



Πανεπιστήμιο Κρήτης  
Σχολή Θετικών & Τεχνολογικών Επιστημών  
Τμήμα Μαθηματικών & Εφαρμοσμένων Μαθηματικών  
Κατεύθυνση Μαθηματικών

**Η Διδασκαλία Θεωρίας Αριθμών στη Δευτεροβάθμια  
Εκπαίδευση**

Πτυχιακή Εργασία

Καμαλεδάκη Στυλιανή

A.M.: 5919

Εξεταστική Επιτροπή

Γεώργιος Πολύδωρος

Αγγελική Μάλη

Ελένη Τζανάκη

Ηράκλειο

Φεβρουάριος 2023

## ΒΕΒΑΙΩΣΗ ΕΚΠΟΝΗΣΗΣ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗΣ ή ΠΤΥΧΙΑΚΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

«Δηλώνω υπεύθυνα ότι η διπλωματική ή πτυχιακή εργασία, του Πανεπιστημίου Κρήτης, με τίτλο: «Η Διδασκαλία Θεωρίας Αριθμών στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση» έχει συγγραφεί από εμένα αποκλειστικά και στο σύνολό της.

Δεν έχει υποβληθεί ούτε έχει εγκριθεί στο πλαίσιο κάποιου άλλου μεταπτυχιακού προγράμματος ή προπτυχιακού τίτλου σπουδών, στην Ελλάδα ή στο εξωτερικό, ούτε είναι εργασία ή τμήμα εργασίας ακαδημαϊκού ή επαγγελματικού χαρακτήρα.

Δηλώνω επίσης υπεύθυνα ότι οι πηγές στις οποίες ανέτρεξα για την εκπόνηση της συγκεκριμένης εργασίας, αναφέρονται στο σύνολό τους, κάνοντας πλήρη αναφορά στους συγγραφείς, τον εκδοτικό οίκο ή το περιοδικό, συμπεριλαμβανομένων και των πηγών που ενδεχομένως χρησιμοποιήθηκαν από το διαδίκτυο.

Παράβαση της ανωτέρω ακαδημαϊκής μου ευθύνης αποτελεί ουσιώδη λόγο για την ανάκληση της

Πτυχιακής ή Μεταπτυχιακής εργασίας.

Ονοματεπώνυμο Φοιτητή

Καμαλεδάκη Στυλιανή

Ψηφιακή υπογραφή Φοιτητή

Κωδικός εγγράφου: H1oI6AkBmU4eqAROsS9NKQ



## Ευχαριστίες

Η παρούσα πτυχιακή εργασία παρουσιάστηκε στο Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών στις 22 Φεβρουαρίου 2023. Θα επιθυμούσα να ευχαριστήσω τους καθηγητές μου κ. Γ. Πολύδωρο, κ. Α. Μάλη, κ. Ε. Τζανάκη που συμμετείχαν στην εξεταστική επιτροπή. Ιδιαίτερος ευχαριστώ τον κ. Πολύδωρο υπό την επίβλεψη και την καθοδήγηση του οποίου εκπονήθηκε αυτή η εργασία.

# Περιεχόμενα:

<b>Κατάλογος Εικόνων-Πινάκων.....</b>	<b>σελ.4</b>
<b>Περίληψη.....</b>	<b>σελ.5</b>
<b>Abstract.....</b>	<b>σελ.6</b>
<b>Εισαγωγή.....</b>	<b>σελ.7</b>
<b>Κεφάλαιο 1ο: Βιβλιογραφική Επισκόπηση.....</b>	<b>σελ.9</b>
1.1 Θεωρία Αριθμών.....	σελ.9
1.2 Διδασκαλία στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση.....	σελ.10
1.3 Οφέλη Διδασκαλίας της Θεωρίας Αριθμών.....	σελ.12
<b>Κεφάλαιο 2ο: Μεθοδολογία Έρευνας.....</b>	<b>σελ.16</b>
2.1 Γενικά στοιχεία της έρευνας.....	σελ.16
2.2 Επιλογή κατάλληλου τύπου ερωτήσεων, δείγματος και ερευνητικών εργαλείων.....	σελ.17
<b>Κεφάλαιο 3ο: Αποτελέσματα.....</b>	<b>σελ.18</b>
3.1 Περιγραφική Στατιστική.....	σελ.18
3.2 Επαγωγική Στατιστική.....	σελ.22
3.3 Αποδελτίωση των απόψεων.....	σελ.24
<b>Κεφάλαιο 4ο: Συμπεράσματα.....</b>	<b>σελ.27</b>
<b>Επίλογος.....</b>	<b>σελ.29</b>
<b>Βιβλιογραφία.....</b>	<b>σελ.30</b>
<b>Παράρτημα Α.....</b>	<b>σελ.32</b>

# Κατάλογος Εικόνων-Πινάκων

## Εικόνες

Εικόνα 1: Έτος Σπουδών φοιτητών και αριθμός καθηγητών.....σελ.18	σελ.18
Εικόνα 2: «Σας βοήθησε η Θεωρία Αριθμών στη Μαθηματική σας ανάπτυξη;».....σελ.19	σελ.19
Εικόνα 3: «Πότε καταλάβατε πλήρως βασικές έννοιες της Θεωρίας Αριθμών;».....σελ.19	σελ.19
Εικόνα 4: Γενική άποψη ερωτώμενων.....σελ.20	σελ.20
Εικόνα 5: Άποψη για το Κεφάλαιο της Β' Λυκείου.....σελ.21	σελ.21
Εικόνα 6: Πρόθεση διδασκαλίας.....σελ.21	σελ.21

## Πίνακες

Πίνακας 1: Τεστ Κανονικότητας.....σελ.22	σελ.22
Πίνακας 2: Συσχέτιση Spearman μεταβλητής «έτος σπουδών/καθηγητής» με άλλες μεταβλητές.....σελ.23	σελ.23
Πίνακας 3: Συσχέτιση Spearman μεταβλητής «μάθημα Θεωρίας Αριθμών στο πανεπιστήμιο» με άλλες μεταβλητές.....σελ.23	σελ.23
Πίνακας 4: Συσχέτιση Spearman μεταβλητής «μαθηματική ανάπτυξη που προσέφερε το μάθημα» με άλλες μεταβλητές.....σελ.24	σελ.24

## Περίληψη

Στόχος της παρούσας εργασίας είναι η εξέταση της ένταξης της διδασκαλία της Θεωρίας Αριθμών σε επίπεδο δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, καθώς και τα μαθησιακά αποτελέσματα που θα προκαλούσε μια τέτοια διαφοροποίηση της διδακτέας ύλης στην επίδοση των μαθητών στα Μαθηματικά και στην γνώμη τους για το μάθημα γενικότερα. Η εργασία ξεκινάει με το θεωρητικό κομμάτι, όπου αναλύονται οι βασικές έννοιες και όροι που προσδιορίζουν το θέμα και ακολουθείται από μία έρευνα που διεξήχθη στο Πανεπιστήμιο Κρήτης. Μοιράστηκαν ερωτηματολόγια σε φοιτητές του τμήματος Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών, τα οποία είχαν ως στόχο την τοποθέτηση των μελλοντικών καθηγητών Μαθηματικών σχετικά με το θέμα της διδασκαλίας Θεωρίας Αριθμών στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, καθώς και τις δικές τους εμπειρίες με το αντικείμενο στην δικιά τους εκπαίδευση. Ως επέκταση, τα ερωτηματολόγια δόθηκαν και σε κάποιους καθηγητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης για να εξεταστεί και η δική τους γνώμη πάνω στο θέμα ως πιο έμπειροι εκπαιδευτικοί. Τα αποτελέσματα έδειξαν πως η πλειοψηφία των ερωτώμενων συμφωνεί, σε ένα βαθμό, με τη διδασκαλία της Θεωρίας Αριθμών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

**Λέξεις-κλειδιά:** Θεωρία Αριθμών, Διδακτική Μαθηματικών, Διδασκαλία Μαθηματικών, Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση.

# Abstract

This thesis was written with the intention of examining the inclusion of the teaching of Number Theory at secondary education level, as well as the learning effects that such a change in curriculum would have for students' performance in Mathematics and their opinion of the subject in general. The thesis begins with a literature overview, where the basic concepts and terminology that is related to the subject are introduced, followed by research conducted in the University of Crete. Questionnaires were distributed to undergraduate students of the Department of Mathematics and Applied Mathematics. The goal was to gather information regarding the teaching of Number Theory in secondary education as well as their own experiences with it in their own education. The questionnaires were also given to secondary education teachers. The results showed that the majority of the participants in the survey agree with the teaching of Number Theory in secondary education.

**Keywords:** Number Theory, Teaching Strategy of Mathematics, Teaching of Mathematics, Secondary Education.

## Εισαγωγή

Η παρούσα εργασία ασχολείται με το θέμα της διδασκαλίας της Θεωρίας Αριθμών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Οι βασικές έννοιες της Θεωρίας Αριθμών, ο Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης, το Ελάχιστο Κοινό πολλαπλάσιο και οι πρώτοι αριθμοί, διδάσκονται εν μέρη από το δημοτικό. Μία επανάληψη των εννοιών αυτών γίνεται στην αρχή της Α' Γυμνασίου όπου και σταματάει η εκπαίδευση των μαθητών όσον αφορά τον τομέα αυτόν. Στο βιβλίο Μαθηματικών Προσανατολισμού της Β' Λυκείου, όμως, υπάρχει ένα ολόκληρο κεφάλαιο, το 4ο κεφάλαιο, αφοσιωμένο στη Θεωρία Αριθμών. Σε αυτό, περιλαμβάνονται επιπλέον η μαθηματική επαγωγή, οι γραμμικές διοφαντικές εξισώσεις και οι ισουπόλοιποι αριθμοί. Παρόλο που υπάρχει στο βιβλίο, δεν διδάσκεται ποτέ.

Οι Zazkis και Campbell ασχολήθηκαν εκτεταμένα με το θέμα και το 2006 εξέδωσαν ένα βιβλίο σχετικά με τη διδασκαλία της Θεωρίας Αριθμών, το «Number Theory in Mathematics Education: Perspectives and Prospects» που μεταφράζεται ως «Θεωρία Αριθμών στην Μαθηματική Εκπαίδευση: Απόψεις και Προοπτικές». Η Zazkis έγραψε ένα άρθρο αργότερα, το 2009, όπου χαρακτηρίζει τη Θεωρία Αριθμών ως «Βασίλισσα και Υπηρέτρια» των Μαθηματικών. Και στα δύο τονίζεται η έλλειψη της διδασκαλίας της Θεωρίας Αριθμών σε μη πανεπιστημιακό επίπεδο καθώς και η ανεπαρκής έρευνα σχετικά με τα οφέλη που θα είχε αν διδασκόταν. Για την πραγματικότητα αυτή κάνει λόγο και η Wagner (2012) στο άρθρο της, όπου ερευνά την διδασκαλία της απόδειξης μέσω της Θεωρίας Αριθμών. Το 2014, ο Miele εκτελεί μια εκτενής έρευνα πάνω στις επιπτώσεις που έχει η ενασχόληση μαθητών Λυκείου με τη Θεωρία Αριθμών και καταλήγει σε ευνοϊκά αποτελέσματα για την ανάπτυξη των μεταγνωστικών λειτουργιών, τη μαθηματική περιέργεια και τη διάθεση των μαθητών προς το μάθημα των Μαθηματικών.

