ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΠΜΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Η ΑΠΟΔΕΙΚΤΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΩΣ ΜΕΘΟΔΟΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ «ΜΕΣΑ ΑΠΟ ΤΑ ΜΑΤΙΑ» ΕΜΠΕΙΡΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΗΣ ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΚΑΙ ΙΔΙΩΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

Αλέξανδρος Γ. Συγκελάκης

Μέλη Επιτροπής: 1) Γεώργιος Πολύδωρος (Επιβλέπων)
2) Σουζάννα Παπαδοπούλου
3) Αθανάσιος Φειδάς

Ηράκλειο, Μάιος, 2022

Στην πολυαγαπημένη μου γιαγιά

Αέρας είναι η ζωή π’ αθόρυβα διαβαίνει,

μόνο πως κάνει μια στραθιά και δε ξαναγιαγέρνει.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω αρχικά τον επιβλέποντα καθηγητή μου κο Πολύδωρο ο οποίος με ενθάρρυνε να ασχοληθώ με το παρόν θέμα της Μεταπτυχιακής εργασίας, πίστεψε σε αυτή από την πρώτη στιγμή και με διακριτικότητά με υποστήριζε και με καθοδηγούσε. Ευχαριστώ επίσης και τα υπόλοιπα μέλη της επιτροπής, τον κο Φειδά και την κα Παπαδοπούλου, πρότυπα πανεπιστημιακών δασκάλων και ακαδημαϊκών, με τους οποίους είχα την χαρά να συνεργαστώ αλλά και να ανταλλάξω απόψεις. Η συζήτηση μαζί τους ήταν πάντα γόνιμη και επωφελής.

Στο σημείο αυτό θέλω να αναφερθώ και στην εξαιρετική προσπάθεια του Τμήματος Μαθηματικών & Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και γενικότερα του Πανεπιστημίου Κρήτης να παρέχει υψηλού επιπέδου δωρεάν σπουδές σε ένα ακαδημαϊκό περιβάλλον το οποίο δεν έχει να ζηλέψει σε τίποτα από εξαιρετικά οργανωμένα μεγάλα ακαδημαϊκά ιδρύματα. Οι παροχές στους μεταπτυχιακούς φοιτητές (προσωπικό γραφείο, υπολογιστής, τεχνική υποστήριξη, πρόσβαση στο τμήμα 7 ημέρες την εβδομάδα και 24 ώρες το 24ωρο με ειδική κάρτα εισόδου, πρόσβαση στη βιβλιοθήκη και φωτοτυπικό και άμεση επίλυση οποιουδήποτε προβλήματος ανακύψει) δείχνουν την μεγάλη αγάπη, αφοσίωση και μεράκι των διδασκόντων στον ακαδημαϊκό ρόλο που επιτελούν. Χαίρομαι ιδιαίτερα και ευχαριστώ το Τμήμα γι’ αυτή την εξαιρετική εμπειρία και είμαι ευγνώμων που ένας ακόμη τίτλος σπουδών προέρχεται από αυτό.

Μία ημέρα μετά την παρουσίαση της παρούσας μεταπτυχιακής εργασίας, στις 20 Μαΐου 2022, έχασε τη μάχη για τη ζωή η αγαπημένη μου γιαγιά, η Μαρία. Ένας άνθρωπος που λάτρευε την οικογένειά της και γεύτηκε τους καρπούς της απεριόριστης αγάπης της από παιδιά, εγγόνια, δισέγγονα αλλά και από συγγενείς και φίλους. Της αφιερώνω λοιπόν την παρούσα εργασία και την ευχαριστώ από καρδιάς για όλα όσα έκανε για εμάς.

Τέλος, οφείλω ένα μεγάλο ευχαριστώ στην οικογένειά μου και ιδιαίτερα στα παιδιά μου Γιώργο και Νικόλα για το χρόνο που τους στέρησα κατά τη διάρκεια των σπουδών μου και για την υπομονή που επέδειξαν.

Περίληψη

Η αποδεικτική διαδικασία είναι θεμέλιος λίθος των μαθηματικών και το κύριο στοιχείο που τη διαφοροποιεί από επιστήμες όπου το πείραμα σε συνδυασμό με τη θεωρητική προσέγγιση είναι τα δομικά τους υλικά. Στην παρούσα εργασία αναλύεται η ελληνική πραγματικότητα γύρω από την αποδεικτική διαδικασία με βάση τα σχολικά εγχειρίδια του Λυκείου, οι διδακτικές προσεγγίσεις και προτάσεις έμπειρων μαθηματικών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης γύρω από την αποδεικτική διαδικασία στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, ο ιδανικός τρόπος εισαγωγής σε αυτή σύμφωνα με τις προτάσεις τους και προτείνεται ένα νέο θεωρητικό μοντέλο τριών επιπέδων που αφορά την άλγεβρα στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση το αντίστοιχο με εκείνο των πέντε επιπέδων των Van Hiele για τη γεωμετρία.

Με βάση το νέο αυτό μοντέλο και με σκοπό την αναβάθμιση της αποδεικτικής διαδικασίας, παραθέτουμε μία ωριαία γραπτή αξιολόγηση πέντε θεμάτων στο μάθημα της Άλγεβρας της Α Λυκείου και το οποίο τέθηκε σε ένα τμήμα 22 μαθητών, το οποίο οι παραπάνω εκπαιδευτικοί αναλύουν και κάνουν τις προτάσεις τους.

Λέξεις κλειδιά

Αποδεικτική διαδικασία και ευχέρεια, μοντέλο A.Of.Al.P.C.

Abstract

The process of mathematical proof is the cornerstone of mathematics and the key element that differentiates it from other sciences that rely on experiments combined with theoretical approach. In the present thesis we analyse the didactic approaches and proposals of experienced high school mathematics teachers concerning the process of proof in secondary education, the ideal way of introducing it according to their proposals and propose a new three-level theoretical model concerning algebra in secondary education analogous to that of Van Hiele's five levels of geometry.

Based on this new model and in order to improve the process of proof, we propose a five-subject test in the algebra course of the upper High School (class of 22 students) which the teachers analyse and make their proposals.

Key Words

Proof procedure and competence, A.Of.Al.P.C. Model

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Είναι γνωστή η δυσκολία που αντιμετωπίζουν οι μαθητές με την αποδεικτική διαδικασία από την αρχή που έρχονται σε επαφή με αυτή αλλά και αργότερα μαθαίνοντας νέες μορφές της σε μεγαλύτερες τάξεις (απαγωγή σε άτοπο, αντιπαράδειγμα) χωρίς να έχουν ήδη κατανοήσει σε βάθος τις ήδη γνωστές μεθόδους απόδειξης.

Η πείρα των καθηγητών η οποία αναφέρεται στον τίτλο της εργασίας, στηρίζεται περισσότερο σε αντικειμενικά κριτήρια (χρόνια υπηρεσίας στο δημόσιο ή/και ιδιωτικό τομέα, τίτλοι σπουδών κτλ) παρά σε διαφορετικού τύπου standards τα οποία υπάρχουν μεν στην βιβλιογραφία (ενδεικτικά: Walker (2008)) αλλά τα οποία δεν θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν για την επιλογή των εκπαιδευτικών (έλλειψη γνώσης στην εφαρμογή τους για αξιολόγηση των εκπαιδευτικών).

Αρχικά αναπτύσσεται το θεωρητικό πλαίσιο της εργασίας στο οποίο αναφέρονται οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές γενικότερα στα μαθηματικά και τα κύρια αίτιά τους, καθώς επίσης και η έννοια, ο ορισμός και οι διάφορες μέθοδοι απόδειξης, σύμφωνα με την ελληνική και διεθνή βιβλιογραφία.

Προχωρώντας στη μεθοδολογία αναλύεται ο σκοπός της παρούσας εργασίας και τίθενται τα ερευνητικά ερωτήματα πριν παρατεθεί η μέθοδος που ακολουθήθηκε αμέσως μόλις επιλέχθηκε το δείγμα των εννέα (9) έμπειρων[1] καθηγητών μαθηματικών του δημόσιου και ιδιωτικού τομέα για τη συνέντευξη που ακολούθησε.

Η πρωτοτυπία της εργασίας έγκειται, μεταξύ άλλων, στην πρόταση ενός νέου μοντέλου (A.Of.Al.P.C.) που εξετάζει την ευχέρεια των μαθητών στην Άλγεβρα σε τρία (3) επίπεδα αντίστοιχα με εκείνα των Van Hiele στη Γεωμετρία. Τα ερωτήματα που τέθηκαν σε μορφή ερωτηματολογίου στους εκπαιδευτικούς κινούνταν σε τρεις άξονες. Ο πρώτος περιείχε ερωτήσεις σε βιογραφικά/δημογραφικά στοιχεία των εκπαιδευτικών ενώ ο δεύτερος και ο τρίτος άξονας συνολικά έξι (6) ερωτήσεις πλήρους ανάπτυξης σχετικές με την αποδεικτική διαδικασία γενικά (δεύτερος άξονας) και σχετικές με τα επίπεδα του προτεινόμενου μοντέλου (τρίτος άξονας). Οι απαντήσεις των εκπαιδευτικών

[1] *Έμπειρος, -η, -ο* αυτός που διαθέτει πείρα, που έχει προηγούμενη εμπειρία ως πρακτική γνώση.
Πείρα (η) 1. η γνώση που αποκτάται όχι θεωρητικά, αλλά στην πράξη κατά την εφαρμογή των θεωρητικών γνώσεων που κατέχει (κάποιος) ή με την εξάσκηση, 2. Η συσσωρευμένη γνώση που έχει κάποιος σε έναν ή διάφορους τομείς, το σύνολο των εμπειριών στη ζωή, ό,τι αποκομίζει κανείς συνολικά (ως γνώση για τον κόσμο, τους ανθρώπους, τη ζωή). (Μπαμπινιώτης Γ., Λεξικό της Νέας Ελληνικής Γλώσσας, Β Έκδοση 2006).

αναλύθηκαν μέσα από τη διαδικασία της κατηγοριοποίησης (φαινομενολογική προσέγγιση) και στη συνέχεια αυτά ερμηνεύτηκαν με ποιοτικούς όρους στα αποτελέσματα της έρευνας ξεχωριστά για κάθε ερώτηση.

Η εργασία διαρθρώνεται σε πέντε (5) κεφάλαια. Τα δύο πρώτα ασχολούνται με το θεωρητικό πλαίσιο και παρατίθενται βιβλιογραφικές αναφορές. Πιο συγκεκριμένα, το πρώτο κεφάλαιο ασχολείται με γενικά θέματα στη διαδικασία μάθησης των μαθηματικών στο οποίο περιλαμβάνονται οι δυσκολίες των μαθητών στα μαθηματικά ενώ το δεύτερο με το θέμα της απόδειξης στα μαθηματικά. Στο 3ο κεφάλαιο βρίσκεται η μεθοδολογία που ακολουθήθηκε, ο σκοπός και τα ερευνητικά ερωτήματα της εργασίας, η ανάλυση του δείγματος των καθηγητών που ρωτήθηκαν και αναλύεται και το νέο μοντέλο που αφορά την αποδεικτική διαδικασία στην Άλγεβρα της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Στο 4ο κεφάλαιο βρίσκονται τα αποτελέσματα της εργασίας σύμφωνα με τα ερευνητικά ερωτήματα που τέθηκαν και αναλύονται ανά ερώτημα.

Το κύριο μέρος της εργασίας (5ο κεφάλαιο), ολοκληρώνεται με την παράθεση των συμπερασμάτων τα οποία συνδέονται με τα ερευνητικά ερωτήματα που τίθενται στο κεφάλαιο 3 της μεθοδολογίας. Η έρευνα έδειξε ότι οι μαθητές δεν ανταποκρίνονται επαρκώς στο επιθυμητό αποτέλεσμα στη διδασκαλία της αποδεικτικής διαδικασίας και επισημαίνουν τις μαθηματικές έννοιες που θεωρούν ότι πρέπει να έχουν κατακτήσει πριν από την εισαγωγή τους σε αυτή. Αναφέρονται ξεχωριστά στο ότι θα πρέπει να χειρίζονται με ευχέρεια τις πράξεις και τις ιδιότητές τους και τα βασικά σύνολα των αριθμών. Αυτή η άποψη ενισχύεται ακόμα περισσότερο και με την απάντηση που έδωσε οι πλειοψηφία των ερωτηθέντων εκπαιδευτικών για τα επίπεδα του μοντέλου A.Of.Al.P.C.. Πιο συγκεκριμένα, απάντησαν σχεδόν ομόφωνα ότι το επίπεδο L1, το οποίο απαιτεί θεμελιώδης γνώσεις και γνώση απαραίτητων εργαλείων είναι και το πιο σημαντικό για την ενίσχυση της αποδεικτικής διαδικασίας στην άλγεβρα. Όσον αφορά την καταλληλότερη μαθηματική πρόταση για την εισαγωγή στην αποδεικτική διαδικασία διαφοροποιούνται ανάλογα με την τάξη στην οποία διδάσκουν ή/και αν εργάζονται στο δημόσιο ή ιδιωτικό τομέα. Αναφέρουν μεταξύ άλλων τη μεγάλη συμβολή της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στην εισαγωγή και στην περαιτέρω κατανόηση της απόδειξης αλλά και στην ανάπτυξη της χρήσης του λόγου και της επιχειρηματολογίας των μαθητών.

Δίνονται επίσης αφορμές για περαιτέρω έρευνα γύρω από την αποδεικτική διαδικασία, την ευχέρεια των μαθητών σε αυτή και περαιτέρω βελτίωση του προτεινόμενου μοντέλου. Τέλος, στα παραρτήματα που ακολουθούν αμέσως μετά τις βιβλιογραφικές αναφορές, παρατίθενται τα θέματα της ωριαίας γραπτής αξιολόγησης των μαθητών, η βαθμολογία τους καθώς επίσης και μία ενδεικτική συνέντευξη του εκπαιδευτικού Τ1.

Κεφάλαιο 1ο: Θέματα στη διαδικασία μάθησης των Μαθηματικών

1.1 Δυσκολίες στα Μαθηματικά

Πολλές φορές συμβαίνει τα γραπτά των μαθητών να αποτυπώνουν την λύση μόνο στην περίπτωση που διαβάζονται από ένα έμπειρο και προσεκτικό αναγνώστη με την κατάλληλη εμπειρία, καθώς το γραπτό τους μπορεί να είναι ατελές με μαθηματικές ασάφειες στην διατύπωση του. Σύμφωνα με το NCTM (2007) τα χαρακτηριστικά των μαθητών με μαθησιακές δυσκολίες στα μαθηματικά είναι τα εξής:

1. Επιδεικνύουν αργή ή λανθασμένη χρήση βασικών κανόνων αριθμητικής.
2. Απαντούν παρορμητικά σε προβλήματα χωρίς αναστολή.
3. Απαντούν παρορμητικά σε προβλήματα και ερωτήσεις, χωρίς αναστολή.
4. Έχουν δυσκολία να ανακαλέσουν βασικές μαθηματικές γνώσεις (τύπους, κανόνες, απλές μαθηματικές προτάσεις).
5. Έχουν ανεπαρκή αίσθηση της έννοιας του αριθμού.
6. Έχουν δυσκολίες στο να διατηρήσουν πληροφορίες στη λειτουργική μνήμη τους.

Οι μαθητές μπορεί να έχουν κατανοήσει το μαθηματικό υπόβαθρο και την μεθοδολογία που απαιτείται για μία μαθηματική αποδεικτική άσκηση, δυσκολεύονται όμως να τα χρησιμοποιήσουν και να τα διατυπώσουν σωστά στο γραπτό (Mamona-Dows & Downs, 2009). Οι Downs και Mamona-Downs (2005), χωρίζουν τους παράγοντες που συμβάλουν σε αυτό το φαινόμενο σε τρεις κατηγορίες. Στους παράγοντες που αφορούν:

1. Την επίδραση του συναισθήματος και τους τύπους σκέψης.
2. Τα προβλήματα κατανόησης των τυπικών μαθηματικών.
3. Τα γενικά εργαλεία και τις πηγές για την παραγωγή αποδείξεων.

Πιο αναλυτικά, στις επόμενες ενότητες αναφέρονται, σύμφωνα με τις παραπάνω βιβλιογραφικές αναφορές, οι παράγοντες που ανήκουν σε κάθε κατηγορία.

1.2 Η επίδραση του συναισθήματος και οι τύποι σκέψης.

Η αντίληψη των μαθητών και ο τρόπος της σκέψης τους μπορούν να επηρεάσουν την προσέγγιση μιας αποδεικτικής μαθηματικής άσκησης (αν και αυτό δεν θα εξεταστεί στην συγκεκριμένη έρευνα, αξίζει να αναφερθεί).

i) Η έλλειψη κινήτρου είναι κάτι που επηρεάζει το ενδιαφέρον που δείχνουν οι μαθητές για αυτό το οποίο διδάσκονται. Οι μαθητές εντυπωσιάζονται από τα αποτελέσματα, κάτι το οποίο δεν προσφέρει απλόχερα ο τύπος της απόδειξης.

ii) Οι μαθητές θεωρούν ότι στην αποδεικτική διαδικασία υπάρχει ένα προκαθορισμένο μοντέλο επίλυσης, με αποτέλεσμα να χάνεται η προσωπική τους επιχειρηματολογία.

iii) Η λανθασμένη αντίληψη των μαθητών ότι θα πρέπει να αποφεύγεται η χρήση άτυπων περιγραφών και αναπαραστάσεων στην δημιουργία μιας απόδειξης.

iv) Θεωρούν ότι για την παραγωγή μιας απόδειξης χρειάζεται μόνο γνώση που έχει κατακτηθεί παλαιότερα, που δεν γνωρίζουν όμως που πρέπει να ανατρέξουν για να την επαναφέρουν, άρα και να βοηθηθούν.

v) Υπάρχουν πολλά μοντέλα που χαρακτηρίζουν τα στυλ σκέψεις. Η αντιμετώπιση της απόδειξης εξαρτάται και από τον τύπο σκέψης που χαρακτηρίζει κάθε μαθητή.

1.3 Τα προβλήματα κατανόησης των τυπικών μαθηματικών.

i) Μεγάλο ποσοστό των μαθητών δυσκολεύονται να κατανοήσουν και να χειριστούν θεμελιώδεις έννοιες. Παρουσιάζουν σύγχυση στους βασικούς ρόλους που κατέχουν διαφορετικά αντικείμενα και καταστάσεις.

ii) Γενικά οι μαθητές δεν διαθέτουν εμπειρία σε βασικές έννοιες, όπως στο να καταλάβουν τι είναι ένα σύνολο και τι είναι συνάρτηση, πόσο μάλλον να επεκταθούν στις ιδιότητες αυτών. Όμως το σύνολο και η συνάρτηση είναι οι βασικοί κώδικες για να επεκταθεί κανείς στην γλώσσα της απόδειξης, που για εκείνους όμως είναι ξένο.

iii) Οι μαθητές δυσκολεύονται να συντονίσουν την απόδειξη με τους ορισμούς όταν υπάρχουν σχετικές νοητικές εικόνες. Η μορφή του ορισμού δεν μπορεί να αντανακλά τον τρόπο με τον οποίο ένας μαθητής αντιλαμβάνεται τη βασική έννοια και επιπλέον οι σχετικές νοητικές εικόνες θα στερούνται τη γλώσσα που θα διαθέτει ο ορισμός. Έτσι η επιχειρηματολογία του μπορεί να είναι λογικά ασυνεπής σε ότι μπορεί να παραχθεί από τους ορισμούς, δεν θα μπορεί να εκφράζεται με ένα αποδεκτό επίπεδο σαφήνειας, και τέλος, μπορεί να είναι σχετικά περιορισμένη.

iv) Οι μαθητές δεν ξέρουν πώς να ξεκινήσουν τις αποδείξεις ακόμη και σε απλές περιπτώσεις. Η πολυπλοκότητα που μπορεί να έχει μια απόδειξη, δεν φαίνεται να εξηγεί όλες τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές σχετικά με αυτή την απόδειξη. Η ιδανική κατάσταση είναι εκείνη που βασίζεται σε ένα μόνο ορισμό, όπου η απόδειξη προκύπτει κάνοντας μερικές πράξεις που προτείνει η άμεση δομή που προκύπτει από τον ορισμό. Το πρόβλημα φαίνεται σε μεγάλο βαθμό να βρίσκεται στην αδυναμία των μαθητών να χειριστούν τους ορισμούς και τις προτάσεις.

1.4 Τα γενικά εργαλεία και οι πηγές για την παραγωγή αποδείξεων

Καθώς οι μαθητές προχωρούν μαθησιακά και αποκτούν εμπειρία στην απόδειξη, θα μπορούσε να ισχυριστεί κανείς ότι αποκτούν εμπειρία στην αποδεικτική διαδικασία, καθώς ενισχύονται και ωριμάζουν οι ικανότητες τους. Το ερώτημα εδώ είναι, σε ποιο βαθμό θα πρέπει να περιμένει κανείς ότι αυτές τις δεξιότητες θα τις αποκτήσουν δουλεύοντας μόνοι τους χωρίς επιπλέον παιδαγωγική ενίσχυση;

i) Δημιουργώντας μια δομική κατανόηση του συστήματος είναι αρκετά συχνά απαραίτητη, η παρατήρηση ενός συγκεκριμένου χαρακτηριστικού που είναι σημαντικό στη διαμόρφωση μιας στρατηγικής για την απόδειξη. Η διαδικασία εντοπισμού του δεν είναι εύκολη, αλλά απαιτεί τον προβληματισμό και μερικές φορές καθίσταται προφανές μόνον μετά από κάποια δοκιμαστική διερεύνηση της δομής. Η απαίτηση για την επίτευξη αυτού του στόχου από τους μαθητές μπορεί να είναι υψηλή, αλλά είναι απογοητευτικό το γεγονός ότι ακόμη και σε περιπτώσεις όπου το χαρακτηριστικό φαίνεται να είναι προφανές η σύνδεση δεν γίνεται.

ii) Οι τεχνικές μπορούν να προκύψουν τόσο από μαθηματικές θεωρίες όσο και από ευρείες πρακτικές που υπερβαίνουν τα θεωρητικά όρια. Σε αυτές τις πρακτικές, δίνεται το όνομα «τεχνικές της απόδειξης». Μια σημαντική δυσκολία με τις τεχνικές της απόδειξης είναι ότι δεν διδάσκονται συχνά. Ο μαθητής καλείται να τις επαναφέρει στην μνήμη του από αποδείξεις που έχει συναντήσει στο παρελθόν. Οι λίγες τεχνικές αποδείξεων που έχουν την τάση να διδάσκονται είναι η επαγωγή και η απόδειξη με αντίφαση, οι οποίες δεν είναι ιδιαίτερα προσεγγίσιμες από μεγάλη μερίδα μαθητών.

iii) Αν και οι αποδείξεις μπορεί να είναι περίπλοκες και να περιλαμβάνουν πολλά σημαντικά στάδια, οι εργασίες των μαθητών που αφορούν την παραγωγή αποδείξεων τείνουν να είναι σχετικά απλές. Αν δεν είναι, δίνονται υποδείξεις για να βοηθήσουν στην εύρεση της κατάλληλης αποδεικτικής διαδικασίας. Είναι όμως, σύνηθες φαινόμενο, οι μαθητές να μην μπορούν να χρησιμοποιήσουν τις υποδείξεις καθώς συνήθως δίνονται στην γλώσσα της απόδειξης με αποτέλεσμα να δυσκολεύει και πάλι τους μαθητές.

iv) Για να εξειδικευτούν οι μαθητές στην παραγωγή της απόδειξης συνιστάται να κάνουν εκτεταμένη πρακτική στην ανάγνωση αποδείξεων. Όχι μόνο σε μια επιφανειακή, παθητική ανάγνωση, αλλά να καταφέρουν να αποκτήσουν μια συνολική ιδέα για την εργασία της απόδειξης, ώστε να έχουν την δυνατότητα στην συνέχεια να την εφαρμόσουν αλλού.

