Πανεπιστήμιο Κρήτης
Σχολή Θετικών και Τεχνολογικών Επιστημών
Τμήμα Μαθηματικών

Μεταπτυχιακή Εργασία

Ποσοτικά θεωρήματα Επαναφοράς

Αντώνιος Λουτράρης
Επιβλέπων Καθηγητής: Κωστάκης Γεώργιος

Ηράκλειο, 2012

University of Crete

School of Sciences & Engineering

Department of Mathematics

Master of Science Thesis

Quantitative Recurrence Theorems

Antonios Loutraris

Supervisor: Costakis George

Heraklion, 2012

Η μεταπτυχιακή εργασία πραγματοποιήθηκε στα πλαίσια του Διατμηματικού Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών « Μαθηματικα και Εφαρμογές τους » στη κατεύθυνση « Θεωρητικά Μαθηματικά » και κατατέθηκε τον Ιούνιο του 2012.
Τη τριμελή επιτροπή αξιολόγησης αποτέλεσαν οι:

- Γιώργος Κωστάκης (επιβλέπων), επίκουρος καθηγητής, Τμήμα Μαθηματικών
- Σπύρος Καμβύσης, καθηγητής, Τμήμα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών
- Νίκος Φραντζικινάκης, επίκουρος καθηγητής, Τμήμα Μαθηματικών

Στους γονείς μου,
Γιάννη και Αλεξάνδρα.

Ευχαριστίες

Σ΄ αυτή τη διαδρομή υπήρξαν αρκετές στιγμές γεμάτες χαρά και δημιουργία αλλά και κάποιες δύσκολες στιγμές.Θα ήθελα σ΄ αυτό το σημείο να ευχαριστήσω κάποιους ανθρώπους που με τη παρουσία τους μου έδωσαν δύναμη και βοήθησαν στην ολοκλήρωση του μεταπτυχιακού κύκλου σπουδών μέσα από τη παρούσα εργασία.

Πρώτα απ΄ όλους την οικογένειά μου, Γιάννη, Αλεξάνδρα, Μιχάλη και Ειρήνη για τη στήριξή τους όλα αυτά τα χρόνια αλλά κυρίως για το πλούτο των ηθικών αξιών που συνόδευσαν και θα συνοδεύουν τη μετέπειτα πορεία μου. Μεγάλη χαρά και τιμή για εμένα ήταν η συνεργασία με τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κ.Γιώργο Κωστάκη, τον οποίο ευχαριστώ για τη στήριξη και για τις αμέτρητες ώρες υπομονής και επιμονής. Ένα μεγάλο ευχαριστώ οφείλω στο κ.Νίκο Φραντζικινάκη για τη δυνατότητα γνωριμίας με το κόσμο της Εργοδικής Θεωρίας που μου έδωσε και για τις χρήσιμες συμβουλές του καθώς και στο κ.Σπύρο Καμβύση για τη συνεργασία που είχαμε όλα αυτά τα χρόνια. Θα ήταν παράλειψή μου εάν δεν ευχαριστούσα τη κα.Σουζάνα Παπαδοπούλου και τον κ.Μανώλη Κατσοπρινάκη για τη στήριξή τους σε κάποιες δύσκολες στιγμές κατά τη διάρκεια των σπουδών μου.

Τέλος, ευχαριστώ από καρδιάς τους φίλους μου Γιάννη, τον Γιώργο για τη πολύτιμη βοήθειά του στη συγγραφή της εργασίας και ιδιαίτερα τη Γιώτα για τη στήριξη και τη συμπαράσταση τα τελευταία δυόμιση χρόνια.

Περίληψη

Στη παρούσα εργασία δίνουμε μία ποσοτική επέκταση ενός κεντρικού αποτελέσματος στην Εργοδική Θεωρία, του θεωρήματος επαναφοράς του Poincarè που δόθηκε από τον Michael Boshernitzan. Πιο συγκεκριμένα, δοθέντος ενός measure preserving system $(\mathbf{X}, \Phi, \mu, d, T)$ και υποθέτοντας ότι για κάποιο $\alpha > 0$ το α-διάστατο μέτρο Hausdorff $\mathcal{H}_\alpha$ είναι σ-πεπερασμένο στον $\mathbf{X} = (\mathbf{X}, d)$, τότε σχεδόν για όλα τα $x \in \mathbf{X}$ έχουμε

$$\liminf_{n\to+\infty}\{n^\beta d(x, T^n(x))\} < \infty, \beta = \frac{1}{\alpha}.$$

Στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται μία αναφορά στο μέτρο και στη διάσταση Hausdorff ενός συνόλου σε ένα τυχαίο μετρικό χώρο. Στο δεύτερο κεφάλαιο παραθέτουμε κάποια βασικά στοιχεία Εργοδικής Θεωρίας καθώς και κάποιες εφαρμογές του εργοδικού θεωρήματος του Birkhoff.Στο τρίτο κεφάλαιο διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε το θεώρημα Poincarè δίνοντας και μία τοπολογική του προσέγγιση και έπειτα στο τέταρτο κεφάλαιο δίνουμε την απόδειξη και κάποιες εφαρμογές του παραπάνω ποσοτικού αποτελέσματος.

Λέξεις κλειδιά

Εργοδική θεωρία, Επαναφορά, θεώρημα επαναφοράς Poincarè, εργοδικό θεώρημα Birkhoff, μέτρο Hausdorff,διάσταση Hausdorff.

Abstract

In this master thesis, we present a quantitative extension of Poincare's reccurence theorem, due to Michael Boshernitzan. More precisely, given a measure preserving system $(\mathbf{X}, \Phi, \mu, d, T)$ and assume that for some $\alpha > 0$ the α-dimensional Hausdorff measure is σ-finite at $\mathbf{X}$, then for almost $x \in \mathbf{X}$,

$$\liminf_{n \to +\infty} \{n^{\beta} d(x, T^n(x))\} < \infty, \beta = \frac{1}{\alpha}.$$

In the first chapter we review some basic facts concerning Hausdorff measure and dimension of a set in a metric space. In the second chapter we present Birkhoff's ergodic theorem and some of its applications. In the third chapter, we formulate and prove Poincare's recurrence theorem. Finally the fourth chapter occupies the proof and some applications of the above quantitative result, due to Boshernitzan.

Key words

Ergodic theory, Recurrence, Poincare's recurrence theorem, Birkhoff's ergodic theorem, Hausdorff measure, Hausdorff dimension.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Μέτρο και Διάσταση Hausdorff

Στο παρακάτω κείμενο γίνεται μία σύντομη αναφορά στο μέτρο και στη διάσταση Hausdorff ενός συνόλου καθώς και σε κάποιες ιδιότητές τους. Τόσο οι ορισμοί όσο και κάποια θεωρήματα μαζί με τις αποδείξεις τους γίνονται σε ένα τυχαίο μετρικό χώρο $(\mathbf{X}, \rho)$.

1.1 Μέτρο Hausdorff

Ορισμός. *Ένα εξωτερικό μέτρο μ στον $\mathbf{X}$ είναι μία μη αρνητική συνολοσυνάρτηση η οποία αντιστοιχεί σε κάθε υποσύνολο του $\mathbf{X}$ ένα μη αρνητικό πραγματικό αριθμό και έχει τις παρακάτω ιδιότητες:*

α΄. $\mu(\varnothing) = 0$

β΄. *Αν* $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ *τότε* $\mu(\mathbf{A}) \leq \mu(\mathbf{B})$

γ΄. *(Αριθμήσιμη υποπροσθετικότητα): Αν* $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ *είναι υποσύνολα του* $\mathbf{X}$ *τότε:*

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

Τώρα, αν $\mathbf{E}$ είναι ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbf{X}$ ορίζουμε τη διάμετρο του $\mathbf{E}$ ώς:

$$|\mathbf{E}| = \sup\{\rho(x,y) : x, y \in \mathbf{E}\}.$$

Άν για μία οικογένεια υποσυνόλων $\{F_i\}$ του $\mathbf{X}$(όχι απαραίτητα ανοιχτών) έχουμε $\mathbf{E} \subset \bigcup_i F_i$ και $0 < |F_i| \leqslant \delta$ για κάθε i λέμε ότι η $\{F_i\}$ είναι μία δ-κάλυψη του $\mathbf{E}$.
Έστω $\mathbf{E}$ ένα υποσύνολο του $\mathbf{X}$ και s ένας μη αρνητικός ακέραιος. Για $\delta > 0$ ορίζουμε

$$\mathcal{H}^s_\delta(\mathbf{E}) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} |F_i|^s,$$

όπου το infimum είναι πάνω από όλες τις αριθμήσιμες δ-καλύψεις του $\mathbf{E}$.

Παρατηρήσεις: Από τη φύση του $\mathcal{H}^s_\delta$ ώς infimum του συνόλου που περιέχει τις ποσότητες $\sum_{i=1}^{\infty} |F_i|^s$ πάνω από όλες τις αριθμήσιμες δ-κάλυψεις του $\mathbf{E}$ ισχύουν τα εξής:

- Για κάθε άπειρη αριθμήσιμη συλλογή συνόλων που καλύπτουν το $\mathbf{E}$ έχουμε
$$\mathcal{H}^s_\delta(\mathbf{E}) \leq \sum_{i=1}^{\infty} |F_i|^s.$$

- Κατόπιν, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει τουλάχιστον μία άπειρη αριθμήσιμη συλλογή συνόλων τα οποία καλύπτουν το $\mathbf{E}$ ώστε να είναι
$$\sum_{i=1}^{\infty} |F_i|^s \leq \mathcal{H}^s_\delta(\mathbf{E}) + \epsilon.$$

Λήμμα. *Έστω* $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{X}$ *μη κενό. Το* $\mathcal{H}^s_\delta$ *είναι εξωτερικό μέτρο στο* $\mathbf{E}$ *για κάθε* $\delta > 0$.

