



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Αριθμητική Προσέγγιση της Λύσης της Κυματικής Εξίσωσης

Παναγιώτης Παράσχος

Επιβλέπων Καθηγητής
Γεώργιος Ζουράρης

11 Ιουλίου 2019

Πρόλογος

Οι Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις (Μ.Δ.Ε), αποτελούν ένα από τα βασικότερα εργαλεία για την επίλυση προβλημάτων στις θετικές επιστήμες. Ωστόσο, στις περισσότερες περιπτώσεις έχουν τέτοια μορφή, ώστε να μην υπάρχουν μέθοδοι αναλυτικής επίλυσής τους. Σε αυτές τις περιπτώσεις, καταφεύγουμε σε αριθμητικές μεθόδους προσεγγιστικής επίλυσής τους.

Στην παρούσα εργασία, γίνεται η ανάπτυξη και η ανάλυση μιας κατηγορίας αριθμητικών μεθόδων, τη Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων, για μια συγκεκριμένη μορφή προβλημάτων, η οποία αποτελείται από μία Μ.Δ.Ε, την Κυματική Εξίσωση στη μία διάσταση, τις αρχικές συνθήκες της λύσης της και της χωρικής παραγωγού της, καθώς και ομογενείς συνοριακές συνθήκες τύπου Dirichlet.

Στο κεφάλαιο 0, γίνεται μία σύντομη εισαγωγή στους χώρους Sobolev.

Στο πρώτο κεφάλαιο, παρουσιάζεται το πρόβλημα αριμών και συνοριακών τιμών, που θα μας απασχολήσει και το αριθμητικό σχήμα, που θα χρησιμοποιηθεί για την προσεγγιστική επίλυσή του.

Στο δεύτερο κεφάλαιο, γίνονται κάποιες εκ των προτέρων εκτιμήσεις σφάλματος της μεθόδου, δηλαδή εκτιμήσεις της διαφοράς της ακριβούς με την προσεγγιστική λύση.

Στο τρίτο κεφάλαιο, παρουσιάζεται αναλυτικά η υλοποίηση της μεθόδου με γραμμικές, τετραγωνικές και κυβικές splines

Στο τέταρτο κεφάλαιο, ορίζεται ένα συγκεκριμένο πρόβλημα, του οποίου η λύση είναι γνωστή και γίνονται συγκρίσεις της αναλυτικής λύσης με τη λύση των πεπερασμένων στοιχείων (σφάλματα, γραφικές παραστάσεις).

Στο Παράρτημα, βρίσκεται ως παράδειγμα ένας από τους τρεις κώδικες που αναπτύχθηκαν για την υλοποίηση της μεθόδου.

Σε αυτό το σημείο, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή της εργασίας, κύριο Γεώργιο Ζουράρη, ο οποίος ήταν ανά πάσα στιγμή πρόθυμος να με βοηθήσει σε οποιοδήποτε πρόβλημα αντιμετώπισα κατά την εκπόνηση της εργασίας.

Παναγιώτης Παράσχης

Περιεχόμενα

0	Στοιχεία θεωρίας χώρων Sobolev	3
1	Περιγραφή του Προβλήματος	4
2	L^2-Εκτιμήσεις Σφάλματος	6
3	Υλοποίηση της μεθόδου	19
3.1	Υλοποίηση με γραμμικές splines	19
3.2	Υλοποίηση με τετραγωνικές splines	24
3.3	Υλοποίηση με κυβικές splines	29
4	Αποτελέσματα για ένα συγκεκριμένο πρόβλημα	34
4.1	Αποτελέσματα για τις γραμμικές splines	35
4.2	Αποτελέσματα για τις τετραγωνικές splines	36
4.3	Αποτελέσματα για τις κυβικές splines	37
5	Παράρτημα	39

0 Στοιχεία θεωρίας χώρων Sobolev

Στη θεωρία ασθενών λύσεων για τις Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις, χρησιμοποιείται μια κατηγορία χώρων με νόρμα, οι χώροι Sobolev. Σε αυτό το κεφάλαιο, θα γίνει μια συνοπτική παρουσίαση των χώρων αυτών. Στις προτάσεις και τα θεωρήματα του παρόντος κεφαλαίου, δεν θα δίνονται αποδείξεις, καθώς είναι πέρα από τους σκοπούς της εργασίας.

Θεωρούμε τον χώρο $(C_0[a, b], \|\cdot\|_{L^p(a,b)})$ με

$$C_0[a, b] = \{f \in C[a, b] : f(a) = f(b) = 0\}$$

και

$$\|f\|_{L^p(a,b)} = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

Το ολοκλήρωμα, με το οποίο ορίζουμε τη νόρμα, πρόκειται για το ολοκλήρωμα του Lebesgue.

Γενικότερα, ορίζουμε τους χώρους $C_0^m[a, b]$, $0 \leq m \leq \infty$ των $C^m[a, b]$ συναρτήσεων, που μηδενίζονται στα άκρα του διαστήματος $[a, b]$.

Ορισμός 1. Ορίζουμε τον χώρο $(L^p(a, b), \|\cdot\|_{L^p(a,b)})$ ως την κλειστότητα του $C_0[a, b]$ ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_{L^p(a,b)}$, δηλαδή για κάθε $u \in L^p(a, b)$ υπάρχει ακολουθία $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C_0[a, b]$ τ.ω.

$$\|u_n - u\|_{L^p(a,b)} \rightarrow 0.$$

Σχόλιο: Ο χώρος $L^p(a, b)$ δεν αποτελείται από συναρτήσεις, αλλά από κλάσεις ισοδυναμίας συναρτήσεων, για τις οποίες έχουμε ότι

$$f \sim g \text{ αν } f = g \text{ σχεδόν παντού στο } (a, b).$$

Επειδή ο όρος 'σχεδόν παντού' απαιτεί γνώσεις Θεωρίας Μέτρου, θα θεωρήσουμε ότι δύο συναρτήσεις $f, g \in L^p(a, b)$ ταυτίζονται εάν $f \sim g$ και θα αντιμετωπίζουμε τον $L^p(a, b)$ ως χώρο συναρτήσεων. Το ίδιο θα γίνει αργότερα και με τους χώρους Sobolev.

Τώρα, θα γενικεύσουμε την έννοια της παραγώγου ως εξής:

Έστω $u \in C^1[a, b]$. Τότε, για κάθε $\varphi \in C_0^\infty[a, b]$, ολοκληρώνοντας την $u\varphi$ κατά μέρη, έχουμε ότι

$$\int_a^b u'(x)\varphi(x)dx = - \int_a^b u(x)\varphi'(x)dx$$

Έτσι, θα γενικεύσουμε την παράγωγο της u σύμφωνα με την παραπάνω σχέση.

Ορισμός 2. Έστω $u \in L^1(a, b)$. Λέμε ότι η u είναι ασθενώς παραγωγίσιμη, εάν υπάρχει $v \in L^1(a, b)$ τέτοια ώστε

$$\int_a^b v(x)\varphi(x)dx = - \int_a^b u(x)\varphi'(x)dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty[a, b]$$

Η v ονομάζεται ασθενής παράγωγος της u και συμβολίζεται με u' .

Ορισμός 3. Έστω $u \in L^1(a, b)$. Λέμε ότι η u έχει ασθενή παράγωγο k τάξης, εάν υπάρχει $v \in L^1(a, b)$ τέτοια ώστε

$$\int_a^b v(x)\varphi(x)dx = (-1)^k \int_a^b u(x)\varphi^{(k)}(x)dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty[a, b]$$

Η v συμβολίζεται με $u^{(k)}$ ή με u'' , αν $k = 2$.

Παρατηρούμε ότι η ύπαρξη ασθενών παραγώγων k τάξης δεν απαιτεί ύπαρξη παραγώγων τάξης μικρότερης του k .

Ορισμός 4. Ορίζουμε τους χώρους Sobolev $(H^k(a, b), \|\cdot\|_k)$, $k \geq 1$ ως εξής:

$$H^k(a, b) = \{u \in L^2(a, b) : \text{οι } u^{(s)} \text{ υπάρχουν και } u^{(s)} \in L^2(a, b) \quad \forall s \leq k\}$$

$$\|u\|_k = \left(\sum_{s=0}^k \|u^{(s)}\|_{L^2(a,b)}^2 \right)^{1/2}$$

Οι χώροι Sobolev ορίζονται σε πιο γενική μορφή, βάσει των χώρων L^p , αλλά στην παρούσα εργασία μας ενδιαφέρουν μόνο οι χώροι H^k .

Ορισμός 5. Ορίζουμε τον χώρο $(H_0^1(a, b), \|\cdot\|_1)$, υπόχωρο του $H^1(a, b)$ ως την κλειστή θήκη του $C_0^\infty[a, b]$ ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_1$. Δηλαδή, για κάθε $u \in H_0^1(a, b)$, υπάρχει ακολουθία $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C_0^\infty[a, b]$ τέτοια ώστε

$$\|u_n - u\|_1 \rightarrow 0$$

Θεώρημα 1. Ο $H_0^1(a, b)$ είναι ο χώρος των συναρτήσεων του $H^1(a, b)$, που μηδενίζονται στα άκρα.

Πρόταση 1. Οι χώροι $(L^p(a, b), \|\cdot\|_{L^p(a,b)})$, $(H^k(a, b), \|\cdot\|_k)$ και $(H_0^1(a, b), \|\cdot\|_1)$ είναι πλήρεις δηλαδή κάθε ακολουθία Cauchy στους $L^p(a, b)$, $H^k(a, b)$, $H_0^1(a, b)$ συγκλίνει ως προς την αντίστοιχη νόρμα.

Παρατηρούμε ότι οι νόρμες $\|\cdot\|_{L^2(a,b)}$ και $\|\cdot\|_k$ παράγονται από τα εσωτερικά γινόμενα $(\cdot, \cdot)_{L^2(a,b)}$, $(\cdot, \cdot)_k$ αντίστοιχα, τα οποία είναι τα

$$(u, v)_{L^2(a,b)} = \int_a^b u(x)v(x)dx$$

$$(u, v)_k = \sum_{s=0}^k (u^{(s)}, v^{(s)})_{L^2(a,b)}$$

Τώρα, έχοντας κάνει μια σύντομη εισαγωγή στους χώρους Sobolev, θα προχωρήσουμε στην περιγραφή του προβλήματος που θα μας απασχολήσει στο υπόλοιπο της εργασίας.

1 Περιγραφή του Προβλήματος

Θεωρούμε το εξής πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών με ομογενείς συνοριακές συνθήκες Dirichlet

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) - (\alpha(x)u_x(x, t))_x &= f(x, t), \quad x \in [a, b], \quad t \in [0, T], \quad T > 0 \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad x \in [a, b] \\ u_t(x, 0) &= u_1(x), \quad x \in [a, b] \\ u(a, t) &= u(b, t) = 0, \quad t \in [0, T] \end{aligned} \tag{1}$$

με $\alpha(x) \geq \alpha_0$, $\forall x \in [a, b]$, για κάποιο $\alpha_0 > 0$.

Υποθέτουμε ότι η λύση u του προβλήματος (1), ικανοποιεί τις απαραίτητες συνθήκες ομαλότητας που θα χρειαστούμε αργότερα για τις εκτιμήσεις σφαλμάτων των αριθμητικών μεθόδων της προσεγγιστικής επίλυσης του (1).

Εστω $\varphi \in H_0^1(a, b)$. Τότε, πολλαπλασιάζοντας την Μ.Δ.Ε. του προβλήματος (1) με φ και ολοκληρώνοντας στο $[a, b]$, έχουμε ότι $\forall t \in [0, T]$

$$\int_a^b u_{tt}(x, t)\varphi(x)dx - \int_a^b (\alpha(x)u_x(x, t))_x\varphi(x)dx = \int_a^b f(x, t)\varphi(x)dx. \quad (2)$$

Εφαρμόζοντας ολοκλήρωση κατά μέρη, έχουμε ότι

$$- \int_a^b (\alpha(x)u_x(x, t))_x\varphi(x)dx = \int_a^b \alpha(x)u_x(x, t)\varphi'(x)dx \quad (3)$$

Ορίζουμε το L^2 -εσωτερικό γινόμενο (\cdot, \cdot) ως εξής:

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx, \quad \forall f, g \in L^2(a, b)$$

και $\|\cdot\|$ την επαγόμενη από αυτό νόρμα.

Τότε, η (3) και η (2) δίνουν

$$(u_{tt}, \varphi) + (\alpha u_x, \varphi') = (f, \varphi), \quad \forall \varphi \in H_0^1(a, b).$$

Ορίζουμε τη διγραμμική μορφή $\gamma : H_0^1(a, b) \times H_0^1(a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ τ.ω.

$$\gamma(f, g) = (\alpha f', g'), \quad \forall f, g \in H_0^1(a, b).$$

Τότε, καταλήγουμε στην ακόλουθη ασθενή μορφή του προβλήματος (1):

$$\begin{aligned} (u_{tt}, \varphi) + \gamma(u, \varphi) &= (f, \varphi), \quad \forall \varphi \in H_0^1(a, b) \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad x \in [a, b] \\ u_t(x, 0) &= u_1(x), \quad x \in [a, b] \\ u(a) &= u(b) = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Τώρα, το πρόβλημα έχει έρθει σε τέτοια μορφή, ώστε να επιλυθεί αριθμητικά, με την ακόλουθη Μέθοδο Πεπερασμένων Στοιχείων:

Θεωρούμε τη διαμέριση $a = x_0 < x_1 < \dots < x_J = b$ του $[a, b]$, με $x_i = a + ih$, $i = 0, \dots, J$. Τότε ορίζουμε τον υπόχωρο S_h^1 του $H_0^1(a, b)$ ως εξής:

$$S_h^1 := \{s \in C[a, b] : s|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}^1, \quad i = 0, \dots, J-1, \quad s(a) = s(b) = 0\}$$

Θεωρούμε επίσης τη διαμέριση $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ του $[0, T]$, με $t_n = nk$, $n = 0, \dots, N$.

Έτσι, θεωρούμε το ακόλουθο πρόβλημα προσέγγισης της λύσης του προβλήματος (4):

Αναζητούμε $U^n \in S_h^1$ προσέγγιση της $u(\cdot, t_n)$ τ.ω.

$$\left(\frac{U^{n+1} - 2U^n + U^{n-1}}{k^2}, \chi \right) + \gamma(U_\beta^n, \chi) = (f_\beta^n, \chi), \quad \forall \chi \in S_h^1, \quad n = 1, \dots, N-1 \quad (5)$$

U^0, U^1 δεδομένα,

όπου $f_\beta^n = \beta f(\cdot, t_{n+1}) + (1-2\beta)f(\cdot, t_n) + \beta f(\cdot, t_{n-1})$ και $U_\beta^n = \beta U^{n+1} + (1-2\beta)U^n + \beta U^{n-1}$, $\frac{1}{4} \leq \beta \leq \frac{1}{2}$.

Εκτός από τον S_h^1 , μπορούμε να θεωρήσουμε και άλλους υποχώρους του $H_0^1(a, b)$, όπως για παράδειγμα χώρους τετραγωνικών ή κυβικών splines. Προς το παρόν, θα ασχοληθούμε με εκτιμήσεις σφάλματος στον χώρο των κατά τμήματα γραμμικών συναρτήσεων S_h^1 και αργότερα, θα ασχοληθούμε με την υλοποίηση της μεθόδου (5) και στους δύο παραπάνω υποχώρους.

2 L^2 -Εκτιμήσεις Σφάλματος

Σε αυτή την ενότητα, θα ασχοληθούμε με εκτιμήσεις σφάλματος της μεθόδου (5), ως προς την L^2 -νόρμα. Για λόγους απλότητας, θα θεωρήσουμε ότι $\beta = 1/2$.

Έστω $\{g^n\}_{n=0}^N \subset S_h^1$ και $\{y^n\}_{n=0}^N \subset \mathbb{R}$ τ.ω.

$$\frac{1}{k^2}(g^{n+1} - 2g^n + g^{n-1}, g^{n+1} - g^{n-1}) + \gamma(g_\beta^n, g^{n+1} - g^{n-1}) = y^n, \quad n = 1, \dots, N-1$$

Τότε:

$$\begin{aligned} (g^{n+1} - 2g^n + g^{n-1}, g^{n+1} - g^{n-1}) &= ((g^{n+1} - g^n) - (g^n - g^{n-1}), (g^{n+1} - g^n) + (g^n - g^{n-1})) \\ &= (g^{n+1} - g^n, g^{n+1} - g^n) - (g^n - g^{n-1}, g^n - g^{n-1}) \\ &= \|g^{n+1} - g^n\|^2 - \|g^n - g^{n-1}\|^2 \end{aligned} \quad (6)$$

Επίσης,

$$\begin{aligned} \gamma(g_\beta^n, g^{n+1} - g^{n-1}) &= \gamma(\beta g^{n+1} + (1-2\beta)g^n + \beta g^{n-1}, g^{n+1} - g^{n-1}) \\ &= \beta(\gamma(g^{n+1}, g^{n+1}) - \gamma(g^{n-1}, g^{n-1})) + (1-2\beta)(\gamma(g^{n+1}, g^n) - \gamma(g^n, g^{n-1})) \\ &= \beta(\|\sqrt{\alpha}g_x^{n+1}\|^2 - \|\sqrt{\alpha}g_x^{n-1}\|^2) + (1-2\beta)(\gamma(g^{n+1}, g^n) - \gamma(g^n, g^{n-1})) \end{aligned} \quad (7)$$

Για $\beta = 1/2$, η (7) γίνεται

$$\gamma(g_{1/2}^n, g^{n+1} - g^{n-1}) = \frac{1}{2}(\|\sqrt{\alpha}g_x^{n+1}\|^2 - \|\sqrt{\alpha}g_x^{n-1}\|^2) \quad (8)$$

Έτσι, από τις (6) και (8) έχουμε ότι

$$\frac{1}{k^2}(\|g^{n+1} - g^n\|^2 - \|g^n - g^{n-1}\|^2) + \frac{1}{2}(\|\sqrt{\alpha}g_x^{n+1}\|^2 - \|\sqrt{\alpha}g_x^{n-1}\|^2) = y^n, \quad n = 1, \dots, N-1$$

Αθροίζοντας από $n = 1$ ως ℓ , $1 \leq \ell \leq N-1$, έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{1}{k^2} \sum_{n=1}^{\ell} (\|g^{n+1} - g^n\|^2 - \|g^n - g^{n-1}\|^2) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\ell} (\|\sqrt{\alpha}g_x^{n+1}\|^2 - \|\sqrt{\alpha}g_x^{n-1}\|^2) &= \sum_{n=1}^{\ell} y^n \Rightarrow \\ \|g^{\ell+1} - g^\ell\|^2 + \frac{k^2}{2}(\|\sqrt{\alpha}g_x^{\ell+1}\|^2 + \|\sqrt{\alpha}g_x^\ell\|^2) &= \|g^1 - g^0\|^2 + \frac{k^2}{2}(\|\sqrt{\alpha}g_x^1\|^2 + \|\sqrt{\alpha}g_x^0\|^2) + k^2 \sum_{n=1}^{\ell} y^n \end{aligned} \quad (9)$$

Θα ξεκινήσουμε αποδεικνύοντας το παρακάτω Λήμμα:

Λήμμα 1 (Ανισότητα Poincaré-Friedrichs). Έστω $v \in H_0^1(a, b)$. Τότε,

$$\|v\| \leq (b-a)\|v'\|$$

Απόδειξη. Έστω $f \in C_0^\infty[a, b]$. Επειδή $f(a) = 0, \forall x \in [a, b]$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_a^x f'(s)ds \Rightarrow \\ |f(x)|^2 &= \left| \int_a^x f'(s)ds \right|^2 \leq \int_a^x ds \cdot \int_a^x |f'(s)|^2 ds \Rightarrow \\ |f(x)|^2 &\leq \int_a^b ds \cdot \int_a^b |f'(s)|^2 ds = (b-a)\|f'\|^2 \end{aligned}$$

Ολοκληρώνοντας στο $[a, b]$, καταλήγουμε ότι

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x)|^2 dx &\leq \int_a^b (b-a)\|f'\|^2 dx \Rightarrow \\ \|f\|^2 &\leq (b-a)^2\|f'\|^2 \Rightarrow \\ \|f\| &\leq (b-a)\|f'\| \end{aligned}$$

Έστω τυχούσα $v \in H_0^1(a, b)$. Τότε, υπάρχει ακολουθία $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C_0^\infty[a, b]$ τ.ω.

$$\|v_n - v\|_1 \rightarrow 0$$

Η $(\|v_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει στην $\|v\|$ και η $(\|v'_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει στην $\|v'\|$, επειδή

$$\begin{aligned} \left| \|v_n\| - \|v\| \right| + \left| \|v'_n\| - \|v'\| \right| &\leq \|v_n - v\| + \|v'_n - v'\| \\ &\leq 2\|v_n - v\|_1 \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Επίσης, $v_n \in C_0^\infty[a, b]$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα έχουμε ότι

$$\|v_n\| \leq (b-a)\|v'_n\|, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Παίρνοντας όρια στην παραπάνω ανισότητα, καταλήγουμε στην

$$\|v\| \leq (b-a)\|v'\|.$$

□

Παρατηρώντας ότι η διγραμμική μορφή γ είναι εσωτερικό γινόμενο, ορίζουμε τη νόρμα ενέργειας $\|\cdot\|_E$, ως τη νόρμα που παράγεται από το εσωτερικό γινόμενο γ , δηλαδή

$$\|f\|_E = \sqrt{\gamma(f, f)}, \quad \forall f \in H_0^1(a, b)$$

Έτσι, ορίζουμε την ελλειπτική προβολή $R_h u$ της u , ως τη βέλτιστη προσέγγιση της u από τον S_h^1 , ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_E$, δηλαδή η $R_h u$ είναι τέτοια ώστε

$$\|u - R_h u\|_E = \inf_{\chi \in S_h^1} \|u - \chi\|_E$$

Η $\|\cdot\|_E$ παράγεται από το εσωτερικό γινόμενο γ και ο S_h^1 είναι χώρος πεπερασμένης διάστασης, άρα ισοδύναμα έχουμε

$$\begin{aligned} \gamma(u - R_h u, \chi) &= 0, \quad \forall \chi \in S_h^1 \\ \Leftrightarrow \gamma(u, \chi) &= \gamma(R_h u, \chi), \quad \forall \chi \in S_h^1 \end{aligned}$$

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε το εξής Λήμμα:

Λήμμα 2. Έστω $v \in C_0^2[a, b]$. Τότε, υπάρχει $C > 0$ τ.ω.

$$\inf_{\chi \in S_h^1} \{ \|v - \chi\| + h \|(v - \chi)'\| \} \leq Ch^2 \|v''\| \quad (10)$$

Απόδειξη. Έστω $I_h v$ η spline παρεμβολής της v από τον S_h^1 , δηλαδή

$$I_h v(x_i) = v(x_i), \quad i = 0, \dots, J \quad (11)$$

Θέτουμε $e := v - I_h v$. Τότε, από την (11), για κάθε $0 \leq i \leq J - 1$ έχουμε

$$e(x_i) = e(x_{i+1}) = 0$$

και η e είναι συνεχώς παραγωγίσιμη στο $[x_i, x_{i+1}]$, ως διαφορά της συνεχώς παραγωγίσιμης v με το πολυώνυμο $I_h v|_{[x_i, x_{i+1}]}$.

Άρα, $e \in C_0^1[x_i, x_{i+1}] \subset H_0^1(x_i, x_{i+1})$. Επομένως, από την ανισότητα Poincaré-Friedrichs, έχουμε

$$\|e\|_{L^2(x_i, x_{i+1})} \leq h \|e'\|_{L^2(x_i, x_{i+1})} \Rightarrow$$

$$\|e\|_{L^2(x_i, x_{i+1})}^2 \leq h^2 \|e'\|_{L^2(x_i, x_{i+1})}^2 \Rightarrow$$

$$\sum_{i=0}^{J-1} \|e\|_{L^2(x_i, x_{i+1})}^2 \leq h^2 \sum_{i=0}^{J-1} \|e'\|_{L^2(x_i, x_{i+1})}^2 \Rightarrow$$

$$\|e\|^2 \leq h^2 \|e'\|^2 \Rightarrow$$

$$\|e\| \leq h \|e'\| \quad (12)$$

Για κάθε $0 \leq i \leq J - 1$, η e είναι συνεχώς παραγωγίσιμη στο $[x_i, x_{i+1}]$ και $e(x_i) = e(x_{i+1})$, άρα από το Θεώρημα Rolle, υπάρχει $\xi \in (x_i, x_{i+1})$ τ.ω.

$$e'(\xi) = 0 \Rightarrow e'(x) - e'(\xi) = e'(x), \quad \forall x \in [x_i, x_{i+1}] \Rightarrow$$

$$e'(x) = \int_{\xi}^x e''(s) ds = \int_{\xi}^x (v(s) - I_h v(s))'' ds \stackrel{(I_h v)''=0}{=} \int_{\xi}^x v''(s) ds, \quad \forall x \in [x_i, x_{i+1}]$$

Άρα, $\forall x \in [x_i, x_{i+1}]$, έχουμε

$$|e'(x)|^2 = \left| \int_{\xi}^x v''(s) ds \right|^2 \leq \int_{\xi}^x ds \cdot \int_{\xi}^x |v''(s)|^2 ds \leq \int_{x_i}^{x_{i+1}} ds \cdot \int_{x_i}^{x_{i+1}} |v''(s)|^2 ds = h \int_{x_i}^{x_{i+1}} |v''(s)|^2 ds \Rightarrow$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} |e'(x)|^2 dx \leq h \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |v''(s)|^2 dx ds = h^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} |v''(s)|^2 ds \Rightarrow \|e'\|_{L^2(x_i, x_{i+1})}^2 \leq h^2 \|v''\|_{L^2(x_i, x_{i+1})}^2$$

Αθροίζοντας από $i = 0$ ως $J - 1$, καταλήγουμε ότι

$$\|e'\|^2 \leq h^2 \|v''\|^2 \implies \|e'\| \leq h \|v''\| \Rightarrow$$

$$h \|e'\| \leq h^2 \|v''\| \tag{13}$$

Άρα, από τις (12),(13), έχουμε ότι

$$\|e\| \leq h \|e'\| \leq h^2 \|v''\| \tag{14}$$

Προσθέτοντας τις (13) και (14) και θέτοντας $C = 2$, καταλήγουμε ότι

$$\|v - I_h v\| + h \|(v - I_h v)'\| \leq Ch^2 \|v''\|$$

και επειδή $I_h v \in S_h^1$, έπεται ότι

$$\inf_{\chi \in S_h^1} \{ \|v - \chi\| + h \|(v - \chi)'\| \} \leq Ch^2 \|v''\|$$

□

Τώρα, μπορούμε να αποδείξουμε το παρακάτω αποτέλεσμα:

Πρόταση 2. Έστω $v \in C_0^2[a, b]$ και $R_h v$ η ελλειπτική προβολή της v , όπως έχει οριστεί παραπάνω. Τότε, υπάρχει $C > 0$ τ.ω.

$$\|v - R_h v\| + h \|(v - R_h v)'\| \leq Ch^2 \|v''\|$$

Απόδειξη. Από τον ορισμό της $R_h v$, έχουμε

$$\|v - R_h v\|_E = \inf_{\chi \in S_h^1} \|v - \chi\|_E$$

και

$$\|v - R_h v\|_E = \left(\int_a^b \alpha(x) |(v(x) - R_h v(x))'|^2 dx \right)^{1/2} \geq \left(\int_a^b \alpha_0 |(v(x) - R_h v(x))'|^2 dx \right)^{1/2} = \sqrt{\alpha_0} \|(v - R_h v)'\|$$

και για κάθε $\chi \in S_h^1$ έχουμε

$$\|v - \chi\|_E = \left(\int_a^b \alpha(x) |v'(x) - \chi'(x)|^2 dx \right)^{1/2} \leq \left(\int_a^b \max_{x \in [a, b]} (\alpha(x)) |v'(x) - \chi'(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Ορίζουμε $\alpha_{max} := \max_{x \in [a, b]}(\alpha(x))$. Τότε:

$$\|v - \chi\|_E \leq \sqrt{\alpha_{max}} \left(\int_a^b |v'(x) - \chi'(x)|^2 dx \right)^{1/2} = \sqrt{\alpha_{max}} \|(v - \chi)'\| \quad \forall x \in S_h^1$$

Άρα,

$$\inf_{\chi \in S_h^1} \|v - \chi\|_E \leq \sqrt{\alpha_{max}} \inf_{\chi \in S_h^1} \|(v - \chi)'\|$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} \sqrt{\alpha_0} \|(v - R_h v)'\| &\leq \|v - R_h v\|_E = \inf_{\chi \in S_h^1} \|v - \chi\|_E \leq \sqrt{\alpha_{max}} \inf_{\chi \in S_h^1} \|(v - \chi)'\| \Rightarrow \\ \|(v - R_h v)'\| &\leq \sqrt{\frac{\alpha_{max}}{\alpha_0}} \inf_{\chi \in S_h^1} \|(v - \chi)'\| \leq \sqrt{\frac{\alpha_{max}}{\alpha_0}} Ch \|v''\| \end{aligned} \quad (15)$$

Στη συνέχεια, θα χρησιμοποιήσουμε το “τέχνασμα του Nitsche”:

Θεωρούμε το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\begin{aligned} (\alpha(x)w'(x))' &= g(x), \quad x \in [a, b] \\ w(a) &= w(b) = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

με $g := v - R_h v$. Τότε, $g(a) = g(b) = 0$. Έτσι, έχουμε

$$\|g\|^2 = \int_a^b g^2(x) dx = \int_a^b g(x)(\alpha(x)w'(x))' dx = - \int_a^b \alpha(x)g'(x)w'(x) dx = -\gamma(g, w) = -\gamma(v - R_h v, w) \quad (17)$$

Έστω τυχόν $\chi \in S_h^1$. Τότε, $\gamma(v - R_h v, \chi) = 0$. Άρα, η (17) γίνεται:

$$\begin{aligned} \|v - R_h v\|^2 &= -\gamma(v - R_h v, w - \chi) \leq \|v - R_h v\|_E \cdot \|w - \chi\|_E \\ &= \|v - R_h v\|_E \left(\int_a^b \alpha(x)|w'(x) - \chi'(x)|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq \sqrt{\alpha_{max}} \|v - R_h v\|_E \cdot \|(w - \chi)'\| \\ &\leq \sqrt{\alpha_{max}} \|v - R_h v\|_E \inf_{\chi \in S_h^1} \|(w - \chi)'\| \\ &\leq Ch \sqrt{\alpha_{max}} \|v - R_h v\|_E \|w''\| \end{aligned} \quad (18)$$

Πολλαπλασιάζοντας τη Σ.Δ.Ε. του προβλήματος (16) με w και ολοκληρώνοντας στο $[a, b]$, έχουμε

$$((\alpha w')', w) = (g, w) \Rightarrow -(\alpha w', w') = (g, w) \Rightarrow$$

$$|(\alpha w', w')| = |(g, w)| \leq \|g\| \cdot \|w\| \leq (b - a) \|w'\| \cdot \|g\|$$

και

$$\alpha_0 \|w'\|^2 = \alpha_0 (w', w') \leq |(\alpha w', w')| \leq (b - a) \|w'\| \cdot \|g\|$$

από την οποία συμπεραίνουμε ότι

$$\|w'\| \leq \frac{b-a}{\alpha_0} \|g\|.$$

Επίσης,

$$(\alpha w')' = g \Rightarrow \alpha w'' + \alpha' w' = g \Rightarrow \alpha w'' = g - \alpha' w' \Rightarrow$$

$$\|\alpha w''\| \leq \|g\| + \|\alpha' w'\| \leq \|g\| + \max_{x \in [a,b]} |\alpha'(x)| \cdot \|w'\|$$

Ορίζουμε $\alpha'_{max} = \max_{x \in [a,b]} |\alpha'(x)|$. Τότε,

$$\|\alpha w''\| \leq \frac{\alpha'_{max}}{\alpha_0} (b-a) \|g\| + \|g\| =: C_a \|g\|$$

και

$$\|w''\| \leq \frac{C_a}{\alpha_0} \|g\|$$

Άρα, η (18) γίνεται:

$$\begin{aligned} \|v - R_h v\|^2 &\leq \frac{C \sqrt{\alpha_{max}} C_a}{\alpha_0} \|v - R_h v\| \cdot h \|v - R_h v\|_E \Rightarrow \\ \|v - R_h v\| &\leq C^* h \|v - R_h v\|_E \leq C^{**} \sqrt{\frac{\alpha_{max}}{\alpha_0}} h^2 \|v''\| \end{aligned} \quad (19)$$

Επομένως, προσθέτοντας κατά μέλη τις (15) και (19), καταλήγουμε ότι υπάρχει $C > 0$ τέτοιο ώστε

$$\|v - R_h v\| + h \|(v - R_h v)'\| \leq C h^2 \|v''\|$$

□

Ορισμός 6. Έστω $v : [a, b] \times [t_s, t_f] \rightarrow \mathbb{R}$, $t_s \geq 0$, $t_f \leq T$. Ορίζουμε τις εξής νόρμες:

$$\|v\|_{L^2(t_s, t_f; H^2)} := \left(\int_{t_s}^{t_f} \|v_{xx}(\cdot, t)\|^2 dt \right)^{1/2}$$

$$\|v\|_{L^2(t_s, t_f; L^2)} := \left(\int_{t_s}^{t_f} \|v(\cdot, t)\|^2 dt \right)^{1/2}$$

Τότε, ισχύει το εξής αποτέλεσμα:

Πρόταση 3. Ορίζουμε $\theta^n := U^n - R_h u^n$ $u^n := u(\cdot, t_n)$. Τότε, για $\beta = 1/2$, ισχύει η εξής εκτίμηση:

Υπάρχει $C > 0$ ανεξάρτητο των k, h , τέτοιο ώστε για κάθε $1 \leq n \leq N - 1$, να ισχύει ότι

$$\max_{0 \leq \ell \leq n} \left(\frac{1}{k} \|\theta^{\ell+1} - \theta^\ell\| + \|\theta_x^\ell\| \right) \leq C \left[\frac{1}{k} \|\theta^1 - \theta^0\| + \|\theta_x^0\| + \|\theta_x^1\| + \sqrt{T} (h^2 \|u_{tt}\|_{L^2(0,T;H^2)} + k^2 \|\partial_t^4 u\|_{L^2(0,T;L^2)}) \right] \quad (20)$$

Απόδειξη. Ορίζουμε $\rho^n := R_h u^n - u^n$, $\omega^n := \frac{1}{2}(u_{tt}^{n+1} + u_{tt}^{n-1}) - \partial_k^2 u^n$, $\partial_k^2 u^n = \frac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{k^2}$.

Θέτουμε $g_{1/2}^n = \frac{1}{2}(g^{n+1} + g^{n-1})$, $g^n \in S_h^1$, $1 \leq n \leq N-1$. Τότε:

$$U^n - u^n = (U^n - R_h u^n) + (R_h u^n - u^n) = \theta^n + \rho^n.$$

Έστω τυχόν $\chi \in S_h^1$. Τότε:

$$\begin{aligned} (\partial_k^2 \theta^n, \chi) + \gamma(\theta_{1/2}^n, \chi) &= (\partial_k^2 U^n, \chi) + \gamma(U_{1/2}^n, \chi) - (\partial_k^2 R_h u^n, \chi) - \gamma((R_h u)_{1/2}^n, \chi) \\ &= (\partial_k^2 U^n, \chi) + \gamma(U_{1/2}^n, \chi) - (\partial_k^2 R_h u^n, \chi) - \gamma(u_{1/2}^n, \chi) \\ &= (f_{1/2}^n, \chi) - (\partial_k^2 R_h u^n, \chi) - \gamma(u_{1/2}^n, \chi) \\ &= (f_{1/2}^n, \chi) - (\partial_k^2 R_h u^n, \chi) - (\alpha(u_{1/2}^n)_x, \chi') \\ &= ((\alpha(u_{1/2}^n)_x)_x, \chi) + (f_{1/2}^n, \chi) - (\partial_k^2 R_h u^n, \chi) \\ &= ((u_{tt})_{1/2}^n - \partial_k^2 R_h u^n, \chi) \\ &= (\partial_k^2 u^n - \partial_k^2 R_h u^n + (u_{tt})_{1/2}^n - \partial_k^2 u^n, \chi) \\ &= (-\partial_k^2 \rho^n + \omega^n, \chi). \end{aligned}$$

Άρα,

$$(\theta^{n+1} - 2\theta^n + \theta^{n-1}, \chi) + k^2 \gamma(\theta_{1/2}^n, \chi) = k^2 (-\partial_k^2 \rho^n + \omega^n, \chi) \quad \forall \chi \in S_h^1. \quad (21)$$

Έστω $1 \leq \ell \leq N-1$. Επιλέγουμε $\chi = \theta^{n+1} - \theta^{n-1}$ και αθροίζουμε την (21) από $n = 1$ ως ℓ . Τότε, η (9), για $g^n = \theta^n$, $y^n = (-\partial_k^2 \rho^n + \omega^n, \theta^{n+1} - \theta^{n-1})$ γίνεται:

$$\begin{aligned} \|\theta^{\ell+1} - \theta^\ell\|^2 + \frac{k^2}{2} \|\sqrt{\alpha} \theta_x^{\ell+1}\|^2 + \frac{k^2}{2} \|\sqrt{\alpha} \theta_x^\ell\|^2 &= \|\theta^1 - \theta^0\|^2 + \frac{k^2}{2} \|\sqrt{\alpha} \theta_x^1\|^2 + \frac{k^2}{2} \|\sqrt{\alpha} \theta_x^0\|^2 \\ &\quad + k^2 \sum_{n=1}^{\ell} (-\partial_k^2 \rho^n + \omega^n, \theta^{n+1} - \theta^{n-1}) \quad (22) \end{aligned}$$

