ΝΙΚΟΛΑΟΣ Κ. ΣΠΑΝΟΥΔΑΚΗΣ

Άλγεβρες τελεστών και αναλλοίωτοι υπόχωροι

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΤΜΗΜΑ του ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΚΡΗΤΗΣ

ΗΡΑΚΛΕΙΟ 1993

ΕΙΣΗΓΗΤΗΣ :
Αναπληρωτής Καθηγητής ΜΙΧΑΛΗΣ Σ. ΛΑΜΠΡΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή

Α

Θα δώσουμε πρώτα μια περίληψη των αποτελεσμάτων που περιέχονται εδώ. (Για τους ορισμούς βλ. μέρη Β και Γ παρακάτω).

Έστω $\mathcal{L}$ ένας σύνδεσμος υποχώρων (subspace lattice) ενός γραμμικού τοπολογικού χώρου και Alg$\mathcal{L}$ η άλγεβρα των τελεστών που αφήνουν αναλλοίωτα τα στοιχεία του $\mathcal{L}$. Εδώ θα μελετήσουμε κυρίως (αλλά όχι μόνο) προβλήματα σχετικά με την ανάλυση ή προσέγγιση τελεστών του Alg$\mathcal{L}$ από αθροίσματα τελεστών τάξης ένα του ίδιου συνόλου. Πιο συγκεκριμένα :

Στο κεφάλαιο 2 γενικεύουμε πρώτα ένα θεώρημα του Ringrose, από χώρο Hilbert σε γραμμικό τοπολογικό χώρο, που δηλώνει ότι τελεστές πεπερασμένης τάξης του Alg$\mathcal{L}$ (συμβολικά τελεστές του ΠΤ(Alg$\mathcal{L}$)) μπορούν να γραφούν σαν αθροίσματα τελεστών τάξης ένα του ίδιου συνόλου (συμβολικά τελεστών του Τ1(Alg$\mathcal{L}$)) στην περίπτωση που ο $\mathcal{L}$ είναι πλήρης αλυσίδα (nest). Όπως στην αρχική απόδειξη, αποδεικνύεται η ύπαρξη ανάλυσης που χρησιμοποιεί το λιγότερο δυνατό πλήθος προσθεταίων. Στην συνέχεια δίνουμε ένα παράδειγμα ενός πεπερασμένου επιμεριστικού (distributive) συνδέσμου $\mathcal{L}_3$, μιας αναπαράστασής του $\mathcal{L}'_3$ (realization) σε χώρο Hilbert και ενός τάξης δύο τελεστή του Alg $\mathcal{L}'_3$ που δεν μπορεί να γραφεί σαν (πεπερασμένο) άθροισμα από τελεστές του Τ1(Alg $\mathcal{L}'_3$) (συμβολικά δεν ανήκει στο σύνολο ΣΤ1(Alg $\mathcal{L}'_3$)). Ο σύνδεσμος αυτός είναι ο ελεύθερα παραγόμενος επιμεριστικός σύνδεσμος με τρείς γεννήτορες (βλ. σχ. 2.1 του κεφ. 2) και έχει 18 στοιχεία.

Στο κεφάλαιο 3 μελετάμε διεξοδικότερα τον $\mathcal{L}_3$. (Αν μια αναπαράσταση $\mathcal{L}'$ ενός συνδέσμου $\mathcal{L}$ ικανοποιεί ΠΤ(Alg$\mathcal{L}'$) = ΣΤ1(Alg$\mathcal{L}'$), θα λέμε ότι ο $\mathcal{L}$ έχει την ΙΠΤ=ιδιότητα πεπερασμένης τάξης). Δίνουμε χαρακτηρισμούς 1) για να ανήκει ένας τελεστής πεπερασμένης τάξης στο Alg$\mathcal{L}_3$, 2) για να ανήκει ένας τελεστής του ΠΤ(Alg$\mathcal{L}_3$) στο ΣΤ1(Alg$\mathcal{L}_3$), και 3) για να έχει μια αναπαράσταση του $\mathcal{L}_3$ την ΙΠΤ. Επίσης αποδεικνύουμε ότι το γινόμενο δύο τελεστών του ΠΤ(Alg$\mathcal{L}_3$) ανήκει πάντοτε στο

ΣΤ1(Alg$\mathcal{L}_3$). Τελειώνουμε το κεφάλαιο μελετώντας τους τάξης δύο τελεστές του Alg$\mathcal{L}_3$ που ανήκουν στο ΣΤ1(Alg$\mathcal{L}_3$), αλλά δεν μπορούν να γραφούν σαν άθροισμα από δύο ακριβώς στοιχεία του Τ1(Alg$\mathcal{L}_3$).

Στο κεφάλαιο 4 αποδεικνύουμε ότι ο $\mathcal{L}_3$ που έχει 18 στοιχεία, είναι ο μικρότερος (όσον αφορά το πλήθος των στοιχείων του), επιμεριστικός σύνδεσμος που δεν έχει την ΙΠΤ και ο μόνος με 18 στοιχεία. (Αποδεικνύεται επίσης ότι είναι ο καλύτερος και σχετικά με μια άλλη ιδιότητα). Δίνονται επίσης πληροφορίες για τη δομή πεπερασμένων επιμεριστικών συνδέσμων χωρίς την ΙΠΤ. Αν περιοριστούμε στους προαναφερθέντες συνδέσμους $\mathcal{L}$ για τους οποίους ο τελεστής του Alg$\mathcal{L}$ χωρίς την ΙΠΤ έχει τάξη δύο, τότε αποδεικνύεται ότι ο $\mathcal{L}_3$ είναι όχι μόνο ο μικρότερος ως προς το πλήθος των στοιχείων τους, αλλά και ο απλούστερος ως προς την πολυπλοκότητα των δομών τους.

Στο κεφάλαιο 5 ασχολούμαστε με την κλειστότητα του ΣΤ1(Alg$\mathcal{L}$) στο Alg$\mathcal{L}$ στην ισχυρή τοπολογία τελεστών (ΙΤΤ, strong operator topology). Πρώτα αποδεικνύουμε ότι το ΣΤ1(Alg$\mathcal{L}$) είναι ΙΤΤ-πυκνό στο Alg$\mathcal{L}$ αν ο σύνδεσμος $\mathcal{L}$ είναι πλήρης αλυσίδα σε χώρο με νόρμα, γενικεύοντας ανάλογο αποτέλεσμα σε χώρο Hilbert του Erdos. Ταυτόχρονα επιτυγχάνουμε βελτίωση και στη τάξη των προσεγγιστικών τελεστών που στην περίπτωση μας είναι ουσιαστικά η μικρότερη δυνατή. Στη συνέχεια μελετάμε τον Boolean σύνδεσμο με τρία άτομα και δίνουμε κατ' αρχήν ικανές και αναγκαίες συνθήκες για να έχει μια αναπαράσταση του την προαναφερθείσα ΙΤΤ-πυκνότητα, και κατόπιν κατασκευάζουμε μια αναπαράσταση του χωρίς την ΙΤΤ-πυκνότητα. Το κεφάλαιο 5 κλείνει με την απόδειξη του ότι το ΣΤ1(Alg$\mathcal{L}_3$) είναι ΙΤΤ-πυκνό στο ΠΤ(Alg$\mathcal{L}_3$).

Στο κεφάλαιο 6 αλλάζουμε θέμα και μελετάμε ην εξίσωση Tx=y (x, y δοσμένα , T άγνωστος με την απαίτηση να ανήκει στο Alg$\mathcal{L}$). Γενικεύουμε αποτέλεσμα του Lance από χώρο Hilbert σε χώρο $L^p(E, \mathcal{A}, \mu)$ και αλυσίδα συγκεκριμένης μορφής (τύπου Volterra). Τέλος μελετάμε την προηγούμενη εξίσωση σε μια πολύ απλή αλυσίδα, δίνοντας μεταξύ άλλων και ένα παράδειγμα εξίσωσης που οποιαδήποτε λύσης της έχει νόρμα γνήσια μεγαλύτερη από την αναμενόμενη λόγω του θεωρήματος του Lance.

(Μερικά από τα προηγούμενα αποτελέσματα έχουν δημοσιευθεί σε περιοδικά. Συγκεκριμένα, τα 2.Β, 5.Β, 6.Β αποτελούν το [43] και το 2.Γ το [44]).

Β

Έστω X ένας γραμμικός τοπολογικός χώρος και Μ ένας (κλειστός) υπόχωρός του. Θα λέμε ότι ένας τελεστής Τ του $\mathcal{B}(X)$ (δηλ. του χώρου των γραμμικών και συνεχών απεικονίσεων από τον X στον εαυτό του) αφήνει αναλλοίωτο τον Μ, αν $T(M) \subseteq M$. Θα δώσουμε δύο παραδείγματα αναλλοίωτων υποχώρων (για περισσότερες πληροφορίες βλ. [37]). Αν ο $\mathcal{X}$ είναι χώρος πεπερασμένης διάστασης πάνω από το $\mathbb{C}$ και x κάποιο ιδιοδιάνυσμα του T (που σ' αυτή τη περίπτωση πάντοτε υπάρχει), τότε ο $< x >$ (δηλ. ο γραμμικός υπόχωρος που παράγεται από το x) είναι ένας αναλλοίωτος υπόχωρος του T. Επίσης για $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ με $\mathcal{X}$ όχι απαραίτητα πεπερασμένης διάστασης, ο χώρος $< T^n x : n = 0,1,2,... >$ (όπου $T^0=I$ ο ταυτοτικός τελεστής πάνω στον $\mathcal{X}$) μένει αναλλοίωτος από τον T για κάθε $x \in \mathcal{X}$.

Αν $\mathcal{T}$ είναι μια οικογένεια τελεστών του $\mathcal{B}(\mathcal{X})$, με Lat$\mathcal{T}$ θα συμβολίζουμε το σύνολο των (κλειστών) υποχώρων του $\mathcal{X}$ που μένουν αναλλοίωτοι από τα στοιχεία της $\mathcal{T}$. Εύκολα ελέγχουμε ότι Lat$\mathcal{T}$ περιέχει τους τετριμμένους υποχώρους $\{0\}$ και $\mathcal{X}$, καθώς επίσης την τομή και τον παραγόμενο υπόχωρο οποιασδήποτε υποοικογένειας του Lat$\mathcal{T}$. Η εύρεση για κάθε τελεστή των αναλλοίωτων υποχώρων του είναι ένα ανοικτό πρόβλημα. Μάλιστα δεν είναι καν γνωστό αν κάθε τελεστής σε χώρο Hilbert έχει μη τετριμμένο αναλλοίωτο υπόχωρο. (Σε χώρο Banach το πρόβλημα πρόσφατα έχει λυθεί αρνητικά από τον Enflo ([10]) και ανεξάρτητα από τον Read ([38], [39])).

Αν $\mathcal{L}$ είναι μια οικογένεια κλειστών υποχώρων του $\mathcal{X}$, με Alg$\mathcal{L}$ θα συμβολίζουμε το σύνολο των τελεστών του $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ που καθένας τους αφήνει αναλλοίωτο κάθε στοιχείο του $\mathcal{L}$. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι το Alg$\mathcal{L}$ είναι μια άλγεβρα τελεστών, περιέχει τον ταυτοτικό τελεστή και αν ο χώρος είναι τοπικά κυρτός και Hausdorff [4, Πόρισμα 38.12, σελ. 158] είναι επίσης κλειστή στην ασθενή τοπολογία τελεστών (weak operator topology) δηλ. στην τοπολογία στην οποία ένα δίκτυο $\{T_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{X})$ συγκλίνει σε κάποιον $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ αν και μόνο αν

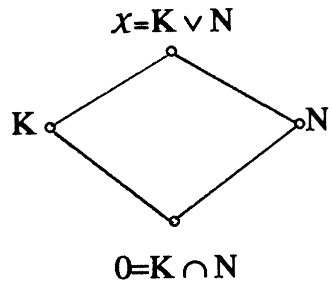
$$(\forall f^* \in \mathcal{X}^*) \ (\forall x \in \mathcal{X}) \ \ \{f^*(T_\lambda x)\}_{\lambda \in \Lambda} \to f^*(Tx).$$

Θα δούμε τώρα πως συνδέονται οι δύο έννοιες Alg και Lat που μόλις ορίσαμε. Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι $\mathcal{L} \subseteq$ Lat(Alg$\mathcal{L}$) και $\mathcal{T} \subseteq$ Alg(Lat$\mathcal{T}$), όπου $\mathcal{L}$, $\mathcal{T}$ όπως παραπάνω. Αν έχουμε ισότητα λέμε ότι ο $\mathcal{L}$ ή ο $\mathcal{T}$ αντίστοιχα είναι reflexive. Έχουν δοθεί ικανές συνθήκες για την ύπαρξη reflexive συνδέσμων (βλ. π.χ. [40], [13], [34]).

Εδώ θα ασχοληθούμε με άλγεβρες τελεστών της μορφής Alg$\mathcal{L}$ όπου $\mathcal{L}$ έχει ιδιότητες όμοιες με του Lat$\mathcal{T}$ (π.χ. είναι πλήρης σύνδεσμος, βλ. παρακάτω). Πρώτα λοιπόν θα μελετήσουμε κάποιες οικογένειες υποχώρων που μας ενδιαφέρουν και κατόπιν θα επιστρέψουμε στην άλγεβρα των τελεστών που τους αφήνουν αναλλοίωτους.

Ας είναι λοιπόν $\mathcal{L}$ μια οικογένεια υποχώρων (πάντοτε θα εννοούμε κλειστών) ενός γραμμικού τοπολογικού χώρου $\mathcal{X}$. Θα λέμε ότι η $\mathcal{L}$ είναι σύνδεσμος (lattice) αν για κάθε δύο στοιχεία K, N του $\mathcal{L}$, η τομή $K \cap N$ και ο χώρος που παράγουν $K \vee N$ (δηλ. ο μικρότερος κλειστός υπόχωρος του $\mathcal{X}$ που περιέχει την ένωση $K \cup N$) είναι επίσης στοιχεία του $\mathcal{L}$. (Η έννοια του συνδέσμου μπορεί να οριστεί σε πολύ γενικότερες καταστάσεις (πράγματι αρκεί ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο, βλ. π.χ. [5]), όμως εδώ θα την χρησιμοποιήσουμε μόνο για υποχώρους (subspace lattice)). Θα λέμε επίσης ότι ένας σύνδεσμος $\mathcal{L}$ είναι πλήρης αν για κάθε υποοικογένεια τού $\mathcal{L}$ περιέχει την τομή της και το χώρο που αυτή παράγει. Ειδικότερα ένας πλήρης σύνδεσμος έχει ένα μέγιστο και ένα ελάχιστο στοιχείο. Όπου στα επόμενα θα λέμε ότι ένας σύνδεσμος είναι πλήρης, θα εννοούμε (εκτός αν από τα συμφραζόμενα προκύπτει αλλοιώς) ότι επιπλέον το μέγιστο στοιχείο του είναι ο $\mathcal{X}$ και το ελάχιστο ο $\{0\}$. Ένα υποσύνολο του $\mathcal{L}$ θα λέμε ότι είναι υποσύνδεσμος ή πλήρης υποσύνδεσμος, αν βλέποντάς το μόνο του είναι σύνδεσμος ή πλήρης υποσύνδεσμος αντίστοιχα. Κάθε σύνδεσμος έχει μια πλήρωση, δηλ. τον μικρότερο πλήρη σύνδεσμο που τον περιέχει (υπάρχει τουλάχιστον ένας πλήρης σύνδεσμος που τον περιέχει, αυτός όλων των υποχώρων του $\mathcal{X}$).

Ένα παράδειγμα συνδέσμου είναι το $\{0, K, N, \mathcal{X}\}$ όπου K, N είναι κλειστοί υπόχωροι του $\mathcal{X}$ με $K \cap N = 0$ και $K \vee N = \mathcal{X}$. Τον σύνδεσμο αυτό (που τον ονομάζουμε σύνδεσμο Boolean με δύο άτομα) θα τον σχεδιάζουμε όπως στο σχ. 1.1, όπου εννοούμε ότι όταν δύο σημεία του (που παριστάνουν μέλη του συνδέσμου) συνδέονται με ευθεία γραμμή, αυτό σημαίνει ότι το χαμηλότερο περιέχεται στο υψηλότερο.



σχήμα 1.1

Είναι προφανές ότι υπάρχουν πολλοί σύνδεσμοι με το ίδιο διάγραμμα (π.χ. K, N μπορούν να είναι δύο συμπληρωματικοί υπόχωροι του $\mathcal{X}$, δηλ. τέτοιοι ώστε $K \cap N = 0$ και $K + N = \mathcal{X}$). Όλοι αυτοί όμως που έχουν το ίδιο διάγραμμα είναι ισομορφικοί μεταξύ τους (με την έννοια της ύπαρξης μιάς "1-1" και "επί" απεικόνισης από τον ένα στον άλλο που διατηρεί μαζί με την αντίστροφή της τη διάταξη δηλ. το "$\subseteq$"· τότε, αν οι σύνδεσμοι είναι πλήρεις, η εικόνα της τομής μιας οικογένειας μελών του ενός συνδέσμου είναι η τομή των εικόνων τους και όμοια για τους παραγόμενους χώρους). Έτσι με τη λέξη σύνδεσμο θα εννοούμε μια δομή υποχώρων (που καθορίζεται πλήρως από τη διάταξη δηλ. το διάγραμμα), ενώ με το "αναπαράσταση συνδέσμου" θα αναφερόμαστε σε συγκεκριμένους υποχώρους συγκεκριμένου χώρου που συνδέονται με την προαναφερθείσα δομή. Επίσης όταν λέμε ότι ένας σύνδεσμος έχει μια ιδιότητα θα εννοούμε ότι την έχει κάθε αναπαράστασή του, ενώ όταν λέμε ότι δεν την έχει θα εννοούμε ότι υπάρχει αναπαράσταση του που δεν την έχει.

Συνεχίζουμε τώρα δίνοντας παραδείγματα συνδέσμων, ιδιότητες των οποίων θα μελετήσουμε παρακάτω. Αλυσίδα (nest) θα ονομάζουμε το σύνδεσμο στον οποίο οποιοδήποτε ζευγάρι στοιχείων του, συγκρίνονται μεταξύ τους. Θα τον ονομάζουμε πλήρη αλυσίδα αν είναι πλήρης σύνδεσμος. Μπορεί να αποδειχθεί ([40]), ότι η πλήρωση $\mathrm{co}(\mathcal{L})$ μιας αλυσίδας $\mathcal{L}$ είναι επίσης αλυσίδα και ότι $\mathrm{Alg}\mathcal{L} = \mathrm{Alg}\,\mathrm{co}(\mathcal{L})$. Τυπικά παραδείγματα (πλήρων) αλυσίδων είναι τα εξής :

1) Σε διαχωρίσιμο χώρο Hilbert $\mathcal{H}$ με ορθοκανονική βάση την $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, το σύνολο

$$\{\, 0, \mathcal{H}, < e_1 >, \ldots, < e_1, e_2, \ldots, e_n >, \ldots \}.$$

2) Στον $L^2([0\,,1])$ το σύνολο

$$\{\ \{\ f \in L^2([0\,,1]) \text{ όπου } f \text{ είναι σχεδόν παντού μηδέν στο } [\alpha\,,1]\,\} : \alpha \in [0\,,1]\},$$

(Αποδεικνύεται (βλ. π.χ. [7, σελ. 53]) ότι το προηγούμενο σύνολο είναι ακριβώς το σύνολο των αναλλοίωτων υποχώρων του τελεστή Volterra V (δηλ. το $\mathrm{Lat}\{V\}$) όπου

$$V\ : L^2([0\,,1]) \to L^2([0\,,1]) \text{ με } V(f)(t) = \int_t^1 f(s)\,ds\,,\ f \in L^2([0\,,1]),\ t \in [0\,,1]).$$

Μια άλγεβρα τελεστών που είναι της μορφής $\mathrm{Alg}\mathcal{L}$ για κάποια αλυσίδα $\mathcal{L}$, θα ονομάζεται nest algebra. (Για περισσότερες πληροφορίες πάνω στις nest algebras βλ. [7]).

Για την περιγραφή της επόμενης οικογένειας παραδειγμάτων θα χρειαστούμε μερικούς επιπλέον ορισμούς. Θα λέμε ότι ένας σύνδεσμος $\mathcal{L}$ είναι επιμεριστικός (distributive) αν και μόνο αν έχει τις επόμενες ιδιότητες :

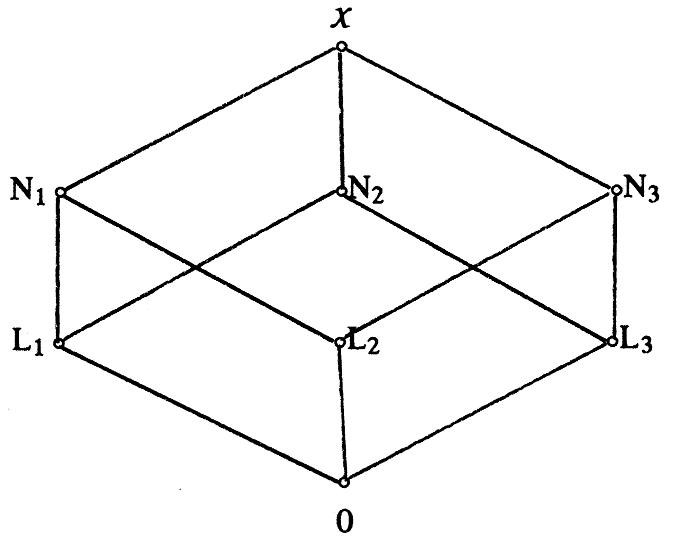
(i) $(\forall\ \{\,K, M, N\,\} \subseteq \mathcal{L})\ \ K \cap (M \vee N) = (K \cap M) \vee (K \cap N)$,

(ii) $(\forall\ \{\,K, M, N\,\} \subseteq \mathcal{L})\ \ K \vee (M \cap N) = (K \vee M) \cap (K \vee N)$.

Μπορεί να αποδειχθεί όμως εύκολα (βλ. π.χ. [5, Θεώρημα 9, σελ. 11]) ότι σε κάθε σύνδεσμο οι δύο προηγούμενες ιδιότητες είναι ισοδύναμες. Αποδεικνύεται επίσης (βλ. π.χ. [5, Πόρισμα 2, σελ. 194] ότι κάθε επιμεριστικός σύνδεσμος είναι ισομορφικός με ένα δακτύλιο (ring) συνόλων (δηλ. μια οικογένεια υποσυνόλων ενός συνόλου που για κάθε δύο στοιχεία της, περιέχει επίσης την τομή και την ένωσή τους). Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι κάθε αλυσίδα είναι επιμεριστικός σύνδεσμος.

Ένας πλήρης σύνδεσμος θα λέμε ότι είναι Boolean σύνδεσμος αν είναι επιμεριστικός και κάθε στοιχείο του M έχει ένα συμπλήρωμα (αποδεικνύεται μοναδικό) στον $\mathcal{L}$ (δηλ. ένα στοιχείο M′ του $\mathcal{L}$ τέτοιο ώστε το $M \cap M'$ να είναι το μικρότερο στοιχείο του συνδέσμου και το $M \vee M'$ να είναι το μεγαλύτερο). Μπορεί να αποδειχθεί ([5, Πόρισμα 3, σελ. 194]) ότι ένας Boolean σύνδεσμος είναι ισομορφικός με ένα σώμα (field) συνόλων (δηλ. μια οικογένεια υποσυνόλων ενός συνόλου που είναι δακτύλιος και επιπλέον για κάθε στοιχείο της περιέχει το συνολοθεωρητικό συμπλήρωμά του).

Ένας τέτοιος σύνδεσμος θα λέγεται ατομικός σύνδεσμος Boolean αν επιπλέον υπάρχει ένα υποσύνολό του, τα στοιχεία του οποίου καλούμε άτομα, που να ικανοποιεί : 1) κάθε άτομο περιέχει γνήσια μόνο το ελάχιστο στοιχείο του συνδέσμου και 2) κάθε μέλος του συνδέσμου εκτός του ελάχιστου, περιέχει τουλάχιστο ένα άτομο. Είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι κάθε μέλος ενός ατομικού συνδέσμου Boolean παράγεται από τα άτομα που περιέχει. Αποδεικνύεται ([5, Θεώρημα 18, σελ. 121]) ότι κάθε τέτοιος σύνδεσμος είναι ισομορφικός με το δυναμοσύνολο κάποιου συνόλου. Στα [22], [23], [24] (βλ. επίσης το [26] των Λάμπρου-Longstaff) ο Μ. Λάμπρου δίνει διάφορους χαρακτηρισμούς αυτών των συνδέσμων. Επίσης στο [3] των Αργυρού-Λάμπρου-Longstaff υπάρχει ένας χαρακτηρισμός (Λήμμα 2.4) για να είναι μια οικογένεια υποχώρων ενός χώρου Banach το σύνολο των ατόμων ενός Boolean συνδέσμου. Ειδικής σημασίας είναι το Θεώρημα 5.1 του ίδιου άρθρου, όπου δίνονται διάφοροι χαρακτηρισμοί για να έχουμε ατομικό σύνδεσμο Boolean με απειροδιάστατο πλήθος μονοδιάστατων ατόμων συνδέοντας τους με τις ισχυρές Markuschevich βάσεις (strong M-bases. (Για περισσότερες πληροφορίες πάνω στους τελευταίους συνδέσμους που αναφέραμε βλ. [20]).



σχήμα 1.2

Έχουμε ήδη περιγράψει τον σύνδεσμο Boolean με δύο άτομα (βλ. σχ. 1.1). Για τον σύνδεσμο Boolean με τρία άτομα βλ. σχ. 1.2 (όπου άτομα είναι τα L_1, L_2, L_3 και συμπληρώματα ατόμων τα N_3, N_2, N_1 αντίστοιχα).

Με αυτό το σύνδεσμο θα ασχοληθούμε πολλές φορές παρακάτω και θα χρειαστούμε τα επόμενα λήμματα.

Λήμμα 1.1. *Έστω $\mathcal{L}$ ένας επιμεριστικός σύνδεσμος υποχώρων ενός χώρου με νόρμα X. Έστω επίσης $L_1, L_2, L_3 \in \mathcal{L}$ είναι τέτοια ώστε $L_1 \cap L_2 = L_2 \cap L_3 = $ $= L_1 \cap L_3 = L_0$ και είτε δεν συγκρίνονται μεταξύ τους ανά δύο είτε καθένα τους περιέχει γνήσια το L_0. Τότε τα L_1, L_2, L_3 είναι άτομα ενός συνδέσμου Boolean (υποσυνδέσμου του $\mathcal{L}$).*

Απόδειξη. Ορίζουμε

$$\mathcal{L}_0 = \{ L_0, L_1, L_2, L_3, L_1 \vee L_2, L_2 \vee L_3, L_1 \vee L_3, L_1 \vee L_2 \vee L_3 \}.$$

Έχουμε $(L_1 \vee L_2) \cap (L_1 \vee L_3) = L_1 \vee (L_2 \cap L_3) = L_1 \vee L_0 = L_1$. Όμοια αποδεικνύουμε πρώτα ότι το $\mathcal{L}_0$ είναι σύνδεσμος και μετά ότι ικανοποιεί και τις υπόλοιπες απαιτούμενες ιδιότητες. ■

Λήμμα 1.2. *Έστω $\mathcal{L}$ όπως στο προηγούμενο λήμμα και $N_1, N_2, N_3 \in \mathcal{L}$ είναι τέτοια ώστε $N_1 \vee N_2 = N_2 \vee N_3 = N_1 \vee N_3 = N_0$ και είτε δεν συγκρίνονται μεταξύ τους ανά δύο είτε καθένα τους περιέχεται γνήσια στο N_0. Τότε τα N_1, N_2, N_3 είναι συμπληρώματα ατόμων ενός συνδέσμου Boolean (υποσυνδέσμου του $\mathcal{L}$).*

Απόδειξη. Το σύνολο

$$\{ N_1, N_2, N_3, N_0, N_1 \cap N_2, N_2 \cap N_3, N_1 \cap N_3, N_1 \cap N_2 \cap N_3 \}.$$

είναι σύνδεσμος. ■

Γ

Επιστρέφουμε τώρα στις άλγεβρες τελεστών που είχαμε ορίσει στο μέρος Β, δηλαδή σε σύνολα της μορφής Alg$\mathcal{L}$ όπου $\mathcal{L}$ είναι ένας (συνήθως πλήρης) σύνδεσμος. Μας ενδιαφέρουν κατ' αρχήν τελεστές απλής μορφής και συγκεκριμένα πεπερασμένης τάξης ή ακόμα και τάξης ένα του Alg$\mathcal{L}$. (Λέμε ότι ένας τελεστής $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ είναι πεπερασμένης τάξης αν η εικόνα του είναι πεπερασμένης διάστασης χώρος. Αυτή τη διάσταση θα τη συμβολίζουμε με rankT). Θα συμβολίζουμε επίσης με ΠΤ(Alg$\mathcal{L}$) την υπο-άλγεβρα των τελεστών πεπερασμένης τάξης που ανήκουν στο Alg$\mathcal{L}$, με Τ1(Alg$\mathcal{L}$) το σύνολο των τάξης ένα τελεστών του Alg$\mathcal{L}$ και με ΣΤ1(Alg$\mathcal{L}$) την άλγεβρα που παράγει το Τ1(Alg$\mathcal{L}$)(δηλ. το ιδεώδες (στον Alg$\mathcal{L}$) των τελεστών πεπερασμένης τάξης που είναι (πεπερασμένο) άθροισμα από τελεστές τάξης ένα του Alg$\mathcal{L}$). (Όπως θα δούμε δεν ισχύει πάντα ΠΤ(Alg$\mathcal{L}$) = ΣΤ1(Alg$\mathcal{L}$), βλ. π.χ. 2.Γ). Για $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, με $T(\mathcal{X})$ ή $\mathcal{R}(T)$ θα συμβολίζουμε την εικόνα του Τ.

Έστω $\mathcal{X}$ ένας γραμμικός τοπολογικός χώρος (Hausdorff). Έστω επίσης $0 \neq e^* \in \mathcal{X}^*$ και $0 \neq f \in \mathcal{X}$. Με $e^* \otimes f$ θα συμβολίζουμε το στοιχείο του $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ που ορίζεται από $(e^* \otimes f)x = e^*(x)f$ για κάθε $x \in \mathcal{X}$. Προφανώς ο $e^* \otimes f$ είναι τάξης ένα τελεστής και εύκολα επίσης ελέγχουμε ότι όλοι οι τελεστές τάξης ένα του $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ είναι αυτής της μορφής.

Αν Τ είναι τελεστής πεπερασμένης τάξης του $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ (δηλ. ανήκει στο ΠΤ($\mathcal{B}(\mathcal{X})$) και $\{f_j : j=1,\dots,n\}$ είναι βάση της εικόνας του (ειδικότερα $\mathcal{R}(T) = \langle f_j : j=1,\dots,n \rangle$), τότε υπάρχουν $\{e_j^* : j=1,\dots,n\} \subseteq \mathcal{X}^*$ τέτοια ώστε $T = \sum_{j=1}^{n} e_j^* \otimes f_j$.

(Ειδικά $\mathcal{R}(T^*) = \langle e_j^* : j=1,\dots,n \rangle$). Είναι πάλι εύκολο να ελεγχεί ότι όλοι οι τελεστές πεπερασμένης τάξης του $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ είναι αυτής της μορφής. Ένας τελεστής πεπερασμένης τάξης Τ μπορεί να γραφεί με πολλούς τρόπους σαν άθροισμα από τάξης ένα (πάντα όμως σε πλήθος τουλάχιστο όσο το rankT). Έστω π.χ. ότι

$$T = \sum_{i=1}^{m} y_i^* \otimes x_i.$$

Είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι $\mathcal{R}(T) \subseteq \langle x_i : i=1,...,m \rangle$ και $\mathcal{R}(T^*) \subseteq \langle y_i^* : i=1,...,m \rangle$ (χωρίς να έχουμε πάντοτε ισότητες). Όποτε στα επόμενα γράφουμε ένα τελεστή πεπερασμένης τάξης T, χωρίς από τα συμφραζόμενα να προκύπτει ειδικός τρόπος γραφής, θα εννοούμε ότι είναι γραμμένος έτσι ώστε τα σύνολα $\{ x_i : i=1,...,m \}$ και $\{ y_i^* : i=1,...,m \}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, οπότε $m=\text{rank}T$ και οι δύο προηγούμενες εγκλήσεις είναι ισότητες.

Θα κάνουμε ευρεία χρήση της έννοιας που θα ορίσουμε αμέσως. Έστω $\mathcal{L}$ ένας πλήρης σύνδεσμος υποχώρων του $\mathcal{X}$. Για $L \in \mathcal{L}$ ορίζουμε

$$L_- = \vee\{M \in \mathcal{L} : L \not\subseteq M\} \in \mathcal{L}$$

(με $0_-=0$). Αν ο $\mathcal{L}$ είναι το πρώτο παράδειγμα αλυσίδας που δώσαμε, για κάθε $L \in \mathcal{L}$ το L_- είναι το ακριβώς προηγούμενο (μικρότερο) του L στο $\mathcal{L}$, ενώ στο δεύτερο παράδειγμα για κάθε $L \in \mathcal{L}$ είναι $L_-=L$. Στο Boolean σύνδεσμο με τρία άτομα (σχ. 1.2) είναι $L_{1-}=N_3, L_{2-}=N_2, L_{3-}=N_1$ και $N_{1-}=N_{2-}=N_{3-}=\mathcal{X}_-=\mathcal{X}$. (Γενικότερα σε ατομικό σύνδεσμο Boolean αν L είναι άτομο, τότε $L_- = L'$).

Για πλήρης συνδέσμους $\mathcal{L}$ υπάρχει ένας πολύ εύχρηστος (όπως αποδεικνύεται στην πράξη), χαρακτηρισμός των στοιχείων του $T1(\text{Alg}\mathcal{L})$. Διατυπώθηκε πρώτα από τον Ringrose στο [40, Λήμμα 3.3] για ειδικής μορφής συνδέσμους, όμως η απόδειξη γενικεύεται εύκολα (βλ. και [34, Λήμμα 3.1]).

Λήμμα 1.3. *Έστω $\mathcal{L}$ ένας πλήρης σύνδεσμος υποχώρων ενός γραμμικού τοπολογικού χώρου (Hausdorff) $\mathcal{X}$ και $0 \neq e^* \in \mathcal{X}^*$, $0 \neq f \in \mathcal{X}$. Τότε ο $e^* \otimes f$ ανήκει στο $\text{Alg}\mathcal{L}$ αν και μόνο αν υπάρχει $N \in \mathcal{L}$ τέτοιο ώστε $f \in N$ και $e^* \in N_-^{\perp}$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι $e^* \otimes f \in \text{Alg}\mathcal{L}$. Ορίζουμε $N = \cap\{K \in \mathcal{L} : f \in K\}$. (Αφού ο $\mathcal{L}$ είναι πλήρης, πρώτον το σύνολο του δεύτερου μέλους δεν είναι κενό (περιέχει τον $\mathcal{X}$), και δεύτερον η τομή είναι στοιχείο του $\mathcal{L}$).

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $e^*(N_-)=0$, ισοδύναμα ότι $e^*(M)=0$ για κάθε $M \in \mathcal{L}$ με $M \not\supseteq N$. Έστω λοιπόν $x \in M \not\supseteq N$. Τότε $(e^* \otimes f)x = e^*(x)f \in M$ (αφού από υπόθεση $e^* \otimes f \in \mathrm{Alg}\mathcal{L}$) και αν ήταν $e^*(x) \neq 0$ θα είχαμε $f \in M$ και επίσης $M \supseteq N$ (βλ. ορισμό του N), άτοπο.

Έστω τώρα ότι $e^* \otimes f \in T1(\mathcal{B}(X))$ και υπάρχει $N \in \mathcal{L}$ τέτοιο ώστε $f \in N$, και $e^*(N_-)=0$. Έστω $x \in M \in \mathcal{L}$. Εξετάζουμε δύο περιπτώσεις σχετικά με το αν το M περιέχει το N ή όχι. Αν $N \subseteq M$ τότε $(e^* \otimes f)x \in \langle f \rangle \subseteq N \subseteq M$, δηλ. ο $e^* \otimes f$ αφήνει αναλλοίωτο τον M, ενώ το ίδιο συμβαίνει αν $N \not\subseteq M$ γιατί τότε έχουμε ότι $M \subseteq N_-$ άρα $(e^* \otimes f)x=0$. ■

__**Λήμμα 1.4.**__ *Έστω X, $\mathcal{L}$ όπως στο* Λήμμα 1.3. *Έστω επίσης* $0 \neq R \in \Pi T(\mathcal{B}(X))$ *και* $N \in \mathcal{L}$ *είναι τέτοια ώστε* $\mathcal{R}(R) \subseteq N$ *και* $\mathcal{R}(R^*) \subseteq N_-^{\perp}$. *Τότε ο* R *ανήκει στο* $\Sigma T1(\mathrm{Alg}\mathcal{L})$. *Επιπλέον μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα από* rankR *τελεστές τάξης ένα του* $\mathrm{Alg}\mathcal{L}$.

Απόδειξη. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, ο R μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$R = \sum_{j=1}^{n} e_j^* \otimes f_j \quad \text{όπου } \mathcal{R}(R) = \langle f_j : j=1,\dots,n \rangle, \ \mathcal{R}(R^*) = \langle e_j^* : j=1,\dots,n \rangle \ (\text{και } n=\mathrm{rankT})$$

με τα σύνολα που παράγουν τις δύο εικόνες να είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Από το Λήμμα 1.3 για κάθε $j \in \{1,\dots,n\}$ είναι $e_j^* \otimes f_j \in \mathrm{Alg}\mathcal{L}$, έτσι το ζητούμενο ακολουθεί. ■

Θα κλείσουμε αυτό το κεφάλαιο με μερικούς επιπλέον ορισμούς και συμβολισμούς.

1) Έστω $\{Y_j : j=1,\dots,n\}$ μια πεπερασμένη οικογένεια μη μηδενικών υποχώρων ενός γραμμικού τοπολογικού χώρου X. Θα λέμε ότι το σύνολο $\{Y_j : j=1,\dots,n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο αν για κάθε επιλογή $y_j \in Y_j$ $j=1,\dots,n$ με $y_1 + \dots + y_n = 0$ ισχύει αναγκαστικά $y_1 = \dots = y_n = 0$.

2) Έστω $\mathcal{X}$ χώρος με νόρμα και M υπόχωρός του. Για $z \in \mathcal{X}$ με $d(z, M)$ θα συμβολίζουμε την απόσταση του z από τον M, δηλ.

$$d(z, M) = \inf\{\| z - w \| : w \in M\}.$$

Αν ο M είναι κλειστός εύκολα ελέγχουμε ότι $z \in M$ αν και μόνο αν $d(z, M) = 0$.

3) Ορίζουμε $\vee\varnothing=0$.

4) Αν $L \subseteq \mathcal{X}$, ορίζουμε $L^{\perp} = \{f^{*} \in \mathcal{X}^{*} : f^{*}(L) = 0\}$ και αν $M \subseteq \mathcal{X}^{*}$, ορίζουμε $M_{\perp} = \{x \in \mathcal{X} : f^{*}(x) = 0 \ f^{*} \in M\}$.

5) Το σύμβολο $\subset$ θα καθορίζει γνήσια έγκλειση.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Ανάλυση τελεστών πεπερασμένης τάξης σε απλούστερους

Α

Έστω $\mathcal{X}$ ένας γραμμικός τοπολογικός χώρος, $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ ένας σύνδεσμος κλειστών υποχώρων του και $F\in \mathrm{Alg}\mathcal{L}$ ένας τελεστής πεπερασμένης τάξης (συμβολικά $F\in \Pi\mathrm{T}(\mathrm{Alg}\mathcal{L})$). Θα λέμε ότι ο F έχει την ιδιότητα πεπερασμένης τάξης (ΙΠΤ), αν και μόνο αν μπορεί να γραφεί σαν πεπερασμένο άθροισμα από τελεστές τάξης ένα του $\mathrm{Alg}\mathcal{L}$ (συμβολικά από στοιχεία του $\mathrm{T1}(\mathrm{Alg}\mathcal{L})$), δηλαδή αν

$$\text{ΙΠΤ}\quad\left\{\begin{array}{l}\text{υπάρχουν } n\in\mathrm{N} \text{ και } \{R_i : i=1,\dots,n\}\subseteq \mathrm{Alg}\mathcal{L}\\ \text{με } \mathrm{rank}R_i=1 \text{ για κάθε } i\in\{1,\dots,n\}, \text{ τέτοιοι ώστε } F=\sum_{i=1}^{n}R_i.\end{array}\right.$$

(Ισοδύναμα ο F έχει την ΙΠΤ αν και μόνο αν $F\in \Sigma\mathrm{T1}(\mathrm{Alg}\mathcal{L})$). Αν κάθε τελεστής πεπερασμένης τάξης μιας αναπαράστασης του $\mathcal{L}$, έχει την ΙΠΤ, τότε λέμε ότι η συγκεκριμένη αναπαράσταση έχει την ΙΠΤ. Αν κάθε αναπαράσταση ενός συνδέσμου έχει την ΙΠΤ, τότε λέμε ότι ο σύνδεσμος έχει την ΙΠΤ.

Το πρόβλημα που θα μας απασχολήσει σ' αυτό, και σε επόμενα κεφάλαια, στην πιο γενική του διατύπωση, είναι το εξής :

(*) Έχει ο $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ την ΙΠΤ;

Κατ' αρχήν υπάρχουν σύνδεσμοι $\mathcal{L}$ (π.χ. διπλό τρίγωνο) για τους οποίους το $\mathrm{Alg}\mathcal{L}$ δεν περιέχει κανένα τελεστή τάξης ένα, ή ακόμα κανένα τελεστή πεπερασμένης τάξης (βλ. [27]). Έτσι το ερώτημα δεν έχει πάντα νόημα. (Στον προηγούμενο σύνδεσμο πάντως ένα πρόβλημα ανάλογο με το (*) όπου στη θέση των τάξης ένα υπάρχουν τάξης δύο, μελετάται στο [27]). Από την άλλη μεριά, ο Longstaff ([34, Θεώρημα 6.1]) έχει αποδείξει σε πλήρως επιμεριστικούς συνδέσμους $\mathcal{L}$ (για ορισμό βλ. π.χ. [34], πλήρης επιμεριστικότητα είναι μια συνθήκη ανάλογη της επιμεριστικότητας για άπειρες οικογένειες), ότι $\mathrm{T1(Alg}\mathcal{L}) \neq \emptyset$ και μάλιστα ισχύει $\mathrm{Lat(T1(Alg}\mathcal{L})) = \mathcal{L}$. Δηλ. ο $\mathcal{L}$ είναι reflexive και επιπλέον $\mathrm{Lat(T1(Alg}\mathcal{L})) = \mathrm{Lat(Alg}\mathcal{L})$. Έτσι οι αναφερόμενοι τάξης ένα τελεστές είναι "πολλοί", με την έννοια ότι οι υπόχωροι που αυτοί αφήνουν αναλλοίωτους περιορίζονται στους απολύτως αναγκαίους. Έτσι το ερώτημα (*) εμφανίζεται ίσως φυσιολογικότερο στην κλάση των πλήρως επιμεριστικών συνδέσμων.

Το πρώτο αποτέλεσμα οφείλεται στον Ringrose, αλλά εμφανίζεται σε άρθρο του Erdos ([12, Θεώρημα 1]). Συγκεκριμένα ο Ringrose απαντάει καταφατικά στην (*) στην περίπτωση που ο X είναι χώρος Hilbert και ο $\mathcal{L}$ πλήρης αλυσίδα. Στο Θεώρημα 2.1, παρακάτω, γενικεύουμε το προηγούμενο, σε γραμμικό τοπολογικό χώρο Hausdorff (με τον $\mathcal{L}$ πλήρη αλυσίδα).

Ο Longstaff στο [35, Θεώρημα 5.2] επίσης δίνει την ίδια απάντηση, αν ο X είναι χώρος Hilbert και ο $\mathcal{L}$ είναι πλήρης ατομικός σύνδεσμος Boolean. Ο Μ. Λάμπρου στο [24, Θεώρημα 4.2] το επεκτείνει στην περίπτωση που ο X είναι χώρος με νόρμα.

Σε όλες τις προηγούμενες περιπτώσεις, συμπεριλαμβανομένου του νέου αποτελέσματος που δίνεται εδώ, οι αποδείξεις δίνουν επιπλέον ότι για συγκεκριμένο $F \in \mathrm{\Pi T(Alg}\mathcal{L})$ το n που εμφανίζεται στον ορισμό της ΙΠΤ μπορεί να διαλεχτεί ίσο με $\mathrm{rank}F$, δηλαδή ο F μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα από στοιχεία του $\mathrm{T1(Alg}\mathcal{L})$ το πλήθος των οποίων είναι το μικρότερο δυνατό.

Τόσο οι αλυσίδες, όσο και οι ατομικοί σύνδεσμοι Boolean είναι πλήρως επιμεριστικοί, έτσι το επόμενο βήμα αφορούσε αυτούς τους πιο γενικούς συνδέσμους. Προς αυτή την κατεύθυνση, ο Longstaff στο [35, Θεώρημα 4.1] απαντάει επίσης θετικά αν ο X είναι πεπερασμένης διαστασης χώρος Hilbert (η απόδειξη χωρίς ουσιώδεις μεταβολές ισχύει επίσης σε χώρο με νόρμα) και ο $\mathcal{L}$ είναι πλήρως επιμεριστικός σύνδεσμος. Σημειώνουμε, ότι στις πεπερασμένες διαστάσεις, αυτό είναι ισοδύναμο με το να είναι ο $\mathcal{L}$ πεπερασμένος επιμεριστικός (βλ. [35, σελ. 20] και την εκεί βιβλιογραφία).

Από την άλλη μεριά, οι Hopenwasser-Moore στο [18] μελέτησαν το πρόβλημα για αντιμεταθετικούς συνδέσμους (σε χώρο Hilbert), δηλαδή συνδέσμους για τους οποίους οι προβολές πάνω στα στοιχεία τους , αντιμετατίθενται. Έτσι έδωσαν επίσης καταφατική απάντηση στη (*) (Πόρισμα 7), στην περίπτωση που ο σύνδεσμος επιπλέον παράγεται από πεπερασμένες το πλήθος αλυσίδες (ειδικότερα είναι πεπερασμένος). Στο ίδιο άρθρο έδωσαν και την πρώτη αρνητική απάντηση, κατασκευάζοντας (σε απειροδιάστατο χώρο) έναν πλήρως επιμεριστικό σύνδεσμο (που επιπλέον είναι αντιμεταθετικός), και έναν τελεστή τάξης δύο σε κάποια αναπαράστασή του, που δεν είχε την ΙΠΤ. Στο παράδειγμά τους ο σύνδεσμος έχει άπειρο πλήθος στοιχείων.

Μετά από αυτά, το ερώτημα που παρέμενε ανοικτό αφορούσε τους πεπερασμένους επιμεριστικούς συνδέσμους. Παρακάτω, δίνουμε αρνητική απάντηση στην

(*), σ' αυτή την τελευταία εναπομείνουσα περίπτωση. Πιο συγκεκριμένα, θα κατασκευάσουμε ένα επιμεριστικό σύνδεσμο, τον $\mathcal{L}_3$, με 18 στοιχεία, μια αναπαράστασή του, την $\mathcal{L}_3'$, η οποία θα είναι σε χώρο Hilbert, και ένα τελεστή τάξης δύο του Alg$\mathcal{L}_3'$, που αποτυγχάνει στην ικανοποίηση της ΙΠΤ. Στο κεφάλαιο 4, θα δείξουμε ότι ο σύνδεσμος αυτός είναι ο μικρότερος δυνατός, ειδικότερα αποδεικνύουμε ότι σε κάθε επιμεριστικό σύνδεσμο $\mathcal{L}$ με το πολύ 17 στοιχεία δεν υπάρχει τελεστής του ΠΤ(Alg$\mathcal{L}$) που να μην έχει την ΙΠΤ. Με 18 υπάρχει μόνο ένας, αυτός που αναφέραμε. Επίσης, στο κεφάλαιο 3, μελετάμε συστηματικά τις αναπαραστάσεις του.

B

Το πρώτο κύριο αποτέλεσμα αυτού του κεφαλαίου είναι το Θεώρημα 2.1, που γενικεύει το Θεώρημα 1 του [12]. Η απόδειξη που δίνεται στο [12], χρησιμοποιεί ουσιώδη χαρακτηριστικά των χώρων Hilbert (προβολές), και δεν γενικεύεται, τουλάχιστο με προφανή στον συγγραφέα τρόπο, σε γενικότερους χώρους.

Θα χρειαστούμε τα επόμενα δύο λήμματα, που μελετούν τις τομές χώρων πεπερασμένης διάστασης με στοιχεία της αλυσίδας.

