Tilings της ευθείας φραγμένης πυκνότητας και εφαρμογές

Μεταπτυχιακή εργασία
του
Σπυριδάκη Εμμανουήλ

Πανεπιστήμιο Κρήτης, Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών, Ηράκλειο Κρήτης, 2023

Στους γονείς μου

Περιεχόμενα

0.1 Εισαγωγή 2

1 Tilings της ευθείας και στοιχεία αρμονικής ανάλυσης 3

1.1 Ορισμοί 3

1.2 Στοιχεία αρμονικής ανάλυσης και κατανομές 5

1.3 Θεωρία LCA ομάδων 9

1.4 Κάποιες βασικές προτάσεις 12

2 Tilings της ευθείας φραγμένης πυκνότητας 15

2.1 Βασικά λήμματα 15

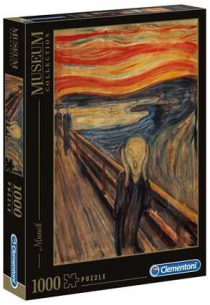
2.2 Ο ρόλος της ανάλυσης Fourier στα tilings φραγμένης πυκνότητας 21

2.3 Tilings από συναρτήσεις με συμπαγή φορέα 31

3 Παραδείγματα 35

0.1 Εισαγωγή

Βρισκόμαστε σε ένα κατάστημα παιχνιδιών και πέφτει το μάτι μας στο παρακάτω puzzle.



Αφού το αγοράσουμε, γυρίζουμε στο σπίτι μας και ξεκινάμε να το λύσουμε. Κοιτάμε τις διαστάσεις της τελικής εικόνας που θα προκύψει (αναφέρονται στο κουτί που μόλις αγοράσαμε) και παίρνουμε ένα χαρτόνι με αυτές τις διαστάσεις. Πάνω στο χαρτόνι τοποθετούμε τα κομμάτια του puzzle με τέτοιο τρόπο ώστε να προκύψει τελικά η εικόνα που φαίνεται στο κουτί του puzzle που αγοράσαμε. Οι κινήσεις των κομματιών του puzzle που μπορούμε να κάνουμε είναι οι μεταφορές και οι περιστροφές αυτών. Η διαδικασία αυτή ίσως κρατήσει μέρες, βδομάδες ή και μήνες προκειμένου να βρεθούν όλες οι σωστές θέσεις των κομματιών. Το τελικό όμως αποτέλεσμα ανταμοίβει (συνήθως) όλο τον κόπο και τον χρόνο που αφιερώσαμε μιας και το καφέ και αδιάφορο χαρτόνι έχει αντικατασταθεί από την εικόνα του puzzle που είναι πλέον έτοιμη για να διακοσμήσει το σπίτι μας. Από μαθηματική σκοπιά αυτό που κάναμε είναι να καλύψουμε το χαρτόνι από (τα μεταφερμένα και περιστραμμένα κατάλληλα) κομμάτια του puzzle. Φυσικά ο κατασκευαστής έχει κάνει όλη τη «δύσκολη» δουλειά για εμάς: Δεδομένων των διαστάσεων του νοητού ορθογωνίου που καλύπτει η τελική εικόνα, βρήκε τα κομμάτια του puzzle και έδειξε ότι αν τα μεταφέρουμε κατάλληλα θα καλύψουν όλο το ορθογώνιο. Σκοπίμως δεν αναφέρθηκαν οι περιστροφές των κομματιών του puzzle μιας και ο κατασκευαστής γνωρίζει τη θέση κάθ'ενός κομματιού στο puzzle.

Στα μαθηματικά υπάρχει ένας ολόκληρος κλάδος που μελετά τρόπους με τους οποίους μπορούμε να καλύψουμε χώρους από μεταφορές γεωμετρικών αντικειμένων με την ονομασία Tilings by translates. Ο κλάδος αυτός φαίνεται να ξεκίνησε από το Ρώσσο κρυσταλλογράφο Yevgraf Fyodorov το 1891 που απέδειξε ότι κάθε περιοδικό tiling του επιπέδου προκύπτει από ένα εκ των δεκαεπτά διαφορετικών ομάδων ισομετριών. Άλλοι συντελεστές στον κλάδο αυτό ήταν οι Alexei Vasilievich Shubnikov, Nikolai Belov (1964), Heinrich Heesch και Otto Kienzle (1963). Σε αυτήν την εργασία θα παρουσιαστεί κάπως αναλυτικά το άρθρο των M.N. Κολουντζάκης και J.C. Lagarias [7]. Σε πλήρη αντιστοιχία με το παράδειγμα που αναφέραμε στην πρώτη παράγραφο θα γίνουμε κατασκευαστές puzzle με δοσμένο χώρο την πραγματική ευθεία και ως κομμάτια του puzzle συναρτήσεις και μεταφορές αυτών. Θα δείξουμε πότε οι μεταφορές μιας συνάρτησης που έχει κάποιες ιδιότητες καλύπτουν την ευθεία και θα περιγράψουμε ορισμένους τρόπους (μεταφορών) που υλοποιούν τέτοιες καλύψεις.

Κεφάλαιο 1

Tilings της ευθείας και στοιχεία αρμονικής ανάλυσης

1.1 Ορισμοί

Σε αυτή την εργασία θα μελετήσουμε tilings της πραγματικής ευθείας από μεταφορές μίας πραγματικής Lebesgue ολοκληρώσιμης συνάρτησης f ορισμένη στο $\mathbb{R}$. Πρωτού δώσουμε τον ορισμό του tiling θα αναφέρουμε σχεδόν επιγραμματικά κάποιες βασικές έννοιες που θα τις χρησιμοποιούμε συχνά.
Μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, λέγεται Lebesgue μετρήσιμη αν για κάθε $a \in \mathbb{R}$, το σύνολο $(f)^{-1}((a, +\infty))$ είναι Lebesgue μετρήσιμο. Μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ λέγεται Lebesgue μετρήσιμη αν η συνάρτηση του πραγματικού και του φαντιστικού μέρους της αντίστοιχα είναι Lebesgue μετρήσιμη.
Η σ-άλγεβρα των Lebesgue μετρήσιμων συνόλων συμβολίζεται με $\mathscr{L}_1$
Στο μετρήσιμο χώρο $(\mathbb{R}, \mathscr{L}_1)$ θεωρούμε το μονοδιάστατο μέτρο Lebesgue που το συμβολίζουμε με m_1 και με αυτό ο μετρήσιμος χώρος γίνεται πλήρης χώρος μέτρου.
Μία Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ λέγεται Lebesgue ολοκληρώσιμη (ή m_1 - ολοκληρώσιμη) αν ισχύει ότι :

$$\int_{\mathbb{R}} |f|(x) dm_1(x) < \infty$$

Ο χώρος των Lebesgue ολοκληρώσιμων μιγαδικών συναρτήσεων ορισμένων στην πραγματική ευθεία συμβολίζεται με $\mathscr{L}^1(\mathbb{R})$.
Ο φορέας μίας μιγαδικής συνάρτησης ορισμένη στην πραγματική ευθεία ορίζεται να είναι το μικρότερο κλειστό σύνολο έξω απ'το οποίο η συνάρτηση ισούται με τη μηδενική και το συμβολίζουμε με supp. Προκύπτει εύκολα ότι για το φορέα μίας συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ισχύει η παρακάτω ισότητα:

$$\mathrm{supp}(f) = cl\{x \in \mathbb{R} | f(x) \neq 0\}$$

με cl να συμβολίζουμε τη κλειστότητα ενός υποσυνόλου της πραγματικής ευθείας ως προς τη τοπολογία που επάγεται από τη νόρμα της απόλυτης τιμής.
Ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ λέγεται διακριτό αν κάθε φραγμένο υποσύνολό του είναι πεπερασμένο

σύνολο. Είναι προφανές ότι τα διακριτά υποσύνολα της ευθείας είναι πληθαριθμικά το πολύ αριθμήσιμα συνόλα.
Είμαστε τώρα σε θέση να δώσουμε τον ορισμό του tiling.

Ορισμός 1. *Έστω $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ και A ένα διακριτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Λέμε ότι η συνάρτηση f δίνει tiling της ευθείας από μεταφορές-στοιχεία του συνόλου A σε ύψος $w \in \mathbb{R}$, αν:*
1) $\sum_{a\in A} |f(x-a)| < \infty$ για m_1-σ.κ. $x \in \mathbb{R}$
2) $\sum_{a\in A} f(x-a) = w$ για m_1- σ.κ.$x \in \mathbb{R}$.
Σε αυτή την περίπτωση μπορούμε εναλλακτικά να λέμε ότι το σύνολο A είναι tile set της ευθείας για τη συνάρτηση f ύψους $w \in \mathbb{R}$.

Βλέποντας τον παραπάνω ορισμό παρατηρούμε ότι κάθε φόρα που θα λέμε για tilings της ευθείας θα έχουμε στο νου μας τρία πράγματα: Μία πραγματική και ολοκληρώσιμη συνάρτηση f, οι μεταφορές της οποίας (ή ισοδύναμα τα μεταφερμένα αντίγραφά της) καλύπτουν το $\mathbb{R}$. Το σύνολο των μεταφορών (ή ισοδύναμα των αντιγράφων) της συνάρτησης f που συνεισφέρουν στην κάλυψη της ευθείας (κοινώς το tile set). Το ύψος του tiling w ή ισοδύναμα το πόσες φορές καλύπτεται η ευθεία από τις μεταφορές της συνάρτησης f. Το τελευταίο φαίνεται εύκολα αν στο δεξί μέλος της 2) του παραπάνω ορισμού αντικαταστήσουμε το w με $w\chi_{\mathbb{R}}$ όπου $\chi_{\mathbb{R}}$ είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση του $\mathbb{R}$.

Στα διακριτά σύνολα- tile sets του ορισμού 1, επιτρέπουμε να μετράμε τα στοιχεία τους, παραπάνω από μία φορές αλλά πάντα (προφανώς) το πλήθος των φορών που επιτρέπουμε να μετρήσουμε κάποιο στοιχείο του συνόλου είναι φυσικός αριθμός και ονομάζεται πολλαπλότητα του στοιχείου που τη συμβολίζουμε με τη συνάρτηση $m(.)$. Τέτοιου είδους σύνολα ονομάζονται πολυσύνολα αλλά σε αυτή την εργασία μπορούμε να τα λέμε απλά σύνολα. Για παράδειγμα το σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων στο οποίο κάθε στοιχείο του το μετράμε όσο η απόλυτη τιμή του (δηλαδή $m(n) = |n|$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$) είναι ένα πολυσύνολο.

Όπως αναφέραμε και παραπάνω ένα διακριτό σύνολο A ικανοποιεί την εξής ιδιότητα: Για κάθε $T \in \mathbb{R}$ το σύνολο $A \cap [T, T+1)$ είναι πεπερασμένο ή ισοδύναμα:

$$card(A \cap [T, T+1)) \leq C_T \tag{1.1}$$

όπου $card(.)$ είναι μέτρο που μετράει τον πληθάριθμο ενός υποσυνόλου της ευθείας ενώ η ποσότητα C_T είναι ένας θετικός αριθμός που εξαρτάται από το $T \in \mathbb{R}$. Όπως θα δούμε και στο δεύτερο κεφάλαιο, ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα διακριτά σύνολα για το οποία υπάρχει μία θετική σταθερά που δεν εξαρτάται από το $T \in \mathbb{R}$ και ικανοποιεί την (1.1) για κάθε $T \in \mathbb{R}$. Τέτοιου είδους σύνολα τα λέμε φραγμένης πυκνότητας. Συμβολίζουμε τη ποσότητα $card(A \cap [T, T+1)) = |A \cap [T, T+1)|$ με $N_A(T, T+1)$. Μία συνάρτηση f που έχει ως tile set ένα σύνολο φραγμένης πυκνότητας λέμε ότι δίνει tiling της ευθείας φραγμένης πυκνότητας. Θα δείξουμε μάλιστα ότι κάθε μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση με θετικό ολοκλήρωμα δίνει tiling μόνο φραγμένης πυκνότητας (δηλαδή το τυχόν tile set για την f πρέπει υποχρεωτικά να είναι φραγμένης πυκνότητας).

Ας θεωρήσουμε μία συνάρτηση $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ και δύο tile sets για την f τα A_1,A_2. Αν w_1, w_2 τα αντίστοιχα ύψη των δύο tiling της f μέσω των συνόλων A_1, A_2 τότε το σύνολο $A_1 \cup A_2$ είναι tile set για την f, ύψους $w_1 + w_2$.(Στην περίπτωση που τουλάχιστον ένα από τα δύο tile set είναι

πολυσύνολα, δεχόμαστε ότι και η ένωση τους θα διατηρεί τις πολλαπλότητες του κάθε στοιχείου που ανήκει μόνο στο ένα εκ των δύο συνόλων, ενώ αθροίζει τις δύο πολλαπλότητες των κοινών στοιχείων των A_1,A_2). Επίσης, αν τα tile sets είναι και τα δύο φραγμένης πυκνότητας έπεται ότι και η ένωσή τους είναι σύνολο φραγμένης πυκνότητας. Άρα το σύνολο των υψών των tiling φραγμένης πυκνότητας από μία συνάρτηση f με πράξη τη πρόσθεση έχει τη δομή ημιομάδας και το συμβολίζουμε με $W(f)$.

Ένα tile set A για μία συνάρτηση $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ λέμε ότι είναι διασπάσιμο αν μπορεί να γραφτεί ως ένωση δύο μη κενών συνόλων, με το καθ'ένα να είναι επίσης tile set για την f. Στην αντίθετη περίπτωση το σύνολο A λέγεται αδιάσπαστο tile set για την f.

Στόχος της εργασίας είναι να παρουσιάσουμε τη βασική θεωρία των tiling(s) φραγμένης πυκνότητας από μεταφορές ολοκληρώσιμων συναρτήσεων με συμπαγή φορέα. Θα δώσουμε μία ικανή και αναγκαία συνθήκη για το πότε μία τέτοια συνάρτηση δίνει tiling φραγμένης πυκνότητας. Επίσης θα δώσουμε τη δομή που έχουν τα tile sets φραγμένης πυκνότητας και θα περιγράψουμε τα αδιάσπαστα tile sets φραγμένης πυκνότητας δεδομένης ολοκληρώσιμης συνάρτησης με συμπαγή φορέα. Για να τα δείξουμε όμως αυτά, θα χρειαστούμε κάποιες έννοιες από την ανάλυση Fourier στην ευθεία, τη θεωρία κατανομών αλλά και τη θεωρία των τοπικά συμπαγών αβελιανών ομάδων (ή απλά LCA ομάδες).

1.2 Στοιχεία αρμονικής ανάλυσης και κατανομές

Σε αυτήν την ενότητα θα παρουσιάσουμε σύντομα τη βασική θεωρία της ανάλυσης του Fourier στην πραγματική ευθεία καθώς και κάποια στοιχεία από τη θεωρία κατανομών. Όλα όσα θα πούμε εδώ μπορεί να τα βρει κανείς στα βιβλία των Rudin [1], Grafakos [2]. Ξεκινάμε με συμβολισμούς κάποιων χώρων συναρτήσεων.

Με $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ συμβολίζουμε το χώρο των μιγαδικών λείων συναρτήσεων που ορίζονται στο $\mathbb{R}$, δηλαδή των χώρο των συναρτήσεων που είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμες.

Με $\mathscr{S}$ συμβολίζουμε το χώρο των λείων μιγαδικών συναρτήσεων από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{C}$, των οποίων κάθε παράγωγός τους, φθίνει κατ'απόλυτη τιμή (στο μηδέν) γρηγορότερα από οποιαδήποτε πολυωνυμική συνάρτηση. Δηλαδή μία σύνάρτηση $f \in \mathscr{S}$ αν για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$, υπάρχει θετικός αριθμός $C_{n,m}$, τέτοιος ώστε :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|x^m f^{(n)}(x)\right| = C_{n,m}$$

ή ισοδύναμα, για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$, υπάρχει θετικός αριθμός $C_{n,m}$ τέτοιος ώστε:

$$|f^{(n)}(x)| \leq \frac{C_{n,m}}{(1+|x|)^m}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (με $f^{(n)}$ συμβολίζουμε τη n-οστή παράγωγο της f).

