ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥΣ»

ΤΩΝ ΤΜΗΜΑΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

«Η χρήση της Παραγώγου για την επίλυση προβλημάτων από τους μαθητές κατεύθυνσης της Γ' Λυκείου»

ΝΙΚΟΛΑΟΣ ΚΑΤΣΑΛΗΣ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ : ΧΡΗΣΤΟΣ ΚΟΥΡΟΥΝΙΩΤΗΣ

ΗΡΑΚΛΕΙΟ

2017

στα παιδιά μου Γιώργο και Θεανώ

Η παρούσα μεταπτυχιακή εργασία πραγματοποιήθηκε στα πλαίσια του Διατμηματικού Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών των Τμημάτων Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών της Σχολής Θετικών και Τεχνολογικών Επιστημών του Πανεπιστημίου Κρήτης «Μαθηματικά και Εφαρμογές τους» στην κατεύθυνση «Μαθηματικά στην εκπαίδευση» με επιβλέποντα καθηγητή τον κ. Κουρουνιώτη Χρήστο.

Την τριμελή επιτροπή αξιολόγησης αποτέλεσαν οι καθηγητές:

- Κουρουνιώτης Χρήστος (Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης)
- Κατσοπρινάκης Εμμανουήλ (Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης)
- Παπαδημητράκης Μιχαήλ (Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης)

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να εκφράσω τις ιδιαίτερες ευχαριστίες μου στην τριμελή επιτροπή αξιολόγησης για την πολύτιμη βοήθειά τους και ιδιαίτερα στον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Χρήστο Κουρουνιώτη για τις χρήσιμες υποδείξεις του και τις συμβουλές του κατά την εκπόνηση της διπλωματικής μου εργασίας.

Επίσης ευχαριστώ:

- Όλους τους καθηγητές του προπτυχιακού και μεταπτυχιακού προγράμματος οι οποίοι με βοήθησαν να διευρύνω τις γνώσεις μου αλλά και εμβαθύνω τη σκέψη μου στον όμορφο κόσμο των μαθηματικών.
- Όλους τους συμφοιτητές μου για τη δημιουργική σχέση που είχαμε κατά τη διάρκεια των σπουδών.
- Τους συναδέλφους καθηγητές μαθηματικών Τζιρίτα Εμμανουήλ, Τζαβλάκη Ελένη και Παντερή Ανδρέα για τη σημαντική βοήθειά τους στην πραγματοποίηση της έρευνας καθώς και όλους τους συμμετέχοντες σε αυτήν μαθητές.
- Όλους τους συναδέλφους καθηγητές στο σχολείο μου που μου συμπαραστάθηκαν και με ενθάρρυναν να συνεχίσω και να ολοκληρώσω τις σπουδές μου.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τη σύζυγό μου Εύη και τα παιδιά μου Γιώργο και Θεανώ για την αγάπη τους και τη συμπαράστασή τους σε όλη τη διάρκεια των σπουδών μου.

Περιεχόμενα

Εικόνες

Πίνακες

Περίληψη

Έρευνες έχουν δείξει ότι μαθητές δευτεροβάθμιας και φοιτητές συναντούν σημαντικές δυσκολίες στην κατανόηση της έννοιας της παραγώγου και στην χρήση της για την επίλυση προβλημάτων. Στην παρούσα έρευνα συλλέχθηκαν οι απαντήσεις μαθητών της Γ’ Λυκείου, που εξετάζονται στα μαθηματικά κατεύθυνσης, σε γραπτή εξέταση στην οποία διερευνήθηκε η δυνατότητά τους να χρησιμοποιούν την πρώτη παράγωγο και τις ιδιότητες της για τη μελέτη των συναρτήσεων, κυρίως όσον αφορά τη μονοτονία και τα ακρότατα, και την επίλυση προβλημάτων από διάφορους τομείς. Η ανάλυση των απαντήσεων έδειξε ότι λιγότεροι από τους μισούς μαθητές μπορούσαν να χρησιμοποιήσουν την πρώτη παράγωγο και τις ιδιότητες της για τη μελέτη των συναρτήσεων καθώς και σοβαρά στοιχεία έλλειψης βαθύτερης κατανόησης των σχέσεων συνάρτησης και παραγώγου. Ένας περιορισμένος αριθμός μαθητών μπορούσε να επιλύσει προβλήματα από διαφόρους τομείς, συσχετίζοντας κατάλληλα τις έννοιες και τα αντικείμενα του πεδίου του προβλήματος με τα αντίστοιχα του μαθηματικού πεδίου και να εφαρμόσει τις απαραίτητες διαδικασίες και τους υπολογισμούς για να τα επιλύσει.

1 Εισαγωγή

Ένας σημαντικός αριθμός ερευνών έχουν πραγματοποιηθεί, κυρίως στην τριτοβάθμια και λιγότερο στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, τόσο για την κατανόηση της έννοιας της παραγώγου και των εφαρμογών της από τους μαθητές όσο και για τους τρόπους και τις πρακτικές διδασκαλίας της από τα βιβλία και τους καθηγητές. Οι έρευνες αυτές έχουν δείξει ότι η έννοια της παραγώγου παρουσιάζει ένα σύνολο προβλημάτων που καθιστά ιδιαίτερα δύσκολη την κατανόησή της από τους μαθητές αλλά και τη διδασκαλία της από τους καθηγητές και ότι τα προβλήματα αυτά δεν αντιμετωπίζονται ικανοποιητικά ούτε από τα βιβλία ούτε από τους καθηγητές στην διδασκαλία. Στα αίτια των προβλημάτων και των δυσκολιών αναφέρονται τόσο οι προϋπάρχουσες αδυναμίες που παρουσιάζουν οι μαθητές σε μαθηματικές έννοιες που χρειάζονται για την ορθή και σε βάθος κατανόηση της παραγώγου (πχ ο ρυθμός μεταβολής, η εφαπτομένη, η συνάρτηση και το όριο) όσο και οι πολλαπλές όψεις της παραγώγου κατά τη διδασκαλία της.

Είναι φανερό ότι όλες αυτές οι δυσκολίες και τα προβλήματα καθιστούν την διδασκαλία της έννοιας της παραγώγου και των εφαρμογών της πολύ δύσκολη, ιδιαίτερα στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση και μάλιστα σε μία σχολική χρονιά που οι μαθητές προετοιμάζονται για τις πανελλήνιες εξετάσεις. Επίσης η κατανόηση των μαθητών για την έννοια της παραγώγου στη δευτεροβάθμια και η εννοιακή εικόνα που θα σχηματίσουν για αυτήν, αναμένεται να επηρεάσει σημαντικά και τις μετέπειτα σπουδές του μαθητή, είτε στα μαθηματικά είτε σε άλλους τομείς στους οποίους χρειάζονται οι εφαρμογές της.

Στην παρούσα έρευνα πραγματοποιήθηκε γραπτή εξέταση σε μαθητές της Γ’ Λυκείου, που προέρχονταν από τρία Γενικά Λύκεια του Ηρακλείου Κρήτης, οι οποίοι εξετάζονταν στα μαθηματικά κατεύθυνσης. Στην γραπτή εξέταση οι μαθητές απάντησαν σε ερωτήματα που διερευνούσαν τη δυνατότητά τους να χρησιμοποιούν την πρώτη παράγωγο και τις ιδιότητες της για τη μελέτη των συναρτήσεων, κυρίως όσον αφορά τη μονοτονία και τα ακρότατα, καθώς και για την επίλυση προβλημάτων από διάφορους τομείς με χρήση των εφαρμογών της παραγώγου. Η ανάλυση των απαντήσεων των μαθητών στη γραπτή εξέταση έδειξε ότι λιγότεροι από τους μισούς μαθητές μπορούσαν να χρησιμοποιήσουν την πρώτη παράγωγο και τις ιδιότητες της για να βγάλουν συμπεράσματα για τη συνάρτηση καθώς και το αντίστροφο. Στις απαντήσεις των μαθητών καταγράφηκαν πολλά λάθη και δυσκολίες που δείχνουν έλλειψη βαθύτερης κατανόησης των σχέσεων συνάρτησης και παραγώγου. Επίσης έδειξε ότι μόνο ένας περιορισμένος αριθμός μαθητών μπορούσε να επιλύσει προβλήματα από διάφορους τομείς, συσχετίζοντας κατάλληλα τις έννοιες και τα αντικείμενα του πεδίου του προβλήματος με τα αντίστοιχα του μαθηματικού πεδίου και εφαρμόζοντας τις απαραίτητες διαδικασίες και υπολογισμούς. Τα αποτελέσματα αυτά αλλά και οι δυσκολίες που παρατηρήθηκαν βρίσκονται σε συμφωνία με τα αποτελέσματα και τις διαπιστώσεις που έχουν καταγραφεί στην σχετική βιβλιογραφία.

Με βάση τα συμπεράσματα της έρευνας, τα προβλήματα και τις δυσκολίες που παρατηρήθηκαν αλλά και τα συμπεράσματα της σχετικής έρευνας που αναφέρεται στη βιβλιογραφία, γίνονται προτάσεις για την καλύτερη κατανόηση της έννοιας της παραγώγου και της χρήσης της στην επίλυση προβλημάτων. Οι προτάσεις αυτές περιλαμβάνουν τα σημαντικότερα σημεία της διδασκαλίας της έννοιας στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, τις μεθόδους και πρακτικές που πρέπει να ακολουθούνται κατά τη διδασκαλία της καθώς και είδη ασκήσεων και προβλημάτων που πρέπει να περιλαμβάνει. Τέλος γίνονται κάποιες προτάσεις για περαιτέρω έρευνα προς την κατεύθυνση της βελτίωσης της διδασκαλίας της έννοιας στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

2 Θεωρητικό Πλαίσιο

2.1 Έρευνα σχετικά με την έννοια της Παραγώγου

Η διδασκαλία της έννοιας της παραγώγου παρουσιάζει ένα σύνολο προβλημάτων που καθιστά ιδιαίτερα δύσκολη την κατανόησή της από τους μαθητές αλλά και τη διδασκαλία της από τους καθηγητές. Ένας σημαντικός λόγος που συμβαίνει αυτό είναι οι πολλαπλές όψεις της παραγώγου. Έτσι η παράγωγος ανάλογα με το περιβάλλον διδασκαλίας μπορεί να παρουσιάζεται ως έννοια και συγκεκριμένα είτε ως μία νέα συνάρτηση (παράγωγος συνάρτηση) ή ως μία τιμή (παράγωγος σημείου), να εμφανίζεται ως διαδικασία (η διαδικασία της παραγώγισης) αλλά και να ταυτίζεται με άλλες έννοιες όπως η κλίση της εφαπτομένης σε σημείο ή ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής μίας συνάρτησης.

Ένας άλλος σημαντικός λόγος είναι οι προϋπάρχουσες αδυναμίες που παρουσιάζουν οι μαθητές σε μαθηματικές έννοιες και σε μαθηματικούς τομείς που απαιτούνται για την ορθή και σε βάθος διδασκαλία και κατανόηση της παραγώγου. Οι αδυναμίες αυτές έχουν τεκμηριωθεί στην έρευνα που έχει πραγματοποιηθεί και αφορούν το ρυθμό μεταβολής (Orton, 1984, Thompson, 1994, Hackworth, 1994), την εφαπτομένη (Vinner 1982, Tall 1987), τη συνάρτηση (Vinner 1983, Vinner & Dreyfus 1989, Sajka, 2003) και το όριο (Cornu, 2002, Tall & Vinner, 1981, Przenioslo, 2004, Kyeong Hah Roh, 2008).

Είναι αναμενόμενο λοιπόν για μία τόσο δύσκολη έννοια να έχει διεξαχθεί ένας πολύ σημαντικός αριθμός ερευνών και να συνδέεται με έναν ακόμα μεγαλύτερο αριθμό ερευνών που αφορούν άλλες έννοιες όπως η συνάρτηση, ο ρυθμός μεταβολής, η εφαπτομένη σε σημείο και η έννοια του ορίου. Οι έρευνες αυτές αφορούν τόσο τα προβλήματα και τις δυσκολίες στη διδασκαλία και την κατανόηση της έννοιας της παραγώγου όσο και τις δυσκολίες που παρουσιάζονται στις εφαρμογές της παραγώγου και τη δυνατότητα χρήσης της για την επίλυση προβλημάτων. Οι περισσότερες έρευνες έχουν πραγματοποιηθεί σε φοιτητές και μαθητές και ένα μικρότερο τμήμα έχει εστιαστεί στις μεθόδους και τρόπους διδασκαλίας των καθηγητών καθώς και στην σύγκριση και ανάλυση διδακτικών βιβλίων. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι τόσο η διδασκαλία από τους καθηγητές όσο και η παρουσίαση από τα βιβλία δεν αντιμετωπίζει όλα αυτά τα προβλήματα και τις δυσκολίες. Το μεγαλύτερο μέρος της έρευνας έχει διεξαχθεί στην τριτοβάθμια εκπαίδευση και αφορά κυρίως φοιτητές τμημάτων Μαθηματικών αλλά και φοιτητές άλλων επιστημών στις οποίες η διδασκαλία της έννοιας έχει μεγάλη σημασία (Φυσικών και Οικονομικών επιστημών, Μηχανικών κλπ). Επίσης ένα σημαντικό τμήμα της επικεντρώνεται στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Στη συνέχεια παρουσιάζεται ένα ενδεικτικό τμήμα της σχετικής αυτής έρευνας.

Σε έρευνα που διεξήχθη σε μαθητές τεσσάρων σχολείων καθώς και σε φοιτητές κολλεγίων που σπούδαζαν για να γίνουν καθηγητές μαθηματικών διαπιστώθηκε ότι μεγαλύτερες δυσκολίες παρουσιάστηκαν στην κατανόηση της παραγώγισης και στις γραφικές προσεγγίσεις του ρυθμού μεταβολής, ενώ στις εφαρμογές παρατηρήθηκαν πολύ καλύτερα αποτελέσματα (Orton, 1983). Στα συμπεράσματα περιλαμβάνονται συστάσεις για την καλύτερη διδασκαλία της έννοιας της παραγώγου πολλές από τις οποίες εφαρμόζονται στα σημερινά προγράμματα σπουδών τόσο της δευτεροβάθμιας όσο και της τριτοβάθμιας εκπαίδευσης.

Σε έρευνα των Ferrini-Mundy & Gaudard (1992) μελετήθηκε η επιρροή, στην απόδοση πρωτοετών φοιτητών κολλεγίου στην ανάλυση, των διαφορετικών επιπέδων διδασκαλίας ανάλυσης που είχαν διδαχθεί ως μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Στα συμπεράσματα καταγράφεται η σημαντική διαφοροποίηση των φοιτητών που είχαν διδαχθεί για ένα χρόνο ανάλυση στη δευτεροβάθμια έναντι των υπολοίπων που είχαν διδαχθεί μόνο μία εισαγωγή ή δεν είχαν διδαχθεί καθόλου.

Οι White & Mitchelmore (1996) συνέλεξαν απαντήσεις, από πρωτοετείς φοιτητές που είχαν διδαχθεί ανάλυση στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, σε προβλήματα που αφορούσαν το ρυθμό μεταβολής και διαπιστώθηκε ότι η βασική αιτία των δυσκολιών των μαθητών να εφαρμόσουν σε προβλήματα τις γνώσεις της ανάλυσης είναι η λανθασμένη αντίληψη της έννοιας της μεταβλητής και η χρήση των μεταβλητών ως σύμβολα και όχι ως ποσότητες που πρέπει να συσχετισθούν.

Σε έρευνα των Asiala, Cottrill, Dubinsky & Schwingendorf (1997) μελετήθηκε η γραφική κατανόηση φοιτητών κολεγίου για την συνάρτηση και την παραγωγό της. Ορισμένοι φοιτητές είχαν παρακολουθήσει μάθημα που είχε δημιουργηθεί με γενετική αποσύνθεση της έννοιας της παραγώγου με τη θεωρία APOS και οι υπόλοιποι είχαν παρακολουθήσει το παραδοσιακό μάθημα. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι φοιτητές που είχαν παρακολουθήσει το νέο μάθημα είχαν περισσότερη επιτυχία στην ανάπτυξη της γραφικής κατανόησης της συνάρτησης και της παραγώγου της από τους φοιτητές που είχαν παρακολουθήσει το παραδοσιακό μάθημα.

Σε πειραματικό μάθημα που πραγματοποίησαν οι Habre & Abboud (2006) στο Πανεπιστήμιο Λιβάνου, στο οποίο χρησιμοποιήθηκαν διαφορετικοί τρόποι αναπαράστασης των εννοιών - αριθμητικά, απεικονιστικά και συμβολικά - ανιχνεύτηκε η κατανόηση της συνάρτησης και της παραγώγου της, με έμφαση στη σημασία της παραγώγου ως ρυθμός μεταβολής και ως κλίση της καμπύλης σε συγκεκριμένο σημείο, τα οποία μπορούν να βοηθήσουν τους φοιτητές να λύσουν ένα μεγάλο σύνολο προβλημάτων. Στα συμπεράσματα καταγράφεται ότι το συγκεκριμένο μάθημα δυσκόλεψε πάρα πολλούς φοιτητές αλλά παράλληλα ευνόησε ιδιαίτερα ορισμένους, ότι για τους περισσότερους φοιτητές κυριαρχεί η αλγεβρική αναπαράσταση της συνάρτησης, ότι όλοι αυτοί επέδειξαν πολύ καλή κατανόηση της έννοιας της παραγώγου καθώς και ότι ένα μεγάλο ποσοστό των μαθητών δυσκολεύτηκε να δώσει γεωμετρικό ορισμό της παραγώγου.

Σε έρευνα που πραγματοποίησαν οι Biza, Christou & Zachariades (2006), σε μαθητές της Γ' λυκείου ελληνικών σχολείων, για την εννοιακή εικόνα τους για την εφαπτομένη αλλά και για την ικανότητά τους για συμβολική διαχείριση, οι μαθητές κατατάχθηκαν σε τρία διαφορετικά επίπεδα. Η κατάταξη αυτή αποκαλύπτει την διαφορετική ικανότητά τους τόσο σε συμβολικούς υπολογισμούς, κατά τον υπολογισμό του τύπου της εφαπτομένης, όσο και το πόσο επηρεάζεται η εννοιακή τους εικόνα για την εφαπτομένη από μία σειρά ιδιοτήτων της εφαπτομένης, σωστών ή λανθασμένων, που έχουν αποδεχτεί. Στα συμπεράσματα διατυπώνεται το ότι οι προηγούμενες αντιλήψεις, και κυρίως αυτές από τη γεωμετρία, επηρεάζουν τις τρέχουσες και λειτουργούν ως επιστημολογικό εμπόδιο καθώς τις περιορίζουν.

Σε έρευνα των Roorda, Vos & Goedhart (2009) για το ποιες πλευρές της παραγώγου γίνονται διαθέσιμες στους μαθητές Γ' Λυκείου και αν και πως οι μαθητές σχετίζουν την έννοια της παραγώγου με διαφορετικά αντικείμενα όπως μαθηματικά, φυσική και οικονομικά, αναφέρεται η προτίμηση των μαθητών στη γραφική αναπαράσταση και στην τυπική αναπαράσταση, η αρχικά λανθασμένη ταύτιση της παραγώγου με την εφαπτομένη καθώς και δυσκολίες σύνδεσης των μαθηματικών εννοιών με τη φυσική.

Ο Lithner (2000) ερεύνησε τις στρατηγικές που επιλέγουν οι προπτυχιακοί φοιτητές για να αντιμετωπίσουν τις δυσκολίες που συναντούν επιλύοντας μαθηματικά προβλήματα που απαιτούν τη χρήση της παραγώγου. Τα συμπεράσματα έδειξαν ότι οι προπτυχιακοί φοιτητές εστιάζουν κατά την επίλυση πολύ περισσότερο σε ότι τους είναι οικείο και θυμούνται από προηγούμενα προβλήματα και πολύ λιγότερο στις μαθηματικές ιδιότητες που απαιτούνται για την επίλυση του προβλήματος, όπως οι ιδιότητες και εφαρμογές της παραγώγου. Έτσι πολλοί αποτυγχάνουν όταν στο συγκεκριμένο πρόβλημα δεν εφαρμόζονται αυτά που έχουν μάθει από προηγούμενα προβλήματα.

Σε έρευνα που πραγματοποίησε ο Stump (1999) μελετήθηκαν οι γνώσεις των καθηγητών μέσης εκπαίδευσης για την κλίση, μέσα από τη σκέψη τους για προβλήματα που είναι σχετικά με την αναγνώριση παραμέτρων και την ερμηνεία γραφικών παραστάσεων και του ρυθμού μεταβολής. Στα αποτελέσματα συστήνεται η επιμόρφωση των εκπαιδευτών να περιλαμβάνει τη κλίση ως βασική έννοια με έμφαση στη σύνδεσή της με την έννοια της συνάρτησης. Επίσης σε έρευνα του Stump (2001), μαθητές λυκείου εξετάστηκαν και συζήτησαν πραγματικές καταστάσεις στις οποίες εμπλεκόταν η κλίση, σε φυσικές περιπτώσεις ως μέτρο του βαθμού κλίσης και σε περιπτώσεις με συναρτήσεις ως μέτρο του ρυθμού μεταβολής. Ανιχνεύθηκε ότι πολλοί μαθητές είχαν πρόβλημα να ερμηνεύσουν την κλίση ως μέτρο του ρυθμού μεταβολής και προτείνεται η διδασκαλία να επικεντρωθεί στο να βοηθήσει τους μαθητές να δημιουργήσουν συνδέσεις με πραγματικές καταστάσεις και προβλήματα και να τους παρέχει ευκαιρίες για να εκφράσουν την κατανόησή που έχουν μέσα από αυτά.

Οι Judson & Nishimori (2005) ερεύνησαν τις διαφορές, στην κατανόηση της ανάλυσης και στην ικανότητα επίλυσης προβλημάτων ανάλυσης με χρήση αλγεβρικών μεθόδων, μεταξύ μαθητών Αμερικανικών και Ιαπωνικών Λυκείων. Στην έρευνα περιλαμβάνεται και η κατανόηση και η χρήση της παραγώγου για τον προσδιορισμό στοιχείων της συνάρτησης (μονοτονίας, ακροτάτων) καθώς και για την επίλυση προβλημάτων. Δεν παρατηρήθηκαν σημαντικές διαφορές όσον αφορά την κατανόηση της παραγώγου αλλά παρατηρήθηκε πολύ καλύτερη επίδοση των μαθητών των Ιαπωνικών Λυκείων όσον αφορά τις αλγεβρικές ικανότητες και την επίλυση προβλημάτων.

Σε έρευνες που πραγματοποίησε η Park (2012 και 2013) στα χαρακτηριστικά της ομιλίας φοιτητών μαθήματος ανάλυσης, σε συνεντεύξεις στις οποίες τεκμηριώνουν τις επιλογές τους σε επίλυση προβλημάτων, αναζητήθηκαν απαντήσεις σε ερωτήματα όπως οι περιγραφές των μαθητών για την παράγωγο και τη σχέση συνάρτησης με την παράγωγο συνάρτηση και με την παράγωγο σε σημείο. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι φοιτητές δυσκολεύονται να αντιληφθούν την παράγωγο ως ένα αντικείμενο ορισμένο σε ένα σημείο και ως ένα αντικείμενο ορισμένο σε ένα διάστημα αλλά και να τα διαχωρίσουν. Επίσης αδυνατούσαν να εξηγήσουν μαθηματικά τη διαδικασία εύρεσης της παραγώγου σε ένα σημείο από τον τύπο της συνάρτησης, τη σχέση του προσήμου της παραγώγου με τη συμπεριφορά της συνάρτησης καθώς και τη σχέση της παραγώγου με την τιμή της σε ένα σημείο.

Οι Rivera-Figueroa & Ponce-Campuzano (2013) διερεύνησαν, μέσω της ανάλυσης βιβλίων, τις συνθήκες αναγκαιότητας ή ικανότητας των κριτηρίων για τον προσδιορισμό των ακροτάτων μίας συνάρτησης. Στα συμπεράσματα υποστηρίζεται ότι η βαθύτερη κατανόηση των ιδιοτήτων και εφαρμογών της παραγώγου για την μελέτη των συναρτήσεων μπορεί να επιτευχθεί όταν οι καθηγητές χρησιμοποιούν συχνά στη διδασκαλία γραφικά βοηθήματα τα οποία συνδέουν με τις τυπικές αποδείξεις.

Ο Maharaj (2013) χρησιμοποίησε το θεωρητικό πλαίσιο APOS για τη διερεύνηση της κατανόησης φοιτητών για την παράγωγο και τις εφαρμογές της. Οι φοιτητές απάντησαν σε έξι ερωτήσεις και τα αποτελέσματα έδειξαν δυσκολίες στην παραγώγιση συναρτήσεων που απαιτούν τον κανόνα της αλυσίδας καθώς και στην ερμηνεία της παραγώγου μίας συνάρτησης που παρουσιάζεται γραφικά, με πιθανή αιτία τη μη ανάπτυξη κατάλληλων νοητικών δομών στο επίπεδο διαδικασιών, αντικειμένων και σχήματος.

Η Park (2015) μελέτησε τις προσεγγίσεις που επιλέχτηκαν από τρεις καθηγητές ανάλυσης για τη διδασκαλία της παραγώγου σε σημείο και της παραγώγου συνάρτησης. Διαπιστώθηκε ότι οι πτυχές εκείνες της παραγώγου που δυσκολεύουν τόσο τους παλιούς μαθηματικούς όσο και τους σημερινούς φοιτητές δεν αντιμετωπίστηκαν κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας και προτείνεται ότι κάνοντάς τις σαφείς θα βοηθήσει τους φοιτητές να κατανοήσουν πολύ καλύτερα την έννοια της παραγώγου. Οι πτυχές αυτές περιλαμβάνουν την ξεκάθαρη σύνδεση γραφικής και συμβολικής αναπαράστασης της παραγώγου σε σημείο, την εμπεριστατωμένη μετάβαση από την παράγωγο σε σημείο στην παράγωγο συνάρτηση και την μελέτη των ιδιοτήτων της παραγώγου σε διάστημα. Επίσης σε άλλη μελέτη που πραγματοποιήθηκε από την Park (2016) έγινε σύγκριση τριών ευρέως χρησιμοποιούμενων σχολικών βιβλίων στις Ηνωμένες Πολιτείες της Αμερικής και στα συμπεράσματα καταγράφονται ασυνέπειες, μη αμεσότητα και αποσύνδεση των οπτικών διαμεσολαβητών που χρησιμοποιούνται για τις παραστάσεις των αρχικών και τελικών αντικειμένων αλλά και των διαδικασιών για την μετάβαση από το αρχικό στο τελικό αντικείμενο καθώς και χρήση παρόμοιων συμβόλων για τη παράγωγο σε σημείο και την παράγωγο συνάρτηση.

Σε έρευνα της Tyne (2015) που αφορούσε φοιτητές ανάλυσης και η οποία πραγματοποιήθηκε με ερωτήσεις για γραμμικές και μη γραμμικές σχέσεις και ερμηνείες κλίσης και παραγώγου καθώς και με ερωτήσεις κρίσης για συγκεκριμένα συμπεράσματα που δόθηκαν, διαπιστώθηκε ότι οι φοιτητές δυσκολεύονται να αντιληφθούν τι παριστάνει η παράγωγος και πώς να τη χρησιμοποιήσουν για να βγάλουν συμπεράσματα.

Σε έρευνα των Roundy, Dray, Manogue, Wagner & Weber (2015) παρουσιάζεται ένα θεωρητικό πλαίσιο για την μελέτη της κατανόησης των μαθητών για την έννοια της παραγώγου. Το πλαίσιο αυτό επεκτείνει προϋπάρχον θεωρητικό πλαίσιο έτσι ώστε να επιδέχεται επιπλέον απαντήσεις στο ερώτημα «βρείτε την παράγωγο». Συγκεκριμένα στην επέκταση αυτή έγινε επεξεργασία της φυσικής αναπαράστασης, προστέθηκε μία αριθμητική αναπαράσταση καθώς και χώρος για το σύνολο των κανόνων ανεύρεσης συμβολικών παραγώγων.

