Μεταπτυχιακή Εργασία: Μετασχηματισμός Fourier και Διάσταση Hausdorff

Κατέυθυνση Θεωρητικών Μαθηματικών

Μαρίνος Δαμίγος

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Μετασχηματισμός Fourier

Ορισμός 1.1 (L^1Μετασχηματισμός Fourier)**.** *Αν $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ τότε ο Fourier μετασχηματισμός της είναι η $\hat{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ και ορίζεται ως*

$$\hat{f}(\xi) = \int e^{-2\pi i x \cdot \xi} f(x) dx.$$

Γενικά, έστω M($\mathbb{R}^n$) να είναι ένας χώρος από πεπερασμένα μιγαδικά μέτρα στον $\mathbb{R}^n$ με τη νόρμα

$$\| \mu \| = | \mu | (\mathbb{R}^n)$$

, όπου $| \mu |$ είναι η πλήρης μεταβολή. Έτσι $L^1(\mathbb{R}^n)$ περιέχεται στο M($\mathbb{R}$) απο την $f \to \mu$, $d\mu = f dx$. Γενικεύοντας τον ορισμό του μετασχηματισμού έχουμε:

$$\hat{\mu}(\xi) = \int e^{-2\pi i x * \xi} d\mu(x)$$

.

Πρόταση 1.1. *Αν $\mu \in M(\mathbb{R}^n)$ τότε $\hat{\mu}$ είναι φραγμένη συνάρτηση, όντως:*

$$\| \hat{\mu} \|_\infty \leq \| \mu \|_{M(\mathbb{R}^n)}$$

.

Πρόταση 1.2. *Αν $\mu \in M(\mathbb{R}^n)$ τότε $\hat{\mu}$ είναι συνεχής συνάρτηση.*

Πρόταση 1.3. *Έστω ότι $\mu \in M(\mathbb{R}^n)$ και το στήριγμα της μ είναι συμπαγές. Τότε $\hat{\mu}$ είναι C^∞ και*

$$D^\alpha \hat{\mu} = ((-\widehat{2\pi i x})^\alpha \mu)$$

Επιπλέον, αν $supp\mu \subset D(0, R)$ τότε

$$\| D^\alpha \hat{\mu} \|_\infty \leq (2\pi R)^{|\alpha|} \| \mu \|$$

.

Πρόταση 1.4. *Έστω ότι f είναι C^N και ότι $D^\alpha f \in L^1$ για όλα τα α με $0 \leq | \alpha | \leq N$. Τότε*

$$\widehat{D^\alpha f(\xi)} = (2\pi i \xi)^\alpha \hat{f}(\xi)$$

, όταν $| \alpha | \leq N$ και επιπλέον

$$| \hat{f}(\xi) | \leq C(1 + | \xi |)^{-N}$$

για κατάλληλη σταθερά C.

Λήμμα 1.1. *Αν f είναι C^N, $D^\alpha f \in L^1$ για όλα τα α με $| \alpha | \leq N$ και αν θέσουμε $f_k = \varphi_k f$ τότε $\lim_{k \to \infty} \| D^\alpha f_k - D^\alpha f \|_1 = 0$ για όλα τα α με $| \alpha | \leq N$.*

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Μέτρα και Διάσταση Hausdorff

Το μέτρο Hausdorff είναι ένας τύπος εξωτερικού μέτρου που ¨μετράει¨ ένα σύνολο στον $\mathbb{R}^n$ ή γενικότερα σε ένα μετρικό χώρο. Παραδείγματος χάρη το μέτρο Hausdorff μιας απλής καμπύλης στον $\mathbb{R}^n$ είναι το μήκος της καμπύλης.

Ορισμός 2.1. *Έστω $\alpha > 0$ (σταθεροποιημένο), και έστω $E \subset \mathbb{R}^n$. Για $\varepsilon > 0$, ορίζουμε*

$$H_\alpha^\varepsilon(E) = inf(\sum_{j=1}^{\infty} r_j^\alpha),$$

όπου το infimum λαμβάνεται πάνω από όλες τις καλύψεις του E από δίσκους $D(x_j, r_j)$ με $r_j < \varepsilon$. Είναι εμφανές ότι το $H_\alpha^\varepsilon(E)$ αυξάνεται καθώς το ε μειώνεται, και ορίζουμε

$$H_\alpha(E) = \lim_{\varepsilon \to 0} H_\alpha^\varepsilon(E).$$

Άρα μπορούμε να δούμε και ότι $H_\alpha^\varepsilon(E) \leq H_\beta^\varepsilon(E)$ αν $\alpha > \beta$ και $\varepsilon \leq 1$. Η $H_\alpha(E)$ είναι μη-αύξουσα συνάρτηση του α.

Λήμμα 2.1. *Υπάρχει μοναδικό α_0, και καλείται Hausdorff διάσταση του E ή dimE, τέτοιο ώστε $H_\alpha(E) = \infty$ αν $\alpha < \alpha_0$ και $H_\alpha(E) = 0$ αν $\alpha > \alpha_0$.*
Το dimE ταυτίζεται και με τα παρακάτω

$$dimE = sup\{s : H_s(E) > 0\} = sup\{s : H_s(E) = \infty\} = inf\{t : H_t(E) < \infty|\} = inf\{t : H_t(E) = 0\}.$$

Γενικά το $H_{\alpha_0}(E)$ μπορεί να παίρνει τις τιμές ∞,0 αλλά και να είναι ένα θετικός αριθμός $< \infty$. π.χ $dim\mathbb{R}^n = n$.