Με $\mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ συμβολίζουμε το χώρο όλων των λείων συναρτήσεων από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{C}$ με συμπαγή φορέα. Είναι προφανές ότι και οι τρεις χώροι που αναφέραμε είναι γραμμικοί πάνω από το $\mathbb{C}$ και μάλιστα:

$$\mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}) \subseteq \mathscr{S} \subseteq \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$$

ως γραμμικοί χώροι. Ορίζουμε τώρα σύγκλιση ακουλουθιών σε αυτούς τους χώρους:
Θα λέμε ότι $f_n \to f$ στον $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ αν $f_n, f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ και για $m, N \in \mathbb{N}$, ισχύει ότι :

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{|x|\leq N} \left|(f_n - f)^{(m)}(x)\right| = 0$$

Αντίστοιχα, θα λέμε ότι $f_n \to f$ στον $\mathscr{S}$, αν $f_n, f \in \mathscr{S}$ και για κάθε $m, N \in \mathbb{N}$, ισχύει ότι:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|x^N (f_n - f)^{(m)}(x)\right| = 0$$

Τέλος, θα λέμε ότι $f_n \to f$ στον $\mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ αν $f_n, f \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ο φορέας $\mathrm{supp}(f_n) \subseteq B$ για κάποιο συμπαγές σύνολο B $\subseteq \mathbb{R}$ και για κάθε $m \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|(f_n - f)^{(m)}(x)\right| = 0$$

Έχοντας τώρα ορίσει συγκλίσεις ακολουθιών στους χώρους που αναφέραμε μπορούμε να θεωρήσουμε τις τοπολογίες που επάγονται από αυτές τις συγκλίσεις. Αποδεικνύεται (αλλά δε θα το δείξουμε εδώ) ότι και οι τρεις χώροι ως προς τις τοπολογίες αυτές είναι πλήρεις.
Τώρα θα ορίσουμε το μετασχηματισμό Fourier. Κανείς πρώτα τον ορίζει στο χώρο $\mathscr{S}$ ως τη γραμμική απεικόνιση $\mathscr{F}$ με τύπο:

$$\mathscr{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x) dm_1(x)$$

για κάθε συνάρτηση $f \in \mathscr{S}$, $\xi \in \mathbb{R}$. Είναι γνωστό ότι ο μετασχηματισμός Fourier είναι ομοιομορφισμός του χώρου $\mathscr{S}$ με τον εαυτό του και άρα έχει συνεχή αντίστροφη απεικόνιση:

$$\mathscr{F}^{-1}(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\mathscr{F}(f)(-x)$$

για κάθε $f \in \mathscr{S}$, $x \in \mathbb{R}$.
Αν τώρα θεωρήσουμε μία συνάρτηση $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ παρατηρούμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier με τον ορισμό που δώσαμε έχει νόημα να εφαρμοστεί στην f επεκτείνοντας τον έτσι σε όλον τον $\mathscr{L}^1(\mathbb{R})$. Μάλιστα ο επεκταμένος μετασχηματισμός Fourier (που θα τον λέμε απλά μετασχηματισμό Fourier) είναι μονομορφισμός από τον χώρο $\mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ στον $\mathscr{C}_0(\mathbb{R})$, με το δεύτερο χώρο να αποτελείται από όλες τις συνεχείς συναρτήσεις από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{C}$ που φθίνουν στο μηδέν καθώς η μεταβλητή τους απειρίζεται κατ'απόλυτη τιμή. Προφανώς ως γραμμική απεικόνιση έχει νόημα και ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier από τον $\mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ στον $\mathscr{C}_0(\mathbb{R})$ αλλά εδώ δεν είναι στ'αλήθεια ο αντίστροφος του μετασχηματισμού Fourier μιας και ο μετασχηματισμός Fourier δεν είναι επί του $\mathscr{C}_0(\mathbb{R})$. Ωστόσο όταν μία συνάρτηση $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ με μετασχηματισμό Fourier μία συνάρτηση που ανήκει στον $\mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ τότε ισχύει ότι:

$$f = \mathscr{F}^{-1} \circ \mathscr{F}(f)$$

σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}$. Από εδώ και στο εξής θα συμβολίζουμε το μετασχηματισμό Fourier μίας συνάρτησης $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ με $\hat{f}$, ενώ τον αντίστροφο του μετασχηματισμού Fourier στην f με $\check{f}$.
Τώρα θα πούμε κάποια πράγματα για τα μιγαδικά μέτρα Borel στην ευθεία. Σε ότι ακολουθεί σε αυτή την εργασία κάθε φορά που θα λέμε μέτρο, θα εννοούμε μία συνολοσυνάρτηση ορισμένη στη

σ-άλγεβρα των συνόλων Borel της ευθείας με τιμές στο επεκταμένο $\mathbb{C}$ που είναι σ-προσθετική και μηδενίζεται στο κενό σύνολο. Αν ένα μέτρο στην ευθεία είναι πεπερασμένο στα συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}$ τότε θα το λέμε μέτρο Radon στην ευθεία. Ένα τετριμμένο παράδειγμα (αλλά ιδιαίτερα χρήσιμο) μέτρου Radon είναι το μέτρο Dirac: Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ ορίζουμε το μέτρο δ_a με τύπο:

$$\delta_a(E) = \begin{cases} 1 & a \in E \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

για κάθε Ε σύνολο Borel. Αν τώρα θεωρήσουμε ένα διακριτό σύνολο $A \subseteq R$ ορίζουμε το μέτρο μ_A με τύπο :

$$\mu_A(E) := \Big(\sum_{a \in A} \delta_a\Big)(E) = \lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{a\in A \\ -n\le a\le n}} \delta_a(E) = \lim_{n\to\infty} card([-n,n] \cap E \cap A) = card(A \cap E)$$

για κάθε Ε σύνολο Borel. Αφού το σύνολο A είναι διακριτό, είναι άμεσο ότι το μέτρο μ_A είναι μέτρο Radon. Επίσης ένα μέτρο Radon μ, λέμε ότι είναι ομοιόμορφα τοπικά πεπερασμένο αν υπάρχει μία θετική σταθερά C τέτοια ώστε :

$$|\mu|(T, T+1) \le C$$

για κάθε $T \in \mathbb{R}$. Με βάση τον ορισμό που μόλις δώσαμε και εκείνον της φραγμένης πυκνότητας για ένα διακριτό σύνολο Α είναι προφανές ότι το μέτρο μ_A είναι ομοιόμορφα τοπικά πεπερασμένο αν και μόνον αν το σύνολο A είναι φραγμένης πυκνότητας.

Τέλος, είναι γνωστό ότι ο γραμμικός χώρος των πεπερασμένων μιγαδικών μέτρων στην ευθεία εφοδιασμένος με τη νόρμα της απόλυτης κύμανσης, είναι χώρος Banach. Μάλιστα κάθε μέτρο αυτού του χώρου αντιστοιχεί σε ένα μοναδικό γραμμικό συναρτησοειδές του χώρου των συνεχών και φραγμένων συναρτήσεων από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{C}$ ως προς τη supremum νόρμα. Αποδεικνύεται επίσης ότι η νόρμα του γραμμικού συναρτησοειδούς που προκύπτει από αυτήν την αντιστοιχία ισούται με τη νόρμα του αντίστοιχου μέτρου. Για το λόγο αυτό, πολλές φορές ταυτίζουμε αυτά τα μέτρα με τα αντίστοιχα γραμμικά συναρτησοειδή του δυϊκού χώρου των συνεχών και φραγμένων συναρτήσεων.

Κλείνουμε τώρα αυτήν την ενότητα παρουσιάζοντας τη βασική θεωρία των κατανομών στο $\mathbb{R}$. Στην αρχή αυτής της ενότητας ορίσαμε κάποιους χώρους συναρτήσεων και τους δώσαμε κάποιες τοπολογίες ώστε οι χώροι αυτοί να είναι πλήρεις. Ορίζονται λοιπόν οι αντίστοιχοι δυϊκοί χώροι τους.

Με $\mathscr{D}'$ συμβολίζουμε το δυϊκό χώρο του $\mathscr{C}_c^\infty$ και τα στοιχεία του λέγονται κατανομές.

Με $\mathscr{S}'$ συμβολίζουμε το δυϊκό χώρο του $\mathscr{S}$, τα στοιχεία του οποίου λέγονται tempered κατανομές.

Με $\mathscr{E}'$ συμβολίζουμε το δυϊκό χώρο του $\mathscr{C}^\infty$, τα στοιχεία του οποίου λέγονται κατανομές με συμπαγή φορέα.

Προτάσεις για το πότε ένα γραμμικό συναρτησοειδές σε κάποιο από τους τρεις χώρους των λείων συναρτήσεων που ορίσαμε είναι συνεχές μπορεί κανείς να βρει στο βιβλίο Grafakos[2], ενότητα 2.3.2. Οι αντίστοιχοι εγκλεισμοί των δυϊκών χώρων είναι οι εξής:

$$\mathscr{E}' \subseteq \mathscr{S}' \subseteq \mathscr{D}'$$

Στον χώρο των tempered κατανομών ορίζουμε το μετασχηματισμό Fourier με τύπο:

$$\widehat{T}(\varphi)(x) := \overline{\Big(T(\hat{\varphi})(-x)\Big)}$$

για κάθε $T \in \mathscr{S}'$, $\varphi \in \mathscr{S}$ και $x \in \mathbb{R}$. Αποδεικνύεται και πάλι ότι ο μετασχηματισμός Fourier στον $\mathscr{S}'$ είναι ομοιομορφισμός του $\mathscr{S}'$ με τον εαυτό του. Επίσης, για κάθε $T \in \mathscr{S}'$, $\varphi \in \mathscr{S}$ ορίζουμε την tempered κατανομή φT με τύπο:

$$(\varphi T)(\psi) := T(\overline{\varphi}\psi)$$

για κάθε $\psi \in \mathscr{S}$. Επιπλέον, ορίζουμε την tempered κατανομή $\varphi \star$ T, όπου $\varphi \in \mathscr{S}$, $T \in \mathscr{S}'$ να ισούται με τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier εφαρμοσμένο στην tempered κατανομή $\widehat{\varphi}\widehat{T}$.

Ο φορέας μίας tempered κατανομής $\widehat{T}$ ορίζεται να είναι το μικρότερο κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ για το οποίο οποιαδήποτε συνάρτηση $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ με φορέα έξω από αυτό το σύνολο έπεται ότι $T(\varphi) = 0$.

Μέτρα Radon και τοπικά ολοκληρώσιμες συναρτήσεις μπορούμε να τις δούμε ως κατανομές, με τον τρόπο που υποδεικνύεται στο βιβλίο του Rudin[1] ενότητα 6.11. Άρα το μέτρο dirac που αναφέραμε μπορούμε να το δούμε ως κατανομή. Για $a \in \mathbb{R}$ η κατανομή dirac (ή συνάρτηση δέλτα) κεντραρισμένη στο a συμβολίζεται με δ_a και ο τύπος της είναι:

$$\delta_a(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x) d\delta_a(x) = f(a)$$

για κάθε $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$. Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ διακριτό σύνολο, τότε το μέτρο Radon μ_A είναι κατανομή αλλά εν γένει όχι tempered. Μία ικανή συνθήκη για την κατανομή μ_A να είναι tempered είναι η :

$$|A \cap [-R, R]| = O(R^c) \tag{1.2}$$

όπου $c > 0$ καθώς $R \to \infty$. (Υπενθυμίζουμε ότι για δύο συναρτήσεις $f(x), g(x)$ ορισμένες στο $\mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(x) = O(g(x))$ καθώς $x \to +\infty$ αν υπάρχει σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε $|f(x)| \leq C|g(x)|$ για αρκετά μεγάλα $x \in \mathbb{R}$.) Επομένως αν το σύνολο A είναι φραγμένης πυκνότητας τότε αυτόματα ικανοποιείται η (1.2) και άρα η κατανομή μ_A είναι tempered και επομένως $\widehat{\mu_A} \in \mathscr{S}'$. Ειδικώτερα αν $A = a\mathbb{Z}$ με $a \neq 0$ τότε από τον τύπο άθροισης του Poisson γνωρίζουμε τον τύπο της tempered κατανομής $\widehat{\mu_A}$:

$$\widehat{\mu_A} = \frac{2\pi}{|a|}\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{2\pi n/a}\Big) \tag{1.3}$$

Το δεξί μέλος της (1.3) είναι και μέτρο Radon (αν $B := (2\pi/a)\mathbb{Z}$, τότε $\widehat{\mu_A} = \frac{2\pi}{|a|}\mu_B$) άρα η κατανομή $\widehat{\mu_A}$ είναι και μέτρο Radon (μάλιστα ομοιόμορφα τοπικά πεπερασμένο) κάτι που εν γένει δεν ισχύει για μία κατανομή $\widehat{\mu_A}$ ακόμα και αν το σύνολο A ικανοποιεί τη σχέση (1.2). Κλείνουμε αυτήν την ενότητα αποδεικνύοντας μία χρήσιμη για το δεύτερο κεφάλαιο πρόταση:

Πρόταση 1. *Έστω συνάρτηση f τοπικά ολοκληρώσιμη στο $\mathbb{R}$ (δηλαδή ολοκληρώσιμη σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$). Αν:*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x) dm_1(x) = 0 \tag{1.4}$$

για κάθε $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ τότε η συνάρτηση f ισούται με τη μηδενική σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}$. Άρα αν δύο κατανομές που αναπαριστώνται από τοπικά ολοκληρώσιμες συναρτήσεις f, g αντίστοιχα(βλ.Rudin[1],ενότητα 6.11) ταυτίζονται στον χώρο $\mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ τότε ισχύει ότι $f = g$ σχεδόν παντού.

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα το ζητούμενο για ολοκληρώσιμη συνάρτηση f που ικανοποιεί την (1.4). Παρατηρούμε πως αν $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση ως προς y $\varphi(x-y) \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ και άρα από την (1.4) έπεται ότι:

$$f \star \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\varphi(x-y)dm_1(y) = 0 \tag{1.5}$$

για κάθε $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R})$. Παίρνοντας το μετασχηματισμό Fourier στην (1.5) έχουμε ότι :

$$\hat{f}(\xi)\hat{\varphi}(\xi) = 0 \tag{1.6}$$

για κάθε $\xi \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε τώρα $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ με $\hat{\varphi}(0) = 1$ βρίσκοντας έτσι ένα συμμετρικό διάστημα της μορφής $[-\delta, \delta]$ στο οποίο η συνάρτηση φ είναι γνήσια θετική και άρα η $\hat{f}$ πρέπει να είναι ίση με τη μηδενική στο διάστημα $[-\delta, \delta]$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε την συνάρτηση $\varphi_n(x) = n\varphi(nx) \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, με μετασχηματισμό Fourier $\widehat{\varphi_n}(\xi) = \hat{\varphi}(\xi/n)$. Αντικαθιστούμε στην (1.6) τη συνάρτηση φ με τη φ_n παίρνοντας έτσι ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η συνάρτηση $\hat{f}$ είναι μη μηδενική στο $[-n\delta, n\delta]$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $\hat{f} = 0$ παντού στο $\mathbb{R}$. Καθώς ο μετασχηματισμός Fourier από τον $\mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ στον $\mathscr{C}_0$ είναι ένα προς ένα, έπεται ότι η f είναι η μηδενική συνάρτηση σχεδόν παντού.
Αν τώρα η συνάρτηση f είναι τοπικά ολοκληρώσιμη και επιλέξουμε μία συνάρτηση $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ με φορέα στο διάστημα $[-R, R]$, μη αρνητική και γνήσια θετική στο διάστημα $[-R/2, R/2]$ τότε η συνάρτηση $f\varphi$ είναι ολοκληρώσιμη και ισχύει η (1.4) για αυτήν. Με βάση λοιπόν τα παραπάνω έπεται ότι $f\varphi = 0$ σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}$ και αφού η συνάρτηση φ είναι γνήσια θετική στο $[-R/2, R/2]$ έπεται ότι η f ισούται με μηδέν σχεδόν παντού στο $[-R/2, R/2]$. Θεωρούμε τώρα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τη συνάρτηση $\varphi_n(x) = \frac{1}{n}\varphi(x/n)$ δείχνοντας έτσι ότι η συνάρτηση f είναι ίση με τη μηδενική σχεδόν παντού στο $[-nR/2, nR/2]$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και άρα η συνάρτηση f είναι η μηδενική σχεδόν παντού. □

1.3 Θεωρία LCA ομάδων

Σε αυτήν την ενότητα παρουσιάζουμε (χωρίς αποδείξεις) τη βασική θεωρία των τοπικά συμπαγών αβελιανών ομάδων. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να ψάξει τις αποδείξεις όσων θα ειπωθούν στα βιβλία των Folland[3], Rudin[4].
Ένας τοπολογικός χώρος X λέγεται τοπικά συμπαγής αν για κάθε $x \in X$ υπάρχει ανοικτή περιοχή του x, U_x και συμπαγές σύνολο $K \subseteq X$ έτσι ώστε να ισχύει $U_x \subseteq K$. Τα δύο ακόλουθα παραδείγματα τοπικά συμπαγών χώρων, αν και τετριμμένα είναι ιδιαίτερα χρήσιμα.
1) Η πραγματική ευθεία $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη τοπολογία (επαγόμενη από τη νόρμα της απόλυτης τιμής). Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι $x \in (x-1, x+1) \subseteq [x-1, x+1]$.

