0, έτσι ώστε

$$[\alpha, \beta] \subset \bigcup_{n=1}^{n_0} (\alpha_n, \beta_n).$$

Απόδειξη

Έστω

$$[\alpha, \beta] \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (\alpha_n, \beta_n).$$

Υποθέτουμε ότι η πρόταση δεν ισχύει, δηλαδή ότι δεν υπάρχει φυσικός αριθμός n_0 ώστε

$$[\alpha, \beta] \subset \bigcup_{n=1}^{n_0} (\alpha_n, \beta_n).$$

Τότε για κάθε φυσικό αριθμό n υπάρχει

$$x_n \in [\alpha,\beta] \backslash \bigcup_{k=1}^{n} (\alpha_k, \beta_k).$$

Τα x_n που βρήκαμε πριν ορίζουν ακολουθία σε κλειστό διάστημα (φραγμένη) άρα από το θεώρημα Bolzano-Weierstrass υπάρχει συγκλίνουσα υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) και έστω $x = \lim_{n\to\infty} x_{k_n}$. Παρατηρούμε ότι $x \in [\alpha,\beta]$ άρα υπάρχει φυσικός αριθμός n_0 ώστε $x \in (\alpha_{n_0}, \beta_{n_0})$. Εφόσον $x_{k_n} \to x$ καθώς $n \to \infty$, έπεται ότι υπάρχει φυσικός αριθμός n_1 ώστε $k_{n_1} \geq n_0$ και για κάθε $n \geq n_1$ να ισχύει $x_{k_n} \in (\alpha_{n_0}, \beta_{n_0})$. Από τον τρόπο επιλογής των όρων της x_n έχουμε ότι

$$x_{k_{(n_1+1)}} \in [\alpha,\beta] \backslash \bigcup_{k=1}^{k_{(n_1+1)}} (\alpha_k, \beta_k).$$

Το τελευταίο αυτό συμπέρασμα μας λέει ότι $x_{k_{(n_1+1)}} \notin (\alpha_{n_0}, \beta_{n_0})$ κάτι το οποίο είναι άτοπο.

10.4 Η αρχή της πληρότητας (και τα ισοδύναμά της) σε αποδείξεις που παραλείπονται από τα σχολικά βιβλία

Ένα βασικό θεώρημα της ανάλυσης που διδάσκεται στην ύλη Γ΄ Λυκείου στα Μαθηματικά της κατεύθυνσης είναι αυτό της ενδιάμεσης τιμής (ή θεώρημα του Bolzano). Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια συνεχή συνάρτηση $f\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ η οποία παίρνει ετερόσημες τιμές στα άκρα του διαστήματος τότε αυτό που περιμένει κανείς είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης να τέμνει σε κάποιο σημείο τον οριζόντιο άξονα $x'x$. Δηλαδή να υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = 0$. Αυτό το θεώρημα όπως αναφέραμε και πριν για πρώτη φορά αποδεικνύεται από B. Bolzano το 1817. Ουσιαστικά προηγήθηκε, ίσως λόγω της γεωμετρικής του αναπαράστασης, της υπόλοιπης θεωρίας του απειροστικού λογισμού που αναπτύχθηκε γύρω στα 1870. Στη συνέχεια θα δώσουμε τρεις αποδείξεις του θεωρήματος που χρησιμοποιούν ουσιαστικά κάποια από τις αρχές της πληρότητας που περιγράψαμε πριν.

Δύο βασικές προτάσεις που αφορούν συνεχείς συναρτήσεις και θα μας χρειαστούν στη συνέχεια είναι η εξής.

Πρόταση1: Έστω $X \subset \mathbb{R}, f\colon X \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση συνεχής στο $x_0 \in X$.

i) Αν $f(x_0) > 0$ τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap X$

ii) Αν $f(x_0) < 0$ τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap X$

Πρόταση2: Έστω $X \subset \mathbb{R}, f\colon X \to \mathbb{R}$. Αν η συνάρτηση είναι συνεχής στο $x_0 \in X$ τότε είναι τοπικά φραγμένη. Δηλαδή υπάρχει $\delta > 0$ και $M > 0$ έτσι ώστε $|f(x)| < M$ για κάθε $\in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap X$.

Θεώρημα Ενδιαμέσων τιμών (Bolzano): Αν $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(\alpha)<0$, $f(\beta)>0$. Τότε υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=0$.

1η Απόδειξη

Έστω $A=\{x\in[a,\beta]: f(x)<0\}$. Το $\alpha\in A$ άρα $A\neq\emptyset$. Επίσης το $A\subset[\alpha,\beta]$ άρα το A είναι φραγμένο. Θέτουμε $\xi=supA$ από την αρχή της πληρότητας των πραγματικών αριθμών. Από την προηγούμενη πρόταση έπεται ότι $a<\xi<\beta$. Ας θεωρήσουμε την ακολουθία $\beta_n=\xi-\frac{1}{n}$, $n=1,2,\dots$ ισχύει $\beta_n<\xi=supA$. Άρα θα υπάρχει $x_n\in A$, έτσι ώστε $\beta_n<x_n\leq\xi$ δηλαδή καθώς το $n\to\infty$, $\tau o\ x_n\to\xi$. Επειδή η f είναι συνεχής θα ισχύει $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=f(\xi)$ και επειδή $f(x_n)<0$ θα ισχύει $f(\xi)\leq 0$.

Θέτουμε $c_n=\min\left\{\beta,\xi+\frac{1}{n}\right\}$ $\gamma\iota\alpha\ n=1,2,\dots$. Επειδή $\xi\leq c_n\leq\xi+\frac{1}{n}$, έπεται ότι, όταν $n\to\infty$, $\tau o\ c_n\to\xi$ και $c_n\notin A$. Άρα $\lim_{n\to\infty} f(c_n)=f(\xi)\geq 0$. Οπότε τελικά $f(\xi)=0$.

2η Απόδειξη

Θα προσπαθήσουμε να βρούμε τη μικρότερη λύση της εξίσωσης $f(x)=0$ στο διάστημα (α,β). Ψάχνουμε να βρούμε $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=0$ και $f(x)<0$ για κάθε x με $\alpha\leq x<\xi$. Ορίζουμε το σύνολο $A=\{x\in[\alpha,\beta]: f(\psi)<0\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ \psi\in[\alpha,x]\}$. Το $\alpha\in A$ $\acute{\alpha}\rho\alpha\ A\neq\emptyset$. Επίσης το $A\subset[\alpha,\beta]$ άρα το A είναι φραγμένο. Θέτουμε $\xi=supA$ από την αρχή της πληρότητας των πραγματικών αριθμών. Ισχύει ότι $a<\xi<\beta$.

Ισχυρισμός1. $f(\xi)>0$.

Πράγματι ας υποθέσουμε ότι $f(\xi)<0$. Επειδή η f είναι συνεχής στο ξ και $a<\xi<\beta$ θα υπάρχει $\delta>0$ ώστε για κάθε $x\in(\xi-\delta,\xi+\delta)$ να ισχύει ότι $f(x)<0$ (από προηγούμενη πρόταση1). Αυτό το τελευταίο όμως μας οδηγεί στο συμπέρασμα $f(x)<0$ για $x\in[\alpha,\xi+\frac{\delta}{2}]$. Δηλαδή $\xi+\frac{\delta}{2}\in A$ ενώ $\xi+\frac{\delta}{2}>\xi=supA$, άτοπο.

Ισχυρισμός2. $f(\xi)<0$.

Πράγματι ας υποθέσουμε ότι $f(\xi)>0$. Επειδή η f είναι συνεχής στο ξ και $a<\xi<\beta$ θα υπάρχει $\delta>0$, ώστε για κάθε $x\in(\xi-\delta,\xi+\delta)$ να ισχύει ότι $f(x)>0$ (από προηγούμενη πρόταση1). Αυτό το τελευταίο όμως μας οδηγεί στο συμπέρασμα $f\left(\xi-\frac{\delta}{2}\right)>0$. Δηλαδή $\xi-\frac{\delta}{2}\notin A$ το συμπέρασμα αυτό είναι άτοπο μια και $\xi=supA$.

Από τους δύο αυτούς ισχυρισμούς έχουμε την απόδειξη της πρότασης.

3η Απόδειξη

Στην τρίτη απόδειξη προσπαθούμε να προσεγγίσουμε την ρίζα της f οπουδήποτε ανάμεσα στα α,β με διαδοχικές διχοτομίσεις του διαστήματος $[\alpha,\beta]$. Την ύπαρξη της ρίζας θα μας την εξασφαλίσει η αρχή του κιβωτισμού. Στο πρώτο βήμα διχοτομούμε το $[\alpha, \beta]$ θεωρώντας το μέσο του $\frac{\alpha+\beta}{2}$. Αν ισχύει $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = 0$ τότε θέτουμε $\xi = \frac{\alpha+\beta}{2}$ και έχουμε δείξει ότι $f(\xi) = 0$. Αλλιώς αν $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) > 0$ θέτουμε $\alpha_1 = \alpha, \beta_1 = \frac{\alpha+\beta}{2}$. Παρατηρούμε ότι $f(\alpha_1) < 0, f(\beta_1) > 0 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; \alpha < \alpha_1 < \beta_1 < \beta$. Επίσης το πλάτος του διαστήματος $[\alpha_1, \beta_1]$ είναι ίσο με το μισό του διαστήματος $[\alpha, \beta]$. Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία στο διάστημα $[\alpha_1, \beta_1]$ θεωρώντας το μέσο του $\frac{\alpha_1+\beta_1}{2}$. Αν ισχύει $f\left(\frac{\alpha_1+\beta_1}{2}\right) = 0$ τότε θέτουμε $\xi = \frac{\alpha_1+\beta_1}{2}$ και έχουμε δείξει ότι $f(\xi) = 0$. Αλλιώς βρίσκουμε α_2, β_2 με $f(\alpha_2) < 0, f(\beta_2) > 0$ και $\alpha < \alpha_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \beta_1 < \beta$. Το πλάτος του διαστήματος $[\alpha_2, \beta_2]$ είναι ίσο με $\frac{\beta_2-\alpha_2}{2^2}$. Συνεχίζοντας επαγωγικά ή θα βρούμε $\xi \in (\alpha, \beta)$ με $f(\xi) = 0$ ή θα ορίσουμε ακολουθία κιβωτισμένων διαστημάτων

$$[\alpha, \beta] \supset [\alpha_1, \beta_1] \supset [\alpha_2, \beta_2] \supset \cdots \supset [\alpha_n, \beta_n]$$

για τα οποία ισχύουν

$$i)\ f(\alpha_n) < 0 < f(\beta_n)$$
$$ii)\ \beta_n - \alpha_n = \frac{\beta - \alpha}{2^n}$$

Επειδή

$$\lim_{n\to\infty}(\beta_n - \alpha_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{\beta - \alpha}{2^n} = 0$$

Επειδή οι ακολουθίες α_n, β_n είναι ισοσυγκλίνουσες, το μοναδικό κοινό στοιχείο των διαστημάτων θα είναι ο πραγματικός ξ για τον οποίο θα ισχύει αναγκαστικά $f(\xi) = 0$ μια και

$$f(\xi) = \lim_{n\to\infty} f(\alpha_n) \leq 0 \leq \lim_{n\to\infty} f(\beta_n) = f(\xi).$$

Ένα σημαντικό θεώρημα από την ύλη της κατεύθυνσης της Γ΄ Λυκείου είναι αυτό που αφορά συνεχείς συναρτήσεις σε κλειστό διάστημα θα δούμε και για αυτό το θεώρημα τρείς αποδείξεις που βασίζονται στην αρχή της πληρότητας και τα ισοδύναμά της που είδαμε πριν.

Θεώρημα: Κάθε συνεχής συνάρτηση σε κλειστό διάστημα είναι φραγμένη.

1η Απόδειξη

Έστω $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ συνεχής και $A = \{x \text{ όπου } x \in [\alpha, \beta] \text{ με } f \text{ φραγμένη στο } [\alpha, x]\}$. Θα δείξουμε ότι $A = [\alpha, \beta]$.
Καταρχήν $\alpha \in A$ άρα το A είναι μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ άρα έχει μέγιστο άνω φράγμα (αρχή της πληρότητας). Έστω $\kappa = supA$. Ισχύει ότι $\alpha \leq \kappa \leq \beta$.
Αν $\kappa < \beta$ εφόσον η f είναι συνεχής στο κ υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε η f να είναι φραγμένη στο $(\kappa - \delta, \kappa + \delta)$ (πρόταση2). Εφόσον η f είναι φραγμένη στο $[\alpha, \kappa - \delta)$ έπεται ότι η f είναι φραγμένη στο $[\alpha, \kappa + \delta)$ άτοπο. Άρα $\kappa = \beta$. Μένει να δείξουμε ότι και το $\beta \in A$ οπότε θα έχουμε δείξει ότι τελικά η f είναι φραγμένη σε όλο το $[\alpha, \beta]$.

Εφόσον η f είναι συνεχής στο β, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε η f να είναι φραγμένη στο διάστημα $(\beta - \delta, \beta]$. Αλλά $\beta - \delta < \beta$ άρα η f είναι φραγμένη στο $[\alpha, \beta - \delta]$, οπότε η f τελικά είναι φραγμένη σε όλο το $[a, \beta]$.

2η Απόδειξη

Υποθέτουμε ότι η f δεν είναι φραγμένη. Τότε για κάθε $n = 1,2, \ldots$ υπάρχει $x_n \in [a, \beta]$ με $|f(x_n)| > n$. Η ακολουθία (x_n) είναι φραγμένη άρα από το θεώρημα Bolzano – Weierstrass υπάρχει υπακολουθία (x_{κ_n}) που συγκλίνει σε κάποιο αριθμό $\xi \in [a, \beta]$. Εφόσον η f είναι συνεχής στο ξ θα ισχύει $\lim_{n\to\infty} f(x_{\kappa_n}) = f(\xi)$ άρα η ακολουθία $f(x_{\kappa_n})$ είναι φραγμένη, άτοπο γιατί $\left|f(x_{\kappa_n})\right| > \kappa_n \geq n$ για $n = 1,2, \ldots$

3η Απόδειξη

Στην τρίτη αυτή απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε την έννοια της ομοιόμορφης συνέχειας συνάρτησης. Πριν ξεκινήσουμε την απόδειξη ας δούμε την σχετική θεωρία. Έστω $f: X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ θα λέμε ότι η συνάρτηση f είναι ομοιόμορφα συνεχής αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $x, y \in X \; και \; |x - y| < \delta, \; τότε \; |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Προφανώς μια συνάρτηση ομοιόμορφα συνεχής είναι και συνεχής. Το ανάποδο ισχύει για τις συνεχείς συναρτήσεις σε κλειστό διάστημα. Η πρόταση που συνδέει την ομοιόμορφη συνέχεια με την συνέχεια είναι η εξής: Αν $f: [a, \beta] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής και οφείλεται στον E. Heine. Στο σημείο αυτό μπορούμε να επιστρέψουμε στην απόδειξη.

Σύμφωνα με τα όσα είπαμε πριν η f θα είναι ομοιόμορφα συνεχής άρα θα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $y_1, y_2 \in [a, \beta] και \; | \, y_1 - y_2| < \delta, \; τότε \; |f(y_1) - f(y_2)| < \varepsilon = 1$ (1). Διαμερίζουμε το διάστημα $[a, \beta]$ με σημεία $t_0, t_1, \ldots, t_n$ ώστε $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta$ και $| \, t_i - t_{i-1}| < \delta$ για $i = 1,2, \ldots, n$. Θέτουμε $M = max\{|f(t_0)|, \ldots, |f(t_n)|\} + 1$. Είναι σαφές ότι $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in [a, \beta]$. Πράγματι αν $x \in [a, \beta]$, τότε υπάρχει $i = 1,2, \ldots, n$ ώστε $x \in [t_{i-1,} \, t_i]$ δηλαδή $|f(x) - f(t_i)| < 1$ (από (1) εφόσον $| \, x - t_i| < \delta$). Αλλά $|f(x)| - |f(t_i)| \leq |f(x) - f(t_i)| < 1$ άρα $|f(x)| \leq |f(t_i)| + 1 \leq M$ άρα η συνάρτηση είναι φραγμένη.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11^{Ο} ΑΡΡΗΤΟΙ ΚΑΙ ΥΠΕΡΒΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΣΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Εκτός από τις τετραγωνικές ρίζες των αριθμών που δεν είναι τέλεια τετράγωνα, άρρητοι επίσης είναι όλοι οι αριθμοί της μορφής $\sqrt[n]{\alpha}\ \ \mu\varepsilon\ \alpha \neq \kappa^n\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\pi o\iota o\ \kappa \in \mathbb{N}$. Η απόδειξη για το προηγούμενο μπορεί να γίνει με ανάλογο τρόπο όπως αυτή που έχουμε στα *Στοιχεία* για το $\sqrt{2}$.

Δύο διάσημοι άρρητοι αριθμοί (οι οποίοι είναι και υπερβατικοί όπως θα δούμε στην συνέχεια) είναι οι π, e. Το π το έχουμε γνωρίσει, το e ορίζεται ως το όριο της ακολουθίας $(1+\frac{1}{n})^n$ και εμφανίστηκε στα Μαθηματικά σε προβλήματα ανατοκισμού. Ο πρώτος που απέδειξε το άρρητο των π, e ήταν ο J. Lambert (1728-1777) με χρήση συνεχών κλασμάτων. Στη συνέχεια θα δούμε την απόδειξη για το άρρητο του π που έδωσε ο Niven (1915 – 1999) το 1947 η οποία είναι από τις ευκολότερες που μας είναι γνωστές. Για τα παρακάτω μας πληροφορεί ο Μ. Λάμπρου στο άρθρο του *Άρρητοι και Υπερβατικοί αριθμοί* που δημοσιεύθηκε στο περιοδικό Θεαίτητος (τ.3).

11.1 Το άρρητο του π

Θεώρημα: Ο π είναι άρρητος.