Κεφάλαιο 2ο: Η Απόδειξη στα Μαθηματικά

2.1 Η έννοια της απόδειξης

Τί συνιστά απόδειξη; Η απάντηση στο ερώτημα αυτό εξαρτάται πιθανόν από το άτομο που θα ερωτηθεί. Όπως παρατηρεί ο Balacheff (2002), μεμονωμένα άτομα αλλά και ακόμη και μαθηματικοί και ερευνητές της διδακτικής των μαθηματικών αντιλαμβάνονται τη φύση της απόδειξης με διαφορετικούς τρόπους και οι διαφορές συνίστανται στο ότι υπάρχουν διαφορετικές μορφές της στα διάφορα ηλικιακά επίπεδα. Καθώς οι μαθητές ωριμάζουν γλωσσικά και καθώς αναπτύσσεται η ικανότητά τους να συλλογίζονται επαγωγικά, η απόδειξη αποκτά ένα πιο επίσημο νόημα στην τάξη.

Στις τάξεις του δημοτικού σχολείου, η απόδειξη θεωρείται πιο άτυπα ως συλλογισμός, επιχειρηματολογία, διαίσθηση. Αυτό που αποτελεί απόδειξη σε αυτό το επίπεδο δεν παίρνει την μορφή και τον συμβολισμό που έχει μία τυπική απόδειξη αλλά επιτρέπει στα παιδιά να συμμετέχουν σε λογικά επιχειρήματα που είναι αποδεκτά στο δικό τους μαθησιακό επίπεδο. Οι Fosnot και Jacob (2010), για παράδειγμα, εξετάζουν την ανάπτυξη του επαγωγικού συλλογισμού των παιδιών χρησιμοποιώντας διαδικασίες παρόμοιες με αυτές που χρησιμοποιούν οι μαθηματικοί ενώ προσπαθούν να πείσουν τους συμμαθητές τους για τους μαθηματικούς ισχυρισμούς που κάνουν. Ωστόσο το μαθηματικό πλαίσιο για τα επιχειρήματά τους είναι μία αριθμογραμμή και τα σύμβολα είναι οι ακέραιοι αριθμοί. Ομοίως ο Schifter (1999) διερευνά πώς τα παιδιά χτίζουν επιχειρήματα για να αποδείξουν τη βεβαιότητα, ενώ ο Morris στο κεφάλαιο 5 του βιβλίου των Stylianou et al (2009), εξετάζει πώς τα παιδιά μπορούν να προετοιμαστούν για μία πιο επίσημη μελέτη της απόδειξης μελετώντας και αναπτύσσοντας επιχειρήματα σχετικά με τις σχέσεις μεταξύ ποσοτήτων.

Στο επίπεδο του γυμνασίου οι μαθητές εξακολουθούν να βλέπουν την απόδειξη ως επιχειρηματολογία ενώ την ίδια στιγμή ο συμβολισμός που χρησιμοποιούν είναι σαφώς πιο αναβαθμισμένος σε σχέση με το δημοτικό όχι όμως τόσο όσο θα περίμενε κανείς. Εδώ, η απόδειξη αποκτά σταδιακά ένα πιο επίσημο νόημα. Οι μαθητές εισάγονται σε συγκεκριμένες μορφές για τη σύνταξη των αποδείξεων και η διδασκαλία δίνει μεγαλύτερη έμφαση στη χρήση του επαγωγικού συλλογισμού.

Κάποιος μπορεί να υποστηρίξει ότι οι πρώιμες εμπειρίες σε σχέση με την απόδειξη θα πρέπει να δομηθούν για να προετοιμάσουν τους μαθητές για πιο επίσημες μελέτες απόδειξης στις μεγαλύτερες τάξεις. Ο Στυλιανίδης (2007) υποστηρίζει ότι θα πρέπει να υπάρχει συνέχεια στον τρόπο με τον οποίο νοείται η έννοια της απόδειξης σε διαφορετικά επίπεδα τάξης, έτσι ώστε οι μαθητές να έχουν μία συνέχεια σε σχέση με τις εμπειρίες τους με την απόδειξη στο σχολείο. Οι Stylianou et al. (2009) υποστηρίζουν ότι η απόδειξη στις πρώτες τάξεις δεν στοχεύει απαραίτητα να προετοιμάσει τους μαθητές για τη χρήση της συμβολικής λογικής που συχνά βρίσκεται στον πυρήνα της απόδειξης στα προχωρημένα μαθηματικά. Η απόδειξη σε όλες τις βαθμίδες έχει ως στόχο να δώσει μία εκτίμηση για τη δημιουργία των λογικών επιχειρημάτων ενώ χρησιμοποιεί μαθηματικά εργαλεία που είναι προσβάσιμα από τους μαθητές.

Η έρευνα αφορά, όπως έχει ήδη αναφερθεί, την αποδεικτική διαδικασία στο Γυμνάσιο και στο Λύκειο από τη σκοπιά καθηγητών μαθηματικών. Ο Τουμάσης (2004) δίνει τον εξής ορισμό για την απόδειξη:

«Η απόδειξη είναι η συλλογιστική διαδικασία η οποία ξεκινά από ένα σύνολο υποθέσεων και μέσω μιας σειράς διαδοχικών συμπερασμάτων καταλήγει σ' ένα τελικό συμπέρασμα, με τέτοιο τρόπο ώστε η οποιαδήποτε αμφιβολία γύρω από το τελικό συμπέρασμα θα πρέπει να αναζητηθεί πίσω στις υποθέσεις μάλλον, παρά στη λογική αναγκαιότητα των διαδοχικών συμπερασμάτων.»

Οι Μούτσιος-Ρέντζος και Πιτσιλή-Χατζή (2015) παραπέμπουν στον Hersh (2006), ο οποίος αντιλαμβάνεται την απόδειξη ως μια αλληλουχία τυπικά εκφρασμένων δηλώσεων, εκκινώντας από μη αποδεδειγμένες δηλώσεις για μη ορισμένους όρους και προχωρώντας με βήματα επιτρεπτά από πρώτης τάξης κατηγορηματικό λογισμό.

Η απόδειξη αποτελεί το κύριο χαρακτηριστικό των μαθηματικών και έχει πρωτεύοντα ρόλο σε όλα τα επίπεδα διδασκαλίας τους. Άλλωστε ένας από τους κεντρικούς στόχους που διαπερνά το πρόγραμμα σπουδών, είναι η ανάπτυξη του μαθηματικού συλλογισμού, η ικανότητα παρακολούθησης και παραγωγής μαθηματικής επιχειρηματολογίας και η απόδειξη. Στο λύκειο η απόδειξη είναι περισσότερο αυστηρή από ότι στις άλλες τάξεις και οι μαθητές ασκούνται στο να εφαρμόζουν διάφορες αποδεικτικές μεθόδους (ευθεία απόδειξη, απαγωγή σε άτοπο, αντιπαράδειγμα) για να επιβεβαιώσουν την αλήθεια των προτάσεων.

Η έννοια της απόδειξης, έχει άμεση σχέση με την αξιωματική θεμελίωση και το Μαθηματικό σύστημα μέσα στο οποίο εφαρμόζεται. Ένα σύστημα αρχίζει με ένα σύνολο αξιωμάτων που είναι και διαισθητικά ερμηνεύσιμο και αναγνωρίζεται ως αληθές, και κάθε απόδειξη προσθέτει σε αυτά ένα θεώρημα που είναι επίσης τόσο διαισθητικά ερμηνεύσιμο και αληθινό (Hanna & Jahnke, 1993)

Μια άλλη διάκριση των τύπων των αποδείξεων, σύμφωνα με τον Lakatos (1976) είναι σε «προ-τυπικές» και «τυπικές». Οι προ-τυπικές αποδείξεις, θεωρούνται αυτές που περιέχουν κρυφές υποθέσεις, αναλογίες, ανεπίσημη γλώσσα και συμβολισμούς. Τέτοιες είναι και οι αποδείξεις που παράγονται από μαθητές, σύμφωνα με τους Blum και Kirsch (1991), οι οποίες χρησιμοποιούν «διαισθήσεις» ως κρυφές υποθέσεις. Ενώ, οι τυπικές αποδείξεις είναι κατάλληλες για δημοσίευση. Τέλος, ο Reid (2001), επεκτείνει ελαφρώς την ταξινόμηση του Lakatos και διακρίνει τις «τυπικές» αποδείξεις, σε «ημι-τυπικές» και πλήρως τυπικές αποδείξεις. Ημι-τυπική απόδειξη, είναι αυτή που αφήνει κενά στην επιχειρηματολογία και κάνει χρήση κοινών παραδοχών, χωρίς να τις σχολιάσει. Ενώ, πλήρως τυπικές αποδείξεις, είναι αυτές όπου κάθε βήμα και παραδοχή διευκρινίζονται.

Ένα εργαλείο απόδειξης, των μαθηματικών ισχυρισμών είναι η Μαθηματική αιτιολόγηση, η οποία στηρίζεται σε δύο θεμέλια. Το ένα θεμέλιο, είναι το εξελισσόμενο σώμα της γνώσης, δηλαδή οι μαθηματικές ιδέες, διαδικασίες, μέθοδοι και όροι και το άλλο θεμέλιο είναι η μαθηματική γλώσσα, δηλαδή, τα σύμβολα, οι όροι, η σημειογραφία, ορισμοί, αναπαραστάσεις και κανόνες λογικής και σύνταξης. Ένα επιχείρημα, θα πρέπει να πληροί, ένα θεσμικά επιβεβλημένο σύστημα συμβάσεων για να θεωρηθεί απόδειξη, όπως η αυστηρότητα στην παρουσίαση του, να είναι καλά οργανωμένο, κατανοητό και πειστικό. Έρευνες, δείχνουν ότι, οι μαθητές μπορεί να κατέχουν μια περίπλοκη νοητική επιχειρηματολογία, ή τα μαθηματικά εργαλεία που χρειάζονται αλλά συνήθως δεν είναι σε θέση να τα χειριστούν και να τα παρουσιάσουν.

2.2 Μέθοδοι απόδειξης στα Μαθηματικά

Στη διαρκή προσπάθειά μας να εκτελεστεί μια μαθηματική απόδειξη επιλέγεται και χρησιμοποιείται διαισθητικά ενδεχομένως, σύμφωνα με την εκάστοτε περίπτωση μια πλούσια ποικιλία από συλλογιστικές μεθόδους, έχοντας ως εργαλεία πολλές και διάφορες μαθηματικές εκφράσεις. Σε τελικό όμως στάδιο και σε επίπεδο αυστηρότητας διατύπωσης της απόδειξης, είναι υποχρεωμένος ο διδάσκων να τεκμηριώσει με σίγουρες μαθηματικές εκφράσεις την επιλογή της μεθόδου, του πλαισίου αλλά και όλα τα βήματα που ακολουθήθηκαν. Οι πιο συνηθισμένες μέθοδοι απόδειξης (Τουμάσης, 2004:373· Λιάκος, 2017:20) είναι:

- «Ευθεία». Με αρχή τις υποθέσεις ή αλλιώς τα δεδομένα και χρησιμοποιώντας λογικούς συλλογισμούς και προηγούμενες μαθηματικές γνώσεις (ορισμούς, αξιώματα, θεωρήματα, πορίσματα), δηλαδή με διαδοχικά βήματα, καταλήγουμε στο ζητούμενο. Η μαθηματική λογική πρόταση είναι, όπως έχει επικρατήσει να λέγεται, «αν Α τότε Β» ή «Α συνεπάγεται Β». Ή συμβολικά: $A \Rightarrow B$.
- «Με ισοδυναμία». Με δεδομένο τον προς απόδειξη μαθηματικό ισχυρισμό προκύπτουν μαθηματικά ισοδύναμές εκφράσεις μέχρι να καταλήξουμε σε κάποια ήδη αποδεκτή μαθηματική γνώση, οπότε λόγω της ισοδυναμίας θα ισχύει και η προς απόδειξη αρχική σχέση. Η μαθηματική αυτή λογική πρόταση είναι, όπως έχει επικρατήσει να λέγεται «αν Α τότε Β και αντίστροφα» ή «Α ισοδυναμεί με το Β» ή «Α αν και μόνο αν Β» ή συμβολικά: $A \Leftrightarrow B$.
- «Με απαγωγή σε άτοπο». Συγκεκριμένα εδώ θεωρούμε ότι το συμπέρασμα της προς απόδειξη πρότασης δεν ισχύει και με δεδομένο πλέον αυτό, φτάνουμε σε αντίφαση με τη βοήθεια των υπολοίπων δεδομένων της πρότασης. Συνεπώς το συμπέρασμα της πρότασης ισχύει.
- «Με αντιπαράδειγμά». Χρησιμοποιείται όταν θέλουμε να δείξουμε ότι ένας ισχυρισμός δεν ισχύει. Βρίσκουμε δηλαδή ένα παράδειγμα που να ικανοποιεί τις υποθέσεις του ισχυρισμού αλλά όχι το συμπέρασμά του.
- «Μικτές» μέθοδοι. Ξεκινώντας από το τελικό αποτέλεσμα, αναζητούμε όλες εκείνες τις προϋποθέσεις ώστε να προχωρήσουμε με την ανάποδη πορεία και σταδιακά να διαπιστώσουμε ως βασική την αρχική προϋπόθεση του οικοδομήματος (Καλαβάσης και Μούτσιος-Ρέντζος, 2015). Ειδικότερα εδώ για την τελευταία μέθοδο την μικτή, οι Hanna και de Bruyn (1999:28), την ονομάζουν ως «απόδειξη από την ανάλυση», που αποδίδεται στον Έλληνα μαθηματικό Πάππο». Στόχος είναι να προχωρήσουμε ανάποδα, δηλαδή από το συμπέρασμά στην υπόθεση και μάλιστα οι Hanna και de Bruyn (1999:28), ισχυρίζονται ότι «η εργασία από το συμπέρασμα στην υπόθεση, είναι μια σημαντική τεχνική επίλυσης προβλήματος με μεγάλο εύρος εφαρμογών»

Στη βιβλιογραφία αναφέρονται και άλλες μέθοδοι απόδειξης οι οποίες είναι ίδιες ή παραπλήσιες με τις παραπάνω θεμελιώδεις. Ενδεικτικά αναφέρεται η απόδειξη με χρήση του αντιθετοαντίστροφου, απόδειξη με απαρίθμηση, υπαρξιακή απόδειξη καθώς και η απόδειξη διάψευσης μίας πρότασης μέσω αντίφασης η οποία είναι παρόμοια με εκείνη με τη μέθοδο απόδειξης με αντιπαράδειγμα (Τουμάσης, 2004:373).

2.3 Έλεγχος κατανόησης της μαθηματικής απόδειξης

Οι ερευνητές έχουν υποθέσει ότι η ανάπτυξη των ικανοτήτων των μαθητών στην απόδειξη μπορεί να ακολουθήσει μία αναπτυξιακή πρόοδο. Δηλαδή η κατανόηση της μαθηματικής αιτιολόγησης από τους μαθητές «είναι πιθανό να προχωρήσει από την επαγωγική προς την απαγωγική» (Simon και Blume 1996). Πράγματι έχουν προταθεί διάφορα αποδεικτικά πλαίσια για τον έλεγχο και την αναπτυξιακή πρόοδο των μαθητών σε αυτό τον τομέα εκ των οποίων το μοντέλο του Waring (2000) είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρον για τις σκέψεις σχετικά με την κατανόηση και παραγωγή αποδείξεων από τους μαθητές. Παρακάτω βρίσκεται μία τροποποίηση του πλαισίου αυτού σύμφωνα με τους Stylianou et al. (2009).

Επίπεδο 0: Οι μαθητές σε αυτό το επίπεδο φαίνεται να μη γνωρίζουν την ανάγκη παροχής μίας μαθηματικής αιτιολόγησης για να αποδειχθεί η αλήθεια μίας πρότασης. Για παράδειγμα ένας μαθητής μπορεί να δεχτεί μία πρόταση ως αληθινή επειδή ένας δάσκαλος, γονέας ή κείμενο λέει ότι είναι αλήθεια. Σε αυτή την περίπτωση η αιτιολόγηση είναι μη μαθηματική. Σε άλλες περιπτώσεις, ένας μαθητής μπορεί απλώς να δηλώσει ότι μία πρόταση είναι αληθής χωρίς καμία αναφορά στο γιατί η πρόταση είναι αληθής (π.χ. «το άθροισμα δύο ζυγών αριθμών είναι ζυγό επειδή έτσι ακριβώς είναι», «ναι, οι αριθμοί θα είναι ίσοι γιατί θα είναι πάντα ίσοι»).

Επίπεδο 1: Οι μαθητές σε αυτό το επίπεδο φαίνεται να γνωρίζουν την ανάγκη να παρέχουν μια μαθηματική αιτιολόγηση, αλλά οι αιτιολογήσεις τους δεν είναι γενικές. Στην πλειονότητα των περιπτώσεων, οι αιτιολογήσεις των μαθητών βασίζονται εμπειρικά. Μεταξύ των εμπειρικά βασισμένων αιτιολογήσεων, υπάρχουν διακρίσεις (σε επιμέρους επίπεδα) μεταξύ των μαθητών που εξετάζουν μερικές περιπτώσεις, των μαθητών που εξετάζουν συστηματικά μερικές περιπτώσεις (π.χ. ζυγούς και περιττούς αριθμούς), μαθητές που σκέφτονται να ελέγξουν ακραίες περιπτώσεις ή «τυχαίες» περιπτώσεις, και μαθητές που εξετάζουν τη χρήση ενός γενικού παραδείγματος (απόδειξη για μια κατηγορία αντικειμένων)

Επίπεδο 2: Οι μαθητές σε αυτό το επίπεδο φαίνεται να έχουν επίγνωση της ανάγκης για ένα γενικό επιχείρημα και συχνά προσπαθούν να παράγουν οι ίδιοι τέτοια επιχειρήματα. Τα επιχειρήματα, ωστόσο, δεν είναι αποδεκτές αποδείξεις. Η «αποτυχία» μπορεί να συμβεί με έναν από τους δύο τρόπους: (1) Οι μαθητές εκφράζουν την αναγνώριση της ανάγκης να παράσχουν ένα γενικό επιχείρημα και προσπαθούν να παράγουν ένα τέτοιο επιχείρημα, ωστόσο, το επιχείρημα που παρέχεται δεν είναι κατάλληλο (δηλ., το επιχείρημα είτε είναι μαθηματικά λανθασμένο είτε δεν θα οδηγούσε σε αποδεκτή απόδειξη). (2) Οι μαθητές εκφράζουν την αναγνώριση της ανάγκης να παράσχουν ένα γενικό επιχείρημα και προσπαθούν να παραγάγουν ένα τέτοιο επιχείρημα, ωστόσο, το επιχείρημα είναι ελλιπές (αν ολοκληρωθεί, το επιχείρημα θα ήταν αποδεκτή απόδειξη). Και στις δύο περιπτώσεις, το θέμα είναι ότι οι μαθητές προσπαθούν να αντιμετωπίσουν τη γενική περίπτωση. Επιπλέον, οι αιτιολογήσεις του επιπέδου 2 περιλαμβάνουν επίσης απαντήσεις από εκείνους τους μαθητές που αποδεικνύουν ότι τα εμπειρικά στοιχεία δεν επαρκούν ως απόδειξη - είτε εκφράζοντας την αναγνώριση της ανάγκης αντιμετώπισης όλων των υποθέσεων είτε εκφράζοντας την αναγνώριση του περιορισμού των παραδειγμάτων ως απόδειξη - αλλά δεν είναι σε θέση να παράγουν (ή να επιχειρήσουν) ένα γενικό επιχείρημα.

Επίπεδο 3: Οι μαθητές σε αυτό το επίπεδο φαίνεται να γνωρίζουν την ανάγκη για ένα γενικό επιχείρημα και είναι σε θέση να παράγουν με επιτυχία τέτοια επιχειρήματα οι ίδιοι. Θεωρείται ότι τα επιχειρήματα που παράγουν οι μαθητές σε αυτό το επίπεδο είναι αποδεκτές αποδείξεις. Δηλαδή, τα επιχειρήματά τους καταδεικνύουν ότι μια πρόταση ή δήλωση είναι αληθής σε όλες τις περιπτώσεις. Τα επιχειρήματα που κατηγοριοποιούνται σε αυτό το επίπεδο περιλαμβάνουν συνήθως μια αναφορά σε οποιεσδήποτε υποθέσεις ή δεδομένα, μια αλυσίδα επιχειρημάτων και αφαιρετικών τεχνικών που χρησιμοποιούνται για τη δημιουργία του επιχειρήματος και, τέλος, μια ρητή τελική δήλωση. Αν και τα επιχειρήματα που παράγουν οι μαθητές μπορεί να μην έχουν την αυστηρότητα ή την τυπικότητα που συνήθως συνδέονται με μια απόδειξη, τα επιχειρήματά τους, ωστόσο, αποδεικνύουν τη γενική υπόθεση.

2.4 Εισαγωγή στην αποδεικτική διαδικασία

Στην παρούσα υποενότητα δεν θα γίνει αναφορά για τον τρόπο εισαγωγής στην αποδεικτική διαδικασία στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση αν και υπάρχουν αρκετές παραπομπές σε σχετικά θέματα (Schifter (1999)· Stylianou et al. (2009)· Fosnot και Jacob (2010) κ.α.). Θα γίνει αναφορά κυρίως στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση στηριζόμενοι κυρίως στους Stylianou et al. (2009) και τις αντίστοιχες παραπομπές τους.

Η απόδειξη στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση βρήκε ιστορικά το σπίτι της στο μάθημα της γεωμετρίας του γυμνασίου και εμφανίζεται σπάνια, αν όχι καθόλου, σε άλλες ενότητες μαθηματικών του γυμνασίου (ουσιαστικά ανύπαρκτη στα μαθηματικά του γυμνασίου). Στο γυμνάσιο, η απόδειξη πρέπει να είναι ένα τακτικό και διαρκές μέρος των μαθηματικών εμπειριών των μαθητών, εμπειρίες που αναμένεται να βασιστούν στις εμπειρίες των μαθητών του δημοτικού σχολείου στις αποδείξεις.

Τέτοιες εμπειρίες θα πρέπει να χρησιμεύουν για την περαιτέρω όξυνση και επέκταση της κατανόησης των αποδείξεων των μαθητών, έτσι ώστε τα πρότυπά τους για την αποδοχή των εξηγήσεων να γίνονται πιο αυστηρά και οι μέθοδοι συλλογισμού και απόδειξης να γίνονται πιο περίπλοκες (NCTM, 2000).