Απόδειξη. Για την ιδιότητα (i) θεωρούμε την άπειρη αριθμήσιμη συλλογή συνόλων $F_1 = F_2 = \cdots = \varnothing$. Αυτά καλύπτουν το $\varnothing$ οπότε έχουμε $\mathcal{H}_\delta^s(\varnothing) \leq \sum_{i=1}^{\infty} |F_i|^s = 0$ άρα $\mathcal{H}_\delta^s(\varnothing) = 0$.
Για την ιδιότητα (ii) πρέπει να δείξουμε ότι άν $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{U}$ τότε $\mathcal{H}_\delta^s(\mathbf{E}) \leq \mathcal{H}_\delta^s(\mathbf{U})$. Πράγματι, θεωρούμε μία τυχαία αριθμήσιμη συλλογή συνόλων $\{F_i\}$ τα οποία καλύπτουν το $\mathbf{U}$ ώστε $\sum_{i=1}^{\infty} |F_i|^s < \infty$. Αυτό το $\sum_{i=1}^{\infty} |F_i|^s$ είναι τυχαίο στοιχείο του συνόλου του οποίου το infimum έχει οριστεί να είναι το $\mathcal{H}_\delta^s(\mathbf{U})$. Επειδή $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{U}$ τα $F_1, F_2, \ldots$ καλύπτουν και το $\mathbf{E}$ και επομένως το $\sum_{i=1}^{\infty} |F_i|^s$ είναι και στοιχείο του συνόλου του οποίου το infimum έχει οριστεί να είναι το $\mathcal{H}_\delta^s(\mathbf{E})$, άρα $\mathcal{H}_\delta^s(\mathbf{E}) \leq \sum_{i=1}^{\infty} |F_i|^s$ και επομένως είναι $\mathcal{H}_\delta^s(\mathbf{E}) \leq \mathcal{H}_\delta^s(\mathbf{U})$.
Για την ιδιότητα (iii) θεωρούμε ένα $\delta > 0$. Θεωρούμε μία άπειρη αριθμήσιμη οικογένεια $\{A_j\}_{j=1}^{\infty}$ υποσυνόλων του $\mathbf{E}$. Για δοθέν $\epsilon > 0$ και για κάθε $j = 1, 2, \ldots$ υπάρχει μία ακολουθία $\{B_j^{(i)}\}_{i=1}^{\infty}$ τέτοια ώστε

$$A_j \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} B_j^{(i)}, \quad |B_j^{(i)}| \leq \delta \quad \textit{και} \quad \sum_{i=1}^{\infty} |B_j^{(i)}|^s \leq \mathcal{H}_\delta^s(A_j) + \frac{\epsilon}{2^j}.$$

Οπότε έχουμε ότι

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \subseteq \bigcup_{i,j=1}^{\infty} B_j^{(i)} \quad \textit{και} \quad \mathcal{H}_\delta^s\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{i,j=1}^{\infty} |B_j^{(i)}|^s \leq \epsilon + \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{H}_\delta^s(A_j).$$

και αφού το ϵ είναι τυχόν έχουμε

$$\mathcal{H}_\delta^s\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{H}_\delta^s(A_j).$$

□

Είμαστε σε θέση τώρα να ορίσουμε το s-διάστατο μέτρο Hausdorff ενός συνόλου $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{X}$.
Παρατηρούμε ότι στην έκφραση του $\mathcal{H}_\delta^s(\mathbf{E})$ καθώς το δ μειώνεται το

$\mathcal{H}^s_\delta(\mathbf{E})$ αυξάνεται. Ως s-διάστατο εξωτερικό μέτρο Hausdorff του $\mathbf{E}$ ορίζουμε το

$$\mathcal{H}^s(\mathbf{E}) = \lim_{\delta\to 0} \mathcal{H}^s_\delta(\mathbf{E}) = \sup_{\delta>0} \mathcal{H}^s_\delta(\mathbf{E}). \tag{1.1}$$

Ορισμός. *Ένα σύνολο* $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{X}$ *θα λέγεται* $\mathcal{H}^s$*-μετρήσιμο αν για κάθε* $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{X}$ *έχουμε*

$$\mathcal{H}^s(\mathbf{E}) = \mathcal{H}^s(\mathbf{E} \cap \mathbf{A}) + \mathcal{H}^s(\mathbf{E} \cap \mathbf{A}^c).$$

Αν περιορισουμε το $\mathcal{H}^s(\cdot)$ *στη σ-άλγεβρα των* $\mathcal{H}^s$*-μετρήσιμων υποσυνόλων του* $\mathbf{X}$ *τότε η σχέση 1.1 μας δίνει το s-διάστατο μέτρο Hausdorff του* $\mathbf{E}$*.*

Θεώρημα. *Έστω* $\mathbf{A}, \mathbf{B} \subseteq \mathbf{X}$ *με* $dist(\mathbf{A}, \mathbf{B}) > 0$*. Τότε* $\mathcal{H}^s(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = \mathcal{H}^s(\mathbf{A}) + \mathcal{H}^s(\mathbf{B})$*.*

Απόδειξη. Έστω $\mathbf{A}, \mathbf{B} \subseteq \mathbf{X}$ με την ιδιότητα $dist(\mathbf{A}, \mathbf{B}) > 0$ και έστω $\delta < dist(\mathbf{A}, \mathbf{B})$. Είναι εύκολο να δούμε ότι

$$\mathcal{H}^s_\delta(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = \mathcal{H}^s_\delta(\mathbf{A}) + \mathcal{H}^s_\delta(\mathbf{B}).$$

Παίρνοντας $\delta \to 0$ έχουμε το ζητούμενο. □

Τα μέτρα Hausdorff γενικεύουν τις έννοιες του μήκους, του εμβαδού του όγκου κ.ο.κ. Παρακάτω θα αποδείξουμε ότι για όλα τα υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$, το n-διάστατο μέτρο Hausdorff είναι ένα σταθερό πολλαπλάσιο του n-διάστατου μέτρου Lebesgue, Πιο συγκεκριμένα, άν $\mathbf{E}$ είναι ένα Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ έχουμε

$$\mathcal{L}^n(\mathbf{E}) = c_n \mathcal{H}^n(\mathbf{E})$$

όπου $\mathcal{L}^n(\mathbf{F})$ το n-διάστατο μέτρο Lebesgue και $V_n = \dfrac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$[1] ο όγκος της n-διάστατης μπάλας διαμέτρου 1. Στη πραγματικότητα $c_1 = 1$ και $c_2 = \frac{\pi}{4}$.
Για την απόδειξη του παραπάνω ισχυρισμού θα χρησιμοποιήσουμε τα παρακάτω θεωρήματα (χωρίς απόδειξη).

---

[1] Για $x > 0$ ορίζουμε τη συνάρτηση Γ ώς $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$

1.1.1 Θεώρημα κάλυψης Vitali

Θεώρημα. *Έστω* $\mathbf{E} \subset \mathbb{R}^n, \mathcal{H}^s$ *μετρήσιμο και* $\mathcal{V}$ *μία κάλυψη Vitali*[2] *από κλειστά σύνολα του* $\mathbf{E}$. *Τότε μπορούμε να διαλέξουμε μία αριθμήσιμη οικογένεια* $\{\mathbf{U_i}\}$ *ξένων ανά δύο συνόλων από τη* V *τέτοια ώστε* $\sum |\mathbf{U_i}|^s = \infty$ *ή* $\mathcal{H}^s(\mathbf{E} \setminus \bigcup_i \mathbf{U_i}) = 0$.

Με άλλα λόγια, μπορώ να διαλέξω μία υποοικογένεια ξένων ανά δύο συνόλων από τη συλλογή V που να καλύπτουν σχεδόν παντού, με την έννοια του μέτρου, το $\mathbf{E}$.
Το παρακάτω θεώρημα είναι γνωστό ώς το Ισοδιαμετρικό πρόβλημα.

1.1.2 Ισοδιαμετρικό πρόβλημα

Ο n-διάστατος όγκος ενός κλειστού κυρτού[3] συνόλου διαμέτρου το πολύ δ είναι, το πολύ, $\dfrac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} \cdot \delta^n$, ο όγκος της σφαίρας διαμέτρου δ.

Δηλαδή από όλα τα συμπαγή και κυρτά σύνολα του $\mathbb{R}^n$ τα οποία έχουν διάμετρο το πολύ δ, η σφαίρα S του $\mathbb{R}^n$ διαμέτρου δ, έχει τον μεγαλύτερο όγκο. Αποδεικνύουμε τώρα το παραπάνω ισχυρισμό για τη σχέση του μέτρου Hausdorff και Lebesgue.

Θεώρημα. *Αν* $\mathbf{E} \subset \mathbb{R}^n$, *τότε* $\mathcal{L}^n(\mathbf{E}) = c_n \mathcal{H}^n(\mathbf{E})$ *όπου* $c_n = \dfrac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} \cdot \delta^n$.

Απόδειξη. Έστω $\epsilon > 0$. Αν $\mathcal{L}^n(\mathbf{E}) = \mathcal{H}^n(\mathbf{E}) = +\infty$ έχουμε το ζητούμενο.
Ας υποθέσουμε ότι $\mathcal{H}^n(\mathbf{E}) < +\infty$. Μπορούμε να βρούμε μία κάλυψη $\{\mathbf{U}_i\}$ του $\mathbf{E}$ απο κλειστά και κυρτά σύνολα τέτοια ώστε $\sum_{i=1}^{\infty} |\mathbf{U}_i|^n < \mathcal{H}^n(\mathbf{E}) + \epsilon$.

[2]Μία συλλογή V από σύνολα καλείται κάλυψη Vitali για ένα σύνολο $\mathbf{E}$ αν για κάθε $x \in \mathbf{E}$ και $\delta > 0$. υπάρχει $\mathbf{U} \in V$ με $x \in \mathbf{U}$ και $0 < |\mathbf{U}| \leq \delta$

[3]Ένα σύνολο $\mathbf{E} \subset \mathbb{R}^n$ είναι κυρτό αν $(1-\lambda)x + \lambda y \in \mathbf{E}$, για κάθε $x, y \in \mathbf{E}, \lambda \in [0,1]$.

Από το ισοδιαμετρικό πρόβλημα έχουμε οτι

$$\mathcal{L}^n(\mathbf{U}_i) \leq c_n|\mathbf{U}_i|^n,$$

οπότε

$$\mathcal{L}^n(\mathbf{E}) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(\mathbf{U}_i) < c_n\mathcal{H}^n(\mathbf{E}) + c_n\epsilon$$

και επειδή το ϵ είναι τυχαίο, έχουμε $\mathcal{L}^n(\mathbf{E}) \leq c_n\mathcal{H}^n(\mathbf{E})$.
Αντίστροφα τώρα, έστω $\mathbf{C}_i$ μία συλλογή από διαστήματα της μορφής $[\alpha_1, b_1) \times [\alpha_2, b_2) \times \cdots \times [\alpha_n, b_n)$ που καλύπτουν το $\mathbf{E}$ με

$$\sum_{i=1}^{\infty} V(\mathbf{C}_i) < \mathcal{L}^n(\mathbf{E}) + \epsilon. \tag{1.2}$$

Η παραπάνω ανισότητα ισχύει και αν πάρουμε τα $\mathbf{C}_i$ ανοικτά επεκτείνοντάς τα κατά ϵ προς τα αριστερά. Για κάθε i τώρα θεωρούμε κλειστές μπάλες $\mathbf{B}_i \subset \mathbf{C}_i$ ακτίνας δ. Η συλλογή αυτή αποτελεί μία κάλυψη Vitali για τα $\mathbf{C}_i$. Από το θεώρημα κάλυψης του Vitali υπάρχει μία ξένη υποοικογένεια $\{\mathbf{B}_{i,j}\}$ στα $\mathbf{C}_i$ διαμέτρου το πολύ δ με $\mathcal{H}^n\left(\mathbf{C}_i \backslash \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathbf{B}_{i,j}\right) = 0$. Τότε

$$\mathcal{H}^n_\delta(\mathbf{E}) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^n_\delta\left(\mathbf{C}_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{H}^n_\delta\left(\mathbf{B}_{i,j}\right) + \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^n_\delta\left(\mathbf{C}_i n \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathbf{B}_{i,j}\right)$$

$$\leq \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} |\mathbf{B}_{i,j}|^n = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} c_n^{-1}\mathcal{L}^n\left(\mathbf{B}_{i,j}\right)$$

$$\leq c_n^{-1}\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^n\left(\mathbf{C}_i\right) < c_n^{-1}\mathcal{L}^n\left(\mathbf{E}\right) + c_n^{-1}\epsilon,$$

από την 1.2. Τότε $c_n\mathcal{H}^n_\delta\left(\mathbf{E}\right) \leq \mathcal{L}^n(\mathbf{E}) + \epsilon$ για όλα τα ϵ και τα δ.
Άρα

$$c_n\mathcal{H}^n(\mathbf{E}) \leq \mathcal{L}^n(\mathbf{E}).$$

□

Παρακάτω δίνεται μία χρήσιμη πρόταση εκτίμησης του μέτρου Hausdorff ενός συνόλου.