Οι Moll, Trigueros, Badillo & Rubio (2016) σε έρευνά τους σύγκριναν δύο διαφορετικές θεωρίες, τη θεωρία APOS και τη θεωρία OSA, προσεγγίζοντας με την κάθε μία από αυτές το πώς πρέπει να γίνει αντιληπτή μία μαθηματική έννοια με χρήση ως παράδειγμα την έννοια της παραγώγου. Στην έρευνα παρουσιάζεται μία γενετική αποσύνθεση για τη διδασκαλία της έννοιας της παραγώγου σύμφωνα με τη θεωρία APOS.

Η προσφορά όλων αυτών των ερευνών είναι ιδιαίτερα σημαντική αφού αποτελεί προϋπόθεση για να κατανοήσουμε τις δυσκολίες της μάθησης και διδασκαλίας της έννοιας της παραγώγου και προσφέρουν τα εννοιολογικά εργαλεία για την σωστή σχεδίαση κατάλληλων παιδαγωγικών στρατηγικών.

2.2 Εννοιακή Εικόνα (Concept Image)

Σύμφωνα με τους Tall & Vinner (1981) πολλές έννοιες τις συναντάμε, τις αναγνωρίζουμε και τις χρησιμοποιούμε σε διαφορετικά περιβάλλοντα, πολύ πριν τις γνωρίσουμε τυπικά, και δημιουργούμε για αυτές μία συνολική γνωστική δομή η οποία αποκαλείται εννοιακή εικόνα (concept image). Η εννοιακή εικόνα περιλαμβάνει όλες τις νοερές εικόνες και τις σχετικές ιδιότητες και διαδικασίες (συνειδητές ή μη) που σχετίζονται με την έννοια, εξελίσσεται διαρκώς και λόγω του τρόπου λειτουργίας του εγκεφάλου, μπορεί να μην έχει συνοχή. Κάθε φορά που συναντάμε την έννοια κάποιο μέρος της εννοιακής εικόνας, το οποίο αποκαλείται ανασυρόμενη εννοιακή εικόνα (evoked concept image), ανασύρεται και χρησιμοποιείται με αποτέλεσμα να χρησιμοποιούνται διαφορετικές διαδικασίες σε διαφορετικές χρονικές στιγμές και σε διαφορετικά περιβάλλοντα που απαντάται η ίδια έννοια και να συμβαίνουν ή να μην συμβαίνουν λάθη.

Εννοιακό ορισμό (concept definition) ονομάζουμε τη διατύπωση που χρησιμοποιείται για τον ορισμό της έννοιας. Αυτός ο ορισμός μπορεί να είναι μία προσωπική έκφραση του ατόμου βασιζόμενος στην ανασυρόμενη εννοιακή εικόνα, άρα μπορεί να μεταβάλλεται με το χρόνο και το περιβάλλον, και τότε ονομάζεται προσωπικός εννοιακός ορισμός ή μπορεί να είναι ο τυπικός ορισμός που είναι ευρύτερα αποδεκτός από τη μαθηματική κοινότητα και τότε ονομάζεται τυπικός εννοιακός ορισμός. Ο εννοιακός ορισμός δημιουργεί τη δική του εννοιακή εικόνα η οποία είναι μέρος της εννοιακής εικόνας του ατόμου (η οποία μπορεί να περιλαμβάνει και άλλα πράγματα). Αυτό μπορεί στη διδασκαλία, να προκαλέσει στον μαθητή την απενεργοποίηση του εννοιακού ορισμού και την ανάπτυξη της εννοιακής εικόνας με στοιχεία αντιφατικά προς τον εννοιακό ορισμό. Αυτό μπορεί αργότερα, όταν η ίδια έννοια αντιμετωπισθεί σε διαφορετικό περιβάλλον, να προκαλέσει σύγχυση στον μαθητή.

Το τμήμα της εννοιακής εικόνας ή του εννοιακού ορισμού που έρχεται σε σύγκρουση με κάποιο άλλο τμήμα της εννοιακής εικόνας ή του εννοιακού ορισμού ονομάζεται δυνάμει παράγοντας σύγκρουσης (potential conflict factor). Αυτοί οι παράγοντες μπορεί να μην ενεργοποιηθούν έτσι ώστε να δημιουργήσουν σύγκρουση αλλά όταν ενεργοποιηθούν με τρόπο ώστε να ανακληθούν ταυτόχρονα δύο αντικρουόμενα μέρη της εννοιακής εικόνας τότε προκαλούν σύγκρουση και ονομάζονται παράγοντες γνωστικής σύγκρουσης. Φυσικά οι δυνάμει παράγοντες σύγκρουσης μπορεί να ενεργοποιηθούν υποσυνείδητα με τη σύγκρουση να γίνεται αντιληπτή μόνο ως μία ασαφής αίσθηση δυσκολίας στη λύση ενός προβλήματος ή στη διεξαγωγή έρευνας και μόνο αρκετά αργότερα να γίνει αντιληπτός ο λόγος της σύγκρουσης. Μία άλλη σημαντική περίπτωση δυνάμει παράγοντα σύγκρουσης είναι όταν η εννοιακή εικόνα είναι σε διάσταση όχι με κάποιο άλλο μέρος της εννοιακής εικόνας αλλά με τον τυπικό εννοιακό ορισμό. Στην περίπτωση αυτή προκαλούνται δυσκολίες στην εκμάθηση της θεωρίας, παρόλο του ότι δεν έχουμε σύγκρουση εκτός και αν ο εννοιακός ορισμός δημιουργήσει μία εννοιακή εικόνα που συγκρούεται με την υπάρχουσα.

2.3 Θεωρία APOS

Η θεωρία APOS (Action Process Object Shceme) που παρουσίασαν οι Dubinsky & Mcdonald (2001) αποτελεί προσπάθεια συνέχισης της εργασίας του Piaget στην ανακλαστική αφαίρεση στην μάθηση παιδιών σε επίπεδο κολεγιακών Μαθηματικών. Η θεωρία υποθέτει ότι η μαθηματική γνώση αποτελείται από την τάση ενός ατόμου να ασχολείται, μέσα σε ένα κοινωνικό πλαίσιο, με μαθηματικά προβλήματα που αντιλαμβάνεται, κατασκευάζοντας νοητικές ενέργειες, διαδικασίες και αντικείμενα και οργανώνοντας τα σε σχήματα για να γίνουν κατανοητά τα προβλήματα και να τα επιλύσει. Τα βασικά μέρη της θεωρίας περιλαμβάνουν:

1. Την ενέργεια (action) η οποία αποτελεί έναν μετασχηματισμό αντικειμένων που γίνεται αντιληπτός από το άτομο ως εξωτερικός και ο οποίος απαιτεί βήμα προς βήμα οδηγίες για την πραγματοποίησή του.
2. Τη διαδικασία (process) που είναι η εσωτερική νοητική κατασκευή που δημιουργείται από το άτομο ως αποτέλεσμα της επανάληψης μίας ενέργειας. Έτσι το άτομο μπορεί να σκέφτεται πως πραγματοποιεί μία διαδικασία χωρίς να την κάνει πραγματικά, το οποίο του επιτρέπει να μπορεί να αντιστρέφει τη διαδικασία και να την συνδυάζει με άλλες διαδικασίες.
3. Το αντικείμενο (object) το οποίο κατασκευάζεται από τη διαδικασία όταν το άτομο αντιλαμβάνεται τη διαδικασία ως ολότητα και συνειδητοποιεί ότι μετασχηματισμοί μπορούν να δράσουν σε αυτό.
4. Το σχήμα (scheme) το οποίο, για μία συγκεκριμένη μαθηματική έννοια, είναι η συλλογή ενός ατόμου από τις ενέργειες, τις διαδικασίες, τα αντικείμενα και άλλα σχήματα που συνδέονται με κάποιες γενικές αρχές και δημιουργούν ένα πλαίσιο στο μυαλό του ατόμου το οποίο μπορεί να αξιοποιηθεί από το άτομο όταν αντιμετωπίσει μία κατάσταση που αφορά τη συγκεκριμένη έννοια. Το πλαίσιο αυτό πρέπει να έχει συνοχή, δηλαδή να παρέχει, άμεσα ή έμμεσα, τη δυνατότητα να αντιλαμβάνεται το άτομο ποια φαινόμενα έχουν σχέση με κάποιο σχήμα. Η ιδέα του σχήματος είναι

παρόμοια με την εννοιακή εικόνα των Tall & Vinner (1981) αλλά διαφοροποιείται λόγω της απαίτησης για συνεκτικότητα που παρουσιάζει το σχήμα.

Τα τέσσερα αυτά βασικά μέρη δεν εμφανίζονται σειριακά αλλά σε μία διαλεκτική σειρά. Η θεωρία APOS χρησιμοποιείται ως ένα θεωρητικό πλαίσιο μέσα από το οποίο μπορούμε, μελετώντας την απόδοση των φοιτητών και την κατασκευή από μέρους τους των ενεργειών, διαδικασιών, αντικειμένων και σχημάτων, να βγάλουμε χρήσιμα συμπεράσματα για τον τρόπο με τον οποίο θα έπρεπε να μαθαίνονται οι διάφορες μαθηματικές έννοιες δημιουργώντας έτσι εκπαιδευτικά προγράμματα. Το πλαίσιο της ανάλυσης και της δημιουργίας εκπαιδευτικών προγραμμάτων περιλαμβάνει τρία μέρη:

1. Τη θεωρητική ανάλυση συγκεκριμένων Μαθηματικών εννοιών.
2. Την ανάπτυξη και υλοποίηση διαδικασιών με οδηγίες, στην οποία αξιοποιούνται η συνεργατική μάθηση και η κατασκευή μαθηματικών εννοιών στον υπολογιστή, βάση της θεωρητικής ανάλυσης.
3. Τη συλλογή και επεξεργασία δεδομένων ώστε να αξιολογηθεί και να βελτιωθεί τόσο η θεωρητική ανάλυση όσο και οι οδηγίες.

Τα τρία αυτά μέρη επαναλαμβάνονται όσες φορές χρειαστεί για να γίνει κατανοητή η επιστημολογία της έννοιας και να δημιουργηθούν αποτελεσματικές παιδαγωγικές στρατηγικές για την διδασκαλία της. Πολλές φορές τα αποτελέσματα απαιτούν την αναθεώρηση ολόκληρης της θεωρίας.

Η έρευνα με τη θεωρία APOS βασίστηκε στα δεδομένα και οδήγησε στη δημιουργία μιας μεγάλης κοινότητας ερευνητών. Η έρευνα εφαρμόστηκε σε ένα μεγάλο εύρος προχωρημένων μαθηματικών εννοιών και έδειξε ότι μπορεί να αποτελέσει μία αποτελεσματική γλώσσα επικοινωνίας ιδεών για τη μάθηση, να βοηθήσει στην οργάνωση της σκέψης για την κατανόηση μαθηματικών εννοιών, να παρέχει επεξηγήσεις για τις δυσκολίες που αντιμετωπίζονται στη μάθηση, να προβλέψει την επιτυχία ή αποτυχία κατανόησης αλλά και να χρησιμοποιηθεί και για την εκμάθηση πιο βασικών εννοιών σε νεότερους φοιτητές.

2.4 Η διδασκαλία της έννοιας της Παραγώγου στο Γενικό Λύκειο

Η διδασκαλία της έννοιας της παραγώγου στο Γενικό Λύκειο πραγματοποιείται στην Γ’ τάξη τόσο στο μάθημα Γενικής Παιδείας όσο και στο μάθημα της κατεύθυνσης.

Στο μάθημα της γενικής παιδείας χρησιμοποιείται το βιβλίο «Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής» των Αδαμόπουλου, Δαμιανού και Σβέρκου (2015) και διδάσκεται σε όλους τους μαθητές της Γ’ Λυκείου για 2 ώρες/εβδομάδα. Στο βιβλίο αυτό η έννοια της παραγώγου διδάσκεται στο πρώτο κεφάλαιο. Συγκεκριμένα:

1. Στην παράγραφο 1.1 παρουσιάζεται η έννοια της συνάρτησης, του τύπου και της γραφικής της παράστασης, οι ορισμοί που αφορούν τη μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης καθώς και το όριό της.
2. Στην παράγραφο 1.2 παρουσιάζεται η έννοια της παραγώγου. Στην αρχή παρουσιάζεται η εφαπτομένη καμπύλης σε σημείο ως η οριακή θέση των τεμνουσών της καμπύλης

που περνάνε από αυτό το σημείο και από ένα δεύτερο σημείο που κινείται προς αυτό. Η παρουσίαση γίνεται και γραφικά και συμβολικά παρουσιάζοντας το συντελεστή διεύθυνσης της καμπύλης ως το όριο του συντελεστή διεύθυνσης των τεμνουσών καθώς το δεύτερο σημείο κινείται προς το σημείο της εφαπτομένης. Στη συνέχεια παρουσιάζεται η στιγμιαία ταχύτητα σε ένα χρονικό σημείο, ακριβώς ανάλογα με το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης, ως το όριο της μέσης ταχύτητας καθώς το δεύτερο χρονικό σημείο πλησιάζει αυτό το σημείο. Ακολουθεί η παρουσίαση της παραγώγου σε σημείο χρησιμοποιώντας το όριο της μέσης μεταβολής της συνάρτησης σε αυτό το σημείο και σε ένα δεύτερο, καθώς το δεύτερο πλησιάζει αυτό. Γίνεται αναφορά ότι η παράγωγος της συνάρτησης σε σημείο εκφράζει τον ρυθμό μεταβολής της σε αυτό το σημείο και ότι ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης καθώς και η στιγμιαία ταχύτητα εκφράζουν και αυτές το ίδιο. Τέλος δίνεται παράδειγμα μη παραγωγίσιμης συνάρτησης σε κάποιο σημείο (της $f(x) = |x|$ στο x=0) και με υπολογισμό του ορίου και με τη γραφική παράσταση που «κάνει γωνία» στο x=0. Ακολουθούν εφαρμογές και ασκήσεις Α ομάδας.

3. Στην παράγραφο 1.3 παρουσιάζεται η έννοια της παραγώγου συνάρτησης ως η συνάρτηση που αντιστοιχίζει κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της συνάρτησης στην τιμή της παραγώγου της συνάρτησης στο σημείο αυτό. Επίσης γίνεται αναφορά και στη δεύτερη παράγωγο ως την παράγωγο της παραγώγου της συνάρτησης. Ακολουθεί η παραγώγιση βασικών συναρτήσεων (σταθερής, ταυτοτικής κλπ) καθώς και οι κανόνες παραγώγισης (γινομένου με σταθερά, αθροίσματος, γινομένου και λόγου και σύνθετης συνάρτησης) κάποιοι από τους οποίους χωρίς απόδειξη. Η παράγραφος τελειώνει με εφαρμογές και ασκήσεις Α και Β ομάδας.
4. Στην παράγραφο 1.4 παρουσιάζονται εφαρμογές της παραγώγου και συγκεκριμένα το κριτήριο της πρώτης παραγώγου για τον προσδιορισμό των διαστημάτων μονοτονίας της συνάρτησης καθώς και των σημείων ακροτάτων της καθώς και το κριτήριο της δεύτερης παραγώγου για τον προσδιορισμό των σημείων ακροτάτων της. Η παράγραφος τελειώνει με εφαρμογές και ασκήσεις Α και Β ομάδας. Μαζί με την παράγραφο ολοκληρώνεται και το κεφάλαιο με γενικές ασκήσεις και ερωτήσεις κατανόησης.

Στο μάθημα της κατεύθυνσης χρησιμοποιείται το βιβλίο «Μαθηματικά», Γ’ τάξης Γενικού Λυκείου, Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών και Σπουδών Οικονομίας & Πληροφορικής, των Ανδρεαδάκη, Κατσαργύρη, Μέτη, Μπρουχούτα, Παπασταυρίδη και Πολύζου (2015). Από το βιβλίο αυτό διδάσκεται μόνο το Β’ Μέρος (ΑΝΑΛΥΣΗ). Το μάθημα διδάσκεται στους μαθητές της ομάδας προσανατολισμού Θετικών σπουδών (όσοι επιλέξουν το 2^{ο} Επιστημονικό Πεδίο) και στους μαθητές της ομάδας προσανατολισμού σπουδών Οικονομίας και Πληροφορικής για 5 ώρες/εβδομάδα. Στο βιβλίο αυτό η έννοια της παραγώγου διδάσκεται στο δεύτερο κεφάλαιο του Β’ Μέρους αφού πρώτα έχουν διδαχθεί οι έννοιες της συνάρτησης (και μονοτονία, ακρότατα συνάρτησης), του ορίου και της συνέχειας στο πρώτο κεφάλαιο. Συγκεκριμένα:

1. Στην παράγραφο 2.1 παρουσιάζεται η έννοια της παραγώγου. Η παρουσίαση είναι παρόμοια με της γενικής παιδείας αλλά εδώ πρώτα παρουσιάζεται η στιγμιαία ταχύτητα και ακολούθως η εφαπτομένη καμπύλης σε σημείο. Ακολουθεί και εδώ η

παρουσίαση της παραγώγου σε σημείο παρόμοια με το γενικής παιδείας με πολύ περισσότερα παραδείγματα και με παρουσίαση και της κατακόρυφης παραγώγου και της σχέσης παραγώγου συνέχειας. Εδώ δίνονται περισσότερα παραδείγματα μη παραγωγίσιμων σε σημείο συναρτήσεων καθώς και τη συνάρτηση $f(x) = |x|$, ως παράδειγμα συνεχούς αλλά μη παραγωγίσιμης στο x=0 συνάρτησης. Ακολουθούν εφαρμογές και ασκήσεις Α και Β ομάδας.

2. Στην παράγραφο 2.2 παρουσιάζεται η έννοια της παραγώγου συνάρτησης παρόμοια με της γενικής παιδείας με περισσότερα παραδείγματα και αναφορά και στην ν-οστή παράγωγο. Ακολουθεί και εδώ η παραγώγιση βασικών συναρτήσεων (σταθερής, ταυτοτικής κλπ) ενώ οι κανόνες παραγώγισης παρουσιάζονται στην επόμενη παράγραφο. Η παράγραφος τελειώνει με εφαρμογές και ασκήσεις Α και Β ομάδας.
3. Στην παράγραφο 2.3 παρουσιάζονται οι κανόνες παραγώγισης (γινομένου με σταθερά, αθροίσματος, γινομένου και λόγου και σύνθετης συνάρτησης) με αναλυτικές αποδείξεις με βάση τον ορισμό της παραγώγου και αρκετά παραδείγματα. Ακολουθούν εφαρμογές και ασκήσεις Α και Β ομάδας.
4. Στην παράγραφο 2.4 παρουσιάζεται ο ρυθμός μεταβολής σε σημείο ως η παράγωγος στο σημείο αυτό και γίνεται αναφορά σε διάφορες έννοιες από άλλους τομείς που παριστάνουν τον ρυθμό μεταβολής εννοιών των αντίστοιχων τομέων. Σε αυτές περιλαμβάνεται η στιγμιαία ταχύτητα και επιτάχυνση, το οριακό κέρδος, οριακό κόστος και οριακή είσπραξη. Ακολουθούν εφαρμογές και ασκήσεις Α και Β ομάδας.
5. Ακολουθούν στην παράγραφο 2.5 το θεώρημα Μέσης Τιμής και στην παράγραφο 2.6 οι συνέπειες του θεωρήματος Μέσης Τιμής. Επίσης στην παράγραφο αυτή παρουσιάζεται και θεώρημα με απόδειξη για τη σχέση μονοτονίας και προσήμου της παραγώγου καθώς και σχόλιο για την μη ισχύ του αντιστρόφου του θεωρήματος με παράδειγμα συνάρτησης ($f(x) = x^3$).
6. Στην παράγραφο 2.7 παρουσιάζονται τα τοπικά ακρότατα, το θεώρημα του Fermat με απόδειξη και παρατίθεται σχόλιο για τα πιθανά σημεία ακροτάτων μία συνάρτησης με παράδειγμα. Ακολουθεί θεώρημα με απόδειξη και παραδείγματα για τον εντοπισμό των σημείων ακροτάτων μίας συνάρτησης με χρήση της αλλαγής προσήμου της πρώτης παραγώγου. Τέλος ακολουθεί θεώρημα για τον προσδιορισμό των ακροτάτων με χρήση της δεύτερης παραγώγου. Η παράγραφος τελειώνει με εφαρμογές και ασκήσεις Α και Β ομάδας.
7. Ακολουθούν στην παράγραφο 2.8 η παρουσίαση της κυρτότητας και των σημείων καμπής και στην παράγραφο 2.9 οι ασύμπτωτες και οι κανόνες De L' Hospital. Στην παράγραφο 2.10 γίνεται χρήση των προηγουμένων για τη χάραξη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης. Εδώ ολοκληρώνεται και το $2^{ο}$ κεφάλαιο του βιβλίου με γενικές ασκήσεις και ερωτήσεις κατανόησης καθώς και ένα ιστορικό σημείωμα για την έννοια της παραγώγου και τους κανόνες παραγώγισης.

Πρέπει να σημειωθεί ότι στην ύλη των πανελληνίων εξετάσεων δεν περιλαμβάνεται το κριτήριο της δεύτερης παραγώγου και γι' αυτό στην παράγραφο 2.7 δεν διδάσκεται το θεώρημα της σελ. 264 για τον προσδιορισμό των ακροτάτων με χρήση της δεύτερης παραγώγου. Οπότε οι μαθητές είναι αναμενόμενο να χρησιμοποιήσουν, για τον προσδιορισμό του είδους των ακροτάτων, το πρόσημο της πρώτης παραγώγου αριστερά και δεξιά του υπό εξέταση σημείου.

3 Σχεδιασμός και Μεθοδολογία Έρευνας

3.1 Επιλογή της έννοιας της Παραγώγου

Η επιλογή να μελετηθεί στην παρούσα έρευνα η έννοια της παραγώγου στη Γ' Λυκείου έγινε για ένα σύνολο λόγων που αφορούν την ίδια την έννοια και τις δυσκολίες κατανόησής της, ιδιαίτερα στη δευτεροβάθμια, την επιρροή που η κατανόηση της έννοιας στη δευτεροβάθμια μπορεί να έχει στις μετέπειτα σπουδές του μαθητή καθώς και η χρήση της σε ένα σύνολο σημαντικών εφαρμογών σε άλλους τομείς.

Όπως ήδη αναφέρθηκε η έννοια της παραγώγου παρουσιάζει ένα σύνολο προβλημάτων που καθιστά ιδιαίτερα δύσκολη την κατανόησή της και συνεπώς την αποτελεσματική διδασκαλία της. Σε αυτά τα προβλήματα περιλαμβάνονται και οι πολλαπλές όψεις της παραγώγου (παράγωγος σε σημείο, κλίση εφαπτομένης σε σημείο, παράγωγος συνάρτηση, ρυθμός μεταβολής, διαδικασία παραγώγισης) ανάλογα με το περιβάλλον μέσα στο οποίο χρησιμοποιείται που δυσκολεύει τους φοιτητές να τις αντιληφθούν και να τις διαχωρίσουν (Park, 2012 και 2013). Μάλιστα οι δυσκολίες αυτές δεν αντιμετωπίζονται κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας από τους καθηγητές (Park, 2015). Επίσης, στα προβλήματα αυτά, περιλαμβάνονται και οι προϋπάρχουσες αδυναμίες που παρουσιάζουν οι μαθητές σε άλλες μαθηματικές έννοιες που επηρεάζουν την κατανόησή της. Η εννοιακή λοιπόν εικόνα που θα διαμορφωθεί για την έννοια της παραγώγου θα επηρεαστεί σαφώς από τις υπάρχουσες εννοιακές εικόνες του ρυθμού μεταβολής, της συνάρτησης, της εφαπτομένης και του ορίου καθώς τμήματά τους θα ανασύρονται μέσα στο εκάστοτε περιβάλλον διδασκαλίας της παραγώγου. Έτσι περιορισμοί στη γεωμετρική αντίληψη και ευχέρεια του μαθητή δημιουργούν δυσκολίες και διαφορετικές αντιλήψεις για την εφαπτομένη και την κλίση της (Vinner 1982, Tall 1987, Stump, 2001, Biza et al, 2006). Επίσης προβλήματα κατανόησης στην έννοια της συνάρτησης, όπως δυσκολίες στην κατανόηση των μεταβλητών και του ρόλου τους και στην σχεδίαση και χρήση του γραφήματος και τη συσχέτισή του με τα δεδομένα της συνάρτησης, δυσκολεύουν τους μαθητές στη σε βάθος κατανόηση της έννοιας της παραγώγου και ενδέχεται να δημιουργούν λανθασμένες αλλά και αλληλοσυγκρουόμενες εννοιακές εικόνες (Vinner 1983, Vinner & Dreyfus 1989, Sajka, 2003). Τέλος τα σημαντικά προβλήματα που αντιμετωπίζουν οι μαθητές με την κατανόηση της έννοιας του ορίου, τους δημιουργούν πολλές δυσκολίες στην κατανόηση του ορισμού της και στη δημιουργία ενός εννοιακού ορισμού σε συνοχή με τις υπόλοιπες εννοιακές εικόνες που αφορούν την παράγωγο (Cornu, 2002, Tall & Vinner, 1981, Przenioslo, 2004, Kyeong Hah Roh, 2008).

Από όλα τα παραπάνω αναφερόμενα προβλήματα είναι προφανές ότι η παράγωγος είναι η δυσκολότερη έννοια που διδάσκονται οι μαθητές στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Μάλιστα η διδασκαλία της γίνεται στην Γ' Λυκείου που ο μαθητής προετοιμάζεται για τις Πανελλήνιες εξετάσεις και που ενδέχεται η προετοιμασία αυτή να καθορίζει σε μεγάλο βαθμό τόσο το περιεχόμενο όσο και τον τρόπο που θα διδαχθεί την έννοια της παραγώγου και τις εφαρμογές της αλλά και τις άλλες μαθηματικές έννοιες. Επίσης η κατανόηση της έννοιας αυτής στη δευτεροβάθμια αναμένεται να επηρεάσει τις μετέπειτα σπουδές του μαθητή (Ferrini-Mundy & Gaudard, 1992), αφού η διαμορφωμένη εννοιακή εικόνα για την παράγωγο θα αποτελέσει παράγοντα, θετικό ή αρνητικό, που θα επηρεάσει τη μετεξέλιξη της καθώς η έννοια αυτή θα εμφανίζεται, είτε στη διδασκαλία της ίδιας της έννοιας είτε στη χρήση της ως αντικείμενο ή διαδικασία στην εκμάθηση άλλων εννοιών στα πρώτα έτη των σπουδών του μαθητή.

Η έννοια της παραγώγου έχει ένα ευρύ φάσμα σημαντικών εφαρμογών που συναντώνται τόσο σε ένα σύνολο άλλων τομέων, πέρα των Μαθηματικών, στους οποίους είναι πολύ πιθανόν να συνεχίσει τις σπουδές του ο μαθητής (όπως Φυσική, Μηχανική, Οικονομία κλπ). Επίσης πολλές από αυτές τις εφαρμογές, στην περίπτωση που δεν συνεχιστούν οι σπουδές, μπορεί να είναι χρήσιμες, εφόσον αξιοποιηθούν, για την επαγγελματική και κοινωνική εξέλιξή του. Οι εφαρμογές αυτές περιλαμβάνουν και τις εφαρμογές της παραγώγου για τον προσδιορισμό των διαστημάτων μονοτονίας μίας συνάρτησης και του είδους των ακροτάτων που παρουσιάζει σε κάποια σημεία, οι οποίες διδάσκονται στη Γ' Λυκείου. Μάλιστα οι υπάρχουσες έρευνες για τη δυνατότητα χρήσης των εφαρμογών της παραγώγου σε προβλήματα, οι οποίες δείχνουν τις σημαντικές δυσκολίες που παρουσιάζονται, περιορίζονται κυρίως σε επίπεδο τριτοβάθμιας (π.χ. White & Mitchelmore, 1996, Lithner, 2000, Habre & Abboud, 2006, Tyne, 2015) και λιγότερο σε επίπεδο δευτεροβάθμιας (π.χ. Stump, 2001, Judson & Nishimori, 2005, Roorda et al, 2009) και ειδικότερα σε ελληνικά σχολεία. Είναι λοιπόν σημαντικό να μελετηθεί η δυνατότητα των μαθητών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης των ελληνικών σχολείων να χρησιμοποιούν την παράγωγο και τις εφαρμογές της για την επίλυση προβλημάτων και να ανιχνευτούν οι δυσκολίες που παρουσιάζονται σε αυτό το επίπεδο.

