Οι τύποι Area και Coarea

Παναγιώτης Χουδαλάκης

Μεταπτυχιακή Εργασία
Επιβλέπων καθηγητής: Θεμιστοκλής Μήτσης

Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Κρήτης, 2023

Οι τύποι Area και Coarea

Παναγιώτης Χουδαλάκης

Πρόλογος

Η εργασία αυτή αποτελεί μία μελέτη πάνω στους τύπους Area και Coarea, βασισμένη στο βίβλίο των Evans & Gariepy με τίτλο Measure theory and fine properties of functions. Οι τύποι αποδείχτηκαν πρώτα από τον Γερμανό μαθηματικό Herbert Federer τις δεκαετίες του 1950 και του 1960. Αφορούν Lipschitz συνεχείς συναρτήσεις $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ και από αυτούς προκύπτουν τύποι αλλαγής μεταβλητής. Έχουμε τις εξής δύο περιπτώσεις:

Αν $n \leq m$ τότε ο τύπος Area ισχυρίζεται ότι το n-διάσταστο μέτρο του $f(A)$, μετρώντας την πολλαπλότητα, μπορεί να υπολογιστεί ολοκληρώνοντας την Ιακωβιανή της f πάνω από το A.

Εάν $n \geq m$, τότε ο τύπος Coarea ισχυρίζεται ότι το ολοκλήρωμα του $n-m$-διάσταστου μέτρου των level sets της f μπορεί να υπολογιστεί ολοκληρώνοντας την Ιακωβιανή της f. Αυτό αποτελέι μια γενίκευση του θεωρήματος του Fubini.

Στο πρώτο κεφάλαιο εισάγουμε κάποιες έννοιες που θα χρειαστούμε και αναφέρουμε, χωρίς απόδειξη, διάφορες ιδιότητες που θα χρησιμοποιήσουμε.
Στα επόμενα δύο κεφάλαια δίνουμε την απόδειξη των δύο θεωρημάτων.

Σημείωση: Όπου αναφέρουμε μέτρο, εννοούμε εξωτερικό μέτρο.

Στους γονείς μου

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγικά **4**

1.1 Θεωρία μέτρου 4

1.1.1 Μέτρο Hausdorff 5

1.1.2 Συναρτήσεις Lipschitz και μέτρο Hausdorff 6

1.2 Γραμμική Άλγεβρα 8

1.2.1 Γραμμικές απεικονίσεις 8

1.2.2 Ιακωβιανή συνάρτησης 11

2 Ο τύπος Area **12**

2.1 Προκαταρκτικά λήμματα 12

2.2 Ο τύπος Area 17

2.3 Τύπος αλλαγής μεταβλητής 20

2.4 Εφαρμογές 21

3 Ο τύπος Coarea **23**

3.1 Προκαταρκτικά λήμματα 23

3.2 Ο τύπος Coarea 32

3.3 Τύπος αλλαγής μεταβλητής 39

3.4 Εφαρμογές 39

4 Βιβλιογραφία **41**

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγικά

1.1 Θεωρία μέτρου

Στην ενότητα αυτή αναφερόμαστε σε βασικές έννοιες της θεωρίας μέτρου και εισάγουμε το μέτρο Hausdorff.

Ορισμός 1.1. *(i) Ένα μέτρο μ στον $\mathbb{R}^n$ λέγεται **Borel** έαν κάθε Borel σύνολο είναι μ-μετρήσιμο.*

*(ii) Ένα μέτρο μ στον X λέγεται **κανονικό** αν για κάθε σύνολο $A \subseteq X$ υπάρχει ένα μ-μετρήσιμο σύνολο B τέτοιο ώστε $A \subseteq B$ και $\mu(A) = \mu(B)$.*

*(iii) Ένα μέτρο μ στον $\mathbb{R}^n$ λέγεται **Borel κανονικό** εάν είναι Borel και για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}^n$ υπάρχει ένα Borel σύνολο B τέτοιο ώστε $A \subseteq B$ και $\mu(A) = \mu(B)$.*

*(iv) Ένα μέτρο μ στον $\mathbb{R}^n$ λέγεται **Radon** μέτρο εάν είναι Borel κανονικό και $\mu(K) < \infty$ για κάθε $K \subseteq \mathbb{R}^n$ συμπαγές.*

Θεώρημα 1.1. *(Decomposition of nonnegative measurable functions.) Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f : X \to [0, +\infty]$ είναι μ-μετρήσιμη. Τότε υπάρχουν μ-μετρήσιμα σύνολα $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ στον X τέτοια ώστε*

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \chi_{A_k}$$

Θεώρημα 1.2. *Έστω ν, μ Radon μέτρα στον $\mathbb{R}^n$, με $\nu << \mu$. Τότε*

$$\nu(A) = \int_A D_\mu \nu \, d\mu$$

για όλα τα μ-μετρήσιμα σύνολα $A \subseteq \mathbb{R}^n$, όπου $D_\mu \nu$ είναι η παράγωγος του μέτρου ν ως προς το μέτρο μ.

1.1.1 Μέτρο Hausdorff

Ορισμός 1.2. *(i) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n,\ 0 \leq s < \infty,\ 0 < \delta \leq \infty$. Ορίζουμε*

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) := \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \alpha(s)\left(\frac{\mathrm{diam}C_j}{2}\right)^s \mid A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j,\ \mathrm{diam}C_j \leq \delta\right\}$$

όπου

$$\alpha(s) := \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma(\frac{s}{2}+1)}$$

(ii) Για σύνολο A όπως παραπάνω, ορίζουμε

$$\mathcal{H}^s(A) := \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(A) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}^s_\delta(A)$$

Το $\mathcal{H}^s$ λέγεται $s-$διάστατο μέτρο Hausdorff στον $\mathbb{R}^n$. Παρακάτω παραθέτουμε ορισμένες βασικές ιδιότητες του $\mathcal{H}^s$.

Θεώρημα 1.3.

(i) Για κάθε $0 \leq s < \infty$, το $\mathcal{H}^s$ είναι Borel κανονικό μέτρο στον $\mathbb{R}^n$.

(ii) Το $\mathcal{H}^0$ είναι το counting μέτρο.

(iii) $\mathcal{H}^1 = \mathcal{L}^1$ στον $\mathbb{R}^1$.

(iv) $\mathcal{H}^s = 0$ στον $\mathbb{R}^n$ για κάθε $s > n$.

(v) $\mathcal{H}^s(\lambda A) = \lambda^s \mathcal{H}^s(A)$, για κάθε $\lambda > 0,\ A \subseteq \mathbb{R}^n$.

(vi) $\mathcal{H}^s(L(A)) = \mathcal{H}^s(A)$ για κάθε αφινική ισομετρία $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ A \subseteq \mathbb{R}^n$.

Λήμμα 1.4. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και $0 \leq s < t < \infty$.*

(i) Εάν $\mathcal{H}^s(A) < \infty$, τότε $\mathcal{H}^t(A) = 0$

(ii) Εάν $\mathcal{H}^t(A) > 0$ τότε $\mathcal{H}^s(A) = +\infty$.

Ορισμός 1.3. *Η **διάσταση Hausdorff** ενός συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι*

$$H_{dim}(A) := \inf\{0 \leq s < \infty \mid \mathcal{H}^s(A) = 0\}$$

Σημείωση:

(i) Από το (iv) του θεωρήματος 1.3, παρατηρούμε ότι $H_{dim}(A) \leq n$. Έστω $s = H_{dim}(A)$. Τότε $\mathcal{H}^t(A) = 0$ εάν $t > s$ και $\mathcal{H}^t(A) = +\infty$ εάν $t < s$. Το $\mathcal{H}^s(A)$ μπορεί να είναι οποιοσδήποτε αριθμός ανάμεσα στο 0 και το ∞.

(ii) Το $\mathcal{H}^s,\ 0 \leq s < n$ δεν είναι Radon μέτρο, καθώς $B(1) \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{H}^n(B(1)) > 0$ και επομένως $\mathcal{H}^s(B(1)) = +\infty$.

Θεώρημα 1.5. *(Ισοδιαμετρική ανισότητα) Εάν $A \subseteq \mathbb{R}^n$, τότε*

$$\mathcal{L}^n(A) \leq \alpha(n)\Big(\frac{\text{diam } A}{2}\Big)^n.$$

Θεώρημα 1.6. *Ισχύει*

$$\mathcal{H}^n = \mathcal{L}^n \quad \textit{στον } \mathbb{R}^n$$

1.1.2 Συναρτήσεις Lipschitz και μέτρο Hausdorff

Ορισμός 1.4. *Μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ λέγεται Lipschitz συνεχής εάν υπάρχει μια σταθερά C τέτοια ώστε*

$$\|f(x) - f(y)\| \leq C\|x - y\|, \quad \textit{για κάθε } x, y \in \mathbb{R}^n$$

Η μικρότέρη σταθερά C για την οποία ισχύει η παραπάνω σχέση για κάθε x, y λέγεται Lipschitz σταθερά για την f και συμβολίζεται με $\text{Lip}f$. Δηλαδή

$$\text{Lip}f := \sup\left\{\frac{\|f(x) - f(y)\|}{\|x - y\|} \mid x, y \in A,\ x \neq y\right\}$$

Θεώρημα 1.7. *(Επέκταση Lipschitz συναρτήσεων). Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ και $f : A \to \mathbb{R}^m$ Lipschitz συνεχής. Τότε υπάρχει μία Lipschitz συνεχής συνάρτηση $\overline{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ τέτοια ώστε*

(i) $\overline{f} = f$ *στο* A

(ii) $\text{Lip}\overline{f} \leq \sqrt{m}\ \text{Lip}f$

Θεώρημα 1.8. *(i) Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ Lipschitz συνεχής, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και $0 \leq s < \infty$. Τότε*

$$\mathcal{H}^s(f(A)) \leq (\text{Lip}f)^s\mathcal{H}^s(A)$$

(ii) Εάν $n > k$, $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ η προβολή, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και $0 \leq s < \infty$, τότε:

$$\mathcal{H}^s(P(A)) \leq \mathcal{H}^s(A)$$

Ορισμός 1.5. *(Γράφημα συνάρτησης). Για $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ και $A \subseteq \mathbb{R}^n$, γράφουμε*

$$G(f; A) := \{(x, f(x)) \mid x \in A\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+m}$$

Το $G(f; A)$ λέγεται **γράφημα** *της f πάνω από το A.*

Θεώρημα 1.9. *(Hausdorff διάσταση γραφημάτων). Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ και $\mathcal{L}^n(A) > 0$.*

(i) Τότε $H_{dim}(G(f; A)) \geq n$.

(ii) Εάν η f είναι Lipschitz συνεχής, τότε $H_{dim}(G(f; A)) = n$.