Οι έρευνες πάνω στη διδασκαλία της Θεωρίας Αριθμών και τα οφέλη της στη μαθηματική εκπαίδευση στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση είναι λίγες. Με την παρούσα εργασία προσδοκείται η συγκέντρωση καινούργιων στοιχείων πάνω στο θέμα αυτό. Στοιχεία τα οποία έχουν τη δυνατότητα να δράσουν τουλάχιστον ως έναυσμα για την διεξαγωγή ερευνών στον τομέα της διδασκαλίας της Θεωρίας Αριθμών στο επίπεδο της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

Η Zazkis και ο Campbell (2006) ασχολήθηκαν γενικά με το θέμα. Η Wagner (2012) επικεντρώθηκε περισσότερο στην εξέταση του γνωστικού αντικείμενου από παιδαγωγικής άποψης. Ενώ ο Miele (2014) εξέτασε τις επιπτώσεις που η ενασχόληση με τη Θεωρία Αριθμών είχε σε μαθητές Λυκείου. Η παρούσα εργασία αποβλέπει στην μελέτη του τρίτου



παράγοντα του Παιδαγωγικού Τριγώνου, του εκπαιδευτικού. Όπου το παιδαγωγικό τρίγωνο χαρακτηρίζεται ως η βασική δομή που χρησιμοποιείται για την ανάλυση των σχέσεων μεταξύ μαθητών, εκπαιδευτικών και γνωστικού αντικειμένου (Friesen & Osguthorpe, 2018, σελ. 2). Η εργασία, δηλαδή, στοχεύει στη συλλογή πληροφοριών σχετικά με την εκπαίδευση των εκπαιδευτικών σε επίπεδο δευτεροβάθμιας και ανώτατης εκπαίδευσης και διερευνά τις απόψεις των καθηγητών Μαθηματικών της δευτεροβάθμιας σχετικά με το θέμα αυτό. Δηλαδή, αν πιστεύουν πως η Θεωρία Αριθμών πρέπει να διδάσκεται στο Λύκειο και συγκεκριμένα στη Β' Λυκείου όπου υπάρχει και το αντίστοιχο κεφάλαιο και τα οφέλη που θα είχε η διδασκαλία του για τη μαθηματική ικανότητα των μαθητών και κατ' επέκταση των φοιτητών που θα ασχοληθούν με τις Θετικές Επιστήμες.

Η έρευνα που έγινε ήταν εμπειρική και διεξήχθη με τη χρήση ενός διαδικτυακού ερωτηματολογίου που στάλθηκε σε φοιτητές του τμήματος Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Κρήτης και σε καθηγητές Μαθηματικών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

Η εργασία ξεκινά με μία βιβλιογραφική ανασκόπηση, όπου εξηγούνται οι κύριοι όροι και έννοιες που προσδιορίζουν το θέμα. Ακολουθεί η αναλυτική μεθοδολογία της έρευνας όπου αναλύεται το μοντέλο έρευνας που χρησιμοποιείται, το δείγμα και η μεθοδολογία επεξεργασίας των στατιστικών στοιχείων. Έπειτα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τη στατιστική επεξεργασία των απαντήσεων που δόθηκαν και τέλος, αναγράφονται και σχολιάζονται τα κύρια συμπεράσματα της έρευνας.

Οι φοιτητές έκριναν το μάθημα της Θεωρίας Αριθμών στο Πανεπιστήμιο από μέτριο έως πολύ καλό για τη μαθηματική τους ανάπτυξη. Τα αποτελέσματα σχετικά με την κατανόηση βασικών εννοιών της Θεωρίας Αριθμών δείχνουν μεγάλο ποσοστό κατανόησης τους στο Γυμνάσιο, ικανοποιητικό στο Δημοτικό και το Πανεπιστήμιο και σχεδόν μηδενικό στο Λύκειο. Οι περισσότεροι φοιτητές και φοιτήτριες καθώς και όλοι οι καθηγητές και καθηγήτριες που απάντησαν στο ερωτηματολόγιο φαίνεται να συμφωνούν με τη ένταξη της διδασκαλίας της Θεωρίας Αριθμών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Οι λίγοι που απάντησαν αρνητικά εστίασαν στην έλλειψη χρόνου για την διεκπεραίωση μιας τέτοιας προσθήκης στη διδακτέα ύλη ως αιτία άρνησης.

# Κεφάλαιο 1ο: Βιβλιογραφική Επισκόπηση

## 1.1 Θεωρία Αριθμών

Η Θεωρία Αριθμών είναι ο τομέας των θεωρητικών μαθηματικών που ασχολείται με την μελέτη φυσικών και ακέραιων αριθμών. Κάποιοι την αποκαλούν και «Ανώτερη Αριθμητική» και οι στόχοι της αποτελούν κάποιους από τους παλαιότερους και φυσικότερους της επιστήμης των Μαθηματικών. Στοχεύει στην ανακάλυψη σχέσεων μεταξύ διαφόρων ειδών αριθμών (Dunham, 2022) και στην απόδειξη των σχέσεων αυτών. Τα «είδη» αριθμών στα οποία αναφέρεται είναι οι άρτιοι, οι περιττοί, τα τέλεια τετράγωνα, οι τέλειοι κύβοι, οι πρώτοι και πολλά άλλα. Οι αριθμοί του κάθε είδους έχουν κάτι κοινό μεταξύ τους, όπως για παράδειγμα η τέλεια διαίρεση με το δύο για τους άρτιους αριθμούς. (Sunitha, 2013, σελ. 2-3) Ιδιαίτερο χαρακτηριστικό της Θεωρίας Αριθμών είναι πως τα προβλήματα και τα θεωρήματα της διατυπώνονται με απλούς όρους που μπορούν να γίνουν κατανοητοί ακόμα και από άτομα που δεν έχουν ασχοληθεί με τα Μαθηματικά σε ανώτερο επίπεδο. Οι λύσεις και οι αποδείξεις τους δεν είναι πάντα απλές, αλλά μπορούν να γίνουν εύκολα κατανοητές.

Σήμερα η Θεωρία Αριθμών χωρίζεται στις εξής υποκατηγορίες: βασική, αλγεβρική, αναλυτική, γεωμετρική και πιθανολογική Θεωρία Αριθμών. Η ορολογία αυτή αναφέρεται στις μεθόδους που χρησιμοποιούνται για να λυθούν τα προβλήματα των ακεραίων με τα οποία ασχολείται (Dunham, 2022). Η παρούσα εργασία επικεντρώνεται στη βασική θεωρία αριθμών, αφού είναι η πιο προσιτή για τους μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

Η βασική θεωρία αριθμών εστιάζει στη διαιρεσιμότητα ανάμεσα σε ακέραιους, στον αλγόριθμο της διαίρεσης, τον Ευκλείδειο αλγόριθμο, τον Μέγιστο Κοινό Διαιρέτη, το Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο, τις βασικές ιδιότητες των πρώτων αριθμών και τη δομή των συνόλων  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , για  $n \in \mathbb{N}$ , ως αντιμεταθετικούς δακτυλίους. Ως επέκταση, αναφέρονται συνήθως το Μικρό Θεώρημα του Fermat, το Θεώρημα του Euler, η σχέση γραμμικότητας και το Κινέζικο Θεώρημα των Υπολοίπων (Sunitha, 2013, σελ. 12). Φυσικά υπάρχουν ανώτερες έννοιες που εντάσσονται στη βασική Θεωρία Αριθμών αλλά δεν είναι αρκετά απλές για μαθητές Γυμνασίου και Λυκείου.

Μέχρι τα μέσα του 20ου αι. η Θεωρία Αριθμών θεωρούνταν μια από τις πιο «αγνές» μορφές μαθηματικών, χωρίς κάποια εφαρμογή στον πραγματικό κόσμο (Dunham, 2022). Αυτό άλλαξε από την εφεύρεση και ανάπτυξη των ψηφιακών τεχνολογιών επικοινωνίας. Συγκεκριμένα, αποτελεί σημαντικό εργαλείο για τον αλγόριθμο κρυπτογράφησης. Η

κρυπτογραφία είναι η πρακτική της απόκρυψης πληροφοριών, της μετατροπής δηλαδή κρυφών πληροφοριών σε κείμενο που είναι αδύνατο να διαβαστεί. Χρησιμοποιείται στις διαδικτυακές αγορές έτσι ώστε τα στοιχεία των τραπεζικών λογαριασμών των πελατών να μένουν ιδιωτικά και να μην μπορούν να κλαπούν από τρίτους. Ενώ οι διοφαντικές εξισώσεις, ένα ενδιαφέρον κεφάλαιο της Θεωρίας Αριθμών, βρίσκουν εφαρμογή σε πολλά ρεαλιστικά προβλήματα. Ένα ενδιαφέρον παράδειγμα είναι το πρόβλημα επιλογής κατάλληλου ύψους σκαλωσιών για τον χρωματισμό ενός τοίχου, πρόβλημα που λύνεται χρησιμοποιώντας το πυθαγόρειο θεώρημα και τους αριθμούς Jarasandha (Saranya & Janaki, 2021, σελ. 1-2).

Δυστυχώς, όμως, η αλήθεια είναι πως η Θεωρία Αριθμών δεν έχει ουσιαστικές εφαρμογές στην καθημερινή ζωή. Και καθώς τα Αναλυτικά Προγράμματα προσπαθούν να επικεντρωθούν σε γνώσεις που μπορούν να εφαρμοστούν, η Θεωρία Αριθμών συνήθως παραλείπεται από την βασική εκπαίδευση (Campbell & Zazkis, 2006, σελ. 1-2). Παρόλο που υπάρχουν αναφορές για επιτυχείς στρατηγικές διδασκαλίας εννοιών της Θεωρίας Αριθμών, δεν υπάρχει έρευνα για το αν οι μαθητές όντως κατανοούν τις έννοιες αυτές (Campbell & Zazkis, 2006, σελ. 7).