2) Ο μοναδιαίος μιγαδικός κύκλος $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} | |z| = 1\}$ με τη τοπολογία που επάγεται από τη συνηθισμένη τοπολογία του $\mathbb{C}$ στο υποσύνολο $\mathbb{T}$ (δηλαδή $\mathscr{T}_{\mathbb{T}} := \{A \cap \mathbb{T} | A$ ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{C}\}$) είναι τοπικά συμπαγής χώρος. Για κάθε $z \in \mathbb{T}$ το σύνολο $z \in D(z, 1/2) \cap \mathbb{T} \subseteq cl(D(z, 1/2)) \cap \mathbb{T}$. Είναι προφανές ότι αν ένας τοπολογικός χώρος X είναι συμπαγής τότε είναι και τοπικά συμπαγής. Αν λοιπόν Y συμπαγές υποσύνολο του X τότε ο χώρος Y με την επαγόμενη τοπολογία από τον X είναι συμπαγής τοπολογικός χώρος και άρα τοπικά συμπαγής. Δώσαμε λοιπόν και μία εναλλακτική απόδειξη για την τοπική συμπάγεια του $\mathbb{T}$.
Έστω τώρα ένας τ.χ. X εφοδιασμένος με μία πράξη που τη συμβολίζουμε με $+$ ως προς την οποιά ικανοποιούνται τα εξής:
1) $(\mathrm{X}, +)$ είναι αβελιανή ομάδα.
2) Οι πράξεις $+ : X \times X \to X$ και $- : X \to X$ με τύπο: $+(x, y) = x + y$ και $-(x) = -x$ αντίστοιχα είναι συνεχείς συναρτήσεις (εδώ η τοπολογία του $X \times X$ είναι η τοπολογία γινόμενο). Σε αυτήν την περίπτωση ο χώρος X λέγεται τοπολογική αβελιανή ομάδα (εννοώντας ως προς την πράξη $+$). Αν επιπλέον είναι και τοπικά συμπαγής τοπολογικός χώρος τότε λέμε ότι ο X είναι μία τοπικά συμπαγής αβελιανή ομάδα ή LCA ομάδα (Locally Compact Abelian group). Για προφανείς λόγους, θα χρησιμοποιούμε τη ξενόφερτη συντομογραφία για να λέμε ότι ένας χώρος έχει τη παραπάνω δομή αντί της Ελληνικής. Παραδείγματα LCA ομάδων είναι οι χώροι $\mathbb{R}$ με τη γνωστή πρόσθεση των πραγματικών αριθμών και ο $\mathbb{T}$ με πράξη τον πολλαπλασιασμό μιγαδικών αριθμών (οι τοπολογίες είναι οι ίδιες με εκείνες που τους δώσαμε στην αρχή της ενότητας).
Έστω τώρα μία LCA ομάδα X και μία συνάρτηση $\gamma : X \to \mathbb{T}$. Η γ θα λέγεται χαρακτήρας της X αν είναι συνεχής απεικόνιση και ομομορφισμός ομάδων. Δηλαδή η συνάρτηση γ είναι χαρακτήρας της X αν:
i) Το σύνολο $\gamma^{-1}(A)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X για κάθε ανοικτό υποσύνολο A του $\mathbb{T}$.
ii)$\gamma(x + y) = \gamma(x)\gamma(y)$ για κάθε $x, y \in X$.
Το σύνολο όλων των χαρακτήρων της X λέγεται δυϊκή ομάδα και συμβολίζεται με $\widehat{X}$ υπό την προϋπόθεση ότι είναι ομάδα ως προς την πράξη: $(\gamma_1 + \gamma_2)(x) = \gamma_1(x)\gamma_2(x)$, για κάθε $\gamma_1, \gamma_2 \in \widehat{X}, x \in X$.
Είναι γνωστό ότι η δυϊκή ομάδα μίας LCA ομάδας είναι και αυτή LCA ομάδα αν εφοδιαστεί με την τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης στα συμπαγή υποσύνολα της ομάδας X. Από εδώ και στο εξής όταν θα λέμε για τη δυϊκή ομάδα μίας LCA ομάδας θα τη θεωρούμε επίσης LCA ως προς την τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης στα συμπαγή υποσύνολα. Είναι επίσης γνωστό ότι κάθε LCA ομάδα έχει ένα μέτρο Haar, δηλαδή ένα Radon μέτρο ορισμένο στα σύνολα Borel της ομάδας που είναι αναλλοίωτο ως προς τις «μεταφορές» των συνόλων. Μάλιστα οποιαδήποτε δύο μέτρα Haar στην ίδια LCA ομάδα μ, λ ικανοποιούν τη σχέση: $\mu = c\lambda$, όπου $c > 0$ σταθερά. Ένας τοπολογικός χώρος λέγεται διακριτός αν κάθε υποσύνολο του είναι ανοικτό σύνολο (και άρα και κλειστό). Σε αυτήν την περίπτωση η τοπολογία του χώρου λέγεται διακριτή. Μία διακριτή αβελιανή ομάδα είναι φυσικά τοπικά συμπαγής. Μάλιστα αποδεικνύεται ότι αν μία LCA ομάδα είναι διακριτή τότε η δυϊκή της ομάδα είναι συμπαγής αβελιανή ομάδα. Αντίστοιχα η δυϊκή μίας συμπαγής αβελιανής ομάδας είναι διακριτή αβελιανή ομάδα. Μάλιστα ισχύει και το αντίστροφο (βλ. Folland[3] 4.1,4.3).

Παραδείγματα κάποιων απλών αλλά χρήσιμων δυϊκών χώρων LCA ομάδων είναι οι:
1) $\widehat{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}$, αφού $\widehat{\mathbb{R}} = \{\gamma(x) := e^{2\pi i \xi x} | \xi \in \mathbb{R}\}$.
2) $\widehat{\mathbb{T}} \cong \mathbb{Z}$, αφού $\widehat{\mathbb{T}} = \{\gamma(z) = z^n | n \in \mathbb{Z}\}$.
3) $\widehat{Z} \cong \mathbb{T}$ αφού $\widehat{Z} = \{\gamma(n) = z^n | z \in \mathbb{T}\}$.
Έστω τώρα μία LCA ομάδα X εφοδιασμένη με ένα μέτρο Haar μ. Θεωρούμε τον χώρο μέτρου $(X, \mathscr{B}_X, \mu)$ και τον χώρο των μ- ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στον X. Ορίζουμε το μετασχηματισμό Fourier $\mathscr{F} : \mathscr{L}^1(X) \to C_0(\widehat{X})$ με τύπο:

$$\mathscr{F}(f)(\gamma) := \int_X \overline{\gamma(x)} f(x) d\mu(x)$$

για κάθε $\gamma \in \widehat{X}$. (Όπως και στην περίπτωση του $\mathbb{R}$ ο μετασχηματισμός Fourier μίας συνάρτησης f θα συμβολίζεται με $\hat{f}$ αντί του $\mathscr{F}(f)$). Ο μετασχηματισμός Fourier επεκτείνεται και στο χώρο των πεπερασμένων μιγαδικών μέτρων Radon $M(X)$ με τύπο :

$$\hat{\nu}(\gamma) = \int_X \overline{\gamma(x)} d\nu(x)$$

για κάθε $\nu \in M(X)$. Αντίστοιχα ορίζεται και ο αντίστροφος του μετασχηματισμοού Fourier στον $\mathscr{L}^1(\widehat{X})$ (βλ.Folland[3] 4.2).
Τώρα θα μιλήσουμε για την κατά Bohr συμπαγοποιήση μίας μη συμπαγής τοπικά συμπαγής αβελιανής ομάδας X. Θεωρούμε τη δυϊκή ομάδα της X (που δεν είναι διακριτός χώρος) και την εφοδιάζουμε με την διακριτή τοπολογία. Συμβολίζουμε αυτήν την ομάδα με $\widehat{X}_d$. Αφού η $\widehat{X}_d$ είναι διακριτή αβελιανή ομάδα, έπεται ότι η δυϊκή της ομάδα είναι συμπαγής ομάδα που την ονομάζουμε Bohr συμπαγοποίηση της ομάδας X και τη συμβολίζουμε με bX. Είναι γνωστό ότι η ομάδα bX είναι το σύνολο που περιέχει όλους τους ομομορφισμούς (συνεχείς και μη) από τη $\widehat{X}$ στην $\mathbb{T}$ και ότι η X εμβυθίζεται στην bX ως υποομάδα της bX. Επίσης η ομάδα X είναι πυκνή στην bX.
Τέλος, κλείνουμε αυτήν την ενότητα με δύο σημαντικά θεωρήματα που θα επικαλεστούμε στο κεφάλαιο δύο και σχετίζονται με το δακτύλιο των συμπλόκων μίας LCA ομάδας X. Αναφορικά ο δακτύλιος των συμπλόκων μίας LCA ομάδας X ορίζεται να είναι το μικρότερο σύνολο που περιέχει όλα τα ανοικτά σύμπλοκα της X και που είναι κλειστό ως προς πεπερασμένες ενώσεις, πεπερασμένες τομές και συμπληρώματα. Αποδείξεις των παρακάτω θεωρημάτων μπορεί κανείς να βρει στα Cohen[5] σελίδα 204 και Rosenthal[6] σελίδα 71 αντίστοιχα:
Θεώρημα 1 (Cohen's Indempotent Theorem). *Έστω G μία LCA ομάδα και $\widehat{G}$ η δυϊκή της. Αν μ είναι ένα πεπερασμένο μέτρο Borel στην ομάδα G τέτοιο ώστε $\hat{\mu}(\gamma) \in \{0, 1\}$ για κάθε $\gamma \in \widehat{G}$ τότε ο φορέας της $\hat{\mu}$ ο οποίος είναι:*

$$\operatorname{supp} \hat{\mu} = \{\gamma \in \widehat{G} | \hat{\mu}(\gamma) = 1\} \tag{1.7}$$

ανήκει στο δακτύλιο των συμπλόκων της $\hat{G}$.
Θεώρημα 2 (Rosenthal). *Τα στοιχεία του δακτυλίου των συμπλόκων του $\mathbb{R}_d$ είναι της μορφής*

$$F \triangle \bigcup_{i \leq k} (a_i \mathbb{Z} + b_i) \tag{1.8}$$

όπου $F \subseteq \mathbb{R}$ πεπερασμένο σύνολο και $a_i > 0$, $b_i \in \mathbb{R}$. (Με το σύμβολο $\triangle$ εννοούμε τη συμμετρική διαφορά συνόλων)

1.4 Κάποιες βασικές προτάσεις

Σε αυτήν την ενότητα αποδεικνύουμε κάποιες ιδιαίτερα χρήσιμες για το δεύτερο κεφάλαιο προτάσεις.

Πρόταση 2. *Έστω $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ με συμπαγή φορέα. Τότε η συνάρτηση $\hat{f} \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ και το σύνολο $B := \{\xi \in \mathbb{R} | \hat{f}(\xi) = 0\}$ είναι διακριτό σύνολο (του $\mathbb{R}$).*

Απόδειξη. Έστω $\operatorname{supp} f \subseteq [-R, R]$ για κάποιο $R > 0$ και παρατηρούμε ότι για κάθε $z \in \mathbb{C}$ ισχύει:

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)e^{-ixz}| dm_1(x) \leq ||f||_1 e^{R|z|} < \infty$$

Συνεπώς για κάθε $z \in \mathbb{C}$ ορίζεται η συνάρτηση:

$$\hat{f}(z) := \int_{\mathbb{R}} e^{-ixz} f(x) dm_1(x)$$

Η παραπάνω συνάρτηση είναι απλά ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης f με μιγαδική μεταβλητή. Θα δείξουμε ότι η συνάρτηση $\hat{f}$ είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}$ και άρα άπειρες φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{C}$ και κατά συνέπεια σε κάθε σημείο του πραγματικού άξονα στο μιγαδικό επίπεδο. Η ολομορφία της f οφείλεται στο θεώρημα του Morera το οποίο με τη σειρά του οφείλεται στο θεώρημα του Fubini. Αναλυτικά: Δείχνουμε πρώτα ότι η συνάρτηση $\hat{f}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{C}$. Έστω λοιπόν $z_n \in \mathbb{C}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $z_n \to z_0$ για κάποιο $z_0 \in \mathbb{C}$. Η ακολουθία συναρτήσεων $g_n(x) := e^{-ixz_n} f(x)$ συγκλίνει στην $e^{-ixz_0} f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, λόγω συνέχειας της μιγαδικής εκθετικής συνάρτησης στο $\mathbb{C}$. Προφανώς για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η συνάρτηση g_n είναι Borel μετρήσιμη ως γινόμενο Borel μετρήσιμων συναρτήσεων. Τέλος:

$$|e^{-ixz_n} f(x)| \leq e^{x \sup_{n \in \mathbb{N}} |z_n|} |f(x)|$$

με την τελευταία συνάρτηση να είναι m_1 -ολοκληρώσιμη. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης έπεται η συνέχεια της $\hat{f}$ στο z_0 και αφού το z_0 ήταν τυχαίο στοιχείο του $\mathbb{C}$, έπεται ότι η $\hat{f}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{C}$.

Έστω τώρα γ απλή κλειστή τμηματικά C^1 καμπύλη στο μιγαδικό επίπεδο. Τότε:

$$\begin{aligned} \oint_\gamma \int_{\mathbb{R}} |e^{-ixz} f(x)| dm_1(x) d|z| &\leq \oint_\gamma e^{R|z|} ||f||_1 d|z| \\ &\leq e^{R \sup_{z \in \gamma^\star} |z|} ||f||_1 l(\gamma) < \infty \end{aligned}$$

Από το θεώρημα του Fubini έπεται:

$$\oint_\gamma \hat{f}(z) dz = \int_{\mathbb{R}} f(x) \Big(\oint_\gamma e^{-ixz} dz \Big) dm_1(x) = 0$$

αφού για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση (ως προς $z \in \mathbb{C}$) e^{-ixz} είναι ολόμορφη. Άρα από το θεώρημα του Morera η συνάρτηση $\hat{f}$ είναι ακέραια. Το σύνολο B είναι διακριτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ (και ως υποσύνολο του $\mathbb{R}$ είναι διακριτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$) ως υποσύνολο του διακριτού συνόλου $D := \{z \in \mathbb{C} | \hat{f}(z) = 0\}$ λόγω ολομορφίας της $\hat{f}$ στο $\mathbb{C}$ (κάθε μιγαδική ρίζα της $\hat{f}$ είναι πεπερασμένης πολλαπλότητας). $\square$

Για την επόμενη πρόταση θα χρειαστούμε τον εξής ορισμό:

Ορισμός 2. *Έστω διακριτό σύνολο* A $\subseteq \mathbb{R}$. *Το όριο :*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\big|A \cap [-T,T]\big|}{2T}$$

όταν υπάρχει (στο $\mathbb{R}$*) λέγεται ασυμπτωτική πυκνότητα του συνόλου* A *και συμβολίζεται με* $d(A)$.

Πρόταση 3. *Έστω διακριτό σύνολο* A *με ασυμπτωτική πυκνότητα* $d(A) = d \geq 0$*:*
1) Αν $d = 0$*, τότε για κάθε* $r > 0$ *υπάρχει* $a_r \in A$ *τέτοιο ώστε* $A \cap (a_r, a_r + r) = \emptyset$.
2) Αν $d > 0$ *τότε για κάθε* $r < 1/2d$ *υπάρχει* $a_r \in A$ *τέτοιο ώστε* $A \cap (a_r, a_r + r) = \emptyset$

Απόδειξη. Δίχως βλάβη της γενικότητας θα υποθέσουμε ότι το μηδέν ανήκει στο σύνολο A.
1) Αν το A είναι πεπερασμένο σύνολο είναι προφανές το συμπέρασμα. Έστω λοιπόν άπειρο διακριτό σύνολο A με $d(A) = 0$. Θα δείξουμε το ζητούμενο με άτοπο. Υπάρχει λοιπόν $r > 0$ και ακολουθία $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο A με τις εξής ιδιότητες:
i) $b_1 = 0$
ii) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ γνησίως αύξουσα
iii) $b_n - b_{n-1} < r$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (και άρα $b_n < (n-1)r$)
Προφανώς η ακολουθία b_n δεν είναι άνω φραγμένη (διαφορετικά το σύνολο A θα είχε σημείο συσσώρευσης στο $\mathbb{R}$) και από τις ιδιότητες της b_n ισχύει:

$$\frac{(n-1)}{2nr} \leq \frac{\big|\{b_n | n \in \mathbb{R}\} \cap [-nr, nr]\big|}{2nr} \leq \frac{\big|A \cap [-nr, nr]\big|}{2nr} \tag{1.9}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Η (1.9) μας λέει πως η ασυμπτωτική πυκνότητα φράσσεται από κάτω από τον αριθμό $1/2r$ καταλήγοντας έτσι σε άτοπο.
2) Δουλεύουμε όπως στο 1). Έστω ότι υπάρχει $r < 1/2d$ και ακολουθία $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο A με τις εξής ιδιότητες:
i) $b_1 = 0$
ii) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ γνησίως αύξουσα
iii) $b_n - b_{n-1} < r$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (και άρα $b_n < (n-1)r$)
και οδηγούμαστε πάλι στην (1.9). Παίρνοντας όρια στην (1.9) οδηγούμαστε στην ανισότητα:

$$\frac{1}{2r} \leq d$$

απ'όπου προκύπτει ότι $r \geq 1/2d$, καταλήγοντας έτσι σε άτοπο. □

Κεφάλαιο 2

Tilings της ευθείας φραγμένης πυκνότητας

2.1 Βασικά λήμματα

Ξεκινάμε το δεύτερο κεφάλαιο,δείχνοντας αυστηρά αυτό που αναφέραμε στην πρώτη ενότητα του κεφαλαίου ένα: Κάθε μη αρνητική, ολοκληρώσιμη συνάρτηση με θετικό ολοκλήρωμα που δίνει tiling της ευθείας με tile set κάποιο υποσύνολο A των πραγματικών αριθμών,δίνει tiling(s) φραγμένης πυκνότητας. Διαισθητικά κανείς αιτιολογεί τον παραπάνω ισχυρισμό ως εξής: Αν η συνάρτηση έχει θετικό ολοκλήρωμα σε ένα φραγμένο διάστημα I και δίνει tiling ύψους $w \in \mathbb{R}$ τότε ολοκληρώνοντας το άθροισμα όλων των αντιγράφων της συνάρτησης που συνεισφέρουν στο tiling της ευθείας σε ένα οποιοδήποτε διάστημα μήκους όσου και του I, θα πάρουμε το γινόμενο του ύψους του tiling w με το μήκος του διαστήματος I. Όμως αν το tile set δεν ήταν φραγμένης πυκνότητας θα σήμαινε ότι υπάρχει ακολουθία διαστημάτων μήκους όσου και του διαστήματος I (ας συμβολίσουμε τα διαστήματα της ακολουθίας, I_n με $n \in \mathbb{N}$) τέτοια ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ να υπάρχουν τουλάχιστον n επί το μήκος του I το πλήθος στοιχεία του tile set. Ως εκ τούτου υπάρχουν τουλάχιστον $n \cdot \ell(\mathrm{I})$ αντίγραφα στο διάστημα I_n με το καθ'ένα να δίνει θετικό ολοκλήρωμα στο διάστημα αυτό και επομένως συνδυάζοντας αυτά που μόλις είπαμε θα έχουμε μία ανισότητα της μορφής: $na \cdot \ell(I) \leq w \cdot \ell(I)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, όπου $a > 0$ το ολοκλήρωμα της συνάρτησης στο διάστημα I. Τεχνικά όπως θα δούμε και στην απόδειξη θα χρειαστεί να μεγαλώσουμε το διάστημα στο οποίο χρησιμοποιούμε το παραπάνω επιχείρημα προκειμένου αυτός ο αριθμός $a > 0$ να είναι κοινό κάτω φράγμα των ολοκληρωμάτων των αντιγράφων στο διάστημα που θα θεωρήσουμε.

