ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Μεταπτυχιακη Εργασια

Ο θόρυβος του Walsh σε Στοχαστικές Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις και εφαρμογές

Θεοδώρα Αποστολάκη

Επιβλέπουσα καθηγήτρια: Γεωργία Καραλή

Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

27 Σεπτεμβρίου 2022

Ευχαριστίες

Πρώτα απ'ολα θα ήθελα να ευχαριστήσω την επιβλέπουσα καθηγήτρια της διπλωματικής μου εργασίας κ.Γεωργία Καραλή, για την πολύτιμη βοήθεια και την καθοδήγηση της. Την ευχαριστώ θερμά για όλο το χρόνο που μου αφιέρωσε καθώς και που μου έδωσε την ευκαιρία να μελετήσω ένα τόσο ενδιαφέρον θέμα.
Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τον κ.Σταύρο Κομηνέα και τον κ.Γεώργιο Μακράκη που αποτέλεσαν τα μέλη της εξεταστικής επιτροπής της εργασίας μου. Τους ευχαριστώ επίσης για τα ενδιαφέροντα μαθήματα που παρακολούθησα μαζί τους κατά τη διάρκεια του μεταπτυχιακού μου.

Εισαγωγή

Στην παρούσα εργασία θα μελετήσουμε το θόρυβο του John B. Walsh καθώς και την εφαρμογή του σε στοχαστικές μερικές διαφορικές εξισώσεις.

Στο πρώτο κεφάλαιο θα κάνουμε μια ανασκόπηση βασικών εννοιών της θεωρίας πιθανοτήτων καθώς και κάποιων στοιχείων της Θεωρίας Μέτρου. Συνεχίζοντας στο δεύτερο κεφάλαιο γίνεται μια εισαγωγή στις στοχαστικές μερικές διαφορικές εξισώσεις καθώς και στις εφαρμογές που έχουν σε διάφορες επιστήμες. Οι στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις αποτελούν μια γενίκευση των ντετερμινιστικών εξισώσεων καθώς προκύπτουν εισάγοντας σε αυτές μια στοχαστική διαδικασία, με αποτέλεσμα και η λύση τους να αποτελεί στοχαστική διαδικασία.

Σο κεφάλαιο 3 θα μελετήσουμε το θόρυβο όπως ορίζεται από τον J.B. Walsh στο [14]. Θα δούμε αρχικά το λευκό θόρυβο $\dot{W}$, τον οποίο θεωρεί ως μέτρο καθώς και την κίνηση Brown, η οποία αποτελεί μια διαδικασία που παράγεται από το λευκό θόρυβο. Το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με το Γκαουσσιανό χωρικά συσχετισμένο θόρυβο ο οποίος αποτελεί έναν θόρυβο πιο γενικό από το λευκό.

Θεωρώντας το λευκό θόρυβο ως μέτρο στον Ευκλείδιο χώρο $W(dx,\, dt)$ κατασκευάζουμε ολοκληρώματα της μορφής $\int f(x,t)dW$. Στο κεφάλαιο 4 θα κατασκευάσουμε το ολοκλήρωμα του Walsh. Για να γίνει αυτό γενικεύουμε το $\int f(x,t)dW$ ώστε να πάρουμε ολοκληρώματα ως προς μέτρα martingale. Θα δούμε την κατασκευή του ολοκληρώματος τόσο για στοιχειώδεις όσο και για απλές συναρτήσεις, αφού πρώτα τις ορίσουμε.

Εισάγοντας το θόρυβο του Walsh σε μερικές διαφορικές εξισώσεις παίρνουμε στοχαστικές μερικές διαφορικές εξισώσεις τις οποίες μπορούμε να λύσουμε σε όρους των παραπάνω ολοκληρωμάτων. Παράδειγμα αποτελούν οι εξισώσεις κύματος και cable τις οποίες θα μελετήσουμε στο κεφάλαιο 5 με το οποίο ολοκληρώνεται η εργασία.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Βασικοί ορισμοί Θεωρίας Πιθανοτήτων

Το παρόν κεφάλαιο ειναι βασισμένο στις βιβλιογραφίες ([1], [3], [6]).

1.1 Χώρος Πιθανότητας

Οι χώροι πιθανότητας μοντελοποιούν πειράματα τύχης, δηλαδή πειράματα των οποίων δε μπορούμε εκ των προτέρων να προβλέψουμε το αποτέλεσμα.
Για να ορίσουμε το χώρο πιθανότητας θα πρέπει πρώτα να μελετήσουμε ορισμένες έννοιες από τη Θεωρία μέτρου.

Ορισμός 1.1.1. Έστω σύνολο A. *σ−άλγεβρα* $\mathcal{A}$ ονομάζεται μια συλλογή υποσυνόλων του A με τις εξής ιδιότητες:

1. $A \in \mathcal{A}$
2. αν $X \in \mathcal{A}$ τότε $X^c \in \mathcal{A}$
3. αν $X_1, X_2, ... \in \mathcal{A}$ τότε
$$\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i, \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} X_i \in \mathcal{A}.$$

Το ζευγάρι $(A, \mathcal{A})$ ονομάζεται *μετρήσιμος χώρος*.

Σχόλιο 1.1.2. Η μικρότερη σ−άλγεβρα είναι η $\mathcal{A} = \{\varnothing, A\}$ και η μεγαλύτερη το δυναμοσύνολο του A.

Ορισμός 1.1.3. Αν
$$\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$$
συνολοσυνάρτηση η οποία ικανοποιεί τα εξής:

1. $\mu(\varnothing) = 0$
2. αν X_n, $n \in \mathbb{N}$ μετρήσιμα και ξένα ανα δύο
$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(X_n)$$

τότε η τριάδα $(A, \mathcal{A}, \mu)$ ονομάζεται *χώρος μέτρου* και η μ *μέτρο.*

Σχόλιο 1.1.4. Αν $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ τότε η μ λέγεται *προσημασμένο μέτρο.*
Αν $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i,\ A_i \in \mathcal{A}$ και $\mu(A_i) < \infty,\ \forall i$ το μ ονομάζεται *σ-πεπερασμένο.*

Έστω Ω ο *δειγματικός χώρος* ενός πειράματος, δηλαδή το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων του και $\mathcal{U}$ η $\sigma-$άλγεβρα των υποσυνόλων του.

Ορισμός 1.1.5. Μια συνολοσυνάρτηση

$$P : \mathcal{U} \to [0, 1]$$

με τις ιδιότητες:

1. $P(\Omega) = 1$
2. αν $A_1, A_2, ... \in \mathcal{U}$ ξένα ανα δύο τότε

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

ονομάζεται *μέτρο πιθανότητας* και η τριάδα $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ *χώρος πιθανότητας.* Επιπλέον, τα στοιχεία της $\mathcal{U}$ ονομάζονται *ενδεχόμενα.*

Πρόταση 1.1.6. *1. Έστω $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ χώρος πιθανότητας και $A, B \in \mathcal{U}$. Αν $A \subset B$ τότε $P(A) \leq P(B)$.*

2. Αν $A_1, A_2, ... \in \mathcal{U}$ τότε

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Απόδειξη. 1. Έχουμε $B = A \cup (B \setminus A)$ και $A,\ B \setminus A$ ξένα σύνολα της $\mathcal{U}$. Έτσι $P(B) = P(A) + P(B \setminus A)$. Όμως $P(B \setminus A) \geq 0$ και άρα $P(B) \geq P(A)$.

2. Έστω

$$B_n = An \setminus \bigcup_{i<n} A_i \quad n = 1, 2, ...$$

Τότε $B_n \in \mathcal{U}$ και $B_n \subset A_n$ επομένως $P(B_n) \leq P(A_n)$ για κάθε n.

Επιπλέον τα B_n είναι ξένα ανά δύο και $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Έτσι,

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

□

1.2 Τυχαίες μεταβλητές

Ορισμός 1.2.1. Έστω $\mathcal{F}$ μια οικογένεια υποσυνόλων του Ω η οποία δεν είναι απαραίτητα $\sigma-$ άλγεβρα. Τότε, ως $\sigma(\mathcal{F})$ συμβολίζουμε τη μικρότερη $\sigma-$ άλγεβρα που περιέχει την $\mathcal{F}$ και ονομάζεται *$\sigma-$άλγεβρα που παράγεται από την $\mathcal{F}$.*

Αν $\Omega = \mathbb{R}^n$ και $\mathcal{F}$ η οικογένεια όλων των ανοικτών συνόλων, η $\sigma(\mathcal{F})$ ονομάζεται *άλγεβρα Borel* και συμβολίζεται ως $\mathcal{B}$. Τα σύνολα που ανήκουν σε αυτή ονομάζονται *σύνολα Borel.*

Ορισμός 1.2.2. Έστω $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ χώρος πιθανότητας. Μια απεικόνιση

$$X : \Omega \to \mathbb{R}^n$$

ονομάζεται $n-$διάστατη *τυχαία μεταβλητή* αν για κάθε $B \in \mathcal{B}$, έχουμε

$$X^{-1}(B) \in \mathcal{U}.$$

Ισοδύναμα λέμε ότι η X είναι $\mathcal{U}$ μετρήσιμη.

Οι τυχαίες μεταβλητές, ανάλογα με τις τιμές που παίρνουν, διακρίνονται σε *διακριτές* και *συνεχείς*. Οι διακριτές παίρνουν θετικές τιμές σε ένα πεπερασμένο ή αριθμήσιμο διακριτό σύνολο ενώ οι συνεχείς σε διαστήματα.
Αν $A_1, ..., A_m \in \mathcal{U}$, με $\Omega = \bigcup_{i=1}^m A_i$ και $a_1, ..., a_m$ πραγματικοί αριθμοί, η

$$X = \sum_{i=1}^m a_i \mathcal{X}_{\mathcal{A}}$$

είναι τυχαία μεγαβλητή και ονομάζεται *απλή*.

Έστω $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ χώρος πιθανότητας και $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ τυχαία μεταβλητή.

Ορισμός 1.2.3.

1. Η συνάρτηση $F_X : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ ονομάζεται *συνάρτηση κατανομής* της X και ορίζεται ως εξής:
$$F_X(x) := P(X \le x)$$
για όλα τα $x \in \mathbb{R}^n$.

2. Αν $X_1, ..., X_m : \Omega \to \mathbb{R}^n$ τυχαίες μεταβλητές, η *κοινή συνάρτηση κατανομής* τους είναι η
$$F_{X_1,...,X_m} : (\mathbb{R}^n)^m \to [0,1]$$
και
$$F_{X_1,...,X_m} := P(X_1 \le x_1, ..., X_m \le x_m)$$
για όλα τα $x_i \in \mathbb{R}^n, \quad i = 1, ..., m$.

3. Αν υπάρχει ολοκληρώσιμη και μη αρνητική συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε
$$F(x) = F(x_1, ..., x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} ... \int_{-\infty}^{x_n} f(y_1, ..., y_n) dy_n ... dy_1,$$
τότε η f ονομάζεται *συνάρτηση πυκνότητας* της X και
$$P(X \in B) = \int_B f(x) dx$$
για όλα τα $B \in \mathcal{B}$.

Η $F = F_X$ ικανοποιεί τα ακόλουθα:

- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$
- $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$

- η F είναι μη φθείνουσα συνάρτηση
- Για κάθε x, $F(x+) := \lim_{\epsilon \to 0} F(x+\epsilon) = F(x)$.

Αντίστροφα, όποια συνάρτηση F ικανοποιεί τις παραπάνω συνθήκες είναι η συνάρτηση κατανομής μιας τυχαίας μεταβλητής.

Για τη συνάρτηση πυκνότητας f ισχύει ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

Αντίστροφα, αν το ολοκλήρωμα μιας μη αρνητικής συνάρτησης f είναι ίσο με 1 τότε η f είναι η συνάρτηση πυκνότητας μιας τυχαίας μεταβλητής.

1.2.1 Ανεξαρτησία τυχαίων μεταβλητών

Έστω $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ χώρος πιθανότητας και ενδεχόμενα $A, B \in \mathcal{U}$ με $P(B) > 0$. Η πιθανότητα του A με δεδομένο το B ορίζεται ως

$$P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Αν τα ενδεχόμενα A, B είναι ανεξάρτητα, το να γνωρίζουμε οτι ισχύει το B δεν επηρεάζει την πιθανότητα του A, επομένως

$$P(A|B) = P(A).$$

Ορισμός 1.2.4. Δύο ενδεχόμενα A, B λέγονται ανεξάρτητα αν και μόνο αν

$$\begin{aligned} & P(A|B) = P(A) \\ \Rightarrow \quad & P(A \cap B) = P(A)P(B) \end{aligned}$$

Ορισμός 1.2.5.
- Έστω $\mathcal{U}_i \subseteq \mathcal{U}$ $\sigma-$άλγεβρες με $i = 1, \ldots$.
  Οι $\{\mathcal{U}\}_{i=1}^{\infty}$ θα είναι ανεξάρτητες αν για κάθε επιλογή $1 \le k_1 < k_2 < \ldots < k_m$ και ενδεχομένων $A_{k_i} \in \mathcal{U}_{k_i}$ έχουμε
  $$P(A_{k_1} \cap \ldots \cap A_{k_m}) = P(A_{k_1}) \ldots P(A_{k_m}).$$

- Έστω $X_i : \Omega \to \mathbb{R}^n$ τυχαίες μεταβλητές με $i = 1, \ldots$.
  Οι $X_1, \ldots$ θα είναι ανεξάρτητες αν για όλους τους ακεραίους $k \ge 2$ και κάθε επιλογή συνόλων Borel $\mathcal{B}_1, \ldots \mathcal{B}_k \subseteq \mathbb{R}^n$ έχουμε
  $$P(X_1 \in \mathcal{B}_1, \ldots, X_k \in \mathcal{B}_k) = P(X_1 \in \mathcal{B}_1) \ldots P(X_k \in \mathcal{B}_k).$$

1.2.2 Μέση τιμή και διασπορά

Έστω $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ χώρος πιθανότητας και $X = \sum_{i=1}^{m} a_i \mathcal{X}_A$ απλή τυχαία μεταβλητή που παίρνει πραγματικές τιμές. Ορίζουμε το *ολοκλήρωμα* Lebesgue της X ως προς P ως εξής:

$$\int_{\Omega} X dP := \sum_{i=1}^{k} a_i P(A_i).$$

Αν η X είναι μη αρνητική με τιμές στο $\mathbb{R}$ ορίζεται ως:

$$\int_\Omega X dP := \sup_{Y \le X} \int_\Omega Y d,$$

όπου Y απλή.

Για μια τυχαία μεταβλητή $X : \omega \to \mathbb{R}$ γράφουμε

$$\int_\Omega X dP := \int_\Omega X^+ dP - \int_\Omega X^- dP$$

υπό τον όρο ότι τουλάχιστον ένα από τα ολοκληρώματα στα δεξιά είναι πεπερασμένο.
$X^+ = max(X, 0)$ και $X^- max(-X, 0)$ έτσι ώστε $X = X^+ - X^-$.

Τέλος, αν $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ διανυσματική τυχαία μεταβλητή, $X = (X^1, ..., X^n)$,

$$\int_\Omega X dP = \left(\int_\Omega X^1 dP, ..., \int_\Omega X^n dP \right).$$

Ορισμός 1.2.6. Έστω τυχαία μεταβλητή X.

1. Η μέση τιμή ορίζεται ως εξής:
$$E(X) = \int_\Omega X dP.$$

2. Η διασπορά ορίζεται ως:
$$V(x) = \int_\Omega |X - E(X)|^2 dP,$$
όπου $|\cdot|$ η Ευκλείδια νόρμα.

   Παρατηρούμε ότι
$$V(X) = E(|X - E(X)|^2) = E(|X|^2) - E(X)^2.$$

   Επιπλέον ως $\sqrt{V(X)}$ ορίζουμε την τυπική απόκλιση της X.
   Η διασπορά και η τυπική απόκλιση μετρούν το πόσο πιθανό είναι να αποκλίνει η τυχαία μεταβλητή από τη μέση τιμή της.

Λήμμα 1.2.7. *Έστω $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση κατανομής $F = F_X$ και πυκνότητα f. Θεωρούμε $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ και $Y = g(X)$ ολοκληρώσιμη. Τότε,*

$$E(Y) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) f(x) dx.$$

Συγκεκριμένα,

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}^n} x f(x) dx, \quad V(X) = \int_{\mathbb{R}^n} |x - E(X)|^2 f(x) dx.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε ότι η g είναι μια απλή συνάρτηση στον $\mathbb{R}^n$:

$$g = \sum_{i=1}^m b_i \mathcal{X}_{B_i}, \quad B_i \in \mathcal{B}.$$

Τότε

$$E(g(X)) = \sum_{i=1}^{m} b_i \int_{\Omega} \mathcal{X}_{B_i}(X) dP = \sum_{i=1}^{m} b_i P(X \in B_i).$$

Όμως επίσης

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x) f(x) dx = \sum_{i=1}^{m} b_i \int_{B_i} f(x) dx = \sum_{i=1}^{m} b_i P(X \in B_i).$$

□

Θεώρημα 1.2.8. *Αν $X_1, ..., X_m$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με $E(|X_i|) < \infty$, $i = 1, ..., m$, τότε*

$$E(|X_1 ... X_m|) < \infty$$

και

$$E(X_1 ... X_m) = E(X_1) ... E(X_m).$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι κάθε X_i είναι φραγμένη και έχει πυκνότητα f_{X_i}. Τότε

$$\begin{aligned} E(X_1 ... X_m) &= \int_{\mathbb{R}^m} x_1 ... x_m f_{X_1} ... f_{X_m}(x_1, ..., x_m) dx_1 ... x_m \\ &= \int_{\mathbb{R}} x_1 f_{X_1} dx_1 ... \int_{\mathbb{R}} x_m f_{X_m} dx_m \\ &= E(X_1) ... E(X_m) \end{aligned}$$

□

Έστω X, Y τυχαίες μεταβλητές, τότε ικανοποιούνται οι εξής ιδιότητες:

1. (*Γραμμικότητα*) $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$ για a, b πραγματικές σταθερές
2. αν $X \leq Y$ (σχεδόν για κάθε $\omega \in \Omega$) τότε $E(X) \leq E(Y)$
3. (*Θεώρημα μονότονης σύγκλισης*) αν $0 \leq X_1 \leq X_2 \leq ...$ μια ακολουθία μη αρνητικών τυχαίων μεταβλητών που συγκλίνει (σχεδόν για κάθε $\omega \in \Omega$) στην τυχαία μεταβλητή X τότε
$$E(X) = \lim_{n \to \infty} E(X_n)$$
4. (*Θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης*) αν $X_1, X_2, ...$ μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών που συγκλίνει στην τυχαία μεταβλητή X και $|X_n| \leq Y$ (σχεδόν για κάθε $\omega \in \Omega$) με $E(|Y|) \leq \infty$ τότε
$$E(X) = \lim_{n \to \infty} E(X_n)$$
5. $V(X) \geq 0$
6. $V(X + a) = V(X)$ και $V(aX) = a^2 V(X)$ για a πραγματική σταθερά.

Λήμμα 1.2.9. *Έστω X τυχαία μεταβλητή και $a > 0$. Τότε ισχύουν οι παρακάτω ανισότητες:*

(ανισότητα Markov)

$$P(\{|X| \geq a\}) \leq \frac{E(|X|)}{a},$$

(ανισότητα Chebyshev)

$$P(\{|X - E(X)| \geq a\}) \leq \frac{V(X)}{a}.$$

Απόδειξη. Έστω $X_a = a1_{\{|X|\geq a\}}$. Τότε, $X_a \leq |X|$ και άρα

$$E(|X|) \geq E(X_a) = aP(\{|X| \geq a\}).$$

Για την απόδειξη της ανισότητας Chebyshev εφαρμόζουμε την ανισότητα Markov για την τυχαία μεταβλητή $|X - E(X)|^2$. Τότε,

$$P(\{|X - E(X)|^2 \geq a^2\}) \leq \frac{|X - E(X)|^2}{a^2} = \frac{V(X)}{a^2}.$$

□

1.2.3 Δεσμευμένη μέση τιμή

Έστω $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ χώρος πιθανότητας και $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ μια $\sigma-$άλγεβρα.
Θα ορίσουμε τη δεσμευμένη μέση τιμή τυχαίας μεταβλητής X ως προς τη $\mathcal{V}$.

Ορισμός 1.2.10. Αν $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ τυχαία μεταβλητή ορίζουμε τη

$$E(X|\mathcal{V})$$

να είναι μια τυχαία μεταβλητή στο Ω τέτοια ώστε

- $E(X|\mathcal{V})$ είναι $\mathcal{V}-$ μετρήσιμη
- $\int_A X dP = \int_A E(X|\mathcal{V}) dP$ για όλα τα $A \in \mathcal{V}$.

Έστω X, Y τυχαίες μεταβλητές και $a, b \in \mathbb{R}$. Τότε:

1. $E(E(X|\mathcal{V})) = E(X)$
2. $E(aX + bY|\mathcal{V}) = aE(X|\mathcal{V}) + bE(Y|\mathcal{V})$
3. αν X $\mathcal{V}-$μετρήσιμη και XY ολοκληρώσιμη τότε $E(XY|\mathcal{V}) = XE(Y|\mathcal{V})$
4. αν $X \leq Y$ τότε $E(X\mathcal{V}) \leq E(Y\mathcal{V})$
5. αν X ανεξάρτητη στη $\mathcal{V}$ τότε $E(X|\mathcal{V}) = E(X)$.

1.2.4 Χώροι L^p

Έστω X τυχαία μεταβλητή στο χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ και $p \in [1, \infty)$. Ορίζουμε

$$||X||_p = [E(|X|^p)]^{\frac{1}{p}}$$

και

$\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{U}, P) := \{X$ τυχαία μεταβλητή στο $\Omega : ||X||_p < \infty\}$.

Για $X, Y \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{U}, P)$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

1. $||\lambda X||_p = |\lambda| ||X||_p$

2. $\|X+Y\|_p \leq \|X\|_p + \|Y\|_p$.

Λήμμα 1.2.11. *(Ανισότητα Hölder) Έστω X, Y τυχαίες μεταβλητές και $p \in (1,\infty), q \in (1,\infty)$. Αν $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ τότε*

$$E(|XY|) \leq \|X\|_p \|Y\|_q = [E(|X|^p)]^{\frac{1}{p}}[E(|Y|^q)]^{\frac{1}{q}}.$$

Ειδική περίπτωση της ανισότητας Hölder είναι η Cauchy Schwarz για $p=q=2$.
Η νόρμα $\|\cdot\|_p$ ορίζει μια μετρική στον $\mathcal{L}^p(P)$ και ο μετρικός χώρος $(\mathcal{L}^p(P), d_p)$ είναι πλήρης.

1.3 Στοχαστικές διαδικασίες

Έστω $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ χώρος πιθανότητας και ένας μετρήσιμος χώρος (S, Σ) όπου Σ $\sigma-$άλγεβρα. Μια *στοχαστική διαδικασία* ορίζεται ως μια συλλογή τυχαίων μεταβλητών που παίρνουν τιμές στο S και γράφεται ως εξής:

$$X(t) = X_t : t \in T.$$

Ορισμός 1.3.1. Έστω X_t στοχαστική διαδικασία πραγματικών τιμών ορισμένη στον $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ με το δείκτη t να παίρνει μη αρνητικές τιμές. Έστω επίσης μια διαμέριση του $[0,t]$, $0=t_0<t_1<...<t_n=t$. Η *τετραγωνική απόκλιση* της X_t είναι η διαδικασία που γράφεται ως $[X]_t$ και ορίζεται ως

$$[X]_t = \lim_{\max_k (t_k - t_{k-1}) \to 0} \sum_{k=1}^{n} (X_{t_k} - X_{t_{k-1}})^2.$$

Έστω X συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2v}},\ x \in \mathbb{R}.$$

Η X ονομάζεται *Γκαουσιανή ή κανονικά κατανεμημένη* με μέση τιμή $E(X)=\mu$ και διασπορά $V(x)=v$ και συμβολίζεται $X \sim \mathcal{N}(\mu, v)$.

1.3.1 Martingales

Διήθηση σε ένα χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ θα λέμε μια ακολουθία $\sigma-$αλγεβρών $(\mathcal{U}_t)_{t\geq 0}$ τέτοια ώστε

$$\mathcal{U}_t \subset \mathcal{U}_{t+1} \subset \mathcal{U}$$

για κάθε $t \geq 0$.

Προσαρμοσμένη στη διήθηση $(\mathcal{U}_t)_{t\geq 0}$ θα λέμε μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $(X_t)_{t\geq 0}$ στον Ω αν για κάθε $t \geq 0$ η X_t είναι $\mathcal{U}_t-$μετρήσιμη.

Έστω $T \subset \mathbb{R}$, η διήθηση $(\mathcal{U}_t,\ t \in T)$ καλείται *συνεχής από τα δεξιά* αν για κάθε $t \in T$

$$\mathcal{U}_t = \bigcap_{\epsilon > 0} \mathcal{U}_{t+\epsilon}.$$

Ορισμός 1.3.2. Μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $X=(X_t)_{t\geq 0}$ θα λέγεται *martingale* ως προς τη διήθηση $(\mathcal{U}_t)_{t\geq 0}$ και το μέτρο P αν ισχύουν τα εξής:

- Η $X = (X_t)_{t\geq 0}$ είναι προσαρμοσμένη στην $(\mathcal{U}_t)_{t\geq 0}$

- $E(|X_t|) < \infty$ για κάθε $t \geq 0$

- $E(X_{t+1}|\mathcal{U}_t) = X_t$ για κάθε $t \geq 0$.