Απόδειξη

Έστω $\pi = \frac{\alpha}{\beta}$ με α, β φυσικούς αριθμούς. Ορίζουμε την συνάρτηση f με

$$f(x) = \frac{x^n(\alpha - \beta x)^n}{n!}$$

Όπου το n θα το διαλέξουμε παρακάτω. Προφανώς ισχύει

$$f\left(\frac{\alpha}{\beta} - x\right) = f(x), \qquad \acute{\alpha}\rho\alpha\ \kappa\alpha\iota\ \ f(\pi - x) = f(x).$$

Η συνάρτηση αυτή μπορεί να γραφεί με την μορφή

$$f(x) = \frac{1}{n!}\sum_{i=1}^{2n} c_i x^i \quad \acute{o}\pi o\upsilon\ c_i\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \acute{o}\lambda o\iota\ \alpha\kappa\acute{\varepsilon}\rho\alpha\iota o\iota.$$

Επίσης

$$f^{(\kappa)}(0) = 0\ \ \alpha\nu\ \ \kappa > 2n \text{ ή } \kappa < n$$

και

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{n!}[n!\, c_n + \acute{o}\rho o\iota\ \pi o\upsilon\ \acute{\varepsilon}\chi o\upsilon\nu\ x]$$

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{1}{n!}[(n+1)!\, c_{n+1} + \acute{o}\rho o\iota\ \pi o\upsilon\ \acute{\varepsilon}\chi o\upsilon\nu\ x]$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$f^{(2n)}(x)=\frac{1}{n!}[(2n)!\,c_{2n}].$$

Οι παραπάνω σχέσεις μας δίνουν ότι $f^{(\kappa)}(0)$ είναι ακέραιοι για κάθε τιμή του κ. Από την σχέση $f(\pi-x)=f(x)\ \theta\alpha\ \acute{\varepsilon}\chi o\upsilon\mu\varepsilon\ f^{(\kappa)}(x)=(-1)^{\kappa}f^{(\kappa)}(\pi-x)$ συμπεραίνουμε ότι $f^{(\kappa)}(\pi)$ είναι επίσης ακέραιος για κάθε τιμή του κ. Ορίζουμε μια νέα συνάρτηση

$$F(x)=f(x)-f^{(2)}(x)+f^{(4)}(x)-\cdots+(-1)^{n}f^{(2n)}(x).$$

Παραγωγίζοντας δύο φορές την F θα έχουμε

$$F''(x)=f^{(2)}(x)-f^{(4)}(x)+f^{(6)}(x)-\cdots+(-1)^{n}f^{(2n+2)}(x).$$

Ο τελευταίος όρος, $(-1)^{n}f^{(2n+2)}(x)$ είναι ίσος με το μηδέν. Άρα αν προσθέσουμε τις δύο παραπάνω σχέσεις θα έχουμε $F(x)+F''(x)=f(x)$.

Θέτουμε

$$H(x)=F'(x)\eta\mu x-F(x)\sigma\upsilon\nu x,$$

οπότε

$$H'(x)=F''(x)\eta\mu x+F'(x)\sigma\upsilon\nu x-F'(x)\sigma\upsilon\nu x-F(x)\eta\mu x=[F''(x)+F(x)]\eta\mu x$$

Άρα τελικά $H'(x)=f(x)\eta\mu x$.

Οπότε

$$\int_0^{\pi}f(x)\eta\mu x dx=\int_0^{\pi}H'(x)dx=[\,F'(x)\eta\mu x-F(x)\sigma\upsilon\nu x]_0^{\pi}=F(\pi)+F(0)$$
$$=\alpha\kappa\acute{\varepsilon}\rho\alpha\iota o\varsigma.$$

Από την άλλη έχουμε για $0<x<\frac{\alpha}{\beta}=\pi$ ότι

$$0<f(x)\eta\mu x<\frac{x^n(\alpha-\beta x)^n}{n!}<\frac{\pi^n a^n}{n!}.$$

Άρα και

$$0<\int_0^{\pi}f(x)\eta\mu x dx<\frac{\pi^n a^n}{n!}$$

Επειδή η ακολουθία $\frac{\alpha^n}{n!}$ συγκλίνει στο 0 αν επιλέξουμε κατάλληλα μεγάλο n θα έχουμε

$$0<\int_0^{\pi}f(x)\eta\mu x dx<\frac{\pi^n a^n}{n!}<1$$

Δηλαδή $0<\alpha\kappa\acute{\varepsilon}\rho\alpha\iota o\varsigma<1$ κάτι το οποίο είναι άτοπο. Άρα ο π είναι άρρητος.

Με πιο εύκολο τρόπο μπορεί να προκύψει ότι και ο αριθμός e είναι άρρητος. Η απόδειξη που ακολουθεί ανήκει στο J. Fourier (1768 – 1830).

11.2 Το άρρητο του e

Θεώρημα: Ο e είναι άρρητος

Απόδειξη

Από την δυναμοσειρά του Taylor για την εκθετική συνάρτηση, που θα δούμε σε επόμενο κεφάλαιο, προκύπτει ότι

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \quad οπότε\ για\ \chi = 1$$

$$έχουμε\ \ e\ = 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots \qquad n > 1$$

Ας υποθέσουμε ότι ο e είναι ρητός τότε $e = \frac{m}{n}$ με m, n φυσικούς. Ο αριθμός

$$n!\left(e - 1 - \frac{1}{2!} - \cdots - \frac{1}{n!}\right) = n!\frac{m}{n} - n! - n!\frac{1}{2!} - \cdots n!\frac{1}{n!}$$

είναι φυσικός ως άθροισμα φυσικών. Από την άλλη

$$n!\left|e - \left(1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)\right| = n!\left|\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots\right| =$$

$$= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots$$

$$< \frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+2)^2} + \frac{1}{(n+3)^3} + \cdots < \frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \cdots$$

Το τελευταίο άθροισμα είναι άθροισμα απείρων όρων γεωμετρικής προόδου άρα θα ισούται με

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n} < 1$$

$$άρα\ \ 0 < n!\left|e - \left(1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)\right| < 1$$

δηλαδή $0 < φυσικός < 1$ κάτι που είναι άτοπο.

Αρκετά χρόνια αργότερα θα ανακαλυφθεί ότι οι αριθμοί π και e έχουν κάτι ακόμα «χειρότερο» για εμάς από το να είναι άρρητοι αριθμοί, ας δούμε ένα σχετικό παράδειγμα. Ο $x = \sqrt{2}$ είδαμε ότι είναι άρρητος αριθμός, δηλαδή δεν μπορεί να γραφεί στην μορφή $x = \frac{\alpha}{\beta}$. Με άλλα λόγια δεν μπορεί να αποτελέσει λύση της εξίσωσης $\beta x - a = 0$ με α, β ακέραιους αριθμούς. Ο $x = \sqrt{2}$ μπορεί όμως να αποτελέσει λύση μιας εξίσωσης μεγαλύτερου βαθμού όπως για παράδειγμα $x^2 - 2 = 0$. Το ίδιο μπορεί να συμβεί με όλες τις ρίζες της μορφής $\sqrt{7}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[10]{7}$, … Το ίδιο επίσης μπορεί να συμβεί και σε περιπτώσεις πιο περίπλοκων άρρητων αριθμών όπως για παράδειγμα

$$x = \sqrt[5]{3 - 2\sqrt{7}} \Longrightarrow x^5 = 3 - 2\sqrt{7} \Longrightarrow 3 - x^5 = 2\sqrt{7} \Longrightarrow (3 - x^5)^2 = 28 \Longrightarrow$$

$$x^{10} - 6x^5 - 19 = 0.$$

Δηλαδή παρατηρούμε και σε αυτή την περίπτωση υπάρχει εξίσωση με ακέραιους συντελεστές που έχει ως ρίζα τον άρρητο αριθμό. Οι αριθμοί που είναι ρίζες αλγεβρικών εξισώσεων ονομάζονται αλγεβρικοί αριθμοί. Τάξη του αλγεβρικού αριθμού ονομάζεται ο πιο χαμηλός βαθμός της εξίσωσης που έχει τον αριθμό αυτόν ως ρίζα. Το ερώτημα που δημιουργείται άμεσα είναι: μπορούν όλοι οι άρρητοι αριθμοί να αποτελέσουν ρίζες αλγεβρικών εξισώσεων; Πριν προχωρήσουμε στην απάντηση αυτής της ερώτησης ας δούμε μια σημαντική παρατήρηση. Αν θ είναι αλγεβρικός αριθμός τάξης n, που είναι ρίζα της πολυωνυμικής εξίσωσης $P(x) = 0$, τότε για κάθε ρητό $\frac{\alpha}{\beta} \neq \theta$ ισχύει $P(\frac{\alpha}{\beta}) \neq 0$. Πράγματι αν $P\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = 0$ τότε $P(x) = \left(x - \frac{\alpha}{\beta}\right)Q(x)$. Με $Q(x)$ πολυώνυμο $n-1$ βαθμού. Άρα

$$P(\theta) = \left(\theta - \frac{a}{\beta}\right)Q(\theta) = 0 \Longrightarrow Q(\theta) = 0$$

Αλλά επειδή το θ είναι τάξης n δεν είναι δυνατόν να ισχύει η τελευταία ισότητα άρα δεν μπορεί να ισχύει $P\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = 0$.

Το 1851 ο J. Liouville (1809 – 1882) έδωσε απάντηση στο παραπάνω ερώτημα αποδεικνύοντας την ύπαρξη του πρώτου αριθμού που δεν ήταν αλγεβρικός. Οι αριθμοί αυτοί που δεν είναι ρίζες αλγεβρικών πολυωνύμων ονομάζονται υπερβατικοί αριθμοί. Βασικό εργαλείο για την απόδειξη αυτή ήταν το παρακάτω θεώρημά του.

11.3 Το θεώρημα Liouville - το αδύνατο του τετραγωνισμού του κύκλου με κανόνα και διαβήτη

Θεώρημα: Αν θ αλγεβρικός αριθμός τάξης n τότε υπάρχει σταθερά M (που εξαρτάται μόνο από τον θ) τέτοια ώστε για κάθε ρητό $\frac{\alpha}{\beta}$ $(\alpha \in \mathbb{Z},\ \beta \in \mathbb{N})$ να ισχύει

$$\left|\theta - \frac{\alpha}{\beta}\right| \geq \frac{1}{M\beta^n}$$

Απόδειξη

Έστω πολυωνυμική εξίσωση $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$, με ακέραιους συντελεστές, n-βαθμού. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις για τον ρητό $\frac{\alpha}{\beta}$ $(\alpha \in \mathbb{Z},\ \beta \in \mathbb{N})$.

<u>α΄ περίπτωση</u> : Αν $\left|\theta - \frac{\alpha}{\beta}\right| > 1$ τότε για οποιοδήποτε $M > 1$ ισχύει ακόμη περισσότερο ότι

$$\left|\theta - \frac{\alpha}{\beta}\right| \geq \frac{1}{M\beta^n}$$

<u>β΄ περίπτωση</u> : Αν $\left|\theta - \frac{\alpha}{\beta}\right| \leq 1$ τότε $\frac{\alpha}{\beta} \in [\theta - 1, \theta + 1]$. Στο διάστημα αυτό το $P'(x)$ είναι φραγμένο ως πολυώνυμο άρα υπάρχει M έτσι ώστε $|P'(x)| < M,\ x \in [\theta - 1, \theta + 1]$. Από το θεώρημα μέσης τιμής θα υπάρχει $\xi \in [\theta - 1, \theta + 1]$ τέτοιο ώστε

$$\left|P\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right| = \left|P\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) - P(\theta)\right| = \left|\frac{\alpha}{\beta} - \theta\right| \cdot |P'(\xi)| \leq \left|\frac{\alpha}{\beta} - \theta\right| \cdot M \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left|\frac{\alpha}{\beta} - \theta\right| \geq \frac{1}{M}\left|P\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right| = \frac{1}{M\beta^n}\left|\beta^n P\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right| (*).$$

Η εξίσωση $P(x) = 0$, σύμφωνα με την προηγούμενη παρατήρηση, δεν έχει ως ρίζα το ρητό $\frac{\alpha}{\beta}$. Επίσης επειδή οι συντελεστές του P είναι ακέραιοι θα έχουμε ότι ο

$$\beta^n P\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \beta^n(a_n \frac{a^n}{\beta^n} + \cdots + \alpha_1 \frac{\alpha}{\beta} + \alpha_0) = P(x) = a_n\alpha^n + \cdots + a_1\alpha\beta^{n-1} + a_0\beta^n$$

Θα είναι ακέραιος διάφορος του μηδενός. Άρα

$$\left|\beta^n P\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right| \geq 1 \overset{(*)}{\Longrightarrow} \left|\theta - \frac{\alpha}{\beta}\right| \geq \frac{1}{M\beta^n}.$$

Ως πόρισμα του προηγούμενου θεωρήματος προκύπτει ότι ο αριθμός

$$\sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{1}{10^{\kappa!}} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^6} + \cdots = 0{,}11000100 \ldots 01_{24}0 \ldots$$

είναι υπερβατικός.

Απόδειξη

Έστω θ ο παραπάνω αριθμός και έστω ότι αυτός είναι αλγεβρικός τάξης n. Από το προηγούμενο θεώρημα θα υπάρχει M έτσι ώστε

$$\left|\theta - \frac{\alpha}{\beta}\right| \geq \frac{1}{M\beta^n}. \quad (\alpha \in \mathbb{Z}, \beta \in \mathbb{N})$$

Εξετάζουμε τον ρητό

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{10^{2!}} + \cdots + \frac{1}{10^{m!}} = \frac{a_m}{10^{m!}} \;\; \mu\varepsilon \;\; a_m \in \mathbb{N}.$$

Για αυτόν θα ισχύει

$$\left|\theta - \frac{\alpha_m}{10^{m!}}\right| \geq \frac{1}{M10^{m!n}}$$

Από την άλλη ισχύει

$$\left|\theta - \frac{\alpha_m}{10^{m!}}\right| = \left|\frac{1}{10^{(m+1)!}} + \frac{1}{10^{(m+2)!}} + \cdots\right| \leq \frac{1}{10^{(m+1)!}}\left|1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \cdots\right| < \frac{2}{10^{(m+1)!}}$$

Άρα

$$\frac{1}{M10^{m!n}} \leq \left|\theta - \frac{\alpha_m}{m!}\right| < \frac{2}{10^{(m+1)!}} = \frac{2}{10^{m!(m+1)}} \Longrightarrow 2 \geq \frac{1}{M}10^{m!(m+1-n)}$$

Το τελευταίο αυτό συμπέρασμα είναι άτοπο μια και η ακολουθία $10^{m!(m+1-n)} \to \infty$ όταν $m \to \infty$ άρα δεν μπορεί να είναι φραγμένη.

Με τον ίδιο τρόπο μπορεί να αποδειχθεί ότι και οι αριθμοί

$$\sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\kappa!}} \quad n \in \mathbb{N}, n \neq 1, \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{\alpha_\kappa}{n^{\kappa!}} \;\; \alpha_\kappa \in \{1,2,\ldots,9\}$$

είναι υπερβατικοί.

Μερικά χρόνια αργότερα (1873) ο C. Hermit (1822 – 1901) απέδειξε την υπερβατικότητα του e και το 1882 ο F. Lindemann (1852 – 1939) την υπερβατικότητα του π.

Με την ανακάλυψη της υπερβατικότητας του π μπορούμε να αποδείξουμε το αδύνατο της κατασκευής τετραγώνου ισοδύναμου με κύκλο (τετραγωνισμός κύκλου) με κανόνα και διαβήτη. Στο σημείο αυτό μπορούμε να αναφέρουμε το θεώρημα ότι ο τετραγωνισμός του κύκλου είναι αδύνατος με κανόνα και διαβήτη. Η πλήρης κατανόηση του θεωρήματος αυτού απαιτεί αρκετή θεωρία Άλγεβρας (επεκτάσεις σωμάτων) που ξεφεύγει τους σκοπούς της εργασίας αυτής.

Θεώρημα : Ο τετραγωνισμός του κύκλου είναι αδύνατος με κανόνα και διαβήτη.

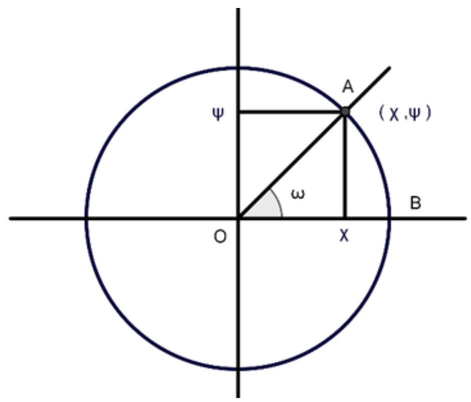
Απόδειξη

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι μας δίνουν ένα κύκλο μοναδιαίας ακτίνας, οπότε έχουμε να κατασκευάσουμε ένα τετράγωνο εμβαδού π, άρα θέλουμε να κατασκευάσουμε ευθύγραμμο τμήμα (πλευρά του τετραγώνου) μήκους $\sqrt{\pi}$. Η δυνατότητα κατασκευής ευθυγράμμου τμήματος μήκους $\sqrt{\pi}$ συνεπάγεται (με τη βοήθεια των στοιχειωδών γεωμετρικών κατασκευών της Ευκλείδειας Γεωμετρίας) τη δυνατότητα κατασκευής ευθυγράμμου τμήματος μήκους π. Συνεπώς βάση γνωστού θεωρήματος, υπάρχει πεπερασμένη επέκταση του $\mathbb{Q}$, που περιέχει τον αριθμό π, ειδικότερα, λόγω του Θεωρήματος «Κάθε πεπερασμένη επέκταση ενός σώματος είναι αλγεβρική επέκτασή του». Αυτό συνεπάγεται ότι ο αριθμός π είναι αλγεβρικός. Όμως, όπως αναφέραμε προηγουμένως, έχει αποδειχθεί ότι ο π είναι υπερβατικός και αυτή η αντίφαση ολοκληρώνει την απόδειξη.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 12^{Ο} ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Επιστρέφουμε στην τριγωνομετρία στην σύγχρονή της μορφή. Θα δούμε πως ορίζονται σήμερα στα σχολικά βιβλία οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Στην συνέχεια εκμεταλλευόμενοι τον απειροστικό λογισμό θα δούμε και με ποιους άλλους τρόπους μπορούν να εισαχθούν προς μελέτη οι συναρτήσεις αυτές, χωρίς να γίνει αναφορά στον τριγωνομετρικό κύκλο.

Αν θεωρήσουμε την προσανατολισμένη γωνία ω που ορίζεται από την ημιευθεία OB του οριζόντιου άξονα και την ημιευθεία OA όπου $A(x,\psi)$ με $x^2+\psi^2=1$. Ορίζουμε $\eta\mu\omega=\psi$ και $\sigma\upsilon\nu\omega=x$.