Ορισμός 1.6. *Η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ λέγεται* **παραγωγίσιμη** *στο $x \in \mathbb{R}^n$ εάν υπάρχει μια γραμμική απεικόνιση*

$$L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

τέτοια ώστε

$$\lim_{y \to x} \frac{\|f(y) - f(x) - L(y - x)\|}{\|x - y\|} = 0$$

ή ισοδύναμα,

$$f(y) = f(x) + L(y - x) + o(\|y - x\|) \quad \text{καθώς } y \to x$$

Συμβολισμός: Εάν μια τέτοια απεικόνιση υπάρχει τότε είναι μοναδική και γράφουμε

$$Df(x)$$

για την L. Καλούμε την $Df(x)$ **παράγωγο** της f στο x.

Σημείωση: Βλέπουμε από τον ορισμό ότι αν η συνάρτηση f είναι γραμμική, τότε η παράγωγος της είναι η ίδια η f.

Θεώρημα 1.10. *(Rademacher's theorem). Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ Lipschitz συνεχής συνάρτηση. Τότε ή f είναι παραγωγίσιμη $\mathcal{L}^n$-σ.π.*

Θεώρημα 1.11. *(i) Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ Lipschitz συνεχής συνάρτηση και*

$$Z := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \ f(x) = 0\}$$

Τότε $Df(x) = 0$ για $\mathcal{L}^n$-σ.κ. $x \in Z$.

(ii) Έστω $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz συνεχείς συναρτήσεις και

$$Y := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \ g(f(x)) = x\}$$

Τότε

$$Dg(f(x))Df(x) = I \quad \text{για } \mathcal{L}^n - \text{σ.κ. } x \in Y$$

1.2 Γραμμική Άλγεβρα

Στο κεφάλαιο αυτό αναφέρουμε κάποιες έννοιες της γραμμικής άλγεβρας. Ο στόχος μας είναι να ορίσουμε την Ιακωβιανή μιας συνάρτησης $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

1.2.1 Γραμμικές απεικονίσεις

Ορισμός 1.7.

(i) Μια γραμμική απεικόνιση $O : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ λέγεται ***ορθογώνια*** *εάν*

$$(Ox) \cdot (Oy) = x \cdot y$$

για όλα τα $x, y \in \mathbb{R}^n$.

(ii) Μια γραμμική απεικόνιση $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ λέγεται ***συμμετρική*** *εάν*

$$x \cdot (Sy) = (Sx) \cdot y$$

για όλα τα $x, y \in \mathbb{R}^n$.

(iii) Μια γραμμική απεικόνιση $D : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ λέγεται ***διαγώνια*** *εάν υπάρχουν $d_1, d_2, \ldots d_n \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε*

$$Dx = (d_1x_1, d_2x_2, \ldots, d_nx_n)$$

για όλα τα $x \in \mathbb{R}^n$.

(iv) Έστω $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ γραμμική απεικόνιση. Η ***συζυγής*** *της A είναι η γραμμική απεικόνιση $A^* : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, όπου*

$$x \cdot (A^*y) = (Ax) \cdot y$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n,\ y \in \mathbb{R}^m$.

Σημείωση: Μία ορθογώνια απεικόνιση, όπως παραπάνω, είναι ισομετρία και από το θεώρημα των Mazur - Ulam είναι και αφινική. Επομένως εάν $O : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ορθογώνια απεικόνιση και $A \subseteq \mathbb{R}^n$, τότε από το θεώρημα 1.3

$$\mathcal{H}^s(O(A)) = \mathcal{H}^s(A)$$

Θεώρημα 1.12.

(i) $A^{**} = A$

(ii) $(A \circ B)^* = B^* \circ A^*$

(iii) $O^* = O^{-1}$ *εάν η* $O : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *είναι ορθογώνια.*

(iv) $S^* = S$ *εάν η* $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *είναι συμμετρική.*

(v) Εάν η $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *είναι συμμετρική, υπάρχει μια ορθογώνια απεικόνιση* $O : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *και μία διαγώνια απεικόνιση* $D : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *τέτοιες ώστε*

$$S = O \circ D \circ O^{-1}$$

(vi) Εάν η $O : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *είναι ορθογώνια, τότε* $n \leq m$ *και*

$$O^* \circ O = I \quad \text{στο } \mathbb{R}^n$$

Θεώρημα 1.13. *(Polar decomposition)*
Έστω $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *μια γραμμική απεικόνιση.*

(i) Εάν $n \leq m$*, τότε υπάρχει μια συμμετρική απεικόνιση* $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *και μια ορθογώνια απεικόνιση* $O : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *τέτοιες ώστε*

$$L = O \circ S$$

(ii) Εάν $n \geq m$*, τότε υπάρχει συμμετρική απεικόνιση* $S : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ *και ορθογώνια απεικόνιση* $O : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *τέτοιες ώστε*

$$L = S \circ O^*$$

Ορισμός 1.8. *Έστω* $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *γραμμική.*

(i) Εάν $n \leq m$*, γράφουμε* $L = O \circ S$ *όπως παραπάνω και ορίζουμε την* ***Ιακωβιανή*** *της* L *να είναι*

$$[\![L]\!] = |\det S|$$

(ii) Εάν $n \geq m$*, γράφουμε* $L = S \circ O^*$ *όπως παραπάνω, και ορίζουμε την* ***Ιακωβιανή*** *της* L *να είναι*

$$[\![L]\!] = |\det S|$$

Από το επόμενο θεώρημα, προκύπτει ότι η ιακωβιανή της L δεν εξαρτάται από την επιλογή των O και S.

Θεώρημα 1.14.

(i) Εάν $n \leq m$, τότε

$$[\![L]\!]^2 = \det(L^* \circ L)$$

(ii) Εάν $n \geq m$, τότε

$$[\![L]\!]^2 = \det(L \circ L^*)$$

Ορισμός 1.9.

(i) Εάν $n \leq m$, ορίζουμε

$$\Lambda(m,n) = \{\lambda : \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,m\} \ \mid \ \lambda \ \text{ είναι αύξουσα}\}$$

(ii) Για κάθε $\lambda \in \Lambda(m,n)$, ορίζουμε $P_\lambda : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ με

$$P_\lambda(x_1,\ldots,x_m) = (x_{\lambda(1)},\ldots,x_{\lambda(n)})$$

(iii) Για κάθε $\lambda \in \Lambda(m,n)$, ορίζουμε τον $n-$διάσταστο υπόχωρο

$$S_\lambda := \operatorname{span}\{e_{\lambda(1)},\ldots,e_{\lambda(n)}\} \subseteq \mathbb{R}^m$$

Τότε η P_λ είναι η προβολή του $\mathbb{R}^m$ στον S_λ.

Θεώρημα 1.15. *(Binet- Cauchy formula)*
Έστω $n \leq m$ και $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ γραμμική. Τότε

$$[\![L]\!]^2 = \sum_{\lambda \in \Lambda(m,n)} (\det(P_\lambda \circ L))^2.$$

Επομένως για να υπολογίσουμε την $[\![L]\!]^2$, υπολογίζουμε το άθροισμα των τετραγώνων των οριζουσών των $(n \times n)$- υποπινάκων του $(m \times n)$- πίνακα που αναπαριστά την L.

1.2.2 Ιακωβιανή συνάρτησης

Έστω τώρα συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ Lipschitz συνεχής. Από το θεώρημα του Rademacher, η f είναι παραγωγίσιμη $\mathcal{L}^n$-σ.π. και επομένως η $Df(x)$ υπάρχει και μπορεί να θεωρηθεί ως μία γραμμική απεικόνιση από τον $\mathbb{R}^n$ στον $\mathbb{R}^m$, για $\mathcal{L}^n$-σ.κ. $x \in \mathbb{R}^n$.
Συμβολισμός: Εάν $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ f = (f^1, \dots, f^m)$, γράφουμε

$$Df = \begin{pmatrix} f^1_{x_1} & \dots & f^1_{x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f^m_{x_1} & \dots & f^m_{x_n} \end{pmatrix}_{m \times n}$$

Ορισμός 1.10. *Για $\mathcal{L}^n$-σ.κ. x, ορίζουμε την **Ιακωβιανή** της f να είναι*

$$Jf(x) = [\![Df(x)]\!].$$

Σημείωση: Η Df είναι Borel μετρήσιμη αφού $f^i_{x_j}$ είναι Borel μετρήσιμη για κάθε i, j ως όριο ρητών παραστάσεων από συνεχείς συναρτήσεις.
Ομοίως η Jf είναι Borel μετρήσιμη ως αλγεβρικός συνδυασμός Borel μετρήσιμων συναρτήσεων (από τον τύπο Cauchy-Binet).

Κεφάλαιο 2

Ο τύπος Area

Σε αυτό το κεφάλαιο υποθέτουμε ότι

$$n \leq m$$

2.1 Προκαταρκτικά λήμματα

Λήμμα 2.1. *Έστω $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ γραμμική, $n \leq m$. Τότε*

$$\mathcal{H}^n(L(A)) = [\![L]\!]\mathcal{L}^n(A)$$

Απόδειξη. Γράφουμε $L = O \circ S$, όπως στο θεώρημα 1.13. Τότε $[\![L]\!] = |\det S|$.

Εάν $[\![L]\!] = 0$, τότε $\dim S(\mathbb{R}^n) \leq n-1$ και άρα $\dim L(\mathbb{R}^n) \leq n-1$. Συνεπώς, $\mathcal{H}^n(L(\mathbb{R}^n)) = 0$.

Εάν $[\![L]\!] > 0$, τότε $\dim L(\mathbb{R}^n) = n$ και για $Lx, Ly \in L(\mathbb{R}^n)$ έχουμε

$$O^*(Lx) \cdot O^*(Ly) = Sx \cdot Sy = (O \circ S)x \cdot (O \circ S)y = Lx \cdot Ly.$$

Δηλαδή ο O^* περιορισμένος στην εικόνα της L είναι ισομετρία. Έχουμε λοιπόν:

$$\frac{\mathcal{H}^n(L(B(x,r)))}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} = \frac{\mathcal{H}^n(O^* \circ L(B(x,r)))}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} = \frac{\mathcal{L}^n(O^* \circ L(B(x,r)))}{\mathcal{L}^n(B(x,r))}$$
$$= \frac{\mathcal{L}^n(O^* \circ O \circ S((B(x,r))))}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} = \frac{\mathcal{L}^n(S(B(x,r)))}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} = \frac{\mathcal{L}^n(S(B(1)))}{\alpha(n)} = |\det S| = [\![L]\!]$$

Ορίζουμε τώρα $\nu(A) := \mathcal{H}^n(L(A))$ για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}^n$.
Ισχυρισμός: Το ν είναι μέτρο Radon και $\nu << \mathcal{L}^n$

Απόδειξη ισχυρισμού: Το $\mathcal{H}^n$ είναι Borel κανονικό μέτρο. Εάν $K \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές, τότε από το θεώρημα 1.8

$$\nu(K) = \mathcal{H}^n(L(K)) \leq C\mathcal{H}^n(K) = C\mathcal{L}^n(K) < \infty.$$

Ομοίως αν $\mathcal{L}^n(A) = 0$ αποδεικνύουμε ότι $\nu(A) = 0$.

