

Πεπερασμένα Στοιχεία για  
Υπερβολικούς Νόμους Διατήρησης:  
Νέες Μέθοδοι και Τεχνικές Υπολογισμών

Χρήστος Αρβανίτης

Πανεπιστήμιο Κρήτης, Ιούνιος 2002

# Περιεχόμενα

Περιεχόμενα	ii
Εισαγωγή	1
1 Σχήματα πεπερασμένων στοιχείων χαλάρωσης	8
1.1 Εισαγωγή	8
1.2 Μορφοποίηση των Σχημάτων Πεπερασμένων Στοιχείων με Relaxation	15
1.3 Πλήρως Διακριτά σχήματα	22
1.4 Αλγόριθμοι αναδιαμέρισης	25
1.5 Επεκτάσεις	30
1.6 Υπολογιστικά Παραδείγματα	31
2 Ανάλυση ευστάθειας σχημάτων πεπερασμένων στοιχείων χαλάρωσης	44
2.1 Relaxation μορφή νόμων διατήρησης	44
2.2 Ιδιότητες της relaxation λύσης	46
2.3 Μέτρα Young και συμπάγεια	48
2.4 Προσέγγιση Galerkin της relaxation μορφής	51
2.4.1 Ημιδιακριτό σχήμα	51
2.4.2 Ιδιότητες ημιδιακριτού σχήματος	52
2.4.3 Ευστάθεια ημιδιακριτού σχήματος: Η περίπτωση $N = 1$ , $F'$ , συμμετρικός	53
2.4.4 Ευστάθεια ημιδιακριτού σχήματος: Η περίπτωση $N = 1$ , και το σύστημα επιδέχεται κυρτή συνάρτηση εντροπίας	57
2.5 Πλήρως διακριτό σχήμα	63
2.5.1 Ιδιότητες πλήρως διακριτού σχήματος	63

2.5.2	Ευστάθεια του πλήρως διακριτού σχήματος στην συμμετρική περίπτωση . . . . .	66
2.5.3	Ευστάθεια πλήρως διακριτού σχήματος όταν το σύστημα επιδέχεται κυρτή συνάρτηση εντροπίας . . . . .	73
<b>3</b>	<b>Μέθοδοι Αναδιαμέρισης και Μεταγωγής</b>	<b>78</b>
3.1	Εισαγωγή . . . . .	78
3.1.1	Χώρος δοκιμών . . . . .	80
3.2	Αναδιαμέριση . . . . .	86
3.2.1	Εκτιμήτριες συναρτήσεις . . . . .	87
3.2.2	Κατασκευή της νέας διαμέρισης . . . . .	92
3.2.3	Ανακατασκευή της λύσης . . . . .	95
3.3	Galerkin προσέγγιση της <i>relaxation</i> μορφής με αναδιαμέριση . . . . .	99
3.4	Μεταγωγή . . . . .	111
3.4.1	Διακριτοποίηση διακοπτόμενα χαλαρωτικής μορφής Νόμων Διατήρησης (switched relaxation) . . . . .	111
3.4.2	Διακριτοποίηση διακοπτόμενα χαλαρωτικής μορφής Νόμων Διατήρησης με αναδιαμέριση . . . . .	123
3.5	Οριο Διακριτοποίησης και Διακριτοποίηση Ορίου, Χαλαρωτικών σχημάτων . . . . .	133
3.5.1	Διακριτοποίηση οριακά χαλαρωτικής μορφής Νόμων Διατήρησης (limit relaxation) . . . . .	133
3.5.2	Ευθεία διακριτοποίηση των Νόμων Διατήρησης . . . . .	140
	<b>Βιβλιογραφηψ</b>	<b>150</b>

# Εισαγωγή

Στην εργασία αυτή, μελετούμε την αριθμητική επίλυση με μεθόδους **Πεπερασμένων Στοιχείων** μεταβλητής διαμέρισης, του προβλήματος **Υπερβολικών Νόμων Διατήρησης**:

Δοθεισών  $F : \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^M$  με  $\operatorname{div}(F) > 0$  και  $u_0 : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ , ζητείται  $u : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^M$ , τέτοια ώστε για κάθε  $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+$ , να ικανοποιεί τις εξισώσεις

$$\begin{cases} u(x, 0) = u_0(x) \\ \partial_t u + \sum_{i=1}^N \partial_{x_i} F_i(u) = 0 \end{cases} \quad (0.0.1)$$

Απο μαθηματική σκοπιά, κάθε φυσικό φαινόμενο τού οποίου η χρονική εξέλιξη καθορίζεται απο την χωρική κατανομή **διατηρησίμων μεγεθών**<sup>1</sup>, αντιστοιχεί στην λύση κάποιου συστήματος Νόμων Διατήρησης (ηλεκτρικά φορτία, ρευστά σώματα για όσο δεν αλλάζουν φυσική κατάσταση, μεταφορικά μέσα για όσο παραμένουν ακέραια, οικονομικές μονάδες για όσο δεν αλλάζουν αξία, εκφράσεις για όσο δεν αλλάζουν νόημα, κλπ). Συνεπώς όλα τα χωρο-χρονικά προβλήματα ροής μεγεθών, όπως η σχεδίαση της τοπολογίας και γεωμετρίας του δικτύου μεταφοράς καθώς και ο έλεγχος κυκλοφορίας σε αυτό, συνδέονται με την επίλυση εξισώσεων τής μορφής (0.0.1).

Το γεγονός ότι τα προβλήματα δυναμικής εξέλιξης κάθε κλάδου τής Επιστήμης

---

<sup>1</sup> Διατηρήσιμο (χρονικά) είναι ένα μετρήσιμο μέγεθος του  $\mathbb{R}^N$  όταν, η διαφορά τής συνολικής ποσότητας του πάνω απο οποιοδήποτε σύνολο  $A \subset \mathbb{R}^N$  σε δύο χρονικές στιγμές, ισούται με την ποσότητα που αλγεβρικά εισέρευσε διά τού συνόρου αυτού του συνόλου, στο ενδιάμεσο χρονικό διάστημα.

ή τής Τεχνολογίας, μπορούν με ομοιόμορφο και συστηματικό τρόπο να περιγραφούν μαθηματικά με κατάλληλους Νόμους Διατήρησης, έχει σαν τίμημα ότι η αριθμητική επίλυση τής γενικής μορφής αυτών των εξισώσεων είναι δύσκολη διαδικασία.

Καταρχήν, οι εξισώσεις αυτές δεν έχουν λύση με την κλασσική έννοια τής Ανάλυσης. Στην γενική περίπτωση, για οσοδήποτε ομαλά αρχικά δεδομένα  $F, u_0$ , υπάρχει χρονική στιγμή  $t > 0$  στην οποία η λύση  $u$  τής (0.0.1) παρουσιάζει χωρική ασυνέχεια (**shock**). Επειδή ενδιαφερόμαστε για Galerkin προσέγγιση, ο φυσιολογικός τρόπος να ξεπεραστεί αυτή η δυσκολία είναι να αναζητήσουμε ασθενή λύση με την έννοια τής κατανομής, ήτοι η ζητούμενη  $u$  να ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\forall \Phi \in C_0^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}) \quad \int_{\mathbb{R}^+} (\partial_t u + \sum_{i=1}^N \partial_{x_i} F_i(u), \Phi) dt = 0 \quad (0.0.2)$$

(όπου το  $(\cdot, \cdot)$  συμβολίζει το  $L_2$  εσωτερικό γινόμενο τού  $\mathbb{R}^N$ ). Το (0.0.2), επαυξημένο ίσως με ανισοτικούς Νόμους Διατήρησης (**συνθήκες εντροπίας**), έχει μοναδική (**εντροπική**) λύση.

Όσotόσο η εξίσωση (0.0.2) δέν ενδείκνυται για υπολογιστικούς σκοπούς. Αναλόγως τής τάξης διακριτοποίησής αυτής, προκύπτουν προσεγγιστικά σχήματα με όρους **διάχυσης** ή **διασποράς** που κυριαρχούν στις περιοχές απότομων μεταβολών. Γί' αυτόν τον λόγο, οι υπολογιστικές λύσεις τής (0.0.2) είτε είναι πολύ ομαλοποιημένες προσεγγίσεις, είτε παρουσιάζουν εσφαλμένες ταλαντώσεις, ειδικά στις περιοχές τών shock.

Ενας αποδεκτός τρόπος, είναι η αντικατάσταση τής (0.0.1) απο μια ε-παραμετρική **εξίσωση μοντέλο** πού, αφενός να εμπεριέχει σταθεροποιητικούς μηχανισμούς και αφεταίρου, η λύση τής  $u_\varepsilon$ , να συγκλίνει ασθενώς στην λύση  $u$  τής (0.0.1) καθώς η παράμετρος  $\varepsilon$  τείνει στο 0. Σ' αυτήν την εργασία, χρησιμοποιούμε το **χαλαρωτικό** μοντέλο τών *Jin-Xin*:

$$\partial_t u_\varepsilon + \sum_{i=1}^N \partial_{x_i} F_i(u_\varepsilon) + \varepsilon (\partial_{tt} u_\varepsilon - \sum_{i=1}^N A_i \cdot \partial_{x_i x_i} u_\varepsilon) = 0 \quad (0.0.3)$$

στο οποίο, για κατάλληλη επιλογή των πινάκων  $A_i \in \mathbb{R}^{M,M}$ , ο εμφανιζόμενος κυματικός τελεστής δρά ανταγωνιστικά στον όρο διασποράς που παράγει η διακριτοποίηση της.

Στο πρώτο κεφάλαιο, διατυπώνουμε το ημιδιακριτό σχήμα πεπερασμένων (πολυωνυμικών) στοιχείων για την (0.0.3) από το οποίο, το πλήρως διακριτό σχήμα προκύπτει με διακριτοποίηση στον χρόνο μέσω RK-μεθόδων που δεν αυξάνουν την ολική κύμανση (TVD ιδιότητα). Με κατάλληλους χειρισμούς και χρησιμοποιώντας ζεύγη άμεσης+ημιπεπλεγμένης RK-μεθόδων ο αλγόριθμος που προκύπτει είναι γραμμικής πολυπλοκότητας. Τέλος δείχνουμε την συνέπεια αυτών των σχημάτων και εντοπίζουμε τις περιοχές ευστάθειας και ορθής ποιοτικής συμπεριφοράς του.

Στο επόμενο κεφάλαιο, αναφερόμαστε αρχικά σε θέματα συμπάγειας της οικογένειας λύσεων  $\{u_\varepsilon\}$ . Ειδικά για κάποιες κλάσεις ροών, δείχνουμε ευστάθεια των προσεγγίσεων Galerkin και σύγκλιση με κάποια ασθενή έννοια στην λύση του (0.0.3).

Τόσο απο την θεωρητική ανάλυση, όσο και απο την εφαρμογή τού παραπάνω μετρητικού αλγορίθμου σε προβλήματα μονοδιάστατης χωρικής μεταβλητής ( $N = 1, M \geq 1$ ), επιλεγμένα απο τους χώρους της Φυσικής και της Μηχανικής (*Advection, Burgers, Elastodynamics, Two phase flow, Isentropic flow, Shallow water*), τα βασικά συμπεράσματα είναι:

- Το πρόβλημα της ασθενούς σύγκλισης των λύσεων  $\{u_\varepsilon\}$  προς την λύση Νόμων Διατήρησης  $u$ , ανάγεται σε ανάλογα προβλήματα μέτρων *Young*. Μιά πρόταση για την διευθέτηση τέτοιων προβλημάτων, είναι η συλλογιστική *Compensated Compactness* η οποία, για  $N = M = 1$  ή  $2$  είναι λογικά συνεπής και έχει εφαρμοσθεί επιτυχώς σε πολλές κλάσεις ροών  $F$ . Στην γενική περίπτωση, οι εξειδικευμένες συνθήκες εντροπίας που πρέπει να ικανοποιεί μία συγκεκριμένη ροή  $F$ , γεννούν ασυμβατότητα διάστασης διανυσματικών χώρων, οπότε το πρόβλημα παραμένει ανοικτό.

- Για κάθε τιμή τής παραμέτρου χαλάρωσης  $\varepsilon$ , το χρονικό και το χωρικό βήμα διακριτοποίησης ( $\kappa$  και  $h$  αντίστοιχα) πρέπει τοπικά να ικανοποιούν τις σχέσεις:
  - για να μην κυριαρχεί ο όρος διασποράς στις περιοχές των shock,  $h < C_1\varepsilon$ .
  - για λόγους ευστάθειας του πλήρως διακριτού σχήματος  $\kappa < C_2\varepsilon < C_3h$ .

όπου οι σταθερές  $C_1, C_2, C_3$  εξαρτώνται από την συνάρτηση ροής  $F$ . Μιά συνθήκη τής μορφής  $\kappa < C \cdot h$  είναι αναμενόμενη σε κάθε προσεγγιστικό σχήμα Νόμων Διατήρησης (**CFL**). Οι υπόλοιπες που τίθενται απο το σχήμα χαλάρωσης, καθιστούν την μέθοδο υπολογιστικά δαπανηρή, για πολύ μικρές τιμές τής παραμέτρου  $\varepsilon$  που ενδιαφερόμαστε.

- Απαιτείται διαδικασία *συντονισμού* τού σχήματος με την ροή  $F$  κάθε προβλήματος. Οι πίνακες  $A_i$  πρέπει να επιλεγούν έτσι ώστε, η δράση του κυματικού τελεστή να αλληλομηδενίζεται από αυτή του όρου διασποράς διακριτοποίησης, σε όσο το δυνατόν μεγαλύτερο πεδίο τής λύσης. Δεδομένου ότι στην γενική περίπτωση η  $F$  είναι μή-γραμμική, το αίτημα αυτό μπορεί να ικανοποιηθεί μόνο με κάποια ασθενή έννοια. Αν και για λόγους σύγκλισης του μοντέλου, το σύνολο επιλογής τών  $A_i$  περιορίζεται απο ένα πλήθος **υποχαρακτηριστικών συνθηκών** που εξαρτώνται απο την ροή  $F$ , πρακτικά ο προσδιορισμός τους γίνεται με δοκιμές και κριτήριο την ποιότητα προσέγγιστικής λύσης.
- Για οποιαδήποτε επιλογή τών παραμέτρων  $\varepsilon, A_i$ , κάθε στιγμιότυπο τής αριθμητικής λύσης περιέχει μία υψίσυχη **αριθμητική ταλάντωση** περιόδου 2-4 διαστημάτων διακριτοποίησης και πλάτους αναλόγου με την τιμή τής  $\varepsilon$  και τον τοπικό συντονισμό του σχήματος.

Στο επόμενο κεφάλαιο ασχολούμαστε με την εξάλειψη των αδυναμιών του χαλαρωτικού σχήματος Πεπερασμένων Στοιχείων.

Αρχικά μεθοδεύουμε μία στρατηγική ανακατασκευής της αριθμητικής λύσης που παράγει το χαλαρωτικό σχήμα, με σκοπό την ποιοτική βελτίωση της λύσης χωρίς μεταβολή της ευστάθειας. Βασικά σε κάθε χρονικό βήμα εισάγουμε επιπλέον τα υποβήματα:

- Προσδιορίζεται μία διαμέριση του χώρου επίλυσης τέτοια ώστε:
  - ο συνολικός αριθμός κόμβων να είναι σταθερός.
  - η πυκνότητα κόμβων να ακολουθεί μία συνάρτηση που εκτιμάει την οξύτητα, του τρέχοντος στιγμιότυπου της αριθμητικής λύσης.

Σε τέτοιες διαμερίσεις ικανοποιείται αυτόματα η συνθήκη  $h < C_1 \varepsilon$  σε περιοχές των shock.

- Ανακατασκευάζεται το τρέχων στιγμιότυπο της αριθμητικής λύσης, στον χώρο Πεπερασμένων Στοιχείων της νέας διαμέρισης, με Παρεμβολή ή  $L_2$  προβολή. Δεδομένου ότι, οι χώροι Πεπερασμένων Στοιχείων που αντιστοιχούν στην παλαιά και την νέα διαμέριση διαφέρουν λίγο, η διαδικασία της ανακατασκευής δρά ταυτόχρονα σαν φίλτρο της αριθμητικής ταλάντωσης.

Τα αποτελέσματα που καταγράφονται από την εφαρμογή του αλγορίθμου μεταβλητής διαμέρισης στα μετρητικά προβλήματα, αποτελούν μια πηγή ενδείξεων ότι, η αναπτυχθείσα μέθοδος χωρικής αναδιαμέρισης βελτιώνει ικανοποιητικά την ποιοτική συμπεριφορά των προσεγγίσεων Galerkin του χαλαρωτικού μοντέλου.

Στην συνέχεια, θα εισάγουμε την τεχνική της **Μεταγωγής** και θα ορίσουμε μέσω αυτής το **Μεταγωγικά Χαλαρωτικό** μοντέλο Νόμων Διατήρησης. Προκύπτει από το μοντέλο χαλάρωσης (0.0.3) αν η μεταβλητή χαλάρωσης  $\varepsilon$



θεωρηθεί συνάρτηση του χρόνου και ειδικότερα αν είναι 0 πάνω στους κόμβους της χρονικής διακριτοποίησης και σταθερή αλλού. Δηλαδή αυτό το μοντέλο *μετάγεται* από τό Χαλαρωτικό μοντέλο στην ευθεία εξίσωση Νόμων Διατήρησης, αναλόγως της χρονικής στιγμής. Με αυτόν τον ορισμό ελπίζουμε ότι το αντίστοιχο σχήμα θα έχει υβριδικά χαρακτηριστικά π.χ μικρότερη εξάρτηση από τις παραμέτρους χαλάρωσης  $\varepsilon$ ,  $A_i$  και ίδια όριακή λύση. Από την εφαρμογή του στο ίδιο σύνολο προβλημάτων, διαπιστώνουμε ότι, ακόμα και για σχεδόν μηδενική τιμές της παράμετρο χαλάρωσης  $\varepsilon$  και μεγάλο χρονικό βήμα, η λύση που αποδίδει το σχήμα παραμένει φραγμένη. Δηλαδή υπάρχουν σοβαρές ενδείξεις ότι, **η περιοχή ευστάθειας του μεταγωγικά χαλαρωτικού σχήματος δεν εξαρτάται από το  $\varepsilon$** . Ας σημειωθεί εδώ ότι μικρή εξάρτηση από την παράμετρο χαλάρωσης  $\varepsilon$  συνεπάγεται και μικρή εξάρτηση από τους πίνακες χαρακτηριστικών ταχυτήτων  $A_i$  (οπότε ΔΕΝ χρειάζεται συντονισμός του σχήματος για μικρές τιμές της  $\varepsilon$ ).

Ο συνδυασμός αναδιαμέρισης και μεταγωγής δίνει ένα ταχύ, ευσταθές και υψηλής ευκρίνειας σχήμα. Στο σύνολο των δοκιμαστικών προβλημάτων, η ποιότητα της λύσης ήταν εξαιρετική ακόμα και για μεγάλο χρονικό βήμα και πολύ μικρή τιμή της παράμετρο χαλάρωσης  $\varepsilon$ .

Από το γεγονός ότι για αναδιαμέριση που χρησιμοποιεί την καμπυλότητα σαν εκτιμήτρια οξύτητος της λύσης, το παραπάνω σχήμα διατηρεί την ευστάθειά και την ευκρίνεια του, ακόμα και για  $\varepsilon=0$ , θα οδηγήθουμε στην συνέχεια στον ορισμό του *οριακά χαλαρωτικού σχήματος*, για προσέγγιση Galerkin του ασθενούς ορίου του χαλαρωτικού μοντέλου. Αν και τα αποτελέσματα της εφαρμογής του οριακά χαλαρωτικού σχήματος στα δοκιμαστικά προβλήματα είναι ικανοποιητικά, πίο σημαντικό είναι το ερώτημα που ανακύπτει:

“ *Είναι η κατάλληλη αναδιαμέριση ένας αυτόνομος μηχανισμός κατασκευής προσεγγίσεων Galerkin για λύσεις Νόμων Διατήρησης ;* ”

Κλείνουμε το κεφάλαιο διερευνώντας πειραματικά την απάντηση στην παραπάνω πρόταση. Πιο συγκεκριμένα εισάγουμε το βήμα τής αναδιαμέρισης καμπυλότητας στο σχήμα Galerkin που προκύπτει απο την ευθεία διακριτοποίηση Νόμων Διατήρησης. Επειτα απο την εφαρμογή του στα ίδια προβλήματα, διαπιστώνουμε ότι τα αποτελέσματα που παίρνουμε είναι παρεμφερή με του οριακά χαλαρωτικού σχήματος, κάτι που ενισχύει την καταφατική απάντηση στην παραπάνω ερώτηση.

# Κεφάλαιο 1

## Σχήματα πεπερασμένων στοιχείων χαλάρωσης

### 1.1 Εισαγωγή

Πολλή απο την έρευνα που γίνεται προς την κατεύθυνση της κατασκευής αποτελεσματικών αριθμητικών σχημάτων για συστήματα Υπερβολικών Νόμων Διατήρησης

$$\begin{cases} \partial_t u + \sum_{i=1}^N \partial_{x_i} F_i(u) = 0, & x \in \mathbb{R}^N, t > 0, u(x) \in \mathbb{R}^M \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \quad (1.1.1)$$

στηρίζεται σε διακριτοποίηση πεπερασμένων διαφορών ή πεπερασμένων όγκων. Η βασική δυσκολία, απο υπολογιστικής πλευράς, είναι η επιλογή ενός εξομαλυντικού μηχανισμού ικανού να υπολογίζει με μεγάλη ακρίβεια και χωρίς εσφαλμένες ταλαντώσεις τόσο την περιοχή των ασυνεχειών (shocks) όσο και τις ομαλές περιοχές της λύσης. Σ' αυτήν την εργασία, προτείνονται σχήματα πεπερασμένων στοιχείων για το (1.1.1) στα οποία ο εξομαλυντικός μηχανισμός είναι προϊόν διαταραχής με χρήση κυματικών τελεστών αλλά και κατάλληλης αναδιαμέρισης. Αυτό μπορεί να γίνει εφαρμόζοντας διακριτοποίηση πεπερασμένων στοιχείων στην relaxation προσέγγιση του (1.1.1) πάνω σε κατάλληλη

διαμέριση η οποία είναι προϊόν κάποιας εκτιμήτριας συνάρτησης που μπορεί να εντοπίσει τις περιοχές του shock.

Για αποσαφήνιση της κεντρικής ιδέας των παραπάνω θα ασχοληθούμε με το βαθμωτό μονοδιάστατο πρόβλημα

$$\partial_t u + f(u)_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad u(x) \in \mathbb{R} \quad (1.1.2)$$

Οι Νόμοι Διατήρησης σχετίζονται με τα όρια καταλλήλων μοντέλων relaxation βλ. [48, 49]. Το μοντέλο των Jin, Xin [18] που χρησιμοποιείται για την κατασκευή τέτοιων σχημάτων, είναι

$$\begin{aligned} \partial_t u + \partial_x v &= 0 \\ \partial_t v + c^2 \partial_x u &= -\frac{1}{\varepsilon} (v - f(u)), \quad u(x), v(x) \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

Το σύστημα (1.1.3) μπορεί να θεωρηθεί ως ομαλοποίηση του (1.1.2) μέσω του κυματικού τελεστή. Πράγματι η (1.1.3) οδηγεί στην

$$\partial_t u + f(u)_x + \varepsilon (\partial_{tt} u - c^2 \partial_{xx} u) = 0 \quad (1.1.4)$$

Υποθέτοντας ότι ισχύει η υποχαρακτηριστική συνθήκη, [60]:  $-c < f'(u) < c$ , παίρνουμε ως relaxation όριο την (1.1.2) καθώς  $\varepsilon \rightarrow 0$ , [18, 63, 56, 64]. Συγκεκριμένα στις εργασίες [63, 56] αποδεικνύεται ότι καθώς  $\varepsilon \rightarrow 0$  η λύση του μοντέλου χαλάρωσης (όταν  $M = N = 1$ ) συγκλίνει στον  $L^1$  στην μοναδική λύση εντροπίας (λύση Kruzhkov) του νόμου διατήρησης.

### 1.1.1. Σχήματα χαλάρωσης

Τα relaxation σχήματα που προτείνονται στο [18] βασίζονται στην διακριτοποίηση πεπερασμένων διαφορών του (1.1.3) στην γνωστή upwind μορφή. Ένα από τα βασικά χαρακτηριστικά του μοντέλου χαλάρωσης είναι ότι οδηγεί με φυσιολογικό τρόπο σε έμμεσες - άμεσες διακριτοποιήσεις ως προς τον χρόνο: Θεωρούμε διακριτές προσεγγίσεις  $U^n \cong u(t^n), V^n \cong V(t^n)$  όπου  $t^n = n\kappa$ ,  $\kappa$

το βήμα της διακριτοποίησης ως προς τον χρόνο. Δεδομένου ότι ο άκαμπος μη γραμμικός όρος πρέπει να διακριτοποιηθεί πεπλεγμένα η απλούστερη μορφή διακριτοποίησης ως προς τον χρόνο της (1.1.3) θα είναι

$$\begin{aligned} \frac{U^{n+1} - U^n}{\kappa} + V_x^n &= 0, \\ \frac{V^{n+1} - V^n}{\kappa} + c^2 U_x^{n+1} &= -\frac{1}{\varepsilon}(V^{n+1} - f(U^{n+1})). \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

Προφανώς το σύστημα (1.1.5) μπορεί να αποσυνδεθεί, και αφού η  $U^{n+1}$  υπολογίζεται από την πρώτη εξίσωση, η επίλυση μη γραμμικών συστημάτων δεν είναι απαραίτητη.

Τα αντίστοιχα relaxation σχήματα προκύπτουν διακριτοποιώντας την (1.1.5) ως προς  $x$  με πηλίκα διαφορών τεχνητής διάχυσης, βλ. την παράγραφο 2. Οι υπολογισμοί πραγματοποιούνται συνήθως για  $\varepsilon \ll h$  ή ακόμα και για  $\varepsilon \rightarrow 0$  (relaxed schemes). Εδώ το  $h$  συμβολίζει την παράμετρο χωρικής διακριτοποίησης. Σ' αυτήν την περίπτωση ο κυρίαρχος εξομαλυντικός μηχανισμός είναι αυτός της τεχνητής διάχυσης (artificial diffusion) όπως θα δούμε αναλυτικότερα στην παράγραφο 2.

### 1.1.2. Σχήματα χαλάρωσης Πεπερασμένων Στοιχείων

Η δική μας προσέγγιση είναι διαφορετική. Υποθέτουμε αρχικά για απλούστευση ότι τα δεδομένα του προβλήματός μας και η λύση στο  $[0, T]$  έχουν συμπαγή φορέα σ' ένα υποσύνολο  $\Omega_1 \subset \mathbb{R}$ . Εστω  $\Omega$  κατάλληλο σύνολο τ.ω.  $\Omega_1 \subset \Omega$  στο οποίο θα αναζητηθεί η αριθμητική μας λύση και  $S_h$  ένας κλασικός μονοδιάστατος χώρος  $C^0$  πεπερασμένων στοιχείων πολυωνυμικού τύπου, που ορίζεται πάνω σε μιά διαμέριση  $\mathcal{T}_h$  του  $\Omega$ , δηλαδή:

$$S_h = \{ \phi \in C(\mathbb{R}) : \phi|_K \in \mathbb{P}_p(K), K \in \mathcal{T}_h, \phi|_{\Omega^c} \equiv 0 \}$$

όπου με  $\mathbb{P}_q(Q)$  συμβολίζουμε τον χώρο των πολυωνύμων στο  $Q$  βαθμού το πολύ  $q$ , με  $K$  τα στοιχεία ( διαστήματα στην μονοδιάστατη περίπτωση ) της διαμέρισης  $\mathcal{T}_h$ , και με  $h_K$  την διάμετρο του στοιχείου  $K$ . Επειτα θεωρούμε την διακριτοποίηση πεπερασμένων στοιχείων του (1.1.3)

$$\begin{aligned} (\partial_t u_h, \phi) + (\partial_x v_h, \phi) &= 0, \quad \forall \phi \in S_h \\ (\partial_t v_h, \psi) + (c^2 \partial_x u_h, \psi) &= -\frac{1}{\varepsilon} (v_h - f(u_h), \psi), \quad \forall \psi \in S_h \end{aligned} \tag{1.1.6}$$

όπου οι άγνωστοι  $u_h, v_h$  ανήκουν στον  $S_h$ . Η ιδέα είναι να χρησιμοποιήσουμε την (1.1.6) για πολύ μικρό  $\varepsilon$ . Επειδή δεν υπάρχει άλλος μηχανισμός διάχυσης σ' αυτό το σχήμα, ο μόνος εξομαλυντικός μηχανισμός είναι το relaxation (ή ισοδύναμα αυτός του (1.1.4)). Θα δούμε αργότερα ότι το τοπικό μέγεθος διακριτοποίησης κοντά στο shock πρέπει να είναι  $h_K \leq \gamma\varepsilon$ .

Αυτή η απαίτηση είναι συμβιβαστή με την προσέγγιση πεπερασμένων στοιχείων που βασίζεται σε μη δομημένες διαμερίσεις και τεχνικές αναδιαμέρισης. Πράγματι χρησιμοποιώντας κατάλληλη εκτιμήτρια συνάρτηση η οποία να μπορεί να εντοπίσει την περιοχή του shock, η (1.1.6) μπορεί αν συνδυαστεί με μια μέθοδο που αναπροσαρμόζει την διαμέριση ε.ω. να είναι πιο πυκνή στις περιοχές των shocks και πιο αραιή στις ομαλές περιοχές της λύσης. Τα σχήματα που κατασκευάζονται χρησιμοποιώντας αυτήν την ιδέα, βασίζονται σε

μηχανισμό εξομάλυνσης πεπερασμένης ταχύτητας μετάδοσης (finite speed of propagation), δεν απαιτούν την προσεγγιστική λύση προβλημάτων Riemann, μπορούν να διατυπωθούν σε μορφή χαμηλής τάξης, υψηλής τάξης ή ακόμα και σε συνδυασμένη μορφή (μέθοδοι  $h - p$ ) και τέλος μπορούν να γενικευτούν σε πολλές διαστάσεις με απλές αλλαγές χρησιμοποιώντας την ευελιξία της διατύπωσης των πεπερασμένων στοιχείων.

Απο την άλλη πλευρά, δυσκολίες του προβλήματος όπως η σωστή επιλογή του μηχανισμού αναδιαμέρισης και στην περίπτωση των συστημάτων η ύπαρξη κάποιας επιπλέον δομής όπως είναι οι ασυνέχειες επαφής ( contact discontinuities ), απαιτούν ειδική μεταχείριση στο επίπεδο της ΜΔΕ (relaxation model), βιβλ. [48], ή στην επιλογή της διαμέρισης. Ένα απο τα βασικά χαρακτηριστικά των σχημάτων χαλάρωσης (relaxation ) πεπερασμένων στοιχείων που προτείνονται σ' αυτήν την εργασία, είναι οτι δεν χρησιμοποιούν επιλυτές Riemann και άρα συνδυάζουν υψηλή ακρίβεια και απλότητα. Συνεπώς σχετίζονται με τα κεντρικά σχήματα πεπερασμένων διαφορών υψηλής ευκρίνειας τα οποία έχουν αναπτυχθεί τα τελευταία χρόνια από τον E. Tadmor και τους συνεργάτες του, [30], [25].

Στην παρούσα εργασία αναπτύσσονται ημιδιακριτά σχήματα για πεπερασμένα στοιχεία με relaxation στην παράγραφο 2 και μελετάται η συνέπειά τους. Αναλόγως του βαθμού των χρησιμοποιούμενων πολυωνύμων και της ομαλότητας της λύσης, το τοπικό σφάλμα στρογγύλευσης είναι βέλτιστης τάξης. Επιπλέον μελετάται η συμπεριφορά στις περιοχές του shock συγκριτικά με την σχετική κλασική μέθοδο πεπερασμένων διαφορών για relaxation σχήματα για τις περιπτώσεις των κατα τμήματα γραμμικών πολυωνύμων ( $p = 1$ ). Στην παράγραφο 2 αναπτύσσονται και σχήματα για την περίπτωση των πολλών διαστάσεων. Στην παράγραφο 3 ασχολούμαστε με άμεσα-έμμεσα πλήρως διακριτά σχήματα. Χρησιμοποιώντας τον μη-γραμμικό όρο έμμεσα, [59], και τον βασικό γραμμικό όρο άμεσα (μέσω των TVB σχημάτων στα [37], [36]) καταλήγουμε σ' ένα

άμεσο σχήμα. Η αναδιαμέριση αναπτύσσεται στην παράγραφο 4. Λαμβάνοντας υπόψιν τα αποτελέσματα της [54] προτείνουμε μιά εκτιμήτρια συνάρτηση η οποία εντοπίζει ικανοποιητικά τις περιοχές των shocks. Βασισμένοι σε αυτήν την πληροφορία μπορούμε να αναπτύξουμε αλγόριθμους αναδιαμέρισης. Επιλογή μας στους υπολογισμούς είναι ένας αλγόριθμος που στηρίζεται σε δοθέντα σταθερό αριθμό κόμβων. Αυτός ο αλγόριθμος επιλέγει τις θέσεις των κόμβων εκμεταλευόμενος την πληροφορία της εκτιμήτριας συνάρτησης. Φυσικά είναι πιθανές και άλλες μέθοδοι δες, π.χ. [15]. Στην παράγραφο 5 αναπτύσσονται πιθανές επεκτάσεις των σχημάτων μας όπως μέθοδοι μεταβλητής χαρακτηριστικής ταχύτητας και μεταβλητής παραμέτρου relaxation. Τέλος στην παράγραφο 6 παρουσιάζονται τα υπολογιστικά αποτελέσματα της μεθόδου για διάφορα τέστ-προβλήματα. Έχουν επιλεγεί προβλήματα Riemann και προβλήματα με ομαλά δεδομένα. Στο 6.1 μέρος ασχολούμαστε με βαθμωτό πρόβλημα μίας διάστασης και στο 6.2 με σύστημα ελαστοδυναμικής για μία διάσταση.

Μέθοδοι πεπερασμένων στοιχείων για Υπερβολικούς Νόμους Διατήρησης έχουν προταθεί και αναλυθεί στο παρελθόν π.χ. από τους Johnson και Szepessy [19, 36, 20, 17], Cockburn και Shou [9, 52, 7], δες τα άρθρα ανασκόπησης των Cockburn, Johnson στο [8]. Στην streamline diffusion μέθοδο των JS1, S, έχει προστεθεί τεχνητή διάχυση (artificial diffusion) στην κατεύθυνση των δυναμικών γραμμών σε συνδυασμό με ειδικούς όρους οι οποίοι σκοπό έχουν την βελτίωση της συμπεριφοράς του σχήματος στις περιοχές των shocks (shock capturing terms).

Μέθοδοι πεπερασμένων στοιχείων που χρησιμοποιούν ασυνεχή στοιχεία αναπτύσσονται στα [17] και [9]. Συγκεκριμένα σ' αυτές τις εργασίες η σύνδεση ανάμεσα στα στοιχεία της διαμέρισης επιτυγχάνεται επιβάλλοντας συνθήκες οι οποίες στην κατεύθυνση του εξωτερικού κάθετου διανύσματος ανάγονται σε μονοδιάστατες διακριτές ροές πεπερασμένων διαφορών πρώτης τάξης. Αυτές



οι μέθοδοι χρησιμοποιούν πολυώνυμα αυθαίρετου βαθμού και είναι γενικά υψηλής τάξης. Η διακριτοποίηση στον χρόνο στο [9] έγινε χρησιμοποιώντας τα TVB Runge Kutta σχήματα των [37, 36]. Οι ίδιες μέθοδοι συνδυασμένες με κατάλληλες ημιπελεγμένες μεθόδους (DIRK) χρησιμοποιούνται και στην παρούσα εργασία για την διακριτοποίηση στον χρόνο.

Μέθοδοι πεπερασμένων στοιχείων με αυτόματη αναδιαμέριση έχουν μελετηθεί στο παρελθόν από τους Johnson και Szepessy [20] για την  $\varepsilon$ -διαταραχή διάχυσης των μονοδιάστατων συστημάτων νόμων διατήρησης.

Η μέθοδος πεπερασμένων χωρίων αποτελεί μια εναλλακτική μέθοδο υπολογισμών σε μη δομημένες διαμερίσεις. Τα τελευταία χρόνια έχει αναπτυχθεί εκτενής βιβλιογραφία η οποία αναφέρεται κυρίως σε θεωρητικά αποτελέσματα αναφορικά με τις μεθόδους πεπερασμένων χωρίων για υπερβολικούς νόμους διατήρησης βλ., [49, 8] και τις αναφορές τους.

Σχήματα πεπερασμένων διαφορών τα οποία στηρίζονται σε μοντέλα χαλάρωσης έχουν μελετηθεί στις εργασίες [42, 56, 48, 23, 16]. Αυτές οι μέθοδοι μπορούν επίσης να ιδωθούν και ως διακριτά κινητικά σχήματα, βλ. την εργασία ανασκόπησης του B. Perthame [66] και επίσης τις [43, 47]. Σχήματα χαλάρωσης - πεπερασμένων χωρίων σε μη δομημένες διαμερίσεις εισάγονται και αναλύονται στην [22].

Μέθοδοι με αυτόματη αναδιαμέριση για υπερβολικούς νόμους διατήρησης έχουν μελετηθεί στο παρελθόν στις εργασίες [61, 20, 46, 69].

## 1.2 Μορφοποίηση των Σχημάτων Πεπερασμένων Στοιχείων με Relaxation

### 1.2.1. Συστήματα μίας διάστασης

Εστω το σύστημα (1.1.1) για  $N = 1$ . Το αντίστοιχο relaxation σύστημα των [18] είναι

$$\begin{aligned} \partial_t u + \partial_x v &= 0 \\ \partial_t v + A \partial_x u &= -\frac{1}{\varepsilon} (v - F(u)), \quad u(x), v(x) \in \mathbb{R}^M \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

όπου  $A = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_M)$  κατάλληλος διαγώνιος πίνακας, που προκύπτει από την ομαλοποίηση του (1.1.1) όταν εφαρμόζεται ένας κυματικός τελεστής σε κάθε συνιστώσα του συστήματος. Τότε το αντίστοιχο σχήμα πεπερασμένων στοιχείων είναι (με τον ίδιο συμβολισμό της παραγράφου 1):

Ζητούνται  $u_h, v_h \in S_h^M := S_h \times \dots \times S_h$  τ.ω.

$$\begin{aligned} (\partial_t u_h, \phi) + (\partial_x v_h, \phi) &= 0, \quad \forall \phi \in S_h^M \\ (\partial_t v_h, \psi) + (A \partial_x u_h, \psi) &= -\frac{1}{\varepsilon} (v_h - f(u_h), \psi), \quad \forall \psi \in S_h^M \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

Για απλότητα θεωρούμε εδώ  $u_h \in S_h^M$  με  $S_h$  όπως ορίζεται στην παράγραφο 1. Κάποια συστήματα ίσως απαιτούν την επιλογή  $u_h \in \mathcal{S}_h$  όπου  $\mathcal{S}_h = S_h^{(1)} \times \dots \times S_h^{(M)}$ , δηλ. στην γενική περίπτωση διαφορετική διαμέριση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για κάθε συνιστώσα του  $S_h$ .

Για λόγους ευστάθειας όπως και στην βαθμωτή περίπτωση ο πίνακας  $A$  πρέπει να επιλεγεί με τέτοιο τρόπο ώστε να ισχύει η υποχαρακτηριστική συνθήκη, π.χ. στην περίπτωση συμμετρικών συστημάτων  $A - F'(u)^2 \geq \mu I$ ,  $\mu > 0$ . Στην περίπτωση όπου το σύστημα επιδέχεται αυστηρά κυρτή εντροπία  $\eta$ , τότε ο  $A$  πρέπει να επιλεγεί ε.ω., [40, 41],  $\frac{1}{2}(A^T \eta_{uu}(u) + \eta_{uu}(u)A) - \alpha F'^T(u)F'(u) \geq \mu I$  όπου  $\eta_{uu}(u) \leq \alpha I$  και  $\eta_{uu}$  συμβολίζει την Εσσιανή του  $\eta$ . Δές [43], [47] για τις συνθήκες ευστάθειας του (1.2.1).

Τα σχήματα (1.2.2) μπορούν να γραφτούν στην μορφή

$$\begin{aligned} (\partial_t u_h, \phi) + (\partial_x v_h, \phi) &= 0, \quad \forall \phi \in S_h^M \\ \varepsilon (\partial_t v_h, \psi) + \varepsilon (A \partial_x u_h, \psi) + (v_h - f(u_h), \psi) &= 0, \quad \forall \psi \in S_h^M \end{aligned}$$

ή (με προφανή συμβολισμό)

$$E_h(u_h, \phi; v_h, \psi) = 0, \quad \forall \phi, \psi \in S_h^M \quad (1.2.3)$$

Όπως σημειώθηκε, η (1.2.1) αρα και η (1.2.2) αντιστοιχούν στην ομαλοποίηση της (1.1.1) που προκύπτει αν εφαρμοστεί ένας κυματικός τελεστής σε κάθε συνιστώσα του προβλήματος. Αυτή πιθανότατα δεν είναι πάντα η ενδεδειγμένη επιλογή, ειδικά όταν το σύστημα εισάγει γραμμικώς εκφυλισμένα πεδία (linearly degenerate fields) και ασυνέχειες επαφής όπως στην περίπτωση των εξισώσεων Euler για δυναμική αερίων. Αυτό μερικώς οφείλεται στο γεγονός ότι δεν υπάρχουν “ακριβείς” επιλυτές για ασυνέχειες επαφής οι οποίοι να λειτουργούν με relaxation. Σ’ αυτήν την περίπτωση, όπως προτάθηκε από τους Coquel, Perthame [48], είναι δυνατόν να εισαχθεί relaxation σε κάποιες από τις συνιστώσες του συστήματος ενώ για τις υπόλοιπες να εφαρμοσθεί η κλασική μεταχείριση στην upwind μορφή. Ένα μοντέλο relaxation και το αντίστοιχο σχήμα για εξισώσεις ελαστοδυναμικής, που εισάγει relaxation σε μία εξίσωση του συστήματος, αναπτύχθηκε από τους Gosse, Tzavaras [16]. Αυτό το σχήμα αποδείχτηκε λιγότερο διαχυτικό από το relaxation σχήμα του [18]. Μπορεί κανείς να κατασκευάσει σχήματα πεπερασμένων στοιχείων με relaxation για relaxation μοντέλα όπως π.χ. των [48] και [56] (με κατάλληλες μετατροπές) και επιπλέον να βρει εναλλακτικές προσεγγίσεις στο πρόβλημα των ασυνεχειών επαφής. Αυτό θα είναι αντικείμενο επόμενης έρευνας.

### 1.2.2. Συνέπεια

Για την ανάλυση της συνέπειας του (1.2.1) ακολουθούμε την κλασική ανάλυση πεπερασμένων στοιχείων. Υποθέτουμε ότι η ακριβής λύση  $u$  του (1.1.1) είναι

αρκετά ομαλή στο πεδίο ορισμού  $\Omega_S$ . Έστω  $v = F(u)$  και  $\Pi$  ο τελεστής παρεμβολής πεπερασμένων στοιχείων στο  $S_h$ , [4], έχουμε το παρακάτω αποτέλεσμα

**Πρόταση 1.2.1.** *Αν  $\phi, \psi \in S_h^M$  συμπαγούς φορέα στο  $\Omega_S$ , τότε υπό τις παραπάνω συνθήκες*

$$|E_h(\Pi u, \phi; \Pi v, \psi)| \leq C(u)(h^p + \varepsilon)(\|\phi\| + \|\psi\|) \quad (1.2.4)$$

και

$$|E_h(\Pi u, \phi; \Pi v, \psi)| \leq C(u)(h^{p+1} + \varepsilon)(\|\phi_x\| + \|\psi_x\|) \quad (1.2.5)$$

όπου  $E_h$  όπως ορίζεται στην (1.2.3) και  $\|\cdot\|$  συμβολίζει την  $L^2(\Omega_S)$  νόρμα.

*Απόδειξη.* Η παρεμβάλουσα πεπερασμένων στοιχείων του  $S_h$ , ικανοποιεί [4] την

$$\|w - \Pi w\|_{j, \Omega_S} \leq C h^{p+j} \|w\|_{p+1, \Omega_S}, \quad j = 0, 1,$$

όπου  $\|w\|_{m, \Omega_S}$  συμβολίζει την Sobolev νόρμα τάξης  $m$ . Για  $v = f(u)$ , όπου  $u$  η (ομαλή) λύση του (1.1.1) έχουμε

$$\begin{aligned} (\partial_t \Pi u, \phi) + (\partial_x \Pi v, \phi) &= (\partial_t u, \phi) + (\partial_x f(u), \phi) \\ &+ (\partial_t(\Pi u - u), \phi) + (\partial_x(\Pi v - v), \phi) \quad (1.2.6) \\ &= (\partial_t(\Pi u - u), \phi) + (\partial_x(\Pi v - v), \phi). \end{aligned}$$

Επειδή η  $\Pi$  είναι ανεξάρτητη του  $t$ ,  $\partial_t(\Pi u - u) = (\Pi - I)\partial_t u$ . Επιπλέον επειδή η  $\phi$ , έχει συμπαγή φορέα στο  $\Omega_S$  μπορούμε να ολοκληρώσουμε κατα μέλη τον όρο

$$(\partial_x(\Pi v - v), \phi).$$

Χρησιμοποιώντας τις προσεγγιστικές ιδιότητες του  $\Pi$  παίρνουμε τα επιθυμητά αποτελέσματα για την πρώτη συνιστώσα του  $E_h$ . Παρόμοια για την δεύτερη συνιστώσα, επειδή

$$\begin{aligned} \varepsilon(\partial_t \Pi v, \psi) + \varepsilon A(\partial_x \Pi u, \psi) + (\Pi F(u) - F(\Pi u), \psi) \\ = \varepsilon(\partial_t v, \psi) + \varepsilon A(\partial_x u, \psi) \\ + \varepsilon(\partial_t(\Pi v - v), \psi) + \varepsilon A(\partial_x(\Pi u - u), \psi) \\ + (\Pi F(u) - F(u), \psi) + (F(u) - F(\Pi u), \psi), \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

το αποτέλεσμα προκύπτει όπως παραπάνω.  $\square$

Αυτά τα φράγματα είναι βέλτιστα, ακόμα και για το αντίστοιχο γραμμικό πρόβλημα. Ας σημειωθεί εδώ ότι το  $\varepsilon$  είναι μια σταθερή παράμετρος που επιλέγουμε σύμφωνα με την επιθυμητή ακρίβεια και σ' αυτό το επίπεδο είναι ανεξάρτητη του πλάτους  $h$  της διαμέρισης. Οι εκτιμήσεις (1.2.4), (1.2.5) συνδυασμένες με ανάλυση ευστάθειας μπορούν να δώσουν ταχύτητες σύγκλισης για το σχήμα στην ομαλή περίπτωση.

### 1.2.3. Ποιοτική συμπεριφορά των σχημάτων για $p = 1$

Για να κατανοήσουμε την συμπεριφορά του σχήματος κοντά στις περιοχές του shock, εξετάζουμε την περίπτωση μιάς (τοπικά) ομοιόμορφης διαμέρισης διαμέτρου  $h$ . Τότε το σχήμα πεπερασμένων στοιχείων για κατά τμήματα γραμμικά στοιχεία παίρνει την μορφή

$$\begin{aligned} \partial_t \frac{1}{6} (u_{j+1} + 4u_j + u_{j-1}) + \frac{1}{2h} [v_{j+1} - v_{j-1}] &= 0, \\ \partial_t \frac{1}{6} (v_{j+1} + 4v_j + v_{j-1}) + \frac{1}{2h} c^2 [u_{j+1} - u_{j-1}] &= -\frac{1}{\varepsilon} \left[ \frac{1}{h} (v - f(u), \varphi_j) \right], \end{aligned}$$

όπου  $\varphi_j$  η συνάρτηση βάσης τού χώρου πεπερασμένων στοιχείων που αντιστοιχεί στον κόμβο  $x_j$ . Η συμπεριφορά λοιπόν αυτού του σχήματος αντιστοιχεί σ' αυτήν του κεντραρισμένου σχήματος πεπερασμένων διαφορών,

$$\begin{aligned} \partial_t u_j + \frac{1}{2h} [v_{j+1} - v_{j-1}] &= 0, \\ \partial_t v_j + \frac{1}{2h} c^2 [u_{j+1} - u_{j-1}] &= -\frac{1}{\varepsilon} [v_j - f(u_j)]. \end{aligned} \quad (1.2.8)$$

Οπότε οι συναρτήσεις  $\{u_j\}$  ικανοποιούν την,

$$\partial_t u_j + \frac{1}{2h} [f(u_{j+1}) - f(u_{j-1})] + \varepsilon \left[ \partial_{tt} u_j - c^2 \frac{1}{4h^2} [u_{j+2} - 2u_j + u_{j-2}] \right] = 0. \quad (1.2.9)$$

Χρησιμοποιώντας αναπτύγματα Taylor προκύπτει ότι αυτό το σχήμα είναι προσέγγιση τρίτης τάξης της εξίσωσης

$$\partial_t u + f(u)_x + \varepsilon \left[ \partial_{tt} u - c^2 \partial_{xx} u \right] + \frac{h^2}{6} f(u)_{xxx} = 0,$$

δηλ. όπως ήταν αναμενόμενο η διακριτοποίηση πεπερασμένων στοιχείων εισάγει έναν όρο διασποράς ο οποίος είναι γραμμικός ως προς την μεταβλητή ροής. Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα Chapman-Enskog συμπεραίνουμε ότι

$$\partial_t u + f(u)_x - \varepsilon \partial_x((c^2 - f'(u)^2) \partial_x u) + \frac{h^2}{6} f(u)_{xxx} = 0.$$

Το δυναμικό όριο της διασποράς - διάχυσης προσέγγισης ενός Νόμου Διατήρησης είναι λεπτό θέμα που έχει συζητηθεί π.χ. στο [55]. Οι Jacobs, McKinney και Shearer [55] έδειξαν ότι εξίσωση

$$\partial_t u^\delta + f(u^\delta)_x - \delta \partial_{xx} u^\delta + \beta \delta^2 u^\delta_{xxx} = 0, \quad (1.2.10)$$

μπορεί να έχει λύσεις οι οποίες συγκλίνουν σε μη - αποδεκτά shocks καθώς  $\delta \rightarrow 0$ . Επιπλέον αν κυριαρχεί ο όρος της διασποράς η προσεγγιστική λύση θα παρουσιάζει ταλαντώσεις κοντά στο shock. Αρα για να αποκλειστεί αυτή η περίπτωση από το σχήμα μας πρέπει να κυριαρχεί ο όρος της διάχυσης. Αυτό επιβάλλει μία συνθήκη της μορφής

$$h < \gamma \varepsilon. \quad (1.2.11)$$

Ας σημειωθεί ότι το  $h$  στην (1.2.11) είναι το τοπικό πλάτος της διαμέρισης κοντά στο shock και άρα στην στρατηγική της αναδιαμέρισης η (1.2.11) πρέπει να λαμβάνεται υπόψιν μόνο στην γειτονιά του shock. Τα παραπάνω επιχειρήματα επιβεβαιώνονται από τα υπολογιστικά αποτελέσματα στην παράγραφο 6. Ας συγκρίνουμε τα παραπάνω σχήματα με τα relaxation σχήματα των πεπερασμένων διαφορών του [18]. Το σχήμα πρώτης τάξης του [18] είναι

$$\begin{aligned} \partial_t u_j + \frac{1}{2h} [v_{j+1} - v_{j-1}] - \frac{1}{h} c [u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}] &= 0, \\ \partial_t v_j + \frac{1}{2h} c^2 [u_{j+1} - u_{j-1}] - \frac{1}{h} c [v_{j+1} - 2v_j + v_{j-1}] &= -\frac{1}{\varepsilon} [v_j - f(u_j)]. \end{aligned} \quad (1.2.12)$$

Η εξίσωση-μοντέλο γι' αυτό το σχήμα είναι

$$\begin{aligned}\partial_t u + v_x - h c u_{xx} &= 0, \\ \partial_t v + c^2 u_x - h c v_{xx} &= -\frac{1}{\varepsilon} [v - f(u)].\end{aligned}$$

Αρα παραλείποντας όρους υψηλής τάξης ως προς  $h$  και  $\varepsilon$  οδηγούμαστε στην

$$\partial_t u + f(u)_x + \varepsilon [\partial_{tt} u - c^2 \partial_{xx} u] - h c u_{xx} = 0.$$

Στα κλασικά relaxation σχήματα οι υπολογισμοί γίνονται για  $\varepsilon \ll h$ , [18], οπότε κυρίαρχος εξομαλυντικός όρος προέρχεται από τον όρο της διάχυσης. Ας σημειωθεί ότι εδώ εντοπίζεται μια ουσιώδης διαφορά από την δική μας προσέγγιση. Πράγματι στα σχήματα πεπερασμένων στοιχείων που προτείνονται δεν προστίθενται όροι αριθμητικής διάχυσης και ο κυρίαρχος εξομαλυντικός παράγοντας προέρχεται από τον όρο του γελαξαιον και την αναδιαμέριση.

Ας σημειωθεί ότι αν  $\varepsilon \ll h$  η προσεγγιστική λύση θα είναι κοντά στην λύση του

$$\partial_t u_j + \frac{1}{2h} [f(u_{j+1}) - f(u_{j-1})] - \frac{1}{2h} c [u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}] = 0,$$

το οποίο είναι ημιδιακριτό σχήμα Lax-Friedrichs. Παρόμοιες παρατηρήσεις ισχύουν για σχήματα μεγαλύτερης τάξης της (1.2.12) Ας σημειωθεί ότι τα relaxation σχήματα του [JX] συνδέονται στενά με τα κεντραρισμένα σχήματα του [30] και ειδικότερα με τα ημιδιακριτά κεντραρισμένα σχήματα που προτάθηκαν στο [25], δες και την παράγραφο 5.

#### 1.2.4. Συστήματα σε πολλές διαστάσεις

Η επέκταση των σχημάτων σε πολλές διαστάσεις είναι άμεση χρησιμοποιώντας την διατύπωση πεπερασμένων στοιχείων. Εστω  $\mathcal{T}_h$  διαμέριση πεπερασμένων στοιχείων του  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  σε πολύεδρα. Εστω  $h_K$  συμβολίζει την διάμετρο του πολύεδρου  $K$  και  $h = \sup_{K \in \mathcal{T}_h} h_K < 1$ . Ορίζουμε

$$S_h = \{ \chi \in H_0^1(\Omega)^M : \chi|_K \in \mathbb{P}_p(K)^M, K \in \mathcal{T}_h, \chi|_{\Omega^c} \equiv 0 \}$$

όπου  $\Omega$  είναι κατάλληλο πολυεδρικό πεδίο ορισμού έξω από το οποίο η λύση μας είναι 0. Το σχήμα πεπερασμένων στοιχείων με relaxation προσδιορίζεται αναζητώντας  $(u_h, v_{h,1}, \dots, v_{h,N}) \in S_h^{1+N}$  τ.ω.

$$\begin{aligned} (\partial_t u_h, \phi) + \sum_{i=1}^N (\partial_{x_i} v_{h,i}, \phi) &= 0, \quad \forall \phi \in S_h \\ (\partial_t v_{h,i}, \psi) + (A_i \partial_{x_i} u_h, \psi) &= -\frac{1}{\varepsilon} (v_{h,i} - F_i(u_h), \psi), \quad \forall \psi \in S_h, i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (1.2.13)$$

Όπου οι πίνακες  $A_i$  πρέπει να επιλεγούν ε.ω. να ικανοποιούνται κάποιες υποχαρακτηριστικές συνθήκες. Μια επιλογή των  $A_i$  είναι όπως στο [18]. Σε αναλογία με την (1.2.3) γράφουμε το σχήμα για πολλές διαστάσεις στην μορφή

$$E_h(u_h, \phi; v_h, \psi) = 0, \quad \forall \phi, \psi \in S_h,$$

και συμβολίζοντας με  $\Pi$  την παρεμβάλουσα πεπερασμένων στοιχείων στον  $S_h$ , [4], παίρνουμε πάλι για τις ομαλές περιοχές τα ακόλουθα φράγματα συνέπειας

**Πρόταση 1.2.2.** *Αν  $\phi, \psi \in S_h^M$  συμπαγούς φορέα στο  $\Omega_S$ , τότε υπό τις παραπάνω συνθήκες*

$$|E_h(\Pi u, \phi; \Pi v, \psi)| \leq C(u)(h^p + \varepsilon)(\|\phi\| + \|\psi\|) \quad (1.2.14)$$

και

$$|E_h(\Pi u, \phi; \Pi v, \psi)| \leq C(u)(h^{p+1} + \varepsilon)(\|\phi\|_1 + \|\psi\|_1) \quad (1.2.15)$$

όπου  $E_h$  ορίζεται παραπάνω και  $\|\cdot\|, \|\cdot\|_1$  συμβολίζουν τις  $L^2$  και  $H^1$  νόρμες αντίστοιχα..

Και στην περίπτωση των πολλών διαστάσεων παραμένει η ιδέα της αναδιαμέρισης γύρω από τις ανώμαλες περιοχές της λύσης. Ωστόσο σ' αυτήν την περίπτωση η επιλογή της διαμέρισης χρειάζεται προσεκτική ανάλυση πιθανόν διαφορετική από αυτήν που παρουσιάζεται σ' αυτήν την εργασία για μονοδιάστατα συστήματα. Πάλι το πλεονέκτημα της (1.2.13) είναι ότι το κυρίως μέρος



του τελεστή είναι γραμμικό. Παραπέμπουμε στα [62, 67, 69] όπου προτείνονται και αναλύονται διαφορετικές προσεγγίσεις. Κατάλληλες στρατηγικές αναδιαμέρισης οι οποίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε συστήματα της μορφής (1.2.13) θα αναπτυχθούν σε επόμενο κεφάλαιο.

### 1.3 Πλήρως Διακριτά σχήματα

Υπάρχουν πολλές επιλογές για την διακριτοποίηση στον χρόνο του ημιδιακριτού προβλήματος (1.2.2). Δες π.χ. τις εισαγωγικές παραπομπές σε μεθόδους σχετικές με την διακριτοποίηση στον χρόνο για Νόμους Διατήρησης. Στην περίπτωση μας, φαίνεται ότι οι μέθοδοι Runge-Kutta είναι προτιμώτερες λόγω της ευλυγισίας επιλογών που παρέχουν, κάτι που είναι απαραίτητο στις μεθόδους με αναδιαμέριση. Μια διαφορετική επιλογή θα μπορούσε να είναι η διακριτοποίηση με χωρο-χρονικά πεπερασμένα στοιχεία. Θα παρουσιάσουμε την βαθμωτή μονοδιάστατη περίπτωση μόνο, η επέκταση στις υπόλοιπες περιπτώσεις είναι προφανής. Θα ασχοληθούμε λοιπόν με πλήρως διακριτά σχήματα για το σύστημα

$$\begin{aligned} (u_{h,t}, \phi) + (v_{h,x}, \phi) &= 0, \quad \forall \phi \in S_h \\ (v_{h,t}, \psi) + c^2 (u_{h,x}, \psi) &= -\frac{1}{\varepsilon} (v_h - f(u_h), \psi), \quad \forall \psi \in S_h \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

Διακριτοποιούμε το (1.3.1) στον χρόνο χρησιμοποιώντας Runge-Kutta (RK) μεθόδους. Θα χειριστούμε τον άκαμπτο μη-γραμμικό όρο έμμεσα ενώ το γραμμικό βασικό μέρος της (1.3.1) διακριτοποιείται άμεσα [59, 18]. Οπότε όπως στο [18], λόγω της δομής του συστήματος το προκύπτον σχήμα είναι γραμμικό. Για να διασπάσουμε το σύστημα προχωρούμε ως εξής :

Διακριτοποιούμε την πρώτη εξίσωση χρησιμοποιώντας μια άμεση RK (ERK) μέθοδο, ενώ για την δεύτερη μια διαγώνια πεπλεγμένη RK (DIRK) μέθοδο. Εστω  $\kappa$  το προσωρινό χρονικό βήμα (φυσικά το  $\kappa$  μπορεί να μεταβάλλεται με

το  $n$ , αλλά για απλότητα στους συμβολισμούς θα παραλείπεται ο δείκτης  $n$ ) και τέλος έστω  $t^n = t^{n-1} + \kappa$ . Υποθέτοντας ότι έχουν υπολογιστεί οι προσεγγίσεις  $(u_h^n, v_h^n)$  στην χρονική στιγμή  $t^n$ , τότε η  $(u_h^{n+1}, v_h^{n+1})$  ορίζεται απο

$$\begin{aligned} (u_h^{n+1}, \varphi) &= (u_h^n, \varphi) + \kappa \sum_{i=1}^q b_i \{-(v_{h,x}^{n,i}, \varphi)\} \\ (v_h^{n+1}, \psi) &= (v_h^n, \psi) + \kappa \sum_{i=1}^q \tilde{b}_i \left\{ -c^2 (u_{h,x}^{n,i}, \psi) - \frac{1}{\epsilon} (v_h^{n,i} - f(u_h^{n,i}), \psi) \right\} \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

όπου για  $i = 1, \dots, q$ , τα ενδιάμεσα στάδια  $(u_h^{n,i}, v_h^{n,i})$  δίνονται απο τα ζεύγη των  $q$ -εξισώσεων

$$\begin{aligned} (u_h^{n,i}, \varphi) &= (u_h^n, \varphi) + \kappa \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \{-(v_{h,x}^{n,j}, \varphi)\} \\ (v_h^{n,i}, \psi) &= (v_h^n, \psi) + \kappa \sum_{j=1}^i \tilde{a}_{ij} \left\{ -c^2 (u_{h,x}^{n,j}, \psi) - \frac{1}{\epsilon} (v_h^{n,j} - f(u_h^{n,j}), \psi) \right\} \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

και οι σταθερές  $A = (a_{ij})$ ,  $b = (b_1, \dots, b_q)$ ,  $\bar{A} = (\tilde{a}_{ij})$ ,  $\bar{b} = (\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_q)$ ,  $i, j = 1, \dots, q$  ορίζουν τα  $q$ -ενδιάμεσα στάδια των (ERK) και (DIRK) μεθόδων αντίστοιχα.