Πέρα από αυτούς τους γενικούς λόγους, για την επιλογή της μελέτης της συγκεκριμένης έννοιας, υπάρχει και ο προσωπικός λόγος του συγγραφέα της εργασίας αυτής ο οποίος, ως μαθητής Λυκείου και αργότερα ως φοιτητής, είχε αντιμετωπίσει δυσκολίες τόσο στην κατανόηση της έννοιας όσο και στην αποτελεσματική χρήση της σε εφαρμογές.

3.2 Στόχοι Έρευνας - Ερευνητικά Ερωτήματα

Βασικός στόχος αυτής της έρευνας είναι να διαπιστωθεί κατά πόσο, μέσα από την διδασκαλία της έννοιας της παραγώγου και των εφαρμογών της, οι μαθητές της Γ' Λυκείου έχουν αναπτύξει το κατάλληλο πλαίσιο που τους επιτρέπει να χρησιμοποιήσουν την πρώτη παράγωγο για να επιλύσουν προβλήματα από διάφορους τομείς με χρήση των εφαρμογών της παραγώγου. Το κατάλληλο αυτό πλαίσιο μπορεί να προσεγγιστεί είτε ως η ανάπτυξη του απαραίτητου σχήματος σύμφωνα με τη θεωρία APOS (Dubinsky & Mcdonald, 2001), είτε ως η ανάπτυξη μίας ικανοποιητικά συνεκτικής εννοιακής εικόνας (Tall & Vinner, 1981) που περιέχει όλα τα στοιχεία της έννοιας που χρειάζονται για την επίλυση προβλημάτων.

Ειδικότερα, και στα περιορισμένα πλαίσια της διδασκαλίας της έννοιας στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, στην παρούσα έρευνα μας ενδιαφέρει αν ο μαθητής έχει αναπτύξει το κατάλληλο σχήμα, εννοιακή εικόνα, που περιλαμβάνει την παράγωγο ως γενικό εργαλείο μελέτης των συναρτήσεων και επίλυσης προβλημάτων, που αφορούν κυρίως τη μονοτονία και τα ακρότατα, καθώς και τις κατάλληλες ενέργειες και διαδικασίες και τα αντικείμενα στα οποία αυτές πρέπει να εφαρμοστούν. Επίσης αν αυτό το σχήμα, εννοιακή εικόνα, έχει την απαραίτητη συνοχή ώστε με δεδομένο ένα γενικό πρόβλημα, που επιδέχεται λύση με τη χρήση των εφαρμογών της παραγώγου για την εύρεση της μονοτονίας και του είδους των ακροτάτων, να μπορεί ο μαθητής να αναγνωρίσει την παράγωγο ως εργαλείο επίλυσής του, να επιλέξει την κατάλληλη διαδικασία, να την εφαρμόσει και να οδηγηθεί στη λύση του προβλήματος.

Για να επιτευχθεί ο στόχος αυτός θα πρέπει να εξετασθούν μία σειρά επιμέρους ερωτημάτων. Πρώτα πρέπει να εξεταστεί κατά πόσο οι μαθητές μπορούν να βγάλουν συμπεράσματα για μία συνάρτηση από τις ιδιότητες της παραγώγου της καθώς και το αντίστροφο. Επίσης πρέπει να εξεταστεί κατά πόσο έχοντας την εκφώνηση ενός προβλήματος, που απαιτεί τη χρήση άλγεβρας και ανάλυσης, μπορούν να μεταβούν από το πεδίο του προβλήματος στο μαθηματικό πεδίο, να το λύσουν και η λύση να μετατραπεί στο πεδίο του προβλήματος (White & Mitchelmore, 1996). Τέλος πρέπει να εξεταστεί κατά πόσο οι μαθητές έχοντας ένα πρόβλημα σε ένα σχετικά αφηρημένο επίπεδο μπορούν να αναγνωρίσουν ότι επιλύεται με τις εφαρμογές της παραγώγου και να ανακαλέσουν τη σωστή διαδικασία για την επίλυσή του. Η μαθηματική μοντελοποίηση του προβλήματος στο επίπεδο της εύρεσης του τύπου της κατάλληλης συνάρτησης είναι πέρα από τα πλαίσια της παρούσας έρευνας.

Οπότε τα ερευνητικά ερωτήματα διαμορφώνονται ως εξής:

1. Μπορούν οι μαθητές να βγάλουν συμπεράσματα για μία συνάρτηση (μονοτονία, ακρότατα, σταθερή κλπ) από τις ιδιότητες της παραγώγου της; Μπορούν να κάνουν το αντίστροφο, δηλαδή να βγάλουν συμπεράσματα για τις ιδιότητες της παραγώγου μίας συνάρτησης (σημεία που δεν ορίζεται, πρόσημο, μηδενική κλπ) από τη συνάρτηση; Η ικανότητά τους αυτή στηρίζεται σε βαθύτερη κατανόηση ή κυρίως στη χρήση κανόνων;
2. Μπορούν οι μαθητές, με δεδομένη την εκφώνηση του προβλήματος να συσχετίσουν έννοιες και αντικείμενα από το πεδίο του προβλήματος με έννοιες και αντικείμενα του μαθηματικού πεδίου και το αντίστροφο και να κάνουν τους απαραίτητους υπολογισμούς;
3. Μπορούν οι μαθητές, με δεδομένη την εκφώνηση του προβλήματος, σε ένα σχετικά αφηρημένο επίπεδο χωρίς να τους δίνεται συγκεκριμένη συνάρτηση, να αντιληφθούν ότι δέχεται επίλυση μέσω των εφαρμογών της παραγώγου και να ανακαλέσουν και να διατυπώσουν την κατάλληλη διαδικασία, στα απαραίτητα αντικείμενα, για την επίλυσή του;

Για να απαντηθούν θετικά τα ερωτήματα αυτά από τους μαθητές απαιτείται η ανάπτυξη από μέρους τους των απαραίτητων γνωστικών δομών σε διαφορετικά επίπεδα των βασικών μερών της θεωρίας APOS. Συγκεκριμένα το πρώτο ερευνητικό ερώτημα απαιτεί από τους μαθητές να έχουν αναπτύξει τις απαραίτητες γνωστικές δομές σε επίπεδο ενεργειών και διαδικασιών. Αυτό συμβαίνει αφού για να μπορέσουν οι μαθητές να βρουν τα διαστήματα μονοτονίας της αρχικής συνάρτησης, τα διαστήματα που αυτή είναι σταθερή και τα σημεία ακροτάτων της θα πρέπει να μπορούν να χρησιμοποιήσουν σωστά την κατάλληλη διαδικασία (π.χ. θεώρημα για τη μονοτονία σελ. 253 του βιβλίου κατεύθυνσης των Ανδρεαδάκη κ.α. (2015)), για οποιοδήποτε σημείο ή οποιοδήποτε διάστημα, και να εκτελέσουν τις ενέργειες που αυτή περιλαμβάνει. Επίσης για να βρουν από τη γραφική παράσταση ή τον τύπο της αρχικής συνάρτησης τα σημεία που η παράγωγος της είναι θετική ή μηδέν θα πρέπει να μπορούν να αντιστρέψουν την κατάλληλη διαδικασία (αντιστροφή του Θεωρήματος σελ. 253 και χρήση του σχόλιου σελ. 254 του βιβλίου κατεύθυνσης των Ανδρεαδάκη κ.α. (2015)) και για να απαντήσουν σε πιο σύνθετα ερωτήματα, όπως τα διαστήματα που η παράγωγος είναι σταθερή και διάφορη του 0, θα πρέπει να μπορούν όχι μόνο να αντιστρέψουν μία διαδικασία (αντιστροφή της διαδικασίας εύρεσης παραγώγου γραμμικής συνάρτησης) αλλά και να τη συνδυάσουν με την απαίτηση η αρχική συνάρτηση να μην είναι σταθερή.

Για να απαντηθεί θετικά το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα απαιτείται από τους μαθητές να έχουν αναπτύξει τις απαραίτητες γνωστικές δομές σε επίπεδο ενεργειών, διαδικασιών και αντικειμένων. Συγκεκριμένα οι μαθητές θα πρέπει να μπορούν από τα στοιχεία του πεδίου του προβλήματος να δημιουργούν τα κατάλληλα μαθηματικά αντικείμενα, όπως την παράγωγο σε σημείο ή σε διάστημα, και να εφαρμόζουν σε αυτά τις διαδικασίες και ενέργειες για να λύσουν το πρόβλημα στο μαθηματικό πεδίο και φυσικά να μεταβαίνουν πίσω για να βγάζουν τα συμπεράσματα που αφορούν το πεδίο του προβλήματος.

Τέλος για να απαντηθεί θετικά το τρίτο ερευνητικό ερώτημα απαιτείται από τους μαθητές να έχουν αναπτύξει τις απαραίτητες γνωστικές δομές σε επίπεδο ενεργειών, διαδικασιών, αντικειμένων και σχήματος. Συγκεκριμένα οι μαθητές θα πρέπει να μπορούν με προσεκτική μελέτη του προβλήματος, το οποίο είναι σε σχετικά αφηρημένο επίπεδο, να συσχετίσουν τα δεδομένα του με το σχήμα που έχουν αναπτύξει για την έννοια της παραγώγου και το οποίο περιλαμβάνει όλες τις ενέργειες, τις διαδικασίες, τα αντικείμενα που σχετίζονται με την έννοια καθώς και άλλα σχήματα που συνδέονται με κάποιες γενικές αρχές. Μέσω της συσχέτισης αυτής θα πρέπει να αναγνωρίσουν τις εφαρμογές της παραγώγου ως εργαλείο επίλυσης του, να εντοπίσουν τα κατάλληλα αντικείμενα, να ανακαλέσουν τις απαραίτητες διαδικασίες και να τις εφαρμόσουν στα αντικείμενα αυτά εκτελώντας τις απαιτούμενες ενέργειες.

Μέσα από την έρευνα αυτή αναμένεται να ανιχνευτεί σε ποιο από τα παραπάνω ερωτήματα δυσκολεύονται περισσότερο οι μαθητές και φυσικά να ανιχνευθούν και τα είδη των τυχόν λανθασμένων αντιλήψεων και παρανοήσεων που δημιουργούνται στους μαθητές για την έννοια της παραγώγου αλλά και τα συνήθη λάθη και δυσκολίες που παρουσιάζονται κατά τους παραπάνω υπολογισμούς με χρήση της παραγώγου.

3.3 Επιλογή μαθητών

Επειδή η διδασκαλία της έννοιας της παραγώγου στο μάθημα της γενικής παιδείας γίνεται μόνο για 2 ώρες/εβδομάδα και λόγω της προσήλωσης των περισσοτέρων μαθητών στα μαθήματα κατεύθυνσης, εξαιτίας των επικείμενων πανελληνίων εξετάσεων, η επιλογή μαθητών που διδάσκονται μόνο το μάθημα των μαθηματικών γενικής παιδείας κρίθηκε ανεπαρκής για τους σκοπούς της έρευνας.

Οπότε επιλέχθηκαν μαθητές της ομάδας προσανατολισμού Θετικών σπουδών (που έχουν επιλέξει το 2ο Επιστημονικό Πεδίο) καθώς και μαθητές της ομάδας προσανατολισμού σπουδών Οικονομίας και Πληροφορικής. Οι μαθητές αυτοί διδάσκονται τόσο το μάθημα των μαθηματικών γενικής παιδείας για 2 ώρες/εβδομάδα όσο και το μάθημα των μαθηματικών κατεύθυνσης για 5 ώρες/εβδομάδα, άρα θα έχουν διδαχθεί την έννοια της παραγώγου και των εφαρμογών της ικανοποιητικά. Επίσης λόγω του ενδιαφέροντος των επικείμενων εξετάσεων είναι αναμενόμενο να έχουν δείξει το απαραίτητο ενδιαφέρον και στο μάθημα των μαθηματικών ως βασικό εξεταζόμενο μάθημα. Τέλος οι μαθητές αυτοί είναι υποψήφιοι για σχολές που στη μεγάλη πλειοψηφία τους περιλαμβάνουν μαθήματα ανάλυσης, δηλαδή διδασκαλία της παραγώγου, καθώς και χρήση των εφαρμογών της παραγώγου, οπότε αναμένεται η εννοιακή εικόνα που θα διαμορφωθεί για την παράγωγο στη δευτεροβάθμια να παίξει σημαντικό ρόλο στις σπουδές τους.

Για να έχουμε καλύτερο δείγμα γραπτών επιλέχθηκαν μαθητές από τρία γενικά Λύκεια της πόλης του Ηρακλείου.

3.4 Περιεχόμενο και δομή εξέτασης

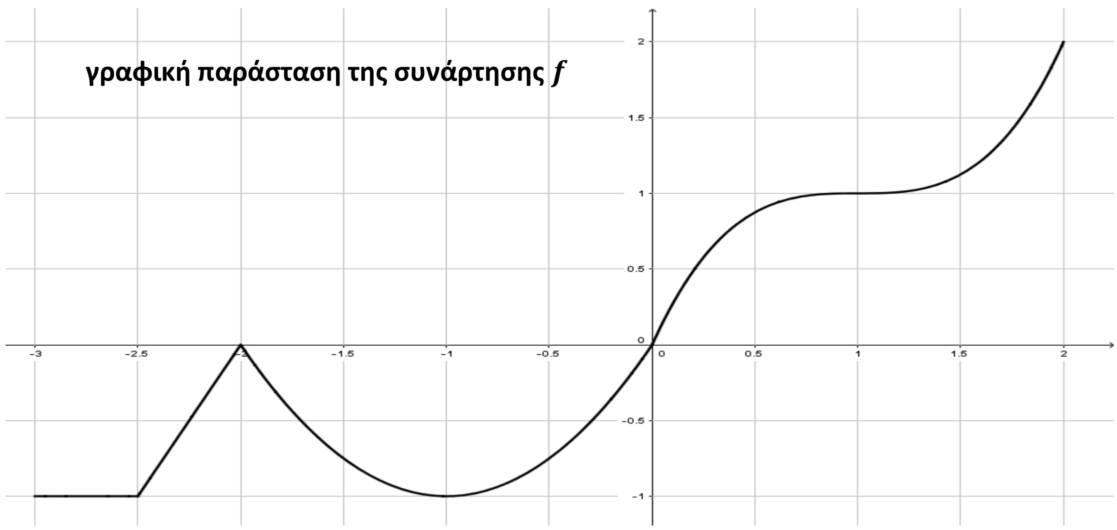
Για τη διερεύνηση των ερευνητικών ερωτημάτων που τέθηκαν σχεδιάστηκε γραπτή εξέταση στην οποία υποβλήθηκαν οι μαθητές και η οποία παρατίθεται στο παράρτημα της εργασίας. Η γραπτή εξέταση αποτελείται από δύο μέρη, το μέρος Α και το μέρος Β.

3.4.1 Μέρος Α γραπτής εξέτασης

Το μέρος Α’ της γραπτής εξέτασης έχει στόχο να απαντηθεί το πρώτο ερευνητικό ερώτημα, δηλαδή αν μπορούν οι μαθητές να βγάλουν συμπεράσματα για μία συνάρτηση (μονοτονία, ακρότατα, σταθερή κλπ) από τις ιδιότητες της παραγώγου της καθώς και το αντίστροφο. Το μέρος αυτό αποτελείται από δύο ασκήσεις.

Στην πρώτη άσκηση δίνεται η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης καθώς και ο τύπος της (ανά διαστήματα) και δίνονται πέντε ερωτήματα για να εξετασθεί κατά πόσο μπορεί ο μαθητής να βγάλει συμπεράσματα για την παράγωγο της (πρόσημο, τιμή κλπ). Η πρώτη άσκηση του Α’ μέρους έχει ως εξής:

Α’ ΜΕΡΟΣ - ΑΣΚΗΣΗ 1



Εικόνα 1: Γραφική παράσταση της συνάρτησης της Άσκησης 1, Α' Μέρους

Στο παραπάνω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f.

I. Στο διάστημα [-3, -2.5] η f ταυτίζεται με την -1

II. Στο διάστημα (-2.5, -2] η f ταυτίζεται με την $2x + 4$

III. Στο διάστημα (-2, 0] η f ταυτίζεται με την $x^2 + 2x$

IV. Στο διάστημα (0, 2] η f ταυτίζεται με την $(x-1)^3 + 1$.

Απαντήστε <u>με σύντομη αιτιολόγηση</u> στις επόμενες ερωτήσεις:

1. Υπάρχουν σημεία στα οποία κατά την γνώμη σας δεν ορίζεται η παράγωγος f';
2. Σε ποια διαστήματα ή και μεμονωμένα σημεία η παράγωγος f' είναι 0;
3. Σε ποια διαστήματα η παράγωγος f' είναι σταθερή και διάφορη του 0;
4. Σε ποια διαστήματα η παράγωγος f' είναι θετική;
5. Σε ποια διαστήματα η παράγωγος f' είναι αρνητική;

Οι ειδικότεροι στόχοι των ερωτημάτων παρουσιάζονται στον επόμενο πίνακα:

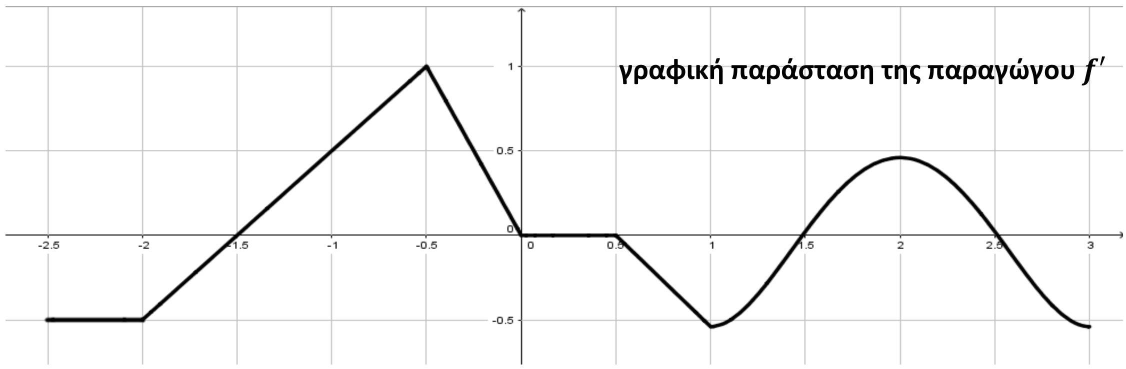
Ερώτημα Άσκησης 1	**Ειδικότερος στόχος**
Ερώτημα 1	Αν ο μαθητής μπορεί να βρει από μία συνάρτηση τα σημεία που δεν ορίζεται η παράγωγος της. Τα σημεία είναι το $x_1 = -2.5$ και το $x_2 = -2$ όπου η γραφική παράσταση κάνει εμφανώς γωνία και το σημείο $x_3 = 0$. Το σημείο $x_3 = 0$ είναι ένα σημείο που δεν είναι διακριτό άμεσα από το γράφημα και ο σκοπός του είναι να εξεταστεί πόσοι μαθητές λειτουργώντας σχολαστικά και με βάση τη θεωρία θα το εντοπίσουν. Φυσικά η διατύπωση του ερωτήματος που ρωτάει αν υπάρχουν και δεν τα ζητάει ρητά, παρόλο ότι δόθηκαν προφορικά διευκρινήσεις για να δοθούν όλα τα σημεία, μπορεί να επηρεάσει κάποιους μαθητές και δώσουν ως απάντηση μόνο 1 ή 2 σημεία.
Ερώτημα 2	Αν ο μαθητής μπορεί να βρει από μία συνάρτηση τα σημεία και τα διαστήματα στα οποία μηδενίζεται η παράγωγος της. Τα σημεία αυτά είναι το $x_1 = -1$ (τοπικό ελάχιστο) και το $x_2 = 1$ (όχι τοπικό ακρότατο) και το διάστημα είναι το [-3, -2.5) στο οποίο η συνάρτηση είναι σταθερή.
Ερώτημα 3	Αν ο μαθητής μπορεί να βρει από μία συνάρτηση τα διαστήματα στα οποία η παράγωγος της είναι σταθερή και διάφορη του 0. Δηλαδή αυτά στα οποία η συνάρτηση είναι γραμμική με συντελεστή διεύθυνσης διάφορο του μηδενός. Το διάστημα είναι το (-2.5, -2). Η ερώτηση αυτή απαιτεί τη αντιστροφή διαδικασιών που ο μαθητής αντιμετωπίζει συνήθως στο σχολείο.
Ερώτημα 4	Αν ο μαθητής γνωρίζει τη σχέση μονοτονίας συνάρτησης με το πρόσημο της παραγώγου (θετική). Είναι τα διαστήματα (-2.5, -2), (-1, 0), (0, 1) και (1, 2). Δηλαδή τα διαστήματα που η αρχική συνάρτηση είναι γν. αύξουσα αφαιρώντας τα σημεία που η παράγωγος μηδενίζεται ή δεν ορίζεται. Στο ερώτημα αυτό ο μαθητής πρέπει να αντιστρέψει το θεώρημα της σελ. 253 αλλά και να αξιοποιήσει το σχόλιο της σελ. 254 του βιβλίου κατεύθυνσης των Ανδρεαδάκη κ.α. (2015) για να μην περιλάβει τα σημεία που η παράγωγος μηδενίζεται.

Ερώτημα 5	Αν ο μαθητής γνωρίζει τη σχέση μονοτονίας συνάρτησης με το πρόσημο της παραγώγου (αρνητική). Είναι το διάστημα (-2, -1). Δηλαδή τα διαστήματα που η αρχική συνάρτηση είναι γν. φθίνουσα αφαιρώντας τα σημεία που η παράγωγος μηδενίζεται ή δεν ορίζεται. Και στο ερώτημα αυτό, όπως και στο προηγούμενο, ο μαθητής πρέπει να αντιστρέψει το θεώρημα της σελ. 253 και να αξιοποιήσει το σχόλιο της σελ. 254 του βιβλίου κατεύθυνσης των Ανδρεαδάκη κ.α. (2015) για να μην περιλάβει τα σημεία που η παράγωγος μηδενίζεται.

Πίνακας 1: Ειδικότεροι στόχοι ερωτημάτων Άσκησης 1, Α' Μέρους

Στη δεύτερη άσκηση δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μίας συνάρτησης και δίνονται έξι ερωτήματα για να εξετασθεί κατά πόσο μπορεί ο μαθητής να βγάλει συμπεράσματα για την αρχική συνάρτηση (μονοτονία, ακρότατα, σταθερή κλπ). Η δεύτερη άσκηση του Α' μέρους έχει ως εξής:

Α' ΜΕΡΟΣ - ΑΣΚΗΣΗ 2



Εικόνα 2: Γραφική παράσταση της συνάρτησης της Άσκησης 2, Α' Μέρους

Στο παραπάνω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση **της παραγώγου f'** μίας αρχικής συνάρτησης f. Θέλουμε να βγάλουμε από την παράγωγο f' συμπεράσματα για την αρχική συνάρτηση f.

Απαντήστε <u>με σύντομη αιτιολόγηση</u> στις επόμενες ερωτήσεις <u>για την αρχική συνάρτηση</u>:

1. Σε ποια διαστήματα η αρχική συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα;
2. Σε ποια διαστήματα η αρχική συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα;
3. Σε ποια διαστήματα η αρχική συνάρτηση f είναι σταθερή;
4. Σε ποια διαστήματα η αρχική συνάρτηση f είναι γραμμική (δηλ έχει τη μορφή $f(\mathrm{x}) = \mathrm{ax} + \mathrm{b}, \mathrm{a} \neq 0$).
5. Σε ποια σημεία η αρχική συνάρτηση f έχει τοπικό μέγιστο;
6. Σε ποια σημεία η αρχική συνάρτηση f έχει τοπικό ελάχιστο;

Οι ειδικότεροι στόχοι των ερωτημάτων παρουσιάζονται στον επόμενο πίνακα.

Ερώτημα Άσκησης 2	**Ειδικότερος στόχος**
Ερώτημα 1	Αν ο μαθητής μπορεί να βρει από την παράγωγο, τα διαστήματα μονοτονίας της αρχικής συνάρτησης (γν. αύξουσα). Τα διαστήματα είναι το [-1.5, 0] και το [1.5, 2.5]. Οι μαθητές εδώ πρέπει να εφαρμόσουν το θεώρημα της σελ. 253 του βιβλίου κατεύθυνσης των Ανδρεαδάκη κ.α. (2015) χρησιμοποιώντας ότι η αρχική συνάρτηση είναι συνεχής στα παραπάνω κλειστά διαστήματα εφόσον είναι παραγωγίσιμη σε αυτά.
Ερώτημα 2	Αν ο μαθητής μπορεί να βρει από την παράγωγο, τα διαστήματα μονοτονίας της αρχικής συνάρτησης (γν. φθίνουσα). Τα διαστήματα είναι το [-2.5, -1.5], το [0.5, 1.5] και το [2.5, 3]. Και εδώ οι μαθητές πρέπει να εφαρμόσουν το θεώρημα της σελ. 253 του βιβλίου κατεύθυνσης των Ανδρεαδάκη κ.α. (2015) χρησιμοποιώντας ότι η αρχική συνάρτηση είναι συνεχής στα παραπάνω κλειστά διαστήματα εφόσον είναι παραγωγίσιμη σε αυτά.
Ερώτημα 3	Αν ο μαθητής μπορεί να βρει από την παράγωγο, τα διαστήματα στα οποία η αρχική συνάρτηση είναι σταθερή. Το διάστημα είναι το [0, 0.5]. Οι μαθητές εδώ πρέπει να εφαρμόσουν το θεώρημα της σελ. 251 του βιβλίου κατεύθυνσης των Ανδρεαδάκη κ.α. (2015)
Ερώτημα 4	Αν ο μαθητής μπορεί να βρει από την παράγωγο, τα διαστήματα στα οποία η αρχική συνάρτηση είναι γραμμική με συντελεστή διεύθυνσης διάφορο του μηδενός. Το διάστημα είναι το [-2.5, -2]. Η ερώτηση αυτή απαιτεί τη αντιστροφή και τον συνδυασμό διαδικασιών που ο μαθητής αντιμετωπίζει συνήθως στο σχολείο.
Ερώτημα 5	Αν ο μαθητής μπορεί να βρει με χρήση της παραγώγου, τα σημεία ακροτάτων (τοπ. μέγιστα) μίας συνάρτησης. Τα σημεία είναι το $x_1 = 2.5$, $x_2 = 0$, το $x_3 = 0.5$ και όλα τα σημεία του διαστήματος (0, 0.5). Επίσης τοπικό μέγιστο είναι και το αριστερό άκρο του πεδίου ορισμού, το σημείο $x_4 = -2.5$, καθώς η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα [-2.5, -1.5]. Στα πλαίσια της εξέτασης της έννοιας της παραγώγου και του τρόπου διδασκαλίας του εντοπισμού του είδους των ακροτάτων (αλλαγή προσήμου πρώτης παραγώγου) αναμένουμε ότι ο μαθητής πρέπει να απαντήσει το σημείο $x_1 = 2.5$. Αν χρησιμοποιήσει καλύτερα την πληροφορία της παραγώγου αναμένουμε να απαντήσει και το σημείο $x_2 = 0$ (η συνάρτηση αύξουσα αριστερά και σταθερή δεξιά) και το σημείο $x_3 = 0.5$ (η συνάρτηση σταθερή αριστερά και φθίνουσα δεξιά) και φυσικά και το αριστερό άκρο του πεδίου ορισμού, το σημείο $x_4 = -2.5$. Επίσης αν ο μαθητής χρησιμοποιήσει σωστά τους ορισμούς των ακροτάτων που έχει διδαχθεί (παρ. 2.7 του βιβλίου κατεύθυνσης των Ανδρεαδάκη κ.α. (2015)) τότε αναμένεται να απαντήσει τόσο τα σημεία $x_2 = 0$ και $x_3 = 0.5$ όσο και όλα τα σημεία του διαστήματος (0, 0.5) τα οποία είναι και τοπ. μέγιστα και τοπ. ελάχιστα.
Ερώτημα 6	Αν ο μαθητής μπορεί να βρει με χρήση της παραγώγου τα σημεία ακροτάτων (τοπ. ελάχιστα) μίας συνάρτησης. Τα σημεία είναι το $x_1 = -1.5$, $x_2 = 1.5$ και όλα τα σημεία του διαστήματος (0, 0.5). Επίσης τοπικό ελάχιστο είναι και το δεξιό άκρο του πεδίου ορισμού, το σημείο $x_3 = 3$, καθώς η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα [2.5, 3].

