Τμήμα Μαθηματικών & Εφαρμοσμένων Μαθηματικών
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Πτυχιακή Εργασία
Εφαρμογές της Μιγαδικής Ανάλυσης στην Οικονομική Θεωρία

Μιχαήλ Α. Σγουρομάλλης

Επιβλέψας: Ιωάννης Δ. Πλατής

26 Ιουνίου 2016

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή της εργασίας μου κύριο Ιωάννη Δ. Πλατή για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε αναθέτοντάς μου αυτή την εργασία, για την καθοδήγησή και τις συμβουλές του καθ΄ όλη τη διάρκειά της και κυρίως για την ευκαιρία που μου έδωσε να ασχοληθώ με ένα ιδιαίτερα ενδιαφέρον αντικείμενο. Επίσης οφείλω ένα μεγάλο ευχαριστώ και στην οικογένειά μου που με στήριξε με κάθε τρόπο σε όλη τη διάρκεια των σπουδών μου.

Προλογος

Η πτυχιακή μου εργασία αποτελείται από δύο κεφάλαια· στο πρώτο κεφάλαιο επιχειρούμε να ερμηνεύσουμε δύο σημαντικούς οικονομικούς όρους, τη διάρκεια D και τον εσωτερικό δείκτη απόδοσης (IRR), διαμέσου του μιγαδικού επιπέδου. Το δεύτερο κεφάλαιο αναλύει τη σημασία των εξισώσεων Cauchy-Riemann και Laplace στη μιγαδική οικονομική ανάλυση.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Οπτικοποίηση οικονομικών εννοιών στο μιγαδικό επίπεδο

1.1 Εισαγωγή

Στις Οικονομικές Επιστήμες συναντούμε αρκετά συχνά μιγαδικούς αριθμούς. Για παράδειγμα, τους συναντούμε στη μελέτη της ευστάθειας των διαφορικών εξισώσεων που χρησιμοποιούνται στον κύκλο επιχειρηματικής ανάλυσης (βλ. [1]).

Σε αυτ'ο το κεφάλαιο θα δείξουμε πως μπορεί το μιγαδικό επίπεδο να χρησιμοποιηθεί ώστε να δώσει μία οπτική ερμηνεία σε δύο σημαντικές οικονομικές έννοιες:

- στη διάρκεια (Duration) και
- στον εσωτερικό δείκτη απόδοσης (IRR).

Οι παραπάνω έννοιες περιγράφονται εδώ με συνοπτικό τρόπο· οι αναλυτικές περιγραφές τους μπορούν να βρεθούν σε κάποιο απο τα πολλά κείμενα που αφορούν οικονομικά ή χρηματοοικονομικά (βλ. λ.χ. [2] και [3]). Σε αυτή την ενότητα, η οποία βασίζεται στην εργασία [23], ασχολούμαστε με την γενίκευση της εξίσωσης τιμών ομολόγων που δίδεται στην Παράγραφο 1.2. Για την οικονομική ορολογία που ακολουθεί, παραπέμπουμε στο Παράρτημα.

1.2 Οικονομική Άλγεβρα

Θεωρούμε την *εξίσωση τιμών ομολόγων*

$$-PV + \sum_{i=1}^{n} \frac{PMT}{(1+r)^i} + \frac{FV}{(1+r)^n} = 0, \tag{1.2.1}$$

όπου:

- με PV συμβολίζεται η *τρέχουσα αξία*,
- με FV η *μελλοντική αξία*,
- με r ο *εσωτερικός δείκτης απόδοσης* (IRR) και
- με PMT η *ποσότητα πληρωμής*.

Έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

- $PMT = 0 \implies$ Η (1.2.1) γίνεται

$$FV = PV(1+r)^n.$$

- $PMT = 1 \implies$ Η (1.2.1) γίνεται

$$PV = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(1+r)^i} + \frac{FV}{(1+r)^n}$$

$\implies$

$$FV = (1+r)^n PV - (1+r)^{n-1} - (1+r)^{n-2} - \cdots - 1.$$

Αν ισχύει για $n = 1$, τότε ισχύει $\forall n$.

Διαιρώντας με PV, παίρνουμε την

$$\begin{aligned} -1 + \frac{PMT/PV}{1+r} + \frac{PMT/PV}{(1+r)^2} + \cdots + & \\ \frac{PMT/PV}{(1+r)^{n-1}} + \frac{(PMT+FV)/PV+1}{(1+r)^n} + \frac{1}{(1+r)^n} &= 0. \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

Οι ισοδύναμες εξισώσεις (1.2.2) και (1.2.1) δείχνουν την άλγεβρα του τύπου των τιμών ομολόγων στον γνώριμο συμβολισμό ενός οικονομικού υπολογιστή. Η (1.2.2) είναι ίσως η πιο οικεία μορφή της εξίσωσης τιμών ομολόγων. Εάν

$$PV = FV = 1,$$

οι εξισώσεις (1.2.2) και (1.2.1) είναι αυτές ενός ομολόγου με ονομαστική αξία (par bond).

Έστω $a_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \ldots, n$. Θεωρούμε την εξίσωση

$$-1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{(1+r)^i} + \frac{1}{(1+r)^n} = 0 \tag{1.2.3}$$

Γενικά φανταζόμαστε ένα ομόλογο σαν να έχουμε μία ροή ίσων αποτελεσμάτων, στα οποία όλα τα a_i στην παραπάνω εξίσωση είναι ίσα. Όμως η (1.2.2) μας δείχνει ότι μπορούμε να εργαστούμε στο πλαίσιο της γενικής εξίσωσης (1.2.3), με $a_1 = \cdots = a_{n-1}$ ενώ το a_n είναι διαφορετικό. Με την μοναδική αυτή διαφοροποίηση έχουμε μία μεταβαλλόμενη σειρά αριθμών a_i.

Η εξίσωση (1.2.3) είναι στη μορφή που εμφανίζεται πιο συχνά σε βιβλία που σχετίζονται με οικονομικά· είναι η χρονική τιμή εξίσωσης χρήματος. Έστω η εξίσωση

$$x^n - a_1 x^{n-1} - \cdots - a_{n-1} x - (a_{n+1}) = 0, \quad \text{όπου} \quad x = 1 + r. \tag{1.2.4}$$

Τούτη είναι ισοδύναμη με την (1.2.3), στην πιο γενική μορφή που εμφανίζεται στα βιβλία μαθηματικών.

Σύμφωνα με την εξίσωση (1.2.3), πληρώνουμε 1, στη συνέχεια παίρνουμε μια ροή αποτελεσμάτων a_i και μας επιστρέφεται 1 στο τελευταίο αποτέλεσμα. Κάθε σειρά αριθμών μπορεί να τοποθετηθεί σε μία τέτοια δομή. Στην αγορά ομολόγων σταθερού εισοδήματος έχουμε την περίπτωση $a_1 = \cdots = a_{n-1}$ που περιγράψαμε παραπάνω.

Σκοπός μας στην ενότητα αυτή, είναι να εξετάσουμε την περίπτωση όπου τα a_i μπορούν να πάρουν κάθε τιμή. Πιο συγκεκριμένα, ερευνάμε τον τρόπο με τον οποίο τα a_i παίζουν ρόλο στον καθορισμό του εσωτερικού δείκτη απόδοσης IRR και της διάρκειας D μέσω του μιγαδικού επιπέδου.

Ο εσωτερικός δείκτης απόδοσης (IRR) είναι η τιμή του r που ικανοποιεί τις εξισώσεις (1.2.2) ή (1.2.1), όταν μας δοθούν τιμές σε όλες τις άλλες μεταβλητές.

Είναι ένα μέτρο της απόδοσης ανά περίοδο για τη σειρά αριθμών a_i, ή απλώς ένα μέτρο της απόδοσης ενός ομολόγου.

Η διάρκεια D είναι η πρώτη παράγωγος της τρέχουσας αξίας PV ως προς r στην (1.2.1), διαιρεμένη με PV. Δείχνει την ελαστικότητα επιτοκίου της τιμής ενός ομολόγου και είναι επομένως ένα μέτρο ρίσκου. Η διάρκεια έχει έναν αριθμό από σημαντικές ιδιότητες: για παράδειγμα, η διάρκεια ενός σταθμισμένου χαρτοφυλακίου κεφαλαίων, είναι ιση με το σταθμισμένο μέσο των διαρκειών τους. Είναι χρήσιμο να ξέρουμε πότε ελλοχεύει κίνδυνος.

1.3 Κάποια θεμέλια

Η εξίσωση (1.2.3) είναι μία $n-$οστού βαθμού πολυωνυμική, επομένως σύμφωνα με το θεώρημα Gauss-D'Alembert έχει n μιγαδικές ρίζες. Συνήθως, η πρώτη πραγματική ρίζα που είναι μεγαλύτερη του 0, η $(1+r)$, είναι η μοναδική λύση για την οποία ενδιαφερόμαστε κατά τη διάρκεια οποιασδήποτε οικονομικής ανάλυσης. Αυτός ο αριθμός ερμηνεύεται με διάφορους τρόπους:

- ως το 1 συν τον εσωτερικό δείκτη απόδοσης (IRR)·
- ως την πραγματική απόδοση·
- ως την ετήσια ποσοστιαία τιμή·
- ως την οριακή αποδοτικότητα κεφαλαίου,

κλπ., αναλόγως της ερμηνείας των a_i. Ένα ερώτημα δημιουργείται σε αυτό το σημείο, το οποίο δεν τίθεται συχνά. Τι σημαίνουν οι υπόλοιπες $n-1$ ρίζες;

Κάθε $n-$οστού βαθμού πολυωνυμική εξίσωση με πραγματικούς συντελεστές θα έχει n ρίζες, οι οποίες είτε θα είναι πραγματικές, είτε συζυγείς μιγαδικές. Το γενονός ότι υπάρχει φανταστικό μέρος στις μιγαδικές λύσεις, σημαίνει ότι η ερμηνεία τους σε ένα οικονομικό πλαίσιο δεν είναι προφανής.

Η απλούστερη περίπτωση είναι όταν όλα τα a_i είναι ίσα με 0. Δηλαδή τα FV και PV είναι ίσα με 1 (δεν υπάρχει κέρδος ή απώλεια κεφαλαίου) και όλες οι αποδόσεις είναι ίσες με 0. Τότε η εξίσωση (1.2.3) απλοποιείται στην (1.3.1).

$$-1+\frac{1}{(1+r)^n}=0. \tag{1.3.1}$$

Παρατηρούμε ότι αυτή είναι μία εξίσωση της μορφής

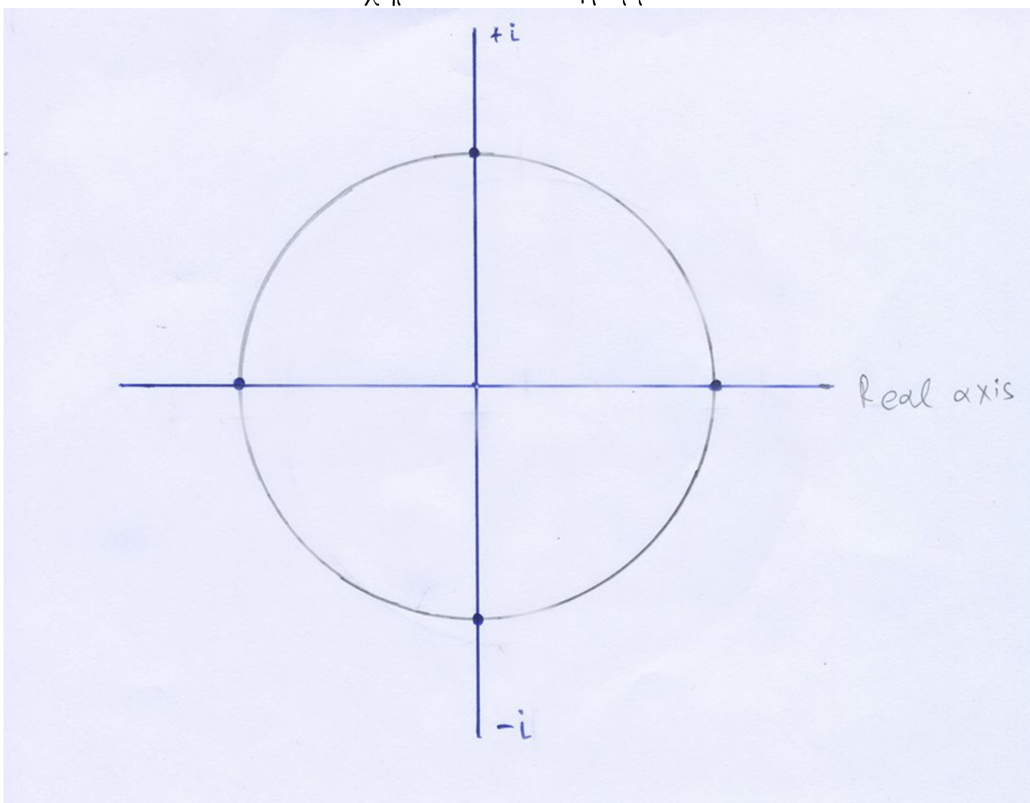
$$z^n=1. \tag{1.3.2}$$

Οι ρίζες αυτής της (1.3.2) είναι οι $n-$*οστές ρίζες της μονάδας*

$$z_k = e^{i\frac{2\kappa\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Οι n-οστές ρίζες της μονάδας βρίσκονται πάνω σε κορυφές κανονικού πολυγώνου εγγεγραμμένου στον μοναδιαίο κύκλο πάνω στο μιγαδικό επίπεδο (το διάγραμμα A είναι το διάγραμμα του Argand για $n = 4$).

Σχήμα 1.3.1: Διάγραμμα Α



Για την επόμενη περίπτωση, έστω ότι υπάρχουν $a_i \neq 0$ στην εξίσωση και έστω ότι $a_1 = \cdots = a_{n-1} = a$. Έχουμε τότε την εξίσωση ομολόγου με ονομαστική αξία (par bond). Τα PV και FV είναι και τα δύο ίσα με 1, και το a είναι ίσα με το τοκομερίδιο.