Η ενίσχυση του ρόλου της απόδειξης στην τάξη απαιτεί ουσιαστική προσπάθεια από την πλευρά των καθηγητών στο βαθμό που είναι υπεύθυνοι να διασφαλίσουν ότι οι μαθητές έχουν τα μέσα καθώς και τις ευκαιρίες να συμμετέχουν στην απόδειξη. Οι Stylianou et al. (2009), περιγράφουν λεπτομερώς τις προσπάθειες να ενισχυθεί ο ρόλος της απόδειξης στην τάξη, καθώς αναλύουν διδακτικά επεισόδια από τη διδασκαλία της σε μια τάξη μαθηματικών γυμνασίου. Υποστηρίζουν ότι η διαδικασία εμπλοκής των μαθητών σε σημαντικές μαθηματικές συζητήσεις μπορεί να χρησιμεύσει ως πηγή για την υποστήριξη της κατανόησης των αποδείξεων από τους μαθητές. Σημειώνουν περαιτέρω ότι αυτή η διαδικασία εμπλοκής των μαθητών σε σημαντικές μαθηματικές συζητήσεις «δημιούργησε ένα περιβάλλον στο οποίο τα μαθηματικά επιχειρήματα περνούσαν από μια σταδιακή διαδικασία βελτίωσης που οδηγεί σε πιο αποτελεσματικά και περίπλοκα επιχειρήματα».

Είναι σημαντικό επίσης να τονιστεί η κρίσιμη σχέση μεταξύ των ευκαιριών των μαθητών να συμμετέχουν στην απόδειξη (δηλαδή των εργασιών με τις οποίες ασχολούνται οι μαθητές) και των εκπαιδευτικών πρακτικών που καθοδηγούν τι μαθαίνουν τελικά οι μαθητές από τέτοιες ευκαιρίες. Οι εργασίες αναγνώρισης μοτίβων (patterns) είναι ένας δημοφιλής τύπος εργασίας που φαίνεται να συμβάλλει στην καλύτερη κατανόηση της αποδεικτικής διαδικασίας.

Οι Herbs et al. στο βιβλίο Stylianou et al. (2009), επικεντρώνονται στην απόδειξη στα μαθήματα γεωμετρίας του γυμνασίου τόσο από ιστορική σκοπιά όσο και από την οπτική γωνία των καθηγητών γεωμετρίας. Παρέχουν επίσης αποσπάσματα από τις τάξεις μαθημάτων γεωμετρίας και μαθητών που ασχολούνται με την απόδειξη και αναλύουν τα αποσπάσματα αυτά και τη συμμετοχή των μαθητών στη διαδικασία της απόδειξης. Οι ίδιοι υποστηρίζουν ότι οι αποδείξεις στη γεωμετρία σπάνια παρέχουν ευκαιρίες στους μαθητές να χρησιμοποιήσουν την απόδειξη ως εργαλείο για την εκμάθηση των μαθηματικών, αλλά μάλλον λειτουργούν κυρίως ως εργαλείο για τη διδασκαλία της λογικής σκέψης. Το συμπέρασμά τους υποδηλώνει την ανάγκη επαναπροσδιορισμού της έννοιας της απόδειξης και εάν οι δραστηριότητες εικασίας και απόδειξης πρόκειται να διαδραματίσουν σημαντικό ρόλο στην εκμάθηση των μαθηματικών από τους μαθητές.

Οι Harel και Sowder (1998) αναφέρουν ότι το να δίνεις την ιδέα της απόδειξης προτού την κάνεις, το να δουλεύεις ένα συγκεκριμένο παράδειγμα πριν την απόδειξη, να επαναλάβεις κρίσιμα σημεία από προηγούμενες γνώσεις, να περιγράψεις το γενικό πρότυπο/μορφή παρόμοιων αποδείξεων, το να βάζεις λανθασμένα βήματα στις αποδείξεις ώστε να τα ανακαλύψουν οι μαθητές μπορεί πράγματι να βοηθήσει τους μαθητές με την αποδεικτική διαδικασία τονίζοντας παράλληλα ότι τα μαθηματικά είναι όπως μία γλώσσα, δηλαδή με τις δικές της λέξεις, όρους και κανόνες.

Συνοψίζοντας τα αποτελέσματα των ερευνητών, οι αποδείξεις πρέπει να διδάσκονται έμμεσα, οδηγώντας τους μαθητές να προτείνουν εικασίες και σταδιακά να διατυπώνουν πειστικά επιχειρήματα. Επίσης οι αποδείξεις πρέπει να αποτελούν ρητό αντικείμενο εξέτασης και πρέπει να διδάσκεται χρησιμοποιώντας και αλγεβρικό συλλογισμό. Επίσης θα πρέπει να ζητηθεί από τους μαθητές να αποδείξουν προτάσεις που προκύπτουν μέσω εκτέλεσης υπολογισμών.

Επιπλέον, η διδασκαλία της απόδειξης θα πρέπει να διδάσκεται με τη χρήση διδακτικού υλικού που υποστηρίζει τις προσπάθειες των εκπαιδευτικών να διευκολύνουν τη συμμετοχή των μαθητών σε δραστηριότητες απόδειξης. Τα μαθήματα για την απόδειξη θα πρέπει να περιλαμβάνουν τους μαθητές - όχι μόνο τον δάσκαλο - να αποφασίζουν πότε είναι σκόπιμο να αποδείξουν και να συνθέσουν μια απόδειξη. Οι καθηγητές θα πρέπει να παρέχουν ευκαιρίες για να βοηθήσουν τους μαθητές να εσωτερικεύσουν τη γλώσσα της απόδειξης και της επιχειρηματολογίας και να αναπτύξουν την ικανότητα να αμφισβητούν τη λογική τους και τα βήματα κατασκευής της απόδειξης. Επίσης πρέπει να αναλαμβάνουν πρωταγωνιστικό ρόλο μόνο σε προσεκτικά επιλεγμένα χρονικά σημεία και θα πρέπει να εστιάζουν τόσο στις σημασιολογικές όσο και στις συντακτικές πτυχές της απόδειξης. Τέλος, ο μαθητής πρέπει να μάθει τις απαραίτητες πτυχές της λογικής και της θεωρίας συνόλων μέσω της κατασκευής πραγματικών αποδείξεων.

Κεφάλαιο 3ο : Μεθοδολογία

3.1 Σκοπός και ερευνητικά ερωτήματα

Η παρούσα εργασία έχει σκοπό να αναδείξει την αποδεικτική διαδικασία ως μέθοδο διδασκαλίας των μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση αφού αυτή αποτελεί αναπόσπαστο κομμάτι τους, καθώς επίσης και τους τρόπους με τους οποίους ένας καθηγητής μαθηματικών με εμπειρία τόσο του δημόσιου όσο και του ιδιωτικού τομέα, προσεγγίζει τις διάφορες μεθόδους απόδειξης και τις εντάσσει στο καθημερινό του μάθημα. Επιπλέον έχει ως σκοπό να προταθεί ένα νέο μοντέλο που αφορά την αποδεικτική διαδικασία στην Άλγεβρα της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, αντίστοιχο με εκείνο των Van Hiele που υπάρχει για τη Γεωμετρία.

Ο στόχος είναι να αναδειχθεί η ανάγκη εμπλοκής της αποδεικτικής διαδικασίας στο πλαίσιο ενός μαθήματος μαθηματικών.

Για το σκοπό αυτό επιλέχθηκαν εννέα (9) καθηγητές μαθηματικών όλων των βαθμίδων γυμνασίου και λυκείου, που με το εργαλείο της συνέντευξης, εξετάστηκαν και αναλύθηκαν, θέματα γενικά γύρω απ' το γιατί οι μαθητές δυσκολεύονται στην κατανόηση της αλγεβρικής αποδεικτικής διαδικασίας και πως θα μπορούσαν οι ίδιοι οι καθηγητές να ενισχύσουν διδακτικά την προσπάθεια αυτή των μαθητών.

Το ερωτηματολόγιο της συνέντευξης κινούνταν σε τρεις άξονες. Ο πρώτος είχε ερωτήσεις δημογραφικού χαρακτήρα, ο δεύτερος τέσσερις (4) ερωτήσεις πλήρους ανάπτυξης σχετικά με την αποδεικτική διαδικασία και τέλος, ο τρίτος άξονας είχε δύο (2) ερωτήσεις επίσης πλήρους ανάπτυξης σχετικά με το μοντέλο A.Of.Al.P.C. (βλέπε επόμενη παράγραφο) που στην ουσία είναι μία πρώτη προσπάθεια μετατροπής των αντίστοιχων πέντε επιπέδων των Van Hiele που υπάρχουν στη Γεωμετρία, σε τρία επίπεδα για την Άλγεβρα (τα δύο πρώτα συγχωνεύτηκαν στο πρώτο λόγω του ότι η έρευνα απευθύνεται στο Γυμνάσιο και στο Λύκειο).

Συμπληρωματικά τέθηκαν στους ερωτηθέντες και δύο (2) ερωτήσεις σχετικές με το μοντέλο A.Of.Al.P.C., το προτεινόμενο αλγεβρικό αντίστοιχο των επιπέδων των Van Hiele στη γεωμετρία. Προς ενίσχυση των δύο (2) αυτών σχετικών ερωτημάτων και με τη βοήθεια του καθηγητή της τάξης, διεξήχθη τεστ σε ένα τμήμα της Άλγεβρας Α' Λυκείου δομημένο αρχικά με γνώμονα τα επίπεδα των Van Hiele και φυσικά λαμβάνοντας υπόψιν όσα δίδαξε και έδωσε έμφαση ο διδάσκων, το οποίο δόθηκε για την σχετική αξιολόγηση στους ερωτηθέντες. Για την ακρίβεια τους ζητήθηκε να ταξινομηθούν τα θέματα αυτά με βάση τα επίπεδα του μοντέλου A.Of.Al.P.C.

Εν συνεχεία και έπειτα από αρκετή ώρα συμπληρωματικής προφορικής ηχογραφημένης συνέντευξης και ποιοτικής ανάλυσης των δεδομένων, προέκυψαν τα συμπεράσματα που παρατίθενται στις επόμενες παραγράφους.

Για την διεξαγωγή της έρευνας αυτής, προτιμήθηκε η διαδικασία της συνέντευξης η οποία επιτρέπει στον ερευνητή να αντλήσει πληροφορίες και δεδομένα μέσα απ' την ανάλυση του λόγου. Οι συνεντεύξεις επιτρέπουν την πρόσβαση στον τρόπο σκέψεις, στις στάσεις και τις απόψεις που κρύβονται πίσω από την συμπεριφορά των ερωτηθέντων. Γενικά, η συνέντευξη στηρίζεται στην ελεύθερη και ανοιχτή επικοινωνία, προϋποθέτει σχέση ανάμεσα σε εκείνον που πραγματοποιεί τη συνέντευξη και τον ερωτώμενο καθώς πλησιάζει σε βάθος το θέμα του, αξιοποιώντας εμπειρίες και συναισθήματα. Με άλλα λόγια η συνέντευξη είναι ένας τρόπος για να ανακαλύψει ο ερευνητής τις σκέψεις και τα συναισθήματα των ερωτηθέντων. Ως εργαλείο έρευνας έχει πολλά πλεονεκτήματα καθώς δίνει ευκαιρίες να διευκρινιστούν οι απαντήσεις όσες φορές και αν χρειαστεί να ερωτηθεί ο συνεντευξιαζόμενος.

Προκειμένου να υλοποιηθεί ο στόχος της μελέτης και να διασαφηνιστεί το συγκεκριμένο ζήτημα, ορίστηκαν τα εξής ερευνητικά ερωτήματα:

1) Τί ισχύει ως προς τις αποδείξεις που υπάρχουν αυτή τη στιγμή στα σχολικά εγχειρίδια του Λυκείου και τη διδασκαλία τους με βάση τις οδηγίες του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής;
2) Ποιες οι απαραίτητες έννοιες που θα πρέπει να έχουν κατακτηθεί από τους μαθητές πριν την εισαγωγή στην αποδεικτική διαδικασία και ποια η καταλληλότερη ηλικία γι' αυτή;
3) Ποιος είναι ο κατάλληλος τρόπος για να ελεγχθεί η κατανόηση της αποδεικτικής διαδικασίας αφότου έχει γίνει εισαγωγή σε αυτή;
4) Ποια θα μπορούσε να είναι μία κατάλληλη μαθηματική πρόταση, η απόδειξη της οποίας θα μπορούσε να αποτελέσει την εισαγωγή στην αποδεικτική διαδικασία;
5) Αξιολόγηση των επιπέδων του νέου μοντέλου A.Of.Al.P.C.

3.2 Μέθοδος έρευνας

Η έρευνα διαχωρίζεται κυρίως σε ποιοτική και ποσοτική. Η ποιοτική έρευνα ασχολείται κυρίως με τη μελέτη των ανθρωπίνων φαινομένων, με στόχο πάντοτε την κατανόηση της ατομικής φύσης και της έννοιας των φαινομένων (Hunt, 1991). Σε αντίθεση με την ποσοτική έρευνα, πολλές φορές η υποκειμενική εμπειρία χάνεται λόγω των αυστηρών ελέγχων που εφαρμόζονται (Bartjes, 1991), ενώ η ποιοτική έρευνα επιτρέπει την εξερεύνηση των εμπειριών, αισθημάτων και σκέψεων των ατόμων που συμμετέχουν σε αυτή.

Στην παρούσα έρευνα, επιλέξαμε την φαινομενολογική προσέγγιση. Η λέξη φαινομενολογία ετυμολογικά προέρχεται από δύο Ελληνικές λέξεις «φαινόμενο» και «λόγος» (Walters, 1995) και σημαίνει κυριολεκτικά τη μελέτη των φαινομένων. Στην έρευνα η φαινομενολογία χρησιμοποιείται για να σχηματιστεί μια αντίληψη για τις εμπειρίες της ζωής των ανθρώπων. Ο φαινομενολόγος ερευνητής κάνει την ερώτηση *«ποια είναι η ουσία αυτού του φαινομένου, όπως βιώνεται από αυτό τον άνθρωπο (ή ανθρώπους);»* (Σιαχίνη-Καρδάση, 1997).

Οι καθηγητές απάντησαν ηλεκτρονικά, μέσω μηνύματος ηλεκτρονικού ταχυδρομείου, στο ερωτηματολόγιο που τους δόθηκε σύμφωνα με τη μέθοδο την οποία ακολούθησαν για την αποδεικτική διαδικασία σε μαθητές Λυκείου/Γυμνασίου (αναλόγως που διδάσκει κατά πλειοψηφία) που κατά την κρίση τους ταίριαζε στο μαθησιακό επίπεδο του τμήματος και αξιολογώντας στη συνέχεια την απόδοση των μαθητών τους και συγκρίνοντάς τη με τους μαθησιακούς στόχους του αναλυτικού προγράμματος. Για τη διεξαγωγή της συγκεκριμένης έρευνας χρησιμοποιήθηκε ποιοτική μορφή έρευνας σε μορφή συνέντευξης η οποία λόγω των βεβαρημένων υγειονομικών συνθηκών (COVID-19) προτιμήθηκε να γίνει εξ' αποστάσεως. Οι καθηγητές έλαβαν με μήνυμα ηλεκτρονικού ταχυδρομείου τις ερωτήσεις που κάλυπταν τους άξονες της έρευνας, και τους ζητήθηκε να αναπτύξουν γραπτώς τις απόψεις τους. Στις περιπτώσεις και στα σημεία που χρειάστηκαν περαιτέρω διευκρινήσεις, ζητήθηκε από τους αντίστοιχους εκπαιδευτικούς να συμπληρώσουν με περισσότερες λεπτομέρειες τα ερωτηματολόγιά τους.

3.3 Πληθυσμός και δείγμα

Στην έρευνα συμμετείχαν εννέα (9) καθηγητές μαθηματικών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης εκ των οποίων οι τέσσερις (4) υπηρετούν σε Πρότυπα και Πειραματικά σχολεία της δημόσιας εκπαίδευσης (τρεις εκ των οποίων σε Λύκειο και ένας σε Γυμνάσιο), ο ένας (1) σε Γενικό Λύκειο της πόλης, ο ένας (1) σε Γυμνάσιο της πόλης και τέλος, οι τρεις (3) υπηρετούν στον ιδιωτικό τομέα.

Η επιλογή των εκπαιδευτικών στην πρώτη, δεύτερη και τρίτη περίπτωση έγινε τόσο με βάση τα χρόνια διδακτικής εμπειρίας τους στο Γυμνάσιο και στο Λύκειο αλλά και το γεγονός ότι τοποθετήθηκαν με θητεία στα συγκεκριμένα σχολεία (αφορά μόνο τους εκπαιδευτικούς της πρώτης περίπτωσης) έπειτα από θετική αξιολόγησή τους που αφορούσε τα τυπικά προσόντα τους (μεταπτυχιακοί τίτλοι, δημοσιεύσεις, γλωσσομάθειες, συμμετοχές και ομιλίες σε συνέδρια κλπ). Στην τέταρτη περίπτωση, οι καθηγητές επιλέχθηκαν επίσης τόσο με βάση τα χρόνια της διδακτικής τους εμπειρίας στο χώρο της φροντιστηριακής εκπαίδευσης, όσο και με βάση τη σταθερή θετική τους αξιολόγηση. Στην περίπτωση των δύο (2) εκ των τριών (3) που υπηρετούν σε μεγάλο φροντιστηριακό όμιλο της χώρας, λήφθηκε υπόψη η υψηλή τους κατάταξη μεταξύ μεγάλου πλήθους μαθηματικών του ομίλου.

Αξίζει να σημειωθεί ότι και οι εννέα (9) καθηγητές είναι τουλάχιστον κάτοχοι μεταπτυχιακού διπλώματος ειδίκευσης ελληνικών πανεπιστημίων εκ των οποίων τρεις (3) κάτοχοι και διδακτορικού διπλώματος. Τα παραπάνω δικαιολογούν τον όρο «έμπειρων Μαθηματικών» που αναφέρει ο τίτλος και σε συνδυασμό με όσα αναφέρονται στην Εισαγωγή. Ο λόγος που επιλέχθηκαν έμπειροι συνάδελφοι με πολυετή πείρα και υψηλή αξιολόγηση, ήταν γιατί θεωρήθηκε ότι τα αποτελέσματα θα είναι όσο το δυνατόν πιο αξιόπιστα σε σχέση με τα ερευνητικά ερωτήματα και το δείγμα όσο το δυνατόν πιο αντιπροσωπευτικό καθώς ήταν προϋπόθεση η έρευνα να επικεντρωθεί σε συναδέλφους οι οποίοι βρίσκονται σε πολύ καλό επίπεδο διδασκαλίας τους αντικειμένου τους, γνωρίζουν το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών και μπορούν εύκολα να αναγνωρίσουν το επίπεδο στο οποίο μπορούν να φτάσουν οι μαθητές τους σε σχέση με την αποδεικτική διαδικασία. Έχουν δηλαδή μερικά από τα χαρακτηριστικά ενός ικανού δασκάλου των Μαθηματικών (Goya, 2006).

3.4 Μοντέλο A.Of.Al.P.C. (Assessment Of Algebraic Proof Competence)

Στην παρούσα έρευνα έγινε, επιπλέον, προσπάθεια να μεταφερθούν στην Άλγεβρα τα πέντε αντίστοιχα επίπεδα των Van Hiele που αναφέρονται στη Γεωμετρία αλλά με τρόπο ώστε να προσαρμοστούν για τα δεδομένα της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Έτσι συγχωνεύτηκαν τα πρώτα 2 επίπεδα με το τρίτο και συνολικά παρουσιάζονται παρακάτω τα τρία (3) επίπεδα L1, L2, L3 του νέου μοντέλου A.Of.Al.P.C. (Assessment Of Algebraic Proof Competence), που αφορά την αποδεικτική διαδικασία στην Άλγεβρα της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

Οι μαθητές οι οποίοι κατατάσσονται στα επίπεδα L1, L2, L3 του προτεινόμενου μοντέλου, έχει θεωρηθεί ότι έχουν γνώσεις και δεξιότητες οι οποίες περιλαμβάνουν τα παρακάτω:

Επίπεδο L1

[αντιστοίχιση με τα επίπεδα των Van Hiele: εδώ αντιστοιχούν τα επίπεδα 1-3]

Αριθμητική των φυσικών αριθμών, νέα σύνολα αριθμών (αρνητικοί ακέραιοι, ακέραιοι, κλάσματα, δεκαδικοί με άπειρα δεκαδικά ψηφία κτλ.), ανάλυση φυσικού σε πρώτους παράγοντες (ένα στάδιο πριν από την παραγοντοποίηση πολυωνύμων με ακέραιους συντελεστές σε «πρώτους παράγοντες» δηλαδή σε πολυώνυμα που δεν παραγοντοποιούνται περισσότερο στο δακτύλιο των ακέραιων πολυωνύμων).

Βασικές πρωτοβάθμιες εξισώσεις μαζί με τους απλούς κανόνες χειρισμού τους (αλλαγή μέλους, διαγραφή των αντίθετων στο ίδιο μέλος, διαγραφή ίσων σε διαφορετικά μέλη, διαίρεση με το συντελεστή του αγνώστου) και χρήση μεταβλητών για την επίλυση απλών προβλημάτων.

Ιδιότητες υπολογισμού αριθμητικών πράξεων και η προτεραιότητα πράξεων. Ιδιότητες των πράξεων με χρήση μεταβλητών, απλή εύρεση ριζών και δυνάμεις, ιδιότητες υπολογισμού αριθμητικών παραστάσεων και προτεραιότητα πράξεων.

Υπολογισμοί και απλοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων με (κυρίως με 1 ή 2) μεταβλητές χωρίς κλάσματα ώστε να αναδειχθούν και να κατανοηθούν οι κανόνες λογισμού (π.χ. αναγωγή όμοιων όρων) και η προτεραιότητα των πράξεων.

Επίπεδο L2

[αντιστοίχιση με τα επίπεδα των Van Hiele: εδώ αντιστοιχεί το επίπεδο 4]

Ιδιότητες (αξιώματα πραγματικών αριθμών), σύνολα, εισαγωγή στην αποδεικτική διαδικασία. ταυτότητες με απόδειξη, απλοποίηση (κλασματικών) παραστάσεων, χειρισμός με άνεση σχέσεων με μεταβλητές, διάκριση των μεθόδων απόδειξης (άμεση/έμμεση απόδειξη, απόδειξη με ισοδυναμία, απαγωγή σε άτοπο).

Κατάρριψης ενός ισχυρισμού (αντιπαράδειγμα), απόδειξη ανισοτήτων, δυνάμεις και ιδιότητές τους με χρήση μεταβλητών, επίλυση εξίσωσης/ανίσωσης 2ου βαθμού με αποδείξεις των αντίστοιχων βημάτων που απαιτούνται, παραμετρικές εξισώσεις, καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων.

Εισαγωγή στην έννοια της συνάρτησης και γραφικές παραστάσεις απλών συναρτήσεων (γραμμικές, $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, y = |x|$, δικλαδικές), γραμμικά συστήματα 2 και 3 μεταβλητών, βασικές γνώσεις τριγωνομετρίας.

