Εκ των υστέρων εκτιμήσεις σφάλματος για τις γραμμικοποιημένες εξισώσεις των Navier–Stokes

Διδακτορική Διατριβή

Φωτεινή Καρακατσάνη

ΤΜΗΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΗΡΑΚΛΕΙΟ 2007

Τριμελής επιτροπή

Χαράλαμπος Μακριδάκης (Επιβλέπων), Καθηγητής, Τμήμα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης
Γεώργιος Ακρίβης, Καθηγητής, Τμήμα Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων
Θεόδωρος Κατσαούνης, Επίκουρος Καθηγητής, Τμήμα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης

Περίληψη

Στην εργασία αυτή αποδεικνύουμε εκ των υστέρων εκτιμήσεις σφάλματος για τις γραμμικοποιημένες, δυναμικές εξισώσεις των Navier–Stokes, δηλαδή τις δυναμικές, ασυμπίεστες, εξισώσεις Stokes, οι οποίες μοντελοποιούν την πολύ αργή ροή. Αρχικά θεωρούμε το ημιδιακριτό πρόβλημα στο χώρο και, χρησιμοποιώντας έναν κατάλληλο τελεστή ανακατασκευής Stokes, παράγουμε μια βοηθητική εξίσωση σφάλματος που ικανοποιεί ακριβώς τη συνθήκη ασυμπιεστότητας. Έτσι, χρησιμοποιώντας συνήθη επιχειρήματα από τη θεωρία των Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων, λαμβάνουμε εκ των υστέρων εκτιμήσεις σφάλματος που βασίζονται στους υπάρχοντες εκτιμητές του στατικού προβλήματος του Stokes. Αποδεικνύονται εκτιμήσεις σφάλματος για την ταχύτητα στις νόρμες $L^\infty(L^2)$ και $L^2(H^1)$ για τη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων και χωρίων. Επίσης, αποδεικνύουμε εκ των υστέρων εκτιμήσεις σφάλματος βέλτιστης τάξης για τη χρονική διακριτοποίηση με τη ϑ-κλασματική μέθοδο. Το συγκεκριμένο αριθμητικό σχήμα, χάρη στις ιδιότητες ευστάθειάς του, είναι κατάλληλο για τη χρονική διακριτοποίηση των εξισώσεων Navier–Stokes. Συγκεκριμένα, έχει ακρίβεια δεύτερης τάξης όπως η μέθοδος των Crank–Nicolson, αλλά επιπλέον είναι ισχυρά A-ευσταθής σε αντίθεση με την μέθοδο Crank–Nicolson που είναι μόνο A-ευσταθής. Εφαρμόζουμε τη ϑ-κλασματική μέθοδο στο γραμμικό παραβολικό πρόβλημα και στο χρονικά εξαρτώμενο πρόβλημα του Stokes με σκοπό την απόδειξη εκ των υστέρων εκτιμήσεων σφάλματος βέλτιστης τάξης. Το κύριο εργαλείο της ανάλυσής μας είναι μια κατάλληλη ανακατασκευή της τμηματικά γραμμικής στο χρόνο προσεγγιστικής λύσης και η οποία αναφέρεται ως ϑ-κλασματική ανακατασκευή. Έπειτα, συνδυάζουμε τα αποτελέσματα της χωρικής διακριτοποίησης με εκείνα της χωρικής για να αποδείξουμε εκ των υστέρων εκτιμήσεις σφάλματος βέλτιστης τάξης για πλήρως διακριτά σχήματα για το γραμμικό παραβολικό πρόβλημα και για το χρονικά εξαρτώμενο πρόβλημα του Stokes. Διακριτοποιούμε στο χρόνο με τη μέθοδο των Crank–Nicolson και τη ϑ-κλασματική μέθοδο. Για τη χωρική διακριτοποίηση θεωρούμε χώρους πεπερασμένων στοιχείων με κατάλληλες προσεγγιστικές ιδιότητες. Με σκοπό την απόδειξη εκ των υστέρων εκτιμήσεων σφάλματος, εισάγουμε μια χωρική-χρονική ανακατασκευή της τμηματικά γραμμικής στο χρόνο προσεγγιστικής λύσης. Αυτή η ανακατασκευή

ολοκληρώνεται σε δύο βήματα: αρχικά προσαρμόζουμε τη χρονική ανακατασκευή, είτε την Crank–Nicolson είτε τη ϑ-κλασματική ανακατασκευή, στην πλήρως διακριτή περίπτωση και ορίζουμε μια κατά τμήματα τετραγωνική συνεχή συνάρτηση στο χρόνο. Έπειτα εισάγουμε την ανακατασκευή Stokes αυτής για να κατασκευάσουμε μια προσέγγιση συνεχή στο χρόνο και στο χώρο. Οι εκ των υστέρων εκτιμήσεις σφάλματος προκύπτουν εφαρμόζοντας μεθόδους ενέργειας.

Abstract

We derive a posteriori error estimates for the linearized, time-dependent Navier–Stokes equation for incompressible flow, namely the time-dependent Stokes equation. We first consider spatial approximations of the time-dependent Stokes equation and by using an appropriate Stokes reconstruction operator, we are able to write an auxiliary error equation, in pointwise form, that satisfies the exact divergence-free condition. Thus, standard energy estimates from Partial Differential Equations theory can directly be applied to derive a posteriori estimates of optimal order for the velocity in $L^\infty(L^2)$ and $L^2(H^1)$ norms for finite-element and finite-volume approximations. Moreover, a posteriori error estimates of optimal order for time discretizations by the fractional–Step ϑ-scheme are shown. This time stepping scheme, due to its stability properties, is proper for the time discretization of the Navier–Stokes equations. It is second order accurate like the Crank–Nicolson scheme, but moreover it is strongly $A-$stable in contrast with Crank–Nicolson which is only $A-$stable. This numerical scheme is applied to the linear parabolic problem and the time-dependent Stokes problem to derive a posteriori error estimates of optimal order in time. The main tool of the a posteriori error analysis is an appropriate reconstruction of the piecewise linear in time approximate solution and which is referred to as the $\theta-$fractional reconstruction. Next, we combine our results for the space and time semidiscrete problems to prove a posteriori error estimates of optimal order for fully discrete approximations of linear parabolic problems and the time-dependent Stokes system. In time we discretize by both Crank-Nicolson and $\theta-$Fractional Step Scheme. For the space discretization we consider finite element spaces with appropriate approximation properties. In order to derive a posteriori error estimates, we introduce a space-time reconstruction of the piecewise linear in time interpolant of the fully discrete approximations. This construction is achieved in two steps: first we adapt to the fully discrete case the $\theta-$fractional reconstruction of the piecewise linear in time interpolant in order to get a continuous piecewise quadratic in time approximate solution. Next, we

introduce the Stokes reconstruction of the time-reconstruction to get a continuous both in space and time approximate solution. The a posteriori error estimates for the fully discrete case are derived by applying energy techniques.

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγή **1**

1.1 Οι γραμμικοποιημένες εξισώσεις Navier–Stokes 2

1.1.1 Οι δυναμικές εξισώσεις Navier–Stokes: η γενική περίπτωση . . 2

1.1.2 Οι δυναμικές εξισώσεις Navier–Stokes: η γραμμική περίπτωση 3

1.2 Εκ των υστέρων έλεγχος σφάλματος και δυναμικές ΜΔΕ 5

1.2.1 Εκ των υστέρων εκτίμηση σφάλματος με ανακατασκευή της προσεγγιστικής λύσης. 8

2 Χωρική διακριτοποίηση των δυναμικών εξισώσεων Stokes **13**

2.1 Εισαγωγή 14

2.2 Η ανακατασκευή Stokes 16

2.3 Εκτιμήσεις των σφαλμάτων 25

2.3.1 Εκτιμήσεις ενέργειας 25

2.3.2 Παραβολική δυϊκότητα 32

2.4 Εφαρμογές 37

2.4.1 Προκαταρκτικά και συμβολισμοί 37

2.4.2 Μη συμμορφικά πεπερασμένα στοιχεία των Crouzeix–Raviart 39

2.5 Μέθοδος Πεπερασμένων Χωρίων 54

3 Πλήρως διακριτά σχήματα για παραβολικές εξισώσεις **63**

3.1 Εισαγωγή 64

3.2 Η μέθοδος Crank-Nicolson 65

3.2.1 Η ανακατασκευή χώρου-χρόνου για τη μέθοδο Crank-Nicolson. 67

3.2.2 Εκτιμήσεις σφάλματος. 70
3.3 Η $\vartheta-$κλασματική μέθοδος 77
3.3.1 Η $\vartheta-$κλασματική ανακατασκευή 79
3.3.2 Εκτιμήσεις σφάλματος. 82

4 Πλήρως διακριτά σχήματα για τις εξισώσεις Stokes 91
4.1 Εισαγωγή 92
4.2 Η μέθοδος των Crank-Nicolson 97
4.2.1 Εκτιμήσεις σφάλματος 105
4.2.2 Η $\vartheta-$κλασματική μέθοδος 117
4.3 Η ανακατασκευή χρόνου-χώρου για τη $\vartheta-$κλασματική μέθοδο 119
4.3.1 Εκτιμήσεις σφάλματος 125

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Το αντικείμενο της εργασίας αυτής είναι η απόδειξη εκ των υστέρων εκτιμήσεων σφάλματος για τις γραμμικοποιημένες, δυναμικές εξισώσεις Navier–Stokes. Οι εξισώσεις Navier–Stokes περιγράφουν την κίνηση ενός ιξώδους, ασυμπίεστου, ομογενούς υγρού. Οι εξισώσεις αυτές είναι μη γραμμικές. Εδώ θα μελετήσουμε τις εξισώσεις που προκύπτουν με γραμμικοποίηση των λύσεων, οι οποίες είναι γνωστές ως εξισώσεις Stokes, και αντιστοιχούν σε πολύ αργή ροή. Η εκ των υστέρων ανάλυση σφάλματος αυτών καθαυτών των εξισώσεων παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον, ενώ ταυτόχρονα αποτελεί ενδιάμεσο βήμα για τη μελέτη των εξισώσεων Navier–Stokes.

Το κεφάλαιο αυτό αποτελείται από δύο κύρια μέρη. Στο πρώτο μέρος παρουσιάζουμε γνωστά αποτελέσματα σχετικά με τις εξισώσεις Stokes, όπως π.χ. αποτελέσματα για την ύπαρξη, τη μοναδικότητα και την ομαλότητα των λύσεων. Στο δεύτερο μέρος διατυπώνουμε το γενικό πρόβλημα της εκ των υστέρων ανάλυσης σφάλματος, παρουσιάζουμε εν συντομία κάποια γνωστά αποτελέσματα για δυναμικές εξισώσεις και περιγράφουμε το γενικό τρόπο απόδειξης εκ των υστέρων εκτιμήσεων σφάλματος βασιζόμενοι σε κατάλληλη ανακατασκευή της προσεγγιστικής λύσης.

1.1 Οι γραμμικοποιημένες εξισώσεις Navier–Stokes

1.1.1 Οι δυναμικές εξισώσεις Navier–Stokes: η γενική περίπτωση

Θεωρούμε τις εξισώσεις Navier–Stokes που περιγράφουν την d-διάστατη κίνηση ενός ασυμπίεστου, συνεκτικού ρευστού[1]

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} & x \in \mathbb{R}^d,\ t \geq 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 & x \in \mathbb{R}^d,\ t \geq 0, \\ \mathbf{u}(x,0) = \mathbf{u}_0(x) & x \in \mathbb{R}^d. \end{cases}$$

Οι άγνωστοι του παραπάνω συστήματος είναι η ταχύτητα του ρευστού $\mathbf{u}$ και η πίεση p, ενώ τα δεδομένα είναι η πυκνότητα των εξωτερικών δυνάμεων ανά μονάδα μάζας $\mathbf{f}$ και η αρχική ταχύτητα $\mathbf{u_0}$. Η σταθερά ν είναι το ιξώδες (kinematic viscosity) που εκφράζει την αντίσταση του ρευστού στην παραμόρφωσή του από διατμητικές δυνάμεις, δηλαδή δυνάμεις που ασκούνται εφαπτομενικά στην επιφάνειά του.

Για δεδομένο πρόβλημα, συμβολίζουμε με L το χαρακτηριστικό μήκος και με U τη χαρακτηριστική ταχύτητα. Εισάγοντας τους αδιάστατους αριθμούς Reynolds

$$\mathrm{Re} := \frac{\mathrm{LU}}{\nu},$$

οι οποίοι μετράνε την επίδραση του ιξώδους στη ροή, μπορούμε να γράψουμε τις εξισώσεις Navier–Stokes στην αδιάστατη μορφή

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \dfrac{1}{\mathrm{Re}} \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} & x \in \mathbb{R}^d,\ t \geq 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 & x \in \mathbb{R}^d,\ t \geq 0, \\ \mathbf{u}(\cdot,0) = \mathbf{u}_0(\cdot) & x \in \mathbb{R}^d. \end{cases}$$

[1] με έντονα γράμματα συμβολίζουμε τις διανυσματικές συναρτήσεις στον $\mathbb{R}^d$

1.1.2 Οι δυναμικές εξισώσεις Navier–Stokes: η γραμμική περίπτωση

Στην παρούσα εργασία, όπως προαναφέραμε, θα ασχοληθούμε με τη γραμμική περίπτωση των δυναμικών εξισώσεων Navier–Stokes, τις δυναμικές εξισώσεις Stokes. Οι εξισώσεις αυτές αντιστοιχούν σε μικρούς αριθμούς Reynolds και περιγράφουν την αργή ροή.

Έστω Ω ένα φραγμένο, συνεκτικό χωρίο στον $\mathbb{R}^d$ $(d = 2, 3)$ με κατάλληλα ομαλό σύνορο και T ένας θετικός πραγματικός αριθμός. Θεωρούμε το ακόλουθο πρόβλημα αρχικών τιμών για τις ασυμπίεστες εξισώσεις Stokes με ομογενείς συνοριακές συνθήκες Dirichlet: να προσδιοριστούν η ταχύτητα $\mathbf{u}(x,t)$ και η πίεση $p(x,t)$ που ικανοποιούν

$$
\begin{cases}
\mathbf{u}_t - \Delta\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} & \text{στο } \Omega \times [0,T] \\
\operatorname{div}\mathbf{u} = 0 & \text{στο } \Omega \times [0,T] \\
\mathbf{u} = 0 & \text{στο } \partial\Omega \times [0,T] \\
\mathbf{u}(\cdot,0) = \mathbf{u}_0(\cdot) & \text{στο } \Omega.
\end{cases}
\tag{1.1}
$$

Πριν προχωρήσουμε στη μεταβολική διατύπωση του προβλήματος, θα εισαγάγουμε τον αναγκαίο συμβολισμό. Εισάγουμε τους χώρους $\mathbf{H} := (L^2(\Omega))^d$, $\mathbf{V} := (H_0^1(\Omega))^d$ και

$$
S := \left\{ \phi \in L^2(\Omega) : \int_\Omega \phi(x)dx = 0 \right\}.
$$

Επίσης, συμβολίζουμε με $\mathbf{V}^\star := (H^{-1}(\Omega))^d$ το δυϊκό του $\mathbf{V}$. Ορίζουμε στον $\mathbf{H}$ το εσωτερικό γινόμενο

$$
\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \sum_{i=1}^d \int_\Omega f_i(x) g_i(x) dx,
$$

στον $\mathbf{V} \times \mathbf{V}$ τη διγραμμική μορφή $a(\cdot,\cdot)$

$$
a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_\Omega \sum_{i=1}^d \langle \nabla u_i, \nabla v_i \rangle \, dx \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}\,, \tag{1.2}
$$

και στον $\mathbf{V} \times S$ τη διγραμμική μορφή $b(\cdot,\cdot)$

$$b(\mathbf{u}, q) = -\int_\Omega (\operatorname{div} \mathbf{u}) q \, dx \,, \quad \mathbf{u} \in \mathbf{V},\, q \in S \,. \tag{1.3}$$

Επιπλέον, συμβολίζουμε τις νόρμες των χώρων $\mathbf{H}$, S, $\mathbf{V}$ και $\mathbf{V}^*$, αντίστοιχα, με $\|\cdot\|_{\mathbf{H}}$, $\|\cdot\|_S$, $\|\cdot\|_{\mathbf{V}}$ και $\|\cdot\|_{\mathbf{V}^\star}$.

Στη συνέχεια θα χρειαστούμε τους υπόχωρους των $\mathbf{V}$ και $\mathbf{H}$ που αποτελούνται από πεδία ελεύθερα απόκλισης. Έτσι, ακολουθώντας για παράδειγμα το συμβολισμό του [18], θέτουμε

$$\mathscr{V} = \{\mathbf{v} \in \mathscr{D}(\Omega),\ \operatorname{div} \mathbf{v} = 0\},$$

και ορίζουμε $\mathbf{J}$ και $\mathbf{Z}$ να είναι οι κλειστές θήκες του $\mathscr{V}$ στους $\mathbf{H}$ και $\mathbf{V}$ αντίστοιχα. Τότε, ο ακόλουθος χαρακτηρισμός ισχύει, [18],

$$\mathbf{J} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H} : \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \ \text{ και } \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0\}, \quad \mathbf{Z} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{V} : \operatorname{div} \mathbf{v} = 0\}, \tag{1.4}$$

όπου $\mathbf{n}$ το κανονικό εξωτερικό κάθετο διάνυσμα.

Λαμβάνοντας στην (1.1) το εσωτερικό γινόμενο με $\mathbf{v} \in \mathscr{V}$ έχουμε

$$\langle \mathbf{u}_t(t), \mathbf{v} \rangle + a(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in \mathscr{V},$$

από την οποία, λόγω συνέχειας, συμπεραίνουμε ότι

$$\langle \mathbf{u}_t(t), \mathbf{v} \rangle + a(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{Z}.$$

Ως φυσιολογικό επακόλουθο της τελευταίας σχέσης είναι η ασθενής διατύπωση του προβλήματος (1.1) που οφείλεται στον Leray [32, 18, 39]: Για δεδομένα $\mathbf{f} \in L^2(0,T;\mathbf{V}^\star)$ και $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}$, προσδιορίστε $\mathbf{u} \in L^2(0,T;\mathbf{V})$ που ικανοποιεί

$$\langle \mathbf{u}_t(t), \mathbf{v} \rangle + a(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \ \text{ στο } \mathscr{D}'((0,T)), \tag{1.5}$$

και

$$\mathbf{u}(t) \to \mathbf{u}_0 \quad \text{στον } \mathbf{H} \text{ καθώς } t \to 0. \tag{1.6}$$

Τότε υπάρχει μια κατανομή p στον $\Omega \times (0,T)$ που είναι ασθενής λύση του προβλήματος (1.1). Αναφορικά με την ομαλότητα της συνάρτησης p το γενικό αποτέλεσμα που μπορεί να αποδειχθεί, χωρίς επιπλέον υποθέσεις ομαλότητας για τα αρχικά δεδομένα, είναι ότι

$$p = \frac{\partial P}{\partial t} \ \text{ με } \ P \in \mathscr{C}([0,T];\mathbf{H}).$$

Υποθέτοντας περισσότερη ομαλότητα για τα αρχικά δεδομένα, το ακόλουθο αποτέλεσμα μπορεί να αποδειχθεί, [18],

Πρόταση 1.1.1. *Έστω Ω ένα φραγμένο χωρίο του $\mathbb{R}^d$ της κλάσης $\mathscr{C}^2$, $\mathbf{f} \in L^2(0,T;\mathbf{H})$ και $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{V}$. Τότε η ασθενής λύση $(\mathbf{u},p)$ του (1.1) ικανοποιεί*

$$\begin{gathered} \mathbf{u} \in L^2([0,T];(H^2(\Omega))^d), \quad \mathbf{u}' \in L^2([0,T];\mathbf{H}) \\ p \in L^2([0,T];H^1(\Omega)) \end{gathered} \tag{1.7}$$

Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με την ύπαρξη, τη μοναδικότητα και την ομαλότητα των λύσεων του προβλήματος Stokes, αλλά και του προβλήματος Navier–Stokes γενικά, ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στα συγράμματα [29, 39, 18, 33].

1.2 Εκ των υστέρων έλεγχος σφάλματος και δυναμικές ΜΔΕ

Θεωρούμε το γραμμικό παραβολικό πρόβλημα: Ζητείται συνάρτηση $u : [0,T] \to D(A)$ η οποία να ικανοποιεί

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = f(t), \ \ 0 < t < T, \\ u(0) = u^0. \end{cases}$$

όπου $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ χώρος Hilbert, $A : D(A) \to H$ θετικά ορισμένος, αυτοσυζυγής, γραμμικός τελεστής με πεδίο ορισμού $D(A)$ πυκνό στον H και $f : [0,T] \to H$, $u_0 \in H$ δεδομένες. Συμβολίζουμε με U μια οποιαδήποτε προσεγγιστική λύση του παραπάνω προβλήματος.

Το γενικό πρόβλημα στην εκ των υστέρων ανάλυση σφάλματος μπορεί να διατυπωθεί ως εξής: για δεδομένη νόρμα $\|\cdot\|$, να αποδειχθεί εκτίμηση της μορφής

$$\|u - U\| \leq \eta(U),$$

όπου ο *εκτίμητης* $\eta(U)$ ικανοποιεί τις ιδιότητες

- Είναι υπολογίσιμη ποσότητα που εξαρτάται μόνο από την προσεγγιστική λύση U και τα δεδομένα του προβλήματος.

- Φθίνει με τη βέλτιστη δυνατή τάξη (δηλαδή με την τάξη ακρίβειας της προσεγγιστικής μεθόδου που χρησιμοποιήθηκε για τον υπολογισμό της U), δίχως να απαιτούνται επιπλέον υποθέσεις ομαλότητας.

- Οι σταθερές που εμφανίζονται στον ορισμό του $\eta(U)$ είναι εύκολα υπολογίσιμες.

Το πρόβλημα της εκ των υστέρων ανάλυσης σφάλματος των δυναμικών διαφορικών εξισώσεων παρουσιάζει ενδιαφέρον ακόμα και στην πιο απλή περίπτωση των γραμμικών παραβολικών εξισώσεων. Σε αντίθεση με το πλήθος των αποτελεσμάτων για την εκ των υστέρων ανάλυση σφάλματος για στατικά προβλήματα, βλ. [42, 1] και τις αναφορές τους, τα διαθέσιμα αποτελέσματα για δυναμικές εξισώσεις είναι περιορισμένα. Τα εν λόγω αποτελέσματα μπορούν να ταξινομηθούν σε δύο βασικές κατηγορίες· σε εκείνα που προκύπτουν με τεχνικές ενέργειας (energy technique) και σε εκείνα που προκύπτουν με τεχνικές δυϊκότητας (duality technique). Στην πρώτη περίπτωση η απόδειξη βασίζεται στις ιδιότητες ευστάθειας της ίδιας της παραβολικής εξίσωσης, ενώ στη δεύτερη στις ιδιότητες ευστάθειας του γραμμικού οπισθοδρομικού δυϊκού προβλήματος. Τονίζουμε ότι για την απόδειξη εκ των υστέρων εκτιμήσεων σφάλματος για μη γραμμικές παραβολικές εξισώσεις είναι αναγκαία η απόδειξη ευστάθειας του γραμμικοποιημένου οπισθοδρομικού δυϊκού προβλήματος, με επιπλέον συνθήκη ο

παράγοντας ευστάθειας να είναι ανέξαρτητος της ακριβούς λύσης. Οι Eriksson, Johnson και Larsson στις εργασίες [19, 20, 21, 22] απέδειξαν εκ των υστέρων εκτιμήσεις σφάλματος για γραμμικά και μη γραμμικά παραβολικά προβλήματα χρησιμοποιώντας την τεχνική της δυϊκότητας. Για τη χρονική διακριτοποίηση χρησιμοποίησαν την ασυνεχή μέθοδο Galerkin και απέδειξαν βέλτιστης τάξης εκτιμήσεις σφάλματος στους χώρους $L^\infty(0,T;L^2)$, $L^\infty(0,T;L^\infty)$. Οι Nochetto, Savare και Verdi στην εργασία [35] απέδειξαν εκ των υστέρων εκτιμήσεις σφάλματος, χρησιμοποιώντας τεχνικές ενέργειας, για μη γραμμικά προβλήματα με χρονική διακριτοποίηση με την πεπλεγμένη Euler . Παρουσιάζονται ουσιαστικές δυσκολίες για εκτιμήσεις σε φυσιολογικές νόρμες (π.χ. στην $L^\infty(0,T;L^2)$ για παραβολικά προβλήματα αντιμετωπίστηκαν πρόσφατα) βλ. [19, 36, 34, 5, 12, 31] . Το πρόβλημα των εκ των υστέρων εκτιμήσεων για τις δυναμικές εξισώσεις του Stokes είναι άμεσα συνδεδεμένο με το πρόβλημα των αντίστοιχων εκτιμήσεων για τις δυναμικές εξισώσεις των Navier–Stokes, αφού οι πρώτες αποτελούν γραμμικοποίηση των τελευταίων. Η ανάπτυξη της θεωρίας για τον εκ των υστέρων έλεγχο των σφαλμάτων παρουσιάζει ενδιαφέρον ακόμα και στην πιο απλή περίπτωση των γραμμικών παραβολικών εξισώσεων, βλ. [19, 36, 34, 5, 12, 31]. Στην περίπτωση του προβλήματος (2.1) εμφανίζονται επιπλέον τεχνικές δυσκολίες. Για παράδειγμα, μια τεχνική δυσκολία που παρουσιάζεται οφείλεται στη συνθήκη ασυμπιεστότητας $\operatorname{div}\mathbf{u} = 0$. Ενώ η ακριβής λύση $\mathbf{u}$ την ικανοποιεί, αυτό δεν είναι απαραίτητο να συμβαίνει με την προσέγγιση $\mathbf{u}_h$· η $\mathbf{u}_h$ αρκεί να ικανοποιεί μια διακριτή συνθήκη ασυμπιεστότητας. Στην περίπτωση που η $\mathbf{u}_h$ δεν ικανοποιεί τη συνθήκη ασυμπιεστότητας, ούτε το σφάλμα $\mathbf{u} - \mathbf{u}_h$ την ικανοποιεί και τότε οδηγούμαστε σε *μεταβολικό σφάλμα (variational crime)* και οι συνήθεις μέθοδοι για την απόδειξη εκ των υστέρων εκτιμήσεων αποτυγχάνουν. Επίσης, μια άλλη τεχνική δυσκολία που παρουσιάζεται οφείλεται στο γεγονός ότι, πολλές φορές, οι χώροι πεπερασμένης διάστασης που χρησιμοποιούνται για τη χωρική διακριτοποίηση των εξισώσεων Stokes αποτελούνται από μη συμμορφικές (noncomforming) συναρτήσεις.

1.2.1 Εκ των υστέρων εκτίμηση σφάλματος με ανακατασκευή της προσεγγιστικής λύσης.

Σε αυτή την παράγραφο παρουσιάζουμε την τεχνική της ανακατασκευή της προσεγγιστικής λύσης, η οποία χρησιμοποιείται για την απόδειξη όλων των εκ των υστέρων εκτιμήσεων σφάλματος της μορφής (1.2) που περιλαμβάνονται σε αυτή τη διατριβή. Για την παρουσίαση της μεθόδου χρησιμοποιούμε ως μοντέλο τη γραμμική παραβολική εξίσωση.

Έστω $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ένας χώρος Hilbert, $A : D(A) \to H$ ένας θετικά ορισμένος, αυτοσυζυγής, γραμμικός τελεστής με πεδίο ορισμού $D(A)$ πυκνό στον H. Η συνάρτηση $f : [0,T] \to H$ και η αρχική συνθήκη $u_0 \in H$ είναι δεδομένες. Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών: Ζητείται συνάρτηση $u : [0,T] \to D(A)$ η οποία να ικανοποιεί

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = f(t), \quad 0 < t < T, \\ u(0) = u^0. \end{cases} \tag{1.8}$$

Συμβολίζουμε με V το χώρο Hilbert $D(A^{1/2})$ και με $\|\cdot\|_H$ και $\|\cdot\|_V$, $\|v\|_V := \|A^{1/2}v\|_H$, τις νόρμες των χώρων H και V, αντίστοιχα. Ταυτίζουμε τον H με το δυϊκό του και συμβολίζουμε με $V^\star$ το δυϊκό του V. Για το δυϊκό ζεύγος μεταξύ των $V^\star$ και V επίσης θα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $\langle\cdot,\cdot\rangle$, ενώ για τη δυϊκή νόρμα του $V^\star$ θα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $\|\cdot\|_{V^\star}$.

Συμβολίζουμε με U μια οποιαδήποτε αριθμητική προσέγγιση της ακριβής λύση $u^\cdot$ η προσέγγιση U μπορεί να είναι η λύση ένος ημιδιακριτού προβλήματος στο χώρο ή στο χρόνο καθώς επίσης και η λύση ένος πλήρως διακριτού προβλήματος. Οι αποδείξεις εκ των υστέρων εκτιμήσεων σφάλματος με τη μέθοδο της ανακατασκευής δεν βασίζεται στην απευθεία σύγκριση των u και U αλλά στη σύγκριση της καθεμιάς από αυτές με μια ενδιάμεση, κατάλληλα επιλεγμένη, συνάρτηση $\hat{U}$, στην οποία αναφερόμαστε ως *ανακατασκεύη της υπολογιστικής λύσης* U. Με άλλα λόγια, χρησιμοποιώντας την ανακατασκευή $\hat{U}$ της U το σφάλμα $e := u - U$ μπορεί να διασπασθεί ως

$$e = \hat{e} + \rho$$

όπου

$$\hat{e} := u - \hat{U} \quad \text{και} \quad \rho := \hat{U} - U, \tag{1.9}$$

και καθένας από τους όρους $\hat{e}$, ρ εκτιμώνται με βέλτιστο τρόπο. Ο στόχος, αλλά και η δυσκολία, στις αποδείξεις εκ των υστέρων εκτιμήσεων σφάλματος με τη συγκεκριμένη τεχνική είναι η εύρεση κατάλληλης ανακατασκευής $\hat{U}$ της υπολογιστικής λύσης U.

Οι εκ των υστερών εκτιμήσεις σφάλματος που αποδεικνύονται σε αυτή την εργασία βασίζονται στην εκτίμηση του *υπολοίπου* R το οποίο, στην περίπτωση του γραμμικού παραβολικού προβλήματος (1.8) ορίζεται ως ως

$$R(t) := U' - AU - f(t).$$

Δηλαδή το υπόλοιπο R μετρά κατά πόσο η προσεγγιστική λύση U αποτυγχάνει να είναι ακριβής λύση της εξίσωσης (1.8). Σημειώνουμε ότι ο ρόλος του υπολοίπου στις εκ των υστέρων εκτιμήσεις είναι καθοριστικός, όπως ακριβώς είναι και ο ρόλος που έχει το σφάλμα συνέπειας στις εκ των προτέρων εκτιμήσεις σφάλματος. Υπενθυμίζουμε ότι το σφάλμα συνέπειας μετρά πόσο η ακριβής λύση αποτυγχάνει να είναι λύση της αριθμητικής μεθόδου. Με άλλα λόγια το υπόλοιπο στις εκ των υστέρων εκτιμήσεις σφάλματος είναι το δυϊκο ανάλογο του σφάλματος συνέπειας στις εκ των προτέρων εκτιμήσεις σφάλματος. Δύο σημαντικές δυσκολίες που εμφανίζονται στην απόδειξη εκ των υστέρων εκτιμήσεων σφάλματος που βασίζονται στο υπόλοιπο είναι (α) το υπόλοιπο δεν είναι συνήθως καλά ορισμένο (για παράδειγμα, όταν η προσεγγιστική λύση δεν είναι αρκετά ομαλή όπως στη χωρική διακριτοποίηση των εξισώσεων Stokes με μη συμμορφικούς χώρους πεπερασμένων στοιχείων) (β) το υπόλοιπο στις δυναμικές εξισώσεις δεν είναι βέλτιστης τάξης με αποτέλεσμα οι εκτιμήσεις σφάλματος που προκύπτουν να μην είναι, επίσης, βέλτιστης τάξης. Η επιλογή της ανακατασκευή $\hat{U}$ γίνεται ώστε το υπόλοιπο $\hat{R}$,

$$\hat{R}(t) := \hat{U}' - A\hat{U} - f(t)$$

να ικανοποιεί τρεις βασικές ιδιότητες

- να είναι καλά ορισμένο,
- να είναι υπολογίσιμη ποσότητα ή να μπορεί να εκτιμηθεί από εκ των υστέρων ποσότητες, δηλαδή από ποσότητες που εξαρτώνται μόνο από την υπολογιστική λύση και τα δεδομένα του συνεχούς προβλήματος,
- να είναι βέλτιστης τάξης διαταραχή του συνεχούς προβλήματος.

Από τη στιγμή που έχουμε επιλέξει μια κατάλληλη ανακατασκευή $\hat{U}$ της προσεγγιστικής λύσης U, δηλαδή έτσι ώστε το αντίστοιχο υπόλοιπο $\hat{R}$ να ικανοποιεί τις παραπάνω ιδιότητες, η απόδειξη των εκ των υστέρων εκτιμήσεων σφάλματος προκύπτει εκτιμώντας κάθε όρο της (1.9) ξεχωριστά. Συγκεκριμένα, ο όρος $\rho = \hat{U} - U$ ελέγχεται από βέλτιστης τάξης εκ των υστέρων ποσότητες και ο όρος $\hat{e} = u - \hat{U}$, στη γραμμική περίπτωση, ικανοποιεί τη μερική διαφορική εξίσωση

$$\hat{e}' - A\hat{e} = -R.$$

Η τελική εκτίμηση σφάλματος προκύπτει εφαρμόζοντας συνήθεις τεχνικές της θεωρίας ευστάθειας των μερικών διαφορικών εξισώσεων, όπως για παράδειγμα μεθόδους ενέργειας.

Η απόδειξη εκ των υστέρων εκτιμήσεων σφάλματος με τη μέθοδο της ανακατασκευής έχει εφαρμοστεί από τους Nochetto, Savare, και Verdi στην εργασία [35] για χρονικές προσεγγίσεις μη γραμμικών παραβολικών προβλήματων με την πεπλεγμένη Euler. Επίσης, οι Χ. Μακριδάκης και R. Nochetto στην εργασία [34] απέδειξαν εκ των υστέρων εκτιμήσεις σφάλματος για τη χωρική διακριτοποίηση του γραμμικού παραβολικού προβλήματος χρησιμοποιώντας την *ελλειπτική ανακατασκευή*. Ο ρόλος της *ελλειπτικής ανακατασκευής* ήταν καθοριστικός για την απόδειξη εκ των υστέρων εκτιμήσεων σφάλματος βέλτιστης τάξης στη νόρμα $L^\infty(0,T;L^2)$. Στις εργασίες [31] και [3] χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος της ανακατασκευής για την απόδειξη εκ των υστέρων εκτιμήσεων σφάλματος στη νόρμα $L^\infty(0,T;L^2)$ για πλήρως διακριτά σχήματα με την πεπλεγμένη Euler και για τη χρονική διακριτοποίηση με τη μέθοδο των Crank–Nicolson, αντίστοιχα, για τη γραμμική παραβολική εξίσωση.

Στη διατριβή αυτή, αποδεικνύουμε εκ των υστέρων εκτιμήσεις σφάλματος για προσεγγίσεις του χρονικά εξαρτώμενου προβλήματος του Stokes. Συγκεκριμένα, στο Κεφάλαιο 2 θεωρούμε το ημιδιακριτό πρόβλημα στο χώρο και, χρησιμοποιώντας έναν κατάλληλο τελεστή ανακατασκευής Stokes, ο οποίος αποτελεί επέκταση της ελλεπτικής ανακατασκευής [34], παράγουμε μια βοηθητική εξίσωση σφάλματος που ικανοποιεί ακριβώς τη συνθήκη ασυμπιεστότητας. Έτσι, χρησιμοποιώντας συνήθη επιχειρήματα από τη θεωρία των Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων, λαμβάνουμε εκ των υστέρων εκτιμήσεις σφάλματος οι οποίες βασίζονται στους υπάρχοντες εκτιμητές του στατικού προβλήματος του Stokes [17, 26]. Αποδεικνύονται εκτιμήσεις σφάλματος βέλτιστης τάξης στη νόρμα $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ για την ταχύτητα για τη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων και τη μέθοδο πεπερασμένων χωρίων. Στο Κεφάλαιο 3, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της ανακατασκευής αποδεικνύουμε εκ των υστέρων εκτιμήσεις σφάλματος βέλτιστης τάξης για πλήρως διακριτά σχήματα για τη διακριτοποίηση του γραμμικού παραβολικού προβλήματος με τις μεθόδους Crank–Nicolson και ϑ-κλασματική στο χρόνο και με τη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων στο χώρο. Για τη μέθοδο Crank–Nicolson συνδυάζουμε την ελλειπτική ανακατασκευή [34] με την ανακατασκευή Crank–Nicolson [3] και ορίζουμε μία ανακατασκευή της πλήρους διακριτής λύσης στο χρόνο και στο χώρο. Όσο αφορά τη ϑ-κλασματική μέθοδο, εισάγουμε αρχικά το κύριο εργαλείο της ανάλυσής μας το οποίο αναφέρεται ως ϑ-κλασματική ανακατασκευή της τμηματικά γραμμικής στο χρόνο προσεγγιστικής λύσης. Αυτή η συνάρτηση έχει δύο βασικές ιδιότητες:

(i) είναι άμεσα υπολογίσιμη και η διαφορά της από την αριθμητική προσέγγιση μπορεί να εκτιμηθεί εκ των υστέρων

(ii) οδηγεί σε υπόλοιπο βέλτιστης τάξης, καθώς επίσης σε κατάλληλες σημειακές αναπαραστάσεις του σφάλματος ίδιας μορφής με την υπό μελέτη δυναμική εξίσωση.

Έπειτα, συνδυάζουμε τα αποτελέσματα της χρονικής διακριτοποίησης με εκείνα της χωρικής για να αποδείξουμε εκ των υστέρων εκτιμήσεις σφάλματος βέλτιστης τάξης για πλήρως διακριτά σχήματα για το γραμμικό παραβολικό πρόβλημα. Στο κεφάλαιο 4, συνδυάζοντας τις ιδέες των δύο προηγούμενων κεφαλαίων, αποδεικνύουμε εκ

των υστέρων εκτιμήσεις σφάλματος για το χρονικά εξαρτώμενο πρόβλημα του Stokes. Οι εκ των υστέρων εκτιμήσεις σφαλματος προκύπτουν εφαρμόζοντας μεθόδους ενέργειας.

Κεφάλαιο 2

Χωρική διακριτοποίηση των δυναμικών εξισώσεων Stokes

Σε αυτό το κεφάλαιο θα αποδείξουμε εκ των υστέρων εκτιμήσεις των σφαλμάτων για χωρικές διακριτοποιήσεις των δυναμικών εξισώσεων Stokes. Το βασικό εργαλείο της ανάλυσής μας θα είναι η *ανακατασκευή Stokes*, η οποία είναι μια κατάλληλη επέκταση της *ελλειπτικής ανακατασκευής* που εισήγαγαν οι Χ. Μακριδάκης και R. Nochetto για την απόδειξη εκ των υστέρων εκτιμήσεων σφάλματος για παραβολικές εξισώσεις στην εργασία [34].

Η ανακατασκευή Stokes θα οριστεί, για σταθερή χρονική στιγμή, ως η ακριβής λύση ενός κατάλληλου στατικού προβλήματος Stokes. Το δεξιό μέλος αυτού του στατικού προβλήματος εξαρτάται άμεσα από την προσεγγιστική λύση του δυναμικού προβλήματος. Ειδικότερα, η προσεγγιστική λύση του δυναμικού προβλήματος θα είναι και προσεγγιστική λύση του στατικού προβλήματος με ακριβή λύση την ανακατασκευή Stokes. Αυτή η βασική ιδιότητα θα μας οδηγήσει στη διάσπαση του σφάλματος σε δύο ποσότητες. Η πρώτη θα είναι μια εκ των υστέρων ποσότητα η οποία θα μπορεί να εκτιμηθεί χρησιμοποιώντας τους υπάρχοντες εκ των υστέρων εκτιμητές του στατικού προβλήματος Stokes. Η δεύτερη θα ικανοποιεί ένα δυναμικό πρόβλημα Stokes, του οποίου το δεξιό μέλος θα εξαρτάται άμεσα από την πρώτη ποσότητα της διάσπασης. Έτσι, με χρήση τεχνικών ενέργειας και της παραβολικής δυϊκότητας από τη θεωρία των διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους, θα προκύψουν εκ των υστέρων

εκτιμήσεις σφαλμάτων. Θα αποδείξουμε βέλτιστης τάξης εκτιμήσεις σφάλματος, στις νόρμες των χώρων $L^\infty(L^2)$ και $L^\infty(H^1)$, για διακριτές προσεγγίσεις με πεπερασμένα στοιχεία και πεπερασμένα χωρία για την ταχύτητα.

2.1 Εισαγωγή

Έστω Ω ένα φραγμένο, συνεκτικό χωρίο στον $\mathbb{R}^d$ $(d = 2, 3)$ με κατάλληλα ομαλό σύνορο και ένας θετικός πραγματικός αριθμός T. Θεωρούμε το ακόλουθο πρόβλημα αρχικών τιμών για τις ασυμπίεστες εξισώσεις Stokes με ομογενείς συνοριακές συνθήκες Dirichlet:

$$
\begin{cases}
\mathbf{u}_t - \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} & \text{στο } \Omega \times [0, T], \\
\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 & \text{στο } \Omega \times [0, T], \\
\mathbf{u} = 0 & \text{στο } \partial\Omega \times [0, T], \\
\mathbf{u}(\cdot, 0) = \mathbf{u}_0(\cdot) & \text{στο } \Omega,
\end{cases}
\tag{2.1}
$$

όπου οι άγνωστοι είναι η ταχύτητα $\mathbf{u}$ και η πίεση p, ενώ η αρχική ταχύτητα $\mathbf{u}_0$ και η πυκνότητα των εξωτερικών δυνάμεων $\mathbf{f}$ είναι δεδομένες. Θα διακριτοποιήσουμε το πρόβλημα (2.1) στο χώρο χρησιμοποιώντας *πεπερασμένα στοιχεία* και *πεπερασμένα χωρία* με σκοπό να αποδείξουμε εκ των υστέρων εκτιμήσεις των σφαλμάτων για αυτές τις προσεγγίσεις.

Το πρόβλημα των εκ των υστέρων εκτιμήσεων για τις δυναμικές εξισώσεις του Stokes είναι άμεσα συνδεδεμένο με το πρόβλημα των αντίστοιχων εκτιμήσεων για τις δυναμικές εξισώσεις των Navier–Stokes, αφού οι πρώτες αποτελούν γραμμικοποίηση των τελευταίων. Η ανάπτυξη της θεωρίας για τον εκ των υστέρων έλεγχο των σφαλμάτων παρουσιάζει ενδιαφέρον ακόμα και στην πιο απλή περίπτωση των γραμμικών παραβολικών εξισώσεων, βλ. [19, 36, 34, 5, 12, 31] . Στην περίπτωση του προβλήματος (2.1) εμφανίζονται επιπλέον τεχνικές δυσκολίες. Για παράδειγμα, μια τεχνική δυσκολία που παρουσιάζεται οφείλεται στη συνθήκη ασυμπιεστότητας $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$. Ενώ η ακριβής λύση $\mathbf{u}$ την ικανοποιεί, αυτό δεν είναι απαραίτητο να συμβαίνει με την προσέγγιση $\mathbf{u}_h$· η $\mathbf{u}_h$ αρκεί να ικανοποιεί μια διακριτή συνθήκη ασυμπιεστότη-

τας. Στην περίπτωση που η $\mathbf{u}_h$ δεν ικανοποιεί τη συνθήκη ασυμπιεστότητας, ούτε το σφάλμα $\mathbf{u} - \mathbf{u}_h$ την ικανοποιεί και τότε οδηγούμαστε σε *μεταβολικό σφάλμα (variational crime)* και οι συνήθεις μέθοδοι για την απόδειξη εκ των υστέρων εκτιμήσεων αποτυγχάνουν. Επίσης, μια άλλη τεχνική δυσκολία που παρουσιάζεται οφείλεται στο γεγονός ότι, πολλές φορές, οι χώροι πεπερασμένης διάστασης που χρησιμοποιούνται για τη χωρική διακριτοποίηση των εξισώσεων Stokes αποτελούνται από μη συμμορφικές (noncomforming) συναρτήσεις.

Σ' αυτό το κεφάλαιο θα δείξουμε πώς μπορούμε να αποφύγουμε τις παραπάνω τεχνικές δυσκολίες και να αποδείξουμε εκ των υστέρων εκτιμήσεις των σφαλμάτων για τις χωρικές προσεγγίσεις των δυναμικών εξισώσεων Stokes χρησιμοποιώντας είτε πεπερασμένα στοιχεία είτε πεπερασμένα χωρία. Ειδικότερα, με εντελώς φυσιολογικό τρόπο, αποφεύγουμε το πρόβλημα που δημιουργείται εξαιτίας της συνθήκης ασυμπιεστότητας που αναφέραμε παραπάνω. Η προσέγγισή μας επιτρέπει τη χρήση μη συμμορφικών στοιχείων, την ελευθερία επιλογής διάφορων εκ των υστέρων εκτιμητών του στατικού προβλήματος, και οδηγεί σε βέλτιστης τάξης εκτιμήσεις, σε διάφορες νόρμες, χρησιμοποιώντας τεχνικές ενέργειας καθώς και δυϊκά επιχειρήματα.

Το βασικό εργαλείο της ανάλυσής μας είναι η *ανακατασκευή της προσέγγισης του προβλήματος Stokes*, που ορίζεται παρακάτω στον Ορισμό 2.2.1 ως η λύση ενός κατάλληλου *στατικού* προβλήματος Stokes, του οποίου το δεξιό μέλος εξαρτάται άμεσα από την προσεγγιστική λύση $\mathbf{u}_h$. Αυτός ο ορισμός είναι μια κατάλληλη επέκταση της *ελλειπτικής ανακατασκευής*, την οποία εισήγαγαν οι X. Μακριδάκης και R. Nochetto [34], για την περίπτωση του παραβολικού προβλήματος. Ο ρόλος της προαναφερθείσας ελλειπτικής ανακατασκευής ήταν καθοριστικός για την εκ των υστέρων ανάλυση σφάλματος των παραβολικών προβλημάτων. Σημειώνουμε ότι ένας παρόμοιος τελεστής χρησιμοποιήθηκε στην εκ των προτέρων ανάλυση σφάλματος των προσεγγίσεων πεπερασμένων στοιχείων των εξισώσεων των Navier–Stokes από τους Heywood και Rannacher [24, Corollary 4.3] για διαφορετικό λόγο. Στο Λήμμα 2.2.1 αποδεικνύουμε ότι η προσέγγιση $(\mathbf{u}_h, p_h)$ του (2.1) και η προσέγγιση του στατικού προβλήματος με ακριβή λύση την ανακατασκευή Stokes $(\mathbf{U}, P)$ ταυτίζονται.

