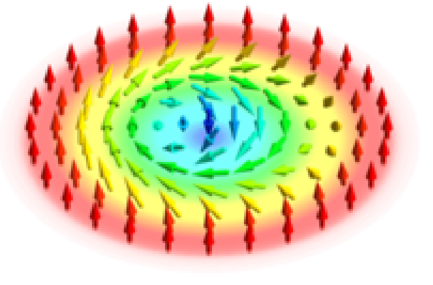
Μεταπτυχιακή εργασία

Κυκλοειδής κίνηση μαγνητικών φυσαλλίδων σε σιδηρομαγνήτη, με ανισοτροπική αλληλεπίδραση **Dzyaloshinskii-Moriya**



Κουλούρης Αθανάσιος

Α.Μ : 9

Επιβλέπων Καθηγητής : Σταύρος Κομηνέας

Πρόγραμμα μεταπτυχιακών σπουδών *"Εφαρμοσμένα και Υπολογιστικά Μαθηματικά"* του τμήματος Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Κρήτης, 2015

Τη μεταπτυχιακή αυτή εργασία μου, την αφιερώνω στον εαυτό μου και σε όλους αυτούς οι οποίοι έχουν σα στόχο να γίνονται κάθε μέρα και καλύτεροι

Ευχαριστίες

Θα ήθελα αρχικά να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα της μεταπτυχιακής μου εργασίας, Επίκουρο Καθηγητή κ. Σταύρο Κομηνέα, για την πολύτιμη βοήθεια του στην επιλογή και διαμόρφωση του θέματος, για το χρόνο τον οποίο διέθεσε, καθώς και για τη διακριτική επίβλεψή του. Επίσης θα ήθελα να τον ευχαριστήσω για τις γνώσεις τι οποίες μου μετέδωσε όλον αυτόν τον καιρό, για την υπομονή του και για τη βοήθεια του σε οποιοδήποτε πρόβλημα και απορία συνάντησα.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τον πατέρα μου Σπύρο, τη μητέρα μου Τασία και την αδερφή μου Ιάννα για την στήριξη τους, ο καθένας με το δικό του τρόπο, για όλα αυτά τα χρόνια των σπουδών και διαβάσματος, από τα προπτυχιακά χρόνια έως και σήμερα.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την επιτροπή αξιολόγησης της εργασίας μου, τον Καθηγητή κ. Ροζάκη Φοίβο και τον Επίκουρο Καθηγητή κ. Χαρμανδάρη Βαγγέλη, καθώς επίσης τον Επίκουρο Καθηγητή κ. Λυδάκη Μάνο και τον προπτυχιακό φοιτητή Μάριο Γκρέτσα για τη βοήθεια τους με συζητήσεις σε θέματα τοπολογίας.

Δεκέμβριος 2015 Κουλούρης Αθανάσιος

Περιεχόμενα

Λίστα Εικόνων

Λίστα συμβόλων

m	Μάζα φορτίου
q	Φορτίο σωμάτιου
$\boldsymbol{E}$	Ηλεκτρικό πεδίο
$\boldsymbol{B}$	Μαγνητικό πεδίο
$\boldsymbol{F}_E$	Δύναμη λόγω ηλεκτρικού πεδίου
$\boldsymbol{F}_B$	Δύναμη λόγω μαγνητικού πεδίου
$\boldsymbol{F}$	Δύναμη Lorentz
$\boldsymbol{v}$	Ταχύτητα φορτίου
ϕ	Ηλεκτρικό δυναμικό
$\boldsymbol{A}$	Μαγνητικό διανυσματικό δυναμικό
∇	Τελεστής ανάδελτα
U	Δυναμική ενέργεια
T	Κινητική ενέργεια
L	Lagrangian
ϵ_{ijk}	Σύμβολο Levi-Civita
δ_{ij}	Δέλτα του Kronecker
H	Hamiltonian
$\boldsymbol{p}$	Γενικευμένη ορμή
$\boldsymbol{\pi}$	Συνήθης ορμή
$\{\,,\,\}$	Αγκύλη Poisson

ω_c	Συχνότητα κυκλότρου
$\boldsymbol{R}$	Οδηγός κίνησης
ρ	Πυκνότητα φορτίου
ε_0	Ηλεκτρική επιτρεπτότητα του κενού
μ_0	Μαγνητική διαπερατότητα του κενού
J	Πυκνότητα ρεύματος
$\boldsymbol{P}$	Πυκνότητα ηλεκτρικής διπολικής ροπής
$\boldsymbol{M}$	Μαγνήτιση
$\boldsymbol{D}$	Ηλεκτρική μετατόπιση
$\boldsymbol{H}$	Μαγνητική διέγερση
M_s	Μαγνήτιση κορεσμού
γ	Γυρομαγνητικός λόγος
g_e	Παράγοντας Landé
e	Φορτίο ηλεκτρονίου
m_e	Μάζα ηλεκτρονίου
α	Σταθερά Landau-Gilbert
∇^2	Λαπλασιανή
$\boldsymbol{F}$	Ενεργό πεδίο
$\boldsymbol{F}_e$	Πεδίο ανταλαγής
$\boldsymbol{F}_a$	Πεδίο ανισοτροπίας
$\boldsymbol{F}_{DM}$	Πεδίο Dzyalosinskii-Moriya

$\boldsymbol{H}_b$	Εξωτερικό μαγνητικό πεδίο
$\boldsymbol{m}$	Αδιάστατη μαγνήτιση
A	Σταθερά ανταλλαγής
D	Σταθερά Dzyalosinskii-Moriya
K	Σταθερά ανισοτροπίας
ℓ_D	Επιλογή για αδιαστατοποίηση της μετατόπισης
$\boldsymbol{r}^\star$	Αδιάστατη μετατόπιση
κ	Αδιάστατη σταθερά ανισοτροπίας
$\boldsymbol{h}_b$	Αδιάστατο εξωτερικό μαγνητικό πεδίο
K_0	Επιλογή για αδιαστατοποίηση της σταθεράς ανισοτροπίας
H_0	Επιλογή για αδιαστατοποίηση του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου
$t^\star$	Αδιάστατος χρόνος
τ_0	Επιλογή για αδιαστατοποίηση του χρόνου
$\boldsymbol{f}$	Αδιάστατο ενεργό πεδίο
E	Ενέργεια του υλικού
E_0	Επιλογή για αδιαστατοποίηση της ενέργειας του υλικού
W	Αδιάστατη ενέργεια του υλικού
W_e	Αδιάστατη ενέργεια ανταλλαγής
W_α	Αδιάστατη ενέργεια ανισοτροπίας
W_b	Αδιάστατη ενέργεια εξωτερικού μαγνητικού πεδίου
W_{DM}	Αδιάστατη ενέργεια Dzyalosinskii-Moriya
w_e	Πυκνότητα ενέργειας W_e

w_a	Πυκνότητα ενέργειας W_a
w_b	Πυκνότητα ενέργειας W_b
w_{DM}	Πυκνότητα ενέργειας W_{DM}
Q	Αριθμός Skyrme
q	Τοπολογική πυκνότητα
μ	Ολική μαγνήτιση
$\mathcal{L}$	Πυκνότητα της Lagrangian
v_{R_e}	Ταχύτητα οδηγού κίνησης του ηλεκτρονίου
v_R	Ταχύτητα οδηγού κίνησης της μαγνητικής φυσαλλίδας
ω	Συχνότητα απλού αρμονικού ταλαντωτή
k	Σταθερά του ελλατηρίου
$\boldsymbol{q}$	Διάνυσμα μετατόπισης
m_s	Μάζα μαγνητικής φυσαλλίδας
f	Συχνότητα ταλάντωσης
T	Περίοδος ταλάντωσης
$\boldsymbol{F}_k$	Δύναμη ελλατηρίου

Εισαγωγή

Οι μαγνητικές διαμορφώσεις βρέθηκαν στο επίκεντρο του ερευνητικού ενδιαφέροντος σαν αποτέλεσμα της κατασκευής διαφόρων σιδηρομαγνητικών υλικών. Οι μαγνητικές φυσαλλίδες συγκεκριμένα, μελετήθηκαν εντατικά τη δεκαετία του 60 και του 70 για διάφορες τεχνολογικές εφαρμογές [5] . Οι στατικές μαγνητικές διαμορφώσεις μελετήθηκαν θεωρητικά σαν ελάχιστα της ενέργειας και με την παρουσία του όρου Dzyaloshinskii-Moriya (DM) σε αυτήν, στις αρχές τις δεκαετίας του 90 [6] . Σε αυτά τα υλικά παρατηρήθηκαν τα τελευταία χρόνια τέτοιου είδους διαμορφώσεις, ως απομονομένες δομές αλλά και ως πλέγματα [10] .

Η δυναμική των διαφόρων μαγνητικών διαμορφώσεων, όπως είναι οι μαγνητικές φυσαλλίδες, έχει μελετηθεί προ πολλού για τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά τα οποία παρουσιάζει [7] . Οι διαμορφώσεις αυτές κινούνται σε μια κατεύθυνση σχεδόν κάθετη σε κάποιο εφαρμοζόμενο εξωτερικό μαγνητικό πεδίο [5] και τα χαρακτηριστικά της κίνησης αυτής φαίνονται να είναι παρόμοια με την κίνηση ενός φορτισμένου σωματιδίου σε ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο.

Το ενδιαφέρον τώρα έχει στραφεί στη μελέτη μαγνητικών φυσαλλίδων σε σιδηρομαγνητικά υλικά των οποίων η ενέργεια περιέχει τον όρο Dzyaloshinskkii-Moriya, αφού αυτού του είδους τα υλικά είναι κατάλληλα για τη μελέτη των μαγνητικών φυσαλλίδων για δύο λόγους. Αρχικά, η αλληλεπίδραση DM επιτρέπει στις φυσαλλίδες να είναι σχετικά μεγάλες και να μένουν άκαμπτες, πράγμα το οποίο τις καθιστά ικανές να χρησιμοποιηθούν σα μέσα μεταφοράς πληροφοριών και δεδομένων στα διάφορα σιδηρημογνητικά υλικά αυτού του είδους. Επίσης με ακόμα έναν όρο στην ενέργεια, μπορεί να δημιουργηθεί μια ανισοτροπία στον κάθετο άξονα στο επίπεδο του υλικού και να μπορεί έτσι να υποστηριχθεί, εκτός της μαγνητικής φυσαλλίδας με αριθμό Skyrme $Q = 1$ και μαγνητική φυσαλλίδα με $Q = 0$ [8] [9] . Πράγμα το οποίο μας επιτρέπει δουλεύοντας τη διαφορετική δυναμική συμπεριφορά των δυο αυτών περιπτώσεων, την άντληση περισσοτέρων πληροφοριών και συμπερασμάτων για αυτού του είδους τις δομές.

Στις ακόλουθες σελίδες της μεταπτυχιακής αυτής εργασίας, γίνεται μια μελέτη της δυναμικής μαγνητικών φυσαλλίδων σε σιδηρομαγνητικά υλικά, των οποίων η ενέργεια περιέχει τον όρο Dzyaloshinskii-Moriya και τα οποία χαρακτηριζόνται επιπλέον από μια ανισοτροπία στον άξονα z, ο οποίος είναι κάθετος στο επίπεδο xy. Πιο συγκεκριμένα μελετάμε την κίνηση της μαγνητικής φυσαλλίδας με αριθμό Skyrme $Q = 1$ και προσπαθούμε λόγω της ομοιότητας της με την κίνηση του ηλεκτρονίου όταν αυτό βρίσκεται μέσα σε ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο, να συνδυάσουμε κατάλληλα αυτές τις δύο περιπτώσεις και να καταλήξουμε σε κάποια συμπεράσματα για τη συγκεκριμένη φυσαλλίδα. Η $Q = 1$ μαγνητική φυσαλλίδα υπό την επίδραση ενός εξωτερικού μαγνητικού πεδίου κατά μήκος του άξονα x, αναγκάζεται σε μια κυκλοειδή κίνηση κάθετη σε αυτόν και όταν αυτό το πεδίο σταματήσει να εφαρμόζεται, η μαγνητική φυσαλλίδα παρουσιάζει μια κυκλική κίνηση γύρω από το σταθερό πλέον οδηγό κίνησης της.

Όμως και το ηλεκτρόνιο υπό την επίδραση ενός ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου, αναγκάζεται και αυτό σε μία κυκλοειδή κίνηση κάθετη στον άξονα που εφαρμόζεται το ηλεκτρικό πεδίο. Μάλιστα όταν αυτό δεν υπάρχει, το ηλεκτρόνιο θέτει τον εαυτό του σε μια περιστροφική κίνηση γύρω από τον οδηγό κίνησης που σταματάει και σε αυτή την περίπτωση να κινείται. Η τόσο μεγάλη ομοιότητα των δύο αυτών περιπτώσεων αποτελεί την ιδέα της πραγματοποίησης της δουλειάς η οποία εμφανίζεται στις ακόλουθες σελίδες.

Κεφάλαιο 1

Κίνηση φορτίου σε ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο

1.1. Δύναμη Lorentz

Θεωρούμε ένα σωμάτιο το οποίο έχει μάζα m και φορτίο q. Έστω ότι το φορτίο βρίσκεται μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο $\boldsymbol{E}$ και μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B}$. Η ηλεκτρική δύναμη που ασκείται στο φορτίο είναι η $\boldsymbol{F}_E = q\boldsymbol{E}$ και η δύναμη λόγω του μαγνητικού πεδίου η $\boldsymbol{F}_B = q\,(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$ η οποία είναι ανάλογη της ταχύτητας $\boldsymbol{v}$. Η συνολική δύναμη η οποία ασκείται στο φορτίο λέγεται *δύναμη Lorentz* και είναι

$$\boldsymbol{F} = q\,[\boldsymbol{E} + (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})]\,. \tag{1.1}$$

Χρησιμοποιώντας το ηλεκτρικό δυναμικό $\phi(\boldsymbol{r})$ καθώς επίσης και το μαγνητικό διανυσματικό δυναμικό $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$, όπως αυτά προκύπτουν στο Παράρτημα 1, το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο γράφονται ως εξής

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}, \qquad \boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}. \tag{1.2}$$

Άρα, η παραπάνω δύναμη Lorrentz γίνεται

$$\boldsymbol{F} = q\left[-\nabla\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \times (\nabla \times \boldsymbol{A}))\right]. \tag{1.3}$$

Ας δούμε τώρα κάθε μια από τις συνιστώσες της δύναμης αυτής. Εφόσον γνωρίσουμε ότι

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{k},$$

τότε

$$(\boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{A}))_x = v_y\frac{\partial A_y}{\partial x} - v_y\frac{\partial A_x}{\partial y} - v_z\frac{\partial A_x}{\partial z} + v_z\frac{\partial A_z}{\partial x}. \tag{1.4}$$

Αν όμως προσθέσουμε και αφαιρέσουμε στο δεύτερο μέλος της (1.4) τον όρο $v_x\left(\partial A_x/\partial x\right)$, θα έχουμε

$$(\boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{A}))_x$$

$$= \left(v_x\frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial A_y}{\partial x} + v_z\frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \left(-v_x\frac{\partial A_x}{\partial x} - v_y\frac{\partial A_x}{\partial y} - v_z\frac{\partial A_x}{\partial z}\right). \tag{1.5}$$

Όμως, η ολική παράγωγος της A_x ως προς το χρόνο είναι

$$\frac{dA_x}{dt} = \frac{\partial A_x}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\,A_x \Rightarrow \frac{dA_x}{dt} = \frac{\partial A_x}{\partial t} + \left(v_x\frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial A_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial A_x}{\partial z}\right)$$

και επομένως η (1.5) γίνεται

$$(\boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{A}))_x = \frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}) - \frac{dA_x}{dt} + \frac{\partial A_x}{\partial t}.$$

Τελικά, η συνιστώσα F_x της δύναμης Lorrentz μπορεί να γραφεί ως εξής

$$\begin{aligned} F_x &= q\left[-\frac{\partial\phi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} + \left(\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}) - \frac{dA_x}{dt} + \frac{\partial A_x}{\partial t}\right)\right] \\ &= q\left[-\frac{\partial}{\partial x}(\phi - (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A})) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial v_x}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A})\right)\right]. \end{aligned} \tag{1.6}$$

1.2. Λαγκρανζιανός φορμαλισμός

Θεωρούμε τη συνήθη κινητική ενέργεια ενός σωμάτιου

$$T = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2 = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2. \tag{1.7}$$

Αν U η δυναμική ενέργεια του σωμάτιου, τότε από την εξίσωση *Euler-Lagrange* θα πρέπει καταλήξουμε στη δύναμη Lorentz της εξίσωσης (1.1). Έτσι γράφουμε τη *Lagrangian*

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2 - U. \tag{1.8}$$

Επομένως, η Euler-Lagrange γράφεται

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}\right) = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}\right)$$

$$\Rightarrow m\ddot{\boldsymbol{r}} = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}\right). \tag{1.9}$$

Η συνιστώσα x της παραπάνω εξίσωσης δίνεται από

$$m\ddot{r}_x = -\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{r}_x}\right), \tag{1.10}$$

όπου αν θεωρήσουμε σα δυναμική ενέργεια την

$$U = q\phi - q\left(\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{A}\right), \tag{1.11}$$

θα έχουμε γράψει τη συνιστώσα F_x της δύναμης Lorrentz όπως αυτή προέκυψε στη σχέση (1.6).