Αν $E(X_{t+1}|\mathcal{U}_t) \geq X_t$ η ακολουθία λέγεται *submartingale* ενώ αν $E(X_{t+1}|\mathcal{U}_t) \leq X_t$ λέγεται *supermartingale.*

Ορισμός 1.3.3. Έστω $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ χώρος πιθανότητας και $\mathcal{U}_t^0 := \sigma(\{W_s : s \in [0,t]\})$. Μια τυχαία μεταβλητή $T : \Omega \to [0, \infty]$ ονομάζεται *χρόνος διακοπής* αν

$$\{T \leq t \in \mathcal{U}_t^0\}$$

για όλα τα $t \geq 0$.

Θεώρημα 1.3.4. *Έστω T_1, T_2 χρόνοι διακοπής. Τότε,*

1. $\{T < t\} \in \mathcal{U}_t^0$ *και* $\{T = t\} \in \mathcal{U}_t^0$ *για όλα τα* $t \geq 0$.
2. $T_1 \wedge T_2 := min(T_1, T_2)$, $T_1 \vee T_2 := max(T_1, T_2)$ *είναι χρόνοι διακοπής.*

Απόδειξη. $\{T < t\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{T \leq t - \frac{1}{k}\}$. Όμως $\{T \leq t - \frac{1}{k}\} \in \mathcal{U}_{t-\frac{1}{k}}^0 \subseteq \mathcal{U}_t^0$.
Επίσης, $\{T_1 \wedge T_2 \leq t\} = \{T_1 \leq t\} \cup \{T_2 \leq t\} \in \mathcal{U}_t^0$ και $\{T_1 \vee T_2 \leq t\} = \{T_1 \leq t\} \cap \{T_2 \leq t\} \in \mathcal{U}_t^0$. □

Ορισμός 1.3.5. Έστω $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ χώρος πιθανότητας, $U_* = \{\mathcal{U}_t \mid t \geq 0\}$ διήθηση και $X : [0, \infty) \times \Omega \to S$ μια U_*−προσαρμοσμένη διαδικασία στο σύνολο S. Το X θα ονομάζεται U_*−τοπικό martingale αν υπάρχει μια ακολουθία U_*−χρόνων διακοπής $T_k : \Omega \to [0, \infty)$ τέτοια ώστε

- $P[T_k < T_{k+1}] = 1$

- $P[\lim_{k\to\infty} T_k = \infty] = 1$

- η διαδικασία $X_t^{T_k} := X_{min\{t, T_k\}}$ είναι U_*−martingale για κάθε k.

Λήμμα 1.3.6. *(Ανισότητα Burkhölder.)*
Για κάθε $1 \leq p < \infty$ υπάρχουν θετικές σταθερές c_p, C_p τέτοιες ώστε, για όλα τα τοπικά martingales X με $X_0 = 0$ και χρόνους διακοπής T, ισχύει

$$c_p E[[X]_T^{\frac{p}{2}}] \leq E[(X_T^*)^p] \leq C_p E[[X]_T^{\frac{p}{2}}]$$

όπου $[X]$ η τετραγωνική απόκλιση της διαδικασίας X και $X_T^* = \sup_{s\leq T} |X_s|$.

Ορισμός 1.3.7. Έστω $W_t : t \geq 0$ μια στοχαστική διαδικασία ορισμένη σε χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ με τιμές στο $\mathbb{R}$. Η W_t λέγεται *κίνηση Brown* ή *διαδικασία Weiner* αν ισχύουν τα εξής:

- με πιθανότητα 1 η W_t είναι συνεχής

- για κάθε $n \geq 1$ και κάθε $0 \leq t_1 < t_2 < ... < t_n$ οι τυχαίες μεταβλητές $W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, ..., W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$, είναι ανεξάρτητες

- για κάθε $0 \leq s < t$, $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$.

Μια κίνηση Brown για την οποία με πιθανότητα 1 ισχύει $W_0 = x$ *λέγεται κίνηση Brown που ξεκινάει από το* x.
Όταν $x = 0$ λέγεται *τυπική κίνηση Brown.*

Ορισμένες ιδιότητες της κίνηση Brown είναι οι:

1. Κάθε κίνηση Brown ορίζει στο χώρο πιθανότητας στον οποίο ορίζεται, μια φυσιολογική διήθηση την $(\mathcal{U}_t^0)_{t\geq 0}$ με $\mathcal{U}_t^0 := \sigma(\{W_s : s \in [0,t]\})$. Για W κίνηση Brown και $t_0 \geq 0$ η

$$X_t := W_{t_0+t} - W_{t_0}$$

για κάθε $t \in [0,\infty)$, είναι τυπική κίνηση Brown ανεξάρτητη από τη $\mathcal{U}_{t_0}^0$.

2. Έστω W τυπική κίνηση Brown.
Η ανέλιξη

$$X_t = -W_t$$

για κάθε $t \in [0,\infty)$, είναι τυπική κίνηση Brown.
Ομίως για $c \neq 0$, η

$$W_t = \frac{1}{c} W_{c^2 t}$$

για κάθε $t \in [0,\infty)$.

3. Έστω W τυπική κίνηση Brown. Η ανέλιξη

$$X_t := \begin{cases} tW_{\frac{1}{t}}, & t > 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases}$$

είναι τυπική κίνηση Brown.

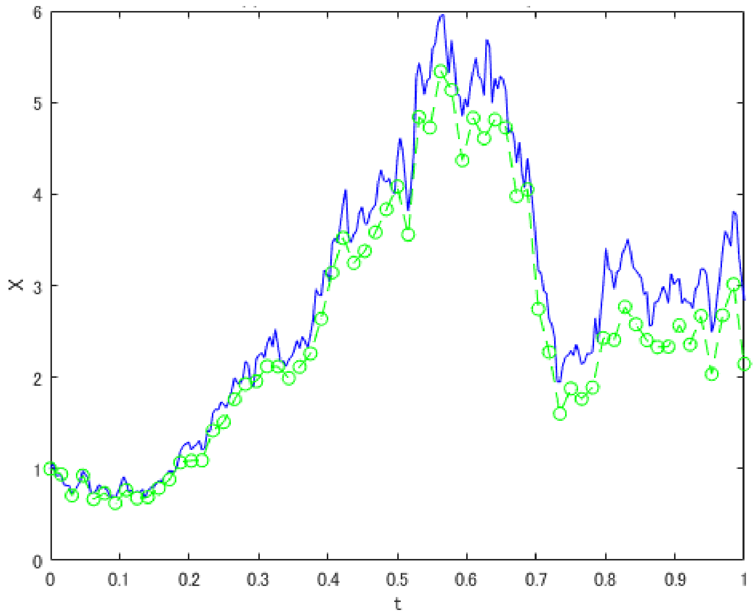
Ορισμός 1.3.8. Έστω $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ χώρος πιθανότητας, W κίνηση Brown και

$$\mathcal{N} = \{N \subset \Omega : \upsilon\pi\alpha\rho\chi\epsilon\iota\ A \in \mathcal{U}\ \mu\epsilon\ P(A) = 0\}$$

το σύνολο των $P-$μηδενοσυνόλων. Αν $(\mathcal{U}_t^0)_{t\geq 0}$ η διήθηση που παράγει η W ορίζουμε μια νέα διήθηση

$$\mathcal{U}_t := \sigma(\mathcal{U}_t^0 \cup \mathcal{N})\ \forall t \geq 0$$

η οποία ονομάζεται *επαυξημένη διήθηση.*



Σχήμα 1.1: Γράφημα που απεικονίζει μια πραγματοποίηση της κίνησης Brown. Σφάλμα προσέγγισης με 10^4 δείγματα

Ορισμός 1.3.9. (Ιδιότητα Markov)
Έστω $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ χώρος πιθανότητας με $\mathcal{U}_t$ διήθηση. Μια προσαρμοσμένη στοχαστική διαδικασία X_t λέμε ότι έχει την ιδιότητα Markov αν για κάθε φραγμένη και μετρήσιμη συνάρτηση g έχουμε ότι

$$E(g(X_t)|\mathcal{U}_t) = E(g(X_t)|X_t), \quad T \geq t.$$

Η ιδιότητα Markov είναι ισοδύναμη με το να ισχύει ότι για κάθε $b \in \mathcal{B}$ ισχύει

$$E(X_t \in B|\mathcal{U}_t) = E(X_t \in B|X_t), \quad T \geq t.$$

Θεώρημα 1.3.10. *Οι στοχαστικές διαδικασίες*

1. W_t
2. $W_t^2 - t$
3. $e^{W_t} e^{-t/2}$

είναι martingale ως προς τη διήθηση $\mathcal{U}_t$ που παράγει η κίνηση Brown.

Απόδειξη. 1. Για κάθε $0 \leq s < t$ έχουμε

$$\begin{aligned} E(W_t|\,\mathcal{U}_s) &= E(W_t - W_s|\,\mathcal{U}_s) + E(W_s|\,\mathcal{U}_s) \\ &= E(W_t - W_s) + W_s \\ &= W_s \end{aligned}$$

αφού $W_t - W_s$ ανεξάρτητη από τη $\mathcal{U}_s$, W_s προσαρμοσμένη και $E(W_t) = E(W_s) = 0$. Άρα η W_t είναι martingale στη $\mathcal{U}_t$.

2.
$$E(W_t^2|\mathcal{U}_s) = E((W_t - W_s)^2|\mathcal{U}_s) + E(2W_tW_s|\mathcal{U}_s) - E(W_s^2|\mathcal{U}_s).$$

Όμως $W_t - W_s$ ανεξάρτητη από τη $\mathcal{U}_s$ δηλαδή $\sigma(W_t - W_s)$, $\mathcal{U}_s$ ανεξάρτητες και αφού $\sigma((W_t - W_s)^2) \subseteq \sigma(W_t - W_s)$ τότε και $\sigma((W_t - W_s)^2)$, $\mathcal{U}_s$ ανεξάρτητες.
Επίσης $W_t - W_s$ ακολουθεί την κατανομή $\mathcal{N}(0, t-s)$ ως προσαρμοσμένη στη $\mathcal{U}_s$ και W_t martingale άρα
$$E(W_t^2|\mathcal{U}_s) = t - s + W_s^2$$
κι επομένως
$$E(W_t^2 - t|\mathcal{U}_s) = W_s^2 - s.$$

3. Συμβολίζουμε με $\Gamma(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}$, $x \in \mathbb{R}$ $t > 0$.

Η $e^{W_t} e^{-\frac{t}{2}}$ είναι προσαρμοσμένη στη $\mathcal{U}_t$ ως συνάρτηση της W_t. Επίσης, $W_t - W_s$ ανεξάρτητη από τη $\mathcal{U}$ κι έτσι για $0 \le s < t$ έχουμε

$$\begin{aligned} E(e^{W_t}|\mathcal{U}_s) &= E(e^{W_t - W_s} e^{W_s}|\mathcal{U}_s) \\ &= e^{W_s} E(e^{W_t - W_s}|\mathcal{U}_s) \\ &= e^{W_s} E(e^{W_t - W_s}). \end{aligned}$$

Όμως,
$$E(e^{W_t - W_s}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^x \Gamma((t-s)^2, x) dx = e^{\frac{t-s}{2}}$$
κι επομένως
$$E(e^{W_t} e^{-\frac{t}{2}}|\mathcal{U}_s) = e^{W_s} e^{-\frac{s}{2}}.$$

□

Κεφάλαιο 2

Στοχαστικές Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

2.1 Εισαγωγή στις μερικές διαφορικές εξισώσεις

Η εξέλιξη των περισσότερων φαινομένων της φύσης όπως για παράδειγμα η θερμότητα, ο μαγνητισμός μπορούν να περιγραφούν και να μελετηθούν με τις μερικές διαφορικές εξισώσεις. Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε τόσο τις μερικές διαφορικές εξισώσεις [2] όσο και τις στοχαστικές μερικές διαφορικές εξισώσεις [12].

Μερική διαφορική εξίσωση (ΜΔΕ) ονομάζεται μια εξίσωση που περιλαμβάνει πολλαπλές ανεξάρτητες μεταβλητές, μια άγνωστη συνάρτηση που εξαρτάται από αυτές καθώς και μερικές παραγώγους της ως προς τις μεταβλητές αυτές. Η *τάξη* μιας μερικής διαφορικής εξίσωσης καθορίζεται από την τάξη της μεγαλύτερης παραγώγου που εμφανίζεται στην εξίσωση. Επομένως, μια μερική διαφορική εξίσωση τάξης m, με m φυσικό αριθμό, είναι μια σχέση της μορφής

$$F(x, y, ..., u, u_x, u_y, ..., u_{xx}, u_{yy}, u_{xy}, ..., u_{xxx}, ...) = 0. \tag{2.1}$$

Το αριστερό μέλος περιλαμβάνει μια τουλάχιστον από τις μερικές παραγώγους τάξης m της άγνωστης συνάρτησης u, όχι όμως και ανώτερης τάξης από m.
Όταν η F είναι γραμμική ως προς την u και τις παραγώγους της τότε η μερική διαφορική εξίσωση ονομάζεται *γραμμική*.

Μερικά χαρακτηριστικά παραδείγματα μερικών διαφορικών εξισώσεων είναι τα εξής:

- Εξίσωση Laplace:

  $$\Delta u(x) = \nabla^2 u(x) = 0,\ x \in D \subseteq \mathbb{R}^n,\ n \geq 2.$$

  Πήρε το όνομα της από τον Pierre-Simon Laplace ο ποίος ήταν ο πρώτος που μελέτησε τις ιδιότητες της. Οι δυο φορές συνεχώς παραγωγίσιμες λύσεις της είναι αρμονικές συναρτήσεις οι οποίες έχουν ιδιαίτερη σημασία σε πολλούς κλάδους της φυσικής, κυρίως στην ηλεκτροστατική, τη βαρύτητα και τη δυναμική των ρευστών. Γενικά η εξίσωση Laplace περιγράφει καταστάσεις ισορροπίας είτε καταστάσεις που δεν εξαρτώνται ρητά από το χρόνο.

- Εξίσωση Poisson:

  $$\Delta u(x) = -F(x),\ x \in D \subseteq \mathbb{R}^n\ n \geq 2.$$

  Πρόκειται για μια εξίσωση η οποία είναι ευρείας χρησιμότητας στη θεωρητική φυσική. Η λύση της αποτελεί το δυναμικό πεδίο που προκαλείται από μια δεδομένη κατανομή ηλεκτρικού φορτίου ή πυκνότητα μάζας. Πήρε το όνομα της από το Γάλλο μαθηματικό και φυσικό Siméon Denis Poisson και αποτελεί μια γενίκευση της εξίσωσης Laplace.

- Εξίσωση κύματος:
$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0.$$
Περιγράφει κύματα , τόσο οδεύοντα όσο και στάσιμα. Ο παράγοντας u αντιπροσωπεύει μια μετατόπιση από την κατάσταση ηρεμίας, το t το χρόνο, το x το χώρο ή τη θέση, u_{tt} είναι ο όρος για το πώς επιτυγχάνεται η μετατόπιση δηλαδή ο ρυθμός με τον οποίο αλλάζει η ίδια η ταχύτητα της μετατόπισης και τέλος ο u_{xx} είναι ο όρος για το πώς η μετατόπιση μεταβάλλεται στο σημείο x. Η κυματική εξίσωση από μόνη της δεν προσδιορίζει μια φυσική λύση. Μοναδική λύση επιτυγχάνεται συνήθως θέτοντας ένα πρόβλημα με περαιτέρω συνθήκες όπως για παράδειγμα οι αρχικές, οι οποίες καθορίζουν το πλάτος και τη φάση του κύματος.

- Εξίσωση θερμότητας:
$$h_t = a u_{xx},\ t > 0,\ x \in D \subseteq \mathbb{R},\ a > 0.$$
Η θεωρία της αναπτύχθηκε πρώτη φορά από τον Joseph Fourier με στόχο τη μοντελοποίηση του τρόπου με τον οποίο μια ποσότητα όπως η θερμότητα διαχέεται σε μια δεδομένη περιοχή. Αποτελεί μια από τις πιο ευρέως μελετημένες εξισώσεις κι έτσι συχνά μια φαινομενικά άλυτη εξίσωση μπορεί να αναχθεί σε μια εξίσωση θερμότητας την οποία ξέρουμε πώς να λύσουμε. Παράδειγμα αποτελεί η λύση της εξίσωσης Black-Scholes η οποία μοντελοποιεί τη σχέση μεταξύ της εξέλιξης της τιμής της μετοχής και του δικαιώματος προαίρεσης.

Σε όλες τις παραπάνω εξισώσεις το πεδίο ορισμού D αποτελεί ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$.

Για να μπορέσουμε να προσδιορίσουμε μοναδική λύση για μια μερική διαφορική εξίσωση είναι απαραίτητο να επιβάλουμε κάποιες επιπλέον συνθήκες. Δύο μεγάλες κατηγορίες τέτοιων συνθηκών είναι οι *αρχικές* και οι *συνοριακές* συνθήκες. Προέρχονται από τη φυσική και το είδος των κατάλληλων συνθηκών για κάθε εξίσωση καθορίζεται εξαρτάται από χαρακτηριστικά της ίδιας της εξίσωσης όπως η τάξη, ο τύπος της κ.α..

Μια αρχική συνθήκη προσδιορίζει την φυσική κατάσταση σε ια συγκεκριμένη χρονική στιγμή. Ας δούμε το παράδειγμα της εξίσωσης θερμότητας. Μια κατάλληλη αρχική σσυνθήκη είναι της μορφής

$$u(t_0, x) = \phi(x),\ x \in D.$$

Η ϕ περιγράφει την κατανομή της θερμότητας στο D κατά την αχρική χρονική στιγμή t_0 κι έτσι η $\phi(x)$ αποτελεί την αρχική θερμοκρασία στο σημείο x.
Όπως συμβαίνει και στις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις έτσι και στις μερικές ο αριθμός αρχικών συνθηκών που χρειάζονται για την επίλυση μιας μερικής διαφορικής εξίσωσης καθορίζεται από την τάξη της. Για το λόγω αυτό η εξίσωση θερμότητας, ως εξίσωση *πρώτης τάξης* ως προς τη χρονική μεταβλητή t, χρειάζεται *μία* αρχική συνθήκη.

Έστω τώρα ∂D το σύνορο του D. Τα σημαντικότερα είδη συνοριακών συνθηκών είναι τα παρακάτω:

1. Συνθήκες Dirichlet: Πήραν το όνομα τους από τον Γερμανό μαθηματικό Peter Gustav Lejeune Dirichlet και με αυτές προκαθορίζονται οι τιμές της u στο σύνορο ∂D. Στην εξίσωση κύματος για παράδειγμα, θα είναι
$$u(t, x) = g(t, x),\ x \in \partial D,\ t \geq t_0$$
με g δεδομένη συνάρτηση.

2. Συνθήκες Neumann: Ονομάστηκαν έτσι λόγω του Γερμανού μαθηματικού Neumann και προκαθορίζουν την κατά κατεύθυνση παράγωγο στην κατεύθυνση του εξωτερικού κανονικού διανύσματος n, το οποίο είναι κάθετο στο ∂D, σε κάθε σημείο του ∂D. Στην εξίσωση θερμότητας θα είναι
$$\frac{\partial u}{\partial n}(t,x) = g(t,x),\ x \in \partial D, t \geq t_0$$
με g δεδομένη συνάρτηση.

3. Συνθήκες Robin: Οφείλουν το όνομα τους στο Γάλλο μαθηματικό Victor Gustave Robin και προκαθορίζουν, για δεδομένη συνάρτηση b, το γραμμικό συνδυασμό
$$\frac{\partial u}{\partial n} + bu$$
στο ∂D. Έχουν εφαρμογές τόσο σε ηλεκτρομαγνητικά όσο και σε προβλήματα μεταφοράς θερμότητας και για το λόγο αυτό ονομάζονται και συνοριακές συνθήκες αντίστασης και συναγωγής αντίστοιχα. Στις εξισώσεις κύματος και θερμότητας θα είναι
$$\frac{\partial u}{\partial n}u(t,x) + b(t,x)u(t,x) = g(t,x),\ x \in \partial D,\ t \geq t_0$$
με g δεδομένη συνάρτηση.

Στην περίπτωση που έχουμε μονοδιάστατα προβλήματα, δηλαδή $D = (0,l)$ οι παραπάνω συνοριακές συνθήκες παίρνουν τη μορφή
$$\begin{aligned} u(t,0) &= g(t), \quad u(t,l) = h(t), \quad t \geq 0, \\ u_x(t,0) &= g(t), \quad u_x(t,l) = h(t), \quad t \geq 0, \\ u_x(t,0) &+ b(t,0)u(t,0) = g(t), \quad u_x(t,l) + b(t,l)u(t,l) = h(t), \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Αν θέλουμε τώρα να δούμε τη φυσική σημασία που έχουν οι συνοριακές συνθήκες, ας μελετήσουμε την εξίσωση κύματος θεωρώντας μια παλλόμενη χορδή. Οι συνοριακές συνθήκες Dirichlet εκφράζουν ότι τα άκρα της χορδής πάλλονται κατά συγκεκριμένο τρόπο, ενώ αν είναι ομογενής, δηλαδή $u(t,0) = u(t,l) = 0$, τα άκρα παραμένουν ακίνητα. Οι συνοριακές συνθήκες Neumann προκαθορίζουν την κλίση της χορδής στα άκρα της. Στην ειδική περίπτωση που είναι ομογενείς, δηολαδή $u_x(t,0) = u_x(t,l) = 0$ η χορδή έχει οριζόντια κλίση στα άκρα της. Τα άκρα δηλαδή κινούνται ελεύθερα και χωρίς τριβή κατακόρυφα, κάθετα στην κατεύθυνση του άξονα των x. Τέλος, με τις συνοριακές συνθήκες Robin προκαθορίζεται ένας συνδυασμός της κλίσης της χορδής στα άκρα καθώς και της θέσης των άκρων.

2.1.1 Ταξινόμηση

Πέρα την ταξινόμηση των μερικών διαφορικών εξισώσεων με βάση την τάξη τους, αυτή μπορεί να γίνει και με κριτήριο την εξάρτηση της εξίσωσης από το χρόνο. Αν δεν εξαρτάται από το χρόνο η εξίσωση ονομάζεται *στατική* αλλιώς ονομάζεται *δυναμική*.

Ορισμένες γραμμικές μερικές διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης μπορούμε να τις ταξινομίσουμε σε *ελλειπτικές, παραβολικές, υπερβολικές*. Η ταξινόμιση αυτή μας παρέχει μια εικόνα για το πόσο ομαλή είναι η λύση της ΜΔΕ καθώς και την επίδραση των αρχικών και συνοριακών συνθηκών.

Έστω γραμμική μερική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης της μορφής

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + e(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + f(x,y)u = g(x,y).$$

Τότε ισχύουν τα εξής:

- Αν $b^2 - 4ac < 0$ η ΜΔΕ ονομάζεται *ελλειπτική*. Οι λύσεις ελλειπτικών ΜΔΕ είναι πάντα ομαλές ακόμα κι αν οι αρχικές και συνοριακές συνθήκες δεν είναι. Οι εξίσώσεις αυτές είναι κατάλληλες για να περιγράψουν καταστάσεις ισορροπίας όπου τυχόν ασυνέχειες έχουν ήδη εξομαλυνθεί. Χαρακτηριστικό παράδειγμα ελλειπτικής ΜΔΕ είναι η εξίσωση Laplace

$$u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

- Αν $b^2 - 4ac = 0$ ονομάζεται *παραβολική*. Οι παραβολικές ΜΔΕ συνήθως εξαρτώνται από το χρόνο. Η λύση $u(t,x)$, ως συνάρτηση του x για $t > 0$ είναι γενικά πιο ομαλή από την αρχική συνθήκη $u(0,x) = u_0(x)$. Παραβολική ΜΔΕ είναι η εξίσωση θερμότητας

$$u_t = \alpha u_{xx}$$

  με α θετική σταθερά.

- Αν $b^2 - 4ac > 0$ ονομάζεται *υπερβολική*. Στις εξισώσεις αυτές η ομαλότητα της λύσης εξαρτάται από την ομαλότητα των αρχικών και συνοριακών συνθηκών. Η εξίσωση κύματος

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0,$$

  με c μη αρνητική πραγματική σταθερά, είναι υπερβολική ΜΔΕ.

2.1.2 Μέθοδοι επίλυσης

Λύση της 2.1 σε ένα χωρίο $D \subset \mathbb{R}^m$ ονομάζεται μια συνάρτηση m φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο D η οποία επαληθεύει την 2.1 σε κάθε σημείο $(x_1, ..., x_m) \in D$.

