ΣΤΑΥΡΟΥ Φ. ΠΑΠΑΔΟΠΟΥΛΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ

ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ M. RIESZ ΓΙΑ ΤΗΝ ΣΥΖΥΓΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ ΣΕ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗ
ΗΡΑΚΛΕΙΟ 1998

Αφιερώνεται στην μνήμη

του Στέλιου Πηχωρίδη

Θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους εκείνους

που με οποιοδήποτε τρόπο με βοήθησαν

να φτάσω μέχρι την παρουσίαση αυτής της διατριβής.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην διατριβή περιέχονται τρία νέα αποτελέσματα.

Το πρώτο είναι ότι:

$$\frac{2^{1/p}}{2\cos\frac{\pi}{2p}} \le \frac{\left(\int |f_1|^p + |f_2|^p\right)^{1/p}}{\left(\int |f_1 + f_2|^p\right)^{1/p}} \le \frac{2^{1/p}}{2\sin\frac{\pi}{2p}}$$

όπου $p = 2^k \quad k \in \mathbb{N}$ και οι $f_1,\ f_2$ είναι τέτοιες ώστε να έχουν σειρές Fourier

$$f_1 \sim \sum_{n\ge 0} \alpha_n e^{inx} \qquad f_2 \sim \sum_{n<0} \alpha_n e^{inx} \qquad \alpha_n \in \mathbb{C}$$

Οι σταθερές είναι οι καλύτερες δυνατές.

Το δεύτερο αποτέλεσμα είναι ότι:

Αν $f(x) + i\tilde{f}(x) = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k e^{in_k x}$ όπου $n_1 < n_2 < \ldots\ n_N$ φυσικοί αριθμοί,

$\alpha_k \in \mathbb{C}$ με $|\alpha_k| \ge 1$ και $M = -\min_{x\in[0,\,2\pi]} f(x)$

τότε υπάρχει απόλυτη σταθερά $c > 0$ ώστε

$$M \ge c\,\frac{N}{\log N}\,\frac{1}{\|\tilde{f}\|_\infty}$$

Το τρίτο αποτέλεσμα είναι ότι:

Αν $n_1 < n_2 < \Lambda \ \ n_N$ είναι φυσικοί αριθμοί, τότε υπάρχει απόλυτη σταθερά $c > 0$ ώστε

$$-\min_{x \in [0, 2\text{ð}]} \sum_{k=1}^{\text{Í}} \cos n_k x + \sin n_k x \geq c \, \frac{\sqrt{N}}{\log N}$$

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. Συμβολισμοί - Ορισμοί

Το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων που συνήθως θα χρησιμοποιούμε θα είναι το $[0, 2\pi]$ ταυτίζοντας το 0 με το 2π.

Δηλαδή για κάθε $f: [0,2\pi] \to C$ θα θεωρούμε αυτονόητο ότι $f(0) = f(2\pi)$.

Ο χώρος $L^p[0, 2\pi]$ είναι οι συναρτήσεις $f: [0, 2\pi] \to C$ με

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^p \, dt < +\infty$$

όπου η ολοκλήρωση γίνεται με την μέθοδο του Lebesgue.

Για $p \geq 1$, $f \in L^p[0, 2\pi]$ ορίζουμε

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^p \, dt \right)^{1/p}$$

Για $f: [0, 2\pi] \to C$ συνεχή ορίζουμε

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 2\pi]} |f(x)|$$

Για μια συνάρτηση $f \in L^1[0, 2\pi]$ ορίζονται οι συντελεστές Fourier

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt \qquad n \in Z$$

Φάσμα της f καλείται το υποσύνολο των $n \in Z$ για τους οποίους έχουμε $\hat{f}(n) \neq 0$.

Η τριγωνομετρική σειρά $\sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{int}$ καλείται σειρά Fourier της f και γράφουμε:

$$f \sim \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{int}$$

Όταν η f παίρνει πραγματικές τιμές τότε η σειρά Fourier μπορεί να γραφεί και ως

$$f \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos kx + b_k \sin kx$$

όπου $\alpha_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Κάθε συνάρτηση της μορφής $f(x) = \sum_{-N}^{N} \alpha_n e^{inx}$ καλείται τριγωνομετρικό πολυώνυμο.

Σ’ αυτή την περίπτωση έχουμε

$\hat{f}(n) = \alpha_n$ για $|n| \le N$ $\qquad$ $\hat{f}(n) = 0$ για $|n| > N$

Αν ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο παίρνει πραγματικές τιμές τότε έχει την μορφή

$$\alpha_0 + \sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k \cos kx + b_k \sin kx$$

όπου $\alpha_k, b_k \in R$.

Επειδή $\int_0^{2\pi} e^{int} dt = 0$ για $n \neq 0$, έχουμε ότι

$$\int_0^{2\pi} \sum_{-\nu}^{\nu} \alpha_n e^{int} \, dt = 2\pi\alpha_0$$

Άρα αν το φάσμα του τριγωνομετρικού πολυωνύμου f(t) δεν περιέχει το 0 τότε

$$\int_0^{2\pi} f(t) dt = 0$$

Το σύνολο των τριγωνομετρικών πολυωνύμων είναι πυκνό στους χώρους $L^p[0, 2\pi]$ $\quad 1 \le p < \infty$ με τη νόρμα $\|f\|_p$, και στον χώρο των συνεχών συναρτήσεων με νόρμα $\|f\|_\infty$.

Για μια συνάρτηση $f: [0, 2\pi] \to R$ ορίζουμε

$$f^+(x) = \max\left(f(x), 0\right) \qquad f^-(x) = \max\left(-f(x), 0\right)$$

Προφανώς έχουμε $\quad f = f^{+} - f^{-} \qquad |f| = f^{+} + f^{-}$

Ανισότητα Minkowski ([32] σελ. 62)

Για $\quad f, g \in L^{p}[0, 2ð] \quad 1 \le p < \infty$ έχουμε

$$\|f+g\|_{p} \le \|f\|_{p} + \|g\|_{p}$$

Ανισότητα Holder ([31] σελ. 18)

Έστω $f_1, f_2, K\ , f_n$ συναρτήσεις που ανήκουν στους $L^{p_1}, L^{p_2}, K\ \ L^{p_n}$ αντίστοιχα $\left(L^{p} = L^{p}[0, 2ð]\right)$ με

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \Lambda\ + \frac{1}{p_n} = 1 \qquad p_i > 0, \ \ i = 1, 2, K\ , n$$

Έχουμε ότι

$$\left| \int_{0}^{2ð} f_1 f_2\, K\ \ f_n \right| \le \left(\int_{0}^{2ð} |f_1|^{p_1} \right)^{1/p_1} \left(\int_{0}^{2ð} |f_2|^{p_2} \right)^{1/p_2} \Lambda\ \left(\int_{0}^{2ð} |f_n|^{p_n} \right)^{1/p_n}$$

