Πανεπιστημιο Κρητης

Σχολη Θετικων και Τεχνολογικων Επιστημων

Διατμηματικο Προγραμμα Μεταπτυχιακων Σπουδων
« Μαθηματικα και Εφαρμογες τους »

Φράγματα για τον Μεγιστικό Τελεστή Kakeya

Κατσαράκης Στυλιανός

Ηράκλειο
17 Νοεμβρίου 2015
Επιβλέπων καθηγητής Μήτσης Θεμιστοκλής

Ευχαριστώ τον επιβλέποντα
καθηγητή μου κ. Μήτση
για την συνεργασία
που είχαμε!

Περιεχόμενα

Συμβολισμοί

- $x \lesssim y$:Υπάρχει C κατάλληλη σταθερά ανεξάρτητη του x, y με $x \leq Cy$.
- I_e ευθύγραμμο τμήμα μοναδιαίου μήκους παράλληλο στο e.
- S^{d-1} ορίζεται η μοναδιαία σφαίρα διάστασης $d-1$ με κέντρο την αρχή των αξόνων.
- $D(*, r)$ μπάλα διάστασης d με κέντρο $*$ και ακτίνα r.
- $\sigma(\cdot)$ μέτρο Lebesgue ορισμένο στην σφαίρα S^{d-1}.
- $|\cdot|$ θα συμβολίζουμε το μέτρο Lebesgue διάστασης d.
- $card(\cdot)$ θα συμβολίζουμε τον πληθάριθμο ενός διακριτού σύνολου.
- Έστω ευθεία $l \in \mathbb{R}^d$ και $e_l \in \mathbb{P}^{d-1}$, το e_l είναι η κατεύθυνση του l.
- $\theta(l_i, l_j) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ είναι η μεταξύ γωνία των ευθειών l_i, l_j.
- $d_{min}(l_i, l_j) := \inf\{|x-y| : x \in l_i \text{ και } y \in l_j\}$.
- $dist(l_i, l_j)$: Είναι η σχετική απόσταση δυο ευθειών l_i, l_j οι οποίες περιέχονται στον $\mathbb{R}^d$. Η μετρική αυτή είναι συγκρίσιμη με την Hausdorff $dist(l_i, l_j) \approx \theta(l_i, l_j) + d_{min}(l_i, l_j)$.
- $d(a_i, a_j) \lesssim \inf\{dist(l_i, l_j) : l_i, l_j$ έχουν κατεύθυνση ίδια με τα a_i, a_j αντίστοιχα $\}$.
- $B(*, r) := \left\{x \in \mathbb{P}^{d-1} : d(x, *) < r\right\}$.
- $d_{min}(l_i, \Pi) = \inf\{dist(l_i, l_j) : l_j \subseteq \Pi\}$.
- $diam(K) := \sup\{|x-y| : x, y \in K\}$.
- $diameter(B) := \sup\{d(x, y) : x, y \in B\}$.
- $T_l^{\rho\delta}(\alpha)$ συμβολίζουμε τον σωλήνα με κέντρο α, άξονα συμμετρίας l, ακτίνας δ και μήκους ρ.
- $\overline{T}_{l_i}^{\rho\delta}(\alpha) := T_{l_i}^{100\rho 100\delta}(\alpha)$.
- Αν το $\rho = 1$, τότε συμβ. $T_{l_i}^{\rho\delta}(\alpha) = T_{l_i}^{\delta}(\alpha)$ και αντίστοιχα $\overline{T}_{l_i}^{\rho\delta}(\alpha) = \overline{T}_{l_i}^{\delta}(\alpha)$.
- $T_l^{\rho\delta}$: υπάρχει $\alpha \in l$ έτσι ώστε $T_l^{\rho\delta}(\alpha)$.

- Έστω δισδιάστατο επίπεδο $\Pi \subseteq \mathbb{R}^d$ και $\delta > 0$, τότε συμβ. $\Pi^\delta := \{x \in \mathbb{R}^d : |x - y| < \delta$ όπου $y \in \Pi\}$.

- Έστω $curve(\Pi)(\subseteq \mathbb{P}^{d-1})$ καμπύλη και $\delta > 0$, τότε συμβ. $curve(\Pi)^\delta := \{x \in \mathbb{P}^d : |x - y| < \delta$ όπου $y \in curve(\Pi)\}$.

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Ορισμός:Ένα σύνολο $E(\subseteq \mathbb{R}^d)$ θα λέγεται Kakeya αν το σύνολο αυτό είναι συμπαγές και περιέχει ευθύγραμμα τμήματα προς όλες τις κατευθύνσεις:

$$\forall e \in \mathbb{P}^{d-1} \quad \exists x \in \mathbb{R}^d \quad \text{τετοιο ωστε} \quad x + te \in E \quad \forall t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$$

Στον τομέα των Μαθηματικών έχουν καταγραφεί ορισμένα ερωτήματα που σχετίζονται με τα σύνολα Kakeya όπως:

α) Υπάρχουν σύνολα Kakeya που να έχουν μέτρο μηδέν;
Απάντηση: Υπάρχουν.

β)Ποια είναι η ελάχιστη διάσταση Hausdorff των συνόλων Kakeya που περιέχονται στον $\mathbb{R}^d$;
Απάντηση: Σύμφωνα με την εικασία, τα σύνολα Kakeya έχουν διάσταση ίδια με τη διάσταση του χώρου στον οποίο ανήκουν. Μέχρι στιγμής τα αποτελέσματα έχουν δείξει πως η εικασία ισχύει για την δεύτερη διάσταση. Γεγονός που δεν έχει αποδειχθεί μέχρι σήμερα για περισσότερες από τις δυο διαστάσεις ($d > 2$). Παρ' όλα αυτά, έχουν βρεθεί κάτω φράγματα για την διάσταση Hausdorff. Η παρούσα εργασία πραγματεύεται την καλύτερη εκτίμηση για την τρίτη διάσταση μέχρι και σήμερα.

Αρχικά, θα πρέπει να σημειωθεί πως η διάσταση των συνόλων Kakeya σχετίζεται με μια οικογένεια προβλημάτων της Μεγιστικής συνάρτησης Kakeya.
Ορισμός: Έστω $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ και $0 < \delta < 1$, ορίζεται ως Μεγιστική συνάρτηση Kakeya :

$$f^*_\delta : \mathbb{P}^{d-1} \to \mathbb{R}, \qquad f^*_\delta(e) := \sup_T \frac{1}{|T|} \int_T |f|$$

όπου T ($\subseteq \mathbb{R}^d$)αντιπροσωπεύει όλους τους σωλήνες με διάμετρο δ, μήκος 1 και άξονα συμμετρίας παράλληλο στο e.

Σε αυτό το σημείο, παρατίθενται ορισμένες εκτιμήσεις, οι οποίες είναι άμεσες συνέπειες:

$$||f_\delta^*||_\infty \leq ||f||_\infty$$
$$||f_\delta^*||_\infty \leq \delta^{-(d-1)}||f||_1 \tag{1.1}$$

Ανοικτό πρόβλημα για την μεγιστική συνάρτηση Kakeya :

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists C_\epsilon : ||f_\delta^*||_d \leq C_\epsilon \delta^{-\epsilon}||f||_d \tag{1.2}$$

Μια ισοδύναμη εκτίμηση είναι η ακόλουθη, η οποία προκύπτει μέσω παρεμβολής από τις σχέσεις (1.1) και (1.2)

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists C_\epsilon : ||f_\delta^*||_q \leq C_\epsilon \delta^{-(d/p-1+\epsilon)}||f||_p, \quad 1 \leq p \leq d, q = (d-1)p' \tag{1.3}$$

Η εκτίμηση της μεγιστικής συνάρτησης του Kakeya (δείτε (1.3)) σχετίζεται με την διάσταση των συνόλων Kakeya, η όποια προκύπτει από την παρακάτω Πρόταση.

Πρόταση 1.1. *Αν η εκτίμηση* (1.3) *ισχύει για κάποιο* $p < \infty$, *τότε τα σύνολα Kakeya που περιέχονται στον* $\mathbb{R}^d$ *έχουν διάσταση Hausdorff τουλάχιστον* p.