Απόδειξη. Ορίζουμε α_0 να είναι το supremum όλων των α τέτοια ώστε $H_\alpha(E) = \infty$. Οπότε προφανώς $H_\alpha(E) = \infty$ αν $\alpha < \alpha_0$, αφού ξέρουμε ότι $H_\alpha(E)$ είναι μη-αύξουσα συνάρτηση του α (και από τις σχέσεις που προκύπτουν από τον ορισμό). Έστω τώρα $\alpha > \alpha_0$ και $\beta \in (\alpha_0, \alpha)$. Ορίζουμε $M = 1 + H_\beta(E) < \infty$. Αν $\varepsilon > 0$ μπορούμε να έχουμε κάλυψη από δίσκους με $\sum_j r_j^\beta \leq M$ και $r_j < \varepsilon$ (από τον ορισμό του M). Οπότε:

$$\sum_j r_j^\alpha \leq \varepsilon^{\alpha-\beta} \sum_j r_j^\beta \leq \varepsilon^{\alpha-\beta} M$$

το οποίο είναι εμφανές ότι πηγαίνει στο 0 όταν $\varepsilon \to 0$. Επομένως $H_\alpha(E) = 0$. □

Παράδειγμα 2.1. Το σύνηθες παράδειγκα του $\frac{1}{3} - Cantor$ σύνολο στην πραγματική ευθεία. Αυτό το σύνολο έχει κάλυψη από 2^n διαστήματα μήκους 3^{-n}, και άρα έχει πεπερασμένο $H_{\frac{log2}{log3}}$-μέτρο (το οποίο είμαι μη-μηδενικό) και άρα η διάσταση Hausdorff του συνόλου είναι $\frac{log2}{log3}$.

Πρόταση 2.1 (Λήμμα Frostman). *Έστω $E \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα $\mu \in P(E)$ με*

$$\mu(D(x, r)) \leq Cr^\alpha \qquad (1)$$

για κατάλληλη σταθερά C και όλα τα $x \in \mathbb{R}^n, r > 0$. Τότε $H_\alpha(E) > 0$. Αντιστρόφως, αν $H_\alpha(E) > 0$, υπάρχει ένα $\mu \in P(E)$ τέτοιο ώστε η (1) να ισχύει.

Απόδειξη. Έστω $\{D(x_j, r_j)\}$ οποιοδήποτε κάλυψη του E από δίσκους. Τότε

$$1 = \mu(E) \leq \sum_j \mu(D(x_j, r_j)) \leq C \sum_j r_j^\alpha$$

που μπορούμε εύκολα να δούμε ότι $H_n(E) \geq C^{-1}$.
Η απόδειξη του αντιστρόφου χρειάζεται την κατασκευή κατάλληλου μέτρου, που γίνεται πιο εύκολα χρησιμοποιώντας δυαδικούς κύβους. Επομένως έχοντας ένα $\mathcal{Q}_k$ που έιναι όλοι οι κύβοι με μήηκος πλευράς $\ell(Q) = 2^{-k}$ του οποίου οι κορυφές είναι τα σημεία $2^{-k}\mathbb{Z}^n$ και μπορούμε να τους θεωρήσουμε κλειστούς κύβους. Τώρα αν $Q \in \mathcal{Q}_k$, τότε υπάρχει μοναδικό $\tilde{Q} \in \mathcal{Q}_{k-1}$ με $Q \subset \tilde{Q}$ (αφού το $mathcalQ_{k-1}$ είναι ένα βήμα κατασκευής πριν από το $\mathcal{Q}_k$ άρα περιέχει όλα τα $Q \in \mathcal{Q}_k$ και το συγκεκριμένο Q είναι υποσύνολο σε ένα μοναδικό $\tilde{Q}$ λόγω κατασκευής του συνόλου). Επιπλέον αν ορίσουμε ένα $Q_1 \in \mathcal{Q}_{k-1}$ τότε Q_1 είναι η ένωση αυτών των $Q \in \mathcal{Q}_k$ με $\tilde{Q} = Q_1$ και η ένωση αυτή είναι ξένη εκτός των σημείων στα άκρα. Επομένως ο δυαδικός κύβος είναι ένας κύβος που ανήκει σε κάποιο Q_k.
Αν τώρα Q είναι δυαδικός κύβος, τότε προφάνως υπάρχει δίσκος $D(x, r)$ με $Q \subset D(x, r)$ και $r \leq C\ell(Q)$. Παρομοίως αν σταθεροποιήσουμε $D(x, r)$ τότε υπάρχουν πεπερασμένου αριθμού δυαδικοί κύβοι $Q_1, ..., Q_C$ με $\ell(Q_j) \leq Cr$ που η ένωσή τους περιέχει το $D(x, r)$. Από αυτές τις ιδιότητες, βλέπουμε εύκολα ότι ο ορισμός του μέτρου Hausdorff και (1) μπορούν να οριστούν μέσω των δυαδικών κύβων. Επομένως εκτός από τις τιμές των σταθερών μ ικανοποιεί (1) $\iff \mu(Q) \leq C\ell(Q)^\alpha$ για όλα τα Q δυαδικοί κύβοι.
Επιπλέον, αν ορίσουμε

$$h_\alpha^\varepsilon(E) = inf(\sum_{Q\in\mathcal{F}} \ell(Q)^\alpha : E \subset \bigcup_{Q\in\mathcal{F}} Q),$$