Έστω $Ù \subseteq C$ ένα ανοικτό σύνολο

Μια συνάρτηση $u : Ù \to C$ λέγεται αρμονική αν έχει συνεχείς παραγώγους δεύτερης τάξης και ισχύει

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{στο} \ \ \Omega$$

Αν η $u : \Omega \to C$ είναι αρμονική και έχουμε $\overline{S(z_0, r)} \subseteq \Omega$ τότε

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u\left(z_0 + re^{i\theta}\right) d\theta$$

Μια συνεχής συνάρτηση $u : \Omega \to R$ καλείται υποαρμονική (αντ. υπεραρμονική) αν για κάθε $S(z_0, r)$ ώστε $\overline{S(z_0, r)} \subseteq \Omega$ έχουμε

$$u(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u\left(z_0 + re^{i\theta}\right) d\theta \qquad (\text{αντ. } \geq)$$

Το σύμβολο c θα σημαίνει μια απόλυτη σταθερά, όχι κατ' ανάγκη την ίδια.

Σύμβολα της μορφής c_p, α_p, A_p κ.λ.π. θα σημαίνουν μια θετική σταθερά που εξαρτάται μόνο από το p.

2. Ορισμός της συζυγούς συνάρτησης

Έστω $D=\left\{z: |z|<1\right\}=\left\{re^{it},\ 0\le r<1 \quad t\in[0,\,2\pi]\right\}$ ο μοναδιαίος δίσκος και $\partial D=\left\{e^{ix}: x\in[0,2\pi]\right\}=T$ το σύνορό του.

Έστω μια $f: [0,\,2\pi] \to C$ με $f\in L^1\,[0,\,2\pi]$.

Ταυτίζοντας το x με το e^{ix} μπορούμε να θεωρούμε την $f: T \to C$.

Επειδή $f\in L^1\,[0,\,2\pi]$ έχουμε ότι

$$\left|\hat{f}(n)\right|=\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,dt\right|\le\|f\|_1$$

Έτσι για $0\le r<1$ ορίζεται η

$$F\left(re^{it}\right)=\sum_{-\infty}^{\infty} r^{|n|}\,\hat{f}(n)e^{int}$$

αφού η σειρά συγκλίνει απόλυτα.

Η F είναι αρμονική στο D και $\lim_{r\to 1}F\left(re^{it}\right)=f(t)$ για σχεδόν όλα τα $t\in[0,\,2\pi]$.

(βλέπε [31] σελ. 101).

Για $0 \le r < 1$ θέτουμε

$$\tilde{F}\left(re^{it}\right) = -i \sum_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(n) |r|^{n} \hat{f}(n) e^{int}$$

όπου $\operatorname{sgn}(n) = \dfrac{n}{|n|} \quad n \neq 0 \qquad \operatorname{sgn}(0) = 0$

Η $\tilde{F}$ είναι αρμονική στο D και $\lim_{r \to 1} \tilde{F}\left(re^{it}\right) = \tilde{f}(t)$ υπάρχει για σχεδόν όλα τα $t \in [0, 2\pi]$.

(βλέπε [31] σελ. 252)

Τη συνάρτηση $\tilde{f}(t)$ την καλούμε συζυγή συνάρτηση της f.

Το πρώτο θεώρημα σχετικά με τη συζυγή συνάρτηση οφείλεται στον Kolmogorov και είναι το ακόλουθο:

Kolmogorov (1925)

Έστω $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ με $f \in L^{1}[0, 2\pi]$.

Για κάθε $0 < \varepsilon < 1$ έχουμε ότι:

$$\int_{0}^{2\pi} |\tilde{f}|^{\varepsilon} \le \frac{4\pi}{1 - \varepsilon} \left(\int_{0}^{2\pi} |f| \right)^{\varepsilon}$$

(βλέπε [31] σελ. 254 θεώρημα 2.6 και [32], σελ. 144).

Η $\tilde{f}$ δεν ανήκει εν γένει στον $L^{1}[0, 2\pi]$, (βλέπε [31] σελ. 253). Αν όμως η $\tilde{f} \in L^{1}[0, 2\pi]$ τότε η σειρά Fourier της είναι

$$\tilde{f} \sim \sum_{-\infty}^{\infty} \left(-i\,\mathrm{sgn}(n)\right) \hat{f}(n) e^{int}$$

Από τον ορισμό της συζυγούς συνάρτησης προκύπτει ότι:

Αν $f, g: [0, 2ð] \to C$ και $á, b \in C$ τότε

$$\widetilde{áf + bg} = á\tilde{f} + b\tilde{g}$$

Έστω $f(x) = á_0 + \sum_{k=1}^{í} á_k \cos kx + b_k \sin kx$ ένα πραγματικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο.

Η συζυγής συνάρτηση του είναι:

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k=1}^{í} -b_k \cos kx + á_k \sin kx$$

3. Το θεώρημα του M. Riesz

Το θεώρημα του M. Riesz είναι

M. Riesz 1927 [26] (βλέπε [32] 7.21, 7.22 σελ. 142)

Αν $\mathbf{f \in L^p[0,\ 2\pi]}$ με $\mathbf{1 < p < \infty}$ τότε $\mathbf{\tilde{f} \in L^p[0,\ 2\pi]}$ και

(∗) $$\|\tilde{f}\|_p \le \alpha_p \|f\|_p$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Minkowski εύκολα δείχνουμε ότι η (∗) είναι ισοδύναμη με την

(∗∗) $$\|f + i\tilde{f}\|_p \le c_p \|f\|_p$$

Επειδή ισχύει η σχέση του Parseval $\int_0^{2\pi} \tilde{f} g = -\int_0^{2\pi} f \tilde{g}$ αν η (∗) ισχύει για $1 < p \le 2$ τότε ισχύει και για $2 \le p < \infty$ και μάλιστα

$$\alpha_p = \alpha_q \qquad \text{με} \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Εύκολα μπορεί να δειχθεί ότι αν η (∗) ή (∗∗) ισχύουν για συναρτήσεις που παίρνουν πραγματικές τιμές τότε ισχύουν και για συναρτήσεις που παίρνουν μιγαδικές τιμές.

Λόγω του θεωρήματος 13 σελ. 181 του [31] η σταθερά στην (∗) παραμένει ίδια όταν η f παίρνει μιγαδικές τιμές.

Η απόδειξη που έδωσε ο M. Riesz ήταν για την ανισότητα (∗) και δεν περιέχει πολλές πληροφορίες για την τιμή της σταθεράς.