Έτσι, γράφοντας τη Lagrangian

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2 + q\left(\dot{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{A}\right) - q\phi, \tag{1.12}$$

η εξίσωση κίνησης που προκύπτει, μπορεί να εκφραστεί σε καρτεσιανές συντεταγμένες για $i,\, j = 1,\, 2,\, 3,$ ως

$$m\ddot{r}_i = -q\left(\frac{\partial \phi}{\partial r_i} + \frac{\partial A_i}{\partial t}\right) + q\left(\frac{\partial A_j}{\partial r_i} - \frac{\partial A_i}{\partial r_j}\right)\dot{r}_j. \tag{1.13}$$

Όμως, για την i συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου έχουμε ότι

$$E_i = -\frac{\partial \phi}{\partial r_i} - \frac{\partial A_i}{\partial t}$$

και για την i συνιστώσα του εξωτερικού γινομένου $(\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{B})$

$$
\begin{aligned}
\left(\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{B}\right)_i &= \left[\dot{\boldsymbol{r}} \times (\nabla \times \boldsymbol{A})\right]_i = \epsilon_{ijk}\dot{r}_j \left(\nabla \times \boldsymbol{A}\right)_k = \epsilon_{ijk}\dot{r}_j \epsilon_{k\ell m}\frac{\partial}{\partial r_\ell}A_m \\
&= \left(\delta_{i\ell}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{j\ell}\right)\dot{r}_j \frac{\partial}{\partial r_\ell}A_m = \left(\frac{\partial A_j}{\partial r_i} - \frac{\partial A_i}{\partial r_j}\right)\dot{r}_j.
\end{aligned}
$$

Έτσι, η εξίσωση κίνησης (1.13) γράφεται

$$
m\ddot{r}_i = q\left[\boldsymbol{E} + \left(\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{B}\right)\right]_i, \tag{1.14}
$$

η οποία πράγματι είναι η εξίσωση του Νεύτωνα, όπως αυτή προκύπτει από τη δύναμη Lorentz (1.1) που ασκείται στο φορτίο.

1.3. Χαμιλτονιανός φορμαλισμός

1.3.1. Hamiltonian του συστήματος

Η κανονική ορμή $\boldsymbol{p}$ του συστήματος δίνεται από

$$
\boldsymbol{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}} \Rightarrow \boldsymbol{p} = m\dot{\boldsymbol{r}} + q\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\pi} + q\boldsymbol{A}, \tag{1.15}
$$

όπου $\boldsymbol{\pi}$ η συνήθης ορμή για την οποία ισχύει ότι

$$
\boldsymbol{\pi} = m\dot{\boldsymbol{r}} \tag{1.16}
$$

και η οποία διαφέρει από την κανονική, διότι η γενικευμένη δυναμική ενέργεια U, εξαρτάται και από την ταχύτητα του φορτίου. Επομένως, η Hamiltonian στην περίπτωση μας είναι η παρακάτω

$$
\begin{aligned}
H &= \boldsymbol{p} \cdot \dot{\boldsymbol{r}} - L \\
&= \frac{1}{m}\boldsymbol{p}\left(\boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A}\right) - \frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A}\right)^2 - \frac{q}{m}\left(\boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{A} + q\phi \\
&= -\frac{1}{m}\left(\boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A}\right)\left(q\boldsymbol{A} - \boldsymbol{p}\right) - \frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A}\right)^2 + q\phi \\
&= \frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A}\right)^2 + q\phi.
\end{aligned} \tag{1.17}
$$

Στα επόμενα, θα μελετήσουμε την περίπτωση ενός ομογενούς μαγνητικού πεδίου το οποίο είναι κάθετο στο επίπεδο xy της κίνησης του φορτίου, δηλαδή $\boldsymbol{B} = (0, 0, B)$ όπου B είναι σταθερά. Οι επιλογές για το μαγνητικό διανυσματικό δυναμικό ώστε να ισχύει $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$, είναι η $\boldsymbol{A} = B(-y,\, 0,\, 0)$ καθώς επίσης και η $\boldsymbol{A} = B/2(x,\, -y,\, 0)$. Για την πρώτη επιλογή, η Hamiltonian παίρνει την εξής μορφή

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_x + qBy\right)^2 + \frac{1}{2m}p_y^2 + q\phi, \tag{1.18}$$

και η οποία χρησιμοποιώντας τη σχέση (1.16), μπορεί τελικά να εκφραστεί ως

$$H = \frac{1}{2m}\left(\pi_1^2 + \pi_2^2\right) + q\phi(x_1,\, x_2). \tag{1.19}$$

1.3.2. Εξισώσεις κίνησης

Οι εξισώσεις Hamilton οι οποίες προκύπτουν από τη Hamiltonian (1.18) είναι

$$\dot{p_x} = -q\frac{\partial \phi}{\partial x}, \qquad \dot{x} = \frac{1}{m}p_x + \frac{1}{m}qBy \tag{1.20}$$

και

$$\dot{p_y} = -\frac{1}{m}qB\left(p_x + qBy\right) - q\frac{\partial \phi}{\partial y}, \qquad \dot{y} = \frac{1}{m}p_y. \tag{1.21}$$

Συνδυάζοντας κατάλληλα τις παραπάνω σχέσεις, βρίσκουμε τις εξισώσεις κίνησης του φορτίου

$$m\ddot{x} = qB\dot{y} - q\frac{\partial \phi}{\partial x}, \tag{1.22}$$

$$m\ddot{y} = -qB\dot{x} - q\frac{\partial \phi}{\partial y}. \tag{1.23}$$

Αν θέσουμε τώρα το $q = 1$, δεν μειώνεται η γενικότητα των εξισώσεων (1.22) και (1.23), οι οποίες εκφράζονται ως

$$m\ddot{x} = B\dot{y} - \frac{\partial U}{\partial x}, \tag{1.24}$$

$$m\ddot{y} = -B\dot{x} - \frac{\partial U}{\partial y}. \tag{1.25}$$

Μπορούμε να ανακτήσουμε τις αρχικές εξισώσεις με τις αντικαταστάσεις $B \longrightarrow qB$ και $U \longrightarrow q\phi$.
Οι εξισώσεις αυτές, μπορούν να γραφούν σα σύστημα πρώτης τάξης ως

$$m\dot{x}_1 = \pi_1, \qquad m\dot{x}_2 = \pi_2, \tag{1.26}$$

$$\dot{\pi}_1 = \frac{B}{m}\pi_2 - \frac{\partial U}{\partial x_1}, \qquad \dot{\pi}_2 = -\frac{B}{m}\pi_1 - \frac{\partial U}{\partial x_2}. \tag{1.27}$$

1.3.3. Ειδικές λύσεις

Θεωρώντας ομογενές μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B} = B\hat{k}$ κάθετο στο επίπεδο xy στο οποίο κινείται το φορτίο, καθώς επίσης και ομογενές ηλεκτρικό πεδίο στο επίπεδο xy για το οποίο έστω ότι ισχύει $\boldsymbol{E} = E\hat{\imath}$ όπου E σταθερά, οι εξισώσεις κίνησης οι οποίες προκύπτουν από τη δύναμη Lorentz (1.3) είναι οι παρακάτω

$$m\ddot{x} = qB\dot{y} + qE, \tag{1.28}$$

$$m\ddot{y} = -qB\dot{x} \tag{1.29}$$

και οι οποίες συμπίπτουν με τις εξισώσεις (1.22) και (1.23) αντίστοιχα, που εξάγαμε στην προηγούμενη παράγραφο με το χαμιλτονιανό φορμαλισμό. Οι παραπάνω δύο εξισώσεις είναι γραμμικές και μπορούμε έτσι να βρούμε τη γενική λύση τους. Ακολουθούμε την εξής μέθοδο. Ορίζουμε τη μεταβλητή θέσης $y+ix$ του σωμάτιου στο επίπεδο xy, για την οποία η εξίσωση κίνησης είναι

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{y} + i\dot{x}\right) - i\omega_c(\dot{y} + i\dot{x}) = i\frac{q}{m}E, \tag{1.30}$$

όπου

$$\omega_c = \frac{qB}{m}, \tag{1.31}$$

ονομάζεται *συχνότητα κυκλότρου*.
Την παραπάνω εξίσωση (1.30), μπορούμε να τη δούμε σα μια πρωτοτάξια γραμμική εξίσωση με άγνωστη τη μεταβλητή $\dot{y} + i\dot{x}$. Έτσι βρίσκουμε ότι

$$\dot{y} + i\dot{x} = c_0 e^{i\omega_c t} - \frac{1}{B}E$$

$$\Rightarrow \dot{y} + i\dot{x} = c_0 \cos(\omega_c t) + ic_0 \sin(\omega_c t) - \frac{1}{B}E. \tag{1.32}$$

Άρα, για την (1.32) θα πρέπει να ισχύει

$$\dot{x} = c_0 \sin(\omega_c t) \tag{1.33}$$

και

$$\dot{y} = c_0 \cos(\omega_c t) - \frac{1}{B}E. \tag{1.34}$$

Λύνοντας τις παραπάνω με αρχικές συνθήκες $x(t = 0) = 0$ και $y(t = 0) = 0$ αντίστοιχα, θα βρούμε ότι

$$x = \frac{c_0}{\omega_c}\left(1 - \cos(\omega_c t)\right), \qquad y = \frac{c_0}{\omega_c}\sin(\omega_c t) - \frac{1}{B}Et. \tag{1.35}$$

Οι εξισώσεις αυτές, οι οποίες περιγράφουν τη θέση του φορτίου, ορίζουν το *τροχοειδές*.

Από τη μορφή των (1.35) βλέπουμε, ότι στην απουσία ηλεκτρικού ομογενούς πεδίου $\boldsymbol{E}$, το φορτίο εκτελεί κυκλική κίνηση με εξισώσεις

$$x = \frac{c_0}{\omega_c}\left(1 - \cos(\omega_c t)\right), \qquad y = \frac{c_0}{\omega_c}\sin(\omega_c t). \tag{1.36}$$

Μια άλλη περίπτωση που πρέπει να αναφερθεί είναι όταν το φορτίο κινείται ευθύγραμμα και ομαλά. Αυτό συμβαίνει όταν $c_0 = 0$. Τότε, το φορτίο κινείται κατά μήκος του άξονα y με σταθερή ταχύτητα

$$v = -\frac{E}{B}. \tag{1.37}$$

Αν τώρα η αρχική ταχύτητα του φορτίου είναι ίση με το μηδέν, από την (1.34) θα βρούμε ότι $c_0 = E/B$. Αν αντικαταστήσουμε αυτό το αποτέλεσμα στις εξισώσεις (1.35), καταλήγουμε στην παρακάτω έκφραση για τις εξισώσεις κίνησης

$$x = \frac{E}{B\omega_c}\left(1 - \cos(\omega_c t)\right), \qquad y = \frac{E}{B\omega_c}\left(\sin(\omega_c t) - \omega_c t\right). \tag{1.38}$$

Επομένως στην περίπτωση αυτή έχουμε την *κυκλοειδή κίνηση*, η οποία είναι κάθετη στον άξονα εφαρμογής του ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου.

1.4. Η κίνηση του φορτίου ως χαμιλτονιανό σύστημα

1.4.1. Αγκύλες Poisson

Ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο για την περιγραφή συστημάτων, αποτελούν οι *αγκύλες Poisson*. Γενικά μια αγκύλη Poisson για δύο τυχαίες συναρτήσεις $f = f\,(q_i, p_i)$ και $g = g\,(q_i, p_i)$ ορίζεται ως

$$\{f,\, g\} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}\right), \tag{1.39}$$

όπου q_i, p_i οι κανονικές συντεταγμένες και ορμές του συστήματος αντίστοιχα. Ειδικότερα για τη Hamiltonian $H = H\,(q_i, p_i)$ του συστήματος, οι εξισώσεις Hamilton δίνονται με χρήση των αγκύλων Poisson ως εξής

$$\dot{q}_i = \{q_i,\, H\} = \sum_i \left(\frac{\partial q_i}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial q_i}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \tag{1.40}$$

$$\dot{p}_i = \{p_i,\, H\} = \sum_i \left(\frac{\partial p_i}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial p_i}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right) = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \tag{1.41}$$

Οι βασικές αλγεβρικές ιδιότητες των αγκύλων Poisson οι οποίες μπορούν να αναφερθούν για οποιεσδήποτε συναρτήσεις f, g, h είναι οι παρακάτω

$$\bullet\,\{f,\, g\} = -\{g,\, f\}, \tag{1.42}$$

$$\bullet\,\{\alpha f + \beta g,\, h\} = \alpha\{f,\, h\} + \beta\{g,\, h\}, \qquad \alpha,\, \beta \in \mathbb{R}, \tag{1.43}$$

$$\bullet\,\{fg,\, h\} = f\{g,\, h\} + g\{f,\, h\}, \tag{1.44}$$

$$\bullet\,\{f,\, \{g,\, h\}\} + \{g,\, \{h,\, f\}\} + \{h,\, \{f,\, g\}\} = 0. \tag{1.45}$$

Η αγκύλη Poisson δύο τυχαίων συναρτήσεων f, g στο σύστημα q, p είναι

$$\{f,\, g\}_{q,\,p} = \sum_j \left(\frac{\partial f}{\partial q_j}\frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial g}{\partial q_j} \right). \tag{1.46}$$

Εάν οι q_j, p_j εκφραστούν, μέσω κάποιου μετασχηματισμού, ως συναρτήσεις των νέων μεταβλητών Q_k, P_k, η παραπάνω εξίσωση θα πάρει τη μορφή

$$\{f,\, g\}_{q,\,p} = \sum_{j,\,k} \left[\frac{\partial f}{\partial q_j} \left(\frac{\partial g}{\partial Q_k}\frac{\partial Q_k}{\partial p_j} - \frac{\partial g}{\partial P_k}\frac{\partial P_k}{\partial p_j} \right) - \frac{\partial f}{\partial p_j} \left(\frac{\partial g}{\partial Q_k}\frac{\partial Q_k}{\partial q_j} - \frac{\partial g}{\partial P_k}\frac{\partial P_k}{\partial q_j} \right) \right],$$

από την οποία καταλήγουμε στην παρακάτω έκφραση

$$\{f,\, g\}_{q,\,p} = \sum_k \left(\frac{\partial g}{\partial Q_k}\{f,\, Q_k\}_{q,\,p} + \frac{\partial g}{\partial P_k}\{f,\, P_k\}_{q,\,p} \right). \tag{1.47}$$

1.4.2. Αγκύλες Poisson του συστήματος

Σύμφωνα με τα προηγούμενα, οι εξισώσεις κίνησης (1.27) θα μπορούσαν να κατανοηθούν ως χαμιλτονιανό σύστημα με Hamiltonian την

$$H = \frac{1}{2m}\left(\pi_1^2 + \pi_2^2\right) + U(x_1, x_2) \tag{1.48}$$

και το οποίο για $\mu,\, \nu = 1,\, 2$, είναι εφοδιασμένο με τις παρακάτω αγκύλες Poisson

$$\{x_1,\, x_2\} = 0, \qquad \{\pi_1,\, \pi_2\} = B, \qquad \{x_\mu,\, \pi_\nu\} = \delta_{\mu\nu}. \tag{1.49}$$

Επομένως, χρησιμοποιώντας τις παραπάνω αγκύλες θα πρέπει να καταλήξουμε στις εξισώσεις κίνησης. Έτσι έχουμε ότι

$$\dot{\pi}_1 = \{\pi_1,\, H\} = \frac{\partial H}{\partial x_i}\{\pi_1,\, x_i\} + \frac{\partial H}{\partial \pi_i}\{\pi_1,\, \pi_i\}$$

$$\Rightarrow \dot{\pi}_1 = \frac{B}{m}\pi_2 - \frac{\partial U}{\partial x_1}$$

και

$$\dot{\pi}_2 = \{\pi_2,\, H\} = \frac{\partial H}{\partial x_i}\{\pi_2,\, x_i\} + \frac{\partial H}{\partial \pi_i}\{\pi_2,\, \pi_i\}$$

$$\Rightarrow \dot{\pi}_2 = -\frac{B}{m}\pi_1 - \frac{\partial U}{\partial x_2},$$

οι οποίες πράγματι είναι οι εξισώσεις κίνησης (1.27), όπως αυτές εκφράστηκαν σε προηγούμενη παράγραφο.