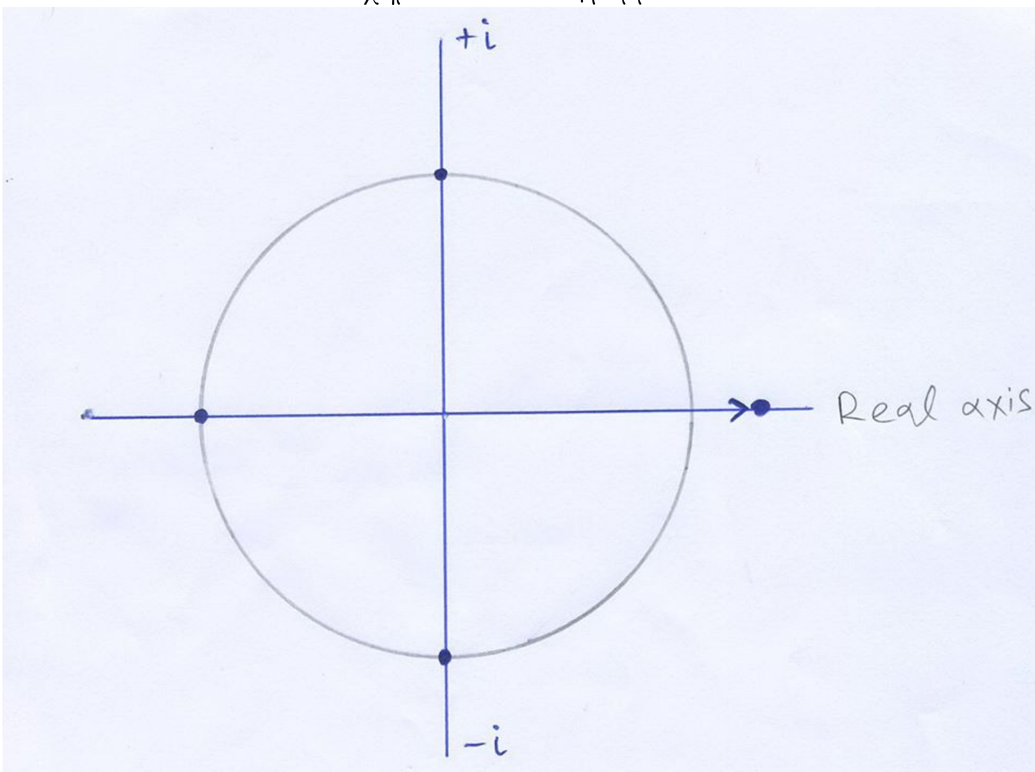
Αν θέσουμε $z = 1 + r$ στην (1.2.3) για $a_1 = \cdots = a_{n-1} = a$, έχουμε:

$$z^n - \alpha z^{n-1} - \cdots - \alpha z - \alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow z^n - 1 = \alpha(z^{n-1} + \cdots + z + 1) \Leftrightarrow$$
$$(z-1)(z^{n-1} + \cdots + z + 1) = \alpha(z^{n-1} + \cdots + z + 1).$$

Αν $(z^{n-1} + \cdots + z + 1) \neq 0 \implies z = 1 + \alpha$.
Αν $(z^{n-1} + \cdots + z + 1) = 0 \implies z$ είναι ν-οστή ρίζα του 1 διαφορετική του 1.

Δηλαδή, στην περίπτωση αυτή, $(n-1)$ από τις ρίζες βρίσκονται ακριβώς στην ίδια θέση με αυτές των $n-1$ ριζών της κυκλοτομικής εξίσωσης $z^{n-1} = 1$, ενώ η n-οστή ρίζα, η μόνη θετική πραγματική, παίρνει την τιμή $(1+r)$ αντί για

Σχήμα 1.3.2: Διάγραμμα Β



τη μονάδα. Συμπεραίνουμε ότι το αποτέλεσμα της προσθήκης της τιμης α, είναι απλώς να μετακινήσει τη θετική πραγματική ρίζα κατά μία απόσταση r προς τα δεξιά κατά μήκος του θετικού άξονα, δηλαδή

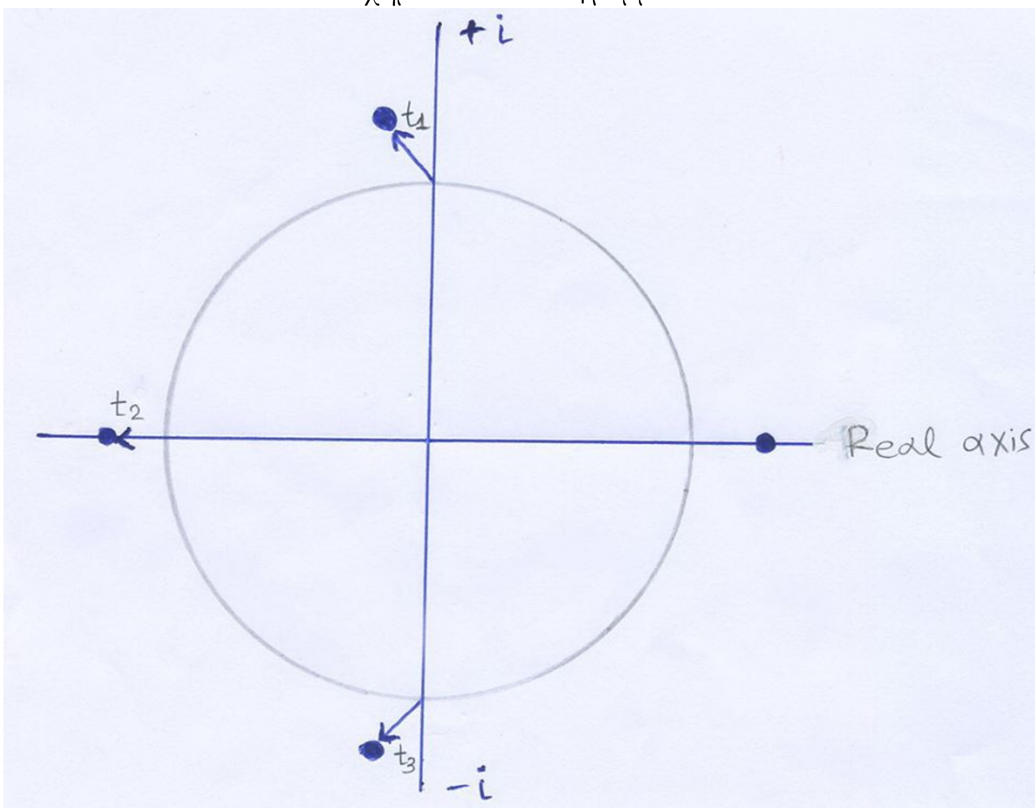
$$1 + r = 1 + \alpha = 1 + \text{τοκομερίδιο}.$$

Το αποτέλεσμα απεικονίζεται στο διάγραμμα Β για $n = 4$.

Το αποτέλεσμα αυτό επίσης γενικεύεται. Όπως η τιμή του a_i ή του τοκομεριδίου αυξάνεται ή μειώνεται, τόσο η πραγματική ρίζα μετακινείται προς τα δεξιά ή τα αριστερά κατά μήκος του πραγματικού άξονα, κατά ίσες ποσότητες. Οι υπόλοιπες ρίζες, άσχετα με το πόσες υπάρχουν, και πάλι διαμερίζονται ομοιόμορφα γύρω από τον μοναδιαίο κύκλο.

Τώρα αφήνουμε τα a_i να μεταβάλλονται προς κάθε κατεύθυνση. Για παράδειγμα, μπορούμε να φανταστούμε την περίπτωση ομολόγου χωρίς ονομαστική αξία (non par bond) με όλους τους συντελεστές να παραμένουν σταθεροί εκτός από τον τελευταίο. Ο τελευταίος συντελεστής αλλάζει για να φανερώσει

Σχήμα 1.3.3: Διάγραμμα C



την τρέχουσα αξία (PV) που εκκινά από τη τιμή 1, βλ. (1.2.2). Όταν τα a_i μεταβάλλονται, οι $n-1$ ρίζες παρεκλίνουν από τις θέσεις τους στο μοναδιαίο κύκλο. Γίνονται σημεία στα τέλη των ¨ουρών¨, (tendrils) που είναι προσαρτημένες στις κυκλοτομικές ρίζες. Αυτές οι ¨ουρές¨, μπορεί να θεωρηθούν ως μέτρα διασποράς από την περίπτωση της ομαλής ροής. Στο διάγραμμα C υπάρχουν τρεις τέτοιες ¨ουρές¨, τα t_i.

Την ίδια στιγμή η n-οστή ρίζα, η πρώτη θετική πραγματική ρίζα, παραμένει στη συνηθισμένη της θέση στον πραγματικό άξονα δείχνοντας τον ρυθμό απόδοσης στη συνολική οικονομική ροή (το *μέσον (middle)* των a_i). Σημειώνουμε ότι η ρίζα αυτή είναι το αποτέλεσμα που παίρνουμε όταν ζητήσουμε την IRR από έναν οικονομικό υπολογιστή· είναι ένα είδος μέσου όρου. Πράγματι, παρακάτω θα δείξουμε ότι το r είναι όντως ένα ιδιαίτερο είδος μέσου όρου των a_i.

Αρχικά, είναι δύσκολο να διακρίνουμε διατάξεις στις θέσεις των ριζών. Οι διατάξεις των θέσεων των ριζών των πολυωνύμων με μεταβαλλόμενους συντελεστές μπορούν να γίνουν με διάφορους τρόπους. Αυτό ισχύει εν μέρει εξαιτίας της δυσκολίας να οπτικοποιήσουμε ό,τι συμβαίνει στο μιγαδικό επίπεδο και εν μέρει εξαιτίας της πολυπλοκότητας των υπολογισμών. Για παράδειγμα, στο [7] υποστηρίζεται ότι τυχαία πολυώνυμα που φαίνονται απλά, είναι από τα πλέον συναρπαστικά και μυστηριώδη στοιχεία στα μαθηματικά.

Οι ρίζες μιας πολυωνυμικής εξίσωσης με τυχαίους συντελεστές διασπείρονται γύρω από ειδικά σημεία στον μοναδιαίο κύκλο. Έχουμε ως εξής: [6]

Θεώρημα 1. ***Θεώρημα των Erdos-Turan για την κατανομή των ριζών πολυωνυμικών.*** *Αν οι ρίζες της*

$$P(z) := \sum_{j=0}^{n} \alpha_j z^j, \quad \alpha_j \in \mathbb{C}, \quad \alpha_0 \alpha_n \neq 0,$$

ορίζονται από

$$z_j = r_j \exp{(i\phi_j)}, \quad r_j > 0, \quad \phi_j \in [0, 2\pi), \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

τότε για κάθε $0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$ *έχουμε*

$$\left| \sum_{j \in I(\alpha,\beta)} 1 - \frac{\beta - \alpha}{2\pi} n \right| < 16\sqrt{n \log R},$$

όπου

$$R := |\alpha_0 \alpha_n|^{-\frac{1}{2}} (|\alpha_0| + |\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|)$$

και

$$I(\alpha, \beta) := \{j : \alpha \leq \phi_j \leq \beta\}.$$

Υπάρχει και μία πιο πρόσφατη γενίκευση του παραπάνω θεωρήματος, [22]:

Θεώρημα 2. *Αν οι ρίζες της*

$$P(z) := \sum_{j=0}^{n} \alpha_j z^j, \quad \alpha_j \in \mathbb{C}, \quad \alpha_0 \alpha_n \neq 0,$$

ορίζονται από

$$z_j = r_j \exp{(i\phi_j)}, \quad r_j > 0, \quad \phi_j \in [0, 2\pi), \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

τότε για κάθε $0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$ *έχουμε*

$$\sum_{j \in I_1(\alpha,\beta)} 1 - \frac{\beta - \alpha}{2\pi} n \leq 16\sqrt{n \log R_1}$$

και

$$\sum_{j \in I_2(\alpha,\beta)} 1 - \frac{\beta - \alpha}{2\pi} n \leq 16\sqrt{n \log R_2},$$

όπου

$$R_1 := |\alpha_n|^{-1} \|P\|,$$

$$R_2 := |\alpha_0|^{-1} \|P\|,$$

και

$$I_1(\alpha,\beta) := \{j : \alpha \leq \phi_j \leq \beta, r_j \geq 1\},$$
$$I_2(\alpha,\beta) := \{j : \alpha \leq \phi_j \leq \beta, r_j \leq 1\}.$$

Εδώ, $\|P\| = \max_{z \in \partial D} |P(z)|$*, όπου* D *είναι ο μοναδιαίος κύκλος.*

Στην περίπτωσή μας, θα χρησιμοποιήσουμε ένα άλλο θεώρημα, που δίνει στη διάρκεια D και στον εσωτερικό δείκτη απόδοσης IRR απλές γεωμετρικές ερμηνείες.

1.4 Το θεώρημα του περιστερώνα

Για την απόδειξη του θεωρήματος του περιστερώνα που εξετάζουμε στην ενότητα αυτή, παραπέμπουμε στο [5] ή στο [8]. Η μεθοδολογία της απόδειξης χρησιμοποιείται στα αποτελέσματα που παρατίθενται παρακάτω.