όπου $\mathcal{F}$ καλύπτει όλες τις καλύψεις του E από δυαδικούς κύβους πλευράς $\ell(Q) < \varepsilon$ και

$$h_\alpha(E) = \lim_{\varepsilon\to 0} h_\alpha^\varepsilon(E)$$

τότε από τις παραπάνω σχέσεις έχουμε

$$C^{-1}H_\alpha^\varepsilon(E) \leq h_\alpha^\varepsilon(E) \leq CH_\alpha^\varepsilon(E)$$

και επομένως βλέπουμε ότι

$$h_\alpha(E) > 0 \iff H_\alpha(E) > 0.$$

Επιστρέφοντας στην ζητούμενη απόδειξη υποθέτουμε ότι E περιέχεται στο μοναδιαίο κύβο $[0, 1]x...x[0, 1]$. Από τις παρατηρήσεις που έχουν γίνει μπορούμε να υποθέσουμε ότι $h_\alpha^1(E) > 0$, και αρκεί να βρούμε $\mu \in P(E)$ τέτοιο ώστε $\mu(Q) \leq C\ell(Q)^\alpha$ για δυαδικό κύβο Q με $\ell(Q) \leq 1$.
Ισχυριζόμαστε ότι αρκεί να βρούμε, για κάθε $m \in \mathbb{Z}^+$, ένα θετικό μέτρο μ με τις εξής ιδιότητες:

Το μ έχει support στην ένωση των κύβων $Q \in \mathcal{Q}_m$ το οποίο τέμνει το E. (2)

$\| \mu \| \geq C^{-1}$ (3)

$\mu(Q) \leq \ell(Q)^\alpha$ για όλους τους δυαδικούς κύβους με $\ell(Q) \geq 2^{-m}$. (4)

Οπού εδώ το C είναι αναξάρτητο του m.
Δηλαδή, αν αυτό μπορεί να συμβεί,τότε λέμε ότι τα μέτρα ικανοποιούν τα (2), (3), (4) μέσω μ_m. Η (4) συνεπάγει ένα φράγμα στο $\| \mu_m \|$, ώστε να υπάρχει ένα ασθενή οριακό σημείο μ. Η (2) τότε δείχνει ότι το μ έχει στήριγμα στο E, η (4) δείχνει ότι $\mu(Q) \leq \ell(Q)^\alpha$ για όλους τους δυαδικούς κύβους, και (3)δείχνει ότι $\| \mu \| \geq C^{-1}$. Αναλόγως, ένα κατάλληλο βαθμωτό πολλαπλάσιο του μ μας δείνει το απαραίτητο μέτρο πιθανότητας.
Υπάρχουν πολλοί τρόποι για να κατασκευάσουμε το μέτρο που θα ικανοποιεί τα (2), (3), (4). Χοντρικά κάποιος πρέπει να βρει ένα μέτρο μ με το κατάλληλο στήριγμα και με συνολική μάζα τόσο μεγάλη όσο είναι δυνατόν για να ικανοποιείται και η (3).
Έτσι λοιπόν παίρνουμε ένα m, και θα κατασκευάσουμε μία πεπερασμένη ακολουθία μέτρων $\nu_m, ..., \nu_0$ με αυτή τη σειρά, όπου ν_0 είναι το μέτρο που ζητάμε.
Αρχίζουμε ορίζοντας το ν_m να είναι μοναδικό με τις ακόλουθες ιδιότητες:
1. Σε κάθε $Q \in \mathcal{Q}_m, \nu_m$ είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο Lebesgue μέτρου (δηλαδή αν λ^n n-διάστατο μέτρο Lebesgue και $B \in \mathcal{B}$ και $t > 0 \in \mathbb{R}^n$ τότε $\lambda^n(t \cdot B) = t^n\lambda^n(B)$).
2. Αν $Q \in \mathcal{Q}_m$ και $Q \cap E = \emptyset$, τότε $\nu_m(Q) = 0$.
3. Αν $Q \in \mathcal{Q}_m$ και $Q \cap E \neq \emptyset$, τότε $\nu_m(Q) = 2^{-m\alpha}$.