Επίσης

$$D_{\mathcal{L}^n}\nu(x) = \lim_{r\to 0} \frac{\nu(B(x,r))}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} = [\![L]\!]$$

Επομένως για όλα τα Borel σύνολα $B \subseteq \mathbb{R}^n$, το θεώρημα 1.2 δίνει

$$\mathcal{H}^n(L(B)) = [\![L]\!]\mathcal{L}^n(B)$$

Αφού το ν και το $\mathcal{L}^n$ είναι Radon μέτρα, άρα και Borel κανονικά, ο τύπος ισχύει για όλα τα σύνολα $A \subseteq \mathbb{R}^n$. □

Από εδώ και στο εξής, θεωρούμε ότι η $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ είναι Lipschitz συνεχής.

Λήμμα 2.2. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα $\mathcal{L}^n-$ μετρήσιμο σύνολο. Τότε:*

(i) *το $f(A)$ είναι $\mathcal{H}^n-$ μετρήσιμο,*

(ii) *η απεικόνιση $y \mapsto \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}\{y\})$ είναι $\mathcal{H}^n-$ μετρήσιμη στον $\mathbb{R}^m$ και*

(iii)

$$\int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}\{y\})\, d\mathcal{H}^n(y) \leq (\mathrm{Lip} f)^n \mathcal{L}^n(A).$$

Ορισμός 2.1. *Η απεικόνιση $y \mapsto \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}\{y\})$ καλείται συνάρτηση πολλαπλότητας.*

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι το A είναι φραγμένο.
Υπάρχουν συμπαγή σύνολα $K_i \subseteq A$ τέτοια ώστε

$$\mathcal{L}^n(K_i) \geq \mathcal{L}^n(A) - \frac{1}{i} \quad (i = 1, 2, \dots)$$

Αφού $\mathcal{L}^n(A) < \infty$ και το A είναι $\mathcal{L}^n$-μετρήσιμο, ισχύει $\mathcal{L}^n(A - K_i) \leq \frac{1}{i}$. Αφού η f είναι συνεχής, το $f(K_i)$ είναι συμπαγές και άρα $\mathcal{H}^n$-μετρήσιμο. Επομένως $f(\cup_{i=1}^{\infty} K_i) = \cup_{i=1}^{\infty} f(K_i)$ είναι $\mathcal{H}^n$-μετρήσιμο. Ακόμα:

$$\mathcal{H}^n\Big(f(A) - f\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i\Big)\Big) \leq \mathcal{H}^n\Big(f\Big(A - \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i\Big)\Big) \leq (\mathrm{Lip} f)^n \mathcal{L}^n\Big(A - \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i\Big) = 0$$

Άρα το $f(A) - f(\cup_{i=1}^{\infty} K_i)$ είναι $\mathcal{H}^n$-μετρήσιμο,επομένως και το $f(A)$ είναι $\mathcal{H}^n$-μετρήσιμο και αυτό αποδεικνύει το (i).

Έστω τώρα για $k = 1, 2, \ldots$

$$B_k := \Big\{ Q \mid Q = (a_1, b_1] \times \cdots \times (a_n, b_n],\ a_i = \frac{c_i}{k},\ b_i = \frac{c_i + 1}{k},\ c_i \in \mathbb{Z} \Big\}$$

Τότε

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{Q \in B_k} Q.$$

Τώρα θεωρώ τις συναρτήσεις

$$g_k := \sum_{Q \in B_k} \chi_{f(A \cap Q)}$$

Είναι $\mathcal{H}^n$-μετρήσιμες από το (i) και

$$g_k(y) = \text{πλήθος κύβων } Q \in B_k \text{ τέτοιοι ώστε } f^{-1}\{y\} \cap (A \cap Q) \neq \emptyset$$

Ισχυρισμός: Καθώς $k \to \infty$,

$$g_k(y) \to \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}\{y\})$$

για κάθε $y \in \mathbb{R}^m$.
Απόδειξη ισχυρισμού: Έστω $y \in \mathbb{R}^m$.
Αν $\mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}\{y\}) = \infty$, τότε προφανώς $g_k(y) = \infty$ τελικά.

Αν $\mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}\{y\}) < \infty$, τότε υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε η $f|_Q$ να είναι 1-1 για κάθε $Q \in B_k,\ k \geq k_0$. Επομένως

$$\mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}\{y\}) = \mathcal{H}^0\Big(A \cap (\cup_{Q \in B_k} Q) \cap f^{-1}\{y\}\Big) = \sum_{Q \in B_k} \chi_{f(A \cap Q)}(y)$$

για $k \geq k_0$, και άρα

$$\big| g_k(y) - \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}\{y\}) \big| = 0$$

για κάθε $k \geq k_0$.

Επομένως η απεικόνιση $y \mapsto \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}\{y\})$ είναι $\mathcal{H}^n$-μετρήσιμη.
Τώρα, από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης έχουμε:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}\{y\})\, d\mathcal{H}^n(y) &= \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^m} g_k \, d\mathcal{H}^n \\
&= \lim_{k\to\infty} \sum_{Q\in B_k} \mathcal{H}^n(f(A\cap Q)) \\
&\le \limsup_{k\to\infty} \sum_{Q\in B_k} (\mathrm{Lip} f)^n \mathcal{L}^n(A\cap Q) \\
&= (\mathrm{Lip} f)^n \mathcal{L}^n(A)
\end{aligned}$$

□

Λήμμα 2.3. *Έστω $t > 1$ και*

$$B := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Df(x) \text{ υπάρχει},\ Jf(x) > 0\}.$$

Τότε υπάρχει αριθμήσιμη συλλογή $\{E_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ από Borel υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε:

(i) $B = \cup_{k=1}^{\infty} E_k$

(ii) $f|_{E_k}$ *είναι 1-1* $(k = 1, 2, \dots)$ *και*

(iii) για κάθε $k = 1, 2, \dots$ υπάρχει ένας συμμετρικός αυτομορφισμός $T_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ τέτοιος ώστε:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Lip}((f|_{E_k}) \circ T_k^{-1}) \le t,\ \mathrm{Lip}(T_k \circ (f|_{E_k})^{-1}) \le t, \\
t^{-n}|\det T_k| \le Jf|_{E_k} \le t^n |\det T_k|.
\end{aligned}$$

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε

$$t^{-1} + \epsilon < 1 < t - \epsilon$$

Έστω C ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του B και S ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο συμμετρικών αυτομορφισμών του $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $c \in C$, $T \in S$ και $i = 1, 2, \dots$ ορίζουμε $E(c, T, i)$ να είναι το σύνολο όλων των $b \in B \cap B(c, \frac{1}{i})$ για τα οποία ισχύει

$$(t^{-1} + \epsilon)\|Tv\| \le \|Df(b)v\| \le (t - \epsilon)\|Tv\| \tag{2.1}$$

για κάθε $v \in \mathbb{R}^n$ και

$$\|f(a) - f(b) - Df(b)\cdot(a - b)\| \le \epsilon\|T(a - b)\| \tag{2.2}$$

για κάθε $a \in B(b, \frac{2}{i})$. Το $E(c, T, i)$ είναι Borel σύνολο καθώς η Df είναι Borel μετρήσιμη. Από τις σχέσεις (2.1) και (2.2) παίρνουμε:

$$t^{-1}\|T(a-b)\| \leq \|f(a) - f(b)\| \leq t\|T(a-b)\| \tag{2.3}$$

για $b \in E(c, T, i), a \in B(b, \frac{2}{i})$

Ισχυρισμός: Εάν $b \in E(c, T, i)$ τότε

$$(t^{-1} + \epsilon)^n |\det T| \leq Jf(b) \leq (t - \epsilon)^n |\det T|$$

Απόδειξη ισχυρισμού: Γράφουμε $Df(b) = L = O \circ S$, όπως παραπάνω.

$$Jf(b) = [\![Df(b)]\!] = |\det S|$$

Σύμφωνα με την (2.1),

$$(t^{-1} + \epsilon)\|v\| \leq \|(S \circ T^{-1})v\| \leq (t - \epsilon)\|v\| \quad (v \in \mathbb{R}^n)$$

Επομένως,

$$(S \circ T^{-1})(B(1)) \subseteq B(t - \epsilon)$$

και από μονοτονία μέτρου $\mathcal{L}^n$ παίρνουμε

$$|\det(S \circ T^{-1})|\alpha(n) \leq \mathcal{L}^n(B(t - \epsilon)) = \alpha(n)(t - \epsilon)^n$$

και άρα πολλαπλασιάζοντας με $|\det T|$,

$$|\det S| \leq (t - \epsilon)^n |\det T|$$

Ομοίως αποδεικνύουμε και την άλλη ανισότητα.

Τώρα απαριθμούμε την αριθμήσιμη συλλογή $\{E(c, T, i) \mid c \in C, T \in S, i \in \mathbb{N}\}$ και τη μετονομάζουμε σε $\{E_k\}_{k \in \mathbb{N}}$. Διαλέγουμε $b \in B$ και γράφουμε $Df(b) = O \circ S$ όπως παραπάνω. Διαλέγουμε $T \in S$ τέτοιο ώστε

$$\mathrm{Lip}(T \circ S^{-1}) \leq (t^{-1} + \epsilon)^{-1}, \ \mathrm{Lip}(S \circ T^{-1}) \leq t - \epsilon.$$

Τώρα διαλέγουμε $i \in \{1, 2, \dots\}$ και $c \in C$ με $\|b - c\| < \frac{1}{i}$ και

$$\|f(a) - f(b) - Df(b) \cdot (a - b)\| \leq \frac{\epsilon}{\mathrm{Lip}(T^{-1})}\|a - b\| \leq \epsilon\|T(a - b)\|$$

για κάθε $a \in B(b, \frac{2}{i})$. Τότε $b \in E(c, T, i)$. Αυτό το συμπέρασμα ισχύει για όλα τα $b \in B$, επομένως ο ισχυρισμός (i) αποδείχθηκε.