Ο P. Stein [28] (1933), (βλέπε και [32] 7.23 σελ. 143) έδειξε την $(**)$ όταν η f παίρνει πραγματικές τιμές χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Green για επικαμπύλια ολοκληρώματα. Η απόδειξη του δίνει

$$c_p = \left(\frac{p}{p-1}\right)^{1/p} \quad \text{για} \quad 1 < p \le 2 \qquad c_p = \frac{p}{\sqrt{2}} \quad \text{για} \quad p \ge 2$$

Ο A. Calderon [4] (1950), έδειξε την $(*)$ χρησιμοποιώντας την ανισότητα

$$|\sin ö|^p \le A_p |\cos ö|^p - B_p \cos pö$$

όπου $|ö| \le ð/2 \quad 1 < p < 2$ και A_p, B_p θετικές σταθερές.

Οι I. T. Colhberg N. Y. Krupnik [6] έδειξαν ότι αν το p είναι δύναμη του 2 δηλαδή $p = 2^k$ ôότε η καλύτερη δυνατή σταθερά στην $(*)$ είναι $\cot(ð/2p)$.

Η απόδειξη τους είναι πολύ απλή και βασίζεται στη σχέση $f^2 - \tilde{f}^2 = -2 f\tilde{f}$.

Ο Σ. Πηχωρίδης [19] βελτιώνοντας την ανισότητα του A. Calderon έδειξε ότι η καλύτερη δυνατή σταθερά στην $(*)$ είναι

$$\tan\frac{ð}{2p} \quad \text{όταν} \quad 1 < p \le 2 \qquad \cot\frac{ð}{2p} \quad \text{όταν} \quad p > 2$$

Την ίδια εποχή ανεξάρτητα αποδείχθηκε το ίδιο αποτέλεσμα και από τον B. Cole (αδημοσίευτο), (βλέπε [9]) .

Οι I.E. Verbitskii [29] και M. Essen [9] ανεξάρτητα έδειξαν ότι η καλύ-τερη δυνατή σταθερά στην $(**)$ όταν η f παίρνει πραγματικές τιμές είναι

$$\frac{1}{\cos\frac{\pi}{2p}} \quad \text{για} \quad 1<p\le 2 \qquad\qquad \frac{1}{\sin\frac{\pi}{2p}} \quad \text{αν} \quad p>2$$

Οι αποδείξεις τους είναι σχετικά απλές και βασίζονται πάνω σε ιδέες του Σ. Πηχωρίδη και στη θεωρία των υποαρμονικών και υπεραρμονικών συναρτήσεων.

Η καλύτερη δυνατή σταθερά στην $(**)$ όταν η f παίρνει μιγαδικές τιμές είναι ακόμα άγνωστη $\big([1], [16], [18]\big)$.

Οι I. Verbitskii, N. Krupnik στο [16] έχουν κάνει την εικασία ότι η καλύτερη δυνατή σταθερά στην $(**)$ είναι $\dfrac{2}{\sin\frac{\pi}{p}}$

$1<p<\infty$.

Φυσικά για $p = 2$ η εικασία είναι σωστή. Γενικά για $p = 2$ το θεώρημα του M. Riesz είναι η ταυτότητα του Parseval $\big([31]$, σελ. $128\big)$.

4. Εκτίμηση της σταθεράς c_p για ειδικές περιπτώσεις

Στην περίπτωση που το p είναι δύναμη του 2 δηλαδή $p=2^k$ $k\in N$ και $\overline{f}(0)=0$ τότε η καλύτερη δυνατή σταθερά στην $(**)$ είναι μικρότερη ή ίση από

$$\frac{2^{1/p}}{\sin\frac{\pi}{2p}}$$

Το συμπέρασμα αυτό προκύπτει από την ανισότητα

(K)

$$\frac{2^{1/p}}{\cos\frac{\pi}{2p}}\left(\int_0^{2\pi}|f|^p\right)^{1/p} \le \left(\int_0^{2\pi}\left|\,f+i\,\tilde f\right|^p+\left|\,f-i\,\tilde f\right|^p\right)^{1/p} \le \frac{2^{1/p}}{\sin\frac{\pi}{2p}}\left(\int_0^{2\pi}|\,f|^p\right)^{1/p}$$

που ισχύει με τις πιο πάνω προϋποθέσεις για συναρτήσεις $f:\ [0, 2\pi] \to C$.

Η προηγούμενη ανισότητα προκύπτει σαν πόρισμα του παρακάτω νέου αποτελέσματος.

Αποτέλεσμα 1

Έστω $f_1,\ f_2 : [0,\ 2\pi] \to C$ οι οποίες έχουν σειρές Fourier

$$f_1 \sim \sum_{n\ge 0}\alpha_n e^{inx} \qquad\qquad f_2 \sim \sum_{n<0}\alpha_n e^{inx} \qquad\qquad \text{με}\ \ \alpha_n \in C,$$

$$n \in Z$$

Αν $f_1,\ f_2 \in L^p$ για $p = 2^k$ $k\in N$ τότε ισχύει η ανισότητα

$$\frac{2^{1/p}}{2\cos\frac{\pi}{2p}}\left(\int_0^{2\pi}|f_1 \pm f_2|^p\right)^{1/p} \le \left(\int_0^{2\pi}|f_1|^p + |f_2|^p\right)^{1/p} \le \frac{2^{1/p}}{2\sin\frac{\pi}{2p}}\left(\int_0^{2\pi}|f_1 \pm f_2|^p\right)^{1/p}$$

Σημείωση

Η δεξιά ανισότητα του αποτελέσματος έχει αποδειχθεί από τον V. Yudin [30] για $p = 2k$, $k \in N$, με σταθερά $2^{1/p}\dfrac{p}{2\sqrt{2}}$.

Απόδειξη της ανισότητας (K) από το αποτέλεσμα

Έστω $f \sim \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{inx}$ η σειρά Fourier της f.

Επειδή $\tilde{f} \sim \sum_{-\infty}^{\infty}(-i\,\mathrm{sgn}(n))\alpha_n e^{inx}$ αν θέσουμε $f_1 \sim \sum_{n>0} \alpha_n e^{inx}$ $f_2 \sim \sum_{n<0} \alpha_n e^{inx}$ τότε έχουμε

$$f + i\tilde{f} = 2f_1 \qquad f - i\tilde{f} = 2f_2 \qquad f = f_1 + f_2$$

Αντικαθιστώντας τις τρεις προηγούμενες σχέσεις στην ανισότητα του αποτελέσματος προκύπτει η (K).

Παρατήρηση

Οι σταθερές στην (K) είναι οι καλύτερες δυνατές. Για την διαπίστωση αυτή αρκεί να περιοριστούμε σε συναρτήσεις που παίρνουν πραγματικές τιμές και να χρησιμοποιήσουμε τις συναρτήσεις που δίνουν την καλύτερη σταθερά στη $(*)$, $(**)$ (βλέπε [9], [19])

Απόδειξη του αποτελέσματος 1

Επειδή το σύνολο των τριγωνομετρικών πολυωνύμων είναι πυκνό, αρκεί να δείξουμε την ανισότητα για τριγωνομετρικά πολυώνυμα.