Αν θέσουμε $k = m$, τότε το ν_k έχει τις ακόλουθες ιδιότητες: είναι απόλυτα συνεχές στο Lebesgue μέτρο, και

$\nu_k(Q) \leq \ell(Q)^\alpha$ αν Q δυαδικός κύβος με πλευρά $2^{-j}, k \leq j \leq m$. (5)

Αν Q_1 είναι δυαδικός κύβος με πλευρά 2^{-k}, τότε υπάρχει μία κάλυψη $\mathcal{F}_{Q_1}$ του $Q_1 \cap E$ από δυαδικούς κύβους που περιέχονται στο Q_1 τέτοιοι ώστε $\nu_k(Q_1) \geq \sum_{Q \in \mathcal{F}_{Q_1}} \ell(Q)^\alpha$. (6)

Υποθέτουμε τώρα ότι $1 \leq k \leq m$ και έχουμε κατασκευάσει ένα απόλυτα συνεχές μέτρο ν_k με τις ιδιότητες (2), (5), (6). Θα κατασκευάσουμε το ν_{k-1} να έχει τις ίδιες ιδιότητες, όπου στην (5) και (6) αντικαθυστούμε το k με το $k-1$. Δηλαδή, για να ορίσουμε το ν_{k-1} αρκεί να ορίσουμε το $\nu_{k-1}(Y)$ όπου Y περιέχεται σε ένα κύβο $Q \in \mathcal{Q}_{k-1}$. Παίρνουμε ένα $Q \in \mathcal{Q}_{k-1}$ και θεωρούμε δύο περιπτώσεις:

(i)$\nu_k(Q) \leq \ell(Q)^\alpha$. Σε αυτή την περίπτωση αφήνουμε το ν_{k-1} να ¨συνμφωνεί¨ με το ν_k σε υποσύνολα του Q.

(ii)$\nu_k(Q) \geq \ell(Q)^\alpha$. Σε αυτή την περίπτωση αφήνουμε το ν_{k-1} να ¨συμφωνεί¨ με το $c\nu_k$ σε υποσύνολα του Q, όπου c είναι το βαθμωτό $\frac{2^{-(k-1)\alpha}}{\nu_k(Q)}$.

Παρατηρούμε ότι $\nu_k - 1(Y) \leq \nu_k(Y)$ για οποιοδήποτε σύνολο Y, και επιπλέον $\nu_{k-1}(Q) \leq \ell(Q)^\alpha$ αν $Q \in \mathcal{Q}_{k-1}$. Αυτές οι ιδιότητες και (5) για ν_k δίνουν το (5) για το ν_{k-1}, και (2) για ν_{k-1} βγαίνει κατευθείαν από την (2) για το ν_k. Για το (6) του ν_{k-1}, παίρνουμε ένα $Q \in \mathcal{Q}_{k-1}$. Αν Q είναι όπως στην περίπτωση (ii), τότε $\nu_{k-1}(Q) = \ell(Q)^\alpha$, ώστε να χρησιμοποιήσουμε την κάλυψη από το $\{Q\}$. Αν Q είναι όπως στην περίπτωση (i) τότε για καθένα από τους κύβους $Q_j \in \mathcal{Q}_k$ των οποίων η ένωση είναι Q έχουμε την κάλυψη του $Q_j \cap E$ που σχετίζεται με το (6) για ν_k. Αφού ν_k και ν_{k-1} ¨συμφωνούν¨ στα υποσύνολα του Q, μπορούμε απλά να ενώσουμε τις καλύψεις μαζί για να πάρουμε μια κατάλληλη κάλυψη του $Q \cap E$. Αυτό συμπερένει το επαγωγικό βήμα από το ν_k στο ν_{k-1}.

Έτσι καταλήγουμε τελικά στην κατασκευή του ν_0. Έχει τις ιδιότητες (2), (4)(αφού βλέπουμε ότι για το ν_0 αυτά είναι ισοδύναμα του (5», και από το (6) και τον ορισμό του h^1_α έχουμε την ιδιότητα (5). □

Ορισμός 2.2. *Ορίζουμε ως α-διάστατη ενέργεια (α-dimensional energy) ενός (θετικού) μέτρου μ με συμπαγές στήριγμα τη φόρμουλα:*

$$I_\alpha(\mu) = \iint |\ x - y\ |^{-\alpha}\ d\mu(x)d\mu(y).$$

Πάντα υποθέτουμε ότι $0 < \alpha < n$. *Ορίζουμε επίσης το δυναμικό*

$$V^\alpha_\mu(y) = \int |\ x - y\ |^{-\alpha}\ d\mu(x).$$

Και επομένως

$$I_\alpha(\mu) = \int V^\alpha_\mu d\mu. \qquad (7)$$

Λήμμα 2.2. *(i) Αν μ είναι μέτρο πιθανότητας με συμπαγές στήριγμα και ικανοποιεί την (1), τότε* $I_\beta(\mu) < \infty$ *για όλα τα* $\beta < \alpha$. *(ii) Αντιστρόφως, αν μ είναι μέτρο πιθανότητας με συμπαγές στήριγμα και με* $I_\alpha(\mu) < \infty$, *τότε υπάρχει ένα άλλο μέτρο πιθανότητας ν τέτοιο ώστε* $\nu(X) \leq 2\mu(X)$ *για όλα τα σύνολα X και έτσι ώστε το ν να ικανοποιεί την (1).*

Απόδειξη. (i) Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η διάμετρος του support του μ είναι ≤ 1. Τότε:

$$V^\beta_\mu(x) = \int \frac{d\mu(y)}{|\ x - y\ |^\beta} = \sum_{j=0}^{\infty} \int_{\frac{1}{2^{j+1}} \leq |x-y| \leq \frac{1}{2^j}} \frac{d\mu(y)}{|\ x - y\ |} \lesssim \sum_{j=0}^{\infty} 2^{j\beta} \mu(D(x, 2^{-j})).$$