1.5. Διατηρήσιμες ποσότητες

Θα προσπαθήσουμε στο σημείο αυτό να γράψουμε τις εξισώσεις κίνησης σε μορφή νόμου διατήρησης. Η εξίσωση κίνησης (1.22) μπορεί να εκφραστεί ως

$$qB\dot{y} - m\ddot{x} = q\frac{\partial \phi}{\partial x} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(y - \frac{1}{\omega_c}\dot{x}\right) = \frac{1}{B}\frac{\partial \phi}{\partial x}, \tag{1.50}$$

καθώς επίσης και η εξίσωση κίνησης (1.23)

$$qB\dot{x} + m\ddot{y} = -q\frac{\partial \phi}{\partial y} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(x + \frac{1}{\omega_c}\dot{y}\right) = -\frac{1}{B}\frac{\partial \phi}{\partial y}. \tag{1.51}$$

Η παραπάνω μορφή των εξισώσεων μας υποδεικνύει να ορίσουμε τις εξής ποσότητες

$$R_y := y - \frac{\dot{x}}{\omega_c}, \qquad R_x := x + \frac{\dot{y}}{\omega_c}. \tag{1.52}$$

Αυτές οι ποσότητες είναι χρήσιμες για την περιγραφή της κίνησης επειδή είναι διατηρήσιμες. Το διάνυσμα (R_x, R_y) λέγεται *οδηγός κίνησης(guiding center)*, γιατί δίνει κατά κάποιον τρόπο τη μέσο όρο θέση του φορτίου.

Ώστε τις εξισώσεις κίνησης (1.50) και (1.51) μπορούμε αν θεωρήσουμε όπως και πριν, ομογενές ηλεκτρικό πεδίο $\boldsymbol{E} = E\hat{i}$ στο επίπεδο xy και ομογενές μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B} = B\hat{k}$ κάθετο σε αυτό, να τις γράψουμε ως

$$\frac{dR_y}{dt} = \frac{1}{B}\frac{\partial \phi}{\partial x} \Rightarrow \dot{R}_y = -\frac{1}{B}E \tag{1.53}$$

και

$$\frac{dR_x}{dt} = -\frac{1}{B}\frac{\partial \phi}{\partial y} \Rightarrow \dot{R}_x = 0. \tag{1.54}$$

Οι λύσεις αυτών των εξισώσεων βρίσκονται εύκολα και είναι

$$R_y = -\frac{1}{B}Et + R_y^i, \qquad R_x = R_x^i, \tag{1.55}$$

όπου R_x^i, R_y^i είναι κάποιες σταθερές που καθορίζονται από τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος και οι οποίες δίνουν τον οδηγό κίνησης στην αρχική χρονική στιγμή $t = 0$.

Στο σημείο αυτό, αντίστοιχα με την παράγραφο (1.3.3) στην οποία γράψαμε τις αγκύλες Poisson για το σύστημα μας, θα κάνουμε το ίδιο, εισάγοντας τώρα τις συντεταγμένες του οδηγού κίνησης όπως τις ορίσαμε στην παραπάνω σχέση (1.52). Θεωρώντας τις συνήθεις ορμές π_1, π_2 και θέτοντας το $q = 1$, οι συντεταγμένες αυτές παίρνουν την παρακάτω μορφή

$$R_1 = x_1 + \frac{\pi_2}{B}, \qquad R_2 = x_2 - \frac{\pi_1}{B}. \tag{1.56}$$

Επομένως η Hamiltonian (1.48) εισάγοντας τις παραπάνω συντεταγμένες γράφεται

$$H = \frac{1}{2m}\left(\pi_1^2 + \pi_2^2\right) + U(R_1 - \frac{\pi_2}{B},\, R_2 + \frac{\pi_1}{B}) \tag{1.57}$$

και το σύστημα μας αποτελεί χαμιλτονιανό, όταν είναι εφοδιασμένο με τις παρακάτω αγκύλες Poisson

$$\{\pi_1,\, \pi_2\} = B, \qquad \{R_1,\, R_2\} = -\frac{1}{B}, \qquad \{\pi_\mu,\, R_\nu\} = 0. \tag{1.58}$$

Έτσι, οι εξισώσεις κίνησης οι οποίες προκύπτουν είναι

$$\dot{\pi}_1 = \{\pi_1,\, H\} = \frac{\partial H}{\partial R_i}\{\pi_1,\, R_i\} + \frac{\partial H}{\partial \pi_i}\{\pi_1,\, \pi_i\} \Rightarrow \dot{\pi}_1 = \frac{B}{m}\pi_2 - \frac{\partial U}{\partial R_1}, \tag{1.59}$$

$$\dot{\pi}_2 = \{\pi_2,\, H\} = \frac{\partial H}{\partial R_i}\{\pi_2,\, R_i\} + \frac{\partial H}{\partial \pi_i}\{\pi_2,\, \pi_i\} \Rightarrow \dot{\pi}_2 = -\frac{B}{m}\pi_1 - \frac{\partial U}{\partial R_2}, \tag{1.60}$$

$$\dot{R}_1 = \{R_1,\, H\} = \frac{\partial H}{\partial R_i}\,\{R_1,\, R_i\} + \frac{\partial H}{\partial \pi_i}\,\{R_1,\, \pi_i\} \Rightarrow \dot{R}_1 = -\frac{1}{B}\frac{\partial U}{\partial R_2} \tag{1.61}$$

και

$$\dot{R}_2 = \{R_2,\, H\} = \frac{\partial H}{\partial R_i}\,\{R_2,\, R_i\} + \frac{\partial H}{\partial \pi_i}\,\{R_2,\, \pi_i\} \Rightarrow \dot{R}_2 = \frac{1}{B}\frac{\partial U}{\partial R_1}. \tag{1.62}$$

1.6. Παράρτημα 1 : Εξισώσεις Maxwell

Το ηλεκτρικό πεδίο $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$ και το μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)$, ικανοποιούν τις εξισώσεις Maxwell

$$\begin{aligned}
\nabla \times \boldsymbol{E} &= -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \\
\nabla \cdot \boldsymbol{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \\
\nabla \times \boldsymbol{B} &= \mu_0 \left(J + \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \right), \\
\nabla \cdot \boldsymbol{B} &= 0,
\end{aligned} \tag{1.63}$$

όπου ρ η πυκνότητα φορτίου, ε_0 η ηλεκτρική επιτρεπτότητα του κενού, μ_0 η μαγνητική διαπερατότητα του κενού και J η πυκνότητα του ρεύματος.

Μέσα σε ένα υλικό είναι δυνατόν να έχουμε ηλεκτρική πόλωση με πυκνότητα ηλεκτρικής διπολικής ροπής $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}, t)$, είτε μαγνητική πόλωση με πυκνότητα μαγνητικής διπολικής ροπής $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}, t)$ την οποία την αποκαλούμε και μαγνήτιση. Ορίζουμε δύο νέα πεδία, την ηλεκτρική μετατόπιση

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}, t) = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) + \boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}, t) \tag{1.64}$$

και τη μαγνητική διέγερση

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) - \boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}, t). \tag{1.65}$$

Οι εξισώσεις Maxwell μέσα σε υλικά τα οποία παρουσιάζουν είτε ηλεκτρική είτε μαγνητική πόλωση, παίρνουν τη μορφή

$$
\begin{aligned}
\nabla \times \boldsymbol{E} &= -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \\
\nabla \cdot \boldsymbol{D} &= \rho_f, \\
\nabla \times \boldsymbol{H} - \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} &= J_f, \\
\nabla \cdot \boldsymbol{B} &= 0.
\end{aligned} \tag{1.66}
$$

Στην μορφή αυτή εμφανίζεται η ρ_f η οποία είναι η πυκνότητα ελεύθερου φορτίου και η J_f η οποία είναι η πυκνότητα ελεύθερου ρεύματος.

Από τη μορφή της τελευταίας από τις εξισώσεις (1.66), θα μπορούσαμε με χρήση μιας διανυσματικής συνάρτησης $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$ να εκφράσουμε το μαγνητικό πεδίο ως

$$
\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}, \tag{1.67}
$$

όπου τη συνάρτηση $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$ την αποκαλούμε μαγνητικό διανυσματικό δυναμικό. Έτσι, η πρώτη από τις εξισώσεις (1.66) γράφεται

$$
\begin{aligned}
\nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \times \boldsymbol{A}\right) = 0 \\
\Rightarrow \nabla \times \left(\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right) = 0.
\end{aligned}
$$

Επομένως μπορούμε να ορίσουμε τη συνάρτηση ηλεκτρικού δυναμικού $\phi(\boldsymbol{r}, t)$, τέτοια ώστε το ηλεκτρικό πεδίο να δίνεται ως

$$
\boldsymbol{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}. \tag{1.68}
$$

Κεφάλαιο 2

Μαγνητική δομή σιδηρομαγνητικών υλικών

2.1. Εξίσωση Landau-Lifshitz-Gilbert

Ένα σιδηρομαγνητικό υλικό περιγράφεται από την πυκνότητα της μαγνητικής ροπής ή αλλιώς μαγνήτιση $\boldsymbol{M}$. Το διάνυσμα της μαγνήτισης $\boldsymbol{M} = (M_x, M_y, M_z)$ είναι μια συνάρτηση της θέσης και του χρόνου και που επιπλέον το μήκος της μπορεί να θεωρηθεί μια σταθερά, για ένα ευρύ φάσμα θερμοκρασιών αρκετά χαμηλότερων από εκείνων του σημείου Curie :

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}, t), \qquad \boldsymbol{M}^2 = M_x^2 + M_y^2 + M_z^2 = M_s^2, \tag{2.1}$$

όπου $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ είναι το διάνυσμα της θέσης, t η μεταβλητή του χρόνου και M_s η σταθερά η οποία ονομάζεται μαγνήτιση κορεσμού.

Οι στατικές όσο και οι δυναμικές ιδιότητες της μαγνήτισης, διέπονται από την εξίσωση Landau-Lifshitz-Gilbert (LLG)

$$\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial t} + \gamma(\boldsymbol{M} \times \boldsymbol{F}) = \frac{\alpha}{M_s}(\boldsymbol{M} \times \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial t}), \tag{2.2}$$

με το $\boldsymbol{F}$ να είναι το ενεργό πεδίο και ο γυρομαγνητικός λόγος γ να δίνεται από τον τύπο

$$\gamma = \frac{g_e\,|e|}{2m_e}, \tag{2.3}$$

όπου g_e είναι ο παράγοντας Landé, που στην περίπτωση μας ισχύει ότι $g_e \sim 2$ και e, m_e το φορτίο και μάζα του ηλεκτρονίου αντίστοιχα . Η εξίσωση (2.2) στο δεύτερο μέλος της εμπεριέχει τον όρο Landau-Gilbert όπου η σταθερά α είναι αδιάστατη.

Για το ενεργό πεδίο ισχύει ότι

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_e + \boldsymbol{F}_a + \mu_0 \boldsymbol{H}_b + \boldsymbol{F}_{DM}. \tag{2.4}$$

Το $\boldsymbol{F}_e$ είναι το πεδίο ανταλλαγής

$$\boldsymbol{F}_e = \frac{2A}{M_s^2}\nabla^2 \boldsymbol{M}, \tag{2.5}$$

όπου A η σταθερά ανταλλαγής. Το $\boldsymbol{F}_a$ είναι το πεδίο ανισοτροπίας

$$\boldsymbol{F}_a = -\frac{2K}{M_s^2}\cdot (M_x, M_y, 0), \tag{2.6}$$

το οποίο οδηγεί σε μια ανισοτροπία στον κάθετο στο επίπεδο xy άξονα z και που K είναι η θετική σταθερά της ανισοτροπίας . Το $\boldsymbol{H}_b$ είναι το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο για το οποίο ισχύει

$$\boldsymbol{H}_b = (0, 0, H_b), \qquad H_b = \sigma\tau\alpha\theta \tag{2.7}$$

και που εφαρμόζεται και αυτό κατά μήκος του κάθετου άξονα στην επιφάνεια του υλικού. Τέλος, το $\boldsymbol{F}_{DM}$ είναι το πεδίο το οποίο ονομάζεται Dzyaloshinskii-Moriya (DM)

$$\boldsymbol{F}_{DM} = -\frac{2D}{M_s^2}\left(\nabla \times \boldsymbol{M}\right), \tag{2.8}$$

όπου D είναι η σταθερά Dzyaloshinskii-Moriya.

2.2. Αδιαστατοποίηση της Landau-Lifshitz-Gilbert

Πληροφορίες για οποιοδήποτε σιδηρομαγνητικό υλικό περιέχονται σε διάφορες παραμέτρους οι οποίες το χαρακτηρίζουν, όπως είναι και κάποιες ποσότητες που όρισαμε και χρησιμοποιήσαμε στην παραπάνω παράγραφο. Εάν αυτές οι παραμέτροι συνδυαστούν με κάποιον κατάλληλο τρόπο ώστε να παράγουν ποσότητες οι οποίες να είναι αδιάστατες, τότε καθιστούν ικανό να πάρουμε πληροφορίες και να εξάγουμε αποτελέσματα τόσο σε μεγάλες όσο και σε μικρές κλίμακες. Τέτοιου είδους ποσότητες για την εξίσωση (2.2) είναι

$$\boldsymbol{m} = \frac{\boldsymbol{M}}{M_s}, \qquad \text{με} \qquad \boldsymbol{m}^2 = 1 \tag{2.9}$$

και

$$\boldsymbol{r}^\star = \frac{\boldsymbol{r}}{\ell_D}, \tag{2.10}$$

όπου

$$\ell_{D} = \frac{2A}{D}. \tag{2.11}$$

Έτσι, χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις και ορίζοντας τις παρακάτω αδιάστατες ποσότητες

$$\kappa = \frac{K}{K_0}, \qquad K_0 = \frac{D^2}{4A} \tag{2.12}$$

και

$$\boldsymbol{h}_b = \frac{\boldsymbol{H}_b}{H_0}, \qquad H_0 = \frac{D^2}{2\mu_0 M_s A}, \tag{2.13}$$

η εξίσωση LLG (2.2) μπορεί να γραφεί ως εξής

$$M_s \frac{\partial \boldsymbol{m}}{\partial t} + \gamma \frac{D^2}{2A} \left[\boldsymbol{m} \times \left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{m}}{\partial \boldsymbol{r}^{\star 2}} - \kappa \cdot (m_x, m_y, 0) + \boldsymbol{h}_b - 2 \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}^{\star}} \times \boldsymbol{m} \right) \right) \right]$$

$$= \alpha M_s \left(\boldsymbol{m} \times \frac{\partial \boldsymbol{m}}{\partial t} \right). \tag{2.14}$$

Αν στο σημείο αυτό θέσουμε

$$t^{\star} = \frac{t}{\tau_0}, \qquad \tau_0 = \frac{2AM_s}{\gamma D^2}, \tag{2.15}$$

καταλήγουμε στο ότι

$$\frac{\partial \boldsymbol{m}}{\partial t^{\star}} + (\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{f}) = \alpha (\boldsymbol{m} \times \frac{\partial \boldsymbol{m}}{\partial t^{\star}})$$

$$\Rightarrow \dot{\boldsymbol{m}} + (\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{f}) = \alpha (\boldsymbol{m} \times \dot{\boldsymbol{m}}), \qquad \boldsymbol{m}^2 = 1. \tag{2.16}$$

Το ενεργό πεδίο $\boldsymbol{f}$ δίνεται τώρα από

$$\boldsymbol{f} = \nabla^2 \boldsymbol{m} - \kappa \cdot (m_x, m_y, 0) + \boldsymbol{h}_b - 2 \left(\nabla \times \boldsymbol{m} \right), \tag{2.17}$$

όπου $\boldsymbol{h}_b = (0, 0, h_b)$ με $h_b = \sigma\tau\alpha\theta$, είναι το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο.
Η (2.16) αποτελεί την αδιάστατη μορφή της LLG, η οποία επιλέγοντας την αδιάστατη σταθερά α να ισούται με 0 γίνεται

$$\dot{\boldsymbol{m}} + (\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{f}) = 0, \qquad \boldsymbol{m}^2 = 1, \tag{2.18}$$

με το $\boldsymbol{f}$ να δίνεται όπως και πριν από την (2.17) και την (2.18) να την αποκαλούμε πλέον Landau-Lifshitz (LL) .