Πρόταση. *Έστω* $\mathbf{F} \subseteq \mathbf{X}$ *και* $f : \mathbf{F} \to \mathbf{X}$ *μία απεικόνιση τέτοια ώστε*

$$(f(x), f(y)) \leq c\rho(x,y)^{\alpha}, (x,y) \in \mathbf{F} \tag{1.3}$$

για κάποια $c > 0$ *και* $\alpha > 0$. *Τότε για κάθε* $s > 0$

$$\mathcal{H}^{\frac{s}{\alpha}}(f(\mathbf{F})) \leq c^{\frac{s}{\alpha}}\mathcal{H}(\mathbf{F}).$$

Απόδειξη. Αν $\{\mathbf{U}_i\}$ είναι μία δ-κάλυψη του $\mathbf{F}$ τότε αφού $|f(\mathbf{F} \cap \mathbf{U}_i)| \leq c|\mathbf{U}_i|^{\alpha}$ έχουμε ότι το $\{f(\mathbf{F} \cap \mathbf{U}_i)\}$ είναι μία ε-κάλυψη του $f(\mathbf{F})$ όπου $\epsilon = c\delta^{\alpha}$. Τότε

$$\sum_{i=1}^{\infty} |f(\mathbf{F} \cap \mathbf{U}_i)|^{\frac{s}{\alpha}} \leq c^{\frac{s}{\alpha}} \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s$$

και άρα $\mathcal{H}_{\epsilon}^{\frac{s}{\alpha}} f(\mathbf{F})) \leq c^{\frac{s}{\alpha}}\mathcal{H}_{\delta}^{s}(\mathbf{F})$. Παίρνοντας $\delta \to 0$ και $\epsilon \to 0$ έχουμε το ζητούμενο. □

Απεικονίσεις που ικανοποιούν τη σχέση 1.3 λέγονται απεικονίσεις Hölder με εκθέτη α. Στη περίπτωση όπου $\alpha = 1$ έχουμε

$$\rho(f(x), f(y)) \leq c\rho(x,y), (x,y) \in \mathbf{F},$$

λέμε ότι η f είναι μία απεικόνιση Lipschitz και

$$\mathcal{H}^s(f(\mathbf{F})) \leq c^s\mathcal{H}^s(\mathbf{F}).$$

1.2 Διάσταση Hausdorff

Πρίν δώσουμε τον ορισμό της διάστασης Hausdorff ενός συνόλου $\mathbf{A}$ αποδεικνύουμε μία σημαντική πρόταση εκτίμησης του μέτρου Hausdorff του συνόλου $\mathbf{A}$ κάτι που μας δίνει τη δυνατότητα να το υπολογίζουμε και κατα προέκταση να υπολογίζουμε τη διάσταση Hausdorff.

Πρόταση. *Έστω* $\mathbf{A} \subset \mathbf{X}$. *Παίρνουμε* $s' > s > 0$*: Άν* $\mathcal{H}^s(\mathbf{A}) < \infty$ *τότε* $\mathcal{H}^{s'}(\mathbf{A}) = 0$ *και εάν* $\mathcal{H}^{s'}(\mathbf{A}) > 0$ *τότε* $\mathcal{H}^s(\mathbf{A}) = 0$.

Απόδειξη. Αποδεικνύουμε τον πρώτο ισχυρισμό. Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται και ο δεύτερος. Άν $\mathcal{H}^s(\mathbf{A}) < \infty$ τότε για οποιοδήποτε δ υπάρχει μία κάλυψη του $\mathbf{A}$ από σύνολα $\{B_j\}$ με διάμετρο το πολύ δ τέτοια ώστε

$$\sum_{j=1}^{\infty} |B_j|^s \leq \mathcal{H}^s(\mathbf{A}) + 1.$$

Αυτό ισχύει διότι για κάθε δ έχουμε $\mathcal{H}^s_\delta(\mathbf{A}) \leq \mathcal{H}^s(\mathbf{A})$ άρα

$$\sum_{j=1}^{\infty} |B_j|^s \leq \mathcal{H}^s_\delta(\mathbf{A}) + 1 \leq \mathcal{H}^s(\mathbf{A}) + 1.$$

Έπεται ότι για $s' > s$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{|B_j|}{\delta}\right)^{s'} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{|B_j|}{\delta}\right)^{s}$$

οπότε ισοδύναμα έχουμε

$$\sum_{j=1}^{\infty} |B_j|^{s'} \leq \delta^{s'-s} \sum_{j=1}^{\infty} |B_j|^s \leq \delta^{s'-s}[\mathcal{H}^s(\mathbf{A}) + 1].$$

Άρα για κάθε $\delta > 0$ έχουμε

$$\mathcal{H}^{s'}_\delta(\mathbf{A}) \leq \delta^{s'-s}[\mathcal{H}^s(\mathbf{A}) + 1]$$

οπότε παίρνοντας $\delta \to 0$ έχουμε ότι $\mathcal{H}^{s'}(\mathbf{A}) = 0$. □

Ορισμός. *Για οποιοδήποτε* $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{X}$ *η διάσταση Hausdorff του* $\mathbf{A}$ *ορίζεται ώς*

$$d_{\mathbf{H}}(\mathbf{A}) = \inf\{d \geq 0 : \mathcal{H}^d(\mathbf{A}) = 0\}.$$

Παρακάτω παραθέτουμε,χωρίς απόδειξη, κάποιες βασικές ιδιότητες της διάστασης Hausdorff.

α΄. Αν $\mathbf{A}, \mathbf{B} \subseteq (\mathbf{X}, \rho)$ και $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ τότε $d_{\mathbf{H}}(\mathbf{A}) \leq d_{\mathbf{H}}(\mathbf{B})$.

β΄. Αν $\mathbf{U_k} \subseteq \mathbf{X}$ μια οικογένεια συνόλων τότε

$$d_{\mathbf{H}}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathbf{U_k}\right) = \sup_k d_{\mathbf{H}}(\mathbf{U_k}).$$

γ΄. Αν $\mathbf{U}$ είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ τότε $d_{\mathbf{H}}(\mathbf{U}) = n$, στη πραγματικότητα $d_{\mathbf{H}}(\mathbb{R}^n) = n$.

δ΄. Αν $f : (\mathbf{X}, \rho_{\mathbf{X}}) \to (\mathbf{Y}, \rho_{\mathbf{Y}})$ είναι Hölder συνεχής με εκθέτη $\alpha \in (0, 1]$ δηλαδή

$$\rho_{\mathbf{Y}}(f(x_1), f(x_2)) \leq C\rho_{\mathbf{X}}(x_1, x_2)^{\alpha}$$

, τότε $d_{\mathbf{H}}(f(\mathbf{X})) \leq d_{\mathbf{H}}(\mathbf{X})/\alpha$.

1.3 Μέτρο Hausdorff σε χώρους άπειρης διάστασης

Κλείνουμε την ενότητα για το μέτρο και τη διάσταση Hausdorff με μία αναφορά στους χώρους με άπειρη διάσταση δείχνοντας ότι κάθε απειροδιάστατος χώρος Banach έχει άπειρη διάσταση Hausdorff. Η βασική ιδέα της απόδειξης είναι η προσπάθεια κάλυψης της μοναδιαίας μπάλας ενός χώρου Banach με αριθμήσιμα το πλήθος σύνολα των οποίων οι διαμέτροι τείνουν στο μηδέν κάτι που αποδεικνύεται αυστηρά στο [5] ότι δε γίνεται.
Στο [6] οι Furi και Vignoli έδειξαν ότι αν $\mathbf{E}$ είναι ένας χώρος άπειρης διάστασης με νόρμα, η μοναδιαία μπάλα στον $\mathbf{E}$ δε μπορεί

να καλυφθεί απο μία πεπερασμένη συλλογή απο σύνολα των οποίων οι διαμέτροι είναι μικρότεροι απο 2. Χρησιμοποιώντας αυτό το αποτέλεσμα έχουμε το ακόλουθο.

Θεώρημα. *Αν* $\mathbf{E}$ *είναι ένας χώρος Banach, η μοναδιαία μπάλα* $\mathbf{B}$ *στον* $\mathbf{E}$ *δε μπορεί να καλυφθεί απο μία συλλογή συνόλων* $\{D_i\}_{i=1}^{\infty}$ *του* $\mathbf{E}$ *τέτοια ώστε* $|D_i| < 2$ *για κάθε* i *και επιπλέον* $|D_i| \to 0$ *καθώς το* $i \to \infty$.

Για την απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος είναι χρήσιμο το επόμενο λήμμα.

Λήμμα. *Αν* $\mathbf{E}$ *είναι ένας απειροδιάστατος χώρος με νόρμα και* $\{D_i\}_{i=1}^{n}$ *μία πεπερασμένη συλλογή συνόλων του* $\mathbf{E}$ *με* $d_i = |D_i| < 2, i = 1 \leq i \leq n$ *και* $0 < \epsilon < 2 - \sup_{i=1 \leq i \leq n}\{d_i\}$, *τότε υπάρχει ακολουθία* $z_n \in \mathbf{B}$ *τέτοια ώστε* $||z_n - D_i|| > \epsilon/2$ *για* $i = 1 \leq i \leq n$.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι δεν υπάρχει ακολουθία $z_n \in \mathbf{B}$. Επιλέγουμε ϵ' τέτοιο ώστε

$$\epsilon < \epsilon' < 2 - \sup_{i=1 \leq i \leq n}\{d_i\}.$$

Τότε η συλλογή $\{N(D_i, \epsilon'/2)\}_{i=1}^{n}$ των $\epsilon'/2$ περιοχών της D_i είναι μία πεπερασμένη συλλογή συνόλων με διάμετρο μικρότερη του 2 που καλύπτει την $\mathbf{B}$ που όμως έρχεται σε αντίθεση το θεώρημα των Furi και Vignoli. □

Απόδειξη. (Θεωρήματος) Ας υποθέσουμε ότι $\{D_i\}_{i=1}^{\infty}$ είναι μια συλλογή υποσυνόλων του $\mathbf{E}$ όπου ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος 1 και έστω $d_i = |D_i|$. Επιλέγουμε ϵ_1 τέτοιο ώστε $0 < \epsilon_1 < 2 - \sup_{i \geq 1}\{d_i\}$, και $n_1 \in \mathbb{Z}^+$ όπου για $i > n_i$, $d_i < \epsilon_1/8$. Απο το προηγούμενο λήμμα υπάρχει ακολουθία $z_1 \in \mathbf{B}$ με $||z_1 - D_i|| > \epsilon_1/2$ για $1 \leq i < n_1$. Υπάρχει z_1' στην $\mathbf{E}$ τέτοια ώστε η μπάλα $\mathbf{B}(z_1', \epsilon_1/8)$ περιέχεται εξ ολοκλήρου στην $\mathbf{B} \cap \mathbf{B}(z_1, \epsilon_1/4)$. Επιλέγουμε ϵ_2 τέτοιο ώστε

$$0 < \epsilon_2 < \frac{1}{2}(\epsilon_1/2 - \sup_{i \geq n_1+1}\{d_i\})$$

και $n_2 \in \mathbb{Z}^+$ τέτοιο ώστε $d_i < \epsilon_2/8$ για $i \geq n_2 + 1$. Ξανά απο το προηγούμενο λήμμα υπάρχει ακολουθία $z_2 \in \mathbf{B}(z_1', \epsilon_1/8)$ με $||z_2 - D_i|| > \epsilon_2/2$ για $n_1 + 1 \leq i \leq n_2$. Συνεχίζοντας την ίδια διαδικασία κατασκευάζουμε μία ακολουθία $\{z_k\}$ σημείων της $\mathbf{B}$ τέτοια ώστε

$$(\alpha)\ ||z_k - z_{k+1}|| < \epsilon_k/4$$

και

$$(\beta)\ ||z_k - D_i|| > \epsilon_k/2$$

για $n_{k-1} + 1 \leq 1 \leq n_k$ όπου για την ακολουθία $\{\epsilon_k\}$ ισχύει $0 < \epsilon_{k+1} < \epsilon_k/4, k \geq 1$.