Αυτή η ιδιότητα της ανακατασκευής Stokes είναι ουσιαστική, γιατί μας επιτρέπει να αναγάγουμε την απόδειξη των εκτιμήσεων για τα σφάλματα $\mathbf{u} - \mathbf{u}_h$ και $p - p_h$

στην απόδειξη εκτιμήσεων για τα σφάλματα $\mathbf{u} - \mathbf{U}$ και $p - P$. Στο Θεώρημα 2.2.1, αποδεικνύουμε ότι το ζεύγος $(\mathbf{u} - \mathbf{U}, p - P)$ ικανοποιεί μια *συνεχή* δυναμική εξίσωση Stokes και τη συνεχή συνθήκη ασυμπιεστότητας. Έτσι, χρησιμοποιώντας τις συνήθεις τεχνικές της θεωρίας των διαφορικών εξισώσεων, όπως τεχνικές ενέργειας και δυϊκότητας, μπορούμε να αποδείξουμε τις τελικές εκτιμήσεις σφάλματος σε διάφορες νόρμες.

Σ' αυτό το κεφάλαιο θα θεωρήσουμε το ημιδιακριτό πρόβλημα στο χώρο για να επικεντρωθούμε στην ανάπτυξη των βασικών ιδεών. Οι ίδιες τεχνικές μπορούν να επεκταθούν σε πλήρως διακριτά σχήματα, όπως θα δούμε στα Κεφάλαια 4 και 5. Αρχικά θα διατυπώσουμε το ημιδιακριτό πρόβλημα στο χώρο. Στη δεύτερη παράγραφο, θα εισαγάγουμε την ανακατασκευή Stokes, και θα συζητήσουμε τις βασικές της ιδιότητες. Στην επόμενη παράγραφο, βασιζόμενοι στη γενική θεωρία που θα αναπτύξουμε στην παράγραφο 1, θα παραγάγουμε εκτιμήσεις χρησιμοποιώντας τεχνικές ενέργειας ή δυϊκότητας. Στην τέταρτη παράγραφο θα εφαρμόσουμε τη γενική θεωρία στην περίπτωση του κλασικού ζεύγους των μη συμμορφικών πεπερασμένων στοιχείων των Crouzeix–Raviart ελάχιστου βαθμού και θα αποδείξουμε εκτιμήσεις βέλτιστης τάξης στους χώρους $L^\infty(L^2)$ και $L^\infty(H^1)$ για το σφάλμα της ταχύτητας. Επίσης, θα θεωρήσουμε τη μέθοδο πεπερασμένων χωρίων για τη διακριτοποίηση του (2.1). Και σ' αυτή την περίπτωση υποθέτουμε ότι οι προσεγγίσεις ανήκουν στους χώρους των Crouzeix–Raviart. Θα τροποποιήσουμε κατάλληλα την ανακατασκευή Stokes για την περίπτωση του σχήματος πεπερασμένων χωρίων και θα αποδείξουμε εκτιμήσεις βέλτιστης τάξης στους χώρους $L^\infty(L^2)$ και $L^\infty(H^1)$. Σ' αυτή την περίπτωση θα διαπιστώσουμε ότι η προσέγγιση πεπερασμένων χωρίων για το στατικό πρόβλημα με ακριβή λύση τη $(\mathbf{U}, P)$ είναι η προσέγγιση πεπερασμένων χωρίων $(\mathbf{u}_h, p_h)$ του δυναμικού προβλήματος. Δηλαδή ισχύει ότι και στην περίπτωση των πεπερασμένων στοιχείων.

2.2 Η ανακατασκευή Stokes

Σ' αυτή την παράγραφο θα ορίσουμε, επεκτείνοντας κατάλληλα τον ορισμό της ελλειπτικής ανακατασκευής που παρουσιάστηκε στην εργασία [34], την *ανακατασκευή*

Stokes και θα μελετήσουμε τις ιδιότητές της. Στη συνέχεια του κεφαλαίου υποθέτουμε ότι τα δεδομένα του προβλήματός μας διαθέτουν την απαιτούμενη ομαλότητα, ώστε τα αποτελέσματά μας να ισχύουν. Συγκεκριμένα υποθέτουμε, εκτός των περιπτώσεων που αναφέρεται κάτι διαφορετικό, ότι $\mathbf{f} \in L^2(0,T;\mathbf{V}^\star)$ και $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}$, έτσι ώστε το πρόβλημα (2.1) να έχει μοναδική ασθενή λύση $(\mathbf{u}, p)$.

Σ' αυτό το σημείο υπενθυμίζουμε τη μεταβολική διατύπωση του προβλήματος Stokes: Ζητούνται $\mathbf{u} \in L^2(0,T;\mathbf{V}) \cap C^0(0,T;\mathbf{H})$ και $p \in H^{-1}(0,T;\mathbf{H})$ τέτοιες ώστε

$$\mathbf{u}(\cdot,0) = \mathbf{u}_0, \text{ σχεδόν παντού στο } \Omega, \tag{2.2}$$

και ώστε, σχεδόν για κάθε $t \in [0,T]$ και για κάθε $(\mathbf{v}, q) \in \mathbf{V} \times S$,

$$\begin{cases} \langle \mathbf{u}_t, \mathbf{v}\rangle + a(\mathbf{u},\mathbf{v}) + b(\mathbf{v},p) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}\rangle, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad b(\mathbf{u},q) = 0, \end{cases} \tag{2.3}$$

όπου $\mathbf{H} = (L^2(\Omega))^d$, $\mathbf{V} = (\mathbf{H}_0^1(\Omega))^d$ και $\mathbf{Z}$ ο κλειστός υπόχωρος του $\mathbf{V}$

$$\mathbf{Z} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{V} : b(\mathbf{v},q) = 0 \quad \forall q \in S\}. \tag{2.4}$$

Όπως είδαμε στο Κεφάλαιο 1, το πρόβλημα (2.3) είναι ισοδύναμο με τα επόμενα δύο προβλήματα: Αρχικά προσδιορίστε $\mathbf{u} \in \mathbf{Z}$ τέτοια ώστε

$$\langle \mathbf{u}_t(t), \mathbf{v}\rangle + a(\mathbf{u}(t),\mathbf{v}) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}\rangle \quad \text{σ.π. στο [0,T]}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{Z}, \tag{2.5}$$

και στη συνέχεια προσδιορίστε $p \in S$ τέτοια ώστε

$$b(\mathbf{v},p) = -\langle \mathbf{u}_t(t), \mathbf{v}\rangle - a(\mathbf{u}(t),\mathbf{v}) + \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}\rangle \quad \text{σ.π. στο [0,T]}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}. \tag{2.6}$$

Για να έχει καθένα από τα προβλήματα (2.5) και (2.6) μοναδική λύση, υποθέτουμε ότι η διγραμμική μορφή $a(\cdot,\cdot)$ είναι ελλειπτική, δηλαδή

$$\alpha\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}^2 \le a(\mathbf{v},\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \tag{2.7}$$

με $\alpha > 0$, και επίσης ότι ικανοποιείται η συνθήκη inf-sup

$$\beta\|p\|_S \leq \sup_{\mathbf{w}\in\mathbf{V}} \frac{b(\mathbf{w},p)}{\|\mathbf{w}\|_{\mathbf{V}}} \quad \forall p \in S, \tag{2.8}$$

με $\beta > 0$, [8].

Έστω $(\mathbf{V}_h, S_h)$ ένα κατάλληλο ζεύγος χώρων πεπερασμένης διάστασης, το οποίο έχει επιλεγεί για τη διακριτοποίηση του στατικού προβλήματος Stokes. Κατ' αναλογίαν προς το πρόβλημα (2.1), ορίζουμε το ημιδιακριτό πρόβλημα πεπερασμένων στοιχείων: Ζητείται $(\mathbf{u}_h, p_h) : [0,T] \to \mathbf{V}_h \times S_h$ τέτοια ώστε

$$\begin{cases} \langle \mathbf{u}_{h,t}(t), \boldsymbol{\varphi}\rangle + a(\mathbf{u}_h(t), \boldsymbol{\varphi}) + b(\boldsymbol{\varphi}, p_h) = \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi}\rangle \quad \text{για κάθε } \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{V}_h, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad b(\mathbf{u}_h, q_h) = 0 \quad \text{για κάθε } q_h \in S_h. \end{cases} \tag{2.9}$$

Τονίζουμε ότι δεν υποθέτουμε ότι $\mathbf{V}_h \subset \mathbf{V}$ αφού, όπως προαναφέραμε, οι χώροι πεπερασμένης διάστασης που χρησιμοποιούνται για τη χωρική διακριτοποίηση του προβλήματος Stokes είναι δυνατόν να περιέχουν μη συμμορφικές συναρτήσεις. Υποθέτουμε όμως ότι η διγραμμική μορφή $a(\cdot,\cdot)$ επεκτείνεται στον $(\mathbf{V}_h + \mathbf{V}) \times (\mathbf{V}_h + \mathbf{V})$ και η διγραμμική μορφή $b(\cdot,\cdot)$ επεκτείνεται στον $(\mathbf{V}_h + \mathbf{V}) \times S$.

Τότε, όπως και στη συνεχή περίπτωση, η επίλυση του παραπάνω ημιδιακριτού προβλήματος (2.9) ανάγεται στην επίλυση των δύο ισοδύναμων προβλημάτων: Ζητείται $\mathbf{u}_h \in \mathbf{Z}_h$ τέτοια ώστε

$$\langle \mathbf{u}_{h,t}(t), \boldsymbol{\varphi}\rangle + a(\mathbf{u}_h(t), \boldsymbol{\varphi}) = \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi}\rangle \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{Z}_h, \tag{2.10}$$

και ζητείται $p_h \in S_h$ τέτοια ώστε

$$b(\mathbf{u}_h, p_h) = -\langle \mathbf{u}_{h,t}(t), \boldsymbol{\varphi}\rangle - a(\mathbf{u}_h(t), \boldsymbol{\varphi}) + \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi}\rangle \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{V}_h, \tag{2.11}$$

όπου $\mathbf{Z}_h \subset \mathbf{V}_h$ είναι ο υπόχωρος του $\mathbf{V}_h$ με στοιχεία που ικανοποιούν τη συνθήκη ασυμπιεστότητας

$$\mathbf{Z}_h = \{\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{V}_h : b(\boldsymbol{\varphi}, q) = 0 \quad \forall q \in S_h\}.$$

Όπως είδαμε στο Κεφάλαιο 1, ικανή και αναγκαία συνθήκη για τη μοναδικότητα της

$\mathbf{u}_h$ είναι η διγραμμική μορφή $a(\cdot,\cdot)$ να είναι ελλειπτική, δηλαδή

$$\alpha^*\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}^2 \leq a(\mathbf{v},\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_h, \tag{2.12}$$

με $\alpha^* > 0$, ενώ για τη μοναδικότητα της p_h ικανή και αναγκαία συνθήκη είναι η διγραμμική μορφή $b(\cdot,\cdot)$ να ικανοποιεί τη διακριτή συνθήκη inf-sup

$$0 < \beta^* := \inf_{q\in S_h} \sup_{\mathbf{v}\in\mathbf{V}_h} \frac{b(\mathbf{v},q)}{\|\mathbf{v}\|\mathbf{v}\|q\|_S} \quad \forall \in S_h, \tag{2.13}$$

με β^* ανεξάρτητο του h.

Στο σημείο αυτό θα παρουσιάσουμε εν συντομία το στατικό πρόβλημα Stokes, την ασθενή του διατύπωση και το αντίστοιχο ημιδιακριτό πρόβλημα (περισσότερες λεπτομέρειες ο αναγνώστης μπορεί να βρεί στο Κεφάλαιο 1 και στις αναφορές του), ούτως ώστε στη συνέχεια να ορίσουμε γι' αυτό τους *εκ των υστέρων εκτιμητές*.

Για $\mathbf{g} \in \mathbf{V}^\star$, το στατικό πρόβλημα Stokes μπορεί να διατυπωθεί ως εξής: προσδιορίστε $(\mathbf{w},q) \in \mathbf{V}\times S$ ώστε να ικανοποιείται

$$\begin{cases} -\Delta\mathbf{w} + \nabla q = \mathbf{g} & \text{στο } \Omega, \\ \operatorname{div}\mathbf{w} = 0 & \text{στο } \Omega. \end{cases} \tag{2.14}$$

Το πρόβλημα (2.14) μπορεί να διατυπωθεί, επίσης, στην ακόλουθη ασθενή μορφή: προσδιορίστε ζεύγος $(\mathbf{w},q) \in \mathbf{V}\times S$ που να ικανοποιεί

$$\begin{cases} a(\mathbf{w},\mathbf{v}) + b(\mathbf{v},q) = \langle \mathbf{g},\mathbf{v}\rangle & \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \\ b(\mathbf{w},\tilde{q}) = 0 & \forall \tilde{q} \in S. \end{cases} \tag{2.15}$$

Όπως είδαμε στο Κεφάλαιο 1, το πρόβλημα (2.15) είναι ισοδύναμο με τα προβλήματα: Ζητείται $\mathbf{w} \in \mathbf{Z}$ τέτοια ώστε

$$a(\mathbf{w},\mathbf{v}) = \langle \mathbf{g},\mathbf{v}\rangle \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{Z}, \tag{2.16}$$

και, στη συνέχεια, ζητείται $q \in S$ τέτοια ώστε

$$b(\mathbf{v}, q) = -a(\mathbf{w}, \mathbf{v}) + \langle \mathbf{g}, \mathbf{v} \rangle \quad \forall\, \mathbf{v} \in \mathbf{V}. \tag{2.17}$$

Το αντίστοιχο πρόβλημα πεπερασμένων στοιχείων είναι: προσδιορίστε ζεύγος $(\mathbf{w}_h, q_h) \in \mathbf{V}_h \times S_h$ τέτοιο ώστε

$$\begin{cases} a(\mathbf{w}_h, \boldsymbol{\varphi}) + b(\boldsymbol{\varphi}, q_h) = \langle \mathbf{g}, \boldsymbol{\varphi} \rangle \quad \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{V}_h, \\ \qquad\qquad b(\mathbf{w}_h, \tilde{q}) = 0 \quad \forall\, \tilde{q} \in S_h. \end{cases} \tag{2.18}$$

Η επίλυση του προβλήματος (2.18) μπορεί να αναχθεί στην επίλυση των ακόλουθων ισοδύναμων προβλημάτων: προσδιορίστε $\mathbf{w}_h \in \mathbf{Z}_h$ τέτοια ώστε

$$a(\mathbf{w}_h, \boldsymbol{\varphi}) = \langle \mathbf{g}, \boldsymbol{\varphi} \rangle \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{Z}_h, \tag{2.19}$$

και, στη συνέχεια, προσδιορίστε q_h τέτοια ώστε

$$b(\boldsymbol{\varphi}, q_h) = -a(\mathbf{w}_h, \boldsymbol{\varphi}) + \langle \mathbf{g}, \boldsymbol{\varphi} \rangle \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{V}_h. \tag{2.20}$$

Όπως αναφέραμε στην εισαγωγική παράγραφο αυτού του κεφαλαίου, η απόδειξη εκ των υστέρων εκτιμήσεων για τις χωρικές προσεγγίσεις του δυναμικού προβλήματος Stokes θα βασιστεί σε αντίστοιχες εκτιμήσεις ενός κατάλληλου στατικού προβλήματος Stokes. Γι' αυτόν το λόγο, υποθέτουμε την ύπαρξη εκ των υστέρων εκτιμητών, σε διάφορες νόρμες, για το στατικό πρόβλημα.

Υπόθεση 2.2.1. *Έστω $(\mathbf{w}, q) \in \mathbf{Z} \times S$ η ακριβής λύση του στατικού προβλήματος Stokes (2.15) και $(\mathbf{w}_h, q_h) \in \mathbf{Z}_h \times S_h$ η προσέγγισή της με πεπερασμένα στοιχεία που εισαγάγαμε στη (2.18). Για το χώρο X για την ταχύτητα, $X \in \{\mathbf{H}, \mathbf{V}, \mathbf{V}^\star\}$, και για το χώρο S για την πίεση, υποθέτουμε ότι υπάρχουν, αντίστοιχα, εκ των υστέρων εκτιμητές $\mathcal{E} = \mathcal{E}((\mathbf{w}_h, q_h), \mathbf{g}; X)$, και $\mathcal{E}_{\text{pres}} = \mathcal{E}_{\text{pres}}((\mathbf{w}_h, q_h), \mathbf{g}; S)$, που εξαρτώνται από την προσεγγιστική λύση $(\mathbf{w}_h, q_h)$, τα δεδομένα $\mathbf{g}$ και την αντίστοιχη νόρμα, τέτοιοι ώστε*

$$\|\mathbf{w} - \mathbf{w}_h\|_X \leq \mathcal{E}((\mathbf{w}_h, q_h), \mathbf{g}; X), \quad X = \mathbf{H},\ \mathbf{V},\ \mathbf{V}^\star, \tag{2.21}$$

και

$$\|q - q_h\|_S \leq \mathcal{E}_{\text{pres}}((\mathbf{w}_h, q_h), \mathbf{g}; S)\,. \tag{2.22}$$

Στη συνέχεια θα εισαγάγουμε την ανακατασκευή Stokes ως τη λύση ενός κατάλληλου στατικού προβλήματος Stokes.

Ορισμός 2.2.1. *(Η ανακατασκευή Stokes) Για $t \in [0, T]$, θεωρούμε τη λύση $(\mathbf{U}(t), P(t)) \in \mathbf{V} \times S$ του στατικού προβλήματος Stokes*

$$\begin{cases} a(\mathbf{U}(t), \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, P(t)) = \langle \mathbf{g}_h(t), \mathbf{v} \rangle & \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \\ b(\mathbf{U}(t), q) = 0 & \forall q \in S, \end{cases} \tag{2.23}$$

με

$$\mathbf{g}_h := -\tilde{\Delta}_h \mathbf{u}_h - \Pi_h \mathbf{f} + \mathbf{f}, \tag{2.24}$$

όπου $\tilde{\Delta}_h$ είναι το διακριτό ανάλογο του τελεστή Stokes που ορίσαμε στο Κεφάλαιο 1. Ονομάζουμε τη $(\mathbf{U}, P) = (\mathbf{U}(t), P(t))$ ανακατασκευή Stokes της $(\mathbf{u}_h(t), p_h(t))$.

Όπως προηγουμένως, η $\mathbf{U} \in \mathbf{Z}$ και η $P \in S$ είναι, αντίστοιχα, οι λύσεις των ακόλουθων προβλημάτων

$$a(\mathbf{U}, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{g}_h, \mathbf{v} \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{Z}, \tag{2.25}$$

και

$$b(\mathbf{v}, P) = -a(\mathbf{U}, \mathbf{v}) + \langle \mathbf{g}_h, \mathbf{v} \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}. \tag{2.26}$$

Στο επόμενο λήμμα αποδεικνύουμε ένα καθοριστικό, για την περαιτέρω ανάλυση, αποτέλεσμα. Συγκεκριμένα, αποδεικνύουμε ότι η λύση πεπερασμένων στοιχείων $(\mathbf{u}_h, p_h)$ του δυναμικού προβλήματος Stokes (2.3) είναι η λύση πεπερασμένων στοιχείων του στατικού προβλήματος Stokes (2.23) με ακριβή λύση την ανακατασκευή Stokes $(\mathbf{U}, P)$.

Λήμμα 2.2.1. *Υποθέτουμε ότι η* $(\mathbf{U}, P)$ *είναι η μοναδική λύση του προβλήματος Stokes* (2.23). *Έστω* $(\mathbf{U}_h, P_h) \in \mathbf{Z}_h \times S_h$ *η λύση πεπερασμένων στοιχείων του* (2.23), *δηλαδή*

$$\begin{cases} a(\mathbf{U}_h, \boldsymbol{\varphi}) + b(\boldsymbol{\varphi}, P_h) = \langle \mathbf{g}_h, \boldsymbol{\varphi} \rangle \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{V}_h, \\ b(\mathbf{U}_h, q) = 0 \quad \forall q \in S_h. \end{cases} \tag{2.27}$$

Τότε

$$\mathbf{U}_h(t) = \mathbf{u}_h(t) \quad \textit{και} \quad P_h(t) = p_h(t)\,, \tag{2.28}$$

όπου $(\mathbf{u}_h, p_h)$ *είναι η λύση του* (2.9).

Απόδειξη. Έστω $\mathbf{v}_h \in \mathbf{Z}_h$· τότε ο ορισμός του χώρου $\mathbf{Z}_h$ συνεπάγεται ότι $b(\mathbf{v}_h, P_h) = 0$, και, συνεπώς, από τη διαφορική εξίσωση (2.27) προκύπτει

$$a(\mathbf{U}_h, \mathbf{v}_h) = \langle \mathbf{g}_h, \mathbf{v}_h \rangle.$$

Τώρα, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η $\Pi_h \mathbf{f}$ είναι η L^2-προβολή της $\mathbf{f}$ στον $\mathbf{Z}_h$, για κάθε $\mathbf{v}_h \in \mathbf{Z}_h$ έχουμε

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{g}_h, \mathbf{v}_h \rangle &= -\langle \tilde{\Delta}_h \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h \rangle - \langle \Pi_h \mathbf{f}, \mathbf{v}_h \rangle + \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_h \rangle \\ &= a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h), \end{aligned} \tag{2.29}$$

και επομένως

$$a(\mathbf{U}_h - \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{Z}_h. \tag{2.30}$$

Αφού $\mathbf{U}_h,\ \mathbf{u}_h \in \mathbf{Z}_h$, επιλέγοντας $\mathbf{v}_h = \mathbf{U}_h - \mathbf{u}_h$ στην τελευταία σχέση συμπεραίνουμε ότι $\mathbf{U}_h(t) = \mathbf{u}_h(t)$. Επίσης, σύμφωνα με τη (2.10) λαμβάνουμε

$$\langle \mathbf{u}_{h,t} - \tilde{\Delta}_h \mathbf{u}_h - \Pi_h \mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi} \rangle = 0 \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{Z}_h,$$

άρα, αφού $\mathbf{u}_{h,t} - \tilde{\Delta}_h \mathbf{u}_h - \Pi_h \mathbf{f} \in \mathbf{Z}_h$, έχουμε

$$\mathbf{u}_{h,t} - \tilde{\Delta}_h \mathbf{u}_h - \Pi_h \mathbf{f} = 0. \tag{2.31}$$

Βάσει της τελευταίας σχέσης συμπεραίνουμε ότι

$$\langle \mathbf{u}_{h,t} - \tilde{\Delta}_h \mathbf{u}_h - \Pi_h \mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi} \rangle = 0 \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{V} + \mathbf{V}_h. \tag{2.32}$$

Επιπλέον, αφαιρώντας την πρώτη σχέση της (2.27) από την αντίστοιχη σχέση της (2.9) λαμβάνουμε, για κάθε $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{V}_h$,

$$b(\boldsymbol{\varphi}, p_h) - b(\boldsymbol{\varphi}, P_h) = -\langle \mathbf{u}_{h,t}, \boldsymbol{\varphi} \rangle - a(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\varphi}) + \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi} \rangle - [-a(\mathbf{U}_h, \boldsymbol{\varphi}) + \langle \mathbf{g}_h, \boldsymbol{\varphi} \rangle], \tag{2.33}$$

ή

$$b(\boldsymbol{\varphi}, p_h) - b(\boldsymbol{\varphi}, P_h) = a(\mathbf{U}_h - \mathbf{u}_h, \boldsymbol{\varphi}) - \langle \mathbf{u}_{h,t} - \tilde{\Delta}_h \mathbf{u}_h - \Pi_h \mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi} \rangle. \tag{2.34}$$

Σύμφωνα με τη (2.32) και το γεγονός ότι $\mathbf{U}_h = \mathbf{u}_h$, έχουμε

$$b(\boldsymbol{\varphi}, p_h - P_h) = 0, \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{V}_h. \tag{2.35}$$

Σ' αυτό το σημείο, για να καταλήξουμε στο επιθυμητό συμπέρασμα, θα χρησιμοποιήσουμε τη διακριτή συνθήκη inf-sup (2.13). Πράγματι, η σχέση (2.13) είναι ισοδύναμη με την

$$\beta^* \|q\|_S \leq \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{V}_h} \frac{b(\mathbf{v}, q)}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}}, \quad \forall q \in S_h. \tag{2.36}$$

Αντικαθιστώντας στην τελευταία σχέση $p = p_h - P_h$, σύμφωνα με τη (2.35), καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι $P_h = p_h$. Συνεπώς η $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{Z}_h \times S_h$ είναι η λύση πεπερασμένων στοιχείων του προβλήματος Stokes, του οποίου η ακριβής λύση είναι η $(\mathbf{U}, P)$. □

Προχωρούμε τώρα στη διατύπωση του βασικού θεωρήματος σχετικά με την εξίσωση που ικανοποιούν τα σφάλματα $\mathbf{e} := \mathbf{u} - \mathbf{U}$ και $\varepsilon := p - P$.

Θεώρημα 2.2.1. *(Εξίσωση σφάλματος) Έστω* $(\mathbf{U}, P)$ *η ανακατασκευή Stokes όπως ορίστηκε στη* (2.23) *και* $(\mathbf{u}, p)$ *η λύση του* (2.3). *Για σταθερό* $t \in [0, T]$, *θέτουμε* $\mathbf{e}(t) := \mathbf{u}(t) - \mathbf{U}(t)$ *και* $\varepsilon := p(t) - P(t)$, *τότε* $(\mathbf{e}(t), \varepsilon(t))$ *είναι η ασθενής λύση του*

$$\begin{cases} \mathbf{e}_t(t) - \Delta\mathbf{e}(t) + \nabla\varepsilon(t) = -(\mathbf{U} - \mathbf{u}_h)_t(t) \\ \operatorname{div}\mathbf{e}(t) = 0\,. \end{cases} \tag{2.37}$$

Αν υποθέσουμε επιπλέον ότι $\mathbf{f} \in H^j[0, T; \mathbf{V}^\star]$, $j = 0, 1$, *τότε για τη διαφορά* $\mathbf{U} - \mathbf{u}_h$ *λαμβάνουμε την εκτίμηση*

$$\|\partial_t^{(j)}(\mathbf{U} - \mathbf{u}_h)\|_X \leq \mathcal{E}((\partial_t^{(j)}\mathbf{u}_h, \partial_t^{(j)}p_h), \partial_t^{(j)}\mathbf{g}_h; X), \quad j = 0,\ 1, \tag{2.38}$$

για $X \in \{\mathbf{H}, \mathbf{V}, \mathbf{V}^\star\}$, *όπου* $\mathcal{E}$ *είναι ο εκ των υστέρων εκτιμητής που αναφέρθηκε στην* Υπόθεση 2.2.1.

Απόδειξη. Το ζεύγος $(\mathbf{U}, P)$ είναι η μοναδική λύση του προβλήματος Stokes

$$\begin{cases} -\Delta\mathbf{U} + \nabla P = \mathbf{g}_h & \text{στο } \Omega, \\ \operatorname{div}\mathbf{U} = 0 & \text{στο } \Omega, \end{cases} \tag{2.39}$$

με $\mathbf{g}_h$ όπως ορίστηκε στη (2.24). Τότε

$$\mathbf{U}_t - \Delta\mathbf{U} + \nabla P = \mathbf{U}_t + \tilde{\Delta}_h\mathbf{u}_h - \Pi_h\mathbf{f} + \mathbf{f}. \tag{2.40}$$

και χρησιμοποιώντας σ' αυτό το σημείο τη (2.31) έχουμε

$$\mathbf{U}_t - \Delta\mathbf{U} + \nabla P = (\mathbf{U} - \mathbf{u}_h)_t + \mathbf{f}. \tag{2.41}$$

Αφαιρώντας την (2.41) από την πρώτη σχέση της (2.3), έπεται ο πρώτος ισχυρισμός του θεωρήματος.

Επίσης, αφού οι διγραμμικές μορφές $a(\cdot,\cdot)$ και $b(\cdot,\cdot)$ δεν εξαρτώνται από το χρόνο, η $(\mathbf{U}_t, P_t)$ είναι η ασθενής λύση του (2.23) με δεξιό μέλος τη $\mathbf{g}_{h,t}$. Αντίστοιχα, η $(\mathbf{U}_{h,t}, P_{h,t}) \in \mathbf{V}_h \times S_h$ είναι η λύση πεπερασμένων στοιχείων του ίδιου προβλήματος. Βάσει του Λήμματος 2.2.1 συμπεραίνουμε ότι $(\mathbf{U}_{h,t}, P_{h,t}) = (\mathbf{u}_{h,t}, p_{h,t})$, δηλαδή

η $(\mathbf{u}_{h,t}, p_{h,t})$ είναι λύση πεπερασμένων στοιχείων του στατικού προβλήματος Stokes με ακριβή λύση την $(\mathbf{U}_t, P_t)$. Συνεπώς, ισχύει και ο δεύτερος ισχυρισμός του θεωρήματος. □

2.3 Εκτιμήσεις των σφαλμάτων

2.3.1 Εκτιμήσεις ενέργειας

Στη συνέχεια του κεφαλαίου θα αποδείξουμε εκ των υστέρων εκτιμήσεις σφάλματος για την ταχύτητα και την πίεση. Όπως αποδείξαμε στην προηγούμενη παράγραφο, τα σφάλματα $\mathbf{e} := \mathbf{u} - \mathbf{U}$ και $\varepsilon := p - P$ ικανοποιούν ένα στατικό πρόβλημα Stokes. Αυτή η ιδιότητα παίζει καθοριστικό ρόλο στην περαιτέρω ανάλυση, αφού επιτρέπει την εφαρμογή των συνήθων τεχνικών από τη θεωρία των διαφορικών εξισώσεων για την απόδειξη εκτιμήσεων σφάλματος. Ειδικότερα σ' αυτήν την παράγραφο, εφαρμόζοντας τεχνικές ενέργειας στο πρόβλημα (2.37), αποδεικνύουμε εκτιμήσεις των σφαλμάτων για την ταχύτητα στις νόρμες του $L^\infty(\mathbf{H})$, του $L^\infty(\mathbf{V})$, και του $L^2(\mathbf{V})$. Έπειτα, συνδυάζοντας τις εκτιμήσεις σφάλματος για την ταχύτητα με τη συνθήκη inf-sup, αποδεικνύουμε εκτίμηση σφάλματος για την πίεση στη νόρμα του $L^\infty(S)$. Προχωρούμε τώρα στη διατύπωση και την απόδειξη των πρώτων εκτιμήσεων.

Εκτιμήσεις σφάλματος για την ταχύτητα.

Θεώρημα 2.3.1. (Εκτιμήσεις σφάλματος στον $L^\infty(\mathbf{H})$ και στον $L^2(\mathbf{V})$.) *Έστω $(\mathbf{u}, p)$ η λύση του δυναμικού προβλήματος Stokes* (2.3) *και $(\mathbf{u}_h, p_h)$ η αντίστοιχη λύση πεπερασμένων στοιχείων του* (2.9). *Έστω $(\mathbf{U}, P)$ η λύση του στατικού προβλήματος Stokes* (2.15) *και $\mathcal{E}$ όπως ορίστηκε στην* Υπόθεση 2.2.1. *Τότε, για $0 < t \leq T$, έχουμε*

$$\|(\mathbf{u}-\mathbf{U})(t)\|_{\mathbf{H}}^2 + \int_0^t \|(\mathbf{u}-\mathbf{U})(s)\|_{\mathbf{V}}^2 ds \leq \|\mathbf{u}(0)-\mathbf{U}(0)\|_{\mathbf{H}}^2 + \int_0^t \mathcal{E}((\mathbf{u}_{h,t}, p_{h,t}), \mathbf{g}_{h,t}; \mathbf{V}^\star)^2 ds\,.$$

Επίσης ισχύουν οι εκτιμήσεις σφάλματος

$$\|(\mathbf{u}-\mathbf{u}_h)(t)\|_{\mathbf{H}} \le \|\mathbf{u}_0-\mathbf{u}_h^0\|_{\mathbf{H}} + \Big(\int_0^t \mathcal{E}((\mathbf{u}_{h,t},p_{h,t}),\mathbf{g}_{h,t};\mathbf{V}^\star)^2 ds\Big)^{1/2} + \mathcal{E}((\mathbf{u}_h(0),p_h(0)),\mathbf{g}_h(0);\mathbf{H}) + \mathcal{E}((\mathbf{u}_h(t),p_h(t)),\mathbf{g}_h(t);\mathbf{H}),$$

και

$$\Big(\int_0^t \|(\mathbf{u}-\mathbf{u}_h)(s)\|_{\mathbf{V}}^2 ds\Big)^{1/2} \le \|\mathbf{u}_0-\mathbf{u}_h^0\|_{\mathbf{H}} + \Big(\int_0^t \mathcal{E}((\mathbf{u}_{h,t},p_{h,t}),\mathbf{g}_{h,t};\mathbf{V}^\star)^2 ds\Big)^{1/2} + \mathcal{E}((\mathbf{u}_h(0),p_h(0)),\mathbf{g}_h(0);\mathbf{H}) + \Big(\int_0^t \mathcal{E}((\mathbf{u}_h,p_h),\mathbf{g}_h;\mathbf{V})^2 ds\Big)^{1/2}.$$

Απόδειξη. Σύμφωνα με τον ορισμό της ανακατασκευής Stokes (2.23) και τη (2.32) έχουμε

$$a(\mathbf{U},\mathbf{v}) + b(\mathbf{v},P) = -\langle \mathbf{u}_{h,t} - \tilde{\Delta}_h\mathbf{u}_h - \Pi_h\mathbf{f},\mathbf{v}\rangle + \langle -\tilde{\Delta}_h\mathbf{u}_h - \Pi_h\mathbf{f}+\mathbf{f},\mathbf{v}\rangle \quad \forall \mathbf{v}\in\mathbf{V},$$

ή

$$a(\mathbf{U},\mathbf{v}) + b(\mathbf{v},P) = -\langle \mathbf{u}_{h,t},\mathbf{v}\rangle + \langle \mathbf{f},\mathbf{v}\rangle \quad \forall \mathbf{v}\in\mathbf{V}, \tag{2.42}$$

ή

$$\langle \mathbf{U}_t,\mathbf{v}\rangle + a(\mathbf{U},\mathbf{v}) + b(\mathbf{v},P) = \langle (\mathbf{U}-\mathbf{u}_h)_t,\mathbf{v}\rangle + \langle \mathbf{f},\mathbf{v}\rangle \quad \forall \mathbf{v}\in\mathbf{V}. \tag{2.43}$$

Θέτουμε $\mathbf{e} := \mathbf{u}-\mathbf{U}$ και $\varepsilon := p-P$. Αφαιρώντας τη (2.3) από τη (2.43), και παρατηρώντας ότι $\mathbf{e}\in\mathbf{Z}$, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι το ζεύγος $(\mathbf{e},\varepsilon)\in\mathbf{V}\times S$ είναι η λύση του προβλήματος Stokes

$$\begin{cases} \langle \mathbf{e}_t,\mathbf{v}\rangle + a(\mathbf{e},\mathbf{v}) + b(\mathbf{v},\varepsilon) = -\langle (\mathbf{U}-\mathbf{u}_h)_t,\mathbf{v}\rangle \quad \forall \mathbf{v}\in\mathbf{V}, \\ \langle \operatorname{div}\mathbf{e},q\rangle = 0 \quad \forall q\in S. \end{cases} \tag{2.44}$$

Ισοδύναμα, $\mathbf{e} \in \mathbf{Z}$ είναι η λύση του

$$\langle \mathbf{e}_t, \mathbf{v} \rangle + a(\mathbf{e}, \mathbf{v}) = -\langle (\mathbf{U} - \mathbf{u}_h)_t, \mathbf{v} \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{Z}, \tag{2.45}$$

και τότε η $\varepsilon \in S$ είναι η λύση του

$$b(\mathbf{v}, \varepsilon) = -\langle \mathbf{e}_t, \mathbf{v} \rangle - a(\mathbf{e}, \mathbf{v}) - \langle (\mathbf{U} - \mathbf{u}_h)_t, \mathbf{v} \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}. \tag{2.46}$$

Τώρα, αφού $\mathbf{e} \in \mathbf{Z}$, μπορούμε να επιλέξουμε $\mathbf{v} = \mathbf{e}$ στη (2.45) για να οδηγηθούμε στην

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{e}(t)\|_{\mathbf{H}}^2 + \|\mathbf{e}(t)\|_{\mathbf{V}}^2 = \langle (\mathbf{u}_{h,t} - \mathbf{U}_t)(t), \mathbf{e} \rangle,$$

από την οποία, χρησιμοποιώντας διαδοχικά την ανισότητα των Cauchy-Schwarz και την αριθμητική γεωμετρική ανισότητα $ab \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$ παίρνουμε

$$\frac{d}{dt}\|\mathbf{e}(t)\|_{\mathbf{H}}^2 + \|\mathbf{e}(t)\|_{\mathbf{V}}^2 \leq \|(\mathbf{u}_{h,t} - \mathbf{U}_t)(t)\|_{\mathbf{V}^\star}^2. \tag{2.47}$$

Ολοκληρώνοντας την τελευταία σχέση στο διάστημα $(0, t)$ λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{u} - \mathbf{U})(t)\|_{\mathbf{H}}^2 + \int_0^t \|(\mathbf{u} - \mathbf{U})(s)\|_{\mathbf{V}}^2 ds \\ \leq \|\mathbf{u}(0) - \mathbf{U}(0)\|_{\mathbf{H}}^2 + \int_0^t \|(\mathbf{u}_{h,t} - \mathbf{U}_t)(s)\|_{\mathbf{V}^\star}^2 ds. \end{aligned} \tag{2.48}$$

Σύμφωνα τώρα με την Υπόθεση 2.2.1 έχουμε

$$\|\mathbf{u}_{h,t} - \mathbf{U}_t\|_{\mathbf{V}^\star} \leq \mathcal{E}((\mathbf{u}_{h,t}, p_{h,t}), \mathbf{g}_{h,t}; \mathbf{V}^\star)\,, \tag{2.49}$$

η οποία με τη σειρά της οδηγεί στον πρώτο ισχυρισμό του Θεωρήματος 2.3.1. Για να αποδείξουμε το δεύτερο ισχυρισμό αρχικά παρατηρούμε ότι από την Υπόθεση 2.2.1 προκύπτει

$$\|(\mathbf{u}_h - \mathbf{U})(t)\|_{\mathbf{H}} \leq \mathcal{E}((\mathbf{u}_h(t), p_h(t)), \mathbf{g}_h(t); \mathbf{H}) \quad \forall\, t \in [0, T]. \tag{2.50}$$

Επίσης

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}(0)-\mathbf{U}(0)\|_{\mathbf{H}} &\le \|\mathbf{u}(0)-\mathbf{u}_h(0)\|_{\mathbf{H}} + \|\mathbf{u}_h(0)-\mathbf{U}(0)\|_{\mathbf{H}} \\ &\le \|\mathbf{u}_0-\mathbf{u}_h^0\|_{\mathbf{H}} + \mathcal{E}((\mathbf{u}_h(0),p_h(0)),\mathbf{g}_h(0);\mathbf{H}).\end{aligned} \tag{2.51}$$

Συνδυάζοντας τις (2.63), (2.50) και (2.51) ολοκληρώνεται η απόδειξη του θεωρήματος. □

Στο επόμενο θεώρημα αποδεικνύουμε εκτιμήσεις των σφαλμάτων στη νόρμα του $L^\infty(\mathbf{V})$ για την ταχύτητα.

Θεώρημα 2.3.2. (Εκτιμήσεις σφάλματος στο $L^\infty(\mathbf{V})$.) *Έστω $(\mathbf{u},p)$ η λύση του δυναμικού προβλήματος Stokes (2.3) και $(\mathbf{u}_h,p_h)$ η αντίστοιχη λύση πεπερασμένων στοιχείων (2.9). Έστω $(\mathbf{U},P)$ η λύση του στατικού προβλήματος Stokes του (2.23) και $\mathcal{E}$ όπως ορίστηκε στην* Υπόθεση 2.2.1. *Τότε ισχύουν οι παρακάτω εκτιμήσεις σφάλματος, για $0<t\le T$,*

$$\begin{aligned}\int_0^t \|(\mathbf{u}-\mathbf{U})_t(s)\|_{\mathbf{H}}^2\,ds + \|\nabla(\mathbf{u}-\mathbf{U})(t)\|_{\mathbf{H}}^2 \\ \le \|\nabla(\mathbf{u}-\mathbf{U})(0)\|_{\mathbf{H}}^2 + \int_0^t \mathcal{E}((\mathbf{u}_{h,t},p_{h,t}),\mathbf{g}_{h,t};\mathbf{H})^2 ds\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\|\nabla(\mathbf{u}-\mathbf{u}_h)(t)\|_{\mathbf{H}} \le \|\mathbf{u}_0-\mathbf{u}_h^0\|_{\mathbf{V}} + \Big(\int_0^t \mathcal{E}((\mathbf{u}_{h,t},p_{h,t}),\mathbf{g}_{h,t};\mathbf{H})^2 ds\Big)^{1/2} \\ + \mathcal{E}((\mathbf{u}_h(0),p_h(0)),\mathbf{g}_h(0);\mathbf{V}) + \mathcal{E}((\mathbf{u}_h(t),p_h(t)),\mathbf{g}_h(t);\mathbf{V}).\end{aligned}$$

Απόδειξη. Ο πρώτος ισχυρισμός του θεωρήματος προκύπτει θέτοντας $\mathbf{v}=\mathbf{e}_t$ στη (2.45). Πράγματι, αφού $\mathbf{e}\in\mathbf{Z}$, συμπεραίνουμε ότι $\mathbf{e}_t\in\mathbf{Z}$, και συνεπώς στη (2.45) μπορούμε να επιλέξουμε $\mathbf{v}=\mathbf{e}_t$ για να οδηγηθούμε στην

$$\|\mathbf{e}_t(t)\|_{\mathbf{H}}^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{e}(t)\|_{\mathbf{V}}^2 = \langle(\mathbf{u}_{h,t}-\mathbf{U}_t)(t),\mathbf{e}_t\rangle, \tag{2.52}$$

από την οποία παίρνουμε

$$\|\mathbf{e}(t)\|_{\mathbf{H}}^2 + \frac{d}{dt}\|\mathbf{e}(t)\|_{\mathbf{V}}^2 \leq \|(\mathbf{u}_{h,t} - \mathbf{U}_t)(t)\|_{\mathbf{H}}^2. \tag{2.53}$$

Ολοκληρώνοντας την τελευταία σχέση στο διάστημα $(0,t)$ έχουμε

$$\begin{aligned} \int_0^t \|(\mathbf{u}-\mathbf{U})(s)\|_{\mathbf{H}}^2\, ds + \|(\mathbf{u}-\mathbf{U})(t)\|_{\mathbf{V}}^2 \\ \leq \|\mathbf{u}(0)-\mathbf{U}(0)\|_{\mathbf{V}}^2 + \int_0^t \|(\mathbf{u}_{h,t}-\mathbf{U}_t)(s)\|_{\mathbf{H}}^2\, ds. \end{aligned} \tag{2.54}$$

Επίσης, σύμφωνα με την Υπόθεση 2.2.1 λαμβάνουμε

$$\|(\mathbf{u}_h - \mathbf{U})(t)\|_{\mathbf{V}} \leq \mathcal{E}((\mathbf{u}_h(t), p_h(t)), \mathbf{g}_h(t); \mathbf{V}), \quad \text{για κάθε } 0 \leq t \leq T\,, \tag{2.55}$$

η οποία, σε συνδυασμό με την

$$\begin{aligned} \|\nabla(\mathbf{u}-\mathbf{U})(0)\|_{\mathbf{H}} &\leq \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_h^0\|_{\mathbf{V}} + \|(\mathbf{u}_h - \mathbf{U})(0)\|_{\mathbf{V}} \\ &\leq \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_h^0\|_{\mathbf{V}} + \mathcal{E}((\mathbf{u}_h(0), p_h(0)), \mathbf{g}_h(0); \mathbf{V}), \end{aligned}$$

αποδεικνύει το δεύτερο ισχυρισμό του θεωρήματος. □

Παρατήρηση 2.3.1. *Εναλλακτικά μπορούμε να αποδείξουμε εκτιμήσεις των σφαλμάτων στη νόρμα του* $\mathbf{V}$ *ως εξής: Προφανώς* $\tilde{\Delta}\mathbf{e} \notin \mathbf{Z}$, *αλλά εφαρμόζοντας ολοκλήρωση κατά μέρη στη σχέση* (2.45), *μπορούμε να αιτιολογήσουμε την επιλογή* $\mathbf{v} = \tilde{\Delta}\mathbf{e}$. *Τότε, παρατηρώντας ότι* $\langle \mathbf{e}_t, \tilde{\Delta}\mathbf{e}\rangle = \langle \mathbf{e}_t, \Delta\mathbf{e}\rangle = -\langle \nabla\mathbf{e}_t, \nabla\mathbf{e}\rangle$ *(βλ. [24]), βρίσκουμε*

$$\begin{aligned} \max_{0\leq t\leq T} \|\nabla(\mathbf{u}-\mathbf{U})(t)\|_{\mathbf{H}}^2 + \int_0^T \|\tilde{\Delta}(\mathbf{u}-\mathbf{U})(s)\|_{\mathbf{H}}^2 ds \\ \leq \|\nabla(\mathbf{u}-\mathbf{U})(0)\|_{\mathbf{H}}^2 + \int_0^T \mathcal{E}((\mathbf{u}_{h,t}, p_{h,t}), \mathbf{g}_{h,t}; \mathbf{H})^2 ds\,. \end{aligned}$$

Εκτιμήσεις σφάλματος για την πίεση

Η εκτίμηση των σφαλμάτων για την πίεση για το δυναμικό πρόβλημα του Stokes

είναι λεπτό θέμα. Δυστυχώς, ενώ στο στατικό πρόβλημα το $\|p - p_h\|_S$ συμπεριφέρεται όπως το $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{V}}$, μια ανάλογη εκτίμηση των σφαλμάτων για την πίεση στα δυναμικά προβλήματα δεν είναι προφανής, ακόμα και στην εκ των προτέρων ανάλυση των σφαλμάτων. Ο δικός μας τρόπος προσέγγισης του προβλήματος περιορίζεται σε μια εκτίμηση που εμπλέκει την $\|p - P\|_S$ και την $\|\mathbf{u} - \mathbf{U}\|_{\mathbf{V}}$ σε όρους του δεξιού μέλους της διαφορικής εξίσωσης (2.37). Δεν είναι ξεκάθαρο πώς αυτό μπορεί να αποδειχθεί με απλές τεχνικές ενέργειας. Περισσότερες πληροφορίες ο αναγνώστης μπορεί να βρει στις εργασίες των Koch και Solonnikov [38, 27, 28], όπου αντιμετωπίζονται διάφορα θέματα ευστάθειας για το δυναμικό πρόβλημα Stokes. Σημειώνουμε επίσης ότι εκτιμήσεις των σφαλμάτων για την πίεση στη νόρμα του $H^{-1}(L^2)$ μπορούν να αποδειχθούν υιοθετώντας επιχειρήματα των Bernardi και Raugel [6] για τις εκτιμήσεις του (2.37). Στη συνέχεια εκτιμούμε την $\max_{t\in[0,T]} \|p(t) - P(t)\|_S$ με κόστος μία επιπλέον παράγωγο ως προς t για την υπό εκτίμηση συνάρτηση· συγκρίνετε με την εκτίμηση των σφαλμάτων για την ταχύτητα στο Θεώρημα 2.3.2 για τη νόρμα $\max_{t\in[0,T]} \|\mathbf{u} - \mathbf{U}\|_{\mathbf{V}}$. Η τάξη του εκτιμητή που προκύπτει είναι βέλτιστη.