Ορίζουμε

$$\varepsilon\varphi\omega=\frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}\ \mu\varepsilon\ \omega\neq\kappa\pi+\frac{\pi}{2},\kappa\in\mathbb{Z}$$

και

$$\sigma\varphi\omega=\frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}\ \mu\varepsilon\ \omega\neq\kappa\pi,\kappa\in\mathbb{Z}$$

Η συνάρτηση που αντιστοιχεί σε κάθε πραγματικό αριθμό x το $\eta\mu x$ ($x\ \sigma\varepsilon\ rad$) συμβολίζεται με $\eta\mu$. Αντίστοιχα ορίζονται και οι άλλες τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Επειδή στο διάστημα $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ η τριγωνομετρική συνάρτηση $\eta\mu x$ είναι 1-1 συναρτήση, ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση που αντιστοιχεί σε κάθε πραγματικό αριθμό του διαστήματος [-1,1] τη γωνία που έχει ως ημ τον αριθμό αυτό. Η συνάρτηση αυτή συμβολίζεται με $\tau o\xi\eta\mu x$. Όμοια το $\sigma\upsilon\nu$ είναι 1-1 στο διάστημα $[0,\pi]$ άρα ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση $\tau o\xi\sigma\upsilon\nu$. Για την εφαπτομένη η αντίστροφή της συνάρτηση είναι η $\tau o\xi\varepsilon\varphi$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

12.1 Προσέγγιση με πολυωνυμικές συναρτήσεις

Ο Απειροστικός Λογισμός, που άρχισε να αναπτύσσεται από τα μέσα του 17^{ου} αιώνα βρήκε άμεσο πεδίο εφαρμογής στις τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Η εύρεση των τιμών για τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις όπως έχουμε δει δεν είναι καθόλου εύκολη υπόθεση. Το ίδιο συμβαίνει και με άλλες κατηγορίες συναρτήσεων όπως π.χ. οι λογαριθμικές και εκθετικές. Για τις συναρτήσεις αυτές ο Άγγλος Μαθηματικός B. Taylor το 1715 ανέπτυξε μια μέθοδο προσέγγισης των τιμών τους από μία πολυωνυμική συνάρτηση. Η πολυωνυμική αυτή συνάρτηση φέρει το όνομα πολυώνυμο Taylor. Ας δούμε σε γενικές γραμμές την μέθοδο αυτή.

Έστω πολυωνυμική συνάρτηση

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Αμέσα παρατηρούμε ότι ισχύει $P(0) = a_0$.

Αν παραγωγίσουμε την συνάρτηση αυτή θα έχουμε

$$P'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι $P'(0) = a_1$. Συνεχίζοντας την ίδια διαδικασία θα έχουμε

$$P''(x) = n(n-1)a_n x^{n-2} + (n-1)(n-2)a_{n-1}x^{n-3} + \cdots + 2a_2$$

Οπότε $P''(0) = 2a_2$. Γενικεύοντας την παραπάνω διαδικασία θα έχουμε

$$P^{(\kappa)}(0) = \kappa!\, a_\kappa$$

Αν είχαμε ένα πολυώνυμο

$$P(x) = a_n(x-\alpha)^n + a_{n-1}(x-\alpha)^{n-1} + \cdots + a_1(x-\alpha) + a_0$$

η ίδια διαδικασία θα έδινε

$$\alpha_\kappa = \frac{P^{(\kappa)}(\alpha)}{\kappa!}.$$

Αν υποθέσουμε ότι έχουμε μια συνάρτηση f τέτοια ώστε να υπάρχουν όλες οι παράγωγοι $f'(\alpha), \dots, f^{(\kappa)}(\alpha)$. Θέτουμε

$$\alpha_\kappa = \frac{f^{(\kappa)}(\alpha)}{\kappa!}\ ,\ \ 0 \le \kappa \le n.$$

Και ορίζουμε

$$P_{n,f,\alpha}(x) = a_n(x-\alpha)^n + a_{n-1}(x-\alpha)^{n-1} + \cdots + a_1(x-\alpha) + a_0$$

Η πολυωνυμική αυτή συνάρτηση ονομάζεται πολυώνυμο Taylor βαθμού n της f στο α. Προφανώς ισχύει ότι $p_{n,f,\alpha}^{(\kappa)}(\alpha) = f^{(k)}(\alpha)$. Αν θεωρήσουμε την συνάρτηση $\eta\mu$ έχουμε

$$\eta\mu(0) = 0$$
$$\eta\mu'(0) = \sigma\upsilon\nu(0) = 1$$
$$\eta\mu''(0) = -\sigma\upsilon\nu(0) = 0$$
$$\eta\mu^{(3)}(0) = -\sigma\upsilon\nu(0) = -1$$
$$\eta\mu^{(4)}(0) = \eta\mu(0) = 0$$

Από το σημείο αυτό και πέρα, οι παράγωγοι επαναλαμβάνονται κυκλικά οπότε οι αριθμοί $\alpha_\kappa = \frac{\eta\mu^{(\kappa)}(0)}{\kappa!}$ είναι

$$0, 1, 0, -\frac{1}{3!}, 0, \frac{1}{5!}, 0, -\frac{1}{7!}, 0, \frac{1}{9!}, \dots$$

Άρα το πολυώνυμο Taylor βαθμού $2n+1$ της $\eta\mu$ στο 0 είναι

$$P_{2n+1,0}(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

Με παρόμοιο τρόπο μπορεί να προκύψει και το πολυώνυμο Taylor βαθμού $2n$ για το $συν$

$$P_{2n,0}(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots (-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n}$$

Μιά συνάρτηση f συνδέεται με το πολυώνυμο Taylor όπως βλέπουμε στο παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα Taylor. Αν υποθέσουμε ότι f είναι μια συνάρτηση για την οποία όλες οι παράγωγοι

$$f', f'', \dots, f^{(n)}, f^{(n+1)}$$

ορίζονται στο διάστημα [α,χ]. $R_{n,a}(x)$ ορίζεται από την σχέση

$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n(x-a), γιά\ κάποιο\ t \in (a,x) \text{ ή}$$

$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}\ γιά\ κάποιο\ t \in (a,x)$$

τότε

$$f(x) = a_n(x-\alpha)^n + a_{n-1}(x-\alpha)^{n-1} + \cdots + a_1(x-\alpha) + a_0 + R_{n,a}(x)$$

Επιπλέον, αν η $f^{(n+1)}$ είναι ολοκληρώσιμη στο [α,χ], τότε

$$R_{n,a}(x) = \int_{\alpha}^{\chi} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt.$$

Ο όρος $R_{n,a}(x)$ λέγεται υπόλοιπο Taylor βαθμού n. Αν το υπόλοιπο $R_{n,a}(x)$ μπορεί να γίνει όσο μικρό θέλουμε, τότε το $f(x)$ μπορεί να υπολογιστεί με όση ακρίβεια θέλουμε χρησιμοποιώντας το πολυώνυμο Taylor. Καθώς απαιτούμε μεγαλύτερη ακρίβεια πρέπει να προσθέτουμε όλο και περισσότερους όρους, οπότε στην περίπτωση αυτή δεν θα μπορέσουμε να αποφύγουμε την άθροιση απείρων όρων. Ας ορίσουμε λοιπόν το άπειρο άθροισμα για να μπορέσουμε να το χρησιμοποιήσουμε και στην περίπτωση του πολυωνύμου Taylor.

Έστω (a_n), μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Θεωρούμε την ακολουθία (s_n), η οποία ορίζεται αναδρομικά με $s_1 = a_1,\ s_n = s_{n-1} + \alpha_n$. Η ακολουθία (a_n) λέγεται αθροίσιμη αν η ακολουθία (s_n) συγκλίνει. Σ΄ αυτήν την περίπτωση το $\lim_{n\to\infty} s_n$ συμβολίζεται με

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \text{ ή } \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_n$$

και ονομάζεται άπειρο άθροισμα της ακολουθίας (a_n). Ένα άπειρο άθροισμα συνήθως λέγεται και άπειρη σειρά. Ένα άπειρο άθροισμα της μορφής

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (x-a)^n$$

ονομάζεται δυναμοσειρά με κέντρο α. Αν f μια συνάρτηση με παραγώγους κάθε τάξης στο α τότε η δυναμοσειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

ονομάζεται σειρά Taylor της f στο α. Αν $\alpha = 0$ τότε η σειρά Taylor της f παίρνει την μορφή

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Αποδεικνύεται ότι οι σειρές Taylor των $\eta\mu$ και $\sigma\upsilon\nu$ στο 0 συγκλίνουν για κάθε x, και παραγωγίζονται κατά όρους επίσης για κάθε x.

12.2 Ορισμός των τριγωνομετρικών συναρτήσεων με την βοήθεια δυναμοσειρών

Η εμπειρία που αποκτήσαμε από την προσέγγιση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων με την βοήθεια των δυναμοσειρών μας δίνει την δυνατότητα να ορίσουμε τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις χωρίς να αναφερθούμε σε γωνίες τριγώνων.
Ορίζουμε λοιπόν

$$\eta\mu x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \ \ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x \in \mathbb{R}$$

$$\sigma\upsilon\nu x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x \in \mathbb{R}$$

Θεώρημα: Εάν $\varphi(x) = \eta\mu x$ και $\rho(x) = \sigma\upsilon\nu x$, τότε οι φ, ρ παραγωγίζονται και μάλιστα ισχύει $\varphi'(x) = \sigma\upsilon\nu x$ και $\rho'(x) = -\eta\mu x$.

Απόδειξη

Όπως έχουμε αναφέρει οι συναρτήσεις $\varphi(x)$, $\rho(x)$ ως δυναμοσειρές είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις με παραγώγους:

$$\varphi'(x) = [x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots]' =$$

$$1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots (-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \cdots = \rho(\chi)$$

και

$$\rho'(x) = [1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots (-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \cdots]' =$$

$$-x + \frac{1}{3!}x^3 - \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{7!}x^7 + \cdots (-1)^n \frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1} + \cdots = -\varphi(x).$$

Θεώρημα: i) $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$

ii) $|\eta\mu x| \leq 1, |\sigma\upsilon\nu x| \leq 1,\ x \in \mathbb{R}$

Απόδειξη

i)Αν θέσουμε $g(x) = \eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x$ τότε $g'(x) = 2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x + 2\sigma\upsilon\nu x(-\eta\mu x) = 0$. Άρα η g είναι σταθερή και επειδή $g(0) = \eta\mu^2 0 + \sigma\upsilon\nu^2 0 = 1$ θα ισχύει $g(x) = 1$ δηλαδή

$\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$.

Το ii) έπεται άμεσα από το i).

Θεώρημα: Ισχύει ότι $\eta\mu(x+\psi) = \eta\mu x\sigma\upsilon\nu\psi + \sigma\upsilon\nu x\eta\mu\psi$.

Απόδειξη

Για κάθε α ορίζουμε την συνάρτηση g με $g(x) = \eta\mu x\sigma\upsilon\nu(\alpha - x) + \sigma\upsilon\nu x\eta\mu(\alpha - x)$.
$g'(x) = \sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu(\alpha - x) + \eta\mu x\eta\mu(\alpha - x) - \eta\mu x\eta\mu(\alpha - x) - \sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu(\alpha - x) = 0$.
Δηλαδή η g είναι σταθερή. Έτσι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $g(x) = g(0) = \eta\mu 0\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu 0\eta\mu\alpha = \eta\mu\alpha$. Άρα $\eta\mu x\sigma\upsilon\nu(\alpha - x) + \sigma\upsilon\nu x\eta\mu(\alpha - x) = \eta\mu\alpha$. Επειδή η σχέση αυτή ισχύει για κάθε α και x θα ισχύει και για $\alpha = x + \psi$, οπότε αντικαθιστώντας θα έχουμε

$$\eta\mu(x+\psi) = \eta\mu x\sigma\upsilon\nu\psi + \sigma\upsilon\nu x\eta\mu\psi.$$

Όμοια αποδεικνύεται ότι $\sigma\upsilon\nu(x+\psi) = \sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu\psi - \eta\mu x\eta\mu\psi$.

Θεώρημα: Υπάρχει αριθμός $\frac{\pi}{2}$ έτσι ώστε $\eta\mu\frac{\pi}{2} = 1,\ \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} = 0$.

Απόδειξη

$$\sigma\upsilon\nu x = \left(1 - \frac{1}{2!}x^2\right) + \frac{1}{4!}x^4 + \left(-\frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8\right) + \cdots$$
$$\sigma\upsilon\nu x = \left(1 - \frac{1}{2!}x^2\right) + \frac{1}{4!}x^4 - x^6\left(\frac{1}{6!} - \frac{1}{8!}x^2\right) - x^8\left(\frac{1}{8!} - \frac{1}{10!}x^2\right) - \cdots$$

Για $x = \sqrt{3}$ όλες οι παρενθέσεις μετά από την πρώτη είναι θετικές άρα θα ισχύει

$$\sigma\upsilon\nu\sqrt{3} < \left(1 - \frac{3}{2!}\right) + \frac{9}{4!} = -\frac{1}{8} < 0$$

Επίσης

$$\sigma\upsilon\nu x = \left(1 - \frac{1}{2!}x^2\right) + x^4\left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{6!}x^2\right) + x^8\left(\frac{1}{8!} - \frac{1}{10!}x^2\right) + \cdots$$

Για $x = \sqrt{2}$ η πρώτη παρένθεση μηδενίζεται ενώ οι υπόλοιπες είναι θετικές άρα

$$\sigma\upsilon\nu\sqrt{2} > 0$$

Αν θέσουμε $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ επειδή αυτή είναι παραγωγίσιμη θα είναι και συνεχής. Επίσης

$$f(\sqrt{2})f(\sqrt{3}) < 0$$

άρα από θεώρημα ενδιαμέσων τιμών θα έχουμε ότι υπάρχει $\xi \in (\sqrt{2}, \sqrt{3})$ έτσι ώστε $\sigma\upsilon\nu\xi = 0$.

Το σύνολο $A = \{\xi > 0 \,/ \sigma\upsilon\nu\xi = 0\} \neq \emptyset$ είναι κλειστό ($\sigma\upsilon\nu x$ συνεχής) και κάτω φραγμένο από το μηδέν άρα έχει ελάχιστο κάτω φράγμα το οποίο ονομάζουμε $\frac{\pi}{2}$. Άρα $\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} = 0$ και από την βασική τριγωνομετρική ταυτότητα $\eta\mu\frac{\pi}{2} = 1$.

Θεώρημα: Οι συναρτήσεις $\eta\mu x, \sigma\upsilon\nu x$ είναι περιοδικές με περίοδο 2π

Απόδειξη

Ισχύει

$$\eta\mu\pi = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = \eta\mu\frac{\pi}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} + \eta\mu\frac{\pi}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} = 0.$$

$$\sigma\upsilon\nu\pi = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} - \eta\mu\frac{\pi}{2}\eta\mu\frac{\pi}{2} = -1.$$

Επίσης

$$\eta\mu 2\pi = \eta\mu(\pi+\pi) = \eta\mu\pi\sigma\upsilon\nu\pi + \eta\mu\pi\sigma\upsilon\nu = 0.$$

$$\sigma\upsilon\nu 2\pi = \sigma\upsilon\nu(\pi+\pi) = \cdots = 1.$$

Έχουμε

$$\eta\mu(x+2\pi) = \eta\mu x\sigma\upsilon\nu 2\pi + \eta\mu 2\pi\sigma\upsilon\nu x = \eta\mu x.$$

$$\sigma\upsilon\nu(x+2\pi) = \sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu 2\pi - \eta\mu x\eta\mu 2\pi = \sigma\upsilon\nu 2\pi.$$

Μένει να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει περίοδος μικρότερη του αριθμού 2π. Έστω το σύνολο $B = \{m \in Z \,/ 2m\pi \leq s \ \text{όπου } s \ \text{περίοδος}\}$

Αυτό είναι μη κενό αφού ο αριθμός 1 ανήκει στο B για $s = 2\pi$. Επιπλέον το A είναι άνω φραγμένο αφού $m \leq \frac{s}{2\pi}$. Έπεται λοιπόν ότι υπάρχει το $supA$ και έστω $n = supA$. Από τον ορισμό του supremum προκύπτει ότι $2n\pi \leq s$ και $2(n+1)\pi > s$. Όμως ο αριθμός $t = s - 2n\pi$ είναι περίοδος και ισχύει ότι $0 \leq t \leq 2\pi$. Άρα $\eta\mu(0+\ t) = \eta\mu 0 = 0$ και $\sigma\upsilon\nu(0+\ t) = \sigma\upsilon\nu 0 = 1$. Αυτό συμβαίνει μόνο αν $t = 0$. Άρα $s = 2n\pi$. Άρα οι συναρτήσεις είναι περιοδικές με περίοδο 2π.

Θεώρημα: i) Ισχύει $\sigma\upsilon\nu x > 0$ για $x \in [0,\frac{\pi}{2}]$ και $\eta\mu x$ γνησίως αύξουσα στο $[0,\frac{\pi}{2}]$ και ii) $\eta\mu x > 0$ για $x \in [0,\frac{\pi}{2}]$ και $\sigma\upsilon\nu x$ γνησίως φθίνουσα στο $[0,\frac{\pi}{2}]$.

Απόδειξη

i) Η συνάρτηση $\sigma\upsilon\nu x$ είναι συνεχής (ως παραγωγίσιμη) για κάθε $x \in [0,\frac{\pi}{2}]$. Επιπλέον $\sigma\upsilon\nu x \neq 0$ για κάθε $\in [0,\frac{\pi}{2}]$ διότι ο $\frac{\pi}{2}$ είναι ο ελάχιστος αριθμός ώστε $\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} = 0$. Έτσι αφού $\sigma\upsilon\nu 0 = 1 > 0$ η συνάρτηση $y = \sigma\upsilon\nu x > 0$ για κάθε $x \in [0,\frac{\pi}{2}]$. Ισχύει ότι $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x > 0$ συνεπώς η συνάρτηση $\eta\mu x$ είναι γνησίως αύξουσα για $x \in [0,\frac{\pi}{2}]$.

ii) Αφού η συνάρτηση $\eta\mu x$ είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x \in [0,\frac{\pi}{2}]$ προκύπτει ότι $0 < \eta\mu x \leq 1$. Αλλά$(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$ από αυτό έπεται ότι η $\sigma\upsilon\nu x$ είναι γνησίως φθίνουσα για $x \in [0,\frac{\pi}{2}]$. Για να αποδειχθούν οι ιδιότητες προσήμου και μονοτονίας στα υπόλοιπα διαστήματα, γίνεται χρήση των ταυτοτήτων $\sigma\upsilon\nu x = -\eta\mu(x-\frac{\pi}{2})$ και $\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu(x-\frac{\pi}{2})$ οι οποίες προκύπτουν από προηγούμενο θεώρημα.

Θεώρημα: Ισχύουν i) $-x \leq \eta\mu x \leq x$.

ii) $\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x} = 1$.

