Μεταπτυχιακή Εργασία

Ακραία σημεία κυρτών συνόλων και το Θεώρημα Προσέγγισης του Korovkin

Μιχαήλ Λεντής

Η εργασία παρουσιαστήκε στο Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Κρήτης την 04/04/2024.
Επιβλέπουσα καθηγήτρια ήταν η κα Σ. Παπαδοπούλου.
Την επιτροπή αξιολόγησης αποτέλεσαν οι κα Σ. Παπαδοπούλου, κος Μ. Παπαδημητράκης, κος Σ. Μπραζιτίκος.

Πρόλογος

Για $A \subseteq \mathbb{R}$, συμβολίζουμε με id τη πραγματική ταυτοτική συνάρτηση και με id^2 τη πραγματική συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^2$, όπου $x \in A$. Το 1953 ο Korovkin απέδειξε τα εξής: Για $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μια ακολουθία θετικών γραμμικών τελεστών στον $C([0,1])$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$ $\big(C([0,1])$ ο χώρος των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων ορισμένων στο $[0,1]\big)$, αν

$$L_n 1 \overset{||\cdot||_\infty}{\to} 1$$

$$L_n \mathrm{id} \overset{||\cdot||_\infty}{\to} \mathrm{id}$$

$$L_n \mathrm{id}^2 \overset{||\cdot||_\infty}{\to} \mathrm{id}^2,$$

τότε $L_n f \overset{||\cdot||_\infty}{\to} f$ για κάθε $f \in C([0,1])$. Το θεώρημα είναι γνωστό ως το "Πρώτο Θεώρημα του Korovkin". Επίσης απέδειξε ότι ισχύει το ίδιο αν αλλάξουμε τον $C([0,1])$ με τον χώρο των συνεχών και 2π-περιοδικών πραγματικών συναρτήσεων και τις $\mathrm{id}, \mathrm{id}^2$ με τις $\cos, \sin$. Αυτό ονομάζεται "Δεύτερο Θεώρημα του Korovkin". Τα θεωρήματα αυτά βρίσκονται στα [6] και [7]. Ανεξάρτητα από τον Korovkin, το 1951 ο Bohman στο [4] απέδειξε το ίδιο συμπέρασμα για τελεστές ειδικής (αρκετά ευρείας) μορφής. Για αυτό το Πρώτο Θεώρημα του Korovkin είναι γνωστό και ως το Θεώρημα Bohman-Korovkin. Μία εφαρμογή του δίνει απόδειξη του Θεωρήματος Προσέγγισης του Weierstrass για πραγματικές συνεχείς συναρτήσεις σε συμπαγή διαστήματα. Από τα θεωρήματα του Korovkin προκύπτει ένα ερώτημα. Αν $\mathfrak{T}$ είναι ένα σύνολο συνεχών συναρτήσεων ορισμένων σε συμπαγή χώρο X, ποιές είναι οι συναρτήσεις f με την εξής ιδιότητα: Η σύγκλιση μιας ακολουθίας θετικών γραμμικών τελεστών για τα στοιχεία του $\mathfrak{T}$ συνεπάγεται σύγκλιση και για την f. Ο προσδιορισμός συνθηκών για σύνολα συναρτήσεων που είναι απαραίτητες για να έχουμε συμπεράσματα όμοια με αυτό του Θεωρήματος του Korovkin είναι το βασικό αντικείμενο της εργασίας. Το 1973 ο Bauer στο [1] και το 1978 στο [2] και το 1975 οι Berens και Lorenz στο [3] χρησιμοποίησαν εργαλεία κυρτής και συναρτησιακής ανάλυσης και θεωρίας μέτρου για να προσδιορίσουν τέτοιες συνθήκες.

Στο πρώτο κεφάλαιο αναφέρονται βασικές έννοιες και συμπεράσματα όπως για παράδειγμα, οι έννοιες των κυρτών συνόλων και των ακραίων σημείων κυρτών συνόλων, το Θεώρημα Hahn-Banach, το Λήμμα του Zorn.

Στο δεύτερο κεφάλαιο αποδεικνύουμε το Θεώρημα Krein-Millman από το οποίο συμπεραίνουμε ότι σε ένα κυρτό συμπαγές σύνολο υπάρχουν "πολλά" ακραία σημεία. Εισάγουμε έννοιες όπως του μέτρου αναπαράστασης και του βαρύκεντρου ενός μέτρου πιθανότητας σύμφωνα με τα οποία δίνεται μια νέα διατύπωση του Θεωρήματος Krein-Millman χρησιμοποιώντας μέτρα πιθανότητας και βαρύκεντρα μέτρων πιθανότητας αντί για ακραία σημεία και τη κυρτή θήκη. Αποδεικνύουμε το Θεώρημα του Choquet το οποίο είναι ουσιαστικά μια ισχυροποίηση του Θεωρήματος Krein-Millman στην περίπτωση μετρικοποιήσιμου συνόλου με χρήση της έννοιας του βαρύκεντρου. Δίνεται, επίσης, χαρακτηρισμός των ακραίων σημείων x ενός κυρτού συμπαγούς συνόλου K μέσω της μοναδικότητας του μέτρου πιθανότητας που έχει βαρύκεντρο το x.

Στο τρίτο κεφάλαιο γενικεύονται οι έννοιες και τα συμπεράσματα του δευτέρου κεφαλαίου στο εξής πλαίσιο: Αν K κυρτό συμπαγές σύνολο και $A(K)$ ο χώρος των συνεχών αφφινικών συναρτήσεων πάνω στο X, το ζευγάρι $(K, A(K))$ γενικεύεται σε ζευγάρι (X, N) όπου X συμπαγής μετρικός χώρος και N γραμμικός υπόχωρος του $C(X)$, ο οποίος περιέχει τις σταθερές και διαχωρίζει σημεία του X. Το σύνολο που παίζει εδώ το ρόλο του συνόλου των ακραίων σημείων είναι το σύνορο Choquet ως προς το N (δείτε Πρόταση 3.1).

Στο τέταρτο κεφάλαιο δίνεται μια απάντηση στο αρχικό μας ερώτημα: Η σύγκλιση μιας ακολουθίας θετικών γραμμικών τελεστών για τα στοιχεία του $\mathfrak{T}$ συνεπάγεται σύγκλιση για όλα τα στοιχεία του $C(X)$ αν και μόνο αν ο X ταυτίζεται με το σύνορο Choquet του ως προς τη γραμμική θήκη του $\mathfrak{T}$. Η απόδειξη των συμπερασμάτων αυτού του κεφαλαίου βρίσκονται στα άρθρα του Bauer ([1],[2]), των Berens και Lorenz ([3]) καθώς και στο βιβλίο του Phelps ([8]).

Βλέπουμε τέλος, στο πέμπτο κεφάλαιο, εφαρμογές και παραδείγματα τα οποία βρίσκονται στα άρθρα του Bauer ([2]) και των Berens και Lorenz ([3]).

Κεφάλαιο 1: Προκαταρκτικά

Για αρχή, τα βασικά σύμβολα και έννοιες που θα χρησιμοποιουθούν είναι τα ακόλουθα.

Για συμπαγή μετρικό χώρο X έχουμε το σύνολο των πραγματικών συναρτήσεων στον X · το οποίο συμβολίζουμε με $C(X)$. Το $C(X)$ εφοδιασμένο με τη sup-νόρμα $||.||_\infty$, που ορίζεται ως $||f||_\infty = \sup\limits_{x\in X}|f(x)|$ για $f \in C(X)$, είναι χώρος Banach. Βάσει αυτού, μπορούμε να ορίσουμε και μια μετρική σύμφωνα με τον τύπο $\rho(f,g) = ||f-g||_\infty$ για κάθε $f,g \in C(X)$. Στον $\mathbb{R}$ έχουμε την συνηθισμένη μετρική $d(a,b) = |a-b|$, για κάθε $a,b \in \mathbb{R}$, όπου $|.|$ είναι η απόλυτη τιμή.

Ορισμός 1.1 Έστω E διανυσματικός χώρος και A κυρτό υποσύνολο του E. 1. Ένα $x \in A$ ονομάζεται ακραίο σημείο του A αν έχει την εξής ιδιότητα: Αν $x = \lambda y + (1-\lambda)z$ όπου $y,z \in A$ και $\lambda \in (0,1)$ τότε $x = y = z$. Το σύνολο τέτοιων $x \in E$ συμβολίζεται $\mathrm{ex}(E)$.
2. Ένα σύνολο $A \subseteq E$ ονομάζεται κυρτό όταν, για κάθε $x,y \in A$, $\lambda \in (0,1)$ ισχύει $\lambda x + (1-\lambda)y \in A$.
3. Η κυρτή θήκη ενός A υποσυνόλου του E ορίζεται ως η τομή των κυρτών υποσυνόλων του E που περιέχουν το A και συμβολίζεται $\mathrm{co}(A)$.
Έστω ότι ο E είναι τοπικά κυρτός.
4. Η κλειστή κυρτή θήκη ενός A υποσυνόλου του E ορίζεται ως η τομή των κυρτών και κλειστών υποσυνόλων του E που περιέχουν το A και συμβολίζεται $\overline{\mathrm{co}}(A)$.
5. Έστω A,B κυρτά υποσύνολα του E τέτοια ώστε $A \subseteq B$. Το A ονομάζεται ακραίο σύνολο του B αν έχει την εξής ιδιότητα: Αν $\lambda x + (1-\lambda)y \in A$ για κάποια $\lambda \in (0,1)$, $x,y \in B$ τότε $x,y \in A$.

Παρατήρηση. 1. Αν A είναι κυρτό τότε και η τοπολογική κλειστότητα του, την οποία συμβολίζουμε $\overline{A}$, είναι κυρτό σύνολο: Έστω $x,y \in \overline{A}$, $\lambda \in (0,1)$. Υπάρχουν δίκτυα $(x_\alpha),(y_\alpha)$ στοιχείων του A τέτοια ώστε $x_\alpha \to x, y_\alpha \to y$ και επειδή το A είναι κυρτό, το $(\lambda x_\alpha + (1-\lambda)y_\alpha)$ είναι δίκτυο στοιχείων του A. Αυτό σημαίνει ότι το όριο του, δηλαδή το $\lambda x + (1-\lambda)y$, ανήκει στο $\overline{A}$.

2. Η κλειστή κυρτή θήκη του συνόλου A είναι ίσο με την τοπολογική κλειστότητα της κυρτής θήκης του συνόλου A: Ισχύει $\overline{\mathrm{co}(A)} \subseteq \overline{\mathrm{co}}(A)$, αφού $\mathrm{co}(A) \subseteq \overline{\mathrm{co}}(A)$ και $\overline{\mathrm{co}}(A)$ είναι κλειστό. Το $\overline{\mathrm{co}(A)}$ είναι κυρτό και κλειστό που περιέχει το A άρα από τον ορισμό της κλειστής κυρτής θήκης, άρα $\overline{\mathrm{co}}(A) \subseteq \overline{\mathrm{co}(A)}$.

3. Έστω A,B όπως στο 5 του Ορισμού 1.1. Τότε κάθε ακραίο σημείο του A είναι και ακραίο σημείο του B και ένα σημείο του B είναι ακραίο αν και μόνο αν το $\{x\}$ είναι ακραίο σύνολο του B: Έστω $x \in B\backslash\mathrm{ex}(B)$. Τότε υπάρχουν $y,z \in B, \lambda \in (0,1)$ τέτοια ώστε $x = \lambda y + (1-\lambda)z$. Αν $x \in A$ τότε πρέπει $y,z \in A$ επειδή το A είναι ακραίο και άρα $x \notin \mathrm{ex}(A)$. Αν $x \notin A$ τότε κατευθείαν έχουμε $x \notin \mathrm{ex}(A)$. Οπότε $\mathrm{ex}(A) \subseteq \mathrm{ex}(B)$. Επίσης $x \in \mathrm{ex}(B)$ αν και μόνο αν $\{x\}$ ακραίο σύνολο του B. Αν $x \in \mathrm{ex}(B)$ και $\lambda y + (1-\lambda)z \in \{x\}$ για κάποια

$y, z \in B$, $\lambda \in (0,1)$ τότε $\lambda y + (1-\lambda)z = x$ και, αφού x είναι ακραίο σημείο του B, παίρνουμε $x = y = z$. Άρα $y, z \in \{x\}$. Αντίστροφα, αν $\{x\}$ είναι ακραίο σύνολο του B για $x \in B$ και υπάρχουν $y, z \in B$, $\lambda \in (0,1)$ τέτοια ώστε $x = \lambda y + (1-\lambda)z$, τότε $\lambda y + (1-\lambda)z \in \{x\}$ και $y, z \in \{x\}$. Άρα $x = y = z$.

Ένα γραμμικό συνεχές συναρτησιακό ονομάζεται θετικό αν για κάθε μη αρνητική συνάρτηση του $C(X)$, η εικόνα της μέσω του συναρτησιακού είναι μη αρνητικός πραγματικός αριθμός.

Παρατήρηση: Κάθε θετικό γραμμικό συνεχές συναρτησιακό είναι αύξουσα απεικόνιση. Έστω $\psi \in C(X)^*$ θετικό και $f, g \in C(X)$ τέτοιες ώστε $f \geqslant g$. Τότε $f - g \geqslant 0$, άρα $\psi(f-g) \geqslant 0$, αφού ψ είναι θετικό · το οποίο μας δίνει τελικά $\psi(f) \geqslant \psi(g)$. Επίσης, λόγω της ανισότητας $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$ έχουμε $-\psi(|f|) = \psi(-|f|) \leqslant \psi(f) \leqslant \psi(|f|)$ · άρα και $|\psi(f)| \leqslant \psi(|f|)$, για κάθε $f \in C(X)$.

Ένα χρήσιμο θεώρημα είναι το εξής:

Θεώρημα. Έστω Ω μερικά διατεταγμένος τοπολογικός διανυσματικός χώρος (πάνω από το $\mathbb{R}$). Θέτουμε $K = \{f \in C(\Omega) | f \geqslant 0\}$. Αν Ω είναι πλήρης, μετρικοποιήσιμος και $\Omega = K - K$ τότε κάθε θετικό γραμμικό συναρτησιακό είναι συνεχές.

Για X συμπαγή μετρικό χώρο και $\Omega = C(X)$ το αμέσως προηγούμενο θεώρημα μας εξασφαλίζει ότι κάθε θετικό γραμμικό συναρτησιακό ορισμένο στον $C(X)$ είναι και συνεχές.

Απαραίτητα είναι τα τρία θεωρήματα που ακολουθούν καθώς και το Λήμμα του Zorn.

Θεώρημα Hahn-Banach. Έστω X διανυσματικός χώρος. Αν η απεικόνιση $p : X \to \mathbb{R}$ έχει τις ιδιότητες $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$, $p(\lambda x) = \lambda x$ για $\lambda \geqslant 0$ και αν ψ είναι γραμμικό συνεχές συναρτησιακό ορισμένο σε κάποιο Y υπόχωρο του X έτσι ώστε $\psi(y) \leqslant p(y)$ για κάθε $y \in Y$ τότε υπάρχει Ψ γραμμικό συνεχές συναρτησιακό ορισμένο σε ολόκληρο τον X τέτοιο ώστε $\Psi(y) = \psi(y)$ για κάθε $y \in Y$ και $\Psi(x) \leqslant p(x)$ για κάθε $x \in X$.

Θεώρημα Hahn-Banach (Γεωμετρική Μορφή). Έστω E τοπολογικός διανυσματικός χώρος (πάνω από το $\mathbb{R}$) και A, B δύο ξένα, κυρτά υποσύνολα του.

1. Έστω ότι A είναι ανοιχτό. Τότε υπάρχουν $\psi \in E^*$, $s \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\psi(a) < s \leqslant \psi(b)$ για κάθε $a \in A$, $b \in B$. Αν A, B είναι και τα δύο ανοιχτά, τότε υπάρχουν $\psi \in E^*$, $s \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\psi(a) < s < \psi(b)$ για κάθε $a \in A$, $b \in B$.

2. Έστω ότι E είναι τοπικά κυρτός, A είναι συμπαγές και B είναι κλειστό. Τότε υπάρχουν $\psi \in E^*$, $t, s \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\psi(a) < t < s < \psi(b)$ για κάθε $a \in A$, $b \in B$.

Έστω Ω τοπολογικός χώρος. Συμβολίζουμε τη σ-άλγεβρα των συνόλων Borel του Ω με $\mathcal{B}(\Omega)$. Ένα μέτρο μ ορισμένο στην $\mathcal{B}(\Omega)$ (μέτρο Borel) λέγεται κανονικό αν για κάθε $E \in \mathcal{B}(\Omega)$ έχουμε $\mu(E) = \sup\{K | K \subseteq \Omega, K \text{ συμπαγές}\} = \inf\{U | U \supseteq \Omega, U \text{ ανοιχτό}\}$. Το σύνολο των κανονικών μέτρων Borel που ορίζονται στην $\mathcal{B}(\Omega)$ συμβολίζεται με $\mathcal{A}_r(\Omega)$ [1]. Ένα μέτρο Borel μ λέγεται τοπικά πεπεραμένο αν για κάθε $x \in \Omega$ υπάρχει περιοχή V του x στον Ω τέτοια ώστε $\mu(V) < +\infty$. Αν Ω είναι τοπικά συμπαγής χώρος Hausdorff και ένα $\mu \in \mathcal{A}_r(\Omega)$ είναι επίσης τοπικά πεπερασμένο και μη αρνητικό τότε λέγεται μέτρο Radon στον Ω.

Θεώρημα F.Riesz-Markov-Kakutani. Έστω Ω Hausdorff τοπολογικός τοπικά συμπαγής χώρος. Τότε για κάθε θετικό γραμμικό συνεχές συναρτησιακό στον $C_c(\Omega)$ (χώρος των συνεχών συναρτήσεων στον Ω με συμπαγή φορέα) υπάρχει μοναδικό μέτρο Radon μ τέτοιο ώστε

$$\psi(f) = \int_\Omega f d\mu \text{ για κάθε } f \in C_c(\Omega).$$

Λήμμα του Zorn. Έστω σύνολο Ω και $\mathcal{A}$ μια μη κενή μερικά διατεταγμένη οικογένεια υποσυνόλων του Ω όπου κάθε μη κενή αλυσίδα στοιχείων της είναι άνω φραγμένη σε αυτή. Τότε η $\mathcal{A}$ περιέχει τουλάχιστον ένα μεγιστικό στοιχείο.

Σε τοπολογικό χώρο Ω, για $x \in \Omega$ μία συνάρτηση $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ ονομάζεται άνω ημισυνεχής στο $x \in \Omega$ αν για κάθε $t \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x) < t$ υπάρχει ανοιχτή περιοχή του x, την οποία συμβολίζουμε με U, στην οποία ισχύει $f(y) < t$ για κάθε $y \in U$. Ισοδύναμα, η f είναι άνω ημισυνεχής στο x αν $\limsup_{y \to x} f(y) \leqslant f(x)$. Μία $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ ονομάζεται κάτω ημισυνεχής αν η $-f$ είναι άνω ημισυνεχής. Παρατηρούμε άμεσα από τον ορισμό ότι η f είναι άνω ημισυνεχής σε όλο το Ω αν και μόνο αν για κάθε $t \in \mathbb{R}$ το $f^{-1}([-\infty, t)) = \{x \in \Omega | f(x) < t\}$ είναι ανοιχτό.

Ορισμός 1.2. Έστω N διανυσματικός υπόχωρος του $C(X)$ ο οποίος διαχωρίζει στοιχεία του X και $1 \in N$. Ορίζουμε τις $f^*(x) = \inf\{h(x) | h \in N, h \geqslant f\}$, $f_*(x) = \sup\{h(x) | h \in N, h \leqslant f\}$, όπου $x \in X$. Ενδέχεται να μην είναι συνεχείς. Επίσης, από τον ορισμό άμεσα βλέπουμε ότι ισχύει $f_* \leqslant f \leqslant f^*$, για κάθε $f \in C(X)$.

Πρόταση 1.1. Έστω $f, g \in C(X)$, $\lambda \geqslant 0$. Ισχύει:

1. $(f + g)^* \leqslant f^* + g^*$
2. $(\lambda f)^* = \lambda f^*$
3. $(-f)^* = -f_*$
4. $(f + h_0)^* = f^* + h_0$, αν $h_0 \in N$
5. $f^* - g^* \leqslant ||f - g||_\infty$
6. η f^* είναι φραγμένη
7. η f^* είναι άνω ημισυνεχής

[1] Στο εξής, όταν λέμε ότι ένα μέτρο μ ορίζεται στον Ω εννοούμε ότι ορίζεται στην $\mathcal{B}(\Omega)$.

Απόδειξη. 1. Έστω $x \in X$. Αν έχουμε h_1, $h_2 \in N$ τέτοιες ώστε $h_1 \geqslant f$, $h_2 \geqslant g$, τότε $h_1 + h_2 \geqslant f + g$. Επομένως

$$\{h'(x)|h' \in N, h' \geqslant f\} + \{h''(x)|h'' \in N, h'' \geqslant g\} \subseteq \{h(x)|h \in N, h \geqslant f + g\} \text{ και τότε}$$

$$\inf\{h(x)|h \in N, h \geqslant f + g\} \leqslant \inf\big(\{h'(x)|h' \in N, h' \geqslant f\} + \{h''(x)|h'' \in N, h'' \geqslant g\}\big) =$$
$$\inf\{h'(x)|h' \in N, h' \geqslant f\} + \inf\{h''(x)|h'' \in N, h'' \geqslant g\},$$

ή ισοδύναμα $(f + g)^*(x) \leqslant f^*(x) + g^*(x)$.

2. Για $\lambda > 0$, θέτουμε $h' = \frac{h}{\lambda}$. Έτσι παίρνουμε

$$(\lambda f)^*(x) = \inf\{h(x)|h \in N, h \geqslant \lambda f\} = \inf\{\lambda h'(x)|h' \in N, h' \geqslant f\} =$$

$$\lambda \inf\{h'(x)|h' \in N, h' \geqslant f\} = \lambda f^*(x).$$

Για $\lambda = 0$, $0^* = 0$ διότι $0 \in N$.

3. Θέτουμε $h' = -h$. Έτσι παίρνουμε

$$(-f)^*(x) = \inf\{h(x)|h \in N, h \geqslant -f\} = \inf\{-h'(x)|h' \in N, h' \leqslant f\} =$$

$$-\sup\{h'(x)|h' \in N, h' \leqslant f\} = -f_*(x).$$

Από αυτό βλέπουμε ότι για $\lambda < 0$ ισχύει $(\lambda f)^*(x) = (-\lambda(-f))^*(x) \overset{-\lambda>0}{=} -\lambda(-f)^*(x) = \lambda f_*(x)$.

4. Αν $h_0 \in N$ τότε $(f + h_0)^* = f^* + h_0$:

$$(f + h_0)^*(x) = \inf\{h(x)|h \in N, h \geqslant f + h_0\} =$$

$$\inf\{h'(x) + h_0(x)|h' \in N, h' \geqslant f\} = f^*(x) + h_0(x),$$

όπου $h' = h - h_0$.

5. $f^* - g^* \leqslant ||f - g||_\infty$: Αφού $f \leqslant ||f||_\infty$ και οι όλες οι σταθερές συναρτήσεις ανήκουν στον N, τότε $f^* \leqslant ||f||_\infty$. Επιπλέον $f^* = (f + g - g)^* \leqslant (f - g)^* + g^*$ άρα $f^* - g^* \leqslant (f - g)^* \leqslant ||f - g||_\infty$ (από τα πάνω).

6. Η f είναι φραγμένη, δηλαδή υπάρχει θετική σταθερή συνάρτηση M τέτοια ώστε $f \leqslant M$. Επειδή $M \in N$, ισχύει ότι $f^* \leqslant M$.

7. Θα δείξουμε γενικότερα ότι το infimum οικογένειας $\mathfrak{S}$ άνω ημισυνεχών συναρτήσεων που ορίζονται στο X είναι άνω ημισυνεχής. Έστω $g(x) := \inf\{h(x)|h \in \mathfrak{S}\}$ και $t \in \mathbb{R}$. Από τον ορισμό της g, έχουμε $\{x|h(x) < t\} \subseteq \{x|g(x) < t\}$, για κάθε $h \in \mathfrak{S}$. Οπότε,

$$\bigcup_h \{x|h(x) < t\} \subseteq \{x|g(x) < t\}.$$

Και μάλιστα,

$$\{x|g(x) < t\} \backslash \bigcup_h \{x|h(x) < t\} = \{x|g(x) < t\} \cap \bigcap_h \{x|h(x) \geqslant t\} = \varnothing.$$

Άρα,

$$\bigcup_h \{x|h(x) < t\} = \{x|g(x) < t\}.$$

Τώρα, αφού η κάθε τέτοια h είναι άνω ημισυνεχής, το $h^{-1}((-\infty, t)) = \{x|h(x) < t\}$ είναι ανοιχτό. Άρα, και το $\{x|g(x) < t\}$ είναι ανοιχτό ως ένωση ανοιχτών. □

Ορισμός 1.3. 1. Για N όπως στον Ορισμό 1.2, ορίζουμε το $K(N) = \{L \in N^* | L(1) = 1 = ||L||\}$.
2. Ορίζουμε τη w*-συνεχή απεικόνιση $\phi : X \to K(N)$ σύμφωνα με τον τύπο $\phi(x)(h) = h(x), h \in N$.