Λήμμα 2.1. *Ας είναι X ένας γραμμικός τοπολογικός χώρος (Hausdorff) και $\mathcal{L}$ μια πλήρης αλυσίδα υποχώρων του. Έστω επίσης $W\neq 0$ ένας διανυσματικός υπόχωρος του X πεπερασμένης διάστασης. Τότε υπάρχει $L_0\in\mathcal{L}$ με $W\cap L_0\neq 0$ και τέτοιο ώστε να ισχύει $L_0\subseteq M$ για κάθε $M\in\mathcal{L}$ για το οποίο $W\cap M\neq 0$.*

Απόδειξη. Ορίζουμε $L_0=\cap\{L\in\mathcal{L} : W\cap L\neq 0\}$. Αφού το $\mathcal{L}$ είναι πλήρες, $L_0\in\mathcal{L}$. Είναι αρκετό να αποδείξουμε ότι $W\cap L_0=\cap\{W\cap L : L\in\mathcal{L}$ και $W\cap L\neq 0\}$ είναι μη μηδενικό. Ισχυριζόμαστε ότι για κάθε $L,K\in\mathcal{L}$ έχουμε $W\cap L = W\cap K$ αν και μόνο αν $\dim(W\cap L) = \dim(W\cap K)$. Πράγματι, αφού W είναι πεπερασμένης διάστασης και το $\mathcal{L}$ είναι αλυσίδα, οι $W\cap L$ και $W\cap K$ είναι χώροι πεπερασμένης διάστασης και συγκρίνονται μεταξύ τους.Έτσι, αν έχουν τις ίδιες διαστάσεις θα είναι ίσοι.(Η άλλη κατεύθυνση είναι προφανής). Επομένως, τα διαφορετικά στοιχεία του συνόλου $\{W\cap L: L\in\mathcal{L}\}$ είναι πεπερασμένα στο πλήθος και επομένως και το σύνολο $\{W\cap L: L\in\mathcal{L}, W\cap L\neq 0\}$ είναι πεπερασμένο. Το ίδιο σύνολο όμως είναι και αλυσίδα, και επομένως η τομή

$W \cap L_o$ είναι επίσης στοιχείο του (το μικρότερο), και άρα μη μηδενικό. ■

Λήμμα 2.2. *Ας είναι X ένας γραμμικός τοπολογικός χώρος (Hausdorff) και $\mathcal{L}$ μια πλήρης αλυσίδα υποχώρων του. Έστω επίσης* W *ένας γραμμικός υπόχωρος του* X *με* $\dim W = n$ $(n \in \mathbb{N})$. *Τότε υπάρχουν* $m \in \mathbb{N}$, *και* $\{n_j : j = 1, \ldots, m\} \subseteq \mathbb{N}$ *τέτοια ώστε* $n_1 + \ldots + n_m = n$, $\{w_{i,j} : i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n_i\} \subseteq W$ *και* $\{N_i : i=1, \ldots, m\} \subseteq \mathcal{L}$, *με τις παρακάτω ιδιότητες : Αν ονομάσουμε* $W_i = < w_{k,j} : k = i, i+1, \ldots, m\ ,\ j = 1, \ldots, n_k >$ $i = 1, \ldots, m$ *τότε*

i) $W = < w_{i,j} : i = 1, \ldots, m\ ,\ j = 1, \ldots, n_i >$ *(δηλ. τα αναφερόμενα διανύσματα είναι βάση),*

ii) $W_i \cap N_i = < w_{i,j} : j = 1, \ldots, n_i >$ $\quad i = 1, \ldots, m$

iii) *Για κάθε* $i \in \{1, \ldots, m\}$ *και για κάθε* $M \in \mathcal{L}$, *αν* $W_i \cap M \neq 0$ *τότε* $N_i \subseteq M$, *και*

iv) $0 \subset N_1 \subset N_2 \subset \ldots \subset N_m \subseteq X$.

Απόδειξη. Ορίζουμε $W_1 = W$. Από το Λήμμα 2.1 υπάρχει $N_1 \in \mathcal{L}$ έτσι ώστε $W_1 \cap N_1 \neq 0$ και αν $W_1 \cap M \neq 0$ για $M \in \mathcal{L}$ τότε $N_1 \subseteq M$. Έστω $\{w_{1,i} : i = 1, \ldots, n_1\}$ μια βάση του $W_1 \cap N_1$. Αν $W_1 \cap N_1 = W_1$ απλά παίρνουμε $m = 1$ και $n_1 = n$. Αν αντίθετα $\dim(W_1 \cap N_1) = n_1 < n$, επεκτείνουμε την προηγούμενη, σε μια βάση του W_1. Έστω $\{w_{1,i} : i = 1, \ldots, n\}$ μια τέτοια βάση του W_1. Ορίζουμε $W_2 = < w_{1,i} : i = n_1+1, \ldots, n > \neq 0$, έτσι πάλι από το Λήμμα 2.1 υπάρχει $N_2 \in \mathcal{L}$ τέτοιο ώστε $W_2 \cap N_2 \neq 0$ και αν $W_2 \cap M \neq 0$ για $M \in \mathcal{L}$ τότε $N_2 \subseteq M$. Έστω $\{w_{2,i} : i = 1, \ldots, n_2\}$ μια βάση του $W_2 \cap N_2$. Αν $W_2 \cap N_2 = W_2$ πέρνουμε $m = 2$ και $n_2 = n - n_1$. Αν $\dim(W_2 \cap N_2) = n_2 < n - n_1$ επεκτείνουμε την προηγούμενη σε μια βάση του W_2, ας είναι δηλαδή $\{w_{2,i} : i=1, \ldots, n-n_1\}$ μια βάση του W_2. Ορίζουμε $W_3 = < w_{2,i} : i = n_2+1, \ldots, n-n_1 > \neq 0$ και συνεχίζουμε όμοια. Αφού ο W είναι πεπερασμένης διάστασης η διαδικασία αυτή τελειώνει μετά από ένα πεπερασμένο αριθμό, έστω m βημάτων. Είναι φανερό ότι ισχύουν τα (i), (ii), (iii) και μένει να αποδείξουμε το (iv). Αν για κάποιο $i \in \{1, \ldots, m-1\}$ είχαμε $N_i \supseteq N_{i+1}$, θα είχαμε επίσης και $W_i \cap N_i \supseteq W_i \cap N_{i+1} \supseteq W_{i+1} \cap N_{i+1} \neq 0$, μια αντίφαση. Αυτό αποδεικνύει τον ισχυρισμό μας. ■

Θεώρημα 2.1. *Έστω $\mathcal{X}$ ένας γραμμικός τοπολογικός χώρος (Hausdorff), $\mathcal{L}$ μια πλήρης αλυσίδα υποχώρων του και $R \in \mathrm{Alg}\mathcal{L}$ ένας τελεστής πεπερασμένης τάξης, έστω $\mathrm{rank}R=n$. Τότε ο R μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα από n τελεστές τάξης ένα, που καθένας τους ανήκει στο $\mathrm{Alg}\mathcal{L}$.*

Απόδειξη. Από το Λήμμα 2.2 εφαρμοσμένο στον $W = R(\mathcal{X})$ υπάρχουν $m \in \mathbb{N}$, $\{n_i : i = 1, \ldots , m\} \subseteq \mathbb{N}$, $\{w_{i,j} : i = 1,\ldots,m ,\ j = 1, \ldots , n_i \} \subseteq R(\mathcal{X})$ και $\{N_i : i = 1,\ldots,m \} \subseteq \mathcal{L}$ που ικανοποιούν τα συμπεράσματα του λήμματος. Επομένως, υπάρχει ένα (μοναδικό) σύνολο $\{ x^*_{i,j} : i = 1,\ldots,m ,\ j = 1, \ldots , n_i\} \subseteq \mathcal{X}^*$ τέτοιο ώστε

$$R = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=i}^{n_i} x^*_{i,j} \otimes w_{i,j}.$$

Θα αποδείξουμε ότι για $i_0 \in \{1, \ldots ,m \}$ και $j_0 \in \{1, \ldots, n_{i_0}\}$ έχουμε $x^*_{i_0,j_0} \otimes w_{i_0 j_0} \in \mathrm{Alg}\mathcal{L}$, οπότε είναι φανερό ότι το θεώρημα θα έχει αποδειχθεί. Είναι αρκετό από το Λήμμα 1.3 να αποδείξουμε ότι $x^*_{i_0,j_0}(N_{i_0 -}) = 0$. Αφού (Λήμμα 2.2.iv) $N_{i_0 -} = \vee\{M \in \mathcal{L} : M \subset N_{i_0} \} =$ $= \vee\{M \in \mathcal{L} : N_{i_0 -1} \subseteq M \subset N_{i_0} \}$ (όπου ορίζουμε $N_0=0$), αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε $M \in \mathcal{L}$, το οποίο επιπλέον ικανοποιεί $N_{i_0 -1} \subseteq M \subset N_{i_0}$ και για κάθε $x \in M$, ισχύει $x^*_{i_0,j_0}(x) = 0$. Ορίζουμε (για x, M όπως αναφέραμε)

$$z = R(x) - \Big(\sum_{i=1}^{i_0 -1} \sum_{j=1}^{n_i} x^*_{i,j}(x) w_{i,j}\Big) = \sum_{i=i_0}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} x^*_{i,j}(x) w_{i,j}.$$

Από την πρώτη έκφραση για το z ακολουθεί ότι $z \in M \subset N_{i_0}$ (αφού $R \in \mathrm{Alg}\mathcal{L}$) και από την δεύτερη ότι $z \in W_{i_0}$. Επομένως $z = 0$ (Λήμμα 2.2.iii) και έτσι, από την γραμμική ανεξαρτησία των διανυσμάτων του τρίτου μέλους, προκύπτει ότι $x^*_{i_0,j_0}(x) = 0$, και η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. ■

Γ

Μόλις είδαμε ότι κάθε αλυσίδα έχει την ΙΠΤ. Αντίθετα, θα δώσουμε τώρα ένα παράδειγμα ενός πεπερασμένου επιμεριστικού συνδέσμου και μιας αναπαράστασής του, στην οποία αποτυγχάνει η ΙΠΤ. Προφανώς, υπάρχουν σύνδεσμοι με την ΙΠΤ (π.χ. αλυσίδες, σύνδεσμοι Boolean), έτσι αυτός που θα δώσουμε θα είναι κάποιος κατάλληλος. Πιο συγκεκριμένα, αυτός θα είναι ο ελεύθερα παραγόμενος επιμεριστικός σύνδεσμος με τρεις γεννήτορες (θα τον συμβολίζουμε με $\mathcal{L}_3$), που έχει 18 στοιχεία. (Για το διάγραμμά του, βλ σχ. 2.1). Παρακάτω, (κεφ. 4), θα αποδείξουμε ότι δεν υπάρχει σύνδεσμος με λιγότερα στοιχεία που να έχει τις ιδιότητες που θέλουμε, καθώς επίσης, ότι με 18 στοιχεία υπάρχει μόνο ένας, αυτός που θα μελετήσουμε.

Μια δυσκολία που εμφανίζεται, είναι ότι υπάρχουν αναπαραστάσεις του $\mathcal{L}_3$ με την ΙΠΤ, ενώ άλλες χωρίς (όπως θα αποδείξουμε). Πραγματικά, σε οποιονδήποτε πεπερασμένο επιμεριστικό σύνδεσμο, υπάρχει αναπαράσταση πάνω σε χώρο πεπερασμένης διάστασης, που επομένως έχει την ΙΠΤ ([35, Θεώρημα 4.1]). Η αναπαράσταση τού $\mathcal{L}_3$ που θα χρησιμοποιήσουμε, την οποία θα συμβολίζουμε με $\mathcal{L}_3'$, θα είναι σε (διαχωρίσιμο) χώρο Hilbert. Η μορφή που αυτός θα εμφανιστεί, είναι ευθύ άθροισμα από 6 αντίγραφα ενός (άλλου) χώρου Hilbert. Το ότι ο σύνδεσμος έχει έξι join irreducible στοιχεία (δηλαδή, που δεν μπορούν να παραχθούν από γνήσια μικρότερα τους), εξηγεί τον αριθμό έξι του πλήθος από αντίγραφα που αναφέραμε προηγουμένως. Αυτό, βέβαια, δεν είναι ουσιαστικό σημείο του αντιπαραδείγματος.

Τέλος θα αποδείξουμε ότι ο $\mathcal{L}_3'$ δεν έχει την ΙΠΤ, κατασκευάζοντας έναν τελεστή που θα ανήκει στο $\mathrm{Alg}\mathcal{L}_3'$, αλλά δεν θα γράφεται σαν πεπερασμένο άθροισμα από τελεστές τάξης ένα, του $\mathrm{Alg}\mathcal{L}_3'$. Εννοείται ότι ο τελεστής αυτός δεν μπορεί να είναι τυχαίος (π.χ. ένα οποιοδήποτε πεπερασμένο άθροισμα από τάξης ένα, έχει τετριμμένα την ΙΠΤ). Ωστόσο, αυτός που θα κατασκευάσουμε είναι βέλτιστος : έχει τάξη δύο, επομένως την μικρότερη δυνατή.

Έστω $\mathcal{H}$ ένας χώρος Hilbert , του οποίου το εσωτερικό γινόμενο συμβολίζουμε με $\langle .,. \rangle$ και $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ένας "1-1", με πυκνή εικόνα, αλλά όχι "επί", αυτοσυζυγής τελεστής. (Το να είναι αυτοσυζυγής δεν είναι ουσιαστικό στα παρακάτω. Το απαιτούμε μόνο για διευκόλυνση των πράξεων). Ένας τελεστής, με τις προηγούμενες ιδιότητες, σε διαχωρίσιμο χώρο Hilbert με ορθοκανονική βάση $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, είναι ο

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \langle x, e_n \rangle e_n .$$

Ο χώρος Hilbert, από υποχώρους του οποίου θα αποτελείται ο σύνδεσμος $\mathcal{L}_3$ του αντιπαραδείγματος μας θα είναι ο $\mathcal{H}^{(6)} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$. Θα ορίσουμε τους γεννήτορες K_1, K_2, K_3 σε δύο στάδια. Στο πρώτο στάδιο ορίζουμε τους ακόλουθους τρείς (κλειστούς) υποχώρους του $\mathcal{H}^{(3)} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$:

$$U_1 = \{(x,0,0) \ : \ x \in \mathcal{H} \},$$

$$U_2 = \{(x,Ax,0) : x \in \mathcal{H}\} \text{ και}$$

$$U_3 = \{(x,Ax,Ax) \ : \ x \in \mathcal{H} \}.$$

Είναι αποδειγμένο στο [3, Λήμμα 6.3] (ή, αν ο $\mathcal{H}$ είναι διαχωρίσιμος, στο [28, Θεώρημα 4.3]) ότι τα U_1, U_2, U_3 είναι άτομα ενός συνδέσμου Boolean. (Στο σημείο αυτό χρησιμοποιούμε ότι ο A είναι 1-1 με πυκνή εικόνα). Το Boolean συμπλήρωμα του U_1 είναι ο $U_2 \vee U_3 = \{(x,Ax,y) : x,y \in \mathcal{H}\}$, του U_2 είναι ο $U_1 \vee U_3 = \{(x,y,y) : x,y \in \mathcal{H}\}$ και του U_3 είναι ο $U_1 \vee U_2 = \{(x,y,0) : x,y \in \mathcal{H}\}$.

Ορίζουμε στον $\mathcal{H}^{(6)}$, τον οποίο βλέπουμε σαν $\mathcal{H}^{(3)} \oplus \mathcal{H}^{(3)}$, τους εξής (κλειστούς) υποχώρούς του :

$$K_1 = (U_2 \vee U_3) \oplus (U_2 \vee U_3)^{\perp} = \{(x,Ax,y,-Au,u,0) \ : \ x,y,u \in \mathcal{H}\},$$

$$K_2 = (U_1 \vee U_3) \oplus (U_1 \vee U_3)^{\perp} = \{(x,y,y,0,u,-u) \ : \ x,y,u \in \mathcal{H}\},$$

$$K_3 = (U_1 \vee U_2) \oplus (U_1 \vee U_2)^{\perp} = \{(x,y,0,0,0,u) \ : \ x,y,u \in \mathcal{H}\}.$$

Με $\mathcal{L}_3'$ θα συμβολίζουμε το σύνδεσμο που παράγεται από τους K_1, K_2, K_3 (και που θα αποδείξουμε παρακάτω ότι είναι ο ελεύθερα παραγόμενος επιμεριστικός σύνδεσμος με τους τρεις γεννήτορες που αναφέραμε). Ορίζουμε

$$L_1=K_1\cap K_2=((U_2\vee U_3)\cap(U_1\vee U_3))\oplus((U_2\vee U_3)^{\perp}\cap(U_1\vee U_3)^{\perp})=$$

$$=U_3\oplus(U_1\vee U_2\vee U_3)^{\perp}=$$

$$=U_3\oplus 0,$$

$L_2=K_1\cap K_3=U_2\oplus 0$ και $L_3=K_2\cap K_3=U_1\oplus 0$. Επίσης ορίζουμε

$$N_1=L_1\vee L_2=(U_2\vee U_3)\oplus 0\ ,$$

$$N_2=L_1\vee L_3=(U_1\vee U_3)\oplus 0\ ,$$

$$N_3=L_2\vee L_3=(U_1\vee U_2)\oplus 0\ ,$$

$$M=L_1\vee L_2\vee L_3=N_1\vee N_2\vee N_3=\mathcal{H}^{(3)}\oplus 0.$$

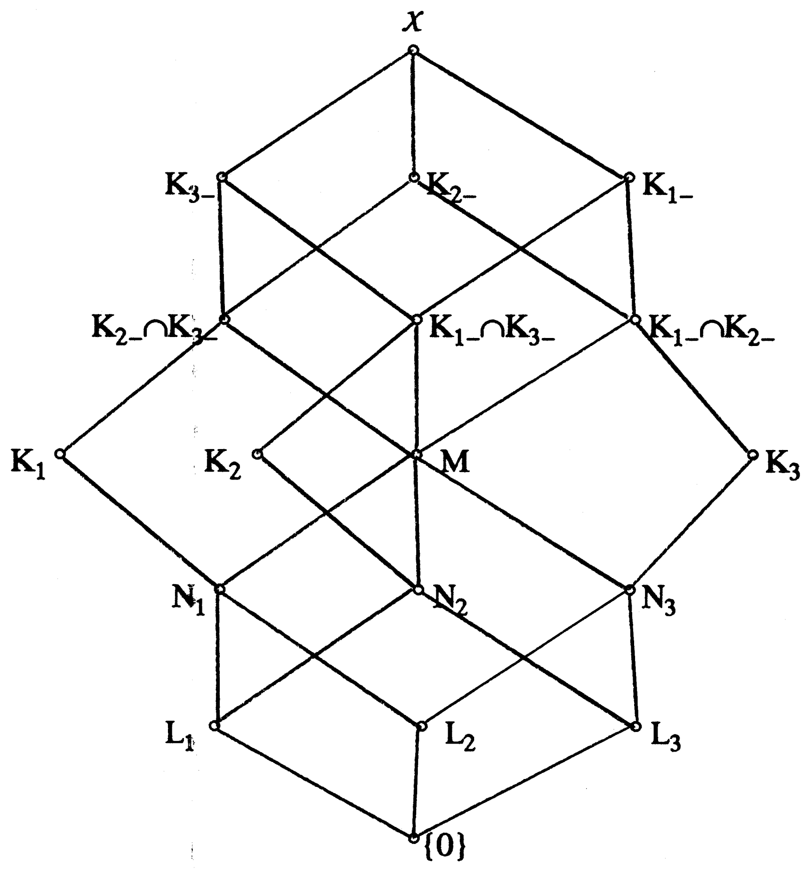
Ακόμη, παρατηρούμε ότι ο $\mathcal{L}_3'$ περιέχει και τους $K_1\vee K_2=\mathcal{H}^{(3)}\oplus U_3^{\perp}$, $K_1\vee K_3=\mathcal{H}^{(3)}\oplus U_2^{\perp}$, $K_2\vee K_3=\mathcal{H}^{(3)}\oplus U_1^{\perp}$ κ.λ.π. Συμπερασματικά, ο $\mathcal{L}_3'$ περιέχει το σύνολο

$$\{K_1,K_2,K_3\}\cup\{L\oplus 0\subseteq\mathcal{H}^{(3)}\oplus\mathcal{H}^{(3)}=\mathcal{H}^{(6)} : L\in Bo\{U_1,U_2,U_3\}\}\cup$$

$$\cup\{\mathcal{H}^{(3)}\oplus L\subseteq\mathcal{H}^{(6)} : L\in Bo\{U_1^{\perp},U_2^{\perp},U_3^{\perp}\}\}$$

όπου με $Bo\{U_1,U_2,U_3\}$ και $Bo\{U_1^{\perp},U_2^{\perp},U_3^{\perp}\}$ συμβολίζουμε τους Boolean συνδέσμους πάνω στον $\mathcal{H}^{(3)}$, που παράγονται από τα U_1,U_2,U_3 και $U_1^{\perp},U_2^{\perp},U_3^{\perp}$ ([3, Θεώρημα 2.10]) αντίστοιχα. Θα αποδείξουμε ότι το σύνολο $\{K_1,K_2,K_3\}\cup\{L\oplus 0\subseteq\mathcal{H}^{(6)} : L\in Bo\{U_1,U_2,U_3\}\}\cup\{\mathcal{H}^{(3)}\oplus L\subseteq\mathcal{H}^{(6)} : L\in Bo\{U_1^{\perp},U_2^{\perp},U_3^{\perp}\}\}$ είναι σύνδεσμος, οπότε θα είναι ο $\mathcal{L}_3'$. Για να το πετύχουμε αυτό αρκεί να αποδείξουμε (βλέπε ορισμό συνδέσμου) ότι η τομή και ο υπόχωρος που παράγεται από δύο στοιχεία του συνόλου, ανήκουν επίσης στο σύνολο.

Παρατηρούμε ότι αν $L \in Bo\{U_1,U_2,U_3\}$ τότε $K_1 \vee (L \oplus 0) = \{(U_2 \vee U_3) \oplus (U_2 \vee U_3)^{\perp}\} \vee \vee \{L \oplus 0\} = \{(U_2 \vee U_3) \vee L\} \oplus (U_2 \vee U_3)^{\perp}$. Αφού αμφότερα, L και $U_2 \vee U_3$, είναι στοιχεία της $Bo\{U_1,U_2,U_3\}$ ο υπόχωρος $(U_2 \vee U_3) \vee L$ είναι ίσος είτε με τον $U_2 \vee U_3$ είτε με τον $U_1 \vee U_2 \vee U_3 = \mathcal{H}^{(3)}$. Επομένως ο $K_1 \vee (L \oplus 0)$ είναι είτε ο K_1 είτε ο $\mathcal{H}^{(3)} \oplus (U_2 \vee U_3)^{\perp}$, με $(U_2 \vee U_3)^{\perp} = U_2^{\perp} \cap U_3^{\perp} \in Bo\{U_1^{\perp}, U_2^{\perp}, U_3^{\perp}\}$. Με παρόμοιο τρόπο εξετάζουμε τις υπόλοιπες περιπτώσεις, και αποδεικνύουμε, τελικά, ότι το σύνολο που περιγράψαμε στην αρχή αυτής της παραγράφου, είναι σύνδεσμος. Είναι εύκολο να δούμε τώρα, ότι ο $\mathcal{L}_3'$ είναι ο ελεύθερα παραγόμενος επιμεριστικός σύνδεσμος με τρείς γεννήτορες και έχει 18 στοιχεία. (Για το διάγραμμα του βλ. σχ. 2.1, βλ. επίσης [5, σελ. 33]). (Είναι εύκολο να δούμε επίσης (βλ. και κεφ. 5.Ε) ότι η προηγούμενη διαδικασία είναι και ένας τρόπος κατασκευής αναπαραστάσεων του $\mathcal{L}_3$ βασιζόμενες σε αναπαραστάσεις του Boolean συνδέσμου με τρία άτομα.



σχήμα 2.1

Θα ορίσουμε τώρα ένα τελεστή τάξης δύο του $\mathrm{Alg}\mathcal{L}_3'$ ο οποίος δεν θα έχει την ΙΠΤ. Ας είναι f ένα διάνυσμα του $\mathcal{H}$ τέτοιο ώστε $f \notin A(\mathcal{H})$. (Τέτοιο διάνυσμα υπάρχει, γιατί ο A δεν είναι "επί"). Πάνω στον $\mathcal{H}^{(6)}$ ορίζουμε τώρα τον εξής τελεστή

$$T = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ f \\ f \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ f \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ f \\ f \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Θα αποδείξουμε ότι $T \in \mathrm{Alg}\mathcal{L}_3'$, αλλά δεν ανήκει στο $\Sigma T1(\mathrm{Alg}\mathcal{L}_3')$. Αν και για το λόγο αυτό μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα Θεωρήματα 3.1 (βλ. και παράδειγμα στο 3.Γ) και 3.2 (βλ. και παρατήρηση 1 στο 3.Δ), θα προτιμήσουμε εδώ μια κατευθείαν απόδειξη. Για το πρώτο, είναι αρκετό να αποδείξουμε ότι ο T αφήνει αναλλοίωτους τους γεννήτορες, δηλαδή τους K_1, K_2, K_3. Ένα τυπικό στοιχείο του K_1 είναι της μορφής

$$\begin{pmatrix} x \\ Ax \\ y \\ -Aw \\ w \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ έτσι } T\left(\begin{pmatrix} x \\ Ax \\ y \\ -Aw \\ w \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \langle w,f\rangle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in K_1.$$

Επίσης ένα τυπικό στοιχείο του K_3 είναι της μορφής

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ u \end{pmatrix}, \text{ και έτσι } T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ u \end{pmatrix}\right) = \langle u,f\rangle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \langle u,f\rangle \begin{pmatrix} 0 \\ f \\ f \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = - \langle u,f\rangle \begin{pmatrix} 0 \\ f \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in K_3.$$

Η απόδειξη για το K_2 είναι όμοια. Επομένως, $T \in \mathrm{Alg}\mathcal{L}_3'$.

Θα αποδείξουμε τώρα, ότι ο T δεν έχει την ΙΠΤ. Κατ' αρχήν, χρησιμοποιώντας το Λήμμα 1.3 θα περιγράψουμε όλους του τελεστές τάξης ένα, του $\mathrm{Alg}\mathcal{L}_3'$. Παρατηρούμε ότι, αν $L \in \mathcal{L}_3'$ και $L \supseteq M$, τότε $L_- \supseteq K_1 \vee K_2 \vee K_3 = \mathcal{H}$, που σημαίνει ότι δεν υπάρχουν μη μηδενικοί τελεστές τάξης ένα, με εικόνα σε έναν τέτοιο L. Επιπλέον παρατηρούμε ότι για i=1,2,3 έχουμε $N_i \subseteq K_i$ και $N_{i-} = K_{i-}$. Έτσι, οι τελεστές με εικόνα στους N_i (βλ. Λήμμα 1.3), μπορούν να θεωρηθούν με εικόνα στα αντίστοιχα K_i.

Από τα προηγούμενα συμπεραίνουμε ότι οι τελεστές τάξης ένα του $\mathrm{Alg}\mathcal{L}_3'$ είναι της εξής μορφής (για οποιαδήποτε $x \in \mathcal{H}$):

$$\begin{pmatrix} * \\ * \\ * \\ * \\ * \\ * \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x \\ Ax \\ Ax \\ * \\ * \\ * \end{pmatrix} \text{ (ο οποίος έχει εικόνα στον } L_1\text{)}, \quad \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \\ * \\ x \\ x \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \\ * \\ * \\ * \end{pmatrix} \text{ (εικόνα στον } L_2\text{)},$$

$$\begin{pmatrix} * \\ * \\ * \\ * \\ * \\ * \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \\ * \\ * \\ * \end{pmatrix} \text{ (εικόνα στον } L_3\text{)}, \quad \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \\ x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \\ * \\ * \\ * \end{pmatrix} \text{ (εικόνα στον } K_1\text{)},$$

$$\begin{pmatrix} * \\ * \\ * \\ x \\ Ax \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \\ * \\ * \\ * \end{pmatrix} \text{ (εικόνα στον } K_2\text{)}, \quad \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \\ x \\ Ax \\ Ax \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \\ * \\ * \\ * \end{pmatrix} \text{ (εικόνα στον } K_3\text{)},$$

όπου σε κάθε περίπτωση το (*) υποδηλεί κατάλληλο (σύμφωνα με το Λήμμα 1.3) στοιχείο του $\mathcal{H}$, που όμως δεν θα χρειαστούμε παρακάτω την ακριβή μορφή του.

Υποθέτουμε τώρα ότι ο T μπορεί να γραφεί σαν ένα πεπερασμένο άθροισμα από τους αναφερόμενους παραπάνω τελεστές τάξης ένα, και θα καταλήξουμε σε άτοπο.

Έστω λοιπον ότι υπάρχουν πεπερασμένα σύνολα δεικτών $I_i(1\leq i\leq 6)$ και διανύσματα

$x_i, y_i, z_i, w_i, s_i, t_i \in \mathcal{H}$ τέτοια ώστε

$$T=\sum_{i\in I_1}\begin{pmatrix}*\\ *\\ *\\ *\\ *\\ *\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}x_i\\ Ax_i\\ Ax_i\\ *\\ *\\ *\end{pmatrix}+\sum_{i\in I_2}\begin{pmatrix}*\\ *\\ *\\ *\\ y_i\\ y_i\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}*\\ *\\ *\\ *\\ *\\ *\end{pmatrix}+\sum_{i\in I_3}\begin{pmatrix}*\\ *\\ *\\ *\\ *\\ *\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}z_i\\ 0\\ 0\\ *\\ *\\ *\end{pmatrix}+$$

$$+\sum_{i\in I_4}\begin{pmatrix}*\\ *\\ *\\ w_i\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}*\\ *\\ *\\ *\\ *\\ *\end{pmatrix}+\sum_{i\in I_5}\begin{pmatrix}*\\ *\\ *\\ s_i\\ As_i\\ 0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}*\\ *\\ *\\ *\\ *\\ *\end{pmatrix}+\sum_{i\in I_6}\begin{pmatrix}*\\ *\\ *\\ t_i\\ At_i\\ At_i\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}*\\ *\\ *\\ *\\ *\\ *\end{pmatrix}.$$

Αν τώρα εφαρμόσουμε και τις δύο πλευρές της προηγούμενης ισότητας, στο διάνυσμα $\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\\ g\\ -g\end{pmatrix}$, όπου το g θα το διαλέξουμε παρακάτω, και χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό του T, πέρνουμε

$$\langle g,f\rangle\begin{pmatrix}0\\ f\\ f\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\\ g\\ -g\end{pmatrix}=\sum_{i\in I_1}\mu_i\begin{pmatrix}x_i\\ Ax_i\\ Ax_i\\ *\\ *\\ *\end{pmatrix}+\sum_{i\in I_3}\lambda_i\begin{pmatrix}z_i\\ 0\\ 0\\ *\\ *\\ *\end{pmatrix}+\sum_{i\in I_5}\langle g,As_i\rangle\begin{pmatrix}*\\ *\\ *\\ *\\ *\\ *\end{pmatrix}.$$

(όπου μ_i ,λ_i είναι κατάλληλοι πραγματικοί ή μιγαδικοί αριθμοί). Έτσι από την ισότητα των δεύτερων συντεταγμένων πέρνουμε

$$\langle g,f\rangle f=\sum_{i\in I_1}\mu_i Ax_i+\sum_{i\in I_5}\langle g,As_i\rangle u_i \qquad (2)$$

(για κατάλληλα $u_i\in\mathcal{H}$). Αφού $f\notin A(\mathcal{H})$, το f δεν ανήκει επίσης στον (πεπερασμένης διάστασης, και άρα κλειστό υπόχωρο) $<As_i : i\in I_5>$. Έτσι υπάρχει $g\in\mathcal{H}$ με $\langle g,f\rangle=1$ και τέτοιο ώστε για κάθε $i\in I_5$, $\langle g,As_i\rangle=0$. Άρα, για αυτό το g, η ισότητα (2) δίνει $f=\sum_{i\in I_1}\mu_i Ax_i\in A(\mathcal{H})$, δηλαδή μια αντίφαση. Αυτή ολοκληρώνει το αντιπαράδειγμα.

Στην παρατήρηση μετά το Θεώρημα 5.5 αποδεικνύουμε ότι ο προηγούμενος T ανήκει στην $\|\cdot\|$-κλειστότητα του $\Sigma T1(\mathrm{Alg}\mathcal{L}_3)$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Ο ελεύθερα παραγόμενος επιμεριστικός σύνδεσμος με τρείς γεννήτορες $\mathcal{L}_3$

Α

Σ' αυτό το κεφάλαιο, μελετάμε πρώτα την ΠΤ(Alg$\mathcal{L}_3$) (για οποιαδήποτε αναπαράσταση του $\mathcal{L}_3$).Πιο συγκεκριμένα το Θεώρημα 3.1 χαρακτηρίζει το ΠΤAlg($\mathcal{L}_3$), ενώ το Θεώρημα 3.2 χαρακτηρίζει εκείνα τα στοιχεία του ΠΤ(Alg$\mathcal{L}_3$) που έχουν την ΙΠΤ. Μετά, το Θεώρημα 3.3 θα δώσει ένα χαρακτηρισμό εκείνων των αναπαραστάσεων του $\mathcal{L}_3$ που δεν έχουν την ΙΠΤ. Ο τελευταίος αυτός χαρακτηρισμός θα είναι πολύ απλός και δεν θα χρησιμοποιεί άλλο συμβολισμό, εκτός του ορισμού του συνδέσμου. Το αντιπαράδειγμα του κεφαλαίου 2.Γ αποδεικνύει την ύπαρξη τέτοιων αναπαραστάσεων. Επίσης αποδεικνύεται (Θεώρημα 3.4), το περίεργο ίσως γεγονός, ότι το γινόμενο δύο στοιχείων του ΠΤ(Alg$\mathcal{L}_3$) έχει πάντοτε την ΙΠΤ. Το επόμενο θεώρημα (3.5) αποδεικνύει ότι σε κάθε αναπαράσταση του $\mathcal{L}_3$ υπάρχει τάξης δύο τελεστής του Alg$\mathcal{L}_3$ που έχει την ΙΠΤ, αλλά δεν μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα από δύο ακριβώς στοιχεία του Τ1(Alg$\mathcal{L}_3$). Το τελευταίο θεώρημα αυτού του κεφαλαίου δηλώνει ότι στην προηγούμενη περίπτωση ο τάξης δύο τελεστής μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα από τρεις τελεστές του Τ1(Alg$\mathcal{L}_3$).

Με $\mathcal{X}$ θα συμβολίζουμε ένα τυχαίο (εκτός αν δηλώνεται διαφορετικά), χώρο με νόρμα. Θα δώσουμε πρώτα έναν ορισμό που θα χρησιμοποιήσουμε παρακάτω. Έστω Y είναι ένας υπόχωρος του $\mathcal{X}$. Θα λέμε ότι ο υπόχωρος Z του $\mathcal{X}$ είναι ένα συμπλήρωμα (ή ένας συμπληρωματικός υπόχωρος) του Y στον $\mathcal{X}$, αν $Z \cap Y=0$ και $Z + Y = \mathcal{X}$. Είναι εύκολο να δούμε ότι αν ο $\mathcal{X}$ είναι ένας πεπερασμένης διάστασης χώρος, τότε κάθε υπόχωρος Y του $\mathcal{X}$ έχει ένα (όχι απαραίτητα μοναδικό) συμπλήρωμα στον $\mathcal{X}$.

Γνωρίζουμε ότι αν $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ είναι ένας τελεστής πεπερασμένης τάξης, τότε

$\mathcal{R}(T^*) = (\mathrm{Ker}\, T)^{\perp}$. Επίσης, για κάθε $Y \subseteq X$ έχουμε $\mathcal{R}(T^*) \subseteq Y^{\perp}$ αν και μόνο αν $Y \subseteq \mathrm{Ker}\, T$ (T πεπερασμένης τάξης).

Το πρώτα λήμμα αυτού του κεφαλαίου είναι πολύ απλό, όμως προτιμάμε να το διατυπώσουμε, γιατί θα το χρησιμοποιήσουμε πολλές φορές παρακάτω.

Λήμμα 3.1. *Έστω $R \in \mathcal{B}(X)$ είναι πεπερασμένης τάξης τελεστής και Y_1, Y_2 υπόχωροι του X τέτοιοι ώστε $\mathcal{R}(R) \subseteq Y_1 + Y_2$. Τότε υπάρχουν πεπερασμένης τάξης τελεστές $R_1, R_2 \in \mathcal{B}(X)$ τέτοιοι ώστε $R=R_1 + R_2$, $\mathcal{R}(R_i) \subseteq Y_i$ και $\mathcal{R}(R_i^*) \subseteq \mathcal{R}(R^*)$ (i=1,2).*

Απόδειξη. Όπως στο κεφάλαιο 1.Γ, ο R μπορεί να γραφεί στη μορφή $R=\sum_{i=1}^{n} y_i^* \otimes x_i$. Έτσι, υπάρχουν $\{t_i : i=1,...n\} \subseteq Y_1$ και $\{s_i : i=1,...n\} \subseteq Y_2$ τέτοιοι ώστε $x_i = t_i + s_i$ (i=1,...,n). Ορίζουμε, $R_1 = \sum_{i=1}^{n} y_i^* \otimes t_i$, $R_2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^* \otimes s_i$. Τότε αυτοί οι τελεστές ικανοποιούν τα συμπεράσματα του λήμματος. ■

B

Τα επόμενα λήμματα ισχύουν σε γενικό πεπερασμένο πλήρη επιμεριστικό σύνδεσμο υποχώρων ενός χώρου με νόρμα και μελετούν τομές πεπερασμένης διάστασης χώρων (ειδικότερα εικόνες στοιχείων του ΠΤ(Alg$\mathcal{L}$)) με στοιχεία του συνδέσμου.

Λήμμα 3.2. *Έστω $\mathcal{L}$ ένας πεπερασμένος επιμεριστικός σύνδεσμος υποχώρων ενός χώρου με νόρμα και $\{L_i, i=1,...,n\} \subseteq \mathcal{L}$. Τότε*

$$\cap\{L_{i-} : i=1,...,n\} = \vee\{M \in \mathcal{L} : L_i \not\subseteq M \ \ i=1,...,n\}.$$

Απόδειξη. Από την επιμεριστικότητα έχουμε

$$\cap\{L_{i-} : i=1,...,n\} = L_{1-} \cap \ldots \cap L_{n-} =$$

$= (\vee\{K_1 \in \mathcal{L} : L_1 \not\subseteq K_1\}) \cap \ldots \cap (\vee\{K_n \in \mathcal{L} : L_n \not\subseteq K_n\}) =$

$= \vee\{K_1 \cap \ldots \cap K_n : K_i \in \mathcal{L},\ L_i \not\subseteq K_i,\ i=1,\ldots,n\} \subseteq$

$\subseteq \vee\{M \in \mathcal{L} : L_i \not\subseteq M \ \ i=1,\ldots,n\}.$

που αποδεικνύει τη μια έγκλειση. Για την αντίστροφη, παρατηρούμε ότι αν $M \in \mathcal{L}$ είναι τέτοιο ώστε $L_i \not\subseteq M$,τότε $M \subseteq L_{i-}$ για $i=1,\ldots,n$ που ολοκληρώνει την απόδειξη. ■

Λήμμα 3.3. *Έστω* $\mathcal{L}$ *ένας πεπερασμένος σύνδεσμος υποχώρων ενός χώρου με νόρμα* X *και* $W \neq 0$ *ένας πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος του* X. *Τότε υπάρχουν ένας* $m \in \mathbb{N}$, *ένα υποσύνολο* $\mathcal{M}_0(W) = \mathcal{M}_0 = \{M_i : i=1,\ldots,m\}$ *του* $\mathcal{L}$, *και υπόχωροι* $0 \neq W_i = W_{M_i} \subseteq M_i \cap W$ $(i=1,\ldots,m)$ *τέτοιοι ώστε*

(1) *Για κάθε* $L \in \mathcal{L}$ *ισχύει* $L \cap W = \vee\{W_i : M_i \subseteq L\}$.

Ειδικότερα αν $L \cap W \neq 0$, *τότε υπάρχει* $i \in \{1,\ldots,m\}$ *τέτοιο ώστε* $M_i \subseteq L$.

Επίσης, (εφαρμογή για $L = X$*)* $W = \vee\{W_i : i=1,\ldots,m\}$.

(2) *Για κάθε* $i \in \{1,\ldots,m\}$ *έχουμε* $W_i \cap (\vee\{W \cap L : L \in \mathcal{L}$ και $L \subset M_i\}) = 0$.

Απόδειξη. Ορίζουμε $Z_1 = \vee\{W \cap L : L \in \mathcal{L}$ και $L \subset X\}$. Αν $Z_1 = 0$ πέρνουμε $m=1$, $M_1 = X$, και $W_1 = W$. Σ' αυτή την περίπτωση έχουμε τελειώσει. Αν έχουμε γνήσια έγκλειση $0 \subset Z_1 \subset W$, τότε ορίζουμε W_1 να είναι ένα συμπλήρωμα του Z_1 στον W και $M_1 = X$. Τότε $0 \neq W_1 \subseteq W$). Αν, τελικά, $Z_1 = W$ δεν ορίζουμε κανένα M_i σ' αυτό το βήμα.

Στην περίπτωση $Z_1 \neq 0$, μελετάμε τα maximal (αναφορικά με την σχέση "υποσύνολο") στοιχεία του (μη κενού) συνόλου $\{L \in \mathcal{L} : L \subset X$ και $L \cap W \neq 0\}$, τα οποία σημειώνουμε με $N_1, N_2, \ldots, N_k$. Ορίζουμε $Z_2 = \vee\{W \cap L : L \in \mathcal{L}$ και $L \subset N_1\}$.

Αν $Z_2 = 0$, θέτουμε $M_{i_0} = N_1$, όπου $i_0 = 2$ αν M_1 έχει ήδη οριστεί, ή $i_0 = 1$ διαφορετικά. Επίσης ορίζουμε $W_{i_0} = W \cap N_1$.

Σ' αυτή την περίπτωση, δεν εξετάζουμε περισσότερο το N_1 αλλά συνεχίζουμε όμοια με τα $N_2,\dots,N_k$. Αν $0\subset Z_2\subset Z_1\cap N_1$ τότε ορίζουμε $M_{i_0}=N_1$, όπου $i_0=2$ αν M_1 έχει οριστεί και $i_0=1$ αν όχι. Επίσης πέρνουμε $0\neq W_{i_0}\subseteq W$ ένα συμπλήρωμα του Z_2 στον $W\cap N_1$. Τότε $0\neq W_{i_0}\subseteq W\cap M_{i_0}$. Αν $Z_2=W\cap N_1$ δεν ορίζουμε κανένα άλλο M_i σ' αυτό το βήμα.

Στην περίπτωση $Z_2\neq 0$, μελετάμε τα maximal στοιχεία του συνόλου $\{L\in\mathcal{L} : L\cap W\neq 0$ και $L\subset N_1\}$ και για καθένα από αυτά συνεχίζουμε με όμοιο τρόπο. Αφού το $\mathcal{L}$ είναι πεπερασμένο, αυτή η διαδικασία θα τελειώσει μετά από ένα πεπερασμένο αριθμό βημάτων. Αφού τελειώσουμε με το N_1, συνεχίζουμε όμοια με τα maximal των $N_2,\dots,N_k$. Προφανώς μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα M_i είναι διαφορετικά μεταξύ τους ανά δύο. Είναι φανερό, από τον τρόπο κατασκευής, ότι τα συμπεράσματα του λήμματος ικανοποιούνται. ■

Έστω $\mathcal{L}$ είναι ένας πεπερασμένος επιμεριστικός σύνδεσμος υποχώρων ενός χώρου με νόρμα $\mathcal{X}$ και $F\in\mathcal{B}(\mathcal{X})$ είναι πεπερασμένης τάξης. Από το Λήμμα 3.3, εφαρμοσμένο στον $W=\mathcal{R}(F)$, βρίσκουμε $m\in\mathbb{N}$, $\mathcal{M}_0=\{M_i,\ i=1,\dots,m\}\subseteq\mathcal{L}$, και $0\neq W_i\subseteq M_i\cap W$ $i=1,\dots,m$, που ικανοποιούν τα συμπεράσματα του λήμματος.

Για έναν τέτοιο F και με τους συμβολισμούς που μόλις ορίσαμε, έχουμε το ακόλουθο λήμμα :

Λήμμα 3.4. *Τα επόμενα είναι ισοδύναμα :*

(i) $F\in \mathrm{Alg}\mathcal{L}$.

(ii) $F(\cap\{M_{i-} : i\in I\})\subseteq \vee\{W_i : i\in\{1,\dots,m\}-I\}$ $\forall\ I\subseteq\{1,\dots,m\}$.

Ειδικά, η (ii) *συνεπάγεται ότι* $F(\cap\{M_{i-} : i=1,\dots,m\})=0$.

Απόδειξη. (i)$\rightarrow$(ii). Υποθέτουμε, αρχικά, ότι $M\in\mathcal{L}$ είναι τέτοιο ώστε για κάθε $i\in I$ να έχουμε $M_i\not\subseteq M$, και ότι $z\in M$. Τότε $Fz\in F(\mathcal{X})\cap M$, έτσι από το (1) του Λήμματος 3.3, ακολουθεί ότι

$$Fz \in \vee\{W_i : M_i \subseteq M\} \subseteq \vee\{W_i : i \in \{1,\dots,m\} - I\}.$$

Γενικά, τώρα, από το Λήμμα 3.2, προκύπτει

$$F(\cap\{M_{i-} : i \in I\}) = F(\vee\{M \in \mathcal{L} : M_i \not\subseteq M\ i \in I\}) \subseteq$$

$$\subseteq \vee\{F(M) : M \in \mathcal{L} \text{ και } M_i \not\subseteq M\ i \in I\}.$$

Αν $w \in \{F(M) : M \in \mathcal{L}$ και $M_i \not\subseteq M$ $i \in I\}$ τότε υπάρχει ένας $M \in \mathcal{L}$ και ένα $z \in M$ τέτοια ώστε $M_i \not\subseteq M$ $(i \in I)$ και $w = Fz$. Από το πρώτο μέρος της απόδειξης, $w = Fz \in \vee\{W_i : i \in \{1,\dots,m\} - I\}$ που όμως είναι ένας κλειστός υπόχωρος του $\mathcal{X}$. Επομένως, επίσης ισχύει $\vee\{F(M) : M \in \mathcal{L}$ και $M_i \not\subseteq M$ $i \in I\} \subseteq \vee\{W_i : i \in \{1,\dots,m\} - I\}$, απ' όπου το ζητούμενο ακολουθεί.

(ii)→(i). Έστω $M \in \mathcal{L}$ αυθαίρετο. Ορίζουμε $I = \{i \in \{1,\dots,m\} : M_i \subseteq M\}$ (που μπορεί να είναι κενό). Για $i \notin I$ έχουμε $M_i \not\subseteq M$, έτσι $M \subseteq M_{i-}$ και ακόμη $M \subseteq \cap\{M_{i-} : i \notin I\}$. Επομένως $F(M) \subseteq \vee\{W_i : i \in I\}$ που είναι ένας υπόχωρος του M. ■

Πόρισμα. *Αν για κάποιον* F *όπως στο Λήμμα 3.4 το σύνολο* $\{W_i : i = 1,\dots,m\}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο, τότε ο* F *έχει την* ΙΠΤ. *Επιπλέον, σ' αυτή την περίπτωση, ο* F *μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα από* rankF *τελεστές τάξης ένα του* $\mathrm{Alg}\mathcal{L}$.

Απόδειξη. Υπάρχουν $F_i \in \Pi T(\mathcal{B}(\mathcal{X}))$ $(i = 1,\dots,m)$ τέτοιοι ώστε $\mathcal{R}(F_i) = W_i$ και

$$F = \sum_{i=1}^{m} F_i.$$

Αν $z \in M_{1-}$ τότε $Fz \in \vee\{W_i : i = 2,\dots,m\}$ (Λήμμα 3.4), έτσι $F_1(z) = 0$ και άρα $F_1(M_{1-}) = 0$. Επομένως, (Λήμμα 1.4) ο F_1 έχει την ΙΠΤ. Με ένα παρόμοιο τρόπο, όλοι οι άλλοι προσθεταίοι του F, και επομένως ο ίδιος ο F, έχουν την ΙΠΤ. ■

Γ

Με $\mathcal{L}_3$ θα συμβολίζουμε τον ελεύθερα παραγόμενο επιμεριστικό σύνδεσμο με τρείς γεννήτορες, σ' ένα χώρο με νόρμα $\mathcal{X}$. (Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, ο σύνδεσμος του αντιπαραδείγματος του κεφ. 2.Γ, είναι μια ειδική σε χώρο Hilbert αναπαράσταση αυτού). Το διάγραμμα του $\mathcal{L}_3$ είναι το σχήμα 2.1 του κεφ. 2.

Όπως φαίνεται από το διάγραμμα (βλ. επίσης το προηγούμενο κεφάλαιο), οι τρείς γεννήτορες του $\mathcal{L}_3$, είναι οι K_1, K_2, K_3. Επιπλέον, έχουμε $L_1=K_1\cap K_2$, $N_1=L_1\vee L_2=(K_1\cap K_2)\vee(K_1\cap K_3)=K_1\cap(K_2\vee K_3)$ και κυκλικά για L_2, L_3, N_2, N_3. Επίσης, ορίζουμε $M=(K_1\cap K_2)\vee(K_1\cap K_3)\vee(K_2\cap K_3)=L_1\vee L_2\vee L_3=N_1\vee N_2\vee N_3=K_{1-}\cap K_{2-}\cap K_{3-}$. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι $L_{1-}=K_3$, $L_{2-}=K_2$, $L_{3-}=K_1$, και $N_{i-}=K_{i-}$ $i=1,2,3$.

Επίσης, αφού $L\supseteq M \Rightarrow L_-=\mathcal{X} \Rightarrow L_-^{\perp}=0$, για κάθε τελεστή τάξης ένα του $\mathrm{Alg}\mathcal{L}_3$,

το "N" του Λήμματος 1.3 είναι ένα από τα L_i, N_i, K_i $i=1,2,3$.

Ο σκοπός αυτού του μέρους (Γ) είναι το Θεώρημα 3.1, που δίνει ικανές και αναγκαίες συνθήκες για να ανήκει ένας τελεστής στο $\Pi T(\mathrm{Alg}\mathcal{L}_3)$.

Τα επόμενα λήμματα θα χρησιμοποιηθούν πολλές φορές σ' αυτό, αλλά και σε επόμενα κεφάλαια. Είναι προκαταρκτικά για τα θεωρήματα 3.1, 3.2 και 3.3 που αναφέρονται σε τελεστές πεπερασμένης τάξης του $\mathrm{Alg}\mathcal{L}_3$.

Έστω Q είναι ένας τελεστής πεπερασμένης τάξης, που ανήκει στο $\mathrm{Alg}\mathcal{L}_3$.