	Στα πλαίσια της εξέτασης της έννοιας της παραγώγου και του τρόπου διδασκαλίας του εντοπισμού του είδους των ακροτάτων (αλλαγή προσήμου πρώτης παραγώγου) αναμένουμε ότι ο μαθητής πρέπει να απαντήσει τα σημεία $x_1 = -1.5$ και $x_2 = 1.5$. Αν χρησιμοποιήσει καλύτερα την πληροφορία της παραγώγου αναμένουμε να απαντήσει και το δεξιό άκρο του πεδίου ορισμού, το σημείο $x_3 = 3$. Επίσης αν ο μαθητής χρησιμοποιήσει σωστά τους ορισμούς των ακροτάτων που έχει διδαχθεί (παρ. 2.7 του βιβλίου κατεύθυνσης των Ανδρεαδάκη κ.α. (2015)) τότε αναμένεται να απαντήσει και όλα τα σημεία του διαστήματος (0, 0.5) τα οποία είναι και τοπ. μέγιστα και τοπ. ελάχιστα.

Πίνακας 2: Ειδικότεροι στόχοι ερωτημάτων Άσκησης 2, Α' Μέρους

Η παρουσίαση της συνάρτησης και της παραγώγου με γράφημα έγινε τόσο γιατί χρησιμοποιείται στη θεωρία και σε ασκήσεις στο βιβλίο όσο και για να προκληθεί ο μαθητής να ανακαλέσει την κατάλληλη διαδικασία επίλυσης και μέσω του γραφήματος να διευκολυνθεί να απαντήσει χωρίς να χρειάζεται να κάνει πράξεις. Στην πρώτη άσκηση, για να εξεταστεί η δυνατότητα των μαθητών να εκτελούν τις απαραίτητες ενέργειες όπου χρειάζεται (π.χ. σημείο $x_1 = 0$ όπου δεν ορίζεται η παράγωγος και σημείο $x_2 = 1$ όπου η παράγωγος μηδενίζεται χωρίς να είναι ακρότατο) και για να αποφευχθεί η περίπτωση κάποιος μαθητής να δυσκολεύεται να προσδιορίσει ακριβείς τιμές από το γράφημα, δόθηκαν και οι τύποι της συνάρτησης ανά διάστημα.

3.4.1.1 Συσχετίσεις ερωτημάτων Άσκησης 1 και Άσκησης 2 του Α' μέρους

Στο μέρος Α έχουμε τις εξής συσχετίσεις μεταξύ ερωτημάτων της Άσκησης 1 και της Άσκησης 2:

ΑΣΚΗΣΗ 1	ΑΣΚΗΣΗ 2
Ερώτημα 2 (όσον αφορά τα διαστήματα)	Ερώτημα 3
Ερώτημα 2 (όσον αφορά τα μεμονωμένα σημεία)	Ερώτημα 5,6
Ερώτημα 3	Ερώτημα 4
Ερώτημα 4	Ερώτημα 1
Ερώτημα 5	Ερώτημα 2

Πίνακας 3: Συσχετίσεις ερωτημάτων Άσκησης 1 και Άσκησης 2, Α' Μέρους

Οι παραπάνω συσχετίσεις αφορούν στο ότι το ερώτημα της άσκησης 1 του Α' μέρους που φαίνεται στην πρώτη στήλη του πίνακα είναι στην πραγματικότητα το αντίστροφο του ερωτήματος (ή των ερωτημάτων) της άσκησης 2 του Α' μέρους που φαίνεται στη δεύτερη στήλη. Δηλαδή ενώ στο ερώτημα της άσκησης 1 εξετάζεται αν ο μαθητής μπορεί να χρησιμοποιήσει τα στοιχεία της δεδομένης συνάρτησης για να εντοπίσει κάποιο σημείο/διάστημα στο οποίο η παράγωγος έχει μία συγκεκριμένη ιδιότητα, στο αντίστοιχο ερώτημα (ή ερωτήματα) της άσκησης 2 εξετάζεται αν ο μαθητής μπορεί να χρησιμοποιήσει αυτήν την ιδιότητα της δεδομένης παραγώγου για να εντοπίσει κάποιο σημείο/διάστημα στο οποίο η αρχικής συνάρτηση παρουσιάζει τα ζητούμενα στοιχεία. Έτσι στο ερώτημα 2 της άσκησης 1 ζητείται σε ποια διαστήματα η παράγωγος της δεδομένης συνάρτησης είναι 0 και στο αντίστοιχο ερώτημα 3 της άσκησης 2 ζητείται σε ποια διαστήματα η αρχική συνάρτηση της δεδομένης παραγώγου είναι σταθερή.

3.4.2 Μέρος Β γραπτής εξέτασης

Το μέρος Β' της γραπτής εξέτασης έχει στόχο να απαντηθεί το δεύτερο και το τρίτο ερευνητικό ερώτημα μέσω της πρώτης και της δεύτερης άσκησης που περιέχει. Η πρώτη άσκηση σκοπεύει να απαντήσει κυρίως στο δεύτερο ερευνητικό ερώτημα, δηλαδή αν μπορούν οι μαθητές με δεδομένη την εκφώνηση του προβλήματος να συσχετίσουν έννοιες από το πεδίο του προβλήματος με έννοιες του μαθηματικού πεδίου και το αντίστροφο και να κάνουν τους κατάλληλους υπολογισμούς και η δεύτερη κυρίως στο τρίτο ερευνητικό ερώτημα, αλλά και στο δεύτερο μέσω του τρίτου ερωτήματός της, δηλαδή αν μπορούν οι μαθητές, με δεδομένη την εκφώνηση του προβλήματος σε ένα σχετικά αφηρημένο επίπεδο, να ανακαλέσουν τη σωστή διαδικασία που θα εφαρμόσουν στα απαραίτητα αντικείμενα για την επίλυσή του.

Στην πρώτη άσκηση δίνεται η εκφώνηση ενός προβλήματος με τον τύπο δύο συναρτήσεων, τη συνάρτηση θέσης κινητού και τη συνάρτηση κατανάλωσης κινητού, και δίνονται έξι ερωτήματα. Η επιλογή των συγκεκριμένων συναρτήσεων έγινε γιατί χρησιμοποιούνται συχνά στις ασκήσεις των βιβλίων και θα πρέπει να είναι αρκετά οικείες στους μαθητές. Ο συγκεκριμένος τύπος της συνάρτησης κατανάλωσης επιλέχθηκε ώστε να κληθεί ο μαθητής κατά την παραγώγιση να χρησιμοποιήσει τον κανόνα σύνθετης συνάρτησης. Η πρώτη άσκηση του Β' μέρους έχει ως εξής:

Β' ΜΕΡΟΣ - ΑΣΚΗΣΗ 1

Ένα αυτοκίνητο ξεκίνησε από την αφετηρία του και κινείται στην εθνική οδό. Η συνάρτηση θέσης του σε μέτρα, συναρτήσει του χρόνου t σε δευτερόλεπτα, δίνεται από την $\mathrm{S(t)} = 100 + 4t - 0.2(\mathrm{t} - 5)^2$, για $0 \le t \le 40$.
Το αυτοκίνητο φέρει μηχανισμό εκτίμησης της κατανάλωσής του σε λίτρα βενζίνης, σε σχέση με την ταχύτητα που κινείται κάθε χρονική στιγμή, που δίνεται από την $\mathrm{K(t)} = 3 + 0.06\upsilon^2$ (όπου υ η ταχύτητα του αυτοκινήτου σε μέτρα/δευτερόλεπτο τη χρονική στιγμή t).
Απαντήστε με <u>σύντομη αιτιολόγηση</u> στις επόμενες ερωτήσεις:

1. Ποια είναι η σημασία του $\frac{\mathrm{S(20)-S(10)}}{10}$ για το αυτοκίνητο;
2. Ποια είναι η σημασία του $\mathrm{S}'(5)$ για το αυτοκίνητο; Σε τι μονάδες μετριέται;
3. Τι σημασία έχουν για το αυτοκίνητο τα χρονικά σημεία t για τα οποία $\mathrm{S}'(\mathrm{t}) = 0$; Τι είναι πιθανόν να συμβαίνει όσον αφορά τη θέση του αυτοκινήτου σε αυτά τα σημεία;
4. Τι σημασία έχουν για το αυτοκίνητο τα χρονικά διαστήματα για τα οποία ισχύει $\mathrm{K}'(t) > 0$; Τι συμπέρασμα μπορούμε να βγάλουμε για την κατανάλωση του σε αυτά τα διαστήματα;
5. Σε ποιό χρονικό διάστημα η θέση του αυτοκινήτου μειώνεται;
6. Σε ποια χρονική στιγμή παρουσιάζει το αυτοκίνητο την ελάχιστη κατανάλωση;

Οι ειδικότεροι στόχοι των ερωτημάτων παρουσιάζονται στον επόμενο πίνακα. Τα ερωτήματα 5 και 6 είναι πολύ κοντά στα ερωτήματα που έχει συνηθίσει να απαντάει ο μαθητής στα προβλήματα του βιβλίου.

Ερώτημα Άσκησης 1	**Ειδικότερος στόχος**
Ερώτημα 1	Αν ο μαθητής μπορεί να μεταβεί από το μαθηματικό πεδίο στο πεδίο του προβλήματος αντιλαμβανόμενος ότι ο τύπος που του δίνεται αφορά τη μέση ταχύτητα στο συγκεκριμένο διάστημα.
Ερώτημα 2	Αν ο μαθητής μπορεί να μεταβεί από το μαθηματικό πεδίο στο πεδίο του προβλήματος αντιλαμβανόμενος ότι ο τύπος που του δίνεται αφορά τη στιγμιαία ταχύτητα στο συγκεκριμένο χρονικό σημείο.
Ερώτημα 3	Αν ο μαθητής μπορεί να μεταβεί από το μαθηματικό πεδίο στο πεδίο του προβλήματος αντιλαμβανόμενος το τι πληροφορία θα μπορούσαν να του δώσουν για το πρόβλημα τα σημεία εκείνα στα οποία μηδενίζεται η παράγωγος της συνάρτησης θέσης (πιθανά σημεία ακροτάτων).
Ερώτημα 4	Αν ο μαθητής μπορεί να μεταβεί από το μαθηματικό πεδίο στο πεδίο του προβλήματος αντιλαμβανόμενος το τι πληροφορία θα μπορούσαν να του δώσουν για το πρόβλημα τα διαστήματα εκείνα στα οποία η παράγωγος της συνάρτησης κατανάλωσης είναι θετική (διαστήματα γν. αύξουσας κατανάλωσης).
Ερώτημα 5	Αν ο μαθητής μπορεί να μεταβεί από το πεδίο του προβλήματος στο μαθηματικό πεδίο και να πραγματοποιήσει τους κατάλληλους υπολογισμούς για εύρεση διαστημάτων μονοτονίας.
Ερώτημα 6	Αν ο μαθητής μπορεί να μεταβεί από το πεδίο του προβλήματος στο μαθηματικό πεδίο και να πραγματοποιήσει τους κατάλληλους υπολογισμούς για εύρεση σημείων ακροτάτων.

Πίνακας 4: Ειδικότεροι στόχοι ερωτημάτων Άσκησης 1, Β' Μέρους

Στη δεύτερη άσκηση δίνεται η εκφώνηση ενός προβλήματος σε πιο αφηρημένο επίπεδο κάνοντας αναφορά σε γνωστή συνάρτηση κόστους και εσόδων αλλά χωρίς να δίνονται οι τύποι, δηλαδή ο μαθητής δεν μπορεί να κάνει συγκεκριμένους υπολογισμούς, και δίνονται τρία ερωτήματα. Η επιλογή του είδους των συγκεκριμένων συναρτήσεων έγινε και πάλι γιατί χρησιμοποιούνται στις ασκήσεις των βιβλίων και θα πρέπει να είναι αρκετά οικείες στους μαθητές. Η δεύτερη άσκηση του Β' μέρους έχει ως εξής:

Β' ΜΕΡΟΣ - ΑΣΚΗΣΗ 2

Μία εταιρεία παράγει ένα λιπαντικό αυτοκινήτου. Το κόστος σε € για την παραγωγή x κιλών από το λιπαντικό δίνεται από μία συνάρτηση K(x) την οποία γνωρίζουμε. Επίσης τα έσοδα σε € της εταιρείας από την πώληση x κιλών δίνεται από μία συνάρτηση E(x) την οποία γνωρίζουμε. Απαντήστε στα επόμενα με σύντομη αιτιολόγηση:

1. Περιγράψτε τους υπολογισμούς που θα κάνατε για να βρείτε την ποσότητα κιλών στην οποία το κόστος ελαχιστοποιείται;
2. Περιγράψτε τους υπολογισμούς που θα κάνατε για να βρείτε το διάστημα κιλών στο οποίο τα έσοδα αυξάνονται;
3. Έστω ότι K'(10)=50. Είναι σωστό να συμπεράνουμε ότι το κόστος για την παραγωγή 20 κιλών λιπαντικού θα είναι αυξημένο κατά περίπου 500€ σε σχέση με το κόστος για την παραγωγή 10 κιλών;

Οι ειδικότεροι στόχοι των ερωτημάτων παρουσιάζονται στον επόμενο πίνακα.

Ερώτημα Άσκησης 2	**Ειδικότερος στόχος**
Ερώτημα 1	Αν ο μαθητής μπορεί, σε σχετικά αφηρημένο πρόβλημα, να συσχετίσει το σχήμα που έχει διαμορφωθεί για την παράγωγο με το τρέχον πρόβλημα και να ανακαλέσει μέσα από αυτό τη σωστή διαδικασία για την επίλυσή του ερωτήματος (εύρεση πιθανών ακροτάτων και εντοπισμός τοπικών ελαχίστων).
Ερώτημα 2	Αν ο μαθητής μπορεί, σε σχετικά αφηρημένο πρόβλημα, να συσχετίσει το σχήμα που έχει διαμορφωθεί για την παράγωγο με το τρέχον πρόβλημα και να ανακαλέσει μέσα από αυτό τη σωστή διαδικασία για την επίλυσή του ερωτήματος (εύρεση διαστημάτων μονοτονίας και εντοπισμός διαστήματος όπου αυτή είναι γν. αύξουσα).
Ερώτημα 3	Αν ο μαθητής μπορεί, σε σχετικά αφηρημένο πρόβλημα, να συσχετίσει το σχήμα που έχει διαμορφωθεί για την έννοια της παραγώγου με το τρέχον πρόβλημα και να ανακαλέσει μέσα από αυτό τη σημασία της παραγώγου σε σημείο για το αντίστοιχο πεδίο του προβλήματος ώστε να μπορέσει κρίνει αν είναι σωστό το ερώτημα και να δικαιολογήσει την απάντησή του.

Πίνακας 5: Ειδικότεροι στόχοι ερωτημάτων Άσκησης 2, Β' Μέρους

3.4.2.1 Συσχετίσεις ερωτημάτων Άσκησης 1 και Άσκησης 2 του Β' μέρους

Στο μέρος Β έχουμε τις εξής συσχετίσεις μεταξύ ερωτημάτων της Άσκησης 1 και της Άσκησης 2 :

ΑΣΚΗΣΗ 1	**ΑΣΚΗΣΗ 2**
Ερώτημα 2 (ρυθμός μεταβολής θέσης για t=5)	Ερώτημα 3 (ρυθμός μεταβολής κόστους για x=10)
Ερώτημα 3 και ερώτημα 6	Ερώτημα 1
Ερώτημα 4 και ερώτημα 5	Ερώτημα 2

Πίνακας 6: Συσχετίσεις ερωτημάτων Άσκησης 1 και Άσκησης 2, Β' Μέρους

Οι παραπάνω συσχετίσεις αφορούν στο ότι θα ήταν αναμενόμενο κάποιος μαθητής που δεν μπορεί να απαντήσει σωστά το ερώτημα (ή τα ερωτήματα) της άσκησης 1 του Β' μέρους που φαίνεται στην πρώτη στήλη του πίνακα, να δυσκολευτεί να απαντήσει σωστά και στο αντίστοιχο ερώτημα της άσκησης 2 του Β' μέρους που φαίνεται στην δεύτερη στήλη, εκτός και αν το πρόβλημα στην απάντηση της άσκησης 1 του Β' μέρους είναι καθαρά θέμα εκτέλεσης ενεργειών.

4 Διεξαγωγή και Αποτελέσματα της Έρευνας

4.1 Συλλογή Δεδομένων Έρευνας

Όπως ήδη αναφέρθηκε, για την διερεύνηση των ερευνητικών ερωτημάτων που τέθηκαν μοιράστηκε σε μαθητές γραπτή εξέταση με Α' και Β' μέρος για την οποία οι μαθητές είχαν στην διάθεσή τους δύο ώρες. Λόγω του περιορισμένου χρόνου πραγματοποίησης της παρούσας εργασίας η εξέταση πραγματοποιήθηκε σε μία δύσκολη για τους μαθητές περίοδο και συγκεκριμένα 2 εβδομάδες πριν το Πάσχα. Για να είναι δυνατόν να συλλεχθούν τα απαραίτητα γραπτά αλλά και για να υπάρχει καλύτερο δείγμα συλλέχθηκαν γραπτά από τρία Γενικά Λύκεια της πόλης του Ηρακλείου. Η συμμετοχή των μαθητών ήταν εθελοντική και η επιλογή τους έγινε από τους διδάσκοντες του μαθήματος των μαθηματικών οι οποίοι προσπάθησαν να επιλέξουν μαθητές που έχουν τις γνώσεις και τη διάθεση για τη συγκεκριμένη εξέταση. Η εξέταση πραγματοποιήθηκε με τη συνεργασία των διδασκόντων στο σχολείο των μαθητών, στην αίθουσα διδασκαλίας κατά τη διάρκεια του κανονικού μαθήματος. Η διάρκεια της εξέτασης, όπως αναφέρθηκε, ήταν δύο διδακτικές ώρες αλλά οι περισσότεροι μαθητές ολοκλήρωσαν στην πρώτη ώρα. Συλλέχθηκαν συνολικά 46 γραπτά και από τα τρία σχολεία.

Καθώς έγινε η πρώτη επεξεργασία των γραπτών διαπιστώθηκε περιορισμένος αριθμός απαντήσεων στο Β' Μέρος σε σχέση με το Α' μέρος της εξέτασης και για να διασφαλιστεί ότι αυτό οφείλεται κυρίως στο περιεχόμενο της εξέτασης πραγματοποιήθηκε μία επιπλέον εξέταση μόνο του Β' μέρους σε διαφορετικούς μαθητές των δύο από τα τρία σχολεία. Η επιπλέον αυτή εξέταση έγινε την εβδομάδα μετά το Πάσχα, πάλι με τη συνεργασία των διδασκόντων, στο σχολείο των μαθητών, είχε διάρκεια μία διδακτική ώρα και συλλέχθηκαν 18 γραπτά.

4.2 Ανάλυση Δεδομένων Έρευνας

4.2.1 Ανάλυση Αρχικής Εξέτασης

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζεται η ανάλυση των 46 γραπτών Α' και Β' μέρους που συλλέχθηκαν κατά την αρχική εξέταση. Στην πρώτη υποενότητα παρουσιάζονται τα στοιχεία που προέκυψαν από την ανάλυση των γραπτών των μαθητών και αφορούν τις ασκήσεις του Α' μέρους, στην επόμενη αυτά που αφορούν τις ασκήσεις του Β' μέρους και στην τρίτη υποενότητα τα στοιχεία που αφορούν την αυτοτελή ανάλυση των γραπτών, όσον αφορά τα ερευνητικά ερωτήματα.

4.2.1.1 Ανάλυση Ασκήσεων Α' Μέρους

Στον επόμενο πίνακα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για τα ερωτήματα της πρώτης άσκησης του Α' μέρους της γραπτής εξέτασης. Οι μαθητές που έδωσαν απαντήσεις ήταν 38 από τους 46, από τους οποίους οι μισοί περίπου έδωσαν και σύντομη δικαιολόγηση, ενώ οι υπόλοιποι 8 δεν έδωσαν καθόλου απαντήσεις. Οι απαντήσεις χαρακτηρίζονται ως σωστές ή λάθος ανεξάρτητα του αν δόθηκε ή όχι δικαιολόγηση.

Θα πρέπει να αναφερθεί ότι στις απαντήσεις τους οι μαθητές είχαν αρκετά λάθη όσον αφορά τα διαστήματα δίνοντας πολλές φορές κλειστό διάστημα εκεί που έπρεπε να μπει ανοικτό ή το αντίθετο. Ως παράδειγμα στο δεύτερο ερώτημα αρκετοί μαθητές έδωσαν ως απάντηση το διάστημα [-3, -2.5] ενώ το σωστό ήταν [-3, -2.5). Αυτό είναι ένα στοιχείο που δείχνει τόσο έλλειψη μαθηματικής αυστηρότητας στις απαντήσεις αλλά και βαθύτερης κατανόησης. Σε κάθε περίπτωση και για όλα τα ερωτήματα οι απαντήσεις των μαθητών θεωρήθηκαν σωστές εφόσον δόθηκε το διάστημα έστω και με λάθος άκρα.

		ΑΡΙΘΜΟΣ ΜΑΘΗΤΩΝ	**ΠΟΣΟΣΤΟ ΣΤΟ ΣΥΝΟΛΟ**	**ΠΟΣΟΣΤΟ ΣΕ ΑΥΤΟΥΣ ΠΟΥ ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ**
	ΣΥΝΟΛΟ	**46**	100,0%	
ΕΡΩΤΗΜΑ 1	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ	35	76,1%	
	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΣΩΣΤΑ (ΤΑ ΔΥΟ ΣΗΜΕΙΑ -2.5 ΚΑΙ -2)	17	37,0%	48,6%
	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΜΟΝΟ ΤΟ ΕΝΑ ΣΗΜΕΙΟ	14	30,4%	40,0%
	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΛΑΘΟΣ (ΚΑΝΕΝΑ ΣΗΜΕΙΟ)	4	8,7%	11,4%
ΕΡΩΤΗΜΑ 2	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ	35	76,1%	
	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΣΩΣΤΑ (ΔΙΑΣΤΗΜΑ ΚΑΙ ΤΑ ΔΥΟ ΣΗΜΕΙΑ)	13	28,3%	37,1%
	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΚΑΠΟΙΑ ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΙ/Η ΤΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ	5	10,9%	14,3%
	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΜΟΝΟ ΤΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ	9	19,6%	25,7%
	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΛΑΘΟΣ (ΚΑΝΕΝΑ ΔΙΑΣΤΗΜΑ-ΣΗΜΕΙΟ)	8	17,4%	22,9%
ΕΡΩΤΗΜΑ 3	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ	35	76,1%	
	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΣΩΣΤΑ (ΜΟΝΟ ΤΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ)	20	43,5%	57,1%
	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΜΟΝΟ ΛΑΘΟΣ ΔΙΑΣΤΗΜΑ	9	19,6%	25,7%
	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΤΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ ΚΑΙ ΛΑΘΟΣ ΔΙΑΣΤΗΜΑ	6	13,0%	17,1%
ΕΡΩΤΗΜΑ 4	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ	38	82,6%	
	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΣΩΣΤΑ (ΟΛΑ ΤΑ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΑ)	18	39,1%	47,4%
	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΜΟΝΟ ΤΑ ΤΡΙΑ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΑ	12	26,1%	31,6%
	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΜΟΝΟ ΤΑ ΔΥΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΑ	8	17,4%	21,1%
ΕΡΩΤΗΜΑ 5	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ	35	76,1%	
	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΣΩΣΤΑ (ΜΟΝΟ ΤΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ)	21	45,7%	60,0%
	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΜΟΝΟ ΛΑΘΟΣ ΔΙΑΣΤΗΜΑ	5	10,9%	14,3%
	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΤΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ ΚΑΙ ΛΑΘΟΣ ΔΙΑΣΤΗΜΑ	9	19,6%	25,7%

Πίνακας 7: Αποτελέσματα ερωτημάτων πρώτης Άσκησης Α' Μέρους

Όσον αφορά το πρώτο ερώτημα θα πρέπει να σημειωθεί ότι η παράγωγος δεν ορίζεται στο σημείο $x = 0$, το οποίο μπήκε για να εξεταστεί αν και πόσοι μαθητές δεν θα αρκεστούν στην οπτική πληροφορία του γραφήματος και θα το εντοπίσουν από τον τύπο της συνάρτησης. Τελικά αυτοί οι μαθητές ήταν μόνο δύο και το σημείο επιλέχθηκε να μην παρουσιαστεί στον πίνακα των αποτελεσμάτων.

Από τον πίνακα βλέπουμε ότι 35 από τους 46 μαθητές απάντησαν στο πρώτο ερώτημα ενώ οι μισοί περίπου από αυτούς που απάντησαν, 17 μαθητές, βρήκαν τα δύο σημεία στα οποία δεν ορίζεται η παράγωγος. Οι 14 από τους υπόλοιπους βρήκαν μόνο το ένα σημείο το οποίο ήταν το $x_1 = -2$, δηλαδή δεν βρήκαν το σημείο $x_2 = -2.5$. Μάλιστα ορισμένοι από αυτούς που δεν βρήκαν το σημείο $x_2 = -2.5$, παρόλο το ότι η περίπτωση είναι ακριβώς η ίδια με αυτή του σημείου $x_1 = -2$, έδωσαν σωστή αιτιολόγηση η οποία είτε είχε τη γεωμετρική ερμηνεία καθώς ανέφεραν: «Η f δε δέχεται στο -2 εφαπτομένη» ή «η γραφική παράσταση παρουσιάζει γωνία», είτε ερμηνεία με διαφορετικό όριο καθώς ανέφεραν «διαφορετικό όριο καθώς το x τείνει στο -2^- και διαφορετικό όταν x τείνει στο -2^+». Πιθανή αιτία ίσως να είναι η πολύ ομαλότερη γωνία που υπάρχει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης σε συνδυασμό και με το ότι και στα δύο βιβλία που διδάσκονται οι μαθητές δίνονται, ως παραδείγματα μη παραγωγίσιμων σε σημείο συναρτήσεων, συναρτήσεις που παρουσιάζουν αρκετά έντονη γωνία. Φαίνεται λοιπόν ότι οι μαθητές διαφοροποιούν τις απαντήσεις ανάλογα με το πόσο έντονη είναι η γωνία στο γράφημα της συνάρτησης. Στην έρευνα των Biza, Christou & Zachariades (2006) καταγράφηκαν μαθητές λυκείου που είτε αποδεχόντουσαν την εφαπτομένη σε γωνία είτε όχι αλλά δεν υπήρχε άσκηση με διαφορετικά έντονες γωνίες ώστε να καταγραφεί κάτι παρόμοιο.