Παρατήρηση. Στο 1 του Ορισμού 1.3 η συνθήκη $L(1) = 1 = ||L||$ μας εξασφαλίζει ότι τα στοιχεία του $K(N)$ είναι θετικά συναρτησιακά. Αυτό ισχύει διότι: Αν $h \in N$, $h \geqslant 0$ τότε $\max_{x \in X} h - L(h) = L(\max_{x \in X} h - h) \leqslant || \max_{x \in X} h - h||_\infty \leqslant \max_{x \in X} h$. Άρα $L(h) \geqslant 0$.
Στο 2 του Ορισμού 1.3 η ϕ είναι 1-1 διότι ο N διαχωρίζει σημεία του X. Πράγματι, για $x_1, x_2 \in X$, αν $\phi(x_1) = \phi(x_2)$ τότε $h(x_1) = h(x_2)$, για κάθε $h \in N$ και συνεπώς $x_1 = x_2$.

Πρόταση 1.2. Το $K(N)$ είναι w*-συμπαγές και κυρτό υποσύνολο του τοπικά κυρτού N^*.

Απόδειξη. Έστω δίκτυο $(L_\alpha)_{\alpha \in A}$ στοιχείων του $K(N)$ και $L \in N^*$ τέτοια ώστε $L_\alpha \xrightarrow{w^*} L$. Τότε έχουμε $L(1) = \lim L_\alpha(1) = 1$. Επίσης, $1 = |L(1)| \leqslant ||L|| \cdot ||1||_\infty = ||L||$ και (αφού η $|.|$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$) $|L(h)| = |\lim L_\alpha(h)| = \lim |L_\alpha(h)| \leqslant \lim ||L_\alpha|| \cdot ||h||_\infty = ||h||_\infty$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα και $||L|| \leqslant 1$. Οπότε τελικά $||L|| = 1$. Άρα το $K(N)$ είναι w*-κλειστό. Τώρα, από Θεώρημα Alaoglu γνωρίζουμε πως το $B_N^* = \{L \in N^* | \, ||L|| \leqslant 1\}$ είναι συμπαγές. Έτσι για το τυχαίο δίκτυο στοιχείων του $K(N)$, έστω L_α, υπάρχουν υποδίκτυό του L_β στο B_N^* και $L \in B_N^* \subseteq N^*$ τέτοια ώστε $L_\beta \xrightarrow{w^*} L$ και αμέσως πριν είδαμε πως το $K(N)$ είναι w*-κλειστό · άρα $L \in K(N)$. Δηλαδή, το $K(N)$ είναι w*-συμπαγές. Έστω L_1, $L_2 \in K(N)$ και $\lambda \in [0, 1]$. Τότε $||\lambda L_1 + (1 - \lambda) L_2|| \leqslant \lambda ||L_1|| + (1 - \lambda)||L_2|| = 1$. Έχουμε ακόμα $1 = |\big(\lambda L_1 + (1 - \lambda) L_2\big)(1)| \leqslant ||\lambda L_1 + (1 - \lambda) L_2|| \cdot ||1||_\infty = ||\lambda L_1 + (1 - \lambda) L_2||_\infty$. Άρα $||\lambda L_1 + (1 - \lambda) L_2||_\infty = 1$. Δηλαδή, το $K(N)$ είναι κυρτό. □

Ερώτημα/Παρατήρηση. Είναι φυσιολογικό κανείς να αναρωτηθεί αν το $\mathrm{ex}(K(N))$ είναι κενό ή όχι. Ας υποθέσουμε ότι είναι κενό. Τότε από τη Πρόταση 1.2 και το Θεώρημα Krein-Millman (το αναφέρουμε στο επόμενο κεφάλαιο)

$$\varnothing = \mathrm{ex}(K(N)) = \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{ex}(K(N))) = K(N),$$

το οποίο είναι άτοπο.

Μας είναι απαραίτητα και τα δύο επόμενα γνωστά θεωρήματα:

Θεώρημα 1.1 (Θεώρημα του Carathéodory για τη κυρτή θήκη). Έστω K συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^k$. Κάθε στοιχείο της κυρτής θήκης του K γράφεται ως κυρτός συνδυασμός το πολύ $k+1$ στο πλήθος στοιχείων του K.

Απόδειξη. Έστω $k \in \mathbb{N}$. Θα δείξουμε ότι αν $x \in \mathrm{co}(K)$, $x_1, \ldots, x_m \in K$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in [0,1]$ τέτοια ώστε $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$ και $x = \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i x_i$, τότε $x = \sum\limits_{i=1}^{m'} \lambda'_i x_{j_i}$ για κάποια $m' \in \{1, \ldots, k+1\}$, $j_1, \ldots, j_{m'} \in \{1, \ldots, m\}$ και $\lambda'_1, \ldots, \lambda'_{m'} \in [0,1]$ με $\sum\limits_{i=1}^{m'} \lambda'_i = 1$. Αν $m \leqslant k+1$ τότε για $m' = m$, έχουμε το ζητούμενο. Αν $m > k+1$, ορίζουμε τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ x_{11} & \ldots & x_{1m} \\ x_{21} & \ldots & x_{2m} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{k1} & \ldots & x_{km} \end{pmatrix},$$

με $x_1 = (x_{11}, \ldots, x_{k1}), \ldots, x_m = (x_{1m}, \ldots, x_{km})$. Η γραμμική απεικόνιση που αντιστοιχεί σε αυτόν, δηλαδή η $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{k+1}$ με τύπο $L(y) = Ay$, $y \in \mathbb{R}^m$, έχει μη τετριμμένο πυρήνα ·θεωρούμε ένα $y' \neq 0$ τέτοιο ώστε $L(y') = Ay' = 0$. Άρα, για $y' = (y_1, \ldots, y_m)$, παίρνουμε $y_1 + \ldots + y_m = 0$ και $\sum\limits_{i=1}^{m} y_i x_i = 0$. Δεν είναι όλες οι συντεταγμένες του y' μηδενικές διότι $y' \neq 0$ οπότε αφού το άθροισμα τους είναι μηδέν, έχουμε θετικούς και αρνητικούς όρους y_i. Έτσι βλέπουμε ότι υπάρχει $l \in \{1, \ldots, m\}$ τέτοιο ώστε $\frac{\lambda_l}{y_l} = \tau = \min\{\frac{\lambda_i}{y_i} | 1 \leqslant i \leqslant m,\, y_i > 0\}$, εφόσον $\big\{i \in \{1, \ldots, m\} | y_i > 0\big\} \neq \varnothing$. Έστω $\tau = \frac{\lambda_l}{y_l}$. Στη συνέχεια, θέτουμε $\lambda'_i = \lambda_i - \tau y_i$. Αυτό μας δίνει $\lambda'_i \geqslant 0$, για κάθε $i \in \{1, \ldots, m\}$ και $\lambda_l = 0$. Επίσης, $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda'_i = 1$ και $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda'_i x_i = \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i}_{=x} - \tau \underbrace{\sum_{i=1}^{m} y_i x_i}_{=0} = x$. Αφού $\lambda'_l = 0$ άρα $x = \sum\limits_{i=1, i \neq l}^{m} \lambda'_i x_i$. Επαναλαμβάνοντας αυτό το βήμα πεπερασμένες φορές, καταλήγουμε στο $m' \leqslant k+1$.

□

Θεώρημα 1.2. Για K συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^k$, η κυρτή θήκη του K είναι συμπαγές σύνολο του $\mathbb{R}^k$.

Απόδειξη. Λόγω του Θεωρήματος 1.1 μπορούμε να ορίσουμε συνεχή και επί απεικόνιση T : $\left\{(\lambda_1, \ldots, \lambda_{k+1}) \in [0,1]^{k+1} \middle| \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i = 1\right\} \times K^{k+1} \to \mathrm{co}(K)$ μέσω του τύπου

$$T(\lambda_1, \ldots, \lambda_{k+1}, x_1, \ldots, x_{k+1}) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i,$$

όπου $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k+1} \in [0,1]$, $x_1, \ldots, x_{k+1} \in K$. Άρα το $\mathrm{co}(K)$ είναι συμπαγές ως εικόνα συμπαγούς μέσω συνεχής απεικόνισης. □

Και τέλος ένα χρήσιμο λήμμα και πρόταση για το τελευταίο κεφάλαιο:

Πρόταση 1.3. Έστω f κυρτή συνάρτηση στο διάστημα $[a, b]$ με $a < b$ και K το υπεργράφημα της. Αν η f είναι γνήσια κυρτή στο υποδιάστημα $[c, d]$ με $a < c < d < b$, τότε για κάθε $x \in [c, d]$ το $(x, f(x))$ είναι ακραίο σημείο του K.

Απόδειξη. Έστω f γνήσια κυρτή στο $[c, d]$ και $x \in [c, d]$. Υποθέτουμε ότι το x δεν είναι ακραίο σημείο του $[c, d]$, δηλαδή υπάρχουν $y, z \in [c, d]$ και $\lambda \in (0, 1)$ τέτοια ώστε $(x, f(x)) = \lambda(y, f(y)) + (1-\lambda)(z, f(z))$ · άρα έπεται $f(x) = \lambda f(y) + (1-\lambda)f(z)$. Όμως η f είναι γνήσια κυρτή στο $[c, d]$, άρα $f(x) = f(\lambda y + (1-\lambda)z) < \lambda f(y) + (1-\lambda)f(z)$ · άτοπο. Οπότε πρέπει να ισχύει $x = y = z$, άρα και $(x, f(x)) = (y, f(y)) = (z, f(z))$ · δηλαδή $(x, f(x)) \in K$.

□

Παρατήρηση. Σύμφωνα με τη Πρόταση 1.3 έχουμε και το εξής αποτέλεσμα: Αν η f είναι γνήσια κοίλη σε διάστημα $[c, d]$ τότε για κάθε $x_0 \in [c, d]$ το $(x_0, f(x_0))$ είναι ακραίο σημείο του $\{(x, r) \in [c, d] \times \mathbb{R} | r \leqslant f(x)\}$.

Λήμμα 1.1. Έστω K κυρτό συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^k$, $k \in \mathbb{N}$ με μη κενό εσωτερικό και $\mathcal{H}$ ένα υπερεπίπεδο το οποίο τέμνει το K μόνο στο τοπολογικό σύνορο του. Τότε:

1. Κάθε ακραίο σημείο της τομής του K με το $\mathcal{H}$ είναι και ακραίο σημείο του K.
2. Υπάρχει τουλάχιστον ένα ακραίο σημείο του K το οποίο ανήκει στην τομή του K με το $\mathcal{H}$.

Απόδειξη. 1. Το ότι υπάρχει υπερεπίπεδο σημαίνει ότι υπάρχουν $\alpha \in \mathbb{R}$, $l \in (\mathbb{R}^k)^*$ τέτοια ώστε $\mathcal{H} = \{x \in \mathbb{R}^k | l(x) = \alpha\}$ και $K \subseteq \{x \in \mathbb{R}^k | l(x) \geqslant \alpha\}$. Το $K \cap \mathcal{H}$ είναι κυρτό συμπαγές. Έστω τώρα $x_0 \in \mathrm{ex}(K \cap \mathcal{H})$. Μένει να δείξουμε ότι $x_0 \in \mathrm{ex}(K)$. Έστω ότι υπάρχουν $y_0, z_0 \in K$ και $\lambda \in (0, 1)$ τέτοια ώστε $x_0 = \lambda y_0 + (1-\lambda)z_0$. Επειδή έχουμε $\alpha = l(x_0) = \lambda l(y_0) + (1-\lambda)l(z_0) \geqslant \lambda\alpha + (1-\lambda)\alpha = \alpha$, έπεται ότι $l(y_0) = l(z_0) = \alpha$.

Δηλαδή $y_0, z_0 \in \mathcal{H}$, άρα και $y_0, z_0 \in K \cap \mathcal{H}$. Οπότε τελικά πρέπει $x_0 = y_0 = z_0$ αφού το x_0 είναι ακραίο του $K \cap \mathcal{H}$. Και άρα, $x_0 \in \mathrm{ex}(K)$.

2. Έστω ότι ισχύει το αντίθετο, δηλαδή $\mathrm{ex}(K) \cap (K \cap \mathcal{H}) = \emptyset$. Άρα και $\mathrm{ex}(K) \cap \mathrm{ex}(K \cap \mathcal{H}) = \emptyset$, το οποίο είναι άτοπο λόγω του 1.

□

Κεφάλαιο 2: Ακραία σημεία κυρτών συνόλων

Θεώρημα Krein-Millman. Αν M μη κενό, συμπαγές και κυρτό υποσύνολο τοπικά κυρτού χώρου E, τότε η κλειστή κυρτή θήκη του συνόλου ακραίων σημείων του M ταυτίζεται με το M.

Απόδειξη. Το $\mathrm{ex}(M)$ δεν είναι κενό: Λόγω της παρατήρησης αμέσως μετά τον Ορισμό 1.2 αρκεί να δείξουμε ότι το M περιέχει ακραίο μονοσύνολο. Έστω

$$\mathfrak{A} = \{K \subseteq M | K \text{ μη κενό, συπαγές και ακραίο}\}$$

(δεν είναι κενό διότι $M \in \mathfrak{A}$) και έστω μια αλυσίδα $\{K_i\}_{i \in I}$ στην $\mathfrak{A}$, ως προς την σχέση $\subseteq$ και I ένα σύνολο δεικτών. Ισχύει ότι $\emptyset \neq \bigcap\limits_{i \in I} K_i$ διαφορετικά αν $\emptyset = \bigcap\limits_{i \in I} K_i$ τότε $E = \bigcup\limits_{i \in I} E \backslash K_i$ · το M είναι συμπαγές άρα αυτό το κάλυμμα του M ανάγεται σε πεπερασμένο υποκάλυμμα $\bigcup\limits_{j=1}^{n} E \backslash K_{i_j}$ με $n \in \mathbb{N}$, $i_1, \ldots, i_n \in I$, $K_{i_1}, \ldots, K_{i_n}$ στοιχεία της αλυσίδας (άρα υπάρχει $j_0 \in \{1, \ldots, n\}$ τέτοιο ώστε $E \backslash K_{i_1}, \ldots, E \backslash K_{i_n} \subseteq E \backslash K_{i_{j_0}}$), και $M \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{n} E \backslash K_{i_j} = E \backslash K_{i_{j_0}}$. Τότε $\emptyset = K_{i_{j_0}}$ ενώ έχουμε $K_{i_{j_0}} \neq \emptyset$. Το $\bigcap\limits_{i \in I} K_i$ είναι και ακραίο, διότι αν $\lambda x + (1-\lambda) y \in \bigcap\limits_{i \in I} K_i$ για κάποια $\lambda \in (0,1)$, $x, y \in M$, τότε $\lambda x + (1-\lambda) y \in K_i$, για κάθε $i \in I$ · το K_i είναι ακραίο άρα $x, y \in K_i$, για κάθε $i \in I$ και συνεπώς $x, y \in \bigcap\limits_{i \in I} K_i \in \mathfrak{A}$. Άρα $\bigcap\limits_{i \in I} K_i \in \mathfrak{A}$. Από το Λήμμα του Zorn το $\mathfrak{A}$ έχει minimal στοιχείο · το οποίο ονομάζουμε $\tilde{A}$. Έστω ότι δεν είναι μονοσύνολο. Τότε υπάρχουν $x_1, x_2 \in \tilde{A}$ τέτοια ώστε $x_1 \neq x_2$ και εφαρμόζοντας το γεωμετρικό Θεώρημα Hahn-Banach, υπάρχει $L \in M^*$ τέτοιο ώστε $L(x_1) < L(x_2)$. Θέτουμε

$$\tilde{A}_L = \Big\{x \in \tilde{A} | L(x) = \max_{y \in \tilde{A}} L(y)\Big\}.$$

Τώρα παρατηρούμε ότι, αν $\lambda y_1 + (1-\lambda) y_2 \in \tilde{A}_L$, όπου $\lambda \in (0,1)$, $y_1, y_2 \in M$ τότε $y_1, y_2 \in \tilde{A}_L$ · διαφορετικά $\max\limits_{y \in \tilde{A}} L(y) = L(\lambda y_1 + (1-\lambda) y_2) = \lambda L(y_1) + (1-\lambda) L(y_2) < \max\limits_{y \in \tilde{A}} L(y)$, άτοπο. Δηλαδή, το $\tilde{A}_L$ είναι ακραίο. Επίσης είναι κλειστό επειδή L είναι συνεχής και

$L^{-1}(\{\max_{y\in\tilde{A}} L(y)\}) = \tilde{A}_L$, άρα και συμπαγές επειδή $\tilde{A}_L \subseteq M$ με το M να είναι συμπαγές. Οπότε, $\tilde{A}_L \in \mathfrak{A}$ και $x_1 \notin \tilde{A}_L$ άρα $\tilde{A}_L \subsetneqq \tilde{A}$. Άτοπο, επειδή το $\tilde{A}$ είναι minimal. Το M είναι συμπαγές και κυρτό, άρα άμεσα από τον ορισμό βλέπουμε ότι $\overline{\text{co}}(\text{ex}(M)) \subseteq M$.

$M\backslash\overline{\text{co}}(\text{ex}(M)) = \varnothing$: Έστω ότι υπάρχει $x \in M\backslash\overline{\text{co}}(\text{ex}(M))$. Εφαρμόζοντας πάλι το Γεωμετρικό Θεώρημα Hahn-Banach, υπάρχει $L \in M^*$ τέτοιο ώστε $L(y) < L(x)$, για κάθε $y \in \overline{\text{co}}(\text{ex}(M))$ και θέτουμε

$$M_L = \Big\{y \in M | L(y) = \max_{z\in\tilde{A}} |L(z)|\Big\}.$$

Τότε $M_L \cap \overline{\text{co}}(\text{ex}(M)) = \varnothing$. Το M_L είναι ακραίο και συμπαγές σύμφωνα με τα ίδια επιχειρήματα που χρησιμοποιήσαμε για να δείξουμε το ίδιο για το $\tilde{A}_L$. Αυτό που αποδείξαμε μόλις πριν είναι ότι σε αυτή την περίπτωση έχουμε ότι $\text{ex}(M_L) \neq \varnothing$ και $\text{ex}(M_L) \subseteq \text{ex}(M)$. Οπότε τελικά έχουμε $\varnothing \subsetneqq \text{ex}(M_L) \subseteq \text{ex}(M) \subseteq \overline{\text{co}}(\text{ex}(M))$ άρα και $M_L \cap \overline{\text{co}}(\text{ex}(M)) \neq \varnothing$, που είναι άτοπο. □

Ορισμός 2.1. 1. Έστω N όπως στον Ορισμό 1.2. Ένα μέτρο πιθανότητας μ στον X λέγεται μέτρο αναπαράστασης του $x \in X$ ως προς το N αν

$$\int_X h d\mu = h(x), \text{ για κάθε } h \in N.$$

Σχόλιο. Το μέτρο Dirac ε_x, όπου $x \in X$, είναι πάντα μέτρο αναπαράστασης του x.

Ορισμός 2.2. Έστω X μη κενό, συμπαγές υποσύνολο τοπικά κυρτού χώρου E και μ μέτρο πιθανότητας στο X. Λέμε ότι κάποιο $x \in E$ είναι βαρύκεντρο του μ αν,

$$\int_X f d\mu = f(x), \text{ για κάθε } f \in E^*.$$

Ο E είναι τοπικά κυρτός άρα ο E^* διαχωρίζει σημεία του X. Αυτό μας εξασφαλίζει ότι κάθε μέτρο πιθανότητας μ στο X θα έχει το πολύ ένα βαρύκεντρο. Ωστόσο δεν μπορούμε να είμαστε βέβαιοι για το αν ένα μέτρο πιθανότητας στο X έχει βαρύκεντρο · και αν όντως έχει, που βρίσκεται. Για αυτό χρειαζόμαστε την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 2.1. Έστω X συμπαγές υποσύνολο τοπικά κυρτού χώρου E, $\mathcal{M}(X)$ το σύνολο των μέτρων πιθανότητας στο X και έστω ότι η κλειστή κυρτή θήκη του X είναι συμπαγές. Αν μ ανήκει στο $\mathcal{M}(X)$, τότε το βαρύκεντρο τού, $r(\mu)$, ανήκει στην κλειστή κυρτή θήκη του X και η συνάρτηση $\kappa : \mathcal{M}(X) \to \overline{\text{co}}(X)$ είναι αφφινική w*-συνεχής.

Απόδειξη. Δείχνουμε ότι το $\overline{\text{co}}(X)$ έχει στοιχείο x τέτοιο ώστε

$$f(x) = \int_X f d\mu, \text{ για κάθε } f \in E^*.$$

Έστω τυχαία $f \in E^*$. Θέτουμε

$$H_f = \Big\{ y \in E \,\Big|\, f(y) = \int_X f d\mu \Big\}.$$

Το H_f είναι κλειστό υπερεπίπεδο και θέλουμε να δείξουμε ότι

$$\Omega := \Big(\bigcap_{f \in E^*} H_f \Big) \cap \overline{\text{co}}(X) \neq \emptyset.$$

Επειδή το $\overline{\text{co}}(X)$ είναι συμπαγές, κάθε οικογένεια κλειστών υποσυνολών του που έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής έχει μη κενή τομή. Άρα αρκεί να δείξουμε ότι για πεπερασμένη συλλογή $f_1, \ldots, f_n \in E^*$, $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\Big(\bigcap_{i=1}^{n} H_{f_i} \Big) \cap \overline{\text{co}}(X) \neq \emptyset.$$

Ορίζουμε $T : E \to \mathbb{R}^n$ σύμφωνα με το τύπο $T(y) = (f_1(y), \ldots, f_n(y))$. Η T είναι γραμμική και συνεχής. Άρα το $T(\overline{\text{co}}(X))$ είναι συμπαγές και κυρτό. Θέτουμε επίσης

$$s = \Big(\int_X f_1 d\mu, \ldots, \int_X f_n d\mu \Big).$$

Τώρα αρκεί να δείξουμε ότι $s \in T(\overline{\text{co}}(X))$. Έστω ότι $s \notin T(\overline{\text{co}}(X))$. Τότε από το Γεωμετρικό Θεώρημα Hahn-Banach υπάρχει $l \in (\mathbb{R}^n)^*$ τέτοιο ώστε $l(s) > \sup\limits_{y \in \overline{\text{co}}(X)} l(T(y))$. Υπάρχει διάνυσμα $l' := (l_1, \ldots, l_n) \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $l(s) = \langle l', s \rangle > \sup\limits_{y \in T(\overline{\text{co}}(X))} \langle l', T(y) \rangle = \sup\limits_{y \in T(\overline{\text{co}}(X))} l(T(y))$. Αν θέσουμε $g = \sum\limits_{i=1}^{n} l_i f_i$, τότε η ανισότητα γράφεται

$$\int_X g d\mu > \sup g(\overline{\text{co}}(X)).$$

Και αυτή με τη σειρά της μας δίνει

$$\sup g(\overline{\text{co}}(X)) < \int_X g d\mu \leqslant \sup g(X) \leqslant \sup g(\overline{\text{co}}(X)), \text{ αφού } X \subseteq \overline{\text{co}}(X), \, \mu(X) = 1,$$

άτοπο. Δείξαμε, δηλαδή, ότι $\Omega \neq \emptyset$. Και επειδή κάθε μέτρο πιθανότητας έχει το πολύ ένα βαρύκεντρο, τότε το Ω είναι μονοσύνολο. Τώρα δείχνουμε ότι η r είναι w*-συνεχής. Έστω δίκτυο (μ_α) στοιχείων του $\mathcal{M}(X)$ και $\mu \in \mathcal{M}(X)$ με x_α, x τα βαρύκεντρα τους αντίστοιχα τέτοια ώστε, για

$$\psi_\alpha(f) := \int_X f d\mu_\alpha, \psi(f) := \int_X f d\mu, \text{ για κάθε } f \in C(X),$$

έχουμε ότι $\psi_\alpha \overset{w^*}{\to} \psi$. Επειδή το X είναι συμπαγές, για να δείξουμε ότι $x_\alpha \to x$ αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε υποδίκτυο του (x_α) που συγκλίνει, έστω (x_β), ισχύει $x_\beta \to x$. Έστω ότι $x_\beta \to y$, για κάποιο $y \in X$ και άρα $f(x_\beta) \to f(y)$, για κάθε $f \in E^*$. Τότε, αφού $\psi_\beta \overset{w^*}{\to} \psi$, $f(x_\beta) = \psi_\beta(f) \to \psi(f) = f(x)$, για κάθε $f \in E^*$. Το E^* όμως διαχωρίζει σημεία, άρα πρέπει $x = y$. Για να δείξουμε ότι η r είναι αφφινική παίρνουμε $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}(X)$ με $x_1, x_2 \in \overline{\text{co}}(X)$ τα βαρύκεντρά τους αντίστοιχα και

$$\psi_1(f) := \int_X f d\mu_1,\ \psi_2(f) := \int_X f d\mu_2 \text{ για κάθε } f \in C(X).$$

Τότε $\lambda\psi_1(f) + (1-\lambda)\psi_2(f) = \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) = f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)$ για κάθε $f \in E^*$ · δηλαδή το $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ είναι βαρύκεντρο του $\lambda\mu_1 + (1-\lambda)\mu_2$. Άρα $r(\lambda\psi_1 + (1-\lambda)\psi_2) = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 = \lambda r(\psi_1) + (1-\lambda) r(\psi_2)$. □

Η Πρόταση 2.1, δεδομένου κάποιου μέτρου πιθανότητας σε συμπαγές σύνολο μας δίνει πληροφορίες για το βαρύκεντρο του. Τι συμβαίνει όμως αν ισχύει το ανάποδο· δηλαδή δεδομένου στοιχείου ενός συμπαγούς συνόλου, τι πληροφορίες είναι δυνατό να αποκτήσουμε; Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα αποκαλύπτει μια ενδιαφέρον σύνδεση των μέτρων πιθανότητας καθώς και των βαρύκεντρών τους με το Θεώρημα Krein-Millman. Για αυτό το λόγο θα χρειαστούμε μια καινούργια πρόταση.