Για τους ισχυρισμούς (ii), (iii):
Επιλέγουμε σύνολο E_k απο την παραπάνω συλλογή. Το E_k είναι της μορφής $E(c, T, i)$ για κάποιο $c \in C, T \in S, i = 1, 2, \ldots$. Έστω $T_k = T$. Σύμφωνα με την (2.3),

$$t^{-1}\|T_k(a-b)\| \leq \|f(a) - f(b)\| \leq t\|T_k(a-b)\|$$

για κάθε $b \in E_k, a \in B(b, \frac{2}{i})$. Είναι $E_k \subseteq B(c, \frac{1}{i}) \subseteq B(b, \frac{2}{i})$, άρα έχουμε

$$t^{-1}\|T_k(a-b)\| \leq \|f(a) - f(b)\| \leq t\|T_k(a-b)\| \tag{2.4}$$

για κάθε $a, b \in E_k$. Επομένως η $f|_{E_k}$ είναι 1-1.
Τέλος, για $a = T_k^{-1}(c), b = T_k^{-1}(d)$, για κάποια $c, d \in \mathbb{R}^n$, βλέπουμε από την (2.4) ότι

$$\mathrm{Lip}((f|_{E_k}) \circ T_k^{-1}) \leq t$$

Ομοίως για $a = (f|_{E_k})^{-1}(c), b = (f|_{E_k})^{-1}(d)$, για κάποια $c, d \in E_k$ βλέπουμε ότι

$$\mathrm{Lip}(T_k \circ (f|_{E_k})^{-1}) \leq t$$

ενώ από τον ισχυρισμό παίρνουμε ότι

$$t^{-n}|\det T_k| \leq Jf|_{E_k} \leq t^n|\det T_k|$$

□

2.2 Ο τύπος Area

Θεώρημα 2.4. *(Area formula) Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ Lipschitz συνεχής συνάρτηση, $n \leq m$. Τότε για κάθε $\mathcal{L}^n$ -μετρήσιμο σύνολο $A \subset \mathbb{R}^n$,*

$$\int_A Jf(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}\{y\})\, d\mathcal{H}^n(y)$$

Απόδειξη. Από το θεώρημα του Rademacher, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $Df(x)$ και $Jf(x)$ υπάρχουν για όλα τα $x \in A$. Μπορούμε ακόμα να υποθέσουμε ότι $\mathcal{L}^n(A) < \infty$.

Περίπτωση 1: $A \subseteq \{Jf > 0\} = B$. Σταθεροποιούμε $t > 1$ και επιλέγουμε Borel σύνολα $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ όπως στο Λήμμα 2.3. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα σύνολα $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ είναι ξένα. Ορίζουμε

$$F_j := E_j \cap A, \quad j = 1, 2, \ldots$$

Τα F_j είναι ξένα και

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j = \bigcup_{j=1}^{\infty}(E_j \cap A) = \Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\Big) \cap A = B \cap A = A$$

Ισχυρισμός 1:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{H}^n(f(F_j)) = \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}\{y\})\ d\mathcal{H}^n(y)$$

Απόδειξη ισχυρισμού 1:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{H}^n(f(F_j)) &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^m} \chi_{f(F_j)}(y)\ d\mathcal{H}^n(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} \sum_{j=1}^{\infty} \chi_{f(F_j)}(y)\ d\mathcal{H}^n(y) \\
&\overset{f|_{F_j}\ 1-1}{=} \int_{\mathbb{R}^m} \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{H}^0\Big(F_j \cap f^{-1}\{y\}\Big)\ d\mathcal{H}^n(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^0\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty}(F_j \cap f^{-1}\{y\})\Big)\ d\mathcal{H}^n(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}\{y\})\ d\mathcal{H}^n(y)
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\mathcal{H}^n(f(F_j)) = \mathcal{H}^n(f|_{E_j} \circ T_j^{-1} \circ T_j(F_j)) \leq t^n \mathcal{L}^n(T_j(F_j))$$

από το θεώρημα 1.8 και

$$\mathcal{L}^n(T_j(F_j)) = \mathcal{H}^n(T_j \circ (f|_{E_j})^{-1} \circ f(F_j)) \leq t^n \mathcal{H}^n(f(F_j))$$

από το Λήμμα 2.3 Επομένως:

$$\begin{aligned}
t^{-2n}\mathcal{H}^n(f(F_j)) &\leq t^{-n}\mathcal{L}^n(T_j(F_j)) \\
&= t^{-n}|\det T_j|\mathcal{L}^n(F_j) \\
&\leq \int_{F_j} Jf\ dx \\
&\leq t^n|\det T_j|\mathcal{L}^n(F_j)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= t^n \mathcal{L}^n(T_j(F_j)) \\
&\leq t^{2n} \mathcal{H}^n(f(F_j))
\end{aligned}
$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τα λήμματα 2.1 και 2.3. Τώρα αθροίζουμε ως προς j:

$$
t^{-2n} \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{H}^n(f(F_j)) \leq \int_A Jf \, dx \leq t^{2n} \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{H}^n(f(F_j))
$$

Από τον ισχυρισμό 1, έχουμε ισοδύναμα ότι:

$$
t^{-2n} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}\{y\}) \, d\mathcal{H}^n(y) \leq \int_A Jf \, dx \leq t^{2n} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}\{y\}) \, d\mathcal{H}^n(y)
$$

Για $t \to 1^+$ παίρνουμε το ζητούμενο.

Περίπτωση 2: $A \subseteq \{Jf = 0\}$. Σταθεροποιούμε $0 < \epsilon \leq 1$. Γράφουμε

$$
f = p \circ g
$$

όπου $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ με

$$
g(x) := (f(x), \epsilon x)
$$

και $p : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ είναι η προβολή

$$
p(y, z) = y
$$

Ισχυρισμός 2: Υπάρχει σταθερά C τέτοια ώστε

$$
0 < Jg(x) \leq C\epsilon
$$

για $x \in A$.
Απόδειξη ισχυρισμού 2:
Γράφουμε $g = (f^1, \ldots, f^m, \epsilon x_1, \ldots, \epsilon x_n)$. Τότε, για $x \in A$:

$$
Dg(x) = \begin{pmatrix} Df(x) \\ \epsilon I \end{pmatrix}_{(m+n)\times n}
$$

Αφού η $Jg(x)^2$ ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των $(n \times n)$ υποοριζουσών του $Dg(x)$, σύμφωνα με το Binet-Cauchy, έχουμε

$$
Jg(x)^2 \geq \epsilon^{2n} > 0
$$

Ακόμα, αφού $\left|\frac{\partial f^i}{\partial x_j}\right| \leq \mathrm{Lip}(f)$, για κάθε $i = 1, \ldots, m$ και $j = 1, \ldots, n$, μπορούμε να υπολογίσουμε:

$Jg(x)^2 = Jf(x)^2 + \{$άθροισμα τετραγώνων όρων με τουλάχιστον ένα ϵ ο καθένας$\} \leq C\epsilon^2$

Μπορούμε να αποδείξουμε την ισότητα του *ισχυρισμού 1* και για την g, με τον ίδιο τρόπο. Επομένως ισχύει

$$\mathcal{H}^n(g(A)) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{H}^n(g(F_j)) = \int_{\mathbb{R}^{n+m}} \mathcal{H}^0(A \cap g^{-1}\{y,z\})\ d\mathcal{H}^n(y,z)$$

Αφου $p : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ είναι προβολή, απο το θεώρημα 1.8 και χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση και την περίπτωση 1 για την g, υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^n(f(A)) = \mathcal{H}^n(p \circ g(A)) &\leq \mathcal{H}^n(g(A)) \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^{n+m}} \mathcal{H}^0(A \cap g^{-1}\{y,z\})\ d\mathcal{H}^n(y,z) \\
&= \int_A Jg(x)\ dx \\
&\leq \epsilon C \mathcal{L}^n(A)
\end{aligned}$$

Για $\epsilon \to 0$ συμπεραίνουμε ότι $\mathcal{H}^n(f(A)) = 0$, και επομένως

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}\{y\})\ d\mathcal{H}^n(y) = 0$$

καθώς ο φορέας της $y \mapsto \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}\{y\})$ είναι υποσύνολο του $f(A)$. Επομένως

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}\{y\})\ d\mathcal{H}^n(y) = 0 = \int_A Jf(x)\ dx$$

Στη γενική περίπτωση, γράφουμε $A = A_1 \cup A_2$ με $A_1 \subseteq \{Jf > 0\}$ και $A_2 \subseteq \{Jf = 0\}$ και εφαρμόζουμε τις περιπτώσεις 1 και 2. □

2.3 Τύπος αλλαγής μεταβλητής

Θεώρημα 2.5. *(Αλλαγή μεταβλητής) Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ μία Lipschitz συνεχής συνάρτηση, $n \geq m$. Τότε για κάθε $\mathcal{L}^n$-ολοκληρώσιμη συνάρτηση $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x) Jf(x)\ dx = \int_{\mathbb{R}^m} \left[\sum_{x \in f^{-1}\{y\}} g(x) \right]\ d\mathcal{H}^n(y).$$

Απόδειξη.
Περίπτωση 1: $g \geq 0$. Σύμφωνα με το θεώρημα 1.1, μπορούμε να γράψουμε

$$g = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \chi_{A_i}$$

για κατάλληλα $\mathcal{L}^n$-μετρήσιμα σύνολα $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$. Τότε από το θέωρημα Μονότονης Σύγκλισης έχουμε:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} gJf \ dx &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{A_i} Jf \ dx \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \int_{A_i} Jf \ dx \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^0(A_i \cap f^{-1}\{y\}) \ d\mathcal{H}^n(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \sum_{x \in f^{-1}\{y\}} \chi_{A_i}(x) \ d\mathcal{H}^n(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} \sum_{x \in f^{-1}\{y\}} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \chi_{A_i}(x) \ d\mathcal{H}^n(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} \left[\sum_{x \in f^{-1}\{y\}} g(x) \right] \ d\mathcal{H}^n(y)
\end{aligned}$$

Περίπτωση 2: Η g είναι μια $\mathcal{L}^n$-ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τότε γράφουμε $g = g^+ - g^-$ και εφαρμόζουμε την περίπτωση 1. □

2.4 Εφαρμογές

Α. Μήκος καμπύλης ($n = 1, m \geq 1$). Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ μία Lipschitz συνεχής και 1-1 συνάρτηση. Γράφουμε

$$f = (f^1, \ldots, f^m), \quad Df = (\dot{f}^1, \ldots, \dot{f}^m) \quad (\dot{} = \frac{d}{dt})$$

Τότε

$$Jf = \sqrt{DfDf^\top} = |Df|$$

Για $-\infty < a < b < \infty$ ορίζουμε την καμπύλη $C := f([a, b]) \subset \mathbb{R}^m$. Τότε

$$\int_a^b |Df| \ dt = \int_C d\mathcal{H}^1(y) = \mathcal{H}^1(C)$$

B. Επιφάνεια γραφήματος ($n \geq 1, m = n+1$). Έστω $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Lipschitz συνεχής και ορίζουμε $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ με

$$f(x) := (x, g(x))$$

Τότε

$$Df = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \\ g_{x_1} & \dots & g_{x_n} \end{pmatrix}_{(n+1)\times n}$$

συνεπώς,

$$(Jf)^2 = 1 + \|Dg\|^2$$

από Cauchy-Binet formula.
Για κάθε ανοικτό σύνολο $U \subseteq \mathbb{R}^n$, ορίζουμε το γράφημα της g πάνω από το U,

$$G = G(g; U) := \{(x, g(x)) \mid x \in U\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

Τότε

$$\int_U \sqrt{(1 + \|Dg\|^2)}\, dx = \mathcal{H}^n(G)$$

Κεφάλαιο 3

Ο τύπος Coarea

Σε αυτό το κεφάλαιο υποθέτουμε ότι

$$n \geq m.$$

3.1 Προκαταρκτικά λήμματα

Λήμμα 3.1. *Έστω $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ γραμμική και $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα $\mathcal{L}^n$-μετρήσιμο σύνολο. Τότε:*

(i) η απεικόνιση $y \mapsto \mathcal{H}^{n-m}(A \cap L^{-1}\{y\})$ είναι $\mathcal{L}^m$-μετρήσιμη, και

(ii)

$$\int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap L^{-1}\{y\})\, dy = [\![L]\!]\mathcal{L}^n(A)$$

Απόδειξη.
Περίπτωση 1. $\dim L(\mathbb{R}^n) < m$
Τότε για $\mathcal{L}^m$-σ.κ. $y \in \mathbb{R}^m$, έχουμε $A \cap L^{-1}\{y\} = \emptyset$ και συνεπώς

$$\mathcal{H}^{n-m}(A \cap L^{-1}\{y\}) = 0.$$

Γράφουμε $L = S \circ O^*$, όπως στο θεώρημα 1.13.