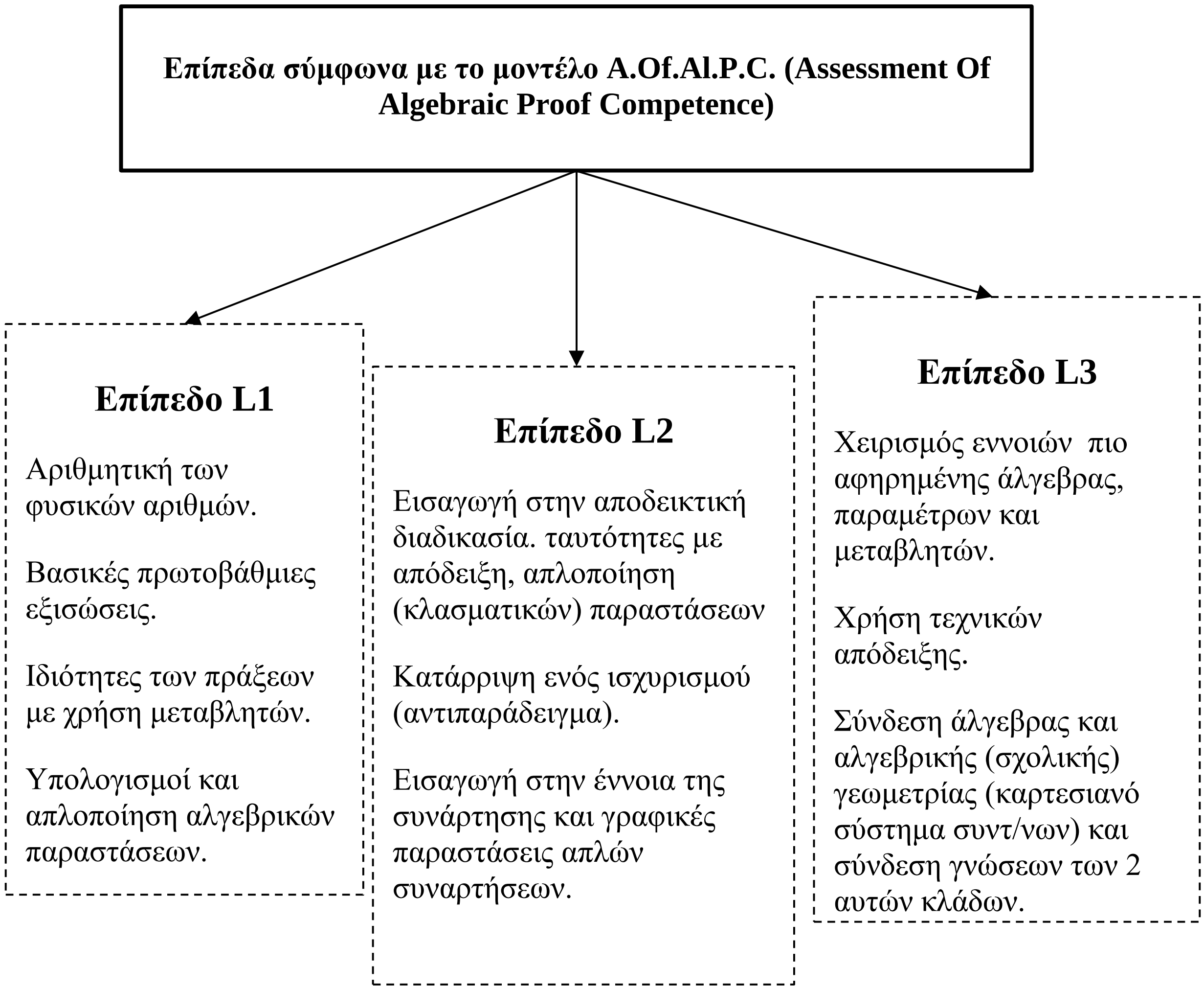
Επίπεδο L3

[αντιστοίχιση με τα επίπεδα των Van Hiele: εδώ αντιστοιχεί το επίπεδο 5]

Εισαγωγή στην πιο αφηρημένη άλγεβρα, εφαρμογή των προηγούμενων γνώσεων για επίλυση/απόδειξη και ορισμός νέων εννοιών (επέκταση του ορισμού της ρίζας, δυνάμεις με ρητό/άρρητο εκθέτη, εκθετική συνάρτηση, τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνιών μεγαλύτερων των $90°$, τριγωνομετρικές συναρτήσεις).

Ο μαθητής πλέον μπορεί να χειριστεί με άνεση έννοιες της πιο αφηρημένης άλγεβρας, παραμέτρους και μεταβλητές και μπορεί να χρησιμοποιήσει τεχνικές απόδειξης ή κατάρριψης ενός ισχυρισμού (αντιπαράδειγμα) για να επιβεβαιώσει ή να καταρρίψει μία εικασία που κάνει ο ίδιος. Μπορεί να κάνει τη σύνδεση άλγεβρας και αλγεβρικής (σχολικής) γεωμετρίας (καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων) και να συνδέσει γνώσεις των 2 αυτών κλάδων (π.χ. κατά τη διάρκεια επίλυσης μία εξίσωσης μίας (1) μεταβλητής είναι σαν να ζητείται να βρεθούν τα σημεία τομής των συναρτήσεων που βρίσκονται στα δύο (2) μέλη της εξίσωσης, όμοια και για τις ανισώσεις ή για τα συστήματα εξισώσεων). Τέλος, μπορεί να επιλύσει ένα πρόβλημα του πραγματικού κόσμου (το οποίο είναι εντός των δυνατοτήτων του με βάση τη διδακτέα ύλη) εφαρμόζοντας τεχνικές μαθηματικής μοντελοποίησης και μετατρέποντας ή μεταφράζοντας τις λέξεις σε μαθηματικές προτάσεις.

Έτσι ο μαθητής αποκτώντας δεξιότητες γενίκευσης και απόδειξης έχει κατακτήσει στο ανώτερο επίπεδο τη σχολική άλγεβρα και είναι έτοιμος για το επόμενο επίπεδο γραμμικής και πιο αφηρημένης άλγεβρας που διδάσκεται σε πανεπιστημιακό επίπεδο.



Εικόνα: Σύντομη κατηγοριοποίηση του *μοντέλου* ***A.Of.Al.P.C. (****Assessment Of Algebraic Proof Competence****)***

3.5 Συλλογή δεδομένων και ερευνητική διαδικασία

Το ερωτηματολόγιο περιλάμβανε τρεις άξονες: Στον πρώτο καταγράφηκαν κάποια βιογραφικά/δημογραφικά στοιχεία των συμμετεχόντων στην έρευνα εκπαιδευτικών (ως προς την ηλικία, το φύλλο, τα χρόνια διδασκαλίας, τις μεταπτυχιακές σπουδές, κ.α.), ο δεύτερος περιείχε τέσσερις (4) ερωτήσεις ανάπτυξης που αφορούσαν γενικά την αποδεικτική διαδικασία και τις απόψεις των εκπαιδευτικών για αυτή, και τέλος, ο τρίτος άξονας περιείχε δύο (2) ερωτήσεις που συνέδεαν την αποδεικτική διαδικασία με το μοντέλο A.Of.Al.P.C. που αναλύσαμε παραπάνω.

Η πρώτη από τις δύο ερωτήσεις του τρίτου άξονα αναφερόταν στην ωριαία γραπτή δοκιμασία με έμφαση στην αποδεικτική διαδικασία που έγινε αμέσως μετά που ολοκληρώθηκε η παράγραφος *2.1 – Οι πράξεις και οι ιδιότητές τους* του σχολικού βιβλίου της Άλγεβρα της Α Λυκείου, σε ένα Τμήμα είκοσι δύο (22) μαθητών του Πρότυπου Γενικού Λυκείου Ηρακλείου το σχολικό έτος 2021-2022 και του οποίου τα θέματα παρατίθενται στο παράρτημα. Οποιεσδήποτε συμπληρώσεις και περαιτέρω διευκρινήσεις που χρειάστηκαν, έγιναν είτε μέσω μηνύματος ηλεκτρονικού ταχυδρομείου είτε με δια ζώσης μαγνητοφωνημένη συζήτηση.

Παρακάτω περιέχονται οι ερωτήσεις του ερωτηματολογίου

1ος άξονας: Βιογραφικά/Δημογραφικά Στοιχεία

1) Η ηλικία σας είναι: (Οι επιλογές ήταν: Κάτω των 30, 30-39 40-49, 50 και άνω)

2) Φύλλο

3) Είστε εκπαιδευτικός στο: (Οι επιλογές ήταν: Δημόσιο Τομέα, Ιδιωτικό Τομέα)

4) Διδάσκετε (κυρίως) σε μαθητές: (Οι επιλογές ήταν: Γυμνασίου, Λυκείου)

5) Είστε κάτοχος: (Οι επιλογές ήταν: Διδακτορικού, Μεταπτυχιακού, Άλλο (2ος Πανεπιστημιακός Τίτλος, 2ο Μεταπτυχιακό), Άλλο)

6) Πόσα χρόνια διδάσκετε συνολικά στο δημόσιο/ιδιωτικό τομέα; (Οι επιλογές ήταν: Λιγότερα από 5, 5-9, 10-19, 20 και άνω)

2ος άξονας: Ερωτήσεις για την αποδεικτική διαδικασία

1) Ποιες μαθηματικές έννοιες θεωρείτε ότι πρέπει να έχει κατανοήσει ένας μαθητής πριν την εισαγωγή στην αποδεικτική διαδικασία;

2) Ανάλογα με την τάξη στην οποία διδάσκετε, ποια πιστεύετε ότι είναι μία κατάλληλη πρόταση την απόδειξη της οποίας θα διδάσκατε με σκοπό να γίνει όσο το δυνατόν πιο κατανοητή η αποδεικτική διαδικασία; Εξηγήστε τους λόγους της επιλογής σας.

3) Σε ποια ηλικία πιστεύετε ότι είναι εφικτή η διδασκαλία της αποδεικτικής διαδικασία; Ποιες ενότητες των μαθηματικών που διδάσκονται στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, πιστεύετε ότι βοηθούν στη κατανόηση της αποδεικτικής διαδικασίας;

4) Πώς πιστεύετε ότι μπορείτε να ελέγξετε την κατανόηση της απόδειξης από τους μαθητές αφού έχετε κάνει εισαγωγή στην αποδεικτική διαδικασία; Προτείνετε τρόπους ελέγχου κατανόησης της απόδειξης και της αναγκαιότητάς της.

3ος άξονας: Ερωτήσεις πάνω στα επίπεδα του μοντέλου A.Of.Al.P.C. (Assessment Of Algebraic Proof Competence)

1) Κατά πόσο θεωρείτε ότι ανταποκρίνονται τα θέματα της συγκεκριμένης αξιολόγησης στα επίπεδα του μοντέλου A.Of.Al.P.C.; Σχολιάστε τα και αντιστοιχίστε το κάθε θέμα με το αντίστοιχό του επίπεδο δικαιολογώντας την απάντησή σας.

2) Ποιες από τις ενότητες που υπάρχουν στα επίπεδα του μοντέλου A.Of.Al.P.C. θεωρείτε ότι ενισχύουν την αποδεικτική διαδικασία στην Άλγεβρα; Ποιες ενότητες που δε διδάσκονται στο αναλυτικό πρόγραμμα θεωρείτε κατάλληλες για την ενίσχυση της αποδεικτικής διαδικασίας στο Γυμνάσιο/Λύκειο (ανάλογα τη βαθμίδα στην οποία υπηρετεί ο εκπαιδευτικός).

3.6 Ανάλυση

Η ανάλυση των δεδομένων έγινε μέσα από τη διαδικασία της κατηγοριοποίησης η οποία επέτρεψε τη μετατροπή του λεκτικού περιεχομένου των συνεντεύξεων σε συνοπτικά ευρήματα, τα οποία στη συνέχεια ερμηνεύτηκαν με ποιοτικούς όρους (Χανλαρίδου, 2019).

Κεφάλαιο 4ο : Αποτελέσματα

4.1 Οι αποδείξεις στα σχολικά εγχειρίδια του Λυκείου

Μελετήθηκαν όλα τα σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών του Γενικού Λυκείου ως προς τις αποδείξεις που περιέχουν και σημειώνεται ο αριθμός εκείνων που έχουν παραμείνει στη διδακτέα ύλη (σύμφωνα με τις οδηγίες για το σχολικό έτος 2021-2022 του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής, οι οποίες δεν έχουν μεταβληθεί κατά την τελευταία 5ετία). Πιο συγκεκριμένα τα βιβλία: Άλγεβρα Α Λυκείου, Γεωμετρία Α Λυκείου, Άλγεβρα Β Λυκείου, Γεωμετρία Β Λυκείου, Μαθηματικά Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών Β Λυκείου (Μαθηματικά Β Λυκείου), Μαθηματικά Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών & Υγείας και Σπουδών Οικονομίας & Πληροφορικής Γ Λυκείου (Μαθηματικά Γ Λυκείου). Στον παρακάτω πίνακα 1, φαίνεται ο αριθμός των αποδείξεων που περιέχονται στο βιβλίο (1η στήλη) και ο αριθμός των αποδείξεων που είναι εντός της διδακτέας ύλης για το σχολικό έτος 2021 – 2022 (2η στήλη).

Έχει παρατηρηθεί ότι οι μαθητές δεν αναγνωρίζουν την απόδειξη μίας πρότασης του σχολικού βιβλίου αν δεν αναφέρεται κάτω από αυτή ξεκάθαρα η λέξη «απόδειξη», λέξη η οποία σηματοδοτεί το σημείο από το οποίο ξεκινάει. Πολλές φορές μάλιστα, οι μαθητές ρωτούν για να μάθουν το πλήθος των αποδείξεων μίας ενότητας καθώς και τα συγκεκριμένα χωρία που τις περιέχουν. Πρέπει να σημειωθεί ότι σε αρκετά βιβλία μαθηματικών, όταν αναφέρεται μία πρόταση/θεώρημα/λήμμα, αναγράφεται ξεκάθαρα η αρχή της απόδειξης (με τη λέξη «απόδειξη»), αλλά και το τέλος της (συνήθως με ένα σύμβολο το οποίο μάλιστα φροντίζει ο συγγραφέας να επεξηγεί στην αρχή του βιβλίου ως το σύμβολο εκείνο που υπάρχει στο τέλος κάθε απόδειξης). Αυτό από μόνο του είναι ένα σημαντικό στοιχείο για ένα μαθηματικό βιβλίο και μάλιστα σχολικού επιπέδου όταν ακόμη περισσότερο σε αυτό γίνεται η εισαγωγή των μαθητών στην αποδεικτική διαδικασία.

Είναι απαραίτητο και πολύ βοηθητικό για τους μαθητές, να υπάρχει σηματοδότηση για τις προτάσεις εκείνες του βιβλίου στις οποίες γίνεται απόδειξη καθώς και για την αντίστοιχη απόδειξη (αρχή και τέλος αυτής) όταν μάλιστα αυτή η πρακτική ακολουθείται και σε αντίστοιχες περιπτώσεις βιβλίων ανώτερων μαθηματικών κάτι που δεν είναι καθόλου τυχαίο.

Ως συνέχεια στον πίνακα, φαίνεται το πλήθος των αποδείξεων των παραπάνω σχολικών βιβλίων οι οποίες είναι εντός σχολικής ύλης και των οποίων η αρχή της απόδειξης δεν σηματοδοτείται με τη λέξη «απόδειξη» (3η στήλη) είναι κατά μία έννοια «θολή απόδειξη». Μάλιστα σε κάποιες από αυτές, προηγείται η απόδειξη και έπεται η διατύπωση της πρότασης ως «φυσιολογική» εξέλιξη των όσων προηγήθηκαν. Αυτό όμως θεωρήθηκε ότι αποπροσανατολίζει το μαθητή και δεν τον βοηθά να διακρίνει την αρχή και το τέλος της απόδειξης αλλά ακόμη και την ίδια την αποδεικτέα πρόταση.

Πίνακας 1

Σύνολο αποδείξεων ανά μάθημα, αποδείξεις εντός της διδακτέας ύλης καθώς και «θολές αποδείξεις

Μάθημα	Σύνολο Αποδείξεων Βιβλίου	Εντός διδακτέας ύλης (Σχ. Έτος 21-22)	«Θολές Αποδείξεις»
Άλγεβρα Α Λυκείου	20	17 (1 προτείνεται να μη διδαχθεί)	12
Γεωμετρία Α Λυκείου	56	32	0
Άλγεβρα Β Λυκείου	12	9	1
Γεωμετρία Β Λυκείου	32	18	4
Μαθηματικά Β Λυκείου	37	30	29
Μαθηματικά Γ Λυκείου	31	25	16

Εντύπωση προκαλεί το γεγονός ότι στις 12 από τις 17 αποδείξεις (ποσοστό 70%) του σχολικού βιβλίου της Άλγεβρας Α Λυκείου οι οποίες είναι εντός ύλης και στις 29 από τις 30 αποδείξεις (ποσοστό 96,6%), στο βιβλίο των Μαθηματικών Ομάδας

Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών της Β Λυκείου, δεν σηματοδοτείται η έναρξη της απόδειξης της πρότασης που αποδεικνύεται. Θετικό στοιχείο αποτελεί ότι τα αντίστοιχα ποσοστά για τη Γεωμετρία της Α και της Β Λυκείου είναι 0 και 22,2% αντίστοιχα και για την Άλγεβρα της Β Λυκείου είναι 11,1%. Αρνητικό όμως στοιχείο αποτελεί το πολύ μικρό πλήθος των εντός ύλης αποδείξεων στην Άλγεβρα της Β Λυκείου το οποίο περιέχει 50% λιγότερες αποδείξεις από το αμέσως επόμενο βιβλίο (Γεωμετρία Β Λυκείου) με τον μικρότερο αριθμό εντός ύλης αποδείξεων και σχεδόν 72% λιγότερες αποδείξεις από το βιβλίο (Γεωμετρία Α Λυκείου) που περιέχει το μεγαλύτερο αριθμό εντός ύλης αποδείξεων. Τέλος, στο βιβλίο Μαθηματικά Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών & Υγείας και Σπουδών Οικονομίας & Πληροφορικής της Γ Λυκείου το ποσοστό των «θολών αποδείξεων» ανέρχεται σε 64% ποσοστό αρκετά αυξημένο αν αναλογιστεί κανείς ότι οι αποδείξεις αυτές τίθενται και ως θέματα στις Πανελλήνιες Εξετάσεις.

Ως συμπέρασμα, προτείνεται στις μελλοντικές εκδόσεις των υπαρχόντων σχολικών βιβλίων καθώς και στα επόμενα σχολικά βιβλία, η διατύπωση των προτάσεων καθώς και η αρχή και το τέλος τους, πρέπει να σηματοδοτείται και να είναι ευδιάκριτη. Αυτό θα βοηθήσει στην περαιτέρω κατανόηση των μαθηματικών και την αναβάθμιση της μαθηματικής απόδειξης.

4.2 Το προφίλ των εκπαιδευτικών (Τ1-Τ9) σύμφωνα με τον πρώτο άξονα

Οι εννέα (9) συμμετέχοντες εκπαιδευτικοί έχουν κωδικοποιηθεί ως Τ1,…,Τ9 αναφέροντας το προφίλ τους σύμφωνα με τις ερωτήσεις του πρώτου άξονα. Στη συνέχεια, για τη διευκόλυνση της ανάλυσης των ερωτημάτων της συνέντευξης οι εκπαιδευτικοί έχουν κωδικοποιηθεί με τον ίδιο τρόπο Τ1 έως Τ9.

Τ1: Γυναίκα άνω των 50 ετών που εργάζεται σε Λύκειο, είναι κάτοχος διδακτορικού και μεταπτυχιακού στα καθαρά μαθηματικά (Ανάλυση) και διδάσκει περισσότερα από 20 χρόνια στην εκπαίδευση.

Τ2: Γυναίκα άνω των 50 ετών που εργάζεται σε Λύκειο, είναι κάτοχος διδακτορικού και μεταπτυχιακού στα καθαρά μαθηματικά (Ανάλυση) και διδάσκει περισσότερα από 20 χρόνια στην εκπαίδευση.

Τ3: Άνδρας στην ηλικιακή ομάδα 40-50, εργάζεται σε Γυμνάσιο, είναι κάτοχος διδακτορικού στα καθαρά μαθηματικά (Γεωμετρία) και μεταπτυχιακού στη διδακτική των μαθηματικών και διδάσκει 10 έως 20 έτη στην εκπαίδευση.
Τ4: Γυναίκα στην ηλικιακή ομάδα 30-40, εργάζεται σε Λύκειο, είναι κάτοχος μεταπτυχιακού στη διδακτική των μαθηματικών και διδάσκει 10 έως 20 έτη στην εκπαίδευση.
Τ5: Γυναίκα άνω των 50 ετών, εργάζεται σε Λύκειο, είναι κάτοχος μεταπτυχιακού στη διδακτική των μαθηματικών και διδάσκει 10 έως 20 έτη στην εκπαίδευση.
Τ6: Γυναίκα στην ηλικιακή ομάδα 30-40, εργάζεται σε Γυμνάσιο, είναι κάτοχος μεταπτυχιακού στη διδακτική των μαθηματικών και διδάσκει 10 έως 20 έτη στην εκπαίδευση.
Τ7: Άνδρας στην ηλικιακή ομάδα 40-50, εργάζεται στον ιδιωτικό τομέα και διδάσκει κυρίως σε μαθητές λυκείου, είναι κάτοχος μεταπτυχιακού διπλώματος και διδάσκει 10 έως 20 έτη στην εκπαίδευση.
Τ8: Άνδρας στην ηλικιακή ομάδα 40-50, εργάζεται στον ιδιωτικό τομέα και διδάσκει κυρίως σε μαθητές λυκείου, είναι κάτοχος μεταπτυχιακού διπλώματος και διδάσκει 10 έως 20 έτη στην εκπαίδευση.
Τ9: Άνδρας στην ηλικιακή ομάδα 40-50, εργάζεται στον ιδιωτικό τομέα και διδάσκει κυρίως σε μαθητές λυκείου, είναι κάτοχος μεταπτυχιακού διπλώματος και διδάσκει 10 έως 20 έτη στην εκπαίδευση.

4.3 Ανάλυση ερωτημάτων δεύτερου άξονα

4.3.1 Ποιες μαθηματικές έννοιες πρέπει να έχει κατανοήσει ένας μαθητής πριν από την εισαγωγή στην αποδεικτική διαδικασία.

Όλοι οι εκπαιδευτικοί συμφωνούν ότι οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν και να χειρίζονται με ευχέρεια τις πράξεις και τις ιδιότητές τους και να αναγνωρίζουν τα βασικά σύνολα των αριθμών. Ενδεικτικά ο Τ7 αναφέρει:

«Πρέπει σίγουρα να υπάρχει απλή λογική σκέψη και έπειτα όλα τα παρακάτω:

Αριθμητική των φυσικών αριθμών, σύνολα αριθμών, φυσικοί, ακέραιοι, κλάσματα, δεκαδικοί. Ιδιότητες υπολογισμού αριθμητικών πράξεων και η προτεραιότητα πράξεων (...)»

Ειδικότερα αναφέρονται στη γνώση και ορθή χρήση της συνεπαγωγής και ισοδυναμίας, στον στοιχειώδη (όχι όμως φορμαλιστικό) προτασιακό λογισμό (Τ1, Τ8, Τ9), σωστή χρήση του συμβόλου της ισότητας και των ιδιότητες που απορρέουν από αυτό (αλλαγή μέλους σε όρους, πολλαπλασιασμός μελών με τον ίδιο αριθμό κτλ) (Τ3, Τ5, Τ7, Τ8).