Απόδειξη. ([3]) Έστω E ένα σύνολο Kakeya και κάλυμμα του συνόλου E με δίσκους $D_j = D(x_j, r_j)$.
Θεωρούμε ότι $r_j \leq \frac{1}{100}$ και ορίζουμε $J_k := \{j : 2^{-k} \leq r_j \leq 2^{-(k-1)}\}$. Ορίζουμε ότι $S_k := \{e \in S^{d-1} : |I_e \cap (\bigcup_{j \in J_k} D_j)| \geq \frac{1}{100k^2}$, όπου $I_e \subseteq E\}$ και υποθέτουμε $\sigma(S_k) \leq 1$. Δεδομένου ότι $\sum_k \frac{1}{100k^2} < 1$ και $\sum_k |I_e \cap (\bigcup_{j \in J_k} D_j)| \geq |I_e| = 1$. Ισχύει ότι $\cup_{k=1}^\infty S_k = S^{d-1}$. Έστω ότι δεν ισχύει, τότε προκύπτει:

$$\sum_k |I_e \cap (\bigcup_{j \in J_k} D_j)| \leq \sum_k \frac{1}{100k^2} < 1 \text{ (Άτοπο).}$$

Επιπλέον, θέτοντας $f = x_{F_k}$ όπου $F_k = \bigcup_{j \in J_k} D(x_j, 10r_j)$.
Έστω τυχαίο $e \in S_k$, θέτουμε α_e κέντρο του I_e και ορίζουμε σωλήνα $T_{l_e}^{2^{-k}}(\alpha_e)$

$$|T_{l_e}^{2^{-k}}(\alpha_e) \cap F_k| \gtrsim \frac{1}{100k^2}|T_{l_e}^{2^{-k}}(\alpha_e)|.$$

Από την παραπάνω ιδιότητα προκύπτει ότι:

$$||f_{2^{-k}}^*||_q \gtrsim k^{-2}\sigma(S_k)^{\frac{1}{q}}.$$

Από την υπόθεση, συνεπάγεται ότι:

$$||f^*_{2^{-k}}||_q \le C_\epsilon 2^{k(\frac{d}{p}+\epsilon-1)}||f||_p \le C_\epsilon 2^{k(\frac{d}{p}+\epsilon-1)}(card(J_k)2^{-(k-1)dp})^{\frac{1}{p}}.$$

Συνεπώς,

$$\sigma(S_k)^{\frac{p}{q}} \lesssim 2^{-k(-d-p\epsilon+p+d)}k^{2p}card(J_k) \lesssim 2^{-k(p-2p\epsilon)}card(J_k)$$

Αθροίζοντας ως προς k:

$$\begin{aligned} 1 \approx \sigma(S^{d-1}) &\lesssim \sum_k \sigma(S_k) \lesssim \sum_k \sigma(S_k)^{\frac{p}{q}} \\ &\lesssim \sum_k 2^{-k(p-2p\epsilon)}card(J_k) \le \sum_j r_j^{p-2p\epsilon} \qquad (1.4) \\ \Rightarrow 1 &\lesssim \sum_j r_j^p. \qquad (1.5) \end{aligned}$$

Στην παραπάνω σχέση, έγινε χρήση της ανίσωσης $\frac{p}{q} \le 1$, η οποία προέρχεται από την σχέση $p \le d$. Η σχέση (1.5) είναι ανεξάρτητη του μεγέθους των r_j συνεπώς η ελάχιστη διάσταση Hausdorff είναι p.

Έστω ότι η υπόθεση $\sigma(S_k) \le 1$ δεν ισχύει, τότε θα πρέπει να τεμαχίσουμε το S_k κατά το λιγότερο δυνατό πλήθος, έτσι ώστε τα νέα κομμάτια του S_k να πληρούν $\sigma(S_k) \le 1$. Το πλήθος των κομματιών του S_k θα είναι το πολύ $\sigma(S^{d-1})$, άρα και πάλι θα πάρουμε το αποτέλεσμα: $1 \lesssim \sum_j r_j^p$. □

Ο στόχος της παρούσας εργασίας είναι η εκτίμηση της μεγιστικής συνάρτησης Kakeya και αυτό θα γίνει μέσω του θεωρήματος 1.1.

Θεώρημα 1.1. *Το* (1.3) *ισχύει για* $p = \frac{d+2}{2}, q = (d-1)p'$.

Κεφάλαιο 2

Βασικές Ιδιότητες

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα παρουσιαστούν ορισμένες ιδιότητες των σωλήνων $T_{l_i}^{\delta}$ και κάποιες άλλες που αφορούν τις δ-διαχωρίσιμες ακολουθίες.

Θα δανειστούμε τις ακόλουθες ιδιότητες που χρησιμοποιήθηκαν και από τον Cordoba[2]:

1. $\forall T_{l_i}^{\delta}, T_{l_j}^{\delta}$ έχουμε ότι: $T_{l_i}^{\delta} \cap T_{l_j}^{\delta} \subseteq T_{l_i}^{C\frac{\delta}{\theta(l_i,l_j)}\delta}$

2. Και ειδικότερα, έχουμε ότι: $|T_{l_i}^{\delta} \cap T_{l_j}^{\delta}| \lesssim \frac{\delta^d}{\theta(l_i,l_j)+\delta}$

Ιδιότητα (*) Έστω $a_0 \in \mathbb{P}^{d-1}$ με δεδομένο $\sigma \geq \delta$ και $\{a_j\}_{j=1}^{N}$ δ-διαχωρίσιμο υποσύνολο του $\mathbb{P}^{d-1}$ με $d(a_0, a_j) \lesssim \sigma$, τότε: $N \leq C\left(\frac{\sigma}{\delta}\right)^{d-1}$.

Απόδειξη. Έστω δ μικρό και $\{a_j\}_{j=1}^{M}$ μεγιστικό δ-διαχωρίσιμο υποσύνολο του $\mathbb{P}^{d-1}$. Θεωρούμε Q το μέγιστο πλήθος μπαλών με ακτίνα δ που τέμνονται με σταθεροποιημένη μπάλα ακτίνας δ έτσι ώστε όλα τα κέντρα των μπαλών μαζί να είναι δ-διαχωρίσιμο υποσύνολο του $\mathbb{P}^{d-1}$. Το Q εξαρτάται μόνο από την διάσταση λόγω του ότι είναι αναλλοίωτο στην μεταβολή της ακτίνας. Από $d(a_0, a_j) \lesssim \sigma$ έχω ότι $a_j \in B(a_0, C\sigma)$ για C κατάλληλο, επομένως, έχω οτι $\bigcup_{i=1}^{M} B(a_j, \delta) \subseteq B(a_0, C\sigma + \delta)$. Συνεπώς, παίρνουμε $\sum_{i=1}^{M} \frac{\sigma(B(a_j,\delta))}{Q} \leq \sigma(\bigcup_{i=1}^{M} B(a_j, \delta)) \leq \sigma(B(a_0, C\sigma + \delta))$, συνεπάγεται ότι: $M \lesssim \left(\frac{\sigma}{\delta}\right)^{d-1}$. □

Ιδιότητα (**) Έστω ευθεία l_0 και δισδιάστατο επίπεδο Π με $l_0 \subseteq \Pi$. Για δεδομένο $\sigma \geq \delta$, $\{a_j\}_{j=1}^{N}$ δ-διαχωρίσιμο υποσύνολο του $\mathbb{P}^{d-1}$ και $\forall j \in \{1, ..., N\}$ υπάρχει l_j με κατεύθυνση a_j έτσι ώστε $dist(l_j, \Pi) < \delta$ και $dist(l_j, l_0) < \sigma$, τότε $N \leq C\frac{\sigma}{\delta}$.

Απόδειξη. Θεωρούμε Π' παράλληλη μεταφορά του Π στην αρχή των αξόνων. Θέτουμε $curve(\Pi') = \Pi' \cap \mathbb{P}^{d-1}$. Ορίζουμε $a_0 \in \mathbb{P}^{d-1}$, έτσι ώστε a_0 κατεύθυνση του l_0. Επομένως, έχουμε ότι $a_0 \in curve(\Pi')$. Θέτουμε $curve := B(a_0, C'\sigma) \cap curve(\Pi')$. Άρα, έχουμε ότι $diameter(curve) \approx \sigma$. Έστω $\{a_j\}_{j=1}^{M}$ μεγιστικό δ-διαχωρίσιμο υποσύνολο του $curve^{C\delta}$. Από το $d(a_j, curve) \lesssim dist(l_j, \Pi) < \delta$, έπεται ότι: $\bigcup_{i=1}^{M} B(a_j, \delta) \subseteq curve^{C\delta+\delta}$. Συνεπώς, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} M\delta^{d-1} \approx \sum_{i=1}^{M} \frac{\sigma(B(a_j,\delta))}{Q} &\leq \sigma(\bigcup_{i=1}^{M} B(a_j,\delta)) \leq \sigma(curve^{C\delta+\delta}) \\ &\approx diameter(curve) \cdot \delta^{d-2} \approx \sigma \cdot \delta^{d-2}. \end{aligned}$$

Επομένως, καταλήγουμε στο αποτέλεσμα $M \lesssim \frac{\sigma}{\delta}$.

□

Κεφάλαιο 3

Βασιζόμενοι στους Bourgain και Cordoba

Το Λήμμα 3.1 είναι μια αναδιατύπωση του επιχειρήματος του Bourgain βλέπε [1] [σελίδα 153-154] από το Wolff.

Λήμμα 3.1. *Έστω ότι έχουμε τους σωλήνες* $\{T_{l_j}^{\beta}\}_{j=1}^{M}$ *και το σύνολο* E. *Επιπλέον υποθέτουμε ότι* $\epsilon > \beta$, *όπου ισχύει:*

$$T_{l_j}^{\beta} \cap T_{l_k}^{\beta} \neq \varnothing \quad \Rightarrow \theta(l_j, l_k) \geq C^{-1}\epsilon \tag{3.1}$$

και $\forall x \in \mathbb{R}^d, 1 \leq j \leq M$

$$\left| T_{l_j}^{\beta} \cap E \cap \left(\mathbb{R}^d \setminus D\left(x, \frac{\beta}{\epsilon}\right)\right)\right| \geq \frac{\lambda}{2}\left|T_{l_j}^{\beta}\right|. \tag{3.2}$$

Τότε προκύπτει ότι $|E| \gtrsim \lambda\beta^{d-1}\sqrt{M}$, *όπου η κατάλληλη σταθερά είναι εξαρτημένη από το* C.