Αφού ο $\mathbf{E}$ είναι πλήρης η z_k είναι Cauchy και ορίζουμε $z_0 = \lim\limits_{k\to\infty} z_k$. Τότε $z_0 \in \mathbf{B}$ και απο το (α) και το (β) είναι $||z_0 - D_i|| > \epsilon_k/6 > 0$ για $n_{k-1} + 1 \leq 1 \leq n_k$ άρα $z_0 \notin D_i$ για κάθε i. Άρα η συλλογή $\{D_i\}_{i=1}^{\infty}$ δε καλύπτει τη μπάλα $\mathbf{B}$ και έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη. $\square$

Εστω $\mathbf{X}$ χώρος Banach και $\mathbf{B}(0,1) = \{x \in \mathbf{X} : ||x|| = 1\}$ η μοναδιαία μπάλα στον $\mathbf{X}$. Θεωρούμε την απεικόνιση $h : \mathbf{X} \to \mathbf{B}(0,1)$ με

$$h(x) = \frac{x}{1 + ||x||}.$$

Η h είναι Lipschitz απεικόνιση στον $\mathbf{X}$. Πράγματι, αν $x, y \in \mathbf{X}$ τότε

$$||h(x) - h(y)|| = ||\frac{x}{1+||x||} - \frac{y}{1+||y||}|| = ||\frac{x(1+||y||) - y(1+||x||)}{(1+||x||)(1+||y||)}|| =$$

$$||\frac{||x + x||y|| - y - y||x||}{(1+||x||)(1+||y||)}|| \leq \frac{||x-y|| + ||\ ||y||x - ||x||y\ ||}{(1+||x||)(1+||y||)}$$

$$\leq \frac{||x-y|| + ||y||||x-y|| + ||y||||x-y||}{(1+||x||)(1+||y||)} \leq 3||x-y||.$$

Η h είναι επί απεικόνιση διότι αν επιλέξουμε ώς $x = (1 + \frac{||y||}{1-||y||})$

έχουμε ότι $h(x) = y$ για κάθε $y \in \mathbf{B}(0,1)$. Από γνωστή πρόταση είναι

$$\mathcal{H}^s(\mathbf{B}(0,1)) \leq 3^s \mathcal{H}^s(\mathbf{X}) \ (1).$$

Θα αποδείξουμε ότι $\mathcal{H}^s(\mathbf{B}(0,1)) = +\infty$. Πράγματι, έστω $\delta > 0$. Το

$$\mathcal{H}^s_\delta(\mathbf{B}(0,1)) = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} |F_i|^s, \mathbf{B}(0,1) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \ \mu\epsilon \ |F_i| \leq \delta, \forall i \in \mathbb{N}\}.$$

Θα δείξουμε ότι για τυχαίο δ το $\mathcal{H}^s_\delta(\mathbf{B}(0,1)) = +\infty$. Ας υποθέσουμε ότι $\mathcal{H}^s_\delta(\mathbf{B}(0,1)) < +\infty$. Τότε υπάρχει δ με $0 < \delta < 1$ ώστε $\mathcal{H}^s_\delta(\mathbf{B}(0,1) < +\infty$. Άρα υπάρχει δ-κάλυψη της $\mathbf{B}(0,1)$, δηλαδή υπάρχει $\{F_i\}_{i=1}^{\infty}$ με $\mathbf{B}(0,1) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ με $|F_i| \leq \delta < 1$ και $\sum_{i=1}^{\infty} |F_i|^s < +\infty$. Αυτό σημαίνει ότι $|F_i| \to 0$ καθώς το $i \to \infty$ που έρχεται σε αντίθεση με το θεώρημα του Connett. Οπότε $\mathcal{H}^s(\mathbf{B}(0,1)) = +\infty$ και κατα συνέπεια από την (1) παίρνουμε ότι $\mathcal{H}^s(\mathbf{X}) = +\infty$.

Κεφάλαιο 2

Στοιχεία Εργοδικής Θεωρίας

2.1 Μετασχηματισμοί που διατηρούν το μέτρο

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναφερθούμε σε κάποια αποτελέσματα από την εργοδική θεωρία που θα χρησιμοποιήσουμε παρακάτω. Για περισσότερες λεπτομέρειες δείτε στα [2] και [3].

Ορισμός. *Έστω* $(\mathbf{X}, \mathcal{B}, \mu)$ *και* $(\mathbf{Y}, \mathcal{A}, \nu)$ *χώροι πιθανότητας και* $T : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ *ένας μετρήσιμος μετασχηματισμός. Θα λέμε ότι ο* T *διατηρεί το μέτρο αν* $\mu(T^{-1}\mathbf{B}) = \nu(\mathbf{B})$ *για κάθε* $\mathbf{B} \in \mathcal{A}$. *Στη περίπτωση όπου υπάρχει ο* T^{-1} *σχεδόν παντού και είναι μετρήσιμος, τότε ο* T *καλείται αντιστρέψιμα αναλλοίωτος ως πρός το μέτρο.*

Παραδείγματα μετασχηματισμών που διατηρούν το μέτρο.

1. Η ταυτοτική απεικόνιση διατηρεί το μέτρο σε κάθε χώρο πιθανότητας.

2. Είναι γνωστό ότι σε κάθε συμπαγή ομάδα ορίζεται μονοσήμαντα κανονικό μέτρο πιθανότητας m αναλλοίωτο από στροφές (Μέτρο Haar). Κάθε συνεχής ενδομορφισμός μίας συμπαγούς ομάδας επί

του εαυτού της διατηρεί το μέτρο Haar. Πράγματι αν $\mathbf{A} : \mathbb{G} \to \mathbb{G}$ ένας συνεχής ενδομορφισμός και m το μέτρο Haar, ορίζουμε το μέτρο πιθανότητας $\mu(E) = m(\mathbf{A}^{-1}(E))$. Αφού το m είναι κανονικό[1] είναι και το μ κανονικό και $\mu(\mathbf{A}x \cdot E) = m(\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}x \cdot E)) = m(x \cdot \mathbf{A}^{-1}E) = m(\mathbf{A}^{-1}(E)) = \mu(E)$. Αφου το m είναι αναλλοίωτο απο στροφές είναι και το μ αναλλοίωτο απο στροφές και απο τη μοναδικότητα του μέτρου Haar έπεται ότι $m = \mu$. Άρα ο $\mathbf{A}$ είναι αναλλοίωτος ώς προς το μέτρο.

3. Αν $\mathbb{G} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ τότε το μέτρο Haar στη πολλαπλασιαστική ομάδα $\mathbb{G}$ είναι το κανονικοποιημένο μέτρο Lebesgue. Ορίζουμε $T : \mathbb{G} \to \mathbb{G}$ με $Tz = gz$ για κάθε $g \in \mathbb{G}$. Ο T διατηρεί το μέτρο και λέγεται στροφή της $\mathbb{G}$.

2.2 Εργοδικότητα

Ορισμός. *Έστω $(\mathbf{X}, \mathcal{B}, \mu)$ χώρος πιθανότητας. Ένας μετασχηματισμός $T : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ που διατηρεί το μέτρο λέγεται εργοδικός αν για κάθε $B \in \mathcal{B}$ με $T^{-1}B = B$ ισχύει $\mu(B) = 0$ ή $\mu(B) = 1$.*

Με άλλα λόγια ένας μετασχηματισμός T είναι εργοδικός αν όλα τα σύνολα τα οποία είναι αναλλοίωτα υπό τον μετασχηματισμό T είναι πολύ μικρά ή πολύ μεγάλα (ως πρός το μέτρο).
Κάποιους ισοδύναμους χαρακτηρισμούς της εργοδικότητας ενός μετασχηματισμού δίνει το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα. *Αν $T : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ είναι ένας μετασχηματισμός που*

[1] Ένα μέτρο μ είναι κανονικό στη Borel σ-άλγεβρα $\mathbf{B}$ ενός συμπαγούς τοπολογικού χώρου $\mathbf{X}$ αν για κάθε $\epsilon > 0$ και κάθε $E \in \mathbf{B}$, υπάρχει U ανοιχτό με $E \subset U$ και $\mu^*(U \backslash E) < \epsilon$. Δηλαδή αν κάθε μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbf{X}$ μπορεί να προσεγγιστεί(ως πρός το μέτρο) από ανοιχτά υπερσύνολά του.

διατηρεί το μέτρο σε ένα χώρο πιθανότητας $(\mathbf{X}, \mathcal{B}, \mu)$*, τότε οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες.*

(α΄) Ο T *είναι εργοδικός.*

(β΄) Τα μόνα σύνολα $B \in \mathcal{B}$ *με* $\mu(T^{-1}B \triangle B) = 0$ [2]*είναι αυτά για τα οποία* $\mu(B) = 0$ *ή* $\mu(B) = 1$.

(γ΄) Για κάθε $A \in \mathcal{B}$ *με* $\mu(A) > 0$ *έχουμε* $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}A) = 1$.

(δ΄) Για κάθε $A, B \in \mathcal{B}$ *με* $\mu(A) > 0$ *και* $\mu(B) > 0$ *υπάρχει* $n \in \mathbb{N}$ *τέτοιο ώστε* $\mu(T^{-n}A \cap B) > 0$.