Το θεώρημα αυτό οφείλεται στον Roger Cotes, μαθηματικού στο πανεπιστήμιο του Cambridge πριν από περίπου 300 χρόνια. Ο Cotes κατέληξε σε αυτό το θεώρημα, εξαιτίας ενός ισχυρισμού του Leibniz στο βιβλίο του Acta Eruditorum (1702). Εκεί ο Leibniz παρατήρησε ότι τα ολοκληρώματα

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x + \alpha} \quad \text{και} \quad \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + \alpha^2}$$

μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει λογαριθμικών και τριγωνομετρικών συναρτήσεων αντίστοιχα, αλλά ισχυρίστηκε ότι για τα ολοκληρώματα

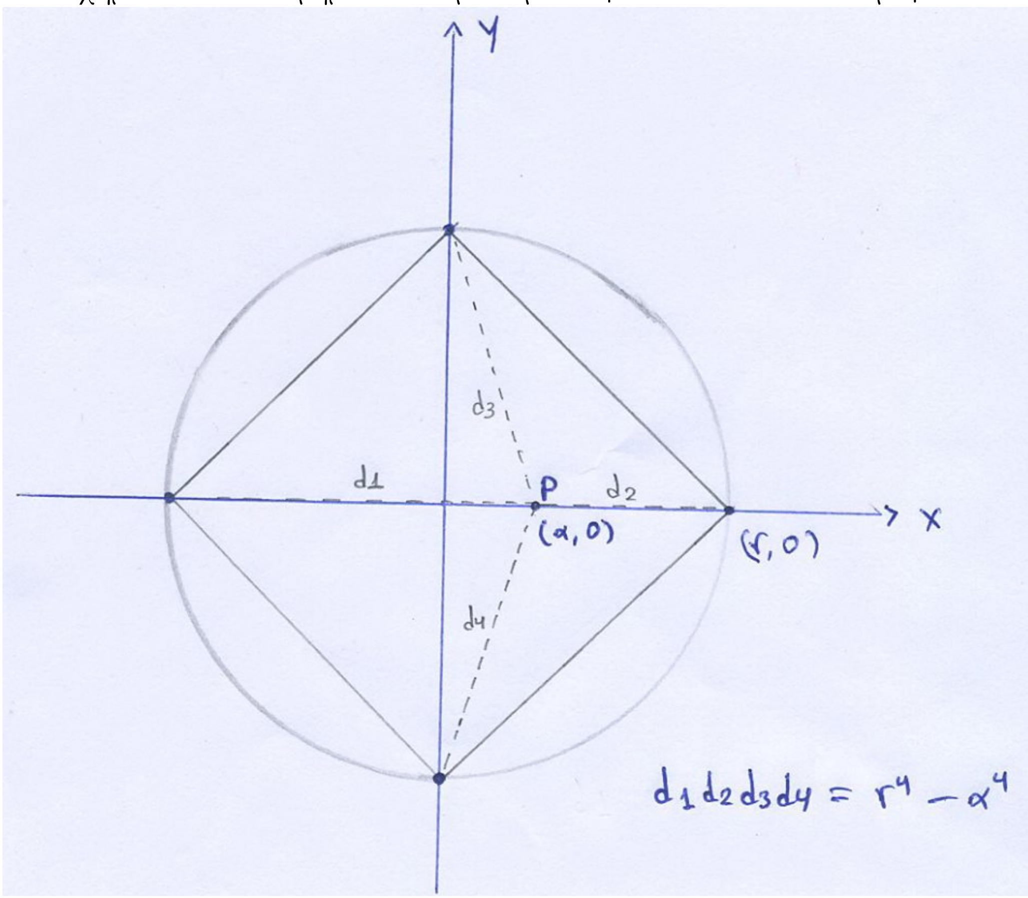
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4+\alpha^4} \quad \text{και} \quad \int \frac{\mathrm{d}x}{x^8+\alpha^8},$$

κάτι τέτοιο δέν ισχύει. Ο Cotes αντέδρασε σε αυτόν τον (λανθασμένο) ισχυρισμό, μελετώντας τον τρόπο της παραγοντοποίησης του $x^n \pm \alpha^n$ και κατασκευάζοντας γεωμετρικά τους παράγοντες. Ο Cotes απλά διατύπωσε το θεώρημά του, δεν το απέδειξε. Τελικά το 1722 δημοσιεύθηκε μία απόδειξη από τον Henry Pemberton (1694-1771), ο οποίος ήταν εκδότης της τρίτης έκδοσης του Principia του Newton.

Θεώρημα 3. *Θεώρημα του περιστερώνα* *Έστω κανονικό n-γωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας r και έστω σημειο P που κείται σε μία από τις ακτίνες από το κέντρο του κύκλου μέχρι μία από τις κορυφές σε απόσταση α από το κέντρο. Τότε το γινόμενο των αποστάσεων μεταξύ του P και όλων των κορυφών είναι $r^n - \alpha^n$ ή $\alpha^n - r^n$, αναλόγως από το εάν το P είναι μέσα στον κύκλο ($\alpha < r$) ή έξω από τον κύκλο ($\alpha > r$), αντίστοιχα.*

Το διάγραμμα 1.4.1 δείχνει τη γεωμετρία που εμπεριέχεται για τη περίπτωση του $n = 4$ και για το P να βρίσκεται μέσα στον κύκλο. Στην απλή αυτή περίπτωση, είναι εύκολο να επαληθεύσουμε το θεώρημα του Cotes με άμεσους υπολογισμούς των αποστάσεων που περιλαμβάνονται.

Σχήμα 1.4.1: Θεώρημα του περιστερώνα για ένα κανονικό τετράγωνο.



Θέλουμε όμως μία γενική απόδειξη που να ισχύει για κάθε n. Αρχικά χωρίς βλάβη της γενικότητος, μπορούμε πάντα να θέσουμε το κέντρο του κύκλου στην αρχή των αξόνων και φανταζόμαστε ότι το P είναι πάνω στον πραγματικό άξονα στο σημείο $z = \alpha$, όπως φαίνεται στο διάγραμμα 1.4.1. Γνωρίζουμε ότι οι θέσεις των κορυφών του κανονικού n-γώνου είναι οι λύσεις της κυκλοτομικής εξίσωσης $z^n = r^n$. Έτσι, αν z_k υποδηλώνει τη θέση της k-οστης κορυφής, παραγοντοποιώντας μπορούμε να γράψουμε:

$$(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)\dots(z - z_n) = z^n - r^n.$$

Αν πάρουμε το μέτρο των δύο μελών της έκφρασης αυτής παίρνουμε

$$|z - z_1||z - z_2||z - z_3|\dots|z - z_n| = |z^n - r^n|.$$

Το αριστερό μέλος είναι απλώς το γινόμενο των αποστάσεων των κορυφών από ένα σημείο z σε αυθαίρετη θέση. Τώρα, ειδικότερα, ας πάρουμε $z = \alpha$, τη θέση του σημείου P επάνω στον πραγματικό άξονα· είναι τότε και $z^n = \alpha^n$. Επίσης, και το $z^n - r^n$ είναι επίσης πραγματικό. Συνεπώς έχουμε :

$$|\alpha - z_1||\alpha - z_2||\alpha - z_3|\dots|\alpha - z_n| = \begin{cases} \alpha^n - r^n, & \text{αν} \quad a > r, \\ r^n - \alpha^n, & \text{αν} \quad a < r \end{cases}$$

και το θεώρημα του περιστερώνα αποδείχθηκε.

Έστω τώρα ένα σημείο z επάνω στον πραγματικό άξονα και μέσα στον μοναδιαίο κύκλο, σε απόσταση $g = |z|$ από την αρχή των αξόνων. Οι αποστάσεις του z από τις κυκλοτομικές ρίζες συμβολίζονται με d^i, όπου το $i = 1, \dots, n$. (Βλ. διάγγραμμα 1.4 για $n = 4$). Σύμφωνα με το θεώρημα του περιστερώνα έχουμε:

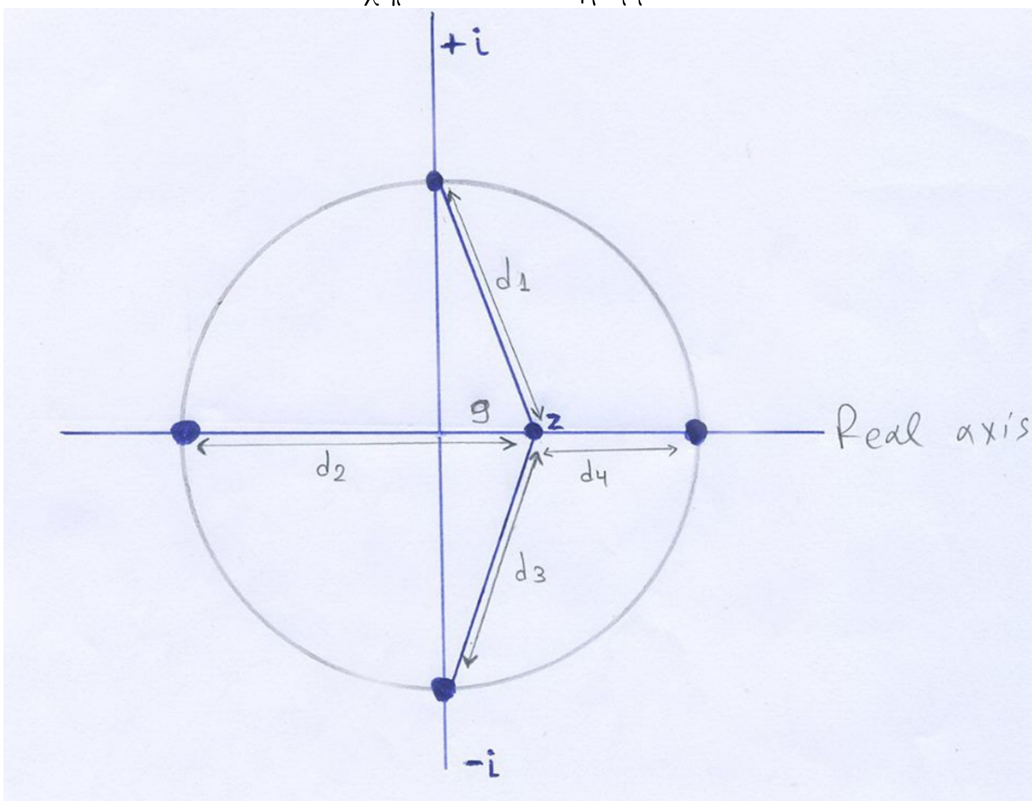
$$\prod_{i=1}^{n} d_i = 1 - g^n, \tag{1.4.1}$$

αν $g < 1$, ή

$$\prod_{i=1}^{n} d_i = g^n - 1, \tag{1.4.2}$$

αν $1 < g$.

Σχήμα 1.4.2: Διάγραμμα D

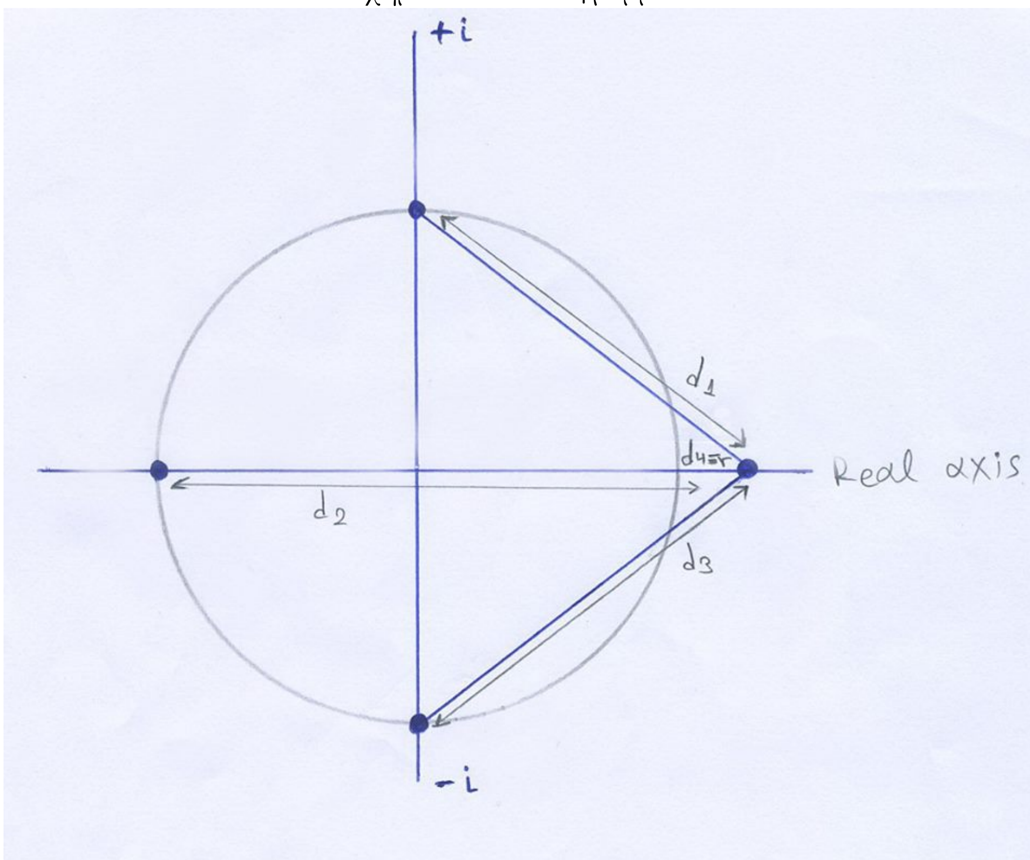


Έστω ότι το σημείο z μετακινείται προς τα δεξιά κατά μήκος του πραγματικού άξονα μέχρι να είναι έξω από τον μοναδιαίο κύκλο, (εξίσωση (1.4.2)) και ότι το z αποτελεί την πρώτη θετική πραγματική ρίζα: $g = 1 + r$. Τότε γράφουμε την (1.4.2) ισοδύναμα ως την:

$$\left(\prod_{i=1}^{n-1} d_i \right) \cdot r = (1+r)^n - 1, \tag{1.4.3}$$

όπου $r = d_n$. Η εικόνα για $n = 4$ είναι στο διάγραμμα D.

Σχήμα 1.4.3: Διάγραμμα Ε



Η εξίσωση (1.4.3) μπορεί να τροποποιηθεί περαιτέρω στην:

$$\frac{\prod_{i=1}^{n-1} d_i}{(1+r)^n} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r(1+r)^n}, \tag{1.4.4}$$

βλ. διάγραμμα Ε για $n = 4$. Αυτή η εξίσωση δείχνει ότι το γινόμενο των αποστάσεων μεταξύ της πρώτης θετικής πραγματικής ρίζας και των άλλων $n - 1$ ριζών στο μιγαδικό επίπεδο, όταν διαιρείται με $(1 + r)^n$, δίνει ένα αποτέλεσμα το οποίο είναι άμεσα αναγνωρίσιμο: είναι το άθροισμα των εκπτωτικών παραγόντων. Έτσι μπορούμε να δούμε ένα οικείο οικονομικό μέτρο διαμέσου του μιγαδικού επιπέδου.