Απόδειξη. ([1]) Από την σχέση (3.2) ισχύει $\sum_{i=1}^{M}|E \cap T_{l_j}^{\beta}| \gtrsim M\lambda\beta^{d-1}$. Συνεπώς, $\sum_{i=1}^{M}\frac{|E\cap T_{l_j}^{\beta}|}{|E|} = \frac{1}{|E|}\int_E \sum_{i=1}^{M}\chi_{T_{l_i}^{\beta}}(x) \gtrsim \frac{M\lambda\beta^{d-1}}{|E|}$, άρα υπάρχει κάποιο $a \in E$, τέτοιο ώστε $card\{i : a \in T_{l_i}^{\beta}\} \gtrsim \frac{M\lambda\beta^{d-1}}{|E|}$. Θέτουμε $A := \left\{i : a \in T_{l_i}^{\beta}\right\}$. Θέτουμε $\tau_j = T_{l_j}^{\beta} \cap (\mathbb{R}^d \setminus D(a, \frac{\beta}{\epsilon}))$. Ισχυρισμός, κάθε σημείο του E ανήκει σε πεπερασμένο πλήθος σωλήνων. Από την υπόθεση (3.1) έχουμε ότι για κάθε A, j υπάρχει C_A, τέτοιο ώστε: $C_A \leq card\{k : a \in T_{l_k}^{\beta}$ και $\theta(l_j, l_k) \leq A\epsilon\}$. Αρκεί να δείξω ότι αν $\theta(l_j, l_k) \geq A\epsilon$ για A αρκετά μεγάλο έχουμε: $\tau_j \cap \tau_k = \emptyset$ ή ισοδύναμα, έχουμε ότι: $T_{l_j}^{\beta} \cap T_{l_k}^{\beta} \subseteq D(a, \frac{\beta}{\epsilon})$. Θεωρούμε ότι A αρκετά μεγάλο

και $\theta(l_j, l_k) \geq A\epsilon$. Από την βασική ιδιότητα 1, προκύπτει: $diam(T^{\beta}_{l_j} \cap T^{\beta}_{l_k}) \leq \frac{\beta}{\epsilon}$ και έπεται $T^{\beta}_{l_j} \cap T^{\beta}_{l_k} \subseteq D(a, \frac{\beta}{\epsilon})$.
Συνεπώς, $|E| \geq \sum_{i \in A} |T^{\beta}_{l_i} \cap E \cap (\mathbb{R}^d \setminus D(\alpha, \frac{\beta}{\epsilon})| \gtrsim \frac{M\lambda^2\beta^{2(d-1)}}{|E|}$. □

Πρόταση 3.1. *Η εκτίμηση (1.3) ισχύει για $1 \leq p \leq \frac{d+1}{2}, q = (d-1)p'$.*

Απόδειξη. ([1])Αν δείξουμε ότι ισχύει το weak type $(p = \frac{d+1}{2}, q = (d-1)p' = d+1)$, τότε από παρεμβολή έχουμε ότι το strong type ισχύει σε όλο το ενδιάμεσο διάστημα. Αρχικά, θα δείξουμε το restricted weak type για τις χαρακτηριστικές και έπειτα, επεκτείνετε στο weak type. Αρκεί να δείξουμε το restricted weak type $(p = \frac{d+1}{2}, q = (d-1)p' = d+1)$

$$\left|\{e \in \mathbb{P}^{d-1} : f^*_\delta(e) \geq \lambda\}\right| \lesssim \left(\frac{|E|}{\delta^{\frac{d-1}{2}}\lambda^{\frac{d+1}{2}}}\right)^2$$

οπού E είναι κάποιο σύνολο και η f ορίζεται ως η χαρακτηριστική του συνόλου αυτού $f = x_E$.
Επιλέγουμε $\epsilon = \frac{A\delta}{\lambda}$, οπού A αρκετά μεγάλη σταθερά. Επιλέγουμε μια μεγιστική ϵ-διαχωρίσιμη ακολουθία $\{a_j\}_{j=1}^{M}$ υποσυνόλων του $\{e \in \mathbb{P}^{d-1} : f^*_\delta(e) \geq \lambda\}$. Η ιδιότητα που υιοθετούν από το σύνολο αυτό είναι ότι $\forall j \in \{1, ..M\}$, υπάρχει ευθεία $l_j (\subseteq \mathbb{R}^d)$ με κατεύθυνση a_j η οποία ορίζει κάποιον σωλήνα της μορφής $T^{\delta}_{l_j}$ με ιδιότητα $|T^{\delta}_{l_j} \cap E| \geq \lambda |T^{\delta}_{l_j}|$. Εξ' αιτίας της μεγιστικής ιδιότητας της ακολουθίας έχουμε: $M\epsilon^{d-1} \gtrsim |\{e \in \mathbb{P}^{d-1} : f^*_\delta(e) \geq \lambda\}|$. Όσον αφορά την επιλογή του A, έγινε με τέτοιο τρόπο ώστε ο $D(*, \frac{\delta}{\epsilon})$ να είναι μικρός και να έχει: $|T^{\delta}_{l_j} \cap D(*, \frac{\delta}{\epsilon})| \leq \frac{\lambda}{2}|T^{\delta}_{l_j}|$. Έπεται ότι

$$\begin{aligned} |T^{\delta}_{l_j} \cap \ E \ \cap (\mathbb{R}^d \setminus D(*, \frac{\delta}{\epsilon}))| &= |T^{\delta}_{l_j} \cap E| - |T^{\delta}_{l_j} \cap E \cap D(*, \frac{\delta}{\epsilon})| \\ &\geq \ \lambda |T^{\delta}_{l_j}| - |T^{\delta}_{l_j} \cap E \cap D(*, \frac{\delta}{\epsilon})| \geq \frac{\lambda}{2}|T^{\delta}_{l_j}|, \end{aligned}$$

το οποίο είναι η υπόθεση (3.2) του λήμματος 3.1 . Αν $T^{\delta}_{l_i} \cap T^{\delta}_{l_j} \neq \emptyset$, τότε έχουμε:
$\epsilon \leq d(a_i, a_j) \lesssim dist(l_i, l_j) \approx \theta(l_i, l_j) + d_{min}(l_i, l_j) = \theta(l_i, l_j) + \delta$. Εξ' αιτίας της επιλογής του ϵ, έχουμε ότι: $\epsilon - \delta = \left(\frac{A-1}{A}\right)\epsilon$. Συνεπώς, $\theta(l_i, l_j) \gtrsim \epsilon$, το οποίο είναι η υπόθεση (3.1).Εφαρμόζοντας το προηγούμενο Λήμμα, καταλήγουμε στο restricted weak type. □

Ο Wolff στο [4] στην προσπάθεια του να δείξει το θεώρημα 1.1 χρησιμοποιεί το L^2-επιχείρημα του Cordoba [2]. Το Λήμμα 3.2 είναι μια διατύπωση της ιδέας του Cordoba.

Λήμμα 3.2. *Έστω ένα σύνολο $E \subseteq \mathbb{R}^d$, ένα δισδιάστατο επίπεδο Π στον $\mathbb{R}^d$ και σωλήνες $\{T^{\beta}_{l_j}\}_{j=1}^{M}$, οι οποίοι περιέχονται στο $\Pi^{C_0\delta}$. Υποθέτουμε ότι ισχύουν τα παρακάτω:*
i)$|E \cap T^{\delta}_{l_j}| \geq \lambda |T^{\delta}_{l_j}|, \quad \forall j \in \{1...N\}$
ii)$card\{j : T^{\delta}_{l_j} \subseteq \overline{T^{\sigma}_{l_k}}\} \leq C_0 \frac{\sigma}{\delta}, \quad \forall \sigma \in (\delta, 1)$ *και* $\forall k$.
iii) Αν $T^{\beta}_{l_j} \cap T^{\beta}_{l_k} \neq \varnothing$ *με* $j \neq k \Rightarrow \theta(l_j, l_k) \geq \delta$
Τότε έχουμε:

$$M\delta^{d-1} \leq C \frac{|E \cap \Pi^{C_0\delta}|}{\lambda^2} \log \frac{1}{\delta},$$

όπου η σταθερά C εξαρτάται μόνο από το C_0.