Πρόταση 2.2. Έστω X μη κενό, συμπαγές υποσύνολο τοπικά κυρτού χώρου E. Τότε, για $x \in E$, ισχύει ότι το x ανήκει στην κλειστή κυρτή θήκη του X αν και μόνο αν το x είναι βαρύκεντρο κάποιου μ μέτρου πιθανότητας στο X.

Απόδειξη. Θέτουμε $\tilde{X} = \overline{\text{co}}(X)$ και έστω $x \in E$. Έστω μ μέτρο πιθανότητας στο X που έχει το x βαρύκεντρο. Τότε,

$$f(x) = \int_X f d\mu \leqslant \sup_{y \in X} f(y) \leqslant \sup_{y \in \tilde{X}} f(y) \text{ για κάθε } f \in E^*.$$

Αν $x \notin \widetilde{X}$, τότε $\{x\} \cap \widetilde{X} = \varnothing$. Από Γεωμετρικό Θεώρημα Hanh-Banach υπάρχουν $f_0 \in E^*$, $t, s \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f_0(y) < t < s < f_0(x)$, για κάθε $y \in \widetilde{X}$. Άρα και $\sup_{y \in \widetilde{X}} f_0(y) < f_0(x)$, άτοπο. Άρα τελικά, $x \in \widetilde{X}$. Για την άλλη κατεύθυνση, έστω $x \in \widetilde{X}$. Αφού $\widetilde{X}$ είναι κλειστό, υπάρχει δίκτυο (x_α), α ανήκει σε κάποιο κατευθυνόμενο σύνολο A, στοιχείων του $\widetilde{X}$ που συγκλίνει στο x. Επειδή $\widetilde{X}$ είναι η κλειστή κυρτή θήκη του X, υπάρχουν $n_\alpha \in \mathbb{N}, \lambda_i^\alpha > 0, x_i^\alpha \in X$ τέτοια ώστε $\sum_{i=1}^{n_\alpha} \lambda_i^\alpha = 1$ και $x_\alpha = \sum_{i=1}^{n_\alpha} \lambda_i^\alpha x_i^\alpha$. Το κάθε x_α είναι βαρύκεντρο του μέτρου πιθανότητας $\mu_\alpha = \sum\limits_{i=1}^{n_\alpha} \lambda_i^\alpha \varepsilon_{x_i^\alpha}$ στο X. Τα συναρτησιακά του $C(X)^*$, που ορίζονται μέσω του τύπου

$$\psi_\alpha(f) = \int_X f d\mu_\alpha = f(x_\alpha), \text{ για κάθε } f \in C(X), \alpha \in A$$

αποτελούν ένα δίκτυο του $K(C(X)) = \{L \in C(X)^* | L(1) = 1 = ||L||\}$. Σύμφωνα με την Πρόταση 1.2, το $K(C(X))$ είναι w$^*-$συμπαγές και κυρτό. Έτσι, το δίκτυο (ψ_α) έχει κάποιο υποδίκτυο (ψ_β) τέτοιο ώστε $\psi_\beta \xrightarrow{w^*} \psi$, όπου $\psi \in K(C(X)^*)$. Από Θεώρημα F.Riesz-Markov-Kakutani υπάρχει κανονικό μέτρο Borel το οποίο σε αυτή τη περίπτωση θα είναι και μέτρο πιθανότητας στο X, μ τέτοιο ώστε

$$\psi(f) = \int_X f d\mu, \text{ για κάθε } f \in C(X).$$

Άρα έχουμε $f(x_\beta) = \psi_\beta(f)$ και άρα $f(x_\beta) \to \psi(f)$, για κάθε $f \in E^*$ (ο περιορισμός κάθε $f \in E^*$ στο X είναι στοιχείο του $C(X)$). Επίσης, επειδή το δίκτυο (x_α) έχει όριο το x, τότε και το υποδίκτυο (x_β) έχει όριο το x. Αυτό σημαίνει και ότι το δίκτυο $f(x_\beta)$ έχει όριο το $f(x)$ για κάθε $f \in E^*$. Άρα, από μοναδικότητα ορίου έχουμε $\psi(f) = f(x)$, για κάθε $f \in E^*$. Δηλαδή, το x είναι βαρύκεντρο του μ. □

Τώρα είμαστε έτοιμοι να δώσουμε τη μορφή του Θεωρήματος Krein-Milman που σχετίζεται με μέτρα πιθανότητας.

Θεώρημα Krein-Milman 2. Κάθε στοιχείο ενός συμπαγούς κυρτού υποσυνόλου X τοπικά κυρτού χώρου E είναι το βαρύκεντρο ενός μέτρου πιθανότητας μ στο X, το οποίο φέρεται από την κλειστότητα του συνόλου των ακραίων σημείων του X.

Απόδειξη. Θα δείξουμε την ισοδυναμία των δύο μορφών του θεωρήματος Krein-Milman. Θέτουμε $Y = \overline{\text{ex}(X)}$. Υποθέτουμε ότι ισχύουν οι πρϋποθέσεις της αρχικής μορφής. Έστω $x \in X$. Τότε $x \in \overline{\text{co}}(Y) \supseteq \overline{\text{co}}(\text{ex}(X)) = X$. Από Πρόταση 2.2 το x είναι το βαρύκεντρο κάποιου μέτρου πιθανότητας μ στο Y. Και τότε, το μέτρο πιθανότητας $\widetilde{\mu}$ στο X που ορίζεται σύμφωνα με το τύπο $\widetilde{\mu}(B) = \mu(B \cap Y)$, όπου B είναι Borel του X, έχει το x βαρύκεντρο και φέρεται από το Y. Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι ισχύουν οι συνθήκες της δεύτερης μορφής. Έστω $x \in X$, άρα από Πρόταση 2.2 έχουμε $x \in \overline{\text{co}}(Y) = \overline{\text{co}}(\text{ex}(X))$. Οπότε $X = \overline{\text{co}}(\text{ex}(X))$. □

Το Θεώρημα Krein-Milman 2 μας εξασφαλίζει για κάθε στοιχείο x ενός κυρτού συμπαγούς X την ύπαρξη μέτρων πιθανότητας, που έχουν βαρύκεντρο το x και φέρονται από την κλειστότητα των ακραίων σημείων του X. Το επόμενο θεώρημα που θα δούμε, είναι μια εκπλέπτυνση του Θεωρήματος Krein-Milman 2 · αυτά τα μέτρα φέρονται από το σύνολο των ακραίων σημείων και όχι τη κλειστότητα του. Χρειάζεται πρώτα η εισαγωγή κάποιων χρήσιμων εργαλείων.

Πρόταση 2.3. Έστω X συμπαγές κυρτό υποσύνολο ενός τοπικά κυρτού χώρου E και $x \in X$. Το x είναι ακραίο σημείο του X αν και μόνο αν το x είναι βαρύκεντρο μόνο του ε_x.

Απόδειξη. Έστω $x \in \mathrm{ex}(X)$ και έστω ότι είναι βαρύκεντρο κάποιου μέτρου πιθανότητας μ στο X. Θέλουμε να δείξουμε ότι το μ έχει φορέα το $\{x\}$. Λόγω κανονικότητας του μ, αρκεί να δείξουμε ότι $\mu(D) = 0$, για κάθε $D \subseteq X\backslash\{x\}$ συμπαγές. Έστω ότι υπάρχει D συμπαγές υποσύνολο του $X\backslash\{x\}$ τέτοιο ώστε $\mu(D) > 0$. Από συμπάγεια του D μπορούμε να πούμε ότι υπάρχει $y \in D$ τέτοιο ώστε για κάθε περιοχή U του y στο X να ισχύει $\mu(U) > 0$: Έστω ότι για κάθε $y \in D$ υπάρχει περιοχή του N_y στο X τέτοια ώστε $\mu(N_y) = 0$. Τότε

$$0 < \mu(D) \leqslant \mu(\bigcup_{y\in D} N_y),$$

D όμως είναι συμπαγές άρα το κάλυμμα $\{N_y | y \in D\}$ έχει υποκάλυμμα $\{N_{y_i} | i = 1, \ldots, n, y_1, \ldots, y_n \in D\}$. Άρα

$$0 < \mu(D) \leqslant \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{n} N_{y_i}\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mu(N_{y_i}) = 0, \text{ άτοπο.}$$

Επιλέγουμε K μια κλειστή κυρτή περιοχή του y στο X τέτοια ώστε $K \subseteq X\backslash\{x\}$. Τότε, το K είναι συμπαγές κυρτό και $0 < \mu(K) := s$. Ισχύει $s < 1$, γιατί αν $\mu(K) = 1$ τότε

$$f(x) = \int_X f d\mu = \int_K f d\mu \leqslant \sup f(K), \text{ για κάθε } f \in E^*$$

και πρέπει $x \in K$· διαφορετικά, από Γεωμετρικό Θεώρημα Hanh-Bancah τότε, υπάρχει $f_0 \in E^*$ τέτοιο ώστε $\sup f_0(K) < f_0(x)$, άτοπο. Τώρα μπορούμε να ορίσουμε μέτρα Borel μ_1, μ_2 στο X σύμφωνα με τους τύπους $\mu_1(B) = s^{-1}\mu(B \cap K)$, $\mu_2(B) = (1-s)^{-1}\mu(B \cap (X\backslash K))$, για κάθε B Borel του X. Από την Πρόταση 2.2, υπάρχουν $x_1, x_2 \in X$ βαρύκεντρα των μ_1, μ_2 αντίστοιχα. Αφού $\mu_1(K) = 1$, $x_1 \in K$ άρα $x_1 \neq x$ και ακόμα, $\mu(B) = s\mu_1(B) + (1-s)\mu_2(B)$, για κάθε B Borel του X. Για

$$\psi(f) := \int_X f d\mu,\ \psi_1(f) := \int_X f d\mu_1,\ \psi_2(f) := \int_X f d\mu_2 \text{ για κάθε } f \in C(X),$$

$$\text{έχουμε } r(\psi) = r(s\psi_1 + (1-s)\psi_2) = sr(\psi_1) + (1-s)r(\psi_2) \text{ άρα } x = sx_1 + (1-s)x_2.$$

Άρα $x \notin \mathrm{ex}(X)$, άτοπο. Αντίστροφα, έστω ότι το x είναι βαρύκεντρο μόνο του ε_x. Θέλουμε να δείξουμε ότι $x \in \mathrm{ex}(X)$. Έστω ότι $x \notin \mathrm{ex}(X)$. Τότε υπάρχουν $y, z \in X$, $\lambda \in (0,1)$ τέτοια ώστε $x = \lambda y + (1-\lambda)z$ και έχουμε

$$\int_X f d\varepsilon_x = f(x) = f(\lambda y + (1-\lambda)z) = \lambda f(y) + (1-\lambda)f(z) =$$

$$\lambda \int_X f d\varepsilon_y + (1-\lambda) \int_X f d\varepsilon_z, \text{ για κάθε } f \in E^*.$$

Από αυτό βλέπουμε ότι το $\mu := \lambda\varepsilon_y + (1-\lambda)\varepsilon_z$ είναι $\mu \neq \varepsilon_x$, αφού $x \neq y, z$, και έχει βαρύκεντρό του το x · άτοπο. □

Πρόταση 2.4. Έστω X συμπαγές κυρτό υποσύνολο ενός τοπικά κυρτού χώρου E. Ο $A(X)$ είναι κλειστός υπόχωρος του $C(X)$ ως προς τη $\sup -$νόρμα και ο $E^*|_X + \mathbb{R}$ είναι πυκνός υπόχωρος του $A(X)$.

Απόδειξη. Έστω ακολουθία στοιχείων $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ του $A(X)$ τέτοια ώστε $a_n \overset{\|\cdot\|_\infty}{\rightarrow} a$, όπου $a \in C(X)$. Έστω $x, y \in X$, $\lambda \in [0,1]$. Επειδή

$$a(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lim a_n(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda a(x) + (1-\lambda)a(y),$$

ισχύει $a \in A(X)$. Δηλαδή ο $A(X)$ είναι κλειστός. Τώρα, έστω $g \in A(X)$, $\epsilon > 0$ και θέτουμε $J_1 = \{(x,r) \in E \times \mathbb{R} | x \in X, g(x) = r\}$, $J_2 = \{(x,r) \in E \times \mathbb{R} | x \in X, g(x) + \epsilon = r\}$ (τα γραφήματα των g, $g+\epsilon$). Τα J_1, J_2 είναι συμπαγή κυρτά, μη κενά και ξένα. Από το Γεωμετρικό Θεώρημα Hahn-Banach υπάρχουν $L \in (E \times \mathbb{R})^*$ και $s \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\sup L(J_1) < s < \inf L(J_2)$. Με το ίδιο επιχείρημα που χρησιμοποιούμε στην απόδειξη της ιδιότητας 2.(b) στις ιδιότητες αμέσως μετά τον Ορισμό 2.3 (παρακάτω) υπάρχει $h \in A(X)$ τέτοια ώστε $g < h < g + \epsilon$. □

Η Πρόταση 2.4 μας δίνει το εξής χρήσιμο αποτέλεσμα:

Πόρισμα 2.1. Έστω X συμπαγές κυρτό υποσύνολο ενός τοπικά κυρτού χώρου E, $N = E^*|_X + \mathbb{R}$, μ μέτρο πιθανότητας στο X και $x \in X$. Τότε το μ είναι μέτρο αναπαράστασης του x στο X ως προς το N αν και μόνο αν το μ μέτρο αναπαράστασης του x στο X ως προς το $A(X)$ αν και μόνο αν το x είναι βαρύκεντρο του μ.

Απόδειξη. Για την πρώτη ισοδυναμία: Αν το μ είναι μέτρο αναπαράστασης του x στο X ως προς το N τότε από την Πρόταση 2.4 έχουμε ότι είναι και ως προς το $A(X)$. Αντίστροφα, αν το μ είναι μέτρο αναπαράστασης του x στο X ως προς το $A(X)$ τότε είναι και ως προς το N αφού $N \subseteq A(X)$.

Για τη δεύτερη ισοδυναμία: Για $x \in X$ αν ισχύει (για κάποιο μ όπως πάνω),

$$\int_X a d\mu = a(x), \text{ για κάθε } a \in A(X),$$

τότε βλέπουμε ότι το x είναι βαρύκεντρο του μ αφού $E^*|_X + \mathbb{R} \subseteq A(X)$. Για την άλλη κατεύθυνση, αν το $x \in X$ είναι βαρύκεντρο κάποιου μ (το μ όπως στην υπόθεση), τότε

$$\int_X f d\mu = f(x), \text{ για κάθε } f \in E^*.$$

Αφού $\mu(X) = 1$, έχουμε

$$\int_X f + rd\mu = f(x) + r, \text{ για κάθε } f \in E^*, r \in \mathbb{R},$$

άρα από Πρόταση 2.4 παίρνουμε

$$\int_X a d\mu = a(x), \text{ για κάθε } a \in A(X).$$

□

Ορισμός 2.3. 1. Μια απεικόνιση $L : K_1 \to K_2$, όπου K_1, K_2 είναι κυρτά υποσύνολα διανυσματικών χώρων (πάνω από το $\mathbb{R}$) V_1, V_2 αντίστοιχα, ονομάζεται αφφινική όταν $L(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda L(x) + (1-\lambda)L(y)$, για κάθε $x, y \in X$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Έστω X συμπαγές υποσύνολο ενός τοπικά κυρτού χώρου E. Συμβολίζουμε με $A(X)$ το σύνολο των συνεχών αφφινικών πραγματικών συναρτήσεων στον X. Ο $A(X)$ είναι υπόχωρος του $C(X)$ και σε αυτόν ανήκουν οι σταθερές συναρτήσεις, καθώς και όλες οι απεικονίσεις της μορφής $x \mapsto f(x) + r$, όπου $x \in X$, $f \in E^*$, $r \in \mathbb{R}$.
3. Έστω f φραγμένη πραγματική συνάρτηση στον X. Για $N = A(X)$ (N όπως στον Ορισμό 1.2), η f^* θα λέγεται άνω θήκη της f.

Στην Πρόταση 1.1 η f ήταν στοιχείο του $C(X)$ όμως στην απόδειξη για τα (1)-(7) της Πρότασης 1.1 δεν χρησιμοποιήσαμε τη συνέχεια της παρά μόνο ότι η f είναι φραγμένη (ως συνεχής ορισμένη σε συμπαγές). Εκτός από τις ιδιότητες των f^*, f_* που έχουμε δει, σε αυτή την περίπτωση έχουμε κάποιες ακόμα:

(a) η f^* είναι κοίλη

(b) αν η f είναι κοίλη άνω ημισυνεχής, τότε $f = f^*$.

Απόδειξη. (a). f^* είναι κοίλη: Θα δείξουμε γενικότερα ότι το infimum οικογένειας $\mathfrak{H}$ κοίλων πραγματικών συναρτήσεων που ορίζονται στο X είναι κοίλη. Έστω $g(x) := \inf\{h(x) | h \in \mathfrak{H}\}$ και $x, y \in X$ και $\lambda \in [0,1]$. Έστω τυχαίο $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει $h \in \mathfrak{H}$ τέτοια ώστε $g(\lambda x + (1-\lambda)y) + \epsilon > h(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant \lambda h(x) + (1-\lambda)h(y) \geqslant \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y)$. Άρα, $g(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y)$.

(b). $f \leqslant f^*$: Έστω $x \in X$. Το $f(x)$ είναι άνω φράγμα του $\{h(x) | h \in A, h \geqslant f\}$ και το $f^*(x)$ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του, άρα $f(x) \leqslant f^*(x)$. Έστω f κοίλη και άνω ημισυνεχής. Παίρνουμε, το υποσύνολο του τοπικά κυρτού $E \times \mathbb{R}$, $K = \{(x, r) \in E \times \mathbb{R} | f(x) \geqslant r\}$. Έστω $(x_1, r_1), (x_2, r_2) \in K$. Τότε $\lambda r_1 + (1-\lambda)r_2 \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) \leqslant f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)$, αφού η f είναι κοίλη · άρα και $K \ni (\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda r_1 + (1-$

$\lambda)r_2) = \lambda(x_1, r_1) + (1-\lambda)(x_2, r_2)$. Δηλαδή το K είναι κυρτό. Επειδή η f είναι άνω ημισυνεχής το $\{x \in X | f(x) < r\}$, όπου $r \in \mathbb{R}$, είναι ανοιχτό ως προς την τοπολογία του E και το $(-\infty, r)$ είναι ανοιχτό ως προς την τοπολογία του $\mathbb{R}$ άρα το $\{x \in X | f(x) < r\} \times (-\infty, r) = \{(x,r) \in E \times \mathbb{R} | f(x) < r\}$ είναι ανοιχτό ως προς την τοπολογία του $E \times \mathbb{R}$. Άρα το $K := \{(x,r) | f(x) \geqslant r\} = (E \times \mathbb{R}) \backslash \{(x,r) | f(x) < r\}$ είναι κλειστό. Έστω ότι υπάρχει κάποιο $x_0 \in X$ για το οποίο ισχύει $f(x_0) < f^*(x_0)$. Τότε $(x_0, f^*(x_0)) \notin K$, οπότε από γεωμετρικό θεώρημα Hahn-Banach (K κυρτό και κλειστό) υπάρχουν $L \in (E \times \mathbb{R})^*$, $t, s \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $L(x, f(x)) < t < s < L(x_0, f^*(x_0))$, για κάθε $x \in K$. Επειδή ισχύει $L(x_0, f(x_0)) < L(x_0, f^*(x_0))$, έπεται ότι $0 < L(0, f^*(x_0) - f(x_0))$ και άρα $0 < \big(\underbrace{f^*(x_0) - f(x_0)}_{>0}\big) L(0,1)$ · άρα $L(0,1) > 0$. Για το τυχαίο $x \in X$ υπάρχει $r'_x > 0$ τέτοιο ώστε $L(0, r'_x) = s - L(x, f(x))$. Επειδή $r'_x L(0,1) = s - L(x, f(x))$ και το $L(0,1)$ είναι αυστηρά θετικό, το $r'_x = \frac{s - L(x, f(x))}{L(0,1)}$ είναι μοναδικό. Ορίζουμε $h(x) = f(x) + r'_x$, για $x \in X$ και τότε $L(x, h(x)) = L(x, f(x)) + L(0, r'_x) = s$ για κάθε $x \in X$. Η h είναι αφφινική. Για $y, z \in X$, $\lambda \in [0,1]$ έχουμε

$$L\big(\lambda y + (1-\lambda)z, h(\lambda y + (1-\lambda)z)\big) = s = \lambda s + (1-\lambda)s = \lambda L(y, h(y)) + (1-\lambda) L(z, h(z)) =$$

$$L\big(\lambda y + (1-\lambda)z, \lambda h(y) + (1-\lambda)h(z)\big).$$

Αυτό μας δίνει ότι

$$L\big(0, h(\lambda y + (1-\lambda)z) - \lambda h(y) - (1-\lambda)h(z)\big) =$$

$$\big[h(\lambda y + (1-\lambda)z) - \lambda h(y) - (1-\lambda)h(z)\big] \underbrace{L(0,1)}_{>0} = 0,$$

άρα και

$$h(\lambda y + (1-\lambda)z) = \lambda h(y) + (1-\lambda)h(z).$$

Επίσης $L(x, f(x)) < s = L(x, h(x))$. Ισοδύναμα $0 < L(0, h(x) - f(x)) = \big(h(x) - f(x)\big) \underbrace{L(0,1)}_{>0}$ για κάθε $x \in X$ άρα $f(x) < h(x)$ για κάθε $x \in X$. Και ακόμη $L(x_0, h(x_0)) = s < L(x_0, f^*(x_0))$, οπότε $0 < L(0, f^*(x_0) - h(x_0)) = \big(f^*(x_0) - h(x_0)\big) \underbrace{L(0,1)}_{>0}$ · άρα $h(x_0) < f^*(x_0)$, που είναι άτοπο από τον ορισμό της f^*. □

Ορολογία. Έστω X συμπαγής χώρος Hausdorff και S ένα σύνολο Borel του. Λέμε ότι ένα μη αρνητικό κανονικό μέτρο Borel μ στον X φέρεται από το S αν $\mu(X \backslash S) = 0$.

Πρόταση 2.5. Έστω X μετρικοποιήσιμο κυρτό συμπαγές υποσύνολο ενός τοπικά κυρτού χώρου E και τυχαία $f \in C(X)$. Θέτουμε $S = \{x \in X | f^*(x) = f(x)\}$. Τότε:

1. Το S είναι σύνολο Borel του X.

2. Το $\mathrm{ex}(X)$ είναι σύνολο Borel του X.

Απόδειξη. 1. Η f^* είναι άνω ημισυνεχής και η f το ίδιο διότι είναι συνεχής, άρα η $f^* - f$ είναι άνω ημισυνεχής. Δηλαδή για κάθε $t \in \mathbb{R}$ το $\{x \in X | f^*(x) - f(x) < t\}$ είναι ανοιχτό, άρα είναι σύνολο Borel. Επειδή τώρα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το $\{x \in X | f^*(x) - f(x) < \frac{1}{n}\}$ είναι σύνολο Borel και

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{x \in X | f^*(x) - f(x) < \frac{1}{n}\} = S,$$

έχουμε ότι το S είναι σύνολο Borel.