Για το άθροισμα στην (22), έχουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει

$$\begin{aligned} k^2 \sum_{n=1}^{\ell} (-\partial_k^2 \rho^n + \omega^n, \theta^{n+1} - \theta^{n-1}) &\leq k^2 \sum_{n=1}^{\ell} \|-\partial_k^2 \rho^n + \omega^n\| \cdot \|\theta^{n+1} - \theta^{n-1}\| \\ &= k^2 \sum_{n=1}^{\ell} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \|-\partial_k^2 \rho^n + \omega^n\| \cdot \sqrt{\varepsilon} \|\theta^{n+1} - \theta^{n-1}\| \\ &\leq \frac{k^2}{\varepsilon} \sum_{n=1}^{\ell} \|-\partial_k^2 \rho^n + \omega^n\|^2 + \varepsilon k^2 \sum_{n=1}^{\ell} \|\theta^{n+1} - \theta^{n-1}\|^2 \\ &\leq \frac{k^2}{\varepsilon} \sum_{n=1}^{\ell} \|\partial_k^2 \rho^n\|^2 + \frac{k^2}{\varepsilon} \sum_{n=1}^{\ell} \|\omega^n\|^2 + \varepsilon k^2 \sum_{n=1}^{\ell} \|\theta^{n+1} - \theta^{n-1}\|^2 \quad (23) \end{aligned}$$

Στη συνέχεια, θα εφαρμόσουμε τον τύπο του Taylor με ολοκληρωτικά υπόλοιπα στις ρ^{n+1} , ρ^{n-1} γύρω από το $t = t_n$.

$$\rho^{n+1} = \rho^n + k \rho_t^n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} (t_{n+1} - s) \rho_{tt}(s) ds$$

$$\rho^{n-1} = \rho^n - k\rho_t^n + \int_{t_n}^{t_{n-1}} (t_{n-1} - s)\rho_{tt}(s)ds$$

Αθροίζοντας τις δύο παραπάνω σχέσεις και αφαιρώντας $2\rho^n$, έπεται ότι

$$\begin{aligned} \rho^{n+1} - 2\rho^n + \rho^{n-1} &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} (t_{n+1} - s)\rho_{tt}(s)ds - \int_{t_{n-1}}^{t_n} (t_{n-1} - s)\rho_{tt}(s)ds \Rightarrow \\ \partial_k^2 \rho^n &= \frac{1}{k^2} \left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} (t_{n+1} - s)\rho_{tt}(s)ds - \int_{t_{n-1}}^{t_n} (t_{n-1} - s)\rho_{tt}(s)ds \right) \Rightarrow \\ |\partial_k^2 \rho^n|^2 &\leq \frac{2}{k^4} \left(\left| \int_{t_n}^{t_{n+1}} (t_{n+1} - s)\rho_{tt}(s)ds \right|^2 + \left| \int_{t_{n-1}}^{t_n} (t_{n-1} - s)\rho_{tt}(s)ds \right|^2 \right) \\ &\leq \frac{2}{k^4} \left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} (t_{n+1} - s)^2 ds \cdot \int_{t_n}^{t_{n+1}} |\rho_{tt}(s)|^2 ds + \int_{t_{n-1}}^{t_n} (t_{n-1} - s)^2 ds \cdot \int_{t_{n-1}}^{t_n} |\rho_{tt}(s)|^2 ds \right) \\ &\leq \frac{1}{k^4} \left(k^3 \int_{t_n}^{t_{n+1}} |\rho_{tt}(s)|^2 ds + k^3 \int_{t_{n-1}}^{t_n} |\rho_{tt}(s)|^2 ds \right) = \frac{1}{k} \int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} |\rho_{tt}(s)|^2 ds \end{aligned}$$

Ολοκληρώνουμε και τα δύο μέλη της ανισότητας στο $[a, b]$ και καταλήγουμε ότι

$$\|\partial_k^2 \rho^n\|^2 \leq \frac{1}{k} \|\rho_{tt}\|_{L^2(t_{n-1}, t_{n+1}; L^2)}^2 \Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\ell} \|\partial_k^2 \rho^n\|^2 \leq \frac{1}{k} \|\rho_{tt}\|_{L^2(0, t_{\ell+1}; L^2)}^2$$

Από την Πρόταση 2, έχουμε

$$\|\rho_{tt}\| = \|R_h u_{tt} - u_{tt}\| \leq Ch^2 \|u_{ttxx}\| \Rightarrow$$

$$\|\rho_{tt}\|^2 \leq Ch^4 \|u_{ttxx}\|^2$$

Όπως πριν, ολοκληρώνοντας στο $[0, t_{\ell+1}]$,

$$\|\rho_{tt}\|_{L^2(0, t_{\ell+1}; L^2)}^2 \leq Ch^4 \|u_{tt}\|_{L^2(0, t_{\ell+1}; H^2)}^2$$

Άρα,

$$\sum_{n=1}^{\ell} \|\partial_k^2 \rho^n\|^2 \leq \frac{Ch^4}{k} \|u_{tt}\|_{L^2(0, t_{\ell+1}; H^2)}^2 \quad (24)$$

Ορίζουμε $\omega_1^n := (u_{1/2}^n)_{tt} - u_{tt}^n$ και $\omega_2^n := u_{tt}^n - \partial_k^2 u^n$. Τότε, $\omega^n = \omega_1^n + \omega_2^n$. Έτσι,

$$\underline{\text{Για το } \omega_1^n: \omega_1^n = \frac{1}{2}(u_{tt}^{n+1} + u_{tt}^{n-1}) - u_{tt}^n}$$

Από τον τύπο του Taylor με ολοκληρωτικά υπόλοιπα, έχουμε ότι

$$u_{tt}^{n+1} = u_{tt}^n + k\partial_t^3 u^n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} (t_{n+1} - s)\partial_t^4 u(s)ds$$

$$u_{tt}^{n-1} = u_{tt}^n - k\partial_t^3 u^n - \int_{t_{n-1}}^{t_n} (t_{n-1} - s)\partial_t^4 u(s)ds$$

Προσθέτοντας τις δύο παραπάνω σχέσεις και πολλαπλασιάζοντας με 1/2, έχουμε ότι

$$\frac{1}{2}(u_{tt}^{n+1} + u_{tt}^{n-1}) = u_{tt}^n + \frac{1}{2} \left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} (t_{n+1} - s)\partial_t^4 u(s)ds - \int_{t_{n-1}}^{t_n} (t_{n-1} - s)\partial_t^4 u(s)ds \right) \Rightarrow$$

$$\omega_1^n = \frac{1}{2} \left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} (t_{n+1} - s)\partial_t^4 u(s)ds - \int_{t_{n-1}}^{t_n} (t_{n-1} - s)\partial_t^4 u(s)ds \right) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} |\omega_1^n|^2 &\leq \frac{2}{4} \left(\left| \int_{t_n}^{t_{n+1}} (t_{n+1} - s)\partial_t^4 u(s)ds \right|^2 + \left| \int_{t_{n-1}}^{t_n} (t_{n-1} - s)\partial_t^4 u(s)ds \right|^2 \right) \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} (t_{n+1} - s)^2 ds \cdot \int_{t_n}^{t_{n+1}} |\partial_t^4 u(s)|^2 ds + \int_{t_{n-1}}^{t_n} (t_{n-1} - s)^2 ds \cdot \int_{t_{n-1}}^{t_n} |\partial_t^4 u(s)|^2 ds \right) \\ &\leq \frac{k^3}{4} \int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} |\partial_t^4 u(s)|^2 ds \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\|\omega_1^n\|^2 \leq \frac{k^3}{4} \|\partial_t^4 u\|_{L^2(t_{n-1}, t_{n+1}; L^2)}^2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\ell} \|\omega_1^n\|^2 \leq \frac{k^3}{4} \|\partial_t^4 u\|_{L^2(0, t_{\ell+1}; L^2)}^2$$

Για το ω_2^n : $\omega_2^n = u_{tt}^n - \frac{1}{k^2}(u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1})$

Όπως πριν, από τον τύπο του Taylor, έχουμε

$$u^{n+1} = u^n + ku_t^n + \frac{k^2}{2}u_{tt}^n + \frac{k^3}{6}\partial_t^3 u^n + \frac{1}{6} \int_{t_n}^{t_{n+1}} (t_{n+1} - s)^3 \partial_t^4 u(s)ds$$

$$u^{n-1} = u^n - ku_t^n + \frac{k^2}{2}u_{tt}^n - \frac{k^3}{6}\partial_t^3 u^n + \frac{1}{6} \int_{t_n}^{t_{n-1}} (t_{n-1} - s)^3 \partial_t^4 u(s)ds$$

Τότε,

$$u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1} = k^2 u_{tt}^n + \frac{1}{6} \left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} (t_{n+1} - s)^3 \partial_t^4 u(s)ds - \int_{t_{n-1}}^{t_n} (t_{n-1} - s)^3 \partial_t^4 u(s)ds \right) \Rightarrow$$

$$\omega_2^n = \frac{1}{6k^2} \left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} (t_{n+1} - s)^3 \partial_t^4 u(s)ds - \int_{t_{n-1}}^{t_n} (t_{n-1} - s)^3 \partial_t^4 u(s)ds \right) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
|\omega_2^n|^2 &\leq \frac{2}{36k^4} \left(\left| \int_{t_n}^{t_{n+1}} (t_{n+1}-s)^3 \partial_t^4 u(s) ds \right|^2 + \left| \int_{t_{n-1}}^{t_n} (t_n-s)^3 \partial_t^4 u(s) ds \right|^2 \right) \\
&\leq \frac{1}{18k^4} \left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} (t_{n+1}-s)^6 ds \cdot \int_{t_n}^{t_{n+1}} |\partial_t^4 u(s)|^2 ds + \int_{t_{n-1}}^{t_n} (t_n-s)^6 ds \cdot \int_{t_{n-1}}^{t_n} |\partial_t^4 u(s)|^2 ds \right) \\
&\leq \frac{k^3}{36} \int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} |\partial_t^4 u(s)|^2 ds \Rightarrow \|\omega_2^n\|^2 \leq \frac{k^3}{36} \|\partial_t^4 u\|_{L^2(t_{n-1}, t_{n+1}; L^2)}^2 \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{\ell} \|\omega_2^n\|^2 \leq \frac{k^3}{36} \|\partial_t^4 u\|_{L^2(0, t_{\ell+1}; L^2)}^2$$

Επομένως,

$$\|\omega^n\|^2 \leq \|\omega_1^n\|^2 + \|\omega_2^n\|^2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\ell} \|\omega^n\|^2 \leq Ck^3 \|\partial_t^4 u\|_{L^2(0, t_{\ell+1}; L^2)}^2 \quad (25)$$

Άρα, από τις (24),(25), έπεται η

$$\frac{k^2}{\varepsilon} \sum_{n=1}^{\ell} \|\partial_k^2 \rho^n\|^2 + \frac{k^2}{\varepsilon} \sum_{n=1}^{\ell} \|\omega^n\|^2 \leq \frac{Ck}{\varepsilon} \left(h^4 \|u_{tt}\|_{L^2(0, t_{\ell+1}; H^2)}^2 + k^4 \|\partial_t^4 u\|_{L^2(0, t_{\ell+1}; L^2)}^2 \right) =: \frac{Ck}{\varepsilon} \sigma_{\ell} \quad (26)$$

Τότε, για $\ell = 0, \dots, N-1$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\|\theta^{\ell+1} - \theta^{\ell}\|^2 + \frac{k^2}{2} \|\sqrt{\alpha} \theta_x^{\ell+1}\|^2 + \frac{k^2}{2} \|\sqrt{\alpha} \theta_x^{\ell}\|^2 &\leq \|\theta^1 - \theta^0\|^2 + \frac{k^2}{2} \|\sqrt{\alpha} \theta_x^1\|^2 + \frac{k^2}{2} \|\sqrt{\alpha} \theta_x^0\|^2 + \frac{Ck}{\varepsilon} \sigma_{\ell} + 2\varepsilon k^2 \sum_{n=0}^{\ell} \|\theta^{n+1} - \theta^n\|^2 \\
&\leq \|\theta^1 - \theta^0\|^2 + \frac{k^2}{2} \|\sqrt{\alpha} \theta_x^1\|^2 + \frac{k^2}{2} \|\sqrt{\alpha} \theta_x^0\|^2 + 2\varepsilon k^2 \sum_{n=0}^{\ell} \left(\|\theta^{n+1} - \theta^n\|^2 + \frac{k^2}{2} \|\sqrt{\alpha} \theta_x^{n+1}\|^2 + \frac{k^2}{2} \|\sqrt{\alpha} \theta_x^n\|^2 \right) + \frac{Ck}{\varepsilon} \sigma_{\ell} \\
&\leq \|\theta^1 - \theta^0\|^2 + \frac{k^2}{2} \|\sqrt{\alpha} \theta_x^1\|^2 + \frac{k^2}{2} \|\sqrt{\alpha} \theta_x^0\|^2 + 2\varepsilon k^2 (\ell+1) \max_{0 \leq n \leq \ell} \left(\|\theta^{n+1} - \theta^n\|^2 + \frac{k^2}{2} \|\sqrt{\alpha} \theta_x^{n+1}\|^2 + \frac{k^2}{2} \|\sqrt{\alpha} \theta_x^n\|^2 \right) + \frac{Ck}{\varepsilon} \sigma_{\ell} \\
&\leq \|\theta^1 - \theta^0\|^2 + \frac{k^2}{2} \|\sqrt{\alpha} \theta_x^1\|^2 + \frac{k^2}{2} \|\sqrt{\alpha} \theta_x^0\|^2 + 2\varepsilon kT \max_{0 \leq n \leq \ell} \left(\|\theta^{n+1} - \theta^n\|^2 + \frac{k^2}{2} \|\sqrt{\alpha} \theta_x^{n+1}\|^2 + \frac{k^2}{2} \|\sqrt{\alpha} \theta_x^n\|^2 \right) + \frac{Ck}{\varepsilon} \sigma_{\ell}
\end{aligned}$$

Επιλέγουμε $\varepsilon = \frac{1}{4kT}$. Τότε, για $\ell = 0, \dots, N-1$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\|\theta^{\ell+1} - \theta^{\ell}\|^2 + \frac{k^2}{2} \|\sqrt{\alpha} \theta_x^{\ell+1}\|^2 + \frac{k^2}{2} \|\sqrt{\alpha} \theta_x^{\ell}\|^2 &\leq \|\theta^1 - \theta^0\|^2 + \frac{k^2}{2} \|\sqrt{\alpha} \theta_x^1\|^2 + \frac{k^2}{2} \|\sqrt{\alpha} \theta_x^0\|^2 \\
&\quad + \frac{1}{2} \max_{0 \leq n \leq \ell} \left(\|\theta^{n+1} - \theta^n\|^2 + \frac{k^2}{2} \|\sqrt{\alpha} \theta_x^{n+1}\|^2 + \frac{k^2}{2} \|\sqrt{\alpha} \theta_x^n\|^2 \right) + Ck^2 T \sigma_{\ell} \quad (27)
\end{aligned}$$

Θεωρούμε $0 \leq m \leq \ell$ τ.ω.

$$\|\theta^{m+1} - \theta^m\|^2 + \frac{k^2}{2} \|\sqrt{\alpha} \theta_x^{m+1}\|^2 + \frac{k^2}{2} \|\sqrt{\alpha} \theta_x^m\|^2 = \max_{0 \leq n \leq \ell} \left(\|\theta^{n+1} - \theta^n\|^2 + \frac{k^2}{2} \|\sqrt{\alpha} \theta_x^{n+1}\|^2 + \frac{k^2}{2} \|\sqrt{\alpha} \theta_x^n\|^2 \right)$$

Τότε, η (27) γίνεται

$$\begin{aligned} \|\theta^{m+1} - \theta^m\|^2 + \frac{k^2}{2} \|\sqrt{\alpha} \theta_x^{m+1}\|^2 + \frac{k^2}{2} \|\sqrt{\alpha} \theta_x^m\|^2 &\leq \|\theta^1 - \theta^0\|^2 + \frac{k^2}{2} \|\sqrt{\alpha} \theta_x^1\|^2 + \frac{k^2}{2} \|\sqrt{\alpha} \theta_x^0\|^2 \\ &+ CTk^2 \sigma_m + \frac{1}{2} \|\theta^{m+1} - \theta^m\|^2 + \frac{k^2}{2} \|\sqrt{\alpha} \theta_x^{m+1}\|^2 + \frac{k^2}{2} \|\sqrt{\alpha} \theta_x^m\|^2 \\ &\leq \|\theta^1 - \theta^0\|^2 + \frac{k^2}{2} \|\sqrt{\alpha} \theta_x^1\|^2 + \frac{k^2}{2} \|\sqrt{\alpha} \theta_x^0\|^2 \\ &+ CTk^2 \sigma_\ell + \frac{1}{2} \|\theta^{m+1} - \theta^m\|^2 + \frac{k^2}{2} \|\sqrt{\alpha} \theta_x^{m+1}\|^2 + \frac{k^2}{2} \|\sqrt{\alpha} \theta_x^m\|^2 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\theta^{m+1} - \theta^m\|^2 + \frac{k^2}{2} \|\sqrt{\alpha} \theta_x^{m+1}\|^2 + \frac{k^2}{2} \|\sqrt{\alpha} \theta_x^m\|^2 &\leq 2 \left(\|\theta^1 - \theta^0\|^2 + \frac{k^2}{2} \|\sqrt{\alpha} \theta_x^1\|^2 + \frac{k^2}{2} \|\sqrt{\alpha} \theta_x^0\|^2 \right) + CTk^2 \sigma_\ell \Rightarrow \\ \|\theta^{\ell+1} - \theta^\ell\|^2 + \frac{k^2}{2} \|\sqrt{\alpha} \theta_x^{\ell+1}\|^2 + \frac{k^2}{2} \|\sqrt{\alpha} \theta_x^\ell\|^2 &\leq 2 \left(\|\theta^1 - \theta^0\|^2 + \frac{k^2}{2} \|\sqrt{\alpha} \theta_x^1\|^2 + \frac{k^2}{2} \|\sqrt{\alpha} \theta_x^0\|^2 \right) + CTk^2 \sigma_\ell \\ &= 2 \left(\|\theta^1 - \theta^0\|^2 + \frac{k^2}{2} \|\sqrt{\alpha} \theta_x^1\|^2 + \frac{k^2}{2} \|\sqrt{\alpha} \theta_x^0\|^2 \right) \\ &+ CTk^2 \left(h^4 \|u_{tt}\|_{L^2(0, t_{\ell+1}; H^2)}^2 + k^4 \|\partial_t^4 u\|_{L^2(0, t_{\ell+1}; L^2)}^2 \right) \end{aligned}$$

