ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
UNIVERSITY OF CRETE

Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών
Σχολή Μαθηματικών
Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών: Μαθηματικά και Εκπαίδευση

Διπλωματική Εργασία με τίτλο:

Η απήχηση της Ρεαλιστικής Μαθηματικής Εκπαίδευσης (Realistic Mathematics Education – RME) στη Διδακτική των Μαθηματικών. Μια κριτική προσέγγιση.

Ονοματεπώνυμο φοιτήτριας: Μαρίνα Γκουρογιάννη (Α.Μ. 407)
Υπεύθυνη καθηγήτρια: Αγγελική Μάλη

Μέλη εξεταστικής επιτροπής:

Κουρουνιώτης Χρήστος

Μάλη Αγγελική

Τζανάκης Κώστας

Περιεχόμενα

Περίληψη……... σελ. 5

Κεφάλαιο 1: Εισαγωγή

1.1 Εισαγωγή……..……... σελ. 9

Κεφάλαιο 2: Μεθοδολογία

2.1 Μεθοδολογία……..…..……. σελ. 11

Κεφάλαιο 3: Ποια είναι τα βασικά σημεία της θεωρίας της RME για τη διδασκαλία και τα προγράμματα σπουδών των Μαθηματικών.

3.1 Ρεαλιστική Μαθηματική Εκπαίδευση……...…… σελ. 19

3.2 Οι κατευθυντήριες ιδέες του Hans Freudenthal……...…… σελ. 19

3.3 Η προέλευση της RME…….…… σελ. 20

3.4 Οι ιδέες της RME…….….……. σελ. 21

3.5 Οι βασικές διδακτικές αρχές της RME…….…….…… σελ. 22

3.6 Μαθηματικοποίηση……...……..……... σελ. 24

3.7 Τα μαθηματικά ως ανθρώπινη δραστηριότητα…….....…….. σελ. 25

3.8 Πρόγραμμα σπουδών…….…….……..……. σελ. 26

3.9 Έρευνα των Van Zanten και Van den Heuvel-Panhuizen (2021) για τα σχολικά εγχειρίδια ……...…...….. σελ. 28

Κεφάλαιο 4: Τι προσφέρει η RME στη διδασκαλία των Μαθηματικών και στη μάθηση των μαθητών.

4.1 Συνεισφορά της RME στην κατανόηση των μαθητών μέσω προβλημάτων πλαισίου (context problems)……..……...…….. σελ. 36

4.2 Μαθησιακές τροχιές (learning trajectories) στην RME……...…….. σελ. 39

4.3 Μοντελοποίηση στην RME…….…..……. σελ. 42

4.4 Το μοντέλο της ράβδου (bar model) για τα ποσοστά…….……...…..…… σελ. 43

4.5 Εκπαιδευτικό πείραμα με το επιτραπέζιο παιχνίδι snake and ladder (φιδάκι) για τη γεωμετρία…….….……... σελ. 51

4.6 Ρεαλιστική αναπαράσταση του έργου «Sunflowers» του Vincent Van Gogh για τη μέτρηση ……..…..…….. σελ. 55

4.6.1 Βασικές δεξιότητες αριθμητικής……...…… σελ. 58

4.6.2 Αναλογία και κλάσματα…….…….……...…… σελ. 59

4.6.3 Μέτρηση και γεωμετρία…….…….….…..…… σελ. 60

Κεφάλαιο 5: Επίλογος

5.1 Επίλογος……..……..……. σελ. 62

Βιβλιογραφία…….……... σελ. 68

Περίληψη

Η παρούσα βιβλιογραφική ανασκόπηση με τίτλο "*Η απήχηση της Ρεαλιστικής Μαθηματικής Εκπαίδευσης (Realistic Mathematics Education - RME) στη διδακτική των Μαθηματικών. Μια κριτική προσέγγιση.*" απαντάει στα εξής ερευνητικά ερωτήματα: 1) Ποια είναι τα βασικά σημεία της θεωρίας της RME για τη διδασκαλία και τα προγράμματα σπουδών των Μαθηματικών; και 2) Τι προσφέρει η RME στη διδασκαλία των Μαθηματικών και στη μάθηση των μαθητών; Σχετικά με το πρώτο ερευνητικό ερώτημα η θεωρία της RME καθορίζεται από τις ιδέες του Freudenthal, σύμφωνα με τις οποίες η διδασκαλία των μαθηματικών βασίζεται σε προβλήματα πλαισίου (context problems) τα οποία αφορούν την πραγματικότητα των μαθητών και απαιτούν κατά την επίλυση τους μαθηματικοποίηση. Η μαθηματικοποίηση υποστηρίζει ότι η εκπαίδευση στα μαθηματικά πρέπει να έχει ως σημείο αφετηρίας της τα μαθηματικά ως δραστηριότητα, και όχι τα μαθηματικά ως έτοιμο σύστημα (Freudenthal, 1971, 1973b, 1991) . Η μαθηματικοποίηση διακρίνεται σε οριζόντια και κατακόρυφη, σύμφωνα με τον Treffers (1987), όπου η οριζόντια αφορά τη μετατροπή του ρεαλιστικού προβλήματος σε μαθηματικό μέσω του συμβολισμού ενώ η κατακόρυφη αφορά την επέκταση της μαθηματικής κατάστασης του κάθε ατόμου (Freudenthal, 1991). Αφού πραγματοποιηθεί η διαδικασία της μαθηματικοποίησης, βασική διαδικασία της RME είναι η καθοδηγούμενη επανεφεύρεση από τους ίδιους τους μαθητές, δηλαδή οι μαθητές αντί να είναι δέκτες έτοιμων μαθηματικών, θα πρέπει να συμμετέχουν ενεργά στην εκπαιδευτική διαδικασία, αναπτύσσοντας μόνοι τους μαθηματικά εργαλεία και γνώσεις (Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2020). Επιπλέον, η RME τονίζει την ιδέα «μαθηματικά για όλους», σύμφωνα με την οποία τα μαθηματικά που θα χρησιμοποιήσει η πλειοψηφία των μαθητών θα είναι για την επίλυση προβλημάτων σε καταστάσεις της καθημερινής ζωής, αφού δεν προορίζεται να γίνουν όλοι μαθηματικοί (Gravemeijer & Terwel, 2000). Όσον αφορά τη θεωρία στα προγράμματα σπουδών, σύμφωνα με τον Freudenthal, δεν είναι ένα προκαθορισμένο σύνολο θεωριών, στόχων, μέσων, περιεχομένων και μεθόδων και για την ανάπτυξη τους απαιτείται η συνεργασία των μαθητών με τους εκπαιδευτικούς σε σχολικό περιβάλλον (Freudenthal, 1973a). Στην προσέγγιση της RME προκύπτει σύμφωνα με τον Treffers (1993, σελ. 103) ότι "στα τέλη της δεκαετίας του 1980 η ανάπτυξη των σχολικών βιβλίων, των αξιολογήσεων και των προγραμμάτων σπουδών είναι καλά προσαρμοσμένη στα εθνικά τελικά πρότυπα και στο (άτυπο) εθνικό πρόγραμμα σπουδών (De Jong, 1986) στην Ολλανδία. Ενώ σε πολλές άλλες χώρες (Ernest, 1991) λείπει οποιοσδήποτε τέτοιος συντονισμός με αποτέλεσμα τα σχολικά βιβλία, το εθνικό πρόγραμμα σπουδών και οι αξιολογήσεις να στερούνται ρητά τις απόψεις των προοδευτικών εκπαιδευτικών". Σχετικά με το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα φαίνεται ότι η διδακτική των Μαθηματικών μέσω RME προκαλεί πολλά

οφέλη ως προς την κατανόηση τους από τους μαθητές. Οι δραστηριότητες των μαθητών στην RME είναι ως επί το πλείστον διαδραστικές και έχουν σχεδιαστεί για να καλλιεργήσουν το ενδιαφέρον των μαθητών για τη μελέτη των μαθηματικών (Fauzan, Slettenhaar & Plomp, 2002). Επιπλέον, η RME μπορεί να αυξήσει τη λογική, την κριτική και τη δημιουργική σκέψη των μαθητών (Ruseffendi, 1990; Saefudin, 2012; Sembiring, Hadi, & Dolk, 2008; Usdiyana, Purniati, Yulianti, & Harningsih, 2013). Βοηθά στην κατασκευή της γνώσης των μαθητών σε κάθε στάδιο της δημιουργικής σκέψης. Με βάση τη βιβλιογραφία, η διαδικασία δημιουργικής σκέψης είναι στην πραγματικότητα πιο προσανατολισμένη και επικεντρωμένη στις γνωστικές και διανοητικές λειτουργίες των ατόμων, ιδιαίτερα στη δημιουργική επίλυση προβλημάτων (Almeida, Prieto, Ferrando, Oliveira, & Ferrandiz, 2008; Isaksen & Treffinger, 2004). Τέλος, οι υποθετικές μαθησιακές τροχιές (learning trajectory) πιστεύεται ότι είναι μια μοναδική και ουσιαστική συνεισφορά στο πεδίο καθώς περιλαμβάνει ταυτόχρονη εξέταση μαθηματικών στόχων, μοντέλων σκέψης των παιδιών, μοντέλων σκέψης των δασκάλων και ερευνητών, αλληλουχίες διδακτικών δραστηριοτήτων και την αλληλεπίδραση αυτών σε λεπτομερές επίπεδο (Clements & Sarama, 2004).

Abstract

This literature review entitled "*The impact of Realistic Mathematics Education (RME) in mathematics teaching. A critical approach.*" answers the following research questions: 1) What are the key points of RME theory for mathematics teaching and curriculum? and 2) What does RME offer to mathematics teaching and student learning? Regarding the first research question, RME theory is defined by Freudenthal's ideas that mathematics teaching is based on context problems that relate to students' reality and require mathematization when solving them. Mathematization argues that mathematics education should have as its starting point mathematics as an activity, rather than mathematics as a ready-made system (Freudenthal, 1971, 1973b, 1991). Mathematization is divided into horizontal and vertical, according to Treffers (1987), where horizontal involves the transformation of a realistic problem into a mathematical one through symbolism, while vertical involves the extension of the individual's mathematical situation (Freudenthal, 1991). Once the process of mathematization has taken place, a key process of RME is the guided reinvention by the students themselves, which means instead of being recipients of ready-made mathematics, students should actively participate in the educational process by developing mathematical tools and knowledge on their own (Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2020). Furthermore, RME emphasizes the idea of "mathematics for all", whereby the mathematics used by the majority of students will be for solving problems in everyday situation, since not everyone is intended to become a mathematician (Gravemeijer & Terwel, 2000). Regarding theory in curriculum, according to Freudenthal, it is not a predetermined set of theories, objectives, means, contents and methods and its development requires the cooperation of students and teachers in a school environment (Freudenthal, 1973a). According to Treffers (1993, p. 103) "in the late 1980s the development of textbooks, assessments and curriculum is well adapted to the national final standards and the (informal) national curriculum (De Jong, 1986) in the Netherlands. In many other countries (Ernest, 1991) any such coordination is lacking and as a result textbooks, national curriculum and assessments explicitly lack the views of progressive teachers." Regarding the second research question, it seems that teaching mathematics through RME has many benefits in terms of students' understanding. Student activities in RME are mostly interactive and designed to cultivate students' interest in studying mathematics (Fauzan, Slettenhaar & Plomp, 2002). In addition, RME can increase students' logical, critical and creative thinking (Ruseffendi, 1990; Saefudin, 2012; Sembiring, Hadi, & Dolk, 2008; Usdiyana, Purniati, Yulianti, & Harningsih, 2013). It helps to construct students' knowledge at each stage of creative thinking. Based on the literature, the creative thinking process is actually more oriented and focused on individuals' cognitive and

intellectual functions, particularly creative problem solving (Almeida, Prieto, Ferrando, Oliveira, & Ferrandiz, 2008; Isaksen & Treffinger, 2004). Finally, hypothetical learning trajectories are believed to be a unique and essential contribution to the field as they involve simultaneous consideration of mathematical goals, children's thinking patterns, teachers' and researchers' thinking patterns, sequences of instructional activities, and the interaction of these at a detailed level (Clements & Sarama, 2004).

Κεφάλαιο 1: Εισαγωγή

1.1 Εισαγωγή

Τα μαθηματικά αποτελούν ένα υποχρεωτικό μάθημα που διδάσκεται σε όλες τις βαθμίδες της εκπαίδευσης. Ακόμη, κατέχουν ένα βασικό κεφάλαιο για τη ζωή του ανθρώπου, ιδιαίτερα για την επίλυση καθημερινών προβλημάτων. Η εκμάθηση των μαθηματικών είναι απαραίτητη μιας και αναπτύσσει την ανώτερη τάξη σκέψης και εξασκεί τον εγκέφαλό στη συστηματική επίλυση προβλημάτων (Laurens et al., 2018). Έτσι, στον πραγματικό κόσμο θα είναι πιο εύκολο να δοθούν λύσεις σε κάθε πρόβλημα. Εκτός αυτού, τα μαθηματικά βοηθούν σε άλλες επιστήμες, συμπεριλαμβανομένων των οικονομικών, της λογιστικής, της χημείας, της φυσικής κ.α. (Laurens et al., 2018).

Η Ρεαλιστική Μαθηματική Εκπαίδευση (Realistic Mathematics Education -RME) προσανατολίζεται στην ενδυνάμωση του "κάνω μαθηματικά" ως βασική διαδικασία για την εκμάθηση των μαθηματικών (Laurens et al., 2018). Τα μαθηματικά δεν είναι μόνο για τους μαθηματικούς, αλλά εμπλέκονται στην καθημερινή ζωή όλων των ανθρώπων (Laurens et al., 2018). Η μαθηματικοποίηση βοηθά τους μαθητές να συνδέσουν ιδέες για να τις ανακαλύψουν ξανά, πράγμα που σημαίνει ότι αποτελεί μια διαδικασία κατά την οποία οι μαθητές επισημοποιούν την άτυπη κατανόηση και τη διαίσθησή τους (Laurens et al., 2018). Ο Freudenthal χρησιμοποιεί τις έννοιες της κατακορυφης και της οριζόντιας μαθηματικοποίησης στην ανάπτυξη RME. Συγκεκριμένα, η μάθηση ξεκινά από ένα άτυπο βήμα, το οποίο αργότερα κατευθύνει τους μαθητές να λύνουν μαθηματικά προβλήματα του πραγματικού κόσμου που αντιπροσωπεύονται από σύμβολα (Laurens et al., 2018). Μετά από αυτό, οι μαθητές μπορούν να συνεχίσουν στην κατακόρυφη μαθηματικοποίηση για να βγάλουν γενικότερα συμπεράσματα (Laurens et al., 2018).

Το νέο στις απόψεις του Freudenthal δεν είναι μόνο ότι θέλει να ενσωματώσει την καθημερινή πραγματικότητα με έμφαση στη μαθηματική εκπαίδευση, αλλά κυρίως είναι η θεμελιώδης ιδέα του να αφήσει πλούσιο πλαίσιο πραγματικότητας να χρησιμεύσει ως πηγή για την εκμάθηση των μαθηματικών (Treffers, 1993). Επιπλέον, ο Pitajeng (2006) δηλώνει ότι η μάθηση των μαθηματικών πρέπει να περιλαμβάνει μαθησιακά βοηθήματα όπως πραγματικές καταστάσεις τροποποιημένες για τα παιδιά, ώστε οι έννοιες να μπορούν να γίνουν εύκολα κατανοητές. Αυτά τα βοηθήματα θα εμπλέξουν τους μαθητές στη μάθηση και τη συζήτηση. Αυτή η διαδικασία μάθησης πραγματοποιείται στα προβλήματα πλαισίου, που αποτελούν χαρακτηριστικό της RME. Τα

προβλήματα πλαισίου (context problems) στην RME ορίζονται ως οι προβληματικές καταστάσεις που είναι βιωματικά πραγματικές για τον μαθητή και ενισχύονται με τη μαθηματική ανάπτυξη του μαθητή (Gravemeijer & Doorman, 1999). Ο γενικός στόχος του εκπαιδευτικού σχεδιασμού είναι να υποστηρίξει τη σταδιακή εμφάνιση μιας μαθηματικής πραγματικότητας που λαμβάνεται ως κοινή. Εάν οι μαθητές βιώσουν τη διαδικασία της επανεφεύρεσης των μαθηματικών ως διευρυνόμενη κοινή λογική, τότε δεν θα βιώσουν καμία διχοτόμηση μεταξύ της καθημερινής εμπειρίας ζωής και των μαθηματικών. Και τα δύο θα είναι μέρος της ίδιας πραγματικότητας (Gravemeijer & Doorman, 1999). Αυτό το χαρακτηριστικό της RME διαφέρει από τη συμβατική μάθηση που δεν περιλαμβάνει τους μαθητές σε μαθησιακά θέματα (Treffers, 1993). Στη συμβατική μάθηση, οι μαθητές ακολουθούν μόνο έννοιες και παραδείγματα που δίνει ο δάσκαλος. Τείνουν να απομνημονεύουν παρά να καταλαβαίνουν (Treffers, 1993). Επομένως, σύμφωνα με τον Freudenthal, τα μαθηματικά δεν πρέπει να μαθαίνονται ως προϊόν, αλλά ως δραστηριότητα μέσω της οποίας οι μαθητές μπορούν να κατασκευάσουν ενεργά τις δικές τους μαθηματικές έννοιες (Wijaya, 2012). Αυτά διακρίνουν τη ρεαλιστική προσέγγιση. (Treffers, 1987, 1991). Ο Freudenthal θέτει τα θεμέλια για αυτόν τον διδακτικό ρεαλισμό και καθορίζει την ανάπτυξη της συγκεκριμένης εκπαίδευσης στα μαθηματικά (Treffers, 1993). Η παρούσα εργασία είναι μια βιβλιογραφική ανασκόπηση με τα εξής ερωτήματα: 1) Ποια είναι τα βασικά σημεία της θεωρίας της RME για τη διδασκαλία και τα προγράμματα σπουδών των Μαθηματικών και 2) Τι προσφέρει η RME στη διδασκαλία των Μαθηματικών και στη μάθηση των μαθητών; Η επόμενη ενότητα αναλύει τη μεθοδολογία που ακολουθώ για να απαντηθούν τα παραπάνω ερωτήματα.

Κεφάλαιο 2: Μεθοδολογία

2.1 Μεθοδολογία

Για την διεξαγωγή της βιβλιογραφικής ανασκόπησης ακολούθησα πέντε αλληλένδετα βήματα (Creswell, 2012). Τα βήματα είναι τα εξής:

1. Προσδιορισμός λέξεων-κλειδιών (Identify key terms) για την αναζήτηση στη βιβλιογραφία.

2. Εντοπισμός κατάλληλης βιβλιογραφίας (Locate literature) σχετικής με το θέμα.

3. Κριτική αξιολόγηση και τελική επιλογή βιβλιογραφίας (Critically evaluate and select the literature).

4. Οργάνωση βιβλιογραφίας (Organize the literature) κρατώντας σημειώσεις από την εκάστοτε βιβλιογραφική πηγή.

5. Δημιουργία της βιβλιογραφικής ανασκόπησης (Write a literature review) με τη χρήση των σημειώσεων της κάθε βιβλιογραφικής πηγής.

Παρακάτω αναλύεται λεπτομερώς η μεθοδολογία που ακολούθησα για τη διεξαγωγή της έρευνας σύμφωνα με τα παραπάνω βήματα.

1. Προσδιορισμός λέξεων-κλειδιών (Identify key terms)

Για το πρώτο βήμα, προσδιόρισα τις λέξεις-κλειδιά: “RME”, “Freudenthal”, “Realistic Mathematics Education”, “teaching Mathematics in Netherlands”, “ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση”, οι οποίες αναφέρονται γενικά στο θέμα που έχω επιλέξει και προκύπτουν από τον τίτλο που έχω θέσει στην εργασία μου “Η απήχηση της Ρεαλιστικής Μαθηματικής Εκπαίδευσης (Realistic Mathematics Education - RME) στη διδακτική των Μαθηματικών: Μία κριτική προσέγγιση.” Έπειτα χρησιμοποιώντας τα ερευνητικά ερωτήματα προκύπτουν επιπλέον, πιο ειδικές λέξεις-κλειδιά: “πρόγραμμα σπουδών στα μαθηματικά βασισμένο στη ρεαλιστική εκπαίδευση”, “RME curriculum”, “mathematics curriculum in Netherlands”, “RME learning trajectories”, “teaching RME”.

Αφού κάνω αυτή την επιλογή λέξεων και φράσεων σχετικών με το θέμα μου, τις αναζητάω στο google scholar. Διαλέγω να κάνω την αναζήτηση εκεί γιατί θεωρώ πιο χρήσιμο να εμφανιστεί υλικό από διάφορες βιβλιοθήκες και ανάλογα με τις επιλογές μου, αργότερα να αναζητήσω τις πηγές στην εκάστοτε βιβλιοθήκη. Οι σύνδεσμοι που προκύπτουν είναι αρκετοί, επομένως αποφασίζω να περιορίσω την αναζήτηση μου σε έρευνες, αρχικά που έχουν χρησιμοποιηθεί ως βιβλιογραφία σε πολλές άλλες έρευνες (>300) και επίσης που εξετάζουν την πλευρά των μαθητών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Αυτό που διαπιστώνω μελετώντας τις περιλήψεις των άρθρων που επιλέγω είναι ότι οι έρευνες σε παιδιά αυτής της βαθμίδας εκπαίδευσης είναι λίγες, επομένως χρησιμοποιώ και έρευνες που εξετάζουν μαθητές πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης-το πιο σύνηθες εύρημα- αλλά και φοιτητές. Άλλη διαπίστωση που κάνω κατά την αναζήτηση μου είναι ότι δεν υπάρχει υλικό στην ελληνική γλώσσα σχετικό με την Ρεαλιστική Μαθηματική Εκπαίδευση (RME), με αποτέλεσμα οι έρευνες που επιλέγω να μελετούν κυρίως την Ολλανδία. Τέλος, κατά την αναζήτηση μου εκτός από τις λέξεις-κλειδιά χρησιμοποιώ και ορισμένα σχετικά άρθρα που ανήκουν στην βιβλιογραφία άρθρων που έχω ήδη επιλέξει.

2. Εντοπισμός κατάλληλης βιβλιογραφίας (Locate literature)

Για τον εντοπισμό της κατάλληλης σχετικής βιβλιογραφίας για την εργασία μου χρησιμοποιώ πρωτογενείς και δευτερογενείς πηγές. Πρωτογενείς πηγές είναι αυτές που έχουν πραγματοποιηθεί και δημιουργηθεί από τον αρχικό ερευνητή παρουσιάζοντας την άποψη του και σημαντικές λεπτομέρειες της αρχικής έρευνας, ενώ οι δευτερογενείς είναι αυτές που χρησιμοποιούν τις πρωτογενείς συνοψίζοντας τες (Creswell, 2012).

Σε πρώτη φάση, οι βιβλιογραφικές πηγές που χρησιμοποιώ για την εργασία μου είναι η "Εγκυκλοπαίδεια της Διδακτικής των Μαθηματικών" (Encyclopedia of Mathematics Education) των Van den Heuvel-Panhuizen και Drijvers (2020) στις σελίδες 521-525 όπου αναφέρεται στην RME και το βιβλίο "Educational Research: Planning, Conducting, And Evaluating Quantitative And Qualitative Research" του Creswell (2012) για να με καθοδηγήσει στη συγγραφή της παρούσας βιβλιογραφικής ανασκόπησης. Έπειτα, αφού κάνω την αναζήτηση των παραπάνω λέξεων και φράσεων κλειδιών, διαβάζω τις περιλήψεις του εκάστοτε άρθρου για να ελέγξω τη συνάφεια με το θέμα μου προκειμένου να κάνω την αρχική επιλογή της βιβλιογραφίας μου.

Είναι γεγονός ότι για τον εντοπισμό της βιβλιογραφίας χρησιμοποιώ μόνο το διαδίκτυο, το οποίο παρουσιάζει ορισμένα πλεονεκτήματα αλλά και μειονεκτήματα (Creswell, 2012). Τα

πλεονεκτήματα αφορούν κυρίως την εύκολη προσβασιμότητα στο υλικό ανά πάσα ώρα, το υπέρογκο εύρος πληροφοριών που μπορεί να συλλεχθεί για οποιοδήποτε θέμα, τη δυνατότητα άμεσης επικοινωνίας με τον εκάστοτε ερευνητή για κάποια απορία και τέλος τη δυνατότητα άμεσης εκτύπωσης του υλικού σε ορισμένες πηγές (Creswell, 2012). Τα μειονεκτήματα αφορούν την αμφιλεγόμενη ποιότητα των ερευνών στην περίπτωση που δεν έχουν ελεγχθεί από ειδικούς, την πιθανότητα λογοκλοπής των κειμένων εν αγνοία του ερευνητή, τη δυσκολία εύρεσης ολόκληρης έρευνας και την ανοργάνωτη αναζήτηση που προσφέρει το διαδίκτυο (Creswell, 2012). Κατά την αναζήτηση μου, για λόγους εγκυρότητας επιλέγω τις τελικές βιβλιογραφικές αναφορές σύμφωνα με τη λίστα διεθνών ερευνητικών περιοδικών της Διδακτικής των Μαθηματικών (Toerner & Arzarello, 2012) εμπλουτισμένη με τα *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, European Journal of Science and Mathematics Education, Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching, Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, αλλά και χρησιμοποιώντας δύο ερευνητικά περιοδικά Quartile 1, το *Mathematics* και το *Journal of Curriculum Studies*.

3. <u>Κριτική αξιολόγηση και τελική επιλογή βιβλιογραφίας</u> (Critically evaluate and select the literature)

Σε πρώτη φάση, οι έρευνες που έχω συμπεριλάβει στη βιβλιογραφία μου έχουν προκύψει με κριτήρια τη συνάφεια τους με το θέμα μου, την οποία ελέγχω διαβάζοντας την εκάστοτε περίληψη αλλά και τη δυνατότητα λήψης τους από το διαδίκτυο. Αυτές στις οποίες καταλήγω είναι σε πλήθος είκοσι δύο. Έπειτα, χρησιμοποιώντας την παρακάτω λίστα ερευνητικών περιοδικών, απορρίπτω έντεκα και αναζητάω επιπλέον, όπου εντοπίζω έντεκα συναφείς με το θέμα μου νέες πηγές, τις οποίες επίσης έχω τη δυνατότητα να αποθηκεύσω στον υπολογιστή μου. Τέλος, καταλήγω σε είκοσι δύο συνολικά άρθρα τα οποία χρησιμοποιώ ως κύριες βιβλιογραφικές πηγές.

Πίνακας 2.1. Λίστα διεθνών ερευνητικών περιοδικών της Διδακτικής των Μαθηματικών και άλλων επιστημών

International journals in mathematics education (peer-reviewed)
Educational Studies in Mathematics (ESM)
Journal for Research in Mathematics Education (JRME)
Mathematical Thinking and Learning (MTL)
Journal of Mathematical Behavior (JMB)
Journal of Mathematics Teacher Education (JMTE)
ZDM - The International Journal on Mathematics Education
Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (old ZDM)
International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education
For the Learning of Mathematics
Research in Mathematics Education (RME)
Mathematics Education Research Journal (MERJ)
Technology, Knowledge and Learning (former International Journal of Computers for Mathematical Learning)
Recherches en didactique des mathematiques
Nordic Studies in Mathematics Education (NOMAD)
The Mathematics Enthusiast
Journal für Mathematik-Didaktik (JMD)

International journals in mathematics & science education (peer-reviewed)
International Journal of Science and Mathematics Education (IJSME)
International Journal of Mathematical Education in Science and Technology
Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education
European Journal of Science and Mathematics Education
Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching
Eurasia journal of mathematics, Science and Technology Education

4. Οργάνωση βιβλιογραφίας (Organize the literature)

Για την οργάνωση της βιβλιογραφίας αρχικά αποθηκεύω τις είκοσι δύο βιβλιογραφικές πηγές στις οποίες έχω καταλήξει, αριθμώντας τες χρονολογικά (ως προς την ημερομηνία λήψης τους), πράγμα χρήσιμο για μένα καθ' όλη τη διάρκεια της έρευνας μου.

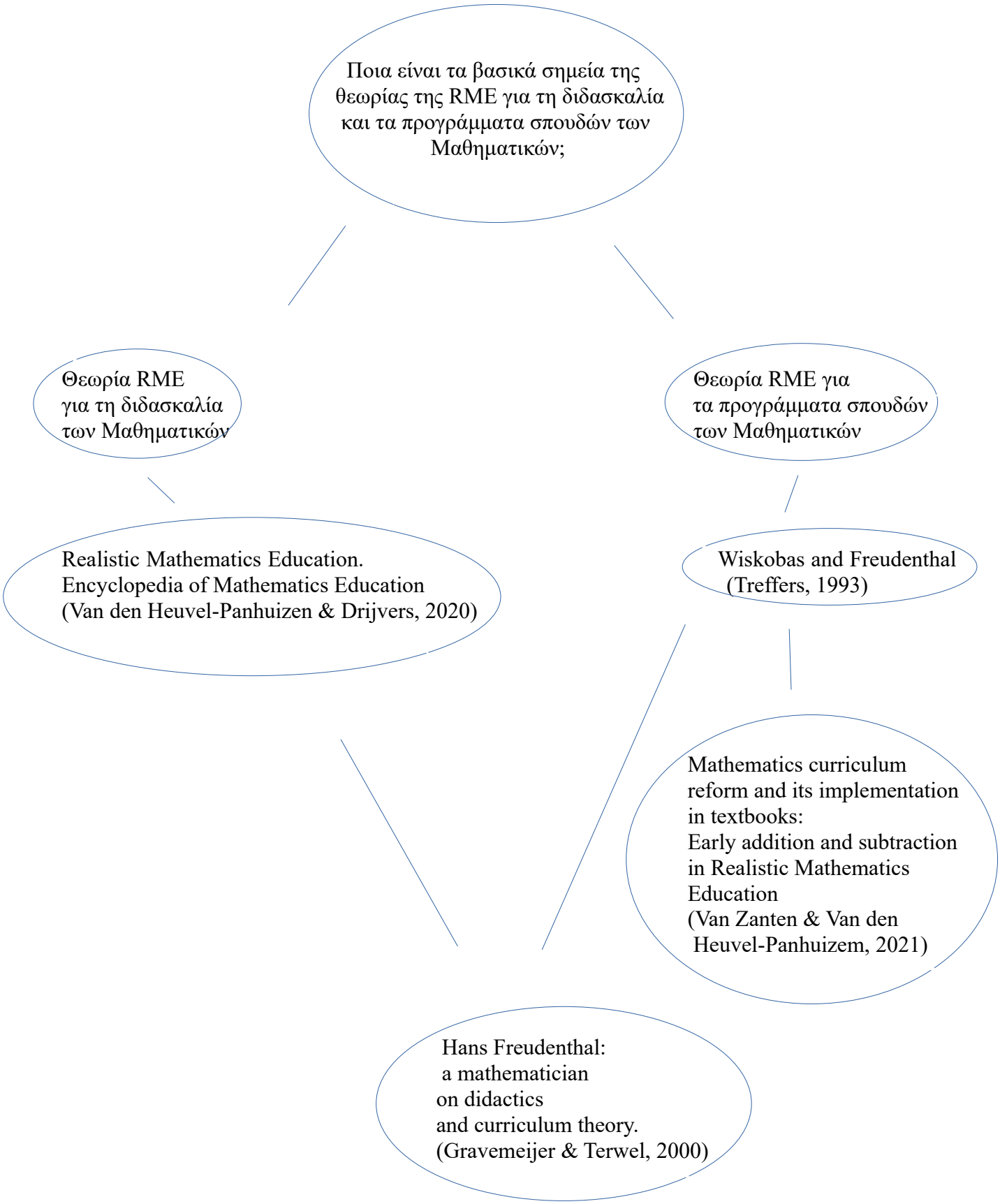
Έπειτα, μελετάω τις είκοσι δύο πηγές κρατώντας σημειώσεις για την καθεμία από αυτές με σκοπό να ερευνήσω κατά πόσο ανταποκρίνονται στα ερευνητικά ερωτήματα που έχω θέσει. Με αυτή τη διαδικασία καταλήγω στην επιλογή οκτώ βιβλιογραφικών αναφορών, τις οποίες θεωρώ περισσότερο σχετικές με την έρευνα μου και κατ' επέκταση με τα ερευνητικά ερωτήματα της έρευνας, τα οποία διαμορφώνονται ως εξής:

1) Ποια είναι τα βασικά σημεία της θεωρίας της RME για τη διδασκαλία και τα προγράμματα σπουδών των Μαθηματικών;

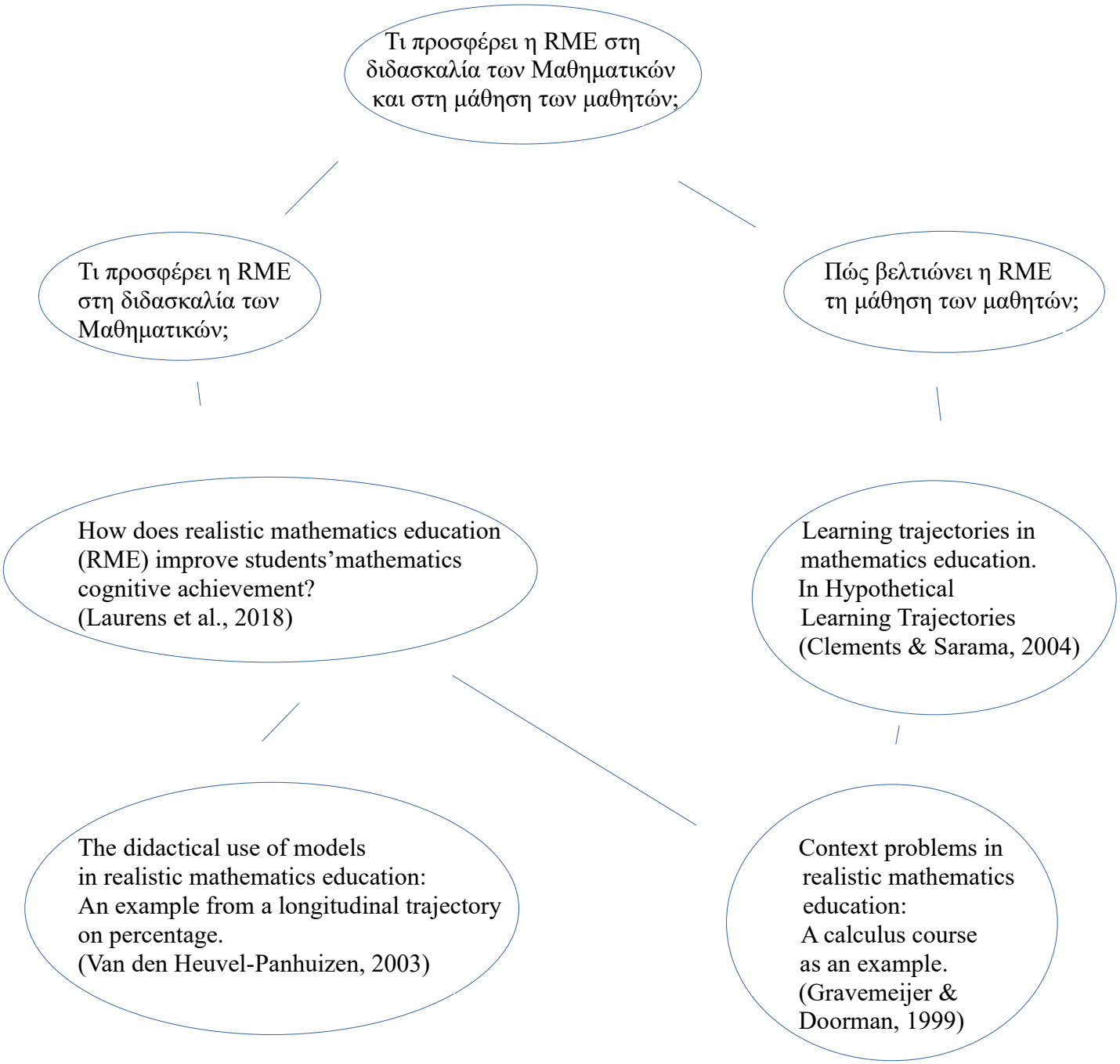
2) Τι προσφέρει η RME στη διδασκαλία των Μαθηματικών και στη μάθηση των μαθητών;

Με βάση τα ερευνητικά ερωτήματα δημιουργώ τον παρακάτω βιβλιογραφικό χάρτη, παρουσιάζοντας ποιες βιβλιογραφικές αναφορές απαντούν το κάθε ερευνητικό ερώτημα.

<u>Σχήμα 2.2:</u> Βιβλιογραφικός χάρτης (Literature map) για το ερευνητικό ερώτημα 1



<u>Σχήμα 2.3:</u> Βιβλιογραφικός χάρτης (Literature map) για το ερευνητικό ερώτημα 2



5. <u>Δημιουργία της βιβλιογραφικής ανασκόπησης</u> (Write a literature review)

Αφού ολοκληρώνεται ο βιβλιογραφικός χάρτης ξεκινάω τη συγγραφή του κυρίως κειμένου της βιβλιογραφικής ανασκόπησης χρησιμοποιώντας τις σημειώσεις που έχουν συλλεχθεί από την κάθε

βιβλιογραφική πηγή. Για τη συγγραφή χρησιμοποιώ το βιβλιογραφικό σύστημα APA 7th edition (American Psychological Association, 2020).

Το γεγονός ότι επιλέγω να διεξάγω τη συγκεκριμένη έρευνα οφείλεται στο γεγονός ότι υπάρχει έλλειμμα στην ελληνική βιβλιογραφία σχετικά με την Ρεαλιστική Μαθηματική Εκπαίδευση (RME), πράγμα που θα μπορούσε να αποτελέσει ερέθισμα και για άλλους ερευνητές να διεξάγουν ποιοτικές και ποσοτικές έρευνες στην Ελλάδα σχετικά με την RME και τα οφέλη της στη διδασκαλία των Μαθηματικών. Ακόμη, παρατηρείται κατά την αναζήτηση μου ότι δεν υπάρχει πληθώρα πρόσφατων ερευνών στην αγγλική γλώσσα που να ανταποκρίνονται στα ερευνητικά ερωτήματα της παρούσας εργασίας. Τέλος, θεωρώ ότι η συγκεκριμένη βιβλιογραφική ανασκόπηση θα μπορούσε να ωφελήσει εκπαιδευτικούς μαθηματικών, οι οποίοι θα ήθελαν να διδάξουν μέσω της RME καθώς παρατίθενται προτεινόμενες προσεγγίσεις διδασκαλίας μέσω RME ορισμένων μαθηματικών εννοιών (π.χ. ποσοστά, γεωμετρία κ.α.).

Οι περιορισμοί που συναντάω κατά τη διάρκεια της έρευνας αφορούν τη χρήση βιβλιογραφίας γραμμένης αποκλειστικά στην αγγλική γλώσσα καθώς είναι η μόνη γλώσσα η οποία μπορώ να κατανοήσω σε πολύ καλό επίπεδο, πέραν της ελληνικής, στην οποία δεν βρίσκω υλικό χρήσιμο για την παρούσα έρευνα. Το γεγονός αυτό περιορίζει την έρευνα αφού απορρίπτονται πηγές γραμμένες σε άλλες γλώσσες, οι οποίες ενδεχομένως να ήταν συναφείς με το θέμα. Επίσης, άλλος περιορισμός είναι σε σχέση με τα σχολικά εγχειρίδια και το πρόγραμμα σπουδών στα μαθηματικά στην Ελλάδα. Σε μία από τις βιβλιογραφικές πηγές που εμφανίζονται στο κείμενο αναφέρονται οι διαφορές που εμφανίζουν τα σχολικά εγχειρίδια που είναι προσανατολισμένα στην RME με την πάροδο των χρόνων. Στα τέλη της δεκαετίας του 1980 η ανάπτυξη των σχολικών βιβλίων, των αξιολογήσεων και των προγραμμάτων σπουδών είναι καλά προσαρμοσμένη στα εθνικά τελικά πρότυπα και στο (άτυπο) εθνικό πρόγραμμα σπουδών (De Jong, 1986) στην Ολλανδία. Σύμφωνα με τον Treffers (1993, σελ. 103) “Ενώ σε πολλές άλλες χώρες (Ernest, 1991) λείπει οποιοσδήποτε τέτοιος συντονισμός οπότε τα σχολικά βιβλία, το εθνικό πρόγραμμα σπουδών και οι αξιολογήσεις στερούνται ρητά τις απόψεις των προοδευτικών εκπαιδευτικών που οδηγούν στην ανάπτυξη αυτών” . Για αυτό τα εγχειρίδια που αναφέρονται στο άρθρο των Van Zanten και Van den Heuvel-Panhuizen (2021) δεν ανταποκρίνονται στα ελληνικά δεδομένα. Τέλος, για την παρούσα βιβλιογραφική ανασκόπηση, η συλλογή βιβλιογραφίας γίνεται αποκλειστικά μέσω του διαδικτύου, γεγονός που περιορίζει την έρευνα αφού αποκλείει υλικό που ενδεχομένως να ήταν συναφές με το θέμα, αλλά δεν είναι διαθέσιμο ηλεκτρονικά, παρά μόνο σε βιβλιοθήκες.

<u>Κεφάλαιο 3:</u> Ποια είναι τα βασικά σημεία της θεωρίας της RME για τη διδασκαλία και τα προγράμματα σπουδών των Μαθηματικών.

3.1 Ρεαλιστική Μαθηματική Εκπαίδευση

Από τη δεκαετία του 1970, το Πανεπιστήμιο της Ουτρέχτης κατέχει ένα ερευνητικό ίδρυμα που προσπαθεί να ανανεώσει τη μάθηση των μαθηματικών. Στο Freudenthal Institute πρωτοστατεί ο Freudenthal. Βασίζεται στην Ολλανδία και δραστηριοποιείται από το 1905 έως το 1990. Το έργο του ονομάζεται Ρεαλιστική Μαθηματική Εκπαίδευση (Realistic Mathematics Education - RME). Η RME αναπτύσσεται με βάση τις έννοιες της καθημερινής ζωής. Στη συνέχεια χρησιμοποιείται σε πολλές χώρες όπως οι Ηνωμένες Πολιτείες και ορισμένες αφρικανικές και ασιατικές χώρες. Έρευνα που διεξήχθη σε ορισμένες (συμπεριλαμβανομένων των αναπτυσσόμενων χωρών όπως η Ινδονησία) έχει αποδείξει ότι η RME είναι μια πολλά υποσχόμενη προσέγγιση για τη διόρθωση και τη βελτίωση της κατανόησης των μαθηματικών εννοιών από τους μαθητές (Armanto, 2002; Fauzan, 2002).

Χαρακτηριστικό της RME είναι ότι οι «ρεαλιστικές» καταστάσεις αποκτούν εξέχουσα θέση στη μαθησιακή διαδικασία. Αυτές οι καταστάσεις χρησιμεύουν ως πηγή για την έναρξη κατανόησης μαθηματικών εννοιών, εργαλείων και διαδικασιών και ως πλαίσιο στο οποίο οι μαθητές μπορούν σε μεταγενέστερο στάδιο να εφαρμόσουν τις μαθηματικές τους γνώσεις, οι οποίες σταδιακά έχουν γίνει πιο γενικές και λιγότερο ειδικές στο πλαίσιο (Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2020).

Αν και οι «ρεαλιστικές» καταστάσεις με την έννοια των καταστάσεων «πραγματικού κόσμου» είναι σημαντικές στην RME, το «ρεαλιστικό» έχει μια ευρύτερη σημασία εδώ. Σημαίνει ότι προσφέρονται στους μαθητές προβληματικές καταστάσεις που μπορούν να φανταστούν (Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2020). Επομένως, στην RME, τα προβλήματα που παρουσιάζονται στους μαθητές μπορούν να προέρχονται από τον πραγματικό κόσμο αλλά και από τον φανταστικό κόσμο των παραμυθιών ή τον επίσημο κόσμο των μαθηματικών, αρκεί να είναι βιωματικά στο μυαλό του μαθητή (Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2020).

3.2 Οι κατευθυντήριες ιδέες του Hans Freudenthal

Ο Hans Freudenthal, μαθηματικός γεννημένος στη Γερμανία, ο οποίος το 1946 γίνεται καθηγητής στο Πανεπιστήμιο της Ουτρέχτης στην Ολλανδία συμβάλει ουσιαστικά στους τομείς της

γεωμετρίας και της τοπολογίας (Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2020). Αργότερα στην καριέρα του, ο Freudenthal (1968, 1973a, 1991) ενδιαφέρεται για την εκπαίδευση στα μαθηματικά. Σήμερα είναι πιθανώς περισσότερο γνωστός ως ένας από τους πιο ουσιαστικούς εκπαιδευτικούς μαθηματικών της εποχής του (Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2020). Το έργο του βασίζεται σε μια σειρά από ιδέες για το πώς να αντιμετωπιστούν τα ερωτήματα: Τι πρέπει να διδάσκεται σε ένα σχολικό μάθημα; Για ποιον σκοπό; Και σε ποιον; Υποστηρίζει τη διδασκαλία των μαθηματικών μέσω μαθητοκεντρικής προσέγγισης και τη διεξαγωγή πειραμάτων σκέψης για να διερευνηθεί το πώς μπορούν να προσφερθούν στους μαθητές ευκαιρίες για καθοδηγούμενη επανεφεύρεση των μαθηματικών (Freudenthal, 1973a). Οι μαθητές αντί να είναι δέκτες έτοιμων μαθηματικών, θα πρέπει να συμμετέχουν ενεργά στην εκπαιδευτική διαδικασία, αναπτύσσοντας μόνοι τους μαθηματικά εργαλεία και γνώσεις (Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2020). Ο Freudenthal θεωρεί τα μαθηματικά ως ανθρώπινη δραστηριότητα. Επομένως, σύμφωνα με τον ίδιο, τα μαθηματικά πρέπει να μαθαίνονται ως δραστηριότητα μαθηματικοποίησης της πραγματικότητας (Freudenthal, 1973a).

3.3 Η προέλευση της RME

Στα τέλη της δεκαετίας του 1950, σε πολλές δυτικές χώρες γίνεται αισθητή η ανάγκη για «ριζικές αλλαγές και βελτιώσεις στη διδασκαλία των μαθηματικών» (OEEC, 1961) (σελ. 11). Υπάρχουν πολλοί λόγοι για αυτό, που ποικίλλουν από την αυξανόμενη σημασία των μαθηματικών και των εφαρμογών τους για την κοινωνία έως τις νέες ιδέες για τη μάθηση και τη διδασκαλία των μαθηματικών (Bjarnadottir, 2014, 2018). Η υπόθεση και οι προτάσεις για μεταρρύθμιση εξετάζονται στο συνέδριο που πραγματοποιείται στο Centre Culturel de Royaumont στο Asnière-sur-Oise (Γαλλία) το 1959 (OEEC, 1961). Αυτό το συνέδριο είναι η έναρξη του παγκόσμιου αντίκτυπου του κινήματος μεταρρύθμισης των Νέων Μαθηματικών (Bjarnadottir, 2014; Kilpatrick, 2012). Ωστόσο, υπό την καθοδήγηση του Freudenthal (Robitaille & Travers, 2003) (σελ. 1495), τα Νέα Μαθηματικά δεν θα κέρδιζαν έδαφος. Αντίθετα, επιλέγεται μια άλλη κατεύθυνση, η οποία τελικά οδηγεί στην RME (Treffers, 1993).

Ως συνέπεια της διάσκεψης Royaumont, το 1961 η ολλανδική κυβέρνηση εγκατέστησε την Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde (Commission for the Modernization of the Mathematics Curriculum) (CMLW), της οποίας ήταν μέλος ο Freudenthal και της οποίας, το 1969, έγινε πρόεδρος. Στη CMLW ανατέθηκε να διερευνήσει ποια μεταρρύθμιση περιεχομένου και διδακτικής χρειαζόταν η Ολλανδία (CMLW, 1961). Η έναρξη του έργου Wiskobas που αφορά την

πρωτοβάθμια εκπαίδευση σηματοδοτεί την έναρξη της ανάπτυξης της RME. Από το 1971 και μετά, το έργο της CMLW και του Wiskobas συνεχίστηκε στο νεοϊδρυθέν Instituut voor Ontwikkeling van het Wiskundeonderwijs (IOWO), με πρώτο διευθυντή τον Freudenthal. Το 1991, ο διάδοχος αυτού του ινστιτούτου μετονομάστηκε σε Ινστιτούτο Freudenthal.

3.4 Οι ιδέες της RME

Γύρω στο 1970, η επικρατούσα προσέγγιση στην αριθμητική εκπαίδευση στην Ολλανδία είναι μάλλον μηχανιστική (Treffers, 1978, 1987). Έχει μια χαρακτηριστική εστίαση στη διδασκαλία σταθερών διαδικασιών με τρόπο βήμα προς βήμα, με τον δάσκαλο να δείχνει πώς να προχωρήσει σε κάθε βήμα (Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2020). Τα Νέα Μαθηματικά δεν θεωρούνται κατάλληλη εναλλακτική λύση. Σύμφωνα με τα λόγια του Freudenthal, τα Νέα Μαθηματικά παίρνουν «τη λάθος οπτική [...] αντικατάστασης της διορατικότητας του μαθητή από τη διορατικότητα του ενήλικα μαθηματικού» (σελ.141) (Freudenthal, 1981). Ο Freudenthal θεωρεί τα μαθηματικά ως δραστηριότητα αντί ως έτοιμη γνώση (Freudethal, 1968, 1973b). Το τελευταίο αναφέρεται στο ήδη δημιουργημένο σύστημα μαθηματικών το οποίο, ο Freudenthal αναφέρει ότι, οι μαθητές, όταν τους προσφέρεται, μπορούν μόνο να το αναπαράγουν (Freudethal, 1973b). Για αυτόν, μαθηματικά σημαίνει μαθηματικοποίηση της πραγματικότητας. Επομένως, κατά την άποψή του, η εκπαίδευση στα μαθηματικά δεν πρέπει να αφορά τη μετάδοση έτοιμων μαθηματικών στους μαθητές, αλλά τη δραστηριότητα της μαθηματικοποίησης (Freudenthal, 1981).

Αυτή η μεγάλη ιδέα των μαθηματικών ως της ανθρώπινης δραστηριότητας των μαθηματικών γίνεται μια σημαντική ιδέα που διέπει την ανάπτυξη της RME. Ο Treffers, ένα από τα κορυφαία πρόσωπα στην ανάπτυξη της RME, κάνει αργότερα τη διάκριση μεταξύ οριζόντιας και κατακόρυφης μαθηματικοποίησης. Η οριζόντια μαθηματικοποίηση αναφέρεται στη μετατροπή των προβλημάτων του πραγματικού κόσμου σε μαθηματικούς όρους, ενώ η κατακόρυφη μαθηματικοποίηση αναφέρεται στη χρήση μαθηματικών μέσων για την επίλυση προβλημάτων, τη γενίκευση της διαδικασίας επίλυσης και την επίτευξη υψηλότερου επιπέδου τυποποίησης (Treffers, 1987).

Στην RME, η πραγματικότητα θεωρείται ως αφετηρία για τις διαδικασίες μάθησης. Αυτός ο σημαντικός ρόλος της πραγματικότητας εκφράζεται με τον όρο «ρεαλιστική». Ωστόσο, στην RME, το ρεαλιστικό έχει επίσης μια ευρύτερη χροιά. Εκτός από τη χρήση της πραγματικότητας ως πηγής για την εκπαίδευση στα μαθηματικά, αναφέρεται το “συνειδητοποιώ και φαντάζομαι τι συμβαίνει”

(Van den Brink, 1973, 1989; Wijdeveld, 1980; Van den Heuvel-Panhuizen, 1996). Στην RME, προσφέρονται στους μαθητές προβλήματα που μπορούν να φανταστούν, συμπεριλαμβανομένων προβλημάτων από τον φανταστικό κόσμο των παραμυθιών και τον επίσημο κόσμο των μαθηματικών. Η παροχή τέτοιων προβλημάτων στους μαθητές συνεπάγεται έναν προληπτικό ρόλο του δασκάλου, ο οποίος εκφράζεται στην άλλη μεγάλη ιδέα του Freudenthal, την καθοδηγούμενη επανεφεύρεση (Freudenthal, 1991). Σύμφωνα με τον Freudenthal η επανεφεύρεση αναφέρεται στα βήματα των μαθησιακών διαδικασιών, ενώ το επίθετο «καθοδηγούμενη» δείχνει το εκπαιδευτικό περιβάλλον των μαθησιακών διαδικασιών. Η καθοδήγηση της επανεφεύρεσης συνεπάγεται μια ισορροπία μεταξύ, αφενός, του να αφήνονται οι μαθητές να σκέφτονται και να επινοούν πράγματα και, αφετέρου, να παρέχεται καθοδήγηση που προκαλεί στοχαστική σκέψη. Ο Treffers υπογράμμισε αυτή την άποψη τονίζοντας ότι οι κατασκευές και οι παραγωγές των μαθητών έχουν καθοριστική επίδραση στη μαθησιακή διαδικασία (Treffers, 1987). Σύμφωνα με τον ίδιο, η παρακίνηση των μαθητών να βρουν λύσεις μόνοι τους όταν επιλύουν προβλήματα ή να φτιάχνουν προβλήματα οι ίδιοι είναι ένα κρίσιμο στοιχείο της RME και «η βάση των πάντων» (σελ. 72) (Van Zanten, 2019).

3.5 Οι βασικές διδακτικές αρχές της RME

Αυτές οι μεγάλες ιδέες της RME («η ανθρώπινη δραστηριότητα της μαθηματικοποίησης» σε σχέση με την «οριζόντια και κατακόρυφη μαθηματικοποίηση» και η «καθοδηγούμενη επανεφεύρεση» σε σχέση με «κατασκευές των μαθητών και τις παραγωγές των μαθητών») έχουν διατυπωθεί επανειλημμένα και καθορίζονται με διαφορετικούς τρόπους. Ο Treffers χαρακτηρίζει την προσέγγιση Wiskobas σε οκτώ σημεία εκκίνησης, τα οποία περιελαμβάνουν τρεις διδακτικές αρχές (δραστηριότητα, διαφοροποίηση και κάθετος προγραμματισμός) και πέντε μαθηματικές αρχές (δομή, γλώσσα, εφαρμοσιμότητα, δυναμική και μια συγκεκριμένη προσέγγιση), τις οποίες συνοψίζει στη δημοσίευσή του το 1987 ως τα τέσσερα σημεία εκκίνησης της ρεαλιστικά προσανατολισμένης μαθηματικής εκπαίδευσης (Treffers, 1978, 1987). Επιπλέον, ο Treffers ορίζει πέντε αρχές διδασκαλίας που καθοδηγούν την προοδευτική μαθηματικοποίηση: φαινομενολογική εξερεύνηση, γεφύρωση με όργανα, αυτοδυναμία: κατασκευές και παραγωγές των ίδιων των μαθητών, διαδραστικότητα και διαπλοκή (Treffers, 1987).

Σε μεταγενέστερη δημοσίευση, αυτές οι αρχές διδασκαλίας αναδιατυπώνονται ως οι πέντε θεμελιώδεις αρχές μάθησης της διδασκαλίας της ανασυγκρότησης: κατασκευή και

συγκεκριμενοποίηση, επίπεδα και μοντέλα, προβληματισμός και παραγωγή από τους μαθητές, κοινωνικό πλαίσιο και αλληλεπίδραση, δόμηση και διαπλοκή (Treffers, De Moor & Feijis, 1989).

Τα πρώτα χρόνια της RME είναι ξεκάθαρα εκείνα της συνεχούς ανασύλληψης του τι αντιπροσωπεύει η αναμορφωμένη μαθηματική εκπαίδευση. Η Van den Heuvel-Panhuizen συνοψίζει τα χαρακτηριστικά της RME και προσδιορίζει τις ακόλουθες έξι αρχές (Van den Heuvel-Panhuizen, 2001):

• *Αρχή της δραστηριότητας* σημαίνει ότι στην RME οι μαθητές αντιμετωπίζονται ως ενεργοί συμμετέχοντες στη μαθησιακή διαδικασία. Τονίζει επίσης ότι τα μαθηματικά μαθαίνονται καλύτερα "κάνοντας μαθηματικά".

• *Αρχή της πραγματικότητας* μπορεί να αναγνωριστεί στην RME με δύο τρόπους. Πρώτον, εκφράζει τη σημασία που αποδίδεται στον στόχο της μαθηματικής εκπαίδευσης, συμπεριλαμβανομένης της ικανότητας των μαθητών να εφαρμόζουν τα μαθηματικά στην επίλυση προβλημάτων της «πραγματικής ζωής». Δεύτερον, σημαίνει ότι η εκπαίδευση στα μαθηματικά πρέπει να ξεκινά από προβληματικές καταστάσεις που έχουν νόημα για τους μαθητές, κάτι που τους προσφέρει ευκαιρίες να προσδώσουν νόημα στις μαθηματικές κατασκευές που αναπτύσσουν κατά την επίλυση προβλημάτων. Αντί να ξεκινά με τη διδασκαλία ορισμών που θα εφαρμοστούν αργότερα, στην RME, η διδασκαλία ξεκινά με προβλήματα σε πλούσια ρεαλιστικά περιβάλλοντα που απαιτούν μαθηματική οργάνωση ή, με άλλα λόγια, μπορούν να μαθηματικοποιηθούν και να βάλουν τους μαθητές στην τροχιά άτυπων στρατηγικών λύσεων που σχετίζονται με το πλαίσιο.

• *Αρχή του επιπέδου* υπογραμμίζει ότι η εκμάθηση μαθηματικών σημαίνει ότι οι μαθητές περνούν διάφορα επίπεδα κατανόησης: από άτυπες λύσεις που σχετίζονται με το πλαίσιο, μέσω της δημιουργίας διαφόρων επιπέδων συντομεύσεων και σχηματισμών, έως την απόκτηση εικόνας για το πώς συνδέονται έννοιες και στρατηγικές. Τα μοντέλα είναι σημαντικά για τη γεφύρωση του χάσματος μεταξύ των άτυπων μαθηματικών που σχετίζονται με το πλαίσιο και των πιο επίσημων μαθηματικών.

• *Αρχή της διαπλοκής* σημαίνει ότι οι τομείς μαθηματικού περιεχομένου όπως ο αριθμός, η γεωμετρία, η μέτρηση και ο χειρισμός δεδομένων δεν θεωρούνται μεμονωμένα κεφάλαια του προγράμματος σπουδών αλλά στενά συνδεδεμένα. Στους μαθητές προσφέρονται ρεαλιστικά προβλήματα στα οποία μπορούν να χρησιμοποιήσουν διάφορα μαθηματικά εργαλεία και γνώσεις.

• *Αρχή της διαδραστικότητας* σημαίνει ότι η εκμάθηση των μαθηματικών δεν είναι μόνο μια ατομική δραστηριότητα αλλά και μια κοινωνική δραστηριότητα. Ως εκ τούτου, η RME ευνοεί τις συζητήσεις ολόκληρης της τάξης αλλά και την ομαδική εργασία, τα οποία προσφέρουν στους μαθητές ευκαιρίες να μοιραστούν τις στρατηγικές και τις εφευρέσεις τους με άλλους. Με αυτόν τον τρόπο μπορούν να πάρουν ιδέες για τη βελτίωση των στρατηγικών τους. Επιπλέον, η αλληλεπίδραση προκαλεί προβληματισμό, ο οποίος επιτρέπει στους μαθητές να φτάσουν σε ένα υψηλότερο επίπεδο κατανόησης.

• *Αρχή καθοδήγησης* αναφέρεται στην ιδέα του Freudenthal για την «καθοδηγούμενη επανεφεύρεση» των μαθηματικών. Υπονοεί ότι στην RME οι δάσκαλοι πρέπει να έχουν ενεργό ρόλο στη μάθηση των μαθητών και ότι τα εκπαιδευτικά προγράμματα πρέπει να περιέχουν σενάρια που παρέχουν τη δυνατότητα να λειτουργήσουν ως μοχλός για την επίτευξη αλλαγών στην κατανόηση των μαθητών. Για να γίνει αυτό, η διδασκαλία και τα προγράμματα σπουδών θα πρέπει να βασίζονται σε μαθησιακές τροχιές (learning trajectories), στις οποίες θα γίνει λεπτομερής αναφορά στην ενότητα 4.2.

3.6 Μαθηματικοποίηση

Η μαθηματικοποίηση κυριολεκτικά σημαίνει «κάνω μαθηματικά». Η ιδέα της μαθηματικοποίησης δίνει μεγαλύτερη έμφαση στη νοητική δραστηριότητα. Είναι η οργανωτική δραστηριότητα που είναι κεντρική στη σύλληψη του Freudenthal. Για να διευκρινιστεί τι σημαίνει «κάνω μαθηματικά», μπορεί κανείς να σκεφτεί χαρακτηριστικά των μαθηματικών όπως η γενικότητα, η βεβαιότητα, η ακρίβεια και η συντομία. Για να διευκρινιστεί τι πρέπει να γίνει κατανοητό με τη μαθηματικοποίηση, ακολουθούν ειδικές στρατηγικές εντός αυτών των χαρακτηριστικών (Gravemeijer, 1994c; Treffers, 1987):

. για γενικότητα: γενίκευση (αναζητώντας αναλογίες, ταξινόμηση, δόμηση)
. για βεβαιότητα: διόρθωση, αιτιολόγηση, απόδειξη (χρησιμοποιώντας συστηματική προσέγγιση, επεξεργασία και δοκιμή εικασιών κ.α.)
. για την ακρίβεια: μοντελοποίηση, συμβολισμός, προσδιορισμός (περιορισμοί) και
. για λόγους συντομίας: συμβολισμός και σχηματοποίηση (ανάπτυξη τυπικών διαδικασιών).

Αργότερα, ο Freudenthal (1991) αναλαμβάνει τη διάκριση του Treffers (1987) σε οριζόντια και κατακόρυφη μαθηματικοποίηση. Συγκεκριμένα, στην οριζόντια, οι μαθητές χρησιμοποιούν

μαθηματικά εργαλεία για να οργανώσουν και να λύσουν προβλήματα που βρίσκονται σε πραγματικές καταστάσεις, ουσιαστικά περιλαμβάνει τη μετατροπή ενός ρεαλιστικού προβλήματος σε μαθηματικό πρόβλημα μέσω της μετάβασης από τον κόσμο της ζωής σε αυτόν των συμβόλων (Treffers, 1987). Η κατακόρυφη μαθηματικοποίηση αναφέρεται στη διαδικασία αναδιοργάνωσης μέσα σε ένα θεματικό σύστημα που οδηγεί σε συντομεύσεις χρησιμοποιώντας συνδέσεις ανάμεσα σε έννοιες και στρατηγικές, ουσιαστικά περιλαμβάνει τη μεταφορά της μαθηματικής ύλης σε ένα υψηλότερο επίπεδο (Treffers, 1987). Η κατακόρυφη μαθηματικοποίηση μπορεί να προκληθεί θέτοντας προβλήματα που επιτρέπουν λύσεις σε διάφορα μαθηματικά επίπεδα. Οι δύο μορφές μαθηματικοποίησης συνδέονται στενά και θεωρούνται ίσης αξίας. Όμως, τονίζοντας την προοπτική του «πραγματικού κόσμου» της RME μπορεί να παραμεληθεί η κατακόρυφη μαθηματικοποίηση (Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2020).

Όπως υποδεικνύει ο Freudenthal, τα όρια μεταξύ αυτού που πρέπει να χαρακτηριστεί ως οριζόντια μαθηματικοποίηση ή κατακόρυφη μαθηματικοποίηση δεν είναι ξεκάθαρα (Freudenthal, 1991). Το αν μια συγκεκριμένη πτυχή της μαθηματικής δραστηριότητας ενός ατόμου πρέπει να ονομάζεται «κατακόρυφη» ή «οριζόντια», εξαρτάται από το ερώτημα εάν η δραστηριότητα περιλαμβάνει κάποια επέκταση της «μαθηματικής κατάστασης» αυτού του ατόμου (Freudenthal, 1991). Μια δραστηριότητα με συμβολισμό, για παράδειγμα, θα μπορούσε να είναι μια δραστηριότητα ρουτίνας για έναν μαθητή. Αυτό θα ήταν μια περίπτωση οριζόντιας μαθηματικοποίησης. Ωστόσο, εάν ο ίδιος τρόπος συμβολισμού ήταν μια νέα εφεύρεση για έναν άλλο μαθητή, τότε αυτό θα συνεπαγόταν σε περίπτωση κατακόρυφης μαθηματικοποίησης.

Ωστόσο, η δραστηριότητα της μαθηματικοποίησης σε χαμηλότερο επίπεδο μπορεί να αποτελέσει αντικείμενο έρευνας σε ένα υψηλότερο επίπεδο (Gravemeijer & Terwel, 2000). Αυτό σημαίνει ότι οι οργανωτικές δραστηριότητες που έχουν πραγματοποιηθεί αρχικά με άτυπο τρόπο, αργότερα, ως αποτέλεσμα προβληματισμού, γίνονται πιο επίσημες (Gravemeijer & Terwel, 2000).

3.7 Τα μαθηματικά ως ανθρώπινη δραστηριότητα

Ως ερευνητής μαθηματικός, για τον Freudenthal, το να "κάνει μαθηματικά" είναι πιο σημαντικό από τα μαθηματικά ως έτοιμο προϊόν (Gravemeijer & Terwel, 2000). Κατά την άποψή του, το ίδιο πρέπει να ισχύει και για την εκπαίδευση στα μαθηματικά: η μαθηματική εκπαίδευση είναι μια διαδικασία μαθηματικών που οδηγεί σε ένα αποτέλεσμα, τα μαθηματικά ως προϊόν. Στην παραδοσιακή μαθηματική εκπαίδευση, το αποτέλεσμα των μαθηματικών δραστηριοτήτων

λαμβάνεται ως σημείο εκκίνησης για διδασκαλία και ο Freudenthal (1973b) το χαρακτηρίζει ως αντιδιδακτική αναστροφή. Τα πράγματα είναι ανάποδα αν κάποιος ξεκινάει διδάσκοντας το αποτέλεσμα μιας δραστηριότητας παρά διδάσκοντας την ίδια τη δραστηριότητα.

Τα μαθηματικά ως ανθρώπινη δραστηριότητα είναι μια δραστηριότητα επίλυσης προβλημάτων, αλλά είναι επίσης μια δραστηριότητα οργάνωσης ενός θέματος (Gravemeijer & Terwel, 2000). Αυτό μπορεί να είναι θέμα της πραγματικότητας που πρέπει να οργανωθεί σύμφωνα με μαθηματικά πρότυπα, εάν πρέπει να λυθούν προβλήματα από την πραγματικότητα (Freudenthal, 1971).

Αυτή η έμφαση στη «μαθηματικοποίηση της πραγματικότητας» συνδυάζεται με την έκκληση για «μαθηματικά για όλους» (Damerow & Westbury 1985; Keitel 1987). Ο Freudenthal τονίζει ότι δεν είναι όλοι οι μαθητές μελλοντικοί μαθηματικοί, συγκεκριμένα για την πλειοψηφία, τα μαθηματικά που θα χρησιμοποιήσει θα είναι για την επίλυση προβλημάτων σε καταστάσεις της καθημερινής ζωής (Gravemeijer & Terwel, 2000). Ως εκ τούτου, η εξοικείωση των μαθητών με μια μαθηματική προσέγγιση αυτού του τύπου επίλυσης προβλημάτων αξίζει να αποτελέσει ύψιστη προτεραιότητα στην εκπαίδευση των μαθηματικών (Gravemeijer & Terwel, 2000).

3.8 Πρόγραμμα σπουδών

Η λήψη αποφάσεων σχετικά με το τι και πώς να διδάξει ένας εκπαιδευτικός αποτελεί τον πυρήνα της διδασκαλίας των μαθηματικών (Van Zanten & Van den Heuvel-Panhuizen, 2021). Σε γενικό επίπεδο, ο κύριος πόρος για τη λήψη αυτών των αποφάσεων είναι το επιδιωκόμενο πρόγραμμα σπουδών, το οποίο περιλαμβάνει τους στόχους και τις προθέσεις της εκπαίδευσης (Valverde et al., 2002; Van den Akker, 2003). Σε σχολικό επίπεδο, κατευθυντήριες γραμμές για τη λήψη αποφάσεων σχετικά με αυτές τις δραστηριότητες και την εκμάθηση των απαιτούμενων διαδικασιών μάθησης μπορούν να βρεθούν στα σχολικά βιβλία (Van Zanten & Van den Heuvel-Panhuizen, 2021). Αυτά, συχνά χρησιμεύουν ως η κύρια πηγή για τα καθημερινά μαθήματα στις τάξεις (Stein, Remillard & Smith, 2007). Δεδομένου ότι τα σχολικά βιβλία αποτελούν ένα ενδιάμεσο επίπεδο μεταξύ του προβλεπόμενου προγράμματος σπουδών και του υλοποιούμενου προγράμματος σπουδών, θεωρούνται το δυνητικά υλοποιούμενο πρόγραμμα σπουδών (Valverde et al., 2002).

Οι ιδέες για το τι πρέπει να διδάσκεται στα μαθηματικά και πώς θα μπορούσαν να διδαχθούν καλύτερα, μπορεί να διαφέρουν σημαντικά μεταξύ των χωρών (Leung, Graf & Lopez-Real, 2006; Schmidt et al., 1997). Επιπλέον, στο εσωτερικό των χωρών, όπως φαίνεται με την πάροδο του

χρόνου, μπορούν να εμφανιστούν νέες απόψεις για την εκπαίδευση στα μαθηματικά και οι προσεγγίσεις στη διδασκαλία των μαθηματικών μπορούν να αλλάξουν (Furinghetti & Karp, 2018; Karp & Schubring, 2014; Stanic & Kilpatrick, 2003).

Η Ολλανδία έχει μια ιστορία μεταρρύθμισης της εκπαίδευσης στα μαθηματικά. Ξεκινώντας από τα τέλη της δεκαετίας του 1960, υπό την καθοδήγηση του Freudenthal, αναπτύσσεται η RME (Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2020). Όταν η λέξη «πρόγραμμα σπουδών» εμφανίζεται στο έργο του Freudenthal, έχει συνήθως αρνητική χροιά (Van Zanten & Van den Heuvel-Panhuizen, 2021). Σύμφωνα με τον Freudenthal, η θεωρία του προγράμματος σπουδών δεν είναι ένα προκαθορισμένο σύνολο θεωριών, στόχων, μέσων, περιεχομένων και μεθόδων. Αντίθετα, σχετίζεται πάντα με διαδικασίες. Για τον Freudenthal, η θεωρία του προγράμματος σπουδών είναι μια πρακτική προσπάθεια από την οποία θα μπορούσαν να προκύψουν νέες θεωρητικές ιδέες ως ένα είδος επιστημονικού υποπροϊόντος. Για αυτόν, η ανάπτυξη του προγράμματος σπουδών δεν πρέπει να πραγματοποιηθεί από ακαδημαϊκούς, αλλά σε σχολεία, σε συνεργασία με δασκάλους και μαθητές (Freudenthal, 1973a). Ο Freudenthal θεωρεί τα προγράμματα σπουδών διαδικασίες και προτείνει τη δική του εναλλακτική στην ανάπτυξη τους που ονομάζει εκπαιδευτική ανάπτυξη. Ενώ η ανάπτυξη προγραμμάτων σπουδών μέχρι τότε επικεντρώνεται στην ανάπτυξη του υλικού του προγράμματος σπουδών, ο Freudenthal θέλει να πάει ένα βήμα παραπέρα: η εκπαιδευτική ανάπτυξη επιδιώκει να προωθήσει την πραγματική αλλαγή στη διδασκαλία στην τάξη (Van Zanten & Van den Heuvel-Panhuizen, 2021). Κατά συνέπεια, μια τέτοια εκπαιδευτική ανάπτυξη είναι κάτι πολύ περισσότερο από εκπαιδευτικός σχεδιασμός, είναι μια ολοκληρωμένη στρατηγική καινοτομίας, που βασίζεται, αφενός, σε μια σαφή εκπαιδευτική φιλοσοφία και, αφετέρου, ενσωματώνει εξελίξεις σε κάθε είδους εκπαιδευτικό υλικό (Van Zanten & Van den Heuvel-Panhuizen, 2021). Ο κινητήρας όλης αυτής της διαδικασίας είναι η αναπτυξιακή έρευνα, μια προσέγγιση στην παιδαγωγική παράδοση, μια ποιοτική/ερμηνευτική έρευνα που συνδέεται με πειράματα διδασκαλίας σε μεμονωμένες τάξεις (Van Zanten & Van den Heuvel-Panhuizen, 2021). Κεντρικός ρόλος δίνεται στο διάλογο μεταξύ ερευνητών, προγραμματιστών προγραμμάτων σπουδών και δασκάλων (Van Zanten & Van den Heuvel-Panhuizen, 2021). Ο Freudenthal προτείνει τα μαθηματικά ως ανθρώπινη δραστηριότητα και ως καθοδηγούμενη επανεφεύρεση. Είναι αυτό το ανθρωπιστικό, πρακτικό, προσανατολισμένο στη διαδικασία, φαινομενολογικό και μεταρρυθμιστικό-παιδαγωγικό πιστεύω του, που αναπτύσσεται στο πλαίσιο της ανάπτυξης του προγράμματος σπουδών, που κάνει τη θέση του Freudenthal μοναδική μεταξύ των περισσότερων από τους συναδέλφους του μαθηματικούς εκπαιδευτικούς της εποχής του (Van Zanten & Van den Heuvel-Panhuizen, 2021).

Με τα χρόνια, η RME έχει σημαντικό αντίκτυπο στην αγορά σχολικών βιβλίων στην Ολλανδία. Μελέτες από το Cito, το ολλανδικό ινστιτούτο εκπαιδευτικών μετρήσεων, υποδεικνύουν ένα αυξανόμενο μερίδιο αγοράς σχολικών βιβλίων προσανατολισμένων στην RME από περίπου 15% στα μέσα της δεκαετίας του 1980 σε 75% στη δεκαετία του 1990 (Janssen et al., 1999) και έπειτα στο 100% περίπου το 2003 (Janssen, Van der Schoot & Hemker, 2005). Μετά το 2007, λόγω μιας συζήτησης που ασκεί κριτική στην προσέγγιση RME υπέρ της επιστροφής στην παραδοσιακή μηχανιστική προσέγγιση (Royal Netherlands Academy of Sciences, 2009; Van den Heuvel-Panhuizen, 2010), η αγορά των σχολικών βιβλίων γίνεται ξανά πιο διαφοροποιημένη (Van Zanten & Van den Heuvel-Panhuizen, 2014). Φυσικά, η προσέγγιση της μαθηματικής εκπαίδευσης που αποδίδεται σε ένα σχολικό βιβλίο δεν λέει όλη την ιστορία (Van Zanten & Van den Heuvel-Panhuizen, 2021). Τα σχολικά βιβλία που δεν παρουσιάζονται πλέον ως προσανατολισμένα στην RME ενδέχεται να εξακολουθούν να περιλαμβάνουν χαρακτηριστικά της RME, όπως και τα σχολικά βιβλία που τοποθετούνται ως προσανατολισμένα στην RME δεν περιλαμβάνουν απαραίτητα όλα τα χαρακτηριστικά RME. Το τελευταίο αποδεικνύεται από τον De Jong στη μελέτη «Wiskobas in methoden» (De Jong, 1986).

3.9 Έρευνα των Van Zanten και Van den Heuvel-Panhuizen (2021) για τα σχολικά εγχειρίδια

Στην έρευνα των Van Zanten και Van den Heuvel-Panhuizen, (2021) στόχος είναι να εντοπιστεί το πώς έχουν εξελιχθεί τα προγράμματα σπουδών μέσω RME με τα χρόνια με εστίαση στη μελέτη της πρώιμης πρόσθεσης και αφαίρεσης στο δημοτικό σχολείο στην Ολλανδία. Για αυτό μελετούνται τα βασικά έγγραφα του προγράμματος σπουδών μέσω RME και αναλύονται εγχειρίδια προσανατολισμένα στην RME που έχουν δημοσιευτεί μεταξύ της έναρξης της RME και του παρόντος. Με αυτό το σκοπό, οι ερευνητές εντοπίζουν πρώτα όλες τις προτάσεις που προσφέρουν τα σχολικά βιβλία για τη διευκόλυνση της εκμάθησης της πρώιμης πρόσθεσης και αφαίρεσης και ταξινομούν αυτές τις προτάσεις σε κατηγορίες διευκολυντών μάθησης που βασίζονται στις μεγάλες ιδέες και αρχές της RME. Αυτές οι κατηγορίες είναι (1) η χρήση της πραγματικότητας, (2) η χρήση μοντέλων και (3) η χρήση της συμβολής των ίδιων των μαθητών (Van Zanten & Van den Heuvel-Panhuizen, 2021). Πιο συγκεκριμένα:

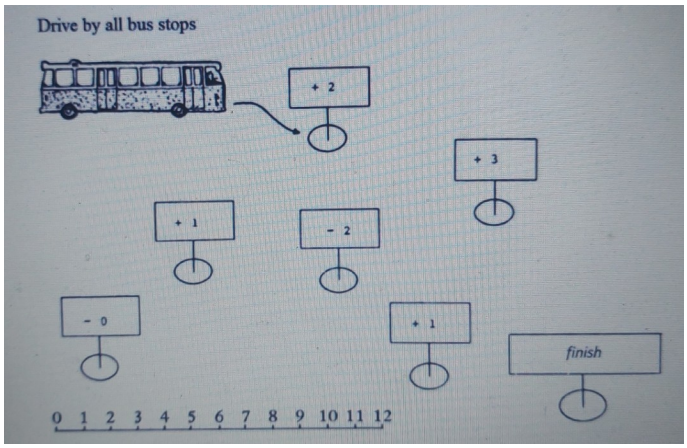
<u>(1) Χρήση της Πραγματικότητας</u>

Η πρόσθεση και η αφαίρεση εισάγονται χρησιμοποιώντας ως αφετηρία την πραγματικότητα. Αυτό σημαίνει για παράδειγμα ότι οι μαθητές παίζουν ένα παιχνίδι με λεωφορείο (Εικόνα 3.1). Ένας

μαθητής ενεργεί ως οδηγός λεωφορείου και οι άλλοι μαθητές είναι οι επιβάτες. Σε στάσεις λεωφορείων που βρίσκονται σε όλη την τάξη οι μαθητές επιβιβάζονται και αποβιβάζονται από το λεωφορείο, κάτι που τους δίνει μια πρώτη ερμηνεία για την πρόσθεση και την αφαίρεση. Οι μαθητές παρακολουθούν πόσοι επιβάτες επιβιβάζονται και αποβιβάζονται από το λεωφορείο και πόσοι είναι στο λεωφορείο μετά από μια στάση λεωφορείου (Van Zanten & Van den Heuvel-Panhuizen, 2021). Από την αρχή και μετά, μια κατάσταση χρησιμοποιείται για τη διενέργεια πολλαπλών υπολογισμών. Αργότερα, η πρόσθεση και η αφαίρεση εισάγονται ταυτόχρονα. Αυτό προκύπτει φυσικά από το γεγονός ότι άνθρωποι μπορούν να μπουν και να βγουν από ένα λεωφορείο ταυτόχρονα. Το να καταλάβουν τι συμβαίνει δίνει στους μαθητές ευκαιρίες για μαθηματικό συλλογισμό (Van Zanten & Van den Heuvel-Panhuizen, 2021):

«Τι μπορεί να συνέβη, όταν το λεωφορείο απομακρύνεται από τη στάση με τρεις επιβάτες περισσότερους από αυτούς που έφτασε; Επιβιβάστηκαν τρεις επιβάτες ή μήπως πέντε επιβιβάστηκαν και δύο αποβιβάστηκαν από το λεωφορείο;» (σελ. 36) (De Jong, Treffers & Wijdeveld, 1975). Μετά τις φυσικές εμπειρίες του παιχνιδιού με το λεωφορείο, παρόμοιες καταστάσεις παρουσιάζονται επίσης σε φύλλα εργασίας.

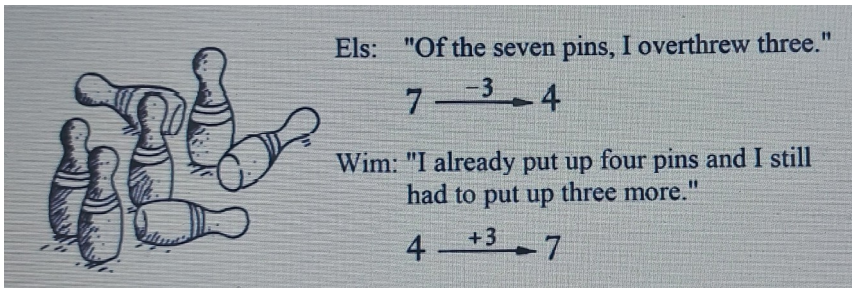
<u>Εικόνα 3.1</u>. Το πρόβλημα πλαισίου με το λεωφορείο (De Jong, Treffers & Wijdeveld, 1975)



Στην αρχή, η γλώσσα βέλους χρησιμοποιείται ως συμβολική αναπαράσταση που αναφέρεται στην πραγματικότητα (Εικόνα 3.2). Χρησιμοποιείται για να αφήσει τους μαθητές να περιγράψουν ότι "κάτι συμβαίνει" (σελ. 39) (De Jong, Treffers & Wijdeveld, 1975). Πρέπει να εκφράσουν με λέξεις τι συμβαίνει σε μια κατάσταση και να το γράψουν στη γλώσσα του βέλους (Van Zanten & Van den

Heuvel-Panhuizen, 2021). Το κάνουν σε κάθε είδους καταστάσεις, γεγονός που τους παρέχει πολλαπλές έννοιες πρόσθεσης και αφαίρεσης. Επιπλέον, η ερμηνεία συγκεκριμένων καταστάσεων με διαφορετικούς τρόπους υπογραμμίζει τη σχέση μεταξύ πρόσθεσης και αφαίρεσης (Van Zanten & Van den Heuvel-Panhuizen, 2021).

Εικόνα 3.2. Παράδειγμα γλώσσας βέλους (De Jong, Treffers & Wijdeveld, 1975)

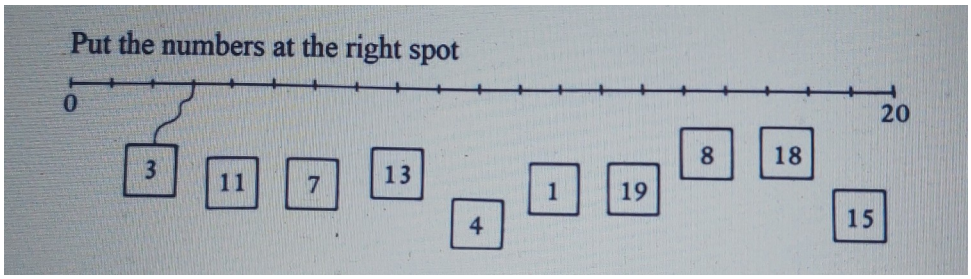


(2) Χρήση Μοντέλων

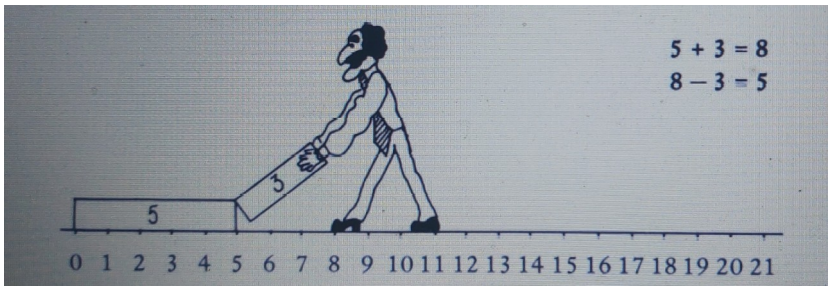
Τα βασικά έγγραφα που μελετούνται στην έρευνα των Van Zanten και Van den Heuvel-Panhuizen (2021) περιγράφουν διάφορα μοντέλα. Τα πιο εμφανή είναι *η αριθμογραμμή*, *το εκατό τετράγωνο* και *το αριθμητικό ράφι* (Van Zanten & Van den Heuvel-Panhuizen, 2021).

Η *αριθμογραμμή* είναι (αρχικά) τμηματοποιημένη. Αυτή η αριθμογραμμή εισάγεται για υπολογισμούς πέραν του 10, όταν οι μαθητές βιώνουν ότι το μέτρημα στα δάχτυλά τους δεν είναι πλέον αρκετό (Εικόνα 3.3). Η τμηματοποιημένη αριθμογραμμή χρησιμοποιείται για να υποστηρίξει τον υπολογισμό με μέτρηση και κίνηση προς τα εμπρός (για πρόσθεση) και προς τα πίσω (για αφαίρεση). Χρησιμοποιείται επίσης για την τοποθέτηση αριθμών, που σημαίνει τον εντοπισμό του πού βρίσκονται συγκεκριμένοι αριθμοί. Επιπλέον, σε συνδυασμό με ράβδους, χρησιμοποιείται για τον καθορισμό της σχέσης μεταξύ πρόσθεσης και αφαίρεσης (Εικόνα 3.4).

<u>Εικόνα 3.3.</u> Τοποθέτηση αριθμών σε μια τμηματοποιημένη αριθμογραμμή (De Jong, Treffers & Wijdeveld, 1975)

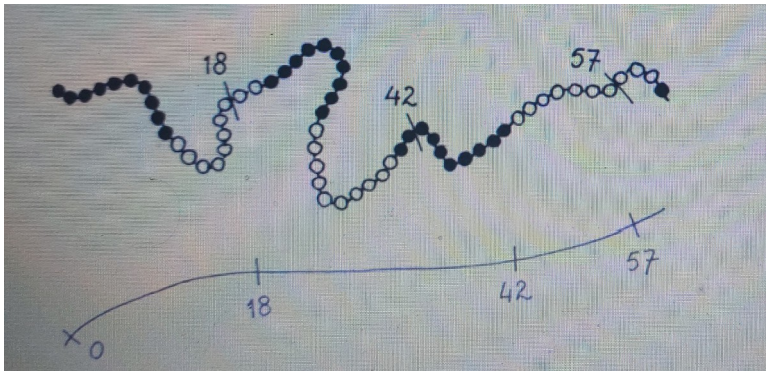


<u>Εικόνα 3.4</u>. Σχέση πρόσθεσης και αφαίρεσης σε μια τμηματοποιημένη αριθμογραμμή (De Jong, Treffers & Wijdeveld, 1975)



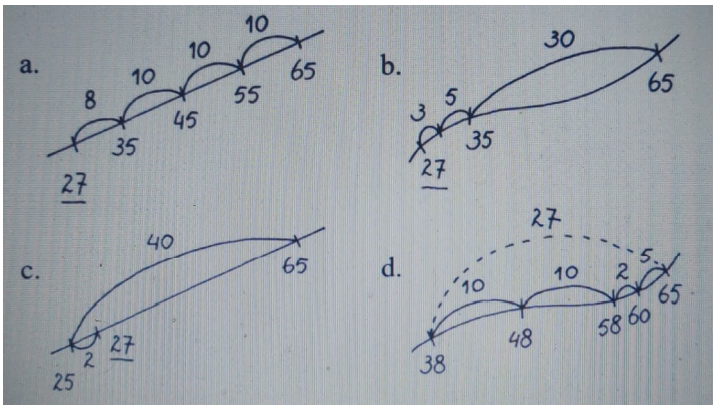
Σε μεταγενέστερο σχολικό εγχειρίδιο (Treffers & De Moor, 1990) η αριθμογραμμή έχει διαφορετική εμφάνιση, είναι πλέον κενή (Εικόνα 3.5). Τονίζεται ότι μια αριθμογραμμή χωρίς ή με λίγα μόνο σημειωμένα σημεία διεγείρει τη χρήση αριθμητικών σχέσεων (π.χ. το 19 είναι κοντά στο 20 και το 10 είναι στη μέση μεταξύ 0 και 20). Για την εισαγωγή αυτής της αριθμογραμμής, δύο έγγραφα της συγκεκριμένης έρευνας προτείνουν μια σειρά από χάντρες. Το εναλλασσόμενο σχέδιο των χρωμάτων (Εικόνα 3.5) παρέχει στους μαθητές μια δομή των δέκα, η οποία τους βοηθά να εφαρμόσουν συντομευμένη μέτρηση σε δεκάδες. Μια καρφίτσα που τοποθετείται στο κορδόνι της χάντρας υποδεικνύει τον αριθμό των σφαιριδίων πριν από αυτό το συγκεκριμένο σημείο.

<u>Εικόνα 3.5</u>. Η σειρά χαντρών και η κενή αριθμογραμμή (Treffers & De Moor, 1990)



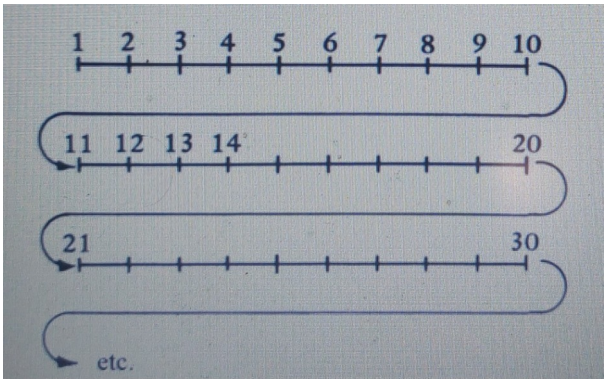
Στο ίδιο εγχειρίδιο (Treffers & De Moor, 1990), η κενή αριθμογραμμή εφαρμόζεται επίσης για την εκτέλεση διαφορετικών δομημένων διαδικασιών υπολογισμού για την επίλυση προβλημάτων πρόσθεσης και αφαίρεσης. Για παράδειγμα, η αφαίρεση “65 - 38” μπορεί να υπολογιστεί κάνοντας αρχικά άλματα των δέκα, (65 - 10 - 10 - 10 - 8, Εικόνα 3.6a) και αργότερα κάνοντας λιγότερα άλματα (65 - 30 - 5 - 3, Εικόνα 3.6b). Επιπλέον, είναι δυνατές ποικίλες στρατηγικές, όπως μια συντομευμένη προσέγγιση μέσω ενός κοντινού αριθμού (65 - 40 + 2, Εικόνα 3.6c) ή μια στρατηγική πρόσθεσης (38 + ... = 65, Εικόνα 3.6d). Αυτή η τελευταία στρατηγική είναι η μόνη περίπτωση στο συγκεκριμένο εγχειρίδιο (Treffers & De Moor, 1990) όπου η σχέση μεταξύ πρόσθεσης και αφαίρεσης τίθεται στο προσκήνιο.

<u>Εικόνα 3.6</u>. Υπολογίζοντας την αφαίρεση 65 – 38 στην κενή αριθμητική γραμμή κάνοντας: a) 65 – 10 – 10 – 10 – 8, b) 65 – 30 – 5 – 3, c) 65 – 40 + 2, και d) 38 + … = 65 (Treffers & De Moor, 1990)

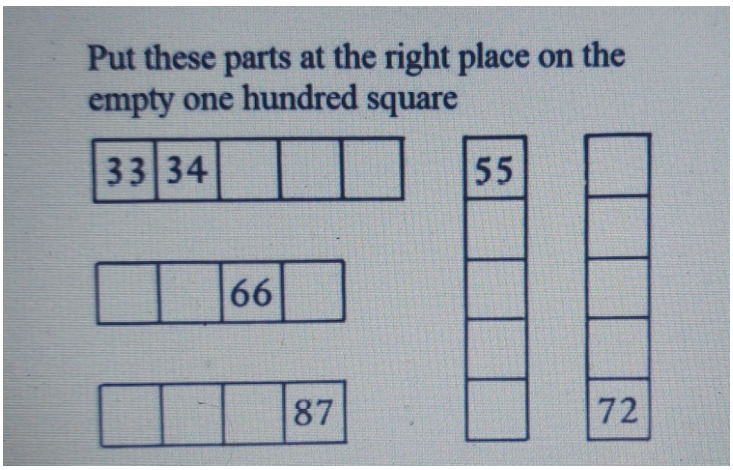


Το δεύτερο μοντέλο είναι το *εκατό τετράγωνο*. Πρόκειται για ένα πλαίσιο δέκα προς δέκα στο οποίο τοποθετούνται οι αριθμοί 1 έως 100. Αυτό το μοντέλο είναι ένα είδος επέκτασης της τμηματοποιημένης αριθμογραμμής μέχρι το 100 (Εικόνα 3.7). Το εκατό τετράγωνο μπορεί να χρησιμοποιηθεί πλήρως ή εν μέρει γεμάτο με αριθμούς. Χρησιμοποιείται για κάθε είδους εξερευνητικές δραστηριότητες (Εικόνα 3.8) και για εξάσκηση της πρόσθεσης και της αφαίρεσης με κίνηση στο τετράγωνο. Για παράδειγμα, τρία βήματα προς τα αριστερά αντιπροσωπεύουν την αφαίρεση τριών και δύο βήματα προς τα δεξιά αντιπροσωπεύουν την πρόσθεση.

Εικόνα 3.7. Το εκατό τετράγωνο ως προέκταση της τμηματοποιημένης αριθμογραμμής (De Jong, Treffers & Wijdeveld, 1975)

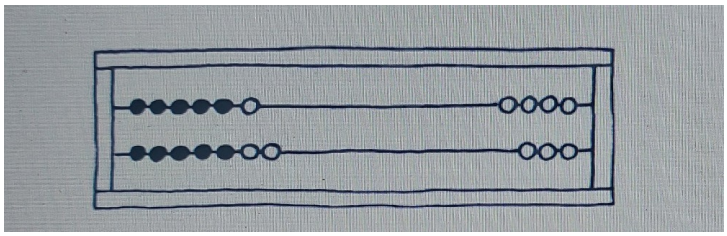


Εικόνα 3.8. Μια εξερευνητική δραστηριότητα μέσω του εκατό τετράγωνο (De Jong, Treffers & Wijdeveld, 1975)



Το τρίτο μοντέλο είναι το *αριθμητικό ράφι* (Εικόνα 3.9) για πρόσθεση και αφαίρεση έως το 20. Το αριθμητικό ράφι έχει δύο γραμμές των δέκα χαντρών, η καθεμία χωρισμένη σε δύο σετ των πέντε χαντρών. Προορίζεται για τη δόμηση αριθμών χρησιμοποιώντας τις πέντε-δομές, δέκα-δομές και τα διπλά. Αυτές οι αναπαραστάσεις αριθμών μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές να μεταβούν από τον υπολογισμό με μέτρηση στον υπολογισμό με δόμηση. Για παράδειγμα η πρόσθεση "6 + 7" μπορεί να τοποθετηθεί στο αριθμητικό ράφι βλέποντας το πέντε και πέντε, που κάνει δέκα, και προσθέτοντας ένα και δύο, δίνοντας δεκατρία (5 + 5 = 10 και μετά 10 + 1 + 2 = 13). Ένας άλλος τρόπος είναι να εντοπιστεί το διπλό έξι και να προστεθεί μετά το ένα (6 + 6 = 12 και μετά 12 + 1 = 13). Επιπλέον, μπορεί να υπολογιστεί μέσω του δέκα (6 + 4 = 10 και μετά 10 + 3 = 13). Το αριθμητικό ράφι θεωρείται σημαντικό μοντέλο επειδή «επιτρέπει την ευέλικτη χρήση πολλαπλών διαδικασιών λύσης, ενώ ταυτόχρονα προσφέρει εικόνες σταθερού αριθμού που διευκολύνουν την απομνημόνευση υπολογισμών έως και 20» (σελ. 48) (Treffers & De Moor, 1990).

Εικόνα 3.9. Το αριθμητικό ράφι (Karp & Schubring, 2014)



(3) Χρήση της συμβολής των ίδιων των μαθητών

Η χρήση της συμβολής των μαθητών στη διδακτική-μαθησιακή διαδικασία έρχεται στο προσκήνιο με δύο τρόπους. Το πρώτο είναι η ήδη αναφερθείσα έμφαση στο να αφήνονται οι μαθητές να εξηγούν με δικά τους λόγια τι συμβαίνει σε καταστάσεις περιβάλλοντος και να το γράφουν μέσω της γλώσσας βέλους. Ο δεύτερος τρόπος είναι να ζητηθεί από τους μαθητές να δημιουργήσουν τα δικά τους προβλήματα, όπως να σκεφτούν μια διαδρομή για το λεωφορείο που θα έχει ως αποτέλεσμα συγκεκριμένο αριθμό επιβατών στο τέλος.

Στο εγχειρίδιο των De Jong, Treffers και Wijdeveld (1975) προτείνεται να γίνονται στους μαθητές ερωτήσεις που απαιτούν κάτι περισσότερο από απλό υπολογισμό, να προκαλούν προβληματισμό και συλλογισμό. Η ερώτηση σχετικά με το τι μπορεί να συνέβη όταν το λεωφορείο απομακρύνεται

από τη στάση του λεωφορείου με τρεις περισσότερους επιβάτες από ότι έφτασε είναι ένα παράδειγμα αυτού.

Στη μελέτη για την RME διαπιστώνεται από τους Van Zanten και Van den Heuvel-Panhuizen (2021) ότι οι ιδέες της RME σχετικά με τη χρήση της πραγματικότητας, των μοντέλων και της συμβολής των ίδιων των μαθητών είναι σταθερά παρούσες στα σχολικά εγχειρίδια της RME που χρησιμοποιήθηκαν στην έρευνα, τα οποία δημοσιεύονται με την πάροδο του χρόνου. Σε αυτά βρήκαν επίσης αλλαγές με την πάροδο του χρόνου σχετικά με συγκεκριμένους διαμεσολαβητές μάθησης και τη χρήση για την οποία προορίζονται. Μερικές από αυτές τις αλλαγές μπορούν ξεκάθαρα να χαρακτηριστούν ως περαιτέρω εκλεπτυσμένες υλοποιήσεις των ιδεών RME. Ένα παράδειγμα αυτού είναι η εξέλιξη της αριθμογραμμής από τμηματοποιημένη σε κενή (Εικόνα 3.5), η οποία επιτρέπει τον δομημένο και ποικιλότροπο υπολογισμό (Van Zanten & Van den Heuvel-Panhuizen, 2021).

<u>Κεφάλαιο 4:</u> Τι προσφέρει η RME στη διδασκαλία των Μαθηματικών και στη μάθηση των μαθητών.

4.1 Συνεισφορά της RME στην κατανόηση των μαθητών μέσω προβλημάτων πλαισίου (context problems)

Η RME έχει σκοπό να μετατρέψει τη μάθηση των μαθηματικών σε διασκεδαστική και ουσιαστική για τους μαθητές, εισάγοντας τους σε προβλήματα της καθημερινότητας. Ξεκινά με την ανάληψη προβλημάτων που σχετίζονται με τις εμπειρίες και τις γνώσεις των μαθητών. Ο δάσκαλος στη συνέχεια ενεργεί ως καθοδηγητής (βλ. την ιδέα του Freudenthal σχετικά με την καθοδηγούμενη επανεφεύρεση των μαθηματικών) για να βοηθήσει τους μαθητές να λύσουν τα ρεαλιστικά προβλήματα. Αυτή η δραστηριότητα επίλυσης προβλημάτων πιστεύεται ότι έχει θετικό αντίκτυπο στα γνωστικά επιτεύγματα των μαθητών, ειδικά σε σχέση με την ικανότητά τους να κατανοούν τα μαθηματικά (Bonotto, 2008). Ο καλύτερος τρόπος για τη διδασκαλία των μαθηματικών είναι να παρέχονται στους μαθητές ουσιαστικές εμπειρίες λύνοντας ζητήματα που αντιμετωπίζουν καθημερινά ή με άλλα λόγια αντιμετωπίζοντας προβλήματα πλαισίου (context problems) (Laurens et al., 2018).

Στην RME, τα προβλήματα πλαισίου προορίζονται για την υποστήριξη μιας διαδικασίας επανεφεύρεσης που επιτρέπει στους μαθητές να αντιμετωπίσουν τα τυπικά μαθηματικά. Αυτή η προσέγγιση περιγράφεται κατά κύριο λόγο από μια προοπτική διδασκαλίας-σχεδιασμού. Ο εκπαιδευτικός-σχεδιαστής προσπαθεί να ερμηνεύσει μια διαδρομή μέσω της οποίας μπορούν να εφευρεθούν εκ νέου τα μαθηματικά. Μια τέτοια διαδρομή επανεφεύρεσης θα είναι στρωμένη με προβλήματα πλαισίου που προσφέρουν στους μαθητές ευκαιρίες για μαθηματικοποίηση (Gravemeijer & Doorman, 1999), αποτελώντας τη βάση για την μαθηματικοποίηση. Συγκεκριμένα, ο εκπαιδευτικός-σχεδιαστής προσπαθεί να ερμηνεύσει ένα σύνολο προβλημάτων πλαισίου που μπορούν να οδηγήσουν σε μια σειρά διαδικασιών οριζόντιας και κατακόρυφης μαθηματικοποίησης που από κοινού καταλήγουν στην επανεφεύρεση των μαθηματικών. Ο σχεδιαστής θα λάβει υπόψιν του τις γνώσεις και την μαθησιακή του εμπειρία και θα εξετάσει την ιστορία των μαθηματικών ως πηγή έμπνευσης και τις άτυπες στρατηγικές λύσης προβλημάτων των μαθητών για τα οποία δεν γνωρίζουν ακόμη τις τυπικές διαδικασίες λύσης (Gravemeijer & Doorman, 1999).

Μέσω της προσέγγισης RME είναι εφικτό να βοηθηθούν οι μαθητές να καταλάβουν τα μαθηματικά (Gravemeijer & Doorman, 1999). Αυτή η προσέγγιση διακρίνεται από άλλες, καθώς προσπαθεί να

ξεπεράσει τη διχοτόμηση μεταξύ άτυπης και τυπικής γνώσης, σχεδιάζοντας μια υποθετική μαθησιακή τροχιά (learning trajectory), -έννοια που αναπτύσσεται λεπτομερώς στην επόμενη ενότητα- κατά την οποία οι μαθητές μπορούν να εφεύρουν εκ νέου τα τυπικά μαθηματικά (Gravemeijer & Doorman, 1999). Ιδανικά, η μαθησιακή τροχιά εκτυλίσσεται με τέτοιο τρόπο, ώστε τα τυπικά μαθηματικά να εμφανίζονται στη μαθηματική δραστηριότητα των μαθητών. Αυτό το ιδανικό συνδέεται με τον ισχυρισμό του Freudenthal (1991) ότι «τα μαθηματικά πρέπει να ξεκινούν και να παραμένουν εντός της κοινής λογικής». Ο Freudenthal υποστηρίζει ότι η κοινή λογική δεν είναι στατική (Gravemeijer & Doorman, 1999). Σημειώνει, για παράδειγμα, ότι αυτό που είναι κοινή λογική για έναν μαθηματικό διαφέρει σημαντικά από αυτό που είναι κοινή λογική για έναν μη μαθηματικό. Επιπλέον, τονίζει ότι η κοινή λογική εξελίσσεται στην πορεία της μάθησης. Έτσι, για παράδειγμα στην περίπτωση της κατανόησης γραφημάτων ταχύτητας και απόστασης, σε πρώτη φάση η περιγραφή της στιγμιαίας ταχύτητας ως προς την απόσταση που καλύπτεται σε περίπτωση σταθερής ταχύτητας, είναι μια δραστηριότητα κοινής λογικής. Με παρόμοιο τρόπο, μια προσέγγιση μεταβαλλόμενης ταχύτητας μπορεί να θεωρηθεί ως δραστηριότητα κοινής λογικής. Μέχρι το τέλος, η δράση σε ένα περιβάλλον δομημένο ως προς τις κλίσεις των γραφημάτων θα έχει γίνει κοινή λογική για τους μαθητές (Gravemeijer & Doorman, 1999).

Μπορεί να παρατηρηθεί μια αντανακλαστική σχέση μεταξύ της χρήσης προβλημάτων πλαισίου και της ανάπτυξης της βιωματικής πραγματικότητας του μαθητή. Αφενός, τα προβλήματα πλαισίου έχουν τις ρίζες τους σε αυτήν την πραγματικότητα, αφετέρου, η επίλυση αυτών των προβλημάτων βοηθά τους μαθητές να επεκτείνουν την πραγματικότητά τους. Παρά αυτόν τον δυναμικό χαρακτήρα της πραγματικότητας που ορίζει τα προβλήματα αυτά, τα σημεία εκκίνησης για τη διδασκαλία των μαθηματικών συχνά συνδέονται με την καθημερινή εμπειρία των μαθητών. Είναι ακριβώς η σύνδεση μεταξύ ταχύτητας και απόστασης που προσφέρει στους μαθητές τα μέσα να συλλογιστούν και να ενεργήσουν με ουσιαστικό τρόπο από την αρχή (Gravemeijer & Doorman, 1999).

Έρευνα για το σχεδιασμό διδασκαλίας με βάση την RME στο δημοτικό σχολείο έχει δείξει ότι η ύπαρξη μοντέλου-έννοια που θα αναπτυχθεί λεπτομερώς στην ενότητα 4.3- μπορεί να λειτουργήσει ως ένα ισχυρό μέσο για την κατανόηση των μαθηματικών (Gravemeijer, 1999). Το μοντέλο προκύπτει από τη δραστηριότητα των μαθητών. Εδώ, το σημείο εκκίνησης είναι οι μέθοδοι επίλυσης συγκεκριμένων καταστάσεων, οι οποίες στη συνέχεια μοντελοποιούνται. Επιλέγονται πρώτα προβλήματα πλαισίου που προσφέρουν στους μαθητές την ευκαιρία να αναπτύξουν αυτές τις μεθόδους που αφορούν συγκεκριμένες καταστάσεις. Στη συνέχεια, εάν το κάνουν, αυτές οι

μέθοδοι μοντελοποιούνται. Υπό αυτή την έννοια, τα μοντέλα προκύπτουν από τη δραστηριότητα των ίδιων των μαθητών. Ακόμα κι αν τα μοντέλα δεν έχουν εφευρεθεί στην πραγματικότητα από τους μαθητές, δίνεται μεγάλη προσοχή στην όσο το δυνατόν μεγαλύτερη προσέγγιση των εφευρέσεων των μαθητών, επιλέγοντας μοντέλα που συνδέονται με την ιστορία μάθησης των μαθητών. Ένα άλλο κριτήριο είναι η δυνατότητα των μοντέλων να υποστηρίζουν την κατακόρυφη μαθηματικοποίηση. Η μετάβαση από το μοντέλο οδηγεί στη σκέψη για τις μαθηματικές σχέσεις. Στην τελευταία φάση, η σκέψη για τις μαθηματικές σχέσεις θα κυριαρχήσει (Gravemeijer & Doorman, 1999). Η τελική κατανόηση των τυπικών μαθηματικών από τους μαθητές θα πρέπει να παραμείνει συνδεδεμένη με τα βιωματικά αληθινά φαινόμενα της καθημερινής ζωής. Σε σχέση με αυτό, η μοντελοποίηση και ο συμβολισμός αποτελούν αναπόσπαστο μέρος μιας οργανωτικής δραστηριότητας που στοχεύει στην αντιμετώπιση μιας προβληματικής κατάστασης (Gravemeijer & Doorman, 1999).

Ακόμη, η εκμάθηση των μαθηματικών θα είναι πιο αποτελεσματική εάν οι μαθητές είναι σε θέση να εργαστούν για να επεξεργαστούν και να ανταλλάξουν πληροφορίες ενεργά (Laurens et al., 2018). Η RME έχει δώσει έμφαση στη χρήση μαθησιακών βοηθημάτων στη μάθηση που σχετίζονται με την ικανότητα των μαθητών. Οι οδηγίες στην RME επικεντρώνονται κυρίως στους μαθητές και στην ανάπτυξη της ικανότητάς τους κατά την εκμάθηση των μαθηματικών (Laurens et al., 2018). Οι δραστηριότητες των μαθητών είναι ως επί το πλείστον διαδραστικές και έχουν σχεδιαστεί για να καλλιεργήσουν το ενδιαφέρον των μαθητών για τη μελέτη των μαθηματικών (Fauzan, Slettenhaar & Plomp, 2002).

Επιπλέον, οι Laurens et al. (2018) αναφέρουν ότι η RME μπορεί να αυξήσει τη λογική, την κριτική και τη δημιουργική σκέψη των μαθητών σύμφωνα με έρευνες των Ruseffendi (1990), Saefudin (2012), Sembiring, Hadi και Dolk (2008) και Usdiyana, Purniati, Yulianti και Harningsih (2013). Επίσης, αναφέρουν ότι η διαδικασία δημιουργικής σκέψης είναι στην πραγματικότητα πιο προσανατολισμένη και επικεντρωμένη στις γνωστικές και διανοητικές λειτουργίες των ατόμων, ιδιαίτερα στη δημιουργική επίλυση προβλημάτων σύμφωνα με έρευνες των Almeida, Prieto, Ferrando, Oliveira και Ferrandiz (2008) και Isaksen και Treffinger (2004). Τέλος, καταλήγουν ότι η RME μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί αποτελεσματικά για την πρόβλεψη των γνωστικών επιτευγμάτων των μαθητών στα μαθηματικά σύμφωνα με αποτελέσματα μελετών των Jupri (2017), Nurhayati και Hartono (2017), Zubainur, Vello και Khalid (2015).

Επομένως, η RME είναι μια προσέγγιση που επιτρέπει στον δάσκαλο να φέρει τα προβλήματα πλαισίου στην τάξη ως αρχικό βήμα μάθησης. Η RME εκπαιδεύει τους μαθητές να ανακαλύπτουν έννοιες. Επιπλέον, ενθαρρύνει τους μαθητές να συμμετέχουν ενεργά σε μαθησιακές δραστηριότητες. Απαιτείται από αυτούς να παίρνουν πρωτοβουλία κατά την επίλυση προβλημάτων που δίνει ο δάσκαλος. Ακόμη, επιτρέπει στους μαθητές να μαθαίνουν ατομικά ή ομαδικά και ευχάριστα. Οι δραστηριότητες των μαθητών περιλαμβάνουν την ενεργή παρακολούθηση του δασκάλου με τον οποίο μπορούν να συνεργαστούν για την επίλυση των ρεαλιστικών προβλημάτων. Είναι μια διέξοδος για την αλλαγή της αντίληψης των μαθητών σχετικά με την εργασία σε μια ομάδα, τη συσχέτιση αυτών που μαθαίνουν με αυτά που ήδη έχουν μάθει και την κατασκευή νέας γνώσης.

4.2 Μαθησιακές τροχιές (learning trajectories) στην RME

Πολλές επιτυχημένες προσεγγίσεις για την ανάπτυξη καινοτόμων προγραμμάτων σπουδών μαθηματικών και για τη διεξαγωγή έρευνας για τη μάθηση και τη διδασκαλία των μαθηματικών έχουν χρησιμοποιήσει μαθησιακές τροχιές (learning trajectories) (Clements & Sarama, 2004). Οι μαθησιακές τροχιές αποτελούν ένα θεωρητικό μοντέλο για το σχεδιασμό της διδασκαλίας των μαθηματικών. Ωστόσο, ενώ οι μαθησιακές τροχιές είναι αρκετά σύγχρονες, έχουν πολλές ρίζες σε προηγούμενες θεωρίες μάθησης, διδασκαλίας και προγράμματος σπουδών (Clements & Sarama, 2004).

Μια ερευνητική ομάδα ρεαλιστικής εκπαίδευσης μαθηματικών (RME) θα μπορούσε να σχεδιάσει ένα πρόγραμμα σπουδών διατυπώνοντας μια υποθετική μαθησιακή τροχιά που περιλαμβάνει εικασίες τόσο για μια πιθανή διαδρομή μάθησης που στοχεύει σε σημαντικές μαθηματικές ιδέες όσο και για ένα συγκεκριμένο εγχειρίδιο που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την υποστήριξη και την οργάνωση της μάθησης κατά μήκος αυτής της διαδρομής (Clements & Sarama, 2004).

Ο αρχικός σχεδιασμός μιας μαθησιακής τροχιάς αποτελείται από ένα σύνολο εκπαιδευτικών εργασιών με κατευθυντήριες γραμμές που προτείνουν μια σειρά μαθηματικών έργων και τρόπων σκέψης και μάθησης στους οποίους συμμετέχουν οι μαθητές (Clements & Sarama, 2004). Αυτός ο αρχικός σχεδιασμός συχνά δεν δέχεται λεπτομερή επεξεργασία, επειδή οι εργασίες αναθεωρούνται εκτενώς κατά τη διάρκεια των δοκιμών στην τάξη. Δηλαδή, σε πρώτη φάση τα μαθηματικά έργα που χρησιμοποιούνται στην τάξη τροποποιούνται σε καθημερινή βάση λαμβάνοντας υπόψη τις πληροφορίες που έχουν προκύψει από την εφαρμογή των προηγούμενων έργων στην τάξη. Στη

δεύτερη φάση, το εκπαιδευτικό πείραμα ακολουθεί μια σειρά από διαδικασίες συζητήσεων σχετικά με τα διδακτικά καθήκοντα, τον ρόλο του δασκάλου και την ευρύτερη κουλτούρα της τάξης, όπως αυτά συγκροτούνται στην τάξη (Gravemeijer, 1999). Στην τρίτη φάση, κατασκευάζεται μια ακολουθία διδασκαλίας «βέλτιστης περίπτωσης». Ο στόχος είναι να αναπτυχθεί μια γενικότερη περιγραφή των υποθετικών μαθησιακών τροχιών που έχουν προκύψει σε συγκεκριμένες τάξεις που αποτελούν τη βάση της διδακτικής ακολουθίας και να την αιτιολογήσουν τόσο με θεωρητικές σκέψεις όσο και με εμπειρικά δεδομένα (Gravemeijer, 1994a, 1994b, 1999). Ο πρωταρχικός στόχος είναι ότι αυτή η διδακτική θεωρία θα παρέχει ένα πλαίσιο που μπορούν να χρησιμοποιήσουν οι δάσκαλοι για να ερμηνεύσουν υποθετικές μαθησιακές τροχιές που ταιριάζουν στις δικές τους τάξεις.

Η κατασκευή των υποθετικών μαθησιακών τροχιών είναι ένα γνωστικό εργαλείο που βασίζεται στον κονστρουκτιβισμό. Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι οι μαθησιακές τροχιές μπορούν και πρέπει να αναθεωρούνται και να δημιουργούνται με τη συνεργασία από μικρές ομάδες ή μεμονωμένους δασκάλους, έτσι ώστε να βασίζονται στη γνώση των συγκεκριμένων μαθητών που εμπλέκονται - τις υπάρχουσες γνώσεις τους, τις μαθησιακές τους προτιμήσεις και τη συμμετοχή σε ορισμένους τύπους δραστηριοτήτων (Simon, 1995). Πράγματι, οι μαθησιακές τροχιές είναι πάντα υποθετικές, καθώς η πραγματική μάθηση και διδασκαλία αλλά και η αναγνώρισή τους από τον δάσκαλο, δεν μπορούν να είναι πλήρως γνωστές εκ των προτέρων (Simon, 1995). Ο δάσκαλος πρέπει να κατασκευάσει νέα μοντέλα μαθηματικών καθώς αλληλεπιδρά με τα παιδιά και έτσι να αλλάξουν οι γνώσεις τους αλλά και οι μελλοντικές εκπαιδευτικές στρατηγικές και διαδρομές που θα ακολουθήσει εκείνος. Έτσι, αναδεικνύεται η πραγματοποιηθείσα μαθησιακή τροχιά (Clements & Sarama, 2004).

Πιστεύεται ότι η έννοια των υποθετικών μαθησιακών τροχιών είναι μια μοναδική και ουσιαστική συνεισφορά στο πεδίο της εκπαίδευσης μέσω RME. Διαφέρει από άλλα μοντέλα καθώς περιλαμβάνει ταυτόχρονη εξέταση μαθησιακών στόχων, μοντέλων σκέψης των παιδιών, μοντέλων σκέψης των δασκάλων και ερευνητών, αλληλουχίες διδακτικών δραστηριοτήτων και την αλληλεπίδραση αυτών σε λεπτομερές επίπεδο (Clements & Sarama, 2004).

Στη θεμελιώδη εργασία του, ο Simon (1995) δηλώνει ότι μια υποθετική μαθησιακή τροχιά περιλαμβάνει «τον μαθησιακό στόχο, τις μαθησιακές δραστηριότητες, τη σκέψη και τη μάθηση στην οποία θα μπορούσαν να συμμετέχουν οι μαθητές» (σελ. 133). Το όνομα «υποθετική τροχιά μάθησης» αν και δίνει έμφαση στη μάθηση έναντι της διδασκαλίας, στην περιγραφή του Simon

(1995) προορίζεται ξεκάθαρα για να χαρακτηρίσει μια ουσιαστική πτυχή της παιδαγωγικής σκέψης (δηλαδή, καθορισμός του στόχου, δημιουργία μαθηματικών έργων που συνδέονται με τη σκέψη και τη μάθηση των παιδιών, κ.α.).

Η ξεχωριστή μελέτη είτε του αναπτυξιακού μονοπατιού (developmental progression) είτε των σειρών μαθημάτων (instructional sequences) μπορεί και πρέπει να ενημερώνει τη μαθηματική εκπαίδευση, έτσι ώστε να προσαρμόζεται συνεχώς (Clements & Sarama, 2004). Για τους σκοπούς αυτούς λοιπόν, οι Clements (2002), Gravemeijer (1999) και Simon (1995) εξετάζουν τις πτυχές του αναπτυξιακού μονοπατιού και των σειρών μαθημάτων. Πρώτα, καθορίζονται μοντέλα μάθησης που αντικατοπτρίζουν τα αναπτυξιακά μονοπάτια (τουλάχιστον για μια δεδομένη ηλικιακή ομάδα μαθητών σε μια συγκεκριμένη κουλτούρα) που βασίζονται σε θεωρητικά και εμπειρικά θεμελιωμένα μοντέλα σκέψης, μάθησης και ανάπτυξης των παιδιών (Carpenter & Moser , 1984; Griffin & Case, 1997). Δηλαδή, οι ερευνητές χτίζουν ένα γνωστικό μοντέλο μάθησης των μαθητών που είναι επαρκώς σαφές για να περιγράψει τις διαδικασίες που εμπλέκονται στην κατασκευή του μαθηματικού στόχου σε διάφορα επίπεδα αυξανόμενης πολυπλοκότητας (Clements & Sarama, 2004). Αυτή η πτυχή είναι που διακρίνει την προσέγγιση της μαθησιακής τροχιάς από προηγούμενα μοντέλα εκπαιδευτικού σχεδιασμού και η θεωρία είναι ότι η μάθηση που συνάδει με τέτοια αναπτυξιακά μονοπάτια είναι πιο αποτελεσματική, αποδοτική και παραγωγική για τον μαθητή από τη μάθηση που δεν ακολουθεί αυτά τα μονοπάτια (Clements & Sarama, 2004).

Η έρευνα των Clements και Sarama (2004) δείχνει ότι η παροχή γνώσεων για τη σκέψη και τη μάθηση των παιδιών στο στοχευμένο τομέα του μαθήματος μπορεί να επηρεάσει ουσιαστικά τον σχεδιασμό του προγράμματος σπουδών εστιάζοντας στη διδασκαλία και τη μάθηση σύμφωνα με έρευνες των Tamir (1988) και Walker (1992). Αυτό οδηγεί στην επόμενη πτυχή των μαθησιακών τροχιών, τη σειρά μαθημάτων, η οποία αποτελείται από βασικές δραστηριότητες που έχουν σχεδιαστεί για την προώθηση της μάθησης σε ένα συγκεκριμένο εννοιολογικό επίπεδο (Clements & Sarama, 2004). Οι δραστηριότητες αυτές είναι αποτελεσματικές για την προώθηση της μάθησης των μαθητών σε κάθε επίπεδο, ενθαρρύνοντας τα παιδιά να κατασκευάσουν τις έννοιες και τις δεξιότητες που χαρακτηρίζουν το επόμενο επίπεδο. Δηλαδή, υποθέτουν συγκεκριμένες νοητικές κατασκευές και πρότυπα σκέψης που αποτελούν τη σκέψη των παιδιών σε κάθε επίπεδο (Clements & Sarama, 2004). Ο κύριος θεωρητικός ισχυρισμός είναι ότι τέτοιες δραστηριότητες θα αποτελέσουν ένα ιδιαίτερα αποτελεσματικό εκπαιδευτικό πρόγραμμα. Ωστόσο, δεν υπονοείται ότι η ακολουθία δραστηριοτήτων είναι η μόνη ή η καλύτερη διαδρομή για μάθηση και διδασκαλία, μόνο ότι είναι μια γόνιμη διαδρομή. Επιπλέον, οι αξίες και οι στόχοι που καθορίζονται από την

κοινωνία αποτελούν ουσιαστικά συστατικά οποιουδήποτε προγράμματος σπουδών (Confrey, 1996; Hiebert, 1999; National Research Council, 2002; Tyler, 1949).

Έτσι, μια πλήρης υποθετική μαθησιακή τροχιά περιλαμβάνει και τις τρεις πτυχές: τον μαθησιακό στόχο, τα αναπτυξιακά μονοπάτια της σκέψης και της μάθησης και τη σειρά των μαθημάτων. Η θέσπιση μιας αποτελεσματικής, πλήρους μαθησιακής τροχιάς μπορεί στην πραγματικότητα να αλλάξει τις αναπτυξιακές προόδους ή τις προσδοκίες που είχαν προηγουμένως καθοριστεί από ψυχολογικές μελέτες, επειδή ανοίγει νέους δρόμους για μάθηση και ανάπτυξη (Clements & Sarama, 2004).

4.3 Μοντελοποίηση στην RME

Στην RME, τα μοντέλα θεωρούνται αναπαραστάσεις προβληματικών καταστάσεων, οι οποίες αντικατοπτρίζουν βασικές πτυχές μαθηματικών εννοιών και δομών που σχετίζονται με την προβληματική κατάσταση, αλλά μπορεί να έχουν διαφορετικές εκδηλώσεις (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003). Αυτό σημαίνει ότι ο όρος «μοντέλο» δεν λαμβάνεται με πολύ κυριολεκτικό τρόπο. Υλικά, οπτικά σκίτσα, παραδειγματικές καταστάσεις, σχήματα, διαγράμματα και ακόμη και σύμβολα μπορούν να χρησιμεύσουν ως μοντέλα (Gravemeijer 1994a; Treffers & Goffree, 1985; Treffers 1987, 1991). Για να είναι κατάλληλα να παρέχουν την επιδιωκόμενη υποστήριξη στις διαδικασίες μάθησης, τα μοντέλα πρέπει να έχουν δύο σημαντικά χαρακτηριστικά (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003). Αφενός πρέπει να έχουν τις ρίζες τους σε ρεαλιστικά, φανταστικά πλαίσια και από την άλλη πρέπει να είναι αρκετά ευέλικτα ώστε να εφαρμόζονται και σε πιο προχωρημένο ή γενικότερο επίπεδο . Αυτό σημαίνει ότι ένα μοντέλο θα πρέπει να υποστηρίζει την πρόοδο στην κατακόρυφη μαθηματικοποίηση χωρίς να εμποδίζει τον δρόμο της επιστροφής (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003). Με άλλα λόγια, οι μαθητές θα πρέπει πάντα να μπορούν να επανέλθουν σε χαμηλότερο επίπεδο. Είναι αυτός ο αμφίδρομος χαρακτήρας των μοντέλων που τα κάνει τόσο ισχυρά. Μια άλλη απαίτηση για τα μοντέλα – σε ευθυγράμμιση με την άποψη της RME ως προς τους μαθητές ως ενεργοί συμμετέχοντες στη διαδικασία διδασκαλίας-μάθησης είναι να μπορούν να εφευρεθούν εκ νέου από τους ίδιους τους μαθητές (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003). Για να γίνει αυτό, τα μοντέλα πρέπει να «συμπεριφέρονται» με φυσικό, αυτονόητο τρόπο. Πρέπει να ταιριάζουν με τις άτυπες στρατηγικές των μαθητών –σαν να μπορούσαν να έχουν εφευρεθεί από αυτούς– και πρέπει να προσαρμόζονται εύκολα σε νέες καταστάσεις (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003).

Στη μαθησιακή τροχιά που σχεδίασε ο Streefland, η διαδικασία εκμάθησης κλασμάτων ξεκινά συγκρίνοντας ποσότητες πίτσας, και αργότερα οδηγεί στη σύγκριση και στις πράξεις κλασμάτων (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003). Εδώ, το πλαίσιο μιας πιτσαρίας αποτελεί το μοντέλο για τη διδασκαλία των κλασμάτων (Streefland, 1988, 1991). Σε αυτή τη διαδικασία σχηματοποίησης και γενίκευσης, ο ρόλος του σχεδιαστή-δασκάλου είναι πολύ σημαντικός. Σχεδιάζοντας μια τροχιά στην οποία νέα προβλήματα ωθούν τους μαθητές να καταλήξουν σε προσαρμογές του αρχικού «συγκεκριμένου» μοντέλου και τονίζοντας τις ιδιαίτερες προσαρμογές στις οποίες καταλήγουν οι μαθητές, καθοδηγείται η διαδικασία ανάπτυξης του μοντέλου (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003).

4.4 Το μοντέλο της ράβδου (bar model) για τα ποσοστά

Η διδακτική χρήση των μοντέλων στην RME απεικονίζεται εδώ με τη χρήση του μοντέλου της ράβδου (bar model) σε μια μαθησιακή τροχιά για τη διδασκαλία του ποσοστού, που σχεδιάζεται μέσω προβλημάτων πλαισίου στα μαθηματικά. Το μοντέλο ράβδου αναφέρεται σε μια λωρίδα στην οποία απεικονίζονται διαφορετικές κλίμακες ταυτόχρονα, όπου μια ποσότητα μπορεί να εκφραστεί μέσω διαφορετικής ποσότητας. Μέσω αυτού, το μοντέλο ράβδου αγγίζει την ουσία του ποσοστού.

Το κύριο μέρος της ποσοστιαίας μαθησιακής τροχιάς εκτείνεται σε τρεις διδακτικές ενότητες αυτού του προγράμματος σπουδών (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003):

– *Κατά Αίσθηση* (Per Sense) (Van den Heuvel-Panhuizen et al., 1997), προορίζεται για την ηλικία των 10-11 ετών και σκοπεύει να είναι μια εισαγωγή στα ποσοστά.

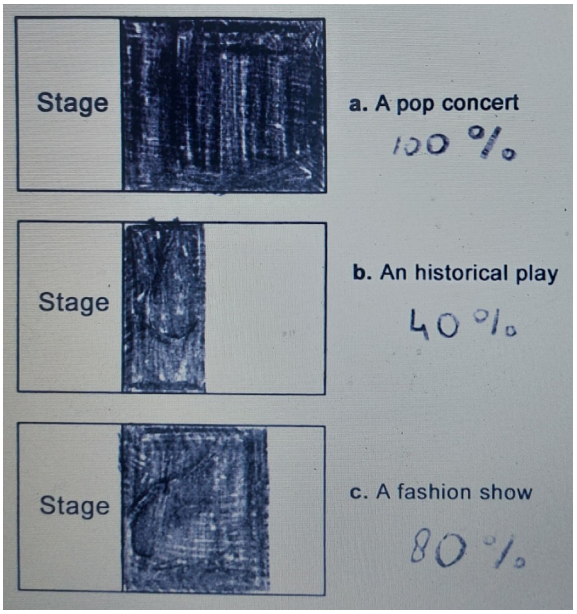
– *Κλάσματα* (Fraction Times) (Keijzer et al., 1998b), προορίζεται για την ηλικία των 11-12 ετών, καλύπτει ευρύτερα τον τομέα των ρητών αριθμών και περιέχει υλικό για ποσοστά, κλάσματα, δεκαδικούς αριθμούς και λόγους.

– *Περισσότερο ή λιγότερο* (More or Less) (Keijzer et al., 1998a), προορίζεται για την ηλικία των 11-12 ετών και επικεντρώνεται σε ποσοστά, κλάσματα και δεκαδικούς αριθμούς.

Η ενότητα *Κατά Αίσθηση* αποτελεί μία εισαγωγική ενότητα στην οποία οι μαθητές έρχονται αντιμέτωποι με κάποιες καθημερινές ιστορίες στις οποίες τα ποσοστά παίζουν ρόλο (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003). Ένα από τα προβλήματα είναι για ένα αγόρι που λέει στη μητέρα του ότι υπάρχει 95% πιθανότητα να παραμείνει η προπόνηση ποδοσφαίρου τις Τετάρτες (Van den Heuvel-

Panhuizen, 2003). Εκτός από τη συζήτηση της ποιοτικής σημασίας της φράσης “95% σημαίνει ότι είναι σχεδόν σίγουρο ότι ...”, ζητείται επίσης από τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν σχέδια για να εξηγήσουν αυτό το νόημα. Με αυτόν τον τρόπο αυτή η πρώτη ενότητα περιλαμβάνει ορισμένες διερευνητικές δραστηριότητες που προετοιμάζουν την κατασκευή μοντέλων (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003). Υπάρχουν αρκετές εργασίες με βάση το σχολικό θέατρο (Εικόνα 4.1). Οι μαθητές καλούνται να υποδείξουν για διαφορετικές παραστάσεις πόσο απασχολημένο θα είναι το θέατρο. Μπορούν να το κάνουν χρωματίζοντας το μέρος της αίθουσας που είναι κατειλημμένο και στη συνέχεια να σημειώσουν το ποσοστό των θέσεων που είναι κατειλημμένες (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003). Ένα ενδιαφέρον εύρημα είναι ότι οι μαθητές χρησιμοποίησαν κλάσματα για να «εξηγήσουν» το ποσοστό πληρότητας. Αυτό σημαίνει ότι η επίγνωση αυτής της σύνδεσης μεταξύ διαφορετικών ρητών αριθμών, που στην πραγματικότητα είναι ένας από τους τελικούς στόχους που πρέπει να επιτευχθούν σε γενικό, επίσημο επίπεδο, είναι στην ουσία ήδη παρούσα στο άτυπο επίπεδο κατανόησης που συνδέεται με το πλαίσιο (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003).

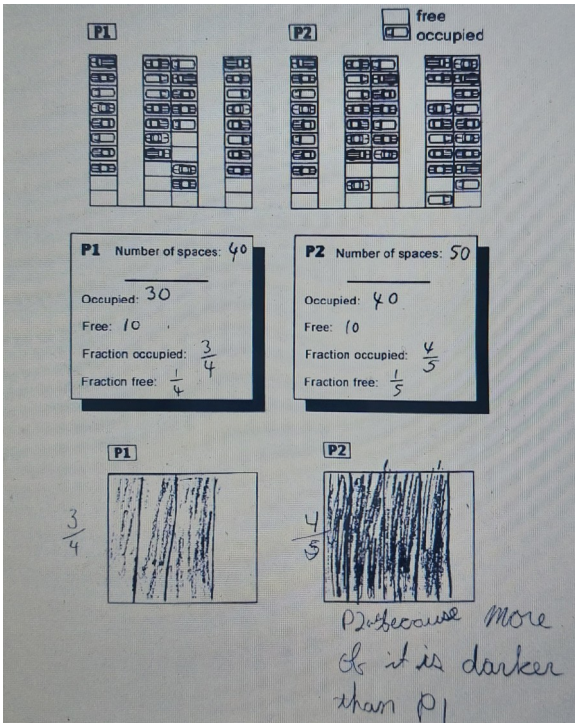
Εικόνα 4.1. Ποσοστιαία έκφραση κατειλημμένων θέσεων στο σχολικό θέατρο (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003)



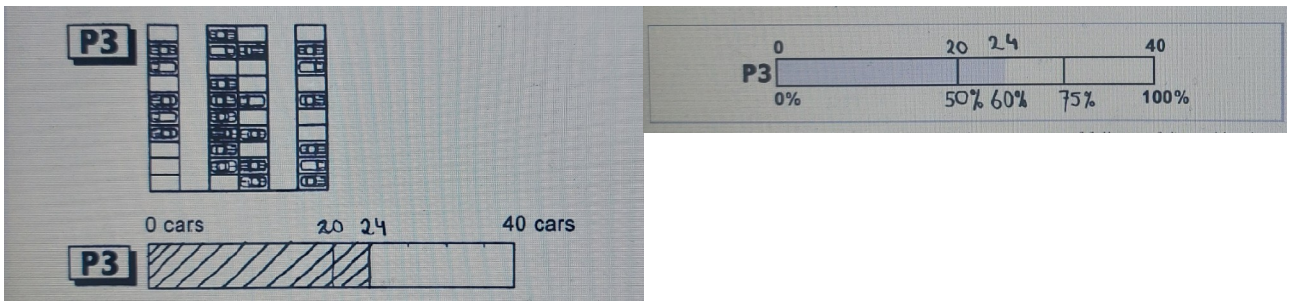
Στην ίδια ενότητα, προκύπτει ένα σύνολο προβλημάτων στο πλαίσιο στάθμευσης (Εικόνα 4.2). Οι μαθητές καλούνται να συγκρίνουν τους χώρους στάθμευσης ως προς την πληρότητά τους (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003). Και πάλι, οι μαθητές καλούνται να υποδείξουν το βαθμό κατάληψης για κάθε χώρο στάθμευσης με χρωματισμό στο ορθογώνιο πλαίσιο που αντιπροσωπεύει το χώρο

στάθμευσης (Εικόνα 4.3). Στη συνέχεια μπορεί να προσδιοριστεί ποιος χώρος στάθμευσης είναι ο πληρέστερος (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003). Το επόμενο βήμα είναι η εμφάνιση του ορθογώνιου πλαισίου που αντιπροσωπεύει το «πραγματικό» χώρο στάθμευσης και αντικαθίσταται από μια ράβδο, που προσφέρει έναν τρόπο να αναπαραστήσουν την πληρότητα του χώρου στάθμευσης (Εικόνα 4.3) (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003). Μπορούν και πάλι να χρωματίσουν το τμήμα που είναι κατειλημμένο.

Εικόνα 4.2. Συγκρίνοντας την πληρότητα των χώρων στάθμευσης (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003)

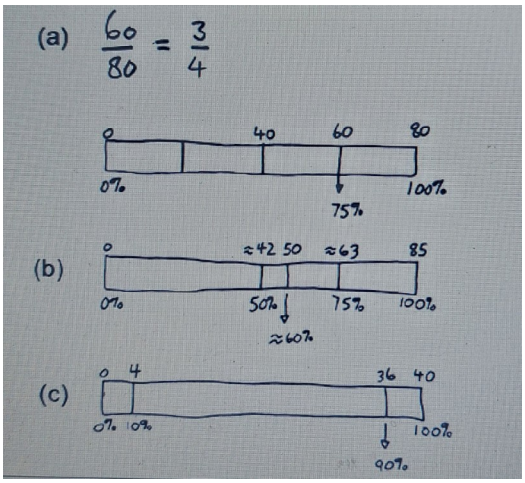


Εικόνα 4.3. Το ορθογώνιο πλαίσιο και η ράβδος που αντιπροσωπεύουν την πληρότητα του χώρου στάθμευσης (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003)



Ανάλογα με τους πραγματικούς αριθμούς που προκύπτουν σε αυτά τα προβλήματα στάθμευσης, η ράβδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί με διαφορετικούς τρόπους για να βρεθεί το ποσοστό πληρότητας (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003). Εάν 60 θέσεις από τις 80 είναι κατειλημμένες (a) οι μαθητές μπορούν να χρησιμοποιήσουν ένα εύκολο κλάσμα (Εικόνα 4.4a). Στην περίπτωση 50 θέσεων από τις 85 (b) το ποσοστό πληρότητας μπορεί να προσεγγιστεί με μια στρατηγική που βασίζεται σε επαναλαμβανόμενη κατά το ήμισυ (Εικόνα 4.4b). Και τέλος, όταν είναι 36 θέσεις στις 40 (c) οι μαθητές μπορούν να κάνουν χρήση ενός γνωστού ποσοστού, το 10% του 40 είναι 4 (Εικόνα 4.4c). Με άλλα λόγια, δεν υπάρχει σταθερή στρατηγική για την επίλυση αυτών των ποσοστιαίων προβλημάτων και η ράβδος επιτρέπει αυτή την ευελιξία στην προσέγγιση (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003).

<u>Εικόνα 4.4 a,b,c</u>. Διαφορετικοί τρόποι για να βρεθεί το ποσοστό πληρότητας (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003)



Έπειτα, προκειμένου να δοθεί στους μαθητές μια πιο ακριβής στρατηγική, στην ίδια ενότητα εφιστάται η προσοχή τους στο σημείο αναφοράς 1% (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003). Αυτό το σημείο αναφοράς 1% εισάγεται για να ανοίξει ο δρόμος για τον υπολογισμό των ποσοστών κατά προσέγγιση (Εικόνα 4.5). Δεν πρέπει να συγχέεται με τον ακριβή υπολογισμό μέσω μιας αριθμομηχανής, η οποία έρχεται αργότερα. Εδώ η ράβδος χρησιμοποιείται για να καθοδηγήσει τους μαθητές στον υπολογισμό του ποσοστού.

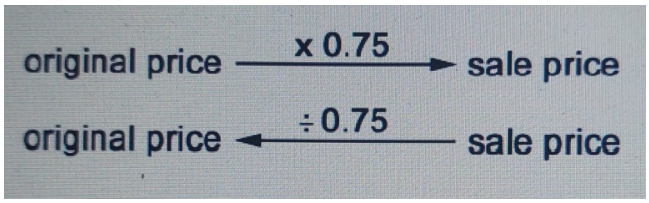
Ένα πρώτο βήμα σε αυτό το επόμενο στάδιο στην εκμάθηση του ποσοστού γίνεται στην ενότητα *Κλάσματα*, όπου οι μαθητές μαθαίνουν να κάνουν «άμεσα» μετατροπές σε ποσοστά (Van den

Heuvel-Panhuizen, 2003). Αντί να διαιρέσουν το μέρος με το 1% του συνολικού αριθμού, τώρα το μέρος διαιρείται απευθείας με τον συνολικό αριθμό. Σε ένα πρόβλημα με ψήφους το ποσοστό των ψήφων που παίρνει κάποιος στις εκλογές προκύπτει διαιρώντας τον αριθμό των ψήφων που έλαβε με τον συνολικό αριθμό των ψήφων που προέκυψαν. Ταυτόχρονα, είναι ακόμα δυνατό να γίνει μια εκτίμηση, για παράδειγμα αν έχει λάβει 121 ψήφους από τις 600 ψήφους συνολικά είναι περίπου το ένα πέμπτο του συνόλου ή περίπου το 20% (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003).

Εικόνα 4.5. Εισαγωγή στο 1% ως σημείο αναφοράς (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003)

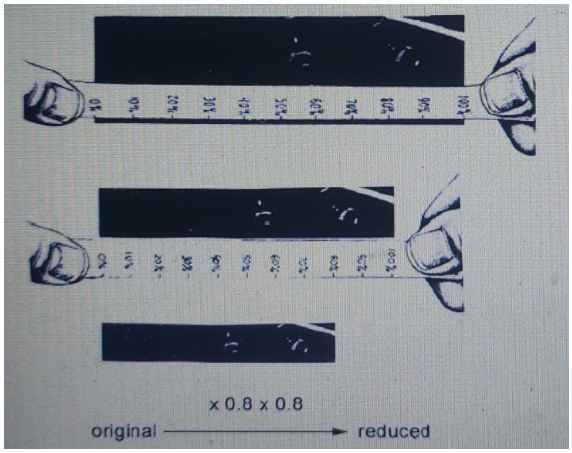
Αργότερα, στην ενότητα *Περισσότερο ή Λιγότερο*, οι μαθητές έρχονται αντιμέτωποι με καταστάσεις αλλαγής (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003). Μαθαίνουν να εκφράζονται τόσο με προσθετική δομή (π.χ. +25% ή –25%) όσο και με πολλαπλασιαστική δομή (π.χ. ×1,25 ή ×0,75). Αυτό το μέρος της μαθησιακής τροχιάς ξεκινά με μια κατάσταση μείωσης των τιμών. Ένα παράδειγμα αφορά ένα σούπερ μάρκετ που εισάγει νέες ετικέτες τιμών (Εικόνα 4.6). Οι μαθητές καλούνται να ελέγξουν την τιμή πώλησης κάνοντας μόνο έναν πολλαπλασιασμό στην αριθμομηχανή τους (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003).

Εικόνα 4.6. Εύρεση της τελικής τιμής γνωρίζοντας την αρχική μέσω πολλαπλασιασμού και εύρεση της αρχικής τιμής γνωρίζοντας την τελική μέσω διαίρεσης (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003)



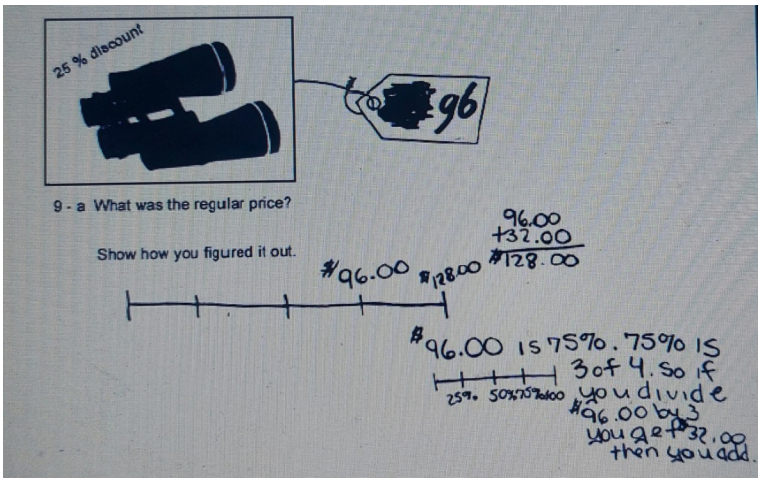
Η ενότητα αυτή έπειτα ασχολείται με το πλαίσιο ενός φωτοτυπικού που μπορεί να κάνει σμίκρυνση και μεγέθυνση (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003). Η μέγιστη επιλογή σμίκρυνσης είναι 80%. Μεταξύ άλλων, οι μαθητές έρχονται αντιμέτωποι με μια κατάσταση όπου μια σμίκρυνση 80% δεν αρκεί και χρειάζονται πολλαπλές σμικρύνσεις 80% (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003). Μια ελαστική ταινία χρησιμοποιείται για να γίνει μια εκτίμηση του αποτελέσματος της διπλής αναγωγής (Εικόνα 4.7). Αργότερα, αυξήσεις αντιμετωπίζονται στο πλαίσιο ενός έντοκου λογαριασμού ταμιευτηρίου (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003). Και πάλι η ράβδος μπορεί να κάνει ορατό πώς λειτουργεί αυτό και τι υπολογισμό πρέπει να κάνει κάποιος για να βρει το συνολικό χρηματικό ποσό μετά από ένα, δύο, τρία χρόνια κ.α.

Εικόνα 4.7. Χρήση ελαστικής ταινίας για την εκτίμηση της διπλής σμίκρυνσης κατά 80% (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003)



Όπως φαίνεται, η ράβδος μπορεί επίσης να είναι χρήσιμη για την κατανόηση πολύπλοκων καταστάσεων. Το ίδιο ισχύει και για καταστάσεις που ζητούν οπισθοδρομικό συλλογισμό (backward thinking) (Εικόνα 4.8) (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003).

<u>Εικόνα 4.8</u>. Η αριθμογραμμή ως υποστήριξη για τον οπισθοδρομικό συλλογισμό (backward thinking) (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003)



Η μοντελοποίηση, κατά την ερμηνεία της, σχετίζεται με τη διαδικασία ανάπτυξης μοντέλων μέσω των οποίων οι μαθητές σταδιακά αποκτούν καλύτερη κατανόηση μιας πλούσιας, ουσιαστικής προβληματικής κατάστασης περιγράφοντάς την και αναλύοντάς την με όλο και πιο προηγμένα μέσα και περνώντας από μια σειρά διαδικασιών μοντελοποίησης αναπτύσσουν τελικά ένα αποτελεσματικό μοντέλο με το οποίο μπορούν επίσης να αντιμετωπίσουν άλλες (παρόμοιες) περίπλοκες προβληματικές καταστάσεις (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003).

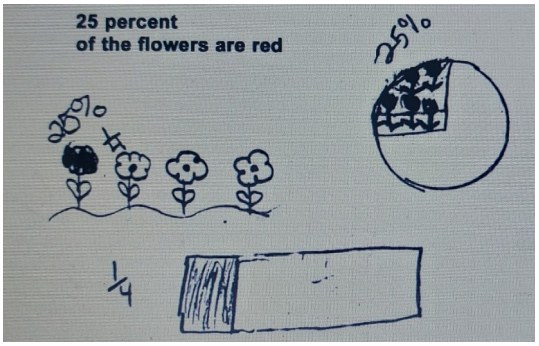
Όμως, δεν είναι τα μοντέλα από μόνα τους που καθιστούν δυνατή την ανάπτυξη της μαθηματικής κατανόησης, αλλά οι δραστηριότητες μοντελοποίησης των μαθητών (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003). Στην RME, στους μαθητές δεν παραδίδονται έτοιμα μοντέλα που ενσωματώνουν συγκεκριμένες μαθηματικές έννοιες, αλλά έρχονται αντιμέτωποι με προβλήματα πλαισίου, που παρουσιάζονται με τέτοιο τρόπο ώστε να προκαλούν δραστηριότητες μοντελοποίησης, που με τη σειρά τους οδηγούν στην εμφάνιση μοντέλων. Επιπλέον, η διαμήκης προοπτική της ποσοστιαίας τροχιάς δείχνει ξεκάθαρα ότι το μοντέλο που εμφανίζεται εδώ, το μοντέλο ράβδου, αναπτύσσεται όλο και περισσότερο σε όλη την τροχιά. Οι αρχικές δραστηριότητες μοντελοποίησης, που εκτελούνται σε προβλήματα πλαισίου ενσωματωμένα στην πραγματικότητα των μαθητών, επιτυγχάνουν να φτάσουν οι μαθητές σε νέες πραγματικότητες, οι οποίες με τη σειρά τους μπορούν να γίνουν αντικείμενο νέων δραστηριοτήτων μοντελοποίησης (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003).

Στην πραγματικότητα, οι δραστηριότητες μοντελοποίησης δεν παράγουν ένα μόνο μοντέλο, αλλά μια αλυσίδα μοντέλων (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003). Προκαλούμενα από μια σειρά

προβλημάτων που παρουσιάζονται σε ένα μαθησιακό περιβάλλον που διεγείρει τον προβληματισμό και την αλληλεπίδραση στην τάξη, νέες εκδηλώσεις του μοντέλου συνεχίζουν να εμφανίζονται, δίνοντας πρόσβαση σε νέες προοπτικές, νέες δυνατότητες για επίλυση προβλημάτων και υψηλότερα επίπεδα κατανόησης (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003). Όλα αυτά συνεπάγονται ότι το μοντέλο παρέχει στους μαθητές ευκαιρίες για πρόοδο, χωρίς να εμποδίζει τον δρόμο της επιστροφής στις πηγές στις οποίες βασίζεται η κατανόηση. Τα παραπάνω σημαίνουν επίσης ότι τα μοντέλα μπορούν να λειτουργήσουν σε διαφορετικά επίπεδα κατανόησης, και ότι μπορούν να συμβαδίσουν με τη μακροπρόθεσμη μαθησιακή διαδικασία που πρέπει να περάσουν οι μαθητές. Αυτή η διαρκής ποιότητα είναι ιδιαίτερα που κάνει το μοντέλο της ράβδου τόσο ισχυρό (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003). Ο ευέλικτος και γενικός χαρακτήρας του εκθέτει τις διαφορετικές εμφανίσεις των ρητών αριθμών και τις αμοιβαίες σχέσεις τους. Ως αποτέλεσμα αυτού, οι μαθητές θα κατανοήσουν περισσότερο την έννοια του ρητού αριθμού, η οποία με τη σειρά της συνδυάζεται με την εφαρμογή του μοντέλου σε ένα προοδευτικά υψηλότερο επίπεδο (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003).

Ακόμη, υπάρχει μια σειρά από συνεχείς αλλαγές, γεγονός που υπονοεί ότι ένα μοντέλο συνδεδεμένο με το πλαίσιο αρχικά συμβολίζει μια άτυπη λύση και στο τέλος γίνεται μοντέλο για επίσημες λύσεις σε ένα γενικότερο επίπεδο (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003). Μια τέτοια αλλαγή συμβαίνει για παράδειγμα όταν οι μαθητές συνειδητοποιούν ότι ο τρόπος με τον οποίο συμβολίζεται η ενασχόληση του θεάτρου μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί για να εκφράσει ότι το 25% των λουλουδιών είναι κόκκινα (Εικόνα 4.9). Αυτή η μετατόπιση είναι συχνά το πρώτο βήμα που δίνει σε ένα μοντέλο έναν πιο γενικό χαρακτήρα.

<u>Εικόνα 4.9</u>. Ποσοστά με τη χρήση ζωγραφιάς (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003)



Αυτή η μετάβαση συμβαίνει όταν συνδέονται οι διαφορετικοί τρόποι με τους οποίους μπορεί να λειτουργήσει το μοντέλο – και οι μαθητές μπορούν να το χρησιμοποιήσουν – αυτό που στην αρχή απλώς απεικόνιζε (ράβδος) χρησιμοποιείται αργότερα για την εκτίμηση ενός ποσοστού ή για τον υπολογισμό από τη νέα μειωμένη τιμή στο αρχική τιμή (Εικόνα 4.6, 4.8). Αυτή η αλλαγή μακροπρόθεσμα οδηγεί στο να μπορούν οι μαθητές να κάνουν ευέλικτη χρήση του μοντέλου και να το χειριστούν. Σε αυτό το σημείο φτάνουν ουσιαστικά στο γενικό, επίσημο επίπεδο κατανόησης (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003).

4.5 Εκπαιδευτικό πείραμα με το επιτραπέζιο παιχνίδι snake and ladder (φιδάκι) για τη γεωμετρία

Η μαθησιακή προσέγγιση πρέπει να διατηρεί την επιθυμία. Η ευκολία της μάθησης μπορεί να βιωθεί εάν τα μαθησιακά περιεχόμενα και τα πλαίσια σχετίζονται με τις καθημερινές δραστηριότητες των μαθητών. Η RME είναι μια από τις προσεγγίσεις που αντιμετωπίζει προβλήματα που προκαλούνται από την καθημερινότητα των μαθητών και οδηγεί στην αφηρημένη εκμάθηση των μαθηματικών (Bray & Tangney, 2015). Σύμφωνα με τον Freudenthal (1971), η χρήση μοναδικών και διασκεδαστικών μέσων μάθησης μπορεί να είναι ένας από τους τρόπους για να ενδυναμωθούν και να ενισχυθούν οι έννοιες των μαθηματικών (Freudenthal, 1971). Επομένως είναι σημαντικό για τους εκπαιδευτικούς να ενδυναμώσουν τη διανοητική ικανότητα των μαθητών μέσω RME και παιχνιδιών, προκειμένου να δημιουργηθεί ουσιαστική και εμπλαισιωμένη (contexualised) μάθηση. Η RME φαίνεται να είναι σε θέση να ενθαρρύνει τους μαθητές να μάθουν και ως αποτέλεσμα να βελτιώσουν τα γνωστικά τους επιτεύγματα.

Στην έρευνα των Laurens et al. (2018), μια παραλλαγή του επιτραπέζιου παιχνιδιού snake and ladder (φιδάκι) (Εικόνα 4.10) αναπτύσσεται για να βοηθήσει τους μαθητές να αντιμετωπίσουν μαθηματικά προβλήματα που σχετίζονται με τη ζωή τους. Επομένως, το παιχνίδι αυτό μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να εφαρμόζουν έννοιες γεωμετρίας στην καθημερινή τους ζωή.

Το snake and ladder είναι ένα παιχνίδι που μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως μέσο εκμάθησης. Στην εκμάθηση των μαθηματικών, το παιχνίδι αναζωογονεί τη γνωστική ικανότητα των μαθητών, έτσι ώστε το επίπεδο πλήξης τους να μπορεί να μειωθεί (Laurens et al., 2018).

Αυτή η έρευνα στοχεύει να διερευνήσει τη διαφορά στη γνωστική επίδοση των μαθητών που διδάχτηκαν μέσω RME και εκείνων μέσω συμβατικής μάθησης. Αποτελεί ένα εκπαιδευτικό

πείραμα που χρησιμοποιεί παρατήρηση πριν και μετά την παρέμβαση (ως pre- και post- test) στην πειραματική ομάδα και την ομάδα ελέγχου.

Υπάρχουν δύο μεταβλητές σε αυτή την έρευνα. Η πρώτη μεταβλητή είναι η μαθησιακή προσέγγιση που περιλαμβάνει την RME και τη συμβατική μάθηση ως εξαρτημένη μεταβλητή. Η δεύτερη μεταβλητή είναι η γνωστική επίδοση των μαθητών ως ανεξάρτητη μεταβλητή. Το εργαλείο μέτρησης της ανεξάρτητης μεταβλητής είναι μέσω ερωτήσεων προς ανάπτυξη. Η έρευνα πραγματοποιείται σε δημόσιο γυμνάσιο στο Ambon (Ινδονησία). Οι ημερήσιες βαθμολογίες των μαθητών χρησιμοποιούνται για τον προσδιορισμό του μέσου όρου της βαθμολογίας των μαθητών. Με βάση τις βαθμολογίες, δύο τάξεις που έχουν σχετικά παρόμοια μέση βαθμολογία επιλέγονται να συμμετάσχουν. Οι δύο τάξεις (από τις 11) επιλέγονται ως πειραματική ομάδα και ως ομάδα ελέγχου. Κάθε τάξη αποτελείται από 25 μαθητές.

Τα χαρακτηριστικά της RME σε αυτή την έρευνα αφορούν την γεωμετρία και συγκεκριμένα την κατανόηση προβλημάτων πλαισίου, μέσω της ομαδικής συζήτησης με στόχο την επίλυση των προβλημάτων. Οι προσπάθειες του δασκάλου για την κατανόηση των προβλημάτων αυτών παρουσιάζονται στην αρχή του μαθήματος, όπου ο δάσκαλος ρωτά τους μαθητές μερικές ερωτήσεις για να τους κατευθύνει στη μάθηση. Στη συνέχεια, η κατανόηση των μαθητών βαθαίνει κάνοντας κάποιες δραστηριότητες που σχετίζονται με το εκπαιδευτικό υλικό που παρέχεται στο φύλλο εργασίας των μαθητών. Στη συνέχεια, οι μαθητές συζητούν τα προβλήματα σε μια ομάδα. Η ομαδική συζήτηση είναι ένα μέσο όπου οι μαθητές μπορούν να μοιραστούν μεταξύ τους τις σκέψεις, τις ιδέες και τις απόψεις τους ως μορφή ευθύνης για τα καθήκοντά τους. Κατά τη διάρκεια της διαδικασίας, οι μαθητές δεν μπορούν να εργαστούν μόνοι τους χωρίς τη βοήθεια του δασκάλου . Στη συγκεκριμένη έρευνα των Laurens et al. (2018) η RME εστιάζει στην επίλυση των προβλημάτων πλαισίου μέσω του παιχνιδιού snake and ladder. Αυτή η έρευνα χρησιμοποιεί το παιχνίδι αυτό ως μέσο για να παρακινήσει τους μαθητές να λύσουν προβλήματα πλαισίου. Ο σκοπός είναι να βοηθήσει τους μαθητές να βελτιώσουν την κατανόησή τους για τα προβλήματα καθώς και να εμπλακούν στη διαδικασία επίλυσης τους.

Ακολουθούν οι οδηγίες χρήσης του παιχνιδιού snake and ladder για την εκμάθηση γεωμετρίας.

Οδηγίες χρήσης του παιχνιδιού snake and ladder:

1. Ρίξτε τα ζάρια. Εάν λάβετε (για παράδειγμα) 4, πρέπει να μετακινήσετε το πιόνι σας στο τέταρτο τετράγωνο προς τα δεξιά.
2. Συνεχίστε να κάνετε το ίδιο πράγμα. Εάν το πιόνι σας σταματήσει σε ένα ορθογώνιο ή ένα τετράγωνο, τότε η ομάδα σας θα πρέπει να απαντήσει σε μια ερώτηση που παρέχεται μέσα στο ποτήρι. Το ποτήρι περιέχει ερωτήσεις (τυχαία επιλογή) που σχετίζονται με τα ορθογώνια και τα τετράγωνα .
3. Λύστε τα προβλήματα μαζί με τα μέλη της ομάδας σας.
4. Ρωτήστε τον δάσκαλό σας εάν χρειάζεστε βοήθεια.

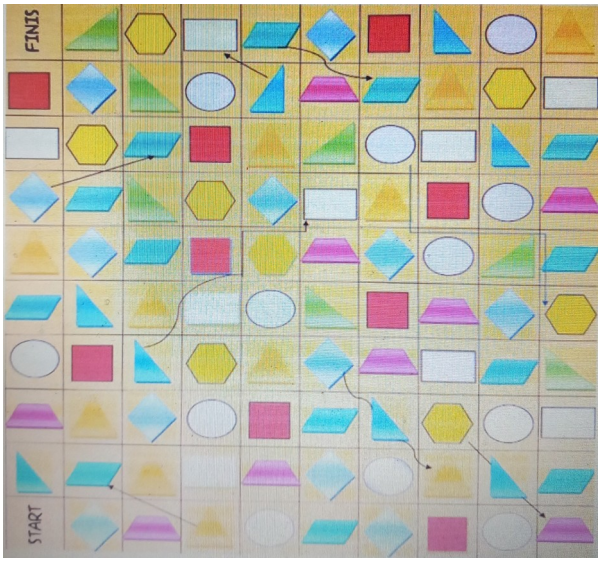
Ερωτήσεις ορθογωνίου:

1. Μπροστά από το σπίτι του κ. Ρ υπάρχει αυλή εμβαδού 840 m^2 και πλάτους 24 m. Βρείτε την περίμετρο της ορθογώνιας αυλής του κυρίου Ρ.
2. Η κ. Γ έχει κήπο εμβαδού 12 km^2 και μήκους 6 km. Πόσο είναι το πλάτος του κήπου;
3. Ο Λ πρόκειται να φτιάξει ένα τραπεζομάντιλο. Το μήκος του είναι 250 cm και το πλάτος του είναι 150 cm. Ποιο είναι το εμβαδόν του υφάσματος που χρειάζεται ο Λ σε m^2;
4. Το μήκος της πίσω αυλής ενός σπιτιού είναι 90 m και το πλάτος της 65 m. Θα χτιστούν φράχτες γύρω από αυτήν και κοστίζουν 13 ευρώ ανά μέτρο. Πόσα χρήματα χρειάζονται για την τοποθέτηση της περίφραξης;

Ερωτήσεις τετραγώνου:

1. Βρείτε το εμβαδόν ενός κήπου σχήματος τετραγώνου αν το μήκος της πλευράς του είναι 25 m.
2. Ένας τετράγωνος κήπος έχει εμβαδόν 625 m^2, βρείτε την περίμετρο του κήπου.
3. Ο κήπος είναι τετράγωνος. Προσδιορίστε την περίμετρο.
4. Το μήκος της πλευράς ενός τετράγωνου δαπέδου είναι 6 m. Σε αυτόν τον όροφο θα τοποθετηθούν 30 x 30 cm^2 πλακάκια. Πόσα πλακάκια χρειάζονται για να καλυφθεί η επιφάνεια του δαπέδου;
5. Ο κ. Τ είναι εργολάβος. Σκοπεύει να αγοράσει μια αυλή. Η αυλή κοστίζει 35 ευρώ ανά m^2. Αν η αυλή είναι τετράγωνη με διαστάσεις 30 x 30 m, πόσα χρήματα θα πρέπει να δώσει ο κ. Τ;

Εικόνα 4.10. Snake and ladder στη γεωμετρία (Laurens et al., 2018)



Στην έρευνα των Laurens et al. (2018) μέσω SPSS 20.0 φαίνεται να υπάρχει διαφορά στη γνωστική επίδοση των μαθητών που διδάχτηκαν μέσω RME και εκείνων μέσω συμβατικής μάθησης. Συγκεκριμένα, το αποτέλεσμα της δοκιμής κανονικότητας με τη χρήση του τεστ chi-square δείχνει ότι τα δείγματα είναι φυσιολογικά. Επίσης, η δοκιμή ομοιογένειας χρησιμοποιώντας το τεστ Fishers επιβεβαιώνει ότι και οι δύο κατηγορίες είναι ομογενοποιημένες. Ως εκ τούτου, μπορεί να διεξαχθεί έλεγχος υποθέσεων με τη χρήση t-test. Το αποτέλεσμα του t-test δείχνει ότι υπάρχει διαφορά στην επίδοση των μαθητών που διδάχτηκαν μέσω RME και εκείνων μέσω συμβατικής μάθησης, ιδιαίτερα στο θέμα της γεωμετρίας. Η διαφορά φαίνεται επίσης από τη μέση βαθμολογία της πειραματικής τάξης (78,44) που είναι υψηλότερη από την ομάδα ελέγχου (68,40). Επιπλέον, τα ευρήματα της έρευνας προτείνουν ότι η RME αύξησε το ενδιαφέρον των μαθητών να μάθουν είτε ατομικά είτε ομαδικά για να βρουν λύση σε μαθηματικά προβλήματα. Παρά το γεγονός ότι κάποιοι μαθητές εξακολουθούσαν να αντιμετωπίζουν κάποιες δυσκολίες στην επίλυση των προβλημάτων, τα αποτελέσματα της έρευνας δείχνουν ότι ο δάσκαλος μπορούσε να το χειριστεί προσφέροντας λύσεις, καθοδήγηση και επεξηγήσεις στα προβλήματα (Laurens et al., 2018).

Στο πείραμα πραγματοποιείται παρατήρηση πριν από οποιαδήποτε διαδικασία. Το αποτέλεσμα της παρατήρησης δείχνει ότι οι μαθητές βρήκαν κάποιες δυσκολίες στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων. Αυτό συμβαίνει γιατί οι μαθητές το πρόβλημα το κατανοούσαν μόνο εν μέρει με αποτέλεσμα να μην μπορούν να εφαρμόσουν τα μαθηματικά στην καθημερινή τους ζωή. Ένας άλλος παράγοντας που επηρέασε την ικανότητα των μαθητών στην επίλυση προβλημάτων είναι η

λιγότερο αποτελεσματική προσέγγιση και οι στρατηγικές μάθησης στη διδασκαλία των μαθηματικών, που περιείχε ως επί το πλείστον επεξηγήσεις τύπων και διαδικασιών υπολογισμού που θεωρούνται κουραστικές για τους μαθητές. Η κατάσταση αυτή επιδεινώθηκε από το γεγονός ότι ο δάσκαλος δεν συνέδεε τις μαθηματικές έννοιες με την καθημερινότητα των μαθητών. Οι μαθητές, λοιπόν, δεν μπόρεσαν να αναπτυχθούν αφού δεν τους δόθηκε καμία ευκαιρία να παραδώσουν τις ιδέες τους και να καταλάβουν τις έννοιες των μαθηματικών μόνοι τους (Laurens et al., 2018).

Τα ευρήματα της έρευνας δείχνουν ότι υπάρχει σημαντική διαφορά μεταξύ των δύο προσεγγίσεων. Η RME έδωσε στους μαθητές περισσότερες ευκαιρίες να συμμετάσχουν ενεργά στη μάθηση μέσω της κατανόησης και της συζήτησης προβλημάτων πλαισίου και κατ' επέκταση μέσω της εύρεσης των απαντήσεων. Τους δόθηκε η ελευθερία να σκεφτούν και να συζητήσουν με τους συμμαθητές τους, που οδήγησε στην ανακάλυψη μαθηματικών εννοιών και την οικοδόμηση των γνώσεών τους. Με αυτόν τον τρόπο, οι γνωστικές τους επιδόσεις βελτιώθηκαν σε σύγκριση με τους μαθητές που έμαθαν με συμβατική μάθηση (Laurens et al., 2018).

4.6 Ρεαλιστική αναπαράσταση του έργου «Sunflowers» του Vincent Van Gogh για τη μέτρηση

Από τις διαθέσιμες κατηγορίες πλαισίων αναφέρεται εδώ ένα απόκομμα εφημερίδας, που προορίζεται για την (αρχική) εκπαίδευση εκπαιδευτικών μαθηματικών (Treffers, 1993). Για την ακρίβεια, το παρακάτω παράδειγμα προβλήματος πλαισίου αποτελείται από δύο αποκόμματα εφημερίδων, και τα δύο σχετικά με μια μάλλον ασυνήθιστη αναπαραγωγή του έργου «Sunflowers» του Van Gogh. Ο Andrew Scott, ένας κηπουρός στη Σκωτία, χρειάστηκε δέκα ημέρες για να κάνει μια ρεαλιστική αναπαραγωγή του έργου «Sunflowers» του Vincent van Gogh. Με τη βοήθεια είκοσι εθελοντών αντιγράφει τον πίνακα σε ένα χωράφι σιταριού της Σκωτίας, χρησιμοποιώντας 250.000 πολύχρωμα φυτά κήπου. Ο βοτανικός «καμβάς» έχει μέγεθος 14 τετραγωνικά χιλιόμετρα (εφημερίδα Trouw 17-8-91). Σε άλλη εφημερίδα μπορεί κανείς να διαβάσει: "Ο Scott χρησιμοποιεί διάφορα είδη φυτών και θάμνων για να απεικονίσει μια εικόνα άνω των 10.000 τετραγωνικών μέτρων" (εφημερίδα Volkskrant 17-8-91).

Με βάση αυτά τα αποκόμματα δίδεται η ακόλουθη ερώτηση (Treffers, 1993) σε εκπαιδευόμενους δασκάλους:

-Ποια αναφορά είναι η πιο ακριβής, της Trouw ή της Volkskrant; Εξηγήστε την απάντησή σας όσο πιο πειστικά γίνεται.

Όταν αυτό το πρόβλημα συζητιέται μεταξύ των εκπαιδευόμενων δασκάλων και τελικά λύνεται, τίθεται το επόμενο ερώτημα:

-Πώς υποθέτετε ότι προέκυψε αυτή η διαφορά στα μεγέθη;

Προστίθεται η πληροφορία ότι στις εφημερίδες δίδεται η έκταση του χωραφιού σε τετραγωνικές γιάρδες: 12.820 τετραγωνικές γιάρδες (Moor & Streefland, 1991).

Πιο συγκεκριμένα:

-Θα μπορούσε η μέτρηση «πάνω από 10.000 τετραγωνικά μέτρα» να είναι σωστή;

-Πώς εξηγείτε το σφάλμα των 14 τετραγωνικών χιλιομέτρων;

Για να προσδιοριστεί ποια μέτρηση φαίνεται πιο εύλογη, υπάρχουν πρώτα από όλα τα επιχειρήματα της γεωμετρίας που τίθενται από τους εκπαιδευτικούς. Κατά την πραγματοποίηση εκτιμήσεων του μήκους και του πλάτους του χωραφιού, τα ίχνη τρακτέρ και το ύψος των δέντρων λαμβάνονται υπόψη: πόσο πλάτος έχει ο τροχός του τρακτέρ και πόσο ψηλό είναι ένα δέντρο; Αυτά τα μεγέθη είναι το πρώτο θέμα συζήτησης και προβληματισμού.

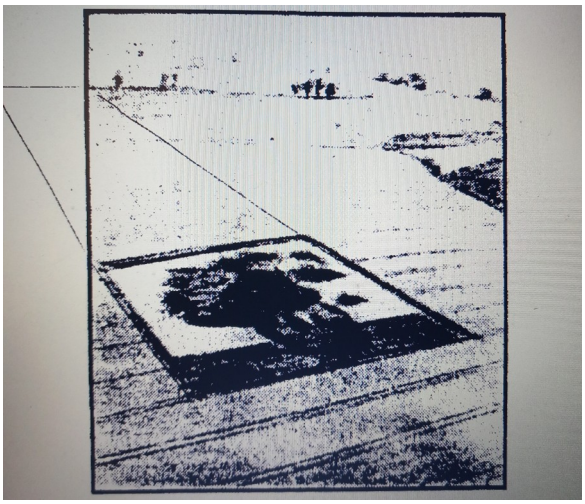
Ένας από τους δασκάλους ακολουθεί μια ενδιαφέρουσα μέθοδο: την «προβολή» των πλευρικών γραμμών του πίνακα στο δρόμο με τα δέντρα να φαίνονται στην κορυφή της φωτογραφίας (Εικόνα 4.11). Αντιλαμβάνονται τότε κοιτάζοντας τα δέντρα, ότι αυτός ο «καμβάς» δεν μπορεί να έχει πλάτος 3 ή 4 χιλιόμετρα, αλλά περίπου εκατό μέτρα το πολύ.

Στη συνέχεια, υπάρχει επίσης το υπολογιστικό επιχείρημα για την απάντηση στην πρώτη ερώτηση σχετικά με την πυκνότητα των φυτών: 250.000 φυτά σε 14 τετραγωνικά χιλιόμετρα ή σε 10.000 τετραγωνικά μέτρα; Στην τελευταία περίπτωση θα υπήρχαν 25 φυτά σε 1 τετραγωνικό μέτρο - αυτό θα φαινόταν λογικό. Αλλά 250.000 φυτά σε 14.000.000 τετραγωνικά μέτρα είναι 25 φυτά σε 1.400 τετραγωνικά μέτρα ή 1 σε 56 τετραγωνικά μέτρα, άρα 1 φυτό σε ένα ορθογώνιο 7 x 8 μέτρων, δηλαδή περίπου το πάτωμα της τάξης, και φυσικά αυτό απέχει πολύ από την πραγματικότητα. Παρουσιάζονται στιγμές συζήτησης όταν γίνεται μια απογραφή των διαφόρων λύσεων. Αλλά το αποτέλεσμα είναι σαφές: 10.000 τετραγωνικά μέτρα φαίνονται μακράν το πιο ρεαλιστικό μέγεθος.

Στη συνέχεια δίνεται η σωστή απάντηση σε γιάρδες: 12.820 τετραγωνικές γιάρδες. Οι δάσκαλοι ρίχνουν άλλη μια ματιά σε αυτά τα 10.000 τετραγωνικά μέτρα και τα 14 τετραγωνικά χιλιόμετρα με αυτή τη σειρά. Αν γίνει η μετατροπή, αντιστοιχούν οι 12.820 τετραγωνικές γιάρδες σε περίπου 10.000 τετραγωνικά μέτρα;

Το πρώτο λάθος ενός δασκάλου συμβαίνει στη μετατροπή τετραγωνικών γιαρδών σε τετραγωνικά μέτρα. Στη συνέχεια γίνονται οι υπολογισμοί μέσω αριθμομηχανής. Η υποδιαστολή μετακινείται έξι θέσεις αριστερά για τη μετατροπή από τετραγωνικά μέτρα σε τετραγωνικά χιλιόμετρα. Η υποδιαστολή όμως τοποθετήθηκε τρεις θέσεις προς τα αριστερά (από μέτρα σε χιλιόμετρα και όχι από τετραγωνικά μέτρα σε τετραγωνικά χιλιόμετρα). Το πιο σημαντικό πράγμα που μαθαίνουν είναι ίσως, ότι σε περιπτώσεις όπως αυτές πρέπει πάντα να εξετάζεται η απάντηση για να φανεί αν είναι αληθοφανής. Στις πρώτες μέρες του Wiskobas, αλλά και στη συνέχεια, θεματικά προσανατολισμένα παραδείγματα όπως αυτό, και σε επίπεδο πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, έχουν σημαντική πληροφοριακή και διεγερτική επιρροή.

Εικόνα 4.11. Ρεαλιστική αναπαράσταση του έργου Sunflowers του Van Gogh (Treffers, 1993)



Τα προβλήματα έχουν έναν συγκεκριμένο σκοπό οριζόντιας μαθηματικοποίησης, δηλαδή κατευθύνονται κυρίως στην εφαρμογή, την εξάσκηση και τη συσχέτιση της γνώσης και των δεξιοτήτων που αποκτούνται σε καταστάσεις πλαισίου (Treffers, 1993).

Στο πρόβλημα πλαισίου σχετικά με τον πίνακα του Van Gogh υπάρχουν στοιχεία από:

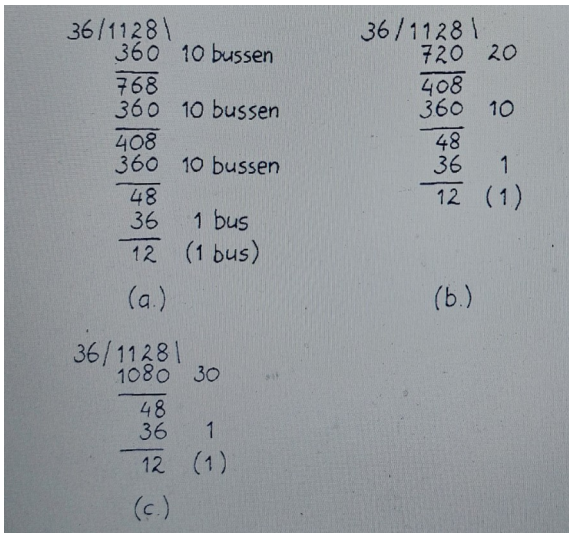
4.6.1 Βασικές δεξιότητες αριθμητικής (Treffers, 1993).
4.6.2 Αναλογία και κλάσματα (Treffers, 1993).
4.6.3 Μέτρηση και γεωμετρία (Treffers, 1993).

4.6.1 Βασικές δεξιότητες αριθμητικής

Η νοητική αριθμητική είναι ένας αποτελεσματικός υπολογισμός για τον οποίο είναι απαραίτητες τόσο η απομνημονευμένη γνώση όσο και η διορατικότητα στους αριθμητικούς κανόνες, με επιπλέον τη γνώση στις σχέσεις των αριθμών (Treffers, 1993). Το πρόβλημα «Sunflowers» του Vincent Van Gogh προσφέρει διάφορες δυνατότητες για νοητική αριθμητική σε συνδυασμό με τον εκτιμώμενο υπολογισμό, για παράδειγμα (8/10) x 12.500 = 8 x 1.250 = 4 x 2.500 = 2 x 5.000 = 10.000

Συμπερασματικά, η αριθμητική που υπάρχει στο «Van Gogh» θα μπορούσε να παραμείνει στο παρασκήνιο χρησιμοποιώντας την αριθμομηχανή. Αλλά αυτό ισχύει και γενικά, η εκμάθηση των αλγορίθμων των πράξεων των πραγματικών αριθμών έχει μειωθεί σημαντικά με την εισαγωγή της αριθμομηχανής. Παρακάτω παρατίθεται ένα παράδειγμα προβλήματος που μπορεί να χρησιμεύσει ως σημείο εκκίνησης για τη διαίρεση: 1.128 οπαδοί πρέπει να μεταφερθούν σε λεωφορεία με 36 θέσεις. Πόσα λεωφορεία θα χρειαστούν; Αυτό το πρόβλημα επιλύεται σε διαφορετικά επίπεδα κατά τη διάρκεια του μαθησιακού σκέλους (Εικόνα 4.12).

<u>Εικόνα 4.12</u>. Πρόβλημα: 1.128 οπαδοί πρέπει να μεταφερθούν σε λεωφορεία με 36 θέσεις. Πόσα λεωφορεία θα χρειαστούν; (Treffers, 1993)



Κάτι παρόμοιο συμβαίνει και για τον πολλαπλασιασμό. Για παράδειγμα, σε ένα πρόβλημα πλαισίου στο οποίο εμφανίζεται ο πολλαπλασιασμός '7 x 24': 7 x 24 = 7 x 20 + 7 x 4 = 140 + 28 = 168

Η αριθμητική εκτίμηση έχει νόημα όταν αφορά τον πρόχειρο προσδιορισμό του αποτελέσματος, τη γενική εκτίμηση του αποτελέσματος ως προς το μέγεθος και εάν πρέπει να χειριστεί κανείς μη επακριβώς καθορισμένες πληροφορίες. Και αυτό ακριβώς γίνεται στο πρόβλημα του «Van Gogh», όπου χρησιμοποιούνται (κατάχρηση) οι πληροφορίες της εμπειρίας, η προσέγγιση, η στρογγυλοποίηση και η (αν)ακρίβεια μετατρέποντας χονδρικά τις γιάρδες σε μέτρα και τις τετραγωνικές γιάρδες σε τετραγωνικά μέτρα και εξετάζοντας αν περίπου 10.000 τετραγωνικά μέτρα είναι κοντά στην εκτίμηση (Treffers, 1993).

Υπάρχει μια προφανής τάση στην Ολλανδία να καθυστερήσει και να περιορίσει τη νοητική αριθμητική και την αριθμητική εκτίμηση. Κατά την περίοδο του IOWO (1971-1980) δεν είχε αναπτυχθεί ειδική διδακτική για την εκμάθηση της προπαίδειας ή της στοιχειώδους νοητικής αριθμητικής. Αυτό δεν συμβαίνει μέχρι τη δεκαετία του 1980 για πρόσθεση και αφαίρεση (Treffers, 1991), για πολλαπλασιασμό και διαίρεση (Ter Heege, 1985). Πάρα πολλοί άνθρωποι φέρνουν μικρή επανάσταση στην ανάπτυξη του προγράμματος για βασικές δεξιότητες στην αριθμητική.

4.6.2 Αναλογία και κλάσματα

Το στοιχείο «Van Gogh» αφορά οπτικές αναλογίες, οι αριθμοί κατέχουν μικρότερο ρόλο στον προσδιορισμό ότι τα 14 τετραγωνικά χιλιόμετρα δεν μπορούν να είναι σωστά: το εξασκημένο μάτι βλέπει αμέσως ότι το χωράφι δεν μπορεί να είναι ένα ορθογώνιο 3 ½ x 4 χιλιομέτρων, λαμβάνοντας υπόψη τα δέντρα, τις διαδρομές, το όλο σκηνικό (Treffers, 1993). Επομένως το πρόβλημα αυτό αφορά οπτικές αναλογίες για τον προσδιορισμό της πυκνότητας των φυτών για τις δύο δεδομένες μετρήσεις και τη μετατροπή των τετραγωνικών γιαρδών σε τετραγωνικά μέτρα (Treffers, 1993).

Τα κλάσματα δεν παίζουν σημαντικό ρόλο στο παρόν πρόβλημα. Μόνο στη σχέση μεταξύ γιαρδών και μέτρων εμφανίζονται. Και η εργασία με αυτά θα μπορούσε ακόμη και να αποφευχθεί αν ήταν ίδιες μονάδες μέτρησης. Αυτό υποδεικνύει αμέσως μία από τις στρατηγικές με τις οποίες πρέπει να προσεγγιστεί και να εξηγηθεί ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση των δεκαδικών αριθμών, δηλαδή αλλάζοντας μονάδες μέτρησης ή αλλιώς προσπαθώντας να απαλλαχθούν από την υποδιαστολή.

Αλλά τα κλάσματα μπορούν να χρησιμοποιηθούν επίσης για την επίλυση προβλημάτων αναλογιών. Οι λόγοι και τα κλάσματα μπορούν να συσχετιστούν μεταξύ τους. Η διαίρεση για παράδειγμα σε

πίτσες, μπάρες σοκολάτας κ.α. μπορεί να οδηγήσει σε κλάσματα. Η σχέση με τους λόγους διατηρείται ρητά σε αυτό το στάδιο, εν μέρει για τη σύγκριση των κλασμάτων και για τον προσδιορισμό της (αν)ισότητας τους μέσω των λόγων (Streefland, 1991).

4.6.3 Μέτρηση και Γεωμετρία

Το πλαίσιο «Van Gogh» αφορά κυρίως τη μέτρηση. Παρακάτω παρατίθενται έξι πτυχές της μέτρησης (Treffers, 1993).

1. Η κατανόηση της μέτρησης δεν είναι αυτόματη. Τι σημαίνει να μετράται το εμβαδόν σε τετραγωνικά μέτρα, χιλιόμετρα, γιάρδες; Τι είναι η περίμετρος; Ο αριθμός των φυτών, για παράδειγμα, λέει κάτι για το μέγεθος ενός χωραφιού; Και μέσω αυτής της σχέσης με ένα άλλο, πιο συγκεκριμένο μέγεθος, η μέτρηση μπορεί να γίνει ορατή, και έτσι να προωθηθεί η ανάπτυξη της κατανόησης του μέτρου (Treffers, 1993).

2. Οι «καθημερινές» μετρήσεις πρέπει να σχετίζονται με την εμπειρία και την φαντασία των παιδιών. Τι είναι ένα τετραγωνικό μέτρο, πόσο μεγάλο είναι; Πόσο μεγάλο είναι ένα τετραγωνικό χιλιόμετρο, φανταστείτε το στο περιβάλλον σας. Πόσο μεγάλα είναι τα 14 τετραγωνικά χιλιόμετρα από αυτή την άποψη; Ποιο είναι το εμβαδόν του ορόφου της τάξης μας; Οι μαθητές πρέπει να χρησιμοποιήσουν ένα πλήθος σημείων αναφοράς σχετικά με το μέτρο: πόσο ψηλός είσαι, πόσο γρήγορα κινείται το αυτοκίνητο, πόσοι άνθρωποι ζουν σε μια μεγάλη πόλη, ποια είναι η θερμοκρασία σήμερα κ.α. Προβλήματα όπως το «Van Gogh» αφορούν αυτό.

3. Η ανάπτυξη στρατηγικών μέτρησης είναι εγγενής στη μέτρηση. Ιδιαίτερα, η εκτίμηση βάσει προσωπικών σημείων αναφοράς. Τα δέντρα, τα κομμάτια στο «Van Gogh», είναι απαραίτητα για την εκτίμηση. Η εκτίμηση και η μέτρηση συνδέονται στενά.

4. Πρέπει να εξεταστούν οι σχέσεις μεταξύ μονάδων μέτρησης και μεγεθών. Οι μετρήσεις είναι μία από αυτές τις σχέσεις. Αλλά και οι σχέσεις μεταξύ απόστασης, χρόνου και ταχύτητας, και ούτω καθεξής.

5. Ο υπολογισμός με αριθμούς μετρήσεων θέτει ειδικές απαιτήσεις, ιδίως όταν πρόκειται
για στρογγυλοποιημένους ή ανακριβείς αριθμούς. Για παράδειγμα συγκρίνετε τις ενδείξεις 250.000 και 12.820 στο πρόβλημα «Van Gogh». Η στρογγυλοποίηση επιτρέπεται; Τα σφάλματα μπορούν να

εκτιναχτούν κατά τον πολλαπλασιασμό ή τη διαίρεση. Θέματα στα οποία πρέπει να δοθεί προσοχή σε σχέση με τη μέτρηση, την εκτίμηση και τον υπολογισμό.

6. Και τέλος, η συλλογή και η επεξεργασία αριθμητικών δεδομένων σε γραφήματα, πίνακες, διαγράμματα κ.α. κάτι που δεν χρησιμοποιήθηκε στο παρόν πρόβλημα. Η σχεδίαση γραφημάτων και η ερμηνεία τους είναι επίσης μέρος της μέτρησης.

Υπάρχει πολύ λίγη γεωμετρία στο πρόβλημα «Van Gogh». Το πρόγραμμα Wiskobas περιέχει προβλήματα σχετικά με την προβολή και την οπτικοποίηση (1), τον προσανατολισμό και τον εντοπισμό (2) και τα σχήματα και τις εικόνες (3). Τα παιδιά ενθαρρύνονται να κατασκευάζουν, να υπολογίζουν και να αιτιολογούν (Treffers, 1993).

Στην πρώτη φάση της διδασκαλίας στη γεωμετρία, η δόμηση των χωρικών εμπειριών είναι κυρίως οπτική: οι ιδέες στην πραγματικότητα εκφράζονται από το «πώς φαίνεται». Οι μεταγενέστερες διαισθητικές έννοιες πρέπει να εξεταστούν περισσότερο και να επιχειρηματολογηθούν καλύτερα μέσω γλωσσικών συμβόλων, εικόνων, συλλογισμών. Στη συνέχεια αναπτύσσονται έννοιες όπως γωνία, καθετότητα, κατεύθυνση κ.α., οι οποίες έχουν μια συγκεκριμένη σχέση και οι οποίες μπορούν να οικοδομηθούν στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση.
Στην κατηγορία της προβολής και της οπτικοποίησης, σύμφωνα με τον Treffers (1993) ταιριάζουν προβλήματα όπως:
- Γιατί οι σκιές γίνονται μεγαλύτερες όταν απομακρύνεστε από το φως του δρόμου και όχι όταν απομακρύνεστε από τον ήλιο;
- Γιατί το φεγγάρι περπατάει μαζί σου;
- Γιατί οι σιδηροδρομικές γραμμές συγκλίνουν σε απόσταση;

Η γεωμετρία εμφανίζεται στην πραγματικότητα από κάθε πλευρά - η γεωμετρία ως μαθηματικός προσανατολισμός του κόσμου που δεν απαιτεί εκτεταμένη διδακτική φαινομενολογική ανάλυση για να αναπτυχθεί γρήγορα (Treffers, 1993). Το μεγαλύτερο μέρος του «Πέντε χρόνια IOWO» αφορά τη μέτρηση και τη γεωμετρία και είναι ενσωματωμένο με αναλογίες. Ο Freudenthal ήταν επίσης ο μεγάλος υποστηρικτής πίσω από τη μέτρηση (Treffers, 1993).

Κεφάλαιο 5: Επίλογος

5.1 Επίλογος

Ο όρος «ρεαλιστικό» στη Ρεαλιστική Μαθηματική Εκπαίδευση - Realistic Mathematics Educcation (RME) αναφέρεται περισσότερο στην πρόθεση να προσφερθούν στους μαθητές προβληματικές καταστάσεις που μπορούν να φανταστούν (Van den Brink, 1973; Wijdeveld, 1980) παρά στην «πραγματικότητα» ή την αυθεντικότητα των προβλημάτων. Ωστόσο, αυτό δεν σημαίνει ότι η σύνδεση με την πραγματική ζωή δεν είναι σημαντική. Υπονοεί μόνο ότι τα πλαίσια δεν περιορίζονται απαραίτητα σε πραγματικές καταστάσεις. Ο φανταστικός κόσμος των παραμυθιών, ακόμη και ο επίσημος κόσμος των μαθηματικών μπορεί να είναι εξίσου κατάλληλα πλαίσια για προβλήματα, αρκεί να είναι «πραγματικά» στο μυαλό των μαθητών (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003).

Από τότε που εισήχθη η RME, έχει καθιερώσει πρόγραμμα σπουδών μαθηματικών και διδακτική προσέγγιση (Laurens et al.,2018). Οι Clements και Sarama (2004) αναφέρουν ότι τα κύρια χαρακτηριστικά της RME περιλαμβάνουν την εφαρμογή ουσιαστικών πλαισίων, την ανάπτυξη μοντέλου που επιτρέπει τη μετατροπή από τα ρεαλιστικά πλαίσια στα τυπικά μαθηματικά, την αναδημιουργία μαθηματικών εννοιών από τους μαθητές, την αλληλεπίδραση μεταξύ μαθητών και δασκάλου και την αντίληψη των μαθηματικών ως ολοκληρωμένου μαθήματος (Laurens et al., 2018). Αυτά τα χαρακτηριστικά οδηγούν στην προοδευτική μαθηματική διαδικασία που επιτρέπει στους μαθητές να συσχετίσουν τα προβλήματα με τα πλαίσια, να εντοπίσουν σχετικές μαθηματικές έννοιες, να λύσουν προβλήματα και να ερμηνεύσουν τη λύση με βάση τα ρεαλιστικά πλαίσια τους (Laurens et al., 2018). Ο Yuwono (2007) απλοποιεί τα χαρακτηριστικά της RME στην κατανόηση, συζήτηση και επίλυση των ρεαλιστικών προβλημάτων.

Η εκμάθηση των μαθηματικών επομένως πρέπει να έχει τα χαρακτηριστικά της γνωστικής ανάπτυξης και όχι μιας διαδικασίας στοίβαξης κομματιών γνώσης. Το σημείο εκκίνησης του Freudenthal είναι η κριτική του στην παραδοσιακή εκπαίδευση στα μαθηματικά. Αντιτίθεται σθεναρά σε αυτό που αποκαλεί αντιδιδακτική αναστροφή (Freudenthal, 1973b), όπου τα τελικά αποτελέσματα σε ασκήσεις στα μαθηματικά λαμβάνονται ως αφετηρία για την εκπαίδευση (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003). Ως εναλλακτική, υποστηρίζει ότι η εκπαίδευση στα μαθηματικά πρέπει να έχει ως σημείο αφετηρίας της τα μαθηματικά ως δραστηριότητα, και όχι τα μαθηματικά ως έτοιμο σύστημα (Freudenthal, 1971, 1973b, 1991). Έτσι έχει θέσει τα θεμέλια για την RME. Για

τον Freudenthal, τα μαθηματικά δεν είναι το σώμα της μαθηματικής γνώσης, αλλά η δραστηριότητα της επίλυσης και της αναζήτησης προβλημάτων (Freudenthal, 1968), κάτι που επηρεάζει τόσο τους στόχους της μαθηματικής εκπαίδευσης όσο και τις μεθόδους διδασκαλίας. Για αυτόν η βασική μαθηματική δραστηριότητα είναι η μαθηματικοποίηση. Ο Freudenthal βλέπει αυτή τη δραστηριότητα των μαθητών ως έναν τρόπο επανεφεύρεσης των μαθηματικών.

Οι μαθητές δεν αναμένεται να επανεφεύρουν τα πάντα μόνοι τους. Για τον Freudenthal, η έμφαση δίνεται στη μαθησιακή διαδικασία παρά στην εφεύρεση αυτή καθ' αυτή (Freudenthal, 1991). Η ιδέα είναι να επιτραπεί στους εκπαιδευόμενους να θεωρήσουν τη γνώση που αποκτούν ως δική τους προσωπική γνώση για την οποία είναι υπεύθυνοι οι ίδιοι. Αυτό υπονοεί ότι πρέπει να υπάρχουν ορισμένοι κοινωνικοί κανόνες (Yackel & Cobb, 1996) όπως ότι δεν μαθαίνονται μαθηματικά μαντεύοντας τι έχει στο μυαλό του ο δάσκαλος, αλλά "κάνοντας μαθηματικά" ο ίδιος. Η εκπαίδευση μπορεί να ξεκινήσει με τη μαθηματικοποίηση του αντικειμένου της καθημερινής ζωής. Σε σχέση με αυτό, ο Treffers (1987) διακρίνει οριζόντια και κατακόρυφη μαθηματικοποίηση. Η οριζόντια αναφέρεται στη διαδικασία περιγραφής ενός προβλήματος πλαισίου (context problem) με μαθηματικούς όρους – για να είναι εφικτό να λυθεί με μαθηματικό συμβολισμό. Η κατακόρυφη αναφέρεται στη μαθηματικοποίηση της δικής του μαθηματικής δραστηριότητας. Μέσω της κατακόρυφης, ο μαθητής φτάνει σε υψηλότερο επίπεδο μαθηματικών. Είναι στη διαδικασία της προοδευτικής μαθηματικοποίησης – η οποία περιλαμβάνει τόσο την οριζόντια όσο και την κατακόρυφη συνιστώσα – όπου οι μαθητές κατασκευάζουν (νέα) μαθηματικά.

Στην RME τα προβλήματα πλαισίου μπορούν να λειτουργήσουν ως σημεία αγκύρωσης για την επανεφεύρεση των μαθηματικών από τους ίδιους τους μαθητές. Επιπλέον, η καθοδηγούμενη επανεφεύρεση προσφέρει μια διέξοδο από το γενικά αντιληπτό δίλημμα για το πώς να γεφυρωθεί το χάσμα μεταξύ της άτυπης και τυπικής γνώσης των μαθηματικών (Gravemeijer & Doorman, 1999). Σε μια προσέγγιση επανεφεύρεσης, τα προβλήματα πλαισίου διαδραματίζουν βασικό ρόλο (Gravemeijer & Doorman, 1999). Τα σωστά επιλεγμένα προβλήματα πλαισίου προσφέρουν ευκαιρίες στους μαθητές να αναπτύξουν άτυπες στρατηγικές επίλυσης υψηλού περιεχομένου (όπως γενίκευση, περιορισμούς κ.α.).

Η κύρια κριτική της προσέγγισης RME είναι ότι είναι συχνά αδύνατη η μετάβαση από βιωματικά πραγματικές καταστάσεις στη μαθηματικοποίηση αυτών. Η επανεφεύρεση, από αυτή την άποψη, είναι χάσιμο χρόνου (Verstappen, 1991).

Η χρήση της προσέγγισης RME στα σχολικά εγχειρίδια κατά την πάροδο του χρόνου, σύμφωνα με τους Van Zanten και Van den Heuvel-Panhuizen, (2021) επιτρέπει μια παραλλαγή των διαδικασιών υπολογισμού που είναι χρήσιμη για την ιδέα των κατασκευών των διαδικασιών λύσης των ίδιων των μαθητών. Το όφελος της συνεισφοράς των μαθητών—να αφήνονται δηλαδή οι μαθητές να εκφράσουν με λέξεις τι συμβαίνει και να βρουν τις δικές τους παραγωγές προβλημάτων—είναι παρόν στα σχολικά βιβλία μέχρι σήμερα (Van Zanten & Van den Heuvel-Panhuizen, 2021). Η εξέλιξη της προσέγγισης RME στα σχολικά βιβλία σχετικά με την πρώιμη πρόσθεση και αφαίρεση, όπως επιδιώκεται στην έρευνα των Van Zanten και Van den Heuvel-Panhuizen (2021) φανερώνει ότι οι κατηγορίες των διαμεσολαβητών μάθησης που βασίζονται στις μεγάλες ιδέες και τις αρχές διδασκαλίας της RME είναι σταθερά παρούσες σε όλα τα έγγραφα που αναλύονται στη συγκεκριμένη έρευνα. Η προσέγγιση αυτή παρέχει ευκαιρίες για διαδικασίες δομημένης λύσης και ανοίγει τον δρόμο για τη χρήση των κατασκευών των ίδιων των μαθητών μέσω ποικίλων στρατηγικών υπολογισμού.

Στην Ολλανδία ωστόσο, η RME είχε και εξακολουθεί να έχει σημαντικό αντίκτυπο στην εκπαίδευση στα μαθηματικά (Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2020). Στη δεκαετία του 1980, σύμφωνα με τους Van den Heuvel-Panhuizen και Drijvers (2020) το μερίδιο αγοράς των εγχειριδίων πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης με παραδοσιακή, μηχανιστική προσέγγιση είναι στο 95% και τα σχολικά βιβλία με προσέγγιση προσανατολισμένη στις μεταρρυθμίσεις – βασισμένα στην ιδέα της εκμάθησης μαθηματικών στο πλαίσιο για την ενθάρρυνση της διορατικότητας και της κατανόησης – έχουν μερίδιο αγοράς μόνο 5%. Το 2004, τα εγχειρίδια με προσανατολισμό στις μεταρρυθμίσεις φτάνουν σε μερίδιο αγοράς 100 % και τα μηχανιστικά εξαφανίζονται (Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2020). Η εφαρμογή της RME καθοδηγείται από τα έγγραφα προγραμμάτων σπουδών που βασίζονται σε αυτήν. Μια παρόμοια εξέλιξη μπορεί να παρατηρηθεί και στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, όπου η προσέγγιση RME επηρεάζεται επίσης σε μεγάλο βαθμό από τις σειρές σχολικών βιβλίων. Για παράδειγμα οι Goddijn et al. (2004) παρέχουν πλούσιους πόρους για ρεαλιστική εκπαίδευση γεωμετρίας, στην οποία η εφαρμογή και η απόδειξη συμβαδίζουν. Σε παγκόσμιο επίπεδο, η RME έχει επίσης επιρροή μιας και τα σχολικά εγχειρίδια που προσανατολίζονται στην RME κατέχουν σημαντικό μερίδιο αγοράς στις ΗΠΑ (Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2020). Στην προσέγγιση της RME προκύπτει ότι στα τέλη της δεκαετίας του 1980 η ανάπτυξη των σχολικών βιβλίων, των αξιολογήσεων και των προγραμμάτων σπουδών είναι καλά προσαρμοσμένη στα εθνικά τελικά πρότυπα και στο (άτυπο) εθνικό πρόγραμμα σπουδών (De Jong, 1986) στην Ολλανδία. Σύμφωνα με τον Treffers (1993, σελ. 103) “ενώ σε πολλές άλλες χώρες (Ernest, 1991) λείπει οποιοσδήποτε τέτοιος συντονισμός με

αποτέλεσμα τα σχολικά βιβλία, το εθνικό πρόγραμμα σπουδών και οι αξιολογήσεις να στερούνται ρητά τις απόψεις των προοδευτικών εκπαιδευτικών” .

Τα αποτελέσματα της έρευνας των Gravemeijer και Terwel (2000) βασισμένα σε έρευνες των Dekker (1991), Hoek et al. (1997), (1999), Hoek (1998), Perrenet (1995), Roelofs και Terwel (1999), Terwel (1990), (1999) και Terwel et al. (1994) καταλήγουν ότι τα προγράμματα σπουδών των μαθηματικών εμπνευσμένων από τις ιδέες του Freudenthal, δείχνουν ξεκάθαρα ότι η εκμάθηση των μαθηματικών σε πλαίσια της πραγματικής ζωής σε ετερογενείς ομάδες μάθησης είναι εφικτή και αποτελεσματική. Επίσης, εξακολουθεί να υπάρχει ευρεία υποστήριξη για την RME από εκπαιδευτικούς, θεωρητικούς και υπεύθυνους προγραμμάτων σπουδών. Σχεδόν όλα τα ολλανδικά εγχειρίδια μαθηματικών δείχνουν τον αντίκτυπο των ιδεών του Freudenthal. Όμως, αν και υπάρχουν εμπειρικές και πρακτικές αποδείξεις για την αποτελεσματικότητα της RME, το πιο πειστικό επιχείρημα του Freudenthal για την RME είναι ότι δεν είναι όλοι οι μαθητές μελλοντικοί μαθηματικοί αλλά, μάλλον, για την πλειοψηφία, τα μαθηματικά που θα χρησιμοποιήσουν θα είναι η επίλυση προβλημάτων σε καταστάσεις της καθημερινής ζωής (Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2020).