Από το Λήμμα 3.3 εφαρμοσμένο στον $W=\mathcal{R}(Q)$, υπάρχουν $m\in\mathbb{N}$,

$\mathcal{M}_0(\mathcal{R}(Q))=\mathcal{M}_0(Q)\subseteq\mathcal{L}_3$, και $0\neq W_L(Q)\subseteq L\cap\mathcal{R}(Q)$, $L\in\mathcal{M}_0(\mathcal{R}(Q))$ που ικανοποιούν τα

συμπεράσματα των Λημμάτων 3.3 και 3.4. Ορίζουμε

$$\mathcal{M}_1=\{L_1,L_2,L_3,N_1,N_2,N_3,K_1,K_2,K_3\}.$$

Πέρνουμε μια βάση του $\vee\{W_L(Q) : L\in\mathcal{M}_0(\mathcal{R}(Q))\cap\mathcal{M}_1\}$ και την επεκτείνουμε

(αν είναι απαραίτητο) σε μια βάση του $\mathcal{R}(Q)$ χρησιμοποιώντας διανύσματα του

$\vee\{W_L(Q) : L\in\mathcal{M}_0(\mathcal{R}(Q))-\mathcal{M}_1\}$.

Από αυτό είναι φανερό ότι υπάρχουν πεπερασμένης τάξης τελεστές

T και S τέτοιοι ώστε $Q=T+S$,

$\mathcal{R}(T)=\vee\{W_L(Q) : L\in\mathcal{M}_0(\mathcal{R}(Q))\cap\mathcal{M}_1\}$ και $\mathcal{R}(T)\cap\mathcal{R}(S)=0$.

Εφαρμόζουμε το Λήμμα 3.3 για $W=\mathcal{R}(T)$ και βρίσκουμε

$\mathcal{M}_0(\mathcal{R}(T)) \subseteq \mathcal{L}_3$, και $0 \neq W_L(T) \subseteq L \cap \mathcal{R}(T)$, $L \in \mathcal{M}_0(\mathcal{R}(T))$

τα οποία ικανοποιούν τα συμπεράσματα του λήμματος.

Με αυτούς τους συμβολισμούς έχουμε τα επόμενα λήμματα :

<u>Λήμμα 3.5.</u> *Ισχύει* $\mathcal{M}_0 \subseteq \{L_1, L_2, L_3, N_1, N_2, N_3, K_1, K_2, K_3\}$.

Απόδειξη. Ειναι αρκετό να αποδείξουμε ότι για κάθε $L_0 \in \mathcal{M}_0(\mathcal{R}(T))$ έχουμε $M \not\subseteq L_0$. Υποθέτουμε, αντίθετα, ότι για παράδειγμα, $L_0 = M$. (Οι άλλες περιπτώσεις, όπως π.χ. όταν $L_0 = M \vee K_1$ ή $L_0 = K_1 \vee K_2$ κλπ αποδεικνύονται όμοια).

Για $0 \neq z \in W_M$, από τον ορισμό του T υπάρχουν, $z_L \in W_L(T)$ με $L \in \mathcal{M}_0(\mathcal{R}(Q)) \cap \mathcal{M}_1$ τέτοια ώστε

$$z = \sum_{L \in \mathcal{M}_0(\mathcal{R}(Q)) \cap \mathcal{M}_1} z_L .$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $\mathcal{M}_1 \subseteq \mathcal{M}_0(\mathcal{R}(Q))$.

Έχουμε $z_{K_1} = z - \sum_{L \in \mathcal{M}_1 - \{K_1\}} z_L \in K_1 \cap \{M \vee K_2 \vee K_3\} = N_1$.

Έτσι $z_{K_1} \in W_{K_1}(Q) \cap \{\mathcal{R}(Q) \cap L : L \subset K_1\}) = 0$ (βλ.Λήμμα 3.3 (2)).

Δηλαδή $z_{K_1} = 0$ και όμοια πέρνουμε $z_{K_2} = z_{K_3} = 0$.

Έτσι τελικά έχουμε $z = \sum_{L \in \{L_1, L_2, L_3, N_1, N_2, N_3\}} z_L$.

Αλλά αυτό έρχεται σε αντίθεση με το (2) του Λήμματος 3.3. Αυτή η αντίφαση, ολοκληρώνει την απόδειξη. ■

Στα επόμενα θα συμβολίζουμε για συντομία $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}_0(\mathcal{R}(T))$ και $W_L = W_L(T)$.

<u>Λήμμα 3.6.</u> *Έστω* N *είναι κάποιο από τα* N_1, N_2, N_3. *Τότε το σύνολο* $\{W_L : L \in \mathcal{M}_0 - \{N\}\}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο.*

Απόδειξη. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι N είναι ο N_3 και ότι $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}_1 = \{L_1, L_2, L_3, N_1, N_2, N_3, K_1, K_2, K_3\}$. Για $L \in \mathcal{M}_1 - \{N_3\}$ έστω $z_L \in W_L$ είναι τέτοια ώστε

$$\sum_{L \in \mathcal{M}_1 - \{N_3\}} z_L = 0.$$

Θα δείξουμε ότι $z_L = 0$ για κάθε $L \in \mathcal{M}_1 - \{N_3\}$. Αφού

$$z_{L_1} + z_{L_2} + z_{L_3} + z_{N_1} + z_{N_2} + z_{K_1} + z_{K_2} = -z_{K_3} \in (M \vee K_1 \vee K_2) \cap K_3 = N_3,$$

από το (2) του Λήμματος 3.3, πέρνουμε $z_{K_3}=0$. Χρησιμοποιώντας αυτό το αποτέλεσμα στην προηγούμενη ισότητα, πέρνουμε

$$z_{L_1} + z_{L_2} + z_{L_3} + z_{N_1} + z_{N_2} + z_{K_1} = -z_{K_2} \in (M \vee K_1) \cap K_2 = N_2$$

και συνεπώς $z_{K_2}=0$. Επίσης

$$z_{L_1} + z_{L_2} + z_{L_3} + z_{N_1} + z_{N_2} = -z_{K_1} \in M \cap K_1 = N_1$$

δηλαδή $z_{K_1}=0$. Επιπλέον, έχουμε

$$z_{L_1} + z_{L_2} + z_{N_1} = -z_{L_3} - z_{N_2} \in N_1 \cap N_2 = L_1,$$

έτσι $z_{N_2} \in (T(\mathcal{X}) \cap L_1) \vee (T(\mathcal{X}) \cap L_3)$ και άρα $z_{N_2}=0$. Όμοια πέρνουμε $z_{N_1}=0$.

Τελικά, $z_{L_1} + z_{L_2} = -z_{L_3} \in (L_1 \vee L_2) \cap L_3 = 0$ απ' όπου προκύπτει $z_{L_3}=0$ και ότι $z_{L_1} = -z_{L_2} \in L_1 \cap L_2 = 0$. Από την τελευταία ισότητα, απορρέουν οι $z_{L_1} = z_{L_2} = 0$. ■

Η πιο ενδιαφέρουσα περίπτωση είναι αυτή στην οποία συμβαίνει τα N_1, N_2, N_3 να ανήκουν (όλα) στο $\mathcal{M}_0$. (Πραγματικά, στην αντίθετη περίπτωση, χρησιμοποιώντας τα λήμματα 3.5 και 3.6, το Πόρισμα του Λήμματος 3.4 δίνει ότι ο T έχει την ΙΠΤ).
Ο σύνδεσμος όσον αφορά τα N_1, N_2, N_3, είναι συμμετρικός. Θα μελετήσουμε ειδικά ένα από αυτά, χωρίς βλάβη της γενικότητας, το N_3.

Το Λήμμα 3.3 παράγει λοιπόν και τον W_{N_3}. Θα χωρίσουμε αυτό το χώρο σε δύο υποχώρους του σχετικά με το αν είναι ή όχι γραμμικά εξαρτημένοι από το σύνολο των υποχώρων $\{ W_L : L\in \mathcal{M}_0-\{N_3\}\}$. Συγκεκριμένα ορίζουμε $W_{N_3,2}$ να είναι ένα συμπλήρωμα του

$$W_{N_3,1}= (\vee\{ W_L : L\in \mathcal{M}_0-\{N_3\}\})\cap W_{N_3}$$

στον W_{N_3}. Από εδώ και πέρα θα χρησιμοποιούμε μόνο τους $W_{N_3,1}$ και $W_{N_3,2}$, στους οποίους δίνουμε καινούρια ονόματα W_0 και (ένας νέος) W_{N_3} αντίστοιχα.

Με τους νέους συμβολισμούς, το σύνολο $\{W_L : L\in \mathcal{M}_0\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο και

$$W_0 \subseteq\vee \{ W_L : L\in \mathcal{M}_0-\{N_3\} \} \qquad (*)$$

(Φυσικά, τα W_0, W_{N_3} κληρονομούν τις ιδιότητες που προήλθαν από τα Λήμματα 3.3 και 3.4).

Με τρόπο όμοιο με το πρώτο μέρος της απόδειξης του Λήμματος 3.6, είναι εύκολο να δούμε ότι στην σχέση (*) μπορούμε να παραλήψουμε τα K_i.

Πράγματι, έστω $z \in W_0$. Υπάρχουν $z_L\in W_L$ $L\in \{L_1,L_2,L_3,N_1,N_2,K_1,K_2,K_3\}$ τέτοια ώστε $z = \sum_{L\in \{L_1,L_2,L_3,N_1,N_2,K_1,K_2,K_3\}} z_L$. Έχουμε

$$z_{K_3}= z- \sum_{L\in \{L_1,L_2,L_3,N_1,N_2,K_1,K_2\}} z_L \in K_3 \cap\{M\vee K_1\vee K_2\}=N_3$$

και έτσι $z_{K_3}\in W_{K_3}\cap(W\cap N_3)=0$ από το Λήμμα 3.3 (2). Ομοια $z_{K_1}=z_{K_2}=0$.

Δηλαδή, έχουμε

$$W_0 \subseteq\vee \{ W_L : L\in \mathcal{M}_0\cap\{L_1,L_2,L_3,N_1,N_2\} \}.$$

Επομένως, αν $\{x_j : j=1,...,k \}$ είναι μια βάση του W_0 (υποθέτουμε $W_0\neq 0$)και αν $L\in \mathcal{M}_0 \cap\{L_1 , L_2 , L_3 , N_1 , N_2\}$ και $j\in \{1,...,k\}$, υπάρχουν διανύσματα $x_{j,L} \in W_L$ τέτοια ώστε

$$x_j = \sum_{L\in \mathcal{M}_0 \cap\{L_1,L_2,L_3,N_1,N_2\}} x_{j,L} .$$

Αν $W_0=0$ πέρνουμε $x_{j,L}=0$ για κάθε L,j. Εφόσον, από το (1) του Λήμματος

3.3, $\mathcal{R}(T)=\vee\{W_L : L\in \mathcal{M}_0\}$, υπάρχουν (μοναδικοί) τελεστές πεπερασμένης τάξης

$T_L\in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ με $\mathcal{R}(T_L)=W_L$ και

$$T = \sum_{L\in \mathcal{M}_0} T_L .$$

Χρησιμοποιώντας αυτό το συμβολισμό έχουμε το επόμενο θεώρημα :

<u>**Θεώρημα 3.1.**</u> *Ο πεπερασμένης τάξης τελεστής* $Q=T+S=\sum_{L\in \mathcal{M}_0} T_L+S$

ανήκει στο $\mathrm{Alg}\mathcal{L}_3$ *αν και μόνο αν*

(1) T_L *έχει την* ΙΠΤ, *για* $L\in \mathcal{M}_0\cap\{L_2, L_3, N_3, K_1, K_2, K_3\}$

(2) *Αν* $N_1\in \mathcal{M}_0$, *τότε* $\mathcal{R}(T_{N_1}^*)\subseteq (N_{1-}\cap N_{3-})^\perp$

(3) *Αν* $N_2\in \mathcal{M}_0$, *τότε* $\mathcal{R}(T_{N_2}^*)\subseteq (N_{2-}\cap N_{3-})^\perp$

(4) *Υπάρχουν* $\lambda_j^*\in \mathcal{X}^*$ $j=1,\dots,k$ *τέτοια ώστε*

$$K_3\subseteq \mathrm{Ker}(T_L-\sum_{j=1}^{k} \lambda_j^*\otimes x_{j,L}) \quad \text{για } L\in\{L_1, N_1, N_2\}\cap\mathcal{M}_0.$$

(5) $S=0$.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε το θεώρημα μόνο στην περίπτωση $\mathcal{M}_0=\mathcal{M}_1$, $0\subset W_0\subset W_0\vee W_{N_3}$. Οι άλλες περιπτώσεις είναι όμοιες και τις παραλείπουμε.

Υποθέτουμε αρχικά ότι οι συνθήκες (1) μέχρι (5) ισχύουν και θα αποδείξουμε ότι $Q=T+S=T\in \mathrm{Alg}\mathcal{L}_3$. Για να το πετύχουμε αυτό είναι αρκετό να αποδείξουμε ότι ο T αφήνει αναλλοίωτους τους γεννήτορες του συνδέσμου, δηλαδή τους K_1, K_2, K_3.

Από το (1), καθένας από τους $T_{L_2}, T_{L_3}, T_{N_3}, T_{K_1}, T_{K_2}, T_{K_3}$ ανήκει στο $\mathrm{Alg}\mathcal{L}_3$, έτσι χρειάζεται να αποδείξουμε ότι ο τελεστής $T_0=T_{L_1}+T_{N_1}+T_{N_2}$ ικανοποιεί

$T(K_i) \subseteq K_i$ i=1,2,3. Έχουμε από το (3) ότι $K_1 \subseteq N_{2-} \cap N_{3-} \subseteq \mathrm{Ker}\, T_{N_2}$. Έτσι

$T_0(K_1) \subseteq T_{L_1}(K_1) + T_{N_1}(K_1) \subseteq L_1 \vee N_1 \subseteq K_1$.

Όμοια αποδεικνύουμε ότι $T_0(K_2) \subseteq K_2$.

Έστω, τέλος, $u \in K_3$ είναι αυθαίρετο διάνυσμα.

Έχουμε (από το (4))

$$T_0(u) = \sum_{L \in \{L_1, N_1, N_2\}} T_L(u) =$$

$$= \sum_{L \in \{L_1, N_1, N_2\}} \sum_{j=1}^{k} \lambda_j^*(u)\, x_{j,L}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \lambda_j^*(u)(\sum_{L \in \{L_1, N_1, N_2\}} x_{j,L}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \lambda_j^*(u)(x_j - \sum_{L \in \{L_2, L_3\}} x_{j,L}) \in N_3 \vee L_2 \vee L_3 = N_3 \subseteq K_3 ,$$

που συμπληρώνει την απόδειξη του "αν".

Για την άλλη κατεύθυνση, υποθέτουμε ότι $Q \in \mathrm{Alg}\mathcal{L}_3$. Θα αποδείξουμε ότι οι συνθήκες (1) μέχρι (5) ισχύουν.

Υποθέτουμε πρώτα ότι υπάρχει $L_0 \in \mathcal{M}_0(Q) - \mathcal{M}_1$. Τότε $L_{0-} = \mathcal{X}$. Έστω $x \in \mathcal{X}$.

Από το Λήμμα 3.4 έχουμε

$Qx \in Q(\cap\{L_- : L \in \mathcal{M}_0(Q) - \mathcal{M}_1\}) \subseteq \vee\{W_L : L \in \mathcal{M}_0(Q) \cap \mathcal{M}_1\} = \mathcal{R}(T)$.

Έτσι $Sx = Qx - Tx \in \mathcal{R}(S) \cap \mathcal{R}(T) = 0$, δηλαδή $S = 0$.

Αν $\mathcal{M}_0(Q) \subseteq \mathcal{M}_1$ τότε προφανώς $S = 0$. Ετσι τελικά $S = 0$ και $T + Q \in \mathrm{Alg}\mathcal{L}_3$.

Θα αποδείξουμε τώρα ότι οι συνθήκες (1) έως (4) ισχύουν.

Αφού $K_1 = K_{2\_} \cap K_{3\_} \cap N_{2\_} \cap N_{3\_} \cap L_{3\_}$, χρησιμοποιώντας το Λήμμα 3.4 έχουμε ότι

$T(K_1) \subseteq \vee \{ W_L : L \in \{L_1, L_2, N_1, K_1\}\}$.

Εφόσον $T = \sum_{L \in \mathcal{M}_1} T_L$, και αφού το σύνολο $\{W_L : L \in \mathcal{M}_1\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο,

συμπεραίνουμε ότι $K_1 \subseteq \operatorname{Ker} T_L$ για L οποιοδήποτε από τα L_3, N_2, N_3, K_2, K_3.

Ειδικά παίρνουμε $L_{3\_} \subseteq \operatorname{Ker} T_{L_3}$, έτσι (Λήμμα 1.4) ο T_{L_3} έχει την ΙΠΤ.

Δουλεύοντας όμοια για $K_2 = K_{1\_} \cap K_{3\_} \cap N_{1\_} \cap N_{3\_} \cap L_{2\_}$ βρίσκουμε ότι

$K_2 \subseteq \operatorname{Ker} T_L$ για L μέλος του $\{L_2, N_1, N_3, K_1, K_3\}$. Ειδικότερα $L_{2\_} \subseteq \operatorname{Ker} T_{L_2}$

δηλαδή ο T_{L_2} έχει την ΙΠΤ.

Τώρα, αφού $K_3 = K_{1\_} \cap K_{2\_} \cap N_{1\_} \cap N_{2\_} \cap L_{1\_}$, το Λήμμα 3.4 δείχνει ότι

$$\mathcal{R}(T \mid_{K_3}) \subseteq \vee \{ W_L : L \in \{L_2, L_3, N_3, K_3\}\} \vee W_0 =$$

$$= \vee \{ W_L : L \in \{L_2, L_3, N_3, K_3\}\} \vee < x_j : j=1,\dots,k>.$$

Υπάρχουν, επομένως, γραμμικά συναρτησοειδή $\lambda_j^* \in \mathcal{X}^*$ $(j=1,\dots,k)$ και ένας

τελεστής $T_1 \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ τέτοιοι ώστε $\mathcal{R}(T_1) \subseteq \vee \{ W_L : L \in \{L_2, L_3, N_3, K_3\}\}$ και

$$T \mid_{K_3} = T_1 \mid_{K_3} + \sum_{j=1}^{k} (\lambda_j^* \mid_{K_3}) \otimes x_j.$$

(Από το Λήμμα 3.6 το σύνολο

$\{W_L : L \in \{L_2, L_3, N_3, K_3\}\} \cup \{W_0\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο , και έτσι οι

$\lambda_j^* \mid_{K_3}$ και $T_1 \mid_{K_3}$ είναι μοναδικά ορισμένοι).

Επίσης, αφού $N_3 = K_{1\_} \cap K_{2\_} \cap K_{3\_} \cap N_{1\_} \cap N_{2\_} \cap N_{3\_} \cap L_{1\_} \subseteq K_3$,

έχουμε $T(N_3) \subseteq \vee \{ W_L : L \in \{L_2, L_3\}\}$ και από την προηγούμενη παρατήρηση

συμπεραίνουμε ότι $\lambda_j^* \in N_3^{\perp}$ $j=1,\dots,k$. Επίσης

$$T\,|_{K_3} = T_1\,|_{K_3} + \sum_{j=1}^{k} (\lambda_j^*\,|_{K_3}) \otimes \Big(\sum_{L\in\{L_1,L_2,L_3,N_1,N_2\}} x_{j,L} \Big) =$$

$$= T_1\,|_{K_3} + \sum_{L\in\{L_1,L_2,L_3,N_1,N_2\}} \sum_{j=1}^{k} (\lambda_j^*\,|_{K_3}) \otimes x_{j,L}\,.$$

Έτσι,

$$K_3 \subseteq \mathrm{Ker}(T_L - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j^* \otimes x_{j,L}) \ \text{αν}\ L \in \{L_1,N_1,N_2\} \qquad (**)$$

που είναι η (4) και $K_3 \subseteq \mathrm{Ker}T_L$ αν $L \in \{K_1,K_2\}$.

Τελικά, από όλες τις προηγούμενες σχέσεις συμπεραίνουμε επίσης,

$$N_{3\_} = K_1 \vee K_2 \subseteq \mathrm{Ker}\, T_{N_3},$$

$$K_{1\_} = K_2 \vee K_3 \subseteq \mathrm{Ker}\, T_{K_1},$$

$$K_{2\_} = K_1 \vee K_3 \subseteq \mathrm{Ker}\, T_{K_2},$$

$$K_{3\_} = K_1 \vee K_2 \subseteq \mathrm{Ker}\, T_{K_3}.$$

Συνδιάζοντας με προηγούμενα αποτελέσματα και το Λήμμα 1.4, έχουμε την (1).

Υπενθυμίζουμε ότι $\lambda_j^* \in (N_3)^{\perp}$ $j=1,\ldots,k$, έτσι, από την (**) έχουμε $N_3 \subseteq \mathrm{Ker}\, T_{N_1}$.

Επομένως $N_{1\_} \cap N_{3\_} = N_3 \vee K_2 \subseteq \mathrm{Ker}\, T_{N_1}$ που είναι ισοδύναμη με την (2).

Δουλεύοντας όμοια μπορούμε να αποδείξουμε την (3), και η απόδειξη του θεωρήματος είναι τώρα πλήρης. ■

Παράδειγμα. Προφανώς υπάρχουν τελεστές που ικανοποιούν το προηγούμενο θεώρημα (π.χ. όσοι είναι άθροισμα από τάξης ένα). Θα δώσουμε όμως τώρα ένα ειδικό παράδειγμα τέτοιου τελεστή, σε κάποια αναπαράσταση του συνδέσμου, που επίσης θα ικανοποιεί το Θεώρημα 3.1. Ο T του αντιπαραδείγματος 2.Γ είναι ειδική μορφή αυτού που θα δώσουμε εδώ. Παρακάτω, μετά το Θεώρημα 3.2, θα γίνει ολοφάνερο, γιατί μας ενδιαφέρουν τέτοιοι τελεστές.

Από τον ορισμό του συνδέσμου, είναι φανερό ότι οι L_2+L_3, L_1+L_3, L_2+L_3 είναι πυκνοί στους N_1, N_2, N_3 αντίστοιχα. Υποθέτουμε, επιπλέον ότι η αναπαράσταση του συνδέσμου είναι τέτοια ώστε να υπάρχουν (μη μηδενικά) διανύσματα

$x_1, x_2, y_1^*, y_2^* \in \mathcal{X}$ που να ικανοποιούν (όπου τώρα ο $\mathcal{X}$ είναι χώρος Hilbert)

$x_1 \in N_1 - (L_1+L_2)$, $x_2 \in N_2 - (L_1+L_3)$, $y_1^* \in N_{1-}^{\perp} \vee N_{3-}^{\perp}$, $y_2^* \in N_{2-}^{\perp} \vee N_{3-}^{\perp}$ και, επιπλέον,

$x_1 + x_2 \in N_3$, $y_3^* = y_1^* - y_2^* \in N_{1-}^{\perp} \vee N_{2-}^{\perp}$. Αναπαραστάσεις με την προηγούμενη ιδιότητα υπάρχουν, (π. χ. αυτή του αντιπαραδείγματος).

Επίσης ισχύει ότι $x_1 + x_2 \notin L_2+L_3$. Πράγματι, αν αντίθετα υπήρχαν $z_2 \in L_2$ και $z_3 \in L_3$ τέτοια ώστε $x_1 + x_2 = z_2 + z_3$ θα είχαμε ακόμη $x_1 - z_2 = - x_2 + z_3 \in N_1 \cap N_2 =$ $= L_1$ και ειδικά $x_1 \in L_1 + L_2$, άτοπο.

Ορίζουμε τώρα $T_0 = y_1^* \otimes x_1 + y_2^* \otimes x_2$ (ακριβώς όπως στο αντιπαράδειγμα). Είναι εύκολο να δούμε ότι για τον T_0 έχουμε $\mathcal{M}_0 = \{N_1, N_2, N_3\}$, $W_{N_1} = \langle x_1 \rangle$, $W_{N_2} = \langle x_2 \rangle$, $W_0 = \langle x_1 + x_2 \rangle$, $T_{N_1} = y_1^* \otimes x_1$, $T_{N_2} = y_2^* \otimes x_2$. Προφανώς, ο T_0 ικανοποιεί τις συνθήκες (2) και (3), (η (1) δεν έχει νόημα). Για την (4) πέρνουμε $\lambda^* = y_1^*$ και έχουμε $T_{N_1} - \lambda^* \otimes x_1 = 0$ και $T_{N_2} - \lambda^* \otimes x_2 = (y_2^* - \lambda^*) \otimes x_2 =$

$= (-y_3^*) \otimes x_2$. Αφού $y_3^* \in N_{1-}^{\perp} \vee N_{2-}^{\perp} = (N_{1-} \cap N_{2-})^{\perp} \subseteq K_3^{\perp}$, η συνθήκη (4) του Θεωρήματος 3.1 ισχύει και έτσι T_0 είναι στο $\mathrm{Alg}\mathcal{L}_3$. ■

Δ

Όπως έχουμε ήδη δεί (2.Γ), υπάρχουν τελεστές του ΠΤ($\mathrm{Alg}\mathcal{L}_3$) χωρίς την ΙΠΤ. Το επόμενο θεώρημα χαρακτηρίζει ακριβώς εκείνους που την έχουν. Θα διασπάσουμε την απόδειξη σε λήμματα. Ο συμβολισμός εξακολουθεί να παραμένει ο ίδιος.

Λήμμα 3.7. *Έστω* $S \in \mathrm{Alg}\mathcal{L}_3$ *είναι ένας πεπερασμένης τάξης τελεστής. Αν* $\mathcal{R}(S) \subseteq L_1 + L_2 + L_3$, *τότε ο* S *έχει την* ΙΠΤ.

Απόδειξη. Έστω $\{z_i : i=1,...,n\}$ είναι μια βάση του $\mathcal{R}(S)$. Τότε υπάρχει

$\{y_i^* : i=1,\ldots,n\} \subseteq \mathcal{X}^*$ τέτοιο ώστε $S = \sum_{j=1}^{n} y_i^* \otimes z_i$. Αφού για κάθε i,

$z_i \in \mathcal{R}(S) \subseteq L_1 + L_2 + L_3$, υπάρχουν $z_{i,j} \in \mathcal{X}$ (j=1,2,3) τέτοια ώστε $z_i = z_{i,1} + z_{i,2} + z_{i,3}$

και $z_{i,j} \subseteq L_j$ (j=1,2,3). Ορίζουμε για j=1,2,3 $S_j = \sum_{i=1}^{n} y_i^* \otimes z_{i,j}$ και έχουμε

$S = S_1 + S_2 + S_3$ με $\mathcal{R}(S_j) \subseteq L_j$.

Αν $i_0 \in \{1,2,3\}$ και $z \in L_{i_0-}$ τότε $Sz = S_1z + S_2z + S_3z \in L_{i_0-}$. Αφού για $i \neq i_0$ έχουμε $L_i \subseteq L_{i_0-}$, ακολουθεί ότι $S_{i_0}(z) \in L_{i_0-}$. Έτσι $S_{i_0}(z) \in L_{i_0-} \cap L_{i_0} = 0$ και συνεπώς $L_{i_0-} \subseteq \mathrm{Ker} S_{i_0}$. Επομένως, από το Λήμμα 1.4, ο S_{i_0} έχει την ΙΙΤ για $i_0 = 1,2,3$ και η απόδειξη είναι πλήρης. ■

<u>**Λήμμα 3.8.**</u> *Έστω $Q \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ είναι ένας τελεστής πεπερασμένης τάξης και τέτοιος ώστε για ένα σταθερό $i_0 \in \{1,2,3\}$ έχουμε $K_{i_0-} \subseteq \mathrm{Ker}\, Q$ (ισοδύναμα $\mathcal{R}(Q^*) \subseteq (K_{i_0-})^{\perp}$). Τότε $\mathcal{R}(Q) = Q(K_{i_0})$.*

Απόδειξη. Έστω $z \in \mathcal{X}$. Αφού $K_{i_0} \vee K_{i_0-} = \mathcal{X}$, υπάρχουν ακολουθίες $\{r_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq K_{i_0}$ και $\{t_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq K_{i_0-}$ τέτοιες ώστε $r_n + t_n \to z$. Τότε $Qr_n + Qt_n \to Qz$. Αλλά $K_{i_0-} \subseteq \ker Q$, έτσι $Qt_n = 0$ και $Qr_n \to Qz$. Επομένως $Qz \in \overline{Q(K_{i_0})}$. Αφού ο $Q(K_{i_0})$ είναι πεπερασμένης διάστασης, είναι κλειστός και έτσι πέρνουμε ότι $Qz \in Q(K_{i_0})$ απ' όπου, $\mathcal{R}(Q) \subseteq Q(K_{i_0})$. Η άλλη κατεύθυνση είναι τετριμμένη. ■

Έστω T είναι ένας τελεστής πεπερασμένης τάξης του $\mathrm{Alg}\mathcal{L}_3$ και $\mathcal{M}_0$ όπως στο Λήμμα 3.3. Υποθέτουμε, επίσης, ότι $N_1, N_2 \in \mathcal{M}_0$. Ορίζουμε $W_{N_1,+} = W_{N_1} \cap (L_1 + L_2)$ και $W_{N_1,\vee}$ να είναι ένας συμπληρωματικός υπόχωρος του $W_{N_1,+}$ στον W_{N_1}.
Όμοια, ορίζουμε $W_{N_2,+} = W_{N_2} \cap (L_1 + L_3)$ και $W_{N_2,\vee}$ να είναι ένας συμπληρωματικός υπόχωρος του $W_{N_2,+}$ στον W_{N_2}. Αφού για $i \in \{1,2\}$ έχουμε $\mathcal{R}(T_{N_i}) = W_{N_i} =$

$= W_{N_i,+} + W_{N_i,\vee}$, υπάρχουν από το Λήμμα 3.1, τελεστές πεπερασμένης τάξης $T_{N_i,+}$, $T_{N_i,\vee}$ τέτοιοι ώστε $T_{N_i} = T_{N_i,+} + T_{N_i,\vee}$, $\mathcal{R}(T_{N_i,+}) \subseteq W_{N_i,+}$ και $\mathcal{R}(T_{N_i,\vee}) \subseteq W_{N_i,\vee}$.

Μπορούμε τώρα να διατυπώσουμε το δεύτερο κύριο αποτέλεσμα αυτού του κεφαλαίου :

<u>**Θεώρημα 3.2.**</u> *Ένας τελεστής* $T \in \Pi T(\mathrm{Alg}\mathcal{L}_3)$ *έχει την ΙΙΠΤ αν και μόνο αν*

(1) *Αν* $N_1 \in \mathcal{M}_0$, *τότε* $\mathcal{R}(T^*_{N_1,\vee}) \subseteq (N_{1\_})^{\perp} + (N_{3\_})^{\perp}$,

(2) *Αν* $N_2 \in \mathcal{M}_0$, *τότε* $\mathcal{R}(T^*_{N_2,\vee}) \subseteq (N_{2\_})^{\perp} + (N_{3\_})^{\perp}$.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε το θεώρημα στην περίπτωση $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}_1$. Οι άλλες περιπτώσεις είναι όμοιες και απλούστερες και θα τις παραλήψουμε.

Υποθέτουμε πρώτα ότι $T \in \Pi T(\mathrm{Alg}\mathcal{L}_3)$ έχει την ΙΙΠΤ και θα δείξουμε τις συνθήκες (1) και (2). Αφού $T \in \mathrm{Alg}\mathcal{L}_3$, από το (1) του Θεωρήματος 3.1 συμπεραίνουμε ότι ο τελεστής $T_{L_1} + T_{N_1} + T_{N_2}$ έχει την ΙΙΠΤ, δηλαδή μπορεί να γραφεί σαν πεπερασμένο άθροισμα από τελεστές τάξης ένα καθένας από τους οποίους ανήκει στο $\mathrm{Alg}\mathcal{L}_3$. Από το Λήμμα 1.3 για έναν τέτοιο, τάξης ένα, R υπάρχει $L \in \mathcal{L}$ τέτοιο ώστε $\mathcal{R}(R) \subseteq L$ και $\mathcal{R}(R^*) \subseteq (L\_)^{\perp}$. Ορίζουμε F_L να είναι το άθροισμα εκείνων των R οι οποίοι έχουν το ίδιο L (δηλαδή το ίδιο "N" του Λήμματος 1.3). Είναι φανερό ότι $\mathcal{R}(F_L) \subseteq L$, $\mathcal{R}(F^*_L) \subseteq (L\_)^{\perp}$ και

$$T_{L_1} + T_{N_1} + T_{N_2} = \sum_{L \in \mathcal{M}_1} F_L .$$

Για κάθε $z \in X$ έχουμε

$$F_{K_3}(z) = (T_{L_1} + T_{N_1} + T_{N_2} - \sum_{L \in \mathcal{M}_1 - \{K_3\}} F_L)(z) \in K_3 \cap (M \vee K_1 \vee K_2) = K_3 \cap K_{3\_} = N_3.$$

Δηλαδή, $\mathcal{R}(F_{K_3}) \subseteq N_3$. Επίσης, αφού $K_{3-} = N_{3-}$, μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας, να υποθέσουμε ότι

$$T_{L_1} + T_{N_1} + T_{N_2} = \sum_{L \in \{L_i, N_i : i=1,2,3\}} F_L.$$

Έστω $z \in K_{2\_} \cap K_{3\_} = K_{2\_} \cap K_{3\_} \cap N_{2\_} \cap N_{3\_}$. Έχουμε, χρησιμοποιώντας το Λήμμα 3.4, ότι

$$Tz \in \vee\{ W_L : L \in \{L_1, L_2, L_3, N_1, K_1\}\}$$

και επομένως $T_{N_2}(z) = 0$. Συνεπώς η ισότητα

$$(T_{L_1} + T_{N_1} + T_{N_2})(z) = (F_{L_1} + F_{L_2} + F_{L_3} + F_{N_1} + F_{N_2} + F_{N_3})(z)$$

δίνει διαδοχικά

$$T_{L_1}(z) + T_{N_1}(z) = (F_{L_1} + F_{L_2} + F_{L_3} + F_{N_1})(z),$$

$$F_{L_3}(z) \in N_1 \cap L_3 = 0, \text{ έτσι}$$

$$F_{N_1}(z) = T_{N_1}(z) + T_{L_1}(z) - F_{L_1}(z) - F_{L_2}(z).$$

Αφού $\mathcal{R}(F_{N_1}^*) \subseteq N_{1-}^{\perp} = K_{1-}^{\perp}$ από το Λήμμα 3.8 συμπεραίνουμε ότι $\mathcal{R}(F_{N_1}) = F_{N_1}(K_1)$.

Επίσης, αφού $K_1 \subseteq K_{2-} \cap K_{3-}$ έχουμε

$$
\begin{aligned}
F_{N_1}(K_1) &\subseteq T_{N_1}(K_1) + T_{L_1}(K_1) + F_{L_1}(K_1) + F_{L_2}(K_1) \subseteq \\
&\subseteq T_{N_1}(K_1) + L_1 + L_2 \subseteq \\
&\subseteq \mathcal{R}(T_{N_1}) + L_1 + L_2, \text{ και έτσι}
\end{aligned}
$$

$$\mathcal{R}(F_{N_1}) \subseteq W_{N_1} + L_1 + L_2.$$

Έτσι (βλ. Λήμμα 3.1), υπάρχουν τρείς τελεστές πεπερασμένης τάξης οι οποίοι έχουν άθροισμα F_{N_1}, οι εικόνες τους περιέχονται στούς W_{N_1}, L_1 και L_2 αντίστοιχα, και οι εικόνες των συζυγών τους είναι στον $\mathcal{R}(F_{N_1}^*) \subseteq N_{1-}^{\perp}$. Αλλά και για $i \in \{1,2\}$ έχουμε $N_{1-}^{\perp} \subseteq L_{i-}^{\perp}$. Έτσι από το Λήμμα 1.3 είναι φανερό ότι μπορούμε να ξαναγράψουμε τον τελεστή $\sum_{L\in\{L_i,N_i:i=1,2,3\}} F_L$ με τέτοιο τρόπο ώστε $\mathcal{R}(F_{N_1}) \subseteq W_{N_1}$ (και οι άλλες υποθέσεις για τους F_L εξακολουθούν να ικανοποιούνται).

Όμοια, (ξεκινώντας από ένα $z \in K_{1\_} \cap K_{3\_}$) μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\mathcal{R}(F_{N_2}) \subseteq W_{N_2}$.

Αφού $F_{N_3} = T_{L_1} + T_{N_1} + T_{N_2} - F_{L_1} - F_{L_2} - F_{L_3} - F_{N_1} - F_{N_2}$, έχουμε

$$\mathcal{R}(F_{N_3}) \subseteq W_{N_1} + W_{N_2} + L_1 + L_2 + L_3 .$$

Επομένως, για $L \in \{L_1, L_2, L_3, N_1, N_2\}$, υπάρχουν $F_{N_3,L}$ τέτοιοι ώστε

$F_{N_3} = \sum_{L\in\{L_1,L_2,L_3,N_1,N_2\}} F_{N_3,L}$, $\mathcal{R}(F_{N_3,N_i}) \subseteq W_{N_i}$, $\mathcal{R}(F^*_{N_3,L_i}) \subseteq L_i$ i=1,2,3

και $\mathcal{R}(F^*_{N_3,N_i}) \subseteq \mathcal{R}(F^*_{N_3}) \subseteq N_{3-}^{\perp}$ i=1,2 . Συνεπώς, για κάθε $z \in \mathcal{X}$,

$$(F_{N_3,N_1} + F_{N_3,L_1} + F_{N_3,L_2} - T_{L_1} - T_{N_1} + F_{L_1} + F_{L_2} + F_{N_1})(z) =$$

$$= (-F_{N_3,N_2} - F_{N_3,L_3} + T_{N_2} - F_{L_3} - F_{N_2})(z) \in N_1 \cap N_2 = L_1.$$

Άρα $\mathcal{R}(F_{N_3,N_1} - T_{N_1} + F_{N_1}) \subseteq L_1 + L_2$. Επίσης $\mathcal{R}(F_{N_3,N_1}) \subseteq W_{N_1} = W_{N_1,+} + W_{N_1,\vee}$, έτσι υπάρχουν (Λήμμα 3.1) $F_{N_3,N_1,+}$ και $F_{N_3,N_1,\vee}$ τέτοιοι ώστε $F_{N_3,N_1} = F_{N_3,N_1,+} + F_{N_3,N_1,\vee}$, $\mathcal{R}(F_{N_3,N_1,+}) \subseteq W_{N_1,+}$, $\mathcal{R}(F_{N_3,N_1,\vee}) \subseteq W_{N_1,\vee}$ και $\mathcal{R}(F^*_{N_3,N_1,\vee}) \subseteq \mathcal{R}(F^*_{N_3,N_1}) \subseteq N_{3-}^{\perp}$.

Όμοια αποδεικνύουμε την ύπαρξη του $F_{N_1,+}$ (με $\mathcal{R}(F_{N_1,+}) \subseteq W_{N_1,+}$) και $F_{N_1,\vee}$ (με $\mathcal{R}(F_{N_1,\vee}) \subseteq W_{N_1,\vee}$) οι οποίοι ικανοποιούν

$F_{N_1} = F_{N_1,+} + F_{N_1,\vee}$ και $\mathcal{R}(F^*_{N_1,\vee}) \subseteq \mathcal{R}(F^*_{N_1}) \subseteq N_{1-}^{\perp}$. Έτσι

$$\mathcal{R}(F_{N_3,N_1,\vee} - T_{N_1,\vee} + F_{N_1,\vee}) \subseteq$$

$$\subseteq \mathcal{R}(F_{N_3,N_1} - T_{N_1} + F_{N_1}) + \mathcal{R}(F_{N_3,N_1,+} - T_{N_1,+} + F_{N_1,+}) \subseteq$$

$$\subseteq \{\{(L_1 + L_2) \cap W_{N_1}\} \vee W_{N_1,+}\} \cap W_{N_1,\vee} =$$

$$= W_{N_1,+} \cap W_{N_1,\vee} = 0.$$

Επομένως $T_{N_1,\vee}=F_{N_3,N_1,\vee}+F_{N_1,\vee}$, έτσι $T^*_{N_1,\vee}=F^*_{N_3,N_1,\vee}+F^*_{N_1,\vee}$ και άρα

$\mathcal{R}(T^*_{N_1,\vee}) \subseteq \mathcal{R}(F^*_{N_3,N_1,\vee}) + \mathcal{R}(F^*_{N_1,\vee}) \subseteq N_{3-}^{\perp} + N_{1-}^{\perp}$, που είναι η σχέση (1).

Με όμοιο, με την απόδειξη της (1) τρόπο, πέρνουμε την (2), και η απόδειξη του "μόνο αν" του θεωρήματος, είναι πλήρης.

Υποθέτουμε τώρα ότι οι (1) και (2) ισχύουν. Θα αποδείξουμε ότι ο T έχει την ΙΙΤ. Αφού $T \in$ ΠΤ($\mathrm{Alg}\mathcal{L}_3$), είναι αρκετό (Θεώρημα 3.1), να αποδείξουμε ότι ο $T_{N_1}+T_{N_2}+T_{L_1}$ έχει την ΙΙΤ. Χρησιμοποιώντας τις υποθέσεις, μπορούμε να βρούμε πεπερασμένης τάξης τελεστές $S_{N_1,1}$, $S_{N_1,3}$, $S_{N_2,2}$, $S_{N_2,3}$ τέτοιους ώστε $T_{N_1,\vee} = S_{N_1,1} + S_{N_1,3}$, $\mathcal{R}(S^*_{N_1,i}) \subseteq N_{i-}^{\perp}$, $\mathcal{R}(S_{N_1,i}) \subseteq \mathcal{R}(T_{N_1,\vee})$ i=1,3 και $T_{N_2,\vee} = S_{N_2,2} + S_{N_2,3}$, $\mathcal{R}(S^*_{N_2,i}) \subseteq N_{i-}^{\perp}$, $\mathcal{R}(S_{N_2,i}) \subseteq \mathcal{R}(T_{N_2,\vee})$ i=2,3. Επομένως

$$
\begin{aligned}
T_{N_1}+T_{N_2}+T_{L_1} &= \\
&= T_{N_1,+} + T_{N_1,\vee} + T_{N_2,+} + T_{N_2,\vee} + T_{L_1} = \\
&= T_{N_1,+} + S_{N_1,1} + S_{N_1,3} + T_{N_2,+} + S_{N_2,2} + S_{N_2,3} + T_{L_1} = \\
&= S_{N_1,1} + S_{N_1,3} + S_{N_2,2} + S_{N_2,3} + S,
\end{aligned}
$$

όπου S είναι ο προφανής τελεστής και η εικόνα του είναι στον $L_1 + L_2 + L_3$. Εφόσον από το Λήμμα 1.4, οι $S_{N_1,1}$ και $S_{N_2,2}$ έχουν την ΙΙΤ είναι αρκετό να αποδείξουμε ότι ο τελεστής $S_{N_1,3} + S_{N_2,3} + S$ ο οποίος είναι στο $\mathrm{Alg}\mathcal{L}_3$, επίσης έχει την ΙΙΤ.

Έστω $z \in K_3$. Τότε $S_{N_1,3}(z) + S_{N_2,3}(z) + S(z) \in K_3 \cap M \subseteq N_3$. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 3.8, πέρνουμε $\mathcal{R}(S_{N_1,3} + S_{N_2,3}) \subseteq L_1 + N_3$. Από αυτό και το Λήμμα 3.1, είναι προφανές ότι ο $S_{N_1,3} + S_{N_2,3}$ μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα από δύο τελεστές πεπερασμένης τάξης, των οποίων οι εικόνες είναι στους L_1 και N_3 αντίστοιχα, και τέτοιοι ώστε ο δεύτερος να έχει την ΙΙΤ (από τα Λήμματα 3.1 και 1.4). Αλλά τότε είναι αρκετό να αποδείξουμε ότι ένας κατάλληλος τελεστής , ο οποίος έχει εικόνα στον $L_1 + L_2 + L_3$ έχει την ΙΙΤ. Η τελευταία απαίτηση είναι αλήθεια από το Λήμμα 3.7 και έτσι η απόδειξη του θεωρήματος είναι πλήρης. ■

Παρατήρηση 1. Έστω T_0 είναι ο τελεστής του παραδείγματος , ακριβώς μετά το Θεώρημα 3.1. Εφόσον $\mathcal{R}(T^*_{N_i}) = \langle y^*_i \rangle$ (i=1,2) είναι φανερό πότε ο T_0 έχει και πότε όχι την ΙΠΤ. Το αντιπαράδειγμα είναι ακριβώς τέτοιο ώστε να μην έχει την ΙΠΤ. (Εκεί βέβαια δώσαμε μια απόδειξη που δεν χρησιμοποιεί το Θεώρημα 3.2). ■

Παρατήρηση 2. Βασιζόμενοι στην απόδειξη του θεωρήματος, μπορούμε επίσης να δείξουμε ότι αν κάποιος $T \in \mathrm{Alg}\mathcal{L}_3$ έχει την ΙΠΤ τότε αυτός μπορεί να γραφεί σαν ένα άθροισμα τελεστών τάξης ένα από το $\mathrm{Alg}\mathcal{L}_3$ των οποίων το πλήθος είναι το πολύ 3(rankT). Σημειώνουμε ότι rankT σαν άθροισμα προσθετέων δεν είναι πάντα δυνατό. Πράγματι, στο [18] οι Hopenwasser-Moore έχουν κατασκευάσει μια ειδική αναπαράσταση $\mathcal{L}_3'$ του $\mathcal{L}_3$ και έναν τελεστή τάξης δύο του $\mathrm{Alg}\mathcal{L}_3'$ που γράφεται σαν άθροισμα από τρεις τελεστές του $T1(\mathrm{Alg}\mathcal{L}_3')$, αλλά όχι από δύο. Παρακάτω (μέρος Η), θα επανέλθουμε σ' αυτό το θέμα (για τάξης δύο τελεστές). ■

Ε

Σε ένα ανακλαστικό χώρο Banach έχουμε τον επόμενο χαρακτηρισμό εκείνων των αναπαραστάσεων του $\mathcal{L}_3$, που δεν έχουν την ΙΠΤ.

<u>Θεώρημα 3.3.</u> *Έστω $\mathcal{L}_3'$ είναι μια αναπαράσταση του $\mathcal{L}_3$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα :*

(i) *Η $\mathcal{L}_3'$ δεν έχει την* ΙΠΤ.

(ii) $(N_1 + N_2) \cap \{N_3 - (L_2 + L_3)\} \neq \emptyset$ *και*

$$\{ (N_{1-} \cap N_{3-})^{\perp} + (N_{2-} \cap N_{3-})^{\perp} \} \cap \{(N_{1-} \cap N_{2-})^{\perp} - ((N_{1-})^{\perp} + (N_{2-})^{\perp})\} \neq \emptyset .$$

(iii) *Υπάρχει ένας τελεστής τάξης δύο του* $\mathrm{Alg}\mathcal{L}_3'$ *χωρίς την* ΙΠΤ.

<u>Παρατήρηση.</u> Η δεύτερη συνθήκη στο (ii) είναι απλά η αντίστοιχη της πρώτης,

αλλά για το σύνδεσμο $\{L^{\perp} : L\in \mathcal{L}_3'\}$.

Απόδειξη. (i)$\rightarrow$ (ii). Έστω $T\in \Pi T(\mathrm{Alg}\mathcal{L}_3')$ δεν ικανοποιεί την ΙΠΤ και $(N_1+N_2)\cap\{N_3-(L_2+L_3)\}=\varnothing$. Θα χρησιμοποιήσουμε τον συνήθη συμβολισμό για τα $\mathcal{M}_0$, W_0, x_j, T_L κλπ, που αναφέρονται στον T. Αφού κάθε x_j (είναι $W_0\neq 0$) μπορεί να γραφεί στην μορφή.

$$x_j=\sum_{L\in \mathcal{M}_0\cap\{L_1,L_2,L_3,N_1,N_2\}} x_{j,L}$$

ακολουθεί ότι $x_j\in(N_1+N_2)\cap N_3$. Έτσι από τις υποθέσεις έχουμε ότι $x_j\in L_2+L_3$. Έστω $u\in K_3$. Έχουμε, χρησιμοποιώντας το πρώτο μέρος της απόδειξης του Θεωρήματος 3.1, ότι $(T_{L_1}+T_{N_1}+T_{N_2})u\in L_2+L_3$, έτσι υπάρχουν $t_2\in L_2$ και $t_3\in L_3$ τέτοια ώστε $T_{L_1}u+T_{N_1}u+T_{N_2}u=t_2+t_3$ και επίσης $T_{L_1}u+T_{N_1}u-t_2=$ $=-T_{N_2}u+t_3\in N_1\cap N_2=L_1$. Επομένως $T_{N_1}(K_3)\subseteq L_1+L_2$ και $T_{N_2}(K_3)\subseteq L_1+L_3$. Επιπλέον $T_{N_1,\vee}(K_3)\subseteq L_1+L_2$ και $T_{N_2,\vee}(K_3)\subseteq L_1+L_3$. Από τον ορισμό των $T_{N_1,\vee}, T_{N_2,\vee}$ πέρνουμε ότι $T_{N_1,\vee}(K_3)=T_{N_2,\vee}(K_3)=0$. Αφού (Θεώρημα 3.1) $T_{N_1,\vee}(N_{1-}\cap N_{3-})=0$ και $T_{N_2,\vee}(N_{2-}\cap N_{3-})=0$ έχουμε $T_{N_1,\vee}(N_{1-})=T_{N_1,\vee}((N_{1-}\cap N_{3-})\vee K_3)=0$ δηλαδή $T_{N_1,\vee}$ και όμοια ο $T_{N_2,\vee}$ έχουν την ΙΠΤ.

Από το Λήμμα 3.7 έχουμε τώρα ότι ο $T_{L_1}+T_{N_1}+T_{N_2}$ και επομένως ο T έχουν την ΙΠΤ, μια αντίφαση. Αυτό αποδεικνύει την πρώτη σχέση του (ii). Εφαρμόζοντας την συνθήκη που μόλις αποδείξαμε για τον σύνδεσμο $\{L^{\perp} : L\in \mathcal{L}_3'\}$ και τον τελεστή T^*, πέρνουμε την δεύτερη σχέση.