Στα πειράματά μας χρησιμοποιήθηκαν οι παρακάτω (ERK) μέθοδοι που προτείνονται στα [37, 36], οι οποίες είναι 2ης και 3ης τάξης αντίστοιχα

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} 1/6 \\ 1/6 \\ 2/3 \end{pmatrix}. \quad (1.3.4)$$

Αυτές οι άμεσες RK είναι γνωστό ότι είναι κατάλληλες για διακριτοποίηση Νόμων Διατήρησης. Οι αντίστοιχες DIRK μέθοδοι που χρησιμοποιήθηκαν

είναι

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1/6 \\ 1/6 \\ 2/3 \end{pmatrix}. \quad (1.3.5)$$

Τα ενδιαμέσα στάδια  $(u_h^{n,i}, v_h^{n,i})$ ,  $i = 1, \dots, q$  υπολογίζονται για τις ίδιες χρονικές στιγμές  $\tau = \tilde{\tau} = (0, 1)$  και  $\tau = \tilde{\tau} = (0, 1, 1/2)$  αντίστοιχα. Ας σημειωθεί ότι ο υπολογισμός των ενδιαμέσων σταδίων απαιτεί την επίλυση του (1.3.3) η οποία (επειδή το (1.3.3) μπορεί να διασπασθεί) είναι άμεσο σχήμα πεπερασμένων στοιχείων που απαιτεί την αντιστροφή του πίνακα μάζας. Αυτό μπορεί να απλοποιηθεί περισσότερο χρησιμοποιώντας κατάλληλη τετραγωνική προσέγγιση του  $L^2$  εσωτερικού γινομένου (μέθοδος Lumped Mass), αλλά δεν θα γίνει εδώ.

Έχουμε πει ότι τα ημιδιακριτά σχήματα της προηγούμενης παραγράφου μπορούν να διακριτοποιηθούν στον χρόνο και με άλλες μεθόδους. Προς αυτήν την κατεύθυνση ας αναφέρουμε τις μεθόδους που αναπτύσσονται στο [25]. Πλήρως πεπλεγμένα Runge Kutta σχήματα είναι επίσης πιθανή επιλογή για υπολογιστική εξέταση.

**Προσαρμογή της διαμέρισης.** Οι μέθοδοι που αναπτύσσονται σ' αυτήν την εργασία απαιτούν την αλλαγή του χώρου πεπερασμένων στοιχείων σε κάθε χρονικό βήμα  $n$ . Αυτό είναι σαφές αφού σύμφωνα με την προηγούμενη προσέγγιση μας όταν τα shocks κινούνται η διαμέριση πρέπει να αναπροσαρμόζεται αναφορικά με τις θέσεις αυτών. Γι' αυτό σε κάθε χρονική στιγμή  $t^n$  θα συμβολίζουμε με  $u_h^n$  την προσεγγιστική λύση από τον χώρο  $S_{h,n}$ . Εστω λοιπόν

$$S_{h,n} = \{ \phi \in C(\mathbb{R}) : \phi|_K \in \mathbb{P}_p(K), K \in \mathcal{T}_h^n, \phi|_{\Omega^c} \equiv 0 \} \quad (1.3.6)$$

Όπου στην περίπτωση μίας διάστασης τα στοιχεία είναι τα διαστήματα

$$K = K_j^n = (x_{j-1}^n, x_j^n), \text{ της διαμέρισης } \mathcal{T}_h^n = \{K_j^n, j = 1, \dots, N_h(n)\}. \quad (1.3.7)$$

Υπάρχουν δύο εναλλακτικές επιλογές στην υλοποίηση των (1.3.2),(1.3.3) αφού  $u_h^n, v_h^n \in S_{h,n}$  και  $u_h^{n+1}, v_h^{n+1} \in S_{h,n+1}$ .

1. Η αντικατάσταση των  $u_h^n, v_h^n$  στην (1.3.2),(1.3.3) με τις  $L^2$  προβολές τους στον  $S_{h,n+1}$ . Σ' αυτήν την περίπτωση οι (1.3.2),(1.3.3) δεν αλλάζουν.
2. Η αντικατάσταση των  $u_h^n, v_h^n$  στην (1.3.2),(1.3.3) με τις πεπερασμένων στοιχείων παρεμβάλουσες στον  $S_{h,n+1}$ . Σ' αυτήν την περίπτωση οι  $u_h^n, v_h^n$  πρέπει να αντικατασταθούν απο τις  $\Pi^{n+1}u_h^n, \Pi^{n+1}v_h^n$  στις (1.3.2),(1.3.3).

## 1.4 Αλγόριθμοι αναδιαμέρισης

Οι μέθοδοι (1.2.2) και (1.2.13) μπορούν να συνδυαστούν με αλγόριθμους αναδιαμέρισης. Αυτό μπορεί να γίνει με την βοήθεια κάποιων εκ των υστέρων εκτιμήσεων. Τέτοιες εκτιμήσεις είναι διαθέσιμες π.χ. για σχήματα πεπερασμένων διαφορών τα οποία ικανοποιούν κατάλληλες ανισότητες εντροπίας [15] όπως και για τα σχήματα πεπερασμένων όγκων [54, 57], δεσ και τα [30, 50, 51, 20, 70]. Ειδικότερα ας θεωρήσουμε τα σχήματα πεπερασμένων διαφορών πρώτης τάξης γραμμένα στην (viscous) μορφή

$$\begin{aligned} v_j^{n+1} = & v_j^n - \frac{\kappa}{2h_j} (f(v_{j+1}^n) - f(v_{j-1}^n)) \\ & + \frac{\kappa}{2h_j} (Q_{j+\frac{1}{2}}^n (v_{j+1}^n - v_j^n) - Q_{j-\frac{1}{2}}^n (v_j^n - v_{j-1}^n)), \end{aligned} \quad (1.4.1)$$

όπου  $S_j = (x_{j+\frac{1}{2}}, x_{j-\frac{1}{2}})$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ , και  $x_j$  συμβολίζει το μέσο του  $S_j$ ,  $|K_j| = h_j \leq h$ . Εδώ ο συντελεστής  $Q_{j+\frac{1}{2}}^n = Q_{j+\frac{1}{2}}^n(v_{j+1}^n, v_j^n)$  είναι μέτρο της ποσότητας τεχνητής διάχυσης η οποία εισάγεται από το σχήμα. Τότε η κατα τμήματα σταθερή προσέγγιση  $(v_h, v_h|_{S_j \times [t^n, t^{n+1}]} = v_j^n)$  που γεννάται απο το σχήμα, ικανοποιεί κάτω απο απαραίτητες CFL συνθήκες, [15], τις εκτιμήσεις

$$\sup_{t \leq t^n} \|v_h(t) - u(t)\|_{L^1} \leq \|v_h(0) - u_0\|_{L^1} + C \sqrt{TV(u_0)} M\mathcal{E}(v_h, t^n), \quad (1.4.2)$$

όπου

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(v_h, t^n) = & \left\{ \left( \sum_{m=0}^n \kappa \sum_{j \in \mathbb{Z}} h_j |v_j^m - v_{j-1}^m| \right)^{1/2} \right. \\ & \left. + \sqrt{t^n} \max_{m \leq n} \left( \sum_{j \in \mathbb{Z}} h_j |v_j^m - v_{j-1}^m| \right) \right\}. \end{aligned} \quad (1.4.3)$$

Επιπλέον για υψηλής ακρίβειας σχήματα (συμπεριλαμβανομένων των σχημάτων SOR του [65]) οι παρακάτω εκτιμήσεις αποδείχτηκαν στο [15]

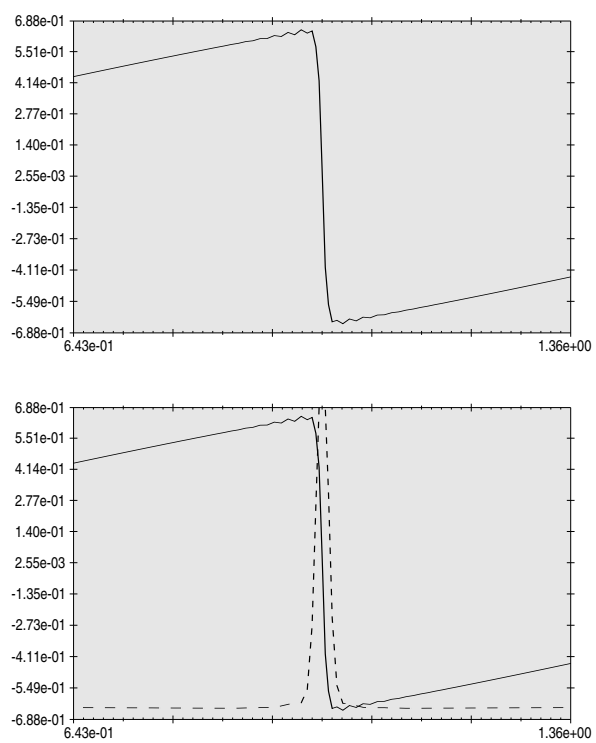
$$\sup_{t \leq t^n} \|v_h(t) - u(t)\|_{L^1} \leq \|v_h(0) - u_0\|_{L^1} + C\mathcal{E}(v_h, t^n) + C_1\mathcal{E}_1(v_h, t^n), \quad (1.4.4)$$

όπου ο όρος  $\mathcal{E}_1(v_h, t^n)$  είναι ένα μέτρο του βαθμού ασυνέπειας του σχήματος στο να ικανοποιεί τις διακριτές (και τοπικές) ανισότητες εντροπίας. Έχειδειχτεί σε ορισμένες περιπτώσεις - μοντέλα ότι ο  $\mathcal{E}_1(v_h, t^n)$  είναι μεγαλύτερης τάξης συγκριτικά με τον  $\mathcal{E}(v_h, t^n)$ . Ως εκ τούτου η εκτιμήτρια συνάρτηση  $\mathcal{E}(v_h, t^n)$  ελέγχει το σφάλμα μιάς σχετικά μεγάλης κλάσης σχημάτων (παρόμοιες παρατηρήσεις ισχύουν για σχήματα πεπερασμένων όγκων, για την μονοτονική περίπτωση δεξ [54, 57].)

Για συστήματα Νόμων Διατήρησης δεν υπάρχουν γενικά παρόμοιες εκτιμήσεις. Ωστόσο ορμώμενοι από τα παραπάνω μπορούμε να δούμε αν η εκτιμήτρια  $\mathcal{E}$  μπορεί να αποδειχτεί χρήσιμη, ακόμα και αν δεν έχουμε εκτιμήσεις σαν την (1.4.2). Πράγματι μπορούμε να συμπεράνουμε ότι για την προσέγγιση  $u_h$  της λύσης  $u$  του Νόμου Διατήρησης οι αθροιστές του  $\mathcal{E}(u_h)$ ,

$$h_j |u_h(x_j, t^m) - u_h(x_{j-1}, t^m)|$$

εντοπίζουν με ακρίβεια το *shock* (της προσεγγιστικής λύσης). Αυτό επιβεβαιώνεται και από τα αριθμητικά αποτελέσματα του 6 τμήματος. Η ιδέα είναι να χρησιμοποιήσουμε την χρήσιμη αυτήν πληροφορία στην κατασκευή αλγορίθμων αναδιαμέρισης.



Σχήμα 1.1: Προσεγγιστική λύση  $u_h$  και η εκτιμήτρια συνάρτηση  $g$ .

Στα παρακάτω, για δοθείσα προσέγγιση  $u_h^n \in S_{h,n}$  που συμπεραίνεται απο το σχήμα (1.3.2),(1.3.3), ορίζουμε ως εκτιμήτρια συνάρτηση  $g$ , την συνεχή κατά τμήματα (πάνω στην διαμέριση του  $S_{h,n}$ ) γραμμική συνάρτηση έτσι ώστε:

$$g(x_i^n) = g_i^n = h_i |u_h^n(x_i) - u_h^n(x_{i-1})|. \quad (1.4.5)$$

Πιο ακριβείς επιλογές της  $g_i^n$  είναι εφικτές π.χ. διαφορές σε περισσότερα σημεία (εκτός μόνο των ακραίων), αλλά για απλότητα στην ανάπτυξη θα εργαστούμε με την (1.4.5). Το σχήμα 1 δείχνει την μορφή της  $g$  για δοθείσα  $u_h^n$ .

*Αλγόριθμος Αναδιαμέρισης (Σταθερός αριθμός κόμβων).* Η παρακάτω μέθοδος βασίζεται στην αρχή ότι αριθμός των κόμβων των χώρων πεπερασμένων στοιχείων (1.3.6), (1.3.7) πρέπει να παραμένει σταθερός σε κάθε χρονικό βήμα  $n$ . Α αυτή η προσέγγιση αν και διαφορετική είναι σχετική με τις ‘one shot’ μεθόδους αναδιαμέρισης των [44, 45]. (Αρα ο προκύπτων αλγόριθμος μπορεί να συγκριθεί άμεσα με τις παραδοσιακές μεθόδους πεπερασμένων διαφορών, τουλάχιστον αναφορικά με τους βαθμούς ελευθερίας που χρησιμοποιούν ανα χρονικό βήμα). Ειδικότερα κάθε προσέγγιση  $u_h^n$  λαμβάνεται απο τον χώρο  $S_{h,n}$ . Αυτός οι χώρος μεταβάλλεται με το  $n$ , αλλά η πληθικότητα της διαμέρισης  $\mathcal{T}_h^n$  στους ορισμούς (1.3.6), (1.3.7), παραμένει ένας σταθερός αριθμός  $N_h$ . Στα παρακάτω οι κόμβοι της διαμέρισης  $\mathcal{T}_h^n$  θα είναι

$$\{x_0^n, x_1^n, \dots, x_{N_h}^n\}. \quad (1.4.6)$$

Το πρόβλημα λοιπόν περιγράφεται ως εξής

*Δοθέντων των κόμβων που προσδιορίζουν τον  $S_{h,n}$ , διάλεξε το νέο συνολο κόμβων  $\{x_i^{n+1}\}_{i=0}^{N_h}$  οι οποίοι προσδιορίζουν τον  $S_{h,n+1}$ .*

Ο αλγόριθμός μας χρησιμοποιεί την κανονικοποιημένη εκτιμήτρια συνάρτηση  $g$  ως συνάρτηση πυκνότητας της νέας διαμέρισης. Γι αυτό έστω  $G$  η μέση τιμή

της  $g$  πάνω απο το  $\Omega$ , δηλ.

$$G(x) = \frac{g(x)}{\int_{\Omega} g(y) dy}.$$

Τότε  $\int_{\Omega} G(x) dx = 1$  και η  $G$  μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως συνάρτηση πυκνότητας του νέου συνόλου κόμβων  $\{x_i^{n+1}\}_{i=0}^{N_h}$ . Ειδικότερα αυτό το σύνολο ορίζεται ε.ω. να ικανοποιεί την

$$\int_{x_i^{n+1}}^{x_{i+1}^{n+1}} G(x) dx = \frac{1}{N_h}, \quad (1.4.7)$$

δηλ. το  $\{x_i^{n+1}\}_{i=0}^{N_h}$  ισοκατανέμει την μάζα του  $G$ . Είναι φανερό απο την μορφή του  $G$  ( η μάζα του συγκεντρώνεται στα shocks) ότι αυτή η επιλογή θα αυξήσει την πυκνότητα των κόμβων γυρω απο τις περιοχές των shock.

Εκτεταμένοι υπολογισμοί που έγιναν, έδειξαν οτι αυτό που είναι σημαντικό είναι η ποιοτική συμπεριφορά του  $G$ , δηλ. η υπολογιστική λύση δεν είναι πολύ ευαίσθητη στις μεταβολές της διαμέρισης όσο ικανοποιούνται οι παρακάτω συνθήκες:

1. Υπάρχουν αρκετοί κόμβοι στις περιοχές των shocks
2. Ο αριθμός των κόμβων για τις ομαλές περιοχές είναι ικανός ώστε η προσεγγιστική λύση να διατηρεί την ακρίβειά της.

Σ' αυτήν την κατεύθυνση στους υπολογισμούς μας χρησιμοποιήσαμε ως συνάρτηση κατανομής  $G$  την παραλλαγή της (1.4.7) που προκύπτει αν αντικατασταθεί η  $g$  με  $g^\alpha$ ,  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Για  $\alpha = 0$ , η  $G$  ταυτίζεται με την πυκνότητα της ομοιόμορφης κατανομής ενώ για  $\alpha = 1$  με της (1.4.7). Η εισαγωγή αυτής της παραμέτρου δίνει την δυνατότητα επιλογής της διαμέρισης, επιδρώντας έτσι στην ποιοτική συμπεριφορά της παραπάνω διαδικασίας αναφορικά με την δράση της στις περιοχές των shock.



## 1.5 Επεκτάσεις

Σ' αυτό το τμήμα θα αναπτυχθούν πιθανές επεκτάσεις των προτεινομένων μεθόδων.

**Μεταβλητή χαρακτηριστική ταχύτητα.** Είναι φανερό ότι η υποχαρακτηριστική συνθήκη ( για  $M = N = 1$ )  $|f'(u_h)| < c$  πρέπει να ικανοποιείται. Ωστόσο ο παράγοντας  $c^2 - f'(u_h)^2$  επιδρά στην τεχνητή διάχυση (artificial diffusion) του σχήματος, δεξ την ανάπτυξη μετά την (1.2.9). Αυτό σημαίνει ότι όταν η  $f'(u_h)$  έχει μεγάλη κύμανση, είναι πιθανό σε κάποιες περιοχές ο όρος  $c^2 - f'(u_h)^2$  να γίνει μεγαλύτερος απ' ότι πρέπει. Μια λύση σ' αυτό είναι η χρησιμοποίηση μεταβλητής ταχύτητας  $c$  ως προς  $u$ . Υπάρχουν πολλοί τρόποι για να γίνει αυτό. Ένας είναι να χρησιμοποιηθεί ως  $c$  μια κατά τμήματα πολυωνυμική συνάρτηση τ.ω. σε κάθε περιοχή της διαμέρισης η  $c$  να κυριαρχεί του τοπικού μεγίστου της  $|f'(u_h)|$ . Κάτι τέτοιο μπορεί να γίνει επίσης με κάποια μέθοδος προσαρμογής στο πλήρως διακριτό σχήμα χωρίς να αυξηθεί το κόστος υπερβολικά. Ας σημειωθεί εδώ η σχέση μεταξύ των κλασικών relaxation σχημάτων με αυτών της μεταβλητής χαρακτηριστικής ταχύτητας, δεξ την ανάπτυξη μετά την (1.2.12) και τα κεντραρισμένα σχήματα του [25].

**Μεταβλητή παράμετρος.** Επειδή το  $\varepsilon$  επιδρά στον εξομαλυντικό μηχανισμό της μεθόδου αλλά και στην ακρίβεια της στις ομαλές περιοχές, θα ήταν χρήσιμο να έχει διαφορετικές τιμές στις περιοχές των shocks απ' ότι στις ομαλές περιοχές της λύσης. Φαίνεται ότι στα μονοδιάστατα προβλήματα αυτό δεν είναι απαραίτητο ( γιατί μπορούμε να πάρουμε πολύ μικρό  $\varepsilon$ ), αλλά στα πολυδιάστατα προβλήματα αυτό ίσως είναι πολύ χρήσιμο.

## 1.6 Υπολογιστικά Παραδείγματα

### 1.6.1. Βαθμωτές εξισώσεις

Θα ασχοληθούμε πρώτα με την εξίσωση Burgers,

$$u_t + uu_x = 0$$

με αρχικές συνθήκες  $u^0 = 0.75 \sin(\pi x)$  στο  $[0, 2]$ . Στο σχήμα 2 μπορούμε να δούμε τις λύσεις για ομοιόμορφη διαμέριση και για προσαρμοζόμενη αναδιαμέριση 200 κόμβων και για τις χρονικές στιγμές  $t = 0.52$  και  $t = 1$ . Η προσαρμοζόμενη αναδιαμέριση είναι ένας ικανοποιητικός μηχανισμός απόσβεσης των ταλαντώσεων. Η προσεγγιστική λύση με μεγαλύτερου βαθμού πολυώνυμα  $p = 2, 4$  παρουσιάζεται στο σχήμα 3. Οι δύο λύσεις ταυτίζονται πλήρως. Στο δεύτερο σχήμα θεωρούμε ένα πρόβλημα Riemann για βαθμωτή εξίσωση με μη-κυρτής ροής

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad f(u) = u + 0.3u^3.$$

Η αρχική συνθήκη είναι  $u^0 = -1/2$  στο  $[-1, -1/2] \cup [1/2, 1]$  και  $u^0 = 2$  στο  $[-1/2, 1/2]$ . Εικονίζονται οι λύσεις 200 και 400 κόμβων.

### 1.6.2. Σύστημα Ελαστοδυναμικής

Θεωρούμε το μονοδιάστατο σύστημα μη-γραμμικής ελαστοδυναμικής

$$u_{1,t} - u_{2,x} = 0 \tag{1.6.1}$$

$$u_{2,t} - f(u_1)_x = 0$$

$$u_{1,t} - u_{2,x} = 0 \tag{1.6.2}$$

$$u_{2,t} - f(u_1)_x = 0$$

Το αντίστοιχο relaxation σύστημα είναι

$$u_{1,t} - v_{1,x} = 0$$

$$u_{2,t} - v_{2,x} = 0$$

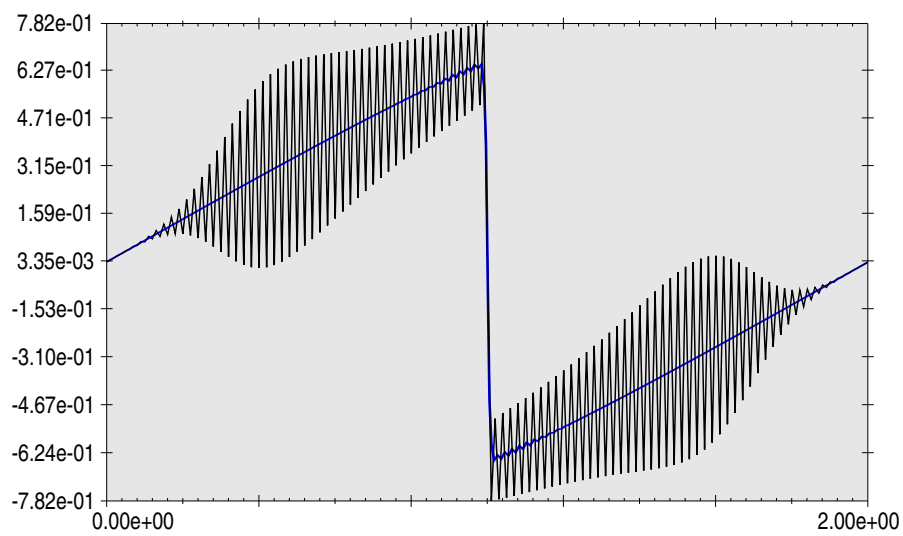
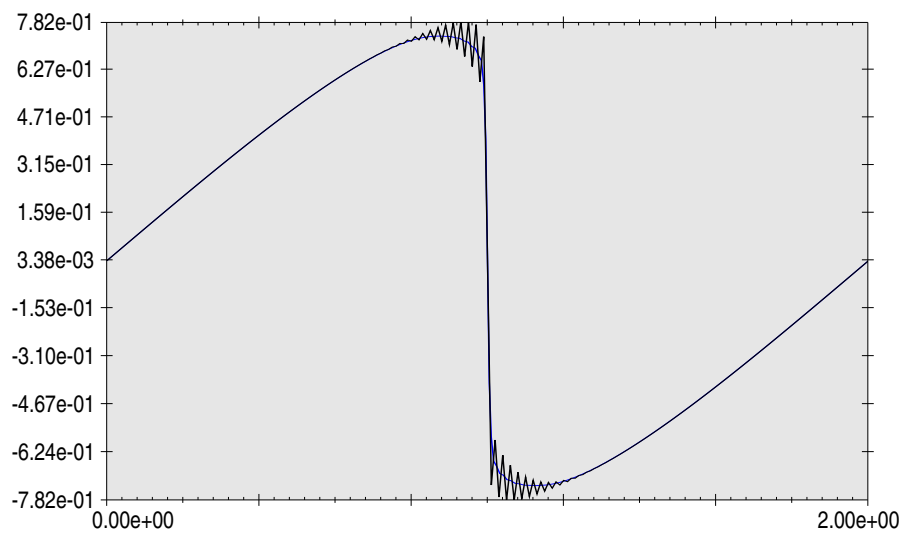
$$v_{1,t} - a_1 u_{1,x} = -\frac{1}{\varepsilon}(v_1 - u_2) \tag{1.6.3}$$

$$v_{2,t} - a_2 u_{2,x} = -\frac{1}{\varepsilon}(v_2 - f(u_1))$$

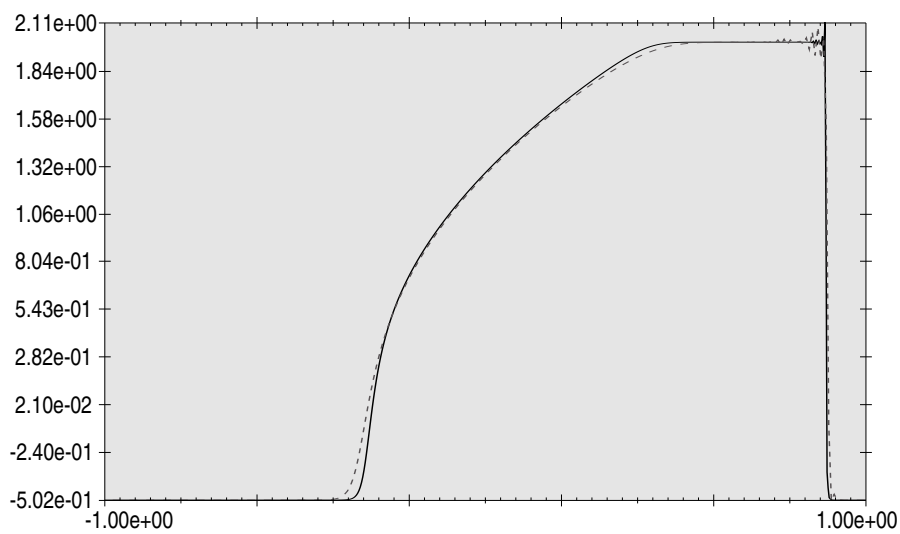
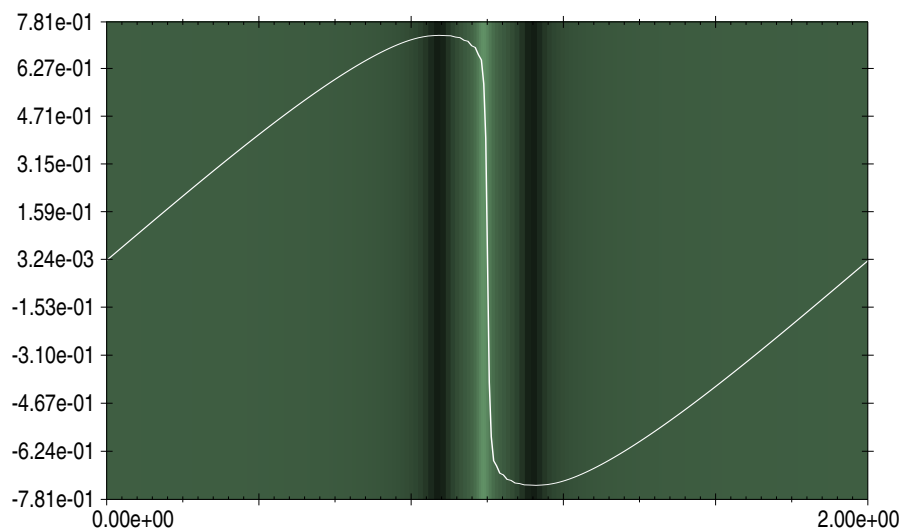
Κάτω απο κάποιες υποθέσεις στην  $f$  και για  $a_1, a_2$  αρκετά μεγάλους στην [35] αποδεικνύεται ότι οι λύσεις της (1.6.3) συγκλίνουν σε ασθενή λύση της εξίσωσης ελαστοδυναμικής (1.6.1). Θα ασχοληθούμε με δύο τεστ-προβλήματα γι' αυτό το σύστημα με  $f(v) = v + v^3$ . Πρώτα με δεδομένα Riemann  $u_1(0) = u_2(0) = 2$  στο  $[0, 1/4] \cup [3/4, 1]$  και  $u_1(0) = u_2(0) = 1$  στο  $[1/4, 3/4]$  δεξ σχήματα 4,5,6. Τα αποτελέσματα των υπολογισμών δείχνουν ότι οι μέθοδοι τόσο με συναρτήσεις κατα τμήματα γραμμικές όσο και με συναρτήσεις υψηλότερου βαθμού, δίνουν ικανοποιητικά αποτελέσματα ως προς την ακρίβεια αλλά και ως προς την ποιότητα συμπεριφορά της προσεγγιστικής λύσης. Για τον ίδιο αριθμό κόμβων οι υψηλότερου βαθμού μέθοδοι ( $p = 2, 3, 4$ ) δίνουν καλύτερα αποτελέσματα τόσο στις περιοχές του shock όσο και στις ομαλές περιοχές. Στα σχήματα 7-10 παρουσιάζονται αποτελέσματα για ομαλά δεδομένα  $u_1(0) = u_2(0) = 1 + 3 \sin(\pi x)$  στο  $[0, 2]$ . Αυτό είναι μη-τετριμμένο πρόβλημα απο υπολογιστικής πλευράς αφού οι ομαλές περιοχές της λύσης έχουν μη-τετριμμένη δομή. Είναι φανερό ότι οι υψηλού βαθμού μέθοδοι πλεονεκτούν. Στο σχήμα 10 βλέπουμε ένα συγκριτικό αποτέλεσμα υπολογισθέντων λύσεων για δυο διαφορετικές τιμές της παραμέτρου relaxation  $\varepsilon$  ( $\varepsilon = 3.0e - 06$ , και  $\varepsilon = 1.5e - 06$ .)

Ακολουθούν κάποιες παρατηρήσεις για τους υπολογισμούς μας. Στα παραπάνω παραδείγματα χρησιμοποιήθηκε σταθερή χαρακτηριστική ταχύτητα (για κάθε ένα χωριστά). Μιά παρατήρηση είναι ότι η χαρακτηριστική ταχύτητα που απαιτούνταν για την επιτυχή εκτέλεση της μεθόδου, εξαρτάται απο τον βαθμό των χρησιμοποιούμενων πολυωνύμων. Οι μέθοδοι υψηλού βαθμού απαιτούν μεγαλύτερες τιμές για τις παραμέτρους  $a_1, a_2$ . Ειδικότερα στην περίπτωση των συστημάτων με δεδομένα Riemann ( σχήμα 5, 200 κόμβοι) πήραμε  $a_1 = a_2 = 15$  για  $p = 1$  και  $a_1 = a_2 = 250$  για  $p = 4$ . Επιπλέον μεγαλύτερες τιμές χαρακτηριστικών ταχυτήτων απαιτούνταν για περισσότερους κόμβους π.χ. στα σχήματα 6, 7 όπου είχαμε 400 κόμβους πήραμε

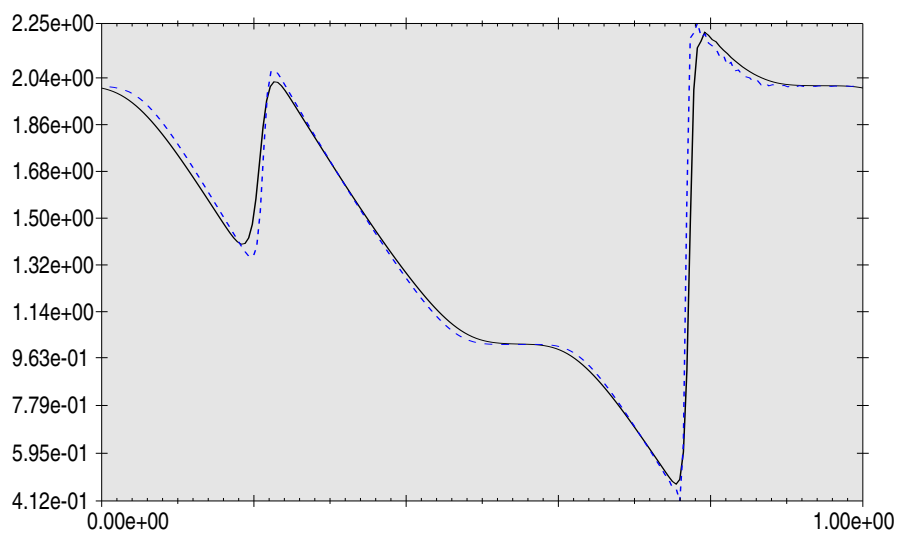
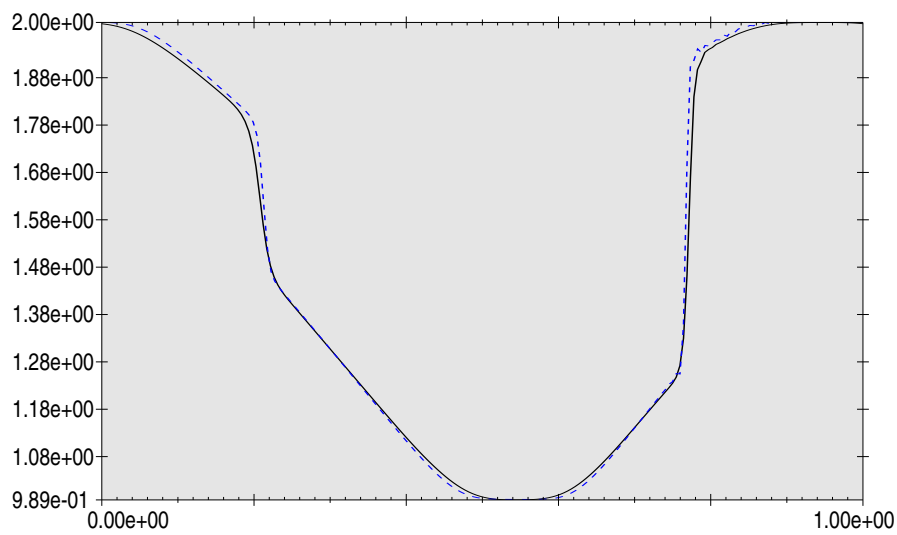
$a_1 = 15, a_2 = 50$  για  $p = 1$  και  $a_1 = a_2 = 400$  για  $p = 2$ . Γενικά δεν υπάρχει περιορισμός στην επιλογή της μεθόδου Runge-Kutta αναφορικά με την χωρική ακρίβεια. Όλοι οι συνδυασμοί δίνουν ικανοποιητικά αποτελέσματα. Στους υπολογισμούς επιλέχθηκαν μέθοδοι υψηλής τάξης στον χρόνο όταν χρησιμοποιήθηκαν πολυώνυμα μεγαλύτερου βαθμού απο  $p = 1$  για την χωρική διακριτοποίηση. Η παράμετρος  $\varepsilon$  είχε σταθεροποιηθεί σε μια χαμηλή τιμή και έπειτα επιλέξαμε τις υπόλοιπες παραμέτρους της μεθόδου. Για τα παραπάνω παραδείγματα μίας διάστασης το  $\varepsilon$ , μπορούσε να γίνει πολύ μικρό, δεξ την παράγραφο 5. Τέλος η ικανοποίηση της (1.2.11) γίνεται απο τον αλγόριθμο αναδιαμέρισης. Ειδικότερα οι υπολογισμοί έδειξαν οτι αν και το  $\varepsilon$  είναι πολύ μικρό, το μικρότερο πλάτος της διαμέρισης είναι πολύ μεγαλύτερο, δηλ. η  $\gamma$  στην (1.2.11) είναι τάξης  $10^2 - 10^3$ .



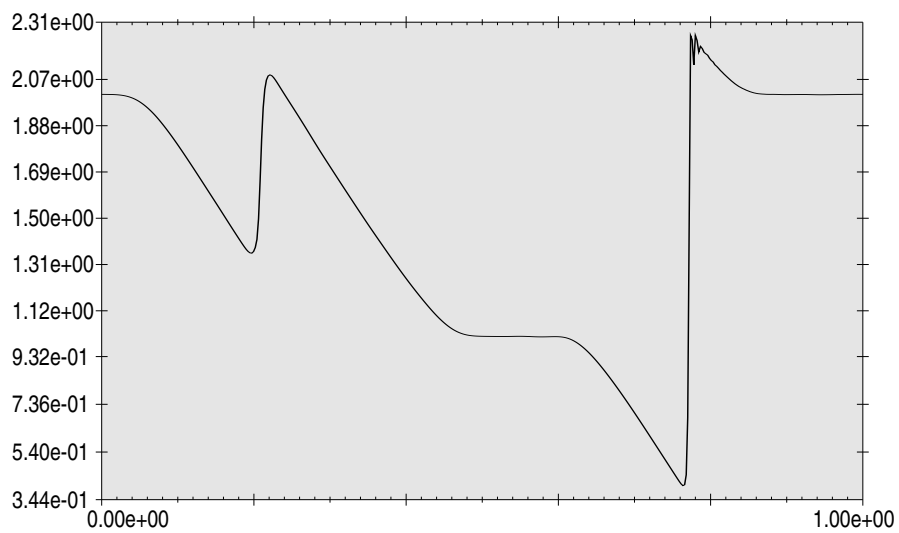
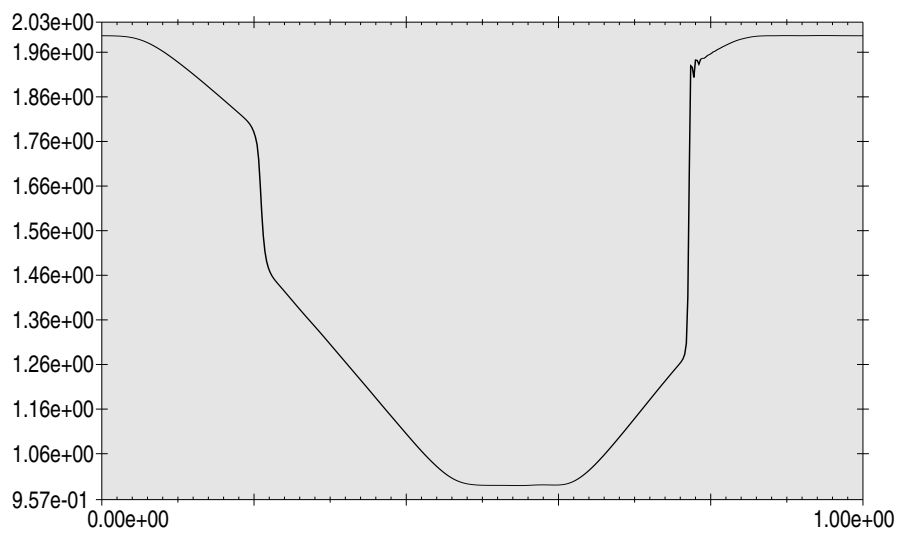
Σχήμα 1.2: 200 κόμβοι στο  $[0, 2]$ ,  $C = 13$ ,  $p = 1$ ,  $T = 0.52$  και  $T = 1$ ,  $\varepsilon = 5.0e-06$ , με αναδιαμέριση (μπλέ καμπύλη) και με ομοιόμορφη διαμέριση (μαύρη καμπύλη).



Σχήμα 1.3: Πρώτο σχήμα: λύσεις και οι διαμερίσεις τους για 200 κόμβους στο  $[0, 2]$ ,  $C = 13$ ,  $p = 1, 4$ ,  $T = 0.52$ . Δεύτερο σχήμα: 200 (γκρί γραμμή) και 400 κόμβοι ( μαύρη καμπύλη) στο  $[-1, 1]$ ,  $p = 1$ ,  $T = 0.2$ ,  $\varepsilon = 3.0e - 07$ , με αναδιαμέριση.

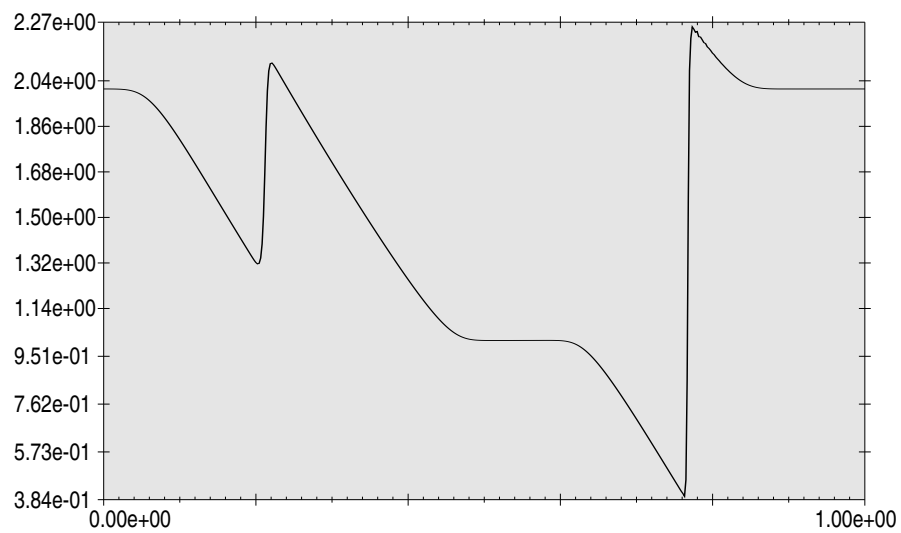
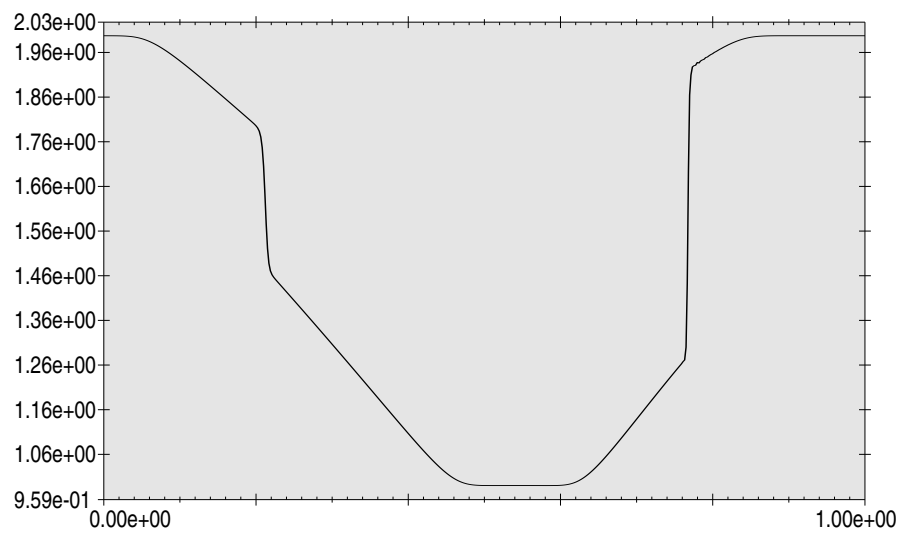


Σχήμα 1.4: Σύστημα με Riemann δεδομένα και αναδιαμέριση, με 200 κόμβους στο  $[0, 1]$ ,  $p = 1$ ,  $T = 0.35$ ,  $\varepsilon = 5.0e - 07$ , (μαύρη καμπύλη) και για  $p = 4$ ,  $T = 0.35$ ,  $\varepsilon = 5.0e - 06$ , (μπλέ καμπύλη)

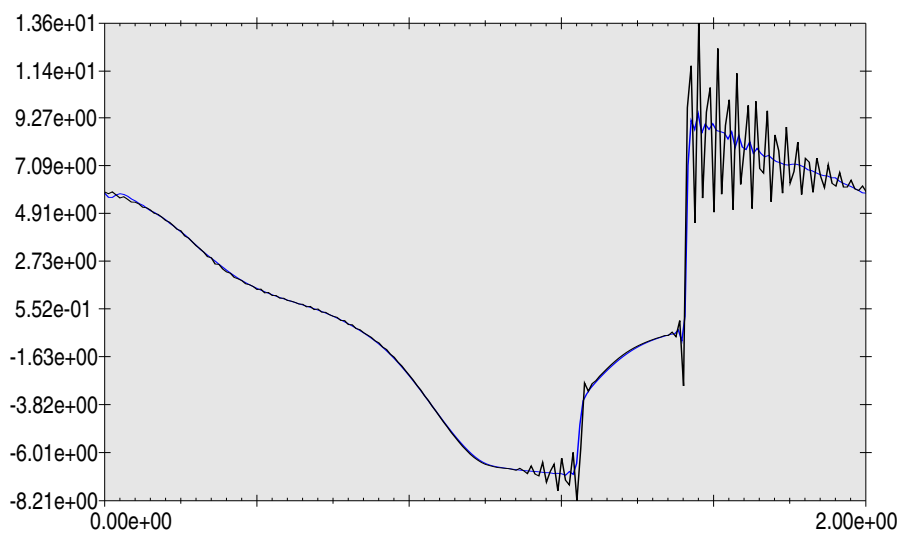
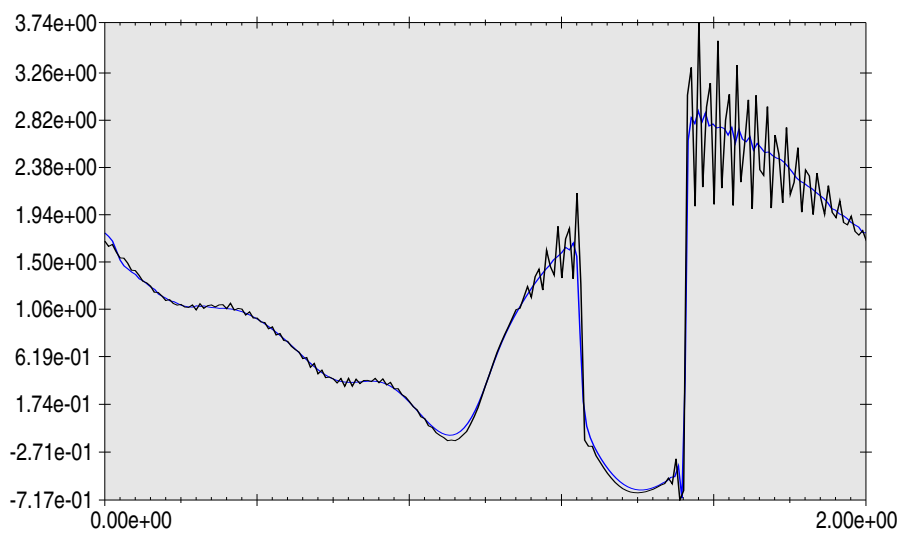


Σχήμα 1.5: Σύστημα με Riemann δεδομένα, με 400 κόμβους στο  $[0, 1]$ ,  $p = 1$ ,  $T = 0.35$ ,  $\varepsilon = 5.0e - 07$ .

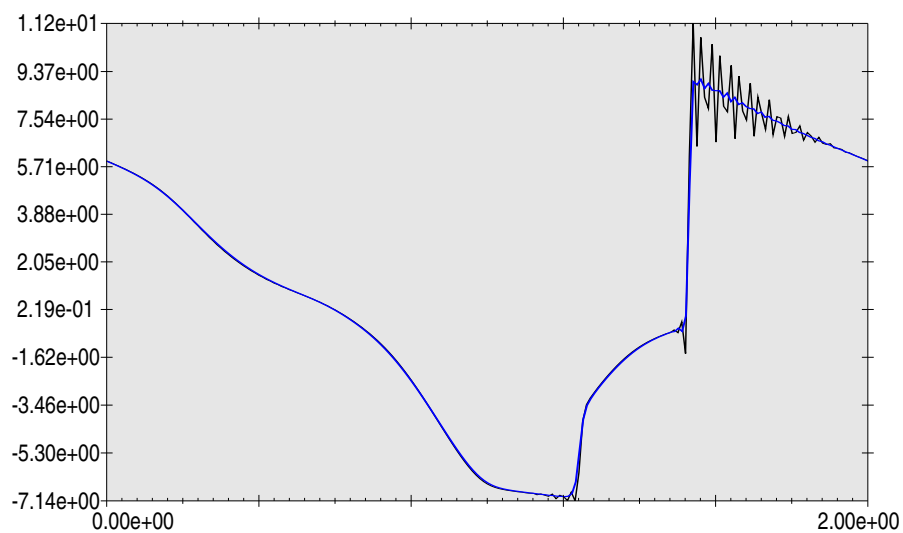
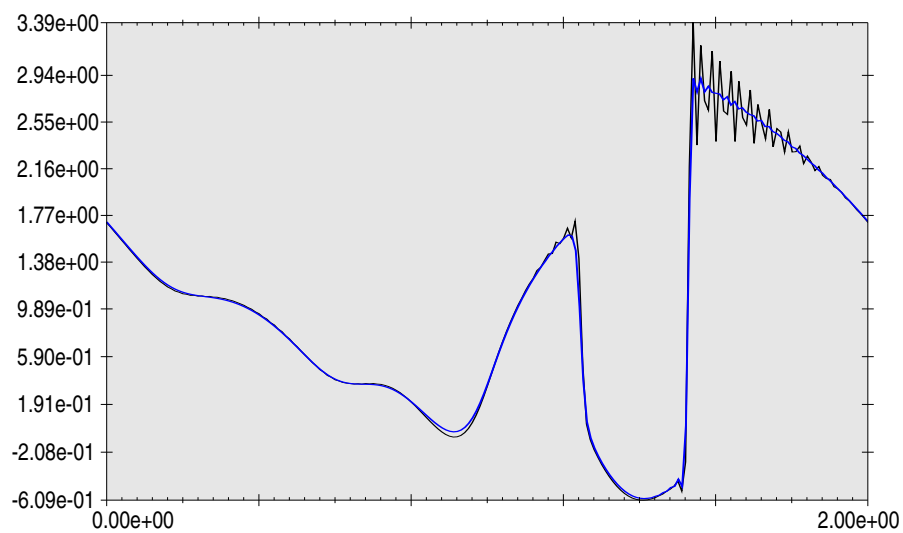




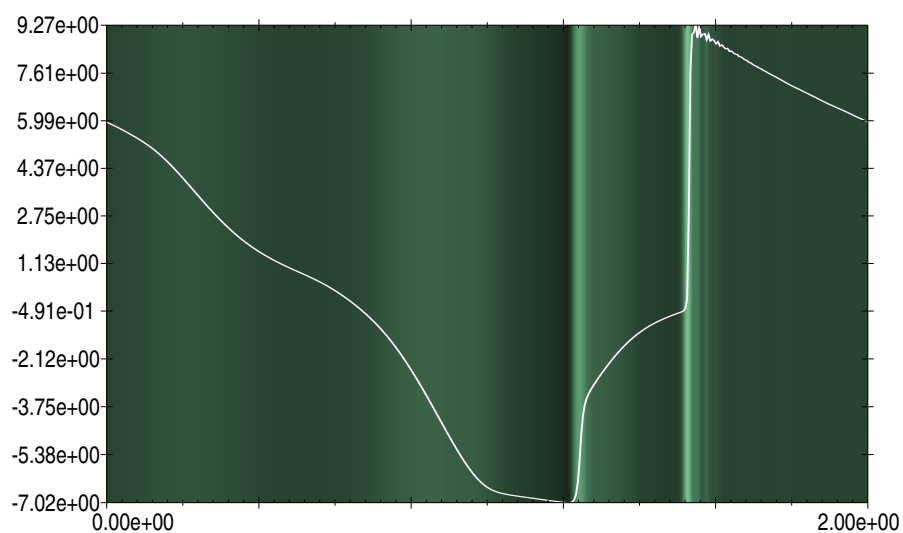
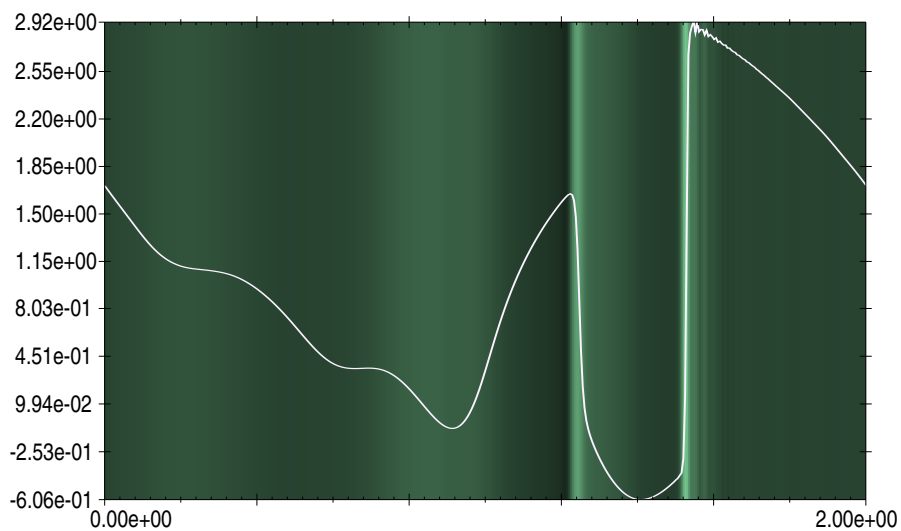
Σχήμα 1.6: Σύστημα με Riemann δεδομένα, με 400 κόμβους στο  $[0, 1]$ ,  $p = 2$ ,  $T = 0.35$ ,  $\varepsilon = 5.0e - 07$ .



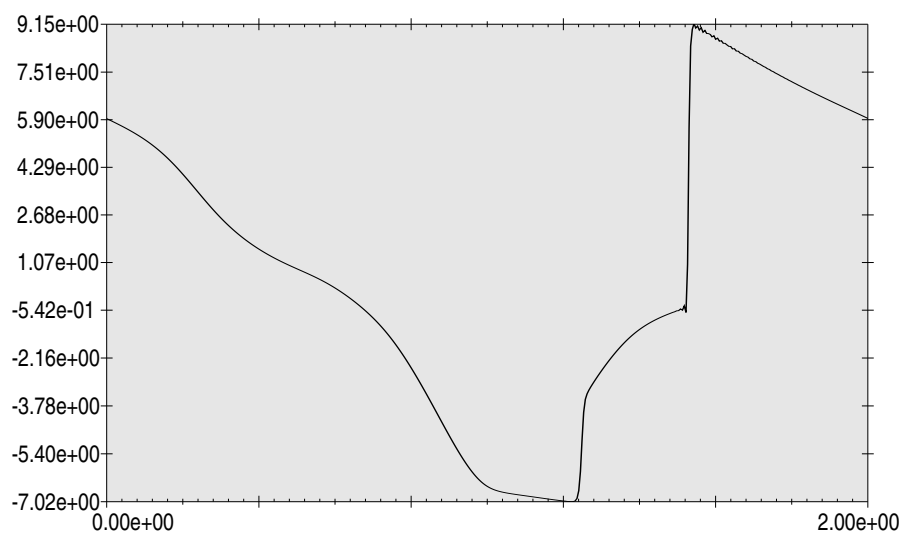
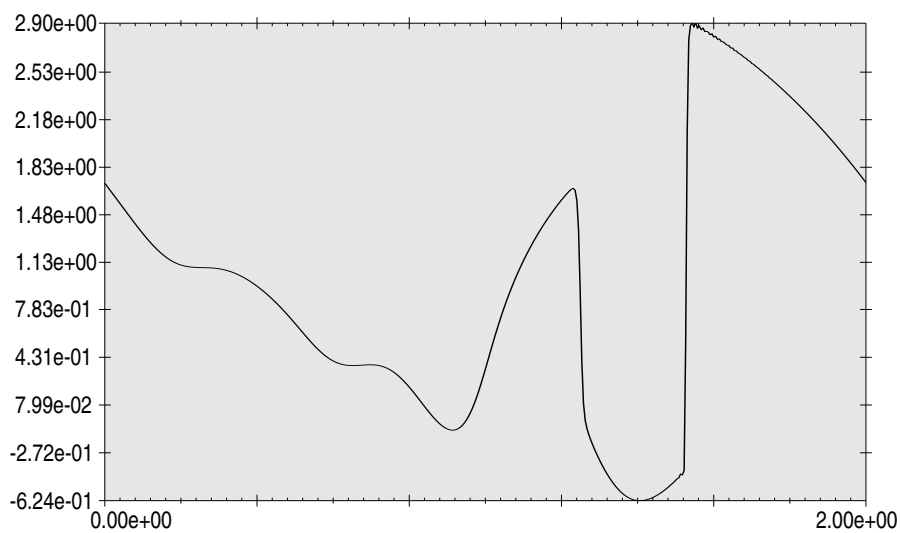
Σχήμα 1.7: Σύστημα με ομαλά δεδομένα με 200 κόμβους στο  $[0, 2]$ ,  $p = 1$ ,  $T = 0.2$ ,  $\varepsilon = 5.0e-06$ , και αναδιαμέριση (μπλέ καμπύλη) και με ομοιόμορφη διαμέριση (μαύρη καμπύλη).



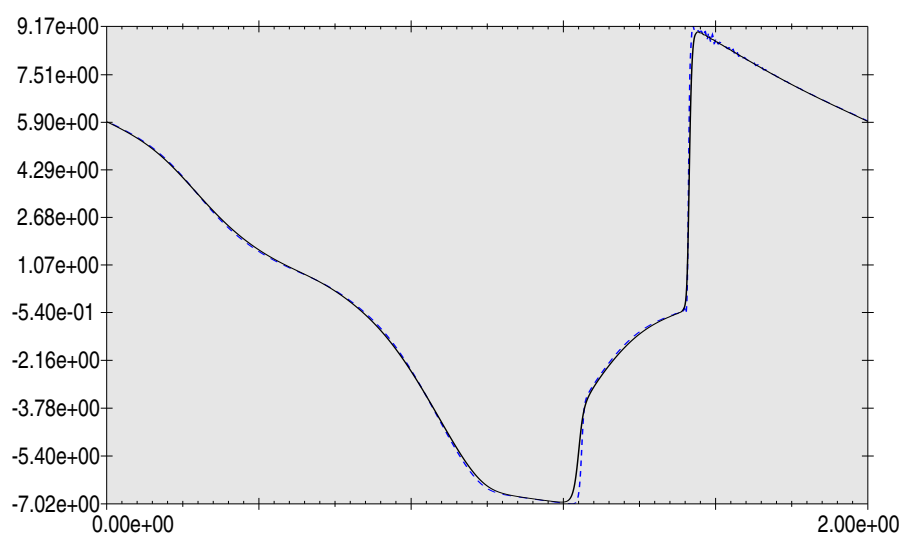
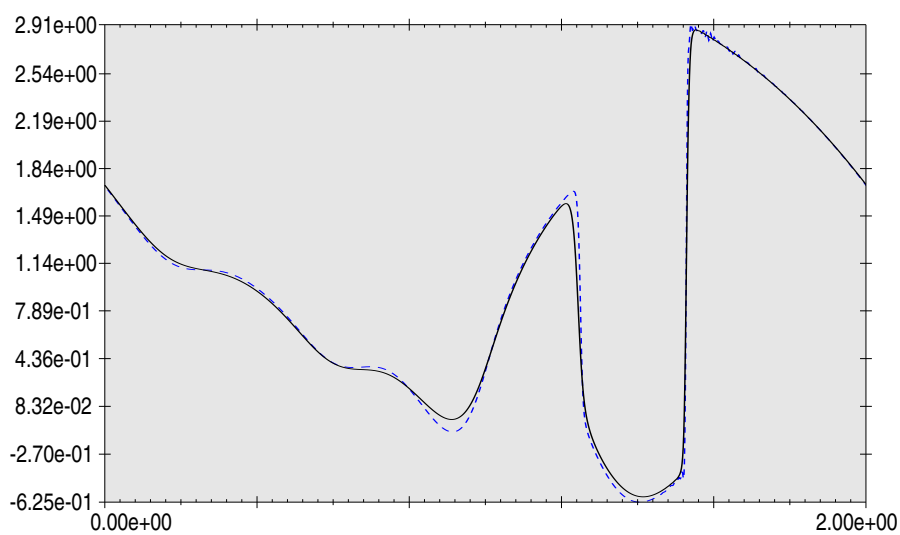
Σχήμα 1.8: Σύστημα με ομαλά δεδομένα με 200 κόμβους στο  $[0, 2]$ ,  $p = 2$ ,  $T = 0.2$ ,  $\varepsilon = 5.0e-06$ , και αναδιαμέριση (μπλέ καμπύλη) και με ομοιόμορφη διαμέριση για  $p = 1$  (μαύρη καμπύλη).