Έστω γ_k η καλύτερη σταθερά ώστε

(1)

$$\left(\int_0^{2ð} |f_1 \pm f_2|^k\right)^{1/k} \leq ã_k \left(\int_0^{2ð} |f_1|^k + |f_2|^k\right)^{1/k}$$

Θα δείξουμε ότι

(2) $$ã_{2k} \leq \sqrt{2^{\frac{k-1}{k}} + ã_k} \qquad ã_2 = 1$$

Επειδή $|f_1 \pm f_2|^2 = |f_1|^2 + |f_2|^2 \pm \left(f_1\bar{f}_2 + \bar{f}_1 f_2\right)$ ολοκληρώνοντας παίρνουμε:

$$\int_0^{2ð} |f_1 \pm f_2|^2 = \int_0^{2ð} |f_1|^2 + |f_2|^2$$

αφού το φάσμα της $f_1\bar{f}_2 + \bar{f}_1 f_2$ δεν περιέχει το μηδέν.

Άρα $\tilde{a}_2 = 1$.

Από το διώνυμο του Newton έχουμε:

$$|f_1 \pm f_2|^{2k} = \left(|f_1 \pm f_2|^2\right)^k = \left(|f_1|^2 + |f_2|^2 \pm (f_1\bar{f}_2 + \bar{f}_1 f_2)\right)^k =$$

$$= \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} \left(|f_1|^2 + |f_2|^2\right)^n (\pm 1)^{k-n} \left(f_1\bar{f}_2 + \bar{f}_1 f_2\right)^{k-n}$$

Άρα

(3)

$$|f_1 \pm f_2|^{2k} \le \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} \left(|f_1|^2 + |f_2|^2\right)^n \left|f_1\bar{f}_2 + \bar{f}_1 f_2\right|^{k-n}$$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα Holder με εκθέτες k/n , k/k-n έχουμε:

(4)

$$\int_0^{2\eth} \left(|f_1|^2 + |f_2|^2\right)^n \left|f_1\bar{f}_2 + \bar{f}_1 f_2\right|^{k-n} \le \left(\int_0^{2\eth} \left(|f_1|^2 + |f_2|^2\right)^k\right)^{n/k} \left(\int_0^{2\eth} \left|f_1\bar{f}_2 + \bar{f}_1 f_2\right|^k\right)^{(k-n)/k}$$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα (1) για $f_1\bar{f}_2$, $\bar{f}_1 f_2$ στις θέσεις των f_1, f_2 και χρησιμοποιώντας ότι

$$2\left|f_1\bar{f}_2\right|^k \le |f_1|^{2k} + |f_2|^{2k} \qquad \left(|f_1|^2 + |f_2|^2\right)^k \le 2^{k-1}\left(|f_1|^{2k} + |f_2|^{2k}\right)$$

η (4) γίνεται

$$\int_0^{2ð}\left(|f_1|^2+|f_2|^2\right)^n\left|f_1\bar{f}_2+\bar{f}_1 f_2\right|^{k-n} \le \left(2^{k-1}\right)^{n/k}\tilde{a}_k^{k-n}\int_0^{2ð}|f_1|^{2k}+|f_2|^{2k}$$

Ολοκληρώνοντας την (3) και αντικαθιστώντας στο αριστερό της μέρος τις προηγούμενες ανισότητες για $n = 0, 1, \ldots, k$ παίρνουμε:

$$\int_0^{2ð}|f_1 \pm f_2|^{2k} \le \left(2^{\frac{k-1}{k}}+\tilde{a}_k\right)^k\int_0^{2ð}|f_1|^{2k}+|f_2|^{2k}$$

Από την τελευταία συμπεραίνουμε ότι

$$\tilde{a}_{2k} \le \sqrt{2^{\frac{k-1}{k}}+\tilde{a}_k} \qquad \text{δηλαδή την (2).}$$

Έστω $\acute{a}_\lambda = 2^{1/2^\lambda}\,\tilde{a}_{2^\lambda} \qquad \lambda = 1, 2, K$

Έχουμε $\acute{a}_1 = \sqrt{2}\,\tilde{a}_2 = \sqrt{2} = 2\cos\left(ð/2^2\right)$

και $2^{-1/2^{\lambda+1}}\acute{a}_{\lambda+1} \le \sqrt{2^{\frac{2^{\lambda-1}}{2^\lambda}}+2^{-1/2^\lambda}\acute{a}_\lambda}$

Κάνοντας τις πράξεις στην τελευταία παίρνουμε

$$\acute{a}_{\lambda+1} \le \sqrt{2+\acute{a}_\lambda}$$

Επαγωγικά μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\acute{a}_\lambda \le 2\cos\frac{ð}{2^{\lambda+1}}$$

Άρα $\qquad \tilde{a}_{2^{\lambda}} \leq 2^{-1/2^{\lambda}} 2\cos\frac{\eth}{2^{\lambda+1}}$

Για $\quad p = 2^{\lambda}$ η προηγούμενη γίνεται $\qquad \tilde{a}_{p} \leq 2^{-1/p}\, 2\cos\frac{\eth}{2p}$

οπότε η (1) μας δίνει την αριστερή ανισότητα του αποτελέσματος.

Θα δείξουμε τώρα την δεξιά ανισότητα.

Ολοκληρώνοντας την ταυτότητα

$$\left| f_1^{2^k} - f_2^{2^k} \right|^2 = |f_1|^{2^{k+1}} + |f_2|^{2^{k+1}} - \left(\overline{f_1^{2^k}}\, f_2^{2^k} + f_1^{2^k}\, \overline{f_2^{2^k}} \right)$$

και λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι το φάσμα της $\overline{f_1^{2^k}}\, f_2^{2^k} + f_1^{2^k}\, \overline{f_2^{2^k}}$ δεν περιέχει μηδέν παίρνουμε

(5) $$\int_0^{2\eth} \left| f_1^{2^k} - f_2^{2^k} \right|^2 = \int_0^{2\eth} |f_1|^{2^{k+1}} + |f_2|^{2^{k+1}}$$

Γράφοντας

$$f_1^{2^k} - f_2^{2^k} = (f_1 - f_2)(f_1 + f_2)\left(f_1^2 + f_2^2\right) K \quad \left(f_1^{2^{k-1}} + f_2^{2^{k-1}}\right)$$