2.3. Ενέργεια του συστήματος

Στο σημείο αυτό αφού πρώτα θεωρήσουμε ότι για το διάνυσμα της μαγνήτισης ισχύει $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}(x, y)$ δηλαδή $\boldsymbol{r} = (x, y)$, πρέπει να αναφέρουμε ότι το συναρτησοειδές της ενέργειας ενός κάθετα στο επίπεδο xy ανισοτροπικού υλικού τύπου Dzyalosinskii-Moriya, υπό την επίδραση ενός εξωτερικού μαγνητικού πεδίου H_b δίνεται από

$$\begin{aligned} E(\boldsymbol{M}) = \frac{A}{M_s^2} \int (\partial_\mu \boldsymbol{M} \cdot \partial_\mu \boldsymbol{M})\; dxdy + \frac{K}{M_s^2} \int \left(M_1^2 + M_2^2\right) dxdy \\ -\mu_0 \int (\boldsymbol{H}_b \cdot \boldsymbol{M})\; dxdy + \frac{D}{M_s^2} \int \left[\boldsymbol{M} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{M})\right] dxdy. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Προκειμένου να προχωρήσουμε στην αδιαστατοποίηση του παραπάνω συναρτησοειδούς της ενέγειας, θα πρέπει να ανακαλέσουμε τις σχέσεις (2.9), (2.10) και (2.11) οι οποίες χρησιμοποιήθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο. Έτσι, το συναρτησοειδές το οποίο θα προκύψει θα είναι

$$\begin{aligned} E(\boldsymbol{m}) = A \int (\partial_\mu \boldsymbol{m} \cdot \partial_\mu \boldsymbol{m})\; dx_1 dx_2 + \ell_D^2 K \int \left(m_1^2 + m_2^2\right) dx_1 dx_2 \\ -\mu_0 M_s \ell_D^2 \boldsymbol{H}_b \int \boldsymbol{m}\, dx_1 dx_2 + \ell_D D \int \left[\boldsymbol{m} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{m})\right] dx_1 dx_2. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Αν τώρα θέσουμε

$$W = \frac{E}{E_0}, \qquad E_0 = 2A, \tag{2.21}$$

στο αδιάστατο συναρτησοειδές στο οποίο θα καταλήξουμε είναι το παρακάτω

$$\begin{aligned} W(\boldsymbol{m}) = \frac{1}{2}\int \left(\partial_\mu \boldsymbol{m}\cdot\partial_\mu \boldsymbol{m}\right)\, dx_1 dx_2 + \frac{\kappa}{2}\int \left(m_1^2 + m_2^2\right) dx_1 dx_2 \\ + h_b \int \left(1 - m_3\right)\, dx_1 dx_2 + \int \left[\boldsymbol{m}\cdot\left(\nabla\times\boldsymbol{m}\right)\right] dx_1 dx_2. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Είναι πολύ σημαντικό να αναφέρουμε ότι ένα συντηρητικό συναρτησοειδές ενέργειας $W = W\left(\boldsymbol{m}\right)$ υπάρχει, όταν το ενεργό πεδίο προκύπτει από τη σχέση η οποία ισχύει γενικά

$$\boldsymbol{f} = -\frac{\delta W}{\delta \boldsymbol{m}} \tag{2.23}$$

και που το σύμβολο δ δηλώνει τη συνήθη μεταβολή ενός συναρτησοειδούς. Την παραπάνω σχέση μπορούμε να τη γράψουμε τώρα λίγο διαφορετικά οπού χρησιμοποιώντας την *πυκνότητα ενέργειας* w, καταλήγουμε στην παρακάτω έκφραση η οποία είναι ισοδύναμη

$$\boldsymbol{f} = \sum_j \frac{d}{dx_j}\left(\frac{\partial w}{\partial\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{m}}{\partial x_j}\right)}\right) - \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{m}}. \tag{2.24}$$

Το συναρτησοειδές της ενέργειας (2.22) θα μπορούσαμε να το εκφράσουμε ως

$$W = W_e + W_a + W_b + W_{\scriptscriptstyle DM},$$

όπου παρατηρούμε την εμφάνιση τεσσάρων όρων οι οποίοι απευθύνονται στην ενέργεια του πεδίου ανταλλαγής, ανισοτροπίας, εξωτερικού μαγνητικού πεδίου και του πεδίου Dzyaloshinskii-Moriya αντίστοιχα. Για την ενέργεια του πεδίου ανταλαγής έχουμε

$$W_e = \int w_e \, dx_1 dx_2,$$

όπου για την πυκνότητα της ενέργειας w_e ισχύει

$$w_e = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \boldsymbol{m}\cdot\partial_\mu \boldsymbol{m}\right). \tag{2.25}$$

Αντίστοιχα, για την ενέργεια του πεδίου ανισοτροπίας

$$W_a = \int w_a \, dx_1 dx_2, \qquad w_a = \frac{1}{2}\kappa \left(m_1^2 + m_2^2\right), \tag{2.26}$$

για την ενέργεια του πεδίου πόλωσης

$$W_b = \int w_b \, dx_1 dx_2, \qquad w_b = h_b(1 - m_3) \tag{2.27}$$

και για το πεδίο DM

$$W_{DM} = \int w_{DM} \, dx_1 dx_2, \qquad w_{DM} = \boldsymbol{m} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{m}) \, . \tag{2.28}$$

Έτσι, εύκολα μπορεί κάποιος χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.24) να καταλήξει στο ότι πράγματι, η ενέργεια της εξίσωσης (2.22) είναι αυτή η οποία επαληθεύει το ενεργό πεδίο $\boldsymbol{f}$ της εξίσωσης (2.17), όπως αυτό προέκυψε στο τέλος της προηγούμενης παραγράφου.

2.4. Διαμορφώσεις σε σιδηρομαγνητικό υλικό

2.4.1. Αριθμός Skyrme

Σε κάποιο σιδηρομαγνητικό υλικό είναι δυνατόν να εμφανιστούν διάφορες μαγνητικές διαμορφώσεις όπως είναι οι μαγνητικές φυσαλλίδες και οι δίνες. Η διαμόρφωση για μια *μαγνητική φυσαλλίδα* δεν είναι τετριμμένη, ιδιαιτέρως για το διαχωριστικό πεδίο που σχηματίζεται μεταξύ της εσωτερικής και της εξωτερικής περιοχής αυτής. Με σκοπό την πιο συστηματική προσέγγιση για την περιγραφή των πιθανών διαμορφώσεων τέτοιων φυσσαλίδων, αρχίζουμε τονίζοντας ένα βασικό γεγονός, ότι δηλαδή το διάνυσμα της μαγνήτισης $\boldsymbol{m}$ βρίσκεται πάντα μέσα σε μια μοναδιαία σφαίρα. Αυτός είναι ένας άλλος τρόπος για να πούμε ότι το διάνυσμα αυτό έχει σταθερό μήκος το οποίο είναι ίσο προς τη μονάδα όπως και φαίνεται στη δεύτερη εκ των (2.18) εξισώσεων. Επιπλέον στο σημείο αυτό πρέπει να τονίσουμε ακόμα ένα βασικό χαρακτηριστικό το οποίο έχει να κάνει με τις συνοριακές συνθήκες των κάθετα ανισοτροπικών υλικών. Για το διάνυσμα της μαγνήτισης $\boldsymbol{m}$ τέτοιων υλικών ισχύει ότι $\boldsymbol{m}\left(|\boldsymbol{r}| \to \infty\right) = (0, 0, 1)$, το οποίο ουσιαστικά σημαίνει ότι η μαγνήτιση δείχνει στο βόρειο πόλο της σφαίρας και για λύσεις που έχουν να κάνουν με φυσαλλίδες ισχύει ότι $\boldsymbol{m}\,(\boldsymbol{r}=0)=(0,0,-1)$, το οποίο σημαίνει ότι στο κέντρο της μαγνητικής φυσαλλίδας η μαγνήτιση δείχνει στο νότιο πόλο της σφαίρας. Επομένως είναι ξεκάθαρο από τα παραπάνω, ότι η μαγνήτιση $\boldsymbol{m}$ καλύπτει περιοχές της σφαίρας στα ενδιάμεσα σημεία μεταξύ $\boldsymbol{r}=0$ και ∞.

Γενικά υπάρχουν διάφορες πιθανότητες για τη δημιουργία διαφορετικών διαχωριστικών πεδίων μεταξύ της εσωτερικής και της εξωτερικής περιοχής μαγνητικών φυσαλλίδων. Οι πιθανότητες αυτές έχουν να κάνουν με τον τροπό αλλά και τον αριθμό των φορών που καλύπτεται ο ισημερινός της μοναδιαίας αυτής σφαίρας και οι οποίες μας οδηγούν στο να προσδιορίσουμε έναν τοπολογικό αριθμό για όλες αυτές τις δομές στο διαχωριστικό αυτό πεδίο. Τον τοπολογικό αυτόν αριθμό τον αποκαλούμε *αριθμό Skyrme*, το συμβολίζουμε με Q , παίρνει μόνο ακέραιες τιμές $Q=0,\pm1,\pm2,...$ και ορίζεται σαν

$$Q=\frac{1}{4\pi}\int q\,dx_1dx_2, \tag{2.29}$$

όπου

$$q=\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu}\boldsymbol{m}\cdot\left(\partial_\mu\boldsymbol{m}\times\partial_\nu\boldsymbol{m}\right), \tag{2.30}$$

ονομάζεται *τοπολογική πυκνότητα* με $\mu,\nu=1,2$. Ανάλογα με την ακέραια τιμή του αριθμού Skyrme Q , καταλαβαίνουμε τις πόσες ακέραιες φορές καλύφθηκε η μοναδιαία σφαίρα. Το πρόσημο του Q δηλώνει συμβατικά την αίσθηση της φοράς της μαγνήτισης.

2.4.2. Ύπαρξη στατικών μαγνητικών φυσαλλίδων

Στο συγκεκριμένο σημείο, ας θεωρήσουμε προς το παρόν την απουσία του όρου του μαγνητικού πεδίου $\boldsymbol{h}_b$ και του όρου Dzyaloshinskii-Moriya από το συναρτησοειδές της ενέργειας $W(\boldsymbol{m})$. Έτσι, η σχέση (2.22) παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} W &= W_e+W_a \\ \Rightarrow W &= \frac{1}{2}\int\left(\partial_\mu\boldsymbol{m}\cdot\partial_\mu\boldsymbol{m}\right)dx_1dx_2+\frac{\kappa}{2}\int\left(m_1^2+m_2^2\right)dx_1dx_2. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Σκοπός μας είναι να βρούμε στατικές λύσεις της εξίσωσης Landau-Lifshitz (2.18), δηλαδή λύσεις οι οποίες να ικανοποιούν την εξίσωση $\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{f}=0$ με ενέργεια την παραπάνω. Εκτός των τετριμμένων $\boldsymbol{m}=(0,0,\pm1)$ οι οποίες μας δίνουν ότι για την ολική ενέργεια ισχύει $W=0$, δηλαδή μας οδηγούν σε μια ομοιόμορφη κατάσταση, γνωρίζουμε ότι οι στατικές λύσεις είναι τα στάσιμα σημεία του συναρτησοειδούς της ενέργειας $W = W(\boldsymbol{m})$, υπό την προϋπόθεση όμως, ότι ο δεσμός $\boldsymbol{m}^2 = 1$ λαμβάνεται υπόψη.

Τώρα, προκειμένου να πάρουμε πληροφορίες για τις στατικές λύσεις τις οποίες αναζητάμε, ας θεωρήσουμε αρχικά ότι το διάνυσμα της μαγνήτισης $\boldsymbol{m}_0(x_1, x_2)$ αποτελεί στατική λύση. Υποθέτοντας την εισαγωγή ενός παράγοντα λ και στις δύο χωρικές συντεταγμένες της μαγνήτισης $\boldsymbol{m}_0$, ας θεωρήσουμε μια οικογένεια απεικονίσεων για τις οποίες να ισχύει ότι

$$\boldsymbol{m}_\lambda(x_1, x_2) = \boldsymbol{m}_0(\lambda x_1, \lambda x_2), \qquad \text{με} \qquad \lambda = \sigma\tau\alpha\theta. \tag{2.32}$$

Έτσι, σύμφωνα με τα παραπάνω και ορίζοντας τις μεταβλητές $x_1' = \lambda x_1$, $x_2' = \lambda x_2$, θα προσπαθήσουμε να γράψουμε το κάθε ολοκλήρωμα της ενέργειας (2.31) σε αυτό με $\lambda = 1$. Επομένως ο κάθε όρος της ενέργειας θα μπορούσε να εκφραστεί ξεχωριστά ως

$$\begin{aligned} W_e(\lambda) &= \frac{1}{2}\int \left(\partial_\mu \boldsymbol{m}_0(\lambda x_1, \lambda x_2) \cdot \partial_\mu \boldsymbol{m}_0(\lambda x_1, \lambda x_2)\right) d^2x \\ &= \frac{1}{2}\int \left(\partial_\mu' \boldsymbol{m}_0(x_1', x_2') \cdot \partial_\mu' \boldsymbol{m}_0(x_1', x_2')\right) d^2x' = W_e(\lambda = 1), \end{aligned} \tag{2.33}$$

και

$$\begin{aligned} W_a(\lambda) &= \frac{\kappa}{2}\int \left([m_1(\lambda x_1, \lambda x_2)]^2 + [m_2(\lambda x_1, \lambda x_2)]^2\right) d^2x \\ &= \frac{1}{\lambda^2}\frac{\kappa}{2}\int \left([m_1(x_1', x_2')]^2 + [m_2(x_1', x_2')]^2\right) d^2x' = \frac{1}{\lambda^2} W_a(\lambda = 1). \end{aligned} \tag{2.34}$$

Επομένως για τη λύση με τη μικρότερη ενέργεια, το επιχείρημα του Derrick [4] υποδεικνύει να γράψουμε τη συνθήκη προκειμένου η ενέργεια να είναι ελάχιστη για $\lambda = 1$. Άρα θα πρέπει να ισχύει ότι

$$\frac{d\left(W(\boldsymbol{m}_\lambda(x_1, x_2))\right)}{d\lambda} = 0, \quad \text{στο σημείο} \quad \lambda = 1. \tag{2.35}$$

Δηλαδή

$$\left.\frac{dW_e}{d\lambda}\right|_{\lambda=1} + \left.\frac{dW_\alpha}{d\lambda}\right|_{\lambda=1} = 0$$

$$\Rightarrow W_a(\lambda = 1) = 0. \tag{2.36}$$

Επομένως, ένα υλικό με ενέργεια την (2.31) σύμφωνα με την υπόδειξη του Derrick, δεν μπορεί να υποστηρίξει άλλες στατικές λύσεις εκτός των τετριμμένων. Αν όμως στο υλικό υπάρχει ο όρος DM, εφαρμόζοντας την ίδια μέθοδο και γράφοντας τον όρο W_{DM} σε αυτόν με $\lambda = 1$, δηλαδή

$$W_{DM}(\lambda) = \int \left[\boldsymbol{m}_0(\lambda x_1,\, \lambda x_2) \cdot (\nabla \times \boldsymbol{m}_0(\lambda x_1,\, \lambda x_2))\right] d^2x$$

$$= \frac{1}{\lambda}\int \left[\boldsymbol{m}_0(x_1',\, x_2') \cdot (\nabla' \times \boldsymbol{m}_0(x_1',\, x_2'))\right] d^2x' = \frac{1}{\lambda} W_{DM}(\lambda = 1),$$

αν χρησιμοποιήσουμε τη σχέση (2.35), θα βρούμε ότι

$$2W_a(\lambda = 1) + W_{DM}(\lambda = 1) = 0. \tag{2.37}$$

Στη σχέση που μόλις καταλήξαμε προκύπτει ο όρος W_a που είναι η θετική ενέργεια ανισοτροπίας και ο όρος W_{DM} που είναι η ενέργεια Dzyaloshinskii-Moriya, η οποία θα μπορούσε να είναι είτε θετική είτε αρνητική. Επομένως, ένα μοντέλο σιδηρομαγνητικού υλικού με ενέργεια $W = W_e + W_a + W_{DM}$, δεν αποκλείεται να έχει στατικές λύσεις εκτός των τετριμμένων.