Ένα πρόβλημα για το οποίο υπάρχει μοναδική λύση, δηλαδή μοναδική συνάρτηση u η οποία ικανοποιεί τόσο την εξίσωση όσο και τις βοηθητικές συνθήκες (συνοριακές, αρχικές), η οποία εξαρτάται συνεχώς από τα δεδομένα του προβλήματος, ονομάζεται *καλώς τεθειμένο.*

Στις γραμμικές εξισώσεις ισχύει η *αρχή της επαλληλίας* ή αλλιώς *αρχή της υπέρθεσης* σύμφωνα με την οποία αν $u_1, ..., u_n$ λύσεις της εξίσωσης τότε και

$$c_1 u_1 + ... + c_n u_n, \quad c_i \in \mathbb{R}$$

επίσης λύση της εξίσωσης. Επιπλέον, αν u_1 λύση μιας ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης και u_2 της αντίστοιχης μη ομογενούς τότε η $u_1 + u_2$ αποτελεί τη γενική λύση της μη ομογενούς εξίσωσης.

Ορισμένες από τις βασικότερες μεθόδους επίλυσης μερικών διαφορικών εξισώσεων είναι οι παρακάτω:

1. Χωρισμός Μεταβλητών: Χρησιμοποιώντας αυτή τη μέθοδο μπορούμε να ανάγουμε μια μερική διαφορική εξίσωση n μεταβλητών σε ένα σύστημα n το πλήθος συνήθων διαφορικών εξισώσεων.

2. Αλλαγή Συντεταγμένων: Αλλάζοντας τις συντεταγμένες μπορούμε να πάρουμε είτε μια συνήθη είτε μια απλούστερη μερική διαφορική εξίσωση. Η επιλογή κατάλληλου συστήματος συντεταγμένων (καρτεσιανές, πολικές, σφαιρικές κ.τ.λ.) γίνεται με βάση το είδος της εξίσωσης αλλά και το σχήμα του πεδίου.

3. Ανάπτυγμα Ιδιοσυναρτήσεων: Η λύση δίνεται ως άπειρο άθροισμα ιδιοσυναρτήσεων οι οποίες προέρχονται από ένα πρόβλημα ιδιοτιμών, σχετικό με την εξίσωση.

4. Ολοκληρωτικοί μετασχηματισμοί: Με χρήση κατάλληλων μετασχηματισμών όπως για παράδειγμα Laplace, Fourier μια μερική διαφορική εξίσωση n μεταβλητών ανάγεται σε μερική διαφορική εξίσωση $n-1$ μεταβλητών.

5. Συνάρτηση Green: Χρησιμοποιώντας μια ειδική συνάρτηση, τη συνάρτηση Green, η μερική διαφορική εξίσωση ανάγεται σε μια ολοκληρωτική εξίσωση. Ύστερα από επίλυση της παίρνουμε μια τυπική λύση η οποία με μια διαδικασία ομαλοποίησης δίνει τις συνθήκες κάτω από τις οποίες μπορεί να αποτελεί κλασική λύση της εξίσωσης.

6. Λογισμός μεταβολών: Η επίλυση της εξίσωσης με τη μέθοδο του λογισμού μεταβολών ή αλλιώς την ενεργειακή μέθοδο, ανάγει το πρόβλημα σε ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης.

7. Μέθοδος Διαταραχών: Εφαρμόζεται σε μη γραμμικές μερικές διαφοριές εξισώσεις και στόχο έχει την προσέγγιση της μη γραμμικής εξίσωσης από μια ακολουθία γραμμικών μερικών διαφορικών εξισώσεων. Οι λύσεις των γραμμικών εξισώσεων είτε είναι γνωστή η αναλυτική έκφραση τους είτε μπορεί να μελετηθεί η ασυμπτωτική συμπεριφορά τους.

8. Αριθητικές Μεθόδοι: Πολλά προβλήματα μερικών διαφορικών εξισώσεων έχουν ως μοναδικό τρόπο μελέτης τις αριθμητικές μεθόδους. Με τη χρήση αυτών η εξίσωση μετασχηματίζεται σε σύστημα εξισώσεων διαφορών το οποίο μπορεί να επιλυθεί με επαναληπτικές μεθόδους σε υπολογιστή.

2.2 Στοχαστικές μερικές διαφορικές εξισώσεις

Αν σε μια μερική διαφορική εξίσωση, ένας ή περισσότεροι όροι της είναι μια στοχαστική διαδικασία, με αποτέλεσμα και η λύση να είναι στοχαστική διαδικασία, τότε έχουμε μια *στοχαστική μερική διαφορική εξίσωση*.

Η γενική μορφή μιας στοχαστικής μερικής διαφορικής εξίσωσης είναι

$$F(u, Du, D^2u, ...) = G(u, Du, D^2u, ...) \cdot N, \tag{2.2}$$

όπου F, G τυχαίες συναρτήσεις που εξαρτώνται από το $\omega \in \Omega$, N ο όρος του θορύβου και το σύμβολο $\cdot$ αντιπροσωπεύει την κατάλληλη πράξη της στοχαστικής ολοκλήρωσης.

Ορισμένες φορές το αριστερό μέρος ονομάζεται *ντετερμινιστικό* και το δεξί *στοχαστικό* μέρος της εξίσωσης. Σε στοχαστικές εξισώσεις εξέλιξης

$$u_t = F(u, Du, D^2u, ...) + G(u, Du, D^2u, ...) \cdot N \tag{2.3}$$

οι όροι ντετερμινιστικό και στοχαστικό μέρος αναφέρονται στα F και $G \cdot N$ αντίστοιχα.

Οι στοχαστικές μερικές διαφορικές εξισώσεις βρίσκουν εφαρμογή σε διάφορες επιστήμες κάποιες από τις οποίες είναι η *βιολογία* τα *οικονομικά* και *χρηματοοικονομικά* και η *φυσική*.

Στη *Βιολογία* η εξίσωση

$$u_t = u_{xx} + \sqrt{u}\dot{W}(t,x)$$

περιγράφει τη χρονική εξέλιξη της μονοδιάστατης πυκνότητας πληθυσμού σε ένα ορισμένο συνεχές όριο. Η εξίσωση μοντελοποιεί την κατανομή ατόμων δηλαδή ανθρώπων και ζώων. Αντίστοιχα, η εξίσωση

$$u_t = u_{xx} + \sqrt{u(1-u)}\dot{W}(t,x)$$

μοντελοποιεί την κατανομή γονιδίων.

Στα *οικονομικά* και *χρηματοοικονομικά* ένα παράδειγμα εφαρμογής είναι η μοντελοποίηση της δομής ποσοστών ενδιαφέροντος. Σημείο εκκίνησης αποτελεί το μοντέλο των τιμών των ομολόγων των Heath-Jarrow-Morton. Οι διατυπώσεις του Musiela για το μοντέλο αντικαθιστούν το χρόνο ωριμότητας με το χρόνο μέχρι την ωριμότητα καταλήγοντας στην υπερβολική εξίσωση πρώτης τάξης

$$u_t = u_x + \alpha(t,x) + \sum_{k\geq 1}\sigma_k(t,x)\dot{w}_k(t)$$

όπου $w_k,\ k \geq 1$ ανεξάρτητες κινήσεις Brown και $\sigma_k,\ \alpha$ συναρτήσεις που σχετίζονται μέσω μιας συνθήκης Heath-Jarrow-Morton.

Καθώς πολλές ντετερμινιστικές μερικές διαφορικές εξισώσεις προέρχονται από φυσικά μοντέλα είναι αναμενόμενο ότι και πολλές στοχαστικές μερικές διαφορικές εξισώσεις θα συνδέονται άμεσα με τη φυσική. Δύο χαρακτηριστικά παραδείγματα είναι η εξίσωση Schrödinger

$$iu_t + \mathbf{\Delta} u + V(t,x)u = 0,$$

στην οποία η συνάρτηση V ονομάζεται *δυναμικό* διότι βασίζεται στη δυναμική ενέργεια του κινούμενου σωματιδίου και τελεστής Laplace $\mathbf{\Delta}$ αντιστοιχεί στην κινητική ενέργεια και η εξίσωση κύματος

$$u_{tt} = \mathbf{\Delta} u + f(t,x)$$

στην οποία η f καλείται συνήθως *εξωτερική δύναμη*.

Για να πάρουμε τώρα από μια τέτοια ντετερμινιστική εξίσωση, που περιγράφει ένα φυσικό μοντέλο, μια στοχαστική μερική διαφορική εξίσωση μπορούμε είτε με απευθείας τυχαιοποίηση των συνιστωσών της εξίσωσης είτε με τυχαιοποίηση σε ένα προγενέστερο στάδιο της παραγώγου της εξίσωσης.
Η τυχαιότητα εισάγεται είτε θεωρώντας τυχαία κινητήρια δύναμη, είτε τυχαίο δυναμικό, τυχαίες αρχικές και συνοριακές συνθήκες και άλλα. Ο πιο άμεσος τρόπος να γίνει αυτό είναι εισάγοντας στην εξίσωση τον όρο

$$(f(t,x,u) + g(t,x))\dot{N}(t,x),$$

όπου το $\dot{N}$ αντιπροσωπεύει το θόρυβο. Η πιο κοινή περίπτωση είναι ως $\dot{N}$ να έχουμε τον Γκαουσσιανό λευκό θόρυβο $\dot{W}$.
Εφαρμόζοντας τα παραπάνω οι εξισώσεις Schrödinger και κύματος γίνονται

$$iu_t + \mathbf{\Delta} u + = \dot{W}(t,x)$$

και

$$u_{tt} = \mathbf{\Delta} u + \dot{W}(t,x)$$

αντίστοιχα.

Γενικότερα, στην ανάλυση ενός φυσικού μοντέλου, στο μικροσκοπικό επίπεδο μεμονομένων σωματιδίων (άτομα, μόρια κτλ) το σύστημα είναι εγγενώς τυχαίο εθαιτίας των κβαντικών επιδράσεων ή/και των πολλαπλών συγκρούσεων μεταξύ των σωματιδίων.

Στο μακροσκοπικό επίπεδο στο οποίο τα αντικείμενα είναι ορατά με γυμνό μάτι, η τυχαιότητα στο μικροσκοπικό επίπεδο βγάζει μέσο όρο και οδηγεί στην αντίστοιχη ντετερμινιστική συνήθη ή μερική διαφορική εξίσωση που περιγράφει ο σύστημα. Ανάμεσα στο μικροσκοπικό και το μακροσκοπικό επίπεδο υπάρχει το μεσοσκοπικό στο οποίο τα αντικείμενα είναι ορατά με οπτικό μικροσκόπιο. Ένα προσεκτικό πέρασμα στο όριο από το μικροσκοπικό στο μεσοσκοπικό επίπεδο μπορεί να οδηγήσει σε μια στοχαστική διαφορική εξίσωση είτε συνήθη είτε μερική. Παράδειγμα αποτελεί η εξίσωση Kardar-Parisi-Zhang

$$u_t = \mathbf{\Delta} u + |\nabla u|^2 + \dot{W}(t,x).$$

2.2.1 Ταξινόμηση

Όσον αφορά την *ταξινόμηση* μιας στοχαστικής μερικής διαφορικής εξίσωσης, μπορεί να γίνει με βάση το είδος του θορύβου αλλά και τον τρόπο με τον οποίο αυτός εισάγεται στην εξίσωση καθώς και με τον τύπο του στοχαστικού ολοκληρώματος.

Μερικά παραδείγματα θορύβου είναι ο λευκός Γκαουσσιανός, ο κλασματικός Γκαουσσιανός και ο Poisson. Επίσης, τα κύρια στοχαστικά ολοκληρώματα που συναντάμε είναι τα ολοκληρώματα Itô, Stratonvich και Skorokhod. Τέλος, θόρυβο μπορούμε να εισάγουμε σε μια εξίσωση με δύο τρόπους: *προσθετικά*, όταν η συνάρτηση G στις 2.2 και 2.3 δεν εξαρτάται από το u και τις παραγώγους του, ή *πολλαπλασιαστικά* όταν εξαρτάται.

Στην ειδική περίπτωση όπου οι F, G είναι και οι δύο γραμμικές, οι εξισώσεις με πολλαπλασιαστικό θόρυβο θα ονομάζονται *διγραμμικές.*

Για παράδειγμα η

$$du(t,x) = uu_{xx}(t,x)dt + e^{-x^2}dw(t)$$

είναι μια εξίσωση με προσθετικό θόρυβο καθώς η $G = e^{-x^2}$ δεν εξαρτάται από το u ή τις παραγώγους του και η

$$du(t,x) = u_{xx}(t,x)dt + u_x(t,x)dw(t)$$

είναι μια διγραμμική εξίσωση.

Ας μελετήσουμε τώρα το παράδειγμα της εξίσωσης θερμότητας με συνοριακές συνθήκες Dirichlet. Εισάγοντας σε αυτή λευκό θόρυβο την αναγάγουμε σε στοχαστική εξίσωση θερμότητας.

Πρώτη περίπτωση: Έστω D φραγμένο χωρίο του $\mathbb{R}^d$ με λείο σύνορο ∂D. Εισάγοντας πολλαολασιαστικό θόρυβο έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b(u)\dot{W}, \quad x \in D,\ t \in [0,T] \\
u(t,x) &= 0, \quad x \in \partial D,\ t \in [0,T] \\
u(0,x) &= u_0(x), \quad x \in D
\end{aligned}$$

όπου $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitz συνεχής συνάρτηση.

Δεύτερη περίπτωση: Εισάγοντας προσθετικό λευκό θόρυβο χώρου-χρόνου έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial W}{\partial t}(t,x), \quad x \in (0,1),\ t \in [0,T] \\ u(t,0) &= u(t,1) = 0, \quad t \in [0,T] \\ u(0,x) &= u_0(x), \quad x \in (0,1). \end{aligned}$$

Καθώς μιλάμε για μερικές διαφορικές εξισώσεις, η ταξινόμηση μιας ΣΜΔΕ δεν περιορίζεται στον τύπο θορύβου και ολοκληρώματος αλλά μπορεί να γίνει και με βάση την τάξη της, τον τύπο μη γραμμικότητας αλλά και τον τύπο αρχικών και συνοριακών συνθηκών της εξίσωσης. Τέλος, μπορούμε να τις ταξινομήσουμε σε ελλειπτικές, παραβολικές και υπερβολικές όπως είδαμε και στις μερικές διαφορικές εξισώσεις.

Η *τάξη* της καθορίζεται από την υψηλότερης τάξης μερική παράγωγο που εμφανίζεται στην εξίσωση και μπορεί να εξαρτάται από τον τύπο ολοκληρώματος που χρησιμοποιείται.
Η 2.3 θα ονομάζεται *γραμμική* αν οι τελεστές

$$u \mapsto F(u, Du, D^2u, ...), \quad u \mapsto G(u, Du, D^2u, ...)$$

είναι γραμμικοί. Ένα παράδειγμα γραμμικής εξίσωσης είναι η

$$du = u_{xx}dt + dw(t).$$

Ημιγραμμική θα ονομάζεται αν οι τελεστές είναι γραμμικοί στην υψηλότερης τάξης παράγωγο αλλά οι συντελεστές μπορούν να εξαρτώνται από το u και τις ξαμηλότερης τάξης παραγώγους του, για παράδειγμα η

$$du = (u_x u_{xx} - u^2)dt + uu_x dw(t).$$

Τέλος, *πλήρως μη γραμμική* θα λέγεται αν η εξάρτηση από την υψηλότερης τάξης παράγωγο είναι μη γραμμική.

Η μόνη διαφορά στις αρχικές και συνοριακές συνθήκες σε σχέση με τις μερικές διαφοριές εξισώσεις είναι ότι τώρα μπορεί να είναι τυχαίες. Το πρόβλημα αρχικών τιμών είναι γνωστό και ως πρόβλημα Cauchy. Τα κύρια προβλήματα συνοριακών τιμών είναι δύο ειδών. Το πρόβλημα Dirichlet στο οποίο η τιμή της λύσης προσδιορίζεται στο σύνορο του πεδίου ορισμού και το πρόβλημα Neumann στο οποίο προσδιορίζεται η τιμή της παραγώγου κατά κατεύθυνση της λύσης, δηλαδή η παράγωγος στην κατεύθυνση του εξωτερικού μοναδιαίου κάθετου διανύσμαατος στο σύνορο.

Η λύση μιας στοχαστικής μερικής διαφορικής εξίσωσης μπορεί να είναι *κλασική* ή *γενικευμένη*.
Μια *κλασική λύση* είναι μια συνεχής συνάρτηση η οποία ικανοποιεί την εξίσωση και τις συνοριακές και αρχικές συνθήκες κατά σημείο, με πιθανότητα ένα.
Η συνάρτηση $u(t,x) = x + w(t)$ για παράδειγμα είναι κλασική λύση της εξίσωσης

$$du(t,x) = u_x(t,x)dw(t),\ u(0,x) = x$$

η οποία σε ολοκληρωτική μορφή γίνεται

$$u(t,x) = x + \int_0^t u_x(s,x)dw(s).$$

Η δομή της εξίσωσης καθώς και η ομαλότητα των δεδομένων της μπορούν να επηρεάσουν το αν θα έχει κλασική λύση. Γενικότερα αν ο θόρυβος δεν είναι ομαλός στο χώρο η εξίσωση είναι απίθανο να έχει κλασική λύση.

Κάθε λύση η οποία δεν είναι κλασική θα ονομάζεται *γενικευμένη*. Μια γενικευμένη λύση επεκτείνει ορισμένες ιδιότητες της κλασικής λύσης χωρίς να χρειάζεται η ύπαρξη των μερικών παραγώγων. Η ιδέα γενικότερα είναι να πάρουμε μια ιδιότητα που ικανοποιείται από την κλασική λύση κι έπειτα να πούμε ότι κάθε συνάρτηση η οποία την ικανοποιεί αποτελεί μια γενικευμένη λύση.

Μια λύση *κλειστής μορφής* είναι ένας τύπος που εκφράζει τη λύση ως προς τα δεδομένα εισόδου. Η λύση δεν είναι απαραίτητο ότι θα είναι κλασική. Για παράδειγμα στο πρόβλημα αρχικών τιμών $u_t + u_x = 0,\ u(0,x) = f(x)$ λύση κλειστής μορφής είναι η $u(t,x) = f(x-t)$ η οποία είναι κλασική αν και μόνο αν η f είναι συνεχώς παραγωγίσιμη.

Μια επέκταση της λύσης κλειστής μορφής είναι η *ήπια λύση* η οποία χρησιμοποιείται κυρίως σε εξισώσεις οι οποίες μπορούν να θεωρηθούν διαταραχές μιας γραμμικής εξίσωσης με λύση κλειστής μορφής.
Η ιδέα της ήπιας λύσης είναι αρκετά χρήσιμη στην αναγωγή στοχαστικών εξισώσεων με προσθετικό θόρυβο σε τυχαίες εξισώσεις. Έστω για παράδειγμα A ένας μη τυχαίος γραμμικός τελεστής, Φ η ημιομάδα που παράγεται από τον A και N ο όρος του θορύβου. Θεωρούμε την εξίσωση

$$u(t) = \int_0^t Au(s)ds + \int_0^t F(s,u(s))ds + N(t). \tag{2.4}$$

Ορίζουμε ως

$$N_A(t) = \int_0^t \Phi(t-s)dN(s)$$

τη *στοχαστική συνέλιξη*.
Η ήπια λύση της 2.4 είναι η λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης

$$u(t) = \Phi(t)u_0 + \int_0^t \Phi(t-s)F(s,u(s))ds + N_A(t).$$

Ορίζουμε τη νέα διαδικασία $v(t) = u(t) - N_A(t)$ και τότε $v(0) = u(0)$ και

$$v(t) = \Phi(t)v_0 + \int_0^t \Phi(t-s)F(s,v(s)+N_A(s))ds.$$

Δηλαδή η v είναι η ήπια λύση της

$$v(t) = v(0) + \int_0^t Av(s)ds + \int_0^t \tilde{F}(s,v(s))ds,$$

όπου $\tilde{F}(t,u) = F(t,u+N_A(t))$.

2.2.2 Ύπαρξη και μοναδικότητα λύσης

Στην υποενότητα αυτή θα δούμε το θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας λύσης μιας στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης. Πριν περάσουμε σε αυτό θα δώσουμε τον αυστηρό ορισμό τόσο της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης όσο και της λύσης της και θα δούμε ορισμένα χρήσιμα λήμματα για την απόδειξη του θεωρήματος.

Ορισμός 2.2.1. Έστω $\mu, \sigma : [0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις, $x_0 \in \mathbb{R}$ και W κίνηση Brown. Τότε μια εξίσωση της μορφής

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t, \quad X_0 = x0 \tag{2.5}$$

λέγεται *στοχαστική διαφορική εξίσωση.*

Ονομάζεται *γραμμική* αν

$$\mu(t,x) := c(t) + D(t)x$$

για $c : [0,T] \to \mathbb{R}^n, \quad D : [0,T] \to M^{n\times n}$ και

$$\sigma(t,x) := E(t) + F(t)x$$

για $E : [0,T] \to M^{n\times m}, \quad F : [0,T] \to L(\mathbb{R}^n, M^{n\times m})$ ο χώρος των φραγμένων γραμμικών απεικονίσεων από το $\mathbb{R}^n$ στο $M^{n\times m}$.
Αν $c \equiv E \equiv 0$ για $t \in [0,T]$ ονομάζεται *ομογενής.*

Έστω $(\mathcal{U}_t)_{t\geq 0}$ η επαυξημένη διήθηση που παράγεται από την κίνηση Brown. *Λύση* της 2.5 ονομάζεται κάθε ανέλιξη $(X_t)_{t\geq 0})$ για την οποία ισχύουν τα εξής:

- έχει συνεχή μονοπάτια
- είναι προσαρμοσμένη στην $(\mathcal{U}_t)_{t\geq 0}$
- για κάθε $t > 0$, με πιθανότητα 1, ισχύει

$$\begin{aligned}\int_0^t |\mu(s, X_s)| ds &< \infty, \\ \int_0^t \sigma^2(s, X_s) ds &< \infty\end{aligned}$$

- με πιθανότητα 1 ισχύει

$$X_t = x_0 + \int_0^t \mu(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s, \ \forall t > 0.$$

Λήμμα 2.2.2. *(Gronwall) Έστω ϕ, f μη αρνητικές, συνεχείς συναρτήσεις που ορίζονται για $t \in [0,T]$ και C_0 μη αρνητική σταθερά. Αν*

$$\phi(t) \leq C_0 + \int_0^t f\phi ds$$

για όλα τα $t \in [0,T]$, τότε

$$\phi(t) \leq C_0 e^{\int_0^t f ds}$$

για όλα τα $t \in [0,T]$.

Λήμμα 2.2.3. *(Borel-Cantelli) Έστω $(A_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία ενδεχομένων στο $(\Omega, \mathcal{U}, P)$. Αν*

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty,$$

τότε

$$P(\limsup_{n\geq 1} A_n) = 0.$$

Θεώρημα 2.2.4. *(Ύπαρξη και μοναδικότητα λύσης) Για $T > 0$ υποθέτουμε ότι υπάρχει $K > 0$ ώστε*

$$\begin{aligned} |\mu(t,x) - \mu(t,y)| &\leq K|x-y|, \\ |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| &\leq K|x-y|, \\ |\mu(t,x)| &\leq K(1+|x|), \\ |\sigma(t,x)| &\leq K(1+|x|) \end{aligned}$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ και $t \in [0,T]$. Τότε υπάρχει λύση $X \in L^2_n(0,T)$ της 2.5 και είναι μοναδική. Δηλαδή για οποιεσδήποτε δύο λύσεις X, Y ισχύει $P(X_t = Y_t$ για κάθε $t \in [0,T]) = 1$.