Ο Τ9 χαρακτηριστικά γράφει:

«Παράλληλα να έχουν ξεκαθαρίσει την έννοια της συνεπαγωγής, της ισοδυναμίας και της ισότητας, καθώς παρατηρείται ότι όταν τα διδάσκονται τα συγχέουν (συχνό λάθος αντικαθιστούν το ίσον από ισοδυναμία σα να είναι μία αναβάθμισή του).»

Μάλιστα ο Τ8 επισημαίνει τη χρησιμότητα των πρωτοβάθμιων εξισώσεων για εξάσκηση στους απλούς αλγεβρικούς κανόνες επίλυσης που αναφέρει και ο Τ3 παραπάνω και σε ανώτερες τάξεις ότι ο μαθητής πρέπει να μπορεί να αναγνωρίσει ποια είναι η παράμετρος και ποιος ο άγνωστος. Χρήσιμο επίσης είναι να μπορεί να μετατρέπει γλωσσικά δεδομένα σε αλγεβρικά και το ανάποδο (Τ3, Τ4). Η Τ4 επίσης αναφέρει ότι καλό θα είναι επιπλέον ο μαθητής να αναγνωρίζει πρότυπα και τις βασικές γεωμετρικές έννοιες, να ταξινομεί και να διατυπώνει συλλογισμούς. Γενικά είναι σημαντικό να μπορεί να αναγνωρίζει τα συστήματα συμβολικών παραστάσεων, τις γλωσσικές εκφράσεις των αριθμών και το δεκαδικό σύστημα αρίθμησης:

«Ιδανικά πρέπει να μπορεί να μετατρέπει τις συμβολικές σχέσεις σε εικόνες και να μεταφράζει τις εικόνες σε συμβολικά Μαθηματικά. Η μετάβαση από τα σύμβολα στις εικόνες, δηλαδή η ενσάρκωση του αφηρημένου σε συγκεκριμένο, του δίνει τη δυνατότητα να κατανοήσει καλύτερα το αφηρημένο και να σκεφτεί πάνω σε κάτι που βλέπει.»

Η Τ6 στην απάντησή της εκτός των άλλων, αναφέρει ως σημαντική δεξιότητα οι μαθητές να γνωρίζουν να διακρίνουν τα δεδομένα και τα ζητούμενα της προς εξέταση απόδειξης.

Η Τ1 θεωρεί ότι πέρα από τις μαθηματικές έννοιες οι μαθητές χρειάζονται και άλλου είδους δεξιότητες:

«(…) Όμως κυρίως χρειάζονται και δεξιότητες (πέρα από τις μαθηματικές έννοιες) όπως δημιουργία εικασιών (π.χ. μήπως ισχύει ότι…), λήψη αποφάσεων (π.χ. απορρίπτεται αυτός ο ισχυρισμός…), εμπλοκή σε διαδικασίες δοκιμής και απόρριψης, ικανότητα διαπραγμάτευσης και συζήτησης για την ορθότητα (η μη ορθότητα) ενός συλλογισμού, οργάνωση των δεδομένων ενός προβλήματος για τον εντοπισμό σχέσεων (π.χ. αν δύο αριθμοί είναι ίσοι με τρίτο αριθμό τότε είναι ίσοι και μεταξύ τους), ευελιξία σε οπτικές (π.χ. ένα ευθύγραμμο τμήμα να το βλέπουν τόσο ως χορδή ενός τόξου όσο και ως βάση ενός ισοσκελούς τριγώνου), ιεράρχηση αποδεικτικών βημάτων (επαγωγικός συλλογισμός) κ.α.»

Ο Τ7 δίνει επιπλέον βαρύτητα και στους υπολογισμούς και την απλοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων με μεταβλητές ώστε να αναδειχθούν και να κατανοηθούν οι κανόνες λογισμού ενώ ο Τ8 αναφέρει ότι για τις ανώτερες τάξεις Β και Γ του Λυκείου ο μαθητής έχοντας κατανοήσει τη θεωρία, θα πρέπει να μπορεί να χαράξει τη στρατηγική επίλυσης/απόδειξης και δίνει ως παράδειγμα από τα μαθηματικά προσανατολισμού της Β Λυκείου των σκέψεων και βημάτων που πρέπει να ακολουθήσει ο μαθητής για την εύρεση του συμμετρικού ενός σημείου ως προς μία ευθεία. Ο Τ3 ολοκληρώνοντας την απάντησή του σε αυτό το ερώτημα αναφέρει:

«Ωστόσο, ο μαθητής πρέπει πριν από όλα να έχει κατανοήσει την αναγκαιότητα τις απόδειξης. Είναι σύνηθες το φαινόμενο οι μαθητές να αμφισβητούν την αναγκαιότητα πολλών αποδείξεων.»

Αναλύοντας τις απαντήσεις των εκπαιδευτικών και θεωρώντας πολύ σημαντική την παρατήρηση με την οποία ολοκλήρωσε την απάντησή του ο Τ3, για τη σημασία να κατανοήσει ο μαθητής την αναγκαιότητα της απόδειξης, παρατηρείται ότι για να μπορεί να γίνει ομαλή εισαγωγή στην αποδεικτική διαδικασία, ο μαθητής θα πρέπει να έχει κατακτήσει κάποιες βασικές γνώσεις της στοιχειώδους αριθμητικής και να είναι εξοικειωμένος με το χειρισμό των μαθηματικών συμβόλων και εννοιών. Είναι πολύ βασικό για τους μαθητές να μπορούν να παρατηρήσουν ένα φαινόμενο στα μαθηματικά, να μπορέσουν να το μετατρέψουν στη μαθηματική γλώσσα και κατόπιν να αναρωτηθούν για την ισχύ του ή όχι. Και ο τρόπος της (μαθηματικής) απόρριψης ενός ισχυρισμού είναι το αντιπαράδειγμα ενώ της μαθηματικής κατοχύρωσης ενός ισχυρισμού δεν είναι άλλος παρά η μαθηματική απόδειξη.

4.3.2 Ανάλογα με την τάξη στην οποία διδάσκουν, ποια θεωρούν ότι είναι μία κατάλληλη πρόταση την απόδειξη της οποίας θα δίδασκαν με σκοπό να γίνει όσο το δυνατόν πιο κατανοητή η αποδεικτική διαδικασία.

Στην ενότητα αυτή θα γίνει αναφορά στις απαντήσεις των εκπαιδευτικών, σχετικά με εκείνη τη μαθηματική πρόταση την απόδειξη της οποίας θεωρούν κατάλληλη για να γίνει όσο το δυνατόν πιο κατανοητή η αποδεικτική διαδικασία από τους μαθητές, ανάλογα με την τάξη στην οποία διδάσκουν. Στο σύνολο τους και οι εννέα (9) εκπαιδευτικοί, επιδιώκουν να ενισχύσουν την διδασκαλία τους με απώτερο σκοπό την κατανόηση της αποδεικτικής διαδικασίας και τους μαθησιακούς σκοπούς που αυτή υπηρετεί ανάλογα την τάξη στην οποία βρίσκονται οι μαθητές. Παρ' όλα αυτά η απόδειξη της μαθηματικής πρότασης που αναφέρουν διαφέρει, καθώς φαίνεται ο καθένας από αυτούς ανάλογα με την διδακτική του εμπειρία και την τάξη στην οποία αναφέρεται, επιλέγει και κάτι διαφορετικό.

Παρ' όλα αυτά οι Τ1 και Τ4 συμφωνούν με τον εκπαιδευτικό Τ3 (απόδειξη βασικών «τύπων» και όχι απλή αλγοριθμική χρήση) ο οποίος διδάσκει σε γυμνάσιο και συγκεκριμένα αναφέρει ότι:

«Η διδασκαλία των τύπων των ριζών της δευτεροβάθμιας εξίσωσης, πρόκειται για ένα βασικότατο θέμα και αν ο μαθητής δεν καταλάβει πώς προκύπτουν οι τύποι των ριζών, φαίνονται ως αδικαιολόγητα αποτελεσματική συνταγή. Είναι συχνό το φαινόμενο ένας μαθητής να είναι σε θέση να εκτελέσει όλα τα αλγοριθμικά βήματα που απαιτούνται για την επίλυση τέτοιων εξισώσεων, ενώ δεν κατανοεί πραγματικά τι συμβαίνει. Μάλιστα, ίσως θα ήταν προτιμότερο στο γυμνάσιο να απουσίαζε η μέθοδος με τη διακρίνουσα και αυτό να διδασκόταν για πρώτη φορά στην Α' Λυκείου. Με αυτόν τον τρόπο ο μαθητής κάθε φορά που θα επιχειρούσε να λύσει μια δευτεροβάθμια εξίσωση θα έπρεπε να επαναλαμβάνει όλα τα βήματα που οδηγούν στη διατύπωση του γενικού κανόνα.»

Ιδιαίτερα φαίνεται να συμφωνούν οι εκπαιδευτικοί Τ1, Τ4 καθώς συγκλίνουν στο ότι η αποδεικτική διαδικασία θα μπορούσε να ενισχυθεί με απόδειξη των ταυτοτήτων (κάτι που αναφέρει και ο Τ9) και των ιδιοτήτων των αναλογιών. Σε αυτό, αναφέρουν, θα βοηθούσε ενδεχομένως και η γεωμετρική απόδειξη των ταυτοτήτων και η Τ4 αναφέρει ότι:

«(...) Ανάλογα και με την τάξη θα μπορούσαμε να ασχοληθούμε και με τη γεωμετρική απόδειξη, ώστε να αντιληφθούν οι μαθητές ότι η Άλγεβρα και η Γεωμετρία δεν είναι ξεχωριστά αντικείμενα.»

Η Τ2 θεωρεί ότι μία πολύ καλή πρόταση απόδειξης είναι ότι «το άθροισμα περιττών είναι άρτιος» ή «το τετράγωνο ενός φυσικού είναι άρτιος αν και μόνον αν ο φυσικός είναι άρτιος» αναφέροντας σχετικά:

«Αυτό μπορεί να γίνει από τη στιγμή που τα παιδιά μπορούν να διαχειρίζονται πράξεις με μεταβλητές. Τα παιδιά πρέπει να δουν την απόδειξη ως μια διαδικασία κατά την οποία εξηγούν μια κατάσταση-πρόταση χρησιμοποιώντας άλλες απλούστερες δεδομένες - αποδεκτές προτάσεις.»

Μάλιστα στην παρατήρηση της Τ2, συμφωνεί και ο Τ9 αναφέροντας, μεταξύ άλλων, ότι θα δίδασκε στην Γ΄ Γυμνασίου την απόδειξη της ταυτότητας $(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$ καθώς:

«χρησιμοποιεί προηγούμενη γνώση και έτσι εισάγει τους μαθητές στη «συνέχεια» των μαθηματικών συλλογισμών»

Ο Τ9 συνεχίζει παραθέτοντας μία πρόταση για κάθε μία από τις τάξεις Α, Β και Γ Λυκείου, των οποίων η απόδειξη περιλαμβάνεται στο σχολικό βιβλίο και η οποία θεωρεί ότι προσφέρει στην κατανόηση της αποδεικτικής διαδικασίας. Συγκεκριμένα:

«Α΄ Λυκείου: $|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|$ *χρησιμοποιούν και τα 2 μέλη, οπότε αντιμετωπίζουν πιο σύνθετη κατάσταση από πριν*

Β΄ Λυκείου: $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$ *αυξάνει το επίπεδο δυσκολίας, συνδυασμού δεδομένων, χρησιμοποιεί Γεωμετρικό σχήμα στην Άλγεβρα τονίζοντας την ολότητα των Μαθηματικών ως επιστήμη.*

Γ΄ Λυκείου: Αν $f'(x) = 0$ *τότε* $f(x) = c$. *Διακρίνει περιπτώσεις, χρησιμοποιεί άλλο θεώρημα και με τυχαία επιλογή των* x_1, x_2 *γενικεύει.»*

Η Τ1 αναφέρει στην συνέντευξη της μία συγκεκριμένη άσκηση που από την εμπειρία της θεωρεί ότι βοηθάει τους μαθητές στη κατανόηση της απαγωγής σε άτοπο. Πιο συγκεκριμένα:

«Για την απαγωγή σε άτοπο μου αρέσει η εξής σπαζοκεφαλιά: ένας πύργος κινείται σε μια σκακιέρα είτε οριζόντια σε μία γραμμή είτε κατακόρυφα σε μία στήλη. Είναι δυνατόν ο πύργος να ξεκινήσει από το πάνω-αριστερά τετράγωνο και να καταλήξει στο κάτω-δεξιά σαρώνοντας όλα τα τετράγωνα της σκακιέρας από μία φορά;»

Η Τ6, θεωρεί ότι για την καλύτερη κατανόηση της αποδεικτικής διαδικασίας είναι κατάλληλες όλες οι προτάσεις των ιδιοτήτων των πραγματικών αριθμών καθώς δίνουν την ευκαιρία, όπως λέει, να έρθουν σε επαφή τόσο με την ευθεία απόδειξη όσο και τη χρήση αντιπαραδειγμάτων (ως παράδειγμα για το τελευταίο έχει την πρόταση: «$\begin{cases} \alpha = \beta \\ \gamma = \delta \end{cases} \Rightarrow \alpha + \gamma = \beta + \delta$. Το αντίστροφο γιατί δεν ισχύει;»). Θεωρεί επίσης απαραίτητο οι μαθητές να βρεθούν μπροστά σε γνωστικές συγκρούσεις με χρήση ασκήσεων εύρεσης λάθους. Για τις αποδείξεις των παραπάνω προτάσεων αυτών καταλήγει:

«Οι μαθητές δυσκολεύονται στην απόδειξη των παραπάνω προτάσεων και δεν αντιλαμβάνονται ούτε καν την ανάγκη απόδειξή τους, αφού τις θεωρούν «προφανείς» δεδομένου ότι έχουν παγιωθεί στο μυαλό τους ως «λογικές» κινήσεις αφού έχουν μάθει να τις χρησιμοποιούν αρκετά χρόνια με καθαρά μηχανιστικό τρόπο.»

Η Τ6 αναφέρει την απόδειξη της πρότασης $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$ του σχολικού βιβλίου της Α Λυκείου και για τους λόγους επιλογής της αναφέρει:

« 1. Χρησιμοποιείται η ευθεία απόδειξη μέσω ισοδυναμιών.

2. Χρησιμοποιούνται ιδιότητες των απόλυτων τιμών.

3. Χρησιμοποιείται η ταυτότητα του τετραγώνου του αθροίσματος.

4. Καταλήγει σε μία ανισότητα της μορφής $\leq$ όπου η ισότητα χρειάζεται περαιτέρω διερεύνηση.

5. Δίνεται η δυνατότητα για γενίκευση με περισσότερους προσθετέους και οι μαθητές μπορούν να μπουν στη διαδικασία απόδειξης της γενίκευσης εφόσον έχουν καταλάβει την παραπάνω απόδειξη με τους δύο προσθετέους.»

Οι έξι (6) συνάδελφοι Τ1, Τ3, Τ4, Τ5, Τ6 και Τ9 φαίνεται να συμφωνούν στο να δοθεί βαρύτητα στην απόδειξη βασικών προτάσεων που αποτελούν θεωρία του σχολικού βιβλίου (είτε η απόδειξη αυτών περιλαμβάνεται στο σχολικό βιβλίο είτε όχι) ενώ οι εκπαιδευτικοί Τ1, Τ2, Τ7 και Τ8 προτείνουν και προτάσεις/ασκήσεις οι οποίες δε βρίσκονται στο σχολικό βιβλίο.

Οι συνάδελφοι Τ7 και Τ8 του ιδιωτικού τομέα κάνουν αναφορά, σε πιο εξιδεικευμένες και προχωρημένες στην ύλη έννοιες/ασκήσεις μαθηματικών προφανώς διότι διδάσκουν κυρίως σε μαθητές της τελευταίας τάξης του Λυκείου, που έχουν ως προαπαιτούμενη γνώση την εις βάθος κατανόηση της χρήσης βασικών μαθηματικών εννοιών από τις μικρότερες τάξεις.

Μάλιστα, ο Τ8 αναφέρει συγκεκριμένη άσκηση η οποία θεωρεί πως δίνει βαρύτητα στον προβληματισμό και έλεγχο των προϋποθέσεων και τελικά στην λήψη απόφασης από τον μαθητή για το ποια μέθοδος δίνει το βέλτιστο αποτέλεσμα. Αναφέρει λοιπόν:

«Να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $2x = \eta\mu x + 1$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(0, \pi/2)$. Η συγκεκριμένη άσκηση βοηθά στον προβληματισμό-έλεγχο προϋποθέσεων-επιλογή μεθόδου εύρεσης τουλάχιστον μιας ρίζας εξίσωσης (...) και στον προβληματισμό-έλεγχο προϋποθέσεων-επιλογή μεθόδου απόδειξης το πολύ μιας λύσης μιας εξίσωσης (...)»

Από την άλλη ο Τ7 δείχνει μεγαλύτερο ενδιαφέρον σε απόδειξη θεωρήματος του σχολικού βιβλίου, όπου εκεί είναι ξεκάθαρη η υπόθεση και το συμπέρασμα και βοηθάει τον μαθητή άμεσα να διακρίνει την διαδικασία της απόδειξης από αυτή της υπόθεσης. Χαρακτηριστικά λέει:

«Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση $f + g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει : $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$. Είναι ξεκάθαρη και η υπόθεση και το συμπέρασμα. Επίσης είναι εύκολο να διακρίνει ο μαθητής στην διαδικασία της απόδειξης την χρήση της υπόθεσης.»

Από τις πιο πάνω δηλώσεις φαίνεται ότι οι εκπαιδευτικοί όλων των βαθμίδων είτε του δημοσίου είτε του ιδιωτικού τομέα αναζητούν τρόπους ενίσχυσης της αποδεικτικής διαδικασίας. Επίσης, θα έλεγε κανείς πως διακρίνονται εύκολα οι διαφοροποιημένες απαιτήσεις που έχει ο κάθε ένας διδάσκοντας από τους μαθητές του. Αυτό μπορεί ενδεχομένως να αποδοθεί στις διαφορετικές βαθμίδες που διδάσκει ο καθένας αλλά και στους σκοπούς που ο κάθε φορέας υπηρετεί.

4.3.3. Ποια ηλικία είναι η καταλληλότερη για την εκμάθηση της αποδεικτικής διαδικασίας και ποιες ενότητες των μαθηματικών που διδάσκονται στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, θεωρούν ότι βοηθούν στη κατανόηση της

Στην παρούσα ενότητα, καταγράφονται οι απόψεις των εκπαιδευτικών, όσον αφορά την ηλικία που πιστεύουν ότι ενδείκνυται περισσότερο για την εκμάθηση της αποδεικτικής διαδικασίας και επιπλέον, καταθέτουν και προτάσεις για το τί πιστεύουν ότι θα βοηθούσε περισσότερο προς την κατεύθυνση της σωστής κατανόησης.

Σε αυτή την ερώτηση οι Τ1, Τ2, Τ4 και Τ5 συμφωνούν στο ότι η αποδεικτική διαδικασία κάτω από συγκεκριμένες προϋποθέσεις και προδιαγραφές θα μπορούσε να διδαχθεί ακόμα και στις μεγάλες τάξεις του δημοτικού, με την Τ1 να δίνει συγκεκριμένο παράδειγμα:

«(…) Δίνω ένα παράδειγμα προβλήματος για Δ' τάξη Δημοτικού: Δύο αδέλφια, ο Ανδρέας και η Βάσω, έλαβαν δώρο ένα κουτί με 10 σοκολατάκια και κάθισαν δίκαια να τα μοιραστούν. Είχαν φάει από 2 σοκολατάκια ο καθένας, όταν τους επισκέφτηκε η καλή τους φίλη η Γιάννα. Τα αδέλφια θεώρησαν καλό τα σοκολατάκια που είχαν απομείνει να τα κάνουν τρεις ίσες μερίδες, δύο δικές τους και μία για την Γιάννα. Τελικά, πόσα σοκολατάκια έφαγε το κάθε παιδί; (…)»

η Τ2 αναφέρει ότι μπορεί να γίνει εισαγωγή της απόδειξης σε γεωμετρικές και όχι τόσο σε αλγεβρικές προτάσεις, ενώ η Τ4 συμπληρώνει:

«Η απόψή μου ταυτίζεται με τη διεθνή βιβλιογραφία όπου η διδασκαλία της αποδεικτικής διαδικασίας μπορεί να ξεκινήσει από το δημοτικό υπό προϋποθέσεις.

Μπορεί τα μαθηματικά που διδάσκονται σε αυτό το επίπεδο να βασίζονται σε μεγάλο βαθμό σε ενσωματωμένες εμπειρίες, απτά αντικείμενα και κοινωνικές αλληλεπιδράσεις, αλλά με κατάλληλες πρακτικές διδασκαλίας μπορεί η μαθηματική απόδειξη να ενσωματωθεί καταλλήλως και να βοηθήσει τους μαθητές να αποκτήσουν ιδιότητες που μπορεί να χαρακτηριστούν ως μαθηματική συλλογιστική και απόδειξη.

Βέβαια αυτό προϋποθέτει ο δάσκαλος να είναι κατάλληλα εκπαιδευμένος καθώς ερευνητικά έχει διαπιστωθεί ότι οι δάσκαλοι που διδάσκουν μαθηματικά στο δημοτικό έχουν ποικίλες αντιλήψεις για το τι είναι τα μαθηματικά και οι μαθηματικές αποδείξεις. Αναλόγως θα πρέπει να διαμορφωθεί και το σχολικό εγχειρίδιο. (…)»

Η Τ5 θεωρεί ότι πολλοί μαθητές στην ηλικία των 8-10 ετών μπορούν να κατανοήσουν ή και να παράγουν μη αυστηρές αποδείξεις που στηρίζονται στη διαίσθησή τους ή σε πειραματικές διαδικασίες που συνοδεύονται με οπτικοποίηση ακόμη και τη χρήση των αντιπαραδειγμάτων.

Οι Τ1, Τ2, Τ3, Τ4 και Τ9 επίσης συμφωνούν ότι το μάθημα της γεωμετρίας στις τάξεις του γυμνασίου βοηθάει με σχετικές ενότητες: άθροισμα γωνιών τριγώνου, σχέση εγγεγραμμένης – επίκεντρης γωνίας, κατακορυφήν γωνίες και στην συνέχεια κριτήρια ισότητας τριγώνων που τους ακολουθούν έως και την Α΄ λυκείου. Ο Τ9 αναφέρει ότι το αξιωματικό σύστημα της γεωμετρίας μπορεί να λειτουργήσει βοηθητικά για την κατανόηση της αποδεικτικής διαδικασίας. Η Τ2 αναφέρει συγκεκριμένες ενότητες ανά τάξη του Γυμνασίου: γωνίες που σχηματίζουν παράλληλες ευθείες τεμνόμενες από τρίτη στην Α Γυμνασίου, εμβαδά και Πυθαγόρειο Θεώρημα στη Β Γυμνασίου ενώ για τη Γ Γυμνασίου αναφέρει τα εξής:

«… στην Γ γυμνασίου ξεκινούν οι αλγεβρικές αποδείξεις με τις ταυτότητες.
Νομίζω ότι η ίδια η απόδειξη ταυτοτήτων δεν δίνει στα παιδιά την έννοια της απόδειξης διότι επειδή κάνουν πράξεις δεν νιώθουν ότι χρησιμοποιούν κάποιες ήδη γνωστές προτάσεις, στην προκειμένη στιγμή τις ιδιότητες των πράξεων.
Η ερώτηση όμως:
Να αποδείξετε ότι η ισότητα α+β=3 δεν είναι ταυτότητα ή
Να αποδείξετε ότι η ισότητα α+β=β+α είναι ταυτότητα
νομίζω ότι εισάγει τα παιδιά στη διαδικασία να αντιληφθούν την έννοια της απόδειξης»

Γενικά οι παραπάνω καθηγητές συμφωνούν στο ότι η γεωμετρία καλλιεργεί την προσεκτική μεθοδολογία και επιχειρηματολογία, ενώ για το μάθημα της άλγεβρας τονίζουν και πάλι ότι τα κεφάλαια που βοηθούν είναι αυτά που αναφέρθηκαν και στις απαντήσεις τους στην ερώτηση 2.