Απόδειξη. $(\alpha) \Rightarrow (\beta)$ Έστω $B \in \mathcal{B}$ και $\mu(T^{-1}B \triangle B) = 0$. Θα κατασκευάσουμε ένα σύνολο B_∞ με $T^{-1}B_\infty = B_\infty$ και $\mu(B \triangle B_\infty) = 0$. Για κάθε $n \geq 0$ έχουμε $\mu(T^{-n}B \triangle B) = 0$ επειδή

$$T^{-n}B \triangle B \subset \bigcup_{i=0}^{n-1} T^{-(i+1)}B \triangle T^{-i}B = \bigcup_{i=0}^{n-1} T^{-i}(T^{-1}B \triangle B)$$

και από την υποπροσθετικότητα έχουμε $\mu(T^{-n}B \triangle B) \leq n\mu(T^{-1}B \triangle B)$. Έστω $B_\infty = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} T^{-i}B$. Από την υποπροσθετικότητα του μέτρου και τα προηγούμενα έχουμε ότι:

$$\mu\left(B \triangle \bigcup_{i=n}^{\infty} T^{-i}B\right) \leq \sum_{i=n}^{\infty} \mu\left(B \triangle T^{-i}B\right) = 0$$

για κάθε $n \geq 0$. Αφού τα σύνολα $\bigcup_{i=n}^{\infty} T^{-i}B$ φθίνουν και κάθε ένα από αυτά έχει μέτρο ίσο με το $\mu(B)$ έχουμε $\mu(B \triangle B_\infty) = 0$ και τότε $\mu(B_\infty) = \mu(B)$. Επίσης

$$T^{-1}B_\infty = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} T^{-(i+1)}B = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{i=n+1}^{\infty} T^{-i}B = B_\infty.$$

Κατασκευάσαμε λοιπόν ένα σύνολο B_∞ με $T^{-1}B_\infty = B_\infty$ και $\mu(B \triangle B_\infty) = 0$. Από την εργοδικότητα έχουμε $\mu(B_\infty) = 0$ ή 1

[2] $A \triangle B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$

και τότε $\mu(B) = 0$ ή 1.
$(\beta) \Rightarrow (\gamma)$ Έστω $A \in \mathcal{B}$ και $\mu(A) > 0$. Θεωρούμε το σύνολο $A_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}A$. Έχουμε $T^{-1}A_1 \subset A_1$ και αφού $\mu(A_1) = 0$ ή 1 έχουμε $\mu\left(T^{-1}A_1 \triangle A_1\right) = 0$. Από το (β) έχουμε $\mu(A_1) = 0$ ή 1. Δεν μπορούμε να έχουμε $\mu(A_1) = 0$ διότι $T^{-1}A \subset A_1$ και $\mu(T^{-1}A) = \mu(A) > 0$. Άρα $\mu(A_1) = 1$.
$(\gamma) \Rightarrow (\delta)$ Έστω ότι $\mu(A) > 0$ και $\mu(B) > 0$. Από το (γ) έχουμε ότι $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}A\right) = 1$ και άρα

$$0 < \mu(B) = \mu\left(B \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}A\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B \cap T^{-n}A\right).$$

Οπότε $\mu\left(B \cap T^{-n}A\right) > 0$ για κάποιο $n \geq 1$.
$(\delta) \Rightarrow (\alpha)$ Έστω $B \in \mathcal{B}$ και $T^{-1}B = B$. Αν $0 < \mu(B) < 1$ τότε $0 = \mu(B \cap (X \setminus B)) = \mu(T^{-n}B \cap (X \setminus B))$ για όλα τα $n \geq 1$ το οποίο έρχεται σε αντίθεση με το (δ). $\square$

Σημείωση:
(1) Η πρόταση (γ) μπορεί να αντικατασταθεί από τη πρόταση 'Για κάθε $A \in \mathcal{B}$ με $\mu(A) > 0$ και κάθε φυσικό N έχουμε $\mu(\bigcup_{n=N}^{\infty} T^{-n}A) = 1$' διότι $\bigcup_{n=N}^{\infty} T^{-n}A = T^{-n}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}A\right)$. Οπότε μπορούμε να αντικαταστίσουμε την πρόταση (δ) με τη πρόταση 'Για κάθε $A, B \in \mathcal{B}$ με $\mu(A) > 0$ και $\mu(B) > 0$ και κάθε φυσικό N υπάρχει $n > N$ τέτοιο ώστε $\mu(T^{-n}A \cap B) > 0$.'
(2) Οι προτάσεις (β),(γ) διαισθητικά λένε ότι,με την έννοια του μέτρου, η τροχιά $\{T^{-n}A\}_{n=0}^{\infty}$ είναι πυκνή.

Θεώρημα. *Έστω $\mathbf{X}$ συμπαγής μετρικός χώρος, $\mathcal{B}$ η σ-άλγεβρα των Borel υποσυνόλων του $\mathbf{X}$ και m ένα μέτρο πιθανότητας στον $\mathbf{X}$ τέτοιο ώστε $m(U) > 0$ για κάθε μη κενό ανοιχτό σύνολο U. Αν $T : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ είναι ένας συνεχής μετασχηματισμός που διατηρεί το μέτρο, τότε σχεδόν κάθε στοιχείο του $\mathbf{X}$ έχει πυκνή τροχιά, δηλαδή το σύνολο $\{x \in \mathbf{X} | (T^{-n}A)_{n=0}^{\infty}$ είναι πυκνό υποσύνολο του $\mathbf{X}\}$ έχει μέτρο 1.*

Απόδειξη. Έστω $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ βάση της τοπολογίας του $\mathbf{X}$. Τότε το $\{T^n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ είναι πυκνό στον $\mathbf{X}$ αν και μόνο αν $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{\infty} T^{-k}U_n$. Αφού $T^{-1}(\bigcup_{k=0}^{\infty} T^{-k}U_n) \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} T^{-k}U_n$ και ο T διατηρεί το μέτρο και είναι εργοδικός έχουμε $\mu(\bigcup_{k=0}^{\infty} T^{-k}U_n) = 0$ ή 1. Επειδή το $\bigcup_{k=0}^{\infty} T^{-k}U_n$ είναι ένα μη κενό ανοικτό σύνολο έχουμε

$$\mu\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} T^{-k}U_n\right) = 1.$$

□

2.3 Το εργοδικό θεώρημα

Θεώρημα. *(Εργοδικό θεώρημα Birkhoff) Έστω $(\mathbf{X}, \mathcal{B}, \mu)$ χώρος πεπερασμένου μέτρου, $T : (\mathbf{X}, \mathcal{B}, \mu) \to (\mathbf{X}, \mathcal{B}, \mu)$ ένας μετασχηματισμός που διατηρεί το μέτρο και $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Τότε*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x)) \to f^*(x)$$

σχεδόν παντού, όπου $f^* \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Επίσης $f^* \circ T = f^*$ σχεδόν παντού και αν $\mu(\mathbf{X}) < \infty$ τότε $\int_{\mathbf{X}} f^* d\mu = \int_{\mathbf{X}} f d\mu$.

Απόδειξη. Για την απόδειξη του θεωρήματος δές το [2]. □

Σημείωση: Αν ο μετασχηματισμός T είναι εργοδικός τότε η f^* είναι σταθερή σχεδόν παντού και αν $\mu(\mathbf{X}) < \infty$ τότε

$$f^* = \frac{1}{\mu(\mathbf{X})}\int_{\mathbf{X}} f d\mu$$

σχεδόν παντού. Αν τώρα ο $(\mathbf{X}, \mathcal{B}, \mu)$ είναι χώρος πιθανότητας και ο T είναι εργοδικός έχουμε για κάθε $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ ότι

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x)) = \int_{\mathbf{X}} f d\mu$$

σχεδόν παντού.
Παρακάτω παραθέτουμε δύο εφαρμογές του εργοδικού θεωρήματος.

(1) Έστω $(\mathbf{X}, \mathcal{B}, \mu)$ χώρος πιθανότητας, T ένας μετασχηματισμός που διατηρεί το μέτρο και $\mathbf{B} \in \mathcal{B}$. Αν $x \in \mathbf{X}$ και $i \in \mathbb{N}$ τότε $T^i x \in \mathbf{E}$ αν και μόνο αν $\chi_{\mathbf{E}}\left(T^i\right)(x) = 1$. Άρα ο αριθμός των στοιχείων του $\{x, T(x), \ldots, T^{n-1}(x)\}$ που είναι στο $\mathbf{E}$ είναι ίσος με $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \chi_{\mathbf{E}}\left(T^k(x)\right)$. Ο σχετικός αριθμός των στοιχείων του $\{x, T(x), \ldots, T^{n-1}(x)\}$ στο $\mathbf{E}$ είναι $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \chi_{\mathbf{E}}\left(T^k\right)(x)$ και αν ο μετασχηματισμός T είναι εργοδικός τότε από το θεώρημα του Birkhoff συγκλίνει σχεδόν παντού στο $\mu(\mathbf{E})$. Άρα η τροχιά κάθε στοιχείου του $\mathbf{X}$ τέμνει το $\mathbf{E}$ με ασυμπτωτική σχετική συχνότητα $\mu(\mathbf{E})$.

(2)

Λήμμα 1. *Έστω $(\mathbf{X}, \mathcal{B}, \mu, T)$ ένα αντιστρέψιμο δυναμικό σύστημα και έστω $\mathbf{A}$ ένα μετρήσιμο σύνολο με $\mu(\mathbf{A}) > 0$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $r_{\mathbf{A}} : \mathbf{A} \to \mathbb{N}$ με*

$$r_{\mathbf{A}}(x) = \inf_{n \geq 1}\{n \mid T^n(x) \in \mathbf{A}\}.$$

Ισχύει ότι

$$\int_{\mathbf{A}} r_{\mathbf{A}}(x) d\mu = \mu\left(\bigcup_{n \geq 0} T^n \mathbf{A}\right).$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τα σύνολα $A_n = \{x \in \mathbf{A} : r_{\mathbf{A}}(x) = n\}$. Τότε τα σύνολα $T^i A_n, n = 1, 2, \ldots, 0 \leq i < n$, είναι ανά δύο ξένα και $\displaystyle\bigcup_{n \geq 0} T^n \mathbf{A} = \bigcup_{n \geq 1}\bigcup_{i=0}^{n-1} T^i A_n$. Τότε

$$\mu\left(\bigcup_{n \geq 0} T^n \mathbf{A}\right) = \mu\left(\bigcup_{n \geq 1}\bigcup_{i=0}^{n-1} T^i A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{n-1} \mu\left(T^i A_n\right) =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\mu(A_n) = \int_{\mathbf{A}} r_{\mathbf{A}}(x) d\mu.$$

□

Ορίζουμε τώρα το μετασχηματισμό $T_{\mathbf{A}} : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ ώς

$$T_{\mathbf{A}}(x) = T^{r_{\mathbf{A}}(x)}(x).$$

Λήμμα 2. *Ο μετασχηματισμός $T_{\mathbf{A}}$ διατηρεί το μέτρο στον χώρο $(\mathbf{A}, \mathcal{B}|_{\mathbf{A}}, \mu_{\mathbf{A}} = \frac{1}{\mu(\mathbf{A})}\mu|_{\mathbf{A}}, T_{\mathbf{A}})$.*

Ο συμβολισμός $\mathcal{B}|_{\mathbf{A}} = \{\mathbf{B} \cap \mathbf{A} \mid \mathbf{B} \in \mathcal{B}\}$ και το μέτρο $\mu|_{\mathbf{A}}$ είναι ο περιορισμός του μ στη σ-άλγεβρα $\mathcal{B}|_{\mathbf{A}}$ και ορίζεται ώς $\mu_{\mathbf{A}}(\mathbf{B}) = \frac{1}{\mu(\mathbf{A})}\mu(\mathbf{B})$ για κάθε $\mathbf{B} \in \mathcal{B}|_{\mathbf{A}}$.