Λήμμα 1. *Έστω $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ με $f \geq 0$ και $||f||_1 > 0$. Τα tiling της ευθείας από μεταφορές της f, είναι φραγμένης πυκνότητας.*

Απόδειξη. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$, ένα tile set για την f και w το ύψος του tiling. Προφανώς ισχύει ότι $w \geq 0$. Θα δείξουμε πρώτα ότι $w > 0$. Έστω λοιπόν, για να οδηγηθούμε σε άτοπο, ότι $w = 0$. Αφού $||f||_1 > 0$, έπεται ότι το σύνολο $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > 0\}$ είναι θετικού μέτρου(ως προς το μέτρο Lebesgue στην ευθεία). Σταθεροποιούμε ένα $a \in A$ και παρατηρούμε ότι το σύνολο

$B_a := \{x \in \mathbb{R} \mid f(x-a) > 0\} = a + \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > 0\}$ είναι επίσης θετικού μέτρου. Όμως,

$$\begin{aligned} B_a &\subseteq \{x \in \mathbb{R} | \sum_{a' \in A} f(x-a') > 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} | \sum_{a' \in A} f(x-a') = 0\}^c \end{aligned}$$

με το τελευταίο σύνολο να είναι μηδενικού μέτρου (αφού η f είναι tiling του $\mathbb{R}$) και έτσι οδηγούμαστε σε άτοπο. Άρα $w > 0$.

Τώρα θα δείξουμε ότι το σύνολο A, είναι φραγμένης πυκνότητας. Από την υπόθεση ότι $||f||_1 > 0$ και το θεώρημα μονότονης σύγκλισης, υπάρχει $R > 1$ τέτοιο ώστε $L := \int_{[-R,R]} f dm_1 > 0$. Έτσι, για αυτό το R και επειδή η f είναι tiling του $\mathbb{R}$ ύψους w, έπεται ότι για κάθε $T \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε το διάστημα $[T, T+1]$ να έχει στοιχεία του A, ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} (2R+1)w &= \int_{[T-R,T+R+1]} \sum_{a \in A} f(x-a) dm_1(x) \\ &\geq \int_{[T-R,T+R+1]} \sum_{\substack{a \in A \\ T \leq a < T+1}} f(x-a) dm_1(x) \end{aligned} \tag{2.1}$$

Επιλέγουμε τώρα ένα $a \in A \cap [T, T+1]$ με την ιδιότητα:

$$\sum_{\substack{a' \in A \\ T \leq a < T+1]}} f(x-a') \geq N_A(T, T+1) f(x-a).$$

Τέλος από την (2.1) συνεπάγεται ότι:

$$\begin{aligned} (2R+1)w &\geq \int_{[T-R,T+R+1]} \sum_{\substack{a' \in A \\ T \leq a < T+1}} f(x-a') dm_1(x) \\ &\geq N_A(T, T+1) \int_{[T-R,T+R+1]} f(x-a) dm_1(x) \\ &= N_A(T, T+1) \int_{[T-R-a,T+R-a+1]} f(x) dm_1(x) \\ &\geq N_A(T, T+1) \int_{[-R-1,R+1]} f(x) dm_1(x) \\ &\geq N_A(T, T+1) \int_{[-R,R]} f(x) dm_1(x) \end{aligned}$$

Δηλαδή:

$$N_A(T, T+1) \leq \frac{(2R+1)w}{L}$$

Εδώ ολοκληρώνεται η απόδειξη. □

Το γεγονός ότι ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$, είναι φραγμένης πυκνότητας μας δίνει την εξής χρήσιμη πληροφορία:

Λήμμα 2. *Έστω $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$, και $A \subseteq \mathbb{R}$ σύνολο φραγμένης πυκνότητας. Για σχεδόν κάθε $x \in \mathbb{R}$, το άπειρο άθροισμα $\sum_{a \in A} f(x-a)$ είναι αριθμός, ορίζοντας έτσι μία πραγματική συνάρτηση στην ευθεία η οποία είναι μάλιστα τοπικά ολοκληρώσιμη.*

Απόδειξη. Καθώς το σύνολο A είναι φραγμένης πυκνότητας, έπεται ότι υπάρχει ένας θετικός αριθμός C, τέτοιος ώστε για κάθε $T \in \mathbb{R}$, να ισχύει:

$$N_A(T, T+1) \leq C$$

Για το συμπέρασμα του λήμματος, αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\sum_{a \in A} \int_{[T,T+1]} |f(x-a)| dm_1(x) < \infty$$

για σ.κ. $x \in \mathbb{R}$ και $T \in \mathbb{R}$.
Έτσι λοιπόν, για σ.κ. $x \in \mathbb{R}$, $T \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
\sum_{a \in A} \int_{[T,T+1]} |f(x-a)| dm_1(x) &= \sum_{a \in A} \int_{[T-a,T-a+1]} |f(x)| dm_1(x) \\
&\leq \sum_{a \in A} \int_{[T-\lfloor a \rfloor -1, T+1-\lfloor a \rfloor]} |f(x)| dm_1(x) \\
&= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{\substack{a \in A \\ n \leq a < n+1}} \int_{[T-n-1,T+1-n]} f(x) dm_1(x) \\
&\leq N_A(T, T+1) \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{[T-n-1,T+1-n]} |f(x)| dm_1(x) \\
&\leq C \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{[T-n-1,T-n]} |f(x)| dm_1(x) \\
&+ C \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{[T-n,T-n+1]} |f(x)| dm_1(x) \\
&= 2C ||f||_1 < \infty
\end{aligned}$$

□

Στο επόμενο λήμμα, παρουσιάζουμε τη σχέση του ολοκληρώματος μίας πραγματικής συνάρτησης που είναι tiling της ευθείας, με το ύψος του tiling.

Λήμμα 3. *Έστω $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ που είναι tiling της ευθείας μέσω ενός συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}$ φραγμένης πυκνότητας, ύψους κάποιου πραγματικού αριθμού w και έστω $L := \int_{\mathbb{R}} f(x) dm_1(x)$. Τότε:*
1) Αν $L = 0$, έπεται ότι $w = 0$
2) Αν $L > 0$, έπεται ότι $w \geq 0$. Σε αυτήν την περίπτωση, η ασυμπτωτική πυκνότητα του συνόλου A ισούται με w/L. Δηλαδή, ισχύει ότι :

$$\lim_{T \to +\infty} \frac{|A \cap [-T, T]|}{2T} = \frac{w}{L}$$

Σχόλιο 1. *Το αποτέλεσμα 2) έχει αποδειχθεί σε μία πιο ισχυρή μορφή. Αν $L > 0$ τότε $w > 0$ (βλ. M.N.Kolountzakis- Nir Lev [9] Θεώρημα 1.2), ωστόσο η ισότητα της ασυμπτωτικής πυκνότητας στο 2) είναι ιδιαίτερα χρήσιμη και για το λόγο αυτό θα αποδείξουμε ολόκληρο το αποτέλεσμα,*

Απόδειξη. Ξεκινάμε την απόδειξη του λήμματος δίνοντας ένα άνω φράγμα για την ποσότητα $N_A(T)$.

Για κάθε $r > 1$, $T \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} N_A(T+r) - N_A(T) &= |A \cap [-T-r, -T]| + |A \cap [T, T+r]| \\ &\leq |A \cap [-T-\lfloor r \rfloor - 1, -T]| \\ &+ |A \cap [T, T+\lfloor r \rfloor + 1]| \\ &\leq \sum_{1 \leq k \leq \lfloor r \rfloor + 1} |A \cap [-T-k, -T-k+1]| \\ &+ \sum_{0 \leq k \leq \lfloor r \rfloor} |A \cap [T+k, T+k+1]| \\ &\leq C\lfloor r \rfloor + C(\lfloor r \rfloor + 1) \leq 4Cr \end{aligned} \tag{2.2}$$

όπου C, η θετική σταθερά για την οποία ισχύει:

$$N_A(T, T+1) \leq C,$$

για κάθε $T \in \mathbb{R}$, μιας και το σύνολο A είναι φραγμένης πυκνότητας με βάση την υπόθεση.
Άρα, για $T = 0$ και για κάθε $r > 1$, η (2.2) γίνεται:

$$\mathrm{N}_A(r) \leq 4Cr \tag{2.3}$$

Καθώς τώρα το σύνολο A είναι tile set για την f ,έπεται ότι για σ.κ. $x \in \mathbb{R}$, ισχύει ότι :

$$\sum_{a \in A} f(x-a) = w, \tag{2.4}$$

όπου $w \in \mathbb{R}$, το ύψος του tiling.
Για κάθε $R \geq 1$ και $T > R$, ολοκληρώνουμε την (2.4) στο διάστημα [-T,T], παίρνοντας έτσι:

$$\begin{aligned} 2wT &= \int_{[-T,T]} \sum_{a \in A} f(x-a) dm_1(x) \\ &= \sum_{|a| \leq T-R} \int_{\mathbb{R}} f(x) dm_1(x) - \sum_{|a| \leq T-R} \int_{|x|>T} f(x-a) dm_1(x) \\ &+ E_1(T) + E_2(T) \\ &= N_A(T-R)L + E_1(T) + E_2(T) + E_3(T) \end{aligned} \tag{2.5}$$

όπου:

$$\begin{aligned} E_1(T) &:= \int_{[-T,T]} \sum_{T-R \leq |a| \leq T+R} f(x-a) dm_1(x) \\ E_2(T) &:= \int_{[-T,T]} \sum_{\substack{a \in A \\ |a| > T+R}} f(x-a) dm_1(x) \\ E_3(T) &:= -\sum_{|a| \leq T-R} \int_{|x|>T} f(x-a) dm_1(x) \end{aligned}$$

Δίνουμε τώρα κάποια άνω φράγματα για τις ποσότητες $\mathrm{E}_i(T)$, με $i \in \{1, 2, 3\}$. Όπως και προηγουμένως, θεωρούμε $R > 1$,$T > R$ και επιπλέον ένα $\varepsilon > 0$.
Ξεκινάμε με την $\mathrm{E}_3(T)$. Καθώς $|f| \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$, από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης, υπάρχει

$r > 1$ με $\int_{|x|>r} |f|(x)dm_1(x) < \varepsilon$. Άρα για κάθε $T > r > 1$ και χρησιμοποιώντας την (2.3), προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}
|E_3(T)| &\leq \sum_{\substack{a\in A\\ |a|\leq T-r}} \int_{|x|>T} |f(x-a)|dm_1(x) \\
&\leq \sum_{\substack{a\in A\\ |a|\leq T-r}} \int_{(-\infty,-T-a)\cup(T-a,+\infty)} |f(x)|dm_1(x) \\
&\leq \sum_{\substack{a\in A\\ |a|\leq T-r}} \int_{|x|>r} |f(x)|dm_1(x) \\
&\leq N_A(T-R)\varepsilon \leq \varepsilon N_A(T) \\
&\leq 4C\varepsilon T
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Συνεχίζουμε τώρα την εκτίμηση των άλλων δύο ποσοτήτων θεωρώντας ως $R := r$ (και $T > R$). Για την $\mathrm{E}_1(\mathrm{T})$, λόγω της (2.2), έχουμε ότι :

$$\begin{aligned}
|E_1(T)| &\leq \int_{[-T,T]} \sum_{\substack{a\in A\\ T-R\leq|a|\leq T+R}} |f(x-a)|dm_1(x) \\
&\leq \sum_{\substack{a\in A\\ T-R\leq|a|\leq T+R}} \int_{[-T,T]} |f(x-a)|dm_1(x) \\
&\leq \sum_{\substack{a\in A\\ T-R\leq|a|\leq T+R}} \int_{\mathbb{R}} |f(x-a)|dm_1(x) \\
&= (N_A(T+R) - N_A(T-R))||f||_1 \leq 4CR||f||_1
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Τέλος για την $\mathrm{E}_2(\mathrm{T})$:

$$\begin{aligned}
|\mathrm{E}_2(\mathrm{T})| &\leq \sum_{\substack{a\in A\\ |a|>T+R}} \int_{[-T,T]} |f(x-a)|dm_1(x) \\
&\leq 2C \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ |n|>T+R}} \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ -T\leq k<T}} \int_{[k,k+1]} |f(x-n)|dm_1(x) \\
&= 2C \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ -T\leq k<T}} \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ |n|>T+R}} \int_{[k,k+1]-n} |f(x)|dm_1(x) \\
&= 2C \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ -T\leq k<T}} \int_{\bigcup_{|n|>T+R}[k,k+1]-n} |f(x)|dm_1(x) \\
&\leq 2C \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ -T\leq k<T}} \int_{|x|>R} |f(x)|dm_1(x) \\
&\leq 4CT\varepsilon
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Επομένως, από τις σχέσεις (2.5)-(2.8) , παίρνουμε την ανισότητα:

$$|\mathrm{N}_A(\mathrm{T})L - 2wT| \leq 8C\varepsilon T + 4CR(L + ||f||_1) \tag{2.9}$$

για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε $T > R$.
1) Αν $L = 0$, η (2.9) γράφεται:

$$|w| \leq 4C\varepsilon + \frac{2CR||f||_1}{T} \tag{2.10}$$

για κάθε $\varepsilon > 0$ και κάθε $T > R$. Παίρνοντας όρια στη (2.10), πρώτα ως προς T στο άπειρο και μετά ως προς το ε στο μηδέν, παίρνουμε το ζητούμενο.
2) Αν $L > 0$, από τη σχέση (2.9) έχουμε ότι:

$$|\frac{N_A(T)}{2T} - \frac{w}{L}| \leq \frac{4C}{L}\varepsilon + \frac{2CR(L + ||f||_1)}{LT} \tag{2.11}$$

για κάθε $\varepsilon > 0$ και $T > R$. Άρα:

$$\limsup_{T \to +\infty} |\frac{N_A(T)}{2T} - \frac{w}{L}| \leq \frac{4C}{L}\varepsilon$$

για κάθε $\varepsilon > 0$. Στέλνουμε το ε στο μηδέν και παίρνουμε ότι:

$$\lim_{T \to +\infty} \frac{N_A(T)}{2T} = \frac{w}{L}$$

Τέλος, ο αριθμός $\frac{w}{L}$ είναι μη αρνητικός ως το όριο (στο άπειρο) της μη αρνητικής συνάρτησης $\frac{N_A(T)}{2T}$ για κάθε T>0 και αφού $L > 0$, έπεται ότι $w \geq 0$. □

Τώρα, θα δείξουμε ότι για συναρτήσεις με συμπαγή φορέα και μη μηδενικό ολοκλήρωμα που είναι tiling της ευθείας φραγμένης πυκνότητας, το ύψος του tiling είναι μη μηδενικός αριθμός, δίνοντας μάλιστα και ένα κάτω φράγμα για το ύψος του tiling.

Λήμμα 4. *Έστω $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ με $L := \int_{\mathbb{R}} f(x)dm_1(x) > 0$ και $\mathrm{supp}(f) \subseteq [-R, R]$ για κάποιο $R > 0$. Αν η f είναι tiling της ευθείας, φραγμένης πυκνότητας μέσω ενός συνόλου A και ύψους $w \in \mathbb{R}$ τότε:*

$$w \geq \frac{L}{2R} \tag{2.12}$$

Απόδειξη. Προφανώς, η $||f||_1 > 0$ και επομένως το σύνολο $\mathrm{B}_f := \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}$ είναι θετικού μέτρου.Θέτουμε λοιπόν:

$$r_1 := \inf\{a \in \mathbb{R} | m_1(B \cap (a, +\infty)) = 0\} \in \mathbb{R}$$
$$r_2 := \sup\{b \in \mathbb{R} | m_1(B \cap (-\infty, b)) = 0\} \in \mathbb{R}$$
$$r := \max\{|r_1|, |r_2|\}$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x)\mathbb{1}_{[-r,r]}$ και παρατηρούμε ότι $g = f$, σχεδόν παντού.Επομένως η καινούρια μας συνάρτηση g, είναι και αυτή tiling του $\mathbb{R}$ με το ίδιο tile set A , και το ίδιο ύψος w. Ορίζοντας το σύνολο $B_g := \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \neq 0\}$, μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς να βλάπτεται η γενικότητα, πως για κάθε $\varepsilon > 0$, ισχύει:

$$m_1(B_g \cap (r - \varepsilon, r)) > 0 \tag{2.13}$$

Από το λήμμα 3, έπεται ότι $w \geq 0$. Θα δείξουμε αρχικά, ότι $w > 0$. Έστω λοιπόν, για να οδηγηθούμε σε άτοπο, ότι $w = 0$ και τότε, ξανά από το λήμμα 3, προκύπτει ότι το σύνολο A έχει μηδενική πυκνότητα. Άρα, υπάρχει $a_0 \in A$, τέτοιο ώστε $(a_0, a_0 + 3r) \cap A = \emptyset$ (βλ.πρόταση

3)). Αν τώρα επιλέξουμε $\delta := \min\{\min_{a\in A\setminus\{a_0\}} |a-a_0|, r\} > 0$, ορίσουμε για κάθε $a \in A$ το σύνολο $B_a := a + B_g$ και εφαρμόσουμε τη (2.13) για $\varepsilon := \delta$, παίρνουμε ότι:

$$m_1((a_0 + r - \delta, a_0 + r) \cap B_{a_0}) > 0$$

ενώ:

$$(a_0 + r - \delta, a_0 + r) \cap \mathrm{supp}(g(x-a)) = \emptyset$$

για κάθε $a \in A \setminus \{a_0\}$(για την τελευταία ισότητα, αρκεί κανείς να παρατηρήσει πως για $a \in A$, με $a > a_0$ τότε $a > a_0 + 3r$, ενώ για $a \in A$ με $a < a_0$ έπεται ότι $a \leq -\delta + a_0$). Συνεπώς προκύπτει ότι:

$$w = \sum_{a\in A} g(x-a) = m(a_0)g(x-a_0) \neq 0$$

για σ.κ. $x \in (a_0 + r - \delta, a_0 + r) \cap B_{a_0}$ και επομένως $w \neq 0$(όπου $m(a_0)$, η πολλαπλότητα του a_0 στο tile set A).