2. Έστω d_0 μια μετρική του X και για $m \in \mathbb{N}$,

$$F_m := \{x \in X | x = \frac{y+z}{2}, \text{ για κάποια } y, z \in X \text{ όπου } d_0(y,z) \geqslant \frac{1}{m}\}.$$

Έστω μια ακολουθία στοιχείων του F_m, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, και $x' \in X$ τέτοια ώστε $d_0(x_n, x') \to 0$. Τότε υπάρχουν ακολουθίες $(y_n), (z_n)$ στο X τέτοιες ώστε $d_0(\frac{y_n+z_n}{2}, x') \to 0$, $d_0(y_n, z_n) \geqslant \frac{1}{m}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αφού ο X είναι συμπαγής υπάρχουν υπακολουθίες $(y_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}, (z_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ των $(y_n), (z_n)$ αντίστοιχα και $y', z' \in X$ ώστε $d_0(y', z') \geqslant \frac{1}{m}$, $d_0(y_{n_k}, y') \to 0, d_0(z_{n_k}, z') \to 0$. Και τότε για την $(\frac{y_{n_k}+z_{n_k}}{2})$ έχουμε ότι $d_0(\frac{y_{n_k}+z_{n_k}}{2}, \frac{y'+z'}{2}) \to 0$ η οποία είναι υπακολουθία της (x_n) · άρα $x' = \frac{y'+z'}{2}$ με $d_0(y', z') \geqslant \frac{1}{m}$. Δηλαδή, $x' \in F_m$. Αυτό σημαίνει ότι το F_m, $m \in \mathbb{N}$, είναι κλειστό και παρατηρούμε ότι $x \notin \mathrm{ex}(X)$ αν και μόνο αν υπάρχει $m_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $x \in F_{m_0}$. Οπότε $\mathrm{ex}(X) = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} X \backslash F_m$, όπου για κάθε $m \in \mathbb{N}$, το $X \backslash F_m$ είναι ανοιχτό άρα και σύνολο Borel · συνεπώς το $\mathrm{ex}(X)$ είναι και αυτό σύνολο Borel.

□

Τώρα μπορούμε να μιλήσουμε για το θεώρημα που αναφέραμε πριν.

Θεώρημα του Choquet. Έστω X μετρικοποιήσιμο κυρτό συμπαγές υποσύνολο ενός τοπικά κυρτού χώρου E και x_0 ένα στοιχείο του X. Τότε υπάρχει μέτρο πιθανότητας στον X που έχει το x_0 βαρύκεντρο και φέρεται από το σύνολο των ακραίων σημείων του X.

Απόδειξη. X είναι μετρικοποιήσιμος, οπότε ο $C(X)$, άρα και ο $A(X)$, είναι διαχωρίσιμος. Βάσει αυτού, επιλέγουμε ακολουθία συναρτήσεων του $A(X)$, έστω $(h_m)_{m \in \mathbb{N}}$, τέτοιες ώστε $||h_m||_\infty = 1$ και το σύνολο $\{h_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ είναι πυκνό στη μοναδιαία σφαίρα $\{a \in A(X) | \, ||a||_\infty \leqslant 1\}$ του $A(X)$ και επιπλέον, διαχωρίζει σημεία του X. Έστω $f = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{h_m^2}{2^m}$. Η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα άρα $f \in C(X)$. Αν $x, y \in X$ τέτοια ώστε $x \neq y$, τότε υπάρχει $m_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $h_{m_0}(x) \neq h_{m_0}(y)$, άρα η h_{m_0} δεν είναι σταθερή στο διάστημα $[x, y]$. Τότε και η $h_{m_0}^2$ είναι αυστηρά κυρτή σε αυτό, άρα και η f. Οπότε, η f είναι αυστηρά κυρτή. Θεωρούμε τον υπόχωρο $B = \{a + rf | a \in A(X), r \in \mathbb{R}\}$ του $C(X)$. Για την απεικόνιση $p : C(X) \to \mathbb{R}$ που ορίζεται σύμφωνα με το τύπο $p(g) = g^*(x_0)$, όπου $g \in C(X)$, ισχύει $p(g_1 + g_2) = (g_1 + g_2)^*(x_0) \leqslant g_1^*(x_0) + g_2^*(x_0) = p(g_1) + p(g_2)$, $p(rg) = (rg)^*(x_0) = rg^*(x_0)$, για $r \geqslant 0$, λόγω του (c). Ορίζουμε γραμμική απεικόνιση $m_0 : B \to \mathbb{R}$ με τον τύπο $m_0(h + rf) = h(x_0) + rf^*(x_0)$, όπου $h \in A(X)$, $r \in \mathbb{R}$. Για $r \geqslant 0, h \in A(X)$ έχουμε $h + rf^* = (h + rf)^*$ από τα (2) και (4) της Πρότασης 1.1. Έστω $r < 0$, $h \in A(X)$. Η f είναι κυρτή, δηλαδή για $y, z \in X$, $y \neq z$, $\lambda \in (0, 1)$ ισχύει

$$\lambda f(y) + (1 - \lambda)f(z) \leqslant f(\lambda y + (1 - \lambda)z) \cdot$$

και άρα

$$rf(\lambda y + (1 - \lambda)z) \leqslant \lambda rf(y) + (1 - \lambda)rf(z).$$

Οπότε για $y, z \in X$, $y \neq z$, $\lambda \in (0, 1)$ ισχύει

$$h + rf(\lambda y + (1 - \lambda)z) = h(\lambda y + (1 - \lambda)z) + rf(\lambda y + (1 - \lambda)z) =$$

$$\lambda h(y) + (1 - \lambda)h(z) + rf(\lambda y + (1 - \lambda)z) \leqslant \lambda h(y) + (1 - \lambda)h(z) + \lambda rf(y) + (1 - \lambda)rf(z).$$

Δηλαδή η $h+rf$ κοίλη και άνω ημισυνεχής αφού h και f είναι συνεχείς (η f είναι επίσης κοίλη και άνω ημισυνεχής). Έτσι από το 3.(b) του Ορισμού 2.3 έχουμε $h+rf^* = h+rf = (h+rf)^*$. Από το Θεώρημα Hahn-Banach τώρα, υπάρχει συναρτησιακό $m : C(X) \to \mathbb{R}$ που επεκτείνει το m_0 και κυριαρχείται από την p. Επίσης για κάθε $g \in C(X)$, $g \geqslant 0$ ισοδυναμεί με $0 \geqslant -g$ από το οποίο έπεται ότι $0 \geqslant (-g)^*(x_0) \geqslant m(-g)$ όπου και αυτό με τη σειρά του ισοδυναμεί με $m(g) \geqslant 0$ · δηλαδή το m είναι θετικό άρα και συνεχές. Από το Θεώρημα F.Riesz-Markov-Kakutani υπάρχει μ μη αρνητικό κανονικό μέτρο Borel στον X τέτοιο ώστε

$$m(g) = \int_X g d\mu, \text{ για κάθε } g \in C(X).$$

Επειδή $1 \in A(X)$,

$$1 = m(1) = \int_X 1 d\mu = \mu(X).$$

Οπότε το μ είναι μέτρο πιθανότητας. Επίσης, έχουμε ότι

$$\int_X f d\mu = m(f) = f^*(x_0).$$

Στη συνέχεια αφού $f \leqslant f^*$, παίρνουμε

$$\int_X f d\mu \leqslant \int_X f^* d\mu.$$

Αν $h \in A(X)$ και $h \geqslant f$, τότε $h \geqslant f^*$ και

$$h(x_0) = m(h) = \int_X h d\mu \geqslant \int_X f^* d\mu.$$

Το μ-ολοκλήρωμα της f^* είναι κάτω φράγμα του $\{h(x_0)|h \in A(X), h \geqslant f\}$ ενώ το $f^*(x_0)$ είναι το μέγιστο κάτω φράγμα του · άρα

$$f^*(x_0) \geqslant \int_X f d\mu.$$

Θέτουμε $S = \{x \in X | f^*(x) = f(x)\}$. Από τη Πρόταση 2.5 έχουμε

$$\int_X f d\mu = \int_X f^* d\mu \text{ άρα } \int_X f^* - f d\mu = 0 \text{ και τότε } \int_{X\backslash S} f^* - f d\mu = 0$$

και εντέλει έπεται ότι $\mu(X\backslash S) = 0$, αφού $f^* - f > 0$ στο $X\backslash S$. Έστω τώρα $x \in X$. Αν $x \notin \text{ex}(X)$, τότε υπάρχουν $\lambda \in (0,1), y, z \in X, y \neq z$ τέτοια ώστε $x = \lambda y + (1-\lambda)z$ και από την αυστηρή κυρτότητα της f έχουμε

$$f(x) < \lambda f(y) + (1-\lambda)f(z) \leqslant \lambda f^*(y) + (1-\lambda)f^*(z) \leqslant f^*(x).$$

Άρα $x \notin S$. Δηλαδή, δείξαμε ότι το μέτρο πιθανότητας μ που έχει βαρύκεντρο το x_0 φέρεται από το S, ένα υποσύνολο του $\text{ex}(X)$.

□

Κεφάλαιο 3: Σύνορο Choquet ενός χώρου συναρτήσεων

Ορισμός συνόρου Choquet. Έστω X συμπαγής μετρικός χώρος υποσύνολο τοπικά κυρτού χώρου E.
α) Έστω $f \in C(X)$ και f^*, f_*, N όπως στον Ορισμό 1.2. Ο πρώτος ορισμός του συνόρου Choquet είναι

$$C_{*N} = \{x \in X | f^*(x) = f_*(x) \text{ για κάθε } f \in C(X)\}.$$

β) Έστω μ όπως στον Ορισμό 2.1 και N όπως στον Ορισμό 1.2. Ο δεύτερος ορισμός του συνόρου Choquet είναι

$$\widehat{C}_N = \{x \in X | \varepsilon_x \text{ είναι το μοναδικό μέτρο αναπαράστασης του } x \text{ ως προς το } N\}.$$

γ) Έστω $K(N)$ και ϕ όπως στον Ορισμό 1.3. Ο τρίτος ορισμός του συνόρου Choquet είναι $\widetilde{C}_N = \{x \in X | \phi(x) \in \text{ex}(K(N))\}$.

Θα αποδειχθεί παρακάτω η ταύτιση τους. Για το σκοπό αυτό αναφέρουμε το επόμενο λήμμα. Πριν από αυτό όμως, ας δούμε μια πρόταση που θα μας βοηθήσει να απαντήσουμε σε ερωτήματα που ενδεχομένως προκύπτουν από κάποια σημεία της απόδειξής του Θεωρήματος Choquet. Ένα τέτοιο διευκρινίζεται παρακάτω.

Πρόταση 3.1. Έστω X συμπαγές κυρτό υποσύνολο τοπικά κυρτού χώρου E και $N = A(X)$ ή $N = E^*|_X + \mathbb{R}$. Τότε κάθε $x \in X$ είναι ακραίο αν και μόνο αν x ανήκει στο σύνορο Choquet του X ως προς το N.

Απόδειξη. Για κάθε $x \in X$, η Πρόταση 2.3 μας λέει ότι $x \in \mathrm{ex}(X)$ αν και μόνο αν το x είναι βαρύκεντρο μόνο του ε_x και από το Πόρισμα 2.1 αυτό ισοδυναμεί με το ε_x να είναι το μοναδικό μέτρο αναπαράστασης του X ως προς το N, δηλαδή το x ανήκει στο σύνορο Choquet του X σύμφωνα με τον δεύτερο ορισμό του συνόρου Choquet. □

Στην απόδειξη του Θεωρήματος Choquet είδαμε πως το $S = \{x | f(x) = f^*(x)\}$ είναι υποσύνολο των ακραίων σημείων του X. Ισχύει όμως ότι κάθε ακραίο σημείο του X είναι και σημείο του S; Εδώ ακριβώς γίνεται φανερός ο ρόλος της Πρότασης 2.5, σύμφωνα με την οποία το σύνολο των ακράιων σημείων του X είναι υποσύνολο του συνόρου Choquet του X το οποίο με τη σειρά του είναι υποσύνολο του X.

Επιστρέφουμε τώρα στη διατύπωση και απόδειξη του λήμματος.

Λήμμα 3.1. Για τυχαίο $x \in X$ και τυχαία $f \in C(X)$ έχουμε ότι

$$[f_*(x), f^*(x)] = \Big\{ \int_X f d\mu \,\Big|\, \mu \,\text{μέτρο αναπαράστασης του}\, x \Big\}.$$

Απόδειξη. Έστω τυχαίο $x \in X$ και τυχαία $f \in C(X)$. Έστω τώρα τυχαίο μ μέτρο αναπαράστασης για το x και τυχαίες $h_1, h_2 \in N$ για τις οποίες ισχύει $h_1 \leqslant f \leqslant h_2$. Τότε

$$\int_X h_1 d\mu \leqslant \int_X f d\mu \leqslant \int_X h_2 d\mu.$$

Από τον ορισμό της f_*, το $f_*(x)$ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του συνόλου $\{h(x) | h \in N, h \leqslant f\}$ και το

$$\int_X f d\mu \,\text{είναι ένα άνω φράγμα του, άρα}\, f_*(x) \leqslant \int_X f d\mu.$$

Αντίστοιχα καταλήγουμε στην ανισότητα

$$\int_X f d\mu \leqslant f^*(x), \text{ άρα τελικά } \int_X f d\mu \in [f_*(x), f^*(x)].$$

Αντίστροφα, επιλέγουμε ένα $\alpha \in [f_*(x), f^*(x)]$ και ορίζουμε τη γραμμική απεικόνιση από τον γραμμικό υπόχωρο $\{\lambda f | \lambda \in \mathbb{R}\}$ του $C(X)$ στο $\mathbb{R}$, την οποία ονομάζουμε ψ, σύμφωνα με το τύπο $\psi(\lambda f) = \lambda\alpha$.

Επίσης, ορίζουμε την απεικόνιση $p : C(X) \to \mathbb{R}$ σύμφωνα με $p(g) = g^*(x)$, όπου $g \in C(X)$. Από τη Πρόταση 1.1 έχουμε δύο αποτελέσματα. Πρώτο, για την p ισχύει $p(g_1 + g_2) \leqslant p(g_1) + p(g_2)$, για κάθε $g_1, g_2 \in C(X)$ και $p(\lambda g) = \lambda p(g)$, για κάθε $\lambda \geqslant 0$, $g \in C(X)$.

Δεύτερο, όταν $\lambda \geqslant 0$ έχουμε $\psi(\lambda f) = \lambda\alpha \leqslant \lambda f^*(x) = (\lambda f)^*(x) = p(\lambda f)$ και όταν $\lambda < 0$, $\psi(\lambda f) = \lambda\alpha \leqslant \lambda f_*(x) = -\lambda(-f_*(x)) = -\lambda(-f)^*(x) = (\lambda f)^*(x) = p(\lambda f)$. Άρα για κάθε $\lambda \geqslant 0$ ισχύει $\psi(\lambda f) \leqslant p(\lambda f)$. Δηλαδή, η ψ κυριαρχείται από την p και εφαρμόζοντας το Θεώρημα Hahn-Banach, υπάρχει συναρτησιακό $\psi : C(X) \to \mathbb{R}$ που την επεκτείνει και κυριαρχείται από την p.

Για $g \in C(X)$, ισχύει $g \geqslant 0$ οπότε $\psi(-g) \leqslant p(-g) = (-g)^*(x) = -g_*(x) \leqslant 0$, συνεπώς $-\psi(g) \leqslant 0$ και τέλος παίρνουμε $\psi(g) \geqslant 0$, άρα το ψ είναι θετικό. Για τυχαία $h \in N$, ισχύει $\psi(h) \leqslant p(h) = h^*(x) = h(x)$ και $-\psi(h) = \psi(-h) \leqslant p(-h) = (-h)^*(x) = -h_*(x) = -h(x)$. Άρα $\psi(h) = h(x)$. Τώρα από το Θεώρημα F.Riesz-Markov-Kakutani, υπάρχει μοναδικό μέτρο Radon μ στον X τέτοιο ώστε

$$\psi(g) = \int_X g d\mu, \text{ για κάθε } g \in C(X).$$

Από αυτά που μόλις δείξαμε, το μ είναι μέτρο αναπαράστασης για το x και

$$\int_X f d\mu = \psi(f) = \alpha.$$

□

Με άμεση εφαρμογή του Λήμματος 3.1 μπορούμε πλέον να δείξουμε ότι $C_{*N} = \widehat{C}_N$. Για $x \in X$, αν $f_*(x) = f^*(x)$, για κάθε $f \in C(X)$, τότε από το λήμμα έχουμε

$$\left\{ \int_X f d\mu \,\middle|\, \mu \text{ μέτρο αναπαράστασης του } x \right\} = [f_*(x), f^*(x)] = \{f(x)\}$$

αφού ισχύει $f_*(x) \leqslant f(x) \leqslant f^*(x)$, για κάθε $f \in C(X)$. Άρα

$$\int_X f d\mu = f(x), \text{ για κάθε } f \in C(X)$$

και τότε $\mu = \varepsilon_x$, όπου μ μέτρο αναπαράστασης του x.

Αν ε_x είναι το μοναδικό μέτρο αναπαράστασης του x, τότε από το Λήμμα 3.1 έχουμε

$$[f_*(x), f^*(x)] = \left\{ \int_X f d\mu \,\middle|\, \mu \text{ μέτρο αναπαράστασης του } x \right\} = \left\{ \int_X f d\varepsilon_x \right\} = \{f(x)\},$$

για κάθε $f \in C(X)$. Άρα $f_*(x) = f^*(x) = f(x)$, για κάθε $f \in C(X)$. Ουσιαστικά αποδείξαμε το εξής.

Πρόταση 3.2. Για N όπως στον Ορισμό 1.2, $x \in X$, έχουμε ότι $f_*(x) = f^*(x)$ για κάθε $f \in C(X)$ αν και μόνο αν το ε_x είναι το μοναδικό μέτρο αναπαράστασης του x ως προς το N.

Εφόσον δείξαμε την ισοδυναμία των ορισμών 1 και 2 του συνόρου Choquet, για να ολοκληρώσουμε τον σκοπό μας, πρέπει να δείξουμε ότι ο τρίτος ορισμός του συνόρου Choquet είναι ισοδύναμος με έναν από τους δύο. Επιλέγουμε να δείξουμε την ισοδυναμία του με τον δεύτερο. Η επόμενη πρόταση θα μας εξασφαλίσει αυτό ακριβώς.

Πρόταση 3.3. Έστω X συμπαγής χώρος Hausdorff υποσύνολο τοπικά κυρτού χώρου E. Για $x \in X$ και ϕ, $K(N)$ όπως στον Ορισμό 1.3, το x είναι βαρύκεντρο μόνο για το ε_x αν και μόνο αν το $\phi(x)$ είναι ακραίο σημείο του $K(N)$.

Απόδειξη. Έστω $x \in X$ τέτοιο ώστε $\phi(x) \in \mathrm{ex}(K(N))$ και έστω μ μέτρο στο X για το οποίο ισχύει

$$h(x) = \int_X h d\mu, \text{ για κάθε } h \in N.$$

Κάθε διανυσματικός χώρος είναι πυκνός στη πλήρωση του άρα

$$h(x) = \int_X h d\mu, \text{ για κάθε } h \in \overline{N}.$$ διότι η κλειστότητα $\overline{N}$ του N είναι και η πλήρωση του N.

Ορίζουμε το κανονικό μέτρο Borel στο $K(N)$ μέσω της σχέσης $\mu' = \mu \circ \phi^{-1}$.
Τότε,

$$h \circ \phi^{-1}(\phi(x)) = \int_{\phi(X)} h \circ \phi^{-1} d\mu' \text{ για κάθε } h \in \overline{N}$$

και

$$h \circ \phi^{-1}(\phi(x)) + r = \int_{\phi(X)} (h \circ \phi^{-1} + r) d\mu' \text{ για κάθε } h \in \overline{N}, r \in \mathbb{R}.$$

Είναι γνωστό ότι $((\overline{N})^*, \mathrm{w}^*)^* = \overline{N}$ και από Πρόταση 2.5 έχουμε ότι το $\overline{N}|_{K(N)} + \mathbb{R}$ είναι πυκνό στο $A(K(N))$ ως προς τη $\sup -$νόρμα και τότε

$$a'(\phi(x)) = \int_{\phi(X)} a' d\mu' \text{ για κάθε } a' \in A(K(N))$$

και επειδή

$$\int_{\phi(X)} a' d\varepsilon_{\phi(x)} = a'(\phi(x)), \text{ για κάθε } a' \in A(K(N))$$

από το Πόρισμα 2.1 επομένως, έχουμε ότι το $\phi(x)$ είναι βαρύκεντρο του μ'. Αφού $\phi(x) \in \mathrm{ex}(K(N))$, η Πρόταση 2.4 μας εξασφαλίζει ότι $\mu' = \varepsilon_{\phi(x)}$ άρα και, $\mu = \varepsilon_x$. Έστω τώρα $x \in X$ τέτοιο ώστε $\phi(x) \notin \mathrm{ex}(K(N))$. Τότε υπάρχουν L_1, $L_2 \in K(N)$, $L_1 \neq L_2$ τέτοια ώστε $\phi(x)(h) = \frac{1}{2}L_1(h) + \frac{1}{2}L_2(h)$, για κάθε $h \in N$ άρα υπάρχουν μ_1, μ_2 μέτρα πιθανότητας στο X τέτοια ώστε $\mu_1 \neq \mu_2$,

$$L_1 = \int_X h d\mu_1, \; L_2 = \int_X h d\mu_2, \text{ για κάθε } h \in N.$$

Θέτουμε τώρα $\mu = \frac{1}{2}\mu_1 + \frac{1}{2}\mu_2$, το οποίο είναι και αυτό μέτρο πιθανότητας στο X · τότε

$$\int_X h d\mu = h(y), \text{ για κάθε } h \in N.$$

Αν το x όμως είναι βαρύκεντρο μόνο για το ε_x, τότε $\varepsilon_x = \mu = \frac{1}{2}\mu_1 + \frac{1}{2}\mu_2$. Έτσι έπεται ότι $\varepsilon_x = \mu_1 = \mu_2$ · άτοπο. Άρα καταλήγουμε στο ότι το x δεν είναι βαρύκεντρο μόνο για το ε_x. □

Ορολογία/Ορισμός συνόλου ελέγχου, χώρου ελέγχου, μέτρου ελέγχου. Επιλέγουμε ένα υποσύνολο $\mathfrak{T}$ του διανυσματικού χώρου $C(X)$ στο οποίο ανήκει η σταθερή συνάρτηση 1 και το οποίο διαχωρίζει σημεία του X · δηλαδή αν έχουμε $x, y \in X$ όπου $x \neq y$, τότε υπάρχει $t \in \mathfrak{T}$ τέτοια ώστε $t(x) \neq t(y)$. Το ονομάζουμε σύνολο (του X) ελέγχου και τα στοιχεία του λέγονται συναρτήσεις ελέγχου (του X). Το σύνολο $\text{lin}\mathfrak{T} = \{h \in C(X) | f = a_1 t_1 + \ldots + a_n t_n, n \in \mathbb{N}, t_1, \ldots, t_n \in \mathfrak{T}, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}$ είναι διανυματικός υπόχωρος του $C(X)$ και ονομάζεται χώρος ελέγχου. Αν ένα θετικό μέτρο Radon μ είναι μέτρο αναπαραστάσης ενός στοιχείου του X, έστω x, ως προς τη γραμμική θήκη του συνόλου ελέγχου $\mathfrak{T}$ (Ορισμός 2.1) · τότε αυτό το μ ονομάζεται μέτρο ελέγχου ως προς το $\mathfrak{T}$. Σύμφωνα με τα (1),(2),(3) της Πρότασης 1.1 όταν πάρουμε για N τη γραμμική θήκη του συνόλου ελέγχου $\mathfrak{T}$, ισχύει ότι ο χώρος $\mathfrak{T}^* = \{f \in C(X) | f^*(x) = f_*(x), \text{για κάθε } x \in X\}$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του $C(X)$.

Απόδειξη. $0 \in \mathfrak{T}^*$ αφού $0 \in \text{lin}\mathfrak{T}$, άρα και $0^* = 0_*$. Φυσικά, το ίδιο ισχύει για κάθε $h \in \text{lin}\mathfrak{T}$. Για $\lambda \geqslant 0$, αν

$$f \in \mathfrak{T}^* \text{ τότε έπεται } f^* = f_* \text{ και τότε } \lambda f^* = \lambda f_* \text{ και τότε } (\lambda f)^* = (\lambda f)_*,$$

επειδή

$$\lambda f_* = -\lambda(-f_*) = -\lambda(-f)^* = -(-\lambda f)^* = (\lambda f)_*.$$

Για $\lambda < 0$, αφού

$$f^* = f_* \text{ ισχύει } -\lambda f^* = -\lambda f_* \text{ άρα } (-\lambda f)^* = (-\lambda f)_* \text{ άρα και } -(\lambda f)_* = -(\lambda f)^*$$

που προκύπτει από την ισότητα $(-f)^* = -f_*$. Άρα $\lambda f \in \mathfrak{T}^*$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. Επίσης, αν

$$f, g \in \mathfrak{T}^* \text{ τότε } f^* = f_*, g^* = g_* \text{ και τότε } f^* + g^* = f_* + g_*,$$

και αφού

$$(f+g)_* = -[-(f+g)_*] = -[-(f+g)]^* \geqslant -[(-f)^* + (-g)^*] = f_* + g_*$$

έχουμε $f_* + g_* \leqslant (f+g)_* \leqslant f+g \leqslant (f+g)^* \leqslant f^* + g^* = f_* + g_*$. Άρα $(f+g)_* = (f+g)^*$, δηλαδή $f + g \in \mathfrak{T}^*$. □

Έτσι καταλήξαμε στην αλυσίδα $\mathfrak{T} \subseteq \mathrm{lin}\mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{T}^* \subseteq C(X)$.