## 1.2 Διδασκαλία στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση

Η διδασκαλία της Θεωρίας Αριθμών ξεκινάει σε ένα βαθμό στις τελευταίες τάξεις του Δημοτικού, όπου οι μαθητές αρχικά μαθαίνουν να διακρίνουν πρώτους και σύνθετους αριθμούς. Συνεχίζουν μαθαίνοντας τον τρόπο εύρεσης του Μέγιστου Κοινού Διαιρέτη (ΜΚΔ) και του Ελάχιστου Κοινού Πολλαπλάσιου (ΕΚΠ) και τέλος διδάσκονται την ανάλυση ενός αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων (ΙΕΠ-Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση, 2022-2023). Το ίδιο περιεχόμενο διδάσκεται και στην αρχή της Α' Γυμνασίου με μερικές διαφοροποιήσεις. Πιο συγκεκριμένα, σύμφωνα με το Αναλυτικό Πρόγραμμα, το οποίο μπορεί να βρεθεί στην ιστοσελίδα του υπουργείου (<http://iep.edu.gr/el/>), οι μαθητές ξεκινούν τη μελέτη των Μαθηματικών στο Γυμνάσιο κάνοντας επανάληψη στις πράξεις με φυσικούς αριθμούς, τις οποίες γνωρίζουν ήδη, αλλά μαθαίνουν να εκφράζουν πιο τυπικά με μεταβλητές. Αφού γίνει η επανάληψη των πράξεων, προχωρούν στην Ευκλείδεια διαίρεση και την έννοια της διαιρετότητας, έννοιες που περιέχονται στη Θεωρία Αριθμών. Τέλος, ασχολούνται με το ΜΚΔ, το ΕΚΠ και την Ανάλυση Αριθμού σε Γινόμενο πρώτων παραγόντων, επίσης βασικές έννοιες της Θεωρίας Αριθμών (ΙΕΠ-Γυμνασίου, 2022-2023).

Το ΕΚΠ και ο ΜΚΔ χρησιμοποιούνται σε όλα τα χρόνια του Γυμνασίου ως εργαλεία για την απλοποίηση κλασμάτων ή επίλυση κλασματικών εξισώσεων. Αλλά, λόγω της

ελλιπούς κατανόησης των εννοιών αυτών, οι μαθητές συχνά δυσκολεύονται να τα υπολογίσουν. Πολλές φορές, οι δύο όροι μπερδεύονται μεταξύ τους στο μυαλό του μαθητή και, παρά τις πολλαπλές στρατηγικές που έχουν μάθει από τους καθηγητές τους, δεν μπορούν να βρουν ποιο από τα δύο να χρησιμοποιήσουν.

Η εύρεση των ΕΚΠ και ΜΚΔ στο Δημοτικό γίνεται με ένα τέχνασμα όπου χρησιμοποιούνται οι πρώτοι παράγοντες των αριθμών, χωρίς όμως να επισημαίνεται η ανάλυση ενός αριθμού σε πρώτους παράγοντες. Στο Γυμνάσιο, αφού μαθαίνουν πως κάθε αριθμός μπορεί να γραφεί ως μοναδικό γινόμενο πρώτων αριθμών, οι μαθητές ίσως θα πρέπει να ενθαρρυνθούν να πειραματιστούν παραπάνω με τους πρώτους αριθμούς. Αυτό όμως δεν γίνεται και έχει ως αποτέλεσμα να γίνει απλά ένα κομμάτι της θεωρίας που δεν χρησιμοποιείται στην πράξη και ξεχνιέται μετά τις εξετάσεις.

Για να μην ξεχαστούν οι έννοιες αυτές, οι καθηγητές θα ήταν θεμιτό να κάνουν επανάληψη αυτών, έστω και περιληπτικά, και στις Β' και Γ' Γυμνασίου. Κάτι το οποίο γίνεται έτσι κι αλλιώς από πολλούς καθηγητές αλλά ως μία άτυπη και συνήθως πολύ σύντομη διαδικασία που δεν είναι αρκετή για το μαθητή. Συγκεκριμένα, όταν υπάρχει ανάγκη για εύρεση του ΜΚΔ ή του ΕΚΠ, όπως για παράδειγμα στην εύρεση κοινού παράγοντα στο κεφάλαιο της παραγοντοποίησης στη Γ' Γυμνασίου, ο καθηγητής ενδεχομένως να επαναλάβει τη διαδικασία εύρεσης των πρώτων παραγόντων ενός αριθμού. Η επανάληψη αυτή, όμως, πολλές φορές δεν επαρκεί και ο μαθητής αντιμετωπίζει προβλήματα στην εκμάθηση της νέας έννοιας λόγω της ελλιπής κατανόησης της προϋπάρχουσας γνώσης.

Η Θεωρία Αριθμών περιέχει και άλλες έννοιες οι οποίες, αν και ενδέχεται να γίνουν κατανοητές από μαθητές Γυμνασίου, αφήνονται για το Λύκειο. Ίσως βέβαια η αναφορά, έστω και περιληπτικά, κάποιων εννοιών, όπως π.χ. τους ισοϋπόλοιπους αριθμούς, θα ενίσχυε το ενδιαφέρον των μαθητών για το μάθημα των Μαθηματικών γενικά.

Στην Α' Λυκείου, οι μαθητές εισάγονται στον συμβολικό κόσμο της Μαθηματικής Λογικής και αντιμετωπίζουν τις Μαθηματικές έννοιες που ήδη γνωρίζουν σε ένα υψηλότερο επίπεδο αφαίρεσης όπως αναφέρεται και στο Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών του μαθήματος της Άλγεβρας (ΙΕΠ-ΓΕΛ, 2022-2023). Οι μαθητές είναι δηλαδή πλέον σε θέση να επεκτείνουν τις γνώσεις τους στη Θεωρία Αριθμών. Μάλιστα, πλέον η αριθμητική δεν είναι το κύριο αντικείμενο ούτε των Μαθηματικών αλλά ούτε και της Φυσικής και της Χημείας, μαθημάτων που απαιτούν πράξεις. Οπότε, το να καλλιεργηθεί μία άνεση με τις πράξεις αριθμών, θεωρώντας όλους τους αριθμούς ως γινόμενα πρώτων, μπορεί να δώσει στο μαθητή

την ευκαιρία να τελειώνει γρήγορα με τους υπολογισμούς και να εστιάζει στο πραγματικό αντικείμενο της κάθε άσκησης.

Στα βιβλία γενικής κατεύθυνσης, ωστόσο, δεν υπάρχει καμία αναφορά στα ΕΚΠ, ΜΚΔ ή σε πρώτους αριθμούς. Είναι επίσης ανύπαρκτη ακόμα και στα Μαθηματικά Προσανατολισμού της Γ' Λυκείου, τα οποία ίσως θα έπρεπε να παρουσιάζουν ένα θεωρητικό αλλά προσιτό τομέα των μαθηματικών όπως αυτόν. Ακόμα και αν δεν έχουν άμεση χρήση στην καθημερινότητα, μπορούν να βοηθήσουν με γρήγορους υπολογισμούς χωρίς αριθμομηχανές ή κάθετες πράξεις.

Στο σχολικό βιβλίο Μαθηματικών Προσανατολισμού της Β' Λυκείου υπάρχει ένα ολοκλήρο κεφάλαιο αφιερωμένο στη Θεωρία Αριθμών, το οποίο όμως είναι εξ ολοκλήρου εκτός ύλης και δεν αναφέρεται καν στο Αναλυτικό Πρόγραμμα. Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται νέες μαθηματικές έννοιες, μια πολύ σημαντική από αυτές είναι η Μαθηματική Επαγωγή, η οποία επιδεικνύει ένα τρόπο απόδειξης πολλών θεωρημάτων σε φυσικούς ή ακέραιους αριθμούς. Συνεχίζει παρουσιάζοντας ξανά τα ΕΚΠ, ΜΚΔ και την Ευκλείδεια διαίρεση, και έπειτα τους πρώτους αριθμούς. Επιπρόσθετα, αναφέρει τις γραμμικές διοφαντικές εξισώσεις και τους ισούπόλοιπους αριθμούς.

Στη Β' Λυκείου, οι μαθητές έχουν ήδη εισαχθεί στη μέθοδο της απόδειξης από τη Γεωμετρία. Το μάθημα της Θεωρίας Αριθμών, ωστόσο, μπορεί να αποδειχθεί πολύ καλή ευκαιρία για την περαιτέρω ενασχόληση τους με τις αποδείξεις (Zazkis & Campbell, 2006, σελ. 9-10). Αν εργαστούν σε περισσότερες αποδείξεις, η μαθηματική και αφαιρετική τους σκέψη θα αναπτυχθεί και θα αποκτήσουν σημαντικά εφόδια και για τα προβλήματα και τις ασκήσεις της Γ' Λυκείου.

### 1.3 Οφέλη Διδασκαλίας της Θεωρίας Αριθμών

Η Zazkis (2009, σελ. 2-3) ισχυρίζεται πως οι ιδιότητες των αριθμών, που μελετούνται στη Θεωρία Αριθμών, θα ενισχύσουν τις υπολογιστικές ικανότητες των μαθητών. Αλλά, δυστυχώς, η παρουσία της Θεωρίας Αριθμών στη διδασκαλία κυμαίνεται από απειροελάχιστη έως και ανύπαρκτη, παρόλη την ποικιλία των Αναλυτικών Προγραμμάτων σε διαφορετικές χώρες. Τα άτομα έλκονται από την «ομορφιά» και «κομψότητα» των αντικειμένων, ιδιαίτερα όταν συνοδεύονται από κάποια μυστικότητα. Η Θεωρία Αριθμών έχει όλα αυτά τα στοιχεία. Με τον σωστό χειρισμό, έχει τη δυνατότητα να ωφελήσει σημαντικά στην μάθηση του μαθητή. Αν και οι περισσότεροι κλάδοι των Μαθηματικών χαρακτηρίζονται από «ομορφιά», «κομψότητα» και «μυστικότητα», κανένας άλλος τομέας

δεν παρουσιάζει αυτά τα χαρακτηριστικά τόσο απλοϊκά, δηλαδή κατανοητά ακόμα και από άτομα χωρίς ειδικευση στον τομέα των Μαθηματικών.