Σχήμα 1.9: Σύστημα με ομαλά δεδομένα και αναδιαμέριση, με 400 κόμβους στο  $[0, 2]$ ,  $p = 1$ ,  $T = 0.2$ ,  $\varepsilon = 3.0e - 04$ . Η φωτεινότητα του φόντου, είναι ανάλογη της πυκνότητας της χρησιμοποιούμενης διαμέρισης σε αυτό το χρονικό βήμα.



Σχήμα 1.10: Σύστημα με ομαλά δεδομένα και αναδιαμέριση, με 400 κόμβους στο  $[0, 2]$ ,  $p = 2$ ,  $T = 0.2$ ,  $\varepsilon = 3.0e - 06$ ,



Σχήμα 1.11: Σύστημα με ομαλά δεδομένα και αναδιαμέριση, με 400 κόμβους στο  $[0, 2]$ ,  $p = 3$ ,  $T = 0.2$ ,  $\varepsilon = 1.5e - 06$  (μπλέ καμπύλη), και  $\varepsilon = 3.0e - 06$  (μαύρη καμπύλη)

## Κεφάλαιο 2

# Ανάλυση ευστάθειας σχημάτων πεπερασμένων στοιχείων χαλάρωσης

### 2.1 Relaxation μορφή νόμων διατήρησης

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα ασχοληθούμε εκτενέστερα με την ανάλυση ευστάθειας και την σύγκλιση της προσεγγιστικής λύσης η οποία παράγεται από τα σχήματα πεπερασμένων στοιχείων για το πρόβλημα Νόμων Διατήρησης:

Δοθέντων  $F = (F_1, \dots, F_N) : (\mathbb{R}^M)^N \rightarrow (\mathbb{R}^M)^N$ ,  $u_0 : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ , ζητείται  $u : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^M$ , τέτοια ώστε για  $x \in \mathbb{R}^N$ :

$$\begin{cases} u(x, 0) = u_0(x) \text{ και για } t > 0 \\ \partial_t u + \sum_{i=1}^N \partial_{x_i} F_i(u) = 0 \end{cases} \quad (2.1.1)$$

Δεδομένου ότι Νόμοι Διατήρησης με ομαλά δεδομένα  $F, u_0$ , επιδέχονται λύσεις  $u$  οι οποίες παρουσιάζουν ασυνέχειες, από κάποια χρονική στιγμή  $t > 0$  και μετά, στην γενική περίπτωση αυτό το πρόβλημα δεν έχει λύση με την κλασική έννοια για όλους τους χρόνους. Ουσιαστικά λοιπόν αναφερόμαστε σε ασθενείς λύσεις του (2.1.1), που προκύπτουν αν τα αναλυτικά στοιχεία του (οι τελεστές

διαφορίσης), ληφθούν υπόψιν με την ασθενή (κατα κατανομή) έννοια.

Το ομαλοποιημένο - προσεγγιστικό πρόβλημα-μοντέλο που θα μας απασχολήσει είναι αυτό που προτείνουν οι *Jin, Xin*:

Δοθέντων  $F = (F_1, \dots, F_N): (\mathbb{R}^M)^N \rightarrow (\mathbb{R}^M)^N$ ,  $u_0: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ ,  $A_1, \dots, A_N \in \mathbb{R}^{M \times M}$ , ζητούνται  $u, v_1, \dots, v_N: \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^M$ , τέτοιες ώστε για  $x \in \mathbb{R}^N$ :

$$\begin{cases} u_h(x, 0) = u_0(x), \quad v_{h,i}(x, 0) = F_i(u_0(x)), \quad i = 1, \dots, N \text{ και για } t > 0 \\ \partial_t u + \sum_{i=1}^N \partial_{x_i} v_i = 0 \\ \partial_t v_i + A_i \partial_{x_i} u = -\frac{1}{\varepsilon} (v_i - F_i(u)), \quad i = 1, \dots, N, \end{cases} \quad (2.1.2)$$

Για την περίπτωση μονοδιάστατης χωρικής μεταβλητής ( $N = 1$ ), το (2.1.2) έρχεται στην μορφή:

Δοθέντων  $F: \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^M$ ,  $u_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^M$ ,  $A \in \mathbb{R}^{M \times M}$ , ζητούνται  $u, v: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^M$ , τέτοιες ώστε για  $x \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{cases} u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = F(u_0(x)) \text{ και για } t > 0 \\ \partial_t u + \partial_x v = 0 \\ \partial_t v + A \partial_x u = -\frac{1}{\varepsilon} (v - F(u)) \end{cases} \quad (2.1.3)$$

Τυπικά, το ασθενές όριο της λύσης του (2.1.2) καθώς  $\varepsilon \rightarrow 0$ , είναι  $(u, F_1(u), \dots, F_N(u))$ , όπου  $u$  κάποια από τις λύσεις του προβλήματος (2.1.1) των Νόμων Διατήρησης. Στην γενική περίπτωση, τα προβλήματα αυτά επιδέχονται σύνολο ασθενών λύσεων, εκ των οποίων, σε ορισμένες περιπτώσεις μπορούμε να επιλέξουμε μία, επιβάλλοντας επιπλέον συνθήκες. Στην βαθμωτή περίπτωση ( $N = 1$ ) η μοναδικότητα εξασφαλίζεται από την απαίτηση ότι η φυσικά αποδεκτή λύση ικανοποιεί (απειρία) ασθενών ανισοτήτων εντροπίας, [11]. Στην περίπτωση των συστημάτων το πρόβλημα της ύπαρξης - μοναδικότητας των ασθενών λύσεων είναι εν γένει ανοικτό, [11]. Πρόσφατα σημειώθηκε σημαντική πρόοδος στην περίπτωση των μονοδιάστατων συστημάτων με τις εργασίες των Bressan,



Bianchini, Liu και των συνεργατών τους.

Το πρόβλημα (2.1.2) θα αναφέρεται ως “*relaxation*” μορφή των Νόμων Διατήρησης και η λύση του ως “*relaxation*” προσέγγιση του προβλήματος των Νόμων Διατήρησης. Το υπόλοιπο του κεφαλαίου, αναφέρεται στην ανάλυση των προσεγγίσεων Galerkin για την *relaxation* μορφή των Νόμων Διατήρησης. Στόχος μας είναι η απόδειξη ιδιοτήτων ευστάθειας και συμπάγειας των σχημάτων πεπερασμένων στοιχείων, οι οποίες οδηγούν στις ειδικές περιπτώσεις όπου υπάρχουν διαθέσιμα θεωρητικά αποτελέσματα, στην σύγκλιση των προσεγγίσεων σε αντίστοιχες ασθηνείς λύσεις των νόμων διατήρησης (2.1.1). Οι ιδιότητες ευστάθειας και συμπάγειας οι οποίες αποδεικνύονται σ’ αυτό το κεφάλαιο είναι συμβατές με ιδιότητες οι οποίες απαιτούνται για την εφαρμογή του προγράμματος συμπάγειας με χρήση μέτρων Young (Compensated Compactness), βλ. Κεφάλαιο XV [11]. Σημειώνεται ότι τα σχήματα που προτείνονται σ’ αυτήν την εργασία αποτελούν την μόνη μέχρι στιγμής κατηγορία σχημάτων υψηλής τάξης τα οποία ικανοποιούν τις παραπάνω ιδιότητες.

Στην συνέχεια υποθέτουμε ότι τόσο τα αρχικά δεδομένα όσο και η λύση του (2.1.2), είναι συναρτήσεις με συμπαγή φορέα  $\Omega_1 \times [0, T] \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ .

## 2.2 Ιδιότητες της *relaxation* λύσης

Αν  $\phi \in C_0^2(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^M)$ , παρατηρούμε ότι η λύση  $(u, v_1, \dots, v_N)$  του (2.1.2), έχει τις παρακάτω ιδιότητες

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N (\partial_t v_i, \partial_{x_i} \phi) &= \partial_t \sum_{i=1}^N (v_i, \partial_{x_i} \phi) - \sum_{i=1}^N (v_i, \partial_{x_i} \partial_t \phi) \\ &\stackrel{(\Theta \cdot \text{Gauss})}{=} - \partial_t \sum_{i=1}^N (\partial_{x_i} v_i, \phi) + \sum_{i=1}^N (\partial_{x_i} v_i, \partial_t \phi) \\ &\stackrel{(2.1.2)^a}{=} \partial_t (\partial_t u, \phi) - (\partial_t u, \partial_t \phi) = (\partial_{tt} u, \phi) \end{aligned}$$

$$\text{ήτοι} \quad \sum_{i=1}^N (\partial_t v_i, \partial_{x_i} \phi) = (\partial_{tt} u, \phi) \quad (2.2.1)$$

Τώρα, παίρνοντας εσωτερικό γινόμενο των εξισώσεων (2.1.2)*b* με  $\partial_{x_i} \phi$ ,  $i = 1, \dots, N$  αντίστοιχα, αθροίζοντας ως προς  $i$  και λαμβάνοντας υπόψιν ότι οι  $\partial_{x_i} \phi$  έχουν συμπαγή φορέα (οπότε εφαρμόζεται η (2.2.1)) έπεται ότι

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^N (v_i, \partial_{x_i} \phi) - \sum_{i=1}^N (F_i(u), \partial_{x_i} \phi) + \varepsilon \sum_{i=1}^N (\partial_t v_i + A_i \partial_{x_i} u, \partial_{x_i} \phi) \\ &\stackrel{(\Theta.\text{Gauss})}{=} - \sum_{i=1}^N (\partial_{x_i} v_i, \phi) - \sum_{i=1}^N (F_i(u), \partial_{x_i} \phi) + \varepsilon \sum_{i=1}^N (\partial_t v_i + A_i \partial_{x_i} u, \partial_{x_i} \phi) \\ &\stackrel{(2.1.2)^a}{=} (\partial_t u, \phi) - \sum_{i=1}^N (F_i(u), \partial_{x_i} \phi) + \varepsilon \sum_{i=1}^N (\partial_t v_i + A_i \partial_{x_i} u, \partial_{x_i} \phi) \\ &\stackrel{(2.2.1)}{=} (\partial_t u, \phi) - \sum_{i=1}^N (F_i(u), \partial_{x_i} \phi) + \varepsilon ((\partial_{tt} u, \phi) + \sum_{i=1}^N (A_i \partial_{x_i} u, \partial_{x_i} \phi)) \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Ειδικά για την περίπτωση μονοδιάστατης χωρικής μεταβλητής ( $N = 1$ ), οι (2.2.1), (2.2.2) έρχονται στην μορφή:

$$(\partial_t v, \partial_x \phi) = (\partial_{tt} u, \phi) \quad (2.2.3)$$

$$(\partial_t u, \phi) - (F(u), \partial_x \phi) + \varepsilon ((\partial_{tt} u, \phi) + (A \partial_x u, \partial_x \phi)) = 0 \quad (2.2.4)$$

Στις παραπάνω σχέσεις, τα εσωτερικά γινόμενα ορίζονται αθροίζοντας κατα συντεταγμένες, δηλαδή:

$$(v, \phi) = \int_{\mathbb{R}^N} v_1 \phi_1 + \dots + \int_{\mathbb{R}^N} v_M \phi_M$$

Οι (2.2.1), (2.2.2) απεδείχθησαν για οποιαδήποτε συνάρτηση ελέγχου  $\phi$ , δηλαδή είναι ασθενείς (κατα κατανομή) ιδιότητες της relaxation λύσης. Ειδικότερα απο την (2.2.2) συμπεραίνουμε ότι η relaxation λύση, εφ' όσον συγλίνει (ισχυρά)

για  $\varepsilon \rightarrow 0$  σε μία συνάρτηση  $u$ , η συνάρτηση αυτή θα είναι και ασθενής λύση του προβλήματος (2.1.1) των Νόμων Διατήρησης. Συνήθως, από κατάλληλες εκτιμήσεις ευστάθειας, προκύπτει μόνο η ασθενής σύγκλιση των προσεγγιστικών λύσεων  $u^\varepsilon \rightarrow u$ . Η συμπεριφορά όμως αυτού του ορίου είναι πολύ λεπτό θέμα αφού εν γένει από την ασθενή σύγκλιση  $u^\varepsilon \rightarrow u$  δεν συνεπάγεται ότι  $F_i(u^\varepsilon) \rightarrow F_i(u)$  ασθενώς και επομένως δεν προκύπτει κατά αυτόματο τρόπο ότι ασθενή όρια λύσεων της (2.2.1) είναι ασθενής λύσεις του νόμου διατήρησης (2.1.1).

### 2.3 Μέτρα Young και συμπάγεια

Για την μελέτη ασθενών ορίων προσεγγιστικών λύσεων των νόμων διατήρησης είναι θεμελιώδες να χαρακτηρισθούν τα ασθενή όρια μη γραμμικών συναρτήσεων. Το ακόλουθο θεώρημα ορίζει τα μέτρα Young:

**Θεώρημα 2.3.1.** Έστω  $O$  ένα ανοιχτό υποσύνολο του  $\mathbb{R}^m$ . Τότε σε κάθε φραγμένη ακολουθία  $U_k$  του  $L^\infty(O; \mathbb{R}^n)$  αντιστοιχεί μια υπακολουθία  $U_j$  και μία μετρήσιμη οικογένεια  $\{\nu_X : X \in O\}$  μέτρων πιθανότητας με συμπαγή φορέα τέτοια ώστε, για κάθε  $g \in C(\mathbb{R}^n)$ ,

$$g(U_j) \rightarrow \bar{g}, \quad j \rightarrow \infty \text{ στον } L^\infty - w^*, \quad (2.3.1)$$

όπου

$$\bar{g}(X) = \langle \nu_X, g \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} g(y) d\nu_X(y). \quad (2.3.2)$$

Θεωρούμε το μονοδιάστατο σύστημα (2.1.1) γραμμένο σε συμπαγή μορφή ως

$$\partial_t u + \partial_x F(u) = 0. \quad (2.3.3)$$

Έστω  $U_k$  φραγμένη ακολουθία του  $L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^M)$  η οποία προκύπτει από ένα προσεγγιστικό σχήμα της (2.3.3) το οποίο μας επιτρέπει να πάρουμε ασθενή

όρια (όπως π.χ. στην (2.2.4)). Αν  $\{\nu_{x,t} : (x,t) \in \Omega\}$  είναι η αντίστοιχη οικογένεια μέτρων πιθανότητας Young θα έχουμε

$$\partial_t \langle \nu_{x,t}, U \rangle + \partial_x \langle \nu_{x,t}, F(U) \rangle = 0. \quad (2.3.4)$$

Η οικογένεια  $\{\nu_{x,t}\}$  μπορεί να θεωρηθεί ως “ ασθενής λύση μέτρων ” του (2.3.3):

**Ορισμός 2.3.1.** Μία λύση μέτρων για το σύστημα νόμων διατήρησης (2.3.3) σε ένα ανοικτό υποσύνολο  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , είναι μία μετρήσιμη οικογένεια  $\{\nu_{x,t} : (x,t) \in \Omega\}$  μέτρων πιθανότητας η οποία ικανοποιεί την (2.3.4) με την έννοια των κατανομών στο  $\Omega$ .

Κάθε ασθενής λύση του νόμου διατήρησης  $u$  μπορεί να ταυτισθεί με μία λύση μέτρων θέτοντας  $\nu_{x,t} = \delta_{u(x,t)}$ . Η κλάση των λύσεων μέτρων είναι ευρύτερη, βλ. [11], και επιπλέον έχει πραγματική υπόσταση για ορισμένα προβλήματα εφαρμογών, [11]. Στο επίπεδο της μελέτης ασθενών λύσεων νόμων διατήρησης, η παρακάτω παρατήρηση είναι χρήσιμη: Έστω ότι για κάθε  $(x,t) \in \Omega$  ο φορέας του  $\nu_{x,t}$  εντοπίζεται στο σημείο  $v = v(x,t)$  του  $\mathbb{R}^M$ , δηλ.,

$$\nu_{x,t} = \delta_{v(x,t)}.$$

Τότε από την (2.3.4) προκύπτει ότι η συνάρτηση  $v = v(x,t)$  είναι ασθενής λύση του (2.3.3), δηλαδή σ’ αυτήν την περίπτωση η λύση μέτρων για το σύστημα νόμων διατήρησης (2.3.3) ανάγεται σε ασθενή λύση. Κατά συνέπεια για την απόδειξη του γεγονότος ότι σε μια δοσμένη ακολουθία προσεγγίσεων του νόμου διατήρησης αντιστοιχεί στο όριο μια ασθενής λύση, αρκεί ναδειχθεί ότι για την αντίστοιχη λύση μέτρων θα ισχύει  $\nu_{x,t} = \delta_{v(x,t)}$  για κάποιο  $v = v(x,t)$ .

Το παραπάνω πρόγραμμα έχει πραγματοποιηθεί με επιτυχία για τις βαθμωτές εξισώσεις και για ειδικά μονοδιάστατα συστήματα, όπως π.χ. το σύστημα της ελαστοδυναμικής, βλ. [D] για περισσότερες λεπτομέρειες και εκτενείς βιβλιογραφικές παραπομπές.

Σχεδόν σε όλες τις περιπτώσεις όπου το πρόγραμμα αυτό έχει εφαρμοσθεί με επιτυχία η ακόλουθη συνθήκη συμπάγειας αποτελεί καθοριστικό στοιχείο:

$$\partial_t \eta(U_j) + \partial_x q(U_j) \subset \text{συμπαγούς συνόλου του } H_{\text{loc}}^{-1}(\Omega), \quad (2.3.5)$$

όπου  $\eta, q$  ένα ζεύγος εντροπίας για το σύστημα. Σε αρκετές περιπτώσεις συστημάτων μάλιστα αρκεί να επαληθευθεί η (2.3.5) για την δοσμένη ακολουθία προσεγγίσεων για να συμπεράνουμε, χρησιμοποιώντας γνωστά αποτελέσματα, ότι στο όριο προκύπτει ασθενής λύση. Στην συνέχεια του κεφαλαίου θα επαληθεύσουμε την (2.3.5) για τις προσεγγίσεις που προκύπτουν από τα σχήματα πεπερασμένων χωρίων χαλάρωσης. Γί αυτό το σκοπό θα χρησιμοποιήσουμε το παρακάτω αποτέλεσμα το οποίο οφείλεται στον βλ. F. Murat:

**Λήμμα 2.3.1.** Έστω  $\Omega$  ένα ανοικτό υποσύνολο του  $\mathbb{R}^m$  και  $\{\phi_j\}$  μία φραγμένη ακολουθία του  $W^{-1,p}(\Omega)$  για κάποιο  $p > 2$ . Επιπλέον έστω  $\phi_j = \chi_j + \psi_j$ , όπου η  $\{\chi_j\}$  ανήκει σε συμπαγές του  $H^{-1}(\Omega)$  ενώ η  $\{\psi_j\}$  ανήκει σε φραγμένο σύνολο του χώρου των μέτρων  $M(\Omega)$ . Τότε η  $\{\phi_j\}$  ανήκει σε συμπαγές του  $H^{-1}(\Omega)$ .

## 2.4 Προσέγγιση Galerkin της relaxation μορφής

### 2.4.1 Ημιδιακριτό σχήμα

Εστω  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  πολυεδρικό πεδίο ορισμού στο οποίο θα αναζητηθεί η αριθμητική λύση, τέτοιο ώστε  $\Omega_1 \subset \Omega$ . Στο  $\Omega$  ορίζουμε πεπερασμένη διαμέριση  $\mathcal{T}_h = \{K\}$  ανοικτών, ξένων μεταξύ τους πολυέδρων. Εστω  $h_K$  συμβολίζει την διάμετρο του πολυέδρου  $K$  και  $h = \sup_{K \in \mathcal{T}_h} h_K < 1$ ,  $\underline{h} = \min_{K \in \mathcal{T}_h} h_K$ . Πάνω σε αυτήν την διαμέριση, ορίζουμε τον χώρο πεπερασμένων στοιχείων  $S_h \times V_h^N$ , απο τον οποίο θα προσεγγίσουμε την λύση του (2.1.2), όπου  $S_h, V_h$  τέτοιοι ώστε:

$$\begin{aligned} S_h &= \{ \phi \in C^0(\mathbb{R}^N) : \phi|_K \in \mathbb{P}_p(K)^M, K \in \mathcal{T}_h, \phi|_{\Omega^c} \equiv 0 \} \\ V_h &= \{ \psi \in L^2(\mathbb{R}^N) : \psi|_K \in \mathbb{P}_q(K)^M, K \in \mathcal{T}_h, \psi|_{\Omega^c} \equiv 0 \} \\ &\text{και} \quad \forall \phi \in S_h \quad \partial_{x_i} \phi \in V_h \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

Ο τελεστής  $\partial$  στην (2.4.1), λαμβάνεται με την ασθενή κατα κατανομή έννοια, δηλαδή:

“  $v$  ασθενής παράγωγος του  $\phi$  ”  $\iff$  “  $\forall \Psi \in C_0^\infty \quad (v, \Psi) = -(\phi, \partial_x \Psi)$  ”  
 Με  $(\mathbb{R}^N)^{\mathbb{R}^M}$  συμβολίζουμε το σύνολο των συναρτήσεων απο τον  $\mathbb{R}^M$  στον  $\mathbb{R}^N$  και με  $\mathbb{P}_q(Q)$  τον χώρο των πολυωνύμων στο  $Q$  βαθμού το πολύ  $q$ . Υπο αυτόν τον συμβολισμό, η προσέγγιση Galerkin  $(u_h, v_{h,1}, \dots, v_{h,N})$ , του (2.1.2), είναι λύση του (ημιδιακριτού) προβλήματος.

Ζητείται  $(u_h, v_{h,1}, \dots, v_{h,N}) \in (S_h \times \mathbb{R}) \times (V_h \times \mathbb{R})^N$ , τέτοια ώστε για  $x \in \Omega$ :

$$\begin{cases} u_h(x, 0) = u_0(x), \quad v_{h,i}(x, 0) = F_i(u_0(x)), \quad i = 1, \dots, N \text{ και για } t > 0 \\ (\partial_t u_h, \phi) - \sum_{i=1}^N (v_{h,i}, \partial_{x_i} \phi) = 0, \quad \forall \phi \in S_h \\ (\partial_t v_{h,i}, \psi) + (A_i \partial_{x_i} u_h, \psi) = -\frac{1}{\varepsilon} (v_{h,i} - F_i(u_h), \psi), \quad \forall \psi \in V_h, \quad i = 1, \dots, N, \end{cases} \quad (2.4.2)$$

Ειδικώτερα για συστήματα μονοδιάστατης χωρικής μεταβλητής ( $N=1$ ), τα πολύεδρα  $K$  της διαμέρισης  $\mathcal{T}_h$ , είναι ξένα, ανοικτά υποδιαστήματα του  $\Omega = [a, b]$ . Αντίστοιχα, οι χώροι πεπερασμένων στοιχείων, είναι:

$$\begin{aligned} S_h &= \{ \phi \in C^0(\mathbb{R}) : \phi|_K \in \mathbb{P}_p(K)^M, K \in \mathcal{T}_h, \phi|_{\Omega^c} \equiv 0 \} \\ V_h &= \{ \psi \in L^2(\mathbb{R}) : \psi|_K \in \mathbb{P}_q(K)^M, K \in \mathcal{T}_h, \psi|_{\Omega^c} \equiv 0 \} \end{aligned}$$

Η προσέγγιση Galerkin του (2.1.3), δίνεται ως λύση του ημιδιακριτού προβλήματος:

Ζητείται  $(u_h, v_h) \in (S_h \times \mathbb{R}) \times (V_h \times \mathbb{R})$ , τέτοια ώστε για  $x \in \Omega$ :

$$\begin{cases} u_h(x, 0) = u_0(x), v_h(x, 0) = F(u_0(x)), \text{ και για } t > 0 \\ (\partial_t u_h, \phi) - (v_h, \partial_x \phi) = 0, \quad \forall \phi \in S_h \\ (\partial_t v_h, \psi) + (A \partial_x u_h, \psi) = -\frac{1}{\varepsilon} (v_h - F(u_h), \psi), \quad \forall \psi \in V_h \end{cases} \quad (2.4.3)$$

**Παρατήρηση:** Ορίστηκε διαφορετικός χώρος προσέγγισης της  $u_h(\cdot, t)$  από των  $v_{h,1}(\cdot, t), \dots, v_{h,N}(\cdot, t)$ , μόνο για λόγους γενίκευσης. Υπο αυτόν τον ορισμό και την υπόθεση (2.4.1), το σχήμα (2.4.2) περιγράφει προσεγγίσεις Galerkin πολλών οικογενειών (π.χ. για  $p=1, q=0$  της Discontinuous Galerkin).

## 2.4.2 Ιδιότητες ημιδιακριτού σχήματος

Για  $\phi \in S_h$ , παρατηρούμε ότι η λύση  $(u_h, v_{h,1}, \dots, v_{h,N})$  του (2.4.2), έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N (\partial_t v_{h,i}, \partial_{x_i} \phi) &= \partial_t \sum_{i=1}^N (v_{h,i}, \partial_{x_i} \phi) \\ &\stackrel{(2.4.2)^a}{=} \partial_t (\partial_t u_h, \phi) = (\partial_{tt} u_h, \phi) \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

Τώρα, αθροίζοντας ως προς  $i = 1, \dots, N$  τις εξισώσεις (2.4.2) $b$  και λαμβάνοντας υπόψιν ότι λόγω της (2.4.1),  $\partial_{x_i}\phi \in V_h$ , έπεται ότι:

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{i=1}^N (v_{h,i}, \partial_{x_i}\phi) - \sum_{i=1}^N (F_i(u_h), \partial_{x_i}\phi) + \varepsilon \sum_{i=1}^N (\partial_t v_{h,i} + A_i \partial_{x_i} u_h, \partial_{x_i}\phi) \\
&\stackrel{(2.4.2)^a}{=} (\partial_t u_h, \phi) - \sum_{i=1}^N (F_i(u_h), \partial_{x_i}\phi) + \varepsilon \sum_{i=1}^N (\partial_t v_{h,i} + A_i \partial_{x_i} u_h, \partial_{x_i}\phi) \\
&\stackrel{(2.4.4)}{=} (\partial_t u_h, \phi) - \sum_{i=1}^N (F_i(u_h), \partial_{x_i}\phi) + \varepsilon ((\partial_{tt} u_h, \phi) + \sum_{i=1}^N (A_i \partial_{x_i} u_h, \partial_{x_i}\phi))
\end{aligned} \tag{2.4.5}$$

Ειδικά για την περίπτωση μονοδιάστατης χωρικής μεταβλητής ( $N = 1$ ), οι (2.4.4), (2.4.5) έρχονται στην μορφή:

$$(\partial_t v_h, \partial_x \phi) = (\partial_{tt} u_h, \phi) \tag{2.4.6}$$

$$(\partial_t u_h, \phi) - (F(u_h), \partial_x \phi) + \varepsilon ((\partial_{tt} u_h, \phi) + (A \partial_x u_h, \partial_x \phi)) = 0 \tag{2.4.7}$$

### 2.4.3 Ευστάθεια ημιδιακριτού σχήματος: Η περίπτωση $N = 1$ , $F'$ , συμμετρικός

Έστω  $\phi = u_h$  στην (2.4.7). Επειδή  $(F(u_h), \partial_x u_h) = 0$ , έχουμε

$$\begin{aligned}
&\partial_t \left[ \int_{\mathbb{R}} \left( \frac{1}{2} |u_h|^2 + \varepsilon u_h u_{h,t} \right) dx \right. \\
&\quad \left. + \varepsilon \left[ \int_{\mathbb{R}} [(A \partial_x u_h, \partial_x u_h) - (u_{h,t})^2] dx \right] = 0.
\end{aligned} \tag{2.4.8}$$

Για να εκτιμήσουμε το  $\varepsilon \int_{\mathbb{R}} (u_t)^2 dx$  θέτουμε  $\phi = u_{h,t}$ , στην (2.4.7). Τελικά,

$$\begin{aligned}
&\|\partial_t u_h\|_{L^2}^2 + (F'(u_h) \partial_x u_h, \partial_t u_h) \\
&\quad + \varepsilon \frac{1}{2} \partial_t \|\partial_t u_h\|_{L^2}^2 + \varepsilon \frac{1}{2} \partial_t (A \partial_x u_h, \partial_x u_h) = 0
\end{aligned} \tag{2.4.9}$$

Τότε οι (2.4.8) και (2.4.9) συνεπάγονται (πολλαπλασιάζοντας (2.4.9) με  $2\varepsilon$ )



$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \partial_t \|u_h + \varepsilon \partial_t u_h\|_{L^2}^2 + \varepsilon (A \partial_x u_h, \partial_x u_h) + 2\varepsilon (F'(u_h) \partial_x u_h, \partial_t u_h) \\ & + \varepsilon \|\partial_t u_h\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \partial_t \left\{ \|\partial_t u_h\|_{L^2}^2 + 2(A \partial_x u_h, \partial_x u_h) \right\} = 0. \end{aligned}$$

Αφού

$$\begin{aligned} & \|\partial_t u_h\|_{L^2}^2 + 2(F'(u_h) \partial_x u_h, \partial_t u_h) \\ & = \|\partial_t u_h + F'(u_h) \partial_x u_h\|_{L^2}^2 - (F'(u_h)^2 \partial_x u_h, \partial_x u_h), \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

έχουμε δείξει το ακόλουθο αποτέλεσμα ευστάθειας:

**Πρόταση 2.4.1.** Υποθέτουμε ότι  $F'$ ,  $A$  είναι συμμετρικοί και ότι

$$A - F'(u_h)^2 \geq \nu I \quad \text{για κάποιο } \nu > 0. \quad (2.4.11)$$

Τότε οι προσεγγίσεις του ημιδιακριτού σχήματος (2.4.3) ικανοποιούν

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} \left( |u_h + \varepsilon \partial_t u_h|^2 + \varepsilon^2 |\partial_t u_h|^2 + 2\varepsilon^2 A \partial_x u_h \cdot \partial_x u_h \right) \\ & + 2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left( \varepsilon |u_{h,t} + F'(u_h) \partial_x u_h|^2 + \varepsilon \nu |\partial_x u_h|^2 \right) \\ & \leq \int_{\mathbb{R}} |u_h^0 + \varepsilon \partial_t u_h(t=0)|^2 + \varepsilon^2 |\partial_t u_h(t=0)|^2 + 2\varepsilon^2 A \partial_x u_h^0 \cdot \partial_x u_h^0. \end{aligned}$$

Στην συνέχεια αποδεικνύουμε την ακόλουθη ιδιότητα του σχήματος:

**Πρόταση 2.4.2.** Για ζεύγη εντροπίας τα οποία ικανοποιούν

$$\|\eta\|_{L^\infty}, \|\eta'\|_{L^\infty}, \|\eta''\|_{L^\infty} \leq C$$

και για  $h \leq C\varepsilon$  ισχύει

$$\eta(u_h)_t + g(u_h)_x \subset \text{συμπαγούς του } H_{loc}^{-1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+).$$

Απόδειξη. Έστω  $(\eta, g)$  ζεύγος εντροπίας για το σύστημα και  $\phi$  μιά αυθαίρετη συνάρτηση ελέγχου. Επιπλέον έστω  $\Pi : H^1 \rightarrow S_h$  μιά προβολή στον χώρο πεπερασμένων στοιχείων του  $u_h$  η οποία θα ορισθεί στην συνέχεια. Τότε χρησιμοποιώντας τον ορισμό του σχήματος έχουμε

$$\begin{aligned}
\left( \eta(u_h)_t + g(u_h)_x, \phi \right) &= \left( \eta'(u_h) [u_{h,t} + F'(u_h)u_{h,x}], \phi \right) \\
&= \left( [u_{h,t} + F'(u_h)u_{h,x}], \Pi(\eta'(u_h)\phi) \right) \\
&+ \left( [u_{h,t} + F'(u_h)u_{h,x}], \eta'(u_h)\phi - \Pi(\eta'(u_h)\phi) \right) \\
&= \varepsilon \left( A\partial_x u_h, [\Pi(\eta'(u_h)\phi)]_x \right) - \varepsilon \left( u_{h,tt}, \Pi(\eta'(u_h)\phi) \right) \\
&+ \left( [u_{h,t} + F'(u_h)u_{h,x}], \eta'(u_h)\phi - \Pi(\eta'(u_h)\phi) \right).
\end{aligned} \tag{2.4.12}$$

Επιλέγουμε τώρα  $\Pi$  να είναι η  $L^2$ -προβολή στον  $S_h$ :

$$(\Pi\omega, \phi) = (\omega, \phi) \quad \forall \phi \in S_h. \tag{2.4.13}$$

Τότε

$$\|\Pi\omega - \omega\|_{L^2(\Omega)} = \inf_{\chi \in S_h} \|\omega - \chi\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch \|\omega_x\|_{L^2(\Omega)} \tag{2.4.14}$$

Απο τις ιδιότητες ευστάθειας της  $\Pi$ , [CrT], έχουμε

$$\|(\Pi\omega)_x\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\omega_x\|_{L^2(\Omega)}. \tag{2.4.15}$$

Είμαστε έτοιμοι να εκτιμήσουμε το δεξιό μέλος της (2.4.12). Πράγματι, η (2.4.15) συνεπάγεται

$$\begin{aligned}
\varepsilon \left| \left( A\partial_x u_h, [\Pi(\eta'(u_h)\phi)]_x \right) \right| &\leq \varepsilon C \|\partial_x u_h\|_{L^2} \|(\eta'(u_h)\phi)_x\|_{L^2} \\
&\leq \varepsilon C \|\partial_x u_h\|_{L^2} \|\eta''(u_h)u_{h,x}\phi + \eta'(u_h)\phi_x\|_{L^2} \\
&\leq C \left( \varepsilon \int |\partial_x u_h|^2 \right) \cdot \|\eta''\|_{L^\infty} \|\phi\|_{C^0} \\
&+ \varepsilon^{1/2} C \left( \varepsilon \int |\partial_x u_h|^2 \right)^{1/2} \|\eta\|_{L^\infty} \|\phi_x\|_{L^2}.
\end{aligned} \tag{2.4.16}$$

Επιπλέον,

$$\begin{aligned}
& -\varepsilon \int_0^t \int_{\mathbb{R}} u_{h,tt} \Pi(\eta'(u_h)\phi) dxdt = -2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}} u_{h,tt} \eta'(u_h)\phi \\
& = \varepsilon \int_0^t \int_{\mathbb{R}} u_{h,t}(\eta'(u_h)\phi)_t + \varepsilon \int_{\Omega} u_{h,t} \eta'(u_h)\phi (t=0) - \varepsilon \int_{\Omega} u_{h,t} \eta'(u_h)\phi (t=t)
\end{aligned}$$

Από την Πρόταση 2.4.1 έχουμε

$$\begin{aligned}
\varepsilon \left| \int_{\Omega} u_{h,t} \eta'(u_h)\phi (t=t) \right| & \leq \varepsilon \left( \int_{\Omega} u_{h,t}^2 \right)^{1/2} \|\eta'\|_{L^\infty} \|\phi\|_{C^0} m(\Omega)^{1/2} \\
& \leq C_{\Omega} \|\phi\|_{C^0}.
\end{aligned} \tag{2.4.17}$$

και όπως πριν

$$\begin{aligned}
\varepsilon \left| \int_0^t \int_{\Omega} u_{h,t}(\eta'(u_h)\phi)_t \right| & \leq C \left( \varepsilon \int |u_{h,t}|^2 \right) \|\eta''\|_{L^\infty} \|\phi\|_{C^0} \\
& + \varepsilon^{1/2} \left( \varepsilon \int |u_{h,t}|^2 \right)^{1/2} \|\eta'\|_{L^\infty} \|\phi_t\|_{L^2}.
\end{aligned} \tag{2.4.18}$$

Εκτιμούμε τώρα τον τελευταίο όρο της (2.4.12). Παρατηρούμε ότι  $\eta'(u)\phi \in H^1$ , συνεπώς

$$\begin{aligned}
\|\eta'(u_h)\phi - \Pi(\eta'(u_h)\phi)\|_{L^2(\Omega)} & \leq Ch \|\eta'(u_h)\phi\|_{L^2(\Omega)} + Ch \|\eta'(u_h)\phi_x\|_{L^2} \\
& \leq Ch \|\eta''\|_{L^\infty} \|u_{h,x}\|_{L^2(\Omega)} \|\phi\|_{C^0} + Ch \|\eta'\|_{L^\infty} \|\phi_x\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Από την (2.4.11) έχουμε  $\|F'(u)^2\|_{L^\infty} \leq C$ , άρα

$$\begin{aligned}
& \left| \left( [u_{h,t} + F'(u_h)u_{h,x}] \right), \eta'(u_h)\phi - \Pi(\eta'(u_h)\phi) \right| \\
& \leq C \left( h \int |u_{h,t}|^2 + |\partial_x u_h|^2 \right) \|\phi\|_{C^0} \\
& + h \left( \int |u_{h,t}|^2 + |\partial_x u_h|^2 \right)^{1/2} \|\phi_x\|_{L^2}.
\end{aligned} \tag{2.4.19}$$

Συνδυάζοντας τις (2.4.16)-(2.4.19) και χρησιμοποιώντας το Λήμμα 2.3.1 (με την παρατήρηση ότι στην περίπτωση μας οι όροι  $\chi_h \rightarrow 0$  στον  $H^{-1}$  και άρα ανήκουν σε συμπαγές σύνολο του  $H^{-1}$ ) ολοκληρώνεται η απόδειξη  $\square$

#### 2.4.4 Ευστάθεια ημιδιακριτού σχήματος: Η περίπτωση $N = 1$ , και το σύστημα επιδέχεται κυρτή συνάρτηση εντροπίας

Η περίπτωση όπου η  $F'$  δέν είναι αναγκαστικά συμμετρική αλλά το σύστημα επιδέχεται κυρτή συνάρτηση εντροπίας η θα μελετηθεί σ' αυτήν την παράγραφο. Σ' αυτήν την περίπτωση, οι προσεγγίσεις πεπερασμένων στοιχείων ικανοποιούν τις ίδιες a priori εκτιμήσεις με το συνεχές μοντέλο χαλάρωσης οι οποίες έχουν αποδειχθεί από τον A. Τζαβάρρα στην [T]. Θα αποδείξουμε την ακόλουθη πρόταση

**Πρόταση 2.4.3.** Υποθέτουμε ότι το σύστημα επιδέχεται μία αυστηρά κυρτή συνάρτηση εντροπίας  $\eta$  η οποία ικανοποιεί για κάποιο  $\alpha > 0$

$$\eta''(u_h) \leq \alpha I. \quad (2.4.20)$$

Υποθέτουμε επιπλέον ότι ο συμμετρικός και θετικά ορισμένος πίνακας  $A$  ικανοποιεί

$$(A^T \eta''(u_h) + \eta''(u_h)A) - \alpha F'(u_h)^T F'(u_h) \geq \nu I \quad \text{για κάποιο } \nu > 0. \quad (2.4.21)$$

Τότε οι προσεγγίσεις πεπερασμένων στοιχείων ικανοποιούν

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} \left( |u_h + \varepsilon \partial_t u_h|^2 + \varepsilon^2 |\partial_t u_h|^2 + 2\varepsilon^2 A \partial_x u_h \cdot \partial_x u_h \right) \\ & + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left( \varepsilon |u_{h,t} + F(u_h) \partial_x u_h|^2 + \varepsilon \nu |\partial_x u_h|^2 \right) \\ & \leq \int_{\mathbb{R}} |u_h^0 + \varepsilon \partial_t u_h(t=0)|^2 + \varepsilon^2 |\partial_t u_h(t=0)|^2 + 2\varepsilon^2 A \partial_x u_h^0 \cdot \partial_x u_h^0. \end{aligned}$$

υπό την προϋπόθεση ότι

$$h \leq \gamma \varepsilon \quad \text{για κάποιο } \gamma > 0. \quad (2.4.22)$$

Στην απόδειξη θα χρειαστούμε τον τελεστή ελλειπτικής προβολής στον  $S_q$  και τις ιδιότητες προσέγγισης και ευστάθειας: Έστω  $P_1 : H^1 \rightarrow S_h$  η ελλειπτική προβολή, η οποία ορίζεται από την

$$(A \partial_x P_1 v, \partial_x \phi) = (A \partial_x v, \partial_x \phi), \quad \forall \phi \in S_h. \quad (2.4.23)$$

Είναι γνωστό ότι η  $P_1$  ικανοποιεί

$$\begin{aligned} \|P_1\omega - \omega\|_{L^2(\Omega)} &\leq C h \|\omega_x\|_{L^2(\Omega)} \\ \|(P_1\omega)_x\|_{L^2(\Omega)} &\leq C \|\omega_x\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (2.4.24)$$

Πράγματι, το δεύτερο φράγμα είναι άμεση συνέπεια του ορισμού και το πρώτο προκύπτει με ένα συνήθες δυϊκό επιχειρήμα. Το επόμενο (μή προφανές) αποτέλεσμα ευστάθειας θα έχει κρίσιμο ρόλο στην απόδειξη της Πρότασης 2.4.3. Χρησιμοποιείται εδώ κατα ουσιαστικό τρόπο η ανάλυση ευστάθειας της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων με χρήση νορμών οι οποίες εξαρτώνται από την διαμέριση, Babuška και Osborn [BO].

**Λήμμα 2.4.1.** Έστω η όπως πριν και  $v_h \in S_q$ . Υποθέτουμε επιπλέον ότι η (2.4.20) ισχύει, τότε υπάρχει μία θετική σταθερά  $\beta$  τέτοια ώστε

$$(v_h, P_1[\eta''(u_h)(v_h)]) \leq \beta \|\eta''(w)\|_{L^\infty(\Omega)} \|v_h\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (2.4.25)$$

Απόδειξη. Είναι γνωστό ότι η  $P_1$  δεν είναι ευσταθής ως προς την νόρμα του  $L^2(\Omega)$ , [BO]. Έχει όμως αποδειχθεί στην απο τους Babuška και Osborn [BO] η ευστάθεια της ως προς την τύπου  $L^2$  νόρμα η οποία εξαρτάται από την διαμέριση:

$$\|v\|_{0,h,\Omega} = \left( \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_j \delta_j |v(x_j)|^2 \right)^{1/2} \quad (2.4.26)$$

όπου  $x_j$  είναι οι κόμβοι της διαμέρισης και  $\delta_j = (|K_j| + |K_{j+1}|)/2$ . Δηλαδή ισχύει

$$\|P_1 v\|_{0,h,\Omega} \leq \beta_1 \|v\|_{0,h,\Omega}. \quad (2.4.27)$$

Συνεπώς, η (2.4.27) συνεπάγεται

$$\|P_1[\eta''(w)(v_h)]\|_{L^2(\Omega)} \leq \beta_1 \|\eta''(w)\|_{L^\infty(\Omega)} \|v_h\|_{0,h,\Omega}. \quad (2.4.28)$$

Εφαρμόζοντας τοπικές αντίστροφες ανισότητες στον χώρο πεπερασμένων στοιχείων, έχουμε

$$\|v_h\|_{0,h,\Omega} \leq \beta_2 \|v_h\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall v_h \in S_q. \quad (2.4.29)$$

Επομένως η (2.4.25) έπεται με  $\beta = \beta_1 \beta_2$ .  $\square$

*Απόδειξη της Πρότασης 2.4.3.* Όπως έχουμε δει η προσέγγιση πεπερασμένων στοιχείων  $u_h$  ικανοποιεί

$$\begin{aligned} (\partial_t u_h, \phi) - (F(u_h), \phi_h) + \varepsilon(\partial_{tt} u_h, \phi) \\ + \varepsilon(A\partial_x u_h, \partial_x \phi) = 0 \quad \forall \phi \in S_h \end{aligned} \quad (2.4.30)$$

Θέτουμε τώρα  $\phi = P_1 \eta'(u_h)$  στην (2.4.30). Τότε

$$\begin{aligned} (\partial_t u_h, \eta'(u_h)) + (\partial_x F(u_h), \eta'(u_h)) \\ + \varepsilon(\partial_{tt} u_h, P_1 \eta'(u_h)) + \varepsilon(A\partial_x u_h, \partial_x \eta'(u_h)) \\ = (\partial_t u_h, \eta'(u_h) - P_1 \eta'(u_h)) \\ + (\partial_x F(u_h), \eta'(u_h) - P_1 \eta'(u_h)) \\ =: Z_1 + Z_2 \end{aligned} \quad (2.4.31)$$

Οι όροι του δεξιού μέλους θα εκτιμηθούν στην συνέχεια. Πρώτα όμως θα μελετήσουμε την ευστάθεια η οποία προέρχεται απο τους όρους του αριστερού μέλους. Πράγματι, αφού η  $P_1$  αντιμετωπίζεται με την παραγωγή ως προς τον χρόνο,

$$\begin{aligned} \varepsilon(\partial_{tt} u_h, P_1 \eta'(u_h)) &= \varepsilon \partial_t (\partial_t u_h, P_1 \eta'(u_h)) - \varepsilon(\partial_t u_h, P_1 [\eta''(u_h) \partial_t u_h]) \\ &= \varepsilon \partial_t (\partial_t u_h, \eta'(u_h)) - \varepsilon(\partial_t u_h, P_1 [\eta''(u_h) \partial_t u_h]) \\ &\quad - \varepsilon \partial_t (\partial_t u_h, \eta'(u_h) - P_1 \eta'(u_h)). \end{aligned} \quad (2.4.32)$$

Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} \partial_t \int \eta(u_h) + \int \partial_x g(u_h) + \varepsilon \partial_t (\partial_t u_h, \eta'(u_h)) \\ + \varepsilon(A\partial_x u_h, \eta''(u_h) \partial_x u_h) - \varepsilon(\partial_t u_h, P_1 [\eta''(u_h) \partial_t u_h]) \\ = Z_1 + Z_2 + Z_3, \end{aligned} \quad (2.4.33)$$

όπου ο νέος όρος  $Z_3$  δίδεται από την

$$Z_3 = \varepsilon \partial_t (\partial_t u_h, \eta'(u_h) - P_1 \eta'(u_h)). \quad (2.4.34)$$

Όπως και στην [T] θα χρησιμοποιήσουμε την ακόλουθη ταυτότητα,

$$\begin{aligned} \int \eta(u_h + \varepsilon \partial_t u_h) dx &= \int \eta(u_h) dx + \varepsilon (\eta'(u_h), \partial_t u_h) \\ &+ \varepsilon^2 (\partial_t u_h, \{ \int_0^1 \int_0^s \eta''(u_h + \varepsilon \tau \partial_t u_h) d\tau ds \} \partial_t u_h) \end{aligned} \quad (2.4.35)$$

Χρειαζόμαστε μια εκτίμηση του

$$\varepsilon (\partial_t u_h, P_1 [\eta''(u_h) \partial_t u_h]).$$

Χρησιμοποιούμε πρώτα το Λήμμα 2.4.1 και έχουμε

$$\varepsilon |(\partial_t u_h, P_1 [\eta''(u_h) \partial_t u_h])| \leq \beta \|\eta''(u_h)\|_{L^\infty(\Omega)} \|\partial_t u_h\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (2.4.36)$$

Τότε για να εκτιμήσουμε το  $\varepsilon \int_{\mathbb{R}} (u_t)^2 dx$  ενεργούμε όπως και στην συμμετρική περίπτωση. Πράγματι, θέτοντας  $\phi = u_{h,t}$ , καταλήγουμε στην

$$\begin{aligned} \|\partial_t u_h\|_{L^2}^2 + (F'(u_h) \partial_x u_h, \partial_t u_h) \\ + \varepsilon \frac{1}{2} \partial_t \|\partial_t u_h\|_{L^2}^2 + \varepsilon \frac{1}{2} \partial_t (A \partial_x u_h, \partial_x u_h) = 0. \end{aligned} \quad (2.4.37)$$

Στην συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε τον ακόλουθο συμβολισμό

$$\begin{aligned} \bar{\beta} &= \beta \|\eta''(u_h)\|_{L^\infty(\Omega)} \\ \bar{\eta}'' &= \{ \int_0^1 \int_0^s \eta''(u_h + \varepsilon \tau \partial_t u_h) d\tau ds \} \\ \bar{\alpha} &= \max\{2\bar{\beta}, 2\alpha\}. \end{aligned} \quad (2.4.38)$$

Τότε αθροίζοντας την (2.4.33) και την σχέση που προκύπτει πολλαπλασιάζοντας  $2\varepsilon \bar{\alpha}$  επί (2.4.37) παίρνουμε

$$\begin{aligned}
& \partial_t \left\{ \int \eta(u_h + \varepsilon \partial_t u_h) + \varepsilon^2 (\partial_t u_h, \{\bar{\alpha} I - \bar{\eta}''\} \partial_t u_h) \right. \\
& \quad \left. + \varepsilon^2 \bar{\alpha} (A \partial_x u_h, \partial_x u_h) \right\} \\
& + \varepsilon (\bar{\alpha} - \bar{\beta}) \|\partial_t u_h\|_{L^2}^2 \\
& + \varepsilon \bar{\alpha} \|\partial_t u_h\|_{L^2}^2 + 2\varepsilon \bar{\alpha} (F'(u_h) \partial_x u_h, \partial_t u_h) \\
& + \varepsilon (A \partial_x u_h, \eta''(u_h) \partial_x u_h) \\
& \leq Z_1 + Z_2 + Z_3,
\end{aligned} \tag{2.4.39}$$

Αλλά,

$$\begin{aligned}
& \varepsilon \bar{\alpha} \|\partial_t u_h\|_{L^2}^2 + 2\varepsilon \bar{\alpha} (F'(u_h) \partial_x u_h, \partial_t u_h) \\
& = \varepsilon \bar{\alpha} \left[ \|\partial_t u_h\|_{L^2}^2 + 2(F'(u_h) \partial_x u_h, \partial_t u_h) + (F'(u_h) \partial_x u_h, F'(u_h) \partial_x u_h) \right] \\
& \quad - \varepsilon \bar{\alpha} (F'(u_h)^T F'(u_h) \partial_x u_h, \partial_x u_h) \\
& = \varepsilon \bar{\alpha} \|\partial_t u_h + F'(u_h) \partial_x u_h\|^2 - \varepsilon \bar{\alpha} (F'(u_h)^T F'(u_h) \partial_x u_h, \partial_x u_h).
\end{aligned} \tag{2.4.40}$$

Επιπλέον, αφού ο  $A$  είναι συμμετρικός,

$$(A \partial_x u_h, \eta''(u_h) \partial_x u_h) = \frac{1}{2} \left( (\eta''^T A + A \eta'') \partial_x u_h, (u_h) \partial_x u_h \right).$$

Συνεπώς χρησιμοποιώντας την (2.4.20) και την υποχαρακτηριστική συνθήκη (2.4.21) συμπεραίνουμε ότι,

$$\begin{aligned}
& \partial_t \left\{ \int \eta(u_h + \varepsilon \partial_t u_h) + \varepsilon^2 \alpha \|\partial_t u_h\|_{L^2}^2 + \varepsilon^2 \bar{\alpha} (A \partial_x u_h, \partial_x u_h) \right\} \\
& + \varepsilon \bar{\beta} \|\partial_t u_h\|_{L^2}^2 + \varepsilon \bar{\alpha} \|\partial_t u_h + F'(u_h) \partial_x u_h\|_{L^2}^2 \\
& + \varepsilon \nu \|\partial_x u_h\|_{L^2}^2 \\
& \leq Z_1 + Z_2 + Z_3,
\end{aligned} \tag{2.4.41}$$



Απομένει να εκτιμήσουμε τους όρους  $Z_i$ .

$$\begin{aligned} Z_1 &= (\partial_t u_h, \eta'(u_h) - P_1 \eta'(u_h)) \\ &\leq C h \|\partial_t u_h\|_{L^2} \|\partial_x \eta'(u_h)\|_{L^2} \\ &\leq C h \|\partial_t u_h\|_{L^2} \|\eta''(u_h)\|_{L^\infty} \|\partial_x u_h\|_{L^2}. \end{aligned} \quad (2.4.42)$$

Επιπλέον,

$$\begin{aligned} Z_2 &= (\partial_x F(u_h), \eta'(u_h) - P_1 \eta'(u_h)) \\ &\leq C h \|\partial_x u_h\|_{L^2} \|F'(u_h)\|_{L^\infty} \|\eta''(u_h)\|_{L^\infty} \|\partial_x u_h\|_{L^2}. \end{aligned} \quad (2.4.43)$$

Για τον  $Z_3$  παρατηρούμε ότι

$$Z_3 = \varepsilon \partial_t (\partial_t u_h, \eta'(u_h) - P_1 \eta'(u_h)) = \varepsilon \partial_t Z_1. \quad (2.4.44)$$

Επομένως για να χειριστούμε αυτόν τον όρο αρκεί να χρησιμοποιήσουμε την εκτίμηση για τον  $Z_1$  στην (2.4.43).

Ολοκληρώνουμε την (2.4.42) ως προς  $t$  και κατόπιν χρησιμοποιούμε τις εκτιμήσεις (2.4.42) και (2.4.43). Η απόδειξη είναι πλήρης παρατηρώντας ότι ισχύει η (2.4.44) και χρησιμοποιώντας την υπόθεση (2.4.22).  $\square$

Η απόδειξη της συμπίεσης του σχήματος είναι ίδια με αυτήν της συμμετρικής περίπτωσης και επομένως παραλείπεται.