Ορισμός 3.1. Όταν $f \in \mathfrak{T}^*$, για $f \in C(X)$, η f ονομάζεται $\mathfrak{T}$-αφφινική.

Στη συνέχεια δίνονται δύο παραδείγματα ώστε να αποκτήσουμε μια εικόνα για το "μέγεθος" και τη μορφή του $\mathrm{lin}\mathfrak{T}$ στον $C(X)$. Έτσι θα πάρουμε κάποιες ενδιαφέρουσες πληροφορίες για τις f^*, f_*, όπου $f \in C(X)$.

Παράδειγμα 3.1. Έστω $X = [t_1, t_2]$, με $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, $t_1 < t_2$ και $\mathfrak{T} = \{1, \mathrm{id}, \mathrm{id}^2\}$. Τότε $\mathrm{lin}\mathfrak{T} = \{h \in C(X) | h(x) = ax^2 + bx + c \,\text{όπου}\, a, b, c \in \mathbb{R}\}$. Το ενδιαφέρον εδώ είναι ότι για κάθε $f \in C(X)$ ισχύει $f_* = f^* = f$. Πως φαίνεται αυτό: Θα δείξουμε ότι $f(x) = f^*(x) = \inf\{h(x) | h \in \mathrm{lin}\mathfrak{T}, h \geqslant f\}$, για κάθε $x \in X$. Έστω $\epsilon > 0$, $x \in X$ και $f \in C(X)$. Κατασκευάζουμε πολυωνυμική συνάρτηση δευτέρου βαθμού, έστω $g \geqslant f$ στο X, τέτοια ώστε η κορυφή της να είναι στο x και $|g(x) - f(x)| < \epsilon$. Άρα για $g(y) = ay^2 + by + c$, όπου $a, b, c \in \mathbb{R}$, $y \in X$ πρέπει να ισχύει $g'(x) = 0$. Επειδή $g'(x) = 2ax + b$, έπεται $b = -2ax$ και έτσι παίρνουμε $g(y) = ay^2 - 2axy + c$. Επίσης, πρέπει $0 \leqslant g(x) - f(x) < \epsilon$ άρα $g(x) - f(x) = ax^2 - 2ax^2 + c - f(x) = c - (f(x) + ax^2)$, συνεπώς $0 \leqslant c - (f(x) + ax^2) < \epsilon$ και τότε $f(x) + ax^2 \leqslant c < f(x) + ax^2 + \epsilon$. Μπορούμε να επιλέξουμε $c = f(x) + ax^2 + \frac{\epsilon}{2}$. Τώρα μένει να προσδιορίσουμε κατάλληλα την σταθερά a έτσι ώστε να ισχύει $g(y) \geqslant f(y)$, για κάθε $y \in X$. Η f είναι συνεχής στο x άρα υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $y \in X$, αν $|x - y| < \delta$ τότε $|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{4}$. Εξετάζουμε πρώτα τα y με $|y - x| < \delta$. Τότε $g(y) - f(y) = a(x-y)^2 + \frac{\epsilon}{2} + f(x) - f(y) > a(x-y)^2 + \frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon}{4} = a(x-y)^2 + \frac{\epsilon}{4}$ και ψάχνουμε $a \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $a(x-y)^2 + \frac{\epsilon}{4} \geqslant 0$. Άρα μπορούμε να επιλέξουμε το a να είναι ένας οποιοσδήποτε μη αρνητικός αριθμός. Εξετάζουμε τώρα τα y με $|y - x| \geqslant \delta$. Επειδή η f είναι συνεχής σε συμπαγές, υπάρχει σταθερά $M > 0$ τέτοια ώστε $|f(y)| \leqslant M$, για κάθε $y \in X$. Για το επόμενο βήμα πρέπει, και μπορούμε, να περιορίσουμε τις δυνατές τιμές του ϵ στο $(0, 4M)$. Σε αυτή τη περίπτωση, $g(y) - f(y) = a(x-y)^2 + \frac{\epsilon}{2} + f(x) - f(y) \geqslant a\delta^2 + \frac{\epsilon}{2} - 2M$ και ψάχνουμε $a \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $a\delta^2 + \frac{\epsilon}{2} - 2M \geqslant 0$ ή ισοδύναμα $a \geqslant \frac{4M-\epsilon}{2\delta^2}$. Οπότε, επιλέγοντας $c_0 = \frac{4M-\epsilon}{2\delta^2}$ και $h_\epsilon(y) = c_0(x-y)^2 + f(x) + \frac{\epsilon}{2}$, έχουμε $h_\epsilon \geqslant f$ και $h_\epsilon(x) - f(x) < \epsilon$ · άρα $h_\epsilon(x) - \epsilon < f(x)$. Εντέλει, μόλις δείξαμε ότι για τυχαίο $\epsilon > 0$ υπάρχει h_ϵ τέτοια ώστε για κάθε x ισχύει $h_\epsilon(x) \in \{h(x) | h \in \mathrm{lin}\mathfrak{T}, h \geqslant f\}$ και $h_\epsilon(x) - \epsilon < f(x)$, δηλαδή $f(x) = \inf\{h(x) | h \in \mathrm{lin}\mathfrak{T}\}$. Άρα $f^* = f$, για κάθε $f \in C(X)$: Από αυτό και το (3) της Πρότασης 1.1 έχουμε και $f_* = -(-f)^* = -(-f) = f$.

Παράδειγμα 3.2. $X = [t_1, t_2]$, με $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, $t_1 < t_2$, $\mathfrak{T}' = \{1, \mathrm{id}\}$. Τότε $\mathrm{lin}\mathfrak{T}' = \{h \in C(X) | h(x) = ax + b,\, a, b \in \mathbb{R}\} = A(X)$. Έστω $f \in C(X)$. Από τις ιδιότητες κάτω από τον Ορισμό 2.3 έχουμε ότι η f^* είναι πάντα κοίλη και η f_* είναι πάντα κυρτή. Οπότε έχουμε την ισοδυναμία $f_* = f = f^*$ αν και μόνο αν $f \in \mathrm{lin}\mathfrak{T}'$.

Η χαρακτηριστική ιδιότητα των $\mathfrak{T}-$αφφινικών μοιάζει πολύ με τον Ορισμό 2 του συνόρου Choquet. Παρατηρούμε, σύμφωνα με αυτό, ότι ο X ταυτίζεται με το σύνορο Choquet του αν και μόνο αν ο $\mathfrak{T}^*$ ταυτίζεται με τον $C(X)$. Οπότε, βλέπουμε ότι το σύνορο Choquet συνδέεται άμεσα με το σύνολο των $\mathfrak{T}$-αφφινικών του $C(X)$. Ας δούμε αυτή τη σύνδεση στα δύο παραδείγματα που εξετάσαμε πριν.

Για το Παράδειγμα 3.1. Για κάθε $f \in C(X)$ έχουμε $f_* = f^*$. Άρα $\mathfrak{T}^* = C(X)$ και από την ισοδυναμία που έχουμε από πάνω, $X = C_{*\mathrm{lin}\mathfrak{T}}$.

Για το Παράδειγμα 3.2. Εφαρμόζοντας την Πρόταση 3.2 έχουμε την ισότητα $\mathrm{ex}(X) = C_{*A(X)}$. Αφού $\mathrm{ex}(X) = \{t_1, t_2\}$ τότε $C_{*A(X)} = \{t_1, t_2\}$.

Σε αυτά τα δύο παραδείγματα παρατηρούμε ότι κάθε στοιχείο του χώρου ελέγχου έχει ολικό μέγιστο και ελάχιστο στο σύνορο Choquet. Αυτό ισχύει γενικά. Η επόμενη πρόταση μας δείχνει γιατί.

Πρόταση 3.4. Έστω X συμπαγής χώρος Hausdorff υποσύνολο τοπικά κυρτού χώρου E και N όπως στον Ορισμό 1.3. Αν $f \in N$ τότε υπάρχει $x \in \widetilde{C}_N$ τέτοιο ώστε $|f(x)| = ||f||_\infty$.

Απόδειξη. Έστω $f \in N$. Επιλέγουμε $y \in X$ για το οποίο ισχύει $|f(y)| = ||f||_\infty$. Ορίζουμε συναρτησιακό του N^* σύμφωνα με

$$\psi(g) = g(y), \text{ για κάθε } g \in C(X).$$

Έτσι έχουμε ότι, $|\psi(f)| = |f(y)| = ||f||_\infty$ και $||\psi|| = ||\varepsilon_y|| = 1$. Δηλαδή, $\psi \in K(N)$. Τώρα μπορούμε να ορίσουμε το σύνολο $K_0 = \{L \in K(N) | L(f) = \psi(f)\}$. Έστω δίκτυο (L_α) στοιχείων του K_0, τέτοιο ώστε $L_\alpha \xrightarrow{\mathrm{w}^*} L$ για κάποιο $L \in K(N)$. Τότε $L \in K_0$ αφού $L(f) = \lim L_\alpha(f) = \lim \psi(f) = \psi(f)$. Άρα το K_0 είναι w*-κλειστό άρα και w*-συμπαγές. Εύκολα βλέπουμε ότι το K_0 είναι κυρτό. Έστω τώρα ότι $\lambda L_1 + (1-\lambda)L_2 \in K_0$ για κάποια $\lambda \in (0,1)$, $L_1, L_2 \in K(N)$. Έστω πως $L_1 \notin K_0$ ή $L_2 \notin K_0$. Τότε $L_1(f) \neq L_2(f)$. Έπεται $|\lambda L_1(f) + (1-\lambda)L_2(f)| = |\psi(f)| < |L_1(f)|$ ή $|\lambda L_1(f) + (1-\lambda)L_2(f)| = |\psi(f)| < |L_2(f)|$. Σε κάθε περίπτωση ισχύει, $||f||_\infty = |f(y)| = |\psi(f)| < ||f||_\infty$ · άτοπο που σημαίνει ότι $L_1, L_2 \in K_0$. Δηλαδή το K_0 είναι ακραίο σύνολο του $K(N)$ άρα $\mathrm{ex}(K_0) \subseteq \mathrm{ex}(K(N))$ (όπως είχαμε δει και στην απόδειξη του Krein-Milman). Άρα υπάρχει $L' \in K_0$ τέτοιο ώστε $L' = \phi(y)$ (η ϕ του Ορισμού 1.3) και έχουμε $|f(y)| = |\phi(y)(f)| = |L'(f)| = |\psi(f)| = ||f||_\infty$. □

Βλέπουμε τώρα ότι για X συμπαγή μετρικό χώρο, $N = \mathrm{lin}\mathfrak{T}$, από Πρόταση 3.4 και $\widetilde{C}_N = C_{*N}$, για κάθε t συνάρτηση ελέγχου υπάρχει $x \in C_{*N}$ τέτοιο ώστε $|t(x)| = ||t||_\infty$. Από αυτό συμπεραίνουμε ότι, για κάθε $f \in N$, η $|f|$ μεγιστοποιείται στο C_{*N}. Έστω $f \in N$, $g := -f \in N$. Τότε υπάρχουν $y_1, y_2 \in C_{*N}$ τέτοια ώστε $\max\limits_{x \in X} |f(x)| = |f(y_1)|$, $\max\limits_{x \in X} |g(x)| = |g(y_2)|$. Αν $f(y_1) \geqslant 0$, τότε η f μεγιστοποιείται στο y_1 και η g μεγιστοποιείται στο y_2 ή ισοδύναμα η f ελαχιστοποιείται στο y_2. Αν $f(y_1) < 0$, τότε η f μεγιστοποιείται στο y_2 και η g ελαχιστοποιείται στο y_1 ή ισοδύναμα η f ελαχιστοποιείται στο y_1. Άρα κάθε $f \in N$ μεγιστοποιείται και ελαχιστοποιείται στο C_{*N}.

Οι $\mathfrak{T}$-αφφινικές συναρτήσεις είναι χρήσιμες στη μελέτη αντικειμένων που θα ορίσουμε αμέσως τώρα.

Κεφάλαιο 4: Τα θεωρήματα προσέγγισης του Korovkin και η γενίκευση τους

Ορισμός 4.1. Έστω X συμπαγής μετρικός χώρος, $\mathfrak{T}$ σύνολο ελέγχου και $N = \text{lin}\mathfrak{T}$. Μία ακολουθία $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ θετικών γραμμικών τελεστών στον $C(X)$ ονομάζεται $\mathfrak{T}$-αποδεκτή αν $\lim\limits_{n\to\infty} ||L_n t - t||_\infty = 0$, για κάθε $t \in \mathfrak{T}$.

Αμέσως παρατηρούμε ότι αν $h \in N$, δηλαδή υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$, $t_1, \ldots, t_n \in \mathfrak{T}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $h = \lambda_1 t_1 + \ldots + \lambda_n t_n$, τότε για $m \in \mathbb{N}$ έχουμε $||L_m h - h||_\infty \leqslant |\lambda_1| \cdot ||L_m t_1 - t_1||_\infty + \ldots + |\lambda_n| \cdot ||L_m t_n - t_n||_\infty \to 0$. Άρα $\lim\limits_{n\to\infty} ||L_n h - h||_\infty = 0$, για κάθε $h \in N$.

Υπάρχουν άλλες συναρτήσεις πέρα από αυτές, δηλαδή υπάρχουν $f \in C(X)\backslash N$, για τις οποίες ισχύει $||L_n f - f||_\infty \to 0$ για κάθε (L_n) $\mathfrak{T}$-αποδεκτή ακολουθία; Η απάντηση σε αυτή την ερώτηση συνδέει την έννοια του συνόρου Choquet με την έννοια της $\mathfrak{T}$-αποδεκτής ακολουθίας. Πριν προσπαθήσουμε να το απαντήσουμε, εστιάζουμε σε μια παραλλαγή του: Για ποιές $f \in C(X)$ ισχύει ότι για κάθε (L_n) $\mathfrak{T}$-αποδεκτή ακολουθία, η $(L_n f)$ συγκλίνει κατά σημείο στην f; Έστω $f \in C(X)$ και έστω (L_n) $\mathfrak{T}$-αποδεκτή ακολουθία θετικών γραμμικών τελεστών από τον $C(X)$ στον ευατό του. Έστω κάποιο $x \in X$ σταθερό και έστω $g, h \in N$ τέτοιες ώστε $g \leqslant f \leqslant h$. Για $n \in \mathbb{N}$, ο τελεστής L_n είναι θετικός · δηλαδή για $\tilde{f} \geqslant 0$ ισχύει $L_n \tilde{f} \geqslant 0$, όπου $\tilde{f} \in C(X)$. Άρα για τυχαίες $\tilde{f}$, $\tilde{g} \in C(X)$ τέτοιες ώστε $\tilde{g} \geqslant \tilde{f}$ έχουμε $L_n \tilde{g} \geqslant L_n \tilde{f}$. Έτσι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, παίρνουμε $L_n g \leqslant L_n f \leqslant L_n h$ και συγκεκριμένα για το x,

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} L_n g(x) \leqslant \liminf_{n\to\infty} L_n f(x) \leqslant \limsup_{n\to\infty} L_n f(x) \leqslant \lim_{n\to\infty} L_n h(x) = h(x).$$

Άρα

$$f_*(x) = \sup\{\tilde{h}(x) | \tilde{h} \in N, \tilde{h} \leqslant f\} \leqslant \liminf_{n\to\infty} L_n f(x) \leqslant$$

$$\limsup_{n\to\infty} L_n f(x) \leqslant \inf\{\tilde{h}(x) | \tilde{h} \in N, f \leqslant \tilde{h}\} = f^*(x).$$

Από αυτή έχουμε ότι η $(L_n f(x))_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο $f(x)$ αν ισχύει $f_*(x) = f^*(x)$. Τελικά η απάντηση στη δεύτερη ερώτηση που προέκυψε είναι:

Αν $f \in \mathfrak{T}^*$ τότε $L_n f \to f$ κατά σημείο.

Πρόταση 4.1. Έστω X συμπαγής μετρικός χώρος, $\mathfrak{T}$ σύνολο ελέγχου και $N = \mathrm{lin}\mathfrak{T}$. Κάθε $f \in C(X)$ είναι $\mathfrak{T}^*$-αφφινική αν και μόνο αν το ε_x είναι το μοναδικό μέτρο ελέγχου ως προς το $\mathfrak{T}$ για κάθε $x \in X$.

Απόδειξη. Έστω $X = \widehat{C}_N$, δηλαδή για κάθε $x \in X$ το ε_x είναι το μοναδικό μέτρο ελέγχου για το x και η Πρόταση 3.2 μας λέει ότι αυτό ισοδυναμεί με το ότι για κάθε $x \in X$, για κάθε $f \in C(X)$ ισχύει $f_*(x) = f^*(x)$ · δηλαδή για κάθε $f \in C(X)$ ισχύει $f \in \mathfrak{T}^*$ ή ισοδύναμα $C(X) = \mathfrak{T}^*$. □

Θεώρημα 4.1 (Το Πρώτο Θεώρημα του Korovkin). Έστω $X = [a, b]$, με $a < b$, a, $b \in \mathbb{R}$, $\mathfrak{T} = \{1, \mathrm{id}, \mathrm{id}^2\}$ και μια $\mathfrak{T}-$αποδεκτή ακολουθία θετικών τελεστών (L_n). Τότε η $(L_n f)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f, για κάθε $f \in C(X)$.

Απόδειξη. Έστω $f \in C(X)$. Η f είναι συνεχής σε συμπαγές άρα υπάρχει σταθερά $M > 0$ τέτοια ώστε $|f(x)| \leqslant M$, για κάθε $x \in X$. Ακόμα, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, δηλαδή για δοσμένο $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε, για κάθε x, $y \in X$, αν $|x - y| < \sqrt{\delta}$ τότε $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ ή ισοδύναμα αν $|x - y|^2 < \delta$ τότε $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. Έστω $\epsilon > 0$. Όταν $|x - y|^2 < \delta$, έχουμε ότι $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. Όταν $|x - y| \geqslant \delta$, έχουμε ότι $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ ή $|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x)| + |f(y)| \leqslant 2M = \underbrace{2M\delta^{-1}}_{:=\alpha}\delta$. Οπότε σε κάθε περίπτωση έχουμε $|f(x) - f(y)| \leqslant \epsilon + \alpha(x - y)^2$, για κάθε x, $y \in X$. Έτσι, για σταθερό $y \in X$, παίρνουμε την ανισότητα συναρτήσεων $|f - f(y)| \leqslant \epsilon + \alpha(\mathrm{id} - y)^2$ όπου οι $y, y^2, f(y)$ είναι σταθερές συναρτήσεις. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ο L_n είναι θετικός άρα

$$L_n|f - f(y)| \leqslant L_n\big(\epsilon + \alpha(\mathrm{id} - y)^2\big) = \epsilon L_n 1 + \alpha L_n \mathrm{id}^2 - 2\alpha y L_n \mathrm{id} + \alpha y^2 L_n 1.$$

Δηλαδή για κάθε $x \in X$ έχουμε

$$|(L_n f)(x) - f(y)(L_n 1)(x)| = |(L_n f)(x) - (L_n f(y))(x)| =$$

$$|\big(L_n(f - f(y))\big)(x)| \leqslant (L_n|f - f(y)|)(x) \leqslant$$

$$\epsilon(L_n 1)(x) + \alpha(L_n \mathrm{id}^2)(x) - 2\alpha y(L_n \mathrm{id})(x) + \alpha y^2(L_n 1)(x).$$

Και για $x = y$,

$$|(L_n f)(x) - f(x)(L_n 1)(x)| \leqslant \epsilon(L_n 1)(x) + \alpha(L_n \mathrm{id}^2)(x) - 2\alpha x(L_n \mathrm{id})(x) + \alpha x^2(L_n 1)(x).$$

Παίρνοντας όρια ως προς τα δύο μέλη αυτής της ανισότητας έχουμε, για κάθε $x \in X$

$$\lim_{n\to\infty} |(L_n f)(x) - f(x)(L_n 1)(x)| \leqslant$$

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\epsilon(L_n 1)(x) + \alpha(L_n \mathrm{id}^2)(x) - 2\alpha x(L_n \mathrm{id})(x) + \alpha x^2(L_n 1)(x)\Big) =$$

$$\epsilon + \alpha \mathrm{id}^2(x) - 2\alpha x \mathrm{id}(x) + \alpha x^2 = \epsilon + \alpha x^2 - 2\alpha x^2 + \alpha x^2 = \epsilon.$$

Ισοδύναμα

$$\lim_{n\to\infty} ||L_n f - f L_n 1||_\infty \leqslant \epsilon.$$

Καταλήγουμε στο ότι $\lim\limits_{n\to\infty} ||L_n f - f L_n 1||_\infty = 0$. Εντέλει έχουμε

$$||L_n f - f||_\infty \leqslant ||L_n f - f L_n 1||_\infty + ||f L_n 1 - f||_\infty \leqslant ||L_n f - f L_n 1||_\infty + M||L_n 1 - 1||_\infty \to 0.$$

$\square$

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε καταστάσεις όπως στο Θεώρημα 4.1 αλλά για το τυχαίο $\mathfrak{T}$. Σε αυτό το πλαίσιο είναι απαραίτητο να μελετηθούν οι συγκεκριμένες συναρτήσεις:

Ορισμός 4.2. Έστω X συμπαγής μετρικός χώρος και $\mathfrak{T}$ σύνολο ελέγχου. Μία $f \in C(X)$ ονομάζεται συνάρτηση Korovkin ως προς το $\mathfrak{T}$ αν για κάθε $\mathfrak{T}-$αποδεκτή ακολουθία $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$, η $(L_n f)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f.

Ένα φυσιολογικό ερώτημα είναι "Ποιά στοιχεία του $C(X)$ είναι συναρτήσεις Korovkin ως προς το $\mathfrak{T}$;". Για να απαντήσουμε σε αυτό θα χρησιμοποιήσουμε την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 4.2. Αν X συμπαγής μετρικός χώρος, $\mathfrak{T}$ σύνολο ελέγχου και $N = \mathrm{lin}\mathfrak{T}$, κάθε $f \in \mathfrak{T}^*$ είναι συνάρτηση Korovkin ως προς το $\mathfrak{T}$.

Απόδειξη. Έστω $f \in \mathfrak{T}^*$ και $\epsilon > 0$. Αφού $f_* = f = f$, δηλαδή η f είναι $\mathfrak{T}-$αφφινική, για κάθε $x \in X$ υπάρχουν u_x, $l_x \in N$ τέτοιες ώστε $l_x \leqslant f$, $f(x) - l_x(x) < \frac{\epsilon}{2}$ και $f \leqslant u_x$ και $u_x(x) - f(x) < \frac{\epsilon}{2}$. Άρα $l_x \leqslant f \leqslant u_x$ και $u_x(x) - l_x(x) = (u_x(x) - f(x)) + (f(x) - l_x(x)) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$. Για κάθε $x \in X$ υπάρχει ανοιχτή περιοχή του x, έστω U_x, τέτοια ώστε $u_x(y) - l_x(y) < \epsilon$, για κάθε $y \in U_x$. Η οικογένεια $(U_x)_{x\in X}$ είναι ένα ανοιχτό κάλυμμα του X και αφού ο X είναι συμπαγής, αυτή ανάγεται σε πεπερασμένη υπο-οικογένεια που τον καλύπτει. Άρα υπάρχουν $k \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_k \in X$ τέτοια ώστε $\bigcup\limits_{i=1}^{k} U_{x_i} = X$. Θέτουμε $l_j = l_{x_j}$, $u_j = u_{x_j}$, για $j = 1, \ldots, k$ και $\underline{h} = \sup(l_1, \ldots, l_k)$, $\overline{h} = \inf(u_1, \ldots, u_k)$. Τότε έχουμε $\underline{h} \leqslant f \leqslant \overline{h}$ και $\overline{h} - \underline{h} < \epsilon$. Έστω τυχαία $\mathfrak{T}-$αποδεκτή ακολουθία $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Αμέσως μετά τον Ορισμό 4.1 είδαμε πως για μια τέτοια ακολουθία ισχύει $L_n h \overset{||.||_\infty}{\to} h$, για κάθε $h \in N$. Άρα $L_n l_j \overset{||.||_\infty}{\to} l_j$ και $L_n u_j \overset{||.||_\infty}{\to} u_j$, για κάθε $j = 1, \ldots, k$. Άρα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $||L_n l_j - l_j||_\infty < \epsilon$ και $||L_n u_j - u_j||_\infty < \epsilon$, για κάθε $n \geqslant n_0$ και κάθε $j = 1, \ldots, k$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ο τελεστής L_n είναι αύξουσα απεικόνιση, άρα $L_n l_j \leqslant L_n f \leqslant L_n u_j$ όπου $j = 1, \ldots, k$. Επομένως για κάθε $n \geqslant n_0$ και $j = 1, \ldots, k$ έχουμε $l_j - \epsilon \leqslant L_n f \leqslant u_j + \epsilon$. Για κάθε $x \in X$ και για κάθε $n \geqslant n_0$ το $L_n f(x) + \epsilon$ $[L_n f(x) - \epsilon]$ είναι άνω φράγμα [κάτω φράγμα] του $\{l_j(x) | j = 1, \ldots, k\}$ $[\{u_j(x) | j = 1, \ldots, k\}]$, οπότε $\underline{h} \leqslant L_n f + \epsilon$ και $L_n f - \epsilon \leqslant \overline{h}$ ή ισοδύναμα $\underline{h} - \epsilon \leqslant L_n f \leqslant \overline{h} + \epsilon$. Επίσης έχουμε $-\overline{h} \leqslant -f \leqslant -\underline{h}$ αφού $\underline{h} \leqslant f \leqslant \overline{h}$. Προσθέτουμε κατά μέλη τις δύο τελευταίες ανισότητες: $-\overline{h}+\underline{h}-\epsilon=-(\overline{h}-\underline{h}+\epsilon)\leqslant L_nf-f\leqslant\overline{h}-\underline{h}+\epsilon\cdot$ ισοδύναμα $|L_nf-f|\leqslant\overline{h}-\underline{h}+\epsilon<2\epsilon$, για κάθε $n\geqslant n_0$. □

Η απάντηση του ερωτήματος είναι έτοιμη.