(ii)$\rightarrow$ (iii). Ας είναι T ο τάξης δύο τελεστής, που περιγράφεται στο παράδειγμα μετά το Θεώρημα 3.1 και με τις επιπλέον υποθέσεις $x_1+x_2\notin L_2+L_3$ και

$\overset{*}{y_3} \notin (N_{1-})^{\perp} + (N_{2-})^{\perp}$. Τότε έχουμε επίσης ότι $x_1 \notin L_1 + L_2$ και $x_2 \notin L_1 + L_3$. Πράγματι, αν για παράδειγμα $x_1 = t_1 + t_2$ με $t_1 \in L_1$ και $t_2 \in L_2$, τότε $t_1 + x_2 =$ $= (x_1 + x_2) - t_2 \in N_2 \cap N_3 = L_3$, δηλαδή $x_1 + x_2 \in L_2 + L_3$, μια αντίφαση. Όμοια για τα $\overset{*}{y_1}, \overset{*}{y_2}$ και έτσι, από το Θεώρημα 3.2, έχουμε ότι ο T δεν ικανοποιεί την ΙΠΤ.

(iii)$\rightarrow$(i). Προφανής. ■

Παρατήρηση. Είναι εύκολο να δούμε ότι οι σχέσεις (ii) μπορούν να αντικατασταθούν από άλλες κυκλικά παραγώμενες. ■

Z

Είναι εύκολο να δούμε ότι για οποιονδήποτε σύνδεσμο $\mathcal{L}$, αν $T \in$ ΠΤ(Alg$\mathcal{L}$) και $F \in$ ΣΤ1(Alg$\mathcal{L}$), τότε TF ανήκει στο ΣΤ1(Alg$\mathcal{L}$). Το απροσδόκητο ίσως είναι ότι για τον $\mathcal{L}_3$ το προηγούμενο αποτέλεσμα εξακολουθεί να ισχύει ακόμα και στην περίπτωση που κανείς από τους δύο τελεστές δεν έχει την ΙΠΤ (αλλά βέβαια ανήκουν στο ΠΤ(Alg$\mathcal{L}_3$)). Αυτό αποδεικνύεται στο επόμενο θεώρημα.

<u>**Θεώρημα 3.4.**</u> *Αν* T,R $\in$ ΠΤ(Alg$\mathcal{L}_3$) *τότε* TR $\in$ ΣΤ1(Alg$\mathcal{L}_3$).

Απόδειξη. Έστω T_L για $L \in \mathcal{M}_0$ είναι οι τελεστές που ορίστηκαν πριν το Θεώρημα 3.1, και R_L οι αντίστοιχοι τελεστές για τον R. Έχουμε $T = \sum_{L \in \mathcal{M}_1} T_L$, όπου, αν $L \in \mathcal{M}_1 - \mathcal{M}_0$ τότε έχουμε $T_L = 0$. Όμοια $R = \sum_{L \in \mathcal{M}_1} R_L$. Αφού, για $L \in \{L_2, L_3, N_3, K_1, K_2, K_3\}$, κάθε R_L έχει την ΙΠΤ, προφανώς το ίδιο είναι αλήθεια για τον TR_L. Έτσι για να συμπληρώσουμε την απόδειξη είναι αρκετό να αποδείξουμε ότι ο τελεστής

$$TR - TR_{L_2} - TR_{L_3} - TR_{N_3} - TR_{K_1} - TR_{K_2} - TR_{K_3} = TR_{N_1} + TR_{N_2} + TR_{L_1}$$

του $\mathrm{Alg}\mathcal{L}_3$, έχει την ΙΠΤ. Χρησιμοποιούμε τις συνθήκες (1), (2) και (3) του Θεωρήματος 3.1, και έτσι έχουμε

$$TR_{N_1} + TR_{N_2} + TR_{L_1} =$$

$$= (T_{L_1} + T_{L_2}) R_{N_1} + (T_{L_1} + T_{L_3}) R_{N_2} + T_{L_1} R_{L_1} =$$

$$= T_{L_1}(R_{N_1} + R_{N_2} + R_{L_1}) + T_{L_2} R_{N_1} + T_{L_3} R_{N_2} .$$

Το συμπέρασμα τώρα προκύπτει από το Λήμμα 3.7. ■

Παρατήρηση. Προφανώς αν $T \in \Pi T(\mathrm{Alg}\mathcal{L}_3)$ τότε $T^2 \in \Sigma T1(\mathrm{Alg}\mathcal{L}_3)$.

Ειδικότερα για τον T του 2.Γ είναι $T^2 = 0$. ■

Η

Οι Hopenwasser-Moore στο [18] έχουν κατασκευάσει μια αναπαράσταση του $\mathcal{L}_3$ και ένα τελεστή τάξης δύο του $\mathrm{Alg}\mathcal{L}_3$ που μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα από τρεις τελεστές του $T1(\mathrm{Alg}\mathcal{L}_3)$ αλλά όχι από δύο του ίδιου συνόλου. Στα επόμενα δύο θεωρήματα, που θα κλείσουν αυτό το κεφάλαιο, θα αποδείξουμε ότι η αναπαράσταση δεν είναι απαραίτητο να είναι συγκεκριμένη (Θεώρημα 3.5) και το τρία που αναφέραμε παραπάνω, είναι το μόνο δυνατό πλήθος με τις αντίστοιχες ιδιότητες (Θεώρημα 3.6).

Θεώρημα 3.5. *Σε κάθε αναπαράσταση του $\mathcal{L}_3$ υπάρχει τελεστής τάξης δύο του $\mathrm{Alg}\mathcal{L}_3$ που έχει την ΙΠΤ, αλλά δεν μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα από δύο ακριβώς τελεστές του $T1(\mathrm{Alg}\mathcal{L}_3)$.*

Απόδειξη. Έστω $0 \neq t_i \in L_i$ $i=1,2,3$. Τότε το σύνολο $\{t_i:\ i=1,2,3\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Έστω επίσης $0 \neq \alpha^* \in (N_{1-})^{\perp}$, $0 \neq \beta^* \in (N_{3-})^{\perp}$ και $0 \neq \gamma^* \in (N_{2-})^{\perp}$. Θα αποδείξουμε ότι ο τελεστής

$$T = (\alpha^* + \beta^*) \otimes (t_1 + t_2) + (\gamma^* + \beta^*) \otimes (-t_1 + t_3)$$

ικανοποιεί το συμπέρασμα του θεωρήματος. Κατ' αρχήν παρατηρούμε ότι ο T έχει τάξη ακριβώς δύο και ότι μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$T = (\alpha^* - \gamma^*) \otimes t_1 + (\alpha^* + \beta^*) \otimes t_2 + (\gamma^* + \beta^*) \otimes t_3 .$$

Εφόσον $\alpha^* - \gamma^* \in (N_{1-})^{\perp} \vee (N_{2-})^{\perp} \subseteq (L_{1-})^{\perp}$, συμπεραίνουμε ότι $(\alpha^* - \gamma^*) \otimes t_1 \in \mathrm{Alg}\mathcal{L}_3$. Όμοια αποδεικνύουμε ότι και οι άλλοι δύο προσθεταίοι του T ανήκουν στο $T1(\mathrm{Alg}\mathcal{L}_3)$.

Μένει να αποδείξουμε ότι ο T δεν μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα από ακριβώς δύο στοιχεία του $T1(\mathrm{Alg}\mathcal{L}_3)$. Υποθέτουμε αντίθετα ότι αυτό συμβαίνει. Έστω δηλαδή ότι $y_1^* \otimes x_1, y_2^* \otimes x_2 \in \mathrm{Alg}\mathcal{L}_3$ είναι τέτοιοι ώστε $T = y_1^* \otimes x_1 + y_2^* \otimes x_2$. Αφού ο T έχει τάξη δύο, το σύνολο $\{ y_1^*, y_2^*\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, και άρα $x_1, x_2 \in T(\mathcal{X})$, ειδικότερα $x_1, x_2 \in M$. Έστω $Q_1 \in \mathcal{L}_3$ είναι το μικρότερο δυνατό με την ιδιότητα $x_1 \in Q_1$ (Λήμμα 1.3), οπότε έχουμε και ότι $y_1^* \in (Q_{1-})^{\perp}$ και Q_2 το αντίστοιχο για τον $y_2^* \otimes x_2$. Προφανώς $\{Q_1,Q_2\} \subseteq \{L_i,N_i,K_i : i=1,2,3\}$ γιατί αλλοιώς θα είχαμε π.χ. $Q_{1-}=\mathcal{X}$ άτοπο. Αν επίσης για κάποιο i είχαμε $Q_1=K_i$, τότε $x_1 \in K_i \cap M=N_i$ που όμως δεν μπορεί να συμβαίνει αφού ο Q_1 είναι ο μικρότερος που περιέχει το x_1. Επίσης αν π.χ. $Q_1=L_1$, τότε θα υπήρχαν λ, μ τέτοια ώστε $x_1 = \lambda(t_1 + t_2) + \mu(-t_1 + t_3) \in L_1$ από όπου προκύπτει ότι $\lambda=\mu=0$ και έτσι $x_1=0$, άτοπο, που αποδεικνύει τον ισχυρισμό. Εύκολα επίσης βλέπουμε ότι $Q_1 \neq Q_2$.

Υποθέτουμε λοιπόν ότι (οι άλλες περιπτώσεις είναι όμοιες) $Q_1=N_1$ και $Q_2=N_3$. Τότε υπάρχουν λ και μ τέτοια ώστε $x_1 = \lambda(t_1 + t_2) + \mu(-t_1 + t_3) \in N_1$. Άρα $\mu=0$ και επομένως $x_1 = \lambda(t_1 + t_2)$. Όμοια $x_2 = \xi(t_2 + t_3)$ (ξ κατάλληλο). Άρα

$$T = y_1^* \otimes x_1 + y_2^* \otimes x_2 = (\lambda y_1^*) \otimes (t_1 + t_2) + (\xi y_2^*) \otimes (t_2 + t_3) .$$

Αλλά επίσης

$$T = (\alpha^* + \beta^*) \otimes (t_1 + t_2) + (\gamma^* + \beta^*) \otimes (-t_1 + t_3) =$$

$$= (\alpha^* - \gamma^*) \otimes (t_1 + t_2) + (\gamma^* + \beta^*) \otimes (t_2 + t_3),$$

και έτσι $\lambda y_1^* = \alpha^* - \gamma^*$ και $\xi y_2^* = \gamma^* + \beta^*$ απ' όπου έχουμε $\gamma^* = \alpha^* - \lambda y_1^* =$

$= \xi y_2^* - \beta^* \in (N_{1-})^\perp \cap (N_{3-})^\perp = 0$, δηλ. $\gamma^* = 0$, μια αντίφαση. ■

Το επόμενο θεώρημα ουσιαστικά δηλώνει ότι για οποιονδήποτε τάξης δύο τελεστή T του $\mathrm{Alg}\mathcal{L}_3$, ένα από τα τρία επόμενα συμβαίνει:

1) Μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα από δύο ακριβώς στοιχεία του $\mathrm{Alg}\mathcal{L}_3$,

2) Μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα από τρία στοιχεία του $\mathrm{Alg}\mathcal{L}_3$, αλλά όχι από δύο ή

3) Δεν έχει την ΙΠΤ.

<u>Θεώρημα 3.6</u>. *Έστω $T \in \Sigma T1(\mathrm{Alg}\mathcal{L}_3)$ είναι ένας τελεστής τάξης δύο, που δεν γράφεται σαν άθροισμα από δύο τελεστές του $T1(\mathrm{Alg}\mathcal{L}_3)$. Τότε ο T μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα από τρείς τελεστές του $T1(\mathrm{Alg}\mathcal{L}_3)$.*

Απόδειξη. Από το Λήμμα 3.6 και το Πόρισμα του Λήμματος 3.4, πέρνουμε αμέσως ότι $\mathcal{M}_0(T) \supseteq \{N_1, N_2, N_3\}$. Από αυτό, εύκολα επίσης δείχνουμε ότι $\dim W_{N_i} = 1$, $i=1,2,3$. Αν υπήρχε $L \in \mathcal{M}_0(T) - \{N_1, N_2, N_3\}$, από το Λήμμα 3.6, το σύνολο $\{W_{N_1}, W_{N_2}, W_L\}$ θα αποτελείτο από τρία τουλάχιστο γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathcal{R}(T)$, που όμως δεν μπορεί να συμβαίνει εφόσον έχει διάσταση δύο. Άρα, $\mathcal{M}_0(T) = \{N_1, N_2, N_3\}$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε τώρα ότι $W_{N_i} = \langle x_i \rangle$ $i=1,2,3$, όπου $x_3 = x_1 + x_2$. Επομένως ο T μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$T = y_1^* \otimes x_1 + y_2^* \otimes x_2$$

με κατάλληλα τα εμφανιζόμενα διανύσματα. Από το Θεώρημα 3.2 πέρνουμε ότι $x_1 \in L_1 + L_2$ (ισοδύναμα $x_2 \in L_1 + L_3$) ή $y_1^* \in (N_{1-})^\perp + (N_{3-})^\perp$ (και ταυτόχρονα $y_2^* \in (N_{2-})^\perp + (N_{3-})^\perp$). Εξετάζουμε την πρώτη περίπτωση, (η δεύτερη είναι όμοια και την παραλείπουμε), οπότε υπάρχουν $t_i \in L_i$ $i=1,2,3$ τέτοια ώστε $x_1 = t_1 + t_2$ και $x_2 = -t_1 + t_3$. (Το x_2 έχει αυτή τη μορφή γιατί $x_3 = x_1 + x_2 \in N_3$). Έτσι

$$T = (y_1^* - y_2^*) \otimes t_1 + y_1^* \otimes t_2 + y_2^* \otimes t_3 .$$

Το αποτέλεσμα προκύπτει τώρα από τα (2) και (3) του Θεωρήματος 3.1. ■

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Ο μικρότερος σύνδεσμος χωρίς την ΙΠΤ είναι ο $\mathcal{L}_3$

(Σ' όλο το κεφάλαιο 4, με $\mathcal{L}$ θα συμβολίζουμε έναν τυχαίο (εκτός αν δηλώνεται διαφορετικά), πεπερασμένο πλήρη επιμεριστικό σύνδεσμο υποχώρων ενός χώρου με νόρμα. Επίσης σε οποιοδήποτε σημείο αυτού του κεφαλαίου που θα λέμε ότι το διάγραμμα του $\mathcal{L}$ είναι αυτό του σχήματος 4.1 ή 4.2, θα συμπεριλαμβάνουμε την περίπτωση M=M').

Θα λέμε ότι μια αναπαράσταση $\mathcal{L}'$ του $\mathcal{L}$ έχει την ιδιότητα (*) αν και μόνο αν

$$(*)\quad \left\{\begin{array}{l}\text{κάθε πεπερασμένης τάξης } T\in \mathrm{Alg}\mathcal{L}' \text{ μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα}\\ \qquad\text{από rankT ακριβώς τελεστές τάξης ένα του } \mathrm{Alg}\mathcal{L}'.\end{array}\right.$$

Ένα ερώτημα που εμφανίζεται είναι πόσο μεγάλος πρέπει να είναι ένας $\mathcal{L}$ για να μην έχει την ΙΠΤ ή να μην έχει την (*). Έχουμε αποδείξει στα κεφάλαια 2 και 3, ότι ο $\mathcal{L}_3$ δεν έχει καμία απο αυτές τις δύο ιδιότητες. Στο προηγούμενο ερώτημα απαντά αυτό το κεφάλαιο. Συγκεκριμένα αποδεικνύουμε ότι ο $\mathcal{L}_3$ είναι ο μικρότερος σύνδεσμος (όσον αφορά το πλήθος των στοιχείων του), χωριστά για κάθε μια από τις ιδιότητες τού να μην έχει 1) την ΙΠΤ, και 2) την (*).

Η ακριβής διατύπωση του θεωρήματος είναι η ακόλουθη:

<u>Θεώρημα 4.1.</u> *Έστω $\mathcal{L}$ είναι ένας πεπερασμένος επιμεριστικός σύνδεσμος, με την ιδιότητα ότι υπάρχει αναπαράστασή του $\mathcal{L}'$ και $T\in \Pi T(\mathrm{Alg}\mathcal{L}')$ που δεν γράφεται σαν άθροισμα από rankT το πλήθος τάξης ένα τελεστές του $\mathrm{Alg}\mathcal{L}'$. (Δηλαδή, ή ο T δεν έχει την ΙΠΤ, ή αν την έχει, σε οποιαδήποτε γραφή του σαν άθροισμα στοιχείων του $T1(\mathrm{Alg}\mathcal{L}')$, το πλήθος των προσθεταίων είναι γνήσια μεγαλύτερο από rankT).*

Τότε ο $\mathcal{L}$

1) *περιέχει ένα υποσύνδεσμο όπως του σχήματος 4.1 ή 4.2 (ειδικότερα περιέχει μια Boolean με τρία άτομα), και*

2) *έχει τουλάχιστο 18 στοιχεία.*

Με 18 στοιχεία υπάρχει μόνο ένας τέτοιος σύνδεσμος : ο ελεύθερα παραγόμενος με τρεις γεννήτορες.

Επίσης, αν υποθέσουμε επιπλέον ότι ο T *έχει τάξη δύο, τότε ο* $\mathcal{L}$ *περιέχει υποσύνδεσμο της μορφής του σχήματος* 4.1 *όπου* $P_i = Q_i$, $i = 1,2,3$ *(βλ. σχ.* 4.1 *για την ονομασία).*

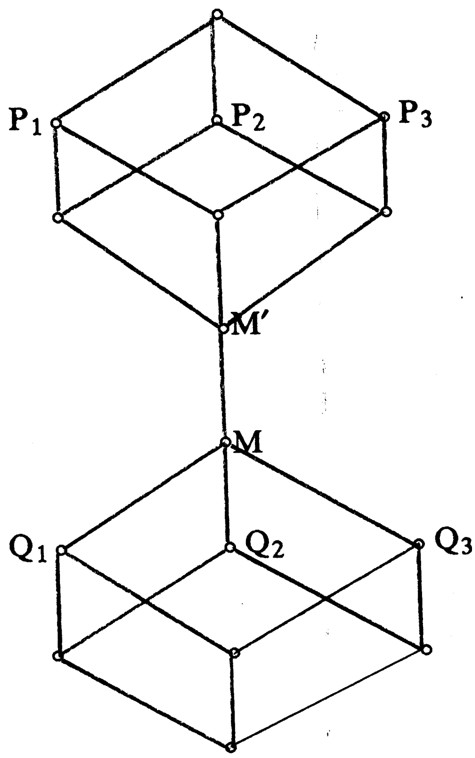
Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη του θεωρήματος θα δώσουμε ένα πόρισμά του. Σύνδεσμοι των μορφών που αναφέρονται στην υπόθεση του πορίσματος, έχουν μελετηθεί από τον Longstaff.

Πόρισμα. *Έστω* $\mathcal{L}$ *ικανοποιεί μία τουλάχιστο από τις επόμενες δύο συνθήκες :*

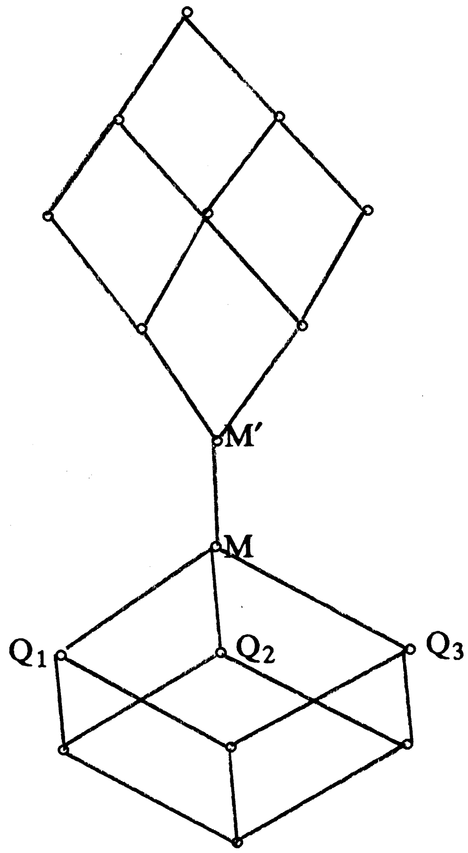
(i) *έχει το πολύ* 17 *στοιχεία, ή*

(ii) *δεν περιέχει Boolean με τρία άτομα.*

Τότε κάθε αναπαράσταση $\mathcal{L}'$ *του* $\mathcal{L}$ *έχει την* ΙΙΤ *και επιπλέον κάθε* $T \in \Pi T(\mathrm{Alg}\mathcal{L}')$ *μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα από* rankT *τελεστές του* $T1(\mathrm{Alg}\mathcal{L}')$. ■



σχήμα 4.1



σχήμα 4.2

Παρατηρούμε το ίσως περίεργο γεγονός ότι αν και κάθε αναπαράσταση του $\mathcal{L}_3$ δεν έχει την (*) (βλ. Θεώρημα 3.5), εντούτοις κάθε αναπαράσταση ενός $\mathcal{L}$ που ικανοποιεί την (i) ή την (ii), έχει την (*).

Θα χρειαστούμε καταρχήν το επόμενο λήμμα.

Λήμμα 4.1. *Αν* $\mathcal{L}$ *σύνδεσμος και* $\{L_i : i=1,\dots,k\}\subseteq\mathcal{L}$, *τότε*

$$\Big(\bigvee_{i=1}^{k} L_i\Big)_- = \bigvee_{i=1}^{k} L_{i-}.$$

Απόδειξη. Έχουμε

$$\Big(\bigvee_{i=1}^{k} L_i\Big)_- = \vee\{N\in\mathcal{L} : \Big(\bigvee_{i=1}^{k} L_i\Big) \not\subseteq N\} =$$

$$= \vee\{N\in\mathcal{L} : \exists\, i\in\{1,\dots,k\}\ \ L_i \not\subseteq N\} =$$

$$= \bigvee_{i=1}^{k}\{N\in\mathcal{L}:\ L_i \not\subseteq N\} = \bigvee_{i=1}^{k} L_{i-}. \ \blacksquare$$

Παρατήρηση. Η αντίστοιχη ιδιότητα με τομές είναι $(L_1\cap L_2)_- \subseteq L_{1-}\cap L_{2-}$, και δεν ισχύει πάντα σαν ισότητα. (βλ. π.χ. τα K_1 και K_2 του $\mathcal{L}_3$). $\blacksquare$

Απόδειξη του Θεωρήματος 4.1. Καταρχήν, χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι ο T έχει την μικρότερη τάξη, δηλ. ότι δεν υπάρχει στοιχείο του $\Pi T(\mathrm{Alg}\mathcal{L}')$ με τάξη γνήσια μικρότερη από rank$T$ και με την ίδια ιδιότητα. Το πρώτο αποτέλεσμα είναι ότι ο T δεν μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα από rank$T$ τελεστές τάξης ένα, εκ των οποίων ένας τουλάχιστο να είναι στο Alg$\mathcal{L}'$. Πράγματι, σε αντίθετη περίπτωση η διαφορά του T από τον αναφερόμενο τάξης ένα τελεστή, θα ήταν ένας τελεστής με τάξη γνήσια μικρότερη από αυτή του T και θα είχε την ίδια με αυτόν ιδιότητα, κάτι που δεν μπορεί να συμβαίνει. Σ' αυτή την περίπτωση θα λέμε συνοπτικά ότι ο T δεν έχει προσθεταίο τάξης ένα.

Εφαρμόζουμε το Λήμμα 3.3 στον $W=\mathcal{R}(T)$ και βρίσκουμε $m\in\mathbb{N}$,

$\mathcal{M}_0=\{M_i\ i=1,...,m\}\subseteq\mathcal{L}$ και $W_{M_i}\subseteq M_i\cap\mathcal{R}(T)$, που ικανοποιούν τα συμπεράσματα των Λημμάτων 3.3 και 3.4. Θα αποδείξουμε πρώτα ότι το πλήθος των ελαχιστικών (minimal) του συνόλου $\{L_-:L\in\mathcal{M}_0\}$ είναι τουλάχιστο δύο. Ας υποθέσουμε αντίθετα ότι είναι ένα και έστω π.χ. $M_{1-}\subseteq M_{i-}\ \forall\ i\in\{1,...,m\}$. Τότε υπάρχει μη μηδενικό $x\in W_{M_1}\subseteq M_1\cap\mathcal{R}(T)$ και βάση $\{x\}\cup\{y_j:j\in J\}$ (όπου J σύνολο δεικτών με πληθάριθμο rankT−1) του $\mathcal{R}(T)$, που το περιέχει. Επομένως υπάρχουν $x^*,\ y_j^*\in\mathcal{X}^*$ τέτοια ώστε

$$T=x^*\otimes x+\sum_{j\in J}y_j^*\otimes y_j.$$

Για $z\in M_{1-}=\cap\{M_{i-}:i=1,...,m\}$ έχουμε από το Λήμμα 3.4 ότι $Tz=x^*(z)\,x+\sum_{j\in J}y_j^*(z)\,y_j=$ $=0$ και άρα $x^*(z)=0$, που αποδεικνύει ότι ο $x^*\otimes x$ ανήκει στο Alg$\mathcal{L}'$ και επομένως είναι προσθεταίος του T, άτοπο.

Έστω λοιπόν $M_{1-},...,M_{k-}\ (k\geq2)$ τα ελαχιστικά του $\{L_-:L\in\mathcal{M}_0\}$. Είναι πιθανόν να υπάρχουν πολλά $L\in\mathcal{M}_0$ τέτοια ώστε $L_-=M_{1-}$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι το M_1 είναι ένα ελαχιστικό από αυτά. Όμοια για τα $M_2,...,M_k$. Ορίζουμε

$$\mathcal{M}_2=\{L\in\mathcal{M}_0:L_-\supseteq M_{1-}\},$$

$$\mathcal{M}_3=\mathcal{M}_0-\mathcal{M}_2=\{L\in\mathcal{M}_0:L_-\not\supseteq M_{1-}\}\neq\emptyset.$$

Έστω $0\neq x\in W_{M_1}\subseteq M_1\cap\mathcal{R}(T)$. Θα αποδείξουμε ότι το x ανήκει στο $\vee\{W_L:L\in\mathcal{M}_3\}$. Ας υποθέσουμε αντίθετα ότι αυτό δεν συμβαίνει. Πέρνουμε $\{y_j:j\in J\}$ βάση του $\vee\{W_L:L\in\mathcal{M}_3\}$. Προφανώς το σύνολο $\{x\}\cup\{y_j:j\in J\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, επομένως μπορούμε να το επεκτείνουμε σε μια βάση του $\mathcal{R}(T)$ π.χ. στην $\{x\}\cup\{y_j:j\in J\}\cup\{z_i:i\in I\}$. Έτσι ο T γράφεται στη μορφή :

$$T = x^* \otimes x + \sum_{j\in J} y_j^* \otimes y_j + \sum_{i\in I} z_i^* \otimes z_i.$$

Για $t \in M_{1-} = \cap\{M_{i-} : M_i \in \mathcal{M}_2\}$ έχουμε $Tt \in \vee\{W_L : L \in \mathcal{M}_3\} = \langle y_j : j\in J\rangle$. Άρα $x^*(t)=0$ δηλ. $x^* \otimes x \in \mathrm{Alg}\mathcal{L}'$, άτοπο, γιατί ο T δεν έχει προσθεταίο τάξης ένα.

Επομένως $x \in \vee\{W_L : L \in \mathcal{M}_3\}$ και έστω π.χ. ότι $x = y_1 + ... + y_n$ με $0 \neq y_i \in W_{L_i}$ όπου $L_i \in \mathcal{M}_3$ $i=1,...,n$. (Είναι πιθανόν ο x να γράφεται με πολλούς διαφορετικούς τρόπους που ίσως επιρρεάζουν το πλήθος των προσθεταίων. Εμείς κοιτάμε μια τυχαία γραφή).

Από εδώ και πέρα θα υποθέτουμε ότι τα L_i που εμφανίζονται στην ανάλυση του x, δεν συγκρίνονται μεταξύ τους ανά δύο. Πράγματι, αρκεί σε μια τυχαία γραφή του x, να κοιτάξουμε τα μεγιστικά του $\{L_i : i=1,...,n\}$ και να μαζέψουμε σε έναν, εκείνους τους προσθεταίους, των οποίων τα αντίστοιχα L_i περιέχονται στο ίδιο μεγιστικό. Οπότε τα νέα L_i δεν θα συγκρίνονται μεταξύ του ανά δυό, αφού θα είναι μεγιστικά κάποιου συνόλου και επίσης τα νέα y_i (που είναι άθροισμα από τα παλαιότερα), δεν ανήκουν σε γνήσια μικρότερο μέλος του συνδέσμου.

Επίσης το M_1 δεν συγκρίνεται με κανένα από τα L_i. Πράγματι, αν π.χ. $M_1 \subseteq L_1$ τότε $M_{1-} \subseteq L_{1-}$ και έτσι $L_1 \in \mathcal{M}_2$, άτοπο (γιατί $L_1 \in \mathcal{M}_3$), ενώ αν $M_1 \supset L_1$ τότε $M_{1-} \supseteq L_{1-}$. Σ' αυτή την περίπτωση
η αντίφαση προκύπτει από το ότι το M_{1-} είναι ελαχιστικό.

Έστω $x = y_1 + ... + y_n$ όπως είπαμε. Δεν είναι δυνατόν να υπάρχει μόνο ένας προσθεταίος για τον x. Πράγματι, αν π.χ. $x = y_1$ τότε $x \in M_1 \cap L_1 \subset M_1$ (γιατί αν $M_1 \cap L_1 = M_1$ τότε $M_1 \subseteq L_1$), άτοπο. Έτσι $n \geq 2$.

Στην περίπτωση n=2 θα αποδείξουμε πρώτα ότι τα M_1, L_1, L_2 είναι συμπληρώματα ατόμων Boolean. Αφού $x = y_1 + y_2$ έχουμε $x \in M_1 \cap (L_1 \vee L_2)$, έτσι $M_1 \cap (L_1 \vee L_2) = M_1$ δηλ. $M_1 \subseteq (L_1 \vee L_2)$ και επομένως $L_1 \vee L_2 = L_1 \vee L_2 \vee M_1$. Όμοια (ξεκινώντας από την $y_1 = x - y_2$ και την συμμετρική της) αποδεικνύουμε τελικά ότι $L_1 \vee L_2 = L_1 \vee M_1 = L_2 \vee M_1$ και άρα τα L_1, L_2, M_1 ειναι συμπληρώματα ατόμων Boolean (εφόσον επιπλέον δεν συγκρίνονται μεταξύ τους), βλ. Λήμμα 1.2.

Θα αποδείξουμε τώρα ότι και τα M_{1-}, L_{1-}, L_{2-} είναι συμπληρώματα ατόμων Boolean. Από το Λήμμα 4.1 είναι αρκετό (Λήμμα 1.2) να αποδείξουμε ότι δεν συγκρίνονται μεταξύ τους ανά δύο. Όμοια απόδειξη με το ότι τα M_1, L_1 δεν συγκρίνονται μεταξύ τους δίνει και ότι το M_{1-} δεν συγκρίνεται με κανένα από τα L_{1-}, L_{2-}. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι $L_{1-} \subseteq L_{2-}$ Είναι $M_{1-} \vee L_{2-} = (M_1 \vee L_2)_- = (L_1 \vee L_2)_- = L_{1-} \vee L_{2-} = L_{2-}$ δηλ. $M_{1-} \subseteq L_{2-}$ και επομένως $L_2 \in \mathcal{M}_2$, άτοπο.

Επομένως αν n=2 το $\mathcal{L}$ περιέχει ένα υποσύνδεσμο της μορφής του σχ. 4.1 (όπου επιπλέον $Q_{i-} = P_i$) γιατί επίσης $M_{1-} \supseteq L_1 \vee L_2 = L_1 \vee L_2 \vee M_1$ και κυκλικά, άρα $M_{1-} \cap L_{1-} \cap L_{2-} \supseteq L_1 \vee L_2 \vee M_1$.

Εξετάζουμε τώρα την (αρκετά πιο πολύπλοκη) περίπτωση $n \geq 3$. Θα αποδείξουμε ότι σ' αυτή τη περίπτωση ο $\mathcal{L}$ περιέχει τουλάχιστο 19 στοιχεία. Έχουμε $x \in M_1 \cap (L_1 \vee \ldots \vee L_n) = M_1$, επομένως $M_1 \subseteq L_1 \vee \ldots \vee L_n$ και έτσι $L_1 \vee \ldots \vee L_n =$ $= M_1 \vee L_1 \vee \ldots \vee L_n$. Όμοια αποδεικνύουμε ότι ο παραγόμενος χώρος από οποιαδήποτε n-άδα των $\{M_1, L_1, \ldots L_n\}$ είναι ο $M_1 \vee L_1 \vee \ldots \vee L_n$.

Στο σημείο αυτό θα διακόψουμε την κατευθείαν απόδειξη του θεωρήματος και θα αποδείξουμε μερικά λήμματα, από τα οποία θα προκύψει το τελικό αποτέλεσμα.

Θα δώσουμε πρώτα τον ορισμό δύο συμβολισμών. Με $\pi\lambda(\mathcal{L})$ θα συμβολίζουμε το πλήθος των στοιχείων του (πεπερασμένου) συνδέσμου $\mathcal{L}$, με $\pi\lambda\{A, B, \ldots\}$ το πλήθος των στοιχείων του συνόλου $\{A, B, \ldots\}$, ενώ με $\sigma\upsilon\nu\delta(N, K, \ldots)$ θα συμβολίζουμε τον επιμεριστικό σύνδεσμο που παράγεται απο τα N, K, ...

Λήμμα 4.2. *Για $k \geq 4$ έστω $L_1, \ldots, L_k$ στοιχεία του $\mathcal{L}$ που δεν συγκρίνονται μεταξύ τους ανά δύο και ικανοποιούν*

$$(\forall s \in \{1,\ldots,k\}) \quad \vee\{L_i : i \in \{1,\ldots,k\}-\{s\}\} = \vee\{L_i : i=1,\ldots,k\}$$

Τότε πλ(συνδ($L_1,...,L_k$))$\geq$12 *και ο* συνδ($L_1,...,L_k$) *περιέχει μια Boolean με τρία άτομα.*

Απόδειξη. Η απόδειξη θα αρχίσει εξετάζοντας διάφορες περιπτώσεις. Όπου στα παρακάτω θα εξετάζουμε την περίπτωση π.χ. 1.2, αυτό θα σημαίνει ότι εξακολουθουν να ισχύουν οι υποθέσεις της περίπτωσης 1. Επίσης σε κάθε περίπτωση που εξετάζουμε υποθέτουμε ότι υπάρχει πεπερασμένος επιμεριστικός σύνδεσμος που περιέχει σαν υποσύνδεσμο το συνδ($L_1,...,L_k$).
Ακόμα, στα εμφανιζόμενα διαγράμματα δεν θα είναι σχεδιασμένα απαραίτητα όλα τα στοιχεία του συνδ($L_1,...,L_k$).

Περίπτωση 1. Υποθέτουμε ότι μεταξύ των $L_1 \vee L_2, L_2 \vee L_3, L_1 \vee L_3$ υπάρχουν δύο που συγκρίνονται μεταξύ τους π.χ. $L_1 \vee L_2 \subseteq L_2 \vee L_3$. Τότε επίσης ισχύει $L_1 \vee L_3 \subseteq (L_1 \vee L_2) \vee L_3 \subseteq L_2 \vee L_3$ και $L_2 \vee L_3 = L_1 \vee L_2 \vee L_3$. Αν $L_1 \cap L_3 \subseteq L_2$ θα είχαμε

$$L_2 = L_2 \vee \{(L_3 \cap L_1) \vee (L_3 \cap L_2)\} =$$
$$= L_2 \vee \{L_3 \cap (L_1 \vee L_2)\} =$$
$$= (L_2 \vee L_3) \cap (L_2 \vee L_1 \vee L_2) =$$
$$= L_1 \vee L_2 \supseteq L_1, \text{ άτοπο.}$$

Όμοια αποδεικνύουμε $L_1 \cap L_2 \not\subseteq L_3$ (ξεκινώντας από το L_3).

Περίπτωση 1.1. Έστω ότι μεταξύ των $L_1 \cap L_2$, $L_1 \cap L_3$, $L_2 \cap L_3$ υπάρχουν δύο που συγκρίνονται. Αν $L_1 \cap L_2 \subseteq L_1 \cap L_3$ ή $L_1 \cap L_2 \subseteq L_2 \cap L_3$ θα ήταν επίσης $L_1 \cap L_2 \subseteq L_3$, άτοπο. Όμοια, αν $L_1 \cap L_3 \subseteq L_1 \cap L_2$ ή $L_1 \cap L_3 \subseteq L_2 \cap L_3$ θα ήταν $L_1 \cap L_3 \subseteq L_2$, άτοπο. Επομένως, ή $L_2 \cap L_3 \subseteq L_1 \cap L_3$ ή $L_2 \cap L_3 \subseteq L_1 \cap L_2$.
Αν $L_2 \cap L_3 \subseteq L_1 \cap L_3$ τότε $L_2 \cap L_3 \subseteq L_1 \cap L_3 \cap L_2 \subseteq L_1 \cap L_2$, ενώ αν $L_2 \cap L_3 \subseteq L_1 \cap L_2$ προκύπτει επίσης ότι $L_2 \cap L_3 \subseteq L_1 \cap L_2 \cap L_3 \subseteq L_1 \cap L_3$.

Άρα στην περίπτωση που εξετάζουμε ισχύουν ταυτόχρονα $L_2 \cap L_3 \subseteq L_1 \cap L_3$ και $L_2 \cap L_3 \subseteq L_1 \cap L_2$ (και επίσης $L_2 \cap L_3 = L_1 \cap L_2 \cap L_3$). Εξετάζουμε τώρα περιπτώσεις σχετικά με το αν ή όχι έχουμε ισότητες στις προηγούμενες εγκλείσεις.

Περίπτωση 1.1.1. $L_2 \cap L_3 = L_1 \cap L_3$ και $L_2 \cap L_3 \subseteq L_1 \cap L_2$.

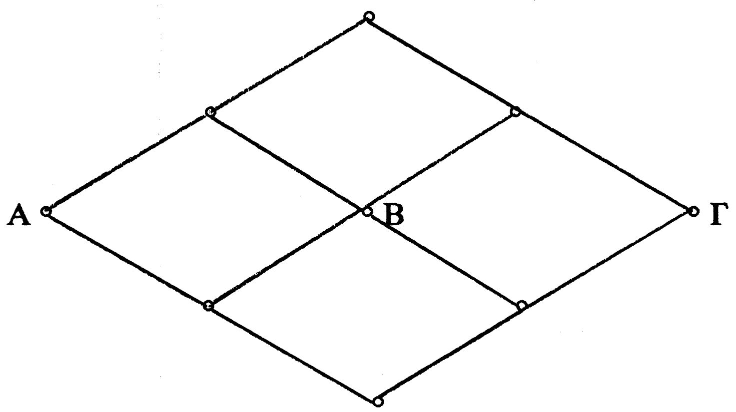
Έχουμε $L_2 \supseteq L_1 \cap L_2 = (L_1 \cap L_2) \vee (L_2 \cap L_3) = (L_1 \cap L_2) \vee (L_1 \cap L_3) =$
$= L_1 \cap (L_2 \vee L_3) = L_1$, άτοπο.

Περίπτωση 1.1.2. $L_2 \cap L_3 \subset L_1 \cap L_3$ και $L_2 \cap L_3 = L_1 \cap L_2$.

Όμοια με την περίπτωση 1.1.1 (ξεκινούμε από το L_3).

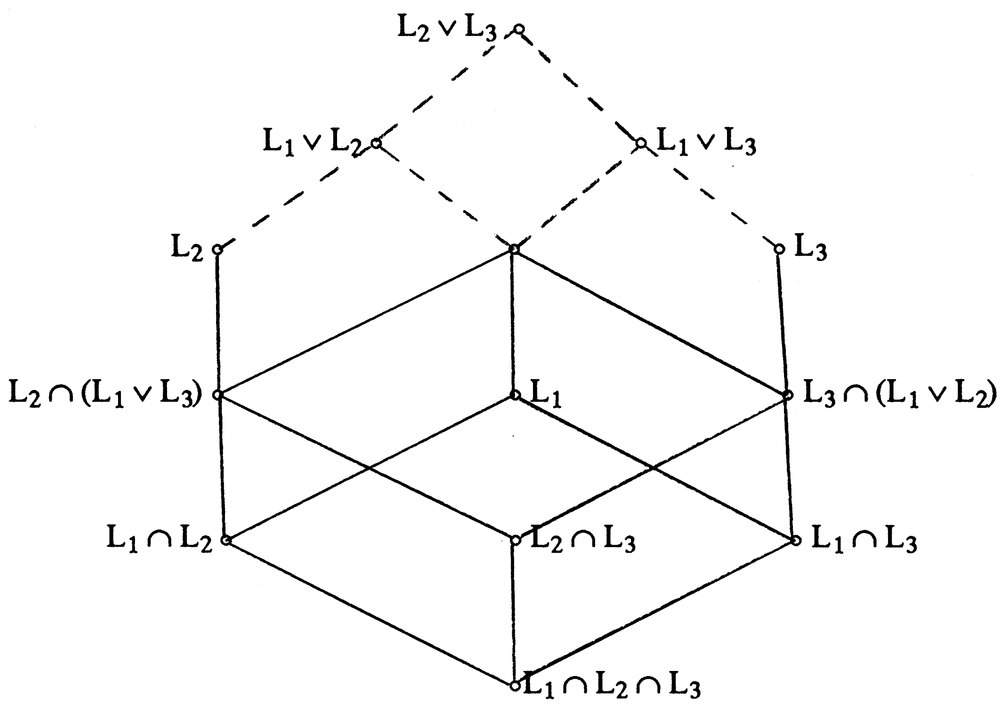
Περίπτωση 1.1.3. $L_2 \cap L_3 \subset L_1 \cap L_3$ και $L_2 \cap L_3 \subset L_1 \cap L_2$.

Αποδεικνύουμε πρώτα ότι τα $L_1 \cap L_3$ και $L_1 \cap L_2$ δεν συγκρίνονται μεταξύ τους. Πράγματι, αν π.χ. $L_1 \cap L_3 \subseteq L_1 \cap L_2$ θα είχαμε $L_1 \cap L_3 = L_1 \cap L_2 \cap L_3 \subseteq$ $\subseteq L_2 \cap L_3 \subset L_1 \cap L_3$, άτοπο. Επίσης σ' αυτή την περίπτωση τα $L_1 \vee L_2$ και $L_1 \vee L_3$ δεν συγκρίνονται μεταξύ τους, γιατί αν π.χ. $L_1 \vee L_2 \subseteq L_1 \vee L_3$ θα είχαμε $L_2 \subseteq L_1 \vee L_2 = (L_1 \vee L_2) \cap (L_1 \vee L_3) = L_1 \vee (L_2 \cap L_3) = L_1$, άτοπο. Επίσης τέλος $L_1 \vee L_2 \subset L_2 \vee L_3$ και $L_1 \vee L_3 \subset L_2 \vee L_3$, γιατί αν π.χ. $L_1 \vee L_2 = L_2 \vee L_3$ θα είχαμε $L_1 = L_1 \vee \{(L_1 \cap L_2) \vee (L_3 \cap L_2)\} = L_1 \vee \{(L_1 \vee L_3) \cap L_2\} =$
$= (L_1 \vee L_3) \cap (L_1 \vee L_2) = (L_1 \vee L_3) \cap (L_2 \vee L_3) = L_1 \vee L_3 \supseteq L_3$, άτοπο. Επομένως σ' αυτή την περίπτωση το διάγραμμα του συνδ(L_1, L_2, L_3) είναι το σχ. 4.3 (όπου $B = L_1$ και $\{A, \Gamma\} = \{L_2, L_3\}$).



σχήμα 4.3

Περίπτωση 1.2. $L_1 \vee L_2 \subseteq L_2 \vee L_3$, $L_1 \vee L_3 \subseteq L_2 \vee L_3$ και τα $L_1 \cap L_2$, $L_1 \cap L_3$, $L_2 \cap L_3$ δεν συγκρίνονται μεταξύ τους ανά δύο. Τότε τα $L_1 \cap L_2$, $L_1 \cap L_3$, $L_2 \cap L_3$ είναι άτομα Boolean (Λήμμα 1.1) και το διάγραμμα του συνδ(L_1, L_2, L_3) είναι στο σχ. 4.4. Έχουμε $L_2 \cap (L_1 \vee L_3) = L_2$ αν και μόνο αν



σχήμα 4.4

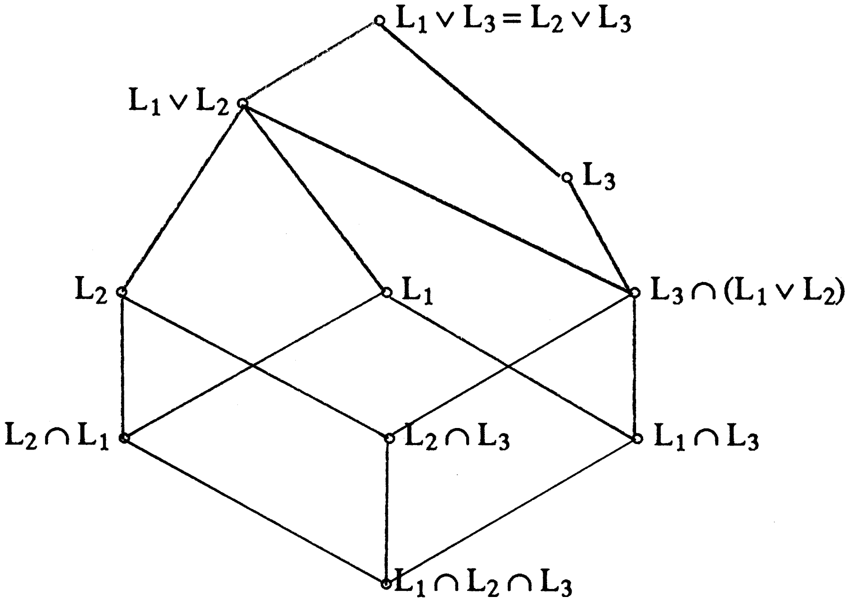
$L_1 \vee L_3 = L_2 \vee L_3$, και $L_3 \cap (L_1 \vee L_2) = L_3$ αν και μόνο αν $L_1 \vee L_2 = L_2 \vee L_3$.

Εξετάζουμε τώρα περιπτώσεις σχετικά με το αν ή όχι ισχύουν οι δύο προηγούμενες ισότητες.

Περίπτωση 1.2.1. $L_1 \vee L_3 \neq L_2 \vee L_3$ (οπότε και $(L_1 \cap L_2) \vee (L_2 \cap L_3) \subset L_2$) και $L_1 \vee L_2 \neq L_2 \vee L_3$ (οπότε και $(L_2 \cap L_3) \vee (L_1 \cap L_3) \subset L_3$).

Τότε πλ(συνδ$(L_1, L_2, L_3, L_4)) \geq 11+1=12$.

Περίπτωση 1.2.2. $L_1 \vee L_3 = L_2 \vee L_3$ (οπότε και $(L_1 \cap L_2) \vee (L_2 \cap L_3) = L_2$)



σχήμα 4.5

και $L_1 \vee L_2 \neq L_2 \vee L_3$ (οπότε και $(L_2 \cap L_3) \vee (L_1 \cap L_3) \subset L_3$) (βλ. σχ. 4.5). Θα αποδείξουμε ότι τουλάχιστο ένα από τα $L_4 \vee L_3$, $L_4 \cap L_2$, $L_4 \cap L_3$ είναι διαφορετικό από τα εικονιζόμενα στο σχ. 4.5. Τότε ο συνδ(L_1, L_2, L_3, L_4) θα περιέχει τουλάχιστο τα 10 στοιχεία του συνδ(L_1, L_2, L_3), το L_4 και ένα από τα τρία προαναφερθέντα, δηλ. 12. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι τα $L_4 \vee L_3$, $L_4 \cap L_2$, $L_4 \cap L_3$ είναι κάποια από τα στοιχεία του συνδ(L_1, L_2, L_3). Αφού $L_4 \vee L_3 \supseteq L_3$ είναι $L_4 \vee L_3 = L_3$ ή $L_4 \vee L_3 = L_2 \vee L_3$. Αφού δεν μπορεί $L_4 \vee L_3 = L_3$, είναι $L_4 \vee L_3 = L_2 \vee L_3$. Έχουμε $L_4 = L_4 \cap (L_3 \vee L_4) = L_4 \cap (L_2 \vee L_3) =$
$= (L_4 \cap L_2) \vee (L_4 \cap L_3)$, όπου $L_4 \cap L_2, L_4 \cap L_3 \in$ συνδ(L_1, L_2, L_3). Άρα $L_4 =$
$= (L_4 \cap L_2) \vee (L_4 \cap L_3) \in$ συνδ(L_1, L_2, L_3) και επομένως το L_4 συγκρίνεται με τουλάχιστο ένα από τα L_1, L_2, L_3, άτοπο.

Περίπτωση 1.2.3 $L_1 \vee L_3 \neq L_2 \vee L_3$ και $L_1 \vee L_2 = L_2 \vee L_3$.
Όμοια με την προηγούμενη.

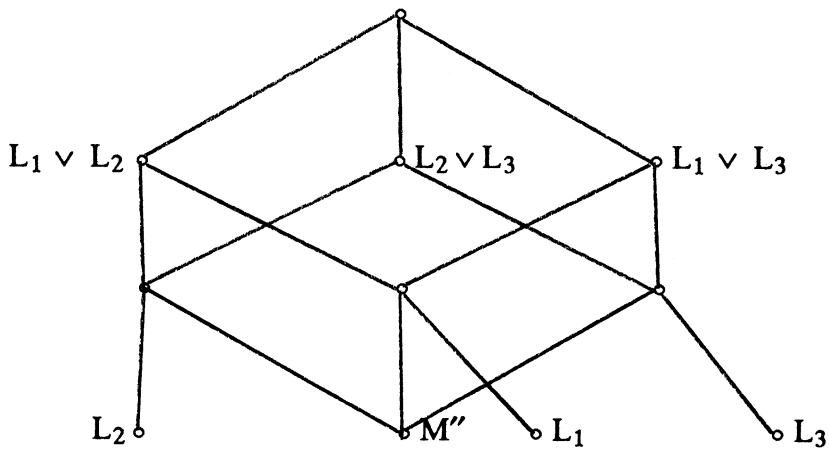
Περίπτωση 1.2.4. $L_1 \vee L_3 = L_2 \vee L_3$ και $L_1 \vee L_2 = L_2 \vee L_3$, οπότε

$L_1 \vee L_3 = L_2 \vee L_3 = L_1 \vee L_2 = L_1 \vee L_2 \vee L_3$.