και εφαρμόζοντας τη γενική ανισότητα του Holder με εκθέτες $2^k,\, 2^k,\, 2^{k-1},\; K \;\; 2$ η (5) δίνει:

$$\int_0^{2ð} |f_1|^{2^{k+1}} + |f_2|^{2^{k+1}} \le \left(\int_0^{2ð} |f_1 - f_2|^{2^{k+1}}\right)^{1/2^k} \left(\int_0^{2ð} |f_1 + f_2|^{2^{k+1}}\right)^{1/2^k}$$

$$\left(\int_0^{2ð} \left|f_1^2 + f_2^2\right|^{2^k}\right)^{1/2^{k-1}} \quad K$$

$$K \qquad \left(\int_0^{2ð} \left|f_1^{2^{k-1}} + f_2^{2^{k-1}}\right|^4\right)^{1/2}$$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα (1) για κατάλληλες f_1, f_2 στο δεξιό μέρος της προηγούμενης ανισότητας παίρνουμε

$$\int_0^{2ð} |f_1|^{2^{k+1}} + |f_2|^{2^{k+1}} \le \left(\int_0^{2ð} |f_1 \pm f_2|^{2^{k+1}}\right)^{1/2^k} \left(ã_{2^{k+1}}\, ã_{2^k}\, K\; ã_4\right)^2 \left(\int_0^{2ð} |f_1|^{2^{k+1}} + |f_2|^{2^{k+1}}\right)^{1/2^ê + Λ\ 1/2}$$

Επειδή $\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k-1}} + Λ \ + \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2^k}$ η τελευταία γίνεται

(6)

$$\left(\int_0^{2ð} |f_1|^{2^{k+1}} + |f_2|^{2^{k+1}}\right)^{1/2^{k+1}} \le ã_{2^{k+1}} \cdot ã_{2^k}\ Λ\ ã_4 \left(\int_0^{2ð} |f_1 \pm f_2|^{2^{k+1}}\right)^{1/2^{k+1}}$$

Αλλά

$$ã_4 ã_8\ Λ\ ã_{2^{k+1}} \le 2^{-1/2^2}\ Λ\ 2^{-1/2^{k+1}}\, 2\cos\frac{ð}{2^3}\, 2\cos\frac{ð}{2^4}\ Λ\ 2\cos\frac{ð}{2^{k+2}} =$$

$$2^{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^k}\right)}\,\frac{\sin\frac{\pi}{2^2}}{\sin\frac{\pi}{2^3}}\,\frac{\sin\frac{\pi}{2^3}}{\sin\frac{\pi}{2^4}}\cdots\frac{\sin\frac{\pi}{2^{k+1}}}{\sin\frac{\pi}{2^{k+2}}}=$$

$$=2^{-1/2}2^{1/2^{k+1}}\,\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{2^{k+2}}}=\frac{2^{1/2^{k+1}}}{2\sin\frac{\pi}{2^{k+2}}}$$

Έτσι η ανισότητα (6) δίνει την δεξιά ανισότητα του αποτελέσματος για $p=2^{k+1}$.

5. Μια παραλλαγή του θεωρήματος του M. Riesz

Σ’ αυτή την παράγραφο παραθέτουμε ένα θεώρημα στο οποίο εκτός των ποσοτήτων $\|f\|_p$ $\|\tilde{f}\|_p$ υπεισέρχεται και η ελάχιστη τιμή της f, όταν ο σταθερός της όρος είναι 0.

Όπως θα δούμε παρακάτω το αποτέλεσμα 3 είναι άμεση εφαρμογή του.

Το θεώρημα εξάγεται άμεσα από μια ανισότητα που βρίσκεται στο άρθρο [19] του Σ. Πηχωρίδη. Συγκεκριμένα είναι η αριστερή ανισότητα (2.5), σελίδα 167.

Θεώρημα

Έστω $\mathbf{f(x) = \sum_{k=1}^{N} \acute{a}_k \cos kx + b_k \sin kx}$ **ένα πραγματικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο.**

Θέτουμε $\mathbf{M = -\min\limits_{x\in[0,\,2\pi]} f(x).}$

Για $\mathbf{0 < \varepsilon < 1}$ **ισχύει** $\displaystyle \mathbf{\sin\varepsilon\frac{\pi}{2}\int_0^{2\pi}|\tilde{f}|^{1+\varepsilon} + 2\pi(2M)^{1+\varepsilon} \geq \int_0^{2\pi}|f|^{1+\varepsilon}}$

Απόδειξη

Παρατηρούμε ότι $M > 0$ εκτός αν $f \equiv 0$.

Έστω $\displaystyle G(z) = 2M + \sum_{k=1}^{N} c_k z^k$ όπου $c_k = a_k - ib_k$.

Παρατηρούμε ότι $G(e^{ix}) = f(x) + 2M + i\tilde{f}(x)$

Επειδή $\operatorname{Re}G = f + 2M \geq M > 0$ πάνω στον κύκλο $|z| = 1$ έχουμε:

$$G(z) = |G(z)|\left(\cos\theta(z) + i\sin\theta(z)\right) \quad \text{με } |\theta(z)| < \frac{\pi}{2} \quad \text{για } |z| \leq 1$$

Έτσι ορίζεται η $G^{\varepsilon}(z)$ για $0 < \varepsilon < 1$ και

$$G^{\varepsilon}(z) = |G(z)|^{\varepsilon}\left(\cos\varepsilon\theta(z) + i\sin\varepsilon\theta(z)\right) \quad \text{για } |z| \leq 1$$

Από τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy για την GG^{ε} παίρνουμε

$$(2M)^{1+\varepsilon} = G(0)G^{\varepsilon}(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{G(z)G^{\varepsilon}(z)}{z}\,dz$$

Επειδή το πραγματικό μέρος της $G(z)G^{\varepsilon}(z)$ πάνω στον κύκλο $|z|=1$ είναι

$$(f+2M)|G|^{\varepsilon}\cos\varepsilon\theta-\tilde{f}|G|^{\varepsilon}\sin\varepsilon\theta$$

η προηγούμενη σχέση δίνει

(1)

$$\int_0^{2\pi}\tilde{f}|G|^{\varepsilon}\sin\varepsilon\theta+2\pi(2M)^{1+\varepsilon}=\int_0^{2\pi}(f+2M)|G|^{\varepsilon}\cos\varepsilon\theta$$

Εύκολα μπορεί να διαπιστωθεί μελετώντας κατάλληλες συναρτήσεις ότι

$$\cos\varepsilon\theta\ge(\cos\theta)^{\varepsilon}\qquad |\sin\varepsilon\theta|\le\sin\varepsilon\frac{\pi}{2}|\sin\theta|^{\varepsilon}$$

για $|\theta|\le\pi/2$ και $0<\varepsilon<1$.