Παίρνοντας ρίζες και διαιρώντας με k στην παραπάνω ανισότητα, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} \|\theta^{\ell+1} - \theta^\ell\| + \frac{1}{2} \|\sqrt{\alpha} \theta_x^{\ell+1}\| + \frac{1}{2} \|\sqrt{\alpha} \theta_x^\ell\| &\leq \sqrt{2} C \left(\frac{1}{k} \|\theta^1 - \theta^0\| + \frac{1}{\sqrt{2}} \|\sqrt{\alpha} \theta_x^1\| + \frac{1}{\sqrt{2}} \|\sqrt{\alpha} \theta_x^0\| \right) \\ &+ C\sqrt{T} \left(h^2 \|u_{tt}\|_{L^2(0, t_{\ell+1}; H^2)} + k^2 \|\partial_t^4 u\|_{L^2(0, t_{\ell+1}; L^2)} \right) \Rightarrow \\ \frac{1}{k} \|\theta^{\ell+1} - \theta^\ell\| + \frac{\sqrt{\alpha_0}}{2} \|\theta_x^{\ell+1}\| + \frac{\sqrt{\alpha_0}}{2} \|\theta_x^\ell\| &\leq \sqrt{2} C \left(\frac{1}{k} \|\theta^1 - \theta^0\| + \frac{\sqrt{\alpha_{max}}}{\sqrt{2}} \|\theta_x^1\| + \frac{\sqrt{\alpha_{max}}}{\sqrt{2}} \|\theta_x^0\| \right) \\ &+ C\sqrt{T} \left(h^2 \|u_{tt}\|_{L^2(0, t_{\ell+1}; H^2)} + k^2 \|\partial_t^4 u\|_{L^2(0, t_{\ell+1}; L^2)} \right) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\frac{1}{k} \|\theta^{\ell+1} - \theta^\ell\| + \frac{1}{2} \|\theta_x^{\ell+1}\| + \frac{1}{2} \|\theta_x^\ell\| \leq C \left[\frac{1}{k} \|\theta^1 - \theta^0\| + \|\theta_x^1\| + \|\theta_x^0\| + \sqrt{T} \left(h^2 \|u_{tt}\|_{L^2(0, t_{\ell+1}; H^2)} + k^2 \|\partial_t^4 u\|_{L^2(0, t_{\ell+1}; L^2)} \right) \right]$$

Τότε, για κάθε $1 \leq n \leq N - 1$, έχουμε:

$$\max_{0 \leq \ell \leq n} \left(\frac{1}{k} \|\theta^{\ell+1} - \theta^\ell\| + \frac{1}{2} \|\theta_x^{\ell+1}\| + \frac{1}{2} \|\theta_x^\ell\| \right) \leq C \left[\frac{1}{k} \|\theta^1 - \theta^0\| + \|\theta_x^1\| + \|\theta_x^0\| + \sqrt{T} \left(h^2 \|u_{tt}\|_{L^2(0, T; H^2)} + k^2 \|\partial_t^4 u\|_{L^2(0, T; L^2)} \right) \right] \Rightarrow$$

$$\max_{0 \leq \ell \leq n} \left(\frac{1}{k} \|\theta^{\ell+1} - \theta^\ell\| + \|\theta_x^\ell\| \right) \leq C \left[\frac{1}{k} \|\theta^1 - \theta^0\| + \|\theta_x^1\| + \|\theta_x^0\| + \sqrt{T} \left(h^2 \|u_{tt}\|_{L^2(0, T; H^2)} + k^2 \|\partial_t^4 u\|_{L^2(0, T; L^2)} \right) \right]$$

□

Έτσι, καταλήγουμε στο ακόλουθο συμπέρασμα:

Πρόταση 4. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $c > 0$, τέτοιο ώστε

$$\frac{1}{k} \|\theta^1 - \theta^0\| + \|\theta_x^1\| + \|\theta_x^0\| \leq c(k^2 + h^2) \quad (28)$$

Τότε, υπάρχει $C > 0$ τ.ω.

$$\max_{0 \leq n \leq N} \|U^n - u^n\| \leq C(k^2 + h^2)$$

Απόδειξη. Έστω $0 \leq n \leq N$. Τότε,

$$U^n - u^n = (U^n - R_h u^n) + (R_h u^n - u^n) = \theta^n + \rho^n \Rightarrow \|U^n - u^n\| \leq \|\theta^n\| + \|\rho^n\|$$

Από την Πρόταση 2, έχουμε ότι $\|\rho^n\| \leq Ch^2 \|u_{xx}^n\|$, για κάποιο $C > 0$ ανεξάρτητο του h . Επομένως, η παραπάνω ανισότητα, γίνεται

$$\|U^n - u^n\| \leq \|\theta^n\| + Ch^2 \|u_{xx}^n\| \leq \|\theta^n\| + Ch^2 \max_{t \in [0, T]} \|u_{xx}(\cdot, t)\| \quad (29)$$

Από την ανισότητα Poincaré-Friedrichs, για κάθε $0 \leq n \leq N$ έχουμε

$$\begin{aligned} \|\theta^n\| &\leq (b-a) \|\theta_x^n\| \leq (b-a) \max_{0 \leq \ell \leq n} \|\theta_x^\ell\| \\ &\leq (b-a) \max_{0 \leq \ell \leq n} \left(\frac{1}{k} \|\theta^{\ell+1} - \theta^\ell\| + \|\theta_x^\ell\| \right) \end{aligned} \quad (30)$$

Έτσι, από την (29) και την Πρόταση 3, έπεται η

$$\|\theta^n\| \leq (b-a)C \left[\frac{1}{k} \|\theta^1 - \theta_0\| + \|\theta_x^1\| + \|\theta_x^0\| + C(k^2 + h^2) \right] \quad (31)$$

Χρησιμοποιώντας την (27), η (31) γίνεται

$$\|\theta^n\| \leq C(k^2 + h^2), \quad n = 0, \dots, N \quad (32)$$

Επομένως, αντικαθιστώντας την (32) στην (29), καταλήγουμε στην

$$\begin{aligned} \|U^n - u^n\| &\leq C(k^2 + h^2) + Ch^2 \max_{t \in [0, T]} \|u_{xx}(\cdot, t)\| \quad \forall 0 \leq n \leq N \Rightarrow \\ \max_{0 \leq n \leq N} \|U^n - u^n\| &\leq C(k^2 + h^2) \end{aligned} \quad (33)$$

□

Μένει να κάνουμε την κατάλληλη επιλογή των U^0 και U^1 , ώστε να ισχύει η σχέση (28).

Κατ' αρχήν, για κάθε $v \in H_0^1(a, b)$ και $\chi \in S_h^1$, έχουμε

$$\begin{aligned} (\alpha R_h v', \chi') &= (\alpha v', \chi') \Rightarrow (\alpha R_h v', R_h v') = (\alpha v', R_h v') \Rightarrow \\ (\alpha R_h v', R_h v') &\leq \|\alpha v'\| \cdot \|R_h v'\| \Rightarrow \int_a^b \alpha(x) |R_h v'(x)|^2 dx \leq \left(\int_a^b \alpha(x) |v'(x)|^2 dx \right)^{1/2} \cdot \|R_h v'\| \Rightarrow \\ \alpha_0 \int_a^b |R_h v'(x)|^2 dx &\leq \sqrt{\alpha_{max}} \left(\int_a^b |v'(x)|^2 dx \right)^{1/2} \cdot \|R_h v'\| \Rightarrow \alpha_0 \|R_h v'\|^2 \leq \sqrt{\alpha_{max}} \|v'\| \cdot \|R_h v'\| \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\|R_h v'\| \leq \frac{\sqrt{\alpha_{max}}}{\alpha_0} \|v'\| \quad (34)$$

Επιλέγουμε $U^0 = R_h u_0$. Τότε, $\theta^0 = 0$. Για την U^1 , αναπτύσσουμε κατά Taylor την $u(x, t_1)$, $x \in [a, b]$, γύρω από το $t = 0$.

$$\begin{aligned} u(x, t_1) &= u(x, 0) + k u_t(x, 0) + \frac{k^2}{2} u_{tt}(x, 0) + O(k^3) \\ &= u(x, 0) + k u_t(x, 0) + \frac{k^2}{2} ((\alpha(x) u_x(x, 0))_x + f(x, 0)) + O(k^3) \\ &= u_0(x) + k u_1(x) + \frac{k^2}{2} ((\alpha(x) u'_0(x))' + f_0(x)) + O(k^3), \quad f_0 = f(\cdot, 0) \end{aligned}$$

Ορίζουμε

$$\Psi(x) = u_0(x) + k u_1(x) + \frac{k^2}{2} ((\alpha(x) u'_0(x))' + f_0(x)), \quad x \in [a, b]$$

Τότε,

$$\Psi'(x) = u'_0(x) + k u'_1(x) + \frac{k^2}{2} ((\alpha(x) u'_0(x))'' + f'_0(x)), \quad x \in [a, b]$$

και

$$\begin{aligned} u_x(x, t_1) &= u_x(x, 0) + k u_{tx}(x, 0) + \frac{k^2}{2} ((\alpha(x) u_x(x, 0))_{xx} + f_x(x, 0)) + O(k^3) \\ &= u'_0(x) + k u'_1(x) + \frac{k^2}{2} ((\alpha(x) u'_0(x))'' + f'_0(x)) + O(k^3) \quad \forall x \in [a, b] \end{aligned}$$

Άρα:

$$\begin{aligned} u(x, t_1) &= \Psi(x) + O(k^3) \Rightarrow \Psi(x) - u(x, t_1) = O(k^3) \\ u_x(x, t_1) &= \Psi'(x) + O(k^3) \Rightarrow \Psi'(x) - u_x(x, t_1) = O(k^3) \end{aligned} \quad (35)$$

Επιλέγουμε $U^1 = R_h \Psi$. Τότε,

$$\|\theta^1\| = \|U^1 - R_h u^1\| = \|R_h(\Psi - u^1)\|$$

Οι σχέσεις (34), (35) και η ανισότητα Poincaré-Friedrichs δίνουν:

$$\|\theta^1\| \leq (b-a) \| (R_h(\Psi - u^1))_x \| \leq \frac{\sqrt{\alpha_{max}}}{\alpha_0} (b-a) \|(\Psi - u^1)_x\| \leq C k^3 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{k} \|\theta^1\| \leq C k^2 \quad (36)$$

και

$$\|\theta_x^1\| = \| (R_h(\Psi - u^1))_x \| \leq C k^3 \leq C k^2 \quad (37)$$

Από τις (36) και (37), έπεται ότι

$$\frac{1}{k} \|\theta^1\| + \|\theta_x^1\| \leq C k^2$$

και επειδή $\theta^0 = 0$ και $h > 0$, έχουμε ότι

$$\frac{1}{k} \|\theta^1 - \theta^0\| + \|\theta_x^1\| + \|\theta_x^0\| \leq C(k^2 + h^2)$$

Άρα, βρήκαμε αρχικές προσεγγίσεις U^0 και U^1 , τέτοιες ώστε να ικανοποιείται η (28).

3 Υλοποίηση της μεθόδου

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα ασχοληθούμε με την υλοποίηση της μεθόδου (5) στους εξής υποχώρους του $H_0^1(a, b)$:

$$\begin{aligned} S_h^1 &= \{s \in C[a, b] : s|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}^1, i = 0, \dots, J-1, s(a) = s(b) = 0\} \quad (\text{γραμμικές splines}) \\ S_h^2 &= \{s \in C[a, b] : s|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}^2, i = 0, \dots, J-1, s(a) = s(b) = 0\} \quad (\text{τετραγωνικές splines}) \\ S_h^3 &= \{s \in C^2[a, b] : s|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}^3, i = 0, \dots, J-1, s(a) = s(b) = 0\} \quad (\text{κυβικές splines}) \end{aligned}$$

Εάν για $r = 2, 3$ εφαρμόσουμε τη μέθοδο (5) στον S_h^r , μπορούμε όμοια να δείξουμε ότι

$$\max_{0 \leq n \leq N} \|U^n - u^n\| \leq C(k^2 + h^{r+1})$$

για κάποια σταθερά $C > 0$, αρκεί να αποδείξουμε πως ισχύει το αντίστοιχο του Λήμματος 2

$$\inf_{\chi \in S_h^r} \{\|v - \chi\| + h\|(v - \chi)'\|\} \leq ch^{r+1}\|v\|_{r+1}, \quad r = 2, 3$$

για κάποιο $c > 0$.

Το υπόλοιπο κομμάτι των εκτιμήσεων σφάλματος είναι ακριβώς το ίδιο.

3.1 Υλοποίηση με γραμμικές splines

Θεωρούμε $\{\varphi_i\}_{i=1}^{J-1}$ βάση του S_h^1 , για την οποία:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{h} & , \quad x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{x_{i+1}-x}{h} & , \quad x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 & , \quad \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad i = 1, \dots, J-1$$

Ορίζουμε τις βοηθητικές συναρτήσεις $\Phi_0(y) = 1 - y$ και $\Phi_1(y) = y$. Τότε:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \Phi_1\left(\frac{x-x_{i-1}}{h}\right) & , \quad x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \Phi_0\left(\frac{x-x_i}{h}\right) & , \quad x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 & , \quad \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad i = 1, \dots, J-1$$

και

$$\varphi_i'(x) = \begin{cases} \frac{1}{h} & , \quad x \in [x_{i-1}, x_i] \\ -\frac{1}{h} & , \quad x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 & , \quad \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad i = 1, \dots, J-1$$

Τότε ισχύει η εξής ισοδύναμη διατύπωση του (5):

Πρόταση 5. Για κάθε $1 \leq n \leq N-1$, έχουμε

$$\begin{aligned} (\partial_k^2 U^n, \chi) + \gamma(U_\beta^n, \chi) &= (f_\beta^n, \chi) \quad \forall \chi \in S_h^1 \\ \Leftrightarrow (\partial_k^2 U^n, \varphi_i) + \gamma(U_\beta^n, \varphi_i) &= (f_\beta^n, \varphi_i), \quad i = 1, \dots, J-1 \end{aligned}$$

Απόδειξη. Η κατεύθυνση " \Rightarrow " είναι προφανής, καθώς $\varphi_i \in S_h^1$.

" \Leftarrow ": Έστω τυχόν $\chi \in S_h^1$. Τότε, επειδή οι συναρτήσεις $\{\varphi_i\}_{i=1}^{J-1}$ αποτελούν βάση του S_h^1 , υπάρχουν

$\{\lambda_i\}_{i=1}^{J-1} \subset \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$\chi(x) = \sum_{i=1}^{J-1} \lambda_i \varphi_i(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

Άρα:

$$\begin{aligned} (\partial_k^2 U^n, \varphi_i) + \gamma(U_\beta^n, \varphi_i) &= (f_\beta^n, \varphi_i), \quad i = 1, \dots, J-1 \Rightarrow \\ (\partial_k^2 U^n, \lambda_i \varphi_i) + \gamma(U_\beta^n, \lambda_i \varphi_i) &= (f_\beta^n, \lambda_i \varphi_i), \quad i = 1, \dots, J-1 \end{aligned}$$

Αθροίζοντας στην παραπάνω ισότητα από $i = 1$ ως $J-1$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{J-1} (\partial_k^2 U^n, \lambda_i \varphi_i) + \sum_{i=1}^{J-1} \gamma(U_\beta^n, \lambda_i \varphi_i) &= \sum_{i=1}^{J-1} (f_\beta^n, \lambda_i \varphi_i) \Rightarrow \\ \left(\partial_k^2 U^n, \sum_{i=1}^{J-1} \lambda_i \varphi_i \right) + \gamma \left(U_\beta^n, \sum_{i=1}^{J-1} \lambda_i \varphi_i \right) &= \left(f_\beta^n, \sum_{i=1}^{J-1} \lambda_i \varphi_i \right) \Rightarrow \\ (\partial_k^2 U^n, \chi) + \gamma(U_\beta^n, \chi) &= (f_\beta^n, \chi) \end{aligned}$$

□

Για κάθε $n = 0, \dots, N$ η $U^n \in S_h^1$, άρα υπάρχουν $\{c_i^n\}_{i=1}^{J-1} \subset \mathbb{R}$ τ.ω.

$$U^n = \sum_{i=1}^{J-1} c_i^n \varphi_i \quad (38)$$

Τότε, για κάθε $i = 1, \dots, J-1$, έχουμε:

$$\begin{aligned} \left(\frac{U^{n+1} - 2U^n + U^{n-1}}{k^2}, \varphi_i \right) + (\alpha(\beta U^{n+1} + (1-2\beta)U^n + \beta U^{n-1})_x, \varphi_i') \\ = (\beta f^{n+1} + (1-2\beta)f^n + \beta f^{n-1}, \varphi_i) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\left(\frac{U^{n+1}}{k^2}, \varphi_i \right) + (\alpha(\beta U^{n+1})_x, \varphi_i') = \left(\frac{2U^n - U^{n-1}}{k^2}, \varphi_i \right) - (\alpha((1-2\beta)U^n + \beta U^{n-1})_x, \varphi_i') + (f_\beta^n, \varphi_i)$$

Αντικαθιστώντας την (38), έχουμε ότι για κάθε $0 \leq i \leq J-1$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{k^2} \left(\sum_{j=1}^{J-1} c_j^{n+1} \varphi_j, \varphi_i \right) + \beta \left(\alpha \sum_{j=1}^{J-1} c_j^{n+1} \varphi_j', \varphi_i' \right) &= \frac{1}{k^2} \left(\sum_{j=1}^{J-1} (2c_j^n - c_j^{n-1}) \varphi_j, \varphi_i \right) \\ &- \left(\alpha \sum_{j=1}^{J-1} ((1-2\beta)c_j^n + \beta c_j^{n-1}) \varphi_j', \varphi_i' \right) + (f_\beta^n, \varphi_i) \end{aligned}$$

Ισοδύναμα, έχουμε

$$\sum_{j=1}^{J-1} \left[\frac{(\varphi_i, \varphi_j)}{k^2} + \beta(\alpha \varphi_i', \varphi_j') \right] c_j^{n+1} = \sum_{j=1}^{J-1} \frac{2c_j^n - c_j^{n-1}}{k^2} (\varphi_i, \varphi_j) - \sum_{j=1}^{J-1} ((1-2\beta)c_j^n + \beta c_j^{n-1}) (\alpha \varphi_i', \varphi_j') + (f_\beta^n, \varphi_i) \quad (39)$$

Ορίζουμε τους πίνακες $M, S \in \mathbb{R}^{(J-1) \times (J-1)}$, για τους οποίους

$$M_{ij} = (\varphi_i, \varphi_j), \quad S_{ij} = \gamma(\varphi_i, \varphi_j), \quad i, j = 1, \dots, J-1$$

Από τη συμμετρικότητα του εσωτερικού γινομένου, παρατηρούμε ότι $S_{ij} = S_{ji}$ και $M_{ij} = M_{ji}$, $i = 1, \dots, J-1$, άρα οι M, S είναι συμμετρικοί. Επίσης, λόγω του φορέα των $\{\varphi_i\}_{i=1}^{J-1}$, για κάθε $0 \leq i, j \leq J-1$ με $|i-j| > 1$, έχουμε ότι

$$(\varphi_i, \varphi_j) = 0, \quad \gamma(\varphi_i, \varphi_j) = 0$$

δηλαδή οι M, S είναι τριδιαγώνιοι. Άρα, η (34) είναι ισοδύναμη με το ακόλουθο τριδιαγώνιο γραμμικό σύστημα:

$$\left(\frac{1}{k^2} M + \beta S \right) c^{n+1} = \left(\frac{2}{k^2} M - (1 - 2\beta) S \right) c^n - \left(\frac{1}{k^2} M + \beta S \right) c^{n-1} + F_\beta^n, \quad n = 1, \dots, N-1 \quad (40)$$

όπου $c^n = (c_1^n, \dots, c_{J-1}^n)^T$ και $(F_\beta^n)_i = (f_\beta^n, \varphi_i)$, $i = 1, \dots, J-1$.