Ισχυρισμός 1: Έχουμε $L(\mathbb{R}^n) = S(\mathbb{R}^m)$.

Απόδειξη ισχυρισμού 1:
Αν $y \in L(\mathbb{R}^n)$, τότε υπάρχει $x \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $S(O^\star(x)) = y$, δηλαδή $y \in S(\mathbb{R}^m)$.

Αν $y \in S(\mathbb{R}^m)$, τότε υπάρχει $x \in \mathbb{R}^m$ τέτοιο ώστε $S(x) = y$. Όμως $L = S \circ O^\star \implies L \circ O = S$. Άρα $L(O(x)) = y$, δηλαδή $y \in L(\mathbb{R}^n)$.

Άρα $\dim S(\mathbb{R}^m) < m$ και επομένως $[\![L]\!] = |\det S| = 0$.

Περίπτωση 2. $L = P =$ ορθογώνια προβολή του $\mathbb{R}^n$ στον $\mathbb{R}^m$.
Τότε για κάθε $y \in \mathbb{R}^m$, το $P^{-1}\{y\}$ είναι ένας $(n-m)$-διάστατος αφινικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$, μια μεταφορά του $P^{-1}\{0\}$. Από το θεώρημα του Fubini,

$$y \mapsto \mathcal{H}^{n-m}(A \cap P^{-1}\{y\}) \quad \text{είναι } \mathcal{L}^m \text{ μετρήσιμη}$$

και

$$\int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap P^{-1}\{y\})\, dy = \mathcal{L}^n(A) \tag{3.1}$$

Περίπτωση 3. $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\dim L(\mathbb{R}^n) = m$
Από το θεώρημα Polar Decomposition, γράφουμε

$$L = S \circ O^*$$

όπου

$$S : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \text{ είναι συμμετρική,}$$
$$O : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \text{ είναι ορθογώνια,}$$

και

$$[\![L]\!] = |\det S| > 0$$

Ισχυρισμός 2: Μπορούμε να γράψουμε $O^* = P \circ Q$, όπου P είναι η ορθογώνια προβολή του $\mathbb{R}^n$ επί του $\mathbb{R}^m$ και $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι ορθογώνια.

Απόδειξη ισχυρισμού 2: Έστω Q μια οποιαδήποτε ορθογώνια απεικόνιση από το $\mathbb{R}^n$ επί του $\mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε

$$Q^*(x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0) = O(x_1, \ldots, x_m)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^m$. Σημειώστε ότι

$$P^*(x_1, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^m$. Επομένως $O = Q^* \circ P^*$ και άρα $O^* = P \circ Q$.

Τώρα αφού $\dim L(\mathbb{R}^n) = m$ και $n = \dim L^{-1}\{0\} + \dim L(\mathbb{R}^n)$, συμπεραίνουμε ότι ο $L^{-1}\{0\}$ είναι ένας $(n-m)$-διάστατος υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ και $L^{-1}\{y\}$ είναι

μία μεταφορά του για κάθε $y \in \mathbb{R}^m$. Επομένως από το θέωρημα του Fubini, $y \mapsto \mathcal{H}^{n-m}(A \cap L^{-1}\{y\})$ είναι $\mathcal{L}^m$-μετρήσιμη και μπορούμε να υπολογίσουμε:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^n(A) &= \mathcal{L}^n(Q(A)) && (|\det Q| = 1) \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(Q(A) \cap P^{-1}\{y\})\, dy && \text{από τη σχέση (3.1)} \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(Q^{-1}(Q(A) \cap P^{-1}\{y\}))\, dy && (Q^{-1} \text{ είναι ισομετρία}) \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap (Q^{-1} \circ P^{-1}\{y\}))\, dy
\end{aligned}$$

Η απεικόνιση L είναι επί (αφού $\dim L(\mathbb{R}^n) = m$). Επομένως και η S είναι επί και άρα είναι και 1-1. Τώρα θέτουμε $z = Sy \iff y = S^{-1}z$ και υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap (Q^{-1} \circ P^{-1}\{y\}))\, dy = \\
&|\det S^{-1}| \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap (Q^{-1} \circ P^{-1} \circ S^{-1}\{z\}))\, dz
\end{aligned}$$

και επομένως

$$|\det S| \mathcal{L}^n(A) = \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap (Q^{-1} \circ P^{-1} \circ S^{-1}\{z\}))\, dz$$

Αλλά $L = S \circ O^* = S \circ P \circ Q$, και άρα

$$[\![L]\!] \mathcal{L}^n(A) = \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap L^{-1}\{z\})\, dz$$

□

Στο εξής θεωρούμε συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ Lipschitz συνεχής.

Λήμμα 3.2. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα $\mathcal{L}^n$-μετρήσιμο σύνολο, $n \geq m$. Τότε:*

(i) $A \cap f^{-1}\{y\}$ *είναι $\mathcal{H}^{n-m}$-μετρήσιμο για $\mathcal{L}^m$-σ.κ. y,*

(ii) *η απεικόνιση $y \mapsto \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\})$ είναι $\mathcal{L}^m$-μετρήσιμη και*

(iii)

$$\int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\})\, dy \leq \frac{\alpha(n-m)\alpha(m)}{\alpha(n)} (\mathrm{Lip} f)^m \mathcal{L}^n(A)$$

Απόδειξη. Για κάθε $j = 1, 2, \dots$ υπάρχουν κλειστές μπάλες $\{B_i^j\}_{i=1}^{\infty}$ τέτοιες ώστε

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i^j, \ \mathrm{diam} B_i^j \leq \frac{1}{j}, \ \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(B_i^j) \leq \mathcal{L}^n(A) + \frac{1}{j}$$

Ορίζουμε

$$g_i^j := \alpha(n-m) \left(\frac{\mathrm{diam} B_i^j}{2} \right)^{n-m} \chi_{f(B_i^j)}$$

Η g_i^j είναι $\mathcal{L}^m$-μετρήσιμη. Παρατηρούμε ότι για κάθε $y \in \mathbb{R}^m$,

$$\mathcal{H}^{n-m}_{\frac{1}{j}}(A \cap f^{-1}\{y\}) \leq \sum_{i=1}^{\infty} g_i^j(y)$$

Πράγματι, αν $A \cap f^{-1}\{y\} = \emptyset$ τότε η ανισότητα ισχύει προφανώς.
Αν $A \cap f^{-1}\{y\} \neq \emptyset$, τότε η υποσυλλογή των μπαλών B_i^j για τις οποίες $\chi_{f(B_i^j)}(y) = 1$ είναι μια $\frac{1}{j}$-κάλυψη του $A \cap f^{-1}\{y\}$. Συνεπώς ισχύει πάλι η ανισότητα.

Επομένως χρησιμοποιώντας το λήμμα του Fatou και την ισοδιαμετρική ανισότητα, υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^m}^{*} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\})\, dy = \\
&\quad = \int_{\mathbb{R}^m}^{*} \lim_{j\to\infty} \mathcal{H}^{n-m}_{\frac{1}{j}}(A \cap f^{-1}\{y\})\, dy \\
&\quad \leq \int_{\mathbb{R}^m} \liminf_{j\to\infty} \sum_{=1}^{\infty} g_i^j \, dy \\
&\quad \leq \liminf_{j\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^m} g_i^j \, dy \\
&\quad = \liminf_{j\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(n-m) \Big(\frac{\mathrm{diam} B_i^j}{2} \Big)^{n-m} \mathcal{L}^m(f(B_i^j)) \\
&\quad \leq \liminf_{j\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(n-m) \Big(\frac{\mathrm{diam} B_i^j}{2} \Big)^{n-m} \alpha(m) \Big(\frac{\mathrm{diam} f(B_i^j)}{2} \Big)^{m} \\
&\quad \leq \frac{\alpha(n-m)\alpha(m)}{\alpha(n)} (\mathrm{Lip} f)^m \liminf_{j\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(B_i^j), \quad \text{καθώς } \mathrm{diam} f(B_i^j) \leq \mathrm{Lip} f \cdot \mathrm{diam} B_i^j \\
&\quad \leq \frac{\alpha(n-m)\alpha(m)}{\alpha(n)} (\mathrm{Lip} f)^m \mathcal{L}^n(A).
\end{aligned}$$

Επομένως

$$\int_{\mathbb{R}^m}^{*} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\})\, dy \leq \frac{\alpha(n-m)\alpha(m)}{\alpha(n)} (\mathrm{Lip} f)^m \mathcal{L}^n(A). \qquad (\star)$$

Αυτό θα αποδείξει το (iii) μολίς αποδείξουμε το (ii).
Απόδειξη του (ii):
Περίπτωση 1: Το A είναι συμπαγές.
Σταθεροποιούμε $t \geq 0$ και για κάθε θετικό ακέραιο i, θέτουμε U_i να είναι το σύνολο των $y \in \mathbb{R}^m$ για τα οποία υπάρχουν πεπερασμένα το πλήθος ανοικτα σύνολα $S_1, \ldots, S_l,\ l = l(i)$, τέτοια ώστε

$$\begin{cases} A \cap f^{-1}\{y\} \subseteq \bigcup_{j=1}^{l} S_j, \\ \mathrm{diam} S_j \leq \frac{1}{i} \quad (j = 1, \ldots, l) \\ \sum_{j=1}^{l} \alpha(n-m) \Big(\frac{\mathrm{diam} S_j}{2}\Big)^{n-m} \leq t + \dfrac{1}{i} \end{cases}$$

Ισχυρισμός 1: Τα U_i είναι ανοικτά.
Απόδειξη ισχυρισμού 1: Έστω $y \in U_i,\ A \cap f^{-1}\{y\} \subseteq \bigcup_{j=1}^{l} S_j$, όπως παραπάνω. Τότε αφού η f είναι συνεχής και το A είναι συμπαγές,

$$A \cap f^{-1}\{z\} \subseteq \bigcup_{j=1}^{l} S_j$$

για όλα τα z που βρίσκονται κατάλληλα κοντα στο y.