Θεώρημα 2.3.3. (Εκτιμήσεις των σφαλμάτων στον $L^\infty(S)$.) *Έστω* $(\mathbf{u}, p)$ *η λύση του δυναμικού προβλήματος Stokes* (2.3) *και* $(\mathbf{u}_h, p_h)$ *η αντίστοιχη λύση πεπερασμένων στοιχείων του* (2.9). *Έστω* $(\mathbf{U}, P)$ *η λύση του στατικού προβλήματος Stokes* (2.15) *και* $\mathcal{E}$ *όπως ορίστηκε στην* Υπόθεση 2.2.1. *Τότε ισχύουν οι παρακάτω εκτιμήσεις σφάλματος, για* $0 < t \leq T$,

$$\begin{aligned}\beta^2\|(p-P)(t)\|_S{}^2 \leq C\big[&\|(\mathbf{u}-\mathbf{U})_t(0)\|_{\mathbf{H}}^2 + \|\nabla(\mathbf{u}-\mathbf{U})(0)\|_{\mathbf{H}}^2 \\ &+ \int_0^t \mathcal{E}((\mathbf{u}_{h,tt}, p_{h,tt}), \mathbf{g}_{h,tt}; \mathbf{V}^\star)^2 ds \\ &+ \int_0^t \mathcal{E}((\mathbf{u}_{h,t}, p_{h,t}), \mathbf{g}_{h,t}; \mathbf{H})^2 ds + \mathcal{E}((\mathbf{u}_{h,t}, p_{h,t}), \mathbf{g}_{h,t}; \mathbf{V}^\star)^2\big].\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\beta\|(p-p_h)(t)\|_S \le C\big[&\|(\mathbf{u}-\mathbf{U})_t(0)\|_{\mathbf{H}} + \|\nabla(\mathbf{u}-\mathbf{U})(0)\|_{\mathbf{H}} \\ &+ \Big(\int_0^t \mathcal{E}((\mathbf{u}_{h,tt}, p_{h,tt}), \mathbf{g}_{h,tt}; \mathbf{V}^\star)^2 ds \\ &+ \int_0^t \mathcal{E}((\mathbf{u}_{h,t}, p_{h,t}), \mathbf{g}_{h,t}; \mathbf{H})^2 ds\Big)^{1/2} + \mathcal{E}((\mathbf{u}_{h,t}, p_{h,t}), \mathbf{g}_{h,t}; \mathbf{V}^\star)\big] \\ &+ \beta\mathcal{E}_{\text{pres}}((\mathbf{u}_h, p_h), \mathbf{g}_h; S)\,.\end{aligned}$$

Απόδειξη. Σύμφωνα με τη συνθήκη inf-sup (2.13) και τη (2.44), έχουμε

$$\beta\|\varepsilon\|_S \le \sup_{\mathbf{v}\in\mathbf{V}} \frac{b(\mathbf{v},\varepsilon)}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}} = \sup_{\mathbf{v}\in\mathbf{V}} \frac{-\langle \mathbf{e}_t, \mathbf{v}\rangle - a(\mathbf{e},\mathbf{v}) - \langle (\mathbf{U}-\mathbf{u}_h)_t, \mathbf{v}\rangle}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}} \tag{2.56}$$

από την οποία έπεται

$$\beta\|\varepsilon\|_S \le \sup_{\mathbf{v}\in\mathbf{V}} \frac{\|\mathbf{e}_t\|_{\mathbf{H}}\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}} + \|\mathbf{e}\|_{\mathbf{V}}\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}} + \|(\mathbf{U}-\mathbf{u}_h)_t\|_{\mathbf{V}_\star}\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}} \tag{2.57}$$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα του Poincaré έχουμε

$$\frac{\|\mathbf{e}_t\|_{\mathbf{H}}\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}}}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}} \le C(\Omega)\|\mathbf{e}_t\|_{\mathbf{H}}, \quad \forall \mathbf{v}\in\mathbf{V}, \tag{2.58}$$

δηλαδή

$$\sup_{\mathbf{v}\in\mathbf{V}} \frac{\|\mathbf{e}_t\|_{\mathbf{H}}\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}}}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}} \le C(\Omega)\|\mathbf{e}_t\|_{\mathbf{H}}. \tag{2.59}$$

Παραγωγίζοντας τη (2.45) ως προς t λαμβάνουμε

$$\langle \mathbf{e}_{tt}, \mathbf{v}\rangle + a(\mathbf{e}_t, \mathbf{v}) = \langle (\mathbf{U}-\mathbf{u}_h)_{tt}, \mathbf{v}\rangle \quad \forall \mathbf{v}\in\mathbf{Z}. \tag{2.60}$$

Τώρα, θέτοντας $\mathbf{v} = \mathbf{e}_t \in \mathbf{Z}$ στην τελευταία εξίσωση λαμβάνουμε

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{e}_t(t)\|_{\mathbf{H}}^2 + \|\mathbf{e}_t(t)\|_{\mathbf{V}}^2 = \langle (\mathbf{u}_{h,tt} - \mathbf{U}_{tt})(t), \mathbf{e}_t\rangle, \tag{2.61}$$

από την οποία προκύπτει ότι

$$\frac{d}{dt}\|\mathbf{e}_t(t)\|_{\mathbf{H}}^2 + \|\mathbf{e}_t(t)\|_{\mathbf{V}}^2 \leq \|(\mathbf{u}_{h,tt} - \mathbf{U}_{tt})(t)\|_{\mathbf{V}^\star}^2. \tag{2.62}$$

Ολοκληρώνοντας την τελευταία σχέση στο διάστημα $(0,t)$ λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{u}-\mathbf{U})_t(t)\|_{\mathbf{H}}^2 + \int_0^t \|(\mathbf{u}-\mathbf{U})_t(s)\|_{\mathbf{V}}^2\, ds \\ \leq \|\mathbf{u}_t(0) - \mathbf{U}_t(0)\|_{\mathbf{H}}^2 + \int_0^t \|(\mathbf{u}_{h,tt} - \mathbf{U}_{tt})(s)\|_{\mathbf{V}^\star}^2\, ds. \end{aligned} \tag{2.63}$$

Χρησιμοποιώντας τις (2.56), (2.63), την Υπόθεση 2.2.1 και τις προηγούμενες εκτιμήσεις των σφαλμάτων για την ταχύτητα οδηγούμαστε στο αποτέλεσμα του θεωρήματος.

□

2.3.2 Παραβολική δυϊκότητα

Θα συζητήσουμε σύντομα με ποιον τρόπο μπορούμε να εφαρμόσουμε τις προηγούμενες ιδέες για να αποδείξουμε εκτιμήσεις των σφαλμάτων χρησιμοποιώντας την παραβολική δυϊκότητα [40, 19]. Θεωρούμε το ανάδρομο (backward) πρόβλημα Stokes: για $0 < t_\star \leq T$ έστω $\mathbf{z} \in L^2(0,t_\star;\mathbf{V}) \cap C^0(0,t_\star;\mathbf{H})$ και $s \in H^{-1}(0,t_\star;\mathbf{H})$ η λύση του προβλήματος

$$\begin{cases} \mathbf{z}_t + \Delta\mathbf{z} - \nabla s = 0 & \text{στο } \Omega \times (0,t_\star), \\ \operatorname{div}\mathbf{z} = 0 & \text{στο } \Omega \times (0,t_\star), \\ \mathbf{z} = 0 & \text{στο } \partial\Omega \times (0,t_\star), \\ \mathbf{z}(\cdot,t_\star) = \mathbf{e}(\cdot,t_\star) & \text{στο } \Omega, \end{cases} \tag{2.64}$$

όπου $\mathbf{e} = \mathbf{U} - \mathbf{u}$. Στο σημείο αυτό, χρησιμοποιώντας ανάλογα επιχειρήματα όπως στο βιβλίο [40, Lemma 12.5], αποδεικνύουμε το επόμενο λήμμα για το πρόβλημα (2.64).

Λήμμα 2.3.1. *Έστω $t \in (0,T]$. Τότε για κάθε τ, $0 < \tau < t_\star$, ισχύει η ακόλουθη*

εκτίμηση για τη λύση $\mathbf{z}$ *του ανάδρομου προβλήματος* (2.64)

$$\int_0^{t_\star-\tau} \|\mathbf{z}_t\|_{\mathbf{H}} dt + \sup_{t\in(0,t_\star-\tau)} \|\mathbf{z}(t)\|_{\mathbf{H}} \leq C L_\tau \|\mathbf{e}(t_\star)\|_{\mathbf{H}}, \tag{2.65}$$

όπου $L_\tau = (\log(\frac{t_\star}{\tau}))^{1/2} + 1$.

Απόδειξη. Αντικαθιστώντας τη μεταβλητή t με $t_\star - t$ προκύπτει το εξής πρόβλημα Stokes, το οποίο είναι ισοδύναμο με το (2.64)

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{z}}_t - \Delta\tilde{\mathbf{z}} + \nabla\tilde{s} = 0 & \text{στο } \Omega\times(0,t_\star), \\ \nabla\cdot\tilde{\mathbf{z}} = 0 & \text{στο } \Omega\times(0,t_\star), \\ \tilde{\mathbf{z}} = 0 & \text{στο } \partial\Omega\times(0,t_\star), \\ \tilde{\mathbf{z}}(\cdot,0) = \mathbf{e}(\cdot,t_\star) & \text{στο } \Omega. \end{cases} \tag{2.66}$$

Παίρνοντας στη διαφορική εξίσωση το εσωτερικό γινόμενο με $\tilde{\mathbf{z}} \in \mathbf{Z}$ έχουμε

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\tilde{\mathbf{z}}(t)\|_{\mathbf{H}}^2 + \|\nabla\tilde{\mathbf{z}}(t)\|_{\mathbf{H}}^2 = 0, \tag{2.67}$$

από την οποία συμπεραίνουμε ότι η $\|\tilde{\mathbf{z}}\|_{\mathbf{H}}$ είναι φθίνουσα συνάρτηση του t στο διάστημα $(0,t_\star)$, και συνεπώς

$$\sup_{t\in(0,t_\star)} \|\tilde{\mathbf{z}}(t)\|_{\mathbf{H}} \leq \|\tilde{\mathbf{z}}(0)\|_{\mathbf{H}}, \tag{2.68}$$

από την οποία έπεται ότι

$$\sup_{t\in(0,t_\star]} \|\mathbf{z}(t)\|_{\mathbf{H}} \leq \|\mathbf{z}(t_\star)\|_{\mathbf{H}}. \tag{2.69}$$

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι

$$\int_\tau^{t_\star} \|\tilde{\mathbf{z}}_s\|_{\mathbf{H}} ds \leq C\, L_\tau\, \|\mathbf{e}(t_\star)\|_{\mathbf{H}} \tag{2.70}$$

με $L_\tau = (\log(\frac{t_\star}{\tau}))^{1/2} + 1$.

Παίρνοντας το εσωτερικό γινόμενο στη (2.66) με $t\,\tilde{\mathbf{z}}_t$ και ολοκληρώνοντας στο διάστημα $(0, t_\star)$, έχουμε

$$\int_0^{t_\star} t\|\tilde{\mathbf{z}}_t\|_{\mathbf{H}}^2 - \int_0^{t_\star} t\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\langle\Delta\tilde{\mathbf{z}}, \tilde{\mathbf{z}}\rangle = 0.$$

Ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες το δεύτερο ολοκλήρωμα λαμβάνουμε

$$\int_0^{t_\star} t\|\tilde{\mathbf{z}}_t\|_{\mathbf{H}}^2 + \frac{t_\star}{2}\|\nabla\tilde{\mathbf{z}}(t_\star)\|_{\mathbf{H}}^2 + \frac{1}{2}\int_0^{t_\star} \|\nabla\tilde{\mathbf{z}}(t)\|_{\mathbf{H}}^2 = 0.$$

Αντικαθιστώντας την ολοκληρωτέα ποσότητα στο τελευταίο ολοκλήρωμα από τη σχέση (2.67) έχουμε

$$\int_0^{t_\star} t\|\tilde{\mathbf{z}}_t\|_{\mathbf{H}}^2 + \frac{t_\star}{2}\|\nabla\tilde{\mathbf{z}}(t_\star)\|_{\mathbf{H}}^2 = \frac{1}{4}\|\tilde{\mathbf{z}}(0)\|_{\mathbf{H}}^2 - \frac{1}{4}\|\tilde{\mathbf{z}}(t_\star)\|_{\mathbf{H}}^2. \tag{2.71}$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει

$$\int_0^{t_\star} t\|\tilde{\mathbf{z}}_t\|_{\mathbf{H}}^2 \le \frac{1}{4}\|\tilde{\mathbf{z}}(0)\|_{\mathbf{H}}^2 = \frac{1}{4}\|\mathbf{e}(t_\star)\|_{\mathbf{H}}^2. \tag{2.72}$$

Τώρα έχουμε

$$\Big(\int_\tau^{t_\star} \|\tilde{\mathbf{z}}_t\|_{\mathbf{H}} dt\Big)^2 \le \int_\tau^{t_\star} \frac{dt}{t}\int_0^{t_\star} t\|\tilde{\mathbf{z}}_t\|_{\mathbf{H}}^2 dt \le \frac{1}{4}\log\big(\frac{t_\star}{\tau}\big)\|\mathbf{e}(t_\star)\|_{\mathbf{H}}^2. \tag{2.73}$$

Από την τελευταία σχέση έπεται ότι

$$\Big(\int_0^{t_\star-\tau} \|\mathbf{z}_t\|_{\mathbf{H}} dt\Big)^2 \le \frac{1}{4}\log\big(\frac{t_\star}{\tau}\big)\|\mathbf{e}(t_\star)\|_{\mathbf{H}}^2, \tag{2.74}$$

το οποίο συμπληρώνει την απόδειξη. □

Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο λήμμα καταλήγουμε στο αποτέλεσμα

Θεώρημα 2.3.4. *Υποθέτουμε ότι* $(\mathbf{u}, p)$ *είναι η ακριβής λύση του* (2.3) *και* $(\mathbf{u}_h, p_h)$ *είναι η αντίστοιχη προσέγγιση πεπερασμένων στοιχείων του* (2.9). *Έστω* $(\mathbf{U}, P)$ *η ανακατασκευή Stokes όπως ορίστηκε στη* (2.15). *Τότε, για* $0 < t_\star \le T$ *και κάθε* τ,

$0 < \tau < t_\star$, *ισχύει η εκ των υστέρων εκτίμηση σφάλματος:*

$$\|(\mathbf{u}-\mathbf{u}_h)(t_\star)\|_{\mathbf{H}} \le \big(1+\frac{1}{2}L_\tau\big) \max_{0\le t\le t_\star} \|(\mathbf{U}-\mathbf{u}_h)(t)\|_{\mathbf{H}} + \int_{t_\star-\tau}^{t_\star} \|(\mathbf{U}-\mathbf{u}_h)_t\|_{\mathbf{H}}\, dt + \|(\mathbf{u}-\mathbf{u}_h)(0)\|_{\mathbf{H}}\,,$$

με $L_\tau = \log(\frac{t_\star}{\tau})^{1/2}$.

Απόδειξη. Για να αποδείξουμε τους ισχυρισμούς του θεωρήματος, αρχικά λαμβάνουμε το εσωτερικό γινόμενο με $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ στην εξίσωση (2.64)

$$\langle \mathbf{z}_t, \mathbf{v}\rangle - a(\mathbf{z},\mathbf{v}) - \langle \mathbf{v}, \nabla s\rangle = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}\,. \tag{2.75}$$

Ολοκληρώνοντας την τελευταία σχέση ως προς t στο διάστημα $(0, t_\star)$ και εφαρμόζοντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες παίρνουμε

$$\int_0^{t_\star} \langle \mathbf{v}_t, \mathbf{z}\rangle + a(\mathbf{v},\mathbf{z}) + \langle \nabla s, \mathbf{v}\rangle\, dt + \langle \mathbf{v}(0), \mathbf{z}(0)\rangle = \langle \mathbf{v}(t_\star), \mathbf{z}(t_\star)\rangle \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}\,. \tag{2.76}$$

Ειδικότερα, επιλέγοντας $\mathbf{v} \in \mathbf{Z}$, αυτή η σχέση ανάγεται στην

$$\int_0^{t_\star} \langle \mathbf{v}_t, \mathbf{z}\rangle + a(\mathbf{v},\mathbf{z})\, dt + \langle \mathbf{v}(0), \mathbf{z}(0)\rangle = \langle \mathbf{v}(t_\star), \mathbf{z}(t_\star)\rangle \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{Z}\,. \tag{2.77}$$

Συνεπώς, αφού $\mathbf{e} \in \mathbf{Z}$, η (2.37) δίνει

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{e}(t_\star)\|_{\mathbf{H}}^2 &= \langle \mathbf{e}(t_\star), \mathbf{z}(t_\star)\rangle \\
&= \int_0^{t_\star} \langle \mathbf{e}_t, \mathbf{z}\rangle + a(\mathbf{e},\mathbf{z})\, dt + \langle \mathbf{e}(0), \mathbf{z}(0)\rangle \\
&= \int_{t_\star-\tau}^{t_\star} \langle (\mathbf{U}-\mathbf{u}_h)_t, \mathbf{z}\rangle\, dt + \int_0^{t_\star-\tau} \langle (\mathbf{U}-\mathbf{u}_h)_t, \mathbf{z}\rangle\, dt + \langle \mathbf{e}(0), \mathbf{z}(0)\rangle.
\end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες στο δεύτερο ολοκλήρωμα λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}\|\mathbf{e}(t_\star)\|_{\mathbf{H}}^2 = &\int_{t_\star-\tau}^{t_\star} \langle (\mathbf{U}-\mathbf{u}_h)_t, \mathbf{z}\rangle\, dt + \langle (\mathbf{U}-\mathbf{u}_h)(t_\star-\tau), \mathbf{z}(t_\star-\tau)\rangle \\ &- \langle (\mathbf{U}-\mathbf{u}_h)(0), \mathbf{z}(0)\rangle - \int_0^{t_\star-\tau} \langle (\mathbf{U}-\mathbf{u}_h), \mathbf{z}_t\rangle\, dt + \langle \mathbf{e}(0), \mathbf{z}(0)\rangle.\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τη (2.65) παίρνουμε

$$\begin{aligned}\|\mathbf{e}(t_\star)\|_{\mathbf{H}}^2 \le \Big[&\int_{t_\star-\tau}^{t_\star} \|(\mathbf{U}-\mathbf{u}_h)_t\|_{\mathbf{H}}\, dt + (1+\frac{1}{2})L_\tau \max_{0\le t\le t_\star-\tau} \|(\mathbf{U}-\mathbf{u}_h)(t)\|_{\mathbf{H}} \\ &+ \|(\mathbf{u}-\mathbf{u}_h)(0)\|_{\mathbf{H}} \Big] \|\mathbf{e}(t_\star)\|_{\mathbf{H}}.\end{aligned}$$

□

Είναι ενδιαφέρουσα η παρατήρηση, ότι στην παραπάνω εκτίμηση ο όρος

$$\int_{t_\star-\tau}^{t_\star} \|(\mathbf{U}-\mathbf{u}_h)_t\|_{\mathbf{H}}\, dt$$

είναι φραγμένος από $\max_{t_\star-\tau\le t\le t_\star} \|(\mathbf{U}-\mathbf{u}_h)(t)\|_{\mathbf{H}}$ στην περίπτωση του πλήρους διακριτού σχήματος, υπό την προϋπόθεση ότι το τ είναι της τάξης του χρονικού βήματος. Παρόμοιο φαινόμενο εμφανίζεται στις συνήθεις αποδείξεις με δυϊκότητα στις περιπτώσεις της χρονικής ημιδιακριτοποίησης και της πλήρους διακριτοποίησης, για λεπτομέρειες βλ. [40, 19]. Η πλήρως διακριτή περίπτωση (με την έμμεση μέθοδο του Euler για τη χρονική διακριτοποίηση) για τα παραβολικά προβλήματα μελετήθηκε στην εργασία [30]. Αν υποθέσουμε ότι αυτός ο όρος δεν εμφανίζεται στην περίπτωσή μας και αγνοήσουμε το σφάλμα των αρχικών συνθηκών, θα οδηγηθούμε, επικαλούμενοι το Θεώρημα 2.3.1, σε μια εκτίμηση του σφάλματος της μορφής

$$\|(\mathbf{u}-\mathbf{u}_h)(t_\star)\|_{\mathbf{H}} \le \big(2+\frac{1}{2}L_\tau\big) \max_{0\le t\le t_\star} \mathcal{E}((\mathbf{u}_h, p_h), \mathbf{g}_h; \mathbf{H})\,.$$

2.4 Εφαρμογές

Στο υπόλοιπο του κεφαλαίου θα δούμε κάποιες συγκεκριμένες εφαρμογές της γενικής θεωρίας ανάλυσης σφάλματος που παρουσιάσαμε στις προηγούμενες παραγράφους. Αρχικά θα εφαρμόσουμε τα αποτελέσματά μας στην περίπτωση των μη συμμορφικών πεπερασμένων στοιχείων των Crouzeix–Raviart ελάχιστης τάξης (κατά τμήματα γραμμικές συναρτήσεις για την ταχύτητα και κατά τμήματα σταθερές για την πίεση). Στην επιλογή των μη συμμορφικών στοιχείων μας οδηγεί το γεγονός ότι τα συνήθη συμμορφικά στοιχεία ελάχιστης τάξης δεν ικανοποιούν τη συνθήκη inf-sup, ιδιότητα που διαθέτουν τα μη συμμορφικά. Ως παράδειγμα θα χρησιμοποιήσουμε τους εκτιμητές υπολοίπου, που μελετήθηκαν από τους Dari, Duran και Padra στην εργασία [17], για τη χωρική διακριτοποίηση του στατικού προβλήματος Stokes με πεπερασμένα στοιχεία των Crouzeix–Raviart. Στο σημείο αυτό πρέπει να σημειώσουμε ότι υπάρχουν πολλοί άλλοι εκτιμητές που μπορούν να χρησιμοποιηθούν, για παράδειγμα εκείνοι των εργασιών [2, 26] και του βιβλίου [42].

2.4.1 Προκαταρκτικά και συμβολισμοί

Πριν προχωρήσουμε στην εφαρμογή, θα αναφέρουμε κάποιες μαθηματικές έννοιες και θα εισαγάγουμε κάποιους επιπλέον συμβολισμούς, οι οποίοι θα μας φανούν χρήσιμοι στη συνέχεια.

Έστω $D \subset \Omega$ και $s \geq 0$ ακέραιος. Συμβολίζουμε με $H^s(D)$ το συνήθη χώρο του Sobolev, με $\mathbf{H}^s(D)$ το χώρο $H^s(D) \times H^s(D)$ και με $\|\cdot\|_{s,D}$ και $|\cdot|_{s,D}$ τη νόρμα και την ημινόρμα τους, αντίστοιχα. Για να μην υπάρξει σύγχυση, στην ειδική περίπτωση $s = 0$, θα διατηρήσουμε το συμβολισμό των προηγούμενων παραγράφων, δηλαδή $\mathbf{H} := (L^2(\Omega))^2$. Επίσης, με $\mathbf{V}$ θα συνεχίσουμε να συμβολίζουμε τον $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$. Για ευκολία μας, σ' αυτήν και την επόμενη παράγραφο, θα συμβολίζουμε με $\|\cdot\|$ και με $\|\cdot\|_1$, αντίστοιχα, την L^2 και την H^1 νόρμα των διανυσματικών ή πραγματικών συναρτήσεων

Ορισμός 2.4.1. *Έστω Ω ένα φραγμένο, κυρτό, πολυγωνικό χωρίο του $\mathbb{R}^2$. Ονομάζουμε* τριγωνισμό *του Ω έναν διαμερισμό του που αποτελείται από τρίγωνα και έχει την ιδιότητα: δύο οποιαδήποτε τρίγωνα είτε είναι ξένα, είτε έχουν κοινή μία κορυφή ή*

έχουν κοινή μία πλευρά.

Χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $\mathcal{T}_h$, για να δηλώσουμε έναν τριγωνισμό, όπου h είναι η μέγιστη πλευρά των τριγώνων του. Με $E_h(K)$ συμβολίζουμε το σύνολο των πλευρών του τριγώνου $K \in \mathcal{T}_h$. Το σύνολο των πλευρών του $\mathcal{T}_h$ που δεν ανήκουν στο σύνορο $\partial\Omega$ το συμβολίζουμε με E_h^{in}, και με $E_h^{\text{in}}(K)$ το σύνολο των αντίστοιχων πλευρών του τριγώνου K. Επιπλέον, με h_K συμβολίζουμε τη διάμετρο του τριγώνου K, με $|K|$ το εμβαδό του, και με h_e το μήκος μιας πλευράς $e \in E_h(K)$. Στη συνέχεια δίνουμε τον ορισμό της *μη εκφυλισμένης (shape–regular)* οικογένειας τριγωνισμών του χωρίου Ω όπως παρουσιάζεται στα βιβλία [7, 15].

Ορισμός 2.4.2. *Θεωρούμε μια οικογένεια $\{\mathcal{T}_h\}_{0<h<1}$ από τριγωνισμούς του Ω. Η $\{\mathcal{T}_h\}_{0<h<1}$ θα ονομάζεται μη εκφυλισμένη, αν υπάρχει μια σταθερά θ_0 τέτοια ώστε $\theta_K \geq \theta_0 > 0$, για κάθε K, όπου θ_K είναι η μικρότερη γωνία του τριγώνου K.*

Σ' αυτό το σημείο θα υπενθυμίσουμε τους ορισμούς κάποιων διαφορικών τελεστών για μια ομαλή διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{v} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Έστω $\mathbf{v} = (v_1, v_2)^{\cdot}$ η κλίση $\nabla\mathbf{v}$ της $\mathbf{v}$ ορίζεται να είναι ο πίνακας

$$\nabla\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}, \tag{2.78}$$

και ο στροβιλισμός της $\operatorname{curl}\mathbf{v}$ ο πίνακας

$$\operatorname{curl}\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \\ -\frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \end{pmatrix}. \tag{2.79}$$

Η διακριτή εκδοχή της κλίσης μιας κατά τμήματα ομαλής διανυσματικής συνάρτησης $\mathbf{v} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ορίζεται ως ο L^2-πίνακας $\nabla_h\mathbf{v}|_K = \nabla\big(\mathbf{v}|_K\big)$, $K \in \mathcal{T}_h$. Επίσης, η απόκλιση $\operatorname{div} A$, ενός πίνακα συναρτήσεων A, ορίζεται ως το διάνυσμα

$$\operatorname{div} A = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial A_{12}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial A_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial A_{22}}{\partial x_2} \end{pmatrix}. \tag{2.80}$$

Το εσωτερικό γινόμενο δύο πινάκων B και D, $B : D$, ορίζουμε ως

$$B : D = \sum_{i,j=1}^{2} B_{ij} D_{ij}.$$

Σημειώνουμε ότι σύμφωνα με τους παραπάνω συμβολισμούς έχουμε την ακόλουθη μορφή της ολοκλήρωσης κατά μέρη

$$\int_D \operatorname{div} A \cdot \mathbf{w} = -\int_D A : \nabla \mathbf{w} + \int_{\partial D} A\mathbf{n} \cdot \mathbf{w}, \tag{2.81}$$

όπου $\mathbf{n}$ είναι το κανονικό εξωτερικό κάθετο διάνυσμα στο σύνορο ∂D. Επίσης, για κάθε $\mathbf{v},\ \mathbf{w} \in \mathbf{H}^1(D)$ ισχύει

$$\int_D \nabla \mathbf{v} : \operatorname{curl} \mathbf{w} = \int_{\partial D} \nabla \mathbf{v} \tau \cdot \mathbf{w}, \tag{2.82}$$

όπου τ το εφαπτόμενο διάνυσμα στο ∂D.

2.4.2 Μη συμμορφικά πεπερασμένα στοιχεία των Crouzeix–Raviart

Θεωρούμε μια οικογένεια μη εκφυλισμένων τριγωνισμών $(\mathcal{T}_h)_{0<h<1}$ του χωρίου Ω. Ο χώρος των μη συνεχών πεπερασμένων στοιχείων των Crouzeix–Raviart για την ταχύτητα, βλ. [16], ορίζεται ως

$$\mathbf{V}_h = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H} : \mathbf{v}|_K \in \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1, \forall\, K \in T_h\},$$

και ο αντίστοιχος χώρος για την πίεση είναι ο

$$S_h = \{q \in S : q|_K \in \mathbb{P}_0, \forall\, K \in T_h\},$$

όπου με $\mathbb{P}_k$ συμβολίζουμε το χώρο των πολυωνύμων δύο μεταβλητών βαθμού μικρότερου ή ίσου του k. Σημειώνουμε εδώ ότι ο $\mathbf{V}_h$ αποτελείται από κατά τμήματα γραμμικές συναρτήσεις που είναι συνεχείς στα μέσα των πλευρών των στοιχείων του

τριγωνισμού $\mathcal{T}_h$.

Η προσεγγιστική λύση πεπερασμένων στοιχείων $(\mathbf{u}_h, p_h)$ του ημιδιακριτού, δυναμικού προβλήματος (2.3) ορίζεται όπως στη (2.9). Πιο αναλυτικά, η $(\mathbf{u}_h, p_h) : [0,T] \to \mathbf{V}_h \times S_h$ ικανοποιεί την

$$\begin{aligned} \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \Big\{ \int_K \mathbf{u}_{h,t} \cdot \boldsymbol{\varphi} + \int_K \nabla \mathbf{u}_h : \nabla \boldsymbol{\varphi} - \int_K p_h \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} \Big\} &= \int_K \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\varphi} \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{V}_h, \\ \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \int_K \chi \operatorname{div} \mathbf{u}_h &= 0 \quad \forall \chi \in S_h. \end{aligned} \tag{2.83}$$

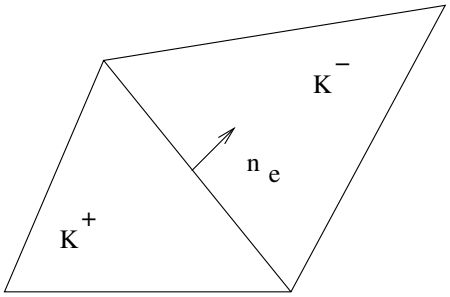
Επίσης, η προσεγγιστική λύση πεπερασμένων στοιχείων των Crouzeix–Raviart, $(\mathbf{w}_h, q_h)$, του στατικού προβλήματος (2.15) ορίζεται όπως στη (2.18). Πιο αναλυτικά, η $(\mathbf{w}_h, q_h) \in \mathbf{V}_h \times S_h$ ικανοποιεί την

$$\begin{aligned} \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \Big\{ \int_K \nabla \mathbf{w}_h : \nabla \boldsymbol{\varphi} - \int_K q_h \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} \Big\} &= \int_K \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\varphi} \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{V}_h, \\ \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \int_K \chi \operatorname{div} \mathbf{w}_h &= 0 \quad \forall \chi \in S_h. \end{aligned} \tag{2.84}$$

Στη συνέχεια, για κάθε ζεύγος $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{V}_h \times S_h$, θα εισαγάγουμε κάποιον συμβολισμό που είναι απαραίτητος για τον ορισμό των διάφορων εκτιμητών. Για δεδομένη $e \in E_h^{\text{in}}$ επιλέγουμε μια αυθαίρετη κανονική κατεύθυνση $\mathbf{n}_e = (n_1, n_2)^t$ και συμβολίζουμε τα δύο στοιχεία με κοινή πλευρά την e με K^+ και K^-, με K^+ εκείνο το στοιχείο για το οποίο το διάνυσμα $\mathbf{n}_e$ είναι το κανονικό εξωτερικό διάνυσμα. Στην περίπτωση μιας πλευράς που βρίσκεται στο $\partial\Omega$ επιλέγουμε ως $\mathbf{n}_e$ το κανονικό εξωτερικό διάνυσμα. Επίσης, συμβολίζουμε με $\boldsymbol{\tau}_e = (-n_2, n_1)^t$ το εφαπτόμενο διάνυσμα στην πλευρά e.

Χρησιμοποιούμε το συνήθη συμβολισμό για να ορίσουμε την ασυνέχεια

$$[\![(\nabla \mathbf{u}_h - p_h \mathbf{I})\mathbf{n}_e]\!]_e = (\nabla \mathbf{u}_h|_{K^-} - p_h|_{K^-}\mathbf{I})\mathbf{n}_e - (\nabla \mathbf{u}_h|_{K^+} - p_h|_{K^+}\mathbf{I})\mathbf{n}_e,$$



Σχήμα 2.1: *Τα δύο στοιχεία K^+ και K^- με κοινή πλευρά την e*

και

$$[\![\nabla \mathbf{u}_h \, \boldsymbol{\tau}_e]\!]_e = (\nabla \mathbf{u}_h|_{K^-})\boldsymbol{\tau}_e - (\nabla \mathbf{u}_h|_{K^+})\boldsymbol{\tau}_e.$$

Για κάθε $e \in E_h$ θέτουμε

$$\mathbf{J}_{e,\mathbf{n}}(\mathbf{u}_h, p_h) = \begin{cases} [\![(\nabla \mathbf{u}_h - p_h \mathbf{I})\mathbf{n}_e]\!]_e, & \text{εάν } e \in E_h^{\text{in}}, \\ 0, & \text{διαφορετικά}, \end{cases} \tag{2.85}$$

και

$$\mathbf{J}_{e,\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{u}_h) = \begin{cases} [\![\nabla \mathbf{u}_h \, \boldsymbol{\tau}_e]\!]_e, & \text{εάν } e \in E_h^{\text{in}}, \\ 2\nabla \mathbf{u}_h \boldsymbol{\tau}_e, & \text{διαφορετικά}. \end{cases} \tag{2.86}$$

Είναι γνωστό, βλ. [16, §6], [39, Proposition 4.13], ότι οι διγραμμικές μορφές $a(\cdot,\cdot)$ και $b(\cdot,\cdot)$, ορισμένες με την έννοια των πεπερασμένων στοιχείων, ικανοποιούν τις (2.12) και (2.13).

Επίσης, θεωρούμε έναν κατάλληλο τελεστή παρεμβολής, π.χ. τύπου Clement, $\mathbf{I}_h \colon \mathbf{H}_0^1(\Omega) \to \mathbf{X}_h$, ο οποίος έχει τις παρακάτω προσεγγιστικές ιδιότητες, βλ. [37], [7,

(4.8.5)],

$$\|\mathbf{v}-\mathbf{I}_h\mathbf{v}\|_{0,K} \le C\,|K|^{1/2}\,|\mathbf{v}|_{1,\widetilde{K}}, \tag{2.87α'}$$

$$|\mathbf{I}_h\mathbf{v}|_{1,K} \le |\mathbf{v}|_{1,K} + |\mathbf{v}-\mathbf{I}_h\mathbf{v}|_{1,K} \le C\,|\mathbf{v}|_{1,\widetilde{K}}, \tag{2.87β'}$$

$$\|\mathbf{v}-\mathbf{I}_h\mathbf{v}\|_{0,e} \le C\,|e|^{1/2}\,|\mathbf{v}|_{1,\widetilde{K}}, \quad e\in E_h^{\mathrm{in}}, \tag{2.87γ'}$$

όπου $\widetilde{K}$ είναι η ένωση όλων των στοιχείων K' τέτοιων ώστε $\bar{K}\cap\bar{K}'\neq\emptyset$, με $K\in\mathcal{T}_h$. Τα τελευταία φράγματα προκύπτουν από τα δύο πρώτα και μια ανισότητα για τον τελεστή ίχνους:

$$\|\mathbf{v}-\mathbf{I}_h\mathbf{v}\|_{0,e}^2 \le C\,\|\mathbf{v}-\mathbf{I}_h\mathbf{v}\|_{0,K}\,\|\mathbf{v}-\mathbf{I}_h\mathbf{v}\|_{1,K}, \tag{2.88}$$

βλ. [7, (1.6.6)], εφαρμόζοντας ένα σύνηθες επιχείρημα ομοιογένειας, βλ. [7, Κεφ. 4]. Παρατηρήστε ότι

$$\begin{aligned}\|\mathbf{v}-\mathbf{I}_h\mathbf{v}\|_{1,K} &\le \|\mathbf{v}-\mathbf{I}_h\mathbf{v}\|_{0,K} + |\mathbf{v}-\mathbf{I}_h\mathbf{v}|_{1,K}\\ &\le C\,|K|^{1/2}\,|\mathbf{v}|_{1,\widetilde{K}} + C\,|\mathbf{v}|_{1,\widetilde{K}} \le C\,|\mathbf{v}|_{1,\widetilde{K}}\,.\end{aligned}$$

Εκτιμητές σφάλματος για το στατικό πρόβλημα Stokes.

Εκ των προτέρων και εκ των υστέρων εκτιμήσεων σφάλματος για τις προσεγγίσεις των πεπερασμένων στοιχείων για τις στατικές εξισώσεις Stokes έχουν μελετηθεί, π.χ. στις εργασίες [16, 17, 26, 42, 23]. Σ' αυτή την παράγραφο παρουσιάζουμε τους εκτιμητές σφάλματος για το στατικό πρόβλημα Stokes, καθώς και την ισοδυναμία τους με το αντίστοιχο σφάλμα. Όλα τα αποτελέσματα αυτής της παραγράφου είναι των Dari, Duran και Padra από την εργασία [17].

Για το στατικό πρόβλημα (2.15) ορίζουμε τους τοπικούς εκτιμητές $\eta_{1,K}(\mathbf{w}_h)$, $K\in\mathcal{T}_h$, μέσω της

$$\eta_{1,K}(\mathbf{w}_h)^2 = h_K^2\,\|\mathbf{g}\|_{0,K}^2 + \frac{1}{2}\sum_{e\in E_h(K)} h_e\big(\|\mathbf{J}_{e,\mathbf{n}}\|_{0,e}^2 + \|\mathbf{J}_{e,\boldsymbol{\tau}}\|_{0,e}^2\big), \tag{2.89}$$

όπου $\|\mathbf{J}_{e,\mathbf{n}}\|_{0,e} := \|\mathbf{J}_{e,\mathbf{n}}\|_{0,e}(\mathbf{w}_h,q_h)$ και $\|\mathbf{J}_{e,\boldsymbol{\tau}}\|_{0,e} := \|\mathbf{J}_{e,\boldsymbol{\tau}}\|_{0,e}(\mathbf{w}_h)$. Αυτόν το συμβολισμό θα το διατηρήσουμε σε όλη την παράγραφο.

Ο ολικός εκτιμητής $\eta_1(\mathbf{w}_h)$ ορίζεται ως το άθροισμα των τοπικών εκτιμητών:

$$\eta_1(\mathbf{w}_h) = \Big(\sum_K \eta_{1,K}(\mathbf{w}_h)^2\ \Big)^{1/2}. \tag{2.90}$$

Θέτουμε $\boldsymbol{\sigma} := \mathbf{w} - \mathbf{w}_h$ και $\xi := q - q_h$, όπου $(\mathbf{w}, q)$ είναι η ακριβής λύση του στατικού προβλήματος (2.15), και εισάγουμε τον κλασικό συμμορφικό χώρο

$$\mathbf{X}_h = \mathbf{V}_h \cap \mathbf{H}_0^1(\Omega). \tag{2.91}$$

Τότε, αφαιρώντας κατά μέλη τη (2.18) από τη (2.15), λαμβάνουμε τη σχέση ορθογωνιότητας για το σφάλμα

$$a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varphi}) + b(\boldsymbol{\varphi}, \xi) = 0 \quad \forall\, \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{X}_h. \tag{2.92}$$

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε τρία λήμματα από τα οποία θα προκύψει ως συμπέρασμα το βασικό αποτέλεσμα αυτής της παραγράφου, το οποίο παρουσιάζεται στο επόμενο θεώρημα

Θεώρημα 2.4.1. *Έστω $\boldsymbol{\sigma} := \mathbf{w} - \mathbf{w}_h$ και $\xi := q - q_h$, το σφάλμα της ταχύτητας και της πίεσης, αντίστοιχα, του στατικού προβλήματος* (2.15). *Τότε υπάρχει σταθερά $\mathcal{C}$ τέτοια ώστε*

$$\|\xi\| + \|\nabla_h \boldsymbol{\sigma}\| \le \mathcal{C}\ \eta_1.$$

Στο πρώτο λήμμα αποδεικνύουμε ένα ενδιάμεσο βοηθητικό αποτέλεσμα

Λήμμα 2.4.1. *Το σφάλμα $\nabla_h \boldsymbol{\sigma}$ διασπάται ως εξής*

$$\nabla_h \boldsymbol{\sigma} = \nabla \mathbf{r} - qI + \operatorname{curl} \mathbf{s}, \tag{2.93}$$

με $\mathbf{r} \in \mathbf{V}$, $q \in S$ και $\mathbf{s} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ τέτοιες ώστε

$$\|\mathbf{r}\|_1 + \|\mathbf{s}\|_1 \le C\|\nabla_h \boldsymbol{\sigma}\| \tag{2.94}$$

και

$$\operatorname{div} \mathbf{r} = 0.$$

Απόδειξη. Για να αποδείξουμε την παραπάνω διάσπαση εργαζόμαστε ως εξής: Θεωρούμε $\mathbf{r} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ και $q \in L_0^2(\Omega)$ να είναι η λύση του στατικού προβλήματος Stokes

$$\begin{cases} -\Delta \mathbf{r} + \nabla q = -\mathrm{div}(\nabla_h \boldsymbol{\sigma}) & \text{στο } \Omega \\ \mathrm{div}\, \mathbf{r} = 0 & \text{στο } \Omega. \end{cases} \tag{2.95}$$

Προφανώς $-\mathrm{div}(\nabla_h \boldsymbol{\sigma}) \in \mathbf{H}^{-1}(\Omega)$ και συνεπώς, σύμφωνα με τις εκτιμήσεις ελλειπτικής ομαλότητας για το (2.95), ισχύει η εκ των προτέρων εκτίμηση σφάλματος

$$\|\mathbf{r}\|_1 + \|q\| \leq C \|\nabla_h \boldsymbol{\sigma}\|. \tag{2.96}$$

Επιπλέον, από την πρώτη εξίσωση της (2.95) λαμβάνουμε

$$\mathrm{div}(\nabla \mathbf{r} - qI - \nabla_h \boldsymbol{\sigma}) = 0.$$

Συνεπώς υπάρχει $\mathbf{s} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ τέτοια ώστε το σφάλμα να μπορεί να διασπασθεί στη μορφή $\nabla_h \boldsymbol{\sigma} = \nabla \mathbf{r} - q\mathbf{I} + \mathrm{curl}\, \mathbf{s}$ (διάσπαση κατά Helmholtz) και τότε η εκτίμηση (2.94) έπεται από τη (2.96). □

Τώρα μπορούμε να αποδείξουμε ότι η ποσότητα $\|\nabla_h \boldsymbol{\sigma}\|$ μπορεί να εκτιμηθεί προς τα πάνω από τον ολικό εκτιμητή σφάλματος (2.90) (βλ. επίσης [17, Lemma 3.2]).

Λήμμα 2.4.2. *Ισχύει η ακόλουθη εκτίμηση:*

$$\|\nabla_h \boldsymbol{\sigma}\| \leq C\, \eta_1.$$

Απόδειξη. Για να αποδείξουμε την προαναφερθείσα εκτίμηση σφάλματος για την ταχύτητα θα χρησιμοποιήσουμε τη διάσπαση που αποδείξαμε στο Λήμμα 2.4.1. Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι

$$\int_\Omega \nabla_h \boldsymbol{\sigma} : qI = \sum_K \int_K q\, \mathrm{div}\, \boldsymbol{\sigma} = 0,$$

αφού $\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}|_K) = 0$. Συνεπώς, αφού $\operatorname{div}\mathbf{r} = 0$, λαμβάνουμε

$$
\begin{aligned}
\|\nabla_h \boldsymbol{\sigma}\|^2 &= \int_\Omega \nabla_h \boldsymbol{\sigma} : (\nabla \mathbf{r} - q\mathbf{I} + \operatorname{curl}\mathbf{s}) \\
&= \int_\Omega \nabla_h \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{r} - \int_\Omega \xi \operatorname{div}\mathbf{r} + \int_\Omega \nabla_h \boldsymbol{\sigma} : \operatorname{curl}\mathbf{s}
\end{aligned} \tag{2.97}
$$

Θέτοντας στην εξίσωση (2.92) $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{I}_h\mathbf{r} \in \mathbf{X}_h$, και χρησιμοποιώντας την ορθογωνιότητα

$$
\int_\Omega \nabla_h \boldsymbol{\sigma} : \operatorname{curl}\boldsymbol{\psi} = 0, \quad \forall\, \boldsymbol{\psi} \in \mathbf{X}_h,
$$

βλ. [4], για $\psi = \mathbf{I}_h\, \mathbf{s}$, από τη σχέση (2.97) λαμβάνουμε

$$
\begin{aligned}
\|\nabla_h \boldsymbol{\sigma}\|^2 &= \int_\Omega \nabla_h \boldsymbol{\sigma} : \nabla(\mathbf{r} - \mathbf{I}_h\mathbf{r}) - \int_\Omega \xi \operatorname{div}(\mathbf{r} - \mathbf{I}_h\mathbf{r}) + \int_\Omega \nabla_h \boldsymbol{\sigma} : \operatorname{curl}(\mathbf{s} - \mathbf{I}_h\mathbf{s}) \\
&= \int_\Omega (\nabla_h \boldsymbol{\sigma} - \xi\mathbf{I}) : \nabla(\mathbf{r} - \mathbf{I}_h\mathbf{r}) + \int_\Omega \nabla_h \boldsymbol{\sigma} : \operatorname{curl}(\mathbf{s} - \mathbf{I}_h\mathbf{s})
\end{aligned}
$$

ή

$$
\|\nabla_h \boldsymbol{\sigma}\|^2 = \sum_K \left\{ \int_K (\nabla_h \boldsymbol{\sigma} - \xi\mathbf{I}) : \nabla(\mathbf{r} - \mathbf{I}_h\mathbf{r}) + \int_K \nabla_h \boldsymbol{\sigma} : \operatorname{curl}(\mathbf{s} - \mathbf{I}_h\mathbf{s}) \right\}. \tag{2.98}
$$

Εφαρμόζοντας ολοκλήρωση κατά μέρη σε κάθε στοιχείο K, σύμφωνα με τις (2.81) και (2.82), έχουμε

$$
\begin{aligned}
\int_K (\nabla_h \boldsymbol{\sigma} - \xi\mathbf{I}) : \nabla(\mathbf{r} - \mathbf{I}_h\mathbf{r}) &= -\int_K \operatorname{div}(\nabla \boldsymbol{\sigma} - \xi\mathbf{I}) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{I}_h\mathbf{r}) \\
&\quad + \int_{\partial K} (\nabla \boldsymbol{\sigma} - \xi\mathbf{I})\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{I}_h\mathbf{r}) \\
&= -\int_K (\Delta \mathbf{w} - \nabla q) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{I}_h\mathbf{r}) + \int_{\partial K} (\nabla \mathbf{w} - q\mathbf{I})\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{I}_h\mathbf{r}) \\
&\quad - \int_{\partial K} (\nabla \mathbf{w}_h - q_h\mathbf{I})\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{I}_h\mathbf{r})
\end{aligned} \tag{2.99}
$$

και

$$\int_K \nabla_h \boldsymbol{\sigma} : \operatorname{curl}(\mathbf{s} - \mathbf{I}_h \mathbf{s}) = \int_{\partial K} \nabla \boldsymbol{\sigma} \tau \cdot (\mathbf{s} - \mathbf{I}_h \mathbf{s}) = \int_{\partial K} \nabla(\mathbf{w} - \mathbf{w}_h) \tau \cdot (\mathbf{s} - \mathbf{I}_h \mathbf{s}). \tag{2.100}$$

Τελικά

$$\|\nabla_h \boldsymbol{\sigma}\|_{0,K}^2 = \int_K \mathbf{f} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{I}_h \mathbf{r}) - \int_{\partial K} (\nabla \mathbf{w}_h - q_h \mathbf{I}) \mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{I}_h \mathbf{r}) - \int_{\partial K} \nabla \mathbf{w}_h \tau \cdot (\mathbf{s} - \mathbf{I}_h \mathbf{s}), \tag{2.101}$$

και χρησιμοποιώντας τους ορισμούς των (2.85) και (2.86) καταλήγουμε στην

$$\|\nabla_h \boldsymbol{\sigma}\|_{0,K}^2 = \int_K \mathbf{f} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{I}_h \mathbf{r}) + \frac{1}{2} \sum_{e \in E_h(K)} \Big[\int_e \mathbf{J}_{e,\boldsymbol{n}} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{I}_h \mathbf{r}) + \int_e \mathbf{J}_{e,\boldsymbol{\tau}} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{I}_h \mathbf{r}) \Big]. \tag{2.102}$$

Σε καθένα από τα παραπάνω ολοκληρώματα εφαρμόζουμε την ανισότητα των Cauchy–Schwarz

$$\|\nabla_h \boldsymbol{\sigma}\|_{0,K}^2 \leq \|\mathbf{f}\| \|\mathbf{r} - \mathbf{I}_h \mathbf{r}\| + \frac{1}{2} \sum_{e \in E_h(K)} \big[\|\mathbf{J}_{e,\boldsymbol{n}}\|_{0,e} \|\mathbf{r} - \mathbf{I}_h \mathbf{r}\|_{0,e} + \int_e \|\mathbf{J}_{e,\boldsymbol{\tau}}\|_{0,e} \|\mathbf{r} - \mathbf{I}_h \mathbf{r}\|_{0,e} \big]. \tag{2.103}$$

Χρησιμοποιώντας τις προσεγγιστικές ιδιότητες της παρεμβάλλουσας $\mathbf{I}_h$, βλ. (2.87), λαμβάνουμε

$$\|\nabla_h \boldsymbol{\sigma}\|_{0,K}^2 \leq C|K|^{1/2} \|\mathbf{f}\| |\mathbf{r}|_{1,\tilde{K}} + \frac{C}{2} \sum_{e \in E_h(K)} h_e^{1/2} \big[\|\mathbf{J}_{e,\boldsymbol{n}}\|_{0,e} + \|\mathbf{J}_{e,\boldsymbol{\tau}}\|_{0,e} \big] |\mathbf{r}|_{1,\tilde{K}}. \tag{2.104}$$

Αθροίζοντας ως προς όλα τα στοιχεία και εφαρμόζοντας τη διακριτή ανισότητα των

Cauchy–Schwarz έχουμε

$$\|\nabla_h \boldsymbol{\sigma}\|^2 \leq C \left\{ \left(\sum_K |K| \|\mathbf{f}\|^2 \right)^{1/2} + \left(\frac{1}{2} \sum_{e \in E_h(K)} h_e [\|\mathbf{J}_{e,\boldsymbol{n}}\|_{0,e}^2 + \|\mathbf{J}_{e,\boldsymbol{\tau}}\|_{0,e}^2] \right)^{1/2} \right\} |\mathbf{r}|_{1,\Omega}.$$

Εδώ εφαρμόζουμε την εκτίμηση (2.94) και η απόδειξη του λήμματος έχει ολοκληρωθεί.

