ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥΣ»

ΤΩΝ ΤΜΗΜΑΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Η χρήση της γραφικής αναπαράστασης στη διδασκαλία γενικών μαθηματικών εννοιών και εξειδικευμένων εννοιών στα ΕΠΑΛ : η περίπτωση του τομέα Οικονομίας

ΝΙΚΟΣ ΚΑΣΜΕΡΙΔΗΣ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ : ΧΡΗΣΤΟΣ ΚΟΥΡΟΥΝΙΩΤΗΣ

ΗΡΑΚΛΕΙΟ

2017

Στο Μαράκι μου, τη Δαναΐτσα μου και το Μελινάκι μου

Η παρούσα μεταπτυχιακή εργασία πραγματοποιήθηκε στα πλαίσια του Διατμηματικού Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών των Τμημάτων Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών της Σχολής Θετικών και Τεχνολογικών Επιστημών του Πανεπιστημίου Κρήτης «Μαθηματικά και Εφαρμογές τους» στην κατεύθυνση «Μαθηματικά στην εκπαίδευση» με επιβλέποντα καθηγητή τον κ. Κουρουνιώτη Χρήστο

Την τριμελή επιτροπή αξιολόγησης αποτέλεσαν οι καθηγητές:

- ☺ Κουρουνιώτης Χρήστος (Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης)
- ☺ Κρητικού Δούκισσα (Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης)
- ☺ Πλατής Ιωάννης (Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης)

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Ευχαριστώ:

- ✓ Τον Επίκουρο Καθηγητή και επιβλέποντα της εργασίας κ. Κουρουνιώτη Χρήστο για τις χρήσιμες υποδείξεις του και τις συμβουλές του κατά την εκπόνηση της διπλωματικής μου εργασίας.
- ✓ Όλους τους καθηγητές του προπτυχιακού και μεταπτυχιακού προγράμματος οι οποίοι με τις γνώσεις τους με ταξίδεψαν στον όμορφο κόσμο των Μαθηματικών και με βοήθησαν να διευρύνω τις γνώσεις και τη σκέψη μου γύρω από τη διδακτική των θετικών επιστημών.
- ✓ Όλους τους συμφοιτητές μου για τη συνεργασία που είχαμε κατά τη διάρκεια των σπουδών αλλά και τη στήριξη που μου παρείχαν.
- ✓ Τους συναδέλφους Μαθηματικούς και Οικονομολόγους του 2^{ου} ΕΠΑΛ Ηρακλείου που με βοήθησαν στην έρευνα, καθώς και τους συμμετέχοντες μαθητές στη συμπλήρωση των ερωτηματολογίων.
- ✓ Τέλος, ιδιαίτερα να ευχαριστήσω τη σύζυγό μου και τα δυο μου κοριτσάκια για τη συμπαράστασή τους σε όλη τη διάρκεια των σπουδών μου.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ 6

1. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ – ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ 7

   1.1 Η έννοια της αναπαράστασης 7

   1.2 Αναπαραστάσεις στα Μαθηματικά 10

   1.3 Ιστορική εξέλιξη γραφικών αναπαραστάσεων 15

2. ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ 25

3. ΔΙΕΞΑΓΩΓΗ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ – ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ 54

4. ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 77

5. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ 95

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το σημαντικότερο θέμα που απασχολεί τους επιστήμονες που ασχολούνται με θέματα Διδακτικής των Επιστημών, είναι ο τρόπος που οι μαθητές μαθαίνουν τις διδασκόμενες έννοιες που συναντούν κατά τη διάρκεια των σπουδών τους είτε στο σχολείο είτε αργότερα στο πανεπιστήμιο. Για την κατανόηση αυτών των εννοιών, η ανθρώπινη σκέψη χρησιμοποιεί πολλά είδη αναπαραστάσεων, δηλαδή μετασχηματισμών των όσων ακούει και βλέπει, σε εικόνες, ιδέες και νοητικές κατασκευές που είναι οικείες και αντιληπτές, με ιδιαίτερο τρόπο από τον καθένα.

Ειδικά στη Διδακτική των Μαθηματικών, οι γραφικές αναπαραστάσεις παίζουν σημαντικό ρόλο αρχικά στην κατανόηση των μαθηματικών εννοιών αλλά κατόπιν και στη διάδοσή τους μέσω ενός κοινού ‘’μαθηματικού’’ καναλιού που τις χρησιμοποιεί ως μέσο επικοινωνίας.

Στην παρούσα εργασία, προσπαθούμε να ερευνήσουμε τη σημασία των γραφικών αναπαραστάσεων στη διδασκαλία των μαθηματικών αλλά και πιο εξειδικευμένων εννοιών σε μαθητές Επαγγελματικών Λυκείων (ΕΠΑΛ). Μάλιστα, η μελέτη επικεντρώνεται στον τομέα Οικονομίας, που περιέχει πολλές συγγενικές έννοιες με τα καθαρά μαθηματικά.

Η εργασία, αποτελείται από τρία (3) κύρια μέρη – κεφάλαια:

Το πρώτο μέρος με τίτλο *Θεωρητικό πλαίσιο – Ιστορική αναδρομή*, περιλαμβάνει τρεις (3) υποενότητες στις οποίες αναλύεται ο όρος «αναπαράσταση» γενικά, κατόπιν ειδικότερα στο χώρο των μαθηματικών και τέλος γίνεται μια ιστορική περιγραφή της εξέλιξης των γραφικών αναπαραστάσεων.

Στο δεύτερο μέρος με τίτλο *Σχεδιασμός και Μεθοδολογία της έρευνας,* περιγράφεται ο ερευνητικός σχεδιασμός και οι επιμέρους αναμενόμενοι στόχοι.

Στο τελευταίο μέρος της έρευνας, με τίτλο *Διεξαγωγή και αποτελέσματα της έρευνας – συμπεράσματα,* παρουσιάζονται αναλυτικά τα αποτελέσματα της έρευνας και γίνεται ένας γενικός σχολιασμός τους.

Τέλος, στο παράρτημα παρουσιάζεται όλο το υλικό που χρησιμοποιείται, τα ερωτηματολόγια και συγκεντρωτικά οι απαντήσεις των μαθητών.

1. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ – ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ

1.1 Η έννοια της αναπαράστασης

Ο όρος *αναπαράσταση* , σύμφωνα με τον *Kaput* (1987a), ως έννοια περιλαμβάνει πέντε (5) ολότητες:

i. την ολότητα που *αναπαριστάται*
ii. την ολότητα που *αναπαριστά*
iii. τις συγκεκριμένες *πτυχές* της ολότητας προς αναπαράσταση που *αναπαρίστανται*
iv. τις συγκεκριμένες *πτυχές* της ολότητας που αναπαριστά, οι οποίες κάνουν την αναπαράσταση
v. την *αντιστοιχία* ανάμεσα στις δύο ολότητες

Πρόκειται δηλαδή, για ένα σχηματισμό από χαρακτήρες, εικόνες, διακριτά αντικείμενα κλπ. τα οποία συμβολίζουν ή ‘’αναπαριστάνουν’’ κάτι άλλο.

Κατά τον *Bruner* (1996) υπάρχουν τρεις (3) τύποι αναπαραστάσεων, οι οποίοι έχουν μια εξελικτική σύνδεση μεταξύ τους:

α. ενεργητική (λειτουργική) αναπαράσταση (δράση)
β. εικονική αναπαράσταση (νοερές εικόνες, όχι λεπτομέρειες)
γ. συμβολική αναπαράσταση (αναπαράσταση εμπειριών στη μνήμη μέσω γλωσσικών ή άλλων συμβόλων)

Η πρώτη φάση (*ενεργητική αναπαράσταση*) αφορά στην ικανότητα των παιδιών να απαντούν σε ερωτήσεις μόνο σε σχέση με προηγούμενες πρακτικές εμπειρίες τους. Η επόμενη φάση (*εικονική αναπαράσταση*) χαρακτηρίζεται από απαντήσεις που αφορούν σε νοητικές εικόνες φυσικών αντικειμένων ή σε έναν εσωτερικό χώρο σχημάτων. Τέλος, η *συμβολική αναπαράσταση*, αφορά στη χρήση αφηρημένων συμβόλων των οποίων το νόημα πρέπει να εκφραστεί ή να οριστεί.

Οι ιδέες γύρω από τις αναπαραστάσεις στην έρευνα, τη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών έχουν αναπτυχθεί τα τελευταία χρόνια (*Goldin* & *Shteingold*, 2001). Το 2000 το National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), δημοσίευσε μια αναθεωρημένη έκδοση των *προτύπων* (standards) στη διδασκαλία των Μαθηματικών (η προηγούμενη δημοσιεύτηκε το 1989) και πρόσθεσε την

αναπαράσταση στα «Principles and Standards of School Mathematics», ως ακόμα ένα *διαδικασιακό πρότυπο (*process standard) *μάθησης* (δηλαδή ως διαδικασία μέσω της οποίας οι μαθητές κατακτούν και χρησιμοποιούν τη μαθηματική γνώση) μαζί με την *Επίλυση προβλημάτων*, τη *Συλλογιστική και τις Αποδείξεις*, την *Επικοινωνία* και τους *Συσχετισμούς*. (*Van de Walle, J. A., Karp, K. S., & Bay- Williams, J. M.,* 2010). Ανάλογες προσπάθειες καθορισμού διαδικασιακών προτύπων μάθησης, υλοποιείται στη χώρα μας μέσω του Διαθεματικού Ενιαίου Πλαισίου Προγραμμάτων Σπουδών (Δ.Ε.Π.Π.Σ) και Αναλυτικών Προγραμμάτων Σπουδών (Α.Π.Σ) της Υποχρεωτικής Εκπαίδευσης (Δημοτικό – Γυμνάσιο) για τα Μαθηματικά (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο 2003, διαθέσιμο στην ιστοσελίδα : http://www.pi-schools.gr/programs/depps/).

Οι *Goldin* & *Kaput* (1996) διακρίνουν τις αναπαραστάσεις σε:

α. *εσωτερικές* αναπαραστάσεις και

β. *εξωτερικές* αναπαραστάσεις

α. **Εσωτερικές** αναπαραστάσεις: αναφέρονται στους πιθανούς νοητικούς σχηματισμούς που δημιουργούν τα άτομα, όπως οι μαθητές ή οι λύτες προβλημάτων για να αναπαραστήσουν την πραγματικότητα. Ως καθηγητές ή ερευνητές, συχνά οδηγούμε τους μαθητές μας (περισσότερο ‘’σιωπηλά’’ παρά ‘’απευθείας’’) σε συμπεράσματα που τους δίνουν τη δυνατότητα να αναπτύξουν συγκεκριμένου τύπου εσωτερικές αναπαραστάσεις μέσω της διδασκαλίας μας.

β. **Εξωτερικές** αναπαραστάσεις: αφορούν στους ενσωματωμένους αισθητούς σχηματισμούς του κάθε ατόμου όπως λέξεις, εικόνες, γραφικές παραστάσεις, εξισώσεις ή υπολογιστικούς μικρόκοσμους. Αυτά τα συστήματα είναι προσβάσιμα προς παρατήρηση από καθέναν που έχει την απαραίτητη γνώση για να τα ερμηνεύσει. Έτσι, η ερμηνεία των εξωτερικών αναπαραστάσεων δεν είναι αντικειμενική ή απόλυτη, αλλά εξαρτάται από τις εσωτερικές αναπαραστάσεις του ατόμου που τις ερμηνεύει.

Αυτό μας οδηγεί στην ιδιαίτερα σημαντική αμφίδρομη σχέση αλληλεπίδρασης ανάμεσα στις εσωτερικές και τις εξωτερικές αναπαραστάσεις Συγκεκριμένα, σε μερικές περιπτώσεις το άτομο εξωτερικεύει με φυσικό τρόπο πράξεις που πηγάζουν από εσωτερικές δομές, ενώ σε άλλες περιπτώσεις, εσωτερικεύει πράξεις μέσω ενός συμβολικού συστήματος διαβάζοντας,

ερμηνεύοντας λέξεις και προτάσεις, ερμηνεύοντας εξισώσεις και γραφικές παραστάσεις. (*Goldin & Kaput*, 1996).

1.2 Αναπαραστάσεις στα Μαθηματικά

Ο ρόλος και η χρήση των πολλαπλών αναπαραστάσεων έχουν αποτελέσει αντικείμενο μελέτης και εκτενούς συζήτησης κατά τη διάρκεια των τελευταίων ετών στη μαθηματική κοινότητα.

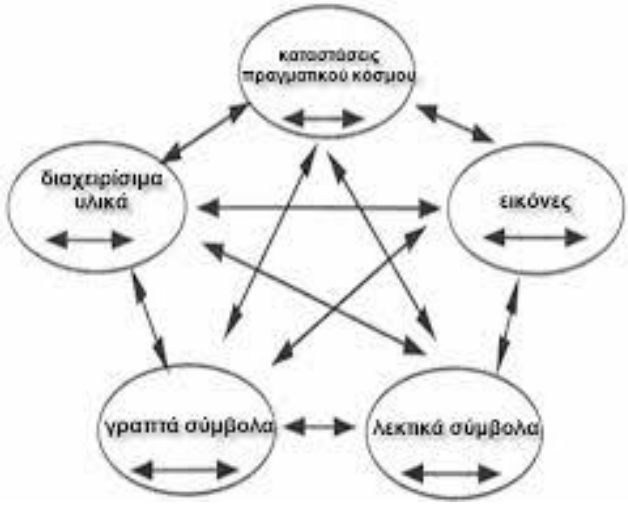
Η Ainsworth (1999) υποστηρίζει ότι οι πολλαπλές εξωτερικές αναπαραστάσεις, υπηρετούν **τρεις** κύριες **λειτουργίες** στη μαθησιακή διαδικασία:

i. ως συμπληρωματική πληροφορία ή υποστηρικτική μαθησιακή διεργασία,
ii. ως αποφυγή πιθανών παρερμηνειών μιας έννοιας λόγω χρήσης μιας άλλης αναπαράστασης και
iii. ως ενθάρρυνση στους μαθητές να πετύχουν βαθύτερη κατανόηση της έννοιας που περιγράφουν.

Σε σχέση με τη μάθηση των Μαθηματικών και την επίλυση προβλήματος οι *Lesh, Behr & Post* (1987, όπ. αναφ. στον Haciomeroglu, 2007, σελ. 49) διακρίνουν πέντε (5) διαφορετικά είδη συστημάτων εξωτερικών αναπαραστάσεων:(Σχήμα 1)

1. Κείμενα, στα οποία η γνώση είναι οργανωμένη με βάση γεγονότα της καθημερινής ζωής και τα οποία αποτελούν το πλαίσιο για την ερμηνεία και επίλυση άλλων καταστάσεων προβλήματος.
2. Χειριστικά αντικείμενα/μοντέλα, όπως είναι οι κύβοι αριθμητικής, οι ράβδοι κλασμάτων, η αριθμητική γραμμή, όπου τα επιμέρους στοιχεία του συστήματος/μοντέλου δεν έχουν νόημα αυτά καθ’ αυτά, ωστόσο οι σχέσεις και οι λειτουργίες που προκύπτουν από το χειρισμό και συνδυασμό των επιμέρους στοιχείων ταιριάζουν με πολλές καταστάσεις της καθημερινής ζωής.
3. Εικόνες και διαγράμματα – στατικά εικονικά μοντέλα τα οποία, όπως και τα χειριστικά μοντέλα, είναι δυνατό να εσωτερικευθούν ως νοητικές εικόνες.
4. Γλώσσες – συμπεριλαμβανομένων και των εξειδικευμένων γλωσσών, που σχετίζονται με τα διάφορα επιμέρους πεδία (πχ. Μαθηματική λογική).

5. Γραπτά σύμβολα –τα οποία, όπως και οι γλώσσες, είναι δυνατόν να περιλαμβάνουν εξειδικευμένες προτάσεις και φράσεις καθώς επίσης συνηθισμένες προτάσεις και φράσεις στην καθομιλουμένη.



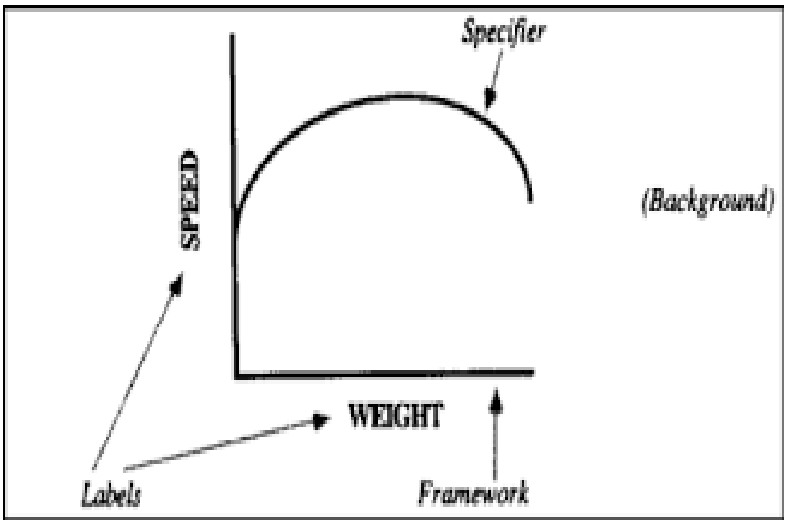
Σχήμα 1 : Συστήματα εξωτερικών αναπαραστάσεων

Στην αλγεβρική μορφή των μαθηματικών, η δημιουργία γραφήματος ταυτίζεται με διάφορα συστήματα συντεταγμένων ενώ σε άλλους τομείς των μαθηματικών, για παράδειγμα στην στατιστική, υπάρχει πολύ μεγαλύτερη ευελιξία στις μορφές των αναπαραστάσεων (αυτό μάλλον οφείλεται στο ότι η μελέτη επεκτείνεται όχι μόνο σε ποσοτικές μεταβλητές). Ωστόσο, σημαντικό ρόλο στη δημιουργία γραφημάτων και στην πολλαπλή παρουσίαση δεδομένων με διαφορετικές μορφές αναπαραστάσεων, κατέχουν τα κατάλληλα λογισμικά για υπολογιστές. Αυτές οι εφαρμογές είναι σχεδιασμένες ώστε να βοηθήσουν τους μαθητές να οπτικοποιήσουν δεδομένα και να μεταφέρουν την πληροφορία στον χώρο. Τα πιο εξελιγμένα, παρέχουν δυναμικές δομές αλληλεπίδρασης, τις οποίες μπορούν να χειριστούν εύκολα, μειώνοντας το βάρος της δημιουργίας γραφήματος στους μαθητές, αν και κάποια άλλα που δεν είναι τόσο αλληλεπιδραστικά, δημιουργούν γραφήματα χωρίς να είναι τόσο κατανοητά και χρήσιμα. Βέβαια, η συνεχής χρήση οποιουδήποτε λογισμικού στη δημιουργία γραφημάτων, μπορεί να επηρεάσει τους μαθητές στη σκέψη και στην κατανόηση. Η επιλογή λοιπόν του κατάλληλου λογισμικού που θα υποστηρίζει το πρόγραμμα σπουδών, πρέπει να βασίζεται στη δυνατότητά του να παρέχει το καλύτερο μαθησιακό περιβάλλον ώστε

να αντλήσει από τη σκέψη των μαθητών για τα δεδομένα ότι καλύτερο κατά τη δημιουργία γραφημάτων. (*Watson & Fitzallen,* 2010)

Ο *Playfair* (1805, όπ. αναφ. στο "*The Development of Graph Understanding in the Mathematics Curriculum"* των Watson - Fitzallen, 2010, σελ. 7), αναγνώρισε τη δυναμική πολυπλοκότητα των γραφημάτων και επισήμανε: ''Απέναντι από κάθε γράφημα, είναι οι περιγραφές και οι εξηγήσεις. Ο αναγνώστης θα βρει (με πέντε λεπτά προσοχής στις αρχές πάνω στις οποίες είναι κατασκευασμένο), οικονομία σε κόπο και χρόνο, όμως χωρίς αυτήν την μηδαμινή προσοχή, μπορεί να κοιτάζει απλώς σε ένα λευκό φύλλο χαρτιού''. Με αυτό στο μυαλό μας, φαίνεται απαραίτητο να αναπτύξουμε την κατανόηση για τον τρόπο με τον οποίο δημιουργούνται τα γραφήματα, ώστε να εκτιμήσουμε τον τρόπο με τον οποίο μεταδίδουν την πληροφορία.

Παρόλο που υπάρχουν πολλοί τύποι γραφημάτων, όλοι είναι φτιαγμένοι από τα ίδια βασικού επιπέδου συστατικά (*Kosslyn,* 1989, όπ. αναφ. στους Watson - Fitzallen, 2010, σελ. 7). Ο *Kosslyn* πρότεινε ένα σχήμα για την ανάλυση των



Σχήμα 2 : Τα βασικού – επιπέδου συστατικά μέρη ενός γραφήματος (*Kosslyn,* 1989)

γραφημάτων που μπορεί να χρησιμοποιηθεί ώστε να μεταδίδεται η πληροφορία καθαρά και συνοπτικά. Τα στοιχεία του περιλαμβάνουν το ''υπόβαθρο'', το ''πλαίσιο'', τον ''προσδιοριστή'' και τις ''ετικέτες'' (Σχήμα 2).

Το υπόβαθρο (*background*) είναι το πρότυπο πάνω στο οποίο παρουσιάζονται τα υπόλοιπα συστατικά μέρη του γραφήματος. Στις περισσότερες

περιπτώσεις είναι λευκό και δεν είναι απαραίτητο να περιλαμβάνει ένα σχέδιο ή μια εικόνα που θα μπορούσε να το κάνει δυσανάγνωστο. Το πλαίσιο (*framework*) εκτείνεται στα άκρα του γραφήματος και η λειτουργία του είναι να οργανώσει το γράφημα ως μια σημαντική ολότητα. Μερικά γραφήματα μπορεί να έχουν και επιπλέον εμφωλευμένο πλαίσιο. Ένα εσωτερικό πλαίσιο είναι μια δομή (π.χ. πλέγμα) που απεικονίζει σημεία του εξωτερικού πλαισίου στα υπόλοιπα μέρη του γραφήματος. Ο προσδιοριστής μεταφέρει συγκεκριμένη πληροφορία σχετικά με το πλαίσιο απεικονίζοντας μέρη του πλαισίου σε άλλα μέρη του πλαισίου. Ο προσδιοριστής (*specifier*) μπορεί να είναι ένα σημείο, μία γραμμή ή μια ράβδος και συνήθως βασίζεται σε κάποιο ζευγάρι τιμών. Οι ετικέτες (*labels*) ενός γραφήματος είναι η ερμηνεία μιας γραμμής ή μιας περιοχής. Μπορεί να είναι γράμματα, λέξεις ή εικόνες που δίνουν πληροφορίες σχετικά με το πλαίσιο ή τον προσδιοριστή.

Για την ανάλυση των γραφημάτων, η ερμηνεία τους πρέπει να γίνεται σε τρία επίπεδα (*Kosslyn,* 1989, όπ. αναφ. στους Watson - Fitzallen, 2010, σελ. 8): πρώτον, τα ατομικά στοιχεία και η οργάνωσή τους, μπορεί να περιγραφεί. Δεύτερον, η κατανόηση της εικόνας μπορεί να καθοριστεί κοιτάζοντας τις σχέσεις μεταξύ των στοιχείων του γραφήματος. Τρίτον, η ανάλυση μπορεί να επεκταθεί στην ερμηνεία των συμβόλων και των γραμμών πέραν της κυριολεξίας, ανάλογα με την πληροφορία. Η ερμηνεία της σημασίας του γραφήματος μεταφέρεται από τον τρόπο που είναι οργανωμένη η πληροφορία.

Εδώ πρέπει να σημειώσουμε το παράδειγμα του *γραφήματος* ράβδος ή του *διαγράμματος* ράβδος που χρησιμοποιείται μερικές φορές εκπροσωπώντας μια συνολική συχνότητα μιας κατηγορίας ή ατομικές τιμές δεδομένων και άλλες φορές απεικονίζοντας εσωτερικές συχνότητες ή ποσοστώσεις κάποιας κατηγορίας ανάλογα αν το ερμηνεύουμε ως προς τις ‘’γραμμές’’ του ή τις ‘’στήλες’’ του. Σύμφωνα με τους *Chick* & *Watson* (2001) και τους *Pfannkuch* & *Rubick* (2002, όπ. αναφ. στους Watson - Fitzallen, 2010, σελ. 9), αυτό το είδος του γραφήματος σχεδιάζεται συνήθως αυθόρμητα από τους λιγότερο έμπειρους μαθητές/φοιτητές (αυτήν την άνετη σχέση των μαθητών με τη συγκεκριμένη μορφή αναπαράστασης, την βλέπουμε και παρακάτω στην ανάλυση των στοιχείων της έρευνας). Είτε το γράφημα είναι μια κατανομή μιας μεταβλητής είτε το διάγραμμα διασποράς δύο

μεταβλητών, είναι σημαντικό να αναγνωρίσουμε την ύπαρξή του και τη δύναμή του να βοηθήσει τους μαθητές/φοιτητές να οπτικοποιήσουν ένα σύνολο δεδομένων.

Στενά συνδεδεμένη με την δημιουργία διαφόρων τύπων γραφημάτων είναι η ιδέα της *υπέρβασης των αριθμών* (transnumeration), όρο που εισήγαγαν οι *Wild* & *Pfannkuch* (1999, όπ. αναφ. στους Watson - Fitzallen, 2010, σελ. 9) για την διεργασία ''αλλαγής αναπαραστάσεων ώστε να προκληθεί η κατανόηση''. Συμπεριέλαβαν τρία (3) βήματα:

(i) αποθήκευση μετρήσεων από τον πραγματικό κόσμο,

(ii) αναδιοργάνωση και υπολογισμός με χρήση δεδομένων και

(iii) μετάδοση δεδομένων μέσω κάποιας αναπαράστασης.

Παρόλο που και τα τρία βήματα σχετίζονται στενά με το να κάνουν οι μαθητές/φοιτητές αληθινή στατιστική έρευνα, το δεύτερο και το τρίτο σχετίζονται περισσότερο με τα γραφήματα.

1.3 Ιστορική εξέλιξη γραφικών αναπαραστάσεων

Είναι συνηθισμένο να σκεφτόμαστε ότι τα στατιστικά γραφήματα και η οπτικοποίηση δεδομένων σχετίζονται με τις σύγχρονες εξελίξεις στην στατιστική. Στην πραγματικότητα, η γραφική αναπαράσταση της ποσοτικής πληροφορίας έχει βαθιές ρίζες που ξεκινούν από τις πρώτες προσπάθειες χαρτογράφησης και οπτικής απεικόνισης και αργότερα στη θεματική χαρτογραφία, στατιστική και γραφήματα στατιστικής με εφαρμογές και καινοτομίες σε πολλά πεδία της ιατρικής και της επιστήμης. Επίσης, συνδέονται με την ανάπτυξη της στατιστικής σκέψης και της διαδεδομένης συλλογής δεδομένων σχετικά με το εμπόριο κατά τον 19^{ο} αιώνα.

Ποσοτικά γραφήματα έχουν χρησιμοποιηθεί από τα αρχαία χρόνια για την αναπαράσταση πληροφοριών. Η προέλευσή τους σχετίζεται με τη χαρτογράφηση, όμως εξελίχθηκαν με την πάροδο του χρόνου σε σημαντικό εργαλείο ανάλυσης δεδομένων. Οι Αιγύπτιοι συνήθιζαν να χρησιμοποιούν κάποιο σύστημα συντεταγμένων για να δηλώσουν την θέση των σημείων στον πραγματικό χώρο ήδη από το 3200 π.Χ. και χρησιμοποιούσαν γραφικές αναπαραστάσεις για να δείξουν το εμβαδόν των σχημάτων, συμπεριλαμβανομένων τετραγώνων, τραπεζίων, τριγώνων και κύκλων, από το 1500 π.Χ. (*Beniger* & *Robyn* , 1978, όπ. αναφ. στους Watson - Fitzallen, 2010, σελ. 12).

Από τις πρώτες γραφικές απεικονίσεις της ποσοτικής πληροφορίας είναι μια ανώνυμη γραφική παράσταση του 10^{ου} αιώνα που παρουσιάζει την αλλαγή θέσεων των επτά (7) πιο διακεκριμένων ουράνιων σωμάτων διαμέσου του χρόνου, όπως περιγράφονται στο έργο του *Funkhouser* (1936) και αναπαράγονται από τον *Tufte* (1983, όπ. αναφ. στο “A brief history of data visualization”, του Friendly M., 2006, σελ. 3) (Σχήμα 3)

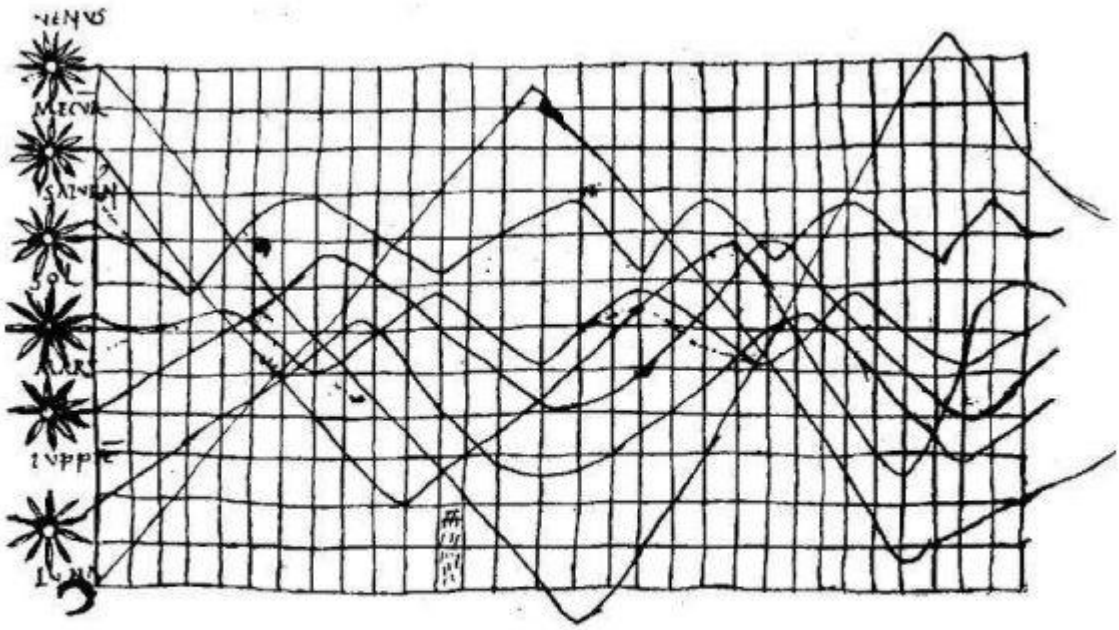


Figure 2: Planetary movements shown as cyclic inclinations over time, by an unknown astronomer, appearing in a 10th century appendix to commentaries by A. T. Macrobius on Cicero's *In Somnium Scripionus*. Source: Funkhouser (1936, p. 261).

Σχήμα 3: Η πρώτη γραφική απεικόνιση κίνησης ουράνιων σωμάτων 10ος αιώνας (*Funkhouser*, 1936)

Ο κάθετος άξονας παρουσιάζει την κλίση των τροχιών των πλανητών ενώ ο οριζόντιος άξονας δείχνει τον χρόνο που είναι διαιρεμένος σε τριάντα (30) διαστήματα. Η ημιτονοειδής μεταβολή σε διαφορετικές χρονικές περιόδους καθώς και η χρήση πλέγματος, υποδηλώνουν την έννοια ενός συστήματος συντεταγμένων, μια ιδέα όμως που δεν θα αναπτυχθεί πλήρως μέχρι το 1600 – 1700 μ.Χ.

Τον 14ο αιώνα, η ιδέα κατασκευής διαγράμματος μιας θεωρητικής συνάρτησης και της λογικής σχέσης μεταξύ τιμών σε έναν πίνακα και αναπαράστασής τους γραφικά, εμφανίστηκε στη δουλειά του *Nicole Oresme* (*Tractacus de configrationibus qualitatum et motuum,* 1353, όπ. αναφ. στον Friendly M., 2006, σελ. 4) όπου φαίνεται ξεκάθαρα η ιδέα των συναρτήσεων, των (x, y) συντεταγμένων και πάνω από όλα των γραφημάτων των συναρτήσεων.

Τον 16ο αιώνα οι τεχνικές και τα εργαλεία για ακριβή παρατήρηση και μέτρηση φυσικών ποσοτήτων και των γεωγραφικών και ουράνιων θέσεων, είναι καλά ανεπτυγμένες (παράδειγμα το ''τεταρτημόριο τοίχου'' – *''wall quadrant''* που κατασκεύασε για αστρονομική παρατήρηση ο *Tycho Brahe,* το οποίο κάλυπτε

ολόκληρο τοίχο στο παρατηρητήριό του). Ιδιαίτερα σημαντική ήταν η ανάπτυξη του *τριγωνισμού*, δηλαδή της διαίρεσης επιφάνειας σε τρίγωνα με σκοπό να χαρτογραφηθεί ευκολότερα (*Frisius* – 1533, *Tartaglia* – 1556, όπ. αναφ. στον Friendly M., 2006, σελ. 4). Επίσης, βλέπουμε τις πρώτες ιδέες για απευθείας σύλληψη της εικόνας (σκοτεινός θάλαμος που χρησιμοποίησε ο *Reginer Gemma – Frisius* , 1545, για να καταγράψει την έκλειψη του ηλίου), η καταγραφή μαθηματικών συναρτήσεων σε πίνακες (τριγωνομετρικοί πίνακες από τον *Georg Rheticus*, 1550) και ο πρώτος μοντέρνος χαρτογραφικός άτλαντας (*Teatrum Orbis Terrarum* από τον *Abraham Ortelius*, 1570, όπ. αναφ. στον Friendly M., 2006, σελ. 4).