**Πρόταση 2.4.4.** *Γιά ζεύγη εντροπίας τα οποία ικανοποιούν*

$$\|\eta\|_{L^\infty}, \|\eta'\|_{L^\infty}, \|\eta''\|_{L^\infty} \leq C$$

και για  $h \leq C \varepsilon$  ισχύει

$$\eta(u_h)_t + g(u_h)_x \subset \text{συμπαγούς του } H_{loc}^{-1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+).$$

## 2.5 Πλήρως διακριτό σχήμα

Η διακριτοποίηση στον χρόνο του σχήματος (2.4.1), στις χρονικές στιγμές  $0, \kappa, 2\kappa, \dots$ , μπορεί να γίνει με πολλούς τρόπους. Εδώ θα υποθέσουμε ότι, όσες συναρτήσεις της πρώτης εξίσωσης του (2.4.1) δεν αφορούν την εξέλιξη της λύσης (δεν είναι χρονικοί παράγωγοι της λύσης), είναι υπολογισμένες στο τρέχων χρονικό βήμα, ενώ αυτές της δεύτερης εξίσωσης του (2.4.1), είναι υπολογισμένες στο επόμενο χρονικό βήμα. Δηλαδή, διακριτοποιούμε χρονικά το ημιδιακριτό σχήμα (2.4.1), χρησιμοποιώντας την πρώτη του εξίσωση άμεσα ενώ την δεύτερη έμμεσα. Αρα η Galerkin προσέγγιση  $(u_h^n, v_{h,1}^n, \dots, v_{h,N}^n) \in S_h \times V_h^N, n = 0, 1, \dots$ , του relaxation προβλήματος (2.1.3), στις χρονικές στιγμές  $0, \kappa, 2\kappa, \dots$ , δίνεται από τις σχέσεις:

$$\begin{cases} u_h^0 = u_0, v_{h,i}^0 = F_i(u_0), i = 1, \dots, N, \text{ και για } n = 0, 1, \dots \\ \left( \frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\kappa}, \phi \right) - \sum_{i=1}^N (v_{h,i}^n, \partial_{x_i} \phi) = 0, \quad \forall \phi \in S_h \\ \left( \frac{v_{h,i}^{n+1} - v_{h,i}^n}{\kappa}, \psi \right) + (A_i \partial_{x_i} u_h^{n+1}, \psi) = -\frac{1}{\varepsilon} (v_{h,i}^{n+1} - F_i(u_h^{n+1}), \psi), \\ \quad \forall \psi \in V_h, i = 1, \dots, N \end{cases} \quad (2.5.1)$$

Αντίστοιχα για το μονοδιάστατης χωρικής μεταβλητής ( $N = 1$ ), ημιδιακριτό σχήμα (2.4.3), η Galerkin προσέγγιση  $(u_h^n, v_h^n) \in S_h \times V_h, n = 0, 1, \dots$ , του relaxation προβλήματος (2.1.2), στις χρονικές στιγμές  $0, \kappa, 2\kappa, \dots$ , δίνεται από τις σχέσεις:

$$\begin{cases} u_h^0 = u_0, v_h^0 = F(u_0) \text{ και για } n = 0, 1, \dots \\ \left( \frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\kappa}, \phi \right) - (v_h^n, \partial_x \phi) = 0, \quad \forall \phi \in S_h \\ \left( \frac{v_h^{n+1} - v_h^n}{\kappa}, \psi \right) + (A \partial_x u_h^{n+1}, \psi) = -\frac{1}{\varepsilon} (v_h^{n+1} - F(u_h^{n+1}), \psi), \quad \forall \psi \in V_h \end{cases} \quad (2.5.2)$$

### 2.5.1 Ιδιότητες πλήρως διακριτού σχήματος

Για οποιαδήποτε ακολουθία  $\{Y^n\}$ , ορίζουμε τους τελεστές  $\bar{\partial}_t, \bar{\partial}_{tt}$ , έτσι ώστε:

$$\bar{\partial}_t Y^n := \frac{1}{\kappa} (Y^{n+1} - Y^n), \quad \bar{\partial}_{tt} Y^n := \bar{\partial}_t \bar{\partial}_t Y^n.$$

Σημειώστε ότι μ' αυτόν τον συμβολισμό, το κεντρικό πηλίκο διαφορών το οποίο προσεγγίζει την παράγωγο στο  $t^n$  είναι

$$\bar{\partial}_{tt} Y^{n-1} = \frac{1}{\kappa^2} (Y^{n+1} - 2Y^n + Y^{n-1}).$$

Προφανώς πρόκειται για γραμμικούς τελεστές που αντιμετωπίζονται με τον  $\partial_x$ , με τις παρακάτω επιπλέον ιδιότητες:

$$\begin{aligned} (\bar{\partial}_t Y^n, Y^{n+1}) &= \frac{1}{\kappa} (Y^{n+1} - Y^n, Y^{n+1}) \\ &= \frac{1}{2\kappa} [\|Y^{n+1}\|^2 - \|Y^n\|^2 + \|Y^{n+1} - Y^n\|^2] \quad (2.5.3) \\ &= \frac{1}{2} [\bar{\partial}_t \|Y^n\|^2 + \kappa \|\bar{\partial}_t Y^n\|^2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\bar{\partial}_t Y^n, Y^n) &= \frac{1}{\kappa} (Y^{n+1} - Y^n, Y^n) \\ &= \frac{1}{2\kappa} [\|Y^{n+1}\|^2 - \|Y^n\|^2 - \|Y^{n+1} - Y^n\|^2] \quad (2.5.4) \\ &= \frac{1}{2} [\bar{\partial}_t \|Y^n\|^2 - \kappa \|\bar{\partial}_t Y^n\|^2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\bar{\partial}_{tt} Y^n, \bar{\partial}_t Y^{n+1}) &= (\bar{\partial}_t W^n, W^{n+1}), \quad W^n := \bar{\partial}_t Y^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ &\stackrel{(2.5.3)}{=} \frac{1}{2} [\bar{\partial}_t \|W^n\|^2 + \kappa \|\bar{\partial}_t W^n\|^2] \quad (2.5.5) \\ &= \frac{1}{2} [\bar{\partial}_t \|\bar{\partial}_t Y^n\|^2 + \kappa \|\bar{\partial}_{tt} Y^n\|^2] \end{aligned}$$

και τέλος, επειδή

$$\begin{aligned} &(\bar{\partial}_{tt} Y^{n-1}, Y^{n+1}) - (\bar{\partial}_{tt} Y^{n-1}, Y^{n+1} - Y^n) = (\bar{\partial}_{tt} Y^{n-1}, Y^n) \\ &= \frac{1}{\kappa^2} [(Y^{n+1} - Y^n, Y^n) - (Y^n - Y^{n-1}, Y^n)] \\ &= \frac{1}{\kappa^2} [(Y^{n+1} - Y^n, Y^{n+1}) - (Y^n - Y^{n-1}, Y^n) - (Y^{n+1} - Y^n, Y^{n+1} - Y^n)] \\ &= \frac{1}{\kappa} [(\bar{\partial}_t Y^n, Y^{n+1}) - (\bar{\partial}_t Y^{n-1}, Y^n)] - (\bar{\partial}_t Y^n, \bar{\partial}_t Y^n) \\ &= \bar{\partial}_t (\bar{\partial}_t Y^{n-1}, Y^n) - \|\bar{\partial}_t Y^n\|^2 \end{aligned}$$

έπεται ότι

$$\begin{aligned} (\bar{\partial}_{tt}Y^{n-1}, Y^{n+1}) &= \kappa(\bar{\partial}_{tt}Y^{n-1}, \bar{\partial}_tY^n) + \\ &\bar{\partial}_t(\bar{\partial}_tY^{n-1}, Y^n) - \|\bar{\partial}_tY^n\|^2 \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

Για  $\phi \in S_h$ , παρατηρούμε ότι η ακολουθία  $\{(u_h^n, v_{h,1}^n, \dots, v_{h,N}^n)\}$  του (2.5.1), για κάθε χρονικό βήμα  $n = 1, 2, \dots$ , έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N (\bar{\partial}_t v_{h,i}^{n-1}, \partial_{x_i} \phi) &= \sum_{i=1}^N \left( \frac{v_{h,i}^n - v_{h,i}^{n-1}}{\kappa}, \partial_{x_i} \phi \right) \\ &\stackrel{(2.5.1)a}{=} \left( \frac{\bar{\partial}_t u_h^n - \bar{\partial}_t u_h^{n-1}}{\kappa}, \phi \right) = (\bar{\partial}_{tt} u_h^{n-1}, \phi) \end{aligned} \quad (2.5.7)$$

Τώρα, αθροίζοντας ως προς  $i = 1, \dots, N$  τις εξισώσεις (2.5.1)b και λαμβάνοντας υπόψιν ότι λόγω της (2.4.1),  $\partial_{x_i} \phi \in V_h$ , έπεται ότι:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^N (v_{h,i}^n, \partial_{x_i} \phi) - \sum_{i=1}^N (F_i(u_h^n), \partial_{x_i} \phi) + \varepsilon \sum_{i=1}^N (\bar{\partial}_t v_{h,i}^{n-1} + A_i \partial_{x_i} u_h^n, \partial_{x_i} \phi) \\ &\stackrel{(2.5.1)a}{=} (\bar{\partial}_t u_h^n, \phi) - \sum_{i=1}^N (F_i(u_h^n), \partial_{x_i} \phi) + \varepsilon \sum_{i=1}^N (\bar{\partial}_t v_{h,i}^{n-1} + A_i \partial_{x_i} u_h^n, \partial_{x_i} \phi) \\ &\stackrel{(2.5.7)}{=} (\bar{\partial}_t u_h^n, \phi) - \sum_{i=1}^N (F_i(u_h^n), \partial_{x_i} \phi) \\ &\quad + \varepsilon \left( (\bar{\partial}_{tt} u_h^{n-1}, \phi) + \sum_{i=1}^N (A_i \partial_{x_i} u_h^n, \partial_{x_i} \phi) \right) \end{aligned} \quad (2.5.8)$$

Ειδικά για την περίπτωση μονοδιάστατης χωρικής μεταβλητής ( $N = 1$ ), οι (2.5.7), (2.5.8) έρχονται στην μορφή:

$$(\bar{\partial}_t v_h^n, \partial_x \phi) = (\bar{\partial}_{tt} u_h^n, \phi) \quad (2.5.9)$$

$$(\bar{\partial}_t u_h^n, \phi) - (F(u_h^n), \partial_x \phi) + \varepsilon \left( (\bar{\partial}_{tt} u_h^{n-1}, \phi) + (A \partial_x u_h^n, \partial_x \phi) \right) = 0 \quad (2.5.10)$$

## 2.5.2 Ευστάθεια του πλήρως διακριτού σχήματος στην συμμετρική περίπτωση

Για την επιλογή  $\phi = 2u_h^{n+1} + 4\varepsilon \bar{\partial}_t u_h^n$ , απο την (2.5.10) προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}
0 &= 2(\bar{\partial}_t u_h^n, u_h^{n+1}) + 2(\partial_x F(u_h^n), u_h^{n+1}) \\
&+ 2\varepsilon(\bar{\partial}_{tt} u_h^{n-1}, u_h^{n+1}) + 2\varepsilon(A \partial_x u_h^n, \partial_x u_h^{n+1}) \\
&+ 4\varepsilon(\bar{\partial}_t u_h^n, \bar{\partial}_t u_h^n) + 4\varepsilon(\partial_x F(u_h^n), \bar{\partial}_t u_h^n) \\
&+ 4\varepsilon^2(\bar{\partial}_{tt} u_h^{n-1}, \bar{\partial}_t u_h^n) + 4\varepsilon^2(A \partial_x u_h^n, \partial_x \bar{\partial}_t u_h^n)
\end{aligned} \tag{2.5.11}$$

Ομως για  $\varrho := \max |eigenvalue(A)|$  και οποιοδήποτε  $\alpha > 0$ , οι όροι της (2.5.11) παίρνουν την παρακάτω μορφή

$$2(\bar{\partial}_t u_h^n, u_h^{n+1}) \stackrel{(2.5.3)}{=} \bar{\partial}_t \|u_h^n\|^2 + \kappa \|\bar{\partial}_t u_h^n\|^2.$$

Επίσης

$$\begin{aligned}
2(\partial_x F(u_h^n), u_h^{n+1}) &= 2(\partial_x F(u_h^n), u_h^n) + 2(\partial_x F(u_h^n), u_h^{n+1} - u_h^n) \\
&= 0 + 2\kappa(\partial_x F(u_h^n), \bar{\partial}_t u_h^n) \\
&= 2\kappa(F'(u_h^n) \partial_x u_h^n, \bar{\partial}_t u_h^n)
\end{aligned}$$

επιπλέον,

$$\begin{aligned}
2\varepsilon(\bar{\partial}_{tt} u_h^{n-1}, u_h^{n+1}) &\stackrel{(2.5.6)}{=} 2\varepsilon \bar{\partial}_t(\bar{\partial}_t u_h^{n-1}, u_h^n) - 2\varepsilon \|\bar{\partial}_t u_h^n\|^2 \\
&+ 2\varepsilon \kappa(\bar{\partial}_{tt} u_h^{n-1}, \bar{\partial}_t u_h^n) \\
&\stackrel{(\alpha-\gamma)}{\geq} 2\varepsilon \bar{\partial}_t(\bar{\partial}_t u_h^{n-1}, u_h^n) - 2\varepsilon \|\bar{\partial}_t u_h^n\|^2 \\
&- 2\varepsilon^2 \kappa \|\bar{\partial}_{tt} u_h^{n-1}\|^2 - \frac{\kappa}{2} \|\bar{\partial}_t u_h^n\|^2,
\end{aligned}$$

και

$$2\varepsilon(A \partial_x u_h^n, \partial_x u_h^{n+1}) = 2\varepsilon(A \partial_x u_h^n, \partial_x u_h^n) + 2\varepsilon \kappa(A \partial_x u_h^n, \partial_x \bar{\partial}_t u_h^n).$$

---

<sup>0</sup>( $\alpha - \gamma$ ) Αριθμητική-Γεωμετρική ανισότητα

<sup>0</sup>( $\alpha - \alpha$ ) Αντίστροφη ανισότητα

Οι όροι με συντελεστή  $4\varepsilon$  γίνονται,

$$\begin{aligned} 4\varepsilon(\bar{\partial}_t u_h^n, \bar{\partial}_t u_h^n) &= 4\varepsilon\|\bar{\partial}_t u_h^n\|^2, \\ 4\varepsilon(\partial_x F(u_h^n), \bar{\partial}_t u_h^n) \\ 4\varepsilon^2(\bar{\partial}_{tt} u_h^{n-1}, \bar{\partial}_t u_h^n) &\stackrel{(2.5.5)}{=} 2\varepsilon^2\bar{\partial}_t\|\bar{\partial}_t u_h^{n-1}\|^2 + 2\varepsilon^2\kappa\|\bar{\partial}_{tt} u_h^{n-1}\|^2, \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} 4\varepsilon^2(A\partial_x u_h^n, \partial_x \bar{\partial}_t u_h^n) &= 4\varepsilon^2(W^n, \bar{\partial}_t W^n), \quad W^n := A^{1/2}\partial_x u_h^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ &\stackrel{(2.5.4)}{=} 2\varepsilon^2\bar{\partial}_t\|W^n\|^2 - 2\varepsilon^2\kappa\|\bar{\partial}_t W^n\|^2 \\ &= 2\varepsilon^2\bar{\partial}_t(A\partial_x u_h^n, \partial_x u_h^n) - 2\varepsilon^2\kappa(A\partial_x \bar{\partial}_t u_h^n, \partial_x \bar{\partial}_t u_h^n). \end{aligned}$$

Συνοψίζοντας, οι όροι με διακριτή χρονική παράγωγο, οι οποίοι θα εμφανισθούν στην (2.5.11) είναι

$$\begin{aligned} &\bar{\partial}_t \left[ \|u_h^n\|^2 + 2\varepsilon(\bar{\partial}_t u_h^{n-1}, u_h^n) + 2\varepsilon^2\|\bar{\partial}_t u_h^{n-1}\|^2 + 2\varepsilon^2(A\partial_x u_h^n, \partial_x u_h^n) \right] \\ &= \bar{\partial}_t \left[ \|u_h^n + \varepsilon\bar{\partial}_t u_h^{n-1}\|^2 + \varepsilon^2\|\bar{\partial}_t u_h^{n-1}\|^2 + 2\varepsilon^2(A\partial_x u_h^n, \partial_x u_h^n) \right]. \end{aligned}$$

Επιπλέον, ο ακόλουθος υπολογισμός είναι χρήσιμος

$$\begin{aligned} &2\varepsilon\|\bar{\partial}_t u_h^n\|^2 + 4\varepsilon(\partial_x F(u_h^n), \bar{\partial}_t u_h^n) \\ &= \varepsilon\|\bar{\partial}_t u_h^n\|^2 + 2\varepsilon\left\| \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\partial}_t u_h^n + \sqrt{2}F'(u_h^n)\partial_x u_h^n \right\|^2 \\ &\quad - 4\varepsilon(F'(u_h^n))^2\partial_x u_h^n, \partial_x u_h^n. \end{aligned}$$

Καταλήγουμε επομένως στην εκτίμηση

$$\begin{aligned} &\bar{\partial}_t \left[ \|u_h^n + \varepsilon\bar{\partial}_t u_h^{n-1}\|^2 + \varepsilon^2\|\bar{\partial}_t u_h^{n-1}\|^2 + 2\varepsilon^2(A\partial_x u_h^n, \partial_x u_h^n) \right] \\ &\quad + \varepsilon\|\bar{\partial}_t u_h^n\|^2 + \frac{\kappa}{2}\|\bar{\partial}_t u_h^n\|^2 \\ &\quad + 2\varepsilon(A - 2(F'(u_h^n))^2)\partial_x u_h^n, \partial_x u_h^n \\ &\leq |2\kappa(\partial_x F(u_h^n), \bar{\partial}_t u_h^n)| + |2\varepsilon\kappa(A\partial_x u_h^n, \partial_x \bar{\partial}_t u_h^n)| \\ &\quad + 2\varepsilon^2\kappa(A\partial_x \bar{\partial}_t u_h^n, \partial_x \bar{\partial}_t u_h^n) \end{aligned} \tag{2.5.12}$$

Στην συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε την αντίστροφη ανισότητα στον χώρο πεπερασμένων στοιχείων  $S_h$ , [BS],

$$\|\partial_x \varphi\| \leq C_I \underline{h}^{-1} \|\partial_x \varphi\| \quad \forall \varphi \in S_h. \quad (2.5.13)$$

Έχουμε επομένως,

$$|2\kappa(\partial_x F(u_h^n), \bar{\partial}_t u_h^n)| \leq 4\kappa(F'(u_h^n))^2 \|\partial_x u_h^n\| \|\partial_x \bar{\partial}_t u_h^n\| + \frac{\kappa}{4} \|\bar{\partial}_t u_h^n\|^2,$$

και

$$\begin{aligned} |2\varepsilon \kappa(A \partial_x u_h^n, \partial_x \bar{\partial}_t u_h^n)| &\leq 2\varepsilon C_I \frac{\kappa}{\underline{h}} (\|A \partial_x u_h^n\| \|\bar{\partial}_t u_h^n\|) \\ &\leq \varepsilon C_I \|A\| \frac{\kappa}{\underline{h}} \|\partial_x u_h^n\|^2 + \varepsilon C_I \|A\| \frac{\kappa}{\underline{h}} \|\bar{\partial}_t u_h^n\|. \end{aligned}$$

Ο τελευταίος όρος εκτιμάται ως εξής:

$$\begin{aligned} 2\varepsilon^2 \kappa(A \partial_x \bar{\partial}_t u_h^n, \partial_x \bar{\partial}_t u_h^n) &\leq 2\varepsilon^2 C_I \frac{\kappa}{\underline{h}} (\|A \partial_x \bar{\partial}_t u_h^n\| \|\bar{\partial}_t u_h^n\|) \\ &\leq \varepsilon \frac{\varepsilon}{\underline{h}} \left( C_I^2 \|A\| \frac{\kappa}{\underline{h}} \right) \|\bar{\partial}_t u_h^n\|^2. \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας την (2.5.12) επί  $\kappa$ , αθροίζοντας και χρησιμοποιώντας τις παραπάνω εκτιμήσεις αποδεικνύουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

**Πρόταση 2.5.1.** Υποθέτουμε ότι  $F'$ ,  $A$  είναι συμμετρικοί και επιπλέον ότι για  $\beta_\kappa > 0$ ,

$$\begin{aligned} \kappa &\leq \beta_\kappa \varepsilon \\ A - (2 + 4\beta_\kappa) F'(u_h)^2 &\geq \nu I \quad \text{για κάποιο } \nu > 0. \end{aligned} \quad (2.5.14)$$

Αν θέσουμε  $\gamma_{CFL} = C_I^2 \|A\| \frac{\kappa}{\underline{h}}$ , υποθέσουμε ότι  $\gamma_{CFL}$  είναι κατάλληλα μικρό, και ότι

$$\varepsilon \leq \frac{1}{2\gamma_{CFL}} \underline{h}$$

τότε οι προσεγγίσεις που προκύπτουν από το πλήρως διακριτό σχήμα ικανοποιούν την εκτίμηση ευστάθειας

$$\begin{aligned} & \left[ \| u_h^n + \varepsilon \bar{\partial}_t u_h^{n-1} \|^2 + \varepsilon^2 \| \bar{\partial}_t u_h^{n-1} \|^2 + 2\varepsilon^2 (A \partial_x u_h^n, \partial_x u_h^n) \right] \\ & + \sum_{j=1}^{n-1} \varepsilon \kappa \| \bar{\partial}_t u_h^j \|^2 + \sum_{j=1}^{n-1} \kappa^2 \| \bar{\partial}_t u_h^j \|^2 \\ & + \sum_{j=1}^{n-1} \varepsilon \kappa \| \partial_x u_h^j \|^2 \leq C(u_h^0). \end{aligned}$$

Στην συνέχεια θα μελετήσουμε τις ιδιότητες συμπίεσης του σχήματος. Γί αυτόν το σκοπό χρησιμοποιούμε τον εξής συμβολισμό:

$$\begin{aligned} u_h & \text{ συμβολίζει την κατά τμήματα γραμμική συνάρτηση} \\ & \text{στον χρόνο, τέτοια ώστε } u_h(t^n) = u_h^n, \\ \bar{u}_h & \text{ συμβολίζει την κατά τμήματα σταθερή συνάρτηση} \quad (2.5.15) \\ & \text{στον χρόνο, τέτοια ώστε } \bar{u}_h(t^n) = u_h^n, \\ I_n & = (t^n, t^{n+1}]. \end{aligned}$$

**Πρόταση 2.5.2.** *Γιά ζεύγη εντροπίας τα οποία ικανοποιούν*

$$\|\eta\|_{L^\infty}, \|\eta'\|_{L^\infty}, \|\eta''\|_{L^\infty} \leq C$$

και για  $h \leq C\varepsilon$ , τότε, υπό τις υποθέσεις της Πρότασης 2.5.1, θα ισχύει

$$\eta(u_h)_t + g(u_h)_x \subset \text{συμπαγούς του } H_{loc}^{-1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+),$$

όπου η  $u_h$  ορίζεται από την (2.5.15).

*Απόδειξη.* Έστω  $(\eta, g)$  ζεύγος εντροπίας για το σύστημα και  $\phi$  μιά αυθαίρετη συνάρτηση ελέγχου. Επιπλέον έστω  $\Pi : H^1 \rightarrow S_h$  η  $L^2$ -προβολή στον  $S_h$  η οποία ορίζεται στην (2.4.13). Τότε χρησιμοποιώντας τον ορισμό του



πλήρως διακριτού σχήματος έχουμε

$$\begin{aligned}
& \left( \eta(u_h)_t + g(u_h)_x, \phi \right) = \left( \eta'(u_h)[u_{h,t} + F'(u_h)u_{h,x}], \phi \right) \\
& = \left( \eta'(u_h)[\bar{\partial}_t u_h^n + \partial_x F'(\bar{u}_h)], \phi \right) \\
& + \left( \eta'(u_h)\partial_x [F(u_h) - F(\bar{u}_h)], \phi \right) \\
& = \left( [\bar{\partial}_t u_h^n + \partial_x F'(\bar{u}_h)], \Pi(\eta'(u_h)\phi) \right) \\
& + \left( [\bar{\partial}_t u_h^n + \partial_x F'(\bar{u}_h)], \eta'(u_h)\phi - \Pi(\eta'(u_h)\phi) \right) \tag{2.5.16} \\
& + \left( \eta'(u_h)\partial_x [F(u_h) - F(\bar{u}_h)], \phi \right) \\
& = -\varepsilon \left( A\partial_x u_h^n, [\Pi(\eta'(u_h)\phi)]_x \right) - \varepsilon \left( \bar{\partial}_{tt} u_h^{n-1}, \Pi(\eta'(u_h)\phi) \right) \\
& + \left( [\bar{\partial}_t u_h^n + \partial_x F'(\bar{u}_h)], \eta'(u_h)\phi - \Pi(\eta'(u_h)\phi) \right) \\
& + \left( \eta'(u_h)\partial_x [F(u_h) - F(\bar{u}_h)], \phi \right).
\end{aligned}$$

Σημειώνουμε έδω ότι για απλότητα στον συμβολισμό όταν χρησιμοποιούμε στις παραπάνω ολοκληρώσεις  $\bar{\partial}_t u_h^n, u_h^n, \bar{\partial}_{tt} u_h^{n-1}$  εννοούμε τις κατά τμήματα σταθερές (ως προς  $t$ ) συναρτήσεις οι οποίες έχουν τις παραπάνω τιμές στο  $I_n$ .

Είμαστε έτοιμοι να εκτιμήσουμε το δεξιό μέλος της (2.5.16). Πράγματι, η (2.4.15) συνεπάγεται

$$\begin{aligned}
\varepsilon \left| \left( A\partial_x u_h^n, [\Pi(\eta'(u_h)\phi)]_x \right) \right| & \leq \varepsilon C \|\partial_x u_h\|_{L^2} \|(\eta'(u_h)\phi)_x\|_{L^2} \\
& \leq \varepsilon C \|\partial_x u_h^n\|_{L^2} \|\eta''(u_h)u_{h,x}\phi + \eta'(u_h)\phi_x\|_{L^2} \\
& \leq C \left( \varepsilon \int |\partial_x u_h^n|^2 \right) \cdot \|\eta''\|_{L^\infty} \|\phi\|_{C^0} \\
& + \varepsilon^{1/2} C \left( \varepsilon \int |\partial_x u_h^n|^2 \right)^{1/2} \|\eta\|_{L^\infty} \|\phi_x\|_{L^2} \tag{2.5.17} \\
& \leq C \left( \varepsilon \kappa \sum_{j=0}^m \|\partial_x u_h^j\|^2 \right) \cdot \|\eta''\|_{L^\infty} \|\phi\|_{C^0} \\
& + \varepsilon^{1/2} C \left( \varepsilon \kappa \sum_{j=0}^m \|\partial_x u_h^j\|^2 \right)^{1/2} \|\eta\|_{L^\infty} \|\phi_x\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

Επιπλέον, χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό

$$\bar{v}_j = \kappa^{-1} \int_{I_j} v \, dt,$$

έχουμε απο την (2.4.13), ( $t = t^{m+1}$ )

$$\begin{aligned} -\varepsilon \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \bar{\partial}_{tt} u_h^{n-1} \Pi(\eta'(u_h)\phi) \, dx dt &= -\varepsilon \sum_{j=0}^m \int_{I_j} \bar{\partial}_{tt} u_h^{j-1} \int_{\mathbb{R}} \eta'(u_h)\phi \\ &= -\varepsilon \int_{\mathbb{R}} \sum_{j=0}^m (\bar{\partial}_t u_h^j - \bar{\partial}_t u_h^{j-1}) \overline{(\eta'(u_h)\phi)}_j \\ &= -\varepsilon \int_{\mathbb{R}} \sum_{j=0}^m \bar{\partial}_t u_h^j \overline{(\eta'(u_h)\phi)}_j + \varepsilon \int_{\mathbb{R}} \sum_{j=-1}^{m-1} \bar{\partial}_t u_h^j \overline{(\eta'(u_h)\phi)}_{j+1} \\ &= \varepsilon \int_{\mathbb{R}} \sum_{j=0}^{m-1} \bar{\partial}_t u_h^j (\overline{(\eta'(u_h)\phi)}_{j+1} - \overline{(\eta'(u_h)\phi)}_j) \\ &\quad - \varepsilon \int_{\mathbb{R}} \bar{\partial}_t u_h^m \int_{\mathbb{R}} \overline{(\eta'(u_h)\phi)}_m. \end{aligned} \tag{2.5.18}$$

Από την Πρόταση 2.5.1 έχουμε, αφού  $|\bar{v}_j| \leq \|v\|_{\infty}$ ,

$$\begin{aligned} \varepsilon \left| \int_{\Omega} \bar{\partial}_t u_h^m \overline{(\eta'(u_h)\phi)}_m \right| &\leq \varepsilon \|\bar{\partial}_t u_h^m\| \|\eta'\|_{L^\infty} \|\phi\|_{C^0} m(\Omega)^{1/2} \\ &\leq C_\Omega \|\phi\|_{C^0}. \end{aligned} \tag{2.5.19}$$

Παρατηρούμε τώρα ότι,

$$|\bar{v}_{j+1} - \bar{v}_j| = \frac{1}{\kappa} \left| \int_{I_j} \int_t^{t+\kappa} v_t \, ds \, dt \right| \leq \int_{t_j}^{t_{j+2}} |v_t| \, dt,$$

συνεπώς με αντίστοιχα επιχειρήματα όπως πριν καταλήγουμε στην εκτίμηση

$$\begin{aligned}
& \varepsilon \left| \int_{\mathbb{R}} \sum_{j=0}^{m-1} \bar{\partial}_t u_h^j \left( \overline{(\eta'(u_h)\phi)}_{j+1} - \overline{(\eta'(u_h)\phi)}_j \right) \right| \\
& \leq C \left( \varepsilon \kappa \sum_{j=0}^m \|\bar{\partial}_t u_h^j\|^2 \right) \|\eta''\|_{L^\infty} \|\phi\|_{C^0} \\
& \quad + \varepsilon^{1/2} \left( \varepsilon \kappa \sum_{j=0}^m \|\bar{\partial}_t u_h^j\|^2 \right)^{1/2} \|\eta'\|_{L^\infty} \|\phi_t\|_{L^2}.
\end{aligned} \tag{2.5.20}$$

Εκτιμούμε τώρα τον επόμενο όρο της (2.5.16) με εντελώς αντίστοιχο τρόπο όπως και στην ημιδιακριτή περίπτωση. Πράγματι επειδή  $\eta'(u)\phi \in H^1$ , έχουμε

$$\begin{aligned}
& \|\eta'(u_h)\phi - \Pi(\eta'(u_h)\phi)\|_{L^2(\Omega)} \\
& \leq Ch \|\eta''\|_{L^\infty} \|u_{h,x}\|_{L^2(\Omega)} \|\phi\|_{C^0} + Ch \|\eta'\|_{L^\infty} \|\phi_x\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

και  $\|F'(u)^2\|_{L^\infty} \leq C$ , ((2.4.11)) άρα

$$\begin{aligned}
& \left| \left( [\bar{\partial}_t u_h^n + F'(\bar{u}_h)\partial_x \bar{u}_h], \eta'(u_h)\phi - \Pi(\eta'(u_h)\phi) \right) \right| \\
& \leq C \left( h \kappa \sum_{j=0}^m \|\bar{\partial}_t u_h^j\|^2 + \|\partial_x u_h^j\|^2 \right) \|\phi\|_{C^0} \\
& \quad + h \left( \kappa \sum_{j=0}^m \|\bar{\partial}_t u_h^j\|^2 + \|\partial_x u_h^j\|^2 \right)^{1/2} \|\phi_x\|_{L^2}.
\end{aligned} \tag{2.5.21}$$

Τέλος, επειδή,

$$|u_h - \bar{u}_h| \leq C\kappa |u_{h,t}| = C\kappa |\bar{\partial}_t u_h^n|,$$

έχουμε χρησιμοποιώντας ότι  $\kappa \leq C\epsilon$

$$\begin{aligned}
\left( \eta'(u_h) \partial_x [F(u_h) - F(\bar{u}_h)], \phi \right) &= - \left( [F(u_h) - F(\bar{u}_h)], \partial_x (\eta'(u_h) \phi) \right) \\
&\leq C \left( \epsilon \kappa \sum_{j=0}^m \|\bar{\partial}_t u_h^j\|^2 + \|\partial_x u_h^j\|^2 \right) \|\phi\|_{C^0} \\
&\quad + \epsilon \left( \kappa \sum_{j=0}^m \|\bar{\partial}_t u_h^j\|^2 + \|\partial_x u_h^j\|^2 \right)^{1/2} \|\phi_x\|_{L^2}.
\end{aligned} \tag{2.5.22}$$

Συνδυάζοντας τις (2.5.17)-(2.5.22) και χρησιμοποιώντας το Λήμμα 2.3.1, με την παρατήρηση ότι όπως πριν στην περίπτωση μας οι όροι  $\chi_h \rightarrow 0$  στον  $H^{-1}$  και άρα ανήκουν σε συμπαγές σύνολο του  $H^{-1}$ , ολοκληρώνεται η απόδειξη  $\square$

### 2.5.3 Ευστάθεια πλήρως διακριτού σχήματος όταν το σύστημα επιδέχεται κυρτή συνάρτηση εντροπίας

Στην περίπτωση όπου η  $F'$  δέν είναι αναγκαστικά συμμετρική αλλά το σύστημα επιδέχεται κυρτή συνάρτηση εντροπίας η τα αποτελέσματα είναι αντίστοιχα με την συμμετρική περίπτωση η οποία αντιμετωπίστηκε στην προηγούμενη παράγραφο. Η ανάλυση στηρίζεται κατά κύριο λόγο στον συνδυασμό επιχειρημάτων από την αντίστοιχη ανάλυση του ημιδιακριτού σχήματος και την ανάλυση του πλήρους διακριτού σχήματος στην συμμετρική περίπτωση. Γι' αυτόν το λόγο θα παρουσιάσουμε την απόδειξη με συνοπτικό τρόπο. Για τις επιμέρους εκτιμήσεις παραπέμπουμε στις δύο προηγούμενες παραγράφους. Θα αποδείξουμε την ακόλουθη πρόταση

**Πρόταση 2.5.3.** Υποθέτουμε ότι το σύστημα επιδέχεται μία αυστηρά κυρτή συνάρτηση εντροπίας  $\eta$  η οποία ικανοποιεί για κάποιο  $\alpha > 0$

$$\eta''(u_h) \leq \alpha I. \tag{2.5.23}$$

Υποθέτουμε επιπλέον ότι ο συμμετρικός και θετικά ορισμένος πίνακας  $A$  ικανοποιεί

$$(A^T \eta''(u_h) + \eta''(u_h)A) - \alpha F'(u_h)^T F'(u_h) \geq \nu I \quad \text{για κάποιο } \nu > 0. \quad (2.5.24)$$

Τότε, υπό αντίστοιχες συνθήκες σχέσης των  $\kappa, \varepsilon, h$  όπως στην Πρόταση 2.5.1 (με πιθανόν διαφορετικές σταθερές), και αν  $h \leq \gamma \varepsilon$  για κάποιο  $\gamma > 0$  οι προσεγγίσεις που προκύπτουν από το πλήρως διακριτό σχήμα ικανοποιούν την εκτίμηση ευστάθειας

$$\begin{aligned} & \left[ \| u_h^n + \varepsilon \bar{\partial}_t u_h^{n-1} \|^2 + \varepsilon^2 \| \bar{\partial}_t u_h^{n-1} \|^2 + 2\varepsilon^2 (A \partial_x u_h^n, \partial_x u_h^n) \right] \\ & + \sum_{j=1}^{n-1} \varepsilon \kappa \| \bar{\partial}_t u_h^j \|^2 + \sum_{j=1}^{n-1} \kappa^2 \| \bar{\partial}_t u_h^j \|^2 \\ & + \sum_{j=1}^{n-1} \varepsilon \kappa \| \partial_x u_h^j \|^2 \leq C(u_h^0). \end{aligned}$$

Απόδειξη. Η προσέγγιση πεπερασμένων στοιχείων  $u_h^n$  ικανοποιεί εξ' ορισμού

$$(\bar{\partial}_t u_h^n, \phi) - (F(u_h^n), \partial_x \phi) + \varepsilon ((\bar{\partial}_{tt} u_h^{n-1}, \phi) + (A \partial_x u_h^n, \partial_x \phi)) = 0 \quad (2.5.25)$$

Θέτουμε τώρα  $\phi = P_1 \eta'(u_h^{n+1})$  στην (2.5.25), όπου  $P_1 : H^1 \rightarrow S_h$  η ελλειπτική προβολή, η οποία ορίζεται από την (2.4.23). Τότε

$$\begin{aligned} & (\bar{\partial}_t u_h^n, \eta'(u_h^{n+1})) + (\partial_x F(u_h^n), \eta'(u_h^{n+1})) \\ & + \varepsilon (\bar{\partial}_{tt} u_h^{n-1}, P_1 \eta'(u_h^{n+1})) + \varepsilon (A \partial_x u_h^n, \partial_x \eta'(u_h^{n+1})) \\ & = (\bar{\partial}_t u_h^n, \eta'(u_h^{n+1}) - P_1 \eta'(u_h^{n+1})) \\ & + (\partial_x F(u_h^n), \eta'(u_h^{n+1}) - P_1 \eta'(u_h^{n+1})) \\ & =: Z_1 + Z_2 \end{aligned} \quad (2.5.26)$$

Οι όροι του δεξιού μέλους θα εκτιμηθούν όπως και στην ημιδιακριτή περίπτωση. Θα μελετήσουμε κατ' αρχήν την ευστάθεια η οποία προέρχεται από τους όρους του αριστερού μέλους. Με αντίστοιχο τρόπο όπως και στην απόδειξη της (2.5.6) έχουμε,

$$\begin{aligned}
& (\bar{\partial}_{tt}Y^{n-1}, W^{n+1}) - (\bar{\partial}_{tt}Y^{n-1}, W^{n+1} - W^n) = (\bar{\partial}_{tt}Y^{n-1}, W^n) \\
& = \frac{1}{\kappa^2} [ (Y^{n+1} - Y^n, W^n) - (Y^n - Y^{n-1}, W^n) ] \\
& = \frac{1}{\kappa^2} [ (Y^{n+1} - Y^n, W^{n+1}) - (Y^n - Y^{n-1}, W^n) - (Y^{n+1} - Y^n, W^{n+1} - W^n) ] \\
& = \frac{1}{\kappa} [ (\bar{\partial}_t Y^n, W^{n+1}) - (\bar{\partial}_t Y^{n-1}, W^n) ] - (\bar{\partial}_t Y^n, \bar{\partial}_t W^n) \\
& = \bar{\partial}_t (\bar{\partial}_t Y^{n-1}, W^n) - (\bar{\partial}_t Y^n, \bar{\partial}_t W^n)
\end{aligned}$$

συνεπώς

$$\begin{aligned}
(\bar{\partial}_{tt}Y^{n-1}, W^{n+1}) & = \kappa(\bar{\partial}_{tt}Y^{n-1}, \bar{\partial}_t W^n) \\
& \quad + \bar{\partial}_t(\bar{\partial}_t Y^{n-1}, W^n) - (\bar{\partial}_t Y^n, \bar{\partial}_t W^n).
\end{aligned} \tag{2.5.27}$$

Άρα,

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\bar{\partial}_{tt}u_h^{n-1}, P_1 \eta'(u_h^{n+1})) & = \varepsilon\kappa(\bar{\partial}_{tt}u_h^{n-1}, \bar{\partial}_t P_1 \eta'(u_h^n)) \\
& \quad + \varepsilon\bar{\partial}_t(\bar{\partial}_t u_h^{n-1}, P_1 \eta'(u_h^n)) \\
& \quad - \varepsilon(\bar{\partial}_t u_h^n, \bar{\partial}_t P_1 \eta'(u_h^n)) \\
& = \varepsilon\bar{\partial}_t(\bar{\partial}_t u_h^{n-1}, \eta'(u_h^n)) \\
& \quad + \varepsilon\kappa(\bar{\partial}_{tt}u_h^{n-1}, \bar{\partial}_t P_1 \eta'(u_h^n)) \\
& \quad - \varepsilon(\bar{\partial}_t u_h^n, \bar{\partial}_t P_1 \eta'(u_h^n)) \\
& \quad + \varepsilon\bar{\partial}_t(\bar{\partial}_t u_h^{n-1}, P_1 \eta'(u_h^n) - \eta'(u_h^n)).
\end{aligned} \tag{2.5.28}$$

Ο τύπος του Taylor δίδει

$$\begin{aligned}
\int \eta(u_h^n) dx & = \int \eta(u_h^{n+1}) dx - \kappa(\eta'(u_h^{n+1}), \bar{\partial}_t u_h^n) \\
& \quad + \kappa^2(\bar{\partial}_t u_h^n, \{ \int_0^1 \int_0^s \eta''(u_h^{n+1} - \kappa \tau \bar{\partial}_t u_h^n) d\tau ds \} \bar{\partial}_t u_h^n),
\end{aligned} \tag{2.5.29}$$

δηλαδή,

$$\begin{aligned}
(\bar{\partial}_t u_h^n, \eta'(u_h^{n+1})) & = \bar{\partial}_t \int \eta(u_h^n) dx \\
& \quad + \kappa(\bar{\partial}_t u_h^n, \{ \int_0^1 \int_0^s \eta''(u_h^{n+1} - \kappa \tau \bar{\partial}_t u_h^n) d\tau ds \} \bar{\partial}_t u_h^n).
\end{aligned} \tag{2.5.30}$$

Επιπλέον, επειδή οι  $\eta, g$  αποτελούν ζεύγος εντροπίας,

$$\begin{aligned} (F'(u_h^n) \partial_x u_h^n, \eta'(u_h^{n+1})) &= (F'(u_h^n) \partial_x u_h^n, \eta'(u_h^n)) \\ &\quad + (F'(u_h^n) \partial_x u_h^n, \eta'(u_h^{n+1}) - \eta'(u_h^n)) \\ &= \kappa (F'(u_h^n) \partial_x u_h^n, \bar{\partial}_t \eta'(u_h^n)). \end{aligned}$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_t \int \eta(u_h^n) dx + \varepsilon \bar{\partial}_t (\bar{\partial}_t u_h^{n-1}, \eta'(u_h^n)) \\ + \varepsilon (A \partial_x u_h^n, \eta''(u_h) \partial_x u_h^n) - \varepsilon (\bar{\partial}_t u_h^n, P_1 \bar{\partial}_t \eta'(u_h^n)) \\ + \kappa (\bar{\partial}_t u_h^n, \{ \int_0^1 \int_0^s \eta''(u_h^{n+1} - \kappa \tau \bar{\partial}_t u_h^n) d\tau ds \} \bar{\partial}_t u_h^n) \\ = Z_1 + Z_2 + Z_3, \end{aligned} \tag{2.5.31}$$

όπου ο νέος όρος  $Z_3$  δίδεται από την

$$\begin{aligned} Z_3 &= -\varepsilon \kappa (\bar{\partial}_{tt} u_h^{n-1}, \bar{\partial}_t P_1 \eta'(u_h^n)) \\ &\quad - \varepsilon \bar{\partial}_t (\bar{\partial}_t u_h^{n-1}, P_1 \eta'(u_h^n) - \eta'(u_h^n)) \\ &\quad - \kappa (F'(u_h^n) \partial_x u_h^n, \bar{\partial}_t \eta'(u_h^n)). \end{aligned} \tag{2.5.32}$$

Από τον τύπο του Taylor έχουμε

$$\begin{aligned} \int \eta(u_h^n + \varepsilon \bar{\partial}_t u_h^{n-1}) dx &= \int \eta(u_h^n) dx + \varepsilon \bar{\partial}_t (\bar{\partial}_t u_h^{n-1}, \eta'(u_h^n)) \\ &\quad + \varepsilon^2 (\bar{\partial}_t u_h^{n-1}, \{ \int_0^1 \int_0^s \eta''(u_h^n + \varepsilon \tau \bar{\partial}_t u_h^{n-1}) d\tau ds \} \bar{\partial}_t u_h^{n-1}). \end{aligned} \tag{2.5.33}$$

Με μία μικρή παραλλαγή της απόδειξης του Λήμματος 2.4.1 έχουμε

$$\varepsilon |(\bar{\partial}_t u_h^n, P_1 \bar{\partial}_t \eta'(u_h^n))| \leq \beta \|\eta''\|_{L^\infty} \|\bar{\partial}_t u_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2. \tag{2.5.34}$$

Ουσιαστικά απομένει να εκτιμήσουμε το  $\|\bar{\partial}_t u_h^n\|_{L^2(\Omega)}$ . Όπως και στην συμμετρική περίπτωση θέτουμε στην εξίσωση η οποία ορίζει το σχήμα  $\phi =$

$\bar{\partial}_t u_h^n$ . Προσθέτουμε το αποτέλεσμα της εξίσωσης που προκύπτει (επί καποιον κατάλληλο παράγοντα) στην (2.5.31). Με αντίστοιχα επιχειρήματα όπως και στην ημιδιακριτή περίπτωση, βλ. (2.4.37) - (2.4.41) και στην πλήρως διακριτή περίπτωση όπου ο  $F'$  συμμετρικός, βλ. τους όρους με συντελεστή  $4\varepsilon^2$  και τις αντιστοιχες εκτιμήσεις, ολοκληρώνουμε την απόδειξη αφού εκτιμήσουμε τους όρους  $Z_i$ . Σημειώνουμε την σημασία στην ανάλυση ευστάθειας της εκτίμησης του όρου

$$\begin{aligned} & \kappa(\bar{\partial}_t u_h^n, \{ \int_0^1 \int_0^s \eta''(u_h^{n+1} - \kappa \tau \bar{\partial}_t u_h^n) d\tau ds \} \bar{\partial}_t u_h^n) \\ & \geq \mu \kappa \|\bar{\partial}_t u_h^n\|_{L^2}^2 \quad \mu > 0. \end{aligned} \tag{2.5.35}$$

□

Τελικά έχουμε το αποτέλεσμα συμπάγειας:

**Πρόταση 2.5.4.** *Γιά ζεύγη εντροπίας τα οποία ικανοποιούν*

$$\|\eta\|_{L^\infty}, \|\eta'\|_{L^\infty}, \|\eta''\|_{L^\infty} \leq C$$

τότε, υπό τις υποθέσεις της Πρότασης 2.5.3, θα ισχύει

$$\eta(u_h)_t + g(u_h)_x \subset \text{συμπαγούς του } H_{loc}^{-1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+),$$

όπου η  $u_h$  ορίζεται από την (2.5.15) και  $u_h^n$  οι προσεγγίσεις του πλήρως διακριτού σχήματος στην περίπτωση την οποία το σύστημα επιδέχεται ζεύγος εντροπίας



## Κεφάλαιο 3

# Μέθοδοι Αναδιαμέρισης και Μεταγωγής

### 3.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό, θα μελετήσουμε εκτενέστερα την αναδιαμέριση και θα δούμε την τεχνική της μεταγωγής, για τις προσεγγίσεις Galerkin της relaxation μορφής που εξετάζουμε.

Αρχικά, θα αναλύσουμε το βήμα της αναδιαμέρισης και θα δούμε εναλλακτικές επιλογές του, τις οποίες και θα εφαρμόσουμε σ' ένα σύνολο προβλημάτων Νόμων Διατήρησης, διακριτοποιημένων στην relaxation μορφή. Τα αποτελέσματα που καταγράφονται, αποτελούν μια πηγή ενδείξεων ότι, **η αναδιαμέριση βελτιώνει την ποιοτική συμπεριφορά** των προσεγγίσεων Galerkin της relaxation μορφής.

Στην συνέχεια, θα εισάγουμε την τεχνική της “Μεταγωγής” και θα ορίσουμε μέσω αυτής το “μεταγωγικό (ή διακοπτόμενα) χαλαρωτικό” (switched relaxation) σχήμα για Νόμους Διατήρησης. Απο την εφαρμογή του στο ίδιο σύνολο προβλημάτων, διαπιστώνουμε ότι, ακόμα και για πολύ μικρές τιμές της relaxation παράμετρου  $\varepsilon$  και μεγάλο χρονικό βήμα, η λύση που αποδίδει το σχήμα παραμένει φραγμένη. Δηλαδή υπάρχουν σοβαρές ενδείξεις ότι, **η μεταγωγή**

διευρύνει την περιοχή ευστάθειας και αυξάνει την τάξη σύγκλισης των προσεγγίσεων Galerkin της relaxation μορφής.

Ο συνδυασμός αναδιαμέρισης και μεταγωγής δίνει ένα ταχύ, ευσταθές και υψηλής ευκρίνειας σχήμα. Στο σύνολο των δοκιμαστικών προβλημάτων, η ποιότητα της λύσης ήταν εξαιρετική ακόμα και για μεγάλο χρονικό βήμα και πολύ μικρή τιμή της relaxation παραμέτρου  $\varepsilon$ .

Απο το γεγονός ότι για αναδιαμέριση που στηρίζεται στην καμπυλότητα της λύσης, το παραπάνω σχήμα διατηρεί την ευστάθειά και την ευκρίνεια του, ακόμα και για  $\varepsilon=0$ , θα οδηγήθουμε στην συνέχεια στον ορισμό του “οριακά χαλαρωτικού” (limit relaxation) σχήματος, για προσέγγιση Galerkin κατεύθειας του (ασθενούς) ορίου της relaxation μορφής Νόμων Διατήρησης. Αν και τα αποτελέσματα της εφαρμογής, του limit relaxation σχήματος στα δοκιμαστικά προβλήματα, είναι ικανοποιητικά, πιο σημαντικό είναι το ερώτημα που ανακύπτει:

*“ Είναι η κατάλληλη αναδιαμέριση, ένας αυτόνομος μηχανισμός κατασκευής ασθενών λύσεων Νόμων Διατήρησης με την μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων; ”*

Κλείνουμε το κεφάλαιο αυτό, διερευνώντας πειραματικά την απάντηση στην παραπάνω πρόταση. Πιο συγκεκριμένα, ορίζουμε αρχικά το σχήμα που προκύπτει, αν επαυξήσουμε την κατα Galerkin διακριτοποίηση του προβλήματος Νόμων Διατήρησης (όχι της relaxation μορφής του) με το βήμα της αναδιαμέρισης καμπυλότητας. Έπειτα απο την εφαρμογή του στα ίδια προβλήματα, διαπιστώνουμε ότι τα αποτελέσματα που παίρνουμε είναι παρεμφερή με του limit relaxation, κάτι που ενισχύει την καταφατική απάντηση στην παραπάνω ερώτηση.

Περαιτέρω ανάλυση προς αυτήν την σημαντική κατεύθυνση, αποτελεί αντικείμενο μελλοντικής έρευνας.

### 3.1.1 Χώρος δοκιμών

Τόσο το σχήμα *relaxation* (2.5.2) όσο και οι μεταλλάξεις του που θα δούμε παρακάτω, υλοποιήθηκαν για χώρους πεπερασμένων πολυωνυμικών στοιχείων τύπου *Bsplines*( $p$ ),  $p = 1, \dots, 5$  και ολοκλήρωσης στον χρόνο με μεθόδους *Runge – Kutta ERK – DIRK*, (μητρώων όπως ορίζονται στο κεφάλαιο 1 ( 2, 3, ή 4 σταδίων ) ) και εφαρμόστηκαν στα παρακάτω προβλήματα, με περιοδικές συνοριακές συνθήκες και για χωρική διαμέριση  $N_h = 200$  κόμβων:

*Μεταφοράς*

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x(2u) = 0 \\ u_0 = 1_{[0.3,0.6]}, x \in [0, 1], t \in [0, 1] \end{cases}$$

*Buckley-Leverett* ( “Δύο φάσεων ή ντεποζίτου” ) Πρόβλημα μη-κυρτής ροής, οπότε για κατάλληλα αρχικά δεδομένα παρουσιάζει περιοχές αραίωσης που τερματίζουν σε shock

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x\left(\frac{u^2}{u^2+0.5(1-u)^2}\right) = 0 \\ u_0 = 1_{[0,0.1] \cup [0.5,1]}, x \in [0, 1], t \in [0, 0.4] \end{cases}$$

*Ισεντροπικής ροής*

$$\begin{cases} \partial_t \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \partial_x \begin{pmatrix} u_2 \\ \frac{u_2^2}{u_1} + u_1^{1.4} \end{pmatrix} = 0 \\ \begin{pmatrix} u_{0,1} \\ u_{0,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2_{[0,0.2] \cup [0.7,1]} \end{pmatrix}, x \in [0, 1], t \in [0, 0.5] \end{cases}$$

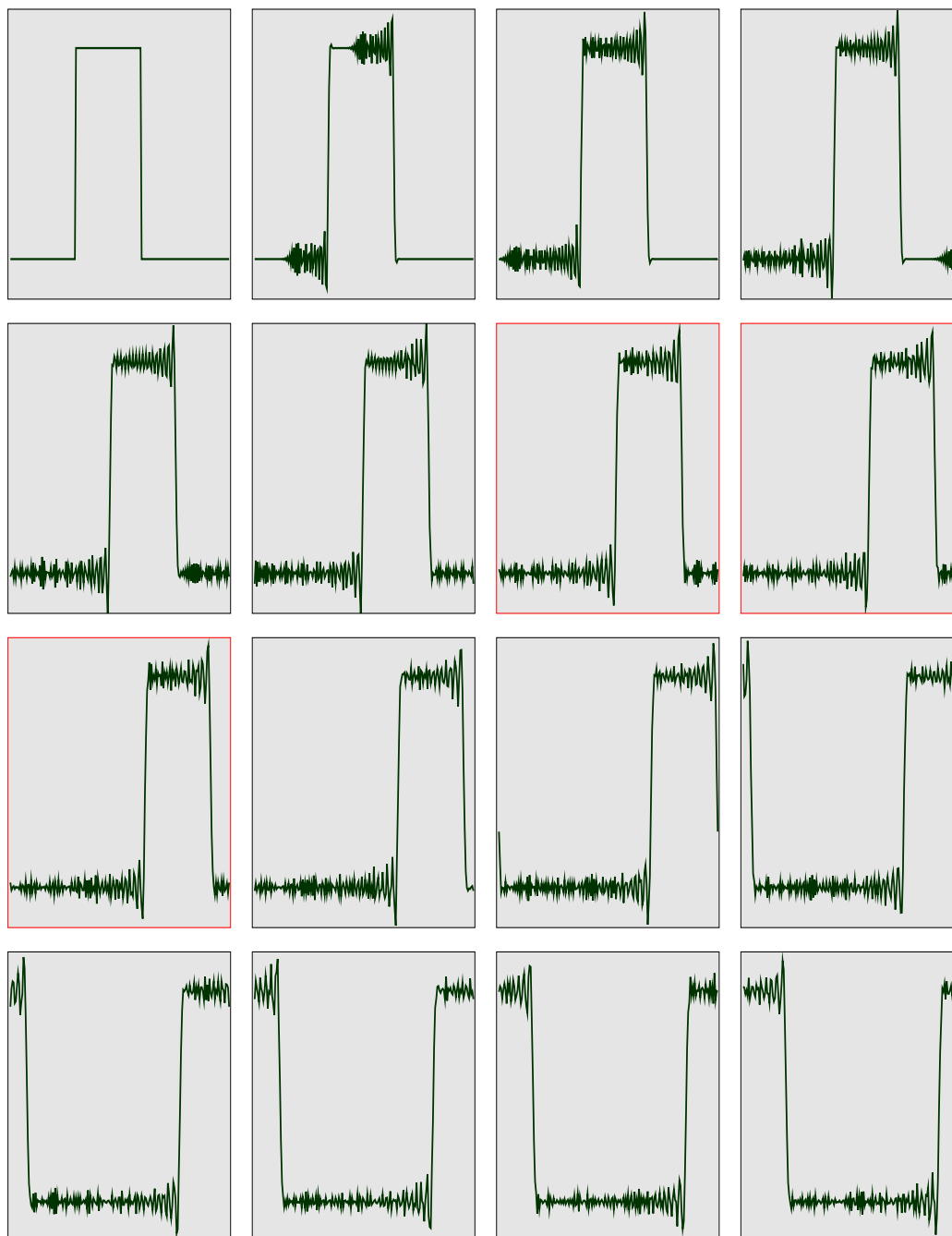
*Shallow water*

$$\begin{cases} \partial_t \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \partial_x \begin{pmatrix} u_1 \cdot u_2 \\ \frac{u_2^2}{2} + u_1 \end{pmatrix} = 0 \\ \begin{pmatrix} u_{0,1} \\ u_{0,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_{[0.3,0.4]} + 0.2_{[0.6,0.7]} \\ 0 \end{pmatrix}, x \in [0, 1], t \in [0, 1] \end{cases}$$

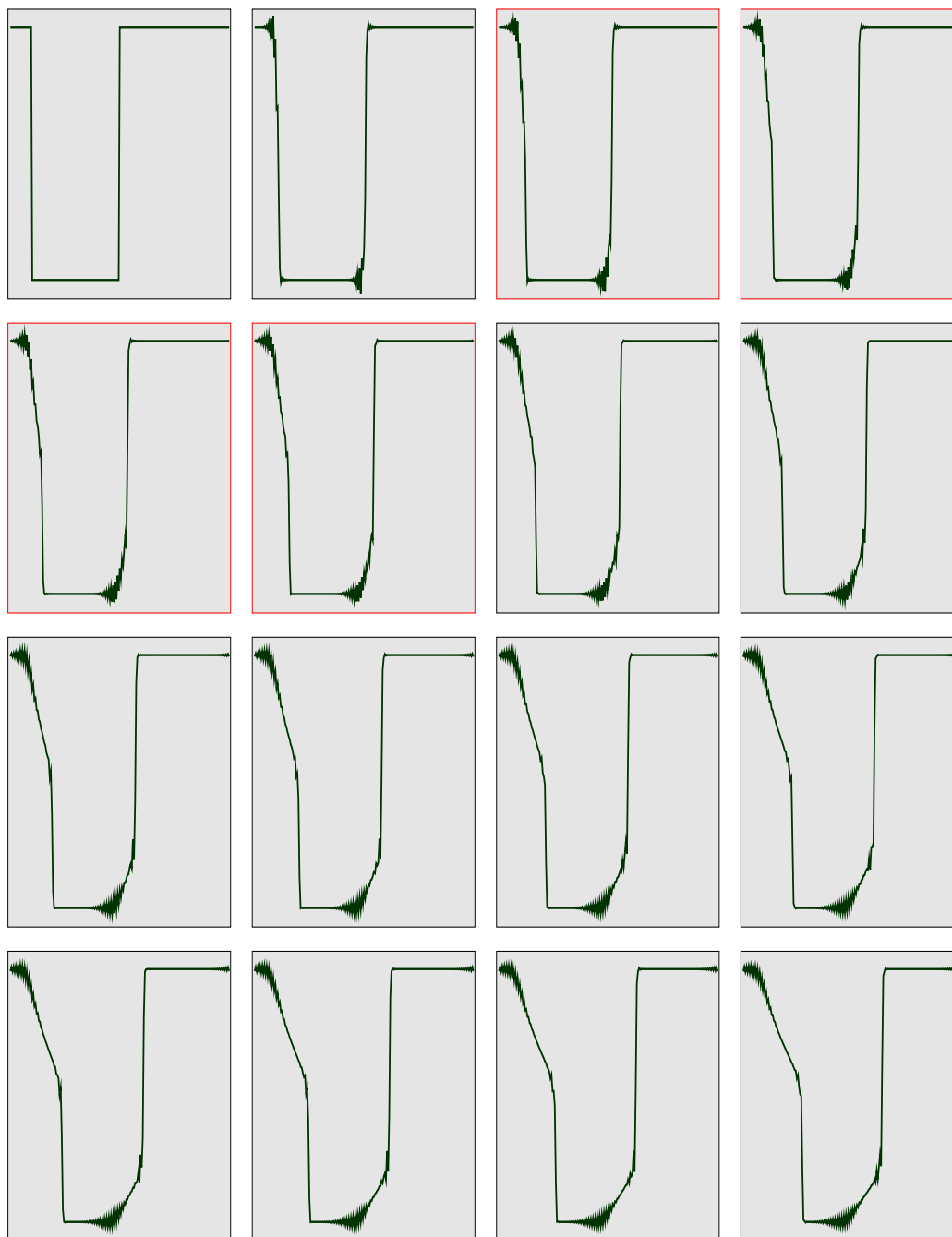
Τα σχήματα 3.1, ..., 3.4, απεικονίζουν τις γραφικές παραστάσεις ακολουθίας στιγμιοτύπων (σε διάταξη γραπτού λόγου), των αποτελεσμάτων που έδωσε η υλοποίηση του σχήματος relaxation (2.5.2), γι' αυτά τα προβλήματα. Ειδικότερα, οι τιμές των παραμέτρων ήταν:

- Βαθμός των πολυωνύμων προσέγγισης  $p = 1$ .
- $RK$  3 σταδίων.
- Χωρική διαμέριση  $N_h = 200$  κόμβων.
- $\varepsilon \in \{5 \cdot 10^{-4}, 3 \cdot 10^{-4}, 2 \cdot 10^{-4}, 1 \cdot 10^{-4}, 5 \cdot 10^{-5}, 2.5 \cdot 10^{-5}\}$
- Δοθέντων των παραμέτρων  $N_h, \varepsilon$ , τόσο ο αριθμός των χρονικών βημάτων όσο και οι ιδιοταχύτητες (τα στοιχεία  $A_{i,i}$  του διαγώνιου πίνακα  $A$ ), μετά από επανειλημμένες δοκιμές πήραν τις ελάχιστες τιμές (αναγράφονται σε κάθε παράδειγμα) για τις οποίες, η προκύπτουσα λύση:
  - α) είναι φραγμένη σε όλα τα χρονικά βήματα και β) είναι η ποιοτικά καλύτερη, δηλαδή οξεία στις περιοχές ασυνέχειας, με όσο το δυνατόν μικρότερου πλάτους εισερχόμενη εκ του σχήματος ταλάντωση.

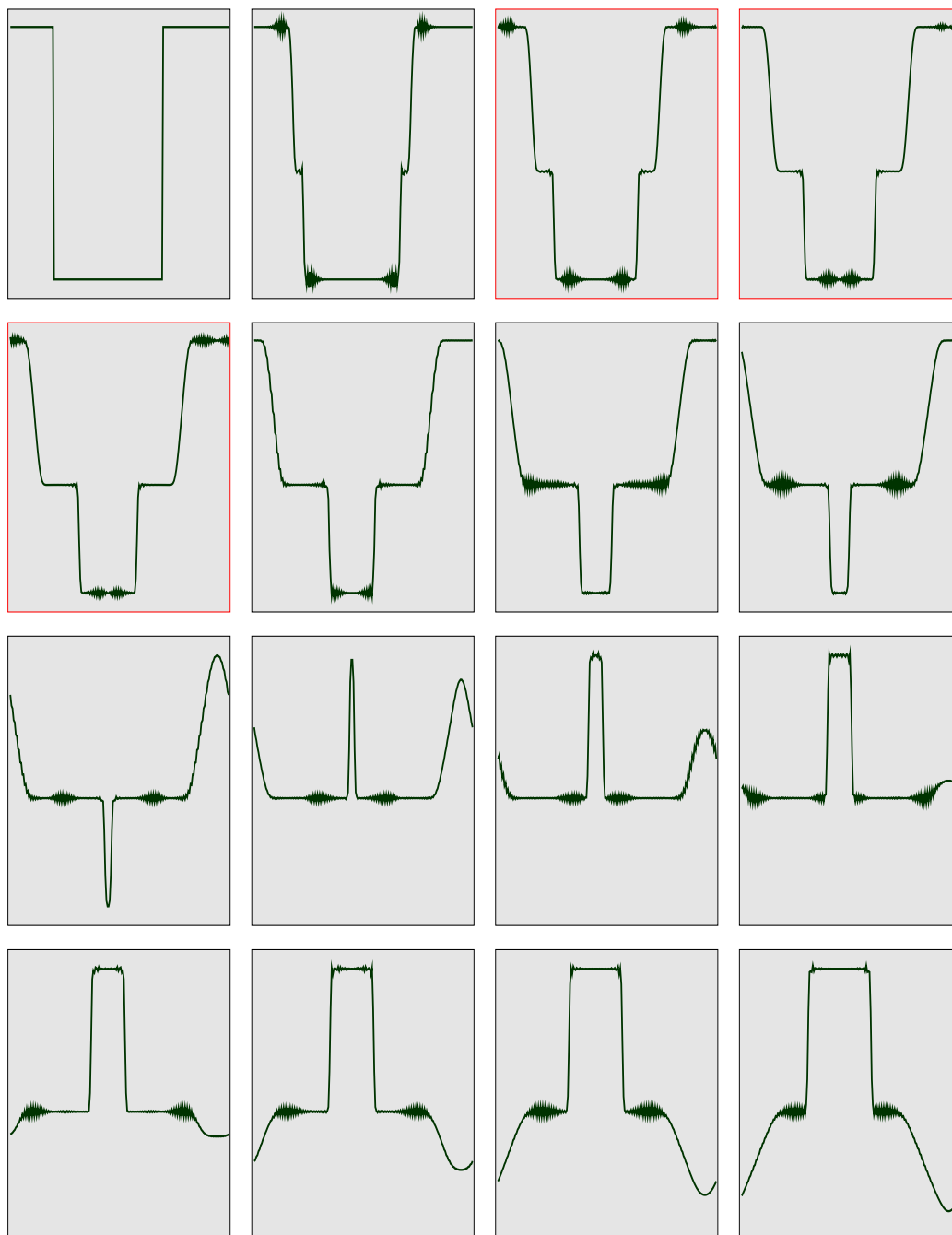
Σημείωση: Στα σχήματα 3.1, ..., 3.4, παρουσιάζονται μόνο τα καλύτερα δυνατά αποτελέσματα (του μικρότερου  $\varepsilon$ ), για προφανείς λόγους ευκρίνειας.



Σχήμα 3.1: **Μεταφοράς:** Τα  $76 \cdot i, i = 0, \dots, 15$ , στιγμιότυπα της λύσεως από την μέθοδο relaxation ( $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-5}$ ,  $A_{1,1} = 4.5$ ,  $N_\kappa = 19 \cdot 200$ ). Με κόκκινο χρώμα σημειώνονται τα στιγμιότυπα, μεταξύ των οποίων θα γίνουν συγκριτικές αναφορές στα παρακάτω.



Σχήμα 3.2: **Buckley Leverett**: Τα  $136 \cdot i, i = 0, \dots, 15$ , στιγμιότυπα της λύσεως από την μέθοδο relaxation ( $\varepsilon = 2.5 \cdot 10^{-5}$ ,  $A_{1,1} = 100$ ,  $N_\kappa = 17 \cdot 200$ ). Με κόκκινο χρώμα σημειώνονται τα στιγμιότυπα, μεταξύ των οποίων θα γίνονται συγκριτικές αναφορές στα παρακάτω.



Σχήμα 3.3: Πρώτη συνιστώσα Isentropic flow: Τα  $160 \cdot i, i = 0, \dots, 15$ , στιγμιότυπα της λύσεως απο την μεθόδο relaxation ( $\varepsilon = 2.5 \cdot 10^{-5}$ ,  $A_{1,1} = 20$ ,  $A_{2,2} = 40$ ,  $N_\kappa = 20 \cdot 200$ ). Με κόκκινο χρώμα σημειώνονται τα στιγμιότυπα, μεταξύ των οποίων θα γίνονται συγκριτικές αναφορές στα παρακάτω.