Θεώρημα 4.2. Έστω X συμπαγής μετρικός χώρος και $\mathfrak{T}$ σύνολο ελέγχου. Οι $\mathfrak{T}-$αφφινικές συναρτήσεις είναι οι μοναδικές συναρτήσεις Korovkin ως προς το $\mathfrak{T}$.

Απόδειξη. Χάρη στην Πρόταση 4.2 αρκεί να δείξουμε πως αν $f\in C(X)$ είναι συνάρτηση Korovkin ως προς το $\mathfrak{T}$ τότε $f\in\mathfrak{T}^*$. Από το Λήμμα 3.1 αυτό ισοδυναμεί με το ότι

$$\int_X fd\mu=f(x),$$

για κάθε $x\in X$ και κάθε μ μέτρο ελέγχου για το x. Έστω $x\in X$ και μ μέτρο ελέγχου για το x. Έστω d η μετρική του χώρου X και $d(x,A)=\inf\{d(x,y)|y\in A\}$, για $\varnothing\neq A\subseteq X$. Για $\varnothing\neq A\subseteq X$, η απεικόνιση $d(\cdot,A)$ που ορίζεται μέσω του $d'(y)=d(y,A)$, όπου $y\in X$, είναι συνεχής: Έστω $x\in X$ και ακολουθία (x_n) του X η οποία συγκλίνει στο x. Θέλουμε να δείξουμε ότι $d(x_n,A)\to d(x,A)$ όταν $d(x_n,x)\to 0$. Από τις ιδιότητες της μετρικής και τον ορισμό της $d(\cdot,A)$, για κάθε $y\in A$ και $n\in\mathbb{N}$ έχουμε τις ανισότητες

$$d(x_n,A)\leqslant d(x_n,y)\leqslant d(x_n,x)+d(x,y)$$
$$d(x,A)\leqslant d(x,y)\leqslant d(x_n,x)+d(x_n,y)$$

Χρησιμοποιώντας την πρώτη έχουμε $-d(x,A)=-\inf\{y\in A|d(x,y)\}=\sup\{y\in A|-d(x,y)\}\leqslant d(x_n,x)-d(x_n,A)$, δηλαδή $d(x_n,A)-d(x,A)\leqslant d(x_n,x)$. Χρησιμοποιώντας τη δεύτερη έχουμε $d(x,A)-d(x_n,x)\leqslant d(x_n,y)$ δηλαδή το $d(x,A)-d(x_n,x)$ είναι κάτω φράγμα του $\{y\in A|d(x_n,y)\}$ άρα $d(x,A)-d(x_n,x)\leqslant d(x_n,A)$ ή ισοδύναμα $-d(x_n,x)\leqslant d(x_n,A)-d(x,A)$. Άρα τελικά έχουμε

$$-d(x_n,x)\leqslant d(x_n,A)-d(x,A)\leqslant d(x_n,x)$$

και από το κριτήριο παρεμβολής καταλήγουμε στο ζητούμενο. Για κάθε $n\in\mathbb{N}$, θέτουμε $A_n=\{y\in X|d(y,x)\geqslant\frac{1}{n}\}$ και $\alpha_n=d(x,A_n)>0$. Θέτουμε επίσης,

$$q_n(y)=\begin{cases}1, & \text{αν } A_n=\varnothing\\ \min\left(\frac{1}{\alpha_n}d(y,A_n),1\right), & \text{αν } A_n\neq\varnothing\end{cases}.$$

Παίρνουμε έτσι μια ακολουθία πραγματικών συναρτήσεων στο X, την $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε για κάθε $n\in\mathbb{N}$ ισχύει $0\leqslant q_n\leqslant 1$, $q_n(x)=1$, $q_n(y)=0$ για κάθε $y\in A_n$. Ορίζουμε ακολουθία θετικών γραμμικών τελεστών από τον $C(X)$ στον εαυτό του μέσω του τύπου

$$L_ng=q_n\int_X gd\mu+(1-q_n)g,$$

όπου $n \in \mathbb{N}$ και $g \in C(X)$.

Θα δείξουμε ότι η (L_n) είναι $\mathfrak{T}$-αποδεκτή: Βλέπουμε ότι για $t \in \mathfrak{T}$ και $y \in X$, έχουμε $|L_n t(y) - t(y)| = q_n |t(x) - t(y)|$. Άρα $||L_n t - t||_\infty \leqslant \sup_{y \in X \setminus A_n} |t(x) - t(y)|$. Έστω $\epsilon > 0$. Από τη συνέχεια της t στο x υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε, για κάθε $y \in X$ έχουμε, αν $d(x,y) < \delta$ τότε $|t(x) - t(y)| < \epsilon$. Τα $X \setminus A_n$ είναι οι ανοιχτές μπάλες $B(x, \frac{1}{n})$. Έστω $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\frac{1}{n} < \delta$ για κάθε $n \geqslant n_0$ · τότε αν $y \in X \setminus A_n$ για $n \geqslant n_0$ έχουμε $d(x,y) < \frac{1}{n} < \delta$ άρα $|t(x) - t(y)| < \epsilon$. Άρα βρήκαμε $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geqslant n_0$ να έχουμε $||L_n t - t||_\infty \leqslant \epsilon$. Οπότε δείξαμε ότι η (L_n) είναι $\mathfrak{T}-$αποδεκτή ακολουθία.

Αν f συνάρτηση Korovkin ως προς το $\mathfrak{T}$ σύμφωνα με τον Ορισμό 4.2 ισχύει $L_n f(x) \to f(x)$. Από τον ορισμό του τελεστή L_n τότε έχουμε

$$L_n f(x) = q_n(x) \int_X f d\mu + (1 - q_n(x)) f(x) = \int_X f d\mu,$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ άρα

$$\int_X f d\mu = f(x).$$

□

Συνδυάζοντας το Θεώρημα 4.2 με τα προηγούμενα βγάζουμε και ένα ακόμα συμπέρασμα.

Θεώρημα 4.3. Έστω X συμπαγής μετρικός χώρος και $\mathfrak{T}$ ένα σύνολο ελέγχου. Κάθε $f \in C(X)$ είναι συνάρτηση Korovkin ως προς το $\mathfrak{T}$ αν και μόνο αν για κάθε $x \in X$ το αντίστοιχο ε_x είναι το μόνο μέτρο ελέγχου ως προς το $\mathfrak{T}$ για αυτό.

Απόδειξη. Το Θεώρημα 4.2 μας λέει ότι το $\mathfrak{T}^*$ ταυτίζεται με το σύνολο των συναρτήσεων Korovkin και η Πρόταση 4.1 μας δίνει την ισοδυναμία. □

Τώρα ξεκινάμε την προετοιμασία για να δώσουμε απόδειξη του Θεωρήματος 4.1 που χρησιμοποιεί τα εργαλεία που αναπτύχθηκαν παραπάνω.

Ορισμός 4.3. 1. Αν X συμπαγές σύνολο και $\mathfrak{T} = \{1, t_1, \ldots, t_k\}$ πεπερασμένο σύνολο ελέγχου στο X, ορίζουμε συνεχή απεικόνιση $\Phi : X \to \mathbb{R}^k$ μέσω του τύπου $\Phi(x) = (t_1(x), \ldots, t_k(x))$. Η Φ είναι 1-1 αφού το $\mathfrak{T}$ διαχωρίζει σημεία του X, άρα η Φ είναι ομοιομορφισμός από το X στο $\Phi(X)$.

2. Για $j = 1, \ldots, k$ η p_j είναι η προβολή στην $j-$συντεταγμένη, δηλαδή $p_j(x) = x_j$, όπου $x = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$.

Πρόταση 4.3. Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^k$, $k \in \mathbb{N}$ συμπαγές κυρτό σύνολο, $\mathfrak{T} = \{p_0 = 1, p_1, \ldots, p_k\}$ (όπου p_i είναι η προβολή στη $i-$συντεταγμένη για $i = 1, \ldots, k$) σύνολο ελέγχου και $N = \mathrm{lin}\mathfrak{T}$. Τότε το σύνορο Choquet του K ως προς το N είναι ίσο με το σύνολο των ακραίων σημείων του K.

Απόδειξη. Είναι η Πρόταση 3.1 για $X = K$, $E = \mathbb{R}^k$ και $N = \{h | h(x) = \lambda_0 + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j p_j(x) = \lambda_0 + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j$, όπου $\lambda_0, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}\} = (\mathbb{R}^k)^*|_K + \mathbb{R}$. □

Πρόταση 4.4. Έστω X συμπαγής μετρικός χώρος, $\mathfrak{T}$ πεπερασμένο σύνολο ελέγχου, Φ όπως στον Ορισμό 4.3 και $N = \mathrm{lin}\mathfrak{T}$. Τότε η εικόνα του συνόρου Choquet του X ως προς το N μέσω της Φ ταυτίζεται με το σύνολο των ακραίων στοιχείων της κυρτής θήκης του $\Phi(X)$.

Απόδειξη. Έστω $\mathfrak{T} = \{t_0 = 1, t_1, \ldots, t_k\}$ όπου $k \in \mathbb{N}$. Έστω $x \in X$. Από το (β) του ορισμού του συνόρου Choquet έχουμε την ισοδυναμία, $x \in \widehat{C}_N$ αν και μόνο αν το ε_x είναι το μόνο μέτρο ελέγχου για το x στον X ως προς το $\mathfrak{T}$.

Η Φ είναι ισομορφισμός από το X στο $\Phi(X)$. Για $y := \Phi(x)$, $t_0 \circ \Phi^{-1}(y) = 1$ και $t_j \circ \Phi^{-1}(y) = t_j(x) = p_j(y)$ για κάθε $j = 1, \ldots, k$. Το $\mathfrak{T}' = \{1, p_1, \ldots, p_k\}$ είναι σύνολο ελέγχου του $\Phi(X)$.

Για το τυχαίο μ μέτρο ελέγχου για το x ως προς το $\mathfrak{T}$ ορίζουμε $\mu' = \mu \circ \Phi^{-1}$ στον $\Phi(X)$ το οποίο είναι μέτρο ελέγχου για το $\Phi(x)$ ως προς το $\mathfrak{T}'$. Αυτό ισχύει διότι

$$\int_{\Phi(X)} p_j(y') d\mu' = \int_{\Phi(X)} t_j \circ \Phi^{-1}(y')) d\mu' = \int_X t_j d\mu = t_j(x) = t_j \circ \Phi^{-1}(\Phi(x))$$

$$= p_j(\Phi(x)) \text{ για κάθε } j = 0, \ldots, k \text{ (όπου } p_0 = 1).$$

Έτσι παίρνουμε την ισοδυναμία, το ε_x είναι το μόνο μέτρο ελέγχου για το x στον X ως προς το $\mathfrak{T}$ αν και μόνο αν το $\varepsilon_{\Phi(x)}$ είναι το μόνο μέτρο ελέγχου για το $\Phi(x)$ στον $\Phi(X)$ ως προς το $\mathfrak{T}'$.

Το $\mathrm{lin}\mathfrak{T}'$ είναι ο χώρος των αφφινικών συναρτήσεων στον $\mathrm{co}(\Phi(X))$, οπότε από τους Ορισμούς 2.1 και 2.2 έχουμε ότι το $\varepsilon_{\Phi(x)}$ είναι το μόνο μέτρο στο $\Phi(X)$ με βαρύκεντρο το $\Phi(x)$.

Μένει να δείξουμε ότι το $\Phi(x)$ είναι ακραίο του $\mathrm{co}(\Phi(X))$ αν και μόνο αν το $\varepsilon_{\Phi(x)}$ είναι το μόνο μέτρο πιθανότητας στον $\Phi(X)$ με βαρύκεντρο το $\Phi(x)$: Έστω ότι το $\Phi(x)$ δεν είναι ακραίο του $\mathrm{co}(\Phi(X))$ ενώ το $\varepsilon_{\Phi(x)}$ είναι το μόνο μέτρο στο $\Phi(X)$ με βαρύκεντρο το $\Phi(x)$. Δηλαδή υπάρχουν $y_1, \ldots, y_k \in \Phi(X)$ (διαφορετικά του $\Phi(x)$) και $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k+1} \in [0, 1)$ (όχι όλα μηδέν) τέτοια ώστε $\Phi(x) = \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i y_i$. Θέτουμε μ' μέτρο πιθανότητας στον $\Phi(X)$ μέσω του τύπου $\mu' = \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i \varepsilon_{y_i}$. Το μ' είναι μέτρο αναπαράστασης του $\Phi(x)$ ως προς το $\mathrm{lin}\mathfrak{T}'$ διαφορετικό του $\varepsilon_{\Phi(x)}$ · άτοπο. Αντίστροφα, αφού το $\Phi(x)$ είναι ακραίο του $\mathrm{co}(\Phi(X))$ τότε λόγω της Πρότασης 2.3 έπεται ότι το $\varepsilon_{\Phi(x)}$ είναι το μόνο μέτρο στον $\Phi(X)$ με βαρύκεντρο το $\Phi(x)$. $\square$

Πόρισμα 4.1. Έστω X συμπαγής κυρτός μετρικός χώρος, $\mathfrak{T}$ πεπερασμένο σύνολο ελέγχου και έστω Φ όπως στον Ορισμό 4.3. Κάθε $f \in C(X)$ είναι συνάρτηση Korovkin ως προς το $\mathfrak{T}$ αν και μονό αν η εικόνα του X μέσω της Φ ταυτίζεται με το σύνολο των ακραίων σημείων της κυρτής θήκης του $\Phi(X)$.

Απόδειξη. Έστω ότι κάθε $f \in C(X)$ είναι συνάρτηση Korovkin ως προς το $\mathfrak{T}$. Τότε από το Θεώρημα 4.3 έχουμε $\widehat{C}_{\mathrm{lin}\mathfrak{T}} = X$ άρα $\Phi(\widehat{C}_{\mathrm{lin}\mathfrak{T}}) = \Phi(X)$. Έτσι η Πρόταση 4.4 μας λέει ότι $\Phi(X) = \Phi(\widehat{C}_{\mathrm{lin}\mathfrak{T}}) = \mathrm{ex}(\mathrm{co}(\Phi(X)))$. Αντίστροφα, έστω ότι $\Phi(X) = \mathrm{ex}(\mathrm{co}(\Phi(X)))$. Από τη Πρόταση 4.4 έπεται $\Phi(X) = \Phi(\widehat{C}_{\mathrm{lin}\mathfrak{T}})$ και τότε $X = \widehat{C}_{\mathrm{lin}\mathfrak{T}}$. Λόγω του Θεωρήματος 4.3 αυτό ισοδυναμεί με το ότι κάθε $f \in C(X)$ είναι συνάρτηση Korovkin ως προς το $\mathfrak{T}$. $\square$

Πρόταση 4.5. Έστω $X = [t_1, t_2] \subseteq \mathbb{R}$, με $t_1 < t_2$ και $u \in C(X)$. Κάθε $f \in C(X)$ είναι συνάρτηση Korovkin ως προς το σύνολο ελέγχου $\mathfrak{T} = \{1, \mathrm{id}, u\}$ αν και μόνο αν u είναι αυστηρά κυρτή ή αυστηρά κοίλη στο X.

Απόδειξη. Έστω ότι κάθε $f \in C(X)$ είναι συνάρτηση Korovkin ως προς το σύνολο ελέγχου $\mathfrak{T} = \{1, \mathrm{id}, u\}$. Από το Πόρισμα 4.1, αυτό ισοδυναμεί με το ότι $\Phi(X) = \mathrm{ex}(\mathrm{co}(\Phi(X)))$, όπου Φ όπως στον Ορισμό 4.3. Θέλουμε να δείξουμε ότι η u είναι αυστηρά κυρτή ή αυστηρά κοίλη. Πρώτα δείχνουμε ότι η u είναι κυρτή ή κοίλη. Έστω ότι δεν είναι · δηλαδή, υπάρχουν $x_1, y_1, x_2, y_2 \in X$, όχι όλα ίσα μεταξύ τους, $\lambda_1, \lambda_2 \in (0,1)$ τέτοια ώστε

$$u(z_1) > \lambda_1 u(x_1) + (1-\lambda_1)u(y_1), \text{ για } z_1 := \lambda_1 x_1 + (1-\lambda_1) y_1 \quad (\star)$$

και

$$u(z_2) < \lambda_2 u(x_2) + (1-\lambda_2)u(y_2), \text{ για } z_2 := \lambda_2 x_2 + (1-\lambda_2) y_2. \quad (\star\star)$$

Θέτουμε τώρα $f(t) = u(tz_1+(1-t)z_2) - t\lambda_1 u(x_1) - t(1-\lambda_1)u(y_1) - (1-t)\lambda_2 u(x_2) - (1-t)(1-\lambda_2)u(y_2)$, όπου $t \in (0,1)$. Βλέπουμε ότι $f(0) = u(z_2) - \lambda_2 u(x_2) - (1-\lambda_2)u(y_2) < 0$ λόγω του $(\star\star)$ και $f(1) = u(z_1) - \lambda_1 u(x_1) - (1-\lambda_1)u(y_1) > 0$ λόγω του $(\star)$. Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ άρα από το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής υπάρχει $t_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f(t_0) = 0$. Άρα $u(t_0 z_1 + (1-t_0)z_2) = t_0\lambda_1 u(x_1) + t_0(1-\lambda_1)u(y_1) + (1-t_0)\lambda_2 u(x_2) + (1-t_0)(1-\lambda_2)u(y_2)$ και από αυτό παίρνουμε $\Phi(t_0 z_1 + (1-t_0)z_2) = t_0\lambda_1\Phi(x_1) + t_0(1-\lambda_1)\Phi(y_1) + (1-t_0)\lambda_2\Phi(x_2) + (1-t_0)(1-\lambda_2)\Phi(y_2)$. Άρα $\Phi(X) \neq \mathrm{ex}(\mathrm{co}(\Phi(X)))$, άτοπο. Άρα δείξαμε ότι η u είναι κυρτή ή κοίλη. Έστω τώρα ότι δεν είναι αυστηρά κυρτή ή αυστηρά κοίλη. Περιοριζόμαστε στη περίπτωση όπου η u είναι κυρτή και όχι αυστηρά κυρτή. Τότε η u πρέπει να είναι αφφινική σε ένα υποδιάστημα $[a,b]$ του X. Επιλέγουμε κάποιο $x \in (a,b)$. Υπάρχει $s \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $x = sa + (1-s)b$. Θεωρούμε το μέτρο πιθανότητας $\mu = s\varepsilon_a + (1-s)\varepsilon_b$. Για αυτό το μ έχουμε

$$\int_X 1 d\mu = \mu(X) = s + (1-s) = 1$$

$$\int_X \mathrm{id} d\mu = s\mathrm{id}(a) + (1-s)\mathrm{id}(b) = x = \mathrm{id}(x)$$

$\int_X u d\mu = su(a) + (1-s)u(b) = u(sa + (1-s)b) = u(x)$, διότι η u είναι αφφινική στο $[a,b]$.

Δηλαδή το μ είναι μέτρο ελέγχου για το x διαφορετικό του ε_x. Άρα $x \notin \widehat{C}_{\mathrm{lin}\mathfrak{T}}$ και άρα $X \neq \widehat{C}_{\mathrm{lin}\mathfrak{T}}$. Από το Θεώρημα 4.3 αυτό σημαίνει ότι υπάρχει τουλάχιστον μία $f_0 \in C(X)$ που δεν είναι συνάρτηση Korovkin ως προς το $\mathfrak{T}$ · άτοπο.

Αντίστροφα, έστω ότι u είναι αυστηρά κυρτή ή αυστηρά κοίλη. Επειδή θέλουμε να δείξουμε ότι ισχύει η ισότητα $\Phi(X) = \mathrm{ex}(\mathrm{co}(\Phi(X)))$, σύμφωνα με το Θεώρημα 1.1 τα στοιχεία του $\mathrm{co}(\Phi(X))$ είναι κυρτοί συνδυασμοί τριών, το περισσότερο, στο πλήθος στοιχείων του $\Phi(X)$. Έστω $x \in \Phi(X)$. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $y_1, y_2, y_3 \in \Phi(X)$ για τα οποία δεν ισχύει $y_1 = y_2 = y_3$, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in (0,1)$ τέτοια ώστε $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ και $x = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3$. Άρα υπάρχουν $x', y_1', y_2', y_3' \in X$ τέτοια ώστε $(x', u(x')) = x$, $(y_1', u(y_1')) = y_1, (y_2', u(y_2')) = y_2, (y_3', u(y_3')) = y_3$ και για τα οποία ισχύει $(x', u(x')) = \lambda_1(y_1', u(y_1')) + \lambda_2(y_2', u(y_2')) + \lambda_3(y_3', u(y_3'))$. Από αυτό προκύπτουν οι ισότητες

$$x' = \lambda_1 y_1' + \lambda_2 y_2' + \lambda_3 y_3'$$
$$u(x') = \lambda_1 u(y_1') + \lambda_2 u(y_2') + \lambda_3 u(y_3') \ (\star\star\star)$$

Αφού η u είναι αυστηρά κυρτή ή αυστηρά κοίλη έχουμε $u(\lambda_1 y_1' + \lambda_2 y_2' + \lambda_3 y_3') = u\big(\lambda_1 y_1' + (1-\lambda_1)(\frac{\lambda_2}{1-\lambda_1} y_2' + \frac{\lambda_3}{1-\lambda_1} y_3')\big) >$ [ή $<$] $\lambda_1 u(y_1') + (1-\lambda_1) u(\frac{\lambda_2}{1-\lambda_1} y_2' + \frac{\lambda_3}{1-\lambda_1} y_3') >$ [ή $<$] $\lambda_1 u(y_1') + \lambda_2 u(y_2') + \lambda_3 u(y_3')$ · το οποίο αντιφάσκει τη $(\star\star\star)$ εκτός και αν $x' = y_1' = y_2' = y_3'$. Άρα πρέπει $x = y_1 = y_2 = y_3$. Δηλαδή, $x \in \mathrm{ex}(\mathrm{co}(\Phi(X)))$. Οπότε $\Phi(X) \subseteq \mathrm{ex}(\mathrm{co}(\Phi(X)))$. Και αμέσως βλέπουμε από τον ορισμό των ακραίων σημείων ότι $\mathrm{ex}(\mathrm{co}(\Phi(X))) \subseteq \Phi(X)$. Από το Πόρισμα 4.1 αυτό ισοδυναμεί με το ότι κάθε $f \in C(X)$ είναι συνάρτηση Korovkin ως προς το σύνολο ελέγχου $\mathfrak{T} = \{1, \mathrm{id}, u\}$. □

Πόρισμα 4.2 (Το Πρώτο Θεώρημα του Korovkin). Έστω $X = [t_1, t_2]$, με $t_1 < t_2$, t_1, $t_2 \in \mathbb{R}$, $\mathfrak{T} = \{1, \mathrm{id}, \mathrm{id}^2\}$ σύνολο ελέγχου. Έστω επίσης μια $\mathfrak{T}-$αποδεκτή (L_n). Υποθέτουμε πως η $(L_n f)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f, για $f = 1, \mathrm{id}, \mathrm{id}^2$. Τότε η $(L_n f)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f, για κάθε $f \in C(X)$.

Απόδειξη. Η id^2 είναι αυστηρά κυρτή στον X άρα από Πρόταση 4.5 έχουμε το ζητούμενο. □

Σχόλιο. Η Πρόταση 4.5 μας επιτρέπει να αλλάξουμε στην υπόθεση του Θεωρήματος 4.1 την id^2 με οποιαδήποτε άλλη αυστηρά κυρτή ή κοίλη πραγματική συνάρτηση στο $[t_1, t_2]$.

Πρόταση 4.6. Έστω X συμπαγής μετρικός χώρος και $\mathfrak{T}$ σύνολο ελέγχου. Αν υπάρχει $h \in \mathrm{lin}\mathfrak{T}$, $h \geqslant 0$ με μοναδικό $x \in X$ τέτοιο ώστε $h(x) = 0$, τότε το ε_x είναι το μόνο μέτρο ελέγχου (ως προς το $\mathfrak{T}$) για το x.