Αυτά τα πρώτα βήματα αποτελούν την αρχή της απεικόνισης δεδομένων, η οποία μόλις στα τέλη του 18^{ου} αιώνα με αρχές του 19^{ου} αιώνα με τη χρήση των γραφημάτων και διαγραμμάτων, απέκτησε πρακτικό χαρακτήρα (*Fienberg*, 1979, όπ. αναφ. στους Watson – Fitzallen, 2010, σελ. 12). Από τότε και μετά, η ανάπτυξη των γραφικών μεθόδων, εξαρτάται από τα πλεονεκτήματα που παρέχει η τεχνολογία, από τη συλλογή δεδομένων και από τη στατιστική θεωρία (*Friendly*, 2007, όπ. αναφ. στους Watson – Fitzallen, 2010, σελ. 12).

Σε μια συνοπτική επισκόπηση στην ιστορία των ποσοτικών γραφημάτων στη στατιστική, οι *Beniger* και *Robyn* (1978, όπ. αναφ. στους Watson – Fitzallen, 2010, σελ. 12), περιγράφουν τέσσερεις (4) περιόδους που αντιστοιχούν στην ιστορική εξέλιξη των γραφημάτων, ξεκινώντας από τον 17^{ο} αιώνα. Αυτές οι περίοδοι είναι:

i. οργάνωση του χώρου για ανάλυση δεδομένων,
ii. διακριτές ποσοτικές συγκρίσεις,
iii. συνεχείς κατανομές και
iv. κατανομές πολλαπλών μεταβλητών και συσχετίσεων.

Ωστόσο, οι ίδιοι συγγραφείς, περιλαμβάνουν και ακόμα μία περίοδο που παρουσιάζουν τις καινοτομίες που αναπτύχθηκαν στον 20^{ο} αιώνα. Συλλογικά, οι τέσσερεις περίοδοι και οι καινοτομίες του 20^{ου} αιώνα, περιγράφουν προοδευτικές εξελίξεις που επηρέασαν τον τρόπο με τον οποίο τα δεδομένα αναπαριστάνονται και αναλύονται στις μέρες μας. Παρόλο που οι εξελίξεις σημειώθηκαν σε συνεχείς ιστορικά περιόδους, οι ιδέες που παρουσιάστηκαν σε πρότερες περιόδους δεν αντικαταστάθηκαν από επόμενες εξελίξεις. Στοιχεία από κάθε φάση διατηρούνταν

και ενσωματώνονταν στην επόμενη. Ας δούμε λίγο πιο αναλυτικά τις περιόδους αυτές:

- *οργάνωση του χώρου για ανάλυση δεδομένων* : τεχνολογικές καινοτομίες της μορφής αυτόματων μηχανών μέτρησης, επινοήθηκαν τον 17^{ο} και 18^{ο} αιώνα, κάνοντας δυνατή τη συγκέντρωση και καταγραφή μεγάλων συνόλων δεδομένων. Μηχανές μέτρησης όπως το θερμόμετρο αέρα και νερού, το ρολόι καιρού, το εκκρεμές ρολόι και το θερμόμετρο υδραργύρου, χρησιμοποιούνταν στην ανάπτυξη επιστημονικών εργαλείων που μπορούσαν να κάνουν πολλαπλές μετρήσεις. Ως αποτέλεσμα, νέοι τρόποι οργάνωσης και ανάλυσης δεδομένων ήταν απαραίτητοι στον χειρισμό μεγάλων συλλογών δεδομένων. Γενικά, οι αυτόματες μηχανές καταμέτρησης παρήγαγαν γραφήματα με κινούμενες γραμμές που αναπαριστάνουν δεδομένα που συλλέχτηκαν σε κάποια χρονική περίοδο χρησιμοποιώντας κάποιο σύστημα συντεταγμένων. Εκείνη την περίοδο, ήταν συνηθισμένο τα δεδομένα να μεταφράζονται από τη γραφική τους μορφή στην μορφή πινάκων για ανάλυση. Η γραφική μορφή θεωρούνταν ένα μέσο καταγραφής δεδομένων και η δυνατότητά της να χρησιμοποιηθεί για ανάλυση δεν υπήρχε μέχρι αργότερα. Το Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων που επανεισήχθη στα μαθηματικά από τον *Descartes* το 1637, δεν αποτέλεσε σημαντικό εργαλείο για ανάλυση δεδομένων μέχρι το 1830 (*Beniger* & *Robyn,* 1978, όπ. αναφ. στους Watson – Fitzallen, 2010, σελ. 13)
- *διακριτές ποσοτικές συγκρίσεις*: ο συνδυασμός εικόνας και στατιστικών δεδομένων ώστε να δημιουργηθούν γραφικές αναπαραστάσεις της πληροφορίας εκτός επιστημονικών δεδομένων, ερευνήθηκε από τον *Playfair* το 1786. Αντικατέστησε πίνακες αριθμών με οπτικές αναπαραστάσεις, δημιουργώντας την ευκαιρία χρήσης εικόνων και γραφημάτων για την περιγραφή ποσοτικής πληροφορίας (*Tufte*, 1983, όπ. αναφ. στους Watson – Fitzallen, 2010, σελ. 13). Τα γραφήματα που παρήγαγε ο *Playfair* ήταν πολύ σύνθετα και συνήθως παρουσίαζαν δεδομένα πολλαπλών μεταβλητών στο ίδιο γράφημα. Αν και προηγήθηκαν κάποιοι άλλοι του *Playfair* στη χρήση γραφημάτων για να απεικονίσουν δεδομένα, αυτός επέκτεινε την χρήση τους σε τομείς της οικονομίας, κάνοντας τη χρήση των στατιστικών γραφικών δημοφιλή για πληροφορίες γενικού ενδιαφέροντος (*Wainer* & *Velleman*, 2001, όπ. αναφ. στους

Watson – Fitzallen, 2010, σελ. 13). Μία από τις πρώτες καινοτομίες του *Playfair*, ήταν το διάγραμμα *ράβδος*. (σχήμα 4)

Αυτή η αναπαράσταση χρησιμοποιήθηκε για να απεικονίσει απόλυτα δεδομένα. Εκείνον τον καιρό, ο *Playfair* ήταν πολύ προσεκτικός σχετικά με την αποτελεσματικότητα των διαγραμμάτων *ράβδος* και απολογούνταν για την έλλειψη λεπτομέρειάς τους, καθώς δεν σχετίζονταν με κάποια συγκεκριμένη

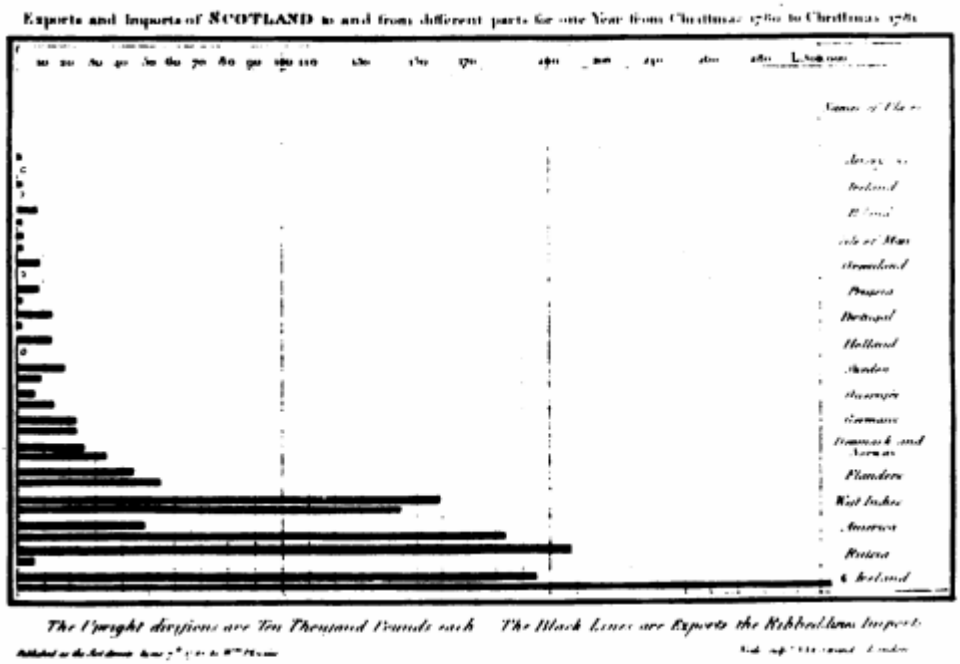


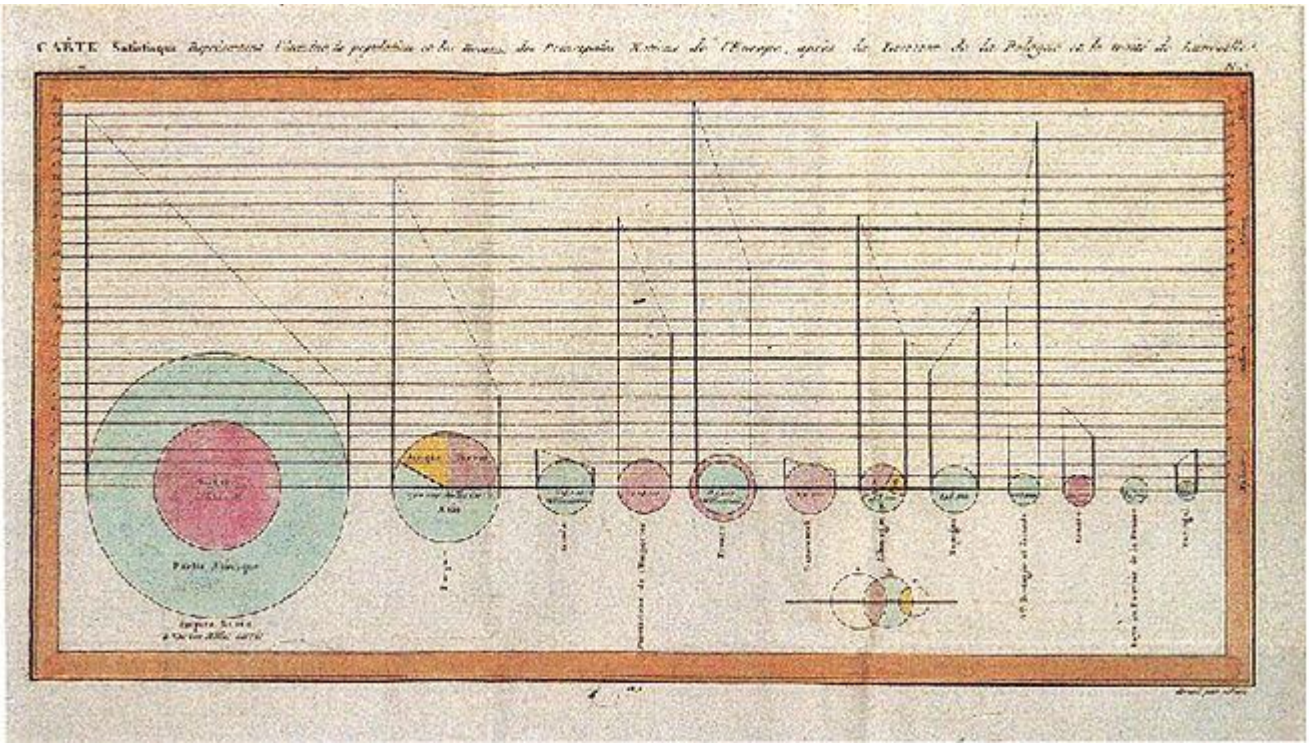
Figure C. Representation of Scotland's Imports and Exports for 17 Countries in 1781, the First Published Appearance of the Bar Chart, Invented by William Playfair and Included in his *Commercial and Political Atlas*, 1786.

Σχήμα 4: το πρώτο δημοσιευμένο διάγραμμα ράβδος (*Playfair*, 1786)

χρονική διάρκεια, όπως τα γραφήματα χρονικής ακολουθίας (*Funkhouser*, 1937, όπ. αναφ. στους Watson – Fitzallen, 2010, σελ. 13). Η ειρωνεία είναι ότι τελικά τα *ραβδογράμματα*, έγιναν παγκόσμια γλώσσα και είναι η απλότητα των αναπαραστάσεών τους που τα κάνανε τόσο χρήσιμα.

Κατά τη διάρκεια του 18^{ου} αιώνα, επιστήμονες και οικονομολόγοι, ανέπτυξαν τρόπους συλλογής μεγάλου όγκου πληροφοριών σχετικά με πληθυσμούς και κοινωνικές δραστηριότητες όπως δεδομένα σχετικά με το εμπόριο. Παρόλο που ήταν κοινή γνώση η οργάνωση των δεδομένων σε πίνακες για ανάλυση, ήταν πολύ χρονοβόρα και δύσκολη μέθοδος. Για να εξομαλύνει αυτή τη δυσκολία, ο

Playfair ανέπτυξε το κυκλικό γράφημα (*διάγραμμα πίτα*) για την οπτικοποίηση των δεδομένων. Αναγνώρισε ότι οι άνθρωποι ήταν ικανοί να κάνουν απευθείας συγκρίσεις ποσοστού και μεγέθους σχημάτων διαισθητικά με το μάτι, δηλώνοντας: ‘’είναι η καλύτερη και η ευκολότερη μέθοδος μετάδοσης μιας ευδιάκριτης ιδέας” (*Playfair*, 1801, όπ. αναφ. στους Watson – Fitzallen, 2010, σελ. 13). Στο παρακάτω σχήμα (Σχήμα 5) φαίνεται κάποιο από τα αρχικά γραφήματά του, όπου παρουσιάζονται με κύκλους η έκταση κάποιων σημαντικών ευρωπαϊκών χωρών της εποχής και με γραμμές αναπαριστάνονται ο πληθυσμός και τα έσοδά τους.



Σχήμα 5: Έκταση, πληθυσμός, έσοδα σημαντικών ευρωπαϊκών χωρών (*Playfair*)

- *συνεχείς κατανομές*: το 1821, ο *Fourier* ήταν ο πρώτος που εφάρμοσε γραφική ανάλυση σε στατιστικές πληθυσμών, προωθώντας την ανάπτυξη της στατιστικής. Προκειμένου να δείξει τον αριθμό των κατοίκων του Παρισιού ανά 10000 το 1817 που είχαν μια συγκεκριμένη ηλικία, ανέπτυξε την κατανομή αθροιστικών συχνοτήτων (*cumulative frequency distribution*). Στο γράφημα που έφτιαξε, χρησιμοποίησε ράβδους τοποθετημένες τη μία δίπλα στην άλλη ώστε η κάθε μία περιέγραφε συγκεκριμένο εύρος ηλικιών. (σχήμα 6)

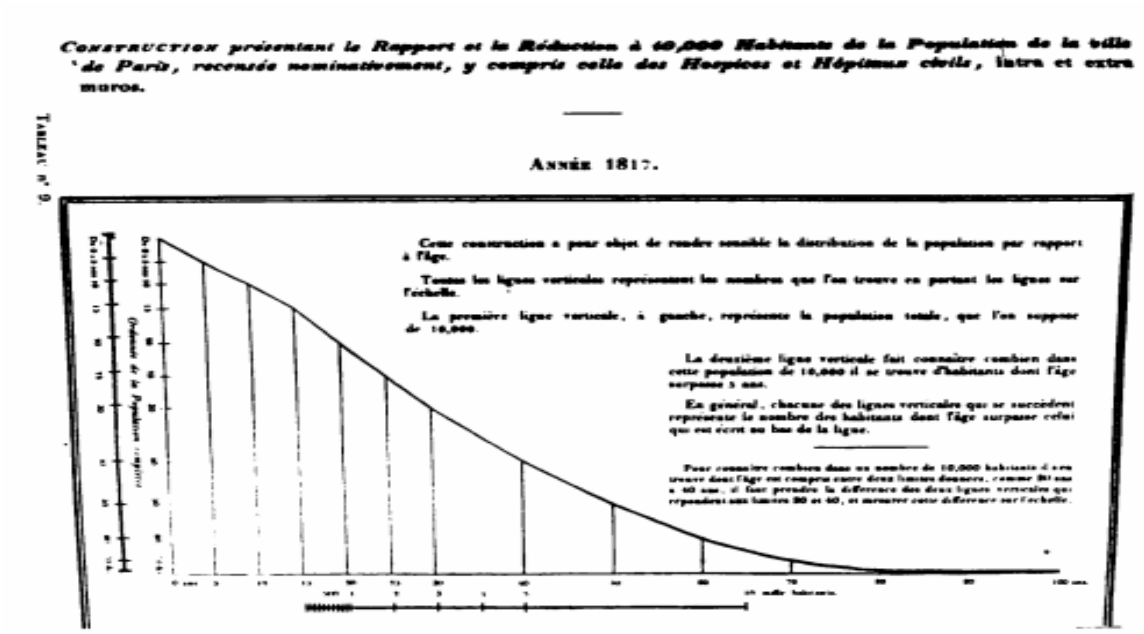


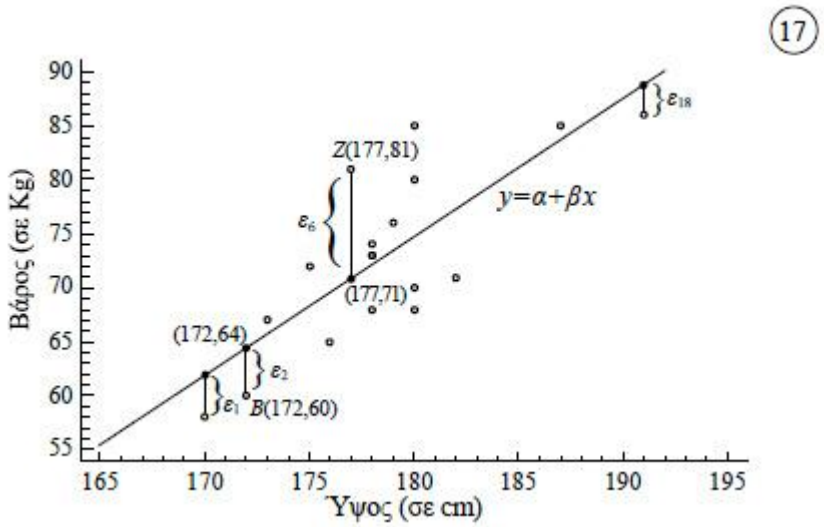
Figure D. Line Graph Representing the 1817 Population of Paris by Age Groupings, the First Appearance of the Cumulative Frequency Distribution Devised by J. B. J. Fourier, Published in [22], 1821.

Σχήμα 6: η πρώτη εμφάνιση της κατανομής αθροιστικών συχνοτήτων (*Fourier*,1821)

Άλλη μία καινοτομία που αναπτύχθηκε από το διάγραμμα *ράβδος*, είναι το *ιστόγραμμα*. Το 1833, ο *Guerry,* δημιούργησε ιστογράμματα φτιάχνοντας διατεταγμένες κατηγορίες για συνεχόμενα δεδομένα (*Beniger* & *Robyn*, 1978, όπ. αναφ. στους Watson – Fitzallen, 2010, σελ. 14). Χρησιμοποίησε στήλες ίσου πλάτους για να αναπαραστήσει την συχνότητα κάθε κλάσης που αντιπροσωπεύει ίσα διαστήματα δεδομένων και ενώνοντας τα μέσα των στηλών, προκύπτει ένα πολύγωνο συχνοτήτων (στην πραγματικότητα μια ''σπασμένη'' γραμμή της οποίας η αρχή και το τέλος είναι σημεία του οριζόντιου άξονα). Η καμπύλη της συχνότητας είναι η λεία καμπύλη που προκύπτει από το πολύγωνο συχνοτήτων. Την λέξη ''ιστόγραμμα'', την χρησιμοποίησε πρώτος ο *Karl Pearson* (1895, όπ. αναφ. στους Watson – Fitzallen, 2010, σελ. 14) στο έργο του *Contributions to the Mathematical Theory of Evolution – II*. Κατόπιν, ο *Adolphe Quetelet*, προήγαγε την ανάπτυξη των γραφημάτων των συνεχών κατανομών, εφαρμόζοντας τη θεωρία των πιθανοτήτων σε γραφικές μεθόδους (*Funkhouser,* 1937, όπ. αναφ. στους Watson – Fitzallen, 2010, σελ. 14). Το 1846 κατέγραψε τα αποτελέσματα δειγμάτων από διάφορα δοχεία ως συμμετρικά ιστογράμματα και μετά έδειξε την συμπτυγμένη ''καμπύλη της πιθανότητας''. Αυτό αναπτύχθηκε και αργότερα

ονομάστηκε η *κανονική καμπύλη* (*Friendly*, 2008, όπ. αναφ. στους Watson – Fitzallen, 2010, σελ. 14)

- *κατανομές πολλαπλών μεταβλητών και συσχετίσεων*: κατά τα μέσα του 19ου αιώνα, τα δεδομένα που σχετίζονται με τη στατιστική γίνονται περισσότερο πολύπλοκα και εμπλέκουν σχέσεις με περισσότερες από δύο μεταβλητές. Οι χάρτες περιγραμμάτων και τα στερεογράμματα αναπτύχθηκαν ώστε να φιλοξενήσουν αυτήν την αύξηση στην πολυπλοκότητα καθώς παρείχαν δισδιάστατες αναπαραστάσεις κατανομών πολλών μεταβλητών και συσχετίσεων. Η χρήση των χαρτών περιγραμμάτων περιλαμβάνει την απεικόνιση της πληθυσμιακής πυκνότητας σε μια περιοχή και τα στερεογράμματα χρησιμοποιούνται για την αναπαράσταση της πληθυσμιακής πυκνότητας ανά ηλικιακή ομάδα σε συγκεκριμένη περιοχή. Όταν εξετάζεται η σχέση μεταξύ δύο μεταβλητών, τα δεδομένα αναφέρονται σαν να είναι δισδιάστατες μεταβλητές. Τα δισδιάστατα δεδομένα παρέχουν πληροφορίες για δύο μεταβλητές οι οποίες δεν είναι απαραίτητο να εξαρτώνται η μία από την άλλη. Ένα *διάγραμμα διασποράς* (σχήμα 7) είναι μια γραφική τεχνική που χρησιμοποιείται για να απεικονίσει δισδιάστατα δεδομένα

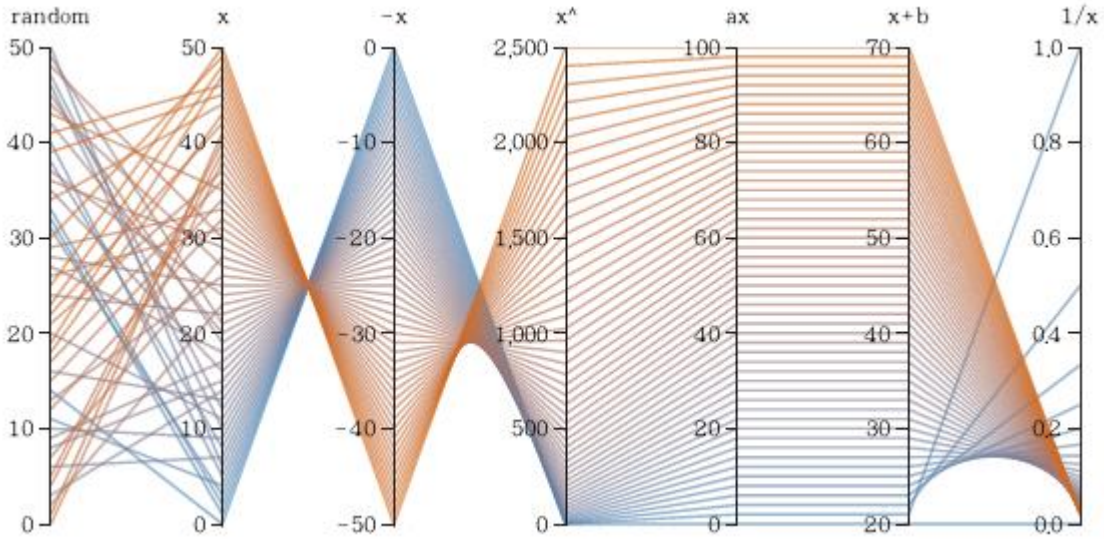


Σχήμα 7 : διάγραμμα διασποράς δύο μεταβλητών ύψος - βάρος

Είναι μια χρήσιμη εξερευνητική μέθοδος για να αναγνωριστούν ομάδες σημείων και ακραίων τιμών σε μια κατανομή δισδιάστατων δεδομένων. Βοηθάει στην αναγνώριση σχέσης και εξάρτησης μεταξύ των μεταβλητών και της μεταβολής τους (*Cleveland*, 1993, όπ. αναφ. στους Watson – Fitzallen, 2010, σελ. 15)

- *20ος αιώνας και μελλοντικές εξελίξεις*: Μετά από μια περίοδο στις αρχές του 20ου αιώνα όπου η τυπική στατιστική ανάλυση δεδομένων χρησιμοποιήθηκε περισσότερο από την γραφική ανάλυση, η σπουδαιότητα της απεικόνισης δεδομένων για γραφική ανάλυση ανέκτησε το ενδιαφέρον των επιστημόνων. Αυτό μπορεί να αποδοθεί σε τρεις κυρίως εξελίξεις: πρώτα ο *Tukey* (1977, όπ. αναφ. στους Watson – Fitzallen, 2010, σελ. 15) παρουσίασε την έννοια της *εξερευνητικής ανάλυσης δεδομένων* , δεύτερον ο *Bertin* (1981, όπ. αναφ. στους Watson – Fitzallen, 2010, σελ. 15) ανέπτυξε μια *θεωρία γραφημάτων* και τρίτον *τεχνολογικές καινοτομίες* επέτρεψαν την επεξεργασία από υπολογιστή των στατιστικών δεδομένων (*Friendly*, 2008, όπ. αναφ. στους Watson – Fitzallen, 2010, σελ. 15).

  Η εξερευνητική ανάλυση δεδομένων (*exploratory data analysis* - EDA) είναι μια άτυπη γραφική προσέγγιση στην ανάλυση δεδομένων που επικεντρώνεται ώστε η εμφάνιση των γραφημάτων να δώσει μια διορατικότητα σχετικά με τα δεδομένα παρά να δώσει τυπικά συμπεράσματα στατιστικών υπολογισμών. Βασίζεται σε γραφικές αναπαραστάσεις δεδομένων (ιστογράμματα, *run charts, parallel coordinates* – Σχήμα 8) με λίγες επιπρόσθετες ποσοτικές τεχνικές.



Σχήμα 8 : παράδειγμα γραφήματος με τη μέθοδο parallel coordinates

Η EDA είναι ένα παράδειγμα που είναι ευέλικτο και επιτρέπει ώστε η ανάλυση δεδομένων να είναι επαναλαμβανόμενη και δημιουργική (*Tukey*, 1977, όπ. αναφ. στους Watson – Fitzallen, 2010, σελ. 15). Ο *Tukey* ισχυρίζεται ότι η ανάλυση

δεδομένων δεν αφορά μόνο στο να πάρουμε τη σωστή απάντηση για μια ερώτηση. Επίσης αφορά στο να δούμε τι επηρεάζει την απάντηση, τι ερωτήσεις γίνανε και με ποιον τρόπο αυτές τέθηκαν.

Η δεύτερη σημαντική εξέλιξη του 20^{ου} αιώνα, αποδίδεται στη δουλειά του *Bertin* (1983, όπ. αναφ. στους Watson – Fitzallen, 2010, σελ. 16). Το 1967 δημοσίευσε την θεωρία του για την οπτικοποίηση της πληροφορίας στα Γαλλικά, *Semiologie Graphique.* Το ενδιαφέρον του *Bertin* γύρω από αυτό το θέμα ξεκίνησε όταν αναγνώρισε ότι οι γραφικές αναπαραστάσεις που προκύπτουν από τις επιστημονικές εκδόσεις δεν είναι κατανοητές. Η θεωρία που ανέπτυξε, επικεντρωνόταν στην αναπαράσταση των οπτικών και αντιληπτικών στοιχείων των γραφημάτων και έκανε διαχωρισμό μεταξύ των εννοιών που μεταδίδονται μέσω των ποιοτικών και ποσοτικών στοιχείων μιας γραφικής παράστασης. (*Card, Mackinlay* & *Shneiderman*, 1999, όπ. αναφ. στους Watson – Fitzallen, 2010, σελ. 16). Ο *Tufte* (1983, όπ. αναφ. στους Watson – Fitzallen, 2010, σελ. 16) επίσης ανέπτυξε μια θεωρία για τα γραφικά δεδομένα που δίνει έμφαση στη μεγιστοποίηση της πυκνότητας της πληροφορίας και την ελαχιστοποίηση της εξωτερικής πληροφορίας (την όρισε ως ‘’σαβούρα του διαγράμματος’’ – *chart junk*).

Τέλος, η πρόοδος στην τεχνολογία υπολογιστών είχε και θα συνεχίσει να έχει σημαντικό αντίκτυπο στην ανάλυση δεδομένων και στις οπτικές απεικονίσεις που χρησιμοποιούνται στην αναπαράσταση δεδομένων. Το λογισμικό γραφημάτων και οι συνδεόμενες με αυτό τεχνολογίες, παρέχουν μια εναλλακτική λύση στα γραφήματα που σχεδιάζονται με το χέρι, καλλωπισμού των παλαιότερων τύπων γραφημάτων, ανάλυσης μεγάλου όγκου δεδομένων και αναπαράστασης συνόλων δεδομένων πολλών μεταβλητών σε δύο ή τρεις διαστάσεις (*Beniger* & *Robyn,* 1978, όπ. αναφ. στους Watson – Fitzallen, 2010, σελ. 16).

2 ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓ ΙΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Η εργασία αναφέρεται στο τρόπο που οι γραφικές αναπαραστάσεις (κλασική γραφική παράσταση συνάρτησης, ραβδόγραμμα, κυκλικό διάγραμμα) βοηθούν στην κατανόηση γενικών μαθηματικών εννοιών από τους μαθητές των επαγγελματικών λυκείων (ΕΠΑΛ) καθώς και εννοιών που αφορούν στην ειδικότητά τους. Πιο συγκεκριμένα:

α) εξετάζουμε την ικανότητα των μαθητών της Β΄ και Γ΄ τάξης στην οπτικοποίηση γενικών μαθηματικών εννοιών (εξίσωση ευθείας, λύση γραμμικού συστήματος, στατιστική, ακρότατα) με χρήση γραφικών αναπαραστάσεων,

β) ερευνούμε την αντίστροφη ικανότητα των μαθητών, δηλαδή εξαγωγή πληροφοριών από δοσμένες γραφικές αναπαραστάσεις και

γ) με ανάλογο τρόπο, ερευνούμε την δυνατότητα των μαθητών να συσχετίσουν τις γενικές αυτές μαθηματικές έννοιες, με πιο εξειδικευμένες έννοιες που διδάσκονται σε μαθήματα της ειδικότητάς τους (ανάλογα ποσά, ανατοκισμοί, προθεσμιακές καταθέσεις).

Για τη διεξαγωγή της έρευνας, επιλέχθηκε ένα τμήμα της Β΄ τάξης (18 μαθητές) και ένα τμήμα της Γ΄ τάξης (17 μαθητές) του τομέα Οικονομίας του 2^{ου} ΕΠΑΛ Ηρακλείου, αρχικά επειδή είναι το σχολείο προσωπικής διδασκαλίας ως καθηγητής Πληροφορικής και Μαθηματικών, αφετέρου επειδή τα Μαθηματικά έχουν πολλές εφαρμογές στον χώρο των οικονομικών σπουδών.

Κάθε ένα από τα δύο τμήματα, καλείται να απαντήσει σε δύο διαφορετικά ερωτηματολόγια (ένα γενικά σε μαθηματικά και ένα πιο εξειδικευμένο με τον τομέα τους) σε ερωτήσεις που καλύπτουν από μία διδακτική ώρα το καθένα (δηλαδή συνολικά 4 ερωτηματολόγια – διδακτικές ώρες).

Στα ερωτηματολόγια που χρησιμοποιούνται στην έρευνα, περιλαμβάνονται ερωτήσεις – ασκήσεις είτε από τα αντίστοιχα σχολικά εγχειρίδια είτε ανάλογου επιπέδου. Επειδή η έρευνα είναι καθαρά διερευνητική για εξαγωγή συμπερασμάτων σχετικά με την κατανόηση των γραφικών αναπαραστάσεων από τους μαθητές, οι ερωτήσεις και η μορφή τους, προσπαθούν να ανταποκριθούν στα διαφορετικά αυτά επίπεδα κατανόησης.

Οι απαιτούμενες μαθηματικές γνώσεις για τις απαντήσεις των ερωτήσεων, είτε έχουν αποκτηθεί από τους μαθητές σε προηγούμενες σχολικές χρονιές είτε κατά την τρέχουσα σχολική χρονιά. Επιπλέον σε κάποιες ερωτήσεις, πρέπει να λειτουργήσει και η συνδυαστική σκέψη των μαθητών προκειμένου να καταφέρουν να τις απαντήσουν.

Παρακάτω περιγράφονται αναλυτικά οι ερωτήσεις – ασκήσεις σε κάθε ερωτηματολόγιο, επισημαίνοντας τους επιμέρους στόχους για κάθε μία από αυτές:

<u>1^{ο} ερωτηματολόγιο – Άλγεβρα Β΄ Λυκείου:</u> <u>διάρκεια 40 λεπτά</u>

Οι ερωτήσεις σε αυτό το ερωτηματολόγιο αφορούν σε μαθηματικές γνώσεις που σχετίζονται με απλές γραφικές παραστάσεις, είτε στη δημιουργία τους είτε σε εξαγωγή απλών συμπερασμάτων από κάποιες δοσμένες γραφικές παραστάσεις. Οι μαθητές έχουν γνωρίσει τα βασικά στοιχεία των γραφικών παραστάσεων κατά τη διάρκεια της Α΄ Λυκείου (Άλγεβρα Α΄ Λυκείου – Κεφάλαιο 6^{ο}: Βασικές έννοιες των Συναρτήσεων) καθώς και στη Β΄ Λυκείου (Άλγεβρα Β΄ Λυκείου – Κεφάλαιο 2^{ο}: Ιδιότητες Συναρτήσεων). Επίσης έχουν διδαχτεί σχετική θεωρία με αλγεβρικές ρίζες πολυωνύμων και έχουν δει και παραδείγματα με γραφική εύρεση ριζών πολυωνυμικών εξισώσεων της μορφής f(x) = 0 (Άλγεβρα Β΄ Λυκείου – Κεφάλαιο 4^{ο}: Πολυώνυμα – Πολυωνυμικές Εξισώσεις). Τέλος στη διάρκεια της Β΄ Λυκείου, οι μαθητές διδάσκονται την έννοια της γραφικής λύσης ενός συστήματος 2x2 (Άλγεβρα Β΄ Λυκείου – Κεφάλαιο 1^{ο}: Συστήματα).