Τότε ο συνδ(L_1, L_2, L_3) είναι η Boolean με συμπληρώματα ατόμων τα L_1, L_2, L_3.

Περίπτωση 2. Τα $L_1 \vee L_3$, $L_2 \vee L_3$, $L_1 \vee L_2$ δεν συγκρίνονται μεταξύ τους ανά δύο.

Τότε αυτά είναι συμπληρώματα ατόμων Boolean συνδέσμου (Λήμμα 1.2). Είναι $(L_1 \vee L_2) \cap (L_2 \vee L_3) = L_2 \vee (L_1 \cap L_3) \supseteq L_2$. Όμοιες σχέσεις ισχύουν για τα L_1, L_3 βλ. σχ. 4.6. (Δεν μπορεί $L_1 = M''$, (όπου $M'' = (L_1 \vee L_2) \cap (L_2 \vee L_3) \cap (L_1 \vee L_3)$) γιατί τότε $L_1 \subseteq L_2 \vee L_3$ και άρα $L_1 \vee L_2 \subseteq L_2 \vee L_3$, άτοπο). Όμοια $M'' \notin \{L_1, L_2, L_3\}$.



σχήμα 4.6

Περίπτωση 2.1. Οι τρεις προηγούμενες εγκλείσεις είναι γνήσιες.

Τότε πλ(συνδ$(L_1, L_2, L_3, L_4)) \geq 11+1=12$.

Περίπτωση 2.2. Στην μια έχουμε ισότητα π.χ. $(L_1 \vee L_2) \cap (L_2 \vee L_3) = L_2$ και οι άλλες είναι γνήσιες.

Τότε το M'' είναι διαφορετικό με κάποιο από τα $L_1 \cap L_3$ ή $L_2 \cap L_3$. Πράγματι, αν $L_1 \cap L_3 = L_2 \cap L_3 = M''$, θα είχαμε

$$L_1 = L_1 \vee \{(L_2 \cap L_1) \vee (L_1 \cap L_3)\} =$$

$$= L_1 \vee \{(L_2 \cap L_1) \vee (L_2 \cap L_3)\} =$$

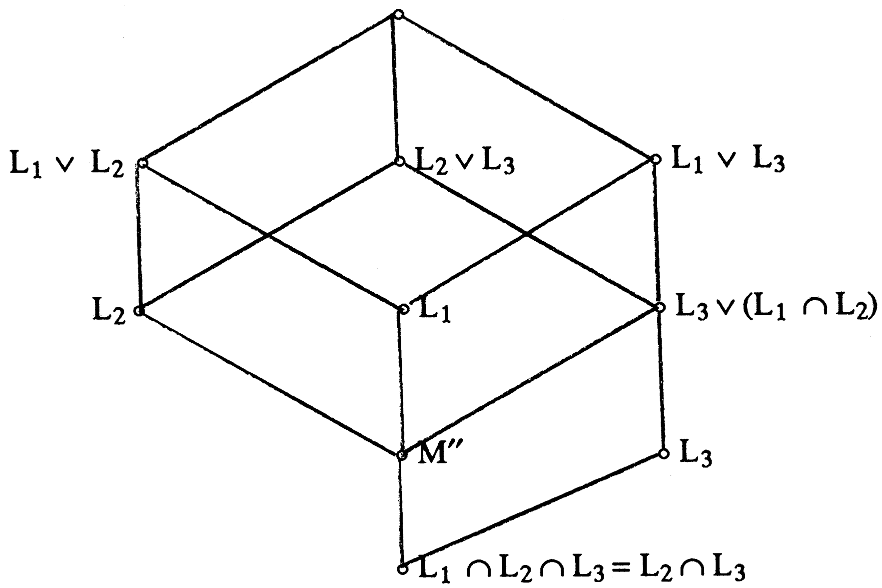
$= L_1 \vee \{L_2 \cap (L_1 \vee (L_2 \cap L_3))\} =$

$= (L_1 \vee L_2) \cap \{L_1 \vee (L_2 \cap L_3)\} = L_1 \vee (L_2 \cap L_3) \supset L_1$, άτοπο.

Επομένως και σ' αυτή την περίπτωση είναι πλ(συνδ(L_1, L_2, L_3, L_4)) $\geq$ 11+1=12.

Περίπτωση 2.3. $(L_1 \vee L_2) \cap (L_2 \vee L_3) = L_2$, $(L_1 \vee L_2) \cap (L_1 \vee L_3) =$

$= L_1$, $(L_2 \vee L_3) \cap (L_1 \vee L_3) \supset L_3$, (βλ. σχ. 4.7).



σχήμα 4.7

Αν ήταν $L_1 \cap L_3 = M''$ θα είχαμε

$L_3 = L_3 \vee M'' = L_3 \vee \{(L_1 \cap L_3) \vee (L_1 \cap L_2)\} =$

$= L_3 \vee \{L_1 \cap (L_3 \vee (L_1 \cap L_2))\} = (L_3 \vee L_1) \cap \{L_3 \vee (L_1 \cap L_2)\} =$

$= L_3 \vee (L_1 \cap L_2) \supset L_3$, άτοπο.

Όμοια αποδεικνύουμε ότι $L_2 \cap L_3 \neq M''$.

Περίπτωση 2.3.1. $L_2 \cap L_3 \neq L_1 \cap L_3$.

Είναι πλ(συνδ(L_1, L_2, L_3, L_4)) $\geq$ 8+2+1+1=12.

Περίπτωση 2.3.2. $L_2 \cap L_3 = L_1 \cap L_3$.

Τότε ισχύει επίσης $L_2 \cap L_3 \subset L_1 \cap L_2 = M''$. Αν $συνδ(L_1, L_2, L_3, L_4) \supset$

$\supset συνδ(L_1, L_2, L_3) \cup \{L_4\}$ είναι $πλ(συνδ(L_1, L_2, L_3, L_4)) \geq 10+1+1=12$. Ας υποθέσουμε ότι αυτό δεν συμβαίνει. Τότε $L_4 \cap L_3 = L_2 \cap L_3 = L_1 \cap L_3 = L_1 \cap L_2 \cap L_3$.

Ισχύει $L_3 \vee L_4 \in \{ L_3 \vee (L_1 \cap L_2), L_1 \vee L_3, L_2 \vee L_3, L_1 \vee L_2 \vee L_3 \}$.

Περίπτωση 2.3.2.1. $L_3 \vee L_4 \in \{ L_3 \vee (L_1 \cap L_2), L_1 \vee L_3 \}$.

Τότε $L_4 \subseteq L_1 \vee L_3$. Αν $k=4$, τότε $L_1 \vee L_3 = L_1 \vee L_3 \vee L_4 = L_1 \vee L_2 \vee L_3$, άτοπο.

Αν $k \geq 5$, τότε $πλ(συνδ(L_1, \ldots, L_k) \geq 10+1+1=12$.

Περίπτωση 2.3.2.2. $L_3 \vee L_4 = L_2 \vee L_3$.

Όμοια με την περίπτωση 2.3.2.1.

Περίπτωση 2.3.2.3. $L_3 \vee L_4 = L_1 \vee L_2 \vee L_3$.

Είναι $L_4 \subseteq L_1 \vee L_2 \vee L_3$ και $L_2 \cap L_4 \in \{ M'', L_2 \cap L_3 \}$, άρα

$(L_2 \cap L_4) \vee (L_2 \cap L_3) \in \{ M'', L_2 \cap L_3 \}$, επομένως

$$\begin{aligned}
L_3 \vee (L_1 \cap L_2) = L_3 \vee M'' &\supseteq \\
&\supseteq L_3 \vee \{ (L_2 \cap L_4) \vee (L_2 \cap L_3)\} = \\
&= L_3 \vee \{ (L_2 \cap L_4) \vee (L_3 \cap L_4)\} = \\
&= L_3 \vee \{ (L_2 \vee L_3) \cap L_4 \} = \\
&= (L_3 \vee L_2) \cap (L_3 \vee L_4) = \\
&= (L_3 \vee L_2) \cap (L_1 \vee L_2 \vee L_3) = L_3 \vee L_2, \text{ άτοπο.}
\end{aligned}$$

Περίπτωση 2.4.

Σ' αυτή την περίπτωση ο σύνδεσμος $συνδ(L_1, L_2, L_3)$ είναι ο Boolean με άτομα τα L_1, L_2, L_3.

Ας συνοψίσουμε τώρα ό,τι έχουμε αποδείξει. Έστω $A, B, \Gamma \in \mathcal{L}$ δεν συγκρίνονται μεταξύ τους ανά δύο. Λέμε ότι η τριάδα $\{A, B, \Gamma\} \subseteq \mathcal{L}$ είναι κατηγορίας (I) αν $πλ(συνδ(A, B, \Gamma)) \leq 9$ και κατηγορίας (II) αν το αντίθετο συμβαίνει. Έχουμε αποδείξει το λήμμα που μελετάμε στην περίπτωση που μεταξύ των L_i υπάρχει τριάδα της κατηγορίας (ΙΙ). Επίσης έχουμε αποδείξει ότι αν η τριάδα $\{A, B, \Gamma\}$ είναι της κατηγορίας (Ι), τότε ο συνδ(A, B, Γ) θα έχει μία από τις εξής μορφές :

(i) το διάγραμμά του είναι αυτό του σχ. 4.3,

(ii) είναι Boolean με συμπληρώματα ατόμων τα $\{A, B, \Gamma\}$,

(iii) είναι Boolean με άτομα τα $\{A, B, \Gamma\}$.

Ειδικά προκύπτει ότι ο σύνδ(A, B, Γ) (οποιασδήποτε κατηγορίας), έχει τουλάχιστο 8 στοιχεία.

Είναι φανερό από τα προηγούμενα ότι η μόνη περίπτωση που απομένει για να αποδείξουμε ότι ο συνδ$(L_i\ i=1,\ldots,k)$ περίεχει μια Boolean με τρία άτομα, είναι όταν όλες οι τριάδες του $\{L_i\ i=1,\ldots,k\}$ είναι της κατηγορίας (Ι) και της μορφής (i). Για αυτή την περίπτωση, η απόδειξη θα γίνει επαγωγικά ως προς k.

$k=4$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι στον συνδ(L_1, L_2, L_3) το L_2 είναι το "κεντρικό" στοιχείο (δηλ $L_1 \vee L_3 \supset L_1 \vee L_2$ και $L_1 \vee L_3 \supset L_2 \vee L_3$). Τότε στον σύνδ$(L_1, L_2, L_4)$, το L_4 δεν μπορεί να είναι το "κεντρικό" σημείο, γιατί τότε θα είχαμε, από ιδιότητες αυτής της μορφής των συνδέσμων, ότι $L_1 \vee L_2 = L_1 \vee L_2 \vee L_4$ και $L_1 \vee L_2 \subset L_1 \vee L_2 \vee L_3$, μια αντίφαση (βλ υποθέσεις λήμματος).

Επομένως είτε το $L_2 \vee L_4$ είτε το $L_1 \vee L_4$ περιέχεται γνήσια στον $L_1 \vee L_2 \vee L_4$, αν L_2 ή L_1 αντίστοιχα είναι το "κεντρικό" στοιχείο του συνδέσμου. Τα $L_1 \vee L_2$, $L_2 \vee L_3$ μαζί με εκείνο από τα $L_2 \vee L_4$, $L_1 \vee L_4$ που περιέχεται γνήσια στον $L_1 \vee L_2 \vee L_4$, είναι συμπληρώματα ατόμων Boolean, γιατί ανά δύο παράγουν τον ίδιο χώρο και καθένα τους περιέχεται γνήσια σ' αυτόν (Λήμμα 1.2).

Υποθέτουμε τώρα ότι η επαγωγική υπόθεση ισχύει για $k-1$ με $k\geq 5$ και θα την αποδείξουμε για το k. Αφού ο χώρος που παράγουν δύο οποιεσδήποτε διαφορετικές $k-2$- άδες από τα L_i είναι ο ίδιος, είναι αρκετό να αποδείξουμε την ύπαρξη τουλάχιστον τριών από αυτές, με την ιδιότητα οι παραγόμενοι από αυτές χώροι, να περιέχονται γνήσια στον $\vee\{L_i : i=1,\ldots,k\}$.

Αν υπάρχει μια $k-1$-άδα (χωρίς βλάβη της γενικότητας ας υποθέσουμε η $\{L_i : i\neq 1\}$) που να έχει την ιδιότητα ότι κάθε $k-2$-άδα της ισούται με $\vee\{L_i : i\neq 1\}$, τότε το αποτέλεσμα ακολουθεί από την επαγωγική υπόθεση.

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι για κάθε k–1-άδα του $\{L_i : i=1,...,k\}$ υπάρχει μια k–2-άδα που να περιέχεται στην προηγούμενη και να είναι τέτοια ώστε ο χώρος που παράγει να περιέχεται γνήσια στον παραγόμενο από την προαναφερθείσα k–1-άδα. Βρίσκουμε μια τέτοια k–2-άδα για κάποια σταθερή k–1-άδα. Διαλέγουμε ένα τυχαίο μέλος από αυτά που εμφανίζονται στην k–2-άδα που διαλέξαμε. Στην k–1-άδα που προκύπτει από την $\{L_i : i=1,...,k\}$ απαλείφοντας το συγκεκριμένο μέλος, βρίσκουμε κάποια k–2-άδα, από αυτές που θεωρήσαμε (δηλ. ο χώρος που παράγει περιέχεται γνήσια σ' αυτόν που παράγει η k–1-άδα στην οποία περιέχεται.

Οι δύο k–2-άδες διαφέρουν σε τουλάχιστο ένα μέλος, έτσι είναι διαφορετικές. Θα έχουμε τελειώσει αν υπάρχει κοινός δείκτης μεταξύ των δύο k–2-άδων που έχουμε μέχρι στιγμής διαλέξει, αφού σ' αυτή την περίπτωση θα εφαρμόσουμε ξανά την ίδια ιδέα για να βρούμε την τρίτη k–2-άδα. Τέτοιο όμως μέλος υπάρχει, γιατί αφού $k \geq 5$ είναι $2(k-2)>k$. Έτσι ολοκληρώθηκε η απόδειξη για την ύπαρξη της Boolean.

Θα αποδείξουμε τώρα ότι αν κάθε τριάδα από τα $\{L_i : i=1,...,k\}$ είναι κατηγορίας (I) δηλαδή έχει μια από της μορφές (i), (ii), (iii), τότε πλ(συνδ($L_i : i=1,...,k$)) $\geq$ ≥ 12, που θα ολοκληρώσει την απόδειξη του λήμματος. Υποθέτουμε πρώτα ότι υπάρχει τριάδα από τα $\{L_i : i=1,...,k\}$ της μορφής (i). Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι η τριάδα αυτή είναι η $\{L_1, L_2, L_3\}$ με "κεντρικό" στοιχείο το L_2. Με αυτή την υπόθεση θα δημιουργηθούν οι περιπτώσεις 1, 2 και 3. Γενικότερα θα εξετάσουμε τις μορφές που έχουν οι σύνδεσμοι συνδ(L_1, L_2, L_3) και συνδ(L_2, L_3, L_4).

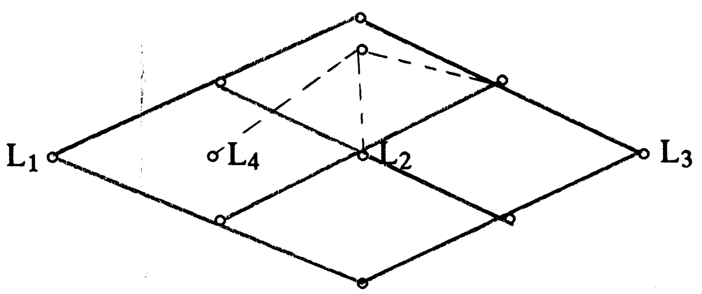
Περίπτωση 1. Οι σύνδεσμοι συνδ(L_1, L_2, L_3) και συνδ(L_2, L_3, L_4) είναι και οι δυό της μορφής (i).
Θα εξετάσουμε τρεις περιπτώσεις σχετικά με το πιο είναι το "κεντρικό" στοιχείο στο δεύτερο σύνδεσμο.

Περίπτωση 1.1. Το "κεντρικό" στοιχείο του δεύτερου συνδέσμου είναι το L_2.

Περίπτωση 1.1.1. $L_2 \vee L_4 \notin$ συνδ$(L_1, L_2, L_3) \cup \{L_4\}$, ισοδύναμα $L_2 \vee L_4 \neq L_1 \vee L_2$ (βλ σχ. 4.8).

Αν $L_2 \vee L_3 \vee L_4 \notin$ συνδ$(L_1, L_2, L_3) \cup \{L_4\}$ ισοδύναμα $L_2 \vee L_3 \vee L_4 \neq L_1 \vee L_2 \vee L_3$, τότε πλ(συνδ$(L_1, L_2, L_3, L_4)$)$\geq 12$. Έστω λοιπόν $L_2 \vee L_3 \vee L_4 = L_1 \vee L_2 \vee L_3$.

Κοιτάμε το $L_1 \vee L_2 \vee L_4$. Εύκολα ελέγχουμε ότι βρίσκεται μεταξύ του $L_1 \vee L_2$ και $L_1 \vee L_2 \vee L_3$. Έχουμε τελειώσει, αν δεν είναι το $L_1 \vee L_2 \vee L_3$, γιατί σ' αυτή την



σχήμα 4.8

περίπτωση αναγκαστικά είναι $k \geq 5$. Έστω λοιπόν ότι $L_1 \vee L_2 \vee L_4 = L_1 \vee L_2 \vee L_3$.

Τότε όμως τα $L_1 \vee L_2$, $L_2 \vee L_3$, $L_2 \vee L_4$ είναι συμπληρώματα ατόμων κάποιας Boolean. Από τη δομή των μελετώμενων συνδέσμων προκύπτει ότι τότε το L_2 είναι ένα άτομο που περιέχεται στο συμπλήρωμα του, άτοπο.

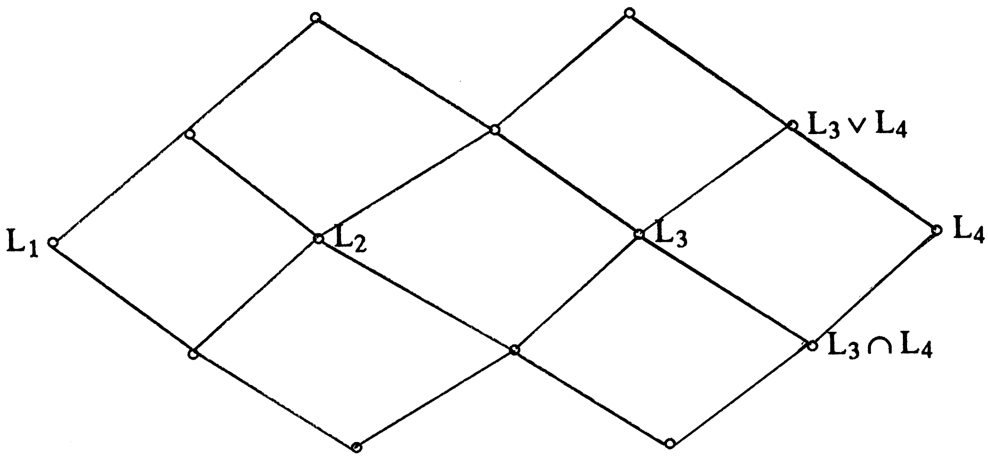
Περίπτωση 1.1.2. $L_2 \vee L_4 = L_1 \vee L_2$.

Αν $k=4$, αυτό δεν μπορεί να συμβαίνει. Αν $k \geq 5$ και το $L_1 \vee L_4$ δεν είναι νέο, τότε υπάρχει Boolean με συμπληρώματα ατόμων τα L_1, L_4, L_2. Εφόσον ένα άτομο της τελευταίας Boolean είναι το $L_1 \cap L_2$ η μη ύπαρξη νέων στοιχείων θα ερχόταν σε αντίφαση με το γεγονός ότι μόνο δύο παλιά στοιχεία είναι πιθανά για τα άλλα άτομα, όμως αυτά συγκρίνονται μεταξύ τους.

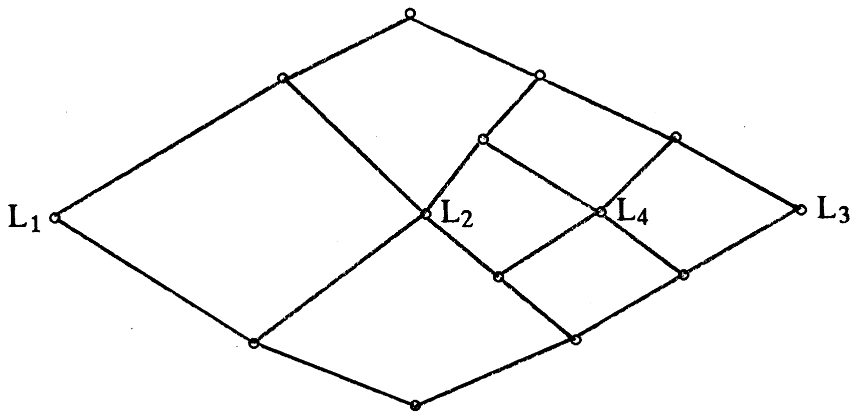
Περίπτωση 1.2. Το κεντρικό στοιχείο του συνδ(L_2, L_3, L_4) είναι το L_3 (σχ. 4.9).

Θα αποδείξουμε ότι $L_3 \vee L_4$, $L_3 \cap L_4 \notin$ συνδ$(L_1, L_2, L_3) \cup \{L_4\}$, οπότε θάχουμε τελειώσει με αυτή την περίπτωση. Υποθέτουμε ότι συμβαίνει το αντίθετο. Τότε όμως από τον συνδ(L_1, L_2, L_3) βλέπουμε ότι $L_3 \vee L_4 \supseteq L_2$, άτοπο από την δομή του συνδ(L_2, L_3, L_4). Όμοια για το $L_3 \cap L_4$.

Περίπτωση 1.3. Το κεντρικό του συνδ(L_2, L_3, L_4), είναι το L_4, (σχ. 10). Εύκολα αποδεικνύουμε ότι πλ(συνδ(L_1, L_2, L_3, L_4)) $\geq$ 14.



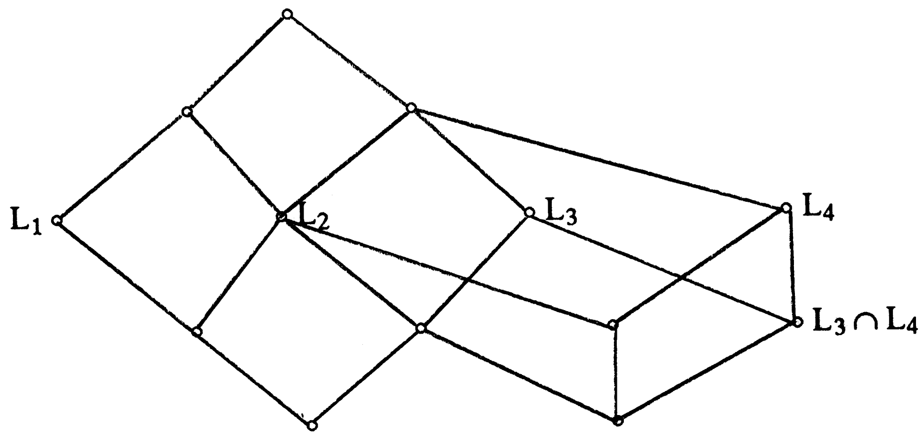
σχήμα 4.9



σχήμα 4.10

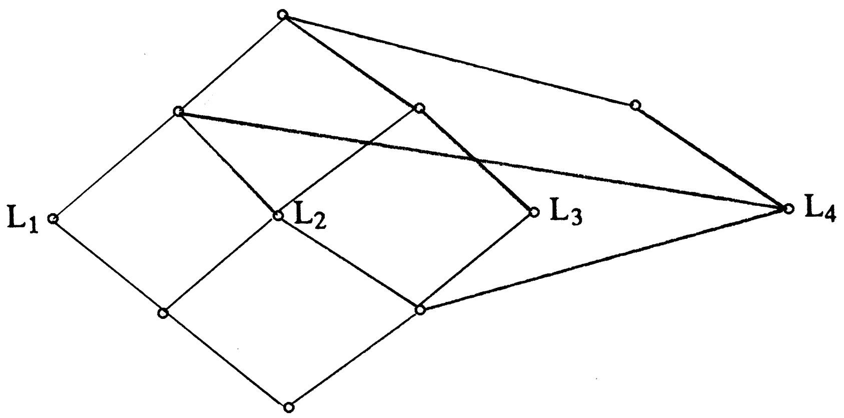
Περίπτωση 2. Ο σύνδεσμος συνδ(L_1, L_2, L_3) είναι της μορφής (i) και ο συνδ(L_2, L_3, L_4) της (ii) (σχ. 4.11).

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι το $L_3 \cap L_4$ είναι νέο στοιχείο , δηλ. διαφορετικό από το L_4, και τα στοιχεία του συνδ(L_1, L_2, L_3). Προφανώς $L_2 \vee L_3 \vee L_4 = L_2 \vee L_3 \subset$ $\subset L_1 \vee L_2 \vee L_3$. Αν k=4 αυτό δεν μπορεί να συμβαίνει. Αν k≥5, τότε το αποτέλεσμα ισχύει.



σχήμα 4.11

Περίπτωση 3. Ο σύνδεσμος συνδ(L_1, L_2, L_3) είναι της μορφής (i) και ο συνδ(L_2, L_3, L_4) της (iii), (σχ. 4.12).



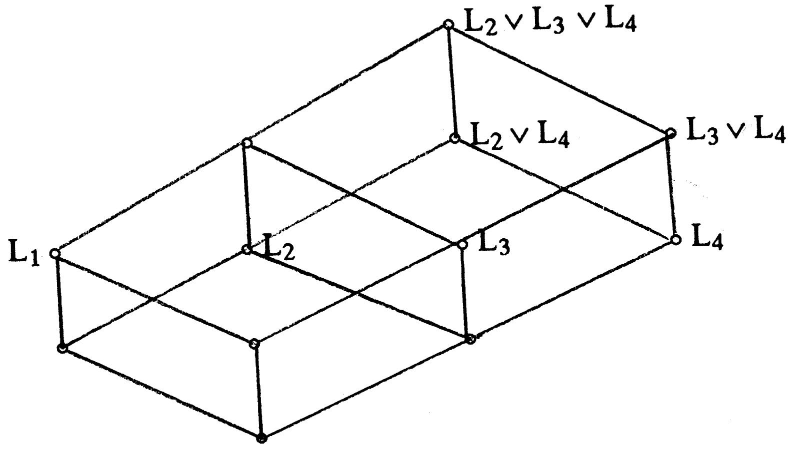
σχήμα 4.12

Το $L_3 \vee L_4$ είναι νέο. Αν το $L_2 \vee L_4$ είναι νέο, έχουμε τελειώσει. Διαφορετικά αναγκαστικά είναι $L_2 \vee L_4 = L_1 \vee L_2$. Για $k=4$ αυτό δεν μπορεί να συμβαίνει γιατί τότε θα ήταν $L_1 \vee L_2 \vee L_4 = L_1 \vee L_2 \subset L_1 \vee L_2 \vee L_3$. Αν $k \geq 5$, το αποτέλεσμα προκύπτει ανεξάρτητα του αν υποθέσουμε ότι το $L_2 \vee L_4$ είναι νέο ή όχι.

Περίπτωση 4. Οι σύνδεσμοι συνδ(L_1, L_2, L_3) και συνδ(L_2, L_3, L_4) είναι της μορφής (ii).

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι σ' αυτή την περίπτωση ο συνδ(L_1, L_2, L_3, L_4) είναι Boolean με 4 άτομα (συμπληρώματα ατόμων είναι τα L_1, L_2, L_3, L_4) και άρα έχει 16 στοιχεία.

Περίπτωση 5. Ο σύνδεσμος συνδ(L_1, L_2, L_3) είναι της μορφής (ii) και ο συνδ(L_2, L_3, L_4) της (iii), (σχ. 4.13).



σχήμα 4.13

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι τα $L_3 \vee L_4$, $L_2 \vee L_4$, $L_2 \vee L_3 \vee L_4$ είναι νέα στοιχεία. (Μάλιστα αν $k=4$, αυτή η περίπτωση δεν είναι δυνατόν να υπάρξει).

Περίπτωση 6. Οι σύνδεσμοι συνδ(L_1, L_2, L_3) και συνδ(L_2, L_3, L_4) είναι της μορφής (iii).

Τότε ο $\sigma\upsilon\nu\delta(L_1, L_2, L_3, L_4)$ είναι Boolean με άτομα τα L_1, L_2, L_3, L_4 και άρα έχει 16 στοιχεία. Η απόδειξη του λήμματος έχει ολοκληρωθεί. ■

Συνέχεια της απόδειξης του Θεωρήματος 4.1. Θα αποδείξουμε τώρα ότι ο σύνδεσμος $\sigma\upsilon\nu\delta(M_{1-}, L_{1-},..., L_{n-})$:

1) περιέχει μια Boolean με τρία άτομα ή ένα υποσύνδεσμο της μορφής του σχήματος 4.3 (και επομένως έχει τουλάχιστο 8 στοιχεία), και

2) περιέχει τουλάχιστο 7 στοιχεία διαφορετικά από τα του $\sigma\upsilon\nu\delta(M_1, L_1, ..., L_n)$.

Το μέρος 1) πρώτα. Αν υπάρχει τριάδα από τα $M_{1-}, L_{1-},..., L_{n-}$ που να μην συγκρίνονται μεταξύ τους ανά δύο, έχουμε τελειώσει (βλ. απόδειξη προηγούμενου λήμματος). Έστω αντίθετα ότι σε κάθε τριάδα υπάρχουν δύο που συγκρίνονται. Για κάθε επιτρεπτά i, j θα υπάρχουν λοιπόν δύο μέλη της τριάδας $\{M_{1-}, L_{i-}, L_{j-}\}$ που να συγκρίνονται. Αφού το M_{1-} δεν συγκρίνεται με κανένα από τα L_{k-} $k=1,..,n$, το σύνολο $\{L_{1-},..., L_{n-}\}$ είναι αλυσίδα, ας πούμε με μέγιστο στοιχείο το L_{1-}. Από το Λήμμα 4.1 και από προηγούμενη συζήτηση έχουμε

$$M_{1-} \vee \{L_{i-} : i\neq 1\} = (M_1 \vee \{L_i : i\neq 1\})_- =$$

$$= (\vee \{L_i \; i=1,...,n\})_- = \vee \{L_{i-} \; i=1,...,n\} = L_{1-}, \text{ άτοπο.}$$

Για το μέρος 2). Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι $M_{1-} \supseteq L_1 \vee ... \vee L_n = M$, $L_{1-} \supseteq M_1 \vee L_2 \vee ... \vee L_n = M$, κλπ, όπου $M = M_1 \vee L_1 \vee ... \vee L_n$.

Από τα προηγούμενα είναι φανερό ότι τα 1) και 2) του θεωρήματος έχουν αποδειχθεί στην περίπτωση $n\geq 3$. (Μάλιστα σ' αυτή την περίπτωση έχουμε επιπλέον ότι $\pi\lambda(\mathcal{L})\geq 19$)). Έτσι η μόνη περίπτωση που μένει να εξετάσουμε είναι αν το $\mathcal{L}$ περιέχει υποσύνδεσμο του σχ. 4.1, όπου επιπλέον $Q_{i-} = P_i$. Το επόμενο λήμμα αποδεικνύει το μέρος του θεωρήματος που αναφέρεται στον τάξης δύο τελεστή. (Δεν χρησιμοποιούμε κανένα από τα προηγούμενα αποτελέσματα αυτού του κεφαλαίου).

<u>Λήμμα 4.3.</u> *Έστω $\mathcal{L}'$ αναπαράσταση του $\mathcal{L}$ και $T\in \mathrm{Alg}\mathcal{L}'$ έχει τάξη δύο, αλλά δεν γράφεται σαν άθροισμα από ακριβώς δύο τάξης ένα τελεστές του $\mathrm{Alg}\mathcal{L}'$.*

Τότε ο $\mathcal{L}$ *περιέχει υποσύνδεσμο με διάγραμμα αυτό του σχ.* 4.1 *και όπου επιπλέον* $Q_{i-}=P_i$ $i=1,2,3$.

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το Λήμμα 3.3 για $W=\mathcal{R}(T)$ και βρίσκουμε $m\in\mathbb{N}$, $\mathcal{M}_0=\{M_i, : i=1,...,m\}$ και $0\neq W_{M_i}\subseteq M_i\cap\mathcal{R}(T)$ $i=1,...,m$ που ικανοποιούν τα συμπεράσματα των Λημμάτων 3.3 και 3.4. (Θα αποδείξουμε ότι τα Q_i είναι κάποια από τα M_i και επιπλέον ότι στη θέση του συνδ(Q_i) μπορεί να μπει ο συνδ$(M_i: i=1,...,m)$, που όπως θα αποδείξουμε είναι Boolean με m άτομα).

Η απόδειξη θα γίνει σε εννέα βήματα. Θα διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε αμέσως κάθε ένα από αυτά.

Βήμα 1. $m\geq 2$.

Απόδειξη. Έστω $m=1$. Τότε $\mathcal{R}(T)=W_{M_1}$ και έστω $\{x,z\}$ είναι βάση της εικόνας του T. Υπάρχουν λοιπόν x^* και $z^*\in\mathcal{X}^*$ τέτοια ώστε $T=x^*\otimes x+z^*\otimes z$. Για $t\in M_{1-}$ από το Λήμμα 3.4 πέρνουμε ότι $T(t)=x^*(t)\,x+z^*(t)\,z=0$, άρα $x^*(M_{1-})=z^*(M_{1-})=0$. Το άτοπο τώρα ακολουθεί από το Λήμμα 1.3 και την υπόθεση.

Βήμα 2. Για κάθε $i\in\{1,...,m\}$ είναι $\dim W_{M_i}=1$.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε αντίθετα ότι π.χ. $\dim W_{M_1}=2$ (γιατί ο T έχει τάξη δύο) και $\mathcal{R}(T)=W_{M_1}=<x,y>$. Από το βήμα 1 προκύπτει η ύπαρξη $0\neq z\in W_{M_2}$. Άρα $z\in<x,y>$ και επομένως $z\in\mathcal{R}(T)\cap M_1\cap M_2$. Από το Λήμμα 3.3 πέρνουμε ότι $M_1\cap M_2=M_2$ και επομένως $M_2\subseteq M_1$. Αν $M_2\subset M_1$ θα είχαμε

$$0\neq z\in W_{M_1}\cap(\vee\{\mathcal{R}(T)\cap L : L\subset M_1\})=0,\ \text{άτοπο.}$$

Άρα $M_2=M_1$ που όμως επίσης δεν ισχύει. Από εδώ και μέχρι το τέλος της απόδειξης αυτού του λήμματος, με x_i θα εννοούμε ένα μη μηδενικό στοιχείο του W_{M_i}. Από τα προηγούμενα έχουμε λοιπόν ότι $W_{M_i}=<x_i>$.

Βήμα 3. $m\geq 3$.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε αντίθετα ότι m=2. Τότε $\mathcal{R}(T) = W_{M_1} \vee W_{M_2} =$

$= \langle x_1, x_2 \rangle$. (Ειδικότερα το σύνολο $\{x_1, x_2\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο).

Υπάρχουν λοιπόν $y_1^*, y_2^* \in \mathcal{X}^*$ τέτοια ώστε $T = y_1^* \otimes x_1 + y_2^* \otimes x_2$. Για $t \in M_{1-}$ έχουμε

$T(t) = y_1^*(t)\, x_1 + y_2^*(t)\, x_2 \in \langle x_2 \rangle$. Άρα $y_1^*(M_{1-}) = 0$, άτοπο (Λήμμα 1.3 και υπόθεση).

Βήμα 4. Κάθε δυάδα από τα $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ αποτελεί ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο.

Απόδειξη. Έστω π.χ. $x_1 = \lambda x_2$ (οπότε $\lambda \neq 0$). Τότε (Λήμμα 3.3) $M_1 = M_1 \cap M_2 =$

$= M_2$, άτοπο.

Βήμα 5. Τα $M_1, M_2, \ldots, M_m$ δεν συγκρίνονται μεταξύ τους ανά δύο.

Απόδειξη. Έστω π.χ. ότι $M_1 \subset M_2$. Τότε $x_3 \in \mathcal{R}(T) \subseteq M_2$ (από το βήμα 4).

Άρα $x_3 \in M_2 \cap M_3 \subseteq M_3$ και επομένως $M_2 \cap M_3 = M_3$ δηλ. $M_3 \subset M_2$. Επομένως

υπάρχουν $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ τέτοια ώστε $x_2 = \lambda x_1 + \mu x_3 \in W_{M_2} \cap \{\vee(\mathcal{R}(T) \cap L : L \subset M_2)\} = 0$,

άτοπο.

Βήμα 6. Για κάθε $i, j \in \{1, \ldots, m\}$ με $i \neq j$, είναι $M_i \vee M_j = \vee\{M_k : k=1, \ldots, m\} = M$.

Απόδειξη. Έχουμε (βήμα 4) $x_3 \in (M_1 \vee M_2) \cap M_3 \subseteq M_3$. Άρα

$(M_1 \vee M_2) \cap M_3 = M_3$ και επομένως $M_3 \subseteq M_1 \vee M_2$. Όμοια αποδεικνύονται και οι υπόλοιπες σχέσεις.

Βήμα 7. Ο συνδ$(M_i : i=1, \ldots, m)$ είναι Boolean σύνδεσμος με m άτομα.

Απόδειξη. Από τα βήματα 5 και 6 εύκολα προκύπτει ότι τα $M_1, \ldots, M_m$ είναι συμπληρώματα ατόμων Boolean (βλ. και Λήμμα 1.2).

Βήμα 8. Ο σύνδεσμος συνδ$(M_{1-}, M_{2-}, \ldots, M_{m-})$ περιέχει Boolean με τρία άτομα.

Απόδειξη. Από το Λήμμα 4.1 και το βήμα 6, για κάθε $i, j \in \{1, \ldots, m\}$ με $i \neq j$ είναι

$M_{i-} \vee M_{j-} = (M_i \vee M_j)_- = (\vee\{M_k : k=1, \ldots, m\})_- = M_-$. Δουλεύοντας όμοια με την

απόδειξη του βήματος 1, αποδεικνύουμε την ύπαρξη τουλάχιστον ενός $i \in \{1, \ldots, m\}$ με

$M_{i-} \subset M_-$. Αν υπήρχαν μόνο δύο που να περιέχονταν γνήσια στο M_-, π.χ. τα M_{1-}

και M_{2-} θα είχαμε πάλι αντίφαση για όμοιο λόγο (βλ. και απόδειξη βήματος 3), αφού

$M_{1-} = \cap\{M_{k-} : k=1,...,m$ και $k\neq 2\}$. Άρα υπάρχουν τουλάχιστο τρία, από τα M_{i-}που περιέχονται γνήσια στο M_-. Αυτά είναι τα συμπληρώματα των ατόμων της ζητούμενης Boolean.

Βήμα 9. Ο $\mathcal{L}$ περιέχει τον υποσύνδεσμο του σχ. 4.1.

Απόδειξη. Από τα βήματα 5 και 6 έχουμε $M_{1-} \supseteq M_2 \vee M_3 = M$ κλπ, επομένως $\cap\{M_{k-} : k=1,...,m\} \supseteq M$. Αυτό, σε συνδιασμό με τα βήματα 7 και 8 αποδεικνύουν αυτό το βήμα και έτσι και το λήμμα. ■

Λήμμα 4.4. *Αν το $\mathcal{L}$ περιέχει υποσύνδεσμο του σχ. 4.1, όπου επιπλέον $Q_{i-} = P_i$ (και πιθανόν $M' = M$), τότε έχει τουλάχιστο 18 στοιχεία.*

Απόδειξη. Έχουμε

$Q_{1-} = \vee\{L \in \mathcal{L} :\ Q_1 \not\subseteq L\} =$

$= (\vee\{L \in \mathcal{L} :\ Q_1 \not\subseteq L \not\subseteq M\}) \vee (\vee\{L \in \mathcal{L} :\ Q_1 \not\subseteq L \subseteq M\}) =$

$= M \vee \{L \in \mathcal{L} :\ Q_1 \not\subseteq L \not\subseteq M\}.$

Όμοια $Q_{i-} = M \vee \{L \in \mathcal{L} :\ Q_i \not\subseteq L \not\subseteq M\}$ i=1,2,3. Για i=1,2,3 ορίζουμε n_i το πλήθος των μεγιστικών του μη κενού (άρα $n_i \geq 1$) συνόλου $\{L \in \mathcal{L} :\ Q_i \not\subseteq L \not\subseteq M\}$, και συμβολίζουμε αυτά τα μεγιστικά με $N_{i,1}, N_{i,2}, ... N_{i,n_i}$. Εύκολα βλέπουμε ότι το M και οποιοδήποτε από τα $N_{i,j}$ δεν συγκρίνονται μεταξύ τους. Ειδικότερα τα $N_{i,j}$ είναι "νέα" στοιχεία δηλ. διαφορετικά από τα σχεδιασμένα στο σχ.4.1. Προφανώς $Q_{i-} = M \vee N_{i,1} \vee ... \vee N_{i,n_i}$.

Υπάρχει j τέτοιο ώστε $N_{2,j} \notin \{N_{1,i} : i=1,...,n_1\}$ γιατί αλλοιώς $Q_{2-} \subseteq Q_{1-}$, άτοπο.

Όμοια για τα άλλα ζευγάρια από τα {1,2,3}.

Εξετάζουμε πρώτα την περίπτωση $M \neq M'$. Έχουμε

$\pi\lambda(\mathcal{L}) \geq 8+8+\max\{n_1,n_2,n_3\}+1$. Άρα αν $\max\{n_1,n_2,n_3\} \geq 2$, τότε $\pi\lambda(\mathcal{L}) \geq 16+2+1=19$.

Έστω $n_1=n_2=n_3=1$. Τότε τα $N_{1,1}, N_{2,1}, N_{3,1}$ είναι διαφορετικά μεταξύ τους και άρα

$\pi\lambda(\mathcal{L}) \geq 8+8+3=19$.

Ερχόμαστε τώρα στην περίπτωση $M=M'$. Αν $\max\{n_1,n_2,n_3\}\geq 3$, τότε $\pi\lambda(\mathcal{L}) \geq 15+3+1=19$. Έστω ότι $\max\{n_1,n_2,n_3\}=2$, π.χ. $n_3=2$ και $\min\{n_1,n_2,n_3\}=1$, π.χ. $n_1=1$. Υπάρχει $N_{2,j}$ π.χ. με $j=1$ τέτοιο ώστε $N_{2,1} \notin \{N_{3,1}, N_{3,2}\}$. Τότε όμως έχουμε επίσης $N_{1,1} \notin \{N_{2,1}, N_{3,1}, N_{3,2}\}$ (αλλοιώς $Q_{1-} \subseteq Q_{2-}$ ή $Q_{1-} \subseteq Q_{3-}$). Άρα $\pi\lambda\{N_{1,1}, N_{2,1}, N_{3,1}, N_{3,2}\}=4$, απ' όπου πέρνουμε $\pi\lambda(\mathcal{L}) \geq 15+4=19$.

Εξετάζουμε τώρα την περίπτωση $\max\{n_1,n_2,n_3\}=1$ (ισοδύναμα $n_1=n_2=n_3=1$). Τα στοιχεία του συνόλου $\{N_{1,1}, N_{2,1}, N_{3,1}\}$ δεν συγκρίνονται μεταξύ τους ανά δύο, γιατί σε αντίθετη περίπτωση θα είχαμε αντίφαση με το ότι τα Q_{1-}, Q_{2-}, Q_{3-} δεν συγκρίνονται μεταξύ τους ανά δύο.

Ισχυριζόμαστε ότι $N_{1,1} \supseteq Q_2$ και $N_{1,1} \supseteq Q_3$. Πράγματι, αν δεν συνέβαινε αυτό, π.χ. αν $N_{1,1} \not\supseteq Q_2$ θα είχαμε επίσης ότι $N_{1,1} \in \{L \in \mathcal{L}:\ Q_2 \not\subseteq L \not\subseteq M\}$ και άρα μαζί με το $N_{2,1}$ θα ήταν μεγιστικά του παραπάνω συνόλου, δηλ. θα ήταν $n_2 \geq 2$, άτοπο. Άρα $N_{1,1} \supseteq Q_2 \vee Q_3 = M \supseteq Q_1$, άτοπο.

Στην τελευταία τέλος περίπτωση $\max\{n_1,n_2,n_3\}=\min\{n_1,n_2,n_3\}=2$ (ισοδύναμα $n_1=n_2=n_3=2$) έχουμε $\pi\lambda(\mathcal{L}) \geq 15+2+1=18$, που ολοκληρώνει την απόδειξη. ■

Είναι φανερό ότι το προηγούμενο λήμμα ολοκληρώνει την απόδειξη του πρώτου μέρους του Θεωρήματος 4.1. Μένει να αποδείξουμε ότι με 18 στοιχεία, ο μόνος σύνδεσμος με την ιδιότητα που μας ενδιαφέρει είναι ο $\mathcal{L}_3$. Αυτό αποδεικνύεται στο παρακάτω λήμμα που βασίζεται στην παρατήρηση που προκύπτει από την απόδειξη του προηγουμένου Λήμματος 4.4, ότι αν $\pi\lambda(\mathcal{L})=18$, τότε $M=M'$ και $n_1=n_2=n_3=2$.

Λήμμα 4.5. *Αν $\mathcal{L}$ είναι όπως στο* Λήμμα 4.4 *με* $M=M'$, $n_1=n_2=n_3=2$ *και* $\pi\lambda(\mathcal{L})=18$, *τότε* $\mathcal{L}=\mathcal{L}_3$.

Απόδειξη. Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι

$$\pi\lambda\{N_{1,1}, N_{1,2}, N_{2,1}, N_{2,2}\ N_{3,1}, N_{3,2}\}=3$$

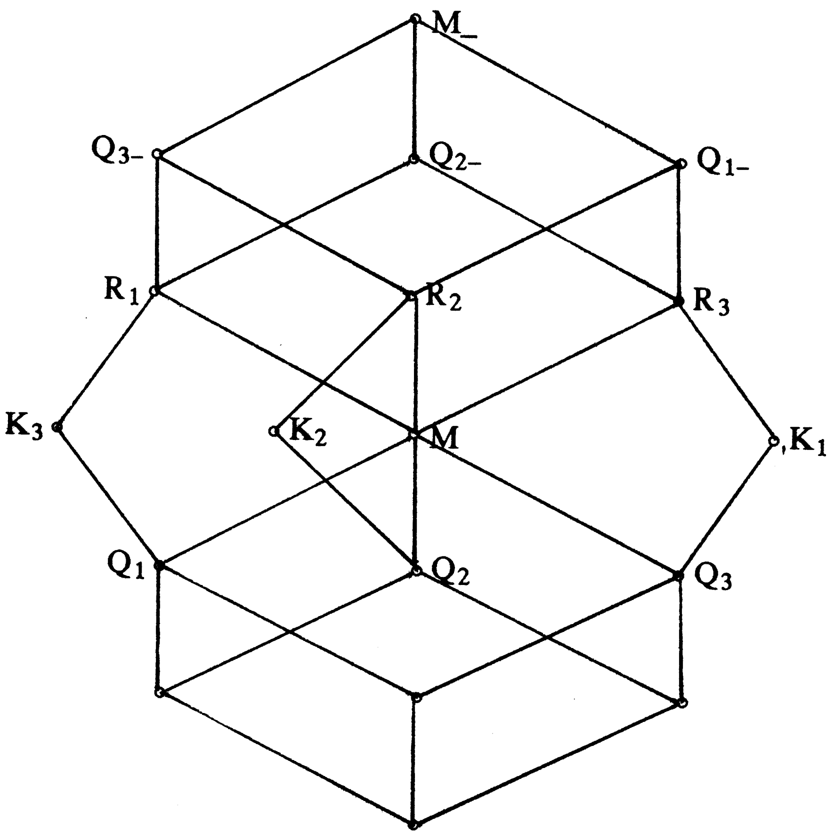
(αλλοιώς $\pi\lambda(\mathcal{L}) \geq 19$). Θα χρησιμοποιήσουμε νέο συμβολισμό : $K_1=N_{1,1}$ και $K_2=N_{1,2}$. Αφού $\pi\lambda\{N_{1,1}, N_{1,2}, N_{2,1}, N_{2,2}, N_{3,1}, N_{3,2}\}=3$, κάποιο (μόνο ένα) από τα $N_{2,1}, N_{2,2}$ ταυτίζεται με κάποιο από τα K_1, K_2, έστω π.χ. $N_{2,1}=K_1$. Τότε όμως το $N_{2,2}$ αναγκαστικά δεν συγκρίνεται με το K_2, αλλοιώς τα Q_{1-} και Q_{2-} θα συγκρίνονταν.

Ορίζουμε $K_3=N_{2,2}$, έτσι τα K_1, K_2, K_3 δεν συγκρίνονται μεταξύ τους ανά δύο. Ειδικότερα $\{N_{3,1}, N_{3,2}\} \subseteq \{K_1, K_2, K_3\}$. Αν $N_{3,1}=K_1$ θα ήταν επίσης $N_{3,2}=K_2$ ή $N_{3,2}=K_3$. Στην πρώτη περίπτωση θα είχαμε $\{N_{3,1}, N_{3,2}\}=\{K_1, K_2\}$ που δίνει $Q_{3-} = Q_{1-}$, άτοπο, ενώ όμοια η δεύτερη δίνει $Q_{3-} = Q_{2-}$, που όμως ούτε αυτό μπορεί να συμβαίνει. Άρα $\{N_{3,1}, N_{3,2}\}=\{K_2, K_3\}$. Έτσι το σύνολο των μεγιστικών στοιχείων του $\{L \in \mathcal{L} : Q_i \not\subseteq L \not\subseteq M\}$ είναι

αν $i=1$ το $\{K_1, K_2\}$,

αν $i=2$ το $\{K_1, K_3\}$ και

αν $i=3$ το $\{K_2, K_3\}$.