□

Στο τελευταίο λήμμα αποδεικνύουμε ότι το σφάλμα για την πίεση φράσσεται προς τα πάνω από το άθροισμα του σφάλματος για την ταχύτητα και τον εκτιμητή η_1.

Λήμμα 2.4.3. *Ισχύει η ακόλουθη εκτίμηση:*

$$\|\xi\| \leq C \left(\|\nabla_h \boldsymbol{\sigma}\| + \eta_1 \right).$$

Απόδειξη. Σύμφωνα με τη συνθήκη inf-sup (2.8), για $\xi \in S$, ισχύει

$$\beta \|\xi\| \leq \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{V}} \frac{\int_\Omega \xi \operatorname{div} \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|_1}.$$

Έστω $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$. Θεωρούμε την προβολή $\mathbf{I}_h \mathbf{v} \in \mathbf{X_h}$ της $\mathbf{v}$, όπως ορίστηκε στην προηγούμενη παράγραφο. Χρησιμοποιώντας την εξίσωση σφάλματος (2.92) λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} \int_\Omega \xi \operatorname{div} \mathbf{v} &= \int_\Omega \xi \operatorname{div}(\mathbf{v} - \mathbf{I}_h \mathbf{v}) + \int_\Omega \xi \operatorname{div} \mathbf{I}_h \mathbf{v} \\ &= \int_\Omega \xi \operatorname{div}(\mathbf{v} - \mathbf{I}_h \mathbf{v}) + \int_\Omega \nabla_h \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{I}_h \mathbf{v} \\ &= \int_\Omega \xi \operatorname{div}(\mathbf{v} - \mathbf{I}_h \mathbf{v}) - \int_\Omega \nabla_h \boldsymbol{\sigma} : \nabla(\mathbf{v} - \mathbf{I}_h \mathbf{v}) + \int_\Omega \nabla_h \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{v}. \end{aligned} \tag{2.105}$$

Εφαρμόζοντας ολοκλήρωση κατά μέρη σε κάθε στοιχείο K, σύμφωνα με τις (2.81) και (2.82), έχουμε

$$\begin{aligned} \int_\Omega \xi \operatorname{div} \mathbf{v} = &\sum_K \int_K (\Delta \mathbf{w} - \nabla q) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{I}_h \mathbf{v}) \\ &+ \int_{\partial K} (\nabla \mathbf{w}_h - q_h \mathbf{I}) \mathbf{n} \cdot \operatorname{div}(\mathbf{v} - \mathbf{I}_h \mathbf{v}) + \int_\Omega \nabla_h \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{v} \end{aligned} \tag{2.106}$$

και χρησιμοποιώντας τους ορισμούς των (2.85) και (2.86) καταλήγουμε στη

$$\begin{aligned}\int_\Omega \xi \operatorname{div} \mathbf{v} = \sum_K \Big\{ &- \int_K \mathbf{f} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{I}_h \mathbf{v}) \\ &- \frac{1}{2} \sum_{e \in E_h(K)} \int_e \|\mathbf{J}_{e,\boldsymbol{n}}\|_{0,e} \cdot \nabla(\mathbf{r} - \mathbf{I}_h \mathbf{r}) \Big\} \int_\Omega \nabla_h \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{v}.\end{aligned} \tag{2.107}$$

Σε καθένα από τα παραπάνω ολοκληρώματα εφαρμόζουμε τη ανισότητα των Cauchy–Schwarz και η απόδειξη του λήμματος ολοκληρώνεται με τρόπο ανάλογο της απόδειξης του προηγούμενου λήμματος. □

Εκτιμητές σφάλματος για δυναμικό πρόβλημα Stokes.

Θα δούμε τώρα πώς τα γενικά αποτελέσματα των προηγούμενων παραγράφων μπορούν να εφαρμοστούν όταν θεωρούμε εκτιμητές υπολοίπου για τη χωρική διακριτοποίηση με μη συμμορφικά πεπερασμένα στοιχεία των Crouzeix–Raviart. Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε τους εκτιμητές για το στατικό πρόβλημα που μελετήθηκαν στην εργασία [17], τους οποίους παρουσιάσαμε στην προηγούμενη παράγραφο. Φυσικά, όπως έχουμε αναφέρει, πολλές άλλες επιλογές εκτιμητών είναι δυνατές.

Για το σκοπό αυτόν επαναορίζουμε τα σφάλματα σ και ξ,

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{U} - \mathbf{u}_h, \ \xi = P - p_h$$

και υπενθυμίζουμε ότι, σύμφωνα με το Λήμμα 2.2.1, η $(\mathbf{u}_h, p_h)$ είναι η προσέγγιση του στατικού προβλήματος (2.23), του οποίου ακριβής λύση είναι η ανακατασκευή Stokes $(\mathbf{U}, P)$. Όλα τα αποτελέσματα της προηγούμενης παραγράφου ισχύουν προφανώς και στη συγκεκριμένη αυτή περίπτωση. Θεωρούμε το εσωτερικό τοπικό υπόλοιπο (inner residual) $\mathbf{R}_K$ που ορίζεται ως

$$\mathbf{R}_K := \mathbf{u}_{h,t} - \Delta \mathbf{u}_h + \nabla p_h - \mathbf{f}. \tag{2.108}$$

Υπενθυμίζουμε ότι η $\mathbf{u}_h$ και η p_h είναι, αντίστοιχα, γραμμική και σταθερή συνάρτηση σε κάθε τρίγωνο K. Συνεπώς, σε κάθε στοιχείο K ισχύει ότι $\Delta \mathbf{u}_h = 0, \ \nabla p_h = 0,$

και επομένως για τον περιορισμό της συνάρτησης $\mathbf{g}_h$ στο στοιχείο K ισχύει

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_h|_K &= -\tilde{\Delta}_h \mathbf{u}_h - \Pi_h \mathbf{f} + \mathbf{f} = -\mathbf{u}_{h,t} + \mathbf{f} \\ &= -(\mathbf{u}_{h,t} - \Delta \mathbf{u}_h + \nabla p_h - \mathbf{f}) = -\mathbf{R}_{\mathbf{K}}. \end{aligned} \tag{2.109}$$

Παρατήρηση 2.4.1. *Το παραπάνω επιχείρημα μπορεί να εφαρμοστεί και στην περίπτωση που οι χώροι των προσεγγίσεων περιέχουν πολυώνυμα υψηλότερου βαθμού. Σ' αυτήν την περίπτωση το εσωτερικό υπόλοιπο θα εμφανιστεί στον εκτιμητή, αφού στη* (2.97) *αντί της* $\mathbf{g}_h$ *θα έχουμε* $\mathbf{g}_h + \Delta \mathbf{u}_h - \nabla p_h$, *και άρα θα εξακολουθεί να ισχύει* $\mathbf{g}_h + \Delta \mathbf{u}_h - \nabla p_h = -\mathbf{R}_K$.

Σύμφωνα με την ανάλυση της προηγούμενης παραγράφου και τη (2.109), οι τοπικοί εκτιμητές $\eta_{1,K}(\mathbf{u}_h)$, $K \in \mathcal{T}_h$, ορίζονται μέσω της

$$\big(\eta_{1,K}(\mathbf{u}_h)\big)^2 = h_K^2 \, \|\mathbf{R}_K\|_{0,K}^2 + \frac{1}{2} \sum_{e \in E_h(K)} h_e \big(\|\mathbf{J}_{e,\mathbf{n}}\|_{0,e}^2 + \|\mathbf{J}_{e,\boldsymbol{\tau}}\|_{0,e}^2 \big), \tag{2.110}$$

όπου το εσωτερικό τοπικό υπόλοιπο $\mathbf{R}_K$ δίνεται από $\mathbf{R}_K = \mathbf{u}_{h,t} - \Delta \mathbf{u}_h + \nabla p_h - \mathbf{f}$. Σ' αυτό το σημείο είναι χρήσιμο να παρατηρήσουμε ότι ο εμπλεκόμενος όρος $\mathbf{J}_{e,\boldsymbol{\tau}}$ μπορεί να αντικατασταθεί από την ασυνέχεια της $\mathbf{u}_h$ στην πλευρά e. Πράγματι, ένας στοιχειώδης υπολογισμός αποδεικνύει ότι, [26],

$$\|[\![\mathbf{u}_h]\!]_e\|_{0,e}^2 = \frac{h_e^2}{12} \, \|\mathbf{J}_{e,\boldsymbol{\tau}}\|_{0,e}^2. \tag{2.111}$$

Σύμφωνα με όσα αναπτύξαμε και τις εκτιμήσεις της προηγούμενης παραγράφου ισχύει το εξής αποτέλεσμα:

Λήμμα 2.4.4. *(V−εκτιμητής) Ισχύει η ακόλουθη εκτίμηση*

$$\mathcal{E}((\mathbf{u}_h(t), p_h(t)), \mathbf{g}_h(t); \mathbf{V}) \leq C \, \eta_1 \left(\mathbf{u}_h(t) \right). \tag{2.112}$$

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε μια εκτίμηση για την ποσότητα $\mathcal{E}((\mathbf{u}_{h,t}(t), p_{h,t}(t)), \mathbf{g}_{h,t}(t); \mathbf{H})$. Η απόδειξη ακολουθεί τις συνήθεις τεχνικές, δηλαδή θεωρούμε το δυϊκό πρόβλημα: Ζητείται ζεύγος συναρτήσεων $(\mathbf{z}, s) \in (\mathbf{H}^2(\Omega) \cap \mathbf{H}_0^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega))$ τέτοιο

ώστε

$$\begin{cases} -\Delta \mathbf{z} - \nabla s = \boldsymbol{\sigma}_t & \text{στο } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{z} = 0, & \text{στο } \Omega, \\ \mathbf{z} = \mathbf{0}, & \text{στο } \partial\Omega. \end{cases}$$

Εάν το χωρίο Ω είναι ανοικτό και φραγμένο της κλάσης C^2, η λύση $(\mathbf{z}, s)$ ικανοποιεί την εκτίμηση ελλειπτικής ομαλότητας

$$\|\mathbf{z}\|_2 + \|s\|_1 \leq C\|\boldsymbol{\sigma}_t\|. \tag{2.113}$$

Λαμβάνοντας το εσωτερικό γινόμενο με $\boldsymbol{\sigma}_t$ στην πρώτη εξίσωση της (2.113) και χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση κατά μέρη, σύμφωνα με τον τύπο (2.81), σε κάθε στοιχείο K παίρνουμε

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\sigma}_t\|^2 &= \sum_K \int_K (-\Delta \mathbf{z} - \nabla s) : \boldsymbol{\sigma}_t = -\sum_K \int_K \operatorname{div}(\nabla \mathbf{z} + s\mathbf{I}) \cdot \boldsymbol{\sigma}_t \\ &= \sum_K \Big\{ \int_K (\nabla \mathbf{z} + s\mathbf{I}) : \nabla \boldsymbol{\sigma}_t - \int_{\partial K} (\nabla \mathbf{z} + s\mathbf{I})\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}_t \Big\}. \end{aligned} \tag{2.114}$$

Τώρα σύμφωνα με τη δεύτερη εξίσωση στη (2.113) και την ομαλότητα των συναρτήσεων $\mathbf{z}$, $\mathbf{U}$, s λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\sigma}_t\|^2 = \sum_K \Big\{ &\int_K \nabla \mathbf{z} : \nabla(\mathbf{U}_t - \mathbf{u}_{h,t}) + s \operatorname{div}(\mathbf{U}_t - \mathbf{u}_{h,t}) - (P_t - p_{h,t}) \operatorname{div} \mathbf{z} \\ &+ \int_{\partial K} \nabla \mathbf{z}\, \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_{h,t} + \int_{\partial K} s\, \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_{h,t} \Big\} \end{aligned} \tag{2.115}$$

Επίσης, παραγωγίζοντας τη (2.92) ως προς t, έχουμε

$$a(\boldsymbol{\sigma}_t, \boldsymbol{\varphi}) + b(\boldsymbol{\varphi}, \xi_t) = 0 \quad \forall\, \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{X}_h,$$

και συνεπώς

$$\|\boldsymbol{\sigma}_t\|^2 = \sum_K \Big\{ \int_K \nabla(\mathbf{z}-\boldsymbol{\varphi}) : \nabla\boldsymbol{\sigma}_t + s \operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}_t - \xi_t \operatorname{div}(\mathbf{z}-\boldsymbol{\varphi}) + \int_{\partial K} \nabla\mathbf{z}\,\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}_{h,t} + \int_{\partial K} s\,\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}_{h,t} \Big\}. \tag{2.116}$$

Επιπλέον, $b(\mathbf{U}_t - \mathbf{u}_{h,t}, \psi) = 0,\ \psi \in \Pi_h$. Επομένως

$$\|\boldsymbol{\sigma}_t\|^2 = \sum_K \Big\{ \int_K \nabla(\mathbf{z}-\boldsymbol{\varphi}) : \nabla\boldsymbol{\sigma}_t + (s-\psi) \operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}_t - \xi_t \operatorname{div}(\mathbf{z}-\boldsymbol{\varphi}) + \int_{\partial K} \nabla\mathbf{z}\,\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}_{h,t} + \int_{\partial K} s\,\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}_{h,t} \Big\}. \tag{2.117}$$

Ολοκληρώνοντας κατά μέρη στο πρώτο και το τρίτο ολοκλήρωμα στο στοιχείο K λαμβάνουμε

$$\int_K \nabla(\mathbf{z}-\boldsymbol{\varphi}) : \nabla\boldsymbol{\sigma}_t = -\int_K \Delta\boldsymbol{\sigma}_t \cdot (\mathbf{z}-\boldsymbol{\varphi}) + \int_{\partial K} \boldsymbol{\sigma}_t\mathbf{n}\cdot(\mathbf{z}-\boldsymbol{\varphi}) \tag{2.118}$$

και

$$\int_K \xi_t \operatorname{div}(\mathbf{z}-\boldsymbol{\varphi}) = -\int_K \nabla\xi_t \cdot (\mathbf{z}-\boldsymbol{\varphi}) + \int_{\partial K} \xi_t\mathbf{n}\cdot(\mathbf{z}-\boldsymbol{\varphi}). \tag{2.119}$$

Αντικαθιστώντας τις (2.118) και (2.119) στη (2.117) έχουμε

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{\sigma}_t\|^2 = \sum_K \Big\{ & \int_K (-\Delta\boldsymbol{\sigma}_t + \nabla\xi_t)\cdot(\mathbf{z}-\boldsymbol{\varphi}) \\ & + \int_K (s-\psi) \operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}_t + \int_{\partial K} (\nabla\boldsymbol{\sigma}_t - \xi_t)\mathbf{n}\cdot(\mathbf{z}-\boldsymbol{\varphi}) \\ & + \int_{\partial K} \nabla\mathbf{z}\,\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}_{h,t} + s\,\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}_{h,t} \Big\}.\end{aligned}$$

Αφού σε κάθε στοιχείο K έχουμε $\mathbf{g}_{h,t} = -\partial_t\mathbf{R}_K = -\mathbf{R}_{K,t}$, $\Delta u_{h,t} = 0,\ \nabla p_{h,t} = 0$ και

$$\int_{\partial K} (\nabla\mathbf{u}_t\mathbf{n} - p_t\,\mathbf{n})\cdot(\mathbf{z}-\boldsymbol{\varphi}) = 0,$$

λαμβάνουμε

$$\|\boldsymbol{\sigma}_t\|^2 = \sum_K \Big\{ \int_K -\mathbf{R}_{K,t} \cdot (\mathbf{z} - \boldsymbol{\varphi}) - (s - \psi) \operatorname{div} \mathbf{u}_{h,t} + \int_{\partial K} (\nabla \mathbf{u}_{h,t}\, \mathbf{n} - p_{h,t}\, \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{z} - \boldsymbol{\varphi}) + \int_{\partial K} (\nabla \mathbf{z}\, \mathbf{n} + s\, \mathbf{n}) \cdot \mathbf{u}_{h,t} \Big\}, \tag{2.120}$$

για κάθε $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{X}_h$ και $\psi \in \Pi_h$.

Ορίζουμε τους τοπικούς εκτιμητές $\eta_{0,K}$ μέσω της

$$\big(\eta_{0,K}(\mathbf{u}_{h,t})\big)^2 = h_K^4 \|\mathbf{R}_{K,t}\|_{0,K}^2 + h_K^2 \,\|\operatorname{div} \mathbf{u}_{h,t}\|_{0,K}^2 + \frac{1}{2} \sum_{e \in E_h^{\mathrm{in}}(K)} \big(h_e^3 \,\|\partial_t \mathbf{J}_{e,\mathbf{n}}\|_{0,e}^2 + h_e^3 \,\|\partial_t \mathbf{J}_{e,\boldsymbol{\tau}}\|_{0,e}^2 \big),$$

και τότε ο L^2-εκτιμητής δίνεται από

$$\eta_0(\mathbf{u}_{h,t}\,) = \big(\sum_K \ \eta_{0,K}(\mathbf{u}_{h,t})^2 \ \big)^{1/2}. \tag{2.121}$$

Για να ολοκληρώσουμε την εκτίμηση, μπορούμε να αποδείξουμε όπως στη [26] ότι

$$\begin{aligned} \sum_K \sum_{e \in E_h(K)} \int_e \big(\nabla \mathbf{z}\, \mathbf{n} + s\, \mathbf{n}\big) \cdot \mathbf{u}_{h,t} \leq & C \left(\sum_{e \in E_h^{\mathrm{iv}}} h_e \,\|[\![\mathbf{u}_{h,t}]\!]_e\|_{0,e}^2 \right)^{1/2} \|\boldsymbol{\sigma}_t\| \\ \leq & C \left(\sum_{e \in E_h^{\mathrm{iv}}} h_e^3 \,\|\partial_t \mathbf{J}_{e,\boldsymbol{\tau}}\|_{0,e}^2 \right)^{1/2} \|\boldsymbol{\sigma}_t\|. \end{aligned} \tag{2.122}$$

Εδώ εκμεταλλευόμαστε το γεγονός ότι $\int_e [\![\mathbf{u}_{h,t}]\!]_e = 0$, τις προσεγγιστικές ιδιότητες της $L^2(e)$ προβολής στον $\mathbb{P}_0(e)$ και την ευστάθεια (2.113).

Τότε, επιλέγοντας $\boldsymbol{\varphi}$ να είναι η συνήθης παρεμβάλλουσα στους κόμβους $\mathbf{z}$ και $\psi = I_h s$ τελικά καταλήγουμε στο

Λήμμα 2.4.5. *Ισχύει η ακόλουθη εκτίμηση:*

$$\mathcal{E}((\mathbf{u}_{h,t}(t), p_{h,t}(t)), \mathbf{g}_{h,t}(t); \mathbf{H}) \leq C\, \eta_1\, (\mathbf{u}_{h,t}(t)\,)\,. \tag{2.123}$$

Επιπλέον, υποθέτοντας ότι η (2.113) *ισχύει, έχουμε*

$$\mathcal{E}((\mathbf{u}_{h,t}(t), p_{h,t}(t)), \mathbf{g}_{h,t}(t); \mathbf{H}) \leq C\, \eta_0\,(\mathbf{u}_{h,t}(t)\,)\,. \tag{2.124}$$

Μπορούμε τώρα να εφαρμόσουμε τα Θεωρήματα 2.3.1 και 2.3.2 για να πάρουμε $\mathbf{H}^1$ εκτιμήσεις στην περίπτωσή μας.

Θεώρημα 2.4.2. (Εκτιμήσεις υπολοίπου στις νόρμες των $L^2(\mathbf{H}^1)$ και $L^\infty(\mathbf{H}^1)$.) *Υποθέτουμε ότι* $(\mathbf{u}, p)$ *είναι η ακριβής λύση του στατικού προβλήματος Stokes* (2.1) *και* $(\mathbf{u}_h, p_h)$ *είναι η προσέγγιση των πεπερασμένων στοιχείων των Crouzeix–Raviart. Τότε ισχύουν οι ακόλουθες εκ των υστέρων εκτιμήσεις, για* $0 < t \leq T$,

$$\Big(\int_0^t \|(\mathbf{u}-\mathbf{u}_h)(s)\|_{\mathbf{V}}^2 ds\Big)^{1/2} \leq \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_h^0\|_{\mathbf{H}} + C\Big(\int_0^t \eta_1((\mathbf{u}_{h,t}(s)\,)^2 ds\Big)^{1/2}$$
$$+ C\eta_1((\mathbf{u}_h(0)\,) + C\Big(\int_0^t \eta_1((\mathbf{u}_h(s)\,)^2 ds\Big)^{1/2},$$

και

$$\|\nabla(\mathbf{u}-\mathbf{u}_h)(t)\|_{\mathbf{H}} \leq \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_h^0\|_{\mathbf{V}} + C\Big(\int_0^t \eta_1((\mathbf{u}_{h,t}(s)\,)^2 ds\Big)^{1/2}$$
$$+ C\eta_1((\mathbf{u}_h(0)\,) + C\eta_1(\mathbf{u}_h(t)\,).$$

Παρατήρηση 2.4.2. *Αν και στις παραπάνω εκτιμήσεις δεν υποθέσαμε την ελλειπτική ομαλότητα* (2.113) *και χρησιμοποιήσαμε το πρώτο φράγμα του Λήμματος 2.4.5, οι εκτιμήσεις του Θεωρήματος 2.4.2 είναι ακόμα βέλτιστης τάξης. Στην περίπτωση π.χ. των κυρτών πολυγωνικών χωρίων όπου η* (2.113) *ισχύει, ο εκτιμητής* $\eta_1((\mathbf{u}_{h,t}(s)\,)$ *μπορεί να αντικατασταθεί από* $\eta_0((\mathbf{u}_{h,t}(s)\,))$.

Για την $L^\infty(L^2)$ εκτίμηση, παρατηρούμε ότι επειδή χρησιμοποιήσαμε τα μη συμμορφικά πεπερασμένα στοιχεία των Crouzeix–Raviart ελάχιστης τάξης, αληθεύει ότι ο όρος $\mathcal{E}((\mathbf{u}_{h,t}, p_{h,t}), \mathbf{g}_{h,t}; \mathbf{V}^\star)$ στο Θεώρημα 2.3.1 είναι φραγμένος από $\mathcal{E}((\mathbf{u}_{h,t}, p_{h,t}), \mathbf{g}_{h,t}; \mathbf{H})$.

Στην εκτίμηση του επόμενου θεωρήματος, όπως και στην ελλειπτική περίπτωση, για να κερδίσουμε μία δύναμη του h στην τάξη, χρησιμοποιούμε την ελλειπτική ομαλότητα (2.113).

Θεώρημα 2.4.3. (Εκτιμήσεις σφάλματος τύπου υπολοίπου στο $L^\infty(L^2)$.)

Υποθέτουμε ότι η $(\mathbf{u}, p)$ *είναι η ακριβής λύση του στατικού προβλήματος Stokes* (2.1) *και* $(\mathbf{u}_h, p_h)$ *είναι η προσέγγιση των πεπερασμένων στοιχείων των Crouzeix–Raviart. Υποθέτουμε επιπλέον ότι ισχύει η ελλειπτική ομαλότητα* (2.113). *Τότε έχουμε τα παρακάτω φράγματα για τις εκ των υστέρων εκτιμήσεις: για* $0 < t \leq T$

$$\|(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)(t)\|_{\mathbf{H}} \leq \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_h^0\|_{\mathbf{H}} + C\Big(\int_0^t \eta_0((\mathbf{u}_{h,t}(s)\,)^2 ds\Big)^{1/2}$$
$$+ C\eta_0(\mathbf{u}_h(0)\,) + C\eta_0(\mathbf{u}_h(t)\,).$$

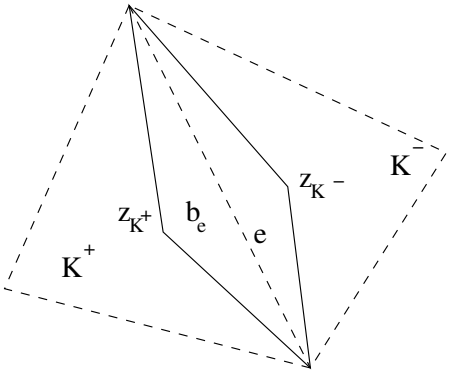
2.5 Μέθοδος Πεπερασμένων Χωρίων

Η μέθοδος πεπερασμένων χωρίων βασίζεται στις τοπικές ιδιότητες διατήρησης των διαφορικών εξισώσεων. Έτσι, ολοκληρώνοντας τη (2.1) πάνω σε ένα χωρίο $b \subset \Omega$ και χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Green λαμβάνουμε

$$\int_b \mathbf{u}_t - \int_{\partial b} \nabla \mathbf{u}\, \mathbf{n} + \int_{\partial b} p\, \mathbf{n} = \int_b \mathbf{f}. \tag{2.125}$$

Επιπλέον η (2.1) δίνει $\int_{\mathscr{O}} \operatorname{div} \mathbf{u} = 0$, για κατάλληλα χωρία $\mathscr{O}$. Στη μέθοδο πεπερασμένων χωρίων αναζητούμε προσεγγίσεις στο Καρτεσιανό γινόμενο των χώρων Crouzeix–Raviart $\mathbf{V}_h \times \Pi_h$, που χρησιμοποιήσαμε στην προηγούμενη παράγραφο, που να ικανοποιούν την ιδιότητα διατήρησης (2.125) σε *χωρία ελέγχου (control volumes)*. Το πλήθος των χωρίων ελέγχου ισούται με τη διάσταση του χώρου $\mathbf{V}_h$. Εισάγουμε τώρα τον απαραίτητο συμβολισμό για τη συνέχεια. Έστω z_K ένα εσωτερικό σημείο του $K \in T_h$. Ενώνουμε το z_K με ευθύγραμμα τμήματα με τις κορυφές του K, και έτσι χωρίζουμε το K σε τρία υποτρίγωνα K_e, $e \in E_h(K)$. Κατ' αυτόν τον τρόπο σε κάθε πλευρά $e \in E_h$ αντιστοιχούμε ένα πολύγωνο b_e, που αποτελείται από την ένωση των υποπεριοχών K_e.

Η αντίστοιχη μέθοδος πεπερασμένων χωρίων για το δυναμικό πρόβλημα Stokes



Σχήμα 2.2: *Το χωρίο* b_e

είναι: Ζητείται ζεύγος συναρτήσεων $(\mathbf{u}_h, p_h) : [0,T] \to \mathbf{V}_h \times \Pi_h$ τέτοιο ώστε

$$\int_{b_e} \mathbf{u}_{h,t} - \int_{\partial b_e} \nabla \mathbf{u}_h \, \mathbf{n} + \int_{\partial b_e} p_h \, \mathbf{n} = \int_{b_e} \mathbf{f}, \quad \forall\, e \in E_h^{in}, \tag{2.126}$$

$$\int_K \operatorname{div} \mathbf{u}_h = 0, \quad \forall\, K \in \mathcal{T}_h. \tag{2.127}$$

Παραπέμπουμε στις εργασίες [13, 14] και [11], αντίστοιχα, για τις εκ των προτέρων και εκ των υστέρων εκτιμήσεις για τις μεθόδους πεπερασμένων χωρίων για το στατικό πρόβλημα του Stokes.

Για το υπόλοιπο αυτού του κεφαλαίου, είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι το σχήμα πεπερασμένων χωρίων μπορεί να γραφεί σε μεταβολική μορφή παρεμφερή με εκείνη των πεπερασμένων στοιχείων, [11, 9, 10].

Λήμμα 2.5.1. *Υπάρχει μοναδική λύση* $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{V}_h \times \Pi_h$ *της μεθόδου πεπερασμένων χωρίων* (2.126)–(2.127) *η οποία ικανοποιεί τις*

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}_{h,t}, \mathbf{\Lambda}_h \boldsymbol{\varphi} \rangle + a(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\varphi}) + b(\boldsymbol{\varphi}, p_h) &= \langle \mathbf{f}, \mathbf{\Lambda}_h \boldsymbol{\varphi} \rangle \quad \forall\, \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{V}_h, \\ b(\mathbf{u}_h, \psi) &= 0 \quad \forall\, \psi \in \Pi_h, \end{aligned} \tag{2.128}$$

όπου ο τελεστής $\mathbf{\Lambda}_h : C(\Omega)^2 + \mathbf{V}_h \to \mathbf{V}_h$ *ορίζεται ως*

$$\mathbf{\Lambda}_h \mathbf{v} = \sum_{e \in E_h^{in}} \mathbf{v}(m_e) \chi_{b_e}, \tag{2.129}$$

με χ_{b_e} *τη χαρακτηριστική συνάρτηση του χωρίου* b_e *και* m_e *το μέσο της πλευράς* e.

Για μελλοντικές παραπομπές αναφέρουμε τις βασικές ιδιότητες του τελεστή $\mathbf{\Lambda}_h$ [11, 9]

$$\|\boldsymbol{\varphi} - \mathbf{\Lambda}_h\boldsymbol{\varphi}\|_{0,K}^2 = \sum_{e\in E_h(K)} \|\boldsymbol{\varphi} - \mathbf{\Lambda}_h\boldsymbol{\varphi}\|_{0,K_e}^2 \leq Ch_K^2|\boldsymbol{\varphi}|_{1,K}^2 \quad \forall\, \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{V}_h, \tag{2.130}$$

$$\int_e \mathbf{\Lambda}_h\boldsymbol{\varphi} = \int_e \boldsymbol{\varphi} \quad \forall\, \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{V}_h,\ \forall\, e \in E_h. \tag{2.131}$$

Εισάγουμε τώρα δύο τελεστές, που θα είναι χρήσιμοι στις επόμενες παραγράφους: $\mathscr{L}_h : \mathbf{H} \to \mathbf{V}_h$ και $\tilde{\mathscr{L}}_h : \mathbf{H} \to \mathbf{Z}_h$ ως

$$\begin{aligned} \langle \mathscr{L}_h\mathbf{v}, \boldsymbol{\varphi}\rangle &= \langle \mathbf{v}, \mathbf{\Lambda}_h\boldsymbol{\varphi}\rangle \quad \forall\, \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{V}_h, \\ \langle \tilde{\mathscr{L}}_h\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}\rangle &= \langle \mathbf{v}, \mathbf{\Lambda}_h\boldsymbol{\omega}\rangle \quad \forall\, \boldsymbol{\omega} \in \mathbf{Z}_h\,. \end{aligned} \tag{2.132}$$

Προφανώς οι $\mathscr{L}_h$ και $\tilde{\mathscr{L}}_h$ είναι καλώς ορισμένοι. Σύμφωνα με τους προηγούμενους ορισμούς και το Λήμμα 2.5.1 καταλήγουμε στο ότι η λύση της μεθόδου πεπερασμένων χωρίων ικανοποιεί την

$$\tilde{\mathscr{L}}_h\mathbf{u}_{h,t} - \tilde{\Delta}_h\mathbf{u}_h - \tilde{\mathscr{L}}_h\mathbf{f} = 0. \tag{2.133}$$

Η απόδειξη των εκ των υστέρων εκτιμήσεων ακολουθεί την εισαγωγική ανάλυση που παρουσιάσαμε στην Παράγραφο 1, αλλά απαιτούνται τώρα κάποιες τροποποιήσεις. Αρχικά ορίζουμε την ανακατασκευή Stokes ως τη λύση ενός στατικού προβλήματος Stokes, διαφορετικού από το αντίστοιχο των πεπερασμένων στοιχείων: Έστω $(\mathbf{U}, P) \in \mathbf{V} \times S$ η λύση του στατικού προβλήματος Stokes

$$\begin{aligned} a(\mathbf{U}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, P) &= \langle \mathbf{g}_h, \mathbf{v}\rangle \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \\ b(\mathbf{U}, q) &= 0 \quad \forall q \in S, \end{aligned} \tag{2.134}$$

με

$$\mathbf{g}_h := -\tilde{\Delta}_h\mathbf{u}_h - \tilde{\mathscr{L}}_h\mathbf{f} + \mathbf{f} + \tilde{\mathscr{L}}_h\mathbf{u}_{h,t} - \mathbf{u}_{h,t}. \tag{2.135}$$

Οπότε, σύμφωνα με τον ορισμό της $\mathbf{g}_h$ και την (2.133) λαμβάνουμε

$$\mathbf{g}_h = \mathbf{f} - \mathbf{u}_{h,t}. \tag{2.136}$$

Ένας από τους λόγους τροποποίησης του ορισμού της $\mathbf{g}_h$ είναι ότι σύμφωνα με τη (2.136) η εξίσωση σφάλματος που ικανοποιούν τα $\mathbf{e} := \mathbf{u} - \mathbf{U}$ και $\varepsilon := p - P$ είναι αυτή του Θεωρήματος 2.2.1:

$$\begin{cases} \mathbf{e}_t - \Delta\mathbf{e} + \nabla\varepsilon = -(\mathbf{U} - \mathbf{u}_h)_t \\ \operatorname{div}\mathbf{e} = 0\,. \end{cases} \tag{2.137}$$

Έτσι η εκτίμηση των $\mathbf{e}$ και ε μπορεί να γίνει με παρόμοιο τρόπο όπως στην παράγραφο για τη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων, αν βέβαια γνωρίζουμε πώς να εκτιμήσουμε τα σφάλματα $\mathbf{U}-\mathbf{u}_h$ και $(\mathbf{U}-\mathbf{u}_h)_t$. Στο υπόλοιπο αυτής της παραγράφου αποδεικνύουμε ότι, αν και το Λήμμα 2.2.1 δεν ισχύει στην προκείμενη περίπτωση, η $\mathbf{U}-\mathbf{u}_h$ ικανοποιεί τις σχέσεις ορθογωνιότητας που απαιτούνται για να εκτιμήσουμε τα σφάλματα $\mathbf{U}-\mathbf{u}_h$ και $(\mathbf{U} - \mathbf{u}_h)_t$ χρησιμοποιώντας τις αντίστοιχες εκ των υστέρων εκτιμήσεις για το σχήμα πεπερασμένων στοιχείων για το στατικό πρόβλημα, [11]. Τονίζουμε εδώ ότι η $(\mathbf{u}_h, p_h)$ *είναι η λύση πεπερασμένων χωρίων για το στατικό πρόβλημα* (2.134):

Λήμμα 2.5.2. *Υποθέτουμε ότι η* $(\mathbf{U}, P)$ *είναι η μοναδική λύση του στατικού προβλήματος* (2.134) *και η* $(\mathbf{U}_h, P_h)$ *είναι η προσέγγισή της με τη μέθοδο πεπερασμένων χωρίων, δηλαδή*

$$\begin{aligned} a(\mathbf{U}_h, \boldsymbol{\varphi}) + b(\boldsymbol{\varphi}, P_h) &= \langle \mathbf{g}_h, \boldsymbol{\Lambda}_h\boldsymbol{\varphi}\rangle \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{V}_h, \\ b(\mathbf{U}_h, q) &= 0 \quad \forall q \in S_h. \end{aligned} \tag{2.138}$$

Τότε

$$\mathbf{U}_h(t) = \mathbf{u}_h(t) \quad \textit{και} \quad P_h(t) = p_h(t), \tag{2.139}$$

όπου $(\mathbf{u}_h, p_h)$ *είναι η λύση του (2.128).*

Απόδειξη. Αν $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{Z}_h$, τότε $b(\boldsymbol{\varphi}, P_h) = 0$ *και* $a(\mathbf{U}_h, \boldsymbol{\varphi}) = \langle \mathbf{g}_h, \boldsymbol{\Lambda}_h\boldsymbol{\varphi}\rangle$. Τώρα,

σύμφωνα με τις (2.128), (2.136) έχουμε

$$a(\mathbf{U}_h, \boldsymbol{\varphi}) = \langle \mathbf{g}_h, \boldsymbol{\Lambda}_h \boldsymbol{\varphi} \rangle = \langle \mathbf{f} - \mathbf{u}_{h,t}, \boldsymbol{\Lambda}_h \boldsymbol{\varphi} \rangle = a(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\varphi}), \tag{2.140}$$

ή

$$a(\mathbf{U}_h - \mathbf{u}_h, \boldsymbol{\varphi}) = 0 \quad \text{για κάθε } \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{Z}_h. \tag{2.141}$$

Αφού $\mathbf{U}_h,\ \mathbf{u}_h \in \mathbf{Z}_h$, έχουμε $\mathbf{U}_h(t) = \mathbf{u}_h(t)$. Αφαιρώντας τη (2.138) από τη (2.128)

$$\begin{aligned} b(\boldsymbol{\varphi}, p_h) - b(\boldsymbol{\varphi}, P_h) &= -a(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\varphi}) - \langle \mathbf{u}_{h,t}, \boldsymbol{\Lambda}_h \boldsymbol{\varphi} \rangle + \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\Lambda}_h \boldsymbol{\varphi} \rangle \\ &\quad - [-a(\mathbf{U}_h, \boldsymbol{\varphi}) + \langle \mathbf{g}_h, \boldsymbol{\Lambda}_h \boldsymbol{\varphi} \rangle] \\ &= a(\mathbf{U}_h - \mathbf{u}_h, \boldsymbol{\varphi}) - \langle \mathbf{u}_{h,t} - \mathbf{f} + \mathbf{g}_h, \boldsymbol{\Lambda}_h \boldsymbol{\varphi} \rangle, \end{aligned} \tag{2.142}$$

για κάθε $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{V}_h$. Σύμφωνα με τη (2.136) και το γεγονός ότι $\mathbf{U}_h = \mathbf{u}_h$ έχουμε

$$b(\boldsymbol{\varphi}, p_h - P_h) = 0 \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{V}_h.$$

Λόγω της διακριτής υπόθεσης inf-sup (2.13) έχουμε $p_h = P_h$. Συνεπώς, η $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{Z}_h \times S_h$ είναι η λύση πεπερασμένων χωρίων για το στατικό πρόβλημα Stokes, του οποίου ακριβής λύση είναι η $(\mathbf{U}, P)$. □

Επιστρέφουμε τώρα στην εκτίμηση της διαφοράς $\mathbf{U} - \mathbf{u}_h$. Όπως στην προηγούμενη παράγραφο, θέτουμε

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{U} - \mathbf{u}_h, \xi = P - p_h.$$

Παρατηρούμε ότι το Λήμμα 2.5.1 συνεπάγεται ότι η $(\mathbf{u}_h, p_h)$ ικανοποιεί την

$$a(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\varphi}) + b(\boldsymbol{\varphi}, p_h) = \langle \mathscr{L}_h \mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi} \rangle - \langle \mathscr{L}_h \mathbf{u}_{h,t}, \boldsymbol{\varphi} \rangle \quad \forall\, \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{V}_h. \tag{2.143}$$

Συνεπώς, σύμφωνα με τον ορισμό της $(\mathbf{U}, P)$ και τη (2.136) έχουμε τη σχέση ορθωνιότητας στην περίπτωση του χώρου με συνεχή στοιχεία $\mathbf{X}_h$

$$a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varphi}) + b(\boldsymbol{\varphi}, \xi) = \langle \mathbf{f} - \mathscr{L}_h \mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi} \rangle - \langle \mathbf{u}_{h,t} - \mathscr{L}_h \mathbf{u}_{h,t}, \boldsymbol{\varphi} \rangle \quad \forall\, \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{X}_h. \tag{2.144}$$

Η απόδειξη βασίζεται στην εφαρμογή του επιχειρήματος της εργασίας [17] όπως στην προηγούμενη παράγραφο, αφού λάβουμε υπόψιν τον επιπλέον όρο σφάλματος που προκύπτει από τη διακριτοποίηση με πεπερασμένα χωρία. Έτσι, με τους συμβολισμούς της προηγούμενης παραγράφου, χρησιμοποιούμε τη διάσπαση $\nabla_h \boldsymbol{\sigma} = \nabla \mathbf{r} - q\mathbf{I} + \operatorname{curl} \mathbf{s}$, όπου $q \in L_0^2(\Omega)$, $\mathbf{r} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ με $\operatorname{div} \mathbf{r} = 0$ και $\mathbf{s} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$. Επομένως, χρησιμοποιώντας τη (2.144) και τον ορισμό της $\mathscr{L}_h$ τελικά παίρνουμε

$$\begin{aligned} \|\nabla_h \boldsymbol{\sigma}\|^2 = \sum_K \int_K \mathbf{g}_h \cdot (\mathbf{r} - \boldsymbol{\chi}) + \int_K (\mathbf{f} - \mathbf{u}_{h,t}) \cdot (\boldsymbol{\chi} - \boldsymbol{\Lambda}_h \boldsymbol{\chi}) \\ - \int_{\partial K} (\nabla_h \mathbf{u}_h - p_h \mathbf{I}) \mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \boldsymbol{\chi}) - \int_{\partial K} \nabla_h \mathbf{u}_h \boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{s} - \boldsymbol{\psi}), \end{aligned} \tag{2.145}$$

για κάθε $\boldsymbol{\chi}$, $\boldsymbol{\psi} \in \mathbf{X}_h$. Επίσης συμβολίζουμε με $\mathbf{R}_K$ το εσωτερικό υπόλοιπο, δηλαδή $\mathbf{R}_K = \mathbf{u}_{h,t} - \Delta \mathbf{u}_h + \nabla p_h - \mathbf{f}$. Τότε, $\mathbf{g}_h|_K = -\mathbf{u}_{h,t} + \mathbf{f} = -\mathbf{R}_K$. Θεωρούμε τους τοπικούς εκτιμητές $\eta_{1,K}(\mathbf{u}_h)$, όπως ορίστηκαν στη (2.110) και τον ολικό εκτιμητή $\eta_1(\mathbf{u}_h)$ όπως ορίστηκε στη (2.90). Έπειτα επιλέγουμε $\boldsymbol{\chi} = \mathbf{I}_h \mathbf{r}$, $\boldsymbol{\psi} = \mathbf{I}_h \mathbf{s}$ στη (2.145), $\mathbf{I}_h$ να είναι η παρεμβάλλουσα τύπου Clement στον $\mathbf{X}_h$. Χρησιμοποιώντας τις προσεγγιστικές ιδιότητες (2.130) της παρεμβάλλλουσας και του τελεστή $\boldsymbol{\Lambda}_h$, συμπεραίνουμε όπως στην [11] ότι:

Λήμμα 2.5.3. *Ισχύει η ακόλουθη εκτίμηση:*

$$\|\mathbf{U} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{V}} \leq C\, \eta_1 \left(\mathbf{u}_h(t)\right). \tag{2.146}$$

Στη συνέχεια θα δούμε έναν εκ των υστέρων εκτιμητή για την ταχύτητα στην L^2-νόρμα. Από τη θεωρία των εκ των προτέρων εκτιμήσεων για τις μεθόδους πεπερασμένων χωρίων, είναι γνωστό ότι, [9], για να αποδείξουμε $\mathcal{O}(h^2)$ σύγκλιση στην L^2-νόρμα, το σημείο z_K πρέπει να επιλεγεί ως το βαρύκεντρο του K. Γι' αυτόν το λόγο στη συνέχεια υποθέτουμε ότι στην κατασκευή των χωρίων ελέγχου b_e, το σημείο z_K επιλέχθηκε ως το βαρύκεντρο του K. Σ' αυτή την περίπτωση έχουμε

$$\int_K (\boldsymbol{\varphi} - \boldsymbol{\Lambda}_h \boldsymbol{\varphi}) = 0 \quad \forall\, \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{V}_h. \tag{2.147}$$

Θεωρούμε πάλι το δυϊκό πρόβλημα (2.113). Τότε η σχέση (2.114) εξακολουθεί να

ισχύει. Επιπλέον, αφού όλοι οι τελεστές αντιμετατίθενται με τη διαφόριση ως προς το χρόνο, εάν παραγωγίσουμε την εξίσωση (2.144) ως προς t, λαμβάνουμε,

$$a(\boldsymbol{\sigma}_t, \boldsymbol{\varphi}) + b(\boldsymbol{\varphi}, \xi_t) = \langle \mathbf{f}_t - \mathscr{L}_h \mathbf{f}_t, \boldsymbol{\varphi} \rangle - \langle \mathbf{u}_{h,tt} - \mathscr{L}_h \mathbf{u}_{h,tt}, \boldsymbol{\varphi} \rangle \quad \forall\, \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{X}_h.$$

Στην ακόλουθη σχέση χρησιμοποιούμε επίσης το γεγονός ότι $b(\mathbf{U}_t - \mathbf{u}_{h,t}, \psi) = 0, \psi \in \Pi_h$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{\sigma}_t\|^2 = \sum_K \Big\{ & \int_K \big(-\Delta \boldsymbol{\sigma}_t + \nabla \xi_t\big) \cdot (\mathbf{z} - \boldsymbol{\chi}) \\
& + \int_K \big((s - \psi)\ \mathrm{div}(\boldsymbol{\sigma}_t) + \int_{\partial K} \big(\nabla(\boldsymbol{\sigma}_t)\, \mathbf{n} - \xi_t\, \mathbf{n}\big) \cdot (\mathbf{z} - \boldsymbol{\chi}) \\
& + \int_K (\mathbf{f}_t - \mathbf{u}_{h,tt}) \cdot (\boldsymbol{\chi} - \boldsymbol{\Lambda}_h \boldsymbol{\varphi})\big) \\
& + \int_{\partial K} \big(\nabla \mathbf{z}\, \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_{h,t} + s\, \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_{h,t}\big) \Big\}.
\end{aligned}$$

Επίσης, λόγω του γεγονότος ότι $\mathbf{g}_{h,t} = -\partial_t \mathbf{R}_K = -\mathbf{R}_{K,t}$ και της (2.147), έχουμε

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{\sigma}_t\|^2 = \sum_K \Big\{ & \int_K (-\mathbf{R}_{K,t} \cdot (\mathbf{z} - \boldsymbol{\chi}) - (s - \psi)\ \mathrm{div}\, \mathbf{u}_{h,t}) \\
& - \int_K (\mathbf{R}_{K,t} - \overline{\mathbf{R}_{K,t}}) \cdot (\boldsymbol{\chi} - \boldsymbol{\Lambda}_h \boldsymbol{\chi})\big) \\
& + \int_{\partial K} \big(\nabla \mathbf{u}_{h,t}\, \mathbf{n} - p_{h,t}\, \mathbf{n}\big) \cdot (\mathbf{z} - \boldsymbol{\chi}) + \int_{\partial K} \big(\nabla \mathbf{z}\, \mathbf{n} + s\, \mathbf{n}\big) \cdot \mathbf{u}_{h,t} \Big\},
\end{aligned} \tag{2.148}$$

για κάθε $\boldsymbol{\chi} \in \mathbf{X}_h$ και $\psi \in \Pi_h$. Εδώ $\overline{\mathbf{R}_{K,t}}$ συμβολίζει το μέσο όρο του $\mathbf{R}_{K,t}$ πάνω στο K. Οι τοπικοί εκτιμητές $\widetilde{\eta}_{0,K}$ στην περίπτωση των πεπερασμένων χωρίων είναι ελαφρώς διαφορετικοί από τους αντίστοιχους στην περίπτωση των πεπερασμένων στοιχείων:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\eta}_{0,K}(\mathbf{u}_{h,t})^2 = & \ h_K^4 \|\mathbf{R}_{K,t}\|_{0,K}^2 + h_K^2\, \|\, \mathrm{div}\, \mathbf{u}_{h,t}\|_{0,K}^2 \\
& + h_K^2 \|\mathbf{R}_{K,t} - \overline{\mathbf{R}_{K,t}}\|_{0,K}^2 \\
& + \frac{1}{2} \sum_{e \in E_h^{\mathrm{iv}}(K)} \big(h_e^3\, \|\partial_t \mathbf{J}_{e,\mathbf{n}}\|_{0,e}^2 + h_e^3\, \|\partial_t \mathbf{J}_{e,\boldsymbol{\tau}}\|_{0,e}^2\big).
\end{aligned}$$

Ο L^2 εκτιμητής ορίζεται ως

$$\widetilde{\eta}_0(\mathbf{u}_{h,t}\,) = \big(\sum_K \widetilde{\eta}_{0,K}(\mathbf{u}_{h,t})^2\,\big)^{1/2}. \tag{2.149}$$

Επιλέγουμε χ να είναι η συνήθης παρεμβάλλουσα της $\mathbf{z}$, που συμβολίζεται με $\mathbf{I}_{h,\mathscr{N}}\mathbf{z}$ και $\psi = I_h s$. Ακολουθώντας την [11] παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\int_K \big(\mathbf{R}_{K,t} - \overline{\mathbf{R}_{K,t}}\big)\cdot\big(\mathbf{I}_{h,\mathscr{N}}\mathbf{z} - \mathbf{\Lambda}_h\mathbf{I}_{h,\mathscr{N}}\mathbf{z}\big)\big) &\le \|\mathbf{R}_{K,t} - \overline{\mathbf{R}_{K,t}}\|_{0,K}\,\|\mathbf{I}_{h,\mathscr{N}}\mathbf{z} - \mathbf{\Lambda}_h\widetilde{\mathbf{I}}_h\mathbf{z}\|_{0,K}\\ &\le C|K|^{1/2}\|\mathbf{R}_{K,t} - \overline{\mathbf{R}_{K,t}}\|_{0,K}\,|\mathbf{I}_{h,\mathscr{N}}\mathbf{z}|_{1,K}\\ &\le C|K|^{1/2}\|\mathbf{R}_{K,t} - \overline{\mathbf{R}_{K,t}}\|_{0,K}\,\|\mathbf{z}\|_{2,K}\,.\end{aligned}$$

Έτσι η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Συνεπώς, αποδείξαμε ότι

Θεώρημα 2.5.1. *Ισχύει η ακόλουθη εκτίμηση:*

$$\|\mathbf{u}_{h,t} - \mathbf{U}_t\|_{\mathbf{H}} \le C\,\eta_1\,(\mathbf{u}_{h,t}(t)\,)\,. \tag{2.150}$$

Επιπλέον, υποθέτοντας ότι ισχύουν οι (2.113) *και* (2.147)*, έχουμε*

$$\|\mathbf{u}_{h,t} - \mathbf{U}_t\|_{\mathbf{H}} \le C\,\widetilde{\eta}_0\,(\mathbf{u}_{h,t}(t)\,)\,. \tag{2.151}$$

Τώρα μπορούμε να εραρμόσουμε το Θεώρημα 2.3.2 για να πάρουμε εκτιμήσεις στη H^1-νόρμα στην περίπτωσή μας.