Απόδειξη. ([2]) Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $E \subseteq \Pi^{C_0\delta}$. Θέτουμε $\sigma = 2^k\delta$ με $k \in \{0, 1, ..., \log_2(\frac{\pi}{4\delta})\}$ και προκύπτει: $\sigma < 1$ για οποιαδήποτε τιμή του k. Επομένως από την υπόθεση (ii), ισχύει ότι:

$$card\{j : T^{\delta}_{l_i} \cap T^{\delta}_{l_j} \neq \varnothing, \theta(l_i, l_j) \in [2^k\delta, 2^{k+1}\delta]\} \leq card\{j : T^{\delta}_{l_i} \subseteq \overline{T^{2^k\delta}_{l_j}}\} \leq$$

$$\leq C_0 \frac{2^k\delta}{\delta} \leq 2^k C_0. \tag{3.3}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
M\lambda\delta^{d-1} &\leq \sum_j |E \cap T^{\delta}_{l_j}| = \int_E \sum x_{T^{\delta}_{l_j}} \\
&\leq |E|^{\frac{1}{2}} (\sum_i \sum_j |T^{\delta}_{l_i} \cap T^{\delta}_{l_j}|)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq |E|^{\frac{1}{2}} (CM\delta^{d-1} + \sum_{i \neq j} |T^{\delta}_{l_i} \cap T^{\delta}_{l_j}|)^{\frac{1}{2}} \qquad (3.4) \\
&\leq |E|^{\frac{1}{2}} \Big(CM\delta^{d-1} + \sum_i \sum_{k=0}^{\log_2(\frac{\pi}{4\delta})} \frac{\delta^{d-1}}{2^k} card\{j : T^{\delta}_{l_i} \cap T^{\delta}_{l_j} \neq \varnothing, \\
&\qquad \theta(l_i, l_j) \in [2^k\delta, 2^{k+1}\delta]\}\Big)^{\frac{1}{2}} \qquad (3.5) \\
&\leq C \left(|E| M\delta^{d-1}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \sum_{k=0}^{\log_2 \frac{\pi}{4\delta}} 1\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C \left(|E| M\delta^{d-1} \log \frac{1}{\delta}\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Στην σχέση (3.4), αλλάζουμε τους δείκτες του αθροίσματος, ώστε να έχουμε δυαδική διαμέριση της γωνιά $[\delta, \frac{\pi}{2}]$. Στη σχέση (3.5) χρησιμοποιούμε την παρατήρηση (3.3). Οπότε:

$$M\lambda\delta^{d-1} \lesssim \left(|E|M\delta^{d-1}\log\frac{1}{\delta}\right)^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow M\delta^{d-1} \leq C\frac{|E|}{\lambda^2}\log\frac{1}{\delta}\ .$$

$\square$

Κεφάλαιο 4

Κύριο Επιχείρημα - Λήμμα του Wolff

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα διατυπώσουμε και θα αποδείξουμε το κύριο επιχείρημα, οπού χρησιμοποίησε ο Wolff[4] για την απόδειξη του θεωρήματος 1.1.

Λήμμα 4.1. *Έστω $d \geq 3$. Υποθέτουμε ότι έχουμε σύνολο $E \subseteq \mathbb{R}^d$, σωλήνες $\{T_{l_j}^{\rho\delta}\}_{j=1}^{M}$, $\delta \leq \frac{\rho}{100}$, αρκετά μεγάλη σταθερά C_0 και κάποια σταθερά C για τα οποία ισχύουν:*
i) $|E \cap T_{l_j}^{\rho\delta}| \geq \lambda |T_{l_j}^{\rho\delta}|,\ \forall j$
ii) Αν $x \in \mathbb{R}^d$, *τότε* $\forall j$

$$|E \cap T_{l_j}^{\rho\delta} \cap D\left(x, \left(\log\frac{\rho}{\delta}\right)^{-\nu} \rho\right)| \leq {C_0}^{-1} \frac{\lambda}{\log\frac{\rho}{\delta}} |T_{l_j}^{\rho\delta}|$$

iii) $\forall k$ *και* $\forall \sigma \in (\delta, \rho)$,

$$card\left\{j : \overline{T_{l_j}^{\rho\sigma}} \cap \overline{T_{l_k}^{\rho\sigma}} \neq \varnothing,\ \theta(l_j, l_k) \leq \frac{\sigma}{\rho}\right\} \leq C\left(\frac{\sigma}{\delta}\right)^{d-1}.$$

iv) $\forall k$, $\forall \sigma \in (\delta, \rho)$ *και* $\forall \Pi$ *επίπεδο με την ιδιότητα* $l_k \subseteq \Pi$,

$$card\left\{j : T_{l_j}^{\rho\delta} \subseteq \overline{T_{l_k}^{\rho\sigma}} \cap \Pi^{C_0\delta}\right\} \leq C\left(\frac{\sigma}{\delta}\right).$$

Τότε έχουμε οτι για αρκετά μεγάλο ν παίρνουμε την εκτίμηση:

$$\rho^{-d}|E| \geq C_\nu^{-1} \lambda^2 \left(\frac{\delta}{\rho}\right)^{\frac{d-2}{2}} \left(M\left(\frac{\delta}{\rho}\right)^{d-1}\right)^{\frac{1+\frac{1}{d-1}}{2}} \left(\log\frac{\rho}{\delta}\right)^{-d\nu}.$$

Απόδειξη. Έστω $\rho = 1$.

$$\textbf{Ισχυρισμός: } \text{Αν ισχύει } T_{l_i}^{\delta} \cap T_{l_j}^{\delta} \neq \varnothing, \quad \text{τότε } \theta(l_i, l_j) \geq \delta. \tag{4.1}$$

Έστω $T_{l_j}^{\delta}$ και $\sigma = \delta$ από *(iii)* έχουμε ότι το πλήθος των σωλήνων των οποίων δεν ισχύει η παραπάνω ιδιότητα είναι το πολύ C. Επιλέγουμε $\{T_{l_{j_i}}^{\delta}\}_{i=1}^{\overline{M}}$ ως μεγιστική υπ-ακολουθία των $\{T_{l_j}^{\delta}\}_{j=1}^{M}$ με την παραπάνω ιδιότητα αντί $\{T_{l_j}^{\delta}\}_{j=1}^{M}$ με $\overline{M} \geq C^{-1}M$ αντί του M.

Στην συνέχεια, σταθεροποιούμε $N \in \mathbb{N}$ και διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

I.**(Χαμηλή Πολλαπλότητα)** Υπάρχουν τουλάχιστον $\frac{M}{2}$ σωλήνες με την ιδιότητα:

$$|\{x \in T_{l_j}^{\delta} \cap E : card(\{i : x \in T_{l_i}^{\delta}\}) \leq N\}| \geq \frac{\lambda}{2}|T_{l_j}^{\delta}|.$$

II$_\sigma$.**(Υψηλή Πολλαπλότητα γωνίας σ)** Υπάρχουν τουλάχιστον $\frac{M}{C_1 \log(\frac{1}{\delta})}$ σωλήνες με την ιδιότητα:

$$\begin{aligned} |\{x \in T_{l_j}^{\delta} \cap E : card\{i : x \in T_{l_i}^{\delta} \quad & \text{και} \quad \theta(l_i, l_j) \in [\sigma, 2\sigma]\} \\ \geq \quad & \left(C_1 \log\left(\frac{1}{\delta}\right)\right)^{-1} N\}| \\ & \geq \left(C_1 \log\left(\frac{1}{\delta})\right)\right)^{-1} \lambda |T_{l_j}^{\delta}|. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Λήμμα 4.2. *Υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε να ισχύουν ταυτόχρονα οι ισχυρισμοί (I) και (II_σ) για κάποιο $\sigma \in [\delta, \frac{\pi}{2}]$.*

Απόδειξη. Επιλέγουμε το μικρότερο δυνατό N τέτοιο ώστε να ισχύει ο ισχυρισμός (I). Προκύπτει ότι υπάρχουν $\frac{M}{2}$ στο πλήθος σωλήνες που διατηρούν την σχέση

$$|\{x \in T_{l_j}^{\delta} \cap E : card\{i : x \in T_{l_i}^{\delta}\} \geq N\}| \geq \frac{\lambda}{2}|T_{l_j}^{\delta}|. \tag{4.3}$$

Έστω σωλήνας j όπως παραπάνω $\forall x \in T_{l_j}^{\delta}$ με $card\{i : x \in T_{l_i}^{\delta}\} \geq N$ όπου ισχύει ο ισχυρισμός (4.1). Έπεται ότι υπάρχει $k \in \{1, ..., \log_2(\frac{\pi}{2\delta})\}$ τέτοιο ώστε:

$$card\left\{i : x \in T_{l_i}^{\delta}, \theta(l_i, l_j) \in [2^{k-1}\delta, 2^k\delta]\right\} \geq \left(\log_2\left(\frac{\pi}{2\delta}\right)\right)^{-1} N.$$

Επομένως, για σωλήνα j με την ιδιότητα (4.3) υπάρχει κάποιο $k \in \{1, ..., \log_2(\frac{\pi}{2\delta})\}$ ώστε να πληρεί το:

$$
\begin{aligned}
|\{x \in T^{\delta}_{l_j} \cap E : card\{i : x \in T^{\delta}_{l_i} \quad \text{και} \quad \theta(l_i, l_j) \in [2^{k-1}\delta, 2^k\delta]\} \\
\geq \quad (\log_2(\frac{\pi}{2\delta}))^{-1} N\}| \\
\geq (\log_2(\frac{\pi}{2\delta}))^{-1} \frac{\lambda}{2} |T^{\delta}_{l_j}|
\end{aligned}
$$

Άμεσα προκύπτει ότι ο ισχυρισμός II_{σ} ισχύει για κάποιο k με γωνία $\sigma = 2^{k-1}\delta$. □

Λήμμα 4.3. *Αν ισχύει ο ισχυρισμός χαμηλής πολλαπλότητας (I) και η υπόθεση (i) από το Λήμμα 4.1, τότε προκύπτει:* $|E| \gtrsim \frac{\lambda M \delta^{d-1}}{N}$.