το οποίο προκύπτει από τον παραπάνω ορισμό και από το ότι πληρείται η ανισότητα (1). Αναλόγως, αν το μ ικανοποιεί την (1), και $\beta < \alpha$, τότε προκύπτει:

$$V^\beta_\mu(x) \lesssim \sum_{j=0}^{\infty} 2^{j\beta} 2^{-j\alpha} \lesssim 1$$

και έχοντας αυτό και από την σχέση (7) έχουμε ότι $I_\alpha(\mu) < \infty$.
. (ιι) Έστω $\mathcal{F}$ ένα σύνολο σημείων x τέτοια ώστε $V^\alpha_\mu(x) \leq 2I_\alpha(\mu)$. Τότε βλέπουμε από (7) ότι $\mu(\mathcal{F}) \geq 1/2$. Έστω $\mathcal{X}_\mathcal{F}$ είναι η συνάρτηση-δείκτης της $\mathcal{F}$ και έστω $\nu(X) = \mu(X \cap \mathcal{F})/\mu(\mathcal{F})$. Πρέπει να δείξουμε ότι η ν ικανοποιεί την σχέση (1). Έστω πρώτα ότι $x \in \mathcal{F}$. Αν $r > 0$ τότε

$$r^{-\alpha}\nu(D(x, r)) \leq V^\alpha_\nu(x) \leq 2V^\alpha_\mu(x) \leq 4I_\alpha(\mu).$$

το οποίο προκύπτει από τις προηγούμενες σχέσεις της αποδείξης και την (2). Αυτό όμως ικανοποιεί την (1) όταν $x \in \mathcal{F}$. Γενικά για οποιαδήποτε x, ξεχωρίζουμε δύο περιπτώσεις. Αν r είναι τέτοιο ώστε $D(x, r) \cap \mathcal{F} = \emptyset$ τότε προφανώς $\nu(D(x,r)) = 0$. Και αν $D(x,r) \cap \mathcal{F} \neq \emptyset$, έστω $y \in D(x,r) \cap \mathcal{F}$. Τότε $\nu(D(x,r)) \leq \nu(D(x,2r)) \lesssim r^{\alpha}$ από το πρώτο μέρος της απόδειξης. □

Πρόταση 2.2. *Αν E είναι συμπαγές τότε η Hausdorff διάσταση του E συμπίπτει με τον αριθμό*

$$sup(\alpha : \exists \mu \in P(E), I_{\alpha}(\mu) < \infty).$$

Απόδειξη. Ονομάζουμε το παραπάνω sup ως s. Αν $\beta < s$ τότε από το παραπάνω λήμμα (ii) E είναι support σε ένα μέτρο μ με $\mu(D(x,r)) \leq Cr^{\beta}$. Τότε από πρόταση 8.2 $H_{\beta}(E) > 0$, οπότε $\beta \leq dimE$. Οπότε $s \leq dimE$. Συνεπώς, αν $\beta < dimE$ τότε από πρόταση 2.1 E είναι support σε ενα μέτρο μ με $\mu(D(x,r)) \leq Cr^{\beta+\varepsilon}$ για $\varepsilon > 0$ αρκετά μικρό. Τότε $I_{\beta}(\mu) < \infty$, οπότε $\beta \leq s$, το οποίο δείχνει ότι $dimE \leq s$. □

Τα παρακάτω μας δείχνουν την εισαγωγή του μετασχηματισμού Fourier στη διάσταση και τα μέτρα Hausdorff, για να καταλήξουμε στο θεώρημα προβολών του Marstrand όπου ο μετασχηματισμός Fourier είναι απαραίτητος για να περιγράψουμε προβολές στη διάσταση Hausdorff.

Πρόταση 2.3. *Έστω μ θετικό μέτρο με συμπαγές στήριγμα και $0 < \alpha < n$. Τότε*

$$\int\int \mid x-y \mid^{-\alpha} d\mu(x)d\mu(y) = c_{\alpha} \int \mid \hat{\mu}(\xi) \mid^{2} \mid \xi \mid^{-(n-\alpha)} d\xi \qquad (8)$$

, όπου $c_{\alpha} = \frac{\gamma(\frac{n-\alpha}{2})\pi^{\alpha-\frac{n}{2}}}{\gamma(\frac{\alpha}{2})}, \gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-t}s^{s-1}dt.$

Απόδειξη. Για την απόδειξη αυτή θα χρησιμοποιήσουμε την συνάρτηση Riesz-Kernel $\kappa_{\alpha}(x) =\mid x \mid^{-\alpha}, 0 < \alpha < n$. Όμως σε αυτή τη συνάρτηση δεν υπάρχει ο μετασχηματισμός Fourier και γράφουμε το μετασχηματισμό της με την έννοια των κατανομών.
Δηλαδή έστω συναρτήσεις φ και f, εμείς ξέρουμε ότι αν και οι δύο έχουν μετασχηματισμό Fourier τότε $\int \phi \hat{f} = \int \hat{\phi} f$ άν όμως η f δεν έχει μετασχηματισμό και αλλά υπάρχει h συνάρτηση τέτοια ώστε $\int \phi h = \int \hat{\phi} f$ τότε λέμε ότι ο μεταστηματισμός Fourier της f είναι η h.
Στη συγκεκριμένη περίπτωση λοιπόν $\hat{\kappa_{\alpha}} = \gamma(n,\alpha)\kappa_{n-\alpha}$ όπου $\gamma(n,\alpha)$ μία σταθερά. Και άρα έχουμε $\int \kappa_{\alpha}\hat{\phi} = \gamma(n,\alpha)\int \kappa_{n-\alpha}\phi$ όπου φ είναι Schwartz.
Επίσης εδώ χρησιμοποιούμε τον τύπο του Convolution δηλαδή $\phi * f(x) = \int \phi(y)f(x-y)dy$ όπως και τις ιδιότητες $\int \hat{u}\bar{\hat{v}} = \int u\bar{v}$ και $\widehat{\phi * f} = \hat{\phi}\hat{f}$.
Έτσι λοιπόν έχουμε ότι