Θεώρημα 2.5.2. (Εκτιμήσεις σφάλματος τύπου υπολοίπου στους $L^2(H^1)$ και $L^\infty(H^1)$.) *Υποθέτουμε ότι η* $(\mathbf{u}, p)$ *είναι η λύση του δυναμικού προβλήματος Stokes* (2.1) *και η* $(\mathbf{u}_h, p_h)$ *είναι η προσέγγισή της με τη μέθοδο των πεπερασμένων χωρίων* (2.126), (2.127). *Τότε ισχύουν οι εκ των υστέρων εκτιμήσεις, για* $0 < t \le T$,

$$\begin{aligned}\|\nabla(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)(t)\|_{\mathbf{H}} \le \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_h^0\|_{\mathbf{V}} + C\Big(\int_0^t \eta_1((\mathbf{u}_{h,t}(s)\,)^2 ds\Big)^{1/2}\\ + C\eta_1((\mathbf{u}_h(0)\,) + C\eta_1(\mathbf{u}_h(t)\,).\end{aligned}$$

και

$$\Big(\int_0^t \|(\mathbf{u}-\mathbf{u}_h)(s)\|_{\mathbf{V}}^2 ds\Big)^{1/2} \le \|\mathbf{u}_0-\mathbf{u}_h^0\|_{\mathbf{H}} + C\Big(\int_0^t \eta_1((\mathbf{u}_{h,t}(s)\,)^2 ds\Big)^{1/2}$$
$$+ C\eta_1((\mathbf{u}_h(0)\,) + C\Big(\int_0^t \eta_1((\mathbf{u}_h(s)\,)^2 ds\Big)^{1/2}.$$

Παρατήρηση 2.5.1. *Στην περίπτωση που ισχύουν οι* (2.113) *και* (2.147), *ο εκτιμητής* $\eta_1((\mathbf{u}_{h,t}(s)\,)$ *σε αυτά τα φράγματα μπορεί να αντικατασταθεί από* $\widetilde{\eta}_0((\mathbf{u}_{h,t}(s)\,)$.

Επιπλέον ισχύει η ακόλουθη $L^\infty(L^2)$ εκ των υστέρων εκτίμηση

Θεώρημα 2.5.3. (Εκτιμήσεις σφαλμάτων τύπου υπολοίπου στο L^2.) *Υποθέτουμε ότι η* $(\mathbf{u},p)$ *είναι η λύση του δυναμικού προβλήματος Stokes* (2.1) *και η* $(\mathbf{u}_h,p_h)$ *είναι η προσέγγισή της με τη μέθοδο των πεπερασμένων χωρίων* (2.126), (2.127). *Επιπλέον υποθέτουμε ότι ισχύουν οι* (2.113) *και* (2.147). *Τότε ισχύουν οι ακόλουθες εκ των υστέρων εκτιμήσεις, για* $0<t\le T$,

$$\|(\mathbf{u}-\mathbf{u}_h)(t)\|_{\mathbf{H}} \le \|\mathbf{u}_0-\mathbf{u}_h^0\|_{\mathbf{H}} + C\Big(\int_0^t \widetilde{\eta}_0((\mathbf{u}_{h,t}(s)\,)^2 ds\Big)^{1/2}$$
$$+ C\widetilde{\eta}_0(\mathbf{u}_h(0)\,) + C\widetilde{\eta}_0(\mathbf{u}_h(t)\,).$$

Κεφάλαιο 3

Πλήρως διακριτά σχήματα για αφηρημένες παραβολικές εξισώσεις

Σ' αυτό το κεφάλαιο θα αποδείξουμε εκ των υστέρων εκτιμήσεις των σφαλμάτων για πλήρως διακριτά σχήματα για αφηρημένες παραβολικές εξισώσεις. Για τη χρονική διακριτοποίηση θα θεωρήσουμε αρχικά τη μέθοδο Crank–Nicolson και στη συνέχεια τη $\vartheta-$κλασματική μέθοδο που είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Για τη διακριτοποίηση στο χώρο θα θεωρήσουμε ένα χώρο πεπερασμένης διάστασης με κατάλληλες προσεγγιστικές ιδιότητες.

Η ανάλυσή μας βασίζεται σε μια ανακατασκευή χρόνου-χώρου της κατά τμήματα γραμμικής παρεμβάλλουσας U της ακολουθίας των προσεγγίσεων $\left(U^n\right)_{0\leq n\leq N}$ που παράγεται από το πλήρως διακριτό σχήμα. Η ανακατασκευή αυτή θα γίνει σε δύο στάδια: αρχικά, προσαρμόζοντας στην πλήρως διακριτή περίπτωση τις ιδέες που αναπτύχθηκαν στην εργασία [3] για τη μέθοδο Crank–Nicolson και στο Κεφάλαιο 3 για τη $\vartheta-$κλασματική μέθοδο, θα ορίσουμε μια χρονική ανακατασκευή $\hat{U}$ της U. Στη συνέχεια, θα ανακατασκευάσουμε χωρικά τις U και $\hat{U}$, θεωρώντας τις ελλειπτικές ανακατασκευές τους W και $\hat{W}$, αντίστοιχα, [34].

3.1 Εισαγωγή

Έστω $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ένας χώρος Hilbert, $A : D(A) \to H$ ένας θετικά ορισμένος, αυτοσυζυγής, γραμμικός τελεστής με πεδίο ορισμού $D(A)$ πυκνό στον H. Η συνάρτηση $f : [0,T] \to H$ και η αρχική συνθήκη $u_0 \in H$ είναι δεδομένες. Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών: Ζητείται συνάρτηση $u : [0,T] \to D(A)$ η οποία να ικανοποιεί

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = f(t), \quad 0 < t < T, \\ u(0) = u^0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Συμβολίζουμε με V το χώρο Hilbert $D(A^{1/2})$ και με $\|\cdot\|_H$ και $\|\cdot\|_V$, $\|v\|_V := \|A^{1/2}v\|_H$, τις νόρμες των χώρων H και V, αντίστοιχα. Ταυτίζουμε τον H με το δυϊκό του και συμβολίζουμε με $V^\star$ το δυϊκό του V. Για το δυϊκό ζεύγος μεταξύ των $V^\star$ και V επίσης θα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $\langle\cdot,\cdot\rangle$, ενώ για τη δυϊκή νόρμα του $V^\star$ θα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $\|\cdot\|_{V^\star}$.

Έστω V_h ένας υπόχωρος πεπερασμένης διάστασης του V με κατάλληλες προσεγγιστικές ιδιότητες. Η ημιδιακριτή προσεγγιστική λύση $u_h \in V_h$ ορίζεται δια

$$\begin{cases} \langle u_{h,t}, \chi\rangle + a(u_h, \chi) = \langle f, \chi\rangle \quad \forall \chi \in V_h \\ u_h(\cdot, 0) = u_h^0, \end{cases} \tag{3.2}$$

όπου $u_h^0 \in V_h$ κατάλληλη προσέγγιση της u^0.

Συμβολίζουμε με $\Pi_h : L^2 \to V_h$ την L^2-προβολή στον V_h,

$$\langle \Pi_h f, \chi\rangle = \langle f, \chi\rangle \quad \forall \chi \in V_h, \tag{3.3}$$

και με $A_h : V_h \to V_h$ τη διακριτή εκδοχή του τελεστή A,

$$\langle A_h v_h, \chi\rangle = a(v_h, \chi) \quad \forall \chi \in V_h. \tag{3.4}$$

Η βασική υπόθεση αυτού του κεφαλαίου για τους χώρους V_h είναι η ύπαρξη εκ των υστέρων εκτιμητών για το αντίστοιχο ελλειπτικό πρόβλημα. Συγκεκριμένα,

Υπόθεση 3.1.1. *Έστω $w \in V$ η ακριβής λύση του*

$$a(w, v) = \langle g, v \rangle \quad \forall v \in V,$$

και $w_h \in V_h$ η αντίστοιχη λύση πεπερασμένων στοιχείων,

$$a(w_h, v_h) = \langle g, v_h \rangle \quad \forall v_h \in V_h.$$

Για το χώρο $X \in \{H, V, V^*\}$, υποθέτουμε ότι υπάρχει ένας εκ των υστέρων εκτιμητής $\mathcal{E} = \mathcal{E}(w_h, g; X)$, που εξαρτάται από τις w_h, g και την αντίστοιχη νόρμα, έτσι ώστε

$$\|w - w_h\|_X \leq \mathcal{E}(w_h, g; X), \quad X = H,\, V,\, V^*\,. \tag{3.5}$$

3.2 Η μέθοδος Crank-Nicolson

Σ' αυτή την ενότητα θα αποδείξουμε εκ των υστέρων εκτιμήσεις σφάλματος για προσεγγίσεις των γραμμικών παραβολικών εξισώσεων που προκύπτουν με χρονική διακριτοποίηση του προβλήματος (3.2) με τη μέθοδο Crank-Nicolson. Στοχεύουμε στην απόδειξη βέλτιστης τάξης εκ των υστέρων εκτιμήσεων και ως προς τη χρονική και ως προς τη χωρική διακριτοποίηση.

Έστω $0 = t^0 < t^1 < \cdots < t^N = T$ ένας διαμερισμός του $[0, T]$, σε υποδιαστήματα $I_n := (t^{n-1}, t^n]$. Συμβολίζουμε με k_n το μήκος του I_n. Θέτουμε $u^m := u(\cdot, t^m)$ και $f^m := f(\cdot, t^m)$. Επιπλέον εισάγουμε το συνήθη συμβολισμό: για δεδομένα $v^1, v^2, \ldots, v^N$ θέτουμε

$$v^{n-\frac{1}{2}} = \frac{v^n + v^{n-1}}{2}.$$

Διακριτοποιούμε το ημιδιακριτό πρόβλημα (3.2) ως προς το χρόνο με τη μέθοδο Crank-Nicolson και οδηγούμαστε έτσι στο πλήρως διακριτό σχήμα: Προσδιορίστε προσεγγίσεις $U^n \in V_h$ των τιμών $u(t^n)$, οι οποίες δίνονται αναδρομικά από το σχήμα

$$\begin{cases} \langle \dfrac{U^n - U^{n-1}}{k_n}, v_h \rangle + a(U^{n-\frac{1}{2}}, v_h) = \langle f(t^{n-\frac{1}{2}}), v_h \rangle \quad \forall v_h \in V_h,\ 1 \leq n \leq N, \\ U^0 := u_h^0. \end{cases} \tag{3.6}$$

Βάσει των ορισμών (3.4) του τελεστή A_h και (3.3) της L^2-προβολής, από την προηγούμενη σχέση λαμβάνουμε

$$U^n - U^{n-1} + k_n A_h U^{n-\frac{1}{2}} = k_n \Pi_h f(t^{n-\frac{1}{2}}) \quad \forall v_h \in V_h. \tag{3.7}$$

Στο υπόλοιπο αυτής της ενότητας, σκοπεύουμε από την ακολουθία προσεγγίσεων U^n, $n = 0, \ldots,$ να κατασκευάσουμε μια συνεχή συνάρτηση $\hat{U}$, ορισμένη στο $[0, T]$, ώστε να αποδείξουμε βέλτιστης τάξης εκ των υστέρων εκτιμήσεις για το *ολικό σφάλμα*

$$e_{CN} := u - \hat{U}.$$

Σ' αυτό το σημείο θα αναφέρουμε τα βασικά βήματα της ανάλυσής μας, ώστε να είναι πιο εύκολο στον αναγνώστη να την ακολουθήσει. Αρχικά θα κατασκευάσουμε μια κατά τμήματα γραμμική συνάρτηση $U : [0, T] \to V_h$ ως προς το χρόνο με παρεμβολή της ακολουθίας $\left(t^n, U^n\right)_{0 \le n \le N}$. Η U, όπως και στο Κεφάλαιο 3, δεν θα είναι βέλτιστης τάξης προσέγγιση, ως προς το χρόνο, της ακριβούς λύσης u. Έτσι, προσαρμόζοντας στην πλήρως διακριτή προσέγγιση τις ιδέες της [3], θα ορίσουμε μια νέα παρεμβάλλουσα $\hat{U} : [0, T] \to V_h$, κατά τμήματα τετραγωνική, η οποία θα είναι ανακατασκευή της U (*η ανακατασκευή Crank-Nicolson της* U) και δεύτερης τάξης προσέγγιση, ως προς το χρόνο, της u. Στη συνέχεια, σε κάθε $\hat{U}(t)$, $t \in [0, T]$, θα αντιστοιχήσουμε μια συνάρτηση $\hat{W} \in V$ (*την ελλειπτική ανακατασκευή της* $\hat{U}$) έτσι ώστε το σφάλμα e_{CN} να διασπασθεί, ως

$$e_{CN} := \hat{e} - \hat{\rho},$$

όπου

$$\hat{e} := u - \hat{W} \quad \text{και} \quad \hat{\rho} := \hat{U} - \hat{W}.$$

Η παραπάνω διάσπαση θα έχει τις ακόλουθες ιδιότητες

- Το σφάλμα $\hat{\rho}$ θα είναι μια εκ των υστέρων ποσότητα (θα εξαρτάται μόνο από την προσεγγιστική λύση και τα αρχικά δεδομένα)· ειδικότερα η $\hat{U}$ θα είναι η ελλειπτική προβολή της $\hat{W}$ στον V_h. Επομένως, για την εκ των υστέρων εκτίμηση του σφάλματος $\hat{\rho}$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε, με βάση την Υπόθεση

3.1.1, τους υπάρχοντες εκ των υστέρων εκτιμητές για το ελλειπτικό πρόβλημα (για παράδειγματα βλ. [1, 41]).

- Το σφάλμα $\hat{e}$ θα είναι λύση ενός παραβολικού προβλήματος που το δεξιό μέλος θα εξαρτάται από το σφάλμα $\hat{\rho}$ και άλλες εκ των υστέρων ποσότητες. Άρα μπορούμε να το εκτιμήσουμε χρησιμοποιώντας τις συνήθεις τεχνικές της θεωρίας των διαφορικών εξισώσεων.

3.2.1 Η ανακατασκευή χώρου-χρόνου για τη μέθοδο Crank-Nicolson.

Σ' αυτή την παράγραφο θα κατασκευάσουμε μια βέλτιστης τάξης προσέγγιση $\hat{W}$, ως προς το χρόνο και ως προς το χώρο, της u. Αρχικά θα κατασκευάσουμε μια κατάλληλη προσέγγιση $\hat{U}$, μόνο ως προς το χρόνο, και στη συνέχεια βάσει αυτής θα κατασκευάσουμε την $\hat{W}$.

Ορίζουμε την κατά τμήματα γραμμική προσέγγιση $U : [0, T] \to V_h$ της u με γραμμική παρεμβολή των τιμών U^{n-1} και U^n,

$$U(t) = U^{n-1} + (t - t^{n-1})\, \bar{\partial} U^n,\ t \in I_n. \tag{3.8}$$

Η ακόλουθη μορφή της U θα μας φανεί, επίσης, χρήσιμη στη συνέχεια της ανάλυσής μας

$$U(t) = U^{n-\frac{1}{2}} + (t - t^{n-\frac{1}{2}})\, \bar{\partial} U^n,\ t \in I_n. \tag{3.9}$$

Το υπόλοιπο της U δεν είναι βέλτιστης τάξης και για αυτόν το λόγο πρέπει να ορίσουμε μια κατάλληλη ανακατασκευή της. Θα ορίσουμε λοιπόν μια συνεχή κατά τμήματα τετραγωνική συνάρτηση (κατά τμήματα πολυώνυμο βαθμού το πολύ δύο) ως προς το χρόνο $\hat{U} : [0, T] \to V_h$. Αυτή η κατασκευή θα εξαρτάται άμεσα από τη U, επομένως θα αναφερόμαστε σε αυτή ως *ανακατασκευή Crank-Nicolson της* U, [3].

Πριν ορίσουμε την ανακατασκευή Crank-Nicolson της U, θα εισαγάγουμε ένα κατά τμήματα τετραγωνικό πολυώνυμο Φ, το οποίο θα συμπεριλαμβάνεται στο ορισμό της.

Έστω $\varphi : I_n \to H$ η γραμμική παρεμβάλλουσα της f στους κόμβους t^{n-1} και $t^{n-\frac{1}{2}}$,

$$\varphi(t) := f(t^{n-1}) + \frac{2[f(t^{n-\frac{1}{2}}) - f(t^{n-1})]}{k_n}(t - t^{n-1}), \quad t \in I_n, \tag{3.10}$$

ή διαφορετικά

$$\varphi(t) = f(t^{n-\frac{1}{2}}) + \frac{2}{k_n}[f(t^{n-\frac{1}{2}}) - f(t^{n-1})](t - t^{n-\frac{1}{2}}), \quad t \in I_n. \tag{3.11}$$

Βάσει της φ, ορίζουμε την κατά τμήματα τετραγωνική συνάρτηση Φ, ως $\Phi(t) := \int_{t^{n-1}}^{t} \varphi(s)ds$, $t \in I_n$, δηλαδή,

$$\Phi(t) = (t - t^{n-1})f(t^{n-\frac{1}{2}}) - \frac{(t - t^{n-1})(t^n - t)}{k_n}[f(t^{n-\frac{1}{2}}) - f(t^{n-1})]. \tag{3.12}$$

Εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι η Φ έχει τις ιδιότητες

- $\Phi(t^{n-1}) = 0$,
- $\Phi(t^n) = k_n f(t^{n-\frac{1}{2}}) = \int_{I_n} f(t^{n-\frac{1}{2}})dt$.

Τώρα μπορούμε να ορίσουμε την κατά τμήματα τετραγωνική ανακατασκευή $\hat{U}$ της U ως, [3],

$$\hat{U}(t) := U^{n-1} - \int_{t^{n-1}}^{t} A_h U(s)ds + \Pi_h \Phi(t), \quad t \in I_n. \tag{3.13}$$

Επειδή η $\hat{U}$ είναι άμεσα συνδεδεμένη με τη U, στη συνέχεια θα την αναφέρουμε ως *ανακατασκευή Crank-Nicolson της* U. Χάριν στον τρόπο κατασκευής της, η $\hat{U}$ παρεμβάλλεται στις τιμές U^n, $n = 0, \ldots, N$. Πράγματι, από τον ορισμό (3.13) είναι προφανές ότι $\hat{U}(t^{n-1}) = U^{n-1}$. Επιπλέον, αν υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα της τελευταίας σχέσης με τον κανόνα του μέσου, παίρνουμε

$$\hat{U}(t^n) = U^{n-1} - k_n A_h U^{n-\frac{1}{2}} + k_n \Pi_h f(t^{n-\frac{1}{2}}) = U^n. \tag{3.14}$$

Επομένως, οι συναρτήσεις $\hat{U}$ και U λαμβάνουν τις ίδιες τιμές στους κόμβους $t^0, \ldots, t^N$· ειδικότερα, η $\hat{U} : [0, T] \to V_h$ είναι συνεχής συνάρτηση στο χρόνο. Επι-

πλέον, παραγωγίζοντας την (3.13) ως προς t καταλήγουμε στη σχέση

$$\hat{U}_t(t) = -A_h U(t) + \Pi_h \varphi(t), \quad t \in \ I_n. \tag{3.15}$$

Τώρα θα εισαγάγουμε τις *ελλειπτικές ανακατασκευές* των U και $\hat{U}$, [34], ως

Ορισμός 3.2.1. *(Η ελλειπτική ανακατασκευή της U) Για σταθερό $t \in [0,T]$, έστω $W \in V$ η ακριβής λύση του ελλειπτικού προβλήματος*

$$a(W, v) = \langle A_h U(t), v \rangle \quad \forall v \in V. \tag{3.16}$$

Θα αναφερόμαστε στην $W = W(t)$ ως ελλειπτική ανακατασκευή της $U(t)$.

Ορισμός 3.2.2. *(Η ελλειπτική ανακατασκευή της $\hat{U}$) Για σταθερό $t \in [0,T]$, έστω $\hat{W} \in V$ η ακριβής λύση του ελλειπτικού προβλήματος*

$$a(\hat{W}, v) = \langle A_h \hat{U}(t), v \rangle \quad \forall v \in V. \tag{3.17}$$

Θα αναφερόμαστε στην $\hat{W} = \hat{W}(t)$ ως ελλειπτική ανακατασκευή της $\hat{U}(t)$.

Συμβολίζουμε με $W_h \in V_h$ τη λύση του

$$a(W_h, v_h) = \langle A_h U(t), v_h \rangle \quad \forall v_h \in V_h, \tag{3.18}$$

και με $\hat{W}_h \in V_h$ τη λύση του

$$a(\hat{W}_h, v_h) = \langle A_h \hat{U}(t), v_h \rangle \quad \forall v_h \in V_h. \tag{3.19}$$

Θα αποδείξουμε τώρα τη βασική σχέση ανάμεσα στις συναρτήσεις U και $\hat{U}$ και τις ελλειπτικές ανακατασκευές τους W και $\hat{W}$, αντίστοιχα.

Λήμμα 3.2.1. *Για $t \in [0,T]$, θεωρούμε τις λύσεις W, $\hat{W}$ των ελλειπτικών προβλημάτων* (3.16) *και* (3.17)*,αντίστοιχα. Επίσης, θεωρούμε τις λύσεις W_h, $\hat{W}_h \in V_h$ των* (3.18) *και* (3.19)*, αντίστοιχα. Τότε*

$$W_h = U(t) \quad \textit{και} \quad \hat{W}_h = \hat{U}(t). \tag{3.20}$$

Απόδειξη. Έχουμε

$$a(W_h, v_h) = \langle A_h U(t), v_h \rangle = a(U(t), v_h) \quad \forall v_h \in V_h, \tag{3.21}$$

και συνεπώς

$$a(W_h(t) - U(t), v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h, \tag{3.22}$$

και επειδή $W_h(t),\ U(t) \in V_h$, συμπεραίνουμε ότι $W_h(t) = U(t)$. Ομοίως, έχουμε

$$a(\hat{W}_h, v_h) = \langle A_h \hat{U}(t), v_h \rangle = a(\hat{U}(t), v_h) \quad \forall v_h \in V_h, \tag{3.23}$$

επομένως

$$a(\hat{W}_h(t) - \hat{U}(t), v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h, \tag{3.24}$$

και άρα $\hat{W}_h(t) = \hat{U}(t)$. □

Όπως προκύπτει από τα προηγούμενα λήμματα, όπως και στην περίπτωση του ημιδιακριτού προβλήματος στο χώρο [34], η κατασκευή των W, $\hat{W}$ έγινε με τέτοιον τρόπο ώστε οι U, $\hat{U}$ να είναι, αντίστοιχα, οι ελλειπτικές τους προβολές στο χώρο V_h.

3.2.2 Εκτιμήσεις σφάλματος.

Ορίζουμε τα σφάλματα

$$\hat{e} := u - \hat{W} \quad \text{και} \quad e := u - W. \tag{3.25}$$

Λαμβάνοντας το εσωτερικό γινόμενο με $v \in V$ στην (3.15) παίρνουμε

$$\langle \hat{U}_t(t), v \rangle = -\langle A_h U(t), v \rangle + \langle \Pi_h \varphi(t), v \rangle \ \ t \in \ I_n, \tag{3.26}$$

επομένως, χρησιμοποιώντας τον ορισμό (3.16) της W, έχουμε για $t \in I_n$,

$$\langle \hat{U}_t(t), v \rangle + a(W(t), v) = \langle \Pi_h \varphi(t), v \rangle \quad \forall v \in V. \tag{3.27}$$

Αφαιρώντας την τελευταία εξίσωση από την

$$\langle u_t(t), v\rangle + a(u(t), v) = \langle f(t), v\rangle \quad \forall v \in V, \tag{3.28}$$

λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}\langle u_t(t) - \hat{W}_t(t), v\rangle + a(u(t) - W(t), v) &= \langle f(t) - \Pi_h\varphi(t), v\rangle \\ &\quad + \langle \hat{U}_t(t) - \hat{W}_t(t), v\rangle \quad \forall v \in V.\end{aligned} \tag{3.29}$$

Τελικά, καταλήγουμε στην εξίσωση σφάλματος

$$\langle \hat{e}_t(t), v\rangle + a(e(t), v) = \langle f(t) - \Pi_h\varphi(t), v\rangle + \langle \hat{U}_t(t) - \hat{W}_t(t), v\rangle \quad \forall v \in V. \tag{3.30}$$

Θεώρημα 3.2.1. (Εκτιμήσεις σφάλματος στον $L^\infty(H)$ και στον $L^2(V)$.) *Έστω u η λύση του παραβολικού προβλήματος* (3.1) *και W, $\hat{W}$ οι λύσεις των ελλειπτικών προβλημάτων* (3.16) *και* (3.17)*, αντίστοιχα. Τότε, για $0 < t \le t^n$, ισχύει η ακόλουθη εκτίμηση*

$$\begin{aligned}\max_{0<t\le t^n} \|(u - \hat{W})(t)\|_H^2 + \int_0^t \|(u - W)(s)\|_V^2 ds + \frac{1}{2}\int_0^t \|(u - \hat{W})(s)\|_V^2 ds \\ \le \|u(0) - \hat{W}(0)\|_H^2 + 4\int_0^{t^n} \|(\hat{U} - \hat{W})_t(s)\|_{V^\star}^2 ds \\ + 4\int_0^{t^n} \|f(s) - \Pi_h\varphi(s)\|_{V^\star}^2\, ds + \int_0^{t^n} \|W(s) - \hat{W}(s)\|_{V^\star}^2\, ds.\end{aligned}$$

Απόδειξη.

Επιλέγουμε $v = \hat{e}$ στην εξίσωση σφάλματος (3.30) και έχουμε

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\hat{e}(t)\|_H^2 + \langle Ae(t), \hat{e}(t)\rangle = \langle f - \Pi_h\varphi, \hat{e}\rangle + \langle (\hat{U} - \hat{W})_t, \hat{e}\rangle. \tag{3.31}$$

Τώρα

$$\langle Ae(t), \hat{e}(t)\rangle = \frac{1}{2}\|e(t)\|_V^2 + \frac{1}{2}\|\hat{e}(t)\|_V^2 - \frac{1}{2}\|\hat{e}(t) - e(t)\|_V^2, \tag{3.32}$$

επομένως, χρησιμοποιώντας και την ανισότητα των Cauchy-Schwarz στο δεξιό μέλος, έχουμε

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\hat{e}(t)\|_H^2 + \frac{1}{2}\|e(t)\|_V^2 + \frac{1}{2}\|\hat{e}(t)\|_V^2 \leq \frac{1}{2}\|\hat{e}(t) - e(t)\|_V^2 + \|(f - \Pi_h\varphi)(t)\|_{V^\star}\|\hat{e}(t)\|_V + \|(\hat{U} - \hat{W})_t(t)\|_{V^\star}\|\hat{e}(t)\|_V. \tag{3.33}$$

Αλλά σύμφωνα με την αριθμητική γεωμετρική ανισότητα λαμβάνουμε

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\hat{e}(t)\|_H^2 + \frac{1}{2}\|e(t)\|_V^2 + \frac{1}{2}\|\hat{e}(t)\|_V^2 \leq \frac{1}{2}\|(W - \hat{W})(t)\|_V^2 + 2\|(f - \Pi_h\varphi)(t)\|_{V^\star}^2 + \frac{1}{8}\|\hat{e}(t)\|_V^2 + 2\|(\hat{U} - \hat{W})_t(t)\|_{V^\star}^2 + \frac{1}{8}\|\hat{e}(t)\|_V^2, \tag{3.34}$$

και συνεπώς

$$\frac{d}{dt}\|\hat{e}(t)\|_H^2 + \|e(t)\|_V^2 + \frac{1}{2}\|\hat{e}(t)\|_V^2 \leq \|(W - \hat{W})(t)\|_V^2 + 4\|f - \Pi_h\varphi\|_{V^\star}^2 + 4\|(\hat{U} - \hat{W})_t\|_{V^\star}^2 . \tag{3.35}$$

Ολοκληρώνοντας την τελευταία σχέση στο $[0, t],\ 0 \leq t \leq t^n$ παίρνουμε

$$\|\hat{e}(t)\|_H^2 + \int_0^t \|e(s)\|_V^2 ds + \frac{1}{2}\int_0^t \|\hat{e}(s)\|_V^2 ds \leq \|\hat{e}(0)\|_H^2 + \int_0^t \|(W - \hat{W})(s)\|_V^2 ds + 4\int_0^t \|(f - \Pi_h\varphi)(s)\|_{V^\star}^2 ds + 4\int_0^t \|(\hat{U} - \hat{W})_t(s)\|_{V^\star}^2 ds. \tag{3.36}$$

□

Παρατηρούμε ότι το δεξιό μέλος της εκτίμησης του Θεωρήματος 3.2.1 έχει διασπασθεί ως εξής

- στο σφάλμα που οφείλεται στη χρονική διακριτοποίηση και αντιστοιχεί στον όρο $\int_0^{t^n} \|(W - \hat{W})(s)\|_V^2 ds$
- στο σφάλμα που οφείλεται στη χωρική διακριτοποίηση και αντιστοιχεί στον όρο $\int_0^{t^n} \|(\hat{U} - \hat{W})_t(s)\|_{V^\star}^2 ds$
- στο σφάλμα που αντιστοιχεί στην προσέγγιση των αρχικών δεδομένων και της

f και αντιστοιχεί στους όρους $\|e(0)\|_H^2$ και $\int_0^{t^n} \|(f - \Pi_h\varphi)(s)\|_{V^\star}^2 ds$.

Θα δούμε τώρα πώς μπορούμε να εκτιμήσουμε καθέναν από τους προηγούμενους όρους.

Εκτίμηση του χρονικού σφάλματος. Αρχικά θα εκτιμήσουμε τον όρο

$$\int_{t^{m-1}}^{t^m} \|(W - \hat{W})(s)\|_V^2 ds.$$

Από τους ορισμούς (3.16) και (3.17) των ανακατασκευών W και $\hat{W}$, αντίστοιχα, λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} \|(W - \hat{W})(s)\|^2 &= a(W - \hat{W}, W - \hat{W}) \\ &= \langle A_h U(t), W - \hat{W}\rangle - \langle A_h \hat{U}(t), W - \hat{W}\rangle \\ &= \langle A_h[U(t) - \hat{U}(t)], W - \hat{W}\rangle \\ &\leq \|A_h[U(t) - \hat{U}(t)]\|_H \|W - \hat{W}\|_H, \end{aligned} \tag{3.37}$$

επομένως, με χρήση της ανισότητας του Poincaré, έχουμε

$$\|(W - \hat{W})(s)\|_V \leq C_P \|A_h[U(t) - \hat{U}(t)]\|_H. \tag{3.38}$$

όπου C_P η σταθερά Poincaré. Θα υπολογίσουμε τώρα τη διαφορά $\hat{U}(t) - U(t)$. Βάσει των ορισμών (3.13) και (3.9) των $\hat{U}$ και U, αντίστοιχα, έχουμε

$$\begin{aligned} \hat{U}(t) - U(t) = &\big\{U^{m-1} - \int_{t^{m-1}}^{t} A_h U(s) ds + \Pi_h \Phi(t)\big\} \\ &- \big\{U^{m-1} + (t - t^{m-1})\bar{\partial} U^m\big\} \quad t \in I_m. \end{aligned} \tag{3.39}$$

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα του μέσου για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος της τελευταίας σχέσης, λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} \hat{U}(t) - U(t) = &\big\{U^{m-1} - \frac{(t - t^{m-1})}{2}[A_h U^{m-1} + A_h U(t)] + \Pi_h \Phi(t)\big\} \\ &- \big\{U^{m-1} + (t - t^{m-1})\bar{\partial} U^m\big\} \quad t \in I_m, \end{aligned}$$

ή

$$\hat{U}(t) - U(t) = -(t - t^{m-1})\big\{\bar{\partial}U^m + A_h U^{m-\frac{1}{2}}\big\} \\ - \frac{(t - t^{m-1})}{2}[A_h U(t) - A_h U^m] + \Pi_h \Phi(t) \quad t \in I_m.$$

Από την προηγούμενη σχέση, σύμφωνα με την (3.15), παίρνουμε

$$\hat{U}(t) - U(t) = -\frac{(t - t^{m-1})}{2} A_h[U(t) - U^m] \\ + \Pi_h\big\{\Phi(t) - (t - t^{m-1}) f(t^{m-\frac{1}{2}})\big\} \quad t \in I_m. \tag{3.40}$$

Τώρα, επειδή η U είναι γραμμική στο I_m, λαμβάνουμε

$$U(t) - U^m = (t - t^m)\bar{\partial}U^m \quad t \in I_m. \tag{3.41}$$

Επίσης, για $t \in I_m$, βάσει του ορισμού της Φ, έχουμε

$$\Phi(t) - (t - t^{m-1}) f(t^{m-\frac{1}{2}}) = -\frac{1}{k_m}(t - t^{m-1})(t^m - t)\Pi_h[f(t^{m-\frac{1}{2}}) - f(t^{m-1})]. \tag{3.42}$$

Συνδυάζοντας τα προηγούμενα αποτελέσματα, οδηγούμαστε στη σχέση

$$\hat{U}(t) - U(t) = -\,(t - t^{m-1})(t^m - t)\big\{A_h\bar{\partial}U^m + \frac{1}{k_m}\Pi_h[f(t^{m-\frac{1}{2}}) - f(t^{m-1})]\big\} \quad t \in I_m.$$

Αντικαθιστώντας την τελευταία σχέση στην (3.38), παίρνουμε

$$\|(W - \hat{W})(s)\|_V \le (t - t^{m-1})(t^m - t)\big\{\frac{1}{2}\|A_h^2\bar{\partial}U^m\|_H \\ + \frac{1}{k_m}\|A_h[\Pi_h f(t^{m-\frac{1}{2}}) - \Pi_h f(t^{m-1})]\|_H. \tag{3.43}$$

Με απλούς υπολογισμούς βρίσκουμε ότι

$$\int_{t^{m-1}}^{t^m} (t - t^{m-1})^2 (t^m - t)^2 dt = \frac{k_m^5}{30}, \tag{3.44}$$

και συνεπώς οδηγούμαστε στην εκτίμηση

$$\int_{t^{m-1}}^{t^m} \|(W-\hat{W})(s)\|_V^2 \leq C_P \frac{k_m^5}{30}\big\{\|A_h^2\bar{\partial}U^m\|_H^2 + \frac{2}{k_m^2}\|A_h[\Pi_h f(t^{m-\frac{1}{2}}) - \Pi_h f(t^{m-1})]\|_H^2\big\}. \tag{3.45}$$

Τονίζουμε ότι το δεξιό μέλος είναι μια υπολογίσιμη εκ των υστέρων ποσότητα. Αναλυτικότερα, για τον υπολογισμό των όρων της (3.45), απαιτείται η επίλυση, σε κάθε χρονικό βήμα, τεσσάρων συστημάτων με πίνακα τον πίνακα μάζας. Πράγματι, παρατηρούμε ότι το διάνυσμα $b := A_h^2\bar{\partial}U^m$ ικανοποιεί τις

$$\langle A_h^2\bar{\partial}U^m, \varphi\rangle = a(A_h\bar{\partial}U^m, \varphi)$$

και

$$\langle A_h\bar{\partial}U^m, \varphi\rangle = a(\bar{\partial}U^m, \varphi),$$

για κάθε $\varphi \in V_h$, και συνεπώς για τον υπολογισμό του απαιτείται η λύση δύο γραμμικών συστημάτων με τον πίνακα μάζας. Ομοίως, το διάνυσμα $d := A_h[\Pi_h f(t^{m-\frac{1}{2}}) - \Pi_h f(t^{m-1})]$ ικανοποιεί τις

$$\langle A_h[\Pi_h f(t^{m-\frac{1}{2}}) - \Pi_h f(t^{m-1})], \varphi\rangle = a(\Pi_h f(t^{m-\frac{1}{2}}) - \Pi_h f(t^{m-1}), \varphi)$$

και

$$\langle \Pi_h f(t^{m-\frac{1}{2}}) - \Pi_h f(t^{m-1}), \varphi\rangle = \langle f(t^{m-\frac{1}{2}}) - f(t^{m-1}), \varphi\rangle,$$

και πάλι απαιτείται ο προσδιορισμός της λύσης δύο γραμμικών συστημάτων με τον πίνακα μάζας.

Εκτίμηση του χωρικού σφάλματος. Για να εκτιμήσουμε την ποσότητα

$$\int_{t^{m-1}}^{t^m} \|(\hat{U}-\hat{W})_t(s)\|_{V^\star}^2 ds$$

θα χρησιμοποιήσουμε την Υπόθεση 3.1.1. Πράγματι, σύμφωνα με το Λήμμα 3.2.1 η $\hat{U}$ είναι η ελλειπτική προβολή της $\hat{W}$ στο χώρο V_h, συνεπώς η $\hat{U}_t$ είναι η ελλειπτική

προβολή της $\hat{W}_t$ στο χώρο V_h. Άρα, βάσει της προαναφερθείσας υπόθεσης, έχουμε

$$\|(\hat{U} - \hat{W})_t(s)\|_{V^\star} \leq \mathcal{E}(\hat{U}_t(s), A_h\hat{U}_t(s); V^\star). \tag{3.46}$$

Εκτίμηση του σφάλματος που αντιστοιχεί στην προσέγγιση f. Την ποσότητα

$$\int_{t^{m-1}}^{t^m} \|(f - \Pi_h\varphi)(s)\|_{V^\star}^2 ds$$

μπορούμε να την εκτιμήσουμε προς τα πάνω, χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Poincaré, δηλαδή

$$\int_{t^{m-1}}^{t^m} \|(f - \Pi_h\varphi)(s)\|_{V^\star}^2 ds \leq C_P^2 \int_0^t \|(f - \Pi_h\varphi)(s)\|_H^2 ds,$$

όπου C_P η σταθερά Poincaré. Τώρα, για να εκτιμήσουμε την τελευταία ποσότητα, θα χρησιμοποιήσουμε τη διάσπαση

$$f - \Pi_h\varphi = (f - \varphi) + (\varphi - \Pi_h\varphi).$$

Παρατηρούμε ότι ο πρώτος όρος της παραπάνω διάσπασης αντιστοιχεί μόνο σε χρονικό σφάλμα, ενώ ο δεύτερος αντιστοιχεί μόνο σε χωρικό. Συνεπώς

$$\int_{m-1}^{m} \|f(t) - \Pi_h\varphi(t)\|_H^2 \, dt \leq 2 \int_{m-1}^{m} \big\{\|f(t) - \varphi(t)\|_H^2 + \|\varphi(t) - \Pi_h\varphi(t)\|_H^2\big\}. \tag{3.47}$$

Συνοψίζοντας, διατυπώνουμε το βασικό αποτέλεσμα αυτής της παραγράφου στο ακόλουθο θεώρημα

Θεώρημα 3.2.2. (Εκτιμήσεις σφάλματος στον $L^\infty(H)$ και στον $L^2(V)$.) *Έστω u η λύση του παραβολικού προβλήματος* (3.1), *U η γραμμική παρεμβάλλουσα των τιμών της ακολουθίας των προσεγγίσεων $\big(U^n\big)_{0\leq n\leq N}$ που παράγει το πλήρως διακριτό σχήμα* (3.6), *και $\hat{U}$ η ανακατασκευή Crank-Nicolson της U όπως ορίστηκε στην*

(3.13). *Τότε, για* $0 < t \leq t^n$, *έχουμε*

$$\begin{aligned}
\max_{0<t\leq t^n} \|(u-\hat{U})(t)\|_H^2 + \int_0^t \|(u-U)(s)\|_V^2 ds + \frac{1}{2}\int_0^t \|(u-\hat{U})(s)\|_V^2 ds \\
\leq \|u^0 - u_h^0\|_H^2 + \big(\mathcal{E}(u_h^0, A_h u_h^0; H)\big)^2 + \max_{0<t\leq t^n}\big(\mathcal{E}(\hat{U}(s), A_h\hat{U}(s); H)\big)^2 \\
+ \int_0^{t^n} \big(\mathcal{E}(U(s), A_h U(s); V)\big)^2 ds + \frac{1}{2}\int_0^{t^n} \big(\mathcal{E}(\hat{U}(s), A_h\hat{U}(s); V)\big)^2 ds \\
+ 4\int_0^{t^n} \big(\mathcal{E}(\hat{U}_t(s), A_h\hat{U}_t(s); V^\star)\big)^2 ds \\
+ 4C_P \int_0^{t^n} \|f(s) - \Pi_h\varphi(s)\|_H^2\, ds + C_P \sum_{m=1}^{n} \frac{k_m^5}{30}\big\{\frac{1}{2}\|A_h^2 \bar{\partial} U^m\|_H \\
+ \frac{1}{k_m}\|A_h[\Pi_h f(t^{m-\frac{1}{2}}) - \Pi_h f(t^{m-1})]\|_H\big\}.
\end{aligned}$$

με C_P *η σταθερά της ανισότητας Poincaré.*

3.3 Η $\vartheta-$κλασματική μέθοδος

Προχωρούμε τώρα στην απόδειξη ανάλογων αποτελεσμάτων με εκείνων της προηγούμενης παραγράφου για πλήρως διακριτά σχήματα, όταν χρησιμοποιείται η $\vartheta-$κλασματική μέθοδος για τη χρονική διακριτοποίηση. Έστω $0 = t^0 < t^1 < \cdots < t^N = T$ ένας διαμερισμός του $[0,T]$, σε υποδιαστήματα $I_n := (t^{n-1}, t^n]$. Συμβολίζουμε με $k_n := t^n - t^{n-1}$ το μήκος του I_n. Για $\vartheta \in (0,1)$, $\tilde{\vartheta} = 1 - 2\vartheta$, εισάγουμε τα ενδιάμεσα χρονικά στάδια $t^{n-1+\vartheta} = t^{n-1} + \vartheta k_n$ και $t^{n-\vartheta} = t^{n-1} + (\vartheta + \tilde{\vartheta})k_n$. Επιπλέον, συμβολίζουμε με $\mathbf{u}^m$ τη συνάρτηση $\mathbf{u}(\cdot, t^m)$ και με $\mathbf{f}^m$ την κατανομή $\mathbf{f}(\cdot, t^m)$.