Σχήμα 3.4: Πρώτη συνιστώσα Shallow Water: Τα  $76 \cdot i, i = 0, \dots, 15$ , στιγμιότυπα της λύσεως απο την μεθόδο relaxation ( $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-5}$ ,  $A_{1,1} = 4$ ,  $A_{2,2} = 90$ ,  $N_\kappa = 19 \cdot 200$ ). Με κόκκινο χρώμα σημειώνονται τα στιγμιότυπα, μεταξύ των οποίων θα γίνονται συγκριτικές αναφορές στα παρακάτω.



## 3.2 Αναδιαμέριση

Η αναδιαμέριση του συνόλου  $\Omega$  πάνω στο οποίο υπολογίζεται η προσεγγιστική λύση, είναι ένα επιπλέον βήμα που μπορεί να προστεθεί σε οποιοδήποτε αριθμητικό αλγόριθμο. Σκοπός αυτού του βήματος είναι η αύξηση της τοπικής ακρίβειας της προσεγγιστικής λύσης, πάνω από επιλεγθείσα “περιοχή ενδιαφέροντος  $A \subset \Omega$ ”. Στα παρακάτω θα συμβολίζουμε, με  $\Pi$  την οικογένεια υποσυνόλων του  $\Omega$  που περιλαμβάνει όλες τις περιοχές ενδιαφέροντος, δηλαδή  $\Pi = \{A\} \subset \wp\Omega$  και με  $\Pi^c$  την οικογένεια υποσυνόλων  $\wp\Omega \setminus \Pi$ .

Λαμβάνοντας υπόψιν ότι γενικά

- “ η ακρίβεια της αριθμητικής λύσης αυξάνει όσο πιο πυκνή είναι η διαμέριση της περιοχής πάνω στην οποία υπολογίζεται ( στην γενική περίπτωση υπάρχει άνω φράγμα στην πυκνότητα διαμέρισης), ” (\*)

μπορούμε να περιγράψουμε τα βήματα του γενικευμένου αλγόριθμου αναδιαμέρισης ως εξής:

α) Μετρικοποίηση περιοχών του συνόλου  $\Omega$ , μέσω κάποιου συναρτησιακού  $g$  (εκτιμήτρια συνάρτηση), θετικού και φραγμένου ( $g[\Omega] = [0, \bar{g}]$ ), κατάλληλα επιλεγμένου ώστε οι τιμές του πάνω από τις περιοχές ενδιαφέροντος  $\Pi$ , να είναι σημαντικά μεγαλύτερες από αλλού. Πιο συγκεκριμένα υποθέτουμε ότι υπάρχει στάθμη διαχωρισμού  $\underline{g} \in (0, \bar{g})$  τέτοια ώστε

$$\forall A \subset \Omega \quad g[A] \subset [\underline{g}, \bar{g}] \iff A \in \Pi \quad (3.2.1)$$

β) Εύρεση μίας πεπερασμένης πληθυκότητας διαμέριση  $\mathcal{T} = \{K_j\}_{j=1}^{N_h}$  του  $\Omega$  σε Lebesgue-μετρήσιμα υποσύνολα  $K$ , τέτοιας ώστε, για οποιοδήποτε Lebesgue-μετρήσιμο σύνολο  $A \subset \Omega$ , το πλήθος στοιχείων διαμέρισης  $K \in \mathcal{T}$  που περιέχει, να είναι ανάλογο της συνολικής αποτίμησης του,  $\int_A g \, d\mu$ , από την  $g$  (όπου  $\mu$  το μέτρο Lebesgue). Για να βρούμε μια “οικονομικότερη” περιγραφή της διαμέρισης  $\mathcal{T}$ , θα περιορίσουμε την απαίτησή μας σε σύνολα  $A$  προϊόν ένωσης

στοιχείων  $K \in \mathcal{T}$ , δηλαδή  $A \in \sigma(T) = \left\{ \bigcup_{j=1}^{N_h} K_j^{i_j} : i \in \{0, 1\}^{N_h} \right\}$ , όπου  $\{0, 1\}^{N_h}$  το σύνολο των ακολουθιών του  $\{0, 1\}$  μήκους  $N_h$  και για οποιοδήποτε σύνολο  $K$ ,  $K^1 \equiv K$ ,  $K^0 \equiv K^c$ .

Ητοι, ζητείται διαμέριση  $\mathcal{T} = \{K_j\}_{j=1}^{N_h}$  του  $\Omega$  τέτοια ώστε για κάποια σταθερά  $C$  να ικανοποιεί την πρόταση:

$$\forall A \in \sigma(T) \quad \int_A g \, d\mu = C \#\{K \in \mathcal{T} : K \subset A\} \quad (3.2.2)$$

Ειδικά για  $A = \Omega$  η παραπάνω σχέση δίνει  $C = \frac{1}{N_h} \int_{\Omega} g \, d\mu$ , ενώ για  $A = K \in \mathcal{T}$  προσδιορίζει την διαμέριση από τα στοιχεία της, δηλαδή ισοδύναμα η ζητούμενη διαμέριση προσδιορίζεται από την πρόταση

$$\forall K \in \mathcal{T} \quad \int_K g \, d\mu = \frac{1}{N_h} \int_{\Omega} g \, d\mu \quad (3.2.3)$$

Αρα κατά την (\*), ο υπολογισμός της αριθμητικής λύσης πάνω σε διαμέριση  $\mathcal{T} = \{K\}$  που ικανοποιεί την (3.2.3), θα έχει αυξημένη ακρίβεια στις επιλεγθείσες περιοχές ενδιαφέροντος  $\Pi$ .

γ) Ανακατασκευή της λύσης από την αρχική διαμέριση στην υπολογισθείσα στο βήμα β, μέσω κάποιας κατασκευάστριας συνάρτησης  $Rec$  (εκ του Reconstruction).

Στις παρακάτω υποπαραγράφους, εξετάζουμε αναλυτικότερα τα τρία αυτά βήματα, για τις προσεγγίσεις Galerkin της relaxation μορφής του προβλήματος των Νόμων Διατήρησης για μονοδιάστατη χωρική μεταβλητή ( $\Omega = [a, b]$ ).

### 3.2.1 Εκτιμήτριες συναρτήσεις

Στο πρόβλημα των Νόμων Διατήρησης, μεταξύ των προσεγγιστικών λύσεων ίδιας ακρίβειας στις ομαλές περιοχές, “ποιοτικά καλύτερη θεωρείται αυτή που έχει οξεία συμπεριφορά στις περιοχές ασυνέχειας της πραγματικής λύσης (*shocks*, *contact discontinuities*), ενώ ταυτόχρονα οι παραγόμενες ταλαντώσεις που

παρουσιάζει στις γειτονικές των περιοχές, είναι μικρού πλάτους.” Άρα περιοχές ενδιαφέροντος αυτών των προβλημάτων, είναι κατά κύριο λόγο αυτές όπου η πραγματική λύση παρουσιάζει ασυνέχειες. Κατα συνέπεια, η εκτιμήτρια συνάρτηση  $g$  πρέπει να επιλεγεί από την κλάση των συναρτησιακών που αποτιμούν την οξύτητα της λύσης σε δοθείσα περιοχή (π.χ. κύμανση, νόρμες παραγώγων της λύσεως).

Μια δυσκολία σε αυτήν την επιλογή, προέρχεται από το γεγονός ότι, ο εντοπισμός αυτών των περιοχών γίνεται μέσω της υπάρχουσας αριθμητικής λύσεως (και όχι της πραγματικής η οποία είναι άγνωστη), οπότε ο μηχανισμός της αναδιαμέρισης κληρονομεί μέρος από την κακή συμπεριφορά της συγκεκριμένης επιλύτριας μεθόδου. Σημειώνουμε ότι δεν περιορίζουμε την επιλογή των εκτιμητριών συναρτήσεων από αυτές που προκύπτουν από εκτιμήσεις “*a posteriori*,” βλ. Κεφάλαιο 1.

Ειδικώτερα για τις μεθόδους Galerkin που προκύπτουν από διακριτοποίηση της relaxation μορφής Νόμων Διατήρησης, αναλόγως των τιμών των παραμέτρων  $\varepsilon$ , χαρακτηριστικών ταχυτήτων, παρατηρούμε:

α) Για υψηλές τιμές αυτών των παραμέτρων, παίρνουμε ομαλοποιημένες προσεγγίσεις στις περιοχές ασυνέχειας της πραγματικής λύσεως. Άρα οποιαδήποτε εκτιμήτρια συνάρτηση που αποτιμά την οξύτητα της αριθμητικής λύσεως, λειτουργεί σωστά μόνο πάνω από γνήσια μικρότερες υποπεριοχές από αυτές που περιέχουν τις ασυνέχειες (της πραγματικής λύσης).

β) Για αρκετά χαμηλές τιμές αυτών των παραμέτρων (μέσα όμως στην περιοχή ευστάθειας της μεθόδου), παίρνουμε πιο οξείες προσεγγίσεις των ασυνεχειών της λύσης, που παρουσιάζουν όμως, σε ορισμένες περιπτώσεις, φθίνοντος πλάτους ταλαντώσεις γύρω από το σύνορο της ασυνέχειας. Σε αυτήν την περίπτωση η εκτιμήτρια συνάρτηση θα συμπεριλάβει τις περιοχές ταλάντωσης στις περιοχές ενδιαφέροντος.

Απο τις δύο παραπάνω περιπτώσεις υπο-υπερ εκτίμησης, προτιμώτερη είναι η δεύτερη αφού περιέχει ασφαλώς τις περιοχές ασυνέχειας (της πραγματικής λύσης).

Ένα άλλο σημαντικό θέμα στις μεθόδους με αναδιαμέριση για προσεγγίσεις Νόμων Διατήρησης, είναι αυτό της ευστάθειας της συνολικής μεθόδου. Δεδομένου ότι κάθε αριθμητική λύση Νόμων Διατήρησης που υπολογίζεται με επίλυση συστημάτων, είναι ευσταθής μόνο αν ικανοποιεί την *CFL* συνθήκη:

$$\forall K \in \mathcal{T}^n \quad \text{diam}(K) \geq C_1 \kappa \max_{x \in K} |\text{eigenvalue}(F'(u_h^n(x)))|, \quad n = 1, 2, \dots$$

(όπου κατά τα γνωστά,  $\kappa$  το χρονικό βήμα και  $\mathcal{T}^n$  η χωρική διαμέριση την χρονική στιγμή  $n\kappa$ ) ο μηχανισμός της αναδιαμέρισης πρέπει, είτε να έχει ένα άνω φράγμα στην πυκνότητα της παραγόμενης διαμέρισης, είτε να μικραίνει το χρονικό βήμα της μεθόδου (αν χρειάζεται). Και στις δύο περιπτώσεις απαιτείται ο ακριβός υπολογισμός των ιδιοτιμών των πινάκων  $F'(u_h^n(x))$  για αρκετά μεγάλο αριθμό σημείων  $x$  παρμένων από περιοχές πύκνωσης της διαμέρισης. Μια απλούστερη λύση είναι να χρησιμοποιήσουμε το συναρτησιακό  $g^p$  στην θέση του  $g$ , όπου  $p \in [0, 1]$  παράμετρος μέσω της οποίας ελέγχουμε την μέγιστη πυκνότητα της αναδιαμέρισης.

Πράγματι, από την (3.2.3) έπεται ότι:

$$\forall K \in \mathcal{T} \quad \frac{C}{\max\{g^p \circ u_h^n[K]\}} \leq \mu(K) \leq C_1 \text{diam}(K)^N \quad (\text{όπου } N = \dim \Omega).$$

οπότε για αρκούντως μικρού  $p$  οδηγούμαστε σε διαμέριση που ικανοποιεί την *CFL* συνθήκη και ταυτόχρονα εκμεταλεύεται την πληροφορία για τις περιοχές ενδιαφέροντος που υποδεικνύει το συναρτησιακό  $g$ . Ειδικά για  $p = 0$  το βήμα  $\beta$  τροφοδοτείται με την σταθερή συνάρτηση  $g^0 \equiv 1$ , οπότε θα αποδώσει μία σταθερής πυκνότητας διαμέριση, ήτοι την ομοιόμορφη.

Στους υπολογισμούς που έγιναν για συστήματα Νόμων Διατήρησης μονοδιάστατης χωρικής μεταβλητής, χρησιμοποιήθηκαν τα συναρτησιακά “α ποστεριορί”

και η “καμπυλότητα” της αριθμητικής λύσης, σαν πιθανές επιλογές εκτιμητριας συναρτήσης.

**Η “a posteriori”, εκτιμητρια συνάρτηση περιοχών ασυνέχειας.**

Πρόκειται για το συναρτησιακό που εκτιμάει την ποσότητα

$$\int_{\mathcal{B}(x,r)} |u'(x)| dx$$

μιας συνάρτησης  $u$ , σε μια σφαίρα  $\mathcal{B}(x, r)$ , του σημείου  $x$  με ακτίνα  $r$ . Πρακτικά, αποθηκεύεται σαν διάνυσμα  $\{g_i\}_{i=1}^{N_h}$  του  $\mathbb{R}^{N_h}$ , που προσεγγίζει τις  $\{g(u(x_i))\}$  με κάποιο απλό κανόνα ολοκλήρωσης, στο διάστημα  $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ , π.χ. για  $i = 1, \dots, N_h$ :

$$g_i = \frac{1}{2} (|u_{i+1} - u_i| \cdot |x_{i+1} - x_i| + |u_i - u_{i-1}| \cdot |x_i - x_{i-1}|)$$

**Η καμπυλότητα της λύσης, ως εκτιμητρια συνάρτηση περιοχών ασυνέχειας.**

Πρόκειται για το συναρτησιακό

$$g(x) = \left| \frac{da}{ds} \right| = \frac{|u''(x)|}{(1 + u'(x)^2)^{\frac{3}{2}}},$$

το οποίο εκτιμάει την καμπυλότητα μιας συνάρτησης  $u$ , στο  $x$  (όπου  $a$  η διανυσματική δεύτερη παράγωγος της καμπύλης  $r(t) = (x(t), u(x(t)))$  και  $s$  το μήκος τόξου  $s(t) = \int_0^t |r'(v)| dv$  αυτής της καμπύλης). Απο την πρώτη εξίσωση, φαίνεται ότι πρόκειται για το μέτρο της διανυσματικής επιτάχυνσης (όταν η καμπύλη είναι παραμετρημένη ως προς το μήκος τόξου). Γενικά, η καμπυλότητα ενός πολύπτυχου, είναι ένα μέτρο του “πόσο απέχει τοπικά από το να είναι ευκλείδιος χώρος”, π.χ. στις περιοχές όπου μιά επίπεδη καμπύλη είναι σχεδόν ευθεία, η καμπυλότητά της είναι σχεδόν 0 ενώ στις περιοχές όπου η επιτάχυνσή της είναι μεγάλη (π.χ σε ανώμαλα σημεία όπως οι γωνίες ή οι ασυνέχειες)

είναι και αυτή εξίσου μεγάλη. Παρόμοιες παρατηρήσεις ισχύουν και για τις επιφάνειες τα στερεά κ.λ.π.

Αυτή είναι ακριβώς η ιδιότητα που χρειάζεται η εκτιμήτρια για την λύση των Νόμων Διατήρησης, δεδομένου ότι στα σημεία ασυνέχειας της λύσης ή της παραγώγου της (γωνίες), παίρνει τοπικά μέγιστη τιμή.

Πρακτικά, αποθηκεύεται σαν διάνυσμα  $\{g_i\}_{i=1}^{N_h}$  του  $\mathbb{R}^{N_h}$ , που προσεγγίζει τις  $\{g(u(x_i))\}$  πάνω στους κόμβους  $\{x_i\}$ , μέσω του ευκλείδειου ορισμού

$$k(A_i) = \frac{1}{R(A_{i-1}, A_i, A_{i+1})},$$

όπου  $R$  η ακτίνα του εγγύτατου κύκλου που διέρχεται από τα σημεία  $A_j = (x_j, u(x_j))$ ,  $j = i - 1, i, i + 1$ , δηλαδή για  $i = 0, \dots, N_h - 1$

$$g_i = 2 \frac{|(A_{i+1} - A_i) \times (A_i - A_{i-1})|}{|A_{i+1} - A_i| |A_{i+1} - A_{i-1}| |A_i - A_{i-1}|}$$

Παρατηρήσεις: *i*) Στις περιπτώσεις πολυδιάστατης λύσης ( $M > 1$ ), τα παραπάνω αναφέρονται σε κάθε συνιστώσα της λύσης χωριστά, δηλαδή υπολογίζονται τα συναρτησιακά  $\{g_{k,i}\}_{i=1}^{N_h}$ ,  $k = 1, \dots, M$  και έπειτα

α) είτε αναδιαμερίζεται ο χώρος της  $k$ -συνιστώσας, ως προς την αποτίμηση της  $g_k$  εκτιμήτριας,  $k = 1, \dots, M$

β) είτε αναδιαμερίζεται ο κοινός για όλες τις συνιστώσες χώρος, ως προς την αποτίμηση της μέσης εκτιμήτριας

$$g(x) = \sum_{k=1}^M \frac{g_k(u(x))}{\int_a^b g_k(u(x)) dx}$$

Οι εφαρμογές σε αυτήν την εργασία, έγιναν για κοινής διαμέρισης χώρο (επιλογή β)

*ii*) Περιοχές με αριθμητική ταλάντωση (ακολουθία τοπικών μεγίστων-ελαχίστων ανά 2-3 κόμβους), δύναται να μπερδέψουν τις εκτιμήτριες, οπότε ως τελική εκτιμήτρια χρήσιμο είναι να θεωρηθεί το αόριστο ολοκλήρωμά της.

### 3.2.2 Κατασκευή της νέας διαμέρισης

Μέσω της συνάρτησης  $G$  με τύπο  $G(x) = \int_a^x g(y)dy$ , ορίζουμε τους κόμβους  $\{x_i\}_{i=1}^{N_h}$  έτσι ώστε  $x_0 = a$  και για  $i = 1, \dots, N_h$

$$x_i \text{ τέτοιο ώστε } G(x_i) - G(x_{i-1}) = \frac{G(b)}{N_h} \quad (3.2.4)$$

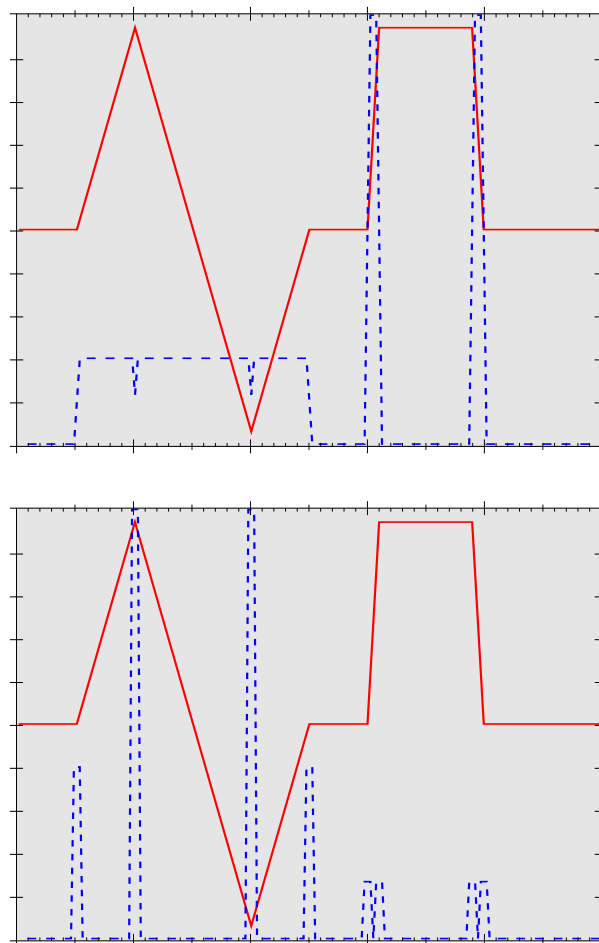
Επειδή η  $G$  είναι αύξουσα, συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία  $\{x_i\}_{i=1}^{N_h}$  όπως ορίζεται από την (3.2.4), είναι αύξουσα και μάλιστα  $x_{N_h} = b$ , επιπλέον η διαμέριση  $\mathcal{T} = \{K_i\}_{i=1}^{N_h}$  έτσι ώστε  $K_i = [x_{i-1}, x_i)$ , ικανοποιεί την (3.2.3), αφού

$$\begin{aligned} \forall K_i \in \mathcal{T} \\ \int_{K_i} g \, d\mu &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x) \, dx = G(x_i) - G(x_{i-1}) = \frac{G(b)}{N_h} \\ &= \frac{1}{N_h} \int_{\Omega} g \, d\mu \end{aligned}$$

Δηλαδή η  $\mathcal{T} = \{[x_{i-1}, x_i)\}_{i=1}^{N_h}$  τ.ώ.  $x_0 = a$  και

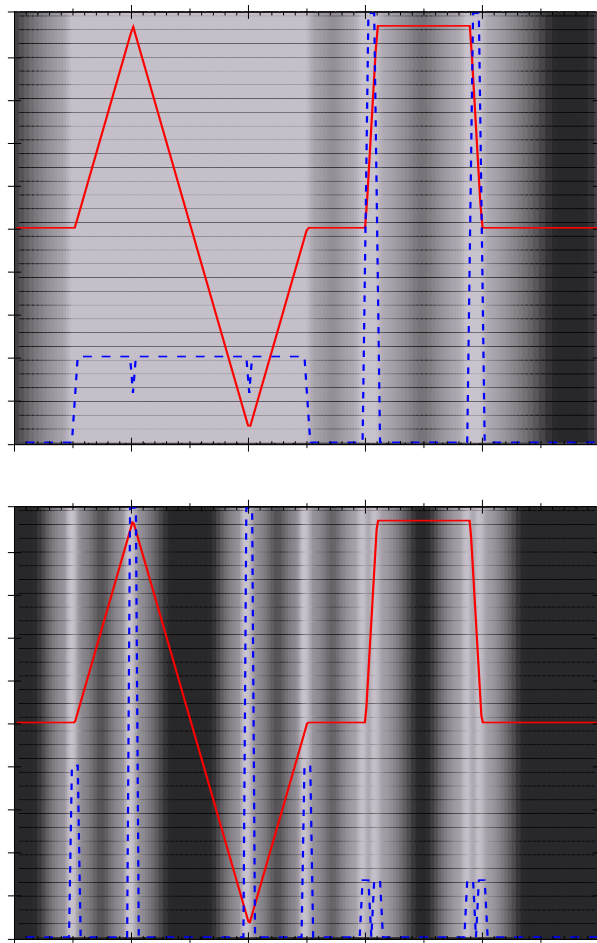
$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x) \, dx = \frac{1}{N_h} \int_a^b g(x) \, dx \quad i = 1, \dots, N_h \quad (3.2.5)$$

ανήκει στο σύνολο των διαμερίσεων του  $[a, b)$ , που ικανοποιούν την (3.2.3)



Σχήμα 3.5: Οι εκτιμήτριες συναρτήσεις  $g_1 = \text{"a posteriori"}$  (πάνω σχήμα, μπλέ καμπύλη) και  $g_2 = \text{"καμπυλότητα"}$  (κάτω σχήμα, μπλέ καμπύλη), μίας συνάρτησης ( κόκκινη καμπύλη).





Σχήμα 3.6: Το σχήμα 3.1, με φόντο, ανάλογης φωτεινότητας προς την πυκνότητα της προτεινόμενης διαμέρισης, από κάθε εκτιμήτρια  $g_i, i=1, 2$

### 3.2.3 Ανακατασκευή της λύσης

Επειδή η λύση μας δίνεται απο διανυσματικό χώρο, επιλέγουμε ως ανακατασκευάστρια συνάρτηση  $\text{Rec}$  της λύσης  $(u_h^{n-1}, v_h^{n-1})$  του  $S_h^{n-1} \times V_h^{n-1}$ , είτε την παρεμβάλουσα είτε την  $L^2$  προβολή στον νέο χώρο  $S_h^n \times V_h^n$ .

Η αναδιαμέριση εισάγει εναν εξομαλυντικό μηχανισμό που στηρίζεται στην προσέγγιση ενός στοιχείου υπόχωρου, απο κάποιον άλλο υπόχωρο. Τα σχήματα 3.7, 3.8 δείχνουν αποσπασματικά τα γραφήματα της ακολουθίας συναρτήσεων  $\{u^n\}, n = 0, 1, \dots$ , που παράγεται απο την επανάληψη  $S_{h,0} = \{ \phi \in C(\mathbb{R}) : \phi|_K \in \mathbb{P}_1(K), K \in \mathcal{T}_h^{n+1}, \phi|_{\Omega^c} \equiv 0 \}$

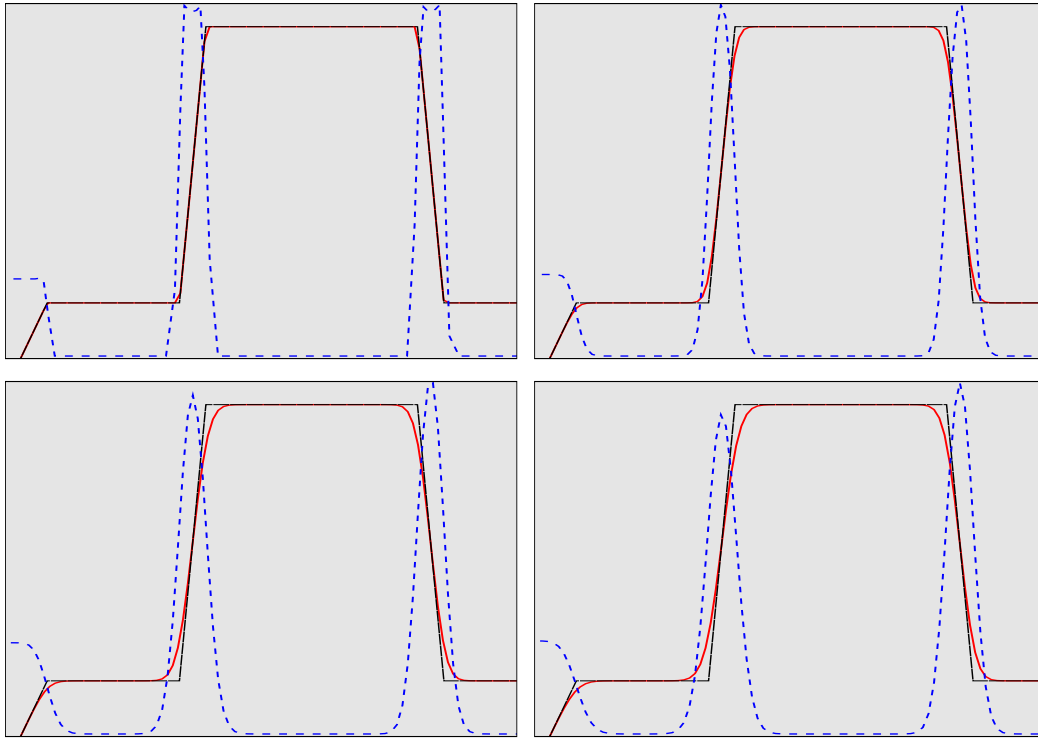
$u^0 = \text{Rec}_{S_{h,0}}(y \text{ “όπως στο σχήμα 3.1”})$  και για  $n = 0, 1, \dots$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{T}_h^{n+1} \text{ διαμέριση του } \Omega \text{ τ.ω. } \#\mathcal{T}_h^{n+1} = N_h \text{ και} \\ \forall K \in \mathcal{T}_h^{n+1} \quad \int_K g \circ u_h^n d\mu = \frac{1}{N_h} \int_{\Omega} g \circ u_h^n d\mu \\ S_{h,n+1} = \{ \phi \in C(\mathbb{R}) : \phi|_K \in \mathbb{P}_1(K), K \in \mathcal{T}_h^{n+1}, \phi|_{\Omega^c} \equiv 0 \} \\ u^{n+1} = \text{Rec}_{S_{h,n+1}}(u_h^n) \end{array} \right. \quad (3.2.6)$$

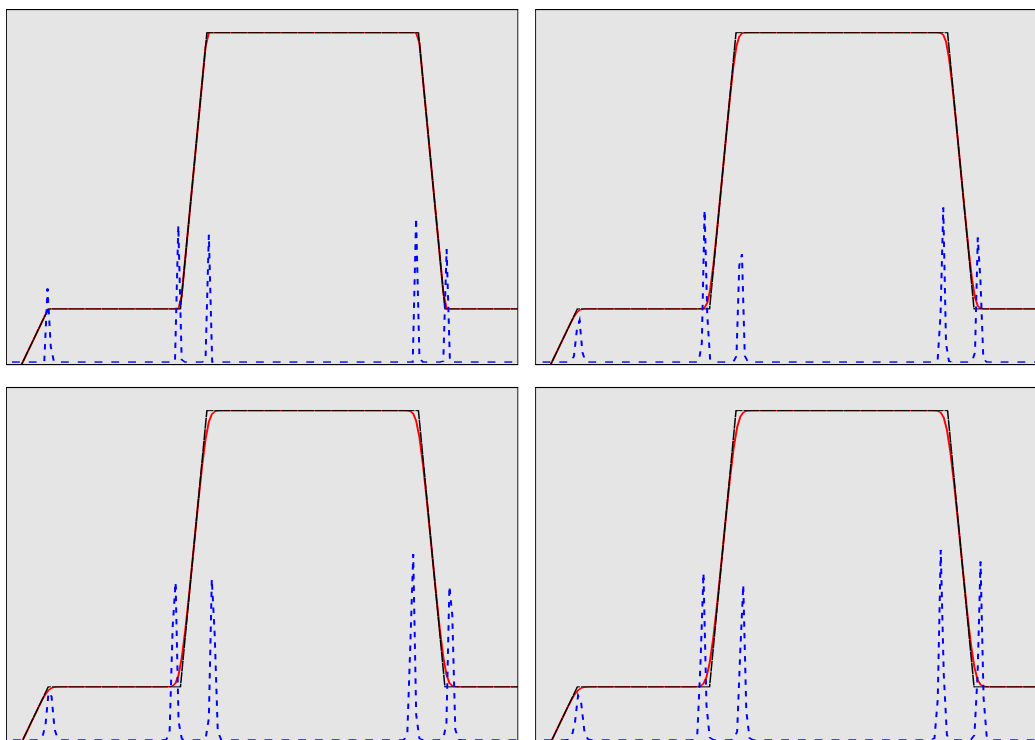
Γενικά παρατηρούμε ότι:

- κάθε βήμα της αναδιαμέρισης ομαλοποιεί τις απότομες περιοχές του προηγούμενου βήματος ( ειδικώτερα η αναδιαμέριση με ανακατασκευάστρια συνάρτηση την παρεμβάλουσα και εκτιμήτρια συνάρτηση την “*a posteriori*” επιφέρει μεγαλύτερη ομαλοποίηση απο αυτήν που χρησιμοποιεί ως εκτιμήτρια συνάρτηση την “*καμπυλότητα*”, όπως βλέπουμε απο τα σχήματα 3.7, 3.8)
- η δράση της αναδιαμέρισης είναι φθίνουσα (πρόκειται για συστολικό μηχανισμό) με όριο μιά σταθερή διαμέριση. Απο το παραπάνω παράδειγμα (αλλά και απο αυτά των προβλημάτων που λύθηκαν), φαίνεται ότι η ταχύτητα σύγκλισης προς την σταθερή οριακή διαμέριση, της αναδιαμέρισης με εκτιμήτρια την *καμπυλότητα*, είναι μεγαλύτερη απο αυτής με εκτιμήτρια την

*“a posteriori”*.



Σχήμα 3.7: Μεγέθυνση της άνω δεξιάς περιοχής, των 1, 10, 20, 40, όρων της επαναληπτικής ακολουθίας που προκύπτει με αναδιαμέριση τύπου “*a posteriori*” και αρχικό όρο την συνάρτηση του σχήματος 3.1. Διακρίνονται η αρχική συνάρτηση (μαύρη καμπύλη), το τρέχων στιγμιότυπο (κόκκινη καμπύλη) και η αντίστοιχη εκτιμήτρια συνάρτηση (μπλέ καμπύλη). Η διαφορά μεταξύ των στιγμιότυπων 30, 40 είναι πολύ μικρή (το 40 στιγμιότυπο είναι καλή προσέγγιση της οριακής-σταθερής (συνάρτησης, διαμέρισης).



Σχήμα 3.8: Μεγέθυνση της άνω δεξιάς περιοχής, των 1, 5, 10, 15, όρων της επαναλειπτικής ακολουθίας που προκύπτει με αναδιαμέριση τύπου “καμπυλότητα” και αρχικό όρο την συνάρτηση του σχήματος 3.1. Διακρίνονται η αρχική συνάρτηση ( μαύρη καμπύλη), το τρέχων στιγμιότυπο (κόκκινη καμπύλη) και η αντίστοιχη εκτιμήτρια συνάρτηση (μπλέ καμπύλη). Η διαφορά μεταξύ των στιγμιότυπων 10, 15 είναι πολύ μικρή (το 15 στιγμιότυπο είναι καλή προσέγγιση της οριακής-σταθερής (συνάρτησης, διαμέρισης).

### 3.3 Galerkin προσέγγιση της *relaxation* μορφής με αναδιαμέριση

Σύμφωνα με την προηγούμενη παράγραφο, το πλήρως διακριτό σχήμα της Galerkin ακολουθίας, επαυξημένο με τα τρία βήματα της αναδιαμέρισης, δίνεται από την παρακάτω περιγραφή.

Αν  $N_h = \#\mathcal{T}_h^n$  η πληθυστικότητα της διαμερίσης  $\mathcal{T}_h^n$  του  $\Omega$  στο  $n$  χρονικό βήμα (σταθερή ως προς  $n$ ),

$Rec_S(x)$  η παρεμβάλουσα (ή η  $L^2$  προβολή) του στοιχείου  $x$  στον χώρο  $S$  και  $\mathcal{T}_h^0$  ομοιόμορφη διαμέριση του  $\Omega$

$$S_{h,0} = \{ \phi \in C(\mathbb{R}) : \phi|_K \in \mathbb{P}_p(K), K \in \mathcal{T}_h^0, \phi|_{\Omega^c} \equiv 0 \},$$

$$V_{h,0} = \{ \psi \in C(\mathbb{R}) : \psi|_K \in \mathbb{P}_q(K), K \in \mathcal{T}_h^0, \psi|_{\Omega^c} \equiv 0 \}$$

αρχικοί χώροι πεπερασμένων στοιχείων, τότε η ακολουθία  $\{(u_h^n, v_{h,1}^n, \dots, v_{h,N}^n)\}$  της Galerkin προσέγγισης με αναδιαμέριση, στις χρονικές στιγμές  $n\kappa, n = 0, 1, \dots$ , ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$u_h^0 = Rec_{S_{h,0}}(u_0), \quad v_{h,i}^0 = Rec_{V_{h,0}}(F_i(u_0)), \quad i = 1, \dots, N \text{ και για } n = 0, 1, \dots$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{T}_h^{n+1} \text{ διαμέριση του } \Omega \text{ τ.ω. } \#\mathcal{T}_h^{n+1} = N_h \text{ και} \\ \forall K \in \mathcal{T}_h^{n+1} \quad \int_K g \circ u_h^n d\mu = \frac{1}{N_h} \int_{\Omega} g \circ u_h^n d\mu \\ S_{h,n+1} = \{ \phi \in C(\mathbb{R}) : \phi|_K \in \mathbb{P}_p(K), K \in \mathcal{T}_h^{n+1}, \phi|_{\Omega^c} \equiv 0 \} \\ V_{h,n+1} = \{ \psi \in C(\mathbb{R}) : \psi|_K \in \mathbb{P}_q(K), K \in \mathcal{T}_h^{n+1}, \psi|_{\Omega^c} \equiv 0 \} \\ \bar{u} = Rec_{S_{h,n+1}}(u_h^n), \quad \bar{v}_i = Rec_{V_{h,n+1}}(v_{h,i}^n), \quad i = 1, \dots, N \\ \left( \frac{u_h^{n+1} - \bar{u}}{\kappa}, \phi \right) - \sum_{i=1}^N (\bar{v}_i, \partial_{x_i} \phi) = 0, \quad \forall \phi \in S_{h,n+1} \\ \left( \frac{v_{h,i}^{n+1} - \bar{v}_i}{\kappa}, \psi \right) + (A_i \partial_{x_i} u_h^{n+1}, \psi) = -\frac{1}{\varepsilon} (v_{h,i}^{n+1} - F_i(u_h^{n+1}), \psi), \\ \forall \psi \in V_{h,n+1}, \quad i = 1, \dots, N \end{array} \right. \quad (3.3.1)$$

και για μονοδιάστατη χωρική μεταβλητή ( $N=1$ )

$u_h^0 = Rec_{S_{h,0}}(u_0)$ ,  $v_h^0 = Rec_{V_{h,0}}(F(u_0))$  και για  $n = 0, 1, \dots$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{T}_h^{n+1} \text{ διαμέριση του } [a, b] \text{ τ.ώ. } \#\mathcal{T}_h^{n+1} = N_h, x_0 = a \text{ και} \\ \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(u_h^n(x)) dx = \frac{1}{N_h} \int_a^b g(u_h^n(x)) dx, \quad i = 1, \dots, N_h \\ S_{h,n+1} = \{ \phi \in C(\mathbb{R}) : \phi|_K \in \mathbb{P}_p(K), K \in \mathcal{T}_h^{n+1}, \phi|_{\Omega^c} \equiv 0 \} \\ V_{h,n+1} = \{ \psi \in C(\mathbb{R}) : \psi|_K \in \mathbb{P}_q(K), K \in \mathcal{T}_h^{n+1}, \psi|_{\Omega^c} \equiv 0 \} \\ \bar{u} = Rec_{S_{h,n+1}}(u_h^n), \quad \bar{v}_i = Rec_{V_{h,n+1}}(v_h^n), \quad i = 1, \dots, N \\ (\frac{u_h^{n+1} - \bar{u}}{\kappa}, \phi) - (\bar{v}, \partial_x \phi) = 0, \quad \forall \phi \in S_{h,n+1} \\ (\frac{v_h^{n+1} - \bar{v}}{\kappa}, \psi) + (A \partial_x u_h^{n+1}, \psi) = -\frac{1}{\varepsilon} (v_h^{n+1} - F(u_h^{n+1}), \psi), \\ \forall \psi \in V_{h,n+1} \end{array} \right. \quad (3.3.2)$$

**Παρατήρηση :** Η μετρητική ακολουθία της συμπεριφοράς της αναδιαμέρισης (παρατήρηση προηγούμενης υποπαραγράφου), είναι προϊόν επίλυσης του προβλήματος Νόμων Διατήρησης  $\partial_t u = 0$ ,  $u(x, 0) = u_0(x)$  μέσω του (3.3.2), όπως μπορεί να διαπιστώσει κανείς αντιπαραθέτοντας τους ορισμούς (3.2.6), (3.3.2) των αντιστοίχων ακολουθιών.

Απο τα αποτελέσματα της εφαρμογής των μεθόδων (2.5.2), (3.3.2), (σχήματα 3.5, 3.6, 3.7) και λαμβάνοντας υπόψιν τον εξομαλυντικό μηχανισμό διάχυσης-διασποράς του σχήματος (2.5.2), καθώς και αυτόν που κρύβεται στο βήμα της αναδιαμέρισης, συμπεραίνουμε ότι:

- Η διασπορά που εισάγει η διακριτοποίηση πεπερασμένων στοιχείων χωρίς την κατάλληλη αναδιαμέριση, αθροίζει στην προσεγγιστική λύση μιιά ταλάντωση, με πλάτος και συχνότητα που εξαρτώνται απο τις παραμέτρους  $\varepsilon$  και ιδιοταχύτητες ( πρόκειται για τις τετραγωνικές ρίζες των ιδιοτιμών του πίνακα “ταχύτητων”  $A$ , των μεθόδων αυτών), αντίστοιχα.

Μια ικανή συνθήκη στις ιδιοταχύτητες ( τα στοιχεία  $A_{ii}$  άν ο πίνακας  $A$  είναι διαγώνιος) ώστε το αντίστοιχο relaxation σχήμα, να είναι ευσταθές

(δες προηγούμενο κεφάλαιο), είναι:

$$A_{ii} > C_i + \max_{x \in \Omega} \text{eigenvalue}_i (F'(u(x)))^2, i = 1, 2, \dots, M. \quad (3.3.3)$$

Μιά τέτοια συνθήκη είναι πολύ βαριά δεδομένου ότι αντιστοιχεί σε υψηλές τιμές αυτών των παραμέτρων και άρα σε υψίσυχνης εισαγόμενης ταλάντωσης. Πρακτικά προσδιορίζονται με πλήθος δοκιμών και έτσι ώστε το παραγόμενο σχήμα να αποδίδει φραγμένη λύση (ο αντίστοιχος αλγόριθμος να ολοκληρώνει τα βήματα επίλυσης), με όσο το δυνατόν μικρότερες τιμές αυτών των παραμέτρων.

Επιπλέον η επιλογή της τιμής του  $\varepsilon$  έρχεται να επιδεινώσει την κατάσταση. Αφενός το  $\varepsilon$  πρέπει να είναι όσο το δυνατόν μικρότερο, ώστε το σχήμα να περιγράφει μια καλή προσέγγιση της λύσης των Νόμων Διατήρησης. Αφεταίρου όμως, η εισαγόμενη διάχυση πρέπει να είναι αρκετή (και άρα όχι πολύ μικρό  $\varepsilon$ ), ώστε το πλάτος των υψίσυχνων ταλαντώσεων (είτε τής πραγματικής λύσης είτε των εισαγόμενων λόγω διασποράς), να είναι μικρό. Επιπλέον πρέπει να ληφθεί υπόψιν ότι, η περιοχή ευστάθειας αυτών των σχημάτων, περιγράφεται από μία σχέση της μορφής

$$\kappa < C_1 \cdot \varepsilon, \quad \kappa \text{ το χρονικό βήμα της διαμέρισης,} \quad (3.3.4)$$

οπότε μικρό  $\varepsilon$  οδηγεί αναγκαστικά σε αύξηση των χρονικών βημάτων.

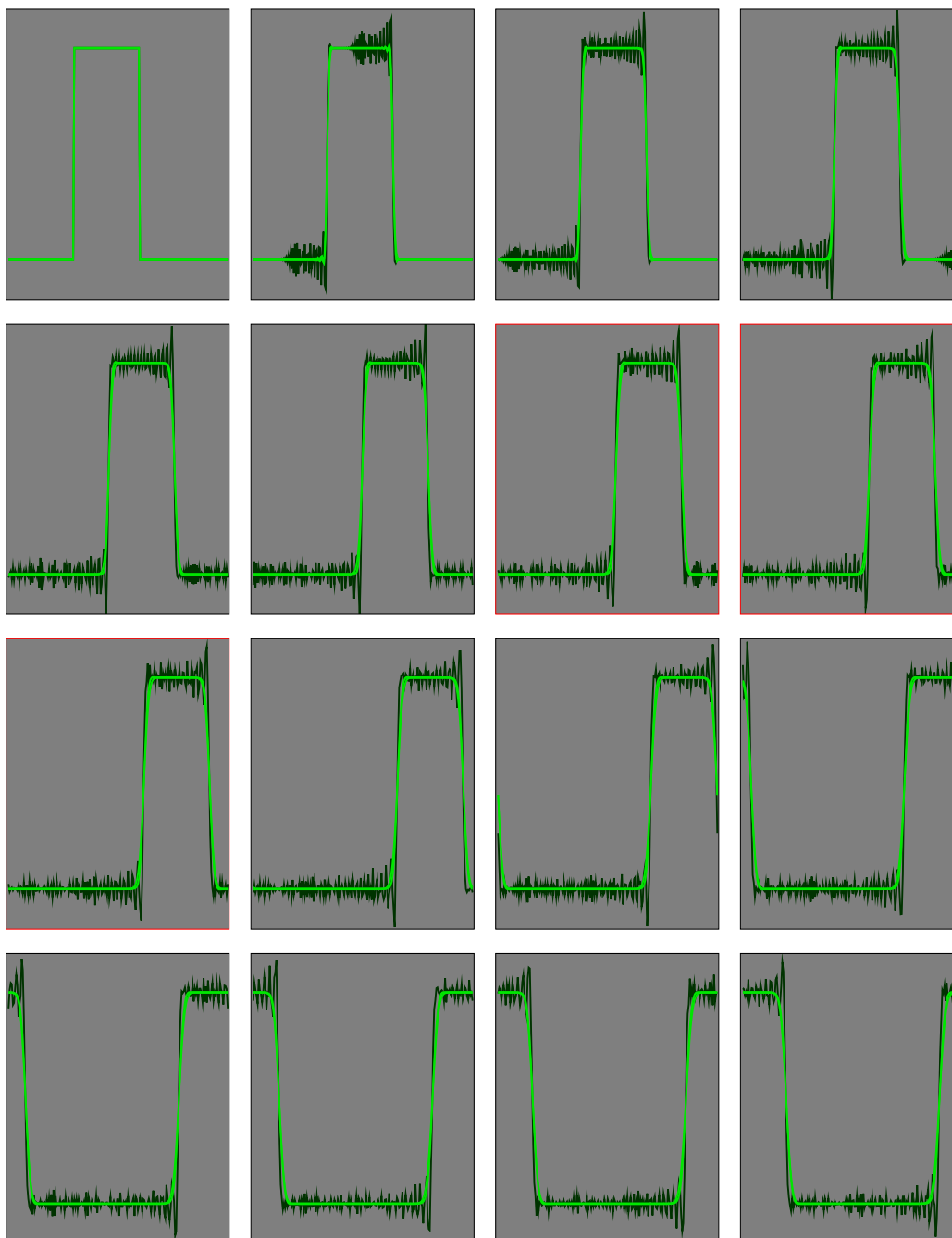
- Στην περίπτωση των relaxation σχημάτων με αναδιαμέριση, εισάγεται επιπλέον η παράμετρος *power*. Πρόκειται για την δύναμη στην οποία υψώνεται η εκτιμητρία συνάρτηση και που ουσιαστικά καθορίζει τον βαθμό που θα διαφέρει η νέα διαμέριση από την ομοιόμορφη. Η επιλογή αυτής της παραμέτρου γίνεται εύκολα, δεδομένου ότι επιλέγεται από το  $[0, 1]$  ανεξαρτήτως προβλήματος (πρακτικά από το  $(0, 0.2)$ ), αλλά άς σημειώσουμε ότι στα περισσότερα προβλήματα δεν αλλάχτηκε από την τιμή



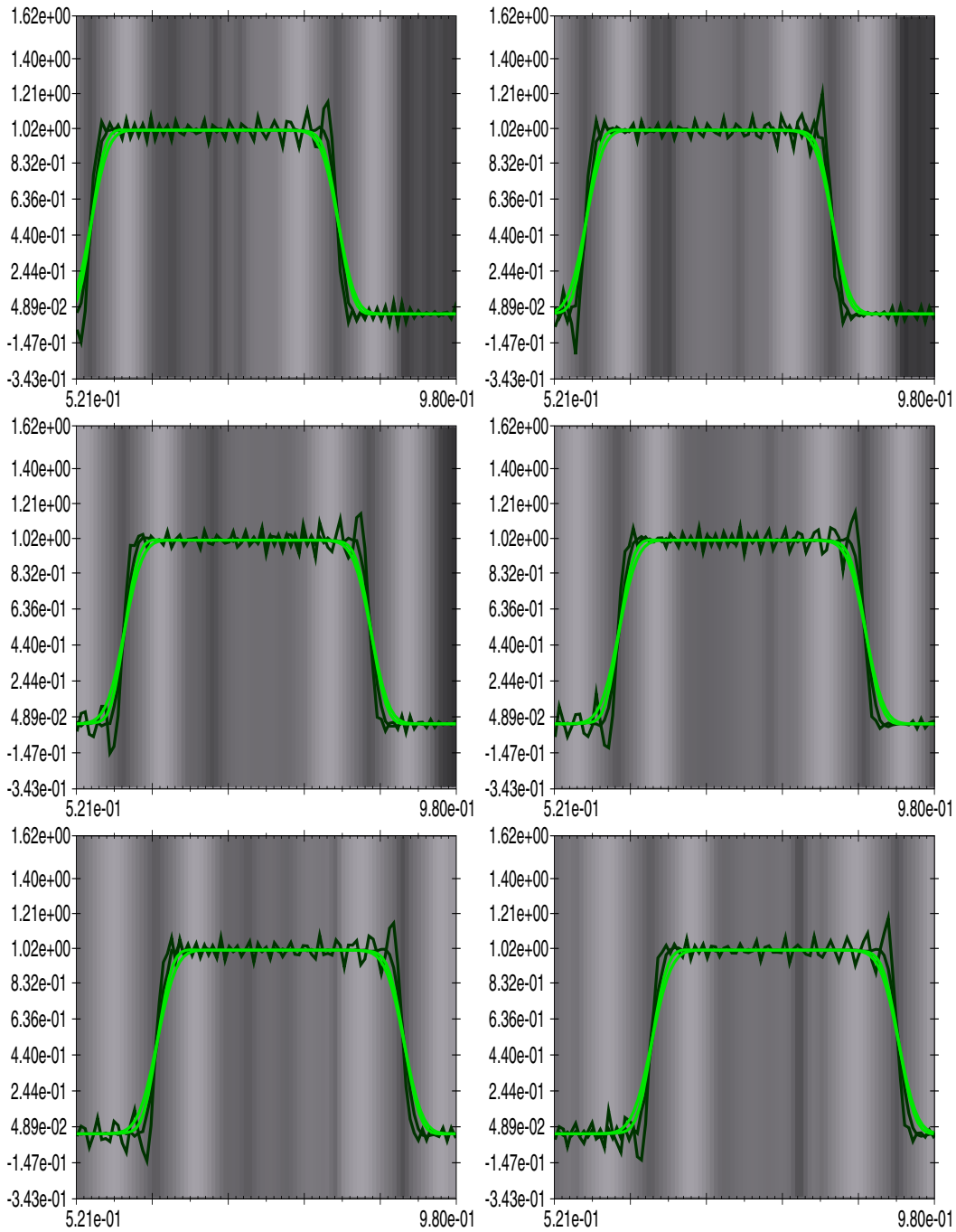
0.035 για αναδιαμέριση τύπου καμπυλότητας). Επιπλέον, λόγω του εξομαλυντικού μηχανισμού που κρύβεται στην αναδιαμέριση ( παρατήρηση προηγούμενης υποπαραγράφου), οι λύσεις που δίνονται απο τα σχήματα αυτά είναι απαλλαγμένες απο τις ταλαντώσεις που εισάγει η διασπορά. Πιο συγκεκριμένα, σε κάθε παράδειγμα, για το ίδιο σύνολο παραμέτρων  $\varepsilon$ , ιδιοταχυτήτων, και παράμετρο *power* της τάξης  $10^{-3}$  έως  $10^{-2}$ , το relaxation σχήμα με αναδιαμέριση (3.3.2) έδωσε πολύ ομαλές λύσεις και μέσα στο περίγραμμα των ταλαντούμενων λύσεων που έδωσε το αντίστοιχο relaxation σχήμα χωρίς αναδιαμέριση (2.5.2).

- Αναφορικά με την περιοχή ευστάθειας των δύο σχημάτων πρέπει να πούμε ότι υπόκεινται στους ίδιους περιορισμούς (3.3.3), (3.3.4).

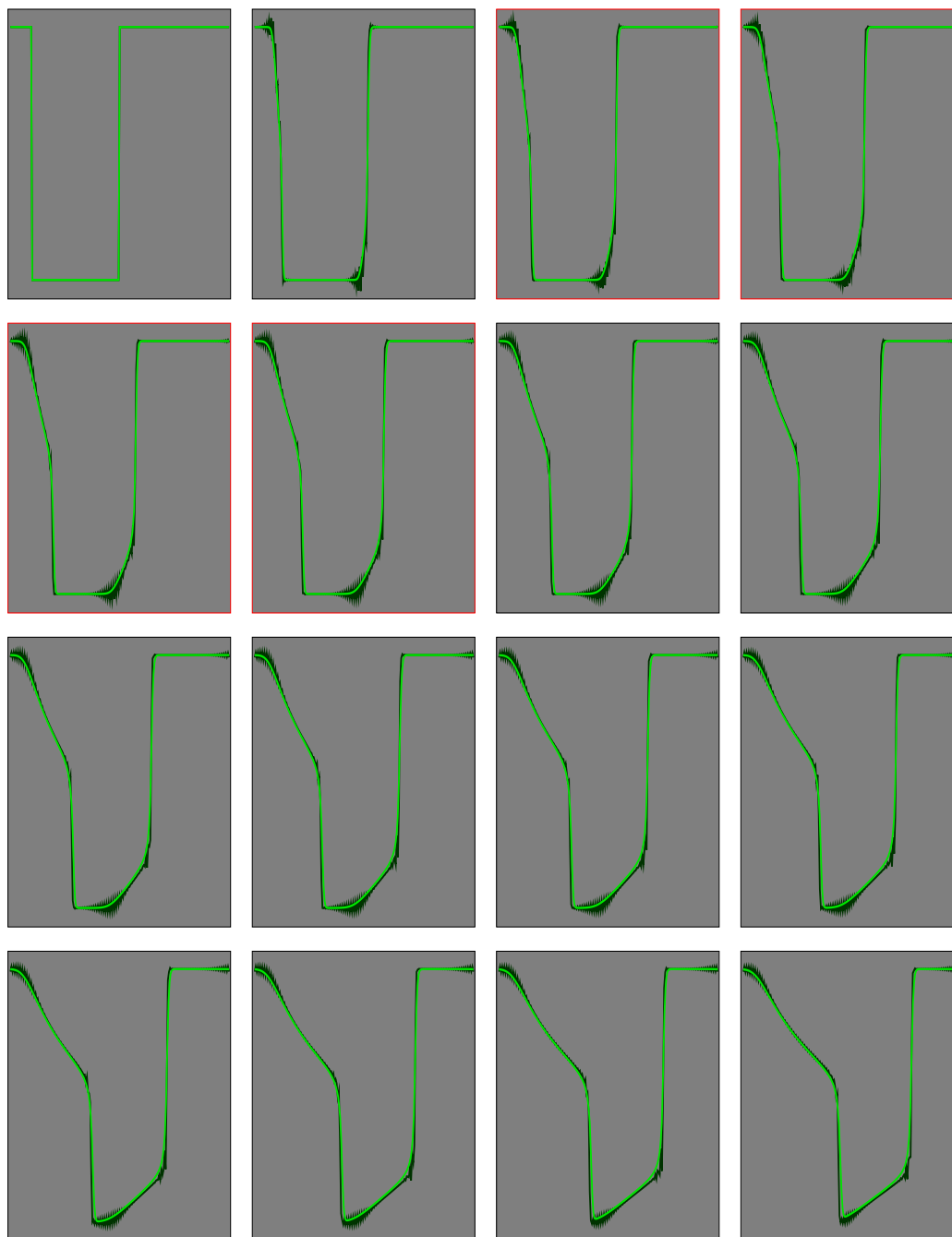
Συνολικά μπορούμε να πούμε για τα relaxation σχήματα σταθερής διαμέρισης, ότι: Η επιλογή των θεμελιωδών παραμέτρων  $\varepsilon$ , ιδιοταχυτήτων έτσι ώστε το relaxation σχήμα να αποδίδει λύση με, μικρού πλάτους ταλάντωση στις ομαλές περιοχές και ταυτόχρονα οξείας προσέγγιστικότητας στις περιοχές ασυνεχειών, είναι εξαιρετικά δύσκολη και εξειδικευμένη για κάθε πρόβλημα, εργασία. Εισάγοντας το βήμα της αναδιαμέρισης, οδηγούμαστε σε ένα επιτυτικό σχήμα που αφενός αποδίδει υψηλής ευκρίνειας λύσεις, ακόμα και για όχι βέλτιστη επιλογή παραμέτρων, και αφεταίρου δεν περιορίζει την περιοχή ευστάθειας και την τάξη σύγκλισης του αρχικού σχήματος.



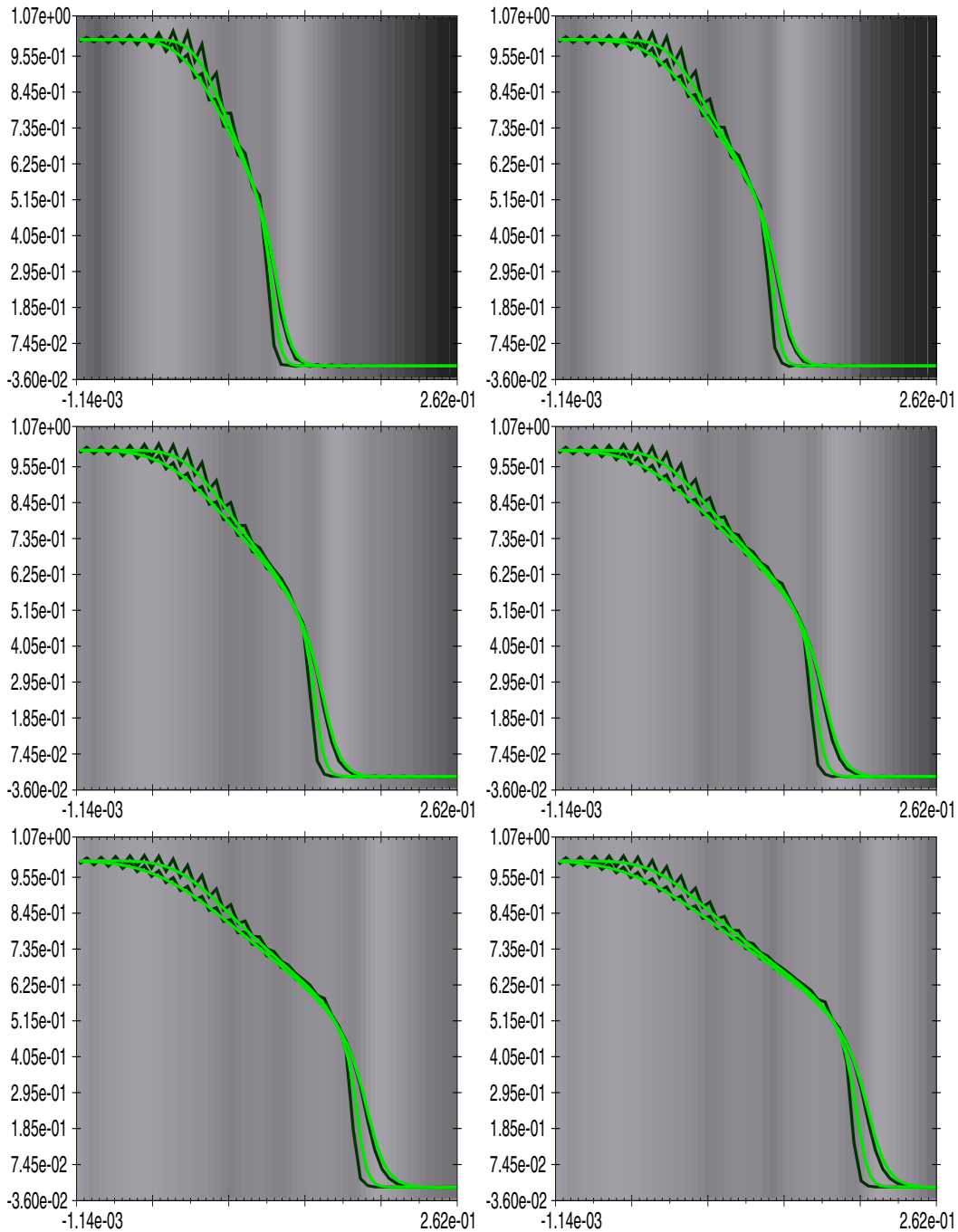
Σχήμα 3.9: **Μεταφοράς:** Αντιπαράθεση 16 στιγμιότυπων, των λύσεων απο τις μεθόδους relaxation ( $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-5}$ ,  $A_{1,1} = 4.5$ ,  $N_{\kappa} = 19 \cdot 200$ ) (σκούρα πράσινη καμπύλη), relaxation με αναδιαμέριση για το ίδιο σύνολο παραμέτρων και  $power = 4.3 \cdot 10^{-3}$  (ανοικτή πράσινη καμπύλη).