Απόδειξη

i) Ισχύει ότι $-1 \leq \sigma\upsilon\nu x \leq 1$ και αφού η $\sigma\upsilon\nu x$ είναι συνεχής είναι και ολοκληρώσιμη. Συνεπώς για $x \geq 0$ από την προηγούμενη ανισότητα έπεται

$$\int_0^x -1dt \leq \int_0^x \sigma\upsilon\nu t dt \leq \int_0^x 1\, dt$$

από όπου προκύπτει ότι $-x \leq \eta\mu x \leq x$. Ομοίως αν $x < 0$.

ii) Με εφαρμογή των κανόνων De l' Hospital, έχουμε

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(\eta\mu x)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0}\sigma\upsilon\nu x = 1.$$

Με παρόμοιο τρόπο μπορούν να αποδειχθούν όλες οι γνωστές ιδότητες που έχουν οι συνήθεις τριγωνομετρικές συναρτήσεις $\eta\mu x$, $\sigma\upsilon\nu x$. Τέλος ορίζουμε

$$\varepsilon\varphi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}, x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2} \quad \kappa\alpha\iota \quad \sigma\varphi x = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}, x \neq \kappa\pi \; \mu\varepsilon \; \kappa \in \mathbb{Z}.$$

12.3 Ορισμός των τριγωνομετρικών συναρτήσεων από διαφορικές εξισώσεις

Έστω $S, C : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \mu\varepsilon\ S'(x) = C(x),\ C'(x) = -S(x)\ \kappa\alpha\iota\ S(0) = 0,\ C(0) = 1$

Η ύπαρξη των συναρτήσεων εξασφαλίζεται από τις γνωστές δυναμοσειρές.

Θεώρημα: $S^2(x) + C^2(x) = 1$

Απόδειξη

$[S^2(x) + C^2(x)]' = 2S(x)S'(x) + 2C(x)C'(x) = 2S(x)C(x) - 2C(x)S(x) = 0.$

Άρα $S^2(x) + C^2(x) = S^2(0) + C^2(0) = 1.$

Ως πόρισμα από το προηγούμενο θεώρημα έχουμε ότι $|S(x)| \leq 1,\ |C(x)| \leq 1.$

Θεώρημα: Οι συναρτήσεις S, C είναι μοναδικές.

Απόδειξη

Έστω f, g είναι δύο συναρτήσεις με

$$f'(x) = g(x), \qquad g'(x) = -f(x) \;\; \kappa\alpha\iota\ f(0) = 0, \qquad g(0) = 1.$$

$$\tau\acute{o}\tau\varepsilon \;\; (Sg - fC)' = S'g + Sg' - f'C - fC' = Cg - Sf - gC + fS = 0$$

$$(Sf - gC)' = S'f + Sf' - g'C - gC' = Cf + Sg - fC - gS = 0.$$
Άρα υπάρχουν α, β:
$$S(x)g(x) - f(x)C(x) = \alpha$$
$$S(x)f(x) - g(x)C(x) = \beta$$
Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη με $C(x)$ και την δεύτερη $S(x)$ και προσθέτουμε κατά μέλη άρα $-f(x)\big(S^2(x) + C^2(x)\big) = \alpha C(x) - \beta S(x)$ άρα $f(x) = \beta S(x) - \alpha C(x)$. Επίσης $g(x) = aS(x) + \beta C(x)$. Για x=0 έχουμε $f(0) = \beta S(0) - \alpha C(0)$ άρα $\alpha = 0$ και $g(0) = aS(0) + \beta C(0)$ οπότε $\beta = 1$. Άρα τελικά έχουμε $f(x) = S(x)\ και\ g(x) = C(x)$ δηλαδή οι συναρτήσεις είναι μοναδικές.

Θεώρημα: Ισχύει ότι $S(-x) = -S(x)\ \ και\ \ C(-x) = C(x)$.

Απόδειξη

Θέτουμε $f(x) = S(-x)\ \ και\ g(x) = C(-x)$ και ακολουθούμε την προηγούμενη απόδειξη.

Θεώρημα: Ισχύει ότι i) $S(x + \psi) = S(x)C(\psi) + C(x)S(\psi)$.

ii) $C(x + \psi) = C(x)C(\psi) - S(x)S(\psi)$.

Απόδειξη

i) Για κάθε α, ορίζουμε την συνάρτηση $g\ με\ g(x) = S(x)C(\alpha - x) + C(x)S(\alpha - x)$. Τότε $g'(x) = S'(x)C(\alpha - x) - S(x)C'(\alpha - x) + C'(x)S(\alpha - x) - C(x)S'(\alpha - x) = C(x)C(\alpha - x) + S(x)S(\alpha - x) - S(x)S(\alpha - x) - C(x)C(\alpha - x) = 0$.
Δηλαδή η g είναι σταθερή. Έτσι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $g(x) = g(0) = S(0)C(a) + C(0)S(a) = S(\alpha)$. Επειδή η προηγούμενη σχέση ισχύει για κάθε α θα ισχύει και για $\alpha = x + \psi$. Άρα
$S(x)C(\alpha - x) + C(x)S(\alpha - x) = S(\alpha)$ ή $S(x + \psi) = S(x)C(\psi) + C(x)S(\psi)$.
ii) Όμοια

θεώρημα: i) Υπάρχει ένας πραγματικός θετικός αριθμός x_0 τέτοιος ώστε $C(x_0) = 0$.

ii) Υπάρχει ένας ελάχιστος θετικός πραγματικός αριθμός θ τέτοιος ώστε $C(\theta) = 0$.

Απόδειξη

i) Έστω ότι $C(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Τότε αφού η συνάρτηση C είναι συνεχής για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ως παραγωγίσιμη και $C(0) = 1$, από την ιδιότητα ότι η C διατηρεί πρόσημο έπεται ότι $C(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα $S'(x) = C(x) > 0$ συνεπώς η συνάρτηση S είναι αύξουσα. Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής Διαφορικού Λογισμού για την C στο $[1, x]$, όπου $x > 1$ υπάρχει $\xi \in (1, x)$ τέτοιο ώστε
$$C(x) - C(1) = -(x - 1)S(\xi)$$
Όμως $1 < \xi < x$ και αφού η S είναι αύξουσα έχουμε ότι $S(1) < S(\xi) < S(x)$. Άρα
$$C(x) - C(1) = -(x - 1)S(\xi) < -(x - 1)S(1)$$

δηλαδή

$$C(x) < C(1) + S(1) - xS(1)$$

Αλλά το $\lim_{x \to +\infty} [C(1) + S(1) - xS(1)] = -\infty$ συνεπώς και $\lim_{x \to +\infty} C(x) = -\infty$. Αυτό όμως είναι άτοπο αφού από προηγούμενο θεώρημα ισχύει ότι $|C(x)| \leq 1$. Εφόσον $C(-x) = C(x)$ υπάρχει κάποιος $x_0 \in \mathbb{R}_+$ τέτοιος ώστε $C(x_0) = 0$.

ii) Έστω το σύνολο $A = \{u: C(u) = 0,\ u > 0\}$

Λόγω του i) το A θα έχει μέγιστο κάτω φράγμα, έστω $\theta = infA$. Αρκεί να αποδειχθεί ότι $\theta > 0$. Υπάρχει ακολουθία $u_n \in A$ τέτοια ώστε $u_n \to \theta$. Συνεπώς $\lim_{u \to \infty} C(u_n) = C(\theta) = 0$. Όμως $\theta \geq 0$ επειδή $C(0) = 1$ έπεται ότι $\theta > 0$.

Ορισμός: Αν θ είναι ο ελάχιστος θετικός αριθμός τέτοιος ώστε $C(\theta) = 0$, τότε ορίζεται $\pi = 2\theta$.

Στην συνέχεια θα δείξουμε μερικές βασικές ιδιότητες που έχουν οι συναρτήσεις που ορίσαμε, οι οποίες αποτελούν και ιδιότητες των τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

Θεώρημα: Ισχύει ότι $C(\frac{\pi}{2}) = 0$, $S\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $C(\pi) = -1$, $S(\pi) = 0$, $C(2\pi) = 1$, $S(2\pi) = 0$

Απόδειξη

Από τον προηγούμενο ορισμό έχουμε ότι $C(\theta) = 0$ άρα $C\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ και από προγούμενο θεώρημα έχουμε ότι $S^2\left(\frac{\pi}{2}\right) + C^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ άρα $S\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ (μια και $S(0) = 0$ και S γνησίως αύξουσα). Η υπόλοιπες ισότητες προκύπτουν αν στις σχέσεις $S(x+\psi) = S(x)C(\psi) + C(x)S(\psi)$ $\quad και \quad$ $C(x+\psi) = C(x)C(\psi) - S(x)S(\psi)$ που αποδείξαμε πριν θέσουμε πρώτα $x = \psi = \frac{\pi}{2}$, και στην συνέχεια $x = \psi = \pi$.

Θεώρημα: Οι συναρτήσεις C, S είναι περιοδικές με περίοδο το 2π.

Απόδειξη

Αν στους τύπους του αθροίσματος που χρησιμοποιήσαμε πριν θέσουμε $\psi = 2\pi$ θα έχουμε ότι $C(x+2\pi) = C(x)$, $S(x+2\pi) = S(x)$. Δηλαδή το 2π είναι περίοδος των συναρτήσεων αυτών. Περίοδος επίσης είναι και κάθε ακέραιο πολλαπλάσιό του. Θα δείξουμε ότι δεν υπάρχει περίοδος άλλη ανάμεσα στο 0 και το 2π. Θεωρούμε το σύνολο

$$A = \{\kappa \in \mathbb{Z}/2\kappa\pi \leq \sigma, όπου\ \sigma\ περίοδος\}.$$

Αυτό είναι μη κενό αφού ο αριθμός 1 ανήκει στο σύνολο A για $\sigma = 2\pi$. Επιπλέον το A είναι άνω φραγμένο αφού $\kappa \leq \frac{\sigma}{2\pi}$. Έπεται λοιπόν ότι υπάρχει το $supA$ και έστω $n = supA$. Από τον ορισμό του supremum προκύπτει ότι $2n\pi \leq \sigma$ και $2(n+1)\pi > \sigma$. Όμως ο αριθμός $t = 2n\pi - \sigma$ είναι περίοδος και άρα θα ισχύει ότι $0 \leq t < 2\pi$. Αλλά

$S(0+t) = S(0) = 0$ και $C(0+t) = C(0) = 1$. Αυτό συμβαίνει όπως δείξαμε πριν μόνο αν $t = 0$. Άρα $\sigma = 2n\pi$.

Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύονται και οι υπόλοιπες ιδιότητες που έχουν οι γνωστές μας τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Αν λοιπόν ονομάσουμε $S(x) = \eta\mu x$ και $C(x) = \sigma\upsilon\nu x$ θα έχουμε ορίσει τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις χωρίς καμία αναφορά σε τόξα ή γωνίες τριγωνομετρικού κύκλου.

12.4 Ορισμός των τριγωνομετρικών συναρτήσεων μέσω ολοκληρώματος

Τώρα θα δούμε συνοπτικά έναν εναλλακτικό ορισμό των τριγωνομετρικών συναρτήσεων μέσω ολοκληρώματος. Ακολουθούμε την εξής πορεία: πρώτα ορίζουμε την συνάρτηση $\tau o\xi\varepsilon\varphi x$, κατόπιν την αντίστροφή της, την $\varepsilon\varphi x$, και, τέλος τις $\sigma\upsilon\nu x$ και $\eta\mu x$.

Ορίζουμε

$$\tau o\xi\varepsilon\varphi x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} \quad \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x \in \mathbb{R}$$

Δηλαδή, ορίζουμε τη συνάρτηση $\tau o\xi\varepsilon\varphi x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Επειδή η $\frac{1}{1+x^2}$ είναι συνεχής, η συνάρτηση αυτή είναι παραγωγίσιμη με

$$(\tau o\xi\varepsilon\varphi x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Προφανώς $\tau o\xi\varepsilon\varphi 0 = 0$ και επειδή η παράγωγος είναι θετική η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα. Επίσης η συνάρτηση αυτή είναι περιττή και φραγμένη άνω γιατί

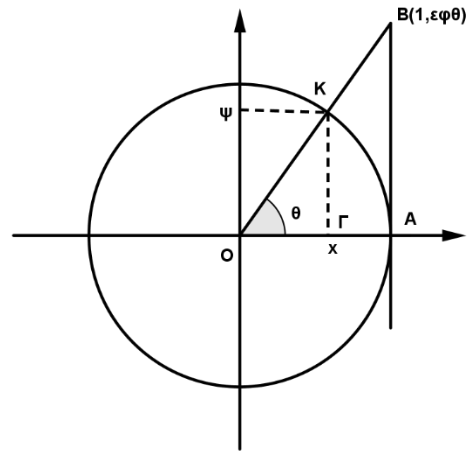
$$\tau o\xi\varepsilon\varphi(-x) = \int_0^{-x} \frac{dt}{1+t^2} \overset{t=-s}{\Longrightarrow} \tau o\xi\varepsilon\varphi(-x) = -\int_0^x \frac{ds}{1+s^2} = -\tau o\xi\varepsilon\varphi x \ \ \kappa\alpha\iota$$

$$\tau o\xi\varepsilon\varphi x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} + \int_1^x \frac{dt}{1+t^2} \leq \int_0^1 1dt + \int_1^x \frac{dt}{t^2} = 1 + 1 - \frac{1}{x} \leq 2.$$

Επειδή η συνάρτηση είναι φραγμένη θα έχει όριο στο άπειρο το οποίο ορίζουμε να είναι το $\frac{\pi}{2}$. Επίσης επειδή η συνάρτηση είναι περιττή το όριο της όταν το $x \to -\infty$ θα είναι $-\frac{\pi}{2}$. Οπότε το σύνολο τιμών της θα είναι $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Η συνάρτηση αυτή επειδή είναι γνησίως μονότονη θα αντιστρέφεται και την αντίστροφη την συμβολίζουμε με $\varepsilon\varphi x\colon (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$.

Η επιλογή του συγκεκριμένου ολοκληρώματος για τον ορισμό της συνάρτησης $\tau o\xi\varepsilon\varphi x$ προκύπτει ως εξής: Στο παρακάτω σχήμα έχουμε ένα τριγωνομετρικό κύκλο. Το τόξο που αντιστοιχεί στην $\varepsilon\varphi\theta$ είναι το AK το μήκος L του τόξου αυτού δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{[x'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt.$$



Η εξίσωση του μοναδιαίου κύκλου είναι $x^2+\psi^2=1$ επίσης ισχύει ότι $\psi = x\varepsilon\varphi\theta$ άρα

$$x^2+x^2\varepsilon\varphi^2\theta=1 \text{ ή } x=\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2\theta}}\,,\psi=\frac{\varepsilon\varphi\theta}{\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2\theta}}$$

Άρα αν θέσουμε $\varepsilon\varphi\theta=t$ θα έχουμε

$$x(t)=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,,\psi(t)=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$L_{AB}=\int_0^x\sqrt{[x'(t)]^2+[\psi\,'(t)]^2}\,dt=\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}.$$

Θεώρημα: Για κάθε α,β τέτοια ώστε $\alpha\beta\neq 1$ ισχύει

$$\tau o\xi\varepsilon\varphi\alpha+\tau o\xi\varepsilon\varphi\beta=\tau o\xi\varepsilon\varphi\,\tfrac{\alpha+\beta}{1-\alpha\beta}$$

Απόδειξη

Έστω η συνάρτηση

$$f(x)=\int_0^x\frac{du}{1+u^2}+\int_0^a\frac{du}{1+u^2}-\int_0^{\frac{a+x}{1-ax}}\frac{du}{1+u^2}$$

Παραγωγίζοντας την f και κάνοντας τις πράξεις έπεται ότι $f'(x)=0$. Συνεπώς $f(x)=c$. Αλλά $f(0)=0$ άρα c=0. Έτσι αφού $f(x)=0$ έπεται ότι

$$\int_0^x\frac{du}{1+u^2}+\int_0^a\frac{du}{1+u^2}=\int_0^{\frac{a+x}{1-ax}}\frac{du}{1+u^2}$$

οπότε για $x=\beta$ θα έχουμε το ζητούμενο.

Θεώρημα: Για $x,\psi\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ τέτοια ώστε $x+\psi\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, ισχύει ότι:

$$\varepsilon\varphi(x+\psi)=\frac{\varepsilon\varphi x+\varepsilon\varphi\psi}{1-\varepsilon\varphi x\varepsilon\varphi\psi}$$

Απόδειξη

Έστω ότι $\tau o\xi\varepsilon\varphi\alpha=x,\tau o\xi\varepsilon\varphi\beta=\psi$ τότε θα ισχύει $\varepsilon\varphi x=\alpha$ και $\varepsilon\varphi\psi=\beta$. Από το προηγούμενο θεώρημα θα έχουμε ότι:

$$\varepsilon\varphi(\tau o\xi\varepsilon\varphi\alpha + \tau o\xi\varepsilon\varphi\beta) = \varepsilon\varphi(\tau o\xi\varepsilon\varphi\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha\beta})$$

Αντικαθιστώντας από τις προηγούμενες ισότητες θα έχουμε την ζητούμενη σχέση.
Ορίζουμε στο διάστημα $(-\pi, \pi)$

$$\sigma\upsilon\nu x = \frac{1-u^2}{1+u^2} \quad \kappa\alpha\iota \ \eta\mu x = \frac{2u}{1+u^2} \quad \acute{o}\pi o\upsilon \ u = \varepsilon\varphi\frac{x}{2}$$

Θεώρημα: Ισχύει για κάθε $x \in (-\pi, \pi)$, $(\sigma\upsilon\nu x)' = -\,\eta\mu x$ και $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$.

Απόδειξη

$$E\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta} \quad u = \varepsilon\varphi\frac{x}{2} \ \ \acute{\alpha}\rho\alpha \ \ x = 2\tau o\xi\varepsilon\varphi u, \acute{\eta} \ \ 1 = \frac{2}{1+u^2}\frac{du}{dx} \ \ \kappa\alpha\iota \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{2}(1+u^2).$$

$$\frac{d(\sigma\upsilon\nu x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)\frac{du}{dx} = \frac{-4u}{(1+u^2)^2}\cdot\frac{1}{2}(1+u^2) = -\frac{2u}{1+u^2} = -\eta\mu x.$$

Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται και η δεύτερη σχέση.

Όταν x τείνει στο π^- τότε $\varepsilon\varphi(\frac{x}{2})$ τείνει στο $+\infty$ άρα $\lim\limits_{x\to\pi^-} \sigma\upsilon\nu x = \lim\limits_{u\to\infty}\frac{1-u^2}{1+u^2} = -1$,
$\lim\limits_{x\to\pi^-} \eta\mu x = \lim\limits_{u\to\infty}\frac{2u}{1+u^2} = 0$. Όμοια $\lim\limits_{x\to\pi^+} \sigma\upsilon\nu x = -1$, $\lim\limits_{x\to\pi^+} \eta\mu x = 0$.

Οπότε μπορούμε τους προηγούμενους ορισμούς να τους επεκτείνουμε σε όλο το σύνολο των πραγματικών απαιτώντας, $\eta\mu\pi = 0, \eta\mu(x+2\pi) = \eta\mu x, \sigma\upsilon\nu\pi = -1, \sigma\upsilon\nu(2\pi + x) = \sigma\upsilon\nu\chi$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι οι συναρτήσεις αυτές είναι συνεχείς παντού και έχουν και συνεχή παράγωγο.