Ισχυρισμός 2:

$$\{y \mid \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\}) \leq t\} = \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i$$

και άρα το σύνολο στο αριστερό μέλος είναι Borel.
Απόδειξη ισχυρισμού 2: Εάν $\mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\}) \leq t$, τότε για κάθε $\delta > 0$ ισχύει

$$\mathcal{H}_{\delta}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\}) \leq t.$$

Για δοσμένο i, επιλέγουμε $\delta \in (0, \frac{1}{i})$. Τότε υπάρχουν σύνολα $\{S_j\}_{j=1}^{\infty}$ τέτοια ώστε

$$\begin{cases} A \cap f^{-1}\{y\} \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} S_j \\ \mathrm{diam} S_j \leq \delta < \frac{1}{i}, \\ \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(n-m) \Big(\frac{\mathrm{diam} S_j}{2}\Big)^{n-m} < t + \frac{1}{i}. \end{cases}$$

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα S_j είναι ανοικτά. Αφού το $A \cap f^{-1}\{y\}$ είναι συμπαγές, μια πεπερασμένη υποσυλλογή $\{S_1, \dots S_l\}$ καλύπτει το $A \cap f^{-1}\{y\}$. Επομένως $y \in U_i$. Άρα

$$\{y \mid \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\}) \leq t\} \subseteq \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i$$

Έστω τώρα $y \in \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i$. Τότε για κάθε $i = 1, 2, \dots,$

$$\mathcal{H}^{n-m}_{\frac{1}{i}}(A \cap f^{-1}\{y\}) \leq t + \frac{1}{i}$$

και άρα

$$\mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\}) \leq t.$$

Επομένως

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} U_i \subseteq \{y \mid \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\}) \leq t\}.$$

Σύμφωνα με τον ισχυρισμό 2, για συμπαγές A η απεικόνιση

$$y \mapsto \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\})$$

είναι Borel συνάρτηση, άρα και $\mathcal{L}^m$- μετρήσιμη.
Περίπτωση 2: Το A είναι ανοικτό σύνολο.
Τότε υπάρχουν συμπαγή σύνολα $K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset A$ τέτοια ώστε

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$$

Επομένως για κάθε $y \in \mathbb{R}^m$,

$$\mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\}) = \lim_{i \to \infty} \mathcal{H}^{n-m}(K_i \cap f^{-1}\{y\})$$

και συνεπώς η απεικόνιση

$$y \mapsto \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\})$$

είναι $\mathcal{L}^m$-μετρήσιμη.
Περίπτωση 3: $\mathcal{L}^n(A) < \infty$. Τότε υπάρχουν ανοικτα σύνολα $V_1 \supset V_2 \supset \cdots \supset A$ τέτοια ώστε

$$\lim_{i \to \infty} \mathcal{L}^n(V_i - A) = 0, \ \mathcal{L}^n(V_1) < \infty$$

Τώρα

$$\begin{aligned}&\mathcal{H}^{n-m}(V_i \cap f^{-1}\{y\})\\ \leq&\mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\}) + \mathcal{H}^{n-m}((V_i \setminus A) \cap f^{-1}\{y\})\end{aligned}$$

και άρα από την $(\star)$,

$$\begin{aligned}\limsup_{i\to\infty} \int^*_{\mathbb{R}^m} |\mathcal{H}^{n-m}(V_i \cap f^{-1}\{y\}) - \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\})|\, dy\\ \leq \limsup_{i\to\infty} \int^*_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}((V_i \setminus A) \cap f^{-1}\{y\})\, dy\\ \leq \limsup_{i\to\infty} \frac{\alpha(n-m)\alpha(m)}{\alpha(n)} (\mathrm{Lip} f)^m \mathcal{L}^n(V_i \setminus A) = 0.\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\mathcal{H}^{n-m}(V_i \cap f^{-1}\{y\}) \to \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\}) \quad \mathcal{L}^m - \text{σ.π.}$$

Σύμφωνα με την περίπτωση 2, η απεικόνιση

$$y \mapsto \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\})$$

είναι $\mathcal{L}^m$-μετρήσιμη. Επιπροσθέτως, $\mathcal{H}^{n-m}((V_i \setminus A) \cap f^{-1}\{y\}) \to 0$ $\mathcal{L}^m$-σ.π. και άρα το $A \cap f^{-1}\{y\}$ είναι $\mathcal{H}^{n-m}$- μετρήσιμο για $\mathcal{L}^m$-σ.κ. y.
Περίπτωση 4: $\mathcal{L}^n(A) = +\infty$. Γράφουμε το A ως αύξουσα ακολουθία φραγμένων $\mathcal{L}^n$-μετρήσιμων συνόλων και εφαρμόζουμε την περίπτωση 3 για να δείξουμε ότι το $A \cap f^{-1}\{y\}$ είναι $\mathcal{H}^{n-m}$-μετρήσιμο για $\mathcal{L}^m$-σ.κ. y, και

$$y \mapsto \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\})$$

είναι $\mathcal{L}^m$- μετρήσιμη.

Αυτό αποδεικνύει τα $(i), (ii)$ και το (iii) προκύπτει από την $(\star)$.

Σημείωση:(Eilenberg's inequality) Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι ισχύει

$$\int^*_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^k(A \cap f^{-1}\{y\})\, d\mathcal{H}^l \leq \frac{\alpha(k)\alpha(l)}{\alpha(k+l)} (\mathrm{Lip} f)^l \mathcal{H}^{k+l}(A)$$

για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

□

Λήμμα 3.3. *Έστω $t > 1$, $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz συνεχής. Θέτουμε*

$$B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Dh(x) \text{ υπάρχει}, Jh(x) > 0\}$$

Τότε υπάρχει μια αριθμήσιμη συλλογή $\{D_k\}_{k=1}^\infty$ από Borel υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε

(i) $\mathcal{L}^n(B - \cup_{k=1}^{\infty} D_k) = 0$

(ii) $h|_{D_k}$ *είναι 1-1 για* $k = 1, 2, \ldots$ *και*

(iii) *για κάθε* $k = 1, 2, \ldots$ *υπάρχει ένας συμμετρικός αυτομορφισμός* $S_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *τέτοιος ώστε*

$$\begin{aligned} &\mathrm{Lip}(S_k^{-1} \circ (h|_{D_k})) \leq t, \ \mathrm{Lip}((h|_{D_k})^{-1} \circ S_k) \leq t, \\ &t^{-n}|\det S_k| \leq Jh|_{D_k} \leq t^n |\det S_k|. \end{aligned}$$

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το Λήμμα 2.3 με h στη θέση της f, για να βρούμε Borel σύνολα $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ και συμμετρικούς αυτομορφισμούς $T_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ώστε

(1) $B = \cup_{k=1}^{\infty} E_k$

(2) $h|_{E_k}$ είναι 1-1,

(3) Για $k = 1, 2, \ldots,$

$$\begin{aligned} \mathrm{Lip}((h|_{E_k}) \circ T_k^{-1}) \leq t, \ \mathrm{Lip}(T_k \circ (h|_{E_k})^{-1}) \leq t \\ t^{-n}|\det T_k| \leq Jh|_{E_k} \leq t^n |\det T_k| \end{aligned}$$

Σύμφωνα με το (3), η $(h|_{E_k})^{-1}$ είναι Lipschitz συνεχής και άρα από το θεώρημα 1.7 υπάρχει μία Lipschitz συνεχής συνάρτηση $h_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε $h_k = (h|_{E_k})^{-1}$ στο $h(E_k)$.
Ισχυρισμός 1: $Jh_k > 0$ $\mathcal{L}^n$-σ.π. στο $h(E_k)$.
Απόδειξη ισχυρισμού: Αφού $h_k \circ h(x) = x$ για $x \in E_k$, το θεώρημα 1.11 δίνει

$$Dh_k(h(x)) \circ Dh(x) = 1, \quad \mathcal{L}^n - \text{σ.π. στο } E_k,$$

και άρα

$$Jh_k(h(x))Jh(x) = 1 \quad \mathcal{L}^n - \text{σ.π. στο } E_k.$$

Με βάση το (3), αυτό συνεπάγεται ότι $Jh_k(h(x)) > 0$ για $\mathcal{L}^n$-σ.κ. $x \in E_k$ και ο ισχυρισμός έπεται από το γεγονός ότι η h είναι Lipschitz συνεχής.

Τώρα εφαρμόζουμε το Λήμμα 2.3 για την h_k στο $h(E_k)$. Υπάρχουν Borel σύνολα $\{F_j^k\}_{j=1}^{\infty}$ και συμμετρικοί αυτομορφισμοί $\{R_j^k\}_{j=1}^{\infty}$ ώστε

(4) $\mathcal{L}^n(h(E_k) \setminus \cup_{j=1}^{\infty} F_j^k) = 0$

(5) $h_k|_{F_j^k}$ είναι 1-1

(6) Για $k = 1, 2, \dots$

$$\mathrm{Lip}((h_k|_{F_j^k}) \circ (R_j^k)^{-1}) \le t, \ \mathrm{Lip}(R_j^k \circ (h_k|_{F_j^k})^{-1}) \le t$$
$$t^{-n}|\det R_j^k| \le Jh_k|_{F_j^k} \le t^n|\det R_j^k|$$

Θέτουμε

$$D_j^k := E_k \cap h^{-1}(F_j^k), \ S_j^k := (R_j^k)^{-1} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

Ισχυρισμός 2: $\mathcal{L}^n(B \setminus \cup_{k,j=1}^{\infty} D_j^k) = 0$

Απόδειξη ισχυρισμού 2: Παρατηρούμε ότι

$$h_k(h(E_k) \setminus \cup_{j=1}^{\infty} F_j^k) = h^{-1}(h(E_k) \setminus \cup_{j=1}^{\infty} F_j^k) = E_k \setminus \cup_{j=1}^{\infty} D_j^k$$

Επομένως, σύμφωνα με (4),

$$\mathcal{L}^n(E_k \setminus \cup_{j=1}^{\infty} D_j^k) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots)$$

Το αποτέλεσμα έπεται από το (1).
Από το (2) συνεπάγεται ότι η $h|_{D_j^k}$ είναι 1-1.
Ισχυρισμός 3: Για $k, j = 1, 2, \dots$ έχουμε

$$\mathrm{Lip}((S_j^k)^{-1} \circ (h|_{D_j^k})) \le t, \quad \mathrm{Lip}((h|_{D_j^k})^{-1} \circ S_j^k) \le t$$
$$t^{-n}|\det S_j^k| \le Jh|_{D_j^k} \le t^n|\det S_j^k|.$$