Θέτουμε $A := \frac{1}{k^2} M + \beta S$. Τότε, εάν ορίσουμε το εσωτερικό γινόμενο $(\cdot, \cdot)_A : S_h^1 \times S_h^1 \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$(u, v)_A = \frac{1}{k^2} (u, v) + \beta \gamma(u, v), \quad u, v \in S_h^1,$$

έχουμε

$$A_{ij} = (\varphi_i, \varphi_j)_A.$$

Έστω τυχόν $y \in \mathbb{R}^{J-1}$. Τότε,

$$\begin{aligned} y^T A y &= \sum_{i=1}^{J-1} (Ay)_i y_i = \sum_{i=1}^{J-1} \left(\sum_{j=1}^{J-1} A_{ij} y_j \right) y_i \\ &= \sum_{i=1}^{J-1} \left(\sum_{j=1}^{J-1} (\varphi_i, \varphi_j)_A y_j y_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{J-1} \left(\sum_{j=1}^{J-1} (y_i \varphi_i, y_j \varphi_j)_A \right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{J-1} y_i \varphi_i, \sum_{j=1}^{J-1} y_j \varphi_j \right)_A \\ &= \left\| \sum_{i=1}^{J-1} y_i \varphi_i \right\|_A^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Υποθέτουμε ότι $y^T A y = 0$. Τότε,

$$\left\| \sum_{i=1}^{J-1} y_i \varphi_i \right\|_A^2 = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{J-1} y_i \varphi_i(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b] \quad (41)$$

και επειδή οι συναρτήσεις είναι γραμμικώς ανεξάρτητες, η (41) δίνει

$$y_i = 0, \quad i = 1, \dots, J-1 \Rightarrow y = 0.$$

Άρα, $y^T A y > 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^{J-1} \setminus \{0\}$. Δηλαδή, ο $\frac{1}{k^2} M + \beta S$ είναι θετικά ορισμένος και συμμετρικός, επομένως το σύστημα (40) έχει μοναδική λύση.

Τώρα, θα αναγάγουμε τα εσωτερικά γινόμενα που χρειάζεται να υπολογίσουμε, σε μια πιο απλή μορφή:

$$\begin{aligned} M_{ii} &= \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i^2(x) dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i^2(x) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i^2(x) dx \\ &= h \int_0^1 \Phi_1^2(y) dy + h \int_0^1 \Phi_0^2(y) dy \\ &= h \int_0^1 (\Phi_1^2(y) + \Phi_0^2(y)) dy \end{aligned}$$

$$M_{i,i+1} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i(x) \varphi_{i+1}(x) dx = h \int_0^1 \Phi_1(y) \Phi_0(y) dy$$

και

$$M_{i,i-1} = M_{i-1,i} = h \int_0^1 \Phi_1(y) \Phi_0(y) dy$$

Επίσης,

$$\begin{aligned} S_{ii} &= \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \alpha(x) (\varphi_i'(x))^2 dx = \frac{1}{h^2} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \alpha(x) dx \\ &= \frac{1}{h} \int_0^1 (\alpha(x_{i-1} + hy) + \alpha(x_i + hy)) dy \end{aligned}$$

$$S_{i,i+1} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \alpha(x) \varphi_i'(x) \varphi_{i+1}'(x) dx = -\frac{1}{h^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \alpha(x) dx = -\frac{1}{h} \int_0^1 \alpha(x_i + hy) dy$$

και

$$S_{i,i-1} = S_{i-1,i} = -\frac{1}{h} \int_0^1 \alpha(x_{i-1} + hy) dy$$

Τέλος,

$$\begin{aligned} (F_\beta^n)_i &= \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f_\beta^n \varphi_i(x) dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_\beta^n \varphi_i(x) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f_\beta^n \varphi_i(x) dx \\ &= h \int_0^1 (f_\beta^n(x_{i-1} + hy) \Phi_1(y) + f_\beta^n(x_i + hy) \Phi_0(y)) dy \end{aligned}$$

Τα παραπάνω ολοκληρώματα θα υπολογιστούν αριθμητικά με τον κανόνα του Simpson

$$\int_a^b g(x) dx \approx \frac{b-a}{6} \left[g(a) + 4g\left(\frac{a+b}{2}\right) + g(b) \right],$$

ο οποίος ολοκληρώνει ακριβώς πολυώνυμα βαθμού το πολύ 3.

Στη συνέχεια, θα δούμε έναν αλγόριθμο για την επίλυση τριδιαγωνίων συστημάτων με μη-μηδενικά διαγώνια στοιχεία.

Έστω $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ τριδιαγώνιος και $d \in \mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$ με

$$\begin{aligned} A_{i,i-1} &=: a_i, & i = 2, \dots, m \\ A_{ii} &=: b_i, & i = 1, \dots, m \\ A_{i,i+1} &=: c_i, & i = 1, \dots, m-1 \end{aligned}$$

Τότε, εφαρμόζοντας απαλοιφή Gauss με μερική οδήγηση στον A , καταλήγουμε στον παρακάτω αλγόριθμο για την επίλυση του συστήματος $Ax = d$:

Algorithm 1: Tridiagonal system Solver

$f \leftarrow$ new array with m zeros

for $i \leftarrow 2$ to m **do**

if $|a_i| > |b_{i-1}|$ **then**

 swap b_{i-1} with a_i

 swap c_{i-1} with b_i

 swap f_{i-1} with c_i

 swap d_{i-1} with d_i

$$b_i \leftarrow b_i - c_{i-1}a_i/b_{i-1}$$

$$c_i \leftarrow c_i - f_{i-1}a_i/b_{i-1}$$

$$d_i \leftarrow d_i - d_{i-1}a_i/b_{i-1}$$

$$x_m \leftarrow d_m/b_m, \quad x_{m-1} \leftarrow (d_{m-1} - c_{m-1}x_m)/b_{m-1}$$

for $i \leftarrow m-2$ downto 1 **do**

$$x_i \leftarrow (d_i - c_i x_{i+1} - f_i x_{i+2})/b_i$$

return x

Έτσι, εφαρμόζοντας τον παραπάνω αλγόριθμο για

$$A = \frac{1}{k^2}M + \beta S$$

και

$$d = \left(\frac{2}{k^2}M - (1 - 2\beta)S \right) c^n - \left(\frac{1}{k^2}M + \beta S \right) c^{n-1} + F_\beta^n, \quad n = 1, \dots, N-1$$

προκύπτει το διάνυσμα των συντελεστών της προσεγγιστικής λύσης U^{n+1} .

Μένει να βρούμε τα διανύσματα c^0, c^1 . Τα c^0, c^1 είναι τέτοια ώστε

$$U^0 = \sum_{i=1}^{J-1} c_i^0 \varphi_i, \quad U^1 = \sum_{i=1}^{J-1} c_i^1 \varphi_i$$

όπου U^0, U^1 οι αρχικές προσεγγίσεις, που ορίσαμε στο Κεφάλαιο 2. Δηλαδή,

$$R_h u_0 = \sum_{i=1}^{J-1} c_i^0 \varphi_i, \quad R_h \Psi = \sum_{i=1}^{J-1} c_i^1 \varphi_i$$

Δηλαδή, τα c^0, c^1 είναι τα διανύσματα συντεταγμένων των ελλειπτικών προβολών των u_0, Ψ , ως προς τη βάση $\{\varphi_i\}_{i=1}^{J-1}$.

Έστω $v \in H_0^1(a, b)$. Θα δούμε πώς μπορούμε να υπολογίσουμε το διάνυσμα συντεταγμένων λ της ελλειπτικής προβολής του ως προς τη βάση $\{\varphi_i\}_{i=1}^{J-1}$.

Για κάθε $\chi \in S_h^1$, έχουμε

$$\gamma(v, \chi) = \gamma(R_h v, \chi)$$

Ισοδύναμα, όπως στην Πρόταση 5, για κάθε $1 \leq i \leq J-1$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \gamma(v, \varphi_i) &= \gamma(R_h v, \varphi_i) \\ \Leftrightarrow \gamma\left(\sum_{j=1}^{J-1} \lambda_j \varphi_j, \varphi_i\right) &= \gamma(v, \varphi_i) \\ \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{J-1} \lambda_j \gamma(\varphi_i, \varphi_j) &= \gamma(v, \varphi_i) \end{aligned}$$

το οποίο είναι ισοδύναμο με το γραμμικό σύστημα

$$A\lambda = \mu$$

όπου $A \in \mathbb{R}^{(J-1) \times (J-1)}$ και $\mu \in \mathbb{R}^{J-1}$ με

$$A_{ij} = \gamma(\varphi_i, \varphi_j), \quad \mu_i = \gamma(v, \varphi_i), \quad i, j = 1, \dots, J-1$$

Παρατηρούμε ότι $A = S$, δηλαδή το σύστημα είναι επίσης τριδιαγώνιο και τα $\gamma(\varphi_i, \varphi_j)$, $\gamma(v, \varphi_i)$ υπολογίζονται όπως παραπάνω με τον κανόνα του Simpson.

Έτσι, εφαρμόζουμε την παραπάνω μέθοδο για $v = u_0$ και $v = \Psi$ και βρίσκουμε τα c^0, c^1 . Τα $\{c^n\}_{n=2}^N$ υπολογίζονται αναδρομικά από το σύστημα (40).

3.2 Υλοποίηση με τετραγωνικές splines

Θεωρούμε $\{\varphi_i\}_{i=1}^{2J-1}$ βάση του S_h^2 , για την οποία

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{[i/2]-1}}{h} & , \quad x \in [x_{[i/2]-1}, x_{[i/2]}] \\ \frac{x_{[i/2]+1}-x}{h} & , \quad x \in [x_{[i/2]}, x_{[i/2]+1}] \\ 0 & , \quad \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad i = 1, \dots, 2J-1, \quad i \pmod 2 = 0$$

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{(x-x_{[i/2]})(x_{[i/2]+1}-x)}{h^2} & , \quad x \in [x_{[i/2]}, x_{[i/2]+1}] \\ 0 & , \quad \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad i = 1, \dots, 2J-1, \quad i \pmod 2 = 1$$

Ορίζουμε τις βοηθητικές συναρτήσεις $\Phi_0(y) = 1 - y$, $\Phi_1(y) = y$, $\Phi_2(y) = y(1 - y)$. Τότε,

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \Phi_1\left(\frac{x-x_{[i/2]-1}}{h}\right) & , \quad x \in [x_{[i/2]-1}, x_{[i/2]}] \\ \Phi_0\left(\frac{x-x_{[i/2]}}{h}\right) & , \quad x \in [x_{[i/2]}, x_{[i/2]+1}] \\ 0 & , \quad \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad i = 1, \dots, 2J-1, \quad i \pmod 2 = 0$$

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \Phi_2\left(\frac{x-x_{[i/2]}}{h}\right) & , \quad x \in [x_{[i/2]}, x_{[i/2]+1}] \\ 0 & , \quad \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad i = 1, \dots, 2J-1, \quad i \pmod 2 = 1$$

και

$$\varphi'_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{h} & , \quad x \in [x_{[i/2]-1}, x_{[i/2]}] \\ -\frac{1}{h} & , \quad x \in [x_{[i/2]}, x_{[i/2]+1}] \\ 0 & , \quad \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad i = 1, \dots, 2J-1, \quad i \bmod 2 = 0$$

$$\varphi'_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{h} \Phi'_2\left(\frac{x-x_{[i/2]}}{h}\right) & , \quad x \in [x_{[i/2]}, x_{[i/2]+1}] \\ 0 & , \quad \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad i = 1, \dots, 2J-1, \quad i \bmod 2 = 1$$

Όπως και στην Ενότητα 3.1, θα πρέπει να λύσουμε το γραμμικό σύστημα

$$\left(\frac{1}{k^2}M + \beta S\right) c^{n+1} = \left(\frac{2}{k^2}M - (1-2\beta)S\right) c^n - \left(\frac{1}{k^2}M + \beta S\right) c^{n-1} + F_\beta^n, \quad n = 1, \dots, N-1$$

με $M, S \in \mathbb{R}^{(2J-1) \times (2J-1)}$, $F_\beta^n \in \mathbb{R}^{2J-1}$ τ.ω.

$$M_{ij} = (\varphi_i, \varphi_j), \quad S_{ij} = \gamma(\varphi_i, \varphi_j), \quad i, j = 1, \dots, 2J-1$$

και

$$(F_\beta^n)_i = (f_\beta^n, \varphi_i), \quad i = 1, \dots, 2J-1$$

Έτσι, θα βρούμε τα διανύσματα $\{c^{n+1}\}_{n=1}^{N-1} \subset \mathbb{R}^{2J-1}$, για τα οποία

$$U^{n+1} = \sum_{i=1}^{2J-1} c_i^{n+1} \varphi_i, \quad n = 1, \dots, N-1.$$

Οι πίνακες M, S είναι συμμετρικοί και επειδή

$$(\varphi_i, \varphi_j) = 0, \quad \gamma(\varphi_i, \varphi_j) = 0, \quad i, j = 1, \dots, 2J-1, \quad |i-j| > 2$$

οι M, S είναι πενταδιαγώνιοι, και μάλιστα

$$(\varphi_i, \varphi_j) = 0, \quad \gamma(\varphi_i, \varphi_j) = 0, \quad i, j = 1, \dots, 2J-1, \quad |i-j| > 1,$$

εάν i και j περιτοί.

Τώρα, θα αναγάγουμε τα εσωτερικά γινόμενα που χρειάζεται να υπολογίσουμε σε μία πιο απλή μορφή.

$$\begin{aligned} M_{ii} &= \int_{x_{[i/2]-1}}^{x_{[i/2]+1}} \varphi_i^2(x) dx = \int_{x_{[i/2]-1}}^{x_{[i/2]}} \varphi_i^2(x) dx + \int_{x_{[i/2]}}^{x_{[i/2]+1}} \varphi_i^2(x) dx \\ &= h \int_0^1 \Phi_1^2(y) dy + h \int_0^1 \Phi_0^2(y) dy \\ &= h \int_0^1 (\Phi_0^2(y) + \Phi_1^2(y)) dy, \quad i \bmod 2 = 0 \end{aligned}$$

$$M_{ii} = \int_{x_{[i/2]}}^{x_{[i/2]+1}} \varphi_i^2(x) dx = h \int_0^1 \Phi_2^2(y) dy, \quad i \bmod 2 = 1$$

$$M_{i,i+1} = \int_{x_{[i/2]}}^{x_{[i/2]+1}} \varphi_i(x)\varphi_{i+1}(x)dx = h \int_0^1 \Phi_0(y)\Phi_1(y)dy, \quad i \bmod 2 = 0$$

$$M_{i,i+1} = \int_{x_{[i/2]}}^{x_{[i/2]+1}} \varphi_i(x)\varphi_{i+1}(x)dx = h \int_0^1 \Phi_1(y)\Phi_2(y)dy, \quad i \bmod 2 = 1$$

$$M_{i,i+2} = \int_{x_{[i/2]}}^{x_{[i/2]+1}} \varphi_i(x)\varphi_{i+2}(x)dx = h \int_0^1 \Phi_0(y)\Phi_1(y)dy, \quad i \bmod 2 = 0$$

$$M_{i,i+2} = 0, \quad i \bmod 2 = 1$$

$$M_{i,i-1} = M_{i-1,i}, \quad M_{i,i-2} = M_{i-2,i}$$

⌘⌘

$$S_{ii} = \int_{x_{[i/2]-1}}^{x_{[i/2]+1}} \alpha(x)(\varphi'_i(x))^2 dx = \frac{1}{h^2} \int_{x_{[i/2]-1}}^{x_{[i/2]+1}} \alpha(x)dx = \frac{1}{h} \int_0^1 (\alpha(x_{[i/2]-1} + hy) + \alpha(x_{[i/2]} + hy)) dy, \quad i \bmod 2 = 0$$

$$S_{ii} = \frac{1}{h} \int_{x_{[i/2]}}^{x_{[i/2]+1}} \alpha(x)(\varphi'_i(x))^2 dx = \frac{1}{h} \int_0^1 \alpha(x_{[i/2]} + hy)(\Phi'_2(y))^2 dy, \quad i \bmod 2 = 1$$

$$S_{i,i+1} = \int_{x_{[i/2]}}^{x_{[i/2]+1}} \alpha(x)\varphi'_i(x)\varphi'_{i+1}(x)dx = -\frac{1}{h} \int_{x_{[i/2]}}^{x_{[i/2]+1}} \alpha(x)\varphi'_{i+1}(x)dx = h \int_0^1 \alpha(x_{[i/2]} + hy)\Phi'_2(y)dy, \quad i \bmod 2 = 0$$

$$S_{i,i+1} = \int_{x_{[i/2]}}^{x_{[i/2]+1}} \alpha(x)\varphi'_i(x)\varphi'_{i+1}(x)dx = \frac{1}{h} \int_{x_{[i/2]}}^{x_{[i/2]+1}} \alpha(x)\varphi'_i(x)dx = h \int_0^1 \alpha(x_{[i/2]} + hy)\Phi'_2(y)dy, \quad i \bmod 2 = 1$$

$$S_{i,i+2} = \int_{x_{[i/2]}}^{x_{[i/2]+1}} \alpha(x)\varphi'_i(x)\varphi'_{i+2}(x)dx = -\frac{1}{h^2} \int_{x_{[i/2]}}^{x_{[i/2]+1}} \alpha(x)dx = -\frac{1}{h} \int_0^1 \alpha(x_{[i/2]} + hy)dy, \quad i \bmod 2 = 0$$

$$S_{i,i+2} = S_{i,i-2} = 0, \quad i \bmod 2 = 1$$

$$S_{i,i-1} = S_{i-1,i} = \frac{1}{h} \int_0^1 \alpha(x_{[i/2]-1} + hy)\Phi'_2(y)dy, \quad i \bmod 2 = 0$$

$$S_{i,i-1} = S_{i-1,i} = -\frac{1}{h} \int_0^1 \alpha(x_{[i/2]-1} + hy)\Phi'_2(y)dy, \quad i \bmod 2 = 1$$

$$S_{i,i-2} = S_{i-2,i} = -\frac{1}{h} \int_0^1 \alpha(x_{[i/2]-1} + hy)dy, \quad i \bmod 2 = 0$$

Τέλος,

$$(F_{\beta}^n)_i = \int_{x_{[i/2]-1}}^{x_{[i/2]+1}} f_{\beta}^n(x) \varphi_i(x) dx = h \int_0^1 (f_{\beta}^n(x_{[i/2]-1} + hy) \Phi_1(y) + f_{\beta}^n(x_{[i/2]} + hy) \Phi_0(y)) dy, \quad i \bmod 2 = 0$$

και

$$(F_{\beta}^n)_i = \int_{x_{[i/2]}}^{x_{[i/2]+1}} f_{\beta}^n(x) \varphi_i(x) dx = h \int_0^1 f_{\beta}^n(x_{[i/2]} + hy) \Phi_2(y) dy, \quad i \bmod 2 = 1$$

Τα παραπάνω ολοκληρώματα θα υπολογιστούν αριθμητικά με τον κανόνα Gauss τριών σημείων στο $[0, 1]$

$$\int_0^1 g(x) dx \approx \sum_{\ell=1}^3 w_{\ell} g(\xi_{\ell}),$$

όπου $\{w_{\ell}\}_{\ell=1}^3 \subset \mathbb{R}$ τα βάρη του κανόνα αριθμητικής ολοκλήρωσης, τα οποία είναι

$$w_1 = \frac{8}{18}, \quad w_2 = \frac{5}{18}, \quad w_3 = \frac{5}{18}$$

και $\{\xi_{\ell}\}_{\ell=1}^3 \subset \mathbb{R}$ οι κόμβοι του κανόνα αριθμητικής ολοκλήρωσης, οι οποίοι είναι

$$\xi_1 = \frac{1}{2}, \quad \xi_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{5}}, \quad \xi_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{5}}$$

Ο κανόνας Gauss τριών σημείων ολοκληρώνει ακριβώς πολυώνυμα βαθμού το πολύ 5.