1.5 Διάρκεια ομολόγου με ονομαστική αξία

Η κατάσταση που αναπαριστάται στο διάγραμμα Ε είναι ισοδύναμη με ένα ομόλογο με ονομαστική αξία (par bond), διότι οι $n-1$ ρίζες είναι οι κυκλοτομικές ρίζες και η μοναδική πραγματική ρίζα αναπαριστά το τοκομερίδιο (τα a_i στην εξίσωση (1.2.3) είναι ίσα). Σε αυτό το ιδιαίτερο γενικό πλαίσιο, μπορεί να φανεί ότι το άθροισμα των εκπτωτικών παραγόντων είναι ίσο με το αρνητικό της τροποποιημένης διάρκειας D, όπως θα δούμε στην επόμενη παράγραφο, δηλαδή

$$\frac{\prod_{i=1}^{n-1} d_i}{(1+r)^n} = -D. \tag{1.5.1}$$

Αυτό άμεσα προκαλεί μία εικασία. Ο τύπος στο αριστερό μέλος της (1.5.1) είναι επίσης ίσος με τη τροποποιημένη διάρκεια όταν τα a_i μεταβάλλονται; Για παράδειγμα, ισχύει στη περίπτωση των ομολόγων χωρίς ονομαστική αξία (non par bonds), όταν ο τελευταίος συντελεστής είναι διαφορετικός από τους υπολοίπους ή όντως όταν σκεφτόμαστε κάποια σειρά αριθμών στην οποία καθένα από τα a_i είναι διαφορετικά; Η απάντηση είναι θετική. Η απόδειξη θα δοθεί πλήρως παρακάτω, λόγω της εσωτερικής πληροφορίας που παρέχει για την έννοια της διάρκειας.

1.6 Η γενική εξίσωση για τη διάρκεια

Στην εξίσωση (1.2.3) αλλάζουμε το πρόσημο κάθε στοιχείου και διαιρούμε με $1+r$:

$$\frac{1}{1+r} - \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{(1+r)^{i+1}} - \frac{1}{(1+r)^{n+1}} = 0.$$

Πολλαπλασιάζοντας με n παίρνουμε

$$\frac{n}{1+r} - \sum_{i=1}^{n} \frac{na_i}{(1+r)^{i+1}} - \frac{n}{(1+r)^{n+1}} = 0.$$

Γράφουμε τώρα την παραπάνω εξίσωση ως εξής:

$$\begin{aligned} P_1 &=: \frac{n}{1+r} - \frac{(n-1)a_1}{(1+r)^2} - \frac{(n-2)a_2}{(1+r)^3} - \cdots - \frac{a_{n-1}}{(1+r)^n} \\ &= \frac{a_1}{(1+r)^2} + \frac{2a_2}{(1+r)^3} + \cdots + \frac{(n)a_n}{(1+r)^{n+1}} + \frac{n}{(1+r)^{n+1}} \\ &=: -P_2. \end{aligned}$$

Θα αναλύσουμε τα P_1 και P_2 ξεκινώντας πρώτα από το P_2, διότι έχει την πιο οικεία ερμηνεία. Για την ακρίβεια το P_2 παριστάνει την τροποποιημένη διάρκεια D ενός ομλοόγου. Συνεπώς, η εξίσωση για το $D = P_2$ καθίσταται η

$$D = -\frac{a_1}{(1+r)^2} - \frac{2a_2}{(1+r)^3} - \cdots - \frac{n(a_n+1)}{(1+r)^{n+1}}. \tag{1.6.1}$$

Η εξίσωση (1.6.1) μπορεί να ισχύει για ένα ομόλογο με ονομαστική αξία (par bond) ή για ένα ομόλογο χωρίς ονομαστική αξία (non par bond), διότι τα a_i δεν έχουν προσδιοριστεί· μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε τιμή.

Επειδή $P_1 = -P_2$, το P_1 είναι ίσο με το αρνητικό της τροποποιημένης διάρκειας D. Η επιπλέον σημασία του P_1 δεν είναι τόσο προφανής. Θα δείξουμε ότι το P_1 είναι ίσο με το αριστερό μέλος της εξίσωσης (1.5.1), δηλαδή, ίσο με το γινόμενο των $n-1$ αποστάσεων μεταξύ των $n-1$ ριζών και της πραγματικής n-οστής ρίζας, διαιρούμενα με $(1+r)^n$.

Για την απόδειξη, ακολουθούμε τον συλλογισμό του [5]. Παίρνουμε την εξίσωση τιμών του γενικού ομολόγου (universal bond) (1.2.3), αλλάζουμε τα πρόσημα, πολλαπλασιάζουμε με $(1+r)^n$ και θέτουμε $(1+r) = z$. Προσκύπτει η εξίσωση

$$z^n - a_1 z^{n-1} - \cdots - a_{n-1} z - a_n + 1 = 0. \tag{1.6.2}$$

Σημειώνυουμε εδώ ότι εν γένει $z \in \mathbb{C}$· οι διάφορες τιμές της ρίζας $(1+r) = z$ μπορούν να είναι οποιοσδήποτε αριθμός, είτε μιγαδικός είτε πραγματικός.

Γνωρίζουμε από το θεμελιώδες θεώρημα της άλγεβρας ότι η εξίσωση (1.6.2) έχει n μιγαδικές ρίζες $z_1, \ldots, z_n$. Παραγοντοποώντας λοιπόν την (1.6.2) έχουμε

$$z^n - a_1 z^{n-1} - \cdots - a_{n-1} z - a_n + 1 = 0 = \prod_{i=1}^{n} (z - z_i). \tag{1.6.3}$$

Στο διάγραμμα D $(n = 4)$, η τιμή z είναι το σημείο z· η θέση του μπορεί να επιλεγεί αυθαίρετα. Τα z_i είναι οι ρίζες. Τώρα η απόλυτη τιμή του γινομένου στο δεξιό μέλος της (1.6.3) είναι ίσο με το γινόμενο των απολύτων τιμών, δηλαδή:

$$\left|\prod_{i=1}^{n}(z-z_i)\right| = \prod_{i=1}^{n}|z-z_i|. \tag{1.6.4}$$

Η απόλυτη τιμή της διαφοράς $|z-z_i|$ δύο μιγαδικών αριθμών είναι η απόσταση μεταξύ των δύο σημείων z και z_i στο επίπεδο. Αν θέσουμε $z = z_n = 1+r$, δηλαδή την πρώτη θετική πραγματική ρίζα, τότε οι εξισώσεις (1.6.3) και (1.6.4) είναι ίσες με 0, διότι το τελευταίο στοιχείο και των δύο είναι 0. Ωστόσο, τα υπόλοιπα στοιχεία του δεξιού μέλους της (1.6.3) και της (1.6.4) δεν είναι ίσα με 0. Το γινόμενο αυτών των ύπολοίπων $(n-1)$ στοιχείων είναι το πρώτο στοιχείο του αριστερού μέλους της (1.5.1), δηλαδή $\prod_{i=1}^{n} d_i$.

Διαιρούμε την (1.6.3) με $z - z_n$ και έχουμε διά της ευκλείδειας διαίρεσης στο αριστερό σκέλος ότι:

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n-1}(z-z_i) &= z^{n-1} + (z_n - a_1)z^{n-2} + \cdots + (z_n^{n-2} - a_1 z_n^{n-1} - \cdots - a_{n-2})z \\ &\quad + \left(z_n^{n-1} + \cdots + \sum_{i=1}^{n-1} a_i z_n^{n-1-i}\right).\end{aligned} \tag{1.6.5}$$

Θέτουμε τώρα $z = z_n = 1+r$ στη (1.6.5), διαιρούμε το αποτέλεσμα με το $(1+r)^n$ και βρίσκουμε την απόλυτη τιμή των δύο μελών. Αυτό μας δίνει την:

$$\frac{\prod_{i=1}^{n-1} d_i}{(1+r)^n} = \left|\frac{n}{1+r} - \frac{(n-1)a_1}{(1+r)^2} - \frac{(n-2)a_2}{(1+r)^3} - \cdots - \frac{a_{n-1}}{(1+r)^n}\right|. \tag{1.6.6}$$

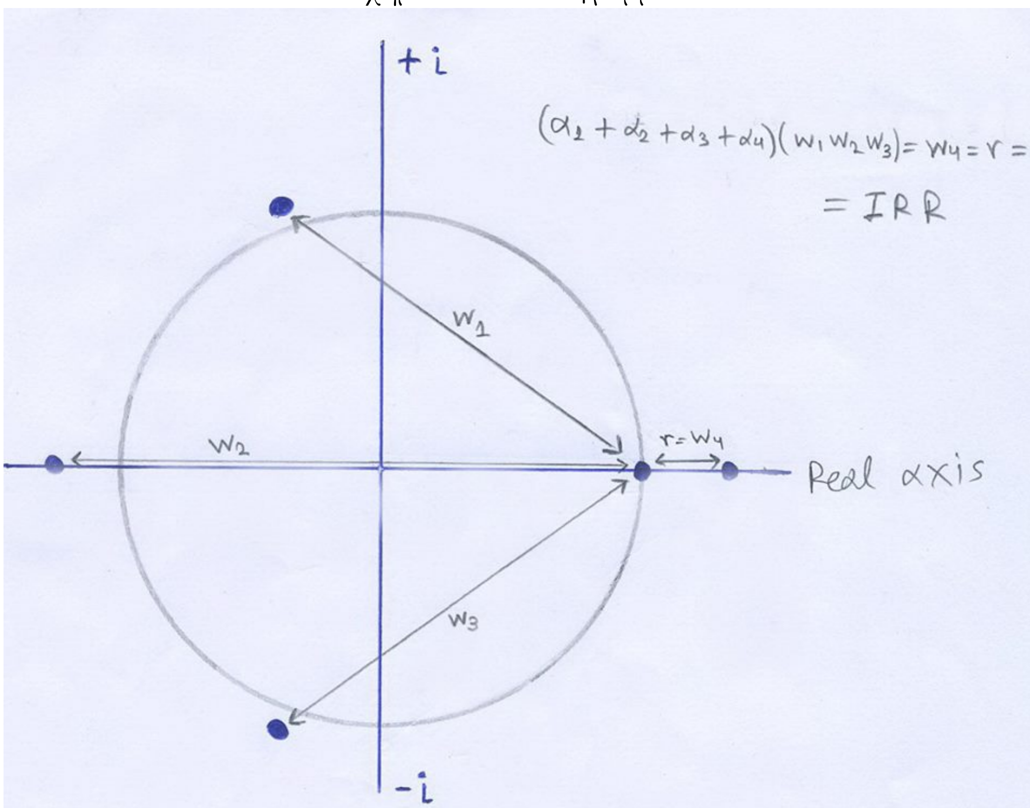
Η σχέση (1.6.6) ολοκληρώνει την απόδειξη· το δεξιό μέλος της εντός του απολύτου είναι το $P_1 = -D$.

Συμπεραίνουμε επίσης ότι η εξίσωση (1.5.1) ισχύει, για οποιεσδήποτε τιμές των a_i.

1.7 Ο εσωτερικός δείκτης απόδοσης (IRR)

Έχουμε δηλώσει αλλα δεν έχουμε αποδείξει, ότι η τιμή $r = IRR$, όπου- $1+r$ είναι η πρώτη θετική πραγματική ρίζα, είναι ένα απλό είδος μέσης τιμής της σειράς των αριθμών a_i.

Σχήμα 1.7.1: Διάγραμμα F



Ως έννοια, η IRR δεν θεωρείται απλή, διότι συνήθως συναντάται στην περίπλοκη άλγεβρα της χρονικής τιμής χρηματικής εξίσωσης. Το να λύσουμε ως προς r την εξίσωση (1.2.3), όπου $n = 1, 2, 3$ ή 4, είναι στοιχειώδες αν και στις τελευταίες δύο περιπτώσεις αποτελεί μία μάλλον μακροσκελή διαδικασία. Όταν $n > 4$ η επίλυση γίνεται χρησιμοποιώντας αριθμητικές μεθόδους, όπως για παράδειγμα μέθοδο Muller. Ακόμα όμως και η ταχύτητα των μεθόδων αυτών εξαρτάται από την πρώτη τιμή που δίνουμε.

Ωστόσο, στο μιγαδικό επίπεδο μπορούμε να δούμε τι είναι η IRR, ακόμα και αν ο υπολογισμός της παραμένει δύσκολος. Εξετάζουμε το διάγραμμα F $(n = 4)$:

Οι τρείς γραμμές που συνδέουν τις 4 ρίζες στο διάγραμμα E έχουν αντικατασταθεί απο 4 γραμμές που συνδέουν όλες τις 4 ρίζες σε ένα άλλο σημείο στο επίπεδο, το σημείο $(1,0)$ στον πραγματικό άξονα. Αυτό είναι το ίδιο, σαν να θέτουμε $z=1$ στην εξίσωση (1.6.3), αντί να θέσουμε $z=z_n$ όπως κάναμε στην προηγούμενη ενότητα).

Το αποτέλεσμα είναι η εξίσωση

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \prod_{i=1}^{n} |1-z_i|, \tag{1.7.1}$$

και το διάγραμμα F $(n=4)$. Στο αριστερό σκέλος της (1.7.1) έχουμε την απόλυτη τιμή του αριστερού σκέλους της εξίσωσης (1.6.2) για $z=1$. Στο δεξιό σκέλος έχουμε απόλυτη τιμή της παραγοντοποιημένης μορφής του, με $z=1$. Συμπεραίνουμε ότι το άθροισμα των συντελεστών a_i είναι ίσο με το γινόμενο των n αποστάσεων από τις ρίζες μέχρι το σημείο $(1,0)$. Μία από αυτές τις αποστάσεις είναι $IRR = r = |1-z_n|$. Αν $w_i = 1-z_i$, $i=1,\ldots,n$, η εξίσωση

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{\prod_{1\le i\le (n-1)} w_i} = r = IRR \tag{1.7.2}$$

δείχνει ότι το $r = IRR$ είναι ένα είδος μέσου βάρους των συντελεστών στη πολυνυμική εξίσωση· τα βάρη γίνονται αποστάσεις στο μιγαδικό επίπεδο. Όπως και η διάρκεια D, έτσι και η IRR έχει μια απλή ερμηνεία στο μιγαδικό επίπεδο διαμέσου της εξίσωσης (1.7.2). Σύμφωνα με τον τύπο αυτό, μπορούμε να ερμηνεύσουμε την IRR και ως ένα μέτρο κεντρικής ροπής.