Απόδειξη ισχυρισμού 3:

$$\begin{aligned}\mathrm{Lip}((S_j^k)^{-1} \circ (h|_{D_j^k})) &= \mathrm{Lip}(R_j^k \circ (h|_{D_j^k})) \\ &\le \mathrm{Lip}(R_j^k \circ (h_k|_{F_j^k})^{-1}) \\ &\le t\end{aligned}$$

από το (6). Ομοίως,

$$\begin{aligned}\mathrm{Lip}((h|_{D_j^k})^{-1} \circ S_j^k) &= \mathrm{Lip}((h|_{D_j^k})^{-1} \circ (R_j^k)^{-1}) \\ &\le \mathrm{Lip}((h_k|_{F_j^k}) \circ (R_j^k)^{-1}) \le t\end{aligned}$$

Επιπλέον, όπως αναφέραμε παραπάνω,

$$Jh_k(h(x))Jh(x) = 1 \quad \mathcal{L}^n - \text{σ.π. στο } D_j^k.$$

Άρα, από το (6),

$$t^{-n}|\det S_j^k| = t^{-n}|\det R_j^k|^{-1} \le Jh|_{D_j^k} \le t^n|\det R_j^k|^{-1} = t^n|\det S_j^k|.$$

□

Λήμμα 3.4. *Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ Lipschitz συνεχής συνάρτηση. Τότε*

$$\mathrm{Lip} f = \sup_x \|Df(x)\|$$

Απόδειξη. Από το θεώρημα μέσης τιμής για βαθμωτά πεδία, έχουμε ότι για κάθε x, y και κάθε z με $\|z\| = 1$ υπάρχει ξ στο ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα x, y τέτοιο ώστε

$$z \cdot (f(x) - f(y)) = z \cdot Df(\xi)(x - y)$$

Άρα

$$|z \cdot (f(x) - f(y))| \leq \|Df(\xi)\| \|x - y\| \leq \sup_x \|Df(x)\| \|x - y\|$$

Παίρνοντας sup ως προς z, έχουμε $\|f(x) - f(y)\| \leq \sup_x \|Df(x)\| \|x - y\|$ και άρα

$$\mathrm{Lip} f \leq \sup_x \|Df(x)\|$$

Έστω τώρα $\epsilon > 0$ και x τυχόν. Επιλέγουμε w με $\|w\| = 1$ ώστε $\|Df(x)\| < \|Df(x)(w)\| + \epsilon$. Τότε για κάθε n έχουμε

$$\begin{aligned}\mathrm{Lip} f \geq \frac{\|f(x + \frac{w}{n}) - f(x)\|}{\frac{1}{n}} &\geq \frac{\|Df(x)(\frac{w}{n})\|}{\frac{1}{n}} - \frac{\|f(x + \frac{w}{n}) - f(x) - Df(x)(\frac{w}{n})\|}{\frac{1}{n}} \\ &> \|Df(x)\| - \epsilon - \frac{\|f(x + \frac{w}{n}) - f(x) - Df(x)(\frac{w}{n})\|}{\frac{1}{n}}\end{aligned}$$

Στέλνουμε $n \to +\infty, \epsilon \to 0$ παίρνουμε sup ως προς x και έχουμε

$$\mathrm{Lip} f \geq \sup_x \|Df(x)\|.$$

□

3.2 Ο τύπος Coarea

Θεώρημα 3.5. *(Coarea formula)*
Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ Lipschitz συνεχής, $n \geq m$. Τότε για κάθε $\mathcal{L}^n$-μετρήσιμο σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^n$,

$$\int_A Jf \, dx = \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\}) \, dy$$

Απόδειξη. Σύμφωνα με το θεώρημα Rademacher, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η $Df(x)$, και άρα και η $Jf(x)$, υπάρχουν για κάθε $x \in A$. Επίσης υποθέτουμε ότι $\mathcal{L}^n(A) < \infty$.
Περίπτωση 1. $A \subseteq \{Jf > 0\}$. Για κάθε $\lambda \in \Lambda(n, n-m)$ γράφουμε

$$f = q \circ h_\lambda$$

όπου $h_\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ και $q : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^m$ είναι οι συναρτήσεις

$$\begin{aligned} h_\lambda(x) &:= (f(x), P_\lambda(x)) && (x \in \mathbb{R}^n) \\ q(y,z) &:= y && (y \in \mathbb{R}^m,\ z \in \mathbb{R}^{n-m}) \end{aligned}$$

και P_λ είναι η προβολή που ορίσαμε στην ενότητα 1.2. Ορίζουμε

$$A_\lambda := \{x \in A \mid \det Dh_\lambda(x) \neq 0\}$$

Ισχυρισμός 1:

$$A_\lambda = \{x \in A \mid P_\lambda|_{[Df(x)]^{-1}(0)} \text{ είναι 1-1}\}$$

Απόδειξη ισχυρισμού 1: Αν $\det Dh_\lambda(x) \neq 0$, τότε αν $y_1, y_2 \in [Df(x)]^{-1}(0)$ με $P_\lambda(y_1) = P_\lambda(y_2)$, έχουμε:

$$Dh_\lambda(x)(y_1 - y_2) = \begin{pmatrix} Df(x)(y_1 - y_2) \\ P_\lambda(y_1 - y_2) \end{pmatrix} = (0)$$

Δηλαδή $y_1 - y_2 \in [Dh_\lambda(x)]^{-1}(0) = \{0\}$, άρα $y_1 = y_2$.

Αν τώρα η $P_\lambda|_{[Df(x)]^{-1}(0)}$ είναι 1-1, τότε:
Αν $y_1, y_2 \in [Df(x)]^{-1}(0)$ με $y_1 \neq y_2$, τότε $Dh_\lambda(y_1) \neq Dh_\lambda(y_2)$.

Αν κάποιο από τα y_1, y_2 δεν ανήκει στο $[Df(x)]^{-1}(0)$, τότε πάλι για $y_1 \neq y_2$ θα ισχύει $Df(x)(y_1 - y_2) \neq 0 \implies Dh_\lambda(x)(y_1 - y_2) \neq 0$. Άρα

$$\det Dh_\lambda(x) \neq 0$$

Ισχυρισμός 2:

$$A = \bigcup_{\lambda \in \Lambda(n,n-m)} A_\lambda$$

Απόδειξη ισχυρισμού 2:
Αν $x \in A$, τότε $Jf(x) > 0$ και από το θεώρημα Cauchy-Binet, υπάρχει κάποιο $\lambda \in \Lambda(n,m)$ τέτοιο ώστε

$$\big(\det(P_\lambda \circ Df(x))\big)^2 > 0$$

Τότε ο $Df(x)$ έχει τάξη m, επομένως $\dim[Df(x)]^{-1}(0) = n-m$. Τότε υπάρχει $\lambda \in \Lambda(n, n-m)$ τέτοιο ώστε

$$[Df(x)]^{-1}(0) \cap \ker P_\lambda = \{0\}$$

Συνεπώς η $P_\lambda|_{[Df(x)]^{-1}(0)}$ είναι 1-1.

Αντιστρόφως, αν $x \in A_\lambda$ για κάποιο $\lambda \in \Lambda(n, n-m)$ τότε $\dim[Df(x)]^{-1}(0) = n-m$, επομένως $\dim Df(x)(\mathbb{R}^n) = m$ και άρα $(\det(P_\lambda \circ Df(x)))^2 > 0$ για κάποιο $\lambda \in \Lambda(n, m)$. Συνεπώς

$$Jf(x) > 0$$

Μπορούμε, λοιπόν, για απλότητα να υποθέσουμε ότι $A = A_\lambda$ για κάποιο $\lambda \in \Lambda(n, n-m)$.
Σταθεροποιούμε $t > 1$ και εφαρμόζουμε το Λήμμα 3.3 στη συνάρτηση $h_\lambda =: h$ για να πάρουμε ξένα Borel σύνολα $\{D_k\}_{k=1}^\infty$ και συμμετρικούς αυτομορφισμούς $\{S_k\}_{k=1}^\infty$ που ικανοποιούν τις υποθέσεις $(i) - (iii)$ του λήμματος 3.3 Θέτουμε $G_k := A \cap D_k$.

Ισχυρισμός 3: Για κάθε $k = 1, 2, \dots$

$$t^{-n}[\![q \circ S_k]\!] \leq Jf|_{G_k} \leq t^n[\![q \circ S_k]\!]$$

Απόδειξη ισχυρισμού 3:
Έστω $k \in \{1, 2, \dots\}$ και $x \in G_k$. Αφού $f = q \circ h$ έχουμε

$$\begin{aligned} Df(x) &= q \circ Dh(x) \\ &= q \circ S_k \circ S_k^{-1} \circ Dh(x) \\ &= q \circ S_k \circ D(S_k^{-1} \circ h)(x) \\ &= q \circ S_k \circ C(x) \end{aligned}$$

όπου $C(x) := D(S_k^{-1} \circ h)(x)$.
Ισχύει

$$\mathrm{Lip}(S_k^{-1} \circ h|_{G_k}) = \sup_{x \in G_k} \|C(x)\|$$

από το λήμμα 3.4. Από το λήμμα 3.3 παίρνουμε

$$\sup_{x \in G_k} \|C(x)\| \leq t \qquad (\star)$$

Τώρα γράφουμε

$$Df(x) = S \circ O^*, \ q \circ S_k = T \circ P^*$$

για συμμετρικούς $S, T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ και ορθογώνιους $O, P : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Έχουμε τότε:

$$S \circ O^* = T \circ P^* \circ C(x) \qquad (\star\star)$$

Συνεπώς,

$$S = T \circ P^* \circ C(x) \circ O$$

Αφού $G_k \subseteq A \subseteq \{Jf > 0\}$, $\det S \neq 0$, άρα $\det T \neq 0$ και ο T αντιστρέφεται. Επομένως, εάν $v \in \mathbb{R}^m$,

$$\begin{aligned}
\|T^{-1} \circ S(v)\| &= \|P^* \circ C(x) \circ O(v)\| \\
&\leq \|C(x) \circ O(v)\| \\
&\leq \|C(x)\|\|O(v)\| \\
&\leq t\|O(v)\| \quad \text{από την } (\star) \\
&= t\|v\|
\end{aligned}$$

Επομένως

$$(T^{-1} \circ S)(B(1)) \subseteq B(t)$$

και άρα

$$Jf(x) = |\det S| \leq t^n |\det T| = t^n [\![q \circ S_k]\!]$$

Τώρα για την πρώτη ανισότητα, αφού $h = h_\lambda$ και $x \in A = A_\lambda$, η $C(x)$ αντιστρέφεται, με

$$[C(x)]^{-1} = [Dh(x)]^{-1} \circ S_k = D(h^{-1} \circ S_k)(x)$$

καθώς $[Dh|_{G_k}]^{-1} = Dh|_{G_k}^{-1}$ από το θεώρημα 1.11. Επομένως, όπως πριν,

$$\sup_{x \in G_k} \| [C(x)]^{-1} \| \leq t.$$

Ακόμα, από τη σχέση $(\star\star)$ παίρνουμε $S^{-1} \circ T = O^* \circ [C(x)]^{-1} \circ P$ και άρα, για $v \in \mathbb{R}^m$,

$$\begin{aligned}
\|S^{-1} \circ T(v)\| &= \|O^* \circ [C(x)]^{-1} \circ P(v)\| \\
&\leq \| [C(x)]^{-1} \circ P(v)\| \\
&\leq t\|P(v)\| \\
&= t\|v\|
\end{aligned}$$