2.4.3. Στατικές μαγνητικές φυσαλλίδες

Έχοντας υπόψη τη δομή μιας στατικής μαγνητικής φυσαλλίδας, δηλαδή πιο συγκεκριμένα την αξονικά συμμετρική δομή του διαχωριστικού πεδίου μεταξύ της εσωτερικής και της εξωτερικής της περιοχής, αφού πρώτα είναι καταλληλότερο να χρησιμοποιήσουμε κυλινδρικές συντεταγμένες για τις συνιστώσες της θέσης, δηλαδή να τις γράψουμε στην εξής μορφή

$$x_1 = \rho\cos\phi, \qquad x_2 = \rho\sin\phi \quad \text{και} \quad x_3 = z, \tag{2.38}$$

μπορούμε να περιγράψουμε αυτού του είδους τις διαμορφώσεις για το διάνυσμα της μαγνήτισης $\boldsymbol{m} = (m_1, m_2, m_3)$, με την παρακάτω γενική έκφραση

$$m_1 + im_2 = \left[m_\rho(\rho) + im_\phi(\rho)\right] e^{i\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right)}, \qquad m_3 = m_z(\rho). \tag{2.39}$$

Η οποία είναι ακριβώς η ίδια με το να γράψουμε

$$
\begin{aligned}
m_1 &= m_\rho \sin\phi + m_\phi \cos\phi, \\
m_2 &= m_\phi \sin\phi - m_\rho \cos\phi, \\
m_3 &= m_z(\rho),
\end{aligned} \tag{2.40}
$$

όπου m_ρ η ακτινική, m_ϕ η αζιμουθιακή και m_z η κατά μήκος συνιστώσα της μαγνήτισης και για την οποία συνεχίζει να ισχύει ο δεσμός

$$
m_\rho^2 + m_\phi^2 + m_z^2 = 1. \tag{2.41}
$$

Είναι επίσης πάρα πολύ σημαντικό το να μπορέσουμε να καταλήξουμε σε ένα γενικό τύπο για τον αριθμό Skyrme των μαγνητικών φυσαλλίδων οι οποίες χαρακτηρίζονται από την παραπάνω δομή. Για να γίνει αυτό πρέπει πρώτα να εκφράσουμε την τοπολογική πυκνότητα ως

$$
q = (\partial_2 \boldsymbol{m} \times \partial_1 \boldsymbol{m}) \cdot \boldsymbol{m} = \frac{1}{\rho} \left(\partial_\phi \boldsymbol{m} \times \partial_\rho \boldsymbol{m}\right) \cdot \boldsymbol{m}.
$$

Επομένως για την αξονικά συμμετρική δομή της μορφής (2.40) αυτή γίνεται

$$
q = \frac{1}{\rho} \left[\left(m_1 \partial_\phi m_2 - m_2 \partial_\phi m_1\right) \partial_\rho m_3 + \left(\partial_\phi m_1 \partial_\rho m_2 - \partial_\phi m_2 \partial_\rho m_2\right) m_3 \right].
$$

Όμως

$$
\begin{aligned}
m_1 \partial_\phi m_2 - m_2 \partial_\phi m_1 &= \left(m_\rho \sin\phi + m_\phi \cos\phi\right)^2 + \left(m_\phi \sin\phi - m_\rho \cos\phi\right)^2 \\
&= m_\rho^2 + m_\phi^2
\end{aligned}
$$

και

$$
\partial_\phi m_1 \partial_\rho m_2 - \partial_\phi m_2 \partial_\rho m_2 = -\left(m_\rho \partial_\rho m_\rho + m_\phi \partial_\phi m_\phi\right) = m_z \partial_\rho m_z.
$$

Άρα

$$
q = \frac{1}{\rho} \left(\left(m_\rho^2 + m_\phi^2\right) \partial_\rho m_z + m_z^2 \partial_\rho m_z \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial m_z}{\partial \rho}
$$

και τελικά έχουμε

$$
Q = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\rho} \frac{\partial m_z}{\partial \rho} \, 2\pi\rho \, d\rho = \frac{1}{2} \left[m_z(\rho \to \infty) - m_z(\rho = 0) \right]. \tag{2.42}
$$

Έτσι, εάν η παραπάνω εξίσωση λυθεί για συνοριακές συνθήκες $m_z(\rho = 0) = -1$ και $m_z(\rho \to \infty) = 1$, μας οδηγεί σε μια στατική μαγνητική φυσαλλίδα με αριθμό Skyrme $Q = 1$.

Γενικά άλλες αξονικά συμμετρικές στατικές μαγνητικές φυσαλλίδες μπορούν να βρεθούν, εάν θεωρήσουμε πολλαπλές περιστροφές του διανύσματος της μαγνήτισης $\boldsymbol{m}(\boldsymbol{r})$ καθώς κινούμαστε ακτινικά από το κέντρο αυτών. Για να γίνει αυτό θα ήταν πιο βολικό να περιγράψουμε το διάνυσμα της μαγνήτισης $\boldsymbol{m}$ με τη χρήση των γωνιών Θ και Φ, δηλαδή

$$m_1 = \sin\Theta\cos\Phi, \qquad m_2 = \sin\Theta\sin\Phi, \qquad m_3 = \cos\Theta. \tag{2.43}$$

Εάν στην συνέχεια θεωρήσουμε ότι

$$\Theta = \Theta(\rho), \qquad \Phi = \phi + \Phi_0(\rho), \tag{2.44}$$

όπου (ρ, ϕ) οι πολικές συντεταγμένες και επιλέξουμε $\Phi_0(\rho) = \pi/2$, η ενέργεια (2.31) με την προσθήκη του όρου W_{DM} γράφεται ως

$$\begin{aligned} W = {} & \frac{1}{2}\int \left[(\partial_\rho\Theta(\rho))^2 + \frac{\sin^2\Theta(\rho)}{\rho^2}\right] 2\pi\rho\, d\rho + \frac{\kappa}{2}\int \sin^2\Theta(\rho)\, 2\pi\rho\, d\rho \\ & - \int \left[\partial_\rho\Theta(\rho) + \frac{\cos\Theta(\rho)\sin\Theta(\rho)}{\rho}\right] 2\pi\rho\, d\rho. \end{aligned}$$

Επομένως για τα στάσιμα σημεία της, θα πρέπει να ισχύει ότι

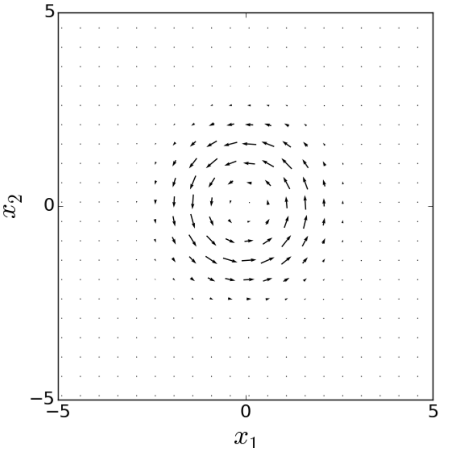
$$\frac{\delta W}{\delta\Theta(\rho)} = 0,$$

δηλαδή

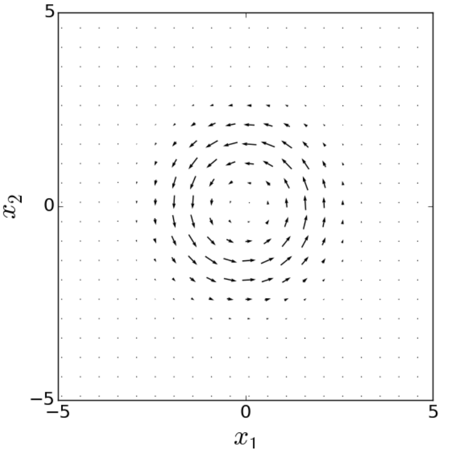
$$\frac{d^2\Theta(\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d\Theta(\rho)}{d\rho} - \left(\kappa + \frac{1}{\rho^2}\right)\cos\Theta(\rho)\sin\Theta(\rho) + \frac{2}{\rho}\sin^2\Theta(\rho) = 0. \tag{2.45}$$

Επομένως αξονικά συμμετρικές φυσαλλίδες θεωρώντας πολλαπλές περιστροφές της μαγνήτισης βρίσκονται, όταν λύσουμε την εξίσωση (2.45) με συνοριακές συνθήκες $\theta(\rho = 0) = k\pi$ και $\theta(\rho \to \infty) = 0$ με $k = 1, 2, 3, ..., N$, όπου για $k = 1$ καταλήγουμε στη θεμελιώδη στατική μαγνητική φυσαλλίδα $Q = 1$ για την οποία κάναμε λόγο προηγουμένως.

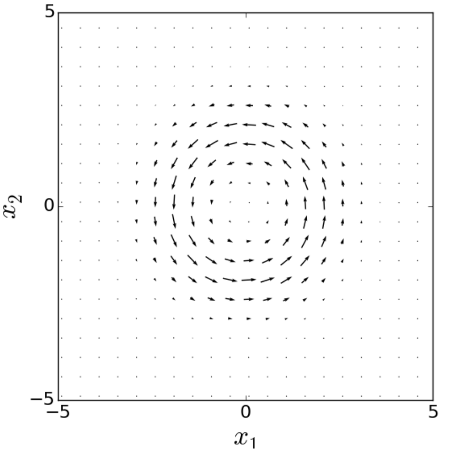
Η στατική και αξονικά συμμετρική μαγνητική φυσαλλίδα με αριμό Skyrme $Q = 1$ για διαφορετικές επιλογές της σταθεράς ανισοτροπίας $\kappa = 3, 2.9, 2.8$, εκπροσωπείται μέσω της προβολής (m_1, m_2) του διανύσματος της μαγνήτισης $\boldsymbol{m}$, από τις παρακάτω εικόνες (Εικόνα 2.1, 2.2, 2.3) αντίστοιχα. Έτσι μπορεί κάποιος να καταλήξει στο συμπέρασμα, ότι καθώς η σταθερά κ μικραίνει, η μαγνητική φυσαλλίδα μεγαλώνει. Δηλαδή ο όρος της ανισοτροπίας στην ενέργεια ευνοεί την τιμή της μαγνητισης $\boldsymbol{m} = (0, 0, \pm 1)$, δηλαδή την κάθετη στο σιδηρομαγνητικό υλικό.



Εικόνα 2.1: Η προβολή $(m_1,\, m_2)$ του διανύσματος της μαγνήτισης $\boldsymbol{m}$ μιας στατικής και αξονικά συμμετρικής μαγνητικής φυσαλλίδας $Q = 1$, με σταθερά ανισοτροπίας $\kappa = 3$.



Εικόνα 2.2: Η προβολή $(m_1,\, m_2)$ του διανύσματος της μαγνήτισης $\boldsymbol{m}$ μιας στατικής και αξονικά συμμετρικής μαγνητικής φυσαλλίδας $Q = 1$, με σταθερά ανισοτροπίας $\kappa = 2.9$.



Εικόνα 2.3: Η προβολή $(m_1,\, m_2)$ του διανύσματος της μαγνήτισης $\boldsymbol{m}$ μιας στατικής και αξονικά συμμετρικής μαγνητικής φυσαλλίδας $Q = 1$, με σταθερά ανισοτροπίας $\kappa = 2.8$.

2.5. Δυναμική μαγνητικών φυσαλλίδων

2.5.1. Νόμοι διατήρησης

Μελετώντας ένα σύστημα από εξισώσεις δε σημαίνει απαραίτητα ότι μπορούμε να βρούμε και τις λύσεις του. Ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο για την ποιοτική και κάποιες φορές για την ποσοτική μελέτη συστημάτων είναι οι νόμοι διατήρησης, οι οποίοι είναι σχέσεις που μας οδηγούν σε κάποιες ποσότητες που διατηρούνται από τις εξισώσεις της κίνησης. Εννοείται ότι όλες οι λύσεις των εξισώσεων πρέπει να ικανοποιούν αυτές τις σχέσεις.

Αρχικά θα μελετήσουμε τη διατηρητική εξίσωση Landau-Lifshitz (LL) σε δύο διαστάσεις και θα θεωρήσουμε ότι το ενεργό πεδίο $\boldsymbol{f}$ περιέχει τους όρους της ανισοτροπίας, ανταλλαγής καθώς επίσης και ένα πιθανό εξωτερικό πεδίο $\boldsymbol{h}_b$, δηλαδή

$$\frac{\partial \boldsymbol{m}}{\partial t^\star} = -\left(\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{f}\right), \qquad \boldsymbol{f} = \nabla^2 \boldsymbol{m} + \kappa \cdot (0,\, 0,\, m_3) + \boldsymbol{h}_b. \tag{2.46}$$

Καθώς η παραπάνω εξίσωση παρουσιάζει μια ανισοτροπία στην τρίτη κατεύθυνση του χώρου της μαγνήτισης, θα ήταν σκόπιμο να προσπαθήσουμε να μελετήσουμε τη συγκεκριμένη κατεύθυνση. Έτσι γίνεται κατανοητός ο λόγος για τον οποίο θα εξετάσουμε το παρακάτω ολοκλήρωμα το οποίο εκφράζει την *ολική μαγνήτιση* για την τρίτη συνιστώσα του διανύσματος $\boldsymbol{m}$

$$\mu = \int m_3 \, d^2x. \tag{2.47}$$

Με σκοπό να φτάσουμε σε μια διατηρήσιμη ποσότητα που να έχει σχέση με τη μαγνήτιση, θα μπορούσαμε να πάρουμε τη χρονική παράγωγο της ολικής μαγνήτισης για την οποία ισχύει

$$\dot{\mu} = \int \dot{m}_3 \, d^2x = -\int (\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{f})_3 \, d^2x = -\int (\boldsymbol{m} \times \partial_\mu \partial_\mu \boldsymbol{m} + \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{h}_b)_3 \, d^2x$$

$$= -\int \partial_\mu (\boldsymbol{m} \times \partial_\mu \boldsymbol{m})_3 \, d^2x - \int (\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{h}_b)_3 \, d^2x.$$

Ο πρώτος όρος της δεξιάς μεριάς της παραπάνω εξίσωσης είναι σε μορφή ολικής χωρικής παραγώγου. Επομένως αν εφαρμόσουμε το Θεώρημα Απόκλισης για το ολοκλήρωμα αυτό, θα μεταφερθούμε από ολόκληρο το επίπεδο στο επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του συνόρου του χώρου του οποίου ολοκληρώνουμε, δηλαδή

$$\int\int_S \partial_\mu (\boldsymbol{m} \times \partial_\mu \boldsymbol{m})_3 \, d^2x = \oint_{\partial S} (\boldsymbol{m} \times \partial_\mu \boldsymbol{m})_3 \, d\ell,$$

όπου S είναι η επιφάνεια ολοκλήρωσης και ∂S η συνοριακή καμπύλη. Στην περίπτωση μας την οποία ολοκληρώνουμε στο άπειρο επίπεδο θα μπορούσαμε να πάρουμε το σύνορο στο άπειρο. Εάν υποθέσουμε ότι η παραπάνω ολοκληρωτέα ποσότητα στο επικαμπύλιο ολοκλήρωμα φθήνει αρκέτα γρήγορα καθώς πηγαίνουμε στο χωρικό άπειρο, τότε τα ολοκλήρωμα αυτό είναι ίσο με το μηδέν.
Ας θεωρήσουμε τώρα ότι

$$\boldsymbol{h}_b = (h_1, h_2, h_3)\,,$$

έτσι, για τη χρονική παράγωγο της ολικής μαγνήτισης καταλήγουμε στην παρακάτω έκφραση

$$\dot{\mu} = -\int (m_1 h_2 - m_2 h_1) \, d^2x. \tag{2.48}$$

Μία ενδιαφέρουσα περίπτωση είναι όταν δεν έχουμε καθόλου την επίδραση κάποιου εξωτερικού πεδίου ή όταν το εξωτερικό πεδίο είναι της μορφής $\boldsymbol{h}_b = (0, 0, h)$, το οποίο μας οδηγεί στο να έχουμε το νόμο διατήρησης $\dot{\mu} = 0 \Rightarrow \mu = \sigma\tau\alpha\theta$. Δηλαδή αυτό σημαίνει ότι στην απουσία εξωτερικού πεδίου ή όταν το πεδίο είναι της παραπάνω μορφής, η ολική μαγνήτιση πρέπει να διατηρείται για όλες τις εξισώσεις της κίνησης. Θα μπορούσαμε για παράδειγμα να θεωρήσουμε μια μαγνητική φυσαλλίδα η οποία στην αρχή θα κινηθεί λόγω της εφαρμογής ενός εξωτερικού πεδίου και το οποίο στη συνέχεια θα σταματήσει να εφαρμόζεται. Η φυσσαλίδα αυτή είναι πολύ πιθανό να παρουσιάσει κάποιες ταλαντώσεις, αλλά αυτές θα είναι τέτοιες ώστε η ολική μαγνήτιση της να παραμένει σταθερή. Σίγουρα, εάν υπάρχει και ο όρος της απόσβεσης (Landau-Gilbert) οι ταλαντώσεις θα αρχίζουν να εξασθενούν και τελικά θα σταματήσουν, την ίδια στιγμή που η ολική μαγνήτιση μ θα αλλάξει και θα συγκλίνει στην τιμή για τη στατική πλέον μαγνητική φυσαλλίδα.

Για μια μαγνητική φυσαλλίδα η ολική μαγνήτιση της έτσι όπως την ορίσαμε στην (2.47) θα μπορούσε να είναι άπειρη. Επομένως θα ήταν πιο χρήσιμο προκειμένου να αποφευχθεί αυτή η περίπτωση να την ορίσουμε ως

$$\mu = \int (1 - m_3) \, d^2x, \tag{2.49}$$

όπου $m_3 = 1$, είναι η μαγνήτιση στο χωρικό άπειρο δηλαδή πολύ μακριά από την φυσαλλίδα. Αυτή η ποσότητα είναι πεπερασμένη και πράγματι διατηρείται. Αν όμως στο ενεργό πεδίο μας υπάρχει ο όρος Dzyaloshinskii-Moriya $\boldsymbol{f}_{DM} = -2\left(\nabla \times \boldsymbol{m}\right)$, δεν ισχύει κάτι τέτοιο και η ολική μαγνήτιση παύει πλέον να αποτελεί μια διατηρήσιμη ποσότητα για το σύστημα μας.