Απόδειξη. 1. *Μοναδικότητα.* Έστω X, Y λύσεις. Τότε για όλα τα $t \in [0,T]$ θα έχουμε

$$\begin{aligned} X_t - Y_t &= \int_0^t \mu(s,X_s) - \mu(s,Y_s)ds + \int_0^t \sigma(s,Y_s) - \sigma(s,Y_s)dW_s \\ \Rightarrow |X_t - Y_t|^2 &= |\int_0^t \mu(s,X_s) - \mu(s,Y_s)ds + \int_0^t \sigma(s,Y_s) - \sigma(s,Y_s)dW_s|^2. \end{aligned}$$

Όμως $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ άρα

$$E(|X_t - Y_t|^2) \leq 2E\left(|\int_0^t \mu(s,X_s) - \mu(s,Y_s)ds|^2\right) + 2E\left(|\int_0^t \sigma(s,Y_s) - \sigma(s,Y_s)dW_s|^2\right).$$

Σύμφωνα με την ανισότητα Cauchy-Schwarz

$$|\int_0^t f ds|^2 \leq t\int_0^t |f|^2 ds \forall t > 0, f : [0,t] \to \mathbb{R}^n.$$

Εφαρμόζοντας την παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} E\left(|\int_0^t \mu(s,X_s) - \mu(s,Y_s)ds|^2\right) &\leq TE\left(\int_0^t |\mu(s,X_s) - \mu(s,Y_s)ds|^2 ds\right) \\ &\leq K^2 T\int_0^t E(|X_s - Y_s|^2)ds. \end{aligned}$$

Επιπλέον,

$$\begin{aligned} E\left(|\int_0^t \sigma(s.X_s) - \sigma(s,Y_s)dW_s|^2\right) &= E\left(\int_0^t |\sigma(s.X_s) - \sigma(s,Y_s)|^2 dW_s\right) \\ &\leq K^2\int_0^t E(|X_s - Y_s|^2)ds \end{aligned}$$

για $t \in [0,T]$. Για κατάλληλη σταθερά C έχουμε

$$E(|X_t - Y_t|^2) \leq C\int_0^t E(|X_s - Y_s|^2)ds.$$

Στη συνέχεια θέτουμε $\phi(t) := E(|X_t - Y_t|^2)$ και άρα $\phi(t) \leq C\int_0^t \phi(s)ds$ για όλα τα $t \in [0,T]$. Έτσι, από το 2.2.2 για $C_0 = 0$ έχουμε ότι $\phi \equiv 0$. Δηλαδή, $X_t = Y_t$ σχεδόν βέβαια για όλα τα $t \in [0,T]$ και $X_r = Y_r$ για όλους τους ρητούς $r \in [0,T]$ εκτός από κάποια σύνολα με πιθανότητα μηδέν. Τέλος, λόγω συνέχειας, σχεδόν βέβαια

$$P\left(\max_{0\leq t\leq T} |X_t - Y_t| > 0\right) = 0.$$

2. *Ύπαρξη.*
   Ορίζουμε

$$\begin{aligned} X^0(t) &:= X_0 \\ X^{n+1} &:= X_0 + \int_0^t \mu(s, X_s^n)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^n)dW_s \end{aligned}$$

για $n = 0, 1, ...$ και $t \in [0, T]$ και

$$d^n(t) := E(|X_t^{n+1} - X_t^n|^2).$$

Θα δείξουμε ότι

$$d^n(t) \le \frac{(Mt)^{n+1}}{(n+1)!}$$

για όλα τα $n = 0, ...,$ $t \in [0, T]$ και σταθερά M που εξαρτάται από τα K, T, X_0.
Για $n = 0$ ισχύει, αφού

$$\begin{aligned} d^0(t) &= E(|X^1(t) - X^0(t)|^2) \\ &= E\left(|\int_0^t \mu(X_0, s)ds + \int_0^t \sigma(X_0, s)dW_s|^2\right) \\ &\le 2E\left(|\int_0^t K(1 + |X_0|)ds|^2\right) + 2E\left(\int_0^t K^2(1 + |X_0|^2)ds\right) \\ &\le TM \end{aligned}$$

για αρκετά μεγάλη σταθερά M.

Τώρα υποθέτουμε ότι για $n - 1$ ισχύει. Άρα,

$$\begin{aligned} d^n(t) &= E(|X_t^{n+1} - X_t^n|^2) \\ &= E\left(|\int_0^t \mu(s, X^n) - \mu(s, X^{n-1})ds + \int_0^t \sigma(s, X^n) - \sigma(s, X^{n_1})dW_s|^2\right) \\ &\le 2TK^2 E\left(\int_0^t |X^n - X^{n-1}|^2 ds\right) + 2K^2 E\left(\int_0^t |X^n - X^{n-1}|^2 ds\right) \\ &\le 2K^2(1 + T)\int_0^t \frac{M^n s^n}{n!} ds \\ &\le \frac{M^{n+1} t^{n+1}}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

Επιλέγουμε $M \ge 2K^2(1 + T)$ κι έτσι αποδεικνύεται ο ισχυρισμός μας.

Επίσης,

$$\max_{0 \le t \le T} |X_t^{n+1} - X_t^n|^2 \le 2TK^2 \int_0^T |X^n - X^{n-1}|^2 ds + 2 \max_{0 \le t \le T} |\int_0^t \sigma(s, X^n) - \sigma(s, X^{n-1})dW_s|^2$$

κι επομένως εφαρμόζοντας την ανισότητα Martingale έχουμε

$$\begin{aligned} E(\max_{0\le t\le T}|X_t^{n+1}-X_t^n|^2) &\le 2TK^2\int_0^T E(|X^n-X^{n-1}|^2)ds+8K^2\int_0^T E(|X^n-X^{n-1}|^2)ds \\ &\le C\frac{(MT)^n}{n!}. \end{aligned}$$

Έπειτα μπορούμε να εφαρμόσουμε το λήμμα Borel-Cantelli καθώς

$$\begin{aligned} P(\max_{0\le t\le T}|X_t^{n+1}-X_t^n|>\frac{1}{2^n}) &\le 2^{2n}E(\max_{0\le t\le T}|X_t^{n+1}-X_t^n|^2) \\ &\le 2^{2n}C\frac{(MT)^n}{n!} \end{aligned}$$

και $\sum_{n=1}^{\infty}2^{2n}\frac{(MT)^n}{n!}<\infty$.
Έτσι,

$$P(\max_{0\le t\le T}|X_t^{n+1}-X_t^n|>\frac{1}{2^n})=0.$$

Έτσι, για σχεδόν κάθε

$$\omega$$

η

$$X^n=X_0+\sum_{j=0}^{n-1}(X^{j+1}-X^j)$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,T]$ σε μια διαδικασία X. Παίρνοντας όρια στον ορισμό της X^{n+1} έχουμε

$$X_t=X_0+\int_0^t\mu(s,X_s)ds+\int_0^t\sigma(s,X_s)dW_s$$

για $t\in[0,T]$.

Τέλος, πρέπει να δείξουμε ότι $X\in L_n^2(0,T)$. Έχουμε

$$\begin{aligned} E(|X_t^{n+1}|^2) &\le CE(|X_0|^2)+CE\left(|\int_0^t\mu(s,X^n)ds|^2\right)+CE\left(|\int_0^t\sigma(s,X^n)dW_s|^2\right) \\ &\le C(1+E(|X_0|^2))+C\int_0^t E(|X^n|^2)ds \end{aligned}$$

όπου C διάφορες σταθερές.
Από επαγωγή

$$E(|X_t^{n+1}|^2)\le[C+C^2+...+C^{n+2}\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}](1+E(|X_0|^2)).$$

Επομένως,

$$E(|X_t^{n+1}|^2)\le C(1+E(|X_0|^2))e^{Ct}.$$

Για $n\longrightarrow\infty$ έχουμε

$$E(|X_t|^2)\le C(1+E(|X_0|^2))e^{Ct}$$

για όλα τα $t\in[0,T]$ κι έτσι $X\in L_n^2(0,T)$. □

Θεώρημα 2.2.5. *Για $k = 1, 2, \ldots$ θεωρούμε ότι οι μ^k, σ^k, X_0^k ικανοποιούν το θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας με την ίδια σταθερά K. Υποθέτουμε επιπλέον ότι*

$$\lim_{k\to\infty} E(|X_0^k - X_0|^2) = 0$$

και οτι για κάθε $M > 0$

$$\lim_{k\to\infty} \max_{0\leq t\leq T,\ |x|\leq M} (|\mu^k(t, X) - \mu(t, X)| + |\sigma^k(t, X) - \sigma(t, X)|) = 0.$$

Τέλος, θεωρούμε ότι η X^k λύνει τη

$$dX_t^k = \mu^k(t, X_t^k)dt + \sigma^k(t, X_t^k)dW_t,\ X^k(0) = X_0.$$

Τότε

$$\lim_{k\to\infty} E(\max_{0\leq t\leq T} |X_t^k - X_t|^2) = 0,$$

όπου X η μοναδική λύση της

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t, \quad X(0) = X_0.$$

Κεφάλαιο 3

Θόρυβος του **Walsh**

Στο παρόν κεφάλαιο θα μελετήσουμε το θόρυβο με την έννοια του J.B.Walsh όπως μελετάται στο [14]. Θα ξεκινήσουμε ορίζοντας το *λευκό θόρυβο* και στη συνέχεια θα δούμε διαδικασίες που παράγονται από αυτόν, συγκεκριμένα την *κίνηση Brown*. Έπειτα, θα κάνουμε μια εισαγωγή στις *μετριασμένες κατανομές* καθώς και το *μετασχηματισμό Fourier* στο χώρο αυτών. Τέλος, θα μελετήσουμε τον *Γκαουσσιανό χωρικά συσχετισμένο θόρυβο.* Οι βιβλιογραφίες στις οποίες είναι βασισμένο το κεφάλαιο είναι οι ([7], [10], [11], [13]).

3.1 Μέτρο martingale

Ορισμός 3.1.1. Ένας τοπολογικός χώρος X ονομάζεται *χώρος Lusin* αν είναι μετρήσιμος και αν υπάρχει ένας Πολωνικός χώρος P, δηλαδή ένας χώρος διαχωρίσιμος και μετρήσιμος με μετρική που τον καθιστά πλήρη, μηδενικής διάστασης και μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση του P στο X.

Έστω $(A, \mathcal{A})$ χώρος Lusin, $\mathcal{U} \subset \mathcal{A}$ μια άλγεβρα και $V(A, \omega)$ συνάρτηση ορισμένη στο $\mathcal{U} \times Q$, όπου $\mathcal{U} \subset \mathcal{A}$, τέτοια ώστε $E(V(A)^2) < \infty,\ A \in \mathcal{U}$. Υποθέτουμε ότι η V είναι πεπερασμένα προσθετική δηλαδή αν $A \cap B = \varnothing,\ A, B \in \mathcal{U}$ τότε $V(A \cup B) = V(A) + V(B)$ σχεδόν βέβαια.

Ορισμός 3.1.2. Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ χώρος πιθανότητας. Ας θεωρήσουμε τη V ως μια συνολοσυνάρτηση με τιμές στο $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ κι έστω $\|V(A)\|_2 = E(V^2(A))^{\frac{1}{2}}$ η L^2-νόρμα της $V(A)$. Θα λέμε ότι η V είναι *σ-πεπερασμένη* αν υπάρχει μια αύξουσα ακολουθία $A_n \subset \mathcal{A}$ της οποίας η ένωση είναι το A, τέτοια ώστε για όλα τα n:

- $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{U}$ όπου $\mathcal{A}_n = \mathcal{A}|_{A_n}$
- $\sup \{\|V(A)\|_2 :\ A \in \mathcal{A}_n\} < \infty$.

Ορίζουμε συνολοσυνάρτηση μ ως εξής:

$$\mu(A) = \|V(A)\|_2^2.$$

Αν V αριθμήσιμα προσθετική στην $\mathcal{A}_n$ για κάθε n τότε αν $A \in \mathcal{A}$, θέτουμε $V(A) = \lim_{n\to\infty} V(A \cap A_n)$ αν το όριο υπάρχει στο L^2 και απροσδιόριστο αλλιώς. Έτσι, το V παραμένει αμετάβλητο σε κάθε $\mathcal{A}_n$ και μπορεί οι τιμές του να μεταβάλλονται σε κάποια σύνολα $A \in \mathcal{A}$ με $A \notin \mathcal{A}_n$. Ένα τέτοιο μέτρο V θα ονομάζεται *σ-πεπερασμένο με τιμές στο L^2*.

Ορισμός 3.1.3. Έστω $\mathcal{U}_t$ διήθηση συνεχής από τα δεξιά. Μια διαδικασία $\{M_t(A),\, \mathcal{U}_t,\, t \geq 0,\, A \in \mathcal{U}\}$ είναι *μέτρο martingale* αν

- $M_0(A) = 0$
- αν $t > 0$, M_t είναι σ-πεπερασμένο μέτρο με τιμές στον $L^2(P)$
- $\{M_t(A),\, \mathcal{U}_t,\, t \geq 0\}$ είναι martingale.

Ένα μέτρο martingale M ονομάζεται *ορθογώνιο* αν για κάθε δύο ξένα σύνολα A και B στη $\mathcal{U}$ τα $\{M_t(A),\, t \geq 0\}$ και $\{M_t(B),\, t \geq 0\}$ είναι ορθογώνια. Ισοδύναμα το M είναι ορθογώνιο αν το γινόμενο $M_t(A)M_t(B)$ είναι martingale για κάθε δύο ξένα σύνολα A, B.

Ένα παράδειγμα ορθογώνιου μέτρου martingale είναι ο *λευκός θόρυβος*. Επιπλέον, κάθε μέτρο martingale που παράγεται από λευκό θόρυβο θα ονομάζεται επίσης λευκός θόρυβος.

3.2 Γκαουσιανός Θόρυβος

Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ χώρος πιθανότητας.

Τυχαίο πεδίο ονομάζουμε μια συλλογή τυχαίων μεταβλητών με δείκτες στοιχεία ενός τοπολογικού χώρου T, δηλαδή μια συλλογή $\{F_t : t \in T\}$ όπου κάθε F_t είναι μια τυχαία μεταβλητή.

Μια στοχαστική διαδικασία συνεχούς χρόνου ονομάζεται *Γκαουσιανή* αν και μόνο αν, για κάθε πεπερασμένο σύνολο δεικτών $t_1, ..., t_k$ στο σύνολο δεικτών T, η $X_{t_1,...,t_k} = (X_{t_1}, ..., X_{t_k})$ είναι πολυμεταβλητή Γκαουσιανή τυχαία μεταβλητή.
Χρησιμοποιώντας χαρακτηριστικές συναρτήσεις μπορούμε να διατυπώσουμε την Γκαουσιανή ιδιότητα ως εξής: $\{X_t : t \in T\}$ Γκαουσιανή αν και μόνο αν, για κάθε πεπερασμένο σύνολο δεικτών $t_1, ..., t_k$, υπάρχουν σ_{ij}, μ_l που παίρνουν πραγματικές τιμές με $\sigma_{jj} > 0$, τέτοια ώστε για όλα τα $s_1, ..., s_k \in \mathbb{R}$ να ισχύει η ισότητα

$$E\big(\exp\big(i \sum_{l=1}^{k} slX_{t_l}\big)\big) = \exp\big(-\frac{1}{2} \sum_{l,j} \sigma_{lj} s_l s_j + i \sum_{l} \mu_l s_j\big),$$

όπου i η μιγαδική μονάδα για την οποία ισχύει $i^2 = -1$.
Οι αριθμοί σ_{lj} και μ_l θα είναι αντίστοιχα οι συνδιασπορές και οι μέσες τιμές των μεταβλητών της διαδικασίας.

Η *μέση συνάρτηση* $\mu_{X(t)}$ μιας τυχαίας διαδικασίας $X(t)$ είναι μια συνάρτηση που καθορίζει τη μέση τιμή σε κάθε t. Δηλαδή,

$$\mu_{X(t)} = E[X(t)].$$

Για ένα τυχαίο πεδίο ή μια στοχαστική διαδικασία $X(t)$ σε ένα χωρίο D η *συνάρτηση συνδιασποράς* $C(t, s)$ δίνει τη συνδιασπορά των τιμών του τυχαίου πεδίου στα t, s και ορίζεται ως

$$C(t, s) := cov(X(t), X(s)) = E[(X(t) - E[X(t)]) \cdot (X(s) - E[X(s)])].$$

Για $t_1, ..., t_N \in D$ η διασπορά κάθε γραμμικού συνδυασμού $X = \sum_{i=1}^{N} w_i X(t_i)$ μπορεί να υπολογιστεί ως

$$var(X) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} w_i C(t_i, t_j) w_j.$$

Μια συνάρτηση είναι συνάρτηση συνδιασποράς αν και μόνο αν η διασπορά αυτή είναι μη αρνητική για όλες τις πιθανές επιλογές του N και των $w_1, ..., w_N$.

Παράδειγμα 3.2.1. Έστω $\{X(t) : t \in [0, \infty)\}$ με

$$X(t) = A + Bt, \ \forall t \in [0, \infty)$$

με A, B ανεξάρτητες κανονικές $N(1,1)$ τυχαίες μεταβλητές. Η συνάρτηση συνδιασποράς της $X(t)$ υπολογίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned}
C_X(t,s) &= E[X(t)X(s)] - E[X(t)]E[X(s)] \\
&= E[(A+Bt)(A+Bs)] - E[A+Bt]E[A+Bs] \\
&= E[A^2] + (t+s)E[AB] + stE[B^2] - (E[A] + tE[B])(E[A] + sE[B]) \\
&= E[A^2] + (t+s)E[A]E[B] + stE[B^2] - (E[A] + tE[B])(E[A] + sE[B]) \\
&= 2 + t + s + 2st - (1+t)(1+s) \\
&= 1 + ts
\end{aligned}$$

για όλα τα $t, s \in [0, \infty)$.

3.2.1 Λευκός Θόρυβος

Έστω v ένα σ-πεπερασμένο μέτρο στον $\mathbb{R}^n$ και $\mathcal{B}(A)$ η οικογένεια $\{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) : v(A) < \infty\}$.

Ορισμός 3.2.2. Ένας *λευκός θόρυβος βασισμένος στο* v είναι ένα Γκαουσσιανό τυχαίο πεδίο $(W(A), \ A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, ορισμένο σε ένα χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ με μέση συνάρτηση $\mu(A) = E[W(A)] = 0$ και συνάρτηση συνδιασποράς $C(A,B) = E[W(A)W(B)] = v(A \cap B)$.

Αν v μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}^n$ τότε το λευκό θόρυβο βασιμένο στο v τον καλούμε απλά *λευκό θόρυβο*.
Ένας λευκός θόρυβος W στο $[0,T] \times D$ όπου D χωρίο του $\mathbb{R}^n$ θα ονομάζεται *λευκός θόρυβος χώρου-χρόνου* στο D.

Ορισμένες ιδιότητες του λευκού θορύβου βασισμένου στο $\mathbf{v}$ είναι οι παρακάτω:

1. Αν $A \cap B = \emptyset$ τότε $W(A), W(B)$ ανεξάρτητες.
2. Αν $A \cap B = \emptyset$ τότε $W(A \cup B) = W(A) + W(B)$.
3. Αν $An \uparrow A$ και $v(A) < \infty$ τότε $W(A_n) \to W(A)$ στον $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Απόδειξη. 1. $E[W(A)W(B)] = v(A \cap B) = 0 = E[W(A)]E[W(B)]$.

2.

$$\begin{aligned}
E[(W(A \cup B) - W(A) - W(B))^2] &= E[W(A \cup B)^2] + E[W(A)^2] + E[W(B)^2] \\
&- 2E[W(A \cup B)W(A)] - 2E[W(A \cup B)W(B)] + 2E[W(A)W(B)] \\
&= v(A \cup B) + v(A) + v(B) - 2v(A) - 2v(B) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

3. $E[(W(A) - W(A_n))^2] = v(A) + v(A_n) - 2v(A \cap A_n) = v(A) - v(A_n) \longrightarrow_{\to\infty} 0$ αφού $v(A_n) \uparrow v(A)$.

□

3.2.2 Ο λευκός θόρυβος ως μέτρο

Θα μελετήσουμε τώρα το λευκό θόρυβο ως διανυσματικό μέτρο για στοχαστικά ολοκληρώματα.

Έστω $L^2(\mathbb{R}^n, v)$ το στοχαστικό ολοκλήρωμα Ito-Wiener για ντετερμινιστικές συναρτήσεις ως προς το λευκό θόρυβο.
Για $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ θέτουμε

$$W(1_A) := W(A).$$

Παίρνουμε σταθερά $c_1, ..., c_n \in \mathbb{R}$ και $A_1, ..., A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ξένα ανά δύο σύνολα και $h = \sum_{j=1}^n c_j 1_{A_j}$. Ορίζουμε

$$W(h) = W\big(\sum_{j=1}^n c_j 1_{A_j}\big) := \sum_{j=1}^n c_j W(A_j).$$

Αφού A_j ξένα ανά δύο και από ιδιότητες του λευκού θορύβου έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\Big\|W\big(\sum_{j=1}^n c_j 1_{A_j}\big)\Big\|^2_{L^2(\Omega)} &= E\Big[\big(\sum_{j=1}^n c_j W(A_j)\big)^2\Big] \\
&= \sum_{j=1}^n c_j{}^2 E[W(A_j)^2] = \sum_{j=1}^n c_j{}^2 v(A_j) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \big(\sum_{j=1}^n c_j 1_{A_j}(x)\big)^2 v(dx).
\end{aligned}$$

Επομένως, στο σύνολο των απλών συναρτήσων της μορφής $h = \sum_{j=1}^n c_j 1_{A_j}$, η απεικόνιση $h \to W(h)$ είναι ισομετρία από τον $L^2(\mathbb{R}^n, v)$ στον $L^2(\Omega)$.

Το σύνολο των απλών συναρτήσεων είναι πυκνό στον $L^2(\mathbb{R}^n, v)$ κι έτσι η ισομετρία αυτή δέχεται μοναδική επέκταση από τον $L^2(\mathbb{R}^n, v)$ στον $L^2(\Omega)$ που δίνεται ως εξής. Για σταθερό $h \in L^2(\mathbb{R}^n, v)$ έστω (h_n) ακολουθία απλών συναρτήσεων τέτοιων ώστε $\|h - h_n\|_{L^2(\mathbb{R}^n, v)} \to 0$. Τότε,

$$W(h) := \lim_{n\to\infty} W(h_n),$$

με το όριο να ειναι στον $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.
Η παραπάνω ισομετρία είναι γνωστή ως *ισομετρία Wiener*. Η τυχαία μεταβλητή $W(h)$ είναι το ολοκλήρωμα Wiener του h ως προς το λευκό θόρυβο W :

$$W(h) = \int_{\mathbb{R}^n} h(x) W(dx). \tag{3.1}$$

Πρόταση 3.2.3. *Η οικογένεια $(W(h),\ h \in L^2(\mathbb{R}^n, v))$ αποτελείται από Γκαουσσιανές τυχαίες μεταβλητές με μέση τιμή μηδέν και $E[W(h_1)(W(h_2))] = \langle h_1, h_2 \rangle$.*

Απόδειξη. Απευθείας από τον ορισμό προκύπτει ότι η $W(h)$ είναι Γκαουσσιανή με μέση τιμή μηδέν και $E[W(h)^2] = \|h\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n, v)}$.
Επίσης,

$$\begin{aligned}
W(h_1)W(h_2) &= \frac{1}{4}(W(h_1) + W(h_2))^2 - \frac{1}{4}(W(h_1) - W(h_2))^2 \\
&= \frac{1}{4}(W(h_1 + h_2))^2 - \frac{1}{2}(W(h_1 - h_2))^2
\end{aligned}$$

κι έτσι

$$\begin{aligned} E[W(h_1)W(h_2)] &= \frac{1}{4}\|h_1+h_2\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n,v)} - \frac{1}{4}\|h_1-h_2\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n,v)} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} h_1(x)h_2(x)v(dx). \end{aligned}$$

□

Παρατηρούμε ότι η $h \to W(h)$ είναι γραμμική κι επομένως η $(W(h),\ h \in L^2(\mathbb{R}^n, v))$ είναι μια Γκαουσσιανή στοχαστική διαδικασία.

Έστω H πραγματικός διαχωρίσιμος χώρος Hilbert με εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle_H$ και νόρμα $\|\cdot\|_H$.

Ορισμός 3.2.4. Μια στοχαστική διαδικασία $W = (W(h), h \in H)$, ορισμένη σε έναν πλήρη χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, είναι μια *ισοκανονική* Γκαουσσιανή διαδικασία στον H, αν για κάθε $h \in H$ η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής $W(h)$ είναι $N(0, \|h\|^2_H)$ και $E[W(h)W(g)] = \langle h, g\rangle_H$ για κάθε $h, g \in H$.

Μπορούμε να κατασκευάσουμε μια τέτοια διαδικασία ως εξής.
Έστω $(e_n,\ n \geq 1)$ ένα πλήρες ορθοκανονικό σύστημα στον H και $(\xi_n,\ n \geq 1)$ μια ακολουθία ανεξάρτητων Κανονικών τυχαίων μεταβλητών ορισμένων στον $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle h, e_n\rangle_H \xi_n$$

συγκλίνει στον $L^2(\Omega)$ σε μια τυχαία μεταβλητή με όριο τη $W(h)$.

Αντίστροφα, με δοσμένη μια ισοκανονική Γκαουσσιανή διαδικασία $(W(h), h \in H)$ και ένα πλήρες ορθοκανονικό σύστημα $(e_n, n \geq 1)$ στον H, η ακολουθία $W(e_n, n \geq 1)$ αποτελείται από ανεξάρτητες Κανονικές τυχαίες μεταβλητές. Ορίζουμε

$$\tilde{W}(h) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle h, e_n\rangle_H W(e_n).$$

Για κάθε $h \in H$ $E[(W(h) - \tilde{W}(h)]^2 = 0$ και άρα συμπίπτουν σχεδόν βέβαια.

Λήμμα 3.2.5. *Αν $(W(h), h \in H)$ ισοκανονική Γκαουσσιανή διαδικασία στον H τότε η απεικόνιση $h \to W(h)$ από τον H στον $L^2(\Omega)$, είναι γραμμική.*

Απόδειξη. Για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ και $h, g \in H$,

$$\begin{aligned} E[(W(ah &+ bg) - aW(h) - bW(g))^2] = \|ah+bg\|^2_H + a^2\|h\|^2_H + b^2\|g\|^2_H \\ &- 2a\langle ah+bg, g\rangle_H - 2b\langle ah+bg, g\rangle_H + 2ab\langle h, g\rangle_H = 0. \end{aligned}$$

□

3.2.3 Κίνηση Brown

Η κίνηση Brown αποτελεί μια διαδικασία που παράγεται από το λευκό θόρυβο.