Επομένως,

$$[\![q \circ S_k]\!] = |\det T| \leq t^n |\det S| = t^n Jf(x)$$

Το $x \in G_k$ ήταν τυχαίο, άρα

$$t^{-n}[\![q \circ S_k]\!] \leq Jf|_{G_k} \leq t^n [\![q \circ S_k]\!]$$

Τώρα υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned}
& t^{-3n+m} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(G_k \cap f^{-1}\{y\})\ dy \\
& \overset{h|_{G_k}\ 1-1}{=} t^{-3n+m} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(h^{-1}(h(G_k) \cap q^{-1}\{y\}))\ dy \\
& = t^{-3n+m} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(h^{-1} \circ S_k \circ S_k^{-1}(h(G_k) \cap q^{-1}\{y\}))\ dy \\
& \leq t^{-3n+m} \int_{\mathbb{R}^m} [\mathrm{Lip}(h^{-1} \circ S_k)]^{n-m} \mathcal{H}^{n-m}(S_k^{-1}(h(G_k) \cap q^{-1}\{y\}))\ dy \\
& \overset{\text{λήμμα } 3.3}{\leq} t^{-2n} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(S_k^{-1}(h(G_k) \cap q^{-1}\{y\}))\ dy \\
& = t^{-2n} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(S_k^{-1} \circ h(G_k) \cap (q \circ S_k)^{-1}\{y\})\ dy \\
& \overset{\text{λήμμα } 3.1}{=} t^{-2n} [\![q \circ S_k]\!] \mathcal{L}^n(S_k^{-1} \circ h(G_k)) \\
& = t^{-2n} [\![q \circ S_k]\!] \mathcal{H}^n(S_k^{-1} \circ h(G_k)) \\
& \leq t^{-n} [\![q \circ S_k]\!] \mathcal{H}^n(G_k) \\
& = t^{-n} [\![q \circ S_k]\!] \mathcal{L}^n(G_k) \\
& \leq \int_{G_k} Jf\ dx \\
& \leq t^n [\![q \circ S_k]\!] \mathcal{L}^n(G_k) \\
& = t^n [\![q \circ S_k]\!] \mathcal{H}^n(G_k) \\
& = t^n [\![q \circ S_k]\!] \mathcal{H}^n\Big((h^{-1} \circ S_k) \circ (h^{-1} \circ S_k)^{-1}(G_k)\Big) \\
& \leq t^n [\![q \circ S_k]\!] \Big(\mathrm{Lip}(h^{-1} \circ S_k)\Big)^n \mathcal{L}^n(S_k^{-1} \circ h(G_k)) \\
& \leq t^{2n} [\![q \circ S_k]\!] \mathcal{L}^n(S_k^{-1} \circ h(G_k)) \\
& = t^{2n} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(S_k^{-1} \circ h(G_k) \cap (q \circ S_k)^{-1}\{y\})\ dy \\
& = t^{2n} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(S_k^{-1}(h(G_k) \cap q^{-1}\{y\}))\ dy \\
& = t^{2n} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(S_k^{-1} \circ h \circ h^{-1}(h(G_k) \cap q^{-1}\{y\}))\ dy \\
& \leq t^{3n-m} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(h^{-1}(h(G_k) \cap q^{-1}\{y\}))\ dy
\end{aligned}$$

$$= t^{3n-m} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(G_k \cap f^{-1}\{y\})\ dy$$

Τώρα αθροίζουμε ως προς k, και αφού

- $$\int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\})dy$$
$$= \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}([A \setminus \cup_{k=1}^{\infty} G_k] \cap f^{-1}\{y\})dy + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(G_k \cap f^{-1}\{y\})dy$$
και
- $\mathcal{L}^n(A \setminus \cup_{k=1}^{\infty} G_k) = 0$, άρα από το λήμμα 3.2
$$\int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}([A \setminus \cup_{k=1}^{\infty} G_k] \cap f^{-1}\{y\})dy = 0$$

παίρνουμε

$$t^{-3n+m} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\})\ dy \leq \int_A Jf\ dx \leq t^{3n-m} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\})\ dy$$

Στέλνοντας το $t \to 1^+$:

$$\int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\})\ dy = \int_A Jf\ dx$$

Περίπτωση 2: $A \subseteq \{Jf = 0\}$. Σταθεροποιούμε $0 < \epsilon \leq 1$ και ορίζουμε

$$g(x, y) := f(x) + \epsilon y,\ p(x, y) := y$$

για $x \in \mathbb{R}^n,\ y \in \mathbb{R}^m$. Τότε:

$$Dg = (Df, \epsilon I)_{m \times (n+m)}.$$

Εφόσον $[\![Dg]\!] = [\![Dg^*]\!]$, από τον τύπο Cauchy-Binet, παίρνουμε

$$\epsilon^m \leq Jg \leq C\epsilon$$

Επομένως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την περίπτωση 1 για την g. Παρατηρούμε ότι:

$$\int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\})\ dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y - \epsilon w\}) dy, \quad \text{για κάθε } w \in \mathbb{R}^m$$
$$= \frac{1}{\alpha(m)} \int_{B(1)} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y - \epsilon w\})\ dydw$$

Ισχυρισμός 4: Σταθεροποιούμε $y \in \mathbb{R}^m,\ w \in \mathbb{R}^m$ και θέτουμε $B := A \times B(1) \subset \mathbb{R}^{n+m}$. Τότε:

$$B \cap g^{-1}\{y\} \cap p^{-1}\{w\} = \begin{cases} \emptyset & w \notin B(1) \\ (A \cap f^{-1}\{y - \epsilon w\}) \times \{w\} & w \in B(1) \end{cases}$$

Απόδειξη ισχυρισμού 4:
Έχουμε $(x, z) \in B \cap g^{-1}\{y\} \cap p^{-1}\{w\}$ εάν και μόνο αν

$$x \in A, z \in B(1), f(x) + \epsilon z = y, z = w$$

ισοδύναμα

$$x \in A, z = w \in B(1), f(x) = y - \epsilon w$$

ισοδύναμα

$$w \in B(1), (x, z) \in (A \cap f^{-1}\{y - \epsilon w\}) \times \{w\}$$

Τώρα χρησιμοποιούμε τον ισχυρισμό 4 για να συνεχίσουμε τον υπολογισμό:

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\})\ dy \\
&= \frac{1}{\alpha(m)} \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(B \cap g^{-1}\{y\} \cap p^{-1}\{w\})\ dwdy \\
&\leq \frac{\alpha(n-m)}{\alpha(n)} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n}(B \cap g^{-1}\{y\})\ dy \\
&= \frac{\alpha(n-m)}{\alpha(n)} \int_{B} Jg\ dxdz \\
&\leq \frac{\alpha(n-m)}{\alpha(n)} \alpha(m) \mathcal{L}^n(A) \sup_B Jg \\
&\leq C\epsilon
\end{aligned}$$

Η τρίτη γραμμη παραπάνω προέκυψε από τη σημείωση μετά το Λήμμα 3.2(Eilenberg's inequality). Για $\epsilon \to 0$ παίρνουμε

$$\int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\})\ dy = 0 = \int_A Jf\ dx$$

Στη γενική περίπτωση γράφουμε $A = A_1 \cup A_2$ όπου $A_1 \subseteq \{Jf > 0\}$ και $A_2 \subseteq \{Jf = 0\}$ και εφαρμόζουμε τις περιπτώσεις 1 και 2. □

3.3 Τύπος αλλαγής μεταβλητής

Θεώρημα 3.6. *Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ Lipschitz, $n \geq m$. Τότε για κάθε $\mathcal{L}^n$-ολοκληρώσιμη συνάρτηση $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,*

(i) $g|_{f^{-1}\{y\}}$ *είναι $\mathcal{H}^{n-m}$ ολοκληρώσιμη για $\mathcal{L}^m$-σ.κ. y, και*

(ii)

$$\int_{\mathbb{R}^n} gJf \, dx = \int_{\mathbb{R}^m} \left[\int_{f^{-1}\{y\}} g \, d\mathcal{H}^{n-m} \right] dy.$$

Σημείωση: *Για κάθε $y \in \mathbb{R}^m$ το $f^{-1}\{y\}$ είναι κλειστό και άρα $\mathcal{H}^{n-m}$- μετρήσιμο.*

Απόδειξη.

Περίπτωση 1: $g \geq 0$. Γράφουμε $g = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \chi_{A_i}$ για κατάλληλα $\mathcal{L}^n$- μετρήσιμα σύνολα $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$, όπως στο θεώρημα 1.1. Τότε:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} gJf \, dx &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \int_{A_i} Jf \, dx \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A_i \cap f^{-1}\{y\}) \, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \mathcal{H}^{n-m}(A_i \cap f^{-1}\{y\}) \, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} \left[\int_{f^{-1}\{y\}} g \, d\mathcal{H}^{n-m} \right] dy
\end{aligned}$$

Περίπτωση 2: Η g είναι μια οποιαδήποτε $\mathcal{L}^n$-ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τότε $g = g^+ - g^-$ και χρησιμοποιούμε την περίπτωση 1. □

3.4 Εφαρμογές

Θεώρημα 3.7. *(Πολικές συντεταγμένες) Έστω $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μία $\mathcal{L}^n$-ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τότε:*

$$\int_{\mathbb{R}^n} g \, dx = \int_0^{\infty} \left(\int_{\partial B(r)} g \, d\mathcal{H}^{n-1} \right) dr.$$

Απόδειξη. Θέτουμε $f(x) = |x|$ Τότε για $x \neq 0$, έχουμε

$$Df(x) = \frac{x}{|x|}, Jf(x) = 1.$$

$\square$

Θεώρημα 3.8. *Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Lipschitz συνεχής συνάρτηση.*

(i) Τότε

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Df| \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}^{n-1}(\{f = t\}) \, dt.$$

(ii) Υποθέτουμε ακόμα ότι $\operatorname{ess\,inf} |Df| > 0$ *και υποθέτουμε ότι $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι $\mathcal{L}^n$-ολοκληρώσιμη. Τότε*

$$\int_{\{f>t\}} g \, dx = \int_t^{\infty} \left(\int_{\{f=s\}} \frac{g}{|Df|} d\mathcal{H}^{n-1} \right) \, ds.$$

Κεφάλαιο 4

Βιβλιογραφία

1. Measure theory and fine properties of functions, Evans & Gariepy

2. Geometric measure theory, Herbert Federer