Επίσης 3 μαθητές έβαλαν ότι δεν ορίζεται στο διάστημα [-3, -2.5) ή στο διάστημα (-2.5, -2) χωρίς να το δικαιολογούν. Σε αυτά τα διαστήματα η εφαπτομένη συμπίπτει με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης και οι απαντήσεις των μαθητών συμφωνούν και πάλι με απαντήσεις μαθητών λυκείου που καταγράφονται στα συμπεράσματα της έρευνας των Biza, Christou & Zachariades (2006) όπου σε άσκηση που τους ζητούσε να ζωγραφίσουν την εφαπτομένη σε δοθείσα γραφική παράσταση συνάρτησης, για το διάστημα που ήταν γραμμική απαντούσαν «δεν υπάρχει εφαπτομένη αφού θα ταυτιζόταν με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης». Μάλιστα οι Rivera-Figueroa & Ponce-Campuzano (2013) αναφέρουν το πρόβλημα του να παρουσιάζεται γραφικά η εφαπτομένη μόνο σε καμπύλες, κάτι που γίνεται στα σχολικά βιβλία, και όχι σε πιο σύνθετες περιπτώσεις, καθώς και του να κυριαρχεί στον μαθητή η παλαιότερη εικόνα για την εφαπτομένη, αφού δημιουργεί απροθυμία στους μαθητές να αποδεχτούν την εφαπτομένη σε αυτές τις πιο σύνθετες περιπτώσεις όταν τις συναντήσουν.

Φυσικά στην αξιολόγηση των απαντήσεων του πρώτου ερωτήματος θα πρέπει να ληφθεί υπόψη, όπως ήδη αναφέρθηκε, ότι η διατύπωση του πρώτου ερωτήματος ρωτάει αν υπάρχουν και δεν τα ζητάει ρητά, παρόλο ότι δόθηκαν προφορικά διευκρινήσεις για να δοθούν όλα τα σημεία. Αυτό μπορεί να επηρέασε κάποιους μαθητές οι οποίοι έδωσαν στην απάντηση ως παράδειγμα μόνο ένα σημείο.

Όσον αφορά το δεύτερο ερώτημα βλέπουμε ότι απάντησαν 35 από τους 46 μαθητές. Από αυτούς τους 35 μόνο οι 13 απάντησαν σωστά (και τα δύο σημεία και το διάστημα), οι 9 απάντησαν μόνο το διάστημα, οι 5 απάντησαν μερικώς (ή το διάστημα ή κάποιο σημείο) και οι υπόλοιποι 8 απάντησαν λάθος. Θα πρέπει να αναφερθεί ότι από τους 8 μαθητές που απάντησαν λάθος, οι 5 έγραψαν ότι η παράγωγος μηδενίζεται στο σημείο $x = 0$ χωρίς κάποια δικαιολόγηση. Παρατηρούμε λοιπόν μεγαλύτερη δυσκολία στην εύρεση των σημείων από την εύρεση των διαστημάτων που μηδενίζεται η παράγωγος. Επίσης οι περισσότεροι από τους μαθητές που έκαναν λάθος σε αυτό το ερώτημα έκαναν λάθος και στο συσχετιζόμενο ερώτημα 3 της δεύτερης άσκησης του Α' μέρους.

Στο τρίτο ερώτημα βλέπουμε ότι απάντησαν πάλι 35 από τους 46 μαθητές. Οι 20 από αυτούς τους 35 απάντησαν σωστά (έδωσαν μόνο το συγκεκριμένο διάστημα), ενώ από τους υπόλοιπους 15 οι 6 απάντησαν το διάστημα και κάποιο άλλο λάθος διάστημα και οι άλλοι 9 μόνο λάθος διάστημα. Σημαντικό είναι ότι από τους 15 μαθητές που έδωσαν λάθος διάστημα οι 10 έδωσαν το διάστημα [-3, -2.5), στο οποίο η f είναι σταθερή και διάφορη του 0 ενώ η f' είναι 0, και μάλιστα οι περισσότεροι από αυτούς στο ερώτημα 2 είχαν δώσει στο ίδιο διάστημα ότι η f' ήταν 0. Ίσως αυτό δικαιολογείται, τουλάχιστον για αυτούς που έδωσαν και το σωστό διάστημα, από το ότι δεν πρόσεξαν τον περιορισμό της ερώτησης που ζητούσε να είναι διάφορη του 0. Επίσης οι υπόλοιποι 5 που έδωσαν λάθος διάστημα έδωσαν το διάστημα (0, 2) χωρίς δικαιολόγηση. Οι περισσότεροι μαθητές που έκαναν λάθος σε αυτό το ερώτημα έκαναν λάθος και στο συσχετιζόμενο ερώτημα 4 της δεύτερης άσκησης του Α' μέρους.

Όσον αφορά το τέταρτο ερώτημα βλέπουμε ότι απάντησαν 38 από τους 46 μαθητές. Από αυτούς τους 38 οι 18 απάντησαν όλα τα διαστήματα ενώ από τους υπόλοιπους 20 οι 12 απάντησαν τα τρία μόνο διαστήματα και οι 8 τα δύο μόνο διαστήματα (οι 8 από τους 20). Οι περισσότεροι μαθητές στις απαντήσεις τους δεν ξεχώριζαν τα διαστήματα, δηλαδή απαντούσαν το διάστημα (0, 2), που η συνάρτηση είναι γν. αύξουσα αλλά στο σημείο 1 η f' μηδενίζεται, δείχνοντας ότι στη σκέψη τους ισχύει ότι γν. αύξουσα συνάρτηση είναι ισοδύναμο με θετική παράγωγο της συνάρτησης το οποίο δεν ισχύει και αναφέρεται ρητά στο βιβλίο (σχόλιο σελ. 254 του βιβλίου κατεύθυνσης των Ανδρεαδάκη κ.α. (2015)). Από τους 20 που δεν απάντησαν όλα τα διαστήματα, οι 14 δεν απάντησαν το διάστημα (-1, 0) και οι 8 δεν απάντησαν το διάστημα (-2.5, -2). Και στα δύο αυτά διαστήματα η f είναι γν. αύξουσα αλλά είναι και αρνητική και αυτό φαίνεται να δημιουργεί σύγχυση στους μαθητές που καλούνταν να προσδιορίσουν τα διαστήματα που η f' είναι θετική.

Στο πέμπτο ερώτημα βλέπουμε ότι απάντησαν 35 από τους 46 μαθητές. Από αυτούς τους 35, οι 21 απάντησαν σωστά (μόνο το διάστημα) ενώ από τους υπόλοιπους 14, οι 9 απάντησαν το διάστημα και κάποιο λάθος διάστημα και οι άλλοι 5 απάντησαν μόνο λάθος διάστημα. Είναι πολύ σημαντικό να αναφερθεί ότι και οι 14 αυτοί μαθητές έδωσαν ως λάθος διάστημα το (-1, 0), που είναι αρνητική η f, και μάλιστα ταυτίζονται στην πλειοψηφία τους με τους 14 μαθητές που δεν έδωσαν το διάστημα αυτό ως σωστό στο τέταρτο ερώτημα.

Από τις απαντήσεις στα ερωτήματα 4 και 5 φαίνεται ότι η σχέση μεταξύ αρχικής συνάρτησης και της παραγώγου της όσον αφορά την μονοτονία της συνάρτησης και του προσήμου της παραγώγου της δεν έχει κατανοηθεί από ορισμένους μαθητές οι οποίοι φαίνεται να επηρεάζονται από το πρόσημο της αρχικής συνάρτησης κάτι που δείχνει σε συμφωνία με συμπεράσματα της Park (2012 και 2013) όπου ορισμένοι φοιτητές αμφιταλαντευόντουσαν μεταξύ της σχέσης του προσήμου της παραγώγου της συνάρτησης με την αρχική συνάρτηση και την ομοιότητα των γραφικών τους παραστάσεων.

Οπότε, όσον αφορά το πρώτο ερευνητικό ερώτημα και ειδικότερα τη δυνατότητα των μαθητών να βγάλουν συμπεράσματα για την παράγωγο μίας συνάρτησης (πρόσημο, σταθερή, μηδενική κλπ) από τα δεδομένα της συνάρτησης, βλέπουμε από τις απαντήσεις της πρώτης άσκησης ότι ένα σημαντικό ποσοστό των μαθητών δεν δίνει καθόλου απαντήσεις. Στο σύνολο των μαθητών λίγο περισσότεροι από τους μισούς απαντάνε σχετικά ικανοποιητικά αλλά με την παρουσία, σε αρκετούς από αυτούς, λαθών που δείχνουν έλλειψη βαθύτερης κατανόησης. Τα σημαντικότερα προβλήματα εντοπίζονται στην εύρεση των σημείων που δεν ορίζεται η παράγωγος καθώς και σε αυτά που μηδενίζεται και είναι σταθερή, ενώ αρκετά προβλήματα έχουμε και στην εύρεση του προσήμου της παραγώγου.

Στον επόμενο πίνακα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για τα ερωτήματα της δεύτερης άσκησης του Α’ μέρους της γραπτής εξέτασης. Πρέπει να επισημανθεί ότι σε αυτή την άσκηση οι μαθητές είχαν την πληροφορία της f' μόνο από τη γραφική της παράσταση.

Και σε αυτή την άσκηση βλέπουμε ότι οι μαθητές που έδωσαν απαντήσεις ήταν 38 από τους 46, από τους οποίους και πάλι οι μισοί περίπου έδωσαν και σύντομη δικαιολόγηση, ενώ οι υπόλοιποι 8 δεν έδωσαν καθόλου απαντήσεις. Οι απαντήσεις χαρακτηρίζονται ως σωστές ή λάθος ανεξάρτητα του αν δόθηκε ή όχι δικαιολόγηση. Και στη δεύτερη άσκηση θα πρέπει να αναφερθεί ότι στις απαντήσεις τους οι μαθητές είχαν αρκετά λάθη όσον αφορά τα διαστήματα δίνοντας πολλές φορές κλειστό διάστημα εκεί που έπρεπε να μπει ανοικτό ή το αντίθετο. Ως παράδειγμα στα δύο πρώτα ερωτήματα αρκετοί μαθητές έδιναν ως απάντηση ανοικτά διαστήματα ενώ τα σωστά ήταν κλειστά. Αυτό είναι ένα στοιχείο που δείχνει τόσο έλλειψη μαθηματικής αυστηρότητας στις απαντήσεις αλλά και βαθύτερης κατανόησης αφού οι μαθητές έπρεπε χρησιμοποιώντας ότι η αρχική συνάρτηση είναι συνεχής στα κλειστά, αφού είναι παραγωγίσιμη, να εφαρμόσουν σωστά το θεώρημα της σελ. 253 του βιβλίου κατεύθυνσης των Ανδρεαδάκη κ.α. (2015). Σε κάθε περίπτωση και για όλα τα ερωτήματα οι απαντήσεις των μαθητών θεωρήθηκαν σωστές εφόσον δόθηκε το διάστημα έστω και με λάθος άκρα.

Όσον αφορά το πρώτο ερώτημα βλέπουμε ότι απάντησαν 38 από τους 46 μαθητές. Από αυτούς τους 38 απάντησαν και τα δύο διαστήματα οι 31, ενώ από τους υπόλοιπους 7, οι 3 απάντησαν μόνο το ένα διάστημα και οι 4 μόνο λάθος διάστημα.

Στο δεύτερο ερώτημα βλέπουμε ότι απάντησαν 37 από τους 46 μαθητές. Από αυτούς τους 37 οι 27 απάντησαν και τα τρία διαστήματα ενώ από τους υπόλοιπους 10, οι 5 απάντησαν μόνο τα δύο διαστήματα, ένας απάντησε μόνο ένα διάστημα και 4 απάντησαν μόνο λάθος διάστημα.

Οι μαθητές που δεν απαντούσαν σωστά στο πρώτο ερώτημα δεν έβαζαν συνήθως τα διαστήματα [-0.5, 0] και [2, 2.5] στα οποία ενώ η f είναι συνεχής και f' είναι θετική σε όλα τα εσωτερικά σημεία (άρα η f γν. αύξουσα), η f' είναι συγχρόνως και φθίνουσα. Από τους μαθητές που δεν απάντησαν όλα τα διαστήματα στο δεύτερο ερώτημα, οι 5 δεν έβαλαν το διάστημα [-2.5, -2] και οι 4 δεν έβαλαν το διάστημα [1, 1.5] στα οποία ενώ η f είναι συνεχής και η f' είναι αρνητική σε όλα τα εσωτερικά σημεία (άρα η f γν. φθίνουσα), η f' είναι συγχρόνως είτε σταθερή στο πρώτο διάστημα, είτε αύξουσα στο δεύτερο διάστημα. Οι λάθος αυτές απαντήσεις συμφωνούν με τα συμπεράσματα της Park (2012 και 2013) όπου καταγράφεται ότι η πιο κοινή λάθος αντίληψη για την σχέση της συνάρτησης $f(x)$ με την παράγωγό της $f'(x)$, είναι ότι η $f'(x)$ αυξάνεται/μειώνεται αν και μόνο αν η $f(x)$ αυξάνεται/μειώνεται.

		ΑΡΙΘΜΟΣ ΜΑΘΗΤΩΝ	ΠΟΣΟΣΤΟ ΣΤΟ ΣΥΝΟΛΟ	ΠΟΣΟΣΤΟ ΣΕ ΑΥΤΟΥΣ ΠΟΥ ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ
	ΣΥΝΟΛΟ	**46**	100,0%	
ΕΡΩΤΗΜΑ 1	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ	38	82,6%	
	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΣΩΣΤΑ (ΚΑΙ ΤΑ ΔΥΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΑ)	31	67,4%	81,6%
	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΕΝΑ ΜΟΝΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ	3	6,5%	7,9%
	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΛΑΘΟΣ (ΚΑΝΕΝΑ ΔΙΑΣΤΗΜΑ)	4	8,7%	10,5%
ΕΡΩΤΗΜΑ 2	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ	37	80,4%	
	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΣΩΣΤΑ (ΚΑΙ ΤΑ ΤΡΙΑ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΑ)	27	58,7%	73,0%
	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΔΥΟ ΜΟΝΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΑ	5	10,9%	13,5%
	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΕΝΑ ΜΟΝΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ	1	2,2%	2,7%
	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΛΑΘΟΣ (ΚΑΝΕΝΑ ΔΙΑΣΤΗΜΑ)	4	8,7%	10,8%
ΕΡΩΤΗΜΑ 3	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ	33	71,7%	
	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΣΩΣΤΑ (ΜΟΝΟ ΤΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ)	13	28,3%	39,4%
	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΤΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ ΚΑΙ ΛΑΘΟΣ ΔΙΑΣΤΗΜΑ	15	32,6%	45,5%
	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΛΑΘΟΣ (ΜΟΝΟ ΛΑΘΟΣ ΔΙΑΣΤΗΜΑ)	5	10,9%	15,2%
ΕΡΩΤΗΜΑ 4	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ	29	63,0%	
	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΣΩΣΤΑ (ΜΟΝΟ ΤΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ)	6	13,0%	20,7%
	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΤΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ ΚΑΙ ΛΑΘΟΣ ΔΙΑΣΤΗΜΑ	10	21,7%	34,5%
	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΛΑΘΟΣ (ΜΟΝΟ ΛΑΘΟΣ ΔΙΑΣΤΗΜΑ)	13	28,3%	44,8%
ΕΡΩΤΗΜΑ 5	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ	32	69,6%	
	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΣΩΣΤΑ (ΤΟ ΣΗΜΕΙΟ 2.5)	16	34,8%	50,0%
	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΛΑΘΟΣ	16	34,8%	50,0%
ΕΡΩΤΗΜΑ 6	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ	31	67,4%	
	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΣΩΣΤΑ (ΤΑ ΣΗΜΕΙΑ -1.5 ΚΑΙ 1.5)	14	30,4%	45,2%
	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΜΟΝΟ ΤΟ ΈΝΑ ΑΠΌ ΤΑ ΔΥΟ ΣΗΜΕΙΑ	3	6,5%	9,6%
	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΛΑΘΟΣ	14	30,4%	45,2%

Πίνακας 8: Αποτελέσματα ερωτημάτων δεύτερης Άσκησης Α' Μέρους

Στο τρίτο ερώτημα βλέπουμε ότι απάντησαν 33 από τους 46 μαθητές. Από αυτούς τους 33 μόνο οι 13 απάντησαν το σωστό διάστημα και μόνο αυτό, ενώ από τους υπόλοιπους 20, οι

15 απάντησαν το σωστό διάστημα και κάποιο άλλο λάθος και οι 5 απάντησαν μόνο λάθος διάστημα (5 από τους 20). Από τους 20 μαθητές που έβαλαν λάθος διάστημα, οι 17 έβαλαν το διάστημα [-2.5, -2] ενώ πολλοί από αυτούς δικαιολογούσαν σωστά την απάντησή τους. Φαίνεται ότι επειδή η f' είναι σταθερή σε αυτό το διάστημα μπερδευόντουσαν και είτε τη θεωρούσαν 0 (και άρα την f σταθερή) είτε θεωρούσαν ότι έβλεπαν στο γράφημα την f. Οι λάθος απαντήσεις δείχνουν σε συμφωνία με τις παρατηρήσεις, που καταγράφονται από τους Judson & Nishimori (2005), ότι πολλοί μαθητές λυκείου έδειξαν να δυσκολεύονται στην κατανόηση των συναρτήσεων, ακόμα και των σταθερών και να δυσκολεύονται να συνδέσουν το ότι σταθερή συνάρτηση είναι αυτή που η παράγωγός της είναι 0 καθώς και το ότι μία συνάρτηση μπορεί να είναι σταθερή τοπικά μόνο.

Στο τέταρτο ερώτημα βλέπουμε ότι απάντησαν 29 από τους 46 μαθητές. Από αυτούς τους 29 μόνο οι 6 απάντησαν το σωστό διάστημα και μόνο αυτό, ενώ από τους υπόλοιπους 23, οι 10 απάντησαν το σωστό διάστημα και κάποιο άλλο λάθος διάστημα και οι 13 απάντησαν μόνο λάθος διάστημα. Από τους μαθητές που έβαλαν λάθος διάστημα υπήρχαν 8 μαθητές που έβαλαν το διάστημα (0, 0.5), οι οποίοι είχαν καλή γενική εικόνα, που μάλλον οφείλεται στο ότι ίσως δεν πρόσεξαν το περιορισμό $\alpha \neq 0$. Επίσης υπήρχαν και 6 μαθητές που έβαλαν το διάστημα (-2, 0) ή/και το διάστημα (0.5, 1) στο οποίο η f' είναι γραμμική που μπορεί να οφείλεται σε σύγχυση που δημιουργείται κατά το πέρασμα από την πληροφορία της f' στην πληροφορία f ή σε μπέρδεμα της f με την f'. Το τέταρτο αυτό ερώτημα είναι σε αντιστοιχία με το τρίτο ερώτημα της πρώτης άσκησης που και σε αυτό παρουσιάστηκαν αρκετά προβλήματα και στην μεγάλη πλειοψηφία τους οι ίδιοι μαθητές έκαναν λάθος και στα δύο αυτά ερωτήματα. Πρέπει να αναφέρουμε ότι τα ερωτήματα αυτά διαφέρουν από τα τυπικά ερωτήματα που γίνονται στο σχολείο, όπου συνήθως ζητείται το διάστημα που είναι σταθερή η αρχική συνάρτηση, αφού απαιτούν από το μαθητή να σκεφτεί και να αντιστρέψει ή και να συνδυάσει διαδικασίες που έχει μάθει.

Το πέμπτο και το έκτο ερώτημα αφορούσε την εύρεση ακροτάτων της f από την πληροφορία της f'. Σε αυτά τα ερωτήματα πρέπει να αναφερθεί ότι από το γράφημα που δόθηκε στους μαθητές όλα τα σημεία του διαστήματος (0, 0.5) είναι τοπικά μέγιστα και ελάχιστα (αφού η f' είναι 0 και άρα η f είναι σταθερή) σύμφωνα με τον ορισμό του βιβλίου της κατεύθυνσης. Επίσης τα σημεία $x_1 = 0$ και $x_2 = 0.5$ είναι τοπικά μέγιστα αλλά δεν εφαρμόζεται η ακριβής μεθοδολογία που μαθαίνουν οι μαθητές (εναλλαγή προσήμου της παραγώγου, θεώρημα σελ. 262 του βιβλίου κατεύθυνσης των Ανδρεαδάκη κ.α. (2015)) και απαιτείται βαθύτερη κατανόηση της πληροφορίας που δίνει η παράγωγος ή χρήση των ορισμών τοπικών ακροτάτων (παράγρ. 2.7 του βιβλίου κατεύθυνσης των Ανδρεαδάκη κ.α. (2015)). Τέλος το αριστερό άκρο του πεδίου ορισμού, το σημείο $x_3 = -2.5$, είναι τοπικό μέγιστο και το δεξιό άκρο του πεδίου ορισμού, το σημείο $x_4 = 3$, είναι τοπικό ελάχιστο. Οπότε ουσιαστικά το διάστημα (0, 0.5) μπορούσαν να το βρουν μόνο οι μαθητές που θα εφάρμοζαν τον ορισμό των ακροτάτων και τα σημεία $x_1 = 0$ και $x_2 = 0.5$ αλλά και τα άκρα του πεδίου ορισμού μπορούσαν να τα βρουν μόνο οι μαθητές που είτε θα εφάρμοζαν πάλι τον ορισμό των ακροτάτων ή θα είχαν βαθύτερη κατανόηση της πληροφορίας που δίνει η παράγωγος. Έτσι π.χ. για το σημείο $x_1 = 0$ έχουμε την παράγωγο 0 και στο διάστημα αριστερά του σημείου θετική, άρα την αρχική συνάρτηση γν. αύξουσα, ενώ δεξιά του σημείου 0, άρα την αρχική συνάρτηση σταθερή, οπότε τοπικό μέγιστο.

Στο πέμπτο ερώτημα κανένας μαθητής δεν έκανε αναφορά στο αριστερό άκρο του διαστήματος, στο σημείο $x_3 = -2.5$, ενώ στο έκτο ερώτημα μόνο 3 μαθητές έκαναν αναφορά στο δεξιό άκρο του διαστήματος, στο σημείο $x_4 = 3$. Επίσης μόνο ένας μαθητής απάντησε στο πέμπτο και έκτο ερώτημα σωστά σε όλα τα άλλα σημεία, συμπεριλαμβανομένων των σημείων του διαστήματος [0, 0.5] αλλά όχι των άκρων του πεδίου ορισμού. Αυτό δείχνει ότι οι μαθητές λειτουργούν κυρίως με κανόνες (εκτελούν ενέργειες) και δεν έχουν βαθύτερη κατανόηση της σχέσης της συνάρτησης με την παράγωγό της. Μάλιστα οι Rivera-Figueroa & Ponce-Campuzano (2013) αναφέρουν ότι δημιουργείται η διαίσθηση του ότι το κριτήριο της πρώτης παραγώγου για προσδιορισμό των ακροτάτων (αλλαγή προσήμου δεξιά και αριστερά από το σημείο που μηδενίζεται η f') είναι αναγκαίο ενώ είναι μόνο ικανό. Και πράγματι στο βιβλίο της κατεύθυνσης των Ανδρεαδάκη κ.α. (2015) στο θεώρημα για το κριτήριο της πρώτης παραγώγου για προσδιορισμό των ακροτάτων (σελ. 262) δεν γίνεται κάποιο σαφή σχόλιο που να διευκρινίζει τη μη αναγκαιότητα, όπως γίνεται για την περίπτωση του θεωρήματος για την εύρεση της μονοτονίας (σελ. 253).

Οπότε στα αποτελέσματα που φαίνονται στον πίνακα δεν περιλήφθηκε καθόλου το διάστημα [0, 0.5] καθώς και τα άκρα του πεδίου ορισμού και η σωστή απάντηση που αναφέρεται περιλαμβάνει για το πέμπτο ερώτημα το σημείο (2.5, 0) και για το έκτο τα σημεία (-1.5, 0) και (1.5, 0) τα οποία προκύπτουν όλα με τη μεθοδολογία που επικρατεί στη διδασκαλία του σχολείου.

Στο πέμπτο λοιπόν ερώτημα βλέπουμε ότι απάντησαν 32 από τους 46 μαθητές. Από αυτούς τους 32 μόνο οι 16 απάντησαν το σωστό σημείο και οι υπόλοιποι 16 απάντησαν λάθος σημείο. Είναι σημαντικό να αναφερθεί ότι από τους 16 που απάντησαν λάθος σημείο, 12 έδωσαν ως τοπικό μέγιστο το σημείο $x_1 = -0.5$ και 10 το σημείο $x_1 = 2$ που είναι τοπικά μέγιστα της f' και όχι της f. Είναι πιθανό ορισμένες από αυτές τις λάθος απαντήσεις να οφείλονται σε μπέρδεμα της f με την f', αν και οι ίδιοι μαθητές απαντάνε σωστά σε προηγούμενα ερωτήματα της ίδιας άσκησης, ή σε σύγχυση για την ομοιότητα που πρέπει να έχει η f με την f' όπως καταγράφεται από την Park (2012 και 2013).

Στο έκτο ερώτημα βλέπουμε ότι απάντησαν 31 από τους 46 μαθητές. Από αυτούς τους 31 μόνο οι 14 απάντησαν και τα δύο σωστά σημεία, οι 3 απάντησαν μόνο το ένα σωστό σημείο και οι υπόλοιποι 14 απάντησαν λάθος σημείο. Είναι σημαντικό να αναφερθεί ότι και σε αυτό το ερώτημα, όπως και στο πέμπτο, από τους 14 που απάντησαν λάθος σημείο οι 12 έδωσαν ως τοπικό ελάχιστο ένα από τα σημεία $x = -2$, $x = 1$ που είναι τοπικά ελάχιστα της f' και όχι της f. Οι λόγοι πρέπει να είναι παρόμοιοι με αυτούς του πέμπτου ερωτήματος αφού στη μεγάλη πλειοψηφία τους οι μαθητές ταυτίζονται στα δύο ερωτήματα αν και υπάρχουν μαθητές που απαντάνε σωστά στο πέμπτο ερώτημα και λάθος ή μερικώς λάθος στο έκτο ερώτημα.

Οπότε, όσον αφορά το πρώτο ερευνητικό ερώτημα και ειδικότερα τη δυνατότητα των μαθητών να βγάλουν συμπεράσματα για την συνάρτηση (μονοτονία, σταθερή, ακρότατα κλπ) από τα δεδομένα της παραγώγου, για την οποία είχαν την πληροφορία από τη γραφική της παράσταση, βλέπουμε από ότι τα αποτελέσματα παρουσιάζουν λίγο χειρότερη εικόνα από αυτά της πρώτης άσκησης. Δηλαδή και εδώ έχουμε ένα σημαντικό ποσοστό που δεν δίνει καθόλου απαντήσεις και στο σύνολο των μαθητών έχουμε λιγότερους από τους μισούς να δίνουν σχετικά ικανοποιητικές απαντήσεις, με την παρουσία και πάλι, σε αρκετούς από αυτούς, λαθών που δείχνουν έλλειψη βαθύτερης κατανόησης. Εδώ τα σημαντικότερα προβλήματα εντοπίζονται στα ακρότατα, δηλαδή στα ερωτήματα 5 και 6, καθώς και στο τέταρτο ερώτημα που διαφοροποιείται από τις τυπικές ασκήσεις του σχολείου, που παρουσιάζονται πολλά λάθη και σωστές απαντήσεις δίνονται από περίπου το ένα τρίτο του συνόλου των μαθητών. Επίσης παρουσιάζεται και ένας αριθμός περιπτώσεων που δηλώνουν σύγχυση των μαθητών όσον αφορά της διάκριση της συνάρτησης από την παράγωγο της και της σχέσης μεταξύ τους και οι οποίες δείχνουν να βρίσκονται σε συμφωνία με περιπτώσεις που αναφέρει στην έρευνά της η Park (2012 και 2013) όπου οι φοιτητές δείχνουν να αμφιταλαντεύονται μεταξύ της σχέσης του προσήμου της παραγώγου της συνάρτησης με την αρχική συνάρτηση και την ομοιότητα των γραφικών τους παραστάσεων. Φυσικά πρέπει να αναφερθεί και το ενδεχόμενο να μην ήταν αρκετή για πολλούς μαθητές η πληροφορία μόνο της γραφικής παράστασης που είχαν για να απαντήσουν σωστά. Ο Maharaj (2013) αναφέρει ότι ένα μικρό ποσοστό φοιτητών είχε το απαραίτητο σχήμα, σε επίπεδο ενεργειών και διαδικασιών, ώστε να βγάλει συμπεράσματα από τη γραφική παράσταση της παραγώγου για την αρχική συνάρτηση. Επίσης οι Asiala, Cottrill, Dubinsky & Schwingendorf (1997) κατά τη μελέτη της γραφικής κατανόησης της συνάρτησης και της παραγώγου της, παρατηρούν ότι ορισμένοι φοιτητές χρειάζονται τον τύπο της συνάρτησης και δεν τους αρκεί η γραφική παράσταση για να απαντήσουν.

Είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι παρατηρούμε παρόμοια αποτελέσματα σε συσχετιζόμενα ερωτήματα μεταξύ των δύο ασκήσεων του Α’ μέρους. Έτσι καλύτερα αποτελέσματα είχαμε στα ερωτήματα 4 και 5 της πρώτης άσκησης καθώς και στα συσχετιζόμενα με αυτά ερωτήματά 1 και 2 της δεύτερης άσκησης. Επίσης σχετικά καλά αποτελέσματα είχαμε στο ερώτημα 2 της πρώτης άσκησης, μόνο όσον αφορά το διάστημα, καθώς και στο συσχετιζόμενο με αυτό ερώτημα 3 της δεύτερης άσκησης. Τέλος σημαντικά προβλήματα παρουσιάστηκαν στο ερώτημα 2 της πρώτης άσκησης, όσον αφορά τα μεμονωμένα σημεία, καθώς και στα συσχετιζόμενα με αυτό ερωτήματα 5 και 6 της δεύτερης άσκησης. Επίσης βλέπουμε ότι, στη μεγάλη πλειοψηφία τους, οι ίδιοι μαθητές που κάνουν λάθος σε κάποιο ερώτημα της πρώτης άσκησης είναι αυτοί που κάνουν λάθος και στα συσχετιζόμενα ερωτήματα της δεύτερης άσκησης.

4.2.1.2 Ανάλυση Ασκήσεων Β’ Μέρους

Στον επόμενο πίνακα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για τα ερωτήματα της πρώτης άσκησης του Β’ μέρους της γραπτής εξέτασης. Όπως φαίνεται και από τον πίνακα οι απαντήσεις που δόθηκαν είναι πολύ περιορισμένες σε σχέση με το Α’ μέρος, έτσι οι μαθητές που έδωσαν απαντήσεις ήταν 24 από τους 46 ενώ οι υπόλοιποι 22 δεν έδωσαν.

Όσον αφορά το πρώτο ερώτημα βλέπουμε ότι απάντησαν 22 από τους 46 μαθητές. Από αυτούς τους 22 μόνο 8 απάντησαν διατυπώνοντας ότι είναι η μέση ταχύτητα στο συγκεκριμένο διάστημα, ενώ οι 7 έγραψαν ότι είναι η ταχύτητα και μάλιστα πολλοί από αυτούς δεν έβαλαν καθόλου το διάστημα ή έβαλαν λάθος διάστημα. Ενδεικτικές διατυπώσεις που χρησιμοποίησαν είναι: «ο ρυθμός μεταβολής της θέσης του αυτοκινήτου (η ταχύτητά του) από το 10 έως και το 20 s», «ο ρυθμός μεταβολής της θέσης του το χρονικό διάστημα από 0 sec έως 10 sec», «ρυθμός μεταβολής της θέσης του». Οι υπόλοιποι 7 απάντησαν λάθος με δύο από αυτούς να αναφέρουν ότι είναι το Θεώρημα Μέσης Τιμής.

		ΑΡΙΘΜΟΣ ΜΑΘΗΤΩΝ	ΠΟΣΟΣΤΟ ΣΤΟ ΣΥΝΟΛΟ	ΠΟΣΟΣΤΟ ΣΕ ΑΥΤΟΥΣ ΠΟΥ ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ
	ΣΥΝΟΛΟ	**46**	100,0%	
ΕΡΩΤΗΜΑ 1	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ	22	47,8%	
	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΣΩΣΤΑ	8	17,4%	36,4%
	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΓΡΑΦΟΝΤΑΣ ΤΑΧΥΤΗΤΑ	7	15,2%	31,8%
	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΛΑΘΟΣ	7	15,2%	31,8%
ΕΡΩΤΗΜΑ 2	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ	21	45,7%	
	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΣΩΣΤΑ ΜΕ ΜΟΝΑΔΕΣ	15	32,6%	71,4%
	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΣΩΣΤΑ ΧΩΡΙΣ ΜΟΝΑΔΕΣ	3	6,5%	14,3%
	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΛΑΘΟΣ	3	6,5%	14,3%
ΕΡΩΤΗΜΑ 3	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ	20	43,5%	
	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΣΩΣΤΑ ΤΟ ΠΡΩΤΟ ΜΕΡΟΣ (ΤΑΧΥΤΗΤΑ ΜΗΔΕΝΙΖΕΤΑΙ)	15	32,6%	75,0%
	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΣΩΣΤΑ ΚΑΙ ΤΟ ΔΕΥΤΕΡΟ ΜΕΡΟΣ (ΠΙΘΑΝΑ ΑΚΡΟΤΑΤΑ)	11	24,0%	55,0%
	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΛΑΘΟΣ	5	10,9%	25,0%
ΕΡΩΤΗΜΑ 4	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ	16	34,8%	
	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΌΤΙ ΡΥΘΜΟΣ ΚΑΤΑΝΑΛΩΣΗΣ ΘΕΤΙΚΟΣ	11	23,9%	68,8%
	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΚΑΙ ΌΤΙ Η ΚΑΤΑΝΑΛΩΣΗ ΓΝ. ΑΥΞΟΥΣΑ	9	19,6%	56,3%
	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΛΑΘΟΣ	5	10,9%	31,3%
ΕΡΩΤΗΜΑ 5	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ	15	32,6%	
	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΣΩΣΤΑ (ΒΡΗΚΑΝ ΤΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ)	7	15,2%	46,7%
	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΤΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ (ΧΩΡΙΣ ΔΙΑΣΤΗΜΑ Ή ΛΑΘΟΣ)	4	8,7%	26,7%
	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΛΑΘΟΣ	4	8,7%	26,7%
ΕΡΩΤΗΜΑ 6	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ	15	32,6%	
	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΣΩΣΤΑ	10	21,7%	66,7%
	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΛΑΘΟΣ ΑΛΛΑ ΜΕ ΤΗ ΣΩΣΤΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ	2	4,3%	13,3%
	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΛΑΘΟΣ	3	6,5%	20,0%

Πίνακας 9: Αποτελέσματα ερωτημάτων πρώτης Άσκησης Β' Μέρους

Στο δεύτερο ερώτημα απάντησαν 21 από τους 46 μαθητές με τους 18 από αυτούς να δίνουν σωστή απάντηση.

Στο τρίτο ερώτημα απάντησαν 20 από τους 46 μαθητές με τους 15 από αυτούς να αναφέρουν ότι η ταχύτητα μηδενίζεται τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή. Όμως οι 11 από αυτούς τους 15 δεν έδωσαν απάντηση στο δεύτερο σκέλος της ερώτησης που ρωτούσε τι πιθανόν συμβαίνει όσον αφορά τη θέση αυτού του σημείου, δηλαδή δεν ανέφεραν ότι τα σημεία αυτά είναι σημεία πιθανών ακροτάτων για τη θέση του κινητού. Οι 4 που το ανέφεραν χρησιμοποίησαν διατυπώσεις όπως: «στα σημεία αυτά η θέση μπορεί να παραμένει σταθερή ή να αλλάζει πρόσημο ή να είναι μέγιστη ή ελάχιστη», «βρίσκεται σε ακραία θέση», «πιθανόν αλλάζει φορά». Οι υπόλοιποι 5 μαθητές απάντησαν λάθος.

Στο τέταρτο ερώτημα απάντησαν 16 από τους 46 μαθητές. Οι 11 από τους 16 απάντησαν σωστά αναφέροντας ότι ο ρυθμός μεταβολής της κατανάλωσης είναι θετικός με τους 9 από αυτούς να απαντάνε σωστά και στο δεύτερο μέρος, που ρωτάει για τα συμπεράσματα που αφορούν την κατανάλωση, αναφέροντας ότι η κατανάλωση αυξάνεται.

Στο πέμπτο ερώτημα απάντησαν 15 από τους 46 μαθητές με τους 7 από αυτούς να βρίσκουν το σωστό διάστημα εφαρμόζοντας τη διαδικασία, τους 4 να αναφέρουν μόνο τη διαδικασία ή να την εφαρμόζουν με λάθος αποτέλεσμα και τους υπόλοιπους 4 να απαντάνε λάθος.

Στο έκτο ερώτημα απάντησαν πάλι 15 από τους 46 μαθητές με τους 10 από αυτούς να βρίσκουν το σωστό σημείο αλλά μόνο οι 8 από αυτούς εφάρμοσαν τη διαδικασία μέσω της παραγώγου αφού οι υπόλοιποι 2 την έλυσαν μέσω του τύπου της κατανάλωσης ζητώντας το σημείο που μηδενίζεται η ταχύτητα. Από τους υπόλοιπους 5 που απάντησαν λάθος, οι 2 εφάρμοσαν τη σωστή διαδικασία αλλά έκαναν λάθος στην παραγώγιση της σύνθετης συνάρτησης της κατανάλωσης. Ο Maharaj (2013) αναφέρει ότι σημαντικό ποσοστό μαθητών παρουσιάζει δυσκολίες στην εφαρμογή του κανόνα της αλυσίδας. Σχεδόν όλοι οι μαθητές που εφάρμοσαν σωστά τη διαδικασία σε αυτό το ερώτημα είχαν απαντήσει σωστά και στο ερώτημα 3.

Πρέπει να τονισθεί ότι τα ερωτήματα 5 και 6 αυτής της άσκησης είναι τυπικά ερωτήματα που περιέχονται στο βιβλίο των μαθητών. Επίσης είναι σημαντικό να αναφερθεί ότι κάποιοι μαθητές πριν απαντήσουν στα ερωτήματα 1, 2, 3 και 4 προσπάθησαν να κάνουν υπολογισμούς, οι οποίοι δεν χρειάζονταν για να δοθεί απάντηση, κάτι το οποίο δηλώνει την έλλειψη βαθύτερης κατανόησης της έννοιας της παραγώγου και της σημασίας της για το πεδίο του προβλήματος. Στις περισσότερες από αυτές τις περιπτώσεις οι μαθητές κατέληξαν σε λάθος απάντηση.

Οπότε, όσον αφορά το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα, δηλαδή αν μπορούν οι μαθητές, με δεδομένη την εκφώνηση του προβλήματος να συσχετίσουν έννοιες και αντικείμενα από το πεδίο του προβλήματος με έννοιες και αντικείμενα του μαθηματικού πεδίου και το αντίστροφο και να κάνουν τους απαραίτητους υπολογισμούς, βλέπουμε από τις απαντήσεις στα ερωτήματα της πρώτης άσκησης ότι παρουσιάζονται σημαντικά προβλήματα. Καταρχήν ο μικρός αριθμός των απαντήσεων δηλώνει ότι αρκετοί από τους μαθητές που δεν απάντησαν βρήκαν τα ερωτήματα δύσκολα ή δυσνόητα. Από αυτούς που απάντησαν παρουσιάστηκαν αρκετά προβλήματα στο να απαντήσουν τι σημαίνουν στο πεδίο του προβλήματος συγκεκριμένα μαθηματικά αντικείμενα ή έννοιες, όπως φαίνεται από το ερώτημα 1 αλλά και από το δεύτερο μέρος του ερωτήματος 3 και λιγότερο από το δεύτερο μέρος του ερωτήματος 4. Όμως προβλήματα παρουσιάστηκαν και όταν, με δεδομένη την ερώτηση στο πεδίο του προβλήματος, κλήθηκαν να επιλέξουν την κατάλληλη μαθηματική μέθοδο και να κάνουν τους απαραίτητους υπολογισμούς όπως φαίνεται από τις απαντήσεις στα τυπικά ερωτήματα 5 και 6. Επίσης η χρήση άλλων προσεγγίσεων επίλυσης από ορισμένους μαθητές συμφωνούν με τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται από τον Lithner (2000) όπου αναφέρεται ότι οι φοιτητές εστιάζουν, κατά την επίλυση προβλημάτων, πολύ περισσότερο σε ότι τους είναι οικείο και θυμούνται από προηγούμενα προβλήματα και πολύ λιγότερο στις μαθηματικές ιδιότητες που απαιτούνται για την επίλυση του προβλήματος όπως οι ιδιότητες και εφαρμογές της παραγώγου στα προβλήματα που απαιτούν τη χρήση της. Όλα αυτά δείχνουν ότι λίγοι μαθητές έχουν αναπτύξει τις απαραίτητες γνωστικές δομές σε επίπεδο ενεργειών, διαδικασιών και αντικειμένων για να απαντήσουν θετικά στο δεύτερο ερευνητικό ερώτημα.

Στον επόμενο πίνακα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για τα ερωτήματα της δεύτερης άσκησης του Β’ μέρους της γραπτής εξέτασης. Όπως φαίνεται και από τον πίνακα οι απαντήσεις που δόθηκαν είναι αρκετά λιγότερες από αυτές στην πρώτη άσκηση, έτσι οι μαθητές που έδωσαν απαντήσεις ήταν 14 από τους 46 ενώ οι υπόλοιποι 32 δεν έδωσαν. Μάλιστα στην ανάλυση των αποτελεσμάτων θα πρέπει να ληφθεί υπόψη ότι πριν τα ερωτήματα αυτά είχε πραγματοποιηθεί το Α’ μέρος και η πρώτη άσκηση του Β’ μέρους που έπρεπε να λειτουργήσει ως οδηγός στους μαθητές για το τι έπρεπε να χρησιμοποιήσουν για την επίλυση τους.

		ΑΡΙΘΜΟΣ ΜΑΘΗΤΩΝ	ΠΟΣΟΣΤΟ ΣΤΟ ΣΥΝΟΛΟ	ΠΟΣΟΣΤΟ ΣΕ ΑΥΤΟΥΣ ΠΟΥ ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ
	ΣΥΝΟΛΟ	**46**	100,0%	
ΕΡΩΤΗΜΑ 1	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ	12	26,1%	
	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΣΩΣΤΑ ΠΛΗΡΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ	3	6,5%	25,0%
	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΣΩΣΤΑ ΜΟΝΟ ΕΛΕΓΧΟ ΤΟΥ Κ'(Χ)=0	4	8,7%	33,3%
	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΛΑΘΟΣ	5	10,9%	41,7%
ΕΡΩΤΗΜΑ 2	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ	12	26,1%	
	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΣΩΣΤΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ	10	21,7%	83,3%
	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΛΑΘΟΣ	2	4,3%	16,7%
ΕΡΩΤΗΜΑ 3	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ	10	21,7%	
	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΣΩΣΤΑ	3	6,5%	30,0%
	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΛΑΘΟΣ	7	15,2%	70,0%

Πίνακας 10: Αποτελέσματα ερωτημάτων δεύτερης Άσκησης Β' Μέρους

Στο πρώτο ερώτημα βλέπουμε ότι απάντησαν 12 από τους 46 μαθητές. Από αυτούς τους 12 μόνο οι 3 απάντησαν διατυπώνοντας τη σωστή πλήρη διαδικασία, ενώ 4 διατύπωσαν μόνο ότι θα έλυναν την εξίσωση $K'(x) = 0$ χωρίς να δώσουν την υπόλοιπη διαδικασία. Οι 7 αυτοί μαθητές ήταν από τους 10 μαθητές που είχαν χρησιμοποιήσει την ίδια διαδικασία στο συσχετιζόμενο ερώτημα 6 της πρώτης άσκησης, δηλαδή οι 3 μαθητές που είχαν κάνει τη διαδικασία στο ερώτημα 6 της πρώτης άσκησης δεν την έδωσαν σε αυτό το ερώτημα. Από τους υπόλοιπους 5, που διατύπωσαν λάθος διαδικασία, οι 2 διατύπωσαν ότι θα βρουν που έχουμε $K'(x) < 0$ και οι άλλοι 3 διατύπωσαν ότι θα υπολόγιζαν τη διαφορά $K(x) - E(x)$ ή κάτι που έχει σχέση με αυτή τη διαφορά. Φυσικά πρέπει να αναφερθεί ότι κανένας μαθητής δεν διατύπωσε την πλήρη διαδικασία προσδιορισμού ακροτάτων όπως αυτή αναφέρεται στο σχόλιο της ενότητας 2.7 του βιβλίου της κατεύθυνσης, δηλαδή ότι θα πρέπει να ελεγχθούν τα άκρα των διαστημάτων και τα σημεία που η παράγωγος δεν ορίζεται.

Στο δεύτερο ερώτημα απάντησαν πάλι 12 από τους 46 μαθητές. Από αυτούς τους 12 οι 10 απάντησαν διατυπώνοντας τη σωστή διαδικασία, η οποία όμως ήταν πολύ απλούστερη και άμεση από την ζητούμενη διαδικασία του πρώτου ερωτήματος, ενώ 2 διατύπωσαν λάθος διαδικασία που αναφερόταν στη σχέση του $K(x)$ με το $E(x)$ όπως και στο πρώτο ερώτημα. Οι 10 μαθητές που διατύπωσαν την σωστή διαδικασία ήταν από τους μαθητές που είχαν απαντήσει σωστά και στα συσχετιζόμενα ερωτήματα 4 και 5 της πρώτης άσκησης.

Στο τρίτο ερώτημα απάντησαν 10 από τους 46 μαθητές. Από αυτούς τους 10 οι 3 απάντησαν σωστά ενώ οι 7 απάντησαν λάθος. Από τους 7 που απάντησαν λάθος οι περισσότεροι απάντησαν σωστά ότι είναι λάθος η εκτίμηση αλλά η δικαιολόγηση τους ήταν λανθασμένη και σε αρκετές περιπτώσεις προσέγγισαν το πρόβλημα προσπαθώντας να βρουν αναλογία μεταξύ των ποσών (κιλά και κόστος/κιλό). Από τις απαντήσεις στο ερώτημα 3 βλέπουμε ότι ελάχιστοι μαθητές έχουν κατανοήσει ουσιαστικά τη σημασία της έννοιας της παραγώγου σε ένα σημείο και την πληροφορία που μπορεί να σου παρέχει στο αντίστοιχο πεδίο του προβλήματος όταν το πρόβλημα αυτό είναι σε αρκετά αφηρημένο επίπεδο ώστε να μην μπορούν να προχωρήσουν άμεσα σε υπολογισμούς που θα τους βοηθήσουν. Το συμπέρασμα αυτό συμφωνεί με την έρευνα της Tyne (2015) όπου η μεγάλη πλειοψηφία των φοιτητών δεν μπόρεσε να ερμηνεύσει σωστά την κλίση και την παράγωγο στο πεδίο του προβλήματος καθώς και να κρίνει αν είναι σωστές ή όχι δοθείσες ερμηνείες και μάλιστα ανιχνεύτηκε, σε ορισμένους φοιτητές, παρόμοια ερμηνεία του στιγμιαίου ρυθμού, με αυτή που έδωσαν κάποιοι στο ερώτημα 3, ως «αναλογία των συνολικών μεγεθών». Επίσης συμφωνεί και με τα αποτελέσματα της έρευνας της Park (2012, 2013) όπου σε προβλήματα που ζητούνταν η σημασία της τιμής της παραγώγου σε ένα σημείο για το πεδίο του προβλήματος, πολλοί φοιτητές μπέρδευαν την τιμή της παραγώγου σε σημείο με την τιμή της συνάρτησης στο σημείο αυτό, δεν ξεχώριζαν την $f'(\alpha)$, ως ρυθμό μεταβολής της $f(x)$, από τη μεταβολή στην $f(x)$ από το $x = \alpha$ στο $x = \alpha + 1$ και τους δυσκόλευε ο προσδιορισμός της ανεξάρτητης μεταβλητής της παραγώγου.

Οπότε, όσον αφορά το τρίτο ερευνητικό ερώτημα, δηλαδή αν μπορούν οι μαθητές, με δεδομένη την εκφώνηση του προβλήματος, σε ένα σχετικά αφηρημένο επίπεδο χωρίς να τους δίνεται συγκεκριμένη συνάρτηση, να αντιληφθούν ότι δέχεται επίλυση μέσω των εφαρμογών της παραγώγου και να ανακαλέσουν και να διατυπώσουν την κατάλληλη διαδικασία, στα απαραίτητα αντικείμενα, για την επίλυσή του, παρατηρούμε και εδώ, όπως στην πρώτη άσκηση, αρκετές δυσκολίες. Ο πολύ μικρός, μικρότερος και από την πρώτη άσκηση του ίδιου μέρους, αριθμός των απαντήσεων δηλώνει και σε αυτή την περίπτωση ότι αρκετοί από τους μαθητές που δεν απάντησαν βρήκαν τα ερωτήματα δύσκολα ή δυσνόητα. Επίσης βλέπουμε δυσκολίες και στις απαντήσεις στο ερώτημα 1 όπου λίγοι διατυπώνουν την συνολική διαδικασία που πρέπει να ακολουθηθεί. Στην περίπτωση του ερωτήματος 2 τα αποτελέσματα είναι καλύτερα από του ερωτήματος 1 κάτι που συμβαδίζει και με το Α' μέρος της εξέτασης που είχαμε πολύ καλύτερα αποτελέσματα στην μονοτονία από τα ακρότατα. Επίσης, και στα ερωτήματα αυτής της άσκησης, όπως και στα ερωτήματα της πρώτης άσκησης, η χρήση άλλων προσεγγίσεων επίλυσης από ορισμένους μαθητές συμφωνούν με τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στην έρευνα του Lithner (2000).

Όλα αυτά τα στοιχεία αυτά δείχνουν ότι πολύ λίγοι μαθητές έχουν αναπτύξει τις απαραίτητες γνωστικές δομές σε επίπεδο ενεργειών, διαδικασιών, αντικειμένων και σχήματος για να απαντήσουν θετικά στο τρίτο ερευνητικό ερώτημα.

4.2.1.3 Αυτοτελής Ανάλυση Γραπτών Μαθητών

Με βάση την παραπάνω ανάλυση των δύο μερών της εξέτασης και για να διαπιστωθεί κατά πόσο ένα γραπτό απαντάει θετικά σε καθένα από τα ερευνητικά ερωτήματα που τέθηκαν στην παρούσα έρευνα, το κάθε γραπτό εξετάστηκε αυτοτελώς και θεωρήθηκε πως απαντάει θετικά σε ένα ερευνητικό ερώτημα εφόσον:

1. Έχει επιτύχει τουλάχιστον τη βάση της βαθμολογίας στα ερωτήματα της εξέτασης που αντιστοιχούν στο κάθε ερευνητικό ερώτημα.
2. Έχει δώσει σχετικά ικανοποιητικές απαντήσεις στα σημαντικότερα ερωτήματα που αντιστοιχούν στο κάθε ερευνητικό ερώτημα.

Πρέπει να διευκρινιστεί ότι τα ερωτήματα βαθμολογούνται ισάξια. Για το πρώτο ερευνητικό ερώτημα βαθμολογούνται τα ερωτήματα όλου του Α' μέρους και σημαντικότερα θεωρούνται τα ερωτήματα που αναφέρονται στο πρόσημο της παραγώγου και στα σημεία και διαστήματα που μηδενίζεται καθώς και στην μονοτονία και τα ακρότατα της αρχικής συνάρτησης. Για το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα βαθμολογούνται τα ερωτήματα της πρώτης άσκησης του Β' μέρους καθώς και το τρίτο ερώτημα του δεύτερου μέρους και σημαντικότερα θεωρούνται τα ερωτήματα 2, 3, 5 και 6 της πρώτης άσκησης. Για το τρίτο ερευνητικό ερώτημα βαθμολογούνται τα ερωτήματα της δεύτερης άσκησης του Β' μέρους και σημαντικότερα θεωρούνται τα ερωτήματα 1 και 2.

Θετική Απάντηση	**Αριθμός Μαθητών**	**Ποσοστό Μαθητών (στο σύνολο των 46 μαθητών)**	**Ποσοστό Μαθητών (στους 38 μαθητές που απάντησαν)**
Στο πρώτο ερευνητικό ερώτημα	20	43,5%	52,6%
Και στα δύο πρώτα ερευνητικά ερωτήματα	13	28,3%	34,2%
Και στα τρία ερευνητικά ερωτήματα.	7	15,2%	18,4%

Πίνακας 11: Μαθητές, που με βάση τη θεώρηση, συνάγεται από το γραπτό τους θετική απάντηση στα ερευνητικά ερωτήματα

Με βάση την παραπάνω θεώρηση φαίνεται ότι τα ερευνητικά ερωτήματα που παρουσίασαν τις λιγότερες θετικές απαντήσεις για τους μαθητές, και άρα τα περισσότερα προβλήματα και δυσκολίες, ήταν το τρίτο και το δεύτερο, ενώ το πρώτο παρουσιάζει πολύ περισσότερες θετικές απαντήσεις. Συγκεκριμένα διαπιστώνουμε ότι 7 μαθητές έδωσαν γραπτό ώστε να απαντά θετικά και στα τρία ερευνητικά ερωτήματα. Επιπλέον αυτών, άλλοι 6 μαθητές, έδωσαν γραπτό ώστε να απαντά θετικά στα δύο πρώτα ερευνητικά ερωτήματα και επιπλέον όλων αυτών, άλλοι 7 μαθητές έδωσαν γραπτό το οποίο απαντά θετικά στο πρώτο ερευνητικό ερώτημα. Τα αποτελέσματα αυτά φαίνονται στον παραπάνω πίνακα.

Είναι πολύ σημαντικό να αναφερθεί ότι ορισμένοι από τους παραπάνω μαθητές έχουν πετύχει τη βάση της βαθμολογίας οριακά ή έχουν δώσει απαντήσεις με αρκετά λάθη και παραλείψεις. Αυτό δείχνει ότι ο αριθμός των μαθητών που πραγματικά έχει αναπτύξει την κατάλληλα συνεκτική εννοιακή εικόνα, την απαραίτητη γνωστική δομή σε επίπεδο ενεργειών, διαδικασιών, αντικειμένων και σχήματος, που να απαντά θετικά στα αντίστοιχα ερευνητικά ερωτήματα ίσως να είναι ακόμα χαμηλότερος.

4.2.2 Ανάλυση Επιπλέον Εξέτασης

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζεται η ανάλυση των 18 γραπτών μόνο Β' μέρους που συλλέχθηκαν κατά την επιπλέον εξέταση.