Μία πολύ βασική σχέση [12] για τη δυναμική της τοπολογικής πυκνότητας q και των άλλων ποσοτήτων που ορίζονται μέσω αυτής είναι

$$\dot{q} = -\epsilon_{\mu\nu} \left(\partial_\mu \boldsymbol{f} \cdot \partial_\nu \boldsymbol{m}\right) = -\epsilon_{\mu\nu} \partial_\mu \left(\boldsymbol{f} \cdot \partial_\nu \boldsymbol{m}\right) = \epsilon_{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\lambda \sigma_{\nu\lambda}, \tag{2.50}$$

όπου

$$\partial_\mu \sigma_{\nu\mu} = -\boldsymbol{f} \cdot \partial_\nu \boldsymbol{m}. \tag{2.51}$$

Τώρα μπορούμε να υπολογίσουμε τη χρονική παράγωγο του αριθμού Skyrme

$$\dot{Q} = \frac{1}{4\pi} \int \dot{q} \, d^2x = -\frac{1}{4\pi} \int \epsilon_{\mu\nu} \partial_\mu \left(\boldsymbol{f} \cdot \partial_\nu \boldsymbol{m}\right) d^2x. \tag{2.52}$$

Χρησιμοποιώντας όπως και προηγουμένως το Θεώρημα Απόκλισης, το ολοκλήρωμα αυτό δίνει ένα επικαμπύλιο ολοκλήρωμα στο χωρικό άπειρο. Κάνοντας αντίστοιχα με πριν την εύλογη υπόθεση, ότι δηλαδή η ποσότητα που βρίσκεται μέσα στο ολοκλήρωμα φθήνει αρκετά γρήγορα στο χωρικό άπειρο, το ολοκλήρωμα κάνει μηδέν και από το οποίο καταλήγουμε ότι ο αριθμός Skyrme είναι και αυτός μια διατηρήσιμη ποσότητα. Έτσι δώσαμε μια απόδειξη για ένα αποτέλεσμα που σε προηγούμενη παράγραφο βασίστηκε σε τοπολογικά επιχειρήματα.

Κάποιες επιπλέον πολύ χρήσιμες ποσότητες για την περιγραφή της κίνησης μιας μαγνητικής φυσαλλίδας είναι οι παρακάτω

$$I_\mu = \int x_\mu q \, d^2x, \qquad \mu = 1, 2. \tag{2.53}$$

Η χρονική παράγωγος των παραπάνω ποσοτήτων, χρησιμοποιώντας ξανά τη σχέση (2.50) και χωρίς στο ενεργό πεδίο να υπάρχει ο όρος του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου $\boldsymbol{h}_b$, γράφεται

$$\dot{I}_\mu = \int x_\mu \dot{q}\, d^2x = -\epsilon_{\lambda\nu} \int x_\mu \partial_\lambda \left(\boldsymbol{f} \cdot \partial_\nu \boldsymbol{m}\right) d^2x = \epsilon_{\mu\nu} \int \left(\boldsymbol{f} \cdot \partial_\nu \boldsymbol{m}\right) d^2x$$

$$= \epsilon_{\mu\nu} \int \left[\left(\nabla^2 \boldsymbol{m} + \kappa m_3 \hat{e}_3\right) \cdot \partial_\nu \boldsymbol{m}\right] d^2x.$$

Άρα, χρησιμοποιώντας ότι

$$\nabla^2 \boldsymbol{m} \cdot \partial_\nu \boldsymbol{m} = \partial_k \partial_k \boldsymbol{m} \cdot \partial_\nu \boldsymbol{m} = \partial_k \left(\partial_k \boldsymbol{m} \cdot \partial_\nu \boldsymbol{m}\right) - \frac{1}{2} \partial_\nu \left(\partial_k \boldsymbol{m} \cdot \partial_k \boldsymbol{m}\right)$$

$$= \partial_k \left[\left(\partial_k \boldsymbol{m} \cdot \partial_\nu \boldsymbol{m}\right) - \delta_{\nu k} \left(\frac{1}{2} \partial_\lambda \boldsymbol{m} \cdot \partial_\lambda \boldsymbol{m}\right)\right]$$

και

$$m_3 \hat{e}_3 \cdot \partial_\nu \boldsymbol{m} = m_3 \partial_\nu m_3 = \frac{1}{2} \partial_\nu \left(m_3^2\right),$$

θα έχουμε εκφράσει την ολοκληρωτέα ποσότητα που προέκυψε για τη χρονική παράγωγο των ποσοτήτων I_μ σε μορφή ολικής χωρικής παραγώγου. Έτσι, αν χρησιμοποιηθεί για άλλη μια φορά το Θεώρημα Απόκλισης θα μεταφερθούμε από την επιφάνεια του υλικού στο σύνορο του στο χωρικό άπειρο, όπου όπως και πριν, θεωρούμε ότι εκεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα δίνει αποτέλεσμα ίσο με το μηδέν και επομένως οι παραπάνω ποσότητες είναι διατηρήσιμες.

Εαν τώρα στο ενεργό πεδίο $\boldsymbol{f}$ υπάρχει ο όρος Dzyaloshinskii-Moriya $\boldsymbol{f}_{DM} = -2\left(\nabla \times \boldsymbol{m}\right)$, ο τανυστής $\sigma_{\nu\mu}$ με συνιστώσες [13] τις

$$\sigma_{11} = \frac{1}{2} \left(\partial_2 \boldsymbol{m} \cdot \partial_2 \boldsymbol{m} - \partial_1 \boldsymbol{m} \cdot \partial_1 \boldsymbol{m}\right) - \frac{\kappa}{2} m_3^2 + (m_1 \partial_2 m_3 - m_3 \partial_2 m_1),$$

$$\sigma_{12} = -\partial_1 \boldsymbol{m} \cdot \partial_2 \boldsymbol{m} + (m_3 \partial_1 m_1 - m_1 \partial_1 m_3),$$

$$\sigma_{21} = -\partial_1 \boldsymbol{m} \cdot \partial_2 \boldsymbol{m} + (m_2 \partial_2 m_3 - m_3 \partial_2 m_2),$$

$$\sigma_{22} = \frac{1}{2} \left(\partial_1 \boldsymbol{m} \cdot \partial_1 \boldsymbol{m} - \partial_2 \boldsymbol{m} \cdot \partial_2 \boldsymbol{m} \right) - \frac{\kappa}{2} m_3^2 + (m_3 \partial_1 m_2 - m_2 \partial_1 m_3),$$

μας επιτρέπει να εκφράσουμε την ολοκληρωτέα ποσότητα που προκύπτει στη χρονική παράγωγο των ποσοτήτων I_μ, σε μορφή ολικής χωρικής παραγώγου. Πράγματι

$$-\left(\partial_1 \sigma_{11} + \partial_2 \sigma_{12} \right)$$

$$= \partial_1 \boldsymbol{m} \left(\partial_1 \partial_1 \boldsymbol{m} + \partial_2 \partial_2 \boldsymbol{m} \right) + \kappa m_3 \hat{e}_3 \cdot \partial_1 \boldsymbol{m} - 2 \left(\nabla \times \boldsymbol{m} \right) \cdot \partial_1 \boldsymbol{m} = \boldsymbol{f} \cdot \partial_1 \boldsymbol{m}$$

και

$$-\left(\partial_1 \sigma_{21} + \partial_2 \sigma_{22} \right)$$

$$= \partial_2 \boldsymbol{m} \left(\partial_1 \partial_1 \boldsymbol{m} + \partial_2 \partial_2 \boldsymbol{m} \right) + \kappa m_3 \hat{e}_3 \cdot \partial_2 \boldsymbol{m} - 2 \left(\nabla \times \boldsymbol{m} \right) \cdot \partial_2 \boldsymbol{m} = \boldsymbol{f} \cdot \partial_2 \boldsymbol{m}.$$

Έτσι αποδείξαμε ότι οι ποσότητες αυτές είναι διατηρήσιμες και σε αυτήν την περίπτωση.

Για την εξήγηση των αποτελεσμάτων θα πρέπει πρώτα να τονίσουμε ότι η τοπολογική πυκνότητα q, παίρνει σημαντικές τιμές στην περιοχή του κέντρου της μαγνητικής φυσσαλίδας. Αυτό οδηγεί ξεκάθαρα στο ότι οι ποσότητες I_μ οι οποίες δίνουν τη μέση θέση της τοπολογικής πυκνότητας, αποτελούν ένα σημαντικό σ-τοιχείο για τον προσδιορισμό της θέσης της φυσαλλίδας. Ειδικότερα, η θέση δίνεται από τις ποσότητες I_μ κανονικοποιημένες στην ολική τοπολογική πυκνότητα, ορίζοντας έτσι τον οδηγό κίνησης $\boldsymbol{R} = (R_1, R_2)$ για τον οποίο ισχύει

$$R_1 = \frac{I_1}{4\pi Q} = \frac{\int x_1 \, q \, d^2x}{\int q \, d^2x}, \qquad R_2 = \frac{I_2}{4\pi Q} = \frac{\int x_2 \, q \, d^2x}{\int q \, d^2x} \tag{2.54}$$

και ο οποίος προέκυψε από την ανάγκη να ορίσουμε τη θέση της μαγνητικής φυσαλλίδας για $Q \neq 0$, προκειμένου να μελετήσουμε μια πιθανή κίνηση αυτής.

2.5.2. Κίνηση μαγνητικών φυσαλλίδων

Με σκοπό τη μελέτη της δυναμικής των μαγνητικών φυσαλλίδων, θεωρούμε την επίδραση ενός εξωτερικού μαγνητικού πεδίου $\boldsymbol{h}_b = \boldsymbol{h}_b(x_1,\, x_2,\, t) = (0,\, 0,\, h_b)$. Το ζήτημα τώρα είναι να προβλέψουμε τη συμπεριφορά των φυσαλλίδων όταν το εξωτερικό αυτό πεδίο εφαρμοστεί. Από τη στιγμή που γίνει κάτι τέτοιο, ο αριθμός Skyrme θα συνεχίσει να διατηρείται αλλά δε θα γίνει το ίδιο και με τις ποσότητες I_μ της σχέσης (2.52), για τις οποίες θα ισχύει πλέον ότι

$$\begin{aligned}\dot{I}_\mu &= \epsilon_{\mu\nu}\int h_b \hat{e}_3 \cdot \partial_\nu \boldsymbol{m}\, d^2x = \epsilon_{\mu\nu}\int h_b \partial_\nu m_3\, d^2x \\ &= \epsilon_{\mu\nu}\int h_b \partial_\nu (m_3 - 1)\, d^2x = -\epsilon_{\mu\nu}\int h_b \partial_\nu (1 - m_3)\, d^2x. \end{aligned} \tag{2.55}$$

Στο σημείο αυτό ας θεωρήσουμε μια αρχικά στατική μαγνητική φυσαλλίδα με $Q = 1$ και $\kappa = 3$ σαν αυτήν την οποία μπορούμε να δούμε στην (Εικόνα 2.1). Στη συνέχεια εφαρμόζουμε ένα εξωτερικό μαγνητικό πεδίο τέτοιο ώστε

$$\boldsymbol{h}_b = (0, 0, g x_1), \tag{2.56}$$

δηλαδή $h_b = g x_1$. Η ταχύτητα τώρα του οδηγού κίνησης προκύπτει από την εισαγωγή της εξίσωσης (2.56) στην εξίσωση (2.55). Πραγματοποιώντας στη συνέχεια μια ολοκλήρωση κατά παράγοντες έχουμε ότι

$$\dot{R}_1 = 0, \qquad \dot{R}_2 = -\frac{1}{4\pi Q}\int \partial_1 h_b (1 - m_3)\, d^2x, \tag{2.57}$$

δηλαδή

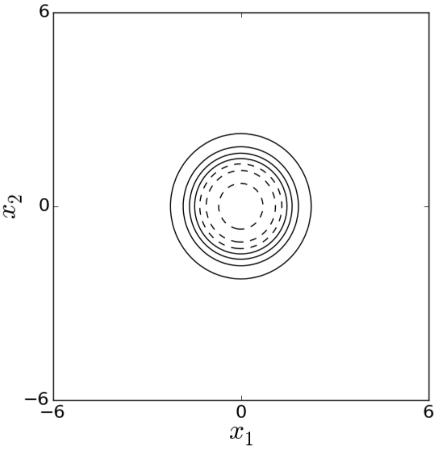
$$\dot{R}_1 = 0, \qquad \dot{R}_2 = -\frac{g\mu}{4\pi Q}, \tag{2.58}$$

οπού $\mu = \int (1 - m_3) d^2x$ είναι η ολική μαγνήτιση όπως την ορίσαμε στην παραπάνω εξίσωση (2.49).

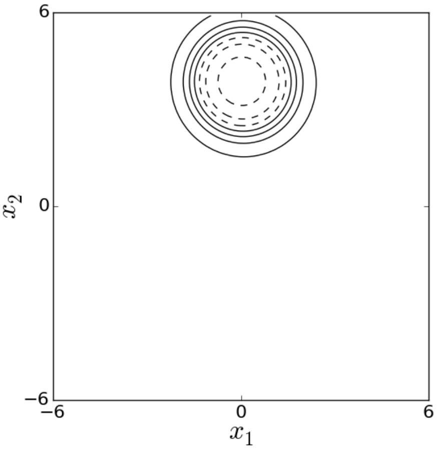
Κάποιος θα μπορούσε να εφεύρει και άλλες ποσότητες για να περιγράψει τη θέση και την κίνηση της φυσαλλίδας, των οποίων η χρησιμότητα έχει να κάνει με τη σύνδεση αυτών στις πραγματικές μετρήσεις. Ένα εύλογο μέτρο της θέσης της τρίτης συνιστώσας της μαγνήτισης $\boldsymbol{m}$ δίνεται από τις παρακάτω ποσότητες

$$X_1 = \frac{\int x_1(1-m_3)\,d^2x}{\int (1-m_3)\,d^2x}, \qquad X_2 = \frac{\int x_2(1-m_3)\,d^2x}{\int (1-m_3)\,d^2x}\ . \tag{2.59}$$

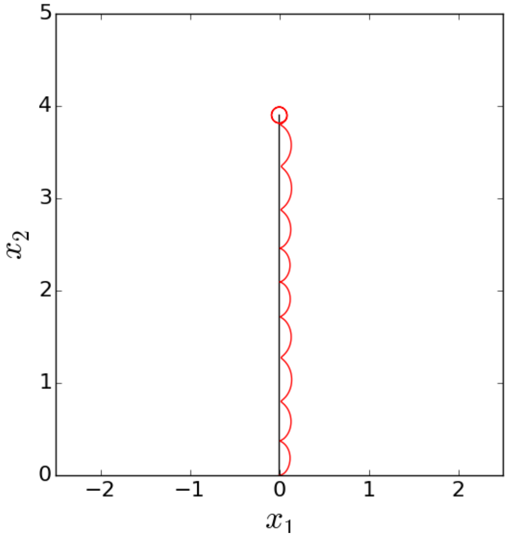
Στην παρακάτω εικόνα (Εικόνα 2.4), παρατηρούμε την αρχική θέση της στατικής μαγνητικής φυσαλλίδας με $Q = 1$ και $\kappa = 3$, εκφρασμένης μέσω της τρίτης συνιστώσας m_3 του διανύσματος της μαγνήτισης $\boldsymbol{m}$. Μετά από την εφαρμογή ενός εξωτερικού μαγνητικού πεδίου της μορφής (2.56), η θέση της φυσαλλίδας λίγο πριν αυτό σταματήσει να εφαρμόζεται δίνεται από την Εικόνα 2.5. Στην Εικόνα 2.6 παρατηρούμε την τροχιά που διέγραψε η ίδια μαγνητική φυσαλλίδα από την αρχική της θέση, μέχρι να φτάσει στο σημείο που φαίνεται από την Εικόνα 2.5. Ο οδηγός κίνησης (2.58), ο οποίος αντιπροσωπεύεται από τη μαύρη γραμμή, διαδίδεται κάθετα στην κατεύθυνση του εφαρμοζόμενου πεδίου. Η τροχιά για το διάνυσμα της θέσης $(X_1,\, X_2)$ είναι κυκλοειδής και αντιπροσωπεύεται από την κόκκινη γραμμή. Από τη στιγμή που το εφαρμοζόμενο πεδίο σταματήσει, ο οδηγός κίνησης παύει να κινείται περαιτέρω και η φυσαλλίδα θέτει τον εαυτό της σε μια περιστροφική κίνηση γύρω από το σταθερό πλέον οδηγό κίνησης. Η θέση $(X_1,\, X_2)$ πριν το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο σταματήσει, ακολουθεί τον οδηγό κίνησης $\boldsymbol{R} = (R_1,\, R_2)$ πραγματοποιώντας ταυτόχρονα κάποιες ταλαντώσεις. Δεν υπάρχει καμία αμφιβολία ότι αυτή η κίνηση, είναι ακριβώς αντίστοιχη με την κίνηση του ηλεκτρονίου την οποία μελετήσαμε στο Κεφάλαιο 1 και το οποίο κινούταν υπό την επίδραση ηλεκτρικού $\boldsymbol{E} = E\hat{\imath}$ και μαγνητικού $\boldsymbol{B} = B\hat{k}$ πεδίου, πραγματοποιώντας και αυτό μια κυκλοειδή κίνηση, κάθετη στον άξονα εφαρμογής του ηλεκτρικού αυτού πεδίου.



Εικόνα 2.4: Η τρίτη συνιστώσα m_3 του διανύσματος της μαγνήτισης $\boldsymbol{m}$ της μαγνητικής φυσαλλίδας με $Q = 1$ και σταθερά ανισοτροπίας $\kappa = 3$ στην αρχική της θέση (Εικόνα 2.1).