$$I_{\alpha}(\mu) = \int\int \mid x-y \mid^{-\alpha} d\mu(x)d\mu(y) = \int \kappa_{\alpha} * \mid \mu = \int \widehat{\kappa_{\alpha}\mu}\bar{\hat{\mu}} = \int \kappa_{a} l\hat{p}ha \mid \hat{\mu} \mid^{2} = c_{\alpha} \int \mid \hat{\mu}(\xi) \mid^{2} \mid \xi \mid^{\alpha-n} d\xi,$$

που είναι η ζητούμενη ισότητα. □

Λήμμα 2.3. *Έστω ϕ ακτινική φθίνουσα συνάρτηση Schwartz με L^1 νόρμα 1, και έστω $0 < \alpha < n$. Τότε*

$$\int \mid x-y \mid^{-\alpha} \phi(y)dy \lesssim \mid x \mid^{-\alpha}$$

, όπου η ¨σιωπηρή¨ σταθερά εξαρτάται μόνο από το a, όχι από την επιλογή του ϕ.

Απόδειξη. Έστω $\phi(x) = e^{-\pi|x|^2}$. Τότε έχουμε $\phi^{\varepsilon} * \mu \in \mathcal{S}$, οπότε

$$\iint \left(\iint \mid x-y \mid^{-\alpha} \phi^{\varepsilon}(x-z)\phi^{\varepsilon}(y-w)dxdy \right) d\mu(z)d\mu(w) = c_{\alpha} \int \mid \hat{\mu}(\xi) \mid^{2} \mid \hat{\phi}(\varepsilon\xi) \mid^{2} \mid \xi \mid^{-n-\alpha} d\xi. \qquad (10)$$

Τώρα αφήνουμε το $\varepsilon \to 0$. Η αριστερή πλευρά του (10), η έκφραση της παρένθεσης συγκλίνει κατά σημείο στο $\mid z-w \mid^{-\alpha}$ (χρησιμοποιώντας ότι αν $\phi \in \mathcal{S}$ και $\int \phi = 1$ τότε (1)αν f συνεχής που τείνει στο 0 στο άπειρο έχουμε $\phi^{\varepsilon} * f \to f$ ομοιόμορφα καθώς $\varepsilon \to 0$ και (2)αν $f \in L^p, 1 \leq p < \infty$ τότε $\phi^{\varepsilon} * f \to f$ στον L^p καθώς $\varepsilon \to 0$). Αν $I_{\alpha}(\mu) < \infty$ τότε η σύγκλιση κυριαρχείται σύμφωνα με το προηγούμενο λήμμα, οπότε τα ολοκληρώματα στο αριστερό μέλος συγκλίνουν στο $I_{\alpha}(\mu)$. Αν $I_{\alpha}(\mu) = \infty$, τότε αυτό παραμένει αληθές σύμφωνα με το λήμμα του

Fatou. Στη δεξιά πλευρά του (10) παρομοίως: τα ολοκληρώματα συγκλίνουν κατά σημείο στο $|\hat{\mu}(\xi)|^2|\xi|^{-(n-\alpha)}$. Αν $\int |\hat{\mu}(\xi)|^2|\xi|^{-(n-\alpha)}\,d\xi < \infty$ τότε η σύγκλιση κυριαρχείται αφού οι παράγωντες $\hat{\phi}(\varepsilon\xi)$ φράσονται από το 1, οπότε τα ολοκληρώματα συγκλίνουν στο $\int |\hat{\mu}(\xi)|^2|\xi|^{-(n-\alpha)}\,d\xi$. Αν $\int |\hat{\mu}(\xi)|^2|\xi|^{-(n-\alpha)}\,d\xi = \infty$ τότε αυτό παραμένει αληθές από το λήμμα του Fatou. Αναλόγως πέρνοντας όρια καταλήγουμε πάλι στο (10). □

Πόρισμα 2.1. *Έστω μ είναι ένα μέτρο πιθανότητας με συμπαγές στήριγμα στον $\mathbb{R}^n$ με*

$$|\hat{\mu}(\xi)| \leq C|\xi|^{-\beta},$$

για κάποιο $0 < \beta < n/2$, ή γενικότερα ότι είναι αληθής στον L^2 που σημαίνει

$$\int_{D(0,N)} |\hat{\mu}(\xi)|^2\,d\xi \leq CN^{n-2\beta}. \qquad (11)$$

Τότε η διάσταση του support της μ είναι τουλάχιστον 2β.