1.8 Μία σύνοψη των αποτελεσμάτων

Συνοψίζουμε εδώ τα αποτελέσματά μας όταν έχουμε μεταβλητή ροή περιόδων a_i.

1. Οι n ρίζες βρίσκονται όλες πάνω ή γύρω από τον μοναδιαίο κύκλο.

2. Η πραγματική ρίζα $1+r$, βρίσκεται κοντά στο σημείο (1,0), διότι ο εσωτερικός δείκτης απόδοσης r, αντικατοπτρίζει το μέσο μέγεθος της ροής· είναι ένα μέτρο κεντρικ΄κς ροπής.

3. Οι υπόλοιπες $n-1$ ρίζες βρίσκονται έξω από τον μοναδιαίο κύκλο αν τα a_i μεταβάλλονται, ή πάνω στον μοναδιαίο κύκλο αν είναι σταθερά.

4. Οι αποστάσεις των ριζών από τα κυκλοτομικά σημεία πάνω στον μοναδιαίο κύκλο (οι ¨ουρές ¨, t_1, t_2 και t_3 στο διάγραμμα C) κατά κάποιο τρόπο αντικατοπτρίζουν τη διασπορά των a_i από την περίπτωση ομαλής ροής.

5. Το γινόμενο των αποστάσεων των $n-1$ ριζών από τη n-οστή πραγματική ρίζα διαιρούμενο διά $(1+r)^n$, δίνει τη τροποποιημένη διάρκεια.

Τα αποτελέσματα που αφορούν το IRR και τη διάρκεια D αποδείχθηκαν ανεξάρτητα από το είδος των συντελεστών της πολυωνυμικής εξζίσωσης. Συνεπώς, η διάρκεια D ενός ομολόγου, με ή χωρίς ονομαστική αξία, είναι απλά μία ιδιαίτερη περίπτωση ενός γενικότερου μοντέλου: οι n συντελεστές είναι ίσοι (ομόλογο με ονομαστική αξία), ή $n-1$ από αυτούς είναι ίσοιι και ο n-οστός είναι διαφορετικός (ομόλογο χωρίς ονομαστική αξία). Στη γενική περίπτωση, έχουμε τύπο για την διάρκεια ανεξάρτητο από τί τιμές παίρνουν τα a_i όπως και από το πλήθος τους. Μέσω λοιπόν του μιγαδικού επιπέδου έχουμε μία νέα οπτική για τις δύο αυτές σημαντικές οικονομικές έννοιες που παρουσιάζονται στην χρονική τιμή εξίσωσης χρήματος.

Κεφάλαιο 2

Οικονομική μιγαδική ανάλυση (για προσδοκώμενη οικονομική ισορροπία και ευστάθεια)

2.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό δείχνουμε σε αδρές γραμμές ότι οι εξισώσεις Cauchy-Riemann και η εξίσωση του Laplace, υπό το γενικό πλαίσιο της μιγαδικής οικονομικής θεωρίας, δομούν τον πυρήνα της οικονομικής μιγαδικής ανάλυσης: περιγράφουν την οικονομική ισορροπία και ευστάθεια. Συνδυάζοντας τις θεμελιώδεις λύσεις των εξισώσεων Cauchy-Riemann και Laplace, οι ευσταθείς οικονομικές συναρτήσεις αποκαλύπτονται· στις συναρτήσεις αυτές η συνάρτηση προϊόντος είναι η X και η συνάρτηση χρήματος είναι η Y· αυτές είναι οι ίδιες συναρτήσεις του επιπέδου τιμών P και της ποσότητας Q, και δίνουν την μιγαδική οικονομική συνάρτηση $Z = X + Yi$ που εξαρτάται από τα P και Q. Με αριθμητικές προσομοιώσεις παίρνουμε οπτικά αποτελέσματα, με πολλαπλές λύσεις, παρόλο που οι θεμελιώδεις λύσεις παραμένουν μοναδικές.

Η γενική ισορροπία και η οικονομική ευστάθεια είναι βασικά θέματα στα οικονομικά, ειδικότερα στη νομισματική οικονομική [9], [10], η οποία σχετίζεται με την οικονομική ευστάθεια [11], [12] και το νομισματικό μηχανισμό [13]. Ακολουθώντας το πλαίσιο της μιγαδικής οικονομικής [14], [15], προσπαθούμε να αναπτύξουμε την οικονομική μιγαδική ανάλυση με τον τρόπο που θα περιγραφεί παρακάτω.

2.2 Μιγαδική οικονομική θεωρία: το πλαίσιο

Ας θεωρήσουμε την εξής γενική περίπτωση: έστω η πραγματική μεταβλητή P που παριστάνει το επίπεδο τιμών ενός προϊόντος και έστω η πραγματική μεταβλητή Q που παριστάνει την ποσότητα του προϊόντος. Έστω τώρα οι συναρτήσεις $X = X(P,Q)$ (συνάρτηση προϊόντος) και $Y = Y(P,Q)$ (συνάρτηση χρήματος). Σημειώνουμε ότι στη συνάρτηση X περιέχεται το κεφάλαιο K και το προϊόν J, ενώ στη συνάρτηση Y συμπεριλαμβάνονται τα ήδη υπάρχοντα χρήματα (Me) και το αυξανόμενο χρήμα (Mi).

Θεωρούμε τη μιγαδική οικονομική συνάρτηση

$$M = M(X,Y) = Z(P,Q) = X(P,Q) + iY(P,Q). \tag{2.2.1}$$

Αν οι συναρτήσεις X και Y είναι αναλυτικές και η M είναι ολόμορφη, τότε ικανοποιούνται οι συνθήκες Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial X}{\partial P} - \frac{\partial Y}{\partial Q} = 0, \tag{2.2.2}$$

$$\frac{\partial X}{\partial Q} - \frac{\partial Y}{\partial P} = 0. \tag{2.2.3}$$

Στην περίπτωση αυτή, οι X και Y είναι αρμονικές. Συνεπώς, ικανοποιούν την εξίσωση Laplace:

$$\triangle X = \frac{\partial^2 X}{\partial P^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial Q^2} = \triangle Y = \frac{\partial^2 Y}{\partial P^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial Q^2} = 0. \tag{2.2.4}$$

Σε μιγαδική μορφή, οι εξισώσεις (2.2.2) και (2.2.3) γράφονται ως:

$$\frac{\partial Z}{\partial P} + i\frac{\partial Z}{\partial Q} = 0. \tag{2.2.5}$$

Οι δε εξισώσεις (2.2.4) γράφονται ως:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial P^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial Q^2} = 0. \tag{2.2.6}$$

Ορισμός 2.2.1. Ένα οικονομικό σύστημα λέγεται *μιγαδικά ευσταθές* αν ικανοποιούνται οι εξισώσεις (2.2.5) και (2.2.6).

Γενικά, διαφορετικές αρχικές και συνοριακές συνθήκες καθορίζουν διαφορετικές λύσεις των εξισώσεων (2.2.5) και (2.2.6). Ωστόσο, μπορούμε να εξετάσουμε τις θεμελιώδεις ολόμορφες λύσεις τους που προκύπτουν από τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\frac{\partial Z}{\partial P} + i\frac{\partial Z}{\partial Q} = -\delta(P, Q), \tag{2.2.7}$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial P^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial Q^2} = -\delta(P, Q). \tag{2.2.8}$$

Όπου δ είναι η συνάρτηση Dirac, βλ. Παράρτημα II. Αυτές είναι μερικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης και δεύτερης τάξης αντίστοιχα.

2.3 Αναλυτικές λύσεις

Είναι γνωστό ότι (βλ. Παράρτημα II) η θεμελιώδης λύση της εξίσωσης (2.2.7) είναι η

$$Z(P, Q) = \frac{1}{2\pi(P + iQ)}. \tag{2.3.1}$$

Ένας σχετικά απλός τρόπος για να το δείξουμε αυτό, είναι ο παρακάτω. Κάνοντας μετασχηματισμό Fourier και στα δύο μέλη της (2.2.7) ως προς Q, παίρνουμε μια συνήθη διαφορική εξίσωση ως προς P με παράμετρο s:

$$\frac{\mathrm{d}\hat{Z}(P, s)}{\mathrm{d}P} - s\hat{Z}(P, s) = -\delta(P). \tag{2.3.2}$$

Η λύση της (2.3.2) είναι :

$$\hat{Z}(P, s) = (H(P) + C(s))e^{sP}, \tag{2.3.3}$$

στην οποία το $C(s)$ είναι κάποια σταθερά που εξαρτάται απο το s. Τότε η θεμελιώδης λύση της εξίσωσης (2.2.7) γίνεται :

$$Z(P, Q) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-isP}\hat{Z}(P, s)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2\pi(P + iQ)}.$$

Η θεμελιώδης λύση της (2.2.8) (βλ. Παράρτημα II) είναι η

$$Z(P, Q) = \frac{1}{4\pi}\ln(P^2 + Q^2). \tag{2.3.4}$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (2.2.1), (2.3.1) και (2.3.4) , έχουμε την

$$Z(P,Q) = X + iY = \frac{1}{2\pi(P+iQ)} = \frac{1}{4\pi}\ln(P^2+Q^2), \tag{2.3.5}$$

έτσι ώστε η *κατάσταση ισορροπίας* μπορεί να γραφτεί ως

$$\frac{1}{P+iQ} = \frac{1}{2}\ln(P^2+Q^2) = \frac{1}{2}\ln(P-iQ)(P+iQ). \tag{2.3.6}$$

Ισοδύναμα:

$$\frac{P+iQ}{2}\ln(P-iQ)(P+iQ) - 1 = 0. \tag{2.3.7}$$

Η εξίσωση (2.3.7) δομεί τη μαθηματική κατάσταση οικονομικής ισορροπίας και ευστάθειας: αυτό σημαίνει ότι ένα μιγαδικά ευσταθές οικονομικό σύστημα που χαρακτηρίζεται από την συνάρτηση προϊόντος X και συνάρτηση χρήματος Y, έχει ένα ειδικό επίπεδο τιμών P καθώς και μία ειδική ποσότητα παραγωγής Q.

Η εξίσωση (2.3.7) είναι σημαντική για τον εξής λόγο: γνωρίζουμε ότι η εξίσωση Laplace απλώς περιγράφει ευσταθή φαινόμενα, συνεπώς κάθε μία από τις παραπάνω εξισώσεις (2.2.7) και (2.2.8), καθώς επίσης και οι λύσεις της Cauchy-Riemann (2.3.1) και της Laplace (2.3.4) προσαρμόζονται στην οικονομική ευστάθεια. Όμως ο συνδυασμός των λύσεων των δύο εξισώσεων Laplace και Cauchy-Riemann που δίνεται από την (2.3.7) εκφράζει την οικονομική ισορροπία.

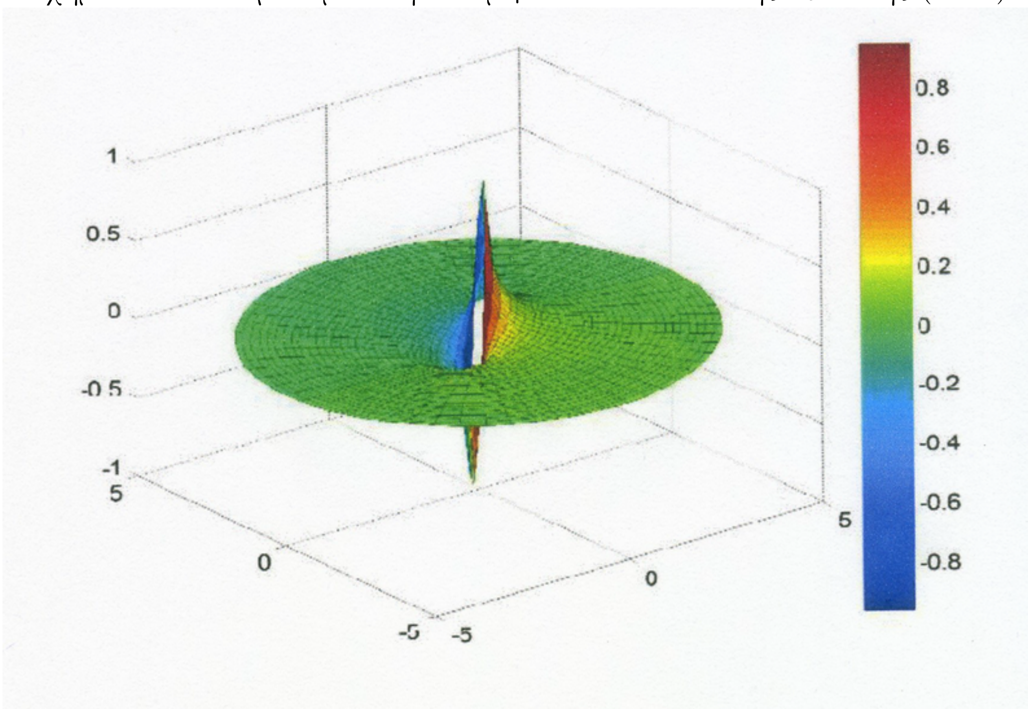
Στην επόμενη ενότητα θα εφαρμόσουμε αριθμητικές μεθόδους για να μελετήσουμε τις λύσεις των (2.3.1), (2.3.4) και (2.3.7).

2.4 Αριθμητική προσομοίωση

Για τη κατανόηση των οικονομικών συμπεριφορών των λύσεων (2.3.1), (2.3.4) και (2.3.7), προσπαθούμε να προσομοιώσουμε τα αριθμητικά αποτελεσματά τους, χρησιμοποιώντας Matlab. Οι οπτικές μιγαδικές λύσεις της εξίσωσης (2.3.1) μπορούν να εκφραστούν με το ακόλουθο πρόγραμμα στη Matlab, όπως φαίνεται στο σχήμα (1).

```
figure(1)
z=5*cplxgrid(30);
```

Σχήμα 2.4.1: Η προσομοίωση των μιγαδικών λύσεων της εξίσωσης (2.3.1).