Δείξαμε λοιπόν ότι, $w > 0$. Για το ζητούμενο κάτω φράγμα του w, θα υποθέσουμε ψευδώς ότι, $\frac{w}{L} < \frac{1}{2r}$. Πάλι από το λήμμα 3, έχουμε ότι η ασυμπτωτική πυκνότητα του συνόλου A, ισούται με $\frac{w}{L}$ και άρα για κάθε $\varepsilon \in (0, 2r - \frac{L}{w})$, υπάχει $a \in A$ με:

$$(a, a + 2r + \varepsilon) \cap A = \emptyset$$

και επίσης:

$$(a + r, a + r + \varepsilon) \cap \mathrm{supp}(g(x - a')) = \emptyset$$

για κάθε $a' \in A \setminus a$ και το πολύ το μονοσύνολο $\{r\}$ αν $a' = a$.Σταθεροποιούμε ένα τέτοιο $\varepsilon > 0$,(βρίσκοντας έτσι ένα $a \in A$) και προκύπτει με βάση τα παραπάνω ότι:

$$\sum_{a\in A} g(x-a) = 0 = w$$

για σ.κ. $x \in (a + r, a + r + \varepsilon)$ καταλήγοντας έτσι σε άτοπο. Τέλος, για το γενικό $R > 0$ της εκφώνησης του λήμματος, αρκεί κανείς να παρατηρήσει ότι, $r \leq R$ και τα αντίστοιχα συμπεράσματα για αυτό το R βγαίνουν άμεσα. □

2.2 Ο ρόλος της ανάλυσης Fourier στα tilings φραγμένης πυκνότητας

Τώρα θα δούμε κάποιες εφαρμογές της αρμονικής ανάλυσης στα tilings φραγμένης πυκνότητας της ευθείας. Για το λόγο αυτό θα χρειαστούμε αποσπάσματα από τη δεύτερη και την τρίτη ενότητα του Κεφ.1. Το γεγονός ότι μία συνάρτηση f είναι tiling της ευθείας μέσω ενός συνόλου A, ύψους κάποιου αριθμού w σημαίνει ότι :

$$f \star \mu_A = w$$

Παίρνοντας μετασχηματισμό Fourier στην παραπάνω ισότητα θα είχαμε ότι:

$$\hat{f}\widehat{\mu_A} = (2\pi w)\delta_0$$

απ'όπου προκύπτει ότι η συνάρτηση $\hat{f}$ μηδενίζεται στο φορέα της $\widehat{\mu_A}$ εκτός ίσως από το μηδέν. Δυστυχώς τόσο η συνάρτηση $f \star \mu_A$, όσο και η κατανομή $\hat{f}\widehat{\mu_A}$ δεν είναι, εν γένει, καλώς ορισμένες. Ωστόσο η βασική ιδέα για το ακόλουθο θεώρημα στηρίζεται στο επιχείρημα που μόλις παρουσιάσαμε.

Θεώρημα 3. *Έστω $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ με $\hat{f} \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ και $A \subseteq \mathbb{R}$ σύνολο φραγμένης πυκνότητας.*
i) Αν η συνάρτηση f είναι tiling της ευθείας μέσω του συνόλου A τότε:

$$\operatorname{supp} \widehat{\mu_A} \subseteq B := \{0\} \cup \{\xi \in \mathbb{R} | \hat{f}(\xi) = 0\}$$

ii) Αν ο φορέας της κατανομής $\widehat{\mu_A}$ περιέχεται στο σύνολο B και είναι μέτρο Radon τότε η συνάρτηση f είναι tiling της ευθείας μέσω του συνόλου A, ύψους κάποιου αριθμού $w \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη. i) Αφού $\hat{f} \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$, έπεται ότι το σύνολο $\left(\hat{f}\right)^{-1}(\{0\})$ είναι κλειστό και άρα το σύνολο B είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Καθώς το σύνολο A είναι φραγμένης πυκνότητας συνεπάγεται ότι η κατανομή $\widehat{\mu_{\mathrm{A}}}$ είναι tempered και άρα εξ'ορισμού του φορέα tempered κατανομής, για να δείξουμε το ζητούμενο εγκλεισμό αρκεί να ισχύει:

$$\widehat{\mu_{\mathrm{A}}}(\varphi) = 0$$

για κάθε $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, με $\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq \mathbb{R} \setminus B$. Έστω λοιπόν μία τέτοια συνάρτηση φ και θεωρούμε επιπλέον μία συνάρτηση $\psi \in \mathscr{S}$ με τις ακόλουθες ιδιότητες:
1) $\hat{\psi} \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R})$
2) $\hat{\psi}(0) =1$
3) $\hat{\psi}(\xi) \neq 0$, για κάθε ξ που ανήκει σε ένα διάστημα $I \supseteq \operatorname{supp}(\varphi)$.
Καθώς $\hat{\psi}\hat{f} \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}) \subseteq \mathscr{S}$, με το μετασχηματισμό Fourier να είναι ένα προς ένα και επί στο χώρο $\mathscr{S}$, έπεται ότι η συνάρτηση $F := \psi \star f \in \mathscr{S}$. Θα δείξουμε τώρα ότι $F \star \mu_A(x) = \sum_{a \in A} F(x-a) = w$ για σ.κ. $x \in \mathbb{R}$, όπου w το ύψος του tiling από την f μέσω του συνόλου A. Πράγματι, για την πρώτη ισότητα χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της F ως συνάρτηση του χώρου $\mathscr{S}$, βρίσκουμε μία θετική σταθερά C τέτοια ώστε :

$$|F(x)| \leq \frac{C}{(1+|x|)^2}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα από την παραπάνω σχέση και από το γεγονός ότι το σύνολο A είναι φραγμένης πυκνότητας έπεται ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει:

$$\begin{aligned}
\sum_{a \in A} \left|F(x-a)\right| &\leq \sum_{a \in A} \frac{C}{(1+|x-a|)^2} \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \sum_{\substack{a \in A \\ n \leq |x-a| < n+1}} \frac{C}{(1+|x-a|)^2} \\
&\leq \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{C}{(1+n)^2} < +\infty
\end{aligned}$$

Επομένως η σειρά $\sum_{a \in A} F(x-a)$ είναι απολύτως συγκλίνουσα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και άρα ισχύει :

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{\substack{a \in A \\ -n \leq a \leq n}} F(x-a) = \sum_{a \in A} F(x-a) \tag{2.14}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Από την άλλη έχουμε ότι:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{a\in A\\ -n\le a\le n}} F(x-a) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} F(x-y) d\Big(\sum_{\substack{a\in A\\ -n\le a\le n}} \delta_a \Big)(y) \tag{2.15}$$

με:

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\sum_{\substack{a\in A\\ -n\le a\le n}} \delta_a \Big)(\mathrm{E}) = \mu_A(\mathrm{E}) \tag{2.16}$$

για κάθε $E \subseteq \mathbb{R}$, σύνολο Borel. Αν τώρα θεωρήσουμε ένα $\varepsilon > 0$ τότε από τη σχέση (2.16) υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε:

$$\Big|\mu_{\mathrm{A}} - \Big(\sum_{\substack{a\in A\\ -n\le a\le n}} \delta_\alpha \Big)\Big|([-1,1]^c) \le \varepsilon \tag{2.17}$$

για κάθε $n \ge n_0$. Παρατηρούμε επίσης ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει:

$$\mu_{\mathrm{A}}([-1,1]) = \sum_{\substack{a\in A\\ -n\le a\le n}} \delta_a([-1,1]) \tag{2.18}$$

Οπότε συνδυάζοντας τις σχέσεις (2.14),(2.15),(2.17),(2.18) βλέπουμε ότι για το τυχαίο $\varepsilon > 0$ και για αρκετά μεγάλα $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\Big|\sum_{a\in A} F(x-a) - \int_{\mathbb{R}} F(x-y) d\mu_{\mathrm{A}}(y)\Big| &\le \Big|\sum_{a\in A} F(x-a) - \int_{\mathbb{R}} F(x-a) d\Big(\sum_{\substack{a\in A\\ -n\le a\le n}} \delta_a \Big)(y)\Big| \\
&\quad + \Big|\int_{\mathbb{R}} F(x-a) d\Big(\sum_{\substack{a\in A\\ -n\le a\le n}} \delta_a \Big)(y) - \int_{\mathbb{R}} F(x-y) d\mu_{\mathrm{A}}(y)\Big| \\
&\le \varepsilon + \int_{[-1,1]^c} |F(x-y)| d\Big|\mu_{\mathrm{A}} - \sum_{\substack{a\in A\\ -n\le a\le n}} \delta_a\Big|(y) \\
&\le \varepsilon + \sup_{x\in\mathbb{R}}(|F(x)|)\Big|\mu_A - \sum_{\substack{a\in A\\ -n\le a\le n}} \delta_a\Big|([-1,1]^c) \le M\varepsilon
\end{aligned} \tag{2.19}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (όπου $M = 1 + \sup_{x\in\mathbb{R}}(|F(x)|)$). Δηλαδή ισχύει ότι:

$$F \star \mu_A(x) = \sum_{a\in A} F(x-a)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Για την ισότητα: $\sum_{a\in A} F(x-a) = w$ έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
\sum_{a\in A} F(x-a) &= \sum_{a\in A} \int_{\mathbb{R}} f(x-a-t)\psi(t) dm_1(t) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \psi(t) \sum_{a\in A} f(x-t-a) dm_1(t) \\
&= w\hat{\psi}(0) = w
\end{aligned}$$

για σ.κ. $x \in \mathbb{R}$, όπου χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα 2) της συνάρτησης ψ και το θεώρημα του Fubini αφού το σύνολο A είναι φραγμένης πυκνότητας και $\psi \in \mathscr{S}$. Παίρνοντας τώρα μετασχηματισμό Fourier στην ισότητα $F \star \mu_A = w$ (ως κατανομές) οδηγούμαστε στη σχέση:

$$\hat{F}\widehat{\mu_A} = (2\pi w)\delta_0$$

Καθώς $\widehat{F} = \widehat{\psi}\widehat{f}$ και λόγω της τρίτης ιδιότητας της συνάρτησης ψ, έπεται ότι αν για κάποιο $\xi \in I$ μηδενίζεται η $\widehat{F}$ τότε μηδενίζεται και η $\widehat{f}$ και αντίστροφα. Άρα έχουμε ότι:

$$\{\xi \in \mathbb{R} | \widehat{F}(\xi) = 0\} \cap I = \{\xi \in \mathbb{R} | \widehat{f}(\xi) = 0\} \cap I \subseteq B \cap I$$

και αφού $\operatorname{supp}(\varphi) \cap B = \emptyset$, έπεται ότι ο λόγος $\varphi/\overline{\widehat{F}}$ ορίζει μία ${\mathscr{C}_c}^{\infty}(\mathbb{R})$ συνάρτηση με φορέα που περιέχεται στο φορέα της συνάρτησης φ και άρα ξένο με το σύνολο B. Τέλος, αφού το μηδέν δεν ανήκει στο φορέα της φ και με βάση τα παραπάνω, καταλήγουμε στην ζητούμενη ισότητα:

$$\widehat{\mu_A}(\varphi) = \widehat{\mu_A}\Big(\varphi\overline{\widehat{F}}/\overline{\widehat{F}}\Big) = (\widehat{F}\widehat{\mu_A})\Big(\varphi/\overline{\widehat{F}}\Big) = (2\pi w)\delta_0\Big(\varphi/\overline{\widehat{F}}\Big) = (2\pi w)\Big(\varphi/\overline{\widehat{F}}\Big)(0) = 0$$

ii) Θεωρούμε μία συνάρτηση $\psi \in \mathscr{S}$ και ορίζουμε όπως πριν τη συνάρτηση $F := \psi \star f$. Φυσικά $F \in \mathscr{S}$. Θα δείξουμε πρώτα ότι ο φορέας της κατανομής $\widehat{F}\widehat{\mu_A}$ είναι το μονοσύνολο $\{0\}$. Για το λόγο αυτό θα πάρουμε πρώτα μία τυχούσα συνάρτηση $\varphi \in \mathscr{C}_c^{\infty}(\mathbb{R})$ με φορέα στο διάστημα $(0, +\infty)$, δείχνοντας ότι $\Big(\widehat{F}\widehat{\mu_A}\Big)(\varphi) = 0$. Από τις ιδιότητες των tempered κατανομών, έπεται ότι:

$$\Big(\widehat{F}\widehat{\mu_A}\Big)(\varphi) = \widehat{\mu_A}\Big(\varphi\overline{\widehat{F}}\Big) \tag{2.20}$$

Καθώς $\Big(\widehat{f}\Big)^{-1}(\{0\}) \subseteq \Big(\widehat{F}\Big)^{-1}(\{0\})$ και από τις υποθέσεις της εκφώνησης ότι

1) $\operatorname{supp}(\widehat{\mu_A}) \subseteq B \subseteq \{0\} \cup \Big(\widehat{F}\Big)^{-1}$ και

2) $\widehat{\mu_A}$ είναι μέτρο Radon

έπεται: $\operatorname{supp}\Big(\varphi\overline{\widehat{F}}\Big) \cap \operatorname{supp}(\widehat{\mu_A}) = \emptyset$. Άρα καταλήγουμε στο συμπέρασμα:

$$\widehat{F}\widehat{\mu_A}(\varphi) = 0$$

για κάθε $\varphi \in \mathscr{C}_c^{\infty}(\mathbb{R})$ με φορέα στο διάστημα $(0, +\infty)$. Όμοια δείχνουμε ότι $\widehat{F}\widehat{\mu_{\mathrm{A}}}(\varphi) = 0$, για κάθε $\varphi \in \mathscr{C}_c^{\infty}(\mathbb{R})$ με φορέα στο διάστημα $(-\infty, 0)$, καταλήγοντας έτσι στην απόδειξη του ισχυρισμού μας:

$$\operatorname{supp}\left(\widehat{F}\widehat{\mu_A}\right) = \{0\}$$

Επομένως:

$$\widehat{F}\widehat{\mu_A} = (\widehat{F}(0)\widehat{\mu_A}(\{0\}))\delta_0 = \widehat{\psi}(0)\widehat{f}(0)\widehat{\mu_A}(\{0\})$$

πράγμα που συνεπάγεται ότι:

$$F \star \mu_A = \frac{1}{2\pi}\widehat{f}(0)\widehat{\mu_A}(\{0\})$$

Αφού τώρα $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ και A σύνολο φραγμένης πυκνότητας, έπεται από το Λήμμα 2 ότι η συνάρτηση $G(x) = \sum_{a \in A} f(x-a)$ είναι τοπικά ολοκληρώσιμη και άρα για την απόδειξη του (ii) μένει να δείξουμε την ισότητα $G(x) = w$, για σχεδόν κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αφού η συνάρτηση $F \in \mathscr{S}$ ισχύει για σχεδόν κάθε $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} w\widehat{\psi}(0) &= \sum_{a \in A} F(x-a) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \psi(t)\Big(\sum_{a \in A} f(x-a-t)\Big) dm_1(t) \end{aligned} \tag{2.21}$$

με την εναλλαγή αθροίσματος και ολοκληρώματος να γίνεται μέσω του θεωρήματος του Fubini όπως στο i). Τέλος αφού η (2.21) ισχύει για κάθε $\psi \in \mathscr{S}$, βλέπουμε ότι η συνάρτηση $G(x-t) = \sum_{a\in A} f(x-a-t)$ ως προς τη μεταβλητή $t \in \mathbb{R}$ είναι ίση με τη σταθερή συνάρτηση w ως κατανομές και ως τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση έπεται ότι:

$$G(x-t) = w$$

για σ.κ. $t \in \mathbb{R}$ και για σχεδόν κάθε $x \in \mathbb{R}$, ή ισοδύναμα

$$G(y) = \sum_{a\in A} f(y-a) = w$$

για σ.κ $y \in \mathbb{R}$. □

Η θεωρία των LCA ομάδων μας δίνει πληροφορίες για την περιγραφή συνόλων φραγμένης πυκνότητας.Το επόμενο θεώρημα αποτελεί εφαρμογή του θεωρήματος του Cohen που αναφέραμε στην τρίτη ενότητα του κεφαλαίου ένα και με τη βοήθεια αυτού θα αποδείξουμε μία μορφή ενός αποτελέσματος του Meyer.

Θεώρημα 4. *Έστω G μία LCA ομάδα, $\widehat{G}$ η δυϊκή ομάδα της G και μ ένα πεπερασμένο μέτρο Borel στη G με $\hat{\mu}(\widehat{G}) = S := \{s_1, ..., s_n\}$, πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathbb{C}$. Η προεικόνα κάθε στοιχείου του συνόλου S μέσω της συνάρτησης $\hat{\mu}$ είναι στοιχείο του δακτυλίου συμπλόκων της $\widehat{G}$.*

Απόδειξη. Δίχως βλάβη της γενικότητας θα δείξουμε ότι η πρεικόνα του s_1 ανήκει στο δακτύλιο των συμπλόκων της $\widehat{G}$. Θεωρούμε ένα μιγαδικό πολυώνυμο P με τις εξής ιδιότητες:
1) $P(s_i) = 0$ για κάθε $2 \leq i \leq n$.
2) $P(s_1) = 1$
Καθώς το μέτρο μ είναι πεπερασμένο μπορούμε να ορίσουμε ένα καινούριο μέτρο ν στη G ως η πολυωνυμική έκφραση του μέτρου μ (ως προς τη συνέλειξη) μέσω του P. Δηλαδή, αν :

$$P(z) = a_m z^m + ... + a_0$$

τότε:

$$\nu := P(\mu) = a_m \mu^{\star m} + ... + a_0 \tag{2.22}$$

όπου $\mu^{\star k} := \mu \star .... \star \mu$, k-φορές (με $k \in \mathbb{N}$). Από τη (2.22) παίρνοντας Fourier (αφού και το μέτρο ν είναι πεπερασμένο μέτρο Borel) καταλήγουμε στην ισότητα:

$$\hat{\nu}(\gamma) = P(\hat{\mu}(\gamma))$$

που ισχύει για κάθε $\gamma \in \widehat{G}$. Τώρα παρατηρούμε ότι για το μέτρο ν ως πεπερασμένο μέτρο στη G με εύρος τιμών το δισύνολο $\{0, 1\}$, το θεώρημα του Cohen εφαρμόζεται και επομένως ο φορέας του, $\text{supp}(\hat{\nu}) = \{\gamma \in \widehat{G} | \hat{\nu}(\gamma) = 1\}$ είναι στοιχείο του δακτυλίου συμπλόκων της $\widehat{G}$. Όμως :

$$\text{supp}(\hat{\nu}) = (\hat{\mu})^{-1}(s_1)$$

λόγω της ιδιότητας 2) του πολυωνύμου P, αποδεικνύοντας έτσι το ζητούμενο. □

Το επόμενο θεώρημα μας περιγράφει τη δομή που έχουν ορισμένα διακριτά υποσύνολα της ευθείας.