Αν θέσουμε $\psi = \eta\mu x$ ισχύει ότι

$$\frac{d^2\psi}{dx} + \psi = 0$$

Η παραπάνω διαφορική εξίσωση ισχύει και για $\psi = \sigma\upsilon\nu x$ όπως επίσης και για κάθε γραμμικό συνδυασμό των συναρτήσεων $\eta\mu, \sigma\upsilon\nu$.

Θεώρημα: Έστω f μια συνάρτηση με την ιδιότητα $f(x) + f^{(2)}(x) = 0$ για κάθε$x \in \mathbb{R}$. Τότε υπάρχουν A, B τέτοια ώστε $f(x) = A\sigma\upsilon\nu x + B\eta\mu x$

Απόδειξη

Θέτουμε $g(x) = f(x) - f(0)\sigma\upsilon\nu x - f'(0)\eta\mu x$. Εύκολα μπορεί να δειχθεί ότι
$g''(x) + g(x) = 0 \ \kappa\alpha\iota \ g(0) = g'(0) = 0$. Τότε

$$\frac{d}{dx}\{[g'(x)]^2 + [g(x)]^2\} = 2g'(x)[g''(x) + g\,(x)] = 0$$

Άρα η συνάρτηση $K(x) = [g'(x)]^2 + [g(x)]^2$ είναι σταθερή και αν θέσουμε $x = 0$ θα ισχύει $K(0) = 0$. Άρα

$$[g'(x)]^2 + [g(x)]^2 = 0 \implies g'(x) = g(x) = 0 \implies f(x) = f(0)\sigma\upsilon\nu x - f'(0)\eta\mu x.$$

Θεώρημα*:* Ισχύει

$$\eta\mu(x+\alpha) = \eta\mu x\sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu x,$$
$$\sigma\upsilon\nu(x+\alpha) = \sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu x\eta\mu\alpha.$$

Απόδειξη

Θέτουμε $f(x) = ημ(x+α)$, τότε $f''(x) = -ημ(x+α) = -f(x)$. Από προηγούμενο θεώρημα ισχύει $ημ(x+α) = Aσυνx + Bημx, όπου\ A, B$ σταθερές. Παραγωγίζοντας έχουμε $συν(x+α) = -Aημx + Bσυνx$. Για $x = 0$ η προηγούμενη σχέση μας δίνει $A = ημα\ \ και\ \ B = συνα$.

Θεώρημα: Η συνάρτηση $ημx$ είναι περιττή, ενώ η $συνx$ άρτια.

Απόδειξη

Έστω $f(x) = ημ(-x).\ Τότε\ f'(x) = -συν(-x)\ \ και\ f''(x) = -ημ(-x) = -f(x)$. Δηλαδή παρατηρούμαι ότι $f''(x) + f(x) = 0$. Άρα σύμφωνα με προηγούμενο θεώρημα $f\ (x) = f(0)συνx + f'(0)ημx$, αλλά $f\ (0) = 0\ και\ f'(0) = 1$. Άρα τελικά $ημ(-x) = -ημx$. Με παραγώγιση θα έχουμε $-συν(-x) = -συνx$.

Οι υπόλοιπες γνωστές τριγωνομετρικές σχέσεις προκύπτουν κατά φυσιολογικό τρόπο. Με ανάλογο τρόπο μπορούν να οριστούν οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις και από τις άλλες αντίστροφες συναρτήσεις του ημιτόνου και συνημιτόνου.

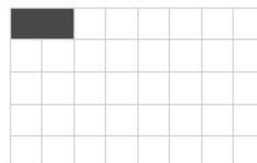
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 13^{ο} ΕΜΒΑΔΟΝ ΚΑΙ ΣΧΟΛΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ.

13.1 Το εμβαδόν στα σχολικά Μαθηματικά

Στα σύγχρονα σχολικά Μαθηματικά η έννοια του εμβαδού εισάγεται από τις πρώτες τάξεις του Δημοτικού σχολείου. Οι πρώτες αναφορές είναι εμπειρικές και έχουν να κάνουν με καταμέτρηση τετραγωνικών μονάδων σε διάφορες επιφάνειες. Η παρακάτω εικόνα είναι από το σχολικό βιβλίο της Β΄ Δημοτικού.

- Με πόσα ■ μπορώ να καλύψω τη διπλανή επιφάνεια; Χρωματίζω τα μισά κόκκινα και τα άλλα μισά κίτρινα
  Τα κόκκινα τετραγωνάκια είναι ....

- Με πόσα ▬ μπορώ να καλύψω τη διπλανή επιφάνεια; Χρωματίζω τη μισή επιφάνεια κόκκινη και την άλλη μιση γαλάζια.
  Συνολικά χρωμάτισα .... κόκκινα



- Με πόσα ◣ μπορώ να καλύψω τη διπλανή επιφάνεια; Χρωματίζω τη μισή επιφάνεια κόκκινη και την άλλη μιση πράσινη.
  Τα κόκκινα τετραγωνάκια είναι ....

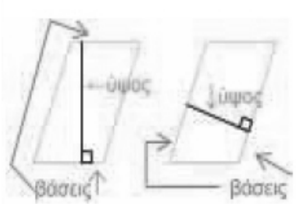
Στις τελευταίες τάξεις της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης εισάγονται και οι πρώτοι τύποι για το εμβαδόν παραλληλογράμμου και άλλων βασικών σχημάτων. Η παρακάτω εικόνα είναι από το σχολικό βιβλίο της ΣΤ΄ Δημοτικού.

Από τα παραπάνω διαπιστώνουμε ότι ένα πλάγιο παραλληλόγραμμο με βάση **β** και ύψος **υ** έχει την ίδια επιφάνεια με ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με διαστάσεις ίσες με **β** και **υ**.

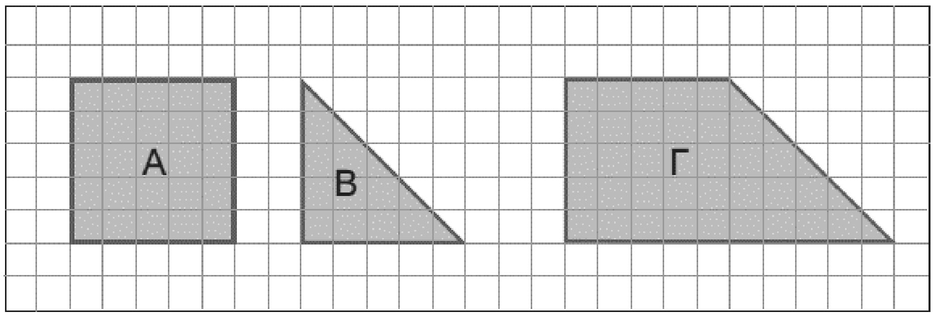
Εμβαδό παραλληλογράμμου
Το **εμβαδό** ενός παραλληλογράμμου είναι ίσο με το γινόμενο μιας βάσης του επί το αντίστοιχο ύψος.
|Αυτό εκφράζεται σύντομα με τον τύπο.
$E_{(\text{παραλληλογράμμου})} = \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\upsilon}$

Για να βρούμε το ύψος του παραλληλογράμμου, πρέπει να τραβήξουμε ένα κάθετο ευθύγραμμο τμήμα προς ένα από τα ζευγάρια των παράλληλων πλευρών του. Αυτές οι πλευρές τότε λέγονται βάσεις του και το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα, ύψος.

Παραδείγματα

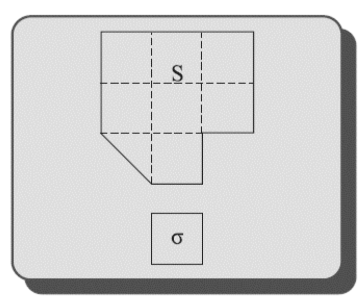


Στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση η έννοια του εμβαδού εισάγεται σε δύο τάξεις, στην Β΄ Γυμνασίου και Β΄ Λυκείου. Αν ανατρέξουμε στο σχολικό βιβλίο της Β΄ Γυμνασίου, θα δούμε ότι η έννοια του εμβαδού εισάγεται διαισθητικά με την κατάτμηση σχημάτων σε μικρά τετράγωνα σαν συνέπεια της διαδικασίας σύγκρισης των επιφανειών που περιγράψαμε πριν. Η παρακάτω εικόνα προέρχεται από το βιβλίο αυτό.



Στην συνέχεια διαβάζουμε ...
«Το εμβαδόν μιας επίπεδης επιφάνειας είναι ένας θετικός αριθμός, που εκφράζει την έκταση που καταλαμβάνει η επιφάνεια αυτή στο επίπεδο. Ο αριθμός αυτός εξαρτάται από τη μονάδα μέτρησης επιφανειών που χρησιμοποιούμε.»
Οι συγγραφείς δίνουν χωρίς απόδειξη ότι το εμβαδόν του τετραγώνου ισούται με το τετράγωνο της πλευράς του. Με βάση αυτό αποδεικνύουν όλους τους τύπους για το εμβαδόν ευθυγράμμων σχημάτων (ορθογώνιο, τυχαίο παραλληλόγραμμο, τρίγωνο και τραπέζιο). Αυτό πρέπει να σημειωθεί είναι ότι αν και οι πραγματικοί αριθμοί έχουν διδαχθεί σε προηγούμενη ενότητα του σχολικού βιβλίου, δεν χρησιμοποιούνται στην περίπτωση αυτή. Πιο συγκεκριμένα δεν γίνεται καμία αναφορά στο αν αυτή η κατάτμηση σε στοιχειώδη τετράγωνα μπορεί να συμβεί σε κάθε περίπτωση. Π.χ. τι θα συμβεί αν μια πλευρά ενός ορθογωνίου είναι άρρητος αριθμός;
Στην Β΄ Λυκείου η έννοια του εμβαδού εισάγεται αξιωματικά και συνδέεται με γενικότερα πολυγωνικά σχήματα. Στο σχολικό βιβλίο της β΄ Λυκείου διαβάζουμε:

Έστω, λοιπόν ένα πολυγωνικό χωρίο S (σχ.4). Όπως και στα ευθύγραμμα τμήματα, μέτρηση του χωρίου S λέμε τη σύγκριση του με ένα άλλο επίπεδο χωρίο σ, το οποίο επιλέγουμε ως μονάδα. Η σύγκριση αυτή οδηγεί σε μια σχέση της μορφής: $S = \lambda \cdot \sigma$, όπου λ θετικός αριθμός. (Στην περίπτωση του σχ. 4 είναι $\lambda = 7{,}5$). Ο θετικός αριθμός λ λέγεται ***εμβαδόν*** του πολυγωνικού χωρίου S και συμβολίζεται με (S). Πολλές φορές το εμβαδόν ενός πολυγωνικού χωρίου ή μιας πολυγωνικής επιφάνειας θα το συμβολίζουμε απλά με το γράμμα Ε. Επίσης, στα επόμενα, θα λέμε εμβαδόν τριγώνου, τετραπλεύρου και γενικά πολυγώνου και θα εννοούμε το εμβαδόν του αντίστοιχου πολυγωνικού χωρίου.

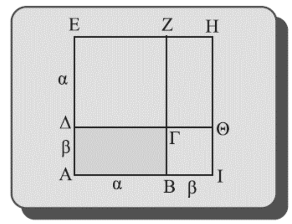


Σχήμα 4

Στην συνέχεια ακολουθούν τρία αξιώματα:

- Ίσα σχήματα έχουν ίσα εμβαδά.
- Αν ένα πολυγωνικό χωρίο χωρίζεται σε πεπερασμένου πλήθους πολυγωνικά χωρία που δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία τότε το εμβαδόν του πολυγωνικού χωρίου ισούται με το άθροισμα των εμβαδών των επιμέρους πολυγωνικών χωρίων.
- Το εμβαδόν τετραγώνου με πλευρά 1 είναι 1.

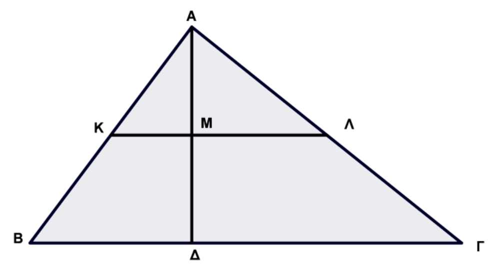
Μια πρώτη παρατήρηση στα παραπάνω είναι ότι δεν έχει οριστεί η έννοια «εσωτερικά σημεία ενός πολυγωνικού χωρίου». Το εμβαδόν του τετραγώνου δίνεται εδώ ως θεώρημα χωρίς απόδειξη και ακολουθούν οι αποδείξεις για τα εμβαδά των υπολοίπων σχημάτων που γίνονται σχεδόν με τον ίδιο τρόπο όπως και στο Γυμνάσιο. Μια διαφοροποίηση υπάρχει για την απόδειξη του εμβαδού του ορθογωνίου, όπου χρησιμοποιείται η γνωστή διαμέριση του τετραγώνου που υπάρχει στην Πρόταση 4η (βιβλίο ΙΙ) των Στοιχείων του Ευκλείδη. Στη συνέχεια δίνονται άλλοι τύποι για το εμβαδόν τριγώνου και θεωρήματα σύγκρισης εμβαδών. Στο τέλος της αντίστοιχης ενότητας δίνεται μέσω δύο κατασκευών ο τετραγωνισμός πολυγωνικής επιφάνειας. Σα γενικά συμπεράσματα θα μπορούσαμε να πούμε ότι η έννοια του εμβαδού στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση εισάγεται διαισθητικά με μοναδικό εργαλείο τις μετρήσεις (σύγκριση με μοναδιαία επιφάνεια). Δεν δίνονται όμως απαντήσεις (ούτε νύξεις) για τα ασύμμετρα μεγέθη παρόλο που σε παλαιότερα σχολικά βιβλία (Κανέλλου, Αλιμπινίση) υπήρχαν προσπάθειες για πιο πλήρη διερεύνηση ακόμα και σε περιπτώσεις τέτοιων μεγεθών. Ένα άλλο θέμα στο οποίο δεν ρίχνει φως το σχολικό βιβλίο είναι το θέμα της μοναδικότητας του εμβαδού της πολυγωνικής επιφάνειας. Στα πλαίσια της εργασίας αυτής θα δώσουμε μια πλήρη εισαγωγή της έννοιας του εμβαδού πολυγωνικής επιφάνειας.



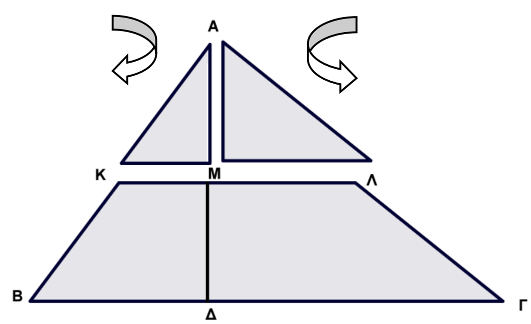
13.2 Από την επιφάνεια στο εμβαδόν με τρίγωνα

Στα παρακάτω θα συνδυάσουμε τις τεχνικές του Ευκλείδη αλλά και τη σύγχρονη αξιωματική θεμελίωση, για να μπορέσουμε να δώσουμε την έννοια του εμβαδού ευθυγράμμων σχημάτων στην σχολική τάξη. Σε προηγούμενη πρόταση των Στοιχείων του Ευκλείδη (42 βιβλίο Ι) είδαμε ότι για κάθε τρίγωνο μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα ισοδύναμο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Οπότε με βάση την πρόταση αυτή μπορούμε να υλοποιήσουμε την παρακάτω κατασκευή. Σε ένα τρίγωνο $ΑΒΓ$ φέρνουμε το ύψος $ΑΔ$ από μια κορυφή του $Α$, όπως βλέπουμε στο παρακάνω σχήμα.

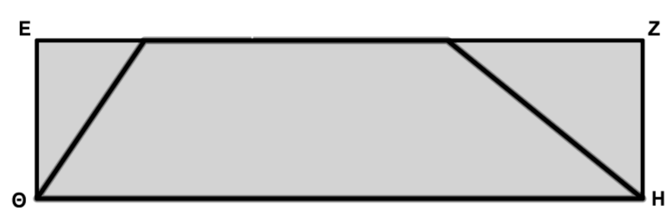
Στην συνέχεια φέρνουμε την μεσοκάθετη του ύψους που τέμνει τις πλευρές $AB, A\Gamma$ στα σημεία K, Λ.



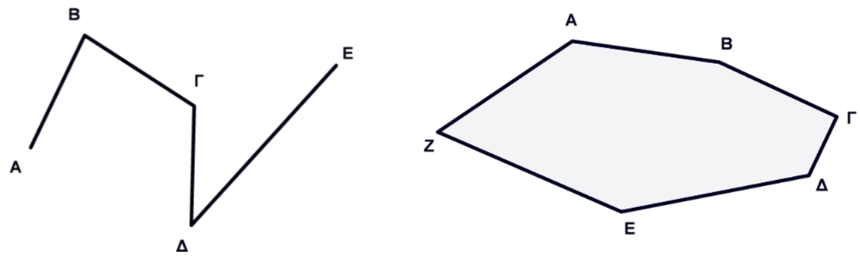
Στην συνέχεια ας κόψουμε το τρίγωνο $AK\Lambda$ χωρίζοντας στα δύο ορθογώνια τρίγωνα από τα οποία αποτελείται δηλαδή το AKM και $AM\Lambda$. Επειδή τα σημεία K, Λ είναι μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ μπορούμε να φέρουμε το τρίγωνο ΑΚΜ δίπλα στην πλευρά BK και το τρίγωνο $AM\Lambda$ δίπλα στην πλευρά ΛΓ έτσι ώστε να σχηματιστεί το παρακάτω ορθογώνιο $EZH\Theta$. Δηλαδή παρατηρούμε ότι τα δύο σχήματα, το αρχικό τρίγωνο $AB\Gamma$ και το ορθογώνιο $EZH\Theta$ που δημιουργήθηκε έχουν την ίδια επιφάνεια.



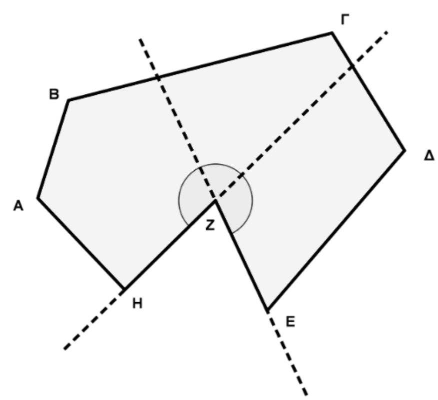
Δηλαδή υλοποιήσαμε την κατασκευή που έκανε και ο Ευκλείδης με μια μόνο διαφορά, εδώ διαμερίσαμε το αρχικό τρίγωνο και με τα κομμάτια αυτά συνθέσαμε ένα καινούργιο σχήμα (ορθογώνιο) με την ίδια επιφάνεια. Δύο τέτοια σχήματα θα τα ονομάζουμε από τώρα και στο εξής ισομερίσιμα.