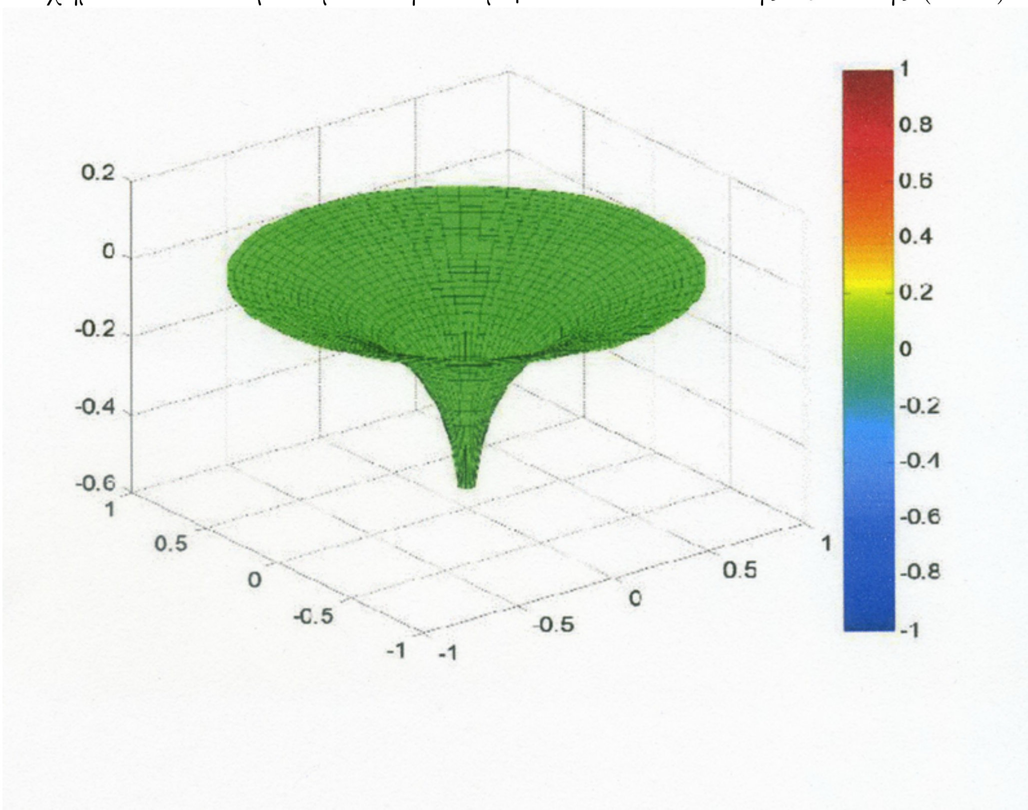



```
p=real(z);
q=imag(z);
s=p+q*i;
w=s.^ (-1)/(2*pi)
%mesh(p,q,z);
surf(p,q,real(w),imag(w));
colorbar
```

Χρησιμοποιώντας την ίδια μέθοδο, οι οπτικές μιγαδικές λύσεις της εξίσωσης (2.3.4) μπορούν να φανούν στο σχήμα(2) με το ακόλουθο πρόγραμμα.

```
figure(2)
z=cplxgrid(30);
p=real(z);
q=imag(z);
w=log(p.^ 2+q.^ 2)/(4*pi);
```

Σχήμα 2.4.2: Η προσομοίωση των μιγαδικών λύσεων της εξίσωσης (2.3.4).



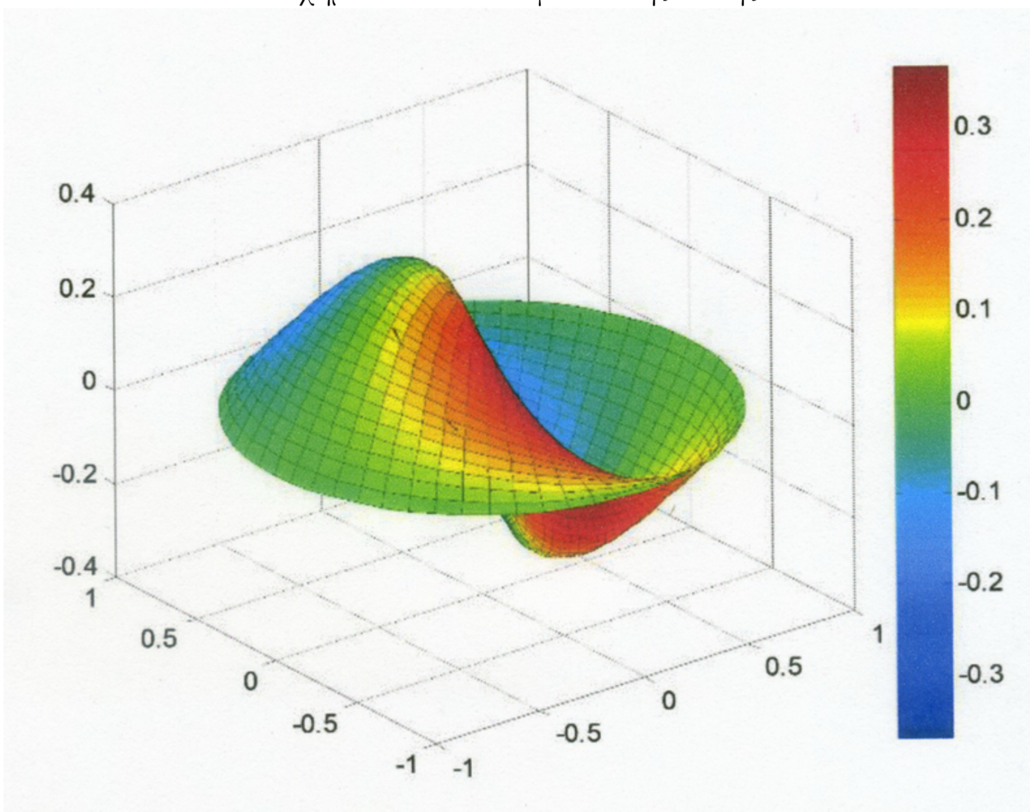

```
%mesh(p,q,z);
surf(p,q,real(w),imag(w));
colorbar
```

Στο σχήμα (1) και στο σχήμα (2), τα κεντρικά σχήματα δείχνουν το πραγματικό μέρος και η γραμμή με τα χρώματα δείχνει το φανταστικό μέρος.

Τα σχήματα (1) και (2) φανερώνουν την ύπαρξη των λύσεων (2.3.1) και (2.3.4) αντίστοιχα. Η βασική μορφή των κοινών τους λύσεων, προσδιορίζεται από τη μιγαδική συνάρτηση

$$Z = \frac{P+iQ}{2}\ln(P-iQ)(P+iQ). \tag{2.4.1}$$

Σχήμα 2.4.3: Η επιφάνεια της λύσης.



Από αυτήν παίρνουμε την επιφάνεια της λύσης, η οποία μπορεί να δειχθεί χρησιμοποιώντας το ακόλουθο πρόγραμμα , όπως στο σχήμα (3).

```
figure(3)
z=cplxgrid(30);
p=real(z);
q=imag(z);
s=p+q*i;
w=s.*log(p.^ 2+q.^ 2)/2
%mesh(p,q,z);
surf(p,q,real(w),imag(w));
colorbar
```

Τα παραπάνω αποτελέσματα επαληθεύουν αριθμητικά την ύπαρξη μιγαδικών λύσεων. Ωστόσο, οι λύσεις δεν είναι μοναδικές.

Υπάρχουν διάφορες ειδικές λύσεις [16] της εξίσωσης Laplace (2.2.6), το οποίο σημαίνει ότι υπάρχουν πολλές περιπτώσεις (πολλαπλών καταστάσεων) οικονομικής ισορροπίας και ευστάθειας.

Αν $Z(P,Q)$ είναι η λύση της εξίσωσης Laplace, τότε οι ακόλουθες συναρτήσεις είναι επίσης λύσεις σε κάθε σημείο όπου ορίζονται. Τα A, B, C, D, θ και λ είναι τυχαίες σταθερές.

$$Z_1(P,Q) = AZ(\pm P\lambda + C, \pm Q\lambda + D) + B,$$
$$Z_2(P,Q) = AZ(P\cos\theta + Q\sin\theta, -P\sin\theta + Q\cos\theta),$$
$$Z_3(P,Q) = AZ\left(\frac{P}{P^2+Q^2}, \frac{Q}{P^2+Q^2}\right).$$

Παρακάτω σημειώνουμε ορισμένες ειδικές λύσεις της εξίσωσης Laplace (2.2.6) σε καρτεσιανές συντεταγμένες:

$$Z(P,Q) = AP + BQ + C,$$
$$Z(P,Q) = A(P^2 - Q^2) + BPQ,$$
$$Z(P,Q) = A(P^3 - 3PQ^2) + B(3P2Q - Q^3),$$
$$Z(P,Q) = \frac{AP + BQ}{P^2+Q^2} + C,$$
$$Z(P,Q) = \exp(\pm nP)(A\cos nQ + B\sin nQ),$$
$$Z(P,Q) = (A\cos nP + B\sin nP)\exp(\pm nQ),$$
$$Z(P,Q) = (A\cos nP + B\sin nP)(C\sinh nQ + D\cosh nQ),$$
$$Z(P,Q) = (A\sinh nP + B\cosh nP)(C\cos nQ + D\sin nQ),$$

όπου τα A, B, C, D και n είναι τυχαίες σταθερές.

Η εξίσωση (2.2.6) σε πολικές συντεταγμένες r, ϕ, γράφεται :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial Z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 Z}{\partial \phi^2} = 0, \tag{2.4.2}$$

όπου $r = \sqrt{P^2+Q^2}$ και $P = r\cos\phi$, $Q = r\sin\phi$. Ενδιαφερόμαστε για τις παρακάτω μορφές ειδικών λύσεων:

Α. Λύσεις της μορφής $Z = Z(r)$.

Β. Λύσεις της μορφής $Z(r,\phi) = f(r)(C\cos m\phi + D\sin m\phi)$, $m \in \mathbb{N}$.

Στην περίπτωση Α η (2.4.2) γίνεται

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial Z}{\partial r}\right) = 0 \implies r\frac{\partial Z}{\partial r} = A \implies \frac{\partial Z}{\partial r} = \frac{A}{r}.$$

Άρα

$$Z(r) = A\ln(r) + B,$$

όπου A και B σταθερές.

Στην περίπτωση Β εξετάζουμε ενδεικτικά την υποπερίπτωση

$$f(r) = Ar^m + \frac{B}{r^m}.$$

Τότε,

$$Z(r,\phi) = (Ar^m + \frac{B}{r^m})(C\cos m\phi + D\sin m\phi),$$

όπου A, B, C, D είναι τυχαίες σταθερές και $m = 1, 2, \ldots$

2.5 Συμπεράσματα

Γενικά, αν $Z = X(P,Q) + iY(P,Q)$, όπου τα X και Y είναι συναρτήσεις των πραγματικών μεταβλητών P και Q, τότε τα πραγματικά και φανταστικά μέρη της Z ικανοποιούν την εξίσωση Laplace δύο διαστάσεων ($\triangle X = 0, \triangle Y = 0$). Έτσι, προσδιορίζοντας ολόμορφες συναρτήσεις Z και παίρνοντας τα πραγματικά και φανταστικά μέρη τους, αποκτούμε διάφορες ειδικές λύσεις της εξίσωσης Laplace δύο διαστάσεων. Ωστόσο, για οικονομική ισορροπία και ευστάθεια, εκτός από την εξίσωση Laplace (2.2.6), υπάρχει και η εξίσωση Cauchy-Riemann (2.2.5), ώστε οι θεμελιώδεις λύσεις γίνονται οι εξισώσεις (2.3.6) και (2.3.7), οι οποίες είναι μοναδικές.

Σύμφωνα με την οικονομική μιγαδική ανάλυση, το οικονομικό σύστημα καθορίζεται από τη συνάρτηση προιόντος X και τη συνάρτηση χρήματος Y, οι οποίες επίσης εξαρτώνται από το επίπεδο τιμών P και την ποσότητα παραγωγής Q. Έτσι, οι πολιτικές προτάσεις επικεντρώνονται στο να δίνουν παραπάνω προσοχή στη τιμή και τη ποσότητα. Αφού το οικονομικό σύστημα είναι τόσο σύνθετο, η παραπάνω ανάλυση και οι προτάσεις είναι μόνο μία άκρως απλοποιημένη εκτίμηση των οικονομικών αγορών.

Κεφάλαιο 3

Παράρτημα 1

Στο κεφάλαιο αυτό επεξηγούμε τους διάφορους οικονομικούς όρους που παρουσιάζονται στην εργασία.

3.1 Χαρτοφυλάκιο

Στα χρηματοοικονομικά, χαρτοφυλάκιο ονομάζεται η συλλογή περουσιακών στοιχείων που βρίσκονται στην κυριότητα μιας οικονομικής μονάδας. Ένα χαρτοφυλάκιο συνήθως αποτελείται απο τοποθετήσεις σε πολλά διαφορετικά στοιχεία με διαφορετικές αποδόσεις. Αυτό γίνεται στα πλαίσια της διαδικασίας που ονομάζεται διαφοροποίηση και έχει σκοπό τη μείωση συγκεκριμένων κατηγοριών κινδύνου.

3.2 Χρεώγραφο

Στα χρηματοοικονομικά, χρεώγραφο είναι ένα επενδυτικό διαπραγματεύσιμο προϊόν που εκδίδεται από μία κυβέρνηση, μια εταιρία ή κάποιο άλλο οργανισμό και αποτελεί αποδεικτικό χρέους ή δικαίωμα σε διανεμόμενα κέρδη. Το νομικό πρόσωπο που εκδίδει χρεώγραφα ονομάζεται εκδότης. Σε αυτά περιλαμβάνονται τα παρακάτω:

- ομόλογα·
- έντοκα γραμμάτια Δημοσίου·
- μερίσματα αμοιβαίων κεφαλαίων·

- προθεσμιακά συμβόλαια (Forwards)·
- συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης (Futures)·
- συμβόλαια δικαωομάτων προαίρεσης·
- παραστατικά απόκτησης μετοχών (warrants)·
- μετοχές.