Εφαρμόζουμε τη $\vartheta-$κλασματική μέθοδο στο πρόβλημα (3.1) για να οδηγηθούμε στο πλήρως διακριτό σχήμα: με $U^0 := u_h^0$ προσδιορίστε ακολουθία προσεγγίσεων $U^n \in V_h,\ 1 \leq n \leq N$, με ενδιάμεσες προσεγγίσεις $U^{n-1+\vartheta}$, $U^{n-\vartheta}$, τέτοια ώστε για

κάθε $n,\ 1 \le n \le N$, και για κάθε $v_h \in V_h$,

$$
(3.48)\qquad \begin{cases} \langle \dfrac{U^{n-1+\vartheta} - U^{n-1}}{\vartheta k_n}, v_h\rangle + a(\alpha U^{n-1+\vartheta}, v_h) + a(\beta U^{n-1}, v_h) = \langle f^{n-1}, v_h\rangle \\ \langle \dfrac{U^{n-\vartheta} - U^{n-1+\vartheta}}{\tilde{\vartheta} k_n}, v_h\rangle + a(\beta U^{n-\vartheta}, v_h) + a(\alpha U^{n-1+\vartheta}, v_h) = \langle f^{n-\vartheta}, v_h\rangle \\ \langle \dfrac{U^{n} - U^{n-\vartheta}}{\vartheta k_n}, v_h\rangle + a(\alpha U^{n}, v_h) + a(\beta U^{n-\vartheta}, v_h) = \langle f^{n-\vartheta}, v_h\rangle, \end{cases}
$$

με u_h^0 κατάλληλη προσέγγιση της u_0 από το χώρο V_h. Εναλλακτικά, μπορούμε να γράψουμε τη μέθοδο στην ακόλουθη μορφή

$$
(3.49)\qquad \begin{cases} \langle U^{n-1+\vartheta} - U^{n-1}, v_h\rangle + \beta\vartheta k_n a(U^{n-1}, v_h) + \alpha\vartheta k_n a(U^{n-1+\vartheta}, v_h) \\ \qquad = \vartheta k_n \langle f^{n-1}, v_h\rangle \\ \langle U^{n-\vartheta} - U^{n-1}, v_h\rangle + \beta\vartheta k_n a(U^{n-1}, v_h) + \alpha(\vartheta + \tilde{\vartheta}) k_n a(U^{n-1+\vartheta}, v_h) \\ \qquad + \beta\tilde{\vartheta} k_n a(U^{n-\vartheta}, v_h) = k_n \langle \vartheta f^{n-1} + \tilde{\vartheta} f^{n-\vartheta}, v_h\rangle \\ \langle U^{n} - U^{n-1}, v_h\rangle + k_n \big\{ \beta\vartheta a(U^{n-1}, v_h) + \alpha(\vartheta + \tilde{\vartheta}) a(U^{n-1+\vartheta}, v_h) \\ \qquad + \beta(\vartheta + \tilde{\vartheta}) a(U^{n-\vartheta}, v_h) + \alpha\vartheta a(U^{n}, v_h) \big\} \\ \qquad = k_n \langle \vartheta f^{n-1} + (\vartheta + \tilde{\vartheta}) f^{n-\vartheta}, v_h\rangle. \end{cases}
$$

Αν στην προηγούμενη σχέση χρησιμοποιήσουμε τους ορισμούς (3.4) του τελεστή A_h και (3.3) της L^2- προβολής Π_h, το προηγούμενο αριθμητικό σχήμα μπορεί να γραφεί στη μορφή

(3.50)

$$
\begin{cases} U^{n-1+\vartheta} - U^{n-1} + \beta\vartheta k_n A_h U^{n-1} + \alpha\vartheta k_n A_h U^{n-1+\vartheta} = \vartheta k_n \Pi_h f^{n-1} \\ U^{n-\vartheta} - U^{n-1} + \beta\vartheta k_n A_h U^{n-1} + \alpha(\vartheta + \tilde{\vartheta}) k_n U^{n-1+\vartheta} \\ \qquad + \beta\tilde{\vartheta} k_n A_h U^{n-\vartheta} = \vartheta k_n \Pi_h f^{n-1} + \tilde{\vartheta} k_n \Pi_h f^{n-\vartheta} \\ U^{n} - U^{n-1} + \beta\vartheta k_n A_h U^{n-1} + \alpha(\vartheta + \tilde{\vartheta}) k_n A_h U^{n-1+\vartheta} \\ \qquad + \beta(\vartheta + \tilde{\vartheta}) k_n A_h U^{n-\vartheta} + \alpha\vartheta k_n A_h U^{n} = \vartheta k_n \Pi_h f^{n-1} + (\vartheta + \tilde{\vartheta}) k_n \Pi_h f^{n-\vartheta}. \end{cases}
$$

Στη συνέχεια, για να αποδείξουμε βέλτιστης τάξης εκ των υστέρων εκτιμήσεις για τη $\vartheta-$κλασματική μέθοδο, θα εργαστούμε όπως στην ανάλυσή μας για τη μέθοδο

των Crank-Nicolson. Θα ορίσουμε αρχικά μια κατά τμήματα γραμμική συνάρτηση $U : [0,T] \to V_h$, την οποία στη συνέχεια θα ανακατασκευάσουμε κατάλληλα για να προκύψει η κατά τμήματα τετραγωνική συνάρτηση $\hat{U} : [0,T] \to V_h$. Έπειτα, θα αντιστοιχήσουμε στην $\hat{U}$ την ελλειπτική ανακατασκευή της, $\hat{W} \in V$, και τελικά θα διασπάσουμε το σφάλμα e_ϑ, ως $e_\vartheta := (u - \hat{W}) - (\hat{U} - \hat{W}) = \hat{e} - \hat{\rho}$. Για περισσότερες λεπτομέρειες για αυτή τη διάσπαση και τις ιδιότητές της, ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στην ανάλυση για τη μέθοδο των Crank-Nicolson.

3.3.1 Η $\vartheta-$κλασματική ανακατασκευή

Αρχικά θα κατασκευάσουμε μια συνεχή προσέγγιση $\hat{U}$ της u, δεύτερης τάξης ως προς το χρονικό βήμα (όσο η τάξη ακρίβειας της $\vartheta-$κλασματικής μεθόδου για γραμμικά προβλήματα). Γι' αυτόν το σκοπό, ορίζουμε μια κατά τμήματα γραμμική προσέγγιση $U : [0,T] \to V_h$ της u με γραμμική παρεμβολή των τιμών U^{n-1} και U^n,

$$U(t) = U(t^{n-1}) + (t - t^{n-1})\bar{\partial} U^n, \ t \in I_n.$$

Αντί της προηγούμενης μορφής της U, πολλές φορές θα χρησιμοποιήσουμε την

$$U(t) = U(\beta t^{n-1} + \alpha t^n) + (t - (\beta t^{n-1} + \alpha t^n))\bar{\partial} U^n, \tag{3.51}$$

ή

$$U(t) = \beta U^{n-1} + \alpha U^n + (t - (\beta t^{n-1} + \alpha t^n))\bar{\partial} U^n. \tag{3.52}$$

Στη συνέχεια, για να αποδείξουμε βέλτιστης τάξης εκ των υστέρων εκτιμήσεις, θα κατασκευάσουμε μια συνεχή κατά τμήματα τετραγωνική συνάρτηση ως προς το χρόνο $\hat{U} : [0,T] \to V_h$. Για τον ορισμό της $\hat{U}$ θα προσαρμόσουμε τις ιδέες του Κεφαλαίου 3 για πλήρως διακριτά σχήματα. Κατ' αρχάς, εισάγουμε ένα κατά τμήματα τετραγωνικό πολυώνυμο Φ, το οποίο θα περιέχεται στον ορισμό της $\hat{U}$. Έστω $\varphi : I_n \to H$ η

γραμμική παρεμβάλλουσα της f στους κόμβους t^{n-1} και $t^{n-\vartheta}$,

$$\phi(t) := f(t^{n-1}) + \frac{f(t^{n-\vartheta}) - f(t^{n-1})}{(\vartheta + \tilde{\vartheta})k_n}(t - t^{n-1}), \quad t \in I_n. \tag{3.53}$$

Ορίζουμε τη Φ ως $\Phi(t) := \int_{t^{n-1}}^{t} \varphi(s)ds$, $t \in I_n$, δηλαδή,

$$\Phi(t) = (t - t^{n-1})f(t^{n-1}) + \frac{(t - t^{n-1})^2}{2}\frac{f(t^{n-\vartheta}) - f(t^{n-1})}{(\vartheta + \tilde{\vartheta})k_n}. \tag{3.54}$$

Η Φ θα έχει, όπως και η αντίστοιχη συνάρτηση στην ανάλυση για τη χρονική ημιδιακριτοποίηση των παραβολικών εξισώσεων, τις ιδιότητες

- $\Phi(t^{n-1}) = 0$,
- $\Phi(t^n) = k_n\{\vartheta f(t^{n-1}) + (\vartheta + \tilde{\vartheta})f(t^{n-\vartheta})\}$.

Με βάση την ανάλυση του Κεφαλαίου 3, ορίζουμε την κατά τμήματα τετραγωνική, ως προς το χρόνο, ανακατασκευή $\hat{U}$ της U ως

$$\hat{U}(t) := U^{n-1} - \int_{t^{n-1}}^{t} A_h U(s)ds + A_h h(t) + \Pi_h \Phi(t), \;\; t \in \; I_n, \tag{3.55}$$

όπου h είναι πάλι η τμηματικά γραμμική "διορθωτική συνάρτηση", $h : I_n \to V_h$,

$$\begin{aligned} h(t) := (\vartheta + \tilde{\vartheta})(t - t^{n-1})\{\alpha(U(t^{n-1+\vartheta}) - U^{n-1+\vartheta}) \\ + \beta(U(t^{n-\vartheta}) - U^{n-\vartheta})\}, \; t \in I_n, \end{aligned} \tag{3.56}$$

με τις ιδιότητες

- $h(t^{n-1}) = 0$,
- $h(t^n) := (\vartheta + \tilde{\vartheta})k_n\{\alpha(U(t^{n-1+\vartheta}) - U^{n-1+\vartheta}) + \beta(U(t^{n-\vartheta}) - U^{n-\vartheta})\}$.

Προφανώς, $\hat{U}(t^{n-1}) = U^{n-1}$. Επιπλέον, εφαρμόζοντας τον κανόνα αριθμητικής ολοκλήρωσης (;;) στη σχέση (3.55), έχουμε

$$\begin{aligned} \hat{U}(t^n) = U^{n-1} - k_n\{\beta\vartheta A_h U^{n-1} + \alpha(\vartheta + \tilde{\vartheta})A_h U(t^{n-1+\vartheta}) \\ + (\vartheta + \tilde{\vartheta})\beta A_h U(t^{n-\vartheta}) + \alpha\vartheta A_h U^n\} + A_h h(t^n) + \Pi_h \Phi(t^n) \end{aligned} \tag{3.57}$$

ή

$$
\begin{aligned}
\hat{U}(t^n) = U^{n-1} &- k_n\{\beta\vartheta A_h U^{n-1} + \alpha(\vartheta+\tilde{\vartheta})A_h U(t^{n-1+\vartheta}) \\
&+ (\vartheta+\tilde{\vartheta})\beta A_h U(t^{n-\vartheta}) + \alpha\vartheta A_h U^n\} \\
&+ (\vartheta+\tilde{\vartheta})k_n\{\alpha(U(t^{n-1+\vartheta}) - U^{n-1+\vartheta}) + \beta(U(t^{n-\vartheta}) - U^{n-\vartheta})\} \\
&+ k_n\{\vartheta\Pi_h f(t^{n-1}) + (\vartheta+\tilde{\vartheta})\Pi_h f(t^{n-\vartheta})\}.
\end{aligned} \tag{3.58}
$$

Σύμφωνα τώρα με την (3.50),

$$
\begin{aligned}
\hat{U}(t^n) = U^{n-1} &- k_n\{\beta\vartheta A_h U^{n-1} - \alpha(\vartheta+\tilde{\vartheta})A_h U^{n-1+\vartheta} \\
&- (\vartheta+\tilde{\vartheta})\beta A_h U^{n-\vartheta} - \alpha\vartheta A_h U^n\} \\
&+ k_n\{\vartheta\Pi_h f(t^{n-1}) + (\vartheta+\tilde{\vartheta})\Pi_h f(t^{n-\vartheta})\} = U^n.
\end{aligned} \tag{3.59}
$$

Επομένως, η $\hat{U}$ και η U λαμβάνουν τις ίδιες τιμές στους κόμβους $t^0, \ldots, t^N$· ειδικότερα η $\hat{U} : [0,T] \to V_h$ είναι συνεχής συνάρτηση στο χρόνο. Επιπλέον,

$$
\hat{U}_t(t) = -A_h U(t) + A_h h'(t) + \Pi_h \phi(t), \quad t \in \ I_n. \tag{3.60}
$$

Τώρα θα εισαγάγουμε τις *ελλειπτικές ανακατασκευές* των U και $\hat{U}$, ως

Ορισμός 3.3.1. *(Η ελλειπτική ανακατασκευή της U.) Για σταθερό $t \in [0,T]$, έστω $W \in V$ η ακριβής λύση του ελλειπτικού προβλήματος*

$$
a(W, v) = \langle A_h U(t), v\rangle \quad \forall v \in V. \tag{3.61}
$$

Θα αναφερόμαστε στην $W = W(t)$ ως την ελλειπτική ανακατασκευή της $U(t)$.

Ορισμός 3.3.2. *(Η ελλειπτική ανακατασκευή της $\hat{U}$.) Για σταθερό $t \in [0,T]$, έστω $\hat{W} \in V$ η ακριβής λύση του ελλειπτικού προβλήματος*

$$
a(\hat{W}, v) = \langle A_h \hat{U}(t), v\rangle \quad \forall v \in V. \tag{3.62}
$$

Θα αναφερόμαστε στην $\hat{W} = \hat{W}(t)$ ως την ελλειπτική ανακατασκευή της $\hat{U}(t)$.

Συμβολίζουμε με $W_h \in V_h$ τη λύση του

$$a(W_h, v_h) = \langle A_h U(t), v_h \rangle \quad \forall v_h \in V_h, \tag{3.63}$$

και με $\hat{W}_h \in V_h$ τη λύση του

$$a(\hat{W}_h, v_h) = \langle A_h \hat{U}(t), v_h \rangle \quad \forall v_h \in V_h. \tag{3.64}$$

Οι U και $\hat{U}$ και οι ελλειπτικές ανακατασκευές τους W και $\hat{W}$, ικανοποιούν ανάλογο αποτέλεσμα με εκείνο του Λήμματος 3.2.1.

Λήμμα 3.3.1. *Για σταθερό $t \in [0, T]$, θεωρούμε τις λύσεις W, $\hat{W}$ των ελλειπτικών προβλημάτων* (3.61) *και* (3.62)*, αντίστοιχα. Επίσης, θεωρούμε τις λύσεις W_h, $\hat{W}_h \in V_h$ των* (3.63) *και* (3.64)*, αντίστοιχα. Τότε*

$$W_h = U(t) \quad \textit{και} \quad \hat{W}_h = \hat{U}(t). \tag{3.65}$$

Απόδειξη. Βλ. απόδειξη Λήμματος 3.2.1. □

3.3.2 Εκτιμήσεις σφάλματος.

Εισάγουμε τα σφάλματα

$$\hat{e} := u - \hat{W} \quad \text{και} \quad e := u - W. \tag{3.66}$$

Λαμβάνοντας το εσωτερικό γινόμενο με $v \in V$ στην (3.60) παίρνουμε

$$\langle \hat{U}_t(t), v \rangle = -\langle A_h U(t), v \rangle + \langle A_h h'(t), v \rangle + \langle \Pi_h \varphi(t), v \rangle \;\; t \in \; I_n, \tag{3.67}$$

επομένως, χρησιμοποιώντας τον ορισμό (3.61) της W, έχουμε, για $t \in I_n$,

$$\langle \hat{U}_t(t), v \rangle + a(W(t), v) = \langle A_h h'(t), v \rangle + \langle \Pi_h \varphi(t), v \rangle \quad \forall v \in V. \tag{3.68}$$

Αφαιρώντας την τελευταία εξίσωση από την

$$\langle u_t(t), v\rangle + a(u(t), v) = \langle f(t), v\rangle \quad \forall v \in V, \tag{3.69}$$

λαμβάνουμε

$$\langle (u-\hat{W})_t, v\rangle + a(u-W, v) = -\langle A_h h'(t), v\rangle + \langle f - \Pi_h\varphi, v\rangle + \langle (\hat{U}-\hat{W})_t, v\rangle \quad \forall v \in V. \tag{3.70}$$

Τελικά

$$\langle \hat{e}_t, v\rangle + a(e, v) = -\langle A_h h'(t), v\rangle + \langle f - \Pi_h\varphi, v\rangle + \langle (\hat{U}-\hat{W})_t, v\rangle \quad \forall v \in V. \tag{3.71}$$

Στη συνέχεια θα εφαρμόσουμε τις συνήθεις τεχνικές ενέργειας για να αποδείξουμε εκ των υστέρων εκτιμήσεις.

Θεώρημα 3.3.1. (Εκτιμήσεις σφάλματος στον $L^\infty(H)$ και στον $L^2(V)$.) *Έστω u η λύση του παραβολικού προβλήματος* (3.1) *και W, $\hat{W}$ οι λύσεις των ελλειπτικών προβλημάτων* (3.61) *και* (3.62), *αντίστοιχα. Επίσης έστω $\mathcal{E}$ όπως ορίστηκε στην* Υπόθεση 3.1.1. *Τότε, για κάθε $n = 1, \ldots, N$, ισχύει η ακόλουθη εκτίμηση*

$$\begin{aligned}
\max_{[0,t^n]} \|u(t) - \hat{U}(t)\|_H^2 + \int_0^{t^n} \|u(s) - U(s)\|_V^2 ds + \frac{1}{2}\int_0^{t^n} \|u(s) - \hat{U}(s)\|_V^2 ds \\
\leq \|u(0) - \hat{U}(0)\|_H^2 + \sum_{m=1}^{n} \int_{t^{m-1}}^{t^m} \|(W - \hat{W})(s)\|_V^2 ds \\
+ 4\sum_{m=1}^{n} \Big\{ \int_{t^{m-1}}^{t^m} \|A_h h'(t)\|_{V^\star}^2 ds + \int_{t^{m-1}}^{t^m} \|(f - \Pi_h\varphi)(s)\|_{V^\star}^2 ds \\
+ \int_{t^{m-1}}^{t^m} \|(\hat{U} - \hat{W})_t(s)\|_{V^\star}^2 ds \Big\}.
\end{aligned}$$

Απόδειξη. Θέτουμε $v = \hat{e}$ στην παραπάνω εξίσωση σφάλματος και έχουμε

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\hat{e}(t)\|_H^2 + \langle A_h e(t), \hat{e}(t)\rangle = -\langle A_h h'(t), \hat{e}\rangle + \langle f - \Pi_h\varphi, \hat{e}\rangle + \langle (\hat{U}-\hat{W})_t, \hat{e}\rangle. \tag{3.72}$$

Τώρα

$$\langle A_h e(t), \hat{e}(t)\rangle = \frac{1}{2}\|e(t)\|_V^2 + \frac{1}{2}\|\hat{e}(t)\|_V^2 - \frac{1}{2}\|\hat{e}(t) - e(t)\|_V^2, \tag{3.73}$$

επομένως, χρησιμοποιώντας και τη γενικεύμενη ανισότητα των Cauchy-Schwarz, έχουμε

(3.74)
$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\hat{e}(t)\|_H^2 + \frac{1}{2}\|e(t)\|_V^2 + \frac{1}{2}\|\hat{e}(t)\|_V^2 \le \frac{1}{2}\|\hat{e}(t) - e(t)\|_V^2 + \|A_h h'(t)\|_{V^\star}\|\hat{e}(t)\|_V \\ + \|(f - \Pi_h\varphi)(t)\|_{V^\star}\|\hat{e}(t)\|_V + \|(\hat{U} - \hat{W})_t(t)\|_{V^\star}\|\hat{e}(t)\|_V.\end{aligned}$$

Επομένως, σύμφωνα με την αριθμητική γεωμετρική ανισότητα, έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\hat{e}(t)\|_H^2 + \frac{1}{2}\|e(t)\|_V^2 + \frac{1}{2}\|\hat{e}(t)\|_V^2 \le \frac{1}{2}\|(W - \hat{W})(t)\|_V^2 + 2\|A_h h'(t)\|_{V^\star}^2 \\ + \frac{1}{8}\|\hat{e}(t)\|_V^2 + 2\|(f - \Pi_h\varphi)(t)\|_{V^\star}^2 + \frac{1}{8}\|\hat{e}(t)\|_V^2 \\ + 2\|(\hat{U} - \hat{W})_t(t)\|_{V^\star}^2 + \frac{1}{8}\|\hat{e}(t)\|_V^2,\end{aligned} \tag{3.75}$$

και συνεπώς

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|\hat{e}(t)\|^2 + \|e(t)\|^2 + \frac{1}{4}\|\hat{e}(t)\|^2 \le \|(W - \hat{W})(t)\|^2 \\ + 4\|A_h h'(t)\|_\star^2 + 4\|f - \Pi_h\varphi\|_{V^\star}^2 + 4\|(\hat{U} - \hat{W})_t\|_{V^\star}^2.\end{aligned} \tag{3.76}$$

Ολοκληρώνοντας την τελευταία σχέση στο $[t^{m-1}, t^m]$, $1 \le m \le n$ και στη συνέχεια αθροίζοντας για $m = 1, \dots, n$, $n = 1, \dots, N$, παίρνουμε

(3.77)
$$\begin{aligned}\|\hat{e}(t^n)\|_H^2 + \int_0^{t^n} \|e(s)\|_V^2 ds + \frac{1}{2}\int_0^{t^n} \|\hat{e}(s)\|_V^2 ds \le \|\hat{e}(0)\|_H^2 \\ + \sum_{m=1}^n \int_{t^{m-1}}^{t^m} \|(W - \hat{W})(s)\|^2 ds + 4\sum_{m=1}^n \int_{t^{m-1}}^{t^m} \|A_h h'(t)\|_{V^\star}^2 ds \\ + 4\sum_{m=1}^n \int_{t^{m-1}}^{t^m} \|(f - \Pi_h\varphi)(s)\|_{V^\star}^2 ds + 4\sum_{m=1}^n \int_{t^{m-1}}^{t^m} \|(\hat{U} - \hat{W})_t(s)\|_{V^\star}^2 ds\end{aligned}$$

Από την τελευταία σχέση έπεται ο ισχυρισμός του θεωρήματος. □

Παρατηρούμε ότι το δεξιό μέλος της εκτίμησης του Θεωρήματος 3.3.1 έχει διασπασθεί ως εξής

- στο σφάλμα που οφείλεται στη χρονική διακριτοποίηση και αντιστοιχεί στους όρους $\int_{t^{m-1}}^{t^m} \|(W-\hat{W})(s)\|^2 ds$ και $\int_{t^{m-1}}^{t^m} \|A_h h'(t)\|_\star^2 ds$,

- στο σφάλμα που οφείλεται στη χωρική διακριτοποίηση και αντιστοιχεί στον όρο $\int_{t^{m-1}}^{t^m} \|(\hat{U}-\hat{W})_t(s)\|_{V^\star}^2 ds$,

- στο σφάλμα που αντιστοιχεί στην προσέγγιση των αρχικών δεδομένων και της f και αντιστοιχεί στους όρους $\|e(0)\|_H^2$ και $\int_{t^{m-1}}^{t^m} \|(f-\Pi_h\varphi)(s)\|_{V^\star}^2 ds$.

Θα δούμε τώρα πώς μπορούμε να εκτιμήσουμε τον καθένα από τους προηγούμενους όρους.

Εκτίμηση του χρονικού σφάλματος. Θα εκτιμήσουμε πρώτα την ποσότητα

$$\int_{t^{m-1}}^{t^m} \|(W-\hat{W})(s)\|^2 ds.$$

Από τους ορισμούς (3.61) και (3.62) των ανακατασκευών W και $\hat{W}$, αντίστοιχα, λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} \|(W-\hat{W})(s)\|_V^2 ds &= a(W-\hat{W}, W-\hat{W}) \\ &= \langle A_h U(t), W-\hat{W}\rangle - \langle A_h \hat{U}(t), W-\hat{W}\rangle \\ &= \langle A_h[U(t)-\hat{U}(t)], W-\hat{W}\rangle \\ &\le \|A_h[U(t)-\hat{U}(t)]\|_H \|W-\hat{W}\|_H, \quad t\in I_m, \end{aligned} \tag{3.78}$$

επομένως, με χρήση της ανισότητας του Poincaré, έχουμε

$$\|(W-\hat{W})(s)\|_V \le C_P \|A_h[U(t)-\hat{U}(t)]\|_H, \tag{3.79}$$

όπου C_P η σταθερά Poincaré. Θα υπολογίσουμε τώρα τη διαφορά $\hat{U}(t)-U(t)$. Βάσει των ορισμών (3.55) και (3.51) των $\hat{U}$ και U, αντίστοιχα, έχουμε

$$\begin{aligned}\hat{U}(t)-U(t) &= \big\{U^{m-1}-\int_{t^{m-1}}^{t} A_h U(s)ds + A_h h(t) + \Pi_h \Phi(t)\big\}\\ &\quad - \big\{U^{m-1}+(t-t^{m-1})\bar{\partial}U^m\big\}.\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα αριθμητικής ολοκλήρωσης (;;) για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος της τελευταίας σχέση και σύμφωνα με τη (3.50), λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}\hat{U}(t)-U(t) &= -(t-t^{m-1})\big\{\alpha A_h[U(t)-U^m]\\ &\quad + \alpha(\vartheta+\tilde{\vartheta})A_h[U(t^{m-1}+\vartheta(t-t^{m-1}))-U(t^{m-1-\vartheta})]\\ &\quad + \beta(\vartheta+\tilde{\vartheta})A_h[U(t^{m-1}+(1-\vartheta)(t-t^{m-1}))-U(t^{m-\vartheta})]\big\}\\ &\quad + \Pi_h\big\{\Phi(t)-(t-t^{m-1})\vartheta f^{m-1}-(t-t^{m-1})(\vartheta+\tilde{\vartheta})f^{m-\vartheta}\big\}.\end{aligned} \tag{3.80}$$

Οι παραπάνω διαφορές των τιμών της U, σύμφωνα με τον ορισμό της, μπορούν να γραφούν ως εξής

$$U(t)-U^m = (t-t^m)\bar{\partial}U^m, \tag{3.81}$$

$$U(t^{m-1}+\vartheta(t-t^{m-1}))-U(t^{m-1+\vartheta}) = \vartheta(t-t^m)\bar{\partial}U^m, \tag{3.82}$$

και

$$U(t^{m-1}+(1-\vartheta)(t-t^{m-1}))-U(t^{m-\vartheta}) = (1-\vartheta)(t-t^m)\bar{\partial}U^m. \tag{3.83}$$

Επίσης,

$$\begin{aligned}&\Phi(t)-(t-t^{m-1})\{\vartheta f(t^{m-1})+(\vartheta+\tilde{\vartheta})f(t^{m-\vartheta})\}\\ &\quad = (t-t^{m-1})f(t^{m-1})+\frac{(t-t^{m-1})^2}{2}\frac{f(t^{m-\vartheta})-f(t^{m-1})}{(\vartheta+\tilde{\vartheta})k_m}\\ &\quad - (t-t^{m-1})\vartheta f(t^{m-1})-(t-t^{m-1})(\vartheta+\tilde{\vartheta})f(t^{m-\vartheta}),\end{aligned} \tag{3.84}$$

και συνεπώς, λαμβάνοντας υπ΄ όψιν και το γεγονός ότι για $\vartheta = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ ισχύει $2(\vartheta + \tilde{\vartheta})^2 = 1$, παίρνουμε

$$\begin{aligned} &\Phi(t) - (t - t^{m-1})\vartheta f(t^{m-1}) - (t - t^{m-1})(\vartheta + \tilde{\vartheta}) f(t^{m-\vartheta}) \\ &\quad = (t - t^{m-1})(t^m - t)\frac{[f(t^{m-\vartheta}) - f(t^{m-1})]}{2(\vartheta + \tilde{\vartheta})k_m}. \end{aligned} \tag{3.85}$$

Ανακεφαλαιώνοντας

$$\begin{aligned} \hat{U}(t) - U(t) = (t - t^{m-1})(t^m - t) C_{\alpha,\vartheta} A_h \bar{\partial} U^m \\ + (t - t^{m-1})(t^m - t)\frac{[\Pi_h f(t^{m-\vartheta}) - \Pi_h f(t^{m-1})]}{2(\vartheta + \tilde{\vartheta})k_m}, \end{aligned} \tag{3.86}$$

με

$$C_{\alpha,\vartheta} := \frac{1}{2} + \frac{\vartheta + \tilde{\vartheta}}{2}\alpha. \tag{3.87}$$

Αντικαθιστώντας την τελευταία σχέση στην (3.79), παίρνουμε

$$\begin{aligned} \|(W - \hat{W})(s)\|_V \le (t - t^{m-1})(t^m - t)\big\{ C_{\alpha,\vartheta} \|A_h^2 \bar{\partial} U^m\|_H \\ + \frac{1}{2(\vartheta + \tilde{\vartheta})k_m} \|A_h[\Pi_h f(t^{m-\vartheta}) - \Pi_h f(t^{m-1})]\|_H . \big\} \end{aligned} \tag{3.88}$$

Χρησιμοποιώντας τη (3.44) οδηγούμαστε στην εκτίμηση

$$\begin{aligned} \int_{t^{m-1}}^{t^m} \|(W - \hat{W})(s)\|_V^2 \le C_P \frac{k_m^5}{30} \big\{ C_{\alpha,\vartheta} \|A_h^2 \bar{\partial} U^m\|_H^2 \\ + \frac{2}{(2(\vartheta + \tilde{\vartheta})k_m)^2} \|A_h[\Pi_h f(t^{m-\vartheta}) - \Pi_h f(t^{m-1})]\|_H^2 \big\}. \end{aligned} \tag{3.89}$$

Τονίζουμε ότι το δεξιό μέλος είναι μια υπολογίσιμη εκ των υστέρων ποσότητα. Αναλυτικότερα, για τον υπολογισμό της απαιτείται η επίλυση, σε κάθε χρονικό βήμα, τεσσάρων συστημάτων με πίνακα τον πίνακα μάζας. Για περισσότερες λεπτομέρειες προτείνουμε στον αναγνώστη να ανατρέξει στην αντίστοιχη παράγραφο για τη μέθοδο Crank-Nicolson.

Στη συνέχεια θα εκτιμήσουμε το δεύτερο όρο του σφάλματος που οφείλεται στη χρονική διακριτοποίηση, δηλαδή τον όρο $\int_{t^{m-1}}^{t^m} \|A_h h'(s)\|_{V^\star} ds$. Από τον ορισμό της δυϊκής νόρμας και την ανισότητα του Poincaré έχουμε ότι

$$\|A_h h'(t)\|_{V^\star} \leq C_P \|A_h h'(t)\|_H. \tag{3.90}$$

Βάσει του ορισμού της συνάρτησης $h(t)$, για $t \in I_m$ έχουμε

(3.91)

$$\|A_h h'(t)\|_H = (\vartheta + \tilde{\vartheta})\big\{\|\alpha A_h[U(t^{m-1+\vartheta}) - U^{m-1+\vartheta}] + \beta A_h[U(t^{m-\vartheta}) - U^{m-\vartheta}]\|_H\big\}.$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα του Taylor έχουμε

$$\begin{aligned} U(t^{m-1+\vartheta}) &= U^m - (\vartheta + \tilde{\vartheta}) k_m \bar{\partial} U^m, \\ U(t^{m-\vartheta}) &= U^{m-1} + (\vartheta + \tilde{\vartheta}) k_m \bar{\partial} U^m, \end{aligned}$$

επομένως

$$\|A_h h'(t)\|_H = (\vartheta + \tilde{\vartheta}) \|A_h\big\{\alpha[U^m - U^{m-1+\vartheta}] + \beta[U^{m-1} - U^{m-\vartheta}] + \frac{\alpha - \beta}{2} k_m \bar{\partial} U^m\big\}\|_H.$$

Επειδή $(\vartheta + \tilde{\vartheta})^2 = \frac{1}{2}$, τελικά οδηγούμαστε στο αποτέλεσμα

$$\begin{aligned} \int_{t^{m-1}}^{t^m} \|A_h h'(s)\|_H^2 ds \leq \frac{k_m}{2} \|A_h\big\{&\alpha[U^m - U^{m-1+\vartheta}] \\ &+ \beta[U^{m-1} - U^{m-\vartheta}] + \frac{\alpha - \beta}{2} k_m^2 \bar{\partial} U^m\big\}\|_H^2. \end{aligned} \tag{3.92}$$

Παρατηρούμε ότι για τον υπολογισμό του εκ των υστέρων εκτιμητή του δεξιού μέλους απαιτείται η λύση ενός γραμμικού συστήματος με τον πίνακα μάζας.

Εκτίμηση του χωρικού σφάλματος. Για να εκτιμήσουμε την ποσότητα

$$\int_{t^{m-1}}^{t^m} \|(\hat{U} - \hat{W})_t(s)\|_{V^\star}^2 ds$$

θα κάνουμε χρήση της Υπόθεσης 3.1.1. Πράγματι, σύμφωνα με το Λήμμα 3.2.1 η $\hat{U}$ είναι η ελλειπτική προβολή της $\hat{W}$ στο χώρο V_h, συνεπώς η $\hat{U}_t$ είναι η ελλειπτική προβολή της $\hat{W}_t$ στο χώρο V_h. Άρα, βάσει της προαναφερθείσας υπόθεσης, έχουμε

$$\|(\hat{U} - \hat{W})_t(s)\|_{V^\star} \leq \mathcal{E}(U_t, A_h\hat{U}_t(t); V^\star). \tag{3.93}$$

Εκτίμηση του σφάλματος που αντιστοιχεί στην προσέγγιση f. Την ποσότητα

$$\int_{t^{m-1}}^{t^m} \|(f - \Pi_h\varphi)(s)\|_{V^\star}^2 ds,$$

μπορούμε να την εκτιμήσουμε προς τα πάνω, χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Poincaré, δηλαδή

$$\int_{t^{m-1}}^{t^m} \|(f - \Pi_h\varphi)(s)\|_{V^\star}^2 ds \leq C_P^2 \int_0^t \|(f - \Pi_h\varphi)(s)\|_H^2 ds,$$

όπου C_P η σταθερά Poincaré, και τη διάσπαση

$$f - \Pi_h\varphi = (f - \varphi) + (\varphi - \Pi_h\varphi).$$

Για λεπτομέρειες βλ. παράγραφο 4.4.2. Συνοψίζοντας, διατυπώνουμε το βασικό αποτέλεσμα αυτής της παραγράφου στο ακόλουθο θεώρημα

Θεώρημα 3.3.2. (Εκτιμήσεις σφάλματος στον $L^\infty(H)$ και στον $L^2(V)$) *Έστω u η λύση του παραβολικού προβλήματος* (3.1), *U η γραμμική παρεμβάλλουσα των τιμών της ακολουθίας των προσεγγίσεων $\left(U^n\right)_{0\leq n\leq N}$ που παράγει το πλήρως διακριτό σχήμα* (3.49), *και $\hat{U}$ η ανακατασκευή Crank-Nicolson της U,* (3.55). *Τότε για $0 < t \leq t^n$*

έχουμε

$$
\begin{aligned}
\max_{0<t\le t^n} \|(u-\hat{U})(t)\|_H^2 &+ \int_0^t \|(u-U)(s)\|_V^2 ds + \frac{1}{2}\int_0^t \|(u-\hat{U})(s)\|_V^2 ds \\
&\le \|u^0 - u_h^0\|_H^2 + \big(\mathcal{E}(u_h^0, A_h u_h^0; H)\big)^2 + \max_{0<t\le t^n}\big(\mathcal{E}(\hat{U}(s), A_h\hat{U}(s); H)\big)^2 \\
&+ \int_0^{t^n} \big(\mathcal{E}(U(s), A_h U(s); V)\big)^2 ds + \frac{1}{2}\int_0^{t^n} \big(\mathcal{E}(\hat{U}(s), A_h\hat{U}(s); V)\big)^2 ds \\
&+ 4\int_0^{t^n} \big(\mathcal{E}(\hat{U}_t(s), A_h\hat{U}_t(s); V^\star)\big)^2 ds \\
&+ 4C_p \int_0^{t^n} \|f(s) - \Pi_h\varphi(s)\|_H^2\, ds + C_P \sum_{m=1}^{n} C_m \big\{ C_{\alpha,\vartheta}^2 \|A_h^2 \bar{\partial} U^m\|_H^2 \\
&+ \frac{1}{k_m}\|A_h[\Pi_h f(t^{m-\vartheta}) - \Pi_h f(t^{m-1})]\|_H^2 \big\} + \frac{C_p}{2}\sum_{m=1}^{m} k_m^2 \|A_h\big\{\alpha[U^m - U^{m-1+\vartheta}] \\
&+ \beta[U^{m-1} - U^{m-\vartheta}] + \frac{\alpha-\beta}{2} k_m \bar{\partial} U^m\big\}\|_H^2.
\end{aligned}
$$

με C_P *η σταθερά Poincaré,* $C_m := \frac{k_m^5}{30}$, *και* $C_{\alpha,\vartheta}$ *όπως ορίστηκε στην* (3.87).

Κεφάλαιο 4

Πλήρως διακριτά σχήματα για τις δυναμικές εξισώσεις Stokes

Σ' αυτό το κεφάλαιο θα επεκτείνουμε τα αποτελέσματα του Κεφαλαίου 4 για πλήρως διακριτά σχήματα για δυναμικές εξισώσεις Stokes. Για τη χρονική διακριτοποίηση θα θεωρήσουμε πάλι τη μέθοδο Crank–Nicolson και τη $\vartheta-$κλασματική μέθοδο. Για τη διακριτοποίηση στο χώρο θα θεωρήσουμε ένα χώρο πεπερασμένης διάστασης με κατάλληλες προσεγγιστικές ιδιότητες.

Η ανάλυσή μας βασίζεται σε μια ανακατασκευή χρόνου-χώρου της κατά τμήματα γραμμικής παρεμβάλλουσας U της ακολουθίας των προσεγγίσεων της ταχύτητας $\left(U^n\right)_{0\leq n\leq N}$ που παράγεται από το πλήρως διακριτό σχήμα. Η ανακατασκευή αυτή θα γίνει σε δύο στάδια: αρχικά, προσαρμόζοντας στην πλήρως διακριτή περίπτωση τις ιδέες που αναπτύχθηκαν στην εργασία [3] για τη μέθοδο Crank–Nicolson και στο Κεφάλαιο 3 για τη $\vartheta-$κλασματική μέθοδο, θα ορίσουμε μια χρονική ανακατασκευή $\hat{U}$ της U. Στη συνέχεια, θα ανακατασκευάσουμε χωρικά τις U και $\hat{U}$, θεωρώντας τις ανακατασκευές Stokes τους W και $\hat{W}$, αντίστοιχα, (βλ. Κεφάλαιο 2). Τέλος, θα αποδείξουμε εκ των υστέρων εκτιμήσεις για την πίεση.

4.1 Εισαγωγή

Έστω Ω ένα φραγμένο συνεκτικό χωρίο του $\mathbb{R}^d$ $(d = 2, 3)$ με ομαλό σύνορο. Θεωρούμε το δυναμικό πρόβλημα Stokes για την παχύρευστη ασυμπίεστη ροή:

$$
(4.1) \qquad \begin{cases} \mathbf{u}_t - \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} & \text{στο } \Omega \times [0, T], \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 & \text{στο } \Omega \times [0, T], \\ \mathbf{u} = 0 & \text{στο } \partial\Omega \times [0, T], \\ \mathbf{u}(\cdot, 0) = \mathbf{u}_0(\cdot) & \text{στο } \Omega, \end{cases}
$$

όπου η $\mathbf{u}$ και η p αντιπροσωπεύουν, αντίστοιχα, την άγνωστη ταχύτητα και την άγνωστη πίεση· η πυκνότητα των δυνάμεων (body force) ανά μονάδα μάζας (π.χ. βαρύτητα) $\mathbf{f}$ και η αρχική ταχύτητα $\mathbf{u}_0$ είναι δεδομένες.

Πριν προχωρήσουμε στη μεταβολική διατύπωση του προβλήματος, ας υπενθυμίσουμε τους συμβολισμούς που εισαγάγαμε στο Κεφάλαιο 1 και τους οποίους θα χρειαστούμε στη συνέχεια.

Θέτουμε $\mathbf{H} := (L^2(\Omega))^d$, $\mathbf{V} := (H_0^1(\Omega))^d$, $S := \{\phi \in L^2(\Omega) : \int_\Omega \phi(x)dx = 0\}$, και συμβολίζουμε με $\mathbf{V}^\star := (H^{-1}(\Omega))^d$ το δυϊκό του $\mathbf{V}$. Ορίζουμε στον $\mathbf{H}$ το εσωτερικό γινόμενο ως

$$
\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \sum_{i=1}^{d} \int_\Omega f_i(x) g_i(x) dx,
$$

στον $\mathbf{V} \times \mathbf{V}$ τη διγραμμική μορφή $a(\cdot, \cdot)$ ως

$$
(4.2) \qquad a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_\Omega \sum_{i=1}^{d} \langle \nabla u_i, \nabla v_i \rangle \, dx, \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}\,,
$$

και στον $\mathbf{V} \times S$ την $b(\cdot, \cdot)$ ως

$$
(4.3) \qquad b(\mathbf{u}, q) = -\int_\Omega (\operatorname{div} \mathbf{u}) q \, dx, \quad \mathbf{u} \in \mathbf{V},\ q \in S\,.
$$

Επιπλέον, συμβολίζουμε τις νόρμες των χώρων $\mathbf{H}$, S, $\mathbf{V}$ και $\mathbf{V}^\star$, αντίστοιχα, με $\|\cdot\|_{\mathbf{H}}$, $\|\cdot\|_S$, $\|\cdot\|_{\mathbf{V}}$ και $\|\cdot\|_{\mathbf{V}^\star}$.

Η μεταβολική διατύπωση του προβλήματος (4.1) είναι: Ζητείται ζεύγος συναρτήσεων $(\mathbf{u}, p) \in L^2(0,T;\mathbf{V}) \times H^{-1}(0,T;S)$ το οποίο να ικανοποιεί τις

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}_t(t), \mathbf{v}\rangle + a(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) &= \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}\rangle \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V},\ \text{σ.π. στο } [0,T], \\ b(\mathbf{u}, q) &= 0 \quad \forall q \in S\,. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Υποθέτουμε ότι η διγραμμική μορφή $a(\cdot,\cdot)$ είναι ελλειπτική και η διγραμμική μορφή $b(\cdot,\cdot)$ ικανοποιεί τη συνθήκη inf-sup. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι $\mathbf{f} \in L^2(0,T;\mathbf{V}^\star)$ και ότι το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}$ είναι ελεύθερο απόκλισης. Υπό αυτές τις προϋποθέσεις το πρόβλημα αρχικών τιμών (4.4) επιδέχεται μοναδική ασθενή λύση $(\mathbf{u}, p)$ [18, 39].

Επίσης, συμβολίζουμε με $\mathbf{Z}$ τον κλειστό υπόχωρο του $\mathbf{V}$

$$\mathbf{Z} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{V} : b(\mathbf{v}, q) = 0, \quad \text{για κάθε } q \in S\} \tag{4.5}$$

και με $\mathbf{J}$ τον αντίστοιχο κλειστό υπόχωρο του $\mathbf{H}$

$$\mathbf{J} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H} : b(\mathbf{v}, q) = 0, \quad \text{για κάθε } q \in S \text{ και } \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}|_\Omega = 0 \text{ με την ασθενή έννοια}\}. \tag{4.6}$$

Τότε, το πρόβλημα (4.4) είναι ισοδύναμο με τα προβλήματα: Προσδιορίστε $\mathbf{u} \in \mathbf{Z}$ τέτοια ώστε

$$\langle \mathbf{u}_t(t), \mathbf{v}\rangle + a(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}\rangle \quad \text{για κάθε } \mathbf{v} \in \mathbf{Z}, \quad \text{σ.π. στο } [0,T], \tag{4.7}$$

και έπειτα $p \in S$ τέτοια ώστε

$$b(\mathbf{v}, p) = -\langle \mathbf{u}_t(t), \mathbf{v}\rangle - a(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) + \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}\rangle \quad \text{για κάθε } \mathbf{v} \in \mathbf{V},\ \text{σ.π. στο } [0,T]. \tag{4.8}$$

Για να έχει καθένα από τα προβλήματα (4.7) και (4.8) μοναδική λύση, υποθέτουμε ότι η διγραμμική μορφή $a(\cdot,\cdot)$ είναι ελλειπτική, δηλαδή

$$\hat{\alpha}\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}^2 \le a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \tag{4.9}$$

με $\hat{\alpha} > 0$, και ότι η διγραμμική μορφή $b(\cdot,\cdot)$ ικανοποιεί τη συνθήκη inf-sup

$$0 < \hat{\beta} := \inf_{q\in S} \sup_{\mathbf{v}\in\mathbf{V}} \frac{b(\mathbf{v},q)}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}\|q\|_S}. \tag{4.10}$$

Έστω $(\mathbf{V}_h, S_h)$ ένα κατάλληλο ζεύγος χώρων πεπερασμένης διάστασης, το οποίο έχει επιλεγεί για τη διακριτοποίηση του προβλήματος Stokes. Κατ' αναλογίαν προς το πρόβλημα (4.1), ορίζουμε το ημιδιακριτό πρόβλημα πεπερασμένων στοιχείων: Ζητείται ζεύγος συναρτήσεων $(\mathbf{u}_h, p_h) : [0,T] \to \mathbf{V}_h \times S_h$ τέτοιο ώστε

$$\begin{cases} \langle \mathbf{u}_{h,t}(t), \boldsymbol{\varphi}\rangle + a(\mathbf{u}_h(t), \boldsymbol{\varphi}) + b(\boldsymbol{\varphi}, p_h) = \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi}\rangle \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{V}_h, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad b(\mathbf{u}_h, q_h) = 0 \quad \forall q_h \in S_h. \end{cases} \tag{4.11}$$

Τονίζουμε ότι δεν υποθέτουμε ότι $\mathbf{V}_h \subset \mathbf{V}$ αφού, όπως προαναφέραμε, οι χώροι πεπερασμένης διάστασης που χρησιμοποιούνται για τη χωρική διακριτοποίηση του προβλήματος Stokes είναι δυνατόν να περιέχουν μη συμμορφικές συναρτήσεις. Υποθέτουμε όμως ότι η διγραμμική μορφή $a(\cdot,\cdot)$ επεκτείνεται στον $(\mathbf{V}_h + \mathbf{V}) \times (\mathbf{V}_h + \mathbf{V})$ και η διγραμμική μορφή $b(\cdot,\cdot)$ επεκτείνεται στον $(\mathbf{V}_h + \mathbf{V}) \times S$.