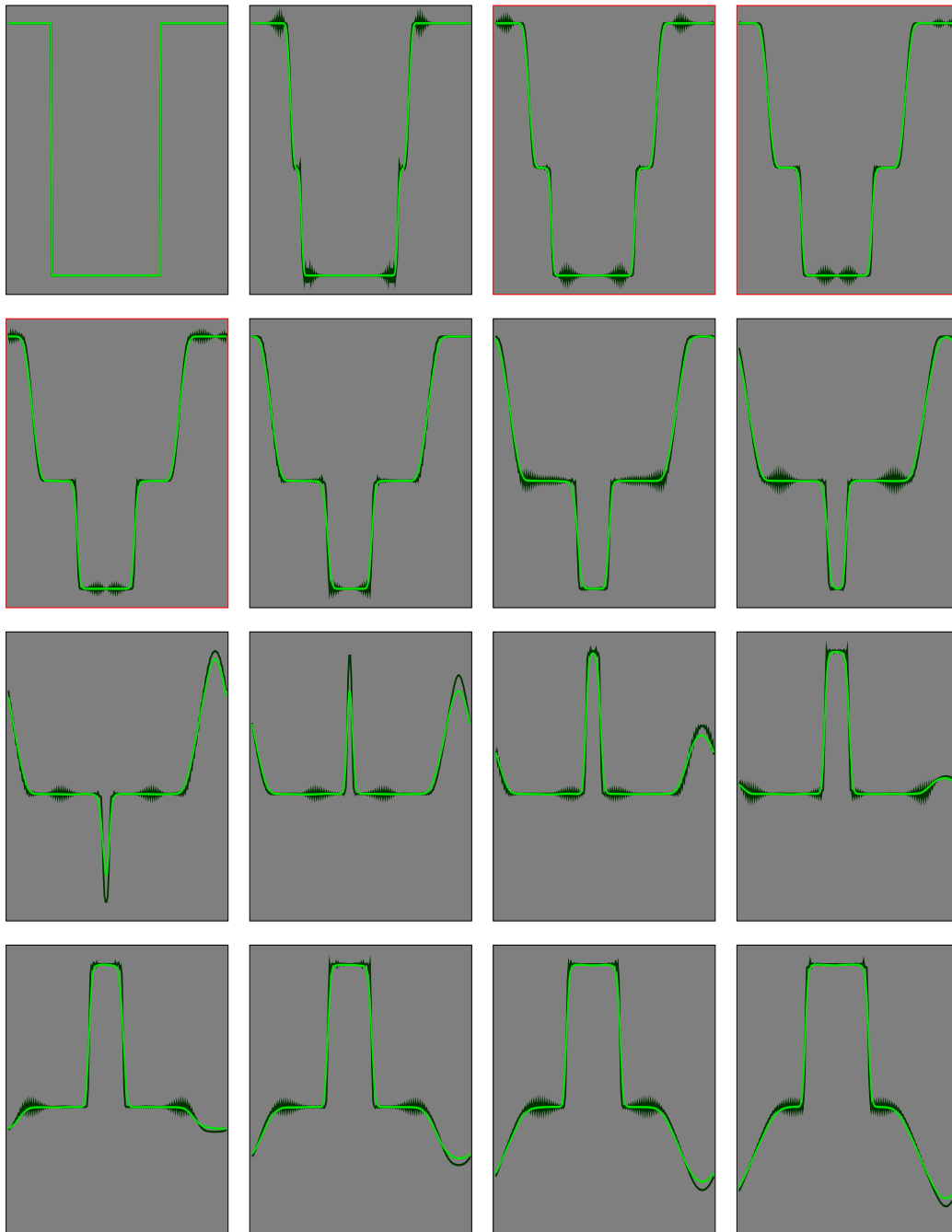
Σχήμα 3.10: **Μεταφοράς:** Μεγέθυνση 6 στιγμιότυπων στο εσωτερικό χρονικό διάστημα των κόκκινων τετραγώνων του προηγούμενου σχήματος. Διακρίνονται οι relaxation λύσεις ( $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-4}$ ,  $A_{1,1} = 4.5$ ,  $N_{\kappa} = 2 \cdot 200$ ), ( $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-5}$ ,  $A_{1,1} = 4.5$ ,  $N_{\kappa} = 19 \cdot 200$ ) (σκούρα πράσινες καμπύλες) και οι relaxation με αναδιαμέριση, λύσεις για τις ίδιες παραμέτρους αντίστοιχα (ανοικτές πράσινες καμπύλες). Οι πιο οξείες λύσεις αντιστοιχούν σε μικρότερο  $\varepsilon$ . Η φωτεινότητα του φόντου ακολουθεί την πυκνότητα της διαμέρισης, της πιο οξείας προσεγγιστικής λύσης με αναδιαμέριση.



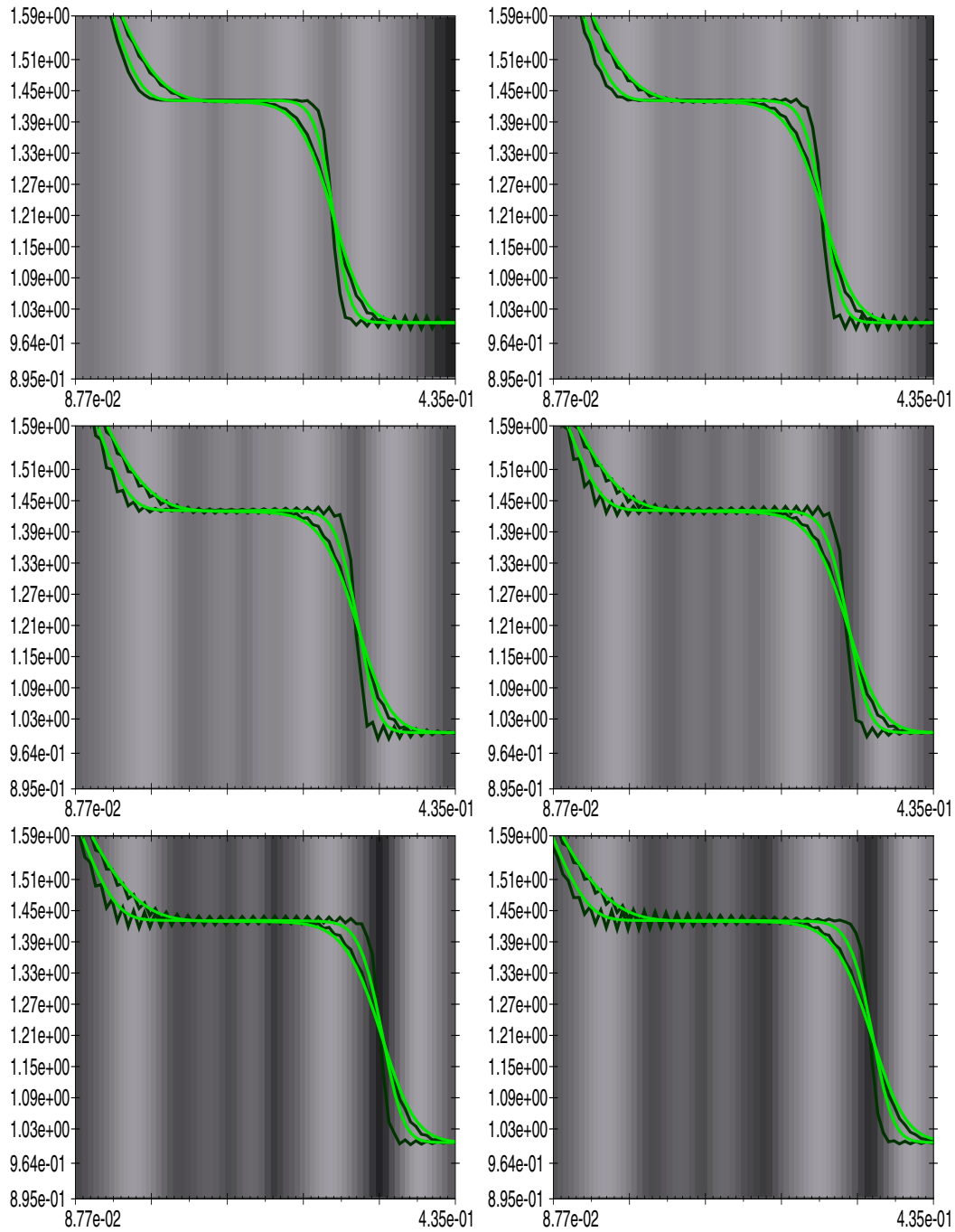
Σχήμα 3.11: **Buckley Leverett**: Αντιπαράθεση 16 στιγμιότυπων, των λύσεων απο τις μεθόδους relaxation ( $\varepsilon = 2.5 \cdot 10^{-5}$ ,  $A_{1,1} = 100$ ,  $N_{\kappa} = 17 \cdot 200$ ) (σκούρα πράσινη καμπύλη), relaxation με αναδιαμέριση για το ίδιο σύνολο παραμέτρων και  $power = 3.5 \cdot 10^{-2}$  (ανοικτή πράσινη καμπύλη).



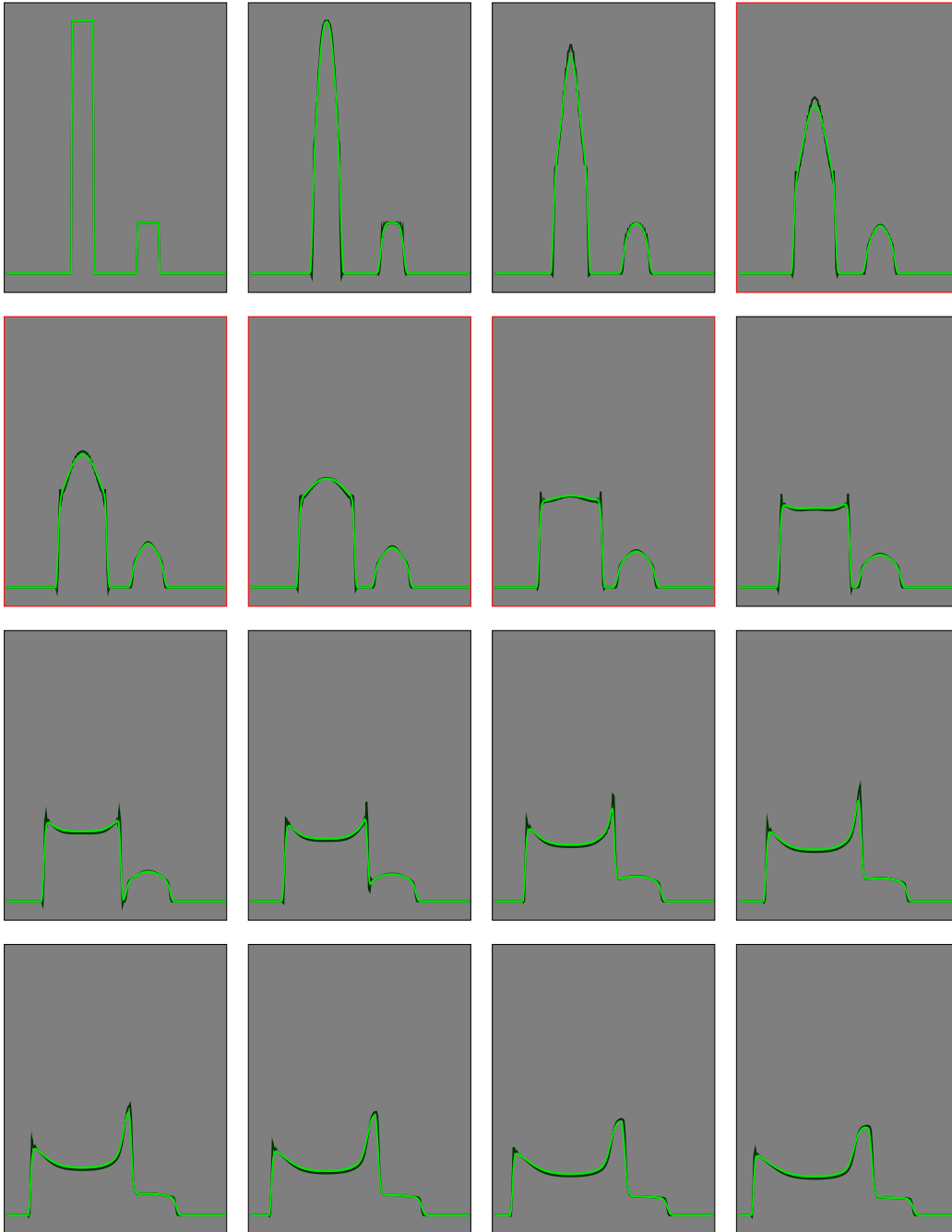
Σχήμα 3.12: **Buckley Leverett**: Μεγέθυνση 6 στιγμιότυπων στο εσωτερικό χρονικό διάστημα των κόκκινων τετραγώνων του προηγούμενου σχήματος. Διακρίνονται οι relaxation λύσεις ( $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-4}$ ,  $A_{1,1} = 20$ ,  $N_\kappa = 2 \cdot 200$ ), ( $\varepsilon = 2.5 \cdot 10^{-5}$ ,  $A_{1,1} = 100$ ,  $N_\kappa = 17 \cdot 200$ ) (σκούρα πράσινες καμπύλες) και οι relaxation με αναδιαμέριση, λύσεις για τις ίδιες παραμέτρους αντίστοιχα (ανοιχτές πράσινες καμπύλες). Οι πιο οξείες λύσεις αντιστοιχούν σε μικρότερο  $\varepsilon$ . Η φωτεινότητα του φόντου ακολουθεί την πυκνότητα της διαμέρισης, της πιο οξείας προσεγγιστικής λύσης με αναδιαμέριση.



Σχήμα 3.13: Πρώτη συνιστώσα **Isentropic flow**: Αντιπαράθεση 16 στιγμιότυπων, των λύσεων απο τις μεθόδους relaxation ( $\varepsilon = 2.5 \cdot 10^{-5}$ ,  $A_{1,1} = 20$ ,  $A_{2,2} = 40$ ,  $N_{\kappa} = 20 \cdot 200$ ) (σκούρα πράσινη καμπύλη), relaxation με αναδι-αμέριση για το ίδιο σύνολο παραμέτρων και  $power = 3.5 \cdot 10^{-2}$  (ανοικτή πράσινη καμπύλη).

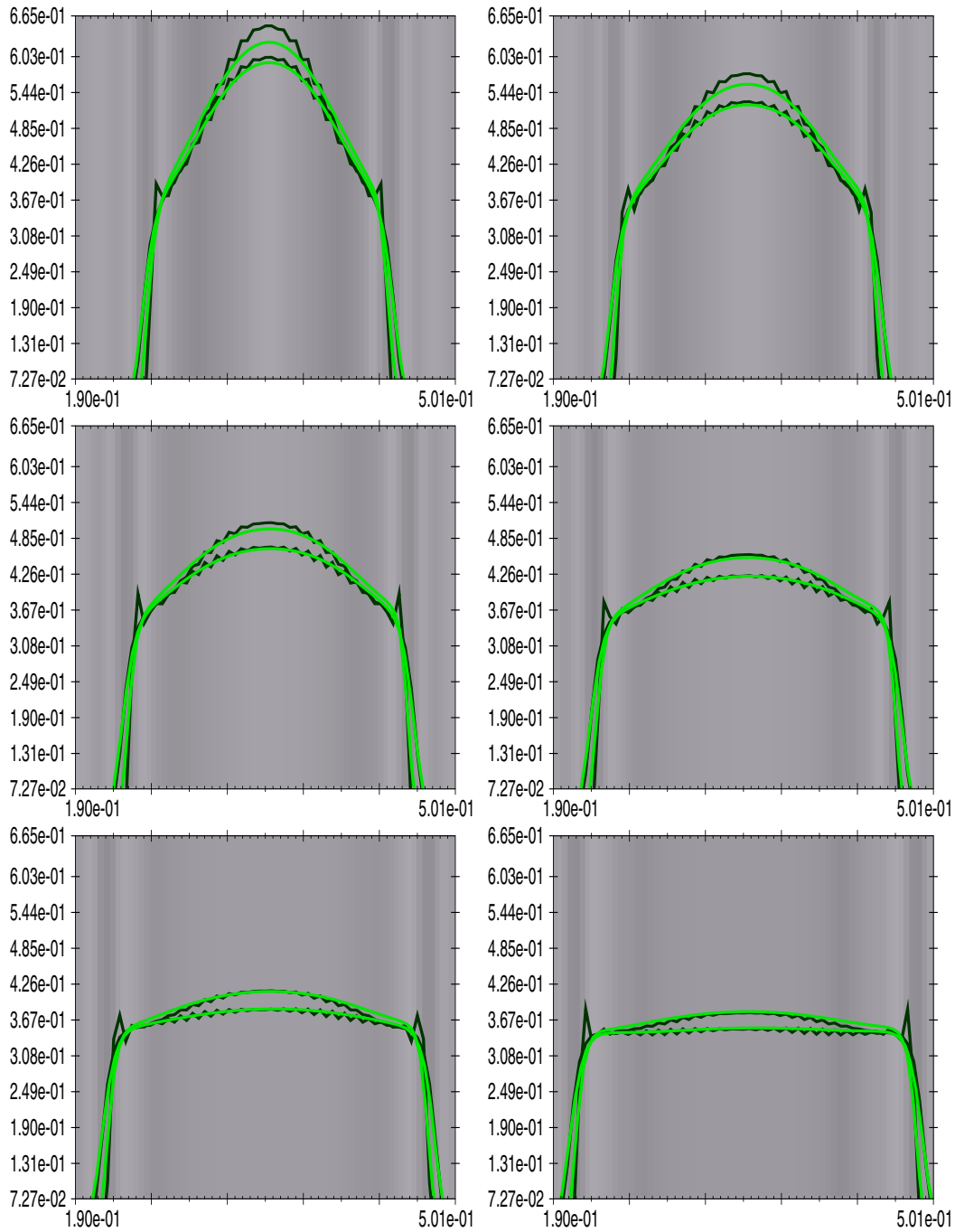


Σχήμα 3.14: Πρώτη συνιστώσα Isentropic flow: Μεγέθυνση 6 στιγμιότυπων στο εσωτερικό χρονικό διάστημα των κόκκινων τετραγώνων του προηγούμενου σχήματος. Διακρίνονται οι relaxation λύσεις ( $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-4}$ ,  $A_{1,1} = 8$ ,  $A_{2,2} = 14$ ,  $N_\kappa = 2 \cdot 200$ ), ( $\varepsilon = 2.5 \cdot 10^{-5}$ ,  $A_{1,1} = 20$ ,  $A_{2,2} = 40$ ,  $N_\kappa = 20 \cdot 200$ ) (σκούρα πράσινες καμπύλες) και οι relaxation με αναδιαμέριση, λύσεις για τις ίδιες παραμέτρους αντίστοιχα (ανοικτές πράσινες καμπύλες). Οι πιό οξείες λύσεις αντιστοιχούν σε μικρότερο  $\varepsilon$ . Η φωτεινότητα του φόντου ακολουθεί την πυκνότητα της διαμέρισης, της πιό οξείας προσεγγιστικής λύσης με αναδιαμέριση.



Σχήμα 3.15: Πρώτη συνιστώσα Shallow Water: Αντιπαράθεση 16 στιγμιότυπων, των λύσεων απο τις μεθόδους relaxation ( $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-5}$ ,  $A_{1,1} = 4$ ,  $A_{2,2} = 90$ ,  $N_\kappa = 19 \cdot 200$ ) (σκούρα πράσινη καμπύλη), relaxation με αναδι-αμέριση για το ίδιο σύνολο παραμέτρων και  $power = 3.5 \cdot 10^{-2}$  (ανοιχτή πράσινη καμπύλη).





Σχήμα 3.16: **Πρώτη συνιστώσα Shallow Water:** Μεγέθυνση 6 στιγμιότυπων στο εσωτερικό χρονικό διάστημα των κόκκινων τετραγώνων του προηγούμενου σχήματος. Διακρίνονται οι relaxation λύσεις ( $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-4}$ ,  $A_{1,1} = 6$ ,  $A_{2,2} = 6$ ,  $N_\kappa = 3 \cdot 200$ ), ( $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-5}$ ,  $A_{1,1} = 4$ ,  $A_{2,2} = 90$ ,  $N_\kappa = 19 \cdot 200$ ) (σκούρα πράσινες καμπύλες) και οι relaxation με αναδιαμέριση, λύσεις για τις ίδιες παραμέτρους αντίστοιχα (ανοικτές πράσινες καμπύλες). Οι πιο οξείες λύσεις αντιστοιχούν σε μικρότερο  $\varepsilon$ . Η φωτεινότητα του φόντου ακολουθεί την πυκνότητα της διαμέρισης, της πιο οξείας προσεγγιστικής λύσης με αναδιαμέριση.

## 3.4 Μεταγωγή

### 3.4.1 Διακριτοποίηση διακοπτόμενα χαλαρωτικής μορφής Νόμων Διατήρησης (switched relaxation)

Σε μεγάλο αριθμό εφαρμογής της relaxation μορφής (με ή χωρίς αναδιαμέριση) σε προβλήματα, παρουσιάστηκε το φαινόμενο της “έκρηξης” της λύσης (δηλαδή ο αλγόριθμος σταμάτησε πριν ολοκληρώσει τα ζητούμενα χρονικά βήματα) σε κάποια χρονική στιγμή, ενώ την αμέσως προηγούμενη η λύση ήταν πολύ ομαλή. Αναζητώντας την αιτία αυτού του φαινομένου, οδηγηθήκαμε στο γεγονός ότι κάποιες από τις μεταβλητές  $v_1, \dots, v_N$ , που εισάγει η μορφή relaxation (και που ουσιαστικά δεν μας ενδιαφέρουν τελικά), είχαν πάρει πολύ μεγάλες τιμές. Λαμβάνοντας υπόψιν ότι, τόσο την χρονική στιγμή 0 όσο και για την οριακή λύση (για  $\varepsilon = 0$ ), οι μεταβλητές αυτές παίρνουν τις τιμές  $v_i = F_i(u)$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ , κρίθηκε σκόπιμο ο αλγόριθμος σε κάθε χρονικό βήμα (και όχι μόνο στο αρχικό), να ξεκινάει θέτοντας αυτές τις μεταβλητές σε αυτές τις τιμές, δηλαδή  $v_i^n = F_i(u^n)$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ ,  $n = 0, 1, \dots$ .

Απο μαθηματική σκοπιά, κάτι τέτοιο ισοδυναμεί με το γεγονός ότι, προσπαθούμε να βρούμε την ασθενή λύση του προβλήματος Νόμων Διατήρησης, χρησιμοποιώντας μια οικογένεια προσεγγίσεων relaxation  $\{u^{\varepsilon_M}\}$  με παράμετρο  $\varepsilon_M = \varepsilon_M(t)$ , συνάρτηση του χρόνου και συγκεκριμένα,  $\varepsilon_M(t) = 0$  αν  $t = n \cdot \kappa$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , αλλιώς  $\varepsilon_M(t) = \varepsilon$  σταθερά.

Ακριβώς λόγω αυτής της μεταπήδησης σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές, από την μία μορφή στην άλλη, ονομάζουμε αυτήν την οικογένεια “Μεταγωγική” και το αντίστοιχο σχήμα “Μεταγωγικό (ή διακοπτόμενα) χαλαρωτικό (switched relaxation)”.

Το αν η Μεταγωγική οικογένεια  $\{u^{\varepsilon_M}\}$  συγκλίνει ασθενώς σε λύση Νόμων Διατήρησης είναι ένα ενδιαφέρον μαθηματικό ερώτημα για μελλοντική διερεύνηση,

γεγονός είναι ότι το swithed relaxation σχήμα έχει πολύ ευσταθή συμπεριφορά, με την έννοια ότι ολοκληρώνει πάντα τα χρονικά βήματα επίλυσης, υπο την προϋπόθεση να ικανοποιείται η  $CFL$  συνθήκη και όχι μιά βαριά σχέση του τύπου (3.3.4), κάτι που με την σειρά του σημαίνει ότι αυξάνει την τάξη σύγκλισης. Το σχήμα που προκύπτει περιγράφεται στην συνέχεια.

Εστω  $\mathcal{T}_h$  ομοιόμορφη διαμέριση του  $\Omega$ , πληθυκότητας  $N_h = \#\mathcal{T}_h$ ,  $S_h = \{ \phi \in C(\mathbb{R}) : \phi|_K \in \mathbb{P}_p(K), K \in \mathcal{T}_h, \phi|_{\Omega^c} \equiv 0 \}$ , χώρος πεπερασμένων στοιχείων, τότε η ακολουθία  $\{(u_h^n, v_{h,1}^n, \dots, v_{h,N}^n)\}$  της Galerkin προσέγγισης με μεταγωγή, στις χρονικές στιγμές  $n\kappa, n = 0, 1, \dots$ , ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$u_h^0 = u_0 \text{ και για } n = 0, 1, \dots$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{v}_i = F_i(u_h^n), \quad i = 1, \dots, N \\ \left( \frac{u_h^{n+1} - \bar{v}}{\kappa}, \phi \right) - \sum_{i=1}^N (\bar{v}_i, \partial_{x_i} \phi) = 0, \quad \forall \phi \in S_{h,n+1} \\ \left( \frac{v_{h,i}^{n+1} - \bar{v}_i}{\kappa}, \psi \right) + (A_i \partial_{x_i} u_h^{n+1}, \psi) = -\frac{1}{\varepsilon} (v_{h,i}^{n+1} - F_i(u_h^{n+1}), \psi), \\ \quad \forall \psi \in V_{h,n+1}, \quad i = 1, \dots, N \end{array} \right. \quad (3.4.1)$$

και για μονοδιάστατη χωρική μεταβλητή ( $N=1$ )

$$u_h^0 = u_0 \text{ και για } n = 0, 1, \dots$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{v} = F(u_h^n) \\ \left( \frac{u_h^{n+1} - \bar{v}}{\kappa}, \phi \right) - (\bar{v}, \partial_x \phi) = 0, \quad \forall \phi \in S_{h,n+1} \\ \left( \frac{v_h^{n+1} - \bar{v}}{\kappa}, \psi \right) + (A \partial_x u_h^{n+1}, \psi) = -\frac{1}{\varepsilon} (v_h^{n+1} - F(u_h^{n+1}), \psi), \\ \quad \forall \psi \in V_{h,n+1} \end{array} \right. \quad (3.4.2)$$

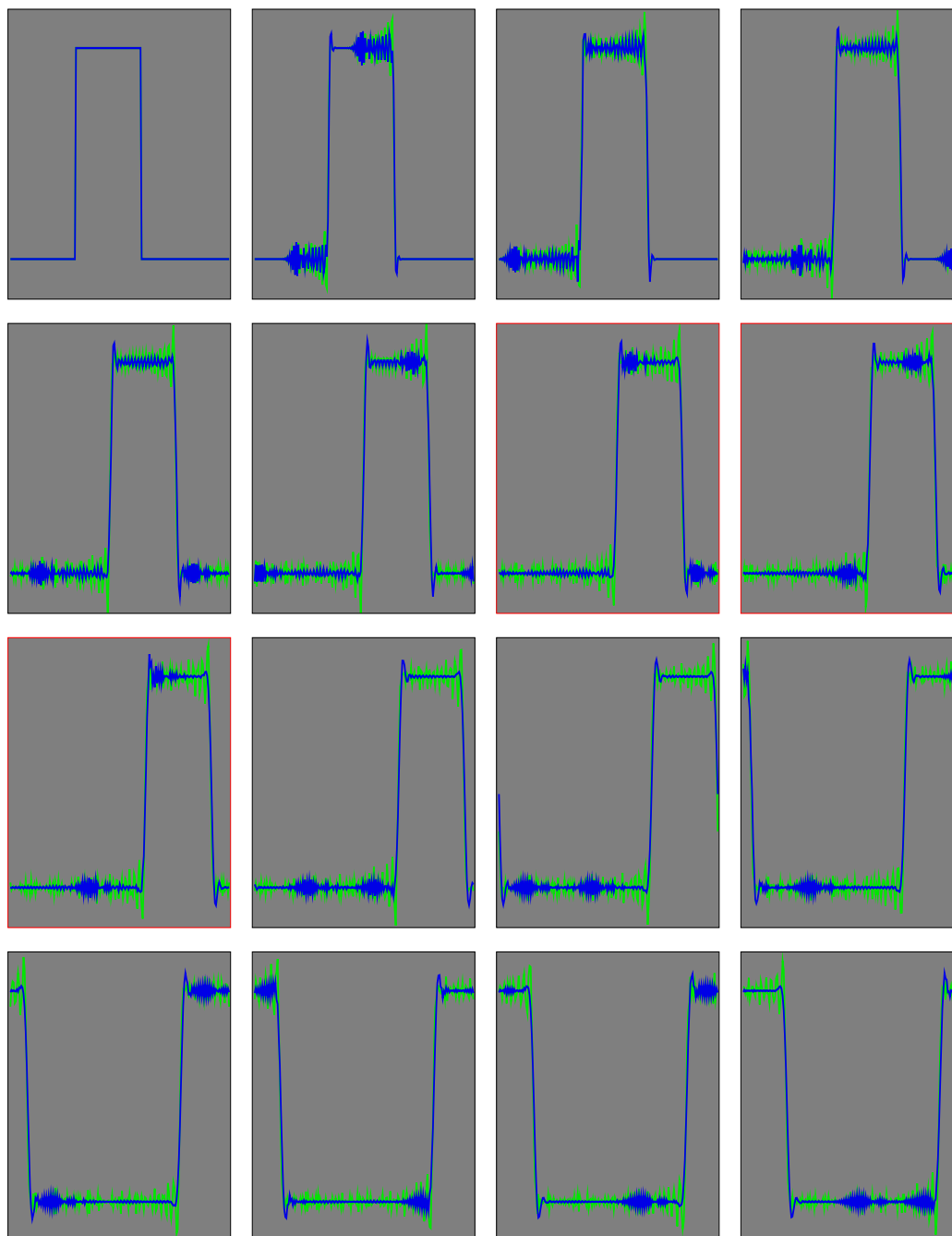
**Παρατήρηση:** Δεδομένου ότι στην πρώτη εξίσωση των σχημάτων αυτών, χρησιμοποιούμε την  $\bar{v}$  και όχι την  $v_h^{n+1}$ , εκ πρώτης όψης φαίνεται περιττή η δεύτερη εξίσωση (μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε κατευθείαν την  $F(u_h^n)$  στην πρώτη εξίσωση και να παραλείψουμε τελειώς την δεύτερη). Αυτό αληθεύει, αν

χρησιμοποιούμε μέθοδο ολοκλήρωσης στον χρόνο που χρησιμοποιεί την λύση μόνο πάνω στους χρονικούς κόμβους ( τύπου *euler*, πολυβηματικές ). Αν όμως χρησιμοποιούμε κάποια μέθοδο τύπου RK (οπότε προσεγγίζεται ουσιαστικά η λύση και σε ενδιάμεσα χρονικά βήματα προκειμένου να παραχθεί η τελική ολοκλήρωση), τότε προφανώς η παραπάνω απλοποίηση δεν είναι επιτρεπτή. Ας θυμηθούμε ότι ουσιαστικά προσεγγίζουμε την μεταγωγική relaxation οικογένεια, η οποία πάνω στους χρονικούς κόμβους ικανοποιεί κατευθείαν την εξίσωση Νόμων Διατήρησης, αλλά στο εσωτερικό τους ικανοποιεί την relaxation μορφή τους.

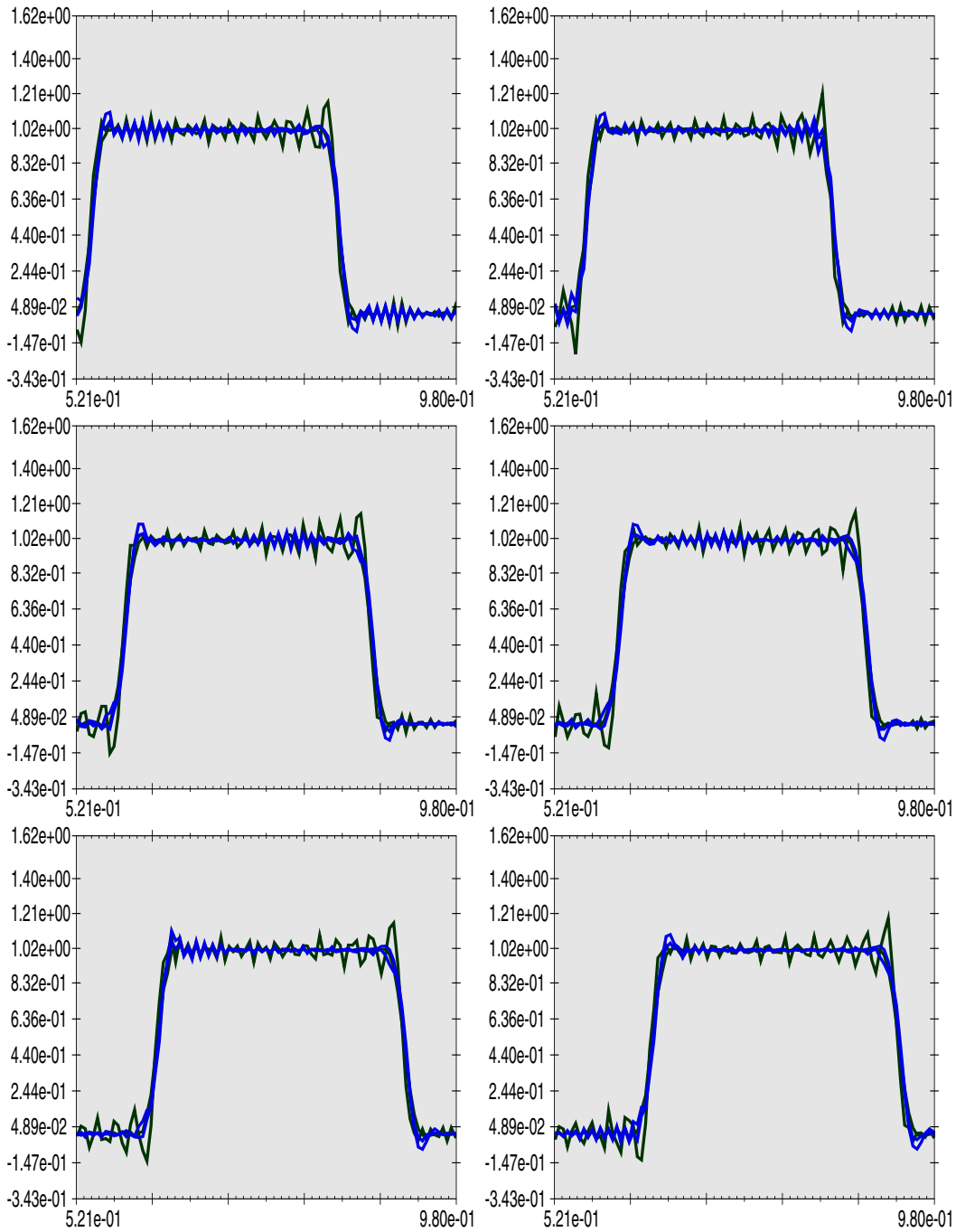
Όπως φαίνεται απο τα αποτελέσματα, το σχήμα αυτό, στο σύνολο των δοκιμαστικών παραδειγμάτων, επέκτεινε την περιοχή ευστάθειας του απλού relaxation σχήματος, και συγκεκριμένα:

- Για την ίδια παράμετρο  $\varepsilon$ , το χρονικό βήμα  $k$  για το οποίο ο μεταγωγικός αλγόριθμος δίνει φραγμένη λύση ( ολοκληρώνει όλα τα χρονικά βήματα), μπορεί να επιλεγεί σημαντικά μεγαλύτερο απο αυτό του αντίστοιχου απλού relaxation.
- Για μεγάλη τιμή της παράμετρο  $\varepsilon$ , τα αποτελέσματα των δύο αλγορίθμων είναι παρεμφερή, με τα ίδια ποιοτικά χαρακτηριστικά λόγω διασποράς-διάχυσης (κυματώδης λύση ακόμα και σε ομαλές περιοχές). Για πολύ μικρή τιμή αυτής της παραμέτρου, τα αποτελέσματα του Μεταγωγικού αλγορίθμου είναι κοντά στην λύση που δίνει η άμεση διακριτοποίηση της εξίσωσης Νόμων Διατήρησης ( εξαιρετικά θορυβώδη ). Το απλό relaxation πρακτικά δεν μπορεί να φτάσει σε πολύ χαμηλές τιμές της  $\varepsilon$  (θέλει υπερβολικά μικρό χρονικό βήμα).
- Για σταθερό χρονικό βήμα  $k$  και παραμέτρους  $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ , οι αντίστοιχες λύσεις του μεταγωγικού αλγορίθμου είναι ομοιόμορφα πιο κοντά μεταξύ

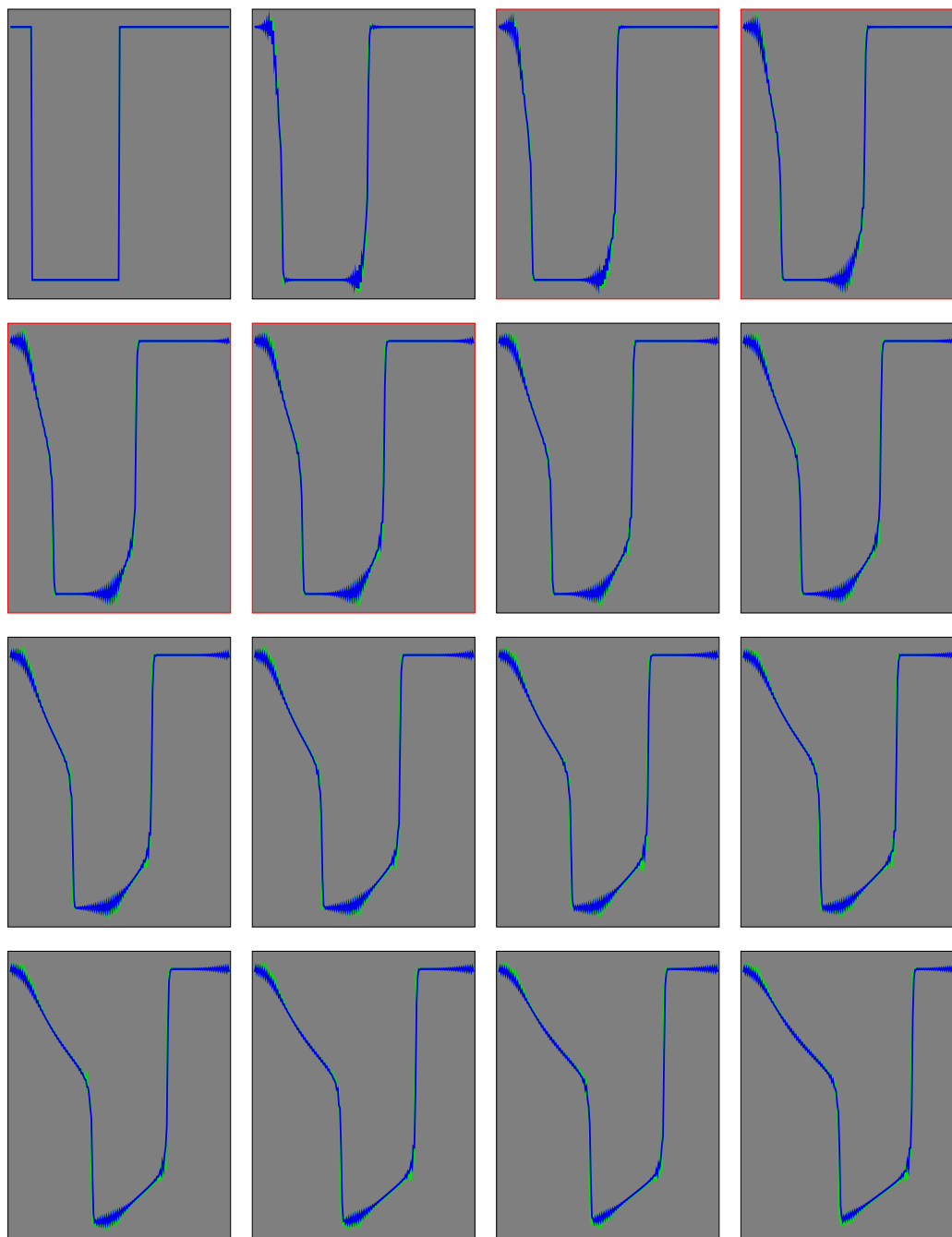
τους απο αυτές του απλού relaxation και άρα εκ των ενδείξεων φαίνεται ότι έχει υψηλότερη τάξη σύγκλισης.



Σχήμα 3.17: **Μεταφοράς:** Αντιπαράθεση 16 στιγμιότυπων, των λύσεων απο τις μεθόδους relaxation με παραμέτρους όπως του σχήματος 3.9 ( πράσινη καμπύλη) και μεταγωγικού relaxation με ίδιες παραμέτρους εκτός του πλήθους χρονικών βημάτων που είναι  $N_\kappa = 2 \cdot 200$  (μπλέ καμπύλη).

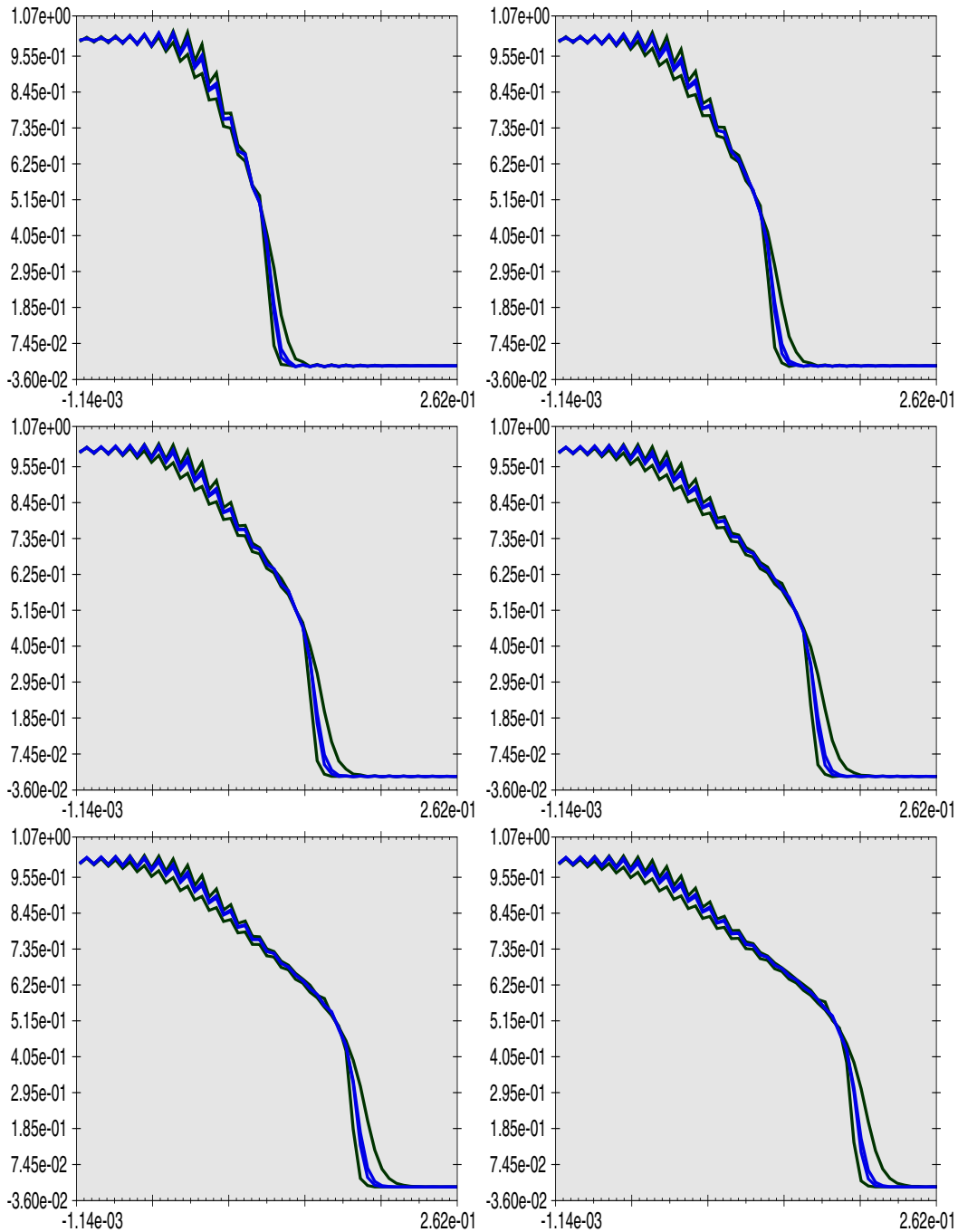


Σχήμα 3.18: **Μεταφοράς:** Μεγέθυνση 6 στιγμιότυπων στο εσωτερικό χρονικό διάστημα των κόκκινων τετραγώνων του προηγούμενου σχήματος. Διακρίνονται οι λύσεις από τις μεθόδους, relaxation με παραμέτρους όπως του σχήματος 3.10 (σκούρα πράσινες καμπύλες) και οι αντίστοιχες του μεταγωγικού relaxation για τις ίδιες παραμέτρους εκτός του πλήθους χρονικών βημάτων που είναι σταθερά ίσο με  $N_{\kappa} = 2 \cdot 200$  (μπλέ καμπύλες). Οι πιο οξείες λύσεις αντιστοιχούν σε μικρότερο  $\varepsilon$ .

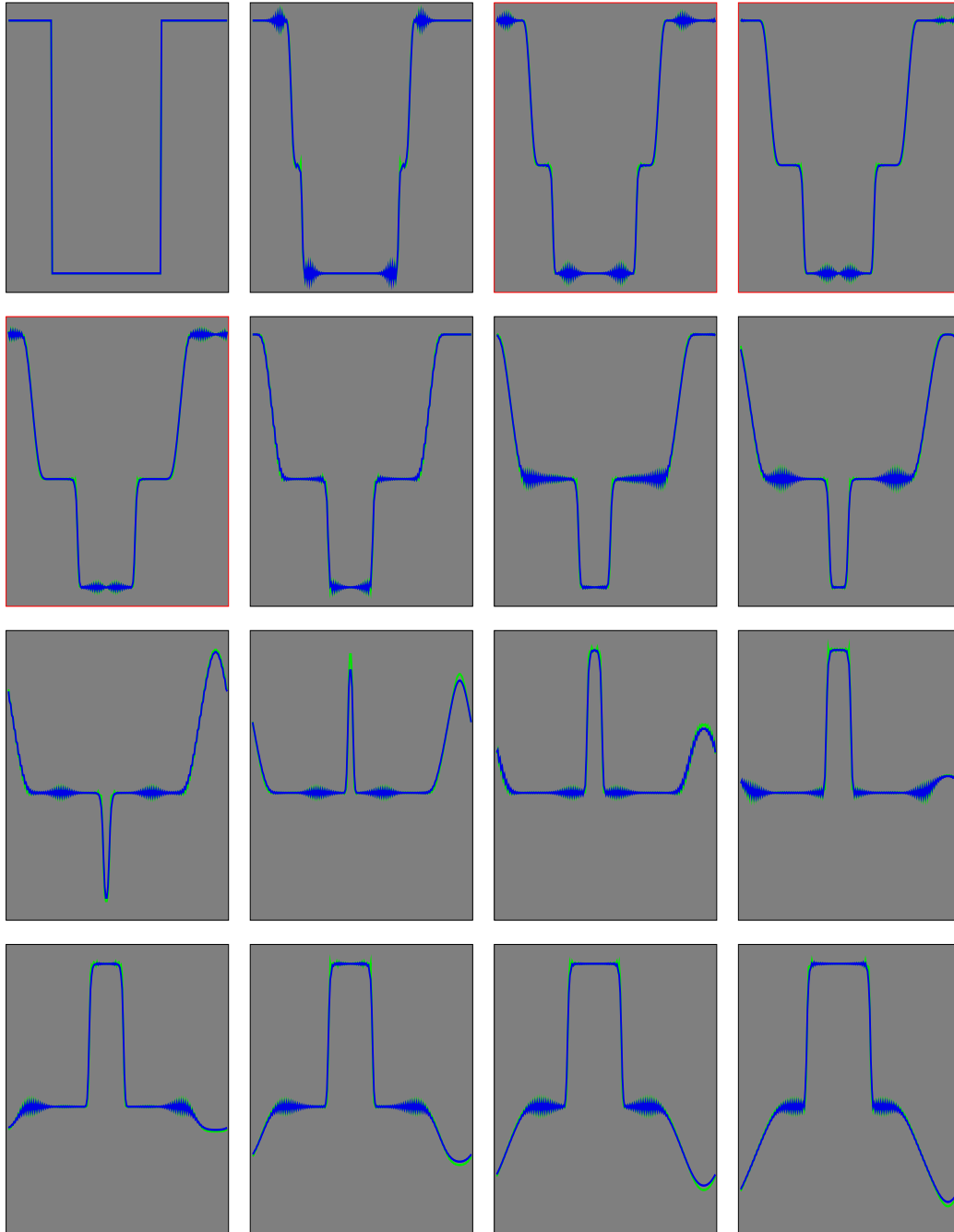


Σχήμα 3.19: **Buckley Leverett**: Αντιπαράθεση 16 στιγμιότυπων, των λύσεων από τις μεθόδους relaxation με παραμέτρους όπως του σχήματος 3.11 (πράσινη καμπύλη) και μεταγωγικού relaxation με ίδιες παραμέτρους εκτός του πλήθους χρονικών βημάτων που είναι  $N_k = 2 \cdot 200$  (μπλέ καμπύλη).

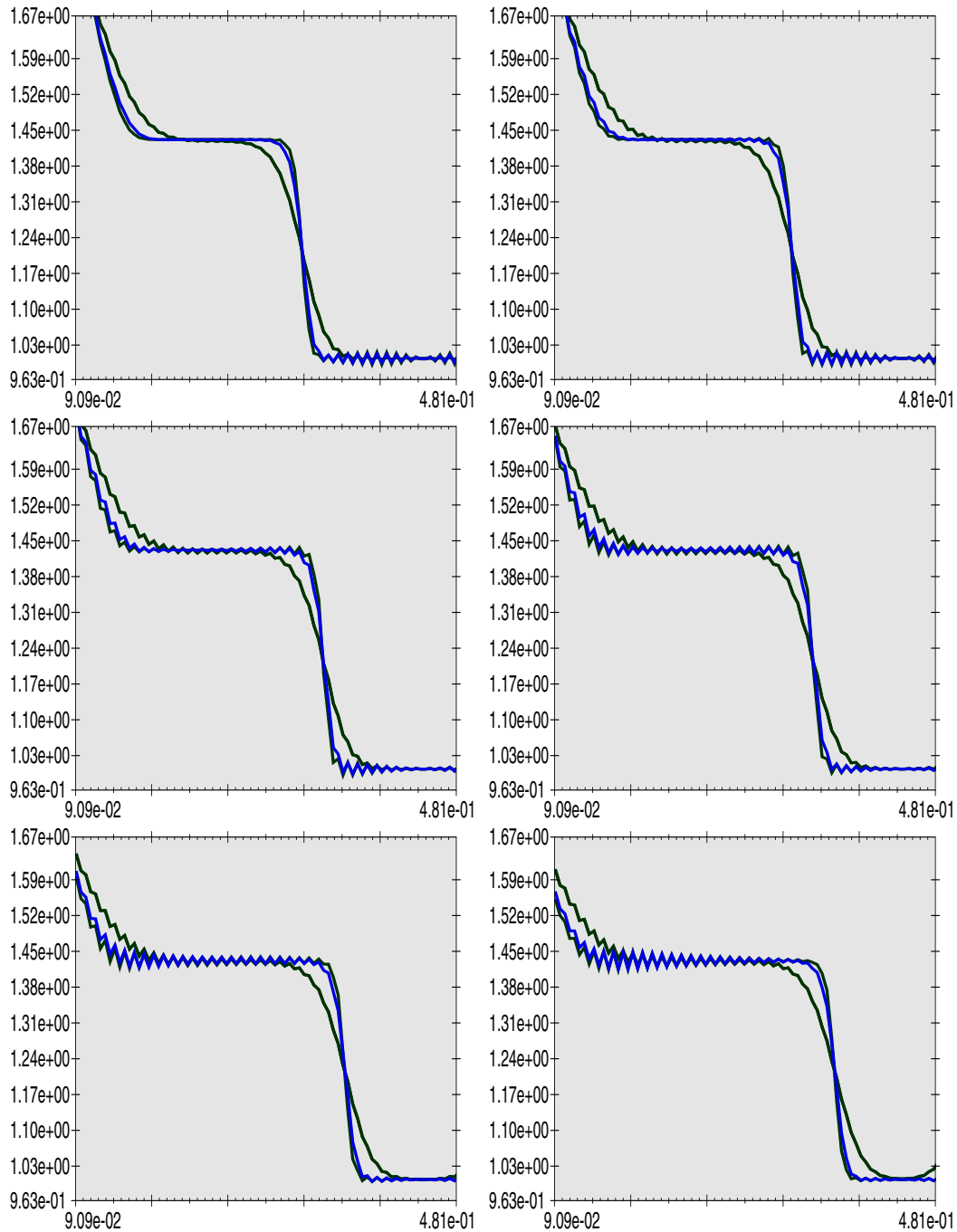




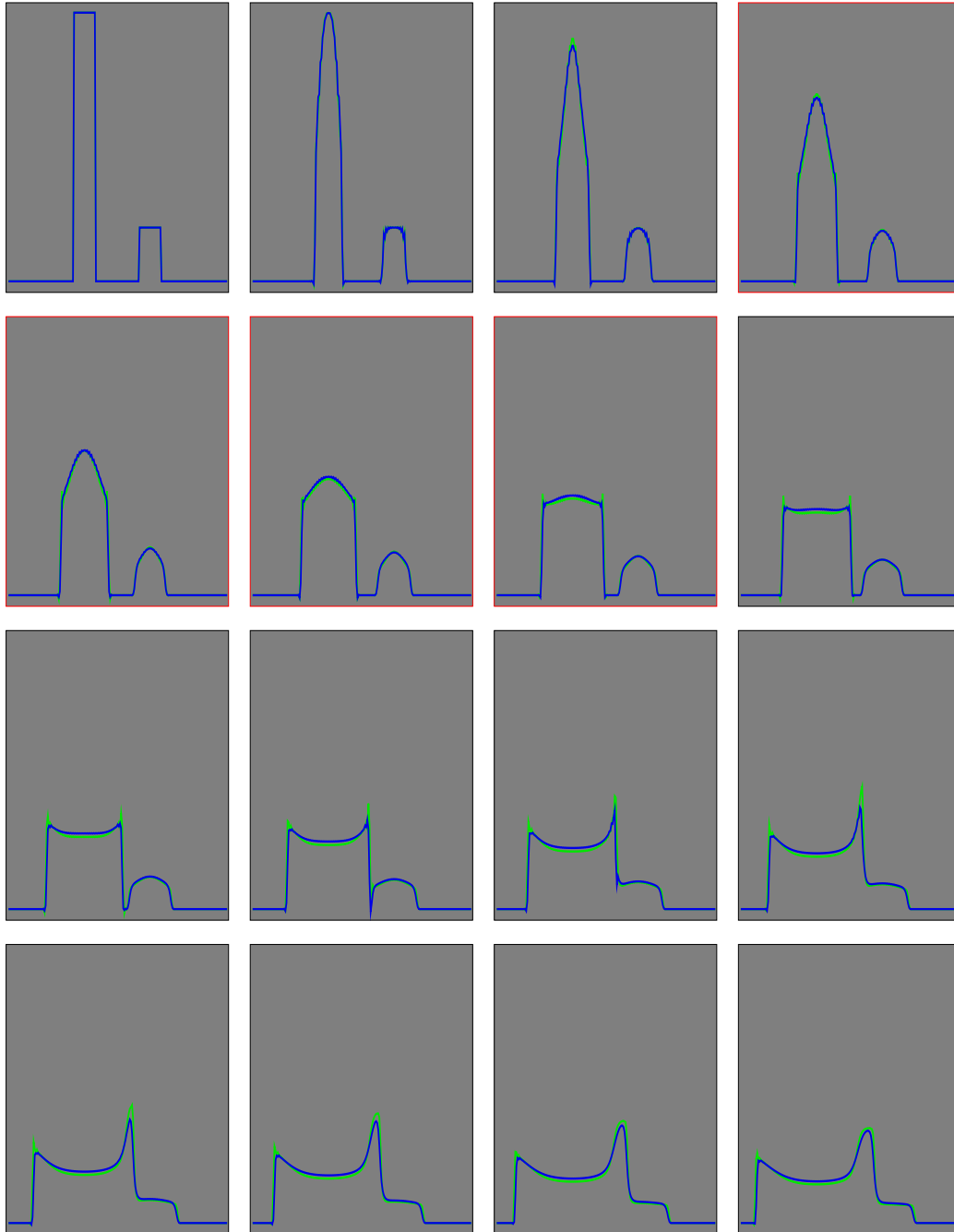
Σχήμα 3.20: **Buckley Leverett**: Μεγέθυνση 6 στιγμιότυπων στο εσωτερικό χρονικό διάστημα των κόκκινων τετραγώνων του προηγούμενου σχήματος. Διακρίνονται οι λύσεις από τις μεθόδους, relaxation με παραμέτρους όπως του σχήματος 3.12 (σκούρα πράσινες καμπύλες) και οι αντίστοιχες του μεταγωγικού relaxation για τις ίδιες παραμέτρους εκτός του πλήθους χρονικών βημάτων που είναι σταθερά ίσο με  $N_k = 2 \cdot 200$  (μπλέ καμπύλες). Οι πιο οξείες λύσεις αντιστοιχούν σε μικρότερο  $\varepsilon$ .



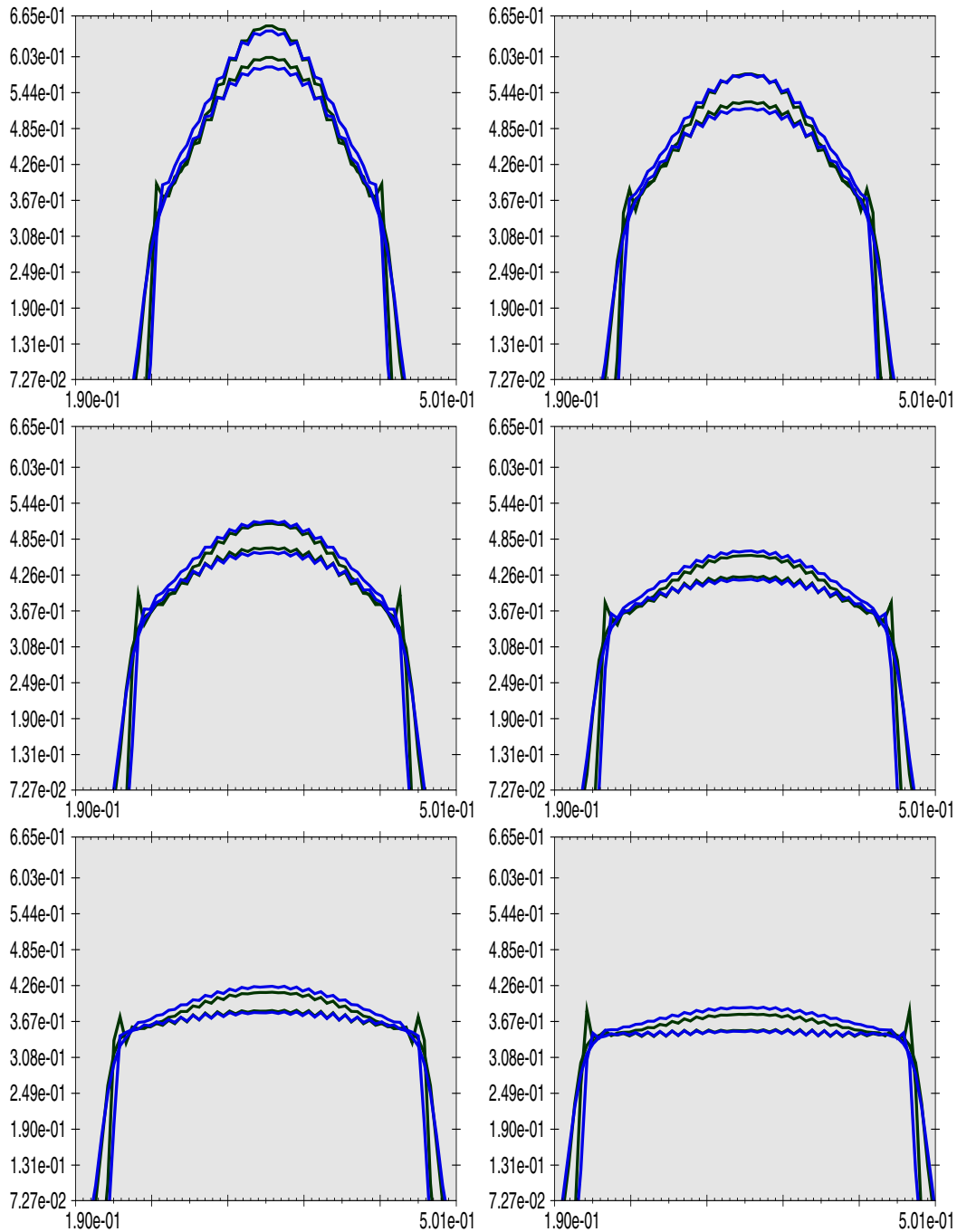
Σχήμα 3.21: **Πρώτη συνιστώσα Isentropic flow**: Αντιπαράθεση 16 στιγμιότυπων, των λύσεων απο τις μεθόδους relaxation με παραμέτρους όπως του σχήματος 3.13 ( πράσινη καμπύλη) και μεταγωγικού relaxation με ίδιες παραμέτρους εκτός του πλήθους χρονικών βημάτων που είναι  $N_\kappa = 2 \cdot 200$  (μπλέ καμπύλη).