Στην Θεωρία Αριθμών, υπάρχουν πολλά άλυτα προβλήματα. Το ξεχωριστό, όμως, των προβλημάτων αυτών είναι πως οι εκφωνήσεις τους μπορούν να γίνουν εύκολα κατανοητές, ακόμα και αν τα ίδια τα προβλήματα δεν μπορούν να λυθούν (Zazkis, 2009, σελ. 5). Η Ανάλυση έχει και αυτή πολλά άλυτα προβλήματα, αλλά δεν μπορούν συνήθως να εκφραστούν χωρίς εξειδικευμένη ορολογία, λέξεις όπως «συγκλίνει», «πυκνό», «συμπαγές» κ.τ.λ. Αντίθετα, στη Θεωρία Αριθμών τα προβλήματα μπορούν να εκφραστούν απλά, ακόμη και με λεξιλόγιο Δημοτικού, π.χ. αν ένας αριθμός διαιρεί έναν δεύτερο αριθμό, ο οποίος διαιρεί έναν τρίτο τότε και ο πρώτος αριθμός διαιρεί τον τρίτο. Αυτό ενθαρρύνει τους μαθητές να επαληθεύσουν θεωρήματα ή να προσπαθήσουν να αποδείξουν κάποιο από αυτά. Οι διαδικασίες που ακολουθούν είναι φυσικό να μην είναι οι τυπικές, αλλά ο πειραματισμός που κάνουν αναπτύσσει τις μαθηματικές τους ικανότητες (Zazkis, 2009, σελ. 4). Ενδεχομένως, κάποια αποτελέσματα θα εκπλήξουν θετικά τον μαθητή τόσο ώστε να ασχοληθεί περεταίρω με αυτά, βελτιώνοντας έτσι και την σχέση του με το μάθημα των Μαθηματικών.

Η διαδικασία του πειραματισμού και των αποδείξεων θεωρημάτων είναι στην πραγματικότητα η ουσία των Μαθηματικών (Zazkis, 2009, σελ. 11-14). Για αυτό το λόγο, η Θεωρία Αριθμών είναι χρήσιμη στη διδασκαλία και την εκμάθηση Μαθηματικών, επειδή προσφέρει τα κατάλληλα ερεθίσματα για την έναρξη της διαδικασίας αυτής από τους μαθητές. Μπορεί ακόμα να δράσει ως εργαλείο αναγνώρισης μοτίβων και να δώσει τα θεμέλια για τη δόμηση αποδείξεων. Παρατηρώντας μοτίβα, τα μαθηματικά μετατρέπονται από τύπους και κανόνες σε οπτικές σχέσεις και δομές (Zazkis, 2009, σελ. 8-10). Για τους μαθητές μάλιστα, η ενασχόληση τους με τη Θεωρία Αριθμών μπορεί να τους δώσει κίνητρο να ασχοληθούν γενικότερα με τα Μαθηματικά και να βελτιώσουν την επίδοσή τους (Zazkis, 2009, σελ. 13-14).

Η Θεωρία Αριθμών μπορεί, επίσης, να χρησιμοποιηθεί για τη διδασκαλία της απόδειξης (Zazkis & Campbell, 2006, σελ. 9-10). Οι αποδείξεις στη Θεωρία Αριθμών είναι συχνά σύντομες και συνοπτικές. Έτσι, μπορεί και ένας μαθητής Λυκείου να τις κατανοήσει και να τις εφαρμόσει. Επιπλέον, εισάγει τον μαθητή σε διάφορες μεθοδολογίες απόδειξης όπως η «εις άτοπον επαγωγή» και η απόδειξη «με γενικό παράδειγμα». Για να υπάρχουν πραγματικά αποτελέσματα, όμως, είναι απαραίτητο ένα λειτουργικό και υποστηρικτικό περιβάλλον μάθησης (Zazkis, 2009, σελ. 11-13). Διότι όσο ωφέλιμη και να είναι η εκμάθηση

μιας έννοιας, αν δεν υπάρχει ουσιαστική κατανόηση από τους μαθητές, δεν υπάρχουν ουσιαστικά αποτελέσματα.

Η Θεωρία Αριθμών έχει τη δυνατότητα να βελτιώσει την κατανόηση μαθηματικών εννοιών, διότι χρησιμοποιεί εξαιρετικά απλή ορολογία για να περιγράψει το αντικείμενο της. Μπορεί να προσφέρει μία ομαλή μετάβαση από την Αριθμητική στην Άλγεβρα, καθώς οι μαθητές υποβοηθούνται να κατανοήσουν την αφηρημένη εννοιολογική δομή των φυσικών και των ακεραίων αριθμών (Campbell & Zazkis, 2006, σελ. 28). Επιπροσθέτως, έχει πολλά αλγεβρικά χαρακτηριστικά, όπως μεταβλητές και μαθηματική λογική χωρίς δυσνόητα σύμβολα και ορολογίες. Σε συνέχεια, μπορεί ακόμα να συνδυαστεί με άλλες ενότητες των Μαθηματικών, όπως η τριγωνομετρία (Zazkis & Truman, 2015) και η Γεωμετρία (Wagner, 2012).

Το γεγονός ότι η διδασκαλία της Θεωρίας Αριθμών μπορεί να επηρεάσει τη διαδικασία της μάθησης των Μαθηματικών είναι γενικά αποδεκτό (Campbell & Zazkis, 2006, σελ. 13), αλλά δεν έχει ακόμα βρεθεί ο τρόπος για να ενταχθεί σωστά το αντικείμενο της στη διδασκαλία, με δεδομένο ότι δεν διδάσκεται στη πλειοψηφία των σχολείων του κόσμου. Επομένως, δεν υπάρχουν αρκετές αποδείξεις για το αν πραγματικά βοηθάει στην μαθηματική ανάπτυξη των μαθητών.

Ο Miele, το 2014, έκανε το διδακτορικό του πάνω στο θέμα αυτό. Συγκεκριμένα, διενήργησε έκανε ποσοτική έρευνα με ερωτηματολόγια σε 40 μαθητές και συνεντεύξεις σε 10 μαθητές Λυκείου της Νέας Υόρκης και της Κίνας. Η έρευνα είχε ως σκοπό την μέτρηση και σύγκριση της μεταγνωστικής ικανότητας, μαθηματικής περιέργειας και τις συμπεριφορές των μαθητών απέναντι στα Μαθηματικά πριν και μετά την απάντηση τους σε ερωτήσεις που σχετίζονται με τη Θεωρία Αριθμών. Αν και διεξήχθη με μαθητές διαφορετικών μαθηματικών ικανοτήτων, τα αποτελέσματα έδειξαν πως στους 39 από τους 40 μαθητές παρατηρήθηκε κάποιου είδους βελτίωση στα χαρακτηριστικά που αναφέρθηκαν παραπάνω. Συνεπώς, τα αποτελέσματα της έρευνας φαίνεται να δείχνουν πως η διδασκαλίας της Θεωρίας Αριθμών έχει οφέλη στη μαθηματική ανάπτυξη των μαθητών, τουλάχιστον στο Λύκειο.

Το συμπέρασμα της έρευνας του ήταν πως η Θεωρία Αριθμών έχει τουλάχιστον τη δυνατότητα να επηρεάσει θετικά τις μεταγνωστικές λειτουργίες, τη μαθηματική περιέργεια και τη διάθεση των μαθητών προς το μάθημα, με μόνο ένα μαθητή να μην δείχνει κάτι τέτοιο. Είναι ένα πολύ θετικό αποτέλεσμα για τη διδασκαλία της Θεωρίας Αριθμών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση με δεδομένα όχι μόνο από την Αμερική αλλά και από μία χώρα με πολύ διαφορετικό πολιτισμό και εκπαιδευτικό σύστημα, την Κίνα (Wang, 2020).

Ένας μαθητής του Δημοτικού έχει τη δυνατότητα να κατανοήσει την διαίρεση κατά modulo. Το ίδιο ισχύει και για την ανάλυση σε γινόμενο πρώτων παραγόντων. Ακόμα και αν οι μαθητές του Δημοτικού δεν κατανοούν το βάθος αυτών των εννοιών, αποκτούν ενδιαφέρον για τα Μαθηματικά. Το γεγονός ότι στο  $\mathbb{Z}_2$  η γνωστή πράξη  $1+1=2$  δεν ισχύει, έχει μία γοητεία που μπορεί να μαγέψει το μαθητή σε σημείο που να αφιερώσει περισσότερο χρόνο με δική του πρωτοβουλία. Είναι αυτή η αγάπη για τα Μαθηματικά και για το παράδοξο που θα βελτιώσουν την επίδοση του μαθητή, κάτι το οποίο έχει τη δυνατότητα να προσφέρει η Θεωρία Αριθμών.



## Κεφάλαιο 2ο: Μεθοδολογία Έρευνας

Αυτό το κεφάλαιο περιγράφει τις μεθόδους και διαδικασίες που ακολουθήθηκαν για να απαντηθούν οι ερευνητικές ερωτήσεις της έρευνας.

Συγκεκριμένα, η έρευνα θέτει τα εξής ερευνητικά ερωτήματα:

1. Με βάση την κρίση των ερωτώμενων, σε ποια βαθμίδα της εκπαίδευσης κατανοούνται πλήρως οι έννοιες του Μέγιστου Κοινού Διαιρέτη, του Ελάχιστου Κοινού Πολλαπλάσιου και των πρώτων αριθμών από τους μαθητές;
2. Με βάση την κρίση των φοιτητών, σε πανεπιστημιακό επίπεδο, η διδασκαλία της Θεωρίας Αριθμών συνέβαλε στην μαθηματική ανάπτυξη των φοιτητών;
3. Τι άποψη έχουν οι καθηγητές της δευτεροβάθμιας για τη διδασκαλία της Θεωρίας Αριθμών στη Β΄ Λυκείου;
4. Τι άποψη έχουν οι φοιτητές του Μαθηματικού για τη διδασκαλία της Θεωρίας Αριθμών στη Β΄ Λυκείου;

### 2.1 Γενικά στοιχεία της έρευνας

Η έρευνα είναι ποσοτική και το εργαλείο συγκέντρωσης δεδομένων είναι το ερωτηματολόγιο. Οι ερωτήσεις που συμπεριλαμβάνονται κινούνται στους εξής άξονες:

1. Γενικές ερωτήσεις σχετικά με το δείγμα (φύλο, έτος σπουδών/ιδιότητα εκπαιδευτικού).
2. Ερωτήσεις σχετικά με τις εμπειρίες και γνώσεις των ερωτώμενων σχετικά με τη Θεωρία Αριθμών και το αντικείμενο της.
3. Ερωτήσεις για τις απόψεις των ερωτώμενων σχετικά με τη διδασκαλία της Θεωρίας Αριθμών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

Η τελευταία ερώτηση «Γιατί η Θεωρία Αριθμών πρέπει ή δεν πρέπει να διδάσκεται στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση;» είχε στόχο την καλύτερη ανάπτυξη και καταγραφή της γνώμης του ερωτώμενου πάνω στο θέμα.

Όλες οι ερωτήσεις του ερωτηματολογίου περιέχονται στο Παράρτημα Α.

Στην έρευνα συμμετείχαν 7 καθηγητές δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (5 άντρες, 2 γυναίκες) και 31 φοιτητές (11 άντρες, 20 γυναίκες) του τμήματος Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Κρήτης.