Απόδειξη. Αρκεί, σύμφωνα με τη πρόταση 2.2, να δείξουμε ότι αν η (11) ισχύει τότε $I_\alpha(\mu) < \infty$ για όλα τα $\alpha < 2\beta$. Όμως

$$\int_{|\xi|\geq 1} |\hat{\mu}(\xi)|^2|\xi|^{-(n-\alpha)}\,d\xi \lesssim \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j(n-\alpha)} \int_{2^j\leq|\xi|\leq 2^{j-1}} |\hat{\mu}(\xi)|^2\,d\xi$$

$$\lesssim \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j(n-\alpha)} 2^{j(n-2\beta)}$$

$$< \infty$$

Αν $\alpha < 2\beta$ και η (11) ισχύει. Παρατηρούμε επίσης ότι το ολοκλήρωμα στο $\xi \leq 1$ είναι πεπερασμένο αφού $|\hat{\mu}(\xi)| \leq \|\mu\| = 1$,δηλαδή $\int_{|\xi|\leq 1} |\hat{\mu}(\xi)|^2|\xi|^{\alpha-n}\,d\xi = \int \frac{1}{|\xi|^{\alpha-n}}d\xi$ το οποίο ολοκληρώνεται και είναι πεπερασμένο. □

Παρατήρηση 1. *Βλέποντας το αντίστροφο πρόβλημα, δηλαδή αν ένα συμπαγές σύνολο διάστασης α μπορεί να είναι support σε ένα μέτρο μ με*

$$|\hat{\mu}(\xi)| \leq C_\varepsilon(1 + |\xi|)^{-\alpha/2+\varepsilon} \qquad (12)$$

για όλα τα $\varepsilon > 0$. Η απάντηση είναι όχι. Πράγματι υπάρχουν πολλά σύνολα με θετική διάσταση που δεν αποτελούν support σε κανένα μέτρο μ του οποίου ο μετασχηματισμός Fourier να πηγαίνει στο 0 καθώς $|\xi| \to \infty$. Ο ευκολότερος τρόπος είναι παίρνοντας το γραμμικό διάστημα $E = [0,1]x\{0\} \subset \mathbb{R}^2$. Το E έχει προφανώς διάσταση 1, αλλά αν μ είναι ένα μέτρο με support στο E τότε $\hat{\mu}(\xi)$ εξαρτάται μόνο από το ξ_1, οπότε δεν είναι δυνατόν να πάει στο 0 όταν τείνει στο ∞. Αν πάρουμε για $n = 1$, έχουμε να κάνουμε τη μοναδικότητα των συνόλων. Για παράδειμα το $1/3$Cantor σύνολο δεν μπορεί να είναι support σε μέτρο μ τέτοιο ώστε $\hat{\mu}$ να ¨χάνεται¨ στο άπειρο.
Όντως είναι προφανές ότι υπάρχει αντιπαράδειγμα. Ένα σύνολο E με δωσμένη διάσταση α που είναι support σε ένα μέτρο που ικανοποιεί την (12) (παρουσιάζουμε την κατασκευή του, μέσω του R. Kaufman παρακάτω).
Σαν τυπική εφαρμογή έχουμε μία ειδική περίπτωση του παρακάτω θεωρήματος προβολής του Marstrand. Έστω e είναι μοναδιαίο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$ και $E \subset \mathbb{R}^n$ ένα συμπαγές σύνολο. Η προβολή $P_e(E)$ είναι ένα σύνολο $\{x \cdot e : x \in E\}$. Θέλουμε να σχετίσουμε τις διαστάσεις του E και των προβολών του. Παρατηρούμε καταρχάς ότι $dimP_eE \leq dimE$ (που αφτό συμπίπτει από τον ορισμό της διάστασης και το ότι η προβολή P_e είναι Lipschitz συνάρτηση).
Ένα καλό παράδειγμα, είναι μια ομαλή καμπύλη στον $\mathbb{R}^2$. Αυτή είναι μονοδιαστατη, και σχεδόν όλη η προβολή της θα είναι επίσης μονοδιάστατη. Παρόλα αυτά αν η καμπύλη είναι ευθεία τότε μία προβολή της θα είναι απλώς ένας σημείο.

Θεώρημα 2.1 (Η προβολή Marstrand (για μονοδιάστατες προβολές». *Υποθέτουμε ότι $E \subset \mathbb{R}^n$ είναι συμπαγές και ότι $dimE = \alpha$. Τότε*

(i) Αν $\alpha \leq 1$ *τότε* $e \in S^{n-1}$ *και έχουμε* $dim P_e E = \alpha$.
(ii) Αν $\alpha > 1$ *τότε* $e \in S^{n-1}$ *η προβολή* $P_e E$ *έχει θετικό μονοδιάστατο μέτρο Lebesgue.*