Απόδειξη. Έστω μ μέτρο ελέγχου για το x. Έτσι έχουμε,

$$\int_X h d\mu = \int_{X\setminus\{x\}} h d\mu + \underbrace{\int_{\{x\}} h d\mu}_{=0} = h(x) = 0 \text{ άρα } \int_{X\setminus\{x\}} h d\mu = 0 \text{ και άρα}$$

$$\mu(X\setminus\{x\}) = 0, \text{ αφού } h > 0 \text{ στο } X\setminus\{x\} \ .$$

Άρα $\mu = \varepsilon_x$. □

Κεφάλαιο 5: Εφαρμογές

Εφαρμογή 5.1. Έστω $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$ και σύνολο ελέγχου $\mathfrak{T} = \{1, \mathrm{Re}, \mathrm{Im}\}$. Για σταθερό $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{T}$, η $h(z) = 1 - x_0\mathrm{Re}(z) - y_0\mathrm{Im}(z)$ είναι μη αρνητική συνάρτηση ελέγχου που μηδενίζεται μόνο στο z_0. Τότε, από Πρόταση 4.6 και Θεώρημα 4.3 έχουμε ότι κάθε $f \in C(\mathbb{T})$ είναι συνάρτηση Korovkin ως προς το $\mathfrak{T}$.

Θεώρημα 5.1 (Δεύτερο Θεώρημα του Korovkin). Κάθε $f \in C_p([0, 2\pi]) = \{f \in C(\mathbb{T}) | f(0) = f(2\pi)\}$ είναι συνάρτηση Korovkin ως προς το $\mathfrak{J} = \{1, \cos, \sin\}$.

Απόδειξη. Θεωρούμε τον $C(\mathbb{T})$, το σύνολο ελέγχου $\mathfrak{T} = \{1, \mathrm{Re}, \mathrm{Im}\}$ και την απεικόνιση $g : [0, 2\pi] \to \mathbb{T}$ μέσω του τύπου $g(x) = e^{ix}$ όπου $x \in [0, 2\pi]$. Για $x \in [0, 2\pi]$ και $f \in \mathbb{T}$ ορίζουμε απεικόνιση $A : C(\mathbb{T}) \to C_p([0, 2\pi])$ μέσω του $(Af)(x) = f(e^{ix})$ η οποία είναι 1-1, επί, ισομορφισμός ως προς τις πράξεις και τη διάταξη και ισομετρία. Έχουμε ότι $A(1) = 1$, $A(\mathrm{Re}) = \cos$, $A(\mathrm{Im}) = \sin$. Τότε από την Εφαρμογή 5.1 έχουμε το ζητούμενο.

□

Εφαρμογή 5.2. Η Εφαρμογή 5.1 δίνει μια αποδείξη του Θεωρήματος του Fejér για τις σειρές Fourier των συνεχών περιοδικών συναρτήσεων. Έστω ο κύκλος $\mathbb{T}$ και σύνολο ελέγχου $\mathfrak{T} = \{1, \mathrm{Re}, \mathrm{Im}\}$. Η σειρά Fourier μίας $f \in C_{p,\mathbb{C}}([0, 2\pi]) = \{g : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \,|\, g \text{ συνεχής}, \ g(0) = g(2\pi)\}$ είναι

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}, \text{ όπου } c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt, \ n = 0, \pm1, \pm2, \ldots, x \in [0, 2\pi].$$

Για $n \in \mathbb{N}_0$ ορίζουμε τελεστή $L_n : C_{p,\mathbb{C}}([0, 2\pi]) \to C_{p,\mathbb{C}}([0, 2\pi])$ μέσω του τύπου

$$L_n f = \frac{s_0 + \ldots + s_{n-1}}{n}, \text{ όπου } s_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx},\ x \in [0, 2\pi],\ \text{για κάθε } f \in C_{p,\mathbb{C}}([0, 2\pi]).$$

Για $f = 1$, έχουμε $c_0 = 1$ και για $n = 1, 2, \ldots$ έχουμε

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int}dt = 0$$

και

$$s_n(x) = 1,\ x \in [0, 2\pi] \text{ για κάθε } n \geqslant 0.$$

Άρα

$$L_n 1 = 1, \text{ για κάθε } n \geqslant 0.$$

Για $f(x) = e^{ix}$ έχουμε $c_1 = 1$ και $c_n = 0$. Τότε, $s_n(x) = f(x)$, για $x \in [0, 2\pi]$ και κάθε $n \geqslant 1$ άρα $L_n e^{ix} = \frac{n-1}{n} e^{ix}$. Σύμφωνα με τον τύπο του Fejér ([5]) έχουμε

$$(L_n f)(x) = \frac{1}{2\pi n}\int_0^{2\pi} f(x+t)\left[\frac{\sin(n\frac{t}{2})}{\sin(\frac{t}{2})}\right]^2 dt, \text{ για κάθε } f \in C_{p,\mathbb{C}}([0, 2\pi]), x \in [0, 2\pi].$$

Άρα για κάθε $n = 0, 1, 2, \ldots$, ο L_n είναι γραμμικός και θετικός. Από τον τύπο του Fejér μπορούμε να θεωρήσουμε τους τελεστές L_n ως απεικονίσεις από τον $C_p([0, 2\pi])$ στον ευατό του για τους οποίους ισχύει $\mathrm{Re} L_n f = L_n \mathrm{Re} f$, $\mathrm{Im} L_n f = L_n \mathrm{Im} f$. Άρα έχουμε $L_n 1 = 1, L_n \cos = \frac{n-1}{n}\cos$, $L_n \sin = \frac{n-1}{n}\sin$. Άρα $L_n 1 \overset{||\cdot||_\infty}{\to} 1$, $L_n \cos \overset{||\cdot||_\infty}{\to} \cos$, $L_n \sin \overset{||\cdot||_\infty}{\to} \sin$ · δηλαδή η ακολουθία (L_n) είναι $\mathfrak{J}$-αποδεκτή. Από το Θεώρημα 5.2 έπεται ότι $L_n f \overset{||\cdot||_\infty}{\to} f$ για κάθε $f \in C_p([0, 2\pi])$. Έστω η απεικόνιση A της απόδειξης του Θεωρήματος 5.1. Για $n = 0, 1, 2, \ldots$, $z \in \mathbb{T}$, $f \in C(\mathbb{T})$ ορίζουμε τελεστές R_n στον $\mathbb{T}$ μέσω του $R_n f = L_n \circ A^{-1} f$ για τους οποίους ισχύει $R_n 1 = 1$, $R_n \mathrm{Re} = \frac{n-1}{n}\mathrm{Re}$, $R_n \mathrm{Im} = \frac{n-1}{n}\mathrm{Im}$. Άρα $R_n 1 \overset{||\cdot||_\infty}{\to} 1$, $R_n \mathrm{Re} \overset{||\cdot||_\infty}{\to} \mathrm{Re}$, $R_n \mathrm{Im} \overset{||\cdot||_\infty}{\to} \mathrm{Im}$ · δηλαδή η ακολουθία (R_n) είναι $\mathfrak{T}$-αποδεκτή. Από την Εφαρμογή 5.1 έπεται ότι $R_n f \overset{||\cdot||_\infty}{\to} f$ για κάθε $f \in C(\mathbb{T})$.

Εφαρμογή 5.3. Έστω $f \in L_p^1([0.2\pi])$, όπου

$$L_p^1([0.2\pi]) = \left\{ g : [0, 2\pi] \to \mathbb{R} \,\middle|\, g(0) = g(2\pi),\ \int_0^{2\pi} |g| < +\infty \right\}$$

με $\mathfrak{J}$ όπως έχει οριστεί στο Θεώρημα 5.1 και (L_n) η $\mathfrak{J}-$αποδεκτή ακολουθία της Εφαρμογής 5.2. Τότε $||L_n f - f||_1 \to 0$ [2].

[2] Αυτό είναι το Θεώρημα του Fejér για την L^1-Cesàro προσθετικότητα σειρών Fourier L^1-ολοκληρώσιμων συναρτήσεων.

Απόδειξη. Έστω $f \in L^1_p([0,2\pi])$. Μπορούμε να θεωρήσουμε τους τελεστές L_n ως απεικονίσεις από τον $L^1_p([0,2\pi])$ στον ευατό του διότι:

$$\int_0^{2\pi} |L_n f| = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi n}\Big|\int_0^{2\pi} f(x+t)\left[\frac{\sin(n\frac{t}{2})}{\sin(\frac{t}{2})}\right]^2 dt\Big| dx \leqslant \frac{n}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |f| dt dx$$

$$= \frac{n}{2\pi}\int_0^{2\pi} ||f||_1 dx = n||f||_1 < +\infty, \text{ αφού } \left|\frac{\sin(n\frac{t}{2})}{\sin(\frac{t}{2})}\right| \leqslant n^2, \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Έστω $\epsilon > 0$. Επειδή $\overline{C_p([0,2\pi])} = L^1_p([0,2\pi])$, υπάρχει $g \in C_p([0,2\pi])$ τέτοια ώστε

$$\int_0^{2\pi} |f-g| < \epsilon.$$

Τώρα, $||L_n f - f||_1 \leqslant ||L_n f - L_n g||_1 + ||L_n g - g||_1 + ||g-f||_1$. Για το $||L_n f - L_n g||_1$ έχουμε:

$$||L_n f - L_n g||_1 = \int_0^{2\pi} |L_n(f-g)| = \int_0^{2\pi} \Big|\frac{1}{2\pi n}\int_0^{2\pi} (f-g)(x+t)\left[\frac{\sin(n\frac{t}{2})}{\sin(\frac{t}{2})}\right]^2 dt\Big| dx$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi n}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |f-g|\left|\frac{\sin(n\frac{t}{2})}{\sin(\frac{t}{2})}\right|^2 dt dx = (\star).$$

Λόγω της ανισότητας

$$\frac{1}{2\pi n}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |f-g|\left|\frac{\sin(n\frac{t}{2})}{\sin(\frac{t}{2})}\right|^2 dt dx \leqslant n(||f||_1 + 2\pi||g||_\infty) < +\infty$$

μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα Fubini και να αλλάξουμε την σειρά ολοκλήρωσης έτσι ώστε

$$(\star) = \frac{1}{2\pi n}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |f-g| dx \left(\frac{\sin(n\frac{t}{2})}{\sin(\frac{t}{2})}\right)^2 dt = L_n \int_0^{2\pi} |f-g| < L_n \epsilon = \epsilon \text{ (αφού } L_n 1 = 1).$$

Για το $||L_n g - g||_1$:

$$||L_n g - g||_1 = \int_0^{2\pi} |L_n g - g|.$$

Αφού $g \in C_p([0,2\pi])$ έχουμε ότι $||L_n g - g||_\infty \to 0$ άρα υπάρχει σταθερά $M > 0$ τέτοια ώστε $||L_n g - g||_\infty \leqslant M$, για κάθε $n = 0, 1, 2, \ldots$. Και τότε

$$\int_0^{2\pi} |L_n g - g| \leqslant 2\pi \cdot ||L_n g - g||_\infty.$$

Επομένως, τελικά, $||L_n f - f||_1 \leqslant 2\epsilon + 2\pi \cdot ||L_n g - g||_\infty$. Άρα $\limsup_{n\to\infty} ||L_n f - f||_1 \leqslant 2\epsilon$ για κάθε $\epsilon > 0$. $\square$

Εφαρμογή 5.4. Έστω X συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^k$, $k \in \mathbb{N}$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $x \in X$ υπάρχει $l \in (\mathbb{R}^k)^*$ τέτοιο ώστε $l(x) < l(y)$, για κάθε $y \in X$, $y \neq x$. Επιλέγουμε ως σύνολο ελέγχου το $\mathfrak{T} = \{1, p_1, \ldots, p_k\}$ (για κάθε $i = 1, \ldots, k$ η p_i είναι η προβολή στην i-συντεταγμένη), έστω $x \in X$ και l όπως παραπάνω. Τότε $l \in \text{lin}\mathfrak{T}$. Θέτουμε $L = l - l(x)$. Τότε $L \in \text{lin}\mathfrak{T}$ και για κάθε $y \in X$, $y \neq x$ έχουμε $L(y) = l(y) - l(x) > 0$ · συνεπώς ισχύει και $L \geqslant 0$ στο X. Άρα από Πρόταση 4.6, για κάθε x το ε_x είναι το μόνο μέτρο ελέγχου για το x και εφαρμόζοντας το Θεώρημα 4.3 παίρνουμε ότι κάθε $f \in C(X)$ είναι συνάρτηση Korovkin ως προς το $\mathfrak{T}$.

Παρατήρηση. Από την Εφαρμογή 5.4 για $X = \mathbb{T}$, $k = 2$ και σύνολο ελέγχου $\mathfrak{T} = \{1, p_1, p_2\}$ έχουμε ότι κάθε $f \in C(\mathbb{T})$ είναι συνάρτηση Korovkin ως προς το σύνολο ελέγχου $\mathfrak{T}$. Βλέπουμε ότι οι Re, Im ταυτίζονται με τις προβολές p_1, p_2 στο $\mathbb{T}$. Δηλαδή το Θεώρημα 5.1 είναι ειδική περίπτωση της Εφαρμογής 5.5.

Εφαρμογή 5.5. Έστω X ένας μετρικός χώρος και $\mathbf{F} \subseteq C(X)$ μια οικογένεια συνεχών πραγματικών συνάρτησεων ορισμένων στον X η οποία διαχωρίζει σημεία του X. Επιλέγουμε για σύνολο ελέγχου το $\mathfrak{T} = \{1\} \cup \mathbf{F} \cup \{f^2 | f \in \mathbf{F}\}$. Έστω $x \in X$ και μ τυχαίο μέτρο ελέγχου για το x ως προς το $\mathfrak{T}$. Για $f \in \mathbf{F}$ θέτουμε $g = (f - f(x))^2 \in \text{lin}\mathfrak{T}$ και

$$\int_X g d\mu = \int_X f^2 d\mu - 2f(x) \int_X f d\mu + f(x)^2 \int_X 1 d\mu = 0$$

Συμβολίζοντας με S_μ τον φορέα του μ, έχουμε $S_\mu \subseteq \bigcap_{f \in \mathbf{F}} \{y \in X | f(y) = f(x)\}$. Αυτό ισχύει διότι: Έστω ότι $S_\mu \nsubseteq \bigcap_{f \in \mathbf{F}} \{y \in X | f(y) = f(x)\}$ · δηλαδή υπάρχει $y \in S_\mu$ τέτοιο ώστε για κάθε ανοιχτή περιοχή U του y στο X έχουμε $\mu(U) > 0$ και $f(y) \neq f(x)$, για κάποια $f \in \mathbf{F}$. Τότε,

$$0 = \int_X g d\mu = \int_{X \setminus \overline{\{x' \in X | f(x') = f(x)\}}} g d\mu$$

και επειδή $g \geqslant 0$ στο X άρα $g > 0$ στο $X \setminus \overline{\{x' \in X | f(x') = f(x)\}}$, έχουμε

$$\mu(X \setminus \overline{\{x' \in X | f(x') = f(x)\}}) = 0.$$

Επιπλέον, $y \notin \overline{\{x' \in X | f(x') = f(x)\}}$ γιατί αλλιώς θα είχαμε $f(y) = f(x)$ αφού η f είναι συνεχής. Άρα υπάρχει ανοιχτή περιοχή του y, έστω V, τέτοια ώστε $V \subseteq X \setminus \overline{\{x' \in X | f(x') = f(x)\}}$ και τότε

$$\mu(V) \leqslant \mu(X \setminus \overline{\{x' \in X | f(x') = f(x)\}}) = 0,$$

άτοπο. Έπεται ότι είναι αδύνατο να υπάρχει $y \in S_\mu$, $y \neq x$ αφού τότε θα ίσχυε $f(y) = f(x)$, για κάθε $f \in \mathbf{F}$, ενώ έχουμε επιλέξει την $\mathbf{F}$ έτσι ώστε να διαχωρίζει σημεία του X. Άρα $S_\mu = \{x\}$ δηλαδή $\mu = \varepsilon_x$. Από το Θεώρημα 4.3 αυτό ισοδυναμεί με το ότι κάθε $f \in C(X)$ είναι συνάρτηση Korovkin ως προς το $\mathfrak{T}$.

Εφαρμογή 5.6. Έστω X συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^k$, $k \in \mathbb{N}$. Θέτουμε $\mathbf{F} = \{1, p_1, \ldots, p_k\}$ και τότε το σύνολο έλεγχου, με το τρόπο που ορίστηκε στην Εφαρμογή 5.5, είναι $\mathfrak{T} = \{1, p_1, \ldots, p_k, p_1^2, \ldots, p_k^2\}$. Αφού το $\mathbf{F}$ διαχωρίζει τα σημεία του X έπεται ότι κάθε $f \in C(X)$ είναι συναρτήση Korovkin ως προς το $\mathfrak{T}$.

Παρατήρηση. Για $X = [t_1, t_2] \subseteq \mathbb{R}$ και $\mathfrak{T} = \{1, \mathrm{id}, \mathrm{id}^2\}$ σύνολο ελέγχου, η Εφαρμογή 5.7 μας δίνει ότι κάθε $f \in C(X)$ είναι συνάρτηση Korovkin ως προς το $\mathfrak{T}$. Δηλαδή το Θεώρημα 4.1 είναι ειδική περίπτωση της Εφαρμογής 5.6.

Εφαρμογή 5.7. Έστω X συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^k$, $k \in \mathbb{N}$ και

$$\mathfrak{T} = \{1, p_1, \ldots, p_k, p_1^2, \ldots, p_k^2\}$$

σύνολο ελέγχου. Θεωρούμε την $h = \sum\limits_{j=1}^{k} (p_j - p_j(x))^2 \in \mathrm{lin}\mathfrak{T}$ · η οποία είναι μη αρνητική και μηδενίζεται μόνο στο $x \in X$, άρα από την Πρόταση 4.6 και το Θεώρημα 4.3 έχουμε ότι κάθε $f \in C(X)$ είναι συνάρτηση Korovkin ως προς το $\mathfrak{T}$. Ισχύει, $h = \sum\limits_{j=1}^{k} p_j^2 - 2\sum\limits_{j=1}^{k} p_j(x)p_j + \sum\limits_{j=1}^{k} p_j(x)^2 = \sum\limits_{j=1}^{k} p_j(x)^2 \cdot 1 - 2p_1(x)\cdot p_1 - \ldots - 2p_k(x)\cdot p_k + 1 \cdot \sum\limits_{j=1}^{k} p_j^2$ · δηλαδή $h \in \mathrm{lin}\mathfrak{T}'$, όπου $\mathfrak{T}' = \{1, p_1, \ldots, p_k, p_1^2 + \ldots + p_k^2\}$. Δηλαδή, για X συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^k$, $k \in \mathbb{N}$ και $\mathfrak{T}' = \{1, p_1, \ldots, p_k, p_1^2 + \ldots + p_k^2\}$ έχουμε ότι κάθε $f \in C(X)$ είναι συνάρτηση Korovkin ως προς το $\mathfrak{T}'$.

Εφαρμογή 5.8. Έστω $X = [t_1, t_2] \subseteq \mathbb{R}$, $t_1 < t_2$ και σύνολο ελέγχου $\mathfrak{T}$ πληθαρίθμου 2. Τότε υπάρχει $f \in C(X)$ που δεν είναι συνάρτηση Korovkin ως προς το $\mathfrak{T}$.

Απόδειξη. Εξ ορισμού πάντα ισχύει $1 \in \mathfrak{T}$. Έστω ότι $|\mathfrak{T}| = 2$, δηλαδή $\mathfrak{T} = \{1, t\}$, για κάποια $t \in C(X)$, και κάθε $f \in C(X)$ είναι συνάρτηση Korovkin ως προς το $\mathfrak{T}$. Το $\mathfrak{T}$ διαχωρίζει σημεία του X άρα πρέπει η t να διαχωρίζει σημεία του X. Η Φ του Ορισμού 4.3 είναι τότε η t. Άρα $\Phi(X) = t(X)$ και το $t(X)$ είναι συμπαγές διάστημα του $\mathbb{R}$ · ας το συμβολίσουμε $[r_1, r_2]$, με $r_1 < r_2$. Το Πόρισμα 4.1 μας λέει ότι $\mathrm{ex}(\mathrm{co}([r_1, r_2])) = [r_1, r_2]$ · άτοπο διότι τα ακραία σημεία του $[r_1, r_2]$ είναι μόνο τα r_1, r_2. □

Θεώρημα 5.2 (Το Τρίτο Θεώρημα του Korovkin). Στην υπόθεση του Θεωρήματος 4.1 το σύνολο ελέγχου $\mathfrak{T}$ δεν μπορεί να έχει λιγότερο από τρία στοιχεία.

Απόδειξη. Αυτό ακριβώς μας δίνει η Εφαρμογή 5.8. □

Σε κάποιες από τις επόμενες εφαρμογές θα χρειαστούμε το παρακάτω λήμμα.

Εφαρμογή 5.9. Έστω Y συμπαγές κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^k$, $k \in \mathbb{N}$ και έστω ότι το $\mathrm{ex}(Y)$ είναι κλειστό, άρα και συμπαγές. Έστω επίσης $\mathfrak{T} = \{1, p_1, \ldots, p_k\}$ με $p_j : \mathrm{ex}(Y) \to \mathbb{R}$

για κάθε $j = 1, \ldots, k$ (η προβολή στη j-συντεταγμένη) σύνολο ελέγχου. Τότε η Φ του Ορισμού 4.3 είναι η ταυτοτική. Σύμφωνα με το Krein-Millman έχουμε $Y = \overline{\mathrm{co}(\mathrm{ex}(Y))}$ και από το Θεώρημα 1.2 έχουμε ότι το $\mathrm{co}(\mathrm{ex}(Y))$ είναι συμπαγές άρα και $Y = \mathrm{co}(\mathrm{ex}(Y))$. Τότε $\Phi(\mathrm{ex}(Y)) = \mathrm{ex}(Y) = \mathrm{ex}(\mathrm{co}(\mathrm{ex}(Y))) = \mathrm{ex}(\mathrm{co}(\Phi(\mathrm{ex}(Y))))$. Εφαρμόζοντας το Πόρισμα 4.1 για $X = \mathrm{ex}(Y)$ έχουμε ότι κάθε $f \in C(\mathrm{ex}(Y))$ είναι συνάρτηση Korovkin ως προς το σύνολο ελέγχου $\mathfrak{T}$.

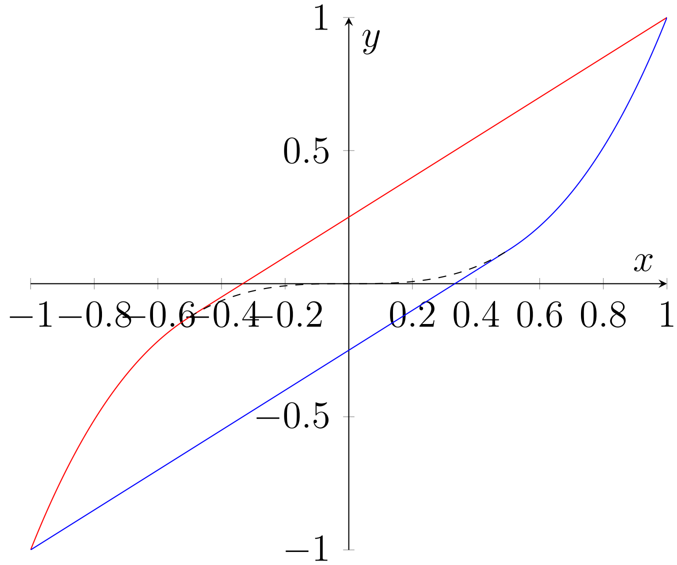
Παρατήρηση. Η Εφαρμογή 5.9 μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να καταλήξουμε στο συμπέρασμα της Εφαρμογής 5.5. Έστω Z συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^k$ ($k \in \mathbb{N}$), $\mathfrak{T} = \{1, p_1, \ldots, p_k\}$ (όπου p_i η προβολή στη i-συντεταγμένη για $i = 1, \ldots, k$) σύνολο ελέγχου και έστω ότι για κάθε $x \in Z$ υπάρχει $l \in (\mathbb{R}^k)^*$ το οποίο ελαχιστοποιείται μόνο σε αυτό. Αρκεί να δείξουμε ότι $Z = \mathrm{ex}(\mathrm{co}(Z))$. Πάντα ισχύει $\mathrm{ex}(\mathrm{co}(Z)) \subseteq Z$. Εξ υποθέσεως για κάθε x που ανήκει στο τοπολογικό σύνορο του Z υπάρχει γραμμικό συνεχές συναρτησιακό το οποίο ελαχιστοποιείται μόνο στο x, δηλαδή υπάρχει υπερεπίπεδο το οποίο τέμνει το Z μόνο στο x και από το Λήμμα 1.1 έπεται $Z \subseteq \mathrm{ex}(\mathrm{co}(Z))$. Τότε η Εφαρμογή 5.9 για $Y = \mathrm{co}(Z)$ μας δίνει ότι κάθε $f \in C(Z)$ είναι συνάρτηση Korovkin ως προς το σύνολο ελέγχου $\mathfrak{T}$.