3.3 Ομόλογα

Τα ομόλογα είναι μακροπρόθεσμα χρεώγραφα τα οποία εκδίδονται είτε από το Δημόσιο, είτε από ιδιωτικούς οργανισμούς (πχ τράπεζες, επιχειρήσεις, κλπ) και χρησιμοποιούνται για το δανεισμό κεφαλαίων από το επενδυτικό κοινό. Στις περισσότερες χώρες του κόσμου, υπάρχουν καλά οργανωμένες δευτερογενείς αγορές για τα χρεώγραφα αυτά, γεγονός που προσθέτει σημαντική ρευστότητα στην αγορά και τα κάνει ελκυστικά στον επενδυτή. Ο εκδότης του ομολόγου, έχει την υποχρέωση να καταβάλλει στη λήξη της σύμβασης, την ονομαστική αξία αυτού, και στη περίπτωση των ομολόγων με τοκομερίδιο, σε τακτά προκαθορισμένα διαστήματα ποσό χρημάτων (το τοκομερίδιο). Τα ομόλογα εκδίδονται γενικώς για ένα καθορισμένης διάρκειας χρονικό διάστημα, μεγαλύτερο του ενός έτους. Με άλλα λόγια, ένα ομόλογο είναι απλώς ένα δάνειο το οποίο αντλείται από τον εκδότη του δανείου, όχι μέσω της τραπεζικής διαμεσολάβησης, αλλά μέσω των κεφαλαιοαγορών. Ο εκδότης είναι ο οφειλέτης, ο κάτοχος ομολόγων ο δανειστής και το τοκομερίδιο (αν υπάρχει) είναι ο τόκος. Οι κάτοχοι ομολόγων είναι στην ουσία δανειστές του εκδότη. Τα ομόλογα είναι πολύ σημαντικά προιόντα της κεφαλαιοαγοράς, διότι δίνουν την ευκαιρία σε έναν επενδυτή να κερδίσει σταθερές αποδόσεις με σχετικά μικρό ή μηδενικό κίνδυνο απώλειας του αρχικού κεφαλαίου, αλλά ταυτόχρονα δίνουν και τη δυνατότητα πολύ υψηλών αποδόσεων για αυτούς που είναι διατεθειμένοι να κερδοσκοπίσουν πάνω στη μεταβολή των επιτοκίων.

3.4 Ονομαστική αξία ομολόγου

Είναι η αξία που αναγράφεται στο ομόλογο όταν εκδίδεται και συνήθως είναι η τιμή εξόφλησης, δηλαδή το χρηματικό ποσό που θα αποδοθεί στον επενδυτή στη λήξη του ομολόγου.

3.5 Τοκομερίδιο

Η πληρωμή τοκομεριδίου για ένα επενδυτικό προϊόν, λ.χ. για ένα ομόλογο, είναι μία περιοδική πληρωμή τόκου την οποία λαμβάνει ο κάτοχός του κατά το διάστημα μεταξύ της έκδοσης και της ωρίμανσής του. Το τοκομερίδιο συνήθως ορίζεται σαν το ποσό πληρωμής που λαμβάνει ο κάτοχος του επενδυτικού προϊόντος. Υπολογίζεται προσθέτοντας τη συνολική ποσότητα των τοκομεριδίων τα οποία πληρώνονται κάθε χρόνο και διαιρώντας με την ονομαστική αξία του επενδυτικού προϊόντος. Για παράδειγμα, αν ένα ομόλογο έχει ονομαστική αξία $1000 και το τοκομερίδιο είναι 5 %, τότε το σύνολο των τοκομεριδίων που πληρώνονται ανά έτος, είναι $50.

3.6 Ελαστικότητα τιμής ως προς επιτόκιο

Γενικά, ελαστικότητα ζήτησης ως προς την τιμή είναι ένας δείκτης που μετρά το βαθμό στον οποίο η ζητούμενη ποσότητα ενός προϊόντος ανταποκρίνεται στη μεταβολή της τιμής του. Η ελαστικότητα τιμής ως προς το επιτόκιο μετρά την ευαισθησία της τιμής του ομολόγου με μηδενικο τοκομερίδιο, δηλαδή ομόλογο το οποίο δεν περιέχει επιτόκιο (τοκομερίδιο), σε μεταβολες επιτοκίου.

3.7 Τρέχουσα αξία PV

Η PV ή *τρέχουσα αξία* εκφράζει την τρέχουσα τιμή μίας ισοδύναμης μελλοντικής πληρωμής, ή σειράς πληρωμών, η οποία έχει προεξοφληθεί από ένα κατάλληλο επιτόκιο. Δεδομένης μίας τιμής απόδοσης, οι μελλοντικές ροές ρευστότητας μειώνονται κατά τη τιμή έκπτωσης (discount rate) και όσο πιο υψηλή είναι αυτή, τόσο χαμηλότερη είναι η τρέχουσα αξία (PV) της μελλοντικής ρευστότητας. Ο καθορισμός της κατάλληλης τιμής έκπτωσης είναι το κλειδί για την ακριβή εκτίμηση της μελλοντικής ρευστότητας· είτε αποτελούν έσοδα, είτε χρέη.

3.8 Μελλοντική αξία FV

Η FV ή *μελλοντική αξία* είναι η αξία ενός επενδυτικού αγαθού σε μία συγκεκριμένη ημερομηνία στο μέλλον, δεδομένου ενός ρυθμού ανάπτυξης ως προς τον χρόνο. Αν για παράδειγμα, βασιζόμενη σε ένα εγγυημένο ρυθμό ανάπτυξης, γινόταν σήμερα μία επένδυση $10000 η οποία θα είχε αξία $100000 σε 20 χρόνια, τότε η μελλοντική αξία (FV) της επένδυσης \$10000, είναι \$100000. Ο υπολογισμός της FV μπορεί να γίνει με δύο διαφορετικούς τρόπους, αναλόγως του είδους του επιτοκίου. Αν μία επένδυση κερδίζει από απλό (σταθερό) επιτόκιο, τότε ο τύπος έχει ως εξής:

$$FV = I(1 + (RT)).$$

Εδώ, με I συμβολίζουμε την ποσότητα της αρχικής επένδυσης, με R το επιτόκιο και με T τον αριθμό των ετών που θα διαρκεσει η επένδυση.

3.9 Ποσότητα πληρωμής PMT

Η συνάρτηση της ποσότητας πληρωμής PMT υπολογίζει τη σταθερή περιοδική πληρωμή που απαιτείται να εφοφληθεί σε ένα δάνειο ή σε μία επένδυση, δεδομένου ενός σταθερού επιτοκίου μέσα σε μία συγκεκριμένη περίοδο. Η PMT συνδέεται με την PV διαμέσου της εξίσωσης:

$$PV = PMT\left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right),$$

όπου i είναι το επιτόκιο και n ο αριθμός των χρονικών περιόδων.

3.10 Εσωτερικός δείκτης απόδοσης (IRR)

Για την παράγραφο αυτή, παραπέμπουμε στο [20]. Ο εσωτερικός δείκτης απόδοσης ή εσωτερική αποδοτικότητα (IRR) είναι ένα δημοφιλές μέτρο που χρησιμοποιείται στον προϋπολογισμό επενδύσεων. Είναι ένα μέτρο του δείκτη αποδοτικότητας, δηλαδή δείχνει την απόδοση ενός επενδυτικού προγράμματος. Εάν ο εσωτερικός δείκτης απόδοσης είναι μεγαλύτερος ή ίσος από την απαιτούμενη απόδοση, η επένδυση γίνεται αποδεκτή. Στην αντίθετη περίπτωση, η πρόταση απορρίπτεται. Ο $IRR = r$, η PV, η PMT και η FV συνδέονται με την εξίσωση τιμών ομολόγων: Θεωρούμε την *εξίσωση τιμών ομολόγων*

$$PV = \sum_{i=1}^{n} \frac{PMT}{(1+r)^i} + \frac{FV}{(1+r)^n}.$$

Υποθέτουμε ότι μας προσφέρεται μια ευκαιρία επένδυσης η οποία απαιτεί να καταθέσουμε PV =\$1000 και έχει μια προβλεπόμενη εισροή κεφαλαίου

FV =\$1200 μετά από $n = 2$ χρόνια. Υποθέτοντας $PMT = 0$, η απόδοση αυτής της επένδυσης είναι το προεξοφλητικό επιτόκιο που κατορθώνει η τωρινή αξία των \$1200 εισροής κεφαλαίου, να είναι ίση με την τωρινή αξία των \$1000 εκροής κεφαλαίου :

$$\$1000 = \frac{\$1200}{(1+IRR)^2}.$$

3.11 Διάρκεια (Duration)

Παραπέμπουμε στο [3] για την παράγραφο αυτή. Η διάρκεια D είναι ένα μέτρο του κινδύνου αγοράς (Market Risk) μέσω της παρακολούθησης της ευαισθησίας των τιμών ενός ομολόγου σε μία συγκεκριμένη αλλαγή των επιτοκίων. Δηλαδή η διάρκεια μετρά την ευαισθησία της τιμής ενος χρεωγράφου στις κινήσεις των επιτοκίων εκφραζόμενη σε αριθμό ετών. Όσο μεγαλύτερη η διάρκεια, τόσο μεγαλύτερος ο κίνδυνος αλλά και η πιθανότητα μεγάλων κερδών.

Είναι ευκολότερο να εξετάσουμε την έννοια της διάρκειας χρησιμοποιώντας τη συνεχόμενη ωρίμανση $y = YTM$ (Yield to maturity), δηλαδή την απόδοση που θα αποκομίσει ο επενδυτής ενός ομολόγου κρατώντας το έως τη λήξη του. Ισοδύναμα, η διάρκεια είναι ένα μέτρο μέσου χρόνου που χρειάζεται κάποιος να περιμένει ώστε να λάβει την πληρωμή από το τοκομερίδιο. Για ένα ομόλογο με μηδενικό τοκομερίδιο, το οποίο ωριμάζει σε n χρόνια, η διάρκεια είναι επίσης n χρόνια. Ωστόσο, ένα ομόλογο με τοκομερίδιο που ωριμάζει σε n χρόνια, έχει διάρκεια λιγότερη από n, αφού κάποιες από τις πληρωμές έχουν πραγματοποιηθεί πριν τα n χρόνια. Ας προσδιορίσουμε την επιρροή στην τιμή ενός ομολόγου με τοκομερίδιο, σε μία αλλαγή στο y. Η τιμή του ομολόγου με τοκομερίδια C_i (όπου C_n περιλαμβάνει την τιμή αποκατάστασης), είναι :

$$P = \sum_{i=1}^{n} C_i \exp(-yt_i) = \sum_{i=1}^{n} PV_i,$$

όπου $PV_i = C_i \exp(-yt_i)$ είναι η τρέχουσα τιμή ρευστότητας C_i. Παραγωγίζοντας ως προς y και διαιρώντας και τα δύο μέλη με P έχουμε:

$$\frac{P'(y)}{P} = -\sum_{i=1}^{n} t_i \cdot \frac{C_i \exp(-yt_i)}{P} = -\sum_{i=1}^{n} t_i \cdot \frac{PV_i}{P}.$$

Ορίζουμε τώρα τη διάρκεια D ως:

$$D = \sum_{i=1}^{n} t_i \cdot \frac{PV_i}{P} = -\frac{P'(y)}{P}.$$

Από τον ορισμό της D, βλέπουμε ότι είναι μία μέση τιμή με βάρη χρόνου της παρούσας τιμής πληρωμών (ως ένα ποσοστό της τιμής). Αν ξέρουμε τη διάρκεια ενός ομολόγου, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε το κέρδος ή την απώλεια κεφαλαίου, ως επακόλουθα μίας μικρής αλλαγής στην απόδοση.

Κεφάλαιο 4

Παράρτημα 2

4.1 Μετασχηματισμός Fourier

Για ό,τι ακολουθεί, βλ. [21]. Ο μετασχηματισμός Fourier είναι ένας μαθηματικός μετασχηματισμός με πολλές εφαρμογές στη φυσική και τη μηχανική. Πολύ συχνά, μετατρέπει μά μαθηματική συνάρτηση του χρόνου, $f(t)$ σε μία νέα συνάρτηση που συμβολίζεται με $\hat{f}$ ή F. Η νέα συνάρτηση είναι τότε γνωστή ως *μετασχηματισμός Fourier της* f. Η F μπορεί επίσης να αντιστραφεί μέσω του μετασχηματισμού Fourier. Έτσι, με δεδομένη τη συνάρτηση $\hat{f}$, μπορεί να προσδιοριστεί η αρχική συνάρτηση f. Τις περισσότερες φορές η f είναι μια πραγματική συνάρτηση και η $\hat{f}$ μία μιγαδική συνάρτηση, όπου ένας μιγαδικός αριθμός περιγράφει τόσο το πλάτος όσο και τη φάση της αντίστοιχης συνιστώσας συχνότητας.

Υπάρχουν πολλές κοινές συμβάσεις για τον καθορισμό του μετασχηματισμού Fourier $\hat{f}$ μίας ολοκληρώσιμης συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Εδώ χρησιμοποιούμε τον ορισμό:

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \mathrm{e}^{-2\pi i x \xi} \mathrm{d}x,$$

για κάθε πραγματικό ξ.

Όταν η ανεξάρτητη μεταβλητή x αντιπροσωπεύει το χρόνο ο μετασχηματισμός της μεταβλητής ξ αντιπροσωπεύει τη συχνότητα. Υπό κατάλληλες συνθήκες, η f προσδιορίζεται από την $f(x)$, μέσω του *αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier*:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) \mathrm{e}^{2\pi i \xi x} \mathrm{d}\xi,$$

για κάθε πραγματικό αριθμό x.