Τότε, όπως και στη συνεχή περίπτωση, η επίλυση του παραπάνω ημιδιακριτού προβλήματος (4.11) ανάγεται στην επίλυση των ακολούθων προβλημάτων: Ζητείται $\mathbf{u}_h : [0,T] \to \mathbf{Z}_h$ τέτοια ώστε

$$\langle \mathbf{u}_{h,t}(t), \boldsymbol{\varphi}\rangle + a(\mathbf{u}_h(t), \boldsymbol{\varphi}) = \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi}\rangle \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{Z}_h, \tag{4.12}$$

και ζητείται $p_h : [0,T] \to S_h$ τέτοια ώστε

$$b(\mathbf{u}_h, p_h) = -\langle \mathbf{u}_{h,t}(t), \boldsymbol{\varphi}\rangle - a(\mathbf{u}_h(t), \boldsymbol{\varphi}) + \langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi}\rangle \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{V}_h, \tag{4.13}$$

όπου $\mathbf{Z}_h \subset \mathbf{V}_h$ είναι ο υπόχωρος του $\mathbf{V}_h$ με στοιχεία που ικανοποιούν τη συνθήκη ασυμπιεστότητας

$$\mathbf{Z}_h = \{\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{V}_h : b(\boldsymbol{\varphi}, q) = 0 \quad \forall q \in S_h\}.$$

Όπως είδαμε στο Κεφάλαιο 1, ικανή και αναγκαία συνθήκη για τη μοναδικότητα της

$\mathbf{u}_h$ είναι η διγραμμική μορφή $a(\cdot,\cdot)$ να είναι ελλειπτική, δηλαδή

$$\alpha^*\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}^2 \leq a(\mathbf{v},\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_h, \tag{4.14}$$

με $\alpha^* > 0$, ενώ για τη μοναδικότητα της p_h ικανή και αναγκαία συνθήκη είναι η διγραμμική μορφή $b(\cdot,\cdot)$ να ικανοποιεί τη διακριτή συνθήκη inf-sup

$$0 < \beta^* := \inf_{q\in S_h} \sup_{\mathbf{v}\in\mathbf{V}_h} \frac{b(\mathbf{v},q)}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}\|q\|_S}, \tag{4.15}$$

με β^* ανεξάρτητο του h.

Στο σημείο αυτό θα παρουσιάσουμε εν συντομία το στατικό πρόβλημα Stokes, την ασθενή του διατύπωση και το αντίστοιχο ημιδιακριτό πρόβλημα (περισσότερες λεπτομέρειες ο αναγνώστης μπορεί να βρεί στο Κεφάλαιο 1 και στις αναφορές του), ούτως ώστε στη συνέχεια να ορίσουμε γι' αυτό τους *εκ των υστέρων εκτιμητές*.

Για $\mathbf{g} \in \mathbf{V}^\star$, το στατικό πρόβλημα Stokes μπορεί να διατυπωθεί ως εξής: προσδιορίστε $(\mathbf{w},q) \in \mathbf{V}\times S$ ώστε να ικανοποιείται

$$\begin{cases} -\Delta\mathbf{w} + \nabla q = \mathbf{g} & \text{στο } \Omega, \\ \operatorname{div}\mathbf{w} = 0 & \text{στο } \Omega. \end{cases} \tag{4.16}$$

Το πρόβλημα (4.16) μπορεί να διατυπωθεί, επίσης, στην ακόλουθη ασθενή μορφή: προσδιορίστε ζεύγος $(\mathbf{w},q) \in \mathbf{V}\times S$ το οποίο να ικανοποιεί τις

$$\begin{cases} a(\mathbf{w},\mathbf{v}) + b(\mathbf{v},q) = \langle \mathbf{g},\mathbf{v}\rangle & \forall \mathbf{v}\in\mathbf{V} \\ b(\mathbf{w},\tilde{q}) = 0 & \forall \tilde{q}\in S. \end{cases} \tag{4.17}$$

Όπως είδαμε στο Κεφάλαιο 1, το πρόβλημα (4.17) είναι ισοδύναμο με τα προβλήματα: Ζητείται $\mathbf{w}\in\mathbf{Z}$ τέτοια ώστε

$$a(\mathbf{w},\mathbf{v}) = \langle \mathbf{g},\mathbf{v}\rangle \quad \forall \mathbf{v}\in\mathbf{Z}, \tag{4.18}$$

και, στη συνέχεια, ζητείται $q \in S$ τέτοια ώστε

$$b(\mathbf{v}, q) = -a(\mathbf{w}, \mathbf{v}) + \langle \mathbf{g}, \mathbf{v} \rangle \quad \forall\, \mathbf{v} \in \mathbf{V}. \tag{4.19}$$

Το αντίστοιχο πρόβλημα πεπερασμένων στοιχείων είναι: προσδιορίστε ζεύγος $(\mathbf{w}_h, q_h) \in \mathbf{V}_h \times S_h$ τέτοιο ώστε

$$\begin{cases} a(\mathbf{w}_h, \boldsymbol{\varphi}) + b(\boldsymbol{\varphi}, q_h) = \langle \mathbf{g}, \boldsymbol{\varphi} \rangle \quad \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{V}_h, \\ \qquad\qquad b(\mathbf{w}_h, \tilde{q}) = 0 \quad \forall\, \tilde{q} \in S_h. \end{cases} \tag{4.20}$$

Η επίλυση του προβλήματος (4.20) μπορεί να αναχθεί στην επίλυση των ακόλουθων προβλημάτων: προσδιορίστε $\mathbf{w}_h \in \mathbf{Z}_h$ τέτοια ώστε

$$a(\mathbf{w}_h, \boldsymbol{\varphi}) = \langle \mathbf{g}, \boldsymbol{\varphi} \rangle \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{Z}_h, \tag{4.21}$$

και, στη συνέχεια, προσδιορίστε p_h τέτοια ώστε

$$b(\boldsymbol{\varphi}, q_h) = -a(\mathbf{w}_h, \boldsymbol{\varphi}) + \langle \mathbf{g}, \boldsymbol{\varphi} \rangle \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{V}_h. \tag{4.22}$$

Όπως στο Κεφάλαιο 2, υποθέτουμε την ύπαρξη εκ των υστέρων εκτιμητών, σε διάφορες νόρμες, για το στατικό πρόβλημα.

Υπόθεση 4.1.1. *Έστω $(\mathbf{w}, q) \in \mathbf{Z} \times S$ η ακριβής λύση του στατικού προβλήματος Stokes (4.17) και $(\mathbf{w}_h, q_h) \in \mathbf{Z}_h \times S_h$ η προσέγγισή της με πεπερασμένα στοιχεία που εισαγάγαμε στη (4.20). Για το χώρο X για την ταχύτητα, $X \in \{\mathbf{H}, \mathbf{V}, \mathbf{V}^*\}$, και για το χώρο S για την πίεση, υποθέτουμε ότι υπάρχουν, αντίστοιχα, εκ των υστέρων εκτιμητές $\mathcal{E} = \mathcal{E}((\mathbf{w}_h, q_h), \mathbf{g}; X)$, και $\mathcal{E}_{\text{pres}} = \mathcal{E}_{\text{pres}}((\mathbf{w}_h, q_h), \mathbf{g}; S)$, οι οποίοι εξαρτώνται από την προσεγγιστική λύση $(\mathbf{w}_h, q_h)$, τα δεδομένα $\mathbf{g}$ και την αντίστοιχη νόρμα, έτσι ώστε*

$$\|\mathbf{w} - \mathbf{w}_h\|_X \leq \mathcal{E}((\mathbf{w}_h, q_h), \mathbf{g}; X), \quad X = \mathbf{H},\ \mathbf{V},\ \mathbf{V}^*, \tag{4.23}$$

και

$$\|q - q_h\|_S \leq \mathcal{E}_{\text{pres}}((\mathbf{w}_h, q_h), \mathbf{g}; S)\,. \tag{4.24}$$

Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη εκ των υστέρων εκτιμήσεων για τη χρονική διακριτοποίηση του ημιδιακριτού προβλήματος (4.11) με τη μέθοδο Crank-Nicolson, θα εισαγάγουμε επιπλέον συμβολισμό. Έστω $\Pi_0 : \mathbf{H} \to \mathbf{J}$ ο τελεστής της $\mathbf{L}^2-$προβολής από τον $\mathbf{H}$ στον $\mathbf{J}$ και $\tilde{\Delta} : \mathbf{H}^2 \cap \mathbf{Z} \subset \mathbf{J} \to \mathbf{J}$ ο τελεστής του Stokes,

$$\langle \tilde{\Delta}\mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = \langle \Delta\mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbf{J}. \tag{4.25}$$

Επιπλέον, έστω $\Pi_h : \mathbf{L}^2 \to \mathbf{Z}_h$ ο τελεστής της $\mathbf{L}^2-$προβολής από τον $\mathbf{H}$ στον $\mathbf{Z}_h$,

$$\langle \Pi_h\mathbf{f}, \mathbf{w}_h\rangle = \langle \mathbf{f}, \mathbf{w}_h) \quad \forall \mathbf{w}_h \in \mathbf{Z}_h. \tag{4.26}$$

και $\tilde{\Delta}_h : \mathbf{Z}_h \subset \mathbf{Z}_h \to \mathbf{J}$ η διακριτή εκδοχή του $\tilde{\Delta}$, [24, 25],

$$\langle \tilde{\Delta}_h\mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h\rangle = -a(\mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h) \quad \forall \mathbf{w}_h \in \mathbf{Z}_h. \tag{4.27}$$

Τότε, για κάθε $\mathbf{v} \in \mathbf{J}$, έχουμε

$$\langle \mathbf{u}_t(t) - \Delta\mathbf{u}(t) + \nabla p - \mathbf{f}, \mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{u}_t(t) - \tilde{\Delta}\mathbf{u}(t) - \Pi_0\mathbf{f}, \mathbf{v}\rangle, \;\; \textit{σ.π. στο } [0, T], \tag{4.28}$$

από την οποία, βάσει των ορισμών του τελεστή Stokes και της $\mathbf{L}^2-$προβολής Π_0, λαμβάνουμε την ακόλουθη σημειακή σχέση

$$\mathbf{u}_t(t) - \tilde{\Delta}\mathbf{u}(t) = \Pi_0\mathbf{f}(t), \;\; \textit{σ.π. στο } [0, T]. \tag{4.29}$$

4.2 Η μέθοδος των Crank-Nicolson

Σ' αυτήν την ενότητα θα μελετήσουμε πλήρως διακριτά σχήματα για το δυναμικό πρόβλημα Stokes. Για τη χρονική διακριτοποίηση θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο των Crank-Nicolson. Για την απόδειξη θα προσαρμόσουμε τις αντίστοιχες ιδέες του

Κεφαλαίου 4 στην περίπτωση του δυναμικού προβλήματος Stokes.

Αρχικά θα αποδείξουμε εκ των υστέρων εκτιμήσεις για την ταχύτητα. Από την ακολουθία προσεγγίσεων της ταχύτητας $\mathbf{U}^n$, $n = 0, \ldots, N$, θα κατασκευάσουμε μια συνεχή συνάρτηση $\hat{\mathbf{U}}$, ορισμένη στο $[0, T]$, ώστε να αποδείξουμε βέλτιστης τάξης εκ των υστέρων εκτιμήσεις για το *ολικό σφάλμα*

$$\mathbf{e}_{CN} := \mathbf{u} - \hat{\mathbf{U}}.$$

Όπως και στο Κεφάλαιο 4, θα ανακατασκευάσουμε την κατά τμήματα γραμμική παρεμβάλλουσα $\mathbf{U} : [0, T] \to \mathbf{Z}_h$ ως προς το χρόνο της ακολουθίας $\left(t^n, \mathbf{U}^n\right)_{0 \le n \le N}$, και θα ορίσουμε μια νέα, κατά τμήματα τετραγωνική, παρεμβάλλουσα $\hat{\mathbf{U}} : [0, T] \to \mathbf{Z}_h$. Η $\hat{\mathbf{U}}$ θα είναι δεύτερης τάξης προσέγγιση, ως προς το χρόνο, της $\mathbf{u}$. Στη συνέχεια, σε κάθε $\hat{\mathbf{U}}(t)$, $t \in [0, T]$, θα αντιστοιχήσουμε μια συνάρτηση $\hat{\mathbf{W}} \in \mathbf{Z}$ (*η ανακατασκευή Stokes της* $\hat{\mathbf{U}}$, βλ. Κεφάλαιο 2) έτσι ώστε το σφάλμα $\mathbf{e}_{CN}$ να διασπασθεί, ως

$$\mathbf{e}_{CN} := \hat{\mathbf{e}} - \hat{\rho},$$

όπου

$$\hat{\mathbf{e}} := \mathbf{u} - \hat{\mathbf{W}} \quad \text{και} \quad \hat{\rho} := \hat{\mathbf{U}} - \hat{\mathbf{W}}.$$

Η παραπάνω διάσπαση θα έχει τις ακόλουθες ιδιότητες

- Το σφάλμα $\hat{\rho}$ θα είναι μια εκ των υστέρων ποσότητα, την οποία θα μπορούμε να εκτιμήσουμε χρησιμοποιώντας, σύμφωνα με την Υπόθεση 4.1.1, τους υπάρχοντες εκ των υστέρων εκτιμητές για το στατικό πρόβλημα Stokes.

- Το σφάλμα $\hat{\mathbf{e}}$ θα είναι λύση ενός δυναμικού προβλήματος Stokes, του οποίου το δεξιό μέλος θα εξαρτάται από το σφάλμα $\hat{\rho}$ και άλλες εκ των υστέρων ποσότητες. Άρα μπορούμε να το εκτιμήσουμε χρησιμοποιώντας τις συνήθεις τεχνικές της θεωρίας των διαφορικών εξισώσεων.

Προχωρούμε τώρα στην ανάλυσή μας, εισάγοντας πρώτα τους απαραίτητους συμβολισμούς. Έστω $0 = t^0 < t^1 < \cdots < t^N = T$ ένας διαμερισμός του $[0, T]$, σε υποδιαστήματα $I_n := (t^{n-1}, t^n]$. Συμβολίζουμε με k_n το μήκος του I_n. Για $\vartheta \in$

$(0,1)$, $\tilde{\vartheta} = 1 - 2\vartheta$, εισάγουμε τα ενδιάμεσα χρονικά στάδια $t^{n-1+\vartheta} = t^{n-1} + \vartheta k_n$ και $t^{n-\vartheta} = t^{n-1} + (\vartheta + \tilde{\vartheta})k_n$. Επιπλέον, συμβολίζουμε με $\mathbf{u}^m$ τη συνάρτηση $\mathbf{u}(\cdot, t^m)$ και με $\mathbf{f}^m$ την κατανομή $\mathbf{f}(\cdot, t^m)$. Επίσης, για δεδομένα $v^1, v^2, \ldots, v^N$ θέτουμε

$$v^{n-\frac{1}{2}} = \frac{v^n + v^{n-1}}{2}.$$

Διακριτοποιούμε το ημιδιακριτό πρόβλημα Stokes (4.11) ως προς το χρόνο με τη μέθοδο των Crank-Nicolson. Οδηγούμαστε έτσι στο πλήρως διακριτό σχήμα: Με $\mathbf{U}^0 = \mathbf{u}_h^0$, ζητείται ζεύγος $(\mathbf{U}^n, P^n) \in \mathbf{V}_h \times S_h$, $1 \le n \le N$, τέτοιο ώστε για κάθε $(\mathbf{v}_h, q_h) \in \mathbf{V}_h \times S_h$,

$$\begin{cases} \langle \dfrac{\mathbf{U}^n - \mathbf{U}^{n-1}}{k_n}, \mathbf{v}_h \rangle + a(\mathbf{U}^{n-\frac{1}{2}}, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, P^n) = \langle \mathbf{f}(t^{n-\frac{1}{2}}), \mathbf{v}_h \rangle \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad b(\mathbf{U}^n, q_h) = 0, \end{cases} \tag{4.30}$$

όπου $\mathbf{u}_h^0$ είναι μια κατάλληλη προσέγγιση της αρχικής ταχύτητας $\mathbf{u}^0$ από τον υπόχωρο $\mathbf{Z}_h$. Ειδικότερα για τις προσεγγίσεις της $\mathbf{u}$ έχουμε: Με $\mathbf{U}^0 = \mathbf{u}_h^0$, ζητείται $\mathbf{U}^n \in \mathbf{Z}_h$, $1 \le n \le N$, τέτοια ώστε, για κάθε $\mathbf{v}_h \in \mathbf{Z}_h$,

$$\langle \mathbf{U}^n - \mathbf{U}^{n-1}, \mathbf{v}_h \rangle + k_n a(\mathbf{U}^{n-\frac{1}{2}}, \mathbf{v}_h) = k_n \langle \Pi_h \mathbf{f}(t^{n-\frac{1}{2}}), \mathbf{v}_h \rangle, \tag{4.31}$$

Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς (4.27) του τελεστή $\tilde{\Delta}_h$ και (4.26) του τελεστή της L^2-προβολής Π_h, το προηγούμενο αριθμητικό σχήμα μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\langle \mathbf{U}^n - \mathbf{U}^{n-1}, \mathbf{v}_h \rangle - k_n \langle \tilde{\Delta}_h \mathbf{U}^{n-\frac{1}{2}}, \mathbf{v}_h \rangle = k_n \langle \Pi_h \mathbf{f}(t^{n-\frac{1}{2}}), \mathbf{v}_h \rangle,$$

ή

$$\mathbf{U}^n - \mathbf{U}^{n-1} - k_n \tilde{\Delta}_h \, \mathbf{U}^{n-\frac{1}{2}} = k_n \Pi_h \mathbf{f}(t^{n-\frac{1}{2}}). \tag{4.32}$$

Η ανακατασκευή χρόνου-χώρου για τη μέθοδο Crank–Nicolson

Ακολουθώντας τη βασική ιδέα του Κεφαλαίου 4 θα ορίσουμε κατ' αρχάς μια χρονική ανακατασκευή για το σχήμα (4.30). Θεωρούμε την κατά τμήματα γραμμική συνάρτηση

$\mathbf{U} : [0,T] \to \mathbf{Z}_h$, η οποία παρεμβάλλεται στις τιμές $\mathbf{U}^{n-1}$ και $\mathbf{U}^n$,

$$\mathbf{U}(t) = \mathbf{U}^{n-\frac{1}{2}} + (t - t^{n-\frac{1}{2}})\,\bar{\partial}\mathbf{U}^n,\ t \in I_n. \tag{4.33}$$

Για την πίεση ορίζουμε μια κατά τμήματα σταθερή προσέγγιση $P : [0,T] \to S_h$,

$$P(t) = P^n,\ t \in I_n. \tag{4.34}$$

Το υπόλοιπο της προσέγγισης $\mathbf{U}$ δεν είναι βέλτιστης τάξης στο χρόνο, επομένως, για να ανακτήσουμε τη βέλτιστη τάξη, είναι αναγκαία η ανακατασκευή της. Στη συνέχεια θα ορίσουμε μια συνεχή κατά τμήματα πολυωνυμική συνάρτηση στο χρόνο, βαθμού το πολύ δύο, $\hat{\mathbf{U}} : [0,T] \to \mathbf{Z}_h$, η οποία θα προέρχεται από ανακατασκευή της $\mathbf{U}$ και θα είναι βέλτιστης τάξης προσέγγιση της $\mathbf{u}$. Θα αναφερόμαστε στη $\hat{\mathbf{U}}$ ως *ανακατασκευή Crank-Nicolson της* $\mathbf{U}$. Σημειώνουμε ότι ορίσαμε μόνο την ανακατασκευή της προσέγγισης $\mathbf{U}$, διότι το υπόλοιπο της προσέγγιση $P(t)$ για την πίεση, όπως θα δούμε στη συνέχεια, είναι βέλτιστης τάξης. Η μέθοδος των Crank-Nicolson (4.30) με τη βοήθεια των συναρτήσεων $\mathbf{U}$ και P γράφεται ως

$$\begin{cases} \langle \mathbf{U}_t(t), \mathbf{v}_h\rangle + a(\mathbf{U}(t^{n-\frac{1}{2}}), \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, P(t)) = \langle \mathbf{f}(t^{n-\frac{1}{2}}), \mathbf{v}_h\rangle \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h \\ b(\mathbf{U}(t^n), q_h) = 0 \quad \forall q_h \in S_h. \end{cases} \tag{4.35}$$

Πριν ορίσουμε την ανακατασκευή Crank-Nicolson της $\mathbf{U}$ εισάγουμε μια κατά τμήματα πολυωνυμική συνάρτηση $\boldsymbol{\Phi}$, βαθμού το πολύ δύο, η οποία θα συμμετέχει στον ορισμό της $\hat{\mathbf{U}}$. Έστω $\boldsymbol{\varphi} : I_n \to \mathbf{H}$ η γραμμική παρεμβάλλουσα της $\mathbf{f}$ στους κόμβους t^{n-1} και $t^{n-\frac{1}{2}}$,

$$\boldsymbol{\varphi}(t) := \mathbf{f}(t^{n-\frac{1}{2}}) + \frac{2}{k_n}[\mathbf{f}(t^{n-\frac{1}{2}}) - \mathbf{f}(t^{n-1})](t - t^{n-\frac{1}{2}}), \quad t \in I_n. \tag{4.36}$$

Ορίζουμε τη $\boldsymbol{\Phi}$ ως $\boldsymbol{\Phi}(t) := \int_{t^{n-1}}^{t} \boldsymbol{\varphi}(s)ds$, $t \in I_n$, δηλαδή,

$$\boldsymbol{\Phi}(t) = (t - t^{n-1})\mathbf{f}(t^{n-\frac{1}{2}}) - \frac{1}{k_n}(t - t^{n-1})(t^n - t)[\mathbf{f}(t^{n-\frac{1}{2}}) - \mathbf{f}(t^{n-1})]. \tag{4.37}$$

Η $\boldsymbol{\Phi}$ έχει τις ιδιότητες

- $\boldsymbol{\Phi}(t^{n-1}) = 0,$
- $\boldsymbol{\Phi}(t^n) = k_n \mathbf{f}(t^{n-\frac{1}{2}}) = \int_{I_n} \mathbf{f}(t^{n-\frac{1}{2}}).$

Ορίζουμε τώρα την ανακατασκευή Crank-Nicolson $\hat{\mathbf{U}}$ της $\mathbf{U}$ ως

$$\hat{\mathbf{U}}(t) := \mathbf{U}^{n-1} + \int_{t^{n-1}}^{t} \tilde{\Delta}_h \mathbf{U}(s) ds + \Pi_h \boldsymbol{\Phi}(t), \quad t \in \ I_n. \tag{4.38}$$

Προφανώς, $\hat{\mathbf{U}}(t^{n-1}) = \mathbf{U}^{n-1}$. Επιπλέον, αν υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα της τελευταίας σχέσης με τον κανόνα του τραπεζίου, παίρνουμε

$$\hat{\mathbf{U}}(t^n) = \mathbf{U}^{n-1} + \frac{k_n}{2}[\tilde{\Delta}_h \mathbf{U}^{n-1} + \tilde{\Delta}_h \mathbf{U}^n] + k_n \Pi_h \mathbf{f}(t^{n-\frac{1}{2}}), \tag{4.39}$$

και σύμφωνα με την (4.32),

$$\hat{\mathbf{U}}(t^n) = \mathbf{U}^{n-1} + k_n \tilde{\Delta}_h \mathbf{U}^{n-\frac{1}{2}} + k_n \Pi_h \mathbf{f}(t^{n-\frac{1}{2}}) = \mathbf{U}^n. \tag{4.40}$$

Επομένως, οι $\hat{\mathbf{U}}$ και $\mathbf{U}$ λαμβάνουν τις ίδιες τιμές στους κόμβους $t^0, \ldots, t^N$ και επομένως η $\hat{\mathbf{U}} : [0, T] \to \mathbf{Z}_h$ είναι συνεχής συνάρτηση στο χρόνο. Επιπλέον, παραγωγίζοντας την (4.38) ως προς t, έχουμε

$$\hat{\mathbf{U}}_t(t) = \tilde{\Delta}_h \mathbf{U}(t) + \Pi_h \boldsymbol{\varphi}(t), \quad t \in \ I_n. \tag{4.41}$$

Στη συνέχεια θα εισαγάγουμε τις *ανακατασκευές Stokes* των $\mathbf{U}$ και $\hat{\mathbf{U}}$.

Ορισμός 4.2.1. *(Η ανακατασκευή Stokes της* $\mathbf{U}$*) Για* $t \in [0, T]$*, έστω* $(\mathbf{W}, Q) \in \mathbf{V} \times S$ *η ακριβής λύση του στατικού προβλήματος Stokes*

$$\begin{aligned} a(\mathbf{W}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, Q) &= -\langle \tilde{\Delta}_h \mathbf{U}(t), \mathbf{v} \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \\ b(\mathbf{W}, q) &= 0 \quad \forall q \in S. \end{aligned} \tag{4.42}$$

Θα αναφερόμαστε στην $(\mathbf{W}, Q) = (\mathbf{W}(t), Q(t))$ *ως ανακατασκευή Stokes της* $(\mathbf{U}(t), P(t))$.

Επαναλαμβάνουμε ότι, οι $\mathbf{W} \in \mathbf{Z}$ και $Q \in S$ είναι, αντίστοιχα, οι λύσεις των

ακόλουθων προβλημάτων

$$a(\mathbf{W}, \mathbf{v}) = -\langle \tilde{\Delta}_h \mathbf{U}(t), \mathbf{v} \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{Z} \tag{4.43}$$

και

$$b(\mathbf{v}, Q) = -a(\mathbf{W}, \mathbf{v}) - \langle \tilde{\Delta}_h \mathbf{U}(t), \mathbf{v} \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}. \tag{4.44}$$

Επίσης, ορίζουμε

Ορισμός 4.2.2. *(Η ανακατασκευή Stokes της $\hat{U}$) Για $t \in [0, T]$, έστω $(\hat{\mathbf{W}}, \hat{Q}) \in \mathbf{V} \times S$ η ακριβής λύση του στατικού προβλήματος Stokes*

$$\begin{aligned} a(\hat{\mathbf{W}}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, \hat{Q}) &= -\langle \tilde{\Delta}_h \hat{\mathbf{U}}(t), \mathbf{v} \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \\ b(\hat{\mathbf{W}}, q) &= 0 \quad \forall q \in S, \end{aligned} \tag{4.45}$$

Θα αναφερόμαστε στην $(\hat{\mathbf{W}}, \hat{Q}) = (\hat{\mathbf{W}}(t), \hat{Q}(t))$ ως ανακατασκευή Stokes της $(\hat{\mathbf{U}}(t), P(t))$.

Όπως προηγουμένως, $\hat{\mathbf{W}} \in \mathbf{Z}$ και $\hat{Q} \in S$ είναι, αντίστοιχα, οι λύσεις των ακόλουθων προβλημάτων

$$a(\hat{\mathbf{W}}, \mathbf{v}) = -\langle \tilde{\Delta}_h \hat{\mathbf{U}}(t), \mathbf{v} \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{Z} \tag{4.46}$$

και

$$b(\mathbf{v}, \hat{Q}) = -a(\hat{\mathbf{W}}, \mathbf{v}) - \langle \tilde{\Delta}_h \hat{\mathbf{U}}(t), \mathbf{v} \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}. \tag{4.47}$$

Θα προχωρήσουμε τώρα στην απόδειξη δύο βοηθητικών, για την ανάλυσή μας, αποτελεσμάτων.

Λήμμα 4.2.1. *Υποθέτουμε ότι το ζεύγος $(\mathbf{W}, Q)$ είναι η μοναδική λύση του προβλήματος του Stokes (4.42) και $(\mathbf{W}_h, Q_h)$ η αντίστοιχη λύση πεπερασμένων στοιχείων,*

δηλαδή

$$
\begin{aligned}
a(\mathbf{W}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, Q_h) &= -\langle \tilde{\Delta}_h \mathbf{U}(t), \mathbf{v}_h \rangle \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \\
b(\mathbf{W}_h, q_h) &= 0 \quad \forall q_h \in S_h.
\end{aligned} \tag{4.48}
$$

Τότε η προσεγγιστική λύση $(\mathbf{W}_h, Q_h)$ *ικανοποιεί τις*

$$
\mathbf{W}_h(t) = \mathbf{U}(t) \tag{4.49}
$$

και

$$
b(\mathbf{v}_h, Q_h(t)) = -\langle \hat{\mathbf{U}}_t(t), \mathbf{v}_h \rangle - a(\mathbf{U}(t), \mathbf{v}_h) + \langle \Pi_h \boldsymbol{\varphi}(t), \mathbf{v}_h \rangle \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \tag{4.50}
$$

όπου $\mathbf{U}$ *είναι η κατά τμήματα γραμμική παρεμβάλλουσα των τιμών* $\mathbf{U}^n$, $n = 0, \ldots, N$, *που ορίσαμε στην* (4.33).

Απόδειξη. Έστω $\mathbf{v}_h \in \mathbf{Z}_h$· τότε $b(\mathbf{v}_h, Q_h) = 0$ και

$$
a(\mathbf{W}_h(t), \mathbf{v}_h) = -\langle \tilde{\Delta}_h \mathbf{U}(t), \mathbf{v}_h \rangle = a(\mathbf{U}(t), \mathbf{v}_h),
$$

δηλαδή

$$
a(\mathbf{W}_h(t) - \mathbf{U}(t), \mathbf{v}_h) = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{Z}_h. \tag{4.51}
$$

Αφού $\mathbf{W}_h,\ \mathbf{U} \in \mathbf{Z}_h$, έχουμε $\mathbf{W}_h(t) = \mathbf{U}(t)$, και το πρώτο αποτέλεσμα του λήμματος έχει αποδειχτεί.

Παίρνοντας στη σχέση (4.41) το εσωτερικό γινόμενο με $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$ συμπεραίνουμε, για $t \in\ I_n$, ότι

$$
\langle \hat{\mathbf{U}}_t(t) - \tilde{\Delta}_h \mathbf{U}(t) - \Pi_h \boldsymbol{\varphi}(t), \mathbf{v}_h \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h. \tag{4.52}
$$

Για $t \in [0, T]$, η προσέγγιση $Q_h(t)$ είναι, κατά τα γνωστά, η λύση του προβλήματος

$$
b(\mathbf{v}_h, Q_h(t)) = -\langle \tilde{\Delta}_h \mathbf{U}(t), \mathbf{v}_h \rangle - a(\mathbf{W}_h(t), \mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h. \tag{4.53}
$$

Επειδή $\mathbf{W}_h(t) = \mathbf{U}(t)$, η (4.52) συνεπάγεται ότι

$$b(\mathbf{v}_h, Q_h(t)) = -\langle \hat{\mathbf{U}}_t(t), \mathbf{v}_h\rangle - a(\mathbf{U}(t), \mathbf{v}_h) + \langle \Pi_h \boldsymbol{\varphi}(t), \mathbf{v}_h\rangle \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \tag{4.54}$$

και η απόδειξη του λήμματος έχει ολοκληρωθεί. □

Παρατήρηση 4.2.1. *Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα του προηγούμενου λήμματος με τα αντίστοιχα αποτελέσματα για το ημιδιακριτό πρόβλημα στο χώρο (Λήμμα 2.2.1), παρατηρούμε την εξής διαφορά: ενώ στην ημιδιακριτή περίπτωση η λύση πεπερασμένων στοιχείων* $(\mathbf{u}_h, p_h)$ *του δυναμικού προβλήματος Stokes είναι επίσης λύση πεπερασμένων στοιχείων του στατικού προβλήματος Stokes, στην περίπτωση του πλήρως διακριτού σχήματος αυτό συμβαίνει μόνο για τη διακριτή λύση για την ταχύτητα. Αυτό οφείλεται στο ότι πριν την ανακατασκευή στο χώρο, έχει γίνει ανακατασκευή στο χρόνο, μάλιστα μόνο για την ταχύτητα, και αντί της* (2.31) *ικανοποιείται η* (4.41).

Λήμμα 4.2.2. *Υποθέτουμε ότι το ζεύγος* $(\hat{\mathbf{W}}, \hat{Q})$ *είναι η μοναδική λύση του προβλήματος του Stokes* (4.45) *και* $(\hat{\mathbf{W}}_h, \hat{Q}_h)$ *η αντίστοιχη λύση πεπερασμένων στοιχείων,*

$$\begin{aligned} a(\hat{\mathbf{W}}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, \hat{Q}_h) &= -\langle \tilde{\Delta}_h \hat{\mathbf{U}}(t), \mathbf{v}_h\rangle \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \\ b(\hat{\mathbf{W}}_h, q_h) &= 0 \quad \forall q_h \in S_h. \end{aligned} \tag{4.55}$$

Τότε η προσεγγιστική λύση $\hat{\mathbf{W}}_h$ *για την ταχύτητα ικανοποιεί την*

$$\hat{\mathbf{W}}_h(t) = \hat{\mathbf{U}}(t). \tag{4.56}$$

Απόδειξη. Έστω $\mathbf{v}_h \in \mathbf{Z}_h$· τότε $b(\mathbf{v}_h, Q_h) = 0$ και

$$a(\hat{\mathbf{W}}_h(t), \mathbf{v}_h) = -\langle \tilde{\Delta}_h \hat{\mathbf{U}}(t), \mathbf{v}_h\rangle = a(\hat{\mathbf{U}}(t), \mathbf{v}_h),$$

δηλαδή

$$a(\hat{\mathbf{W}}_h(t) - \hat{\mathbf{U}}(t), \mathbf{v}_h) = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{Z}_h. \tag{4.57}$$

Αφού $\hat{\mathbf{W}}_h,\ \hat{\mathbf{U}} \in \mathbf{Z}_h$, έχουμε $\hat{\mathbf{W}}_h(t) = \hat{\mathbf{U}}(t)$, και το λήμμα αποδείχτηκε. □

4.2.1 Εκτιμήσεις σφάλματος

Σ' αυτή την ενότητα θα αποδείξουμε βέλτιστης τάξης εκ των υστέρων εκτιμήσεις για τις αριθμητικές προσεγγίσεις των πλήρως διακριτών σχημάτων που αναλύσαμε στην αμέσως προηγούμενη παράγραφο. Αρχικά θα αποδείξουμε την εκτίμηση για την ταχύτητα και στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας αυτήν και τη συνθήκη inf-sup, θα αποδείξουμε την εκτίμηση για την πίεση.

Αρχικά εισάγουμε τους συμβολισμούς:

$$\hat{\mathbf{e}} := \mathbf{u} - \hat{\mathbf{W}} \quad \text{και} \quad \mathbf{e} := \mathbf{u} - \mathbf{W}. \tag{4.58}$$

Λαμβάνοντας το εσωτερικό γινόμενο με $\mathbf{v} \in \mathbf{Z}$ στην (4.41) παίρνουμε

$$\langle \hat{\mathbf{U}}_t(t), \mathbf{v} \rangle = \langle \tilde{\Delta}_h \mathbf{U}(t), \mathbf{v} \rangle + \langle \Pi_h \boldsymbol{\varphi}(t), \mathbf{v} \rangle \quad t \in \ I_n. \tag{4.59}$$

Επομένως, για $t \in \ I_n$, έχουμε

$$\langle \hat{\mathbf{U}}_t(t), v \rangle + a(\mathbf{W}(t), \mathbf{v}) = \langle \Pi_h \boldsymbol{\varphi}(t), \mathbf{v} \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{Z}. \tag{4.60}$$

Αφαιρώντας την τελευταία εξίσωση από την

$$\langle \mathbf{u}_t(t), \mathbf{v} \rangle + a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle, \quad t \in \ I_n. \tag{4.61}$$

καταλήγουμε στην εξίσωση σφάλματος

$$\langle \hat{\mathbf{e}}_t, \mathbf{v} \rangle + a(\mathbf{e}, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{f} - \Pi_h \boldsymbol{\varphi}, \mathbf{v} \rangle + \langle (\hat{\mathbf{U}} - \hat{\mathbf{W}})_t, \mathbf{v} \rangle, \quad t \in \ I_n. \tag{4.62}$$

Εφαρμόζουμε τεχνικές ενέργειας στην παραπάνω εξίσωση σφάλματος για να αποδείξουμε τις ακόλουθες εκτιμήσεις για την ταχύτητα

Θεώρημα 4.2.1. (Εκτιμήσεις σφάλματος στον $L^\infty(\mathbf{H})$ και στον $L^2(\mathbf{V})$ για την ταχύτητα.) *Έστω* $\mathbf{u}$ *η λύση του δυναμικού προβλήματος Stokes* (4.4) *και* $\mathbf{W}$, $\hat{\mathbf{W}}$ *οι λύσεις των δυναμικών προβλημάτων Stokes* (4.42) *και* (4.45), *αντίστοιχα. Επίσης*

έστω $\mathcal{E}$ όπως ορίστηκε στην Υπόθεση 4.1.1. *Τότε, για $0 < t \leq t^n$, έχουμε*

$$\begin{aligned}\|(\mathbf{u}-\hat{\mathbf{W}})(t)\|_{\mathbf{H}}^2 + \int_0^t \|(\mathbf{u}-\mathbf{W})(s)\|_{\mathbf{V}}^2 ds + \frac{1}{2}\int_0^t \|(\mathbf{u}-\hat{\mathbf{W}})(s)\|_{\mathbf{V}}^2 ds \\ \leq \|\mathbf{u}(0)-\hat{\mathbf{W}}(0)\|_{\mathbf{H}}^2 + 4\int_0^{t^n} \|(\hat{\mathbf{U}}-\hat{\mathbf{W}})_t(s)\|_{\mathbf{V}^\star}^2 ds \\ + 4\int_0^{t^n} \|\mathbf{f}(s)-\Pi_h\boldsymbol{\varphi}(s)\|_{\mathbf{V}^\star}^2\, ds + \int_0^{t^n} \|\mathbf{W}(s)-\hat{\mathbf{W}}(s)\|_{\mathbf{V}^\star}^2\, ds.\end{aligned}$$

Απόδειξη. Θέτουμε $\mathbf{v} = \hat{\mathbf{e}}$ στην εξίσωση σφάλματος (4.62) και έχουμε

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\hat{\mathbf{e}}(t)\|_{\mathbf{H}}^2 - \langle\tilde{\Delta}\mathbf{e}(t),\hat{\mathbf{e}}(t)\rangle = \langle\mathbf{f}-\Pi_h\boldsymbol{\varphi},\hat{\mathbf{e}}\rangle + \langle(\hat{\mathbf{U}}-\hat{\mathbf{W}})_t,\hat{\mathbf{e}}\rangle. \tag{4.63}$$

Τονίζουμε ότι $\hat{\mathbf{e}} \in \mathbf{Z}$ και συνεπώς, βάσει του ορισμού (4.25) του τελεστή Stokes, έχουμε

$$\begin{aligned}-\langle\tilde{\Delta}\mathbf{e}(t),\hat{\mathbf{e}}(t)\rangle &= -\langle\Delta\mathbf{e}(t),\hat{\mathbf{e}}(t)\rangle \\ &= \frac{1}{2}\|\mathbf{e}(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \frac{1}{2}\|\hat{\mathbf{e}}(t)\|_{\mathbf{V}}^2 - \frac{1}{2}\|\hat{\mathbf{e}}(t)-\mathbf{e}(t)\|_{\mathbf{V}}^2,\end{aligned} \tag{4.64}$$

επομένως, χρησιμοποιώντας και τη γενικευμένη ανισότητα των Cauchy-Schwarz, παίρνουμε

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\hat{\mathbf{e}}(t)\|_{\mathbf{H}}^2 + \frac{1}{2}\|\mathbf{e}(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \frac{1}{2}\|\hat{\mathbf{e}}(t)\|_{\mathbf{V}}^2 \leq \frac{1}{2}\|\hat{\mathbf{e}}(t)-\mathbf{e}(t)\|_{\mathbf{V}}^2 \\ + \|(\mathbf{f}-\Pi_h\boldsymbol{\varphi})(t)\|_{\mathbf{V}^\star}\|\hat{\mathbf{e}}(t)\|_{\mathbf{V}} + \|(\hat{\mathbf{U}}-\hat{\mathbf{W}})_t(t)\|_{\mathbf{V}^\star}\|\hat{\mathbf{e}}(t)\|_{\mathbf{V}}.\end{aligned} \tag{4.65}$$

Αλλά σύμφωνα με την αριθμητική γεωμετρική ανισότητα έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\hat{\mathbf{e}}(t)\|_{\mathbf{H}}^2 + \frac{1}{2}\|\mathbf{e}(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \frac{1}{2}\|\hat{\mathbf{e}}(t)\|_{\mathbf{V}}^2 \leq \frac{1}{2}\|(\mathbf{W}-\hat{\mathbf{W}})(t)\|_{\mathbf{V}}^2 \\ + 2\|(\mathbf{f}-\Pi_h\boldsymbol{\varphi})(t)\|_{\mathbf{V}^\star}^2 + \frac{1}{8}\|\hat{\mathbf{e}}(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + 2\|(\hat{\mathbf{U}}-\hat{\mathbf{W}})_t(t)\|_{\mathbf{V}^\star}^2 + \frac{1}{8}\|\hat{\mathbf{e}}(t)\|_{\mathbf{V}}^2,\end{aligned} \tag{4.66}$$

και συνεπώς

$$\frac{d}{dt}\|\hat{\mathbf{e}}(t)\|_{\mathbf{H}}^2 + \|\mathbf{e}(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \frac{1}{2}\|\hat{\mathbf{e}}(t)\|_{\mathbf{V}}^2 \leq \|(\mathbf{W}-\hat{\mathbf{W}})(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + 4\|\mathbf{f}-\Pi_h\boldsymbol{\varphi}\|_{\mathbf{V}^\star}^2 + 4\|(\hat{\mathbf{U}}-\hat{\mathbf{W}})_t\|_{\mathbf{V}^\star}^2 . \tag{4.67}$$

Ολοκληρώνοντας την τελευταία σχέση στο $[0,t],\ 0 \leq t \leq t^n$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}\|\hat{\mathbf{e}}(t)\|_{\mathbf{H}}^2 &+ \int_0^t \|\mathbf{e}(s)\|_{\mathbf{V}}^2 ds + \frac{1}{2}\int_0^t \|\hat{\mathbf{e}}(s)\|_{\mathbf{V}}^2 ds \leq \|\hat{\mathbf{e}}(0)\|_{\mathbf{H}}^2 \\ &+ \int_0^t \|(\mathbf{W}-\hat{\mathbf{W}})(s)\|_{\mathbf{V}}^2 ds + 4\int_0^t \big\{\|(\mathbf{f}-\Pi_h\boldsymbol{\varphi})(s)\|_{\mathbf{V}^\star}^2 + \|(\hat{\mathbf{U}}-\hat{\mathbf{W}})_t(s)\|_{\mathbf{V}^\star}^2\big\} ds,\end{aligned} \tag{4.68}$$

και έτσι η απόδειξη του θεωρήματος έχει ολοκληρωθεί. □

Εκτίμηση του χρονικού σφάλματος. Τώρα, από τους ορισμούς (4.43) και (4.46) των ανακατασκευών $\mathbf{W}$ και $\hat{\mathbf{W}}$, αντίστοιχα, λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}\|(\mathbf{W}-\hat{\mathbf{W}})(s)\|^2 &= a(\mathbf{W}-\hat{\mathbf{W}}, \mathbf{W}-\hat{\mathbf{W}}) \\ &= -\langle\tilde{\Delta}_h\mathbf{U}(t), \mathbf{W}-\hat{\mathbf{W}}\rangle + \langle\tilde{\Delta}_h\hat{\mathbf{U}}(t), \mathbf{W}-\hat{\mathbf{W}}\rangle \\ &= -\langle\tilde{\Delta}_h[\mathbf{U}(t)-\hat{\mathbf{U}}(t)], \mathbf{W}-\hat{\mathbf{W}}\rangle \\ &\leq \|\tilde{\Delta}_h[\mathbf{U}(t)-\hat{\mathbf{U}}(t)]\|_{\mathbf{H}}\|\mathbf{W}-\hat{\mathbf{W}}\|_{\mathbf{H}},\end{aligned} \tag{4.69}$$

επομένως, με χρήση της ανισότητας του Poincaré, έχουμε

$$\|(\mathbf{W}-\hat{\mathbf{W}})(s)\|_{\mathbf{V}} \leq \|\tilde{\Delta}_h[\mathbf{U}(t)-\hat{\mathbf{U}}(t)]\|_{\mathbf{H}}. \tag{4.70}$$

Θα υπολογίσουμε τώρα τη διαφορά $\hat{\mathbf{U}}(t)-\mathbf{U}(t)$. Βάσει των ορισμών (4.38) και (4.33) των $\hat{\mathbf{U}}$ και $\mathbf{U}$, αντίστοιχα, έχουμε

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{U}}(t)-\mathbf{U}(t) &= \big\{\mathbf{U}^{m-1} + \int_{t^{m-1}}^t \tilde{\Delta}_h\mathbf{U}(s)ds + \Pi_h\boldsymbol{\Phi}(t)\big\} \\ &\quad - \big\{\mathbf{U}^{m-1} + (t-t^{m-1})\bar{\partial}\mathbf{U}^m\big\},\ t \in I_m.\end{aligned} \tag{4.71}$$

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα του τραπεζίου για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος

της τελευταίας σχέση, λαμβάνουμε

$$\hat{\mathbf{U}}(t) - \mathbf{U}(t) = \big\{\mathbf{U}^{m-1} + \frac{(t-t^{m-1})}{2}[\tilde{\Delta}_h \mathbf{U}^{m-1} + \tilde{\Delta}_h \mathbf{U}(t)] + \Pi_h \boldsymbol{\Phi}(t)\big\} \\ - \big\{\mathbf{U}^{m-1} + (t-t^{m-1})\bar{\partial}\mathbf{U}^m\big\},\ t \in I_m.$$

ή

$$\hat{\mathbf{U}}(t) - \mathbf{U}(t) = -(t-t^{m-1})\big\{\bar{\partial}\mathbf{U}^m - \tilde{\Delta}_h \mathbf{U}^{m-\frac{1}{2}}\big\} + \frac{(t-t^{m-1})}{2}[\tilde{\Delta}_h \mathbf{U}(t) + \tilde{\Delta}_h \mathbf{U}^m] + \Pi_h \boldsymbol{\Phi}(t).$$

Από την προηγούμενη σχέση, σύμφωνα με την (4.41), παίρνουμε

(4.72)
$$\hat{\mathbf{U}}(t) - \mathbf{U}(t) = \frac{(t-t^{m-1})}{2}\tilde{\Delta}_h[\mathbf{U}(t) - \mathbf{U}^m] + \Pi_h\big\{\boldsymbol{\Phi}(t) - (t-t^{m-1})\mathbf{f}(t^{m-\frac{1}{2}})\big\}.$$

Τώρα, βάσει των ορισμών της $\mathbf{U}$ και της $\boldsymbol{\Phi}$, έχουμε

$$\mathbf{U}(t) - \mathbf{U}^m = (t-t^m)\bar{\partial}\mathbf{U}^m,\ t \in I_m \tag{4.73}$$

και

(4.74)
$$\boldsymbol{\Phi}(t) - (t-t^{m-1})\mathbf{f}(t^{m-\frac{1}{2}}) = -\frac{1}{k_m}(t-t^{m-1})(t^m - t)\Pi_h[\mathbf{f}(t^{m-\frac{1}{2}}) - \mathbf{f}(t^{m-1})].$$

Συνδυάζοντας τα προηγούμενα αποτελέσματα, οδηγούμαστε στη σχέση

(4.75)
$$\hat{\mathbf{U}}(t) - \mathbf{U}(t) = -\,(t-t^{m-1})(t^m - t)\big\{-\tilde{\Delta}_h\bar{\partial}\mathbf{U}^m + \frac{1}{k_m}\Pi_h[\mathbf{f}(t^{m-\frac{1}{2}}) - \mathbf{f}(t^{m-1})]\big\}.$$

Αντικαθιστώντας την τελευταία σχέση στην (4.70), παίρνουμε

$$\|(\mathbf{W} - \hat{\mathbf{W}})(s)\|_{\mathbf{V}} \le (t-t^{m-1})(t^m - t)\big\{\frac{1}{2}\|\tilde{\Delta}_h^2\bar{\partial}\mathbf{U}^m\|_H \\ + \frac{1}{k_m}\|\tilde{\Delta}_h[\Pi_h\mathbf{f}(t^{m-\frac{1}{2}}) - \Pi_h\mathbf{f}(t^{m-1})]\|_H\big\}. \tag{4.76}$$

Σύμφωνα με τη (3.44) οδηγούμαστε στην εκτίμηση

$$\int_{t^{m-1}}^{t^m} \|(\mathbf{W}-\hat{\mathbf{W}})(s)\|_V^2 \le C_P \frac{k_m^5}{30}\big\{\|\tilde{\Delta}_h^2 \bar{\partial}\mathbf{U}^m\|_H^2 + \frac{2}{k_m^2}\|\tilde{\Delta}_h[\Pi_h \mathbf{f}(t^{m-\frac{1}{2}}) - \Pi_h \mathbf{f}(t^{m-1})]\|_H^2\big\}. \tag{4.77}$$

Τονίζουμε ότι το δεξιό μέλος είναι μια υπολογίσιμη εκ των υστέρων ποσότητα. Αναλυτικότερα, για τον υπολογισμό της απαιτείται η επίλυση, σε κάθε χρονικό βήμα, τεσσάρων συστημάτων με πίνακα τον πίνακα μάζας. Για τις λεπτομέρειες βλ. παράγραφο 4.2.2.