Αν πάρουμε διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \ldots$, σχηματίζουμε ένα ευθύγραμμο σχήμα που το ονομάζουμε τεθλασμένη γραμμή. Αν το πέρας και η αρχή της τεθλασμένης γραμμής συμπίπτουν τότε αυτή ονομάζεται πολύγωνο.



Τα ευθύγραμμα τμήματα που αποτελούν την τεθλασμένη γραμμή ονομάζονται πλευρές. Οι γωνίες που σχηματίζουν δύο διαδοχικές πλευρές ονομάζονται γωνίες του πολυγώνου. Εδώ να προσέξουμε το εξής. Αν η ευθεία μιας πλευράς χωρίζει το πολύγωνο σε δύο μέρη τότε το πολύγωνο λέγεται μη κυρτό ($ΑΒΓΔΕΖΗ$). Στην περίπτωση του μη κυρτού πολυγώνου, έχουμε πλευρές που τέμνουν το πολύγωνο.



Στην περίπτωση του μη κυρτού πολυγώνου, ως γωνία, θεωρούμε την μη κυρτή γωνία από τις δύο γωνίες που σχηματίζουν οι πλευρές αυτές. Αν δεν συμβαίνει τίποτα από τα παραπάνω το πολύγωνο ονομάζεται κυρτό και οι γωνίες του είναι αυτές που σχηματίζουν οι διαδοχικές πλευρές του (κυρτές).

Ορισμός: Δύο πολύγωνα είναι ίσα, όταν με κατάλληλη μετατόπιση το ένα μπορεί να συμπέσει με το άλλο, δηλαδή αν τελικά έχουν όλες τις πλευρές τους ίσες και όλες τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες.

Όπως παρατηρούμε όταν κατασκευάσουμε ένα πολύγωνο μια καινούργια έννοια έρχεται να προστεθεί και αυτή έχει να κάνει με την *επιφάνεια* (μέρος του επιπέδου) που καταλαμβάνει το πολύγωνο αυτό.

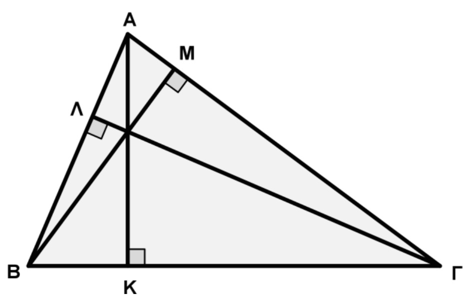
Ορισμός: *Τεμαχισμός* ενός πολυγώνου σε n πολύγωνα $K_1,\ K_2,\ \ldots,\ K_n$ ονομάζεται κάθε διαμέριση ενός πολυγώνου σε n πολύγωνα για τα οποία ισχύει $K = K_1 \cup K_2 \cup \ldots \cup K_n$ και $K_i \cap K_j = \emptyset$ ή ισούται με το ευθύγραμμο τμήμα που είναι το σύνορό τους, για κάθε $i, j = 1,2, \ldots, n\ και\ i \neq j$.

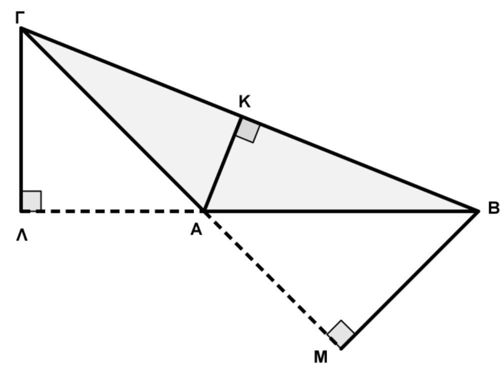
Ορισμός: Δύο πολύγωνα $K, Λ$ θα ονομάζονται ισομερίσιμα (scissor-congruent) όταν το πρώτο μπορεί να τεμαχιστεί σε πεπερασμένο πλήθος πολυγωνικών κομματιών και με αναδιάταξη αυτών να σχηματιστεί το δεύτερο. Δηλαδή αν $K = K_1 \cup K_2 \cup \ldots \cup K_n$ τότε $M = M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_n$ και $K_i = M_j$ $για\ κάθε\ i,j = 1,2,\ldots,n.$ Τα ισομερίσιμα πολύγωνα θα τα συμβολίζουμε ως $K \sim M$.

Για παράδειγμα ισομερίσιμα ήταν το τρίγωνο και το ορθογώνιο που κατασκευάσαμε πριν. Το πιο απλό πολύγωνο που μπορούμε να κατασκευάσουμε είναι αυτό με τρείς πλευρές δηλαδή το *τρίγωνο.*

Πρόταση: Σε κάθε τρίγωνο υπάρχει ένα σταθερό γινόμενο που ισούται με το μήκος μιας πλευράς του επί το αντίστοιχο σε αυτήν ύψος.

Πράγματι τα τρίγωνα $ΑΒΚ$ και $ΒΓΛ$ είναι όμοια άρα $ΒΓ \cdot ΑΚ = ΑΒ \cdot ΓΛ$ και από την ομοιότητα των τριγώνων $ΑΛΓ$ και $ΑΜΒ$ έχουμε $ΑΒ \cdot ΓΛ = ΑΓ \cdot ΒΚ$





Οπότε μπορούμε να ορίσουμε ως εμβαδόν της επιφάνειας του τριγώνου το ήμισυ του γινομένου μιας πλευράς επί το αντίστοιχο σε αυτήν ύψος. $\mathrm{E} = \frac{\text{βάση} \cdot \text{ύψος}}{2}$. Επειδή $ΑΚ = ΑΒ \cdot ημΒ$, δηλαδή $2E = ΑΒ \cdot ΒΓ \cdot ημΒ$, το εμβαδόν ισούται με το γινόμενο δύο πλευρών επι το ημίτονο της γωνίας που περιέχουν οι πλευρές αυτές.

Πρόταση: Αν σε ένα τρίγωνο $ΑΒΓ$ πάρουμε ένα σημείο $Κ$ σε μια πλευρά του τότε

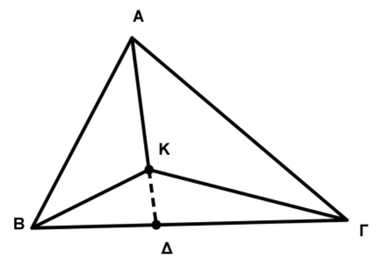
$$E_{ΑΒΓ} = E_{ΑΒΚ} + E_{ΑΚΓ}$$

Απόδειξη

Στο παραπάνω τρίγωνο $ΑΒΓ$ έχουμε:

$$E_{ΑΒΓ} = \frac{ΒΓ \cdot ΑΚ}{2} = \frac{(ΒΚ+ΚΓ) \cdot ΑΚ}{2} = \frac{ΒΚ \cdot ΑΚ + ΚΓ \cdot ΑΚ}{2} = \frac{ΒΚ \cdot ΑΚ}{2} + \frac{ΚΓ \cdot ΑΚ}{2} = E_{ΑΒΚ} + E_{ΑΚΓ}.$$

Η παραπάνω πρόταση μπορεί να γενικευθεί και για πεπερασμένο πλήθος σημείων στην πλευρά του. Επίσης η παραπάνω πρόταση γενικεύεται, αν το σημείο Κ είναι εσωτερικό σημείο του τριγώνου $ΑΒΓ$.



Όπως βλέπουμε στο παραπάνω τρίγωνο $ΑΒΓ$, αν προεκτείνουμε το τμήμα $ΑΚ$ αυτό θα τμήσει την πλευρά $ΒΓ$ σ΄ ένα σημείο $Δ$, τότε από την προηγούμενη πρόταση ισχύει ότι

$$E_{ΑΒΓ} = E_{ΑΒΔ} + E_{ΑΔΓ}$$

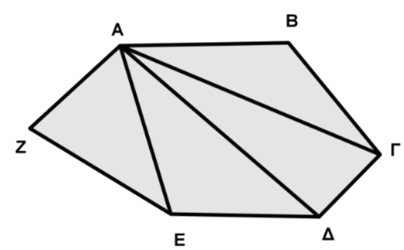
αλλά αν εφαρμόσουμε την προηγούμενη πρόταση σε καθένα από τα τρίγωνα $ΑΒΔ$ και $ΑΔΓ$ με σημείο χωρισμού της πλευράς $ΑΔ$ το $Κ$ θα έχουμε:

$$E_{ΑΒΔ} = E_{ΒΔΚ} + E_{ΒΚΑ} \; και \; E_{ΑΔΓ} = E_{ΓΔΚ} + E_{ΓΚΑ}$$

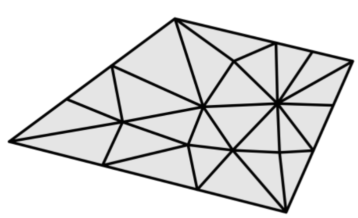
δηλαδή τελικά θα έχουμε

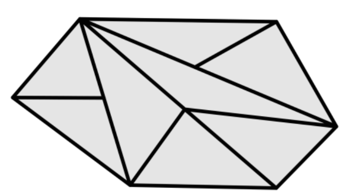
$$E_{ΑΒΓ} = E_{ΒΔΚ} + E_{ΒΚΑ} + E_{ΓΔΚ} + E_{ΓΚΑ}.$$

Σκοπός μας είναι να μπορέσουμε να ορίσουμε το εμβαδόν για οποιοδήποτε πολύγωνο. Ας παρατηρήσουμε το παρακάτω πολύγωνο στο οποίο έχουμε φέρει όλες τις διαγωνίους από μια κορυφή του, βλέπουμε ότι αυτό χωρίζεται σε τρίγωνα όπου τα μόνα κοινά τους σημεία είναι αυτά των πλευρών τους.



Ένας τέτοιος τεμαχισμός ενός πολυγώνου σε τρίγωνα ονομάζεται *τριγωνοποίηση*. Γενικότερα ένας τεμαχισμός σε τρίγωνα ονομάζεται τριγωνοποίηση, αν κανένα από τα τρίγωνα που είναι στο εσωτερικό του πολυγώνου δεν περιέχει κορυφή κάποιου άλλου τριγώνου σε πλευρά του. Παρακάτω βλέπουμε δύο πολύγωνα από τα οποία το πρώτο είναι τριγωνοποιημένο ενώ το δεύτερο όχι.



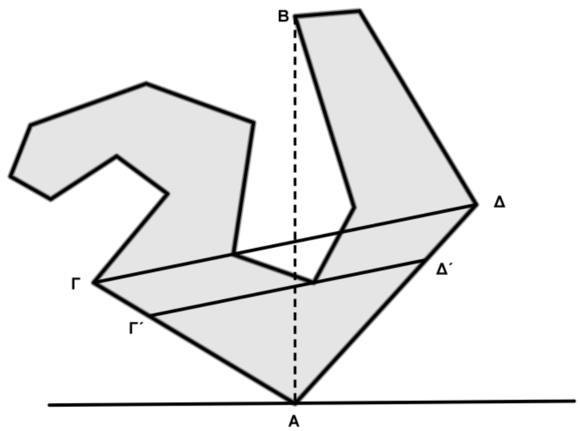


Στόχος μας είναι να ορίσουμε το εμβαδόν της επιφάνειας του πολυγώνου ως άθροισμα των εμβαδών των τριγώνων που το χωρίσαμε. Στην συνέχεια θα αποδείξουμε ότι κάθε πολύγωνο μπορεί να τριγωνοποιηθεί και ότι το εμβαδόν του πολυγώνου, τελικά, είναι ανεξάρτητο από την τριγωνοποίηση που μπορεί να γίνει στο πολύγωνο αυτό.

Πρόταση: Κάθε πολύγωνο μπορεί να τριγωνοποιηθεί.

Απόδειξη

θα αποδείξουμε την πρόταση με επαγωγή στο πλήθος των πλευρών. Έστω n το πλήθος των πλευρών του πολυγώνου. Το θεώρημα ισχύει, όταν έχουμε πλήθος πλευρών $n = 3$. Έστω τώρα ότι το θεώρημα αληθεύει για κάθε πολύγωνο με πλήθος πλευρών μικρότερο του n. Θα δείξουμε ότι το θεώρημα ισχύει και για το πολύγωνο με πλήθος πλευρών $n + 1$.



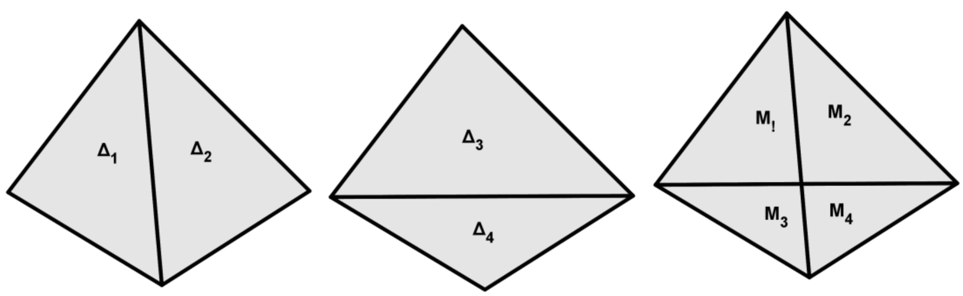
Πρώτα θα δείξουμε ότι υπάρχει κορυφή A του πολυγώνου και μια ευθεία που διέρχεται από την κορυφή αυτή και αφήνει το πολύγωνο στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία αυτή. Η εύρεση της κορυφής A και η κατασκευή της ευθείας θα μπορούσε να γίνει ως εξής: Θεωρούμε το σύνολο όλων των τμημάτων που ενώνουν δύο κορυφές του πολυγώνου και διαλέγουμε το μεγαλύτερο από τα τμήματα αυτά. Ας είναι A το ένα άκρο του τμήματος αυτού, αν φέρουμε μία κάθετη στο τμήμα αυτό στο A, τότε αυτή θα είναι η ζητούμενη ευθεία. Πραγματικά ας υποθέσουμε ότι το μεγαλύτερο τμήμα που συνδέει δύο κορυφές του πολυγώνου είναι το BA, αν η κάθετη ευθεία στην BA δεν άφηνε όλες τις κορυφές από την ίδια πλευρά, τότε θα υπήρχε κορυφή E η οποία θα ήταν σε διαφορετικό ημιεπίπεδο σε σχέση με την κορυφή B, αυτό θα σήμαινε ότι η απόσταση BE θα ήταν μεγαλύτερη από την BA, το οποίο αντιβαίνει στην υπόθεση ότι BA είναι το μεγαλύτερο τμήμα που συνδέει δύο κορυφές του πολυγώνου. Στην συνέχεια ας θεωρήσουμε τις γειτονικές κορυφές Γ, Δ με την κορυφή A και ας φέρουμε την διαγώνιο $\Delta\Gamma$ και ας θεωρήσουμε το τρίγωνο $A\Gamma\Delta$. Υπάρχουν δύο περιπτώσεις που μπορούν να εμφανιστούν:

<u>Περίπτωση 1η.</u> Στο εσωτερικό του τριγώνου $A\Gamma\Delta$ ή στην πλευρά $\Gamma\Delta$ δεν υπάρχουν κορυφές του πολυγώνου. Στην περίπτωση αυτή το αρχικό πολύγωνο με τις n κορυφές

έχει χωριστεί σε ένα τρίγωνο (το $ΑΔΓ$) και σε ένα πολύγωνο με $(n-1)$ πλευρές που με βάση την επαγωγική υπόθεση μπορεί να τριγωνοποιηθεί, άρα λοιπόν και το πολύγωνο τελικά με τις n πλευρές τριγωνοποιείται.

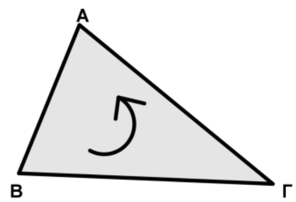
Περίπτωση 2η. Αν στο εσωτερικό του τριγώνου ή στην πλευρά $ΓΔ$ υπάρχουν μία ή περισσότερες κορυφές του πολυγώνου. Από τις κορυφές αυτές έστω η $Λ$ είναι η πιο κοντινή στην κορυφή $Α$. Φέρνουμε από την κορυφή αυτή ευθεία παράλληλη στην $ΓΔ$ που τέμνει τις πλευρές $ΑΓ$ και $ΑΔ$ στα σημεία $Γ'$ και $Δ'$. Είναι φανερό ότι στο εσωτερικό του τριγώνου $ΑΔ'Γ'$ δεν υπάρχουν κορυφές του αρχικού πολυγώνου, έτσι λοιπόν καμιά πλευρά του αρχικού πολυγώνου δεν τέμνει τις πλευρές του τριγώνου. Δηλαδή τελικά η διαγώνιος $ΑΛ$ βρίσκεται στο εσωτερικό του πολυγώνου και το χωρίζει σε δύο μέρη με κάθε μέρος να έχει πλήθος κορυφών μικρότερο του n, που είναι το πλήθος των κορυφών του αρχικού πολυγώνου. Έτσι, λοιπόν, για καθένα από τα δύο αυτά πολύγωνα ισχύει η επαγωγική υπόθεση άρα το καθένα από αυτά μπορεί να τριγωνοποιηθεί. Άρα μπορεί να τριγωνοποιηθεί και το αρχικό πολύγωνο με τις n κορυφές.

Εκείνο που μας απασχολεί τώρα είναι να δείξουμε ότι το άθροισμα των εμβαδών των τριγώνων ενός τριγωνισμού δίνει το εμβαδόν του τριγώνου, όπως το έχουμε σχεδιάσει, και ότι αυτό είναι ανεξάρτητο από τον τριγωνισμό που θα επιλέξουμε. Ας το δείξουμε πρώτα αυτό σε ένα τετράπλευρο, το γενικό έπεται.



Στα τρία παραπάνω σχήματα έχουμε το ίδιο τετράπλευρο με τρείς διαφορετικούς τριγωνισμούς. Ας υποθέσουμε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $Δ$ το συμβολίζουμε με $E(Δ)$. Για τη περίπτωση του πρώτου τριγωνισμού και με βάση το αξίωμα της προσθετικότητας του εμβαδού θα έχουμε ότι: $E(Δ_1) + E(Δ_2) = E(M_1) + E(M_2) + E(M_3) + E(M_4) = E(M_1) + E(M_3) + E(M_2) + E(M_4) = E(Δ_3) + E(Δ_4)$. Δηλαδή βλέπουμε ότι το εμβαδόν του τετραπλεύρου είναι ανεξάρτητο του τριγωνισμού που θα ακολουθήσουμε.