		ΑΡΙΘΜΟΣ ΜΑΘΗΤΩΝ	ΠΟΣΟΣΤΟ ΣΤΟ ΣΥΝΟΛΟ	ΠΟΣΟΣΤΟ ΣΕ ΑΥΤΟΥΣ ΠΟΥ ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ
	ΣΥΝΟΛΟ	**18**	100,0%	
ΕΡΩΤΗΜΑ 1	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ	16	88,9%	
	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΣΩΣΤΑ	3	16,7%	18,8%
	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΓΡΑΦΟΝΤΑΣ ΤΑΧΥΤΗΤΑ	4	22,2%	25,0%
	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΛΑΘΟΣ	9	50,0%	56,3%
ΕΡΩΤΗΜΑ 2	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ	13	72,2%	
	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΣΩΣΤΑ ΜΕ ΜΟΝΑΔΕΣ	8	44,4%	61,5%
	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΣΩΣΤΑ ΧΩΡΙΣ ΜΟΝΑΔΕΣ	0	0,0%	0,0%
	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΛΑΘΟΣ	5	27,8%	38,5%
ΕΡΩΤΗΜΑ 3	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ	11	61,1%	
	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΣΩΣΤΑ (ΤΑΧΥΤΗΤΑ ΜΗΔΕΝΙΖΕΤΑΙ)	8	44,4%	72,7%
	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΛΑΘΟΣ	3	16,7%	27,3%
ΕΡΩΤΗΜΑ 4	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ	11	61,1%	
	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΌΤΙ ΡΥΘΜΟΣ ΚΑΤΑΝΑΛΩΣΗΣ ΘΕΤΙΚΟΣ	2	11,1%	18,2%
	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΚΑΙ ΌΤΙ Η ΚΑΤΑΝΑΛΩΣΗ ΓΝ. ΑΥΞΟΥΣΑ	1	5,6%	9,1%
	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΛΑΘΟΣ	9	50,0%	81,8%

ΕΡΩΤΗΜΑ 5	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ	9	50,0%	
	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΣΩΣΤΑ (ΒΡΗΚΑΝ ΤΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ)	1	5,6%	11,1%
	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΤΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ (ΧΩΡΙΣ ΔΙΑΣΤΗΜΑ Ή ΛΑΘΟΣ)	2	11,1%	22,2%
	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΛΑΘΟΣ	6	33,3%	66,7%

ΕΡΩΤΗΜΑ 6	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ	11	61,1%	
	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΣΩΣΤΑ	2	11,1%	22,2%
	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΜΟΝΟ ΤΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ	1	5,6%	11,1%
	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΛΑΘΟΣ	8	44,4%	88,9%

Πίνακας 12: Αποτελέσματα ερωτημάτων πρώτης Άσκησης της επιπλέον εξέτασης

Η εξέταση πραγματοποιήθηκε για να επιβεβαιωθούν τα αποτελέσματα του Β’ μέρους της αρχικής εξέτασης στα οποία είχαμε μικρό αριθμό απαντήσεων. Στον παραπάνω πίνακα φαίνονται τα αποτελέσματα για τα ερωτήματα της πρώτης άσκησης της εξέτασης αυτής.

Όπως φαίνεται και από τον πίνακα είχαμε μεγαλύτερο ποσοστό απαντήσεων σε σχέση με την αρχική εξέταση όμως οι σωστές απαντήσεις κυμαίνονται είτε στο ίδιο είτε σε χαμηλότερο επίπεδο από αυτές της αρχικής εξέτασης. Μάλιστα αυτό αφορά τα αποτελέσματα όχι μόνο ποσοτικά αλλά και ποιοτικά αφού και εδώ παρατηρήθηκαν τα ίδια προβλήματα στα αντίστοιχα ερωτήματα.

		ΑΡΙΘΜΟΣ ΜΑΘΗΤΩΝ	ΠΟΣΟΣΤΟ ΣΤΟ ΣΥΝΟΛΟ	ΠΟΣΟΣΤΟ ΣΕ ΑΥΤΟΥΣ ΠΟΥ ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ
	ΣΥΝΟΛΟ	**18**	100,0%	
ΕΡΩΤΗΜΑ 1	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ	7	38,9%	
	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΣΩΣΤΑ ΠΛΗΡΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ	3	16,7%	42,9%
	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΣΩΣΤΑ ΜΟΝΟ ΕΛΕΓΧΟ ΤΟΥ Κ'(Χ)=0	0	0,0%	0,0%
	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΛΑΘΟΣ	4	22,2%	57,1%
ΕΡΩΤΗΜΑ 2	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ	4	22,2%	
	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΣΩΣΤΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ	2	11,1%	50,0%
	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΛΑΘΟΣ	2	11,1%	50,0%

ΕΡΩΤΗΜΑ 3	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ	5	27,8%	
	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΣΩΣΤΑ	1	5,6%	20,0%
	ΑΠΑΝΤΗΣΑΝ ΛΑΘΟΣ	4	22,2%	80,0%

Πίνακας 13: Αποτελέσματα ερωτημάτων δεύτερης Άσκησης της επιπλέον εξέτασης

Στον παραπάνω πίνακα φαίνονται τα αποτελέσματα για τα ερωτήματα της δεύτερης άσκησης της εξέτασης αυτής. Όπως φαίνεται και από αυτόν τον πίνακα είχαμε και εδώ μεγαλύτερο ποσοστό απαντήσεων σε σχέση με την αρχική εξέταση όμως οι σωστές απαντήσεις κυμαίνονται και εδώ είτε στο ίδιο είτε σε χαμηλότερο επίπεδο από αυτές της αρχικής εξέτασης. Και σε αυτήν την περίπτωση αυτό αφορά τα αποτελέσματα όχι μόνο ποσοτικά αλλά και ποιοτικά.

4.3 Τελικά Συμπεράσματα

Τα αποτελέσματα της έρευνας δείχνουν ότι περίπου οι μισοί μαθητές μπορούν, σε ένα σχετικά ικανοποιητικό βαθμό, να βγάλουν συμπεράσματα για τις ιδιότητες μίας παραγώγου (σημεία που δεν ορίζεται, πρόσημο, μηδενική κλπ) με δεδομένη την αρχική συνάρτηση, τόσο τη γραφική της παράσταση όσο και τον τύπο της, με τα σημαντικότερα προβλήματα να εντοπίζονται στον προσδιορισμό των σημείων που η παράγωγος δεν ορίζεται και στα σημεία που μηδενίζεται και λιγότερο στον προσδιορισμό των διαστημάτων που είναι θετική ή αρνητική. Λιγότεροι από τους μισούς μπορούν, σε ένα σχετικά ικανοποιητικό βαθμό, να βγάλουν συμπεράσματα για μία συνάρτηση (μονοτονία, ακρότατα, σταθερή κλπ) από τις ιδιότητες της παραγώγου της, έχοντας την πληροφορία μόνο από τη γραφική παράσταση της παραγώγου. Εδώ τα σημαντικότερα προβλήματα εντοπίζονται στον προσδιορισμό των ακροτάτων καθώς και στον προσδιορισμό των διαστημάτων που η αρχική συνάρτηση είναι σταθερή ή γραμμική και απαιτείται να αντιστρέψουν και να συνδυάσουν διαδικασίες που έχουν συνηθίσει να απαντάνε. Επίσης ένας μικρός αριθμός μαθητών έδειξε να παρουσιάζει σύγχυση μεταξύ f και f'.

Γενικά οι μαθητές παρουσίασαν πολύ καλύτερα αποτελέσματα στον προσδιορισμό της μονοτονίας της συνάρτησης και του προσδιορισμού του προσήμου της παραγώγου, από τον προσδιορισμό των ακροτάτων της συνάρτησης, η οποία φυσικά είναι πιο σύνθετη διαδικασία. Τα αρκετά λάθη και παραλείψεις που παρατηρήθηκαν, και τα οποία βρέθηκε να συμφωνούν με τη σχετική βιβλιογραφία, δείχνουν έλλειψη βαθύτερης κατανόησης της σχέσης συνάρτησης με την παράγωγό της αλλά και δυσκολίες στην αυστηρή και σωστή εφαρμογή των θεωρημάτων του βιβλίου, ακόμα και σε ορισμένους από αυτούς που απαντούν σχετικά ικανοποιητικά.

Περίπου το ένα τρίτο των μαθητών μπορούν, με δεδομένη την εκφώνηση του προβλήματος, να συσχετίσουν ικανοποιητικά έννοιες και αντικείμενα από το πεδίο του προβλήματος με έννοιες και αντικείμενα του μαθηματικού πεδίου και το αντίστροφο και να πραγματοποιήσουν επιτυχημένα τους απαραίτητους υπολογισμούς για να λύσουν το πρόβλημα. Η δυσκολία εντείνεται όταν η εκφώνηση του προβλήματος είναι αρκετά αφηρημένη ώστε να μην μπορούν να κάνουν υπολογισμούς για να βοηθηθούν να καταλήξουν σε κάποιο συμπέρασμα. Σημαντικά προβλήματα εντοπίστηκαν στην αναγνώριση της μέσης ταχύτητας και στην βαθύτερη κατανόηση της σημασίας της τιμής της παραγώγου ενός μεγέθους σε σημείο και την πληροφορία που αυτή μας δίνει για τις τιμές του μεγέθους αυτού σε επόμενα σημεία. Επίσης προβλήματα παρουσιάστηκαν και κατά την επιλογή της κατάλληλης μεθόδου επίλυσης και εκτέλεσης των υπολογισμών στις δεδομένες συναρτήσεις.

Λιγότεροι από το ένα τρίτο των μαθητών μπορούν, με δεδομένη την εκφώνηση του προβλήματος σε ένα σχετικά αφηρημένο επίπεδο, χωρίς να δίνεται συγκεκριμένη συνάρτηση, να αντιληφθούν ότι το πρόβλημα επιδέχεται λύση μέσω των εφαρμογών της παραγώγου και να ανακαλέσουν και να διατυπώσουν σωστά την κατάλληλη διαδικασία, στα απαραίτητα αντικείμενα, για την επίλυσή του.

Αυτά τα αποτελέσματα καθώς και η εξέταση του κάθε γραπτού αυτοτελώς δείχνει ότι μόνο ένα περιορισμένο ποσοστό μαθητών έχει αναπτύξει την κατάλληλα συνεκτική εννοιακή εικόνα, την απαραίτητη γνωστική δομή σε επίπεδο ενεργειών, διαδικασιών, αντικειμένων και σχήματος που να δείχνει βαθύτερη κατανόηση της έννοιας της παραγώγου, των ιδιοτήτων και των εφαρμογών της και να του επιτρέπει να τις χρησιμοποιήσει για τη μελέτη των συναρτήσεων και την επίλυση προβλημάτων από διάφορους τομείς. Τα αποτελέσματα αυτά συμφωνούν και με την έρευνα των White & Mitchelmore (1996) όπου αναφέρουν ότι οι φοιτητές είναι συχνά ικανοί να κάνουν υπολογισμούς με παραγώγους αλλά δεν έχουν ουσιαστική κατανόηση της έννοιας και της σημασίας της σε διαφορετικά περιβάλλοντα καθώς και με την έρευνα της Tyne (2015) στην οποία διαπιστώθηκε ότι η μεγάλη πλειοψηφία των φοιτητών δεν έχει πλήρη κατανόηση του τι σημασία έχει η κλίση και η παράγωγος σε περιπτώσεις μοντελοποίησης καθώς και ότι δεν κατανοούν την κατάλληλη χρήση τους για να κάνουν προβλέψεις. Επίσης είναι σύμφωνα και με την έρευνα των Roorda, Vos & Goedhart (2009) όπου, μαθητές λυκείου της Ολλανδίας, καταγράφηκαν δυσκολίες τόσο στην κατανόηση της έννοιας της παραγώγου όσο και στη σύνδεσή της με τη Φυσική και την επίλυση προβλημάτων μέσω αυτής της σύνδεσης.

Τα συμπεράσματα αυτά μπορεί να θεωρηθούν και ως αναμενόμενα αν εξετάσει κανείς τον τρόπο διδασκαλίας των μαθητών ο οποίος επιβάλλεται από τις ανάγκες των πανελληνίων εξετάσεων. Έτσι η διδασκαλία περιορίζεται κυρίως σε μεθοδολογία επίλυσης τυπικών προβλημάτων που απαιτούν την εκτέλεση συγκεκριμένων ενεργειών-υπολογισμών και στην απάντηση συγκεκριμένων ερωτήσεων. Επίσης τα περισσότερα προβλήματα ανήκουν σε συγκεκριμένους τομείς και κυρίως στον τομέα της Φυσικής και της Οικονομίας. Όλα αυτά δημιουργούν ένα περιοριστικό περιβάλλον για τον μαθητή αποτρέποντάς τον να αναπτύξει το απαραίτητο σχήμα που περιέχει ουσιαστική κατανόηση της έννοιας της παραγώγου καθώς και να γενικεύσει τη σημασία και τη χρήση της έννοιας ως εργαλείο προσδιορισμού μονοτονίας και ακροτάτων οποιουδήποτε μεγέθους που μπορεί να μοντελοποιηθεί μαθηματικά ως παραγωγίσιμη συνάρτηση. Σε έρευνα της Sajka (2003) αναφέρεται ότι το περιορισμένο περιβάλλον διδασκαλίας και η περιορισμένη επιλογή μαθηματικών εργασιών στο σχολείο είναι ένας από τους βασικούς λόγους για τα προβλήματα κατανόησης της έννοιας της συνάρτησης. Επίσης στα συμπεράσματα έρευνας του Stump (2001) αναφέρεται η μεγάλη σημασία της ενασχόλησης των μαθητών με πραγματικές καταστάσεις τόσο για να κατανοήσουν καλύτερα τα μαθηματικά όσο και για να επικοινωνήσουν αυτά που έχουν κατανοήσει.

Φυσικά τα συμπεράσματα αυτά βρίσκονται υπό τους περιορισμούς της συγκεκριμένης έρευνας, η οποία πραγματοποιήθηκε για περιορισμένο χρονικό διάστημα, σε μία δύσκολη χρονική περίοδο για τους μαθητές και χωρίς την πραγματοποίηση συνεντεύξεων ώστε να είναι δυνατή η βαθύτερη διερεύνηση των αιτιών των δυσκολιών που ανιχνεύτηκαν. Όμως, από την άλλη, πρέπει να ληφθεί σοβαρά υπόψη ότι τα προβλήματα και τα ερωτήματα που περιείχε η γραπτή εξέταση της έρευνας ήταν πολύ κοντά σε αυτά των βιβλίων του σχολείου, τόσο όσον αφορά τον τομέα στον οποίο εντάσσονται όσο και στην χρησιμοποιούμενη ορολογία, οπότε οι δυσκολίες που ανιχνεύτηκαν στην παρούσα έρευνα είναι πιθανόν να αυξηθούν όταν οι μαθητές κληθούν να αντιμετωπίσουν προβλήματα που εντάσσονται σε άλλους τομείς, είναι αρκετά αφηρημένα και χρησιμοποιούν μη οικεία ορολογία.

4.4 Προτάσεις

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται προτάσεις που αφορούν τη διδασκαλία της παραγώγου που μπορεί να βοηθήσουν στο να μειωθούν κατά πολύ οι δυσκολίες που ανιχνεύτηκαν ότι αντιμετωπίζουν οι μαθητές καθώς και στο να αναπτύξουν ένα κατάλληλο συνεκτικό σχήμα το οποίο θα περιλαμβάνει βαθύτερη κατανόηση της έννοιας της παραγώγου και της χρήσης της ως εργαλείο μελέτης των συναρτήσεων και επίλυσης προβλημάτων. Οι προτάσεις αυτές περιλαμβάνουν τα σημαντικότερα σημεία της διδασκαλίας της έννοιας, μεθόδους και πρακτικές της διδασκαλίας της και είδη ασκήσεων και προβλημάτων που πρέπει να περιλαμβάνει και βασίζονται τόσο στα συμπεράσματα της παρούσας έρευνας όσο και σε συμπεράσματα πολλών σημαντικών ερευνών. Έτσι η Hackworth (1994) αναφέρει τη σημασία της κατανόησης της κλίσης και των μέσων ρυθμών μεταβολής για την σωστή κατανόηση των παραγώγων και του στιγμιαίου ρυθμού μεταβολής στην ανάλυση. Ο Stump (2001) αναφέρει τη σημασία της ενασχόλησης των μαθητών με καταστάσεις του πραγματικού κόσμου, και φυσικές και με χρήση συναρτήσεων, για να κατανοήσουν καλύτερα τα μαθηματικά αλλά και για να επικοινωνήσουν αυτά που έχουν κατανοήσει. Οι Habre & Abboud (2006) αναφέρουν τα οφέλη της διδασκαλίας που ξεκινάει με τη διδασκαλία του ρυθμού μεταβολής, προχωράει με τη συσχέτιση των αποτελεσμάτων με την κλίση της εφαπτομένης και τελικά ορίζει αναλυτικά την παράγωγο, όπως και τα οφέλη της χρήσης οπτικών βοηθημάτων στην κατανόηση της σημασίας της έννοιας. Οι Asiala, Cottrill, Dubinsky & Schwingendorf (1997) παρουσιάζουν μία γενετική αποσύνθεση, με τη χρήση της θεωρίας APOS, για τη γραφική κατανόηση της συνάρτησης και της παραγώγου της και οι Moll, Trigueros, Badillo & Rubio (2016) παρουσιάζουν μία γενετική αποσύνθεση για τη διδασκαλία της έννοιας της παραγώγου. Οι Rivera-Figueroa & Ponce-Campuzano (2013), διερευνώντας τις συνθήκες αναγκαιότητας ή ικανότητας των κριτηρίων για τον προσδιορισμό των ακροτάτων μίας συνάρτησης, αναφέρουν τη μεγάλη σημασία της χρήσης γραφικών βοηθημάτων που συνδέονται με τις τυπικές αποδείξεις για τη βαθύτερη κατανόηση της έννοιας της παραγώγου. Ο Maharaj (2013) προτείνει τη χρήση προφορικών και γραφικών προσεγγίσεων σε εφαρμογές της παραγώγου, την ανάλυση των δομών που δίνονται με συμβολική μορφή και των πληροφοριών που δίνονται με γραφική μορφή και τη μοντελοποίηση πιθανών σχημάτων που θα έπρεπε να αναπτύξει ο φοιτητής. Η Tyne (2015) αναφέρει τη σημαντικότητα της κατανόησης από την πλευρά του μαθητή της έννοιας της κλίσης και της σχέσης της με την παράγωγο και της σημασίας τους σε διάφορα περιβάλλοντα καθώς και την εστίαση της διδασκαλίας όχι μόνο στο που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την παράγωγο αλλά και στους περιορισμούς της χρήσης της για προβλέψεις. Η Park (2015) αναφέρει πολλά συμπεράσματα για λάθη και παραλείψεις των καθηγητών στη διδασκαλία της παραγώγου που περιλαμβάνουν, τη λανθασμένη χρήση όρων (πχ αναφέρουν εφαπτομένη ενώ εννοούν κλίση της εφαπτομένης), τη χρήση γραφημάτων για την παράγωγο σε σημείο αλλά την περιορισμένη χρήση γραφημάτων, και μάλιστα μόνο απλών συναρτήσεων, για την παράγωγο συνάρτησης και τη δικαιολόγηση ιδιοτήτων της παραγώγου συνάρτησης με χρήση ενός παραδείγματος σε ένα σημείο της.

Επίσης σε άλλη έρευνα της Park (2016) αναφέρονται συμπεράσματα που προκύπτουν από τη σύγκριση τριών σχολικών βιβλίων και περιλαμβάνουν ασυνέπειες στην πραγματοποίηση της οριακής διαδικασίας και του αντικειμένου καθώς και στη διαδικασία και το αντικείμενο της παραγώγου, και μη ξεκάθαρη επεξήγηση των σχέσεων μεταξύ διαφορετικών οπτικών διαμεσολαβητών που χρησιμοποιούνται.

Σύμφωνα λοιπόν με τα συμπεράσματα της παρούσας έρευνας και την προαναφερθείσα βιβλιογραφία, σημαντικά σημεία της διδασκαλίας της έννοιας της παραγώγου που πρέπει να παρέχεται στη δευτεροβάθμια, όχι μόνο στη Γ’ Λυκείου, για την ουσιαστική κατανόηση της έννοιας και της χρήσης της ως εργαλείο επίλυσης προβλημάτων, αλλά και για την ανάπτυξη του απαραίτητου υποβάθρου για τις σπουδές σε ανώτερο επίπεδο, είναι με χρονική σειρά διδασκαλίας:

1. Η κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης, του ρόλου της μεταβλητής, των διαφορετικών μορφών αναπαραστάσεώς της συνάρτησης και των μεταξύ τους σχέσεων. Η δυνατότητα ανάλυσης τόσο των σύνθετων συναρτήσεων σε απλούστερες από τον τύπο τους όσο και της πληροφορίας της συνάρτησης από τη γραφική της αναπαράσταση.
2. Η κατανόηση της έννοιας του ορίου ως τελεστής, διαδικασία και αντικείμενο.
3. Η κατανόηση της κλίσης ευθείας και του μέσου και στιγμιαίου ρυθμού μεταβολής και της σημασίας τους.
4. Η κατανόηση του υπολογισμού της τιμής της κλίσης της εφαπτομένης σε σημείο συνάρτησης ως οριακή διαδικασία της κλίσης τεμνουσών ευθειών και η σχέση της με την παράγωγο στο σημείο αυτό. Η σχέση της τιμής της κλίσης της εφαπτομένης και της παραγώγου στο σημείο με το ρυθμό μεταβολής και η δυνατότητα των μαθητών να μεταβαίνουν από τη μία μορφή στην άλλη χωρίς προβλήματα.
5. Η κατανόηση της διαδικασίας παραγώγισης σε σημείο ως τη διαδικασία μέσω της οποίας θα μεταβούμε σε διάστημα για να ορίσουμε τελικά την παράγωγο συνάρτηση και σαφής καθορισμός της σχέσης που ορίζει η νέα αυτή συνάρτηση. Η χρήση της πρώτης παραγώγου ως συνάρτησης και η κατανόηση των κανόνων παραγώγισης και ιδιαίτερα του κανόνα της αλυσίδας με εστίαση στην σύνθεση των συναρτήσεων από απλούστερες.
6. Η κατανόηση της σχέσης της μονοτονίας της συνάρτησης με το πρόσημο της παραγώγου της, όχι απλώς ως κανόνες που θυμούνται οι μαθητές αλλά ως βαθύτερη κατανόηση, του γιατί τα διαστήματα μονοτονίας αλλά και τα σημεία ακροτάτων και τα διαστήματα σταθερότητας της συνάρτησης είναι έτσι σε σχέση με το ρυθμό μεταβολής της.
7. Η μελέτη της δεύτερης παραγώγου της συνάρτησης ως παράγωγός της πρώτης της παραγώγου. Η κατανόηση της σχέσης της δεύτερης παραγώγου με την αρχική συνάρτηση, και πάλι όχι ως απλοί κανόνες που θυμούνται οι μαθητές αλλά ως βαθύτερη κατανόηση του γιατί ισχύουν αυτά που ισχύουν, μέσω της υπάρχουσας κατανόησης της σχέσης της δεύτερης με την πρώτη παράγωγο.

Η διδασκαλία όλων αυτών των σημείων θα πρέπει να συνοδεύεται από την χρήση παραδειγμάτων πραγματικών καταστάσεων, τόσο με φυσικά μεγέθη όσο και με συναρτήσεις, μέσα από τα οποία ο μαθητής θα έχει την ευκαιρία να κατανοήσει καλύτερα τις συγκεκριμένες έννοιες και τη χρήση τους αλλά και να επικοινωνήσει την κατανόησή του. Θα πρέπει να γίνεται με χρήση προσεκτικής ορολογίας και συμβολισμού από τους καθηγητές που δεν θα δημιουργεί λάθος αντιλήψεις για τις σχέσεις των εννοιών και των εφαρμογών τους. Θα πρέπει να γίνεται χρήση πολλών παραδειγμάτων, τα οποία θα περιλαμβάνουν και αλγεβρικές και γραφικές αναπαραστάσεις, θα αναλύονται κατάλληλα και θα καθιστούν ξεκάθαρη τη σχέση τους με το αντικείμενο και τη διαδικασία που αναπαριστούν καθώς και τη σύνδεσή τους με τις συμβολικές παραστάσεις των τυπικών αποδείξεων. Στη χρήση πολλών διαφορετικών αναπαραστάσεων σημαντικό βοήθημα μπορεί να αποτελέσουν οι Τεχνολογίες Πληροφορίας και Επικοινωνιών (Τ.Π.Ε.) μέσω της χρήσης του κατάλληλου λογισμικού που θα υποστηρίζει δυναμικές αναπαραστάσεις. Τέλος θα πρέπει πάλι με τη χρήση παραδειγμάτων να γίνονται σαφείς οι περιορισμοί της χρήσης των εννοιών σε συγκεκριμένα σημεία ή/και διαστήματα και οι προϋποθέσεις που πρέπει να ισχύουν.

Είναι σημαντικό στα παραδείγματα και στις ασκήσεις και τα προβλήματα που θα χρησιμοποιούνται στη διδασκαλία να περιλαμβάνονται:

1. Ασκήσεις στις οποίες ο μαθητής μεταβαίνει με δεδομένη την πληροφορία για τη συνάρτηση σε διάφορες μορφές (τυπική, γραφική παράσταση κλπ), στην πληροφορία για την παράγωγο και το αντίστροφο. Σε αυτές τις ασκήσεις θα πρέπει να δοθεί έμφαση στα σημεία-διαστήματα μη ορισμού και μηδενισμού της παραγώγου και στα σημεία ακροτάτων, με προσοχή στους περιορισμούς και τις προϋποθέσεις καθώς και στη αντιστροφή και συνδυασμό απλούστερων ενεργειών και διαδικασιών που διδάσκονται.
2. Προβλήματα από διάφορους τομείς στα οποία θα παρουσιάζονται ιδιότητες της παραγώγου κάποιου μεγέθους από το πεδίο του προβλήματος και στα οποία θα ζητούνται συμπεράσματα ή θα γίνονται ερωτήσεις που αφορούν το συγκεκριμένο μέγεθος στο πεδίο του προβλήματος. Επίσης προβλήματα στα οποία θα παρουσιάζονται ιδιότητες κάποιου μεγέθους από το πεδίο του προβλήματος και θα ζητούνται συμπεράσματα ή θα γίνονται ερωτήσεις που αφορούν την παράγωγό του και τις ιδιότητές της. Σε αυτές τις ασκήσεις θα πρέπει να δοθεί έμφαση στις μέσες τιμές των μεγεθών καθώς και στις τιμές της παραγώγου σε σημείο και τη σημασία τους.
3. Προβλήματα, σε αφηρημένο επίπεδο χωρίς συγκεκριμένες συναρτήσεις και από διάφορους τομείς στα οποία θα ζητείται από τον μαθητή είτε η διατύπωση της σωστής και πλήρης διαδικασίας και των προϋποθέσεων, σε μορφή αλγορίθμου, ώστε να προσδιορίσει διαστήματα ή σημεία στα οποία κάποιο μέγεθος του προβλήματος παρουσιάζει συγκεκριμένες ιδιότητες (αυξάνεται-μειώνεται, μηδενίζεται, είναι θετικό-αρνητικό ή σταθερό, παρουσιάζει ακρότατα κλπ) είτε την κρίση και δικαιολόγηση συγκεκριμένων συμπερασμάτων που θα παρατίθενται στο πρόβλημα.

4.5 Περαιτέρω έρευνα

Είναι σημαντικό να αρθούν οι περιορισμοί που υπήρχαν στην παρούσα έρευνα ώστε να είναι δυνατόν να διερευνηθούν καλύτερα τα αίτια των δυσκολιών και προβλημάτων που ανιχνεύτηκαν και να έχουμε πιο τεκμηριωμένα συμπεράσματα για ένα τόσο σημαντικό θέμα όπως η κατανόηση της έννοιας της παραγώγου και η χρήση της στην επίλυση προβλημάτων. Θα πρέπει λοιπόν, η έρευνα να επαναληφθεί σε περίοδο που θα καλύπτει όλη τη σχολική χρονιά και φυσικά τα ερωτήματα να αναθεωρηθούν λαμβάνοντας υπόψη τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας. Η νέα έρευνα θα πρέπει να περιλαμβάνει μία επιπλέον αρχική γραπτή εξέταση που θα πραγματοποιηθεί μετά την ολοκλήρωση της διδασκαλίας των εννοιών της συνάρτησης και του ορίου και θα ανιχνεύει προβλήματα που αφορούν την κατανόηση τους, τα οποία έχουν καταγραφεί στη βιβλιογραφία ότι επηρεάζουν την κατανόηση της έννοιας της παραγώγου. Μετά θα ακολουθεί η παρούσα έρευνα που θα πραγματοποιηθεί αμέσως μετά την ολοκλήρωση της διδασκαλίας των παραγώγων και με χρονική διαφορά δύο εβδομάδων μεταξύ της γραπτής εξέτασης του Α' μέρους και της γραπτής εξέτασης του Β΄ μέρους. Λίγες ημέρες μετά από κάθε μία από τις τρεις αυτές επιμέρους γραπτές εξετάσεις, και αφού έχει ολοκληρωθεί η επεξεργασία των αποτελέσματα της, θα γίνονται κλινικές συνεντεύξεις σε επιλεγμένο δείγμα των μαθητών για να καταγραφεί ο τρόπος σκέψης που τους οδήγησε στην εκάστοτε απάντηση και την αιτιολόγησή της. Μάλιστα ιδιαίτερο ενδιαφέρον θα είχε να σχεδιαστούν τα μαθήματα που αφορούν την έννοια της παραγώγου, με χρήση της θεωρίας APOS, ενσωματώνοντας σε αυτά τις προτάσεις που διατυπώνονται στην παρούσα έρευνα και να εφαρμοστούν σε κάποια από τα τμήματα στα οποία βρίσκονται οι μαθητές που θα συμμετέχουν στην νέα έρευνα. Με τον τρόπο αυτό θα μπορούσαμε μέσω της νέας έρευνας, συγκρίνοντας τα αποτελέσματα των μαθητών που παρακολούθησαν τα νέα μαθήματα με αυτά των μαθητών που παρακολούθησαν τα παραδοσιακά μαθήματα, να έχουμε μία εκτίμηση για την αποτελεσματικότητα των προτάσεων της παρούσας έρευνας και να αντλήσουμε σημαντικές πληροφορίες για την αναθεώρησή τους.