Εικόνα 2.5: Η τρίτη συνιστώσα m_3 του διανύσματος της μαγνήτισης $\boldsymbol{m}$ της μαγνητικής φυσαλλίδας με $Q = 1$ και σταθερά ανισοτροπίας $\kappa = 3$, λίγο πριν σταματήσει η εφαρμογή ενός εξωτερικού μαγνητικού πεδίου $\boldsymbol{h}_b = (0,\, 0,\, h_b)$ με $h_b = gx_1$, το οποίο ήταν υπεύθυνο για την μετακίνηση αυτής από την αρχική της θέση (Εικόνα 2.4).



Εικόνα 2.6: Η τροχιά που διέγραψε η μαγνητική φυσαλλίδα $Q = 1$ με $\kappa = 3$ από την αρχική της θέση μέχρι λίγο πριν απενεργοποιηθεί το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο $\boldsymbol{h}_b = (0,\, 0,\, gx_1)$. Με τη μαύρη γραμμή αντιπροσωπεύεται ο οδηγός κίνησης $\boldsymbol{R} = (R_1,\, R_2)$ και με την κόκκινη γραμμή η τροχιά του διανύσματος $(X_1,\, X_2)$. Από τη στιγμή που το $\boldsymbol{h}_b$ απενεργοποιηθεί, η μανγητική φυσαλλίδα θέτει τον εαυτό της σε μια περιστροφική κίνηση γύρω από τον οδηγό κίνησης της ο οποίος σταματάει να κινείται.

2.5.3. Αγκύλες Poisson

Έστω τώρα ότι η Hamiltonian του συστήματος μας είναι το συναρτησοειδές της ενέργειας $W = W(\boldsymbol{m})$ όπως αυτό δίνεται από την εξίσωση (2.22). Τότε το σύστημα μας αποτελεί χαμιλτονιανό, αν είναι επιπλέον εφοδιασμένο με την παρακάτω αγκύλη Poisson

$$\{m_i(\boldsymbol{x}),\, m_j(\boldsymbol{x}')\} = \epsilon_{ijk} m_k(\boldsymbol{x})\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'). \tag{2.60}$$

Έτσι, η εξίσωση Hamiton δίνεται από

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{m}}{\partial t} + \{\boldsymbol{m}, W\} = 0 \Rightarrow & \frac{\partial \boldsymbol{m}}{\partial t} + \frac{\delta W}{\delta m_i}\{m_j,\, m_i\} = 0 \\ \Rightarrow & \frac{\partial \boldsymbol{m}}{\partial t} + \epsilon_{kij}\left[m_k\left(-\frac{\delta W}{\delta m_i}\right)\hat{e}_j\right] = 0 \\ \Rightarrow & \frac{\partial \boldsymbol{m}}{\partial t} = -\left(\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{f}\right) \end{aligned} \tag{2.61}$$

και η οποία πράγματι συμπίπτει με τη γενική μορφή της εξίσωσης Landau-Lifshitz (2.18), όπου το ενεργό πεδίο $\boldsymbol{f}$ δίνεται από την εξίσωση (2.17).

Μια πολύ χρήσιμη αγκύλη Poisson που πρέπει να αναφέρουμε και η οποία έχει να κάνει με τις συνιστώσες του οδηγού κίνησης της μαγνητικής φυσαλλίδας $\boldsymbol{R} = (R_1, R_2)$, ο οποίος ορίστηκε στη σχέση (2.54) της παραγράφου στην οποία κάναμε λόγο για τις διατηρήσιμες ποσότητες του συστήματος, είναι η παρακάτω

$$\{R_1,\, R_2\} = \frac{1}{4\pi Q}\ , \tag{2.62}$$

όπου Q ο διατηρήσιμος αριθμός Skyrme του συστήματος και για τον οποίο ισχύει στην περίπτωση μας ότι $Q = 1$.

2.6. Παράρτημα 2 : Το ισοτροπικό μοντέλο

2.6.1. Στατική Landau-Lifshitz

Ας θυμηθούμε στο σημείο αυτό ότι για το διάνυσμα της μαγνήτισης ισχύει $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{m} = 1 \Rightarrow \boldsymbol{m}^2 = 1$. Δηλαδή αν έχουμε ότι $\boldsymbol{m}(\boldsymbol{x}, t) = \{m_a(\boldsymbol{x}, t);\, a = 1, 2, 3\}$, θα μπορούσαμε να εκφράσουμε το συγκεκριμένο δεσμό ως

$$\sum_a m_a^2(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{m} = 1. \tag{2.63}$$

Επομένως αν θεωρήσουμε σαν πυκνότητα της Lagrangian την

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\sum_\mu\sum_a (\partial_\mu m_a)(\partial_\mu m_a) = \frac{1}{2}(\partial_\mu \boldsymbol{m})\cdot(\partial_\mu \boldsymbol{m}) \tag{2.64}$$

και με το δεσμό (2.63) ο οποίος ισχύει να επιβάλλεται μέσω ενός πολλαπλασιαστή Lagrange $\lambda(\boldsymbol{x}, t)$, μπορούμε να γράψουμε το παρακάτω συναρτησοειδές

$$S(\boldsymbol{m}) = \int d^2x \int dt\, \frac{1}{2}\left[(\partial_\mu \boldsymbol{m}\cdot\partial_\mu \boldsymbol{m}) + \lambda(\boldsymbol{x}, t)(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{m} - 1)\right]. \tag{2.65}$$

Αν τώρα εφαρμόσουμε την εξίσωση Euler-Lagrange

$$\sum_{i=1}^{2}\frac{d}{dx_i}\left(\frac{\partial s}{\partial\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{m}}{\partial x_i}\right)}\right) - \frac{\partial s}{\partial \boldsymbol{m}} = 0,$$

όπου s είναι η πυκνότητα του συναρτησοειδούς (2.65), η εξίσωση στην οποία θα καταλήξουμε είναι η

$$\partial_\mu\partial_\mu \boldsymbol{m} + \lambda \boldsymbol{m} = 0 \Rightarrow \left(\nabla^2 + \lambda\right)\boldsymbol{m} = 0. \tag{2.66}$$

Όμως, χρησιμοποιώντας αυτό το αποτέλεσμα και το δεσμό (2.63), μπορούμε να εξαλείψουμε τον πολλαπλασιαστή Lagrange $\lambda(\boldsymbol{x}, t)$

$$\lambda(\boldsymbol{x}, t) = \lambda(\boldsymbol{x}, t)(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{m}) = -\boldsymbol{m}\cdot\nabla^2\boldsymbol{m}. \tag{2.67}$$

Έτσι, αν εισάγουμε στη σχέση (2.66) το αποτέλεσμα της (2.67), θα προκύψει ότι

$$\nabla^2 \boldsymbol{m} - \left(\boldsymbol{m} \cdot \nabla^2 \boldsymbol{m}\right) \boldsymbol{m} = 0. \tag{2.68}$$

Όμως, η (2.68) είναι ακριβώς η ίδια εξίσωση με την

$$\boldsymbol{m} \times \left(\boldsymbol{m} \times \nabla^2 \boldsymbol{m}\right) = 0, \tag{2.69}$$

η οποία ισχύει μόνο όταν

$$\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{f} = 0, \qquad \text{με} \qquad \boldsymbol{f} = \nabla^2 \boldsymbol{m}. \tag{2.70}$$

Τελικά, η εξίσωση (2.70) είναι αυτή που πρέπει να ικανοποιείται, προκειμένου να βρούμε στατικές λύσεις για κάποιο σιδηρομαγνητικό υλικό με ενέργεια την

$$W(\boldsymbol{m}) = \frac{1}{2} \int \left(\partial_\mu \boldsymbol{m} \cdot \partial_\mu \boldsymbol{m}\right) d^2x. \tag{2.71}$$

2.6.2. Ελαχιστοποίηση της ενέργειας

Έστω τώρα η παρακάτω ανισότητα

$$\int d^2x \left[\left(\partial_\mu \boldsymbol{m} \pm \epsilon_{\mu\nu} \boldsymbol{m} \times \partial_\nu \boldsymbol{m}\right) \cdot \left(\partial_\mu \boldsymbol{m} \pm \epsilon_{\mu\sigma} \boldsymbol{m} \times \partial_\sigma \boldsymbol{m}\right)\right] \geq 0, \tag{2.72}$$

η οποία ισχύει, αφού μέσα στο ολοκλήρωμα το μονόμετρο μέγεθος το οποίο προκύπτει, είναι αποτέλεσμα πολλαπλασιασμού του ίδιου διανύσματος. Κάνοντας τις πράξεις, η (2.72) γίνεται

$$\begin{aligned} \int d^2x \left[\left(\partial_\mu \boldsymbol{m}\right) \cdot \left(\partial_\mu \boldsymbol{m}\right) + \epsilon_{\mu\nu} \left(\boldsymbol{m} \times \partial_\nu \boldsymbol{m}\right) \cdot \epsilon_{\mu\sigma} \left(\boldsymbol{m} \times \partial_\sigma \boldsymbol{m}\right)\right] \\ \geq \pm 2 \int d^2x \left[\epsilon_{\mu\nu} \boldsymbol{m} \cdot \left(\partial_\mu \boldsymbol{m} \times \partial_\nu \boldsymbol{m}\right)\right]. \end{aligned} \tag{2.73}$$

Για το δεύτερο γινόμενο της ολοκληρωτέας ποσότητας της αριστερής μεριάς της (2.73) έχουμε

$$\begin{aligned}\epsilon_{\mu\nu}\left(\boldsymbol{m}\times\partial_\nu\boldsymbol{m}\right)\cdot\epsilon_{\mu\sigma}\left(\boldsymbol{m}\times\partial_\sigma\boldsymbol{m}\right) &= \epsilon_{\mu\nu}\epsilon_{\mu\sigma}\left[\left(\boldsymbol{m}\times\partial_\nu\boldsymbol{m}\right)\cdot\left(\boldsymbol{m}\times\partial_\sigma\boldsymbol{m}\right)\right]\\ &= \delta_{\nu\sigma}\left[\left(\boldsymbol{m}\times\partial_\nu\boldsymbol{m}\right)\cdot\left(\boldsymbol{m}\times\partial_\sigma\boldsymbol{m}\right)\right]\\ &= \delta_{\nu\sigma}\left[\epsilon_{ijk}\epsilon_{\ell mk}m_i(\partial_\nu m)_j m_\ell(\partial_\sigma m)_m\right].\end{aligned} \tag{2.74}$$

Εφόσον γνωρίζουμε ότι

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{\ell mk} = \begin{vmatrix}\delta_{i\ell} & \delta_{im}\\ \delta_{j\ell} & \delta_{jm}\end{vmatrix} = \delta_{i\ell}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{j\ell},$$

η (2.74) γίνεται

$$\begin{aligned}&\delta_{\nu\sigma}\left[\left(\delta_{i\ell}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{j\ell}\right)m_i(\partial_\nu m)_j m_\ell(\partial_\sigma m)_m\right]\\ &= \delta_{\nu\sigma}\left[\delta_{i\ell}m_i m_\ell\delta_{jm}(\partial_\nu m)_j(\partial_\sigma m)_m-\delta_{im}m_i(\partial_\sigma m)_m\delta_{j\ell}m_\ell(\partial_\nu m)_j\right].\end{aligned} \tag{2.75}$$

Όμως για την πρώτη παράγωγο του δεσμού ισχύει ότι $\boldsymbol{m}\cdot(\partial_\nu\boldsymbol{m})=0$, επομένως η (2.75) μπορεί να εκφραστεί ως

$$\begin{aligned}&\delta_{\nu\sigma}\left[\left(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{m}\right)\left(\partial_\nu\boldsymbol{m}\cdot\partial_\sigma\boldsymbol{m}\right)-\left(\boldsymbol{m}\cdot\partial_\sigma\boldsymbol{m}\right)\left(\boldsymbol{m}\cdot\partial_\nu\boldsymbol{m}\right)\right]\\ &= \delta_{\nu\sigma}\left(\partial_\nu\boldsymbol{m}\cdot\partial_\sigma\boldsymbol{m}\right)=\partial_\nu\boldsymbol{m}\cdot\partial_\nu\boldsymbol{m}.\end{aligned}$$

Έτσι, η (2.73) γράφεται ως

$$\begin{aligned}2\int d^2x\left(\partial_\mu\boldsymbol{m}\right)\cdot\left(\partial_\mu\boldsymbol{m}\right) &\geq \pm2\int d^2x\left[\epsilon_{\mu\nu}\boldsymbol{m}\cdot\left(\partial_\mu\boldsymbol{m}\times\partial_\nu\boldsymbol{m}\right)\right]\\ &\Rightarrow 4W\geq16\pi\left|Q\right|\\ &\Rightarrow W\geq4\pi\left|Q\right|.\end{aligned} \tag{2.76}$$

Η παραπάνω ανισότητα θέτει ένα κάτω φράγμα για την ενέργεια, για κάθε στατική διαμόρφωση σε ένα δεδομένο αριθμό Skyrme Q. Άρα, για οποιονδήποτε αριθμό Skyrme η ενέργεια ελαχιστοποιείται, όταν η ισότητα (2.76) ικανοποιείται. Αυτό με τη σειρά του μας λέει ότι πρέπει να ικανοποιείται η ισότητα (2.72), το οποίο συμβαίνει αν και μόνο αν

$$\partial_\mu \boldsymbol{m} \pm \epsilon_{\mu\nu} \boldsymbol{m} \times \partial_\nu \boldsymbol{m} = 0 \Rightarrow \partial_\mu \boldsymbol{m} = \pm\epsilon_{\mu\nu} \boldsymbol{m} \times \partial_\nu \boldsymbol{m}. \tag{2.77}$$

Κάθε διάνυσμα της μαγνήτισης το οποίο ικανοποιεί την (2.77) καθώς επίσης και το δεσμό $\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{m} = 1$, ελαχιστοποιεί την ενέργεια W σε κάποιον αριθμό Skyrme Q και που αυτομάτως ικανοποιείται η εξίσωση $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{f} = 0$ με $\boldsymbol{f} = \nabla^2 \boldsymbol{m}$.

2.6.3. Αξονικά συμμετρική $Q = 1$ μαγνητική φυσαλλίδα

Η εξίσωση (2.77) η οποία προέκυψε, μας λέει ότι ένα διάνυσμα της μαγνήτισης $\boldsymbol{m}$ αποτελεί στατική λύση της εξίσωσης Landau-Lifshitz όταν

$$\partial_1 \boldsymbol{m} = \boldsymbol{m} \times \partial_2 \boldsymbol{m} \qquad \text{και} \qquad \partial_2 \boldsymbol{m} = -\boldsymbol{m} \times \partial_1 \boldsymbol{m}. \tag{2.78}$$

Λύνοντας τις παραπάνω εξισώσεις μπορούν να βρεθούν πολλοί διαφορετικοί αριθμοί Skyrme. Από αυτούς, η αξονικά συμμετρική διαμόρφωση της μαγνητικής φυσαλλίδας με $Q = 1$ της μορφής (2.44) που κάναμε λόγο σε προηγούμενη παράγραφο, δίνεται όταν για τις συνιστώσες της μαγνήτισης ισχύει

$$m_1 = -\frac{2ax_2}{\rho^2 + a^2}, \qquad m_2 = \frac{2ax_1}{\rho^2 + \alpha^2}, \qquad m_3 = \frac{\rho^2 - a^2}{\rho^2 + a^2}, \tag{2.79}$$

όπου a μια αυθαίρετη θετική σταθερά η οποία δίνει την ακτίνα της μαγνητικής φυσαλλίδας και $\rho^2 = x_1^2 + x_2^2$. Η παραπάνω διαμόρφωση (2.79) έχει παρόμοια χαρακτηριστικά με αυτά της μαγνητικής φυσαλλίδας που φαίνεται στην Εικόνα 2.1.

Χρησιμοποιώντας κάποιος τον τελεστή Laplace, ο οποίος στη συγκεκριμένη περίπτωση δίνεται ως

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}$$

και κάνοντας τις πράξεις, θα δει ότι η διαμόρφωση (2.79) πράγματι επαληθεύει την εξίσωση (2.70), δηλαδή αποτελεί μια στατική λύση της εξίσωσης Landau-Lifshitz.