Απόδειξη. Πράγματι, αν $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$ μετρήσιμο τότε η $\mathbf{B} = \bigcup_{n\geq 1}^{\infty} \mathbf{B} \cap A_n$ είναι ένωση ξένων συνόλων ανά δύο άρα

$$\mu_{\mathbf{A}}(\mathbf{B}) = \frac{1}{\mu(\mathbf{A})} \sum_{n\geq 1} \mu(\mathbf{B} \cap A_n).$$

Οπότε $T_{\mathbf{A}}(\mathbf{B}) = \bigcup_{n\geq 1} T_{\mathbf{A}}(\mathbf{B} \cap A_n) = \bigcup_{n\geq 1} T^n(\mathbf{B} \cap A_n)$ άρα

$$\mu_{\mathbf{A}}(T_{\mathbf{A}}(\mathbf{B})) = \frac{1}{\mu(\mathbf{A})} \sum_{n\geq 1} \mu(T^n(\mathbf{B} \cap A_n)) =$$

$$\frac{1}{\mu(\mathbf{A})} \sum_{n\geq 1} \mu(\mathbf{B} \cap A_n) = \mu(\mathbf{B}),$$

αφού ο T διατηρεί το μέτρο μ. □

Λήμμα 3. (**Kac**) *Έστω $(\mathbf{X}, \mathcal{B}, \mu, T)$ ένα εργοδικό δυναμικό σύστημα και $\mathbf{A} \in \mathcal{B}$ με $\mu(\mathbf{A}) > 0$. Τότε*

$$\int_{\mathbf{A}} r_{\mathbf{A}}(x) d\mu = \frac{1}{\mu(\mathbf{A})}.$$

Απόδειξη. Πράγματι από την εργοδικότητα του T έχουμε ότι

$$\mu\left(\bigcup_{n>0} T^n \mathbf{A}\right) = 1.$$

Από το λήμμα 1 είναι $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\mu(A_n) = 1$ όπου

$$A_n = \{x \in \mathbf{A} : r_{\mathbf{A}}(x) = n\}.$$

Οπότε

$$\frac{1}{\mu(\mathbf{A})} = \sum_{n=1}^{\infty} n\frac{\mu(A_n)}{\mu(\mathbf{A})} = \sum_{n=1}^{\infty} n\mu_{\mathbf{A}}(A_n) = \int_{\mathbf{A}} r_{\mathbf{A}}(x)d\mu.$$

□

Κεφάλαιο 3

Θεώρημα Επαναφοράς του Poincarè

Ένα απο τα κεντρικά θέματα στην εργοδική θεωρία είναι εκείνο της επαναφοράς, για την οποία υπάρχουν αρκετά αποτελέσματα σχετικά με το πώς τα σημεία σε ένα μετρήσιμο δυναμικό σύστημα επιστρέφουν σε μία περιοχή τους κάτω από τροχιές που δημιουργούν μετασχηματισμοί. Πιο συγκεκριμένα, αν έχουμε ένα χώρο πιθανότητας $(\mathbf{X}, \mathcal{B}, \mu)$, ένα ανοιχτό σύνολο $\mathbf{G} \in \mathcal{B}$ και ένα μετασχηματισμό $T : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$, ένα σημείο $x \in \mathbf{G}$ είναι σημείο επαναφοράς σε σχέση με το $\mathbf{G}$ αν $T^i x$ ανήκει στο $\mathbf{G}$ για άπειρα $i \in \mathbb{N}$. Το πρώτο αποτέλεσμα ήρθε το 1890 από τον Poincarè, το οποίο θεωρείται απο τα σημαντικότερα αποτελέσματα στην εργοδική θεωρία.

Θεώρημα. *Έστω $T : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ ένας μετασχηματισμός που διατηρεί το μέτρο σε ένα χώρο πιθανότητας $(\mathbf{X}, \mathcal{B}, \mu)$. Έστω $\mathbf{E} \in \mathcal{B}$ με $\mu(\mathbf{E}) > 0$. Τότε σχεδόν όλα τα σημεία του $\mathbf{E}$ επιστρέφουν απείρως συχνά στο $\mathbf{E}$, δηλαδή υπάρχει σύνολο $\mathbf{F} \subset \mathbf{E}$ με $\mu(\mathbf{F}) = \mu(\mathbf{E})$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in \mathbf{F}$ υπάρχει ακολουθία $0 < n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ φυσικών αριθμών με $T^{n_i}(x) \in \mathbf{F}$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$.*

Απόδειξη. Για $N \geq 0$ θεωρούμε την ακολουθία $E_N = \bigcup_{n=N}^{\infty} T^{-n}\mathbf{E}$. Το σύνολο $\bigcap_{N=0}^{\infty} E_N$ είναι το σύνολο των στοιχείων που $\mathbf{X}$ που επιστρέφουν στο $\mathbf{E}$ απείρως συχνά κάτω απο τις θετικές δυνάμεις

του T. Τότε το σύνολο $\mathbf{F} = \mathbf{E} \cap \bigcap_{N=0}^{\infty} E_N$ περιέχει τα στοιχεία του $\mathbf{E}$ που τέμνουν το $\mathbf{E}$ άπειρες φορές κάτω απο τις θετικές δυνάμεις του T. Αν $x \in \mathbf{F}$ υπάρχει ακολουθία $0 < n_1 < n_2 < \dots$ φυσικών αριθμών με $T^{n_i}(x) \in \mathbf{E}$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Για κάθε τέτοιο i έχουμε $T^{n_i}(x) \in \mathbf{F}$ διότι $T^{n_j - n_i}(T^{n_i}x) \in \mathbf{E}$ για κάθε $j \in \mathbb{N}$. Μένει να δείξουμε ότι $\mu(\mathbf{F}) = \mu(\mathbf{E})$.
Αφού $T^{-1}E_N = E_N$ και ο T διατηρεί το μέτρο έχουμε $\mu(E_N) = \mu(E_{N+1})$ και τότε $\mu(\mathbf{E_0}) = \mu(E_N)$ για όλα τα N. Αφού $\mathbf{E_0} \supset E_1 \supset E_2 \supset \cdots$ έχουμε $\mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n\right) = \mu(\mathbf{E_0})$. Συνεπώς $\mu(\mathbf{F}) = \mu(\mathbf{E} \cup \mathbf{E_0}) = \mu(\mathbf{E})$ αφού $\mathbf{E} \subset \mathbf{E_0}$. $\square$

Παρακάτω δίνουμε μία τοπολογική προσέγγιση του παραπάνω θεωρήματος με χρήση του θεωρήματος κατηγορίας του Baire.

Θεώρημα. *(Baire) Έστω $\mathbf{X}$ πλήρης μετρικός χώρος και $G_n \subset \mathbf{X}, n \in \mathbb{N}$, μία ακολουθία G_δ*[1] *και πυκνών*[2] *συνόλων. Τότε η τομή $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ είναι G_δ και πυκνό σύνολο.*

Θεώρημα. *(Poincarè) Εστω $(\mathbf{X}, \rho)$ μετρικός χώρος, $T : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ ένας συνεχής μετασχηματισμός που διατηρεί το μέτρο μ. Ορίζουμε το σύνολο $\mathbf{Rec(T)} = \{x \in \mathbf{X} : \exists (n_k) \subset \mathbb{N}$ γνησίως αύξουσα ώστε $T^{n_k}(x) \to x\}$. Τότε το $\mathbf{Rec(T)}$ είναι G_δ και πυκνό υποσύνολο του $\mathbf{X}$.*

Απόδειξη. Ισχυριζόμαστε ότι

$$\mathbf{Rec(T)} = \bigcap_{s=1}^{\infty} \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} E(n, s),$$

[1]Ένα υποσύνολο $\mathbf{A}$ ενός μετρικού χώρου $\mathbf{X}$ είναι G_δ αν είναι αριθμήσιμη τομή ανοιχτών συνόλων

[2]Ένα υποσύνολο $\mathbf{A}$ ενός μετρικού χώρου $\mathbf{X}$ είναι πυκνό αν $\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{X}$. Ισοδύναμα, αν και μόνο αν κάθε περιοχή κάθε σημείου του $\mathbf{X}$ τέμνει το $\mathbf{A}$.

όπου $E(n,s) = \{x \in \mathbf{X} : \rho(T^n x, x) < \frac{1}{s}\}$. Πράγματι έστω $x \in \mathbf{Rec(T)}$. Θα δείξουμε ότι $x \in \bigcap_{s=1}^{\infty} \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} E(n,s)$, δηλαδή θα πρέπει να δείξουμε ότι κάθε $s = 1, 2, \dots$ και για κάθε $m = 1, 2, \dots$ υπάρχει $n(s,m) \geq m$ τέτοιο ώστε $x \in E(n(s,m), s)$. Σταθεροποιώ ένα s και ένα m τυχαίο. Αρκεί να δείξω ότι υπάρχει $n \geq m$ ώστε $\rho(T^n x, x) < \frac{1}{s}$. Επειδή $x \in \mathbf{Rec(T)}$ υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία n_κ τέτοια ώστε $\rho(T^{n_\kappa} x, x) \to 0$. Άρα υπάρχει κ_0 έτσι ώστε $n_{\kappa_0} > m$ και επιπλέον $\rho(T^{n_{\kappa_0}} x, x) < \frac{1}{s}$, άρα έχουμε το ζητούμενο.
Αντίστροφα, έστω $x \in \bigcap_{s=1}^{\infty} \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} E(n,s)$. Θέλουμε να δείξουμε ότι υπάρχει αύξουσα ακολουθία n_κ τέτοια ώστε $\rho(T^{n_\kappa} x, x) < \frac{1}{s}$. Για $s = 1, m = 1$ έχουμε ότι $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E(n,1)$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει $n_1 \geq 1$ τέτοιο ώστε $x \in E(n,1)$ ισοδύναμα $\rho(T^{n_1} x, x) < 1$. Για $s = 2, m = n_1 + 1$ έχουμε ότι υπάρχει $n_2 \geq n_1 + 1 > n_1$ ώστε $\rho(T^{n_2} x, x) < \frac{1}{2}$. Όμοια για $s = 3, m = n_2 + 1$ έχουμε ότι υπάρχει $n_3 \geq n_2 + 1 > n_2$ ώστε $\rho(T^{n_3} x, x) < \frac{1}{3}$. Συνεχίζοντας επαγωγικά βρίσκουμε γνησίως αύξουσα ακολουθία n_κ ώστε $\rho(T^{n_\kappa} x, x) < \frac{1}{\kappa}$. που σημαίνει ότι $x \in \mathbf{Rec(T)}$. Οπότε

$$\mathbf{Rec(T)} = \bigcap_{s=1}^{\infty} \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} E(n,s)$$

και επειδή τα E(n,s) είναι ανοιχτά (λόγω συνέχειας του T) το $\mathbf{Rec(T)}$ είναι G_δ.
Εστώ $\mathbf{U} \subset \mathbf{X}$ ανοιχτό. Θα δείξουμε ότι $\mathbf{Rec(T)} \cap \mathbf{U} \neq \emptyset$. Πράγματι αφού $\mu(\mathbf{U}) > 0$ και $\mu(\mathbf{Rec(T)}) = 1$ έχουμε ότι $\mu(\mathbf{Rec(T)} \cap \mathbf{U}) > 0$ διότι αν $\mu(\mathbf{Rec(T)} \cap \mathbf{U}) = 0$ θα είχαμε

$$\mathbf{U} = (\mathbf{U} \cap \mathbf{Rec(T)}) \cup (\mathbf{U} \cap (\mathbf{Rec(T)})^c)$$

$$\Rightarrow \mu(\mathbf{U}) = \mu(\mathbf{U} \cap \mathbf{Rec(T)}) + \mu(\mathbf{U} \cap (\mathbf{Rec(T)})^c) = 0$$

που είναι άτοπο. Άρα $\mathbf{Rec(T)} \cap \mathbf{U} \neq \emptyset$ που σημαίνει ότι το $\mathbf{Rec(T)}$ είναι πυκνό. $\square$

Κεφάλαιο 4

Ποσοτικά θεωρήματα Επαναφοράς

Ένα απο τα ερωτήματα που προέκυψαν απο το θεώρημα επαναφοράς του Poincarè ήταν η πληροφορία για το ρυθμό με τον οποίο επιστρέφει ένα τυχαίο σημείο σε μία περιοχή του υπό τη δράση ενός μετασχηματισμού. Το θεώρημα 2 δίνει μία απάντηση στο παραπάνω ερώτημα, συγκεκριμένα λέει ότι ο ρυθμός που επιστρέφουν σχεδόν όλα τα σημεία ενός συνόλου σε μία περιοχή τους είναι σχεδόν πολυωνυμικός.