Επειδή $f+2M\ge|f|$ και $\left(|G|\,|\cos\theta|\right)^{\varepsilon}=(f+2M)^{\varepsilon}$ έχουμε

(2)

$$\int_0^{2\pi}(f+2M)|G|^{\varepsilon}\cos\varepsilon\theta\ge\int_0^{2\pi}(f+2M)|G|^{\varepsilon}(\cos\theta)^{\varepsilon}=\int_0^{2\pi}(f+2M)^{1+\varepsilon}\ge\int_0^{2\pi}|f|^{1+\varepsilon}$$

Επειδή $|G|^{\varepsilon}|\sin\theta|^{\varepsilon}=|\tilde{f}|^{\varepsilon}$ παίρνουμε

(3)

$$\int_0^{2\pi}\tilde{f}\,|G|^{\varepsilon}\sin\varepsilon\theta\le\sin\varepsilon\frac{\pi}{2}\int_0^{2\pi}|\tilde{f}|\,|G|^{\varepsilon}|\sin\theta|^{\varepsilon}\le\sin\varepsilon\frac{\pi}{2}\int_0^{2\pi}|\tilde{f}|^{1+\varepsilon}$$

Αντικαθιστώντας τις (2) και (3) στην (1) παίρνουμε τη ζητούμενη ανισότητα.

6. Προβλήματα για τριγωνομετρικά πολυώνυμα

Έστω $n_1 < n_2 < \ldots < n_N$ N διαφορετικοί φυσικοί αριθμοί και $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_N$ μιγαδικοί αριθμοί.

Έστω $$F(x) = f(x) + i\tilde{f}(x) = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k e^{i n_k x} \quad \text{και} \quad M = -\min_{x\in[0,2\pi]} f(x)$$

Υπάρχουν τρία πολύ γνωστά προβλήματα στην περίπτωση που $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots \alpha_N = 1$.

α) Εικασία του Littlewood (1948) [11]

Υπάρχει μία απόλυτη σταθερά c ώστε

$$\|F\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |F(x)|\,dx \geq c \log N$$

β) (Cosine problem) Chowla 1965 [5]

Υπάρχει μια απόλυτη σταθερά c ώστε

$$M \geq c N^{1/2}$$

γ) (Sine problem)

Πόσο μικρή μπορεί να γίνει η ποσότητα $\|\hat{f}\|_{\infty} = \sup_{x\in[0,2\delta]} |\hat{f}(x)|$ σαν συνάρτηση του N.

Η εικασία του Littlewood απεδείχθει το 1981 από τον S.V. Konyagin [15] και ανεξάρτητα από τους O.C. McGehee, L Pigno, B. Smith [17].

Το δεύτερο και το τρίτο παραμένουν ακόμα άλυτα.

Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τα τρία αυτά προβλήματα, εκτός των παρακάτω, μπορεί ο αναγνώστης να ανατρέξει στα [21], [13], [2].

Ο P. Cohen [7] το 1960 έδειξε ότι

$$\|F\|_1 \geq c\left(\frac{\log N}{\log \log N}\right)^{1/8}$$

Ο Davenport [8] το 1960 και ο Σ. Πηχωρίδης [20] το 1974 χρησιμοποιώντας την ιδέα του P. Cohen βελτίωσαν το αποτέλεσμα σε

$$\left(\frac{\log N}{\log \log N}\right)^{1/4} \quad \text{και} \quad \left(\frac{\log N}{\log \log N}\right)^{1/2} \quad \text{αντίστοιχα.}$$

Χρησιμοποιώντας νέες ιδέες ο Σ. Πηχωρίδης έδωσε νέα κάτω φράγματα

$$(\log N)^{1/2} \qquad [23]\ ,\ [24]\ \ \text{το 1977}$$

και

$$\frac{\log N}{(\log \log N)^{2}} \qquad [25]\ \ \text{το 1980}$$

Το 1979 ο Fournier [10] στηριζόμενος σε μια γενικότερη ανισότητα έδωσε και αυτός κάτω φράγμα $(\log N)^{1/2}$.

Το 1981 ο S. V. Konyagin χρησιμοποιώντας και ιδέες του Σ. Πηχωρίδη έλυσε το πρόβλημα.

Το πρόβλημα έλυσαν το 1981 και οι O.C. McGehee - L. Pigno - B. Smith αποδεικνύοντας την εξής γενικότερη ανισότητα (γενίκευση της ανισότητας Hardy για H^1 συναρτήσεις).

Αν $F \in L^1[0,\ 2ð]$ και έχει σειρά Fourier

$$F \sim \sum_{k=1}^{\infty} á_k\, e^{i n_k x} \qquad \textbf{όπου} \qquad 0 < n_1 < n_2 < \Lambda$$

τότε

$$\|F\|_1 \geq c \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\,á_k|}{k}$$

Όλα τα προηγούμενα αποτελέσματα για την εικασία τη Littlewood χρησιμοποιούν μόνο ότι $|\mathbf{á}_{\mathbf{k}}| \geq \mathbf{1}$ $\quad k = 1, 2, \ . \ . \ . \ N$

Όταν $\quad á_1 = á_2 = \Lambda \ = á_í \ = 1$ είναι εύκολο να δει κανείς ότι η εικασία του Littlewood είναι ισοδύναμη με το ότι:

$$\int_0^{2ð} |\cos n_1 x + \cos n_2 x + \ \Lambda \ + \cos n_N x| \, dx \geq c \log N$$

Επειδή $\quad M \geq \dfrac{1}{2ð} \displaystyle\int_0^{2ð} f^- \quad$ και $\quad \displaystyle\int_0^{2ð} f^+ = \int_0^{2ð} f^- \quad$ έχουμε ότι

$$M \geq \frac{1}{4ð} \int_0^{2ð} |f|$$

Έτσι κάθε κάτω φράγμα για την εικασία του Littlewood δίνει ένα κάτω φράγμα για το (Cosine problem).

Ο Σ. Πηχωρίδης [22] το 1977 συνέδεσε τα δύο πρώτα προβλήματα δείχνοντας ότι

$$\|F\|_1 + M \log M \geq c \log N$$

Δηλαδή είτε θα ισχύει $\|F\|_1 \geq c \log N$ είτε $\quad M \geq c \dfrac{\log N}{\log \log N}$

Ο Συγγραφέας το (1993) χρησιμοποιώντας ακριβώς τις ίδιες ιδέες του Σ. Πηχωρίδη γενίκευσε το προηγούμενο αποτέλεσμα στο:

Για κάθε $\ k \in N \ $ υπάρχει $\ c_k > 0 \ $ ώστε

$$\|F\|_1 (\log N)^{k-1} + M\left(\log(2M + e^{2k})\right)^k \geq c_k (\log N)^k$$

Το καλύτερο ως τώρα αποτέλεσμα για το Cosine problem είναι του J. Bourgain [3]:

Υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε

$$M \geq 2^{(\log N)^{\varepsilon}}$$

Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι εκτός του αποτελέσματος του J. Bourgain για το Cosine problem το μόνο αποτέλεσμα που δεν περνάει μέσα από την εικασία του Littlewood είναι του K. Roth [27] το 1974 :

$$M \geq c\left(\frac{\log N}{\log\log N}\right)^{1/2}$$

Στην περίπτωση που $\alpha_1 \geq 1, \alpha_2 \geq 1, \ldots \alpha_N \geq 1$ το cosine problem χάνει τη σημασία του.