Θεωρούμε την περίπτωση που $n = 1$ κι έστω W λευκός θόρυβος στον $\mathbb{R}$ βασισμένος στο μέτρο $v(dx) = 1_{\mathbb{R}_+}(x)dx$. Για κάθε $t \geq 0$ οι συναρτήσεις $1_{(-\infty,t]}$ και $1_{[0,t]}$ είναι ίσες σχεδόν παντού. Ορίζοντας

$$B_t = W((-\infty,t]) = W([0,t]),\ t \geq 0$$

παίρνουμε την κίνηση Brown.

Ας θεωρήσουμε τώρα την περίπτωση που $n = 2$.
Έστω $(W(A), A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ λευκός θόρυβος βασισμένος στο μέτρο $v(dx) = 1_{\mathbb{R}^2_+}(x)dx$. Ορίζουμε μια Γκαουσσιανή διαδικασία δύο παραμέτρων κι έτσι, από το λευκό θόρυβο αυτό παράγουμε την κίνηση Brown. Έτσι, για $(t_1,t_2) \in \mathbb{R}^2$ θέτουμε

$$W_{t_1,t_2} = W((-\infty,t_1] \times (-\infty,t_2]) = \begin{cases} W([0,t_1] \times [0,t_2]), & \alpha\nu\ (t_1,t_2) \in \mathbb{R}^2_+, \\ 0 \quad \alpha\lambda\lambda\iota\omega\varsigma. \end{cases}$$

Πρόταση 3.2.6. *Η $(W_{t_1,t_2},\ (t_1,t_2) \in \mathbb{R}^2_+)$ είναι κίνηση Brown, δηλαδή Γκαουσσιανή διαδικασία με μηδενική μέση τιμή, τέτοια ώστε $E[W_{t_1,2}W_{s_1,s_2}] = (t_1 \wedge s_1)(t_2 \wedge s_2),\ (s_1,s_2) \in \mathbb{R}^2_+,\ (t_1,t_2) \in \mathbb{R}^2_+$.*

Απόδειξη.

$$\begin{aligned} E[W_{t_1,t_2}W_{s_1,s_2}] &= E[W([0,t_1] \times [0,t_2])W([0,s_1] \times [0,s_2])] \\ &= v(([0,t_1] \times [0,t_2]) \cap [0,s_1] \times [0,s_2]) \\ &= v([0,t_1 \wedge s_1] \times [0,t_2 \wedge s_2]) \\ &= (t_1 \wedge s_1)(t_2,s_2). \end{aligned}$$

□

Έστω

$$\int_{\mathbb{R}^2_+} h(t_1,t_2)dW_{t_1,t_2}$$

το ολοκλήρωμα Wiener, με $h \in L^2(\mathbb{R}^2_+, dx)$.
$1_{(-\infty,t_1]\times(-\infty,t_2]} = W(1_{(-\infty,t_1]\times]-\infty,t_2]})$ κι έτσι

$$\begin{aligned} W_{t_1,t_2} &= W((-\infty,t_1] \times (-\infty,t_2]) = W(1_{(-\infty,t_1]\times(-\infty,t_2]}) \\ &= W(1_{\mathbb{R}^2_+}(t_1 - \cdot, t_2 - \cdot)) = \int_{\mathbb{R}^2_+}(t_1 - s_1, t_2 - s_2)dW_{s_1,s_2}. \end{aligned}$$

Τότε, το λευκό θόρυβο στον $\mathbb{R}^2_+$ μπορούμε να τον δούμε ως τη δεύτερη μερική παράγωγο της κίνηση Brown $(W_{t_1,t_2},\ (t_1,t_2) \in \mathbb{R}^2_+)$.
Για κάθε $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, έχουμε ότι για σχεδόν όλα τα ω

$$\begin{aligned} \langle \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} W, \phi \rangle &= \langle W, \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2}\phi \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^2_+} W_{t_1,t_2} \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2}\phi(t_1,t_2)dt_1dt_2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^2_+} W(1_{[0,t_1]\times[0,t_2]}(\cdot,\cdot)) \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2}\phi(t_1,t_2)dt_1dt_2. \end{aligned}$$

Από θεώρημα Fubini

$$W(\int_{\mathbb{R}_+^2} 1_{[0,t_1]\times[0,t_2]}(\cdot,\cdot)\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2}\phi(t_1,t_2)dt_1dt_2) = W(\psi),$$

με

$$\begin{aligned}\psi(s_1,s_2) &= \int_{\mathbb{R}_+^2} 1_{[0,t_1]\times[0,t_2]}(s_1,s_2)\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2}\phi(t_1,t_2)dt_1dt_2 \\ &= \int_{s_1}^{\infty} dt_1 \int_{s_2}^{\infty} dt_2 \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2}\phi(t_1,t_2) \\ &= \phi(s_1,s_2).\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\langle \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} W, \phi\rangle = W(\phi)$$

για όλα τα $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$.

3.3 Μετριασμένες κατανομές

Ορισμός 3.3.1. *Χώρος Schwartz* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ονομάζεται ο τοπολογικός διανυσματικός χώρος συναρτήσεων $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ τέτοιων ώστε $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ και

$$x^a \partial^\beta f(x) \to 0, \quad \kappa\alpha\theta\omega\varsigma\ |x| \to 0$$

για κάθε ζεύγος $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$.
Για $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ και $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ έστω

$$\|f\|_{\alpha,\beta} = \sup_{\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f|.$$

Μια ακολουθία συναρτήσεων $\{f_k : k \in \mathbb{N}\}$ συγκλίνει σε μια συνάρτηση f στον $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ αν

$$\|f_k - f\|_{\alpha,\beta} \to 0, \quad \kappa\alpha\theta\omega\varsigma\ k \to 0$$

για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$.

Ο χώρος Schwartz επομένως περιέχει λείες συναρτήσεις των οποίων οι παραγώγοι φθίνουν στο άπειρο γρηγορότερα από κάθε δύναμη.

Παράδειγμα 3.3.2. Η συνάρτηση $f(x) = e^{-|x|^2}$ ανήκει στον $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Γενικά, αν p οποιοδήποτε πολυώνυμο τότε $g(x) = p(x)e^{-|x|^2}$ ανήκει στον $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Η $f(x) = \frac{1}{(1+|x|^2)^k}$ δεν ανήκει στον $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ αφού $|x|^2 2k f(x)$ δε φθίνει στο άπειρο καθώς $|x| \to \infty$.

Παρατήρηση: Ο χώρος των λείων συναρτήσεων με συμπαγή στήριξη $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ περιέχει τον $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Αν $f_k \to f$ στο $\mathcal{D}$ τότε $f_k \to f$ στον $\mathcal{S}$ οπότε $\mathcal{D}$ συνεχώς ενσωματωμένος στον $\mathcal{S}$. Επιπλέον αν $f \in \mathcal{S}$ και $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ συνάρτηση αποκοπής με $\eta_k(x) = \eta(\frac{x}{k})$ τότε $\eta_k f \to f$ στο $\mathcal{S}$ καθώς $k \to \infty$ και άρα $\mathcal{D}$ πυκνό στον $\mathcal{S}$.

Ορισμός 3.3.3. *Γραμμικό συναρτησιακό* ονομάζεται μια γραμμική απεικόνιση $f : V \to F$ όπου V διανυσματικός χώρος και F βαθμωτό πεδίο.

Πρόταση 3.3.4. *Ένα γραμμικό συναρτησιακό $f : V \to \mathcal{R}$ είναι συνεχές αν και μόνο αν υπάρχει $c \in (0, \infty)$ τέτοιο ώστε*

$$|f(x)| \leq c||x||$$

για όλα τα x στο V.

Απόδειξη. Έστω ότι υπάρχει $c \in (0, \infty)$ τέτοιο ώστε $|f(x)| \leq c||x||$. Αν $x_n \to x_0$ στο V τότε

$$|f(x_n) - f(x_0)| = |f(x_n - x_0)| \leq c||x_n - x_0|| \to 0$$

καθώς το $n \to 0$. Άρα f συνεχές.

Για το αντίστροφο, υποθέτουμε ότι δεν υπάρχει τέτοιο c και τότε για όλα τα n υπάρχει $x_n \in V$ με

$$|f(x_n)| > n||x_n||.$$

Για $x_n \neq 0$ θέτουμε

$$y_n = \frac{1}{n}\frac{x_n}{||x_n||}.$$

Έτσι έχουμε

$$|f(y_n)| = |f\Big(\frac{1}{n}\frac{x_n}{||x_n||}\Big)| = \frac{1}{n}\frac{|f(x_n)|}{||x_n||} > 1$$

άρα f όχι συνεχής. □

Ορισμός 3.3.5. Μια *μετριασμένη κατανομή* T στον $\mathbb{R}^n$ είναι ένα συνεχές γραμμικό συναρτησιακό $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$.
Ο τοπολογικός διανυσματικός χώρος των μετριασμένων κατανομών συμβολίζεται με $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.
Αν $< T, f >$ η τιμή της $T \in \mathcal{S}'$ στην $f \in \mathcal{S}$, τότε η ακολουθία $\{T_k\}$ συγκλίνει στην T στον $\mathcal{S}'$ και γράφουμε $T_k \to T$ αν

$$< T_k, f > \to < T, f >$$

για κάθε $f \in \mathcal{S}$.

Παρατηρήσεις

1. Αφού $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$ πυκνό και συνεχώς ενσωματωμένο, έχουμε $\mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$. Επιπλέον, μια κατανομή $T \in \mathcal{D}'$ επεκτείνεται μοναδικά σε μια μετριασμένη κατανομή $T \in \mathcal{S}'$ αν και μόνο αν είναι συνεχής στο $\mathcal{D}$ ως προς την τοπολογία στον $\mathcal{S}$.

2. Κάθε συνάρτηση $f \in L^1_{loc}$ ορίζει μια κανονική κατανομή $T_f \in \mathcal{D}'$ ως

$$< T_f, \phi >= \int f\phi dx$$

για όλες τις $\phi \in \mathcal{D}$.

3. Αν $|f| \leq p$ φραγμένη από κάποιο πολυώνυμο p τότε η T_f εκτείνεται σε μια μετριασμένη κατανομή $T_f \in \mathcal{S}'$.

Παράδειγμα 3.3.6. Έστω συνάρτηση $I : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ η οποία ορίζεται από το ολοκλήρωμα Riemann ως

$$I[\phi] = \int_0^1 \phi(x)dx.$$

Η I είναι γραμμική από ιδιότητες ολοκληρώματος Riemann. Επίσης, έστω $(\phi_n)_{n=m}^{\infty}$ μια αυθαίρετη ακολουθία συναρτήσεων Schwartz τέτοια ώστε $\phi_n \to \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ως προς $\|\cdot\|_{\alpha,\beta}$. Τότε, $\phi_n \to \phi$ ομοιόμορφα και επομένως

$$\lim_{n\to\infty} I[\phi_n] = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \phi_n(x)dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} \phi_n(x)dx = \int_0^1 \phi(x)dx I[\phi].$$

Άρα I μετριασμένη κατανομή.

Ορισμός 3.3.7. Ορίζουμε την *παράγωγο* μετριασμένης κατανομής ως

$$< \partial^\alpha T, \phi >= (-1)^{|\alpha|} < T, \partial^\alpha \phi >$$

για $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$.

3.3.1 Μετασχηματισμός Fourier στον $\mathcal{S}$

Μια χρήσιμη πράξη που ορίζεται στις συναρτήσεις Schwartz είναι ο μετασχηματισμός Fourier. Είναι μια συνάρτηση την οποία μπορούμε να σκεφτούμε ως το συνεχές ανάλογο των σειρών Fourier.

Ορισμός 3.3.8. Ο *μετασχηματισμός Fourier* συνάρτησης $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ είναι η συνάρτηση $\hat{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ που ορίζεται ως

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int f(x)e^{-ikx}dx.$$

Ο *αντίστροφος* μετασχηματισμός Fourier της f είναι η συνάρτηση $\check{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ που ορίζεται ως

$$\check{f}(x) = \int f(k)e^{ikx}dk.$$

Ορισμός 3.3.9. Αν f ολοκληρώσιμη συνάρτηση ορισμένη στον $\mathbb{R}^n$ και g φραγμένη, τοπικά ολοκληρώσιμη τότε η *συνέλιξη* της f με την g είναι μια συνάρτηση στον $\mathbb{R}^n$ η οποία ορίζεται ως

$$f \star g(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} g(\mathbf{y}) f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y}.$$

Πρόταση 3.3.10. *Ο μετασχηματισμός Fourier $\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ που ορίζεται ως $\mathcal{F} : f \to \hat{f}$ είναι μια συνεχής, ένα προς ένα και επί του εαυτού της απεικόνιση του $\mathcal{S}$. Η αντίστροφη απεικόνιση $\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ δίνεται από την $\mathcal{F}^{-1} : f \to \check{f}$. Αν $f \in \mathcal{S}$, τότε*

$$\mathcal{F}[\partial^\alpha f] = (ik)^\alpha \hat{f}, \quad \mathcal{F}[(-ix)^\beta f] = \partial^\beta f \hat{f}.$$

Ο μετασχηματισμός Fourier απεικονίζει τη συνέλιξη δύο συναρτήσεων στο κατά σημείο γινόμενο των μετασχηματισμών τους.

Πρόταση 3.3.11. *Αν* $f, g \in \mathcal{S}$ *τότε η συνέλιξη* $h = f \star g \in \mathcal{S}$ *και*

$$\hat{h} = (2\pi)^n \hat{f}\hat{g}.$$

Αν $f, g \in \mathcal{S}$, *τότε*

$$\int f\overline{g}dx = (2\pi)^n \int \hat{f}\overline{\hat{g}}dk.$$

Συγκεκριμένα,

$$\int |f|^2 dx = (2\pi)^n \int |\hat{f}|^2 dk.$$

3.3.2 Μετασχηματισμός Fourier στον $\mathcal{S}'$

Έστω $\phi, \psi \in \mathcal{S}$, τότε από θεώρημα Fubini

$$\begin{aligned} \int \phi\hat{\psi}dx &= \int \phi(x)[\frac{1}{(2\pi)^n}\int \psi(y)e^{-ix\cdot y}dy]dx \\ &= \int [\frac{1}{(2\pi)^n}\int \phi(x)e^{-ix\cdot y}dx]\psi(y)dy \\ &= \int \hat{\phi}\psi dx. \end{aligned}$$

Ορισμός 3.3.12. Αν $T \in \mathcal{S}'$ τότε ο μετασχηματισμός Fourier $\hat{T} \in \mathcal{S}'$ είναι η κατανομή που ορίζεται ως

$$< \hat{T}, \phi > = < T, \hat{\phi} >$$

για όλες τις $\phi \in \mathcal{S}$.
Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier $\check{T} \in \mathcal{S}'$ είναι η κατανομή που ορίζεται ως

$$< \check{T}, \phi > = < T, \check{\phi} >$$

για όλες τις $\phi \in \mathcal{S}$.

Γράφουμε $\hat{T} = \mathcal{F}T$ και $\check{T} = \mathcal{F}^{-1}T$.
Η γραμμικότητα και η συνέχεια του μετασχηματισμού Fourier στον $\mathcal{S}$ υποδηλώνει ότι η $\check{T}$ είναι γραμμική, συνεχής απεικόνιση στον $\mathcal{S}$ κι επομένως ο μετασχηματισμός Fourier μιας μετριασμένης κατανομής είναι μια μετριασμένη κατανομή.

Επίσης, $\mathcal{F} : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ αντιστρέψιμη με αντίστροφη $\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ λόγω της αντιστρεψιμότητας του μετασχηματισμού Fourier στον $\mathcal{S}$.

Αν $T \in \mathcal{S}'$,

$$< \widehat{\partial^\alpha T}, \phi > = < \partial^\alpha T, \hat{\phi} > = (-1)^{|\alpha|} < T, \partial^\alpha \hat{\phi} > = < T, \widehat{(ik)^\alpha \phi} > = < \hat{T}, (ik)^\alpha \phi > = < (ik)^\alpha \hat{T}, \phi > .$$

Έτσι,

$$\widehat{\partial^\alpha T} = (ik)^\alpha \hat{T}, \quad \widehat{(-ix)^\beta T} = \partial^\beta \hat{T}.$$

Σχόλιο 3.3.13. Καθώς ο μετασχηματισμός Fourier μιας συνάρτησης συμπαγούς υποστήριξης δεν έχει γενικά συμπαγή υποστήριξη, δεν ορίζει μια απεικόνιση του χώρου $\mathcal{D}$ των συναρτήσεων ελέγχου στον εαυτό του. Έτσι, ο μετασχηματισμός Fourier μιας κατανομής $T \in \mathcal{D}'$ δεν είναι γενικά μια κατανομή $\hat{T} \in \mathcal{D}'$. Για το λόγο αυτό ορίζουμε το μετασχηματισμό Fourier για την μικρότερη κλάση των μετριασμένων κατανομών.

3.4 Γκαουσσιανός χωρικά συσχετισμένος θόρυβος

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε Γκαουσσιανούς θορύβους πιο γενικούς από το λευκό θόρυβο. Οι δείκτες του θορύβου θα είναι της μορφής (t, ϕ) όπου το $t \in \mathbb{R}_+$ δηλώνει το *χρόνο* και το ϕ είναι ο *χώρος*, όρισμα που ανήκει σε κάποιο συναρτησιακό χώρο.

3.4.1 Χωρικά ομογενής Γκαουσσιανός θόρυβος

Θεωρούμε μια οικογένεια Γκαουσσιανών τυχαίων μεταβλητών με μηδενική μέση τιμή

$$W = \{W(\phi),\ \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})\},$$

όπου $C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ ο χώρος των άπειρα διαφορίσιμων συναρτήσεων με συμπαγή υποστήριξη, με συνδιασπορά

$$E[W(\phi)W(\psi)] = \int_0^\infty dt \int_{\mathbb{R}^n} \Lambda(dx)(\phi(t) \star \tilde{\psi}(t))(x), \tag{3.2}$$

όπου το $\star$ δηλώνει τη συνέλιξη στη χωρική μεταβλητή και $\tilde{\psi}(t,x) := \psi(t,-x)$ ανάκλαση στη μεταβλητή x.
Το Λ είναι ένα μη αρνητικά ορισμένο μέτρο στον $\mathbb{R}^n$, δηλαδή

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Lambda(dx)(\phi \star \tilde{\phi})(x) \geq 0$$

και συμμετρικό. Λόγω της συμμετρίας του Λ, $E[W(\phi)W(\psi)] = E[W(\psi)W(\phi)]$.

Θεώρημα Bochner-Schwartz: $F \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ θετικά ορισμένη αν και μόνο αν F ο μετασχηματισμός Fourier μη αρνητικού μετριασμένου μέτρου στον $\mathbb{R}$.

Παρατηρήσεις:

1. Από το θεώρημα Bochner-Schwartz, το Λ ως μη αρνητικά ορισμένο, είναι ο μετασχηματισμός Fourier του μη αρνητικού μετριασμένου μέτρου μ στον $\mathbb{R}^n : \mathcal{F}_\mu = \Lambda$.

2. Αφού Λ συμμετρικό και μ συμμετρικό. Συγκεκριμένα,

$$\forall f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \int_{\mathbb{R}^n} f(u)\mu(du) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} [f(u) + f(-u)]\mu(du),$$

   και αν f περιττή $\int_{\mathbb{R}^n} f(u)\mu(du) = 0$.
   Το μέτρο μ ονομάζεται *φασματικό μέτρο.*

3. μ μετριασμένο άρα και Λ μετριασμένο.

Από τον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier στο χώρο των μετριασμένων κατανομών $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, για όλες τις $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\Lambda(dx) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}\phi(u)\mu(du) \tag{3.3}$$

και υπάρχει ακέραιος $m \geq 1$ τέτοιος ώστε

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |u|^2)^{-m}\mu(du) < \infty.$$

Χρησιμοποιώντας την 3.3 η 3.2 γράφεται και ως

$$E[W(\phi)W(\psi)] = \int_0^\infty dt \int_{\mathbb{R}^d} \mu(du)\mathcal{F}\phi(t)(u)\overline{\mathcal{F}\psi(t)(u)}.$$

Επίσης, για $\Lambda(dx) = f(x)dx$ η 3.2 γίνεται

$$\int_0^\infty dt \int_{\mathbb{R}^n} dx \int_{\mathbb{R}^n} dy\phi(t,x)f(x-y)\psi(t,y)$$

το οποίο κάνει ξεκάθαρο τον ομογενή χωρικό χαρακτήρα του θορύβου.

Ορισμός 3.4.1. Το U είναι η πληρότητα του χώρου Schwartz $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ μετά την ταυτοποίηση ϕ_1, ϕ_2 τέτοιων ώστε $||\phi_1 - \phi_2||_U = 0$, εφοδιασμένες με το ημιεσωτερικό γινόμενο

$$< \phi, \psi >_U = \int_{\mathbb{R}^n} \Lambda(dx)(\phi \star \tilde{\phi})(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \mu(du)\mathcal{F}\phi(u)\overline{\mathcal{F}\psi(u)} \tag{3.4}$$

όπου $\phi, \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, και ημινόρμα $||\cdot||_U$.

Σχόλιο 3.4.2. Ημιεσωτερικό γινόμενο σημαίνει ότι δεν είναι απαραίτητο να είναι αυστηρά θετικό: $||f|| \geq 0$ και $||f|| = 0$ αν και μόνο αν $f = 0$.

Πρόταση 3.4.3. *Θεωρούμε ότι το μ είναι απόλυτα συνεχές ως προς το μέτρο Lebesgue. Τότε, το σύνολο*

$$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) = \{\Gamma \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \mathcal{F}\Gamma \quad \text{συναρτηση και } \int_{\mathbb{R}^n} \mu(du)|\mathcal{F}\Gamma(u)|^2 < \infty\}$$

περιέχεται στο U.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι

$$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) = \{\Gamma \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \mathcal{F}\Gamma \quad \text{συναρτηση και } \mathcal{F}\Gamma \in L^2(\mathbb{R}^n, \mu)\}.$$

Το σύνολο, $\mathcal{F}(C_0^\infty(\mathbb{R}^n))$ είναι πυκνό στον $L^2(\mathbb{R}^n, \mu)$ άρα για δοσμένη $\Gamma \in \mathcal{S}'_\mu(\mathbb{R}^n)$, υπάρχει ακολουθία $(\phi_n)_n \subset \mathcal{S}'_\mu(\mathbb{R}^n)$ τέτοια ώστε

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{F}\phi_n = \mathcal{F}\Gamma$$

στον $L^2(\mathbb{R}^n, \mu)$. Η $(\phi_n)_n$ μπορεί να ταυτιστεί με μια ακολουθία στον $\mathcal{S}'_\mu(\mathbb{R}^n)$ και συνεπώς η G είναι στην κλειστότητα του $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ στον $\mathcal{S}'_\mu(\mathbb{R}^n)$ το οποίο δείχνει ότι $\Gamma \in U$. □

Το U είναι ένας διαχωρίσιμος χώρος Hilbert, δηλαδή χώρος με εσωτερικό γινόμενο ο οποίος είναι επίσης πλήρης μετρικός χώρος ως προς τη συνάρτηση απόστασης που προκύπτει από το εσωτερικό γινόμενο, ο οποίος μπορεί να περιλαμβάνει κατανομές Schwartz.

3.4.2 Επέκταση του ορισμού του W

Στην υποενότητα αυτή θα επεκτείνουμε τον ορισμό του W σε μια ευρύτερη κλάση συναρτήσεων.

Έστω $[0, T]$ χρονικό διάστημα και $U_T := L^2([0, T]; U)$. Το σύνολο αυτό είναι εφοδιασμένο με τη νόρμα που δίνεται από

$$||g||_{U_T}^2 = \int_0^T ||g(s)||_U^2 ds.$$

Λήμμα 3.4.4. *Ο χώρος $C_0^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^n)$ είναι πυκνός στο U_T για $||\cdot||_{U_T}$.*

Απόδειξη. Έστω C η κλειστότητα του $C_0^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^n)$ στο U_T για $||\cdot||_{U_T}$. Τότε, $C \subset U_T$.

Στοιχεία του U_T της μορφής $\phi_1(\cdot)\phi_2(\star)$, όπου $\phi_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+; \mathbb{R})$, με υποστήριξη που περιέχεται στο $[0, T]$ και $\phi_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, ανήκουν στο C.
Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Lambda(dx)(|\phi_2| \star |\tilde{\phi_2}|)(x) < \infty$$

επειδή Λ μετριασμένο μέτρο και $|\phi_2| \star |\tilde{\phi_2}|$ φθίνει γρήγορα, μαζί με την κυρίαρχη σύγκλιση βλέπουμε ότι υπάρχει μια ακολουθία $(\phi_2^n)_n \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ τέτοια ώστε

$$\lim_{n\to\infty} ||\phi_1\phi_2 - \phi_2\phi_2^n||_{U_T} = 0.$$

Επομένως, $\phi_1(\cdot)\phi_2(\star) \in U_T$.

Στοιχεία του U_T της μορφής $\phi_1(\cdot)\phi_2(\star)$, όπου $\phi_1 \in L^2([0,T];\mathbb{R})$ και $\phi_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, ανήκουν στο C.
Έστω $(\phi_1^n)_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$ τέτοια ώστε για όλα τα n η υποστήριξη της ϕ_1^n περιέχεται στο $[0,T]$ και $\phi_1^n \to \phi_1$ στον $L^2([0,T];\mathbb{R})$. Τότε από τα παραπάνω $\phi_1^n\phi_2 \in C$ και $\phi_1^n\phi_2$ συγκλίνει στο $\phi_1\phi_2$ στο U_T καθώς το n τείνει στο άπειρο.
Έτσι, $\phi_1(\cdot)\phi_2(\star) \in C$.