Κεφάλαιο 3

Σύγκριση των συστημάτων

3.1. Σύγκριση διατηρήσιμων ποσοτήτων

Όπως αναφέραμε στις τελευταίες παραγράφους του Κεφαλαίου 2, η προσομοίωση της κίνησης της μαγνητικής φυσαλλίδας με $Q = 1$ και $\kappa = 3$ όπως φαίνεται στην (Εικόνα 2.6), μας οδηγεί στη διαπίστωση ότι με την προσθήκη ενός εξωτερικού μαγνητικού πεδίου $\boldsymbol{h}_b = (0, 0, h_b)$ με $h_b = g x_1$, η φυσαλλίδα παρουσιάζει μια κυκλοειδή κίνηση, κάθετη στην κατεύθυνση του πεδίου αυτού. Η συγκεκριμένη κίνηση είναι αντίστοιχη με την προβολή της τροχιάς του ηλεκτρονίου όταν αυτό κινείται μέσα σε ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο. Πιο συγκεκριμένα, αν εφαρμόσουμε ένα ομογενές ηλεκτρικό πεδίο στο επίπεδο τέτοιο ώστε $\boldsymbol{E} = E\hat{\imath}$ και ένα μαγνητικό πεδίο κάθετο σε αυτό $\boldsymbol{B} = B\hat{k}$, τότε και το ηλεκτρόνιο κάνει μια κυκλοειδή κίνηση κάθετη στον άξονα τον οποίο εφαρμόζεται το ηλεκτρικό πεδίο και η οποία έχει εξισώσεις τις παρακάτω

$$x = \frac{E}{B\omega_c} - \frac{E}{B\omega_c}\cos(\omega_c t), \tag{3.1}$$

$$y = \frac{E}{B\omega_c}\sin(\omega_c t) - \frac{E}{B}t, \tag{3.2}$$

όπως αυτές προέκυψαν στο Κεφάλαιο 1.

Προκειμένου όμως να κάνουμε οποιαδήποτε σύγκριση των δύο αυτών παρόμοιων περιπτώσεων πρέπει να αναφέρουμε ότι στην πρώτη περίπτωση, δηλαδή αυτής της κίνησης του ηλεκτρονίου, φτάσαμε σε μια αναλυτική λύση όπως και φαίνεται από τις εξισώσεις (3.1) και (3.2). Αντιθέτα με τη δεύτερη περίπτωση, δηλαδή αυτής της κίνησης της φυσαλλίδας, έχουμε μια προσομοίωση της κίνησης της βασιζόμενοι κυρίως στις διατηρήσιμες ποσότητες.

Για το διατηρήσιμο οδηγό κίνησης $\boldsymbol{R} = (R_1, R_2)$ της μαγνητικής φυσαλλίδας και του ηλεκτρονίου, έχουμε αντίστοιχα τις παρακάτω αγκύλες Poisson

$$\{R_1, R_2\} = \frac{1}{4\pi Q} \qquad \text{και} \qquad \{R_1, R_2\} = \frac{1}{B}\ . \tag{3.3}$$

Επομένως από τις παραπάνω εκφράσεις, θα μπορούσαμε να κάνουμε την αναλογία

$$B \longleftrightarrow 4\pi Q. \tag{3.4}$$

Από την κίνηση του ηλεκτρονίου γνωρίζουμε ότι εαν θεωρήσουμε στο σύστημα μας μια δυναμική ενέργεια της μορφής $U = U(x_1,\, x_2)$, περιμένουμε η ταχύτητα του οδηγού κίνησης να είναι

$$v_{R_e} = \frac{\partial_i U}{B} \Rightarrow v_{R_e} = \frac{E_i}{B}\ . \tag{3.5}$$

Ώστε στην περίπτωση του οδηγού κίνησης της μαγνητικής φυσαλλίδας, περιμένουμε να καταλήξουμε για την ταχύτητα του στην παρακάτω έκφραση

$$v_R = \frac{\partial_i U}{4\pi Q}\ . \tag{3.6}$$

Επομένως αν θεωρήσουμε στη συγκεκριμένη περίπτωση, σαν αντίστοιχη δυναμική ενέργεια της $U = U(x_1,\, x_2)$ που έθεσε το ηλεκτρόνιο σε κίνηση κατά μήκος του άξονα y, την ενέργεια W_b του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου $\boldsymbol{h}_b$, η οποία ήταν η υπεύθυνη για την κίνηση τη φυσαλλίδας, η σχέση (3.6) θα μας δώσει ότι

$$v_R = \frac{g\mu}{4\pi Q}\ . \tag{3.7}$$

Αυτή συμπίπτει με την ταχύτητα του οδηγού κίνησης $(R_1,\, R_2)$ της μαγνητικής φυσαλλίδας, όπως αυτή προέκυψε στη σχέση (2.58).

3.2. Απλός αρμονικός ταλαντωτής

Με σκοπό την εξαγωγή αποτελεσμάτων και πληροφοριών για τη μαγνητική φυσαλλίδα με $Q = 1$ και την κίνηση αυτής, προκύπτει η ανάγκη σύγκρισης των Χαμιλτονιανών συστημάτων τα οποία έχουμε ήδη μελετήσει, με το σύστημα του απλού αρμονικού ταλαντωτή. Για τη Lagrangian $L = T - V$ του απλού αρμονικού ταλαντωτή με T την κινητική του ενέργεια και V τη δυναμική ενέργεια λόγω της δύναμης του ελλατηρίου $\boldsymbol{F}_k = -k\boldsymbol{q}$ όπως αυτή προκύπτει από το νόμο του Hooke, έχουμε ότι

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{q}}^2 - \frac{1}{2}k\boldsymbol{q}^2, \tag{3.8}$$

όπου k είναι η σταθερά του ελλατηρίου.

Η κανονική ορμή του συστήματος δίνεται από

$$\boldsymbol{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} \Rightarrow \dot{\boldsymbol{q}} = \frac{\boldsymbol{p}}{m} \ . \tag{3.9}$$

Άρα μπορούμε να βρούμε τη Hamiltonian του συστήματος, η οποία τελικά προκύπτει ως

$$H = \frac{1}{2m}\boldsymbol{p}^2 + \frac{1}{2m}m^2\omega^2\boldsymbol{q}^2, \tag{3.10}$$

με

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \ , \tag{3.11}$$

να είναι η γωνιακή συχνότητα του συστήματος.

3.3. Μάζα $Q = 1$ μαγνητικής φυσαλλίδας

Στο σημείο αυτό πρέπει να αναφέρουμε, ότι το σύστημα του απλού αρμονικού ταλαντωτή αποτελεί Χαμιλτονιανό με Hamiltonian την εξίσωση (3.10), όταν για αυτό ισχύει η παρακάτω αγκύλη Poisson

$$\{\boldsymbol{p},\, \boldsymbol{q}\} = 1. \tag{3.12}$$

Ανακαλώντας τώρα από το Κεφάλαιο 1 την Hamiltonian του ηλεκτρονίου με την παρουσία του ηλεκτρικού δυναμικού, έχουμε ότι

$$H = \frac{1}{2m}\pi_1^2 + \frac{1}{2m}\pi_2^2 + U(x_1,\, x_2). \tag{3.13}$$

Το σύστημα μας αποτελούσε Χαμιλτονιανό εαν επιπλέον ίσχυε και η παρακάτω αγκύλη Poisson

$$\{\pi_1,\, \pi_2\} = B \Rightarrow \left\{\pi_1,\, \frac{\pi_2}{B}\right\} = 1. \tag{3.14}$$

Αν όμως συγκρίνουμε τις Hamiltonians (3.10) και (3.13) θα μπορούσαμε να κάνουμε τις παρακάτω αντιστοιχίες

$$\pi_1 \longleftrightarrow \boldsymbol{p} \qquad \text{και} \qquad \pi_2 \longleftrightarrow m\omega\boldsymbol{q}. \tag{3.15}$$

Έτσι, έχουμε

$$\left\{\boldsymbol{p},\, \frac{m\omega\boldsymbol{q}}{B}\right\} = 1 \Rightarrow \{\boldsymbol{p},\, \boldsymbol{q}\} = \frac{B}{m\omega}$$

$$\Rightarrow m = \frac{B}{\omega}\ . \tag{3.16}$$

Χρησιμοποιώντας όμως την αναλογία (3.4), την οποία μπορούμε να κάνουμε αφού

$$\{\pi_\mu,\, R_\nu\} = 0,$$

καταλήγουμε στο ότι

$$m = \frac{B}{\omega} \longrightarrow m = \frac{4\pi Q}{\omega}\ , \tag{3.17}$$

όπου αν θέσουμε το $Q = 1$ που είναι ο αριθμός Skyrme και ο οποίος χαρακτηρίζει τη μαγνητική φυσαλλίδα του συστήματος μας, παίρνουμε για τη μάζα της την εξής σχέση

$$m_S = \frac{4\pi}{\omega}\ . \tag{3.18}$$

3.4. Γωνιακή συχνότητα και συμπεράσματα

Με σκοπό να φτάσουμε σε μία τιμή για τη μάζα m_S της $Q = 1$ μαγνητικής φυσαλλίδας όπως αυτή προέκυψε παραπάνω, θα πρέπει να αναφέρουμε ότι η γωνιακή συχνότητα κάποιας ταλάντωσης δίνεται από

$$\omega = 2\pi f \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{\mathrm{T}}, \tag{3.19}$$

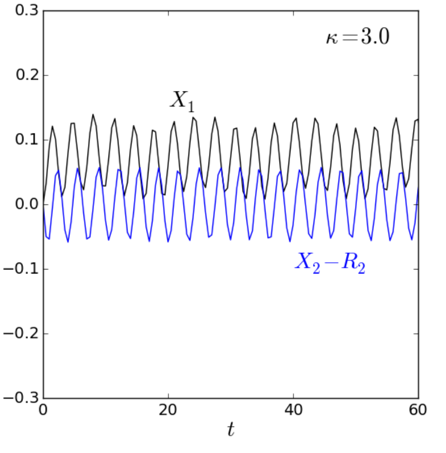
όπου f η συχνότητα και T η περίοδος της.
Όμως από την προσομοίωση της κίνησης, μπορούμε να δούμε ότι οι ποσότητες X_1 και X_2 τις οποίες θεωρήσαμε τις πιο λογικές ώστε να αντιπροσωπεύουν τη θέση της μαγνητικής φυσαλλίδας καθώς αυτή κινείται, ταλαντώνονται για $\kappa = 3$ με περίοδο

$$\mathrm{T} \approx \pi \tag{3.20}$$

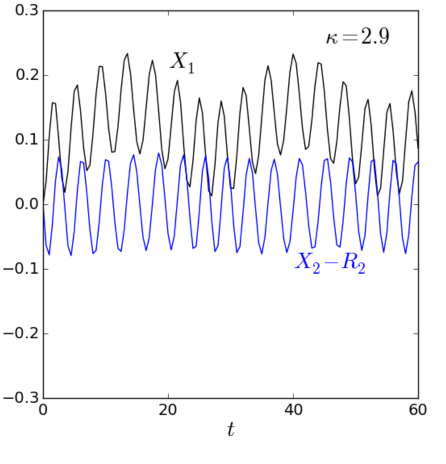
και για $\kappa = 2.9$ με περίοδο

$$\mathrm{T} \approx 1.22\pi, \tag{3.21}$$

όπως αυτές προκύπτουν από τις παρακάτω εικόνες (Εικόνα 2.7, Εικόνα 2.8) αντίστοιχα.



Εικόνα 2.7: Η ταλάντωση των ποσοτήτων X_1 και $X_2 - R_2$, για σταθερά ανισοτροπίας $\kappa = 3$.



Εικόνα 2.8: Η ταλάντωση των ποσοτήτων X_1 και $X_2 - R_2$, για σταθερά ανισοτροπίας $\kappa = 2.9$.

Επομένως για τη γωνιακή συχνότητα στην περίπτωση όπου $\kappa = 3$ ισχύει ότι

$$\omega = 2 \tag{3.22}$$

και στην περίπτωση όπου $\kappa = 2.9$

$$\omega = 1.64. \tag{3.23}$$

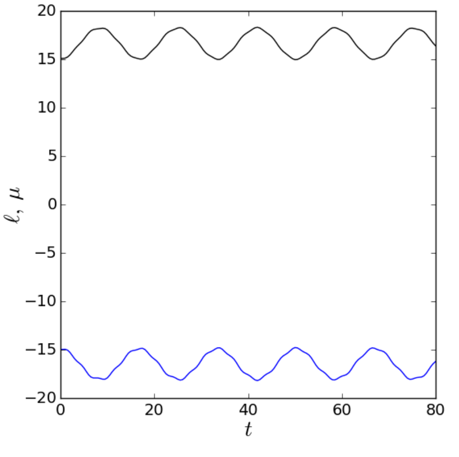
Έτσι από τη σχέση (3.18) καταλήγουμε στο ότι η μάζα της $Q = 1$ μαγνητικής φυσαλλίδας για $\kappa = 3$ δίνεται ως

$$m_S = 2\pi \tag{3.24}$$

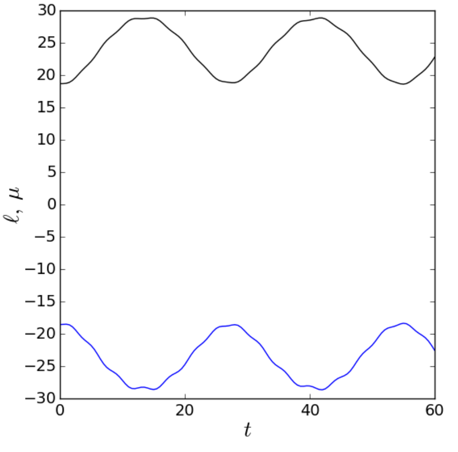
και για $\kappa = 2.9$ ως

$$m_S = 2.43\pi. \tag{3.25}$$

Όμως στο σύστημα μας μπορούν να παρατηρηθούν και κάποιες άλλες ποσότητες οι οποίες ταλαντώνονται, όπως είναι η ολική μαγνήτιση μ και η στροφορμή ℓ. Στις παρακάτω εικόνες (Εικόνα 2.9, 2.10) δίνονται οι ταλαντώσεις των δύο αυτών ποσοτήτων για σταθερά ανισοτροπίας $\kappa = 3$, 2.9 αντίστοιχα.



Εικόνα 2.9: Η ταλάντωση των ποσοτήτων μ (ολική μαγνήτιση) και ℓ (στροφορμή), για σταθερά ανισοτροπίας $\kappa = 3$.



Εικόνα 2.10: Η ταλάντωση των ποσοτήτων μ (ολική μαγνήτιση) και ℓ (στροφορμή), για σταθερά ανισοτροπίας $\kappa = 2.9$.

Έτσι μπορούμε να δούμε ότι καθώς η μαγνητική φυσαλλίδα μεγαλώνει (η σταθερά ανισοτροπίας κ μικραίνει), μεγαλώνει και η περίοδος ταλάντωσης αυτών των ποσοτήτων, αφού για $\kappa = 3$ ταλαντώνονται με περίοδο $\mathrm{T} \approx 5.4\pi$ και για $\kappa = 2.9$ με περίοδο $\mathrm{T} \approx 11.6\pi$. Επομένως αν παρακολουθούσαμε την κίνηση της φυσαλλίδας με βάση αυτές τις ποσότητες, θα παίρναμε σα μάζα της φυσαλλίδας για $\kappa = 3$ την

$$m_S = 10.84\pi \tag{3.26}$$

και για $\kappa = 2.9$ την

$$m_S = 23.27\pi. \tag{3.27}$$

Βιβλιογραφία

Συγγράμματα

[1] Herbert Goldstein, *“Κλασσική Μηχανική”* (Εκδόσεις Π. Πουρναρά, Θεσσαλονική, 1980).

[2] L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *“The Classical Theory of Fields”*, Fourth Edition (Elsevier Science, Oxford, 1975).

[3] L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *“Mechanics”*, Third Edition (Elsevier Science, Oxford, 1976).

[4] R. Rajaraman, *“Solitons and Instantons”*, (North Holand, 1982).

[5] A. P. Malozemoff, J. C Slonczewski, *“Magnetic Domain Walls in Bubble Materials”*, (Academic Press, New York, 1979).

Δημοσιεύσεις

[6] A. N. Bogdanov, A. Hubert, *“Thermodynamically stable magnetic vortex states in magnetic crystals”*, JMMM **138**, 255-269, (1994)

[7] A. A. Thiele *“Steady-State Motion of Magnetic Domains”*, Rev. Lett. **30**, 230, (1973).

[8] A. Leonov, U. K. Rößler, M. Mostovoy, *“Target-skyrmions and skyrmion clusters in nanowires of chiral magnets”*, EPJ Web of Conferences **7**5, 050002, (2013).

[9] A. N. Bogdanov, A. Hubert, *“The stability of vortex-like structures in uniaxial ferromagnets”*, JMMM **195**, 182, (1999)

[10] X. Z. Yu, Y. Onose, N. Kanazawa, J. H. Park, J. H. Han, Y. Matsui, N. Nagaosa, Y. Tokura, *“Real-space observation of a two-dimensional skyrmion crystal ”*, Nature 465, 901-904, (2010).

[11] S. Komineas, N. Papanicolaou, *“Topology and dynamics in ferromagnetic media”*, Physica D **81**, 81-107, (1996).

[12] N. Papanicolaou, T. Tomaras, *"Dynamics of magnetic vortices"*, Nuclear Physics B **360**, 425-462, (1991).

[13] S. Komineas, N. Papanicolaou, *"Skyrmion dynamics in chiral ferromagnets"*, Phys. Rev. B **92**, 064412, (2015).

[14] C. Schütte, M. Garst, *"Magnon-Skyrmion scattering in chiral magnets"*, Phys. Rev. B **90**, 094423, (2014).

[15] L. D. Bookman, M. A. Hoefer, *"Perturbation theory for propagating magnetic droplet solitons"*, Proc. R. Soc. A **471**, 20150042, (2015).