Επίσης θα ήταν ιδιαίτερα σημαντικό να γίνει έρευνα για τον τρόπο διδασκαλίας της έννοιας της παραγώγου στην κατεύθυνση της Γ' Λυκείου από διαφορετικούς καθηγητές και να συσχετιστούν τα συμπεράσματα της έρευνας αυτής με τις δυσκολίες και τα προβλήματα που έχουν ανιχνευτεί στους μαθητές τόσο από την παρούσα έρευνα όσο και από την βιβλιογραφία καθώς και με συμπεράσματα άλλων ερευνών που έχουν γίνει για τους τρόπους διδασκαλίας της έννοιας της παραγώγου όπως της Park (2015).

Τέλος θα πρέπει να γίνει μία εκτενής μελέτη και καταγραφή των συμπερασμάτων των ερευνών που έχουν πραγματοποιηθεί για τις διαφορετικές μεθόδους και πρακτικές με τις οποίες προσεγγίζουν τα σχολικά συγγράμματα τη διδασκαλία της έννοιας της παραγώγου στη δευτεροβάθμια καθώς και τα προβλήματα και τις ασκήσεις που χρησιμοποιούν. Στις έρευνες αυτές περιλαμβάνονται και η έρευνα των Rivera-Figueroa & Ponce-Campuzano (2013) και της Park (2016).

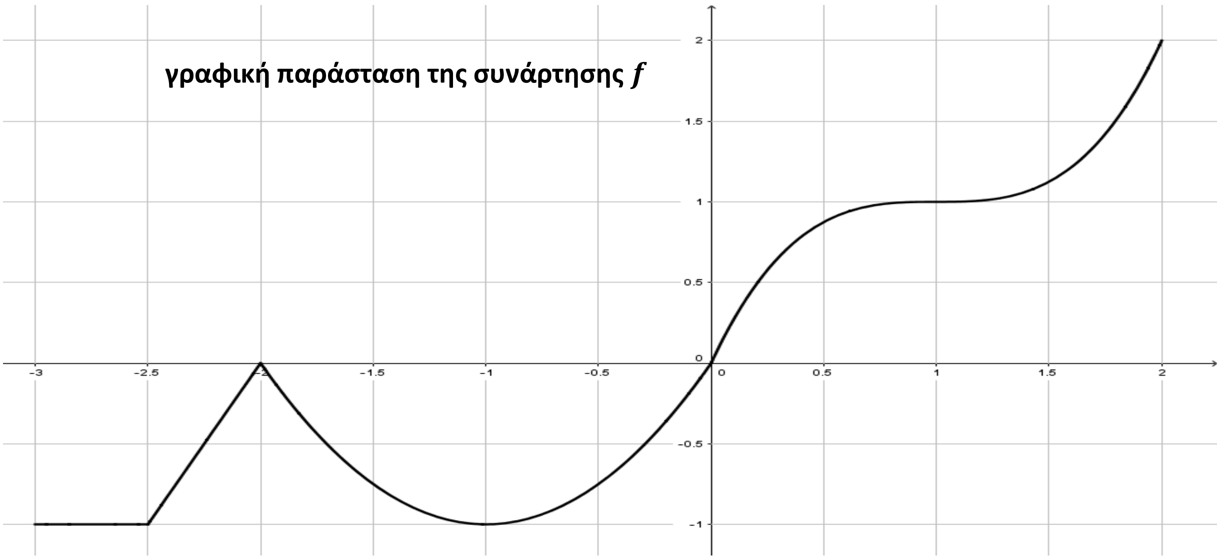
Η συσχέτιση και η αξιοποίηση των αποτελεσμάτων των παραπάνω ερευνών καθώς και των αποτελεσμάτων της σχετικής έρευνας που παρουσιάζεται στη βιβλιογραφία, θα ήταν ένα ουσιαστικό βήμα για την αποτελεσματικότερη διδασκαλία της έννοιας της παραγώγου στο σχολείο, αφού θα αποτελούσαν σημαντικό οδηγό για την αναθεώρηση του προγράμματος σπουδών, των σχολικών βιβλίων και φυσικά των μεθόδων και πρακτικών της διδασκαλίας.

Παράρτημα

ΓΡΑΠΤΗ ΕΞΕΤΑΣΗ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΕΡΟΣ Α

ΑΣΚΗΣΗ 1



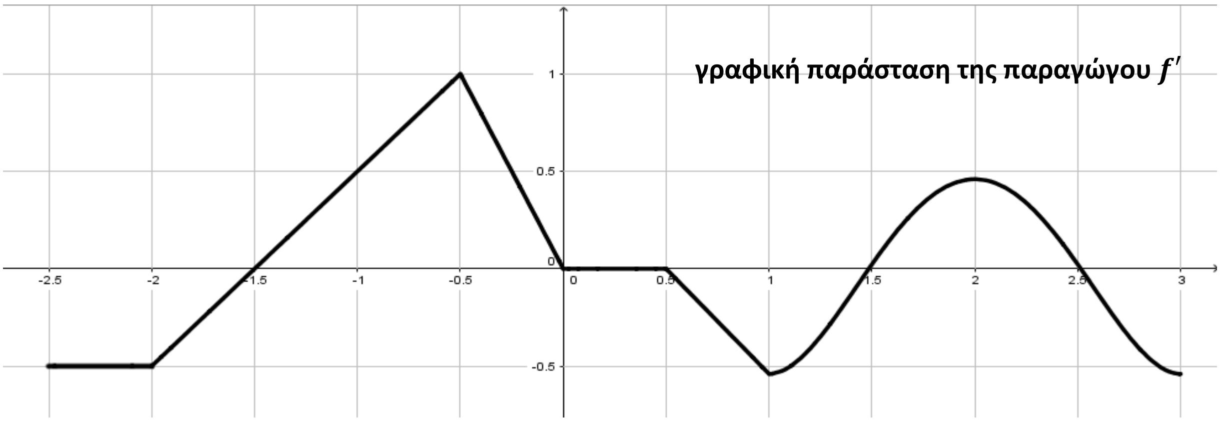
Στο παραπάνω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f.

I. Στο διάστημα [-3, -2.5] η f ταυτίζεται με την -1
II. Στο διάστημα (-2.5, -2] η f ταυτίζεται με την $2x+4$
III. Στο διάστημα (-2, 0] η f ταυτίζεται με την x^2+2x
IV. Στο διάστημα (0, 2] η f ταυτίζεται με την $(x-1)^3+1$.

Απαντήστε <u>με σύντομη αιτιολόγηση</u> στις επόμενες ερωτήσεις:

1. Υπάρχουν σημεία στα οποία κατά την γνώμη σας δεν ορίζεται η παράγωγος f';
2. Σε ποια διαστήματα ή και μεμονωμένα σημεία η παράγωγος f' είναι 0;
3. Σε ποια διαστήματα η παράγωγος f' είναι σταθερή και διάφορη του 0;
4. Σε ποια διαστήματα η παράγωγος f' είναι θετική;
5. Σε ποια διαστήματα η παράγωγος f' είναι αρνητική;

ΑΣΚΗΣΗ 2



Στο παραπάνω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση **της παραγώγου f'** μίας αρχικής συνάρτησης f. Θέλουμε να βγάλουμε από την παράγωγο f' συμπεράσματα για την αρχική συνάρτηση f.

Απαντήστε <u>με σύντομη αιτιολόγηση</u> στις επόμενες ερωτήσεις <u>για την αρχική συνάρτηση</u>:

1. Σε ποια διαστήματα η αρχική συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα;

2. Σε ποια διαστήματα η αρχική συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα;

3. Σε ποια διαστήματα η αρχική συνάρτηση f είναι σταθερή;

4. Σε ποια διαστήματα η αρχική συνάρτηση f είναι γραμμική (δηλ έχει τη μορφή $f(\mathrm{x}) = \mathrm{ax} + \mathrm{b}$, $\mathrm{a} \neq 0$).

5. Σε ποια σημεία η αρχική συνάρτηση f έχει τοπικό μέγιστο;

6. Σε ποια σημεία η αρχική συνάρτηση f έχει τοπικό ελάχιστο;

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΕΡΟΣ Β

ΑΣΚΗΣΗ 1

Ένα αυτοκίνητο ξεκίνησε από την αφετηρία του και κινείται στην εθνική οδό. Η συνάρτηση θέσης του σε μέτρα, συναρτήσει του χρόνου t σε δευτερόλεπτα, δίνεται από την $\mathrm{S(t)} = 100 + 4t - 0.2(\mathrm{t} - 5)^2$, για $0 \le t \le 40$.
Το αυτοκίνητο φέρει μηχανισμό εκτίμησης της κατανάλωσής του σε λίτρα βενζίνης, σε σχέση με την ταχύτητα που κινείται κάθε χρονική στιγμή, που δίνεται από την $\mathrm{K(t)} = 3 + 0.06\upsilon^2$ (όπου υ η ταχύτητα του αυτοκινήτου σε μέτρα/δευτερόλεπτο τη χρονική στιγμή t).
Απαντήστε με <u>σύντομη αιτιολόγηση</u> στις επόμενες ερωτήσεις:

1. Ποια είναι η σημασία του $\frac{\mathrm{S(20)} - \mathrm{S(10)}}{10}$ για το αυτοκίνητο;

2. Ποια είναι η σημασία του $\mathrm{S}'(5)$ για το αυτοκίνητο; Σε τι μονάδες μετριέται;

3. Τι σημασία έχουν για το αυτοκίνητο τα χρονικά σημεία t για τα οποία $\mathrm{S}'(\mathrm{t}) = 0$; Τι είναι πιθανόν να συμβαίνει όσον αφορά τη θέση του αυτοκινήτου σε αυτά τα σημεία;

4. Τι σημασία έχουν για το αυτοκίνητο τα χρονικά διαστήματα για τα οποία ισχύει $\mathrm{K}'(t) > 0$; Τι συμπέρασμα μπορούμε να βγάλουμε για την κατανάλωση του σε αυτά τα διαστήματα;

5. Σε ποιό χρονικό διάστημα η θέση του αυτοκινήτου μειώνεται;

6. Σε ποια χρονική στιγμή παρουσιάζει το αυτοκίνητο την ελάχιστη κατανάλωση;

ΑΣΚΗΣΗ 2

Μία εταιρεία παράγει ένα λιπαντικό αυτοκινήτου. Το κόστος σε € για την παραγωγή x κιλών από το λιπαντικό δίνεται από μία συνάρτηση K(x) την οποία γνωρίζουμε. Επίσης τα έσοδα σε € της εταιρείας από την πώληση x κιλών δίνεται από μία συνάρτηση E(x) την οποία γνωρίζουμε.
Απαντήστε στα επόμενα με <u>σύντομη αιτιολόγηση</u>:

1. Περιγράψτε τους υπολογισμούς που θα κάνατε για να βρείτε την ποσότητα κιλών στην οποία το κόστος ελαχιστοποιείται;

2. Περιγράψτε τους υπολογισμούς που θα κάνατε για να βρείτε το διάστημα κιλών στο οποίο τα έσοδα αυξάνονται;

3. Έστω ότι K'(10)=50. Είναι σωστό να συμπεράνουμε ότι το κόστος για την παραγωγή 20 κιλών λιπαντικού θα είναι αυξημένο κατά περίπου 500€ σε σχέση με το κόστος για την παραγωγή 10 κιλών;

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΣΩΣΤΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΓΡΑΠΤΗΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ

Στην ενότητα αυτή του παραρτήματος παρουσιάζονται ενδεικτικές ορθές απαντήσεις που θα μπορούσε να δώσει ένας μαθητής στα ερωτήματα της εξέτασης.

ΜΕΡΟΣ Α -ΑΣΚΗΣΗ 1

Ερώτημα 1

Σημεία $x_1 = -2.5, x_2 = -2$

Επίσης το σημείο $x_3 = 0$ (το οποίο όμως δεν μετρήθηκε για τα σωστά αποτελέσματα).

Αιτιολογία:

Γεωμετρική: Στα σημεία αυτά η γραφική παράσταση επιδέχεται περισσότερες της μίας εφαπτόμενες ή στα σημεία αυτά η γραφική παράσταση κάνει γωνία κλπ.

Αναλυτική: Υπολογισμό της παραγώγου στο σημείο από αριστερά και δεξιά και σύγκριση τους.

Ερώτημα 2

Διάστημα [-3, -2.5) καθώς και τα σημεία $x_1 = -1, x_2 = 1$

Αιτιολογία:

Στο διάστημα [-3, -2.5) η συνάρτηση είναι σταθερή. Στο σημείο $x_1 = -1$ έχουμε αλλαγή της μονοτονίας ενώ για το $x_2 = 1$ βλέπουμε ότι στο διάστημα (0, 2] έχουμε $f'(x) = 3(x-1)^2$.

Ερώτημα 3

Διάστημα (-2.5, -2)

Αιτιολογία:

Στο διάστημα (-2.5, -2) η συνάρτηση είναι γραμμική με συντελεστή διεύθυνσης 2 οπότε η παράγωγος είναι σταθερή και ίση με 2.

Ερώτημα 4

Διαστήματα (-2.5, -2), (-1, 0), (0, 1) και (1, 2)

Αιτιολογία:

Στα διαστήματα αυτά η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα και η παράγωγος δεν μηδενίζεται πουθενά.

Ερώτημα 5

Διάστημα (-2, -1)

Αιτιολογία:

Στο διάστημα αυτό η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα και η παράγωγος δεν μηδενίζεται πουθενά.

ΜΕΡΟΣ Α -ΑΣΚΗΣΗ 2

Ερώτημα 1

Διαστήματα [-1.5, 0] και [1.5, 2.5]

Αιτιολογία:

Στα διαστήματα αυτά η αρχική συνάρτηση είναι συνεχής (αφού είναι παραγωγίσιμη) και σε όλα τα εσωτερικά σημεία η παράγωγος της είναι θετική (θεώρημα σελ. 253 του βιβλίου κατεύθυνσης των Ανδρεαδάκη κ.α. (2015)).

Ερώτημα 2

Διαστήματα [-2.5, -1.5], [0.5, 1.5] και [2.5, 3]

Αιτιολογία:

Στα διαστήματα αυτά η αρχική συνάρτηση είναι συνεχής (αφού είναι παραγωγίσιμη) και σε όλα τα εσωτερικά σημεία η παράγωγος της είναι αρνητική (θεώρημα σελ. 253 του βιβλίου κατεύθυνσης των Ανδρεαδάκη κ.α. (2015)).

Ερώτημα 3

Διάστημα [0, 0.5]

Αιτιολογία:

Στο διάστημα αυτό η αρχική συνάρτηση είναι συνεχής (αφού είναι παραγωγίσιμη) και η παράγωγος είναι 0 σε όλα τα εσωτερικά σημεία (θεώρημα σελ. 251 του βιβλίου κατεύθυνσης των Ανδρεαδάκη κ.α. (2015))..

Ερώτημα 4

Διάστημα [-2.5, -2]

Αιτιολογία:

Στο διάστημα αυτό η παράγωγος είναι σταθερή (άρα η αρχική συνάρτηση της μορφής $f(\mathrm{x}) = \mathrm{ax} + \mathrm{b}$) και διάφορη του 0 (άρα στην αρχική συνάρτηση $\mathrm{a} \neq 0$).

Ερώτημα 5

Σημείο $x_1 = 2.5$

Επίσης τα σημεία $x_2 = 0$, $x_3 = 0.5$ και το $x_4 = -2.5$ και το διάστημα (0, 0.5) (τα οποία όμως δεν μετρήθηκαν για τα σωστά αποτελέσματα).

Αιτιολογία:

Στο σημείο $x_1 = 2.5$ η παράγωγος μηδενίζεται και αριστερά είναι θετική (η αρχική συνάρτηση γν. αύξουσα) ενώ δεξιά είναι αρνητική (η αρχ. συνάρτηση γν. φθίνουσα).

Στο σημείο $x_2 = 0$ η παράγωγος μηδενίζεται και αριστερά είναι θετική (η αρχ. συνάρτηση γν. αύξουσα) ενώ δεξιά είναι μηδέν (η αρχ. συνάρτηση σταθερή).

Στο σημείο $x_3 = 0.5$ η παράγωγος μηδενίζεται και αριστερά είναι μηδέν (η αρχ. συνάρτηση σταθερή) ενώ δεξιά είναι αρνητική (η αρχ. συνάρτηση γν. φθίνουσα).

Το σημείο $x_4 = -2.5$ είναι αριστερό άκρο του πεδίου ορισμού και η παράγωγος είναι αρνητική σε αυτό και σε ένα διάστημα δεξιά του (η αρχ. συνάρτηση γν. φθίνουσα).

Στο διάστημα (0, 0.5) παράγωγος μηδενίζεται και άρα η συνάρτηση είναι σταθερή άρα εξ ορισμού όλα τα σημεία είναι τοπικά μέγιστα και τοπικά ελάχιστα.

Ερώτημα 6

Σημεία $x_1 = -1.5, x_2 = 1.5$

Επίσης στο σημείο $x_3 = 3$ και στο διάστημα (0, 0.5) (τα οποίο όμως δεν μετρήθηκαν για τα σωστά αποτελέσματα).

Αιτιολογία:

Στα σημεία $x_1 = -1.5$, $x_2 = 1.5$ η παράγωγος μηδενίζεται και αριστερά είναι αρνητική (η αρχ. συνάρτηση γν. φθίνουσα) ενώ δεξιά είναι θετική (η αρχ. συνάρτηση γν. αύξουσα).

Το σημείο $x_3 = 3$ είναι δεξιό άκρο του πεδίου ορισμού και η παράγωγος είναι αρνητική σε αυτό και σε ένα διάστημα αριστερά του (η αρχ. συνάρτηση γν. φθίνουσα).

Στο διάστημα (0, 0.5) παράγωγος μηδενίζεται και άρα η συνάρτηση είναι σταθερή άρα εξ ορισμού όλα τα σημεία είναι τοπικά μέγιστα και τοπικά ελάχιστα.

ΜΕΡΟΣ Β -ΑΣΚΗΣΗ 1

Ερώτημα 1

Η μέση ταχύτητα του αυτοκινήτου στο διάστημα [10, 20].

Ερώτημα 2

Η ταχύτητα στο σημείο $t_1 = 5$. Σε m/sec (μέτρα/δευτερόλεπτο)

Ερώτημα 3

Στα σημεία αυτά η ταχύτητα μηδενίζεται, δηλαδή το αυτοκίνητο σε αυτά τα σημεία σταματάει.

Τα σημεία αυτά αποτελούν πιθανά ακρότατα (τοπικά ή ολικά) για τη θέση του αυτοκινήτου.

Ερώτημα 4

Στα διαστήματα αυτά ο ρυθμός κατανάλωσης είναι θετικός. Δηλαδή η κατανάλωση είναι γνησίως αύξουσα.

Ερώτημα 5

Λύση της ανίσωσης $S'(t) < 0 \Leftrightarrow 4 - 0.4(t-5) < 0$ και εύρεση του διαστήματος [15, 40] (αφού η $S(t)$ συνεχής στο [15, 40] και $S'(t) < 0$ σε όλα τα εσωτερικά σημεία του [15, 40]).

Ερώτημα 6

Λύση της εξίσωσης $K'(x) = 0$

$K'(x) = 0 \Leftrightarrow 0.12v(t)v'(t) = 0 \Leftrightarrow 0.12S'(t)S''(t) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0.12\big(4 - 0.4(t-5)\big)(-0.4) = 0 \Leftrightarrow (4 - 0.4(t-5)) = 0$

και εύρεση του σημείου $t_1 = 15$.

ΜΕΡΟΣ Β -ΑΣΚΗΣΗ 2

Ερώτημα 1

Λύση της εξίσωσης $K'(x) = 0$ και εύρεση των πιθανών σημείων ακροτάτων.

Εύρεση της μονοτονίας αριστερά και δεξιά από αυτά τα σημεία και επιλογή των σημείων που αριστερά $K'(x) < 0$ και δεξιά $K'(x) > 0$.

Επιπλέον για πλήρη απάντηση μπορεί να αναφερθεί ο έλεγχος των σημείων στα οποία η $K'(x)$ δεν ορίζεται ή τα οποία αποτελούν άκρα των διαστημάτων ορισμού της $K(x)$ και φυσικά να αναφερθεί ότι οι υπολογισμοί γίνονται με την υπόθεση ότι η $E(x)$ είναι παραγωγίσιμη.

Ερώτημα 2

Υπολογισμός της $E'(x)$ και εξέταση του προσήμου της στα διάφορα διαστήματα. Εύρεση εκείνων των διαστημάτων που ισχύει $E'(x) > 0$ (δηλαδή η $E(x)$ είναι γν. αύξουσα).

Για πλήρη σωστή απάντηση θα πρέπει ο μαθητής να αναφέρει ότι οι υπολογισμοί γίνονται με την υπόθεση ότι η $E(x)$ είναι παραγωγίσιμη.

Ερώτημα 3

Όχι.

$K'(10) = 50$ σημαίνει ότι ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής του κόστους όταν παράγουμε 10 κιλά είναι 50 ευρώ/κιλό. Η πληροφορία αυτή αφορά το συγκεκριμένο σημείο και όχι κάποιο διάστημα. Θα βγάζαμε αυτό το συμπέρασμα αν η συνάρτηση $K'(x)$ ήταν σταθερή και ίση με 50 ευρώ/κιλό σε όλο το διάστημα [10, 20].

Βιβλιογραφία

1. Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E., & Schwingendorf, K. E. (1997). The development of students' graphical understanding of the derivative. The Journal of Mathematical Behavior, 16(4), 399-431.

2. Biza, I., Christou, C., & Zachariades, T. (2006). Students' thinking about the tangent line. In Proceedings of the 30th PME International Conference (Vol. 2, pp. 177-184).

3. Cornu, B. (2002). Limits. In Advanced mathematical thinking (pp. 153-166). Springer Netherlands.

4. Dubinsky, E., & McDonald, M. A. (2001). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. In The teaching and learning of mathematics at university level (pp. 275-282). Springer Netherlands.

5. Ferrini-Mundy, J., & Gaudard, M. (1992). Secondary school calculus: Preparation or pitfall in the study of college calculus?. Journal for Research in Mathematics Education, 56-71.

6. Habre, S., & Abboud, M. (2006). Students’ conceptual understanding of a function and its derivative in an experimental calculus course. The Journal of Mathematical Behavior, 25(1), 57-72.

7. Hackworth, J. M. (1994). Calculus students' understanding of rate (Master's thesis, San Diego State University).

8. Judson, T. W., & Nishimori, T. (2005). Concepts and skills in high school calculus: An examination of a special case in Japan and the United States. Journal for Research in Mathematics Education, 24-43.

9. Lithner, J. (2000). Mathematical reasoning in school tasks. Educational studies in mathematics, 41(2), 165-190.

10. Moll, V. F., Trigueros, M., Badillo, E., & Rubio, N. (2016). Mathematical objects through the lens of two different theoretical perspectives: APOS and OSA. Educational Studies in Mathematics, 91(1), 107-122.

11. Maharaj, A. (2013). An APOS analysis of natural science students' understanding of derivatives. South African Journal of Education, 33(1), 1-19.

12. Orton, A. (1983). Students' understanding of differentiation. Educational Studies in Mathematics, 14(3), 235-250.

13. Orton, A. (1984). Understanding rate of change. Mathematics in School, 13(5), 23-26.

14. Park, J. (2012). Discursive approach to students’ thinking about the derivative. In 15th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education.

15. Park, J. (2013). Is the derivative a function? If so, how do students talk about it?. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 44(5), 624-640.

16. Park, J. (2015). Is the derivative a function? If so, how do we teach it?. Educational Studies in Mathematics, 89(2), 233-250.

17. Park, J. (2016). Communicational approach to study textbook discourse on the derivative. Educational Studies in Mathematics, 91(3), 395-421.

18. Przenioslo, M. (2004). Images of the limit of function formed in the course of mathematical studies at the university. Educational Studies in Mathematics, 55(1), 103-132.

19. Rivera-Figueroa, A., & Ponce-Campuzano, J. C. (2013). Derivative, maxima and minima in a graphical context. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 44(2), 284-299.

20. Roorda, G., Vos, P., & Goedhart, M. (2009). Derivatives and applications; development of one student's understanding. In Proceedings of CERME (Vol. 6).

21. Roundy, D., Dray, T., Manogue, C. A., Wagner, J. F. & Weber, E. (2015). An extended theoretical framework for the concept of the derivative. In T. Fukawa-Connolly, N. E. Infante, K. Keene, & M. Zandieh (Eds.), Proceedings of the Eighteenth Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education(pp. 919-924). Pittsburgh, PA. Available at http://sigmaa.maa.org/rume/RUME18-final.pdf.

22. Sajka, M. (2003). A secondary school student's understanding of the concept of function-A case study. Educational studies in mathematics, 53(3), 229-254.

23. Stump, S. (1999). Secondary mathematics teachers' knowledge of slope. Mathematics Education Research Journal, 11(2), 124-144.

24. Stump, S. L. (2001). High school precalculus students' understanding of slope as measure. School Science and Mathematics, 101(2), 81-89.

25. Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. Educational studies in mathematics, 12(2), 151-169.

26. Tall, D. (1987). Constructing the concept image of a tangent. In Proceedings of the 11th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 3, pp. 69-75).

27. Thompson, P. W. (1994). Images of rate and operational understanding of the fundamental theorem of calculus. In Learning Mathematics (pp. 125-170). Springer Netherlands.

28. Tyne, J. (2015). Calculus Students' Understanding of Interpreting Slope and Derivative and Using them Appropriately to Make Predictions. Proceedings of the 18th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education, 263-277.

29. Vinner, S. (1982). Conflicts between definitions and intuitions: the case of the tangent. In Proceedings of the 6th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (pp. 24-28).

30. Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 14(3), 293-305.

31. Vinner, S., & Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. Journal for research in mathematics education, 356-366.

32. White, P., & Mitchelmore, M. (1996). Conceptual knowledge in introductory calculus. Journal for Research in Mathematics Education, 79-95.

33. Αδαμόπουλος Λεωνίδας, Δαμιανός Χαράλαμπος & Σβέρκος Ανδρέας (2015). ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ, Γ' τάξης Γενικού Λυκείου. ISBN 978-960-

06-2361-1. Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και Εκδόσεων «Διόφαντος», έκδοση για το σχολικό έτος 2017.

34. Ανδρεαδάκης Στυλιανός, Κατσαργύρης Βασίλειος, Μέτης Στέφανος, Μπρουχούτας Κων/νος, Παπασταυρίδης Σταύρος & Πολύζος Γεώργιος (2015). ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ, Γ' τάξης Γενικού Λυκείου, Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών και Σπουδών Οικονομίας & Πληροφορικής. ISBN 978-960-06-2430-4. Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και Εκδόσεων «Διόφαντος», έκδοση για το σχολικό έτος 2017.