Συγκεκριμένα ο S.V. Konyagin [2], έδειξε ότι υπάρχει απόλυτη θετική σταθερά c με την ιδιότητα:

Για κάθε φυσικό αριθμό N υπάρχουν $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \ldots \geq \alpha_N \geq 1$ ώστε αν θέσουμε

$$f(x)=\sum_{k=1}^{N}\alpha_k \cos kx \qquad \text{και} \qquad M=-\min_{x\in[0,2\pi]} f(x)$$

τότε $$M\le c\log N$$

Δηλαδή η υπόθεση ότι $\alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_N=1$ είναι ουσιαστική για το cosine problem.

Είναι επίσης γνωστό ότι το $N^{1/2}$ δεν μπορεί να μεγαλώσει (βλέπε [22], [2])

Δηλαδή υπάρχει απόλυτη θετική σταθερά c ώστε για κάθε N φυσικό μπορούμε να βρούμε $n_1<n_2<\dots n_N$ φυσικούς με

$$-\min_{x\in[0,\,2\pi]}\left(\cos n_1x+\cos n_2x+\dots\ \cos n_Nx\right)\le c\,N^{1/2}$$

Όπως για το δεύτερο πρόβλημα έτσι και για το τρίτο, λίγα πράγματα είναι γνωστά.

Επειδή $$\|f\|_\infty^2\ge\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x)|^2=\frac{1}{2}N$$

έχουμε πάντα ότι $$\|f\|_\infty\ge\frac{1}{\sqrt{2}}N^{1/2}\ .$$

Ο Bourgain ([12] σελ. 79) το 1986 με πιθανοθεωρητικές μεθόδους έδειξε ότι υπάρχουν συχνότητες $n_1<n_2<\dots<n_N$ ώστε

$$\|f\|_\infty\le cN^{2/3}$$

Για πολύ καιρό υπήρχε η εικασία ότι θα μπορούσαν να βρεθούν συχνότητες ώστε $\|\tilde{f}\|_\infty \le cN^{1/2}$.

Πρόσφατα ο S. V. Konyagin [14] έδειξε ότι πάντα

$$\|\tilde{f}\|_\infty \ge cN^{1/2}\left(\frac{\log N}{\log\log N}\right)^{1/2}$$

οπότε η εικασία δεν είναι σωστή.

Το παρακάτω νέο αποτέλεσμα συνδέει τις ποσότητες M, $\|\tilde{f}\|_\infty$. Συγκεκριμένα:

Αποτέλεσμα 2

Έστω $n_1 < n_2 < \dots < n_N$ φυσικοί αριθμοί και $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\nu$ μιγαδικοί με $|\alpha_k| \ge 1$ $k = 1, 2, \dots, N$.

Αν θέσουμε $f(x) + i\tilde{f}(x) = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k e^{in_k x}$ και $M = -\min_{x\in[0,2\pi]} f(x)$ τότε

$$M \ge c\,\frac{1}{\log N}\,\frac{N}{\|\tilde{f}\|_\infty}$$

Η σημασία του αποτελέσματος είναι ότι αν το $\|\tilde{f}\|_\infty$ είναι μικρό π.χ. $\|\tilde{f}\|_\infty < N^\alpha$ $\quad \frac{1}{2} < \alpha < 1$ τότε το M είναι μεγάλο $M \ge c\,\frac{N^{1-\alpha}}{\log N}$.

Στο [2] ο S. V. Konyagin αναφέρει ότι ο Pichugov το 1982 χρησιμοποιώντας την ιδέα του Σ. Πηχωρίδη στο [22] έδειξε ότι:

Για $n_1 < n_2 < \Lambda < n_N$ φυσικούς και $A > 0$, υπάρχει μια σταθερά $c(A) > 0$ ώστε

$$-\min_{x \in [0, 2\text{ð}]} \sum_{k=1}^{\text{í}} \cos n_k x + \sin n_k x \geq c(A)(\ln N)^A$$

Σαν άμεση εφαρμογή του θεωρήματος της παραγράφου 5, το προηγούμενο αποτέλεσμα ισχυροποιείται στο εξής:

Αποτέλεσμα 3

Αν $\mathbf{n_1 < n_2 < \Lambda < n_N}$ είναι φυσικοί αριθμοί τότε υπάρχει απόλυτη σταθερά $\mathbf{c > 0}$ ώστε:

$$\mathbf{-\min_{x \in [0, 2\text{ð}]} \sum_{k=1}^{\text{í}} \cos n_k x + \sin n_k x \geq c \frac{N^{1/2}}{\log N}}$$

Σημείωση

Ο S. V. Konyagin με πληροφόρησε ότι παρόμοιο αποτέλεσμα έχει αποδείξει και ο A. S. Belov.

7. Αποδείξεις των αποτελεσμάτων 2, 3

Απόδειξη του αποτελέσματος 2

Το θεώρημα του Kolmogorov για τη συζυγή συνάρτηση μας δίνει ότι:

(1)
$$\left(\int_0^{2\pi} |\tilde{f}|^{1-\varepsilon}\right) \leq \frac{4\pi}{\varepsilon}\left(\int_0^{2\pi} |f|\right)^{1-\varepsilon}$$

για $0<\varepsilon<1$.

Επειδή $\int_0^{2\pi} f = 0$ είναι

(2)
$$M \geq \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} |f|$$

(βλέπε σελ. 19)

Εφ’ όσον $|\alpha_k| \geq 1$ $k = 1, 2, \ldots, N$ έχουμε ότι:

(3)
$$\pi N \leq \int_0^{2\pi} |\tilde{f}|^2 \leq \|\tilde{f}\|_\infty^{1+\varepsilon} \int_0^{2\pi} |\tilde{f}|^{1-\varepsilon}$$

Αντικαθιστώντας την (3) στην (1) και λαμβάνοντας υπ’ όψιν την (2) παίρνουμε

$$M^{1-\varepsilon} \geq c\,\varepsilon \frac{N}{\|\tilde{f}\|_{\infty}^{1+\varepsilon}}$$

Γράφοντας $\frac{N}{\|\tilde{f}\|_{\infty}^{1+\varepsilon}} = \frac{1}{N^{\varepsilon}}\left(\frac{N}{\|\tilde{f}\|_{\infty}}\right)^{1+\varepsilon}$, παίρνοντας $\varepsilon = \frac{1}{\log N}$ και λαμβάνοντας υπ’ όψιν ότι $M \geq \frac{1}{2}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f| \geq \frac{1}{2}|\alpha_1| \geq \frac{1}{2}$ έχουμε ότι:

$$M \geq \frac{cN}{\log N \|\tilde{f}\|_{\infty}}$$

Απόδειξη του αποτελέσματος 3

Θέτουμε $f(x) = \sum_{k=1}^{N} \cos n_k x + \sin n_k x$.