Αναλυτικότερα οι <u>ερωτήσεις</u> του ερωτηματολογίου:

1) Να σχεδιάσετε πρόχειρα τις ευθείες των εξισώσεων: (<u>Βοήθεια</u>: συμπληρώστε πρώτα τους πίνακες των τιμών για δύο τιμές του **x** βρίσκοντας τα αντίστοιχα **y** και ενώστε τα σημεία (**x_1, y_1**) και (**x_2, y_2**) που προκύπτουν)

i) y = 3x

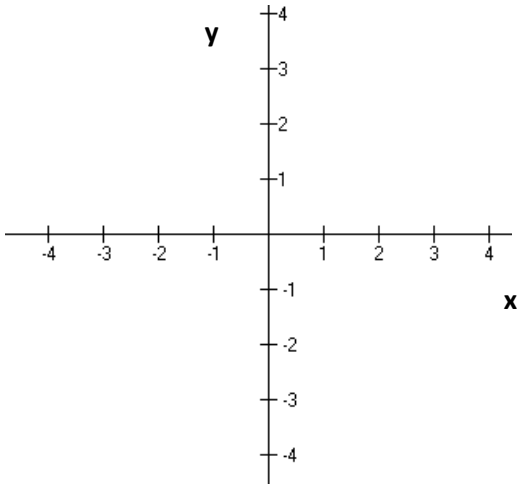
x		
y		

ii) y = 2x+2

x		
y		

iii) y = 3

x		
y		



Στόχος είναι οι μαθητές να ξεκινήσουν το ερωτηματολόγιο με μία άσκηση που είναι βασική στη διδασκαλία δημιουργίας γραφημάτων όπου ζητούνται οι τρεις γραφικές παραστάσεις με τη μορφή y=αx, y=αx+β και y=c. Θεωρείται πολύ κλασική άσκηση και την έχουν συναντήσει πολλές φορές κατά τη διάρκεια των σχολικών τους χρόνων, ώστε λύνοντάς την, να συνεχίσουν στις επόμενες ερωτήσεις με μεγαλύτερο ενθουσιασμό. Τους δίνεται και η κατάλληλη βοήθεια, όπου με τη συμπλήρωση των πινάκων τιμών για τα ζεύγη (x, y) θα μπορέσουν με ευκολία να σχεδιάσουν τις ζητούμενες γραφικές παραστάσεις. Μέσω της απάντησης αυτής της άσκησης, επιδιώκεται να ξεκαθαρίσουν οι μαθητές την αντιστοίχιση αρχικά της σχέσης ''για το x που επιλέγεις βρες το y που του αντιστοιχεί '' και στη συνέχεια της απεικόνισης των ζευγαριών (x, y) που προκύπτουν σε ένα σημείο του επιπέδου. Επίσης, πρέπει να αναρωτηθούν γιατί στη βοήθεια δίνονται μόνο δύο ζεύγη τιμών (x, y), καθώς τα δύο σημεία που θα προκύψουν είναι αρκετά ώστε να γίνει το σχέδιο της ευθείας. Μερικός προβληματισμός αναμένεται στη σχεδίαση της τρίτης ευθείας (y=3) καθώς η λογική του σχεδιασμού της είναι η σταθερή τιμή του y ανεξάρτητα από τις τιμές του x, κάτι που πιθανόν να μπερδέψει κάποιους πιο αδύναμους μαθητές στα Μαθηματικά. Για τον ίδιο λόγο, αποφεύγονται αναφορές σε έννοιες όπως *τετμημένη* και *τεταγμένη* που ξεφεύγουν από το σκοπό της συγκεκριμένης έρευνας.

2) Στις παρακάτω γραμμικές εξισώσεις, βρείτε το **συντελεστή διεύθυνσης λ** των αντίστοιχων ευθειών που αντιπροσωπεύουν: (Βοήθεια: λύστε τις εξισώσεις ως προς **y** ή χρησιμοποιήστε τη σχέση $\lambda=(y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$)

i) $x - 3y = 5$ ii) $3x + 2y = 0$ iii) $y = 2x$

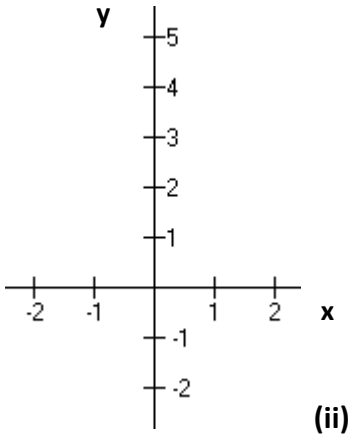
Στόχος αυτής της άσκησης είναι η διερεύνηση του βαθμού εξοικείωσης των μαθητών με την έννοια του *συντελεστή διεύθυνσης* μιας ευθείας και των διαφορετικών τρόπων με τους οποίους αυτός υπολογίζεται. Επειδή η συγκεκριμένη έννοια δεν χαίρει ιδιαίτερης προσοχής από τους μαθητές κατά τη διδασκαλία της, δίνονται ως βοήθεια δύο διαφορετικοί τρόποι υπολογισμού του ζητουμένου. Η πρώτη βοήθεια είναι πιο προφανής, ενώ η δεύτερη απαιτεί τον υπολογισμό δύο

ζευγαριών τιμών (x_1, y_1), (x_2, y_2) που αντιστοιχούν σε σημεία της κάθε ευθείας. Οι μαθητές έχουν διδαχτεί την έννοια αυτή και στην Α΄ Λυκείου αλλά και στη Β΄ Λυκείου. Πιθανόν οι περισσότεροι να έχουν πιο εύκολη τη μορφή y=αx+β (ή αντίστοιχα y=λx+β) της ευθείας και να έχουν συσχετίσει το *α* (ή το λ) με το *συντελεστή διεύθυνσης*, οπότε να δυσκολευτούν λιγάκι με τη μορφή (α) και (β) των ευθειών, κάτι που αναμένεται να ξεπεραστεί άμεσα με χρήση της δοσμένης βοήθειας. Η συγκεκριμένη άσκηση *δεν* προσφέρει κάποια γραφική απεικόνιση – αναπαράσταση του *συντελεστή διεύθυνσης* ευθείας, αφού είναι καθαρά υπολογιστική. Ωστόσο η χρήση της σε αυτό το σημείο, θεωρήθηκε κατάλληλη για δύο κυρίως λόγους: πρώτον, θα χρειαστεί ο *συντελεστής διεύθυνσης* στην αμέσως παρακάτω άσκηση για την οποία είναι ιδιαίτερα χρήσιμη η δεύτερη βοήθεια που δίνεται εδώ για τον υπολογισμό του και δεύτερον, θα παρακινήσει λίγο τους πιο προχωρημένους μαθητές να αναζητήσουν στις γνώσεις τους την έκφραση του όρου *συντελεστής διεύθυνσης* ουσιαστικά ως την κλίση που έχει η ευθεία ως προς τον άξονα των x.

3)**(i)**Μπορείτε να παραστήσετε με κατάλληλες ευθείες τα ζευγάρια τιμών (x, y) που υπάρχουν στους παρακάτω πίνακες;

x	0	1	-1
y	1	3	-1

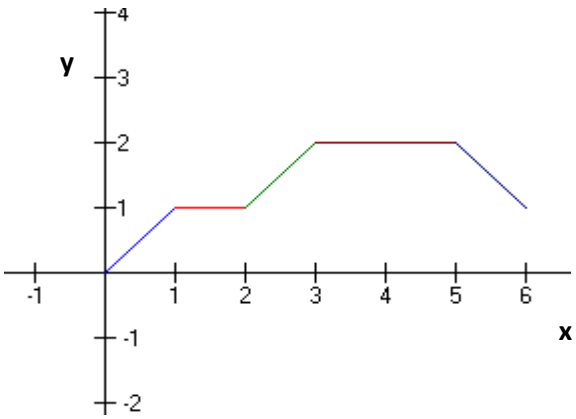
x	0	1	-1
y	3	5	1

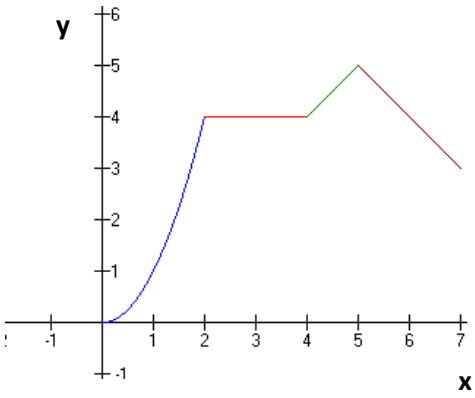


(ii) παρατηρείτε κάτι σε σχέση με τους συντελεστές διεύθυνσης των δύο ευθειών; **(iii)** μπορούν οι δύο ευθείες να είναι γραφική λύση κάποιου γραμμικού συστήματος 2x2; Αιτιολογήστε την απάντησή σας

Ο **στόχος** της συγκεκριμένης άσκησης είναι αρκετά σύνθετος, καθώς περιέχει στοιχεία και από τις δύο ασκήσεις που προηγήθηκαν, επομένως οι μαθητές που απάντησαν με επιτυχία τις παραπάνω ερωτήσεις, δεν αναμένεται να έχουν μεγάλη δυσκολία. Οι μαθητές καλούνται αρχικά να σχεδιάσουν τις δύο ευθείες που προκύπτουν από τα δοσμένα ζευγάρια τιμών (x, y), κάτι εντελώς ανάλογο της πρώτης άσκησης του ερωτηματολογίου. Κατόπιν, η ερώτηση (i) μπορεί να απαντηθεί με δύο τρόπους: έναν προφανή γραφικό, που αναμένεται να χρησιμοποιηθεί από το σύνολο των μαθητών, καθώς με το σωστό σχεδιασμό των ευθειών θα διαπιστώσουν ότι οι δύο ευθείες είναι παράλληλες, επομένως έχουν ίδιους συντελεστές διεύθυνσης. Επίσης μπορούν να χρησιμοποιήσουν και έναν πιο ιδιαίτερο υπολογιστικό τρόπο, αφού πρέπει να κάνουν χρήση της σχέσης που δίνεται ως δεύτερη βοήθεια στην προηγούμενη άσκηση, κάτι που δεν θεωρείται πιθανόν να χρησιμοποιηθεί. Το επόμενο ερώτημα (ii), απαιτεί γνώση Μαθηματικών της Β΄ Λυκείου και σωστό σχεδιασμό των ευθειών ώστε να φαίνεται ότι δεν τέμνονται σε κάποιο σημείο. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχει φυσικά το αν οι μαθητές θα μπορέσουν να συνδυάσουν την έννοια της λύσης ενός απλού γραμμικού συστήματος 2x2 με την εικόνα ενός σημείου στο οποίο τέμνονται δύο ευθείες (*γραφική λύση*) ή την ανυπαρξία λύσης εφόσον οι ευθείες είναι παράλληλες, που είναι και ο σκοπός που τίθεται εδώ το συγκεκριμένο ερώτημα.

4)Συμπληρώστε τα διαστήματα τιμών του **x** στα οποία οι παρακάτω γραφικές παραστάσεις δείχνουν ότι οι συναρτήσεις είναι: i) αύξουσες, ii) φθίνουσες, iii)σταθερές καθώς και σε ποιες τιμές του **x** παρουσιάζουν: α)μέγιστο(στα), β)ελάχιστο(στα)



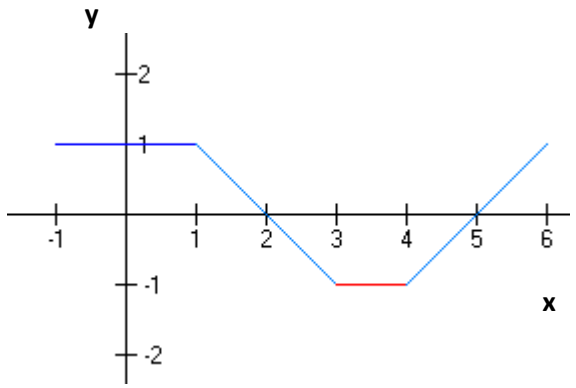


Αύξουσα	
Φθίνουσα	
Σταθερή	
Θέση(εις) μεγίστου(ων)	
Θέση(εις) ελαχίστου(ων)	

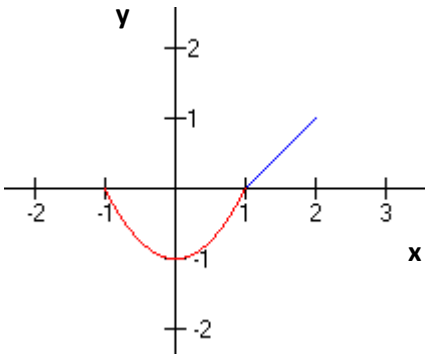
Αύξουσα	
Φθίνουσα	
Σταθερή	
Θέση(εις) μεγίστου(ων)	
Θέση(εις) ελαχίστου(ων)	

Στη συγκεκριμένη άσκηση, αλλάζει η φιλοσοφία των ερωτημάτων του ερωτηματολογίου και ο **στόχος** πλέον *δεν* είναι να καταφέρουν οι μαθητές να απεικονίσουν γραφικά κάποια δεδομένα που αποτελεί και τον πρώτο κλάδο της έρευνας αυτής, αλλά γίνεται μετάβαση στο επόμενο κομμάτι της έρευνας, δηλαδή με δοσμένες κάποιες γραφικές αναπαραστάσεις, να μπορέσουν οι μαθητές να εξάγουν συγκεκριμένες πληροφορίες από αυτές. Δίνονται λοιπόν δύο γραφικές αναπαραστάσεις με μεταβλητή μονοτονία (*αύξουσα, φθίνουσα, σταθερή*) και ζητείται από τους μαθητές κυρίως να επισημάνουν τα διαστήματα αυτά καθώς και τα σημεία που παρουσιάζονται οι μεγαλύτερες και οι μικρότερες τιμές τους. Οι μαθηματικές γνώσεις που απαιτεί η άσκηση αυτή, αποκτούνται σε εισαγωγικό επίπεδο στη Β΄ Λυκείου, ενώ ιδιαίτερα μελετούνται στη Γ΄ Λυκείου και αποτελούν μάλιστα και επανειλημμένα θέματα στις Πανελλαδικές εξετάσεις των ΕΠΑΛ. Ωστόσο, εδώ δεν ζητείται ακριβής μελέτη κάποιας συνάρτησης – γραφικής παράστασης, αλλά το κύριο ζητούμενο είναι αν μπορούν να γίνουν κατανοητές κάποιες έννοιες (έστω και σε αρχικό επίπεδο) με τη βοήθεια μιας γραφικής αναπαράστασης χωρίς το απαιτούμενο μαθηματικό υπόβαθρο. Η άσκηση αυτή, αναμένεται να απαντηθεί από τους περισσότερους μαθητές καθώς δεν χρειάζεται ιδιαίτερους υπολογισμούς, όπως οι προηγούμενες ερωτήσεις του ερωτηματολογίου.

5)Να βρείτε τις **ρίζες** των συναρτήσεων που παριστάνουν οι παρακάτω γραφικές παραστάσεις:



Απάντηση (i):.....



Απάντηση (ii):.....

Η άσκηση αυτή έχει την ίδια πρακτική με την προηγούμενη (εξαγωγή πληροφοριών από δοσμένες γραφικές αναπαραστάσεις). Ωστόσο εμπλέκει και την έννοια της *ρίζας* πολυωνυμικής συνάρτησης που οι μαθητές τη διδάσκονται στη Β΄ Λυκείου. Ο **στόχος** της άσκησης αυτής είναι να μπορέσουν οι μαθητές να συνδέσουν την συνήθη φράση που ακούνε από τους καθηγητές τους, δηλαδή ‘’ψάχνω τις ρίζες της συνάρτησης, επομένως εκείνα τα x για τα οποία είναι f(x)=0’’ με την αναζήτηση των σημείων της γραφικής παράστασης όπου το y μηδενίζεται, άρα τα ζεύγη της μορφής (x, 0). Ως προς τις απαντήσεις των μαθητών, αναμένεται μία σύγχυση, καθώς οι περισσότεροι δεν θα συγκεντρωθούν στη γραφική προφανή απάντηση (κάτι που είναι επιθυμητό και σκοπός της έρευνας), αλλά θα μπερδευτούν με τον αλγεβρικό τρόπο εύρεσης της f(x)=0 και προφανώς αυτό θα τους αποθαρρύνει και θα τους μπερδέψει. Παρόλα αυτά να επισημάνουμε ότι τέτοιου είδους γραφικές απεικονίσεις – ασκήσεις περιλαμβάνονται μέσα στο σχολικό εγχειρίδιο των μαθηματικών.

6)Χαρακτηρίστε (✓) , ανάλογα με το πόσο σας δυσκόλεψαν, τις ερωτήσεις 1 – 5, ως εξής:

αριθμός ερώτησης	**Χαρακτηρισμός**			**αιτιολόγηση**
	Εύκολη	**Μέτριας δυσκολίας**	**Δύσκολη**	
1				
2				
3				
4				
5				

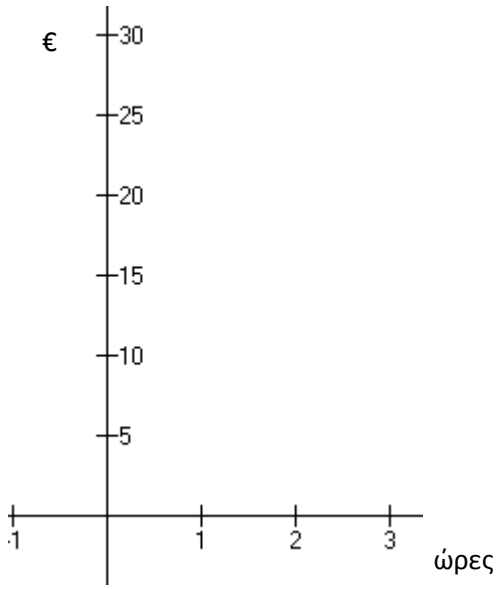
Έχουν τελειώσει οι μαθηματικές ερωτήσεις του ερωτηματολογίου και ως τελευταία απομένει ίσως η σημαντικότερη για την έρευνα αυτή, καθώς οι μαθητές καλούνται να χαρακτηρίσουν τις ασκήσεις του ερωτηματολογίου ανάλογα με το βαθμό που τους δυσκόλεψαν και φυσικά να αιτιολογήσουν την επιλογή του χαρακτηρισμού. Επειδή είναι η τελευταία ερώτηση, οι μαθητές αναμένεται να συμπληρώσουν το κατάλληλο σημάδι (✓) κατηγοριοποίησης της κάθε ερώτησης, όμως το κομμάτι της αιτιολόγησης που είναι και αυτό με το περισσότερο ενδιαφέρον, δεν αναμένεται να είναι συμπληρωμένο από πολλούς μαθητές.

<u>2ο ερωτηματολόγιο – Οικονομικά Μαθηματικά Β΄ Λυκείου :</u> <u>διάρκεια 40 λεπτά</u>

Το μάθημα ‘’Οικονομικά Μαθηματικά’’ της Β΄ Λυκείου, διδάσκεται μόνο στους μαθητές του τομέα Οικονομίας (*μάθημα ειδικότητας*). Αντικείμενο μελέτης του αποτελούν πολλοί καθημερινοί οικονομικοί όροι, όπως ανάλογα ποσά, τόκος, ανατοκισμός, δάνεια, προθεσμιακές καταθέσεις. Οι μαθητές κυρίως ασχολούνται με προβλήματα ανάλογων ποσών – λόγοι αναλογίας (Κεφάλαιο 3 του σχολικού εγχειριδίου), ποσοστά (Κεφάλαιο 2), απλούς τόκους και ανατοκισμούς (Κεφάλαιο 4). Έτσι, οι ερωτήσεις αυτού του ερωτηματολογίου, περιστρέφονται γύρω από αυτές τις έννοιες χωρίς να εμβαθύνουν περισσότερο σε δυσκολότερους και συνθετότερους ορισμούς. Εξάλλου, **κύριος στόχος** του ερωτηματολογίου είναι η μελέτη της δυνατότητας των μαθητών να συσχετίσουν τις γενικές μαθηματικές έννοιες που διδάσκονται στο μάθημα της Άλγεβρας με πιο εξειδικευμένες έννοιες που συναντούν σε μαθήματα της ειδικότητάς τους (*Οικονομικά Μαθηματικά*) μέσα από γραφικές αναπαραστάσεις.

Αναλυτικότερα οι <u>ερωτήσεις</u> του ερωτηματολογίου:

1) Έστω ότι δύο εργάτες, πληρώνονται στη δουλειά τους ο πρώτος με 5€/ώρα και ο δεύτερος με 10€/ώρα. **(i)** Να σχεδιάσετε πρόχειρα τις ευθείες που δείχνουν τη σχέση του χρόνου με την αμοιβή που πρέπει να πάρει ο κάθε εργάτης στις τρεις (3) πρώτες ώρες (Υπόδειξη: σε κάθε ώρα, βρείτε το αντίστοιχο ποσό αμοιβής του κάθε εργάτη και ενώστε τα σημεία που προκύπτουν)



<u>Ερώτηση</u> (ii): έχετε ξαναδεί τέτοιες αναπαραστάσεις τιμών σε ευθείες σε κάποιο άλλο μάθημα; Αν ναι, σε ποιο μάθημα; Σε ποιο θέμα αναφέρονταν;

<u>Απάντηση</u>:……

……

Στόχος της άσκησης είναι οι μαθητές να κατανοήσουν ότι πρόκειται για μια απλή σχεδίαση δύο ευθειών, εντελώς ανάλογη με αυτή που σχεδίασαν στο προηγούμενο ερωτηματολόγιο το οποίο θα τους έχει δοθεί προς συμπλήρωση προηγούμενη ημέρα της εβδομάδας. Η μόνη διαφορά είναι η εκφώνηση της άσκησης, καθώς εδώ ξεπερνάει την τυπική μαθηματική διατύπωση και έχει τη μορφή προβλήματος συνδεδεμένου με την καθημερινότητα. Βέβαια η υπόδειξη που δίνεται, βοηθάει τους μαθητές να σκεφτούν την αντιστοίχιση (ώρες, €) σαν τα ζευγάρια (x, y) που χρησιμοποιείται συνήθως στις γραφικές παραστάσεις. Αυτή η αντιστοίχιση αν επιτευχθεί, αποτελεί και σημαντικό ερώτημα της έρευνας. Επίσης ενδιαφέρον είναι και το ερώτημα που δίνεται στους μαθητές, ώστε να τους παροτρύνει να αναλογιστούν την ευρεία χρήση των γραφικών αναπαραστάσεων στα σχολικά τους μαθήματα (*άλγεβρα, φυσική, ιστορία*) και τον τρόπο που η πληροφορία μπορεί να οπτικοποιηθεί μέσα από αυτές και να γίνει πιο εύκολα κατανοητή.

2) Στους παρακάτω πίνακες, υπάρχει αντιστοίχηση **ποσότητας** και **κόστους** για δύο προϊόντα (**προϊόν Α, προϊόν Β**). Βρείτε τους **λόγους αναλογίας λ_1** και **λ_2** αντίστοιχα.

(i)<u>Προϊόν Α:</u> λ_1 = ……

Ποσότητα	1	2	3
Κόστος	4	8	12

(ii)<u>Προϊόν Β :</u> λ_2 = ……

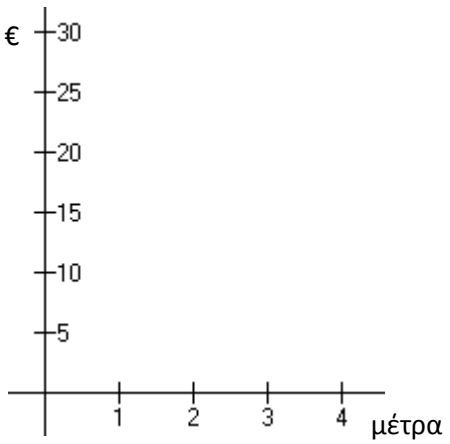
Ποσότητα	1	2	3
Κόστος	6	12	18

Στόχος αυτής της άσκησης είναι η υπενθύμιση στους μαθητές της έννοιας του *λόγου αναλογίας* μεταξύ δύο ποσοτήτων. Η πράξη που τους ζητείται είναι ιδιαίτερα απλή εφόσον έχουν κατανοήσει την έννοια του *λόγου – πηλίκου* και δεν αναμένεται να υπάρχει δυσκολία υπολογισμού του από τους μαθητές. Η συγκεκριμένη άσκηση *δεν* σχετίζεται απευθείας με την κατασκευή κάποιας γραφικής αναπαράστασης. Όμως εμπεριέχει διπλή χρησιμότητα για την επόμενη άσκηση καθώς παρακάτω θα χρειαστεί ο *λόγος αναλογίας*, αλλά και δεύτερον για την πολύ χρήσιμη ''κρυμμένη'' πληροφορία που υπάρχει σε αυτήν την αναλογία, δηλαδή ότι στο προϊόν Α για παράδειγμα, το *κόστος* είναι τετραπλάσιο της *ποσότητας* (κόστος = 4 x ποσότητα). Ανάγοντας αυτήν την πληροφορία σε ''καθαρά'' μαθηματικά, ο μαθητής μπορεί να αντιστοιχίσει τις δύο οντότητες σε δύο πιο πρακτικές μεταβλητές (x, y) και επομένως να κερδίσει τη σχέση: y=4x. Φυσικά επόμενο βήμα είναι να κατανοήσει ότι πρόκειται για μια απλή ευθεία της μορφής y=αx, όμως επειδή δεν ζητείται σε αυτήν την άσκηση ο σχεδιασμός κάποιας γραφικής αναπαράστασης, δεν αναμένεται οι μαθητές να φτάσουν σε αυτό το επίπεδο συσχετισμού.

3) **(i)** Μπορείτε να παραστήσετε με κατάλληλες ευθείες τα ζευγάρια τιμών (μέτρα υφάσματος, κόστος υφάσματος) που υπάρχουν στους παρακάτω πίνακες;

Μέτρα υφάσματος	1	2	3
Κόστος υφάσματος (€)	10	20	30

Μέτρα υφάσματος	2	4
Κόστος υφάσματος (€)	10	20



<u>Ερώτηση (ii):</u> Βρείτε τους λόγους αναλογίας $\boldsymbol{\lambda_1}$ και $\boldsymbol{\lambda_2}$ που προκύπτουν από κάθε πίνακα

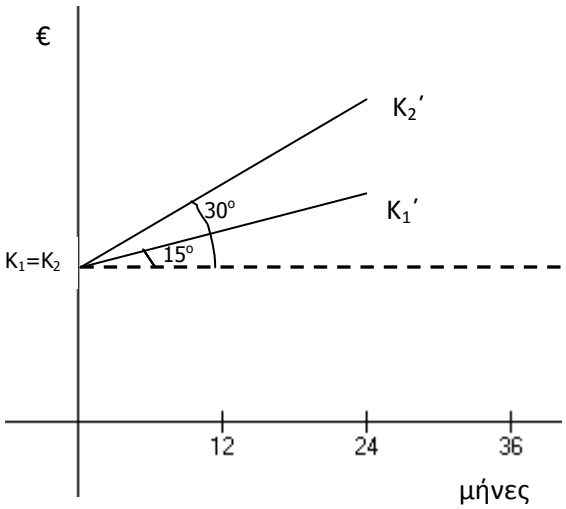
<u>Απάντηση (ii)</u>: $\boldsymbol{\lambda_1}$ **=**……. $\boldsymbol{\lambda_2}$**=**…….

<u>Ερώτηση (iii)</u>: Στις ευθείες που σχεδιάσατε, παίζει κάποιο ρόλο, ο λόγος αναλογίας; Σας θυμίζει κάτι από κάποιο άλλο μάθημα;

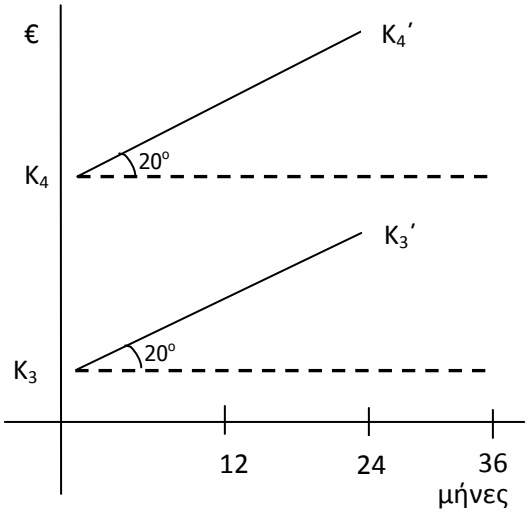
<u>Απάντηση (iii)</u>: …….

Η συγκεκριμένη άσκηση έρχεται να συμπληρώσει τις δύο προηγούμενες και έχει ως **στόχο** να διαπιστώσει αν οι μαθητές μπορούν να συσχετίσουν το *λόγο αναλογίας* με το *συντελεστή διεύθυνσης* ευθείας. Οι μαθητές πρέπει να ξεκινήσουν σχεδιάζοντας τις δύο ευθείες, παίρνοντας τιμές από τα δοσμένα πινακάκια για τα ζευγάρια (*μέτρα*, *κόστος*). Αυτό αναμένεται να μην τους δυσκολέψει καθόλου, αφού έχει δουλευτεί και στο προηγούμενο ερωτηματολόγιο με τη μορφή των ζευγαριών τιμών (x, y), αλλά είναι και εντελώς ανάλογο της πρώτης άσκησης του παρόντος ερωτηματολογίου. Επίσης, η <u>ερώτηση (ii)</u>, είναι πανομοιότυπη ως προς το υπολογιστικό μέρος της προηγούμενης άσκησης. Αυτό όμως που έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον για την έρευνα, είναι η απάντηση στην <u>ερώτηση (iii)</u>. Οι μαθητές, αφού σχεδιάσουν σωστά τις δύο ευθείες, πρέπει να αναρωτηθούν αν η διαφορετικότητά τους οφείλεται στους διαφορετικούς *λόγους αναλογίας*. Η αρχική τους αίσθηση είναι ότι προκύπτουν διαφορετικές ευθείες λόγω διαφορετικών τιμών στα δοσμένα πινακάκια. Σε εκείνο το σημείο λοιπόν, η έρευνα εξετάζει το κατά πόσο οι μαθητές βλέποντας κάποιες γραφικές αναπαραστάσεις (εδώ δύο διαφορετικές ευθείες) κάποιων αριθμητικών δεδομένων, θα μπορέσουν να αντιληφθούν ότι η *κλίση* της κάθε ευθείας, η έννοια δηλαδή του *συντελεστή διεύθυνσης* που έχουν διδαχτεί στο μάθημα της Άλγεβρας, ταυτίζεται με το *λόγο αναλογίας* που γνωρίζουν στο μάθημα *Οικονομικά Μαθηματικά*. Για να φτάσουν βέβαια σε αυτό το επίπεδο συνδυασμών, πρέπει εσωτερικά να γίνουν οι κατάλληλες γνωστικές συγκρούσεις – συνδέσεις που περιγράψαμε και στο προηγούμενο ερώτημα, να αντιληφθούν δηλαδή ότι με χρήση του *λόγου αναλογίας* $\boldsymbol{\lambda}$**,** οι ευθείες που σχεδιάζουν είναι της μορφής $y=\lambda x$.