σχήμα 4.14

Ισχυριζόμαστε τώρα ότι $K_1 \supseteq Q_3$, οπότε $K_1 \cap M=Q_3$ (γιατί $\pi\lambda(\mathcal{L})=18$). Πράγματι, διαφορετικά τα K_1, K_2, K_3 θα ήταν μεγιστικά του $\{L \in \mathcal{L}: Q_3 \not\subseteq L \not\subseteq M\}$, δηλ. $n_3=3$, άτοπο. Όμοια $K_2 \cap M=Q_2$, $K_3 \cap M=Q_1$. Ελέγχοντας τις πιθανές περιπτώσεις αποδεικνύουμε επίσης ότι $K_3 \cap K_2=Q_1 \cap Q_2$ κλπ. Επίσης, αφού $Q_{3-}=M \vee K_2 \vee K_3$ έχουμε ότι $M \vee K_2 \subseteq Q_{3-}$ και επομένως $M \vee K_2 \in \{M, R_1, R_2, Q_{3-}\}$ (βλ. σχ. 4.14). Εστω $M \vee K_2 = Q_{3-} = M \vee K_2 \vee K_3 \Rightarrow K_3 \subseteq M \vee K_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow K_3=K_3 \cap (M \vee K_2)=(K_3 \cap M) \vee (K_3 \cap K_2) \subseteq M$, άτοπο. Εφόσον τα M, K_2 δεν συγκρίνονται μεταξύ τους, αναγκαστικά $M \vee K_2 \in \{R_1, R_2\}$. Όμοια αποδεικνύουμε επίσης ότι

$\{M \vee K_2, M \vee K_3\}=\{R_1, R_2\}$

$\{M \vee K_1, M \vee K_3\}=\{R_1, R_3\}$ και

$\{M \vee K_1, M \vee K_2\}=\{R_2, R_3\}$.

Αν $M \vee K_2=R_1$ η τρίτη ισότητα δεν μπορεί να ισχύει. Άρα $M \vee K_3=R_1$, $M \vee K_2=R_2$, $M \vee K_1=R_3$. Όμοια αποδεικνύουμε και τις υπόλοιπες σχέσεις που απαιτεί ο ορισμός του $\mathcal{L}_3$ και έχουμε τελειώσει. ■

Συνέχεια της απόδειξης του Θεωρήματος 4.1. Είναι φανερό ότι τα Λήμματα 4.4 και 4.5 ολοκληρώνουν την απόδειξη. ■

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Κλειστότητα στην ισχυρή τοπολογία τελεστών

Α

(Σε όλο αυτό το κεφάλαιο, ο $\mathcal{L}=\mathcal{L}(X)$ θα είναι ένας πλήρης σύνδεσμος υποχώρων ενός χώρου με νόρμα X, εκτός αν δηλώνεται επιπλέον περιορισμός).

Το πρόβλημα που θα μας απασχολήσει σ' αυτό το κεφάλαιο στην πιο γενική του μορφή είναι το εξής

(*) Έχει ο $\mathcal{L}(X)$ την ιδιότητα : κάθε $T\in \mathrm{Alg}\mathcal{L}$ ανήκει στην κλειστότητα (ως προς κάποια τοπολογία) της άλγεβρας που παράγουν οι τάξης ένα τελεστές του $\mathrm{Alg}\mathcal{L}$;

Η τοπολογία με την οποία θα ασχοληθούμε είναι αυτή της κατά σημείο σύγκλισης στον $\mathcal{B}(X)$, (βλ. π.χ. [9, σελ. 475], [8, σελ. 100], [14, σελ. 59]) δηλ. της ισχυρής τοπολογίας τελεστών (ΙΤΤ, strong operator topology). Πιο συγκεκριμένα, μια βάση περιοχών του $S\in \mathcal{B}(X)$, ως προς αυτή την τοπολογία, είναι τα σύνολα

$$\Pi(S, \varepsilon, A) = \{T \in \mathcal{B}(X) : (\forall\, x \in A)\ \|Sx - Tx\| < \varepsilon\}$$

όπου ε είναι τυχαίος θετικός αριθμός και A είναι τυχαίο πεπερασμένο υποσύνολο του X. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι σ' αυτή την τοπολογία, ένα δίκτυο $(S_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ από στοιχεία του $\mathcal{B}(X)$ συγκλίνει σε κάποιον S του ίδιου χώρου αν και μόνο αν

$$(\forall\, x \in X)\quad (S_\lambda x)_{\lambda\in\Lambda} \to Sx.$$

Έτσι μια ειδική μορφή του (*) είναι η εξής :

ΙΤΤ(*) Έχει ο $\mathcal{L}(X)$ την (*) όταν η χρησιμοποιούμενη τοπολογία είναι η ΙΤΤ;

Πρώτο βήμα στην διερεύνηση του προβλήματος ΙΤΤ(*) (για αναφορές γνωστών αποτελεσμάτων βλ. και [25]) είναι η καταφατική απάντηση από τον Erdos ([12, Θεώρημα 2]) στην περίπτωση που ο χώρος είναι Hilbert και ο σύνδεσμος είναι πλήρης αλυσίδα. Στο τμήμα Β παρακάτω γενικεύουμε το προηγούμενο αποτέλεσμα σε δύο κατευθύνσεις. Η μία είναι ότι η υπόθεση του χώρου Hilbert αντικαθίσταται από αυτήν του χώρου με νόρμα. Δεδομένου ότι στην αρχική απόδειξη του Erdos, χρησιμοποιούνται δομικά στοιχεία της θεωρίας χώρων Hilbert , η γενίκευσή μας δεν είναι τετριμμένη. Για την δεύτερη βελτίωση πρέπει να πούμε κάτι περισσότερο. Ο ορισμός της ΙΤΤ εφαρμοζόμενος στην περίπτωση μας, απαιτεί για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε n-άδα $x_1,...,x_n$ στοιχείων του $\mathcal{X}$ την προσέγγιση ενός τυχαίου τελεστή του Alg$\mathcal{L}$ από στοιχεία του ΣΤ1(Alg$\mathcal{L}$). Έχει ενδιαφέρον να δούμε την τάξη αυτών των προσεγγιστικών τελεστών. Στην απόδειξη του Erdos αυτοί έχουν τάξη το πολύ $\frac{1}{2}n(n+1)$. Στην δική μας απόδειξη οι αντίστοιχες τάξεις είναι το πολύ n (όσο το πλήθος των προς προσέγγιση σημείων). (Και στις δυό περιπτώσεις οι τάξεις είναι ανεξάρτητες του ε). Είναι γνωστό ότι αν το σύνολο $\{x_1,...,x_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε κάθε n-άδα $\{y_1,...,y_n\}$ που ικανοποιεί $\| x_i - y_i \| < \varepsilon \quad i =1,...,n$ είναι επίσης γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο. Αυτό αποδεικνύει ότι (για αρκετά μικρά θετικά ε), η τάξη των τελεστών που επιλέγουμε είναι η καλύτερη δυνατή.

Στο άρθρο [12] του Erdos που προαναφέραμε, ο συγγραφέας αποδεικνύει επίσης (Θεώρημα 3) κάτι πολύ ισχυρότερο από την ΙΤΤ-κλειστότητα που περιγράψαμε (πάντα σε χώρο Hilbert και με τον $\mathcal{L}$ πλήρη αλυσίδα) : Το σύνολο των τελεστών του ΣΤ1(Alg$\mathcal{L}$) με νόρμα το πολύ ένα, είναι ΙΤΤ-πυκνό στο σύνολο των τελεστών του Alg$\mathcal{L}$ που έχουν νόρμα ένα. Οι Λάμπρου-Longstaff στο [28, Θεώρημα 4.1] και οι Αργυρός-Λάμπρου-Longstaff στο [3, Θεωρήμα 4.6] (που βασίζεται στο Θεώρημα 4.5 του Harrison στο ίδιο άρθρο) έχουν αποδείξει όμοιο αποτέλεσμα (ο χώρος είναι διαχωρίσιμος Hilbert) στην περίπτωση που ο σύνδεσμος είναι Boolean με δύο άτομα. Σε χώρους με νόρμα (ακόμα και Banach), τα δύο προηγούμενα αποτελέσματα δεν γενικεύονται. Πράγματι, αρκεί ο χώρος να μην έχει την boundend approximation property (βλ. π.χ. [33, Ορισμός 1.e.11 σελ. 37, παράδειγμα 1.e.20 σελ. 42]). Έτσι μπορεί να τεθεί ένα καινούριο πρόβλημα προσθέτοντας την υπόθεση ότι ο χώρος έχει την boundend approximation property. Και σ' αυτή την περίπτωση όμως η απάντηση είναι αρνητική, όπως απέδειξε ο Μιχ. Λάμπρου. Στο παράδειγμά του ο σύνδεσμος είναι πλήρης αλυσίδα.

Πριν προχωρήσουμε θα δώσουμε έναν ορισμό που αναλύει περισσότερο την ΙΤΤ. Έστω $n \in \mathbb{N}$. Θα λέμε ότι ένας $T \in$ Alg$\mathcal{L}$ έχει την n-πυκνότητα (n-density) αν για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε A υποσύνολο του $\mathcal{X}$ με το πολύ n στοιχεία, υπάρχει $S \in$ ΣΤ1(Alg$\mathcal{L}$) τέτοιος ώστε $(\forall x \in A) \ \| Tx - Sx \| < \varepsilon$. Θα λέμε ότι ο σύνδεσμος $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ έχει την n-πυκνότητα αν κάθε τελεστής τού Alg$\mathcal{L}$ την έχει. Προφανώς ένας $T \in$ Alg$\mathcal{L}$ ανήκει στην ΙΤΤ-κλειστότητα του ΣΤ1(Alg$\mathcal{L}$) αν και μόνο αν έχει την n-πυκνότητα για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Ο Longstaff στο [35, Θεώρημα 3.1] απέδειξε ότι αν η ΙΤΤ-κλειστότητα του ΣΤ1(Alg$\mathcal{L}$) είναι η Alg$\mathcal{L}$, τότε ο $\mathcal{L}$ είναι πλήρως επιμεριστικός. Ο Μιχ. Λάμπρου στο [24] κατ' αρχήν παρατήρησε ότι στην προηγούμενη απόδειξη του Longstaff η υπόθεση της ΙΤΤ-κλειστότητας μπορεί να εξασθενησθεί σε 1-πυκνότητα για τον $\mathcal{L}$ (συνθήκη A στο [24]) και μετά απέδειξε (Θεώρημα 3.1) την αντίστροφη κατεύθυνση. Έτσι αποδείχτηκε ότι ο $\mathcal{L}$ έχει την 1-πυκνότητα αν και μόνο αν είναι πλήρως επιμεριστικός.

Άλλα αποτελέσματα προς θετική απάντηση στην ΙΤΤ(*), με υποθέσεις στα προς προσέγγιση σημεία και στους συνδέσμους, υπάρχουν στο [3, Θεωρήματα 3.4, 3.5]. Επίσης στο [28, Θεώρημα 4.3] οι Λάμπρου-Longstaff δίνουν μια οικογένεια Boolean συνδέσμων που απαντούν θετικά στην ΙΤΤ(*).

Επίσης οι Laurie-Longstaff στο [32, Θεώρημα 3] έδωσαν καταφατική απάντηση στην (*) στην περίπτωση που ο $\mathcal{X}$ είναι διαχωρίσιμος χώρος Hilbert, ο $\mathcal{L}$ είναι μεταθετικός πλήρως επιμεριστικός σύνδεσμος και η τοπολογία είναι οποιαδήποτε από τις ΙΤΤ ή ultrastrong ή weak ή ultraweak (βλ. [4, σελ. 172, 173, 297, 299] για ορισμούς).

Οι Αργυρός-Λάμπρου-Longstaff στο [3, Addendum], βασιζόμενοι σε ένα πρόσφατο άρθρο των Larson-Wogen ([31]) δίνουν το πρώτο παράδειγμα συνδέσμου χωρίς την 2-πυκνότητα. Ο σύνδεσμος είναι Boolean με απειροδιάστατο πλήθος μονοδιάστατων ατόμων (ειδικότερα έχει την 1-πυκνότητα), σε απειροδιάστατο διαχωρίσιμο χώρο Hilbert. Προηγουμένως οι Crone-Fleming-Jessup στο [6] είχαν δώσει ένα παράδειγμα όμοιου συνδέσμου (σε διαχωρίσιμο χώρο Banach) χωρίς ακολουθιακή ΙΤΤ-σύγκλιση (βλ. και [3, σελ. 51]).

Επίσης στο [20] οι Κατάβολος-Λάμπρου-Παπαδάκης γενικεύουν το παράδειγμα Larson-Wogen κατασκευάζοντας μια οικογένεια τέτοιων συνδέσμων και μάλιστα δίνουν χαρακτηρισμό (Θεώρημα 2.2), εκείνων που δεν έχουν την 2-πυκνότητα. Ο Μιχ. Λάμπρου βασιζόμενος στην προηγούμενη οικογένεια έδωσε παράδειγμα ενός Boolean συνδέσμου με τέσσερα μόλις άτομα και χωρίς την 2-πυκνότητα.

Έχοντας αποδείξει οι Αργυρός-Λάμπρου-Longstaff στο [3, Θεώρημα 3.1] ότι κάθε σύνδεσμος Boolean με δύο άτομα (σε χώρο Banach) απαντάει θετικά στην ΙΤΤ(*), το μόνο ανοικτό πρόβλημα που έμενε σ' αυτή την κατεύθυνση είναι τι γίνεται στην περίπτωση του Boolean συνδέσμου με τρία άτομα. Για έναν τέτοιο σύνδεσμο στο τμήμα Γ παρακάτω δίνουμε μια ικανή και αναγκαία συνθήκη (σε χώρο Hilbert) για 2-πυκνότητα, καθώς και μια (άλλη) ικανή συνθήκη για τον ίδιο λόγο. Στο τμήμα Δ δίνουμε αρνητική απάντηση στην ΙΤΤ(*) κατασκευάζοντας μια αναπαράσταση αυτού του συνδέσμου, χωρίς την 2-πυκνότητα (βασιζόμενοι πάλι στην προηγούμενη οικογένεια). Το τμήμα αυτό (Δ), έχει προέλθει από συνεργασία με τον Μιχ. Λάμπρου.

Εφόσον η ultraweak τοπολογία τελεστών (ή w*) ταυτίζεται σε κυρτά και φραγμένα σύνολα με την ΙΤΤ, στις περιπτώσεις που αναφέραμε προηγουμένως ότι έχουμε ΙΤΤ-πυκνότητα της μοναδιαίας σφαίρας ([12], [28], [3]), αυτομάτως έχουμε θετική απάντηση στην (*) με την ultraweak τοπολογία. Στην περίπτωση της Boolean με δύο άτομα, ο Μ. Παπαδάκης ([36]) κατέληξε ανεξάρτητα στο ίδιο αποτέλεσμα.

Στο κεφάλαιο 3 είχαμε χαρακτηρίσει εκείνους τους τελεστές του ΠΤ(Alg$\mathcal{L}_3$) που δεν είχαν την ΙΠΤ. Εδώ, στο τμήμα Ε αποδεικνύουμε ότι όλοι αυτοί οι τελεστές ανήκουν στην ΙΤΤ-κλειστότητα του ΣΤ1(Alg$\mathcal{L}_3$).

B

Πρίν προχωρήσουμε στη διατύπωση του πρώτου θεωρήματος αυτού του κεφαλαίου θα μελετήσουμε λίγο περισσότερο το ερώτημα ΙΤΤ(*) και τον ορισμό της ΙΤΤ. Κατ' αρχήν είναι εύκολο να δούμε ότι το ΙΤΤ(*) παραμένει ισοδύναμο αν αντικαταστήσουμε τον τυχαίο $T \in$ Alg$\mathcal{L}$ με τον ταυτοτικό τελεστή. Πραγματικά, έστω $0 \neq T \in$ Alg$\mathcal{L}$, $\varepsilon > 0$ και A πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathcal{X}$ και ας υποθέσουμε ότι υπάρχει $S \in$ ΣΤ1(Alg$\mathcal{L}$) τέτοιος ώστε

$$\| x - Sx \| < \frac{\varepsilon}{\|T\|} \quad \forall x \in A.$$

Τότε ισχύει $\| Tx - (TS)x \| < \varepsilon \ \forall x \in A$. Αφού το ΣΤ1(Alg$\mathcal{L}$) είναι ιδεώδες στον Alg$\mathcal{L}$ (γινόμενο τελεστή του Alg$\mathcal{L}$ με τελεστή του ΣΤ1(Alg$\mathcal{L}$) δίνει στοιχείο του ΣΤ1(Alg$\mathcal{L}$)) το ζητούμενο ακολουθεί.

Εύκολα επίσης διαπιστώνουμε ότι αν μπορούμε να προσεγγίσουμε τον ταυτοτικό σε κάποια σημεία, τότε μπορούμε να τον προσεγγίσουμε και σε οποιοδήποτε γραμμικό συνδιασμό τους. Ειδικότερα, αρκεί η προσέγγιση να γίνεται σε γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα.

Το επόμενο θεώρημα γενικεύει το Θεώρημα 2 του [12] (Erdos), από χώρο Hilbert σε χώρο με νόρμα καθώς επίσης βελτιώνει και την τάξη των προσεγγιζόντων τελεστών (που στην περίπτωση μας είναι ουσιαστικά η καλύτερη δυνατή).

<u>**Θεώρημα 5.1.**</u> *Έστω $(\mathcal{X},\|\cdot\|)$ ένας χώρος με νόρμα και $\mathcal{L}$ μια πλήρης αλυσίδα υποχώρων τού $\mathcal{X}$. Τότε η κλειστότητα, στην ισχυρή τοπολογία τελεστών, του συνόλου* $\Sigma T1(\mathrm{Alg}\mathcal{L})$ $(=\Pi T(\mathrm{Alg}\mathcal{L}))$ *είναι το* $\mathrm{Alg}\mathcal{L}$.

Απόδειξη. Έστω $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq \mathcal{X}$ γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο. Από το Λήμμα 2.2, εφαρμοσμένο στον $W = <x_1, \dots, x_n>$, υπάρχουν $m \in \mathbb{N}$, $\{n_i : i = 1, \dots, m\} \subseteq \mathbb{N}$, $\{w_{i,j} : i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n_i\} \subseteq <x_1, \dots, x_n>$ και $\{N_i : i = 1, \dots, m\} \subseteq \mathcal{L}$, που ικανοποιούν τα συμπεράσματα του λήμματος. Είναι αρκετό να αποδείξουμε ότι για $\varepsilon>0$ υπάρχει ένας τελεστής πεπερασμένης τάξης του $\mathrm{Alg}\mathcal{L}$, ας τον σημειώσουμε με R, τέτοιος ώστε

$$\| w_{i,j} - R w_{i,j} \| < \varepsilon \qquad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n_i.$$

Θα βρούμε έναν R της μορφής

$$R = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} x^*_{i,j} \otimes y_{i,j}$$

όπου για $i \in \{1, \dots, m\}$ και $j \in \{1, \dots, n_i\}$ θα έχουμε $x^*_{i,j} \otimes y_{i,j} \in \mathrm{Alg}\mathcal{L}$, $\| w_{i,j} - (x^*_{i,j} \otimes y_{i,j})w_{i,j} \| < \varepsilon$ και $(x^*_{i,j} \otimes y_{i,j})w_{k,t} = 0$ αν $k \neq i$ ή $t \neq j$.

Έστω $i_0 \in \{1, \dots, m\}$, $j_0 \in \{1, \dots, n_{i_0}\}$. Υπάρχει ακολουθία $L_k \in \mathcal{L}$ $k=1,2,\dots$ με $L_{k-} \subset N_{i_0}$ και τέτοια ώστε να υπάρχουν επίσης $z_k \in L_k$ με $\lim z_k = w_{i_0,j_0}$.

(Αυτό συμβαίνει επειδή αν $N_{i_0-} \subset N_{i_0}$ μπορούμε να πάρουμε $L_k = N_{i_0}$ και $z_k = w_{i_0 j_0}$.

Διαφορετικά είναι $N_{i_0} = N_{i_0-} = \vee\{L : L \in \mathcal{L}$ και $L \subset N_{i_0}\}$ και ο ισχυρισμός έπεται).

Κάθε στοιχείο του $L_{k-} \vee < w_{i,j} : i = i_o, i_o+1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n_i >$ μπορεί να γραφεί μοναδικά στην μορφή

$$y + \sum_{i=i_o}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} \lambda_{i,j} w_{i,j} \quad (\text{με } y \in L_{k-} \text{ και } \lambda_{i,j} \in \mathbb{C}).$$

Πράγματι, αν $y + \sum_{i=i_o}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} \lambda_{i,j} w_{i,j} = 0$ (με $y \in L_{k-}$), τότε $\sum_{i=i_o}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} \lambda_{i,j} w_{i,j} = -y \in L_{k-} \subset N_{i_o}$.

Αλλά $\sum_{i=i_o}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} \lambda_{i,j} w_{i,j} \in W_{i_o}$, και έτσι (Λήμμα 2.2.iii)) $\sum_{i=i_o}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} \lambda_{i,j} w_{i,j} = 0$

που αποδεικνύει τον ισχυρισμό. Ορίζουμε

τώρα x_k^* $k = 1,2,\ldots$ (απεικονίσεις) με $x_k^*(y + \sum_{i=i_o}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} \lambda_{i,j} w_{i,j}) = \lambda_{i_o,j_o}$ (για $y \in L_{k-}$)

και τις επεκτείνουμε από το Θεώρημα Hahn-Banach σε όλο τον $\mathcal{X}$ (έτσι ώστε $x_k^* \in \mathcal{X}^*$).

Από το Λήμμα 1.3, $x_k^* \otimes z_k$ ανήκει στο Alg$\mathcal{L}$. Επίσης $(x_k^* \otimes z_k)w_{i_o,j_o} = z_k$ και

$(x_k^* \otimes z_k)w_{i,j} = 0 \qquad i = i_0, \ldots, m \ , j = 1, \ldots, n_i, i \neq i_0$ ή $j \neq j_0$. Επιπλέον, τελικά για

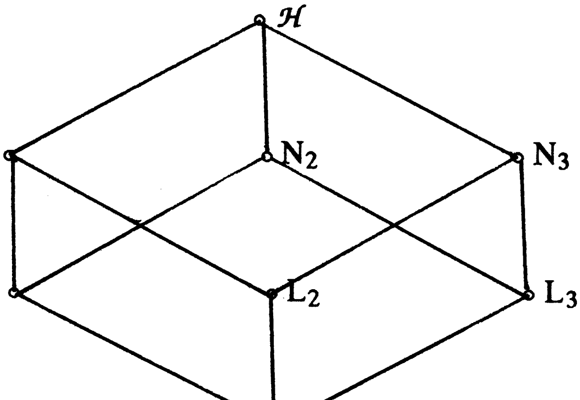
όλα τα k, έχουμε $N_{i_o-1} \subseteq L_{k-} \subset N_{i_o}$, γιατί αλλοιώς θα υπήρχε υποακολουθία $\{L_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$

τέτοια ώστε $L_{k_n} \subset N_{i_o-1}$ και, αφού $\lim z_k = w_{i_o,j_o}$, θα είχαμε $w_{i_o,j_o} \in N_{i_o-1}$, μια αντίφαση (Λήμμα 2.2.iii) και iv)). Έτσι, τελικά για όλα τα k, είναι

$$(x_k^* \otimes z_k)w_{i,j} = 0 \qquad i = 1, \ldots, i_0-1 \ , j = 1, \ldots, n_i.$$

Διαλέγουμε τώρα k_o τόσο μεγάλο ώστε να ικανοποιοείται η προηγούμενη συνθήκη και επιπλέον να έχουμε $\| w_{i_o,j_o} - z_{k_o} \| < \varepsilon$. Ορίζουμε τέλος $x_{i_o,j_o}^* = x_{k_o}^*$, $y_{i_o,j_o} = z_{k_o}$ και έχουμε τελειώσει. ■

Γ



σχήμα 5.1

Σ' αυτό το τμήμα θα δώσουμε ένα χαρακτηρισμό (σε χώρο Hilbert) και μια ικανή συνθήκη για να έχουμε 2-πυκνότητα σε σύνδεσμο Boolean με τρία άτομα. Σε όλο αυτό το τμήμα με $\mathcal{H}$ θα συμβολίζουμε ένα τυχαίο χώρο Hilbert και με $\mathcal{L}$ τυχαία αναπαράσταση (εκτός αν δηλώνεται ή υπονοείται διαφορετικά) του συνδέσμου Boolean με τρία άτομα, από υποχώρους τού $\mathcal{H}$ (Βλ. σχ. 5.1 για την ονομασία των στοιχείων του $\mathcal{L}$).

Θα δώσουμε πρώτα μερικούς ορισμούς. Με I θα συμβολίζουμε τον ταυτοτικό τελεστή του $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ και με P_L την (ορθογώνια) προβολή επί του $L \in \mathcal{L}$. Επίσης ορίζουμε για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$$A_n = \{x \in N_1 : \| (I - P_{L_2})x \| < \frac{1}{n}\},$$

$$B_n = \{x \in N_2 : \| (I - P_{L_3})x \| < \frac{1}{n}\}.$$

Το επόμενο θεώρημα δίνει ένα χαρακτηρισμό της 2-πυκνότητας του $\mathcal{L}$.

<u>**Θεώρημα 5.2.**</u> *Τα επόμενα είναι ισοδύναμα*

(i) *Ο* $\mathcal{L}$ *έχει την* 2-πυκνότητα,

(ii) $N_3 \cap (N_1 + N_2) \subseteq \cap \{A_n + B_n : n = 1,2,\ldots\}$.

Απόδειξη. (i) $\Rightarrow$ (ii). Έστω $x + y \in N_3$ με $x \in N_1$, $y \in N_2$ και $n \in \mathbb{N}$. Από την υπόθεση υπάρχει $R \in \Sigma T1(\mathrm{Alg}\mathcal{L})$ τέτοιος ώστε $\|x - Rx\| < \frac{1}{n}$ και $\|y - Ry\| < \frac{1}{n}$.

Χρησιμοποιώντας την ανάλυση του R σε άθροισμα από τάξης ένα τελεστές του $\mathrm{Alg}\mathcal{L}$, βρίσκουμε $R_j \in \mathrm{Alg}\mathcal{L}$ με $\mathcal{R}(R_j) \subseteq L_j$ και $\mathrm{rank}R_j < +\infty$ $j = 1,2,3$ τέτοιους ώστε $R = R_1 + R_2 + R_3$ και $R_1(N_3) = R_2(N_2) = R_3(N_1) = 0$. Έχουμε

$$\begin{aligned} x + y &= (x - Rx) + (y - Ry) + R(x + y) = \\ &= (x - R_1x - R_2x) + (y - R_1y - R_3y) + R_2(x + y) + R_3(x + y) = \\ &= \{x - R_1x - R_2x + R_2(x + y)\} + \{y - R_1y - R_3y + R_3(x + y)\}. \end{aligned}$$

Όμως $x - R_1x - R_2x + R_2(x + y) \in N_1$ και $\| (I - P_{L_2}) (x - R_1x - R_2x + R_2(x + y)) \| =$

$= \| (I - P_{L_2})(x - R_1x - R_2x) \| = \| (I - P_{L_2})(x - Rx) \| < \frac{1}{n}$, οπότε

$$x - R_1x - R_2x + R_2(x + y) \in A_n.$$

Όμοια $y - R_1y - R_3y + R_3(x + y) \in B_n$ και έτσι $x + y \in A_n + B_n$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Έστω $\{ x, y \} \subseteq \mathcal{H}$ γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο.

Εφαρμόζουμε το Λήμμα 3.3 για $W = \langle x, y \rangle$ και βρίσκουμε $m \in \mathbb{N}$, $\{M_j : j = 1,...,m\} \subseteq \mathcal{L}$ και $\{W_{M_j} : j = 1,...,m\} \subseteq \langle x, y \rangle \cap M_j$ που ικανοποιούν τα συμπεράσματα του λήμματος. Ας εξετάσουμε την περίπτωση $m = 1$ με $M_1 = \mathcal{H}$. Έστω $\varepsilon > 0$. Για $j = 1,2,3$ υπάρχουν προφανώς $x_j, y_j \in L_j$ τέτοια ώστε $\| x - x_1 - x_2 - x_3 \| < \varepsilon$ και $\| y - y_1 - y_2 - y_3 \| < \varepsilon$. Υπάρχουν επίσης (βλ. Λήμμα 3.3.(2)) $x_j^* \in \mathcal{H}$ τέτοια ώστε $x_j^*(x) = 1$, $x_j^*(y) = 0$ και $x_1^*(N_3) = x_2^*(N_2) = x_3^*(N_1) = 0$. Ο τελεστής

$$R_1 = x_1^* \otimes x_1 + x_2^* \otimes x_2 + x_3^* \otimes x_3 \in \Sigma T1(\mathrm{Alg}\mathcal{L})$$

και επίσης ικανοποιεί $R_1(x) = x_1 + x_2 + x_3$ και $R_1(y) = 0$. Ορίζουμε όμοια τελεστή $R_2 \in \Sigma T1(\mathrm{Alg}\mathcal{L})$ με $R_2(x) = 0$ και $R_2(y) = y_1 + y_2 + y_3$. Προφανώς ο τελεστής $R_1 + R_2$ προσεγγίζει τα x και y ταυτόχρονα. Όμοια εξετάζουμε τις υπόλοιπες περιπτώσεις για $m = 1$ ή 2.

Έστω $m \geq 3$. Αποδεικνύουμε χρησιμοποιώντας το Λήμμα 3.3, πρώτα ότι για $j = 1,2,...,m$ είναι $\dim W_{M_j} = 1$ και μετά ότι τα M_j δεν συγκρίνονται μεταξύ τους ανά δύο. Από αυτά συμπεραίνουμε ότι $m = 3$. Εφόσον το σύνολο $\{M_j : j = 1,2,3\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο, αναγκαστικά είναι $\{M_j : j = 1,2,3\} = \{N_j : j = 1,2,3\}$.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $M_j = N_j$ $j = 1,2,3$, $W_{N_1} = \langle x \rangle$, $W_{N_2} = \langle y \rangle$ και $W_{N_3} = \langle x + y \rangle$ (βλ. την συζήτηση στην αρχή του Β). Επομένως $x + y \in N_3 \cap (N_1 + N_2)$. Έστω $n \in \mathbb{N}$. Από την υπόθεση προκύπτει ότι $x + y \in A_n + B_n$. Υπάρχουν λοιπόν $z \in A_n$ και $w \in B_n$ τέτοια ώστε $x + y = z + w$. Αφού $x - z = w - y \in N_1 \cap N_2 = L_1$, υπάρχει $t_1 \in L_1$ με $z = x - t_1$ και $w = y + t_1$.

Αφού $z \in A_n$ έχουμε $\| (I - P_{L_2})(x - t_1) \| < \frac{1}{n}$, άρα $\| x - t_1 - P_{L_2}(x - t_1) \| < \frac{1}{n}$.

Όμοια πέρνουμε $\| y + t_1 - P_{L_3}(y + t_1) \| < \frac{1}{n}$.

Υπάρχουν $f_j^* \in \mathcal{H}$ j=1,2,3 τέτοια ώστε $f_1^*(x) = 1$, $f_1^*(N_3)=0$, $f_2^*(x)=1$, $f_2^*(N_2)=0$, $f_3^*(y)=1$ και $f_3^*(N_1)=0$ (βλ. Λήμμα 3.3). Αφού $x + y \in N_3$ είναι $f_1^*(x + y)=0$. Άρα $f_1^*(y) = -1$. Ορίζουμε

$$R = f_1^* \otimes t_1 + f_2^* \otimes P_{L_2}(x - t_1) + f_3^* \otimes P_{L_3}(y + t_1) \in \Sigma T1(\mathrm{Alg}\mathcal{L})$$

και έχουμε $\| x - Rx \| = \| x - t_1 - P_{L_2}(x - t_1) \| < \frac{1}{n}$ και $\| y - Ry \| = \| y + t_1 - P_{L_3}(y + t_1) \| <$ $< \frac{1}{n}$. ■

Παρατήρηση 1. Το προηγούμενο θεώρημα εξακολουθεί να ισχύει αν το "$\subseteq$" στην (ii) αντικατασταθεί με ισότητα.

Πράγματι, θα αποδείξουμε ότι πάντοτε ισχύει

$$\cap \{A_n + B_n : n = 1,2,\ldots\} \subseteq N_3 \cap (N_1 + N_2).$$

Έστω $u \in \cap \{A_n + B_n : n = 1,2,\ldots\}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχουν λοιπόν $x_n \in A_n$ και $y_n \in B_n$ τέτοια ώστε $u = x_n + y_n$. Άρα $x_n + y_n = x_1 + y_1$, οπότε $x_n - x_1 = = y_1 - y_n \in N_1 \cap N_2 = L_1$. Ορίζουμε $t_n = x_n - x_1 = y_1 - y_n$ οπότε $x_n = x_1 + t_n$ και $y_n = y_1 - t_n$. Αφού $x_n \in A_n$, έχουμε ότι $(I - P_{L_2})x_n \to 0$. Άρα $(I - P_{L_2})(x_1 + t_n) \to 0$ και επομένως $(I - P_{L_2})t_n \to -(I - P_{L_2})x_1$. Όμοια $(I - P_{L_3})t_n \to (I - P_{L_3})y_1$. Επομένως $P_{L_2}t_n - P_{L_3}t_n = (I - P_{L_3})t_n - (I - P_{L_2})t_n \to (I - P_{L_3})y_1 + (I - P_{L_2})x_1$ απ' όπου πέρνουμε ότι $(I - P_{L_3})y_1 + (I - P_{L_2})x_1 \in \overline{L_2 + L_3} = N_3$. Άρα

$$u = x_1 + y_1 \in N_3 \cap (N_1 + N_2). \ ■$$

Παρατήρηση 2. Αν $L_2 + L_3 = N_3$ τότε $N_3 \cap (N_1 + N_2) = L_2 + L_3 \subseteq$ $\subseteq \cap \{A_n + B_n : n = 1,2,\ldots\}$. ■

<u>**Λήμμα 5.1.**</u> *Αν* N_1+N_2 *είναι κλειστό, τότε*

$$(N_3 =)\ N_3 \cap (N_1+N_2) \subseteq \cap\, \{A_n + B_n : n = 1,2,...\}.$$

Απόδειξη. (Με $B[Y, x, \alpha]$ θα συμβολίζουμε την ανοικτή μπάλα με κέντρο το x και ακτίνα α, αποτελούμενη από στοιχεία του συνόλου Y). Έστω $n \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε την απεικόνιση

$$T : N_2 \rightarrow (I - P_{N_1})N_2 \ \text{ με } \ Tx = (I - P_{N_1})x, \quad x \in N_2.$$

Αφού N_1+N_2 κλειστός, επίσης είναι κλειστός ο $(I - P_{N_1})N_2$. (Μάλιστα ισχύει και το αντίστροφο). Έτσι από το Θεώρημα ανοικτής απεικόνισης, η T είναι ανοικτή, οπότε το σύνολο $(I - P_{N_1})B[N_2, 0, \frac{1}{4n}]$ είναι ανοικτό στον $(I - P_{N_1})N_2$. Υπάρχει λοιπόν $\varrho_n>0$ τέτοιο ώστε

$$B[(I - P_{N_1})N_2, 0, \varrho_n] \subseteq (I - P_{N_1})\, B[N_2, 0, \tfrac{1}{4n}].$$

Υπάρχει επίσης $m \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\frac{1}{m} < \varrho_n$ και $m > n$. Προφανώς $L_2 + L_3 \subseteq$ $\subseteq A_{4m}+B_{4m}$. Έτσι $N_3 = \overline{L_2 + L_3} \subseteq \overline{A_{4m}+B_{4m}}$. Έστω $x + y \in N_3$ με $x \in N_1$ και $y \in N_2$. Υπάρχουν επομένως $z \in A_{4m}$ και $w \in B_{4m}$ τέτοια ώστε $\|(x + y) - (z + w)\| <$ $< \frac{1}{4m}$. Άρα $\|(x - z) + (y - w)\| < \frac{1}{4m}$, επομένως $\|(I - P_{N_1})(y - w)\| < \frac{1}{4m} < \varrho_n$.

Αλλά $y - w \in N_2$ και έτσι $(I - P_{N_1})(y - w) \in (I - P_{N_1})N_2$, δηλ.

$$(I - P_{N_1})(y - w) \in B[(I - P_{N_1})N_2, 0, \varrho_n] \subseteq (I - P_{N_1})\, B[N_2, 0, \tfrac{1}{4n}].$$

Υπάρχει επομένως $u \in N_2$ με $\|u\| < \frac{1}{4n}$ και $(I - P_{N_1})(y - w) = (I - P_{N_1})u$. Άρα $(I - P_{N_1})(y - w - u) = 0$ και $y - w - u \in N_1 \cap N_2 = L_1$. Έστω $t = y - w - u$. Έχουμε $x + y = (x + y - z - w) + (z + w)$ και $\|x + y - z - w\| = \|(x - z + t) + (y - w - t)\| < \frac{1}{4m}$.

Είναι $y - w - t = u \in N_2$ και $\| y - w - t \| = \|u\| < \frac{1}{4n}$. Άρα $\| x - z + t \| < \frac{1}{4m} + \frac{1}{4n} < \frac{1}{2n}$,

δηλ. $x - z + t \in A_{2n}$ και επιπλέον $x + y - z - w = (x - z + t) + (y - w - t) \in A_{2n} + B_{2n}$.

Τελικά έχουμε $x + y = (x + y - z - w) + (z + w) \in A_n + B_n$. ■

Παρατήρηση. Στην απόδειξη του προηγουμένου λήμματος, χρησιμοποιήσαμε την υπόθεση $N_1 + N_2$ κλειστός, μόνο για να συμπεράνουμε ότι η απεικόνιση $T : N_2 \to (I - P_{N_1})N_2$ με $Tx = (I - P_{N_1})x \quad x \in N_2$ είναι ανοικτή. Έτσι θα περίμενε ίσως κανείς ότι η υπόθεση αυτή θα μπορούσε να αντικατασταθεί από την ασθενέστερη, T ανοικτή. Αυτό όμως είναι φαινομενικό, αφού μπορούμε να αποδείξουμε ότι :

Η απεικόνιση T είναι ανοικτή αν και μόνο αν $N_1 + N_2$ κλειστός.

Πραγματικά, αν $N_1 + N_2$ κλειστός, τότε από το Θεώρημα ανοικτής απεικόνισης, η T είναι ανοικτή. Έστω τώρα ότι η T είναι ανοικτή. Υπάρχουν λοιπόν $\varrho_n > 0$ τέτοια ώστε

$$B[(I - P_{N_1})N_2, 0, \varrho_n] \subseteq (I - P_{N_1})\, B[N_2, 0, \frac{1}{2^n}].$$

Υποθέτουμε επίσης ότι για κάποια ακολουθία $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in N_2$, υπάρχει $y \in \mathcal{H}$ ώστε να ισχύει $(I - P_{N_1})x_n \to y$. Θα αποδείξουμε ότι $y \in (I - P_{N_1})N_2$. Αφού η $\{(I - P_{N_1})x_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι Cauchy, υπάρχει υποακολουθία της, χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι είναι η ίδια η $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, τέτοια ώστε

$$\| (I - P_{N_1})(x_n - x_{n+1}) \| < \varrho_n.$$

Επομένως υπάρχει $\{w_n\}_{n=1}^{\infty} \in N_2$ με $\|w_n\| < \frac{1}{2^n}$ τέτοια ώστε $(I - P_{N_1})(x_n - x_{n+1}) =$

$= (I - P_{N_1})w_n$. Επομένως $(I - P_{N_1})(x_n - x_{n+1} - w_n) = 0$. Ορίζουμε $t_n = x_n - x_{n+1} - w_n \in N_1 \cap N_2 = L_1$. Έχουμε $x_n - x_{n+1} = w_n + t_n$. Προσθέτοντας

τις τελευταίες εξισώσεις από 1 μέχρι K-1 (όπου $K \in \mathbb{N}$), πέρνουμε $x_1 - x_K =$
$= w_1 + ... + w_{K-1} + t_1 + ... + t_{K-1}$ και αμέσως ότι $x_1 - x_K - (t_1 + ... + t_{K-1}) =$
$= w_1 + ... + w_{K-1}$. Έτσι

$$\| x_K + (t_1 + ... + t_{K-1}) \| \leq \| x_1 \| + \sum_{n=1}^{K-1} \frac{1}{2^n} \leq \| x_1 \| + 1.$$

Επομένως υπάρχει υποδίκτυο $\{x_{K_\lambda} + (t_1 + ... + t_{K_\lambda - 1})\}_{\lambda \in \Lambda}$ της $\{x_K + (t_1 + ... + t_{K-1})\}_{K=1}^{\infty}$

και $x_0 \in N_2$ τέτοια ώστε $\{x_{K_\lambda} + (t_1 + ... + t_{K_\lambda - 1})\}_{\lambda \in \Lambda} \to x_0$ στην ασθενή τοπολογία.

Ειδικότερα έχουμε

$$\{\langle x_{K_\lambda} + (t_1 + ... + t_{K_\lambda - 1}), (I - P_{N_1})z \rangle\}_{\lambda \in \Lambda} \to \langle x_0, (I - P_{N_1})z \rangle \ \forall z \in \mathcal{H}$$

Επομένως $\{\langle (I - P_{N_1})x_{K_\lambda}, z \rangle\}_{\lambda \in \Lambda} \to \langle (I - P_{N_1})x_0, z \rangle \ \forall z \in \mathcal{H}$. Αυτό σημαίνει ότι

$\{(I - P_{N_1})x_{K_\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda} \to (I - P_{N_1})x_0$ στην ασθενή τοπολογία. Εφόσον

$(I - P_{N_1})x_n \to y$, έχουμε ότι $y = (I - P_{N_1})x_0 \in (I - P_{N_1})N_2$. ■

Η απόδειξη του επόμενου θεωρήματος είναι προφανής από τα προηγούμενα. Στην περίπτωση που το άθροισμα όλων των ατόμων είναι κλειστό, αυτό έχει ήδη αποδειχτεί από τους Αργυρό-Λάμπρου-Longstaff στο [3, Θεώρημα 3.5].

Θεώρημα 5.3. *Αν* $N_1 + N_2 = \mathcal{H}$ *ή* $N_2 + N_3 = \mathcal{H}$ *ή* $N_1 + N_3 = \mathcal{H}$, *τότε ο* $\mathcal{L}$ *έχει την* 2-πυκνότητα. ■

Παρατήρηση 1. Θα δώσουμε τώρα ένα παράδειγμα ενός συνδέσμου που ικανοποιεί τις υποθέσεις (και άρα και το συμπέρασμα) του προηγουμένου θεωρήματος. Το σημαντικό χαρακτηριστικό του είναι ότι δεν μπορεί να εφαρμοστεί το Θεώρημα 3.5 του [3] ούτε κατευθείαν στον ίδιο τον σύνδεσμο, ούτε μέσω τού συνδέσμου που αποτελείται από τα κάθετα στοιχεία του αρχικού. Θα χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό του 2.Γ. Ορίζουμε στον $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$

$$L_1 = \{(x, 0) : x \in \mathcal{H}\},$$

$$L_2 = \{(x, Ax) : x \in \langle e_{2n} : n \in \mathbb{N}\rangle\},$$

$$L_3 = \{(x, Ax) : x \in \langle e_{2n-1} : n \in \mathbb{N}\rangle\}.$$

Εύκολα ελέγχουμε (χρησιμοποιώντας π.χ. το [3, Θεώρημα 2.4]) ότι τα L_1, L_2, L_3 είναι άτομα ενός συνδέσμου Boolean και ότι το $N_1 + N_2$ γι' αυτό το σύνδεσμο είναι κλειστό. ■

Παρατήρηση 2. Η υπόθεση του θεωρήματος δεν είναι αναγκαία. Πράγματι, αν ορίσουμε (με συμβολισμό 2.Γ) στον $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$,

$$L_1 = \{(x, 0, 0) : x \in \mathcal{H}\},$$

$$L_2 = \{(x, Ax, 0) : x \in \mathcal{H}\},$$

$$L_3 = \{(x, Ax, Ax) : x \in \mathcal{H}\},$$

τότε έχουμε μια Boolean που απαντά θετικά στην ΠΤ(*) (βλ. [3, Λήμμα 6.3] και [28, Θεώρημα 4.3]). Θεωρούμε την Boolean με συμπληρώματα ατόμων τα $L_1^{\perp}, L_2^{\perp}, L_3^{\perp}$ (βλ. [3, Θεώρημα 2.10]). Από το [3, Θεώρημα 3.3] και αυτή απαντά θετικά στην ΠΤ(*), αλλά όμως όπως μπορούμε να ελέγξουμε κανένα άθροισμα συμπληρωμάτων ατόμων αυτής της Boolean δεν είναι κλειστό. ■

Δ

(Το μέρος αυτό έχει προέλθει από συνεργασία με τον Μιχ. Σ. Λάμπρου). Θα δώσουμε ένα παράδειγμα ενός Boolean συνδέσμου με τρία άτομα που δεν έχει την δύο πυκνότητα.

Τόσο σ' αυτό, όσο και στο επόμενο τμήμα, θα χρησιμοποιήσουμε την έννοια του ίχνους (trace). Η έννοια αυτή μπορεί να οριστεί αρκετά γενικά και έχει μεγάλη σημασία (βλ. π.χ. [42], [41]), εν τούτοις εδώ θα περιοριστούμε σε ό,τι θα χρησιμοποιήσουμε άμεσα.

Έστω $\mathcal{X}$ ένας (πραγματικός ή μιγαδικός) χώρος με νόρμα και T ένας τελεστής πεπερασμένης τάξης του $\mathcal{B}(\mathcal{X})$. Ο T μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$T = \sum_{j=1}^{n} y_j^* \otimes x_j$$

(με $x_j \in \mathcal{X}$ και $y_j^* \in \mathcal{X}^*$). Ορίζουμε

$$\mathrm{tr}(T) = \sum_{j=1}^{n} y_j^*(x_j).$$

Είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι το προηγούμενο άθροισμα είναι ανεξάρτητο από τον τρόπο γραφής του T σε άθροισμα τελεστών τάξης ένα του $\mathcal{B}(\mathcal{X})$. Εύκολα επίσης ελέγχουμε ότι το tr είναι μια γραμμική απεικόνιση από το γραμμικό χώρο των τελεστών πεπερασμένης τάξης του $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ ($\Pi T(\mathcal{B}(\mathcal{X}))$) στο σώμα των πραγματικών ή μιγαδικών αριθμών. Ισχυριζόμαστε επίσης ότι αν $T, F \in \Pi T(\mathcal{B}(\mathcal{X}))$ τότε $\mathrm{tr}(TF) = \mathrm{tr}(FT)$. Πράγματι, κατ' αρχήν χρησιμοποιώντας την γραμμικότητα του tr παρατηρούμε ότι είναι αρκετό να αποδείξουμε την αναφερόμενη σχέση με την επιπλέον υπόθεση ότι οι τελεστές είναι τάξης ένα. Και αυτή η τελευταία ιδιότητα όμως ελέγχεται εύκολα.

Το επόμενο λήμμα δίνει ένα εύχρηστο τρόπο ελέγχου της n-πυκνότητας. Αν και είναι γνωστό, παραθέτουμε την απόδειξη για λόγους πληρότητας.

<u>**Λήμμα 5.2.**</u> *Έστω $T \in \mathrm{Alg}\mathcal{L}$. Τότε ο T έχει την n-πυκνότητα αν και μόνο αν κάθε $S \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ τάξης το πολύ n που ικανοποιεί*

$$(\forall R \in T1(\mathrm{Alg}\mathcal{L}))\ \ \mathrm{tr}(SR) = 0,$$

ικανοποιεί επίσης $\mathrm{tr}(ST) = 0$.

Απόδειξη. Έστω T έχει την n-πυκνότητα και $S \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ με $\mathrm{rank} S \leq n$ είναι τέτοιος ώστε $(\forall R \in T1(\mathrm{Alg}\mathcal{L}))$ $\mathrm{tr}(RS) = 0$. Ο S μπορεί να γραφεί στη μορφή $S = \sum_{i=1}^{n} y_i^* \otimes x_i$. Από την υπόθεση υπάρχει ακολουθία τελεστών $(F_k)_{k=1}^{\infty} \in \Sigma T1(\mathrm{Alg}\mathcal{L})$ τέτοια ώστε $F_k x_i \to T x_i$ $i=1,2,\dots,n$. Έχουμε λοιπόν

$$0 = \mathrm{tr}(F_k S) = \sum_{i=1}^{n} y_i^*(F_k x_i) \to \sum_{i=1}^{n} y_i^*(T x_i) = \mathrm{tr}(TS).$$

Αυτό δίνει $tr(ST) = 0$.

Αντίστροφα, έστω $x_1,\dots,x_n \in \mathcal{X}$. Θεωρούμε το ευθύ άθροισμα του $\mathcal{X}$ με τον εαυτό του, n φορές δηλ. τον $\mathcal{X} \oplus \dots \oplus \mathcal{X}$ με την $\|\,.\,\|_\infty$ νόρμα. Είναι αρκετό να αποδείξουμε ότι το διάνυσμα $\begin{pmatrix} Tx_1 \\ \vdots \\ Tx_n \end{pmatrix}$ ανήκει στην $\|\,.\,\|_\infty$-κλειστότητα του

$$Y = \{ \begin{pmatrix} Fx_1 \\ \vdots \\ Fx_n \end{pmatrix} : F \in \Sigma T1(\mathrm{Alg}\mathcal{L}) \}.$$

Έστω $y^* = (y_1^*,\dots,y_n^*) \in (\mathcal{X} \oplus \dots \oplus \mathcal{X})^*$ είναι τέτοιο ώστε $y^*(Y) = 0$. Αν αποδείξουμε ότι $y^*(\begin{pmatrix} Tx_1 \\ \vdots \\ Tx_n \end{pmatrix}) = 0$ θα έχουμε τελειώσει. Όμως $y^*(Y) = 0$ δίνει $(\forall\, F \in \Sigma T1(\mathrm{Alg}\mathcal{L}))\ \sum_{i=1}^{n} y_i^*(Fx_i) = 0$, που σημαίνει ότι $(\forall\, R \in T1(\mathrm{Alg}\mathcal{L}))\ tr(FR) = 0$.