Θεώρημα 1. *Έστω* $(\mathbf{X}, \Phi, \mu, d, T)$ *ένα δυναμικό σύστημα. Υποθέτουμε ότι για κάποιο* $\alpha > 0$ *το* α*-διάστατο μέτρο Hausdorff* $\mathcal{H}_\alpha$ *είναι σ-πεπερασμένο*[1] *στον* $\mathbf{X} = (\mathbf{X}, d)$*. Τότε σχεδόν για όλα τα* $x \in \mathbf{X}$ *έχουμε*

$$\liminf_{n\to+\infty}\{n^\beta d(x, T^n(x))\} < \infty, \beta = \frac{1}{\alpha}.$$

Στη περίπτωση όπου $\mathcal{H}_\alpha(\mathbf{Y}) = 0$ *τότε σχεδόν για όλα τα* $x \in \mathbf{X}$ *είναι*

$$\liminf_{n\to+\infty} n^\beta d(x, T^n(x)) = 0.$$

[1] Το $\mathcal{H}^\alpha(\mathbf{X})$ λέμε ότι είναι σ-πεπερασμένο αν ο $\mathbf{X}$ γράφεται ώς αριθμήσιμη ένωση από σύνολα $\mathbf{A}_i$ όπου $\mathcal{H}^\alpha(\mathbf{A}_i) < \infty$ για κάθε i.

Σημείωση: Απο το γεγονός ότι το $\mathcal{H}_\alpha$ είναι σ-πεπερασμένο στον $\mathbf{X}$ συνεπάγουμε ότι ο $(\mathbf{X}, d)$ έχει αριθμήσιμη βάση, δηλαδή είναι διαχωρίσιμος.

Θεώρημα 2. *Έστω $(\mathbf{X}, \Phi, \mu, T)$ ένα δυναμικό σύστημα,$(\mathbf{Y}, d)$ μετρικός χώρος και $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ μία μετρήσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $\alpha > 0$ το α-διάστατο μέτρο Hausdorff $\mathcal{H}_\alpha$ είναι σ-πεπερασμένο στον $\mathbf{Y}$. Τότε σχεδόν για όλα τα $x \in \mathbf{X}$ έχουμε οτι το $\liminf_{n\to+\infty}\{n^\beta d(f(x), f(T^n(x)))\} < \infty$, όπου $\beta = \frac{1}{\alpha}$.*
Στη περίπτωση όπου $\mathcal{H}_\alpha(\mathbf{Y}) = 0$ τότε σχεδόν για όλα τα $x \in \mathbf{X}$ είναι

$$\liminf_{n\to+\infty}\{n^\beta d(f(x), f(T^n(x)))\} = 0$$

Το θεώρημα 1 είναι ειδική περίπτωση του θεωρήματος 2 εάν θεωρήσουμε ώς $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ τη ταυτοτική απεικόνιση.

Απόδειξη. Αναγόμαστε στην περίπτωση αρχικά που το θεώρημα 2 ισχύει όταν $\mathcal{H}_\alpha(\mathbf{Y}) < \infty$. Αφού το $\mathcal{H}_\alpha$ είναι σ-πεπερασμένο στον $\mathbf{Y}$, μπορούμε να βρούμε μία κάλυψή του από μία αριθμήσιμη οικογένεια συνόλων U_i με $\mathcal{H}_\alpha(U_i) < \infty$. Άς υποθέσουμε,χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι κάθε U_i είναι Borel υποσύνολο του $\mathbf{Y}$.
Αφού $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ είναι μετρήσιμη, τα σύνολα $K_i = f^{-1}(U_i)$ είναι μετρήσιμα και αφού $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i \backslash \mathbf{X}) = 0$[1] για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη αρκεί να δείξουμε ότι $\mu(E_i) = 0$ για όλα τα i, όπου

$$E_i = \{x \in K_i \mid \liminf_{n\to+\infty}\{n^\beta \cdot d(f(x), f(T^n(x)))\} = \infty\}$$

Υποθέτουμε ότι για κάποιο $\mathbf{E} = E_i \subset \mathbf{K} = K_i$ είναι $\mu(\mathbf{E}) > 0$. Από τη μονοτονία του μέτρου έχουμε $\mu(\mathbf{K}) \geq \mu(\mathbf{E}) > 0$.
Από το θεώρημα επαναφοράς του Poincarè έχουμε ότι σχεδόν για όλα τα $x \in \mathbf{K}$, το σύνολο

$$N(x) = \{n \geq 1 \mid T^n(x) \in \mathbf{K}\} = \{n_1(x) < n_2(x) < n_3(x) < \dots\}$$

[1]Πράγματι $\bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(U_i) = f^{-1}(\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i) = f^{-1}(\mathbf{Y}) = \mathbf{X}$ άρα $\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i \backslash \mathbf{X} = \emptyset$

είναι άπειρο και μάλιστα $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{n_k(x)}{k} = g(x) < \infty$.
Πράγματι, απο το εργοδικό θεώρημα του Birkhoff έχουμε για σχεδόν όλα τα $x \in \mathbf{X}$ ότι

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{\kappa=1}^{n} \mathcal{X}_{\mathbf{K}}(T^{\kappa}x) = h(x)$$

όπου $h(x) = \dfrac{1}{g(x)} < \infty$ σχεδόν παντού στον $\mathbf{X}$.[2] Οπότε

$$\lim_{\kappa\to+\infty} \frac{1}{n_\kappa(x)} \sum_{m=1}^{n_\kappa(x)} \mathcal{X}_{\mathbf{K}}(T^{m}x) = h(x)$$

σχεδόν για κάθε $x \in \mathbf{X}$. Όμως το

$$\frac{1}{n_\kappa(x)} \sum_{m=1}^{n_\kappa(x)} \mathcal{X}_{\mathbf{K}}(T^{m}x) = \frac{|\{1 \leq m \leq n_\kappa(x) : T^m x \in \mathbf{K}\}|}{n_\kappa(x)}$$

οπότε

$$\lim_{\kappa\to+\infty} \frac{|\{1 \leq m \leq n_\kappa(x) : T^m x \in \mathbf{K}\}|}{n_\kappa(x)} = h(x).$$

Άρα $\lim\limits_{\kappa\to+\infty} \dfrac{\kappa}{n_\kappa(x)} = h(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{\kappa\to+\infty} \dfrac{n_\kappa(x)}{\kappa} = g(x)$.
Ορίζουμε τώρα το μετασχηματισμό $S : \mathbf{K} \to \mathbf{K}$ με $S(x) = T^{n_{\mathbf{K}}(x)}(x)$
. Αφού $f(\mathbf{K}) = \mathbf{U}$ με $\mathbf{H}_\alpha(\mathbf{U}) < \infty$ παίρνουμε (υποθέτοντας ότι το θεώρημα 2 ισχύει όταν $\mathbf{H}_\alpha(\mathbf{Y}) < \infty, \mathbf{Y} = \mathbf{U}$) ότι $\mu(\mathbf{E}') = 0$ όπου

$$\mathbf{E}' = \{x \in \mathbf{K} \mid \liminf_{k\to+\infty} \{k^\beta \cdot d(f(x), f(T^k(x)))\} = \infty\}.$$

Αφού $S^k = T^{n(k)}$, έχουμε $\mu(\mathbf{E}\backslash\mathbf{E}') = 0$ και τότε $\mu(\mathbf{E}) = 0$, αντίφαση.

[2] Στη περίπτωση όπου ο T είναι εργοδικός έχουμε σχεδόν για όλα τα $x \in \mathbf{X}$ ότι $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{\kappa=1}^{n} \mathcal{X}_{\mathbf{K}}(T^{\kappa}x) = \mu(\mathbf{K})$.

Αποδείξαμε λοιπόν ότι με την υπόθεση ότι ισχύει το θεώρημα 3 όταν $\mathcal{H}_\alpha(\mathbf{Y}) < \infty$ ισχύει και για σ-πεπερασμένο $\mathbf{H}_\alpha$ στον $\mathbf{Y}$ άρα εάν τώρα αποδείξουμε το θεώρημα για $\mathcal{H}_\alpha(\mathbf{Y}) < \infty$ θα έχουμε τελειώσει. $\square$

Αποδεικνύουμε ένα λήμμα που θα χρειαστεί για τη συνέχεια.

Λήμμα 4. *Έστω* $\mathbf{V} \subset \mathbf{X}$ *μετρήσιμο. Για ένα πραγματικό αριθμό* $t \geq 1$ *ορίζουμε το σύνολο:*

$$\mathbf{V(t)} = \{x \in \mathbf{V} \mid T^i(x) \notin \mathbf{V}, \forall i \in \mathbb{Z} \text{ με } 1 \leq i \leq t \}$$

Τότε $\mu(\mathbf{V}(t)) < \frac{1}{t}$.

Απόδειξη. Τα σύνολα $T^{-i}(\mathbf{V}(t)), 0 \leq i \leq t$ είναι ξένα ανά δύο. Πράγματι αν υποθέσουμε ότι δεν είναι, τότε αν $x \in T^{-m}(\mathbf{V}(t)) \cap T^{-n}(\mathbf{V}(t))$ με $1 \leq m < n \leq t$ τότε το $x \in T^{-m}(\mathbf{V}(t))$ και το $x \in T^{-n}(\mathbf{V}(t))$. Άρα $T^m(x) \in \mathbf{V}(t)$ και το $T^n(x) \in \mathbf{V}(t)$. Αυτό σημαίνει ότι $T^i(T^m(x)) \notin \mathbf{V}(t), \forall i$ με $1 \leq i \leq t$. Αν επιλέξουμε για $i = n - m$ τότε $T^{n-m}(T^m(x)) \notin \mathbf{V}(t)$ που σημαίνει ότι $T^n(x) \notin \mathbf{V}(t)$, άτοπο. Επειδή τώρα ο T διατηρεί το μέτρο, τα σύνολα $T^{-i}(\mathbf{V}(t)), 0 \leq i \leq t$ έχουν μέτρο $\mu(\mathbf{V}(t))$. Επειδή το $\mu(\bigcup_{i=0}^{[t]} T^{-i}(\mathbf{V}(t))) = ([t] + 1)\mu(\mathbf{V}(t))$ και επιπλέον $\mu(\bigcup_{i=0}^{[t]} T^{-i}(\mathbf{V}(t))) \leq 1$ έχουμε ότι

$$\mu(\mathbf{V}(t)) \leq \frac{1}{[t]+1}{}^{3} < \frac{1}{t}$$

$\square$

Λήμμα 5. *Έστω* $\mathcal{H}_\alpha(\mathbf{Y}) < c < \infty$. *Τότε για κάθε* $\epsilon > 0$ *και* $p \geq \max\{1, \frac{1}{4c}\}$ *υπάρχει ένα μετρήσιμο σύνολο* $F = F(p, \epsilon) \subset \mathbf{X}$ *με* $\mu(\mathbf{F}) > 1 - \frac{1}{p}$ *τέτοιο ώστε για κάθε* $x \in \mathbf{F}$ *υπάρχει ένας ακέραιος* κ *τέτοιος ώστε*

$$d(f(x), f(T^k(x)) < \min\{\left(\frac{4cp^2}{k}\right)^\beta, \epsilon\}, \beta = \frac{1}{\alpha}.$$

[3] Για οποιοδήποτε $t \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι $[t] \leq t < [t] + 1$ όπου $[t]$ το ακέραιο μέρος του.