4) Ο έμπορος Ε, ανάθεσε στον οικονομικό του σύμβουλο Σ, να επενδύσει το κεφάλαιό του K_0 σε κερδοφόρες τραπεζικές καταθέσεις. Μετά από δύο χρόνια, ο Σ έδειξε στον Ε τις παρακάτω δύο γραφικές αναπαραστάσεις της πορείας των επενδύσεων που έκανε, εξηγώντας πως το αρχικό κεφάλαιο K_0, το «έσπασε» σε τέσσερα μέρη K_1, K_2, K_3, K_4 (δηλαδή $K_0=K_1+K_2+K_3+K_4$)



Σχήμα 1



Σχήμα 2

Ερώτηση (i): Γιατί πιστεύετε ότι το K_2' είναι μεγαλύτερο από το K_1'; (επιλέξτε όσες θεωρείτε σωστές απαντήσεις)

α) $K_1 > K_2$ β) διαφορετικός συντελεστής διεύθυνσης γ)διαφορετικό επιτόκιο δ) διαφορετικό χρονικό διάστημα επένδυσης

Ερώτηση (ii): Οι ευθείες K_3K_3' και K_4K_4' είναι παράλληλες. Γιατί; (επιλέξτε τη σωστή απάντηση)

α) $K_4 > K_3$ β) διαφορετικός συντελεστής διεύθυνσης γ) $K_2 > K_3$ δ) ίδιος συντελεστής διεύθυνσης

Ερώτηση (iii): Ποια επένδυση κατάλαβε ο Ε ότι είναι η καλύτερη; (επιλέξτε τη σωστή). Γιατί;

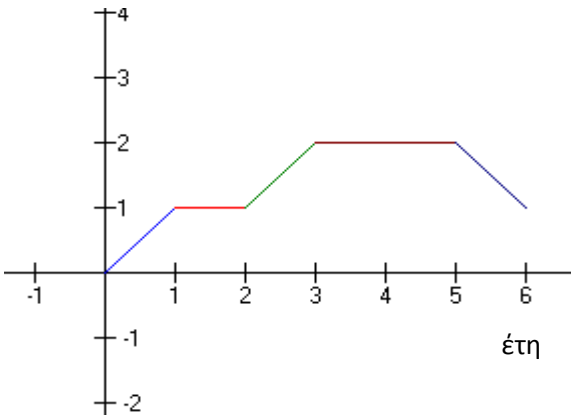
α) K_1 σε K_1' β) K_2 σε K_2' γ) K_3 σε K_3' δ) K_4 σε K_4'

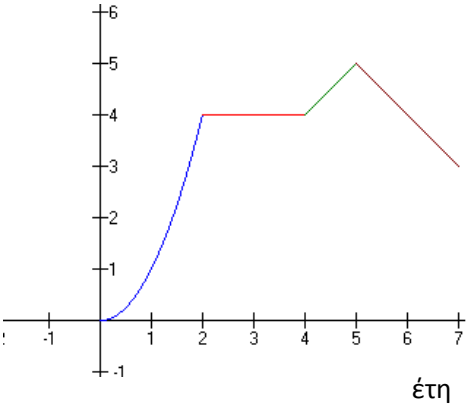
αιτιολόγηση:……

Ο **στόχος** της συγκεκριμένης άσκησης είναι να μπορέσουν οι μαθητές να αντλήσουν πληροφορίες από τις δοσμένες γραφικές αναπαραστάσεις. Τους δίνεται σχηματικά η εξέλιξη τεσσάρων (4) διαφορετικών ποσών (K_1, K_2, K_3, K_4) ενός καταθέτη σε διάστημα δύο ετών (24 μήνες) που τελικά οδηγεί στα ποσά Κ1΄, Κ2΄, Κ3΄, Κ4΄. Οι απαντήσεις των ερωτημάτων δεν απαιτούν ιδιαίτερες οικονομικές γνώσεις, αλλά απλούς ορισμούς όπως *κεφάλαιο, κατάθεση, επιτόκιο* που οι μαθητές κατέχουν από την καθημερινότητα και από τα διδασκόμενα μαθήματά τους, ενώ θα χρειαστεί να κάνουν κάποιες βασικές συνδυαστικές – λογικές σκέψεις προκειμένου να απαντήσουν σωστά. Η **πρώτη** ερώτηση είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα καθώς στις επιλογές απάντησης, περιλαμβάνονται οι όροι *συντελεστής διεύθυνσης* και *επιτόκιο*, εμπλέκονται δηλαδή ξανά τα Μαθηματικά και Οικονομικοί όροι. Το ζητούμενο εδώ είναι διπλό: πρώτον, να εξετάσουμε αν οι μαθητές κατανοούν (μέσω της γραφικής παράστασης), ότι η διαφορετική *κλίση* των ευθειών (που την βλέπουν να αναγράφεται σε μοίρες), δηλαδή ο διαφορετικός *συντελεστής διεύθυνσης* (ήδη γνωρίζουν από τα Μαθηματικά ότι ο *συντελεστής διεύθυνσης* είναι η *εφαπτομένη* της *γωνίας κλίσης*) οδηγεί σε διαφορετικά τελικά ποσά Κ1΄ και Κ2΄. Δεύτερον, να εξετάσουμε την ικανότητά τους να συνδυάσουν την πληροφορία ότι Κ2΄> Κ1΄ (που παρατηρούν από τη γραφική αναπαράσταση) με το διαφορετικό *επιτόκιο* των δύο καταθέσεων, αφού τα αρχικά ποσά είναι ίσα (Κ1 = Κ2) και ο χρόνος κατάθεσης είναι ίδιος (24 μήνες). Ως έμμεση πληροφορία από τον συνδυασμό των δύο παραπάνω απαντήσεων, πιθανόν θα προκύψει σε μερικούς μαθητές ότι στη συγκεκριμένη γραφική αναπαράσταση συνδυάζεται η διαφορετική *γωνία κλίσης* με το *διαφορετικό επιτόκιο*. Η δυνατότητα επιλογής περισσοτέρων από μίας απαντήσεων, αναφέρεται στην ερώτηση, ωστόσο αναμένεται από τους περισσότερους μαθητές να επιλέξουν μόνο μία ως δυνατή απάντηση. Η **δεύτερη** ερώτηση, εξετάζει αν οι μαθητές καταλαβαίνουν ότι η ίδια *γωνία κλίσης* των ευθειών (δηλαδή ο ίδιος *συντελεστής διεύθυνσης* όπως τον γνωρίζουν από τα Μαθηματικά) εκφράζει την παραλληλία και σε αναπαραστάσεις που αναφέρονται σε έννοιες πέραν των *καθαρών* Μαθηματικών. Η **τελευταία** ερώτηση, απαιτεί λίγη σκέψη από μεριάς των μαθητών για το ακριβές ζητούμενο: επιθυμούμε να καταθέσουμε το μικρότερο ποσό και να λάβουμε το μεγαλύτερο τελικό κέρδος. Οι μαθητές, παρατηρώντας τις τιμές των *συντελεστών διεύθυνσης*, μάλλον θα

διαλέξουν την απάντηση (β), όμως θέτοντας και την προϋπόθεση του *μικρότερου αρχικού κεφαλαίου*, και συγκρίνοντας τα τελικά ποσά, θα οδηγηθούν στη σωστή απάντηση (γ).

5) Παρακάτω, δίνονται οι γραφικές αναπαραστάσεις των χρημάτων δύο εταιρειών **E_1** και **E_2** σε κάποια έτη λειτουργίας τους. Συμπληρώστε τα διαστήματα των ετών λειτουργίας (π.χ 3 έως 5) στα οποία η κάθε εταιρεία: i) είχε κέρδη, ii) είχε ζημία, iii)δεν είχε ούτε κέρδη, ούτε ζημία





Κέρδη	
Ζημία	
Σταθερά	

Κέρδη	
Ζημία	
Σταθερά	

Η άσκηση αυτή περιλαμβάνει δύο γραφικές αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούνται και στην <u>ερώτηση 4</u> του **1^{ου} ερωτηματολογίου**. Βέβαια, σε εκείνη την περίπτωση ζητούνται πληροφορίες με συγκεκριμένους μαθηματικούς όρους (*αύξουσα, φθίνουσα, μέγιστο*) και πιθανόν να μπερδέψει τους μη καλά διαβασμένους μαθητές. Στην εδώ όμως περίπτωση δεν χρειάζεται καμιά ιδιαίτερη γνώση Οικονομικών, αλλά οι όροι που αναφέρονται (*κέρδος, ζημία*) είναι επιπέδου Δημοτικού και δεν αναμένεται κάποια παρανόηση. Ο **στόχος** της άσκησης αυτής είναι να μπορέσουν οι μαθητές να αντιστοιχίσουν ακριβώς τους όρους των δύο ερωτήσεων: *αύξουσα – κέρδος*, *φθίνουσα – ζημία*.

Τέλος, η ερώτηση 6 του παρόντος ερωτηματολογίου, είναι ακριβώς ίδια όπως η ερώτηση 6 του **1ου ερωτηματολογίου**, για αυτό παραπέμπουμε σε αυτή για επιπλέον προσδιορισμούς.

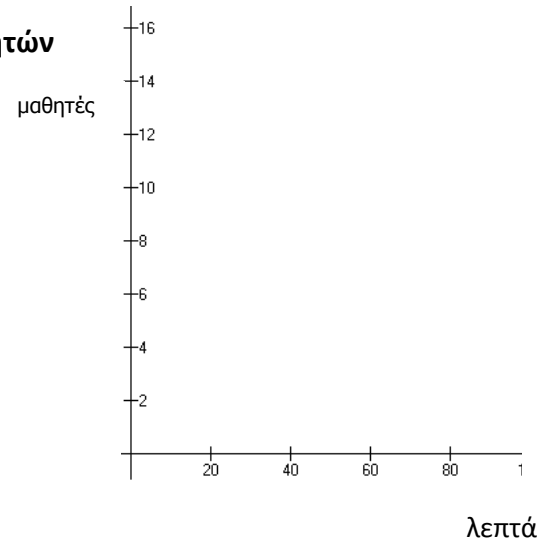
<u>3^{ο} ερωτηματολόγιο – Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου :</u> <u>διάρκεια 40 λεπτά</u>

Οι ερωτήσεις σε αυτό το ερωτηματολόγιο αναφέρονται σε δύο σημαντικά κεφάλαια που περιλαμβάνονται στο σχολικό εγχειρίδιο της Γ΄ Λυκείου και αποτελούν και συνήθη θέματα στις Πανελλαδικές εξετάσεις των ΕΠΑΛ: στο Κεφάλαιο 2 – Στατιστική, όπου αναλύονται έννοιες όπως *συχνότητα, μέση τιμή, διασπορά, διάμεσος* και παρουσιάζονται διάφοροι τρόποι γραφικών αναπαραστάσεων με κυριότερες μορφές το *ραβδόγραμμα* και το *κυκλικό διάγραμμα* και στο Κεφάλαιο 1 – Διαφορικός Λογισμός με ανάλυση στις Παραγώγους και τα χαρακτηριστικά της. Να σημειωθεί επίσης ότι τις αναπαραστάσεις με *ραβδόγραμμα* και *κυκλικό διάγραμμα*, οι μαθητές τις έχουν συναντήσει και στο μάθημα της Πληροφορικής είτε στο Γυμνάσιο είτε στο Λύκειο κατά την ενασχόλησή τους με προγράμματα επεξεργασίας λογιστικών φύλλων (*Excel, Calc*). Οι ασκήσεις που χρησιμοποιούνται στο ερωτηματολόγιο είναι πανομοιότυπες με ασκήσεις του σχολικού βιβλίου, επομένως αναμένεται να υπάρχει μεγάλο ποσοστό επιτυχών απαντήσεων.

Αναλυτικότερα οι <u>ερωτήσεις</u> του ερωτηματολογίου:

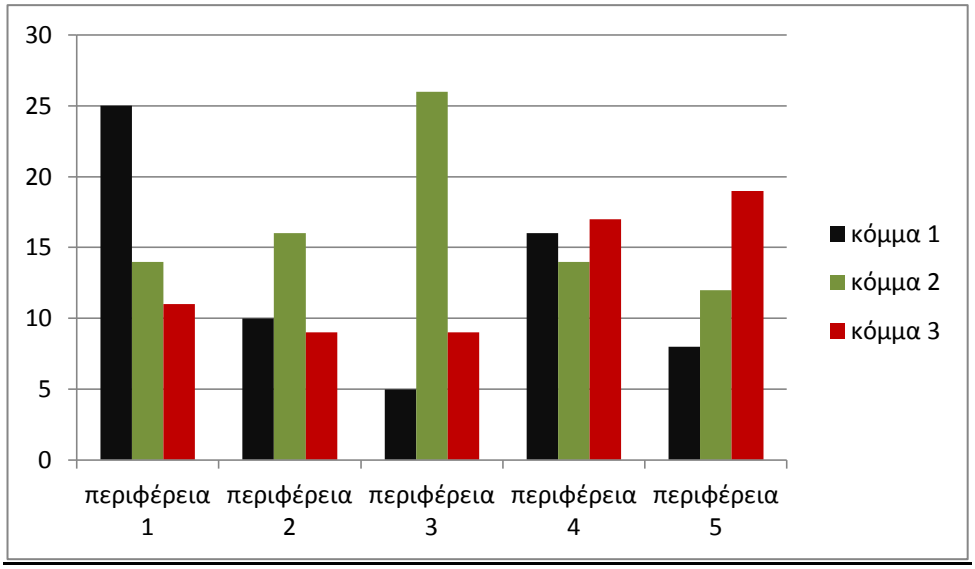
1)Ο παρακάτω πίνακας, δίνει τα λεπτά πλοήγησης στο Διαδίκτυο μέσω του κινητού τηλεφώνου 40 μαθητών. Να παρασταθούν τα δεδομένα σε ένα ιστόγραμμα συχνοτήτων **λεπτών χρήσης – μαθητών**

Λεπτά χρήσης	**μαθητές**
0 – 20	8
20 – 40	12
40 – 60	10
60 – 80	6
80 - 100	4



Η συγκεκριμένη άσκηση είναι η μοναδική στο παρόν ερωτηματολόγιο που ζητάει από τους μαθητές σχεδιασμό μιας γραφικής αναπαράστασης. Ο **στόχος** της χρήσης του *ιστογράμματος* είναι οι μαθητές να θυμηθούν αυτόν τον τρόπο αναπαράστασης δεδομένων και να βοηθηθούν με την επόμενη άσκηση του ερωτηματολογίου που απαιτεί καλύτερη ανάλυση των πληροφοριών που παρέχει ένα *ραβδόγραμμα*. Επίσης, πρέπει να αναλογιστούν τη διπλή διαφορετικότητα αυτού του τρόπου αναπαράστασης σε σχέση με μια κλασική γραφική παράσταση που προφανώς έχουν συναντήσει περισσότερες φορές στα σχολικά τους χρόνια: από τη μια να αντιστοιχίσουν τις τιμές του δοσμένου πίνακα των ποσοτήτων (*λεπτά χρήσης, μαθητές*) με ένα ζευγάρι μεταβλητών (x, y) και δεύτερον να μην θεωρήσουν ότι αυτό το ζεύγος τιμών αντιστοιχεί απλώς σε ένα σημείο του επιπέδου, όπως πιθανόν να έχουν συνηθίσει, αλλά σε μια ολόκληρη *ράβδο* τιμών. Επειδή η επόμενη άσκηση έχει σχεδιασμένο ένα ραβδόγραμμα, η εικόνα αυτή θα βοηθήσει τους μαθητές να ξεπεράσουν τις τυχόν δυσκολίες σχεδιασμού του παρόντος *ιστογράμματος*.

2)Στο παρακάτω ραβδόγραμμα συχνοτήτων, παρουσιάζονται οι ψήφοι (σε χιλιάδες) τριών κομμάτων σε πέντε εκλογικές περιφέρειες.



<u>Ερώτηση (i):</u> Ποια είναι η καλύτερη περιφέρεια (αριθμός) για κάθε κόμμα;

<u>Απάντηση (i):</u> κόμμα 1: ..... κόμμα 2: ..... κόμμα 3: .....

Ερώτηση (ii): Στην περιφέρεια 3, σε σύνολο 40 χιλιάδων ψηφοφόρων των τριών κομμάτων, ποια είναι η σχετική συχνότητα του 1^{ου} κόμματος;

Απάντηση (ii): …….

Ερώτηση (iii): Σε ποια περιφέρεια, η μέση τιμή των ψήφων των τριών κομμάτων είναι πιο κοντά στους ψήφους που πήρε το κάθε κόμμα σε εκείνη την περιφέρεια;

Απάντηση (iii): ……

Ερώτηση (iv): Χρειάστηκε να κάνετε κάποιες πράξεις στην ερώτηση 1;

Απάντηση (iv): (Ναι/ Όχι) …….

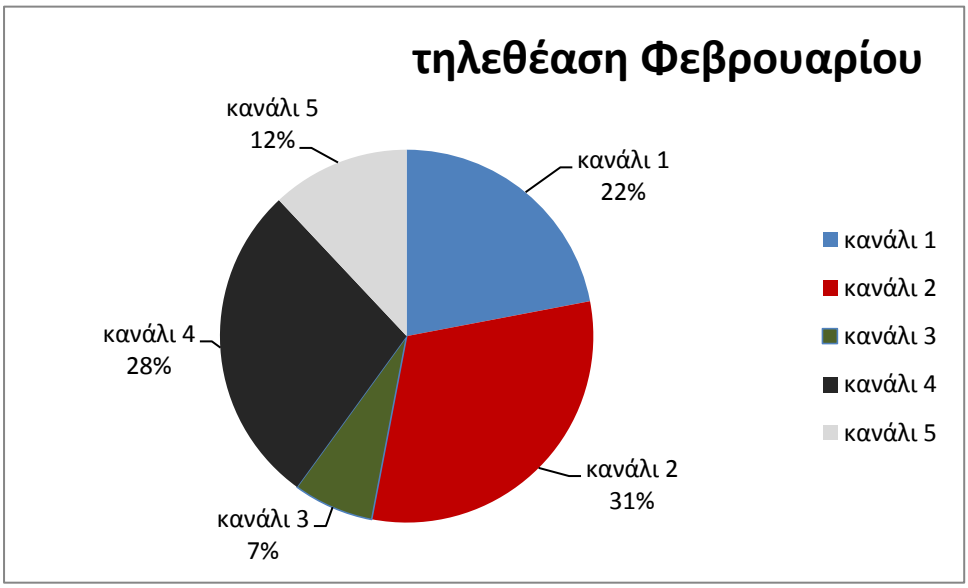
Ερώτηση (v): Χρειάστηκε να κάνετε κάποιες πράξεις στην ερώτηση 3;

Απάντηση (v): (Ναι/ Όχι) …….

Στόχος της παρούσας άσκησης είναι να μπορέσουν οι μαθητές να εξαγάγουν από το δοσμένο *ραβδόγραμμα* αφενός τις ζητούμενες πληροφορίες και αφετέρου να αναρωτηθούν για το πλήθος των επιπλέον πληροφοριών που υπάρχουν ‘’κρυμμένες’’ σε αυτό αλλά δεν ζητούνται από την άσκηση. Η απάντηση στην πρώτη ερώτηση είναι εντελώς ‘’αυτόματη’’ και προκύπτει από το κύριο χαρακτηριστικό του *ραβδογράμματος*, ότι δηλαδή ‘’η υψηλότερη ράβδος αντιστοιχεί στη μεγαλύτερη τιμή’’. Η δεύτερη ερώτηση εμπλέκει την έννοια της *σχετικής συχνότητας* και ο υπολογισμός της (πηλίκο του *μερικού* προς το *όλο*) απαιτεί σύνθετη σκέψη, αφού τα απαιτούμενα δεδομένα πρέπει οι μαθητές να τα αντλήσουν από το *ραβδόγραμμα*. Η τρίτη ερώτηση έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον και ίσως μια δυσκολία παραπάνω σε σχέση με τις υπόλοιπες. Η έννοια της *μέσης τιμής* που αναφέρεται και ο τρόπος υπολογισμού της (πηλίκο *αθροίσματος* προς *πλήθος*) θεωρούνται γνωστά στο σύνολο των μαθητών. Ωστόσο το ενδιαφέρον στην έρευνα δεν είναι ο αλγεβρικός υπολογισμός της *μέσης τιμής* σε κάθε περιφέρεια και κατόπιν η σύγκριση με τους ψήφους του κάθε κόμματος, αλλά η *οπτική* απάντηση που

μπορούν να δώσουν οι μαθητές με σύγκριση του ύψους των *ράβδων*. Μάλιστα για επιβεβαίωση της απευθείας χρήσης της οπτικής πληροφορίας της γραφικής αναπαράστασης, τόσο στην πιο ‘’προφανή’’ απάντηση της πρώτης ερώτησης, όσο και στη συνθετότερη τρίτη ερώτηση, χρησιμοποιούνται οι δύο τελευταίες ερωτήσεις στο ερωτηματολόγιο. Σε περίπτωση που οι μαθητές εκμεταλλευτούν την οπτικοποιημένη πληροφορία, δεν αναμένεται να έχουν δυσκολία στις απαντήσεις της δεύτερης άσκησης. Όμως, υπάρχει πιθανότητα να εμπλακούν με σύνθετους υπολογισμούς και να οδηγηθούν σε λάθος συμπεράσματα ή ακόμα και να παραιτηθούν από την άσκηση.

3)Στο παρακάτω κυκλικό διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων, φαίνονται τα ποσοστά τηλεθέασης πέντε (**5**) ιδιωτικών καναλιών τον μήνα Φεβρουάριο.



<u>Ερώτηση (i):</u> Ποιο κανάλι έχει ποσοστό τηλεθέασης πιο κοντά στη μέση τιμή τηλεθέασης των πέντε καναλιών;

<u>Απάντηση (i):</u> ……

<u>Ερώτηση (ii):</u> Ποια είναι η τιμή της διαμέσου των παραπάνω ποσοστών τηλεθέασης; Είναι εύκολη η απάντηση;

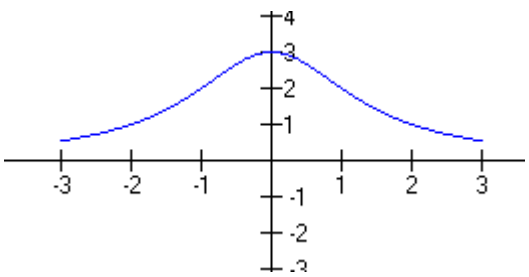
<u>Απάντηση (ii):</u> ……

<u>Ερώτηση (iii):</u> Είναι σωστή η φράση «το τόξο που αντιστοιχεί στο κανάλι 1, είναι περίπου 72°»; Αιτιολογήστε

<u>Απάντηση (iii):</u> ……

Σε αυτήν την άσκηση, χρησιμοποιείται ένα *κυκλικό διάγραμμα* ως γραφική αναπαράσταση των δοσμένων σχετικών συχνοτήτων τηλεθέασης. Επειδή τα δεδομένα είναι εκφρασμένα σε *ποσοστά ως προς τις 100*, αυτή η γραφική αναπαράσταση θεωρείται η καταλληλότερη. Ο **στόχος** της άσκησης είναι διπλός καθώς οι ερωτήσεις εμπλέκουν δύο προοπτικές βάσει των οποίων οι μαθητές πρέπει να αντιμετωπίσουν το συγκεκριμένο διάγραμμα. Πρώτον και βασικότερο, είναι η χαρακτηριστική ιδιότητα του *κυκλικού διαγράμματος* (*πίτας*), βάσει της οποίας το κάθε ένα από τα δοσμένα κομμάτια της, αντιστοιχεί σε κάποιο ποσοστό – μέρος της *πίτας* και όλα μαζί που συμπληρώνουν τον κυκλικό δίσκο, δίνουν ποσοστό 100%. Παράλληλα, το διάγραμμα αυτό, αποτελεί απλώς έναν *κύκλο* εφοδιασμένο με όλες τις γεωμετρικές ιδιότητες του σχήματος αυτού (*γωνίες, διάμετρο, περιφέρεια*). Η πρώτη ερώτηση, είναι ιδιαίτερα απλή εφόσον οι μαθητές εκμεταλλευτούν την πρώτη ιδιότητα του *κυκλικού διαγράμματος* που προαναφέρθηκε. Η επόμενη ερώτηση αναφέρεται στην έννοια της *διαμέσου* των ποσοστών τηλεθέασης, που απαιτεί μια απλή ταξινόμηση των δοσμένων πέντε (5) ποσοστών και επιλογή του μεσαίου. Εδώ οι μαθητές που δεν έχουν ξεκαθαρίσει καλά αυτήν την έννοια, μπορεί να μπερδευτούν με την *μέση τιμή* και να απαντήσουν λανθασμένα. Η τρίτη ερώτηση είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα, αφού συσχετίζει την απάντηση που δόθηκε στην πρώτη ερώτηση και αφορούσε στη *μέση τιμή* (κατά προσέγγιση) των ποσοστών τηλεθέασης, με τη μέτρηση μιας γωνίας (δηλαδή ένα καθαρά γεωμετρικό χαρακτηριστικό). Εδώ οι μαθητές πρέπει να κάνουν σύνθετες διαδοχικές σκέψεις και φυσικά να θυμηθούν ότι ολόκληρος ο κυκλικός δίσκος αποτελείται από 360°.

4)Στο παρακάτω σχήμα, έχουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{6}{2+x^2}$.

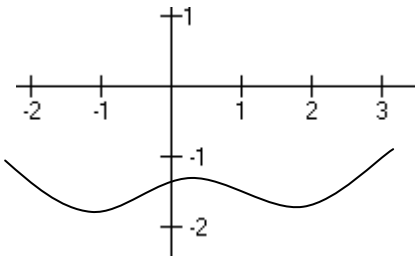


<u>Ερώτηση:</u> Από το σχήμα συμπεραίνουμε ότι οι τιμές του x για τις οποίες ισχύει $\frac{6}{2+x^2} > 2$ είναι

α) x > 2 β) -1 < x < 1 γ) -2 < x < 2 δ)x < -2

Στη συγκεκριμένη άσκηση, εγκαταλείπουμε το κομμάτι της Στατιστικής και ασχολούμαστε με πιο κλασικές γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων. Ο **στόχος** της άσκησης είναι πολλαπλός και θεμελιώδης όσον αφορά στην απεικόνιση συναρτήσεων σε γράφημα. Αρχικά, περιέχει και αρνητικές τιμές και στους δύο άξονες, γεγονός που θα ταρακουνήσει λίγο τους μαθητές, αφού πρέπει να θυμηθούν ότι στους αρνητικούς αριθμούς αντιστρέφεται η διάταξη (μεγαλύτερος αρνητικός αριθμός, είναι αυτός που αντιστοιχεί σε μικρότερο αντίστοιχο θετικό). Αν αυτή η σκέψη τους μπερδεύει, μπορούν να ''εμπιστευτούν'' την εικόνα που βλέπουν (και αυτό είναι το ζητούμενο της έρευνας). Έτσι θα συμπεράνουν ότι στον οριζόντιο άξονα οι αριθμοί μεγαλώνουν καθώς κινούμαστε προς τα δεξιά, ενώ στον κάθετο άξονα μεγαλώνουν όσο κινούμαστε προς τα επάνω. Το δεύτερο συμπέρασμα στο οποίο πρέπει να καταλήξουν οι μαθητές είναι ότι στην πραγματικότητα η άσκηση τους ζητάει να βρουν κάποια συγκεκριμένα σημεία της σχεδιασμένης γραμμής (άρα *τιμές f(x)*) και κατόπιν να κοιτάξουν τις ιδιότητες που πληρούν τα αντίστοιχα x στον οριζόντιο άξονα. Αναμένεται να υπάρξει σύγχυση στις απαντήσεις των μαθητών που ακόμα και τώρα που φοιτούν στην τελευταία τάξη του Λυκείου, δεν έχουν ξεκαθαρίσει τη διαφορά μεταξύ του x και του f(x).

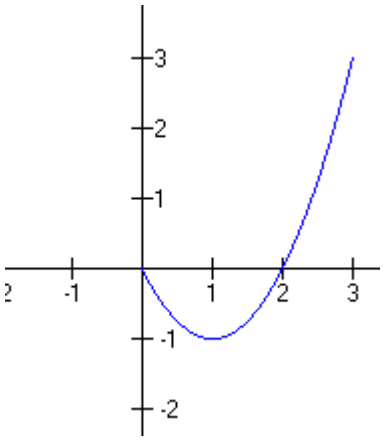
5)Η ευθεία y=k, θέλουμε να τέμνει την παρακάτω γραφική παράσταση της συνάρτησης f σε 4 διαφορετικά σημεία.



Τότε πρέπει: α) k > -1 β)k= - 1 γ) k < - 2 δ) -2 < k < -1

Ο **στόχος** αυτής της άσκησης είναι πανομοιότυπος με της προηγούμενης, δηλαδή να σιγουρευτούν οι μαθητές, μέσω της γραφικής παράστασης που τους δίνεται, ότι έχουν ξεκαθαρίσει τις διαφορετικότητες των x και f(x). Επιπλέον, να κατανοήσουν ότι τους ζητείται να σχεδιάσουν μια ευθεία παράλληλη προς τον άξονα των x, δηλαδή μία άλλη γραφική παράσταση που συναντάει την αρχική σε τέσσερα (4) σημεία. Και εδώ βέβαια, χρειάζεται αντίληψη της διάταξης των αρνητικών αριθμών στον κάθετο άξονα.

6)Παρακάτω δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 2x$ με πεδίο ορισμού A=[0,3].



<u>Ερώτηση (i):</u> Να γράψετε ποια είναι τα ακρότατα της γραφικής παράστασης της f

<u>Απάντηση (i):</u> .....

<u>Ερώτηση (ii):</u> Σε ποια διαστήματα είναι η συνάρτηση f: α) αύξουσα, β) φθίνουσα, γ) σταθερή;

<u>Απάντηση (ii):</u> α) ..... , β) ..... , γ) .....

Στη συγκεκριμένη άσκηση, ο **στόχος** είναι με δοσμένη μία γραφική αναπαράσταση μεταβλητής μονοτονίας, να μπορέσουν οι μαθητές να επισημάνουν τα διαστήματα όπου η συνάρτηση που απεικονίζεται γραφικά εκδηλώνει μονοτονία, καθώς και κάποιες ακραίες τιμές της. Οι μαθηματικές γνώσεις που απαιτεί η άσκηση αυτή, αποκτούνται σε εισαγωγικό επίπεδο στη Β΄ Λυκείου, ενώ ιδιαίτερα μελετούνται στη Γ΄ Λυκείου και αποτελούν μάλιστα και επανειλημμένα

θέματα στις Πανελλαδικές εξετάσεις των ΕΠΑΛ. Η άσκηση αυτή, μάλλον θεωρείται η ευκολότερη από τις μέχρι τώρα ερωτήσεις στο ερωτηματολόγιο αυτό, καθώς δεν χρειάζεται ιδιαίτερους υπολογισμούς και η δοσμένη γραφική αναπαράσταση είναι πολύ κατατοπιστική για να δοθούν σωστές απαντήσεις.

Τέλος, η ερώτηση 7 του παρόντος ερωτηματολογίου, είναι ακριβώς ίδια όπως η ερώτηση 6 του **1ου ερωτηματολογίου** (με επιπρόσθετο σχολιασμό μίας ερώτησης), για αυτό παραπέμπουμε σε αυτή για επιπλέον προσδιορισμούς.

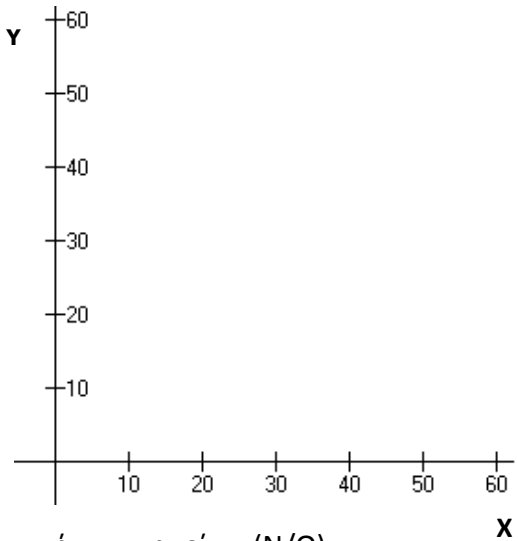
<u>4^{ο} ερωτηματολόγιο – Αρχές Οικονομικής Θεωρίας Γ΄ Λυκείου :</u> <u>διάρκεια 40 λεπτά</u>

Το μάθημα ‘’Αρχές Οικονομικής Θεωρίας’’ είναι μάθημα ειδικότητας της Γ΄ Λυκείου, διδάσκεται στον τομέα Οικονομίας και τη στιγμή που πραγματοποιείται η έρευνα, είναι εξεταζόμενο μάθημα στις Πανελλαδικές εξετάσεις των ΕΠΑΛ. Οι ερωτήσεις του ερωτηματολογίου είναι προσαρμοσμένες στην εξεταστέα ύλη του μαθήματος χωρίς να εμβαθύνει σε πολύπλοκους και σύνθετους υπολογισμούς. Ειδικότερα, απαιτεί γνώσεις των μαθητών από το 1^{ο} Κεφάλαιο (Βασικές Οικονομικές έννοιες), το οποίο πραγματεύεται έννοιες όπως *οικονομικά αγαθά, παραγωγικές δυνατότητες της οικονομίας, οικονομικό κύκλωμα*, το 7^{ο} Κεφάλαιο (*Ακαθάριστο Εγχώριο Προϊόν - Α.Ε.Π., δείκτης τιμών, προστιθέμενη αξία*) και τέλος το 9^{ο} Κεφάλαιο (*Οικονομικές διακυμάνσεις, Πληθωρισμός, Ανεργία*).

Αναλυτικότερα οι <u>ερωτήσεις</u> του ερωτηματολογίου:

1) **(i)** Από τον παρακάτω πίνακα να κατασκευαστεί η καμπύλη παραγωγικών δυνατοτήτων της οικονομίας για τα ζεύγη των αγαθών Χ, Υ και για τους συνδυασμούς των ποσοτήτων στα σημεία Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ

Σημείο	**Χ**	**Υ**
Α	50	0
Β	40	10
Γ	30	20
Δ	20	30
Ε	10	40
Ζ	0	50



<u>Ερώτηση: (ii)</u> Είναι δυνατή η ταυτόχρονη παραγωγή των σημείων;(Ν/Ο)

Κ(10,10):.....

Λ(30,30):……

Μ(40,20):…….

Στόχος της άσκησης είναι οι μαθητές να αντιληφθούν ότι πρόκειται για μια απλή σχεδίαση μιας ευθείας (γενικότερα *καμπύλη παραγωγικών δυνατοτήτων*), εντελώς ανάλογη με αυτές που σχεδιάζουν στο μάθημα των Μαθηματικών. Μάλιστα οι *συντεταγμένες* των δοσμένων σημείων (στην πραγματικότητα οι *ποσότητες* των δύο (2) αγαθών που χρησιμοποιούνται για την παραγωγή των σημείων) τα οποία θα ενωθούν ώστε να προκύψει η ζητούμενη ευθεία, δίνονται σε ζεύγη (Χ, Υ), γεγονός που θα διευκολύνει ιδιαίτερα τους μαθητές. Επόμενο βήμα είναι να διαπιστώσουν οι μαθητές, αν τα ζητούμενα σημεία είναι *εντός* του χωρίου που ορίζουν η σχεδιασμένη ευθεία με τους άξονες (οπότε είναι δυνατή η ταυτόχρονη παραγωγή τους) ή *εκτός* αυτού στην αντίθετη περίπτωση. Αυτό βέβαια συμπεραίνεται άμεσα από την εικόνα που προκύπτει και ακριβώς αυτήν την ευκολία απάντησης μέσω της σχεδιασμένης γραφικής αναπαράστασης εξετάζει η έρευνα σε αυτό το σημείο.