Στη συνέχεια, θα δούμε έναν αλγόριθμο για την επίλυση πενταδιαγώνιων συστημάτων.

Έστω $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ πενταδιαγώνιος και $d \in \mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$ με

$$\begin{aligned} A_{i,i-2} &=: a_i, & i &= 3, \dots, m \\ A_{i,i-1} &=: b_i, & i &= 2, \dots, m \\ A_{ii} &=: c_i, & i &= 1, \dots, m \\ A_{i,i+1} &=: e_i, & i &= 1, \dots, m-1 \\ A_{i,i+1} &=: f_i, & i &= 1, \dots, m-2 \end{aligned}$$

Τότε, εφαρμόζοντας απαλοιφή Gauss, προκύπτει ο παρακάτω αλγόριθμος για την επίλυση του συστήματος $Ax = d$:

Algorithm 2: Pentadiagonal system Solver

$p, q \leftarrow$ new arrays with m zeros

for $i \leftarrow 2$ to $m-1$ **do**

if $|b_i| > |c_{i-1}|$ **then**

swap c_{i-1} with b_i
 swap e_{i-1} with c_i
 swap f_{i-1} with e_i
 swap p_{i-1} with f_i
 swap d_{i-1} with d_i

$c_i \leftarrow c_i - e_{i-1}b_i/c_{i-1}$
 $e_i \leftarrow e_i - f_{i-1}b_i/c_{i-1}$
 $f_i \leftarrow f_i - p_{i-1}b_i/c_{i-1}$
 $d_i \leftarrow d_i - d_{i-1}b_i/c_{i-1}$

if $|a_{i+1}| > |c_{i-1}|$ **then**
 swap c_{i-1} with a_{i+1}
 swap e_{i-1} with b_{i+1}
 swap f_{i-1} with c_{i+1}
 swap p_{i-1} with e_{i+1}
 swap q_{i-1} with f_{i+1}
 swap d_{i-1} with d_{i+1}

$b_{i+1} \leftarrow b_{i+1} - e_{i-1}a_{i+1}/c_{i-1}$
 $c_{i+1} \leftarrow c_{i+1} - f_{i-1}a_{i+1}/c_{i-1}$
 $e_{i+1} \leftarrow e_{i+1} - p_{i-1}a_{i+1}/c_{i-1}$
 $f_{i+1} \leftarrow f_{i+1} - q_{i-1}a_{i+1}/c_{i-1}$
 $d_{i+1} \leftarrow d_{i+1} - d_{i-1}a_{i+1}/c_{i-1}$

if $|b_m| > |c_{m-1}|$ **then**
 swap c_{m-1} with b_m
 swap e_{m-1} with c_m
 swap d_{m-1} with d_m

$c_m \leftarrow c_m - e_{m-1}b_m/c_{m-1}$
 $d_m \leftarrow d_m - d_{m-1}b_m/c_{m-1}$

$x_m \leftarrow d_m/c_m$
 $x_{m-1} \leftarrow (d_{m-1} - e_{m-1}x_m)/c_{m-1}$
 $x_{m-2} \leftarrow (d_{m-2} - e_{m-2}x_{m-1} - f_{m-2}x_m)/c_{m-2}$
 $x_{m-3} \leftarrow (d_{m-3} - e_{m-3}x_{m-2} - f_{m-3}x_{m-1} - p_{m-3}x_m)/c_{m-3}$

for $i \leftarrow m - 4$ **downto** 1 **do**
 $x_i \leftarrow (d_i - e_i x_{i+1} - f_i x_{i+2} - p_i x_{i+3} - q_i x_{i+4})/c_i$
return x

Έτσι, για δεδομένα c^n, c^{n-1} , λύνουμε το πενταδιαγώνιο σύστημα με τον παραπάνω αλγόριθμο και βρίσκουμε τον c^{n+1} , $n = 1, \dots, N - 1$.

Τα c^0, c^1 υπολογίζονται όπως και στην Ενότητα 3.1, λύνοντας τα πενταδιαγώνια συστήματα

$$Sc^0 = \mu^0, \quad Sc^1 = \mu^1,$$

όπου

$$\begin{aligned} \mu_i^0 &= \gamma(u_0, \varphi_i), \quad i = 1, \dots, 2J - 1 \\ \mu_i^1 &= \gamma(\Psi, \varphi_i), \quad i = 1, \dots, 2J - 1 \end{aligned}$$

Τα $\gamma(u_0, \varphi_i), \gamma(\Psi, \varphi_i)$ υπολογίζονται όπως παραπάνω με τον κανόνα Gauss τριών σημείων.

3.3 Υλοποίηση με κυβικές splines

Ορίζουμε τη συνάρτηση $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ως εξής:

$$s(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(x+2)^3 & , \quad x \in [-2, -1] \\ \frac{1}{4}[1 + 3(x+1) + 3(x+1)^2 - 3(x+1)^3] & , \quad x \in [-1, 0] \\ \frac{1}{4}[1 + 3(1-x) + 3(1-x)^2 - 3(1-x)^3] & , \quad x \in [0, 1] \\ \frac{1}{4}(2-x)^3 & , \quad x \in [1, 2] \\ 0 & , \quad \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Ορίζουμε τις συναρτήσεις $\{\varphi_i^*\}_{i=-1}^{J+1}$ έτσι ώστε

$$\varphi_i^*(x) = s\left(\frac{x-x_i}{h}\right), \quad x \in [a, b], \quad i = -1, \dots, J+1,$$

όπου $x_{-1} = a - h$ και $x_{J+1} = b + h$.

Τότε, κατασκευάζουμε τη βάση $\{\varphi_i\}_{i=0}^J$ του S_h^3 ως εξής:

$$\varphi_i := \varphi_i^*, \quad i = 2, \dots, J-2$$

και $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_{J-1}, \varphi_J$ γραμμικοί συνδιασμοί των $\varphi_0^*, \varphi_1^*, \varphi_{-1}^*$ και $\varphi_{J-1}^*, \varphi_{*J}, \varphi_{*J+1}$ τέτοιες ώστε $\varphi_0(a) = \varphi_1(a) = 0, \varphi_{J-1}(b) = \varphi_J(b) = 0$ και το σύνολο $\{\varphi_i\}_{i=0}^J$ να είναι γραμμικώς ανεξάρτητο και να παράγει τον S_h^3 .

Εάν επιλέξουμε

$$\begin{aligned} \varphi_0 &:= \varphi_0^* - 4\varphi_{-1}^*, & \varphi_1 &:= \varphi_1^* - \varphi_{-1}^* \\ \varphi_{J-1} &:= \varphi_{J-1}^* - \varphi_{*J+1}^*, & \varphi_J &:= \varphi_{*J}^* - 4\varphi_{*J+1}^* \end{aligned}$$

οι συναρτήσεις $\{\varphi_i\}_{i=0}^J$ ικανοποιούν τις παραπάνω ιδιότητες. Άρα, κατασκευάσαμε την εξής βάση του S_h^3

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= s\left(\frac{x-x_0}{h}\right) - 4s\left(\frac{x-x_0+h}{h}\right) \\ \varphi_1(x) &= s\left(\frac{x-x_1}{h}\right) - s\left(\frac{x-x_0+h}{h}\right) \\ \varphi_i(x) &= s\left(\frac{x-x_i}{h}\right), \quad i = 2, \dots, J-2, & , \quad x \in [a, b] \\ \varphi_{J-1}(x) &= s\left(\frac{x-x_{J-1}}{h}\right) - s\left(\frac{x-x_J-h}{h}\right) \\ \varphi_J(x) &= s\left(\frac{x-x_J}{h}\right) - 4s\left(\frac{x-x_J-h}{h}\right) \end{aligned}$$

Τότε, οι παράγωγοι $\{\varphi_i'\}_{i=0}^J$ των $\{\varphi_i\}_{i=0}^J$ είναι

$$\begin{aligned} \varphi_0'(x) &= \frac{1}{h} \left[s' \left(\frac{x-x_0}{h} \right) - 4s' \left(\frac{x-x_0+h}{h} \right) \right] \\ \varphi_1'(x) &= \frac{1}{h} \left[s' \left(\frac{x-x_1}{h} \right) - s' \left(\frac{x-x_0+h}{h} \right) \right] \\ \varphi_i'(x) &= \frac{1}{h} s' \left(\frac{x-x_i}{h} \right), \quad i = 2, \dots, J-2, & , \quad x \in [a, b] \\ \varphi_{J-1}'(x) &= \frac{1}{h} \left[s' \left(\frac{x-x_{J-1}}{h} \right) - s' \left(\frac{x-x_J-h}{h} \right) \right] \\ \varphi_J'(x) &= \frac{1}{h} \left[s' \left(\frac{x-x_J}{h} \right) - 4s' \left(\frac{x-x_J-h}{h} \right) \right] \end{aligned}$$

Σχόλιο: Σε αυτή την περίπτωση δεν μπορούμε να μετασχηματίσουμε τις συναρτήσεις βάσης σε απλούστερες συναρτήσεις.

Όπως στις δύο προηγούμενες ενότητες, θα πρέπει να λύσουμε το γραμμικό σύστημα

$$\left(\frac{1}{k^2}M + \beta S\right)c^{n+1} = \left(\frac{2}{k^2}M - (1 - 2\beta)S\right)c^n - \left(\frac{1}{k^2}M + \beta S\right)c^{n-1} + F_\beta^n, \quad n = 1, \dots, N-1$$

με $M, S \in \mathbb{R}^{(J+1) \times (J+1)}$, $F_\beta^n \in \mathbb{R}^{J+1}$ ορισμένα όπως στις προηγούμενες ενότητες.

Θα θεωρούμε ότι οι δείκτες των πινάκων και των διανυσμάτων ξεκινούν από το 0, ώστε να συμφωνούν με τους δείκτες των συναρτήσεων της βάσης.

Έτσι, θα βρούμε τα διανύσματα $\{c^{n+1}\}_{n=1}^{N-1} \subset \mathbb{R}^{J+1}$, για τα οποία

$$U^{n+1} = \sum_{i=0}^J c_i^{n+1} \varphi_i, \quad n = 1, \dots, N-1.$$

Οι πίνακες M, S είναι συμμετρικοί και επειδή

$$(\varphi_i, \varphi_j) = 0, \quad \gamma(\varphi_i, \varphi_j) = 0, \quad i, j = 0, \dots, J, \quad |i - j| > 3$$

οι M, S είναι επταδιαγώνιοι.

Τώρα, θα δούμε αναλυτικά όλα τα στοιχεία των πινάκων M, S και του διανύσματος F_β^n . Τα στοιχεία M_{ij}, S_{ij} και $(F_\beta^n)_i$, $i, j = 0, 1, J-1, J$ χρειάζονται ιδιαίτερη προσοχή, επειδή οι φορείς των συναρτήσεων φ_i είναι διαφορετικοί για τα συγκεκριμένα i . Για τα στοιχεία της διαγωνίου έχουμε

$$\begin{aligned} M_{00} &= \int_{x_0}^{x_2} \varphi_0^2(x) dx, & S_{00} &= \int_{x_0}^{x_2} \alpha(x) (\varphi_0'(x))^2 dx \\ M_{11} &= \int_{x_0}^{x_3} \varphi_1^2(x) dx, & S_{11} &= \int_{x_0}^{x_3} \alpha(x) (\varphi_1'(x))^2 dx \\ M_{J-1, J-1} &= \int_{x_{J-3}}^{x_J} \varphi_{J-1}^2(x) dx, & S_{J-1, J-1} &= \int_{x_{J-3}}^{x_J} \alpha(x) (\varphi_{J-1}'(x))^2 dx \\ M_{JJ} &= \int_{x_{J-2}}^{x_J} \varphi_J^2(x) dx, & S_{JJ} &= \int_{x_{J-2}}^{x_J} \alpha(x) (\varphi_J'(x))^2 dx \end{aligned}$$

Για τα στοιχεία της πρώτης υπερδιαγωνίου, έχουμε

$$\begin{aligned} M_{01} &= \int_{x_0}^{x_2} \varphi_0(x) \varphi_1(x) dx, & S_{01} &= \int_{x_0}^{x_2} \alpha(x) \varphi_0'(x) \varphi_1'(x) dx \\ M_{J-1, J} &= \int_{x_{J-2}}^{x_J} \varphi_J(x) \varphi_{J-1}(x) dx, & S_{J-1, J} &= \int_{x_{J-2}}^{x_J} \alpha(x) \varphi_J'(x) \varphi_{J-1}'(x) dx \end{aligned}$$

Τώρα, για $i = 2, \dots, J-1$, έχουμε

$$M_{ii} = \int_{x_{i-2}}^{x_{i+2}} \varphi_i^2(x) dx, \quad S_{ii} = \int_{x_{i-2}}^{x_{i+2}} \alpha(x) (\varphi_i'(x))^2 dx$$

Για $i = 1, \dots, J-2$, έχουμε

$$M_{i,i+1} = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+2}} \varphi_i(x)\varphi_{i+1}(x)dx, \quad S_{i,i+1} = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+2}} \alpha(x)\varphi'_i(x)\varphi'_{i+1}(x)dx$$

Για $i = 0, \dots, J-2$, έχουμε

$$M_{i,i+2} = \int_{x_i}^{x_{i+2}} \varphi_i(x)\varphi_{i+2}(x)dx, \quad S_{i,i+2} = \int_{x_i}^{x_{i+2}} \alpha(x)\varphi'_i(x)\varphi'_{i+2}(x)dx$$

Για $i = 0, \dots, J-3$, έχουμε

$$M_{i,i+3} = \int_{x_{i+1}}^{x_{i+2}} \varphi_i(x)\varphi_{i+3}(x)dx, \quad S_{i,i+3} = \int_{x_{i+1}}^{x_{i+2}} \alpha(x)\varphi'_i(x)\varphi'_{i+3}(x)dx$$

Για τις υποδιαγωνίους, για κάθε i , έχουμε

$$\begin{aligned} M_{i,i-1} &= M_{i-1,i}, & S_{i,i-1} &= S_{i-1,i} \\ M_{i,i-2} &= M_{i-2,i}, & S_{i,i-2} &= S_{i-2,i} \\ M_{i,i-3} &= M_{i-3,i}, & S_{i,i-3} &= S_{i-3,i} \end{aligned}$$

Τέλος, για το διάνυσμα F_β^n έχουμε

$$\begin{aligned} (F_\beta^n)_0 &= \int_{x_0}^{x_2} f_\beta^n(x)\varphi_0(x)dx, & (F_\beta^n)_1 &= \int_{x_0}^{x_3} f_\beta^n(x)\varphi_1(x)dx \\ (F_\beta^n)_{J-1} &= \int_{x_{J-3}}^{x_J} f_\beta^n(x)\varphi_{J-1}(x)dx, & (F_\beta^n)_J &= \int_{x_{J-2}}^{x_J} f_\beta^n(x)\varphi_J(x)dx \end{aligned}$$

Για $i = 2, \dots, J-2$, το $(F_\beta^n)_i$ είναι

$$(F_\beta^n)_i = \int_{x_{i-2}}^{x_{i+2}} f_\beta^n(x)\varphi_i(x)dx$$

Τα παραπάνω ολοκληρώματα υπολογίζονται αριθμητικά με τον κανόνα Gauss τεσσάρων σημείων στο $[-1, 1]$, όπου

$$\int_{-1}^1 g(x)dx \approx \sum_{\ell=1}^4 w_\ell g(\xi_\ell),$$

όπου $\{w_\ell\}_{\ell=1}^4$ τα βάρη του κανόνα αριθμητικής ολοκλήρωσης, τα οποία είναι

$$w_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{30}}{36}, \quad w_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{30}}{36}, \quad w_3 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{30}}{36}, \quad w_4 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{30}}{36}$$

και $\{\xi_\ell\}_{\ell=1}^4$ οι κόμβοι του κανόνα αριθμητικής ολοκλήρωσης, οι οποίοι είναι

$$\xi_1 = -\sqrt{\frac{15 + 2\sqrt{30}}{35}}, \quad \xi_2 = -\sqrt{\frac{15 - 2\sqrt{30}}{35}}, \quad \xi_3 = \sqrt{\frac{15 - 2\sqrt{30}}{35}}, \quad \xi_4 = \sqrt{\frac{15 + 2\sqrt{30}}{35}},$$

Για να υπολογίσουμε αριθμητικά ένα ολοκλήρωμα σε οποιοδήποτε διάστημα $[a, b]$ με τον παραπάνω κανόνα, μετασχηματίζουμε το ολοκλήρωμα από το $[a, b]$ στο $[-1, 1]$ κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής

$$y = \frac{2x - (b + a)}{b - a}$$

και το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\int_a^b g(x)dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 g\left(\frac{b-a}{2}y + \frac{b+a}{2}\right) dy$$

Έτσι, κάνουμε τον παραπάνω μετασχηματισμό στα εσωτερικά γινόμενα που θέλουμε να υπολογίσουμε και εφαρμόζουμε τον κανόνα Gauss στο $[-1, 1]$. Ο κανόνας Gauss τεσσάρων σημείων ολοκληρώνει ακριβώς πολυώνυμα βαθμού το πολύ 7.

Στη συνέχεια, θα δούμε έναν αλγόριθμο για την επίλυση επταδιαγώνιων συστημάτων.