4.1.1 Ιδιότητες μετασχηματισμού Fourier

Υποθέτουμε ότι $f(x)$, $g(x)$ και $h(x)$ είναι ολοκληρώσιμες συναρτήσεις, είναι Lebesgue μετρήσιμες στην πραγματική ευθεία και ικανοποιούν την:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \mathrm{d}x < \infty.$$

Οι μετασχηματισμοί Fourier των συναρτήσεων αυτών συμβολίζονται με $\hat{f}(\xi)$, $\hat{g}(\xi)$ και $\hat{h}(\xi)$ αντίστοιχα.

Ο μετασχηματισμός Fourier έχει τις εξής βασικές ιδιότητες (βλ. Pinsky 2002).

- **Γραμμικότητα**: για οποιουσδήποτε μιγαδικούς αριθμούς a και b, αν $h(x) = af(x) + bg(x)$, τότε

$$\hat{h}(\xi) = \alpha \cdot \hat{f}(\xi) + b \cdot \hat{g}(\xi).$$

- **Μετάφορά**: για κάθε πραγματικό αριθμό x_0 αν $h(x) = f(x - x_0)$, τότε

$$\hat{h}(\xi) = \mathrm{e}^{-2\pi i x_0 \xi} \hat{f}(\xi).$$

- **Διαμόρφωση**: για κάθε πραγματικό αριθμό ξ_0 αν $h(x) = \mathrm{e}^{2\pi i x \xi_0} f(x)$, τότε

$$\hat{h}(\xi) = \hat{f}(\xi - \xi_0).$$

- **Κλιμάκωση**: Για ένα μη μηδενικό πραγματικό αριθμό α, αν $h(x) = f(\alpha x)$, τότε

$$\hat{h}(\xi) = \frac{1}{|\alpha|} \hat{f}(\frac{\xi}{\alpha}).$$

  Η περίπτωση $\alpha = -1$ οδηγεί στο χρόνο αναστροφής ο οποίος αναφέρει: αν $h(x) = f(-x)$, τότε $\hat{h}(\xi) = \hat{f}(-\xi)$.

- **Σύζευξη**: Αν $h(x) = \overline{f(x)}$, τότε $\hat{h}(\xi) = \overline{\hat{f}(\xi)}$. Ειδικότερα, εάν η f είναι πραγματική, τότε έχουμε

$$\hat{f}(-\xi) = \overline{\hat{f}(\xi)}.$$

Και αν είναι καθαρά φανταστική, έχουμε

$$\hat{f}(-\xi) = -\overline{\hat{f}(\xi)}.$$

4.2 Θεώρημα συνεχούς εξάρτησης

Η παραπομπή μας εδώ είναι στο [19]. Θεωρούμε ένα δυναμικό σύστημα όπου το διανυσματικό πεδίο f εξαρτάται από μία ή περισσότερες παραμέτρους $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$ που για λόγους οικονομίας τις γράφουμε ως διάνυσμα του $\mathbb{R}^m$, $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m)$. Είναι εύλογο να υποθέσουμε ότι το διανυσματικό πεδίο εξαρτάται ομαλά από τις παραμέτρους πχ. οι συνιστώσες του, $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ είναι τουλάχιστον συνεχώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις των $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$. Το δυναμικό σύστημα λοιπόν, είναι της μορφής

$$\dot{x} = f(x, \mu),$$

όπου το διανυσματικό πεδίο f είναι κλάσης τουλάχιστον C^1 σε ένα ανοικτό υποσύνολο E του $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Ας συμβολίσουμε με $\Phi(t, x, \mu)$ τη λύση που τη στιγμή t_0 περνά από το x. Είναι διαισθητικά προφανές ότι, κάθε τέτοια λύση του συστήματος είναι συνεχής συνάρτηση των παραμέτρων.

4.3 Ευστάθεια διαφορικών εξισώσεων

Για τα παρακάτω παραπέμπουμε στο [18]. Θεωρούμε το ακόλουθο σύστημα διαφορικών εξισώσεων:

$$\begin{aligned} x' &= \Phi(t, x) \qquad (4.3.1) \\ x(t_0) &= x^0, \end{aligned}$$

όπου

$$x = (x_1, \ldots, x_n), \quad \Phi(t, x) = (\Phi_1(t, x), \ldots, \Phi_n(t, x)), \quad x(t_0) = x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0).$$

Στις εφαρμογές, οι αρχικές συνθήκες είναι το αποτέλεσμα υπολογισμού στην αρχική στιγμή $t = t_0$ των δεδομένων ενός φυσικού φαινομένου και δεν μπορούν να υπολογιστούν με απόλυτη ακρίβεια. Τα μικρά σφάλματα στον υπολογισμό των αρχικών δεδομένων μπορούν να μας οδηγήσουν σε μία λύση τελείως διαφορετική από εκείνη που ψάχνουμε.

Είναι λοιπόν σημαντικό να ορίσουμε τις συνθήκες, υπό τις οποίες οι μικρές διαταραχές των αρχικών δεδομένων προκαλούν μικρές διαταραχές της λύσης. Αν το t μεταβάλλεται σε κάποιο πεπερασμένο διάστημα $[t_0, T]$, η απάντηση δίνεται απο το θεώρημα συνεχούς εξάρτησης της λύσης από τα αρχικά δεδομένα. Αν το t μπορεί να παίρνει οσοδήποτε μεγάλες τιμές, τότε με αυτά τα προβλήματα ασχολείται η θεωρία της ευστάθειας.

Ορισμός 4.3.1. Η λύση $\phi(t)$ της 4.3.1, ονομάζεται *ευσταθής κατά Lyapunov*, αν για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει $\delta(\epsilon) > 0$, τέτοιο ώστε για οποιαδήποτε λύση $x(t)$ της (4.3.1), η αρχική τιμή της οποίας ικανοποιεί την

$$|x(t_0) - \phi(t_0)| < \delta, \tag{4.3.2}$$

η ανισότητα

$$|x(t) - \phi(t)| < \epsilon, \tag{4.3.3}$$

ικανοποιείται για όλα τα $t \geq t_0$.

Αν τουλάχιστον για μία λύση $x(t)$ που ικανοποιεί την (4.3.2), δεν ισχύει η (4.3.3), λέμε ότι η $\phi(t)$ είναι *ασταθής*.

Αν η $\phi(t)$ είναι ευσταθής και επιπλέον ικανοποιέι την

$$\lim_{t\to\infty} |x(t) - \phi(t)| = 0, \tag{4.3.4}$$

τότε λέμε ότι η $\phi(t)$ είναι *ασυμπτωτικά ευσταθής*.

4.4 Συνάτηση δέλτα του Dirac

Έστω η δ είναι η συνάρτηση δέλτα του Dirac στο επίπεδο:

$$\delta(x, y) = \begin{cases} \infty & \text{για} \quad (x, y) = (0, 0) \\ 0 & \text{για} \quad (x, y) \neq (0, 0) \end{cases}$$

Η συνάρτηση δέλτα δεν είναι συνάρτηση με την παραδοσιακή έννοια. Ο αυστηρός της ορισμός είναι είτε ως μέτρο, είτε ως κατανομή. Αναφέρουμε ορισμένες ιδιότητες :

- Είναι ομογενής βαθμού -2: $\delta(\alpha(x,y)) = |\alpha|^{-2}\delta(x,y)$.
- Είναι αναλλοίωτη από περιστροφές και ανακλάσεις: $\delta(p(x,y)) = \delta(x,y)$.
- Αν θεωρήσουμε την δ ως συνάρτηση της μεταβλητής x, $\delta(x,y) = \delta_y(x)$, τότε ο μετασχηματισμός Fourier είναι :

  $$\hat{\delta}_y(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-2\pi i x\xi}\delta(x,y)\mathrm{d}x.$$

  Ομοίως και αν $\delta(x,y) = \delta_x(y)$.

4.5 Εξισώσεις Cauchy - Riemann

Έστω η μιγαδική

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y} = -\delta(x,y).$$

Θεωρώντας την u σαν συνάρτηση του y, $u(x,y) = u_x(y)$, εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό Fourier στην

$$\triangle u = u_{xx} + u_{yy} = -\delta(x-x', y-y'),$$

παίρνουμε ότι

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\hat{u}_x(\xi) - \xi\hat{u}_x(\xi) = \hat{\delta}_x(\xi).$$

Την ξαναγράφουμε ως:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\hat{u}(x,\xi) - \xi\hat{u}(x,\xi) = \hat{\delta}(x,\xi),$$

Η οποία είναι μία γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης ως προς x της οποίας η λύση είναι της μορφής

$$\hat{u}(x,\xi) = (h(x) + C(\xi))e^{\xi x},$$

όπου η $C(\xi)$ είναι μία σταθερά που εξαρτάται από το ξ. Κάνοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier, παίρνουμε

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i\xi x}\hat{u}(x,\xi)\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi(x+iy)}.$$

4.6 Εξίσωση Laplace

Μία θεμελιώδης λύση της εξίσωσης Laplace ικανοποιεί την

$$\triangle u = u_{xx} + u_{yy} = -\delta(x - x', y - y'). \tag{4.6.1}$$

Το σημείο (x', y') καλείται σημείο πηγής. Από τον ορισμό (4.6.1), έπεται ότι αν ολοκληρώσουμε την λαπλασιανή γύρω από κάθε χωρίο D που περιέχει το (x', y'), τότε για δίσκο D κέντρου (x', y') και ακτίνας α, έχουμε

$$\iint_D \triangle u \, dx \, dy = -1.$$

Από το θεώρημα απόκλισης του Gauss εφαρμόζοντας πολικές συντεταγμένες, παίρνουμε

$$-1 = \int_{\partial D} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} \mathrm{d}s = 2\pi \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\bigg|_{r=a}. \tag{4.6.2}$$

Προκύπτει

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} = \frac{1}{2\pi r} \implies u = \frac{1}{4\pi r}.$$

Έχουμε

$$\iint_{intD} \triangle u \, dx \, dy = \iint_{intD} \left(\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial u}{\partial y}\right] \right) dxdy =$$

$$= \int_{\partial D} \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) \cdot \frac{(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} ds = \int_{x^2+y^2=\alpha^2} \frac{x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathrm{d}\theta.$$

Περνώντας πολικές συντεταγμένες, έχουμε:

$$\text{Για} \quad x = r\cos\theta \quad \text{και} \quad y = r\sin\theta,$$

τότε

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \cos\theta\frac{\partial u}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x}{r}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{y}{r}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\partial u}{\partial r}.$$

Δηλαδή

$$\iint_{intD} \triangle u \, dx \, dy = \oint_{x^2+y^2=\alpha^2} \frac{\partial u}{\partial r} \, ds = 2\pi \frac{du}{dr}\bigg|_{r=a}.$$

Τώρα η (4.6.2) είναι

$$-1 = 2\pi\alpha \frac{du}{dr}\bigg|_{r=a} \Longrightarrow \frac{du}{dr} = -\frac{1}{2\pi}\log r.$$

Βιβλιογραφία

[1] Turner P.; *Modern Macroeconomic Analysis*. McGraw - Hill, 1993.

[2] F. Fabozzi; *Bond markets, Analysis and Strategies*. Prentice-Hall, (3d ed.) 1996.

[3] Cuthbertson K.; *Quantitative Financial Economics*. Wiley, 1996.

[4] Riley K., Hobson M. and Bence S.; *Mathematical Methods for Physics and Engineering*. Cambridge University Press, 1997.

[5] Nahin P.; *An Imaginary Tale: The Story of* $\sqrt{-1}$. Princeton, 1998.

[6] Erdos P. and Turan P.; *On the distribution of roots of polynomials*. Annals of Mathematics, Vol.51, No. 1, 1950.

[7] Farahmand K.; *Topics in Random Polynomials*. Longman, Pitman Research Notes in Mathematics, 1998.

[8] Needham T.; *Visual Complex Analysis*. Oxford University Press, 1998.

[9] Samuelson P. A.; *Foundations of Economic Analysis*. Harvard University Press (Enlarged ed.), 1983.

[10] Friedman B. M. and Hahn F. H.; *Handbook of Monetary Economics*. Elsevier. Vol. 1-2, 1990.

[11] Friedman M.; *A monetary and fiscal framework for economic stability*. American Economic Review, 38 (3): 245-264, 1948.

[12] Hahn F. H.; *The stability of growth equilibrium*. Quarterly Journal of Economics, 74:206-226, 1960.

[13] Modigliani F.; *The monetary mechanism and its interaction with real phenomena*. Review of Economics and Statistics, 45: 79-107, 1963.

[14] Ye F. Y.; *A probe into the unifaction of micro-macro-economics: Arrow-Debreu-Mundel-Flemming model as a standard model*. Euro-Asian Journal of Economics and Finance, 3(1), 1-8, 2015.

[15] Ye F. Y.; *The commodity-money analytical framework: a unified approach to micro-macro-economics and complex economics*. Euro-Asian Journal of Economics and Finance, 3(1), 44-52, 2015.

[16] Polyanin A. D. and Manzhirov A. V.; *Handbook of Mathematics for Engineers and Scientists*. Boca Raton (US): Taylor and Francis Group, 2007.

[17] Fred Y. Ye.; *Economic Complex Analysis for Approaching Economic Equilibrium and Economic Stability*. iSchool, Nanjing University, Euro-Asian Journal of Economics and Finance, Vol. 3, Issue 3, 2015.

[18] Tersenov Alkis.; *Brief Notes for Ordinary Differential Equations*. University of Crete, 2011.

[19] www.repository.kallipos.gr.· *Το Θεώρημα Ύπαρξης και Μοναδικότητας.*

[20] Fabozzi F. CFA and Peterson P. Drake CFA.; *The Basics of Finance-An Introduction to Financial Markets, Business Finance, and Portfolio Management*. Frank J. Fabozzi Series-Wiley, 2010.

[21] Fourier and Freeman.; *Αναλυτική θεωρία της θερμότητας*. Fourier, 1822 , p. 525, Fourier and Freeman, 1878 , p. 408 , Titchmarsh, 1948 , p. 1.

[22] Erdelyi T.; *An Improvement of the Erdos Turan theorem on the distributions of zeros of polynomials*. C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008) 267-270 .

[23] M.J. Osborne; *Visualising financial concepts in the complex plane*. Computers in Higher Education Economics Review, 2000, Vol. 14, Issue 1, 4–8.