2) **(i)** Συμπληρώστε το παρακάτω ραβδόγραμμα που δείχνει την μεταβολή του **δείκτη τιμών (ΔΤ)** μεταξύ των ετών 2004 και 2008, χρησιμοποιώντας τις εξής πληροφορίες:

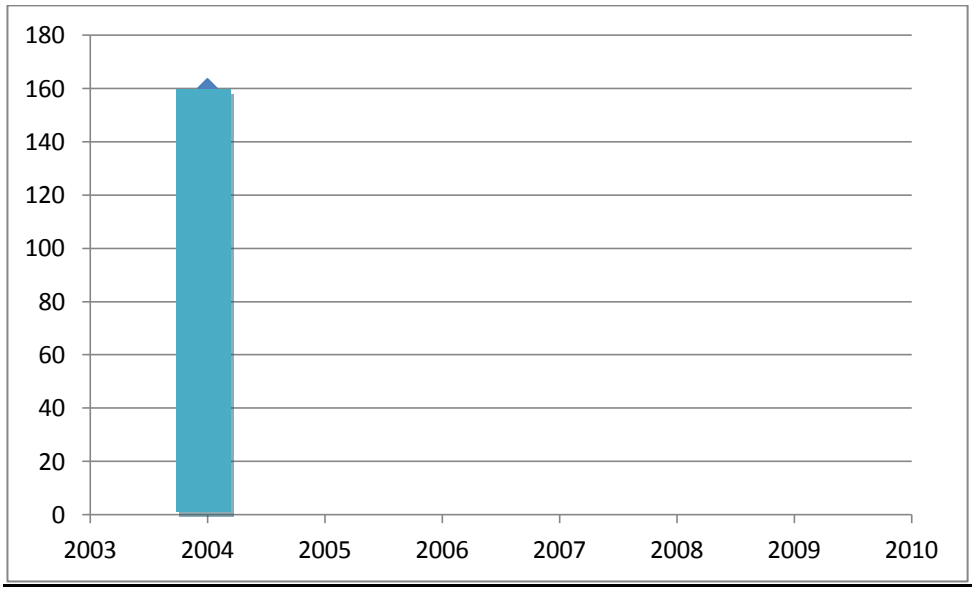
α) το 2004, ο ΔΤ ήταν 160

β) το 2005, ο ΔΤ παρουσίασε αύξηση κατά 10% σε σχέση με το 2004

γ) το 2006, ο ΔΤ μειώθηκε στην τιμή 140

δ) το 2007, ο ΔΤ έφτασε στα επίπεδα του 2005 και επιπλέον 4 μονάδες

ε)το 2008, ο ΔΤ μειώθηκε κατά 20% σε σχέση με το 2007



<u>Ερώτηση (ii):</u> Ποια είναι η καλύτερη οικονομική χρονιά και ποια η χειρότερη;

<u>Απάντηση (ii):</u> καλύτερη: …… χειρότερη: ……

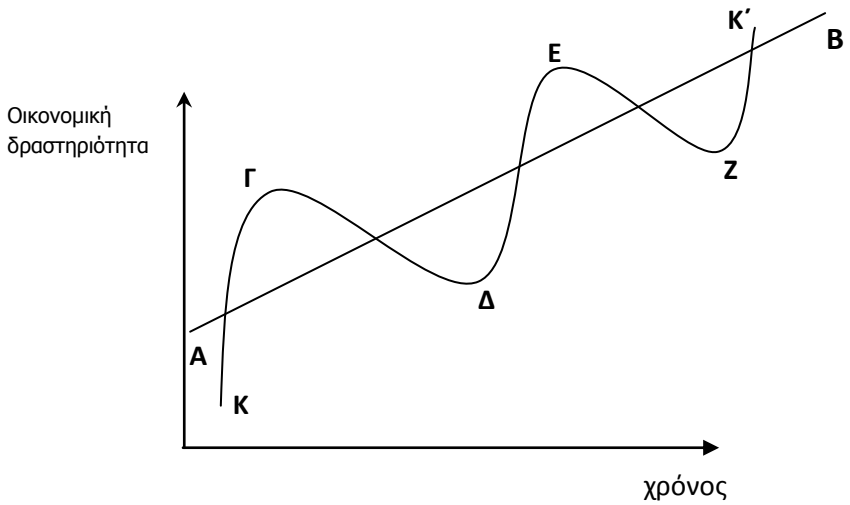
<u>Ερώτηση (iii):</u> Η απάντηση στην παραπάνω ερώτηση έγινε πιο εύκολη με τη χρήση του ραβδογράμματος:

α) **πολύ** β)**ελάχιστα** γ)**καθόλου**

Στόχος αυτής της άσκησης είναι να μπορέσουν οι μαθητές συμπληρώνοντας το δοσμένο *ραβδόγραμμα* να εξάγουν με πολύ εύκολο τρόπο τις ζητούμενες απαντήσεις. Εμπεριέχεται ο όρος *δείκτης τιμών* στα ζητούμενα της άσκησης και αυτό βέβαια απαιτεί γνώση του συγκεκριμένου όρου και της χρησιμότητάς του. Επιπλέον οι τιμές των υπόλοιπων *ράβδων* που πρέπει να συμπληρωθούν, προκύπτουν με στοιχειώδης σκέψεις – πράξεις και δεν αναμένεται να δυσκολέψει τους μαθητές. Ιδιαίτερη σημασία για την έρευνα έχει η απάντηση στην <u>ερώτηση (iii)</u> η οποία θα τονίσει την χρησιμότητα των γραφικών αναπαραστάσεων στην εύκολη εξαγωγή συμπερασμάτων – πληροφοριών.

Η <u>ερώτηση 3</u> του παρόντος ερωτηματολογίου, είναι ακριβώς ίδια όπως η <u>ερώτηση 4</u> του **2ου ερωτηματολογίου** (Οικονομικά Μαθηματικά – Β΄ Λυκείου), για αυτό παραπέμπουμε σε αυτή για επιπλέον προσδιορισμούς.

4) Στο παρακάτω διάγραμμα , η καμπύλη **ΚΚ΄** δείχνει τις διάφορες φάσεις της οικονομίας στο πέρασμα του χρόνου (Η γραμμή ΑΒ παριστάνει τη μακροχρόνια ανοδική τάση της οικονομίας)



<u>Ερώτηση (i):</u> Συμπληρώστε κατάλληλα τα κενά:

Η φάση της οικονομίας από το σημείο ……. στην κορυφή ……, ονομάζεται άνοδος , ενώ η φάση από το…….. στο σημείο …….. , ονομάζεται κάθοδος. Στο σημείο …… σημειώνεται η φάση της κρίσης, ενώ στο σημείο ……. η φάση της ύφεσης

<u>Ερώτηση (ii):</u> Αν η καμπύλη **ΚΚ΄** μπορούσε να θεωρηθεί η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης ως προς τον οριζόντιο άξονα **ΑΒ,** συμπληρώστε τα κενά με τους σωστούς μαθηματικούς όρους:
Η συνάρτηση στο τμήμα **ΚΓ** είναι ……. ενώ στο τμήμα **ΓΔ** είναι …….. και παρουσιάζει στο σημείο **Ε** ..... …….. και στο σημείο **Ζ** …….. ……..

Ο **στόχος** της συγκεκριμένης άσκησης, αποτελεί στην πραγματικότητα τον *τριπλό* στόχο της έρευνας αυτής για τις δυνατότητες μάθησης που παρέχουν οι γραφικές αναπαραστάσεις (*κατανόηση μαθηματικών εννοιών*, *κατανόηση ειδικών οικονομικών εννοιών*, *συσχετισμός μαθηματικών – ειδικότητας οικονομικών*). Δίνεται μια γραφική αναπαράσταση διαφόρων φάσεων της οικονομικής δραστηριότητας στην πάροδο του χρόνου και ζητείται από τους μαθητές να συνδυάσουν σωστά τις έννοιες *άνοδος – αύξουσα, κάθοδος – φθίνουσα, φάση κρίσης – τοπικό μέγιστο, φάση ύφεσης – τοπικό ελάχιστο*.

Τέλος, η <u>ερώτηση 5</u> του παρόντος ερωτηματολογίου, είναι ακριβώς ίδια όπως η <u>ερώτηση 6</u> του **1ου ερωτηματολογίου** (με σχολιασμό μίας λιγότερης ερώτησης), για αυτό παραπέμπουμε σε αυτή για επιπλέον προσδιορισμούς.

3 ΔΙΕΞΑΓΩΓΗ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ - ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε σε ένα τμήμα της Β΄ τάξης και ένα της Γ΄ τάξης του τομέα Οικονομίας, όπως προαναφέρθηκε. Χρονικά, επιλέχτηκε το διάστημα της τρίτης εβδομάδας πριν την έναρξη των ενδοσχολικών εξετάσεων, καθώς μέχρι εκείνη την περίοδο έχει ολοκληρωθεί η διδασκαλία της ύλης από τους καθηγητές και ξεκινούν οι επαναλήψεις. Επίσης, επειδή τα ερωτηματολόγια περιλαμβάνουν ασκήσεις από όλο το εύρος της σχολικής ύλης, κατέχουν και τον ρόλο του επαναληπτικού ‘’τεστ’’. Βέβαια, δεν δόθηκε και το κίνητρο της καλυτέρευσης της βαθμολογίας των μαθητών με τη συμμετοχή τους στην έρευνα, γεγονός που την έκανε καθαρά εθελοντική από μεριάς των μαθητών.

Στους μαθητές της κάθε τάξης, δόθηκε πρώτα προς συμπλήρωση το ερωτηματολόγιο που απευθύνεται στις γενικές μαθηματικές έννοιες που διδάσκονται και κατόπιν (άλλη ημέρα) το ερωτηματολόγιο που περιλαμβάνει ερωτήσεις σχετικές με έννοιες του τομέα σπουδών τους.

Παρακάτω δίνεται η λεκτική - συγκεντρωτική ανάλυση της κάθε ερώτησης για όλα τα ερωτηματολόγια καθώς και σε γραφική αναπαράσταση (με χρήση του λογισμικού *Excel*) τα ποσοστά επιτυχών απαντήσεων ανά ερωτηματολόγιο προς εξαγωγή συμπερασμάτων – σχολιασμό.

Τέλος, παρουσιάζονται με λεπτομέρεια (σε μορφή παραρτήματος) όλες οι απαντήσεις που δόθηκαν από τους μαθητές.

3.1.1 <u>Ερωτηματολόγιο 1^{ο} – Άλγεβρα Β΄ Λυκείου</u>

Το πρώτο ερωτηματολόγιο που αφορά σε ασκήσεις Άλγεβρας της Β΄ Λυκείου, απαντήθηκε και από τους 18 μαθητές του τμήματος που συμμετείχε στην έρευνα. Το γενικότερο συμπέρασμα που προκύπτει με μια πρώτη ματιά στις δοσμένες απαντήσεις είναι ότι οι ερωτήσεις 3 και 4 απαντήθηκαν από το μεγαλύτερο ποσοστό των μαθητών, ενώ η άσκηση 2 που απαιτεί τον υπολογισμό του *συντελεστή διεύθυνσης*, δεν απαντήθηκε παρά μόνον από ένα μαθητή! Πιο συγκεκριμένα:

Στην **πρώτη ερώτηση** που αφορούσε στη σχεδίαση τριών γραφικών παραστάσεων, προσπάθησαν να δώσουν **απάντηση** 12 μαθητές (ποσοστό **66 %**), όμως οι περισσότεροι ενώ υπολόγισαν τις συντεταγμένες κάποιων σημείων με χρήση των πινάκων τιμών, όπως τους προέτρεπε και η βοήθεια του ερωτηματολογίου, εντούτοις απλώς σχεδίασαν τα *σημεία* πάνω στο σύστημα συντεταγμένων χωρίς να τα ενώσουν για τον σχηματισμό του γραφήματος ή κατέληξαν σε μια εντελώς λανθασμένη γραφική παράσταση. Μόλις δύο (2) μαθητές (ποσοστό **11 %**) έδωσαν μια ικανοποιητική – **ολοκληρωμένη απάντηση** στο σχεδιασμό της **πρώτης ευθείας.** Η ερμηνεία του μικρού ποσοστού επιτυχίας, μας οδηγεί στη διαπίστωση ότι οι μαθητές δεν έχουν κατανοήσει την έννοια της αναπαράστασης μιας ευθείας στο καρτεσιανό επίπεδο καθώς και της έκφρασης ‘’σημείο που ανήκει σε μια ευθεία’’, αλλά τουλάχιστον είναι ενθαρρυντικό το κομμάτι της απεικόνισης σημείου στο επίπεδο. Βέβαια, κοινό χαρακτηριστικό των μαθητών στα ΕΠΑΛ (και μάλλον και γενικότερο!), είναι ότι δεν διαβάζουν την εκφώνηση της άσκησης με τέτοιο τρόπο ώστε να την κατανοήσουν και να ξεκινήσουν κατόπιν να την λύνουν ή και να εκμεταλλευτούν τυχόν βοήθεια – υποδείξεις που τους δίνονται, αλλά συνήθως αρκούνται σε μια επιπόλαια ανάγνωση και ταύτιση της δοσμένης άσκησης με κάποια άλλη για την οποία έχουν κάποιο πλάνο απάντησης.

Παρόμοια αποτελέσματα (όμως πιο ικανοποιητικά) έχουμε και στην **τρίτη ερώτηση**, όπου το **πρώτο σκέλος** της αφορούσε πάλι στο σχεδιασμό δύο (2) ευθειών με δοσμένα κάποια σημεία τους. Να παρατηρήσουμε εδώ ότι παρόλο που τους δίνεται επίτηδες ένα (1) σύστημα συντεταγμένων ώστε με το σχεδιασμό και των δύο ευθειών σε αυτό, να προκύψει εύκολα το συμπέρασμα της παραλληλίας

τους, ωστόσο πολλοί μαθητές σχεδίασαν την δεύτερη ευθεία σε ένα δικό τους δεύτερο καρτεσιανό επίπεδο. Το ποσοστό **επιτυχούς σχεδιασμού** ή **μέρους αυτού**, είναι σαφώς μεγαλύτερο (10 μαθητές, ποσοστό **55 %**), οπότε πρέπει να αναρωτηθούμε γιατί αυτή η μεγάλη διαφορά σε σχέση με την πρώτη ερώτηση. Πιθανόν, επειδή στην πρώτη άσκηση, ζητείται από τους μαθητές να ορίσουν μόνοι τους τα σημεία των ευθειών, ενώ στην τρίτη άσκηση δίνονται τα σημεία σε πινακάκια, να προέκυψαν αυτές οι διαφορές. Βέβαια, προκύπτει μια απλή ερώτηση – παρατήρηση για τον λόγο που οι μαθητές αφού απάντησαν στο μέρος της σχεδίασης γραφικών παραστάσεων της τρίτης ερώτησης, γιατί δεν ξαναγύρισαν στην πρώτη ερώτηση να συμπληρώσουν την απάντησή τους που είναι εντελώς ανάλογη. Στο **δεύτερο σκέλος** της τρίτης ερώτησης, που σχετίζεται με το *συντελεστή διεύθυνσης* ευθείας και την ιδιότητά του ως προς την παραλληλία των ευθειών, δεν υπάρχει σχεδόν καθόλου συμμετοχή με απαντήσεις των μαθητών (**μισές** ή **ολοκληρωμένες απαντήσεις** μόλις από 3 μαθητές, ποσοστό **16 %**). Αυτό βέβαια δε μας παραξενεύει, καθώς και στη **δεύτερη ερώτηση** (υπολογισμός *συντελεστή διεύθυνσης*) δεν έχουμε παρά μονάχα από μία (1) **σχεδόν ολοκληρωμένη απάντηση** (ποσοστό **5 %**) για τις δύο πρώτες ευθείες. Αυτό μας δείχνει ότι η συγκεκριμένη έννοια, είναι αρκετά ‘’μακριά’’ από τις μαθηματικές γνώσεις των μαθητών και παρόλο που είναι έννοια που διδάσκεται και στην Α΄ Λυκείου αλλά και στη Β΄ Λυκείου, μάλλον αποτελεί μια ‘’λεπτομέρεια’’ στο σχεδιασμό γραφικών αναπαραστάσεων ευθειών στο καρτεσιανό επίπεδο, που δεν έχει συγκρατηθεί στο μυαλό των μαθητών. Επίσης μία (1) σχεδόν σωστή απάντηση, σημειώνεται και για το τελευταίο σκέλος της τρίτης ερώτησης (*γραφική λύση συστήματος 2x2*), που δείχνει την αδυναμία σύνδεσης από πλευράς των μαθητών της γραφικής πληροφορίας με την αλγεβρική λύση ενός συστήματος. Πιθανόν, στο άκουσμα των εννοιών *λύση συστήματος*, οι μαθητές να αποθαρρύνθηκαν εντελώς και να μην προσπάθησαν καθόλου να δουν την προφανή σχεδιαστική απάντηση.

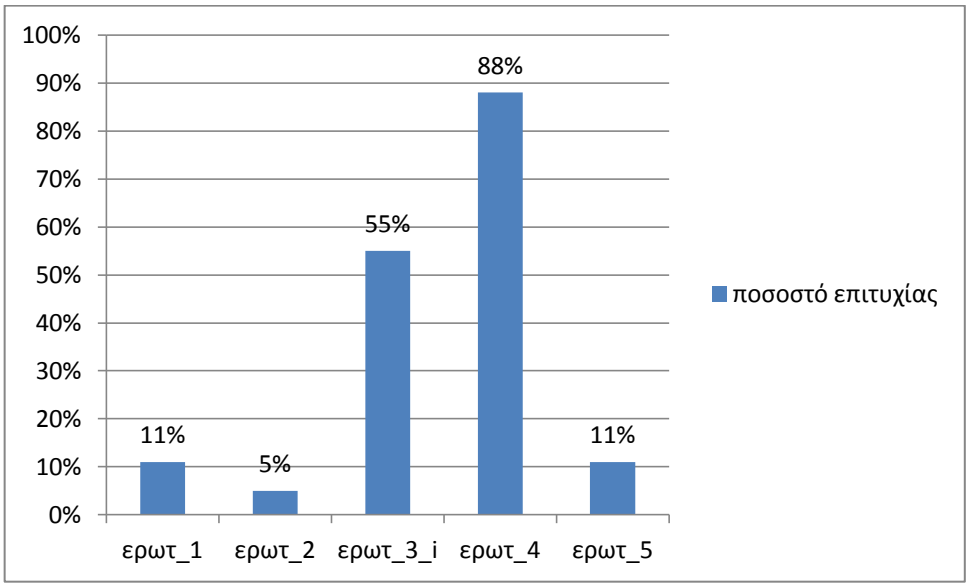
Στην **τέταρτη ερώτηση**, παρατηρείται σχεδόν πλήρης ενεργοποίηση του τμήματος (**ολοκληρωμένες** ή **μισές** σωστά απαντήσεις από 16 μαθητές, ποσοστό **88 %**), από όπου μπορεί να προκύψει σημαντικό συμπέρασμα για την έρευνα. Σε αυτήν την ερώτηση, δίνονται δύο (2) γραφικές παραστάσεις μεταβλητής μονοτονίας, από τις οποίες οι μαθητές μπόρεσαν με ευκολία να εξάγουν την

πληροφορία που αυτές μεταδίδουν. Οι γραφικές αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούνται είναι ιδιαίτερα κατατοπιστικές και αποδεικνύεται ότι με την κατάλληλη γραφική αναπαράσταση, μπορούν να περάσουν στο μυαλό και αρκετά αδύναμων μαθητών, ιδιαίτερες μαθηματικές έννοιες (*αύξουσα, φθίνουσα, σταθερή*).

Τέλος, η **πέμπτη ερώτηση,** που αφορά στις *ρίζες* των πολυωνυμικών συναρτήσεων, φαίνεται πως πάλι μπέρδεψε τους μαθητές. Δεν υπάρχει η δυνατότητα σύνδεσης της γραφικής λύσης που τους δίνεται μέσω των κατάλληλων γραφικών αναπαραστάσεων, με την αλγεβρική έννοια f(x)=0. Πιθανόν, όπως και στην τρίτη ερώτηση, η έννοια της *ρίζας*, τους παρέπεμψε στη μεθοδολογία υπολογισμού των ριζών από το σχετικό κεφάλαιο του σχολικού βιβλίου, με αποτέλεσμα να τους μπλοκάρει και να τους απογοητεύσει. Μόλις δύο (2) μαθητές (ποσοστό **11 %**), έδωσαν μια **ικανοποιητική απάντηση**, γεγονός που δείχνει την παρανόηση της έννοιας ή την αυτοματοποιημένη γνώση υπολογισμού μιας *ρίζας*, χωρίς εσωτερική της αφομοίωση.

Οι παραπάνω δυσκολίες και προσπάθειες να απαντήσουν σωστά οι μαθητές στις ερωτήσεις, εκφράζονται με τις επιλογές κατάταξης των ερωτήσεων ως προς το επίπεδο δυσκολίας που δώσανε στην **έκτη ερώτηση**, η οποία είναι στην πραγματικότητα ένα μικρό ‘’γκάλοπ’’ για το ερωτηματολόγιο. Σε αυτές τις απαντήσεις (που στο σύνολό τους δόθηκαν χωρίς αιτιολόγηση), φαίνεται ξεκάθαρα ότι οι ερωτήσεις **3** και **4** θεωρούνται **μικρής** και **μέτριας δυσκολίας** (15 μαθητές, ποσοστό **83 %**) , ενώ αντίστοιχα υψηλά είναι τα επίπεδα για την **2** και **5** ερώτηση, που χαρακτηρίζονται **μέτριας δυσκολίας** αλλά και **δύσκολες** (14 μαθητές, ποσοστό **77 %**), που δικαιολογούνται βάσει των όσων προαναφέρθηκαν.

3.1.2 Γράφημα ποσοστών σωστών (εξ' ολοκλήρου ή εν μέρει) απαντήσεων ερωτηματολόγιο 1^{ο} – Άλγεβρα Β΄ Λυκείου (18 συμμετέχοντες)



3.2.1 Ερωτηματολόγιο 2ο – Οικονομικά Μαθηματικά Β΄ Λυκείου

Το δεύτερο ερωτηματολόγιο που δόθηκε στους μαθητές της Β΄ Λυκείου, αφορά σε ασκήσεις σχετικές με την ειδικότητα που ακολουθούν, δηλαδή τον τομέα Οικονομίας. Το ερωτηματολόγιο απαντήθηκε από 11 μαθητές του τμήματος και η επικρατούσα εντύπωση είναι ότι οι ασκήσεις που περιέχει είναι απλές και απαντήθηκαν από τους περισσότερους μαθητές, εκτός ίσως της ερώτησης 4 που αν και σημείωσε καλά επίπεδα σωστών απαντήσεων, παραξένεψε τους μαθητές λόγω της πρωτοτυπίας της εκφώνησής της. Αναλυτικότερα:

Στην **πρώτη ερώτηση**, το **αρχικό μέρος** της αφορούσε στη σχεδίαση δύο γραφικών παραστάσεων. Παρατηρούμε δυσκολία στο σχεδιασμό τους (5 μαθητές σχεδίασαν **ικανοποιητικά γραφήματα**, ποσοστό **45%**), γεγονός που παρουσιάστηκε και στο προηγούμενο ερωτηματολόγιο στο κομμάτι σχεδιασμού γραφικών παραστάσεων, παρά την πολύ κατατοπιστική βοήθεια που δίνεται στους μαθητές, η οποία μάλλον δεν χαίρει της προσοχής τους. Δικαιολογημένα λοιπόν οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι οι μαθητές δεν έχουν κατανοήσει σε υψηλό βαθμό την έννοια της δημιουργίας της γραφικής αναπαράστασης μιας ευθείας στο καρτεσιανό επίπεδο καθώς τους έρχεται δύσκολο να απεικονίσουν γραφικά μια σχέση αντιστοίχισης μεταξύ δύο ποσοτήτων. Το **δεύτερο μέρος** της ερώτησης, απαντήθηκε σε **ικανοποιητικό βαθμό** από όλους τους μαθητές (ποσοστό **100 %**) καθώς είδαν την ομοιότητα ανάμεσα στη ζητούμενη γραφική αναπαράσταση και σε αντίστοιχες στο μάθημα της Άλγεβρας (αξιοσημείωτο γεγονός σχετικά με τον τρίτο άξονα της έρευνας για την σύνδεση Μαθηματικών – Τομέα Οικονομίας) ή ακόμα και της Φυσικής. Ωστόσο, παραμένει το ερώτημα, αφού είναι κάτι τόσο γνωστό στους μαθητές, γιατί ο σχεδιασμός των γραφικών παραστάσεων υλοποιήθηκε σχεδόν από τους μισούς;

Στη συνέχεια, αναλύουμε το αποτέλεσμα στις απαντήσεις για την **δεύτερη ερώτηση**, που αφορά στον υπολογισμό *λόγου* αναλογίας δύο (2) ποσοτήτων. Απαντήθηκε **σωστά** από όλους τους συμμετέχοντες μαθητές (ποσοστό **100 %**), κάτι που δείχνει ότι η έννοια αυτή έχει αφομοιωθεί πλήρως από το σύνολο του τμήματος. Βέβαια, η συγκεκριμένη άσκηση είναι απλώς υπολογιστική και δεν σχετίζεται άμεσα με κάποια γραφική διαδικασία ώστε να μπορέσουμε να εξάγουμε

κάποιο χρήσιμο αποτέλεσμα για την έρευνα. Ωστόσο, η χρησιμότητά της αναδεικνύεται στην επόμενη ερώτηση.

Στην **τρίτη ερώτηση**, που είναι συνδυασμός των δύο προηγούμενων ερωτήσεων, αποτυπώνονται περίπου τα ίδια αποτελέσματα. Πιο συγκεκριμένα, στο **πρώτο σκέλος** της που αφορούσε στο σχεδιασμό δύο (2) ευθειών από δοσμένα ζευγάρια τιμών για τις ποσότητες *μέτρα υφάσματος – κόστος υφάσματος*, σημειώνονται 5 **ικανοποιητικές ή ολοκληρωμένες απαντήσεις** (ποσοστό **45 %**) ενώ ακόμα 4 μαθητές (ποσοστό 36%) σχεδίασαν μερικά σημεία που αντιστοιχούν στις τιμές των δοσμένων ζευγαριών, όπως παρατηρήσαμε και στο προηγούμενο ερωτηματολόγιο. Στο **δεύτερο μέρος** της ίδιας ερώτησης (άλλος ένας υπολογισμός λόγου αναλογίας), παρατηρείται ιδιαίτερα υψηλό ποσοστό επιτυχίας (10 σωστές απαντήσεις, ποσοστό **90 %**). Ωστόσο, το ενδιαφέρον μέρος για την έρευνα είναι το **τρίτο μέρος** του ερωτήματος όπου ένα μεγάλο μέρος των μαθητών (7 μαθητές, ποσοστό **63 %**) απάντησε ότι οι σχεδιασμένες ευθείες και ο λόγος αναλογίας τους είναι γνωστά και από το μάθημα της Άλγεβρας (επιτυχής δηλαδή συσχετισμός των δύο μαθημάτων) όμως δεν φαίνεται στις απαντήσεις η προσδοκώμενη αντιστοίχιση μεταξύ *λόγου αναλογίας* και *συντελεστή διεύθυνσης*, γεγονός που δείχνει ότι μέχρι αυτό το σημείο οι μαθητές δεν έχουν καταφέρει να συσχετίσουν πανομοιότυπα με γραφικό τρόπο αυτές τις δύο έννοιες.

Η **τέταρτη ερώτηση**, έχει μια καινοτομία όσο αφορά στην εκφώνησή της, ωστόσο είναι πολύ σημαντική ως προς τα αποτελέσματα που προκύπτουν από τις δοσμένες απαντήσεις. Στο **πρώτο μέρος** της, απάντησαν **σωστά** 5 μαθητές (ποσοστό **45 %**) που είναι και όσοι κατάλαβαν τη σύνδεση *κλίση γωνίας - συντελεστή διεύθυνσης* μέσα από τις δοσμένες γραφικές αναπαραστάσεις καθώς και το ρόλο του *επιτοκίου* στη διαμόρφωση του τελικού ποσού μιας κατάθεσης. Επίσης σημαντικό είναι το γεγονός ότι **επιπλέον** 4 μαθητές (ποσοστό **36%**) απάντησαν ότι η διαφορετικότητα στην κλίση των ευθειών, σημαίνει διαφορετικός *συντελεστής διεύθυνσης* (όπου πιθανότητα θα θυμήθηκαν την έννοια αυτή από την Άλγεβρα που διδάσκονται στο σχολείο). Σε περίπτωση που και αυτοί οι μαθητές, διάβαζαν προσεκτικότερα την εκφώνηση της ερώτησης που τους δίνει δυνατότητα παραπάνω από μία επιλογών, σε σχέση με τη συνήθη μοναδική επιλογή, πιθανολογείται αύξηση του ποσοστού των σωστών απαντήσεων. Στο **δεύτερο μέρος**

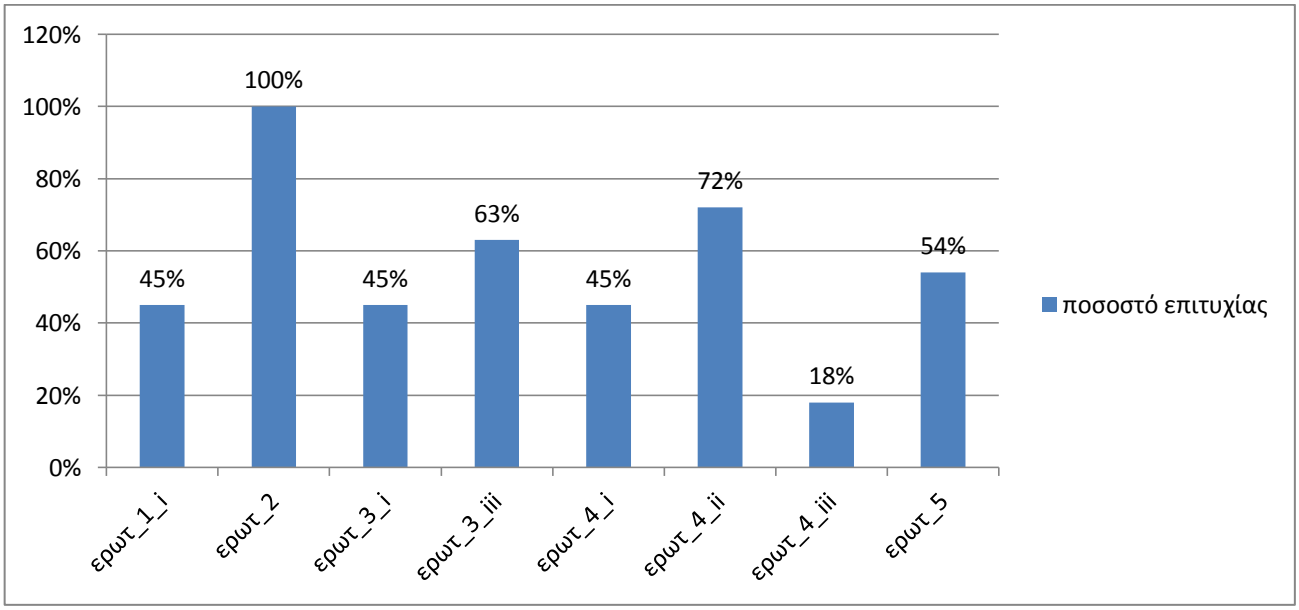
της ερώτησης, σημειώνεται υψηλό ποσοστό **σωστών απαντήσεων** (8 μαθητές , ποσοστό **72 %**) που ερμηνεύεται ως αποτέλεσμα του συνδυασμού *πληροφορίες γραφικής αναπαράστασης – εις άτοπον απαγωγή*. Από τις προτεινόμενες απαντήσεις, οι δύο που δίνονται (η (α) και η (γ)) απορρίπτονται αυτόματα από έναν απλό παρατηρητή της γραφικής αναπαράστασης, χωρίς ιδιαίτερες γνώσεις. Με δεδομένο αυτό και τη γνώση από την Άλγεβρα ότι ‘’παράλληλες ευθείες άρα ίδιος συντελεστής διεύθυνσης’’, απορρίπτεται και η (β) απάντηση, οπότε η (δ) αποτελεί τη μοναδική επιλογή σωστής απάντησης. Στο **τρίτο μέρος** της ερώτησης μόλις 2 μαθητές (ποσοστό **18%**) έδωσαν **εν μέρει σωστή απάντηση** αφού δεν κατάφεραν να δικαιολογήσουν το συλλογισμό τους. Αυτό που πρέπει να κρατήσουμε ως ‘’θετικό’’ για την έρευνα είναι ότι οι μαθητές που απάντησαν **λανθασμένα** (7 μαθητές, ποσοστό **63%**) κατάφεραν να διαβάσουν τη δοσμένη γραφική αναπαράσταση και οι περισσότεροι να θεωρήσουν ως σωστή απάντηση την (α) που αντιστοιχεί σε μεγαλύτερη *γωνία κλίσης*, άρα (κατά το συλλογισμό τους) και σε μεγαλύτερο τελικό κεφάλαιο. Φυσικά, οι μαθητές με τις λανθασμένες απαντήσεις, δεν λάβανε υπόψη και το αρχικό κεφάλαιο επένδυσης K_2 που είναι σχεδόν τριπλάσιο από αυτό της πολύ πιο συμφέρουσας επένδυσης K_3.

Στην **πέμπτη ερώτηση**, προκύπτει ένας κάπως παράξενο συμπέρασμα, αφού οι 6 μαθητές (ποσοστό **54 %**) έδωσαν **σωστές απαντήσεις**, ενώ οι υπόλοιποι 5 μαθητές είτε έδωσαν λανθασμένες απαντήσεις είτε αδιαφόρησαν εντελώς και δεν ασχολήθηκαν με τη συγκεκριμένη ερώτηση. Το παράξενο στα αποτελέσματα που προέκυψαν, είναι ότι η ίδια ακριβώς μορφή γραφικών αναπαραστάσεων, δόθηκε ως ερώτηση 4 στο ερωτηματολόγιο που αφορούσε στην Άλγεβρα της Β΄ Λυκείου, με τη διαφορά ότι εκεί ζητούνταν Μαθηματικές έννοιες από τους μαθητές που είναι ιδιαίτερες (*αύξουσα, φθίνουσα, σταθερή*), αλλά παρατηρήθηκε μεγάλο ποσοστό επιτυχίας στις απαντήσεις (υπενθύμιση: **88%**), ενώ τώρα οι σωστές απαντήσεις (*κέρδος, ζημία, σταθερότητα*) προκύπτουν με μια απλή παρατήρηση, ωστόσο με σημαντικά χαμηλότερο ποσοστό επιτυχίας.