Γενικεύοντας, θεωρούμε $\phi \in U_T$ και θα δείξουμε ότι $\phi \in C$.
Έστω $(e_j)_j$ πλήρης ορθοκανονική βάση του U με $e_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ για όλα τα j. Αφού $\phi(s) \in U$ για κάθε $s \in [0,T]$,

$$\|\phi\|^2{}_{U_T} = \int_0^T \|\phi(s)\|^2{}_U ds = \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^T < \phi(s), e_j >_U^2 ds.$$

Για κάθε $j \geq 1$ η συνάρτηση $s \to < \phi(s), e_j >_U$ ανήκει στον $L^2([0,T];\mathbb{R})$.
Έτσι,

$$\phi^n(\cdot) := \sum_{j=1}^{n} < \phi(\cdot), e_j >_U e_j$$

ανήκει στο C. Επιπλέον, $\|\phi - \phi^n\|_{U_T}^2 \to 0$ καθώς $n \to 0$ κι έτσι $\phi \in C$. □

Συμπεράσματα:

1. Το γενικευμένο Γκαουσσιανό τυχαίο πεδίο $\{W(\phi),\ \phi \in C_0^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^n)\}$ είναι ένα τυχαίο γραμμικό συναρτησιακό , δηλαδή

$$W(\alpha\phi + \beta\psi) = \alpha W(\phi) + \beta W(\psi)$$

   σχεδόν βέβαια.

2. Η απεικόνιση $\phi \to W(\phi)$ είναι ισομετρία από το $(C_0^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{U_T})$ στον $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Ας θεωρήσουμε τώρα ότι H ένας πραγματικός διαχωρίσιμος χώρος Hilbert με βαθμωτό γινόμενο $< \cdot, \cdot >_H$. Η νόρμα ενός $h \in H$ θα είναι $\|h\|_H$.
Παρατηρήσεις:

1. Η $(W(\phi),\ \phi \in U_T)$ είναι μια ισοκανονική διαδικασία στο U_T.
2. Για $t \geq 0$ και $\phi \in U$, θέτουμε $W_t(\phi) = W(1_{[0,t]}(\cdot)\phi(\star))$. Τότε, η διαδικασία $W = (W_t(\phi),\ t \geq 0, \phi \in U)$ έχει τις ακόλουθες ιδιότητες
   - Για κάθε $\phi \in U$, $\{W_t(\phi),\ t \geq 0\}$ κίνηση Brown με συνδιασπορά $t\|\phi\|_U^2$.
   - Για όλα τα $s, t \geq 0$ και $\phi, \psi \in U$, $E[W_t(\phi)W_s(\psi)] = (s \wedge t) < \phi, \psi >_U$.

3.4.3 Παραδείγματα συνδιασποράς

Ορισμένα παραδείγματα μέτρων συνδιασποράς Λ είναι τα εξής:

Λευκός θόρυβος χώρου-χρόνου
Έστω $\Lambda(dx) = \delta_0(dx)$. Το φασματικό μέτρο του είναι το μέτρο Lebesgue $\mu(dx) = dx$. Τότε, η 3.2 γίνεται

$$E[W(\phi)W(\psi)] = \int_0^\infty dt \int_{\mathbb{R}^n} dx \phi(t,x)\psi(t,x) =< \phi, \psi >_{L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, dt \times dx)} .$$

Άρα, $U_T = L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, dt \times dx)$.

Λείες συνδιασπορές

Έστω μ πεπερασμένα φασματικά μέτρα. Τότε $\Lambda(dx) = f(x)dx$ με f μια ομοιόμορφα συνεχής φραγμένη συνάρτηση.

Έστω $(W(\phi), \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1}))$ λευκός, χωρικά ομογενής Γκαουσσιανός θόρυβος με φασματικό μέτρο μ. Υπάρχει στοχαστική διαδικασία $(B_t(x), (t,x) \in [0,\infty] \times \mathbb{R}^n)$ που ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

1. για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, $(B_t(x), t \geq 0)$ είναι μονοδιάστατη κίνηση Brown

2. $E[B_t(x)B_s(y)] = (t \wedge s)f(x-y)$ για κάθε $s,t \geq 0,\ x,y \in \mathbb{R}^n$

3. για κάθε $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$,
$$W[1_{[0,t]}(\cdot)\phi(\star)] = \int_{\mathbb{R}^n} dx\phi(x)B(t,x),$$
με την έννοια ότι και οι δύο εκφράσεις ορίζουν μια Γκαουσσιανή διαδικασία με ίδια μέση συνάρτηση και συνάρτηση συνδιασποράς.

Απόδειξη. Για σταθερή $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ τέτοια ώστε $\psi \geq 0$, η υποστήριξη της ψ περιέχεται στη μοναδιαία μπάλα του $\mathbb{R}^n$ και $\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)dx = 1$. Για $n \geq 1$, θέτουμε $\psi_n(x) = n^k\psi(nx)$. Τότε, $\psi_n \to \delta_0$ στον $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ και $|\mathcal{F}\psi_n| \leq 1$. Από τις ιδιότητες της f έχουμε ότι $\lim_{n\to\infty}[f \star \psi_n](x) = f(x)$.
Ορίζουμε
$$B_t(x) = \lim_{n\to\infty} W(1_{[0,t]}(\cdot)\psi_n(x+\star)),\ t \in [0,T], \tag{3.5}$$
όπου θεωρίσαμε ότι η επίλυση του W στο U_T και το όριο είναι στον $L^2(\Omega)$.
Θα ελέγξουμε αν το όριο υπάρχει. Για $n,m \geq 0$,
$$E[((W(1_{[0,t]}(\cdot)[\psi_n(x+\star) - \psi_m(x+\star)]))^2] =$$
$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} dz(\psi_n - \psi_m)(x+y)f(y-z)(\psi_n - \psi_m)(x+z) =$$
$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \mu(du)|\mathcal{F}(\psi_n - \psi_m)(u)|^2.$$

$\lim_{n,m\to\infty} \mathcal{F}(\psi_n - \psi_m)(u) = 0$ κατά σημείο και μ πεπερασμένο μέτρο άρα από φραγμένη σύγκλιση Lebesgue, $W(1_{[0,t]}(\cdot)\psi_n(x+\star))$ ακολουθία Cauchy στον $L^2(\Omega)$ για κάθε $t \geq 0$. Ετσι, 3.5 καλά ορισμένη και αποδείχθηκε η πρώτη ιδιότητα.

Για τη δεύτερη ιδιότητα έχουμε

$$E[W(1_{[0,s]}(\cdot)\psi(x+\star))W(1_{[0,t]}(\cdot)\psi(y+\star)) =$$
$$(s\wedge t)\int_{\mathbb{R}^n} dz \int_{\mathbb{R}^n} dw\psi_n(x+z)f(z-w)\psi_n(y+w).$$

f συνεχής και φραγμένη οπότε παίρνοντας όριο έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} E[W(1_{[0,s]}(\cdot)\psi_n(x+\star))W(1_{[0,t]}(\cdot)\psi_n(y+\star))] = (t\wedge s)f(x-y).$$

Τέλος, για την τρίτη ιδιότητα παρατηρούμε ότι λόγω της δεύτερης

$$\begin{aligned} & E\big(\big(\int_{\mathbb{R}^n} dx\phi(x)B(t,x)\big)\big(\int_{\mathbb{R}^n} dy\phi(y)B(s,y)\big)\big) \\ = \quad & (t\wedge s)\big(\int_{\mathbb{R}^n} dx \int_{\mathbb{R}^n} dy\phi(x)\phi(y)f(x-y)\big), \end{aligned}$$

το οποίο συμπίπτει με

$$E[W(1_{[0,s]}(\cdot)\phi(x+\star))W(1_{[0,t]}(\cdot)\phi(y+\star))].$$

Επιπλέον, υποθέτουμε ότι $\mu(dx) = h(x)dx$ με $h \geq 0$ και $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$. $\sqrt{h} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ και επομένως $g := \mathcal{F}(\sqrt{h}) \in L^2(\mathbb{R}^n)$.
Για F λευκό θόρυβο χώρου-χρόνου ορίζουμε

$$B_t(x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} F(ds,dy)g(x-y).$$

Από αυτό προκύπτει μια οικογένεια $(B_t(x), t\geq 0, x\in\mathbb{R}^n)$ συσχετισμένων κινησεων Brown με

$$E[B_t(x)B_s(y)] = (t\wedge s)(g\star\tilde{g})(x-y) = (t\wedge s)f(x-y), \tag{3.6}$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε το ότι $\mathcal{F}h = f$.

Η διαδικασία $(W(\phi), \phi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1}))$ ορίζεται ως

$$W(\phi) = \int_{\mathbb{R}^n} dx \int_0^T B(ds,x)\phi(s,x),$$

το οποίο δείχνει ότι W λείο στη χωρική μεταβλητή. □

Κεφάλαιο 4

Στοχαστικό ολοκλήρωμα του **Walsh**

Στο παρόν κεφάλαιο, το οποίο είναι βασισμένο στις βιβλιογραφίες ([5], [8], [9]), θα μελετήσουμε το στοχαστικό ολοκλήρωμα όπως κατασκευάστηκε από τον J.B. Walsh. Το στοχαστικό ολοκλήρωμα του Walsh ορίζεται ως προς ένα *μέτρο martingale.*
Θα μελετήσουμε αρχικά την κατασκευή του ολοκληρώματος για *στοιχειώδεις* συναρτήσεις, έπειτα για *απλές* και τέλος θα δούμε την επέκταση του στην κλάση των απλών συναρτήσεων. Ξεκινώντας το κεφάλαιο αυτό θα ορίσουμε κάποιες έννοιες απαραίτητες για την κατασκευή του στοχαστικού ολοκληρώματος.

4.1 Worthy μέτρο martingale

Έστω M ένα σ-πεπερασμένο μέτρο martingale.
Το *συναρτησιακό συνδιασποράς* του M ορίζεται ως

$$Q_t(A,B) = < M(A), M(B) >_t .$$

Το Q_t είναι συμμετρικό στα A, B και επίσης για σταθερό A τα $Q_t(A,\cdot)$ και $Q_t(\cdot,A)$ είναι προσθετικές συνολοσυναρτήσεις. Πράγματι αν $B \cap C = \varnothing$ τότε

$$\begin{aligned} Q_t(A, B\cup C) &= < M(A), M(B) + M(C) >_t \\ &= < M(A), M(B) >_t + < M(A), M(C) >_t \\ &= Q_t(A,B) + Q_t(A,C). \end{aligned}$$

Ένα σύνολο $(C \times D \times (s,t]) \subset A \times A \times \mathbb{R}_+$ ονομάζεται *ορθογώνιο.* Ορίζουμε σύνολο συναρτήσεων Q στα ορθογώνια ως

$$Q(C \times D \times (s,t]) = Q_t(C,D) - Q_s(C,D)$$

και αν $C \times D \times (s_i, t_i]$ ξένα για $i = 1, ..., n$ θέτουμε

$$Q(\bigcup_{i=1}^{n} C_i \times B_i \times (s_i,t_i]) = \sum_{i=1}^{n} (Q_{t_i}(C_i,B_i) - Q_{s_i}(A_i,B_i)).$$

Ένα προσημασμένο μέτρο $K(dx\, dy\, ds)$ στο $\mathcal{A}\times\mathcal{A}\times\mathcal{D}$ είναι *θετικά ορισμένο* αν για κάθε φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση f για την οποία το ολοκλήρωμα έχει νόημα,

$$\int_{A\times A\times\mathbb{R}_+} f(x,s)f(y,s)K(dxdyds) \geq 0. \tag{4.1}$$

Για ένα τέτοιο θετικά ορισμένο προσημασμένο μέτρο K ορίζουμε

$$(f,g)_K = \int_{A\times A\times\mathbb{R}_+} f(x,s)g(y,s)K(dxdyds).$$

Από 4.1 έχουμε ότι $(f,f)_K \geq 0$.

Πρόταση 4.1.1. *Έστω K συμμετρικό στα x,y. Ισχύουν οι ανισότητες:*

Schwartz

$$(f,g)_K \leq (f,f)_K^{\frac{1}{2}}(g,g)_K^{\frac{1}{2}}$$

Minkowski

$$(f+g,f+g)_K^{\frac{1}{2}} \leq (f,f)_K^{\frac{1}{2}} + (g,g)_K^{\frac{1}{2}}.$$

Ορισμός 4.1.2. *Worthy* λέγεται ένα μέτρο martingale M αν υπάρχει ένα τυχαίο σ-πεπερασμένο μέτρο

$$K(\Lambda,\omega), \quad \Lambda\in\mathcal{A}\times\mathcal{A}\times\mathcal{B}, \quad \omega\in\Omega,$$

τέτοιο ώστε

- K θετικά ορισμένο και συμμετρικό στα x και y
- για σταθερά A,B $\{K(A\times B\times(0,t]), \quad t\leq 0\}$ προβλέψιμο
- για όλα τα n, $E\{K(A_n\times A_n\times[0,T])\} < \infty$
- για κάθε ορθογώνιο Λ, $|Q(\Lambda)| \leq K(\Lambda)$.

Το K ονομάζεται *κυρίαρχο μέτρο* του M.

Πρόταση 4.1.3. *Έστω $\Delta(A) = \{(x,x) : x\in A\}$ η διαγώνιος του A.*
Ένα worthy μέτρο martingale είναι ορθογώνιο αν και μόνο αν το Q στηρίζεται από το $\Delta(A)\times\mathbb{R}_+$.

Απόδειξη. $Q(B\times C\times[0,t]) =< M(B), M(C) >_t$.

Αν το M είναι ορθογώνιο και $B\cap C = \varnothing$, τότε το $Q(B\times C\times[0,t]) =< M(B), M(C) >_t$ μηδενίζεται και άρα

$$|Q|[A\times(A-\Delta(A))\times\mathbb{R}_+] = 0,$$

δηλαδή *supp* $Q\subset\Delta(A)\times\mathbb{R}_+$.

Αντίστροφα, αν μηδενίζεται για όλα τα ξένα B και C τότε το M είναι ορθογώνιο. □

4.2 Στοιχειώδεις και απλές συναρτήσεις

Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ χώρος πιθανότητας και $(A, \mathcal{A})$ χώρος Lusin.

Ορισμός 4.2.1. Μια συνάρτηση $f(x,s,\omega)$ ονομάζεται *στοιχειώδης* αν είναι της μορφής

$$f(x,s,\omega) = X(\omega) I_{(a,b]}(s) I_B(x), \tag{4.2}$$

όπου $0 \le a < t, \quad X$ φραγμένη και $\mathcal{F}$−μετρήσιμη και $B \in \mathcal{A}$.

Ονομάζεται *απλή* αν είναι πεπερασμένο άθροισμα στοιχειωδών συναρτήσεων. Ως $\mathbf{S}$ θα συμβολίζουμε την κλάση των απλών συναρτήσεων

Ορισμός 4.2.2. Το *προβλέψιμο* σ-πεδίο $\mathbf{P}$ στο $Q \times A \times \mathbb{R}_+$ είναι το σ-πεδίο που παράγεται από την $\mathbf{S}$.
Μια συνάρτηση είναι *προβλέψιμη* αν είναι $\mathbf{P}$−μετρήσιμη.

Ορίζουμε την νόρμα $\|\cdot\|_M$ των προβλέψιμων συναρτήσεων ως

$$\|f\|_M = E[(|f|,|f|)_K^{\frac{1}{2}}].$$

Χρησιμοποιήσαμε την απόλυτη τιμή της f για να ορίσουμε την $\|f\|_M$ έτσι ώστε

$$(f,f)_Q \le \|f\|_M^2.$$

Έστω $f \in \mathbf{P_M}$ η κλάση όλων των προβλέψιμων f για τις οποίες $\|f\|_M < \infty$.

Πρόταση 4.2.3. *Έστω $f \in \mathbf{P_M}$ και $B = \{(x,s) : |f(x,s)| \ge \epsilon\}$. Τότε,*

$$E[K(B \times A \times [0,T])] \le \frac{1}{\epsilon}\|f\|_M E[K(A \times A \times [0,T])].$$

Απόδειξη.

$$\begin{aligned} \epsilon E[K(B \times A \times [0,T])] &\le E[\int |f(x,t)| K(dx\, dy\, dt)] \\ &= E[(|f|,1)_K]. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Schwartz έχουμε

$$\begin{aligned} E[(|f|,1)_K] &\le E[(|f|,|f|)_K^{\frac{1}{2}} (1,1)_K^{\frac{1}{2}}] \\ &= E[(|f|,|f|)_K^{\frac{1}{2}} K(A \times A \times [0,T])^{\frac{1}{2}}] \\ &\le \|f\|_M E[K(A \times A \times [0,T])^{\frac{1}{2}}]. \end{aligned}$$

□

Πρόταση 4.2.4. *Το* $\mathbf{S}$ *είναι πυκνό στο* $\mathbf{P_M}$.

Απόδειξη. Αν $f \in \mathbf{P_m}$, έστω

$$f_N(x,s) = \begin{cases} f(x,s) & \alpha\nu \quad |f(x,s)| < N \\ 0 & \alpha\lambda\lambda\iota\acute{\omega}\varsigma. \end{cases}$$

Τότε, $\|f - f_N\|_M^2 = E[\int |f(x,s) - f_N(x,s)||f(y,s) - f_N(y,s)|K(dx\, dy\, ds)]$ το οποίο από μονότονη σύγκλιση πάει στο μηδέν.
Έτσι οι φραγμένες συναρτήσεις είναι πυκνές.

Αν f βαθμιδωτή συνάρτηση, δηλαδή αν υπάρχει $0 \le t_0 < t_1 < ... < t_n$ τέτοιο ώστε $t \to f(x,t)$ είναι σταθερό σε κάθε $(t_j, t_{j+1}]$, τότε η f μπορεί να προσεγγιστεί ομοιόμορφα από απλές συναρτήσεις. Έτσι, οι απλές συναρτήσεις είναι πυκνές στις βαθμιδωτές συναρτήσεις.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι το $K(A \times A \times ds)$ είναι απόλυτα συνεχές ως προς το μέτρο Lebesgue. Αν f φραγμένη και προβλέψιμη θέτουμε

$$f_n(x,s,\omega) = 2^{-n} \int_{(k-1)2^{-n}}^{k1^{-n}} f(x,u,\omega)du,$$

αν $k2^{-n} \le s < (k+1)2^{-n}$.
Κρατάμε σταθερά τα ω και x και τότε $f_n(x,s,\omega) \to f(x,s,\omega)$ για σχεδόν κάθε s από το θεώρημα σύγκλισης martingale. Έτσι, $\|f - f_n\|_M \to 0$. □

4.3 Ολοκλήρωμα του Walsh

Ορισμός 4.3.1. *Τετραγωνικά ολοκληρώσιμη* ονομάζεται μια μετρήσιμη συνάρτηση f, για την οποία το ολοκλήρωμα του τετραγώνου της απόλυτης τιμής της είναι πεπερασμένο, δηλαδή

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty.$$

Αν $f(x,s,\omega) = X(\omega) I_{(a,b]}(s) I_B(x)$ μια στοιχειώδης συνάρτηση τότε ορίζουμε μέτρο martingale $f \cdot M$ ως

$$f \cdot M_t(B) = X(\omega)(M_{t\wedge b}(C \cap B) - M_{t\wedge a}(C \cap B)). \tag{4.3}$$

Λήμμα 4.3.2. *Το* $f \cdot M$ *είναι ένα worthy μέτρο martingale. Ως*

$$Q_{f\cdot M}(dx\, dy\, ds) = f(x,s) f(y,s) Q_M(dx\, dy\, ds) \tag{4.4}$$

$$K_{f\cdot M}(dx\, dy\, ds) = |f(x,s) f(y,s)| K_M(dx\, dy\, ds) \tag{4.5}$$

ορίζονται το μέτρο συνδιασποράς και το κυρίαρχο μέτρο αντίστοιχα.

Επίσης,

$$E((f \cdot M_t(B))^2) \le \|f\|_M^2 \tag{4.6}$$

για όλα τα $B \in \mathcal{A}$, $t \le T$.

Απόδειξη. Το $f \cdot M_t(B)$ είναι προσαρμοσμένο αφού $X \in \mathcal{F}$, είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμο και martingale. Είναι αριθμήσιμα προσθετικό στο L^2 και επιπλέον

$$\begin{aligned} f \cdot M_t(B) f \cdot M_t(D) &- \int_{B \times D \times [0,t]} f(x,s) f(y,s) Q_M(dx\, dy\, ds) \\ &= X^2[(M_{t\wedge b}(C \cap B) - M_{t\wedge a}(C \cap B))(M_{t\wedge b}(C \cap D) - M_{t\wedge a}(C \cap D)) \\ &- < M(C \cap B), M(C \cap B) >_{t\wedge b} + < M(C \cap D), M(C \cap D) >_{t\wedge a}] \end{aligned}$$

το οποίο είναι martingale. Έτσι αποδεικνύεται το 4.4 και προκύπτει άμεσα το 4.5 αφού $K_{f \cdot M}$ είναι θετικό και θετικά ορισμένο.

Για τη σχέση 4.6 έχουμε

$$\begin{aligned} E((f \cdot M_t(B))^2) &= E[X^2(M_{t\wedge b}(C \cap B) - M_{t\wedge a}(C \cap B))^2] \\ &= E[X^2[Q([0, t \wedge b] \times (C \cap B) \times (C \cap B) \\ &- Q([0, t \wedge a] \times (C \cap B) \times (C \cap B)]] \\ &= E[\int_{(C\cap B)\times(C\cap B)\times[0,t]} f(x,s) f(s,y) Q_M(dx\, dy\, ds)] \\ &\leq E[\int_{(C\cap B)\times(C\cap B)\times[0,t]} |f(x,s)||f(s,y)||Q_M(dx\, dy\, ds)|] \\ &\leq E[\int_{(C\cap B)\times(C\cap B)\times[0,t]} |f(x,s)||f(s,y)||K_M(dx\, dy\, ds)|] \\ &= \|f\|_M^2. \end{aligned}$$

□

Το $f \cdot M$ για $f \in \mathbf{S}$ ορίζεται από γραμμικότητα.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι $f \in \mathbf{P_M}$. Από την **;;** υπάρχει $f_n \in \mathbf{S}$ τέτοια ώστε $\|f - f_n\|_M \to 0$. Επίσης

$$\begin{aligned} E[(f_m \cdot M_t(B) - f_n \cdot M_t(B))^2] &= E[\int_{B\times B\times[0,t]} (f_n - f_m)(s,x)(f_n - f_m) Q_M(dx\, dy\, ds)] \\ &\leq E[\int_{B\times B\times[0,t]} |(f_n - f_m)(s,x)||(f_n - f_m)||Q_M(dx\, dy\, ds)|] \\ &\leq E[\int_{B\times B\times[0,t]} |(f_n - f_m)(s,x)||(f_n - f_m)||K_M(dx\, dy\, ds)|] \\ &\leq \|f_n - f_m\|_M^2 \to 0 \end{aligned}$$

καθώς m, $n \to \infty$. Άρα $(f_n \cdot M_t(B))$ Cauchy στον $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ κι έτσι συγκλίνει στον L^2 σε martingale το οποίο θα καλούμε $f \cdot M_t(B)$. Το όριο είναι ανεξάρτητο της ακολουθίας f_n.

Θεώρημα 4.3.3. *Αν $f \in \mathbf{P_M}$ τότε το $f \cdot M$ είναι worthy μέτρο martingale. Είναι ορθογώνιο, αν είναι και το M.*
Το μέτρο συνδιασποράς και το κυρίαρχο μέτρο δίνονται αντίστοιχα από

$$Q_{f\cdot M}(dx\, dy\, ds) = f(x,s) f(y,s) Q_M(dx\, dy\, ds) \tag{4.7}$$

$$K_{f\cdot M}(dx\,dy\,ds) = |f(x,s)f(y,s)|K_M(dx\,dy\,ds). \tag{4.8}$$

Επιπλέον, αν $g \in \mathbf{P_M}$ *και* $B, C \in \mathcal{A}$ *τότε*

$$< f \cdot M(B), g \cdot M(C) >_t = \int_{B\times C\times[0,t]} f(x,s)f(y,s)Q_M(dx\,dy\,ds) \tag{4.9}$$

και

$$E[(f \cdot M_t(B))^2] \le \|f\|_M^2. \tag{4.10}$$

Απόδειξη. Το $f \cdot M_t(B)$ είναι το L^2 όριο των martingales $f_n \cdot M(B)$ και άρα είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμο martingale.
Για κάθε n το

$$f_n \cdot M_t(B)\ f_n \cdot M_t(C) - \int_{\mathbb{B}\times C\times[0,t]} f_n(x,s)f_n(y,s)Q_M(dx\,dy\,ds) \tag{4.11}$$

είναι martingale. Καθένα από τα $f_n \cdot M(B)$ και $f_n \cdot M(C)$ συγκλίνει στον L^2 κι επομένως το γινόμενο τους συγκλίνει στον L^1.
Επιπλέον,

$$\begin{aligned}
& E[|\int_{B\times C\times[0,t]}(f_n(x,s)f_n(y,s) - f(x,s)f(y,s))Q_M(dx\,dy\,ds)|] \\
= \ & E[\int_{A\times A\times[0,T]} |f_n(x)||f_n(y) - f(y)|K_M(dx\,dy\,ds)] \\
+ \ & E[\int_{A\times A\times[0,T]} |f_n(x) - f(x)||f(y)|K_M(dx\,dy\,ds)] \\
\le \ & E[(|f_n|, |f - f_n|)_K + (|f - f_n|, |f|)_K]
\end{aligned}$$

και απο Schwartz

$$\le (\|f_n\|_M + \|f\|_M)\|f_n - f\|_M \to 0.$$

Έτσι, η έκφραση 4.11 συγκλίνει στον L^1 στο

$$f \cdot M_t(B)\ f \cdot M_t(C) - \int_{\mathbb{B}\times C\times[0,t]} f(x,s)f(y,s)Q_M(dx\,dy\,ds)$$

το οποίο επομένως είναι martingale.
Το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι προβλέψιμο κι επομένως πρέπει να είναι ίσο με $< f \cdot M(B), f \cdot M(C) >_t$ το οπίο επαληθεύει την 4.7 και ακολουθεί και η 4.8.