Θεώρημα 5 (Meyer(11)). *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ διακριτό σύνολο και μ το μέτρο Radon με τύπο:*

$$\mu(\mathrm{E}) := \Big(\sum_{a\in A} c_a \delta_a\Big)(E)$$

για κάθε $E \subseteq \mathbb{R}$ σύνολο Borel, όπου $c_a \in S \subseteq \mathbb{C}\setminus\{0\}$ με S πεπερασμένο σύνολο. Υποθέτουμε επίσης ότι $\mu \in \mathscr{S}'$ και ότι η κατανομή $\hat{\mu}$ είναι μέτρο Radon στην ευθεία που ικανοποιεί :

$$|\hat{\mu}|([-R,R]) = O(R) \tag{2.23}$$

καθώς $R \to \infty$. Σε αυτήν την περίπτωση το σύνολο A έχει την ακόλουθη περιγραφή:

$$A = F \triangle \bigcup_{1\le i\le k} (a_i\mathbb{Z} + b_i) \tag{2.24}$$

όπου $k \in \mathbb{N}$, $a_i > 0$, $b_i \in \mathbb{R}$ για κάθε $i \in [k]$ και το σύνολο $F \subseteq \mathbb{R}$ είναι πεπερασμένο. (Με το σύμβολο $\triangle$ εννοούμε τη συμμετρική διαφορά συνόλων).

Απόδειξη. Θεωρούμε συνάρτηση $\varphi \in {\mathscr{C}_c}^{\infty}(\mathbb{R})$ με τις ακόλουθες ιδιότητες:
1) $\mathrm{supp}(\varphi) \subseteq (-1,1)$
2) $|\hat{\varphi}(\xi)| = O(|\xi|^{-a})$, για κάθε $a > 0$.
Για καθε $b \in \mathbb{R}$ θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $\tau_b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο: $\tau_b(x) = bx$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ αφού $\varphi \circ \tau_n \in {\mathscr{C}_c}^{\infty}(\mathbb{R})$, $\mu \in \mathscr{S}'$ ορίζεται η συνάρτηση:

$$\mu_n(x) = ((\varphi \circ \tau_n) \star \mu)(x) \tag{2.25}$$

και θεωρούμενη ως κατανομή έχει μετασχηματισμό Fourier:

$$\widehat{\mu_n} = \frac{1}{n}(\hat{\varphi} \circ \tau_{\frac{1}{n}})\hat{\mu} \tag{2.26}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Με βάση την υπόθεση, ότι η κατανομή $\hat{\mu}$ είναι και μέτρο Radon και ότι $\varphi \in \mathscr{S}$, έπεται ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η κατανομή $\widehat{\mu_n}$ είναι και αυτή με τη σειρά της, μέτρο Radon στην ευθεία.
Επιλέγουμε τώρα ένα $n_0 \in \mathbb{N}$ από το οποίο και μετά ισχύουν ταυτόχρονα οι ασυμπτωτικές σχέσεις της (2.23) του μέτρου μ και της ιδιότητας 2) της συνάρτησης φ για $a = 2$. Θα δείξουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}_{\ge n_0}$, το μέτρο $\widehat{\mu_n}$ είναι πεπερασμένο και άρα στοιχείο του χώρου των μιγαδικών μέτρων Borel της ευθείας με άνω φράγμα μία ποσότητα ανεξάρτητη του $n \in \mathbb{N}_{\ge n_0}$, δείχνοντας έτσι ότι η συλλογή των μέτρων $\{\widehat{\mu_n}\}_{n\in\mathbb{N}_{\ge n_0}}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη στο χώρο των μιγαδικών μέτρων ο οποίος όπως γνωρίζουμε είναι και χώρος Banach. Ξεκινάμε λοιπόν σταθεροποιόντας ένα φυσικό $n \in \mathbb{N}_{\ge n_0}$, επιλέγουμε $k \in \mathbb{N}$ με $2^k > n$ και θέτουμε $k_0 := \max\{m \in \mathbb{N} \mid 2^m \le n\}$.

Τότε:

$$
\begin{aligned}
|\widehat{\mu_n}|([-2^k,2^k]) &\leq \frac{1}{n}||\hat{\varphi}||_\infty|\hat{\mu}|([-n,n]) \\
&+\frac{1}{n}\int_{n<|y|\leq 2^k}|\hat{\varphi}\circ\tau_{\frac{1}{n}}|(\xi)d|\hat{\mu}|(\xi) \\
&\leq C||\varphi||_\infty+\frac{1}{n}\int_{n<|\xi|\leq 2^k}C\frac{n^2}{|\xi|^2}d|\hat{\mu}|(\xi) \\
&\leq C||\varphi||_\infty+\frac{1}{n}\int_{2^{k_0}<|\xi|\leq 2^k}C\frac{n^2}{|\xi|^2}d|\hat{\mu}|(\xi) \\
&\leq C||\varphi||_\infty+\frac{1}{n}\sum_{k_0\leq i\leq k}\int_{2^i<|\xi|\leq 2^{i+1}}C\frac{n^2}{|\xi|^2}d|\hat{\mu}|(\xi) \\
&\leq C||\varphi||_\infty+Cn\sum_{k_0\leq i\leq k}\frac{1}{2^{2i}}|\hat{\mu}|([-2^{i+1},2^{i+1}]) \\
&\leq C||\varphi||_\infty+Cn\sum_{k_0\leq i\leq k}\frac{1}{2^i} \\
&\leq C||\varphi||_\infty+C\frac{n}{2^{k_0}}\leq C||\varphi||_\infty+2C=:C'
\end{aligned}
$$

Το παραπάνω άνω φράγμα ισχύει για κάθε $k\in\mathbb{N}$ αρκετά μεγάλο και άρα $|\widehat{\mu_n}|(\mathbb{R})\leq C'$. Η σταθερά C' δεν εξαρτάται από το $n\in\mathbb{N}_{n\geq n_0}$(ο λόγος $\frac{n}{2^{k_0}}$ δε μπορεί να υπερβεί τον αριθμό 2) δείχνοντας έτσι ότι:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}_{\geq n_0}}\{|\widehat{\mu_n}|(\mathbb{R})|n\in\mathbb{N}\}\leq C'$$

Από το γεγονός ότι το σύνολο A είναι διακριτό και ότι ο φορέας της συνάρτησης $\varphi\star\tau_n$ περιέχεται στο διάστημα $[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$, έπεται εύκολα ότι :

$$\lim_{n\to\infty}\mu_n(x)=\begin{cases}c_a & \text{αν } x\in A\\ 0 & \text{αλλιώς}\end{cases}$$

Τώρα από την κατά Bohr συμπαγοποίηση της πραγματικής ευθείας, ισχύουν τα εξής:
1) Η ομάδα $\widehat{\mathbb{R}}_d$ είναι συμπαγής ως η δυϊκή της διακριτής ομάδας $\mathbb{R}_d$.
2) $\mathbb{R}\subseteq\widehat{\mathbb{R}}_d$, ως τοπολογικοί χώροι με τον πρώτο να είναι πυκνός στον δεύτερο. Περιόριζοντας τις συνεχείς συναρτήσεις του $\widehat{\mathbb{R}}_d$ στον $\mathbb{R}$, βλέπουμε τον εξής εγκλεισμό:

$$\mathscr{C}(\widehat{\mathbb{R}}_d)\subseteq\mathscr{C}(\mathbb{R})\cap\mathscr{L}^\infty(\mathbb{R})$$

όπου και οι δύο χώροι είναι χώροι Banach.
Καθώς λοιπόν τα μέτρα $\widehat{\mu_n}$ είναι στοιχεία του χώρου των μιγαδικών μέτρων Borel της ευθείας και άρα δρουν στο χώρο των συνεχών και φραγμένων συναρτήσεων της πραγματικής ευθείας έπεται ότι δρουν και στο χώρο των συνεχών συναρτήσεων του $\widehat{\mathbb{R}}_d$. Ως ομοιόμορφα φραγμένη συλλογή μέτρων (ως προς τη νόρμα της απόλυτης κύμανσης) έπεται ότι είναι και ασθενώς-άστρο φραγμένη συλλογή γραμμικών συναρτησοειδών. Άρα από το θεώρημα των Banach-Alaoglou έχει ασθενώς-άστρο συγκλίνουσα υπακολούθία στο δυϊκό χώρο των συνεχών και φραγμένων συναρτήσεων. Δηλαδή, υπάρχει ένα μέτρο Borel ν στην ευθεία και υπακολουθία $\widehat{\mu_{n_k}}$ της $\widehat{\mu_n}$ τ.ω $\widehat{\mu_{n_k}}\xrightarrow{w\star}\nu$ το

οποίο με τη σειρά του σημαίνει ότι για κάθε $f \in \mathscr{C}(\widehat{\mathbb{R}}_d)$, έπεται ότι :

$$\widehat{\mu_{n_k}}(f) \to \nu(f) \tag{2.27}$$

Αντικαθιστούμε στην (2.27) τη συνάρτηση f με τους χαρακτήρες του $\widehat{\mathbb{R}}_d$ και πάιρνουμε ότι $\hat{\nu}(\mathbb{R}) = -2\pi S$. Επομένως το θεώρημα 3 εφαρμόζεται για το μέτρο ν και άρα το σύνολο A είναι στοιχείο του δακτυλίου συμπλόκων του $\mathbb{R}_d$. Το ζητούμενο έπεται από το θεώρημα του Rosenthal που αναφέρθηκε στην τρίτη ενότητα του κεφαλαίου ένα. □

Είμαστε τώρα σε θέση να αποδείξουμε ένα από τα πιο σημαντικά θεωρήματα της εργασίας αυτής. Αν έχουμε μία συνάρτηση $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ που πληροί κάποιες προϋποθέσεις και δίνει tilings της ευθείας φραγμένης πυκνότητας τότε το αντίστοιχο tile set γράφεται ως πεπερασμένη αριθμητικών προόδων.

Θεώρημα 6. *Έστω $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$, με $\hat{f} \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$. Υποθέτουμε επίσης ότι το σύνολο που μηδενίζεται η συνάρτηση $\hat{f}$ είναι διακριτό και ότι υπάρχει θετική σταθερά c, τέτοια ώστε να ισχύει:*

$$|\{\xi \in \mathbb{R} | \hat{f}(\xi) = 0\} \cap [-R, R]\}| \leq cR \tag{2.28}$$

για κάθε $R > 0$. Αν η f είναι tiling της ευθείας μέσω ενός συνόλου A, φραγμένης πυκνότητας τότε το σύνολο A έχει την ακόλουθη περιγραφή:

$$\mathrm{A} = \bigcup_{i \leq N} (a_i \mathbb{Z} + b_i) \tag{2.29}$$

όπου $N \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b_i \in \mathbb{R}$ για κάθε $i \in [N]$. Μάλιστα το σύνολο A έχει πεπερασμένη διάσπαση σε περιοδικά tile sets για την f. Δηλαδή:

$$A = \bigcup_{i \leq K} A_i, \tag{2.30}$$

με $K \in \mathbb{N}$ και $A_i = a_i' \mathbb{Z} + \{b_1^{(k)}, ..., b_{n_i}^{(k)}\}$.

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι το μέτρο μ_A πληροί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος 5. Καθώς το σύνολο A είναι φραγμένης πυκνότητας έπεται ότι το μέτρο $\mu_A \in \mathscr{S}'$. Από το Θεώρημα 3(i) προκύπτει ότι:

$$\operatorname{supp} \widehat{\mu_A} \subseteq B := \{0\} \cup \{\xi \in \mathbb{R} | \hat{f}(\xi) = 0\}$$

με το σύνολο B να είναι διακριτό και ικανοποιεί τη σχέση (2.28). Δείχνουμε πρώτα ότι η tempered κατανομή $\widehat{\mu_{\mathrm{A}}}$ είναι μέτρο Radon. Είναι γνωστό ότι μία κατανομή με φορέα το μονοσύνολο $\{b\}$ για κάποιο $b \in \mathbb{R}$ γράφεται ως πεπερασμένος γραμμικός συνδυασμός των παραγώγων της κατανομής δ_b (βλέπε Rudin[3], Θεώρημα 6.25). Καθώς λοιπόν ο φορέας της κατανομής $\widehat{\mu_A}$ είναι διακριτός, προκύπτει ότι:

$$\widehat{\mu_{\mathrm{A}}} = \sum_{b \in B} \psi_b$$

όπου

$$\psi_b = \sum_{i \leq n_b} c_{b,i} \delta_b^{(i)}$$

με $n_b \in \mathbb{N}$, $c_{b,i} \in \mathbb{C}$ για κάθε $b \in B$ και κάθε $i \in [n_b]$ ενώ με $\delta_b^{(i)}$ συμβολίζουμε την i-οστή παράγωγο της κατανομής δ_b. Άρα για να δείξουμε ότι η κατανομή $\widehat{\mu_A}$ είναι μέτρο, θα πρέπει να ισχύει ότι $m_b = 0$ για κάθε $b \in B$. Έστω λοιπόν $b \in B$ και συνάρτηση $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ με φορέα στο $(-1,1)$ και $\varphi^{(i)}(0) = (-1)^i$ για κάθε $i \in [n_b]$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) := \varphi(\lambda(x-b))$, με $\lambda > 0$ και μετασχηματισμό Fourier:

$$\hat{g}(\xi) = \frac{1}{\lambda} e^{-i\xi b/\lambda} \hat{\varphi}(\xi/\lambda)$$

Αφού το σύνολο B είναι διακριτό έπεται ότι για μεγάλα $\lambda > 0$ ο φορέας της g τέμνει το σύνολο B μόνο στο σημείο b. Έτσι, για μεγάλα $\lambda > 0$ ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}
\widehat{\mu_{\mathrm{A}}}(g) &= \psi_b(g) \\
&= \sum_{i \le n_b} (-1)^i c_{b,i} g^{(i)}(b) \\
&= \sum_{i \le n_b} \left(c_{b,i}(-1)^i \varphi^{(i)}(0)\right) \lambda^i \\
&= \sum_{i \le n_b} c_{b,i} \lambda^i
\end{aligned}$$

με το δεξί μέλος της τελευταίας ισότητας να είναι πολυώνυμο βαθμού n_b.
Από την άλλη, αφού η συνάρτηση $g \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ και το σύνολο A είναι φραγμένης πυκνότητας έχουμε ότι:

$$\widehat{\mu_{\mathrm{A}}}(g) = \tilde{\mu}_A(\hat{g}) = \sum_{a \in A} \hat{g}(-a)$$

Διατάσσουμε τα στοιχεία του συνόλου A κατά αύξουσα σειρά των απολύτων τιμών τους. Δηλαδή, $\mathrm{A} = \{a_n | n \in \mathbb{N}\}$, με $|a_n| \le |a_{n+1}|$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Το γεγονός ότι το σύνολο A είναι φραγμένης πυκνότητας μας οδηγεί στο ότι υπάρχει θετική σταθερά C με: $|a_n| \ge Cn$, για αρκετά μεγάλα $n \in \mathbb{N}$. Από αυτό και το ότι η συνάρτηση $\hat{\varphi} \in \mathscr{S}($ και άρα υπάρχει $c > 0$ τέτοια ώστε να ισχύει: $|\hat{\varphi}|(\xi) \le \frac{c}{|\xi|^{3/2}})$ έπεται ότι για μεγάλα n ισχύει:

$$\begin{aligned}
|\hat{g}(-a_n)| &= \frac{1}{\lambda} |\hat{\varphi}(-a_n/\lambda)| \\
&\le c \frac{1}{\lambda} \left|\frac{a_n}{\lambda}\right|^{-\frac{3}{2}} \\
&\le C c \lambda^{\frac{1}{2}} n^{\frac{-3}{2}}
\end{aligned}$$

για κάθε $\lambda > 0$. Για μεγάλα λοιπόν $\lambda > 0$ έχουμε ότι :

$$\Big|\sum_{i \le n_b} c_{b,i} \lambda^i\Big| = |\widehat{\mu_A}|(g) \le C\lambda^{\frac{1}{2}} \sum_{k \ge 1} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \le C' \lambda^{\frac{1}{2}}$$

όπου $C' > 0$ σταθερά. Φυσικά η παραπάνω ανισότητα μπορεί να ισχύει μόνο στη περίπτωση που το πολυώνυμο (ως προς λ) είναι σταθερό καταλήγοντας έτσι στο ότι η κατανομή $\widehat{\mu_A}$ είναι μέτρο Radon, με αναπαράσταση :

$$\widehat{\mu_{\mathrm{A}}} = \sum_{b \in B} c_b \delta_b$$

με $c_b \in \mathbb{C}$.
Στη συνέχεια δείχνουμε ότι η συλλογή των απολύτων τιμών των συντελεστών c_b της παραπάνω αναπαράστασης του μέτρου $\widehat{\mu_A}$ είναι φραγμένη στο $\mathbb{R}$. Όπως και προηγουμένως, θεωρούμε μία συνάρτηση $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ με φορέα στο διάστημα $(-1,1)$ και $\varphi(0) = 1$. Θεωρούμε επίσης ένα τυχαίο $b \in B$ και τη συνάρτηση $h(x) := \varphi(\lambda(x-b))$ για $\lambda > 0$. Παρατηρούμε πάλι πως για αρκετά μεγάλο $\lambda > 0$ ο φορέας της $h(x)$ τέμνει το σύνολο B μόνο στο σημείο b. Έτσι έχουμε ότι :

$$c_b = c_b\delta_b(h) = \widehat{\mu_{\mathrm{A}}}(h) = \tilde{\mu}_{\mathrm{A}}(\hat{h}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \hat{h}(-a_n) \tag{2.31}$$