## 2.2 Επιλογή κατάλληλου τύπου ερωτήσεων, δείγματος και ερευνητικών εργαλείων

Οι ερωτήσεις ανοικτού τύπου συχνά δεν απαντώνται από τους ερωτώμενους είτε λόγω έλλειψης χρόνου είτε διότι δεν νιώθουν άνετα να εκφραστούν γραπτώς, ενώ ταυτόχρονα η επεξεργασία και αποκωδικοποίηση τους είναι δύσκολη (Ζάχος, 2010, σελ.69). Έτσι, η πλειοψηφία των ερωτήσεων στο ερωτηματολόγιο που χρησιμοποιήθηκε είναι κλειστού τύπου. Παρόλα αυτά, το ερωτηματολόγιο περιείχε και μια ερώτηση ανοικτού τύπου έτσι ώστε να γίνει καλύτερη ανάλυση και επιχειρηματολογία των απόψεων των ερωτώμενων (Ζάχος, 2010, σελ.69).

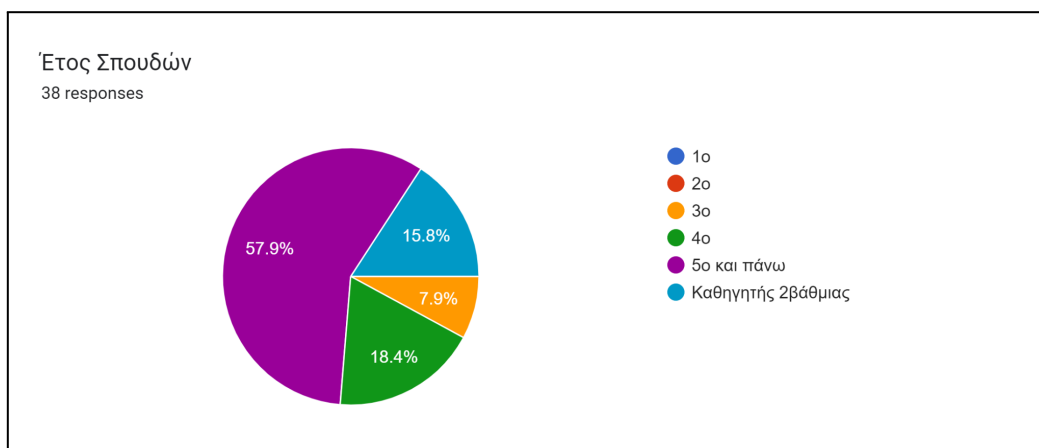
Ο διαμοιρασμός του ερωτηματολογίου έγινε εξ ολοκλήρου διαδικτυακά. Στάλθηκε σε μερικούς καθηγητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης και σε φοιτητές διαφόρων εξαμήνων και γνωστικών υποβάθρων του τμήματος Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Κρήτης. Οι φοιτητές που απάντησαν ήταν κυρίως μεγαλύτερων ετών, άρα πολλοί έχουν πάρει το μάθημα της Θεωρίας Αριθμών (μάθημα επιλογής στο Πανεπιστήμιο Κρήτης) και παιδαγωγικά μαθήματα. Το οποίο σημαίνει πως γνωρίζουν το αντικείμενο της Θεωρίας Αριθμών καθώς έχουν και μία άποψη για τη διδασκαλία στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, γεγονός που τους θέτει ικανούς να διατυπώσουν και να εκφράσουν την γνώμη τους πάνω στο θέμα. Θεωρήθηκε σημαντικό να γίνει διάκριση στους φοιτητές που έχουν πάρει το μάθημα της Θεωρίας Αριθμών και σε αυτούς που δεν το έχουν πάρει. Ο λόγος είναι μία πιθανή διαφοροποίηση στις απόψεις τους.

Τα δεδομένα του ερωτηματολογίου αναλύθηκαν χρησιμοποιώντας τα εργαλεία του google forms και του google sheets καθώς και το λογισμικό SPSS (Statistical Package for the Social Sciences). Το google forms χρησιμοποιήθηκε για την συλλογή και ομαδοποίηση των δεδομένων λόγω της άμεσης ανάλυσής τους, ενώ το google sheets χρησιμοποιήθηκε λόγω της εύκολης συνεργασίας με το google forms και την εύκολη μετατροπή των δεδομένων σε κατάλληλη μορφή για το SPSS. Το SPSS χρησιμοποιήθηκε λόγω της δυνατότητας εύκολης ανάλυσης των δεδομένων χωρίς τη χρήση κώδικα.

## Κεφάλαιο 3ο: Αποτελέσματα

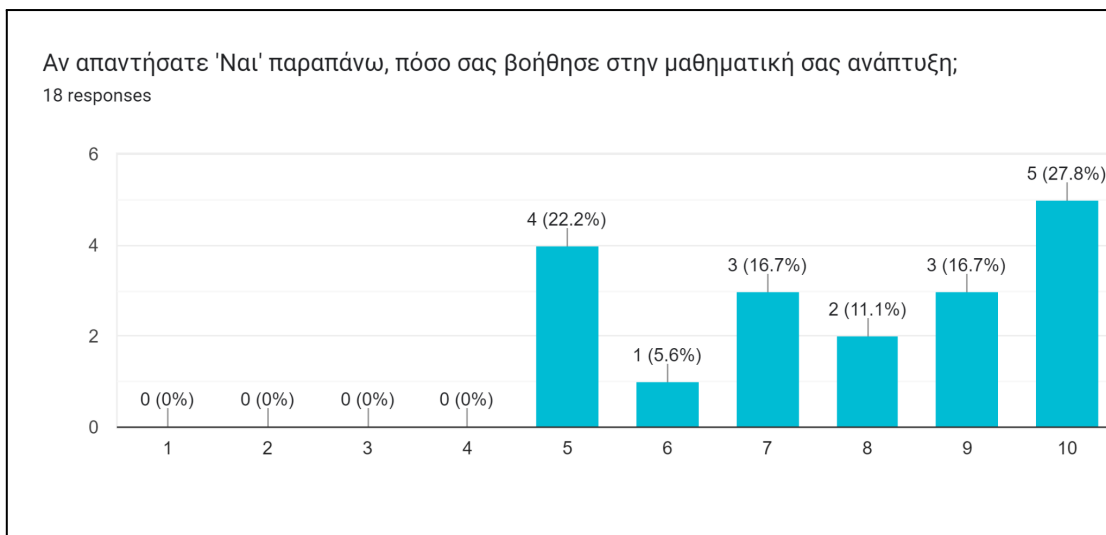
### 3.1 Περιγραφική Στατιστική

**Ερώτηση 1 & 2:** Το ερωτηματολόγιο απαντήθηκε από 16 άντρες και 22 γυναίκες Μαθηματικούς. Από τους οποίους 7 ήταν καθηγητές δευτεροβάθμιας (5 άντρες, 2 γυναίκες) και 31 φοιτητές (11 άντρες, 20 γυναίκες) του τμήματος Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Κρήτης. Όπως εμφανίζεται στην Εικόνα 1, περίπου το 58% των ερωτώμενων ήταν φοιτητές που βρίσκονταν στο 5ο ή παραπάνω έτος σπουδών τους ενώ το 26% ήταν φοιτητές που βρίσκονταν στο 3ο ή 4ο έτος σπουδών τους. Οι καθηγητές δευτεροβάθμιας αποτελούν το 15% των ερωτώμενων.



Εικόνα 1: Έτος Σπουδών φοιτητών και Αριθμός καθηγητών.

**Ερώτηση 3 & 4:** Οι 11 από τους 31 φοιτητές έχουν πάρει το μάθημα της Θεωρίας Αριθμών και σημειώνουν πως τους βοήθησε από μέτρια έως πάρα πολύ στη Μαθηματική τους ανάπτυξη. Οι καθηγητές της δευτεροβάθμιας αξιολόγησαν τη συμβολή του μαθήματος αυτού με 7 και πάνω, δηλαδή από αρκετά έως και πάρα πολύ. Στην Εικόνα 2, απεικονίζονται με μορφή ιστογράμματος τα αποτελέσματα στην ερώτηση «Πόσο σας βοήθησε στην μαθηματική σας ανάπτυξη;».



Εικόνα 2: «Σας βοήθησε η Θεωρία Αριθμών στη Μαθηματική σας ανάπτυξη;»

**Ερώτηση 5:** Η ερώτηση αυτή στοχεύει στην απάντηση του δεύτερου ερευνητικού ερωτήματος. Ο στόχος του ερωτήματος είναι να εξεταστεί η βαθμίδα που άτομα που έχουν επιλέξει τα Μαθηματικά ως αντικείμενο τους κατανόησαν βασικούς όρους της Θεωρίας Αριθμών όπως ο ΜΚΔ, το ΕΚΠ και η Ανάλυση σε πρώτους αριθμούς. Μόνο το 26% (10 άτομα) απάντησαν πως κατανόησαν τις έννοιες αυτές στο Δημοτικό. Η πλειοψηφία, περίπου το 45%, τα κατανόησε στο Γυμνάσιο, ενώ το 8% στο Λύκειο. Το υπόλοιπο 21% (8 άτομα) τα κατανόησαν στο Πανεπιστήμιο. Το γεγονός πως ο ένας στους πέντε κατανόησε αυτές τις έννοιες στο Πανεπιστήμιο, παρόλο που έχει επιλέξει να σπουδάσει Μαθηματικά, είναι ένδειξη πως η διδασκαλία των εννοιών αυτών δεν είναι επαρκής στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Στην Εικόνα 3, αποτυπώνονται τα αποτελέσματα της ερώτησης.



Εικόνα 3: «Πότε καταλάβατε πλήρως βασικές έννοιες της Θεωρίας Αριθμών;»

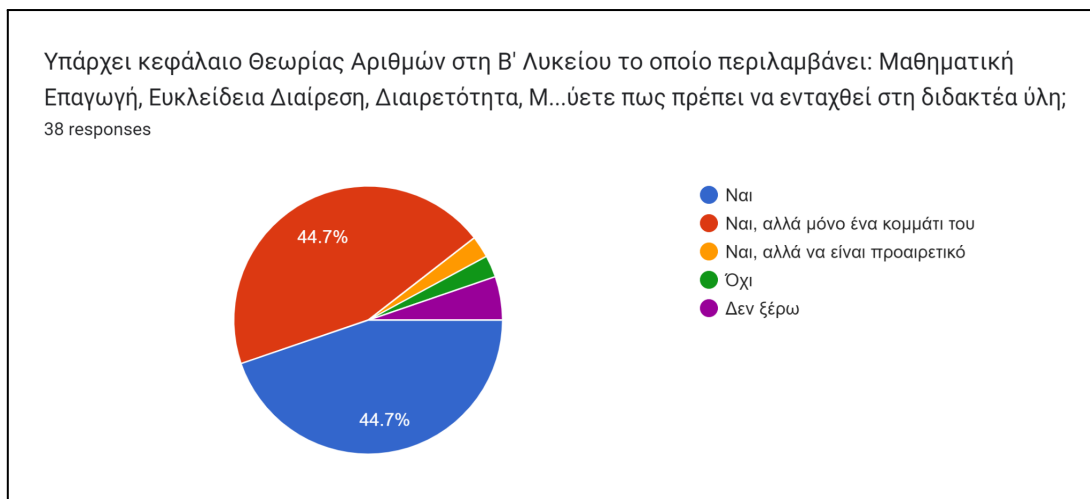
Ακολουθεί το δεύτερο μέρος του ερωτηματολογίου, το οποίο περιέχει ερωτήσεις κρίσεως και στοχεύει στην απάντηση των ερευνητικών ερωτημάτων 3 και 4. Σε αυτό το κομμάτι γίνεται διαχωρισμός στις απαντήσεις των καθηγητών και των φοιτητών.