Από την άλλη, ο εκπαιδευτικός Τ7 κάνει μία αναδρομή ανά σχολική τάξη, αναφέροντας:

«Η διαδικασία της αποδεικτικής μεθόδου μάλλον μπαίνει στην ζωή μας από πολύ μικρή ηλικία χωρίς να το καταλάβουμε. Ωστόσο ας μιλήσουμε για την αποδεικτική διαδικασία στα μαθηματικά με τις παρακάτω μορφές: Η ευθεία απόδειξη, με ισοδυναμίες, η εις άτοπον απαγωγή, μέθοδος της τέλειας επαγωγής, μέθοδος με αντιπαράδειγμα, μέθοδος της αντιθετοαντιστροφής.
Μάλλον προσπαθούμε να εισάγουμε την ευθεία απόδειξη από την Γ' Γυμνασίου με την απόδειξη των ταυτοτήτων, συνεχίζουμε στην Α' Λυκείου και επίσημα με τις δύο πρώτες και κάποιες φορές και με την τρίτη κατά σειρά από την παραπάνω λίστα, μάλλον με πολύ χαμηλά ποσοστά επιτυχίας. Συνεχίζαμε παλαιότερα με την μέθοδο της τέλειας επαγωγής στα μαθηματικά της Β' Λυκείου στην θεωρία αριθμών -όχι πλέον-. Φτάνουμε στην τρίτη λυκείου με την μέθοδο με αντιπαράδειγμα θεωρώντας

πάντα ότι έχουμε κατανοήσει όλες τις προηγούμενες. Μάλλον την τελευταία την αφήνουμε για το πανεπιστήμιο.

Αν εξαιρέσουμε την εις άτοπον απαγωγή, -θεωρώ ότι λάθος προσπαθούμε να την διδάξουμε στην Α λυκείου- όλες οι υπόλοιπες είναι σωστά κατανεμημένες για το χρονικό σημείο που διδάσκονται.»

Επιπλέον, ο εκπαιδευτικός Τ8, αναφέρει ότι όλα εξαρτώνται από το μαθηματικό υπόβαθρο που έχει κατακτήσει ο μαθητής από τάξη σε τάξη, αξιολογώντας ότι ο μαθητής στην Α' λυκείου πλέον είναι σε θέση να μπορεί να αντιληφθεί, να κατανοήσει και να εφαρμόσει τις αποδεικτικές μεθόδους, χωρίς φυσικά να αναφέρεται σε ιδιάζουσες περιπτώσεις.

Συμπερασματικά οι εκπαιδευτικοί Τ1, Τ2, Τ4 και Τ5 θεωρούν πως η αποδεικτική διαδικασία θα μπορούσε να μπει στις ζωές των μαθητών στις μεγάλες τάξεις του δημοτικού, ο εκπαιδευτικός Τ3 που διδάσκει σε γυμνάσιο (στο γυμνάσιο η διδασκαλία της γεωμετρίας εισάγει πολλές βασικές νέες έννοιες, οπότε το έδαφος είναι πρόσφορο για χτίσιμο και της αποδεικτικής διαδικασίας) κάνει αναφορά και επιμένει περισσότερο στο κομμάτι της γεωμετρίας, ο Τ7 φαίνεται να μην συμφωνεί ιδιαίτερα με το κομμάτι της αποδεικτικής διαδικασίας που εισάγεται στην Α΄ Λυκείου (στην τάξη αυτή οι μαθητές καλούνται να αλλάξουν τελείως την μαθηματική τους προσέγγιση σε θέματα πιο συνδυαστικά και όχι τόσο τετριμμένα) και ο Τ8 ουσιαστικά υποστηρίζει ότι αν το υπόβαθρο του μαθητή είναι μετρίου και άνω ηλικιακά οι μαθητές μπορούν να ανταπεξέλθουν (μάλλον ο Τ8 καταλήγει στην άποψη των Τ1 και Τ4, όπου υπάρχει η καλή υποδομή και αν όλα κυλήσουν εξ αρχής υπό κανονικές συνθήκες, τότε τα αποτελέσματα στις μεγαλύτερες τάξεις θα είναι και διαφορετικά).

Αξίζει να σημειωθεί ότι η απόδειξη των αλγεβρικών ταυτοτήτων στη Γ Γυμνασίου και Α Λυκείου ως μέσο κατανόησης της αποδεικτικής διαδικασίας, βρίσκει σύμφωνους τους εκπαιδευτικούς από το Τ3 έως τον Τ9 ενώ η Τ2 γράφει ρητά ότι διαφωνεί για το ότι η απόδειξή τους συμβάλει στην κατανόηση της αλγεβρικής διαδικασίας (βλ. παραπάνω την παράθεση)

Η άποψή μας είναι ότι τα παιδιά θα μπορούσαν ακόμη και από το δημοτικό σχολείο να καλλιεργήσουν σε μία αρχική μορφή, μία σωστά και καλά δομημένη σχέση με τα μαθηματικά συμβάλλοντας σε αυτό τα σωστά συγγράμματα και η σωστή εκπαίδευση των διδασκόντων εκπαιδευτικών. Αν αυτό οργανωθεί εξ αρχής με γερά θεμέλια, θα έρθει να το συμπληρώσει και η σωστή εμβάθυνση της γεωμετρίας στο γυμνάσιο, αλλά και η ορθή κατανόηση της απαγωγής σε άτοπο ή των αντιπαραδειγμάτων ως αποδεικτικών μεθόδων στην Α΄ Λυκείου.

4.3.4. Πώς θα μπορούσε να ελεγχθεί η κατανόηση της απόδειξης από τους μαθητές, εφόσον έχει γίνει η εισαγωγή στην αποδεικτική διαδικασία και τρόποι με τους οποίους προτείνουν ότι θα μπορούσε να γίνει ο έλεγχος της κατανόησης

Από τις ερωτήσεις που έγιναν προς τους εκπαιδευτικούς για το πώς θα μπορούσαν να αξιολογήσουν την προσπάθεια και κατανόηση των μαθητών έπειτα από την διδασκαλία της αποδεικτικής διαδικασίας καταγράφονται οι εξής απόψεις:

Τ1: «Να εξηγήσουν τα αποδεικτικά βήματα μιας ορθής απόδειξης δημιουργώντας εννοιολογικούς χάρτες, να κατασκευάσουν μια δική τους απόδειξη και σε ζεύγη να τις ανταλλάξουν για έλεγχο, να κατασκευάσουν ένα δικό τους πρόβλημα και να το μοιραστούν με τους συμμαθητές τους.»

Τ2: «Θεωρώ ότι ο καταλληλότερος τρόπος είναι να δώσεις συγκεκριμένες προτάσεις τις οποίες να ονομάσεις αποδεκτές και να ζητήσεις χρησιμοποιώντας τις να αποδείξεις κάποια άλλη πρόταση. Ναι μεν θεωρητικά μπορεί να πει κάποιος ότι δεσμεύουμε την σκέψη τους αλλά νομίζω ότι έτσι ελέγχουμε την κατανόηση της αποδεικτικής διαδικασίας.»

Τ3: *« Νομίζω ότι ο καταλληλότερος τρόπος είναι η παρουσίαση της απόδειξης από τον μαθητή στο σύνολο των μαθητών, δεχόμενος ερωτήσεις και προσπαθώντας να καταστήσει κατανοητά τα επιχειρήματά του. Στη συνέχεια αναθέτουμε παρόμοια ερωτήματα για απόδειξη, φροντίζοντας κάθε φορά να διαφοροποιείται η απόδειξη σε μερικά σημεία, ώστε ο μαθητής να μην αναπαράγει στείρα βήματα που έχει απομνημονεύσει.»*

Τ4: *«Προτάσεις για τη διδασκαλία της απόδειξης: Συζήτηση στην τάξη που οδηγεί σε εικασίες, κατάλληλοι πειραματισμοί για τον έλεγχο των εικασιών, απόδειξη για την υποστήριξη των εικασιών, η απόδειξη του ίδιου θεωρήματος με περισσότερους τρόπους, έμφαση στη γενική δομή της αρχικά πριν τη λεπτομερή περιγραφή των βημάτων, η μεταφορά μιας απόδειξης με απαγωγής σε άτοπο με μια κατασκευαστική.*

Γενικά δεν θα πρέπει η αντιμετώπιση της μαθηματικής απόδειξης να γίνεται, ως περιγραφή μιας σειράς λογικών βημάτων που παρουσιάζονται από τον εκπαιδευτικό, αντίθετα είναι σημαντικό να εμπλακούν οι μαθητές στη σημασία και την κατασκευή μιας απόδειξης και να προσπαθήσουν να εντοπίσουν τη βασική αποδεικτική ιδέα, μέσω πειραματισμού και διερεύνησης.»

Τ5: «Με κατάλληλες αποδεικτικές ασκήσεις όλων των μορφών (ευθεία απόδειξη, απαγωγή σε άτοπο, κατάρριψη ισχυρισμού με χρήση αντιπαραδείγματος) αλλά και με ασκήσεις εύρεσης του λάθους όπου οι μαθητές έρχονται αντιμέτωποι με μια γνωστική σύγκρουση και αναγκάζονται να ελέγξουν βήμα προς βήμα κάθε πράξη και να εντοπίσουν το λάθος (με αυτές τις ασκήσεις ο εκπαιδευτικός μπορεί να «προλάβει» συνήθη λάθη, παρερμηνείες ή/και δυσερμηνείες των μαθητών και αφετέρου οι μαθητές εξασκούνται στην παρατήρηση και εμβαθύνουν στη κατανόηση των εννοιών/ιδιοτήτων/κ.α.).»

Τ6: «Αφού θα είχα κάνει την απόδειξη μιας πρότασης θα άλλαζα τα δεδομένα, χωρίς όμως η αλλαγή τους να άλλαζε την «πορεία» της απόδειξης και θα τους ζητούσα να αποδείξουν την πρόταση με τα νέα δεδομένα. Για παράδειγμα, αν τους είχα κάνει την ταυτότητα του τετραγώνου του αθροίσματος με 2 όρους, θα τους ζητούσα να κάνουν την απόδειξη με 3 όρους ή με 2 όρους και τον έναν όρο θα τον αντικαθιστούσα από π.χ. το α^2*.»*

Τ7: *«Η αποδεικτική διαδικασία με καθημερινά παραδείγματα. Η αποδεικτική διαδικασία με τα ήδη λυμένα παραδείγματα του προηγούμενου μαθήματος -λύση από τον μαθητή. Λύση επιπλέον ασκήσεων από τον μαθητή όμοιες με αυτές που έχει διδαχθεί.»*

Τ8: «Η συζήτηση με τον μαθητή εντός/εκτός μαθήματος πάνω στο θέμα αυτό είναι ο σημαντικότερος άξονας ελέγχου της κατανόησης της απόδειξης. Επίσης διάφορα μοντεσσοριανά παιγνίδια-τεστ που μοντελοποιούν κάποιες αποδείξεις μπορούν να παρέχουν έμμεσα σημαντικά χρήσιμα για το σκοπό αυτό.»

Τ9: «Σίγουρα για τον έλεγχο μία εργασία όπως αυτή που στάλθηκε, καθώς χρησιμοποιεί όλες τις μεθόδους απόδειξης. Για την αναγκαιότητα παραδείγματα που χωρίς απόδειξη ο τύπος που χρησιμοποιήθηκε έδωσε λάθος αποτέλεσμα, πχ από την Ιστορία των Μαθηματικών στον πάπυρο του Rhind *το λάθος στο αποτέλεσμα των*

Αιγυπτίων για το εμβαδόν κύκλου που χρησιμοποιούν αυθαίρετη τιμή στο π σε σχέση με τους Έλληνες που το υπολόγισαν με απόδειξη με μεγάλη προσέγγιση.»

Από τα συμπεράσματα αυτά, φαίνεται ότι και οι εννέα (9) εκπαιδευτικοί αναζητούν τρόπους ελέγχου κατανόησης των διδαγμένων εννοιών, όπου ο πυρήνας τους είναι σχετικά ο ίδιος, χωρίς ιδιαίτερες διαφοροποιήσεις. Πιο συγκεκριμένα με εμπλουτισμό με περισσότερες αποδείξεις είτε μέσω αποδείξεων παρεμφερών ή ελαφρά τροποποιημένων προτάσεων που έχουν ήδη αποδειχθεί από τον διδάσκοντα, αποδεικτικών ασκήσεων, περιβάλλον μελέτης νέων προβλημάτων, διατύπωση εικασιών από τους μαθητές και απόδειξή τους. Αξίζει να αναφερθεί η πρόταση του Τ3 ο οποίος προτείνει την παρουσίαση της απόδειξης από τον μαθητή στην ολομέλεια της τάξης υποστηρίζοντας ουσιαστικά ότι κάτι το μαθαίνεις καλύτερα όταν πρέπει να το διδάξεις. Οι φαινομενικές διαφοροποιήσεις θεωρήθηκε ότι οφείλονται στον τρόπο με τον οποίο ο κάθε μαθητής μαθαίνει και ελέγχεται ο ίδιος. Το μαθησιακό περιβάλλον που ο ίδιος έχει φτιάξει για το εαυτό του, υιοθετώντας κομμάτια από τους μαθησιακούς τύπους που ο ίδιος έχει εντοπίσει ότι ανήκει, δηλαδή μαθαίνει και ελέγχεται αποτελεσματικότερα. Για το σκοπό αυτό καλό θα ήταν ο εκπαιδευτικός να προσφέρει διάφορες επιλογές οι οποίες να καταλήγουν στο ίδιο σημείο, αφήνοντας τον μαθητή να επιλέξει τις βέλτιστες για εκείνον.

4.4 Ανάλυση ερωτημάτων τρίτου άξονα

4.4.1 Κατά πόσο θεωρούν ότι ανταποκρίνονται τα θέματα της αξιολόγησης που τέθηκε στους μαθητές στα επίπεδα του μοντέλου A.Of.Al.P.C.

Οι απαντήσεις που έδωσαν οι εκπαιδευτικοί για την κατάταξη των ερωτήσεων της ωριαίας γραπτής εξέτασης (βρίσκεται στο παράρτημα) με βάση τα επίπεδα L1 – L3 του μοντέλου φαίνονται συγκεντρωτικά στον παρακάτω πίνακα 2.

Πίνακας 2

Κατάταξη των θεμάτων της ωριαίας γραπτής εξέτασης από τους εννέα εκπαιδευτικούς με βάση τα επίπεδα του μοντέλου A.Of.Al.P.C.

Εκπ/κοί	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8	T9
Θέμα 1ο	L2	L2	L2	L2	L2	L2	L3	L2	L1
Θέμα 2ο	L2	L1	L2	L2	L2	L2	L2	L1	L2
Θέμα 3ο	L2	L2	L2	L2	L2	L2	L1	L2	L2
Θέμα 4ο	L2	L2	L2	L3	L3	L3	L3	L2	L2
Θέμα 5ο	L3	L3	L3	L3	L3	L3	L3	L3	L3

Η πλειοψηφία των εκπαιδευτικών κατατάσσει το πρώτο θέμα στο επίπεδο L2 ως μορφή απόδειξης με χρήση αντιπαραδείγματος και το δεύτερο θέμα στο επίπεδο L2 ως απόδειξης απλής ταυτότητας. Μάλιστα ο Τ3 σχολιάζει ότι θα μπορούσε να τεθεί και σε προηγούμενη τάξη και οι Τ2 και Τ8 το κατατάσσουν στο L1 ως βασικό θέμα που απαιτεί ιδιότητες υπολογισμού και προτεραιότητα πράξεων.

Το τρίτο κατατάσσεται κατά πλειοψηφία στο L2 ως απλοποίηση κλασματικής παράστασης, θέμα που όπως σχολιάζει ο Τ8 είναι ουσιαστικό και προϋποθέτει εξοικείωση με κλασματικές παραστάσεις. Ο Τ7 το κατατάσσει στο επίπεδο L1 διότι περιέχει υπολογισμούς και απλοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων και γίνεται εισαγωγή στην απόδειξη ενώ ο Τ3 αναφέρει ότι όμοιά του έχουν διδαχθεί και προηγούμενη τάξη και το μόνο νέο είναι η χρήση της ταυτότητας «διαφορά κύβων» (η οποία δε διδάσκεται στο γυμνάσιο).

Το τέταρτο θέμα οι πέντε (5) εκπαιδευτικοί το κατατάσσουν στο επίπεδο L2 και οι υπόλοιποι τέσσερις (4) στο επίπεδο L3. Η Τ1 αναφέρει ότι είναι ουσιαστικά «βηματικός ορισμός μιας σταθερής συνάρτησης που απαιτεί τη χρήση μεταβλητών κα εξαγωγή πράξεων», ο Τ3 σημειώνει ότι:

«Η βασική δυσκολία για τους μαθητές είναι ότι πρόκειται για λεκτικό πρόβλημα, οπότε απαραίτητη προϋπόθεση είναι η κατανόηση του κειμένου. Επί της ουσίας πρόκειται για πρόβλημα της Γ' Γυμνασίου»

ενώ η Τ4 το κατατάσσει στο L3 διότι όπως αναφέρει:

«Αρχικά πρέπει να γίνει η μετάβαση από τη λεκτική περιγραφή στα συμβολικά μαθηματικά. Έπειτα ο μαθητής θα πρέπει να έχει αντιληφθεί ότι το ζητούμενο είναι

να αποδείξει ότι η παράστασή του είναι ταυτότητα. Να έχει συνδέσει δηλαδή την ταυτότητα με το «πάντα», ώστε να αποδειχθεί το ζητούμενο.»

Ο Τ7 αναφέρει ότι πρόκειται για πρόβλημα πιο αφηρημένης άλγεβρας και το κατατάσσει στην κατηγορία «ορισμός προβλήματος και επίλυση» του L3 και τέλος ο Τ8 το θεωρεί απαιτητικό και θεωρεί ότι ο μαθητής πρέπει να έχει εξοικείωση με το χειρισμό των μεταβλητών.

Όσον αφορά το πέμπτο θέμα, όλοι οι εκπαιδευτικοί συμφωνούν και το κατατάσσουν στο επίπεδο L3 ως διερεύνηση – πρόβλημα (Τ1, Τ7), ότι προϋποθέτει αυξημένη μαθηματική ωριμότητα (Τ3) και εξοικείωση με πιο αφηρημένη άλγεβρα (Τ7) και τέλος επειδή είναι μη τετριμμένο θέμα και απαιτητικό (Τ8). Η Τ2 αναφέρει ότι δεν το εντάσσει στις μεθόδους απόδειξης αλλά μόνο ως ικανότητα αλγεβρικών διαδικασιών θα το κατέτασσε στο L2 ή ίσως και στο L3 διότι απαιτεί ικανότητες ανάλυσης και σύνθεσης καθώς και ευελιξία στην εκτέλεση των πράξεων ενώ η Τ5 και η Τ6 θεωρούν ότι απαιτείται εις βάθους κατανόηση της ταυτότητας του θέματος 2 και εφαρμογή της σε συγκεκριμένη κατάσταση (ερμηνεία ρόλου των μεταβλητών).

Πρέπει να αναφερθεί βέβαια ότι – όπως συμβαίνει πάντα σε μία αξιολόγηση - τα θέματα έχουν ως σκοπό να αξιολογήσουν τους μαθητές ως προς το βαθμό κατανόησης όσων έγιναν κατά τη διάρκεια της εκπαιδευτικής διαδικασίας. Πολλές φορές δε, τα θέματα επειδή ακριβώς πρέπει να είναι επιλεγμένα για αυτό το σκοπό, φαίνονται άλλες φορές ευκολότερα ή δυσκολότερα από άλλα θέματα στα μάτια μαθητών ή εκπαιδευτικών που δε συμμετείχαν στη συγκεκριμένη εκπαιδευτική διαδικασία. Ενδέχεται, για παράδειγμα, ο εκπαιδευτικός να έβαλε ως πρώτο θέμα, μία σύντομη απόδειξη μέσω αντιπαραδείγματος, γιατί πιθανόν να δίδαξε αρκετά τέτοιου είδους θέματα κατά τη διάρκεια του μαθήματος,

Η εκπαιδευτική διαδικασία, άρα και η αξιολόγησή της, είναι συνάρτηση πολλών μεταβλητών, κύριες από τις οποίες είναι οι μαθητές και το επίπεδό τους αλλά και ο εκπαιδευτικός. Έτσι, αν και οι εκπαιδευτικοί που ρωτήθηκαν έπρεπε να στηριχθούν αποκλειστικά και μόνο στα επίπεδα L1, L2, L3 όπως τα περιγράψαμε παραπάνω για την κατάταξη των θεμάτων της αξιολόγησης, εντούτοις είναι απόλυτα κατανοητό ότι στα μάτια των εκπαιδευτικών κάποια θέματα αξιολογούνται ως ευκολότερα ή δυσκολότερα κι έτσι εκεί θεωρήθηκε ότι έγκειται η διαφοροποίηση των απαντήσεών τους σε κάποιες ερωτήσεις. Είναι επίσης σημαντικό να αναφερθεί, ότι παρά το ότι ένα θέμα μπορεί να κατατάσσεται στο επίπεδο L2 ή L3, ενδέχεται στη διαδικασία που χρειάζεται για την ολοκλήρωσή του να υπάρχουν συλλογισμοί, χρήση ιδιοτήτων, υπολογισμοί κλπ που εντάσσονται σε κάποιο από τα προηγούμενα επίπεδα ή συνδυασμό αυτών και φυσικά αξιολογούνται από το διδάσκοντα. Θεωρήθηκε μάλιστα ότι είναι απαραίτητο σε μία αξιολόγηση να υπάρχουν θέματα που αξιολογούν κλιμακωτά σε διάφορα επίπεδα του μοντέλου που προτάθηκε παραπάνω ανάλογα πάντα με τη πορεία της διδασκαλίας, το επίπεδο της τάξης και με τους στόχους του αναλυτικού προγράμματος.

4.4.2 Ποιες από τις ενότητες που υπάρχουν στα επίπεδα του μοντέλου A.Of.Al.P.C. θεωρούν ότι ενισχύουν την αποδεικτική διαδικασία στην Άλγεβρα και ποιες ενότητες που δε διδάσκονται στο αναλυτικό πρόγραμμα θεωρούν κατάλληλες για την ενίσχυση της αποδεικτικής διαδικασίας στο Γυμνάσιο/Λύκειο (ανάλογα τη βαθμίδα στην οποία υπηρετεί ο εκπαιδευτικός).