Επιπλέον, οι Laurens et al. (2018) αναφέρουν ότι η RME μπορεί να αυξήσει τη λογική, την κριτική και τη δημιουργική σκέψη των μαθητών σύμφωνα με έρευνες των Ruseffendi (1990), Saefudin (2012), Sembiring, Hadi και Dolk (2008) και Usdiyana, Purniati, Yulianti και Harningsih (2013). Επίσης, αναφέρουν ότι η διαδικασία δημιουργικής σκέψης είναι στην πραγματικότητα πιο προσανατολισμένη και επικεντρωμένη στις γνωστικές και διανοητικές λειτουργίες των ατόμων, ιδιαίτερα στη δημιουργική επίλυση προβλημάτων σύμφωνα με έρευνες των Almeida, Prieto, Ferrando, Oliveira και Ferrandiz (2008) και Isaksen και Treffinger (2004).

Οι δραστηριότητες των μαθητών στην RME είναι ως επί το πλείστον διαδραστικές και έχουν σχεδιαστεί για να καλλιεργήσουν το ενδιαφέρον των μαθητών για τη μελέτη των μαθηματικών (Fauzan, Slettenhaar & Plomp, 2002). Επομένως, η RME είναι μια προσέγγιση που επιτρέπει στον δάσκαλο να φέρει τα προβλήματα πλαισίου στην τάξη ως αρχικό βήμα μάθησης. Η RME εκπαιδεύει τους μαθητές να ανακαλύπτουν έννοιες. Επιπλέον, ενθαρρύνει τους μαθητές να συμμετέχουν ενεργά σε μαθησιακές δραστηριότητες. Απαιτείται από αυτούς να παίρνουν πρωτοβουλία κατά την επίλυση προβλημάτων που δίνει ο δάσκαλος. Ακόμη, επιτρέπει στους μαθητές να μαθαίνουν ατομικά ή ομαδικά και ευχάριστα. Οι δραστηριότητες των μαθητών περιλαμβάνουν την ενεργή παρακολούθηση του δασκάλου με τον οποίο μπορούν να συνεργαστούν

για την επίλυση των ρεαλιστικών προβλημάτων. Είναι μια διέξοδος για την αλλαγή της αντίληψης των μαθητών σχετικά με την εργασία σε μια ομάδα, τη συσχέτιση αυτών που μαθαίνουν με αυτά που ήδη έχουν μάθει και την κατασκευή νέας γνώσης.

Τα ευρήματα της έρευνας των Laurens et al. (2018) δείχνουν ότι υπάρχει σημαντική διαφορά μεταξύ των δύο προσεγγίσεων εκπαίδευσης στον τομέα της γεωμετρίας που χρησιμοποιήθηκαν στο πείραμα, από τη μία με τη βοήθεια του επιτραπέζιου παιχνιδιού snake and ladder (φιδάκι) στο πλαίσιο της RME και από την άλλη στο πλαίσιο της συμβατικής μάθησης. Η RME έδωσε στους μαθητές περισσότερες ευκαιρίες να συμμετάσχουν ενεργά στη μάθηση μέσω της κατανόησης και της συζήτησης προβλημάτων πλαισίου και κατ' επέκταση μέσω της εύρεσης των απαντήσεων. Τους δόθηκε η ελευθερία να σκεφτούν και να συζητήσουν με τους συμμαθητές τους, που οδήγησε στην ανακάλυψη μαθηματικών εννοιών και την οικοδόμηση των γνώσεών τους. Με αυτόν τον τρόπο, οι γνωστικές τους επιδόσεις βελτιώθηκαν σε σύγκριση με τους μαθητές που έμαθαν με συμβατική μάθηση (Laurens et al., 2018).

Το πρόβλημα πλαισίου σχετικά με τη ρεαλιστική αναπαράσταση του έργου "Sunflowers" του Van Gogh αφορά κυρίως οπτικές αναλογίες για τον προσδιορισμό της πυκνότητας των φυτών για τις δύο δεδομένες μετρήσεις και τη μετατροπή των τετραγωνικών γιαρδών σε τετραγωνικά μέτρα (Treffers, 1993). Μέσω αυτού του προβλήματος οι μαθητές είναι σε θέση να αντιληφθούν τη σημασία που έχει η αληθοφάνεια που διέπει κάποιον μαθηματικό υπολογισμό. Για παράδειγμα, πιθανότερο είναι να υπάρχουν 250.000 φυτά σε 14 τετραγωνικά χιλιόμετρα ή σε 10.000 τετραγωνικά μέτρα; Στην τελευταία περίπτωση θα υπήρχαν 25 φυτά σε 1 τετραγωνικό μέτρο - αυτό θα φαινόταν λογικό. Αλλά 250.000 φυτά σε 14.000.000 τετραγωνικά μέτρα είναι 25 φυτά σε 1.400 τετραγωνικά μέτρα ή 1 σε 56 τετραγωνικά μέτρα, άρα 1 φυτό σε ένα ορθογώνιο 7 x 8 μέτρων, δηλαδή περίπου το πάτωμα της τάξης, και φυσικά αυτό απέχει πολύ από την πραγματικότητα.

Η έννοια των υποθετικών μαθησιακών τροχιών (learning trajectory) πιστεύεται ότι είναι μια μοναδική και ουσιαστική συνεισφορά στο πεδίο καθώς περιλαμβάνει ταυτόχρονη εξέταση μαθηματικών στόχων, μοντέλων σκέψης των παιδιών, μοντέλων σκέψης των δασκάλων και ερευνητών, αλληλουχίες διδακτικών δραστηριοτήτων και την αλληλεπίδραση αυτών σε λεπτομερές επίπεδο (Clements & Sarama, 2004). Περνώντας τα διάφορα βήματα της μαθησιακής τροχιάς που παρουσιάζεται στο άρθρο της Van Den Heuvel- Panhuizen (2002) , φαίνεται ότι βρέθηκε ένα καλό σενάριο για τη διδασκαλία του ποσοστού στους μαθητές μέσω του μοντέλου της ράβδου. Σημαντική είναι η εμπειρία ότι οι μαθητές κατέληξαν σε λύσεις που ήταν παρόμοιες με αυτές που

είχαν προβλεφθεί στην τροχιά. Στην έρευνα τους, οι Laurens et al. (2018) καταλήγουν ότι η RME μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί αποτελεσματικά για την πρόβλεψη των γνωστικών επιτευγμάτων των μαθητών στα μαθηματικά σύμφωνα με αποτελέσματα μελετών των Jupri (2017), Nurhayati και Hartono (2017), Zubainur, Vello και Khalid (2015). Αυτή η εμπειρία δίνει πραγματικά την αίσθηση ότι μπορεί να επιτευχθεί αυτό που ο Streefland (1985b, σελ. 285) ονομάζει: "να προβλέψει κανείς αυτό που μόλις φαίνεται στο βάθος". Ωστόσο, αυτές οι εμπειρίες δεν πρέπει να καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι αυτή η μαθησιακή τροχιά που βασίζεται στο μοντέλο ράβδου είναι η τελική απάντηση στο ερώτημα πώς οι μαθητές μπορούν να μάθουν καλύτερα τα ποσοστά. Είναι μόνο μια απάντηση. Η τροχιά που απεικονίζεται σε αυτό το άρθρο δεν θα πρέπει επομένως να θεωρηθεί ως μια σταθερή συνταγή, ούτε ως μια χοάνη στην οποία οι μαθητές έχουν πολύ λίγες επιλογές να ξεφύγουν για να βρουν έναν άλλο τρόπο απόκτησης ορισμένων γνώσεων, αλλά ως μοντέλο για διδασκαλία και μάθηση των ποσοστών στο οποίο βασικό ρόλο παίζει η διδακτική χρήση μοντέλων. Έρευνα για το σχεδιασμό διδασκαλίας με βάση την RME στο δημοτικό σχολείο έχει δείξει ότι η ύπαρξη μοντέλου μπορεί να λειτουργήσει ως ένα ισχυρό μέσο για την κατανόηση των μαθηματικών (Gravemeijer, 1999).

Αν και έχουν περάσει πολλά χρόνια από την έναρξη της RME, μπορεί ακόμα να θεωρηθεί ως έργο σε εξέλιξη. Δεν αποτελεί μια σταθερή και τελειωμένη θεωρία αλλά ούτε και μια ενιαία προσέγγιση της μαθηματικής εκπαίδευσης. Αυτό σημαίνει ότι με την πάροδο των ετών έχει δοθεί διαφορετική έμφαση σε διαφορετικές πτυχές αυτής της προσέγγισης και οι άνθρωποι που έχουν συμμετάσχει στην ανάπτυξη αυτή -κυρίως ερευνητές/υπεύθυνοι της εκπαίδευσης στα μαθηματικά και εκπαιδευτικοί μαθηματικών εντός ή εκτός του Ινστιτούτου Freudenthal- έχουν δώσει διάφορες προσφορές στην RME. Αυτή η ποικιλομορφία, ωστόσο, δεν έχει θεωρηθεί ποτέ ως εμπόδιο για την ανάπτυξη της RME, αλλά μάλλον ως ενθαρρυντικό προβληματισμό και αναθεώρηση με αποτέλεσμα την ωρίμανση της θεωρίας RME (Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2020).

Βιβλιογραφία

Almeida, L. S., Prieto, L. P., Ferrando, M., Oliveira, E., & Ferrándiz, C. (2008). Torrance test of creative thinking: The question of its construct validity. *Thinking Skills and Creativity, 3*(1), 53-58.

American Psychological Association. (2020). *Publication manual of the American Psychological Association: The official guide to APA style* (7th ed.).

Armanto, D. (2002). *Teaching Multiplication and Division Realistically in Indonesian Primary Schools: A Prototype of Local Instruction Theory* (Doctoral Dissertation). University of Twente.

Bjarnadóttir, K. (2014). History of teaching arithmetic. In A. Karp & G. Schubring (Eds.), *Handbook on the History of Mathematics Education,* 431–457. Springer.

Bjarnadóttir, K. (2018). Influences from the 1959 Royaumont seminar. Proposals on arithmetic and algebra teaching at lower-secondary level in Iceland. In F. Furinghetti & A. Karp (Eds.), *Researching the History of Mathematics Education. An International Overview,* 1-21. Springer.

Bray, A. & Tangney, B. (2015). Enhancing student engagement through the affordances of mobile technology: A 21st century learning perspective on realistic mathematics education. *Mathematics Education Research Journal*. doi:10.1007/s13394-015-0158-7.

Bonotto, C. (2008). Realistic mathematical modeling and problem posing. In W. Blum, P. Galbraith, M. Niss. H. W. Henn (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education,* 185-192. Spinger.

Carpenter, T. P., & Moser, J.M. (1984). The acquisition of addition and subtraction concepts in grades one through three. *Journal for Research in Mathematics Education, 15*, 179–202.

Clements, D. H. (2002). Linking research and curriculum development. In L. D. English (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education,* 599–630. Lawrence Erlbaum Associates.

Clements, D. H., & Battista, M. T. (2000). Designing effective software. In A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education,* 761–776. Lawrence Erlbaum Associates.

Clements, D. H., & Sarama, J. (2004). Learning trajectories in mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 81-90. Routledge.

Clements, D. H., & Sarama, J. (2013). Rethinking early mathematics: What is research based curriculum for young children? In L. D. English & J. T. Mulligan (Eds.), *Reconceptualizing early mathematics learning,* 121–147. Springer.

CMLW (1961). *Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde [Commission for the Modernization of the Mathematics Curriculum], 37*(5), 144–151.

Cobb, P. (2001). Supporting the improvement of learning and teaching in social and institutional context. In S. Carver & D. Klahr (Eds.), *Cognition and instruction: Twenty-five years of progress,* 455–478. Lawrence Erlbaum Associates.

Confrey, J. (1996). The role of new technologies in designing mathematics education. In C. Fisher, D. C. Dwyer, & K. Yocam (Eds.), *Education and technology, reflections on computing in the classroom,* 129–149. Apple Press.

Creswell, J. W. (2012). *Educational Research: Planning, Conducting and Evaluating Quantitative and Qualitative Research* (2nd ed.). Pearson/Merrill Prentice Hall.

Damerow, P., & Westbury, I. (1985). Mathematics for all. *Journal of Curriculum Studies, 17*(2), 175- 184.

De Jong, R. (1986). *Wiskobas in Methoden*. OW & OC.

De Jong, R., Treffers, A., & Wijdeveld, E. (1975). In (Eds.), *Overzicht van Wiskundeonderwijs op de Basisschool. Leerplanpublikatie 2.* Overview of Mathematics Education in Primary School. Curriculum Document 2. IOWO.

Dekker, R. (1991). *Wiskunde leren in kleine heterogene groepen [Learning mathematics in small heterogeneous groups]* (Doctoral Dissertation). University of Utrecht. Academisch Boeken Centrum.

Ernest, E. (1991). *The Philosophy of Mathematics Education.* Palmer.

Fauzan, A. (2002). *Applying realistic mathematics education (RME) in teaching geometry in Indonesian primary schools* (Doctoral Dissertation). University of Twente.

Fauzan, A., Slettenhaar, D. & Plomp, T. (2002). Traditional mathematics education Vs realistic mathematics education: Hoping for changes. In P. Valero & O. Skovsmose. *Proceedings of the 3rd International Mathematics Education and Society Conference*, 1-4. Centre for Researh in Learning Mathematics.

Freudenthal, H. (1968). Why to teach mathematics as to be useful? *Educational Studies in Mathematics, 1*(1), 3- 8.

Freudenthal, H. (1971). Geometry between the devil and the deep sea. *Educational Studies in Mathematics, 3*, 413- 435.

Freudenthal, H. (1973a). De niveaus in het leerproces en de heterogene leergroep met het oog op de middenschool. In L. J. van Eijk (Eds.), *Gesamtschule conferentie 1973*, 88- 98. APS/ Muuses.

Freudenthal, H. (1973b). *Mathematics as an Educational Task*. Reidel.

Freudenthal, H. (1981). Major problems of mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 133-150.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education: China Lectures*. Kluwer.

Furinghetti, F., & Karp, A. (2018). In (Eds.), *Researching the History of Mathematics Education. An International Overview.* Springer.

Goddijn, A., Kindt, M., Reuter, W., & Dullens, D. (2004). *Geometry with applications and proofs*. Freudenthal Institute.

Gravemeijer, K. P. E. (1994a). *Developing realistic mathematics instruction*. Freudenthal Institute.

Gravemeijer, K. P. E. (1994b). Educational development and developmental research in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*, 443–471.

Gravemeijer, K. P. E. (1994c). *Developing Realistic Mathematics Education* (Doctoral Dissertation). Utrecht University. CdBeÁ ta Press.

Gravemeijer, K. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. *Mathematical Thinking and Learning, 1*(2), 155- 177.

Gravemeijer, K., & Doorman, M. (1999). Context problems in realistic mathematics education: A calculus course as an example. *Educational studies in mathematics, 39*(1), 111-129.

Gravemeijer, K., & Terwel, J. (2000). Hans Freudenthal: a mathematician on didactics and curriculum theory. *Journal of curriculum studies, 32*(6), 777-796.

Griffin, S., & Case, R. (1997). Re-thinking the primary school math curriculum: An approach based on cognitive science. *Issues in Education, 3,* 1–49.

Hiebert, J. C. (1999). Relationships between research and the NCTM Standards. *Journal for Research in Mathematics Education, 30,* 3–19.

Hoek, D. (1998). *Social and Cognitive Strategies in Co-operative Groups* (Doctoral Dissertation). Graduate School of Teaching and Learning. University of Amsterdam.

Hoek, D., Terwel, J., & Van den Eeden, P. (1997). Effects of training in the use of social and cognitive strategies: an intervention study in secondary mathematics in cooperative groups. *Educational Research and Evaluation, 3(*4), 364- 389.

Hoek, D., Van den Eeden, P., & Terwel, J. (1999). The effects of integrated social and cognitive strategy instruction on the mathematics achievement in secondary education. *Learning and Instruction, 9*(5), 427- 448.

Isaksen, S. G., & Treffinger, D. J. (2004). Celebrating 50 years of reflective practice: Versions of creative problem solving. *The Journal of Creative Behavior, 38*(2), 75-101.

Janssen, J., Van der Schoot, F., Hemker, B. & Verhelst, N. (1999). *Balans van het Reken-Wiskundeonderwijs aan het Einde van de Basisschool 3.* Balance of Mathematics Education at the End of Primary School 3. Cito.

Janssen, J., Van der Schoot, F. & Hemker, B. (2005). *Balans van het Reken-Wiskundeonderwijs aan het Einde van de Basisschool 4.* Balance of Mathematics Education at the End of Primary School 4. Cito.

Jupri, A. (2017). From geometry to algebra and vice versa: Realistic mathematics education principles for analyzing geometry tasks. *AIP Conference Proceeding*s 1830, 050001. doi:10.1063/1.4980938.

Karp, A., & Schubring, G. (2014). In (Eds.), *Handbook on the History of Mathematics Education.* Springer.

Keitel, C. (1987). What are the goals of mathematics for all? *Journal of Curriculum Studies, 19*(5), 393- 407.

Keijzer, R., Van den Heuvel-Panhuizen, M., Wijers, M., Shew, J., Brinker, L. J., Pligge, M. A., Shafer, M. C., & Brendefur, J. (1998a). More or Less. In T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics in Contexts: A Connected Curriculum for Grade 5–8*, Encyclopaedia Britannica Educational Corporation.

Keijzer, R., Van Galen, F., Gravemeijer, K., Shew, A., Cole, B. R., & Brendefur, J. (1998b). Fraction Times. In T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics in Contexts: A Connected Curriculum for Grade 5–8*, Encyclopaedia Britannica Educational Corporation.

Kilpatrick, J. (2012). The New Math as an international phenomenon. *ZDM Mathematics Education, 44,* 563–571.

Laurens, T., Batlolona, F. A., Batlolona, J. R., & Leasa, M. (2018). How does realistic mathematics education (RME) improve students' mathematics cognitive achievement?. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 14*(2), 569-578.

Leung, F., Graf, K., & Lopez-Real, F. (2006). In (Eds.), *Mathematics Education in Different Cultural Traditions. A Comparative Study of East Asia and the West. The 13th ICMI Study.* Springer.

Moor, E. de & Streefland, L. (1991). Van Gogh in het graan. *Tijdschrift voor Nascholing en Onderzoek van het Reken- Wiskundeonderwijs, 10*(1), 61–64.

National Research Council. (2002). Scientific research in education. In R. J. Shavelson & L. Towne (Eds.). National Academy Press.

Nurhayati, D. M., & Hartono. (2017). Implementation of cooperative learning model type STAD with RME approach to understanding of mathematical concept student state junior high school in Pekanbaru. *AIP Conference Proceedings* 1848, 040002. doi:10.1063/1.4983940.

OEEC. (1961). *New Thinking in School Mathematics.* Organisation for European Economic Co-operation.

Perrenet, J. C. (1995). *Leren probleemoplossen in het wiskunde-onderwijs: samen of alleen [Problem solving in mathematics]* (Doctoral dissertation). University of Amsterdam.

Pitajeng. (2006). *Fun mathematics learning.* Depdiknas.

Robitaille, D., & Travers, K. (2003). International Connections in Mathematics Education. In G. Stanic & J. Kilpatrick (Eds.), *A History of School Mathematics,* 1491–1508. NCTM.

Roelofs, E., & Terwel, J. (1999). Constructivism and authentic pedagogy: state of the art and recent developments in the Dutch national curriculum in secondary education. *Journal of Curriculum Studies, 31*(2), 201- 227.

Royal Netherlands Academy of Sciences (KNAW) (2009). *Rekenonderwijs op de Basisschool.* Mathematics Education in Primary School. KNAW.

Ruseffendi, E. T. (1990). *Modern mathematics learning for elementary teachers, first edition.* Tarsito Publisher.

Saefudin, A. A. (2012). Development of creative thinking ability of students in mathematics learning with realistic mathematics education approach. *Al-Bidayah, 4*(1).

Schmidt, W., McKnight, C., Valverde, G., Houang, R., & Wiley, D. (1997). *Many Visions, Many Aims. A Cross-National Investigation of Curricular Intentions in School Mathematics.* Kluwer Academic Publishers.

Sembiring, R. K., Hadi, S., & Dolk, M. (2008). Reforming mathematics learning in Indonesian classrooms through RME. *ZDM Mathematics Education, 40*, 927-939.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 26,* 114–145.

Stanic, G., & Kilpatrick, J. (2003). In (Eds.), *A History of School Mathematics.* NCTM.

Stein, M., Remillard, J., Smith, M. (2007). How curriculum influences student learning. In F. Lester (Eds.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning,* 319–369. Information Age Publishing Vol. 1.

Streefland, L. (1985b). Vorgreifendes Lernen zum Steuern Langfristiger Lernprozesse. In W. Dörfler and R. Fischer (Eds.), *Empirische Untersuchungen zum Lehren und Lernen von Mathematik. Beiträge zum 4. Internationalen Symposium für Didaktik der Mathematik in Klagenfurt in 1984,* 271–285. Hölder-Pichler-Tempsky.

Streefland, L. (1988). Reconstructive learning. In *Proceedings of the XII PME Conference,* Vol. I, 75–91.

Streefland, L. (1991). *Fractions in Realistic Mathematics Education. A Paradigm of Developmental Research.* Kluwer Academic Publisher.

Tamir, P. (1988). The role of pre-planning curriculum evaluation in science education. *Journal of Curriculum Studies, 20,* 257–262.

Ter Heege, H. (1985). The acquisition of basic multiplication skills. *Educational Studies in Mathematics, 16,* 375-389.

Terwel, J. (1990). Real maths in cooperative groups. In N. Davidson (Eds.)*, Cooperative Learning in Mathematics*. Addison-Wesley, 228- 264.

Terwel, J. (1999). Constructivism and its implications for curriculum theory and practice. *Journal of Curriculum Studies, 31*(2), 195- 200.

Terwel, J., Herfs, P. G. P., Mertens, E. H. M., & Perrenet, J. C. (1994). Cooperative learning and adaptive instruction in a mathematics curriculum. *Journal of Curriculum Studies, 26*(2), 217- 233.

Toerner, G., & Arzarello, F. (2012). Grading mathematics education research journals. *Newsletter of the European Mathematical Society, 86*, 52–54.

Treffers, A. (1978). *Wiskobas DoelgerichtWiskobas Goal-Directed* (Doctoral Dissertation). IOWO. Utrecht University.

Treffers, A. (1987). *Three Dimensions: A Model of Goal and Theory Description in Mathematics: The Wiskobas Project*. Reidel.

Treffers, A. (1991). Didactical background of a mathematics programm for primary education.
In L. Streefland (Eds.), *Realistic Mathematics Education in Primary School*, 21–56. CD-ß Press/Freudenthal Institute.

Treffers, A. (1993). Wiskobas and Freudenthal realistic mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 25*(1), 89-108.

Treffers, A., De Moor, E., & Feijs, E. (1989). *Proeve van een Nationaal Programma voor het Reken-Wiskundeonderwijs op de Basisschool 1. Overzicht Einddoelen.* Design of a National Program for Mathematics Education in Primary School 1. Overview of Goals. Zwijsen.

Treffers, A. & De Moor, E. (1990). *Proeve van een Nationaal Programma voor het Reken-Wiskundeonderwijs op de Basisschool 2. Basisvaardigheden en Cijferen.* Design of a National Program for Mathematics Education in Primary School 2. Basic Operations and Algorithmic Calculation. Zwijsen.

Treffers, A., & Goffree, F. (1985). Rational analysis of realistic mathematics education– the Wiskobas program. In L. Streefland (Eds.), *Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology ofMathematics Education,* Vol. II, 97–121. OW&OC.

Tyler, R. W. (1949). *Basic principles of curriculum and instruction.* University of Chicago Press.

Usdiyana, D., Purniati, T., Yulianti, K., & Harningsih, E. (2013). Improving junior high school students' logical thinking through realistic mathematics education. *Jurnal Pengajaran MIPA, 13*(1).

Valverde, G., Bianchi, L., Wolfe, R., Schmidt, W., & Houang, R. (2002). *According to the Book. Using Timss to Investigate the Translation of Policy into Practice through the World of Textbooks.* Kluwer Academic Publishers.

Van den Akker, J. (2003). Curriculum perspectives: An introduction. In J. Van den Akker, W. Kuiper & U. Hameyer (Eds.), *Curriculum Landscapes and Trends,* 1-10. Kluwer Academic Publisher.

Van den Brink, J. (1973). Bijna noemen. *Wiskobasbulletin 3*, 129–131.

Van den Brink, J. (1989). *Realistisch Rekenonderwijs aan Jonge Kinderen [Realistic Mathematics Education for Young Students]*. Utrecht University.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (1996). *Assessment and Realistic Mathematics Education.* CD-Press/Freudenthal Institute. Utrecht University.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2001). Realistic mathematics education in the Netherlands. In J. Anghileri (Eds.), Principles and Practices in Arithmetic Teaching. Innovative Approaches for the Primary Classroom, 49-63. Open University Press.

Van den Heuvel-Panhuizen, M., (2002). Realistic Mathematics Education as work in progress. In F. L. Lin (Eds.), *Common Sense in Mathematics Education. Proceedings of 2001 The Netherlands and Taiwan Conference on Mathematics Education*, 1–42. National Taiwan Normal University.

Van den Heuvel-Panhuizen, A. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: an example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics, 54*, 9-35.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: An example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational studies in Mathematics, 54*(1), 9-35.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2010). Reform under attack—Forty years of working on better mathematics education thrown on the scrapheap? No way! In L. Sparrow, B. Kissane & C. Hurst (Eds.), *Shaping the Future of Mathematics Education: Proceedings of the 33rd Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australia,* 1-25. MERGA.

Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Drijvers, P. (2020). Realistic Mathematics Education. In S. Lerman (Eds.), *Encyclopedia of Mathematics Education,* 521–525. Springer.

Van den Heuvel-Panhuizen, M., Streefland, L., Meyer, M., Middleton, J. A., & Browne, J. (1997). Per Sense. In T.A. Romberg (Eds.), *Mathematics in Contexts: A Connected Curriculum for Grade 5–8,* Encyclopaedia Britannica Educational Corporation.

Van Zanten, M. (2019). Students' own productions and own constructions—Adri Treffers' contributions to Realistic Mathematics Education. In W. Blum, M. Artigue, M. Mariotti, R. Strässer & M. Van den Heuvel-Panhuizen (Eds.), European Traditions in Didactics of Mathematics, ICME-13 Monographs, 67-73. Springer Nature.

Van Zanten, M. & Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2014). Freedom of design: The multiple faces of subtraction in Dutch primary school textbooks. In Y. Li & G. Lappan (Eds.), *Mathematics Curriculum in School Education,* 231-259. Springer.

Van Zanten, M., & Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2021). Mathematics curriculum reform and its implementation in textbooks: Early addition and subtraction in Realistic Mathematics Education. *Mathematics, 9*(7), 752. (primary ed.).

Verstappen, P. (1991). *Easier Theorized Than Done*. Dutch National Institute for Curriculum Development.

Walker, D. F. (1992). Methodological issues in curriculum research. In P.W. Jackson (Eds.), *Handbook of research on curriculum,* 98–118. Macmillan.

Wijaya. (2012). *Realistic mathematics education.* Graha Ilmu.

Wijdeveld, E. (1980). Zich realiseren. In IOWO, *De Achterkant van de Möbiusband,* 23–26.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomath norms, argumentation and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*.

Yuwono, I. (2007). *Innovative Learning Models.* UM Press.

Zubainur, C. M., Veloo, A., & Khalid. (2015). The effect of using indonesian realistic mathematics education (PMRI) approach on the mathematics achievement among primary school students. *AIP Conference Proceedings,* 1660, 050077, 1-5. doi:10.1063/1.4915710.