**Ερώτηση 6:** Οι 5 από τους 7 καθηγητές απάντησαν «Ναι» όταν ρωτήθηκαν αν η Θεωρία Αριθμών πρέπει να διδάσκεται στο σχολείο, ενώ οι άλλοι δύο συμφώνησαν αλλά υποστήριξαν πως πρέπει να διδαχθεί μόνο περιορισμένο κομμάτι της. Το 80% των φοιτητών απάντησε «Ναι» ή «Ναι, αλλά περιορισμένο κομμάτι» με το δεύτερο να έχει αρκετά μεγαλύτερη απήχηση. Από το υπόλοιπο 20%, ένας φοιτητής απάντησε πως πρέπει να γίνεται μόνο προαιρετικά, δύο απάντησαν «όχι» και τρεις απάντησαν «δεν ξέρω». Τα από κοινού στατιστικά της ερώτησης αυτής αναγράφονται στην Εικόνα 4.



Εικόνα 4: Γενική άποψη ερωτώμενων.

**Ερώτηση 7:** Η ερώτηση αυτή ζητάει τη γνώμη των ερωτώμενων πάνω στο Κεφάλαιο της Θεωρίας Αριθμών στο βιβλίο των Μαθηματικών Προσανατολισμού της Β' Λυκείου και αν αυτό θα πρέπει να διδάσκεται. Και οι 7 καθηγητές δευτεροβάθμιας απάντησαν «Ναι», οι δύο από τους οποίους επέλεξαν την διευκρίνηση «αλλά μόνο περιορισμένο κομμάτι του κεφαλαίου». Το 87% των φοιτητών απάντησε «Ναι», από τους οποίους το 55% έδωσε τη διευκρίνηση «αλλά μόνο περιορισμένο κομμάτι του κεφαλαίου». Ένας φοιτητής απάντησε «να είναι προαιρετικό», ένας απάντησε «Όχι» και δύο απάντησαν «Δεν ξέρω». Τα ενιαία στατιστικά στοιχεία που απεικονίζονται στη Εικόνα 5 δείχνουν πως το 90% του δείγματος υποστηρίζει σε ένα βαθμό την διδασκαλία της Θεωρίας Αριθμών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση.



Εικόνα 5: Άποψη για το Κεφάλαιο της Β' Λυκείου.

**Ερώτηση 8:** Η ερώτηση αυτή έχει πιο προσωπικό χαρακτήρα καθώς ρωτάει τους καθηγητές και τους φοιτητές αν οι ίδιοι θα ήταν διατεθειμένοι να διδάξουν το κεφάλαιο της Θεωρίας Αριθμών αν αυτό ήταν προαιρετικό. Οι 6 από τους 7 καθηγητές δευτεροβάθμια απάντησαν καθαρό «Ναι» ενώ ένας απάντησε «μόνο περιορισμένο κομμάτι του». Από τους φοιτητές, οι 15 απάντησαν «Ναι», ενώ οι 9 απάντησαν «μόνο περιορισμένο κομμάτι» και 5 απάντησαν «μόνο αν υπάρχει χρόνος», ένας φοιτητής απάντησε «Όχι» και ένας «Δεν ξέρω». Δηλαδή το 94% των φοιτητών και το 100% των καθηγητών δευτεροβάθμιας θα δίδασκε αυτή την ενότητα σε ένα βαθμό, αν το επέτρεπε ο χρόνος. Στην Εικόνα 6 παρουσιάζονται από κοινού τα αποτελέσματα του ερωτηματολογίου για καθηγητές και φοιτητές.



Εικόνα 6: Πρόθεση διδασκαλίας.

**Ερώτηση 9:** Η τελευταία ερώτηση του ερωτηματολογίου είναι ανάπτυξης και ζητάει γενικά την άποψη των ερωτώμενων για τη Διδασκαλία της Θεωρίας Αριθμών στη Δευτεροβάθμια και γιατί πιστεύουν πως πρέπει ή δεν πρέπει να γίνεται. Από τους 38 ερωτώμενους, οι 20 έδωσαν απάντηση (6 καθηγητές, 14 φοιτητές) ποσοστό περίπου 52%. Οι απαντήσεις είχαν μήκος από μία πρόταση έως μία παράγραφο. Οι 4 από τις 20 απαντήσεις αναφέρουν την επιφύλαξη τους στη διδασκαλία της εις βάρος της υπόλοιπης ύλης καθώς η ύλη είναι ήδη πολύ μεγάλη. Άξιο αναφοράς είναι ότι από τους 4 αυτούς, μόνο ο ένας έχει πάρει το μάθημα της Θεωρίας Αριθμών. Οι υπόλοιπες 16 απαντήσεις υποστηρίζουν τη διδασκαλία της στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση και σε αρκετές από αυτές έχει δοθεί επαρκής αιτιολόγηση.

### 3.2 Επαγωγική Στατιστική

Έγινε επίσης έλεγχος συσχέτισης των ερωτήσεων του τρίτου μέρους του ερωτηματολογίου με τις μεταβλητές: «φύλο», «έτος σπουδών/καθηγητής», «μάθημα Θεωρίας Αριθμών στο πανεπιστήμιο» και «μαθηματική ανάπτυξη που προσέφερε το μάθημα». Έπειτα από τεστ κανονικότητας, καμία μεταβλητή δεν παρουσίασε κανονική κατανομή εκτός από την «μαθηματική ανάπτυξη που προσέφερε το μάθημα», όπως φαίνεται και στον Πίνακα 1. Επομένως, για την εξέταση της σχέσης μεταξύ των παραπάνω μεταβλητών επιλέχθηκε ο συντελεστής συσχέτισης Spearman.

	<b>Tests of Normality</b>					
	Kolmogorov-Smirnov <sup>a</sup>			Shapiro-Wilk		
	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.
Gender	,379	38	<,001	,628	38	<,001
Year	,313	38	<,001	,834	38	<,001
Lesson Understanding	,352	38	<,001	,636	38	<,001
Q6	,298	38	<,001	,813	38	<,001
Q7	,413	38	<,001	,616	38	<,001
Q8	,381	38	<,001	,581	38	<,001
Answer	,309	38	<,001	,637	38	<,001
Development	,352	38	<,001	,636	38	<,001
	,178	18	,135	,864	18	,014

a. Lilliefors Significance Correction

Πίνακας 1: Τεστ Κανονικότητας

Εξετάστηκε αρχικά η συσχέτιση της μεταβλητής «φύλο» και των απαντήσεων στις ερωτήσεις απόψεων. Τα αποτελέσματα έδειξαν χαμηλή συσχέτιση ανάμεσα στη μεταβλητή

«φύλο» και την ερώτηση «Πότε κατανοήσατε βασικές έννοιες της Θεωρίας Αριθμών;» ενώ το ίδιο ισχύει και για τις ερωτήσεις απόψεων καθώς και το αν απάντησαν στην ερώτηση ανάπτυξης ή όχι.

Ο επόμενος έλεγχος έγινε στη μεταβλητή «έτος σπουδών/καθηγητής» σε σχέση με τις προαναφερθείσες μεταβλητές. Δεν εμφανίζεται ιδιαίτερη συσχέτιση με τις απαντήσεις που δόθηκαν στις ερωτήσεις απόψεων αλλά παρατηρείται μια μέτρια συσχέτιση με το αν απάντησαν στην ερώτηση ανάπτυξης ή όχι ( $r=0,356$ ,  $p=0,028<0,05$ ). Το οποίο ερμηνεύεται ως μεγαλύτερη προθυμία και άνεση να απαντούν σε ερωτήσεις ανάπτυξης όσο μεγαλύτερη εμπειρία έχουν. Στον Πίνακα 2 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του ελέγχου που έγινε.

			Q6	Q7	Q8	Answer
Spearman's rho	Year	Correlation Coefficient	,162	,110	,007	,356*
		Sig. (2-tailed)	,332	,512	,966	,028
		N	38	38	38	38

\*. Correlation is significant at the 0.05 level (2-tailed).

Πίνακας 2: Συσχέτιση Spearman μεταβλητής «έτος σπουδών/καθηγητής» με άλλες μεταβλητές.

Παρόμοιος έλεγχος (Πίνακας 3) έγινε και για την συσχέτιση της μεταβλητής «μάθημα Θεωρίας Αριθμών στο πανεπιστήμιο», που καταγράφει αν ο ερωτώμενος έχει πάρει το μάθημα της Θεωρίας Αριθμών στο Πανεπιστήμιο ή όχι, με τις ερωτήσεις απόψεων. Πάλι δεν παρατηρείται συσχέτιση, με τη μόνη εξαίρεση το αν απάντησαν στην ερώτηση ανάπτυξης ή όχι όπου υπάρχει μια μέτρια συσχέτιση ( $r=0,372$ ,  $p=0,021<0,05$ ). Αυτό επιδεικνύει πως όσοι έχουν μεγαλύτερη εμπειρία με το αντικείμενο ενδεχομένως έχουν και μια πιο δομημένη γνώμη περί του θέματος και είναι πιο διατεθειμένοι να την εκφράσουν. Τα αποτελέσματα φαίνονται στον Πίνακα 3.

			Q6	Q7	Q8	Answer
Spearman's rho	Lesson	Correlation Coefficient	,178	,204	,203	,372*
		Sig. (2-tailed)	,286	,219	,222	,021
		N	38	38	38	38

\*. Correlation is significant at the 0.05 level (2-tailed).

Πίνακας 3: Συσχέτιση Spearman μεταβλητής «μάθημα Θεωρίας Αριθμών στο πανεπιστήμιο» με άλλες μεταβλητές.