Έστω $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ επταδιαγώνιος και $d \in \mathbb{R}^m$ με

$$\begin{aligned} A_{i,i-3} &=: a_i, & i &= 4, \dots, m \\ A_{i,i-2} &=: b_i, & i &= 3, \dots, m \\ A_{i,i-1} &=: c_i, & i &= 2, \dots, m \\ A_{ii} &=: e_i, & i &= 1, \dots, m \\ A_{i,i+1} &=: f_i, & i &= 1, \dots, m-1 \\ A_{i,i+1} &=: g_i, & i &= 1, \dots, m-2 \\ A_{i,i+3} &=: h_i, & i &= 1, \dots, m-3 \end{aligned}$$

Τότε, εφαρμόζοντας απαλοιφή Gauss, προκύπτει ο ακόλουθος αλγόριθμος για την επίλυση του συστήματος $Ax = d$:

Algorithm 3: Heptadiagonal system Solver

$p, q, r \leftarrow$ new arrays with m zeros

for $i \leftarrow 2$ to $m - 2$ **do**

if $|c_i| > |e_{i-1}|$ **then**

swap e_{i-1} with c_i
 swap f_{i-1} with e_i
 swap g_{i-1} with f_i
 swap h_{i-1} with g_i
 swap p_{i-1} with h_i
 swap d_{i-1} with d_i

$e_i \leftarrow e_i - f_{i-1}c_i/e_{i-1}$
 $f_i \leftarrow f_i - g_{i-1}c_i/e_{i-1}$
 $g_i \leftarrow g_i - h_{i-1}c_i/e_{i-1}$
 $h_i \leftarrow h_i - p_{i-1}c_i/e_{i-1}$
 $d_i \leftarrow d_i - d_{i-1}c_i/e_{i-1}$

if $|b_{i+1}| > |e_{i-1}|$ **then**

swap e_{i-1} with b_{i+1}
 swap f_{i-1} with c_{i+1}
 swap g_{i-1} with e_{i+1}
 swap h_{i-1} with f_{i+1}
 swap p_{i-1} with g_{i+1}
 swap q_{i-1} with h_{i+1}
 swap d_{i-1} with d_{i+1}

$$\begin{aligned}
 c_{i+1} &\leftarrow c_{i+1} - f_{i-1}b_{i+1}/e_{i-1} \\
 e_{i+1} &\leftarrow e_{i+1} - g_{i-1}b_{i+1}/e_{i-1} \\
 f_{i+1} &\leftarrow f_{i+1} - h_{i-1}b_{i+1}/e_{i-1} \\
 g_{i+1} &\leftarrow g_{i+1} - p_{i-1}b_{i+1}/e_{i-1} \\
 h_{i+1} &\leftarrow h_{i+1} - q_{i-1}b_{i+1}/e_{i-1} \\
 d_{i+1} &\leftarrow d_{i+1} - d_{i-1}b_{i+1}/e_{i-1}
 \end{aligned}$$

if $|a_{i+2}| > |e_{i-1}|$ **then**

swap e_{i-1} with a_{i+2}
 swap f_{i-1} with b_{i+2}
 swap g_{i-1} with c_{i+2}
 swap h_{i-1} with e_{i+2}
 swap p_{i-1} with f_{i+2}
 swap q_{i-1} with g_{i+2}
 swap r_{i-1} with h_{i+2}
 swap d_{i-1} with d_{i+2}

$$\begin{aligned}
 b_{i+2} &\leftarrow b_{i+2} - f_{i-1}a_{i+2}/e_{i-1} \\
 c_{i+2} &\leftarrow c_{i+2} - g_{i-1}a_{i+2}/e_{i-1} \\
 e_{i+2} &\leftarrow e_{i+2} - h_{i-1}a_{i+2}/e_{i-1} \\
 f_{i+2} &\leftarrow f_{i+2} - p_{i-1}a_{i+2}/e_{i-1} \\
 g_{i+2} &\leftarrow g_{i+2} - q_{i-1}a_{i+2}/e_{i-1} \\
 h_{i+2} &\leftarrow h_{i+2} - r_{i-1}a_{i+2}/e_{i-1} \\
 d_{i+2} &\leftarrow d_{i+2} - d_{i-1}a_{i+2}/e_{i-1}
 \end{aligned}$$

if $|c_{m-1}| > |e_{m-2}|$ **then**

swap e_{m-2} with c_{m-1}
 swap f_{m-2} with e_{m-1}
 swap g_{m-2} with f_{m-1}
 swap d_{m-2} with d_{m-1}

$$\begin{aligned}
 e_{m-1} &\leftarrow e_{m-1} - f_{m-2}c_{m-1}/e_{m-2} \\
 f_{m-1} &\leftarrow f_{m-1} - g_{m-2}c_{m-1}/e_{m-2} \\
 d_{m-1} &\leftarrow d_{m-1} - d_{m-2}c_{m-1}/e_{m-2}
 \end{aligned}$$

if $|b_m| > |e_{m-2}|$ **then**

swap e_{m-2} with b_m
 swap f_{m-2} with c_m
 swap g_{m-2} with e_m
 swap d_{m-2} with d_m

$$\begin{aligned}
 c_m &\leftarrow c_m - f_{m-2}b_m/e_{m-2} \\
 e_m &\leftarrow e_m - g_{m-2}b_m/e_{m-2} \\
 d_m &\leftarrow d_m - d_{m-2}b_m/e_{m-2}
 \end{aligned}$$

if $|c_m| > |e_{m-1}|$ **then**
 swap e_{m-1} with c_m
 swap f_{m-1} with e_m
 swap d_{m-1} with d_m

$e_m \leftarrow e_m - f_{m-1}c_m/e_{m-1}$
 $d_m \leftarrow d_m - d_{m-1}c_m/e_{m-1}$

$x_m \leftarrow d_m/e_m$
 $x_{m-1} \leftarrow (d_{m-1} - f_{m-1}x_m)/e_{m-1}$
 $x_{m-2} \leftarrow (d_{m-2} - f_{m-2}x_{m-1} - g_{m-2}x_m)/e_{m-2}$
 $x_{m-3} \leftarrow (d_{m-3} - f_{m-3}x_{m-2} - g_{m-3}x_{m-1} - h_{m-3}x_m)/e_{m-3}$
 $x_{m-4} \leftarrow (d_{m-4} - f_{m-4}x_{m-3} - g_{m-4}x_{m-2} - h_{m-4}x_{m-1} - p_{m-4}x_m)/e_{m-4}$
 $x_{m-5} \leftarrow (d_{m-5} - f_{m-5}x_{m-4} - g_{m-5}x_{m-3} - h_{m-5}x_{m-2} - p_{m-5}x_{m-1} - q_{m-5}x_m)/e_{m-5}$

for $i \leftarrow m - 6$ **downto** 1 **do**
 $x_i \leftarrow (d_i - f_i x_{i+1} - g_i x_{i+2} - h_i x_{i+3} - p_i x_{i+4} - q_i x_{i+5} - r_i x_{i+6})/e_i$
return x

Έτσι, βρίσκοντας τα c^0, c^1 όπως στις δύο προηγούμενες ενότητες, λύνουμε αναδρομικά το σύστημα (40) και καταλήγουμε στις προσεγγιστικές λύσεις

$$U^n = \sum_{i=0}^J c_i^n \varphi_i, \quad n = 0, \dots, N$$

Στο επόμενο κεφάλαιο, θα ασχοληθούμε με ένα συγκεκριμένο πρόβλημα, του οποίου η αναλυτική λύση είναι γνωστή και θα συγκρίνουμε τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την υλοποίηση των τριών μεθόδων που μελετήσαμε στον υπολογιστή, με τα αντίστοιχα αποτελέσματα της αναλυτικής λύσης.

4 Αποτελέσματα για ένα συγκεκριμένο πρόβλημα

Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) - \frac{1}{\pi^2} u_{xx}(x, t) &= \frac{2}{\pi^2}, \quad x \in [0, 1], \quad t \in [0, 5] \\ u(x, 0) &= \sin(\pi x) + x(1 - x), \quad x \in [0, 1] \\ u_t(x, 0) &= 0, \quad x \in [0, 1] \\ u(0, t) = u(1, t) &= 0, \quad t \in [0, 5] \end{aligned} \tag{42}$$

Δηλαδή, το (42) είναι το πρόβλημα (1) με $a = 0$, $b = 1$, $T = 5$ και

$$\alpha(x) = \frac{1}{\pi^2}, \quad f(x, t) = \frac{2}{\pi^2}, \quad u_0(x) = \sin(\pi x) + x(1 - x), \quad u_1(x) = 0, \quad (x, t) \in [0, 1] \times [0, 5].$$

Η αναλυτική λύση του προβλήματος είναι η

$$u(x, t) = \cos(t) \sin(\pi x) + x(1 - x), \quad (x, t) \in [0, 1] \times [0, 5]$$

Θα συγκρίνουμε την αναλυτική λύση u του προβλήματος (42) με τις προσεγγιστικές λύσεις $\{U^n\}_{n=0}^N$, που προέκυψαν από την υλοποίηση του σχήματος (5) στον υπολογιστή. Το κεφάλαιο αυτό, θα περιέχει τρεις ενότητες, μία για τον κάθε χώρο κατά τμήματα πολυωνυμικών συναρτήσεων.

4.1 Αποτελέσματα για τις γραμμικές splines

Στον χώρο των γραμμικών splines, το σφάλμα ως προς την L^2 -νόρμα είναι

$$\varepsilon(N, J) := \max_{0 \leq n \leq N} \|U^n - u(\cdot, t_n)\| = \max_{0 \leq n \leq N} \left[\left(\int_0^1 |U^n(x) - u(x, t_n)|^2 dx \right)^{1/2} \right]$$

Ακολουθεί ο πίνακας των σφαλμάτων για $\beta = 1/4, 1/2$ και $(N, J) = (40, 40), (60, 60), (80, 80)$:

Διαμέριση	Σφάλμα για $\beta = 1/4$	Σφάλμα για $\beta = 1/2$
(40,40)	0,004490	0,010916
(60,60)	0,002023	0,004910
(80,80)	0,001145	0,002779

Οι τιμές των σφαλμάτων είναι προσεγγιστικές, καθώς το ολοκλήρωμα στον ορισμό του σφάλματος υπολογίσθηκε με τον κανόνα του Simpson.

Η τάξη του σφάλματος $\varepsilon(N, J)$ είναι

$$\varepsilon(N, J) = O\left(\frac{1}{N^2} + \frac{1}{J^2}\right)$$

Τότε, για $N = J$ έχουμε

$$\varepsilon(N, J) \sim C\left(\frac{1}{N^2} + \frac{1}{J^2}\right) \sim C/J^2$$

Για δύο διαφορετικές διαμερίσεις (N_1, J_1) και (N_2, J_2) με $N_1 = J_1$ και $N_2 = J_2$, ο λόγος των σφαλμάτων ως προς τις διαμερίσεις αυτές είναι

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon(N_1, J_1)}{\varepsilon(N_2, J_2)} &\sim \frac{C/J_1^2}{C/J_2^2} = \left(\frac{J_2}{J_1}\right)^2 \Rightarrow \\ \ln\left(\frac{\varepsilon(N_1, J_1)}{\varepsilon(N_2, J_2)}\right) &\sim \ln\left(\left(\frac{J_2}{J_1}\right)^2\right) = 2 \ln\left(\frac{J_2}{J_1}\right) \Rightarrow \\ \frac{\ln(\varepsilon(N_1, J_1)/\varepsilon(N_2, J_2))}{\ln(J_2/J_1)} &\sim 2 \end{aligned}$$

Τότε, για δύο διαμερίσεις J_1, J_2 με $N_1 = J_1$ και $N_2 = J_2$, ορίζουμε την προσεγγιστική τάξη σύγκλισης ως προς J ως εξής:

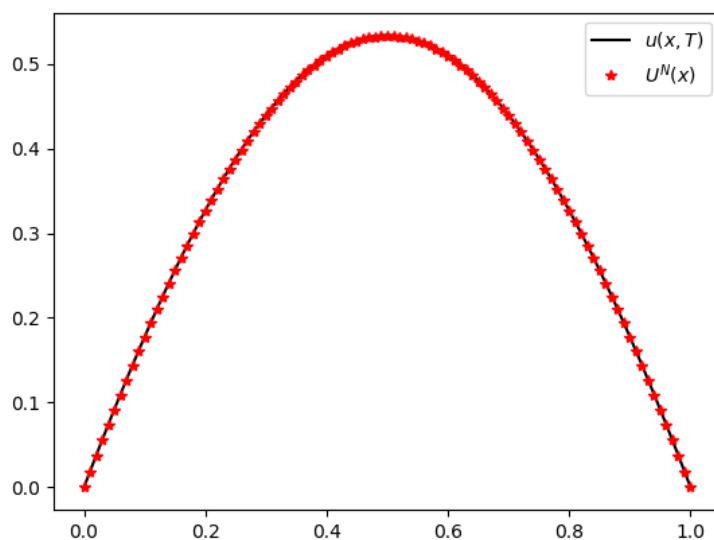
$$rate(J_1, J_2) = \frac{\ln(\varepsilon(J_1, J_1)/\varepsilon(J_2, J_2))}{\ln(J_2/J_1)}$$

και περιμένουμε να είναι περίπου ίση με 2.

Ακολουθεί ο πίνακας των προσεγγιστικών τάξεων σύγκλισης για $\beta = 1/4, 1/2$ και $(J_1, J_2) = (20, 40), (30, 60), (40, 80)$:

(J_1, J_2)	Προσεγγιστική τάξη σύγκλισης για $\beta = 1/4$	Προσεγγιστική τάξη σύγκλισης για $\beta = 1/2$
(20,40)	1,936016	1,938975
(30,60)	1,960430	1,963915
(40,80)	1,971410	1,973914

Τέλος, στο Σχήμα 1, ακολουθούν οι γραφικές παραστάσεις των $U^n, u(\cdot, t_n)$ για $\beta = 1/2, N = J = 100$ και $n = 100$, δηλαδή για $t = T$:



Σχήμα 1: Η γραφική παράσταση της αναλυτικής και της προσεγγιστικής λύσης στις γραμμικές splines, για $t = T$

4.2 Αποτελέσματα για τις τετραγωνικές splines

Ορίζουμε το σφάλμα $\varepsilon(N, J)$, όπως στην προηγούμενη ενότητα. Τότε, ο πίνακας των προσεγγίσεων του σφάλματος για τις ίδιες διαμερίσεις με την ενότητα 4.1 είναι:

Διαμέριση	Σφάλμα για $\beta = 1/4$	Σφάλμα για $\beta = 1/2$
(40,40)	0,004250	0,010690
(60,60)	0,001918	0,004817
(80,80)	0,001086	0,002725

Το ολοκλήρωμα στον ορισμό του σφάλματος υπολογίστηκε με τον κανόνα Gauss τριών σημείων.

Η τάξη του σφάλματος $\varepsilon(N, J)$ είναι

$$\varepsilon(N, J) = O\left(\frac{1}{N^2} + \frac{1}{J^3}\right)$$

Για $N = J^{3/2}$, το σφάλμα $\varepsilon(N, J)$ είναι

$$\varepsilon(N, J) \sim C/J^3$$

Τότε, όπως και στην ενότητα 4.1, ορίζουμε την προσεγγιστική τάξη σύγκλισης ως προς J ως εξής:

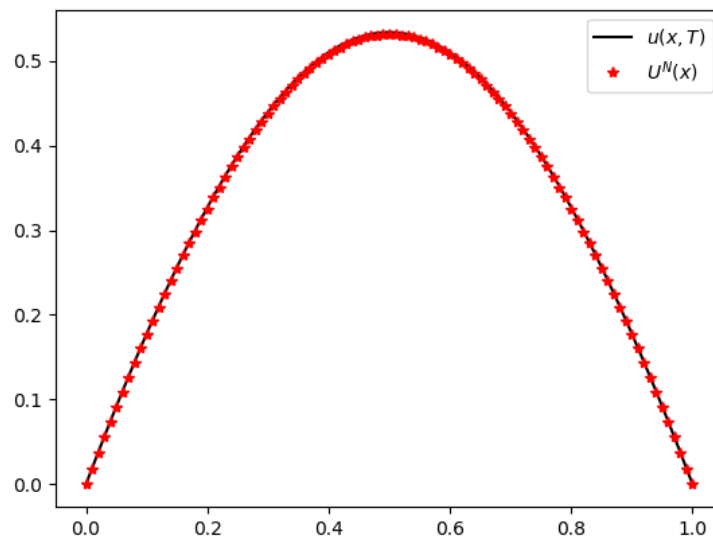
$$rate(J_1, J_2) = \frac{\ln\left(\varepsilon(J_1^{3/2}, J_1)/\varepsilon(J_2^{3/2}, J_2)\right)}{\ln(J_2/J_1)}$$

και περιμένουμε να είναι περίπου ίση με 3.

Ακολουθούν οι πίνακες των προσεγγιστικών τάξεων σύγκλισης, για τις ίδιες διαμερίσεις με εκείνες της ενότητας 4.1, με $N \sim J^{3/2}$:

(J_1, J_2)	Προσεγγιστική τάξη σύγκλισης για $\beta = 1/4$	Προσεγγιστική τάξη σύγκλισης για $\beta = 1/2$
(20,40)	2,930004	2,933402
(30,60)	2,979996	2,982039
(40,80)	3,025699	3,027099

Τέλος, ακολουθούν οι γραφικές παραστάσεις των $U^n, u(\cdot, t_n)$ για $\beta = 1/2$ και ίδια n, N, J με εκείνα της προηγούμενης ενότητας:



Σχήμα 2: Η γραφική παράσταση της αναλυτικής και της προσεγγιστικής λύσης στις τετραγωνικές splines, για $t = T$

4.3 Αποτελέσματα για τις κυβικές splines

Ακολουθεί ο πίνακας των σφαλμάτων $\varepsilon(N, J)$, τα οποία είναι υπολογισμένα με τον κανόνα Gauss τεσσάρων σημείων, για τις ίδιες διαμερίσεις με εκείνες των δύο προηγούμενων ενότητων:

Διαμέριση	Σφάλμα για $\beta = 1/4$	Σφάλμα για $\beta = 1/2$
(40,40)	0,004251	0,010690
(60,60)	0,001918	0,004817
(80,80)	0,001086	0,002725

Η τάξη του σφάλματος $\varepsilon(N, J)$ είναι

$$\varepsilon(N, J) = O\left(\frac{1}{N^2} + \frac{1}{J^4}\right)$$

Για $N = J^2$, το σφάλμα $\varepsilon(N, J)$ είναι

$$\varepsilon(N, J) \sim C/J^4$$

και η προσεγγιστική τάξη σύγκλισης ως προς J είναι

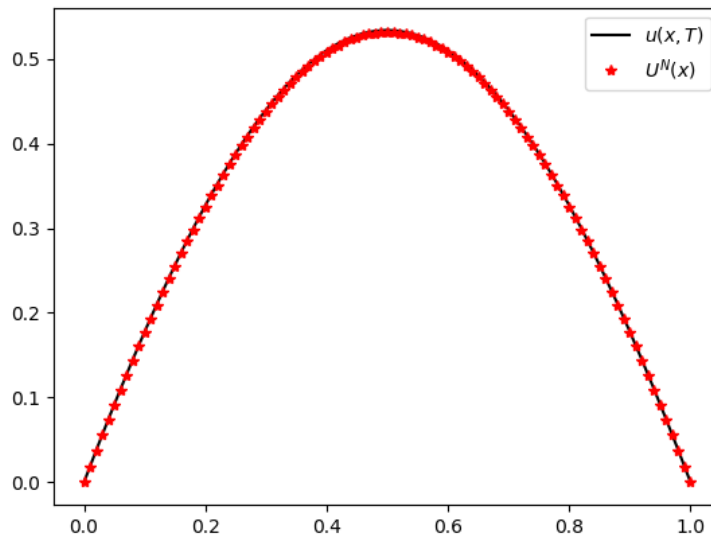
$$rate(J_1, J_2) = \frac{\ln(\varepsilon(J_1^2, J_1)/\varepsilon(J_2^2, J_2))}{\ln(J_2/J_1)},$$

η οποία περιμένουμε να είναι περίπου ίση με 4.

Στη συνέχεια, ακολουθούν οι πίνακες των προσεγγιστικών τάξεων σύγκλισης και των χρόνων εκτέλεσης της μεθόδου, για $(J_1, J_2) = (10, 20), (15, 30), (20, 40)$ με $N = J^2$.