Τέλος, στην **έκτη ερώτηση** - γκάλοπ (ερώτηση κατάταξης των ασκήσεων του ερωτηματολογίου με βάση τη δυσκολία τους) οι παραπάνω δυσκολίες και προσπάθειες να απαντήσουν σωστά οι μαθητές έχουν κατατάξει σχεδόν καθολικά (10 μαθητές, ποσοστό **90 %**) τις ερωτήσεις **1, 2, 3, 5** στις **εύκολες – μέτριας**

δυσκολίας, ενώ η πρωτοτυπία της ερώτησης **4**, την κατατάσσει σε απόλυτο ποσοστό **100%** στις **μέτριας δυσκολίας – δύσκολες**. Αυτές οι επιλογές των μαθητών, υποδηλώνουν μια οικειότητα με τις γραφικές αναπαραστάσεις του ερωτηματολογίου, η οποία όμως περιορίζεται περισσότερο στην οπτική *αναγνώρισή* τους και όχι στην *ουσιαστική* χρήση τους (όπως δείχνουν και τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τις απαντήσεις).

3.2.2 <u>Γράφημα ποσοστών σωστών (εξ' ολοκλήρου ή εν μέρει) απαντήσεων ερωτηματολόγιο 2^{ο} – Οικονομικά Μαθηματικά Β΄ Λυκείου (11 συμμετέχοντες)</u>



3.3.1 Ερωτηματολόγιο 3ο – Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου

Το τρίτο ερωτηματολόγιο δόθηκε στους μαθητές της Γ΄ Λυκείου και αφορούσε σε γενικές μαθηματικές γνώσεις που αποκτούν οι μαθητές κατά τη διάρκεια της τρέχουσας σχολικής χρονιάς. Ιδιαίτερη εντύπωση προκαλεί η καθολικά σωστά απαντημένη πρώτη ερώτηση (*ιστόγραμμα*) και από τους 17 συμμετέχοντες μαθητές αλλά και από την άλλη προβληματισμό η μία και μοναδική σωστή απάντηση στην τέταρτη ερώτηση (*περιορισμός τιμών του x*). Πιο αναλυτικά:

Στην **πρώτη ερώτηση**, οι μαθητές αντιμετωπίζουν την πρόκληση δημιουργίας ενός *ιστογράμματος*, μιας μορφής γραφικής αναπαράστασης που ξεπερνάει τις κλασικές γραφικές παραστάσεις που συναντούν πιο συχνά οι μαθητές. Εντούτοις τα αποτελέσματα δείχνουν ιδιαίτερη ευχέρεια στη διαχείρισή του, καθώς και οι 17 μαθητές (ποσοστό **100%**) το σχεδίασαν με **επιτυχία.**

Η καλή σχέση των μαθητών με το *ραβδόγραμμα,* συνεχίζεται και στη **δεύτερη ερώτηση** καθώς οι μαθητές απάντησαν με υψηλά ποσοστά ορθότητας. Στο **πρώτο μέρος**, σχεδόν όλοι (16 μαθητές, ποσοστό **94 %**) έδωσαν τη σωστή απάντηση αυτόματα, χωρίς πράξεις (όπως δείχνουν και οι απαντήσεις τους στο **τέταρτο μέρος** της ερώτησης), απλώς παρατηρώντας τη γραφική αναπαράσταση, μια διαπίστωση αρκετά σημαντική για την έρευνα. Στο **δεύτερο μέρος**, χρειάστηκε ένας συνδυασμός παρατήρησης του ραβδογράμματος και γνώσης υπολογισμού της *σχετικής συχνότητας,* τον οποίο φαίνεται ότι οι μαθητές κατάφεραν να πραγματοποιήσουν, αφού οι 14 μαθητές (ποσοστό **82 %**) απάντησαν σωστά στο ζητούμενο ερώτημα. Το **τρίτο μέρος** της ερώτησης είναι και το πιο ενδιαφέρον για την έρευνα αφού οι μαθητές παρατηρώντας προσεκτικά το *ραβδόγραμμα* και εξάγοντας σωστά την κατάλληλη πληροφορία, ‘’εκτιμούν’’ τη ζητούμενη *μέση τιμή* ψήφων και δίνουν **σωστή απάντηση** (9 μαθητές, ποσοστό **53%**) χωρίς να εμπλακούν σε πολύπλοκες πράξεις (το δηλώνουν στο **πέμπτο μέρος** της ερώτησης), όπως ήταν και το επιθυμητό από τη διαδικασία της έρευνας. Επίσης, ακόμα και 3 από τους 4 μαθητές (ποσοστό **17%**) που οδηγήθηκαν σε λάθος απάντηση, δήλωσαν στο **τέταρτο μέρος** ότι δεν χρειάστηκε να κάνουν καμιά επιπλέον πράξη για να καταλήξουν στην απάντησή τους. Αθροιστικά λοιπόν, έχουμε ένα ποσοστό **70%** των μαθητών που άντλησαν τις απαιτούμενες πληροφορίες από τη γραφική αναπαράσταση που τους δόθηκε και σε συνδυασμό και με την προηγούμενη ερώτηση, προκύπτει ένα γενικό

συμπέρασμα ευχρηστίας του *ραβδογράμματος* στη μετάδοση πληροφορίας για τους μαθητές.

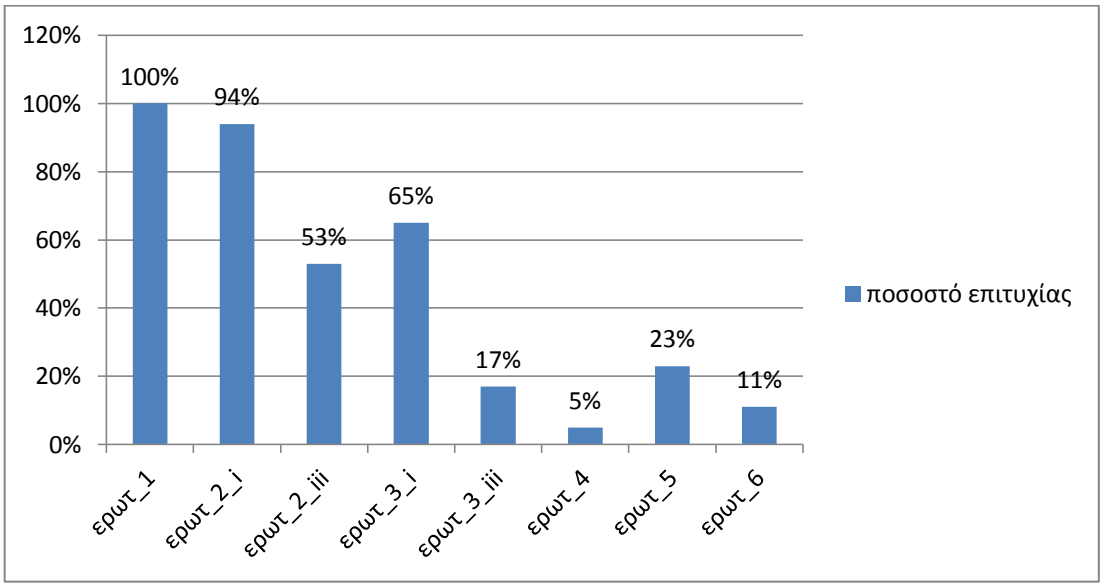
Στην **τρίτη ερώτηση**, δίνεται στους μαθητές ένα *κυκλικό διάγραμμα* (ξανά μια όχι τόσο συνηθισμένη γραφική αναπαράσταση) με ποσοστά τηλεθέασης κάποιων καναλιών, που όπως φαίνεται τελικά από τις απαντήσεις τους αλλά και από την κατάταξη της ερώτησης ως προς τη δυσκολία της (βλ. **έβδομη ερώτηση**) αντιμετωπίστηκε σωστά στο σύνολό της από περίπου τους μισούς μαθητές. Κοιτάζοντας τις απαντήσεις με περισσότερη λεπτομέρεια, βλέπουμε ότι στο **πρώτο μέρος** που απαιτεί έναν απλό υπολογισμό *μέσης τιμής* από πέντε (5) ποσότητες των οποίων το άθροισμα είναι 100 και σύγκρισης του αποτελέσματος με τις πληροφορίες του κυκλικού διαγράμματος, οι 11 μαθητές (ποσοστό **65%**) απάντησαν **σωστά.** Το αξιοσημείωτο εδώ, είναι το αρνητικό ποσοστό **35%** των μαθητών που προσπάθησαν να απαντήσουν αλλά έδωσαν λανθασμένη απάντηση, γεγονός που δείχνει ότι η σχέση των μαθητών με τη συγκεκριμένη μορφή γραφικής αναπαράστασης δεν είναι τόσο καλή, όσο με το *ραβδόγραμμα*. Στο **δεύτερο μέρος** (υπολογισμός διαμέσου πέντε ποσοτήτων), δεν χρειάζεται καθόλου η χρήση της γραφικής αναπαράστασης, αλλά είναι καθαρά θέμα μαθηματικών γνώσεων των μαθητών, από τους οποίους 10 απάντησαν **σωστά** (ποσοστό **59%**). Ενδιαφέρον για την έρευνα αποτελεί ο αριθμός των **σωστών απαντήσεων** στο **τρίτο μέρος** της ερώτησης, καθώς μόλις 3 μαθητές (ποσοστό **17%**) κατάφεραν να συνδυάσουν την πληροφορία του κυκλικού διαγράμματος με τα απλά γεωμετρικά χαρακτηριστικά του ζητούμενου κυκλικού τόξου.

Στις επόμενες τρεις ερωτήσεις (**τέταρτη**, **πέμπτη** και **έκτη ερώτηση**) χρησιμοποιήθηκαν κλασικά γραφήματα συναρτήσεων με ερωτήματα σχετικά με περιορισμούς τιμών για τα x, για τα y καθώς και κλασικές ερωτήσεις μονοτονίας (*ακρότατα, αύξουσα, φθίνουσα*). Από τις **σωστές** ή **ικανοποιητικές** απαντήσεις των μαθητών (1 μαθητής (**5%**), 4 μαθητές (**23%**), 2 μαθητές (**11%**) αντίστοιχα) αντιλαμβανόμαστε τη δυσκολία κατανόησης βασικών μαθηματικών εννοιών και ιδιαίτερα οπτικοποίησής τους σε μια απλή γραφική παράσταση (*άξονας των x, άξονας των τιμών y, τομές γραμμών, ακρότατα*). Αυτό το συμπέρασμα πρέπει να προβληματίσει τον εκπαιδευτικό μαθηματικό χώρο, καθώς μάλλον δίνεται βαρύτητα στον αυτοματοποιημένο – αλγεβρικό υπολογισμό μαθηματικών μεγεθών

(κατανόηση με *εργαλειακό* τρόπο), χωρίς ωστόσο να έχουν καταφέρει οι μαθητές να δημιουργήσουν μια δική τους *εννοιακή εικόνα* ώστε να μπορέσουν να αποδώσουν γραφικά αυτά τα μεγέθη.

Στην **έβδομη ερώτηση** για την κατάταξη των ασκήσεων του ερωτηματολογίου με βάση τη δυσκολία τους, οι περισσότεροι μαθητές (12 μαθητές, ποσοστό **70%**) δηλώνουν τις **δύο πρώτες ερωτήσεις** (*ραβδογράμματα*) **εύκολες** ή **μέτριας δυσκολίας**, γεγονός που συνάδει με όσα προαναφέρθηκαν, ενώ και η **τρίτη ερώτηση** (κυκλικό διάγραμμα) παρά την ''δυσκολία'' της, θεωρείται από το ίδιο μεγάλο ποσοστό ότι ανήκει σε αυτήν την κατηγορία.

3.3.2 Γράφημα ποσοστών σωστών (εξ΄ ολοκλήρου ή εν μέρει) απαντήσεων ερωτηματολόγιο 3^{ο} – Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου (17 συμμετέχοντες)



3.4.1 Ερωτηματολόγιο 4^{ο} – Αρχές Οικονομικής Θεωρίας Γ΄ Λυκείου

Το τελευταίο ερωτηματολόγιο που δόθηκε στους μαθητές της Γ΄ Λυκείου, αναφέρεται σε έννοιες της ειδικότητας του τομέα Οικονομίας. Συμμετείχαν 14 μαθητές στη συμπλήρωσή του και η γενικότερη εντύπωση είναι ότι αντιμετωπίστηκε πιο εύκολα από το αντίστοιχο ερωτηματολόγιο που αφορούσε στα Μαθηματικά της Γ΄ Λυκείου. Πιο συγκεκριμένα:

Στην **πρώτη ερώτηση,** ζητείται στο **πρώτο μέρος** της η σχεδίαση μιας απλής ευθείας (*καμπύλη παραγωγικών δυνατοτήτων*) με χρήση κάποιων δεδομένων της μορφής ζευγαριών (Χ,Υ) και όπως φαίνεται από τις **επιτυχείς** απαντήσεις (9 μαθητές, ποσοστό **64%**) υπάρχει σχετική άνεση με αυτήν την γραφική αναπαράσταση κάτι που προκύπτει και από τις απαντήσεις στο **δεύτερο μέρος** της ερώτησης (ίδιο ποσοστό επιτυχίας). Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι επιτυγχάνεται το τρίτο ζητούμενο της έρευνας, δηλαδή της μεταποίησης της γενικής μαθηματικής γνώσης (σχεδίαση γραφικής παράστασης με χρήση συντεταγμένων (x,y) σημείων) σε ειδική γνώση σχετικά με τα Οικονομικά, μέσω μιας γραφικής αναπαράστασης.

Η **δεύτερη ερώτηση,** ζητάει από τους μαθητές το σχεδιασμό ενός *ραβδογράμματος* με τη βοήθεια κάποιων απλών δεδομένων και υπολογισμών. Όπως ήταν αναμενόμενο από το μεγάλο ποσοστό σωστών απαντήσεων σε αντίστοιχες ερωτήσεις του ερωτηματολογίου των Μαθηματικών και εδώ υπάρχουν πολλοί μαθητές που απάντησαν σωστά (12 μαθητές, ποσοστό **86%**) και που δηλώνουν (βλ. **τρίτο μέρος** της ερώτησης) ότι το *ραβδόγραμμα* τους βοήθησε πολύ στην απάντηση του **δεύτερου μέρους**, επιβεβαιώνοντας έτσι τη μεγάλη χρησιμότητα των γραφικών αναπαραστάσεων στον τομέα της Οικονομίας.

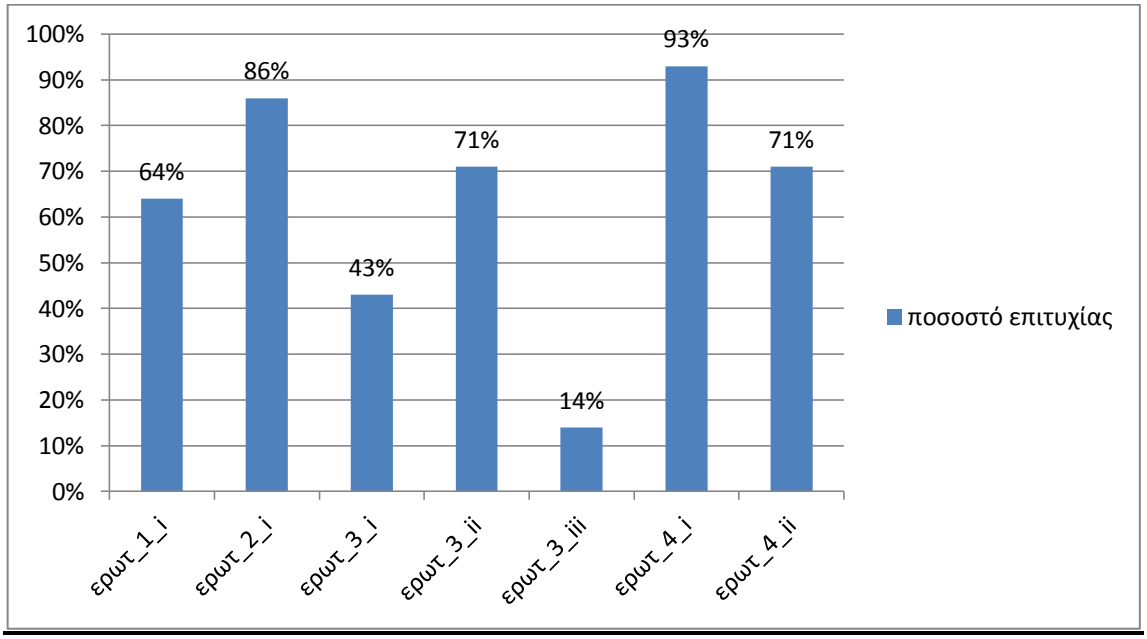
Η **τρίτη ερώτηση** είναι ακριβώς η ίδια με την τέταρτη ερώτηση του 2^{ου} ερωτηματολογίου που δόθηκε στους μαθητές της Β΄ Λυκείου και το ενδιαφέρον της έρευνας είναι ότι σημειώθηκαν **σχεδόν** τα ίδια ποσοστά σε κάθε διαφορετικό μέρος της ερώτησης. Πράγματι, στο **πρώτο μέρος** της, απάντησαν **σωστά** ή **μερικά σωστά** 6 μαθητές (ποσοστό **43%** έναντι **45 %** της Β΄ Λυκείου). Στο **δεύτερο μέρος** της ερώτησης, σημειώνεται υψηλό ποσοστό **σωστών απαντήσεων** (10 μαθητές , ποσοστό **71%** έναντι **72 %** της Β΄ Λυκείου) που πιθανόν προέκυψε όπως και στο αντίστοιχο ερωτηματολόγιο της Β΄ Λυκείου ως συνδυασμός *πληροφορίες γραφικής αναπαράστασης – εις άτοπον απαγωγή,* που αποτελεί ενθαρρυντικό γεγονός και για

τη χρησιμότητα των γραφικών αναπαραστάσεων αλλά και για την μαθηματική σκέψη των μαθητών. Το **τρίτο μέρος** της ερώτησης σημείωσε και εδώ από ελάχιστο μέχρι καθόλου ποσοστό επιτυχίας! (μόλις 2 μαθητές (**14%** έναντι **18%** της Β΄ Λυκείου) έδωσαν **σωστή** ή **μερικά σωστή απάντηση**. Και εδώ οι μαθητές ‘’πέσανε’’ στην παγίδα *μεγαλύτερη γωνία κλίσης – μεγαλύτερο τελικό κεφάλαιο*, με αποτέλεσμα 10 μαθητές (ποσοστό **71%**) να απαντήσουν **λανθασμένα**. Το παρήγορο είναι ότι για την απάντησή τους, χρησιμοποίησαν τη γραφική αναπαράσταση που τους δόθηκε, ίσως όχι πολύ προσεκτικά.

Η **τέταρτη ερώτηση,** έχει μεγάλο ενδιαφέρον για την έρευνα, ιδιαίτερα για τη συσχέτιση των πληροφοριών που προκύπτουν από τη γραφική αναπαράσταση μεταξύ Μαθηματικών – Οικονομίας. Παρατηρούμε ότι 13 μαθητές (ποσοστό **93%**) απάντησαν **σωστά** ή **μερικώς σωστά** στις ερωτήσεις που αφορούσαν στον τομέα σπουδών τους, ενώ οι 10 μαθητές από αυτούς (ποσοστό **71%**) κατάφεραν να συνδυάσουν τις απαντήσεις αυτές με αντίστοιχες μαθηματικές έννοιες.

Στην **πέμπτη ερώτηση** για την κατάταξη των ασκήσεων του ερωτηματολογίου με βάση τη δυσκολία τους, βλέπουμε ότι όλες σχεδόν οι ερωτήσεις αντιμετωπίστηκαν από τους μαθητές ως **εύκολες** ή **μέτριες**, με εξαίρεση την ερώτηση 3, που χαρακτηρίστηκε ως **δύσκολη** από 5 μαθητές (ποσοστό **35%**) .

3.4.2 Γράφημα ποσοστών σωστών (εξ' ολοκλήρου ή εν μέρει) απαντήσεων ερωτηματολόγιο 4ο – Αρχές Οικονομικής Θεωρίας Γ΄ Λυκείου (14 συμμετέχοντες)



3.5 Συμπεράσματα – ανάγκη επιπλέον έρευνας

Στην παράγραφο αυτή, γίνεται μια γενική σύνοψη των συμπερασμάτων της έρευνας που περιγράφονται αναλυτικά για κάθε ερωτηματολόγιο στην προηγούμενη παράγραφο καθώς και τίθενται μερικά σημεία προς μελλοντική έρευνα - αναζήτηση. Επειδή, όπως έχει επισημανθεί από την αρχή, η έρευνα υλοποιήθηκε σε τρεις άξονες, θα εξετάσουμε τα αποτελέσματα ξεχωριστά σε καθέναν από αυτούς. Η ανάλυση γίνεται ως προς δύο κατευθύνσεις :

i. *κατακόρυφα*, δηλαδή ως προς το σύνολο των απαντήσεων των μαθητών ανά ερώτηση,
ii. *οριζόντια*, δηλαδή ως προς τις απαντήσεις του κάθε μαθητή ανά ερώτηση (αυτό επιχειρείται για τους πρώτους 11 μαθητές της Β΄ τάξης και για τους πρώτους 14 μαθητές της Γ΄ τάξης – όπως φαίνεται η σειρά των απαντήσεων στο παράρτημα – καθώς τόσοι συμμετείχαν από κάθε τάξη και στα δύο ερωτηματολόγια). Με αυτόν τον τρόπο, προσπαθούμε να διερευνήσουμε καλύτερα τη δυνατότητα των μαθητών στη συσχέτιση *Μαθηματικά – Οικονομικά* και στα τρία μέρη της έρευνας (αν και αυτό αφορά περισσότερο στο *τρίτο* κομμάτι της έρευνας, όπου αναλύουμε τις απαντήσεις των μαθητών σε ερωτήσεις περισσότερο προσανατολισμένες σε αυτή τη συσχέτιση).

Το *πρώτο* κομμάτι της έρευνας, αφορά στην ικανότητα των μαθητών της Β΄ και Γ΄ τάξης οπτικοποίησης μαθηματικών εννοιών (γενικότερων είτε ειδικότερων που αφορούν σε Οικονομικά θέματα), με χρήση γραφικών αναπαραστάσεων. Με μια γρήγορη ματιά στα ποσοστά των απαντήσεων, παρατηρούμε ότι περίπου οι μισοί μαθητές καταφέρνουν να σχεδιάσουν μια απλή γραφική αναπαράσταση (*ευθεία*) που προκύπτει από ζευγάρια (x, y) συντεταγμένων (ή γενικότερα από μία σχέση μεταξύ δύο ποσοτήτων). Αντίθετα, ιδιαίτερη άνεση (ποσοστό **93%**), προκύπτει από τα αποτελέσματα στο σχεδιασμό άλλου τύπου γραφικής αναπαράστασης (*ραβδόγραμμα*) παρόλο που το προηγούμενο είδος αναπαραστάσεων συναντάται σε πολλά μαθήματα και σε όλη τη διάρκεια της σχολικής ζωής των μαθητών, ενώ το δεύτερο πολύ ελάχιστα.

Αναλυτικότερα, οι ερωτήσεις και τα ποσοστά σωστών (εξ΄ ολοκλήρου ή εν μέρει) απαντήσεων που αφορούν σε αυτό το κομμάτι της έρευνας, είναι :

- Για τη Β΄ τάξη :

  1^{ο} ερωτηματολόγιο – ερώτηση 1 (ποσοστό 11%) , ερώτηση 3(i) (ποσοστό 55%) (οι ερωτήσεις αφορούν στο σχεδιασμό ευθείας)

  2^{ο} ερωτηματολόγιο – ερώτηση 1(i) (ποσοστό 45%), ερώτηση 3(i) (ποσοστό 45%) (οι ερωτήσεις αφορούν στο σχεδιασμό ευθείας)

- Για τη Γ΄ τάξη :

  3^{ο} ερωτηματολόγιο – ερώτηση 1 (ποσοστό 100%)

  (η ερώτηση αφορά στο σχεδιασμό ιστογράμματος)

  4^{ο} ερωτηματολόγιο – ερώτηση 1(i) (ποσοστό 64%), ερώτηση 2(i) (ποσοστό 86%)

  (η ερώτηση 1(i) αφορά στο σχεδιασμό ευθείας, ενώ η ερώτηση 2(i) στο σχεδιασμό ραβδογράμματος)

Επικεντρώνοντας την έρευνά μας στις 11 πρώτες απαντήσεις των μαθητών της Β΄ τάξης και στα δύο ερωτηματολόγια, παρατηρούμε ότι τα ποσοστά των απαντήσεών τους είναι **περίπου τα ίδια** σε καθένα από αυτά. Πιο συγκεκριμένα, 4 μαθητές (ποσοστό **36%**) δεν κατάφεραν να απαντήσουν καθόλου σωστά και στα δύο ερωτηματολόγια, 2 μαθητές (ποσοστό **18%**) απάντησαν σχεδόν στις μισές ερωτήσεις, 4 μαθητές (ποσοστό **36%**) απάντησαν σωστά σχεδόν τα ¾ των ερωτήσεων και στα δύο ερωτηματολόγια, ενώ 1 μαθητής (ποσοστό **9%**) που δεν απάντησε στις ερωτήσεις του 1^{ου} ερωτηματολογίου (Άλγεβρα), έδωσε σωστές απαντήσεις στο ερωτηματολόγιο των Οικονομικών Μαθηματικών.

Αντίστοιχα, για τους πρώτους 14 μαθητές της Γ΄ τάξης, παρατηρείται διατήρηση του ποσοστού απαντήσεων, άσχετα αν οι ερωτήσεις αναφέρονται σε Μαθηματικά ή Οικονομία. Ειδικότερα, οι 13 μαθητές (ποσοστό **93%**) που σχεδίασαν το *ραβδόγραμμα* στο ερωτηματολόγιο των Μαθηματικών (ερώτηση 1), το κατάφεραν και στο ερωτηματολόγιο των Οικονομικών (ερώτηση 2(i)), ενώ μόλις 1 μαθητής (ποσοστό **7%**) δεν κατάφερε να ανταποκριθεί με επιτυχία και στις δύο ερωτήσεις. Στην ερώτηση 1(i) του 4^{ου} ερωτηματολογίου (σχεδιασμός ευθείας) ,

απάντησαν σωστά 9 μαθητές (ποσοστό **64%**) , όμως επειδή δεν υπάρχει αντίστοιχου τύπου ερώτηση στο ερωτηματολόγιο των Μαθηματικών, δεν μπορούμε να εξαγάγουμε κάποιο συγκριτικό αποτέλεσμα για την έρευνά μας.

Το γενικό λοιπόν συμπέρασμα, είναι ότι οι έννοιες των *συντεταγμένων* και του *σχεδιασμού γραφικών αναπαραστάσεων,* αγγίζουν επιδερμικά μεγάλο μέρος των μαθητών και υπάρχει μεγάλο πρόβλημα κατανόησής τους, είτε αναφέρεται σε Μαθηματικές έννοιες, είτε σε έννοιες των Οικονομικών.

Στο *δεύτερο* μέρος της έρευνας (ικανότητα των μαθητών στην εξαγωγή πληροφοριών από δοσμένες γραφικές αναπαραστάσεις), σημειώνεται μεγάλη ευκολία στο ''διάβασμα'' *ραβδογραμμάτων* και καλό ποσοστό σε εξαγωγή πληροφοριών ακόμα και από το *κυκλικό διάγραμμα*. Στις πιο κλασικές γραφικές αναπαραστάσεις, παρατηρείται ότι σχεδόν οι μισοί μαθητές καταφέρνουν να αντλήσουν πληροφορίες που αφορούν σε μονοτονία (όταν πρόκειται για γενικά μαθηματικά) ή μεταβολή εσόδων (όταν πρόκειται για γραφήματα σχετικά με κάποια εταιρεία). Όμως, ξανά παρουσιάζεται έντονα η δυσκολία οπτικοποίησης από μεριάς των μαθητών, εννοιών όπως *ρίζες, τιμές x, τιμές y*, για τις οποίες φαίνονται να μην έχουν ολοκληρωμένη εικόνα παρά μόνο τη θεωρητική γνώση τους.

Αναλυτικότερα, οι ερωτήσεις και τα ποσοστά σωστών (εξ΄ ολοκλήρου ή εν μέρει) απαντήσεων που αφορούν σε αυτό το κομμάτι της έρευνας, είναι :

- Για τη Β΄ τάξη :

  1^{ο} ερωτηματολόγιο – ερώτηση 3(ii) (ποσοστό 5%), ερώτηση 4 (ποσοστό 88%) , ερώτηση 5 (ποσοστό 11%)

  (η ερώτηση 3(ii) αφορά στην ύπαρξη γραφική λύσης συστήματος 2x2, η ερώτηση 4 αφορά σε οπτικό προσδιορισμό ακροτάτων και διαστημάτων μονοτονίας, η ερώτηση 5 αφορά στην παρατήρηση ύπαρξης ριζών συναρτήσεων)

  2^{ο} ερωτηματολόγιο – ερώτηση 4 (ποσοστό 45%), ερώτηση 5 (ποσοστό 54%), (η ερώτηση 4 αφορά σε οπτική σύγκριση και συσχέτιση *κλίσης, συντελεστή διεύθυνσης, επιτόκιο κατάθεσης, μέγιστο κέρδος* ενώ η ερώτηση 5 σε

προσδιορισμό διαστημάτων κέρδους ή ζημίας βάσει του γραφήματος των οικονομικών μιας εταιρίας)

- Για τη Γ΄ τάξη :

  3^{ο} ερωτηματολόγιο – ερώτηση 2 (ποσοστό 78%), ερώτηση 3 (ποσοστό 65%), ερώτηση 4 (ποσοστό 5%), ερώτηση 5 (ποσοστό 23%), ερώτηση 6 (ποσοστό 11%)

  (η ερώτηση 2 αφορά σε πληροφορίες από ραβδόγραμμα, η ερώτηση 3 αφορά σε πληροφορίες από κυκλικό διάγραμμα, οι ερωτήσεις 4 και 5 αφορούν σε διαστήματα τιμών για x και y, η ερώτηση 6 αφορά σε οπτικό προσδιορισμό ακροτάτων και διαστημάτων μονοτονίας)

  4^{ο} ερωτηματολόγιο – ερώτηση 1(ii) (ποσοστό 57%), ερώτηση 2(ii) (ποσοστό 57%), ερώτηση 3 (ποσοστό 43%), ερώτηση 4(i) (ποσοστό 93%)

  (η ερώτηση 1(ii) αφορά στη θέση κάποιων σημείων ως προς τη γραφική παράσταση, η ερώτηση 2(ii) αφορά σε πληροφορίες από το ραβδόγραμμα, η ερώτηση 3 αφορά σε οπτική σύγκριση και συσχέτιση *κλίσης, συντελεστή διεύθυνσης, επιτόκιο κατάθεσης, μέγιστο κέρδος* και η ερώτηση 4(i) αφορά σε εντοπισμό σημείων που σχετίζονται με οικονομικούς όρους)

Για την *οριζόντια* ανάλυση των ερωτηματολογίων της Β΄ τάξης (11 πρώτες απαντήσεις των μαθητών και στα δύο ερωτηματολόγια), θα εξετάσουμε μόνο την ερώτηση 4 του 1^{ου} ερωτηματολογίου σε σχέση με την ερώτηση 5 του 2^{ου} ερωτηματολογίου, καθώς αφορούν στις ίδιες γραφικές αναπαραστάσεις, αλλά τα ζητούμενα έχουν αντίστοιχα Μαθηματική και Οικονομική ορολογία. (Οι υπόλοιπες ερωτήσεις των δύο ερωτηματολογίων που αναφέρονται στο δεύτερο μέρος της έρευνας, δεν μπορούν να συσχετιστούν μεταξύ τους και επομένως δεν μπορούμε να εξαγάγουμε κάποιο χρήσιμο αποτέλεσμα για την έρευνά μας). Παρατηρούμε λοιπόν ότι τα ποσοστά των απαντήσεών των μαθητών στο πρώτο ερωτηματολόγιο (ερώτηση 4) είναι **σχεδόν τα ίδια** με τα ποσοστά των απαντήσεων των ίδιων μαθητών στο δεύτερο ερωτηματολόγιο (ερώτηση 5). Πιο συγκεκριμένα, 4 μαθητές (ποσοστό **36%**) δεν κατάφεραν να απαντήσουν καθόλου σωστά και στα δύο ερωτηματολόγια, 5 μαθητές (ποσοστό **45%**) απάντησαν σωστά ή σχεδόν σωστά σε

όλες τις ερωτήσεις, ενώ 1 μαθητής (ποσοστό **9%**) που δεν απάντησε στις ερωτήσεις του 1^{ου} ερωτηματολογίου (Άλγεβρα), έδωσε σωστές απαντήσεις στο ερωτηματολόγιο των Οικονομικών Μαθηματικών και ένας ακόμα (ποσοστό **9%**) το ακριβώς αντίστροφο.

Αντίστοιχα, για την *οριζόντια ανάλυση* για τους πρώτους 14 μαθητές της Γ΄ τάξης, θα αντιπαραβάλλουμε τα εξής ζεύγη των ερωτήσεων με συναφές περιεχόμενο: ερώτηση 2 (3^{ο} ερωτηματολόγιο) – ερώτηση 2(ii) (4^{ο} ερωτηματολόγιο) και ερώτηση 6 (3^{ο} ερωτηματολόγιο) – ερώτηση 4(i) (4^{ο} ερωτηματολόγιο).