Εφαρμογή 5.10. Έστω $X = [-1, 1]$ και σύνολο ελέγχου $\mathfrak{T} = \{1, \mathrm{id}, f\}$, όπου f είναι η συνάρτηση με τύπο $f(x) = x^3$ για $x \in X$. Η Φ του Ορισμού 4.3 παίρνει τη μορφή $\Phi(x) = (x, x^3)$, για $x \in X$. Σκοπός μας είναι να προσδιορίσουμε το σύνορο Choquet του X ως προς το $\mathfrak{T}$. Θα εφαρμόσουμε την Πρόταση 4.4 οπότε πρέπει να βρούμε ποιο ακριβώς είναι το $\mathrm{ex}(\mathrm{co}(\Phi(X)))$. Το $\Phi(X)$ είναι το γράφημα της συνάρτησης f στο $[-1, 1]$. Ορίζουμε συνάρτηση f_1 (κόκκινη καμπύλη στο επόμενο διάγραμμα) μέσω του τύπου

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) = x^3, \text{ όπου } x \in [-1, -\frac{1}{2}] \\ g_1(x) = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}, \text{ όπου } x \in [-\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

και συνάρτηση f_2 (μπλε καμπύλη στο επόμενο διάγραμμα) μέσω του τύπου

$$f_2(x) = \begin{cases} g_2(x) = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}, \text{ όπου } x \in [-1, \frac{1}{2}] \\ f(x) = x^3, \text{ όπου } x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$



Η f_1 είναι κοίλη: Η f_1 είναι παραγωγίσιμη στο $[-1, -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}, 1]$ διότι οι κλάδοι της είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Για $x_0 = -\frac{1}{2}$, το αριστερό πλευρικό όριο

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f_1(x) - f_1(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = 3x_0^2 = \frac{3}{4}$$

και το δεξί πλευρικό όριο

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f_1(x) - f_1(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{g_1(x) - g_1(x_0)}{x - x_0} = g_1'(x_0) = \frac{3}{4}$$

ισούνται. Άρα η f_1 είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Άρα είναι παραγωγίσιμη στο $[-1, 1]$. Η παράγωγος της f_1, με τύπο

$$f_1'(x) = \begin{cases} 3x^2, \text{ όπου } x \in [-1, -\frac{1}{2}] \\ \frac{3}{4}, \text{ όπου } x \in [-\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

είναι φθίνουσα στο $[-1, -\frac{1}{2}]$ αφού έχει μη θετική παράγωγο σε αυτό και είναι φθίνουσα στο $[-\frac{1}{2}, 1]$ αφού είναι σταθερή. Για $x \in [-1, -\frac{1}{2}]$, $y \in [-\frac{1}{2}, 1]$ ισχύει $f_1'(x) = 3x^2 \geqslant \frac{3}{4} = f_1'(y)$, ενώ έχουμε $x \leqslant y$. Δηλαδή η f_1' είναι φθίνουσα στο $[-1, 1]$.

Η f_2 είναι κυρτή: Η f_2 είναι παραγωγίσιμη στο $[-1, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1]$ διότι οι κλάδοι της είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Για $x_0 = \frac{1}{2}$, το αριστερό πλευρικό όριο

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f_2(x) - f_2(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{g_2(x) - g_2(x_0)}{x - x_0} = g_2'(x_0) = \frac{3}{4}$$

και το δεξί πλευρικό όριο

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f_2(x) - f_2(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = 3x_0^2 = \frac{3}{4}$$

ισούνται. Άρα η f_2 είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Άρα είναι παραγωγίσιμη στο $[-1,1]$. Η παράγωγος της f_2, με τύπο

$$f_2'(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}, \text{ όπου } x \in [-1, \frac{1}{2}] \\ 3x^2, \text{ όπου } x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

είναι αύξουσα στο $[-1, \frac{1}{2}]$ αφού έχει μη αρνητική παράγωγο σε αυτό και είναι αύξουσα στο $[-\frac{1}{2}, 1]$ αφού είναι σταθερή. Για $x \in [-1, \frac{1}{2}]$, $y \in [\frac{1}{2}, 1]$ ισχύει $f_2'(x) = \frac{3}{4} \leqslant 3y^2 = f_2'(y)$, ενώ έχουμε $x \leqslant y$. Δηλαδή η f_2' είναι αύξουσα στο $[-1,1]$.

Θέτουμε $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | -1 \leqslant x \leqslant 1, f_2(x) \leqslant y \leqslant f_1(x)\}$. Το K είναι συμπαγές σύνολο και έχει ως σύνορο τα γραφήματα των f_1, f_2. Αφού η f_1 είναι κοίλη και η f_2 είναι κυρτή έπεται ότι το K είναι κυρτό.

$\Phi(X) \subseteq K$: Από τον ορισμού του K έχουμε ότι τα σύνολα $\{(x,x^3) | x \in [-1, -\frac{1}{2}]\}$, $\{(x,x^3) | x \in [\frac{1}{2}, 1]\}$ περιέχονται στο K. Για $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, θέτουμε συνάρτηση F μέσω του $F(x) = 4x^3 - 3x$ και έχουμε $F'(x) = 12x^2 - 3 = 3(2x-1)(2x+1)$ · άρα τα ακρότατα της F είναι στα σημεία $x = \pm\frac{1}{2}$. Από αυτό έχουμε,

$$F\Big(\frac{1}{2}\Big) = -1 \leqslant F(x) \leqslant F\Big(-\frac{1}{2}\Big) = 1 \text{ που ισοδυναμεί με}$$

$$-\frac{1}{4} \leqslant x^3 - \frac{3}{4}x \leqslant \frac{1}{4} \text{ που ισοδυναμεί με } g_2(x) = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4} \leqslant x^3 \leqslant g_1(x) = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}.$$

Οπότε βλέπουμε ότι το (x,x^3) ανήκει στο ευθύγραμμα τμήμα $[\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}, \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}]$, είναι δηλαδή κυρτός συνδυασμός των στοιχείων $(x, \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}), (x, \frac{3}{4}x + \frac{1}{4})$. Με τη σειρά τους τα $(x, \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}), (x, \frac{3}{4}x + \frac{1}{4})$ είναι κυρτός συνδυαμός των $(-1,-1), (\frac{1}{2}, \frac{1}{8})$ και των $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{8}), (1,1)$ αντίστοιχα. Άρα εντέλει $(x,x^3) \in K$.

Τότε, επειδή το K είναι κυρτό, ισχύει $\mathrm{co}(\Phi(X)) \subseteq K$ (διότι το $\mathrm{co}(\Phi(X))$ είναι το μικρότερο κυρτό υπερσύνολο του $\Phi(X)$).

$K \subseteq \mathrm{co}(\Phi(X))$ $(\star)$: Εξ ορισμού $\Phi(X) \subseteq \mathrm{co}(\Phi(X))$. Το γράφημα της g_1 ανήκει στο $\mathrm{co}(\Phi(X))$ αφού είναι το ευθύγραμμο τμήμα $[(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{8}), (1,1)]$. Με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε πως το γράφημα της g_2 ανήκει στο $\mathrm{co}(\Phi(X))$. Άρα τα γραφήματα των f_1 και f_2 ανήκουν στο $\mathrm{co}(\Phi(X))$. Έστω $(x,y) \in K$. Αυτό σημαίνει ότι $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $f_2(x) \leqslant y \leqslant f_1(x)$. Οπότε βλέπουμε ότι υπάρχει $\lambda \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $y = \lambda f_1(x) + (1-\lambda) f_2(x)$. Άρα $(x,y) = (\lambda x + (1-\lambda)x, \lambda f_1(x) + (1-\lambda) f_2(x)) = \lambda(x, f_1(x)) + (1-\lambda)(x, f_2(x)) \in \mathrm{co}(\Phi(X))$.

Άρα $K = \mathrm{co}(\Phi(X))$. Στη συνέχεια, θέλουμε να βρούμε ποια είναι τα ακραία του K.

α.) Λόγω της Πρότασης 1.3, για $x_1 \in (-1, -\frac{1}{2})$ ισχύει $(x_1, f(x_1)) \in \mathrm{ex}(K)$ και για $x_2 \in (\frac{1}{2}, 1)$ ισχύει $(x_2, f(x_2)) \in \mathrm{ex}(K)$.

β.) Τώρα έστω $\mathcal{H}$ η ευθεία που περιέχει το γράφημα της g_1. Βλέπουμε ότι $\mathrm{ex}(\mathcal{H} \cap K) = \{(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{8}), (1,1)\}$ άρα από το Λήμμα 1.1 τα $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{8}), (1,1)$ είναι και ακραία του K. Το ίδιο συμπέρασμα βγάζουμε για τα $(-1,-1), (\frac{1}{2}, \frac{1}{8})$ εφαρμόζοντας το Λήμμα 1.1 για $\mathcal{H}$ την ευθεία που περιέχει το γράφημα της g_2.

γ.) Έστω $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Στην απόδειξη του $(\star)$ είδαμε ότι κάθε στοιχείο στο εσωτερικό του K, οπότε και για τα (x, x^3) όπου $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, βρίσκεται στο εσωτερικό ενός κατακόρυφου ευθύγραμμου τμήματος που περιέχεται στο K.

Συνεπώς, σύμφωνα με τη Πρόταση 4.4, $\widehat{C}_{\mathrm{lin}\mathfrak{T}} = X \backslash (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Εφαρμογή 5.11. Για X συμπαγή μετρικό χώρο, $n \in \mathbb{N}$, $f_1, \ldots, f_n \in C(X)$ οι οποίες διαχωρίζουν σημεία του X και σύνολο ελέγχου $\mathfrak{T} = \{1, f_1, \ldots, f_n, f_1^2 + \ldots + f_n^2\}$, ορίζουμε $g : X \times X \to [0, +\infty]$ σύμφωνα με το τύπο $g(x, x_0) = \sum\limits_{k=1}^{n} (f_k(x) - f_k(x_0))^2$. Τότε $g(\bullet, x_0) \in \mathrm{lin}\mathfrak{T}$, $g(x_0, x_0) = 0$ και για κάθε $x \neq x_0$ υπάρχει $k_0 \in \{1, \ldots, n\}$ τέτοιο ώστε $0 < (f_{k_0}(x) - f_{k_0}(x_0))^2 \leqslant g(x, x_0) \cdot$ αφού η συλλογή $f_1, \ldots, f_n$ διαχωρίζει στοιχεία του X. Από τη Πρόταση 4.6 και το Θεώρημα 4.3 έχουμε ότι κάθε $f \in C(X)$ είναι συνάρτηση Korovkin ως προς το $\mathfrak{T}$.

Εφαρμογή 5.12. Για τους κύκλους

$$\Gamma_1 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1^2 + x_2^2 = 4\},$$

$$\Gamma_2 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | (x_1 + 1)^2 + x_2^2 = 1\},$$

$$\Gamma_3 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | (x_1 - 1)^2 + x_2^2 = 1\}$$

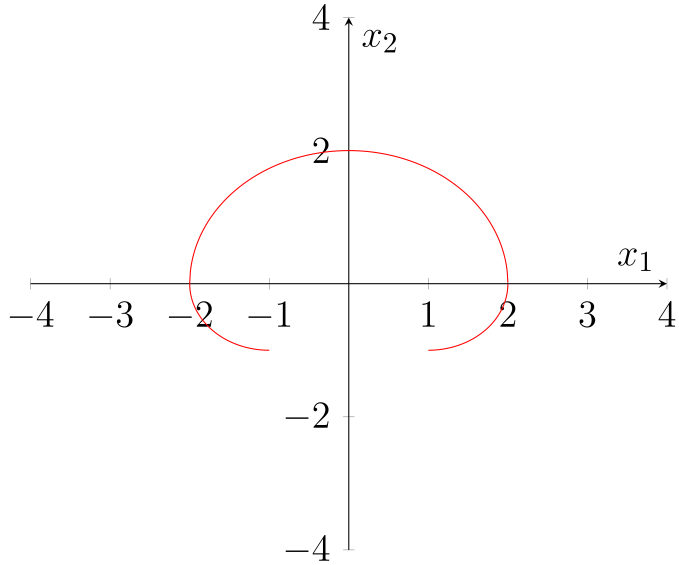
παίρνουμε τα τόξα

$$A_1 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1^2 + x_2^2 = 4, -2 \leqslant x_1 \leqslant 2, 0 \leqslant x_2 \leqslant 2\},$$

$$A_2 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | (x_1 + 1)^2 + x_2^2 = 1, -2 < x_1 \leqslant -1, -1 \leqslant x_2 < 0\},$$

$$A_3 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | (x_1 - 1)^2 + x_2^2 = 1, 1 \leqslant x_1 < 2, -1 \leqslant x_2 < 0\}$$

και θέτουμε $X = \bigcup\limits_{i=1,2,3} A_i$ το οποίο βλέπουμε καθαρά στο διάγραμμα:



Έστω επίσης $\mathfrak{T} = \{1, p_1, p_2\}$. Η Φ του Ορισμού 4.3 είναι η ταυτοτική άρα $\Phi(X) = X$. Κάθε στοιχείο του A_1 είναι ακραίο του δίσκου με κέντρο το 0 και ακτίνας 2, οπότε είναι και ακραίο σημείο του X που είναι υποσύνολο αυτού του δίσκου. Θέλουμε τώρα να δείξουμε ότι τα στοιχεία των A_2 και A_3 είναι ακραία του $\mathrm{co}(X)$. Γνωρίζουμε ότι για ένα κύκλο κέντρου (a, b) και ακτίνας $r > 0$, δηλαδή το σύνολο των $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ που ικανοποιούν την εξίσωση $(x_1 - a)^2 + (x_2 - b)^2 = r^2$, η εφαπτόμενη ευθεία σε ένα σημείο του, έστω (y_1, y_2), έχει εξίσωση της μορφής $(x_1 - y_1)(y_1 - a) + (x_2 - y_2)(y_2 - b) = 0$ (προκύπτει από την εξίσωση του κύκλου αν παραγωγίσουμε ως προς την x_1). Για $(y_1, y_2) \in A_2$ η εξίσωση είναι $(x_1 - y_1)(y_1 + 1) + (x_2 - y_2)y_2 = y_1x_1 + x_1 - y_1^2 - y_1 + y_2x_2 - y_2^2 = (y_1 + 1)x_1 + y_2x_2 - y_1 \underbrace{-y_1^2 - y_2^2}_{-2y_1} = (y_1 - 1)x_1 + y_2x_2 - y_1 = 0$. Για $(y_1, y_2) \in A_3$ η εξίσωση είναι αντίστοιχα $(y_1 - 1)x_1 + y_2x_2 - y_1 = 0$. Για $x \in X$, συμβολίζουμε την εφαπτόμενη ευθεία του X στο x ως E_x. Για κάποιο σταθερό $(y_1, y_2) \in A_2 \backslash (-1, -1)$ η εφαπτόμενη σε αυτό δεν τέμνει το X σε άλλο σημείο και άρα ούτε το $\mathrm{co}(X)$. Αυτό ισχύει γιατί, για $(x_1, x_2) \in A_1$,

$$\begin{gathered} -2 \leqslant x_1 \leqslant 2 \\ 0 \leqslant x_2 \leqslant 2 \\ -2 < y_1 < -1 \\ -1 < y_2 < 0 \end{gathered}$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{gathered} 2(y_1 + 1) \leqslant x_1(y_1 + 1) \leqslant -2(y_1 + 1) \\ 2y_2 \leqslant y_2x_2 \leqslant 0 \end{gathered}$$

άρα

$$(y_1 + 1)x_1 + y_2x_2 + y_1 \leqslant -2(y_1 + 1) + y_1 = -(y_1 + 2) < 0.$$

Επίσης για $(x_1, x_2) \in A_3$,

$$\begin{aligned} 1 \leqslant x_1 \leqslant 2 \\ -1 \leqslant x_2 < 0 \end{aligned}$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{aligned} 2(y_1+1) \leqslant x_1(y_1+1) \leqslant y_1+1 \\ 0 < y_2 x_2 \leqslant -y_2 \end{aligned}$$

άρα

$$(y_1+1)x_1 + y_2 x_2 + y_1 \leqslant 2y_1 - y_2 + 1 \leqslant -2.$$

Δηλαδή δεν υπάρχει κάποιο σημείο του $A_1 \cup A_3$ που να ικανοποιεί την εξίσωση της εφαπτόμενης (προφανώς ούτε κάποιο σημείο του $A_2 \backslash \{(-1,-1),(y_1,y_2)\}$ διότι η ευθεία εφάπτεται στον κύκλο Γ_2). Παρόμοια επιλέγουμε κάποιο $(y_1, y_2) \in A_3 \backslash (1,-1)$. Για $(x_1, x_2) \in A_1$,

$$\begin{aligned} -2 \leqslant x_1 \leqslant 2 \\ 0 \leqslant x_2 \leqslant 2 \\ 1 < y_1 < 2 \\ -1 < y_2 < 0 \end{aligned}$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{aligned} -2(y_1-1) \leqslant x_1(y_1-1) \leqslant 2(y_1-1) \\ 2y_2 \leqslant y_2 x_2 \leqslant 0 \end{aligned}$$

άρα

$$(y_1-1)x_1 + y_2 x_2 - y_1 \leqslant 2(y_1-1) - y_1 = y_1 - 2 < 0.$$

Επίσης για $(x_1, x_2) \in A_2$,

$$\begin{aligned} -2 \leqslant x_1 \leqslant -1 \\ -1 \leqslant x_2 < 0 \end{aligned}$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{aligned} -2(y_1-1) \leqslant x_1(y_1-1) \leqslant -(y_1-1) \\ 0 < y_2 x_2 \leqslant -y_2 \end{aligned}$$

άρα

$$(y_1-1)x_1 + y_2 x_2 - y_1 \leqslant -(y_1-1) - y_2 - y_1 = -2y_1 - y_2 + 1 < 0.$$

Από το Λήμμα 1.1 έπεται ότι κάθε $x \in A_2 \backslash (-1,-1) \cup A_3 \backslash (1,-1)$ είναι ακραίο διότι $E_x \cap \mathrm{co}(X) = \{x\}$. Για $x \in \{(-1,-1),(1,-1)\}$ έχουμε $E_x \cap \mathrm{co}(X) = [(-1,-1),(1,-1)]$ και αφού τα ακραία του είναι τα $(-1,-1),(1,-1)$, πάλι από το Λήμμα 1.1 έπεται ότι αυτά τα δύο είναι και ακραία του $\mathrm{co}(X)$. Άρα τελικά $X = \mathrm{ex}(\mathrm{co}(X))$. Από το Πόρισμα 4.1 αυτό ισοδυναμεί με το ότι κάθε $f \in C(X)$ είναι συνάρτηση Korovkin ως προς το $\mathfrak{T}$.

Παρατήρηση. Η Πρόταση 4.6 δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί εδώ ενώ έχουμε ότι κάθε $f \in C(X)$ είναι συνάρτηση Korovkin ως προς το $\mathfrak{T}$. Έστω $h \in \mathrm{lin}\mathfrak{T}$ η οποία είναι μη αρνητική στο X και μηδενίζεται μόνο στο $(-1,-1)$. Τότε όλα τα σημεία της ευθείας με εξίσωση $x_2 - 1 = 0$ μηδενίζουν την h. Το $(1,-1)$ είναι ένα από αυτά, το οποίο είναι άτοπο.

Εφαρμογή 5.13. Έστω X συμπαγής μετρικός χώρος. Έστω G ένας πυκνός υπόχωρος του $C(X)$. Αν και μπορεί να υπάρχουν πεπερασμένα σύνολα ελέγχου του X τέτοια ώστε κάθε $f \in C(X)$ είναι συνάρτηση Korovkin ως προς αυτά, για κατάλληλη επιλογή των X και G είναι αδύνατο κάποιο πεπερασμένο υποσύνολο του G να είναι σύνολο ελέγχου του X τέτοιο ώστε κάθε $f \in C(X)$ είναι συνάρτηση Korovkin ως προς αυτό. Για παράδειγμα, παίρνουμε το G να είναι ο υπόχωρος όλων των κατά τμήματα γραμμικών συναρτήσεων του $C([0,1])$. Έστω $S \subseteq G$ πεπερασμένο σύνολο ελέγχου για το $[0,1]$. Για να έχουμε ότι κάθε $f \in C([0,1])$ είναι συνάρτηση Korovkin ως προς το S πρέπει ισοδύναμα να ισχύει ότι $\widehat{C}_{\mathrm{lin}S} = [0,1]$ λόγω του Θεωρήματος 4.3. Δηλαδή για κάθε $x \in [0,1]$ το ε_x πρέπει να είναι το μοναδικό μέτρο ελέγχου ως προς το S για το $[0,1]$. Μπορούμε όμως να βρούμε μέτρο ελέγχου για κάποιο x το οποίο είναι διαφορετικό του ε_x. Έστω $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0,1]$ τέτοια ώστε $x, x+\frac{1}{n}, x-\frac{1}{n} \in [0,1]$ και θέτουμε $\mu = \frac{\varepsilon_{x+\frac{1}{n}} + \varepsilon_{x-\frac{1}{n}}}{2}$ το οποίο είναι μέτρο πιθανότητας στο $[0,1]$ (μάλιστα $\mu \neq \varepsilon_x$ αφού για παράδειγμα $\mu([0,x-\frac{1}{n}]) = \frac{1}{2}, \varepsilon_x([0,x-\frac{1}{n}]) = 0$) και

$$\int_{[0,1]} f d\mu = \frac{f(x+\frac{1}{n}) + f(x-\frac{1}{n})}{2}, \text{ για κάθε } f \in C([0,1]).$$

Έστω τώρα $h \in S$, $x \in [0,1]$ και $n \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε τα $x, x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n}$ να βρίσκονται στο ίδιο γραμμικό κομμάτι της h. Η τιμή της h στο x δίνεται από το τύπο $h(x) = ax+b$, για σταθερές $a, b \in \mathbb{R}$. Τότε έχουμε

$$\int_{[0,1]} h d\mu = \frac{h(x+\frac{1}{n}) + h(x-\frac{1}{n})}{2} = \frac{ax+\frac{a}{n}+b+ax-\frac{a}{n}+b}{2} = \frac{2ax+2b}{2} =$$

$$ax+b = h(x).$$

Για $\mu = \frac{\varepsilon_{x+\frac{1}{n}} + \varepsilon_{x-\frac{1}{n}}}{2}$ θέλουμε να δείξουμε ότι υπάρχει $x_0 \in [0,1]$ τέτοιο ώστε

$$\int_{[0,1]} h d\mu = h(x_0), \text{ για κάθε } h \in S.$$

Άρα πρέπει να βρούμε $x_0 \in [0,1]$ τέτοιο ώστε τα $x_0, x_0-\frac{1}{n}, x_0+\frac{1}{n}$ να είναι στο ίδιο γραμμικό τμήμα της κάθε $h \in S$. Έστω $h_1, \ldots, h_m \in G$, όπου $m \in \mathbb{N}$, όλα τα στοιχεία του S.

Επιλέγουμε διάστημα I_1 του $[0,1]$ ώστε η h_1 είναι γραμμική σε αυτό. Στη συνέχεια παίρνουμε ένα υποδιάστημα I_2 του I_1 ώστε η h_2 είναι γραμμική σε αυτό. Επαναλαμβάνοντας αυτή τη διαδικασία εώς ότου φτάσουμε στην h_m, για άλλες $m-2$ φορές δηλαδή, καταλήγουμε να έχουμε ένα διάστημα $I_m \subseteq \ldots \subseteq I_1 \subseteq [0,1]$ τέτοιο ώστε όλες οι $h_1, \ldots, h_m$ είναι γραμμικές σε αυτό. Άρα μπορούμε να επιλέξουμε $y_0 \in [0,1]$ και $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $[y_0 - \frac{1}{n_0}, y_0 + \frac{1}{n_0}] \subseteq I_m$. Άρα για αυτό το n_0, το μ είναι μέτρο ελέγχου για το y_0 ως προς το S.

Βιβλιογραφία

[1] H. Bauer, "Theorems of Korovkin type for adapted spaces", Ann. Inst. Fourier, 23, 4, 1973, p. 245-260

[2] H. Bauer, "Approximation and Abstract Boundaries", The American Mathematical Monthly vol. 85, 1978, p. 632-647

[3] H. Berens and G.G. Lorenz, "Geometric Theory of Korovkin Sets", Journal of Approximation Theory vol. 15, 1975, p. 161-189

[4] H. Bohman, "On approximation of continuous and of analytic functions" Ark. Math. vol. 2, 1951, p. 43–56

[5] E. Hewiit and K. Stromberg, Real and Abstract Analysis, Springer-Verlag New York, 1965

[6] P.P. Korovkin, "On convergence of linear positive operators in the space of continuous functions", *Doklady Akad. Nauk. SSSR (N.S.)* vol. 90, 1953, p. 961–964 (Russian)

[7] P.P. Korovkin, "Linear operators and approximation theory", Gordon&Breach, 1960 (Russian)

[8] R.R. Phelps, "Lectures on Choquet's Theorem" 2^{nd} edition, Lecture Notes in Mathematics 1757, Springer-Verlag, 2001