Σχήμα 3.22: Πρώτη συνιστώσα Isentropic flow: Μεγέθυνση 6 στιγμιότυπων στο εσωτερικό χρονικό διάστημα των κόκκινων τετραγώνων του προηγούμενου σχήματος. Διακρίνονται οι λύσεις από τις μεθόδους, relaxation με παραμέτρους όπως του σχήματος 3.14 (σκούρα πράσινες καμπύλες) και οι αντίστοιχες του μεταγωγικού relaxation για τις ίδιες παραμέτρους εκτός του πλήθους χρονικών βημάτων που είναι σταθερά ίσο με  $N_{\kappa} = 2 \cdot 200$  (μπλέ καμπύλες). Οι πιο οξείες λύσεις αντιστοιχούν σε μικρότερο  $\varepsilon$ .



Σχήμα 3.23: Πρώτη συνιστώσα **Shallow Water**: Αντιπαράθεση 16 στιγμιότυπων, των λύσεων από τις μεθόδους relaxation με παραμέτρους όπως του σχήματος 3.15 ( πράσινη καμπύλη) και μεταγωγικού relaxation με ίδιες παραμέτρους εκτός του πλήθους χρονικών βημάτων που είναι  $N_k = 3 \cdot 200$  (μπλέ καμπύλη).



Σχήμα 3.24: Πρώτη συνιστώσα Shallow Water: Μεγέθυνση 6 στιγμιότυπων στο εσωτερικό χρονικό διάστημα των κόκκινων τετραγώνων του προηγούμενου σχήματος. Διακρίνονται οι λύσεις από τις μεθόδους, relaxation με παραμέτρους όπως του σχήματος 3.16 (σκούρα πράσινες καμπύλες) και οι αντίστοιχες του μεταγωγικού relaxation για τις ίδιες παραμέτρους εκτός του πλήθους χρονικών βημάτων που είναι  $N_\kappa = 2 \cdot 200$  και  $N_\kappa = 3 \cdot 200$  (μπλέ καμπύλες). Οι πιο οξείες λύσεις αντιστοιχούν σε μικρότερο  $\varepsilon$ .

### 3.4.2 Διακριτοποίηση διακοπτόμενα χαλαρωτικής μορφής Νόμων Διατήρησης με αναδιαμέριση

Συνδυάζοντας την αναδιαμέριση και την μεταγωγή, παίρνουμε το παρακάτω σχήμα:

Εστω  $N_h = \#\mathcal{T}_h^n$  η πληθυκότητα της διαμερίσης  $\mathcal{T}_h^n$  του  $\Omega$  στο  $n$  χρονικό βήμα (σταθερή ως προς  $n$ ),

$Rec_S(x)$  η παρεμβάλουσα (ή η  $L^2$  προβολή) του στοιχείου  $x$  στον χώρο  $S$  και  $\mathcal{T}_h^0$  ομοιόμορφη διαμέριση του  $\Omega$

$$S_{h,0} = \{ \phi \in C(\mathbb{R}) : \phi|_K \in \mathbb{P}_p(K), K \in \mathcal{T}_h^0, \phi|_{\Omega^c} \equiv 0 \},$$

$$V_{h,0} = \{ \psi \in C(\mathbb{R}) : \psi|_K \in \mathbb{P}_q(K), K \in \mathcal{T}_h^0, \psi|_{\Omega^c} \equiv 0 \}$$

αρχικοί χώροι πεπερασμένων στοιχείων, τότε η ακολουθία  $\{(u_h^n, v_{h,1}^n, \dots, v_{h,N}^n)\}$  της Galerkin προσέγγισης με αναδιαμέριση, στις χρονικές στιγμές  $n\kappa, n = 0, 1, \dots$ , ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$u_h^0 = Rec_{S_{h,0}}(u_0), \quad v_{h,i}^0 = Rec_{V_{h,0}}(F_i(u_0)), \quad i = 1, \dots, N \text{ και για } n = 0, 1, \dots$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{T}_h^{n+1} \text{ διαμέριση του } \Omega \text{ τ.ω. } \#\mathcal{T}_h^{n+1} = N_h \text{ και} \\ \forall K \in \mathcal{T}_h^{n+1} \quad \int_K g \circ u_h^n d\mu = \frac{1}{N_h} \int_{\Omega} g \circ u_h^n d\mu \\ S_{h,n+1} = \{ \phi \in C(\mathbb{R}) : \phi|_K \in \mathbb{P}_p(K), K \in \mathcal{T}_h^{n+1}, \phi|_{\Omega^c} \equiv 0 \} \\ V_{h,n+1} = \{ \psi \in C(\mathbb{R}) : \psi|_K \in \mathbb{P}_q(K), K \in \mathcal{T}_h^{n+1}, \psi|_{\Omega^c} \equiv 0 \} \\ \bar{u} = Rec_{S_{h,n+1}}(u_h^n), \quad \bar{v}_i = Rec_{V_{h,n+1}}(F_i(u_h^n)), \quad i = 1, \dots, N \\ \left( \frac{u_h^{n+1} - \bar{u}}{\kappa}, \phi \right) - \sum_{i=1}^N (\bar{v}_i, \partial_{x_i} \phi) = 0, \quad \forall \phi \in S_{h,n+1} \\ \left( \frac{v_{h,i}^{n+1} - \bar{v}_i}{\kappa}, \psi \right) + (A_i \partial_{x_i} u_h^{n+1}, \psi) = -\frac{1}{\varepsilon} (v_{h,i}^{n+1} - F_i(u_h^{n+1}), \psi), \\ \forall \psi \in V_{h,n+1}, \quad i = 1, \dots, N \end{array} \right. \quad (3.4.3)$$

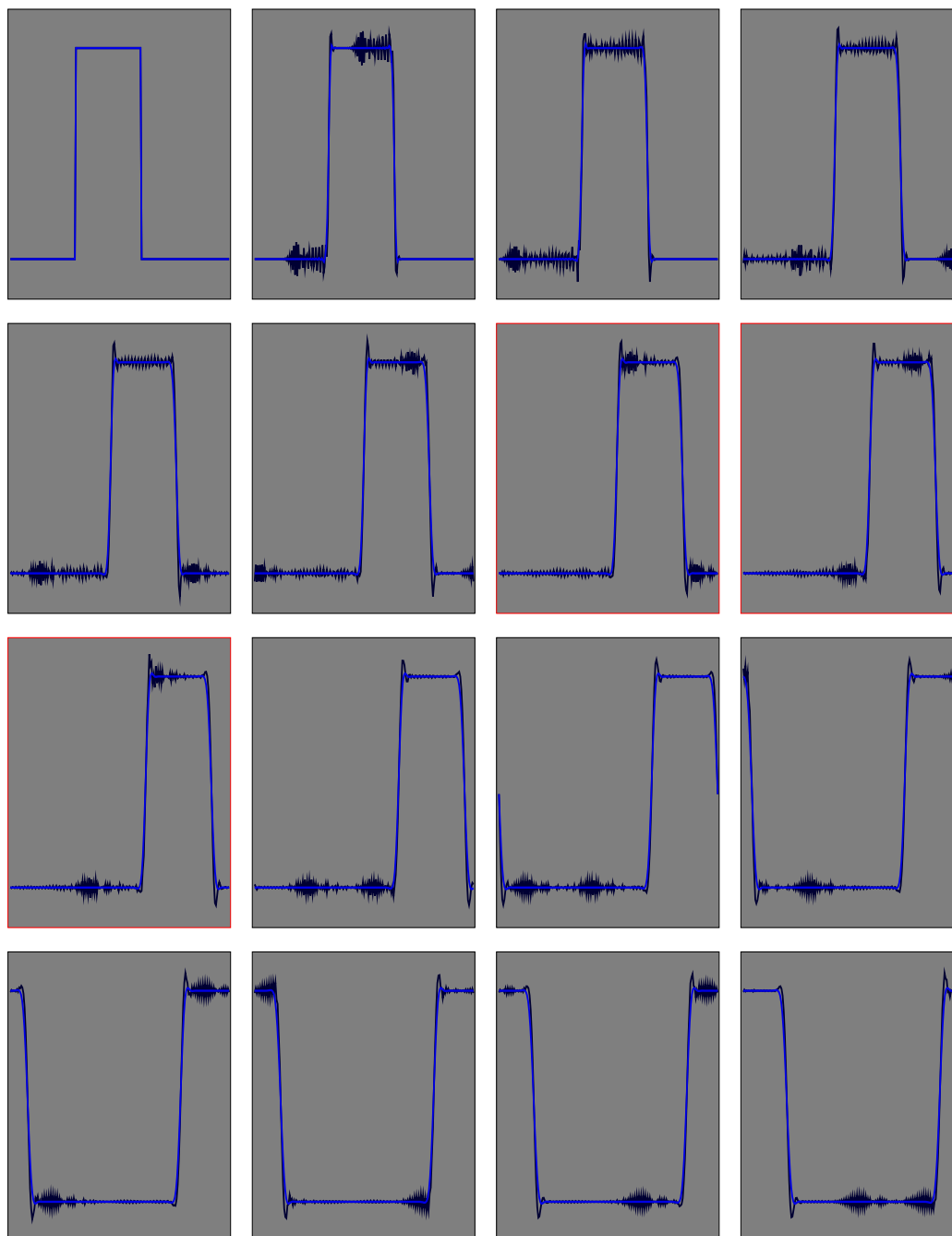
και για μονοδιάστατη χωρική μεταβλητή ( $N=1$ )

$u_h^0 = Rec_{S_{h,0}}(u_0)$ ,  $v_h^0 = Rec_{V_{h,0}}(F(u_0))$  και για  $n = 0, 1, \dots$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{T}_h^{n+1} \text{ διαμέριση του } [a, b] \text{ τ.ώ. } \#\mathcal{T}_h^{n+1} = N_h, x_0 = a \text{ και} \\ \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(u_h^n(x)) dx = \frac{1}{N_h} \int_a^b g(u_h^n(x)) dx, \quad i = 1, \dots, N_h \\ S_{h,n+1} = \{ \phi \in C(\mathbb{R}) : \phi|_K \in \mathbb{P}_p(K), K \in \mathcal{T}_h^{n+1}, \phi|_{\Omega^c} \equiv 0 \} \\ V_{h,n+1} = \{ \psi \in C(\mathbb{R}) : \psi|_K \in \mathbb{P}_q(K), K \in \mathcal{T}_h^{n+1}, \psi|_{\Omega^c} \equiv 0 \} \\ \bar{u} = Rec_{S_{h,n+1}}(u_h^n), \quad \bar{v} = Rec_{V_{h,n+1}}(F(u_h^n)) \\ (\frac{u_h^{n+1} - \bar{u}}{\kappa}, \phi) - (\bar{v}, \partial_x \phi) = 0, \quad \forall \phi \in S_{h,n+1} \\ (\frac{v_h^{n+1} - \bar{v}}{\kappa}, \psi) + (A \partial_x u_h^{n+1}, \psi) = -\frac{1}{\varepsilon} (v_h^{n+1} - F(u_h^{n+1}), \psi), \\ \forall \psi \in V_{h,n+1} \end{array} \right. \quad (3.4.4)$$

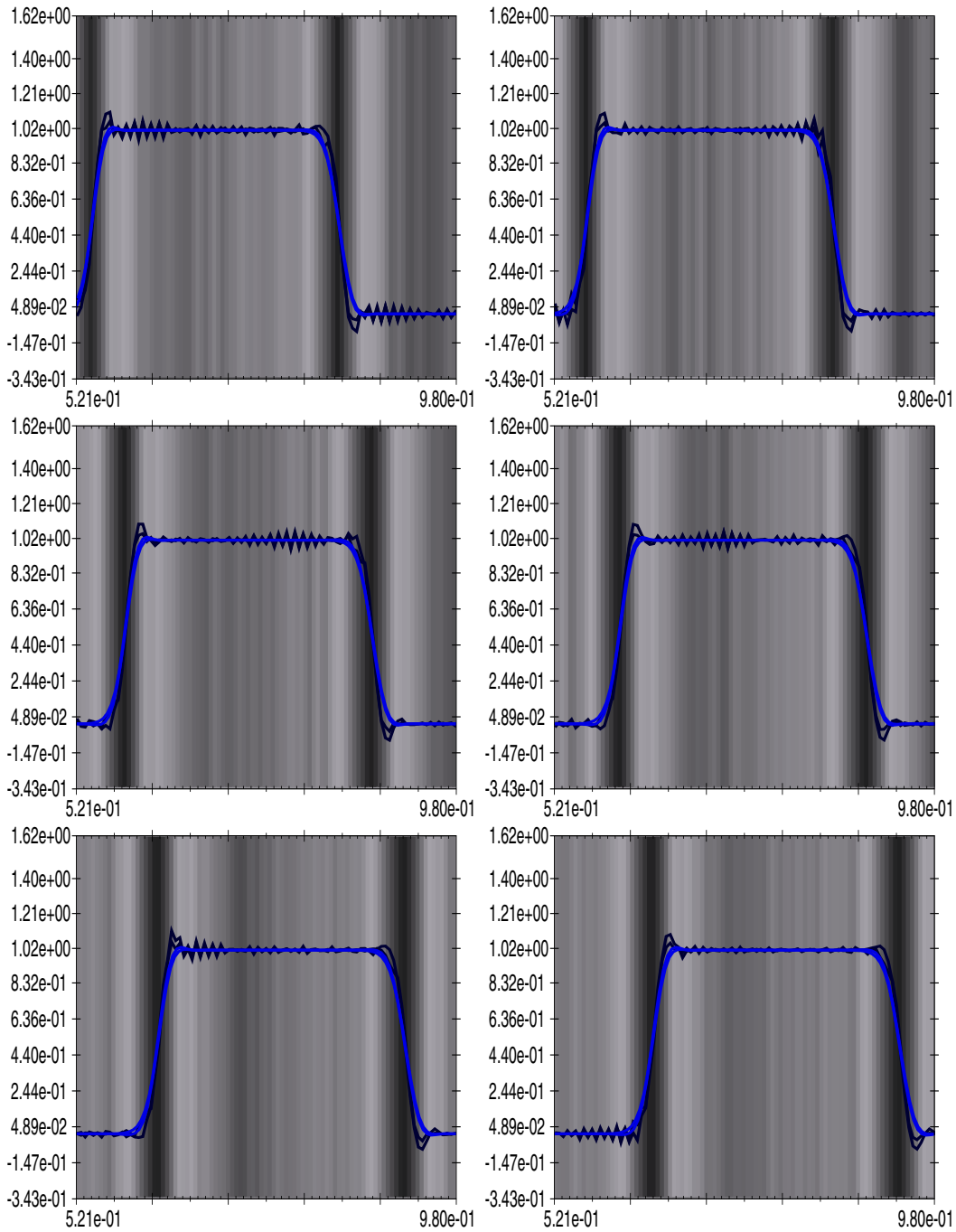
Το σχήμα διακοπτόμενης χαλάρωσης με αναδιαμέριση (3.4.4), κληρονομεί τα προτερήματα των σχημάτων (3.3.2),(3.4.2) όπως ήταν αναμενόμενο, δεδομένου ότι εκμεταλεύεται και τους δύο (ανεξάρτητους) σταθεροποιητικούς μηχανισμούς, της αναδιαμέρισης για βελτίωση της ευκρίνειας και της μεταγωγής για διεύρυνση της περιοχής ευστάθειας, των σχημάτων relaxation (2.5.2). Πράγματι σε όλα τα δοκιμαστικά προβλήματα, οι επιδόσεις αυτού του σχήματος και προς τις δύο κατευθύνσεις, ήταν πολύ καλες (σχήματα). Αυτή η μέθοδος είναι ουσιαστικά το πρακτικό αποτέλεσμα αυτής της ερευνητικής εργασίας. Ωστόσο αξιοποιώντας την παρακάτω παρατήρηση, στην επόμενη ποράγραφο θα οδηγηθούμε σε ένα τελείως διαφορετικό τοπίο εξερεύνησης των προβλημάτων Νόμων Διατήρησης.

Το σχήμα διακοπτόμενης χαλάρωσης (3.4.4) με αναδιαμέριση (ειδικά τύπου καμπυλότητα-παρεμβολής), διατηρεί την ευκρίνεια της λύσης που παράγει, για πάρα πολύ μικρή τιμή της παραμέτρου  $\varepsilon (< 10^{-100})$

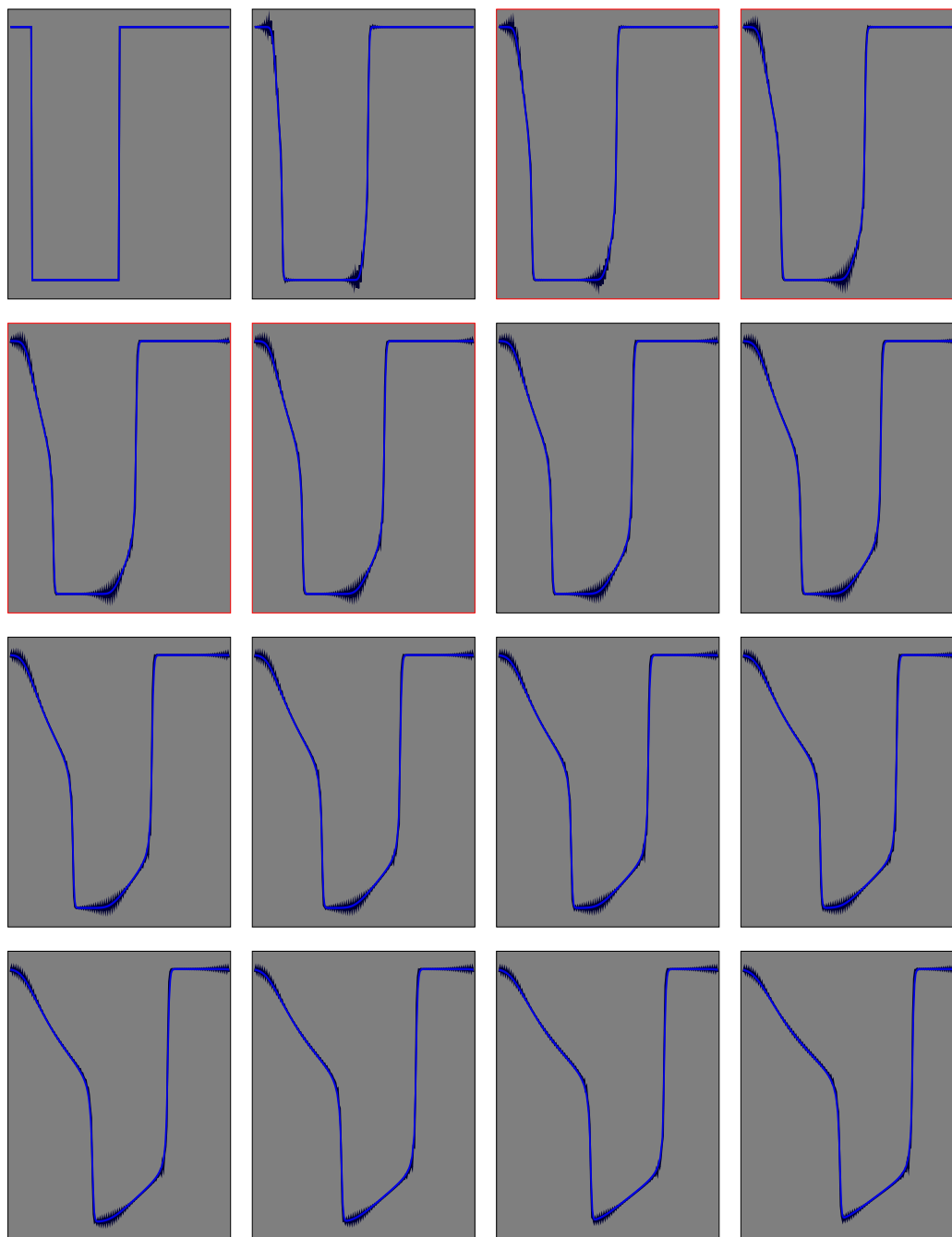


Σχήμα 3.25: **Μεταφοράς:** Αντιπαράθεση 16 στιγμιότυπων, των λύσεων απο τις μεθόδους, μεταγωγικό relaxation και μεταγωγικό relaxation με αναδιαμέριση, παραμέτρων όπως στο σχήμα 3.17 και  $power = 4.3 \cdot 10^{-3}$ .

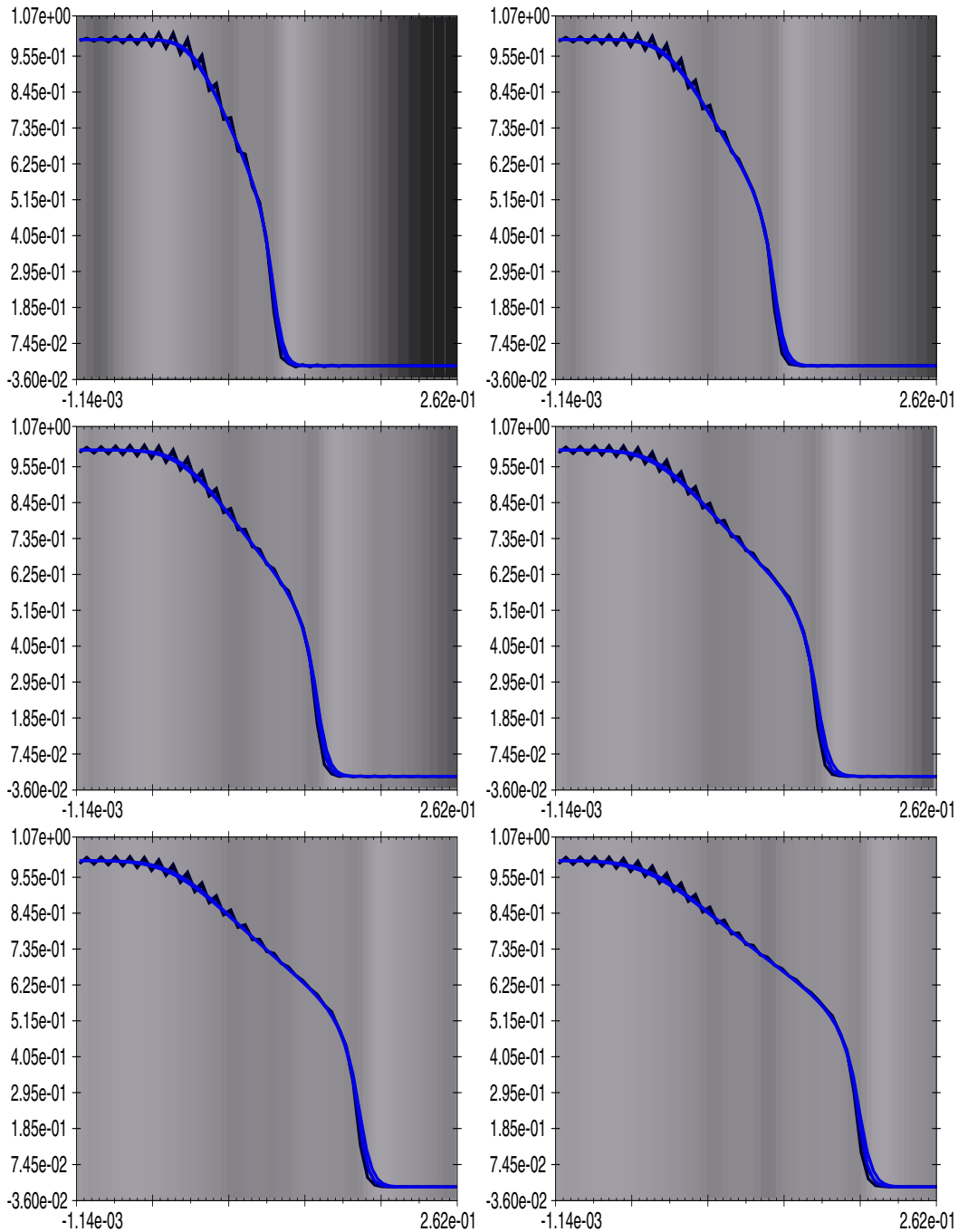




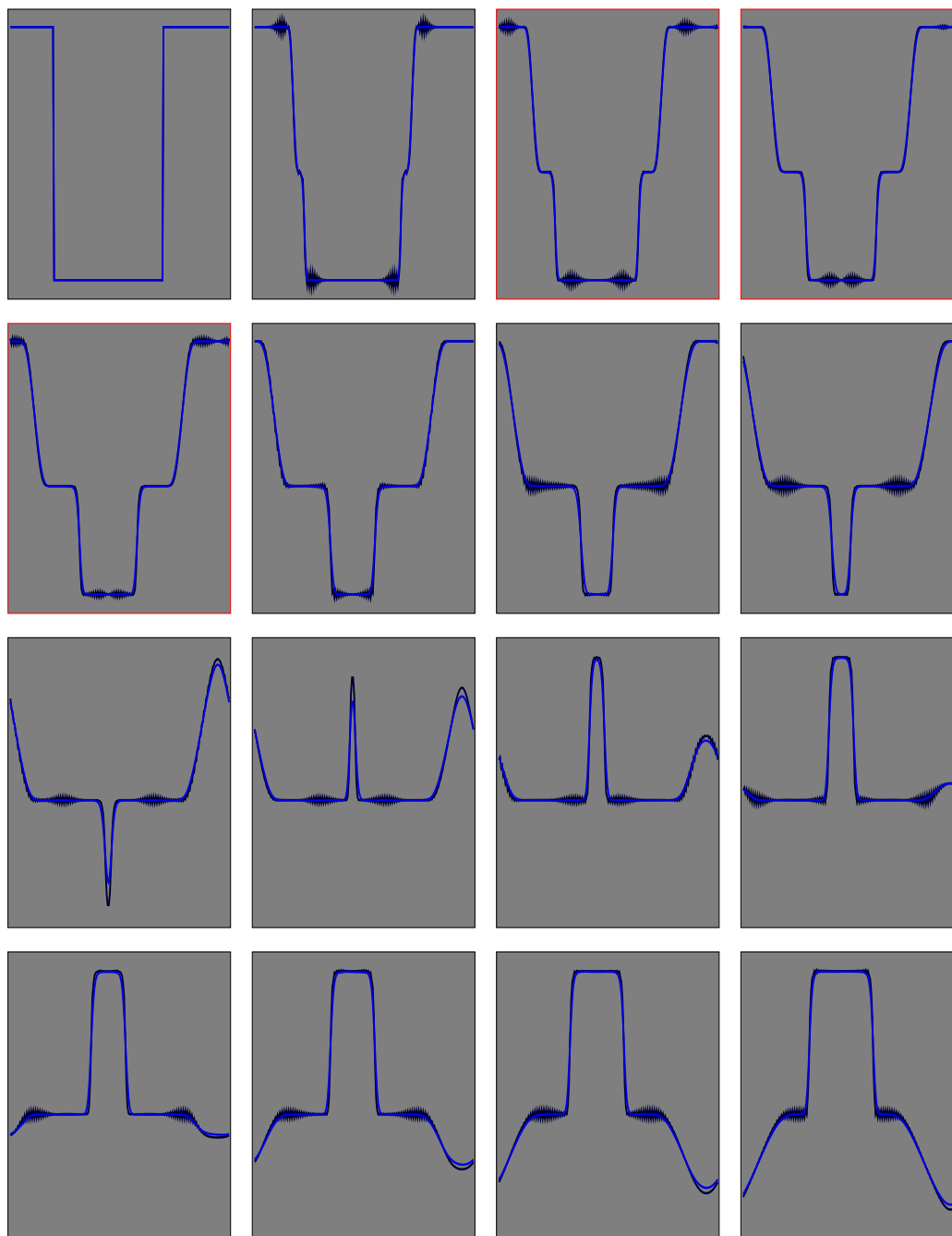
Σχήμα 3.26: **Μεταφοράς:** Μεγέθυνση 6 στιγμιότυπων στο εσωτερικό χρονικό διάστημα των κόκκινων τετραγώνων του προηγούμενου σχήματος. Διακρίνονται οι λύσεις του μεταγωγικού relaxation, παραμέτρων όπως στο σχήμα 3.18 (σκούρες μπλέ καμπύλες) και οι λύσεις του μεταγωγικού relaxation με αναδιαμέριση για τις ίδιες παραμέτρους και  $power = 4.3 \cdot 10^{-3}$  (ανοικτές μπλέ καμπύλες). Οι πιο οξείες λύσεις αντιστοιχούν σε μικρότερο  $\epsilon$ . Η φωτεινότητα του φόντου ακολουθεί την πυκνότητα της διαμέρισης, της πιο οξείας προσεγγιστικής λύσης με αναδιαμέριση.



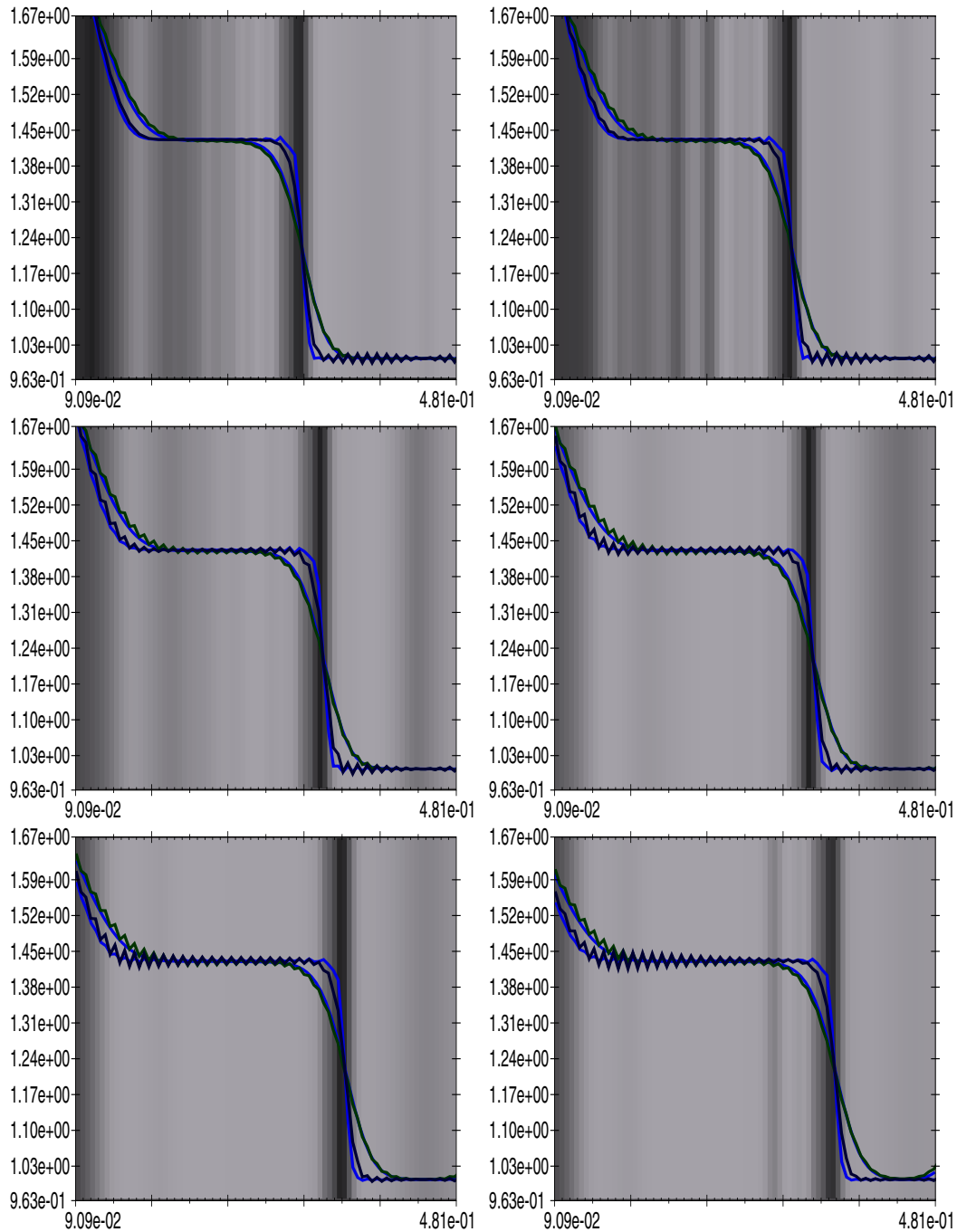
Σχήμα 3.27: **Buckley Leverett**: Αντιπαράθεση 16 στιγμιότυπων, των λύσεων από τις μεθόδους, μεταγωγικό relaxation και μεταγωγικό relaxation με αναδιαμέριση, παραμέτρων όπως στο σχήμα 3.19 και  $power = 3.5 \cdot 10^{-2}$ .



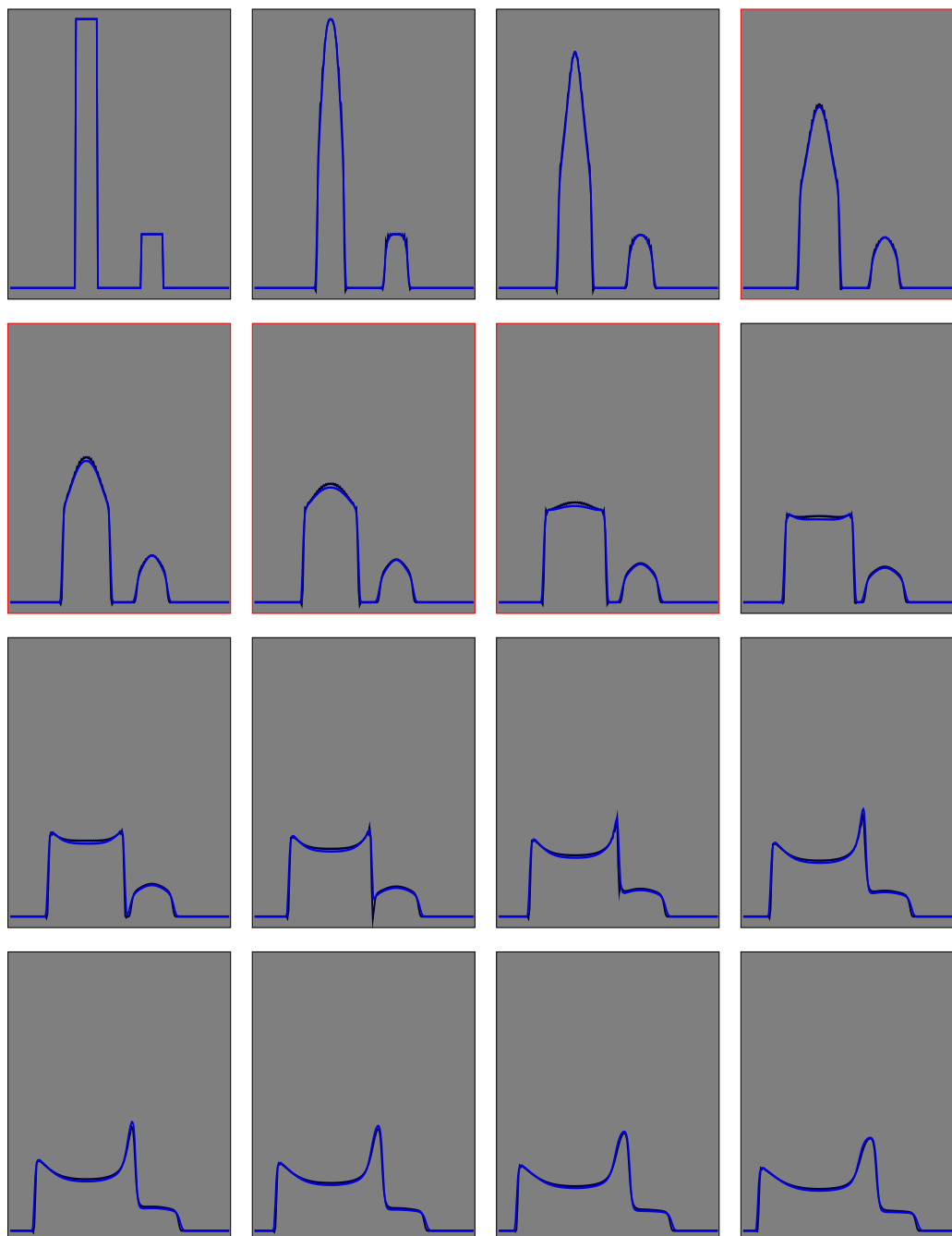
Σχήμα 3.28: **Buckley Leverett**: Μεγέθυνση 6 στιγμιότυπων στο εσωτερικό χρονικό διάστημα των κόκκινων τετραγώνων του προηγούμενου σχήματος. Διακρίνονται οι λύσεις του μεταγωγικού relaxation, παραμέτρων όπως στο σχήμα 3.20 (σκούρες μπλέ καμπύλες) και οι λύσεις του μεταγωγικού relaxation με αναδιαμέριση για τις ίδιες παραμέτρους και  $power = 3.5 \cdot 10^{-2}$  (ανοικτές μπλέ καμπύλες). Οι πιο οξείες λύσεις αντιστοιχούν σε μικρότερο  $\varepsilon$ . Η φωτεινότητα του φόντου ακολουθεί την πυκνότητα της διαμέρισης, της πιο οξείας προσεγγιστικής λύσης με αναδιαμέριση.



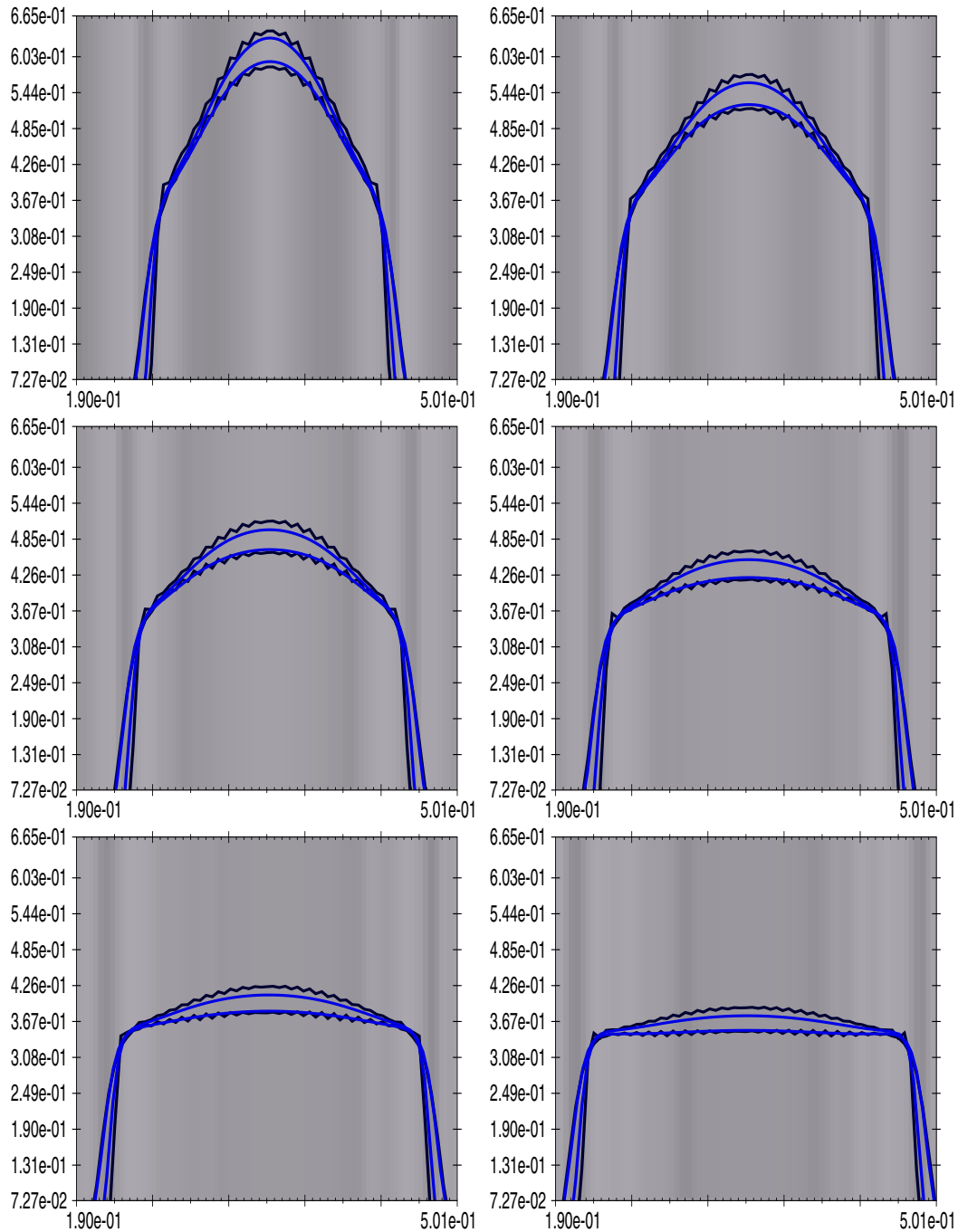
Σχήμα 3.29: Πρώτη συνιστώσα **Isentropic flow**: Αντιπαράθεση 16 στιγμιότυπων, των λύσεων από τις μεθόδους, μεταγωγικό relaxation και μεταγωγικό relaxation με αναδιαμέριση, παραμέτρων όπως στο σχήμα 3.21 και  $power = 3.5 \cdot 10^{-2}$ .



Σχήμα 3.30: Πρώτη συνιστώσα *Isentropic flow*: Μεγέθυνση 6 στιγμιότυπων στο εσωτερικό χρονικό διάστημα των κόκκινων τετραγώνων του προηγούμενου σχήματος. Διακρίνονται οι λύσεις του μεταγωγικού relaxation, παραμέτρων όπως στο σχήμα 3.22 (σκούρες μπλέ καμπύλες) και οι λύσεις του μεταγωγικού relaxation με αναδιαμέριση για τις ίδιες παραμέτρους και  $power = 3.5 \cdot 10^{-2}$  (ανοικτές μπλέ καμπύλες). Οι πίο οξείες λύσεις αντιστοιχούν σε μικρότερο  $\varepsilon$ . Η φωτεινότητα του φόντου ακολουθεί την πυκνότητα της διαμέρισης, της πίο οξείας προσεγγιστικής λύσης με αναδιαμέριση.



Σχήμα 3.31: Πρώτη συνιστώσα Shallow Water: Αντιπαράθεση 16 στιγμιότυπων, των λύσεων απο τις μεθόδους, μεταγωγικό relaxation και μεταγωγικό relaxation με αναδιαμέριση, παραμέτρων όπως στο σχήμα 3.23 και  $power = 3.5 \cdot 10^{-2}$ .



Σχήμα 3.32: **Πρώτη συνιστώσα Shallow Water:** Μεγέθυνση 6 στιγμιότυπων στο εσωτερικό χρονικό διάστημα των κόκκινων τετραγώνων του προηγούμενου σχήματος. Διακρίνονται οι λύσεις του μεταγωγικού relaxation, παραμέτρων όπως στο σχήμα 3.24 (σκούρες μπλε καμπύλες) και οι λύσεις του μεταγωγικού relaxation με αναδιαμέριση για τις ίδιες παραμέτρους και  $power = 3.5 \cdot 10^{-2}$  (ανοικτές μπλε καμπύλες). Οι πιο οξείες λύσεις αντιστοιχούν σε μικρότερο  $\varepsilon$ . Η φωτεινότητα του φόντου ακολουθεί την πυκνότητα της διαμέρισης, της πιο οξείας προσεγγιστικής λύσης με αναδιαμέριση.

### 3.5 Οριο Διακριτοποίησης και Διακριτοποίηση Ορίου, Χαλαρωτικών σχημάτων

#### 3.5.1 Διακριτοποίηση οριακά χαλαρωτικής μορφής Νόμων Διατήρησης (limit relaxation)

Επιδιώκοντας την πλήρη ανεξαρτητοποίηση από τις παραμέτρους του relaxation και λαμβάνοντας υπόψη την τελευταία παρατήρηση, κατασκευάζουμε το σχήμα που προκύπτει από το (3.4.4) για  $\varepsilon = 0$ . Το σχήμα αυτό ονομάστηκε “οριακά χαλαρωτικό (limit relaxation)” διότι η λύση που δίνει είναι πράγματι το όριο της οικογένειας  $u_h^\varepsilon$  των switched relaxation σχημάτων με αναδιαμέριση, για  $\varepsilon \rightarrow 0$  (όπως διαπιστώνεται από τα αποτελέσματα). Πρόκειται για το σχήμα:

Εστω  $N_h = \#\mathcal{T}_h^n$  η πληθυκότητα της διαμερίσης  $\mathcal{T}_h^n$  του  $\Omega$  στο  $n$  χρονικό βήμα (σταθερή ως προς  $n$ ),

$Rec_S(x)$  η παρεμβάλουσα (ή η  $L^2$  προβολή) του στοιχείου  $x$  στον χώρο  $S$  και  $\mathcal{T}_h^0$  ομοιόμορφη διαμέριση του  $\Omega$

$$S_{h,0} = \{ \phi \in C(\mathbb{R}) : \phi|_K \in \mathbb{P}_p(K), K \in \mathcal{T}_h^0, \phi|_{\Omega^c} \equiv 0 \},$$

$$V_{h,0} = \{ \psi \in C(\mathbb{R}) : \psi|_K \in \mathbb{P}_q(K), K \in \mathcal{T}_h^0, \psi|_{\Omega^c} \equiv 0 \}$$

αρχικοί χώροι πεπερασμένων στοιχείων, τότε η ακολουθία  $\{u_h^n\}$  της Galerkin προσέγγισης με αναδιαμέριση, στις χρονικές στιγμές  $n\kappa$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , ικανοποιεί τις σχέσεις:



$u_h^0 = Rec_{S_{h,0}}(u_0)$  και για  $n = 0, 1, \dots$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{T}_h^{n+1} \text{ διαμέριση του } \Omega \text{ τ.ω. } \#\mathcal{T}_h^{n+1} = N_h \text{ και} \\ \forall K \in \mathcal{T}_h^{n+1} \quad \int_K g \circ u_h^n d\mu = \frac{1}{N_h} \int_{\Omega} g \circ u_h^n d\mu \\ S_{h,n+1} = \{ \phi \in C(\mathbb{R}) : \phi|_K \in \mathbb{P}_p(K), K \in \mathcal{T}_h^{n+1}, \phi|_{\Omega^c} \equiv 0 \} \\ V_{h,n+1} = \{ \psi \in C(\mathbb{R}) : \psi|_K \in \mathbb{P}_q(K), K \in \mathcal{T}_h^{n+1}, \psi|_{\Omega^c} \equiv 0 \} \\ \bar{u} = Rec_{S_{h,n+1}}(u_h^n), \quad \bar{v}_i \in V_{h,n+1}, i = 1, \dots, N, \text{ τ.ω.} \\ (\frac{u_h^{n+1} - \bar{u}}{\kappa}, \phi) - \sum_{i=1}^N (\bar{v}_i, \partial_{x_i} \phi) = 0, \quad \forall \phi \in S_{h,n+1} \\ 0 = (\bar{v}_i - F_i(u_h^{n+1}), \psi), \quad \forall \psi \in V_{h,n+1}, i = 1, \dots, N \end{array} \right. \quad (3.5.1)$$

και για μονοδιάστατη χωρική μεταβλητή ( $N=1$ )

$u_h^0 = Rec_{S_{h,0}}(u_0)$  και για  $n = 0, 1, \dots$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{T}_h^{n+1} \text{ διαμέριση του } [a, b] \text{ τ.ω. } \#\mathcal{T}_h^{n+1} = N_h, x_0 = a \text{ και} \\ \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(u_h^n(x)) dx = \frac{1}{N_h} \int_a^b g(u_h^n(x)) dx, \quad i = 1, \dots, N_h \\ S_{h,n+1} = \{ \phi \in C(\mathbb{R}) : \phi|_K \in \mathbb{P}_p(K), K \in \mathcal{T}_h^{n+1}, \phi|_{\Omega^c} \equiv 0 \} \\ V_{h,n+1} = \{ \psi \in C(\mathbb{R}) : \psi|_K \in \mathbb{P}_q(K), K \in \mathcal{T}_h^{n+1}, \psi|_{\Omega^c} \equiv 0 \} \\ \bar{u} = Rec_{S_{h,n+1}}(u_h^n), \quad \bar{v} \in V_{h,n+1}, \text{ τ.ω.} \\ (\frac{u_h^{n+1} - \bar{u}}{\kappa}, \phi) - (\bar{v}, \partial_x \phi) = 0, \quad \forall \phi \in S_{h,n+1} \\ 0 = (\bar{v} - F(u_h^{n+1}), \psi), \quad \forall \psi \in V_{h,n+1} \end{array} \right. \quad (3.5.2)$$

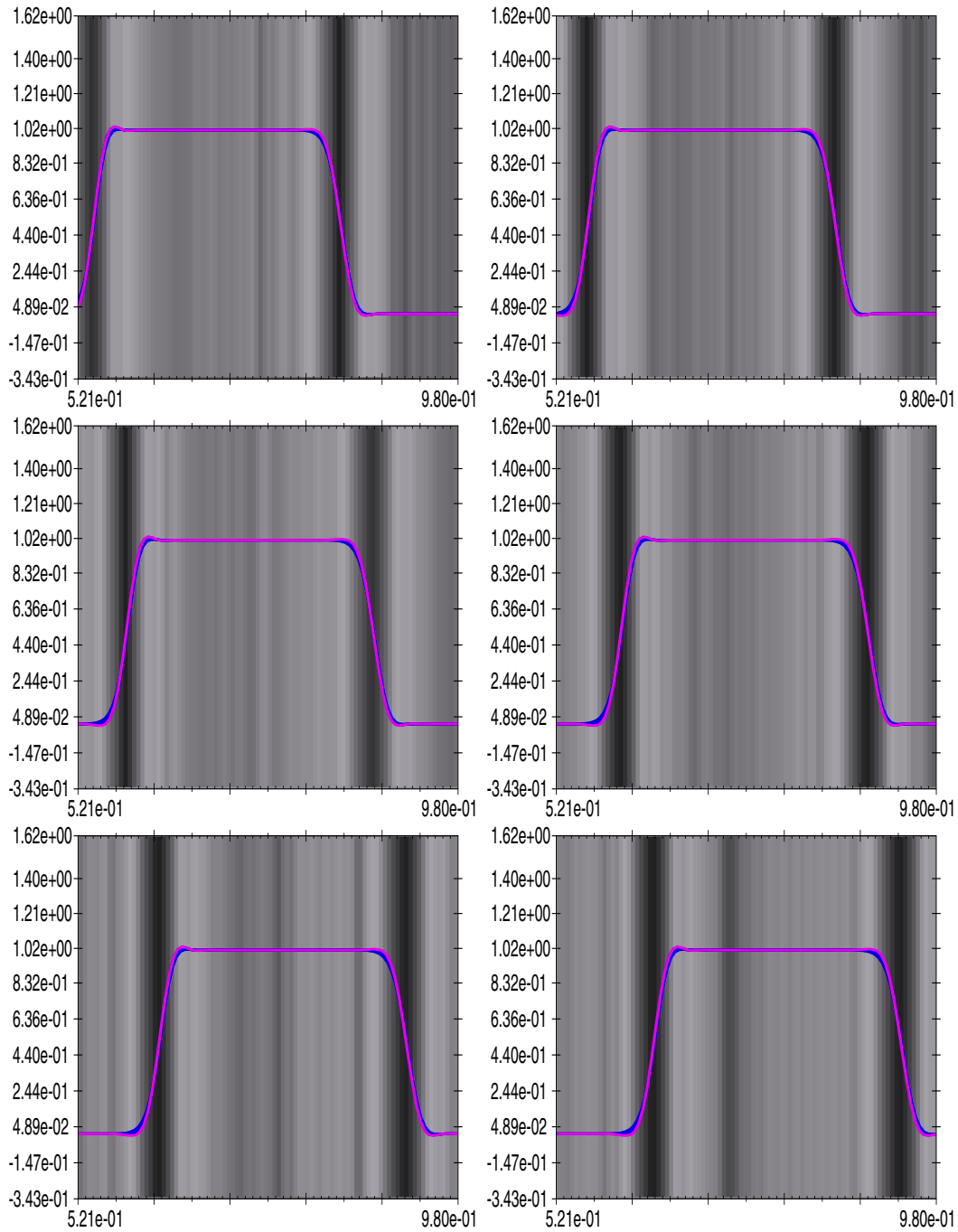
Τα αποτελέσματα της εφαρμογής του οριακά χαλαρωτικού σχήματος ήταν πολύ καλά. Τα βασικά χαρακτηριστικά του είναι:

- Είναι οικονομικώτερη από άποψη χρόνου και μνήμης από όλες τις προηγούμενες, αφού δεν υπολογίζει άλλες συναρτήσεις εκτός της ζητούμενης λύσεως
- Έχει όλα τα πλεονεκτήματα ευστάθειας, ευκρίνειας και τάξης σύγκλισης της οικογένειας των μεταγωγικών σχημάτων με αναδιαμέριση, αφού είναι

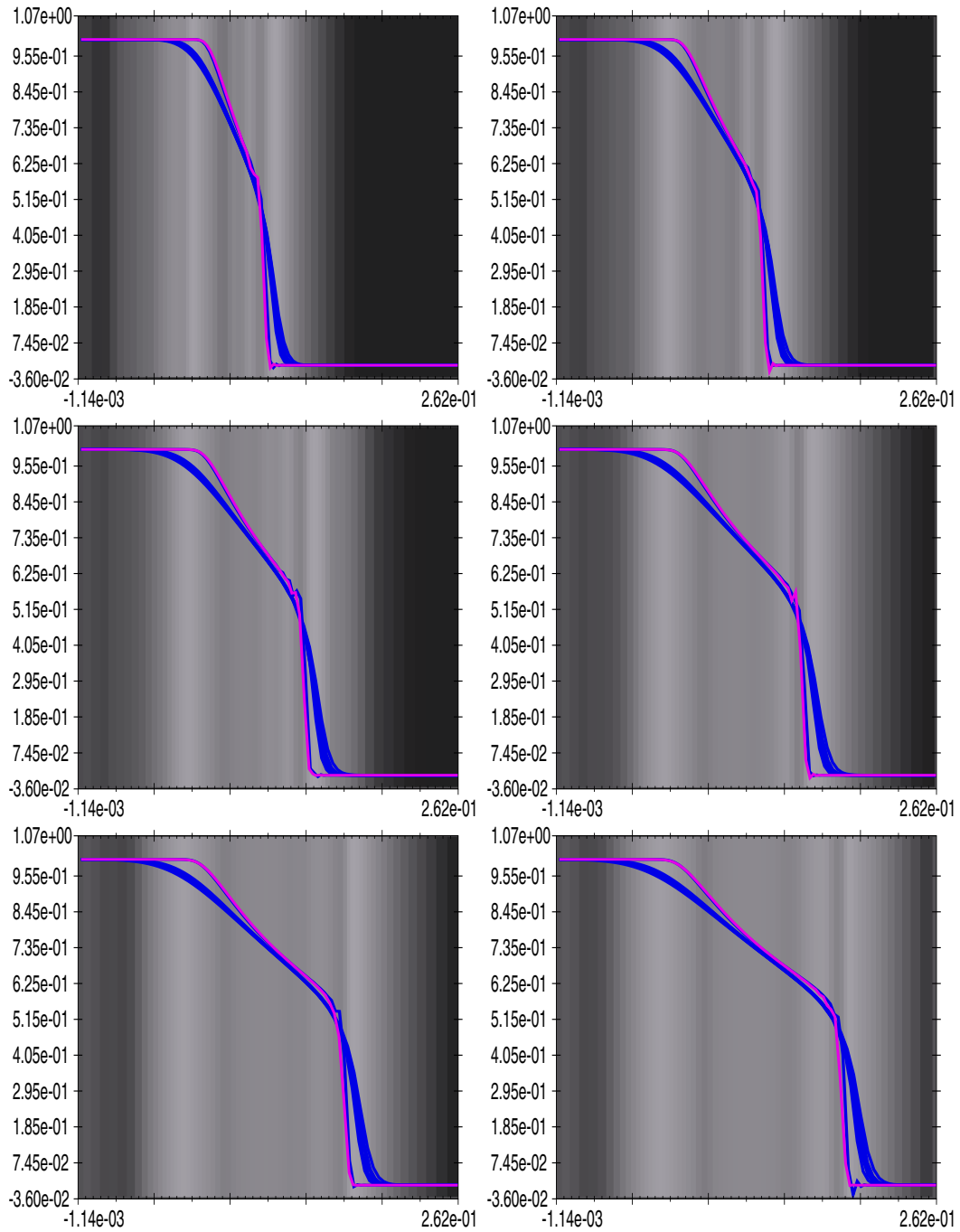
οριακό μέλος της (και η οικογένεια αυτή σύμφωνα με την παρατήρηση της προηγούμενης υποπαραγράφου, φαίνεται ότι είναι κλειστή).

- Είναι εντελώς ανεξάρτητο από τις relaxation παραμέτρους και άρα αμέσου εφαρμογής σε τυχαίο πρόβλημα.
- Έχει μεγάλη ευαισθησία στον μοναδικό εξομαλυντικό μηχανισμό που περιέχει για την σύγκλιση σε ασθενή λύση Νόμων Διατήρησης, την αναδιαμέριση. Αυτό εκδηλώνεται στα παραδείγματα υπο μορφή ταλάντωσης γύρω από τις περιοχές ασυνέχειας σε απρόσμενες χρονικές στιγμές.

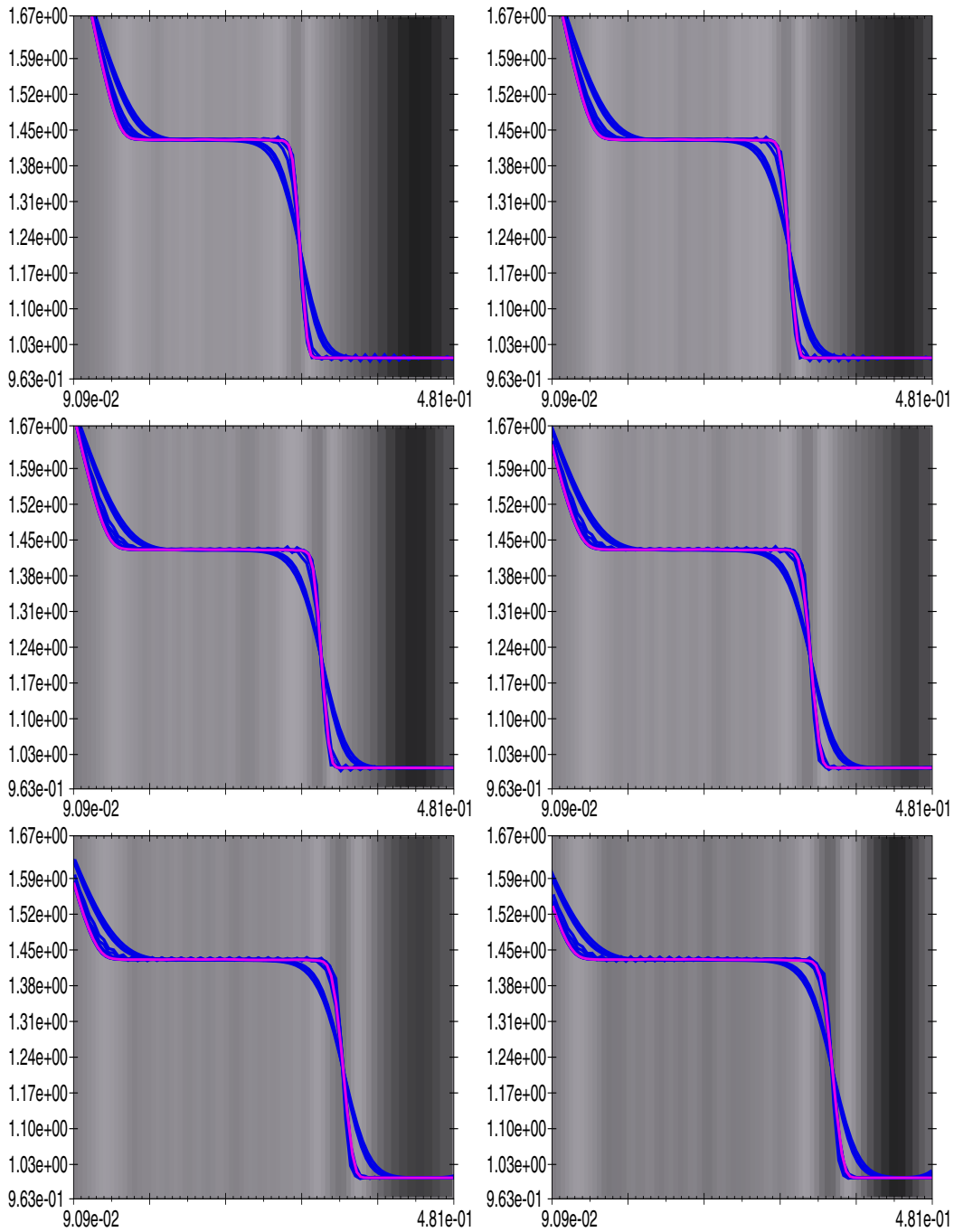
Το τελευταίο αρνητικό χαρακτηριστικό είναι και το μόνο που κρατάει αυτήν την μέθοδο σε πειραματικό στάδιο. Ωστόσο, το γεγονός ότι, το οριακά χαλαρωτικό σχήμα, δίνει απρόσμενα καλά αποτελέσματα χωρίς να μιμείται τον μηχανισμό των viscous προσεγγίσεων, αλλά χρησιμοποιώντας κατάλληλη αναδιαμέριση, είναι και το σημαντικότερο αποτέλεσμα αυτής της εργασίας.