Από την υπόθεση λοιπόν έχουμε $tr(ST) = 0$, δηλ. $\sum_{i=1}^{n} y_i^*(Tx_i) = 0$ ή $y^*(\begin{pmatrix} Tx_1 \\ \vdots \\ Tx_n \end{pmatrix}) = 0$. ■

Παρατήρηση. ([19, Λήμμα 2.1]). Η συνθήκη

$$(\forall\, R \in T1(\mathrm{Alg}\mathcal{L}))\ tr(SR) = 0$$

είναι ισοδύναμη με την

$$(\forall\, L \in \mathcal{L})\ S(L) \subseteq L_-.$$

Πράγματι, από το Λήμμα 1.3, οι $e^* \otimes f \in T1(\mathrm{Alg}\mathcal{L})$ είναι ακριβώς εκείνοι για τους οποίους υπάρχει $L \in \mathcal{L}$ τέτοιο ώστε $e^* \in (L_-)^\perp$ και $f \in L$. Είναι $tr(SR) = 0$ αν και μόνο αν $e^*(Sf) = 0$ αν και μόνο αν $Sf \in ((L_-)^\perp)_\perp = L_-$ αν και μόνο αν $S(L) \subseteq L_-$. ■

Η οικογένεια f_n που ορίζουμε παρακάτω, έχει εμφανιστεί και μελετηθεί στο

[20] των Κατάβολου-Λάμπρου-Παπαδάκη.

Έστω $\mathcal{H}$ διαχωρίσιμος (πραγματικός ή μιγαδικός) χώρος Hilbert και $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ μια ορθοκανονική βάση του. Έστω επίσης $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθίες πραγματικών αριθμών. Ορίζουμε

$$f_{2n} = e_{2n},$$

$$f_{2n-1} = -\beta_{n-1}e_{2n-2} + e_{2n-1} + \gamma_n e_{2n} \quad n=1,2,\ldots \text{ (με } \beta_0 = e_0 = 0\text{)},$$

και

$$f^*_{2n-1} = e_{2n-1},$$

$$f^*_{2n} = -\gamma_n e_{2n-1} + e_{2n} + \beta_n e_{2n+1} \quad n=1,2,\ldots.$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι η ακολουθία $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ παράγει τον $\mathcal{H}$ και ότι το σύστημα $\{f_n, f_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ είναι δισορθογώνιο. Ορίζουμε επίσης

$$L_1 = < f_{3n+1} : n=0,1,2,\ldots>,$$

$$L_2 = < f_{3n+2} : n=0,1,2,\ldots>,$$

$$L_3 = < f_{3n+3} : n=0,1,2,\ldots>.$$

__**Λήμμα 5.3.**__ *Τα L_1, L_2, L_3 είναι άτομα ενός Boolean συνδέσμου.*

Απόδειξη. Είναι αρκετό [3, Θεώρημα 2.4] να αποδείξουμε ότι $L_1 \cap L_2 = 0$, $L_1 \cap L_3 = 0$, $L_2 \cap L_3 = 0$, $(L_1 \vee L_2) \cap (L_1 \vee L_3) = L_1$, $(L_1 \vee L_2) \cap (L_2 \vee L_3) = L_2$, $(L_2 \vee L_3) \cap (L_1 \vee L_3) = L_3$.

Παρατηρούμε ότι η ακολουθία $\{f_{3n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μια ορθογώνια βάση για τον L_1 και αντίστοιχα ισχύουν για τα L_2, L_3. Έστω $x \in L_1 \cap L_2$. Τότε υπάρχουν κατάλληλα

$\lambda_\kappa, \mu_\kappa \in \mathbb{C}$ τέτοια ώστε

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{3n+1} f_{3n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_{3n+2} f_{3n+2}.$$

Πέρνοντας τις τιμές των f^{*}_{3k+1} k=0,1,2,... στα δύο τελευταία μέλη της προηγούμενης ισότητας, βρίσκουμε ότι $\lambda_{3k+1} = 0$ k=0,1,2,... και επομένως $x = 0$. Όμοια $L_1 \cap L_3 = = L_2 \cap L_3 = 0$. Είναι

$$L_1 \vee L_2 = \langle f_{3n+1}, f_{3n+2} : n=0,1,2,\ldots \rangle =$$

$$= \langle f_{6n+1}, f_{6n+4}, f_{6n+2}, f_{6n+5} : n=0,1,2,\ldots \rangle =$$

$$= \langle -\beta_{3n} e_{6n} + e_{6n+1} + \gamma_{3n+1} e_{6n+2},\ e_{6n+4}, e_{6n+2},$$

$$-\beta_{3n+2} e_{6n+4} + e_{6n+5} + \gamma_{3n+3} e_{6n+6} : n=0,1,2,\ldots \rangle =$$

$$= \langle e_1, e_{6n+2}, e_{6n+4}, e_{6n+5} + \gamma_{3n+3} e_{6n+6}, -\beta_{3(n+1)} e_{6(n+1)} + e_{6(n+1)+1} : n=0,1,2,\ldots \rangle.$$

Αντικαθιστούμε το $-\beta_{3(n+1)} e_{6(n+1)} + e_{6(n+1)+1}$ με κατάλληλο γραμμικό συνδιασμό των $-\beta_{3(n+1)} e_{6(n+1)} + e_{6(n+1)+1}$ και $e_{6n+5} + \gamma_{3n+3} e_{6n+6}$ που έχει την ιδιότητα να είναι κάθετος με τα υπόλοιπα. Δηλαδή

$$L_1 \vee L_2 = \langle e_1, e_{6n+2}, e_{6n+4}, e_{6n+5} + \gamma_{3n+3} e_{6n+6},$$

$$\frac{\beta_{3n+3}\gamma_{3n+3}}{1+\gamma^2_{3n+3}} e_{6n+5} - \frac{\beta_{3n+3}}{1+\gamma^2_{3n+3}} e_{6n+6} + e_{6(n+1)+1} : n=0,1,2,\ldots \rangle,$$

όπου τα διανύσματα που εμφανίζονται στον τελευταίο τρόπο γραφής του $L_1 \vee L_2$, είναι μια ορθογώνια βάση του. Όμοια

$$L_2 \vee L_3 = \langle e_{6n+2}, e_{6n+6}, e_{6n+3} + \gamma_{3n+2} e_{6n+4},$$

$$\frac{\beta_{3n+2}\gamma_{3n+2}}{1+\gamma^2_{3n+2}} e_{6n+3} - \frac{\beta_{3n+2}}{1+\gamma^2_{3n+2}} e_{6n+4} + e_{6n+5} : n=0,1,2,\ldots \rangle.$$

Έστω $x \in (L_1 \vee L_2) \cap (L_2 \vee L_3)$. Τότε υπάρχουν $\lambda_n, \zeta_n, \mu_n, \xi_n \in \mathbb{C}$, τέτοια ώστε

$$x=\lambda_1 e_1+\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{6n+2}e_{6n+2}+\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{6n+4}e_{6n+4}+\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{6n+5}(e_{6n+5}+\gamma_{3n+3}e_{6n+6})+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\zeta_n\{\frac{\beta_{3n+3}\gamma_{3n+3}}{1+\gamma_{3n+3}^2}e_{6n+5}-\frac{\beta_{3n+3}}{1+\gamma_{3n+3}^2}e_{6n+6}+e_{6(n+1)+1}\}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\mu_{6n+2}e_{6n+2}+\sum_{n=0}^{\infty}\mu_{6n+6}e_{6n+6}+\sum_{n=0}^{\infty}\mu_{6n+3}(e_{6n+3}+\gamma_{3n+2}e_{6n+4})+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\xi_n\{\frac{\beta_{3n+2}\gamma_{3n+2}}{1+\gamma_{3n+2}^2}e_{6n+3}-\frac{\beta_{3n+2}}{1+\gamma_{3n+2}^2}e_{6n+4}+e_{6n+5}\}.$$

Εξισώνοντας διαδοχικά τους συντελεστές των $e_1, e_{6(n+1)+1}, e_{6n+2}, e_{6n+3}, e_{6n+4}$, e_{6n+5}, e_{6n+6} πέρνουμε $\lambda_1=0, \zeta_n=0, \lambda_{6n+2}=\mu_{6n+2}, 0=\mu_{6n+3}+\xi_n\frac{\beta_{3n+2}\gamma_{3n+2}}{1+\gamma_{3n+2}^2}$,

$\lambda_{6n+4}=\mu_{6n+3}\gamma_{3n+2}-\xi_n\frac{\beta_{3n+2}}{1+\gamma_{3n+2}^2}$, $\lambda_{6n+5}=\xi_n$, $\lambda_{6n+5}\gamma_{3n+3}=\mu_{6n+6}$.

Έχουμε

$$\lambda_{6n+4}=\mu_{6n+3}\gamma_{3n+2}-\xi_n\frac{\beta_{3n+2}}{1+\gamma_{3n+2}^2}-\gamma_{3n+2}\{\mu_{6n+3}+\xi_n\frac{\beta_{3n+2}\gamma_{3n+2}}{1+\gamma_{3n+2}^2}\}=$$

$$=-\lambda_{6n+5}\beta_{3n+2}.$$

Έτσι

$$x=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{6n+2}e_{6n+2}-\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{6n+5}\beta_{3n+2}e_{6n+4}+\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{6n+5}(e_{6n+5}+\gamma_{3n+3}e_{6n+6})=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{6n+2}f_{6n+2}+\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{6n+5}f_{6n+5}\in L_2.$$

Όμοια αποδεικνύουμε τις υπόλοιπες σχέσεις. ■

Στο υπόλοιπο αυτού του μέρους, με $\mathcal{L}$ θα συμβολίζουμε τον Boolean σύνδεσμο που παράγεται από τα $\{L_1, L_2, L_3\}$(και εξαρτάται βέβαια από τις $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$).

Το επόμενο λήμμα προσδιορίζει τους τελεστές τάξης ένα, του Alg$\mathcal{L}$.

Λήμμα 5.4. *Ισχύει*

$$T1(\mathrm{Alg}\mathcal{L}) = \bigcup_{i=1}^{3} \{x^* \otimes x : x \in \langle f_{3m+i} : m=0,1,2\ldots\rangle,\ x^* \in \langle f^*_{3n+i} : n=0,1,2\ldots\rangle\}.$$

Απόδειξη. Από το Λήμμα 1.3 είναι αρκετό να προσδιορίσουμε τους $(L_{i-})^{\perp}$ $i=1,2,3$.

Έστω $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots \in (L_{1-})^{\perp} = (L_2 \vee L_3)^{\perp}$. Έχουμε επομένως για κάθε $n = 0,1,2\ldots$

$\langle x, f_{3n+2}\rangle = 0$, (οπότε $\langle x, f_{6n+2}\rangle = \langle x, f_{6n+5}\rangle = 0$) και

$\langle x, f_{3n+3}\rangle = 0$, (οπότε $\langle x, f_{6n+3}\rangle = \langle x, f_{6n+6}\rangle = 0$).

Έτσι

$$0 = \langle x, f_{6n+2}\rangle = \langle x, e_{6n+2}\rangle = x_{6n+2},$$

$$0 = \langle x, f_{6n+5}\rangle = \langle x, -\beta_{3n+2}e_{6n+4} + e_{6n+5} + \gamma_{3n+3}e_{6n+6}\rangle =$$

$$= -\beta_{3n+2}x_{6n+4} + x_{6n+5} + \gamma_{3n+3}x_{6n+6},$$

$$0 = \langle x, f_{6n+3}\rangle = \langle x, -\beta_{3n+1}e_{6n+2} + e_{6n+3} + \gamma_{3n+2}e_{6n+4}\rangle =$$

$$= -\beta_{3n+1}x_{6n+2} + x_{6n+3} + \gamma_{3n+2}x_{6n+4} \text{ και}$$

$$0 = \langle x, f_{6n+6}\rangle = \langle x, e_{6n+6}\rangle = x_{6n+6} = 0.$$

Άρα $x_{6n+5} = \beta_{3n+2}x_{6n+4}$, $x_{6n+3} = -\gamma_{3n+2}x_{6n+4}$, $x_{6n+2} = x_{6n+6} = 0$. Επομένως για $n=0,1,2,\ldots$, έχουμε

$$\sum_{j=1}^{6} x_{6n+j}e_{6n+j} = x_{6n+1}e_{6n+1} + x_{6n+4}(-\gamma_{3n+2}e_{6n+3} + e_{6n+4} + \beta_{3n+2}e_{6n+5}) =$$

$$= x_{6n+1}f^*_{6n+1} + x_{6n+4}f^*_{6n+4}.$$

Άρα $x \in \langle f^*_{3n+1} : n=0,1,2,\ldots\rangle$. Όμοια αποδεικνύουμε ότι

$$(L_{i-})^{\perp} = \langle f^*_{3n+i} : n=0,1,2,\ldots\rangle \quad i=1,2,3.$$

Το τελικό αποτέλεσμα ακολουθεί εύκολα τώρα. ■

Θεώρημα 5.4. *Υπάρχουν ακολουθίες* $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ *και* $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ *για τις οποίες ο* $\mathcal{L}$ *δεν έχει την 2-πυκνότητα. Ειδικότερα, ο ταυτοτικός τελεστής δεν ανήκει στην κλειστότητα, σχετικά με την ισχυρή τοπολογία τελεστών, του* $\Sigma T1(\mathrm{Alg}\mathcal{L})$.

Απόδειξη. Θα βρούμε κατάλληλο $\mathcal{L}$, και ένα τελεστή τάξης δύο τέτοιον ώστε $tr(RT) = 0$ για κάθε $R \in T1(\mathrm{Alg}\mathcal{L})$, αλλά $tr(T) \neq 0$. Έστω $T = x^* \otimes x + y^* \otimes y$. Η σχέση

$$(\forall\, R \in T1(\mathrm{Alg}\mathcal{L}))\quad tr(RT) = 0,$$

είναι ισοδύναμη με την

$$(\forall\, f^* \otimes f \in \mathrm{Alg}\mathcal{L})\quad f^*(x)x^*(f) + f^*(y)y^*(f) = 0$$

και αυτή με την

$$(*)\qquad f^*_{3n+i}(x)x^*(f_{3m+i}) + f^*_{3n+i}(y)y^*(f_{3m+i}) = 0 \qquad i=1,2,3,\ n,m=0,1,2,\dots$$

Έστω $\{\varrho_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{\sigma_n\}_{n=0}^{\infty}$ πραγματικές ακολουθίες (που κανένας τους όρος δεν είναι μηδέν) του ℓ^2. (ℓ^2 είναι ο χώρος των τετραγωνικά αθροίσιμων ακολουθιών).

Ορίζουμε ακολουθίες $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ και $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ επαγωγικά από τις επόμενες ισότητες, (και όπου πέρνουμε $\beta_0 = 0$) για $n = 0,1,2,\dots$,

$$\gamma_{3n+1} = \frac{1}{2}\left(\beta_{3n} - \frac{\varrho_n}{\sigma_n}\right) \quad (\text{ισοδύναμα } \beta_{3n}\sigma_n - 2\gamma_{3n+1}\sigma_n = \varrho_n),$$

$$\beta_{3n+1} = 2\gamma_{3n+1},$$

$$\gamma_{3n+2} = -2\gamma_{3n+1},$$

$$\beta_{3n+2} = -\gamma_{3n+1},$$

$$\gamma_{3n+3} = -2\frac{\sigma_n}{\sigma_{n+1}}\gamma_{3n+1},$$

$$\beta_{3n+3} = -\frac{\varrho_n}{\varrho_{n+1}}\gamma_{3n+3}.$$

Έχουμε καθορίσει έτσι ένα συγκεκριμένο σύνδεσμο $\mathcal{L}$. Είναι αυτός που θα αποδείξουμε ότι δεν έχει την 2-πυκνότητα. Ορίζουμε επιπλέον για $n = 0,1,2,\ldots$

$$x_{6n+1} = 3\varrho_n,\ x_{6n+3} = 2\varrho_n,\ x_{6n+5} = \varrho_n,\ x_{6n+2} = x_{6n+4} = x_{6n+6} = 0,$$

$$x^*_{6n} = x^*_{6n+2} = x^*_{6n+4} = \sigma_n,\ x^*_{6n+1} = x^*_{6n+3} = x^*_{6n+5} = 0,$$

$$y_{6n+1} = y_{6n+3} = y_{6n+5} = \varrho_n,\ y_{6n+2} = y_{6n+4} = y_{6n+6} = 0,$$

$$y^*_{6n+1} = \varrho_n,\ y^*_{6n+3} = y^*_{6n+5} = 0,\ y^*_{6n+2} = -\sigma_n,\ y^*_{6n+4} = -3\sigma_n,\ y^*_{6n} = -2\sigma_n.$$

Θα αποδείξουμε τώρα ότι ο $T = x^* \otimes x + y^* \otimes y$, όπου $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots$ κλπ, ικανοποιεί τις (*). Για $i = 1, n = 2\lambda-1, m = 2\mu$ $(\lambda, \mu \in \mathbb{N})$ έχουμε

$$f^*_{6\lambda-2}(x)x^*(f_{6\mu+1}) + f^*_{6\lambda-2}(y)y^*(f_{6\mu+1}) =$$

$$= \{-\gamma_{3\lambda-1}x_{6\lambda-3} + x_{6\lambda-2} + \beta_{3\lambda-1}x_{6\lambda-1}\}\{-\beta_{3\mu}x^*_{6\mu} + x^*_{6\mu+1} + \gamma_{3\mu+1}x^*_{6\mu+2}\} +$$

$$+ \{-\gamma_{3\lambda-1}y_{6\lambda-3} + y_{6\lambda-2} + \beta_{3\lambda-1}y_{6\lambda-1}\}\{-\beta_{3\mu}y^*_{6\mu} + y^*_{6\mu+1} + \gamma_{3\mu+1}y^*_{6\mu+2}\} =$$

$$= \{-\gamma_{3\lambda-1}\, 2\varrho_{\lambda-1} + \beta_{3\lambda-1}\varrho_{\lambda-1}\}\{-\beta_{3\mu}\sigma_\mu + \gamma_{3\mu+1}\sigma_\mu\} +$$

$$+ \{-\gamma_{3\lambda-1}\,\varrho_{\lambda-1} + \beta_{3\lambda-1}\varrho_{\lambda-1}\}\{-\beta_{3\mu}(-2\sigma_\mu) + \varrho_\mu + \gamma_{3\mu+1}(-\sigma_\mu)\} =$$

$$= \varrho_{\lambda-1}\{-\gamma_{3\lambda-1}\gamma_{3\mu+1}\sigma_\mu + \beta_{3\lambda-1}\beta_{3\mu}\sigma_\mu + \varrho_\mu(-\gamma_{3\lambda-1} + \beta_{3\lambda-1})\} =$$

$$= \varrho_{\lambda-1}\{2\gamma_{3\lambda-2}\gamma_{3\mu+1}\sigma_\mu - \gamma_{3\lambda-2}\beta_{3\mu}\sigma_\mu + \varrho_\mu\gamma_{3\lambda-2}\} =$$

$$= -\varrho_{\lambda-1}\gamma_{3\lambda-2}\{-2\gamma_{3\mu+1}\sigma_\mu + \beta_{3\mu}\sigma_\mu - \varrho_\mu\} = 0.$$

Όμοια εξετάζουμε τις υπόλοιπες ένδεκα περιπτώσεις ($i = 1,2,3$, n άρτιος ή περιττός, m άρτιος ή περιττός). Με επαγωγή είναι εύκολο να δούμε ότι

$$\sum_{i=1}^{6(n+1)} \{y^*_i(y_i) + x^*_i(x_i)\} = \sum_{i=1}^{6n} \{y^*_i(y_i) + x^*_i(x_i)\} + \varrho_n^2$$

Επομένως $tr(T) = y^*(y) + x^*(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \{y^*_i(y_i) + x^*_i(x_i)\} = \sum_{i=1}^{\infty} \varrho_n^2 \neq 0$. Η απόδειξη του θεωρήματος έχει ολοκληρωθεί. ■

E

Υπενθυμίζουμε ότι με $\mathcal{L}_3$ έχουμε συμβολίσει τον ελεύθερα παραγόμενο επιμεριστικό σύνδεσμο με τρείς γεννήτορες. Στο κεφάλαιο 3 περιγράψαμε εκείνους τους τελεστές πεπερασμένης τάξης του Alg$\mathcal{L}_3$ που δεν γράφονται σαν άθροισμα από τάξης ένα του ίδιου συνόλου (Θεώρημα 3.2). Σ' αυτό το τμήμα που θα κλείσει το κεφάλαιο, αποδεικνύουμε ότι αυτοί οι τελεστές είναι ΙΤ-κοντά σε στοιχεία της άλγεβρας που παράγουν οι τάξης ένα τελεστές του Alg$\mathcal{L}_3$.

Πριν προχωρήσουμε στη διατύπωση του θεωρήματος, θα δούμε κάποια σχέση που υπάρχει μεταξύ αναπαραστάσεων συνδέσμων Boolean με τρία άτομα και αναπαραστάσεων του $\mathcal{L}_3$.

Έστω $\{V_1, V_2, V_3\}$ και $\{U_1, U_2, U_3\}$ είναι άτομα δύο συνδέσμων Boolean σε χώρο με νόρμα X. Ορίζουμε στον $(X \oplus X, \|\cdot\|_\infty)$

$$K_1 = (V_2 \vee V_3) \oplus U_1,$$

$$K_2 = (V_1 \vee V_3) \oplus U_2,$$

$$K_3 = (V_1 \vee V_2) \oplus U_3,$$

και εύκολα ελέγχουμε ότι αυτοί είναι οι γεννήτορες (βλ. επίσης 2.Γ) μιας αναπαράστασης $\mathcal{L}_3'$ του $\mathcal{L}_3$.

Επίσης μπορούμε να αποδείξουμε ότι $\begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix} \in \mathrm{Alg}\mathcal{L}_3'$ αν και μόνο αν

$P \in \mathrm{Alg}\{V_1, V_2, V_3\}$, $S \in \mathrm{Alg}\{U_1, U_2, U_3\}$, $R = 0$ και $Q \in \mathcal{B}(X)$ με $Q(U_j) \subseteq V_i \vee V_k$ $j=1,2,3$, $\{i, k\} = \{1, 2, 3\} - \{j\}$. Επίσης ισχύει $\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \in \Pi\mathrm{T}(\mathrm{Alg}\mathcal{L}_3')$ αν και μόνο αν

$\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \in \Sigma\mathrm{T1}(\mathrm{Alg}\mathcal{L}_3')$ αν και μόνο αν $P \in \Sigma\mathrm{T1}(\mathrm{Alg}\{V_1, V_2, V_3\})$ $(=\Pi\mathrm{T}(\mathrm{Alg}\{V_1, V_2, V_3\}))$,

$S \in \Sigma\mathrm{T1}(\mathrm{Alg}\{U_1, U_2, U_3\})$. Έτσι ο $\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$ ανήκει στην ΙΤ-κλειστότητα του $\Sigma\mathrm{T1}(\mathrm{Alg}\mathcal{L}_3')$

αν και μόνο αν ο I ανήκει στην ΙΤ-κλειστότητα των $\Sigma\mathrm{T1}(\mathrm{Alg}\{V_1, V_2, V_3\})$ και

$\Sigma T1(\text{Alg}\{U_1, U_2, U_3\})$.

Το ενδιαφέρον του επόμενου θεωρήματος είναι η ανεξαρτησία του από συγκεκριμένη αναπαράσταση και έτσι ισχύει ακόμα και στην περίπτωση που ο ταυτοτικός τελεστής δεν μπορεί να προσεγγιστεί από κατάλληλους τελεστές πεπερασμένης τάξης. (Υπάρχουν παραδείγματα που αυτό συμβαίνει, βλ. 5.Δ). Μπορούμε να αποδείξουμε (βλ. παρατήρηση μετά από το επόμενο θεώρημα) ότι αν είναι δυνατή η προσέγγιση του ταυτοτικού του $\mathcal{L}_3$ στην ΙΤΤ, τότε οι τελεστές του $\Pi T(\text{Alg}\mathcal{L}_3)$ μπορούν να προσεγγιστούν από στοιχεία του $\Sigma T1(\text{Alg}\mathcal{L}_3)$ στην $\|.\|$-τοπολογία.

<u>**Θεώρημα 5.5.**</u> *Η άλγεβρα $\Pi T(\text{Alg}\mathcal{L}_3)$ περιέχεται στην κλειστότητα της $\Sigma T1(\text{Alg}\mathcal{L}_3)$, ως προς την ισχυρή τοπολογία τελεστών.*

Απόδειξη. Έστω $T \in \Pi T(\text{Alg}\mathcal{L}_3)$ και $S \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ με $\text{rank}S < +\infty$ είναι τέτοιος ώστε $(\forall R \in T1(\text{Alg}\mathcal{L}_3))$ $tr(RS) = 0$ (ισοδύναμα $(\forall L \in \mathcal{L}_3)$ $S(L) \subseteq L_-$). Θα αποδείξουμε ότι $tr(TS) = 0$, οπότε από το Λήμμα 5.2 το θεώρημα θα έχει αποδειχτεί.

Στο πρώτο μέρος της απόδειξης θα γράψουμε τον S σαν κατάλληλο άθροισμα από τάξης ένα τελεστές. Εφαρμόζουμε το Λήμμα 3.3 για $W = \mathcal{R}(S)$ και βρίσκουμε $\mathcal{M}_0(S)$ και $W_L(S)$ που ικανοποιούν τα συμπεράσματα του λήμματος. (Εδώ το $\mathcal{M}_0(S)$ μπορεί να είναι όλο το $\mathcal{L}$). (Στα επόμενα αν κάποιος $W_L(S)$ δεν παράγεται από το Λήμμα 3.3, αλλά όμως εμφανίζεται, τον ορίζουμε μηδέν). Ορίζουμε

$$W_0 = \vee\{W_L(S) : L \in \{N_1, N_2, L_i, K_i : i=1,2,3\}\} \cap W_{N_3}(S)$$

Επίσης ορίζουμε έναν καινούριο $W_{N_3}(S)$ να είναι ένα συμπλήρωμα του W_0 στον παλιό $W_{N_3}(S)$. Επιπλέον, κάθε διάνυσμα του W_0 μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα από διανύσματα (βλ. τη συζήτηση πριν το Θεώρημα 3.1), των $W_{L_1}(S)$, $W_{L_2}(S)$, $W_{L_3}(S)$, $W_{N_1}(S)$, $W_{N_2}(S)$. Εύκολα διαπιστώνουμε (Λήμμα 3.6), ότι η ανάλυση αυτή είναι μοναδική. Ορίζουμε $W_{1,0}$ τον υπόχωρο του $W_{L_1}(S)$ που αποτελείται από εκείνα τα διανύσματα του $W_{L_1}(S)$, που εμφανίζονται ως προσθεταίοι στην ανάλυση κάποιου διανύσματος του W_0.

Έστω $\{z_{L_1,j} : j=1,\dots,k_1\}$ είναι μια βάση του $W_{1,0}$ και $\{z_j : j=1,\dots,k_1\}$ διανύσματα του W_0, αντίστοιχα ως προς την ανάλυση που αναφέραμε. (Είναι πιθανόν για κάποια $z_{L_1,j}$, να υπάρχουν περισσότερα του ενός στοιχεία του W_0 στων οποίων το ανάπτυγμα να εμφανίζεται ο $z_{L_1,j}$ ως προσθεταίος. Διαλέγουμε για κάθε j ένα τυχαίο τέτοιο διάνυσμα). Το σύνολο $\{z_j : j=1,...,k_1\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Το επεκτείνουμε σε βάση του W_0, π.χ. στην $\{z_j : j=1,...,k_2\}$ (όπου βέβαια $k_2 \geq k_1$), με τέτοιο τρόπο ώστε τα νέα στοιχεία (δηλ. αυτά με δείκτη γνήσια μεγαλύτερο του k_1), να έχουν προσθεταίο μηδέν στον $W_{L_1}(S)$.

Για $j=1,...,k_2$ ας είναι

$$z_j = z_{L_1,j} + z_{L_2,j} + z_{L_3,j} + z_{N_1,j} + z_{N_2,j}$$

η συνήθης ανάλυση. Από τα προηγούμενα προκύπτει βέβαια ότι για $j > k_1$ είναι $z_{L_1,j} = 0$. Επεκτείνουμε το $\{z_{L_1,j} : j=1,...,k_1\}$ σε βάση του $W_{L_1}(S)$, π.χ. στην $\{z_{L_1,j} : j=1,...,k_1\} \cup \{x_{L_1,j} : j \in I_{L_1}\}$. Εύκολα ελέγχουμε ότι τα σύνολα $\{z_{N_1,j} : j=1,...,k_2\}$ και $\{z_{N_2,j} : j=1,...,k_2\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Τα επεκτείνουμε λοιπόν και αυτά σε βάσεις των $W_{N_1}(S)$ και $W_{N_2}(S)$, έστω τις $\{z_{N_1,j} : j=1,...,k_2\} \cup \{x_{N_1,j} : j \in I_{N_1}\}$ και $\{z_{N_2,j} : j=1,...,k_2\} \cup \{x_{N_2,j} : j \in I_{N_2}\}$ αντίστοιχα. Για $L \in \{L_2, L_3, N_3, K_1, K_2, K_3\}$ πέρνουμε επίσης βάσεις των $W_L(S)$, π.χ. τις $\{x_{L,j} : j \in I_L\}$ (όπου I_L είναι κατάλληλα σύνολα δεικτών), και επεκτείνουμε το γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο

$$\{z_{L_1,j} : j=1,...,k_1\} \cup \{z_{N_1,j} : j=1,...,k_2\} \cup \{z_{N_2,j} : j=1,...,k_2\} \cup$$
$$\cup \{x_{L,j} : L \in \{L_i, N_i, K_i : i=1,2,3\}, j \in I_L\},$$

σε βάση του $\mathcal{R}(S)$, προσθέτοντας διανύσματα από τα $W_L(S)$ όπου $L \in \mathcal{M}_0(S)$ και $L \supseteq M$. Τα επιπρόσθετα διανύσματα τα συμβολίζουμε με $x_{L,j}$ $j \in I_L$. Επομένως ο S μπορεί να γραφεί στην παρακάτω μορφή

$$S = \sum_{L \in \mathcal{L}_3} \sum_{j \in I_L} y^*_{L,j} \otimes x_{L,j} + \sum_{L \in \{L_1, N_1, N_2\}} \sum_{j=1}^{k_2} w^*_{L,j} \otimes z_{L,j},$$

όπου θεωρούμε μηδενικούς όσους όρους δεν είχαν οριστεί.

Υποθέτουμε τώρα ότι ο T έχει γραφεί όπως στο Θεώρημα 3.1 (χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $\mathcal{M}_0(T) = \mathcal{M}_1(T)$, $0 \subset W_0(T) \subset W_0(T) \vee W_{N_3}(T))$.

Αν $L \in \{L_2, L_3, N_3, K_1, K_2, K_3\}$ τότε ο T_L έχει την ΠΠΤ, άρα $tr(T_L S)=0$. Επομένως

$$tr(TS) = tr((T_{L_1} + T_{N_1} + T_{N_2})S).$$

Έστω $t_2 \in L_2$. Αφού $S(L_2) \subseteq L_{2-} = K_2$, έχουμε ότι $S(t_2) \in K_2 \cap \mathcal{R}(S)$, άρα ((1) του Λήμματος 3.3)

$$S(t_2) \in \vee\{x_{L,j} : L \in \{L_1, L_3, N_2, K_2\}, j \in J_L\} \vee \{\vee\{z_{L,j} : L \in \{L_1, N_2\}, j = 1,\dots,k_2\}\}.$$

Αφού τα $x_{L,j}$, $z_{L,j}$ που εμφανίζονται στη γραφή του S είναι γραμμικά ανεξάρτητα, έχουμε ειδικότερα,

$$(1) \qquad (\forall L \in \mathcal{L}_3 - \{L_1, L_3, N_2, K_2\})(\forall j \in I_L) \quad y^*_{L,j}(L_2) = 0.$$

Όμοια πέρνουμε

$$(2) \qquad (\forall L \in \mathcal{L}_3 - \{L_1, L_2, N_1, K_1\})(\forall j \in I_L) \quad y^*_{L,j}(L_3) = 0.$$

Για $t_1 \in L_1$ έχουμε

$$S(t_1) \in K_3 \cap \mathcal{R}(S) = \langle W_L(S) : L \in \{L_2, L_3, N_3, K_3\}\rangle \vee W_0(S).$$

Όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.1, αποδεικνύουμε ότι υπάρχουν $S_1 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ με $\mathcal{R}(S_1) \subseteq \vee\{W_L(S) : L \in \{L_2, L_3, N_3, K_3\}\}$ και $\mu^*_j \in \mathcal{X}^*$ $j = 1,\dots,k_2$ τέτοια ώστε

$$S|_{L_1} = S_1|_{L_1} + \sum_{j=1}^{k_2} (\mu^*_j|_{L_1}) \otimes z_j =$$

$$= S_1|_{L_1} + \sum_{L \in \{L_1, L_2, L_3, N_1, N_2\}} \sum_{j=1}^{k_2} (\mu^*_j|_{L_1}) \otimes z_{L,j}.$$

Από την προηγούμενη ισότητα πέρνουμε

$$(3) \qquad (\forall L \in \{K_1, K_2\} \cup \{L \in \mathcal{L}_3 : L \supseteq M\})(\forall j \in I_L) \quad y^*_{L,j}(L_1) = 0,$$

$$(4) \qquad (\forall L \in \{L_1, N_1, N_2\})(\forall j \in I_L) \quad y^*_{L,j}(L_1) = 0,$$

$$(5) \qquad (\forall j \in \{1,\dots,k_1\})(\forall t_1 \in L_1) \quad w^*_{L_1,j}(t_1) = \mu^*_j(t_1),$$

$$(6) \qquad (\forall L \in \{N_1, N_2\})(\forall j \in \{1,\dots,k_2\})(\forall t_1 \in L_1) \quad w^*_{L,j}(t_1) = \mu^*_j(t_1).$$

Ορίζουμε

$$Q = \{T_{L_1} + T_{N_1} + T_{N_2}\} \{ \sum_{L \in \mathcal{L}_3} \sum_{j \in I_L} y^*_{L,j} \otimes x_{L,j} \}.$$

Έχουμε αποδείξει ((3), (1) και (2)), ότι $(\forall \; L \supseteq M)(\forall \; j \in I_L) \quad y^*_{L,j}(M) = 0$. Άρα

$$tr(Q) = tr(\{T_{L_1} + T_{N_1} + T_{N_2}\} \{ \sum_{L \in \mathcal{L}_3} \sum_{j \in I_L} y^*_{L,j} \otimes x_{L,j} \}) =$$

$$= \sum_{L \in \mathcal{L}_3} \sum_{j \in I_L} y^*_{L,j} ((T_{L_1} + T_{N_1} + T_{N_2}) x_{L,j}) =$$

$$= \sum_{L \in \{L_i, N_i, K_i : i=1,2,3\}} \sum_{j \in I_L} y^*_{L,j} ((T_{L_1} + T_{N_1} + T_{N_2}) x_{L,j}).$$

Επίσης έχουμε

$$tr(Q) = \sum_{L \in \{L_2, L_3, N_3, K_3\}} \sum_{j \in I_L} y^*_{L,j} (T_{L_1} x_{L,j}) +$$

$$+ \sum_{L \in \{K_2, K_3, L_i, N_i : i=1,2,3\}} \sum_{j \in I_L} y^*_{L,j} (T_{N_1} x_{L,j}) +$$

$$+ \sum_{L \in \{K_1, K_3, L_i, N_i : i=1,2,3\}} \sum_{j \in I_L} y^*_{L,j} (T_{N_2} x_{L,j}),$$

επειδή από τις σχέσεις (4), (3), (1) και (2), τα $y^*_{L,j}$ που παραλήφθησαν, μηδενίζουν τα αντίστοιχα διανύσματα. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2) και (3) του Θεωρήματος 3.1 έχουμε ότι

$$tr(Q) = \sum_{L \in \{L_2, L_3, N_3, K_3\}} \sum_{j \in I_L} y^*_{L,j} (T_{L_1} x_{L,j}) + \sum_{j \in I_L} y^*_{K_3,j} (T_{N_1} x_{K_3,j}) +$$

$$+ \sum_{j \in I_L} y^*_{K_3,j} (T_{N_2} x_{K_3,j}).$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) πέρνουμε ότι

$$(7) \qquad (\forall \; j \in I_{K_3}) \quad y^*_{K_3,j} (N_3) = 0.$$

Αφού $T_{L_1} + T_{N_1} + T_{N_2} \in Alg\mathcal{L}_3$, έχουμε $(T_{L_1} + T_{N_1} + T_{N_2}) x_{K_3,j} \in M \cap K_3 = N_3$. Άρα (χρησιμοποιώντας και την (7))

$$tr(Q) = \sum_{L \in \{L_2, L_3, N_3\}} \sum_{j \in I_L} y^*_{L,j} (T_{L_1} x_{L,j}).$$

Από το (4) του Θεωρήματος 3.1 και από το ότι εκείνα τα λ_j^* μπορούν να διαλεχτούν τέτοια ώστε $\lambda_j^*(N_3) = 0$ (βλ. απόδειξη του ίδιου θεωρήματος), έχουμε ότι

(8) $\quad T_{L_1}(N_3) = 0.$

Αυτό δίνει ότι $tr(Q) = 0$. Άρα

$$tr(TS) = tr(\{T_{L_1} + T_{N_1} + T_{N_2}\}\ \{\sum_{L \in \{L_1, N_1, N_2\}} \sum_{j=1}^{k_2} w_{L,j}^* \otimes z_{L,j}\}).$$

Χρησιμοποιώντας τις (2) και (3) του Θεωρήματος 3.1 πέρνουμε ότι

$$tr(TS) = \sum_{L \in \{L_1, N_1, N_2\}} \sum_{j=1}^{k_2} w_{L,j}^* \,(T_{L_1} z_{L,j}).$$

Υπενθυμίζουμε ότι για κάθε $j > k_1$ είναι $x_{L_1,j} = 0$. Έτσι οι σχέσεις (5) και (6) δίνουν

$$tr(TS) = \sum_{j=1}^{k_2} \mu_j^* \,(T_{L_1}(z_{L_1,j} + z_{N_1,j} + z_{N_2,j})).$$

Εφόσον $z_{L_1,j} + z_{N_1,j} + z_{N_2,j} = z_j - z_{L_2,j} - z_{L_3,j} \in N_3$, από την (8) έχουμε $tr(TS) = 0$. ■

Παρατήρηση. Ας υποθέσουμε ότι μια αναπαράσταση του $\mathcal{L}_3$ είναι της μορφής που μελετήσαμε στην αρχή αυτού του μέρους (5.Ε). Υποθέτουμε επιπλέον ότι οι δύο Boolean είναι τέτοιες ώστε ο ταυτοτικός τελεστής I του $\mathcal{X}$ ανήκει στην ΙΤΤ-κλειστότητα των $\Sigma T1(\mathrm{Alg}\{V_1, V_2, V_3\})$ και $\Sigma T1(\mathrm{Alg}\{U_1, U_2, U_3\})$.

Τότε υπάρχει δίκτυο $\{F_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ όπου $F_\lambda = \begin{pmatrix} F_{1,\lambda} & 0 \\ 0 & F_{2,\lambda} \end{pmatrix}$ με $F_{1,\lambda} \in \Sigma T1(\mathrm{Alg}\{V_1, V_2, V_3\})$ και $F_{2,\lambda} \in \Sigma T1(\mathrm{Alg}\{U_1, U_2, U_3\})$ (οπότε $F_\lambda \in \Sigma T1(\mathrm{Alg}\mathcal{L}_3)$), τέτοιο ώστε $\{F_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \to \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$ ως προς την ΙΤΤ. (Ο τελευταίος πίνακας που εμφανίστηκε είναι βέβαια ο ταυτοτικός του $(\mathcal{X} \oplus \mathcal{X})_{\infty}$). Επομένως για $T \in \Pi T(\mathrm{Alg}\mathcal{L}_3)$

από γνωστό θεώρημα ισχύει $\{F_\lambda T\}_{\lambda \in \Lambda} \to \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} T = T$ στην τοπολογία της νόρμας.

Επομένως σ' αυτή τη περίπτωση ο T ανήκει στην $\| . \|$-κλειστότητα του $\Sigma T1(\mathrm{Alg}\mathcal{L}_3)$. Ειδικότερα αυτό συμβαίνει στην περίπτωση του τελεστή του 2.Γ (βλ. [28, Θεώρημα 4.3], [3, Θεώρημα 3.3]). ■

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Η εξίσωση Τ x = y

Α

Έστω $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ ένας πλήρης σύνδεσμος υποχώρων ενός χώρου με νόρμα $\mathcal{X}$ και $x, y \in \mathcal{X}$. Το πρόβλημα που θα μας απασχολήσει σ' αυτό το κεφάλαιο είναι το εξής : Υπάρχει $T \in \mathrm{Alg}\mathcal{L}$ τέτοιος ώστε

$$(*) \quad T x = y;$$

Είναι προφανές ότι αν $x \in L \in \mathcal{L}$ με $L \neq \mathcal{X}$ και $y \in \mathcal{X} - L$ τότε η (*) δεν έχει λύση. Μπορούμε να αποδείξουμε κάτι πολύ περισσσότερο υποθέτοντας ότι η εξίσωση έχει λύση. Συγκεκριμένα, για $L \in \mathcal{L}$ έχουμε

$$\begin{aligned} d(y, L) &= \inf\{ \| y - t \| : t \in L \} = \\ &= \inf\{ \| T x - t \| : t \in L \} \leq \\ &\leq \inf\{ \| T x - T t \| : t \in L \} \leq \\ &\leq \| T \| \inf\{ \| x - t \| : t \in L \} = \\ &= \| T \| d(x, L). \end{aligned}$$

Επομένως αν η (*) έχει λύση κάποιον T, τότε

$$(1) \quad \sup\{\frac{d(y, L)}{d(x, L)} : L \in \mathcal{L}\} \leq \| T \|.$$

(όπου το πηλίκο που εμφανίζεται θα το θεωρούμε μηδέν αν ταυτόχρονα αριθμητής και παρονομαστής είναι μηδέν). Ειδικότερα μια αναγκαία συνθήκη για να έχει λύση η (*) είναι η

$$(2) \quad K = \sup\{\frac{d(y, L)}{d(x, L)} : L \in \mathcal{L}\} < +\infty$$

(όπου εννοούμε ότι αν ένας παρονομαστής είναι μηδέν ενώ ο αντίστοιχος αριθμητής δεν είναι, τότε η προηγούμενη συνθήκη δεν ικανοποιείται).

Πρώτος ο Lance στο [29, Θεώρημα 2.3] απέδειξε ότι αν ο χώρος είναι Hilbert και ο σύνδεσμος είναι πλήρης αλυσίδα, τότε η συνθήκη (2) είναι επίσης ικανή και επιπλέον υπάρχει λύση της (*) με νόρμα ίση με K, δηλ. τη μικρότερη δυνατή (βλ. (1)). (Στην απόδειξη του Lance η συνθήκη (2) εμφανίζεται όχι με τη μορφή αποστάσεων, αλλά με χρήση τελεστών (προβολών) σε χώρο Hilbert, δηλ. $d(z, L) = \|(I - P_L)z\|$).

Ο Hopenwasser στο [16] γενικεύει (ολόκληρο) το προηγούμενο αποτέλεσμα (με την ίδια συνθήκη (2)) σε μεταθετικό σύνδεσμο (υποχώρων χώρου Hilbert).

Εδώ (Θεώρημα 6.1), αποδεικνύουμε όμοιο θεώρημα με αυτό του Lance με τις εξής αλλαγές στις υποθέσεις (τα συμπεράσματα παραμένουν ίδια) : 1) Ο χώρος είναι της μορφής $L^p(E, \mathcal{A}, \mu)$ $1 < p < +\infty$, όπου $(E, \mathcal{A}, \mu)$ είναι χώρος μέτρου, και 2) ο σύνδεσμος είναι αλυσίδα ειδικής μορφής (βλ. ακριβή ορισμό πριν το Θεώρημα 6.1 παρακάτω) τύπου Volterra (βλ. και [30, σελ. 182], όπου ο Larson την δίνει σαν παράδειγμα αρκετά γενικής μορφής αλυσίδας). Ο Erdos στο [11] έχει δείξει ότι τυχαία αλυσίδα σε διαχωρίσιμο χώρο Hilbert είναι της εδώ μελετώμενης μορφής, αποδεικνύοντας έτσι τη (μη προφανή) γενίκευση του αποτελέσματός μας. Επίσης σε ορισμένες πεπερασμένες αλυσίδες, η απόδειξη μας είναι κατασκευαστική.

Σε αντίθεση με τα παραπάνω, οι Harrison-Longstaff στο [15, σελ. 226] έδωσαν παράδειγμα ενός συνδέσμου Boolean με δύο άτομα σε χώρο Hilbert, για τον οποίο η συνθήκη (2) δεν είναι ικανή. Όμως στο ίδιο άρθρο αποδεικνύουν ότι με κατάλληλες υποθέσεις για τον τυχαίο σύνδεσμο (Προτάσεις 10, 11), η (2) ξαναγίνεται ικανή.

Διαφορετικές μορφές του προβλήματος, όπου επιπλέον απαιτήσεις τίθενται για την λύση-τελεστή της (*), μελετώνται στα [17] και [2].

Επίσης, το αντίστοιχο του αρχικού προβλήματος, όπου ζητάμε την λύση από τον ίδιο τελεστή ταυτόχρονα μιας οικογένειας εξισώσεων ή ακόμα και της εξίσωσης $TA = B$ με $A, B \in \mathcal{B}(X)$ δοσμένοι τελεστές, εξετάζονται στα [1] και [21]. Επιπλέον στο τελευταίο άρθρο ([21]) γίνεται η σύνδεση μεταξύ του προβλήματος που εξετάζουμε και του "corona problem".

Στο τελευταίο μέρος αυτού του κεφαλαίου εξετάζουμε την (*) σχετικά με τον σύνδεσμο $\{ 0, L, (\mathbb{R}^2, \|.\|_1) \}$. Παρόλο που η αλυσίδα είναι πολύ απλή, το επόμενο αποτέλεσμα (Θεώρημα 6.2) παρουσιάζει ενδιαφέρον σαν ένα πρώτο βήμα προς μια κατεύθυνση που δεν έχει μελετηθεί πριν : Η εξίσωση $Tx = y$ έχει λύση με $\|T\| = K$ αν και μόνο αν ο L είναι άξονας συμμετρίας της $\|.\|_1$ μοναδιαίας σφαίρας του $\mathbb{R}^2$.

Ειδικότερα δίνεται το πρώτο παράδειγμα σε αλυσίδα όπου οποιαδήποτε λύση έχει νόρμα γνήσια μεγαλύτερη από K.

B

Το κύριο αποτέλεσμα αυτού του μέρους είναι το Θεώρημα 6.1 που γενικεύει το Θεώρημα 2.3 του Lance ([29]). Η απόδειξη του Lance γίνεται σε τρία βήματα : χώρος $(\mathbb{C}^n, \|.\|_2)$ $n \in \mathbb{N}$, πεπερασμένη αλυσίδα, γενική αλυσίδα. Η σημαντική βελτίωση της δικής μας απόδειξης αναφέρεται κυρίως στο πρώτο βήμα.

Τα επόμενα δύο λήμματα, λύνουν (κατασκευαστικά) το πρόβλημα στην ειδική περίπτωση που ο χώρος είναι ο $(\mathbb{C}^n, \|.\|_p)$ $1 \le p \le \infty$, και η αλυσίδα είναι το σύνολο $\{0, \langle e_1\rangle, \langle e_1, e_2\rangle, \langle e_1, e_2,\dots,e_n\rangle = \mathbb{C}^n\}$, όπου $\{e_1, e_2,\dots,e_n\}$ είναι η βάση ως προς την οποία πέρνουμε την νόρμα $\|\,.\,\|_p$. Είναι φανερό ότι σ' αυτή τη περίπτωση οι τελεστές που αφήνουν αναλλοίωτα τα στοιχεία της αλυσίδας είναι ακριβώς οι άνω τριγωνικοί πίνακες. Επίσης σ' αυτή την περίπτωση έχουμε

$$d(z, \langle e_1, e_2,\dots,e_i\rangle) = \begin{cases} \left\{ \sum\limits_{k=i+1}^{n} |z_k|^p \right\}^{1/p} & \text{αν } 1 \le p < +\infty \\ \max\{|z_{i+1}|, |z_{i+2}|, \dots, |z_n|\} & \text{αν } p = +\infty \end{cases} \qquad i = 1,\dots,n-1$$

όπου βέβαια $z = \sum\limits_{k=1}^{n} z_k e_k$ $(z_k \in \mathbb{C})$.

<u>Λήμμα 6.1.</u> *Έστω*

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \textit{και} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

διανύσματα του $(\mathbb{C}^n, \|\,.\,\|_p)$, *όπου* $1 \le p < +\infty$ *και υποθέτουμε ότι για κάποιο* $K \ge 0$,

$$(3) \qquad \sum_{j=i}^{n} |y_j|^p \le K^p \sum_{j=i}^{n} |x_j|^p \qquad 1 \le i \le n$$

Τότε υπάρχει άνω τριγωνικός $n \times n$ *πίνακας* A *τέτοιος ώστε* $Ax = y$ *και* $\|A\|_p \leq K$.

Απόδειξη. Είναι εύκολο να δούμε ότι υπάρχουν άνω τριγωνικοί πίνακες A τέτοιοι ώστε $Ax = y$. Πραγματικά, έστω j_0 ο μεγαλύτερος δείκτης με την ιδιότητα ότι $x_{j_0} \neq 0$. Τότε ο πίνακας

$$\frac{1}{x_{j_0}}\begin{pmatrix} 0 & \dots & y_1 & 0 \\ & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & & y_{j_0} & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(όπου η j_0-στήλη είναι η μόνη μη μηδενική), ικανοποιεί τις απαιτήσεις που ζητήσαμε.