Αν $g = f$ αποδεικνύεται η 4.9. Τότε η 4.10 προκύπτει από την 4.8.

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι το $f \cdot M_t$ είναι μέτρο martingale ελέγχοντας την αριθμήσιμη προσθετικότητα.
Αν $B_n \subset A$, $B_n \downarrow \phi$ τότε

$$E[f \cdot M_t(B_n)^2] \le E[\int_{B_n\times B_n\times[0,t]} |f(x,s)f(y,s)|K(dx\,dy\,ds)]$$

το οποίο πηγαίνει στο μηδέν από μονότονη σύγκλιση.

Αν M ορθογώνιο, το Q_M κάθεται στο $\Delta(A) \times [0,T]$ άρα, από την 4.7 και το $Q_{f\cdot M}$, κι επομένως $f \cdot M$ ορθογώνιο. $\square$

Τώρα που το στοχαστικό ολοκλήρωμα ορίστηκε ως μέτρο martingale, το ορίζουμε ως εξής

$$\int_{B\times[0,t]} f dM = f\cdot M_t(B)$$

και

$$\int_{A\times[0,t]} f dM = f\cdot M_t(A)$$

όπου

$$\int f dM = \lim_{t\to\infty} f\cdot M_t(A).$$

4.3.1 Αλλαγή σειράς ολοκλήρωσης

Για να αλλάξουμε τη σειρά ολοκλήρωσης μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μια μορφή του στοχαστικού θεωρήματος Fubini.
Γενικά το θεώρημα Fubini λέει ότι αν A, B πλήρεις μετρικοί χώροι, $f(x,y)$ $A\times B-$μετρήσιμη και

$$\int_{A\times B} |f(x,y)| d(x,y) < \infty,$$

όπου το ολοκλήρωμα το παίρνουμε ως προς ένα μέτρο γινομένου στο χώρο πάνω από το $A\times B$, τότε

$$\int_A\int_B f(x,y)dydx = \int_B\int_A f(x,y)dxdy = \int_{A\times B} f(x,y)d(x,y).$$

Στην περίπτωση τώρα του στοχαστικού ολοκληρώματος, θα μελετήσουμε μια μορφή του θεωρήματος Fubini στην οποία το ένα ολοκλήρωμα είναι στοχαστικό και το άλλο είναι ένα ολοκλήρωμα τυπικού είδους ως προς ένα πεπερασμένο μέτρο.

Έστω $(G,\mathcal{G},\mu)$ πεπερασμένος χώρος μέτρου και M μέτρο martingale με κυρίαρχο μέτρο K.

Θεώρημα 4.3.4. *Έστω $f(x,s,\omega,\lambda)$, $\quad x\in A,\ s\geq 0,\ \omega\in\Omega,\ \lambda\in G$ μια $\mathbf{P}\times\mathcal{G}-$μετρήσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι*

$$E[\int_{A\times A\times[0,T]\times G} |f(x,s,\omega,\lambda)f(y,s,\omega\lambda)| K(dx\,dy\,ds)\mu(d\lambda)] < \infty. \tag{4.12}$$

Τότε,

$$\int_G[\int_{A\times[0,t]} f(x,s,\lambda)M(dxds)]\mu(d\lambda) = \int_{A\times[0,t]}[\int_G f(x,s,\lambda)\mu(d\lambda)]M(dxds). \tag{4.13}$$

Απόδειξη. Αν $f(x,s,\omega,\lambda) = X(\omega)I_{(a,b]}(s)I_B(x)g(\lambda)$ τότε και οι δύο πλευρές της 4.13 είναι ίσες με

$$X(M_{t\wedge b}(B) - M_{t\wedge a}(B))\int g(\lambda)\mu(d\lambda).$$

Και οι δύο πλευρές είναι προσθετικές στην f επομένως ισχύει και για πεπερασμένα αθροίσματα τέτοιων f.

Αν f είναι $\mathbf{P}\times\mathcal{G}$–μετρήσιμη και ικανοποιεί την 4.13 υπάρχει ακολουθία (f_n) τέτοιων συναρτήσεων τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} E[\int |f(x,s,\lambda) &- f_n(x,s,\lambda)||f(y,s,\lambda)-f_n(y,s,\lambda)|K(dx\,dy\,ds)\mu(d\lambda)] \\ &= \int \|f(\lambda)-f_n(\lambda)\|_M^2\mu(d\lambda)\to 0. \end{aligned}$$

Το $\int_G f(x,s,\lambda)\mu(d\lambda)$ είναι $\mathbf{P}$–μετρήσιμο οπότε το ολοκλήρωμα έχει νόημα υπό την προυπόθεση ότι

$$\|\int f(\lambda)\mu(d\lambda)\|_M < \infty.$$

Στη δεξιά πλευρά της 4.13 μπορούμε να πάρουμε μια υπακολουθία ώστε να έχουμε

$$\|f(\lambda)-f_n(\lambda)\|_M \to 0$$

για σχεδόν κάθε λ.
Έτσι

$$\int f_n(\lambda)dM \to \int f(\lambda)dM$$

στον L^2 και άρα είναι μέτρο. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Fubini βλέπουμε ότι

$$\int f_n(\omega,\lambda)dM \to \int f(\omega,\lambda)dM$$

στο $P\times\mu$–μέτρο άρα το ολοκλήρωμα είναι μετρήσιμο στο (ω,λ).
Για σταθερό ω το $\int f(\lambda)dM$ είναι μ–μετρήσιμο και άρα το ολοκλήρωμα στην αριστερή μεριά της 4.13 έχει νόημα.

Θα δείξουμε τώρα ότι και οι δύο πλευρές συγκλίνουν καθώς $n\to\infty$.
Θέτουμε $g_n = f - f_n$.

$$\begin{aligned} \|\int g_n(\lambda)\mu(d\lambda)\|_M &= E[\int_{A\times A\times[0,T]}\int_G g_n(x,s,\lambda)\mu(d\lambda)K(dx\,dy\,ds)\int_G g_n(y,s,\lambda')\mu(d\lambda')] \\ &= \int_{G\times G} E[(g_n(\lambda),g_n(\lambda'))_K]\mu(d\lambda)\mu(d\lambda') \end{aligned}$$

από Schwartz

$$\begin{aligned} \le \int_{G\times G} E[[(|g_n(\lambda)|,| \quad g_n &\quad (\lambda)|)_K]]^{\frac{1}{2}} E[[(|g_n(\lambda')|,|g_n(\lambda')|)_K]]^{\frac{1}{2}}\mu(d\lambda)\mu(d\lambda') \\ &= (\int_G \|g_n(\lambda)\|_M\mu(d\lambda))^2 \\ &\le \mu(G)\int_G \|f(\lambda)-f_n(\lambda)\|_M^2 d\lambda \end{aligned}$$

το οποίο τείνει στο μηδέν από 4.12. Έτσι η δεξιά πλευρά της 4.13 συγκλίνει.

Στην αριστερή πλευρά έχουμε

$$\begin{aligned} E[\int_G (& \int g_n(x,s,\lambda)M(dxds))^2\mu(d\lambda)] \\ &= \int_G E[(\int g_n(x,s,\lambda)M(dxds))^2]\mu(d\lambda) \\ &\leq \int_G \|g_n(\lambda)\|_M^2 \mu(d\lambda) \to 0. \end{aligned}$$

Επιλέγοντας υπακολουθία βλέπουμε ότι για σχεδόν κάθε ω,

$$\int_G (\int g_n(x,s,\lambda)M(dxds))^2\mu(d\lambda) \to 0$$

άρα

$$\int_G (\int f - f_n)dM)d\mu \to 0$$

κι έτσι και η αριστερή πλευ΄ρα της 4.13 συγκλίνει.

$\square$

Κεφάλαιο 5

Εξίσωση κύματος και εξίσωση cable

Στο παρόν κεφάλαιο θα μελετήσουμε την εξίσωση κύματος καθώς και την εξίσωση cable όπως παρουσιάζονται στις ([4], [14], [15]).

Η *εξίσωση κύματος* είναι μια υπερβολική μερική διαφορική εξίσωση και έχει εφαρμογές τόσο στη βιολογία όσο και στη φυσική. Ένα παράδειγμα είναι η μελέτη κίνησης ενός κλώνου DNA. Ένα μόριο DNA μπορούμε να το δούμε ως μια ελαστική χορδή της οποίας το μήκος είναι ουσιαστικά απείρως μακρύ σε σύγκριση με τη διάμετρο της.

Όσον αφορά την *εξίσωση cable* πρόκειται για μια παραβολική εξίσωση. Ένα παράδειγμα εφαρμογής της είναι η νευροφυσιολογία. Αν θεωρήσουμε τα νεύρα ως λεπτούς μακριούς κυλίνδρους τότε αυτά συμπεριφέρονται ως ηλεκτρικά καλώδια.

5.1 Εξίσωση κύματος

Θεωρούμε μια χορδή άπειρου μήκους η οποία ταλαντώνεται από την επίδραση λευκού θορύβου και αρχικά βρίσκεται σε ηρεμία.
Αν $v(t,x)$ η θέση της χορδής τότε

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dot{W},\ t > 0,\ x \in \mathbb{R} \\ v(0,x) = 0,\ x \in \mathbb{R} \\ \frac{\partial v}{\partial t}(0,x) = 0,\ x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{5.1}$$

5.1.1 Ασθενής μορφή

Ο λευκός θόρυβος είναι μη ομαλός και η εξίσωση δεν έχει λύση. Μπορούμε να την ξαναγράψουμε σαν μια ολοκληρωτική εξίσωση η οποία θα μπορεί να λυθεί. Αυτή θα ονομάζεται *ασθενής μορφή* της εξίσωσης.

Για να το κάνουμε αυτό αρχικά πολλαπλασιάζουμε με μια C^∞ συνάρτηση $\phi(t,x)$ συμπαγούς υποστήριξης και ολοκληρώνουμε στο $\mathbb{R} \times [0,T]$, όπου $T > 0$ σταθερό. Έτσι, έχουμε

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} v_{tt}(t,x)\phi(t,x)dxdt = \int_0^T \int_{\mathbb{R}} v_{xx}(t,x)\phi(t,x)dxdt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \dot{W}\phi(t,x)dxdt.$$

Με ολοκλήρωση κατά μέρη το αριστερό μέλος γίνεται

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} v_{tt}(t,x)\phi(t,x)dxdt = \int_{\mathbb{R}} [v_t(t,x)\phi(t,x)]_0^T dx - \int_{\mathbb{R}} [v(t,x)\phi_t(t,x)]_0^T dx + \int_0^T \int_{\mathbb{R}} v(t,x)\phi_{tt}(t,x)dxdt$$

και λόγω των αρχικών συνθηκών

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} v_{tt}(t,x)\phi(t,x)dxdt = \int_{\mathbb{R}} v_t(T,x)\phi(T,x)dx - \int_{\mathbb{R}} v(T,x)\phi_t(T,x)dx + \int_0^T \int_{\mathbb{R}} v(t,x)\phi_{tt}(t,x)dxdt.$$

Ομοίως,

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_{\mathbb{R}} v_{xx}(t,x)\phi(t,x)dxdt &= \int_0^T [v_x(t,x)\phi(t,x)]_{\mathbb{R}} dt - \int_0^T \int_{\mathbb{R}} v_x(t,x)\phi_x(t,x)dxdt \\
&= \int_0^T [v_x(t,x)\phi(t,x)]_{\mathbb{R}} dt - \int_0^T [v(t,x)\phi_x(t,x)]_{\mathbb{R}} dt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}} v(t,x)\phi_{xx} dxdt \\
&= \int_0^T \int_{\mathbb{R}} v(t,x)\phi_{xx} dxdt
\end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω και παίρνοντας $\phi(T,x) = \phi_t(T,x) = 0$ έχουμε

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} v(t,x)[\phi_{tt}(t,x) - \phi_{xx}(t,x)]dxdt = \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \phi(t,x)\dot{W}(t,x)dxdt.$$

Ορισμός 5.1.1. Θα λέμε ότι η $v(t,x)$ είναι *ασθενής λύση* της παραπάνω εξίσωσης αν είναι τοπικά ολοκληρώσιμη και αν για όλα τα $T > 0$ και όλες της C^∞ συναρτήσεις $\phi(t,x)$ συμπαγούς υποστήριξης για τις οποίες $\phi(T,x) = \phi_t(T,x) = 0$, για κάθε x, έχουμε

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} v(t,x)[\phi_{tt}(t,x) - \phi_{xx}(t,x)]dxdt = \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \phi dW. \tag{5.2}$$

Θεώρημα 5.1.2. *Υπάρχει μοναδική συνεχής λύση της 5.2 η οποία είναι η εξής:*

$$v(t,x) = \frac{1}{2}W\left(\frac{t-x}{\sqrt{2}}, \frac{t+x}{\sqrt{2}}\right),$$

όπου W κίνηση Brown.

Απόδειξη. Μοναδικότητα.
Έστω v_1, v_2 συνεχείς κι έστω ότι ικανοποιούν την 5.2, τότε η διαφορά τους $u = v_2 - v_1$ ικανοποιεί

$$\iint u(t,x)[\phi_{tt}(t,x) - \phi_{xx}(t,x)]dxdt = 0.$$

Έστω $f(t,x)$ C^∞ συνάρτηση συμπαγούς υποστήριξης στο $\mathbb{R} \times (0,T)$. Υπάρχει μια $\phi \in C^\infty$ με $\phi(T,x) = \phi_t(T,x) = 0$ τέτοια ώστε $\phi_{tt} - \phi_{xx} = f$. Αν $c(t,x;t_0,x_0)$ δείκτρια συνάρτηση του

$$\{(t,x) : t < t_0, x_0 + t - t_0 < x < x_0 + t_0 - t\}$$

τότε

$$\phi(t_0,x_0) = \int_{\mathbb{R}} \int_0^T f(t,x)c(t,x;t_0,x_0)dxdt.$$

Έτσι,

$$\iint u(t,x)f(t,x)dxdt = 0$$

και άρα $u = 0$ *δηλαδή* $v_1 = v_2$.

Ύπαρξη.
Θέτω $u = \frac{(t-x)}{\sqrt{2}}$, $v = \frac{(t+x)}{\sqrt{2}}$ *και* $\tilde{\phi}(v,u) = \phi(t,x)$ *και* $\tilde{w}(dudv) = w(dxdt)$. *Τότε* $\phi_{tt} - \phi_{xx} = 2\tilde{\phi}_{uv}$.

Ορίζουμε $R(v,u;v_0,u_0) = I_{u \le u_0, v \le v_0}$ *κι έτσι*

$$\tilde{v}(v,u) = \frac{1}{2}\iint_{u'+v'>0} R(v',u';v,u)\tilde{w}(du'dv').$$

Η v *ικανοποιεί την 5.2 αν και μόνο αν*

$$\iint_{u'+v'>0}[\iint_{u+v>0}\frac{1}{2}R(v,u;v',u')\tilde{w}(dudv)]2\tilde{\phi}_{uv}(u',v')du'dv' - \iint_{u+v>0}\tilde{\phi}(u,v)\tilde{w}(dudv) = 0.$$

Αλλάζοντας τη σειρά ολοκλήρωσης έχουμε

$$\iint_{u+v>0}[\int_v^\infty\int_u^\infty \tilde{\phi}(v',u')du'dv' - \tilde{\phi}(v,u)]\tilde{w}(dudv) = 0$$

αφού ο όρος στις αγκύλες μηδενίζεται καθώς η $\tilde{\phi}$ *έχει συμπαγή υποστήριξη.*

□

5.2 Εξίσωση cable

Έστω W λευκός θόρυβος σε χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{U}, P)$, $(\mathcal{U}_t)$ διήθηση τέτοια ώστε η W_t να είναι προσαρμοσμένη σε αυτήν και αν $A \subset [t,\infty)\times\mathbb{R}$ η $W(A)$ είναι ανεξάρτητη της $(\mathcal{U}_t)$. Τότε θεωρούμε την εξίσωση

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u + f(t,u)\dot{W}, \quad t>0,\ 0<x<L \\ \frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,L) = 0, \quad t>0 \\ u(0,x) = u_0(x), \quad t>0. \end{cases} \tag{5.3}$$

Υποθέτουμε ότι η u_0 είναι $\mathcal{U}_0$−μετρήσιμη, η $E[u_0(x)^2]$ είναι φραγμένη κι ότι η f ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz, υπάρχει δηλαδή σταθερά K τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} |f(t,y) - f(t,x)| &\le K|y-x|, \\ |f(t,y)| &\le K(1+t)(1+|y|) \end{aligned}$$

για όλα τα $x,y \in [0,L]$ και $t>0$.
Η ομογενής μορφή της 5.3 ονομάζεται *εξίσωση cable.*

Η συνάρτηση Green για αυτήν είναι:

$$G_t(x,y) = \frac{e^{-t}}{\sqrt{4\pi t}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}[exp\big(-\frac{(y-x-2nL)^2}{4t}\big) + exp\big(-\frac{(y+x-2nL)^2}{4t}\big)]. \tag{5.4}$$

Πρόταση 5.2.1. *Για την παραπάνω Green ισχύουν τα εξής:*

1. $\int_0^L G_s(x,y)G_t(y,z)dy = G_{s+t}(x,z)$,
2. $G_t(x,y) = G_t(y,x)$,
3. *για κάθε* $T > 0$ *υπάρχει σταθερά* C_T *τέτοια ώστε*

$$G_t(x,y) \leq \frac{C_t}{\sqrt{t}} exp\Big(-\frac{|y-x|^2}{4t} - t\Big).$$

Απόδειξη. 1.

2.

$$G_t(x,y) = \frac{e^{-t}}{\sqrt{4\pi t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [exp\Big(-\frac{(y-x-2nL)^2}{4t}\Big) + exp\Big(-\frac{(y+x-2nL)^2}{4t}\Big)]$$

και

$$G_t(y,x) = \frac{e^{-t}}{\sqrt{4\pi t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [exp\Big(-\frac{(x-y-2nL)^2}{4t}\Big) + exp\Big(-\frac{(y+x-2nL)^2}{4t}\Big)].$$

Παρατηρούμε ότι για $n = |k|$ και $n = -|k|$ όπου $k \in \mathbb{R}$ στη $G_t(x,y)$ θα εμφανίζεται το εξής άθροισμα

$$exp\Big(-\frac{(y-x-2|k|L)^2}{4t}\Big)+exp\Big(-\frac{(y+x-2|k|L)^2}{4t}\Big)+exp\Big(-\frac{(y-x+2|k|L)^2}{4t}\Big)+exp\Big(-\frac{(y+x+2|k|L)^2}{4t}\Big).$$

Ομοίως στη $G_t(y,x)$ θα έχουμε το

$$\begin{aligned} & exp\Big(-\frac{(x-y-2|k|L)^2}{4t}\Big) + exp\Big(-\frac{(y+x-2|k|L)^2}{4t}\Big) + exp\Big(-\frac{(x-y+2|k|L)^2}{4t}\Big) + exp\Big(-\frac{(y+x+2|k|L)^2}{4t}\Big) = \\ = \ & exp\Big(-\frac{(y-x-2|k|L)^2}{4t}\Big) + exp\Big(-\frac{(y+x-2|k|L)^2}{4t}\Big) + exp\Big(-\frac{(y-x+2|k|L)^2}{4t}\Big) + exp\Big(-\frac{(y+x+2|k|L)^2}{4t}\Big) = \\ = \ & G_t(x,y). \end{aligned}$$

□

Πρόταση 5.2.2. *Ορίζουμε την* $G_t(\phi,y) = \int_0^L G_t(x,y)\phi(x)dx$, *με* $G_0(\phi,y) = \phi(y)$, *για κάθε συνάρτηση* ϕ *στο* $[0,L]$ *για την οποία υπάρχει το ολοκλήρωμα. Τότε*

$$G_t(\phi,y) = \phi(y) + \int_0^t G_s(\phi'' - \phi, y)ds$$

για όλες τις συναρτήσεις ελέγχου ϕ *για τις οποίες* $\phi'(0) = \phi'(L) = 0$.

Απόδειξη. Γράφουμε $G_t(x,y) = G(t,x,y)$. Η $G(t,x,y)$ ικανοποιεί την ομογενή εξίσωση cable άρα

$$G_t(t,x,y) = G_{xx}(t,x,y) - G(t,x,y)$$

και $G_x(t,0,y) = G_x(t,L,y) = 0$.

Πολλαπλασιάζουμε με τη $\phi(x)$ και ολοκληρώνουμε

$$\int_0^L \int_0^t \phi(x) G_s(s,x,y) ds dx = \int_0^L \int_0^t \phi(x) G_{xx}(s,x,y) ds dx - \int_0^L \int_0^t \phi(x) G(s,x,y) ds dx.$$

Όμως,

$$\begin{aligned}
\int_0^L \int_0^t \phi(x) G_s(s,x,y) ds dx &= \int_0^L [G(s,x,y)\phi(x)]_0^t dx \\
&= \int_0^L (G(t,x,y) - G(0,x,y))\phi(x) dx \\
&= G_t(\phi,y) - \phi(y)
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
\int_0^t \int_0^L G_{xx}(s,x,y)\phi(x) dx ds &= \int_0^t [G_x(s,x,y)\phi(x)]_0^L ds - \int_0^t \int_0^L G_x(s,x,y)\phi'(x) dx ds \\
&= \int_0^t G_x(s,L,y)\phi(L) - G_x(s,0,y)\phi(0) ds - \int_0^t \int_0^L G_x(s,x,y)\phi'(x) dx \\
&= -\int_0^t [G(s,x,y)\phi'(x)]_0^L ds + \int_0^t \int_0^L G(s,x,y)\phi''(x) dx ds \\
&= \int_0^t \int_0^L G(s,x,y)\phi''(x) dx ds.
\end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
G_t(\phi,y) - \phi(y) &= \int_0^t \int_0^L G(s,x,y)\phi''(x) dx ds - \int_0^L \int_0^t \phi(x) G(s,x,y) ds dx \\
&= \int_0^t G_s(\phi'',y) ds - \int_0^t G_s(\phi,y) ds \\
&= \int_0^t G_s(\phi'' - \phi, y) ds.
\end{aligned}$$

□

5.2.1 Ασθενής μορφή

Έστω $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$ με $\phi'(0) = \phi'(L) = 0$. Για να πάρουμε την ασθενή μορφή της 5.3 την πολλαπλασιάζουμε αρχικά με $\phi(x)$ κι έχουμε:

$$u_t(t,x)\phi(x) = u_{xx}(t,x)\phi(x) - u(t,x)\phi(x) + f(t,u)\dot{W}\phi(x). \tag{5.5}$$

Έπειτα, ολοκληρώνουμε και τα δύο μέλη.

Ξεκινώντας με το αριστερό μέλος έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_0^L \int_0^t u_s(s,x)\phi(x) ds dx &= \int_0^L [u(s,x)\phi]_0^t dx \\
&= \int_0^L u(t,x)\phi(x) dx - \int_0^L u_0(x)\phi(x) dx
\end{aligned}$$

και αντίστοιχα για το δεξί

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \int_0^L u_{xx}(s,x)\phi(x)dxds + \int_0^t \int_0^L (-u(s,x)\phi(x) + f(s,u)\dot{W}\phi(x))dxds = \\
=\ &\int_0^t [u_x(s,x)\phi(x)]_0^L ds - \int_0^t \int_0^L u_x(s,x)\phi'(x)dxds + \int_0^t \int_0^L (-u(s,x)\phi(x) + f(s,u)\dot{W}\phi(x))dxds \\
=\ &\int_0^t u_x(t,L)\phi(L) - u_x(t,0)\phi(0)ds - \int_0^t [u(s,x)\phi'(x)]_0^L ds + \int_0^t \int_0^L u(s,x)\phi''(x)dxds \\
+\ &\int_0^t \int_0^L (-u(s,x)\phi(x) + f(s,u)\dot{W}\phi(x))dxds \\
=\ &-\int_0^t (u(t,L)\phi'(L) - u(t,0)\phi'(0))ds + \int_0^t \int_0^L u(s,x)\phi''(x)dxds \\
+\ &\int_0^t \int_0^L (-u(s,x)\phi(x) + f(s,u)\dot{W}\phi(x))dxds \\
=\ &\int_0^t \int_0^L u(s,x)\phi''(x)dxds + \int_0^t \int_0^L (-u(s,x)\phi(x) + f(s,u)\dot{W}\phi(x))dxds.
\end{aligned}$$

Έτσι, μετά την ολοκλήρωση η 5.5 γίνεται:

$$\int_0^L (u(t,x) - u_0(x))\phi(x)dx = \int_0^t \int_0^L u(s,x)(\phi''(x) - \phi(x))dxds + \int_0^t \int_0^L f(s,u)\phi(x)W(dxds) \tag{5.6}$$

η οποία είναι η ασθενής μορφή της 5.3.