Θεωρήθηκε επίσης ενδιαφέρον να εξεταστούν οι ερωτήσεις απόψεων με την μεταβλητή «μαθηματική ανάπτυξη που προσέφερε το μάθημα». Η ερώτηση αυτή απαντήθηκε από τα 18 άτομα που είχαν πάρει το μάθημα της Θεωρίας Αριθμών στο Πανεπιστήμιο και οι απαντήσεις τους έχουν μέτρια έως μεγάλη συσχέτιση με τις απαντήσεις που δόθηκαν στο τρίτο μέρος του ερωτηματολογίου. Ειδικά στην Ερώτηση 6 όπου ζητείται η γενική τους άποψη για τη διδασκαλία της Θεωρίας Αριθμών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση η συσχέτιση είναι πολύ σημαντική ( $r=0,781$ ,  $p<0,001$ ), ενώ για τις άλλες δύο η συσχέτιση είναι επίσης αξιοσημείωτη ( $r=0,584$ ,  $p=0,011<0,05$  για την Ερώτηση 7 και  $r=0,509$ ,  $p=0,031<0,05$  για την Ερώτηση 8). Όσοι θεώρησαν το μάθημα στο Πανεπιστήμιο σημαντικό στη δική τους μαθηματική ανάπτυξη είναι θετικοί στην ένταξη της διδασκαλίας του μαθήματος της Θεωρίας Αριθμών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Ο στατιστικός έλεγχος παρουσιάζεται στον Πίνακα 4.

			Q6	Q7	Q8	Answer
Spearman's rho	Development	Correlation Coefficient	,781**	,584*	,509*	,464
		Sig. (2-tailed)	<,001	,011	,031	,053
		N	18	18	18	18
** . Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).						
* . Correlation is significant at the 0.05 level (2-tailed).						

Πίνακας 4: Συσχέτιση Spearman μεταβλητής «μαθηματική ανάπτυξη που προσέφερε το μάθημα» με άλλες μεταβλητές.

### 3.3 Αποδελτίωση των απόψεων

Για αρχή αναφέρονται οι αιτιολογήσεις, οι οποίες δεν συμφωνούν με την διδασκαλία της Θεωρίας Αριθμών στη Δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Όπως αναφέρθηκε, οι περισσότεροι τόνισαν την έλλειψη επαρκή χρόνου για την ένταξη της Θεωρίας Αριθμών στην σχολική ύλη.

Παραθέτονται αυτολεξεί 2 από τις 4 αρνητικές απαντήσεις:

- «Είναι καλό να διδάσκεται ένα κομμάτι του στο Λύκειο, καθώς έτσι οι μαθητές κατανοούν καλύτερα βασικά κομμάτια της διαίρεσης και κατ' επέκταση την παραγοντοποίηση. Ωστόσο, η επιφύλαξη έγκειται στο γεγονός πως υπάρχουν ήδη στο Λύκειο πολλά και απαιτητικά μαθηματικά αντικείμενα και οι μαθητές δέχονται πολλές προσλαμβάνουσες και μεγάλο όγκο πληροφοριών, οπότε αν προστεθεί κάποιο κομμάτι ίσως χρειάζεται κάποια διαφοροποίηση στην ύλη γενικότερα.»

- «Δεν ξέρω αν τα παιδιά είναι έτοιμα να καταλαβαίνουν πιο αφηρημένες έννοιες. Έχουν απαιτητικό πρόγραμμα και αυτό το μάθημα θα ήταν αμελητέο στο πρόγραμμα τους.»

Όπως αναφέρθηκε και στη βιβλιογραφία, η Θεωρία Αριθμών είναι απύσαστα από τα προγράμματα σπουδών ανεξαρτήτως χώρας. Είναι επίσης γνωστό πως στην Ελλάδα δίνεται τεράστια βάση στις Πανελλήνιες και το Αναλυτικό Πρόγραμμα είναι ήδη επιβαρυνόμενο με έναν τεράστιο όγκο ύλης, επομένως οι ανησυχίες των φοιτητών αυτών είναι απολύτως κατανοητές.

Περνώντας στις θετικές απαντήσεις και τις αιτιολογήσεις τους, ασχολούμαστε πρώτα με τις απαντήσεις των καθηγητών της δευτεροβάθμιας. Και οι 6 καθηγητές που απάντησαν έδωσαν θετική απάντηση. Παραθέτονται αυτολεξεί τέσσερις από τις απαντήσεις του:

- «Η Θεωρία Αριθμών προάγει την μαθηματική σκέψη και αντίληψη σε πολύ μεγάλο βαθμό, π.χ. Μαθηματική Επαγωγή, και η απουσία του μαθήματος στερεί από τους μαθητές σημαντικό μέρος της μαθηματικής γνώσης.»
- «Διότι περιέχει έννοιες που μπορούν να γίνουν απόλυτα κατανοητές και σε μαθητές Λυκείου και μάλιστα μπορούν να γίνουν όλες οι αποδείξεις των θεωρημάτων που χρησιμοποιούνται (αντί της υποτιθέμενης «ανάλυσης» που γίνεται στη Γ Λυκείου και στην πραγματικότητα δεν γίνεται καμία απόδειξη των θεωρημάτων που χρησιμοποιούνται). Τέλος, με τα προβλήματα της θεωρίας των αριθμών, αναδεικνύεται η μαθηματική σκέψη.»
- «Η θεωρία αριθμών είναι το μάθημα μέσω του οποίου κατανοούμε την εξέλιξη της μαθηματικής σκέψης. Μαζί με την Ευκλείδεια Γεωμετρία είναι απαραίτητα στην ανάπτυξη της μαθηματικής διαίσθησης.»
- «Η Θεωρία Αριθμών καλλιεργεί τις νοητικές διαδικασίες καθώς βελτιώνονται μηχανισμοί που ενδυναμώνουν την αφαιρετική σκέψη.»

Τέλος, ενδεικτικά, παρατίθενται και τέσσερις από τις απαντήσεις των φοιτητών που απάντησαν θετικά:

- «Η Θεωρία Αριθμών είναι ένας πολύ σημαντικός κλάδος των Μαθηματικών και θα πρέπει να διδάσκεται στο λύκειο τόσο διότι θα διεγείρει το ενδιαφέρον των μαθητών όσο και επειδή θα τους χρειαστεί σε πανεπιστημιακά μαθήματα σε μαθηματικές σχολές και όχι μόνο!»
- «Πρέπει επειδή βοηθάει στην κατανόηση της συσχέτισης των αριθμών.»

- «Πιστεύω θα έπρεπε για τους εξής λόγους: 1. Είναι από τα λίγα κεφάλαια που συντελούν στο να μνηθεί ο μαθητής στο να «χτίζει» μια απόδειξη με λογικά βήματα. 2. Εμφανίζονται αρκετά εντυπωσιακά αποτελέσματα που μπορεί να ενισχύσουν το ενδιαφέρον των μαθητών για μάθηση. Π.χ. Το τετράγωνο οποιουδήποτε περιττού διαιρούμενο δια 8 αφήνει υπόλοιπο 1.»
- «Ναι, διότι μπορεί να κινήσει το ενδιαφέρον των μαθητών και να αναπτύξουν μια καλύτερη σχέση με τα Μαθηματικά γενικώς. Επίσης μπορεί να βοηθήσει στις αριθμητικές ικανότητες των μαθητών.»

Όπως αναφέρθηκε και στη βιβλιογραφία, η διδασκαλία της Θεωρίας Αριθμών προσφέρει διάφορα οφέλη για τον μαθητή. Τα περισσότερα από αυτά αναφέρθηκαν και στις θετικές απαντήσεις που δόθηκαν. Επιγραμματικά, τα οφέλη της Θεωρίας Αριθμών που εμφανίζονται στις απαντήσεις είναι:

- διεγείρει το ενδιαφέρον των μαθητών
- προάγει την μαθηματική σκέψη και αντίληψη των μαθητών
- ενδυναμώνει την αφαιρετική σκέψη των μαθητών
- αναπτύσσει τη λογική και την αναλυτική σκέψη
- περιέχει έννοιες που μπορούν να γίνουν απόλυτα κατανοητές και σε μαθητές Λυκείου
- μπορούν να γίνουν όλες οι αποδείξεις των θεωρημάτων που χρησιμοποιούνται
- είναι εύκολο να διδαχθεί σε ένα μαθητή λυκείου
- απαραίτητη στην ανάπτυξη της μαθηματικής διαίσθησης
- οι μαθητές κατανοούν καλύτερα βασικά κομμάτια της διαίρεσης και της παραγοντοποίησης
- χρειάζεται σε πανεπιστημιακά μαθήματα σχολών θετικών επιστημών
- βοηθάει στην κατανόηση της συσχέτισης των αριθμών
- βοηθάει στις αριθμητικές ικανότητες των μαθητών
- βοηθάει τους μαθητές να αναπτύξουν μια καλύτερη σχέση με τα Μαθηματικά

Με τη «διέγερση του ενδιαφέροντος των μαθητών», την προαγωγή της «μαθηματικής, αφαιρετικής, λογικής και αναλυτικής σκέψης» και της «αντίληψης» των μαθητών να αναφέρονται σε πολλές από τις απαντήσεις.

## Κεφάλαιο 4ο: Συμπεράσματα

Όσον αφορά τις ερωτήσεις του 2ου άξονα, τα αποτελέσματα της έρευνας συνάδουν με τη βιβλιογραφία (Miele, 2014), όπου ο Miele εξέτασε τη συμβολή της ενασχόλησης με τη Θεωρία Αριθμών στη μαθηματική ανάπτυξη των μαθητών. Η έρευνα έδειξε πως η Θεωρία Αριθμών ως μάθημα στο Πανεπιστήμιο συνέβαλε στη μαθηματική ανάπτυξη των φοιτητών όπως και των μαθητών στην έρευνα του Miele. Οι φοιτητές βέβαια δεν εξετάστηκαν με τον τρόπο που εξετάστηκαν οι μαθητές στην έρευνα του Miele αλλά λόγω της μεγαλύτερης ωριμότητας και εμπειρίας τους, κρίνονται ικανοί να βαθμολογήσουν μόνοι τους πόσο τους βοήθησε η ενασχόληση με τη Θεωρία Αριθμών. Είναι, λοιπόν ένας τομέας των Μαθηματικών που μπορεί να ωφελήσει τον εκπαιδευόμενο σε οποιαδήποτε βαθμίδα εκπαίδευσης.