Θα διαλέξουμε κάποιον πίνακα με την επιπλέον ιδιότητα $\|A\|_p \leq K$. Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή ως προς n. Το αποτέλεσμα είναι φανερό για $n = 1$. Υποθέτουμε ότι το έχουμε για $n - 1$ και θα κατασκευάσουμε έναν πίνακα με τις ζητούμενες ιδιότητες για το n. Αν $x_n = 0$, τότε οι ανισότητες (3) δίνουν $y_n = 0$. Από την επαγωγική υπόθεση υπάρχει πίνακας

$$B = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdot & \cdot & \alpha_{1,n-1} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \alpha_{n-1,n-1} \end{pmatrix} \quad \text{τέτοιος ώστε } B\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{και } \|B\|_p \leq K.$$

Ορίζουμε

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdot\ \cdot\ \cdot & \alpha_{1,n-1} & 0 \\ & & & \\ & \cdot & \alpha_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Προφανώς $Ax = y$ και επίσης

$$\| Az \|_p^p = \| A \begin{pmatrix} z_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ z_{n-1} \\ z_n \end{pmatrix} \|_p^p = \| B \begin{pmatrix} z_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_{n-1} \end{pmatrix} \|_p^p \leq K^p \| \begin{pmatrix} z_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_{n-1} \end{pmatrix} \|_p^p \leq K^p \| z \|_p^p$$

έτσι $\| A \|_p \leq K$. Αν $x_n \neq 0$ το σύνολο

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ : \\ : \\ x_n \end{pmatrix}, e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ : \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, e_{n-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ : \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

είναι μια βάση του $\mathbb{C}^n$, έτσι αν γράψουμε $A = (\alpha_{ij})_{i,j}$, η σχέση $\|A\|_p = \| (\alpha_{ij})_{i,j} \|_p \leq K$ είναι ισοδύναμη με την

$$\| A (\lambda_n . x + \lambda_1 . e_1 + \ldots + \lambda_{n-1} . e_{n-1}) \|_p \leq$$

$$\leq K \| (\lambda_n . x + \lambda_1 . e_1 + \ldots + \lambda_{n-1} . e_{n-1} \|_p \quad (\text{όπου } \lambda_1 \ldots \lambda_n \in \mathbb{C})$$

Αυτή με τη σειρά της, υποθέτοντας ότι Ax=y, είναι ισοδύναμη με την

$$\| \begin{pmatrix} y_1 \\ : \\ : \\ y_n \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ 0 \\ : \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + \lambda_{n-1} \begin{pmatrix} \alpha_{1,n-1} \\ : \\ \alpha_{n-1,n-1} \\ 0 \end{pmatrix} \|_p \leq K \| \begin{pmatrix} x_1 \\ : \\ : \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ : \\ \lambda_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix} \|_p$$

και αυτή με την

$$|y_1 + \lambda_1 \alpha_{11} + \ldots + \lambda_{n-1} \alpha_{1,n-1}|^p + |y_2 + \lambda_2 \alpha_{22} + \ldots$$

(4) $$\ldots + \lambda_{n-1} \alpha_{2,n-1}|^p + \ldots + |y_{n-1} + \lambda_{n-1} \alpha_{n-1,n-1}|^p + |y_n|^p \leq$$

$$\leq K^p (|x_1 + \lambda_1|^p + \ldots + |x_{n-1} + \lambda_{n-1}|^p + |x_n|^p) \quad (\text{όπου } \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{C})$$

Μελετάμε πρώτα την περίπτωση $x_1 \neq 0$. Αν $K \geq |y_1 / x_1|$ τότε θέτουμε $\alpha_{11} = y_1/x_1$, $\alpha_{12} = \cdots \alpha_{1n} = 0$. Από την επαγωγική υπόθεση υπάρχουν $\alpha_{i,j}$ i,j = 2, ..., n τέτοια ώστε

$$\begin{pmatrix} \alpha_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix}$$

και $\|(\alpha_{i,j})_{i,j=2,\ldots,n}\|_p \leq K$ (απ' αυτό η (4) ισχύει). Τώρα ορίζουμε

$$A = \begin{pmatrix} y_1/x_1 & 0 & \ldots & & 0 \\ & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \ldots & \alpha_{2n} \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Αν $K < |y_1/x_1|$ (οπότε $y_1 \neq 0$) θέτουμε $\alpha_{11} = K^p |x_1/y_1|^p (y_1/x_1)$ και έχουμε

$$|y_1 + \lambda_1\alpha_{11} + \ldots + \lambda_{n-1}\alpha_{1,n-1}|^p =$$
$$= |K^{p-1} |x_1/y_1|^p (y_1/x_1) K(x_1 + \lambda_1) +$$
$$+ y_1 - K^p |x_1/y_1|^p y_1 + \lambda_2\alpha_{12} + \ldots + \lambda_{n-1}\alpha_{1,n-1}|^p$$

Αν $y_2 \neq 0$ τότε θέτουμε

$$\alpha_{1i} = (1 - K^p |x_1/y_1|^p)(y_1/y_2)\alpha_{2i} \qquad i = 2, \ldots, n$$

(τα α_{2i} θα οριστούν παρακάτω) και έχουμε, για $1 < p < +\infty$ από την ανισότητα Hölder

$$|y_1 + \lambda_1\alpha_{11} + \ldots + \lambda_{n-1}\alpha_{1,n-1}|^p =$$
$$= |(K^{p-1} |x_1/y_1|^p (y_1/x_1)) K(x_1 + \lambda_1) +$$
$$+ (1 - K^p |x_1/y_1|^p)^{\frac{1}{q}+\frac{1}{p}} \frac{y_1}{y_2}[y_2 + \lambda_2\alpha_{22} + \ldots + \lambda_{n-1}\alpha_{2,n-1}]|^p \leq$$
$$\leq [(K^{p-1} |x_1/y_1|^{p-1})^q + (1 - K^p |x_1/y_1|^p)]^{\frac{p}{q}} \cdot$$
$$\cdot [K^p |x_1 + \lambda_1|^p + |y_1/y_2|^p ((1 - K^p |x_1/y_1|^p) |y_2 + \lambda_2\alpha_{22} + \ldots + \lambda_{n-1}\alpha_{2,n-1}|^p] =$$
$$= K^p |x_1 + \lambda_1|^p + \frac{1}{|y_2|^p}(|y_1|^p - K^p |x_1|^p) |y_2 + \lambda_2\alpha_{22} + \ldots + \lambda_{n-1}\alpha_{2,n-1}|^p$$

όπου $1/p + 1/q = 1$.

Για την περίπτωση $p = 1$ δουλεύουμε όμοια χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα αντί της Hölder και καταλήγουμε στο ίδιο αποτέλεσμα. Απ' αυτό πέρνουμε

(5) $$|y_1 + \lambda_1\alpha_{11} + \ldots + \lambda_{n-1}\alpha_{1,n-1}|^p + |y_2+\lambda_2\alpha_{22} + \ldots + \lambda_{n-1}\alpha_{2,n-1}|^p \leq$$
$$\leq K^p |x_1+\lambda_1|^p + [\frac{1}{|y_2|^p}(|y_1|^p - K^p|x_1|^p) + 1].|y_2 + \lambda_2\alpha_{22} + \ldots + \lambda_{n-1}\alpha_{2,n-1}|^p$$

Ορίζουμε $\gamma = \frac{1}{|y_2|}(|y_1|^p - K^p|x_1|^p + |y_2|^p)^{1/p} > 0$, οπότε το δεύτερο μέλος της (5) ισούται με

$$K^p|x_1 + \lambda_1|^p + |\gamma y_2 + \lambda_2\alpha_{22}\gamma + \ldots + \lambda_{n-1}\alpha_{2,n-1}\gamma|^p$$

Τελικά ορίζουμε $\alpha'_{2i} = \gamma\,\alpha_{2i}$ $\quad i = 2, \ldots, n$ και παρατηρούμε ότι

$$|\gamma y_2|^p + |y_3|^p + \ldots + |y_n|^p = |y_1|^p - K^p|x_1|^p + |y_2|^p + |y_3|^p + \ldots + |y_n|^p \leq K^p(|x_2|^p + \ldots + |x_n|^p).$$

Έτσι από τη επαγωγική υπόθεση υπάρχει πίνακας

$$B = \begin{pmatrix} \alpha'_{22} & \alpha'_{23} & \cdots & \alpha'_{2n} \\ & \alpha_{33} & \cdots & \alpha_{3n} \\ & & & \vdots \\ 0 & & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$ τέτοιος ώστε $$B\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma y_2 \\ y_3 \\ \\ y_n \end{pmatrix}$$

και $$|\gamma y_2 + \lambda_2\alpha'_{22} + \ldots + \lambda_{n-1}\alpha'_{2,n-1}|^p + \ldots + |y_n|^p \leq K^p(|x_2 + \lambda_2|^p + \ldots + |x_n|^p).$$

Πέρνουμε $A = (\alpha_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n}$ με $\alpha_{i,j} = 0$ για $i > j$ και τα άλλα στοιχεία όπως ορίστηκαν παραπάνω δια μέσου του B. Έχουμε

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_{1i}x_i = \alpha_{11}x_1 + \sum_{i=2}^{n}\alpha_{1i}x_i =$$

$$= \alpha_{11}x_1 + (1 - K^p|x_1/y_1|^p)(y_1/y_2).\sum_{i=2}^{n}\alpha_{2i}x_i =$$

$$= \alpha_{11}x_1 + (1 - K^p|x_1/y_1|^p)(y_1/y_2).{}^1\!/_\gamma.\sum_{i=2}^{n}\alpha'_{2i}x_i =$$

$$= K^p|x_1/y_1|^p y_1 + (1 - K^p|x_1/y_1|^p)(y_1/y_2).{}^1\!/_\gamma.\gamma y_2 = y_1$$

και, χρησιμοποιώντας αντίστοιχη ιδιότητα του B, έχουμε τελικά $Ax = y$.
Ο τρόπος εύρεσης του A αποδεικνύει οτι η (4) ισχύει και έτσι $\|A\|_p \leq K$.

Στην περίπτωση $y_2 = 0$ έχουμε (ο ορισμός $\alpha_{11} = K^p |x_1/y_1|^p (y_1/x_1)$ εξακολουθεί να ισχύει) ότι

$$|y_1 + \lambda_1\alpha_{11} + \lambda_2\alpha_{12} + \ldots + \lambda_{n-1}\alpha_{1,n-1}|^p =$$
$$= |K^{p-1}|x_1/y_1|^p(y_1/x_1)\, K(x_1+\lambda_1) + y_1(1-K^p|x_1/y_1|^p) + \lambda_2\alpha_{12} + \ldots + \lambda_{n-1}\alpha_{1,n-1}|^p$$

Αν ορίσουμε $\gamma = (1-K^p|x_1/y_1|^p)^{1/p} > 0$ τότε έχουμε (επειδή $p = 1+\frac{p}{q}$)

$$|y_1 + \lambda_1\alpha_{11} + \ldots + \lambda_{n-1}\alpha_{1,n-1}|^p =$$
$$= |K^{p-1}|x_1/y_1|^p(y_1/x_1)\, K(x_1+\lambda_1) + \gamma^{p/q}\gamma\,(y_1 + \lambda_2\frac{\alpha_{12}}{\gamma^p} + \lambda_3\frac{\alpha_{13}}{\gamma^p} + \ldots + \lambda_{n-1}\frac{\alpha_{1,n-1}}{\gamma^p})|^p \leq$$
$$\leq [(K^{p-1}|x_1/y_1|^{p-1})^q + \gamma^p]^{p/q} . [K^p|x_1+\lambda_1|^p + \gamma^p|y_1 + \lambda_2\frac{\alpha_{12}}{\gamma^p} + \lambda_3\frac{\alpha_{13}}{\gamma^p} + \ldots + \lambda_{n-1}\frac{\alpha_{1,n-1}}{\gamma^p}|^p] =$$
$$= K^p|x_1+\lambda_1|^p + |\gamma y_1 + \lambda_2\alpha_{12}\gamma^{1-p} + \lambda_3\alpha_{13}\gamma^{1-p} + \ldots + \lambda_{n-1}\alpha_{1,n-1}\gamma^{1-p}|^p.$$

Θέτουμε $\alpha'_{1i} = \alpha_{1i}\gamma^{1-p}$ $i=2,\ldots,n$. Αφού

$$|\gamma y_1|^p + |y_3|^p + \ldots + |y_n|^p = |y_1|^p - K^p|x_1|^p + |y_3|^p + \ldots + |y_n|^p \leq K^p(|x_2|^p + \ldots + |x_n|^p)$$

από την επαγωγική υπόθεση υπάρχει πίνακας

$$B = \begin{pmatrix} \alpha'_{12} & \alpha'_{13} & \cdots & \alpha'_{1n} \\ & \alpha_{33} & \cdots & \alpha_{3n} \\ & & & \vdots \\ & & \cdot & \vdots \\ 0 & & & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{τέτοιος ώστε} \quad B\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma y_1 \\ y_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \|B\|_p \leq K.$$

Πέρνουμε $A = (\alpha_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n}$ με $\alpha_{22} = \alpha_{23} \cdots = \alpha_{2n} = 0$, $\alpha_{i,j} = 0$ για $i > j$ και τα άλλα στοιχεία όπως ορίστηκαν παραπάνω, μέσω του B. Είναι φανερό ότι $Ax = y$. Επίσης έχουμε $\|A\|_p \leq K$. Αν $x_1 = 0$ τότε πέρνουμε $\alpha_{11} = 0$ και δουλεύουμε όπως στην περίπτωση $K < |y_1/x_1|$. Η απόδειξη είναι τώρα πλήρης. ■

Παρατηρούμε ότι ο πίνακας $A = (\alpha_{i,j})$ μπορεί να διαλεχτεί ώστε να έχει την ακόλουθη ιδιότητα : αν για κάποιο $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ έχουμε $y_{i_0} = 0$, τότε $\alpha_{i_0,j} = 0$ $j=1, \dots, n$.

<u>Λήμμα 6.2.</u> *Έστω*

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

διανύσματα του $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_\infty)$ *και υποθέτουμε ότι*

$$\max\{|y_i|, |y_{i+1}|, \dots, |y_n|\} \leq K \max\{|x_i|, |x_{i+1}|, \dots, |x_n|\} \qquad 1 \leq i \leq n$$

για κάποιο $K \geq 0$. *Τότε υπάρχει ένας άνω τριγωνικός* $n \times n$ *πίνακας* A *τέτοιος ώστε* $Ax = y$ *και* $\|A\|_\infty \leq K$.

Απόδειξη. Από τις υποθέσεις, για κάθε $i \in \{1, \dots, n\}$ υπάρχει $j(i) \in \{i, i+1, \dots, n\}$ τέτοιο ώστε $|y_i| \leq K\,|x_{j(i)}|$. Αν $x_{j(i)} \neq 0$ ορίζουμε $\alpha_{i,j(i)} = y_i / x_{j(i)}$, αλλοιώς (σ' αυτή την περίπτωση είναι επίσης $y_i = 0$) ορίζουμε $\alpha_{i,j(i)} = 0$. Επίσης θέτουμε $\alpha_{i,j} = 0$ για $j \neq j(i)$ και $i = 1, 2, \dots, n$. Είναι φανερό ότι ο πίνακας $A = (\alpha_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$ είναι άνω τριγωνικός. Επίσης

$$Ax = A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \alpha_{i,j(i)} \cdot x_{j(i)} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ y_i \\ \vdots \end{pmatrix} = y$$

και $\|A\|_\infty = \max\{|\alpha_{i,j(i)}| : i = 1, 2, \dots, n\} = \max\{|y_i|/|x_{j(i)}| : i = 1, 2, \dots, n\} \leq K$. ■

Ερχόμαστε τώρα στο κύριο θεώρημα αυτού του μέρους. Πρώτα ορίζουμε τον συμβολισμό που θα χρησιμοποιήσουμε.

Έστω $(E, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και I ένα ολικά διατεταγμένο (έστω από την σχέση $\leq$) σύνολο με ελάχιστο και μέγιστο στοιχείο (και τα οποία συμβολίζουμε με $\min I$ και $\max I$ αντίστοιχα). Υποθέτουμε ότι $\{E_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{A}$ είναι τέτοιο ώστε

i) Αν $i, j \in I$ και $i < j$ τότε $E_i \subset E_j$ σ.π.

ii) $\mu(E_{\min I}) = 0$ και

iii) $E_{\max I} = E$ σ.π.

Αν $1 \leq p \leq +\infty$ τότε ορίζουμε για $i \in I$, $L_i \subseteq L^p(E, \mathcal{A}, \mu)$ με

$$L_i = \{f \in L^p(E, \mathcal{A}, \mu) : f(E - E_i) = 0 \text{ σ.π.}\}.$$

Επίσης ορίζουμε $\mathcal{L} = \{ L_i : i \in I \}$. Τότε το $\mathcal{L}$ είναι αλυσίδα του $L^p(E,\mathcal{A},\mu)$, (που δεν είναι απαραίτητα πλήρης).

Θεώρημα 6.1. *Έστω $\mathcal{L}$ η αλυσίδα που ορίστηκε παραπάνω με τις επιπλέον υποθέσεις ότι για $p=1$ το I είναι πεπερασμένο και για $p=\infty$ το μέτρο μ είναι σ-πεπερασμένο. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

i) *Υπάρχει* $T \in \operatorname{Alg}\mathcal{L}$ *τέτοιος ώστε* $Tx = y$,

ii) $K = \sup \{\frac{d(y,L_i)}{d(x,L_i)}, i \in I\} < +\infty$.

Αν η (ii) (οπότε και η (i)) ικανοποιείται, τότε ο T μπορεί να διαλεχτεί ώστε $\|T\| = K$. Επίσης οποιοσδήποτε $S \in \operatorname{Alg}\mathcal{L}$ που λύνει την $Sx = y$, ικανοποιεί επίσης και την $\|S\| \geq K$.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε προς στιγμή ότι το I είναι πεπερασμένο, π. χ. έστω ότι $I = \{0,1,2, \dots, n\}$ όπου $n \in \mathbb{N}$. Σ' αυτή την περίπτωση θα αποδείξουμε ότι αν $d(y,L_i) \leq K\, d(x,L_i)$, $i = 0,1, \dots, n$ για κάποιο $K > 0$, τότε υπάρχει $T \in \operatorname{Alg}\mathcal{L}$ τέτοιος ώστε $Tx = y$ και $\|T\|_p \leq K$. Θα εξετάσουμε την περίπτωση $1 \leq p < +\infty$ (Για $p=+\infty$ η απόδειξη είναι όμοια). Ορίζουμε $E_i' = E_i - E_{i-1}$ $i = 1,2, \dots, n$. Τότε $\mu(E_i' \cap E_j') = 0$ για $i \neq j$ και $\cup \{ E_i' : i = 1,\dots,n\} = E$ σ.π..

Έτσι για κάθε $z \in L^p(E,\mathcal{A},\mu)$ έχουμε $z = \sum_{i=1}^{n} \chi_{E_i'} z$ σ.π., όπου αν $A \in \mathcal{A}$ έχουμε ορίσει $\chi_A : E \to \mathbb{R}$ με $\chi_A(x)=1$ αν $x \in A$ και $\chi_A(x)=0$ αν $x \notin A$. Ορίζουμε $z_i = \chi_{E_i'} z$, και έτσι $\| z \|_p^p = \sum_{i=1}^{n} \| z_i \|_p^p$. Επίσης έχουμε

$$d(z,L_i) = \inf \{\|z-f\|_p : f \in L_i\} = \inf\{ (\int_E |z-f|^p)^{1/p} : f \in L_i\} =$$

$$= \inf \{ (\int_{E_i} |z_1+z_2+ \dots +z_i -f|^p + \int_{E-E_i} |z_{i+1}+ \dots +z_n|^p)^{1/p} : f \in L_i\} =$$

$$= \| z_{i+1}+ \dots +z_n \|_p = (\| z_{i+1} \|_p^p + \dots + \| z_n \|_p^p)^{1/p}.$$

Έτσι οι συνθήκες $d(y,L_i) \leq K\, d(x,L_i)$ $i = 0,1, \dots, n-1$ είναι ισοδύναμες με τις

$$\sum_{j=i}^{n} \|y_j\|^p \leq K^p \sum_{j=i}^{n} \|x_j\|^p \qquad 1 \leq i \leq n$$

Επομένως, από το Λήμμα 6.1 υπάρχει ένας πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \text{ τέτοιος ώστε } \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \|x_1\| \\ \vdots \\ \|x_n\| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|y_1\| \\ \vdots \\ \|y_n\| \end{pmatrix},$$

ισοδύναμα $\sum_{j=i}^{n} \alpha_{ij} \|x_j\| = \|y_i\|$ $\quad i = 1, \ldots, n$ και, επιπλέον, $\|A\|_p \leq K$.

Απο γνωστό πόρισμα του Θεωρήματος Hahn - Banach, για κάθε $i \in \{1, \ldots, n\}$ αν $x_i \neq 0$ υπάρχει ένα $e_i^* \in (L^q)$ τέτοιο ώστε $e_i^*(\{f \in L^p : f(E_i') = 0\}) = 0$, $e_i^*(x_i) = \| x_i \|_p$ και $\| e_i^* \| = 1$ (επειδή $d(x_i, \{f \in L^p : f(E_i') = 0\}) = \|x_i\|_p$). Αν $x_i = 0$ πέρνουμε $e_i^* = 0$. Ορίζουμε τώρα $T: L^p \to L^p$, όπως στην αρχική απόδειξη του Lance με

$$T = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} (\alpha_{ij} / \|y_i\|)\, e_j^* \otimes y_i$$

(Αν για κάποιο i_0 έχουμε $y_{i_0} = 0$ τότε επίσης $\alpha_{i_0 i_0} = \alpha_{i_0 i_0+1} = \ldots = \alpha_{i_0 n} = 0$ και για $j = i_0, \ldots, n$ η έκφραση $\alpha_{i_0 j} / \|y_{i_0}\|$ θεωρούμε ότι σημαίνει 0). Είναι φανερό ότι $T \in \mathrm{Alg}\{L_0, \ldots, L_n\}$. Επίσης

$$Tx = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} (\alpha_{ij} / \|y_i\|)\, e_j^*(x_j)\, y_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} (\alpha_{ij} / \|y_i\|) \|x_j\|\, y_i = \sum_{i=1}^{n} \|y_i\| (1/\|y_i\|)\, y_i = y.$$

Τελικά για κάθε $z \in L^p$ έχουμε

$$\|Tz\|^p = \Big\|\sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=i}^{n} \alpha_{ij} e_j^*(z_j)\Big)(y_i / \|y_i\|)\Big\|^p = \sum_{i=1}^{n} \Big\|\sum_{j=i}^{n} \alpha_{ij} e_j^*(z_j)(y_i / \|y_i\|)\Big\|^p = \sum_{i=1}^{n} \Big|\sum_{j=i}^{n} \alpha_{ij} e_j^*(z_j)\Big|^p \leq$$

$$\leq K^p \Big(\sum_{j=1}^{n} |e_j^*(z_j)|^p \leq K^p \Big(\sum_{j=1}^{n} \|e_j^*\|^p \|z_j\|^p\Big) \leq K^p \Big(\sum_{j=1}^{n} \|z_j\|^p\Big) = K^p \|z\|^p.$$

Βασιζόμενοι στα προηγούμενα συμπεράσματα, η απόδειξη στην γενική περίπτωση είναι όμοια με αυτήν του Lance (Θεώρημα 2.3 του [29]) για χώρους Hilbert. (Η μόνη διαφορά βρίσκεται στη χρήση της συμπαγότητας : Για ένα γενικό χώρο Banach $\mathcal{Z}$, η μοναδιαία μπάλα του $\mathcal{B}(\mathcal{Z}^*)$ είναι συμπαγής με την ακόλουθη τοπολογία: Το δίκτυο

$(T_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ συγλίνει σε κάποιον T αν και μόνο αν $((T_\lambda f^*)z)_{\lambda\in\Lambda}$ συγκλίνει στο $(Tf^*)z$ για κάθε $f^*\in \mathcal{Z}^*$ και για κάθε $z\in \mathcal{Z}$). Θα την παραθέσουμε όμως για λόγους πληρότητας.

Έστω $\mathcal{F}(\mathcal{L})$ το σύνολο των πεπερασμένων υπο-αλυσίδων του $\mathcal{L}$. Για κάθε $\Theta \in \mathcal{F}(\mathcal{L})$ υπάρχει λοιπόν $T_\Theta\in \mathrm{Alg}\mathcal{L}$ τέτοιος ώστε $T_\Theta\, x = y$ με

$$\| T_\Theta \| = \sup\{\frac{d(y, L)}{d(x, L)} : L \in \Theta\} \leq K.$$

Το σύνολο $\mathcal{F}(\mathcal{L})$ είναι κατευθυνόμενο και αφού οι τελεστές T_Θ είναι ομοιόμορφα φραγμένοι, το δίκτυο $\{T_\Theta\}_{\Theta\in\mathcal{F}(\mathcal{L})}$ έχει υποδίκτυο, χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι είναι το ίδιο, που συγκλίνει σε κάποιον $T\in \mathcal{B}(X)$ με $\| T \| \leq K$.

Αφού από τις υποθέσεις υπάρχει $\mathcal{Z}$ τέτοιος ώστε $X = \mathcal{Z}^*$, για κάθε $\Theta \in \mathcal{F}(\mathcal{L})$ και για κάθε $z\in \mathcal{Z}$ ισχύει $(T_\Theta x)(z) = y(z)$, άρα $Tx = y$.

Επίσης ισχύει $\cap\{\mathrm{Alg}\Theta : \Theta \in \mathcal{F}(\mathcal{L})\} = \mathrm{Alg}\mathcal{L}$. Έστω $\Theta_0 \in \mathcal{F}(\mathcal{L})$. Θα αποδείξουμε ότι $T \in \mathrm{Alg}\Theta_0$, οπότε θάχουμε αποδείξει ότι $T \in \mathrm{Alg}\mathcal{L}$, και θάχουμε τελειώσει.

Για κάθε $\Theta \in \mathcal{F}(\mathcal{L})$ με $\Theta \supseteq \Theta_0$ έχουμε $\mathrm{Alg}\Theta \subseteq \mathrm{Alg}\Theta_0$, άρα $T_\Theta \in \mathrm{Alg}\Theta_0$ για κάθε $\Theta \geq \Theta_0$. Εφόσον το $\mathrm{Alg}\Theta_0$ είναι κλειστό στη δοσμένη τοπολογία, έχουμε ότι $T\in \mathrm{Alg}\Theta_0$. ■

Γ

Έστω $\mathcal{L}(X)$ μια πεπερασμένη αλυσίδα ενός χώρου με νόρμα X και $x, y \in X$, με την ιδιότητα ότι κάθε $L \in \mathcal{L}$ που περιέχει το x, περιέχει επίσης και το y. Ορίζουμε K όπως στη συνθήκη (2) του Α. Προφανώς $K < +\infty$. Ισχυριζόμαστε ότι η εξίσωση $T x = y$ έχει στη περίπτωση αυτή πάντοτε λύση κάποιον $T \in \mathrm{Alg}\, \mathcal{L}$. Επιπλέον αυτός μπορεί να διαλεχτεί τάξης ένα. Πράγματι, έστω L_0 το στοιχείο του $\mathcal{L}$ που δίνει το Λήμμα 2.1 εφαρμοζόμενο στον $W=< x >$. Τότε $x \notin L_{0-}$ γιατί $L_{0-} \subset L_0$. Άρα υπάρχει $f^* \in X^*$

τέτοιο ώστε $f^*(x) = 1$ και $f^*(L_{0-}) = 0$. Από το Λήμμα 1.3 και από την υπόθεση ($y \in L_0$), έχουμε αμέσως ότι $f^* \otimes y \in \mathrm{Alg}\mathcal{L}$. Εφόσον $(f^* \otimes y)x = y$, ο $f^* \otimes y$ είναι μία λύση.

Από το μέρος Α γνωρίζουμε ότι οποιαδήποτε λύση T του $Tx = y$ ικανοποιεί $\| T \| \geq K$. Το ερώτημα που θα μας απασχολήσει εδώ είναι αν υπάρχει ή όχι πάντοτε λύση με $\| T \| = K$. Θα αποδείξουμε ότι ακόμα και σε πολύ απλή αλυσίδα η απάντηση είναι αρνητική. Επίσης θα δώσουμε χαρακτηρισμό αυτών των αλυσίδων που δεν δίνουν λύση T με $\| T \| = K$.

Θα λέμε ότι μια πεπερασμένη αλυσίδα $\mathcal{L}(X)$ έχει την ιδιότητα (**) αν και μόνο αν

$$(**)\quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Για κάθε } x, y \in X \text{ που είναι τέτοια ώστε} \\ \text{αν } L \in \mathcal{L} \text{ περιέχει το } x \text{ τότε περιέχει και το } y, \\ \text{υπάρχει } T \in \mathrm{Alg}\mathcal{L} \text{ με } Tx = y \text{ και} \\ \| T \| = \max\{\frac{d(y, L)}{d(x, L)} : L \in \mathcal{L}\}. \end{array} \right.$$

Το επόμενο θεώρημα είναι το κύριο αυτού του μέρους. (Με $\mathbb{F}$ θα συμβολίζουμε είτε το $\mathbb{R}$ είτε το $\mathbb{C}$. Αν $\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^2$ ορίζουμε ως γνωστόν $\left\| \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \right\|_1 = |z| + |w|$. Επίσης στον $\mathbb{R}^2$ ταυτίζουμε μονοδιάστατους υποχώρους με τις αντίστοιχες ευθείες).

Θεώρημα 6.2. *Έστω* $\mathcal{L} = \{0, L, (\mathbb{R}^2, \| . \|_1)\}$ *με* L *γνήσιο υπόχωρο του* $\mathbb{R}^2$.

Τα επόμενα είναι ισοδύναμα

(i) *Για κάθε* $x, y \in \mathbb{R}^2$ *τέτοια ώστε αν* $x = 0$ *τότε* $y = 0$ *και αν* $x \in L$ *τότε και* $y \in L$, *υπάρχει* $T \in \mathrm{Alg}\mathcal{L}$ *με* $Tx = y$ *και*

$$\| T \|_1 = K = \max\{ \frac{\| y \|}{\| x \|}, \frac{d(y, L)}{d(x, L)} \}.$$

(ii) *Ο* L *είναι άξονας συμμετρίας της* $\| . \|_1$*- μοναδιαίας σφαίρας του* $\mathbb{R}^2$.

Επειδή η απόδειξη είναι μεγάλη, θα την διασπάσουμε σε λήμματα.

Λήμμα 6.3. *Η αλυσίδα*

$$\left\{0, L = < \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} >, (\mathbb{F}^2, \| \cdot \|_1)\right\}$$

με $z \neq 0$ *και* $|z| \neq 1$, *δεν ικανοποιεί την* (**).

Απόδειξη. Εξετάζουμε πρώτα την περίπτωση $|z| > 1$. Πέρνουμε

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{1+|z|}{z} \end{pmatrix}, \ y = \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{-|z|}{z} \end{pmatrix}$$ και ελέγχουμε εύκολα ότι

$$K = \max\left\{\frac{\|y\|}{\|x\|}, \frac{d(y, L)}{d(x, L)}\right\} = \max\left\{\frac{2|z|}{1+2|z|}, \frac{1+|z|}{|z|}\right\} = \frac{1+|z|}{|z|}.$$

Έστω πίνακας $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ τέτοιος ώστε $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} \in < \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} >$, ισοδύναμα

(6) $\quad \alpha z + \beta = z(\gamma z + \delta)$, και

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{1+|z|}{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{-|z|}{z} \end{pmatrix}$$ ισοδύναμα

(7) $\quad \alpha + \beta\dfrac{1+|z|}{z} = 1$ και

(8) $\quad \gamma + \delta\dfrac{1+|z|}{z} = \dfrac{-|z|}{z}$.

Υποθέτουμε επιπλέον ότι $\left\|\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\right\|_1 = \max\{|\alpha| + |\gamma|, |\beta| + |\delta|\} = K$. Από την (6) χρησιμοποιώντας τις (7) και (8) πέρνουμε

(9) $\quad \beta = \delta z + z\dfrac{1+|z|}{|z|}$.

Επειδή $\inf\{|\delta| + \left|\delta z + z\dfrac{1+|z|}{|z|}\right| : \delta \in \mathbb{C}\} = \dfrac{1+|z|}{|z|} = K$ που πέρνεται μόνο για $\delta = -\frac{1+|z|}{|z|}$, είναι αναγκαστικά $\delta = -\frac{1+|z|}{|z|}$ και από την (9), $\beta = 0$.

Άρα $|\alpha| + |\gamma| = 1 + \left|\frac{-|z|}{z} + \frac{1+|z|}{|z|}\,\frac{1+|z|}{z}\right| = \left(\frac{1+|z|}{|z|}\right)^2 > \frac{1+|z|}{|z|} = K$, άτοπο.

Για την περίπτωση $0 < |z| < 1$, μελετάμε όμοια τα $x = \begin{pmatrix} z\frac{1+|z|}{|z|} \\ 1 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} \frac{-z}{|z|} \\ 1 \end{pmatrix}$. ■

Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $\alpha \neq \beta$ θα συμβολίζουμε με $|\alpha, \beta|$ το διάστημα $[\alpha, \beta]$ αν $\alpha < \beta$ ή το διάστημα $[\beta, \alpha]$ αν $\beta < \alpha$.

<u>Λήμμα 6.4.</u> *Έστω $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ με $\lambda \neq 0, \lambda \neq 1$ και $\mu \neq 1$. Τότε τα διαστήματα $\left|0, \frac{1-\mu}{1-\lambda}\right|$ και $\left|\frac{\mu}{\lambda}, \frac{1-\lambda\mu}{\lambda(1-\lambda)}\right|$ δεν τέμνονται (δηλ. έχουν κενή τομή) αν και μόνο αν ισχύει μία από τις εξής :*

(i) $0 < \lambda < \mu < 1$,

(ii) $1 < \mu < \lambda$,

(iii) $0 < \lambda < 1$, $\lambda\mu < 1$ *και* $1 < \mu$,

(iv) $1 < \lambda$, $1 > \mu > 0$ *και* $1 < \lambda\mu$,

(v) $\lambda < 0$ *και* $1 < \mu$,

(vi) $\lambda < 0$ *και* $0 < \mu < 1$.

Απόδειξη. Ελέγχουμε τις οκτώ περιπτώσεις σχετικά με το πιό διάστημα είναι "μικρότερο" ή "μεγαλύτερο" και σχετικά με τη διάταξη των άκρων τους. Σε κάθε μια από αυτές τις περιπτώσεις ελέγχουμε τις τρείς ανισότητες που προκύπτουν από τη διάταξη των άκρων και σε κάθε μια από τις νέες περιπτώσεις εξετάζουμε άλλες τρεις που προκύπτουν από τα πρόσημα των παρανομαστών. ■

<u>Λήμμα 6.5.</u> *Η αλυσίδα* $\left\{0, L = <\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}>, (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)\right\}$ *έχει την* (**).

Απόδειξη. Εξετάζουμε την περίπτωση $x = \begin{pmatrix} 1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ με $x_2 \neq 0$, $x_2 \neq 1$ και $y_2 \neq 1$. Στο εξής και μέχρι τέλους αυτής της απόδειξης αντί για τα x_2 , y_2 θα γράφουμε απλά x και y, εννοώντας ότι είναι οι δεύτερες συντεταγμένες. Σ' αυτή τη περίπτωση είναι λοιπόν

$$K = \max\left\{\frac{1 + |y|}{1 + |x|}, \frac{|1 - y|}{|1 - x|}\right\}.$$

Έστω $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ ένας τυχαίος πίνακας που λύνει την εξίσωση και ανήκει στο $\mathrm{Alg}\mathcal{L}$.

Εύκολα βρίσκουμε ότι

$$f(\delta) = |\beta| + |\delta| = \left|\delta - \frac{1 - y}{1 - x}\right| + |\delta| \text{ και}$$

$$g(\delta) = |\alpha| + |\gamma| = \left|\frac{1 - xy}{1 - x} - \delta x\right| + |y - \delta x|.$$

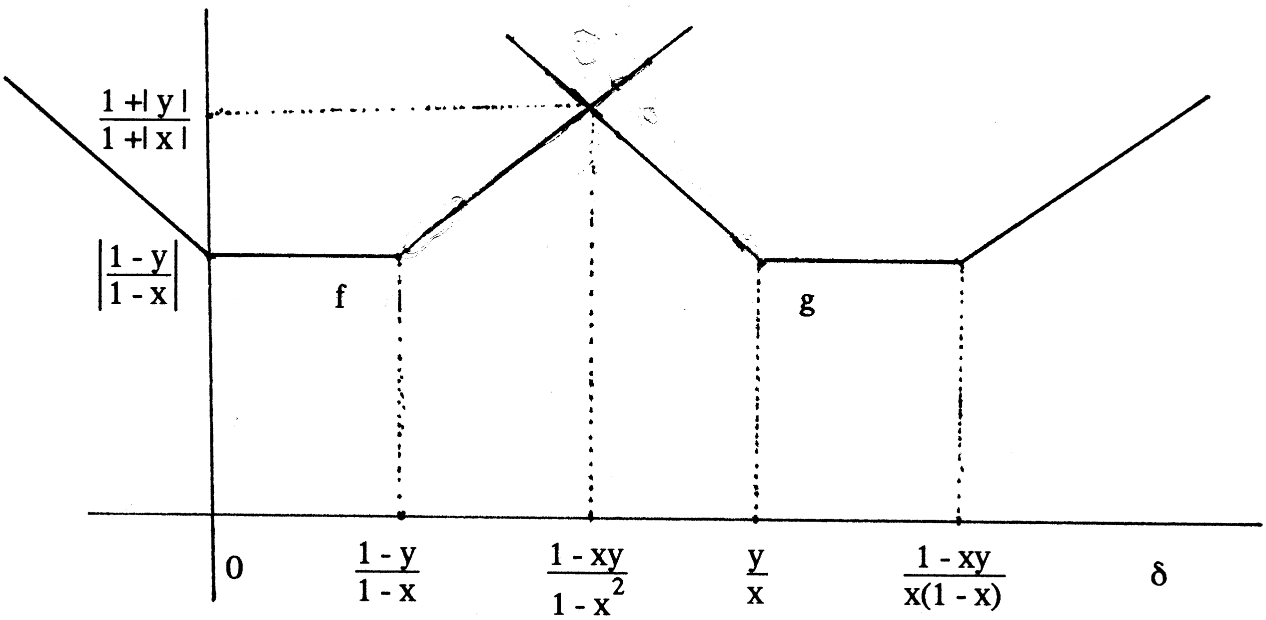
Η συνάρτηση $f(\delta)$ παίρνει ελάχιστη τιμή ίση με $\left|\frac{1 - y}{1 - x}\right|$ για $\delta \in \left[0, \frac{1 - y}{1 - x}\right]$ (και μόνο αυτά), ενώ η $g(\delta)$ παίρνει και αυτή ελάχιστη τιμή ίση με $\left|\frac{1 - y}{1 - x}\right|$ για $\delta \in \left[\frac{1 - xy}{x(1 - x)}, \frac{y}{x}\right]$ (και μόνο αυτά). Έστω $(K =)\ \left|\frac{1 - y}{1 - x}\right| \geq \frac{1 + |y|}{1 + |x|}$. Τότε από το Λήμμα 6.4, η τομή

$$(10) \quad \left[0, \frac{1 - y}{1 - x}\right] \cap \left[\frac{1 - xy}{x(1 - x)}, \frac{y}{x}\right]$$

δεν είναι κενή. Αν πάρουμε δ να ανήκει σ' αυτή την τομή, έχουμε τελειώσει.

Έστω τώρα ότι $\left|\frac{1 - y}{1 - x}\right| < \frac{1 + |y|}{1 + |x|}$ $(= K)$. Τότε η τομή (10) είναι κενή. Πράγματι, αν δεν ήταν και πέρναμε δ στην τομή, θα είχαμε λύση με νόρμα γνήσια μικρότερη του K, άτοπο. Από το Λήμμα 6.4 (εφαρμοσμένο κατάλληλα) ισχύει μία από τις έξι αναφερόμενες περιπτώσεις, π.χ. η (i) (ή η (ii)).

Τότε $0 < \frac{1-y}{1-x} < \frac{y}{x} < \frac{1-xy}{x(1-x)}$, οπότε τα γραφήματα των f και g είναι όπως στο σχ. 6.1.



σχήμα 6.1

Πέρνουμε για δ την τετμημένη του σημείου τομής (δηλ. το $\frac{1-xy}{1-x^2}$) και αποδεικνύουμε ότι είναι κατάλληλο. Όμοια εξετάζουμε τις υπόλοιπες περιπτώσεις. ■

Απόδειξη Θεωρήματος 6.2. Είναι αρκετό (Λήμματα 6.3, 6.5, 6.1) να αποδείξουμε ότι η αλυσίδα $\left\{0, L, (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)\right\}$ με $L = <\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}>$ ή $L = <\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}>$ ικανοποιεί την (**). Χρησιμοποιώντας τις ισομετρίες $U_1 = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$ (που ικανοποιεί $U_1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$) και $U_2 = \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ (όπου $U_2\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$) ανάγουμε το πρόβλημα σε γνωστές περιπτώσεις οπότε έχουμε τελειώσει. ■

Παρατήρηση 1. Δεν υπάρχει ισομετρία U μεταξύ των $<\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}>$ και $<\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}>$, δηλ. τέτοια ώστε $U\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2\\1/2\end{pmatrix}$ (όπου $\{\begin{pmatrix}1/2\\1/2\end{pmatrix}\}$ είναι βάση του $<\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}>$ και έχει $\|\cdot\|_1$-νόρμα ίση με 1). Πράγματι, ας υποθέσουμε αντίθετα ότι υπάρχει τέτοια ισομετρία $U=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$. Τότε

(10) $\|U\|_1 = \max\{|\alpha|+|\gamma|, |\beta|+|\delta|\}=1,$

(11) $\|U^{-1}\|_1 = \left\|\frac{1}{\alpha\delta-\beta\gamma}\begin{pmatrix}\delta & -\beta\\ -\gamma & \alpha\end{pmatrix}\right\|_1 = \frac{1}{|\alpha\delta-\beta\gamma|}\max\{|\delta|+|\gamma|, |\beta|+|\alpha|\}=1$

(είναι βέβαια $\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$), και

(12) $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2\\1/2\end{pmatrix}.$

Από την (12) έχουμε $\alpha=\gamma=\frac{1}{2}$. Επίσης η (10) δίνει

(13) $|\beta|+|\delta|\leq 1.$

Από την (11) πέρνουμε

$$\frac{2}{|\delta-\beta|}\max\{\frac{1}{2}+|\delta|, \frac{1}{2}+|\beta|\}=1,$$

επομένως η (13) δίνει $\max\{\frac{1}{2}+|\delta|, \frac{1}{2}+|\beta|\}=\frac{1}{2}|\delta-\beta|\leq\frac{1}{2}(|\beta|+|\delta|)\leq\frac{1}{2}$.

Τελικά πέρνουμε $|\delta|=|\beta|=0$, άτοπο. ■

Παρατήρηση 2. Μπορούμε να αποδείξουμε ότι για τον $\mathcal{L}$ (με οποιονδήποτε L) η (*) έχει λύση T τέτοιο ώστε $\|T\|_1\leq 2K$. Πραγματικά γνωρίζουμε ότι ([29]) η εξίσωση (*) έχει λύση T στον σύνδεσμο $\{0, L, (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)\}$ τέτοια ώστε $\|T\|_2=K_2$ (με K_2 συμβολίζουμε το K της (2), αλλά παρμένο με την $\|\cdot\|_2$-νόρμα). Είναι εύκολο λοιπόν χρησιμοποιώντας τις σχέσεις $\|z\|_1\geq\|z\|_2\geq\frac{1}{\sqrt{2}}\|z\|_1$ $(z\in\mathbb{R}^2)$, να αποδείξουμε ότι αυτός ο T ικανοποιεί $\|T\|_1\leq 2K$. ■

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] M. Anoussis, Interpolating operators in nest algebras, χειρόγραφο.

[2] M. Anoussis, E. G. Katsoulis, R. L. Moore and T. T. Trent, Interpolation problems for ideals in certain reflexive operator algebras, preprint.

[3] S. Argyros, M. Lambrou and W. E. Longstaff, Atomic Boolean subspace lattices and applications to the theory of bases, Memoirs of the American Mathematical society, 1991, vol. 91, No 445.

[4] S. K. Berberian, Lectures in functional analysis and operator theory, Springer-Verlag, 1979.

[5] G. Birkhoff, Lattice Theory, Amer. Math. Soc., coll. publ. XXV, third ed., Providence, 1979.

[6] L. Crone, D. J. Fleming and P. Jessup, Fundamental biorthogonal sequences and K-norms on φ, Can. J. Math., XXIII(1971), 1040-1050.

[7] K. R. Davidson, Nest algebras, Pitman research notes in mathematics series, 191, Longman, 1988.

[8] R. G. Douglas, Banach algebra techniques in operator theory, Academic Press, 1972.

[9] N. Dunford and J. T. Schwartz, Linear Operators, part I, Wiley- Interscience, 1988.

[10] P. Enflo, On the invariant subspace problem for Banach spaces, Acta Mathematica, 158(1987), 213-313.

[11] J. A. Erdos, Unitary Invariants for nests. Pacific J. of Math., 23(1967), 229 - 256 .

[12] J. A. Erdos, Operators of finite rank in nest algebras. J. London Math. Soc., 43(1968), 391 - 397.

[13] P. R. Halmos, Reflexive lattices of subspaces, J. London Math. Soc., (2), 4(1971), 257-263.

[14] P. R. Halmos, A Hilbert space problem book, second edition, Springer-Verlag, 1982.

[15] K. J. Harrison and W.E. Longstaff, Automorphic images of commutative subspace lattices, Trans. of the Amer. Math. Soc., 296 (1986), 217 - 228 .

[16] A. Hopenwasser, The equation Tx=y in a reflexive operator algebra, Indiana University Math. J., 29(1980), 121-126.

[17] A. Hopenwasser, Hilbert-Schmidt interpolation in CSL-algebras, Illinois, J. of Math., 33(1989), 657-672.

[18] A. Hopenwasser and R. Moore, Finite rank operators in reflexive operator algebras, J. London Math. Soc (2), 27(1983),331 - 338.

[19] A. Katavolos, M. S. Lambrou, W. E. Longstaff, The decomposability of operators relative to two subspaces, προς εμφάνιση στο Studia Mathematica.

[20] A. Katavolos, M. S. Lambrou, M. Papadakis, On some algebras diagonalized by M-bases of ℓ^2, προς εμφάνιση στο Integral Equations and Operator Theory.

[21] E. G. Katsoulis, R. L. Moore and T. T. Trent, Interpolation in nest algebras and applications to operator corona theorems, preprint.

[22] M. S. Lambrou, Complete atomic Boolean lattices, J. London Math. Soc., 15(1977), 387-390.

[23] M. S. Lambrou, Semisimple completely distributive lattices are Boolean algebras, Proc. of the Amer. Math. Soc., 68(1978), 217-219.

[24] M. S. Lambrou , Approximants, commutants and double commutants in normed algebras, J. London Math. Soc. (2), 25 (1982), 499 - 512.

[25] M. S. Lambrou, Strong density of finite rank operators in subalgebras of $\mathcal{B}(X)$, Proceedings of the Centre for Mathematical Analysis, 20(1988), 83-93.

[26] M. S. Lambrou and W. E. Longstaff, Abelian algebras and reflexive lattices, Bull. London Math. Soc., 12(1980), 165-168.

[27] M. S. Lambrou and W. E. Longstaff, Finite rank operators leaving double triangles invariant, J. London Math. Soc., (2) 45 (1992), 153-168.

[28] M. Lambrou and W.E Longstaff, Unit ball density and the operator equation AX = YB, προς εμφάνιση στο Journal of Operator Theory.

[29] E.C. Lance, Some properties of nest algebras, Proc. London Math. Soc. (3), 19 (1969), 45 - 68.

[30] D. R. Larson, On similarity of nests in Hilbert space and in Banach spaces, Lecture notes in mathematics, vol. 1332, Springer-Verlag, 1988.

[31] D. R. Larson and W. R. Wogen, Reflexivity Properties of $T\oplus 0$, J. Funct. Anal., 92(1990), 448-467.

[32] C. Laurie and W. E. Longstaff, A note on rank - one operators in reflexive algebras, Proc. of the Amer. Math. Soc., 89(1983), 293 - 297.

[33] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, Classical Banach spaces I, Springer-Verlag, 1977.

[34] W. E. Longstaff, Strongly reflexive lattices, J. London Math. Soc., (2), 11 (1975), 491-498.

[35] W. E. Longstaff, Operators of rank one in reflexive algebras, Can. J. Math, XXVIII(1976), 19 - 23.

[36] M. Papadakis, On hyperreflexivity and rank one density for non-CSL algebras, Studia Mathematica 98(1991), 11-17.

[37] H. Radjavi and P. Rosenthal, Invariant subspaces, Springer-Verlag (Band 77), 1973.

[38] C. J. Read, A solution to the invariant subspace problem, Bull. London Math. Soc., 16(1984), 337-401.

[39] C. J. Read, A solution to the invariant subspace problem on the space ℓ^1, Bull. London Math. Soc., 17(1985), 305-315.

[40] J. R. Ringrose, On some algebras of operators, Proc. London Math. Soc., (3), 15(1965), 61 -83.

[41] J. R. Ringrose, Compact non-self-adjoint operators, Van Nostrand, 1971.

[42] R. Schatten, Norm ideals of completely continuous operators, (Band 27), Springer-Verlag, 1970.

[43] N. K. Spanoudakis, Generalizations of certain nest algebra results, Proc. of the Amer. Math. Soc., 115(1992), 711-723.

[44] N. K. Spanoudakis, Operators in finite distributive subspace lattices I, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., 113(1993), 141-146.