Στην πρώτη σύγκριση, παρατηρούμε ότι 5 μαθητές (ποσοστό **35%**) κατάφεραν να εξαγάγουν όλες ή καθόλου πληροφορίες από τις δοσμένες γραφικές αναπαραστάσεις σε καθένα από τα ερωτηματολόγια των Μαθηματικών ή το ερωτηματολόγιο των Οικονομικών. Ωστόσο, 3 μαθητές (ποσοστό **21%**), ενώ στο ερωτηματολόγιο των Μαθηματικών δεν τα κατάφεραν πολύ καλά, εντούτοις στις αντίστοιχες ερωτήσεις των Οικονομικών τα πήγανε σαφώς καλύτερα. Τέλος, 6 μαθητές (ποσοστό **42%**) που τα είχανε πάει καλύτερα στις πρώτες απαντήσεις, απάντησαν πολύ λανθασμένα στις αντίστοιχες ερωτήσεις των Οικονομικών.

Στο δεύτερο ζευγάρι συγκρίσεων, 2 μαθητές (ποσοστό **14%**) έδωσαν λανθασμένες απαντήσεις τόσο στο 3^{ο} ερωτηματολόγιο, όσο και στο 4^{ο} ερωτηματολόγιο, ενώ οι 12 μαθητές (ποσοστό **86%**) που στο 3^{ο} ερωτηματολόγιο δεν κατάφεραν σχεδόν καθόλου να διακρίνουν τις πληροφορίες που αφορούν στη μονοτονία και στα ακρότατα που τους παρέχει η δοσμένη γραφική παράσταση, απάντησαν **εντελώς σωστά** στην ερώτηση που σχετίζεται η δοσμένη γραφική παράσταση του 4^{ου} ερωτηματολογίου με οικονομικούς όρους.

Στο *τρίτο* μέρος της έρευνας, εξετάζεται σε μεγαλύτερο βαθμό η δυνατότητα των μαθητών να συσχετίσουν γενικές μαθηματικές έννοιες, με πιο εξειδικευμένες έννοιες της ειδικότητάς τους. Η επιτυχής αυτή σύνδεση αφορά τόσο στη σχεδίαση γραφικών αναπαραστάσεων (*πρώτο* μέρος έρευνας) όσο και στην άντληση πληροφοριών από αυτές (*δεύτερο* μέρος έρευνας). Αυτό είναι κάτι που ερευνήσαμε εν μέρει με την *οριζόντια ανάλυση* (απαντήσεις ανά μαθητή σε σχετικές ερωτήσεις και στα δύο ερωτηματολόγια της κάθε τάξης) παραπάνω. Στο κομμάτι αυτό, θα

αναλύσουμε τις εξής ερωτήσεις (δίνονται και τα αντίστοιχα ποσοστά σωστών απαντήσεων):

- Για τη Β΄ τάξη :

  2^{ο} ερωτηματολόγιο – ερώτηση 1(ii) (ποσοστό 50%), ερώτηση 3(iii) (ποσοστό 45%) , ερώτηση 4 (ποσοστό 45%), ερώτηση 5 (ποσοστό 54%)

  (η ερώτηση 1(iii) αφορά στην ύπαρξη γραφική αναπαραστάσεων τόσο στα Μαθηματικά όσο και στην Οικονομία, η ερώτηση 3(iii) αφορά στην έννοια του λόγου αναλογίας και στο ρόλο του στο σχεδιασμό γραφικών παραστάσεων, η ερώτηση 4 αφορά σε οπτική σύγκριση και συσχέτιση *κλίσης, συντελεστή διεύθυνσης, επιτόκιο κατάθεσης, μέγιστο κέρδος* ενώ η ερώτηση 5 σε προσδιορισμό διαστημάτων κέρδους ή ζημίας βάσει του γραφήματος των οικονομικών μιας εταιρίας).

- Για τη Γ΄ τάξη :

  4^{ο} ερωτηματολόγιο – ερώτηση 1 (ποσοστό 64%), ερώτηση 3 (ποσοστό 42%), ερώτηση 4(ii) (ποσοστό 71%)

  (η ερώτηση 1 αφορά στη σχεδίαση μιας γραφικής αναπαράστασης - καμπύλη παραγωγικότητας – βάσει των ζευγών (Χ, Υ), η ερώτηση 3 αφορά σε οπτική σύγκριση και συσχέτιση *κλίσης, συντελεστή διεύθυνσης, επιτόκιο κατάθεσης, μέγιστο κέρδος* και η ερώτηση 4(ii) σε πλήρη συσχέτιση μαθηματικών όρων που αναφέρονται σε μονοτονία και ακρότατα με τους αντίστοιχους Οικονομικούς όρους)

Το συμπέρασμα που προκύπτει από τα παραπάνω ποσοστά, τόσο για τη Β΄ τάξη όσο και για τη Γ΄ τάξη, είναι ότι **περίπου οι μισοί** μαθητές καταφέρνουν με επιτυχία να συνδέσουν (μέσω των γραφικών αναπαραστάσεων) γενικούς Μαθηματικούς όρους ή έννοιες, με αντίστοιχες γνώσεις που λαμβάνουν στην ειδικότητα των Οικονομικών.

Κλείνοντας την εργασία, μπορούμε να παραθέσουμε κάποιους τομείς – σημεία στα οποία θα μπορούσε να γίνει επιπλέον αναζήτηση σχετικά με τη βοήθεια των γραφικών αναπαραστάσεων στη μαθηματική κατανόηση στο Επαγγελματικό Λύκειο, όπως:

- **Η χρήση των νέων τεχνολογιών στην αναπαράσταση δεδομένων και στην κατανόηση μαθηματικών εννοιών.** Υπάρχει μεγάλη ποικιλία εκπαιδευτικού λογισμικού που μπορεί να χρησιμοποιηθεί από τους εκπαιδευτικούς μαθηματικούς ώστε να βοηθήσει στην κατανόηση εννοιών από τους μαθητές. Ωστόσο, υπάρχει πάντα ο προβληματισμός αν πρακτικά είναι δυνατή η χρήση τους στα πλαίσια ενός ιδιαίτερα *εργαλειακού* περιβάλλοντος μάθησης, όπως είναι το πρόγραμμα σπουδών για τα Μαθηματικά στο Λύκειο. (ανταγωνισμός για εισαγωγή στην τριτοβάθμια Εκπαίδευση). Παράλληλα, υπάρχει έλλειψη εργαστηρίων Η/Υ – αιθουσών με διαδραστικούς πίνακες ώστε να μπορεί να χρησιμοποιηθεί το κατάλληλο λογισμικό.
- **Χαμηλό επίπεδο μαθηματικών γνώσεων των μαθητών των ΕΠΑΛ από τα Γυμνασιακά χρόνια σπουδών τους.** Είναι γνωστό ότι οι μαθητές των Επαγγελματικών Λυκείων, υστερούν αρκετά σε «βάθος» μαθηματικής γνώσης. Αυτό λοιπόν, καθιστά ακόμα πιο επιτακτική την ανάγκη διδασκαλίας των γραφικών αναπαραστάσεων σε αυτή τη δομή της εκπαίδευσης προκειμένου να ξεπεραστεί αυτή η αδυναμία της έλλειψης του θεωρητικού υπόβαθρου των μαθητών. Έτσι με την οπτικοποίηση των μαθηματικών εννοιών μέσω των γραφικών αναπαραστάσεων θα διευκολυνθεί η κατανόηση τους από τους μαθητές. Επίσης, επειδή στα Επαγγελματικά Λύκεια, ο ανταγωνισμός για την εισαγωγή στην Τριτοβάθμια Εκπαίδευση είναι πιο χαλαρός, ο εκπαιδευτικός (με δική του πρωτοβουλία, ξεπερνώντας τις δεσμεύσεις του αναλυτικού προγράμματος) μπορεί ευκολότερα να προσφύγει σε εκτενέστερη χρήση των γραφικών αναπαραστάσεων στη διδασκαλία του.
- **Πιο «πρακτικός» προσανατολισμός των μαθηματικών στα ΕΠΑΛ.** Ως συνέπεια της χαμηλής μαθηματικής γνώσης των μαθητών των ΕΠΑΛ,

προκύπτει η αδιαφορία στη μάθηση νέων θεωρητικών εννοιών, σε πολλές περιπτώσεις ακόμα και αν αυτή η προσπάθεια υποβοηθείται με τη χρήση γραφικών αναπαραστάσεων. Μια πιθανή αντιμετώπιση αυτής της αδιαφορίας είναι να γίνεται η διδασκαλία των μαθηματικών μέσω πιο πρακτικών θεμάτων – προβλημάτων που σχετίζονται με την εκάστοτε ειδικότητα σπουδών του κάθε μαθητή, όπως στην έρευνά μας, χρησιμοποιήθηκε το μάθημα «Οικονομικά Μαθηματικά» του τομέα Οικονομίας όπου διδάσκονται πρακτικές έννοιες, όπως *αναλογίες*, *ανατοκισμοί*, *προθεσμιακές καταθέσεις* (δυστυχώς δεν υπάρχουν αντίστοιχα μαθήματα για τους άλλους τομείς των ΕΠΑΛ). Μέσω των πρακτικών εννοιών και των αντίστοιχων γραφικών αναπαραστάσεων είναι πιο εύκολη η μετάβαση στις αντίστοιχες θεωρητικές έννοιες και αντίστροφα.

4 ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

(i) Ερωτηματολόγιο Β΄ Λυκείου – Άλγεβρα (συγκεντρωτικό)

(ii) Απαντήσεις μαθητών Β΄ Λυκείου – Άλγεβρα

(iii) Ερωτηματολόγιο Β΄ Λυκείου – Οικονομικά Μαθηματικά (συγκεντρωτικό)

(iv) Απαντήσεις μαθητών Β΄ Λυκείου – Οικονομικά Μαθηματικά

(v) Ερωτηματολόγιο Γ΄ Λυκείου – Μαθηματικά (συγκεντρωτικό)

(vi) Απαντήσεις μαθητών Γ΄ Λυκείου – Μαθηματικά

(vii) Ερωτηματολόγιο Γ΄ Λυκείου – Αρχές Οικονομικής Θεωρίας (συγκεντρωτικό)

(viii) Απαντήσεις μαθητών Γ΄ Λυκείου – Αρχές Οικονομικής Θεωρίας

(i) Ερωτηματολόγιο Β΄ Λυκείου – Άλγεβρα

1. Να σχεδιάσετε πρόχειρα τις ευθείες των εξισώσεων: (Βοήθεια: συμπληρώστε πρώτα τους πίνακες των τιμών για δύο τιμές του **x** βρίσκοντας τα αντίστοιχα **y** και ενώστε τα σημεία ($\mathbf{x_1}$, $\mathbf{y_1}$) και ($\mathbf{x_2}$, $\mathbf{y_2}$) που προκύπτουν)

i) y = 3x

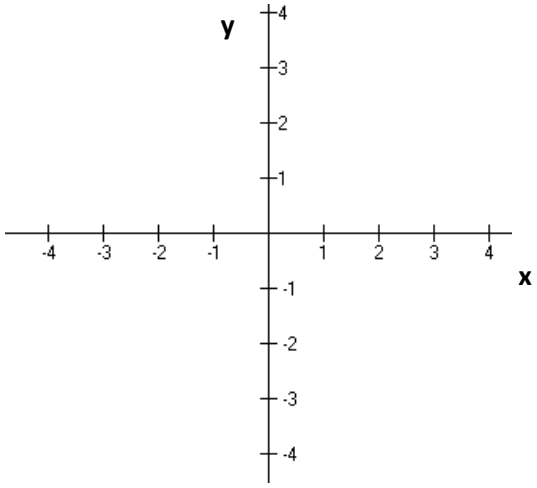
x		
y		

ii) y = 2x+2

x		
y		

iii) y = 3

x		
y		

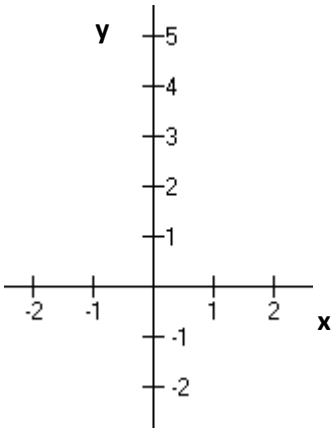


2. Στις παρακάτω γραμμικές εξισώσεις, βρείτε το **συντελεστή διεύθυνσης λ** των αντίστοιχων ευθειών που αντιπροσωπεύουν: (Βοήθεια : λύστε τις εξισώσεις ως προς **y** ή χρησιμοποιήστε τη σχέση $\lambda=(y_2-y_1)/(x_2-x_1)$)
   i) $x-3y=5$
   ii) $3x+2y=0$
   iii) $y=2x$

3. (i) Μπορείτε να παραστήσετε με κατάλληλες ευθείες τα ζευγάρια τιμών (x, y) που υπάρχουν στους παρακάτω πίνακες;

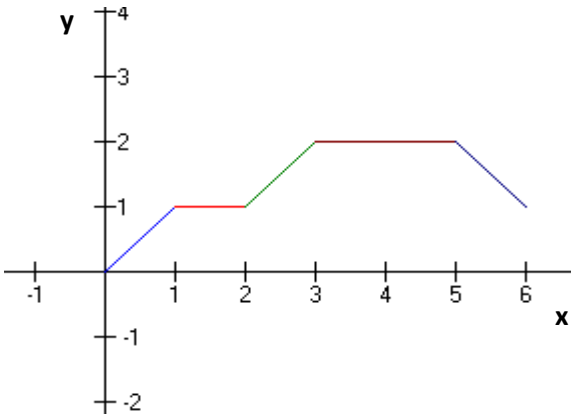
x	0	1	-1
y	1	3	-1

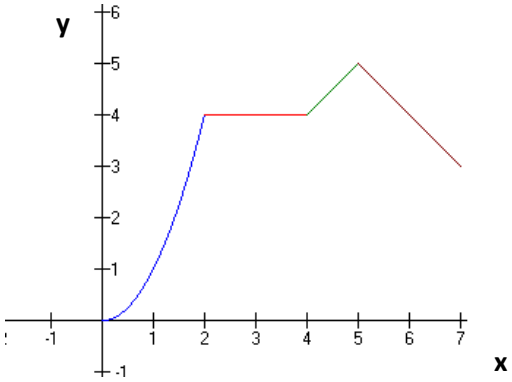
x	0	1	-1
y	3	5	1



ii) παρατηρείτε κάτι σε σχέση με τους συντελεστές διεύθυνσης των δύο ευθειών;
iii) μπορούν οι δύο ευθείες να είναι γραφική λύση κάποιου γραμμικού συστήματος 2x2; Αιτιολογήστε την απάντησή σας

4. Συμπληρώστε τα διαστήματα τιμών του **x** στα οποία οι παρακάτω γραφικές παραστάσεις δείχνουν ότι οι συναρτήσεις είναι: i) αύξουσες, ii) φθίνουσες, iii)σταθερές καθώς και σε ποιες τιμές του **x** παρουσιάζουν: α)μέγιστο(στα), β)ελάχιστο(στα)

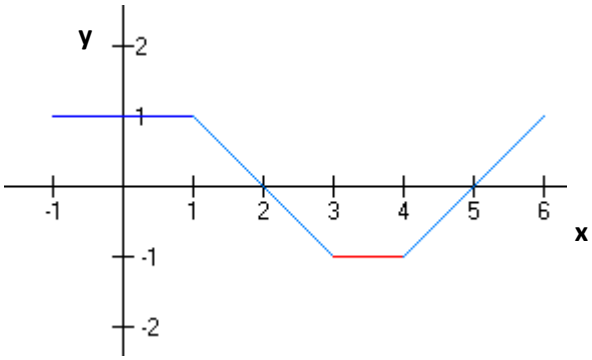


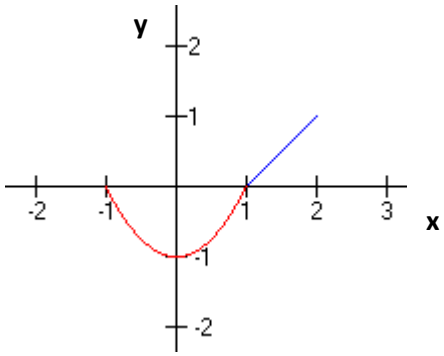


Αύξουσα	
Φθίνουσα	
Σταθερή	
Θέση(σεις) μεγίστου(ων)	
Θέση(σεις) ελαχίστου(ων)	

Αύξουσα	
Φθίνουσα	
Σταθερή	
Θέση(σεις) μεγίστου(ων)	
Θέση(σεις) ελαχίστου(ων)	

5. Να βρείτε τις **ρίζες** των συναρτήσεων που παριστάνουν οι παρακάτω γραφικές παραστάσεις:





Απάντηση (i):…… Απάντηση (ii):……;.

6. Χαρακτηρίστε (✓), ανάλογα με το πόσο σας δυσκόλεψαν, τις ερωτήσεις 1 – 5, ως εξής:

αριθμός ερώτησης	**Χαρακτηρισμός**			**αιτιολόγηση**
	Εύκολη	**Μέτριας δυσκολίας**	**Δύσκολη**	
1				
2				
3				
4				
5				

(ii) Απαντήσεις μαθητών Β΄ Λυκείου - Άλγεβρα

Μ	Ερώτηση 1 (σχεδίαση)			Ερώτηση 2 (συντ. διευθ.)			Ερώτηση 3 (σύστημα 2x2)			Ερώτηση 4 (μονοτονία)					Ερώτηση 5 (ρίζες)		Ερώτηση 6 (χαρακτηρισμός)		
	i	ii	iii	i	ii	iii	i	ii	iii	i	ii	iii	α	β	i	ii	ευκ	μετρ	δυσκ
1	---	---	---	---	---	---	---	---	---	1/2	1/2	οκ	κο	κο	---	---	---	---	---
2	κο	---	---	---	---	---	κο	---	---	1/2	κο	1/2	1/2	1/2	1/2	οκ	1,4	3,5	2
3	---	---	---	---	---	---	κο	---	---	κο	κο	κο	---	---	---	---			1,2,3,4,5
4	σημ	σημ	σημ	---	---	---	1/2	---	---	οκ	οκ	οκ	οκ	οκ	---	---	1,3,4		2,5
5	σημ	σημ	σημ	---	---	---	κο	---	---	1/2	κο	1/2	1/2	---	κο	κο	1	3	2
6	οκ	1/2	1/2	---	---	---	οκ	---	---	οκ	1/2	οκ	---	---	---	---	1,3	4,5	2
7	---	---	---	---	---	---	οκ	1/2	---	οκ	οκ	οκ	κο	κο	---	---	3,4	1	2,5
8	σημ	σημ	σημ	---	---	---	οκ	οκ	1/2	οκ	οκ	οκ	οκ	οκ	---	---	3,4	5	1,2
9	κο	---	---	---	---	---	κο	---	---	οκ	1/2	1/2	1/2	κο	κο	κο	4,5		1,3
10	---	---	---	---	---	---	οκ	οκ	---	οκ	οκ	οκ	---	---	---	---	3	4	2,5
11	κο	κο	κο	---	---	---	κο	---	---	κο	κο	κο	κο	κο	---	---		1,3,4	2,5
12	---	---	---	---	---	---	κο	---	---	1/2	1/2	1/2	1/2	κο	1/2	1/2		3,4,5	1,2
13	σημ	σημ	σημ	---	---	---	οκ	---	---	οκ	οκ	1/2	οκ	κο	---	---	4	1	---
14	οκ	---	---	---	---	---	οκ	---	---	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	---	---	3,4	2	5
15	σημ	σημ	σημ	1/2	1/2	---	οκ	---	---	οκ	οκ	οκ	κο	κο	---	---	1,3,4		2,5
16	σημ	σημ	---	---	---	---	1/2	κο	κο	1/2	1/2	1/2	οκ	κο	---	---	1,4	2,3	
17	---	---	---	---	---	---	---	---	---	οκ	οκ	οκ	κο	κο	---	---		3,4	
18	κο	---	---	---	---	---	οκ	---	---	οκ	1/2	1/2	κο	κο	---	---	1,3,4		2,5

συντομεύσεις

σημ: σημειώθηκαν μόνο σημεία

---: δεν δόθηκε απάντηση

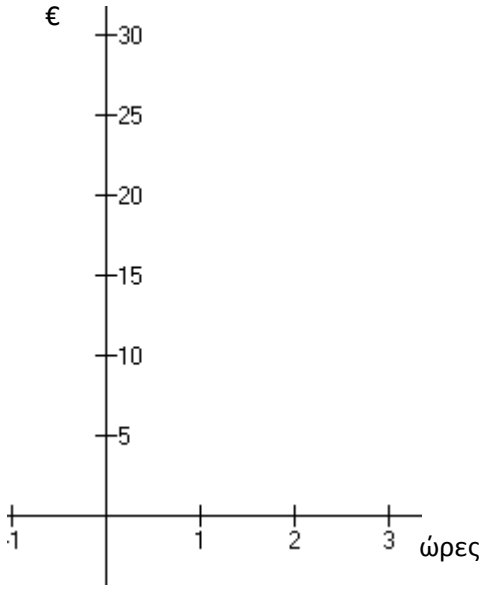
1 /2: μισή σωστή απάντηση

οκ: ολοκληρωμένη σωστή απάντηση

κο: εντελώς λανθασμένη απάντηση

(iii) Ερωτηματολόγιο Β΄ Λυκείου – Οικονομικά Μαθηματικά

1. Έστω ότι δύο εργάτες, πληρώνονται στη δουλειά τους ο πρώτος με 5€/ώρα και ο δεύτερος με 10€/ώρα. **(i)** Να σχεδιάσετε πρόχειρα τις ευθείες που δείχνουν τη σχέση του χρόνου με την αμοιβή που πρέπει να πάρει ο κάθε εργάτης στις τρεις (3) πρώτες ώρες (Υπόδειξη: σε κάθε ώρα, βρείτε το αντίστοιχο ποσό αμοιβής του κάθε εργάτη και ενώστε τα σημεία που προκύπτουν)



Ερώτηση (ii): έχετε ξαναδεί τέτοιες αναπαραστάσεις τιμών σε ευθείες σε κάποιο άλλο μάθημα; Αν ναι, σε ποιο μάθημα; Σε ποιο θέμα αναφέρονταν;

Απάντηση:……
……
……
……
……
……
…….

2. Στους παρακάτω πίνακες, υπάρχει αντιστοίχηση **ποσότητας** και **κόστους** για δύο προϊόντα (**προϊόν Α, προϊόν Β**). Βρείτε τους **λόγους αναλογίας λ_1** και **λ_2** αντίστοιχα.

(i)Προϊόν Α: λ_1 = ……

Ποσότητα	1	2	3
Κόστος	4	8	12

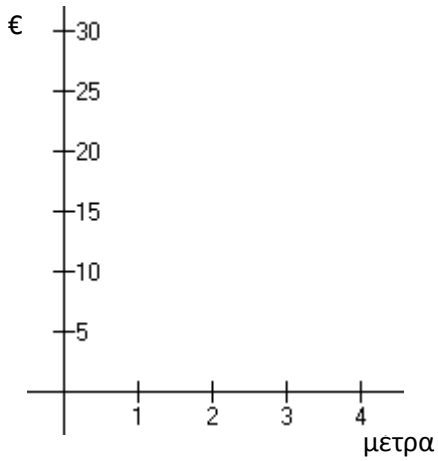
(ii)Προϊόν Β : λ_2 = ……

Ποσότητα	1	2	3
Κόστος	6	12	18

3. **(i)**Μπορείτε να παραστήσετε με κατάλληλες ευθείες τα ζευγάρια τιμών (μέτρα υφάσματος, κόστος υφάσματος) που υπάρχουν στους παρακάτω πίνακες;

Μέτρα υφάσματος	1	2	3
Κόστος υφάσματος (€)	10	20	30

Μέτρα υφάσματος	2	4
Κόστος υφάσματος (€)	10	20



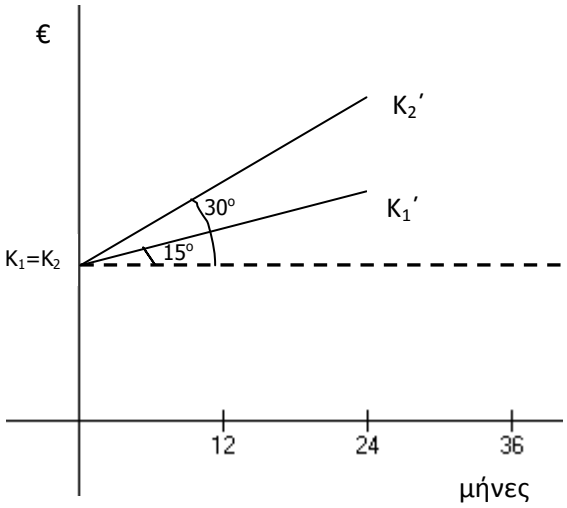
Ερώτηση (ii): Βρείτε τους λόγους αναλογίας λ_1 και λ_2 που προκύπτουν από κάθε πίνακα

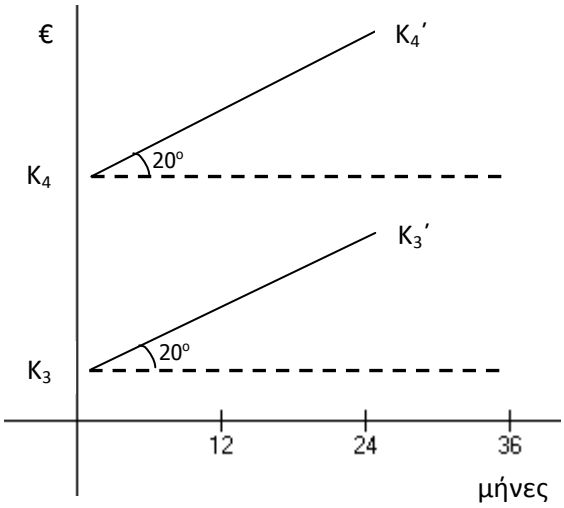
Απάντηση (ii): λ_1 =……. λ_2=…….

Ερώτηση (iii): Στις ευθείες που σχεδιάσατε, παίζει κάποιο ρόλο, ο λόγος αναλογίας; Σας θυμίζει κάτι από κάποιο άλλο μάθημα;

Απάντηση (iii): ……
……
……

4. Ο έμπορος Ε, ανάθεσε στον οικονομικό του σύμβουλο Σ, να επενδύσει το κεφάλαιό του K_0 σε κερδοφόρες τραπεζικές καταθέσεις. Μετά από δύο χρόνια, ο Σ έδειξε στον Ε τις παρακάτω δύο γραφικές αναπαραστάσεις της πορείας των επενδύσεων που έκανε, εξηγώντας πως το αρχικό κεφάλαιο K_0, το «έσπασε» σε τέσσερα μέρη K_1, K_2, K_3, K_4 (δηλαδή $K_0=K_1+K_2+K_3+K_4$)





Σχήμα 1 **Σχήμα 2**

Ερώτηση (i): Γιατί πιστεύετε ότι το K_2' είναι μεγαλύτερο από το K_1'; (επιλέξτε όσες θεωρείτε σωστές απαντήσεις)

α) $K_1 > K_2$ β) διαφορετικός συντελεστής διεύθυνσης γ)διαφορετικό επιτόκιο δ) διαφορετικό χρονικό διάστημα επένδυσης

Ερώτηση (ii): Οι ευθείες K_3K_3' και K_4K_4' είναι παράλληλες. Γιατί; (επιλέξτε τη σωστή απάντηση)

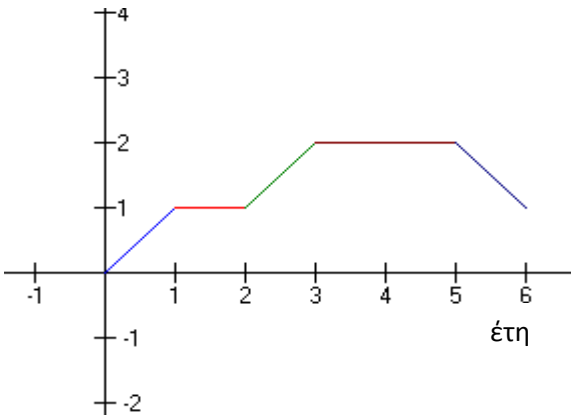
α) $K_4 > K_3$ β) διαφορετικός συντελεστής διεύθυνσης γ) $K_2 > K_3$ δ) ίδιος συντελεστής διεύθυνσης

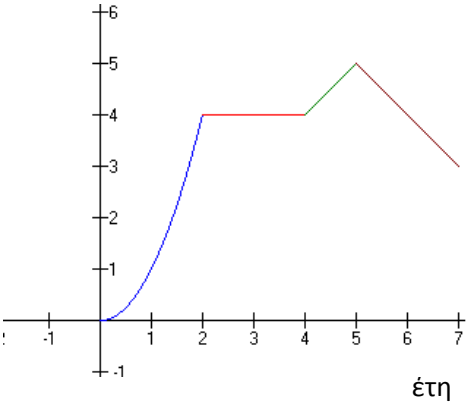
Ερώτηση (iii): Ποια επένδυση κατάλαβε ο Ε ότι είναι η καλύτερη; (επιλέξτε τη σωστή). Γιατί;

α) K_1 σε K_1' β) K_2 σε K_2' γ) K_3 σε K_3' δ) K_4 σε K_4'

αιτιολόγηση:.....

5. Παρακάτω, δίνονται οι γραφικές αναπαραστάσεις των χρημάτων δύο εταιρειών $\mathbf{E_1}$ και $\mathbf{E_2}$ σε κάποια έτη λειτουργίας τους. Συμπληρώστε τα διαστήματα των ετών λειτουργίας (π.χ 3 έως 5) στα οποία η κάθε εταιρεία: i) είχε κέρδη, ii) είχε ζημία, iii)δεν είχε ούτε κέρδη, ούτε ζημία





Κέρδη	
Ζημία	
Σταθερά	

Κέρδη	
Ζημία	
Σταθερά	

6. Χαρακτηρίστε (✓) , ανάλογα με το πόσο σας δυσκόλεψαν, τις ερωτήσεις 1 – 5, ως εξής:

αριθμός ερώτησης	**Χαρακτηρισμός**			**αιτιολόγηση**
	Εύκολη	**Μέτριας δυσκολίας**	**Δύσκολη**	
1				
2				
3				
4				
5				

(iv) Απαντήσεις μαθητών Β΄ Λυκείου – Οικονομικά Μαθηματικά

Μ	Ερώτηση 1 (σχεδίαση)		Ερώτηση 2 (λόγος αναλ.)		Ερώτηση 3 (σχεδ. + λόγος αναλ)			Ερώτηση 4 (επιτόκια)			Ερώτηση 5 (έσοδα εταιρ.)			Ερώτηση 6 (χαρακτηρισμός)		
	i	ii	i	ii	i	ii	iii	i	ii	iii	i	ii	iii	ευκ	μετρ	δυσκ
1	1/2	1/2	οκ	οκ	---	---	---	---	---	---	κο	κο	κο	1	2	3,4,5
2	---	1/2	οκ	οκ	κο	οκ	---	1/2	κο	1/2	κο	κο	κο	1,2,3	4,5	
3	---	1/2	οκ	οκ	σημ.	οκ	κο	κο	οκ	κο	---	---	---	5	1,2,3	4
4	---	1/2	οκ	οκ	σημ	οκ	1/2	1/2	οκ	κο	---	---	---	1,5	2,3,4	
5	σημ	1/2	οκ	οκ	1/2	1/2	1/2	1/2	οκ	κο	οκ	οκ	οκ	1,2,5	3,4	
6	σημ	1/2	οκ	οκ	σημ	οκ	1/2	οκ	οκ	κο	οκ	οκ	οκ	1,2,3,5	4	
7	οκ	1/2	οκ	οκ	οκ	οκ	οκ	οκ	1/2	κο	οκ	οκ	οκ	1,2,3,5	4	
8	οκ	1/2	οκ	οκ	σημ	οκ	οκ	οκ	οκ	1/2	οκ	οκ	οκ	1,2,3,5	4	
9	οκ	1/2	οκ	οκ	οκ	οκ	οκ	οκ	οκ	κο	οκ	οκ	οκ	1,2,3,5	4	
10	οκ	1/2	οκ	οκ	οκ	οκ	οκ	οκ	οκ	---	οκ	οκ	οκ	1,2,3,5		4
11	---	1/2	οκ	οκ	οκ	οκ	---	1/2	οκ	κο	κο	1/2	κο		1,2,3,5	4

συντομεύσεις

σημ: σημειώθηκαν μόνο σημεία

---: δεν δόθηκε απάντηση

1 /2: μισή σωστή απάντηση

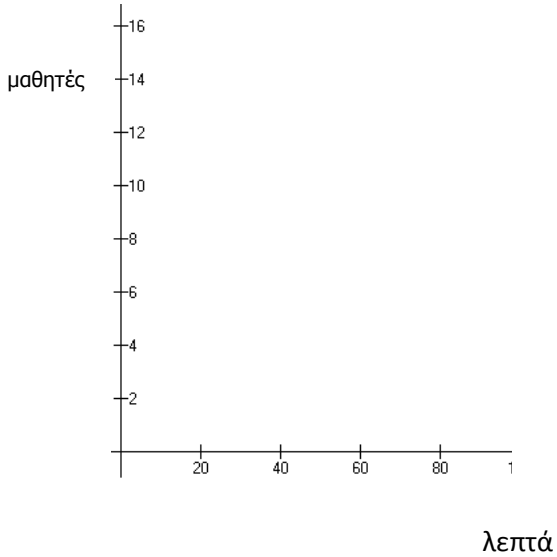
οκ: ολοκληρωμένη σωστή απάντηση

κο: εντελώς λανθασμένη απάντηση

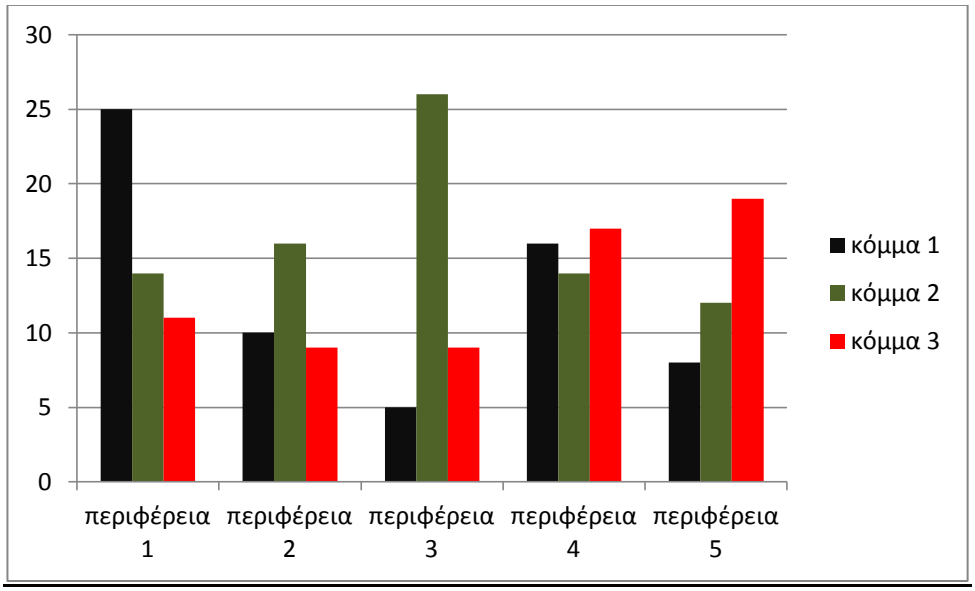
(v) Ερωτηματολόγιο Γ΄ Λυκείου – Μαθηματικά

1. Ο παρακάτω πίνακας, δίνει τα λεπτά πλοήγησης στο Διαδίκτυο μέσω του κινητού τηλεφώνου 40 μαθητών. Να παρασταθούν τα δεδομένα σε ένα ιστόγραμμα συχνοτήτων **λεπτών χρήσης - μαθητών**

Λεπτά χρήσης	**μαθητές**
0 – 20	8
20 – 40	12
40 – 60	10
60 – 80	6
80 - 100	4



2. Στο παρακάτω ραβδόγραμμα συχνοτήτων, παρουσιάζονται οι ψήφοι (σε χιλιάδες) τριών κομμάτων σε πέντε εκλογικές περιφέρειες.