Η σχέση αυτή μπορεί να επεκταθεί και σε λείες συναρτήσεις δύο μεταβλητών, $\phi(t,x)$, τέτοιες ώστε $\phi_x(t,0) = \phi_x(t,L) = 0$ για κάθε t.
Για να γίνει αυτό πολλαπλασιάζουμε την 5.3 με $\phi(t,x)$ κι έπειτα ολοκληρώνουμε.
Τότε, για το αριστερό μέλος έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_0^L \int_0^t u_s(s,x)\phi(s,x)dsdx &= \int_0^L [u(s,x)\phi(s,x)]_0^t dx - \int_0^L \int_0^t u(s,x)\phi_s(s,x)dsdx \\
&= \int_0^L u(s,t)\phi(s,t) - u_0(x)\phi(0,x)dx - \int_0^L \int_0^t u(s,x)\phi_s(s,x)dsdx
\end{aligned}$$

και για το δεξί

$$
\begin{aligned}
\int_0^t \int_0^L u_{xx}(s,x)\phi(s,x)dxds &= \int_0^t [u_x(s,x)\phi(s,x)]_0^L ds - \int_0^t \int_0^L u_x(s,x)\phi_x(s,x)dxds \\
&- \int_0^t \int_0^L u(s,x)\phi(s,x)dxds + \int_0^t \int_0^L f(s,u)\dot{W}\phi(s,x)dsdx \\
&= -\int_0^t \int_0^L u_x(s,x)\phi_x(s,x)dxds - \int_0^t \int_0^L u(s,x)\phi(s,x)dxds \\
&+ \int_0^t \int_0^L f(s,u)\dot{W}\phi(s,x)dsdx \\
&= -\int_0^t [u(s,x)\phi_x(s,x)]_0^L ds + \int_0^t \int_0^L u(s,x)\phi_{xx}dxds - \int_0^t \int_0^L u(s,x)\phi(s,x)dxd \\
&+ \int_0^t \int_0^L f(s,u)\dot{W}\phi(s,x)dsdx \\
&= \int_0^t \int_0^L u(s,x)\phi_{xx}(s,x)dxds - \int_0^t \int_0^L u(s,x)\phi(s,x)dxds \\
&+ \int_0^t \int_0^L f(s,u)\dot{W}\phi(s,x)dsdx.
\end{aligned}
$$

Έτσι, παίρνουμε τη σχέση

$$
\begin{aligned}
\int_0^L u(t,x)\phi(t,x) - u_0(x)\phi(0,x)dx = \int_0^t \int_0^L & u(s,x)[\phi_{xx}(s,x) - \phi(s,x) + \phi_s(s,x)]dxds \\
&+ \int_0^t \int_0^L f(s,u(s,x))\phi(s,x)W(dxds).
\end{aligned}
$$

5.2.2 Ύπαρξη και μοναδικότητα λύσης

Λήμμα 5.2.3. *Έστω $h_n(t)$, $n = 0,1,...$ ακολουθία θετικών συναρτήσεων, τέτοια ώστε h_0 φραγμένη στο $[0,T]$ κι έστω ότι για κάποιο $a > 1$ και μια σταθερά c_1 ισχύει*

$$h_n(t) \le c_1 \int_0^t h_{n-1}(s)(t-s)^a ds, \; n = 1,2,....$$

Τότε, υπάρχει σταθερά c και ακέραιος $k > 1$ ώστε για κάθε $n \ge 1$ και $t \in [0,T]$,

$$h_{n+mk}(t) \le c^m \int_0^t h_n(s)\frac{(t-s)}{(m-1)!}ds, \; m = 1,2,....$$

Θεώρημα 5.2.4. *Υπάρχει μοναδική διαδικασία $u = \{(t,x),\; t \ge 0,\; 0 < x < L\}$ η οποία είναι L^2−φραγμένη στο $[0,T] \times [0,L]$ και ικανοποιεί τη 5.6 για όλα τα $t \ge 0$.*
Αν $v_0(x)$ φραγμένη στον L^p για κάποιο $t \ge 2$, τότε η $u(t,x)$ είναι L^p−φραγμένη στο $[0,T] \times [0,L]$ για κάθε T.

Απόδειξη. Μοναδικότητα: Μια λύση της 5.6 πρέπει να ικανοποιεί και την

$$\int_0^L u(t,x)\phi(t,x) - u_0(x)\phi(0,x)dx = \int_0^t \int_0^L u(s,x)[\phi_{xx}(s,x) - \phi(s,x) + \phi_s(s,x)]dxds + \int_0^t \int_0^L f(s,u(s,x))\phi(s,x)W(dxds).$$

Κρατάμε σταθερό το t και ορίζουμε

$$\psi(s,y) = G_{t-s}(\phi,y) = \int_0^L G_t(x,y)\phi(x)dx.$$

Τότε, $\psi(t,y) = \phi(y)$.

Η $G_{t-s}(x,y) = G(t-s,x,y)$ ικανοποιεί την ομογενή εξίσωση cable επομένως

$$-G_s(t-s,x,y) = G_{xx}(t-s,x,y) - G(t-s,x,y)$$

και $G_x(t-s,0,y) = G_x(t-s,L,y) = 0$.
Επομένως

$$\psi_{xx} - \psi + \psi_s = 0.$$

Έτσι, έχουμε ότι

$$\int_0^L u(t,x)\phi(x)dx = \int_0^L u_0(y)G_t(\phi,y)dy + \int_0^t \int_0^L f(u(s,y))G_{t-s}(\phi,y)W(dyds).$$

Η $E(u^2(t,x))$ είναι φραγμένη στο $[0,L]$ κι έτσι για σχεδόν κάθε ω η $u^2(t,x)$ θα είναι ολοκληρώσιμη ως προς x.

Έστω ότι η ϕ προσεγγίζει μια συνάρτηση δέλτα, παράδειγμα παίρνουμε ϕ της μορφής

$$(2n\pi)^{-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2n}\right)$$

με $n \to \infty$. Τότε η παραπάνω εξίσωση, χρησιμοποιώντας το θεώρημα διαφόρισης Lebesgue στο αριστερό μέλος και παρατηρώντας ότι $G_t(\phi,y) \to G_t(x,y)$, βλέπουμε ότι τείνει στην

$$u(t,x) = \int_0^L u_0(y)G_t(x,y)dy + \int_0^t \int_0^L f(u(s,y))G_{t-s}(x,y)W(dyds) \tag{5.7}$$

σχεδόν σίγουρα, για σχεδόν όλα τα ζευγάρια (t,x).

Αν u_1 και u_2 ικανοποιούν την 5.7 και $v = u_2 - u_1$, ορίζουμε $F(t,x) = E(v^2(t,x))$ και $H(t) = \sup_x F(t,x)$ η οποία είναι φραγμένη από υπόθεση. Τότε, από την 5.7

$$\begin{aligned} F(t,x) &= \int_0^t \int_0^L E(f(u_2(s,y)) - f(u_1(s,y))^2)G^2_{t-s}(x,y)dyds \\ &\le K^2 \int_0^t \int_0^L E((u_2-u_1)^2)G^2_{t-s}(x,y)dyds \\ &= K^2 \int_0^t \int_0^L F(s,y)G^2_{t-s}(x,y)dyds \end{aligned}$$

αφού η f ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz.
Έτσι,

$$\begin{aligned} H(t) &\le K^2 \int_0^t \int_0^L G_{t-s}^2(x,y)dyds \\ &\le K^2 c \int_0^t H(s)\frac{ds}{\sqrt{t-s}} \end{aligned}$$

από 5.2.1.
Επαναλαμβάνοντας έχουμε ότι

$$H(t) \le K^4 c^2 \int_0^t \int_0^s H(u)\frac{duds}{\sqrt{(s-u)(t-s)}}.$$

Αλλάζουμε τη σειρά ολοκλήρωσης και θέτουμε $t-s=v$ και στη συνέχεια $t-u=b$. Έτσι,

$$\begin{aligned} \int_u^t \frac{ds}{\sqrt{(t-s)(s-u)}} &= \int_0^b \frac{dv}{\sqrt{v(b-v)}} \\ &\le 2\int_0^{b/2} \sqrt{\frac{2}{b}}\frac{dv}{\sqrt{v}} \\ &= 4 \end{aligned}$$

και

$$H(t) \le 4K^4c^2 \int_0^t H(s)ds.$$

Επαναλαμβάνοντας, παίρνουμε τελικά ότι

$$H(t) \le \frac{(4K^4c^2)^{n+1}}{n!}\int_0^t H(s)(t-s)^n ds$$

το οποίο τείνει στο μηδέν, άρα $H=0$. Επομένως, με πιθανότητα ένα, $u_1=u_2$ σχεδόν παντού.

Ύπαρξη: Ορίζουμε

$$\begin{cases} u_0(t,x) = \int_0^L u_0(y)G_t(x,y)dy \\ u_{n+1}(t,x) = u_0(t,x) + \int_0^t\int_0^L f(u^n(s,y))G_{t-s}(x,y)W(dyds). \end{cases} \tag{5.8}$$

Θέτουμε $p\ge 2$ και υποθέτουμε ότι $\{u_0(y),\quad 0\le y\le L\}$ L^p φραγμένη.
Θα δείξουμε ότι η u_n συγκλίνει στον L^p σε μια λύση u.

Ορίζουμε

$$F_n(t,x) = E(|u_{n+1}(t,x)-u_n(t,x)|^p)$$

και

$$H_n(t) = \sup_x F_n(t,x).$$

Από την 5.8 έχουμε

$$F_n(t,x) = E\big(|\int_0^t\int_0^L (f(u_n(s,y)) - f(u_{n-1}(s,y)))G_{t-s}(x,y)W(dyds)|^p\big)$$

το οποίο φράσσεται από τη συσχετιζόμενη αύξουσα διαδικασία, από την ανισότητα Burkholder's ως εξής:

$$\begin{aligned} F_n(t,x) &\leq c_p E\Big(\Big(\int_0^t \int_0^L |f(u_n(s,y)) - f(u_{n+1}(s,y))|^2 G_{t-s}^2(x,y)dyds\Big)^{\frac{p}{2}}\Big) \\ &\leq c_p K\, E\Big(\Big|\int_0^t \int_0^L (u_n(s,y) - u_{n-1}(s,y))^2 G_{t-s}^2(x,y)dyds\Big|^{\frac{p}{2}}\Big) \end{aligned}$$

καθώς η f ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz.

Έπειτα, θα χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα Hölder.
Από την πρόταση 5.2.1 παρατηρούμε ότι αν $0 < r < 3$

$$\int_0^L G_t^r(x,y)dy \leq ce^{-tr}t^{-\frac{r}{2}} \int_\infty^\infty e^{-\frac{ry^2}{2t}}dy \leq c'e^{-tr}t^{\frac{1-r}{2}} \tag{5.9}$$

το οποίο είναι ολοκληρώσιμο ως προς t στο $(0,\infty)$.

Πρέπει να κρατήσουμε τον εκθέτη της G κάτω από 3. Θέτουμε $q = \frac{p}{p-2}$ κι επιλέγουμε $0 \leq \epsilon \leq 1$ να είναι αυστηρά μεταξύ $1 - \frac{3}{p}$ και $\frac{3}{2} - \frac{3}{p}$. Επιπλέον, $\epsilon = 0$ αν $p = 2$ και $\epsilon = 1$ αν $p \geq 6$.
Τότε,

$$F_n(t,x) \leq c\Big(\int_0^t \int_0^L G_s^{2\epsilon q}(x,y)\Big)^{\frac{p}{2q}} \int_0^t \int_0^L E\big(|u_n(s,y) - u_{n-1}(s,y)|^p\big) G_{t-s}^{(1-\epsilon)p}(x,y)dyds.$$

Στην περίπτωση αυτή $2\epsilon q < 3$ οπότε ο πρώτος παράγοντας είναι φραγμένος κι από την 5.9 είναι

$$\leq c\int_0^t H_{n-1}(s)(t-s)^a ds,$$

όπου $a = \frac{1}{2}(1 + \epsilon p - p) > -1$, και c σταθερά.
Έτσι

$$H_n(t) \leq c\int_0^t H_{n-1}(s)(t-s)^a ds, \quad t \geq 0$$

για $a > -1$ και $c > 0$.
Παρατηρούμε ότι αν H_{n-1} είναι φραγμένη σε ένα διάστημα $[0,T]$ θα είναι και η H_n.

$$H_0(t) \leq \sup_x c_p E\Big(\Big|\int_0^t f(u_0(s,x))^2 G_{t-s}(x,y)dyds\Big|^{\frac{p}{2}}\Big).$$

Όμως $u_0(s,x)$ L^p-φραγμένη αφού είναι και η $u_0(y)$ κι επομένως θα είναι και η $f(u_0(s,x))$. Με παρόμοιο επιχείρημα με το παραπάνω δείχνουμε ότι $H_0(t)$ φραγμένη στο $[0,T]$
Έτσι οι H_n είναι όλες πεπερασμένες.

Για να δείξουμε ότι τείνουν γρήγορα στο μηδέν θα χρησιμοποιήσουμε το λήμμα 5.2.3. Το εφαρμόζουμε στην H_n και παρ́νουμε ότι για κάθε n, η

$$\sum_{m=0}^\infty (H_{n+mk}(t))^{\frac{1}{p}}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα σε συμπαγή. Ομοίως και η

$$\sum_{n=0}^{\infty}(H_n(t))^{\frac{1}{p}}.$$

Έτσι η $u_n(t,x)$ *συγκλίνει στον* L^p *και η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη στο* $[0,L]\times[0,T]$ *για κάθε* $T>0$. *Συγκεκριμένα η* u_n *συγκλίνει στον* L^2.

Έστω ότι $u(t,x)=\lim u_n(t,x)$. *Θα δείξουμε ότι η* u *ικανοποιεί την 5.6.*
Από την 5.8 έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\int_0^L(u_n(t,x)-u_0(x))\phi(x)dx &- \int_0^t\int_0^L u_n(s,x)[\phi''(x)-\phi(x)]dxds\\
&- \int_0^t\int_0^L f(u_{n-1}(s,y))\phi(y)W(dyds)\\
&= \int_0^L\int_0^t\int_0^L f(u_{n_1}(s,y))G_{t-s}(x,y)W(dyds)\phi(x)dx\\
&+ \int_0^L\Big(\int_0^L G_t(x,y)u_0(y)dy-u_0(x)\Big)\phi(x)dx\\
&- \int_0^t\int_0^L\Big(\int_0^L G_s(x,y)u_0(y)dy\\
&+ \int_0^u\int_0^L f(u_{n-1}(s,y))G_{u-s}(x,y)W(dyds)\Big)(\phi''(x)-\phi(x))dxdu\\
&- \int_0^t\int_0^L f(u_{n-1}(s,y))\phi(y)W(dyds)\\
&= \int_0^t\int_0^L f(u_{n-1}(s,y))[G_{t-s}(\phi,y)-\int_s^t G_{u-s}(\phi''-\phi,y)ds-\phi(y)]W(dyds)\\
&- \int_0^L[G_t(\phi,y)-\phi(y)-\int_0^t G_u(\phi''-\phi,y)du]u_0(y)dy.
\end{aligned}$$

Όμως από πρόταση 5.2.2 οι όροι στις αγκύλες μηδενίζονται κι έτσι

$$\begin{aligned}
\int_0^L(u_n(t,x)-u_0(x))\phi(x)dx &- \int_0^t\int_0^L u_n(s,x)[\phi''(x)-\phi(x)]dxds\\
&- \int_0^t\int_0^L f(u_{n-1}(s,y))\phi(y)W(dyds)=0
\end{aligned}$$

για κάθε n.
Παίρνουμε $n\to\infty$ *κι έτσι* $u_n(s,x)\to u(s,x)$ *στον* L^2, *ομοιόμορφα στο* $[0,L]\times[0,T]$ *για κάθε* $T>0$ *και λόγω της συνθήκης Lipschitz και η* $f(u_{n-1}(s,y))$ *επίσης συγκλίνει ομοιόμορφα στον* L^2 *στη* $f(u(s,y))$.
Τα δύο πρώτα ολοκληρώματα συγκλίνουν καθώς $n\to\infty$. *Ομοίως και το στοχαστικό ολοκλήρωμα, για*

$$\begin{aligned}
&E\Big(\Big(\int_0^t\int_0^L(f(u(s,y))-f(u_{n-1}(s,y))\phi(y)W(dyds)\Big)^2\Big)\\
&\qquad\leq K\int_0^t\int_0^L E\big((u(s,y)-u_{n-1}(s,y))^2\big)\phi(y)dyds
\end{aligned}$$

το οποίο τείνει στο μηδέν.
Αν όπου u_n *και* u_{n-1} *βάλουμε* u *η σχέση επίσης μηδενίζεται κι έτσι παίρνουμε την 5.6.* □

Παράρτημα

Στο παράρτημα θα αποδείξουμε ορισμένες βασικές ανισότητες που χρησιμοποιήθηκαν στην παρούσα εργασία.

Hölder: Έστω X, Y τυχαίες μεταβλητές και $p \in (1, \infty), q \in (1, \infty)$. Αν $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ τότε

$$E(|XY|) \leq \|X\|_p \|Y\|_q = [E(|X|^p)]^{\frac{1}{p}} [E(|Y|^q)]^{\frac{1}{q}}.$$

Απόδειξη. Αν a, b θετικοί πραγματικοί αριθμοί, από την ανισότητα Young έχουμε ότι

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν $a^p = b^q$.
Παίρνουμε

$$a = \frac{|X|}{[E(|X|^p)]^{\frac{1}{p}}},\ b = \frac{|Y|}{[E(|Y|^q)]^{\frac{1}{q}}}.$$

Τότε,

$$\begin{aligned}
ab &= \frac{|XY|}{[E(|X|^p)]^{\frac{1}{p}} [E(|Y|^q)]^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p} \frac{|X|^p}{E(|X|^p)} + \frac{1}{q} \frac{|Y|^q}{E(|Y|^q)} \\
&\Rightarrow \frac{E(|XY|)}{[E(|X|^p)]^{\frac{1}{p}} [E(|Y|^q)]^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p} \frac{E(|X|^p)}{E(|X|^p)} + \frac{1}{q} \frac{E(|Y|^q)}{E(|Y|^q)} = 1 \\
&\Rightarrow E(|XY|) \leq [E(|X|^p)]^{\frac{1}{p}} [E(|Y|^q)]^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

□

Schwartz: Έστω K συμμετρικό στα x, y τότε

$$(f,g)_K \leq (f,f)_K^{\frac{1}{2}}(g,g)_K^{\frac{1}{2}}.$$

Απόδειξη. Για $t \in \mathbb{R}$ ορίζουμε $tf+g$ για το οποίο έχουμε ότι $(tf+g)^2 \geq 0$ και άρα

$$\int_{A\times A\times\mathbb{R}_+}(tf+g)^2 K(dx\,dy\,ds) \geq 0.$$

Όμως

$$\begin{aligned}
\int_{A\times A\times\mathbb{R}_+}(tf+g)^2 K(dx\,dy\,ds) &= t^2\int_{A\times A\times\mathbb{R}_+} f^2 K(dx\,dy\,ds) + 2t\int_{A\times A\times\mathbb{R}_+} fgK(dx\,dy\,ds)\\
&- \int_{A\times A\times\mathbb{R}_+} g^2 K(dx\,dy\,ds)\\
&= Bt^2 + Ct + D.
\end{aligned}$$

Αφού $(f(x,s))^2 \geq 0$ για κάθε $(x,s) \in A\times\mathbb{R}_+$ και η f δεν είναι παντού μηδέν έχουμε ότι $B > 0$. Τότε η Bt^2+Ct+D είναι μια τετραγωνική πολυωνυμμική συνάρτηση με πραγματικούς συντελεστές. Η διακρίνουσα είναι $\Delta = C^2 - 4BD$ κι επειδή

$$Bt^2 + Ct + D \geq 0$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι $D \leq 0$ δηλαδή $\frac{C^2}{4} \leq BD$.

Άρα

$$\begin{aligned}
\left|\int_{A\times A\times\mathbb{R}_+} f(x,s)g(y,s) \quad K(dx\,dy\,ds)\right| &= \sqrt{\frac{C^2}{4}} \leq \sqrt{BD}\\
&= \sqrt{B}\sqrt{D}\\
&= \left(\int_{A\times A\times\mathbb{R}_+} f(x,s)f(y,s)K(dx\,dy\,ds)\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{A\times A\times\mathbb{R}_+} g(x,s)g(y,s)K(dx\,dy\,ds)\right.\\
&= (f,f)_K^{\frac{1}{2}}(g,g)_K^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

□

Minkowski: Για K συμμετρικό στα x, y ισχύει

$$(f+g,f+g)_K^{\frac{1}{2}} \leq (f,f)_K^{\frac{1}{2}} + (g,g)_K^{\frac{1}{2}}.$$

Απόδειξη.

$$[(f,f)_K^{\frac{1}{2}} + (g,g)_K^{\frac{1}{2}}]^2 = (f,f)_K + (g,g)_K + 2(f,f)_K^{\frac{1}{2}}(f,f)_K^{\frac{1}{2}}.$$

Από ανισότητα Schwartz

$$(f,f)_K + (g,g)_K + 2(f,f)_K^{\frac{1}{2}}(f,f)_K^{\frac{1}{2}} \geq (f,f)_K + (g,g)_K + 2(f,g)_K$$

κι επειδή K συμμετρικό στα x, y

$$
\begin{aligned}
(f,f)_K + (g,g)_K + 2(f,g)_K &= (f,f)_K + (f,g)_K + (g,g)_K + (g,f)_K \\
&= \int_{A\times A\mathbb{R}_+} f(x,s)f(y,s) + f(x,s)g(y,s) + g(x,s)g(y,s) + g(x,s)f(y,s)K(dxdydz) \\
&= \int_{A\times A\mathbb{R}_+} [f(x,s)+g(x,s)][f(y,s)+g(y,s)]K(dxdydz) \\
&= (f+g, f+g)_K.
\end{aligned}
$$

Άρα

$$(f,f)_K^{\frac{1}{2}} + (g,g)_K^{\frac{1}{2}} \geq (f+g, f+g)_K^{\frac{1}{2}}.$$

$\square$

Βιβλιογραφία

[1] Γ. Κουμουλής, Σ.Νεγρεπόντης. *Θεωρία Μέτρου.* Εκδόσεις ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ, (2005).

[2] Δ. Τσουμπελής. *Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις.* ΤΟΜΟΣ Β, Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών, (2009).

[3] Δ. Χελιώτη *Εισαγωγή στο στοχαστικό λογισμό.* Εκδόσεις ebook ΣΕΑΒ, ΚΑΛΛΙΠΟΣ, (2015).

[4] R.C. Dalang, D. Khoshnevisan, C. Mueller, D. Nualart, Y. Xiao. *A Minicourse on Stochastic Partial Differential Equations.* Berlin Heidelberg: Springer, (2009).

[5] R.C. Dalang, L.Q. Sardanyons. *Stochastic integrals for spde's: a comparison.* Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Universitat Autonoma de Barcelona, (2010).

[6] L.C. Evans. *An introduction to stochastic partial differential equations.* Berkeley: AMS, (2013).

[7] L. Fiske, C. Overturf. *Tempered Distributions.* May 19, 2016.

[8] L. Gawarecki, V. Mandrekar. *Stochastic Partial Differential Equations in Infinite Dimensions.* Berlin Heidelberg: Springer, (2011).

[9] A. Karczewska. *Stochastic Integral with respect to Cylindrical Wiener Process.* Sectio A, Mathematica LII 2, 9 (1998), 79-93

[10] S. Norvidas. *On positive definite distributions.* Banach Journal of Mathematical Analysis 9(3):14-23.

[11] É. Pardoux. *Stochastic Partial Differential Equations.* Switzerland: Springer, (2021)

[12] L. Sergey. *Stochastic Partial Differential Equations.* Εκδόσεις Springer, (2017)

[13] M.S. Solé. *An Introductory Course on Stochastic Partial Differential Equations.* University of Barcelona, February-May 2016.

[14] J.B. Walsh. *An introduction to stochastic partial differential equations.* Ecole d'Eté de probabilités de St-Flour, XIV, 1984. Lecture Notes in Mathematics 1180. Springer-Verlag, Berlin,Heidelberg, New-York (1986), 265-439.

[15] V.M. Radchenko. *Cable equation with a general stochastic measure.* Article electronically published on August 2, 2012.