Καθώς, $\hat{h}(\xi) = \frac{1}{\lambda}e^{-i\xi b/\lambda}\hat{\varphi}(\xi/\lambda)$ παίρνουμε ότι:

$$\begin{aligned}
|c_b| &\leq \frac{1}{\lambda}\sum_{n\geq 1}|\hat{\varphi}|(-a_n/\lambda) \\
&\leq \frac{1}{\lambda}\sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ 0\leq|a_n|\leq\lambda}}|\hat{\varphi}|(-a_n/\lambda) + \frac{1}{\lambda}\sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ |a_n|\geq\lambda}}|\hat{\varphi}|(-a_n/\lambda) \\
&\leq \frac{1}{\lambda}||\hat{\varphi}||_{[-1,1]}\big|A\cap[-\lambda,\lambda]\big| + \frac{1}{\lambda}\sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ |a_n|>\lambda}}\frac{\lambda^2}{n^2} \\
&\leq C_1||\hat{\varphi}||_{[-1,1]} + \lambda\sum_{n>\lambda}\sum_{n\leq|a_n|<n+1}\frac{1}{n^2} \\
&\leq C_1||\hat{\varphi}||_{[-1,1]} + \lambda C\sum_{n>\lambda}\frac{1}{n^2} \\
&\leq C_1||\hat{\varphi}||_{[-1,1]} + C
\end{aligned} \tag{2.32}$$

για $\lambda > 0$ αρκετά μεγάλο ώστε να ισχύει η (2.31) (η σταθερά C_1 προκύπτει από τη σχέση (2.3) για το άνω φράγμα της ποσότητας $N_A(\lambda)$). Άρα δείξαμε και τον ισχυρισμό ότι οι συντελεστές c_b είναι φραγμένοι.
Συνδυάζοντας τώρα, αυτά που δείξαμε και τη σχέση (2.28) παρατηρούμε ότι το μέτρο $\widehat{\mu_{\mathrm{A}}}$ πληροί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος 5 και άρα το σύνολο A έχει την εξής περιγραφή :

$$A = F\triangle\bigcup_{i\leq N}(a_i\mathbb{Z}+b_i)$$

Αν $A' = \bigcup_{i\leq N}(a_i\mathbb{Z}+b_i)$, τότε μπορούμε να γράψουμε το μέτρο μ_{A} με τον εξής τρόπο:

$$\mu_A = \sum_{a\in A'}\delta_a + \sum_{a\in F\setminus A'}\delta_a - \sum_{a'\in F\cap A'}\delta'_a \tag{2.33}$$

Από τον τύπο άθροισης του Poisson για το $\widehat{\mu_{\mathrm{A}'}}$ και το γεγονός ότι το σύνολο F είναι πεπερασμένο έπεται ότι :

$$\widehat{\mu_A} = \widehat{\mu_{A'}} + \sum_{a\in F\setminus A'}e^{-ia\xi} + \sum_{a'\in F\cap A'}e^{-ia'\xi}$$

Όμως από την αναπαράσταση που δώσαμε για το μέτρο $\widehat{\mu_{\mathrm{A}}}$ έπεται ότι το μέτρο $\widehat{\mu_{\mathrm{A}}}$ είναι ασυνεχές παντού στο $\mathbb{R}$ (αφού το σύνολο B είναι διακριτό) όπως επίσης και το $\widehat{\mu'_{\mathrm{A}}}$ (από τον τύπο άθροισης του Poisson). Άρα υποχρεωτικά το σύνολο F πρέπει να είναι το κενό, δείχνοντας έτσι τη (2.29).

Μένει τώρα να δείξουμε τη διάσπαση του συνόλου A σε περιοδικά tile sets για την f όπως περιγράφεται στη σχέση (2.30). Ορίζουμε λοιπόν μία σχέση ανάμεσα στις αριθμητικές προόδους $(a_i\mathbb{Z} + b_i)$ της (2.29) με τον εξής τρόπο: Δύο τέτοιες αριθμητικές πρόοδοι σχετίζονται μεταξύ τους αν ο λόγος των περιόδων τους είναι ρητός αριθμός. Εύκολα κανείς δείχνει ότι η σχέση αυτή είναι σχέση ισοδυναμίας χωρίζοντας έτσι τα παραπάνω σύνολα σε κλάσεις ισοδυναμίας. Τα σύνολα A_i που εμφανίζονται στη (2.30) δεν είναι άλλα παρά αυτά που προκύπτουν ως η ένωση των αριθμητικών προόδων της (2.29) που ανήκουν στην ίδια κλάση. Δείχνουμε πρώτα ότι αυτά τα A_i είναι περιοδικά σύνολα. Αν $\{a_{i_1}, ...a_{i_m}\}$ είναι το σύνολο των περιόδων των αριθμητικών προόδων που απαρτίζουν το A_i τότε φυσικά ισχύει ότι $a_{i_j} = (p_j/q_j)a_{i_1}$ για κάθε $j \in [m]$, όπου $p_j, q_j \in \mathbb{N}$ πρώτοι μεταξύ τους, για κάθε $j \in [m]$. Αν τώρα θέσουμε $m_i := \mathrm{lcm}(p_2, ..., p_m)$ τότε το σύνολο A_i είναι περιοδικό, με περίοδο $a_i' := m_i a_{i_1}$. Εύκολα τώρα κανείς ελέγχει την ισότητα των παρακάτω συνόλων:

$$A_i = a_i'\mathbb{Z} + \{b_1^{(i)}, ..., b_m^{(i)}\}$$

Μένει να δείξουμε τώρα ότι το σύνολο A_i είναι και tile set για την f. Ας είναι λοιπόν :

$$\mu_i := \mu_{A_i} = \sum_{a \in A_i} \delta_a$$

για $i \in K$ και τότε από τον τύπο άθροισης του Poisson έχουμε ότι:

$$\widehat{\mu_i} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_i(2n\pi/a_i')\delta_{2n\pi/a_i'}$$

όπου

$$g_i(x) := \frac{2\pi}{|a_i'|} \sum_{k \leq m} e^{-ib_k^{(i)}x}$$

Εύκολα μπορούμε να δούμε τώρα ότι το μέτρο $\widehat{\mu}_i$ είναι τοπικά πεπερασμένο (αν $x \in \frac{2\pi}{a_i'}\mathbb{Z}$ τότε μία οποιαδήποτε ανοικτή περιοχή του x που δεν τέμνει άλλα σημεία του $\frac{2\pi}{a_i'}\mathbb{Z}$ είναι πεπερασμένου $\widehat{\mu}_i$ -μέτρου, ενώ αν $x \notin \frac{2\pi}{a_i'}\mathbb{Z}$ τότε ένα ανοικτό διάστημα που περιέχει το x, ξένο με το σύνολο $\frac{2\pi}{a_i'}\mathbb{Z}$ είναι μηδενικού $\widehat{\mu}_i$- μέτρου). Άρα για κάθε $i \in [K]$ έχουμε τα τοπικά πεπερασμένα μέτρα $\widehat{\mu}_i$. Καθώς ο λόγος οποιονδήποτε δύο περιόδων των A_i είναι άρρητος έπεται ότι οι φορείς των αντίστοιχων μέτρων $\widehat{\mu}_i$ είναι ξένοι, εκτός ίσως από το μηδέν. Όμως το μέτρο $\widehat{\mu_A}$ είναι το άθροισμα των $\widehat{\mu}_i$ για όλα τα $i \in [K]$ και άρα η ένωση των φορέων των $\widehat{\mu}_i$ μαζί με το μηδέν ισούται με το φορέα του $\widehat{\mu_A}$ μαζί με το μηδέν. Από το Θεώρημα 3(i), έπεται ότι ο φορέας του $\widehat{\mu_{\mathrm{A}}}$ περιέχεται στο σύνολο B και άρα ο φορέας καθ'ενός από τα $\widehat{\mu}_i$ περιέχεται και αυτός με τη σειρά του στο σύνολο B. Τέλος από το Θεώρημα 3(ii) έπεται ότι το σύνολο A_i είναι tile set για την f. □

2.3 Tilings από συναρτήσεις με συμπαγή φορέα

Τώρα θα δούμε κάποιες εφαρμογές του Θεωρήματος 6 στην ειδική περίπτωση όπου η συνάρτηση που δίνει tiling της ευθείας φραγμένης πυκνότητας έχει συμπαγή φορέα.

Θεώρημα 7. *Έστω $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ μη μηδενική συνάρτηση με συμπαγή φορέα.*
i) Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ είναι tile set του $\mathbb{R}$ για την f, φραγμένης πυκνότητας τότε:

$$A = \bigcup_{i \leq N} (a_i\mathbb{Z} + b_i)$$

με $a_i \neq 0$ για κάθε $i \in [N]$ και $b_i \in \mathbb{R}$.
ii) Κάθε tile set για την f φραγμένης πυκνότητας διαμερίζεται σε πεπερασμένα το πλήθος αδιάσπαστα και περιοδικά tile sets για την f φραγμένης πυκνότητας. Συνεπώς κάθε αδιάσπαστο tile set για την f, φραγμένης πυκνότητας είναι περιοδικό, δηλαδή υπάρχει $a > 0$ τέτοιο ώστε:

$$A = \bigcup_{i \leq K} (a\mathbb{Z} + b_i)$$

με $b_i \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη. i) Δείχνουμε ότι η συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος 4, δηλαδή $\hat{f} \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ με το σύνολο όπου η $\hat{f}$ μηδενίζεται να είναι διακριτό και να ισχύει η (2.28). Έστω λοιπόν $\operatorname{supp} f \subseteq [-R, R]$ για κάποιο $R > 0$. Όπως έχουμε δείξει στην τέταρτη ενότητα του κεφαλαίου ένα $\hat{f} \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ και μάλιστα για κάθε $z \in \mathbb{C}$ ισχύει ότι:

$$|\hat{f}(z)| \leq ||f||_1 e^{R|z|}$$

απ'όπου σύμφωνα με το τύπο του Jensen παίρνουμε ότι :

$$\limsup_{T \to +\infty} \frac{|\{\xi \in \mathbb{R} | \hat{f}(\xi) = 0\} \cap [-T, T]|}{T} \leq \limsup_{T \to +\infty} \frac{|\{z \in \mathbb{C} | \hat{f}(z) = 0\} \cap D(0, T)|}{T} \leq eR$$

Βάσει λοιπόν του θεωρήματος 4 παίρνουμε το ζητούμενο.
ii) Για να δείξουμε ότι το σύνολο A διαμερίζεται σε αδιάσπαστα tile sets για την f, εξετάζουμε τις περιπτώσεις όπου ο αριθμός $L := \hat{f}(0)$ είναι μηδέν ή όχι.
Περίπτωση 1: Έστω λοιπόν ότι $L \neq 0$ και δίχως βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $L > 0$. Από το λήμμα 4 έχουμε ότι το ύψος οποιουδήποτε tiling φραγμένης πυκνότητας που δίνει η συνάρτηση f φράσσεται από κάτω από τον αριθμό $L/2R$. Δείχνουμε τώρα ότι οποιοδήποτε tiling φραγμένης πυκνότητας, ύψους $w \geq 0$ που δίνει η f διαμερίζεται σε το πολύ $\lfloor 2Rw/L \rfloor$ αδιάσπαστα tile sets για την f. Αυτό θα το πετύχουμε κάνοντας επαγωγή στο $n \in \mathbb{N}$ κάθε φορά που το ύψος του tiling βρίσκεται στο διάστημα $[nL/2R, (n+1)L/2R)$. Για $n = 1$ είναι άμεσο ότι το σύνολο A είναι αδιάσπαστο. Διαφορετικά θα διαμεριζόταν σε δύο tile set για την f, A_1, A_2, φραγμένης πυκνότητας ύψους w_1, w_2. Όμως τότε τουλάχιστον ένα από τα δύο αυτά ύψη θα πρέπει να είναι μικρότερα του $L/2R$ καταλήγοντας έτσι σε άτοπο. Χρησιμοποιώντας τώρα την επαγωγική υπόθεση και την ανισότητα: $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor$ δείχνουμε εύκολα το επαγωγικό βήμα.
Περίπτωση 2: Έστω τώρα ότι $L = 0$. Από το Λήμμα 3 (i) έχουμε ότι το ύψος του tiling ισούται με το μηδέν. Λόγω του ότι το σύνολο A είναι πεπερασμένη ένωση αριθμητικών προόδων το όριο :

$$\lim_{T \to \infty} \frac{|A \cap [-T, T]|}{2T}$$

υπάρχει στο $\mathbb{R}$ και το συμβολίζουμε με $d(A)$. Ισχυριζόμαστε τώρα ότι $d(A) \geq 1/2R$ για κάθε tile set φραγμένης πυκνότητας. Διαφορέτικα αν για κάποιο tile set A , ίσχυε ότι $d(A) < 1/2R$ όπως και στην απόδειξη του λήμματος 4, βρίσκουμε ένα στοιχείο $a \in A$ και διάστημα της μορφής $(a, a + 2R + \varepsilon)$ με $\varepsilon < 1/2R$ σταθερό, που η τομή του με το A είναι το κενό σύνολο. Στο

παραπάνω διάστημα βρίσκουμε ένα ανοικτό μη τετριμμένο διάστημα (και άρα σύνολο θετικού m_1- μέτρου) που περιέχεται στο φορέα της $f(x-a)$ και είναι ξένο με το φορέα της $f(x-a')$ για κάθε $a' \in A \setminus \{a\}$, πράγμα που υποχρεώνει το ύψος του tiling, w να είναι μη μηδενικός αριθμός καταλήγοντας έτσι σε άτοπο. Καθώς $d(A_1 \cup A_2) = d(A_1) + d(A_2)$, δουλεύουμε όπως και στην περίπτωση όπου $L > 0$, δείχνοντας ότι οποιοδήποτε tile set A για την f φραγμένης πυκνότητας, διαμερίζεται σε το πολύ $\lfloor 2Rd(A) \rfloor$ το πλήθος αδιάσπαστα tilings, κάνοντας επαγωγή στο $n \in \mathbb{N}$ κάθε φορά που το tile set A έχει ασυμπτωτική πυκνότητα $d(A) \in [n/2R, (n+1)/2R)$.
Τέλος, αν A είναι αδιάσπαστο tile set φραγμένης πυκνότητας για την f, από το θεώρημα 6 προκύπτει ότι το σύνολο A διαμερίζεται σε περιοδικά tile set για την f και επομένως το A είναι περιοδικό. □

Θεώρημα 8. *Έστω συνάρτηση $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ με συπαγή φορέα. Η f δίνει tiling της ευθείας μέσω ενός συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}$ φραγμένης πυκνότητας αν και μόνον αν υπάρχει αριθμός $a > 0$ τέτοιος ώστε: $a\mathbb{Z} \setminus \{0\} \subseteq \{\xi \in \mathbb{R} | \hat{f}(\xi) = 0\}$. Σε αυτή την περίπτωση το σύνολο $A' := (2\pi/a)\mathbb{Z}$ είναι tile set του $\mathbb{R}$ για την f.*

Απόδειξη. Από το θεώρημα 1(ii) το tile set A είναι περιοδικό σύνολο της μορφής : $A = r\mathbb{Z} + \{b_1, ..., b_N\}$ όπου $r > 0$, $N \in \mathbb{N}$ και $b_i \in \mathbb{R}$ για κάθε $i \in [N]$. Από τον τύπο άθροισης του Poisson για το μέτρο μ_A έπεται ότι:

$$\widehat{\mu_{\mathrm{A}}} = \frac{2\pi}{|r|} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h(n) \delta_{2n\pi/r}$$

Ορίζουμε τώρα στο σύνολο των ακεραίων τη συνάρτηση h με τύπο :

$$h(n) := \sum_{i \leq N} \theta_i^n$$

όπου $\theta_i = e^{-2\pi i b_i/r}$ και τότε :

$$\widehat{\mu_A} = \frac{2\pi}{r} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h(n) \delta_{2n\pi/r}$$

Το θεώρημα των Skolem-Mahler-Lech (βλ. C.Lech [10], 417-422) αναφέρει ότι το σύνολο των ακεραίων όπου η συνάρτηση h είναι μηδέν αποτελείται από πεπερασμένες το πλήθος αριθμητικές προόδους μεταφερμένες κατά ένα πεπερασμένο υποσύνολο B των πραγματικών αριθμών. Καθώς $h(0) = N \neq 0$ καμμία από τις αριθμητικές προόδους που περιέχονται στο σύνολο μηδενισμού της h δε διέρχεται από το μηδέν. Αν τώρα θέσουμε l' να έιναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των περιόδων αυτών των αριθμητικών προόδων και k να είναι το μέγιστο στοιχείο του B αν δεν είναι κενό (ειδάλλως θέτουμε $k := 1$) βλέπουμε ότι για τον αριθμό $l = l'k$ έχουμε ότι $h(ln) \neq 0$, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Έτσι

$$\frac{2\pi l}{r}\mathbb{Z} \subseteq \operatorname{supp} \widehat{\mu_A}$$

Από το θεώρημα 3(i) έπεται ότι για $a := 2\pi l/r > 0$:

$$a\mathbb{Z} \setminus \{0\} \subseteq \{\hat{f}(\xi) = 0\}$$

Για το αντίστροφο θέτουμε $a' = 2\pi/a$ και τότε παρατηρούμε ότι το τοπικά πεπερασμένο μέτρο $\widehat{\mu_A} = \frac{2\pi}{a} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{na'}$ πληροί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος 3(ii) και άρα εφαρμόζοντάς το παίρνουμε το ζητούμενο. □

Θεώρημα 9. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ με την ακόλουθη περιγραφή:*

$$A = \bigcup_{i \leq N} \Big(a_i \mathbb{Z} + b_i \Big)$$

όπου $N \in \mathbb{N}$, $a_i > 0$, $b_i \in \mathbb{R}$ για κάθε $i \in [N]$. Τότε υπάρχει συνάρτηση $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ με συμπαγή φορέα για την οποία το σύνολο A είναι tile set και τότε το ύψος του tiling είναι θετικός αριθμός.