Ερώτηση (i): Ποια είναι η καλύτερη περιφέρεια (αριθμός) για κάθε κόμμα;
Απάντηση (i): κόμμα 1: …… κόμμα 2: …… κόμμα 3: ……..

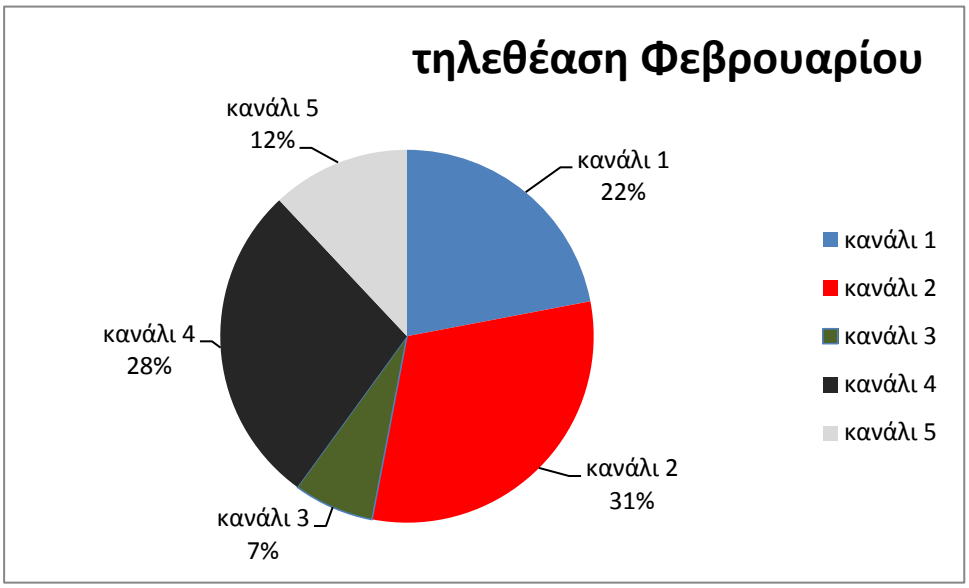
Ερώτηση (ii): Στην περιφέρεια 3, σε σύνολο 40 χιλιάδων ψηφοφόρων των τριών κομμάτων, ποια είναι η σχετική συχνότητα του 1^{ου} κόμματος;
Απάντηση (ii): ……..

Ερώτηση (iii): Σε ποια περιφέρεια, η μέση τιμή των ψήφων των τριών κομμάτων είναι πιο κοντά στους ψήφους που πήρε το κάθε κόμμα σε εκείνη την περιφέρεια;
Απάντηση (iii): ……

Ερώτηση (iv): Χρειάστηκε να κάνετε κάποιες πράξεις στην ερώτηση 1;
Απάντηση (iv): (Ναι/ Όχι) …….

Ερώτηση (v): Χρειάστηκε να κάνετε κάποιες πράξεις στην ερώτηση 3;
Απάντηση (v): (Ναι/ Όχι) …….

3. Στο παρακάτω κυκλικό διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων, φαίνονται τα ποσοστά τηλεθέασης πέντε (**5**) ιδιωτικών καναλιών τον μήνα Φεβρουάριο.

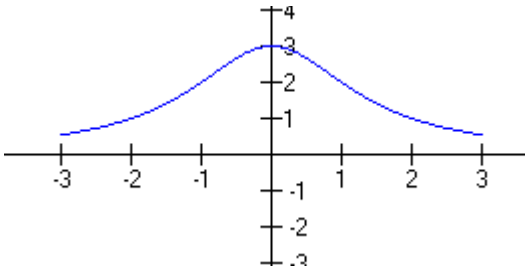


Ερώτηση (i): Ποιο κανάλι έχει ποσοστό τηλεθέασης πιο κοντά στη μέση τιμή τηλεθέασης των πέντε καναλιών;
Απάντηση (i): …….

Ερώτηση (ii): Ποια είναι η τιμή της διαμέσου των παραπάνω ποσοστών τηλεθέασης; Είναι εύκολη η απάντηση;
Απάντηση (ii): ……

Ερώτηση (iii): Είναι σωστή η φράση «το τόξο που αντιστοιχεί στο κανάλι 1, είναι περίπου 72°»; Αιτιολογήστε
Απάντηση (iii): ……

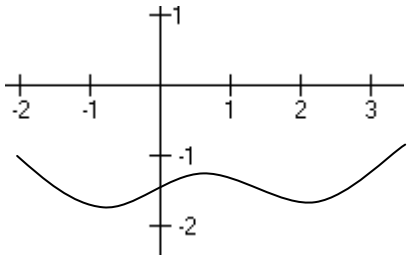
4. Στο παρακάτω σχήμα , έχουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{6}{2+x^2}$.



<u>Ερώτηση :</u> Από το σχήμα συμπεραίνουμε ότι οι τιμές του x για τις οποίες ισχύει $\frac{6}{2+x^2} > 2$ είναι:

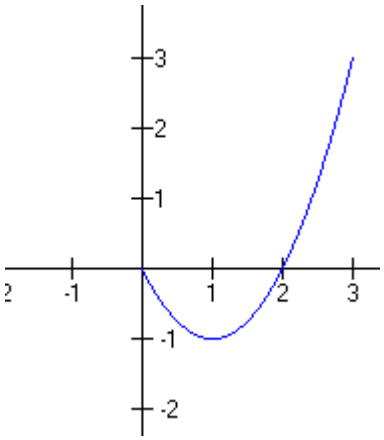
α) x > 2 β) -1 < x < 1 γ) -2 < x < 2 δ)x < -2

5. Η ευθεία y=k, θέλουμε να τέμνει την παρακάτω γραφική παράσταση της συνάρτησης f σε 4 διαφορετικά σημεία.



Τότε πρέπει: α) k > -1 β)k= - 1 γ) k < - 2 δ) -2 < k < -1

6. Παρακάτω δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 2x$ με πεδίο ορισμού A=[0,3].



<u>Ερώτηση 1:</u> Να γράψετε ποια είναι τα ακρότατα της γραφικής παράστασης της f
<u>Απάντηση 1:</u> ……..

<u>Ερώτηση 2:</u> Σε ποια διαστήματα είναι η συνάρτηση f : i) αύξουσα, ii) φθίνουσα, iii) σταθερή;
<u>Απάντηση 2:</u> α) ..... , β) ..... , γ) .....

7. Χαρακτηρίστε (✓) , ανάλογα με το πόσο σας δυσκόλεψαν, τις ερωτήσεις 1 – 6, ως εξής:

αριθμός ερώτησης	**Χαρακτηρισμός**			**αιτιολόγηση**
	Εύκολη	**Μέτριας δυσκολίας**	**Δύσκολη**	
1				
2				
3				
4				
5				
6				

(vi) Απαντήσεις μαθητών Γ΄ Λυκείου – Μαθηματικά

Μ	Ερώτηση 1	Ερώτηση 2					Ερώτηση 3			Ερώτηση 4	Ερώτηση 5	Ερώτηση 6		Ερώτηση 7		
	(σχεδίαση)	(ραβδόγρ. συχνοτητ.)					(κυκλ. διάγρ)			(τιμές x)	(ευθεία y=k)	(μονοτον)		(χαρακτηρισμός)		
		i	ii	iii	iv	v	i	ii	iii			i	ii	ευκ	μετρ	δυσκ
1	ok	ok	ok	ok	O	O	ok	ko	ko	ko	ko	ko	ko	1,2,3,4	5,6	
2	ok	ok	ok	ko	O	O	ko	ok	ok	ko	ko	ko	ko	1,3,6	2,4,5	
3	ok	ok	ok	ko	O	O	ko	ok	---	ko	ko	---	1/2	1,4	2,3,5,6	
4	ok	ok	ok	ok	O	---	ko	ko	ko	ko	ok	ko	1/2	1,2,6	3,5	
5	ok	ok	ok	ok	O	O	ok	ko	1/2	ko	ko	ko	ok	1,2,3,4,5		6
6	ok	ok	ok	---	---	---	ok	---	ok	ko	ko	---	---	1,2,4	5	3
7	ok	ok	ok	ok	O	O	ok	ok	---	ok	ko	ko	ko	---	---	---
8	ok	ok	ko	ok	O	O	ok	ok	ko	ko	ok	ko	ko	1,2	3,6	4,5
9	ok	ok	ok	ok	O	O	ok	ok	1/2	ko	ko	---	---	---	---	---
10	ok	ok	ko	ok	O	O	ko	---	---	ko	ko	ko	ko	1	2,3	4,5,6
11	ok	ko	---	---	O	---	ok	ok	ko	ko	ok	ko	ok	1,3	4,5	2,6
12	ok	ok	ok	ok	O	O	---	ok	ko	ko	ko	ko	ko	---	---	---
13	ok	ok	ok	ko	O	N	ok	ko	ko	ko	ko	ko	ko	1,2,4	3,5,6	
14	ok	ok	ok	ok	O	O	ok	ko	ok	ko	ko	1/2	ko	1,2	3,4,5,6	
15	ok	ok	ok	---	O	---	ok	ok	---	ko	ko	---	---	---	---	---
16	ok	ok	ok	---	O	---	ok	ok	---	---	---	---	---	1,3	2	4,5,6
17	ok	ok	ok	ko	O	O	ko	ok	ko	ko	ok	ko	ko	1,2,6	3,4	5

συντομεύσεις

σημ: σημειώθηκαν μόνο σημεία

---: δεν δόθηκε απάντηση

1 /2: μισή σωστή απάντηση

ok: ολοκληρωμένη σωστή απάντηση

ko: εντελώς λανθασμένη απάντηση

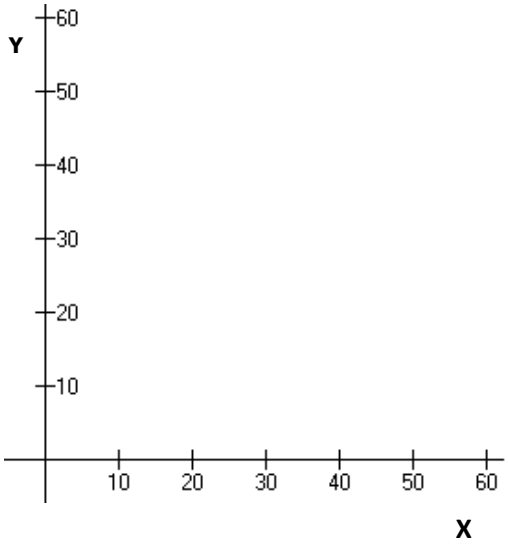
N: ΝΑΙ

O: ΟΧΙ

(vii) Ερωτηματολόγιο Γ΄ Λυκείου – Αρχές Οικονομικής Θεωρίας

1. **(i)** Από τον παρακάτω πίνακα να κατασκευαστεί η καμπύλη παραγωγικών δυνατοτήτων της οικονομίας για τα ζεύγη των αγαθών Χ, Υ και για τους συνδυασμούς των ποσοτήτων στα σημεία Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ

Σημείο	Χ	Υ
Α	50	0
Β	40	10
Γ	30	20
Δ	20	30
Ε	10	40
Ζ	0	50



Ερώτηση (ii): Είναι δυνατή η ταυτόχρονη παραγωγή των σημείων;(Ν/Ο)

Κ(10,10):.....

Λ(30,30):.....

Μ(40,20):.....

2. **(i)** Συμπληρώστε το παρακάτω ραβδόγραμμα που δείχνει την μεταβολή του **δείκτη τιμών (ΔΤ)** μεταξύ των ετών 2004 και 2008, χρησιμοποιώντας τις εξής πληροφορίες:

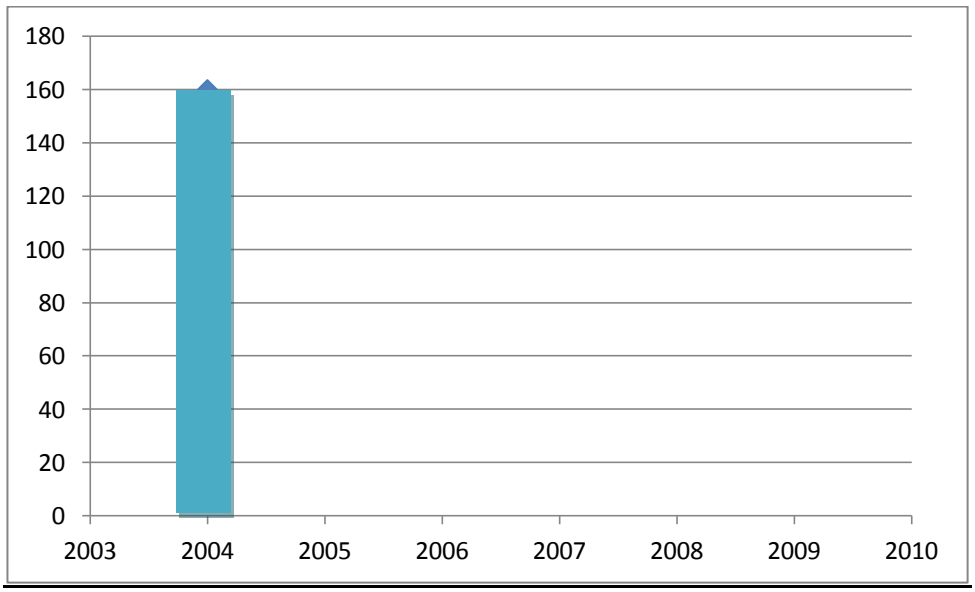
α) το 2004, ο ΔΤ ήταν 160

β) το 2005, ο ΔΤ παρουσίασε αύξηση κατά 10% σε σχέση με το 2004

γ) το 2006, ο ΔΤ μειώθηκε στην τιμή 140

δ) το 2007, ο ΔΤ έφτασε στα επίπεδα του 2005 και επιπλέον 4 μονάδες

ε)το 2008, ο ΔΤ μειώθηκε κατά 20% σε σχέση με το 2007



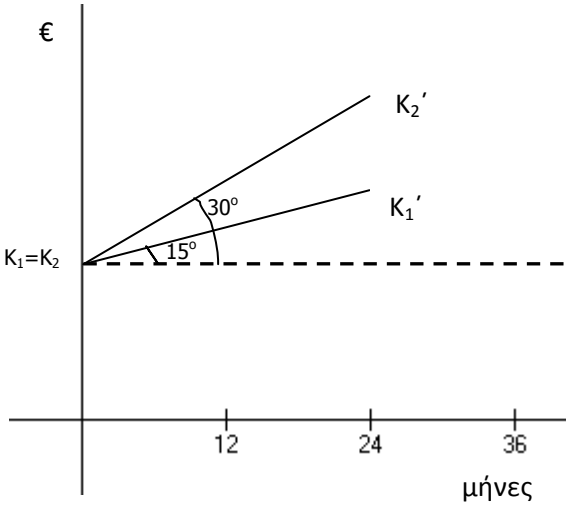
Ερώτηση (ii): Ποια είναι η καλύτερη οικονομική χρονιά και ποια η χειρότερη;

Απάντηση (ii): καλύτερη: ..... χειρότερη: .....

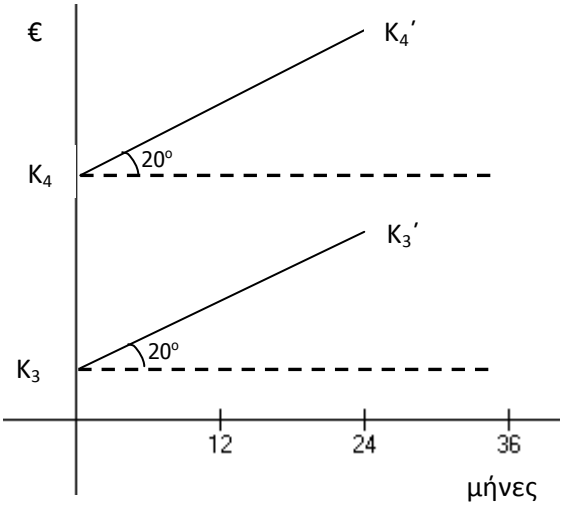
<u>Ερώτηση (iii):</u> Η απάντηση στην παραπάνω ερώτηση έγινε πιο εύκολη με τη χρήση του ραβδογράμματος:

α) **πολύ** β)**ελάχιστα** γ)**καθόλου**

3. Ο έμπορος Ε, ανάθεσε στον οικονομικό του σύμβουλο Σ, να επενδύσει το κεφάλαιό του K_0 σε κερδοφόρες τραπεζικές καταθέσεις. Μετά από δύο χρόνια, ο Σ έδειξε στον Ε τις παρακάτω δύο γραφικές αναπαραστάσεις της πορείας των επενδύσεων που έκανε, εξηγώντας πως το αρχικό κεφάλαιο K_0, το «έσπασε» σε τέσσερα μέρη K_1, K_2, K_3, K_4 (δηλαδή $K_0=K_1+K_2+K_3+K_4$)



<u>Σχήμα 1</u>



<u>Σχήμα 2</u>

<u>Ερώτηση (i):</u> Γιατί πιστεύετε ότι το K_2' είναι μεγαλύτερο από το K_1'; (επιλέξτε όσες θεωρείτε σωστές απαντήσεις)

α) $K_1 > K_2$ β) διαφορετικός συντελεστής διεύθυνσης γ)διαφορετικό επιτόκιο δ) διαφορετικό χρονικό διάστημα επένδυσης

<u>Ερώτηση (ii):</u> Οι ευθείες K_3K_3' και K_4K_4' είναι παράλληλες. Γιατί; (επιλέξτε τη σωστή απάντηση)

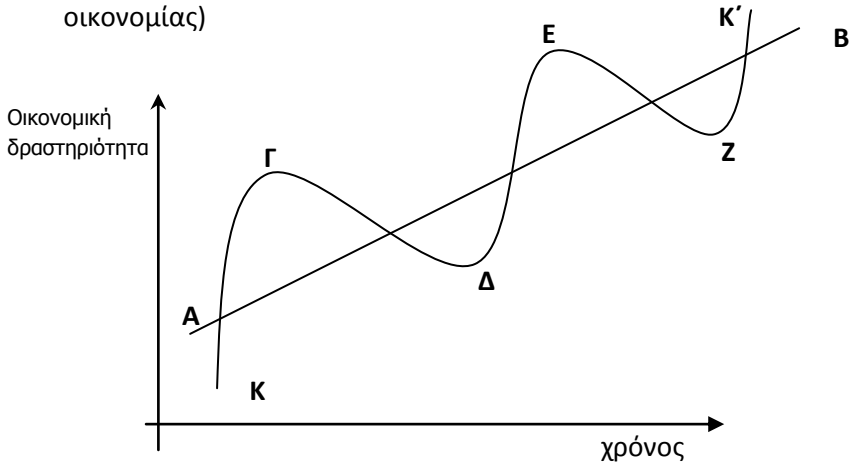
α) $K_4 > K_3$ β) διαφορετικός συντελεστής διεύθυνσης γ) $K_2 > K_3$ δ) ίδιος συντελεστής διεύθυνσης

<u>Ερώτηση (iii):</u> Ποια επένδυση κατάλαβε ο Ε ότι είναι η καλύτερη; (επιλέξτε τη σωστή). Γιατί;

α) K_1 σε K_1' β) K_2 σε K_2' γ) K_3 σε K_3' δ) K_4 σε K_4'

αιτιολόγηση:.....

4. Στο παρακάτω διάγραμμα , η καμπύλη **ΚΚ΄** δείχνει τις διάφορες φάσεις της οικονομίας στο πέρασμα του χρόνου (Η γραμμή ΑΒ παριστάνει τη μακροχρόνια ανοδική τάση της οικονομίας)



<u>Ερώτηση (i):</u> Συμπληρώστε κατάλληλα τα κενά:
Η φάση της οικονομίας από το σημείο ……. στην κορυφή ……, ονομάζεται άνοδος , ενώ η φάση από το…….. στο σημείο …….. , ονομάζεται κάθοδος . Στο σημείο …… σημειώνεται η φάση της κρίσης, ενώ στο σημείο ……. η φάση της ύφεσης

<u>Ερώτηση (ii):</u> Αν η καμπύλη **ΚΚ΄** μπορούσε να θεωρηθεί η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης ως προς τον οριζόντιο άξονα **ΑΒ,** συμπληρώστε τα κενά με τους σωστούς μαθηματικούς όρους:
Η συνάρτηση στο τμήμα **ΚΓ** είναι …….. ενώ στο τμήμα **ΓΔ** είναι …….. και παρουσιάζει στο σημείο **Ε** ..... …….. και στο σημείο **Ζ** …….. ……..

5. Χαρακτηρίστε (✓) , ανάλογα με το πόσο σας δυσκόλεψαν, τις ερωτήσεις 1 – 4 , ως εξής:

αριθμός ερώτησης	**Χαρακτηρισμός**			**αιτιολόγηση**
	Εύκολη	**Μέτριας δυσκολίας**	**Δύσκολη**	
1				
2				
3				
4				

(viii) Απαντήσεις μαθητών Γ΄ Λυκείου – Αρχές Οικονομικής Θεωρίας

Μ	Ερώτηση 1 (σχεδίαση)		Ερώτηση 2 (δείκτης τιμών)			Ερώτηση 3 (επιτόκια)			Ερώτηση 4 (φάσεις οικονομίας)		Ερώτηση 5 (χαρακτηρισμός)		
	i	ii	i	ii	iii	i	ii	iii	i	ii	ευκ	μετρ	δυσκ
1	οκ	οκ	οκ	οκ	Π	οκ	οκ	κο	οκ	οκ	1,2,3,4		
2	κο	κο	οκ	οκ	Π	οκ	οκ	κο	οκ	οκ	1,2,4	3	
3	κο	κο	οκ	οκ	Π	οκ	οκ	κο	οκ	οκ	1,2,4	3	
4	οκ	οκ	οκ	οκ	Π	1/2	οκ	κο	οκ	οκ	1,2,4	3	
5	1/2	κο	οκ	οκ	Π	κο	κο	κο	1/2	---	1,2	3	4
6	1/2	---	οκ	1/2	Π	κο	---	---	οκ	---	1,2	3	4
7	οκ	οκ	οκ	1/2	Π	1/2	οκ	κο	οκ	κο	1,2,4		3
8	οκ	οκ	οκ	κο	Π	κο	οκ	οκ	οκ	οκ	1,2,4		3
9	οκ	οκ	οκ	κο	Π	κο	κο	---	οκ	---	1	2,4	3
10	οκ	οκ	οκ	οκ	Π	---	οκ	κο	οκ	1/2	1	2	3,4
11	οκ	οκ	οκ	κο	Π	κο	οκ	κο	οκ	οκ	1,2,4	3	
12	κο	κο	1/2	1/2	Ε	κο	οκ	1/2	1/2	1/2	---	---	---
13	οκ	1/2	κο	κο	Π	κο	κο	κο	κο	1/2	2	1,3,4	
14	οκ	οκ	οκ	1/2	Ε	1/2	οκ	κο	1/2	οκ	1,2	4	3

συντομεύσεις

---: δεν δόθηκε απάντηση

1 /2: μισή σωστή απάντηση

οκ: ολοκληρωμένη σωστή απάντηση

κο: εντελώς λανθασμένη απάντηση

Π: πολύ

Ε: ελάχιστα

5 ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Ainsworth, S. (1999), The functions of multiple representations. *Computers & Education,* Vol. 33, Issue 2, σσ. 131 – 152.
- Arcavi, A. (2003), The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics,* Vol. 52, Issue 3, σσ. 215-241
- Askew, M. (2012), Models in Mind. Διαθέσιμο στη σελίδα : nrich.maths.org/8348
- Beniger, J. R., & Robyn, D. L. (1978). Quantitative graphics in statistics: A brief history. *The American Statistician*, Vol. *32, Issue* 1, σσ.1-11.
- Brenner, M. et. al. (1997), Learning by Understanding: The Role of Multiple Representations in Learning Algebra. *American Educational Research Journal,* Vol. 34, No. 4, σσ. 663-689
- Bruner, J. (1996) The Culture of Education. Harvard University Press.
- Cifarelli, V.V. (1998). The Development of Mental Representations as a Problem Solving Activity. *Journal of Mathematical Behavior*, Vol. 17, σσ. 239 – 264
- Card, S. K., Mackinlay, J. D., & Shneiderman, B. (1999). *Readings in information visualization: using vision to think*. Morgan Kaufmann.
- Chick, H., & Watson, J. (2001). Data representation and interpretation by primary school students working in groups. *Mathematics Education Research Journal*, Vol. *13*,issue 2, σσ. 91-111.
- Cleveland, W. S. (1993). *Visualizing data*. Hobart Press.
- Confrey, J., & Smith, E. (1991). A framework for functions: Prototypes, multiple representations and transformations. In *Proceedings of the 13th annual meeting of the North American Chapter of The International Group for the Psychology of Mathematics Education* , σσ. 57-63.
- DeLoache, J. S., Uttal, D. H., & Pierroutsakos, S. L. (1998). The Development of Early Symbolization: Educational implication, *Learning and Instruction,* Vol. *8* , σσ. 325-339

- Dufour-Janvier, B., Bednarz, N., & Belanger, M. (1987). Pedagogical considerations concerning the problem of representation. *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*, σσ. 109-122.
- Fennell, F., & Rowan, T. (2001). Representation: An important process for teaching and learning mathematics. *Teaching Children Mathematics*, vol. *7*, issue 5, σ. 288
- Fienberg, S. E. (1979). Graphical methods in statistics. *The American Statistician*, Vol. *33*, issue 4, σσ. 165-178.
- Friendly, M. (2006). A brief history of data visualization. In *Handbook of data visualization* (σσ. 15-56). Springer Berlin Heidelberg.
- Friendly, M. (2007). A brief history of data visualization. In C. Chen, W. Hardle & A. Unwin (Eds.), *Handbook of Computational Statistics: Data Visualization,* Vol III. Springer Berlin Heidelberg.
- Friendly, M. (2008), Milestones in the history of thematic cartography, statistical graphics and data visualization:http://www.math.usu.edu/~symanzik/teaching/2009_stat6560/Downloads/Friendly_milestone.pdf
- Goldin, G., & Shteingold, N. (2001). Systems of representations and the development of mathematical concepts. *The roles of representation in school mathematics*, σσ. 1-23.
- Goldin G.A , Kaput J. M. (1996). A Joint Perspective of the Idea of Representation in Learning and Doing Mathematics. In von L.P. Steffe, Nesher P. (Eds.) (1996) *Theories of Mathematical Learning* (σσ. 397 – 431). Mahwah (New Jersey): LEA.
- Goldin, G. A. (1998). Representational systems, learning, and problem solving in mathematics. *The Journal of Mathematical Behavior*, Vol.*17*, σσ. 137-165.
- Goldin G. A. (1987). Levels of Language in Mathematics Problem Solving. In C. Janvier (Ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (59-65). Hillsdale, NJ: Erlbaum

- Greeno, J. G., & Hall, R. P. (1997). Practicing representation: Learning with and about representational forms. *Phi Delta Kappan*, Vol. 78, issue 5, σσ. 361-367.
- Haciomeroglu, E. S. (2007). *Calculus students' understanding of derivative graphs: Problems of representations in calculus*. ProQuest.
- Hadzilacos, Th. et. al. , Using Graphs in Developing Educational Material, *CEUR Workshop Proceedings*, Vol. 308, σσ. 32-42
- Janvier, C. (1987). Problems of Representations in the Learning and Teaching of Mathematics. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Kaewsuwan, S. (2002). Importance of models in economics. Διαθέσιμο στη σελίδα : http://www.gaoshan.de/university/tp/Importance_of_Models_in_Economics.pdf
- Kaput, J. J. (1998). Representations, inscriptions, descriptions and learning: A kaleidoscope of windows. *The Journal of Mathematical Behavior*, Vol. *17*, σσ. 265-281.
- Kaput, J. J. (1987a). Representation systems and mathematics. *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*, σσ. *19* - 36.
- Kaput, J. (1991). Notations and representations as mediators of constructive processes. In E. Von Glasersfeld (Ed.) Radical constructivism on mathematics education (pp. 53-74), Kluwer Academic Publishers.
- Kosslyn, S. M. (1989). Understanding charts and graphs. *Applied cognitive psychology*, Vol. *3*, Issue 3, σσ. 185-225.
- Larson, M. & Whitin, D. (2010), Young Children Use Graphs to Build Mathematical Reasoning. *Dimensions of Early Childhood,* Vol. 38, No. 3, σσ. 15 - 22
- Leinhardt, G. & Zaslavsky, O. & Stein, M. K. (1990), Functions, Graphs, and Graphing: Tasks, Learning, and Teaching. *Review of Educational Research,* Vol. 60, No. 1, σσ. 1-64
- Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987) Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning mathematics* (pp. 33-40). Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbawm Associates.

- Lesh, R., Landau, M., & Hamilton, E. (1983). Conceptual models and applied mathematical problem-solving research. *Acquisition of mathematics concepts and processes*, σσ.263-343.
- Pape, S. J., & Tchoshanov, M. A. (2001). The role of representation (s) in developing mathematical understanding. *Theory into practice*, Vol. *40*, σσ. 118-127.
- Perkins, D.N., & Unger, C. (1994). A new look in representations for mathematics and science learning. *Instructional Science*, Vol. 22, σσ. 1-37
- Pfannkuch, M. A. X. I. N. E., & Rubick, A. M. A. N. D. A. (2002). An exploration of students' statistical thinking with given data. *Statistics Education Research Journal*, Vol. *1*, 4-21.
- Robert, A., & Robinet, J. (1989). *Représentations des enseignants de mathématiques sur les mathématiques et leur enseignement*. Institut de recherche pour l'enseignement des mathématiques, Université Paris VII.
- Roth, W. M., & McGinn, M. K. (1998). Inscriptions: Toward a theory of representing as social practice. *Review of educational research*, Vol. *68*, σσ. 35-59.
- Tufte, E. R., & Graves-Morris, P. R. (1983). *The visual display of quantitative information* (Vol. 2, No. 9). Cheshire, CT: Graphics press.
- Van de Walle, J. A., Karp, K. S., & Bay- Williams, J. M. (2010). *Elementary and middle school mathematics. Teaching developmentally (7th ed)*. Boston: Pearson.
- Wainer, H. & Velleman, P. F. (2001). Statistical graphics: Mapping the pathways of science. *Annual Review of Psychology,* Vol. 52, σσ. 305 – 335.
- Watson, J. & Fitzallen, N. (2010), The Development of Graph Understanding in the Mathematics Curriculum. New South Wales: Department of Education and Training .
- Wild, C. J., & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, Vol. *67*, issue 3, σσ. 223-248.
- Young, C.Y. (2012), College algebra, Chapter 3: *Functions and their Graphs*. New York City : John Wiley & Sons

- Αδαμόπουλος, Λ. κ.ά. (2015), Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής Γ΄ Λυκείου. Αθήνα: ΙΤΥΕ
- Ανδρεαδάκης, Σ. κ.ά. (2013), Άλγεβρα Α΄ Λυκείου. Αθήνα: ΙΤΥΕ
- Ανδρεαδάκης, Σ. κ.ά. (2012), Άλγεβρα Β΄ Λυκείου. Αθήνα: ΙΤΥΕ
- Αποστολόπουλος, Θ. κ.ά (2015), Οικονομικά Μαθηματικά Β΄ ΕΠΑΛ. Αθήνα : ΙΤΥΕ
- Λιανός, Θ. κ.ά. (2015), Αρχές Οικονομικής Θεωρίας Γ΄ ΕΠΑΛ. Αθήνα: ΙΤΥΕ
- Μαθηματικές Σημειώσεις ΕΠΑΛ. Διαθέσιμο στη σελίδα: http://lisari.blogspot.gr/p/blog-page_1937.html