(J_1, J_2)	Προσεγγιστική τάξη σύγκλισης για $\beta = 1/4$	Προσεγγιστική τάξη σύγκλισης για $\beta = 1/2$
(10,20)	3,982660	3,985691
(15,30)	3,992517	3,993943
(20,40)	3,995817	3,996637

Τέλος, ακολουθούν οι γραφικές παραστάσεις των $U^n, u(\cdot, t_n)$ για $\beta = 1/2$ και ίδια n, N, J με εκείνα των δύο προηγούμενων ενοτήτων:



Σχήμα 3: Η γραφική παράσταση της αναλυτικής και της προσεγγιστικής λύσης στις κυβικές splines, για $t = T$

5 Παράρτημα

Η παρούσα εργασία δεν αναφέρεται σε κάποια γλώσσα προγραμματισμού, ώστε να υπάρχει μεγαλύτερη ευελιξία σε αυτό το κομμάτι και να μπορεί ο αναγνώστης να υλοποιήσει τις μεθόδους που αναπτύσσονται, σε όποια γλώσσα προγραμματισμού επιθυμεί. Παρ' όλα αυτά, επιλέχθηκε ως παράδειγμα ο κώδικας της υλοποίησης για έναν από τους τρεις χώρους, τον χώρο των τετραγωνικών splines. Ο παρακάτω κώδικας γλώσσας προγραμματισμού Python, αναπτύχθηκε στα πλαίσια της εργασίας, για να υλοποιηθεί η μέθοδος (5) στον S_h^2 .

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 a=0; b=1; T=5
5 beta=0.5
6
7 #----functions of the pde and the initial-boundary conditions-----
8
9 def f(x, t):
10     return 2/np.pi**2
11
12 def fnb(x, t, n):
13     return beta*f(x, t[n-1])+(1-2*beta)*f(x, t[n])+beta*f(x, t[n+1])
14
15 def exact(x, t):
16     return np.cos(t)*np.sin(np.pi*x)+x*(1-x)
17
18 def aa(x):
19     return 1/np.pi**2
20
21 def ua(x):
22     return np.sin(np.pi*x)+x*(1-x)
23
24 def ub(x):
25     return 0
26
27 #----functions we need for the computation of U^1-----
28
29 def df(x):
30     return 0
31
32 def da(x):
33     return 0
34
35 def d2a(x):
36     return 0
37
38 def dua(x):
39     return np.pi*np.cos(np.pi*x)+1-2*x
40
41 def dub(x):
42     return 0
43
44 def d2ua(x):
```



```

45     return -(np.pi**2)*np.sin(np.pi*x)-2
46
47 def d3ua(x):
48     return -(np.pi**3)*np.cos(np.pi*x)
49
50 def psi(x,dt):
51     psi1=ua(x)+dt*ub(x)
52     psi2=0.5*(dt**2)*(da(x)*dua(x)+aa(x)*d2ua(x)+f(x,0))
53     return psi1+psi2
54
55 def dpsi(x,dt):
56     psi1=dua(x)+dt*dub(x)
57     psi2=0.5*(dt**2)*(d2a(x)*dua(x)+2*da(x)*d2ua(x)+aa(x)*d3ua(x)+df(x))
58     return psi1+psi2
59
60 #-----quadratic spline basis-----
61
62 def qbasis(i,y,J):
63
64     dx=(b-a)/J; x=np.linspace(a,b,J+1)
65
66     if i%2==0:
67         if y>=x[i//2-1] and y<=x[i//2]:
68             return (y-x[i//2-1])/dx
69         if y>=x[i//2] and y<=x[i//2+1]:
70             return (x[i//2+1]-y)/dx
71         else:
72             return 0
73     if i%2==1:
74         if y>=x[i//2] and y<=x[i//2+1]:
75             return (y-x[i//2])*(x[i//2+1]-y)/dx**2
76         else:
77             return 0
78
79 #----functions for the mapping of the inner products---
80
81 def p0(y):
82     return 1-y
83
84 def p1(y):
85     return y
86
87 def p2(y):
88     return y*(1-y)
89
90 def dp2(y):
91     return 1-2*y
92
93 #----gauss quadrature rule at [0,1]-----
94
95 def gauss(g):
96     w1=0.2777777777777778
97     w2=0.4444444444444444
98     w3=0.2777777777777778

```

```

99     x1=0.1127016653792583
100    x2=0.5
101    x3=0.8872983346207417
102    return w1*g(x1)+w2*g(x2)+w3*g(x3)
103
104    #-----gauss quadrature rule at [x_i, x_{i+1}]-----
105
106    def gauss1(i, g, J):
107        w1=0.2777777777777778
108        w2=0.4444444444444444
109        w3=0.2777777777777778
110        x1=0.1127016653792583
111        x2=0.5
112        x3=0.8872983346207417
113        x=np.linspace(a, b, J+1)
114        h=(b-a)/J
115        return h*(w1*g(x[i]+h*x1)+w2*g(x[i]+h*x2)+w3*g(x[i]+h*x3))
116
117    #-----dot product of pentadiagonal matrix and vector-----
118
119    def pentadot(a, b, c, e, f, x):
120
121        n=len(x)
122        y=np.zeros(n)
123
124        y[0]=c[0]*x[0]+e[0]*x[1]+f[0]*x[2]
125        y[1]=b[1]*x[0]+c[1]*x[1]+e[1]*x[2]+f[1]*x[3]
126
127        for i in range(2, n-2):
128            y[i]=a[i]*x[i-2]+b[i]*x[i-1]+c[i]*x[i]+e[i]*x[i+1]+f[i]*x[i+2]
129
130        y[n-2]=a[n-2]*x[n-4]+b[n-2]*x[n-3]+c[n-2]*x[n-2]+e[n-2]*x[n-1]
131        y[n-1]=a[n-1]*x[n-3]+b[n-1]*x[n-2]+c[n-1]*x[n-1]
132
133        return y
134
135    #-----pentadiagonal system solver-----
136
137    def pentasolve(a, b, c, e, f, d):
138
139        n=len(c)
140        x=np.zeros(n)
141        p=np.zeros(n); q=np.zeros(n)
142
143        for i in range(1, n-1):
144
145            if abs(b[i])>abs(c[i-1]):
146                u=c[i-1]; v=e[i-1]; w=f[i-1]; y=d[i-1]
147                c[i-1]=b[i]; e[i-1]=c[i]; f[i-1]=e[i]; d[i-1]=d[i]
148                b[i]=u; c[i]=v; e[i]=w; d[i]=y
149                p[i-1]=f[i]; f[i]=0.0
150
151            c[i]=c[i]-b[i]*e[i-1]/c[i-1]
152            e[i]=e[i]-b[i]*f[i-1]/c[i-1]

```

```

153     f[i]=f[i]-b[i]*p[i-1]/c[i-1]
154     d[i]=d[i]-b[i]*d[i-1]/c[i-1]
155
156     if abs(a[i+1])>abs(c[i-1]):
157         r=c[i-1]; t=e[i-1]; s=f[i-1]; z=p[i-1]; y=d[i-1]
158         c[i-1]=a[i+1]; e[i-1]=b[i+1]; f[i-1]=c[i+1]; p[i-1]=e[i+1]; d
           [i-1]=d[i+1]
159         a[i+1]=r; b[i+1]=t; c[i+1]=s; e[i+1]=z; d[i+1]=y
160         q[i-1]=f[i+1]; f[i+1]=0.0
161
162     b[i+1]=b[i+1]-a[i+1]*e[i-1]/c[i-1]
163     c[i+1]=c[i+1]-a[i+1]*f[i-1]/c[i-1]
164     e[i+1]=e[i+1]-a[i+1]*p[i-1]/c[i-1]
165     f[i+1]=f[i+1]-a[i+1]*q[i-1]/c[i-1]
166     d[i+1]=d[i+1]-a[i+1]*d[i-1]/c[i-1]
167
168     if abs(b[n-1])>abs(c[n-2]):
169         u=c[n-2]; v=e[n-2]; y=d[n-2]
170         c[n-2]=b[n-1]; e[n-2]=c[n-1]; d[n-2]=d[n-1]
171         b[n-1]=u; c[n-1]=v; d[n-1]=y
172
173     c[n-1]=c[n-1]-b[n-1]*e[n-2]/c[n-2]
174     d[n-1]=d[n-1]-b[n-1]*d[n-2]/c[n-2]
175
176     x[n-1]=d[n-1]/c[n-1]
177     x[n-2]=(d[n-2]-e[n-2]*x[n-1])/c[n-2]
178     x[n-3]=(d[n-3]-e[n-3]*x[n-2]-f[n-3]*x[n-1])/c[n-3]
179     x[n-4]=(d[n-4]-e[n-4]*x[n-3]-f[n-4]*x[n-2]-p[n-4]*x[n-1])/c[n-4]
180
181     for i in range(n-5,-1,-1):
182         x[i]=(d[i]-e[i]*x[i+1]-f[i]*x[i+2]-p[i]*x[i+3]-q[i]*x[i+4])/c[i]
183
184     return x
185
186 #-----elliptic projection of a function g-----
187
188 def proj(g,dg,J):
189
190     loww=np.zeros(2*J-1); low=np.zeros(2*J-1); mid=np.zeros(2*J-1); up=np
           .zeros(2*J-1); upp=np.zeros(2*J-1)
191     d=np.zeros(2*J-1); x=np.linspace(a,b,J+1); dx=(b-a)/J
192
193     for i in range(1,2*J):
194         if i%2==1:
195             mid[i-1]=gauss(lambda y: aa(x[i//2]+y*dx)*(dp2(y)**2))/dx
196             d[i-1]=gauss(lambda y: aa(x[i//2]+y*dx)*dg(x[i//2]+y*dx)*dp2(
           y))
197         else:
198             mid[i-1]=gauss(lambda y: aa(x[i//2-1]+y*dx)+aa(x[i//2]+y*dx))
           /dx
199             d[i-1]=gauss(lambda y: aa(x[i//2-1]+y*dx)*dg(x[i//2-1]+y*dx)-
           aa(x[i//2]+y*dx)*dg(x[i//2]+y*dx))
200
201     for i in range(1,2*J-1):

```

```

202     if i%2==1:
203         up[i-1]=gauss(lambda y: aa(x[i//2]+y*dx)*dp2(y))/dx
204     else:
205         up[i-1]=-gauss(lambda y: aa(x[i//2]+y*dx)*dp2(y))/dx**2
206
207     for i in range(1,2*J-2):
208         if i%2==0:
209             upp[i-1]=-gauss(lambda y: aa(x[i//2]+y*dx))/dx
210
211     for i in range(2,2*J):
212         if i%2==1:
213             low[i-1]=-gauss(lambda y: aa(x[i//2]+y*dx)*dp2(y))/dx
214         else:
215             low[i-1]=gauss(lambda y: aa(x[i//2-1]+y*dx)*dp2(y))/dx
216
217     for i in range(3,2*J):
218         if i%2==0:
219             loww[i-1]=-gauss(lambda y: aa(x[i//2-1]+y*dx))/dx
220
221     c=pentaspolve(loww,low,mid,up,upp,d)
222
223     return c
224
225 #-----finite element method-----
226
227 def fem(y,J,N, **plot_solution):
228
229     t=np.linspace(0,T,N+1); x=np.linspace(a,b,J+1)
230     dx=(b-a)/J; dt=T/N
231
232     #----initial conditions-----
233
234     U=np.zeros(N+1)
235     u0=0; u1=0
236     err=0
237     c=proj(ua,dua,J); cn=proj(lambda y: psi(y,dt),lambda y: dps(y,dt),J)
238
239     for i in range(2*J-1):
240
241         u0+=c[i]*qbasis(i+1,y,J)
242         u1+=cn[i]*qbasis(i+1,y,J)
243
244     U[0]=u0; U[1]=u1
245
246     #-----the arrays we need to solve the problem-----
247
248     mloww=np.zeros(2*J-1); mlow=np.zeros(2*J-1); mmid=np.zeros(2*J-1);
249     mup=np.zeros(2*J-1); mupp=np.zeros(2*J-1)
250     sloww=np.zeros(2*J-1); slow=np.zeros(2*J-1); smid=np.zeros(2*J-1);
251     sup=np.zeros(2*J-1); supp=np.zeros(2*J-1)
252     loww=np.zeros(2*J-1); low=np.zeros(2*J-1); mid=np.zeros(2*J-1); up=np
253     .zeros(2*J-1); upp=np.zeros(2*J-1)
254     loww1=np.zeros(2*J-1); low1=np.zeros(2*J-1); mid1=np.zeros(2*J-1);
255     up1=np.zeros(2*J-1); up1=np.zeros(2*J-1)

```

```

252 d=np.zeros(2*J-1); d1=np.zeros(2*J-1); d2=np.zeros(2*J-1); F=np.zeros
253 (2*J-1)
254
255 #-----time loop-----
256
257 for n in range(1,N):
258
259     sums=0
260
261     #-----M and S matrices-----
262
263     for i in range(1,2*J):
264         if i%2==1:
265             mmid[i-1]=dx*gauss(lambda y: p2(y)**2)
266             smid[i-1]=gauss(lambda y: aa(x[i//2]+y*dx)*(dp2(y)**2))/
                dx
267         else:
268             mmid[i-1]=dx*gauss(lambda y: p0(y)**2+p1(y)**2)
269             smid[i-1]=gauss(lambda y: aa(x[i//2-1]+y*dx)+aa(x[i//2]+y
                *dx))/dx
270
271     for i in range(1,2*J-1):
272         if i%2==1:
273             mup[i-1]=dx*gauss(lambda y: p1(y)*p2(y))
274             sup[i-1]=gauss(lambda y: aa(x[i//2]+y*dx)*dp2(y))/dx
275         else:
276             mup[i-1]=dx*gauss(lambda y: p0(y)*p2(y))
277             sup[i-1]=-gauss(lambda y: aa(x[i//2]+y*dx)*dp2(y))/dx**2
278
279     for i in range(1,2*J-2):
280         if i%2==0:
281             mupp[i-1]=dx*gauss(lambda y: p0(y)*p1(y))
282             supp[i-1]=-gauss(lambda y: aa(x[i//2]+y*dx))/dx
283
284     for i in range(2,2*J):
285         if i%2==1:
286             mlow[i-1]=dx*gauss(lambda y: p0(y)*p2(y))
287             slow[i-1]=-gauss(lambda y: aa(x[i//2]+y*dx)*dp2(y))/dx
288         else:
289             mlow[i-1]=dx*gauss(lambda y: p1(y)*p2(y))
290             slow[i-1]=gauss(lambda y: aa(x[i//2-1]+y*dx)*dp2(y))/dx
291
292     for i in range(3,2*J):
293         if i%2==0:
294             mloww[i-1]=dx*gauss(lambda y: p0(y)*p1(y))
295             sloww[i-1]=-gauss(lambda y: aa(x[i//2-1]+y*dx))/dx
296
297     loww=(1/dt**2)*mloww+beta*sloww
298     low=(1/dt**2)*mlow+beta*slow
299     mid=(1/dt**2)*mmid+beta*smid
300     up=(1/dt**2)*mup+beta*sup
301     upp=(1/dt**2)*mupp+beta*supp
302

```

```

303 #-----the vector of the system-----
304
305 loww1=(2/dt**2)*mloww-(1-2*beta)*sloww
306 low1=(2/dt**2)*mlow-(1-2*beta)*slow
307 mid1=(2/dt**2)*mmid-(1-2*beta)*smid
308 up1=(2/dt**2)*mup-(1-2*beta)*sup
309 upp1=(2/dt**2)*mupp-(1-2*beta)*supp
310
311 d1=pentadot(loww1,low1,mid1,up1,upp1,cn)
312 d2=pentadot(loww,low,mid,up,upp,c)
313
314 for i in range(1,2*J):
315     if i%2==1:
316         F[i-1]=dx*gauss(lambda y: fnb(x[i//2]+y*dx,t,n)*p2(y))
317     else:
318         F[i-1]=dx*gauss(lambda y: fnb(x[i//2]+y*dx,t,n)*p0(y)+fnb
319             (x[i//2-1]+y*dx,t,n)*p1(y))
320
321 d=d1-d2+F
322
323 #-----L2-norm and L2-error-----
324
325 integral=gauss1(0,lambda y: (cn[0]*qbasis(1,y,J)+cn[1]*qbasis(2,y
326     ,J)-exact(y,t[n]))**2,J)
327 for i in range(1,J-1):
328     integral+=gauss1(i,lambda y: (cn[2*i-1]*qbasis(2*i,y,J)+cn[2*
329         i]*qbasis(2*i+1,y,J)+cn[2*i+1]*qbasis(2*i+2,y,J)-exact(y,t
330         [n]))**2,J)
331 integral+=gauss1(J-1,lambda y: (cn[2*J-3]*qbasis(2*J-2,y,J)+cn[2*
332     J-2]*qbasis(2*J-1,y,J)-exact(y,t[n]))**2,J)
333 L2norm=np.sqrt(integral)
334
335 if err<L2norm:
336     err=L2norm
337
338 #-----solution of the system-----
339
340 c=cn
341 cn=pentaspolve(loww,low,mid,up,upp,d)
342
343 #-----plots of the fem solution at t=T-----
344
345 if n==N-1 and plot_solution:
346     plt.plot(x[0],0.0,'r*',label='$U^{N}(x)$')
347     for i in range(1,J-1):
348         plt.plot(x[i],cn[2*i-1]*qbasis(2*i,x[i],J),'r*')
349     plt.plot(x[J-1],cn[2*J-3]*qbasis(2*J-2,x[J-1],J),'r*')
350     plt.plot(x[J],0.0,'r*')
351
352 #-----build of the solution U^{n+1}-----
353
354 for i in range(2*J-1):
355     sums+=cn[i]*qbasis(i+1,y,J)
356
357

```

```

352         U[n+1]=sums
353
354     return U, err
355
356     #-----L2-errors-----
357
358     print( 'error40: ', fem(0.5,40,40) [1])
359     print( 'error60: ', fem(0.5,60,60) [1])
360     print( 'error80: ', fem(0.5,80,80) [1])
361
362     #-----approximate rate of convergence-----
363
364     error20=fem(0.5,20,90) [1]
365     error30=fem(0.5,30,165) [1]
366     error40=fem(0.5,40,250) [1]
367     error60=fem(0.5,60,465) [1]
368     error80=fem(0.5,80,715) [1]
369     print( "rate2040:", np.log(error20/error40)/np.log(2))
370     print( "rate3060:", np.log(error30/error60)/np.log(2))
371     print( "rate4080:", np.log(error40/error80)/np.log(2))
372
373     #----call of the fem function and plot of the exact solution-----
374
375     x=np.linspace(a,b,51)
376     plt.plot(x,exact(x,T), 'k',label='$u(x,T)$')
377     print(fem(0.5,100,100, plot_solution=True) [0][50], exact(0.5,2.5))
378     plt.legend()
379     plt.show()

```

Αναφορές

- [1] Γ. Δ. Ακρίβης-Β. Α. Δουγαλής ‘Αριθμητικές Μέθοδοι για Συνήθειες Διαφορικές Εξισώσεις’ (Ηράκλειο, ΠΕΚ, 2006)
- [2] Γ. Δ. Ακρίβης-Β. Α. Δουγαλής ‘Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση’ (Ηράκλειο, ΠΕΚ, 2015)
- [3] V. A. Dougalis, “Finite Element Methods for the Numerical Solution of PDEs” (Πανεπιστημιακές Σημειώσεις,2013)
- [4] G. A. Baker, “Error Estimates for Finite Element Methods for Second Order Hyperbolic Equations” (SIAM,1976)
- [5] Μ. Πλεξουσάκης-Π. Χατζηπαντελίδης ‘Αριθμητική Επίλυση Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων’ (Αποθετήριο Κάλλιπος, 2015)