Στην παρούσα παράγραφο καταγράφονται οι απόψεις των εκπαιδευτικών σχετικά με το ποιες από τις ενότητες που υπάρχουν στα επίπεδα του μοντέλου A.Of.Al.P.C. θεωρούν ότι ενισχύουν την αποδεικτική διαδικασία στην άλγεβρα και ποιες ενότητες που δεν διδάσκονται στο αναλυτικό πρόγραμμα θεωρούν κατάλληλες για την ενίσχυση της αποδεικτικής διαδικασίας στην βαθμίδα στην οποία διδάσκουν. Οι εκπαιδευτικοί T2, T6 και T9 ταυτίζονται στην άποψή τους ότι όλα τα επίπεδα του μοντέλου A.Of.Al.P.C. ενισχύουν την αποδεικτική ικανότητα με τον T2 να σημειώνει ότι οι ενότητες που ασχολούνται με την επίλυση εξισώσεων και ανισώσεων προσφέρουν πολύ λιγότερο στην αποδεικτική διαδικασία. Οι εκπαιδευτικοί T1 και T7 είναι της ίδιας άποψης με τους συναδέλφους τους παραπάνω σημειώνοντας ότι το επίπεδο εκείνο που τονώνει περισσότερο, είναι το L1.

Θεμελιώδης γνώσεις και απαραίτητα εργαλεία όπως οι αποδείξεις των ταυτοτήτων, των ιδιοτήτων των πράξεων, η επίλυση εξισώσεων, ανισώσεων, η εύρεση αντιπαραδειγμάτων και η επίλυση προβλήματος είναι αυτά που θα δώσουν τα απαραίτητα προσόντα για να προχωρήσουν οι μαθητές παρακάτω. Την ίδια άποψη συμμερίζεται και ο εκπαιδευτικός T1 και O T8 αναφέρει:

«Δε θα ήταν υπερβολή να πούμε πως όλες οι ενότητες του μοντέλου προφανώς ενισχύουν την αποδεικτική διαδικασία στην Άλγεβρα, γιατί η δεξαμενή των μαθηματικών είναι τεράστια και οι απαιτήσεις του κάθε τομέα πολλές.»

Ωστόσο, ο εκπαιδευτικός Τ4 διαφοροποιείται αρκετά θεωρώντας πιο σημαντικά τα επίπεδα L2 και L3 στηρίζοντας αυτή την άποψη στο ότι το επίπεδο L2 αναφέρεται στην οικοδόμηση βασικών δεξιοτήτων, απαραίτητων για την αποδεικτική διαδικασία και στο επίπεδο L3 οι μαθητές κατανοούν τη σπουδαιότητα της ακρίβειας στη διατύπωση των θεωριών και είναι σε θέση να αναλύσουν επαγωγικά συστήματα.

Στο δεύτερο σκέλος της ερώτησης που αφορά τις ενότητες εκείνες που ενώ δε διδάσκονται στο αναλυτικό πρόγραμμα, εντούτοις τις θεωρούν κατάλληλες για την ενίσχυση της αποδεικτικής διαδικασίας στο Γυμνάσιο/Λύκειο, οι Τ3, Τ4 και Τ8 συμφωνούν στο ότι λείπει το κεφάλαιο της θεωρίας αριθμών με τον Τ3 να αιτιολογεί την απάντηση αυτή, αναφέροντας:

«(...) Μέσα από την ενασχόληση με τέτοια θέματα ο μαθητής, χωρίς να απαιτείται σχεδόν καμία ιδιαίτερη προηγούμενη γνώση μπορεί να έρθει σε επαφή με διάφορες μορφές απόδειξης και να διαπιστώσει την καθολική ισχύ προτάσεων που αφορούν ακέραιους αριθμούς. (...)»

Οι Τ6, Τ8 και Τ9 αναφέρουν ότι η μέθοδος της μαθηματικής επαγωγής είναι κάτι που λείπει από τα σχολικά βιβλία και κατά την άποψη τους καλό θα ήταν να υπάρχει, καθώς η λογική και το σκεπτικό το οποίο καλλιεργεί δεν καθρεπτίζεται σε κάτι είδη υπάρχον. Ο Τ5 θεωρεί ότι θα έπρεπε στην Α΄ Λυκείου να αποδεικνύονται οι ιδιότητες των πραγματικών αριθμών. Από την άλλη, για τον εκπαιδευτικό Τ1 αυτό που λείπει είναι το πρόβλημα, η διερεύνηση, η ευκαιρία για ελεύθερη έκφραση. Η φορμαλιστική προσέγγιση αιτιολογεί πως δεν δίνει περιθώρια να ανθίσει η φαντασία και η αποδεικτική ικανότητα του μαθητή. Τα φορμαλιστικά χρειάζονται βέβαια, αλλά ως εργαλεία για όλα τα υπόλοιπα, συμπληρώνει. Όλο αυτό το σκεπτικό το αιτιολογεί με την αναφορά του παρακάτω παραδείγματος:

«(...) Πόσα ορθογώνια παραλληλόγραμμα υπάρχουν με διαγώνιο 1; Αν υπάρχουν περισσότερα από 1 τέτοια ορθογώνια ποιες τιμές θα μπορούσε να πάρει το εμβαδόν τους; (φαινομενικά είναι πρόβλημα Γεωμετρίας, αλλά στην ουσία του είναι ένα πρόβλημα μελέτης τριωνύμου). (...)»

Τέλος, ο εκπαιδευτικός Τ2 διαφοροποιείται αρκετά αναφέροντας ότι θεωρεί ότι την αποδεικτική διαδικασία στην άλγεβρα θα ενίσχυαν η ενότητα των μιγαδικών σε συνδυασμό με την αναλυτική γεωμετρία αλλά και την κλασική άλγεβρα (ομάδες).

Θα μπορούσε κάποιος να παρατηρήσει και να αναφέρει συμπερασματικά ότι η πλειοψηφία εκείνων των ενοτήτων που δηλώνονται από τους εκπαιδευτικούς ότι λείπουν από το αναλυτικό πρόγραμμα και οι οποίες θα ενίσχυαν την αποδεικτική διαδικασία και την κατανόηση των μαθητών, συγκλίνουν και θα μπορούσαν να συμπεριληφθούν καλύπτοντας τις ανάγκες τους αυτές, στο κεφάλαιο της θεωρίας αριθμών και ιδιαίτερα της μαθηματικής επαγωγής.

Κεφάλαιο 5ο: Συμπεράσματα

Η ανάγκη για μελέτη και παρατήρηση του βαθμού κατανόησης της αποδεικτικής διαδικασίας από τους μαθητές, μέσα από τα "μάτια" έμπειρων καθηγητών και του δημοσίου αλλά και του ιδιωτικού τομέα οδήγησε την έρευνα, με την βοήθεια του ερωτηματολογίου στα παρακάτω πολύ ενδιαφέροντα συμπεράσματα.

Ενώ η διδαχθείσα ύλη τρέχει σύμφωνα με τον οδηγό σπουδών του υπουργείου παιδείας ανά τάξη, κάτω από αυστηρούς περιορισμούς και ενώ οι μαθητές φαίνεται από τις απαντήσει των καθηγητών, να μην ανταποκρίνονται στο επιθυμητό αποτέλεσμα στην διδασκαλία της αποδεικτικής διαδικασίας, οι έμπειροι καθηγητές που ερωτήθηκαν, επισημαίνουν τις μαθηματικές έννοιες που θεωρούν ότι πρέπει να έχει κατακτήσει ο μαθητής πριν την εισαγωγή του στην αποδεικτική διαδικασία, σε ποια ηλικία πιστεύουν ότι είναι εφικτή η διδασκαλία της αποδεικτικής διαδικασίας και πώς μπορούν να ελέγξουν το επίπεδο της κατανόησης των μαθητών έπειτα από την διδασκαλία τους.

Επίσης ερωτήθηκαν για το ποια μαθηματική πρόταση θεωρούν καταλληλότερη ανάλογα με την τάξη στην οποία διδάσκουν ώστε να ενισχύσουν τον σκοπό τους, ποιες ενότητες οι οποίες διδάσκονται θεωρούν πως είναι οι καταλληλότερες αλλά και ποιες είναι αυτές οι οποίες ενώ λείπουν από τον οδηγό σπουδών θα βοηθούσαν σε βάθος στην κατανόηση της αποδεικτικής διαδικασίας.

Οι απαντήσεις των καθηγητών ως προς την ηλικιακή ομάδα στην οποία μπορεί να εισαχθεί δειλά - δειλά η έννοια της απόδειξης (2ο ερευνητικό ερώτημα) σε όχι τόσο τυπική μορφή συμφωνούν ως επί τω πλείστων με τη βιβλιογραφία που παραθέσαμε στο θεωρητικό πλαίσιο. Η εισαγωγή αυτή μπορεί να γίνει σε κάποια πλαίσια και κατάλληλα διαμορφωμένη στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση όπως αναφέρουν και οι Schifter (1999), Stylianou et al. (2009), Fosnot και Jacob (2010).

Όμως η έρευνα επικεντρώθηκε κυρίως στην εισαγωγή της αποδεικτικής διαδικασίας στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση όπου οι καθηγητές αναφέρθηκαν στο ότι οι εργασίες αναγνώρισης μοτίβων, η διατύπωση εικασιών, η ενασχόληση με τη γεωμετρία, το να βάζεις λανθασμένα βήματα στις αποδείξεις ώστε να τα ανακαλύψουν οι μαθητές, να δίνεις συγκεκριμένα παραδείγματα πριν την απόδειξη, συμβάλλουν στην εισαγωγή και στην περαιτέρω κατανόηση της απόδειξης.

Πιο συγκεκριμένα, όσον αφορά τη γεωμετρία, πολλοί θεωρούν ότι οι αποδείξεις που περιέχονται, συμβάλλουν στην περαιτέρω κατανόηση της αποδεικτικής διαδικασίας και οι καθηγητές που ρωτήθηκαν αναφέρονται αρκετές φορές στη συμβολή της. Βέβαια οι Herbst et al. στο Stylianou et al. (2009), συμπεραίνουν από την έρευνά τους ότι οι αποδείξεις στις τάξεις γεωμετρίας σπάνια παρέχουν ευκαιρίες στους μαθητές να χρησιμοποιήσουν την απόδειξη ως εργαλείο για την εκμάθηση των μαθηματικών, αλλά μάλλον λειτουργούν κυρίως ως εργαλείο για τη διδασκαλία της λογικής σκέψης. Το συμπέρασμά τους υποδηλώνει την ανάγκη επαναπροσδιορισμού της έννοιας της απόδειξης και εάν οι δραστηριότητες εικασίας και απόδειξης πρόκειται να διαδραματίσουν σημαντικό ρόλο στην εκμάθηση των μαθηματικών από τους μαθητές.

Ως συνέχεια του 2ου ερευνητικού ερωτήματος, όλοι οι εκπαιδευτικοί συμφώνησαν ότι οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν και να χειρίζονται με ευχέρεια τις πράξεις και τις ιδιότητες τους και να αναγνωρίζουν τα βασικά σύνολα των αριθμών. Αυτή η άποψη ενισχύεται ακόμα περισσότερο και με την απάντηση που έδωσε οι πλειοψηφία των ερωτηθέντων στην πρώτη ερώτηση του τρίτου άξονα (5ο ερευνητικό ερώτημα), η οποία απευθύνεται στα επίπεδα του μοντέλου A.Of.Al.P.C. Πιο συγκεκριμένα απάντησαν σχεδόν ομόφωνα ότι το επίπεδο L1, το οποίο απαιτεί θεμελιώδης γνώσεις και γνώση απαραίτητων εργαλείων είναι και το πιο σημαντικό για την ενίσχυση της αποδεικτικής διαδικασίας στην άλγεβρα.

Κάπως έτσι κινήθηκαν και οι απαντήσεις τους που αφορά την ηλικία (πρώιμη και θεμελιώδης) στην οποία θα ήταν καταλληλότερη η εισαγωγή της αποδεικτικής διαδικασίας (συνέχεια του 2ου ερευνητικού ερωτήματος). Δηλαδή, πιστεύουν ότι από αρκετά πρώιμη και εισαγωγική τάξη «λεπτών» εννοιών στα μαθηματικά θα μπορούσαν οι εκπαιδευτικοί κάτω από κατάλληλες υποστηρικτικές συνθήκες να διδάξουν την αποδεικτική διαδικασία, όπως επίσης και έπειτα από την πρώτη εισαγωγή που προτείνουν να γίνει στις τελευταίες τάξεις του δημοτικού, να έρθουν οι τάξεις του γυμνασίου και να ενισχύσουν αυτή την προσπάθεια με ιδιαίτερη έμφαση στην αποδεικτική διαδικασία που αρχίζουν να βλέπουν στο μάθημα της γεωμετρίας (επίσης πρώιμο στάδιο).

Κάπως έτσι θα ενισχυθούν τα θεμέλια ανέγερσης μιας ισχυρής βάσης της αποδεικτικής διαδικασίας για να ακολουθήσουν και οι επόμενες τάξεις που θα εμβαθύνουν σε αυτή, χωρίς πολλά προβλήματα που ακολουθούν συνήθως τους μαθητές από το μαθησιακό τους παρελθόν. Έτσι, θα είναι έτοιμοι να διδαχθούν και να κατανοήσουν σε βάθος τις αποδείξεις των μαθηματικών προτάσεων που αναφέρουν οι εκπαιδευτικοί ότι θα χρησιμοποιούσαν στην διδασκαλία τους για να ενισχύσουν και να τονώσουν αυτό το διδακτικό στόχο κατά κύριο λόγο στις τάξεις του λυκείου.

Όσον αφορά την κατάλληλη πρόταση της οποίας την απόδειξη θα δίδασκαν με σκοπό να γίνει όσο το δυνατόν πιο κατανοητή η αποδεικτική διαδικασία (4ο ερευνητικό ερώτημα), οι απαντήσεις διαφέρουν ανάλογα με το αν ο εκπαιδευτικός διδάσκει σε γυμνάσιο ή λύκειο ή ακόμη και αν διδάσκει στη δημόσια ή ιδιωτική εκπαίδευση. Παρατηρείται δηλαδή ότι αναφέρεται η διδασκαλία της απόδειξης βασικών αλγεβρικών ταυτοτήτων (και μάλιστα αναφέρθηκε ότι ενδεχομένως να βοηθούσε και η γεωμετρική απόδειξη των ταυτοτήτων), η απόδειξη απλών ιδιοτήτων των ακεραίων (περιττός + περιττός = άρτιος, το τετράγωνο ενός φυσικού είναι άρτιος αν και μόνον αν ο φυσικός είναι άρτιος), οι αποδείξεις των ιδιοτήτων των πραγματικών αριθμών.

Ενδιαφέρον αποτελεί το γεγονός ότι οι εκπαιδευτικοί κάνουν λόγο και για τις διαφορετικές μεθόδους απόδειξης (ευθεία απόδειξη, απαγωγή σε άτοπο, αντιπαραδείγματα κ.α.) παραθέτοντας την κατάλληλη, κατά την άποψή τους, πρόταση για ενίσχυση της συγκεκριμένης μεθόδου. Φαίνεται ότι οι εκπαιδευτικοί όλων των βαθμίδων αναζητούν τρόπους ενίσχυσης της αποδεικτικής διαδικασίας στο πλαίσιο των μαθημάτων που διδάσκουν.

Ως προς τον έλεγχο κατανόησης της αποδεικτικής διαδικασίας (3ο ερευνητικό ερώτημα), αναφέρθηκε το μοντέλο του Waring (2000) το οποίο τροποποίησαν και παρουσίασαν στο βιβλίο τους οι Stylianou et al. (2009) σύμφωνα με το οποίο κατατάσσουν με κάποια κριτήρια τους μαθητές σε 4 επίπεδα ανάλογα με την κατανόηση της αποδεικτικής διαδικασίας. Εδώ, οι ερωτώμενοι καθηγητές παρέθεσαν αρκετά από τα κριτήρια που υπάρχουν στα τελευταία δύο επίπεδα του παραπάνω μοντέλου και τα οποία αν πληρούνται, δείχνουν ότι ο μαθητής έχει κατανοήσει την ανάγκη απόδειξης μίας μαθηματικής πρότασης και την αποδεικτική διαδικασία.

Σε ένα γενικό πλαίσιο οι εκπαιδευτικοί όλων των βαθμίδων συμφώνησαν στα γενικά προβλήματα τα οποία αντιμετωπίζουν και θεωρούν πως πρέπει να ενισχυθούν ή ακόμα και να αλλάξουν, κάτι το οποίο φάνηκε και στην πρόταση τους για επαναφορά της Θεωρίας Αριθμών στον οδηγό σπουδών υποχρεωτικής διδασκαλίας που προβλέπεται από το Υπουργείου Παιδείας.

Επίσης, όσον αφορά το 5ο ερευνητικό ερώτημα, η πλειοψηφία τους κατέταξε τα θέματα αξιολόγησης που δόθηκαν σε μαθητές Α’ Λυκείου στην άλγεβρα στα ίδια επίπεδα δυσκολίας σύμφωνα με το μοντέλο το οποίο τους δόθηκε, δικαιολογώντας τις προτάσεις τους χωρίς ιδιαίτερα σημαντικές αποκλίσεις, πλην ελάχιστων σημείων όπως έχει καταγραφεί.

Τέλος, όσον αφορά το 1ο ερευνητικό ερώτημα, επειδή δεν αποτελούσε μέρος της συνέντευξης των εκπαιδευτικών, θεωρείται ότι έχει αναπτυχθεί αναλυτικά στην παράγραφο 3.1 των αποτελεσμάτων.

Επίσης, διαφαίνεται από τις απαντήσεις ότι η απόδειξη δυσκολεύει σε μεγάλο βαθμό, άρα ο εκπαιδευτικός πρέπει να καταφύγει και να ενσωματώσει σύγχρονες μεθόδους διδασκαλίας που μέρος τους είναι και οι ΤΠΕ (Polydoros & Baralis, 2019 · Polydoros, 2021), οι οποίες βελτιώνουν/αναπτύσσουν και συνεισφέρουν στις αποδεικτικές δεξιότητες των μαθητών (Πολύδωρος, 2015, 2017).

5.1 Περιορισμοί έρευνας – Μελλοντική έρευνα

Ολοκληρώνοντας, κρίνεται σκόπιμο να αναφερθεί ότι η παρούσα εργασία έχει αρκετούς περιορισμούς, με σημαντικότερο το μέγεθος του δείγματος. Είναι βέβαιο ότι για την ασφαλή εξαγωγή συμπερασμάτων και τη γενίκευσή τους, θα χρειαζόταν έρευνα σε μεγαλύτερο εύρος καθηγητών και σε πολλά διαφορετικά είδη σχολείων καθώς και αντίστοιχη ποσοτική έρευνα και στατιστική ανάλυση. Ίσως μάλιστα μπορεί να αποτελέσει έναυσμα για διεξαγωγή έρευνας με μεγαλύτερο δείγμα που θα αποτελείται από εκπαιδευτικούς, αλλά και μαθητές. Αποτελεί πρωτοτυπία η προσπάθεια εισαγωγής ενός νέου μοντέλου (A.Of.Al.P.C.) για την αλγεβρική ικανότητα των μαθητών της δευτεροβάθμιας αντίστοιχο με εκείνο των Van-Hiele για τη γεωμετρία και ίσως θα μπορούσε να αποτελέσει αφορμή για περαιτέρω έρευνα και διάκριση των επιπέδων σε περισσότερα με στόχο να συμπεριλαμβάνονται και μικρότερες ηλικίες μαθητών (προσχολική, δημοτική εκπαίδευση). Η παρούσα εργασία ας θεωρηθεί ως μία αφορμή για περαιτέρω έρευνα σε αντίστοιχα πεδία και στο νέο μοντέλο που προτάθηκε.

Τα αποτελέσματα των μαθητών (βαθμολογία στην 20βαθμη κλίμακα) ανά φύλο, αναφέρονται στο παράρτημα αφού η ποσοτική ανάλυση της βαθμολογίας τους δεν περιλαμβάνεται στους στόχους της παρούσας εργασίας καθώς η εστίαση γίνεται στις απόψεις των εκπαιδευτικών γύρω από τα θέματα της ωριαίας γραπτής δοκιμασίας. Και εκεί όμως θα μπορούσε να γίνει μεγαλύτερη έρευνα με μεγαλύτερο πλήθος μαθητών διαφόρων τύπων σχολεία. Θα μπορούσε επίσης να γίνει σύγκριση αποτελεσμάτων των μαθητών πριν αλλά και μετά την παρέμβαση του καθηγητή που έχει ως στόχο την αναβάθμιση της αποδεικτικής διαδικασίας. Γνωρίζουν άραγε οι μαθητές να ξεχωρίζουν πού αρχίζει και πού τελειώνει η απόδειξη μίας πρότασης που περιλαμβάνεται στο σχολικό εγχειρίδιο και της οποίας η αρχή και το τέλος δεν διατυπώνονται με σαφήνεια; Θα άλλαζε την στάση τους προς την αποδεικτική διαδικασία αν οι προτάσεις διατυπώνονταν σαφώς και κατόπιν αποδεικνύονταν με την απόδειξη να έχει ξεκάθαρη αρχή και τέλος;

Τέλος, επειδή η συμβολή των σχολικών εγχειριδίων στην εκμάθηση των μαθηματικών είναι καθοριστική, θα μπορούσε να γίνει περαιτέρω ανάλυση με βάση δημοσιευμένες έρευνες, του τρόπου παρουσίασης των αποδείξεων, της συνέπειας των ορισμών και του τρόπου παρουσίασής τους με σκοπό τη βελτίωσή τους.

5.2 Αντί Επιλόγου

Η αρχή για την αναβάθμιση της απόδειξης στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, κρίνεται απαραίτητο ότι πρέπει να γίνει με την αναβάθμιση της απόδειξης στα σχολικά εγχειρίδια και τη συνέπεια στη ροή της ύλης των μαθηματικών. Ένα καλό σχολικό εγχειρίδιο μαθηματικών πρέπει να έχει σε περίοπτη θέση τις αποδείξεις όλων των προτάσεων τις οποίες χρησιμοποιεί (ακόμα και των πιο δύσκολων, ενδεχομένως σε ένα παράρτημα, όχι μόνο για την ολοκληρωμένη παρουσίαση της ύλης, αλλά και για εκείνους τους μαθητές οι οποίοι δείχνουν μεγαλύτερο ενδιαφέρον για τα μαθηματικά και το στενό αναλυτικό πρόγραμμα όπως ορίζεται από τις οδηγίες του Ι.Ε.Π.). Όπως αναφέρθηκε και στην ενότητα 3.1, οι αποδείξεις στα σχολικά εγχειρίδια κυρίως της Άλγεβρας δεν είναι διακριτές στους μαθητές και αυτό φαίνεται από τις ερωτήσεις τους αφού διαχρονικά ζητούν από τους καθηγητές να τους αναφέρουν ρητά από πού αρχίζουν και που τελειώνουν οι αποδείξεις που περιλαμβάνονται στο σχολικό εγχειρίδιο.

Θεωρούμε επίσης προτιμότερο ο καθηγητής να επικεντρώνεται σε αποδείξεις κατάλληλων, για το επίπεδο των μαθητών της τάξης του, προτάσεων παρά σε στείρα ασκησιολογία και εφαρμογή αλγοριθμικών διαδικασιών, μέθοδοι που θεωρούμε ότι δεν προσφέρουν στη μαθηματική αναβάθμιση του μαθητή και στην ενίσχυση της αποδεικτικής διαδικασίας. Με την ασκησιολογία παρατηρείται μία φαινομενική ικανότητα του μαθητή να λύνει προβλήματα αλλά να μη μπορεί να εξηγήσει στοιχειώδεις διαδικασίες από αυτές που εφαρμόζει για την επίλυσή τους.

Από εκεί και πέρα, είναι καλό να περιλαμβάνονται στην ύλη των μαθηματικών της δευτεροβάθμιας εκείνες οι ενότητες για τις οποίες μπορεί να δοθεί σαφής εξήγηση μέσω αποδείξεων στους μαθητές. Δηλαδή το εύρος της ύλης να είναι τόσο ώστε σε κάθε ενότητα να μπορούν να αιτιολογηθούν όλες ή έστω το μεγαλύτερο μέρος των προτάσεων μέσω απόδειξης (στις μεγαλύτερες τάξεις - Λύκειο) ή σκιαγράφησής της (στις μικρότερες τάξεις - Γυμνάσιο). Ακόμη και για προτάσεις που είναι απλές ή πιο σύνθετες, θα πρέπει να δίνεται η απόδειξή τους στο σχολικό εγχειρίδιο ακόμη και αν δεν περιλαμβάνονται τελικά στη σχολική ύλη. Όπως ακριβώς γίνεται και στη γεωμετρία. Αυτό για να φαίνεται ότι ο θεμέλιος λίθος των μαθηματικών είναι η μαθηματική απόδειξη.

Βιβλιογραφία

Balacheff, N. (2002). The researcher epistemology: A deadlock from educational research on proof. In Fou-Lai Lin (Ed.), *International conference on mathematics: Understanding proving and proving to understand*. Taipei: NSC and NTNU.

Bartjes, A. (1991). “*Phenomenology in clinical practice”* in Gray, G. and Pratt, R. Towards a Discipline of Nursing, Melbourne: Churchill Livingstone, pp. 247-264.

Blanton, M. & Stylianou, D. & Knuth, E. (2009). *Teaching and learning of proof across the grades: A K-16 perspective*. New York: Routledge.

Blum, W. & Kirsch, A. (1991). Pre-formal proving: Examples and reflections, *Educational Studies in Mathematics*, 22, 183-203.

Fosnot, C. T., & Jacob, B. (2010). *Young mathematicians at work: Constructing Algebra.* Portsmouth, NH: Heinemann

Goya, S. (2006). The Critical Need for Skilled Math Teachers. *Phi Delta Kappan*, 87 (5): 370-372.

Hanna, G. & de Villiers, M. (2012). *Proof and Proving in Mathematics Education: The 19th ICMI Study,* Springer.

Hanna G. & de Bruyn, Y. (1999). Opportunity to learn proof in Ontario grade twelve mathematics texts, *Ontario Mathematics Gazette*, 37 (4): 23-29.

Hanna, G. & Jahnke, H.N. (1993). Proof and application. *Educ. Stud Math*, 24, 421-438.

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students’ proof schemes: Results from exploratory studies. In A. H. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education III*. Providence, RI: American Mathematical Society.

Hunt, M. (1991). *“Qualitative Research” in Cormack*, The Research Process in Nursing (2nd edition), Oxford: Blackwell Scientific Publications, pp. 117-128.

Θωμαΐδης, Γ. & Μπαρούτης, Δ. & Σαράφης, Γ., Συγκελάκης, Α. (2016). Η διδασκαλία της Ανάλυσης στην Γ΄ Λυκείου: Είναι δυνατό να συνδυάσουμε θεωρητική εμβάθυνση και «μεθοδολογία»;, *Πρακτικά του 33ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας*, Χανιά, 261-281.

Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π.), (2021). *Οδηγίες διδασκαλίας μαθημάτων ΓΕΛ κατά το σχολικό έτος 2021 – 2022*. http://iep.edu.gr/el/graf-b-yliko-2021-2022/geniko-lykeio [25.03.2022]

ΙΤΥΕ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ», *Διαδραστικά Σχολικά Βιβλία*, Σχολικά Βιβλία Μαθηματικών Λυκείου. http://ebooks.edu.gr/ebooks/ [15.12.2022]

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations: The Logic of Mathematical Discovery,* Cambridge University Press 1976.

Λιάκος, Π. (2017). *Η έννοια και οι λειτουργίες της απόδειξης στη διδασκαλία των μαθηματικών και της φυσικής: μελέτη των εκφράσεων σε ελληνικά σχολικά βιβλία της πρώτης λυκείου*, Διπλωματική Εργασία, Π.Τ.Δ.Ε. Πανεπιστήμιο Αιγαίου.

Mamona-Downs, J. & Downs, M.L. (2005). The identity of problem solving. *The Journal of Mathematical Behavior,* 24, 385-401.

Mamona-Downs, J. & Downs, M. (2009). Proof Status from a Perspective of Articulation. *Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education,* 2, 94-99.

Μούτσιος-Ρέντζος, Α., & Πιτσιλή-Χατζή, Δ. (2015). Όψεις της απόδειξης στο σχολικό βιβλίο της Άλγεβρας της Α' Λυκείου. *Πρακτικά του 1ου Πανελληνίου Συνεδρίου με Διεθνή Συμμετοχή Ανάπτυξη Εκπαιδευτικού Υλικού στα Μαθηματικά και τις Φυσικές Επιστήμες,* Ρόδος: Πανεπιστήμιο Αιγαίου, 561-578.

NCTM (2007). What are the characteristics of students with learning difficulties in mathematics?, *The National Council of Teachers of Mathematics* https://www.nctm.org/Research-and-Advocacy/Research-Brief-and-Clips/Clips/Student_with_Difficulties_Clip/ [25.12.202]

Polydoros, G. & Baralis, G. (2019). Impact of educational software use in correlation with students' math performance, *Social Science and Humanities Journal*, pp. 1535-1551.

Polydoros, G. (2021). Teaching and learning mathematics with mobile devices, *Journal of Research and Opinion*, 7, pp. 2978-2985.

Πολύδωρος, Γ. (2015). Οι ΤΠΕ και η επίδρασή τους στις Μεταγνωστικές δεξιότητες και στα Μαθησιακά στυλ, *Πρακτικά του 8ου Διεθνούς Συνεδρίου της Ανοικτής και εξ Αποστάσεως Εκπαίδευσης*, 8, 2Α

Πολύδωρος, Γ. (2017). Οι νέες τεχνολογίες ως εργαλείο ενίσχυσης των πολλαπλών ευφυϊών, *Ανοικτή Εκπαίδευση: το περιοδικό για την Ανοικτή και εξ Αποστάσεως Εκπαίδευση και την Εκπαιδευτική Τεχνολογία*, 13, 2, pp. 140-148.

Reid, D. (2001). Proof, proofs, proving and probing: Research related to proof, *Proceedings of the 25th Conference of the PME,* I, 360. Utrecht, Netherlands. http://www.acadiau.ca/~dreid/publications/proof/proof.htm [15.12.2021]

Schifter, D. (1999). Reasoning about operations: Early algebraic thinking, grades K through 6. In L. Stiff and F. Curio, (Eds.), *Mathematical reasoning, K–12: 1999 NCTM Yearbook*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Σαχίνη-Καρδάση, Α. (1997). *Μεθοδολογία Έρευνας - Εφαρμογές στο χώρο της υγείας*, Γ έκδοση, Βήτα Medical Arts.

Stylianides, A. J. (2007). The notion of proof in the context of elementary school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 65,* 1–20.

Συγκελάκης, Α. (2016). Η σημασία των αποδείξεων θεωρίας του σχολικού βιβλίου της Γ΄ Λυκείου στην επίλυση ασκήσεων, η επίδρασή τους στα θέματα των Πανελληνίων εξετάσεων και η επιρροή των παλαιότερων σχολικών βιβλίων, *Πρακτικά 8ης Μαθηματικής Εβδομάδας*, Θεσσαλονίκη

Συγκελάκης, Α. (2017). Αξιοποίηση της αποδεικτικής διαδικασίας με στόχο την αναβάθμιση της διδασκαλίας των Μαθηματικών του Λυκείου, *Πρακτικά 7ης Ημερίδας Μαθηματικών της Ελληνογαλλικής Σχολής Καλαμαρί με θέμα: «Η μαθηματική απόδειξη ως πρόβλημα διδασκαλίας και μάθησης»*, Θεσσαλονίκη, 23-34.

Συγκελάκης, Α. (2018). Μια πρόταση για τη διδασκαλία της Άλγεβρας στην Α΄ και Β΄ Λυκείου με έμφαση στην αποδεικτική διαδικασία, *Ευκλείδης Γ΄*, τ.89, 66-85.

Τουμάσης, Μ. (2004). *Σύγχρονη Διδακτική των Μαθηματικών,* Αθήνα: Gutenberg.

Walker, R. J. (2008). Twelve characteristics of an effective teacher: A longitudinal, qualitative, quasi-research study of in-service and pre-service teachers' opinions. *Educational Horizons*, pp. 61-68.

Walters, A.J. (1995). The phenomenological movement: implications for nursing research, *Journal of Advanced Nursing*, 22 (4), pp. 791-799.

Χανλαρίδου, Χ. Α. (2019). *Εξόρυξη Εκπαιδευτικών Δεδομένων και Μαθησιακή Ανάλυση*, Πτυχιακή Εργασία, Π.Τ.Δ.Ε. Πανεπιστήμιο Αιγαίου.

Παράρτημα

Παράρτημα Α: Τα θέματα της αξιολόγησης

Τα θέματα της ωριαίας γραπτής δοκιμασίας των μαθητών αμέσως μετά από την ολοκλήρωση της παραγράφου 2.1 – Οι πράξεις και οι ιδιότητές τους στην Άλγεβρα της Α Λυκείου σε ένα τμήμα 23 μαθητών σε κάποιο Γενικό Λύκειο του Ηρακλείου, με έμφαση στην αποδεικτική διαδικασία.

Πέμπτη, 15 Οκτωβρίου 2021

Άλγεβρα Α Λυκείου – Πραγματικοί Αριθμοί

Όνομα:______________________________________

<u>Θέμα 1ο</u>

Να δώσετε ένα αντιπαράδειγμα στον επόμενο (λανθασμένο) ισχυρισμό: *«Αν για τον πραγματικό αριθμό α ισχύει ότι $\alpha^2 > 9$, τότε $\alpha > 3$»* **(Μονάδες 15)**

<u>Θέμα 2ο</u>

Να αποδείξετε ότι $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 - \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 = \alpha\beta$ **(Μονάδες 20)**

<u>Θέμα 3ο</u>

Δίνεται η παράσταση $A = \frac{x^3 - x}{x^3 - 1} \cdot \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x}$

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α. **(Μονάδες 10)**

β) Να αποδείξετε ότι $A = 1$. **(Μονάδες 15)**

<u>Θέμα 4ο</u>

Η Μαρία είπε στο Γιώργο να γράψει στο τετράδιό του ένα θετικό ακέραιο αριθμό και αμέσως μετά να ακολουθήσει την εξής διαδικασία:

Να προσθέσει σε αυτόν το 2 και ό,τι βρει να το υψώσει στο τετράγωνο. Έπειτα να αφαιρέσει τον αριθμό 4, το αποτέλεσμα να το διαιρέσει με τον αρχικό αριθμό και τέλος από τον αριθμό που θα βρει να αφαιρέσει τον αρχικό αριθμό.

Στο τέλος η Μαρία μάντεψε ότι ο τελικός αριθμός που βρήκε ο Γιώργος μετά από την παραπάνω διαδικασία, ήταν το 4.

Να αποδείξετε ότι όποιον αριθμό και αν έγραφε ο Γιώργος στο τετράδιό του, το τελικό αποτέλεσμα θα ήταν **πάντα** το 4. **(Μονάδες 20)**

<u>Θέμα 5ο</u>

Με δεδομένη την ταυτότητα του **θέματος 2** (ή οποιονδήποτε άλλο τρόπο), να γράψετε τον αριθμό **2000** ως διαφορά τετραγώνων δύο ακέραιων αριθμών. **(Μονάδες 20)**

Παράρτημα Β: Βαθμολογίες των μαθητών ανά φύλλο και κατάταξη στο αντίστοιχο επίπεδο A.Of.Al.P.C.

Αριθμός Γραπτού	Φύλο	Βαθμολογία	Επίπεδο
1	K	5.4	L1
2	A	14	L3
3	A	6	L1
4	K	9.4	L1
5	K	3	L1
6	K	10.4	L2
7	K	15	L3
8	A	1.2	L1
9	K	16	L3
10	K	2	L1
11	A	12.8	L2
12	A	0	L1
13	A	9.4	L1
14	K	13.4	L
15	A	16.8	L3

16	**K**	**18.8**	**L3**
17	**A**	**6.8**	**L1**
18	**A**	**11**	**L2**
19	**A**	**15**	**L3**
20	**K**	**6.2**	**L1**
21	**K**	**14.4**	**L2**
22	**A**	**1**	**L1**

Παράρτημα Γ: Ενδεικτική συνέντευξη

Ακολουθεί η ενδεικτική απάντηση του πρώτου εκ των εννέα εκπαιδευτικών όπως στάλθηκε από τον ίδιο. Για πολλές από τις απαντήσεις ζητήθηκαν και δόθηκαν επιπλέον διευκρινήσεις οι οποίες όμως δεν αποτυπώνονται στις παρακάτω αρχικές τους απαντήσεις.

1^{ος} άξονας: Δημογραφικά Στοιχεία

1) Η ηλικία σας είναι:

	Κάτω των 30
	30-40
	40-50
X	πάνω από 50

2) Φύλλο:

X	Γυναίκα
	Άνδρας

3) Είστε εκπαιδευτικός στο:

X	Δημόσιο Τομέα
	Ιδιωτικό τομέα

4) Διδάσκετε (κυρίως) σε μαθητές:

	Γυμνασίου
X	Λυκείου

5) Είστε κάτοχος:

X	Διδακτορικού
X	Μεταπτυχιακού
	Άλλο (2ος Πανεπιστημιακός Τίτλος, 2ο Μεταπτυχιακό)
	Άλλο

6) Πόσα χρόνια διδάσκετε συνολικά στο δημόσιο/ιδιωτικό τομέα;

	Λιγότερα από 5
	5-10
	10-20
X	περισσότερα από 20

2ος άξονας: Ερωτήσεις για την αποδεικτική διαδικασία

1) Ποιες μαθηματικές έννοιες θεωρείτε ότι πρέπει να έχει κατανοήσει ένας μαθητής πριν την εισαγωγή στην αποδεικτική διαδικασία;

Απάντηση

Ειδικές μαθηματικές έννοιες του αντικειμένου όπως στη Γεωμετρία είναι τα παραλληλόγραμμα και οι ιδιότητές τους και στην Άλγεβρα οι πράξεις και οι ιδιότητές τους, συνεπαγωγές και ισοδυναμίες, στοιχειώδη προτασιακό λογισμό (όχι φορμαλιστικά).
Όμως κυρίως χρειάζονται και δεξιότητες (πέρα από τις μαθηματικές έννοιες) όπως δημιουργία εικασιών (π.χ. μήπως ισχύει ότι…), λήψη αποφάσεων (π.χ. απορρίπτεται

αυτός ο ισχυρισμός…), εμπλοκή σε διαδικασίες δοκιμής και απόρριψης, ικανότητα διαπραγμάτευσης και συζήτησης για την ορθότητα (η μη ορθότητα) ενός συλλογισμού, οργάνωση των δεδομένων ενός προβλήματος για τον εντοπισμό σχέσεων (π.χ. αν δύο αριθμοί είναι ίσοι με τρίτο αριθμό τότε είναι ίσοι και μεταξύ τους), ευελιξία σε οπτικές (π.χ. ένα ευθύγραμμο τμήμα να το βλέπουν τόσο ως χορδή ενός τόξου όσο και ως βάση ενός ισοσκελούς τριγώνου), ιεράρχηση αποδεικτικών βημάτων (επαγωγικός συλλογισμός) κ.α.

2) Ανάλογα με την τάξη στην οποία διδάσκετε, ποια πιστεύετε ότι είναι μία κατάλληλη πρόταση την απόδειξη της οποίας θα διδάσκατε με σκοπό να γίνει όσο το δυνατόν πιο κατανοητή η αποδεικτική διαδικασία; Εξηγήστε τους λόγους της επιλογής σας.

Απάντηση

Για την διδασκαλία της ευθείας απόδειξης είναι κατάλληλες οι αποδείξεις των ταυτοτήτων και των ιδιοτήτων των αναλογιών.

Για την απαγωγή σε άτοπο μου αρέσει η εξής σπαζοκεφαλιά: ένας πύργος κινείται σε μια σκακιέρα είτε οριζόντια σε μία γραμμή είτε κατακόρυφα σε μία στήλη. Είναι δυνατόν ο πύργος να ξεκινήσει από το πάνω-αριστερά τετράγωνο και να καταλήξει στο κάτω-δεξιά σαρώνοντας όλα τα τετράγωνα της σκακιέρας από μία φορά;

3) Σε ποια ηλικία πιστεύετε ότι είναι εφικτή η διδασκαλία της αποδεικτικής διαδικασία; Ποιες ενότητες των μαθηματικών που διδάσκονται στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, πιστεύετε ότι βοηθούν στη κατανόηση της αποδεικτικής διαδικασίας;

Απάντηση

Νομίζω ότι τις δεξιότητες που ανέφερα στο 1) θα πρέπει να τις αναπτύξουν πολύ νωρίς, από τις πρώτες τάξεις του Δημοτικού. Για παράδειγμα να οργανώνουν τα δεδομένα ενός προβλήματος (π.χ. μέσω εννοιολογικών χαρτών), να ελέγχουν την ορθότητα ισχυρισμών, να λαμβάνουν αποφάσεις. Δίνω ένα παράδειγμα προβλήματος για Δ' τάξη Δημοτικού: *Δύο αδέλφια, ο Ανδρέας και η Βάσω, έλαβαν δώρο ένα κουτί με 10 σοκολατάκια και κάθισαν δίκαια να τα μοιραστούν. Είχαν φάει από 2 σοκολατάκια ο καθένας, όταν τους επισκέφτηκε η καλή τους φίλη η Γιάννα. Τα αδέλφια θεώρησαν καλό τα σοκολατάκια που είχαν απομείνει να τα κάνουν τρεις ίσες μερίδες, δύο δικές τους και μία για την Γιάννα. Τελικά, πόσα σοκολατάκια έφαγε το κάθε παιδί;*

Θα έλεγα ότι η Γεωμετρία δίνει πολλές ευκαιρίες στους μαθητές για απόδειξη. Για παράδειγμα η πρόταση «δύο κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες» δίνει την ευκαιρία για ευθεία απόδειξη, ενώ η πρόταση «δεν υπάρχει τρίγωνο με δύο ορθές γωνίες» δίνει την ευκαιρία για απόδειξη με απαγωγή σε άτοπο.

4) Πώς πιστεύετε ότι μπορείτε να ελέγξετε την κατανόηση της απόδειξης από τους μαθητές αφού έχετε κάνει εισαγωγή στην αποδεικτική διαδικασία; Προτείνετε τρόπους ελέγχου κατανόησης της απόδειξης και της αναγκαιότητάς της.

Απάντηση

1. Να εξηγήσουν τα αποδεικτικά βήματα μιας ορθής απόδειξης δημιουργώντας εννοιολογικούς χάρτες (εδώ για παράδειγμα)
2. Να κατασκευάσουν μια δική τους απόδειξη και σε ζεύγη να τις ανταλλάξουν για έλεγχο.
3. Να κατασκευάσουν ένα δικό τους πρόβλημα και να το μοιραστούν με τους συμμαθητές τους.
4. Να εκφράσουν τις σκέψεις τους για την επίλυση ενός προβλήματος (κυρίως η απόδειξη είναι έκφραση) ώστε να φανεί εάν οργανώνουν τα δεδομένα τους και πώς συνδέουν τα στοιχεία του προβλήματος.

3ος άξονας: Ερωτήσεις πάνω στα επίπεδα του μοντέλου A.Of.Al.P.C. (Assessment Of Algebraic Proof Competence)

1) Κατά πόσο θεωρείτε ότι ανταποκρίνονται τα θέματα της συγκεκριμένης αξιολόγησης στα επίπεδα του μοντέλου A.Of.Al.P.C.; Σχολιάστε τα και αντιστοιχίστε το κάθε θέμα με το αντίστοιχό του επίπεδο δικαιολογώντας την απάντησή σας.

Απάντηση

Δεδομένου ότι τα θέματα είναι για την Άλγεβρα της Α’ Λυκείου βλέπω ότι περισσότερο εμπίπτουν στο $2^{ο}$ επίπεδο και συγκεκριμένα:

Θέμα 1ο: Επίπεδο L2, ως αναζήτηση αντιπαραδείγματος αλλά σχετικά απλού (θεωρώ εύκολο το να επιλέξει κάποιος αρνητικούς)
Θέμα 2ο: Επίπεδο L2, ως απόδειξη ταυτότητας
Θέμα 3ο: Επίπεδο L2, ως απλοποίηση κλασματικής αλγεβρικής παράστασης
Θέμα 4ο: Επίπεδο L2, ως βηματικός ορισμός μιας σταθερής συνάρτησης που απαιτεί την χρήση μεταβλητών, και εξαγωγή πράξεων
Θέμα 5ο: Επίπεδο L3 ως διερεύνηση-πρόβλημα

2) Ποιες από τις ενότητες που υπάρχουν στα επίπεδα του μοντέλου A.Of.Al.P.C. θεωρείτε ότι ενισχύουν την αποδεικτική διαδικασία στην Άλγεβρα; Ποιες ενότητες που δε διδάσκονται στο αναλυτικό πρόγραμμα θεωρείτε κατάλληλες για την ενίσχυση της αποδεικτικής διαδικασίας στο Γυμνάσιο/Λύκειο (ανάλογα τη βαθμίδα στην οποία υπηρετεί ο εκπαιδευτικός).

Απάντηση

Όλα ως ένα βαθμό ενισχύουν την αποδεικτική ικανότητα, θα έλεγα όμως ότι ιδιαιτέρως την ενισχύουν οι αποδείξεις των ταυτοτήτων, των ιδιοτήτων των πράξεων, η επίλυση εξισώσεων, ανισώσεων, η εύρεση αντιπαραδειγμάτων, η επίλυση προβλήματος.
Για όσα δεν διδάσκονται, θα έλεγα ότι λείπει το πρόβλημα, η διερεύνηση, η ευκαιρία για ελεύθερη έκφραση. Οτιδήποτε γίνεται φορμαλιστικό «βλάπτει» την φαντασία και την

αποδεικτική ικανότητα του μαθητή. Τα φορμαλιστικά χρειάζονται βέβαια, αλλά ως εργαλεία (π.χ. το να μπορώ να βρίσκω τις ρίζες του τριωνύμου).

Παράδειγμα προβλήματος: Πόσα ορθογώνια παραλληλόγραμμα υπάρχουν με διαγώνιο 1; Αν υπάρχουν περισσότερα από 1 τέτοια ορθογώνια ποιες τιμές θα μπορούσε να πάρει το εμβαδόν τους; (φαινομενικά είναι πρόβλημα Γεωμετρίας, αλλά στην ουσία του είναι ένα πρόβλημα μελέτης τριωνύμου).

Στο κομμάτι της διερεύνησης και της ανάπτυξης αναπαραστάσεων για μία έννοια βοηθάει πολύ και το εκπαιδευτικό λογισμικό.