Απόδειξη. Θα δείξουμε το ζητούμενο πρώτα στην περίπτωση όπου $A = \bigcup_{i \leq N} a_i \mathbb{Z}$, με $a_i > 0$. Για κάθε $i \in \mathbb{N}$, θέτουμε $A_i = a_i \mathbb{Z}$ και ορίζουμε τη συνάρτηση $f_i = \chi_{[0,a_i]}$. Είναι προφανές ότι η f_i δίνει tiling της ευθείας ύψους 1 μέσω του A_i και φυσικά $\left(\widehat{f}\right)^{-1}(0) = 2\pi/a_i \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $f := \star_{i \leq N} f_i \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ με συμπαγή φορέα και τότε $\widehat{f} = \Pi_{i \leq N} \widehat{f}_i$. Είναι προφανές ότι $\widehat{f}(0) > 0$ καθώς και ότι :

$$\frac{2\pi}{a_i} \mathbb{Z} \setminus \{0\} \subseteq \{\widehat{f}_i(\xi) = 0\}$$

για κάθε $i \in [N]$. Από το Θεώρημα 6 η f δίνει tiling της ευθείας μέσω του συνόλου A_i για κάθε $i \in [N]$. Άρα το σύνολο A είναι tile set για την f που σύμφωνα με το Θεώρημα 3(ii) το ύψος του tiling είναι θετικός αριθμός. Τέλος παρατηρεί κανείς ότι το σύνολο A_i είναι tile set για την f αν και μόνον αν οποιαδήποτε μεταφορά του συνόλου A_i είναι tile set για την f. Άρα και το σύνολο A της εκφώνησης είναι tile set για την f ύψους (μάλιστα ίδιου) με εκείνου του A'. □

Θεώρημα 10. *Έστω S ένα φραγμένο μετρήσιμο σύνολο μη μηδενικού μέτρου τέτοιο ώστε η χαρακτηριστική του συνάρτηση δίνει tiling της ευθείας ύψους $w \in \mathbb{R}$. Ο αριθμός w είναι φυσικός αριθμός και το tile set είναι περιοδικό.*

Απόδειξη. Αφού $\chi_S \geq 0$ με $0 < m_1(S) < \infty$ έπεται από το λήμμα 1 ότι η χ_S δίνει tilings του $\mathbb{R}$ μόνο φραγμένης πυκνότητας, ενώ από το λήμμα 3(ii), το ύψος του tiling είναι θετικός αριθμός. Επειδή η χ_S είναι χαρακτηριστική συνάρτηση το ύψος του tiling είναι υποχρεωτικά φυσικός αριθμός. Από το Θεώρημα 7(ii) οποιοδήποτε tile set της χ_S είναι πεπερασμένη ένωση αδιάσπαστων περιοδικών tile set για την χ_S. Ας είναι λοιπόν $A = a\mathbb{Z} + \{b_1, ..., b_N\}$ με $N \in \mathbb{N}$ ένα αδιάσπαστο tile set για την χ_S. Εύκολα κανείς δείχνει ότι η ασυμπτωτική πυκνότητα του συνόλου A, που τη συμβολίζουμε με $d(A)$ ισούται με N/a ενώ από το λήμμα 3(ii) έχουμε ότι $d(A) = w/m_1(S)$. Άρα η περίδοδος a του συνόλου A είναι ρητό πολλαπλάσιο του $m_1(S)$. Αν τώρα B είναι ένα γενικό tile set για την χ_S, με βάση τα παραπάνω η περίδος του συνόλου B είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των περιόδων, των αδιάσπαστων tile set για τη χ_S που απαρτίζουν το B (ο λόγος οποιονδήποτε δύο περιόδων των αδιάσπαστων tile set για τη χ_S είναι ρητός αριθμός). □

Κεφάλαιο 3

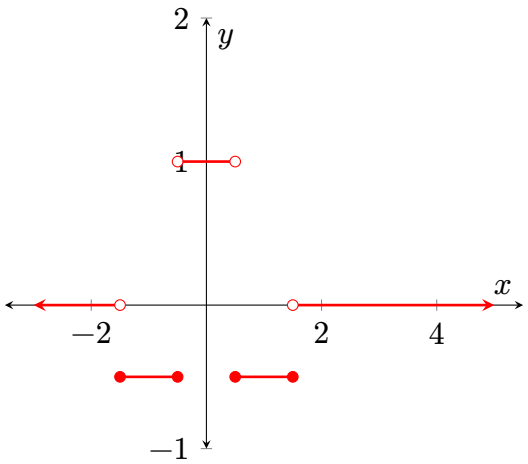
Παραδείγματα

Σε αυτό το κεφάλαιο δίνουμε κάποια μη τετριμμένα tilings της ευθείας από ολοκληρώσιμες συναρτήσεις με συμπαγή φορέα.

Παράδειγμα 1. *Συνάρτηση που δίνει tiling της ευθείας μη φραγμένης πυκνότητας.*
Ορίζουμε την πραγματική συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{αν } |x| < 1/2 \\ -1/2 & \text{αν } 1/2 \leq |x| \leq 3/2 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα:



Φυσικά $\int_{\mathbb{R}} f(x) = 0$ και μπορεί κανείς να διαπιστώσει ότι το σύνολο των ακεραίων $\mathbb{Z}$ είναι tile set για τη συνάρτηση f (φραγμένης πυκνότητας) ύψους μηδέν. Όμως η συνάρτηση f δίνει tiling της ευθείας ύψους $w = -1$ με tile set το πολυσύνολο A που αποτελείται από όλους τους ακεραίους $n \in \mathbb{Z}$ με πολλαπλότητα $m(n) = n^2$. Εύκολα μπορεί κανείς να δείξει ότι το σύνολο A δεν είναι φραγμένης πυκνότητας αφού υπάρχουν $0 < c_1 < c_2$ σταθερές τέτοιες ώστε για μεγάλα $T \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$c_1 T^3 \leq |\{a \in A | |a| \leq T\}| \leq c_2 T^3$$

Η δεύτερη ανισότητα μας λέει ότι το αντίστοιχο μέτρο μ_A είναι tempered κατανομή με αναπα-

ράσταση:

$$\mu_A = \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2 \delta_n$$

και μετασχηματισμό Fourier:

$$\widehat{\mu_A} = 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta^{(2)}_{2n\pi}$$

που φυσικά δεν είναι μέτρο.

Παράδειγμα 2. *Συνάρτηση f με ημιομάδα υψών $W(f)$ όχι πεπερασμένα παραγόμενη.*
Με χ συμβολίζουμε τη χαρακτηριστική συνάρτηση του διαστήματος $[-1,1]$. Ο μετασχηματισμός Fourier αυτής της συνάρτησης έχει τύπο:

$$\hat{\chi}(\xi) = \frac{2\sin(\xi)}{\xi}$$

Θεωρούμε μία ακολουθία θετικών αριθμών $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ που φθίνει στο μηδέν με τέτοιο τρόπο ώστε η ακολουθία συναρτήσεων $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με τύπο:

$$f_n(x) = \star_{k\leq n} \frac{1}{2a_k}\chi(x/a_k) \tag{3.1}$$

να συγλίνει ομοιόμορφα (στο $\mathbb{R}$) σε μία μη αρνητική συνάρτηση f με συμπαγή φορέα στο διάστημα $[-R,R]$ όπου $R = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί λόγω του θεωρήματος των Arzela-Ascoli, αφού για κάθε $n \geq 2$ η συνάρτηση f_n είναι ομοιόμορφα συνεχής με συμπαγή φορέα στο $[-R,R]$ (και άρα η ακολουθία των συναρτήσεων $(f_n)_{n\geq 2}$ είναι ισοσυνεχής) ενώ επαγωγικά δείχνουμε το ομοιόμορφο φράγμα της ακολουθίας λόγω της σχέσης:

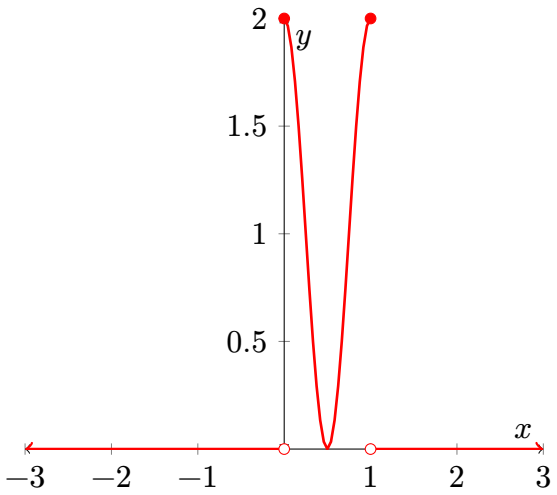
$$f_n(x) = \frac{1}{2a_n}\int_{[x-a_n,x+a_n]} f_{n-1}(y)dm_1(y)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Από την ομοιόμορφη σύγκλιση έπεται ότι για κάθε $\xi \in \mathbb{R}$, $\hat{f}(\xi) = \lim_{n\to\infty} \hat{f}_n(\xi)$. Καθώς $\hat{f}_n(\xi) = \Pi_{k\leq n}\hat{\chi}(a_n\xi)$ έπεται ότι η συνάρτηση $\hat{f}$ μηδενίζεται στα σημεία $\frac{\pi}{a_n}\mathbb{Z}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Από το θεώρημα 3 ii) προκύπτει ότι η συνάρτηση f δίνει tilings της ευθείας μέσω του tile set $\mathrm{A}_n = 2a_n\mathbb{Z}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αφού $\int_{\mathbb{R}} f = \hat{f}(0) = 1$ το αντίστοιχο ύψος w_n του tiling (μέσω του A_n) ισούται με $1/2a_n$. Επιλέγοντας τώρα τα a_n με τέτοιο τρόπο ώστε να ισχύει επιπλέον ότι το σύνολο $\{w_n | n \in \mathbb{N}\}$ να είναι $\mathbb{Q}$ -γραμμικώς ανεξάρτητο παίρνουμε το ζητούμενο για την ημιομάδα $W(f)$.

Παράδειγμα 3. *Συνάρτηση με αδιάσπαστο tile set της μορφής $a\mathbb{Z} + \{b_1, ..., b_m\}$ με $a \in \mathbb{N}$ και δύο μεταφορές b_k, b_l τέτοιες ώστε $b_k - b_l \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.*
Ας είναι f η συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με τύπο :

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \cos 2\pi x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Θεωρούμε επίσης το σύνολο

$$A := \mathbb{Z} + \{0, \pm t_1, \pm t_2\} \tag{3.2}$$

για $t_1, t_2 \in [0, 1)$. Το σύνολο A είναι tile set της ευθείας για την f αν και μόνον αν το σύνολο $\mathscr{B} = \{0, \pm t_1, \pm t_2\}$ είναι tile set του κύκλου $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ για τη συνάρτηση $1 + \cos 2\pi x$ ορισμένη στο σύνολο $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Έτσι το ανάλογο του θεωρήματος 3i) για να είναι το σύνολο A tile set της ευθείας για την f, θα πρέπει το μέτρο μ_{B} στο χώρο $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ να έχει μετασχηματισμό Fourier $\widehat{\mu_{\mathscr{B}}}$ (ορισμένο στο $\mathbb{Z} \cong \widehat{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} \cong \hat{\mathbb{T}}$) με φορέα που περιέχει την ένωση του $\{0\}$ και τους ακεραίους που μηδενίζουν την $\hat{f}$. Καθώς η $\hat{f}$ μηδενίζεται σε όλους τους ακέραιους εκτώς του μηδέν και των ± 1 αρκεί να δείξουμε ότι $\widehat{\mu_{\mathscr{B}}}(\pm 1) = 0$. Όμως,

$$\widehat{\mu_{\mathscr{B}}}(\pm 1) = \int_{[0,1]} e^{-2\pi i x} d\mu(x) = 1 + 2\cos 2\pi t_1 + 2\cos 2\pi t_2$$

πράγμα που σημαίνει ότι για οποιοδήποτε $t_1 \in (1/2, 3/4)$, υπάρχει $t_2 \in [0, 1)$ με $\widehat{\mu_B}(\pm 1) = 0$. Έτσι βλέπουμε ότι υπάρχουν πολλές (άπειρες) επιλογές των t_1, t_2 ούτως ώστε το σύνολο A να είναι tile set (της ευθείας) για την f.

Ο σκοπός μας είναι τώρα να δείξουμε την ύπαρξη ενός αδιάσπαστου tile set της μορφής

$$a\mathbb{Z} + \{b_1, ..., b_m\} \tag{3.3}$$

με $a \in \mathbb{N}$ και $b_i - b_j \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ για κάποια $i, j \in [m]$. Σταθεροποιούμε ένα ζεύγος $t_1, t_2 \in [0, 1)$ τέτοιο ώστε το σύνολο A είναι tile set για την f και τότε από το θεώρημα 7ii) το σύνολο A γράφεται ως πεπερασμένη ένωση αδιάσπαστων περιοδικών tile set για την f της μορφής (3.3): Παρ'όλο που η περίοδος του τυχαίου αδιάσπαστου tile set δεν είναι εν γένει ακέραιος αριθμός, στην περίπτωσή μας κάθε αδιάσπαστο tile set που συμβάλει στη διαμέριση του A περιέχεται στο σύνολο $A = \mathbb{Z} + \{0, \pm t_1, \pm t_2\}$ και ως εκ τούτου η περίοδός του είναι υποχρεωτικά ρητός αριθμός που μπορούμε να το θεωρήσουμε φυσικό αριθμό αν μεγαλώσουμε το σύνολο των μεταφορών του $a\mathbb{Z}$ στην (3.3). Έτσι το σύνολο A έχει τη μορφή

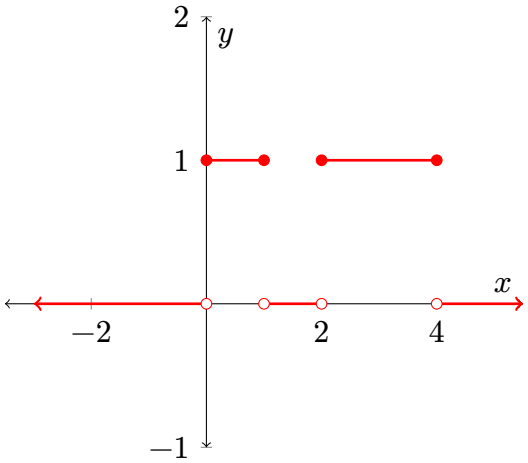
$$A = a\mathbb{Z} + B \tag{3.4}$$

όπου $a \in \mathbb{N}$, $B := \{b_1, ..., b_n\}$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Με βάση τα παραπάνω, το σύνολο B περιέχεται στο σύνολο $\{0, 1, ..., a\} + \{0, \pm t_1, \pm t_2\}$. Φυσικά, η f δεν δίνει tiling της ευθείας με κανένα

υποσύνολο των ακεραίων και επομένως μία οποιαδήποτε αδιάσπαστη συνιστώσα του A για την f δε μπορεί να περιέχει μόνο ακέραιους αριθμούς. Άρα υπάρχει ένα αδιάσπαστο tile set για την f της μορφής (3.4) όπου το σύνολο B περιέχει έναν ακέραιο $m \in \mathbb{Z}$ και έναν αριθμό $n + t_i$ όπου $n \in \mathbb{Z}$, $i \in \{1, 2\}$.
Τώρα όμως επιλέγουμε $t_1 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cap (1/2, 3/4)$ με $t_2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cap [0, 1)$ τέτοιο ώστε $\widehat{\mu_{\mathscr{B}}}(\pm 1) = 0$. Με βάση τα όσα επιπώθηκαν παραπάνω υπάρχει αδιάσπαστο tile set για την f με ακέραια περίοδο της μορφής (7.4), και $m, n + t_i \in B$ για κάποια $n, m \in \mathbb{Z}$. Όμως,

$$t_i + n - m \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

δείχνοντας έτσι το ζητούμενο.
Παράδειγμα 4. *Χαρακτηριστική συνάρτηση συνόλου που δε δίνει tiling της ευθείας ύψους $w = 1$ αλλά μόνο με $w \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.*
Θεωρούμε τα διαστήματα $I_1 = [0, 1]$,$I_2 = [2, 4]$ και $f = \chi_{I_1 \cup I_2}$. Η συνάρτηση f δεν δίνει tiling της ευθείας ύψους 1. Παρ'όλα αυτά δίνει tiling ύψους 3 μέσω του συνόλου $\mathbb{Z}$. Μάλιστα η χαρακτηριστική συνάρτηση της ένωσης δύο (ξένων) διαστημάτων δίνει tiling της ευθείας ύψους ένα αν και μόνον αν τα διαστήματα είναι ισομήκη.



Βιβλιογραφία

[1] W.Rudin, *Functional analysis*, McGraw-Hill Inc., New York 1973

[2] L.Grafakos, *Classical Fourier analysis*, Springer New York, 2014

[3] G.B Folland, *A Course in Abstract Harmonic Analysis*, CRC Press, 1995

[4] W.Rudin, *Fourier analysis on groups*, Interscience Pubs, New York 1962

[5] P.J.Cohen, *On a conjecture of Littlewood and idempotent measures*, Amer. J. Math. **82** (1960), 191-212

[6] H.P. Rosenthal, *Projections onto translation-invariant subspaces of* $L^p(G)$, Memoirs Amer. Math. Soc. **63** (1996)

[7] M.N. Kolountzakis, J.C.Lagarias, *Structure of Tilings of the Line by a Function*, Duke Math. J. **82**(1996), 3, 653-678.

[8] R.P. Boas, *Entire Functions*, Academic Press, New York, 1954

[9] Nir Lev, M.N. Kolountzakis, *Tiling by translates of a function: Results and open problems*, Discrete Analysis 2021, Paper No. 12, 24 pp

[10] C.Lech, *A note on recurring series*, Ark. Mat. 2 (1953) 417-421

[11] Y. Meyer, *Nombres de Pisot, nombres de Salem et analyse harmonique*, Lect. Notes Math. 117 (1970), Springer-Verlag

[12] H. Leptin, D. Müller , *Uniform Partitions of Unity on Locally Compact Groups*, Advances in Mathematics 90, 1-14 (1991)