Εύκολα βλέπουμε ότι $\tilde{f}(x) = \sum_{k=1}^{N} -\cos n_k x + \sin n_k x$.

Παρατηρούμε ότι $\tilde{f}(x) = -f(-x)$. Άρα για $0 < \varepsilon < 1$ έχουμε ότι

$$\int_0^{2\pi} |\tilde{f}(x)|^{1+\varepsilon} dx = \int_0^{2\pi} |f(x)|^{1+\varepsilon} dx$$

Η ανισότητα του θεωρήματος της παραγράφου 5, δίνει:

(1) $$2\pi(2M)^{1+\varepsilon} \ge \left(1-\sin\varepsilon\frac{\pi}{2}\right)\int_0^{2\pi}|f(x)|^{1+\varepsilon}dx$$

Επειδή

$$2\pi N = \int_0^{2\pi}|f(x)|^2 dx \le \|f\|_\infty^{1-\varepsilon}\int_0^{2\pi}|f(x)|^{1+\varepsilon}dx \le (2N)^{1-\varepsilon}\int_0^{2\pi}|f(x)|^{1+\varepsilon}dx$$

συμπεραίνουμε ότι

(2) $$\int_0^{2\pi}|f(x)|^{1+\varepsilon}dx \ge cN^{\varepsilon}$$

Για ε κοντά στο 1 έχουμε ότι $1-\sin\varepsilon\frac{\pi}{2} \ge c(1-\varepsilon)^2$.

Λαμβάνοντας την τελευταία σχέση υπ’ όψιν και αντικαθιστώντας την (2) στην (1) παίρνουμε

(3) $$M \ge c(1-\varepsilon)N^{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}}$$

για ε κοντά στο 1.

Διαλέγοντας ε έτσι ώστε

$$\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\log N} \qquad \text{δηλαδή} \qquad 1-\varepsilon \cong \frac{4}{\log N}$$

η (3) δίνει ότι $$M \ge c\,\frac{N^{1/2}}{\log N}.$$

ΠΑΡΑΠΟΜΠΕΣ

1] A. Baernstein, II & S.I. Montgomery - Smith, Some conjectures about integral means of ∂f and $\bar{\partial} f$, preprint.

2] A.S.Belov & S.V.Konyagin, On the conjecture of Littlewood and minima of even trigonometric polynomials, Sem. Anal. Harm. Publ. Math. Orsay 96-01 (Universite Paris XI, Orsay, 1996) 1-11.

3] J.Bourgain, Sur le minimum d' une somme de cosinus, Acta Arith. 45 (1986) 381-389.

4] A.P. Calderon, On the theorems of M. Riesz and Zygmund, Proc. Amer. Math. Soc. 1 (1950), 533-535.

5] S. Chowla, Some applications of a method of A. Selberg, J. Reine Angew. Math. 217 (1965), 128-132.

6] I.Ts. Gohberg & N.Ya. Krupnik, Norm of the Hilbert transformation in the L^p space, Funct. Anal. Appl. 2.2 (1968), 180-181 (translated from the Russian).

7]	P.J.Cohen,	On a conjecture of Littlewood and idempotent measures, Amer. J. Math. 82 (1960), 191-212.
8]	H.Davenport,	On a theorem of P. J. Cohen, Mathematica 7 (1960), 93-97.
9]	M. Essen,	A superharmonic proof of the M. Riesz conjugate function theorem, Ark. Mat. 22 (1984), 241-249.
10]	J.F. Fournier,	On a theorem of Paley and the Littlewood conjecture, Arkiv for Mat. 17 (1979), 199-216
11]	G.H. Hardy & J.E. Littlewood,	A new proof of a theorem on rearrangements, J. London Math. Soc. 23 (1948), 163-168.
12]	J.P. Kahane,	Some random series of functions (Cambridge University Press, 2nd edn, 1985).
13]	M.N. Kolountzakis	Probabilistic and constructive methods in Harmonic analysis and additive number theory, Dissertation, Stanford 1994.
14]	S.V. Konyagin,	Estimates of maxima of sine sums, East J. Approx. 3 (1) (1997) 301-308.

15] S.V. Konyagin, On probleme Littlewood'a, Izv. A. N. SSSR, ser. Mat. 45, 2 (1981), 243-265.

16] N.Ya. Krupnik & I.E. Verbitsky, The norm of the Riesz projection, in Linear and complex analysis problem book 3, Part I, edited by V.P. Havin and N.K. Nikolski, Lect. Notes Math. 1543, 422-423, Springer Verlag, 1994.

17] O.C. McGehee, L. Pigno, B. Smith, Hardy' s inequality and L^1 - norms of exponential sums, Ann Math. 113 (1981), 613-618.

18] A. Pelczynski, Norms of classical opearators in function spaces, Colloque Laurent Schwartz, Asterisque 131 (1985), 137-162

19] S.K. Pichorides, On the best values of the constants in the theorems of M. Riesz, Zygmund and Kolmogorov, Studia Math. 44 (1972), 165-179.

20] S.K. Pichorides, A lower bound for the L^1 norm of exponential sums, Mathematika 21 (1974), 155-159.

21] S.K. Pichorides, L^p norms of exponential sums, Sem. Anal. Harm., Publ. Math. D' Orsay 77-73 (1976), 1-65

22] S.K. Pichorides, A remark on exponential sums, Bull. Amer. Math. Soc. 83 (1977), 283-285.

23] S.K. Pichorides, On a conjecture of Littlewood concerning exponential sums I, Bull. Greek Math. Soc. 18 (1977), 8-16

24] S.K. Pichorides, On a conjecture of Littlewood concerning exponential sums II, Bull Greek Math. Soc. 19 (1978), 274-277.

25] S.K. Pichorides, On the L^1 norms of exponential sums, Ann. Inst. Fourier 30 (1980), 79-89.

26] M. Riesz, Sur les fonctions conjuguees, Math. Zeitschrift 27 (1927), 218-244.

27] K.F. Roth, On cosine polynomials corresponding to sets of integers, Acta Arith. 24 (1973), 347-355.

28] P. Stein, On a theorem of M. Riesz, J. London Math. Soc 8 (1933), 242-247.

29] I.E. Verbitskii, An estimate of the norm of a function in Hardy space in terms of the norms of its real and imaginary parts, Mat. Issled. Vyp. 54 (1980) 16-20 (Russian), and in Amer. Math. Soc. Transl. (2) 124 (1984), 11-15.

V. Yudin, On Fourier sums in L^p, Proc. Steklov

30] Inst. Math. 178 (1989), 279-280.

31] A. Zygmund, Trigonometric Series, I and II, Cambridge Univ. Press, 2nd Edition, 1968.

32] A. Zygmund, Trigonometric Series, second edition 1955, Dover. Μετάφραση Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης.