

Η απεικόνιση Hopf και οι ομάδες ομοτοπίας της σφαίρας

Φίλιππος Οικονομίδης

Επιβλέπων Καθηγητής

Χρήστος Κουρουνιώτης

Πτυχιακή εργασία



Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Κρήτης
ΗΡΑΚΛΕΙΟ 2020

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά πρωτίστως τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Χρήστο Κουρουνιώτη για την πολύτιμη αρωγή και καθοδήγηση του στην εκπόνηση της παρούσας πτυχιακής εργασίας. Επίσης, ευχαριστώ τους καθηγητές Αλέξανδρο Κουβιδάκη και Μάνο Λυδάκη οι οποίοι συμμετείχαν στην επιτροπή αξιολόγησης. Επί πλέον θα ήθελα να ευχαριστήσω τους καθηγητές Ιωάννη Δ. Πλατή, Αθανάσιο Φειδά, Θεμιστοκλή Μήτση και Μιχάλη Παπαδημητράκη για τα προπτυχιακά μαθήματα που παρακολούθησα μαζί τους και τις γνώσεις που κατέκτησα χάρις σε αυτούς.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω επίσης τον Δημήτρη Πλιάκη ο οποίος μου έχει σταθεί ως μέντορας και φίλος καθ' όλη τη διάρκεια των σπουδών μου.

Ευχαριστώ ακόμη τους γονείς μου οι οποίοι με υποστήριξαν ψυχικά και πνευματικά στη διάρκεια των σπουδών μου και τον αδερφό μου Πέτρο για την βοήθεια του.

Στον παππού μου Χρήστο Οικονομίδη και στον αδερφό μου Χρήστο

Περίληψη

Στην παρούσα πτυχιακή εργασία μελετάμε γεωμετρικές ιδιότητες της απεικόνισης Hopf, και χρησιμοποιούμε τη μακρά ακριβή ακολουθία της για να δείξουμε ότι $\pi_i(S^3) \cong \pi_i(S^2)$ για $i \geq 3$, και να υπολογίσουμε την ομάδα ομοτοπίας $\pi_3(S^2)$.

Συγκεκριμένα, αφού ορίσουμε την απεικόνιση Hopf $p : S^3 \rightarrow S^2$, μελετάμε τις αντίστροφες εικόνες σημείων και κύκλων, και δείχνουμε ότι p είναι δέσμη ινών με ίνα, ολικό χώρο και βάση σφαίρες. Στη συνέχεια εισαγάγουμε βασικές έννοιες της Θεωρίας Ομοτοπίας και αποδεικνύουμε ή παρουσιάζουμε κεντρικά θεωρήματα τα οποία χρησιμοποιούμε για να δείξουμε ότι $\pi_i(S^n) = 0$ για $i < n$ και $\pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$. Τέλος χρησιμοποιούμε τη μακρά ακριβή ακολουθία ομοτοπίας της p για να δείξουμε ότι $\pi_3(S^2) \cong \mathbb{Z}$ με γεννήτορα την κλάση της απεικόνισης p .

Περιεχόμενα

Εισαγωγή	10
0 Προκαταρκτικά	14
0.1 Τοπολογικός χώρος, τοπολογία, σχετική τοπολογία και βάση χώρου	14
0.2 Κλειστό σύνολο, ανοιχτότητα, κλειστότητα, οριακά σημεία και βάση περιοχών .	15
0.3 Χώρος Hausdorff, συνεκτικότητα και συμπαγεια	16
0.4 Συνέχεια, ομοιομορφισμός	17
0.5 Τοπολογία πηλίκο και απεικόνιση πηλίκο	18
I Γεωμετρία της απεικόνισης Hopf	20
1 Η απεικόνιση Hopf	21
1.1 Ορισμός της απεικόνισης Hopf	21
1.2 Μιγαδική προβολική ευθεία	21
1.3 Στοιχειώδης γεωμετρία της τρισδιάστατης σφαίρας	24
1.3.1 Οι προεικόνες σημείων της απεικόνισης Hopf είναι μεγιστικοί κύκλοι .	24
1.3.2 Οι προεικόνες κύκλων της απεικόνισης Hopf είναι τόροι	24
1.3.3 Οι προεικόνες ημισφαιρίων της απεικόνισης Hopf είναι στερεοί τόροι .	25
1.3.4 Οι κύκλοι Hopf έχουν αριθμό σύνδεσης 1	27
1.4 Ορισμός Δέσμης Ινών και παραδείγματα	29
1.5 Η απεικόνιση Hopf είναι Δέσμη Ινών	31
1.5.1 Η απεικόνιση Hopf είναι Δέσμη Ινών, μέσω του $\mathbb{C}P^n$	31
1.5.2 Η απεικόνιση Hopf είναι Δέσμη Ινών, μέσω του $\widehat{\mathbb{C}}$	32
1.5.3 Η αναλλοίωτη της Δέσμης Ινών	37
1.6 Αποτελέσματα γεωμετρίας της S^3 και οι Δέσμες ινών των S^n	38
1.6.1 Αποτελέσματα για τη γεωμετρία της τρισδιάστατης σφαίρας	38
1.6.2 Οι Δέσμες Ινών σφαιρών κάθε διάστασης	38
II Ομάδες ομοτοπίας σφαιρών και ο υπολογισμός της τρίτης ο- μάδας ομοτοπίας της σφαίρας	41
2 Ομάδα ομοτοπίας	42
2.1 Ορισμοί και ιδιότητες των ομάδων ομοτοπίας	42
2.2 Επαγόμενοι ομομορφισμοί	47
2.3 Ομοτοπική ισοδυναμία	48
2.4 Θεμελιώδης ομάδα της σφαίρας πολλών διαστάσεων	49
3 Χώρος κάλυψης και ιδιότητες ανύψωσης	51
3.1 Χώρος κάλυψης	51
3.2 Ιδιότητες ανύψωσης για χώρους κάλυψης	51
3.2.1 Ιδιότητα ανύψωσης ομοτοπίας	51
3.2.2 Ενεικονικότητα της ανύψωσης για χώρους κάλυψης	52
3.2.3 Κριτήριο ανύψωσης	52
3.3 Ομάδες ομοτοπίας χώρων κάλυψης και οι ομάδες ομοτοπίας του κύκλου	54
4 Σχετική ομάδα ομοτοπίας και η μακρά ακριβής ακολουθία της	54
4.1 Ορισμός σχετικής ομάδας ομοτοπίας και το Compression Criterion	54
4.2 Μακρά ακριβής ακολουθία	57
4.3 Μακρά ακριβής ακολουθία των σχετικών ομάδων ομοτοπίας	58

5	Η Μακρά ακριβής ακολουθία των Serre fibrations και των Δεσμών ινών	65
5.1	Η μακρά ακριβής ακολουθία των Serre fibrations	66
5.2	Οι Δέσμες ινών είναι Serre fibrations	72
6	Υπολογισμός τρίτης ομάδας ομοτοπίας της σφαίρας	76
6.1	Cellular approximation theorem	76
6.2	Freudenthal suspension theorem	77
6.3	Εφαρμογή της απεικόνισης Hopf και αποτελέσματα	79
III	Παράρτημα	82
A'	Στερεογραφική Προβολή	83
A'.1	Η στερεογραφική προβολή στο πραγματικό επίπεδο	83
A'.2	Η στερεογραφική προβολή στο μιγαδικό επίπεδο	84
A'.3	Η στερεογραφική προβολή για σφαίρες κάθε διάστασης	85
B'	Συμπαγοποίηση Ενός Σημείου	86
Γ'	Συμπαγοποίηση ενός σημείου και Στερεογραφική Προβολή	87
	Αναφορές	92

Εισαγωγή

Η αλγεβρική τοπολογία θεωρείται ο κλάδος των μαθηματικών ο οποίος εξετάζει ιδιότητες τοπολογικών χώρων μέσω αλγεβρικών δομών. Π.χ. εάν δύο τοπολογικοί χώροι δεν έχουν ισόμορφες ομάδες ομοτοπίας τότε δεν είναι ομοιομορφικοί. Η Θεωρία Ομοτοπίας είναι η συστηματική μελέτη αντικειμένων μέσω ομοτοπιών. Το κεντρικό αντικείμενο της θεωρίας ομοτοπίας είναι οι ομάδες ομοτοπίας. Πατέρας της θεωρίας ομοτοπίας θεωρείται ο L. E. J. Brower, έδωσε τον ορισμό της ομοτοπίας και ενδιαμέσως στις χρονιές 1910-1912 έγραψε μια σειρά εργασιών οι οποίες προχώρησαν την τοπολογία σε μια νέα εποχή χρησιμοποιώντας μεθόδους πρωτοφανείς. Παραδείγματος χάριν το simplicial approximation λεγόταν ότι ήταν παρόμοιο με μαγεία (από I. M. James, σελίδα 563 του [11]). Όμως ο Heinz Hopf ήταν αυτός ο οποίος με την πρωτοποριακή μελέτη του για απεικονίσεις μεταξύ σφαιρών από το 1926 μέχρι το 1935 εγκαινίασε την θεωρία ομοτοπίας (από Jean Dieudonne, σελίδα 311 του [2]). Το 1935 ο Witold Hurewicz όρισε την ομάδα ομοτοπίας ως την γενίκευση της θεμελιώδους ομάδας σε παραπάνω διαστάσεις, δηλαδή ομάδα με στοιχεία τις ομοτοπικές κλάσεις των συνεχών απεικονίσεων $S^n \rightarrow X$.

Γενικότερα οι ομάδες ομοτοπίας είναι πολύ δυσκολότερες στον υπολογισμό από τις θεμελιώδεις ομάδες. Σύμφωνα με τον Peter Hilton στο [6], οι ομάδες ομοτοπίας είναι τρομερά εύκολο να οριστούν αλλά ουσιαστικά αδύνατο να υπολογιστούν. Ένας από τους βασικούς λόγους είναι ότι τα δύο κυριότερα εργαλεία για να υπολογίζουμε τις θεμελιώδεις ομάδες είναι το van Kampen's θεώρημα και οι χώροι κάλυψης. Τα αντίστοιχα εργαλεία υψηλότερης διάστασης για τις ομάδες ομοτοπίας είναι το excision theorem για ομάδες ομοτοπίας και οι δέσμες ινών. Όμως αυτά τα δύο είναι αρκετά πιο αδύναμα από τα αντίστοιχα εργαλεία της θεμελιώδους ομάδας διότι δεν υπολογίζουν άμεσα ομάδες ομοτοπίας, αλλά δίνουν σχέσεις μεταξύ των ομάδων ομοτοπίας διαφορετικών χώρων. Μέχρι σήμερα έχουν βρεθεί αρκετοί τρόποι για να υπολογίζουμε ομάδες ομοτοπίας αλλά δεν υπάρχει κάποια γενική μέθοδος υπολογισμού τους.

Ειδικότερα για να πάρουμε μια γεύση της έμφυτης λεπτότητας της ομάδας ομοτοπίας, εστιάζουμε την προσοχή μας στους μάλλον απλούστερους μη-συσταλτούς χώρους οι οποίοι είναι οι σφαίρες. Ένα μικρό δείγμα υπολογισμών ομάδων ομοτοπίας $\pi_i(S^n)$ φαίνεται στην παρακάτω εικόνα η οποία βρίσκεται στο βιβλίο [30] του Hiroshi Toda.

		$\pi_i(S^n)$											
		$i \rightarrow$											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
n	1	\mathbb{Z}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	↓ 2	0	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_{12}	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_3	\mathbb{Z}_{15}	\mathbb{Z}_2	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
	3	0	0	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_{12}	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_3	\mathbb{Z}_{15}	\mathbb{Z}_2	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
	4	0	0	0	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24} \times \mathbb{Z}_3$	\mathbb{Z}_{15}	\mathbb{Z}_2
	5	0	0	0	0	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_{24}	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_{30}
	6	0	0	0	0	0	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_{24}	0	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}_2
	7	0	0	0	0	0	0	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_{24}	0	0
	8	0	0	0	0	0	0	0	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_{24}	0

Το πρώτο που παρατηρούμε είναι η μεγάλη περιοχή μηδενικών κάτω από την διαγώνιο, πράγματι ισχύει $\pi_i(S^n) = 0$ για $i < n$ όπως θα δείξουμε στο πόρισμα 2. Επίσης, η πρώτη γραμμή αποτελείται από μηδενικά, δηλαδή $\pi_i(S^1) = 0$ όπου θα δείξουμε στην πρόταση 16.

Το επόμενο που παρατηρούμε είναι η ακολουθία των \mathbb{Z} στην διαγώνιο του διαγράμματος από το πόρισμα 3.

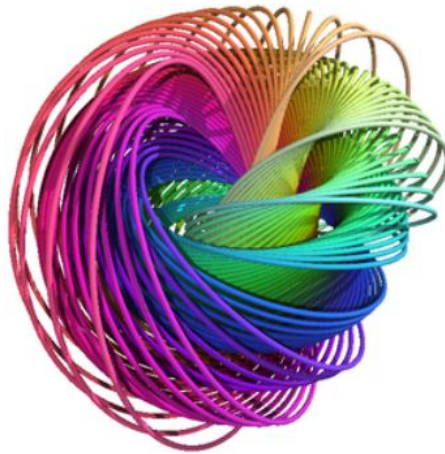
Η πρώτη μη-τετριμμένη ομάδα ομοτοπίας με $i > n$ υπολογίστηκε από τον Hopf το 1931 στην εργασία του [8], όπου βρήκε συνεχή, επί απεικόνιση $p : S^3 \rightarrow S^2$ η οποία δεν είναι ομοτοπική με την σταθερή απεικόνιση. Η απεικόνιση αυτή έγινε γνωστή ως απεικόνιση Hopf

(ή Hopf fibration). Μάλιστα έδειξε ότι $\pi_3(S^2) \cong \mathbb{Z}$ (πρόταση 20), αυτό βέβαια το απέδειξε με άλλον τρόπο από αυτόν που χρησιμοποιούμε στην πτυχιακή εργασία αυτή (βλέπε υποενότητα 1.3.4). Η δεύτερη και η τρίτη γραμμή παρατηρούμε ότι είναι ίδιες, αυτό δεν είναι τυχαίο αφού μέσω της απεικόνισης Hopf συμπεραίνουμε ότι $\pi_i(S^3) \cong \pi_i(S^2)$ για $i \geq 3$, (πρόταση 18).

Οι ομάδες πάνω από την διαγώνιο είναι πεπερασμένες εκτός από τις $\pi_3(S^2)$, $\pi_7(S^4)$, $\pi_{11}(S^6)$. Είναι θεώρημα του Serre (βλέπε [5], θεώρημα 1.21) ότι $\pi_i(S^n)$ είναι πεπερασμένη για $i > n$ εκτός της $\pi_{4k-1}(S^{2k})$, το οποίο είναι το ευθύ άθροισμα του \mathbb{Z} με μια πεπερασμένη ομάδα. Συνεπώς όλη η πολυπλοκότητα των ομάδων ομοτοπίας σφαιρών βρίσκεται στις πεπερασμένες αβελιανές ομάδες.

Ιδιαίτερα ενδιαφέρον είναι ότι στην κάθε διαγώνιο οι ομάδες $\pi_{n+k}(S^n)$ με k σταθερό και μεταβαλλόμενο n τελικά σταθεροποιούνται για αρκετά μεγάλα n . Αυτό είναι άμεση συνέπεια του Freudenthal suspension theorem, το οποίο παρουσιάζεται στην ενότητα 6.2 όπου ορίζουμε την ευσταθή ομάδα ομοτοπίας σφαίρας.

Η απεικόνιση Hopf $p : S^3 \rightarrow S^2$ εκτός από τα σημαντικά αποτελέσματα που έχει στην Θεωρία Ομοτοπίας, δίνει πολύ όμορφα αποτελέσματα για την γεωμετρία της S^3 τα οποία δεν υπάρχουν a priori. Ο Hopf έδειξε ότι οι αντίστροφες εικόνες σημείων της απεικόνισης Hopf είναι μεγιστικοί κύκλοι της S^3 οι οποίοι δεν τέμνονται μεταξύ τους και γεμίζουν όλη την S^3 . Στην συνέχεια έδειξε ότι οι μεγιστικοί κύκλοι ανά δύο έχουν αριθμό σύνδεσης ± 1 , διαισθητικά αυτό σημαίνει ότι οι μεγιστικοί κύκλοι ανά δύο είναι τυλιγμένοι μεταξύ τους μία φορά μέσα στην S^3 . Ένας τρόπος να σκεφτεί κανείς οπτικά την απεικόνιση Hopf και τα αποτελέσματα που έχει στην γεωμετρία της S^3 είναι να προβάλει τις αντίστροφες εικόνες σημείων της απεικόνισης Hopf στον τρισδιάστατο ευκλείδειο χώρο, μέσω της στερεογραφικής προβολής $\sigma : S^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Εφόσον οι κύκλοι στέλνονται σε κύκλους μέσω της στερεογραφικής προβολής, έχουμε κάλυψη του \mathbb{R}^3 από κύκλους οι οποίοι δεν τέμνονται και είναι τυλιγμένοι μεταξύ τους. Ένα μέρος της κάλυψης αυτής φαίνεται στο παρακάτω σχήμα του Niles Johnson από [19].



Σκοπός της πτυχιακής εργασίας αυτής είναι να δείξουμε και να παρουσιάσουμε την ουσία και σημαντικότητα της απεικόνισης Hopf μαζί με κάποια από τα σημαντικά αποτελέσματα της Θεωρίας Ομοτοπίας, με στόχο να αποδείξουμε ότι $\pi_3(S^2) \cong \mathbb{Z}$. Το κείμενο περιέχει ιστορικές σημειώσεις σε διάφορα σημεία του διότι προσπαθούμε να δώσουμε μια χρονολογική διαίσθηση της εξέλιξης των ιδεών. Στην πορεία απόδειξης και παρουσίασης των αποτελεσμάτων της απεικόνισης Hopf προσπερνάμε πολλά όμορφα αποτελέσματα που δυστυχώς δεν μπορούμε να τα καλύψουμε σε μια πτυχιακή εργασία, κάποια από αυτά είναι η αναλλοίωτη Hopf, Hopf fibrations υψηλότερης διάστασης, cellular approximation theorem, Freudenthal suspension theorem, ευσταθή ομάδα ομοτοπίας... Για αυτόν τον λόγο επειδή θεωρήσαμε ότι είναι κρίμα απλώς να τα αγνοήσουμε, προσπαθήσαμε να τα παρουσιάσουμε έτσι ώστε να ταιριάζουν τα αποτελέσματα και να προσφέρουν διαύγεια όσο αναφορά την ουσία και σημαντικότητα της απεικόνισης Hopf.

Η παρούσα πτυχιακή εργασία είναι οργανωμένη με τον ακόλουθο τρόπο:

Αποτελείται από τα προκαταρκτικά, τα δύο κύρια μέρη της πτυχιακής και το παράρτημα. Τα προκαταρκτικά, όπως αναφέρουμε και στην αρχή της 0 ενότητας, περιέχουν έννοιες γενικής και αλγεβρικής τοπολογίας που μπορούν να χρησιμοποιηθούν απλώς αναφορικά στην διάκριση ανάγνωσης του κειμένου.

Το μέρος I αποτελεί την αφητηρία της παρούσας πτυχιακής εργασίας και ασχολείται κυρίως με την γεωμετρία της απεικόνισης Hopf όσο αναφορά τα αποτελέσματα της στην τρισδιάστατη σφαίρα, την ιδιότητα δέσμης ινών και τα γενικότερα αποτελέσματα των δεσμών ινών σφαιρών ανώτερης διάστασης.

Συγκεκριμένα στις 1.1, 1.2 υποενότητες ορίζουμε την απεικόνιση Hopf μέσω του $\widehat{\mathbb{C}}$, και μέσω του $\mathbb{C}P^1$. Αφού αποδείξουμε ότι $\mathbb{C}P^1 \cong \widehat{\mathbb{C}}$, ισχυριζόμαστε ότι θα δείξουμε την σχέση των δύο απεικονίσεων στην 1.5 υποενότητα.

Στην ενότητα 1.3 εξετάζουμε την γεωμετρία της S^3 μέσω της απεικόνισης Hopf. Αρχικά δείχνουμε ότι οι προεικόνες σημείων είναι μεγιστικοί κύκλοι της S^3 . Δείχνουμε ότι οι προεικόνες κύκλων είναι τόροι και πως εμφανίζονται στον τρισδιάστατο χώρο μέσω της στερεογραφικής προβολής. Ύστερα δείχνουμε ότι μέσω της απεικόνισης Hopf υπάρχει κάλυψη της S^3 από 2 στερεούς τόρους με κοινό σύνορο έναν τόρο. Τέλος αφού ορίσουμε τον αριθμό σύνδεσης και τον συνδέσουμε με την αναλλοίωτη Hopf δείχνουμε ότι οι μεγιστικοί κύκλοι της S^3 , ανά δύο, έχουν αριθμό σύνδεσης 1 με κατάλληλο προσανατολισμό.

Στην 1.4, 1.5 ορίζουμε την δέσμη ινών, αποδεικνύουμε ότι και οι δύο απεικονίσεις Hopf που ορίσαμε είναι δέσμες ινών και αφού έχουμε δείξει στην 1.5.3 ότι η δομή δέσμης ινών παραμένει αναλλοίωτη μέσω ομοιομορφισμών στον χώρο βάσης, όποια απεικόνιση Hopf και να επιλέξουμε, συμπεραίνουμε ότι η απεικόνιση Hopf $p : S^3 \rightarrow S^2$ είναι δέσμη ινών. Έτσι ικανοποιείται ο ισχυρισμός που κάναμε στο τέλος της 1.2 υποενότητας.

Στην 1.6.1 παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα της 1.3 στη γεωμετρία της S^3 συλλογικά και στην 1.6.2 παρουσιάζουμε τις υπόλοιπες δέσμες ινών σφαιρών οι οποίες ονομάζονται Hopf fibrations. Συνδέουμε τις Hopf fibrations με τις πραγματικές άλγεβρες διαιρετών με νόρμα και ύστερα από κάποιες ιστορικές σημειώσεις πάνω στα αποτελέσματα της αναλλοίωτης Hopf εκφράζουμε τη συνέπεια του θεωρήματος του Adams η οποία μας λέει ότι οι μοναδικές δέσμες ινών σφαιρών είναι οι Hopf fibrations. Αυτές παράγονται από τις πραγματικές άλγεβρες διαιρετών με νόρμα διάστασης $n = 1, 2, 4, 8$.

Το μέρος II είναι αφιερωμένο στη Θεωρία ομοτοπίας και στον υπολογισμό της $\pi_3(S^2)$.

Η 2η ενότητα ξεκινάει εισάγοντας την έννοια ομοτοπίας, της σχετικής ομοτοπίας και ορίζοντας την ομάδα ομοτοπίας $\pi_n(X, x_0)$ καθώς και την θεμελιώδη ομάδα $\pi_1(X, x_0)$. Δείχνουμε τις βασικές ιδιότητές της, όπως ότι είναι αβελιανή ομάδα για $n \geq 2$, τους επαγόμενους ομομορφισμούς και την ομοτοπική ισοδυναμία μέχρι την 2.4 όπου δείχνουμε το κλασσικό αποτέλεσμα $\pi_1(S^n) = 0$ για $n \geq 2$.

Η 3η ενότητα περιέχει την έννοια του χώρου κάλυψης και τις ιδιότητές του. Αφού τον ορίσουμε βλέπουμε ότι αποτελεί ειδική περίπτωση δέσμης ινών με διακριτή ίνα, παρουσιάζουμε την ιδιότητα ανύψωσης ομοτοπίας και ότι $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ με γεννήτορα την ταυτοτική απεικόνιση στην υποενότητα 3.2.1. Αποδεικνύουμε διάφορες ιδιότητες ανύψωσης του χώρου κάλυψης μέχρι να φτάσουμε στην υποενότητα 3.3 όπου χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες ανύψωσης της 3.2 υποενότητας αποδεικνύουμε ότι οι χώροι κάλυψης επάγουν ισομορφισμούς ομάδων ομοτοπίας και σαν πόρισμα ότι $\pi_n(S^1) = 0$ για $n \geq 2$.

Στην 4η ενότητα ορίζουμε την σχετική ομάδα ομοτοπίας και αποδεικνύουμε την κεντρική ιδιότητα της, το compression criterion. Αυτή η ιδιότητα θα μας επιτρέψει, αφού ορίσουμε την μακρά ακριβή ακολουθία στην 4.2, να αποδείξουμε στην 4.3 υποενότητα ότι οι σχετικές ομάδες ομοτοπίας παράγουν μακρά ακριβή ακολουθία για ζευγάρι τοπολογικών χώρων (X, A) .

Στην 5η ενότητα ορίζουμε τις έννοιες fibration και Serre fibration και αποδεικνύουμε ότι εάν έχουμε απεικόνιση η οποία είναι Serre fibration τότε παράγει μακρά ακριβή ακολουθία ομάδων ομοτοπίας, στην απόδειξη της χρησιμοποιούμε την μακρά ακριβή ακολουθία για ζευγάρι (E, F) . Εν συνεχεία στην υποενότητα 5.2 αποδεικνύουμε ότι κάθε δέσμη ινών είναι Serre fibration.

Στην 6η ενότητα, υποενότητα 6.1, παρουσιάζουμε το cellular approximation theorem to

οποίο έχει πόρισμα ότι $\pi_i(S^n) = 0$ για $i < n$. Στην 6.2 εισάγουμε την έννοια της αώρησης (suspension) και αποδεικνύουμε την ύπαρξη της απεικόνισης αώρησης μέσω της μακράς ακριβούς ακολουθίας δυάδων, από την υποενότητα 4.3. Στην συνέχεια παρουσιάζουμε το Freudenthal suspension theorem το οποίο έχει πόρισμα ότι $\pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ με γεννήτορα την ταυτοτική απεικόνιση. Για την απόδειξη αυτού χρησιμοποιούμε ότι $\pi_1(S^1) \cong \pi_2(S^2)$, το οποίο ισχυριζόμαστε ότι θα δείξουμε στην 6.3 υποενότητα, και $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ από την υποενότητα 3.2.1. Τέλος δίνουμε μια σύντομη παρουσίαση της i -ευσταθούς ομάδας ομοτοπίας η οποία είναι επίσης πόρισμα του Freudenthal suspension theorem.

Η 6.3 υποενότητα περιέχει τον συνδυασμό όλων των προηγούμενων αποτελεσμάτων για να καταλήξουμε στο κεντρικό αποτέλεσμα της παρούσας πτυχιακής εργασίας, $\pi_3(S^2) \cong \mathbb{Z}$. Αρχικά αποδεικνύουμε ότι η απεικόνιση Hopf παράγει μακρά ακριβή ακολουθία ομάδων ομοτοπίας σφαιρών. Αυτό είναι δυνατό εφόσον: στην 1.5 υποενότητα δείξαμε ότι η απεικόνιση Hopf είναι δέσμη ινών, ύστερα από την 5.2 υποενότητα γνωρίζουμε ότι οι δέσμες ινών είναι Serre fibrations, συνεπώς αφού από την υποενότητα 5.1 γνωρίζουμε ότι κάθε Serre fibration παράγει μακρά ακριβή ακολουθία ομάδων ομοτοπίας, συμπεραίνουμε ότι ισχύει το ίδιο για κάθε δέσμη ινών. Επίσης από την υποενότητα 1.5.3 συνάγεται ότι δεν έχει σημασία ποια μορφή της απεικόνισης Hopf θα επιλέξουμε εφόσον η δομή δέσμης ινών παραμένει αναλλοίωτη μέσω ομοιομορφισμών στον χώρο βάσης. Εν συνεχεία, στην μακρά ακριβή ακολουθία της απεικόνισης Hopf παρατηρούμε ότι μηδενίζονται τα $\pi_i(S^1)$ για $i \geq 2$ από υποενότητα 3.3, άρα έχουμε $\pi_i(S^3) \cong \pi_i(S^2)$ για $i \geq 3$ από ιδιότητα των μακρών ακριβών ακολουθιών στην υποενότητα 4.2. Ύστερα από το πόρισμα της 6.1 έχουμε $\pi_2(S^3) = 0$, άρα από την μακρά ακριβή ακολουθία σφαιρών συνάγεται $\pi_1(S^1) \cong \pi_2(S^2)$ όπως είχαμε αναφέρει στην απόδειξη του πορίσματος στην υποενότητα 6.2. Αποδεικνύουμε κατόπιν ότι $\pi_3(S^2) \cong \mathbb{Z}$ με γεννήτορα την απεικόνιση Hopf, χρησιμοποιώντας το πόρισμα της 6.2 υποενότητας και ότι $\pi_i(S^3) \cong \pi_i(S^2)$ για $i \geq 3$. Τέλος παρουσιάζουμε ότι στις κλάσεις ομοτοπίας της $\pi_3(S^2)$ μπορεί να αποδοθεί μια γεωμετρική ερμηνεία μέσω της αναλλοίωτης Hopf και χρησιμοποιώντας ότι $\pi_3(S^2) \cong \mathbb{Z}$ εκφράζουμε κάποια συμπεράσματα για την 1-ευσταθή ομάδα ομοτοπίας.

Το μέρος III είναι το παράρτημα. Στο παράρτημα Α' εξηγούμε την στερεογραφική προβολή σφαιρών. Στο παράρτημα Β' εξηγούμε την συμπαγοποίηση ενός σημείου μαζί με τις ιδιότητες της. Τέλος στο παράρτημα Γ' χρησιμοποιούμε το παράρτημα Α', Β' για να αποδείξουμε ότι η στερεογραφική προβολή $\sigma : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ στέλνει κύκλους σε κύκλους και ότι είναι ομοιομορφισμός. Ο λόγος που έχουμε προσθέσει το παράρτημα είναι ότι η στερεογραφική προβολή και οι χώροι συμπαγοποίησης ενός σημείου μαζί με τις ιδιότητές τους χρησιμοποιούνται συχνά στην παρούσα πτυχιακή εργασία, ιδιαίτερα στην 1η ενότητα. Συνεπώς, για την πληρότητα του κειμένου αλλά και για να μη χαλάσει η ροή του, προσθέτουμε τα παραπάνω στο παράρτημα έτσι ώστε ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης να μπορεί να ανατρέξει σε αυτό όποτε θέλησει.

0 Προκαταρκτικά

Ο στόχος αυτής της ενότητας είναι να εκφράσουμε και να συγκεντρώσουμε κάποιες από τις βασικές έννοιες και ιδιότητες της γενικής και αλγεβρικής τοπολογίας που θα χρησιμοποιήσουμε στις επόμενες ενότητες. Τα παρακάτω συνήθως καλύπτονται σε ένα εξαμηνιαίο προπτυχιακό μάθημα τοπολογίας. Αυτή η ενότητα θεωρείται γνωστή και θα μπορούσε κάλλιστα να παραλειφθεί από τον αναγνώστη ο οποίος θα ανατρέξει σε αυτήν εφόσον χρειαστεί. Για όποιον ενδιαφέρεται να δει περισσότερα και αναλυτικότερα μπορεί να μελετήσει τα [20, 26, 24].

0.1 Τοπολογικός χώρος, τοπολογία, σχετική τοπολογία και βάση χώρου

Ορισμός 0.1. Μια συλλογή υποσυνόλων τ του συνόλου X ονομάζεται **τοπολογία** του X εάν:

- $\emptyset, X \in \tau$
- ένωση οποιουδήποτε πλήθους στοιχείων της τ ανήκει στην τ
- τομή πεπερασμένου πλήθους στοιχείων της τ ανήκει στην τ

Τα στοιχεία της τοπολογίας τ θα τα ονομάζουμε **ανοιχτά σύνολα** και εάν έχουμε $x \in U \in \tau$ τότε το U θα ονομάζεται επίσης **γειτονιά** ή **ανοιχτή γειτονιά** του x .

Το σύνολο X μαζί με την δομή τοπολογίας τ ονομάζεται **τοπολογικός χώρος** και συμβολίζεται (X, τ) , γενικότερα όταν θα λέμε χώρος X θα εννοείται ότι είναι τοπολογικός χώρος, εκτός εάν πούμε κάτι διαφορετικό.

Βασικά παραδείγματα τοπολογιών που ορίζονται σε κάθε σύνολο είναι

- η **τετριμμένη τοπολογία**, η οποία σε σύνολο X είναι $\tau = \{\emptyset, X\}$ και
- η **διακριτή τοπολογία**, η οποία σε σύνολο Y είναι το δυναμοσύνολο του Y , δηλαδή $\tau = \mathcal{P}(Y)$.

Όταν θα λέμε ότι έχουμε έναν υπόχωρο ενός χώρου, θα εννοούμε ότι είναι ο χώρος ο οποίος κληρονομεί την τοπολογία του περιβάλλοντα χώρου του. Αυτή η τοπολογία ονομάζεται **σχετική τοπολογία**.

Ορισμός 0.2. Έστω χώρος (X, τ_X) και $U \subseteq X$. Τότε η συλλογή ανοιχτών συνόλων

$$\tau_Y = \{Y \cap U : U \in \tau_X\}$$

ονομάζεται **σχετική τοπολογία** του Y , έτσι ώστε να ορίζεται ο χώρος (Y, τ_Y) .

Παράδειγμα υπόχωρου είναι η σφαίρα $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ ως $S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$ η οποία ορίζεται με την σχετική τοπολογία

$$\tau_{S^{n-1}} = \{S^{n-1} \cap U : U \in \tau_{\mathbb{R}^n}\}$$

Ορισμός 0.3. Έστω χώρος (X, τ) και \mathbb{B} μια υποοικογένεια της τ . Η \mathbb{B} καλείται **βάση** της τοπολογίας τ , αν κάθε στοιχείο της τ είναι μια ένωση στοιχείων της \mathbb{B} .

Πρόταση 0.1. Έστω χώρος (X, τ) και $\mathbb{B} \subseteq \tau$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. Η \mathbb{B} είναι βάση για την τ .
2. Για κάθε $G \in \tau$ και για κάθε $x \in G$, υπάρχει $B \in \mathbb{B}$ τ.ω. $x \in B$ και $B \subseteq G$.

Στην περίπτωση αυτή, για κάθε $G \subseteq X$ έχουμε:

$$G \in \tau \iff \forall x \in G \exists B \in \mathbb{B} \text{ ώστε } x \in B \subseteq G$$

Παράδειγμα βάση του πραγματικού χώρου \mathbb{R}^n είναι το σύνολο των ανοιχτών μπαλών για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ και για κάθε ακτίνα $r > 0$:

$$B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| < r\}$$

Η τοπολογία του πραγματικού χώρου \mathbb{R}^n η οποία παράγεται από την βάση ανοιχτών μπαλών $B_r(x)$ ονομάζεται **ευκλείδεια τοπολογία**.

0.2 Κλειστό σύνολο, ανοιχτότητα, κλειστότητα, οριακά σημεία και βάση περιοχών

Ορισμός 0.4. Έστω χώρος X , ένα $V \subseteq X$ ονομάζεται **κλειστό** του X όταν $X \setminus V \in \tau$.

Πρόταση 0.2. Έστω χώρος X :

- Τα \emptyset, X είναι κλειστά στο X
- Κάθε πεπερασμένη ένωση κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο.
- Κάθε τομή αυθαίρετου πλήθους κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο.

Για χώρο X , **ανοιχτότητα** ενός συνόλου $A \subseteq X$ ορίζουμε:

$$A^\circ = \bigcup_{C_i \in \tau, C_i \subseteq A} C_i$$

Για χώρο X , **κλειστότητα** ενός συνόλου A ορίζουμε:

$$\bar{A} = \bigcap_{X \setminus C_i \in \tau, C_i \supseteq A} C_i$$

Ορισμός 0.5. Έστω $A \subseteq X$. Το $x \in X$ λέγεται **οριακό σημείο** του A όταν:

$$\forall U_x \in \tau, (U_x \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$$

Θεώρημα 0.1. Έστω A υποσύνολο ενός χώρου X και έστω A' το σύνολο όλων των οριακών σημείων του A . Τότε

$$\bar{A} = A \cup A'$$

Ορισμός 0.6. Ένα $A \subseteq X$ θα λέγεται **πυκνο** στο X εάν $\bar{A} = X$.

Παράδειγμα κλειστού συνόλου είναι η σφαίρα S^{n-1} αφού μπορούμε να την εκφράσουμε:

$$S^{n-1} = (\mathcal{B}^n \cup (\bar{\mathcal{B}}^n)^c)^c$$

τ.ω. $\mathcal{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ και $D^n = \bar{\mathcal{B}}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$.

Ορισμός 0.7. Εάν $A \subseteq X$, ορίζουμε το **σύνορο** του X ως το σύνολο:

$$\partial A = \bar{A} \cap \overline{(X \setminus A)}$$

Δηλαδή τα στοιχεία του ∂A είναι αυτά τα οποία είναι ταυτόχρονα οριακά σημεία του A και οριακά σημεία του συμπληρώματος του A .

Παράδειγμα: Το σύνορο της ανοιχτής μπάλας \mathcal{B}^n είναι σφαίρα:

$$\partial \mathcal{B}^n = \bar{\mathcal{B}}^n \cap (\mathcal{B}^n)^c = S^{n-1}$$

Γενικότερα δείχνεται ότι $\partial A = \bar{A} \setminus A^\circ$.

Ορισμός 0.8. Έστω (X, τ) τοπολογικός χώρος και $x \in X$. Ένα $U \subseteq X$ ονομάζεται **περιοχή** του x όταν $x \in U^\circ$. Το σύνολο των περιοχών του x καλείται **σύστημα περιοχών** του x και συμβολίζεται με N_x .

Ορισμός 0.9. Έστω (X, τ) τοπολογικός χώρος και $x \in X$. Μια υποοικογένεια B_x του N_x λέγεται **βάση περιοχών** του x , όταν για κάθε $U \in N_x$ υπάρχει $B \in B_x$ ώστε $B \subseteq U$. Τα στοιχεία της B_x λέγονται **βασικές περιοχές** του x .

Πρόταση 0.3. Έστω τοπολογικός χώρος (X, τ) και $B \subseteq \tau$. Τότε η \mathbb{B} είναι βάση του τ αν για κάθε $x \in X$ η οικογένεια $B_x = \{B \in \mathbb{B} : x \in B\}$ είναι βάση περιοχών του x .

0.3 Χώρος Hausdorff, συνεκτικότητα και συμπαγεία

Ορισμός 0.10. Ένας χώρος X ονομάζεται χώρος **Hausdorff** εάν:

$$\forall x, y \in X, x \neq y, \exists U_x, U_y \in \tau : U_x \cap U_y = \emptyset$$

Πρόταση 0.4. Εάν ο χώρος X είναι Hausdorff, τότε κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του X είναι κλειστό

Πρόταση 0.5. Σε χώρο Hausdorff X , μια ακολουθία συγκλίνει σημείων του X συγκλίνει το πολύ σε ένα σημείο του X .

Παράδειγμα χώρου Hausdorff είναι ο πραγματικός χώρος \mathbb{R}^n εφόσον:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \text{ υπάρχουν } r_1, r_2 > 0 \\ \text{τ.ω. } B_{r_1}(x) \cap B_{r_2}(y) = \emptyset$$

Ορισμός 0.11. Έστω χώρος X . Ένα ζεύγος ανοικτών υποσυνόλων του (U, V) καλείται **διαχώριση** του X εάν:

1. $U, V \neq \emptyset$,
2. $U \cap V = \emptyset$,
3. $U \cup V = X$.

Ορισμός 0.12. Ένας χώρος X ονομάζεται **συνεκτικός** όταν δεν υπάρχει διαχώριση του X , αλλιώς ονομάζεται μη συνεκτικός.

Λήμμα 0.1. Η ένωση συνεκτικών υποχώρων του X που έχουν κοινό σημείο, είναι συνεκτικό σύνολο.

Ορισμός 0.13. Ένας χώρος X ονομάζεται **συνεκτικός κατά δρόμους** εάν:

$$\forall x, y \in X, \exists f : [a, b] \rightarrow X \text{ συνεχής, τ.ω. } f(a) = x, f(b) = y$$

Θεώρημα 0.2. Κάθε συνεκτικός κατά δρόμους χώρος X είναι συνεκτικός.

Κάθε χώρος X μπορεί να χωριστεί σε συνεκτικά και συνεκτικά κατά δρόμους μέρη. Αυτό γίνεται διότι ορίζονται οι σχέσεις ισοδυναμίας:

$$x \sim y \text{ αν υπάρχει συνεκτικός υπόχωρος } A \subseteq X : x, y \in A \\ x \sim y \text{ αν υπάρχει συνεκτικός κατά δρόμους υπόχωρος } A \subseteq X : x, y \in A$$

Τις κλάσεις ισοδυναμίας τις ονομάζουμε **συνεκτικές συνιστώσες** και **συνεκτικές κατά δρόμους συνιστώσες** αντίστοιχα.

Ορισμός 0.14. Έστω χώρος X . Μία οικογένεια $\mathcal{A} = \{A_i, i \in I\}$ ανοικτών συνόλων $A_i \in \tau$ ονομάζεται **ανοιχτή κάλυψη** του X εάν

$$X = \bigcup_{i \in I} A_i$$

Ορισμός 0.15. Ο χώρος X ονομάζεται **συμπαγής** όταν κάθε ανοιχτό κάλυμμα ανάγεται σε πεπερασμένο. Δηλαδή

$$\forall \mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I} \text{ ανοιχτό κάλυμμα του } X, \exists J = \{1, \dots, m\} \subseteq I : X = \bigcup_{j \in J} A_j$$

Πρόταση 0.6. Κάθε κλειστός υπόχωρος συμπαγούς χώρου είναι συμπαγής.

Πρόταση 0.7. Κάθε συμπαγής υπόχωρος ενός χώρου Hausdorff είναι κλειστός.

Θεώρημα 0.3. (Heine-Borel) Ένα υποσύνολο A του \mathbb{R}^n είναι συμπαγές αν είναι κλειστό και φραγμένο

Παράδειγμα συμπαγούς χώρου είναι η σφαίρα $S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$ εφόσον φράσσεται από συμπαγή κύβο n -διάστασης.

0.4 Συνέχεια, ομοιομορφισμός

Ισοδύναμος ορισμός της συνέχειας με ϵ - δ είναι:

Ορισμός 0.16. Έστω $f : X \rightarrow Y$ απεικόνιση τοπολογικών χώρων. Τότε η f είναι **συνεχής** εάν

$$\forall Y \in \tau_Y \implies f^{-1}(Y) \in \tau_X$$

Δηλαδή εάν προεικόνα ανοιχτού συνόλου είναι ανοιχτό σύνολο τότε η f είναι συνεχής.

Από τον παραπάνω ορισμό έχουμε τα πορίσματα.

Πόρισμα 0.1. Η f είναι συνεχής αν και μόνο αν

$$\forall B \in \mathbb{B} \implies f^{-1}(B) \in \tau_X$$

Πόρισμα 0.2. Η f είναι συνεχής σε σημείο $x \in X$ αν και μόνο αν

$$\forall B \in \mathcal{B}_x \text{ (βάση περιοχών)} \implies f^{-1}(B) \in \tau$$

Θεώρημα 0.4. Έστω χώροι X, Y και $f : X \rightarrow Y$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. Η f είναι συνεχής
2. $\forall A \subseteq X, f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$
3. $\forall B$ κλειστό σύνολο του Y , το $f^{-1}(B)$ είναι κλειστό του X
4. $\forall x \in X$ και $V_{f(x)} \in \tau_Y, \exists U_x \in \tau_X$ ώστε $f(U) \subseteq V$.

Ορισμός 0.17. Έστω X, Y χώροι και $f : X \rightarrow Y$ 1-1 και επί. Η f ονομάζεται **ομοιομορφισμός** εάν οι f, f^{-1} είναι συνεχείς. Δύο χώροι X και Y λέγονται ομοιομορφικοί εάν υπάρχει ομοιομορφισμός $f : X \rightarrow Y$. Το συμβολίζουμε $X \cong Y$.

Ισχύει ότι $f : X \rightarrow Y$ ομοιομορφισμός αν και μόνο αν

$$U \in \tau_X \iff f(U) \in \tau_Y$$

Δείχνεται εύκολα ότι ο ομοιομορφισμός είναι σχέση ισοδυναμίας μεταξύ τοπολογικών χώρων.

Παράδειγμα ομοιομορφισμού είναι η **στερεογραφική προβολή** $\sigma : S^n \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ (βλέπε Παράρτημα Α').

Σημαντική ιδιότητα που θα χρησιμοποιήσουμε αρκετά συχνά είναι η παρακάτω.

Λήμμα 0.2. (Λήμμα επικόλλησης): Έστω $X = A \cup B$ με A, B κλειστά του X . Έστω $f : A \rightarrow Y$ και $g : B \rightarrow Y$ συνεχείς. Εάν $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in A \cap B$, τότε η

$$h(x) \begin{cases} f(x), & x \in A \\ g(x), & x \in B \end{cases}$$

είναι συνεχής.

Θεώρημα 0.5. Έστω Y χώρος Hausdorff και απεικόνιση $f : X \rightarrow Y$ 1-1 και συνεχής τ.ω. X να είναι χώρος. Τότε X είναι χώρος Hausdorff.

Θεώρημα 0.6. Έστω X συνεκτικός χώρος και $f : X \rightarrow Y$ συνεχής απεικόνιση τ.ω. Y να είναι χώρος. Τότε η $f(X)$ είναι συνεκτικός χώρος.

Πόρισμα 0.3. Έστω $f : X \rightarrow Y$ ομοιομορφισμός. Τότε X είναι συνεκτικός χώρος αν και μόνο αν Y είναι συνεκτικός χώρος.

Το παραπάνω θεώρημα και πόρισμα ισχύει και για τους κατά δρόμους συνεκτικούς χώρους αντίστοιχα.

Παράδειγμα συνεκτικού χώρου είναι η S^n εφόσον έχουμε τους ομοιομορφισμούς, μέσω των στερεογραφικών προβολών,

$$\sigma_1 : S^n \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \sigma_2 : S^n \setminus \{S\} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Άρα $S^n \setminus \{N\}, S^n \setminus \{S\}$ είναι συνεκτικοί χώροι, και συνεπώς από λήμμα 0.1 έχουμε ότι η S^n είναι συνεκτικός χώρος.

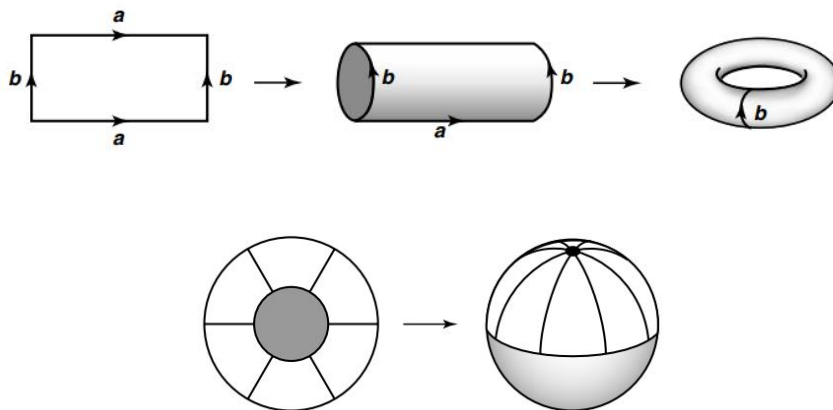
Θεώρημα 0.7. Η συνεχής εικόνα συμπαγούς χώρου είναι συμπαγής χώρος.

Πόρισμα 0.4. Έστω X, Y είναι ομοιομορφισμός. Τότε x είναι συμπαγής χώρος ανν ο Y είναι συμπαγής χώρος

Θεώρημα 0.8. Έστω $f : X \rightarrow Y$, 1-1, επί και συνεχής. Εάν ο X είναι συμπαγής και ο Y είναι Hausdorff, τότε η f είναι ομοιομορφισμός.

0.5 Τοπολογία πηλίκο και απεικόνιση πηλίκο

Το κίνητρο πίσω από την τοπολογία πηλίκο είναι η παραγωγή χώρων, όπως οι επιφάνειες, από διαδικασίες κοψίματος και κολλήματος. Παραδείγματα είναι ο τόρος ο οποίος μπορεί να κατασκευαστεί ταυτίζοντας τις απέναντι πλευρές ενός ορθογωνίου και η σφαίρα η οποία κατασκευάζεται από έναν κλειστό κυκλικό δίσκο D^2 καταρρέοντας το σύνορό του σε ένα σημείο. Αυτό φαίνεται στα παρακάτω σχήματα τα οποία έχουμε πάρει από το βιβλίο [24] του James Munkres.



Πρόταση 0.8. Έστω X, Y σύνολα και \sim σχέση ισοδυναμίας στον X . Έστω $f : X \rightarrow Y$ απεικόνιση τέτοια ώστε $f(x) = f(y)$ όταν $x \sim y$. Τότε υπάρχει καλώς ορισμένη απεικόνιση $g : X/\sim \rightarrow Y$, η οποία καλείται απεικόνιση επαγόμενη από την f και ορίζεται από την

$$g \circ p = f, \quad \text{όπου } p : X \rightarrow X/\sim, \text{ τ.ω. } x \mapsto [x]$$

Συμβολίζουμε το X/\sim με \tilde{X} για ευκολία.

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ p \downarrow & \searrow f & \\ \tilde{X} & \dashrightarrow g & Y \end{array}$$

Τοπολογία πηλίκο στο \tilde{X} ορίζεται η μεγαλύτερη τοπολογία με την οποία η απεικόνιση $p : X \rightarrow \tilde{X}$ είναι συνεχής.

Πρόταση 0.9. Έστω χώρος X και \sim σχέση ισοδυναμίας στον X . Έστω \tilde{X} ο χώρος πηλίκο, δηλαδή ο χώρος των κλάσεων ισοδυναμιών και $p : X \rightarrow \tilde{X}$ που ορίζεται από την $p(x) = [x]$. Θεωρούμε την οικογένεια

$$\tilde{\tau} = \{\tilde{U} \in \tilde{X} : p^{-1}(\tilde{U}) \in \tau_X\}$$

Η $\tilde{\tau}$ είναι η τοπολογία πηλίκο του χώρου πηλίκο \tilde{X} .

Ορισμός 0.18. Μια απεικόνιση $p : X \rightarrow Y$ λέγεται **απεικόνιση πηλίκο** εάν

$$V \in \tau_Y \iff \pi^{-1}(V) \in \tau_X$$

Προφανής απεικόνιση πηλίκο είναι η $p : X \rightarrow \tilde{X}$.

Πρόταση 0.10. Έστω $p : X \rightarrow Y$ απεικόνιση πηλίκο και $g : Y \rightarrow Z$ απεικόνιση. Τότε ισχύει:

$$g \text{ συνεχής} \iff g \circ p \text{ συνεχής}$$

και

$$g \text{ απεικόνιση πηλίκο} \iff g \circ p \text{ απεικόνιση πηλίκο}$$

Ονομάζουμε μια απεικόνιση $f : X \rightarrow Y$ **ανοιχτή απεικόνιση** όταν κάθε ανοιχτό σύνολο του X , το $f(U)$ είναι ανοιχτό σύνολο του Y . Αντίστοιχα ονομάζουμε **κλειστή απεικόνιση** όταν για κάθε κλειστό σύνολο V του X , το $f(V)$ είναι κλειστό σύνολο του Y .

Πρόταση 0.11. Εάν $p : X \rightarrow Y$ είναι επι, ανοιχτή και συνεχής, τότε η p είναι απεικόνιση πηλίκο. Το ίδιο ισχύει εάν είναι κλειστή απεικόνιση αντί για ανοιχτή.

Πρόταση 0.12. Εάν $p : X \rightarrow Y$ είναι επί, συνεχής, ο X είναι συμπαγής χώρος και ο Y είναι χώρος Hausdorff, τότε p είναι απεικόνιση πηλίκο.

Δηλαδή το θεώρημα 0.8 μπορεί να εκφραστεί με τον ακόλουθο τρόπο.

Πρόταση 0.13. Εάν έχουμε απεικόνιση πηλίκο $f : X \rightarrow Y$ 1-1 και επι. Τότε η p είναι ομοιομορφισμός.

Γενικότερα στο παρακάτω κείμενο όταν θα λέμε απεικόνιση θα εννοούμε συνεχή απεικόνιση εκτός εάν πούμε κάτι διαφορετικό.

Μέρος Ι

Γεωμετρία της απεικόνισης Hopf

1 Η απεικόνιση Hopf

1.1 Ορισμός της απεικόνισης Hopf

Η απεικόνιση Hopf είναι μία συνεχής, επί απεικόνιση από την τρισδιάστατη σφαίρα στη δισδιάστατη σφαίρα.

$$p : S^3 \rightarrow S^2$$

Αρχικά την τρισδιάστατη σφαίρα $S^3 = \{x, y, z, t \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1\}$ την ορίζουμε ως υποσύνολο του \mathbb{C}^2 , $S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$. Έχουμε δείξει¹ ότι η στερεογραφική προβολή $\sigma : S^2 \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ είναι ομοιομορφισμός από την σφαίρα στο επεκτεταμένο επίπεδο.

Η απεικόνιση Hopf ορίζεται μέσω της

$$\sigma \circ p = \begin{cases} z_2/z_1, & z_1 \neq 0 \\ \infty, & z_1 = 0 \end{cases}$$

1.2 Μιγαδική προβολική ευθεία

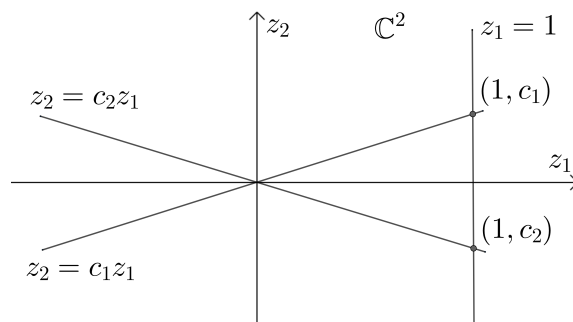
Η μιγαδική προβολική ευθεία, η οποία συμβολίζεται ως \mathbb{CP}^1 , είναι το σύνολο των μιγαδικών ευθειών του \mathbb{C}^2 οι οποίες διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

Μια μιγαδική ευθεία στο \mathbb{C}^2 είναι ένα σύνολο της μορφής:

$$\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : az_1 + bz_2 = 0, a, b \in \mathbb{C}\}$$

- Εάν $b \neq 0$, τότε η κλίση της ευθείας είναι $c = -a/b$
- Εάν $b = 0$, τότε η κλίση της ευθείας είναι ∞

Αφού κάθε ευθεία έχει την δική της κλίση θα ορίσουμε την \mathbb{CP}^1 ως το σύνολο μιγαδικών αναλογιών $[z_1 : z_2]$.



Σχήμα 1: Ευθείες $z_2 = cz_1$ οι οποίες τέμνουν την $z_1 = 1$ στα σημεία $(1, c)$, στον χώρο \mathbb{C}^2 .

Μπορούμε να αναπαραστήσουμε σχεδόν ολόκληρη την προβολική ευθεία ως μια ευθεία σχεδιάζοντας την $z_1 = 1$ έτσι ώστε η κάθε ευθεία να τέμνει την $z_1 = 1$ σε σημείο όπου η z_2 θα είναι ίση με την κλίση της ευθείας.

Όμως από την κατασκευή αυτή λείπει η κατακόρυφη ευθεία, γι' αυτό λέμε ότι $z_1 = 1$ περιέχει άλλο ένα σημείο το οποίο το ονομάζουμε *σημείο στο άπειρο* και το οποίο συμβολίζεται: $[0 : 1]$.

Τώρα μπορούμε να ορίσουμε την \mathbb{CP}^1 .

¹Παράρτημα Γ', Πρόταση 25

Ορισμός 1. Στον τοπολογικό χώρο $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ θεωρούμε τη σχέση ισοδυναμίας $(z_1, z_2) \sim (w_1, w_2)$ εάν $(z_1, z_2) = c \cdot (w_1, w_2)$ για κάποιο $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Ορίζουμε τη μιγαδική προβολική ευθεία $\mathbb{C}P^1$ να είναι το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας στο $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ με την τοπολογία πηλίκο. Η κλάση ισοδυναμίας του στοιχείου (z_1, z_2) συμβολίζεται $[z_1 : z_2]$. Ειδικότερα,

$$\mathbb{C}P^1 = \{[1 : z] : z \in \mathbb{C}\} \cup \{[0 : 1]\}.$$

Εφόσον έχουμε ορίσει την $\mathbb{C}P^1$ μπορούμε να δείξουμε τον παρακάτω σημαντικό ομοιομορφισμό.

Πρόταση 1. Η $\mathbb{C}P^1$ είναι ομοιομορφική με το $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Απόδειξη: Έστω διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} & & \\ \downarrow p & \searrow f & \\ \mathbb{C}P^1 & \xrightarrow{g} & \mathbb{C} \cup \{\infty\} \end{array}$$

όπου

$$f(z_1, z_2) = \begin{cases} z_2/z_1, & z_1 \neq 0 \\ \infty, & z_1 = 0 \end{cases}$$

Από τον ορισμό 1 έχουμε $(z_1, z_2) \sim (w_1, w_2)$ όταν $(w_1, w_2) = \lambda(z_1, z_2)$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ και εφοπλίζουμε την $\mathbb{C}P^1$ με την τοπολογία πηλίκο, δηλαδή $U \subseteq \mathbb{C}P^1$ είναι ανοιχτό αν $p^{-1}(U) \subseteq \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ είναι ανοιχτό.

Δείχνουμε ότι $f(z_1, z_2) = f(w_1, w_2)$ όταν $(z_1, z_2) \sim (w_1, w_2)$, για $(z_1, z_2), (w_1, w_2) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$.

Αφού

$$f(w_1, w_2) = \frac{w_2}{w_1} = \frac{\lambda z_2}{\lambda z_1} = \frac{z_2}{z_1} = f(z_1, z_2)$$

Άρα η f επάγει g απεικόνιση τ.ω. $f = g \circ p$.

Η f είναι συνεχής για $z_1 \neq 0$ αφού z_2/z_1 είναι σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.

Τώρα ελέγχουμε εάν η f είναι συνεχής για $z_1 = 0$, δηλαδή εάν η f είναι συνεχής στο σύνολο $\{(0, z_2) : z_2 \neq 0\}$. Το σημείο $\infty \in \widehat{\mathbb{C}}$ έχει μία βάση περιοχών που αποτελείται από τα συμπληρώματα των κλειστών δίσκων $V_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$ για κάθε $r > 0$. Άρα για να δείξουμε ότι f είναι συνεχής σε ένα σημείο $[0 : z_2]$ αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $r > 0$, $f^{-1}(V_r)$ είναι ανοιχτό στο $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$. Αλλά

$$\begin{aligned} f^{-1}(V_r) &= \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} : |z_2/z_1| > r\} \cup \{(0, z_2) : z_2 \neq 0\} \\ &= \{(z_1, z_2) : |z_2| > r|z_1|\}, \end{aligned}$$

το οποίο είναι ανοιχτό.

Εν συνέχεια έχουμε $g \circ p$ είναι συνεχής εφόσον $f = g \circ p$.

$$\mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \xrightarrow{p} \mathbb{C}P^1 \xrightarrow{g} \widehat{\mathbb{C}}$$

Τώρα επειδή η $g \circ p$ είναι συνεχής έχουμε ότι η g είναι συνεχής από γνωστή ιδιότητα τοπολογίας πηλίκο².

²Εσαγωγή...

Παρατηρούμε ότι η p είναι συνεχής και $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ είναι συνεκτικός χώρος, αφού είναι συνεκτικός κατα δρόμους. Άρα και η μιγαδική προβολική ευθεία $\mathbb{C}P^1$ είναι συνεκτική ως εικόνα συνεχούς απεικόνισης συνεκτικού χώρου

$$\mathbb{C}P^1 = p(\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})$$

Έστω p' ο περιορισμός του p στο S^3 , τότε η p' είναι επεικονική εφόσον οι προεικόνες $p'^{-1}([z_1 : z_2])$ αποτελούνται από όλα τα στοιχεία (z_1, z_2) εάν πολλαπλασιάσουμε την κάθε συνιστώσα με $e^{i\theta}$. Αυτό γίνεται εφόσον για $(z_1, z_2), (w_1, w_2) \in S^3$ έχουμε $(z_1, z_2) \sim (w_1, w_2)$ να αντιστοιχούν στην ίδια εικόνα αν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ τ.ω. $(w_1, w_2) = \lambda(z_1, z_2) \implies w_1 = \lambda z_1, w_2 = \lambda z_2$.

Αυτό σημαίνει ότι:

$$|w_1|^2 + |w_2|^2 = 1 \implies \lambda \bar{\lambda} |z_1|^2 + \lambda \bar{\lambda} |z_2|^2 = 1 \implies \lambda \bar{\lambda} (|z_1|^2 + |z_2|^2) = 1 \implies \lambda \bar{\lambda} = 1 \implies |\lambda| = 1$$

Δηλαδή σε πολικές συντεταγμένες $\lambda = e^{i\theta}$.

Γνωρίζουμε ότι η S^3 είναι συμπαγής χώρος.

Άρα η μιγαδική προβολική ευθεία $\mathbb{C}P^1$ είναι συμπαγής χώρος ως εικόνα συνεχούς απεικόνισης συμπαγούς χώρου

$$\mathbb{C}P^1 = p'(S^3)$$

Ο χώρος $\widehat{\mathbb{C}}$ είναι Hausdorff χώρος εφόσον:

- Ο χώρος \mathbb{C} είναι Hausdorff

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \text{ υπάρχουν } r_1, r_2 > 0$$

$$\text{τ.ω. } B_{r_1}(z_1) \cap B_{r_2}(z_2) = \emptyset$$

- Ο \mathbb{C} είναι τοπικά συμπαγής³

- $\widehat{\mathbb{C}}$ είναι Hausdorff $\iff \mathbb{C}$ είναι τοπικά συμπαγής και Hausdorff.⁴

Συνεπώς η $g : \mathbb{C}P^1 \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ είναι κλειστή απεικόνιση και εφόσον γνωρίζουμε ότι είναι συνεχής και επί, συμπεραίνουμε ότι είναι απεικόνιση πηλίκο.

Τέλος δείχνουμε ότι g είναι 1-1 δείχνοντας ότι:

$$f(w_1, w_2) = f(z_1, z_2) \implies (w_1, w_2) \sim (z_1, z_2)$$

$$f(w_1, w_2) = f(z_1, z_2) \implies \frac{w_2}{w_1} = \frac{z_2}{z_1} \implies w_2 = \lambda z_2, w_1 = \lambda z_1 \implies (w_1, w_2) \sim (z_1, z_2)$$

Άρα η g είναι ομοιομορφισμός. \square

Στην παραπάνω απόδειξη δείξαμε ότι υπάρχει επί συνεχής απεικόνιση

$$p' : S^3 \rightarrow \mathbb{C}P^1, \quad (z_1, z_2) \mapsto [z_1 : z_2] \quad (1)$$

και ομοιομορφισμός μεταξύ της $\mathbb{C}P^1$ και του $\widehat{\mathbb{C}}$.

Συνεπώς αφού γνωρίζουμε ότι υπάρχει ομοιομορφισμός μεταξύ του $\widehat{\mathbb{C}}$ και της S^2 (μέσω της στερεογραφικής προβολής), έχουμε

$$\mathbb{C}P^1 \cong \widehat{\mathbb{C}} \cong S^2 \implies \mathbb{C}P^1 \cong S^2 \quad (2)$$

αφού ο ομοιομορφισμός αποτελεί σχέση ισοδυναμίας. Άρα υπάρχει ομοιομορφισμός μεταξύ της $\mathbb{C}P^1$ και της S^2 .

Η απεικόνιση p' μπορεί επίσης να οριστεί ως η απεικόνιση Hopf⁵, θα δουμε στην ενότητα 1.5 τι σχέση έχει με την απεικόνιση $\sigma \circ p : S^3 \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$.

³Παράρτημα Β', σελίδα 62

⁴Το ίδιο, σελίδα 62

⁵Ο Heinz Hopf στην εργασία του [8] είχε ορίσει την απεικόνιση Hopf μέσω της $\mathbb{C}P^1$.

1.3 Στοιχειώδης γεωμετρία της τρισδιάστατης σφαίρας

1.3.1 Οι προεικόνες σημείων της απεικόνισης Hopf είναι μεγιστικοί κύκλοι

Μεγιστικός κύκλος μιας σφαίρας S^n είναι η τομή ενός δισδιάστατου επιπέδου, το οποίο διέρχεται από την αρχή των αξόνων, με την σφαίρα S^n . Οι μοναδικοί κύκλοι οι οποίοι περιέχονται στην S^n και έχουν την ίδια ακτίνα με την S^n είναι οι μεγιστικοί κύκλοι.

Παρατηρούμε ότι δύο σημεία $(z_1, z_2), (w_1, w_2) \in S^3$ έχουν την ίδια εικόνα στην απεικόνιση p αν και μόνο αν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ τ.ω. $w_1 = \lambda z_1, w_2 = \lambda z_2$, όπως είδαμε και στην προηγούμενη απόδειξη.

Άρα εάν $p(z_1, z_2) = [z_1 : z_2]$ τότε η προεικόνα $p^{-1}([z_1 : z_2])$ αποτελείται από τα σημεία της S^3 εάν πολλαπλασιάσουμε τις συντεταγμένες του (z_1, z_2) με $e^{i\theta}$, για $\theta \in [-\pi, \pi]$.

Καταλήξαμε ότι η προεικόνα κάθε σημείου του S^2 είναι ένας μεγιστικός κύκλος στην S^3 , εφόσον έχουν την ίδια ακτίνα με την S^3 . Δηλαδή $\forall b \in S^2, p^{-1}(b) \cong S^1$.

Γενικότερα κάθε μιγαδική ευθεία στο \mathbb{C}^2 τέμνει την S^3 σε ένα μεγιστικό κύκλο που ονομάζουμε κύκλο Hopf. Εφόσον ακριβώς ένας κύκλος Hopf περνάει από κάθε σημείο της S^3 , η οικογένεια κύκλων Hopf γεμίζει την S^3 και οι κύκλοι βρίσκονται σε 1-1 αντιστοιχία με τις μιγαδικές ευθείες του \mathbb{C}^2 , δηλαδή με $\widehat{\mathbb{C}} \cong \mathbb{C}P^1$.

1.3.2 Οι προεικόνες κύκλων της απεικόνισης Hopf είναι τόροι

Μια γραμμή γεωγραφικού πλάτους⁶ L στην S^2 είναι ίση με την προεικόνα

$$\sigma^{-1}(\{z \in \widehat{\mathbb{C}} : |z| = c\}) \text{ για κάποιο } c > 0$$

της στερεογραφικής προβολής $\sigma : S^2 \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$, δηλαδή η κάθε L είναι ίση με προεικόνα κύκλου κέντρου 0 και ακτίνας $c > 0$ στο $\widehat{\mathbb{C}}$.

Εφόσον η προεικόνα της απεικόνισης Hopf κάθε σημείου του $\widehat{\mathbb{C}}$ είναι ένας κύκλος Hopf και εφόσον κάθε γραμμή γεωγραφικού πλάτους L είναι επίσης κύκλος τότε η προεικόνα της L αποτελείται από οικογένεια κύκλων η οποία εξαρτάται από μία παράμετρο του κύκλου L , άρα η προεικόνα $p^{-1}(L)$ φαίνεται να ορίζει μια επιφάνεια στην S^3 .

Παρατηρούμε ότι η προεικόνα μέσω της απεικόνισης Hopf μίας γραμμής γεωγραφικού πλάτους $p^{-1}(L)$ περιγράφεται από εξίσωση μορφής:

$$\left| \frac{z_2}{z_1} \right| = \text{σταθερή}, \text{ τ.ω. να ισχύει } |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$$

Έχουμε την απεικόνιση Hopf $\sigma \circ p : S^3 \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ ως $(z_1, z_2) \mapsto z_2/z_1 \in \widehat{\mathbb{C}}$.

Σε πολικές συντεταγμένες έχουμε $\sigma \circ p(r_0 e^{i\theta_0}, r_1 e^{i\theta_1}) = (r_1/r_0) e^{i(\theta_1 - \theta_0)}$, όπου $r_0^2 + r_1^2 = 1$. Σύμφωνα με το παραπάνω έχουμε για γραμμή γεωγραφικού πλάτους L ότι $|z_2/z_1| = r_1/r_0 = \rho \in (0, \infty)$, όπου ρ σταθερό και οι γωνίες θ_0 και θ_1 είναι ανεξάρτητες στην S^1 . Άρα η προεικόνα $\sigma \circ p^{-1}(L) = p^{-1}(\rho e^{i(\theta_1 - \theta_0)})$ αποτελείται από τα σημεία $(r_0 e^{i\theta_0}, r_1 e^{i\theta_1})$ τα οποία σχηματίζουν τόρο $T_\rho \subseteq S^3$.

Ο κάθε τόρος T_ρ αποτελείται από ένωση κύκλων Hopf, δηλαδή είναι τα ζευγάρια (θ_0, θ_1) για τα οποία ισχύει $\theta_1 - \theta_0 = \text{σταθερό}$. Το κάθε σημείο της γραμμής γεωγραφικού πλάτους $L \subseteq S^2$ περιγράφεται από γωνία $\psi = \theta_1 - \theta_0$.

Για κάθε ρ έχουμε ξένους τόρους T_ρ οι οποίοι γεμίζουν την S^3 , μαζί με τις ακραίες περιπτώσεις T_0 και T_∞ . Οι περιπτώσεις αυτές προέρχονται από τα $r_1 = 0$ και $r_0 = 0$ αντίστοιχα.

⁶Γραμμή γεωγραφικού πλάτους είναι οι κύκλοι στην S^2 οι οποίοι είναι σε επίπεδο παράλληλο με αυτό του ισημερινού της.

Παρατηρούμε ότι οι περιπτώσεις T_0, T_∞ εκφυλίζονται σε κύκλους διότι εφόσον $r_0^2 + r_1^2 = 1$, ισχύει:

$$\begin{aligned} \text{για } r_0 = 0 &\implies r_1 = 1 \implies (0, e^{i\theta_1}) \subseteq S^3 \\ \text{και για } r_1 = 0 &\implies r_0 = 1 \implies (e^{i\theta_0}, 0) \subseteq S^3 \end{aligned}$$

Άρα είναι δύο μοναδιαίοι κύκλοι στην κάθε συντεταγμένη του \mathbb{C}^2 .

Τώρα μπορούμε να δούμε πως μοιάζει η τρισδιάστατη σφαίρα, ένα αντικείμενο που υπάρχει στις 4 διαστάσεις, εάν την προβάλουμε στον τρισδιάστατο χώρο μέσω της στερεογραφικής προβολής $\sigma : S^3 \rightarrow \widehat{\mathbb{R}}^3$ με σημείο προβολής $(0, i) \in S^3$ τ.ω.

$$\sigma(z_1, z_2) = \left(\frac{z_1}{1 - \operatorname{Im}(z_2)}, \frac{\operatorname{Re}(z_2)}{1 - \operatorname{Im}(z_2)} \right)$$

Όρίζουμε για ευκολία $(z_1, t) = (x, y, t) \in \widehat{\mathbb{R}}^3$, τότε παρατηρούμε ότι

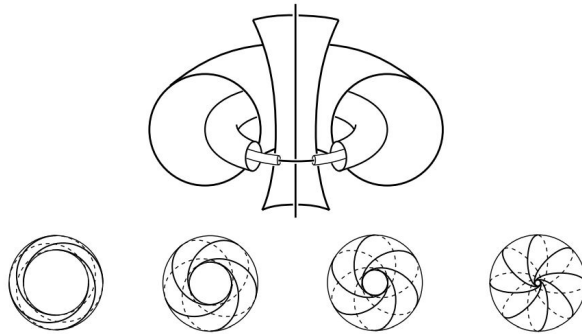
$$\sigma(e^{i\theta_0}, 0) = (e^{i\theta_0}, 0), \quad \text{για } \theta_0 \in [0, 2\pi]$$

και

$$\sigma(0, e^{i\theta_1}) = \left(0, \frac{\cos \theta_1}{1 - \sin \theta_1} \right), \quad \text{για } \theta_1 \in [0, 2\pi]$$

Βλέπουμε ότι $\cos \theta_1 / (1 - \sin \theta_1)$ είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων και ότι ορίζεται στο $\widehat{\mathbb{R}}$ εφόσον έχουμε $\sigma(0, i) = \sigma(0, e^{i\pi/2}) = \{\infty\}$.

Άρα μέσω της στερεογραφικής προβολής το T_0 αντιστοιχίζεται σε μοναδιαίο κύκλο στο x-y επίπεδο και το T_∞ αντιστοιχίζεται στον t-άξονα. Συνεπώς οι τόροι T_ρ με κοινό κέντρο εμφανίζονται στον τρισδιάστατο χώρο όπως στην παρακάτω εικόνα.



Σχήμα 2: Σελίδα 378 του [4]

Όσο το ρ πηγαίνει από το 0 μέχρι το ∞ οι Hopf κύκλοι πλησιάζουν τους κύκλους T_0 και T_∞ , οι οποίοι είναι επίσης ίνες. Η ανωτέρω εικόνα δείχνει τέσσερις τόρους μαζί με κάποιες ίνες.

1.3.3 Οι προεικόνες ημισφαιρίων της απεικόνισης Hopf είναι στερεοί τόροι

Κάτι άλλο που μπορούμε να δείξουμε είναι ότι η S^3 αποτελείται από την ένωση δύο στερεών τόρων με κοινό σύνορο έναν τόρο. Αρχικά βλέπουμε μέσω της στερεογραφικής προβολής $\sigma : S^2 \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ τ.ω.

$$\sigma(w, t) = \frac{w}{1 - t}$$

και

$$\sigma^{-1}(w) = \left(\frac{2w}{|w|^2 + 1}, \frac{|w|^2 - 1}{|w|^2 + 1} \right)$$

ότι μπορούμε να χωρίσουμε την S^2 στα δύο ημισφαίρια της παίρνοντας προεικόνες των συνόλων

$$\{w \in \widehat{\mathbb{C}} : 0 \leq |w| \leq 1\} \quad \text{και} \quad \{w \in \widehat{\mathbb{C}} : 1 \leq |w| \leq \infty\}$$

Παρατηρούμε

$$\begin{aligned} & \{w \in \widehat{\mathbb{C}} : 0 \leq |w| \leq 1\} \cup \{w \in \widehat{\mathbb{C}} : 1 \leq |w| \leq \infty\} = \widehat{\mathbb{C}} \\ & \{w \in \widehat{\mathbb{C}} : 0 \leq |w| \leq 1\} \cap \{w \in \widehat{\mathbb{C}} : 1 \leq |w| \leq \infty\} = \{w \in \widehat{\mathbb{C}} : |w| = 1\} = S^1 \end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned} \sigma^{-1}(\widehat{\mathbb{C}}) &= \sigma^{-1}(\{w \in \widehat{\mathbb{C}} : 0 \leq |w| \leq 1\} \cup \{w \in \widehat{\mathbb{C}} : 1 \leq |w| \leq \infty\}) = \\ &= \sigma^{-1}(\{w \in \widehat{\mathbb{C}} : 0 \leq |w| \leq 1\}) \cup \sigma^{-1}(\{w \in \widehat{\mathbb{C}} : 1 \leq |w| \leq \infty\}) = S^2 \end{aligned}$$

και έχουν τομή τον ισημερινό της S^2 εφόσον για $|w| = 1$

$$\sigma(e^{i\theta}, 0) = e^{i\theta} \quad \text{και} \quad \sigma^{-1}(e^{i\theta}) = (e^{i\theta}, 0)$$

Αναμενόμενο εφόσον χρησιμοποιήσαμε την στερεογραφική προβολή μέσω της οποίας προβάλλουμε την S^2 στο επίπεδο το οποίο τέμνει την σφαίρα στον ισημερινό. Πράγματι λοιπόν χωρίζουμε την S^2 στα δύο ανοιχτά ημισφαίρια της με κοινό σύνορο τον ισημερινό, δηλαδή την S^1 .

Τώρα χρησιμοποιώντας την απεικόνιση Hopf $\sigma \circ p : S^3 \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ τ.ω. $(z_1, z_2) = z_2/z_1 = w \in \widehat{\mathbb{C}}$ και την κάλυψη της σφαίρας που βρήκαμε, έχουμε:

$$\begin{aligned} p^{-1}(\sigma^{-1}(\widehat{\mathbb{C}})) &= p^{-1}(\{w \in \widehat{\mathbb{C}} : 0 \leq |w| \leq 1\}) \cup p^{-1}(\{w \in \widehat{\mathbb{C}} : 1 \leq |w| \leq \infty\}) = \\ &= p^{-1}(\{(z_2/z_1) \in \widehat{\mathbb{C}} : 0 \leq \left| \frac{z_2}{z_1} \right| \leq 1\}) \cup p^{-1}(\{(z_2/z_1) \in \widehat{\mathbb{C}} : 1 \leq \left| \frac{z_2}{z_1} \right| \leq \infty\}) \\ &= (\{(z_1, z_2) \in S^3 : 0 \leq |z_2| \leq |z_1|\}) \cup (\{(z_1, z_2) \in S^3 : |z_1| \leq |z_2| \leq 1\}) = S^3 \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι εφόσον $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$ για το σύνολο $(\{(z_1, z_2) \in S^3 : 0 \leq |z_2| \leq |z_1|\})$ έχουμε

$$|z_2| \leq |z_1| \implies |z_2|^2 + |z_1|^2 \leq 2|z_1|^2 \implies \sqrt{2}/2 \leq |z_1| \leq 1, \quad 0 \leq |z_2| \leq \sqrt{2}/2$$

το οποίο σε πολικές συντεταγμένες εκφράζεται ως

$$\{(r_0 e^{i\theta_0}, r_1 e^{i\theta_1}) \in S^3 : r_0 \in [\sqrt{2}/2, 1], r_1 \in [0, \sqrt{2}/2], \theta_0, \theta_1 \in [0, 2\pi]\}$$

αποτελεί στερεό τόρο.

Ενώ για το σύνολο $(\{(z_1, z_2) \in S^3 : |z_1| \leq |z_2| \leq 1\})$ έχουμε

$$|z_1| \leq |z_2| \implies |z_1|^2 + |z_2|^2 \leq 2|z_2|^2 \implies \sqrt{2}/2 \leq |z_2| \leq 1, \quad 0 \leq |z_1| \leq \sqrt{2}/2$$

το οποίο σε πολικές συντεταγμένες εκφράζεται ως

$$\{(r_0 e^{i\theta_0}, r_1 e^{i\theta_1}) \in S^3 : r_0 \in [0, \sqrt{2}/2], r_1 \in [\sqrt{2}/2, 1], \theta_0, \theta_1 \in [0, 2\pi]\}$$

αποτελεί επίσης στερεό τόρο.

Παίρνοντας το σύνορο αυτών των δύο συνόλων $\{(z_1, z_2) \in S^3 : |z_1| = |z_2|\}$, το οποίο προέρχεται από την προεικόνα του ισημερινού της S^2 , η οποία είναι $\{z_2/z_1 \in \widehat{\mathbb{C}} : |z_2/z_1| = 1\}$, παρατηρούμε ότι είναι τόρος εφόσον

$$\{(z_1, z_2) \in S^3 : |z_1| = |z_2| \quad \text{και} \quad |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\} \implies \{(z_1, z_2) \in S^3 : |z_1| = |z_2| = \sqrt{2}/2\}$$

Δηλαδή σε πολικές συντεταγμένες έχουμε $\{(\sqrt{2}e^{i\theta_0}/2, \sqrt{2}e^{i\theta_1}/2) : \theta_0, \theta_1 \in [0, 2\pi]\}$ οι οποίες είναι ο τόρος T_1 .

Δείξαμε λοιπόν ότι η προεικόνα του άνω και κάτω ημισφαιρίου της S^2 είναι δύο στερεοί τόροι:

$$S^3 = (\{(z_1, z_2) \in S^3 : |z_2| \leq |z_1|\}) \cup (\{(z_1, z_2) \in S^3 : |z_1| \leq |z_2|\})$$

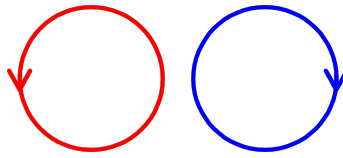
Οι στερεοί τόροι αυτοί έχουν κοινό σύνορο στην προεικόνα του ισημερινού της S^2 , σε τόρο:

$$T_1 = \{(z_1, z_2) \in S^3 : |z_1| = |z_2| = \sqrt{2}/2\}$$

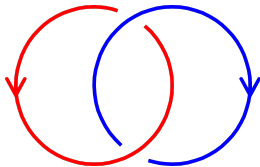
1.3.4 Οι κύκλοι Hopf έχουν αριθμό σύνδεσης 1

Ο Heinz Hopf το 1930 στην εργασία του [8] «On the maps from a three-dimensional sphere to the two-dimensional sphere», όρισε μια νέα αναλλοίωτη (η οποία ύστερα ονομάστηκε αναλλοίωτη Hopf) ως τον **αριθμό σύνδεσης** των προεικόνων δύο διαφορετικών σημείων της S^2 στην S^3 . Έχουμε δείξει ότι οι προεικόνες σημείων είναι μεγιστικοί κύκλοι στην S^3 .

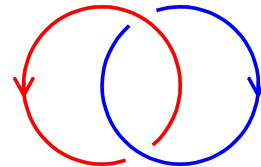
Ο **αριθμός σύνδεσης** είναι μια αριθμητική αναλλοίωτη, η οποία διαισθητικά μας λέει πόσες φορές τυλίγονται δύο κλειστές καμπύλες στον τρισδιάστατο χώρο (στον τετραδιάστατο χώρο δεν έχει ενδιαφέρον εφόσον δύο τυλιγμένες κλειστές καμπύλες «μπορούμε πάντα να τις ξεχωρίσουμε απλώς περνώντας από την τέταρτη διάσταση»). Παραδείγματα αριθμών σύνδεσης φαίνονται στα παρακάτω σχήματα:



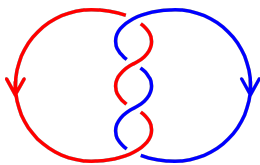
Σχήμα 3: αριθμός σύνδεσης 0. [15]



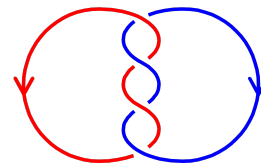
Σχήμα 4: αριθμός σύνδεσης 1. [16]



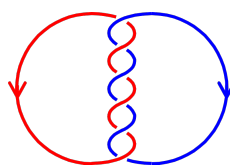
Σχήμα 5: αριθμός σύνδεσης -1. [13]



Σχήμα 6: αριθμός σύνδεσης 2. [17]



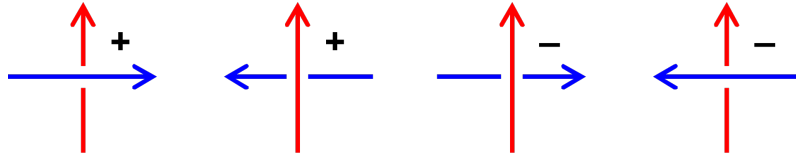
Σχήμα 7: αριθμός σύνδεσης -2. [14]



Σχήμα 8: αριθμός σύνδεσης 3. [18]

Το πρόσημο παρατηρούμε εξαρτάται από τον προσανατολισμό των κλειστών καμπυλών.

Σύνδεσμος λέγεται μια συλλογή κλειστών καμπυλών οι οποίες δεν τέμνονται, αλλά είναι τυλιγμένες μεταξύ τους. Προκειμένου να δώσουμε έναν τύπο για τον υπολογισμό αριθμού σύνδεσης ξεκινάμε δίνοντας πρόσημο σε κάθε διασταύρωση σύμφωνα με το παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 9: θετικός και αρνητικός προσανατολισμός διασταυρώσεων. [12]

όπου το κόκκινο και μπλε δείχνουν διαφορετικές κλειστές καμπύλες.

Ορίζουμε τον αριθμό σύνδεσης δύο κλειστών καμπυλών το παρακάτω

$$(\text{Αριθμός Σύνδεσης}) = \frac{n_1 - n_2}{2}$$

τ.ω. n_1 αριθμός θετικών διασταυρώσεων και n_2 αριθμός αρνητικών διασταυρώσεων.

Πρόταση 2. Έστω $x, y \in S^2$ τ.ω. $x \neq y$, τότε οι προεικόνες της απεικόνισης Hopf $p^{-1}(x), p^{-1}(y)$ είναι μεγιστικοί κύκλοι με αριθμό σύνδεσης ± 1 .

Απόδειξη: Αρχικά χωρίς βλάβη της γενικότητας ορίζουμε την S^3 ως υπόχωρο του \mathbb{R}^4 και την S^2 ως υπόχωρο του \mathbb{R}^3 για ευκολία. Έστω ένα τρισδιάστατο επίπεδο P και ένα διδιάστατο επίπεδο E τα οποία διασχίζουν την αρχή των αξόνων. Τα P, E είναι τέτοια ώστε να μην περιέχεται το E μέσα στο P . Η τομή $P \cap E = L$ είναι ίση με μια ευθεία εφόσον έχουν κοινό σημείο την αρχή των αξόνων και δεν περιέχεται το E μέσα στο P .

Η τομή $S^3 \cap P$ είναι ίση με μεγιστική σφαίρα⁷ και η τομή $S^3 \cap E$ είναι ίση με μεγιστικό κύκλο. Ονομάζουμε το άνω κλειστό ημισφαίριο της μεγιστικής σφαίρας H^+ .

Παρατηρούμε ότι η μεγιστική σφαίρα και ο μεγιστικός κύκλος τέμνονται εφόσον τέμνονται και τα P, E τα οποία ορίζουν την μεγιστική σφαίρα και μεγιστικό κύκλο αντίστοιχα. Εφόσον έχουμε υποθέσει ότι το P δεν περιέχει το E τότε δεν είναι δυνατό και η μεγιστική σφαίρα να περιέχει τον μεγιστικό κύκλο.

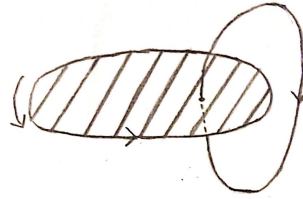
Η ευθεία L θα τέμνει την μεγιστική σφαίρα και την S^3 σε δύο αντιποδικά σημεία p_-, p_+ άρα και ο μεγιστικός κύκλος θα τέμνει την μεγιστική σφαίρα στα δύο αυτά αντιποδικά σημεία. Αυτό συμβαίνει διότι $S^3 \cap L = \{p_-, p_+\}$ και $P \cap E = L$ άρα με την τομή της μεγιστικής σφαίρας και του μεγιστικού κυκλου έχουμε:

$$(S^3 \cap P) \cap (S^3 \cap E) = S^3 \cap (P \cap E) = S^3 \cap L = \{p_-, p_+\}$$

Το σύνορο του H^+ είναι επίσης ένας μεγιστικός κύκλος ο οποίος ορίζεται από διδιάστατο επίπεδο E^* , το οποίο εμπεριέχεται στο P και διασχίζει την αρχή των αξόνων. Άρα δεν μπορούν τα $\{p_-, p_+\}$ να βρίσκονται στο σύνορο του H^+ , δηλαδή στον ισημερινό της μεγιστικής σφαίρας, εφόσον γνωρίζουμε ότι οι μεγιστικοί κύκλοι ως προεικόνες σημείων της απεικόνισης Hopf είναι ξένοι. Συνεπώς, ακριβώς ένα από τα p_-, p_+ βρίσκεται στο εσωτερικό του H^+ .

Εφόσον το $S^3 \cap E$ και το σύνορο του H^+ είναι τυχαίοι μεγιστικοί κύκλοι της S^3 μπορούμε να τους ορίσουμε ως τις προεικόνες τυχαίων σημείων $x, y \in S^2$ της απεικόνισης Hopf, $p^{-1}(x)$ και $p^{-1}(y)$ αντίστοιχα. Γνωρίζουμε ότι το H^+ είναι ομοιομορφικό με κλειστό κυκλικό δίσκο ενώ διατηρεί το σύνορο σταθερό (ένας τρόπος να το δει κανείς είναι μέσω της στερεογραφικής προβολής). Άρα προκύπτει το παρακάτω σχήμα:

⁷Η μεγιστική σφαίρα είναι αντίστοιχη του μεγιστικού κύκλου, δηλαδή όπως ο μεγιστικός κύκλος της S^3 είναι η τομή της S^3 με ένα διδιάστατο επίπεδο το οποίο διασχίζει την αρχή των αξόνων, έτσι και η μεγιστική σφαίρα είναι η τομή της S^3 με ένα τρισδιάστατο επίπεδο το οποίο διασχίζει την αρχή των αξόνων.



Σχήμα 10: Ο κυκλικός δίσκος με το σύνορο του, το οποίο είναι το $p^{-1}(y)$, και ο μεγιστικός κύκλος $p^{-1}(x)$.

Σύμφωνα με τον τύπο του αριθμού σύνδεσης που δώσαμε ανωτέρω και τον προσανατολισμό που επιλέξαμε για το σχήμα έχουμε ότι:

$$(\text{Αριθμός Σύνδεσης}) = \frac{1+1}{2} = 1$$

Παρατηρούμε ότι αν αλλάξουμε τον προσανατολισμό και στους δύο μεγιστικούς κύκλους ο αριθμός σύνδεσης θα παραμείνει 1, όμως εάν αλλάξουμε τον προσανατολισμό μόνο του $p^{-1}(y)$ ή μόνο τον προσανατολισμό του $p^{-1}(x)$ έχουμε ότι:

$$(\text{Αριθμός Σύνδεσης}) = \frac{-1-1}{2} = -1$$

Συνεπώς ελέγξαμε όλους τους δυνατούς προσανατολισμούς των $p^{-1}(y), p^{-1}(x)$ και δείξαμε ότι ο **(Αριθμός σύνδεσης)** = ± 1 και εφόσον έχουμε επιλέξει τυχαία τους μεγιστικούς κύκλους ανά δύο, τότε ισχύει ότι οι μεγιστικοί κύκλοι της S^3 , ανά δύο, είναι σύνδεσμοι. \square

Ο Hopf χρησιμοποίησε την αναλλοίωτη αυτή για να δείξει ότι η $p : S^3 \rightarrow S^2$ δεν είναι ομοτοπική με την σταθερή απεικόνιση. Πριν το 1930 δεν ήταν γνωστό τίποτα άλλο για τις συνεχείς απεικονίσεις σφαιρών διαφορετικής διάστασης παρά μόνο ότι οι απεικονίσεις $S^n \rightarrow S^m$ για $n < m$ είναι ομοτοπικές με την σταθερή απεικόνιση (από τους Günther Frei και Urs Stambach, στην σελίδα 999 του [11]). Μάλιστα λέγεται ότι ο Lefschetz πίστευε ότι το ίδιο θα ίσχυε και για τις απεικονίσεις σφαιρών για $n > m$, όπως και συμβαίνει για αυτές που απεικονίζονται στον κύκλο (από I.M. James στην σελίδα 565 του [11]). Ο Hopf γενίκευσε τις μεθόδους και τα αποτελέσματα της εργασίας του για απεικονίσεις μεταξύ σφαιρών ανώτερης διάστασης μερικά χρόνια αργότερα το 1935. [7]

1.4 Ορισμός Δέσμης Ινών και παραδείγματα

Δέσμη Ινών. Είναι μία τετράδα (E, B, F, p) όπου E, B και F είναι τοπολογικοί χώροι και $p : E \rightarrow B$ είναι μία απεικόνιση με τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. Κάθε σημείο $b \in B$ έχει γειτονιά U του οποίου η προεικόνα $p^{-1}(U)$ είναι ομοιομορφική με $U \times F$.
2. Ο ομοιομορφισμός $\psi : U \times F \rightarrow p^{-1}(U)$ είναι συνεπής με την απεικόνιση p . Δηλαδή το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} U \times F & \xrightarrow{\psi} & p^{-1}(U) \\ & \searrow \text{proj} & \downarrow p \\ & & U \end{array} \quad (3)$$

είναι μεταθετικό.

Ένα διάγραμμα λέμε ότι είναι μεταθετικό όταν δεν έχει σημασία ποια διαδρομή επιλέξουμε στο διάγραμμα, δηλαδή να ισχύει σύμφωνα με το παραπάνω $\text{proj} = p \circ \psi$.

Ορολογία:

- E είναι ο ινώδης χώρος.
- B είναι ο χώρος βάσης.
- F είναι η ίνα.
- p είναι η προβολή ή ινώδης απεικόνιση.

Από την δεύτερη ιδιότητα παρατηρούμε ότι η προεικόνα $p^{-1}(b)$ κάθε σημείου $b \in U \subseteq B$ είναι ομοιομορφική με την F , αφού ο ομοιομορφισμός ψ στέλνει το $\{b\} \times F$ στην $p^{-1}(b)$ και το $\{b\} \times F$ είναι ομοιομορφικό με την F . Άρα έχουμε

$$F \cong (\{b\} \times F) \cong p^{-1}(b) \implies F \cong p^{-1}(b)$$

Μια Δέσμη Ινών συμβολίζεται επίσης:

$$F \longleftarrow E \xrightarrow{p} B$$

Στις επόμενες ενότητες θα δείξουμε ότι η απεικόνιση Hopf είναι Δέσμη Ινών

$$S^1 \longleftarrow S^3 \xrightarrow{p} S^2$$

και με βάση τον ορισμό της Δέσμης Ινών συμπεραίνουμε:

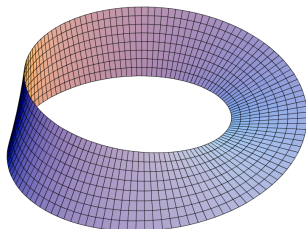
- $U \times S^1 \cong p^{-1}(U)$, όπου S^1 ίνα της απεικόνισης Hopf και $U \subseteq S^2$ γειτονιά
- $S^1 \cong p^{-1}(b)$, όπου $b \in S^2$

Με άλλα λόγια η S^3 τοπικά μοιάζει με την $S^2 \times S^1$, αυτό δεν ισχύει ολικά εκτός από την τετριμμένη περίπτωση την οποία ονομάζουμε **τετριμμένη δέσμη** και στην οποία έχουμε $E = B \times F$ και προβολή $p: B \times F \rightarrow B$ τ.ω. $p(b, f) = b$.

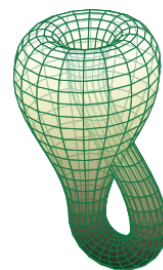
Γενικότερα τις Δέσμες Ινών μπορούμε να τις σκεφτόμαστε ως «στρεβλωμένα» γινόμενα χώρων.

Παραδείγματα είναι:

- **Η λωρίδα Möbius**, η οποία ένας στρεβλωμένος δακτύλιος, έχει ως ίνες ευθύγραμμα τμήματα I , ως χώρο βάσης τον κύκλο S^1 και τοπικά είναι πανομοιότυπη με τον κύλινδρο $S^1 \times I$.
- **Η φιάλη Klein**, η οποία ένας στρεβλωμένος τόρος, έχει ως ίνες κύκλους S^1 , ως χώρο βάσης τον κύκλο S^1 και τοπικά είναι πανομοιότυπη με τον τόρο $S^1 \times S^1$.



Σχήμα 11: Η λωρίδα Möbius. [10]



Σχήμα 12: Η φιάλη Klein εμβαπτισμένη στον \mathbb{R}^3 . [31]

Άλλο παράδειγμα είναι οι **Χώροι Κάλυψης**, τους οποίους θα ορίσουμε εν συνεχεία, οι οποίοι είναι Δέσμες Ινών με ίνα F να είναι ένα διακριτό σύνολο, δηλαδή F να έχει τη διακριτή τοπολογία.

1.5 Η απεικόνιση Hopf είναι Δέσμη Ινών

1.5.1 Η απεικόνιση Hopf είναι Δέσμη Ινών, μέσω του $\mathbb{C}P^n$

Ένας τρόπος για να δείξουμε ότι η απεικόνιση Hopf είναι Δέσμη Ινών, είναι να δείξουμε ότι υπάρχει Δέσμη Ινών

$$S^1 \rightarrow S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n \quad \text{για } n \geq 1.$$

Ο μιγαδικός προβολικός χώρος $\mathbb{C}P^n$ είναι ο χώρος πηλίκου του $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ με την σχέση ισοδυναμίας

$$(z_0, \dots, z_n) \sim \lambda(z_0, \dots, z_n), \text{ για } \lambda \in S^1 \subseteq \mathbb{C}$$

και η S^{2n+1} είναι η μοναδιαία σφαίρα που περιέχεται στο $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$, δηλαδή

$$S^{2n+1} = \{(z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} : \sum_{i=0}^n |z_i|^2 = 1\}$$

Ορίζουμε την προβολή $p' : S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ ως τον περιορισμό της απεικόνισης πηλίκου⁸ $p : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ στην S^{2n+1} .

Θεώρημα 1. Η προβολή $p' : S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ για $n \geq 1$ είναι Δέσμη Ινών, με ίνες S^1 .

Απόδειξη: Η προβολή $p' : S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ στέλνει τα σημεία $(z_0, \dots, z_n), (z'_0, \dots, z'_n) \in S^{2n+1}$ όπου ισχύει

$$(z'_0, \dots, z'_n) = \lambda(z_0, \dots, z_n) \text{ για } \lambda \in S^1$$

στην κλάση ισοδυναμίας $[z_0, \dots, z_n]$, άρα οι ίνες $p^{-1}([z_0, \dots, z_n])$ είναι ομοιομορφικές με S^1 .

Για να δείξουμε την πρώτη ιδιότητα της Δέσμης Ινών χρειάζεται να βρούμε μια κάλυψη του $\mathbb{C}P^n$ από ανοιχτά σύνολα.

Για κάθε $0 \leq i \leq n$, έστω U_i το σύνολο όλων των σημείων $[z_1, \dots, z_n] \in \mathbb{C}P^n$ τ.ω. να υπάρχει αντιπρόσωπος (z_1, \dots, z_n) του $[z_1, \dots, z_n]$ με $z_i \neq 0$.

Αρχικά ελέγχουμε ότι το σύνολο U_i είναι καλά ορισμένο.

Έστω (z'_1, \dots, z'_n) διαφορετικός αντιπρόσωπος του $[z_1, \dots, z_n]$, τότε υπάρχει ένας μη μηδενικός μιγαδικός αριθμός λ , αφού $|\lambda| = 1$, τ.ω. $z'_i = \lambda z_i$ για $0 \leq i \leq n$. Άρα $z'_i \neq 0$ εφόσον $z_i \neq 0$, $\lambda \neq 0$ και ο \mathbb{C} είναι σώμα. Συνεπώς U_i είναι καλά ορισμένο.

Τώρα ας δείξουμε ότι U_i είναι ανοιχτό σύνολο.

Για $0 \leq i \leq n$, ορίζουμε τις προβολές στη i συνιστώσα:

$$\pi_i : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{τ.ω.} \quad (z_0, \dots, z_n) \mapsto z_i$$

Συνεπώς η π_i είναι συνεχής για κάθε $0 \leq i \leq n$.

Έστω $U'_i \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$ τ.ω. να περιέχει τα (z_0, \dots, z_n) όπου $z_i \neq 0$, τότε έχουμε $U'_i = \pi_i^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$. Άρα το U'_i είναι ανοιχτό λόγω της συνέχειας του π_i και επειδή το $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ είναι ανοιχτό σύνολο ως συμπλήρωμα κλειστού.

Εφόσον μέσω της $p : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ έχουμε

$$p^{-1}(U_i) = U'_i \cap \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$$

και το $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ είναι ανοιχτό ως συμπλήρωμα κλειστού, συμπεραίνουμε ότι U_i είναι ανοιχτό σύνολο του $\mathbb{C}P^n$ αφού η p είναι απεικόνιση πηλίκου, δηλαδή $p^{-1}(U_i)$ ανοιχτό αν U_i ανοιχτό.

Συνεπώς έχουμε $\bigcup_{i=0}^n U_i = \mathbb{C}P^n$ αφού το σύνολο $\bigcup_{i=0}^n U_i$ αποτελείται από όλα τα σημεία $[z_0, \dots, z_n] \in \mathbb{C}P^n$ τ.ω. να υπάρχουν αντιπρόσωποι (z_0, \dots, z_n) χωρίς το $(0, \dots, 0)$, όμως η αρχή των αξόνων $(0, \dots, 0)$ δεν ορίζει σημείο στο $\mathbb{C}P^n$.

⁸Ορίζεται αντίστοιχα όπως στην περίπτωση $n = 1$ στον ορισμό 1.

Άρα πράγματι η οικογένεια $\{U_1, \dots, U_n\}$ είναι μια ανοιχτή κάλυψη του $\mathbb{C}P^n$.

Συνεχίζουμε ορίζοντας ομοιομορφισμούς για κάθε $0 \leq i \leq n$ της μορφής

$$h_i : p^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times S^1$$

τ.ω.

$$\begin{aligned} h_i(z_0, \dots, z_n) &= ([z_0, \dots, z_n], z_i/|z_i|) \\ h_i^{-1}([z_0, \dots, z_n], \lambda) &= \lambda|z_i|z_i^{-1}(z_0, \dots, z_n) \end{aligned}$$

Ελέγχουμε ότι ο ένας πράγματι είναι αντίστροφος του άλλου

- Κατά πρώτον θα δείξουμε ότι $h_i \circ h_i^{-1} = \text{id}_{U_i \times S^1}$

$$\begin{aligned} h_i \circ h_i^{-1}([z_0, \dots, z_n], \lambda) &= h_i(\lambda|z_i|z_i^{-1}(z_0, \dots, z_n)) \\ &= ([\lambda|z_i|z_i^{-1}(z_0, \dots, z_n)], \lambda|z_i|/|z_i|) \\ &= ([z_0, \dots, z_n], \lambda) \end{aligned} \tag{1}$$

Η (1) ισχύει διότι εκφράζοντας το z_i και λ σε πολικές συντεταγμένες έχουμε

$$z_i = re^{i\phi} \quad \lambda = e^{i\theta} \implies \lambda|z_i|z_i^{-1} = \frac{e^{i\theta}r}{re^{i\phi}} = e^{i(\theta-\phi)} \in S^1 \implies \lambda|z_i|z_i^{-1} \in S^1$$

Άρα ως στοιχεία του χώρου πηλίκου $\mathbb{C}P^n$ έχουμε

$$[z_0, \dots, z_n] = [\lambda|z_i|z_i^{-1}(z_0, \dots, z_n)] \quad \text{ανν} \quad (z_0, \dots, z_n) \sim \lambda|z_i|z_i^{-1}(z_0, \dots, z_n), \quad \text{για} \quad \lambda|z_i|z_i^{-1} \in S^1$$

- Κατά δεύτερον θα δείξουμε ότι $h_i^{-1} \circ h_i = \text{id}_{p^{-1}(U_i)}$

$$\begin{aligned} h_i^{-1} \circ h_i(z_0, \dots, z_n) &= h_i^{-1}([z_0, \dots, z_n], z_i/|z_i|) \\ &= |z_i|z_i^{-1}|z_i|z_i^{-1}(z_0, \dots, z_n) \\ &= (z_0, \dots, z_n) \end{aligned}$$

Η δεύτερη ιδιότητα της Δέσμης Ινών, δηλαδή ότι το παρακάτω διάγραμμα είναι μεταθετικό

$$\begin{array}{ccc} U_i \times F & \xleftarrow{h_i} & p^{-1}(U_i) \\ & \searrow \text{proj} & \downarrow p' \\ & & U_i \end{array}$$

ισχύει εφόσον

$$\text{proj} \circ h_i(z_0, \dots, z_n) = \text{proj}([z_0, \dots, z_n], z_i/|z_i|) = [z_0, \dots, z_n] = p'(p'^{-1}([z_0, \dots, z_n]))$$

δηλαδή $\text{proj} \circ h_i = p'$. □

Συνεπώς η απεικόνιση Hopf μπορεί να εκφραστεί ως η ειδική περίπτωση $n = 1$ του παραπάνω.

1.5.2 Η απεικόνιση Hopf είναι Δέσμη Ινών, μέσω του $\widehat{\mathbb{C}}$

Ένας άλλος τρόπος να αποδείξουμε ότι $p : S^3 \rightarrow S^2$ έχει δομή Δέσμης Ινών είναι να δείξουμε ότι η $\sigma \circ p : S^3 \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ είναι Δέσμη Ινών.

Θεώρημα 2. Η απεικόνιση $\sigma \circ p : S^3 \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ είναι Δέσμη Ινών.

Απόδειξη: Αρχικά θα δείξουμε ότι για κάθε $(z_2/z_1) \in \widehat{\mathbb{C}}$ υπάρχει γειτονιά U τ.ω. $(\sigma \circ p)^{-1}(U) \cong U \times S^1$

Αυτό αφού έχουμε δείξει ότι η ίνα της απεικόνισης είναι η S^1 , S^3 ο ολικός χώρος και S^2 ο χώρος βάσης.

Εστω κάλυψη του $\widehat{\mathbb{C}}$ που αποτελείται από $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ και $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\}$.

Τώρα πρέπει να βρούμε έναν ομοιομορφισμό ψ_1 μεταξύ $(\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}) \times S^1$ και $(\sigma \circ p)^{-1}(\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\})$ και ομοιομορφισμό ψ_2 μεταξύ $(\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\}) \times S^1$ και $(\sigma \circ p)^{-1}(\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\})$.

Θα χρησιμοποιήσουμε τον μετασχηματισμό ανατίναξης, blow-up transformation, για να βρούμε παραμέτρηση $(z_1, z_2) \in S^3$.

$$\text{Εστω } \zeta_1^2 + \zeta_2^2 = 1$$

Εστω $\zeta_2 = \eta\zeta_1$, για $\zeta_1 \neq 0$ και $\eta \geq 0$

$$\begin{aligned} \zeta_1^2 + \zeta_2^2 = 1 &\implies \zeta_1^2 + \eta^2\zeta_1^2 = 1 \\ \implies \zeta_1^2(1 + \eta^2) = 1 &\implies \zeta_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \eta^2}} \end{aligned}$$

άρα

$$\zeta_2 = \frac{\eta}{\sqrt{1 + \eta^2}}$$

Τώρα εάν $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{R}$, $\zeta_1, \zeta_2 > 0$ έχουμε

$$\zeta_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \eta^2}} \implies \zeta_2 = \frac{\eta}{\sqrt{1 + \eta^2}}$$

το οποίο γράφεται ισοδύναμα:

$$\zeta_1 = \frac{1}{\eta\sqrt{1 + \frac{1}{\eta^2}}}, \quad \zeta_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\eta^2}}}$$

Έχουμε εξίσωση της $S^3 \subseteq \mathbb{C}^2$ για $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$$

Συνεπώς εάν $\zeta_1 = |z_1|$, $\zeta_2 = |z_2|$ έχουμε ότι

$$z_1 = \zeta_1 e^{i(\theta - \psi)}, \quad z_2 = \zeta_2 e^{i\theta}$$

τότε

$$z_1 = \frac{e^{i(\theta - \psi)}}{\eta\sqrt{1 + \frac{1}{\eta^2}}}, \quad z_2 = \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{1 + \frac{1}{\eta^2}}}$$

Θέτουμε $\mu = \eta e^{i\psi}$

Άρα καταλήγουμε στην απεικόνιση:

$$z_1 = \frac{e^{i\theta}}{\mu\sqrt{1 + \frac{1}{|\mu|^2}}}, \quad z_2 = \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{1 + \frac{1}{|\mu|^2}}}$$

Διαπιστώνουμε ότι $\mu = \frac{z_2}{z_1}$, εφόσον

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{\frac{e^{i\theta}}{\sqrt{1 + \frac{1}{\eta^2}}}}{\frac{e^{i(\theta-\psi)}}{\eta\sqrt{1 + \frac{1}{\eta^2}}}} = \frac{e^{i\theta}\eta\sqrt{1 + \frac{1}{\eta^2}}}{e^{i(\theta-\psi)}\sqrt{1 + \frac{1}{\eta^2}}} = \eta e^{i\psi} = \mu$$

και επίσης όταν $\mu \rightarrow \infty$ έχουμε $(z_1, z_2) \rightarrow (0, e^{i\theta})$.

Έτσι έχουμε ορίσει απεικόνιση

$$\psi_1 : (\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}) \times S^1 \rightarrow (\sigma \circ p)^{-1}(\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}) \quad \text{όπου } (\mu, \theta) \in (\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}) \times S^1$$

$$\tau.ω. \quad \psi_1(\mu, \theta) = \begin{cases} (z_1, z_2) = \left(\frac{e^{i\theta}}{\mu\sqrt{1 + \frac{1}{|\mu|^2}}}, \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{1 + \frac{1}{|\mu|^2}}} \right) & \text{για } \mu \neq \infty \\ (0, e^{i\theta}), & \text{για } \mu = \infty \end{cases}$$

Η ψ_1 είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων και επί, λόγω της κατασκευής της. Η ψ_1 είναι 1-1, το οποίο προκύπτει συγκρίνοντας τα κατωτέρω μέτρα με δεδομένο ότι $\theta \in [0, 2\pi]$. Έστω

$$(z_1, z_2) = \left(\frac{e^{i\theta}}{\mu_1\sqrt{1 + \frac{1}{|\mu_1|^2}}}, \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{1 + \frac{1}{|\mu_1|^2}}} \right)$$

$$(w_1, w_2) = \left(\frac{e^{i\theta}}{\mu_2\sqrt{1 + \frac{1}{|\mu_2|^2}}}, \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{1 + \frac{1}{|\mu_2|^2}}} \right)$$

τότε εάν $(z_1, z_2) = (w_1, w_2)$, ισχύει:

$$(z_1, z_2) = (w_1, w_2) \implies |z_1| = |w_1|, \quad |z_2| = |w_2| \implies |\mu_1| = |\mu_2|$$

Συγκρίνοντας αρχικά z_2, w_2 έχουμε:

$$z_2 = w_2 \implies \frac{e^{i\theta_1}}{\sqrt{1 + \frac{1}{|\mu_1|^2}}} = \frac{e^{i\theta_2}}{\sqrt{1 + \frac{1}{|\mu_2|^2}}} \implies \theta_1 = \theta_2$$

εφόσον $|\mu_1| = |\mu_2|$ και $\theta_1 = \theta_2$, συμπεραίνουμε

$$z_1 = w_1 \implies \frac{e^{i\theta_1}}{\mu_1\sqrt{1 + \frac{1}{|\mu_1|^2}}} = \frac{e^{i\theta_2}}{\mu_2\sqrt{1 + \frac{1}{|\mu_2|^2}}} \implies \mu_1 = \mu_2$$

Άρα η ψ_1 είναι συνεχής, 1-1 και επί.

Η αντίστροφη της ψ_1 είναι συνεχής εφόσον

$$\mu = \frac{z_2}{z_1} \quad \text{είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της}$$

και $e^{i\theta} = \sqrt{1 + \frac{1}{|\mu|^2}}$ είναι συνεχής ως γινόμενο συνεχών απεικονίσεων, άρα

$$(\mu, \theta) = \left(\frac{z_2}{z_1}, \frac{\log \left(\sqrt{1 + \frac{1}{|\mu|^2}} z_2 \right)}{i} \right)$$

Συμπεραίνουμε ότι

$$\psi_1 : (\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}) \times S^1 \rightarrow p^{-1}(\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\})$$

είναι ομοιομορφισμός.

Τώρα χρησιμοποιώντας τον ίδιο μετασχηματισμό ανατίναξης θα βρούμε ότι και η

$$\psi_2 : (\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\}) \times S^1 \rightarrow (\sigma \circ p)^{-1}(\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\})$$

είναι ομοιομορφισμός.

Όπως έχουμε ήδη δείξει στην αρχή της απόδειξης, εάν $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{R}$, $\zeta_1, \zeta_2 > 0$, έχουμε από εξίσωση της $S^3 \subseteq \mathbb{C}^2$

$$\zeta_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \eta^2}} \implies \zeta_2 = \frac{\eta}{\sqrt{1 + \eta^2}}.$$

Εάν $\zeta_1 = |z_1|$ και $\zeta_2 = |z_2|$, τότε

$$z_1 = \zeta_1 e^{i\theta}, \quad z_2 = \zeta_2 e^{i(\theta - \psi)}$$

άρα

$$z_1 = \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{1 + \eta^2}}, \quad z_2 = \frac{\eta e^{i(\theta - \psi)}}{\sqrt{1 + \eta^2}}.$$

Θέτουμε $\mu = \eta e^{i(-\psi)} \implies |\mu|^2 = \eta^2$ και καταλήγουμε στην απεικόνιση:

$$z_1 = \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{1 + |\mu|^2}}, \quad z_2 = \frac{\mu e^{i\theta}}{\sqrt{1 + |\mu|^2}}$$

Διαπιστώνουμε ότι $\mu = \frac{z_2}{z_1}$, εφόσον

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{\frac{\eta e^{i(\theta - \psi)}}{\sqrt{1 + \eta^2}}}{\frac{e^{i\theta}}{\sqrt{1 + \eta^2}}} = \frac{\eta e^{i(\theta - \psi)}}{e^{i\theta}} = \eta e^{i(-\psi)} = \mu$$

Έτσι έχουμε ορίσει την απεικόνιση $\psi_2 : (\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\}) \times S^1 \rightarrow (\sigma \circ p)^{-1}(\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\})$ η οποία απεικονίζει το $(\mu, \theta) \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\} \times S^1$ στο

$$\psi_2(\mu, \theta) = \left(\frac{e^{i\theta}}{\sqrt{1 + |\mu|^2}}, \frac{\mu e^{i\theta}}{\sqrt{1 + |\mu|^2}} \right) = (z_1, z_2).$$

Η ψ_2 είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων και επί, λόγω της κατασκευής της.

Η ψ_2 είναι 1-1 γιατί εάν

$$(z_1, z_2) = \left(\frac{e^{i\theta_1}}{\sqrt{1 + |\mu_1|^2}}, \frac{\mu_1 e^{i\theta_1}}{\sqrt{1 + |\mu_1|^2}} \right)$$

$$(w_1, w_2) = \left(\frac{e^{i\theta_2}}{\sqrt{1 + |\mu_2|^2}}, \frac{\mu_2 e^{i\theta_2}}{\sqrt{1 + |\mu_2|^2}} \right)$$

είναι ίσα,

$$z_1 = w_1, \quad z_2 = w_2 \implies |z_1| = |w_1|, \quad |z_2| = |w_2| \implies |\mu_1| = |\mu_2|$$

Εν συνεχεία συγκρίνοντας ξεχωριστά τις συντεταγμένες και υποθέτοντας $\theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi)$, έχουμε $\theta_1 = \theta_2$ και $\mu_1 = \mu_2$.

Άρα η ψ_2 είναι συνεχής, 1-1, επί.

Η αντίστροφη της ψ_2 είναι συνεχής εφόσον:

$$\mu = \frac{z_2}{z_1} \text{ είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της}$$

$e^{i\theta} = \sqrt{1 + |\mu|^2} z_1$ είναι συνεχής ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων, άρα

$$(\mu, \theta) = \left(\frac{z_2}{z_1}, \frac{\log(\sqrt{1 + |\mu|^2} z_1)}{i} \right)$$

Συμπεραίνουμε ότι

$$\psi_2 : \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\} \times S^1 \rightarrow (\sigma \circ p)^{-1}(\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\}) \quad \text{όπου} \quad (\mu, \theta) \in (\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\}) \times S^1$$

είναι ομοιομορφισμός.

Δείξαμε ότι για κάθε $(z_2/z_1) = \mu \in \widehat{\mathbb{C}}$ υπάρχει γειτονιά U του μ , τ.ω. $(\sigma \circ p)^{-1}(U)$ είναι είτε υποσύνολο του $(\sigma \circ p)^{-1}(\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\})$ είτε υποσύνολο του $(\sigma \circ p)^{-1}(\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\})$ και να είναι ομοιομορφικό με το $U \times S^1$ μέσω των ομοιομορφισμών ψ_1, ψ_2 περιορισμένους στο $(\sigma \circ p)^{-1}(U)$.

Τώρα θα δείξουμε ότι ο κάθε ομοιομορφισμός ψ_1, ψ_2 είναι συνεπής με την απεικόνιση $\sigma \circ p$.

$$\psi_1(\mu, \theta) = \begin{cases} (z_1, z_2) = \left(\frac{e^{i\theta}}{\mu \sqrt{1 + \frac{1}{|\mu|^2}}}, \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{1 + \frac{1}{|\mu|^2}}} \right) & \text{για } \mu \neq \infty \\ (0, e^{i\theta}), & \text{για } \mu = \infty \end{cases}$$

$$\psi_2(\mu, \theta) = \left(\frac{e^{i\theta}}{\sqrt{1 + |\mu|^2}}, \frac{\mu e^{i\theta}}{\sqrt{1 + |\mu|^2}} \right)$$

Δηλαδή ότι έχουμε μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccc} U \times F & \xrightarrow{\psi} & (\sigma \circ p)^{-1}(U) \\ & \searrow \text{proj} & \downarrow \sigma \circ p \\ & & U \end{array}$$

$$\begin{aligned} (\sigma \circ p) \circ \psi_1(\mu, \theta) &= (\sigma \circ p)(z_1, z_2) = p \left(\frac{e^{i\theta}}{\mu \sqrt{1 + \frac{1}{|\mu|^2}}}, \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{1 + \frac{1}{|\mu|^2}}} \right) \\ &= \frac{\frac{e^{i\theta}}{\sqrt{1 + \frac{1}{|\mu|^2}}}}{\frac{e^{i\theta}}{\mu \sqrt{1 + \frac{1}{|\mu|^2}}}} = \frac{\mu e^{i\theta} \sqrt{1 + \frac{1}{|\mu|^2}}}{e^{i\theta} \sqrt{1 + \frac{1}{|\mu|^2}}} = \mu = \text{proj}(\mu, \theta) \end{aligned}$$

Άρα η ψ_1 είναι συνεπής με την $\sigma \circ p$ εφόσον δείξαμε:

$$(\sigma \circ p) \circ \psi_1(\mu, \theta) = \text{proj}(\mu, \theta)$$

Ομοίως,

$$(\sigma \circ p) \circ \psi_2(\psi, \theta) = (\sigma \circ p) \left(\frac{e^{i\theta}}{\sqrt{1+|\mu|^2}}, \frac{\mu e^{i\theta}}{\sqrt{1+|\mu|^2}} \right) = \frac{\frac{\mu e^{i\theta}}{\sqrt{1+|\mu|^2}}}{\frac{e^{i\theta}}{\sqrt{1+|\mu|^2}}} = \mu = \text{proj}(\mu, \theta)$$

Άρα η ψ_2 είναι συνεπής με την $\sigma \circ p$ εφόσον

$$(\sigma \circ p) \circ \psi_2(\mu, \theta) = \text{proj}(\mu, \theta)$$

□

Άρα αποδείξαμε ότι η απεικόνιση Hopf $\sigma \circ p$ έχει δομή Δέσμης Ινών

1.5.3 Η αναλλοίωτη της Δέσμης Ινών

Πρόταση 3. Έστω $h : B_1 \rightarrow B$ ομοιομορφισμός και μία επί προβολή $p : E \rightarrow B_1$, τότε η $h \circ p$ είναι Δέσμη Ινών αν η p είναι Δέσμη Ινών.

Απόδειξη: Εφόσον η h είναι ομοιομορφισμός έχουμε το εξής:

$$U \text{ ανοιχτό του } B \iff \exists V \text{ ανοιχτό του } B_1 \text{ τ.ω. } h(V) = U$$

- Έστω $h \circ p$ είναι Δέσμη Ινών (\Rightarrow):

Από υπόθεση έχουμε μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccc} h(V) \times F & \xrightarrow{\psi} & p^{-1}(V) \\ & \searrow \text{proj} & \downarrow h \circ p \\ & & h(V) \end{array}$$

τ.ω. $\text{proj} = h \circ p \circ \psi$ και ψ ομοιομορφισμός.

Το σύνολο τιμών της ψ είναι $p^{-1}(V)$ διότι $(h \circ p)^{-1}(h(V)) = p^{-1}(h^{-1}(h(V))) = p^{-1}(V)$

Έστω $\tilde{h} = (h, \text{id}_F)$, δηλαδή $\tilde{h} : V \times F \rightarrow h(V) \times F$ όπου είναι ομοιομορφισμός με την τοπολογία γινόμενο.

Τότε έχουμε $\psi_1 = \psi \circ \tilde{h}$ όπου είναι ομοιομορφισμός ως σύνθεση ομοιομορφισμών.

Στην συνέχεια παρατηρούμε $p = h^{-1} \circ h \circ p$, άρα έχουμε

$$\text{proj}_1 = h^{-1} \circ h \circ p \circ \psi \circ \tilde{h} \implies \text{proj}_1 = p \circ \psi_1$$

Συνεπώς υπάρχει το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccccc} & & \psi_1 & & \\ & & \curvearrowright & & \\ V \times F & \xrightarrow{\tilde{h}} & h(V) \times F & \xrightarrow{\psi} & p^{-1}(V) \\ & \searrow \text{proj}_1 & \searrow \text{proj} & \downarrow h \circ p & \downarrow h^{-1} \\ & & & h(V) & V \end{array}$$

τ.ω. $\text{proj}_1 = p \circ \psi_1$ και ψ_1 ομοιομορφισμός.

Εφόσον το V επιλέχτηκε τυχαία ικανοποιούνται όλες οι συνθήκες της Δέσμης Ινών, άρα η $p : E \rightarrow B_1$ είναι Δέσμη Ινών.

- Για να αποδείξουμε το αντίστροφο, εφαρμόζουμε το ευθύ στον ομοιομορφισμό h^{-1} και την προβολή $h \circ p$, έτσι ώστε να υπάρχει το παρακάτω διάγραμμα.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \psi_1 & & \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
 h(V) \times F & \xrightarrow{\tilde{h}^{-1}} & V \times F & \xrightarrow{\psi} & (h \circ p)^{-1}(h(V)) \\
 & \searrow \text{proj}_1 & \searrow \text{proj} & \downarrow p & \downarrow p \\
 & & & V & \\
 & & & \downarrow h & \\
 & & & h(V) & \\
 & & & \uparrow p_1 &
 \end{array}$$

□

Η παραπάνω πρόταση ουσιαστικά μας λέει ότι η δομή της Δέσμης Ινών παραμένει αναλλοίωτη μεταξύ ομοιομορφισμών του χώρου βάσης.

Συνεπώς μπορούμε να συμπεράνουμε τα εξής:

- Εφόσον έχουμε δείξει ότι $\sigma \circ p : S^3 \rightarrow S^2 \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ είναι Δέσμη Ινών, όπου σ η στερεογραφική προβολή η οποία είναι ομοιομορφισμός, τότε και η $p : S^3 \rightarrow S^2$ είναι Δέσμη Ινών.
- Με άλλον τρόπο, εφόσον έχουμε δείξει ότι η $p : S^3 \rightarrow \mathbb{C}P^1$ είναι Δέσμη Ινών και γνωρίζουμε ότι υπάρχει ομοιομορφισμός $g : \mathbb{C}P^1 \rightarrow S^2$, τότε η $g \circ p : S^3 \rightarrow \mathbb{C}P^1 \rightarrow S^2$ είναι Δέσμη Ινών, δηλαδή η $p_1 = g \circ p$ είναι Δέσμη Ινών.

Το κύριο αποτέλεσμα που θέλαμε να δείξουμε είναι ότι η απεικόνιση Hopf $S^3 \rightarrow S^2$ είναι Δέσμη Ινών. Θα δούμε αργότερα ότι η δομή της Δέσμης Ινών θα μας επιτρέψει να υπολογίσουμε την ομάδα ομοτοπίας $\pi_3(S^2)$ την οποία θα ορίσουμε στο επόμενο κεφάλαιο.

1.6 Αποτελέσματα γεωμετρίας της S^3 και οι Δέσμες ινών των S^n

1.6.1 Αποτελέσματα για τη γεωμετρία της τρισδιάστατης σφαίρας

Στην ενότητα 1.3.3 δείξαμε ότι η τρισδιάστατη σφαίρα αποτελείται από την ένωση δύο στερεών τόρων

$$S^3 \cong (S^1 \times \bar{D}^2) \cup (\bar{D}^2 \times S^1)$$

οι οποίοι κολλούν στο σύνορο τους το οποίο είναι ένας τόρος.

Μέσω της απεικόνισης Hopf $\sigma \circ p$, παρατηρούμε ότι η S^3 έχει ως κάλυψη δύο στερεούς τόρους έτσι ώστε τα σύνορα τους να κολλάνε στον τόρο T_1 . Στη συνέχεια κάθε στερεός τόρος γεμίζει από τόρους, έτσι ώστε ο πρώτος στερεός τόρος να γεμίζει από τους τόρους T_ρ για $\rho \in [0, 1]$ και ο δεύτερος στερεός τόρος να γεμίζει από τους τόρους T_ρ για $\rho \in [1, \infty]$. Έχουμε δείξει ότι οι περιπτώσεις T_0 και T_∞ εκφυλίζονται σε κύκλους. Τέλος κάθε τόρος T_ρ γεμίζει από κύκλους Hopf, οι οποίοι δείξαμε ότι είναι σύνδεσμοι, ανά δύο. Άρα η S^3 γεμίζει από μεγιστικούς κύκλους οι οποίοι δεν τέμνονται μεταξύ τους και όλοι είναι τυλιγμένοι έτσι ώστε να έχουν αριθμό σύνδεσης ± 1 , επιλέγοντας τον αντίστοιχο προσανατολισμό.

1.6.2 Οι Δέσμες Ινών σφαιρών κάθε διάστασης

Σύμφωνα με τον I.M James στην σελίδα 566 του [11], ο Hopf στην εργασία του [7] περιγράφει τις οικογένειες των δεσμών ινών τέτοιες ώστε η ίνα και ο ολικός χώρος να είναι σφαίρες, και

ο χώρος βάσης να είναι προβολικός χώρος. Ως ειδικότερη περίπτωση υπάρχουν οι δέσμες ινών για τις οποίες και ο χώρος βάσης είναι σφαίρα. Αυτές οι δέσμες ινών είναι

$$S^0 \hookrightarrow S^1 \longrightarrow S^1$$

$$S^1 \hookrightarrow S^3 \longrightarrow S^2$$

$$S^3 \hookrightarrow S^7 \longrightarrow S^4$$

$$S^7 \hookrightarrow S^{15} \longrightarrow S^8$$

οι οποίες ονομάζονται **Hopf fibrations**⁹. Για να τις βρει χρησιμοποίησε τις πραγματικές άλγεβρες διαιρετών με νόρμα.

Ορισμός 2. Μια n -διαστάσεων πραγματική άλγεβρα διαιρετών με νόρμα \mathbb{A} έχει τις εξής ιδιότητες:

- \mathbb{A} είναι ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος με νόρμα.
- \mathbb{A} είναι δακτύλιος διαίρεσης, δεν έχει αναγκαστικά την προσεταιριστικότητα στον πολλαπλασιασμό.
- η νόρμα σέβεται τον πολλαπλασιασμό, δηλαδή $\forall a, b \in \mathbb{A}$ έχουμε $|ab| = |a||b|$.

Τα τέσσερα κλασικά παραδείγματα είναι $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$, οι οποίες τελευταίες δύο είναι οι άλγεβρες των τετράνιων και των οκτόνιων (quaternions and octonions).

Παρατηρούμε ότι εάν έχουμε μια προσεταιριστική n -διαστάσεων πραγματική άλγεβρα διαιρετών με νόρμα \mathbb{A} , τότε έχουμε δομή ομάδας στην $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{A} : |x| = 1\}$ μέσω του πολλαπλασιασμού του \mathbb{A} .

Αντίστροφα, εάν έχουμε δομή ομάδας $(S^{n-1}, *)$, τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε την \mathbb{A} , ορίζοντας για $a, b \in \mathbb{R}^n$ τον πολλαπλασιασμό

$$ab \equiv |a||b| \left(\frac{a}{|a|} * \frac{b}{|b|} \right)$$

Άρα για να βρούμε όλες τις σφαίρες οι οποίες έχουν δομή ομάδας αρκεί να βρούμε όλες τις πραγματικές άλγεβρες διαιρετών με νόρμα \mathbb{A} . Ο Hurwitz απέδειξε το 1898 στο [9] ένα θεώρημα το οποίο είναι ισοδύναμο με το ακόλουθο:

Θεώρημα 3. Υπάρχουν μόνο 4 πραγματικές άλγεβρες διαιρετών με νόρμα κατά ισομορφισμούς. Αυτές είναι οι $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ και έχουν διάσταση 1, 2, 4, 8 αντίστοιχα.

Ο διαισθητικός λόγος για τον οποίο υπάρχουν μόνο 4 πραγματικές άλγεβρες διαιρετών με νόρμα είναι ότι χάνουν δομή κάθε φορά που αυξάνεται η διάσταση:

- Από το \mathbb{R} στο \mathbb{C} χάνεται η διάταξη
- Από το \mathbb{C} στο \mathbb{H} χάνεται η αντιμεταθετικότητα
- Από το \mathbb{H} στο \mathbb{O} χάνεται η προσεταιριστικότητα

⁹Ο Hopf είχε εισαγάγει και χρησιμοποιήσει την έννοια fibration στην εργασία του αντί αυτή της δέσμης ινών. Στην ενότητα 5.2 ορίζουμε τα fibrations και δείχνουμε ότι το fibration επάγεται από την δέσμη ινών

Συνεπώς οι μόνες σφαίρες οι οποίες είναι ομάδες είναι οι S^0, S^1, S^3 . Η S^7 είναι σχεδόν ομάδα γιατί δεν έχει την προσεταιριστική ιδιότητα.

Η κατασκευή των προβολικών χώρων που έκανε ο Hopf ήταν πάνω στα κλασσικά παραδείγματα των \mathbb{A} που εκφράσαμε και γίνεται με αντίστοιχο τρόπο με αυτόν της δέσμης ινών του $\mathbb{C}P^n$, αποδεικνύεται ότι οι

$$S^0 \hookrightarrow S^n \longrightarrow \mathbb{R}P^n$$

$$S^1 \hookrightarrow S^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{C}P^n$$

$$S^3 \hookrightarrow S^{4n+3} \longrightarrow \mathbb{H}P^n$$

$$S^7 \hookrightarrow S^{15} \longrightarrow \mathbb{O}P^1$$

είναι δέσμες ινών, τ.ω. οι S^0, S^1, S^3, S^7 να δρουν στις $S^n, S^{2n+1}, S^{4n+3}, S^{15}$ αντίστοιχα. Δεν λειτουργεί η ίδια κατασκευή στην άλγεβρα των οκτονίων \mathbb{O} λόγω της έλλειψης της προσεταιριστικότητας, επίσης δεν ορίζεται ο $\mathbb{O}P^n$ για $n > 2$ παρά μόνον $\mathbb{O}P^1$. Συνήθως εκφράζονται στην περίπτωση $n = 1$

$$S^0 \hookrightarrow S^1 \longrightarrow \mathbb{R}P^1 \cong S^1$$

$$S^1 \hookrightarrow S^3 \longrightarrow \mathbb{C}P^1 \cong S^2$$

$$S^3 \hookrightarrow S^7 \longrightarrow \mathbb{H}P^1 \cong S^4$$

$$S^7 \hookrightarrow S^{15} \longrightarrow \mathbb{O}P^1 \cong S^8$$

και εφόσον έχουμε ήδη δείξει ότι η δομή δεσμών ινών παραμένει αναλλοίωτη από ομοιομορφισμούς στον χώρο βάσης, πράγματι οι παραπάνω είναι οι δέσμες ινών που έχουν σφαίρες ως ολικό χώρο, χώρο βάσης και ίνα.

Σύμφωνα με τον I.M. James στις σελίδες 566-567 του [11], αυτές οι ειδικές περιπτώσεις οι οποίες μελετήθηκαν από τον Hopf, αποδείχθηκαν εξαιρετικού ενδιαφέροντος. Χρησιμοποιώντας την ίδια ιδέα όπως στην εργασία του το 1930 όρισε την αναλλοίωτη Hopf για κάθε συνεχή απεικόνιση $S^{2n-1} \rightarrow S^n$. Ύστερα από παραμόρφωση, εάν είναι απαραίτητη, η αναλλοίωτη είναι ο αριθμός σύνδεσης των προεικόνων σημείων. Για n περιττούς ο Hopf έδειξε ότι η αναλλοίωτη Hopf είναι μηδέν. Για n άρτιους κατασκεύασε απεικονίσεις με οποιονδήποτε δεδομένο άρτιο ακέραιο ως αναλλοίωτη Hopf. Έθεσε το ερώτημα εάν υπάρχουν απεικονίσεις, για συγκεκριμένες τιμές του n , οι οποίες να έχουν αναλλοίωτη Hopf περιττή και έδειξε ότι αυτό ισχύει για τις περιπτώσεις $n = 1, 2, 4, 8$ χρησιμοποιώντας τις παραπάνω δέσμες ινών.

Η απάντηση ήρθε 25 χρόνια μετά από τον από τον Adams [1], ο οποίος έδειξε ότι οι μόνες απεικονίσεις $S^{2n-1} \rightarrow S^n$ οι οποίες έχουν αναλλοίωτη Hopf ίση με 1 είναι οι περιπτώσεις για $n = 2, 4, 8$, δηλαδή οι παραπάνω δέσμες ινών που είχε υπολογίσει ο Hopf. Το θεώρημα του Adams έχει αρκετές ενδιαφέροντες συνέπειες (βλέπε σελίδα 428 του [4]), μια από αυτές είναι ότι **οι μόνες δέσμες ινών σφαιρών που υπάρχουν είναι οι περιπτώσεις $n = 1, 2, 4, 8$, δηλαδή οι Hopf fibrations.**

Μέρος II

Ομάδες ομοτοπίας σφαιρών και ο
υπολογισμός της τρίτης ομάδας
ομοτοπίας της σφαίρας

2 Ομάδα ομοτοπίας

Το υπόλοιπο μέρος της πτυχιακής θα αφιερωθεί σε αποτελέσματα των ομάδων ομοτοπίας της αλγεβρικής τοπολογίας. Αφού τις ορίσουμε και δείξουμε κάποιες από τις ιδιότητες τους θα προχωρήσουμε στο να χτίσουμε τα κατάλληλα εργαλεία έτσι ώστε να δείξουμε ότι $\pi_3(S^2) \cong \mathbb{Z}$ (η τρίτη ομάδα ομοτοπίας της διδιάστατης σφαίρας είναι ισόμορφη με την προσθετική ομάδα των ακέραιων αριθμών). Συνηθίζεται να ορίζεται πρώτα η θεμελιώδης ομάδα και ύστερα η ομάδα ομοτοπίας όπως ήταν και η χρονολογική σειρά ανακάλυψής τους. Πρώτος όρισε τη θεμελιώδη ομάδα ο Henri Poincaré το 1892 στην ανακοίνωση του για την εργασία του *Analysis situs* (τοπολογία) [27]. Την ομάδα ομοτοπίας πρώτος όρισε ο Eduard Čech το 1932 στο Διεθνές Συνέδριο των Μαθηματικών στην Ζυρίχη¹⁰. Στο παρακάτω κείμενο θα ορίσουμε τις ομάδες ομοτοπίας και θα μιλήσουμε για τη θεμελιώδη ομάδα ως την ειδικότερη περίπτωση τους.

2.1 Ορισμοί και ιδιότητες των ομάδων ομοτοπίας

Αρχικά ορίζουμε τα παρακάτω:

- Έστω I^n ο n -διάστατος κύβος, δηλαδή το καρτεσιανό γινόμενο n διαστημάτων $[0, 1]$.
- Το σύνορο ∂I^n είναι ο υπόχωρος του I^n ο οποίος αποτελείται από σημεία τ.ω. τουλάχιστον μία συντεταγμένη τους να είναι 0 ή 1.
- Απεικονίσεις που συμβολίζουμε $f : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$ θα είναι απεικονίσεις $f : I^n \rightarrow X$ τ.ω. $f(\partial I^n) = x_0$, όπου το $x_0 \in X$ λέμε είναι **σημείο βάσης** ή απλώς **βάση** του X .
- **Ομοτοπία** από $f : X \rightarrow Y$ σε $g : X \rightarrow Y$ είναι συνεχής απεικόνιση $H : X \times I \rightarrow Y$, τέτοια ώστε:

$$H(x, 0) = f(x) \text{ και } H(x, 1) = g(x).$$

Ισοδύναμα λέμε ότι ομοτοπία είναι οποιαδήποτε οικογένεια συνεχών απεικονίσεων $f_t : X \rightarrow Y$ τέτοια ώστε $H(x, t) = f_t(x)$ όπου ισχύει:

$$f(x) = f_0(x), \quad g(x) = f_1(x).$$

- Δύο απεικονίσεις $g, h : X \rightarrow Y$ είναι **ομοτοπικές** εάν υπάρχει ομοτοπία f_t τέτοια ώστε $g = f_0, h = f_1$. Τότε γράφουμε $f_0 \simeq f_1$.

Η ομοτοπία είναι η βασική έννοια της θεωρίας ομοτοπίας. Γενικότερα όταν δύο απεικονίσεις είναι ομοτοπικές σημαίνει ότι μπορούμε να παραμορφώσουμε συνεχώς την μια ως προς την άλλη μέσω κάποιας ομοτοπίας. Ένα από τα πιο απλά παραδείγματα ομοτοπίας είναι η **ομοτοπία δρόμων**.

Ομοτοπία δρόμων, από $\sigma : I \rightarrow X$ σε $\tau : I \rightarrow X$ είναι συνεχής απεικόνιση $H : I \times I \rightarrow X$ τέτοια ώστε:

$$H(s, 0) = \sigma(s), \quad H(s, 1) = \tau(s)$$

και

$$H(0, t) = \sigma(0) = \tau(0), \quad H(1, t) = \sigma(1) = \tau(1)$$

¹⁰Σύμφωνα με τον I.M. James στην σελίδα 566 του [11], ο Čech έδειξε ότι η ομάδες ομοτοπίας είναι αβελιανές σε αντίθεση με την θεμελιώδη ομάδα. Ενδιαφέρον είναι ότι στην συζήτηση ύστερα από την ομιλία του, ο Paul Alexandroff μαζί με άλλους έπεισαν τον Čech ότι αυτές οι ομάδες δεν έχουν κάποιο ενδιαφέρον, εφόσον πίστευαν ότι δεν μπορούσαν να δώσουν κάποια παραπάνω πληροφορία από την ομολογία. Αποθαρρυσμένος ο Čech δεν κυνήγησε άλλο την ιδέα αυτή. Εν συνέχεια ο Witold Hurewicz ξαναόρισε τις ομάδες ομοτοπίας το 1935, έδειξε κάποιες από τις θεμελιώδεις ιδιοτητές τους και έδωσε έναν τρόπο υπολογισμού τους ο οποίος έγινε ύστερα γνωστός ως θεώρημα Hurewicz.

Παραδειγμα: Όλοι οι δρόμοι $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ και $\tau : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ με κοινή αρχή και κοινό τέλος, δηλαδή $\sigma(0) = \tau(0) = x_0$ και $\sigma(1) = \tau(1) = x_1$, είναι ομοτοπικοί μέσω ομοτοπίας $H(s, t) = (1-t)\sigma(s) + t\tau(s)$. Η ομοτοπία αυτή λέγεται **ευθειακή ομοτοπία** εφόσον κάθε δύο σημεία των σ, τ συνδέονται με ευθείες, αυτό φαίνεται σταθεροποιώντας το $s \in I$.

Παρατηρούμε ότι η ομοτοπία δρόμων αποτελεί μέλος μιας ειδικότερης μορφής ομοτοπίας εφόσον περιέχει τις παραπάνω συνθήκες $H(0, t) = \sigma(0) = \tau(0)$ και $H(1, t) = \sigma(1) = \tau(1)$. Θα λέμε ότι η ομοτοπία δρόμων είναι σχετική προς τα περατά των δρόμων.

Ορισμός 3. Για $A \subseteq X$, ομοτοπία από $f : X \rightarrow Y$ σε $g : X \rightarrow Y$ **σχετική προς το A** , ή **ομοτοπία $\text{rel}A$** , είναι συνεχής απεικόνιση $H : X \times I \rightarrow Y$, τέτοια ώστε $H(x, 0) = f(x)$ και $H(x, 1) = g(x)$ για κάθε $x \in X$, και $H(a, t) = H(a, 0)$ για κάθε $a \in A$ και κάθε $t \in I$.

Τώρα θα ορίσουμε την **ομάδα ομοτοπίας**:

Για ένα σύνολο X με βάση $x_0 \in X$ ορίζουμε $\pi_n(X, x_0)$ να είναι το σύνολο των **ομοτοπικών κλάσεων** των απεικονίσεων $f : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$, όπου οι ομοτοπίες f_t ικανοποιούν $f_t(\partial I^n) = x_0$ για κάθε $t \in I$, δηλαδή σχετική προς το ∂I^n .

Ομοτοπική κλάση ορίζουμε την κλάση απεικονίσεων με την σχέση ισοδυναμίας $f \sim g$ αν οι f, g είναι ομοτοπικές και την συμβολίζουμε $[f]$.

Πρόταση 4. Η σχέση ομοτοπίας των $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$, τ.ω. να υπάρχει ομοτοπία f_t όπου ισχύει $f_t(A) \subseteq B$ για κάθε $t \in I$, είναι σχέση ισοδυναμίας.

Απόδειξη:

- **Ανακλαστική ιδιότητα:** Έχουμε $f \simeq f$ μέσω της σταθερής ομοτοπίας $f_t = f$, άρα $f_t(a) = f(a)$ και $f_t(A) = f(A) \subseteq B$.
- **Συμμετρική ιδιότητα:** Εάν $f \simeq g$ μέσω ομοτοπίας f_t όπου ισχύει $f_t(A) \subseteq B$, τότε έχουμε $g \simeq f$ μέσω της αντίστροφης ομοτοπίας f_{1-t} , άρα $f_{1-t}(A) \subseteq B$.
- **Μεταβατική ιδιότητα:** Εάν $f_0 \simeq f_1$ μέσω f_t και $g_0 \simeq g_1$ μέσω g_t , τέτοιο ώστε $f_t(A) \subseteq B$, $g_t(A) \subseteq B$ για κάθε $t \in I$, αντίστοιχα, και $f_1 = g_0$. Τότε $f_0 \simeq g_1$ μέσω ομοτοπίας h_t όπου ορίζεται

$$h_t(s) = \begin{cases} f_{2t}(s), & \text{για } 0 \leq t \leq 1/2 \\ g_{2t-1}(s), & \text{για } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Η h_t είναι συνεχής εφόσον για $t = 1/2$ έχουμε $h_{1/2} = f_1 = g_0$, άρα από το λήμμα επικόλλησης έχουμε την συνέχεια. Η h_t αποτελεί ομοτοπία των f_0, g_1 γιατί $h_0 = f_0$ και $h_1 = g_1$, επίσης έχουμε $h_t(A) \subseteq B$ για κάθε $t \in I$ εφόσον $f_{2t}(A) \subseteq B$ και $g_{2t-1}(A) \subseteq B$ για κάθε $t \in I$.

□

Συνεπώς όταν $X = I^n$, $A = \partial I^n$, $Y = X$ και $B = x_0$ έχουμε για τις $f : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$ ότι η σχέση ομοτοπίας σχετική προς το ∂I^n , είναι σχέση ισοδυναμίας.

Ο ορισμός της ομάδας ομοτοπίας επεκτείνεται και στην περίπτωση $n = 0$, δηλαδή $\pi_0(X, x_0)$ παίρνοντας το I^0 να είναι σημείο και το ∂I^0 να είναι κενό. Μπορούμε να δείξουμε ότι το $\pi_0(X, x_0)$ είναι το σύνολο των συνεκτικών κατά δρόμους συνιστωσών του X .

Πρόταση 5. Τα στοιχεία της $\pi_0(X, x_0)$ είναι οι συνεκτικές κατά δρόμους συνιστώσες του X .

Απόδειξη: Έχουμε $f : (I^0, \partial I^0) \rightarrow (X, x_0)$ όπου $I^0 = \{*\}$ ένα αυθαίρετο σημείο και $\partial I^0 = \emptyset$.

Άρα f είναι σταθερή απεικόνιση στο X , άρα $[f] \in \pi_0(X, x_0)$ αποτελεί την κλάση ομοτοπίας σημείων της X . Έστω $f(*) = x \in X$ και $g(*) = y \in X$ είναι δύο απεικονίσεις $I^0 \rightarrow X$ όπου είναι ομοτοπικές με $F : \{*\} \times I \rightarrow X$ τ.ω. $F(*, 0) = f(*) = x$ και $F(*, 1) = g(*) = y$. Έστω ομοιομορφισμός $G : I \rightarrow (\{*\} \times I)$, συνεπώς έχουμε ομοτοπία $F \circ G : I \rightarrow X$ τ.ω. $F \circ G(0) = x$ και $F \circ G(1) = y$ που είναι ένας δρόμος $x \rightarrow y$ στον X . Συνεπώς έχουμε:

$$\begin{aligned} f \sim g &\iff \exists F : \{*\} \times I \rightarrow X \quad \text{τ.ω.} \quad F(*, 0) = f(*) = x, F(*, 1) = g(*) = y \iff \\ &\iff \text{Υπάρχει δρόμος } F \circ G : I \rightarrow X \quad \text{τ.ω.} \quad F \circ G(0) = x, F \circ G(1) = y \iff \\ &\iff x \sim y \quad \text{εαν υπάρχει συνεκτικός κατά δρόμους υπόχωρος } A \subseteq X : x, y \in A \end{aligned}$$

Το τελευταίο συμβαίνει εφόσον σε κάθε ομοτοπική κλάση της $f : I^0 \rightarrow X$ ανήκουν οι σταθερές απεικονίσεις τ.ω. τα x και y να συνδέονται με δρόμο, δηλαδή όλα τα σημεία $x, y \in A$ τ.ω. ο A να είναι συνεκτικός κατά δρόμους. Άρα $[f] \in \pi_0(X, x_0)$ είναι αντίστοιχο με το σύνολο των συνεκτικών κατά δρόμους συνιστωσών του X . \square

Παρατηρούμε ότι εάν ο X είναι συνεκτικός κατά δρόμους χώρος, τότε το σύνολο $\pi_0(X, x_0)$ αποτελείται μόνο από μία ομοτοπική κλάση που θα περιέχει την σταθερή απεικόνιση στο σημείο βάσης x_0 .

Η ομάδα ομοτοπίας στην περίπτωση $n = 1$, δηλ. $\pi_1(X, x_0)$, λέγεται **θεμελιώδης ομάδα** και αποτελείται από ομοτοπικές κλάσεις **βρόχων** εφόσον $\partial I = \{0, 1\}$ και $f : (I, \partial I) \rightarrow (X, x_0)$ είναι δρόμος με $f(0) = f(1) = x_0 \in X$. Άρα οι ομοτοπίες $f_t : (I, \partial I) \rightarrow (X, x_0)$ αποτελούν συνεχείς παραμορφώσεις από τον έναν βρόχο στον άλλον τ.ω. να διατηρούν σταθερό το σημείο βάσης x_0 .

Όταν $n \geq 2$, ορίζουμε πράξη στο σύνολο των συνεχών απεικονίσεων $f : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$. Εάν $f, g : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$ ορίζουμε συνεχή απεικόνιση:

$$(f + g)(s_1, s_2, \dots, s_n) = \begin{cases} f(2s_1, s_2, \dots, s_n), & s_1 \in [0, 1/2] \\ g(2s_1 - 1, s_2, \dots, s_n), & s_1 \in [1/2, 1] \end{cases}$$

Στην περίπτωση $n = 1$, ορίζουμε πράξη στο σύνολο των βρόχων με βάση στο x_0 . Εάν $f, g : (I, \partial I) \rightarrow (X, x_0)$, ορίζουμε συνεχή απεικόνιση:

$$(f * g)(s_1) = \begin{cases} f(2s_1), & s_1 \in [0, 1/2] \\ g(2s_1 - 1), & s_1 \in [1/2, 1] \end{cases}$$

Αυτές οι πράξεις είναι καλά ορισμένες σε κλάσεις ομοτοπίας σχετικές προς το ∂I^n . Εάν $f_0, f_1, g_0, g_1 : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$ και $f_0 \simeq f_1, g_0 \simeq g_1$, τ.ω., για $n \geq 2$, $f_0 + g_0 \simeq f_1 + g_1$, και για $n = 1$, $f_0 * g_0 \simeq f_1 * g_1$.

Τώρα μπορούμε να αποδείξουμε ότι οι ομάδες ομοτοπίας είναι πράγματι ομάδες, κάτι που θα δείξουμε χωρίς μεγάλη λεπτομέρεια, απλά προσφέροντας τις ομοτοπίες που χρειάζονται.

Πρόταση 6. $H \pi_n(X, x_0)$ για $n \geq 1$ είναι ομάδα, και για $n \geq 2$ είναι αβελιανή ομάδα.

Απόδειξη:

- **Προσεταιριστικότητα:** $[(f+g)+h] = [f+(g+h)]$ για $f(1, \dots, s_n) = g(0, \dots, s_n)$ και $g(1, \dots, s_n) = h(0, \dots, s_n)$, ισχύει λόγω της ομοτοπίας:

$$H(s_1, \dots, s_n, t) \begin{cases} f\left(\frac{4s_1}{1+t}, \dots, s_n\right), & 0 \leq s_1 \leq \frac{1+t}{4} \\ g(4s_1 - 1 - t, \dots, s_n), & \frac{1+t}{4} \leq s_1 \leq \frac{2+t}{4} \\ h\left(\frac{4s_1 - 2 - t}{2-t}, \dots, s_n\right), & \frac{2+t}{4} \leq s_1 \leq 1 \end{cases}$$

- **Ουδέτερο Στοιχείο:** $[f + c_{x_0}] = [f] = [c_{x_0} + f]$, όπου $c_{x_0} : I^n \rightarrow X$ σταθερή απεικόνιση στο x_0 .

Η πρώτη ισότητα ισχύει μέσω της ομοτοπίας

$$G(s_1, \dots, s_n, t) = \begin{cases} f\left(\frac{s_1}{1-t/2}, \dots, s_n\right), & 0 \leq s_1 \leq \frac{2-t}{2} \\ c_{x_0}, & \frac{2-t}{2} \leq s_1 \leq 1 \end{cases}$$

Η δεύτερη ισότητα ισχύει μέσω της ομοτοπίας

$$F(s_1, \dots, s_n, t) = \begin{cases} c_{x_0}, & 0 \leq s_1 \leq \frac{t}{2} \\ f\left(\frac{s_1 - t/2}{1-t/2}, \dots, s_n\right), & \frac{t}{2} \leq s_1 \leq 1 \end{cases}$$

Θα συμβολίζουμε πολλές φορές το ουδέτερο στοιχείο ως 0 .

- **Αντίστροφο στοιχείο:** Ορίζουμε το αντίστροφο στοιχείο της f στην $\pi_n(X, x_0)$ το \bar{f} τ.ω. $\bar{f}(s_1, \dots, s_n) = f(1 - s_1, \dots, s_n)$ και ισχύει $[f + \bar{f}] = 0 = [\bar{f} + f]$.

Η πρώτη ισότητα ισχύει μέσω της ομοτοπίας

$$K(s_1, \dots, s_n, t) = \begin{cases} f(2s_1, \dots, s_n), & 0 \leq s_1 \leq \frac{t}{2} \\ f(t, s_2, \dots, s_n), & \frac{t}{2} \leq s_1 \leq 1 - \frac{t}{2} \\ \bar{f}(2s_1 - 1, \dots, s_n), & 1 - \frac{t}{2} \leq s_1 \leq 1 \end{cases}$$

Η δεύτερη ισότητα ισχύει μέσω της ομοτοπίας

$$P(s_1, \dots, s_n, t) = \begin{cases} \bar{f}(2s_1, \dots, s_n), & 0 \leq s_1 \leq \frac{t}{2} \\ \bar{f}(t, \dots, s_n), & \frac{t}{2} \leq s_1 \leq 1 - \frac{t}{2} \\ f(2s_1 - 1, \dots, s_n), & 1 - \frac{t}{2} \leq s_1 \leq 1 \end{cases}$$

Μια απεικόνιση η οποία είναι ομοτοπική με την σταθερή απεικόνιση θα λέμε ότι είναι **ομοτοπικά τετριμμένη**.

Παρατήρηση: Η προσθετική πράξη $f + g$ των ομάδων ομοτοπίας $\pi_n(X, x_0)$ για $n \geq 2$ μπορεί να οριστεί σε οποιαδήποτε συντεταγμένη s_i χωρίς να χαλάσει την δομή της ομάδας. Δηλαδή αντίστοιχα θα μπορούσαμε να είχαμε ορίσει την προσθετική πράξη στην ομάδα ομοτοπίας $\pi_n(X, x_0)$ για $n \geq 2$:

$$(f +_i g)(s_1, \dots, s_n) = \begin{cases} f(s_1, \dots, s_{i-1}, 2s_i, s_{i+1}, \dots, s_n), & s_i \in [0, 1/2] \\ g(s_1, \dots, s_{i-1}, 2s_i - 1, s_{i+1}, \dots, s_n), & s_i \in [1/2, 1] \end{cases}$$

Ο λόγος διαφορετικού συμβολισμού της πράξης της θεμελιώδους ομάδας και της ομάδας ομοτοπίας είναι ότι οι ομάδες ομοτοπίας $\pi_n(X, x_0)$ για $n \geq 2$ είναι αβελιανές, σε αντίθεση με την θεμελιώδη ομάδα. Φαίνεται ότι $f + g \simeq g + f$ μέσω της ομοτοπίας που παριστάνεται στο παρακάτω σχήμα.

$$\boxed{f \mid g} \simeq \boxed{\boxed{f} \mid \boxed{g}} \simeq \boxed{\boxed{f} \mid \boxed{g}} \simeq \boxed{\boxed{g} \mid \boxed{f}} \simeq \boxed{g \mid f}$$

Σχήμα 13: Σελίδα 340 του [4]

Η ομοτοπία αρχικά συρρικνώνει τα πεδία ορισμού του f και g σε μικρότερους κύβους του I^n , τ.ω. η περιοχή γύρω από τους κύβους αυτούς να στέλνονται στο σημείο βάσης. Έπειτα σέρνουμε τους δύο κύβους οπουδήποτε μέσα στο I^n έτσι ώστε η τομή τους σε όλη την διάρκεια να είναι κενή. Άρα εφόσον $n \geq 2$ μπορεί να περάσει το ένα το άλλο αλλάζοντας θέσεις. Τέλος μεγαλώνουμε τα πεδία ορισμού των f και g στο αρχικό τους μέγεθος. Αυτή η κατασκευή φυσικά δεν γίνεται στην θεμελιώδη ομάδα εφόσον δεν έχουμε την ελευθερία να κινηθούμε σε παραπάνω διαστάσεις. \square

Ένας ίσως πιο διαισθητικός τρόπος να φανταζόμαστε τα στοιχεία των ομάδων ομοτοπίας και της θεμελιώδους ομάδας είναι να δούμε ότι οι απεικονίσεις $(I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$ είναι ίδιες με τις απεικονίσεις του πηλίκου $I^n / \partial I^n = S^n$ που στέλνονται στον X , τ.ω. το $s_0 = \partial I^n / \partial I^n$ να στέλνεται στο x_0 . Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να δούμε την $\pi_n(X, x_0)$ ως τις ομοτοπικές κλάσεις απεικονίσεων $(S^n, s_0) \rightarrow (X, x_0)$, όπου οι ομοτοπίες είναι μέσω απεικονίσεων της ίδιας μορφής $(S^n, s_0) \rightarrow (X, x_0)$. Σε αυτή την ερμηνεία της $\pi_n(X, x_0)$ η πράξη $f + g$ είναι η σύνθεση

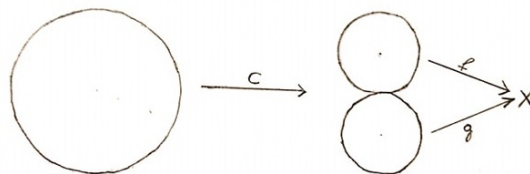
$$S^n \xrightarrow{c} S^n \vee S^n \xrightarrow{f \vee g} X$$

Γενικότερα δεδομένου δύο χώρων X και Y με συγκεκριμένα σημεία $x_0 \in X$ και $y_0 \in Y$, τότε $X \vee Y$ ορίζουμε να είναι το πηλίκο της ξένης ένωσης $X \sqcup Y$ ταυτίζοντας το x_0 και y_0 σε ένα σημείο.

Άρα για $n = 1$ έχουμε

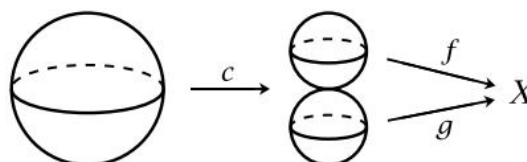
$$S^1 \xrightarrow{c} S^1 \vee S^1 \xrightarrow{f \vee g} X$$

όπου το c καταρρέει τον ισημερινό $S^0 \subseteq S^1$ σε ένα σημείο και s_0 παίρνουμε να είναι αυτό το σημείο, άρα από αυτό παίρνουμε το οχτάρι που φαίνεται στο παρακάτω σχημα και με την $f \vee g$ εννοούμε ότι η f ορίζεται στο πρώτο μέρος της $S^1 \vee S^1$ και η g ορίζεται στο δεύτερο μέρος της $S^1 \vee S^1$.



Σχήμα 14: $S^1 \rightarrow S^1 \vee S^1 \rightarrow X$

Τέλος είναι καλά ορισμένη εφόσον τα δύο μέρη της $S^1 \vee S^1$ έχουν κοινό σημείο στο s_0 όπως και οι f και g έχουν την ίδια τιμή στο σημείο αυτό. Ακριβώς αντίστοιχα και για $n \geq 2$ έχουμε ότι η c καταρρέει τον ισημερινό $S^{n-1} \subseteq S^n$ σε ένα σημείο και s_0 παίρνουμε να είναι αυτό το σημείο. Είναι καλά ορισμένη για τους ίδιους λόγους με ανωτέρω.



Σχήμα 15: $S^n \rightarrow S^n \vee S^n \rightarrow X$. Σελίδα 341 του [4]

2.2 Επαγόμενοι ομομορφισμοί

Έστω $\phi : X \rightarrow Y$ τ.ω. $\phi(x_0) = y_0$, δηλαδή μια απεικόνιση η οποία στέλνει τη βάση $x_0 \in X$ στην βάση $y_0 \in Y$. Για συντομία γράφουμε $\phi : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$. Τότε η ϕ επάγει ομομορφισμό $\phi_* : \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0)$ για $n \geq 1$ η οποία ορίζεται από τη σύνθεση της $f : I^n \rightarrow X$ με βάση το x_0 και της ϕ , δηλαδή $\phi_*[f] = [\phi \circ f]$.

Πρόταση 7. Έστω $\phi : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ μια συνεχής απεικόνιση, τότε η $\phi_* : \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0)$ για $n \geq 1$ τ.ω. $\phi_*[f] = [\phi \circ f]$ είναι ομομορφισμός ομάδων με τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. $(\text{id}_X)_* = \text{id}_{\pi_n(X, x_0)}$, δηλαδή ότι η ταυτοτική απεικόνιση $\text{id} : X \rightarrow X$ επάγει ταυτοτική απεικόνιση $\text{id} : \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(X, x_0)$.
2. $(\psi \circ \phi)_* = \psi_* \circ \phi_*$ για σύνθεση $(X, x_0) \xrightarrow{\phi} (Y, y_0) \xrightarrow{\psi} (Z, z_0)$.
3. Αν η ϕ είναι ομομορφισμός, τότε η ϕ_* είναι ισομορφισμός ομάδων.

Απόδειξη: Έστω $[f], [g] \in \pi_n(X, x_0)$.

- **Η ϕ_* είναι καλά ορισμένη:** εάν $H : I^n \times I \rightarrow X$ είναι μία ομοτοπία των f και g , τότε η $\phi \circ H : I^n \times I \rightarrow Y$ είναι μια ομοτοπία των $\phi \circ f$ και $\phi \circ g$. Συνεπώς έχουμε

$$\phi_*([f]) = [\phi \circ f] = [\phi \circ g] = \phi_*([g])$$

- **Η ϕ_* είναι ομομορφισμός:** έχουμε

$$\begin{aligned} \phi_*([f][g]) &= \phi_*([f + g]) \\ &= [\phi \circ (f + g)] \\ &= [(\phi \circ f) + (\phi \circ g)] \\ &= [\phi \circ f][\phi \circ g] \\ &= \phi_*([f])\phi_*([g]) \end{aligned} \tag{1}$$

(1) ισχύει διότι

$$\phi \circ (f + g)(s_1, \dots, s_n) = \begin{cases} \phi(f(2s_1, \dots, s_n)), & 0 \leq s_1 \leq 1/2 \\ \phi(g(2s_1 - 1, \dots, s_n)), & 1/2 \leq s_1 \leq 1 \end{cases}$$

όμως η δεξιά έκφραση είναι ακριβώς η $(\phi \circ f) + (\phi \circ g)$. Άρα $[\phi \circ (f + g)] = [(\phi \circ f) + (\phi \circ g)]$

1. $(\text{id}_X)_* = \text{id}_{\pi_n(X, x_0)}$ ισχύει διότι:

$$\begin{aligned} (\text{id}_X)_*([f]) &= [\text{id}_X \circ f] \\ &= [f] \\ &= \text{id}_{\pi_n(X, x_0)}([f]) \end{aligned}$$

2. $(\psi \circ \phi)_* = \psi_* \circ \phi_*$ ισχύει διότι:

$$\begin{aligned} (\psi_* \circ \phi_*)([f]) &= \psi_*(\phi_*([f])) \\ &= \psi_*([\phi \circ f]) \\ &= [\psi \circ \phi \circ f] \\ &= (\psi \circ \phi)_*([f]) \end{aligned}$$

3. Έστω $[h] \in \pi_n(Y, y_0)$.

Εάν ϕ είναι ομοιομορφισμός, με αντίστροφο ϕ^{-1} , τότε από τα 1 και 2 έχουμε

$$(\phi^{-1})_* \circ \phi_*([f]) = (\phi^{-1} \circ \phi)_*([f]) = (\text{id}_X)_*[f] = [f]$$

$$\phi_* \circ (\phi^{-1})_*([h]) = (\phi \circ \phi^{-1})_*([h]) = (\text{id}_Y)_*[h] = [h]$$

Δηλαδή $(\phi^{-1})_*$ είναι ο αντίστροφος ομομορφισμός της ϕ_* . Άρα ομοιομορφισμός τοπολογικών χώρων επάγει ισομορφισμό ομάδων ομοτοπίας.

□

2.3 Ομοτοπική ισοδυναμία

Μιλήσαμε για ομοτοπίες μεταξύ συνεχών απεικονίσεων, υπάρχει και μια άλλη σχέση ισοδυναμίας η οποία είναι μεταξύ τοπολογικών χώρων και λέγεται **ομοτοπική ισοδυναμία**.

Ορισμός 4. Δύο χώροι X, Y είναι **ομοτοπικά ισοδύναμοι** και γράφονται $X \simeq Y$, όταν υπάρχουν συνεχείς απεικονίσεις $f : X \rightarrow Y$ και $g : Y \rightarrow X$ τ.ω.

$$g \circ f \simeq \text{id}_X \quad \text{και} \quad f \circ g \simeq \text{id}_Y$$

Εδώ φαίνεται ότι ο ομοιομορφισμός είναι πιο ισχυρή συνθήκη από την ομοτοπική ισοδυναμία

Πρόταση 8. Εάν δύο χώροι X, Y είναι ομοιομορφικοί τότε είναι και ομοτοπικά ισοδύναμοι.

Απόδειξη: Έστω $f : X \rightarrow Y$ ομοιομορφισμός, συνεπώς ισχύει

$$f \circ f^{-1} = \text{id}_Y \quad \text{και} \quad f^{-1} \circ f = \text{id}_X$$

□

Ορισμός 5. Ένας χώρος X λέγεται **συσταλτός**, όταν είναι ομοτοπικά ισοδύναμος με ένα σημείο.

Παράδειγμα συσταλτού χώρου είναι ο \mathbb{R}^n

Πρόταση 9. Ο \mathbb{R}^n είναι ομοτοπικά ισοδύναμος με σημείο, δηλαδή είναι συσταλτός.

Απόδειξη: Έστω $\{x_0\}$ ένα αυθαίρετο σημείο, τότε ορίζουμε

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \{x_0\}, \text{ τ.ω. } f(x) = x_0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}^n$$

και

$$g : \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}^n, \text{ τ.ω. } g(x_0) = 0 \in \mathbb{R}^n$$

οι οποίες είναι σταθερές άρα και συνεχείς.

Στη συνέχεια έχουμε $(f \circ g)(x_0) = x_0$, δηλαδή

$$f \circ g = \text{id}_{\{x_0\}}$$

και

$$(g \circ f)(x) = 0 \simeq \text{id}_{\mathbb{R}^n}$$

η ομοτοπία μεταξύ της σταθερής απεικόνισης στο 0 και της ταυτοτικής απεικόνισης $\text{id}_{\mathbb{R}^n}$ είναι η $H(x, t) = tx$ για $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times I$ □

Τώρα θα δείξουμε ένα βασικό αποτέλεσμα για τους συσταλτούς χώρους.

Πρόταση 10. *Εάν Y είναι συσταλτός χώρος και X είναι τοπολογικός χώρος, τότε εάν $f, g : X \rightarrow Y$ είναι συνεχείς, είναι και ομοτοπικές.*

Απόδειξη: Αφού ο Y είναι συσταλτός και $y_0 \in Y$, υπάρχουν συνεχείς $h : Y \rightarrow \{y_0\}$ και $j : \{y_0\} \rightarrow Y$ τ.ω.

$$h \circ j = \text{id}_{\{y_0\}} \quad \text{και} \quad j \circ h \simeq \text{id}_Y$$

Συνεπώς έχουμε:

$$f = (\text{id}_Y \circ f) \simeq (j \circ h \circ f)$$

$$g = (\text{id}_Y \circ g) \simeq (j \circ h \circ g)$$

Τέλος εφόσον οι $h \circ f, h \circ g : X \rightarrow \{y_0\}$ είναι σταθερές απεικονίσεις τότε και οι $j \circ h \circ f, j \circ h \circ g$ είναι σταθερές άρα ισχύει:

$$f = (\text{id}_Y \circ f) \simeq (j \circ h \circ f) = (j \circ h \circ g) \simeq (\text{id}_Y \circ g) = g \implies f \simeq g$$

□

Τώρα έχουμε άμεσα το παρακάτω

Πόρισμα 1. *Εάν $g : X \rightarrow Y$ είναι συνεχής και Y συσταλτός χώρος τότε υπάρχει ομοτοπία της g με σταθερή απεικόνιση σε $y_0 \in Y$.*

Απόδειξη: Κάθε σταθερή απεικόνιση $c_{y_0} : X \rightarrow Y$ τ.ω. $c_{y_0}(X) = y_0$ είναι συνεχής άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις της Πρότασης 10. □

Παρατηρούμε ότι τα στοιχεία κάθε ομάδας ομοτοπίας ενός συσταλτού χώρου $\pi_n(Y, y_0)$ χαρακτηρίζονται ως οι κλάσεις ομοτοπίας απεικονίσεων $f : (S^n, s_0) \rightarrow (Y, y_0)$ άρα σύμφωνα με τα παραπάνω κάθε f είναι ομοτοπική με σταθερή απεικόνιση στο y_0 άρα **για κάθε ομάδα ομοτοπίας συσταλτού χώρου ισχύει $\pi_n(Y, y_0) = 0$.**

Ένα τελευταίο βασικό αποτέλεσμα της ομοτοπικής ισοδυναμίας είναι ότι εάν δύο χώροι X, Y είναι ομοτοπικά ισοδύναμοι τότε και οι ομάδες ομοτοπίας τους είναι ισόμορφες. Η απόδειξη αυτής της πρότασης δεν θα γίνει στο παρόν κείμενο.

Τώρα μπορούμε να ξεκινήσουμε να υπολογίζουμε κάποιες ομάδες ομοτοπίας όπου θα μας φανούν χρήσιμες στη συνέχεια.

2.4 Θεμελιώδης ομάδα της σφαίρας πολλών διαστάσεων

Θα δείξουμε ότι η $\pi_1(S^n) = 0$ για $n \geq 2$, άλλα πρώτα θα χρειαστούμε το παρακάτω Λήμμα.

Λήμμα. *Εάν ένας χώρος X είναι η ένωση μιας συλλογής κατά δρόμους συνεκτικών ανοιχτών συνόλων A_α , τ.ω. το καθένα περιέχει τη βάση $x_0 \in X$, το οποίο είναι non degenerate¹¹, και κάθε τομή $A_\alpha \cap A_\beta$ είναι κατά δρόμους συνεκτική, τότε κάθε βρόχος στο X με βάση x_0 είναι ομοτοπικός με γινόμενο βρόχων καθένας από τους οποίους περιέχεται σε ένα A_α .*

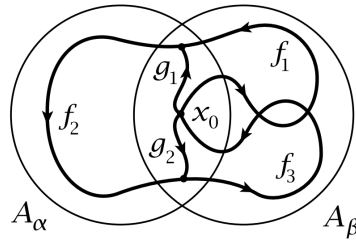
Απόδειξη: Έστω βρόχος $f : I \rightarrow X$ με βάση x_0 , τότε παίρνουμε διαμέριση $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_m = 1$ του I τ.ω. κάθε υποδιάστημα $[s_{i-1}, s_i]$ απεικονίζεται μέσω της f σε ένα A_α και $f(s_i) \in A_\alpha \cap A_\beta, \forall i \in [0, m]$.

Αυτό συμβαίνει διότι, εφόσον η f είναι συνεχής στο I έχουμε ότι για κάθε γειτονιά $V_{f(s)} \subseteq X$ του $f(s)$ υπάρχει γειτονιά U_s του s τ.ω. $f(U_s) \subseteq V_{f(s)}$.

Άρα για γειτονιά $V_{f(s)} = A_\alpha$ υπάρχει U_s τ.ω. $f(U_s) \subseteq A_\alpha$. Έστω για απλότητα $U_s = (s_{i-1}, s_i)$, τότε έχουμε ότι η κλειστότητα του (s_{i-1}, s_i) , δηλαδή το $[s_{i-1}, s_i]$, απεικονίζεται σε ένα A_α αφού έχουμε υποθέσει $f(s_{i-1}), f(s_i) \in A_\alpha \cap A_\beta \subseteq A_\alpha$.

Ύστερα εφόσον $[s_{i-1}, s_i], \forall i \in \mathbb{N}$ είναι κάλυμμα της I , δηλαδή $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} [s_{i-1}, s_i] = I$, και I συμπαγές σύνολο έχουμε ότι υπάρχει πεπερασμένο κάλυμμα τ.ω. $\bigcup_{i=0}^m [s_{i-1}, s_i] = I$.

¹¹Για τον ορισμό του non degenerate σημείου βάσης βλέπε σελίδα 380 του [29].



Σχήμα 16: Σελίδα 35 του [4]

Τώρα συμβολίζω το A_α που περιέχει το $f([s_{i-1}, s_i])$ με A_i και έστω το f_i να είναι ο δρόμος που παίρνουμε από τον περιορισμό της f στο $[s_{i-1}, s_i]$. Τότε η f είναι το γινόμενο $f_1 * \dots * f_m$, όπου f_i δρόμος στο A_i .

Αφού από υπόθεση έχουμε $A_i \cap A_{i+1}$ είναι κατά δρόμους συνεκτικό, επιλέγουμε g_i στο $A_i \cap A_{i+1}$ από το x_0 στο σημείο $f(s_i) \in A_i \cap A_{i+1}$, όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα.

Έστω ο βρόχος

$$(f_1 * \bar{g}_1) * (g_1 * f_2 * \bar{g}_2) * (g_2 * f_3 * \bar{g}_3) * \dots * (g_{m-1} * f_m) \quad (4)$$

λόγω της προσεταιριστικότητας της θεμελιώδους ομάδας η κλάση ομοτοπίας του παραπάνω βρόχου είναι ίση με την κλάση $[f_1 * \dots * f_m] = [f]$, δηλαδή υπάρχει ομοτοπία μεταξύ του βρόχου (4) και της f .

Ο βρόχος (4) αποτελείται από γινόμενο βρόχων, αυτών που βρίσκονται μέσα στις παρενθέσεις, όπου ο καθένας από αυτούς βρίσκεται μέσα σε ένα A_i . Αυτό συμβαίνει διότι το f_i βρίσκεται στο A_i και τα g_i, \bar{g}_i βρίσκονται στο $A_i \cap A_{i+1} \subseteq A_i$.

Άρα πράγματι κάθε βρόχος f στο X με βάση x_0 είναι ομοτοπικός με γινόμενο βρόχων $(f_1 * \bar{g}_1) * (g_1 * f_2 * \bar{g}_2) * (g_2 * f_3 * \bar{g}_3) * \dots * (g_{m-1} * f_m)$ όπου ο καθένας τους περιέχεται σε ένα A_i . \square

Τώρα μπορούμε να αποδείξουμε την παρακάτω Πρόταση.

Πρόταση 11. $\pi_1(S^n) = 0$ όταν $n \geq 2$.

Απόδειξη: Μπορούμε να εκφράσουμε την S^n ως την ένωση δύο ανοιχτών συνόλων A_1, A_2 , όπου για $N = (0, \dots, 1)$ και $S = (0, \dots, -1)$ να είναι ο βόρειος πόλος και ο νότιος πόλος αντίστοιχα έχουμε $A_1 = S^n \setminus \{N\}$ και $A_2 = S^n \setminus \{S\}$. Άρα έχουμε $A_1 \cup A_2 = S^n$ και $A_1 \cap A_2 = S^n \setminus (\{N\} \cup \{S\})$. Τα A_1, A_2 αποτελούν ανοιχτά σύνολα εφόσον το καθένα είναι συμπλήρωμα σημείου.

Τώρα για να χρησιμοποιήσουμε το προηγούμενο Λήμμα πρέπει να δείξουμε ότι το $A_1 \cap A_2$ είναι κατά δρόμους συνεκτικό. Αρχικά μέσω της στερεογραφικής προβολής έχουμε ότι $\sigma : S^n \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι ομοιομορφισμός, δηλαδή $S^n \setminus \{N\} \cong \mathbb{R}^n$, όμως εφόσον η σ είναι 1-1 και $\sigma(0, \dots, -1) = (0, \dots, 0)$ συμπεραίνουμε ότι παίρνοντας τον περιορισμό της σ στο $S^n \setminus (\{N\} \cup \{S\})$, δηλαδή βγάζοντας τον νότιο πόλο, έχουμε ομοιομορφισμό

$$S^n \setminus (\{N\} \cup \{S\}) \cong \mathbb{R}_*^n$$

ο \mathbb{R}_*^n για $n \geq 2$ ξέρουμε ότι είναι κατά δρόμους συνεκτικός αφού $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}_*^n$ έχουμε απεικόνιση $l : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_*^n$, $l(t) = (1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y}$ όταν $l(t) \neq \mathbf{0}, \forall t \in [0, 1]$.

Εάν $l(t) = \mathbf{0}$ για κάποιο $t \in [0, 1]$ μπορούμε να επιλέξουμε οποιοδήποτε $\mathbf{z} \in \mathbb{R}_*^n$ τ.ω. $l(t) \neq \mathbf{z}$, δηλαδή να μην ανήκει στην ευθεία που συνδέει τα \mathbf{x}, \mathbf{y} και ύστερα να ενώσουμε κατά ευθύγραμμα τμήματα το \mathbf{x} με το \mathbf{z} και το \mathbf{z} με το \mathbf{y} .

Άρα \mathbb{R}_*^n για $n \geq 2$ είναι κατά δρόμους συνεκτικό, συνεπώς $S^n \setminus (\{N\} \cup \{S\}) = A_1 \cap A_2$ για $n \geq 2$ είναι κατά δρόμους συνεκτικό, λόγω του $S^n \setminus (\{N\} \cup \{S\}) \cong \mathbb{R}_*^n$.

Δείξαμε ότι πληρούνται όλες οι προϋποθέσεις του παραπάνω Λήμματος.

Το Λήμμα μας λέει ότι κάθε βρόχος f της S^n με βάση x_0 είναι ομοτοπικός με ένα γινόμενο βρόχων, $f \simeq k_1 * k_2 * \dots * k_m$, με k_j βρόχο στο A_{α_j} , για $\alpha_j = 1$ ή 2 . Αφού οι χώροι A_1, A_2 είναι ομοιομορφικοί με το \mathbb{R}^n , είναι συσταλτοί, και $\pi_1(A_1), \pi_1(A_2)$ είναι μηδέν. Μέσω του εγκλεισμού $i_{\alpha_j} : A_{\alpha_j} \rightarrow S^n$, $[k_j]$ απεικονίζεται στο τετριμμένο στοιχείο του $\pi_1(S^n)$, και $[f] = [k_1] \dots [k_m] = [x_0]$. \square

3 Χώρος κάλυψης και ιδιότητες ανύψωσης

Ο σκοπός αυτής της ενότητας είναι να δείξουμε ότι $\pi_n(S^1) = 0$ για $n \geq 2$.

3.1 Χώρος κάλυψης

Δεδομένου ενός χώρου X , **χώρος κάλυψης** του X είναι ένας χώρος \tilde{X} και μια απεικόνιση $p : \tilde{X} \rightarrow X$ η οποία ικανοποιεί την ιδιότητα:

- Για κάθε $x \in X$ υπάρχει μια γειτονιά U_x του x τ.ω. $p^{-1}(U_x)$ είναι ξένη ένωση ανοιχτών συνόλων όπου το κάθε ανοιχτό σύνολο είναι ομοιομορφικό με το U_x μέσω της p .

Σχόλιο 1. Εδώ φαίνεται γιατί μια Δέσμη Ινών με Ίνα F η οποία είναι Διακριτός Χώρος, είναι χώρος κάλυψης. Τα σύνολα $U \times F$ αποτελούν ξένη ένωση από αντήγραφα του U και λόγω της πρώτης ιδιότητας της Δέσμης Ινών υπάρχει ομοιομορφισμός ψ τ.ω. $U \times F \cong p^{-1}(U)$ δηλαδή $U \cong p^{-1}(U)$, άρα συμπίπτει με τον ορισμό του χώρου κάλυψης για το $p^{-1}(U)$.

Επίσης μπορούμε να δούμε ότι οι ίνες του χώρου κάλυψης είναι Διακριτός Χώρος.

Πρόταση 12. Οι χώροι κάλυψης $p : \tilde{X} \rightarrow X$ έχουν ίνες $p^{-1}(y) = F_y$ όπου είναι Διακριτοί Χώροι.

Απόδειξη: Έστω $x \in p^{-1}(y) \subseteq \tilde{X}$, αφού \tilde{X} χώρος κάλυψης υπάρχει $U_x \subseteq \tilde{X}$ γειτονιά του x , τ.ω. $p|_{U_x} : U_x \rightarrow p(U_x)$ να είναι ομοιομορφισμός. Έστω $z \in U_x \cap p^{-1}(y)$, άρα

$$\{z \in U_x\} \cap \{z \in p^{-1}(y)\} \implies p(z) = p(x) = y, \text{ αφού } x \in p^{-1}(y)$$

όμως εφόσον $x, z \in U_x$ και $p|_{U_x} : U_x \rightarrow p(U_x)$ είναι 1-1 ισχύει:

$$p(z) = p(x) \implies z = x$$

Τέλος εφόσον επιλέξαμε τυχαία το z έχουμε $U_x \cap p^{-1}(y) = \{x\}$, άρα $p^{-1}(y) = F_y$ είναι Διακριτός χώρος. \square

3.2 Ιδιότητες ανύψωσης για χώρους κάλυψης

Θα δείξουμε κάποιες βασικές ιδιότητες ανύψωσης που έχουν οι χώροι κάλυψης οι οποίες θα μας βοηθήσουν να καταλήξουμε σε ένα πολύ γενικότερο αποτέλεσμα.

3.2.1 Ιδιότητα ανύψωσης ομοτοπίας

Για απεικόνιση $p : \tilde{X} \rightarrow X$, θα λέμε ότι η \tilde{f} είναι **ανύψωση** της $f : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ από το \tilde{x}_0 , όταν $p \circ \tilde{f} = f$ και $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_0$.

Οι χώροι κάλυψης έχουν την παρακάτω σημαντική ιδιότητα η οποία λέγεται **ιδιότητα ανύψωσης ομοτοπίας**:

- Έστω χώρος κάλυψης $p : \tilde{X} \rightarrow X$, μια ομοτοπία $f_t : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ και απεικόνιση $\tilde{f}_0 : Y \rightarrow \tilde{X}$ η οποία είναι ανύψωση της f_0 , τότε υπάρχει μοναδική ομοτοπία $\tilde{f}_t : (Y, y_0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{f}_0(y_0))$ της \tilde{f}_0 η οποία ανυψώνει την f_t .

Σχόλιο 2. Ένα γνωστό παράδειγμα χώρου κάλυψης είναι $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ τ.ω. $p(x) = e^{2\pi i x}$ (ταυτίζουμε τον κύκλο S^1 με το σύνολο $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$). Μάλιστα μαζί με την ιδιότητα ανύψωσης ομοτοπίας αποδεικνύεται ότι $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ με γεννήτορα την ταυτοτική απεικόνιση, κάτι που θα χρησιμοποιήσουμε στην συνέχεια χωρίς απόδειξη.

3.2.2 Ενεικονικότητα της ανύψωσης για χώρους κάλυψης

Πρόταση 13. Έστω χώρος κάλυψης $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$, τότε η επαγόμενη απεικόνιση $p_* : \pi_n(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_n(X, x_0)$ για $n \geq 1$ είναι ενεικονική.

Βρόχος αποτελεί στοιχείο της υποομάδας $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) \subseteq \pi_1(X, x_0)$ ανν αποτελεί ομοτοπική κλάση βρόχου του X με βάση το x_0 τ.ω. η ανύψωσή του στο \tilde{X} με βάση στο \tilde{x}_0 να είναι βρόχος.

Απόδειξη:

- Θα δείξουμε ότι $\ker p_* = 0$:

Ο πυρήνας της p_* είναι η προεικόνα του $0 \in \pi_n(X, x_0)$, έστω ένα τυχαίο στοιχείο του $\ker p_*$ που αντιπροσωπεύεται από απεικόνιση $\tilde{f}_0 : S^n \rightarrow \tilde{X}$ στέλνεται σε στοιχείο $f_0 = p\tilde{f}_0$ όπου υπάρχει ομοτοπία f_t τ.ω. το f_0 να είναι ομοτοπικό με σταθερή απεικόνιση f_1 . Χρησιμοποιώντας την **ιδιότητα ανύψωσης ομοτοπίας** έχουμε ότι υπάρχει ομοτοπία \tilde{f}_t από την \tilde{f}_0 μέχρι την \tilde{f}_1 , όμως από μοναδικότητα ανυψώσεων έχουμε ότι η ανύψωση της σταθερής f_1 είναι σταθερή απεικόνιση. Άρα η \tilde{f}_t είναι ομοτοπικά τετριμμένη που σημαίνει $[\tilde{f}_0] = 0 \in \pi_n(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ και αφού \tilde{f}_0 επιλέχτηκε τυχαία έχουμε $\ker p_* = 0$.

- Τώρα θα δείξουμε τον δεύτερο ισχυρισμό της Πρότασης.

Ξεκινώντας από την αριστερή κατεύθυνση (\Leftarrow):

Εάν βρόχος με βάση στο x_0 να ανυψώνεται σε βρόχο με βάση στο \tilde{x}_0 , εξ' ορισμού ανήκει στην εικόνα της $p_* : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$.

Δεξιά κατεύθυνση (\Rightarrow):

Έστω $[g] \in p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) \subseteq \pi_1(X, x_0)$, αυτό σημαίνει ότι έχουμε $[g] = p_*([f])$ όπου $[f] \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$, τότε η g είναι ομοτοπική με $p \circ f$ η οποία έχει ανύψωση το g , ο οποίος είναι βρόχος με βάση \tilde{x}_0 .

□

3.2.3 Κριτήριο ανύψωσης

Μια χρήσιμη ιδιότητα είναι η ύπαρξη ανυψώσεων γενικότερων απεικονίσεων και όχι μόνο ανυψώσεις ομοτοπιών όπου μας δίνει η **ιδιότητα ανύψωσης ομοτοπίας**. Η επόμενη πρόταση εξετάζει αυτό ακριβώς το **κριτήριο ανύψωσης**:

Πρόταση 14. Έστω χώρος κάλυψης $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ και μια απεικόνιση $f : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ όπου Y είναι συνεκτικός κατά δρόμους και τοπικά συνεκτικός κατά δρόμους¹². Τότε η ανύψωση $\tilde{f} : (Y, y_0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ υπάρχει ανν $f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subseteq p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$.

Απόδειξη:

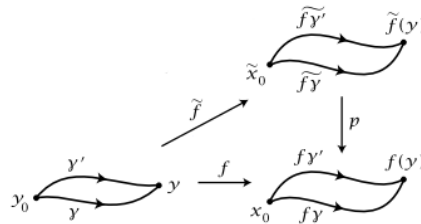
- Αρχίζουμε πρώτα με την δεξιά κατεύθυνση (\Rightarrow):

Έστω ότι υπάρχει ανύψωση $\tilde{f} : (Y, y_0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$, άρα έχουμε $f_* = (p\tilde{f})_* = p_*\tilde{f}_*$. Συνεπώς $f_*(\pi_1(Y, y_0)) = p_*\tilde{f}_*(\pi_1(Y, y_0)) \subseteq p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$, το οποίο είναι το ζητούμενο.

¹²Τοπικά συνεκτικός κατά δρόμους σημαίνει ότι για κάθε $y \in Y$ και για κάθε γειτονιά U του y υπάρχει μία ανοιχτή γειτονιά $V \subseteq U$ του y όπου είναι συνεκτική κατά δρόμους.

- Τώρα θα δείξουμε την αριστερή κατεύθυνση (\Leftarrow):
Έστω $y \in Y$ και έστω δρόμος $\gamma : I \rightarrow Y$ από το y_0 στο y . Ο δρόμος $f\gamma : I \rightarrow X$ ο οποίος ξεκινάει από το x_0 έχει μία μοναδική ανύψωση $\tilde{f}\gamma : I \rightarrow \tilde{X}$ η οποία ξεκινάει από το \tilde{x}_0 , λόγω της ιδιότητας ανύψωσης ομοτοπίας. Ορίζουμε $\tilde{f}(y) = \tilde{f}\gamma(1)$.

Τώρα χρειάζεται να δείξουμε ότι είναι καλά ορισμένο ανεξάρτητα της επιλογής του γ . Έστω $\gamma' : I \rightarrow Y$ άλλος δρόμος από το y_0 μέχρι το y . Τότε έχουμε $h_0 = (f\gamma') * (\tilde{f}\gamma)$ είναι βρόχος στο x_0 και $[h_0] \in f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subseteq p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$. Άρα υπάρχει ένας βρόχος \tilde{h}_1 στο \tilde{X} , με βάση \tilde{x}_0 , τ.ω. h_0 είναι ομοτοπικός προς τον $p\tilde{h}_1$. Τώρα χρησιμοποιώντας την ιδιότητα ανύψωσης ομοτοπίας, \tilde{h}_1 είναι ομοτοπικός προς ένα βρόχο \tilde{h}_0 τ.ω. $h_0 = p\tilde{h}_0$. Από την μοναδικότητα των ανυψώσεων δρόμων έχουμε ότι το πρώτο μισό του \tilde{h}_0

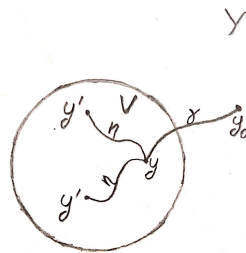


Σχήμα 17: Σελίδα 62 του [4]

είναι το $\tilde{f}\gamma'$ και το δεύτερο μισό είναι $\tilde{f}\gamma$ με αντίστροφη κατεύθυνση, με κοινό σημείο $\tilde{f}\gamma(1) = \tilde{f}\gamma'(1) = \tilde{f}(y)$. Αυτό μας δείχνει ότι η \tilde{f} είναι καλά ορισμένη.

Τώρα θα δείξουμε ότι \tilde{f} είναι συνεχής. Έστω $U \subseteq X$ μια ανοιχτή γειτονιά του $f(y)$ με ανύψωση $\tilde{U} \subseteq \tilde{X}$ που περιέχει το $\tilde{f}(y)$ τ.ω. η $p|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \rightarrow U$ να είναι ομοιομορφισμός. Λόγω του ότι η Y είναι τοπικά συνεκτική κατά δρόμους μπορώ να επιλέξω μια συνεκτική κατά δρόμους ανοιχτή γειτονιά V του y και ύστερα λόγω της συνέχειας της f έχουμε $f(V) \subseteq U$.

Για δρόμους από το y_0 μέχρι το $y' \in V$ παίρνουμε έναν συγκεκριμένο δρόμο γ από το y_0 στο y και ύστερα συνεχίζεται από δρόμους η στο V από το y μέχρι τα σημεία y' .



Τότε οι δρόμοι $(f\gamma) * (f\eta)$ στο X έχουν ανυψώσεις $(\tilde{f}\gamma) * (\tilde{f}\eta)$ τ.ω. $p\tilde{f}\eta = f\eta$. Εφόσον έχουμε $f(V) \subseteq U$ και p ομοιομορφισμός ισχύει $\tilde{f}\eta = p^{-1}f\eta$ όπου $(p|_{\tilde{U}})^{-1} : U \rightarrow \tilde{U}$ η αντίστροφη της p . Ύστερα εφόσον έχουμε $\text{im } \tilde{f}\eta \subseteq \tilde{U} \implies \tilde{f}(V) \subseteq \tilde{U}$ και $\tilde{f}|_V = p^{-1}f$, ισχύει ότι η \tilde{f} είναι συνεχής στο y .

□

Η υπόθεση ότι ο Y είναι τοπικά συνεκτικός κατά δρόμους είναι απαραίτητη για το **κριτήριο ανύψωσης** διότι χωρίς αυτό υπάρχουν παραδείγματα στα οποία αποτυγχάνει (βλέπε άσκηση 7, σελίδα 79 του [4]).

3.3 Ομάδες ομοτοπίας χώρων κάλυψης και οι ομάδες ομοτοπίας του κύκλου

Τώρα μπορούμε να δείξουμε πόσο καλά συμπεριφέρονται οι ομάδες ομοτοπίας όσον αφορά τους χώρους κάλυψης με την επόμενη Πρόταση.

Πρόταση 15. Η προβολή ενός χώρου κάλυψης $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ επάγει ισομορφισμό $p_* : \pi_n(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_n(X, x_0)$ για κάθε $n \geq 2$.

Απόδειξη:

- Επεικόνιση του p_* :

Χρησιμοποιούμε το κριτήριο ανύψωσης από την Πρόταση (14) το οποίο μας δείχνει ότι για απεικόνιση $f : (S^n, s_0) \rightarrow (X, x_0)$ υπάρχει η ανύψωση $\tilde{f} : (S^n, s_0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ αν $f_*(\pi_1(S^n, s_0)) \subseteq p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$. Όμως έχουμε δείξει ότι $\pi_1(S^n) = 0$ για $n \geq 2$ και αφού f_* είναι ομομορφισμός ομάδων έχουμε ότι $f_*(0) = 0$ άρα εφόσον ισχύει πάντα $0 \subseteq p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ έχουμε ότι κάθε f έχει ανύψωση \tilde{f} , δηλαδή:

$$\left(\forall [f] \in \pi_n(X, x_0) \quad \exists [\tilde{f}] \in \pi_n(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \quad \text{τ.ω.} \quad p_*([\tilde{f}]) = [f] \right) \implies p_* \text{ \textit{επεικόνιση}.}$$

- Ενεικόνιση του p_* :

Αυτό είναι άμεσο από την ιδιότητα ανύψωσης ομοτοπίας, τό έχουμε ήδη δείξει στην Πρόταση 13. □

Πρόταση 16. $\pi_n(S^1) = 0$ για $n \geq 2$.

Απόδειξη: Γνωρίζουμε ότι η S^1 έχει χώρο κάλυψης $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ άρα επάγει απεικόνιση $p_* : \pi_n(\mathbb{R}) \rightarrow \pi_n(S^1)$, από Πρόταση 15 έχουμε ότι $\pi_n(\mathbb{R})$ ισομορφικό με $\pi_n(S^1)$ για $n \geq 2$. Όμως γνωρίζουμε ότι \mathbb{R} είναι συσταλτός χώρος, άρα έχουμε $\pi_n(\mathbb{R}) = 0$. Συνεπώς $\pi_n(\mathbb{R}) = \pi_n(S^1) = 0$ για $n \geq 2$. □

4 Σχετική ομάδα ομοτοπίας και η μακρά ακριβής ακολουθία της

4.1 Ορισμός σχετικής ομάδας ομοτοπίας και το Compression Criterion

Πολύ χρήσιμες γενικεύσεις των ομάδων ομοτοπίας $\pi_n(X, x_0)$ είναι οι **σχετικές ομάδες ομοτοπίας** $\pi_n(X, A, x_0)$ για ζευγάρια τοπολογικών χώρων (X, A) , τ.ω. $A \subseteq X$ και σημείο βάσης $x_0 \in A$.

Ορίζουμε:

- I^{n-1} είναι η έδρα του I^n με την τελευταία συντεταγμένη $s_n = 0$, δηλαδή

$$I^{n-1} = \{(s_1, \dots, s_{n-1}, 0) \in I^n\}$$

- J^{n-1} είναι η κλειστότητα του $\partial I^n \setminus I^{n-1}$, η ένωση των εδρών του I^n εκτός του I^{n-1} , δηλαδή

$$J^{n-1} = \overline{(\partial I^n \setminus I^{n-1})}$$

Τότε η σχετική ομάδα ομοτοπίας $\pi_n(X, A, x_0)$ για $n \geq 1$ είναι το σύνολο των ομοτοπικών κλάσεων απεικονίσεων

$$f : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0), \quad \text{τ.ω.} \quad f(I^n) \subseteq X, \quad f(\partial I^n) \subseteq A, \quad f(J^{n-1}) = \{x_0\}$$

με ομοτοπίες F (ή αλλιώς f_t) μέσω απεικονίσεων της ίδιας μορφής, δηλαδή

$$F : (I^n \times I, \partial I^n \times I, J^{n-1} \times I) \rightarrow (X, A, x_0), \quad \text{τ.ω.} \quad F(I^n \times I) \subseteq X, \quad F(\partial I^n \times I) \subseteq A, \quad F(J^{n-1} \times I) = x_0$$

Η προσθετική πράξη στην $\pi_n(X, A, x_0)$ ορίζεται με τους ίδιους τύπους όπως και στην $\pi_n(X, x_0)$, απλώς τώρα η συντεταγμένη s_n έχει ιδιαίτερο ρόλο και δεν μπορεί να οριστεί η προσθετική πράξη σε αυτήν.

- Στην περίπτωση $A = \{x_0\}$ παρατηρούμε $\pi_n(X, x_0, x_0) = \pi_n(X, x_0)$, συνεπώς η ομάδα ομοτοπίας είναι ειδική περίπτωση της σχετικής ομάδας ομοτοπίας.
- Δεν υπάρχει κάποιος ικανοποιητικός τρόπος να ορίσουμε την $\pi_0(X, A, x_0)$, για αυτό δεν θα την ορίσουμε.
- Στην περίπτωση $n = 1$ έχουμε $I^1 = [0, 1]$, $I^0 = \{0\}$ και $J^0 = \{1\}$, συνεπώς η $\pi_1(X, A, x_0)$ είναι το σύνολο των ομοτοπικών κλάσεων απεικονίσεων $f : ([0, 1], \{0\} \cup \{1\}, \{1\}) \rightarrow (X, A, x_0)$, δηλαδή είναι το σύνολο των ομοτοπικών κλάσεων των δρόμων $f : [0, 1] \rightarrow X$ από ένα τυχαίο σημείο $f(0) \in A$ σε ένα σταθερό σημείο $f(1) = x_0 \in A$. Γενικότερα το σύνολο των κλάσεων ομοτοπιών δρόμων δεν αποτελεί ομάδα με την συνήθη πράξη αφού δεν έχουν μοναδικό ταυτοτικό στοιχείο. Στην περίπτωση $A = x_0$ τα f γίνονται βρόχοι και η σχετική ομάδα ομοτοπίας γίνεται η θεμελιώδης ομάδα $\pi_1(X, x_0)$.

Σχόλιο 3. Για κάθε δρόμο $f : I \rightarrow X$ από $y \in A$ μέχρι $x_0 \in A$ μπορούμε να βρούμε ομοτοπία με την σταθερή απεικόνιση στο x_0 συρρικνώνοντας την f μέσω του εαυτού της μέχρι το x_0 . Από αυτό μπορεί κάποιος να σκεφτεί ότι τότε το σύνολο $\pi_1(X, A, x_0)$ θα περιέχει μόνο μία ομοτοπική κλάση. Αυτό δεν ισχύει εφόσον για ομοτοπίες στο $\pi_1(X, A, x_0)$ πρέπει να ισχύει $f_t(\partial I) \subseteq A$ για κάθε t , όμως με την παραπάνω ομοτοπία θα υπάρχει κάποιο t τ.ω. $f_t(\partial I) \subseteq X$, άρα τα στοιχεία για τα οποία λειτουργεί η ομοτοπία αυτή είναι οι δρόμοι οι οποίοι περιέχονται στον A . Θα αποδείξουμε εν συνέχεια ένα κριτήριο το οποίο δείχνει ότι τα στοιχεία του $\pi_1(X, A, x_0)$ τα οποία περιέχονται στον A είναι τα μηδενικά στοιχεία του.

- Για $n \geq 2$ η $\pi_n(X, A, x_0)$ είναι ομάδα.
- Για $n \geq 3$ η $\pi_n(X, A, x_0)$ είναι αβελιανή ομάδα.

Όπως τα στοιχεία της $\pi_n(X, x_0)$ μπορούν να οριστούν ως ομοτοπικές κλάσεις των απεικονίσεων $(S^n, s_0) \rightarrow (X, x_0)$, έτσι και στις $\pi_n(X, A, x_0)$ υπάρχει ένας εναλλακτικός ορισμός τους ως το σύνολο των ομοτοπικών κλάσεων των απεικονίσεων $(D^n, S^{n-1}, s_0) \rightarrow (X, A, x_0)$ εφόσον καταρρέοντας το J^{n-1} σε ένα σημείο αλλάζει το $(I^n, \partial I^n, J^{n-1})$ σε (D^n, S^{n-1}, s_0) , δηλαδή

$$I^n / J^{n-1} \cong D^n, \quad \partial I^n / J^{n-1} \cong S^{n-1}, \quad J^{n-1} / J^{n-1} \cong s_0$$

Τότε η πράξη ορίζεται μέσω της απεικόνισης $c : D^n \rightarrow D^n \vee D^n$ καταρρέοντας την $D^{n-1} \subseteq D^n$ σε ένα σημείο.

Τώρα θα αποδείξουμε ένα Λήμμα που διαφωτίζει τι σημαίνει ένα στοιχείο του $\pi_n(X, A, x_0)$ να είναι τετριμμένο.

Αρχικά θα μας φανεί χρήσιμο το παρακάτω:

- Έστω A υπόχωρος του X , τότε μια ομοτοπία $F : X \times I \rightarrow X$ για την οποία ισχύουν:

- $F(x, 0) = x$, για κάθε $x \in X$
- $F(x, 1) \in A$, για κάθε $x \in X$
- $F(a, t) = a$, για κάθε $a \in A$

λέγεται **συστολή παραμόρφωσης**. Λέμε η συστολή παραμόρφωσης F του X στον A .

Λήμμα. (Compression Criterion): Μια απεικόνιση $(I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0)$ είναι τετριμμένο στοιχείο της $\pi_n(X, A, x_0)$ ανν είναι ομοτοπικά $\text{rel} \partial I^n$ με μια απεικόνιση με εικόνα που περιέχεται στο A .

Απόδειξη:

Ξεκινάμε με την αριστερή κατεύθυνση (\Leftarrow):

Έστω ότι υπάρχει ομοτοπία $\text{rel} \partial I^n$ μεταξύ της f και της g , και ότι $g(I^n) \subseteq A$. Αυτό σημαίνει ότι $[f] = [g] \in \pi_n(X, A, x_0)$. Ορίζουμε συστολή παραμόρφωσης F του I^n στο $I^{n-1} \times \{1\}$:

$$F : I^n \times I \rightarrow I^n, \quad (s_1, \dots, s_n, t) \mapsto (s_1, \dots, s_{n-1}, (1-t)s_n + t)$$

Αυτή η ομοτοπία αποτελεί συστολή παραμόρφωσης εφόσον:

- $F(s_1, \dots, s_n, 0) = (s_1, \dots, s_n)$
- $F(s_1, \dots, s_n, 1) = (s_1, \dots, s_{n-1}, 1)$
- $F(s_1, \dots, s_{n-1}, 1, t) = (s_1, \dots, s_{n-1}, 1)$

Έστω $G(s_1, \dots, s_n, t) := g \circ (F(s_1, \dots, s_n, t))$, παρατηρούμε ότι η G είναι ομοτοπία της g με την σταθερή απεικόνιση εφόσον

- για $t = 0$ έχουμε $G(s_1, \dots, s_n, 0) = g(s_1, \dots, s_n)$
- για $t = 1$ έχουμε $g(s_1, \dots, s_{n-1}, 1) = x_0$ εφόσον $(s_1, \dots, s_{n-1}, 1) \subseteq J^{n-1}$
- $G(\partial I^n) \subseteq A$, αφού $G(s_1, \dots, s_n, t) := g \circ (F(s_1, \dots, s_n, t))$

Άρα $[g] = 0 \in \pi_n(X, A, x_0)$, όμως εφόσον έχουμε $[f] = [g]$ έχουμε και $[f] = 0$.

Συνεχίζουμε με την δεξιά κατεύθυνση (\Rightarrow):

Έστω $[f] = 0$ στην $\pi_n(X, A, x_0)$, δηλαδή υπάρχει ομοτοπία $G : (I^n \times I, \partial I^n \times I, J^{n-1} \times I) \rightarrow (X, A, x_0)$ μεταξύ της f και της σταθερής απεικόνισης. Έστω η σύνθεση $G \circ H : I^n \times I \rightarrow I^n \times I \rightarrow X$, τ.ω. η $H : I^n \times I \rightarrow I^n \times I$ στέλνει ομοιομορφικά το κάθε $I^n \times \{t\}$ στο $I^n \times \{t\} \cup \partial I^n \times [0, t]$. Τον ομοιομορφισμό αυτόν μπορούμε να τον φανταστούμε να στέλνει το κομμάτι του κύβου $K = \{(s_1, \dots, s_n) \in I^n : s_i \in [1/3, 2/3], \text{ για κάθε } 1 \leq i \leq n\}$ στο $I^n \times \{t\}$ και το υπόλοιπο $I^n \setminus K$ να στέλνεται στο $\partial I^n \times [0, t]$ (αυτό μπορεί να το κατανοήσει κάποιος σχεπτόμενος ως παράδειγμα την περίπτωση $n = 2$).

Συνεπώς το $G \circ H$ είναι ομοτοπία $\text{rel} \partial I^n$ από την f σε μια απεικόνιση η εικόνα της οποίας περιέχεται στο A διότι:

- $G \circ H(I^n \times \{0\}) = G(I^n \times \{0\}) = f(I^n)$
- $G \circ H(I^n \times \{1\}) = G(I^n \times \{1\} \cup \partial I^n \times I) = G(I^n \times \{1\}) \cup G(\partial I^n \times I) = \{x_0\} \cup G(\partial I^n \times I) \subseteq A$
- $G \circ H(\partial I^n \times \{t\}) = G(\partial I^n \times \{t\} \cup \partial I^n \times [0, t]) = G(\partial I^n \times [0, t]) \subseteq A$

□

Μια απεικόνιση $\phi : (X, A, x_0) \rightarrow (Y, B, y_0)$ επάγει απεικόνιση $\phi_* : \pi_n(X, A, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, B, y_0)$ η οποία είναι ομομορφισμός για $n \geq 2$ και έχει τις ίδιες ιδιότητες με τις ομάδες ομοτοπίας (ενότητα 2.2): $(\phi\psi)_* = \phi_*\psi_*$ και $\text{id}_* = \text{id}$. Η απόδειξη είναι τελείως ανάλογη της Πρότασης 7.

4.2 Μακρά ακριβής ακολουθία

Ένα βασικό και κεντρικό εργαλείο της αλγεβρικής τοπολογίας που θα μας βοηθήσει στον υπολογισμό ομάδων ομοτοπίας είναι οι μακρές ακριβείς ακολουθίες.

Μια μακρά ακολουθία ομομορφισμών ομάδων

$$\cdots \longrightarrow A_{n+1} \xrightarrow{a_{n+1}} A_n \xrightarrow{a_n} A_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

λέγεται ότι είναι **ακριβής** εάν $\ker a_n = \operatorname{im} a_{n+1}$ για κάθε n .

Ένα χρήσιμο Λήμμα που θα χρησιμοποιήσουμε είναι το εξής.

Λήμμα. $\operatorname{im} a_{n+1} \subseteq \ker a_n \iff a_n a_{n+1} = 0$

Απόδειξη: Αρχικά έχουμε:

$$\ker(a_n a_{n+1}) = \{x \in A_{n+1} : a_n(a_{n+1}(x)) = 0\} = \{x \in A_{n+1} : a_{n+1}(x) \in \ker a_n\} = a_{n+1}^{-1}(\ker a_n)$$

- Έστω $\operatorname{im} a_{n+1} \subseteq \ker a_n$, δηλαδή $a_{n+1}(A_{n+1}) \subseteq \ker a_n$.

Παίρνοντας την προεικόνα a_{n+1}^{-1} έχουμε

$$a_{n+1}^{-1}(a_{n+1}(A_{n+1})) \subseteq a_{n+1}^{-1}(\ker a_n) \implies A_{n+1} \subseteq \ker(a_n a_{n+1})$$

αφού $A_{n+1} \subseteq a_{n+1}^{-1}(a_{n+1}(A_{n+1}))$. Άρα $a_n a_{n+1}(A_{n+1}) = 0$.

- Έστω $a_n a_{n+1} = 0$, δηλαδή $A_{n+1} \subseteq \ker(a_n a_{n+1}) = a_{n+1}^{-1}(\ker a_n)$.

Παίρνοντας την εικόνα a_{n+1} έχουμε

$$a_{n+1}(A_{n+1}) \subseteq a_{n+1}(a_{n+1}^{-1}(\ker a_n)) \implies \operatorname{im} a_{n+1} \subseteq \ker a_n$$

αφού $a_{n+1}(a_{n+1}^{-1}(\ker a_n)) \subseteq \ker a_n$ και $a_{n+1}(A_{n+1}) = \operatorname{im} a_{n+1}$.

□

Διάφορες αλγεβρικές ιδιότητες ομάδων μπορούν να εκφραστούν μέσω της ακρίβειας ακολουθιών ομάδων, για παράδειγμα:

1. $0 \longrightarrow A \xrightarrow{a} B$ είναι ακριβής αν $\ker a = 0$, δηλαδή a είναι ενεικονική.
2. $A \xrightarrow{a} B \longrightarrow 0$ είναι ακριβής αν $\operatorname{im} a = B$, δηλαδή a είναι επεικονική.
3. $0 \longrightarrow A \xrightarrow{a} B \longrightarrow 0$ είναι ακριβής αν a είναι ισομορφισμός, μέσω των (1) και (2).
4. $0 \longrightarrow G \longrightarrow 0$ είναι ακριβής αν η ομάδα G είναι τετριμμένη.

Μια ακριβής ακολουθία της μορφής

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

ονομάζεται **βραχεία ακριβής ακολουθία**.

Απόδειξη: (Αλγεβρικές ιδιότητες ομάδων)

1. Έστω η απεικόνιση $0 \rightarrow A$ ονομάζεται b , έχουμε $\operatorname{im} b = \{0\}$ αφού b ομομορφισμός.

Έστω $\ker a = \operatorname{im} b$, τότε $\ker a = \{0\}$.

Έστω $\ker a = \{0\}$, τότε $\ker a = \operatorname{im} b$.

2. Έστω η απεικόνιση $B \rightarrow 0$ ονομάζεται b , έχουμε $\ker b = B$.

Έστω $\operatorname{im} a = \ker b$, τότε $\operatorname{im} a = B$.

Έστω $\operatorname{im} a = B$, τότε $\operatorname{im} b = \ker a$.

3. Άμεση συνέπεια του (1) και (2).

4. Έστω οι απεικονίσεις $0 \rightarrow G$ και $G \rightarrow 0$ οι οποίες ονομάζονται a και b αντίστοιχα, έχουμε $\operatorname{im} a = \{0\}$ και $\ker b = G$.

Έστω $\operatorname{im} a = \ker b$, τότε $G = \{0\}$.

Έστω $G = \{0\}$, τότε $\ker b = \{0\}$, άρα $\operatorname{im} a = \ker b$.

□

4.3 Μακρά ακριβής ακολουθία των σχετικών ομάδων ομοτοπίας

Μια από τις πιο χρήσιμες ιδιότητες της σχετικής ομάδας ομοτοπίας $\pi_n(X, A, x_0)$ είναι το ότι εκφράζεται σε μια μακρά ακριβής ακολουθία

$$\cdots \rightarrow \pi_n(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, x_0) \rightarrow \cdots \rightarrow \pi_0(X, x_0)$$

Εδώ οι i και j είναι εγγλίσεις $(A, x_0) \hookrightarrow (X, x_0)$ και $(X, x_0, x_0) \hookrightarrow (X, A, x_0)$. Η απεικόνιση ∂ προέρχεται από τον περιορισμό απεικονίσεων $(I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0)$ στο I^{n-1} , ή περιορίζοντας απεικονίσεις $(D^n, S^{n-1}, s_0) \rightarrow (X, A, x_0)$ στο S^{n-1} . Η απεικόνιση ∂ λέγεται απεικόνιση συνόρου και είναι ομομορφισμός για $n > 1$.

Θεώρημα 4. Η μακρά ακολουθία των σχετικών ομάδων ομοτοπίας είναι ακριβής.

Απόδειξη: Κοντά στο τέλος της ακολουθίας, όπου δεν υπάρχει δομή ομάδας, η ακρίβεια ορίζεται ακόμα ως εξής: Η εικόνα μιας απεικόνισης είναι ο πυρήνας της επόμενης, των οποίων τα στοιχεία απεικονίζονται στην ομοτοπική κλάση της σταθερής απεικόνισης του σημείου βάσης.

Αρχικά θα δείξουμε την ακρίβεια στο τέλος της ακολουθίας, δηλαδή στην ακολουθία:

$$\cdots \longrightarrow \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_1(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_0(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_0(X, x_0)$$

Ακρίβεια στην $\pi_1(X, A, x_0)$:

$$\pi_1(X, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_1(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_0(A, x_0)$$

Υπενθυμίζουμε ότι έχουμε ορίσει $I^0 = \{0\}$, $J^0 = \{1\}$ και $\partial I^0 = \emptyset$.

- Θα δείξουμε ότι $\partial_* j_* = 0$:

Έστω $f : (I, \partial I) \rightarrow (X, x_0)$, τ.ω. $[f] \in \pi_1(X, x_0)$ (δηλαδή βρόχος στον X). Μέσω της j_* έχουμε $j \circ f : (I, \partial I, \{1\}) \rightarrow (X, A, x_0)$ τ.ω. $j \circ f(0) = x_0$ και μέσω της ∂ έχουμε $\partial \circ j \circ f : (\{0\}, \emptyset) \rightarrow (A, x_0)$ τ.ω. $\partial \circ j \circ f(0) = x_0$. Το μηδενικό στοιχείο του $\pi_0(A, x_0)$ είναι η συνεκτική συνιστώσα του A στην οποία ανήκει το x_0 και εφόσον έχουμε $\partial \circ j \circ f(0) = x_0$ σημαίνει ότι $[\partial \circ j \circ f] = \partial \circ j_*([f]) = 0 \in \pi_0(A, x_0)$.

- Θα δείξουμε ότι $\ker \partial \subseteq \operatorname{im} j_*$:

Έστω $f : (I, \partial I, \{1\}) \rightarrow (X, A, x_0)$ τ.ω. $[f] \in \pi_1(X, A, x_0)$ και $f(0) = y \in A$ να απεικονίζεται στο μηδενικό στοιχείο του $\pi_0(A, x_0)$. Δηλαδή το y και το x_0 θα πρέπει

να ανήκουν στην ίδια συνεκτική συνιστώσα του A έτσι ώστε να συνδέονται με δρόμο (ομοτοπία του $\pi_0(A, x_0)$) $F : I \rightarrow A$ τ.ω. $F(0) = y$ και $F(1) = x_0$.

Κάθε $g : (I, \partial I) \rightarrow (X, x_0)$ τ.ω. $[g] \in \pi_1(X, x_0)$ απεικονίζεται σε βρόχους $i \circ g : (I, \partial I, \{1\}) \rightarrow (X, A, x_0)$ με $i \circ g(0) = x_0$, άρα η $\text{im } j_*$ αποτελείται από βρόχους στο $\pi_1(X, A, x_0)$. Για να δείξουμε το ζητούμενο αρκεί να δείξουμε ότι η f είναι ομοτοπική με βρόχο στο $\pi_1(X, A, x_0)$.

Εφόσον $[f] \in \ker \partial$ υπάρχει η ομοτοπία $F : I \rightarrow A$ όπου ορίσαμε παραπάνω, άρα μπορούμε να κατασκευάσουμε βρόχο G κολλώντας την F^{-1} με την f , δηλαδή:

$$G(s) = \begin{cases} F(1-2s), & s \in [0, 1/2] \\ f(2s-1), & s \in [1/2, 1] \end{cases}$$

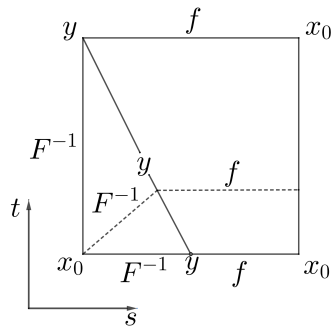
Η $G : I \rightarrow X$ είναι συνεχής από το Λήμμα επικόλλησης εφόσον για $s = 1/2$ έχουμε $F(0) = f(0) = y$ και αποτελεί βρόχος στο $\pi_1(X, A, x_0)$ εφόσον $G(s, 0) = G(s, 1) = x_0$, συνεπώς γράφεται

$$G : (I, \partial I, \{1\}) \rightarrow (X, A, x_0) \quad \text{τ.ω. } G(s, 0) = x_0$$

Εν συνέχεια βρίσκουμε ομοτοπία μεταξύ του δρόμου f και του βρόχου G , η οποία είναι:

$$H(s, t) = \begin{cases} F(-t-2s+1), & 0 \leq t \leq -2s+1 \\ f\left(\frac{t+2s-1}{t+1}\right), & -2s+1 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Μελετάμε την ομοτοπία σύμφωνα με το παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 18: Η ομοτοπία $H(s, t)$ του βρόχου G και του δρόμου f .

Η H είναι συνεχής εφόσον για $t = -2s+1$ έχουμε $F(0) = f(0) = y$ και είναι ομοτοπία των f και G στο $\pi_1(X, A, x_0)$ αφού

- για $t = 0$ έχουμε $F(-2s+1)$ για $s \in [0, 1/2]$ και $f(2s-1)$ για $s \in [1/2, 1]$, δηλαδή $H(s, 0) = G(s)$
- για $t = 1$ έχουμε $H(s, t) = f(s)$
- για $s \in \partial I$ παραμένει στο A για κάθε $t \in I$, αφού για $s = 0$ έχουμε $H(0, t) = F(1-t)$ το οποίο είναι υποσύνολο του A για κάθε t και για $s = 1$ έχουμε $H(1, t) = f(1) = x_0$

Η ομοτοπία H αυτό που κάνει είναι ξεκινώντας από τον βρόχο G κρατώντας σταθερό τον δρόμο f ξεκολλάει το άκρο της F από το x_0 και συρρικνώνει την F στο σημείο y .

Άρα έχουμε $[f] = [G] \in \pi_1(X, A, x_0)$ και εφόσον $[G] \in \text{im } j_*$, ισχύει $[f] \in \text{im } j_*$. Τέλος εφόσον το $[f]$ επιλέχθηκε τυχαία έχουμε $\ker \partial \subseteq \text{im } j_*$.

Ακρίβεια στο $\pi_0(A, x_0)$:

$$\pi_1(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_0(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_0(X, x_0)$$

- Θα δείξουμε $i_*\partial = 0$:

Έστω $f : (I, \partial I, \{1\}) \rightarrow (X, A, x_0)$ τ.ω. $f(0) = y$. Εν συνέχεια μέσω της απεικόνισης συνόρου έχουμε $\partial \circ f : (\{0\}, \emptyset) \rightarrow (A, x_0)$ τ.ω. $\partial \circ f(0) = y$ και ύστερα $i \circ \partial \circ f : (\{0\}, \emptyset) \rightarrow (X, x_0)$ τ.ω. $i \circ \partial \circ f(0) = y$ άρα τα στοιχεία $[i \circ \partial \circ f]$ είναι μηδενικά στο $\pi_0(X, x_0)$ εφόσον είναι ομοτοπικά μέσω της f με την σταθερή απεικόνιση του x_0 .

- Θα δείξουμε $\ker i_* \subseteq \text{im } \partial$:

Έστω $f : (\{0\}, \emptyset) \rightarrow (A, x_0)$ τ.ω. $f(0) = y \in A$ και να στέλνεται στο μηδενικό στοιχείο του $\pi_0(X, x_0)$, δηλαδή για $i \circ f : (\{0\}, \emptyset) \rightarrow (X, x_0)$ υπάρχει ομοτοπία $F : I \rightarrow X$ τ.ω. $F(0) = y$ και $F(1) = x_0$, δηλαδή $F(I, \partial I, \{1\}) \rightarrow (X, A, x_0)$. Συνεπώς η $[F]$ αποτελεί στοιχείο της $\pi_1(X, A, x_0)$, άρα $\partial \circ F : (\{0\}, \emptyset) \rightarrow (A, x_0)$ το οποίο είναι ίσο με f . Άρα $\partial([F]) = [f] \in \text{im } \partial \implies \ker i_* \subseteq \text{im } \partial$.

Τώρα θα δείξουμε την ακρίβεια της υπόλοιπης μακράς ακολουθίας. Για να το δείξουμε αυτό θα χρησιμοποιήσουμε την μακρά ακολουθία της τριπλέτας (X, A, B, x_0) , όπου $x_0 \in B \subseteq A \subseteq X$, και θα δείξουμε ότι είναι ακριβής. Συνεπώς η μακρά ακολουθία των σχετικών ομάδων ομοτοπίας θα είναι απλώς η ειδική περίπτωση της μακράς ακολουθίας της τριπλέτας τ.ω. $B = x_0$. Η μακρά ακολουθία της τριπλέτας (X, A, B, x_0) παίρνει την μορφή

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow \pi_n(A, B, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, B, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, B, x_0) \rightarrow \cdots \\ \cdots \rightarrow \pi_1(X, A, x_0) \end{aligned}$$

και επάγεται από τις εγγλίσεις i και j , οι οποίες είναι $(A, B, x_0) \hookrightarrow (X, B, x_0)$ και $(X, B, x_0) \hookrightarrow (X, A, x_0)$ αντίστοιχα, και από την απεικόνιση συνόρου ∂ η οποία είναι ο περιορισμός των απεικονίσεων $(I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0)$ στο I^{n-1} .

Ακρίβεια στην $\pi_n(X, B, x_0)$:

$$\cdots \rightarrow \pi_n(A, B, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, B, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A, x_0) \rightarrow \cdots$$

- Θα δείξουμε ότι $j_*i_* = 0$:

Αυτό συμβαίνει γιατί κάθε απεικόνιση $f : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (A, B, x_0)$, όπου $[f] \in \pi_n(A, B, x_0)$, αντιπροσωπεύει το μηδενικό στοιχείο της $\pi_n(X, A, x_0)$ ως $j_*i_*([f]) \in \pi_n(X, A, x_0)$. Μέσω του Compression Criterion γνωρίζουμε ότι ένα στοιχείο του $\pi_n(X, A, x_0)$ είναι μηδενικό αν είναι ομοτοπικά $rel \partial I^n$ με μια απεικόνιση που η εικόνα της είναι υποσύνολο της A .

Άρα κάθε απεικόνιση f αποτελεί μηδενικό στοιχείο της $\pi_n(X, A, x_0)$ αφού οι εικόνες τους είναι υποσύνολα του A .

Άρα $j_*i_*([f]) = 0 \in \pi_n(X, A, x_0)$.

- Θα δείξουμε ότι $\ker j_* \subseteq \text{im } i_*$:

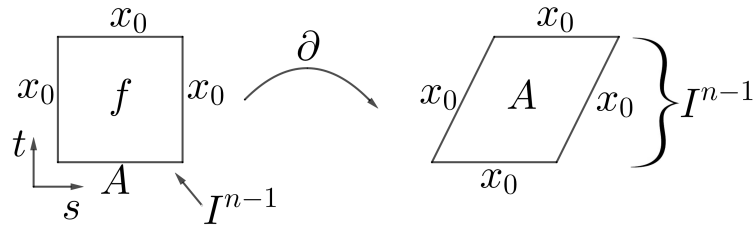
Έστω τυχαίο $f : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (X, B, x_0)$ αντιπροσωπεύει το μηδέν στην $\pi_n(X, A, x_0)$ ως $j_*[f] = 0 \in \pi_n(X, A, x_0)$, δηλαδή $f \in \ker j_*$. Τότε μέσω του Compression Criterion έχουμε ότι η f είναι ομοτοπική $rel \partial I^n$ με μια απεικόνιση με εικόνα μέσα στο A , δηλαδή με απεικόνιση $g : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (A, B, x_0)$, αφού κατά την ομοτοπία παραμένει μέσα στο B , άρα $[g] \in \pi_n(A, B, x_0)$. Τέλος έχουμε ότι $[f] \in \text{im } i_*$ αφού $i_*[g] = [g] = [f] \in \text{im } i_*$ και αφού υποθέσαμε τυχαίο f έχουμε $[f] \in \ker j_* \subseteq \text{im } i_*$.

Γενικότερα έχουμε $i_*[g] = [g]$ και $j_*[f] = [f]$, διότι αφού οι i, j είναι εγκλίσεις ισχύει ότι $i(g(x)) = g(x)$, για κάθε $x \in I^n$, όπως και $j(f(x)) = f(x)$, για κάθε $x \in I^n$, άρα θα έχουμε: $i_*([g]) = [i(g)] = [g]$ και $j_*([f]) = [j(f)] = [f]$.

Ακρίβεια στην $\pi_n(X, A, x_0)$:

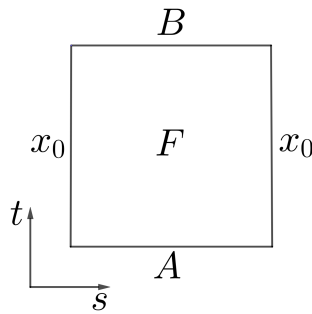
$$\cdots \rightarrow \pi_n(X, B, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, B, x_0) \rightarrow \cdots$$

- Θα δείξουμε ότι $\partial j_* = 0$:
 Η $f : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (X, B, x_0)$ δεν αλλάζει περνώντας μέσα από την j_* , παρά μόνο στο ότι το B που απεικονίζεται από το I^{n-1} τώρα ορίζεται μέσα σε περιβάλλοντα χώρο A , αφού $j_*([f]) = [f]$. Ύστερα ο περιορισμός της f στο I^{n-1} μέσω του boundary map ∂ έχει εικόνα μέσα στο B , άρα $[\partial \circ f] \in \pi_{n-1}(A, B, x_0)$. Όμως αφού η $\partial \circ f$ είναι ομοτοπική $rel \partial I^{n-1}$ με τον εαυτό της, όπου η εικόνα της βρίσκεται μέσα στο B , έχουμε από το Compression Criterion ότι $[\partial \circ f] = 0 \in \pi_{n-1}(A, B, x_0)$. Άρα $\partial j_*([f]) = \partial([f]) = [\partial \circ f] = 0$ για κάθε $[f] \in \pi_n(X, B, x_0)$.
- Θα δείξουμε ότι $\ker \partial \subseteq \text{im } j_*$:
 Έστω ότι ο περιορισμός της $f : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0)$ στο I^{n-1} , δηλαδή $\partial \circ f$, αποτελεί το μηδενικό στοιχείο της $\pi_{n-1}(A, B, x_0)$.



Σχήμα 19: Ο περιορισμός της f στο I^{n-1} και το συνωρό της ∂I^{n-1} όπου πηγαίνει στο x_0

Τότε η $\partial \circ f = f|_{I^{n-1}}$, λόγω του Compression Criterion, είναι ομοτοπική με μία απεικόνιση όπου η εικόνα της βρίσκεται μέσα στο B μέσω ομοτοπίας $F : I^{n-1} \times I \rightarrow A \ rel \partial I^{n-1}$ με $(s, t) \in I^{n-1} \times I$.



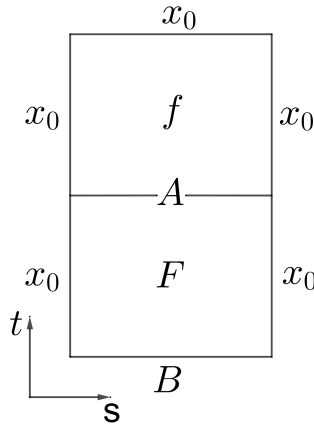
Σχήμα 20: Η ομοτοπία $F : I^{n-1} \times I \rightarrow A \ rel \partial I^{n-1}$ με $(s, t) \in I^{n-1} \times I$, όπου $F|_{\partial I^{n-1} \times I} = x_0, \forall t \in I$.

Μέσω της f έχουμε ότι το σύνολο J^{n-1} (ο κούφιος κύβος n διάστασης χωρίς το εσωτερικό της κάτω έδρας του) και οποιοδήποτε υποσύνολο του στέλνεται στο x_0 . Όμως το $\partial I^{n-1} \times \{0\} \subseteq J^{n-1}$, άρα και το ∂I^{n-1} στέλνεται στο x_0 . Το $\partial I^{n-1} \times \{0\}$ είναι επίσης υποσύνολο του I^{n-1} , άρα στέλνεται στο x_0 μέσω της F αφού $F|_{\partial I^{n-1} \times \{0\}} = f|_{\partial I^{n-1} \times \{0\}} = x_0$.

Ύστερα η F είναι $rel \partial I^{n-1}$, δηλαδή στο ∂I^{n-1} δεν εξαρτάται από το $t \in I$, άρα έχουμε ότι $F|_{\partial I^{n-1} \times I} = x_0 \quad \forall t \in I$, όπως στο Σχήμα 20.

Τώρα μπορούμε να κολλήσουμε την αντίστροφη F επί της f για να πάρουμε μια καινούργια απεικόνιση $g : (I^{n-1} \times I, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (X, B, x_0)$ με $(s, t) \in I^{n-1} \times I$, η οποία ορίζεται:

$$g(s, t) = \begin{cases} F(s, 1 - 2t), & \text{όταν } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ f(s, 2t - 1), & \text{όταν } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

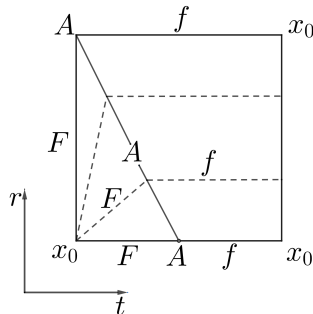


Σχήμα 21: Η απεικόνιση $g : (I^{n-1} \times I, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (X, B, x_0)$ με $(s, t) \in I^{n-1} \times I$.

Παρατηρούμε ότι η απεικόνιση πράγματι είναι καλά ορισμένη αφού η g στο ∂I^n βρίσκεται μέσα στο B , στο J^{n-1} είναι x_0 και είναι συνεχής αφού όταν $t = 1/2$ έχουμε $g(s, 1/2) = F(s, 0) = f(s, 0)$.

Τώρα άμα πάρουμε την g ως απεικόνιση $(I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0)$ μέσω της j_* , βρίσκουμε ομοτοπία $G : I^{n-1} \times I \times I \rightarrow X$ με $(s, t, r) \in I^{n-1} \times I \times I$ της g με την f η οποία κολλάει αυξανόμενα σε μέγεθος ευθύγραμμα τμήματα της F , όπως στο Σχήμα 4 και ορίζεται ως εξής:

$$G(s, t, r) = \begin{cases} F(s, -r - 2t + 1), & \text{για } 0 \leq r \leq -2t + 1 \\ f\left(s, \frac{r+2t-1}{r+1}\right), & \text{για } -2t + 1 \leq r \leq 1 \end{cases}$$



Σχήμα 22: Η απεικόνιση $G : I^{n-1} \times I \times I \rightarrow X$ με $(s, t, r) \in I^{n-1} \times I \times I$.

Η G είναι καλά ορισμένη αφού:

- για $r = 0$ και $t \in [0, 1/2] \implies G(s, t, 0) = F(s, -2t + 1)$
για $t \in [1/2, 1] \implies G(s, t, 0) = f(s, 2t - 1)$
Άρα για $r = 0$ και $t \in [0, 1]$ έχουμε $G(s, t, 0) = g(s, t)$
- για $r = 1$ και $t \in [0, 1]$ έχουμε $G(s, t, 1) = f(s, t)$
- είναι συνεχής αφού για $r = -2t + 1$ έχουμε $G(s, t, -2t + 1) = F(s, 0) = f(s, 0)$
- είναι $rel \partial I^n$ αφού $\forall r \in [0, 1]$ στέλνεται μέσα στο A .

Αυτό που δείξαμε είναι ότι παίρνοντας τυχαίο $[f] \in \ker \partial$ μπορούμε πάντα να βρούμε μια ομοτοπία F μέσα στην $\pi_{n-1}(A, B, x_0)$, μέσω του Compression Criterion, ύστερα κολλώντας τις f και F στο $f|I^{n-1}$ κατασκευάζουμε $[g] \in \pi_n(X, B, x_0)$ και έπειτα παίρνοντας την εικόνα του $j_*([g]) \in \pi_n(X, A, x_0)$ δείξαμε ότι είναι ομοτοπικό με $[f]$ μέσω της G ομοτοπίας, άρα $[f] = j_*([g]) \in \text{im } j_*$ και αφού μιλήσαμε για τυχαίο f έχουμε $\ker \partial \subseteq \text{im } j_*$.

Ακρίβεια στην $\pi_n(A, B, x_0)$:

$$\cdots \rightarrow \pi_{n+1}(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_n(A, B, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, B, x_0) \rightarrow \cdots$$

- Θα δείξουμε ότι $i_*\partial = 0$:

Παίρνοντας τον περιορισμό μιας απεικόνισης $f : (I^{n+1}, \partial I^{n+1}, J^n) \rightarrow (X, A, x_0)$ στο I^n , έχουμε ομοτοπία $rel \partial I^n$ από την $f|I^n$ έως μια σταθερή απεικόνιση c_{x_0} που πηγαίνει στο x_0 μέσω της ίδιας της f .

Δηλαδή η f είναι ομοτοπία στην $\pi_n(A, B, x_0)$, όπου για $(s_n, t) \in I^n \times I$, $f(s_n, 0) = f|I^{n-1}$ και $f(s_n, 1) = c_{x_0}$.

Άρα $[f|I^{n-1}] = [\partial \circ f] = 0 \in \pi_n(A, B, x_0) \implies i_*([\partial \circ f]) = 0 \in \pi_n(X, B, x_0)$.

- Θα δείξουμε $\ker i_* \subseteq \text{im } \partial$, για 2 περιπτώσεις:

- για $B = x_0$:

$$\cdots \rightarrow \pi_{n+1}(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_n(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, x_0) \rightarrow \cdots$$

Έστω $[i \circ f] = 0 \in \pi_n(X)$, δηλαδή υπάρχει μηδενική ομοτοπία F από την $f : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (A, x_0)$ έως μια σταθερή απεικόνιση του x_0 . Άρα έχουμε ομοτοπία $F : (I^{n+1}, \partial I^{n+1}, J^n) \rightarrow (X, A, x_0)$, αφού η βάση του κύβου I^n πηγαίνει στο A και το J^n πηγαίνει στο x_0 . Συνεπώς έχουμε $[F] \in \pi_{n+1}(X, A, x_0)$ και $\partial([F]) = [f]$.

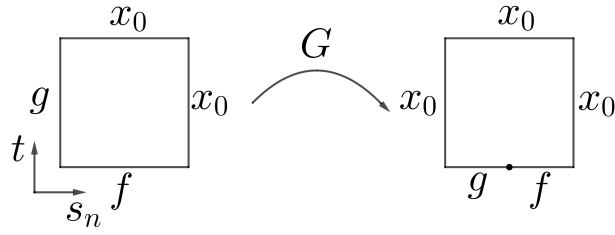
Αυτό που κάναμε είναι ότι επιλέξαμε τυχαίο $f : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (A, x_0)$ το οποίο στο $\pi_n(X, x_0)$ είναι μηδενικό στοιχείο δηλαδή $[f] \in \ker i_*$, άρα έχουμε ότι είναι ομοτοπικό με σταθερή απεικόνιση στο x_0 με $F(\partial I^n \times I) = x_0$.

Έτσι κατασκευάσαμε $[F] \in \pi_{n+1}(X, A, x_0)$ όπου η εικόνα του είναι ίση με $[f]$ αφού $\partial[F] = [F|I^n] = [f]$.

Άρα $[f] \in \text{im } \partial$ μαζί με τυχαίο $[f] \in \ker i_* \implies \ker i_* \subseteq \text{im } \partial$.

- για κάποιο $B \subseteq A \subseteq X$:

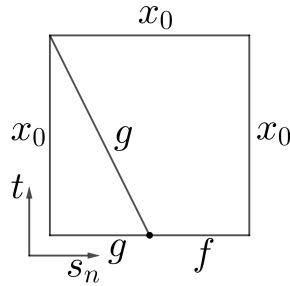
Έστω $F : I^{n-1} \times I \times I \rightarrow X$ με $(s_{n-1}, s_n, t) \in I^{n-1} \times I \times I$ μία μηδενική ομοτοπία του $f : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (A, B, x_0)$ μέσω απεικονίσεων $(I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (X, B, x_0)$ και έστω g ο περιορισμός της F στο $(s_{n-1}, t) \in I^{n-1} \times I$, όπως στο αριστερό από τα 2 παρακάτω σχήματα.



Σχήμα 23: Η $F : I^{n-1} \times I \times I \rightarrow X$ (αριστερά) και η αναπαραμέτρηση G (δεξιά).

Ύστερα θέλω G αναπαραμέτρηση της n^{th} και $(n+1)st$ συντεταγμένων ώστε η F να ορίζεται όπως το δεξί σχήμα στο Σχήμα 23.

Για να καταλάβουμε την αναπαραμέτρηση G θα μας βοηθήσει το παρακάτω σχήμα.



Η αναπαραμέτρηση G ορίζεται ως εξής:

$$G(s_{n-1}, s_n, t) = \begin{cases} F(s_{n-1}, 0, 1 - 2s_n), & \text{όταν } 0 \leq t \leq 1 - 2s_n \\ F\left(s_{n-1}, \frac{2s_{n-1} - 1 + t}{t+1}, t\right), & \text{όταν } 1 - 2s_n \leq t \leq 1 \end{cases}$$

* Είναι συνεχής αφού για $t = 1 - 2s_n$ έχουμε:

$$G(s_{n-1}, s_n, 1 - 2s_n) = F(s_{n-1}, 0, 1 - 2s_n) = F\left(s_{n-1}, \frac{2s_{n-1} - 1 - 2s_n + 1}{t+1}, 1 - 2s_n\right) = F(s_{n-1}, 0, 1 - 2s_n)$$

* για $t = 0, s_n \in [0, 1/2]$:

$$G(s_{n-1}, s_n, 0) = F(s_{n-1}, 0, 1 - 2s_n) = g(s_{n-1}, 1 - 2s_n)$$

* για $t = 0, s_n \in [1/2, 1]$:

$$G(s_{n-1}, s_n, 0) = F(s_{n-1}, 2s_n - 1, 0) = f(s_{n-1}, 2s_n - 1)$$

* για $t = 0, s_n = 1/2$:

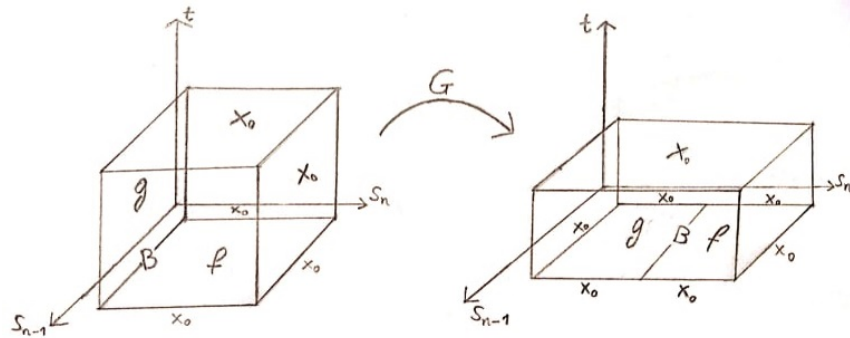
$$G(s_{n-1}, 1/2, 0) = F(s_{n-1}, 0, 0) = g(s_{n-1}, 0) = f(s_{n-1}, 0)$$

* για $t = 1, s_n \in [0, 1] \implies G(s_{n-1}, s_n, 1) = F(s_n, 1)$

* για $s_n = 0, t \in [0, 1] \implies G(s_{n-1}, 0, t) = F(0, 1)$

* για $s_n = 1, t \in [0, 1] \implies G(s_{n-1}, 1, t) = F(1, t)$

Αυτό που καταφέραμε με αυτήν την αναπαραμέτρηση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 24: Η $F : I^{n-1} \times I \times I \rightarrow X$ (αριστερά) και η αναπαραμέτρηση $G : (I^{n+1}, \partial I^{n+1}, J^n) \rightarrow (X, A, x_0)$ (δεξιά).

Δηλαδή καταλήξαμε να έχουμε την g και την f κολλημένες στο $(s_{n-1}, 1/2) \in I^n$ και να ορίζονται στο $(s_{n-1}, s_n) \in I^n$, επίσης έχουμε ότι η $g(I^{n-1} \times [0, 1/2]) \subseteq B$ από πριν όπως την είχαμε ορίσει ως τον περιορισμό της F στο $I^{n-1} \times I$ και ότι $f(I^{n-1} \times [1/2, 1]) \subseteq A$ αφού την είχαμε ορίσει $f : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (A, B, x_0)$. Άρα έχουμε καταλήξει σε έναν κύβο I^{n+1} όπου το J στέλνεται στο x_0 , η κάτω έδρα του δηλαδή η I^n στέλνεται η μισή στο B και η άλλη μισή στο A , και η G στο εσωτερικό του I^{n+1} παίρνει τιμές στο X εφόσον είχαμε ορίσει την F ως ομοτοπία μέσω απεικονίσεων $(I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (X, B, x_0)$. Επομένως για $G : (I^{n+1}, \partial I^{n+1}, J^n) \rightarrow (X, A, x_0)$ έχουμε $[G] \in \pi_{n+1}(X, A, x_0)$.

Τώρα παρατηρούμε ότι οι κολλημένες f και g βρίσκονται μέσα στην $Im\partial$ παίρνοντας τον περιορισμό της G στο I^n , όμως γνωρίζουμε από προηγούμενη παράγραφο ότι κολλώντας την g επί της f παίρνουμε την ίδια την f μέσα στην $\pi_n(A, B, x_0)$, άρα $[f] \in Im\partial$ και εφόσον είχαμε υποθέσει τυχαία $[f] \in \ker i_*$ έχουμε $\ker i_* \subseteq Im\partial$.

□

5 Η Μακρά ακριβής ακολουθία των Serre fibrations και των Δεσμών ινών

Μια από τις πιο χρήσιμες ιδιότητες που έχουμε από τις ακριβείς ακολουθίες ομάδων είναι ότι μας δίνουν έναν τρόπο υπολογισμού ομάδων κατα ισομορφισμούς με την ιδιοτήτά:

Εάν A, B έχουν δομή ομάδας τότε

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{a} B \longrightarrow 0 \text{ είναι ακριβείς αν η } a \text{ απεικόνιση είναι ισομορφισμός.}$$

Χρησιμοποιώντας την μακρά ακριβή ακολουθία σχετικών ομάδων ομοτοπίας του ζευγαριού τοπολογικών χώρων (E, F) μαζί με την **ιδιότητα ανύψωσης ομοτοπίας** θα αποδείξουμε ότι υπάρχει μακρά ακριβής ακολουθία ομάδων ομοτοπίας.

Εν συνέχεια θα δείξουμε ότι κάθε δέσμη ινών $F \longleftarrow E \xrightarrow{p} B$ παράγει μια μακρά ακριβή ακολουθία ομάδων ομοτοπίας, άρα θα μπορούμε να υπολογίζουμε ομάδες ομοτοπίας κατα ισομορφισμούς αρκεί μέσα στην μακρά ακριβή ακολουθία να υπάρχουν ανά τρεις θέσεις τετριμμένες ομάδες ομοτοπίας.

Τέλος αφού έχουμε δείξει ότι η $S^1 \longleftarrow S^3 \xrightarrow{p} S^2$ είναι δέσμη ινών θα μπορέσουμε να παράγουμε μακρά ακριβής ακολουθία ομάδων ομοτοπίας της μορφής:

$$\dots \rightarrow \pi_i(S^1) \rightarrow \pi_i(S^3) \rightarrow \pi_i(S^2) \rightarrow \pi_{i-1}(S^1) \rightarrow \pi_{i-1}(S^3) \rightarrow \dots$$

5.1 Η μακρά ακριβής ακολουθία των Serre fibrations

Ξεκινάμε ορίζοντας κάποιες ιδιότητες που θα είναι ουσιώδους σημασίας για το Θεώρημα που θα ακολουθήσει.

Ιδιότητα ανύψωσης ομοτοπίας. Μία απεικόνιση $p : E \rightarrow B$ λέμε ότι έχει την **ιδιότητα ανύψωσης ομοτοπίας** στον X όταν: Αν έχουμε ομοτοπία $g_t : X \rightarrow B$ και απεικόνιση $\tilde{g}_0 : X \rightarrow E$ όπου είναι ανύψωση της g_0 , δηλαδή $p \circ \tilde{g}_0 = g_0$, τότε υπάρχει ομοτοπία $\tilde{g}_t : X \rightarrow E$ που ανυψώνει την g_t .

Ιδιότητα ανύψωσης επέκτασης για το ζευγάρι (Z, A) . Μια απεικόνιση $p : E \rightarrow B$ λέμε ότι έχει την **ιδιότητα ανύψωσης επέκτασης για το ζευγάρι (Z, A)** όταν: Αν έχουμε απεικόνιση $Z \rightarrow B$ και μια ανύψωση της $A \rightarrow E$, όπου $A \subseteq Z$, τότε η ανύψωση επεκτείνεται στο Z και γίνεται $Z \rightarrow E$.

Τώρα παρατηρούμε ότι η ιδιότητα ανύψωσης ομοτοπίας στο X είναι μια ειδική περίπτωση της ιδιότητας ανύψωσης επέκτασης για το ζεύγος (Z, A) στην περίπτωση $(Z, A) = (X \times I, X \times \{0\})$. Αυτό συμβαίνει αφού έχουμε ορίσει $g_t : X \rightarrow B$ να είναι το ίδιο με $g : X \times I \rightarrow B$ όπου $g_t(x) = g(x, t)$ για $(x, t) \in X \times I$.

Άρα ισχύει:

ιδιότητα ανύψωσης επέκτασης για το ζευγάρι $(X \times I, X \times \{0\})$



ιδιότητα ανύψωσης ομοτοπίας για X

Fibration. Μια απεικόνιση $p : E \rightarrow B$ λέγεται **fibration** όταν έχει την ιδιότητα ανύψωσης ομοτοπίας σε κάθε χώρο X .

Παράδειγμα: Η προβολή $p : B \times F \rightarrow B$ είναι fibration αφού δεδομένης ομοτοπίας $g_t : X \rightarrow B$ και προβολής $h : B \times F \rightarrow F$ έχουμε την $\tilde{g}_t(x) = (g_t(x), h(y))$ άρα και $\tilde{g}_0(x) = (g_0(x), h(y))$, αφού $p \circ \tilde{g}_t(x) = g_t(x)$.

Serre Fibration. Μια απεικόνιση $p : E \rightarrow B$ λέγεται **Serre fibration**¹³ όταν έχει την ιδιότητα ανύψωσης ομοτοπίας για κάθε δίσκο D^k (ή ισοδύναμα για κάθε I^k), όπου $k \geq 0$.

Θεώρημα 5. Έστω $p : E \rightarrow B$ είναι **Serre fibration**. Διαλέγω $b_0 \in B$ και $x_0 \in F = p^{-1}(b_0)$. Τότε η απεικόνιση $p_* : \pi_n(E, F, x_0) \rightarrow \pi_n(B, b_0)$ είναι ισομορφισμός για κάθε $n \geq 1$. Άρα εάν B είναι συνεκτικό κατά δρόμους, υπάρχει μακρά ακριβής ακολουθία:

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow \pi_n(F, x_0) \rightarrow \pi_n(E, x_0) \rightarrow \pi_n(B, b_0) \rightarrow \pi_{n-1}(F, x_0) \rightarrow \cdots \\ \cdots \rightarrow \pi_0(F, x_0) \rightarrow \pi_0(E, x_0) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

Σε αυτή την απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε μια σχετική μορφή της ιδιότητας ανύψωσης ομοτοπίας.

Ιδιότητα ανύψωσης ομοτοπίας για ζευγάρι (X, A) . Μια απεικόνιση $p : E \rightarrow B$ λέμε ότι έχει την **ιδιότητα ανύψωσης ομοτοπίας για ζευγάρι (X, A)** εάν κάθε ομοτοπία $f_t : X \rightarrow B$ ανυψώνεται σε ομοτοπία $\tilde{g}_t : X \rightarrow E$ όταν αυτή ξεκινάει από δεδομένη ανύψωση \tilde{g}_0 και επεκτείνει δεδομένη ανύψωση $\tilde{g}_t : A \rightarrow E$.

¹³Αναλόγως την βιβλιογραφία χρησιμοποιείται και ο ισοδύναμος όρος **weak fibration**

Παρατηρούμε ότι η ιδιότητα ανύψωσης ομοτοπίας για ζευγάρι (X, A) είναι ειδική περίπτωση της ιδιότητας επεκτατικής ανύψωσης για το ζευγάρι (Z, A) στην περίπτωση $(Z, A) = (X \times I, X \times \{0\} \cup A \times I)$. Αυτό συμβαίνει γιατί έχοντας $\tilde{g} : X \times \{0\} \rightarrow E$ και $\tilde{g} : A \times I \rightarrow E$ συνεχείς, μπορούμε να έχουμε πάντα συνεχή απεικόνιση $\tilde{g} : X \times \{0\} \cup A \times I \rightarrow E$ παίρνοντας ότι στην τομή των δύο συνόλων $A \times \{0\}$ θα είναι ίσες.

Άρα ισχύει:

ιδιότητα ανύψωσης επέκτασης για το ζευγάρι $(X \times I, X \times \{0\} \cup A \times I)$

\Leftrightarrow

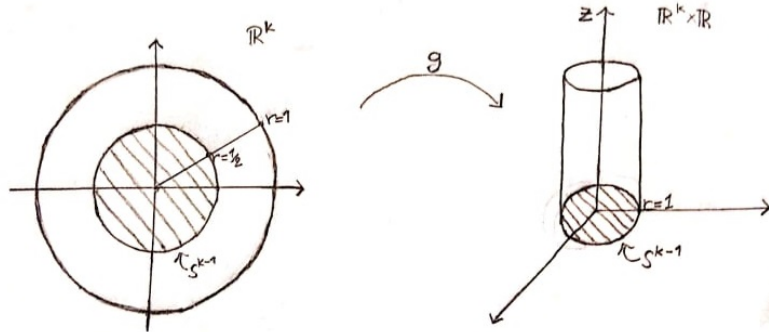
ιδιότητα ανύψωσης ομοτοπίας για ζευγάρι (X, A)

Τώρα μπορούμε να δούμε ότι η ιδιότητα ανύψωσης ομοτοπίας για D^k είναι ισοδύναμη με την ιδιότητα ανύψωσης ομοτοπίας για ζευγάρι $(D^k, \partial D^k)$ αφού τα ζευγάρι $(D^k \times I, D^k \times \{0\})$ και $(D^k \times I, D^k \times \{0\} \cup \partial D^k \times I)$ είναι ομοιομορφικά, δηλαδή υπάρχει ομοιομορφισμός $h : D^k \times I \rightarrow D^k \times I$ του οποίου ο περιορισμός $h|_{D^k \times \{0\}} = g$ είναι ομοιομορφισμός μεταξύ των $D^k \times \{0\}$ και $D^k \times \{0\} \cup \partial D^k \times I$, όπου είναι κυκλικός δίσκος και επιφάνεια κυλίνδρου χωρίς το πάνω καπάκι αντίστοιχα.

Ένας τέτοιος ομοιομορφισμός $g : D^k \times \{0\} \rightarrow D^k \times \{0\} \cup \partial D^k \times I$ είναι:

$$g(r, \theta, z) = \begin{cases} (2r, \theta, 0), & r \in [0, 1/2], \theta \in S^{k-1} \\ \left(1, \theta, \frac{\ln 2r}{\ln 2}\right), & r \in [1/2, 1], \theta \in S^{k-1} \end{cases}$$

$$g^{-1}(r, \theta, z) = \begin{cases} (r/2, \theta, 0), & r \in [0, 1], \theta \in S^{k-1}, z = 0 \\ \left(\frac{e^{z \ln 2}}{2}, \theta, 0\right) & \theta \in S^{k-1}, z \in [0, 1] \end{cases}$$



Σχήμα 25: Ομοιομορφισμός $g : D^k \times \{0\} \rightarrow D^k \times \{0\} \cup \partial D^k \times I$, για $(r, \theta) \in I \times S^{k-1}$ όπου στέλνει τον κυκλικό δίσκο ακτίνας $1/2$ στην βάση του κυλίνδρου και τον δακτύλιο ακτίνας $1/2$ έως 1 στην παράπλευρη επιφάνεια του κυλίνδρου

Άρα ισχύει:

Ιδιότητα ανύψωσης ομοτοπίας για $(I^n, \partial I^n)$

\Leftrightarrow

Ιδιότητα ανύψωσης επέκτασης για $(I^n \times I, I^n \times \{0\} \cup \partial I^n \times I)$

\Leftrightarrow

Ιδιότητα ανύψωσης επέκτασης για $(I^n \times I, I^n \times \{0\})$

\Leftrightarrow

Ιδιότητα ανύψωσης ομοτοπίας για I^n

Άρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ισοδύναμα στην απόδειξη την ιδιότητα της ομοτοπικής ανύψωσης για $(I^n, \partial I^n)$ για κάθε $n \geq 0$, αφού η $p : E \rightarrow B$ είναι Serre fibration.

Απόδειξη:(Θεώρημα 5)

- Αρχικά θα δείξουμε ότι p_* είναι επι.

Έστω στοιχείο της $\pi_n(B, b_0)$ της μορφής $f : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (B, b_0)$. Η σταθερή απεικόνιση του x_0 παρέχει ανύψωση της f στο E πάνω από το $J^{n-1} \subseteq I^n$, δηλαδή $\tilde{f} : J^{n-1} \rightarrow E$, τ.ω. $\tilde{f}(J^{n-1}) = x_0$.

Αυτό συμβαίνει αφού $p \circ \tilde{f} : J^{n-1} \xrightarrow{\tilde{f}} E \xrightarrow{p} B$ τ.ω. $\tilde{f}(J^{n-1}) = x_0$

όμως γνωρίζουμε $p \circ \tilde{f} = f$ και αφού η \tilde{f} σταθερή τότε και η $p \circ \tilde{f}$ είναι σταθερή, άρα $f(J^{n-1}) = b_0$.

Ο σκοπός μας τώρα είναι να ορίσουμε την ανύψωση \tilde{f} στο $I^{n-1} \times \{0\} \cup \partial I^{n-1} \times I$ έτσι ώστε να ισχύσει η ιδιότητα ανύψωσης ομοτοπίας για ζευγάρι $(I^{n-1}, \partial I^{n-1})$.

Παρατηρούμε ότι το $I^{n-1} \times \{0\} \cup \partial I^{n-1} \times I$ αποτελεί την επιφάνεια n διάστασης κύβου χωρίς την πάνω έδρα του, δηλαδή χωρίς το $I^{n-1} \times \{1\}$, όμως και το J^{n-1} αποτελεί την επιφάνεια n διάστασης κύβου χωρίς την κάτω έδρα του, δηλαδή χωρίς το $I^{n-1} \times \{0\}$. Αυτό αντιμετωπίζεται αναπαραμετρώντας την \tilde{f} τ.ω. η τελευταία συντεταγμένη να ξεκινάει αντίστροφα, δηλαδή $\tilde{F}(x_1, \dots, x_n) = \tilde{f}(x_1, \dots, x_{n-1}, 1 - x_n)$ για $(x_1, \dots, x_n) \in J^{n-1}$.

Άρα αφού έχουμε $\tilde{F} : J^{n-1} \rightarrow I^{n-1} \times \{0\} \cup \partial I^{n-1} \times I \rightarrow E$, όπου $(I^{n-1} \times \{0\} \cup \partial I^{n-1} \times I) \subseteq I^n$ και $f : I^{n-1} \times I \rightarrow B$, τότε ισχύει η ιδιότητα ανύψωσης επέκτασης για $(I^{n-1} \times I, I^{n-1} \times \{0\} \cup \partial I^{n-1} \times I) \iff$ ιδιότητα ανύψωσης ομοτοπίας για $(I^{n-1}, \partial I^{n-1})$. Μέσω της ιδιότητας ομοτοπικής ανύψωσης για $(I^{n-1}, \partial I^{n-1})$ επεκτείνουμε την \tilde{F} τ.ω. να ορίζεται $\tilde{F} : I^n \rightarrow E$, άρα επεκτείνεται και η \tilde{f} με τον ίδιο τρόπο τ.ω. $\tilde{f} : I^n \rightarrow E$. Παρατηρούμε ότι $\tilde{f}(\partial I^n) \subseteq F$ εφόσον έχουμε:

$$p \circ \tilde{f}(\partial I^n) = f(\partial I^n) = b_0 \implies p \circ \tilde{f}(\partial I^n) = b_0$$

Άρα παίρνοντας προεικόνα τους έχουμε ότι

$$p^{-1}(b_0) = p^{-1}(p(\tilde{f}(\partial I^n))) \supset \tilde{f}(\partial I^n)$$

και αφού από υπόθεση $p^{-1}(b_0) = F$ προκύπτει μαζί με το παραπάνω $\tilde{f}(\partial I^n) \subseteq F$.

Καταλήξαμε σε μία \tilde{f} όπου $\tilde{f}(I^n) \subseteq E$, $\tilde{f}(\partial I^n) \subseteq F$, $\tilde{f}(J^{n-1}) = x_0$, άρα $\tilde{f} \in \pi_n(E, F, x_0)$ όπου $p_*([\tilde{f}]) = [f]$ εφόσον $p\tilde{f} = f$.

Τέλος η p_* είναι επί αφού δείξαμε ότι για κάθε $[f] \in \pi_n(B, b_0)$ υπάρχει $[\tilde{f}] \in \pi_n(E, F, x_0)$ τ.ω. $p_*([\tilde{f}]) = [f]$.

- Τώρα θα δείξουμε ότι η p_* είναι 1-1.

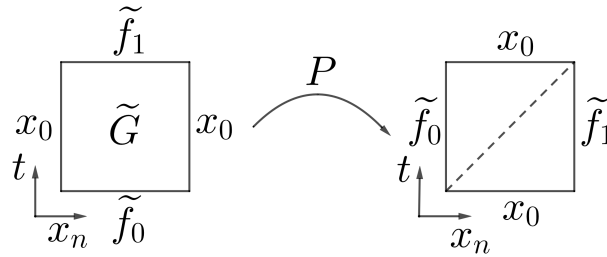
Έστω $\tilde{f}_0, \tilde{f}_1 : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (E, F, x_0)$ τ.ω. $p_*([\tilde{f}_0]) = p_*([\tilde{f}_1])$, άρα υπάρχει $G : (I^n \times I, \partial I^n \times I) \rightarrow (B, b_0)$ ομοτοπία από την $p_*([\tilde{f}_0])$ μέχρι $p_*([\tilde{f}_1])$.

Συνεπώς, έχουμε ανύψωση \tilde{G} όπου δίνεται από:

- \tilde{f}_0 στο $I^n \times \{0\} = \{(x_1, \dots, x_n, 0) | (x_1, \dots, x_n) \in I^n\}$
- \tilde{f}_1 στο $I^n \times \{1\} = \{(x_1, \dots, x_n, 1) | (x_1, \dots, x_n) \in I^n\}$
- σταθερή απεικόνιση που στέλνεται στο x_0 από το $J^{n-1} \times I = \{(x_1, \dots, x_n, t) | \forall i \in [1, n] (\{x_i = 0\} \cup \{x_i = 1\}) \setminus \{x_n = 0\}, (x_1, \dots, x_n, t) \in I^n \times I\}$

* αυτό συμβαίνει αφού έχουμε δείξει ότι η p_* είναι επί απεικόνιση, άρα $\forall [f] \in \pi_n(B, b_0) \exists [\tilde{f}] \in \pi_n(E, F, x_0)$ τ.ω. $p_*([\tilde{f}]) = [f]$. Για ομοτοπία G , αλλιώς $f_t : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (B, b_0)$, έχουμε ότι $f_t(J^{n-1}) = b_0, \forall t \in I$. Άρα υπάρχουν ανυψώσεις $\tilde{f} : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (E, F, x_0) \forall t \in I$ όπου είναι σταθερές στο J^{n-1} , δηλαδή $\tilde{f}_t(J^{n-1}) = \tilde{G}(J^{n-1} \times I) = x_0$.

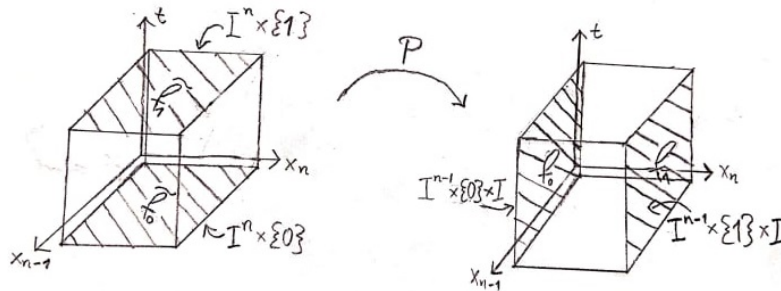
για να ισχύει η ιδιότητα ανύψωσης ομοτοπίας χρειαζόμαστε η \tilde{G} να ορίζεται στο $I^n \times \{0\} \cup \partial I^n \times I$, δηλαδή την επιφάνεια $n+1$ διάστασης κύβου χωρίς την πάνω έδρα. Όμως το $I^n \times \{0\} \cup I^n \times \{1\} \cup J^{n-1} \times I$ είναι η επιφάνεια του κύβου χωρίς την αριστερή έδρα. Αρχικά θα αναπαραμετρήσουμε την \tilde{G} μεταθέτοντας τις τελευταίες δύο συντεταγμένες, δηλαδή $P(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n, t) = \tilde{G}(x_1, \dots, x_{n-1}, t, x_n)$. Αυτή η αναπαραμέτρηση ανακλάει την επιφάνεια του κύβου ως προς την διαγώνιο που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Αυτή η αναπαραμέτρηση μέσω της ανάκλασης κάνει το εξής:

- $I^n \times \{0\}$ γίνεται $\{(x_1, \dots, 0, x_n) | (x_1, \dots, x_n) \in I^n\}$
- $I^n \times \{1\}$ γίνεται $\{(x_1, \dots, 1, x_n) | (x_1, \dots, x_n) \in I^n\}$
- $J^{n-1} \times I$ γίνεται $\{(x_1, \dots, t, x_n) | \forall i \in [1, n] (\{x_i = 0\} \cup \{x_i = 1\}) \setminus \{x_n = 0\}, (x_1, \dots, x_n, t) \in I^n \times I\}$

Άρα όλα τα προηγούμενα σύνολα μαζί στέλνονται στο $\partial I^n \times (I \setminus \{0\})$ όταν μεταθέτουμε τις δύο τελευταίες συντεταγμένες, όπως στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 26: Αριστερά το $(I^n \times \{0\}) \cup (I^n \times \{1\}) \cup (J^{n-1} \times I)$ είναι η επιφάνεια κύβου I^{n+1} χωρίς την αριστερή έδρα, δεξιά το $\partial I^n \times (I \setminus \{0\})$ είναι η επιφάνεια κύβου I^{n+1} χωρίς την κάτω έδρα.

Αυτό που μένει είναι να φτιάξουμε την απεικόνιση έτσι ώστε να λείπει η πάνω έδρα του κύβου αντι για την κάτω έδρα, που γίνεται αντιστρέφοντας την κατεύθυνση της t συντεταγμένης.

Δηλαδή $\tilde{P}(x_1, \dots, x_n, t) = P(x_1, \dots, x_n, 1-t) = \tilde{G}(x_1, \dots, 1-t, x_n)$.
 Συνεπώς, ισχύουν τα κριτήρια της ιδιότητας ομοτοπικής ανύψωσης για ζευγάρι $(I^n, \partial I^n)$ με αποτέλεσμα η \tilde{P} να επεκτείνεται στο $I^n \times I$, άρα και η \tilde{G} επεκτείνεται στο $I^n \times I$, δηλαδή $\tilde{G} : I^n \times I \rightarrow E$.

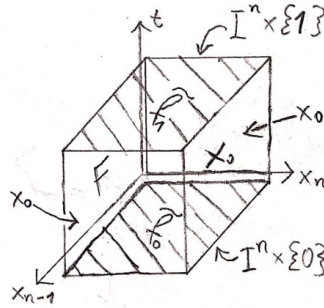
Αυτή είναι μια ομοτοπία $\tilde{f}_t : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (E, F, x_0)$ από το \tilde{f}_0 μέχρι το \tilde{f}_1 , αυτό συμβαίνει γιατί η αριστερή έδρα που έλειπε τώρα στέλνεται στην F :

$$p \circ \tilde{G}(\partial I^n \times I) = G(\partial I^n \times I) = b_0 \implies p \circ \tilde{G}(\partial I^n \times I) = b_0$$

άρα παίρνοντας προεικόνα έχουμε ότι

$$p^{-1}(b_0) = p^{-1}(p(\tilde{G}(\partial I^n \times I))) \supset \tilde{G}(\partial I^n \times I)$$

Εφόσον γνωρίζουμε από υπόθεση ότι $p^{-1}(b_0) = F$ ισχύει $\tilde{G}(\partial I^n \times I) \subseteq F$. Παρατηρούμε ότι η πάνω έδρα και η κάτω έδρα στέλνονται στο E αφού στέλνονται στο f_0 και f_1 , όμως δεν μας επηρεάζει εφόσον $(I^n \times \{0\} \cup I^n \times \{1\}) \not\subseteq \partial I^n \times I$.



Σχήμα 27: Η ομοτοπία $\tilde{G} : (I^n \times I, \partial I^n \times I, J^{n-1} \times I) \rightarrow (E, F, x_0)$, τ.ω. $\tilde{G}(I^n \times \{0\}) = \tilde{f}_0$ και $\tilde{G}(I^n \times \{1\}) = \tilde{f}_1$

Άρα πράγματι η \tilde{G} είναι ομοτοπία στοιχείων της $\pi_n(E, F, x_0)$.

Άρα $[\tilde{f}_0] = [\tilde{f}_1] \in \pi_n(E, F, x_0)$. Αυτό που αποδείξαμε είναι ότι εαν $p\tilde{f}_0$ είναι ομοτοπικό με $p\tilde{f}_1$ με ομοτοπία G τότε \tilde{f}_0 είναι ομοτοπικό με \tilde{f}_1 με ομοτοπία \tilde{G} , δηλαδή $p_*([\tilde{f}_0]) = p_*([\tilde{f}_1]) \implies [\tilde{f}_0] = [\tilde{f}_1]$. Άρα p_* είναι 1-1.

- Τέλος πρέπει να βάλουμε την $\pi_n(B, b_0)$ στην μακρά ακριβής ακολουθία των δυάδων (E, F) . Για να το κάνουμε αυτό θα χρησιμοποιούμε τον ισομορφισμό $\pi_n(E, F, x_0) \rightarrow \pi_n(B, b_0)$ που βρήκαμε και 2 μεταθετικά διαγράμματα με τον εξής τρόπο:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \pi_n(B, b_0) & & & \\ & & \tilde{p}_* \nearrow & \uparrow p_* \downarrow p_*^{-1} & \searrow \tilde{\partial} & & \\ \dots & \xrightarrow{i_*} & \pi_n(E, x_0) & \xrightarrow{j_*} & \pi_n(E, F, x_0) & \xrightarrow{\partial} & \pi_{n-1}(F, x_0) \xrightarrow{i_*} \dots \end{array}$$

τ.ω.

$$\tilde{p}_*([\tilde{f}]) = p_* \circ j_*([\tilde{f}]) \tag{5}$$

$$\tilde{\partial}([f]) = \partial \circ p_*^{-1}([f]) \tag{6}$$

Η (8) είναι καλά ορισμένη εφόσον ορίζουμε την \tilde{p} ως $\tilde{p} : E \rightarrow B$ όπου ανυψώνει $f : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (B, b_0)$ σε απεικονίσεις $\tilde{f} : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (E, x_0)$ τ.ω. $\tilde{p} \circ \tilde{f} = f$ και

$$f = p_* \circ j_* \circ \tilde{f} : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (B, b_0)$$

$$f = \tilde{p} \circ \tilde{f} : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (B, b_0)$$

Η ισότητα της (8) ισχύει εφόσον:

$$p_* \circ j_*([\tilde{f}]) = p_*([j \circ \tilde{f}]) = p_*([\tilde{f}]) = f = \tilde{p}_*([\tilde{f}])$$

Έχουμε $j_* \circ \tilde{f} = \tilde{f}$ διότι ορίζουμε την j ως $j : (E, x_0, x_0) \hookrightarrow (E, F, x_0)$ τ.ω. $j(x_0) = x_0 \in F$ άρα $j(\tilde{f}(x)) = \tilde{f}(x)$ για $x \in I^n$.

Η (9) είναι καλά ορισμένη αφού ορίζουμε την $\tilde{\partial}[f] = [\tilde{f}|I^{n-1}] \in \pi_{n-1}(F, x_0)$ και η ισότητα ισχύει εεφόσον:

$$\partial \circ p_*^{-1}([f]) = \partial([\tilde{f}]) = [\tilde{f}|I^{n-1}]$$

όμως $\tilde{f} : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \rightarrow (E, F, x_0) \implies \tilde{f}(I^{n-1}) \subseteq F$
 άρα $[\tilde{f}|I^{n-1}] \in \pi_{n-1}(F, x_0) \implies \partial \circ p_*^{-1}([f]) = \tilde{\partial}([f])$

Τέλος χρειάζεται να δείξουμε την ακρίβεια στην $\pi_n(B, b_0)$, δηλαδή ότι $\ker \tilde{\partial} = \text{im } \tilde{p}_*$:
 Αρκεί να δείξουμε ότι $\ker(\partial \circ p_*^{-1}) = \text{im}(p_* \circ j_*)$ εφόσον αποδείξαμε την (8) και (9),
 επίσης θα χρησιμοποιήσουμε ότι γνωρίζουμε την ακρίβεια στην $\pi_n(E, F, x_0)$ δηλαδή ότι
 $\ker \partial = \text{im } j_*$.

$\ker(\partial \circ p_*^{-1}) = \{[f] \in \pi_n(B, b_0) | \partial(p_*^{-1}([f])) = 0\} = \{[f] \in \pi_n(B, b_0) | p_*^{-1}([f]) \in \ker \partial\} = p_*^{-1}(p_*^{-1}(\ker \partial))$, δηλαδή η προεικόνα του $p_*^{-1}(\ker \partial)$.

Από το γεγονός ότι έχουμε δείξει p_* ισομορφισμός και από την μοναδικότητα αντιστροφής απεικόνισης έχουμε ότι: $p_*^{-1}(p_*^{-1}(\ker \partial)) = p_*(\ker \partial)$

συνεχίζουμε $p_*(\ker \partial) = p_*(\text{im } j_*)$, αφού $\ker \partial = \text{im } j_*$

ύστερα $p_*(\text{im } j_*) = p_*(j_*(\pi_n(E, x_0))) = p_* \circ j_*(\pi_n(E, x_0)) = \text{im}(p_* \circ j_*)$

Άρα $\ker(\partial \circ p_*^{-1}) = \text{im}(p_* \circ j_*) \implies \ker \tilde{\partial} = \text{im } \tilde{p}_*$

Το 0 στο τέλος της ακολουθίας βγαίνει από την ιδιότητα:

$$\pi_0(F, x_0) \xrightarrow{i_0} \pi_0(E, x_0) \longrightarrow 0 \quad \text{είναι ακριβείς αν η } i_0 \text{ απεικόνιση είναι επί.}$$

άρα αρκεί να δείξουμε ότι i_0 είναι επί.

Από υπόθεση έχουμε ότι B είναι συνεκτική κατα δρόμους και έχουμε ορίσει την ομοτοπική ομάδα $\pi_0(X, x_0)$ να έχει ως στοιχεία τις συνεκτικές συνιστώσες του X .

Θα δείξουμε ότι μπορούμε να βρούμε δρόμο από τυχαίο $x \in E$ μέχρι την F ανυψώνοντας δρόμο στο B από το $p(x)$ μέχρι το b_0 .

Έστω δρόμος $g : I \rightarrow B$ τ.ω. $g(0) = p(x), x \in E$ και $g(1) = b_0$, άρα υπάρχει ανύψωση $\tilde{g} : I \rightarrow E$ τ.ω.

$$\begin{aligned} p \circ \tilde{g}(0) = g(0) = p(x) &\implies p^{-1}(p(\tilde{g}(0))) = p^{-1}(p(x)) = x \in E \\ \implies \tilde{g}(0) \subseteq p^{-1}(p(\tilde{g}(0))) &\implies \tilde{g}(0) = x \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} p \circ \tilde{g}(1) = g(1) = b_0 &\implies p^{-1}(p(\tilde{g}(1))) = p^{-1}(b_0) = F \\ \implies \tilde{g}(1) \subseteq p^{-1}(p(\tilde{g}(1))) &\implies \tilde{g}(1) \subseteq F \end{aligned}$$

άρα για κάθε $x \in E$ έχουμε δρόμο $x \rightarrow F$, συνεπώς κάθε συνεκτική συνιστώσα του E προέρχεται από μια συνεκτική συνιστώσα της F τ.ω. εάν $[g] \in \pi_0(F, x_0)$ τότε $i_0([g]) \in \pi_0(E, x_0)$. Άρα i_0 είναι επί.

Συνεπώς κατασκευάσαμε μακρά ακριβή ακολουθία της μορφής

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow \pi_n(F, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E, x_0) \xrightarrow{\tilde{p}_*} \pi_n(B, b_0) \xrightarrow{\tilde{\partial}} \pi_{n-1}(F, x_0) \rightarrow \cdots \\ \cdots \rightarrow \pi_0(F, x_0) \rightarrow \pi_0(E, x_0) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

τ.ω.

$$\tilde{p}_* = p_* \circ j_*, \quad \tilde{\partial} = \partial \circ p_*^{-1}$$

□

5.2 Οι Δέσμες ινών είναι Serre fibrations

Τώρα δείχνουμε γιατί ισχύει ο ισχυρισμός που κάναμε στην αρχή της ενότητας, δηλαδή ότι κάθε δέσμη ινών παράγει μια μακρά ακριβή ακολουθία ομάδων ομοτοπίας. Για την παρακάτω απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε έναν ισοδύναμο ορισμό της ιδιότητας ομοτοπικής ανύψωσης μέσω μεταθετικών διαγραμμάτων.

Ορισμός 6. Έστω E και B τοπολογικοί χώροι. Μια απεικόνιση $p : E \rightarrow B$ έχει την ιδιότητα ανύψωσης ομοτοπίας στον X εάν για κάθε δύο απεικονίσεις $\tilde{f} : X \rightarrow E$ και $G : X \times I \rightarrow B$ τ.ω. $p\tilde{f} = Gi$ (όπου $i : X \rightarrow X \times \{0\}$ είναι η έγκλιση $x \mapsto (x, 0)$), υπάρχει απεικόνιση $\tilde{G} : X \times I \rightarrow E$ τ.ω. και τα δύο παρακάτω τρίγωνα να είναι μεταθετικά:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\tilde{f}} & E \\ \downarrow i & \nearrow \tilde{G} & \downarrow p \\ X \times I & \xrightarrow{G} & B \end{array}$$

Δηλαδή $\tilde{G}i = \tilde{f}$ και $p\tilde{G} = G$.

Οι δύο ορισμοί είναι ισοδύναμοι εφόσον:

Ορίζοντας $f : X \rightarrow B$ τ.ω. $f(x) = G(x, 0)$, τότε \tilde{f} είναι ανύψωση της f , εφόσον $p\tilde{f} = Gi = f$. Εάν ορίσουμε $g : X \rightarrow B$ τ.ω. $g(x) = G(x, 1)$, τότε η G είναι ομοτοπία των f, g . Η \tilde{G} είναι ομοτοπία των \tilde{f}, \tilde{g} τ.ω. $\tilde{g} = \tilde{G}(x, 1)$ είναι ανύψωση της g , εφόσον $p\tilde{g} = p\tilde{G}(x, 1) = G(x, 1) = g$. Άρα, εάν έχουμε ομοτοπία G των f, g και $\tilde{f} = \tilde{G}(x, 0)$ είναι ανύψωση της f , τότε υπάρχει ανύψωση \tilde{G} της ομοτοπίας G τ.ω. $\tilde{G}(x, 1) = \tilde{g}$.

Για την απόδειξη του παρακάτω θεωρήματος θα χρειαστούμε:

Ορισμός 7. Έστω ένας μετρικός χώρος (X, d) . Εάν $A \subseteq (X, d)$, η διάμετρος του A είναι ο αριθμός

$$\text{diam}(A) = \sup\{d(a_1, a_2), a_1, a_2 \in A\}$$

Λήμμα. (αριθμού Lebesgue) Έστω \mathcal{A} ένα ανοιχτό κάλυμμα του μετρικού χώρου (X, d) . Εάν X είναι συμπαγής, τότε υπάρχει $\delta > 0$ τ.ω. για κάθε $A \subseteq X$ με $\text{diam}(A) < \delta$, υπάρχει $A_i \in \mathcal{A}$ τ.ω. $A \subseteq A_i$.

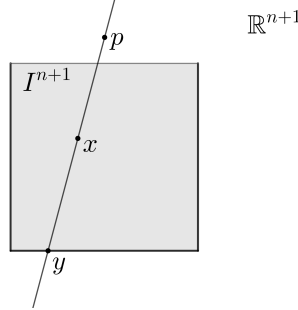
Ο αριθμός δ ονομάζεται **αριθμός Lebesgue** της κάλυψης \mathcal{A} .

Μια χρήσιμη απεικόνιση είναι η $r : I^n \times I \rightarrow (I^n \times \{0\}) \cup (\partial I^n \times I)$, τ.ω.

$$r|_{(I^n \times \{0\}) \cup (\partial I^n \times I)} = \text{id}_{(I^n \times \{0\}) \cup (\partial I^n \times I)}$$

Μια απεικόνιση τέτοιου είδους την ονομάζουμε *retraction*. Αυτή την απεικόνιση μπορούμε να την κατασκευάσουμε σταθεροποιώντας ένα σημείο εκτός του κύβου $p = (0, \dots, 2)$ στον

\mathbb{R}^{n+1} . Στην συνέχεια συνδέουμε τυχαίο σημείο $x \in I^{n+1}$ και p με μια ευθεία, αυτή η ευθεία για κάθε $x \in I^{n+1}$ θα διέρχεται από ένα ακριβώς σημείο $y \in (I^n \times \{0\}) \cup (\partial I^n \times I)$. Ορίζουμε r την απεικόνιση να στέλνει κατα μήκος της ευθείας τα σημεία $x \in I^{n+1}$ στο αντίστοιχο σημείο $y \in (I^n \times \{0\}) \cup (\partial I^n \times I)$, συνεπώς ικανοποιεί $r|_{(I^n \times \{0\}) \cup (\partial I^n \times I)} = \text{id}_{(I^n \times \{0\}) \cup (\partial I^n \times I)}$ αφού τα σημεία y παραμένουν σταθερά. Η κατασκευή φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Θεώρημα 6. Κάθε Δέσμη Ινών $p : E \rightarrow B$ είναι Serre fibration.

Απόδειξη: Έστω μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccc} I^n & \xrightarrow{\tilde{f}} & E \\ \downarrow & & \downarrow p \\ I^{n+1} & \xrightarrow{G} & B \end{array}$$

Επιλέγουμε ανοιχτή κάλυψη $\{U_a\}$ του B τ.ω. να έχουμε ομοιομορφισμούς $\psi : U_a \times F \rightarrow p^{-1}(U_a)$, μέσω της δομής Δέσμης ινών. Άρα η οικογένεια $\{G^{-1}(U_a)\}$ αποτελεί κάλυψη του I^{n+1} και επειδή είναι συμπαγής χώρος ανάγεται σε πεπερασμένη κάλυψη. Ο I^{n+1} είναι συμπαγής μετρικός χώρος με ανοιχτή κάλυψη $\{G^{-1}(U_a)\}$, συνεπώς υπάρχει αριθμός Lebesgue $\delta > 0$ τ.ω. για οποιοδήποτε υποσύνολο A του I^{n+1} με διάμετρο $< \delta$ ισχύει $A \subseteq G^{-1}(U_a)$, άρα $G(A) \subseteq U_a$.

Καλύβουμε τον I^n από υποκύβους C_n τ.ω. $\text{diam}(C_n) < \delta/2$ και επιλέγουμε σημεία $0 = t_0 < t_1 \cdots < t_m = 1$ τ.ω. $t_{j+1} - t_j < \delta/2$ για $0 \leq j \leq m$. Παρατηρούμε ότι $\text{diam}(C_n \times [t_j, t_{j+1}]) < \delta$ για κάθε C_n και για κάθε j . Συνεπώς για κάθε C_n και j , υπάρχει μια γειτονιά U_a τ.ω. $G(C_n \times [t_j, t_{j+1}]) \subseteq U_a$.

Ο κάθε υποκύβος θα λέμε ότι αποτελείται από την ένωση κελιών (faces) το πολύ $(n - 1)$ -διάστασης και του εσωτερικού $(C_n)^\circ$. Το κάθε κελί k -διάστασης $(0 \leq k \leq n - 1)$ C_k είναι ομοιομορφικό με το I^k , π.χ. κελιά 0-διάστασης είναι οι κορυφές του υποκύβου, κελιά 1-διάστασης είναι οι ακμές του υποκύβου, κελιά 2-διάστασης είναι έδρες του υποκύβου, κ.ο.κ. Η ένωση των κελιών C_{n-1} είναι ίση με ∂C_n (για να το καταλάβει αυτό κανείς μπορεί να σκεφτεί για διάσταση $n = 2, 3$). Την κάλυψη του I^n την παίρνουμε από υποκύβους C_n τ.ω.

- Εάν έχουμε υποκύβο $C_n \subseteq I^n$, τότε κάθε κελί $C_k \subseteq I^n$ για $0 \leq k \leq n - 1$.
- Εάν έχουμε υποκύβους $C_n, K_n \subseteq I^n$, τότε η τομή $C_n \cap K_n$ είναι κενή ή είναι κάποιο κοινό κελί των υποκύβων.

Με $L^{(k)}$ θα συμβολίζουμε την ένωση των κελιών k -διάστασης όλων των υποκύβων C_n που καλύπτουν το I^n , π.χ. $L^{(n-1)}$ θα είναι η ένωση όλων των συνόρων του κάθε υποκύβου C_n .

Θα δείξουμε με επαγωγή στο $k \geq 0$, ότι υπάρχουν συνεχείς απεικονίσεις \tilde{h}_k τέτοιες ώστε

τα δύο τρίγωνα του μεταθετικού διαγράμματος

$$\begin{array}{ccc}
 L^{(k)} & \xrightarrow{\tilde{f}} & E \\
 \downarrow i & \nearrow \tilde{h}_k & \downarrow p \\
 L^{(k)} \times [0, t_1] & \xrightarrow{G} & B
 \end{array}$$

να είναι μεταθετικά και η \tilde{h}_{k+1} να είναι επέκταση της \tilde{h}_k (θα κάνουμε κατάχρηση του συμβολισμού και θα συμβολίζουμε τους περιορισμούς των i, \tilde{f} και G με τα ίδια γράμματα).

Έστω οι προβολές $\alpha : U_a \times F \rightarrow U_a$ και $\beta : U_a \times F \rightarrow F$. Εάν $x \in p^{-1}(U_a)$, τότε $\psi^{-1}(x) = (\alpha\psi^{-1}(x), \beta\psi^{-1}(x))$ και εφόσον $\alpha\psi^{-1}(x) = p(x)$, από το μεταθετικό διάγραμμα της Δέσμης ινών, ισχύει για κάθε $x \in p^{-1}(U_a)$:

$$\psi(p(x), \beta\psi^{-1}(x)) = x \quad (7)$$

Τώρα ξεκινάμε την απόδειξη με επαγωγή στο $k \geq 0$:

- Έστω $u \in L^{(0)}$, το $L^{(0)}$ αποτελεί το σύνολο των κορυφών όλων των υποκύβων C_n , άρα αποτελεί διακριτός χώρος και το u αποτελεί μία από τις κορυφές. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει U_a τ.ω. $G(\{u\} \times [0, t_1]) \subseteq U_a$. Ορίζουμε $h^u : \{u\} \rightarrow p^{-1}(U_a) \subseteq E$ έτσι ώστε:

$$h^u(u, t) = \psi(G(u, t), \beta\psi^{-1}\tilde{f}(u))$$

Συνεπώς

- ισχύει $ph^u(u, t) = G(u, t)$, εφόσον από ιδιότητα Δέσμης ινών γνωρίζουμε $p\psi = \alpha$ και άρα

$$ph^u(u, t) = p\psi(G(u, t), \beta\psi^{-1}\tilde{f}(u)) = G(u, t)$$

- ισχύει $h^u(u, 0) = \tilde{f}(u)$, εφόσον μέσω του μεταθετικού διαγράμματος και της (7) έχουμε

$$h^u(u, 0) = \psi(G(u, 0), \beta\psi^{-1}\tilde{f}(u)) = \psi(p\tilde{f}(u), \beta\psi^{-1}\tilde{f}(u)) = \tilde{f}(u)$$

Τώρα κολλάμε τις απεικονίσεις h^u για κάθε $u \in L^{(0)}$, έτσι ώστε να αποκτήσουμε απεικόνιση $\tilde{h}_0 : L^{(0)} \rightarrow E$. Η απεικόνιση αυτή είναι συνεχής εφόσον ο χώρος $L^{(0)}$ είναι διακριτός, συνεπώς έχει την διακριτή τοπολογία και γνωρίζουμε ότι εάν έχουμε απεικόνιση η οποία έχει πεδίο ορισμού με την διακριτή τοπολογία, τότε είναι συνεχής. Παρατηρούμε ότι η \tilde{h} πράγματι κάνει τα τρίγωνα μεταθετικά μέσω των h^u .

- Για το επαγωγικό βήμα, έστω C_{k+1} να είναι κελί $(k+1)$ -διάστασης και έστω U_a τ.ω. $G(C_{k+1} \times [0, t_1]) \subseteq U_a$. Εφόσον το C_{k+1} είναι ομοιομορφικό με το I^{k+1} και το $[0, t_1]$ ομοιομορφικό με το I , τότε υπάρχει ομοιομορφισμός $g : I^{k+1} \times I \rightarrow C_{k+1} \times [0, t_1]$. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει retraction

$$r : I^{k+1} \times I \rightarrow (I^{k+1} \times \{0\}) \cup (\partial I^k \times I)$$

άρα ορίζεται η συστολή $r_c : C_{k+1} \times [0, t_1] \rightarrow (C_{k+1} \times \{0\}) \cup (\partial C_{k+1} \times [0, t_1])$, τ.ω.

$$r_c = (g|_{(I^{k+1} \times \{0\}) \cup (\partial I^k \times I)}) \circ r \circ g^{-1}$$

Στην συνέχεια ορίζουμε απεικόνιση $\tilde{v}_c : (C_{k+1} \times \{0\}) \cup (\partial C_{k+1} \times [0, t_1]) \rightarrow p^{-1}(U_a)$, τ.ω.

$$\tilde{v}_c|_{C_{k+1} \times \{0\}} = \tilde{f}|_{C_{k+1}} \quad \text{και} \quad \tilde{v}_c|_{\partial C_{k+1} \times [0, t_1]} = \tilde{h}_k|_{\partial C_{k+1} \times [0, t_1]}$$

Οι απεικονίσεις \tilde{f} και \tilde{h}_k ορίζονται εφόσον στο επαγωγικό βήμα έχουμε υποθέσει στο μεταθετικό διάγραμμα τα δύο τρίγωνα είναι μεταθετικά

$$\begin{array}{ccc} L^{(k)} & \xrightarrow{\tilde{f}} & E \\ \downarrow i & \nearrow \tilde{h}_k & \downarrow p \\ L^{(k)} \times [0, t_1] & \xrightarrow{G} & B \end{array}$$

Η \tilde{f} ορίζεται στο I^n συνεπώς περιέχει το C_{k+1} και η \tilde{h}_k περιέχει το $\partial C_{k+1} \times [0, t_1]$ επειδή το $L^{(k)}$, όπως το έχουμε ορίσει, περιέχει όλα τα σύνορα ∂C_{k+1} . Άρα $\partial C_{k+1} \times [0, t_1] \subseteq L^{(k)} \times [0, t_1]$.

Τελικά ορίζουμε $h^c : C_{k+1} \times [0, t_1] \rightarrow p^{-1}(U_a)$, τ.ω.

$$h^c(u, t) = \psi(G(u, t), \beta\psi^{-1}\tilde{v}_c r_c(u, t))$$

όπου $u \in C_{k+1}$ και $t \in [0, t_1]$.

Τώρα θα δείξουμε ότι $h^c|_{\partial C_{k+1} \times [0, t_1]} = \tilde{h}_k|_{\partial C_{k+1} \times [0, t_1]}$ και ότι το παρακάτω διάγραμμα αποτελείται από μεταθετικά τρίγωνα:

$$\begin{array}{ccc} C_{k+1} & \xrightarrow{\tilde{f}} & E \\ \downarrow i & \nearrow h^c & \downarrow p \\ C_{k+1} \times [0, t_1] & \xrightarrow{G} & B \end{array}$$

Αρχικά παρατηρούμε $ph^c(u, t) = p\psi(G(u, t), \dots) = G(u, t)$, έτσι ώστε το κάτω τρίγωνο να είναι μεταθετικό. Στην συνέχεια ελέγχουμε την περίπτωση $(u, t) \in (C_{k+1} \times \{0\}) \cup (\partial C_{k+1} \times [0, t_1])$, όπου ισχύει $r_c(u, t) = (u, t)$.

- Εάν $(u, t) \in C_{k+1} \times \{0\}$, τότε $G(u, t) = G(u, 0) = p\tilde{f}$ και $\tilde{v}_c(u, t) = \tilde{f}(u)$. Συνεπώς μαζί με την (7) έχουμε:

$$h^c(u, t) = \psi(p\tilde{f}(u), \beta\psi^{-1}\tilde{f}(u)) = \tilde{f}(u)$$

- Εάν $(u, t) \in \partial C_{k+1} \times [0, t_1]$, τότε $G(u, t) = p\tilde{h}_k(u, t)$ και $\tilde{v}_c(u, t) = \tilde{h}_k(u, t)$. Συνεπώς μαζί με την (7) έχουμε:

$$h^c(u, t) = \psi(p\tilde{h}_k(u, t), \beta\psi^{-1}\tilde{h}_k(u, t)) = \tilde{h}_k(u, t)$$

Δηλαδή πράγματι τα δύο τρίγωνα είναι μεταθετικά και ισχύει $h^c|_{\partial C_{k+1} \times [0, t_1]} = \tilde{h}_k|_{\partial C_{k+1} \times [0, t_1]}$.

Τώρα εφόσον οι τομές των υποκύβων αποτελούν κελιά χαμηλότερης διάστασης, δηλαδή ορίζεται το \tilde{h}_k σε αυτές, μπορούμε να κολλήσουμε όλες τις απεικονίσεις h^c για κάθε C_{k+1} μέσω του λήμματος επικόλλησης τ.ω. στις τομές των C_{k+1} να είναι ίσες οι αντίστοιχες h^c . Συνεπώς με αυτό το κόλλημα αποκτούμε συνεχή απεικόνιση $\tilde{h}_{k+1} : L^{(k+1)} \times [0, t_1] \rightarrow E$.

Συγκεκριμένα για $k = n$, υπάρχει συνεχής απεικόνιση $\tilde{G}_1 = \tilde{h}_n$ τ.ω. το παρακάτω διάγραμμα μαζί με τα τρίγωνα του να είναι μεταθετικό

$$\begin{array}{ccc} I^n & \xrightarrow{\tilde{f}} & E \\ \downarrow i & \nearrow \tilde{G}_1 & \downarrow p \\ I^n \times [0, t_1] & \xrightarrow{G} & B \end{array}$$

Για να επεκτείνουμε την ανύψωση στο $I^n \times I$ κάνουμε το εξής:

Επαναλαμβάνουμε την κατασκευή με την επαγωγή απλώς αντικαθιστώντας το $[t_1, t_2]$ αντί για $[t_0, t_1]$ (για $t_0 = 0$) όπως κάναμε προηγουμένως. Έτσι θα αποκτήσουμε απεικόνιση $I^n \times [t_1, t_2] \rightarrow E$ τ.ω. να είναι ίση με την G_1 στο $I^n \times \{t_1\}$. Στην συνέχεια κολλάμε τις απεικονίσεις αυτές μέσω του λήμματος επικόλλησης για να αποκτήσουμε συνεχή απεικόνιση $\tilde{G}_2 : I^n \times [0, t_2] \rightarrow E$ η οποία κάνει τα τρίγωνα του αντίστοιχου διαγράμματος μεταθετικά. Άρα στο τελευταίο βήμα θα έχουμε $\tilde{G} = \tilde{G}_m$ η οποία θα ορίζεται στο $I^n \times [0, t_m] = I^n \times I$, το οποίο ήταν το ζητούμενο. \square

Υπάρχει ένα γενικότερο αποτέλεσμα, αντίστοιχο με το παραπάνω Θεώρημα στο Corollary 14, σελίδα 96, του [29].

Θεώρημα 7. *Εάν $p : E \rightarrow B$ είναι Δέσμη ινών τ.ω. ο B να είναι παρασυμπαγής και Hausdorff, τότε p είναι fibration.*

Για ιδιότητες της παρασυμπάγειας μπορεί να κοιτάξει κάποιος την ενότητα 41, σελίδα 252 του [24]. Παραδείγματα παρασυμπαγών χώρων είναι οι συμπαγείς χώροι, αλλά και οι χώροι \mathbb{R}^n .

Από αυτά παρατηρούμε ότι τα fibrations είναι γενικότερα είδη απεικονίσεων από τις δέσμες ινών εφόσον το αντίστροφο των παραπάνω θεωρημάτων δεν ισχύει αναγκαστικά. Αυτό επίσης φαίνεται αφού αποδεικνύεται ότι οι ίνες των fibrations είναι τουλάχιστον ομοτοπικά ισοδύναμες από το Theorem 11.47 του [28], σε αντίθεση με τις ίνες των δεσμών ινών οι οποίες είναι ομοιομορφικές.

6 Υπολογισμός τρίτης ομάδας ομοτοπίας της σφαίρας

Δύο σημαντικά αποτελέσματα της αλγεβρικής τοπολογίας είναι $\pi_i(S^n) = 0$ για $i < n$ και $\pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ με γεννήτορα την ταυτοτική απεικόνιση, τα οποία επάγονται από το **cellular approximation theorem**, σελίδα 349 του [4], και το **Freudenthal suspension theorem**, σελίδα 360 του [4] αντίστοιχα, οι αποδείξεις των οποίων επειδή είναι αρκετά τεχνικές και δεν ταιριάζουν με το παρόν κείμενο δεν θα τις αναπτύξουμε. Έχουμε ήδη δείξει την περίπτωση $\pi_1(S^n) = 0$ στην πρόταση (11) και αναφέραμε ότι $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ με γεννήτορα την ταυτοτική απεικόνιση στην ενότητα (3.2.1).

6.1 Cellular approximation theorem

Αυτό το θεώρημα αφορά τα λεγόμενα **CW-complex**, οι δομικοί λίθοι των οποίων αποτελούν τα cells e^n για $n \geq 0$, τα οποία είναι ομοιομορφικά με ανοιχτές μπάλες αντίστοιχης διάστασης. Θα λέμε X^n είναι ο n -σκελετός, ο οποίος περιέχει όλα τα cells μέχρι n -διάστασης.

Παράδειγμα: Η σφαίρα S^n αποτελεί CW-complex αποτελούμενη από δύο cells, $e^0 = \{0\}$ και e^n (δηλαδή $S^n = X^n = e^n \cup e^0$), τ.ω. να κολλάμε το σύνορο του e^n σε ένα σημείο e^0 . Η κατασκευή αυτή είναι ισοδύναμη με τον τοπολογικό χώρο του S^n ως ο χώρος πηλίκου $D^n / \partial D^n$.

Δεν θα δώσουμε τον αυστηρό ορισμό του CW-complex, σελίδα 5 του [4], εφόσον μόνο το παράδειγμα της σφαίρας μας αρκεί.

Ένας τρόπος για να αποδείξουμε ότι $\pi_i(S^n) = 0$ για $i < n$ θα ήταν αρχικά να δείξουμε ότι κάθε απεικόνιση $S^i \rightarrow S^n$ είναι ομοτοπική με μια απεικόνιση η οποία απεικονίζεται σε όλη την S^n εκτός τουλάχιστον ενός σημείου, στην συνέχεια εφόσον γνωρίζουμε ότι το συμπλήρωμα ενός σημείου της S^n είναι συσταλτός χώρος (μέσω στερεογραφικής προβολής) έχουμε από την πρόταση (10) ότι η απεικόνιση αυτή είναι ομοτοπικά τετριμμένη, άρα κάθε απεικόνιση $S^i \rightarrow S^n$ για $i < n$ είναι ομοτοπικά τετριμμένη.

Το πρώτο βήμα είναι απαραίτητο εφόσον η συνεχής απεικόνιση $S^i \rightarrow S^n$ μπορεί να είναι επί χρησιμοποιώντας καμπύλες που γεμίζουν τον χώρο. Συνεπώς θα θέλαμε οι απεικονίσεις $S^i \rightarrow S^n$ για $i < n$ να είναι ομοτοπικές με απεικονίσεις οι οποίες δεν αυξάνουν την διάσταση.

Τέτοιου είδους απεικονίσεις είναι συχνές στα μαθηματικά, ένα παράδειγμα είναι οι γραμμικές απεικονίσεις, αφού η διάσταση της εικόνας είναι μικρότερη ή ίση από την διάσταση του πεδίου ορισμού. Άλλο παράδειγμα βγαίνει από το θεώρημα του Sard, το οποίο πορισματικά λέει ότι οι λείες απεικονίσεις μεταξύ λείων πολλαπλοτήτων δεν αυξάνουν την διάσταση (βλέπε ενότητα 6 του [21]).

Η αντίστοιχη απεικόνιση για τα CW-complexes είναι η απεικόνιση η οποία στέλνει cells σε cells ίσης ή μικρότερης διάστασης. Μια απεικόνιση $f : X \rightarrow Y$ τέτοιου είδους, η οποία ικανοποιεί $f(X^n) \subseteq Y^n$ για κάθε n , λέγεται **cellular απεικόνιση**. Το θεώρημα μας δίνει ακριβώς αυτό που ζητούσαμε, δηλαδή αυθαίρετες απεικονίσεις να είναι ομοτοπικές με απεικονίσεις οι οποίες δεν αυξάνουν την διάσταση.

Θεώρημα 8. (cellular approximation theorem): Κάθε απεικόνιση $f : X \rightarrow Y$ από CW-complexes είναι ομοτοπική με μία cellular απεικόνιση.

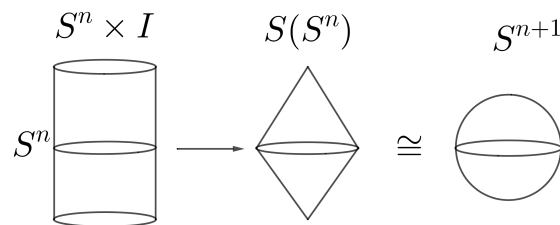
Πόρισμα 2. $\pi_i(S^n) = 0$ για $i < n$.

Απόδειξη: Έστω απεικόνιση $f : S^i \rightarrow S^n$ τ.ω. $S^i = X^i$ και $S^n = Y^n$ όπως στο παραπάνω παράδειγμα. Τότε η f είναι ομοτοπική, σύμφωνα με το cellular approximation theorem, με cellular απεικόνιση g . Άρα έχουμε $g(X^0) \subseteq Y^0$ και $g(X^i) \subseteq Y^i$, από το πρώτο έχουμε $g(x_0) = y_0$. Το δεύτερο μας λέει ότι το $g(X^i)$ είναι υπόχωρος του i -σκελετού της S^n , όμως για $i < n$ το Y^i αποτελείται μόνο από ένα σημείο, το y_0 . Συνεπώς η g είναι σταθερή απεικόνιση και εφόσον είναι ομοτοπική με κάθε $f : S^i \rightarrow S^n$ για $i < n$ έχουμε το ζητούμενο. \square

6.2 Freudenthal suspension theorem

Η επόμενη σημαντική πρόοδος μετά το [7] στη Θεωρία Ομοτοπίας ήταν από τον μαθητή του Hopf, τον Freudenthal, ο οποίος το 1937 στο [3] εισήγαγε την έννοια της **αιώρησης** (suspension). Για έναν χώρο X , η αιώρηση SX είναι ο χώρος πηλίκο του $X \times I$ συρρικνώνοντας το $X \times \{0\}$ σε σημείο και το $X \times \{1\}$ σε άλλο σημείο. Εάν $(x, t) \in X \times I$, χρησιμοποιούμε το $[x, t]$ για να συμβολίσουμε το αντίστοιχο στοιχείο στο SX μέσω της απεικόνισης πηλίκο $X \times I \rightarrow SX$.

Παράδειγμα: Εάν $X = S^n$, τότε $SX = S^{n+1}$ τ.ω. τα δύο «σημεία αιώρησης» να είναι ο βόρειος και νότιος πόλος της S^{n+1} , δηλαδή τα σημεία $(0, \dots, 0, \pm 1)$. (Όποιος ενδιαφέρεται για την απόδειξη μπορεί να κοιτάξει στην σελίδα 42, το Lemma 6 του [29]).



Ένας τρόπος να σκεφτόμαστε τον SX είναι ως ένας διπλός κώνος στον X , δηλαδή η ένωση των κώνων $C_+X = (X \times I)/(X \times \{0\})$ και $C_-X = (X \times I)/(X \times \{1\})$.

Μια χρήσιμη ιδιότητα της αιώρησης είναι ότι εκτός από χώρους, μπορούν να αναρτηθούν και απεικονίσεις. Εάν $f : X \rightarrow Y$, τότε η αιώρηση της είναι $Sf : SX \rightarrow SY$ τ.ω. $Sf([x, t]) = [f(x), t]$, δηλαδή η απεικόνιση πηλίκο του $f \times \text{id} : X \times I \rightarrow Y \times I$.

Η αιώρηση απεικονίσεων επίσης διατηρεί ομοτοπίες. Εάν $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ είναι ομοτοπικές μέσω ομοτοπίας f_t , τότε Sf_0, Sf_1 είναι ομοτοπικές μέσω ομοτοπίας Sf_t . Με αφορμή ότι η αιώρηση διατηρεί τις ομοτοπίες θέλουμε να βρούμε ομομορφισμό ομάδων ομοτοπίας:

$$j : \pi_i(S^n) \rightarrow \pi_{i+1}(S^{n+1}), \quad \tau.ω. [f] \mapsto [Sf]$$

Για να βρούμε τέτοια απεικόνιση θα χρησιμοποιήσουμε τη μακρά ακριβή ακολουθία των σχετικών ομάδων ομοτοπίας.

Αρχικά παρατηρούμε ότι $C_{\pm}X$ είναι συσταλτοί χώροι. Αυτό συμβαίνει διότι, έστω $\{*\}$ αυθαίρετο σημείο και

$$f : C_-X \rightarrow \{*\}, \quad \tau.ω. f([x, t]) = \{*\}$$

$$g : \{*\} \rightarrow C_-X, \quad \tau.ω. g(*) = [x, 0]$$

άρα $f \circ g = \text{id}_{\{*\}}$ και μέσω ομοτοπίας $H([x, t], s) = [x, st]$, $g \circ f([x, t]) = [x, 0] \simeq \text{id}_{C_-X}$. Συνεπώς, ο κώνος C_-X είναι ομοτοπικά ισοδύναμος με το σημείο $[x, 0] \in C_-X$, όμοια συμπεραίνουμε ότι C_+X είναι ομοτοπικά ισοδύναμος με $[x, 1]$. Άρα έχουμε ότι $\pi_i(C_{\pm}X) = 0$ για κάθε i .

Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι η μακρά ακριβής ακολουθία του ζευγαριού (C_+X, X)

$$\cdots \rightarrow \pi_{i+1}(C_+X) \xrightarrow{j_*} \pi_{i+1}(C_+X, X) \xrightarrow{\partial} \pi_i(X) \xrightarrow{i_*} \pi_i(C_+X) \rightarrow \cdots$$

και η μακρά ακριβής ακολουθία του ζευγαριού (SX, C_-X)

$$\cdots \rightarrow \pi_{i+1}(C_-X) \xrightarrow{i_*} \pi_{i+1}(SX) \xrightarrow{j_*} \pi_{i+1}(SX, C_-X) \xrightarrow{\partial} \pi_i(C_-X) \rightarrow \cdots$$

σπάνε σε μικρότερες ακριβείς ακολουθίες της μορφής

$$0 \rightarrow \pi_{i+1}(C_+X, X) \rightarrow \pi_i(X) \rightarrow 0$$

και

$$0 \rightarrow \pi_{i+1}(SX) \rightarrow \pi_{i+1}(SX, C_-X) \rightarrow 0$$

εφόσον οι $\pi_i(C_{\pm}X)$ είναι τετριμμένες.

Συνεπώς από ιδιότητα των μακρώς ακριβών ακολουθιών (ενότητα 4.2) συμπεραίνουμε:

$$\pi_{i+1}(C_+X, X) \cong \pi_i(X) \quad \text{και} \quad \pi_{i+1}(SX) \cong \pi_{i+1}(SX, C_-X), \quad \text{για κάθε } i$$

Τέλος ορίζουμε τη σύνθεση απεικονίσεων

$$\pi_i(X) \xrightarrow{\cong} \pi_{i+1}(C_+X, X) \rightarrow \pi_{i+1}(SX, C_-X) \xrightarrow{\cong} \pi_{i+1}(SX)$$

τ.ω. η αριστερή και η δεξιά απεικόνιση να είναι οι ισομορφισμοί και η μεσαία να είναι ο επαγόμενος ομομορφισμός της έγκλισης $(C_+X, X) \leftrightarrow (SX, C_-X)$.

Άρα για $X = S^n$ ορίζουμε τη σύνθεση αυτή να είναι η $j : \pi_i(S^n) \rightarrow \pi_{i+1}(S^{n+1})$, το οποίο ήταν το ζητούμενο.

Το Θεώρημα που ακολουθεί χρησιμοποιεί την απεικόνιση j που υπολογίσαμε, η απεικόνιση j είναι γνωστή και ως **απεικόνιση αιώρησης**.

Θεώρημα 9. (Freudenthal suspension theorem): Η απεικόνιση αιώρησης $j : \pi_i(S^n) \rightarrow \pi_{i+1}(S^{n+1})$ είναι ισομορφισμός για $i < 2n - 1$ και επιμορφισμός για $i = 2n - 1$.

Πόρισμα 3. $\pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$, με γεννήτορα την ταυτοτική απεικόνιση, για κάθε $n \geq 1$.

Απόδειξη: Σύμφωνα με το Freudenthal suspension theorem για $i = n$, έχουμε ότι για $n > 1$ οι απεικονίσεις αιώρησης είναι ισομορφισμοί και για $n = 1$ είναι επί. Δηλαδή υπάρχει η ακολουθία των απεικονίσεων αιώρησης

$$\pi_1(S^1) \rightarrow \pi_2(S^2) \rightarrow \pi_3(S^3) \rightarrow \dots$$

τ.ω. η πρώτη απεικόνιση να είναι επί και όλες οι υπόλοιπες να είναι ισομορφισμοί.

Εφόσον γνωρίζουμε ότι η $\pi_1(S^1)$ είναι ισόμορφη με την \mathbb{Z} με γεννήτορα την ταυτοτική απεικόνιση, συμπεραίνουμε ότι οι $\pi_n(S^n)$ για $n \geq 2$ είναι πεπερασμένες ή άπειρες κυκλικές ομάδες¹⁴ ανεξάρτητα από το n . Οι $\pi_n(S^n)$ έχουν επίσης γεννήτορα την ταυτοτική απεικόνιση διότι η απεικόνιση αιώρησης τη διατηρεί, έστω $[id_{S^1}] \in \pi_1(S^1)$, τότε έχουμε

$$j \circ id_{S^1}(x) = Sid_{S^1}([x, t]) = [id_{S^1}(x), t] = [x, t] = id_{S^2}$$

και αφού η αιώρηση είναι ομοτοπική αναλλοίωτος χρησιμοποιώντας το ίδιο επιχείρημα για $n \geq 2$, ισχύει

$$[id_{S^1}] \mapsto [id_{S^2}] \mapsto [id_{S^3}] \mapsto \dots$$

μέσω της j . Και εφόσον είναι τουλάχιστον επίμορφισμοι έχουμε $\langle [id_{S^n}] \rangle = \pi_n(S^n)$ για $n \geq 1$.

Παρακάτω δείχνουμε στην πρόταση (19) ότι ισχύει $\pi_1(S^1) \cong \pi_2(S^2)$ μέσω της απεικόνισης Hopf.

Άρα ισχύει ότι $\pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ για $n \geq 1$. □

Μια άμεση συνέπεια του Freudenthal suspension theorem είναι ότι για σταθερό i , οι ομάδες ομοτοπίας $\pi_{n+i}(S^n)$ τελικά σταθεροποιούνται, δηλαδή είναι ανεξάρτητες από το n για αρκετά μεγάλες τιμές του n . Αυτή η οριακή τιμή λέγεται η i -ευσταθής ομάδα ομοτοπίας σφαιρών και συμβολίζεται π_i^s . Παρατηρούμε ότι μπορούμε να βρούμε πότε κάθε ακολουθία σταθεροποιείται, μέσω του Freudenthal αυτό γίνεται για $2n \geq (n+i)+2$ ή ισοδύναμα $n \geq i+2$ τ.ω.

$$\pi_i^s = \pi_{2i+2}(S^{i+2})$$

Π.χ. στο πόρισμα 3 εμείς υπολογίσαμε την $\pi_0^s \cong \mathbb{Z}$.

Οι ευσταθείς ομάδες ομοτοπίας σφαιρών είναι από τα πιο θεμελιώδη αντικείμενα της τοπολογίας και αποτελούν μέρος του ευρύτερου κλάδου της ευσταθούς θεωρίας ομοτοπίας. Ευσταθείς ομάδες ομοτοπίας σφαιρών για τιμές του i έχουν υπολογιστεί μέχρι περίπου το 60.

6.3 Εφαρμογή της απεικόνισης Hopf και αποτελέσματα

Έχοντας αναπτύξει τα κατάλληλα εργαλεία μπορούμε τώρα να δείξουμε την σημαντικότητα της απεικόνισης Hopf με τα παρακάτω αποτελέσματα.

Πρόταση 17. Η απεικόνιση Hopf παράγει μακρά ακριβή ακολουθία της μορφής:

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow \pi_i(S^1) \rightarrow \pi_i(S^3) \xrightarrow{\tilde{p}^*} \pi_i(S^2) \rightarrow \pi_{i-1}(S^1) \rightarrow \pi_{i-1}(S^3) \rightarrow \dots \\ \dots \longrightarrow \pi_1(S^1) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

Απόδειξη: Στην πρώτη ενότητα δείξαμε ότι η απεικόνιση Hopf $p : S^3 \rightarrow S^2$ είναι δέσμη ινών¹⁵, με ίνες S^1 . Από τα θεωρήματα (5) και (6) συμπεραίνουμε ότι κάθε δέσμη ινών παράγει

¹⁴Εάν έχουμε επιμορφισμό ομάδων με πεδίο ορισμού κυκλική ομάδα, τότε το πεδίο τιμών της είναι επίσης κυκλική ομάδα.

¹⁵Έχουμε δείξει ότι δεν έχει σημασία ποια μορφή της απεικόνισης Hopf θα επιλέξουμε (είτε μέσω της $\mathbb{C}P^1$ είτε μέσω του $\hat{\mathbb{C}}$) εφόσον η δομή δέσμης ινών παραμένει αναλλοίωτη μέσω ομοιομορφισμών στον χώρο βάσης.

μια μακρά ακριβή ακολουθία. Συνεπώς έχουμε μακρά ακριβή ακολουθία της μορφής:

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow \pi_i(S^1) \rightarrow \pi_i(S^3) \xrightarrow{\tilde{p}_*} \pi_i(S^2) \rightarrow \pi_{i-1}(S^1) \rightarrow \pi_{i-1}(S^3) \rightarrow \cdots \\ \cdots \rightarrow \pi_1(S^1) \rightarrow \pi_1(S^3) \rightarrow \pi_1(S^2) \rightarrow \pi_0(S^1) \rightarrow \pi_0(S^3) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Τα σύνολα $\pi_0(S^1)$, $\pi_0(S^3)$ αποτελούνται από μια κλάση ομοτοπίας, αφού από πρόταση (5) γνωρίζουμε ότι κάθε κλάση ομοτοπίας αποτελεί μια συνεκτική συνιστώσα και εφόσον S^3 , S^1 είναι συνεκτικές κατά δρόμους έχουμε $\pi_0(S^1) = \pi_0(S^3) = 0$.

Οι θεμελιώδεις ομάδες $\pi_1(S^3)$, $\pi_1(S^2)$ είναι τετριμμένες από πρόταση (11), άρα έχουμε $\pi_1(S^3) = \pi_1(S^2) = 0$. Άρα πράγματι καταλήγουμε σε μακρά ακριβή ακολουθία της μορφής:

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow \pi_i(S^1) \rightarrow \pi_i(S^3) \xrightarrow{\tilde{p}_*} \pi_i(S^2) \rightarrow \pi_{i-1}(S^1) \rightarrow \pi_{i-1}(S^3) \rightarrow \cdots \\ \cdots \rightarrow \pi_1(S^1) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

□

Πρόταση 18. $\pi_i(S^3) \cong \pi_i(S^2)$ για $i \geq 3$.

Απόδειξη: Από την πρόταση (16) έχουμε $\pi_i(S^1) = \pi_{i-1}(S^1) = 0$ για $i \geq 3$. Συνεπώς η μακρά ακριβής ακολουθία της απεικόνισης Hopf σπάει σε μικρότερες ακριβείς ακολουθίες της μορφής:

$$0 \rightarrow \pi_i(S^3) \xrightarrow{\tilde{p}_*} \pi_i(S^2) \rightarrow 0 \quad \text{για κάθε } i \geq 3$$

Άρα από ιδιότητα των μακρών ακριβών ακολουθιών έχουμε ότι η απεικόνιση $\tilde{p}_* : \pi_i(S^3) \rightarrow \pi_i(S^2)$ για $i \geq 3$, είναι ισομορφισμός. □

Δηλαδή με την παραπάνω πρόταση φαίνεται ότι η απεικόνιση Hopf αποκαλύπτει μια συμμετρία ανάμεσα στην S^3 και την S^2 , η οποία δεν υπάρχει a priori.

Πρόταση 19. $\pi_2(S^2) \cong \pi_1(S^1)$.

Απόδειξη: Στο τέλος της μακράς ακριβής ακολουθίας της απεικόνισης Hopf έχουμε

$$\pi_2(S^3) \rightarrow \pi_2(S^2) \rightarrow \pi_1(S^1) \rightarrow 0$$

Από πόρισμα (2) έχουμε ότι $\pi_2(S^3) = 0$. Άρα η παραπάνω ακολουθία ανάγεται σε:

$$0 \rightarrow \pi_2(S^2) \rightarrow \pi_1(S^1) \rightarrow 0$$

Συνεπώς ισχύει το ζητούμενο. □

Τώρα μπορούμε να υπολογίσουμε πορισματικά μια ομάδα ομοτοπίας $\pi_i(S^n)$ τ.ω. $i > n$.

Πρόταση 20. $\pi_3(S^2) \cong \mathbb{Z}$ και έχει ως γεννήτορα την απεικόνιση Hopf $p : S^3 \rightarrow S^2$.

Απόδειξη: Από πόρισμα (3) έχουμε $\pi_3(S^3) \cong \mathbb{Z}$ με γεννήτορα την ταυτοτική απεικόνιση και από την πρόταση (18) έχουμε για $i = 3$ ισομορφισμό $\tilde{p}_* : \pi_3(S^3) \rightarrow \pi_3(S^2)$. Συνεπώς υπάρχει ισομορφισμός τ.ω. $\pi_3(S^2) \cong \mathbb{Z}$.

Για το άλλο μέρος της πρότασης, εφόσον id_{S^3} είναι γεννήτορας της $\pi_3(S^3)$, τότε $\tilde{p}_*([\text{id}_{S^3}])$ είναι γεννήτορας της $\pi_3(S^2)$ αφού οι γεννήτορες διατηρούνται μέσω ισομορφισμών.

Άρα

$$\tilde{p}_*([\text{id}_{S^3}]) = [p \circ \text{id}_{S^3}] = [p] \in \pi_3(S^2)$$

δηλαδή η κλάση ομοτοπίας της απεικόνισης Hopf είναι γεννήτορας της $\pi_3(S^2)$. □

Στα στοιχεία της $\pi_3(S^2)$ μπορεί να δοθεί μια γεωμετρική ερμηνεία μέσω της αναλλοίωτης Hopf, την οποία είχαμε ορίσει στην υποενότητα (1.3.4), έτσι ώστε εάν για $f : S^3 \rightarrow S^2$ με $p, q \in S^2$ ορίζουμε $\gamma(f) := \ell(f^{-1}(p), f^{-1}(q))^{16}$, τότε:

$$\gamma : \pi_3(S^2) \rightarrow \mathbb{Z}, \quad \text{τ.ω. } [f] \mapsto \gamma(f)$$

είναι επιμορφισμός και για την απεικόνιση Hopf ισχύει $\gamma(p) = 1$ με τον αντίστοιχο προσανατολισμό (βλέπε πρόταση 2). Η γ είναι καλά ορισμένη εφόσον ο Hopf είχε δείξει στην εργασία του ότι η γ είναι αναλλοίωτη της ομοτοπικής κλάσης του $\pi_3(S^2)$.

Με την $\pi_3(S^2)$ μπορούμε να βγάλουμε κάποια συμπεράσματα για την 1-ευσταθή ομάδα ομοτοπίας

$$\pi_1^s = \pi_4(S^3)$$

Από το Freudenthal suspension theorem έχουμε την ακολουθία απεικονίσεων αιώρησης

$$\mathbb{Z} \cong \langle [p] \rangle = \pi_3(S^2) \rightarrow \pi_4(S^3) \xrightarrow{\cong} \pi_5(S^4) \xrightarrow{\cong} \dots$$

τ.ω. για $n \geq 3$ είναι ισομορφισμοί και για $n = 2$ είναι επιμορφισμός. Η ακολουθία περιέχει και την $\pi_2(S^1)$ στην πρώτη θέση αλλά επειδή είναι τετριμμένη την αγνοούμε. Από το προηγούμενο θεώρημα έχουμε ότι η $\pi_3(S^2)$ είναι ισόμορφη με το \mathbb{Z} και έχει γεννήτορα την απεικόνιση Hopf p , άρα επειδή $\pi_3(S^2) \rightarrow \pi_4(S^3)$ είναι επιμορφισμός έχουμε ότι και η $\pi_4(S^3)$ είναι κυκλική ομάδα, άπειρη ή πεπερασμένη, τ.ω. να έχει γεννήτορα την Sp . Δηλαδή ισχύει:

$$\mathbb{Z} \cong \langle [p] \rangle \rightarrow \langle [Sp] \rangle \xrightarrow{\cong} \langle [SSp] \rangle \xrightarrow{\cong} \dots$$

Επίσης από πρόταση (18) έχουμε $\pi_4(S^3) \cong \pi_4(S^2)$.

Συνεπώς οι ομάδες ομοτοπίας $\pi_4(S^2)$ και $\pi_{n+1}(S^n)$ για $n \geq 3$, είναι ισόμορφες κυκλικές ομάδες.

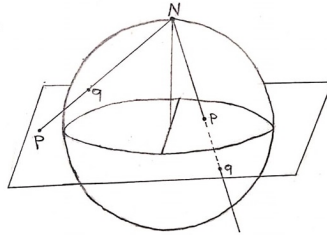
¹⁶ $\ell(f^{-1}(p), f^{-1}(q))$ συμβολίζεται ο αριθμός σύνδεσης των $f^{-1}(p)$ και $f^{-1}(q)$

Μέρος ΙΙΙ
Παράρτημα

Α' Στερεογραφική Προβολή

Α'.1 Η στερεογραφική προβολή στο πραγματικό επίπεδο

Η στερεογραφική προβολή είναι μια απεικόνιση από την σφαίρα S^2 , χωρίς τον βόρειο πόλο της $N = (0, 0, 1)$, στο επίπεδο \mathbb{R}^2 . Κάθε σημείο της σφαίρας $q = (x, y, z)$ απεικονίζεται σε ένα σημείο του επιπέδου $p = (a, b)$, μέσω της ευθείας η οποία συνδέει τον βόρειο πόλο N και το σημείο του επιπέδου p . Δηλαδή μπορούμε να φανταστούμε τον N ως μια φωτεινή πηγή που προβάλλει μέσω των ακτίνων της κάθε σημείο της σφαίρας στο επίπεδο, όπως στο κατωτέρω σχήμα:



Αυτή η απεικόνιση θα δείξουμε ότι είναι ομοιομορφισμός και θα τη συμβολίσουμε με σ . Έστω $p = (a, b)$ και $q = (x, y, z) \in S^2$. Εφόσον τα p, q, n είναι συνευθειακά υπάρχει αριθμός t τ.ω.

$$q - n = t(p - n)$$

άρα

$$(x, y, z) - (0, 0, 1) = (ta, tb, 0) - (0, 0, 1) \implies (x, y, z - 1) = (ta, tb, -1) \quad (8)$$

δηλαδή έχουμε

$$x = ta, \quad y = tb, \quad z - 1 = -1$$

συνεπώς από $t = 1 - z$ συμπεραίνουμε ότι

$$a = \frac{x}{t} = \frac{x}{1 - z}, \quad b = \frac{y}{t} = \frac{y}{1 - z}$$

$t \neq 0$ εφόσον έχουμε εξαιρέσει το σημείο $N = (0, 0, 1)$.

Άρα η απεικόνιση $\sigma : S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ έχει τύπο

$$\sigma(x, y, z) = \left(\frac{x}{1 - z}, \frac{y}{1 - z} \right)$$

και είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών.

Τώρα θα βρούμε τον τύπο της αντίστροφης $\sigma^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2 \setminus \{N\}$.

Από την (8) έχουμε

$$x = ta, \quad y = tb, \quad t = 1 - z$$

Αντικαθιστώντας στην $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ έχουμε

$$(ta)^2 + (tb)^2 + (1 - t)^2 = 1 \implies t^2 a^2 + t^2 b^2 + 1 - 2t + t^2 = 1 \implies t^2(a^2 + b^2 - 2/t + 1) = 0$$

$$a^2 + b^2 + 1 = 2/t \implies t = \frac{2}{a^2 + b^2 + 1}$$

Άρα από (8) έχουμε

$$x = \frac{2a}{a^2 + b^2 + 1}, \quad y = \frac{2b}{a^2 + b^2 + 1}, \quad z = 1 - \frac{2}{a^2 + b^2 + 1} = \frac{a^2 + b^2 - 1}{a^2 + b^2 + 1}$$

συνεπώς η απεικόνιση $\sigma^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2 \setminus \{N\}$ έχει τυπο:

$$\sigma^{-1}(a, b) = \left(\frac{2a}{a^2 + b^2 + 1}, \frac{2b}{a^2 + b^2 + 1}, \frac{a^2 + b^2 - 1}{a^2 + b^2 + 1} \right)$$

η οποία είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών.

Εφόσον η σ έχει αντίστροφο, τότε είναι 1-1 και επί. Συνεπώς η σ είναι ομοιομορφισμός εφόσον είναι συνεχής, 1-1, επί και με συνεχή αντίστροφο, δηλαδή $S^2 \setminus \{N\} \cong \mathbb{R}^2$.

Κατασκευάσαμε την στερεογραφική προβολή $\sigma : S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$, έτσι ώστε το επίπεδο $z = 0$ να διέρχεται από το κέντρο της S^2 , με τύπους:

$$\sigma(x, y, z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right)$$

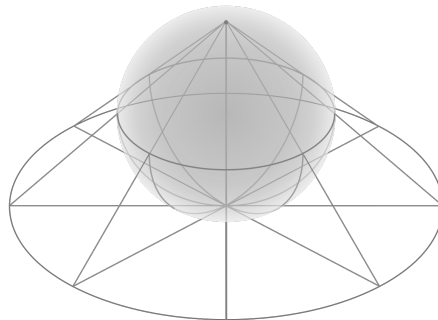
$$\sigma^{-1}(a, b) = \left(\frac{2a}{a^2 + b^2 + 1}, \frac{2b}{a^2 + b^2 + 1}, \frac{a^2 + b^2 - 1}{a^2 + b^2 + 1} \right)$$

Θα μπορούσαμε να είχαμε επιλέξει το επίπεδο να εφάπτεται στην σφαίρα Q κέντρου $(0, 0, 1/2)$ και ακτίνας $r = 1/2$ στο σημείο $(0, 0, -1)$ και ακολουθώντας ακριβώς την ίδια διαδικασία θα καταλήγαμε πάλι σε ομοιομορφισμό $\sigma : Q^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ με τύπους:

$$\sigma(x, y, z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right)$$

και

$$\sigma^{-1}(a, b) = \left(\frac{a}{a^2 + b^2 + 1}, \frac{b}{a^2 + b^2 + 1}, \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2 + 1} \right)$$



Σχήμα 28: Στερεογραφική προβολή από σφαίρα κέντρου $(0, 0, 1/2)$ και ακτίνα $r = 1/2$ στο επίπεδο $z = -1$. [23]

Α'.2 Η στερεογραφική προβολή στο μιγαδικό επίπεδο

Συχνά είναι χρήσιμο να αντιμετωπίζουμε την σ σαν μια απεικόνιση στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών \mathbb{C} αντί στο επίπεδο \mathbb{R}^2 ταυτίζοντας το $a + bi \in \mathbb{C}$ με το (a, b) . Επίσης μπορούμε να εκφράσουμε την απεικόνιση μέσω μιγαδικών αριθμών ταυτίζοντας το $(x, y, z) \in S^2$ με το $(x + yi, z)$. Με αυτόν τον τρόπο η S^2 γίνεται το σύνολο των ζευγών (w, z) όπου $w \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{R}$ και $|w|^2 + z^2 = 1$. Άρα η στερεογραφική προβολή παίρνει την μορφή:

$$\sigma(w, z) = \frac{w}{1-z}$$

και

$$\sigma^{-1}(w) = \left(\frac{2w}{|w|^2 + 1}, \frac{|w|^2 - 1}{|w|^2 + 1} \right)$$

Μπορούμε να ξεπεράσουμε την εξαίρεση που κάναμε στην στερεογραφική προβολή για το σημείο N ορίζοντας ένα «σημείο στο άπειρο» τ.ω. $\sigma(N) = \{\infty\}$, με τον ορισμό του επεκτεταμένου επιπέδου $\widehat{\mathbb{R}}^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ και του επεκτεταμένου μιγαδικού επιπέδου $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Επομένως μέσω της $\sigma : S^2 \rightarrow \widehat{\mathbb{R}}^2$ ή αλλιώς $\sigma : S^2 \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ έχουμε ομοιομορφισμούς $\widehat{\mathbb{R}}^2 \cong S^2 \cong \widehat{\mathbb{C}}$.¹⁷

Α'.3 Η στερεογραφική προβολή για σφαίρες κάθε διάστασης

Την ανωτέρω κατασκευή της στερεογραφικής προβολής $\sigma : S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$, μπορούμε να την επεκτείνουμε έτσι ώστε η στερεογραφική προβολή να ορίζεται για σφαίρα κάθε διάστασης.

Δηλαδή για $N = (0, \dots, 1) \in S^n$ υπάρχει ομοιομορφισμός $\sigma : S^n \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ τ.ω. να τέμνουμε την S^n με ένα υπερεπίπεδο $E = \{(y_1, \dots, y_n, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}\}$, το υπερεπίπεδο E να ταυτίζεται με τον \mathbb{R}^n , και τέλος να προβάλλουμε τα σημεία της $S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) : x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$ στο υπερεπίπεδο αυτό.

Έστω $q = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n, p = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

Όπως και πριν εφόσον p, q, N είναι συνευθειακά, υπάρχει t τ.ω.

$$q - N = t(y_1, \dots, y_n) - tN \implies (x_1, \dots, x_n, x_{n+1} - 1) = (ty_1, \dots, ty_n, -t) \quad (9)$$

Άρα έχουμε

$$x_1 = ty_1, \quad \dots, \quad x_n = ty_n, \quad x_{n+1} - 1 = -t$$

και εφόσον $t = 1 - x_{n+1}$ έχουμε μαζί με την (9):

$$y_1 = \frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \quad \dots, \quad y_n = \frac{x_n}{1 - x_{n+1}}$$

Άρα η απεικόνιση $\sigma : S^n \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ έχει τύπο

$$\sigma(x_1, \dots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}} \right)$$

Τώρα συνεχίζουμε να βρούμε τον τύπο της $\sigma^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow S^n \setminus \{N\}$, για $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n$ έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1 \quad \text{και από (9)} \quad x_i = ty_i, \quad x_{n+1} = 1 - t \\ \implies \sum_{i=1}^n (ty_i)^2 + (1-t)^2 = 1 \implies t^2 \sum_{i=1}^n y_i^2 + 1 - 2t + t^2 = 1 \implies \sum_{i=1}^n y_i^2 - 2/t + 1 = 0 \implies 1 + \sum_{i=1}^n y_i^2 = 2/t \\ \implies t = \frac{2}{1 + \sum_{i=1}^n y_i^2} \end{aligned}$$

Άρα μαζί με την (9) έχουμε

$$x_1 = \frac{2y_1}{1 + \sum_{i=1}^n y_i^2}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{2y_n}{1 + \sum_{i=1}^n y_i^2}, \quad x_{n+1} = 1 - \frac{2}{1 + \sum_{i=1}^n y_i^2}$$

δηλαδή

$$\sigma^{-1}(y_1, \dots, y_n) = \left(\frac{2y_1}{1 + \sum_{i=1}^n y_i^2}, \dots, \frac{2y_n}{1 + \sum_{i=1}^n y_i^2}, \frac{-1 + \sum_{i=1}^n y_i^2}{1 + \sum_{i=1}^n y_i^2} \right)$$

¹⁷Θα εξετάσουμε την τοπολογία του $\widehat{\mathbb{R}}^2, \widehat{\mathbb{C}}$ και τον ομοιομορφισμό τους στις επόμενες ενότητες του παρόντος παραρτήματος

και εφόσον σ, σ^{-1} είναι συνεχείς ως σύνθεση συνεχών πράγματι έχουμε ομοιομορφισμό $S^n \setminus \{N\} \cong \mathbb{R}^n$ με τύπους:

$$\sigma(x_1, \dots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}} \right)$$

$$\sigma^{-1}(y_1, \dots, y_n) = \left(\frac{2y_1}{1 + \sum_{i=1}^n y_i^2}, \dots, \frac{2y_n}{1 + \sum_{i=1}^n y_i^2}, \frac{-1 + \sum_{i=1}^n y_i^2}{1 + \sum_{i=1}^n y_i^2} \right)$$

B' Συμπαγοποίηση Ενός Σημείου

Έστω X ένας μη συμπαγής, Hausdorff τοπολογικός χώρος με τοπολογία τ . Ονομάζουμε **συμπαγοποίηση ενός σημείου** του χώρου X έναν νέο τοπολογικό χώρο προσθέτοντας ένα αυθαίρετο σημείο στον X , το οποίο θα το συμβολίζουμε $\{\infty\}$. Το σημείο αυτό θα το αποκαλούμε σημείο στο άπειρο. Ο $X \sqcup \{\infty\} = \widehat{X}$ είναι νέος τοπολογικός χώρος με τοπολογία τ' , η οποία αποτελείται από:

- τα ανοιχτά υποσύνολα του X , δηλαδή τα $U \in \tau \subseteq \tau'$
- τα συμπληρώματα μέσα στον \widehat{X} των κλειστών συμπαγών συνόλων του X , δηλαδή εάν $C \subseteq X$ είναι κλειστό συμπαγές τότε $\widehat{X} \setminus C = ((X \setminus C) \cup \{\infty\}) \in \tau'$.

Άρα έχουμε $\tau' = \tau \cup \{(X \setminus C) \cup \{\infty\} : C \text{ κλειστό και συμπαγές του } X\}$. Εύκολα δείχνουμε ότι εάν X είναι Hausdorff, τότε τ' είναι τοπολογία στο \widehat{X} .

Ο σκοπός της **συμπαγοποίησης ενός σημείου**, όπως λέει και το όνομα, είναι να φτι-
άχνουμε συμπαγείς χώρους \widehat{X} από μη συμπαγείς χώρους X προσθέτοντας ένα ξένο αυθαίρετο
σημείο.

Πρόταση 21. *Ο \widehat{X} είναι συμπαγής χώρος.*

Απόδειξη: Έστω τυχαία ανοιχτή κάλυψη $\{U_i \subseteq \widehat{X}\}_{i \in I}$ του \widehat{X} .

Τότε υπάρχει γειτονιά του σημείου στο άπειρο $\{\infty\} \subseteq U_{i_\infty}$ τ.ω. $U_{i_\infty} \in \{U_i \subseteq \widehat{X}\}_{i \in I}$.

Γνωρίζουμε ότι U_{i_∞} είναι της μορφής $(X \setminus C) \cup \{\infty\}$ τ.ω. C κλειστό, συμπαγές υποσύνολο του X . Εφόσον C συμπαγές σημαίνει ότι υπάρχει κάλυψη του C , $\{U_i \subseteq X\}_{i \in J}$ για J πεπερασμένο υποσύνολο του I . Επομένως

$$\left(\bigcup_{i \in J} \{U_i \subseteq X\} \right) \cup U_{i_\infty} = C \cup ((X \setminus C) \cup \{\infty\}) = X \cup \{\infty\}$$

το οποίο είναι πεπερασμένη κάλυψη του \widehat{X} . Συνεπώς κάθε άπειρη κάλυψη του \widehat{X} περιέχει πεπερασμένη κάλυψη του, δηλαδή \widehat{X} είναι συμπαγής. \square

Παρατηρούμε ότι ο X είναι **πυκνός** στον \widehat{X} , δηλαδή ισχύει:

$$\overline{X} = \widehat{X} \text{ ή αλλιώς κάθε σημείο του } \widehat{X} \text{ είτε είναι σημείο του } X \text{ είτε είναι οριακό σημείο του } X$$

Άρκει να δείξουμε ότι το $\{\infty\}$ είναι οριακό σημείο του X , δηλαδή ότι:

$$\forall U_\infty \in \tau', \quad (U_\infty \setminus \{\infty\}) \cap X \neq \emptyset$$

Γνωρίζουμε $U_\infty = (X \setminus C) \cup \{\infty\}$ όπου C κλειστό και συμπαγές του X , συνεπώς:

$$(U_\infty \setminus \{\infty\}) \cap X = (((X \setminus C) \cup \{\infty\}) \setminus \{\infty\}) \cap X = (X \setminus C) \cap X = (X \setminus C) \neq \emptyset$$

αφού X δεν είναι συμπαγές. Τέλος μια ιδιότητα της συμπαγοποίησης ενός σημείου που θα χρησιμοποιήσουμε αλλά δεν θα αποδείξουμε είναι ότι:

$$\widehat{X} \text{ είναι Hausdorff} \iff X \text{ είναι τοπικά συμπαγής και Hausdorff}^{18}$$

Ορισμός 8. Ένας χώρος X είναι **τοπικά συμπαγής** όταν για κάθε σημείο $x \in X$ υπάρχει ένας συμπαγής υπόχωρος C του X ο οποίος περιέχει κάποια γειτονιά U του x , δηλαδή $\forall x \in X$ έχουμε $x \in U \subseteq C$.

Παραδείγματα τοπικά συμπαγών χώρων είναι:

- Η πραγματική ευθεία \mathbb{R} είναι τοπικά συμπαγής.
Το κάθε $x \in \mathbb{R}$ περιέχεται σε διάστημα (a, b) το οποίο περιέχεται σε συμπαγή διάστημα $[a, b]$.
- Το μιγαδικό επίπεδο \mathbb{C} είναι τοπικά συμπαγές.
Το κάθε $z_0 \in \mathbb{C}$ περιέχεται σε ανοικτό δίσκο ακτίνας r , δηλαδή $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r, \quad r > 0\}$, ο οποίος περιέχεται σε κλειστό συμπαγή δίσκο ακτίνας r , δηλαδή $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r, \quad r > 0\}$.
- Ο πραγματικός χώρος \mathbb{R}^n είναι τοπικά συμπαγής, για $n \geq 1$.
Το κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ περιέχεται σε ανοικτό κύβο $(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$ ο οποίος περιέχεται σε συμπαγή κύβο $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$.

Συνεπώς εάν έχουμε μη συμπαγή Hausdorff τοπολογικό χώρο X και την **συμπαγοποίηση ενός σημείου** \widehat{X} , ισχύουν τρεις βασικές ιδιότητες:

1. Ο \widehat{X} είναι συμπαγής χώρος.
2. Ο X είναι πυκνός στον \widehat{X} .
3. \widehat{X} είναι Hausdorff $\iff X$ είναι τοπικά συμπαγής και Hausdorff.

Άρα παίρνοντας π.χ. την συμπαγοποίηση ενός σημείου του \mathbb{R} , έχουμε τον χώρο $\widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \sqcup \{*\}$ (Αλλάξαμε προσωρινά τον συμβολισμό για πρακτικούς λόγους που θα φανούν σε λίγο, κάτι που δεν έχει σημασία εφόσον το ξένο σημείο που προσθέτουμε είναι αυθαίρετο). Εφόσον το $\{*\} \in \widehat{\mathbb{R}}$ είναι οριακό σημείο του \mathbb{R} , από την 2η ιδιότητα, και κάθε γειτονιά U_* του $*$ περιέχει σύνολο της μορφής $[a, b]^c$ φαίνεται ότι κάθε ακολουθία στο \mathbb{R} που τείνει προς το $-\infty$ πρέπει να συγχλίνει στο $\{*\}$ και κάθε ακολουθία στο \mathbb{R} που τείνει προς το $+\infty$ πρέπει να συγχλίνει στο $\{*\}$.

Για αυτόν τον λόγο συμβολίζουμε το αυθαίρετο σημείο $*$ ως ∞ εφόσον οι ακολουθίες στο \mathbb{R} που τείνουν προς το $\pm\infty$ πράγματι συγχλίνουν στο σημείο $\{\infty\}$ στο $\widehat{\mathbb{R}}$.

Ορίζουμε το $\widehat{\mathbb{R}}^n$ τ.ω. να έχει γειτονιές του $\{\infty\}$ τα συμπληρώματα των συμπαγών υποσυνόλων του \mathbb{R}^n . Συνεπώς για $n = 2$ φαίνεται ότι έχουμε ομοιομορφισμό $\widehat{\mathbb{C}} \cong \widehat{\mathbb{R}}^2$ εφόσον $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ και οι γειτονιές του σημείου στο άπειρο είναι οι ίδιες.

Γ' Συμπαγοποίηση ενός σημείου και Στερεογραφική Προβολή

Εφόσον έχουμε ορίσει τον τοπολογικό χώρο $(\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}, \tau')$ με τις γειτονιές του σημείου στο άπειρο $\infty \in U_\infty$, μπορούμε να ορίσουμε τον ομοιομορφισμό $S^2 \cong \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ μέσω της στερεογραφικής προβολής

$$\sigma : S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

¹⁸Για όποιον ενδιαφέρεται για την απόδειξη και την τοπική συμπαγεια μπορεί να ανατρέξει στο κεφάλαιο 29 σελ.180 του [24].

$$\sigma(x, y, z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right)$$

$$\sigma^{-1}(a, b) = \left(\frac{2a}{a^2 + b^2 + 1}, \frac{2b}{a^2 + b^2 + 1}, \frac{a^2 + b^2 - 1}{a^2 + b^2 + 1} \right)$$

επεκτείνοντας την στο σημείο $(0, 0, 1)$ και απεικονίζοντας το στο ∞ , δηλαδή $\sigma(0, 0, 1) = \infty$. Τώρα εάν δείξουμε που απεικονίζονται τα ανοιχτά αυτών των σημείων που προσθέσαμε έχουμε τελειώσει.

Αρχικά ορίζουμε κύκλους S στην σφαίρα τις τομές επιπέδων $Ax + By + Cz = D$ με την S^2 , οι οποίοι σύμφωνα με την σ^{-1} απεικονίζονται στο $\widehat{\mathbb{R}}^2$ ως το σύνολο T :

$$\begin{aligned} A \left(\frac{2a}{a^2 + b^2 + 1} \right) + B \left(\frac{2b}{a^2 + b^2 + 1} \right) + C \left(\frac{a^2 + b^2 - 1}{a^2 + b^2 + 1} \right) = D &\implies \\ \implies (C - D)(a^2 + b^2) + 2Aa + 2Bb = D + C &\quad (1) \end{aligned}$$

για κάθε $(a, b) \in T \subseteq \widehat{\mathbb{R}}^2$. Παρατηρούμε ότι εάν $C \neq D$, τότε η ανωτέρω είναι εξίσωση κύκλου. Αν $C = D$, τότε η εξίσωση αναπαριστά ευθεία. Επίσης παρατηρούμε ότι $C = D$ αν και μόνο αν ο S περνάει από το $(0, 0, 1)$, το οποίο φαίνεται από την εξίσωση επιπέδου. Συνεπώς έχουμε την ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 22. Έστω $S \subseteq S^2$ κύκλος και $T \subseteq \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ η προβολή του. Τότε

1. αν ο S περιέχει το $(0, 0, 1)$, το T είναι ευθεία,
2. αν ο S δεν περιέχει το $(0, 0, 1)$, το T είναι κύκλος.

Η (1) αποτελεί εξίσωση κύκλου για $C \neq D$ διότι διαιρώντας με $C - D$ και ύστερα παίρνοντας τα συμπληρώματα των τετραγώνων έχουμε την εξίσωση:

$$\left(a - \frac{A}{D - C} \right)^2 + \left(b - \frac{B}{D - C} \right)^2 = \frac{A^2 + B^2 + C^2 - D^2}{(D - C)^2}$$

η οποία είναι κύκλος ακτίνας $R = \sqrt{\frac{A^2 + B^2 + C^2 - D^2}{(D - C)^2}}$ και κέντρου $\left(\frac{A}{D - C}, \frac{B}{D - C} \right)$.

Γνωρίζουμε ότι R είναι πραγματικός αριθμός εφόσον $D^2 < A^2 + B^2 + C^2$, αυτό ισχύει διότι το επίπεδο που τέμνει την σφαίρα έχει απόσταση από την αρχή των αξόνων μικρότερη από 1 και η απόστασή του από την αρχή των αξόνων είναι

$$\frac{|D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} < 1 \implies D^2 < A^2 + B^2 + C^2$$

Μπορούμε να δείξουμε το αντίστροφο της παραπάνω Πρότασης:

Πρόταση 23. Έστω $T \subseteq \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ και $S \subseteq S^2$ κύκλος. Τότε

1. αν T είναι ευθεία, ο S είναι κύκλος που διέρχεται από το $(0, 0, 1)$
2. αν T είναι κύκλος, ο S είναι κύκλος που δεν διέρχεται από το $(0, 0, 1)$

Απόδειξη: Έστω ότι έχουμε κύκλο στο $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ τύπου

$$A'(a^2 + b^2) + B'a + C'b + D' = 0$$

τ.ω. ορίζουμε τα A, B, C, D , με βάση την (1)

$$A' = C - D, \quad B' = 2A, \quad C' = 2B, \quad D' = -(C + D)$$

και το αντίστοιχο σύνολο στην σφαίρα να είναι η τομή της σφαίρας με το επίπεδο $Ax + By + Cz = D$. Άρα εφόσον δεν μπορεί η τομή τους να είναι κενή ή σημείο τότε θα είναι κύκλος S τ.ω. το επίπεδο το οποίο τέμνει την σφαίρα να έχει συντελεστές

$$A = B'/2, \quad B = C'/2, \quad C = \frac{A' - D'}{2}, \quad D = \frac{-(A' + D')}{2}$$

Τέλος παρατηρούμε ότι εάν $A' = 0$ τότε έχουμε $C = D$ το οποίο σημαίνει ότι στέλνεται σε κύκλο στην σφαίρα το οποίο διέρχεται από το $(0, 0, 1)$, ενώ εάν $A' \neq 0$ έχουμε κύκλο που δεν διέρχεται από το σημείο $(0, 0, 1)$. \square

Εφόσον οι ευθείες στο επίπεδο αντιστοιχούν σε κύκλους στην σφαίρα που περνάνε από τον Βόρειο Πόλο $(0, 0, 1)$, μπορούμε να σκεφτόμαστε την ευθεία στο επίπεδο ως έναν κύκλο που περνάει από το άπειρο ∞ . Με αυτή τη σύμβαση μπορούμε να εκφράσουμε την παραπάνω πρόταση λέγοντας ότι η στερεογραφική προβολή απεικονίζει κύκλους της σφαίρας σε κύκλους του $\widehat{\mathbb{R}}$.

Την Πρόταση (22) μπορούμε να την γενικεύσουμε για την στερεογραφική προβολή $\sigma : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ με τύπο

$$\sigma(x_1, \dots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}} \right)$$

$$\sigma^{-1}(y_1, \dots, y_n) = \left(\frac{2y_1}{1 + \sum_{i=1}^n y_i^2}, \dots, \frac{2y_n}{1 + \sum_{i=1}^n y_i^2}, \frac{-1 + \sum_{i=1}^n y_i^2}{1 + \sum_{i=1}^n y_i^2} \right)$$

με τον εξής τρόπο

Πρόταση 24. Έστω $T \subseteq \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ και $S \subseteq S^n$ σφαίρα $n - 1$ διαστάσεων. Τότε

1. αν ο S περιέχει το $(0, \dots, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$, τότε T είναι υπερεπίπεδο $n - 1$ διαστάσεων
2. αν ο S δεν περιέχει το $(0, \dots, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$, τότε T είναι σφαίρα $n - 1$ διαστάσεων

Απόδειξη: Η διαδικασία απόδειξης είναι ακριβώς αντίστοιχη με αυτή των 2 διαστάσεων.

Θα θεωρήσουμε δεδομένο ότι οι τομές υπερεπιφανιών n διάστασης και σφαίρας S^n παράγουν σφαίρες $n - 1$ διάστασης. Μια καλή ένδειξη του γεγονότος αυτού είναι π.χ. να πάρουμε τομή υπερεπιφάνειας $\{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} = 0\}$ και της σφαίρας S^n

$$x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1$$

όπου είναι η S^{n-1} .

Ορίζουμε τις σφαίρες $n - 1$ διάστασης S που περιέχονται στην S^n ως τις τομές υπερεπιπέδων $a_1x_1 + \dots + a_{n+1}x_{n+1} = a_{n+2}$ με την S^n . Σύμφωνα με την σ^{-1} στέλνονται στο $\widehat{\mathbb{R}}^n$ ως το σύνολο T :

$$a_1 \left(\frac{2y_1}{1 + \sum_{i=1}^n y_i^2} \right) + \dots + a_{n+1} \left(\frac{-1 + \sum_{i=1}^n y_i^2}{1 + \sum_{i=1}^n y_i^2} \right) = a_{n+2} \implies$$

$$\implies a_1 2y_1 + \dots + a_n 2y_n - a_{n+1} + a_{n+1} \sum_{i=1}^n y_i^2 = a_{n+2} + a_{n+2} \sum_{i=1}^n y_i^2 \implies$$

$$\implies (a_{n+1} - a_{n+2})(y_1^2 + \dots + y_n^2) + a_1 2y_1 + \dots + a_n 2y_n = (a_{n+2} + a_{n+1})$$

για κάθε $(y_1, \dots, y_n) \in T \subseteq \widehat{\mathbb{R}}^n$.

Παρατηρούμε ότι εάν $a_{n+1} \neq a_{n+2}$, τότε η παραπάνω εξίσωση είναι σφαίρας $n - 1$ διάστασης. Αυτό συμβαίνει διότι αφού διαιρέσουμε με $a_{n+1} - a_{n+2}$ παίρνουμε τα συμπληρώματα των τετραγώνων και έχουμε την εξίσωση

$$\left(y_1 - \frac{a_1}{a_{n+2} - a_{n+1}}\right)^2 + \cdots + \left(y_n - \frac{a_n}{a_{n+2} - a_{n+1}}\right)^2 = \frac{a_1^2 + \cdots + a_{n+1}^2 - a_{n+2}^2}{(a_{n+2} - a_{n+1})^2}$$

η οποία είναι σφαίρα διάστασης $n - 1$,

$$\text{ακτίνας: } R = \sqrt{\frac{a_1^2 + \cdots + a_{n+1}^2 - a_{n+2}^2}{(a_{n+2} - a_{n+1})^2}} \quad \text{και κέντρου: } k = \left(\frac{a_1}{a_{n+2} - a_{n+1}}, \dots, \frac{a_n}{a_{n+2} - a_{n+1}}\right)$$

Εάν $a_{n+1} = a_{n+2}$,

το οποίο συμβαίνει όταν S περιέχει το $(0, \dots, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ εφόσον

$$\{(0, \dots, 1)\} \cap \{a_1 x_1 + \cdots + a_{n+1} x_{n+1} = a_{n+2}\} = \{a_{n+2} = a_{n+1}\}$$

Τότε έχουμε υπερεπίπεδο $n - 1$ διαστάσεων

$$a_1 y_1 + \cdots + a_n y_n = a_{n+1}$$

□

Η απόδειξη του αντίστροφου της παραπάνω Πρότασης είναι ακριβώς αντίστοιχη με την απόδειξη της Πρότασης 23 για τις 2 διαστάσεις.

Τώρα θα δείξουμε ότι $\sigma : S^n \rightarrow \widehat{\mathbb{R}}^n$ είναι πράγματι ομοιομορφισμός.

Πρόταση 25. Η στερεογραφική προβολή $\sigma : S^n \rightarrow \widehat{\mathbb{R}}^n$ είναι ομοιομορφισμός.

Απόδειξη: Έχουμε δείξει ήδη ότι είναι ομοιομορφισμός η $\sigma : S^n \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n$, αυτό που λείπει είναι να δείξουμε ότι η σ είναι συνεχής στον Βόρειο Πόλο $N = (0, \dots, 1)$ και η σ^{-1} είναι συνεχής στο σημείο στο άπειρο $\{\infty\}$.

Ορίζουμε την βάση περιοχών του $N \in S^n$, για $\epsilon > 0$,

$$U_{N,\epsilon} = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n : x_{n+1} > 1 - \epsilon\}$$

και την βάση περιοχών του $\infty \in \widehat{\mathbb{R}}^n$, για $k > 0$,

$$V_{\infty,k} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| > k\} \cup \{\infty\}$$

Τα $U_{N,\epsilon}$ απεικονίζονται μέσω της σ σε συμπληρώματα κλειστών μπαλών ακτίνας $R = \sqrt{2/\epsilon - 1}$ και κέντρου $(0, \dots, 0)$ τ.ω. $k \leq R \leq \infty$. Άρα θα μπορούμε πάντα να βρίσκουμε περιοχή $V_{\infty,k}$ η οποία θα περιέχει την $\sigma(U_{N,\epsilon})$ επιλέγοντας ακτίνα $k > 0$ μικρότερη ή ίση του R . Συνεπώς ισχύει

$$\forall V_{\infty,k} \exists U_{N,\epsilon} \text{ τ.ω. } \sigma(U_{N,\epsilon}) \subseteq V_{\infty,k}$$

Άρα η σ είναι συνεχής στο N .

Τώρα για να δείξουμε ότι η σ^{-1} είναι συνεχής στο $\{\infty\}$ παρατηρούμε ότι τα συμπληρώματα κλειστών μπαλών ακτίνας $k = \sqrt{2/\epsilon_1 - 1}$ και κέντρου $(0, \dots, 0)$, δηλαδή τα $V_{\infty,k}$, απεικονίζονται μέσω της σ^{-1} σε ανοιχτά της S^n της μορφής

$$\{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n : x_{n+1} > 1 - \epsilon_1\}$$

Άρα θα μπορούμε πάντα να βρίσκουμε περιοχή $U_{N,\epsilon}$ που να περιέχει το $\sigma^{-1}(V_{\infty,k})$ επιλέγοντας $\epsilon > \epsilon_1$. Συνεπώς ισχύει

$$\forall U_{N,\epsilon} \exists V_{\infty,k} \text{ τ.ω. } \sigma^{-1}(V_{\infty,k}) \subseteq U_{N,\epsilon}$$

Άρα η σ^{-1} είναι συνεχής στο $\{\infty\}$.

Συνεπώς η $\sigma : S^n \rightarrow \widehat{\mathbb{R}}^n$ είναι συνεχής, αμφιμονοσήμαντη και με αντίστροφη $\sigma^{-1} : \widehat{\mathbb{R}}^n \rightarrow S^n$ συνεχής, άρα η σ είναι ομοιομορφισμός. \square

Τέλος παρατηρούμε για $n = 2$ έχουμε ότι:

$$\widehat{\mathbb{C}} \cong \widehat{\mathbb{R}}^2 \cong S^2 \implies \widehat{\mathbb{C}} \cong S^2$$

Αναφορές

- [1] J. F. Adams. «On the Non-Existence of Elements of Hopf Invariant One». In: *The Annals of Mathematics* 72.1 (1960), p. 20.
- [2] Jean Dieudonné. *A History of Algebraic and Differential Topology, 1900 - 1960*. Birkhauser Boston Inc, June 1, 2009. 648 pp.
- [3] Hans Freudenthal. «Über die Klassen der Sphärenabbildungen I. Große Dimensionen». de. In: *Compositio Mathematica* 5 (1938), pp. 299–314. URL: http://www.numdam.org/article/CM_1938__5__299_0.pdf.
- [4] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Pr., 2001. 556 pp. URL: <http://pi.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATpage.html>.
- [5] Allen Hatcher. *Spectral Sequences in Algebraic Topology. Chapter 1: The Serre Spectral Sequence*. Unpublished, 2004. URL: <http://pi.math.cornell.edu/~hatcher/SSAT/SSch1.pdf>.
- [6] Peter Hilton. «A Brief, Subjective History of Homology and Homotopy Theory in This Century». In: *Mathematics Magazine* 61.5 (1988), pp. 282–291.
- [7] Heinz Hopf. «Über die Abbildungen von Sphären auf Sphären niedrigerer Dimension». In: *Fundamenta Mathematicae* 25 (1935), pp. 427–440.
- [8] Heinz Hopf. «Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche». In: *Mathematische Annalen* 104.1 (1931), pp. 637–665.
- [9] A. Hurwitz. «Ueber die Composition der quadratischen Formen von beliebig vielen Variablen». In: *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse* 1898 (1898), pp. 309–316.
- [10] Inductiveload. *Moebius Surface 1 Display.png*. Accessed: 4.9.2020. June 2007. URL: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Moebius_Surface_1_Display.png#file.
- [11] I. M. James. *History of topology*. Amsterdam New York: Elsevier Science B.V, 1999.
- [12] Jim.belk. *The four types of oriented link crossings*. Accessed: 4.9.2020. Sept. 2007g. URL: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Link_Crossings.svg.
- [13] Jim.belk. *Two curves with linking number -1*. Accessed: 4.9.2020. Sept. 2007b. URL: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Linking_Number_-1.svg.
- [14] Jim.belk. *Two curves with linking number -2*. Accessed: 4.9.2020. Sept. 2007d. URL: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Linking_Number_-2.svg.
- [15] Jim.belk. *Two curves with linking number 0*. Accessed: 4.9.2020. Sept. 2007a. URL: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Linking_Number_0.svg.
- [16] Jim.belk. *Two curves with linking number 1*. Accessed: 4.9.2020. Sept. 2007c. URL: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Linking_Number_1.svg.
- [17] Jim.belk. *Two curves with linking number 2*. Accessed: 4.9.2020. Sept. 2007e. URL: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Linking_Number_2.svg.
- [18] Jim.belk. *Two curves with linking number 3. Topologically equivalent to star of David as two symmetrically interlaced triangles*. Accessed: 4.9.2020. Sept. 2007f. URL: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Linking_Number_3.svg.
- [19] Niles Johnson. *A raytraced visualization of the Hopf fibration, computed using Sage and Tachyon*. Last Accessed: 22.9.2020. URL: <https://nilesjohnson.net/etcetera.html>.
- [20] Christos Kourouniotis. *University of Crete, Lecture notes: Geometric Topology*. Accessed: 7.9.2020. 2011. URL: <http://users.math.uoc.gr/~chrisk/GeomTop/GeomTop-Notes.pdf>.

- [21] John M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer-Verlag GmbH, Oct. 1, 2012.
- [22] David W. Lyons. «An elementary introduction to the Hopf fibration». In: *Mathematics magazine* 76.2 (2003), pp. 87–98. URL: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.583.3499&rep=rep1&type=pdf>.
- [23] Mark.Howison. *This image illustrates in 3D a stereographic projection from the north pole onto a plane below the sphere*. Accessed: 5.9.2020. Sept. 2007. URL: https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=File:Stereographic_projection_in_3D.png.
- [24] James R. Munkres. *Topology: Pearson New International Edition*. Pearson Education Limited, July 24, 2013. 512 pp.
- [25] Navid Nabijou. «Homotopy Groups of the Spheres». In: (2014). Accessed: 22.09.2020, p. 65. URL: <https://www.maths.gla.ac.uk/~nnabijou/HomotopyProject.pdf>.
- [26] I. D. Platis. *University of Crete, Lecture notes: Topology*. Accessed: 7.9.2020. 2017. URL: <http://users.math.uoc.gr/~jplatis/topologynotesI.pdf>.
- [27] Henri Poincaré. *Papers on topology : analysis situs and its five supplements*. Providence, R.I. London: American Mathematical Society London Mathematical Society, 2010.
- [28] Joseph Rotman. *An introduction to algebraic topology*. New York: Springer-Verlag, 1988.
- [29] Edwin H. Spanier. *Algebraic topology*. Springer Science & Business Media, 1989.
- [30] Hiroshi Toda. *Compositional Methods in Homotopy Groups of Spheres. (AM-49)*. Princeton University Press, Jan. 20, 1963. 204 pp.
- [31] Hagen Wierstorf. *Fig. 1 Klein bottle*. Accessed: 4.9.2020. June 2011. URL: <http://www.gnuplotting.org/klein-bottle/>.