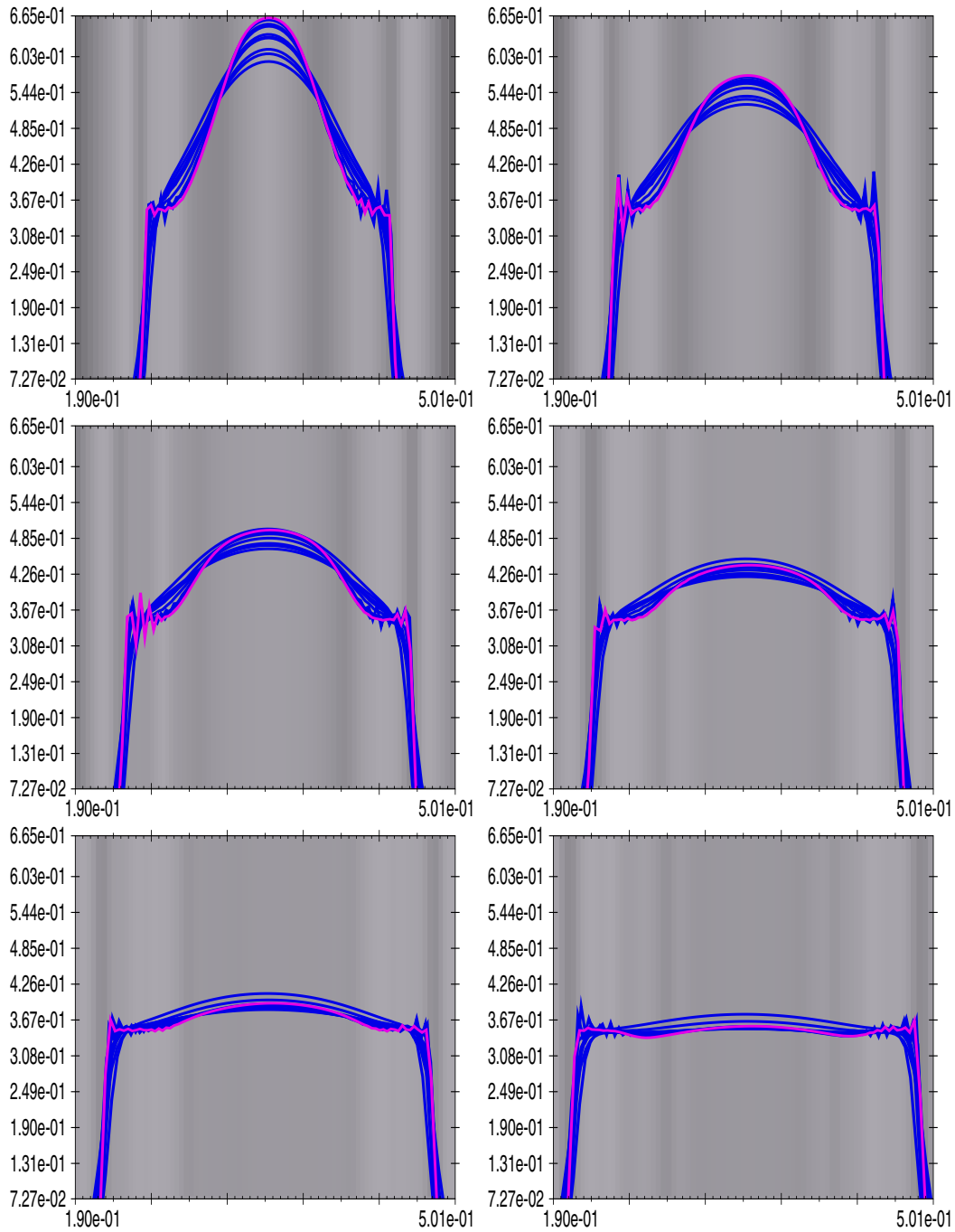
Σχήμα 3.33: **Μεταφοράς:** Μεγέθυνση στα 6 γνωστά στιγμιότυπα. Διακρίνονται, οικογένεια λύσεων από τον αλγόριθμο μεταγωγικού relaxation με αναδιαμέριση, για τιμές του  $\varepsilon$  από  $10^{-4}$  έως  $10^{-100}$ ,  $power = 4.3 \cdot 10^{-3}$  και σταθερό πλήθος χρονικών βημάτων  $N_\kappa = 2 \cdot 200$ , καθώς και η λύση του οριακού relaxation με αναδιαμέριση (μώβ καμπύλη) για τις ίδιες τιμές παραμέτρων  $\kappa$ ,  $power$ .



Σχήμα 3.34: **Buckley Leverett**: Μεγέθυνση στα 6 γνωστά στιγμιότυπα. Διακρίνονται, οικογένεια λύσεων απο τον αλγόριθμο μεταγωγικού relaxation με αναδιαμέριση, για τιμές του  $\varepsilon$  απο  $10^{-4}$  έως  $10^{-100}$ ,  $power = 3.5 \cdot 10^{-2}$  και σταθερό πλήθος χρονικών βημάτων  $N_\kappa = 4 \cdot 200$ , καθώς και η λύση του οριακού relaxation με αναδιαμέριση (μώβ καμπύλη) για τις ίδιες τιμές παραμέτρων  $\kappa$ ,  $power$ .



Σχήμα 3.35: Πρώτη συνιστώσα **Isentropic flow**: Μεγέθυνση στα 6 γνωστά στιγμιότυπα. Διακρίνονται, οικογένεια λύσεων απο τον αλγόριθμο μεταγωγικού relaxation με αναδιαμέριση, για τιμές του  $\varepsilon$  απο  $10^{-4}$  έως  $10^{-100}$ ,  $power = 3.5 \cdot 10^{-2}$  και σταθερό πλήθος χρονικών βημάτων  $N_\kappa = 2 \cdot 200$ , καθώς και η λύση του οριακού relaxation με αναδιαμέριση (μώβ καμπύλη) για τις ίδιες τιμές παραμέτρων  $\kappa$ ,  $power$ .



Σχήμα 3.36: Πρώτη συνιστώσα **Shallow Water**: Μεγέθυνση στα 6 γνωστά στιγμιότυπα. Διακρίνονται, οικογένεια λύσεων απο τον αλγόριθμο μεταγωγικού relaxation με αναδιαμέριση, για τιμές του  $\epsilon$  απο  $10^{-4}$  έως  $10^{-100}$ ,  $power = 3.5 \cdot 10^{-2}$  και σταθερό πλήθος χρονικών βημάτων  $N_\kappa = 3 \cdot 200$ , καθώς και η λύση του οριακού relaxation με αναδιαμέριση (μώβ καμπύλη) για τις ίδιες τιμές παραμέτρων  $\kappa$ ,  $power$ .

### 3.5.2 Ευθεία διακριτοποίηση των Νόμων Διατήρησης

Κλείνουμε το κεφάλαιο προσπαθώντας να διαπιστώσουμε αν τουλάχιστον πειραματικά, επαληθεύεται η παραπάνω πρόταση. Προς τούτο διακριτοποιούμε κατα Galerkin κατευθείαν το πρόβλημα Νόμων Διατήρησης.

Εστω  $N_h = \#\mathcal{T}_h^n$  η πληθυκότητα της διαμερίσης  $\mathcal{T}_h^n$  του  $\Omega$  στο  $n$  χρονικό βήμα (σταθερή ως προς  $n$ ),

$Rec_S(x)$  η παρεμβάλουσα του στοιχείου  $x$  στον χώρο  $S$ ,  $g$  η εκτιμήτρια συνάρτηση "καμπυλότητα" και

$\mathcal{T}_h^0$  ομοιόμορφη διαμέριση του  $\Omega$

$$S_{h,0} = \{ \phi \in C(\mathbb{R}) : \phi|_K \in \mathbb{P}_p(K), K \in \mathcal{T}_h^0, \phi|_{\Omega^c} \equiv 0 \},$$

αρχικός χώρος πεπερασμένων στοιχείων, τότε η ακολουθία  $\{u_h^n\}$  της Galerkin προσέγγισης με αναδιαμέριση, στις χρονικές στιγμές  $n\kappa$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$u_h^0 = Rec_{S_{h,0}}(u_0) \text{ και για } n = 0, 1, \dots$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{T}_h^{n+1} \text{ διαμέριση του } \Omega \text{ τ.ω. } \#\mathcal{T}_h^{n+1} = N_h \text{ και} \\ \forall K \in \mathcal{T}_h^{n+1} \quad \int_K g \circ u_h^n d\mu = \frac{1}{N_h} \int_{\Omega} g \circ u_h^n d\mu \\ S_{h,n+1} = \{ \phi \in C(\mathbb{R}) : \phi|_K \in \mathbb{P}_p(K), K \in \mathcal{T}_h^{n+1}, \phi|_{\Omega^c} \equiv 0 \} \\ \bar{u} = Rec_{S_{h,n+1}}(u_h^n) \\ \left( \frac{u_h^{n+1} - \bar{u}}{\kappa}, \phi \right) - \sum_{i=1}^N (F_i(\bar{u}), \partial_{x_i} \phi) = 0, \quad \forall \phi \in S_{h,n+1} \end{array} \right. \quad (3.5.3)$$

και για μονοδιάστατη χωρική μεταβλητή ( $N=1$ )

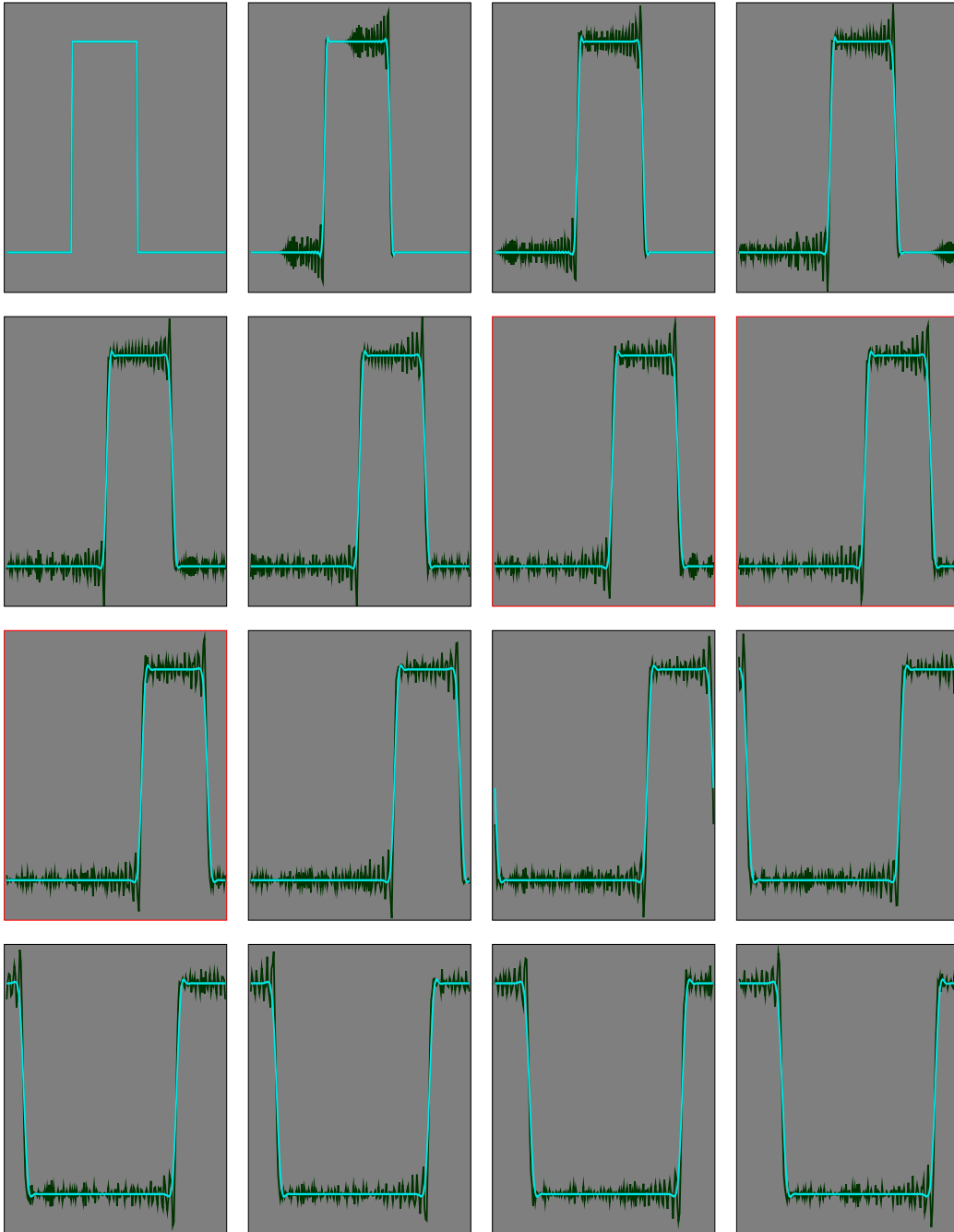
$u_h^0 = Rec_{S_{h,0}}(u_0)$  και για  $n = 0, 1, \dots$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{T}_h^{n+1} \text{ διαμέριση του } [a, b] \text{ τ.ώ. } \#\mathcal{T}_h^{n+1} = N_h, x_0 = a \text{ και} \\ \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(u_h^n(x)) dx = \frac{1}{N_h} \int_a^b g(u_h^n(x)) dx, \quad i = 1, \dots, N_h \\ S_{h,n+1} = \{ \phi \in C(\mathbb{R}) : \phi|_K \in \mathbb{P}_p(K), K \in \mathcal{T}_h^{n+1}, \phi|_{\Omega^c} \equiv 0 \} \\ \bar{u} = Rec_{S_{h,n+1}}(u_h^n) \\ (\frac{u_h^{n+1} - \bar{u}}{\kappa}, \phi) - (F(\bar{u}), \partial_x \phi) = 0, \quad \forall \phi \in S_{h,n+1} \end{array} \right. \quad (3.5.4)$$

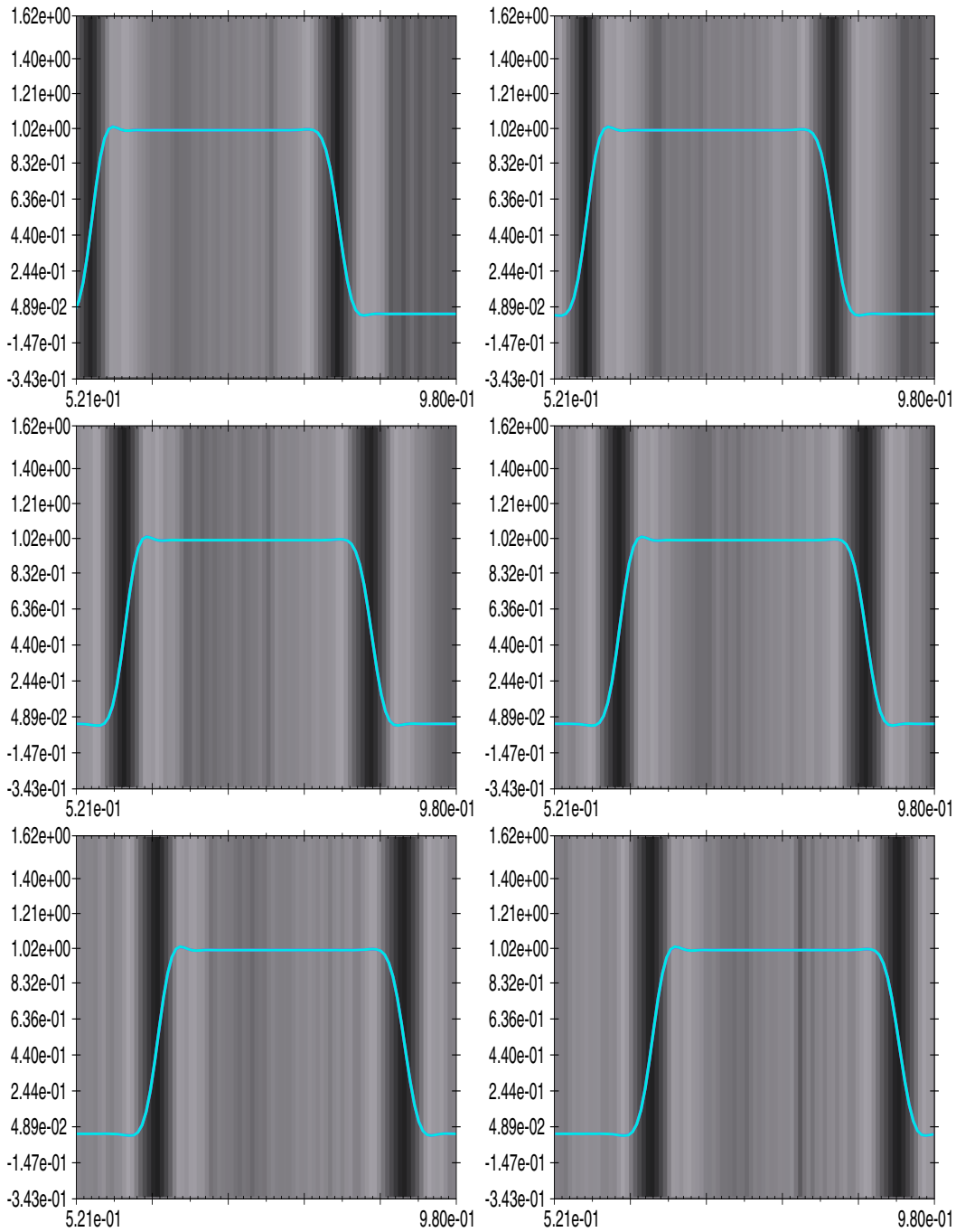
Τα αποτελέσματα απο την εφαρμογή (3.5.4) στα δοκιμαστικά προβλήματα, ήταν πολύ ικανοποιητικά. Το μόνο αρνητικό σημείο, είναι κάποια ταραχώδη συμπεριφορά σε περιοχές των ασυνεχειών σε απρόσμενες χρονικές στιγμές. Είναι κατα κάποιο τρόπο αναμενόμενο, δεδομένου ότι ο μόνος σταθεροποιητικός μηχανισμός του σχήματος αυτού, είναι η αναδιαμέριση. Ας θυμηθούμε ότι η προτεινόμενη διαμέριση σύμφωνα με την (3.2.2), είναι μία απο τις πολλές πιθανές διαμερίσεις που έχουν πυκνότητα κόμβων ανάλογη προς την αποτίμηση της εκτιμήτριας. Οι διαφορές των θέσεων των κόμβων, αυτών των διαμερίσεων, είναι γενικά μικρές σε σχέση με την μικρότερη μεταξύ τους απόσταση (λόγω της απαραίτητης συνθήκης που πρέπει να ικανοποιούν), αλλά σε σχέση με το μέτρο Lebesgue της περιοχής όπου βρίσκεται η ασυνέχεια (που είναι 0), είναι τεράστιες. Μια πιθανή σκέψη είναι η αναδιαμέριση να ενσωματωθεί μέσα στο σύστημα Νόμων Διατήρησης και να παρέχεται απο την διακριτοποίηση του νέου επεκτεταμένου σχήματος, ως υποπροϊόν σε κάθε χρονικό βήμα.

Υπάρχουν και άλλες πιθανές λύσεις, το σημαντικό αυτήν την στιγμή είναι οι μέθοδοι που προτείνονται σ' αυτήν την εργασία και ο προβληματισμός που αναπτύχθηκε για την συμπεριφορά τους, ανοιγεί νέες κατευθύνσεις εξερεύνησης στην αριθμητική επίλυση των Νόμων Διατήρησης.

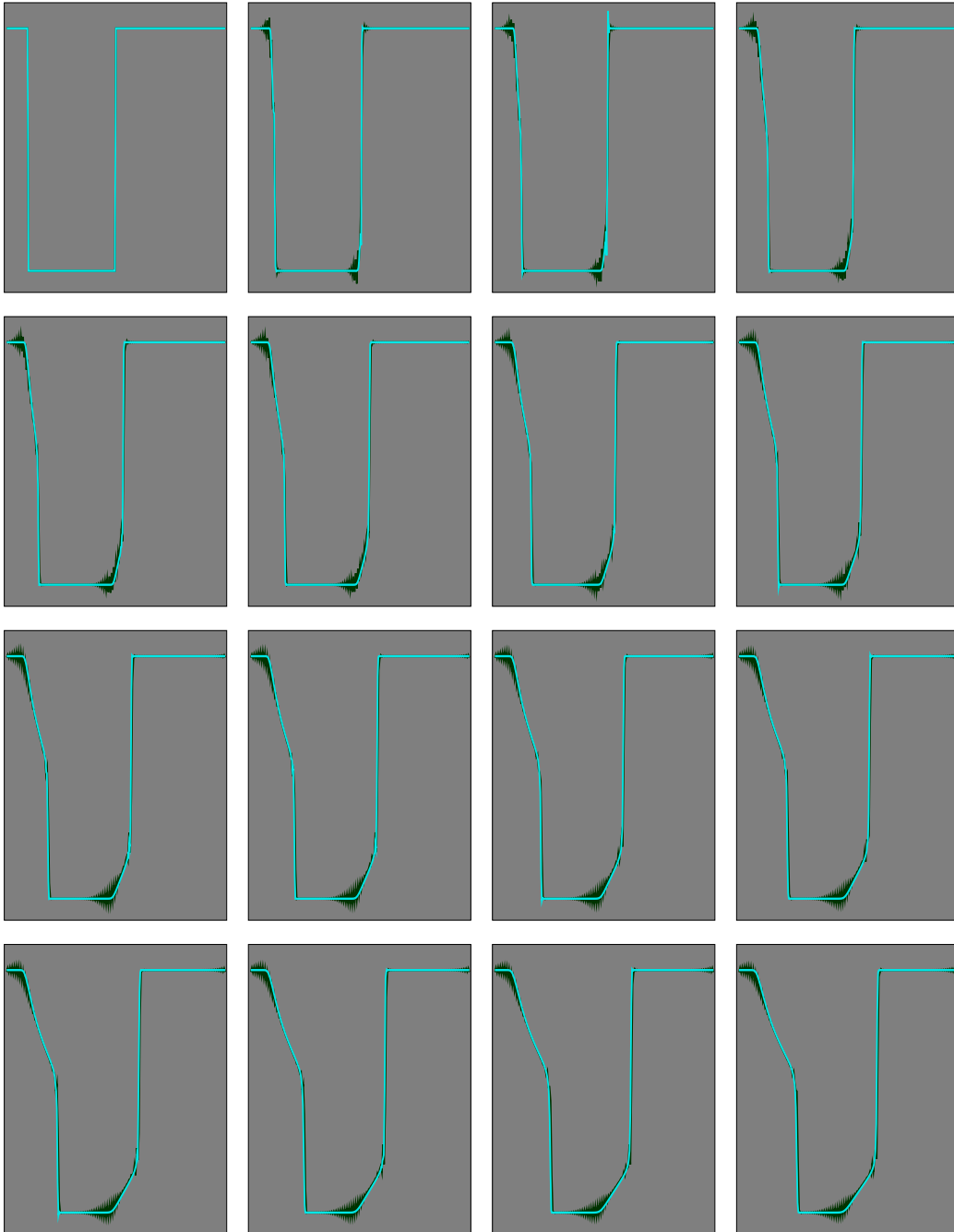




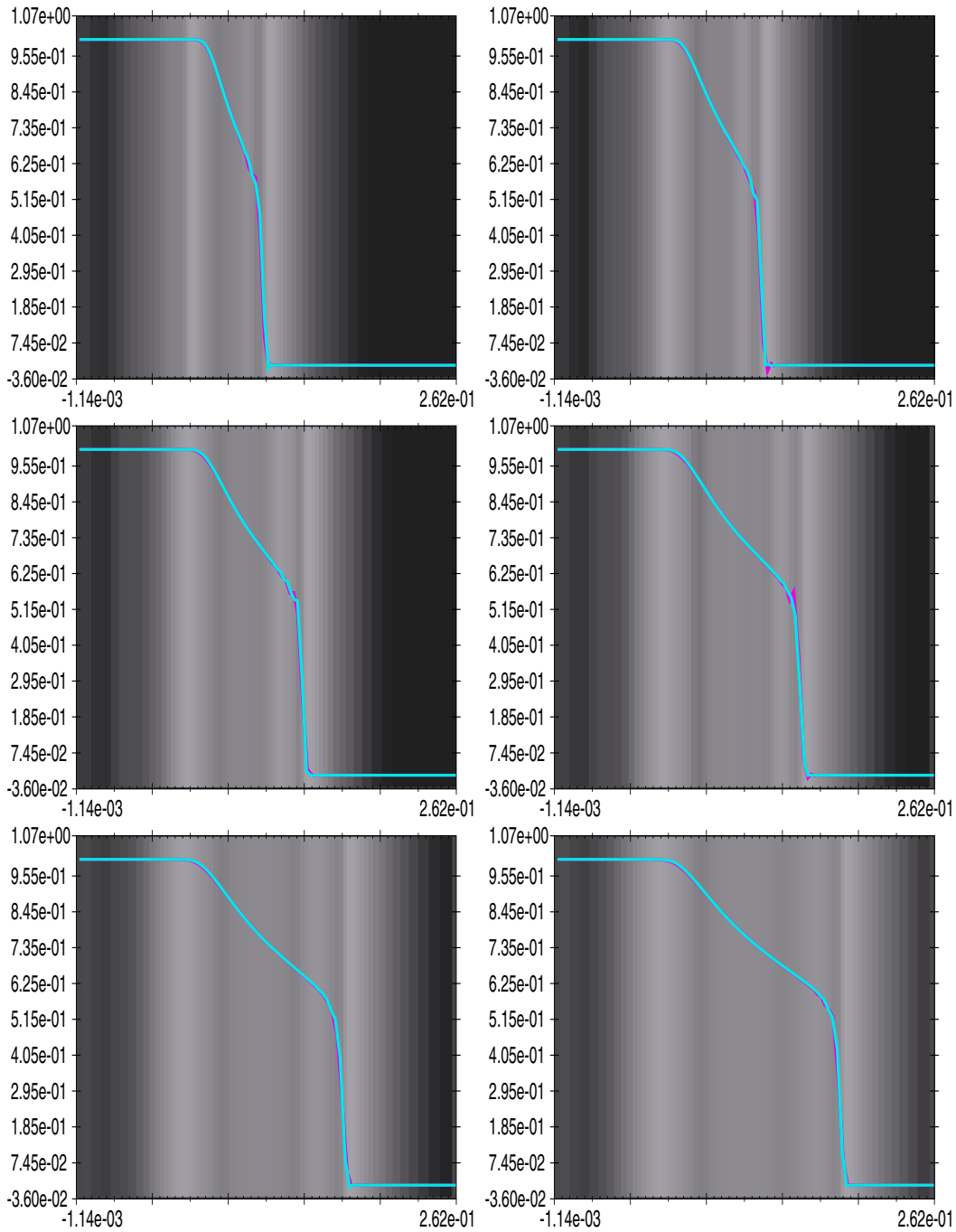
Σχήμα 3.37: **Μεταφοράς:** Αντιπαρατίθενται, η λύση απο τον αρχικό αλγόριθμο relaxation με παραμέτρους ( $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-5}$ ,  $A_{1,1} = 4.5$ ,  $N_{\kappa} = 19 \cdot 200$ ) (σκούρα πράσινη καμπύλη), με την λύση απο τον αλγόριθμο της ευθείας διακριτοποίησης Νόμων Διατήρησης με αναδιαμέριση καμπυλότητας (γαλάζια καμπύλη), για  $N_{\kappa} = 2 \cdot 200$ ,  $power = 4.3 \cdot 10^{-3}$ .



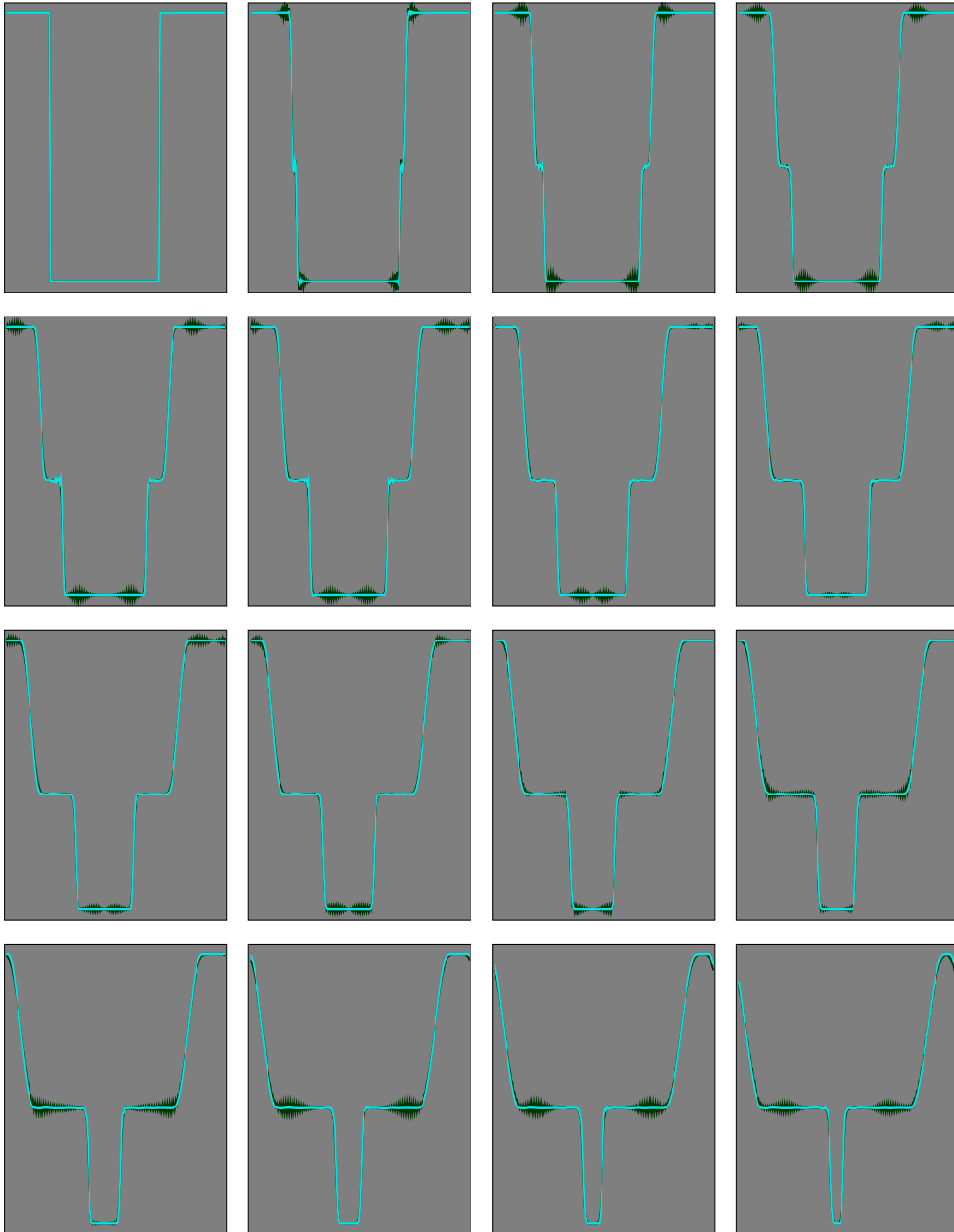
Σχήμα 3.38: **Μεταφοράς:** Μεγέθυνση των 6 γνωστών στιγμιότυπων. Αντιπαρατίθενται, η λύση από τον αλγόριθμο οριακού relaxation με αναδιαμέριση καμπυλότητας ( μώβ καμπύλη) και αυτή του αλγορίθμου της ευθείας διακριτοποίησης Νόμων Διατήρησης με αναδιαμέριση καμπυλότητας ( γαλάζια καμπύλη) και κοινές παραμέτρους  $N_{\kappa} = 2 \cdot 200$ ,  $power = 4.3 \cdot 10^{-3}$ .



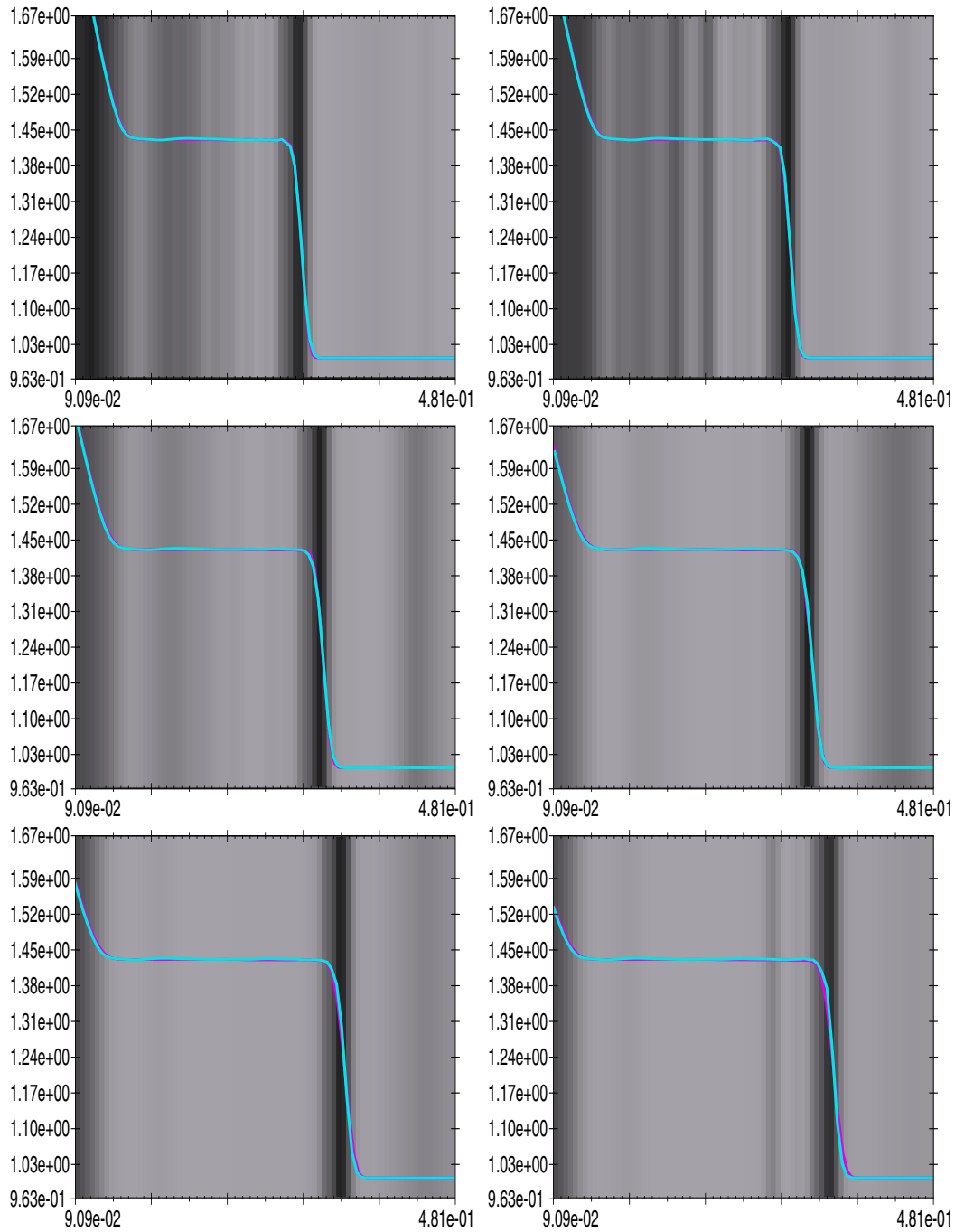
Σχήμα 3.39: **Buckley Leverett** : Αντιπαρατίθενται, η λύση απο τον αρχικό αλγόριθμο relaxation με παραμέτρους ( $\varepsilon = 2.5 \cdot 10^{-5}$ ,  $A_{1,1} = 100$ ,  $N_\kappa = 17 \cdot 200$ ) (σκούρα πράσινη καμπύλη), με την λύση απο τον αλγόριθμο της ευθείας διακριτοποίησης Νόμων Διατήρησης με αναδιαμέριση καμπυλότητας (γαλάζια καμπύλη), για  $N_\kappa = 4 \cdot 200$ ,  $power = 3.5 \cdot 10^{-2}$ .



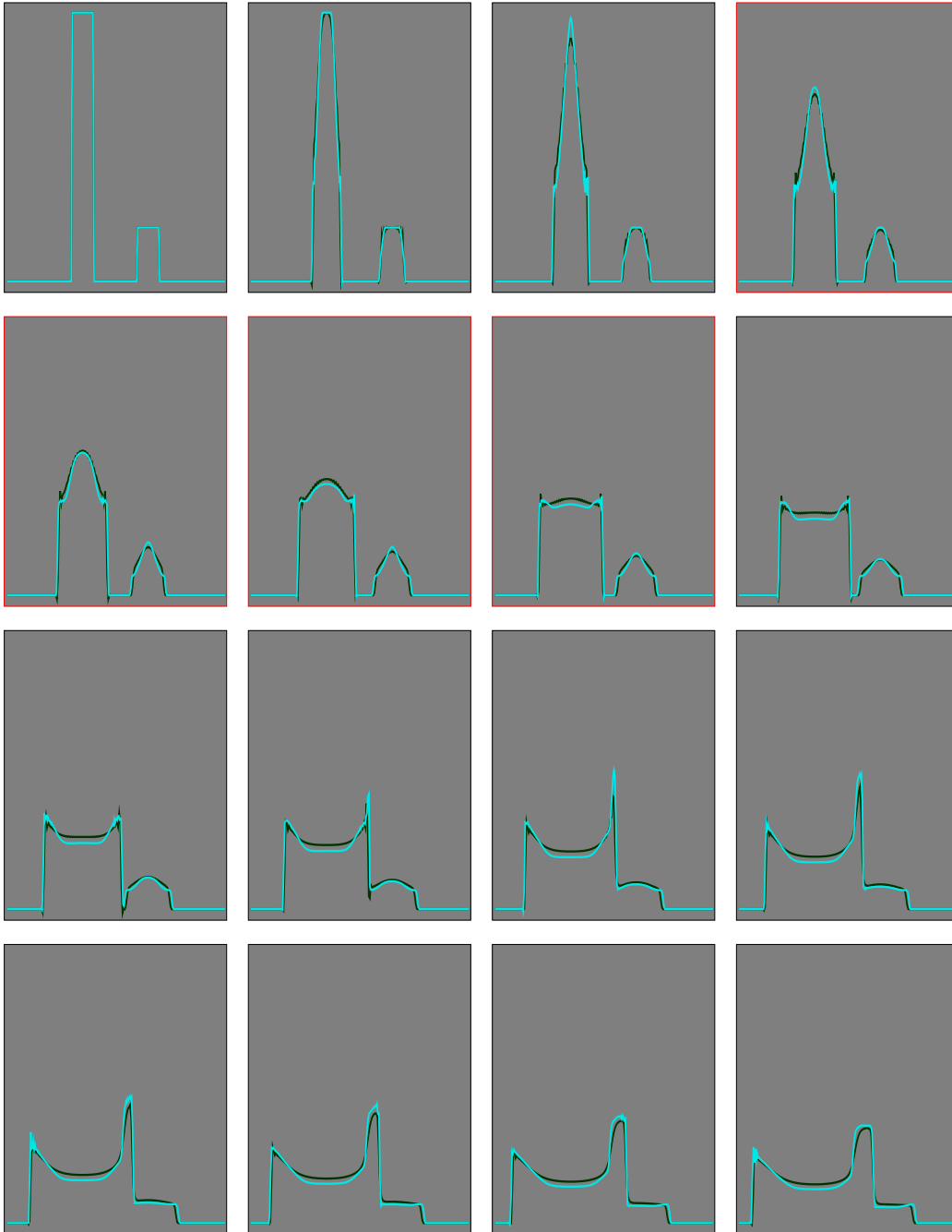
Σχήμα 3.40: **Buckley Leverett** : Μεγέθυνση των 6 γνωστών στιγμιότυπων. Αντιπαρατίθενται, η λύση απο τον αλγόριθμο οριακού relaxation με αναδιαμέριση καμπυλότητας ( μώβ καμπύλη) και αυτή του αλγορίθμου της ευθείας διακριτοποίησης Νόμων Διατήρησης με αναδιαμέριση καμπυλότητας ( γαλάζια καμπύλη) και κοινές παραμέτρους  $N_{\kappa} = 4 \cdot 200$ ,  $power = 3.5 \cdot 10^{-2}$ .



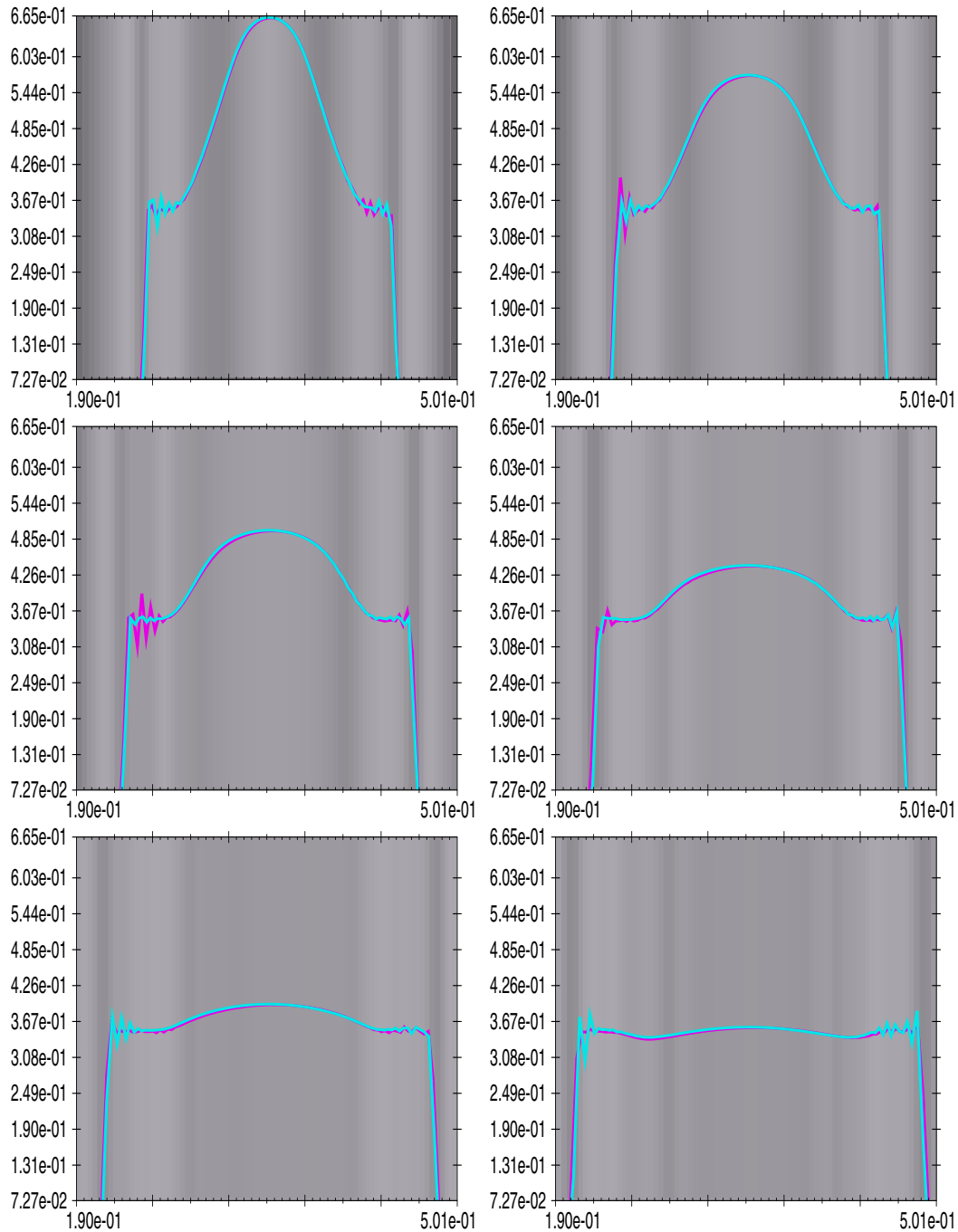
Σχήμα 3.41: Πρώτη συνιστώσα **Isentropic flow** : Αντιπαρατίθενται, η λύση απο τον αρχικό αλγόριθμο relaxation με παραμέτρους (  $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-5}$ ,  $A_{1,1} = 16$ ,  $A_{2,2} = 30$ ,  $N_{\kappa} = 20 \cdot 200$  ) (σκούρα πράσινη καμπύλη), με την λύση απο τον αλγόριθμο της ευθείας διακριτοποίησης Νόμων Διατήρησης με αναδιαμέριση καμπυλότητας (γαλάζια καμπύλη), για  $N_{\kappa} = 2 \cdot 200$ ,  $power = 3.5 \cdot 10^{-2}$  .



Σχήμα 3.42: Πρώτη συνιστώσα **Isentropic flow** : Μεγέθυνση των 6 γνωστών στιγμιότυπων. Αντιπαρατίθενται, η λύση απο τον αλγόριθμο οριακού relaxation με αναδιαμέριση καμπυλότητας ( μώβ καμπύλη) και αυτή του αλγορίθμου της ευθείας διακριτοποίησης Νόμων Διατήρησης με αναδιαμέριση καμπυλότητας ( γαλάζια καμπύλη) και κοινές παραμέτρους  $N_{\kappa} = 2 \cdot 200$ ,  $power = 3.5 \cdot 10^{-2}$  .



Σχήμα 3.43: **Πρώτη συνιστώσα Shallow Water** : Αντιπαρατίθενται, η λύση απο τον αρχικό αλγόριθμο relaxation με παραμέτρους (  $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-5}$ ,  $A_{1,1} = 4$ ,  $A_{2,2} = 90$ ,  $N_{\kappa} = 19 \cdot 200$  ) (σκούρα πράσινη καμπύλη), με την λύση απο τον αλγόριθμο της ευθείας διακριτοποίησης Νόμων Διατήρησης με αναδιαμέριση καμπυλότητας (γαλάζια καμπύλη), για  $N_{\kappa} = 3 \cdot 200$ ,  $power = 3.5 \cdot 10^{-2}$  .



Σχήμα 3.44: **Πρώτη συνιστώσα Shallow Water** : Μεγέθυνση των 6 γνωστών στιγμιότυπων. Αντιπαρατίθενται, η λύση απο τον αλγόριθμο οριακού relaxation με αναδιαμέριση καμπυλότητας ( μώβ καμπύλη) και αυτή του αλγορίθμου της ευθείας διακριτοποίησης Νόμων Διατήρησης με αναδιαμέριση καμπυλότητας ( γαλάζια καμπύλη) και κοινές παραμέτρους  $N_{\kappa} = 3 \cdot 200$ ,  $power = 3.5 \cdot 10^{-2}$  .



# Βιβλιογραφία

- [1] D. Aregba-Driollet and R. Natalini *Discrete kinetic schemes for multi-dimensional systems of conservation laws* , SIAM J. Numer. Anal. **37** ( 2000 ) 1973-2004 .
- [2] I. Babuška and J. E. Osborn *Analysis of finite element methods for second order boundary value problems using mesh dependent norms*, Numer. Math. **34** (1980) 41–62.
- [3] I. Babuška, J. E. Osborn and J. Pitkäranta, *Analysis of mixed methods using mesh dependent norms*, Math. Comp. **35** (1980) 1039–1062.
- [4] S. C. Brenner and L. R. Scott, *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*, Springer -Verlag, New York, 1994.
- [5] G.-Q. Chen, C. D. Levermore and T.-P. Liu *Hyperbolic conservation laws with stiff relaxation terms and entropy* , Comm. Pure Appl. Math. **47** (1994) 789-830.
- [6] B. Cockburn and P.-A. Gremaud, *Error estimates for finite element methods for scalar conservation laws*, SIAM J. Numer. Anal., **33** (1996) 522-554.
- [7] B. Cockburn, S. Hou and C.-W. Shu *The Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws. IV. The multidimensional case*, Math. Comp. **54** (1990) 545–581.
- [8] B. Cockburn, C. Johnson, C.-W. Shu and E. Tadmor, *Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations*, A. Quarteroni (Ed.), Lecture notes in Mathematics, Volume 1697, Springer-Verlag, 1998.

- [9] B. Cockburn and C.-W. Shu *TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws. II. General framework*, Math. Comp. **52** (1989), 411–435 .
- [10] M. Crouzeix and V. Thomée, *On the stability in  $L_p$  and  $W_p^1$  of the  $L_2$  projection into finite element function spaces*, Math. Comp. **48** (1987), 521–532.
- [11] C.M. Dafermos, *Hyperbolic conservation laws in continuum physics*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 325, Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [12] R. DiPerna, *Convergence of approximate solutions to conservation laws*, Arch. Rational Mech. Analysis, **60** (1983), 75-100.
- [13] K. Eriksson and C. Johnson, *Adaptive finite element methods for parabolic problems II: Optimal error estimates in  $L_\infty L_2$  and  $L_\infty L_\infty$* , SIAM J. Numer. Anal. **32** (1995) 706–740
- [14] E. Godlewski and P.-A. Raviart, *Numerical Approximation of Hyperbolic Systems of Conservation Laws.*, Appl. Math. Series 118, Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [15] L. Gosse and Ch. Makridakis, *Two a posteriori error estimates for one dimensional scalar conservation laws*, SIAM J. Numer. Anal. **38** ( 2000 ) 964-988 .
- [16] L. Gosse and A. Tzavaras, *Convergence of relaxation schemes to the equations of elastodynamics*, Math. Comp. **70** (2001) 555-577.
- [17] J. Jaffré, C. Johnson and A. Szepessy, *Convergence of the discontinuous Galerkin finite element method for hyperbolic conservation laws*, Math. Models Methods Appl. Sci. **5** (1995) 367–386 .
- [18] S. Jin and Z. Xin *The relaxing schemes for systems of conservation laws in arbitrary space dimensions*, Comm. Pure Appl. Math. **48** (1995) 235-277.
- [19] C. Johnson and A. Szepessy, *On the convergence of a finite element method for a nonlinear hyperbolic conservation law*, Math. Comp. **49** (1987), 427–444.

- [20] C. Johnson and A. Szepessy, *Adaptive finite element methods for conservation laws. Part I: The general approach*, Comm. Pure Appl. Math. **48** (1995) 199-234.
- [21] C. Johnson, A. Szepessy and P. Hansbo, *On the convergence of shock-capturing streamline diffusion finite element methods for hyperbolic conservation laws*, Math. Comp. **54** (1990), 107–129.
- [22] T. Katsaounis and Ch. Makridakis *Finite volume relaxation schemes for multidimensional conservation laws*, Math.Comp. **70** (2001) 533–553.
- [23] M.A. Katsoulakis, G.T. Kossioris and Ch. Makridakis, *Convergence and error estimates of relaxation schemes for multidimensional conservation laws*, Comm. Partial Dif. Equations, **24** (1999) 395–424.
- [24] D. Kröner, Numerical schemes for conservation laws, Wiley and Teubner, 1997.
- [25] A. Kurganov and E. Tadmor, *New high resolution central schemes for nonlinear conservation laws and convection-diffusion equations*, J. Comput. Phys. **160** (2000) 241-282 .
- [26] Ph.G. LeFloch, Hyperbolic systems of conservation laws. The theory of classical and nonclassical shock waves, Lectures in Mathematics ETH Zurich, Birkhauser Verlag, Basel, 2002.
- [27] R.J. LeVeque, Numerical Methods for Conservation Laws, Lectures in Mathematics ETH Zurich, Birkhauser, Zurich, 1992.
- [28] Lin P., *Young measures and an application of compensated compactness to one-dimensional nonlinear elastodynamics*, Trans. Amer. Math. Soc., **329** (1992), 377-413.
- [29] F. Murat, *L'injection du cone positif de  $H^{-1}$  dans  $W^{-1,q}$  est compacte pour tout  $q < 2$* , J. Math. Pures Appl., **60** (1981), 309-322.
- [30] H. Nessyahu and E. Tadmor, *Non-oscillatory central differencing for hyperbolic conservation laws*, J. Comp. Phys., **87** (1990) 408-463 .

- [31] B. Perthame and A.E. Tzavaras, *Kinetic formulation for systems of two conservation laws and elastodynamics*, Arch. Rational Mech. Analysis, **155** (2000), 1-48.
- [32] M.E. Schonbek, *Convergence of solutions to nonlinear dispersive equations*, Comm. Partial Differential Equations, **7** (1982), 959-1000.
- [33] D. Serre and J. Shearer, *Convergence with physical viscosity for nonlinear elasticity*, (1993) (unpublished preprint).
- [34] J.W. Shearer, *Global existence and compactness in  $L^p$  for the quasilinear wave equation*, Comm. Partial Differential Equations, **19** (1994), 1829-1877.
- [35] D. Serre *Relaxation semi linéaire et cinétique des systèmes de lois de conservation*, Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. Non Linéaire **17** (2000) 169–192.
- [36] C.-W. Shu *Total-variation-diminishing time discretizations*, SIAM J. Sc. Comp. **9** (1988), 1073–1084.
- [37] C.-W. Shu and S. Osher *Efficient implementation of essentially nonoscillatory shock-capturing schemes*, J. Comput. Phys. **77** ( 1988 ) 439–471.
- [38] A. Szepessy, *Convergence of a shock-capturing streamline diffusion finite element method for a scalar conservation law in two space dimensions*, Math. Comp. **53** (1989), 527–545.
- [39] L. Tartar, *Compensated compactness and applications to partial differential equations*, In: Nonlinear Analysis and Mechanics, Heriot Watt Symposium, Vol. IV, R.J. Knops, ed., Pitman Research Notes in Math., New York, 1979, pp. 136–192.
- [40] A. Tzavaras, *Viscosity and relaxation approximation for hyperbolic systems of conservation laws*, In: D.Kröner, M. Ohlberger and C. Rohde (Eds.) An Introduction to recent Developments in Theory and Numerics for Conservation Laws. Lecture notes in Computational Science and Engineering. Volume 5, pages 73-122 Springer-Verlag, 1998

- [41] A. Tzavaras, *Materials with internal variables and relaxation to conservation laws*, Arch. Ration. Mech. Anal. **146** (1999) 2, 129–155 .
- [42] D. Aregba-Driollet and R. Natalini *Convergence of relaxation schemes for conservation laws* Appl. Anal. vol 61 1996 pages 163-193
- [43] D. Aregba-Driollet and R. Natalini *Discrete kinetic schemes for multi-dimensional systems of conservation laws* SIAM J. Numer. Anal. vol 37 2000 pages 1973-2004
- [44] I. Babuška *The adaptive finite element method* TICAM Forum Notes no 7 (1997), University of Texas at Austin
- [45] I. Babuška and W. Gui *Basic principles of feedback and adaptive approaches in the finite element method* Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. vol 55 1986 pages 27-42
- [46] M. Berger and R. LeVeque, *Adaptive mesh refinement using wave-propagation algorithms for hyperbolic systems*, SIAM J. Numer. Anal. **35** (1998), no. 6, 2298–2316
- [47] F. Bouchut *Construction of BGK models with a family of kinetic entropies for a given system of conservation laws* J. Statist. Phys. vol 95 1999 pages 113-170
- [48] R.E. Caflisch and G.C. Papanicolaou *The fluid dynamical limit of a nonlinear model Boltzmann equation*. Comm. Pure Appl. Math. vol 32 1979 pages 589–616
- [49] B. Cockburn, F. Coquel and P. LeFloch *An error estimate for finite volume methods for conservation laws* Math. Comp. vol 64 1994 pages 77-103
- [50] B. Cockburn and H. Gau *A posteriori error estimates for general numerical methods for scalar conservation laws*, Math. Applic. Comp. **14** (1995) 37-47
- [51] B. Cockburn and P.-A. Gremaud *Error estimates for finite element methods for scalar conservation laws* SIAM J. Numer. Anal. vol 33 1996 pages 522-554

- [52] B. Cockburn, S. Y. Lin and C.-W. Shu *TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws. III. One-dimensional systems* *J. Comput. Phys.* **84** (1989), 90–113
- [53] K. Dekker and J.D. Verwer, *Stability of Runge-Kutta Methods for Stiff Nonlinear Differential Equations* *CWI Monographs*, North-Holland Amsterdam 1984
- [54] L. Gosse and Ch. Makridakis, *A-posteriori error estimates for numerical approximations to scalar conservation laws: schemes satisfying strong and weak entropy inequalities*, *IACM-FORTH Technical Report 98-4* (1998)
- [55] D. Jacobs, B. McKinney, M. Shearer *Travelling wave solutions of the modified Korteweg-de Vries-Burgers equation* *J. Differential Equations*, vol 116, 1995 pages 448–467
- [56] M.A. Katsoulakis and A.E. Tzavaras *Contractive relaxation systems and the scalar multidimensional conservation law* *Comm. P.D.E* vol 22 1997 pages 195-233
- [57] D. Kröner and M. Ohlberger *A posteriori error estimates for upwind finite volume schemes for nonlinear conservation laws in multidimensions*, *Math. Comp.* **69** (2000), pp. 25-39
- [58] N.N. Kuznetsov *Accuracy of some approximate methods for computing the weak solutions of a first-order quasi-linear equation* *USSR Comp. Math. and Math. Phys.* vol 16, 1976 pages 105-119
- [59] R. J. LeVeque and H. C. Yee *A study of numerical methods for hyperbolic conservation laws with stiff terms* *J. Comp. Phys.* vol 86 1990 pages 187-210
- [60] T.-P. Liu *Hyperbolic conservation laws with relaxation* *Comm. Math. Phys.* vol 108 1987 pages 153-175
- [61] B. J. Lucier *A moving mesh numerical method for hyperbolic conservation laws* *Math. Comp.* vol 40 1983 pages 91-106

- [62] J.J.H. Miller, E. O’Riordan and G. I. Shishkin , *Fitted numerical methods for singular perturbation problems. Error estimates in the maximum norm for linear problems in one and two dimensions* World Scientific Publishing Co. River Edge, NJ 1996
- [63] R. Natalini *Convergence to equilibrium for the relaxation approximations of conservation laws* *Comm. Pure Appl. Math.* vol 8 1996 pages 795-823
- [64] R. Natalini *A discrete kinetic approximation of entropy solutions to multidimensional scalar conservation laws* *J. Differential Equations* vol 148 1998 pages 292-317
- [65] S. Osher and E. Tadmor, *On the convergence of difference approximations to scalar conservation laws*, *Math. Comp.* **50** (1988) 19-51
- [66] B. Perthame, *An introduction to kinetic schemes for gas dynamics*, In: D.Kröner, M. Ohlberger and C. Rohde (Eds.) *An Introduction to recent Developments in Theory and Numerics for Conservation Laws. Lecture notes in Computational Science and Engineering. Volume 5*, pages 1–27 Springer-Verlag, 1998
- [67] H.-G. Roos, M. Stynes and L. Tobiska , *Numerical methods for singularly perturbed differential equations. Convection-diffusion and flow problems.* Springer-Verlag Berlin 1996
- [68] H. J. Schroll, A. Tveito and R. Winther *An  $L^1$  error bound for a semi-implicit difference scheme applied to a stiff system of conservation laws* *SIAM J. Num. Analysis* vol 34 1997 pages 1152–1166
- [69] T. Sonar and E. Süli, *A dual graph-norm refinement indicator for finite volume approximations of the Euler equations*, *Numer. Math.* **78** (1998) 619-658
- [70] E. Süli, *A-posteriori error analysis and adaptivity for finite element approximations of hyperbolic problems*, In: D.Kröner, M. Ohlberger and C. Rohde (Eds.) *An Introduction to recent Developments in Theory and Numerics for Conservation Laws. Lecture notes in Computational Science and Engineering. Volume 5*, pages 123-194 Springer-Verlag, 1998