Ένα ακόμα συμπέρασμα που μπορεί να διεξαχθεί από τις ερωτήσεις του 2ου άξονα, το οποίο δεν συνάδει με κάποια βιβλιογραφική ανασκόπηση, είναι ότι η Θεωρία Αριθμών είναι σχεδόν εντελώς απύσχα από τη διδακτική ύλη του Λυκείου, παρόλο που βασικές τις έννοιες όπως το ΕΚΠ, το ΜΚΔ και οι πρώτοι αριθμοί δεν έχουν κατανοηθεί πλήρως. Οι έννοιες αυτές βρίσκουν εφαρμογή σε διάφορα είδη ασκήσεων στο Λύκειο. Αν λοιπόν οι μαθητές δεν τις έχουν κατανοήσει, συναντούν δυσκολίες στις ασκήσεις αυτές. Οι φοιτητές που ρωτήθηκαν είχαν όλοι επιλέξει τις θετικές επιστήμες ως προσανατολισμό τους, άρα και εξετάστηκαν στα Μαθηματικά στις πανελλήνιες εξετάσεις. Παρόλα αυτά, το 20% αυτών, δήλωσε πως κατανόησε τις βασικές αυτές έννοιες στο Πανεπιστήμιο και άρα έδωσε πανελλήνιες εξετάσεις έχοντας σημαντικά μαθησιακά κενά.

Τέλος, η βιβλιογραφική ανασκόπηση της έρευνας σχετικά με τη διδασκαλία της Θεωρίας Αριθμών (Campbell & Zazkis, 2006· Zazkis, 2009· Miele, 2014) συνάδει με τα αποτελέσματα (ερωτήσεις του 3ου άξονα), όπου υποστηρίζουν ότι υπάρχουν οφέλη για τους μαθητές στη διδασκαλία της Θεωρίας Αριθμών. Στις απαντήσεις των ερωτώμενων υπήρχαν πολλές αναφορές στη διέγερση του ενδιαφέροντος του μαθητή και ανάπτυξη λογικής και αφαιρετικής σκέψης μέσω της Θεωρίας Αριθμών, το οποίο συμφωνεί με τα αποτελέσματα της έρευνας του Miele (2014). Ακόμα, υποστηρίζεται ότι περιέχει έννοιες που μπορούν να γίνουν απόλυτα κατανοητές και σε μαθητές Λυκείου, κάτι το οποίο αναφέρουν και οι Zazkis και Campbell στο βιβλίο τους (*Number Theory in Mathematics Education: Perspectives and Prospects*). Παράλληλα, εκφράστηκε και η άποψη πως όλες οι αποδείξεις των θεωρημάτων που χρησιμοποιούνται μπορούν να παρουσιαστούν στους μαθητές ή και να εκτελεστούν από

αυτούς. Αυτό συνάδει με την άποψη της Zazkis (2009), η οποία μάλιστα υποστηρίζει πως οι αποδείξεις πρέπει να παρουσιάζονται αρχικά ως λύσεις προβλημάτων και έπειτα να συνοψίζονται σε θεωρήματα και πορίσματα.

Είναι σημαντικό να τονιστεί πως το δείγμα της έρευνας ήταν περιορισμένο σε φοιτητές ενός συγκεκριμένου Πανεπιστημίου και σε πολύ μικρό αριθμό καθηγητών της δευτεροβάθμιας. Επομένως, τα συμπεράσματα της έρευνας δεν μπορούν να γενικευτούν, αλλά δίνει θετικές ενδείξεις για περαιτέρω έρευνα.

Μελλοντικές έρευνες μπορούν να ασχοληθούν με το ζήτημα της ύλης που είναι κατάλληλη για να διδαχθεί σε άτομα Γυμνασίου και Λυκείου καθώς και με την εξέταση των πιο αποτελεσματικών τεχνικών μάθησης για τη διδασκαλία της Θεωρίας Αριθμών σε επίπεδο δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης ώστε να επιτευχθούν τα μαθησιακά αποτελέσματα που αναφέρθηκαν στη βιβλιογραφία.

## Επίλογος

Τα αποτελέσματα της παραπάνω έρευνας προσφέρουν κίνητρο για την προσθήκη της διδασκαλίας της Θεωρίας Αριθμών στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Οι φοιτητές του τμήματος Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Κρήτης, μελλοντικοί καθηγητές Μαθηματικών της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης, καθώς και οι τωρινοί καθηγητές Μαθηματικών στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση υποστηρίζουν, σε μεγάλο ποσοστό, την διδασκαλία της Θεωρίας Αριθμών στα σχολεία.

Η συγκεκριμένη έρευνα έγινε σε μικρό δείγμα φοιτητών και σε ακόμα μικρότερο δείγμα καθηγητών από μία συγκεκριμένη περιοχή. Είναι, οπότε, εύλογο πως τα αποτελέσματα είναι ελλειματικά και η έρευνα πρέπει να επεκταθεί σε μεγαλύτερο δείγμα και σε διαφορετικά πληθυσμιακά δείγματα.

Περαιτέρω σχετικές έρευνες θα ήταν εύλογο να εξετάσουν τις πιθανές ενσωματώσεις της Θεωρίας Αριθμών στην διδακτική ύλη και την καταλληλότερη αξιοποίηση της διδασκαλίας της για την επίτευξη των μαθησιακών αποτελεσμάτων που αναφέρθηκαν.

## Βιβλιογραφία

Dunham, W. (2022, September 29). number theory. *Encyclopedia Britannica*.  
<https://www.britannica.com/science/number-theory>

Friesen, N. & Osguthorpe, R. (2018). Tact and the pedagogical triangle: The authenticity of teachers in relation, *Teaching and Teacher Education*, 70, 255-264. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tate.2017.11.023>

Miele, A. M. (2014). *The Effects of Number Theory Study on High School Students' Metacognition and Mathematics Attitudes* [Doctoral dissertation, University of Columbia]. Academic Commons Columbia. DOI: <https://doi.org/10.7916/D8N58TTC>

Saranya, C. & Janaki, G. (2021). Some Interesting Applications Of Number Theory. In R. Kanaoujiya (Ed.), *Emerging Trends in Science, Social Science, Engineering and Management-A Multidisciplinary Approach* (pp.244-253). Research Circle.

Sunitha, C. (2013). Classifications of Number Theory. *International Journal of Scientific & Engineering Research*, 4(6), 2272-2340.

Wagner, M. (2012). Number Theory and the Queen of Mathematics. *The Mathematics Enthusiast*, 9(1), 193-206. DOI: <https://doi.org/10.54870/1551-3440.1240>

Wang, L. (2020, June 9). *Differences Between American and Chinese Education Systems*. Ivy Talent Education. <https://bit.ly/3jDz104>

Zazkis, R. & Campbell, S. R. (Eds.). (2006). *Number Theory in Mathematics Education: Perspectives and Prospects* (1st ed.). Routledge. DOI: <https://doi.org/10.4324/9780203053904>

Zazkis, R. (2009). *Number Theory in mathematics education: Queen and Servant*. *Mediterranean Journal of Mathematics Education*, 8(1), 73-88.

Zazkis, R. & Truman, J. (2015). From Trigonometry to Number Theory... and Back: Extending LCM to Rational Numbers. *Digital Experiences in Mathematics Education*. 1. 79-86. DOI: <https://doi.org/10.1007/s40751-015-0001-5>

Ζάχος, Δ. Θ. (2010). *Δομή και σημασία της επιστημονικής εργασίας στους τομείς δραστηριότητας των εκπαιδευτικών*. [Course notes]. Σελίδες Χρηστών Α.Π.Θ.. <https://bit.ly/40ykRho>

Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών Μαθηματικών: [http://ebooks.edu.gr/info/cps/11deppsaps\\_math.pdf](http://ebooks.edu.gr/info/cps/11deppsaps_math.pdf)

Οδηγίες Διδασκαλίας Μαθημάτων ΙΕΠ Γυμνασίου:  
<http://iep.edu.gr/el/graf-b-yliko-2022-2023/gymnasio-3> (2022-2023)

Οδηγίες Διδασκαλίας Μαθημάτων ΙΕΠ ΓΕΛ:  
<http://iep.edu.gr/el/graf-b-yliko-2022-2023/geniko-lykeio-2022-2023> (2022-2023)

Οδηγίες Διδασκαλίας Μαθημάτων ΙΕΠ Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης:  
<http://iep.edu.gr/el/graf-b-yliko-2022-2023/protovathmia-2b> (2022-2023)



# Παράρτημα Α

## Ερωτηματολόγιο

1. Φύλλο
  - a. Γυναίκα
  - b. Άντρας
  
2. Έτος Σπουδών
  - a. 1ο
  - b. 2ο
  - c. 3ο
  - d. 4ο
  - e. 5ο και πάνω
  - f. Καθηγητής 2βάθμιας
  
3. Έχετε πάρει το μάθημα της Θεωρίας Αριθμών;
  - a. Ναι
  - b. Όχι
  
4. Αν απαντήσατε «Ναι» παραπάνω, πόσο σας βοήθησε στην μαθηματική σας ανάπτυξη;

(Κλίμακα 1-10 όπου 1=Καθόλου και 10=Πάρα πολύ)
  
5. Πότε καταλάβατε πλήρως τα ΜΚΔ, ΕΚΠ και την Ανάλυση σε πρώτους αριθμούς;
  - a. Δημοτικό
  - b. Γυμνάσιο
  - c. Λύκειο
  - d. Πανεπιστήμιο
  
6. Θεωρείτε πως η Θεωρία Αριθμών πρέπει να διδάσκεται στο σχολείο;
  - a. Ναι
  - b. Ναι, αλλά περιορισμένο κομμάτι της

- c. Προαιρετικά μόνο
  - d. Δεν ξέρω
  - e. Όχι
7. Υπάρχει κεφάλαιο Θεωρίας Αριθμών στη Β' Λυκείου το οποίο περιλαμβάνει: Μαθηματική Επαγωγή, Ευκλείδεια Διαίρεση, Διαιρετότητα, ΜΚΔ και ΕΚΠ, Πρώτους Αριθμούς, Γραμμική Διοφαντική Εξίσωση και Ισοϋπόλοιπους Αριθμούς. Το κεφάλαιο αυτό είναι εκτός ύλης. Πιστεύετε πως πρέπει να ενταχθεί στη διδακτέα ύλη;
- a. Ναι
  - b. Ναι, αλλά μόνο ένα κομμάτι του
  - c. Ναι, αλλά να είναι προαιρετικό
  - d. Δεν ξέρω
  - e. Όχι
8. Αν η Θεωρία Αριθμών ήταν προαιρετικό κεφάλαιο στο Λύκειο, εσείς ως καθηγητής/καθηγήτρια θα επιλέγατε να το διδάξετε;
- a. Ναι
  - b. Ναι, αλλά μόνο ένα κομμάτι του
  - c. Ναι, αλλά αν υπάρχει χρόνος
  - d. Δεν ξέρω
  - e. Όχι
9. Γιατί πιστεύετε πως η διδασκαλία της Θεωρίας Αριθμών πρέπει/δεν πρέπει να γίνεται στο Λύκειο; (Ερώτηση Ανάπτυξης)