Απόδειξη. Αφού το $\mathcal{H}_\alpha(\mathbf{Y}) < \infty$ μπορούμε να βρούμε μία κάλυψη του $\mathbf{Y} = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ όπου τα U_i να έχουν διάμετρο $|U_i| = r_i < \min\{1, \epsilon\}$ τέτοια ώστε $\sum_{i=1}^{\infty}(r_i)^\alpha < c$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας άς υποθέσουμε ότι τα U_i είναι *Borel* και ξένα ανά δύο. Ορίζουμε τα σύνολα $\mathbf{V}_i = f^{-1}(U_i)$ και θεωρούμε το σύνολο δεικτών

$$\mathbf{J} = \{i \geq 1 \mid 2cp \cdot \mu(\mathbf{V}_i) \leq (r_i)^\alpha\}.$$

Τότε προφανώς

$$\sum_{i\in\mathbf{J}} \mu(\mathbf{V}_i) \leq \frac{1}{2cp}\left(\sum_{i\in\mathbf{J}}(r_i)^\alpha\right) < \frac{c}{2cp} = \frac{1}{2p}$$

και επιπλέον

$$\mu(\mathbf{V}_i) > \frac{1}{2cp}(r_i)^\alpha, \forall i \notin \mathbf{J}.$$

Έστω ο πραγματικός αριθμός

$$t_i = \frac{4cp^2}{(r_i)^\alpha} = 4cp \cdot \frac{p}{(r_i)^\alpha} > 1.$$

Από το λήμμα 2 έχουμε ότι $\mu(\mathbf{V_i}(t_i)) < \frac{1}{t_1}$ όπου

$$\mathbf{V}_i(t_i) = \{x \in \mathbf{V}_i \mid T^k(x) \notin \mathbf{V}_i, \forall k \in \mathbb{Z} \ \mu\epsilon \ 1 \leq k \leq t_i\}.$$

Τότε

$$\mu(\mathbf{V}_i(t_i)) < \frac{(r_i)^\alpha}{4cp^2} \leq \frac{2cp \cdot \mu(\mathbf{V}_i)}{4cp^2} = \frac{\mu(\mathbf{V}_i)}{2p}.$$

Ορίζουμε το σύνολο:

$$\mathbf{G} = \left(\bigcup_{i\in\mathbf{J}}^{\infty} \mathbf{V}_i\right) \cup \left(\bigcup_{i\notin\mathbf{J}}^{\infty} \mathbf{V}_i(t_i)\right)$$

Για το σύνολο $\mathbf{G}$ έχουμε ότι:

$$\mu(\mathbf{G}) \leq \sum_{i\in\mathbf{J}} \mu(\mathbf{V}_i) + \sum_{i\notin\mathbf{J}} \frac{\mu(\mathbf{V}_i)}{2p} < \frac{1}{2p} + \frac{1}{2p} = \frac{1}{p}.$$

Ορίζουμε λοιπόν τώρα το σύνολο $\mathbf{F}$ ώς $\mathbf{F} = \mathbf{X} \backslash \mathbf{G}$. Τότε το $\mu(\mathbf{F}) > 1 - \frac{1}{p}$.
Είναι σαφές ότι κάθε $x \in \mathbf{F}$ ανήκει στο σύνολο $\mathbf{V}_i \backslash \mathbf{V}_i(t_i)$ για κάποιο i. Τότε για κάποιον ακέραιο κ $\mu\epsilon$ $1 \leq k \leq t_i$ έχουμε ότι $x, T^k(x) \in \mathbf{V}_i$ οπότε

$$d(f(x), f(T^k(x)) < |U_i| = r_i = \left(\frac{4cp^2}{t_i}\right)^{\beta} \leq \left(\frac{4cp^2}{k}\right)^{\beta}$$

αφού $t_i = \frac{4cp^2}{(r_i)^\alpha}$ και $\beta = \frac{1}{\alpha}$. □

Λήμμα 6. *Έστω* $\mathcal{H}_\alpha(\mathbf{Y}) < c < \infty$. *Τότε για κάθε* $p \geq \max\{1, \frac{1}{4c}\}$ *ορίζουμε το σύνολο*

$$F'(p) = \{x \in \mathbf{X} \mid \liminf_{n \to +\infty} \{n^\beta \cdot d(f(x), f(T^n(x)))\} < (4cp^2)^\beta\}.$$

Τότε $\mu(F'(p)) \geq 1 - \frac{1}{p}$.

Απόδειξη. Πράγματι άς πάρουμε οποιαδήποτε ακολουθία $1 > \epsilon_1 > \epsilon_2 > \ldots$ θετικών αριθμών για την οποία $\lim_{n \to +\infty} \epsilon_n = 0$. Θεωρούμε τα σύνολα $F_i = F(p, \epsilon_i)$ που κατασκευάστηκαν στο λήμμα 2. Έστω το σύνολο

$$F(p) = \bigcap_{\kappa \geq 1} \left(\bigcup_{i \geq \kappa} F_i \right) = \{x \in \mathbf{X} \mid x \in F_i \ \gamma\iota\alpha\ \alpha\pi\epsilon\iota\rho\alpha\ i\}.$$

Αφού $\mu(F_i) \geq 1 - \frac{1}{p}$ για όλα τα i συμπεραίνουμε ότι $\mu(F(p)) \geq 1 - \frac{1}{p}$.
Πράγματι, η ακολουθία $G_\kappa = \bigcup_{i \geq \kappa} F_i$ είναι φθίνουσα οπότε

$$\mu(F_p) = \mu \left(\bigcap_{\kappa \geq 1} G_\kappa \right) = \lim_{\kappa \to +\infty} \mu(G_\kappa) = \mu(G_\kappa) \geq \mu(F_\kappa) > 1 - \frac{1}{p}$$

$$\Rightarrow \mu(F_p) > 1 - \frac{1}{p}.$$

Αρκεί να δείξουμε ότι $F(p) \subset F'(p)$. Πράγματι αν $x \in F(p)$ υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία κ_n τέτοια ώστε $x \in F\left(p, \epsilon_{\kappa_n}\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ακολουθία m_n τέτοια ώστε

$$m_n^{\beta} d(f(x), f(T^{m_n}(x))) < (4cp^2)^{\beta},$$

άρα το $x \in F'(p)$. □

Λήμμα 7. *(Ολοκλήρωση του Θεωρήματος 2)*

Ορίζουμε το σύνολο $F' = \bigcup_p F'(p)$ όπου η ένωση είναι για όλους τους ακεραίους $p \geq \max\{1, \frac{1}{4c}\}$.
Από το λήμμα 3 έχουμε $\mu(F') = 1$ οπότε για κάθε $x \in F$ έχουμε ότι

$$\liminf_{n \to +\infty} \{n^{\beta} \cdot d(f(x), f(T^n(x)))\} < \infty.$$

Η περίπτωση όπου $\mathcal{H}_{\alpha}(\mathbf{Y}) = 0$ (ο δεύτερος ισχυρισμός του θεωρήματος 2) προκύπτει εύκολα απο το λήμμα 3. Εδώ ολοκληρώνεται η απόδειξη του θεωρήματος 2.
Στο παρακάτω κείμενο παραθέτουμε κάποιες εφαρμογές του παραπάνω αποτελέσματος αναφέροντας, χωρίς απόδειξη, το παρακάτω.

Θεώρημα. *Έστω $(\mathbf{X}, \Phi, \mu, d, T)$ ένα δυναμικό σύστημα. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $\alpha > 0$ το α-διάστατο μέτρο Hausdorff συμφωνεί με το μέτρο μ στην άλγεβρα Φ. Τότε για μ-σχεδόν όλα τα $x \in \mathbf{X}$ έχουμε*

$$\liminf_{n \to +\infty} \{n^{\beta} d(x, T^n(x)))\} \leq 1, \beta = \frac{1}{\alpha}.$$

4.1 Εφαρμογές

Εφαρμογή 1: Μετασχηματισμοί που διατηρούν το μέτρο σε φραγμένα χωρία στον $\mathbb{R}^n$.

Θεώρημα. *Έστω* $\mathbf{X} = I = [0,1]$ *και* $T : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ *ένας μετασχηματισμός που διατηρεί το μέτρο Lebesgue(όχι απαραίτητα συνεχής). Τότε σχεδόν για όλα τα* $x \in \mathbf{X}$ *είναι*

$$\liminf_{n\to+\infty}\{n \cdot |x - T^n(x)|\} \leq 1.$$

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το προηγούμενο θεώρημα με $\mathbf{X} = I$ με δεδομένο ότι το μέτρο Lebesgue συμφωνεί με το μέτρο Hausdorff στον $\mathbf{X}$. □

Κάποια απλά παραδείγματα μετασχηματισμών που διατηρούν το μέτρο στο [0,1] είναι οι:

$$T(x) = \begin{cases} 2x & ,0 \leq x < \frac{1}{2} \\ \\ 2x - 1 & ,\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

ή

$$T(x) = \begin{cases} 2x & ,0 \leq x < \frac{1}{2} \\ \\ -2x + 2 & ,\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Εφαρμογή 2

Θεώρημα. *Έστω* $m \geq 2$ *ακέραιος,* $T : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$, $\mathbf{X} = [0,1)$ *ο μετασχηματισμός* $T(x) = m \cdot x$ *(mod 1) και* μ *ένα πεπερασμένο T-αναλλοίωτο μέτρο(όχι απαραίτητα εργοδικό) στον* $\mathbf{X}$. *Τότε σχεδόν για όλα τα* $x \in \mathbf{X}$,

$$\liminf_{n\to+\infty}\{n \cdot |T^n(x) - x|\} = 0.$$

Πράγματι, ο μετασχηματισμός $T(x) = m \cdot x \pmod 1$ διατηρεί το μέτρο μ στο $[0,1)$. Στη περίπτωση όπου $m = 2$ και για το μέτρο Lebesgue έχουμε ότι αν $\mathbf{I} = (\alpha, \beta) \subset [0,1)$ τότε

$$T^{-1}(\mathbf{I}) = \left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right) \cup \left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+1}{2}\right)$$

οπότε $\mu(T^{-1}(\mathbf{I})) = \beta - \alpha = \mu(\mathbf{I})$. Τώρα εάν θεωρήσουμε ένα οποιοδήποτε ανοιχτό σύνολο $\mathbf{O}$ έχουμε ότι

$$\mathbf{O} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathbf{I}_j,$$

όπου τα $\mathbf{I}_j$ είναι ξένα ανά δύο ανοιχτά διαστήματα. Οπότε

$$\mu(T^{-1}(\mathbf{O})) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(\mathbf{I}_j) = \mu(\mathbf{O}),$$

άρα και για κάθε Borel σύνολο $\mathbf{B}$ έχουμε ότι $\mu(T^{-1}(\mathbf{B})) = \mu(\mathbf{B})$.

Βιβλιογραφία

[1] Quantitative recurrence results, Michael Boshernitzan,Inventiones mathematicae,113,pages 617-631, Houston 1993

[2] P.Walters, An introduction to ergodic theory. Graduate Texts in Mathematics, 79. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982. ix+250 pp.

[3] M.Einsiedler-T.Ward,Ergodic Theory with a view towards Number Theory.Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag,London Limited 2011.

[4] K.J.Falconer, The Geometry of Fractal Sets, Cambridge University Press, 1985.

[5] J.Connett, On covering the unit ball in a Banach space, J.London Math. Soc.(2) 7(1973), 291-294.

[6] M. Furi and A. Vignoli, On a property of the unit sphere in a linear normed space, Bull.Acad.Polon.Sci.Math.Astronom.Phys. 18 (1970), 333-334.