Θα δείξουμε το παραπάνω συμπέρασμα γενικά. Θα ακολουθήσουμε την απόδειξη του Hilbert. Θα ορίσουμε το προσανατολισμένο τρίγωνο $Δ[ΑΒΓ]$ το οποίο θα έχει θετικό προσανατολισμό όταν οι κορυφές του είναι διατεταγμένες με φορά αντίστροφη από αυτή των δεικτών του ρολογιού, όπως βλέπουμε στο διπλανό σχήμα. Σε αντίθετη περίπτωση θα λέμε ότι ο προσανατολισμός του τριγώνου είναι αρνητικός. Θα ορίσουμε προσημασμένο εμβαδόν του τριγώνου $ΑΒΓ$



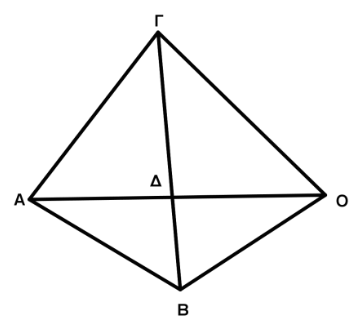
$$[ΑΒΓ] = \begin{cases} E_{ΑΒΓ} & αν\ το\ τρίγωνο\ έχει\ θετικό\ προσανατολισμό \\ -E_{ΑΒΓ} & αν\ το\ τριγωνο\ έχει\ αρνητικό\ προσανατολισμό \end{cases}$$

Δηλαδή για το προηγούμενο τρίγωνο ισχύει $[ΑΒΓ] + [ΑΓΒ] = 0$

Πρόταση: Αν δοθεί τρίγωνο $ΑΒΓ$ και σημείο $Ο$ εκτός του τριγώνου το οποίο δεν ανήκει σε καμιά από τις ευθείες των πλευρών του τότε ισχύει:

$$[ΑΒΓ] = [ΟΑΒ] + [ΟΒΓ] + [ΟΓΑ]$$

Απόδειξη



Ας υποθέσουμε ότι το τμήμα $ΑΟ$ τέμνει την πλευρά $ΒΓ$ στο σημείο $Δ$ τότε:

$$[ΟΑΒ] = [ΟΔΒ] + [ΔΑΒ]\ (1)$$
$$[ΟΒΓ] = -[ΟΓΒ] = -[ΟΓΔ] - [ΟΔΒ]\ (2)$$
$$[ΟΓΑ] = [ΟΓΔ] + [ΓΑΔ]\ (3)$$

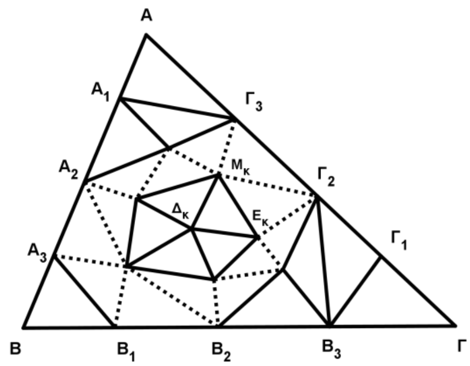
Προσθέτοντας τις τρείς παραπάνω σχέσεις $(1) + (2) + (3)$ έχουμε ότι:

$$[ΟΑΒ] + [ΟΒΓ] + [ΟΓΑ] = [ΔΑΒ] + [ΓΑΔ] = [ΑΒΓ].$$

Πρόταση: Για κάθε τριγωνισμό $Δ_1 + Δ_2 + \ldots + Δ_n$ ενός τριγώνου $ΑΒΓ$, το εμβαδόν του τριγώνου είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των τριγώνων $Δ_κ$, $κ = 1,2, \ldots, n$.

Απόδειξη

Έστω $Δ_κ$ το τρίγωνο $Δ_κ Ε_κ Μ_κ$. Αλλάζοντας αν χρειαστεί την διάταξη των κορυφών του $ΑΒΓ$ και καθενός από τα τρίγωνα $Δ_κ$ μπορούμε να πετύχουμε τα τρίγωνα αυτά να έχουν θετικό προσανατολισμό.



Ας θεωρήσουμε ένα σημείο O εξωτερικό του τριγώνου $ΑΒΓ$ το οποίο όμως να μην ανήκει ούτε στις ευθείες των πλευρών του $ΑΒΓ$ αλλά ούτε και σε εκείνες των τριγώνων $Δ_κ$, $κ = 1,2,\ldots,n$. Έτσι λοιπόν από την προηγούμενη πρόταση έχουμε

$$E(Δ_κ E_κ M_κ) = [Δ_κ E_κ M_κ] = [OΔ_κ E_κ] + [OE_κ M_κ] + [OM_κ Δ_κ].$$

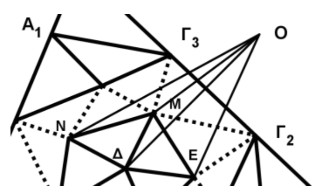
Οπότε το άθροισμα των εμβαδών των τριγώνων $Δ_1$, $Δ_2$, … , $Δ_n$ δίνεται από τον τύπο

$$\sum_{κ=1}^{n} [Δ_κ E_κ M_κ] = \sum_{κ=1}^{n} ([\mathrm{ΟΔκΕκ}] + [\mathrm{ΟΕκΜκ}] + [\mathrm{ΟΜκΔκ}])$$

Κάθε πλευρά των τριγώνων $Δ_κ E_κ M_κ$ που είναι στο εσωτερικό του τριγώνου $ΑΒΓ$ είναι πλευρά σε δύο τρίγωνα, άρα εμφανίζεται δύο φορές στο προηγούμενο άθροισμα, αλλά με διαφορετικό προσημασμένο εμβαδόν. Ας δούμε το παρακάτω σχήμα τα τρίγωνα $MΔE$ και $MΔN$ έχουν κοινή πλευρά την $MΔ$. Αν πάρουμε το άθροισμα των προσημασμένων εμβαδών αυτών των δύο τριγώνων (που θα είναι μέσα στο προηγούμενο άθροισμα) θα έχουμε

$$[MΔE] + [MNΔ] = \cancel{[OMΔ]} + [OΔE] + [OEM] + [OMN] + [ONΔ] + \cancel{[OΔM]}$$

αλλά τα $[OMΔ]$ και $[OΔN]$ είναι αντίθετα και θα απλοποιηθούν.



Με τον ίδιο τρόπο θα απλοποιηθούν όλα τα προσημασμένα εμβαδά των τριγώνων που σχηματίζει το O με πλευρές που είναι στο εσωτερικό του τριγώνου $ΑΒΓ$. Άρα, λοιπόν, μένουν τελικά στο άθροισμα μόνο τα τρίγωνα που έχουν τις πλευρές τους πάνω στις πλευρές του τριγώνου $ΑΒΓ$. Ας υποθέσουμε ότι οι κορυφές των τριγώνων αυτών είναι στις πλευρές του $ΑΒΓ$ με την παρακάτω σειρά

$$A, A_1, A_2, \ldots, A_λ, B, B_1, B_2, \ldots, B_μ, Γ, Γ_1, Γ_2, \ldots, Γ_ν.$$

Τότε:

$$\sum_{\kappa=1}^{n}[\Delta_\kappa E_\kappa M_\kappa] = [OAA_1] + [OA_1A_2] + \ldots + [OA_\lambda B] + [OBB_1]$$
$$+ [OB_1B_2] + \ldots + [OB_\mu \Gamma] + [O\Gamma\Gamma_1] + [O\Gamma_1\Gamma_2] + \ldots + [O\Gamma_\nu A]$$
$$= [OAB] + [OB\Gamma] + [O\Gamma A] = [AB\Gamma] = E_{AB\Gamma}.$$

Στο σημείο αυτό μπορούμε να ορίσουμε το εμβαδόν ενός πολυγώνου K ως $E(K)$ ίσο με το άθροισμα όλων των εμβαδών των τριγώνων ενός τριγωνισμού του πολυγώνου K. Έστω ένα πολύγωνο K και $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ μια τριγωνοποίηση του πολυγώνου. Στο πολύγωνο K θα αντιστοιχίσουμε ένα πραγματικό αριθμό $E(K)$ που θα τον ονομάζουμε εμβαδόν του K, ως εξής:

$$E(K) = E(\Delta_1) + E(\Delta_2) + \ldots + E(\Delta_n).$$

Για το εμβαδόν όπως το ορίσαμε ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες.

Ιδιότητα $1^{η}$: Το εμβαδόν $E(K)$ είναι πάντα θετικός αριθμός ($E(K) > 0$).

Ιδιότητα $2^{η}$: Αν δυο πολύγωνα K και Λ είναι ίσα όπως τα ορίσαμε παραπάνω θα έχουν και το ίδιο εμβαδόν δηλαδή $E(K) = E(\Lambda)$.

Ιδιότητα $3^{η}$: Αν ένα πολύγωνο K μπορεί να χωριστεί σε μικρότερα πολύγωνα $K_1, K_2, \ldots, K_n$ έτσι ώστε $K = K_1 \cup K_2 \cup \ldots \cup K_n$ και η τομή δύο οποιονδήποτε από τα πολύγωνα K_i, K_j $\mu\varepsilon\ i, j = 1, 2, \ldots n\ \kappa\alpha\iota\ i \neq j$ ή θα είναι το κενό σύνολο ή θα είναι κάποιο ευθύγραμμο τμήμα που αποτελεί το σύνορο των δύο πολυγώνων, τότε

$$E(K) = E(K_1) + E(K_2) + \ldots + E(K_n).$$

Οι ιδιότητες 1 και 2 είναι προφανείς από τον ορισμό που έχουμε δώσει για το εμβαδόν. Για την τρίτη ιδιότητα της προσθετικότητας έχουμε: Έστω K ένα πολύγωνο το οποίο το τεμαχίζουμε σε $K_1, K_2, \ldots, K_n$ πολύγωνα έτσι ώστε $K = K_1 \cup K_2 \cup \ldots \cup K_n$. Αν τριγωνοποιήσουμε καθένα από τα προηγούμενα πολύγωνα έτσι ώστε

$$K_i = K_{i1} \cup K_{i2} \cup \ldots \cup K_{im_i}$$

τότε το σύνολο όλων των τριγώνων $\{K_{ij}\ \mu\varepsilon\ i = 1, 2, \ldots, n\ \kappa\alpha\iota\ j = 1, 2, \ldots, m_i\}$ δίνει μια τριγωνοποίηση του πολυγώνου K. Οπότε σύμφωνα με τον ορισμό που έχουμε δώσει ισχύει ότι

$$E(K) = E(K_{11}) + E(K_{12}) + \ldots + E(K_{1m_1}) + E(K_{21}) + E(K_{22}) + \ldots + E(K_{2m_2}) + \cdots$$
$$+ E(K_{nm_1}) + E(K_{nm_2}) + \cdots E(K_{nm_n}) = E(K_1) + E(K_2) + \ldots + E(K_n).$$

Δηλαδή παρατηρούμε ότι ο ορισμός που δώσαμε για το εμβαδόν του πολυγώνου ικανοποιεί και την ιδιότητα της προσθετικότητας.

Πρόταση: Το εμβαδόν ενός πολυγώνου Κ είναι ανεξάρτητο από την επιλογή του τριγωνισμού που θα επιλέξουμε για το πολύγωνο αυτό.

Απόδειξη

Έστω $K = \Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_n$ και $K = \Delta'_1 + \Delta'_2 + \ldots + \Delta'_\mu$ δύο τριγωνισμοί του K. Ας θεωρήσουμε με Δ''_i $(i = 1,2,\ldots,\rho)$ τον τριγωνισμό που θα προκύψει από την κοινή εφαρμογή των δύο παραπάνω τριγωνισμών στο πολύγωνο K. Τότε το εμβαδόν κάθε τρίγωνου Δ_λ $(\lambda = 1,2,..,n)$ του πρώτου τριγωνισμού θα είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών κάποιων τριγώνων του τριγωνισμού Δ'' που καλύπτουν το Δ_λ. Επίσης το εμβαδόν κάθε τρίγωνου Δ'_κ $(\kappa = 1,2,\ldots,\mu)$ θα είναι το άθροισμα των εμβαδών κάποιων τριγώνων του Δ'' που καλύπτουν το Δ'_κ.
Άρα το άθροισμα των $\{\Delta_\lambda\}$ =άθροισμα των εμβαδών των $\{\Delta''_i\}$ =άθροισμα των $\{\Delta'_\kappa\}$.

13.3 Ισομερίσιμα πολύγωνα το θεώρημα Bolyai-Gerwien

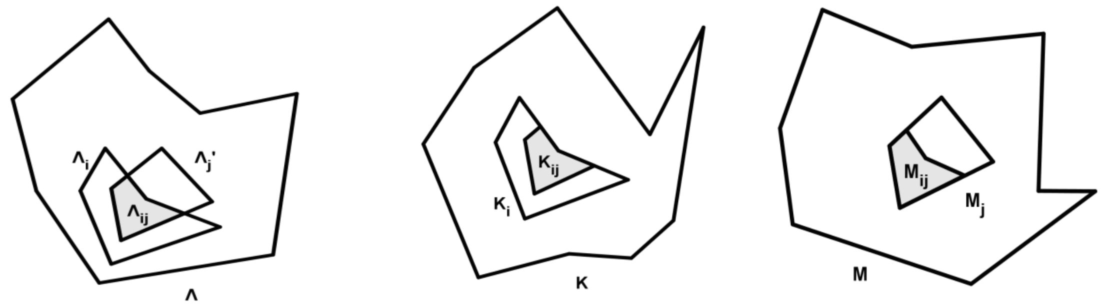
Το ερώτημα που θα μας απασχολήσει για την συνέχεια είναι το εξής: αν έχουμε δύο πολύγωνα με το ίδιο εμβαδόν είναι αυτά τα πολύγωνα ισομερίσιμα; Την απάντηση στο ερώτημα αυτό θα μας τη δώσει το επόμενο θεώρημα που φέρει την ονομασία Bolyai-Gerwien από τους F. Bolyai (1775 – 1856) και P. Gerwien (1800). Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη του θεωρήματος αυτού, ας δούμε μερικά βασικά λήμματα που θα μας βοηθήσουν στην απόδειξη.

Λήμμα1: Αν $K = K_1 + K_2 + \ldots + K_n$ και $\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2 + \ldots + \Lambda_n$ είναι δύο τεμαχισμοί των πολυγώνων K και Λ αντίστοιχα και $K_i \sim \Lambda_j$ για $i, j = 1,2,\ldots,n$ τότε και $K \sim \Lambda$.

Λήμμα2: Η σχέση της ισομερισιμότητας είναι σχέση ισοδυναμίας.

1. $K \sim K$ (ανακλαστική),
2. Αν $K \sim \Lambda$ τότε και $\Lambda \sim K$ (συμμετρική),
3. Αν $K \sim \Lambda$ και $\Lambda \sim M$ τότε $K \sim M$ (μεταβατική).

Οι δύο πρώτες ιδιότητες είναι προφανείς για τα ισομερίσιμα πολύγωνα. Για την τρίτη ιδιότητα ας δούμε την παρακάτω απόδειξη. Έστω $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_n$ ένας τεμαχισμός του πολυγώνου Λ και $K_1, K_2, \ldots, K_n$ ο τεμαχισμός του K του οποίου τα τμήματα αν αναδιαταχθούν δίνουν το πολύγωνο Λ. $\Lambda'_1, \Lambda'_2, \ldots, \Lambda'_m$ ο τεμαχισμός του πολυγώνου Λ τα τμήματα του οποίου αν αναδιαταχθούν δίνουν το πολύγωνο M. Δηλαδή $\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2 + \ldots + \Lambda_n$ και $K = K_1 + K_2 + \ldots + K_n$ όπου $\Lambda_i \equiv K_i$ $(i = 1,2,\ldots,n)$. Επίσης $\Lambda = \Lambda'_1 + \Lambda'_2 + \ldots + \Lambda'_m$ και $M = M'_1 + M'_2 + \ldots + M'_m$, με $\Lambda_j \equiv M_j$ $(j = 1,2,\ldots,m)$. Ας θεωρήσουμε τον τεμαχισμό που θα προκύψει στο πολύγωνο Λ όταν κάνουμε και τους δύο τεμαχισμούς $\{\Lambda_n\}$ και $\{\Lambda'_m\}$ ταυτόχρονα και τα μέρη που τον αποτελούν ας τα ονομάσουμε $\{\Lambda_{ij}\}$ δηλαδή $\Lambda_{ij} = \Lambda_i \cap \Lambda'_j$ $(i = 1,2,\ldots,n \; \kappa\alpha\iota \; j = 1,2,\ldots,m)$.



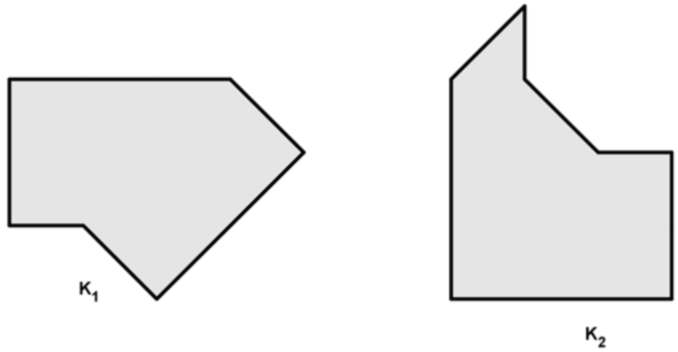
Αν θεωρήσουμε τον δείκτη i του Λ_{ij} σταθερό και ας μεταβάλουμε το j τότε θα δημιουργηθεί ένας τεμαχισμός για το πολύγωνο Λ_i και φυσικά θα υπάρχει ο ίδιος τεμαχισμός και για το πολύγωνο K_i ($\Lambda_i \equiv K_i$). Ας ονομάσουμε $\{K_{ij}\}$ τον τεμαχισμό του K_i στο πολύγωνο K. Με την ίδια διαδικασία αν κρατήσουμε σταθερό τον δείκτη j στο Λ_{ij} και μεταβάλουμε τον δείκτη i θα δημιουργήσουμε έναν τεμαχισμό για το στοιχείο Λ_j' ο οποίος θα μπορεί να γίνει και στο M_j ($\Lambda_j \equiv M_j$). Οπότε αντίστοιχα δημιουργείται ένας τεμαχισμός $\{M_{ij}\}$ για το M_j στο πολύγωνο M και επειδή $\Lambda_i \equiv K_i$ και $\Lambda_j \equiv M_j$ τότε και $K_{ij} \equiv M_{ij}$ $(i = 1,2, \dots, n \; και \; j = 1,2, \dots, m)$ άρα σύμφωνα με το λήμμα1 τα πολύγωνα K, Λ είναι ισομερίσιμα.

Θεώρημα (Bolyai-Gerwien): Αν δύο πολύγωνα K_1 και K_2 έχουν το ίδιο εμβαδόν είναι ισομερίσιμα.

