ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΝΑΛΛΑΣΣΟΜΕΝΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΕΩΝ ΓΙΑ ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΕΙΣ ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΩΝ ΜΕΡΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΜΕ SPLINE COLLOCATION

Π.Τσομπανοπούλου

Πανεπιστήμιο Κρήτης
Μαθηματικό Τμήμα

Περιεχόμενα

Κατάλογος Πινάκων

Κατάλογος Σχημάτων

Κεφάλαιο 1

Ειγωγή

Τα τελευταία χρόνια, οι μέθοδοι Collocation που είναι βασισμένες σε splines Hermite ([18], [29], [1], [21], [22]) ή σε κυβικές splines ([31], [1], [20], [16]) έχουν αποδειχθεί πολύ σπουδαία και ισχυρά εργαλεία διακριτοποίησης για τη λύση ελλειπτικών μερικών διαφορικών εξισώσεων (ΜΔΕ). Εχει παρατηρηθεί ότι και οι δυο μέθοδοι μπορούν να επιτύχουν βέλτιστη τάξη σύγκλισης και αυξημένη υπολογιστική αποδοτικότητα. Πρόσφατα, μια σειρά από δημοσιεύσεις ([11], [12], [13], [2], [5]) έχουν αφιερωθεί στην ανάλυση, στην υλοποίηση και στην αξιολόγηση των μεθόδων εναλλασσόμενων κατευθύνσεων (ΕΚ) στα γραμμικά αλγεβρικά συστήματα που προκύπτουν από διακριτοποιήσεις, τύπου Collocation, ελλειπτικών ΜΔΕ με κυβικές splines Hermite σε δυο και τρεις διαστάσεις.

Η παρούσα μελέτη είναι μια πρώτη προσπάθεια ανάλυσης και υλοποίησης σχημάτων ΕΚ για διακριτοποιήσεις τύπου Collocation με κυβικές splines. Συγκεκριμένα, θα ορίσουμε τις μεθόδους Εναλλαγής Κατευθύνσεων με Splines Collocation (EKSC) βασισμένες σε τμηματικά κυβικά πολυώνυμα για την προσέγγιση της λύσης u της ελλειπτικής γραμμικής μερικής διαφορικής εξίσωσης

$$Lu \equiv \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \gamma u = f \quad \text{στο} \quad \Omega, \tag{1a}$$

με συνοριακές συνθήκες Dirichlet ή Neumann

$$Bu = g \text{ στο } \partial\Omega \equiv \text{σύνορο του } \Omega \tag{2a}$$

όπου Bu είναι η u (ή $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, η κανονική εξωτερική παράγωγος της u), $\Omega \equiv \prod_{i=1}^{k} \otimes [a_i, b_i]$ είναι ένα ορθογώνιο χωρίο στον $\mathbb{R}^k$ και $\alpha_i(< 0)$, $\gamma(\geq 0)$, f και g είναι συναρτήσεις k μεταβλητών. Αν και τόσο η διατύπωση όσο και η υλοποίηση των προτεινομένων σχημάτων ΕΚ δίδονται για το παραπάνω γενικό πρόβλημα ΜΔΕ, δίνουμε την ανάλυση σύγκλισης μόνο για την εξίσωση Helmholtz στις τρεις διαστάσεις και με συνοριακές συνθήκες Dirichlet, δηλαδή

$$
\begin{aligned}
Lu &\equiv \textstyle\sum_{i=1}^{3} D_{x_i}^2 u + \gamma u = f \quad \text{στο} \ \ \Omega & (1b)\\
u &= g \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\ \ \text{στο} \ \ \partial\Omega \ . & (2b)
\end{aligned}
$$

Τη διδιάστατη περίπτωση ΕΚ μπορεί κανείς να τη χειρισθεί με όμοιο τρόπο και γι' αυτό το λόγο δεν παρουσιάζεται εδώ.

Το υπόλοιπο αυτής της εργασίας είναι οργανωμένο ως εξής. Στο Κεφάλαιο 2 δίνουμε περιληπτικά κάποιες από τις ιδιότητες των τανυστικών γινομένων (ή γινομένων Kronecker) πινάκων και παρουσιάζουμε μια σύντομη εισαγωγή στην ανάλυση των ΜΔΕ με τανυστικά γινόμενα. Στο Κεφάλαιο 3 αφού ορίσουμε την μέθοδο διακριτοποίησης Collocation με κυβικές splines περιγράφουμε το γραμμικό αλγεβρικό σύστημα των εξισώσεων που προκύπτουν από την διακριτοποίηση αυτή. Η λεπτομερής παρουσίαση των σχημάτων ΕΚ που σχετίζονται με αυτά τα γραμμικά συστήματα δίδεται στο Κεφάλαιο 4 όπου παρουσιάζονται, επίσης, η ανάλυση της σύγκλισης και η πολυπλοκότητα των προτεινομένων σχημάτων. Τα αποτελέσματα των εκτεταμένων αριθμητικών πειραμάτων μας δίδονται στο Κεφάλαιο 5, ενώ τέλος το Κεφάλαιο 6 περιέχει τα συμπεράσματα και μερικές παρατηρήσεις μας.

Κεφάλαιο 2

Ανάλυ ΜΔΕ με τανυικά γινόμενα

Μια λεπτομερής εισαγωγή στη θεωρία των τανυστικών γινομένων πινάκων δίδεται στο [17]. Η χρησιμοποίηση της θεωρίας αυτής για την ανάλυση των ΜΔΕ προτάθηκε για πρώτη φορά στο [26]. Αλγόριθμοι που χειρίζονται αποδοτικά τανυστικά γινόμενα πινάκων δίδονται στο [6]. Στις τρεις ενότητες που ακολουθούν, παρουσιάζουμε με σύντομο τρόπο τις παραπάνω δημοσιεύσεις επεκτείνοντας τον συμβολισμό και τα θεωρητικά αποτελέσματα για τις ανάγκες αυτής της εργασίας.

2.1 Ορισμοί και ιδιότητες τανυστικών γινομένων

Θεωρούμε δύο συναρτήσεις x και y,

$$x : [a_1, b_1] \to \mathbb{R} \quad \text{και} \quad y : [a_2, b_2] \to \mathbb{R}.$$

Ορίζουμε το τανυστικό γινόμενο των x και y, $x \otimes y$, ως

$$(x \otimes y) : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \to \mathbb{R}$$

$$(x \otimes y)(s,t) = x(s)y(t), \quad (s,t) \in [a_1, b_1] \times [a_2, b_2].$$

Θεωρούμε δύο διανύσματα $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^N$ και $\mathrm{y} \in \mathbb{R}^L$ $(N, L \in \mathbb{N})$

$$\mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)^T \quad \text{και} \quad \mathrm{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_L)^T$$

και τα θεωρούμε σαν περιορισμούς των συναρτήσεων x και y, αντίστοιχα. Ορίζουμε το τανυστικό γινόμενο $\mathrm{x} \otimes \mathrm{y}$ των διανυσμάτων x και y ως

$$(\mathrm{x} \otimes \mathrm{y})_{n,l} = x_n y_l \ , \quad n = 1, \ldots, N, \quad l = 1, \ldots, L$$

το οποίο μπορεί να εκφραστεί με τον φυσικό τρόπο διάταξης ως εξής

$$\mathrm{x} \otimes \mathrm{y} = \begin{pmatrix} x_1 \mathrm{y} \\ x_2 \mathrm{y} \\ \vdots \\ x_N \mathrm{y} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{NL}.$$

Εστω τώρα $A = \{a_{mn}\}$ και $B = \{b_{kl}\}$ πίνακες τάξης $M \times N$ και $K \times L$ αντίστοιχα. Το τανυστικό γινόμενο των A και B είναι ο παρακάτω $MK \times NL$ πίνακας

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1N}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2N}B \\ & \vdots & & \\ a_{M1}B & a_{M2}B & \cdots & a_{MN}B \end{pmatrix}.$$

Υποθέτοντας τώρα ότι τα μεγέθη των πινάκων, που χρησιμοποιούμε παρακάτω, είναι συμβατά με τις ανάλογες πράξεις, συνοψίζουμε μερικές από τις ιδιότητες τανυστικών γινομένων οι οποίες είναι χρήσιμες για την ανάλυση των σχημάτων ΕΚ:

$$(A_1 + A_2) \otimes B = A_1 \otimes B + A_2 \otimes B$$

$$A \otimes (B_1 + B_2) = (A \otimes B_1) + (A \otimes B_2)$$

$$(A_1 \otimes A_2)(B_1 \otimes B_2) = A_1 B_1 \otimes A_2 B_2$$

$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$$

$$(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T.$$

Από τα παραπάνω, εύκολα βλέπουμε ότι αν x και y είναι τα ιδιοδιανύσματα των πινάκων A και B με ιδιοτιμές λ και μ αντίστοιχα, τότε $\mathrm{x} \otimes \mathrm{y}$ και $\lambda\mu$ είναι τα ιδιοδιανύσματα και οι ιδιοτιμές του πίνακα $A \otimes B$, αντίστοιχα. Αξίζει να αναφέρουμε ότι για την παραπάνω πρόταση δεν χρειάζεται οι πίνακες A και B να αντιμετατίθενται. Ενα πολύ χρήσιμο Λήμμα που θα χρησιμοποιηθεί αργότερα στην ανάλυση των μεθόδων Collocation ΕΚ, είναι το εξής.

Λήμμα 2.1 $N_i \times N_i$ $A_i,\ i = 1, \ldots, k,$ $\mathbf{y}^{(i,j_i)},$ $\lambda_{A_i}^{(j_i)}$ $(j_i = 1, \ldots, N_i,\ i = 1, \ldots, k).$ $A \equiv A_1 \otimes A_2 \otimes \cdots \otimes A_k$ $\prod_{i=1}^{k} N_i$ $y^{(\underline{j})} \equiv \mathbf{y}^{(1,j_1)} \otimes \mathbf{y}^{(2,j_2)} \otimes \cdots \otimes \mathbf{y}^{(k,j_k)},$ $\underline{j} \equiv (j_1, \ldots, j_k)$ $j_i = 1, \ldots, N_i,$ $\lambda_A^{(\underline{j})} \equiv \lambda_{A_1}^{(j_1)} \lambda_{A_2}^{(j_2)} \ldots \lambda_{A_k}^{(j_k)}.$

Απόδειξη: Βλέπε Λήμμα 3.5 στο [15].

2.2 Εφαρμογή σε ελλειπτικές ΜΔΕ

Σ' αυτή την ενότητα παρουσιάζουμε κάποια αποτελέσματα που έχουν προκύψει εφαρμόζοντας μια κλασική και αρχική ιδέα στην ανάλυση των ΜΔΕ. Η ιδέα αυτή είναι ότι η επίλυση πολυδιάστατων προβλημάτων μπορεί να αναχθεί στην λύση ενός συνόλου μονοδιάστατων προβλημάτων και είναι η βάση της κλασικής μεθόδου διαχωρισμού μεταβλητών της μαθηματικής φυσικής. Στην περίπτωση των ΜΔΕ, αυτή η ιδέα καταλήγει στην ανάλυση με τανυστικά γινόμενα των πινάκων που προκύπτουν. Παρακάτω παρουσιάζουμε τη βασική ιδέα μιας τέτοιας ανάλυσης στις δυο διαστάσεις.

Θεωρούμε την δεύτερης τάξης γραμμική ΜΔΕ

$$L_x u + L_y u = f \ \text{ στο } \ \Omega \equiv [0,1] \times [0,1] \tag{2.1}$$

όπου L_x (L_y) είναι τελεστής με παραγώγους ως προς x (y) και συντελεστές που εξαρτώνται μόνο από το x (y). Μια συνήθης διαδικασία λύσης της ΜΔΕ (2.1), με κάποιες συνοριακές συνθήκες, είναι η τοποθέτηση σημείων διαμέρισης στο Ω και η αντικατάσταση των παραγώγων με πεπερασμένες διαφορές. Υποθέτουμε ότι τα σημεία της διαμέρισης είναι οι τομές των $M + 1$ παράλληλων προς τον άξονα των y γραμμών της διαμέρισης με τις $N + 1$ παράλληλες προς τον άξονα των x. Συμβολίζουμε με u_{mn} την τιμή της λύσης του διακριτού προβλήματος στο σημείο (x_m, y_n). Αυτές οι τιμές μπορούν να θεωρηθούν σαν τα στοιχεία του διανύσματος $\mathbf{u}$. Το αποτέλεσμα μιας τέτοιας διαδικασίας είναι ένα σύστημα γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων της μορφής

$$M\mathbf{u} = \mathbf{g} \tag{2.2}$$

όπου M είναι πίνακας και $\mathbf{g}$ διάνυσμα με στοιχεία που έχουν δημιουργηθεί από τις τιμές του δεξιού μέρους της (2.1) και τις τιμές στο σύνορο. Η ακριβής μορφή του M εξαρτάται από τον τελεστή $L_x + L_y$, την προσέγγιση των παραγώγων και τον τύπο των συνοριακών συνθηκών. Για την προσέγγιση μιας εξίσωσης Poisson με τη μέθοδο των 5 σημείων είναι εύκολο να δούμε ότι το αλγεβρικό γραμμικό σύστημα (2.2) που προκύπτει έχει την εξής μορφή

$$[I \otimes A + B \otimes I]\mathrm{u} = \mathrm{g} \tag{2.3}$$

όπου A, B είναι τριδιαγώνιοι πίνακες. Είναι προφανές ότι οι $I \otimes A$ και $B \otimes I$ αντιμετατίθενται και είναι γνωστό ([32]) ότι η αντιμεταθετικότητα παίζει σημαντικό ρόλο στην ανάλυση των μεθόδων ΕΚ.

Παρουσιάζουμε τώρα τον ορισμό standard tridiagonal μορφής και ένα θεώρημα από το [26], για να μας βοηθήσουν στην ανάλυση που παρουσιάζεται παρακάτω.

Ορισμός 2.1 H V *standard tridiagonal* H - V - .

Θεώρημα 2.1 $MN \times MN$ H V *standard tridiagonal* , $HV = VH$ $MN \times MN$ D $M \times M$ $N \times N$ E F $H = D^{-1}(I \otimes E)D$ $V = D^{-1}(F \otimes I)D$.

Υποθέτουμε στο εξής, ότι οι πίνακες A και B είναι μη ιδιάζοντες και έχουν γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα. Συνεπώς έχουμε ότι υπάρχουν πίνακες P και Q τέτοιοι ώστε

$$Q^{-1}AQ = \Lambda(A) \ \text{ και } \ P^{-1}BP = \Lambda(B)$$

όπου $\Lambda(X)$ είναι ο διαγώνιος πίνακας με τις ιδιοτιμές του X στην διαγώνιό του.

Ετσι προκύπτει ότι

$$P^{-1} \otimes Q^{-1}(I \otimes A + B \otimes I)P \otimes Q = I \otimes \Lambda(A) + \Lambda(B) \otimes I$$

και επομένως

$$(I \otimes A + B \otimes I)^{-1} = P \otimes Q(I \otimes \Lambda(A) + \Lambda(B) \otimes I)^{-1}P^{-1} \otimes Q^{-1}.$$

Ο πίνακας $I \otimes \Lambda(A) + \Lambda(B) \otimes I$ είναι διαγώνιος και ο αντίστροφός του παίρνεται τετριμμένα. Από τον παραπάνω σχολιασμό εύκολα βλέπουμε ότι η λύση της (2.3) δίδεται από:

$$\mathrm{u} = \left[P \otimes Q \left(I \otimes \Lambda(A) + \Lambda(B) \otimes I \right)^{-1} P^{-1} \otimes Q^{-1} \right] \mathrm{g}. \tag{2.4}$$

Αυτή η σχέση δίδει την ακριβή λύση της διακριτής ΜΔΕ σε όρους τανυστικού γινομένου ποσοτήτων που έχουν σχέση με συνήθεις διαφορικές εξισώσεις. Δηλαδή ο $NM \times NM$ πίνακας $I \otimes A + B \otimes I$ είναι αντιστρέψιμος σε όρους ιδιοσυναρτήσεων και ιδιοτιμών των A και B οι οποίοι είναι πίνακες τάξης $N \times N$ και $M \times M$ μόνο. Ο τύπος (2.4) είναι γνωστής μορφής και μας δείχνει ότι έχουμε ανακτήσει τη διακριτή συνάρτηση Green για τη μερική διαφορική εξίσωση. Στη περίπτωση μας, όπου έχουμε την εξίσωση Poisson, για τη οποία η συνάρτηση Green είναι γνωστή η ομοιότητα είναι φανερή. Στη πραγματικότητα ο πίνακας τελεστής (2.4) τείνει στη συνάρτηση Green του συνεχούς προβλήματος καθώς το βήμα της διαμέρισης τείνει στο μηδέν.

Υπάρχει άλλη μια ενδιαφέρουσα θεώρηση της (2.4). Θεωρούμε τον πίνακα $[P \otimes Q(I \otimes \Lambda(A) + \Lambda(B) \otimes I)^{-1} P^{-1} \otimes Q^{-1}]$ σαν μια ακολουθία τριών τελεστών. Καθένας από αυτούς παριστάνεται από έναν πίνακα και έχει ξεχωριστή έννοια. Ο πρώτος πίνακας $P^{-1} \otimes Q^{-1}$ προβάλλει την συνάρτηση g πάνω σε ένα σύνολο ορθοκανονικών συντεταγμένων, και επομένως ορίζει τις συνιστώσες της g ως προς ένα σύστημα μοναδιαίων διανυσμάτων που έχουν άμεση σχέση με το πρόβλημα, τα ιδιοδιανύσματα του $I \otimes A + B \otimes I$. Ο δεύτερος πίνακας $[I \otimes \Lambda(A) + \Lambda(B) \otimes I]^{-1}$ αναπαριστά τη δράση του τελεστή $(I \otimes A + B \otimes I)^{-1}$ πάνω σ' αυτά τα μοναδιαία διανύσματα. Ο τρίτος πίνακας $P \otimes Q$ είναι ο αντίστροφος του πρώτου πίνακα και μεταφέρει τα αποτελέσματα πίσω στο σύστημα συντεταγμένων της g, παράγοντας με αυτόν τον τρόπο τη λύση. Τα παραπάνω σχόλια μπορούν να παρασταθούν γραφικά ως εξής:

$$\begin{array}{rcl} \text{δεδομένα} \quad \mathrm{g} & & \mathrm{u} \quad \text{λύση} \\ P^{-1} \otimes Q^{-1} \downarrow & & \uparrow \quad P \otimes Q \\ H & \xrightarrow[{[I \otimes \Lambda(A) + \Lambda(B) \otimes I]^{-1}}]{\hspace{6em}} & H \end{array}$$

όπου H είναι ο διανυσματικός χώρος με μοναδιαία διανύσματα τα παραπάνω ιδιοδιανύσματα. Η χρησιμότητα αυτής της διαδικασίας είναι ότι στον

H ο αντίστροφος του μερικού διαφορικού τελεστή είναι διαγώνιος και υπολογίζεται εύκολα.

Δοσμένης μιας αρχικής προσέγγισης $\mathrm{u}^{(0)}$ μπορούμε επίσης να βρούμε τη λύση της εξίσωσης (2.3) με το ακόλουθο σχήμα ΕΚ

$$(L_x + \rho_{s+1} I)\mathrm{u}^{(s+1/2)} = \mathrm{g} - (L_y - \rho_{s+1} I)\mathrm{u}^{(s)}$$

$$(L_y + \rho_{s+1} I)\mathrm{u}^{(s+1)} = (L_y - \omega\rho_{s+1} I)\mathrm{u}^{(s)} + (1+\omega)\rho_{s+1}\mathrm{u}^{(s+1/2)} \tag{2.5}$$

όπου $\rho_{s+1}, s = 0, \ldots,$ και ω είναι κατάλληλες επαναληπτικές παράμετροι.

Εάν e_i, f_j είναι ορθοκανονικά ιδιοδιανύσματα και λ_i, μ_j είναι οι αντίστοιχες ιδιοτιμές των πινάκων A και B αντίστοιχα, τότε (βλέπε ενότητα 2.1) τα διανύσματα $f_j \otimes e_i$ αποτελούν ένα πλήρες σύνολο ορθοκανονικών ιδιοδιανυσμάτων και για τους δυο πίνακες $I \otimes A$ και $B \otimes I$. Ας συμβολίσουμε με u τη λύση της (2.3) και ας ορίσουμε $\mathrm{z}^{(s)} = \mathrm{u}^{(s)} - \mathrm{u}$. Το σφάλμα $\mathrm{z}^{(s)}$ μπορεί τώρα να αναπτυχθεί ως προς τα ιδιοδιανύσματα ως εξής

$$\mathrm{z}^{(s)} = \sum_{i,j} a_{ij}^{(s)} f_i \otimes e_j.$$

Αντικαθιστώντας την $\mathrm{u}^{(s)} = \mathrm{z}^{(s)} + \mathrm{u}$ στην (2.5) μπορούμε εύκολα να πάρουμε ότι

$$a_{ij}^{(s+1)} = a_{ij}^{(s)} \left[1 - \frac{(1+\omega)\rho_{s+1}(\lambda_i + \mu_j)}{(\lambda_i + \rho_{s+1})(\mu_j + \rho_{s+1})} \right].$$

Από τον παραπάνω τύπο είναι εύκολο να δούμε ότι θετικές ιδιοτιμές λ_i, μ_j, θετικές ρ_{s+1} και $0 \le \omega \le 1$ συνεπάγονται ότι

$$\left| \frac{a_{ij}^{(s+1)}}{a_{ij}^{(s)}} \right| < 1.$$

Επομένως το επαναληπτικό σχήμα (2.5) συγκλίνει και η u είναι η μοναδική λύση του.

Σημειώνουμε ότι για $\omega = 1$ (το γνωστό σχήμα Peaceman–Rachford) τα a_{ij} μπορούν να γίνουν μηδέν για όλα τα i επιλέγοντας $\rho_{s+1} = \mu_j$, τις ιδιοτιμές του πίνακα B, για κάποια j. Αυτό δείχνει και την δύναμη του σχήματος: ένας μεγάλος αριθμός συνιστωσών του σφάλματος μπορουν να μηδενιστούν ταυτόχρονα. Επιπλέον αυτό επιτυγχάνεται χωρίς να αυξάνονται οι υπόλοιπες συντεταγμένες του σφάλματος εάν τα $\lambda_i, \mu_j, \rho_{s+1}$ είναι θετικά, όπως συνήθως. Σε αντίθεση, η μέθοδος SOR μπορεί να μηδενίσει μια συνιστώσα του σφάλματος, και το σχήμα Douglas–Rachford με $\omega = 0$ δεν μπορεί να μηδενίσει καμμία. Επομένως το σχήμα Peaceman–Rachford μπορεί να δώσει την ακριβή λύση (παραβλέποντας σφάλματα στρογγύλευσης) σε αριθμό επαναλήψεων ίσο με τον αριθμό των σημείων της διαμέρισης στην κατεύθυνση x ή y. Ομως είναι συνήθως περισσότερο αποδοτικό να χρησιμοποιούμε “βέλτιστες παραμέτρους” και αυτό γιατί μπορούμε να πάρουμε ικανοποιητικές προσεγγιστικές λύσεις με μικρότερο συνολικό αριθμό επαναλήψεων από το $\min(M, N)$.

Τα τανυστικά γινόμενα μπορούν με όμοιο τρόπο να εφαρμοστούν σε άλλα προβλήματα ΜΔΕ και με άλλα σχήματα διακριτοποίησης. Τα παρακάτω είναι παραδείγματα διατύπωσης κοινών προβλημάτων ΜΔΕ με τανυστικά γινόμενα που ορίζονται σε ορθογώνιο χωρίο:

- Μέθοδος των 9 σημείων για την εξίσωση Poisson
$$[6I \otimes A + 6B \otimes I + B \otimes A]\mathrm{u} = \mathrm{g}$$
- Μέθοδος των 5 σημείων για την εξίσωση Helmholtz
$$[I \otimes A + B \otimes I + \sigma I \otimes I]\mathrm{u} = \mathrm{g}, \ \sigma \text{ σταθερά}$$
- Μέθοδος των 13 σημείων για την διαρμονική εξίσωση (στις 2 διαστάσεις)
$$[I \otimes A + B \otimes I]^2\mathrm{u} = \mathrm{g}$$
- Η εξίσωση Poisson με σφαιρικές συντεταγμένες στις 3 διαστάσεις
$$[(C \otimes B_1 + I \otimes B_2) \otimes I + I \otimes I \otimes A]\mathrm{u} = \mathrm{g}.$$

Τα τανυστικά γινόμενα μπορούν επίσης να χρησιμοποιηθούν και για την διατύπωση παραβολικών εξισώσεων πεπερασμένων διαφορών. Ενα τυπικό σχήμα είναι η έμμεση μέθοδος Crank-Nicolson για την εξίσωση της θερμότητας, η οποία οδηγεί σε μια εξίσωση διαφορών της μορφής

$$[I \otimes A + B \otimes I][\mathrm{u}(t + \Delta t) + \mathrm{u}(t)] = 2\sigma[\mathrm{u}(t + \Delta t) - \mathrm{u}(t)]$$

όπου το σ εξαρτάται από τη διαμέριση του χώρου και το βήμα στο χρόνο. Τέλος αναφέρουμε ότι η ανάλυση με τανυστικά γινόμενα μπορεί επίσης να εφαρμοστεί και σε άλλα προβλήματα όπως διαφορο-διαφορικές εξισώσεις, ολοκληρωτικές εξισώσεις με περισσότερες από μια μεταβλητές, ολοκληρωτικές-διαφορικές εξιοώσεις, κτλ.

2.3 Αποδοτικός χειρισμός και πολυπλοκότητα

Το γεγονός ότι ένας πίνακας γράφεται σαν τανυστικό γινόμενο δύο ή περισσότερων πινάκων δεν θα είχε υπολογιστική αξία αν δεν είχαμε αλγορίθμους για αποδοτικό χειρισμό των τανυστικών γινομένων. Για παράδειγμα για να υπολογίσουμε το $(\prod_{i=1}^{k} \otimes A_i)$u χρειαζόμαστε μια διαδικασία που θα χρησιμοποιεί μόνο τους παράγοντες A_i και θα αποφεύγει την ανάπτυξη του $A = \prod_{i=1}^{k} \otimes A_i$. Τέτοιες διαδικασίες δίδονται στο [6].

Πριν αναφερθούμε στις τεχνικές που χρησιμοποιήθηκαν για τον υπολογιστικό χειρισμό των τανυστικών γινομένων, πρέπει πρώτα να ορίσουμε τις δομές που χρησιμοποιήσαμε για να παραστήσουμε τα δεδομένα. Οπως είναι φυσικό παριστάνουμε τους πίνακες παράγοντες του τανυστικού γινομένου σαν ξεχωριστούς πίνακες αποθηκευμένους σαν διδιάστατους πίνακες σε μορφή Fortran. Οταν όμως δουλεύουμε με τανυστικά γινόμενα είναι υπολογιστικά πιο βολικό να παριστάνουμε τα διανύσματα σαν πίνακες k διαστάσεων. Ετσι έχουμε τον ακόλουθο ορισμό

Ορισμός 2.2 x $\prod_{i=1}^{k} N_i$ $N_i \in \mathbb{N}, i = 1, \ldots, k.$ $N_1 N_2 \ldots N_k$ k–
$\mathrm{X} = \{\mathrm{X}_{i_1,i_2,\ldots,i_k}\}$ x

$$\mathrm{X}_{i_1,i_2,\ldots,i_k} = \mathrm{x}_{i_1+N_1(i_2-1+N_2(i_3-1+\ldots+N_{k-1}(i_k-1)\ldots))}$$

$i_j = 1, \ldots, N_j, j = 1, \ldots, k.$

Επίσης χρειαζόμαστε τον εξής ορισμό για τον ανάστροφο ενός k–διάστατου πίνακα.

Ορισμός 2.3 X k- $\prod_{i=1}^{k} N_i$. X^T k– $\prod_{i=2}^{k} N_i \times N_1$

$$\mathrm{X}^T_{l_2,l_3,\ldots,l_k,l_1} = \mathrm{X}_{l_1,l_2,\ldots,l_k}$$

$l_i = 1, \ldots, N_i, i = 1, \ldots, k.$

Οπως εύκολα βλέπουμε από τις εξισώσεις ΕΚ (2.5), τα δυο βασικά μπλοκ υπολογισμών που μας χρειάζονται για την υλοποίηση στον υπολογιστή των σχημάτων ΕΚ είναι το γινόμενο πίνακα με διάνυσμα και η αντιστροφή πίνακα (ή καλύτερα η λύση ενός γραμμικού συστήματος).

Επομένως, χρειαζόμαστε μια αποδοτική διαδικασία για να υπολογίσουμε πράξεις γινομένου πίνακα επί διάνυσμα μορφής τανυστικού γινομένου

$(\prod_{i=1}^{k} \otimes A_i)$x και η δυνατότητα να λύσουμε αποδοτικά συστήματα γραμμικών εξισώσεων που δίδονται από τανυστικά γινόμενα της παρακάτω μορφής

$$\left(\prod_{i=k}^{1} \otimes A_i\right) \mathrm{X} = \mathrm{B}. \tag{2.6}$$

Χρησιμοποιώντας τους παραπάνω ορισμούς, το Λήμμα και το Θεώρημα που ακολουθούν (οι αποδείξεις είναι απλές γενικεύσεις των αποδείξεων που βρίσκονται στο [6] για την περίπτωση $k = 2$) μας δίδουν αποδοτικές διαδικασίες που περιλαμβάνουν μόνο τους πίνακες A_i, X και B.

Λήμμα 2.2 A_i $M_i \times N_i, i = 1, \ldots, k$, x $\prod_{i=1}^{k} N_i$ X k– $N_1 \ldots N_{k-1} N_k$. $M_1 \ldots M_{k-1} M_k$ $\left(\prod_{i=k}^{1} \otimes A_i\right)$ x

$$\left(\prod_{i=k}^{1} \otimes A_i\right) \mathrm{x} = \left(A_k \left(A_{k-1} \left(\cdots A_2 \left(A_1 \mathrm{X}\right)^T \ldots\right)^T\right)^T\right)^T. \tag{2.7}$$

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιούμε την k–διάστατη αναπαράσταση κάθε διανύσματος. Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο Λήμμα παίρνουμε το εξής Θεώρημα, που μας προσφέρει έναν αποδοτικό τρόπο λύσης γραμμικού συστήματος εξισώσεων της μορφής (2.6).

Θεώρημα 2.2 A_i $N_i \times N_i, i = 1, \ldots, k$. X B k– $N_1 N_2 \ldots N_k$. $\left(\prod_{i=k}^{1} \otimes A_i\right) \mathrm{X} = \mathrm{B}$. $i = 1, \ldots, k$ A_i^{-1}

$$\begin{aligned} A_1 \mathrm{Y}_1 &= \mathrm{B}, \\ A_2 \mathrm{Y}_2 &= \mathrm{Y}_1^T, \\ &\vdots \\ A_i \mathrm{Y}_i &= \mathrm{Y}_{i-1}^T, \\ &\vdots \\ A_k \mathrm{Y}_k &= \mathrm{Y}_{k-1}^T, \end{aligned}$$

$\mathrm{X} = \mathrm{Y}_k^T$.

Από το ίδιο Λήμμα επίσης, παίρνουμε το επόμενο Πόρισμα.

Πόρισμα 2.1 $A_i, i = 1, \ldots, k,$ X .

$$\left(\left(\prod_{i=k}^{1} \otimes A_i\right) \mathrm{X}\right)^T = \left(A_1 \otimes \left(\prod_{i=k}^{2} \otimes A_i\right)\right) \mathrm{X}^T. \tag{2.8}$$

Είναι σημαντικό να καταλάβουμε ότι αυτή η παρατήρηση μας δίδει την δυνατότητα να αλλάζουμε τη θέση των όρων του τανυστικού γινομένου. Αυτό μας επιτρέπει αντί να λύνουμε το γραμμικό σύστημα

$$\left(\left(\prod_{i=k}^{m+1} \otimes I\right) \otimes A_m \otimes \left(\prod_{i=m-1}^{1} \otimes I\right)\right) \mathrm{X} = \mathrm{B}\ , \tag{2.9}$$

να χρησιμοποιούμε λογισμικό που ήδη υπάρχει για να υπολογίσουμε "αποδοτικά" τη λύση του ισοδύναμου, κατά το Πόρισμα 2.1, γραμμικού συστήματος

$$\left(\left(\prod_{i=m-1}^{1} \otimes I\right) \otimes \left(\prod_{i=k}^{m+1} \otimes I\right) \otimes A_m\right) \mathrm{X}^{\overbrace{T \ldots T}^{m-1 \text{ φορές}}} = \mathrm{B}^{\overbrace{T \ldots T}^{m-1 \text{ φορές}}}\ . \tag{2.10}$$

Για να συγκρίνουμε την αποδοτικότητα των αριθμητικών αλγορίθμων είναι σύνηθες να μετράμε την υπολογιστική τους πολυπλοκότητα εκτιμώντας την δουλειά του υπολογιστή σε βασικές πράξεις. Αυτό το επιτυγχάνουμε υπολογίζοντας το πλήθος των πράξεων με το γνωστό τρόπο, υπολογίζοντας μόνο τις πράξεις κινητής υποδιαστολής.

Στη συνέχεια δίνουμε μια σειρά από Λήμματα, τα οποία θα μας βοηθήσουν να εκτιμήσουμε στο Κεφάλαιο 4 την υπολογιστική δουλειά των δικών μας σχημάτων ΕΚ.

Λήμμα 2.3 $A_i, i = 1, \ldots, k,$ $N_i \times N_i$ X k- $N_1 N_2 \ldots N_k$. $(A_k \otimes A_{k-1} \otimes \ldots \otimes A_1)\mathrm{X}$ $\mathcal{K} \sum_{i=1}^{k}(2N_i - 1)$. A_i M_i $4\mathcal{K} \sum_{i=1}^{k} M_i$.

Απόδειξη: Αφού $A_1 \in \mathbb{R}^{N_1 \times N_1}$ και $\mathrm{X} \in \mathbb{R}^{N_1 \times (N_2 N_3 \ldots N_k)}$ είναι εύκολο να δούμε ότι ο αριθμός των προσθέσεων/αφαιρέσεων που απαιτούνται για να υπολογίσουμε το $A_1\mathrm{X}$ είναι $(N_1 - 1)\mathcal{K}$ και ο αριθμός των πολλαπλασιασμών είναι $N_1\mathcal{K}$ εαν ο A_1 είναι πλήρης. Στην περίπτωση που ο A_1 είναι πίνακας ζώνης με εύρος M_1 ο απαιτούμενος αριθμός πράξεων μειώνεται σε $2M_1\mathcal{K}$ τόσο για τις προσθέσεις/αφαιρέσεις όσο και για τους πολλαπλασιασμούς.

Πίνακας 2.1: Πλήθος πράξεων για τον υπολογισμό του $(A_k \otimes A_{k-1} \otimes \ldots \otimes A_1)$X.

	+,−	*	+,−	*
A_1X	$(N_1-1)\mathcal{K}$	$N_1\mathcal{K}$	$2M_1\mathcal{K}$	$2M_1\mathcal{K}$
$A_2(A_1\mathrm{X})^T$	$(N_2-1)\mathcal{K}$	$N_2\mathcal{K}$	$2M_2\mathcal{K}$	$2M_2\mathcal{K}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$A_i(A_{i-1}(\ldots(A_1\mathrm{X})^T\ldots)^T)^T$	$(N_i-1)\mathcal{K}$	$N_i\mathcal{K}$	$2M_i\mathcal{K}$	$2M_i\mathcal{K}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$A_k(\ldots(A_1\mathrm{X})^T\ldots)^T$	$(N_k-1)\mathcal{K}$	$N_k\mathcal{K}$	$2M_k\mathcal{K}$	$2M_k\mathcal{K}$
	$\mathcal{K}\sum_{i=1}^{k}(N_i-1)$	$\mathcal{K}\sum_{i=1}^{k}N_i$	$2\mathcal{K}\sum_{i=1}^{k}M_i$	$2\mathcal{K}\sum_{i=1}^{k}M_i$

Χρησιμοποιώντας τον Ορισμό 2.3 συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο και για τους υπόλοιπους πίνακες και τελικά αθροίζουμε για να πάρουμε τον συνολικό αριθμό πράξεων. Τα παραπάνω παρουσιάζονται συνοπτικά στον Πίνακα 2.1. □

Λήμμα 2.4 $A_i, i = 1,\ldots,k,$ $N_i \times N_i$ X, B *k*- $N_1N_2\ldots N_k$. *(2.6)* *Gauss* $O(2(\mathcal{K}\sum_{i=1}^{k}N_i + \sum_{i=1}^{k}N_i^3/3))$. A_i M_i $O(2(3\mathcal{K}\sum_{i=1}^{k}M_i + \sum_{i=1}^{k}M_i^2N_i))$.

Απόδειξη: Υπενθυμίζουμε ότι ο αριθμός των προσθέσεων/αφαιρέσεων ή των πολλαπλασιασμών που χρειάζονται για την παραγοντοποίηση του πίνακα $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ είναι $O(N^3/3)$ ή $O(M^2N)$ εαν ο A είναι πίνακας ζώνης με εύρος ζώνης M. Ομως το κόστος για να λύσουμε προς τα εμπρός/πίσω το LUY = B όπου $A = LU$, Y, B $\in \mathbb{R}^{N\times(\mathcal{K}/N)}$ είναι $N_i\mathcal{K}$ ή $3M\mathcal{K}$ εαν ο A είναι πίνακας ζώνης με εύρος M. Εύκολα τώρα καταλαβαίνουμε τα στοιχεία του Πίνακα 2.2. □

Για τους πίνακες A_i, X, B, ορισμένους όπως παραπάνω, όπου τώρα $N_i = N$ και $M_i = M$ για $i = 1,\ldots,k$, η απαιτούμενη δουλειά για τις παραπάνω διαδικασίες αλλά με το τανυστικό γινόμενο $\prod_{i=k}^{1} \otimes A_i$ ανεπτυγμένο συγκρίνεται με τα αποτελέσματα των παραπάνω Λημμάτων στον Πίνακα 2.3 όπου η σημαντική διαφορά στην αποδοτικότητα είναι φανερή.

Πίνακας 2.2: Πλήθος πράξεων για τη λύση του $\left(\prod_{i=k}^{1} \otimes A_i\right) \mathrm{X} = \mathrm{B}$ με παραγοντοποίηση Gauss.

	$+,-$	$*$	$+,-$	$*$
$/\ A_1 = L_1 U_1$ $L_1 U_1 \mathrm{Y}_1 = \mathrm{B}$	$N_1^3/3$ $N_1 \mathcal{K}$	$N_1^3/3$ $N_1 \mathcal{K}$	$M_1^2 N_1$ $3 M_1 \mathcal{K}$	$M_1^2 N_1$ $3 M_1 \mathcal{K}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$/\ A_i = L_i U_i$ $L_i U_i \mathrm{Y}_i = \mathrm{Y}_{i-1}^T$	$N_i^3/3$ $N_i \mathcal{K}$	$N_i^3/3$ $N_i \mathcal{K}$	$M_i^2 N_i$ $3 M_i \mathcal{K}$	$M_i^2 N_i$ $3 M_i \mathcal{K}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$/\ A_k = L_k U_k$ $L_k U_k \mathrm{Y}_k = \mathrm{Y}_{k-1}^T$	$N_k^3/3$ $N_k \mathcal{K}$	$N_k^3/3$ $N_k \mathcal{K}$	$M_k^2 N_k$ $3 M_k \mathcal{K}$	$M_k^2 N_k$ $3 M_k \mathcal{K}$
	$\mathcal{K} \sum_{i=1}^{k} N_i +$ $\sum_{i=1}^{k} N_i^3/3$	$\mathcal{K} \sum_{i=1}^{k} N_i +$ $\sum_{i=1}^{k} N_i^3/3$	$3\mathcal{K} \sum_{i=1}^{k} M_i +$ $\sum_{i=1}^{k} M_i^2 N_i$	$3\mathcal{K} \sum_{i=1}^{k} M_i +$ $\sum_{i=1}^{k} M_i^2 N_i$

Πίνακας 2.3: Πλήθος πράξεων για τη λύση του $\left(\prod_{i=k}^{1} \otimes A_i\right) \mathrm{X} = \mathrm{B}$.

Διαδικασία	Πλήθος πράξεχν			
	Πλήρης		Ζώνης	
	$+,-$	$*$	$+,-$	$*$
$(A_k \otimes \ldots \otimes A_1)B$: Αναπτυγμένο $\prod_{i=k}^{1} \otimes A_i$ Χρήση Λημ. 2.2	$N^{2k} - N^k$ $k(N^{k+1} - N^k)$	N^{2k} kN^{k+1}	$2MN^k$ $2kMN^k$	$2MN^k$ $2kMN^k$
Λύση $(\prod_{i=k}^{1} \otimes A_i)X = B$: Αναπτυγμένο $\prod_{i=k}^{1} \otimes A_i$ Χρήση Λημ. 2.3	$N^{3k}/3 + N^{k+1}$ $k(N^{k+1} + N^3/3)$	$N^{3k}/3 + N^{k+1}$ $k(N^{k+1} + N^3/3)$	$(M^2 + 3M)N^k$ $k(3MN^k + M^2N)$	$(M^2 + 3M)N^k$ $k(3MN^k + M^2N)$

Πίνακας 2.4: Απαιτούμενη μνήμη για την αποθήκευση του $\prod_{i=1}^{k} \otimes A_i$.

$(A_k \otimes \cdots \otimes A_1)$	$\sum_{i=1}^{k} N_i^2$	$2\sum_{i=1}^{k} K_i N_i$
$\prod_{i=k}^{1} \otimes A_i$	$\prod_{i=1}^{k} N_i^2$	$2K_1 N_1 \prod_{i=2}^{k} N_i^2$

Οι διαδικασίες που περιγράφονται παραπάνω δεν είναι αποδοτικές μόνο ως προς το χρόνο αλλά και ως προς τη μνήμη. Χρησιμοποιώντας απλούς υπολογισμούς μπορούμε να πάρουμε τον Πίνακα 2.4 ο οποίος δείχνει το μέγεθος της μνήμης που απαιτείται για την αποθήκευση των δεδομένων χρησιμοποιώντας τις δομές δεδομένων που περιγράφησαν στην αρχή της ενότητας (στη δεύτερη γραμμή) και αποθηκεύοντας το $\prod_{i=k}^{1} \otimes A_i$ πλήρως ανεπτυγμένο (στη τρίτη γραμμή). Οπως παρατηρούμε η χρήση των τανυστικών γινομένων μπορεί να μειώσει σημαντικά την μνήμη που απαιτείται για την αποθήκευση του $\prod_{i=k}^{1} \otimes A_i$. Αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντικό για τη λύση προβλημάτων σε τρεις (ή περισσότερες) διαστάσεις, για τα οποία η μνήμη μπορεί εύκολα να εξαντληθεί ακόμα και στους σύγχρονους υπολογιστές.

Αξίζει τέλος να σημειώσουμε ότι οι μέθοδοι ΕΚ που παρουσιάζονται σ' αυτή την εργασία, γίνονται παράλληλοι σε μεγάλο βαθμό, εξ' αιτίας του διαχωρισμού των κατευθύνσεων, και αυτό έχει μελετηθεί τελευταία, τόσο πειραματικά [28], [3] όσο και θεωρητικά [23]. Αρκετές παράλληλες υλοποιήσεις των μεθόδων ΕΚ στον υπολογιστή έχουν προταθεί τελευταία. Ειδικά στο [23] η ανάλυση πολυπλοκότητας τέτοιων υλοποιήσεων σε παράλληλες μηχανές με κατανεμημένη μνήμη και συνδεσμολογία δακτυλίου, 2-διάστατων πλεγμάτων ή υπερκύβων δείχνουν ότι οι μέθοδοι ΕΚ μπορούν να επιτύχουν υψηλή αποδοτικότητα. Μια παράλληλη υλοποίηση των μεθόδων ΕΚ σε μηχανές κοινόχρηστης μνήμης παρουσιάζεται στο [3] όπου τα πειραματικά αποτελέσματα μάς δείχνουν την αυξημένη παραλληλοποίηση της υλοποίησης στον υπολογιστή sequence balance.

Κεφάλαιο 3

Collocation με Κυβικές Splines

Το κύριο αντικείμενο αυτού του Κεφαλαίου είναι να αποκτήσουμε το γραμμικό σύστημα των αλγεβρικών εξισώσεων που προκύπτουν από τη διακριτοποίηση Collocation με Κυβικές Splines (CKS), την οποία εν συντομία περιγράφουμε εδώ. Επίσης εισαγάγουμε κάποιους συμβολισμούς που θα τους χρησιμοποιήσουμε αργότερα. Για πιο λεπτομερή διατύπωση και ανάλυση των μεθόδων Collocation με κυβικές splines στις δυο διαστάσεις ο αναγνώστης θα πρέπει να ανατρέξει στο [20].

Ξεκινούμε διακριτοποιώντας ομοιόμορφα, με βήμα h_i, κάθε διάστημα $[a_i, b_i], i = 1, \ldots, k$. Εισάγουμε επίσης δυο επιπλέον σημεία έξω από τα άκρα των διαστημάτων για να πάρουμε

$$\Delta_i \equiv \left\{ \tau_\ell^i = a_i + \ell h_i \; ; \; \ell = -1, \ldots, N_i + 1 \text{ με } h_i = \frac{b_i - a_i}{N_i} \right\},$$

μία ομοιόμορφη διαμέριση του $[a_i, b_i]$. $\Delta \equiv \prod_{i=1}^{k} \otimes \Delta_i$ είναι η επαγώμενη ομοιόμορφη διαμέριση του χωρίου Ω. Συμβολίζουμε με $S_{3,\Delta_i} \equiv \mathrm{P}_{3,\Delta_i} \cap C^2([a_i, b_i])$ το χώρο των μονοδιάστατων splines που ορίζονται από την διαμέριση Δ_i του $[a_i, b_i]$. Τα στοιχεία της βάσης του χώρου των k–διάστατων splines $S_{3,\Delta}$ προκύπτουν παίρνοντας τανυστικά γινόμενα της βάσης των μονοδιάστατων splines S_{3,Δ_i} που μπορούν να επιλεχθούν έτσι ώστε

$$B_\ell^i(\tau_{\ell\pm1}^i)=\frac{1}{6},\, B_\ell^i(\tau_\ell^i)=\frac{2}{3},\, \left.\frac{d^2B_\ell^i(\tau)}{d\tau^2}\right|_{\tau_{\ell\pm1}^i}=\frac{1}{h_i^2},\, \left.\frac{d^2B_\ell^i(\tau)}{d\tau^2}\right|_{\tau_\ell^i}=\frac{-2}{h_i^2}, \quad (3.1)$$

ενώ οι B_ℓ^i και $\frac{d^2B_\ell^i(\tau)}{d\tau^2}$ μηδενίζονται σε όλα τα άλλα σημεία του Δ_i.

Η προσέγγιση Collocation με κυβικές splines $u_\Delta \in S_{3,\Delta}$ μπορεί να παρασταθεί ως εξής :

$$u_\Delta(\mathrm{x})=\sum_{\ell_1=-1}^{N_1+1}\sum_{\ell_2=-1}^{N_2+1}\dots\sum_{\ell_k=-1}^{N_k+1}U_{\ell_1\ell_2\dots\ell_k}B_{\ell_1}^1(x_1)B_{\ell_2}^2(x_2)\dots B_{\ell_k}^k(x_k) \quad (3.2)$$

όπου $\mathrm{x}=(x_1,x_2,\dots,x_k)$ είναι ένα σημείο στη Δ και όπου οι $U_{\ell_1\ell_2\dots\ell_k}$ (με $\ell_i=-1,N_i+1, i=1,\dots,k$) είναι άγνωστοι συντελεστές. Για να ορίσουμε αυτούς τους $\prod_{i=1}^k(N_i+3)$ αγνώστους, απαιτούμε η u_Δ να ικανοποιεί την ΜΔΕ (1) σε όλα τα σημεία της Δ και τις συνοριακές συνθήκες (2) σε όλα τα σημεία του συνόρου $\Delta\cap\partial\Omega$. Χρησιμοποιώντας γνωστά αποτελέσματα από την θεωρία παρεμβολής με splines ([25]) μπορεί εύκολα να δειχθεί ότι η λύση u του προβλήματος ικανοποιεί τις εξισώσεις Collocation με σφάλμα τάξης $O(h^2)$. Με σκοπό την ανάκτηση μιας βέλτιστης ($O(h^4)$) προσέγγισης spline u_Δ της u, αναγκάζουμε την πρώτη να ικανοποιεί την διαταραγμένη ΜΔΕ $L'u=f$ όπου ο τελεστής L' είναι ο διαταραγμένος L στο (1) και μπορεί να ανακτηθεί αντικαθιστώντας, για $i=1,\dots,k$, την

$$\left.\frac{\partial^2u}{\partial x_i^2}\right|_{\mathrm{x}}$$

με

$$\frac{1}{12}\left[\left.\frac{\partial^2u}{\partial x_i^2}\right|_{\mathrm{x}^-}+10\left.\frac{\partial^2u}{\partial x_i^2}\right|_{\mathrm{x}}+\left.\frac{\partial^2u}{\partial x_i^2}\right|_{\mathrm{x}^+}\right]$$

όπου x^-,x και x^+ είναι σημεία της διαμέρισης Δ αναφορικά με την i–κατεύθυνση.

Εχει παρατηρηθεί ([20]) ότι, και στο σχήμα Collocation $O(h^2)$ και στο $O(h^4)$ για προβλήματα ΜΔΕ που ορίζονται από την (1a), οι εξιοώσεις Collocation που παίρνονται από τις συνοριακές συνθήκες και από τη διαφορική εξίσωση στα άκρα κάθε γραμμής μπορούν να διαχωρισθούν. Για την 3–διάστατη περίπτωση μπορούμε να επιτύχουμε αυτόν τον διαχωρισμό με τον εξής τρόπο. Συμβολίζουμε με $U_x^{(0)}, U_x^{(1)}$ και $U_x^{(-1)}$ τα διανύσματα τάξης $(N_2+3)(N_3+3)$ τα οποία περιέχουν τους αγνώστους στα επίπεδα $x_1=\tau_0^1, x_1=\tau_1^1$ και $x_1=\tau_{-1}^1$, αντίστοιχα. Επίσης ορίζουμε ως $F_x^{(0)}$ το διάνυσμα ίδιας τάξης το οποίο περιέχει τιμές της συνάρτησης f του δεξιού μέρους, στο $x_1=\tau_0^1$. Εφ' όσον $u=0$ στο $x_1=\tau_0^1$, έχουμε ότι

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right|_{\mathrm{x}=(\tau_0^1,x_2,x_3)} = \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}\right|_{\mathrm{x}=(\tau_0^1,x_2,x_3)} = 0$$

και επομένως η ΜΔΕ (1) γίνεται

$$a_1\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(\mathrm{x}) = f(\mathrm{x}) \quad , \quad \mathrm{x}=(\tau_0^1,x_2,x_3)$$

όπου χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι a_1 είναι σταθερά. Απαιτώντας η προσέγγιση spline Collocation u_Δ (3.2) να ικανοποιεί τις δυο παραπάνω διαφορικές εξισώσεις, εύκολα παίρνουμε χρησιμοποιώντας την (3.1) το παρακάτω σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων στο επίπεδο $x_1=\tau_0^1$:

$$\frac{a_1}{h^2}\left[(T_4\otimes T_4)\,U_x^{(-1)} - 2\,(T_4\otimes T_4)\,U_x^{(0)} + (T_4\otimes T_4)\,U_x^{(1)}\right] = F_x^{(0)},$$

$$\frac{1}{6}\left[(T_4\otimes T_4)\,U_x^{(-1)} + 4\,(T_4\otimes T_4)\,U_x^{(0)} + (T_4\otimes T_4)\,U_x^{(1)}\right] = 0.$$

Από αυτά τα συστήματα τελικά παίρνουμε τα διαχωρισμένα γραμμικά συστήματα

$$(T_4\otimes T_4)\,U_x^{(0)} = -\frac{h_1^2}{6a_1}F_x^{(0)}$$

και

$$(T_4\otimes T_4)\,U_x^{(-1)} = -\,(T_4\otimes T_4)\,U_x^{(1)} + \frac{2h_1^2}{3a_1}F_x^{(0)}.$$

Δουλεύοντας με τον ίδιο τρόπο παίρνουμε ανάλογες εξισώσεις για τα άλλα 5 επίπεδα του συνόρου για να πάρουμε ανάλογες με τις παραπάνω εκφράσεις για τους υπόλοιπους αγνώστους του συνόρου.

Οι εξισώσεις Collocation *μακριά* $(2\le \ell \le N_i-2)$ από το σύνορο μπορούν να εκφραστούν, για την τριδιάστατη εξίσωση Poisson, σε μορφή stencil. Τα stencils που έχουν σχέση με το σχήμα $O(h^2)$ και με το σχήμα $O(h^4)$ δίδονται στα Σχήματα 3.1 και 3.2, αντίστοιχα. Η τιμή σε κάθε θέση του stencil είναι ο συντελεστής του αντίστοιχου αγνώστου. Ολες οι θέσεις στο stencil $O(h^2)$ έχουν πολλαπλασιαστεί με τον παράγοντα $-\frac{1}{12h^2}$ ενώ στο stencil $O(h^4)$ με τον $-\frac{1}{432h^2}$. Για τις γραμμές δίπλα στο σύνορο, οι εξιοώσεις έχουν όμοια μορφή με λίγο διαφοροποιημένα τα δεξιά μέρη (βλέπε [16]).

Από τα παραπάνω, την αναπαράσταση (3.2) της u_Δ και τη φύση των συναρτήσεων (3.1) της βάσης B-spline εύκολα συμπεραίνουμε (βλέπε επίσης [20]) ότι οι *εσωτερικές* εξισώσεις Collocation μπορούν να γραφούν ως εξής

$$\sum_{i=1}^{k} A_i \mathrm{U} = \mathrm{F}, \quad A_i \in \mathbb{R}^{\mathcal{K}\times\mathcal{K}}, \tag{3.3}$$

όπου $\mathcal{K} = \prod_{i=1}^{k}(N_i - 1)$ και όπου (για την εξίσωση Poisson)

$$A_i \equiv \left(\prod_{j=1}^{k-i} \otimes T_4^j\right) \otimes \frac{1}{6^{k-1}h_i^2}\mathcal{E}^i \otimes \left(\prod_{j=k-i+2}^{k} \otimes T_4^j\right) \ , \ i = 1, \ldots, k, \tag{3.4}$$

με

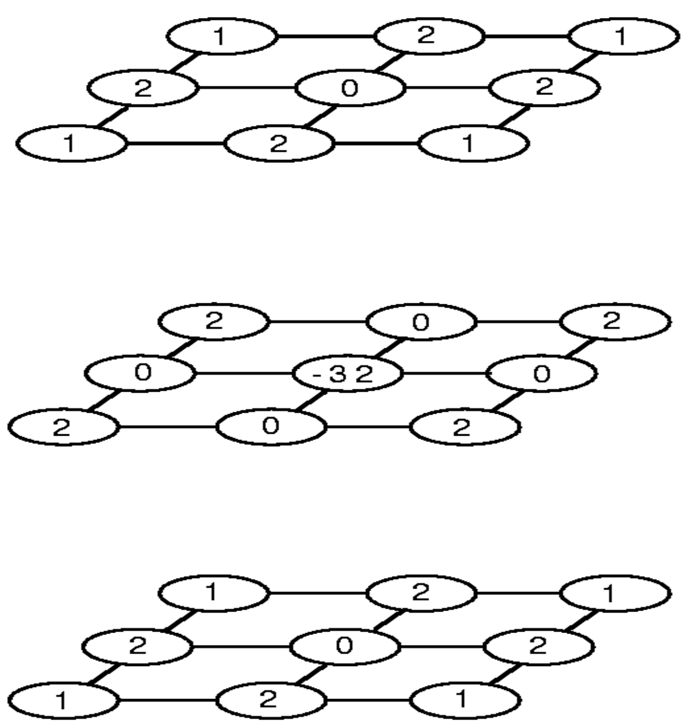
$$\mathcal{E}^i = \begin{cases} T_{-2}^i & \text{σχήμα δεύτερης τάξης} \\ \frac{1}{12}T_{10}^i T_{-2}^i & \text{σχήμα τέταρτης τάξης} \end{cases}$$

όπου

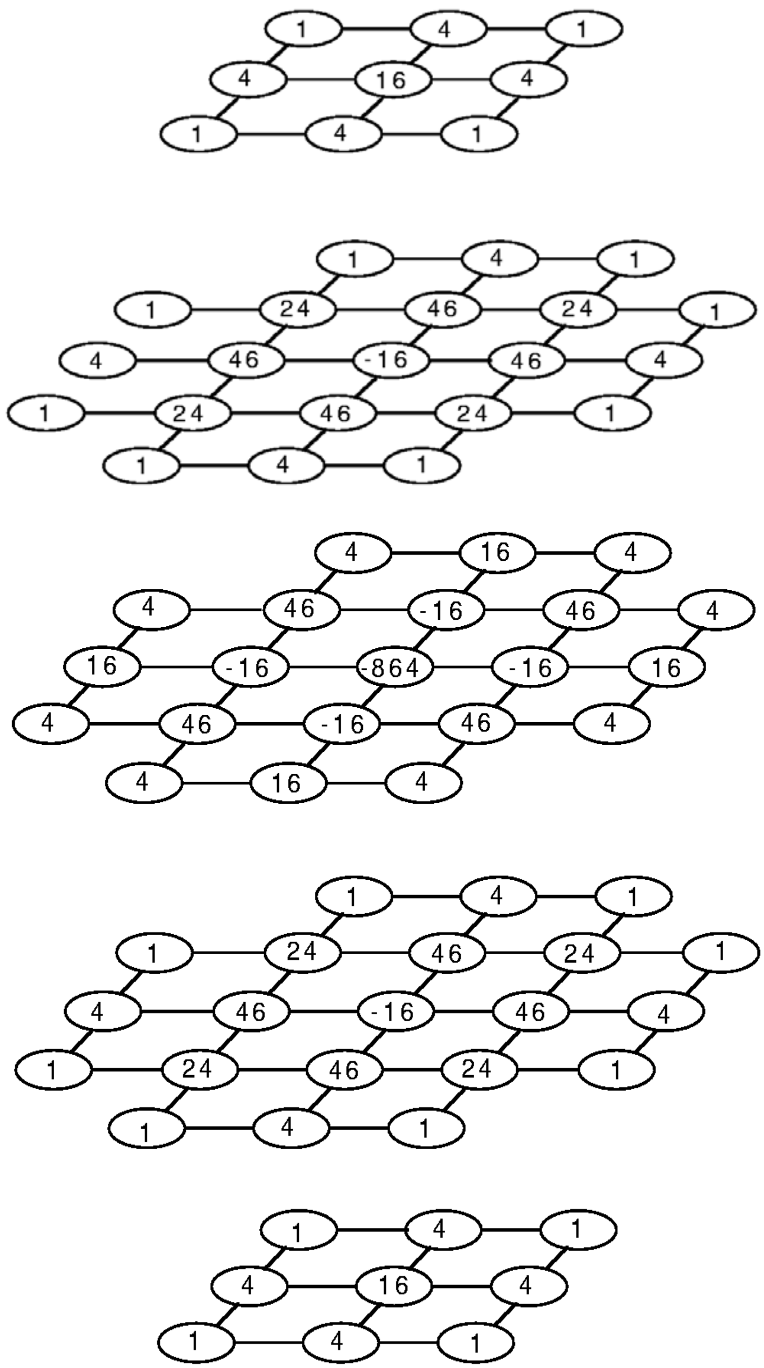
$$T_\alpha^i = tridiag(1, \alpha, 1), \quad T_\alpha^i \in R^{N_i - 1}.$$

Το διάνυσμα του δεξιού μέρους F αποτελείται από τις τιμές της συνάρτησης f του δεξιού μέρους της ΜΔΕ, καθώς επίσης και τις διαταραχές που προέρχονται από το διαχωριομό των "συνοριακών" αγνώστων.

Σχήμα 3.1: Το stencil των συντελεστών των εξισώσεων Collocation $O(h^2)$ στα σημεία μακριά από το σύνορο.



Σχήμα 3.2: Το stencil των συντελεστών των εξισώσεων Collocation $O(h^4)$ στα σημεία μακριά από το σύνορο.



Κεφάλαιο 4

Μέθοδοι ΕΚ με spline Collocation

Σε αυτό το Κεφάλαιο διατυπώνουμε και αναλύουμε μεθόδους ΕΚ για τη λύση εξισώσεων Collocation με κυβικές splines που ανακτήθηκαν στο προηγούμενο Κεφάλαιο. Επίσης παρουσιάζουμε μια λεπτομερή ανάλυση πολυπλοκότητας των μεθόδων ΕΚ με spline Collocation.

4.1 Ανάκτηση

Το γραμμικό σύστημα Collocation των συντελεστών (3.3) μπορεί να λυθεί με πολλές απ' ευθείας και επαναληπτικές μεθόδους (δες [20], και [19] για τις δυο διαστάσεις, και [16] για τις k διαστάσεις). Γενικεύοντας την βασική ιδέα των ΕΚ που αναπτύξαμε στο 2ο Κεφάλαιο (δες και [9]) μπορούμε να πάρουμε την πρώτη μας μέθοδο EKSC για την επίλυση του γραμμικού συστήματος (3.3). Η μέθοδος EKSC αυτή μπορεί να περιγραφεί από την επόμενη αναδρομική σχέση:

Δοσμένης μιας αρχικής τιμής $\mathrm{U}^{(0)}$, με $s = 0, 1, \ldots$

$$\left(A_1 + r_{s+1} D\right) \mathrm{U}^{(s+1/k)} = \left[\left(A_1 + r_{s+1} D\right) - \omega \sum_{i=1}^{k} A_k\right] \mathrm{U}^{(s)} + \omega \mathrm{F} \quad (4.1)$$

$$\left(A_j + r_{s+1} D\right) \mathrm{U}^{(s+j/k)} = A_j \mathrm{U}^{(s+(j-1)/k)} + r_{s+1} D \mathrm{U}^{(s)},\ j = 2, \ldots, k \quad (4.2)$$

όπου $D \equiv \frac{1}{6^k} \prod_{j=1}^{k} \otimes T_4^j$, $r_{s+1}, s = 0, 1, \ldots$ και ω είναι θετικές παράμετροι για την επιτάχυνση της σύγκλισης. Θα πρέπει να τονίσουμε ότι για $\omega = 1$

το σχήμα μας ταυτίζεται με το γνωστό σχήμα Douglas-Rachford ([10]) και για $\omega = 2$ με το σχήμα Douglas ([9]).

Το παραπάνω σχήμα EKSC μπορεί να γραφεί στην εξής μορφή πίνακα

$$\mathrm{U}^{(s+1)} = T_{r_{s+1},\omega}\mathrm{U}^{(s)} + r_{s+1}^{k-1}\omega \prod_{i=1}^{k}\left(\frac{1}{r_{s+1}}D^{-1}A_i + I\right)^{-1}\mathrm{F} \tag{4.3}$$

όπου ο πίνακας επανάληψης $T_{r_{s+1},\omega}$ δίδεται από την σχέση

$$T_{r_{s+1},\omega} = I - \omega\frac{1}{r_{s+1}}\prod_{i=1}^{k}\left(\frac{1}{r_{s+1}}D^{-1}A_i + I\right)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{k} D^{-1}A_i\right). \tag{4.4}$$

Σε μια προσπάθεια να αυξήσουμε την αποδοτικότητα της κάθε επανάληψης του σχήματος EKSC που περιγράφεται παραπάνω, εκφράζουμε όλους τους τριδιαγώνιους πίνακες T_α^i που εμφανίζονται, σε όρους του μοναδιαίου I και του τριδιαγώνιου πίνακα T_{-2}^i. Αντικαθιστώντας αυτές τις εκφράσεις στην (3.3) οι εσωτερικές εξιοώσεις Collocation του $O(h^2)$ τώρα δίδονται (για την εξίσωση Poisson) στη μορφή

$$\left[\sum_{i=1}^{k} X_i + \sum_{i=2}^{k}\sum_{j=1}^{\binom{k}{i}} H_{ij}\right]\mathrm{U} = \mathrm{F} \tag{4.5}$$

με

$$X_i = -\frac{1}{h^2}\left(\prod_{j=k}^{i+1}\otimes I\right)\otimes T_{-2}^i \otimes \left(\prod_{j=i-1}^{1}\otimes I\right)$$

και

$$H_{ij} = -\frac{i}{6^{i-1}h^2}C_{ij}$$

όπου C_{ij} είναι τανυστικό γινόμενο με k πίνακες όπου i από αυτούς είναι T_{-2}^i και οι υπόλοιποι $k-i$ είναι μοναδιαίοι.

Η παραπάνω μορφή του γραμμικού συστήματος μας οδηγεί σε ένα δεύτερο σχήμα EK που δίδεται με την επόμενη αναδρομική σχέση:

$$(r_{s+1}I + X_1)\,\mathrm{U}^{(s+1/k)} = (r_{s+1}I + X_1)\,\mathrm{U}^{(s)} - \omega\left(\sum_{i=1}^{k} X_i + \sum_{i=2}^{k}\sum_{j=1}^{\binom{k}{i}} H_{ij}\right)\mathrm{U}^{(s)} + \omega\mathrm{F} \tag{4.6}$$

$$\left(r_{s+1}I + X_i\right) \mathrm{U}^{(s+i/k)} = r_{s+1}\mathrm{U}^{(s+(i-1)/k)} + X_i\mathrm{U}^{(s)}\ ,\ i = 2,\ldots,k \quad (4.7)$$

όπου σε μορφή πινάκων δίδεται από

$$\mathrm{U}^{(s+1)} = S_{r_{s+1},\omega}\mathrm{U}^{(s)} + r_{s+1}^{k-1}\omega\left(\prod_{i=k}^{1}\left(r_{s+1}I + X_i\right)^{-1}\right)\mathrm{F} \qquad (4.8)$$

και όπου ο πίνακας επανάληψης είναι

$$S_{r_{s+1},\omega} = \qquad (4.9)$$

$$I - \omega\left(\prod_{i=k}^{1}\left(I + \frac{1}{r_{s+1}}X_i\right)^{-1}\right)\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{r_{s+1}}X_i + \sum_{i=2}^{k}\sum_{j=1}^{\binom{k}{i}}\frac{1}{r_{s+1}}H_{ij}\right).$$

Οπως εύκολα βλέπουμε το νέο σχήμα είναι πιο κοντά στο σχήμα ΕΚ (2.5) που προκύπτει από τη μέθοδο διακριτοποίησης 5 σημείων όσον αφορά τους πίνακες που αντιστρέφονται. Εχει παρατηρηθεί ([27]) ότι διατυπώσεις ΕΚ όπως οι (4.6) - (4.7) μπορούν να μας οδηγήσουν σε αυξημένη ακρίβεια. Η ανάλυση αυτού του φαινομένου είναι πέρα από το σκοπό της παρούσης εργασίας και δεν θα παρουσιαστεί εδώ. Επομένως σ' αυτή τη μελέτη θα θεωρήσουμε μόνο την περίπτωση $O(h^2)$ του (4.6) - (4.7).

Στη συνέχεια θα αναφερόμαστε στο σχήμα ΕΚ που ορίζεται από τις σχέσεις (4.1) -(4.2) σαν EKSC1 και σ' αυτό που ορίζεται από τις (4.6) - (4.7) σαν EKSC2.

4.2 Ανάλυση πολυπλοκότητας

Βασισμένοι στα αποτελέσματα για την πολυπλοκότητα που δίδονται στο Κεφάλαιο 2 και ιδιαίτερα στα Λήμματα 2.3 και 2.4, είναι εύκολο να υπολογίσουμε, την ανά επανάληψη εργασία που εκτελείται στα δύο σχήματα EKSC $O(h^2)$ που περιγράφθησαν παραπάνω. Ετσι μια λεπτομερής απαρίθμηση των πράξεων για τη σάρωση των σχημάτων μας από την πρώτη κατεύθυνση (σχέσεις (4.1) και (4.6)) δίδεται στους Πίνακες 4.1 και 4.3 αντίστοιχα ενώ η απαρίθμηση για τις άλλες κατευθύνσεις (σχέσεις (4.2) και (4.7)) παρουσιάζονται στους Πίνακες 4.2 και 4.4. Πολλαπλασιάζοντας τις τελευταίες γραμμές των Πινάκων 4.2 και 4.4 με $k-1$ και προσθέτοντάς

Πίνακας 4.1: Πλήθος πράξεων για την πρώτη κατεύθυνση του EKSC1.

	+,−	*
$W_1 := D + r_{s+1}A_1$	$3(N_1-1)$	$3(N_1-1)$
$U_i^{(s)} := A_iU^{(s)}$	$2k\mathcal{K}$	$2k\mathcal{K}$
$Y := \sum_{i=1}^k U_i^{(s)}$	$(2k^2+k-1)\mathcal{K}$	$2k^2\mathcal{K}$
$\mathrm{R} := W_1U^{(s)} - \omega Y + \omega F$	$2(k+1)\mathcal{K}$	$2(k+1)\mathcal{K}$
$W_1U^{(s+1/k)} = \mathrm{R}$	$3k\mathcal{K} + \sum_{i=1}^k N_i$	$3k\mathcal{K} + \sum_{i=1}^k N_i$
	$(2k^2+6k+1)\mathcal{K}+$ $3(N_1-1)+\sum_{i=1}^k N_i$	$(2k^2+5k+2)\mathcal{K}+$ $3(N_1-1)+\sum_{i=1}^k N_i$

τες στις αντίστοιχες τελευταίες των Πινάκων 4.1 και 4.3 εύκολα βλέπουμε ότι ο συνολικός αριθμός προσθέσεων (O_1^A) και πολλαπλασιασμών (O_1^M) δίδεται για το EKSC1 από τη σχέση

$$O_1^A = 9k^2\mathcal{K} + (3+k)\sum_{i=1}^{k} N_i - 3k \quad , \tag{4.10}$$

και την σχέση

$$O_1^M = (9k^2-k-1)\mathcal{K} + (3+k)\sum_{i=1}^{k} N_i - 3k \quad . \tag{4.11}$$

Ομοια για το σχήμα EKSC2 έχουμε

$$O_2^A = (2^k(k+1)+7k)\mathcal{K} + 4\sum_{i=1}^{k} N_i - 3k \quad ,$$

και

$$O_2^M = (2^k+8k+1)\mathcal{K} + 4\sum_{i=1}^{k} N_i - 3k \quad .$$

Για να συγκρίνουμε την πολυπλοκότητα ανά επανάληψη των δύο σχημάτων χρειάζεται να συγκρίνουμε το συνολικά απαιτούμενο πλήθος πράξεων. Υποθέτοντας ότι ο χρόνος (σε CPU) για την πραγματοποίηση ενός πολλαπλασιασμού είναι διπλάσιος του χρόνου πραγματοποίησης μιας πρόσθεσης, υπολογίζουμε τις ποσότητες $O_i = O_i^A + 2O_i^M$, $i = 1, 2$, που αντιστοιχούν στο χρόνο

Πίνακας 4.2: Πλήθος πράξεων για τις τελευταίες $k-1$ κατευθύνσεις του EKSC1.

	+,−	*
$W_i := D + r_{s+1}A_i$	$3(N_i-1)$	$3(N_i-1)$
$Y_1 := DU^{(s+(i-1)/k)}$	$2k\mathcal{K}$	$2k\mathcal{K}$
$Y_2 := A_iU^{(s)}$	$2k\mathcal{K}$	$2k\mathcal{K}$
$Y := Y_1 + r_{s+1}Y_2$	$\mathcal{K}$	$\mathcal{K}$
$W_iU^{(s+i/k)} = \mathrm{Y}$	$3k\mathcal{K} + \sum_{j=1}^k N_j$	$3k\mathcal{K} + \sum_{j=1}^k N_j$
	$(7k+1)\mathcal{K}+$ $3(N_i-1) + \sum_{j=1}^k N_j$	$(7k+1)\mathcal{K}+$ $3(N_i-1) + \sum_{j=1}^k N_j$

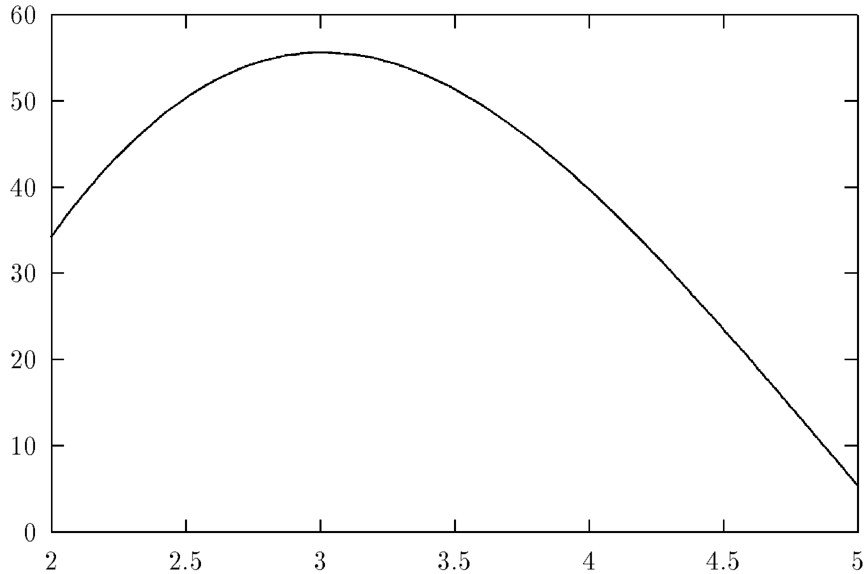
Πίνακας 4.3: Πλήθος πράξεων για την πρώτη κατεύθυνση του EKSC2.

	+,−	*
$Z_1 := r_{s+1}I + X_1$	$3(N_1-1)$	$3(N_1-1)$
$U_i^{(s)} := X_iU^{(s)}$	$2\mathcal{K}$	$2\mathcal{K}$
$V_{ij}^{(s)} := H_j^iU(s)$	$2i\mathcal{K}$	$2i\mathcal{K}$
$\sum_{i=1}^k U_i^{(s)} + \sum_{i=2}^k \sum_{j=1}^{\binom{k}{i}} V_{ij}^{(s)} = V$	$(2^k(k+1)+k-1)\mathcal{K}$	$(2^k+2)k\mathcal{K}$
$\mathrm{R} := Z_1U^{(s)} - \omega V + \omega F$	$4\mathcal{K}$	$4\mathcal{K}$
$Z_1U^{(s+1/k)} = \mathrm{R}$	$3\mathcal{K} + N_1$	$3\mathcal{K} + N_1$
	$(2^k(k+1)+k+6)\mathcal{K}$ $+4N_1-3$	$((2^k+2)k+7)\mathcal{K}$ $+4N_1-3$

Πίνακας 4.4: Πλήθος πράξεων για τις τελευταίες $k-1$ κατευθύνσεις του EKSC2.

	+,−	*
$Z_i := r_{s+1}I + X_i$	$3(N_i-1)$	$3(N_i-1)$
$Y_1 := X_iU^{(s)}$	$2\mathcal{K}$	$2\mathcal{K}$
$Y := r_{s+1}U^{(s+(i-1)/k)} + Y_1$	$\mathcal{K}$	$\mathcal{K}$
$Z_iU^{(s+i/k)} = Y$	$3\mathcal{K} + N_i$	$3\mathcal{K} + N_i$
	$6\mathcal{K} + 4N_i - 3$	$6\mathcal{K} + 4N_i - 3$

Σχήμα 4.1: Ποσοστιαία βελτίωση αποδοτικότητας.



CPU που χρειάζονται τα σχήματα EKSC1 και EKSC2 για να εκτελέσουν μια επανάληψη αντίστοιχα. Στο σχήμα 4.1 σχεδιάζουμε την $100\frac{O_1-O_2}{O_2}$ (στον άξονα των y) ως προς τις διαστάσεις k του πεδίου Ω της ΜΔΕ (στον άξονα των x). Οπως παρατηρείται η επαναληπτική μέθοδος του σχήματος EKSC2 είναι, ανά επανάληψη, περισσότερο αποδοτική από την αντίστοιχη του EKSC1 όταν το Ω είναι k–διάστατο χωρίο για $k = 2, 3, 4, 5$ και επιτυγχάνει την μέγιστη σχετική αποδοτικότητα του, περίπου 55%, για τα τρισδιάστατα προβλήματα. Σε περισσότερες από 5 διαστάσεις το EKSC1 φαίνεται να υπερτερεί αυξάνοντας την σχετική αποδοτικότητά του καθώς το k αυξάνει.

4.3 Ανάλυση σύγκλισης

Σ' αυτή την ενότητα παρουσιάζουμε τα θεωρητικά μας αποτελέσματα που αφορούν την ανάλυση σύγκλισης των μεθόδων EKSC που προτάθηκαν νωρίτερα σ' αυτό το Κεφάλαιο. Αν και η ανάλυση μπορεί να γίνει για το γενικευμένο πρόβλημα Helmholtz (δηλ. $a_i = 1, i = 1, \ldots, k$) με ΜΔΕ $(1b) - (2b)$, για απλότητα στην παρουσίαση θεωρούμε την ΜΔΕ Poisson (δηλ. $\gamma = 0$). Αναφέρουμε ότι οι δυο μέθοδοι ΕΚ για τη λύση των εσωτερικών εξισώσεων Collocation μπορούν να γραφούν στην μορφή

$$\mathrm{U}^{(s+1)} = M_{r_{s+1},\omega}\mathrm{U}^{(s)} + \mathrm{G} \tag{4.12}$$

όπου ο επαναληπτικός πίνακας $M_{r_{s+1},\omega}$ δίδεται από τις σχέσεις (4.4) και (4.9) για τις μεθόδους EKSC1 και EKSC2, αντίστοιχα. Ξεκινούμε την ανάλυσή μας δίδοντας, παρακάτω, αναλυτικές εκφράσεις των ιδιοτιμών αυτών των πινάκων.

Λήμμα 4.1 $\underline{\nu}$ $M_{r_{s+1},\omega}$ *(4.4)* *EKSC1* *(4.9)* *EKSC2*

$$\underline{\nu} = \nu^{(\underline{\ell})} = 1 - \omega \left[\frac{\sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i^{(\ell_i)}}{r_{s+1}} + C}{\prod_{i=1}^{k} \left(\frac{\alpha_i^{(\ell_i)}}{r_{s+1}} + 1 \right)} \right] \tag{4.13}$$

$\underline{\ell} = (\ell_1, \ldots, \ell_k)$, $\ell_i = 1, \ldots, N_i - 1$,

$$\alpha_i^{(\ell_i)} = \begin{cases} \frac{-6N_i^2\lambda_i^{(\ell_i)}}{6+\lambda_i^{(\ell_i)}}, & EKSC1 \quad O(h^2) \\ \frac{-N_i^2\lambda_i^{(\ell_i)}\left(\lambda_i^{(\ell_i)}+12\right)}{2\left(\lambda_i^{(\ell_i)}+6\right)}, & EKSC1 \quad O(h^4) \\ -N_i^2\lambda_i^{(\ell_i)}, & EKSC2 \quad O(h^2) \end{cases}, \tag{4.14}$$

$$\lambda_i^{(\ell_i)} = -4sin^2\left(\frac{\ell_i\pi}{2N_i}\right), \tag{4.15}$$

$C = 0$ *EKSC1*

$$C = \sum_{i=2}^{k} \frac{i}{r_{s+1}} \sum_{j=1}^{\binom{k}{i}} \frac{N_j^2}{6^{i-1}} \prod_{m=1}^{k} p_m^{(ij)}\lambda_m^{(\ell_m)}$$

EKSC2

$$p_m^{(ij)} = \begin{cases} 1 & T_{-2} \quad m \quad H_{ij} \\ \frac{1}{\lambda_m^{(\ell_m)}} & I \quad m \quad H_{ij} \end{cases}$$

Απόδειξη: Είναι γνωστό ([16]) ότι οι ιδιοτιμές $\lambda_i^{(\ell_i)}$ του πίνακα $T_{-2}^{i} \in \mathbb{R}^{N_i \times N_i}$ δίδονται από τη σχέση (4.15). Εύκολα βλέπουμε ότι όλοι οι πίνακες $T_a^i \in \mathbb{R}^{N\times N}$, $T_a^i \equiv tridiag(1,a,1)$, $a \in \mathbb{R}$, έχουν κοινό σύνολο γραμμικά ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων και ότι οι ιδιοτιμές του πίνακα T_a^i δίδονται από $(a+2)+\lambda_i^{(\ell_i)}$. Οι σχέσεις (4.13) και (4.14) μπορούν τώρα εύκολα να ανακτηθούν εφαρμόζοντας το Λήμμα 2.1 στους επαναληπτικούς πίνακες (4.4) και (4.9). □

Συμβολίζουμε τώρα το σφάλμα στην επανάληψη s με $\mathrm{E}^{(s)} = \mathrm{U} - \mathrm{U}^{(s)}$ όπου U και $\mathrm{U}^{(s)}$ είναι οι συντελεστές της u_Δ και $u_\Delta^{(s)}$ στην (3.2), αντίστοιχα. Τότε από την (4.12) έχουμε

$$\mathrm{E}^{(s+1)} = M_{r_{s+1},\omega}\mathrm{E}^{(s)}.$$

Μπορούμε να αναπτύξουμε το σφάλμα $\mathrm{E}^{(s)}$ ως προς τα ιδιοδιανύσματα $\mathrm{p}_{i_j}, j = 1,\ldots,k$, του $D^{-1}A_i$ ή του X_i (βλέπε Λήμμα 2.1) για να πάρουμε

$$\mathrm{E}^{(s)} = \sum_{i_1=1}^{N_1-1}\cdots\sum_{i_k=1}^{N_k-1} E^s_{i_1,\ldots,i_k}\mathrm{p}_{i_1}\otimes\ldots\otimes\mathrm{p}_{i_k}.$$

Συνδυάζοντας τις δυο παραπάνω σχέσεις έχουμε

$$\mathrm{E}^{(s+1)} = \sum_{i_1=1}^{N_1-1}\cdots\sum_{i_k=1}^{N_k-1} \nu_{i_1,\ldots,i_k}(r_{s+1})E^s_{i_1,\ldots,i_k}\mathrm{p}_{i_1}\otimes\ldots\otimes\mathrm{p}_{i_k}$$

όπου $\nu_{i_1,\ldots,i_k}(r_{s+1})$ είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα επανάληψης που δίδεται στο Λήμμα 4.1. Επομένως έχουμε

$$\mathrm{E}^{(s)} = \sum_{i_1=1}^{N_1-1}\cdots\sum_{i_k=1}^{N_k-1}\left[\prod_{j=0}^{s}\nu_{i_1,\ldots,i_k}(r_j)\right]E^0_{i_1,\ldots,i_k}\mathrm{p}_{i_1}\otimes\ldots\otimes\mathrm{p}_{i_k}. \qquad (4.16)$$

Για το σχήμα EKSC1 (όμοια και για το σχήμα EKSC2) χρησιμοποιούμε την (4.16), το Λήμμα 2.1 και το γεγονός ότι η συνάρτηση

$$g(x_1,\ldots,x_k) := \frac{\sum_{i=1}^k x_i}{\prod_{i=1}^k(x_i+1)} - 1,$$

είναι πάντα αρνητική, για να πάρουμε τα πρώτα αποτελέσματα σύγκλισης.

Θεώρημα 4.1 $r_{s+1}, s = 0,1,\ldots,$ $0 < \omega \le 2$ *EKSC1 EKSC2*

.

Στο υπόλοιπο αυτής της ενότητας θα περιοριστούμε στις 3 διαστάσεις μια και τα περισσότερα αποτελέσματά μας δεν μπορούν να επεκταθούν στις περισσότερες διαστάσεις εύκολα. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας, και μόνο για την απλοποίηση της παρουσίασης, υποθέτουμε ότι έχουμε ομοιόμορφη διακριτοποίηση με ίσο βήμα σε όλες τις διαστάσεις (δηλ. $N_i = N, i = 1, 2, 3$).

Αξίζει να σημειώσουμε ότι η επαναληπτική μέθοδος EKSC1 μπορεί να βρει την ακριβή λύση (αν εξαιρέσουμε τα σφάλματα στρογγύλευσης) σε αριθμό επαναλήψεων ίσο με τον αριθμό των αγνώστων. Αυτό μπορούμε να το δούμε εύκολα παρατηρώντας ότι το $\nu_{i_1,i_2,i_3}(r_s)$ είναι κλάσμα με αριθμητή κυβικό πολυώνυμο του r_s το οποίο έχει μια πραγματική ρίζα $r_{i_1 i_2 i_3}$ η οποία δεν μηδενίζει τον παρονομαστή. Επομένως, το $\mathrm{E}^{(s)}$ μπορεί να γίνει μηδέν σε $(N-1)^3$ επαναλήψεις θέτοντας $r_s = r_{i_1 i_2 i_3}$, $s = 1, \ldots, (N-1)^3, i_j = 1, \ldots, (N-1), j = 1, 2, 3$.

Εαν το πλήθος s των επαναλήψεων που απαιτούνται είναι γνωστό από την αρχή, τότε μπορούμε να ορίσουμε τις βέλτιστες τιμές για την ακολουθία των επαναληπτικών παραμέτρων r_s λύνοντας ένα πρόβλημα min-max. Αυτό το πρόβλημα min-max μετατρέπεται σε μια ακολουθία τέτοιων προβλημάτων αφού στην πραγματικότητα σπάνια γνωρίζουμε το s από την αρχή. Το αντικείμενο αυτής της μελέτης είναι να επιλέξουμε μία ακολουθία "καλών" παραμέτρων επιτάχυνσης s η οποία θα ελαττώνει τον αριθμό των επαναλήψεων που απαιτούνται για να έχουμε μια ικανοποιητική προσέγγιση της λύσης. Αυτό θα γίνει για το σχήμα Douglas, δηλ. θέτουμε $\omega = 2$.

Ξεκινούμε θέτοντας για $j = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} \zeta_\ell &= \tfrac{12}{r_\ell h^2}, \;\; \ell = 1, 2, \ldots, \\ \xi_{i_j} &= \frac{\sin^2 \frac{i_j \pi}{2N}}{3 - 2\sin^2 \frac{i_j \pi}{2N}}, \quad i_j = 1, \ldots, N-1 \ . \end{aligned} \tag{4.17}$$

Τότε έχουμε ότι

$$\nu_{i_1,i_2,i_3}(r_\ell) = 1 - 2\frac{\zeta_\ell \xi_{i_1} + \zeta_\ell \xi_{i_2} + \zeta_\ell \xi_{i_3}}{(1+\zeta_\ell \xi_{i_1})(1+\zeta_\ell \xi_{i_2})(1+\zeta_\ell \xi_{i_3})}. \tag{4.18}$$

Θέλουμε να βρούμε μία ακολουθία $\{\zeta^{(\ell)}\}, \ell = 1, \ldots, P$, τέτοια ώστε

$$\mu \leq \zeta^{(\ell)} \xi_{i_j} \leq \nu$$

για κάθε ℓ για τουλάχιστον ένα j. Τα μ και ν είναι παράμετροι οι οποίες θα ορισθούν αργότερα. Εφ' όσον $\xi_1 = \frac{\sin^2\frac{\pi}{2N}}{3-2\sin^2\frac{\pi}{2N}}$ και $\xi_{N-1} \approx 1$ ορίζουμε $\xi^{(1)} = \xi_1$ και την ακολουθία $\{\zeta^{(\ell)}, \xi^{(\ell)}\}$ τέτοια ώστε

$$\zeta^{(\ell)}\xi^{(\ell)} = \mu \quad \text{και} \quad \zeta^{(\ell)}\xi^{(\ell+1)} = \nu$$

από την οποία έχουμε για $\ell = 1, \ldots, P-1$ ότι

$$\zeta^{(\ell)} = \mu \left(\frac{\mu}{\nu}\right)^{\ell-1} \frac{3 - 2\sin^2\frac{\pi}{2N}}{\sin^2\frac{\pi}{2N}}, \tag{4.19}$$

$$\xi^{(\ell)} = \left(\frac{\nu}{\mu}\right)^{\ell-1} \frac{\sin^2\frac{\pi}{2N}}{3 - 2\sin^2\frac{\pi}{2N}}, \tag{4.20}$$

όπου $\mu \le \zeta^\ell \xi \le \nu$ για κάθε ξ τέτοιο ώστε $\xi^{(\ell)} \le \xi \le \xi^{(\ell+1)}$. Σταματούμε να παράγουμε τέτοιους όρους όταν φτάσουμε το 1, δηλ. όταν $\xi^{(P+1)} \approx 1 \approx \xi_{N-1}$, και έτσι έχουμε ότι

$$P = \log^{-1}\left(\frac{\nu}{\mu}\right) \log\left(\frac{3 - 2\sin^2\frac{\pi}{2N}}{\sin^2\frac{\pi}{2N}}\right) \tag{4.21}$$

Χρησιμοποιώντας τις εκφράσεις για τα ζ_ℓ στην (4.17) και στην (4.19) παίρνουμε την ακόλουθη έκφραση για τις παραμέτρους επιτάχυνσης

$$r_s = \frac{12N^2}{\mu} \left(\frac{\nu}{\mu}\right)^{s-1} \frac{\sin^2\frac{\pi}{2N}}{3 - 2\sin^2\frac{\pi}{2N}} \quad s = 1, \ldots, P. \tag{4.22}$$

Συνεχίζουμε δίδοντας δύο Λήμματα από το [9].

Λήμμα 4.2

$$\rho \equiv \rho(a,b,c) = 1 - \frac{2(a+b+c)}{(1+a)(1+b)(1+c)} \tag{4.23}$$

$$\hat{\rho}(\mu,\nu) \equiv \max\{|\rho(a,b,c)| : [\mu \le a \le \nu; 0 \le b, c \le \nu] \text{ ή } [\mu \le b \le \nu; 0 \le a, c \le \nu] \text{ ή } [\mu \le c \le \nu; 0 \le a, b \le \nu]\}.$$

$\mu < 1 < \nu$

$$\hat{\rho}(\mu,\nu) = \max\left[1 - \frac{6\nu}{(1+\nu)^3}, 1 - \frac{2\mu}{1+\mu}\right]. \tag{4.24}$$

Λήμμα 4.3 $\nu \geq 1$

$$\mu = \frac{3\nu(1+\nu)^{-3}}{1-3\nu(1+\nu)^{-3}} = \frac{3\nu}{1-3\nu^2+\nu^3}. \qquad (4.25)$$

$$\hat{\rho}(\mu,\nu) = 1 - \frac{6\nu}{(1+\nu)^3} = 1 - \frac{2\mu}{1+\mu}. \qquad (4.26)$$

Εαν συμβολίσουμε με R_s τον τελεστή που απεικονίζει το $\mathrm{E}^{(0)}$ στο $\mathrm{E}^{(s+1)}$, τότε εύκολα βλέπουμε σύμφωνα με την (4.16) ότι η L_2 νόρμα του είναι

$$||R_s|| = \max_{i_1,\ldots,i_k}\left[\prod_{j=0}^{s}\nu_{i_1,\ldots,i_k}(r_j)\right]. \qquad (4.27)$$

Από τα Λήμματα 4.2 και 4.3 διαπιστώνουμε ότι αν κάνουμε P επαναλήψεις χρησιμοποιώντας τις παραμέτρους που δίδονται στην (4.22) παίρνουμε ότι

$$||R_P|| \leq \hat{\rho}(\mu,\nu)$$

και αν κάνουμε mP επαναλήψεις χρησιμοποιώντας τις παραμέτρους της (4.22) κυκλικά (δηλ. $r_{mP+\ell} = r_\ell$, $m = 1, 2, \ldots$) έχουμε ότι

$$||R_{mP}|| \leq \hat{\rho}^m(\mu,\nu).$$

Εαν τώρα θέλουμε $||R_{mP}|| \approx \epsilon$ τότε

$$m \approx \frac{\log\epsilon}{\log\hat{\rho}(\mu,\nu)}$$

και επομένως

$$mP \approx \frac{-\log\epsilon\log\left(\frac{3-2\sin^2\frac{\pi}{2N}}{\sin^2\frac{\pi}{2N}}\right)}{\log\left(\hat{\rho}(\mu,\nu)\right)^{-1}\log\left(\frac{\nu}{\mu}\right)}. \qquad (4.28)$$

Υποθέτοντας (για δική μας ευκολία) ότι το μ ικανοποιεί την (4.25) και μεγιστοποιώντας τον παρονομαστή της σχέσης (4.28) για $\nu = 1(.01)2$ βρίσκουμε ότι ο αριθμός των επαναλήψεων mP ελαχιστοποιείται για $\nu = 1.78$ και $\mu = 0.33$. Μπορούμε να συνοψίσουμε την παραπάνω συζήτηση (την περίπτωση $O(h^4)$ μπορεί να την μεταχειριστεί κανείς με όμοιο τρόπο) στο ακόλουθο Θεώρημα.

Θεώρημα 4.2 r_s

$$r_s = \begin{cases} \frac{12N^2}{\mu}\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^{s-1} \frac{\sin^2\frac{\pi}{2N}}{3-2\sin^2\frac{\pi}{2N}} & \text{στην περίπτωση } O(h^2) \\ \frac{8N^2}{\mu}\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^{s-1} \frac{\sin^2\frac{\pi}{2N}\left(3-\sin^2\frac{\pi}{2N}\right)}{6-4\sin^2\frac{\pi}{2N}} & \text{στην περίπτωση } O(h^4) \end{cases}, s = 1, \ldots, P \tag{4.29}$$

, . $r_{iP+s} = r_s$, $i = 1, 2, \ldots$, $s = 0, \ldots, P-1$, *EKSC1* $\omega = 2$ $\mathrm{E}^{(0)}$ ϵ mP $m \approx \frac{\log\epsilon}{\log .5}$

$$P \approx \begin{cases} 0.59\log\left(\frac{3-2\sin^2\frac{\pi}{2N}}{\sin^2\frac{\pi}{2N}}\right) & \text{στην περίπτωση } O(h^2) \\ 0.59\log\left(\frac{6-4\sin^2\frac{\pi}{2N}}{\sin^2\frac{\pi}{2N}\left(3-\sin^2\frac{\pi}{2N}\right)}\right) & \text{στην περίπτωση } O(h^4) \end{cases}. \tag{4.30}$$

Με σκοπό να αυξήσουμε την αποδοτικότητα του σχήματος μας EKSC1 θα θέλαμε να βρούμε μια τιμή του ω για την οποία είτε ο ασυμπτωτικός λόγος σύγκλισης είναι μέγιστος είτε το πλήθος των υπολογισμών που απαιτούνται για να μειώσουμε την νόρμα του πίνακα τελεστή που απεικονίζει το διάνυσμα του σφάλματος $\mathrm{E}^{(0)}$ στο διάνυσμα $\mathrm{E}^{(s)}$, $||R_s||$, κάτω από ένα προκαθορισμένο σημείο ανεκτικότητας, να είναι ελάχιστο. Θα ακολουθήσουμε την δεύτερη προσέγγιση και θα χρησιμοποιήσουμε τεχνικές που παρουσιάστηκαν στη [14]. Αναφέρουμε ότι οι ιδιοτιμές του επαναληπτικού πίνακα του EKSC1 δίδονται από

$$\rho = \rho(a, b, c) \equiv \underline{\nu} = 1 - \omega\frac{a+b+c}{(1+a)(1+b)(1+c)} \tag{4.31}$$

όπου $a = \zeta_\ell\xi_{i_1}$, $b = \zeta_\ell\xi_{i_2}$ και $c = \zeta_\ell\xi_{i_3}$ με ζ_ℓ και ξ_{i_j} που δίδονται από την (4.17). Αποφασίσαμε να χρησιμοποιήσουμε σαν παραμέτρους επιτάχυνσης r_s αυτές που ανακτήσαμε για την περίπτωση $\omega = 2$. Επομένως αντικαταστήσαμε, για $\ell = 1, \ldots, n_0$, $(n_0 = P)$, τα ζ_ℓ με $\zeta^{(\ell)}$ που δίδονται στην (4.19). Ετσι αν για κάποια τριάδα (a, b, c) τέτοια ώστε $a \geq b \geq c$ κάνουμε n_0 επαναλήψεις τότε υπάρχει $n^* \in \{1, \ldots, n_0\}$ έτσι ώστε μία από τις παρακάτω σχέσεις να ικανοποιείται

$$\mu \leq a_{n^*} \leq \nu, \quad t\mu \leq b_{n^*}, c_{n^*} \leq \nu \tag{4.32}$$

$$\mu \leq b_{n^*} \leq \nu, \quad t\mu \leq a_{n^*}, c_{n^*} \leq \nu \tag{4.33}$$

$$\mu \le c_{n^*} \le \nu, \quad t\mu \le a_{n^*}, b_{n^*} \le \nu \tag{4.34}$$

με

$$t = \frac{6\tan^2\frac{\pi}{2N} - 4\sin^2\frac{\pi}{2N}}{6 - 4\sin^2\frac{\pi}{2N}}. \tag{4.35}$$

Για $n \neq n^*$ η θεωρούμενη τριάδα δεν ικανοποιεί καμμία από τις (4.32), (4.33) και (4.34). Αντί αυτού, έχουμε

$$t\mu \le a_n, b_n, c_n \le t^{-1}\nu. \tag{4.36}$$

Παίρνοντας παραγώγους και διακρίνοντας διάφορες περιπτώσεις μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε το επόμενο Λήμμα.

Λήμμα 4.4 *t (4.35), $f = f(a,b,c) = \frac{a+b+c}{(1+a)(1+b)(1+c)}$,*

$$f^*_{max} = \max\left\{f(a,b,c), \quad \text{για } a,b,c \text{ που ικανοποιούν την } (4.36)\right\},$$

$$f_{max} = \max\left\{f(a,b,c), \quad \begin{array}{l}\text{για } a,b,c \text{ που ικανοποιούν μια από τις}\\ (4.32), (4.33) \text{ και } (4.34)\end{array}\right\}$$

$$f_{min} = \min\left\{f(a,b,c), \quad \begin{array}{l}\text{για } a,b,c \text{ που ικανοποιούν μια από τις}\\ (4.32), (4.33) \text{ και } (4.34)\end{array}\right\}.$$

$$f^*_{max} = \frac{2t\mu + t^{-1}\nu}{(1+t\mu)^2(1+t^{-1}\nu)}, \tag{4.37}$$

$$f_{max} = \frac{2t\mu + \nu}{(1+t\mu)^2(1+\nu)}, \tag{4.38}$$

$$f_{min} = \min\left\{\frac{\mu + 2t\mu}{(1+t\mu)^2(1+\mu)}, \frac{3\nu}{(1+\nu)^3}\right\}. \tag{4.39}$$

Είμαστε τώρα σε θέση να προσδιορίσουμε τη βέλτιστη τιμή του ω σαν συνάρτηση των N, μ και ν με τον ακόλουθο τρόπο. Από την (4.31) παρατηρούμε ότι ένα πιθανό διάστημα για το ω είναι περιορισμένο από το γεγονός ότι πρέπει να έχουμε $|\rho| < 1$. Ετσι για τριάδες a, b, c που ικανοποιούν την ανισότητα (4.36) έχουμε $-1 < 1 - \omega f < 1$ από την οποία έχουμε

$$0 < \omega \le \frac{2}{f^*_{max}}. \tag{4.40}$$

Με ω στο παραπάνω διάστημα μπορούμε εύκολα να επιβεβαιώσουμε ότι $|\rho| < 1$ για κάθε τριάδα (a, b, c) που ικανοποιεί τις ανισότητες (4.32), (4.33) και (4.34). Για ευκολία παίρνουμε

$$\frac{\mu + 2t\mu}{(1+t\mu)^2(1+\mu)} = \frac{3\nu}{(1+\nu)^3}. \tag{4.41}$$

Μπορούμε εύκολα να δούμε ότι για βελτιστοποίηση πρέπει να έχουμε $1 - \omega f_{min} = -(1 - \omega f_{max})$, δηλαδή

$$\omega = \frac{2}{f_{min} + f_{max}}. \tag{4.42}$$

Για να συνοψίσουμε, θεωρούμε τις εξής δύο περιπτώσεις για ω_{opt}:

Εαν $\frac{2}{f_{min}+f_{max}} \leq \frac{2}{f^*_{max}}$ και αν επιλέξουμε το ω_{opt} όπως στη σχέση (4.42), το οποίο επίσης ικανοποιεί την (4.40), τότε $|\rho| \leq 1 - \omega_{opt} f_{min} \equiv \rho(\mu, \nu)$

Εαν $\frac{2}{f_{min}+f_{max}} > \frac{2}{f^*_{max}}$ και για ω_{opt} στο διάστημα που ορίζεται από την (4.40) έχουμε ότι $1 - \omega_{opt} f_{min} < -(1 - \omega_{opt} f_{max})$ και έτσι έχουμε ξανά $|\rho| \leq \rho(\mu, \nu)$.

Ετσι επιλέγοντας

$$\omega_{opt} = min\left\{\frac{2}{f_{min} + f_{max}}, \frac{2}{f^*_{max}}\right\} \tag{4.43}$$

έχουμε ότι $|\rho| < 1 - \omega_{opt} f_{min}$.

Επιστρέφοντας στην (4.41), μπορούμε να δούμε ότι η συνάρτηση $y(\nu) = \frac{3\nu}{(1+\nu)^3}$ φθίνει για $\nu \geq 1$ και έτσι έχουμε $y(\nu) \leq y(1) = 3/8$ για $\nu \geq 1$. Ετσι για να βρούμε ένα βέλτιστο ζεύγος (μ, ν), το οποίο ελαχιστοποιεί τον συνολικό αριθμό των επαναλήψεων, ερευνούμε ανάμεσα στα ζεύγη (μ, ν) που ικανοποιούν την (4.39), $0 < \mu \leq 1$ και

$$0 < \frac{\mu + 2t\mu}{(1+t\mu)^2(1+\mu)} \leq \frac{3}{8}$$

και μεγιστοποιούν την συνάρτηση $\log \rho(\mu, \nu)^{-1} \log(\mu/\nu)$.

Αφού $0 < f_{min} < 3/8$ και θέλουμε $0 < 1 - \omega f_{min} \leq 1$, η επιθυμητή ανισότητα είναι ισοδύναμη με την $0 < 1 - \frac{3}{8}\omega \leq 1$ ή την

$$0 \leq \omega < \frac{8}{3}.$$

Κεφάλαιο 5

Αριθμητικά πειράματα

Σ' αυτό το Κεφάλαιο παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα των αριθμητικών πειραμάτων που κάναμε για τις EKSC1 επαναληπτικές μεθόδους $O(h^2)$ και $O(h^4)$.

Η υλοποίηση στον υπολογιστή αυτών των μεθόδων EKSC1 βασίζεται σε λογισμικό διαθέσιμο σε μας μέσω της BLAS και της TENPACK. Η BLAS (Basic Linear Algebra Subroutines) ([24], [8]), είναι μια συλλογή από ευρείας χρήσης υπορουτίνες που υλοποιούν βασικές πράξεις της γραμμικής άλγεβρας όπως εσωτερικά γινόμενα διανυσμάτων, γινόμενο πίνακα με διάνυσμα κτλ. και είναι ευρέως διαθέσιμη, στις περισσότερες μηχανές σε μια βελτιστοποιημένη μορφή assembly. Η TENPACK ([4]) είναι ένα λογισμικό πακέτο που υλοποιεί, χρησιμοποιώντας την LINPACK ([7]), αλγορίθμους για τις βασικές πράξεις τανυστικών γινομένων που προτείνονται στο [6]. Χρειάστηκε να κάνουμε κάποιες τροποποιήσεις και επεκτάσεις ορισμένων υπορουτινών της TENPACK για τις δικές μας ανάγκες. Πρέπει να σημειωθεί ότι οι δικοί μας κώδικες πραγματοποιούν πολύ λίγες πράξεις (κινητής υποδιαστολής) εκτός της BLAS και της TENPACK.

Για τη διακριτοποίηση του χωρίου της ΜΔΕ έχουμε χρησιμοποιήσει ομοιόμορφη διαμέριση, ίδια για όλες τις κατευθύνσεις, με βήμα h. Σαν αρχική τιμή έχουμε χρησιμοποιήσει τη μηδενική συνάρτηση. Σταματούμε τις επαναλήψεις του σχήματος EKSC1 όταν επιτύχουμε τρία σωστά ψηφία στη νόρμα μεγίστου του σχετικού σφάλματος ή όταν η νόρμα μεγίστου της διαφοράς δύο επαναλήψεων ($||\mathrm{U}^{(s+1)} - \mathrm{U}^{(s)}||_\infty$) είναι μικρότερη του 10^{-7}.

Ολα τα πειράματα που παρουσιάζονται εδώ έχουν εκτελεσθεί σε Fortran διπλής ακρίβειας στον CONVEX C-3420 που διαθέτει 128Mb RAM.

Ολοι οι χρόνοι είναι σε δευτερόλεπτα.

Για την πειραματική μας μελέτη έχουμε θεωρήσει τρία προβλήματα μοντέλα ΜΔΕ που ορίζονται από τις παρακάτω ΜΔΕ

ΜΔΕ 1 Η εξίσωση Poisson

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = f$$

ΜΔΕ 2 Η γενικευμένη εξίοωση Helmholtz

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} - \gamma u = f$$

με $\gamma(x,y,z) = 100 + \cos(2\pi x) + \sin(3\pi y) + \cos(\pi z)$

ΜΔΕ 3 Η γενική ελλειπτική εξίσωση

$$(1+x^2)u_{xx} + \exp(y-1)u_{yy} + (3+\sin^2(\pi z))u_{zz} + \gamma u = f$$

με $\gamma(x,y,z) = e^{2x}\cos(3\pi x) + y^3 - 2y + \sin(\pi z)\cos(2\pi z)$

στον μοναδιαίο κύβο με ομογενείς συνοριακές συνθήκες Dirichlet. Η συνάρτηση f του δεξιού μέλους έχει επιλεχθεί έτσι ώστε η πραγματική λύση των ΜΔΕ 1 και ΜΔΕ 3 να είναι

$$u(x,y,z) = 10e^{x+y+z}(x^2-x)(y^2-y)(z^2-z)$$

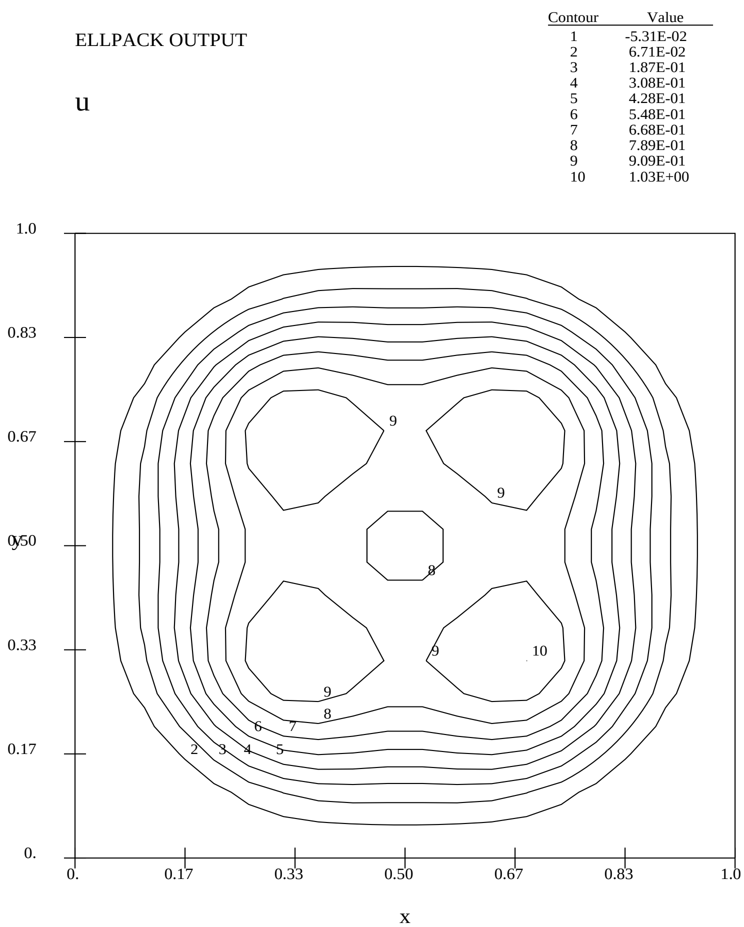
και η πραγματική λύση της ΜΔΕ 2 να είναι

$$u(x,y,z) = \\ -0.31c(x)s(x)(y^2-y)c(y)s(z)\left(\frac{1}{1+(4((x-0.5)^2+(y-0.5)^2+(z-0.5)^2))^4} - 0.5\right)$$

όπου $c(t) := 5.4 - \cos(4\pi t)$ και $s(t) := \sin(\pi t)$. Οπως εύκολα βλέπουμε όλες οι λύσεις είναι αναλυτικές, ενώ η λύση του προβλήματος μοντέλου ΜΔΕ 2 (ένα πρόβλημα στρατοσφαιρικής φυσικής [30] όπου η υπολογισμένη λύση του στο επίπεδο $z = .5$ δείχνεται στο Σχήμα 5.1) είναι ρητή.

Στον πίνακα 5.1 παρουσιάζουμε τα αποτελέσματά μας για το σχήμα $O(h^2)$. Συγκεκριμένα παρουσιάζουμε, για διαφορετικό πλήθος σημείων διαμέρισης N ($N = 5(5)30$) και για τα τρία προβλήματα μοντέλα ΜΔΕ:

Σχήμα 5.1: Ισοϋψείς καμπύλες της υπολογιοθείσας λύσης για το πρόβλημα μοντέλο ΜΔΕ 2 για $z = 0.5$.



Επιτευχείσα ακρίβεια: Με *σφάλμα* στην τρίτη στήλη του Πίνακα 5.1 συμβολίζουμε τη νόρμα μεγίστου του σφάλματος στα σημεία της διαμέρισης δηλ. $σφάλμα = ||u - u_{\Delta}||_{\infty}$.

Τάξη σύγκλισης: Υπολογίζουμε μια εκτίμηση της τάξης σύγκλισης από την έκφραση

$$-log\frac{(||(u-u_{\Delta_1})||_{\infty}}{||(u-u_{\Delta_2})||_{\infty}}/log\left(\frac{h_1}{h_2}\right),$$

όπου η u_{Δ_i} αναπαριστά την προσέγγιση spline Collocation που ανακτήθηκε χρησιμοποιώντας ομοιόμορφο βήμα h_i σε κάθε κατεύθυνση. Οπως εύκολα παρατηρούμε, η τάξη σύγκλισης είναι $O(h^2)$ για κάθε ένα από τα τρία προβλήματα όπως θεωρητικά αναμενόταν.

Βέλτιστο ω: Η βέλτιστη τιμή της παραμέτρου ω ανακτήθηκε πειραματικά με συστηματική έρευνα της τιμής του ω στο διάστημα $[0,4]$, η οποία αντιστοιχεί στον μικρότερο αριθμό επαναλήψεων που απαιτούνται έτσι ώστε η μέθοδος EKSC1 να ικανοποιεί τα κριτήρια τερματισμού. Αυτές οι πειραματικές εκτιμήσεις του ω_{opt} συμφωνούν με κάποια δικαιολογημένη ακρίβεια με τις θεωρητικές (για τις περιπτώσεις που ισχύουν) που ανακτήθηκαν από τη σχέση (4.43). Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η βέλτιστη τιμή του ω για το πρόβλημα μοντέλο ΜΔΕ 2 μεταβάλλεται σε ένα διάστημα μήκους .5. Κατά την διάρκεια αυτής της συστηματικής έρευνας για το ω_{opt} μπορέσαμε να επιβεβαιώσουμε ότι το διάστημα σύγκλισης που βρήκαμε θεωρητικά για το ω_{opt} συμφωνεί με αξιοσημείωτη ακρίβεια με αυτό των πειραμάτων.

Πλήθος επαναλήψεων: Στις τελευταίες τρεις στήλες του Πίνακα 5.1 παρουσιάζουμε το απαιτούμενο πλήθος των επαναλήψεων για τις επαναληπτικές μεθόδους Douglas–Rachford, Douglas και βέλτιστη EKSC1 ώστε αυτές να ικανοποιούν τα κριτήρια τερματισμού. Μπορεί να παρατηρηθεί ότι υπάρχει μια σημαντική μείωση στον αριθμό των επαναλήψεων καθώς μετακινούμαστε από το σχήμα Douglas–Rachford στο σχήμα Douglas και στο βέλτιστο σχήμα για όλα τα προβλήματα μοντέλα ΜΔΕ. Επίσης μπορούμε να παρατηρήσουμε και κάποιο άλλο καλό χαρακτηριστικό για το βέλτιστο σχήμα τουλάχιστον. Ο αριθμός των απαιτουμένων επαναλήψεων για συγκεκριμένο βήμα διακριτοποίησης παραμένει σταθερός για όλα τα προβλήματα μοντέλα.

Οι ίδιες με τις παραπάνω παρατηρήσεις μπορούν να γίνουν και για τα δεδομένα του Πίνακα 5.2 όπου παρουσιάζουμε, με τον ίδιο τρόπο όπως και στην περίπτωση $O(h^2)$, τα αποτελέσματά μας που ανακτήθηκαν από το σχήμα EKSC1 $O(h^4)$ εφαρμοζόμενο στο πρόβλημα μοντέλο ΜΔΕ 1. Επιπλέον πρέπει να σημειώσουμε ότι το απαιτούμενο πλήθος επαναλήψεων δεν αυξάνει σημαντικά καθώς μετακινούμαστε από το σχήμα $O(h^2)$ στο $O(h^4)$.

Για να ελέγξουμε την αποδοτικότητα των υλοποιήσεών μας στον υπολογιστή δίνουμε στον Πίνακα 5.3 τον μέσο χρόνο CPU που απαιτείται για να εκτελεστεί μια επανάληψη των πειραμάτων που παρουσιάζονται στον Πίνακα 5.1. Λογαριθμική προσαρμογή των δεδομένων με ελάχιστα τετράγωνα μας δείχνει ότι ο συνολικός χρόνος T κάθε επανάληψης δίδεται από $T = .0003N^{2.93}$. Αυτή η πειραματική εκτίμηση επιβεβαιώνει τη θεωρητική που ανακτήθηκε από την ανάλυση πολυπλοκότητας στην Ενότητα 4.2 (βλέπε σχέσεις (4.10) και (4.11)).

Στα σχήματα 5.2 και 5.3 παρουσιάζουμε το ιστορικό σύγκλισης της EKSC1 $O(h^2)$ και της $O(h^4)$ εφαρμοζόμενης στο πρόβλημα μοντέλο ΜΔΕ 1 χωρίς κανένα κριτήριο τερματισμού. Μπορούμε να διαχωρίσουμε και στα δύο σχήματα δυο κλάδους, ο επάνω που αναφέρεται στο σχήμα Douglas–Rachford και ο χαμηλότερος που αναφέρεται στο βέλτιστο σχήμα. Σε καθέναν από τους κλάδους μπορούμε να παρατηρήσουμε δύο ομάδες γραμμών που αντιστοιχούν σε *σφάλμα* ίσο με $||u - u_\Delta||_\infty$ (γραμμές '——' και '– . — .' στη επάνω ομάδα) ή ίσο με $||\mathrm{U}^{(s+1)} - \mathrm{U}^{(s)}||_\infty$ (γραμμές '- - - - ' και '– ... —' στη κάτω ομάδα). Εύκολα βλέπουμε την επίδραση της κυκλικής χρήσης των παραμέτρων επιτάχυνσης της σύγκλισης η οποία είναι φανερή για την περίπτωση $||\mathrm{U}^{(s+1)} - \mathrm{U}^{(s)}||_\infty$ και σχεδόν μη ορατή για την περίπτωση $||u - u_\Delta||_\infty$.

Για να κατατάξουμε την προτεινόμενη επαναληπτική μέθοδο EKSC1 τη συγκρίνουμε με τις δύο τρισδιάστατες μεθόδους λύσεων ΜΔΕ που υπάρχουν στο λογισμικό πακέτο της ELLPACK ([30]) με την μέθοδο πεπερασμένων διαφορών με 7 σημεία που είναι μια μέθοδο $O(h^2)$ και με την 27–σημείων που ονομάζεται HODIE. Στο σχήμα 5.4 σχεδιάσαμε το λογάριθμο του σφάλματος $||u - u_\Delta||_\infty$ ως προς τον χρόνο CPU που απαιτήθηκε για να το επιτύχουμε. Τα δεδομένα της μεθόδου 7 σημείων δεν φαίνονται στο γράφημα αφού η αποδοτικότητά της είναι τόσο χαμηλή ώστε η αντίστοιχη γραμμή είναι πάνω από την γραμμή $x = -8$. Αν και το Σχήμα 5.4 συγκρίνει την υλοποίηση και όχι τις ίδιες τις μεθόδους

Πίνακας 5.1: Σφάλμα, τάξη σύγκλισης, ω_{opt} και πλήθος επαναλήψεων για το σχήμα $O(h^2)$ εφαρμοζόμενο στα τρία προβλήματα μοντέλα ΜΔΕ.

	N	σφάλμα	τάξη	ω_{opt}	Πλήθος επαναλήψεων		
					$\omega = 1$	$\omega = 2$	$\omega = \omega_{opt}$
ΜΔΕ 1	5	1.01e-3		2.3	21	7	5
	10	3.20e-4	1.88	2.3	37	13	7
	15	1.55e-4	1.93	2.3	44	13	9
	20	8.99e-5	2.00	2.3	57	18	13
	25	5.90e-5	1.97	2.3	62	21	14
	30	4.18e-5	1.96	2.3	75	18	13
ΜΔΕ 2	5	7.87e-2		2.1 – 2.3	17	6	6
	10	3.29e-2	1.43	2.1 – 2.6	20	10	8
	15	1.52e-2	2.05	2.2 – 2.6	22	8	6
	20	9.43e-3	1.76	2.2 – 2.6	42	10	10
	25	6.07e-3	2.06	2.1 – 2.4	34	13	10
	30	4.27e-3	2.00	2.2 – 2.6	37	14	10
ΜΔΕ 3	5	1.01e-3		2.1 – 2.2	15	3	4
	10	3.31e-4	1.84	2.2	23	10	7
	15	1.53e-4	2.05	2.1	28	7	7
	20	9.16e-5	1.89	2.1	45	13	10
	25	6.00e-5	1.98	2.1	57	17	14
	30	4.21e-5	2.01	2.1	49	14	13

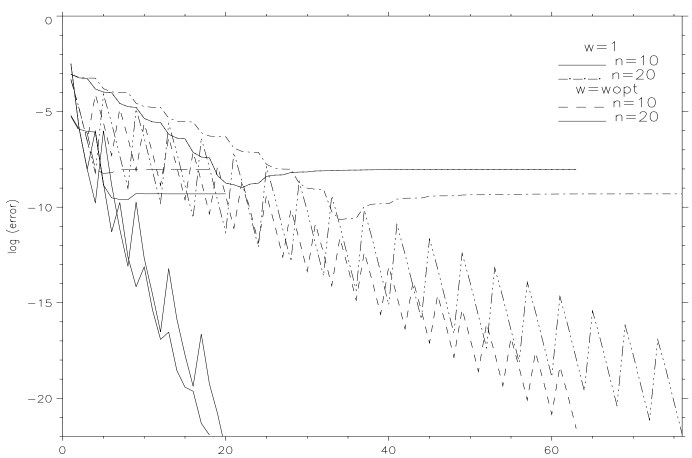
Πίνακας 5.2: Σφάλμα, τάξη σύγκλισης, ω_{opt} και πλήθος επαναλήψεων για το σχήμα $O(h^4)$ εφαρμοζόμενο στο πρόβλημα μοντέλο ΜΔΕ 1.

N	σφάλμα	τάξη	ω_{opt}	Πλήθος επαναλήψεων		
				$\omega = 1$	$\omega = 2$	$\omega = \omega_{opt}$
5	3.01e-4		2.3	31	11	9
10	3.31e-5	3.91	2.3	51	16	10
15	7.90e-6	3.82	2.3	60	19	12
20	3.16e-6	3.66	2.3	61	19	13
25	1.51e-6	3.36	2.3	73	21	13
30	8.95e-7	3.19	2.3	77	25	17

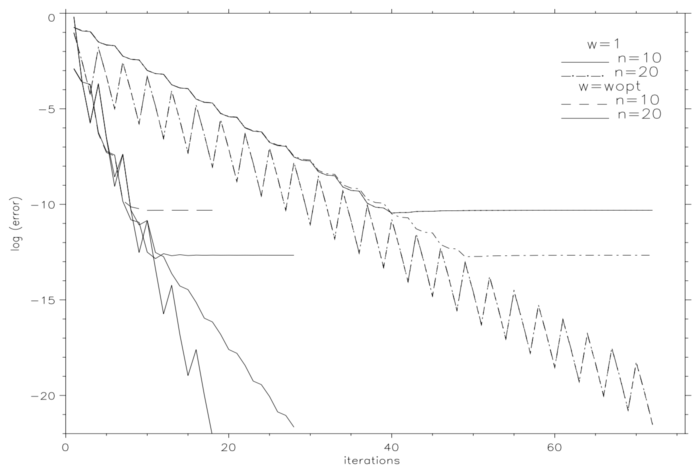
Πίνακας 5.3: Χρόνος CPU ανά επανάληψη για τα σχήματα EKSC.

	$O(h^2)$		
N	ΜΔΕ 1	ΜΔΕ 2	ΜΔΕ 3
5	.04	.04	.06
10	.28	.28	.29
15	.93	.93	.97
20	2.2	2.19	2.23
25	4.24	4.20	5.20
30	7.3	7.19	7.40

Σχήμα 5.2: Ιστορικό σύγκλισης για το $O(h^2)$ και ΜΔΕ 1.

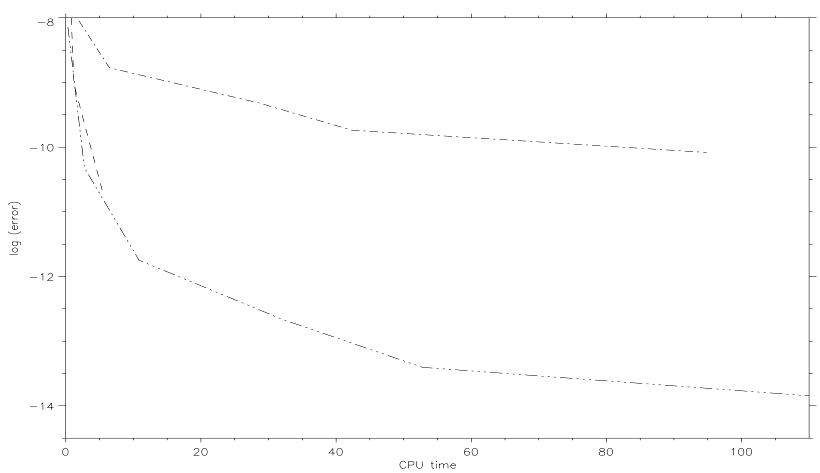


Σχήμα 5.3: Ιστορικό σύγκλισης για το $O(h^4)$ και ΜΔΕ 1.



συμπεραίνουμε ότι οι προτεινόμενες μέθοδοί μας εύκολα επιβάλλονται της μεθόδου των 7 σημείων ενώ είναι συγκρίσιμες με την υψηλής τάξεως μέθοδο HODIE. Εδώ θα πρέπει να σημειώσουμε ότι δεν μπορούσαμε να πάρουμε περισσότερα σημεία για τη γραμμή της HODIE εξ' αιτίας περιορισμών μνήμης. Επιπρόσθετα η δυνατότητα εφαρμογής της μεθόδου HODIE είναι περιορισμένη μόνο σε γενικευμένα προβλήματα Helmholtz και δεν μπορεί να εφαρμοστεί σε γενικές αυτοσυζυγείς μερικές διαφορικές εξισώσεις.

Σχήμα 5.4: Αποδοτικότητα των μεθόδων $O(h^2)$ EKSC1 (_._) , $O(h^4)$ EKSC1 (_...._) και $O(h^4)$ HODIE (- - -).



Κεφάλαιο 6

Περίληψη και μπεράατα

Σε αυτή την εργασία έχουμε διατυπώσει, αναλύσει και υλοποιήσει στον υπολογιστή αποδοτικές επαναληπτικές μεθόδους ΕΚ για την λύση γραμμικών αλγεβρικών συστημάτων τα οποία προκύπτουν από την διακριτοποίηση Αυτοσυζυγών Ελλειπτικών ΜΔΕ στις k διαστάσεις χρησιμοποιώντας $O(h^2)$ και $O(h^4)$ κυβικές Spline Collocation.

Δύο σχήματα EKSC έχουν προταθεί, το EKSC1 και το EKSC2. Μία λεπτομερής ανάλυση αποδοτικότητας ανά επανάληψη έχει παρουσιαστεί δείχνοντάς μας ότι το σχήμα EKSC2 είναι περισσότερο αποδοτικό (ανά επανάληψη) για $k = 2, 3, 4$ διαστάσεις ενώ το EKSC1 υπερτερεί για $k > 5$. Ειδικότερα έχουμε δείξει ότι ο συνολικός αριθμός των πράξεων που απαιτούνται για να εκτελεστεί ένα επαναληπτικό βήμα για τα σχήματα $O(h^2)$ EKSC1 και EKSC2 είναι $(18k^2 - k - 1)N^k + O(N)$ και $(2^k(k + 2) + 15k + 1)N^k + O(N)$, αντίστοιχα, όπου N παριστάνει το πλήθος των σημείων διαμέρισης σε μία κατεύθυνση.

Η ανάλυση σύγκλισης των προτεινομένων σχημάτων έχει πραγματοποιηθεί για τη ΜΔΕ Poisson και μπορεί εύκολα να επεκταθεί στη γενικευμένη ΜΔΕ Helmholtz. Ειδικότερα, αρχικά αποδείξαμε την σύγκλιση για τα σχήματα $O(h^2)$ και $\mathrm{O}(h^4)$ EKSC1 και για το σχήμα $O(h^2)$ EKSC2 στις k διαστάσεις για κάθε σύνολο θετικών παραμέτρων επιτάχυνσης της σύγκλισης και για $0 < \omega < 2$. Το υπόλοιπο της ανάλυσης περιορίζεται στα σχήματά μας EKSC1 και στις 3 διαστάσεις αφού τα περισσότερα αποτελέσματά μας δεν μπορούν να επεκταθούν σε περισσότερες διαστάσεις. Ανακτούμε τιμές για τις παραμέτρους επιτάχυνσης r_s οι οποίες δεν είναι μεν βέλτιστες αλλά είναι δικαιολογημένα καλές. Επιπλέον εκτιμούμε το πλήθος των επαναλήψεων που απαιτούνται από τα σχήματά μας για να ελαττώσουν το σφάλμα κατά έναν προκαθορισμένο παράγοντα ϵ. Τέλος ανακτούμε αναλυτικές εκφράσεις για τις βέλτιστες τιμές και δίνουμε διαστήματα σύγκλισης της παραμέτρου ω.

Εχουμε υλοποιήσει τα σχήματα EKSC1 χρησιμοποιώντας λογισμικά στοιχεία και δομές που εκμεταλλεύονται πλήρως την διατύπωση των επαναληπτικών μας μεθόδων με τανυστικά γινόμενα. Τα εκτεταμένα αριθμητικά μας αποτελέσματα επιβεβαιώνουν την αυξημένη αποδοτικότητα των μεθόδων όπως προκύπτει από την ανάλυση της αποδοτικότητας η οποία επαληθεύεται από τα αποτελέσματα του χρόνου. Επιπλέον μια προσεκτική πειραματική σύγκριση μας δείχνει ότι τα σχήματά μας ΕΚ συγκρίνονται αρκετά καλά με πολύ γνωστές μεθόδους. Εχουμε χρησιμοποιήσει το πρόγραμμά μας για να λύσουμε τρία προβλήματα μοντέλα ΜΔΕ, ένα για την εξίσωση Poisson, ένα για την εξίσωση Helmholtz και ένα γενικό πρόβλημα ΜΔΕ στον μοναδιαίο κύβο. Τα ανακτόμενα πειραματικά δεδομένα εκφράζουν συμφωνία με τα θεωρητικά μας αποτελέσματα και δείχνουν ότι τα τελευταία ισχύουν για γενικότερα προβλήματα ΜΔΕ.

Βιβλιογραφία

[1] D. N. Arnold and J. Saraven, *On the asymptotic convergence of spline - collocation methods for partial differential equations*, SIAM J. Numer. Anal., 21 (1984), pp. 459–472.

[2] B. Bialecki, *An alternating direction implicit method for orthogonal spline collocation linear systems*, Numer. Math., 59 (1991), pp. 413–429.

[3] J. Bonomo, P. Buis, and W. R. Dyksen, *Parallel adi methods on shared memory machines*, Submited, (1992).

[4] P. Buis and W. Dysken, *Tenpack*, Tech. Report CSD-TR-90-048, Purdue University, W. Lafayette. IN, 1990.

[5] K. Cooper and P. Prenter, *Alternating direction collocation method for separable elliptic parial differential equations*, SIAM J. Numer. Anal., 28 (1991), pp. 711–727.

[6] C. de Boor, *Efficient computer manipulation of tensor products*, ACM Trans. Math. Softw., 5 (1979), pp. 173–182.

[7] J. Dongarra, J. Bunch, C. Moler, and G. Stewart, *LINPACK User's Guide*, SIAM, Philadelphia, PA, 1979.

[8] J. J. Dongarra, J. Du Croz, I. Duff, and S. Hammarling, *A set of level 3 basic linear algebra subprograms*, ACM Trans. Math. Softw., 16 (1990), pp. 1–17.

[9] J. Douglas, *Alternating direction methods for three space variables*, Numer. Math., 4 (1962), pp. 41–53.

[10] J. Douglas and H. Rachford, *On the numerical solution of heat conduction problems in two or three space variables*, Trans. Amer. Math. Soc., 82 (1956), pp. 421–438.

[11] W. R. Dyksen, *A tensor product generalized ADI method for elliptic problems on cylindrical domains with holes*, J. Comp. Appl. Maths, 16 (1986), pp. 43–58.

[12] ——, *Tensor product generalized ADI methods for elliptic problems*, SIAM J. Numer. Anal., 24 (1987), pp. 59–76.

[13] W. R. Dyksen, *A tensor product generalized ADI methods for the method of planes*, Num. Meth. for PDEs, 4 (1988), pp. 283–300.

[14] A. Hadjidimos, *On a generalized alternating direction implicit method for solving Laplace's equation*, IMA J. Numer. Anal., 10 (1968), pp. 324–328.

[15] A. Hadjidimos, E. Houstis, J. Rice, and E. Vavalis, *On the iterative solution of line spline collocation schemes for elliptic PDEs*, Tech. Report CSD-TR-020, Purdue University, W. Lafayette. IN, 1991.

[16] ——, *Iterative line cubic spline collocation methods for elliptic partial differential equations in several dimensions*, SIAM J. Sci. Stat. Comput., 14 (1993), pp. 715–734.

[17] P. Halmos, *Finite Dimensional Vector Spaces*, D. van Nostrand, New York, NY, 1958.

[18] E. Houstis, *Collocation methods for linear elliptic problems*, BIT, 18 (1978), pp. 301–310.

[19] E. Houstis, J. Rice, and E. Vavalis, *Spline collocation methods for elliptic partial differential equations*, in Advances in Computer Methods for Partial Differential Equations, R. Vichnevetsky and R. Stepleman, eds., vol. V, IMACS, 1984, pp. 191–194.

[20] E. Houstis, E. Vavalis, and J. Rice, *Convergence of $O(h^4)$ cubic spline collocation methods for elliptic partial differential equations*, SIAM J. Numer. Anal., 6 (1988), pp. 54–74.

[21] E. N. Houstis, W. F. Mitchell, and J. R. Rice, *GENCOL: Collocation on general domains with bicubic Hermite polynomials*, ACM Trans. Math. Softw., 11 (1985), pp. 413–415.

[22] ——, *INTCOL and HERMCOL: Collocation on rectangular domains with bicubic Hermite polynomials*, ACM Trans. Math. Softw., 11 (1985), pp. 416–418.

[23] S. L. Johnsson, Y. Saad, and M. Schultz, *Alternating direction methods on multiprocessors*, SIAM J. Sci. Stat. Comput., 8 (1987), pp. 686–700.

[24] C. L. Lawson, R. J. Hanson, D. R. Kincaid, and F. T. Krogh, *Basic linear algebraic subprogram for Fortran usage*, ACM Trans. Math. Softw., 5 (1979), pp. 324–325.

[25] B. K. Lucas, *Error bounds for interpolating cubic splines under various end conditions*, SIAM J. Numer. Anal., 11 (1974), pp. 569–584.

[26] R. Lynch, J. Rice, and D. Thomas, *Tensor product analysis of alternating direction implicit methods*, Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, 13 (1965), pp. 995–1006.

[27] A. Mitchell and G. Fairweather, *Improved forms of the alternating direction methods of Douglas, Peaceman, and Rachford for solving parabolic and elliptic equations*, Numer. Math., 6 (1964), pp. 285–292.

[28] J. M. Ortega and R. G. Voigt, *Solution of partial differential equations on vector and parallel computers*, SIAM Review, 27 (1985), pp. 149–240.

[29] P. Percell and M. F. Wheeler, *A c^1 finite element collocation method for elliptic equations*, SIAM J. Numer. Anal., 17 (1980), pp. 605–622.

[30] J. Rice and R. Boisvert, *Solving Elliptic Problems Using ELLPACK*, Springer-Verlag, New York, NY, 1985.

[31] S. Rubin and R. Graves, *Viscous flow solution with a cubic spline approximation*, Comput. & Fluids, 3 (1974), pp. 1–36.

[32] R. Varga, *Matrix Iterative Analysis*, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1962.