Απόδειξη. Θέτουμε σύνολο $\overline{E} = \{x \in E : card\{i : x \in T^{\delta}_{l_i}\} \leq N\}$. Εξ' αιτίας του ισχυρισμού I, έχουμε ότι υπάρχουν $\frac{M}{2}$ σωλήνες με την ιδιότητα $|\overline{E} \cap T^{\delta}_{l_j}| \geq \frac{\lambda}{2} |T^{\delta}_{l_j}|$,

$$
|E| \geq \left| \overline{E} \cap \left(\bigcup_j T^{\delta}_{l_j} \right) \right| \geq N^{-1} \sum_j \left| \overline{E} \cap T^{\delta}_{l_j} \right| \gtrsim \frac{\lambda M \delta^{d-1}}{N}.
$$

□

Λήμμα 4.4. *Έστω ότι ισχύει η υπόθεση (i),(ii),(iv) από το Λημμα 4.1 και υπάρχει σωλήνας $T^{\delta}_{l_j}$ ο όποιος επαληθεύει την ανίσωση* (4.2)*. Τότε έχουμε:*

$$
\left| E \cap \overline{T^{\sigma}_{l_j}} \right| \gtrsim \lambda^3 \sigma \delta^{d-2} N \left(\log \left(\frac{1}{\delta} \right) \right)^{-(d-2)\nu - 3}.
$$

Απόδειξη. Θέτουμε $F = \{T^{\delta}_{l_i} : T^{\delta}_{l_j} \cap T^{\delta}_{l_i} \cap E \neq \varnothing,\ \theta(l_i, l_j) \in [\sigma, 2\sigma]\}$.
Έστω $T^{\delta}_{l_i} \in F$, θέτουμε $Q_{l_i} = \{x \in T^{\delta}_{l_i} : dist(x, l_j) \leq C_2^{-1} \sigma (\log \frac{1}{\delta})^{-\nu}\}$. Το Q_{l_i} περιέχεται στο $T^{\delta}_{l_i} \cap \overline{T}^{\sigma\left(\log \frac{1}{\delta}\right)^{-\nu}}_{l_j}$. Σύμφωνα με την βασική ιδιότητα 1, προκύπτει C τέτοιο ώστε το Q_{l_i} να περιέχεται στο $T^{C\left(\log \frac{1}{\delta}\right)^{-\nu}, \sigma}_{l_j}$, δηλαδή περιέχεται σε δίσκο ακτίνας $C\left(\log \frac{1}{\delta}\right)^{-\nu}$. Επομένως, με τη χρήση της υπόθεσης (ii) του Λήμματος 4.1 έχουμε ότι :

$$
\left| \left\{ x \in T^{\delta}_{l_i} \cap E : dist(x, l_j) \geq C_2^{-1} \sigma \left(\log \frac{1}{\delta} \right)^{-\nu} \right\} \right| \geq \frac{\lambda}{2} |T^{\delta}_{l_i}|. \qquad (4.4)
$$

Στην συνέχεια, ισχυριζόμαστε ότι μπορούμε να επιλέξουμε επίπεδα Π_k με $l_j \subseteq \Pi_k$ τέτοια ώστε να ισχύουν τα:
A. $\forall T_{l_i}^{\delta} \in F, \quad \exists k \ : T_{l_i}^{\delta} \subseteq \Pi_k^{C_0\delta}$.
B. $card\{k : x \in \Pi_k^{C_0\delta}$ και $dist(l_j, x) \geq C_2^{-1}\sigma(\log\frac{1}{\delta})^{-\nu}\} \leq C(\log(\frac{1}{\delta}))^{(d-2)\nu}$.

Για να δείξουμε τον παραπάνω ισχυρισμό, αρκεί να πάρουμε ένα μεγιστικό $\frac{\delta}{\sigma}$-διαχωρίσιμο υποσύνολο $\{a_k\}$ μέσα από το $e_j^{\perp} \cap \mathbb{P}^{d-1}$, όπου $e_j^{\perp} := \{x \in \mathbb{R}^d : < x, e_j >= 0\}$ με $e_j = e_{l_j}$ κατεύθυνση του l_j. Θεωρούμε Π_k τα επίπεδα που δημιουργούνται πάνω στο l_j με κατεύθυνση a_k, με $\Pi_k = l_j \oplus (b+ < a_k >)$ όπου $b \in l_j$.

Για να δείξουμε ότι ισχύει το A, θα πάρουμε τυχαίο $e_i = e_{l_i} \in \mathbb{P}^{d-1}$ και θα το αναλύσουμε ως προς δυο κατευθύνσεις: την e_j και μια $e \perp e_j$ (δηλαδή $e \in < e_i > \oplus < e_j >$). Συνεπώς, $e_i = ae_j + be$ με $|b| := \sin\theta(l_i, l_j) \lesssim \sigma$. Έπειτα, επιλέγουμε κατάλληλο k, τέτοιο ώστε: $|e \pm a_k| \leq \frac{\delta}{\sigma}$, όπου το k προέρχεται από την μεγιστική ιδιότητα των $\{a_k\}$ και $e \in e_j^{\perp} \cap \mathbb{P}^{d-1}$. Για λόγους ευκολίας, επιλέγουμε $|e - a_k| \leq \frac{\delta}{\sigma}$. Εφόσον $T_{l_i}^{\delta} \cap T_{l_j}^{\delta} \neq \varnothing$, τότε υπάρχουν $x_i \in l_i$ και $x_j \in l_j$, τέτοια ώστε $|x_i - x_j| \lesssim \delta$ (αυτό είναι προφανές, γιατί παρατηρούμε ότι το σημείο που τέμνονται έχει απόσταση το πολύ δ από τις ευθείες). Για οποιοδήποτε $x \in T_{l_i}^{\delta}$, μπορούμε να βρούμε $y \in l_i$ με $|x - y| \lesssim \delta$.Άρα, μπορούμε να γράψουμε το x στην μορφή:

$$x = x_j + (y - x_i) + (x - y) + (x_i - x_j).$$

Το $y - x_i = te_i$, όπου $t \lesssim 1$. Στην συνέχεια, θα αντικαταστήσουμε το e_i με $ae_j + be$:

$$x = (x_j + tae_j + tba_k) + tb(e - a_k) + (x - y) + (x_i - x_j).$$

Εξ' ορισμού, $(x_j + tae_j + tba_k) \in \Pi_k$,
επομένως, προκύπτει: $|x - (x_j + tae_j + tba_k)| \lesssim \delta$, όπου αυτό είναι και το A.

Για να δείξουμε ότι ισχύει το B, υποθέτουμε ότι το l_j περνάει από την αρχή των αξόνων. Στην συνέχεια, θα σταθεροποιήσουμε ένα x με την ιδιότητα $dist(l_j, x) \geq C_2^{-1}\sigma(\log\frac{1}{\delta})^{-\nu}$ και θα θέσουμε $x^{\perp}$ να είναι η ορθογώνια προβολή του x στο $e_j^{\perp}$. Επομένως, μπορούμε να γράψουμε το $x^{\perp} = te$ με $e \in e_j^{\perp}, |e| = 1, t \geq C_2^{-1}\sigma\left(\log\frac{1}{\delta}\right)^{-\nu}$. Αν το $x \in \Pi_k^{C_0\delta}$, θα έχουμε ότι $dist\left(x^{\perp}, span\{a_k\}\right) \leq C_0\delta$, άρα, θα πάρουμε: $|e \pm a_k| \lesssim \frac{\delta}{t} \lesssim \left(\log\frac{1}{\delta}\right)^{\nu}\frac{\delta}{\sigma}$. Το a_k είναι $\frac{\delta}{\sigma}$-διαχωρίσιμο, επομένως, $card\left\{a_k : dist(x^{\perp}, a_k) \leq C_0\delta\right\} \lesssim \left(\log\frac{1}{\delta}\right)^{(d-2)\nu}$ (Όμοια με την ιδιότητα (*)). Άρα, το B ισχύει, αφού είχαμε επιλέξει x με $dist(l_j, x) \geq C_2^{-1}\sigma(\log\frac{1}{\delta})^{-\nu}$.

Στην συνέχεια, θέτουμε $F_k = \{T_{l_i}^{\delta} \in F : T_{l_i}^{\delta} \in \Pi_k^{C_0\delta}\}$. Από το A, έχουμε ότι $F = \bigcup_k F_k$. Επίσης, γνωρίζουμε ότι $\theta(l_i, l_j) \leq 2\sigma$, άρα, $T_{l_i}^{\delta}$ περιέχεται στο $\overline{T_{l_j}^{\sigma}}$. Έπειτα, εφαρμόζουμε το Λήμμα 3.2 αντικαθιστώντας το λ με $\frac{\lambda}{2}$, το E με

$\overline{T}^{\sigma}_{l_j} \cap E \cap \{x : dist(x, l_j) \geq C_2^{-1}\sigma(\log\frac{1}{\delta})^{-\nu}\}$ και το Π με Π_k. Οι υπόθεσις (i) και (ii) του Λήμματος 3.2, ισχύουν λόγω της σχέσης (4.4) και της υπόθεσης (iv) του Λήμματος 4.1, αντίστοιχα. Οπότε ισχύει:

$$card(F_k)\delta^{d-1} \leq C\frac{|E \cap \overline{T^{\sigma}_{l_j}} \cap \Pi_k^{C_0\delta} \cap \{x : dist(x, l_j) \geq C_2^{-1}\sigma(\log\frac{1}{\delta})^{-\nu}\}|}{\lambda^2}\log\left(\frac{1}{\delta}\right).$$

Αθροίζοντας ως προς τα F_k, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
&card(F)\delta^{d-1} \\
&\leq C\frac{\log(\frac{1}{\delta})}{\lambda^2}\sum_k\left|E \cap \overline{T^{\sigma}_{l_j}} \cap \Pi_k^{C_0\delta} \cap \left\{x : dist(x, l_j) \geq C_2^{-1}\sigma\left(\log\frac{1}{\delta}\right)^{-\nu}\right\}\right| \\
&\lesssim C\frac{\log\left(\frac{1}{\delta}\right)^{(d-2)\nu+1}}{\lambda^2}|E \cap \overline{T^{\sigma}_{l_j}}|, \qquad (4.5)
\end{aligned}$$

κάνοντας χρήση του B. Εν συνεχεία, χρησιμοποιήσουμε την υπόθεση για τον σωλήνα $T^{\delta}_{l_j}$ θέτοντας $K = \left\{x \in T^{\delta}_{l_j} : \sum_{T^{\delta}_{l_i} \in F}\chi_{T^{\delta}_{l_i}}(x) \geq \left(C_1\log(\frac{1}{\delta})\right)^{-1}N\right\}$, όπου προκύπτει: $|K| = \left(C_1\log(\frac{1}{\delta})\right)^{-1}\lambda|T^{\delta}_{l_j}|$ και

$$\begin{aligned}
card(F)\frac{\delta^d}{\sigma} \quad &\gtrsim \quad \sum_{T^{\delta}_{l_i} \in F}\frac{\delta^d}{\delta + \theta(l_i, l_j)} \quad \gtrsim \quad \sum_{T^{\delta}_{l_i} \in F}|T^{\delta}_{l_i} \cap T^{\delta}_{l_j}| \\
&= \quad \int_{T^{\delta}_{l_j}}\sum_{T^{\delta}_{l_i} \in F}\chi_{T^{\delta}_{l_i}}(x)dx \geq \int_K\sum_{T^{\delta}_{l_i} \in F}\chi_{T^{\delta}_{l_i}}(x)dx \\
&\geq \quad |K|(C_1\log(\frac{1}{\delta}))^{-1}N \quad \geq \quad \lambda|T^{\delta}_{l_j}|(C_1\log(\frac{1}{\delta}))^{-2}N.
\end{aligned}$$

Συνεπώς, προκύπτει: $card(F) \gtrsim \frac{\lambda\sigma(\log(\frac{1}{\delta}))^{-2}N}{\delta}$. Από την προηγούμενη ανισότητα και την σχέση (4.5), καταλήγουμε στην επιθυμητή εκτίμηση. $\square$

Λήμμα 4.5. *Έστω ότι ισχύουν οι υποθέσεις $(i), (ii), (iv)$ από το Λήμμα 4.1 και υποθέτουμε ότι υπάρχει σωλήνας $T^{\delta}_{l_j}$, ο όποιος επαληθεύει την ανίσωση (4.2). Τότε προκύπτει ότι: $\forall a \in \mathbb{R}^d$*

$$\left|E \cap \left(\mathbb{R}^d \setminus D\left(\alpha, \left(\log\frac{1}{\delta}\right)^{-\nu}\right)\right) \cap \overline{T^{\sigma}_{l_j}}\right| \gtrsim \lambda^3\sigma\delta^{d-2}N\left(\log\left(\frac{1}{\delta}\right)\right)^{-(d-2)\nu-3}.$$

Απόδειξη. Εάν αντικαταστήσουμε στο Λήμμα 4.4 τις παραμέτρους λ και E με $\frac{\lambda}{2}$ και $E \cap \left(\mathbb{R}^d \setminus D\left(\alpha, (\log\frac{1}{\delta})^{-\nu}\right)\right)$, αντίστοιχα. Είναι προφανές ότι οι υποθέσεις

$(i),(ii),(iv)$ του Λήμματος 4.1 ικανοποιούνται αν η σταθερά C_0 είναι αρκετά μεγάλη. Από το (ii) παρατηρούμε ότι $|E \cap D(\alpha, \log(\frac{1}{\delta})^{-\nu}) \cap \overline{T^{\sigma}_{l_j}}|$ είναι πολύ μικρο, άρα, ισχύει η υπόθεση (4.2).

□

Λήμμα 4.6. *Αν ισχύουν οι υποθέσεις του Λήμματος 3.1 και ο ισχυρισμός (II_σ) για κάποιο σ, τότε ισχύει ότι*

$$|E| \gtrsim \lambda^3 N\delta^{d-2}\left(M\delta^{d-1}\right)^{\frac{1}{d-1}} \log\left(\frac{1}{\delta}\right)^{-2d\nu}.$$

Απόδειξη. Αρχικά διακρίνουμε δύο περιπτώσεις για το σ.

Πρώτη περίπτωση: Αν ισχύει $\sigma \geq \left(M\delta^{d-1}\right)^{\frac{1}{d-1}} \log\left(\frac{1}{\delta}\right)^{-\nu}$, τότε άμεσα από το Λήμμα 4.4 προκύπτει η επιθυμητή εκτίμηση.

Δεύτερη περίπτωση: Αν ισχύει $\sigma \leq \left(M\delta^{d-1}\right)^{\frac{1}{d-1}} \log\left(\frac{1}{\delta}\right)^{-\nu} \lesssim \log\left(\frac{1}{\delta}\right)^{-\nu}$, τότε από την υπόθεση (II_σ), υπάρχουν $\left\{(C_1\log(\frac{1}{\delta}))^{-1}M\right\}$ στο πλήθος σωλήνες για τους οποίους ισχύει η σχέση (4.2). Από αυτούς, επιλέγουμε μεγιστικό υποσύνολο $\{l_{j_k}\}_{k=0}^{\overline{M}}$, έτσι ώστε:

$$\overline{T^{\sigma}_{j_k}} \cap \overline{T^{\sigma}_{j_i}} \neq \varnothing \;\Rightarrow\; \theta(l_{j_k}, l_{j_i}) \geq \sigma\left(\log\left(\frac{1}{\delta}\right)\right)^{\nu}.$$

Τότε προκύπτει:

$$C\left(\frac{\sigma\left(\log\frac{1}{\delta}\right)^{\nu}}{\delta}\right)^{d-1}\overline{M} \geq M\left(C_1\log\frac{1}{\delta}\right)^{-1}$$
$$\Rightarrow \overline{M} \gtrsim M\left(\log\left(\frac{1}{\delta}\right)\right)^{-1}\left(\frac{\delta}{\sigma\left(\log\left(\frac{1}{\delta}\right)\right)^{\nu}}\right)^{d-1}.$$

Γεγονός που προκύπτει άμεσα από την μεγιστική ιδιότητα του υποσυνόλου $\{l_{j_k}\}_{k=0}^{\overline{M}}$ χρησιμοποιώντας την υπόθεση (iii) του Λήμματος 4.1 και αντικαθιστώντας το σ με $\sigma\left(\log\frac{1}{\delta}\right)^{\nu}$.

Θα εφαρμόσουμε το Λήμμα 3.1 στους σωλήνες $\overline{T^{\sigma}_{l_{j_i}}}$ αντικαθιστώντας τις παραμέτρους β, λ και ϵ με σ , $C^{-1}\lambda^3\frac{\delta^{d-2}}{\sigma^{d-2}}N\left(\log(\frac{1}{\delta})\right)^{-(d-2)\nu-3}$ και $\sigma(\log(\frac{1}{\delta}))^{\nu}$, αντίστοιχα. Η υπόθεση (i) του Λήμματος 3.1 ισχύει λόγω της επιλογής του υποσυνόλου $\{l_{j_k}\}_{k=0}^{\overline{M}}$. Όσων αφορά την υπόθεση (ii) του ιδίου Λήμματος, ικανοποιείται βάσει του Λήμματος 4.5.

Από το Λήμμα 3.1 για πολύ μεγάλο ν, έχουμε:

$$\begin{aligned} |E| &\gtrsim \lambda^3 \sigma \delta^{d-2} N \left(\log \frac{1}{\delta}\right)^{-(d-2)\nu-3} \sqrt{M \left(\log \frac{1}{\delta}\right)^{-1} \left(\frac{\delta}{\sigma \left(\log \frac{1}{\delta}\right)^{\nu}}\right)^{d-1}} \\ &\gtrsim \lambda^3 \sigma N \delta^{d-2} \left(\log \frac{1}{\delta}\right)^{-2d\nu} \sqrt{M \frac{\delta^{d-1}}{\sigma^{d-1}}}. \end{aligned}$$

Το γινόμενο $\sigma \cdot \sqrt{M \frac{\delta^{d-1}}{\sigma^{d-1}}}$ φθίνει ως προς τη μεταβλητή σ (όταν $d \geq 3$), άρα, ελαχιστοποιείται στο $\left(M\delta^{d-1}\right)^{\frac{1}{d-1}}$ απ΄ όπου προκύπτει το τελικό αποτέλεσμα.

$\square$

Συνέχεια απόδειξης του Λήμματος (4.1): Χρησιμοποιούμε το Λήμμα 4.2 για να επιλέξουμε κατάλληλο $N \geq 1$, τέτοιο ώστε να ισχύουν οι περιπτώσεις (I) και (II_σ) ταυτόχρονα. Από γεωμετρική ερμηνεία των εκτιμήσεων των Λημμάτων 4.3 και 4.6, προκύπτουν οι ίδιες εκτιμήσεις στην καθεμιά εξαρτημένες από το ρ αυτήν την φορά. Τέλος, αντικαθιστώντας τις στην ισότητα $|E| = |E|^{\frac{1}{2}}|E|^{\frac{1}{2}}$, προκύπτει το αποτέλεσμα του λήμματος 4.1 .

$\square$

Κεφάλαιο 5

Επαγωγικό Βήμα

Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο, θα αποδείξουμε το θεώρημα 1.1. Αρκεί να δείξουμε το αντίστοιχο restricted weak type για $p = \frac{d+2}{2}, q = (d-1)p'$ σε κάποιο E με $f = x_E$,

$$\left|\left\{e \in \mathbb{P}^{d-1} : f_\delta^*(e) \geq \lambda\right\}\right| \leq C_\epsilon \left(\delta^{-\epsilon} \frac{|E|}{\delta^{d-p}\lambda^p}\right)^{q/p}. \tag{5.1}$$

Εν συνεχεία, θεωρούμε το διακριτό ανάλογο του προβλήματος, όπου ορίζεται ως εξής: Έστω $\{a_j\}_{j=1}^M$ δ-διαχωρίσιμη ακολουθία και l_j ευθείες με κατευθύνσεις a_j, όπου ορίζουν σωλήνες $T_{l_j}^\delta$ με ιδιότητα $|E \cap T_{l_j}^\delta| \geq \lambda T_{l_j}^\delta|$, τότε προκύπτει:

$$M\delta^{d-1} \leq C_\epsilon \left(\delta^{-\epsilon} \frac{|E|}{\delta^{d-p}\lambda^p}\right)^{\frac{q}{p}}. \tag{5.2}$$

Αν θεωρήσουμε ότι $\{a_j\}_{j=1}^M$ είναι ένα μεγιστικό δ-διαχωρίσιμο υποσύνολο του $\left\{e \in \mathbb{P}^{d-1} : f_\delta^*(e) \geq \lambda\right\}$, τότε προκύπτει άμεσα το restricted weak type. Εξ ορισμού γνωρίζουμε ότι $f_\delta^*(a_j) = \sup \frac{1}{|T|}\int_T f \geq \lambda$, επομένως, ορίζονται ευθείες l_j σύμφωνα με την παραπάνω ιδιότητα $\frac{|E \cap T_{l_j}^\delta|}{|T_{l_j}^\delta|} \geq \lambda$. Εξ αιτίας της μεγιστικής ιδιότητας της ακολουθίας, προκύπτει η σχέση:

$$\left|\left\{e \in \mathbb{P}^{d-1} : f_\delta^*(e) \geq \lambda\right\}\right| \lesssim M\delta^{d-1}.$$

Άρα, ο ισχυρισμός ισχύει.

Για να δείξουμε την σχέση (5.2), ορίζουμε την παρακάτω υπόθεση. Αν έχουμε $\delta \leq \rho \leq 1$, μια ακολουθία $\{a_j\}_{j=1}^M$ $\frac{\delta}{\rho}$-διαχωρίσιμη για την οποία υπάρχει ευθεία l_j με κατεύθυνση a_j και $|E \cap T_{l_j}^\delta| \geq \lambda |T_{l_j}^\delta|$, τότε θα ισχύει ότι:

$$\rho^{-d}|E| \geq C_\epsilon^{-1}\left(M\left(\frac{\delta}{\rho}\right)^{d-1}\right)^{p/q}\left(\frac{\delta}{\rho}\right)^{d-p}\lambda^p\left(\frac{\delta}{\rho}\right)^{\epsilon}. \tag{5.3}$$

Αντικαθιστώντας ρ=1 στην σχέση (5.3), τότε προκύπτει η σχέση (5.2).

Είναι προφανές ότι θα εφαρμόσουμε το Λήμμα 4.1. Στην συνέχεια, παρατηρείται ότι οι υποθέσεις (i)(ισχύει εξ ορισμού), $(iii), (iv)$ ισχύουν, ενώ η υπόθεση (ii) δεν ισχύει, εν γένει. Επομένως, χρησιμοποιούμε ένα επαγωγικό επιχείρημα, ώστε να δείξουμε ότι ισχύει ο ισχυρισμός (5.3).

Όπως προαναφέρθηκε, η υπόθεση (iii) του λήμματος 4.1 ισχύει.
Για να το αποδείξουμε αυτό, θα σταθεροποιήσουμε k και σ

$$\text{Θέτουμε} \quad J := \left\{ j : \overline{T_{l_j}^{\rho\sigma}} \cap \overline{T_{l_k}^{\rho\sigma}} \neq \varnothing,\ \theta(l_j, l_k) \leq \frac{\sigma}{\rho} \right\}.$$

Παίρνουμε σωλήνα $j \in J$ και ισχύει:

$$dist(l_j \cap \overline{T_{l_j}^{\rho,\sigma}}, l_k \cap \overline{T_{l_k}^{\rho,\sigma}}) \approx \theta(l_j \cap \overline{T_{l_j}^{\rho,\sigma}}, l_k \cap \overline{T_{l_k}^{\rho,\sigma}}) +$$
$$+ d_{min}(l_j \cap \overline{T_{l_j}^{\rho,\sigma}}, l_k \cap \overline{T_{l_k}^{\rho,\sigma}}) \leq \frac{\sigma}{\rho}.$$

Επομένως,

$$d(a_j, a_k) \lesssim dist(l_j, l_k) \leq dist(l_j \cap \overline{T_{l_j}^{\rho,\sigma}}, l_k \cap \overline{T_{l_k}^{\rho,\sigma}}) \lesssim \frac{\sigma}{\rho}.$$

Άρα, το $\{a_j\}_{j \in J}$ είναι μια ακολουθία $\frac{\delta}{\rho}$-διαχωρίσιμη. Συνεπώς, από την ιδιότητα (*) έχουμε: $card(J) \lesssim \left(\frac{\sigma}{\delta}\right)^{d-1}$.

Όπως προαναφέρθηκε, η υπόθεση (iv) του λήμματος 4.1 ισχύει.
Για να το αποδείξουμε αυτό, θα σταθεροποιήσουμε k, σ και Π στο οποίο περιέχεται η ευθεία l_k.

$$\text{Θέτουμε} \quad J := \left\{ j : T_{l_j}^{\rho\delta} \subseteq \overline{T}_{l_k}^{\rho\sigma} \cap \Pi^{C_0\delta} \right\}.$$

Παίρνουμε σωλήνα $j \in J$ και ισχύει: $dist\left(T_{l_j}^{\rho\delta} \cap \overline{T}_{l_k}^{\rho,\sigma}, \Pi\right) \lesssim \delta$. Επομένως, $dist(l_j, \Pi) \lesssim \frac{\delta}{\rho}$ και με δεδομένου ότι η $\{a_j\}_{j \in J}$ είναι μια $\frac{\delta}{\rho}$-διαχωρίσιμη ακολουθία, τότε προκύπτει: $d(a_i, a_j) \geq \frac{\delta}{\rho}$ με $i \in J$.
Ακόμα, ισχύει: $dist\left(T_{l_j}^{\rho\delta} \cap \Pi^{C_0\delta}, \overline{T}_{l_k}^{\rho\sigma}\right) \lesssim \sigma$,
άρα, προκύπτει: $dist(l_j, l_k) \lesssim \frac{\sigma}{\rho}$.
Εξ αιτίας της ιδιότητας (**), έπεται ότι: $card(J) \lesssim \frac{\sigma}{\rho}$.

Στο σημείο αυτό, θα ασχοληθούμε με το επαγωγικό βήμα.
Αρχικά, σταθεροποιούμε το ε και θέτουμε Q,έτσι ώστε: Αν $\delta < \epsilon < 1$, τότε κάθε Y δ-διαχωρίσιμο υποσύνολο του $\mathbb{P}^{d-1}$ έχει ένα Z ϵ-διαχωρίσιμο υποσύνολο τέτοιο ώστε: $\quad card(Z) \geq card(Y) Q^{-1} (\frac{\delta}{\epsilon})^{d-1}$.

Ο ισχυρισμός (5.3) είναι προφανής, αν επιλέξουμε ένα A με δεδομένου ότι $\rho \leq A\delta$, τότε το πλήθος των $\{a_j\}$ $\frac{\delta}{\rho}$-διαχωρίσιμων είναι άνω φραγμένο. Από το $|E| \gtrsim \delta^d \lambda$ και για C_ϵ αρκετά μεγάλο, προκύπτει το ζητούμενο.

Επιλέγουμε μεγάλο ν, τέτοιο ώστε: $\nu\epsilon - p > 0$. Επιλέον, επιλέγουμε το A έτσι ώστε :

$A \geq 100, \quad 3(\log(A))^{-\nu} < 1 \quad$ και $\quad (\log(A))^{\nu\epsilon-p} \geq (2Q)^{\frac{p}{q}} C_0^p 3^{\epsilon}$, όπου C_0 σταθερά από το λήμμα 4.1.

Στην συνέχεια, επιλέγουμε κατάλληλο C_ϵ, έτσι ώστε να ισχύει η σχέση (5.3), για $\rho \leq 3A\delta$ και ταυτόχρονα να ισχύει:

$$C_\epsilon \geq 2^{(1+\frac{1}{d-1})/2} C_\nu \sup_{t>A} t^{-\epsilon}(\log(t))^{d\nu},$$

όπου C_ν σταθερά από το αποτέλεσμα του λήμματος 4.1

Σε αυτό το σημείο, θα αποδείξουμε την σχέση (5.3) με δεδομένου ότι $\rho \geq A\delta$ υποθέτοντας ότι ισχύει για την παράμετρο $\overline{\rho} \leq 3\rho\left(\log\left(\frac{\rho}{\delta}\right)\right)^{-\nu}$. Διακρίνουμε το πρόβλημα σε δυο περιπτώσεις.

Πρώτη Περίπτωση:
Υπάρχουν τουλάχιστον $\frac{M}{2}$ σωλήνες για τις οποίες ισχύει η υπόθεση (ii). Απορρίπτουμε τους σωλήνες εκείνους για τους οποίους δεν ισχύει η υπόθεση και εφαρμόζουμε το Λήμμα 4.1 στους $\frac{M}{2}$ σωλήνες που παραμένουν. Επομένως, προκύπτει η σχέση:

$$\begin{aligned} \rho^{-d}|E| &\geq C_\nu^{-1}\lambda^2 \left(\frac{\delta}{\rho}\right)^{\frac{d-2}{2}} \left(\frac{M}{2}\left(\frac{\delta}{\rho}\right)^{d-1}\right)^{\frac{1+\frac{1}{d-1}}{2}} \left(\log\frac{\rho}{\delta}\right)^{-d\nu} \\ &\geq C_\epsilon^{-1}\lambda^p \left(\frac{\delta}{\rho}\right)^{\frac{d-2}{2}} \left(M\left(\frac{\delta}{\rho}\right)^{d-1}\right)^{\frac{1+\frac{1}{d-1}}{2}} \left(\frac{\delta}{\rho}\right)^{\epsilon}. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Η ανισότητα (5.4) προέκυψε από την ανισότητα του C_ϵ και από το $p \geq \frac{5}{2}$, $1 \geq \lambda$ (άρα $\lambda^2 \geq \lambda^p$).

Δεύτερη Περίπτωση:
Υπάρχουν τουλάχιστον $\frac{M}{2}$ σωλήνες που δεν ισχύει η ιδιότητα (ii). Απορρίπτουμε τους σωλήνες εκείνους για τους οποίους ισχύει η υπόθεση. Θέτουμε $\overline{\rho} := 3\rho\left(\log\left(\frac{\rho}{\delta}\right)\right)^{-\nu}$ και $\overline{\lambda} := \frac{\lambda}{3C_0}\left(\log\left(\frac{\rho}{\delta}\right)\right)^{\nu-1}$.
Επιλέγω μια μεγιστική $\frac{\delta}{\rho}$-διαχωρίσιμη υπ-ακολουθία των εναπομείναντων $\{a_j\}$ πλήθους ($\geq \overline{M} := (2Q)^{-1}(\frac{\rho}{\overline{\rho}})^{d-1}M$).
Οι εναπομείναντες σωλήνες δεν επαληθεύουν την ιδιότητα (ii), επομένως, υ-

πάρχει δίσκος $D(x, \frac{\overline{\rho}}{3})$, τέτοιος ώστε:

$$\begin{aligned}\left|E \cap T_{l_j}^{\rho\delta} \cap D\left(x, \frac{\overline{\rho}}{3}\right)\right| &\geq \left(C_0 \log\left(\frac{\rho}{\delta}\right)\right)^{-1} \lambda |T_{l_j}^{\rho\delta}| \\ &= \left(3C_0\left(\log\left(\frac{\rho}{\delta}\right)\right)^{\nu}\right)^{-1} 3\lambda \left(\log\left(\frac{\rho}{\delta}\right)\right)^{\nu-1} |T_{l_j}^{\rho\delta}| \\ &= 3\overline{\lambda}\left(\log\left(\frac{\rho}{\delta}\right)\right)^{-\nu} |T_{l_j}^{\rho\delta}| = \overline{\lambda}|T_{l_j}^{\overline{\rho}\delta}|.\end{aligned}$$

Επεξήγηση:$|T_{l_j}^{\overline{\rho}\delta}| \approx \overline{\rho}\delta^{d-1} = 3\left(\log\left(\frac{\rho}{\delta}\right)\right)^{-\nu} \rho\delta^{d-1} \approx 3\left(\log\left(\frac{\rho}{\delta}\right)\right)^{-\nu} |T_{l_j}^{\rho\delta}|$
Είναι εύκολο να δούμε ότι το $T_{l_j}^{\rho\delta} \cap D(x, \frac{\overline{\rho}}{3})$ περιέχεται σε κάποιο $T_{l_j}^{\overline{\rho}\delta}$, διότι $diam\left(T_{l_j}^{\rho\delta} \cap D(x, \frac{\overline{\rho}}{3})\right) \leq \frac{2\overline{\rho}}{3}$. Άρα, η υπόθεση (i) του Λήμματος 4.1 ισχύει για τις παραμέτρους $\overline{\rho}$ και $\overline{\lambda}$, δηλαδή $|E \cap T_{l_j}^{\overline{\rho}\delta}| \geq \overline{\lambda}|T_{l_j}^{\overline{\rho}\delta}|$.

Από υπόθεση, η σχέση (5.3) ισχύει για την παράμετρο $\overline{\rho}$ και προκύπτει:

$$\overline{\rho}^{-d}|E| \geq C_{\epsilon}^{-1}\left(\overline{M}\left(\frac{\delta}{\overline{\rho}}\right)^{d-1}\right)^{p/q}\left(\frac{\delta}{\overline{\rho}}\right)^{d-p}\overline{\lambda}^{p}\left(\frac{\delta}{\overline{\rho}}\right)^{\epsilon}.$$

Κάνοντας αντικατάσταση τους όρους $\overline{\rho}, \overline{\lambda}, \overline{M}$, προκύπτει η εξής ισοδύναμη μορφή:

$$\begin{aligned}\rho^{-d}|E| &\geq C_{\epsilon}^{-1}\left(M(\frac{\delta}{\rho})^{d-1}\right)^{p/q}\left(\frac{\delta}{\rho}\right)^{d-p}\lambda^{p}\left(\frac{\delta}{\rho}\right)^{\epsilon} \\ &\qquad \left\{\left(\log\left(\frac{\rho}{\delta}\right)\right)^{\nu\epsilon-p}(2Q)^{-\frac{p}{q}}C_0^{-p}3^{-\epsilon}\right\}.\end{aligned}$$

Από $\frac{\rho}{\delta} \geq A$, έπεται $\left(\log\left(\frac{\rho}{\delta}\right)\right)^{\nu\epsilon-p} \geq (\log A)^{\nu\epsilon-p}$.
Επιπλέον, από την επιλογή του A, εξασφαλίζουμε την παρακάτω ανίσωση:

$$\left\{\left(\log\left(\frac{\rho}{\delta}\right)\right)^{\nu\epsilon-p}(2Q)^{-\frac{p}{q}}C_0^{-p}3^{-\epsilon}\right\} \geq 1.$$

Συνεπώς, καταλήγουμε στην σχέση (5.3) με παράμετρο ρ.

Κεφάλαιο 6

Επίλογος

Στην εν λόγο εργασία, παρουσιάστηκε η εκτίμηση του Wolff για την μεγιστική συνάρτηση Kakeya. Εξ αιτίας της Πρότασης 1.1, διαπιστώσαμε ότι η διάσταση των συνόλων Kakeya είναι τουλάχιστον $\frac{d+2}{2}$. Συγκεκριμένα για την διάσταση $d = 3$, σημειώνεται το καλύτερο αποτέλεσμα μέχρι στιγμής! Όσο για τις περιπτώσεις όπου $d > 3$, έχουν βελτιωθεί ήδη από τους Bourgain, Katz, Laba, καθώς και Tao.

Βιβλιογραφία

[1] Bourgain, J., *Besicovitch type maximal operators, and applications to Fourier analysis.*, Geom. Funct.Ana.1 (1990), 147-187

[2] Cordoba, A., *The Kakeya maximal function and spherical summation multipliers.* Amer. J. Math. 99(1977),1-22

[3] T. Wolff, *Lectures on Harmonic Analysis.* University Lecture Series, 29. AMS.

[4] T. Wolff *An improved bound for Kakeya type maximal functions*, Rev. Mat. Iberoamerican Vol. 11, N^o 3, 1995, 651-674