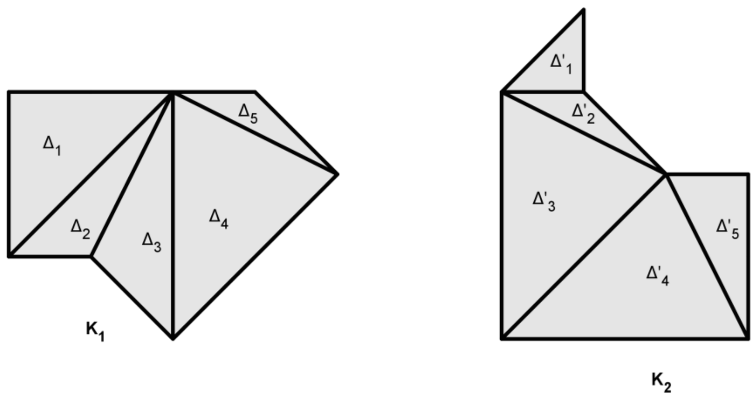
Απόδειξη

Η απόδειξη θα γίνει με τα παρακάτω βήματα. Βήμα 1^o : Τριγωνοποιούμε το πολύγωνο K_1 σε $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ τρίγωνα. Βήμα 2^o : Για κάθε τρίγωνο μπορούμε να κατασκευάσουμε ενα ισοδύναμο ορθογώνιο $\square_1$, $\square_2$, ... , $\square_n$. Βήμα 3^o: Για κάθε ορθογώνιο $\square_\kappa$ $(\kappa = 1,2, \dots, n)$ μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα ισοδύναμο ορθογώνιο που έχει οριζόντιο μήκος 1 και κατακόρυφο ύψος ίσο με το εμβαδόν του ($\square_\kappa^0$). Βήμα 4^o: Στοιβάζουμε τα ορθογώνια αυτά και δημιουργούμε ένα ορθογώνιο με οριζόντιο μήκος 1 και κατακόρυφο ύψος όσο το εμβαδόν του K_1 αυτό το ορθογώνιο το συμβολίζουμε με K_1^0 και το εμβαδόν του είναι $E(K_1)$. Οπότε τα πολύγωνα K_1 και K_1^0 έχουν το ίδιο εμβαδόν και είναι ισομερίσιμα. Εφαρμόζουμε τα βήματα 1-4 και για το πολύγωνο K_2 οπότε θα παραχθεί ένα ορθογώνιο K_2^0 με οριζόντιο μήκος 1 και κατακόρυφο ύψος όσο το εμβαδόν του K_2 και επειδή $E(K_1) = E(K_2)$ το δύο ορθογώνια θα είναι ίσα άρα και ισομερίσιμα, έτσι λοιπόν δείξαμε ότι τα δύο πολύγωνα K_1 και K_2 είναι ισομερίσιμα με ένα ορθογώνιο άρα με την μεταβατική ιδιότητα της ισομερισιμότητας θα είναι και μεταξύ τους ισομερίσιμα.

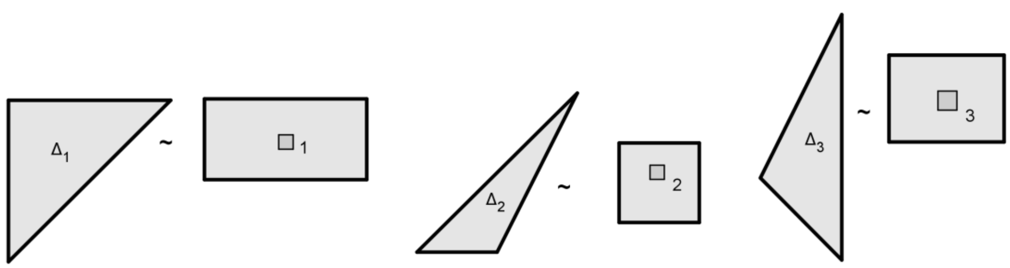
Παρακάτω βλέπουμε μια οπτική αναπαράσταση του θεωρήματος με δύο ισοδύναμα πολύγωνα K_1και K_2



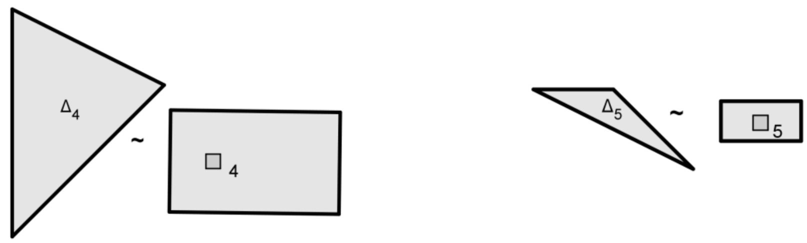
Βήμα 1^{ο}. Τριγωνοποιούμε τα παραπάνω πολύγωνα



Βήμα 2^{ο}. Κατασκευάζουμε για κάθε τρίγωνο ένα ισοδύναμο ορθογώνιο.



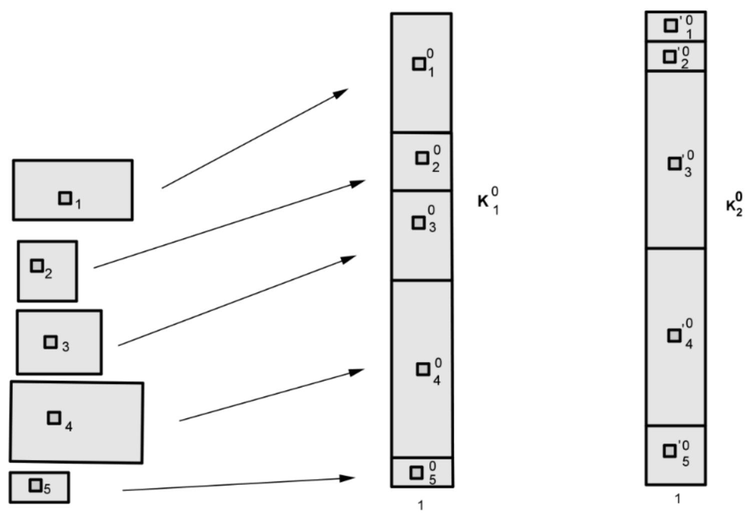
Η προηγούμενη κατασκευή των ορθογωνίων έγινε με με την βοήθεια της πρότασης 42 (βιβλίο Ι) των *Στοιχείων*.



Βήμα 3ο – 4ο

Θα μετασχηματίσουμε τα παραπάνω ορθογώνια σε ισοδύναμα με βάση 1 μονάδα και θα τα ενώσουμε σε ένα ορθογώνιο (θα κατασκευάσουμε το ένα διαδοχικά με το επόμενό του).

Για να γίνει η κατασκευή αυτή θα χρησιμοποιήσουμε την πρόταση 43 (βιβλίο Ι) των Στοιχείων που έχουμε περιγράψει παραπάνω. Για το δεύτερο πολύγωνο K_2 δίνουμε παρακάτω το ορθογώνιο K_2^0 που προκύπτει με την εφαρμογή των παραπάνω βημάτων. Τα δύο ορθογώνια που προκύπτουν είναι ίσα άρα και τα αρχικά πολύγωνα τελικά είναι ισομερίσιμα.



Ο Ευκλείδης, λοιπόν, είδαμε παραπάνω χαρακτήριζε τα πολύγωνα με το ίδιο εμβαδόν ίσα ξεπερνώντας τις σχηματικές διαφορές, προφανώς για αυτόν η έννοια της ισότητας είχε και το γενικότερο χαρακτηριστικό της ίσης επιφάνειας όπως τελικά μας απόδειξε το προηγούμενο θεώρημα.

14. ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Μετά την ολοκλήρωση της εργασίας αυτής μπορώ να πω ότι τα πρώτα αποτελέσματα ήρθαν. Ο τρόπος που βλέπω τα Μαθηματικά δεν είναι ο ίδιος με πριν, είναι καλύτερος και ουσιαστικότερος. Ένα καινούργιο παράθυρο για την περαιτέρω διερεύνησή τους έχει ανοίξει. Η αξιοποίηση των ιστορικών καταβολών μας δίνει εφόδια και έμπνευση για να ξεπεραστούν προβλήματα και δυσκολίες οι οποίες εμφανίζονται κατά την διδασκαλία του μαθήματος σε όλα τα επίπεδα. Για παράδειγμα θα αναφέρω την παρότρυνση του Πλάτωνα δοσμένη από τον Ιάμβλιχο στο έργο του *περί τῆς κοινῆς Μαθηματικῆς ἐπιστήμης* «*Σκοπεῖσθαι δέ δεῖ καί εἰ τι πρός ἐκείνο τείνει, πρός τό ποιεῖν κατιδεῖν ῥᾶον τήν τοῦ ἀγαθοῦ ἰδέαν. Τείνει δέ, φαμέν, πάντα αὐτόσ', ὃσα ἀναγκάζει ψυχήν εἰς ἐκεῖνον τόν τόπον μεταστρέφεσθαι, ᾧ ἐστί το εὐδαιμονέστατον του ὂντος, ὃ δεῖ αὐτήν παντί τρόπο ἰδεῖν.*». Θα ήταν μεγάλη ικανοποίηση για μένα αν η εργασία αυτή έβαζε ένα μικρό λιθαράκι ώστε τα θετικά αποτελέσματα αυτά περάσουν και σε άλλους συναδέλφους μου. Στην δύσκολη εποχή της κρίση αξιών, που διανύουμε, η στροφή στην στέρεη βάση των διαχρονικών αξιών της Μαθηματικής Επιστήμης μόνο όφελος έχει να μας προσφέρει. Στο τέλος αυτής της εργασίας θα ήθελα να ευχαριστήσω τον συνάδελφο Γιάννη Κανέλλο και όλους τους συναδέλφους στο Ηράκλειο Κρήτης από την ομάδα ανάγνωσης των *Στοιχείων* του Ευκλείδη για τον γόνιμο και εποικοδομητικό διάλογο που αναπτύχθηκε στις συναντήσεις της ομάδας. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους τους μαθητές μου, για τον χρόνο που τους «έκλεψα», κατά την συγγραφή της εργασίας αυτής. Ελπίζω ότι κάποιο όφελος επέστρεψε σε αυτούς. Θα ήθελα να ευχαριστήσω τους καθηγητές στο Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Κρήτης Χρήστο Κουρουνιώτη και Νικόλαο Τζανάκη που αποτέλεσαν μέλη της επιτροπής αξιολόγησης και την Σουζάννα Παπαδοπούλου για τις πολύτιμες συμβουλές της. Θα ήθελα να απευθύνω ένα μεγάλο ευχαριστώ στον ακούραστο καθηγητή μου, και δάσκαλό μου, τον Μιχάλη Λάμπρου, που με το παράδειγμά του και τις εμπνευσμένες παραδόσεις του μου έδωσε τον προσανατολισμό για την εργασία αυτή. Τέλος θα ήθελα η εργασία αυτή να αφιερωθεί στην μνήμη του αγαπημένου μου και μοναδικού ανηψιού μου Μιχάλη που χάθηκε απρόσμενα κατά την διάρκεια της συγγραφής της.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Η. Αργυρόπουλος, Π. Βλάμος, Γ. Κατσούλης, Σ. Μαρκάτης, Π. Σιδερής, *Ευκλείδεια Γεωμετρία*, ΟΕΔΒ, Αθήνα, 2003.

Ν. Βαρουχάκης, Λ. Αδαμόπουλος, Ν. Αλεξανδρής, Δ. Παπακωνσταντίνου, Α. Παπαμικρούλης, *Μαθηματικά Α΄ Λυκείου Άλγεβρα*, ΟΕΔΒ 1983

M. Baron, *The origins of the infinitesimal calculus,* Courier Dover Publications, Oxford, 1969.

C.B. Boyer, *A History of Mathematics*, John Willey and Sons Inc, New York, 1968.

K. Menninger, *Number Words and Number Symbols. A Cultural History of Numbers*, translate P. Broneer, MIT press, Cambridge, 1969.

G. Van Brummelen, *The Mathematics of the Heavens and the Earth: The Early History of Trigonometry,* Princeton University Press, Oxford, 2009.

L. Bunt, P. Jones, J. Bedient, *Οι Ιστορικές Ρίζες των Στοιχειωδών Μαθηματικών,* μετάφραση Άννα Φερεντίνου-Νικολακοπούλου, εκδ. Γ. Α. Πνευματικός, Αθήνα, 1981

H.S.M. Coxeter, *Introduction to Geometry,* Second edition, John Wiley and Sons, Torondo, 1980.

P.J. Davis, R. Hersh, *Η Μαθηματική Εμπειρία,* μετάφραση Γ. Αναστασιάδης, Τροχαλία, Αθήνα, 1981.

H. Eves, *Μεγάλες Στιγμές των Μαθηματικών*, μετάφραση Μ. Κωνσταντινίδης, Ν. Λιλής, 2 τόμοι, Τροχαλία, Αθήνα, 1989.

R. Herz - Fischler, *A Mathematical History of Division in Extreme and Mean Ratio*, Wilfrid Laurier University Press, Waterloo, Ontario, Canada, 1987.

Ήρων Αλεξανδρεύς, *Μετρικά – Διοπτρικά*, Μετάφραση Χ. Κηπουρός, έκδοση Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, Αθήνα, 2000.

T. L. Heath, *The Works of Archimedes, Cambridge University Press*, Dover Edition, New York, 1953.

Θέων Σμυρναίος, *Των κατά το Μαθηματικόν χρησίμων εις την Πλάτωνος ανάγνωσιν,* μετάφραση Ε. Σπανδάγος, Αίθρα, Αθήνα, 2003.

Ιάμβλιχος, *Περί της κοινής Μαθηματικής επιστήμης,* μετάφραση Ε. Σπανδάγος, Αθήνα, Αίθρα, 2012.

Μ. Κατσοπρινάκη, *Απλές κλειστές πολυγωνικές γραμμές στο επίπεδο. Απλά επίπεδα πολύγωνα και το Εμβαδόν τους,* Μαθηματική Επιθεώρηση τ.26, έκδοση Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, Αθήνα, 1984.

Μ. Λάμπρου, *Άρρητοι και Υπερβατικοί αριθμοί,* Περιοδικό Θεαίτητος, τεύχος 3, έκδοση ΤΕΙ Κρήτης, Ηράκλειο 1983.

G. Loria, *Ιστορία των Μαθηματικών*, τόμοι 1,2,3, μετάφραση Μ. Κωβαίος, έκδοση Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, Αθήνα, 1971.

K. Menninger, *Zahlwort und Ziffer. Eine Kulturgeschichte der Zahl,* Vandenhoeck & Ruprect, Göttingen, 1958.

O. Neugebauer, *Οι Θετικές Επιστήμες στην Αρχαιότητα,* μετάφραση Χ. Ζερμπίνη, Ι Αρζογλου, έκδοση Μορφωτικό Ίδρυμα Εθνικής Τραπέζης, Αθήνα, 1986.

Σ. Νεγρεπόντης, Σ. Γιωτόπουλος, Ε. Γιαννακούλιας, *Απειροστικός Λογισμός, Τόμος Ι,* Αίθρα, Αθήνα, 1987.

Π. Πάμφιλος*, Έλασσον Γεωμετρικόν,* Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2012.

Πλούταρχος, *Βίοι Παράλληλοι,*τόμος 2, μετάφραση Α. Ραγκαβής, έκδοση Διονυσίου Κορομηλά, Αθήνα, 1864.

M.M. Postnikov, *The problem of squarable lunes,* American Mathematical Monthly, Vol. 107, 2000.

H. Rademacher, O. Töeplit, *Von Zahlen und Figuren*, Berlin, Springer, Berlin, 1933

C. E. Sandifer, *The Early Mathematics of Leonhard Euler,* Mathematical Association of America, 2007.

K. Shiga, T. Sunada, *A mathematical gift. Vol. 3, The interplay between topology, functions, geometry, and algebra,* translate E. Tyler, American Mathematical Society AMS, 2005.

H. Scholz, *Η κρίση των αρχών των Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών,* Αίθρα, Αθήνα, 2004.

D.E. Smith, *History of Mathematics*, V. I, II, Dover Publications Inc, New York, 1951.

M. Spivak, *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός,* μετάφραση Α. Γιαννόπουλος, Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2007.

Ε. Σταμάτης, *Επιστημονικαί Εργασίαι και Άρθρα*, 2 τόμοι, Αθήναι, 1972.

Ε. Σταμάτης, *Ευκλείδου Στοιχεία*, 4 τόμοι, Οργανισμός Εκδόσεως Σχολικών Βιβλίων, Αθήνα, 1957.

Ε. Σταμάτης, *Αρχιμήδους Άπαντα*, Τόμος 1 (Μέρος Β΄), Αθήνα, έκδοση Τεχνικού Επιμελητηρίου της Ελλάδος, Αθήναι, 1970.

Ε. Σταμάτης, *Αρχιμήδους Άπαντα*, Τόμος 2, Αθήνα, έκδοση Τεχνικού Επιμελητηρίου της Ελλάδος, Αθήναι, 1973.

D. J. Struik, *Συνοπτική Ιστορία των Μαθηματικών*, έκδοση Ι. Ζαχαρόπουλος, μετάφραση Α. Φερεντίνου – Νικολοπούλου, Αθήνα, 1982.

A. Szabo, *Απαρχαί των Ελληνικών Μαθηματικών,* μετάφραση Φ. Βασιλείου, Γ. Στεργίου, έκδοση Τεχνικού Επιμελητηρίου της Ελλάδος, Αθήνα, 1973.

D. Tobias, *The Bequest Of The Greeks*, George Allen And Unwin Limited, London, 1955.

Γ. Χριστιανίδης, *Θέματα από την Ιστορία των Μαθηματικών*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηρακλειο, 2003.

B.L. Van der Waerden, *Η Αφύπνιση της Επιστήμης*, 3η έκδοση, μετάφραση Γ. Χριστιανίδης, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2007.

E. A. Whitman, *Some Historical Notes on the Cycloid*, American Mathematical Monthly, Vol. 50, 1943.

Τέλος χρησιμοποιήθηκαν προσωπικές σημειώσεις από τις παραδόσεις των μεταπτυχιακών μαθημάτων «Ιστορία των Μαθηματικών» και «Ανάλυση για την εκπαίδευση» που διδάχθηκαν από τον καθηγητή κ. Μιχάλη Λάμπρου τα έτη 2010, 2011

Τα κείμενα των αρχαίων Ελλήνων συγγραφέων έχουν παρθεί από τις ηλεκτρονικές βάσεις: Perseus Digital Library στην διεύθυνση (http://www.perseus.tufts.edu/hopper/) και από Bienvenue sur le site de L'antiquité grecque et latine Du moyen âge στην διεύθυνση (http://remacle.org/index2.htm).
Τα κείμενα των *Στοιχείων* του Ευκλείδη έχουν παρθεί από την ιστοσελίδα http://www.physics. ntua.gr/~mourmouras/euclid/book1/postulate4.html.