Απόδειξη. Αν μ μέτρο με support στο Ε,$e \in S^{n-1}$, τότε το προβάλων μέτρο μ_e είναι το μέτρο στον $\mathbb{R}$ και ορίζεται ως:

$$\int f d\mu_e = \int f(x \cdot e) d\mu(x)$$

για συνεχής f. Παρατηρούμε ότι

$$\hat{\mu}_e(k) = \int e^{-2\pi i k x \cdot e} d\mu(x) = \hat{\mu}(ke)$$

Έστω $\alpha < dimE$, και μ μέτρο με support στο Ε με $I_\alpha(\mu) < \infty$. Τότε έχουμε

$$\int |\hat{\mu}(ke)|^2 |k|^{-1+\alpha} dk d\sigma(e) < \infty \qquad (13)$$

από την πρόταση 2.3 και πολικές συντεταγμένες($\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx = \int_0^\infty r^{d-1} \int_{S^{d-1}} f(r\xi) d\sigma(\xi) dr$). Επομένως έχουμε για σχεδόν όλα τα e

$$\int |\hat{\mu}(ke)|^2 |k|^{-1+\alpha} dk < \infty.$$

Συνεπάγεται πάλι από την ίδια πρόταση ότι για $n = 1$ για σχεδόν όλα τα e το προβάλων μέτρο μ_e έχει πεπερασμένη α-διάστατη ενέργεια. Αυτό με την πρόταση 2.2 μας δίνει το μέρος (*i*), αφού μ_e έχει support στο σύνολο προβολής $P_e E$. Για το (*ii*), παρατηρούμε ότι αν $dimE > 1$ μπορούμε να πάρουμε το $\alpha = 1$ στην (13). Επομένως $\hat{\mu}_e$ είναι στον L^2 σχεδόν για όλα τα e. Ξέρουμε τώρα ότι αν $\mu \in M(\mathbb{R}^n)$ και $\hat{\mu} \in L^2$ τότε μ είναι απόλυτα συνεχές ως προς Lebesgue μέτρο με L^2 πυκνότητα. Επομένως $P_e E$ πρέπει να έχει θετικό Lebesgue μέτρο. □

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Σύνολα με μέγιστη Fourier διάσταση

Ορισμός 3.1. *Έχουμε ένα $\alpha > 0$ και*

$$E_\alpha = \{x \in \mathbb{R} : \exists \frac{\alpha}{q} :| x - \frac{\alpha}{q} | \leq q^{-(2+\alpha)}.$$

όπου υπάρχουν άπειρου πλήθους πραγματικοί $\frac{\alpha}{q}$.

Πρόταση 3.1. *Η Hausdorff διάσταση του E_α είναι ίση με $\frac{2}{2+\alpha}$*

Απόδειξη. Θα δείξουμε μόνο ότι $dimE \leq \frac{2}{2+\alpha}$. Άρκει να το αποδείξουμε για το πάνω φράγμα του $E_\alpha \cap [-N, N]$. Θεωρούμε το σύνολο των διαστημάτων $I_{\alpha q} = (\frac{\alpha}{q} - q^{-(2+\alpha)}, \frac{\alpha}{q} + q^{-(2+\alpha)})$, όπου $0 \leq \alpha \leq Nq$ είναι ακέραιοι. Τότε

$$\sum_{q>q_0} \sum_{\alpha} | I_{\alpha q} |^\beta \approx \sum_{q>q_0} q \cdot q^{-\beta(2+\alpha)},$$

το οποίο είναι πεπερασμένο και τείνει στο 0 καθώς $q_0 \to \infty$ αν $\beta > \frac{2}{2+\alpha}$. Για οποιοδήποτε q_0 το σύνολο $\{I_{\alpha q} : q > q_0\}$ καλύπτει $E_\alpha \cap [-N, N]$, το οποίο έχει $H_\beta(E_\alpha \cap [-N, N]) = 0$ όταν $\beta > \frac{2}{2+\alpha}$. □

Θεώρημα 3.1 (Kaufman). *Για κάθε $\alpha > 0$ υπάρχει ένα θετικό μέτρο μ με στήριγμα σε υποσύνολο του E_α τέτοιο ώστε*

$$| \cap\mu(\xi) | \leq C_\varepsilon | \xi |^{-\frac{1}{2+\alpha}+\varepsilon}$$

για όλα τα $\varepsilon > 0$.

Απόδειξη. Η απόδειξη γίνεται πιο ¨φυσικά¨ χρησιμοποιώντας περιοδικές συναρτήσεις. Έστω $\mathbb{T}^n$ είναι n-τόρος τον οποίο θεωρούμε ως $[0, 1]x...x[0, 1]$, επομένως μια συνάρτηση στον $\mathbb{T}^n$ είναι το ίδιο όπως μία συνάρτηση στον $\mathbb{R}^n$ περιοδική για το πλέγμα $\mathbb{Z}^n$.

Αν $f \in L^1(\mathbb{T}^n)$ τότε ορίζουμε τους Fourier συντελεστές ως:

$$\hat{f}(k) = \int_{\mathbb{T}^n} f(x)e^{-2\pi ik\cdot x}dx, k \in \mathbb{Z}^n$$

και κάνουμε ανάλογο ορισμό μέτρων. Αν f είναι λεία τότε έχουμε $| \hat{f}(k) | \leq C_N | k |^{-N}$ για όλα τα N και $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \hat{f}(k)e^{2\pi ik\cdot x} = f(x)$. Επίσης, αν $f \in L^1(\mathbb{T}^n)$ ορίζουμε την περιοδολόγηση του ως

$$f_per(x) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n} f(x - \nu).$$

Τότε $f_per \in L^1(\mathbb{T}^n)$. □