Εκτίμηση του χωρικού σφάλματος. Για να εκτιμήσουμε την ποσότητα

$$\int_{t^{m-1}}^{t^m} \|(\hat{\mathbf{U}}-\hat{\mathbf{W}})_t(s)\|_{\mathbf{V}^\star}^2 ds$$

χρησιμοποιούμε την Υπόθεση 4.1.1. Πράγματι, σύμφωνα με το Λήμμα 4.2.2 η $\hat{\mathbf{U}}$ είναι η ελλειπτική προβολή της $\hat{\mathbf{W}}$ στο χώρο $\mathbf{Z}_h$, συνεπώς η $\hat{\mathbf{U}}_t$ είναι η ελλειπτική προβολή της $\hat{\mathbf{W}}_t$ στο χώρο $\mathbf{Z}_h$. Άρα, βάσει της προαναφερθείσας υπόθεσης, έχουμε

$$\|(\hat{\mathbf{U}}-\hat{\mathbf{W}})_t(s)\|_{\mathbf{V}^\star} \le \mathcal{E}(\mathbf{U}_t, \tilde{\Delta}_h \hat{\mathbf{U}}_t(t); \mathbf{V}^\star). \tag{4.78}$$

Εκτίμηση του σφάλματος που αντιστοιχεί στην προσέγγιση f. Για την εκτίμηση της ποσότητας

$$\int_{t^{m-1}}^{t^m} \|(\mathbf{f}-\Pi_h \boldsymbol{\varphi})(s)\|_{\mathbf{V}^\star}^2 ds,$$

χρησιμοποιούμε την ανισότητα του Poincaré και τη διάσπαση

$$\mathbf{f}-\Pi_h\boldsymbol{\varphi} = (\mathbf{f}-\boldsymbol{\varphi}) + (\boldsymbol{\varphi}-\Pi_h\boldsymbol{\varphi}).$$

Για λεπτομέρειες βλ. παράγραφο 4.4.2.

Εκτίμηση σφάλματος για την πίεση. Σ' αυτήν την παράγραφο θα αποδείξουμε, χρησιμοποιώντας τις εκ των υστέρων εκτιμήσεις σφάλματος για την ταχύτητα, ανάλογες εκτιμήσεις για την πίεση.

Όπως είδαμε στην απόδειξη του Λήμματος 4.2.2, ενώ η $\mathbf{U}(t)$ είναι η λύση πεπερασμένων στοιχείων για την ταχύτητα του στατικού προβλήματος (4.42), δεν συμβαίνει το ίδιο με την πίεση $P(t)$. Η $P(t)$ δεν ταυτίζεται με τη λύση πεπερασμένων στοιχείων Q_h του στατικού προβλήματος Stokes με ακριβή λύση το ζεύγος $(\mathbf{W}, Q)$. Η ιδέα της απόδειξης βασίζεται στην εξής διάσπαση για το σφάλμα της πίεσης

$$\varepsilon := p - P = (p - Q) + (Q - Q_h) + (Q_h - P). \tag{4.79}$$

Στο σημείο αυτό ορίζουμε τις ακόλουθες κατά τμήματα σταθερές στο χρόνο συναρτήσεις

$$\bar{Q}_h(t) = \frac{1}{k_m} \int_{t^{m-1}}^{t^m} Q_h(s)ds, \quad t \in I_m, \tag{4.80}$$

$$\bar{p}(t) = \frac{1}{k_m} \int_{t^{m-1}}^{t^m} p(t)dt, \quad t \in I_m \tag{4.81}$$

και

$$\bar{Q}(t) = \frac{1}{k_m} \int_{t^{m-1}}^{t^m} Q(t)dt, \quad t \in I_m, \tag{4.82}$$

οι οποίες θα χρησιμοποιηθούν στην απόδειξη του βασικού αποτελέσματος αυτής της παραγράφου. Αρχικά θα δούμε κάποια ενδιάμεσα αποτελέσματα με τη μορφή λημμάτων.

Λήμμα 4.2.3. *Έστω Q_h η προσέγγιση πεπερασμένων στοιχείων για την πίεση που ορίσαμε στο Λήμμα 4.2.2 και $P(t)$ η κατά τμήματα σταθερή συνάρτηση που ορίστηκε στην* (4.34). *Τότε, για $t \in I_m$, ισχύει*

$$\beta^\star \|\bar{Q}_h(t) - P(t))\|_S \leq \Big\{ \frac{1}{k_m} \int_{t^{m-1}}^{t^m} \|\boldsymbol{\varphi}(t) - \Pi_h \boldsymbol{\varphi}(t)\|_{V^\star}^2 dt \Big\}^{1/2}. \tag{4.83}$$

Απόδειξη. Αφαιρώντας κατά μέλη την (4.35) από τη σχέση για την πίεση του Λήμματος 4.2.1, για $t \in I_m$, παίρνουμε

$$
\begin{aligned}
b(\mathbf{v}_h, Q_h(t) - P(t)) = &-\langle[\hat{\mathbf{U}}(t) - \mathbf{U}(t)]_t, \mathbf{v}_h\rangle - a(\mathbf{U}(t) - \mathbf{U}(t^{n-\frac{1}{2}}), \mathbf{v}_h) \\
&- \langle \mathbf{f}(t^{n-\frac{1}{2}}) - \Pi_h \boldsymbol{\varphi}(t), \mathbf{v}_h\rangle \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h.
\end{aligned} \tag{4.84}
$$

Ολοκληρώνοντας την (4.84) ως προς t στο διάστημα I_m και διαιρώντας στη συνέχεια με k_m, έχουμε

$$
\begin{aligned}
b(\mathbf{v}_h, \bar{Q}_h(t) - P(t)) = &-\langle \frac{1}{k_m}\int_{t^{m-1}}^{t^m} [\hat{\mathbf{U}}_t(t) - \mathbf{U}_t(t)]dt, \mathbf{v}_h\rangle \\
&- a(\frac{1}{k_m}\int_{t^{m-1}}^{t^m} [\mathbf{U}(t) - \mathbf{U}(t^{n-\frac{1}{2}})]dt, \mathbf{v}_h) \\
&- \langle \frac{1}{k_m}\int_{t^{m-1}}^{t^m} [\mathbf{f}(t^{n-\frac{1}{2}}) - \Pi_h \boldsymbol{\varphi}(t)]dt, \mathbf{v}_h\rangle \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h.
\end{aligned} \tag{4.85}
$$

Θα υπολογίσουμε αρχικά τον πρώτο όρο του δεξιού μέλους της (4.85). Έχουμε

$$
\begin{aligned}
\langle \frac{1}{k_m}\int_{t^{m-1}}^{t^m} [\hat{\mathbf{U}}_t(t) - \mathbf{U}_t(t)]dt, \mathbf{v}_h\rangle = &\frac{1}{k_m}\langle[\hat{\mathbf{U}}(t^m) - \mathbf{U}(t^m)], \mathbf{v}_h\rangle \\
&- \frac{1}{k_m}\langle[\hat{\mathbf{U}}(t^{m-1}) - \mathbf{U}(t^{m-1})], \mathbf{v}_h\rangle = 0,
\end{aligned} \tag{4.86}
$$

αφού οι $\mathbf{U}$ και $\hat{\mathbf{U}}$ λαμβάνουν τις ίδιες τιμές στους κόμβους $t^0, \ldots, t^N$. Επίσης, για το δεύτερο όρο του δεξιού μέλους της (4.85), παίρνουμε

$$
a(\frac{1}{k_m}\int_{t^{m-1}}^{t^m} [\mathbf{U}(t) - \mathbf{U}(t^{n-\frac{1}{2}})]dt, \mathbf{v}_h) = 0, \tag{4.87}
$$

δεδομένου ότι ο κανόνας του μέσου ολοκληρώνει ακριβώς γραμμικές συναρτήσεις. Τέλος, για τον τρίτο όρο του δεξιού μέλους της (4.85), έχουμε

$$
\langle \mathbf{f}(t^{n-\frac{1}{2}}) - \Pi_h \boldsymbol{\varphi}(t), \mathbf{v}_h\rangle = \langle \mathbf{f}(t^{n-\frac{1}{2}}) - \boldsymbol{\varphi}(t), \mathbf{v}_h\rangle + \langle \boldsymbol{\varphi}(t) - \Pi_h \boldsymbol{\varphi}(t), \mathbf{v}_h\rangle \tag{4.88}
$$

για κάθε $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$. Βάσει του ορισμού (4.36) της $\boldsymbol{\varphi}$ και χρησιμοποιώντας πάλι το επιχείρημα ότι ο κανόνας του μέσου ολοκληρώνει ακριβώς γραμμικές συναρτήσεις,

συμπεραίνουμε ότι

$$\langle \frac{1}{k_m}\int_{t^{m-1}}^{t^m}[\mathbf{f}(t^{n-\frac{1}{2}})-\boldsymbol{\varphi}(t)]dt, \mathbf{v}_h\rangle = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h. \tag{4.89}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}\langle \frac{1}{k_m}\int_{t^{m-1}}^{t^m}[\mathbf{f}(t^{n-\frac{1}{2}})-\Pi_h\boldsymbol{\varphi}(t)], \mathbf{v}_h\rangle &= \frac{1}{k_m}\int_{t^{m-1}}^{t^m}\langle \boldsymbol{\varphi}(t)-\Pi_h\boldsymbol{\varphi}(t), \mathbf{v}_h\rangle \\ &\le \frac{1}{k_m}\int_{t^{m-1}}^{t^m}\|\boldsymbol{\varphi}(t)-\Pi_h\boldsymbol{\varphi}(t)\|_{V^\star}\|\mathbf{v}_h\|_V \\ &\le \Big\{\frac{1}{k_m}\int_{t^{m-1}}^{t^m}\|\boldsymbol{\varphi}(t)-\Pi_h\boldsymbol{\varphi}(t)\|_{V^\star}^2 dt\Big\}^{1/2}\|\mathbf{v}_h\|_V.\end{aligned} \tag{4.90}$$

Συνδυάζοντας τις (4.86), (4.87) και (4.90), από την (4.85) παίρνουμε, για $t \in I_m$,

$$b(\mathbf{v}_h, \bar{Q}_h(t)-P(t)) \le \Big\{\frac{1}{k_m}\int_{t^{m-1}}^{t^m}\|\boldsymbol{\varphi}(t)-\Pi_h\boldsymbol{\varphi}(t)\|_{V^\star}^2 dt\Big\}^{1/2}\|\mathbf{v}_h\|_V \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h. \tag{4.91}$$

Από τη διακριτή συνθήκη inf-sup (4.15) λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}\beta^\star\|\bar{Q}_h(t)-P(t)\|_S &\le \sup_{\mathbf{v}_h\in\mathbf{V}_h}\frac{b(\mathbf{v}_h, \bar{Q}_h(t)-P(t))}{\|\mathbf{v}_h\|\mathbf{v}_h} \\ &\le \Big\{\frac{1}{k_m}\int_{t^{m-1}}^{t^m}\|\boldsymbol{\varphi}(t)-\Pi_h\boldsymbol{\varphi}(t)\|_{V^\star}^2 dt\Big\}^{1/2}.\end{aligned} \tag{4.92}$$

□

Παίρνοντας στη σχέση (4.41) το εσωτερικό γινόμενο με $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ συμπεραίνουμε ότι, για $t \in I_n$,

$$\langle \hat{\mathbf{U}}_t(t) - \tilde{\Delta}_h\mathbf{U}(t)) - \Pi_h\boldsymbol{\varphi}(t), \mathbf{v}\rangle = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}. \tag{4.93}$$

Αφαιρώντας κατά μέλη την (4.44) από τη διαφορική εξίσωση (4.8), έχουμε

$$\begin{aligned}b(\mathbf{v}, p(t)-Q(t)) = &-a(\mathbf{u}-\mathbf{W}, \mathbf{v}) - \langle [\mathbf{u}(t)-\hat{\mathbf{U}}(t)]_t, \mathbf{v}\rangle \\ &+ \langle \mathbf{f}(t)-\Pi_h\boldsymbol{\varphi}(t), \mathbf{v}\rangle \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}.\end{aligned} \tag{4.94}$$

Λήμμα 4.2.4. *Έστω $\bar{p}$ και $\bar{Q}$ όπως ορίστηκαν στις σχέσεις* (4.81) *και* (4.82)*, αντίστοιχα. Τότε, για $t \in I_m$, ισχύει*

$$\begin{aligned}\hat{\beta}\|\bar{p}(t) - \bar{Q}(t)\|_S \leq & \big\{\frac{1}{k_m}\int_{t^{m-1}}^{t^m} \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{W}(t)\|_{\mathbf{V}}^2 dt\big\}^{1/2} \\ & + \sum_{j=m-1}^{m} \big\{\|\mathbf{u}(t^j) - \hat{\mathbf{U}}(t^j)\|_{\mathbf{V}^\star}\big\} \\ & + \big\{\frac{1}{k_m}\int_{t^{m-1}}^{t^m} \|\mathbf{f}(t) - \Pi_h\boldsymbol{\varphi}(t)\|_{\mathbf{V}^\star}^2 dt\big\}^{1/2},\end{aligned} \tag{4.95}$$

όπου $\hat{\beta}$ η σταθερά της συνθήκης inf-sup (4.10).

Απόδειξη. Ολοκληρώνοντας την (4.94) ως προς t στο διάστημα I_m, και διαιρώντας με k_m, έχουμε

$$\begin{aligned}b(\mathbf{v}, \bar{p}(t) - \bar{Q}(t)) = & -a(\frac{1}{k_m}\int_{t^{m-1}}^{t^m} [\mathbf{u}(t) - \mathbf{W}(t)]dt, \mathbf{v}) \\ & - \langle[\frac{1}{k_m}\int_{t^{m-1}}^{t^m} [\mathbf{u}(t) - \hat{\mathbf{U}}(t)]_t(t)dt, \mathbf{v}\rangle \\ & + \langle\frac{1}{k_m}\int_{t^{m-1}}^{t^m} [\mathbf{f}(t) - \Pi_h\boldsymbol{\varphi}(t)]dt, \mathbf{v}\rangle \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}.\end{aligned} \tag{4.96}$$

Θα εκτιμήσουμε χωριστά κάθε όρο του δεξιού μέλους της παραπάνω σχέσης. Για τον πρώτο όρο έχουμε

$$-a(\frac{1}{k_m}\int_{t^{m-1}}^{t^m} [\mathbf{u}(t) - \mathbf{W}(t)]dt, \mathbf{v}) \leq \frac{1}{k_m}\int_{t^{m-1}}^{t^m} \|[\mathbf{u}(t) - \mathbf{W}(t)]dt\|_{\mathbf{V}}\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}. \tag{4.97}$$

Τώρα

$$\begin{aligned}\frac{1}{k_m}\int_{t^{m-1}}^{t^m} \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{W}(t)\|_{\mathbf{V}} dt \leq & \frac{1}{k_m}\big\{\int_{t^{m-1}}^{t^m} 1dt\big\}^{1/2}\big\{\int_{t^{m-1}}^{t^m} \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{W}(t)\|_{\mathbf{V}}^2 dt\big\}^{1/2} \\ = & \frac{1}{\sqrt{k_m}}\big\{\int_{t^{m-1}}^{t^m} \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{W}(t)\|_{\mathbf{V}}^2 dt\big\}^{1/2}.\end{aligned} \tag{4.98}$$

Επομένως, για κάθε $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, έχουμε την εκτίμηση

(4.99)
$$-a(\frac{1}{k_m}\int_{t^{m-1}}^{t^m}[\mathbf{u}(t)-\mathbf{W}(t)]dt,\mathbf{v}) \leq \frac{1}{\sqrt{k_m}}\Big\{\int_{t^{m-1}}^{t^m}\|\mathbf{u}(t)-\mathbf{W}(t)\|_{\mathbf{V}}^2 dt\Big\}^{1/2}\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}.$$

Ομοίως, για κάθε $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, αποδεικνύουμε ότι

$$\begin{aligned}\langle[\frac{1}{k_m}\int_{t^{m-1}}^{t^m}[\mathbf{u}-\hat{\mathbf{U}}]_t(t)dt,\mathbf{v}\rangle &\leq \|\frac{1}{k_m}\int_{t^{m-1}}^{t^m}[\mathbf{u}-\hat{\mathbf{U}}]_t(t)dt\|_{\mathbf{V}^\star}\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}\\ &\leq \frac{1}{\sqrt{k_m}}\|[\mathbf{u}(t^m)-\hat{\mathbf{U}}(t^m)]-[\mathbf{u}(t^{m-1})-\hat{\mathbf{U}}(t^{m-1})]\|_{\mathbf{V}^\star}\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}.\end{aligned} \tag{4.100}$$

Επομένως

$$\begin{aligned}\langle[\frac{1}{k_m}\int_{t^{m-1}}^{t^m}[\mathbf{u}-\hat{\mathbf{U}}]_t(t)dt,\mathbf{v}\rangle &\leq \|\frac{1}{k_m}\int_{t^{m-1}}^{t^m}[\mathbf{u}-\hat{\mathbf{U}}]_t(t)dt\|_{\mathbf{V}^\star}\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}\\ &\leq \frac{1}{\sqrt{k_m}}\Big\{\sum_{j=m-1}^{m}\|\mathbf{u}(t^j)-\hat{\mathbf{U}}(t^j)\|_{\mathbf{V}^\star}\Big\}\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}.\end{aligned} \tag{4.101}$$

Για τον τελευταίο όρο της (4.96), έχουμε

$$\begin{aligned}\langle\frac{1}{k_m}\int_{t^{m-1}}^{t^m}[\mathbf{f}(t)-\Pi_h\boldsymbol{\varphi}(t)]dt,\mathbf{v}\rangle &\leq \|\frac{1}{k_m}\int_{t^{m-1}}^{t^m}[\mathbf{f}(t)-\Pi_h\boldsymbol{\varphi}(t)]dt\|_{\mathbf{V}^\star}\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}\\ &\leq \Big\{\frac{1}{k_m}\int_{t^{m-1}}^{t^m}\|\mathbf{f}(t)-\Pi_h\boldsymbol{\varphi}(t)\|_{\mathbf{V}^\star}^2 dt\Big\}^{1/2}\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}} \quad \forall\mathbf{v}\in\mathbf{V}.\end{aligned} \tag{4.102}$$

Ο ισχυρισμός του λήμματος έπεται από τις (4.102), (4.101) και (4.102) σε συνδυασμό με τη συνθήκη inf-sup (4.10). □

Τελικά έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα εκ των υστέρων εκτίμησης του σφάλματος για την πίεση σε πλήρως διακριτά σχήματα, στα οποία για τη χρονική διακριτοποίηση χρησιμοποιείται η μέθοδος Crank-Nicolson.

Θεώρημα 4.2.2. (Εκτιμήσεις σφάλματος για την πίεση.) *Έστω* $(\mathbf{u},p)$ *η λύση του δυναμικού προβλήματος Stokes* (4.4) *και* $\big(P^n\big)_{0\leq n\leq N}$ *η ακολουθία προσεγγίσεων για την πίεση που παράγεται από το πλήρως διακριτό σχήμα* (4.30). *Επίσης, θεωρούμε τις κατά τμήματα σταθερές συνάρτησεις* $\bar{p}$ *και* P *που ορίστηκαν στις* (4.81) *και* (4.34),

αντίστοιχα, και τον εκτιμητή $\mathcal{E}_{\text{pres}}$ *που ορίστηκε στην* Υπόθεση 4.1.1. *Τότε, για* $0 < t^n \leq T$, *έχουμε*

$$\begin{aligned}
\max_{0\leq t\leq t^n} \|\bar{p}(t) - P(t)\|_S \leq{}& \frac{1}{\beta^\star}\sum_{m=1}^{n}\Big\{\frac{1}{k_m}\int_{t^{m-1}}^{t^m} \|\boldsymbol{\varphi}(t) - \Pi_h\boldsymbol{\varphi}(t)\|_{V^\star}^2 dt\Big\}^{1/2} \\
&+ \frac{1}{\hat{\beta}}\sum_{m=1}^{n}\Big\{\frac{1}{k_m}\int_{t^{m-1}}^{t^m} \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{W}(t)\|_{\mathbf{V}}^2 dt\Big\}^{1/2} \\
&+ \frac{1}{\hat{\beta}}\sum_{m=1}^{n}\sum_{j=m-1}^{m}\big\{\|\mathbf{u}(t^j) - \hat{\mathbf{W}}(t^j)\|_{\mathbf{V}^\star} + \|\hat{\mathbf{W}}(t^j) - \hat{\mathbf{U}}(t^j)\|_{\mathbf{V}^\star}\big\} \\
&+ \frac{1}{\hat{\beta}}\sum_{m=1}^{n}\Big\{\frac{1}{k_m}\int_{t^{m-1}}^{t^m} \|\mathbf{f}(t) - \Pi_h\boldsymbol{\varphi}(t)\|_{\mathbf{V}^\star}^2 dt\Big\}^{1/2} \\
&+ \Big\{\frac{1}{k_m}\int_{t^{m-1}}^{t^m} \big(\mathcal{E}_{\text{pres}}((\mathbf{U}(t), Q_h), \tilde{\Delta}_h\mathbf{U}; S)\big)^2 dt\Big\}^{1/2}.
\end{aligned}$$

Απόδειξη. Ολοκληρώνοντας τη σχέση (4.145) ως προς t στο διάστημα I_m και διαιρώντας και τα δύο μέλη με k_m, έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k_m}\int_{t^{m-1}}^{t^m}[p(t) - P(t)]dt &= \frac{1}{k_m}\int_{t^{m-1}}^{t^m}[p(t) - Q(t)]dt \\
&+ \frac{1}{k_m}\int_{t^{m-1}}^{t^m}[Q(t) - Q_h(t)]dt + \frac{1}{k_m}\int_{t^{m-1}}^{t^m}[Q(t) - P(t)]dt.
\end{aligned} \tag{4.103}$$

Τότε, για $t \in I_m$, βάσει των ορισμών των κατά τμήματα σταθερών συναρτήσεων στο χρόνο $\bar{p}$, $\bar{Q}$, και $\bar{Q}_h$ και της τριγωνικής ανισότητας, έχουμε

$$\begin{aligned}
\|\bar{p}(t) - P^m\|_S &= \|\bar{p}(t) - P(t)\|_S \\
&\leq \|\bar{p}(t) - \bar{Q}(t)\|_S + \|\bar{Q}(t) - \bar{Q}_h(t)\|_S + \|\bar{Q}_h(t) - P(t)\|_S.
\end{aligned} \tag{4.104}$$

Τονίζουμε ότι ο μεσαίος όρος του δεξιού μέλους μπορεί να εκτιμηθεί χρησιμοποιώντας την Υπόθεση 4.1.1, αφού για σταθερό $t \in [0, T]$, η $(\mathbf{U}(t), Q_h)$ είναι η λύση πεπερασμένων στοιχείων (4.48) του στατικού προβλήματος Stokes (4.42) με ακριβή

λύση την $(\mathbf{W}, Q)$. Συνεπώς, για $t \in I_m$,

$$
\begin{aligned}
\|\bar{Q}(t) - \bar{Q}_h(t)\|_S &= \|\frac{1}{k_m}\int_{t^{m-1}}^{t^m}[Q(t) - Q_h(t)]dt\|_S \\
&\leq \big\{\frac{1}{k_m}\int_{t^{m-1}}^{t^m}\|Q(t) - Q_h(t)\|_S^2 dt\big\}^{1/2} \\
&\leq \big\{\frac{1}{k_m}\int_{t^{m-1}}^{t^m}\big(\mathcal{E}_{\text{pres}}((\mathbf{U}(t), Q_h), \tilde{\Delta}_h\mathbf{U}; S)\big)^2 dt\big\}^{1/2}
\end{aligned}
\tag{4.105}
$$

Για την εκτίμηση των άλλων δύο όρων χρησιμοποιούμε τα αποτελέσματα στα Λήμματα 4.2.3 και 4.2.4 και η απόδειξη του θεωρήματος ολοκληρώθηκε. □

Συνοψίζοντας, διατυπώνουμε το βασικό αποτέλεσμα αυτής της παραγράφου σχετικά με τις εκ των υστέρων εκτιμήσεις για την ταχύτητα και την πίεση για τα πλήρως διακριτά σχήματα (4.30) των δυναμικών εξισώσεων Stokes (4.4)

Θεώρημα 4.2.3. (Εκ των υστέρων εκτιμήσεις σφάλματος για την ταχύτητα και την πίεση.) *Έστω* $\mathbf{u}$ *η λύση του δυναμικού προβλήματος Stokes* (4.4), *και* $(\mathbf{U}, P)$ *οι συναρτήσεις που ορίστηκαν στις* (4.33) *και* (4.34), *αντίστοιχα, βάσει της ακολουθίας των προσεγγίσεων* $\big(\mathbf{U}^n, P^n\big)_{0\leq n\leq N}$ *που παράγει το πλήρως διακριτό σχήμα* (4.30). *Επίσης, έστω* $\hat{U}$ *η ανακατασκευή Crank-Nicolson της* U, (4.38). *Τότε, για* $0 < t \leq t^n$, *έχουμε την βέλτιστης τάξης εκ των υστέρων εκτίμηση για την ταχύτητα*

$$
\begin{aligned}
&\|(\mathbf{u} - \hat{\mathbf{U}})(t)\|_{\mathbf{H}}^2 + \int_0^t \|(\mathbf{u} - \mathbf{U})(s)\|_{\mathbf{V}}^2 ds + \frac{1}{2}\int_0^t \|(\mathbf{u} - \hat{\mathbf{U}})(s)\|_{\mathbf{V}}^2 ds \\
&\quad\leq \|\mathbf{u}^0 - \mathbf{u}_h^0\|_{\mathbf{H}}^2 + \big(\mathcal{E}(\mathbf{u}_h^0, \tilde{\Delta}_h\mathbf{u}_h^0; \mathbf{H})\big)^2 + \max_{0<t\leq t^n}\big(\mathcal{E}((\hat{\mathbf{U}}(s), \hat{Q}_h)\tilde{\Delta}_h\hat{\mathbf{U}}(s); \mathbf{H})\big)^2 \\
&\quad+ \int_0^{t^n}\big(\mathcal{E}((\mathbf{U}(s), Q_h), \tilde{\Delta}_h\mathbf{U}(s); \mathbf{V})\big)^2 ds + \frac{1}{2}\int_0^{t^n}\big(\mathcal{E}((\hat{\mathbf{U}}(s), \hat{Q}_h), \tilde{\Delta}_h\hat{\mathbf{U}}(s); \mathbf{V})\big)^2 ds \\
&\quad+ 4\int_0^{t^n}\big(\mathcal{E}((\hat{\mathbf{U}}_t(s), \hat{Q}_{h,t}), \tilde{\Delta}_h\hat{\mathbf{U}}_t(s); \mathbf{V}^\star)\big)^2 ds \\
&\quad+ 4C_p\int_0^{t^n}\|\mathbf{f}(s) - \Pi_h\boldsymbol{\varphi}(s)\|_{\mathbf{H}}^2 ds + c\sum_{m=1}^n k_m^5\big\{\frac{1}{2}\|A_h^2\bar{\partial}\mathbf{U}^m\|_{\mathbf{H}} \\
&\quad+ \frac{1}{k_m}\|A_h[\Pi_h\mathbf{f}(t^{m-\frac{1}{2}}) - \Pi_h\mathbf{f}(t^{m-1})]\|_{\mathbf{H}}\big\}.
\end{aligned}
$$

Επίσης, ισχύει η ακόλουθη εκ των υστέρων εκτίμηση για την πίεση

$$\begin{aligned}\max_{0\le t\le t^n}\|\bar{p}(t)-P(t)\|_S \le \frac{C_p}{\hat{\beta}}\sum_{m=1}^{n}\big\{\|\mathbf{u}(t^{m-1})-\hat{\mathbf{U}}(t^{m-1})\|_{\mathbf{H}}+\|\mathbf{u}(t^m)-\hat{\mathbf{U}}(t^m)\|_{\mathbf{H}}\big\}\\ +\frac{1}{\hat{\beta}}\sum_{m=1}^{n}\big\{\frac{1}{k_m}\int_{t^{m-1}}^{t^m}2\|\mathbf{u}(t)-\mathbf{U}(t)\|_{\mathbf{V}}^2+2\big(\mathcal{E}((\mathbf{U}(t),Q_h),\tilde{\Delta}_h\mathbf{U}(t);\mathbf{V})\big)^2dt\big\}^{1/2}\\ +\big(\frac{1}{\beta^\star}+\frac{C_p}{\hat{\beta}}\big)\sum_{m=1}^{n}\big\{\frac{1}{k_m}\int_{t^{m-1}}^{t^m}\|\mathbf{f}(t)-\Pi_h\boldsymbol{\varphi}(t)\|_{\mathbf{H}}^2dt\big\}^{1/2}\\ +\big\{\frac{1}{k_m}\int_{t^{m-1}}^{t^m}\big(\mathcal{E}_{\text{pres}}((\mathbf{U}(t),Q_h),\tilde{\Delta}_h\mathbf{U};S)\big)^2dt\big\}^{1/2}.\end{aligned}$$

Και στις δύο εκτιμήσεις C_p είναι η σταθερά της ανισότητας Poincaré, $c:=\int_0^1 t^2(1-t)^2dt=\frac{1}{30}$ και $\mathcal{E}$ οι εκτιμητές για την ταχύτητα και $\mathcal{E}_{\text{pres}}$ οι εκτιμητές για την πίεση, αντίστοιχα, που ορίστηκαν στην Υπόθεση 4.1.1.

4.2.2 Η $\vartheta-$κλασματική μέθοδος

Εφαρμόζουμε τη $\vartheta-$κλασματική μέθοδο στο πρόβλημα (4.11) για να οδηγηθούμε στο πλήρως διακριτό σχήμα: Ζητείται ζεύγος $(\mathbf{U}^n,P^n)\in\mathbf{V}_h\times S_h,\ 1\le n\le N$, με ενδιάμεσες προσεγγίσεις $(U^{n-1+\vartheta},P^{n-1+\vartheta})$, $(\mathbf{U}^{n-\vartheta},P^{n-\vartheta})$, τέτοιο ώστε

$$\mathbf{U}^0=\mathbf{u}_h^0 \quad \text{στο } \Omega \tag{4.106}$$

και, για κάθε $n,\ 1 \le n \le N$, και για κάθε $(\mathbf{v}_h, q_h) \in \mathbf{V}_h \times S_h$,

$$
(4.107)\qquad \begin{cases}
\langle \dfrac{\mathbf{U}^{n-1+\vartheta} - \mathbf{U}^{n-1}}{\vartheta k_n}, \mathbf{v}_h\rangle + a(\alpha \mathbf{U}^{n-1+\vartheta}, \mathbf{v}_h) + a(\beta \mathbf{U}^{n-1}, \mathbf{v}_h) \\
\qquad\qquad + b(\mathbf{v}_h, P^{n-1+\vartheta}) = \langle \mathbf{f}^{n-1}, \mathbf{v}_h\rangle \\
\qquad\qquad\quad b(\mathbf{U}^{n-1+\vartheta}, q_h) = 0, \\
\langle \dfrac{\mathbf{U}^{n-\vartheta} - \mathbf{U}^{n-1+\vartheta}}{\tilde{\vartheta} k_n}, \mathbf{v}_h\rangle + a(\beta \mathbf{U}^{n-\vartheta}, \mathbf{v}_h) + a(\alpha \mathbf{U}^{n-1+\vartheta}, \mathbf{v}_h) \\
\qquad\qquad + b(\mathbf{v}_h, P^{n-\vartheta}) = \langle \mathbf{f}^{n-\vartheta}, \mathbf{v}_h\rangle \\
\qquad\qquad\quad b(\mathbf{U}^{n-\vartheta}, q_h) = 0, \\
\langle \dfrac{\mathbf{U}^{n} - \mathbf{U}^{n-\vartheta}}{\vartheta k_n}, \mathbf{v}_h\rangle + a(\alpha \mathbf{U}^{n}, \mathbf{v}_h) + a(\beta \mathbf{U}^{n-\vartheta}, \mathbf{v}_h) \\
\qquad\qquad + b(\mathbf{v}_h, P^{n}) = \langle \mathbf{f}^{n-\vartheta}, \mathbf{v}_h\rangle \\
\qquad\qquad\quad b(\mathbf{U}^{n}, p_h) = 0,
\end{cases}
$$

με $\mathbf{u}_h^0$ κατάλληλη προσέγγιση της αρχικής ταχύτητας από τον $\mathbf{Z}_h$. Την παραπάνω μέθοδο μπορούμε να την γράψουμε και ως

(4.108)

$$
\begin{cases}
\langle \mathbf{U}^{n-1+\vartheta} - \mathbf{U}^{n-1}, \mathbf{v}_h\rangle + \beta\vartheta k_n a(\mathbf{U}^{n-1}, \mathbf{v}_h) + \alpha\vartheta k_n a(\mathbf{U}^{n-1+\vartheta}, \mathbf{v}_h) \\
+ k_n b(\mathbf{v}_h, \vartheta P^{n-1+\vartheta}) = \vartheta k_n \langle \mathbf{f}^{n-1}, \mathbf{v}_h\rangle \\
\quad b(\mathbf{U}^{n-1+\vartheta}, q_h) = 0, \\
\langle \mathbf{U}^{n-\vartheta} - \mathbf{U}^{n-1}, \mathbf{v}_h\rangle + \beta\vartheta k_n a(\mathbf{U}^{n-1}, \mathbf{v}_h) + \alpha(\vartheta + \tilde{\vartheta}) k_n a(\mathbf{U}^{n-1+\vartheta}, \mathbf{v}_h) \\
+ \beta\tilde{\vartheta} k_n a(\mathbf{U}^{n-\vartheta}, \mathbf{v}_h) + k_n b(\mathbf{v}_h, \vartheta P^{n-1+\vartheta} + \tilde{\vartheta} P^{n-\vartheta}) = k_n \langle \vartheta \mathbf{f}^{n-1} + \tilde{\vartheta} \mathbf{f}^{n-\vartheta}, \mathbf{v}_h\rangle \\
\quad b(\mathbf{U}^{n-\vartheta}, q_h) = 0, \\
\langle \mathbf{U}^{n} - \mathbf{U}^{n-1}, \mathbf{v}_h\rangle + k_n \big\{ \beta\vartheta a(\mathbf{U}^{n-1}, \mathbf{v}_h) + \alpha(\vartheta + \tilde{\vartheta}) a(\mathbf{U}^{n-1+\vartheta}, \mathbf{v}_h) \\
+ \beta(\vartheta + \tilde{\vartheta}) a(\mathbf{U}^{n-\vartheta}, \mathbf{v}_h) + \alpha\vartheta a(\mathbf{U}^{n}, \mathbf{v}_h) \big\} \\
+ k_n b(\mathbf{v}_h, \vartheta P^{n-1+\vartheta} + \tilde{\vartheta} P^{n-\vartheta} + \vartheta P^{n}) = k_n \langle \vartheta \mathbf{f}^{n-1} + (\vartheta + \tilde{\vartheta}) \mathbf{f}^{n-\vartheta}, \mathbf{v}_h\rangle \\
\quad b(\mathbf{U}^{n}, q_h) = 0.
\end{cases}
$$

Ειδικότερα για τις $\vartheta-$κλασματικές προσεγγίσεις της $\mathbf{u}$ έχουμε: Ζητείται $\mathbf{U}^n \in \mathbf{Z}_h,\ 1 \leq n \leq N$, με ενδιάμεσες προσεγγίσεις $\mathbf{U}^{n-1+\vartheta},\ \mathbf{U}^{n-\vartheta}$, τέτοια ώστε

$$\mathbf{U}^0 = \mathbf{u}_h^0 \tag{4.109}$$

με $\mathbf{u}_h^0 \in \mathbf{Z}_h$, και, για κάθε $n,\ 1 \leq n \leq N$, και για κάθε $\mathbf{v}_h \in \mathbf{Z}_h$,

$$\begin{cases} \langle \dfrac{\mathbf{U}^{n-1+\vartheta} - \mathbf{U}^{n-1}}{\vartheta k_n}, \mathbf{v}_h \rangle + a(\alpha \mathbf{U}^{n-1+\vartheta} + \beta \mathbf{U}^{n-1}, \mathbf{v}_h) = \langle \mathbf{f}^{n-1}, \mathbf{v}_h \rangle \\ \langle \dfrac{\mathbf{U}^{n-\vartheta} - \mathbf{U}^{n-1+\vartheta}}{\tilde{\vartheta} k_n}, \mathbf{v}_h \rangle + a(\beta \mathbf{U}^{n-\vartheta} + \alpha \mathbf{U}^{n-1+\vartheta}, \mathbf{v}_h) = \langle \mathbf{f}^{n-\vartheta}, \mathbf{v}_h \rangle \\ \langle \dfrac{\mathbf{U}^{n} - \mathbf{U}^{n-\vartheta}}{\vartheta k_n}, \mathbf{v}_h \rangle + a(\alpha \mathbf{U}^{n} + \beta \mathbf{U}^{n-\vartheta}, \mathbf{v}_h) = \langle \mathbf{f}^{n-\vartheta}, \mathbf{v}_h \rangle. \end{cases} \tag{4.110}$$

ή, χρησιμοποιώντας τους ορισμούς (4.27) του τελεστή $\tilde{\Delta}_h$ και (4.26) του τελεστή της L^2-προβολής Π_h ,

$$\begin{cases} \mathbf{U}^{n-1+\vartheta} - \mathbf{U}^{n-1} - \beta \vartheta k_n \tilde{\Delta}_h \mathbf{U}^{n-1} - \alpha \vartheta k_n \tilde{\Delta}_h \mathbf{U}^{n-1+\vartheta} = \vartheta k_n \Pi_h \mathbf{f}^{n-1} \\ \mathbf{U}^{n-\vartheta} - \mathbf{U}^{n-1} - \beta \vartheta k_n \tilde{\Delta}_h \mathbf{U}^{n-1} - \alpha(\vartheta + \tilde{\vartheta}) k_n \mathbf{U}^{n-1+\vartheta} \\ \qquad - \beta \tilde{\vartheta} k_n \tilde{\Delta}_h \mathbf{U}^{n-\vartheta} = \vartheta k_n \Pi_h \mathbf{f}^{n-1} + \tilde{\vartheta} k_n \Pi_h \mathbf{f}^{n-\vartheta} \\ \mathbf{U}^{n} - \mathbf{U}^{n-1} - \beta \vartheta k_n \tilde{\Delta}_h \mathbf{U}^{n-1} - (\vartheta + \tilde{\vartheta}) k_n \{\alpha \tilde{\Delta}_h \mathbf{U}^{n-1+\vartheta} + \beta \tilde{\Delta}_h \mathbf{U}^{n-\vartheta}\} \\ \qquad - \alpha \vartheta k_n \tilde{\Delta}_h \mathbf{U}^{n} = k_n \{\vartheta \Pi_h \mathbf{f}^{n-1} + (\vartheta + \tilde{\vartheta}) \Pi_h \mathbf{f}^{n-\vartheta}\}. \end{cases} \tag{4.111}$$

4.3 Η ανακατασκευή χρόνου-χώρου για τη $\vartheta-$κλασματική μέθοδο

Κατ' αρχάς ορίζουμε μια κατά τμήματα γραμμική προσέγγιση $\mathbf{U} : [0, T] \to \mathbf{Z}_h$ της $\mathbf{u}$ με γραμμική παρεμβολή των τιμών $\mathbf{U}^{n-1}$ και $\mathbf{U}^n$,

$$\mathbf{U}(t) = \mathbf{U}(\beta t^{n-1} + \alpha t^n) + (t - (\beta t^{n-1} + \alpha t^n)) \bar{\partial} \mathbf{U}^n, \quad t \in I_n, \tag{4.112}$$

ή

$$\mathbf{U}(t) = \beta\mathbf{U}^{n-1} + \alpha\mathbf{U}^n + (t - (\beta t^{n-1} + \alpha t^n))\bar{\partial}\mathbf{U}^n, \quad t \in I_n. \tag{4.113}$$

Για την πίεση ορίζουμε μια κατά τμήματα σταθερή προσέγγιση $P : [0, T] \to S_h$ ως

$$P(t) = \vartheta P^{n-1+\vartheta} + \tilde{\vartheta} P^{n-\vartheta} + \vartheta P^n, \quad t \in I_n. \tag{4.114}$$

Όπως στην περίπτωση της μεθόδου Crank-Nicolson, αρχικά θα αποδείξουμε βέλτιστης τάξης εκ των υστέρων εκτιμήσεις σφάλματος για την ταχύτητα και στη συνέχεια, βασιζόμενοι σ' αυτές, θα αποδείξουμε μια εκ των υστέρων εκτίμηση σφάλματος για την πίεση. Στο πρώτο βήμα θα ορίσουμε τη χρονική ανακατασκευή ως μια συνεχή, κατά τμήματα πολυωνυμική συνάρτηση στο χρόνο, $\hat{\mathbf{U}} : [0, T] \to \mathbf{Z}_h$, βαθμού το πολύ δύο. Γι' αυτόν το σκοπό, εισάγουμε πρώτα μια κατά τμήματα πολυωνυμική συνάρτηση $\boldsymbol{\Phi}$ η οποία θα περιέχεται στον ορισμό της $\hat{\mathbf{U}}$. Έστω $\boldsymbol{\varphi} : I_n \to \mathbf{H}$ η γραμμική παρεμβάλλουσα της $\mathbf{f}$ στους κόμβους t^{n-1} και $t^{n-\vartheta}$,

$$\boldsymbol{\varphi}(t) := \mathbf{f}(t^{n-1}) + \frac{\mathbf{f}(t^{n-\vartheta}) - \mathbf{f}(t^{n-1})}{(\vartheta + \tilde{\vartheta})k_n}(t - t^{n-1}), \quad t \in I_n. \tag{4.115}$$

Ορίζουμε την $\boldsymbol{\Phi}$ ως $\boldsymbol{\Phi}(t) := \int_{t^{n-1}}^{t} \boldsymbol{\varphi}(s)ds$, $t \in I_n$, δηλαδή

$$\boldsymbol{\Phi}(t) = (t - t^{n-1})\mathbf{f}(t^{n-1}) + \frac{(t - t^{n-1})^2}{2}\frac{\mathbf{f}(t^{n-\vartheta}) - \mathbf{f}(t^{n-1})}{(\vartheta + \tilde{\vartheta})k_n}. \tag{4.116}$$

Η $\boldsymbol{\Phi}$ θα έχει, όπως και η αντίστοιχη συνάρτηση στην ανάλυση για τη χρονική ημιδιακριτοποίηση των εξισώσεων Stokes που ορίσαμε στο Κεφάλαιο 3, τις ιδιότητες

- $\boldsymbol{\Phi}(t^{n-1}) = 0$,
- $\boldsymbol{\Phi}(t^n) = k_n\{\vartheta\mathbf{f}(t^{n-1}) + (\vartheta + \tilde{\vartheta})\mathbf{f}(t^{n-\vartheta})\}$.

Αρχικά, ορίζουμε την ανακατασκευή $\hat{\mathbf{U}}$ της $\mathbf{U}$ ως

$$\hat{\mathbf{U}}(t) := \mathbf{U}^{n-1} + \int_{t^{n-1}}^{t} \tilde{\Delta}_h\mathbf{U}(s)ds - \tilde{\Delta}_h\mathbf{h}(t) + \Pi_h\boldsymbol{\Phi}(t), \quad t \in I_n, \tag{4.117}$$

όπου $\mathbf{h} : [0,T] \to \mathbf{Z}_h$ είναι πάλι η "διορθωτική συνάρτηση"

$$\begin{aligned}\mathbf{h}(t) := (\vartheta + \tilde{\vartheta})(t - t^{n-1})\{\alpha(\mathbf{U}(t^{n-1+\vartheta}) - \mathbf{U}^{n-1+\vartheta}) \\ + \beta(\mathbf{U}(t^{n-\vartheta}) - \mathbf{U}^{n-\vartheta})\},\ t \in I_n,\end{aligned} \tag{4.118}$$

με τις ιδιότητες:

- $\mathbf{h}(t^{n-1}) = 0,$
- $\mathbf{h}(t^n) := (\vartheta + \tilde{\vartheta})k_n\{\alpha(\mathbf{U}(t^{n-1+\vartheta}) - \mathbf{U}^{n-1+\vartheta}) + \beta(\mathbf{U}(t^{n-\vartheta}) - \mathbf{U}^{n-\vartheta})\}.$

Προφανώς, ισχύει

$$\hat{\mathbf{U}}(t^{n-1}) = \mathbf{U}^{n-1}.$$

Επιπλέον, υπολογίζοντας το ολοκλήρωμα στην (4.117) με τον κανόνα αριθμητικής ολοκλήρωσης (;;), παίρνουμε

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{U}}(t^n) = \mathbf{U}^{n-1} + k_n\{\beta\vartheta\tilde{\Delta}_h\mathbf{U}^{n-1} + \alpha(\vartheta + \tilde{\vartheta})\tilde{\Delta}_h\mathbf{U}^{n-1+\vartheta} \\ + (\vartheta + \tilde{\vartheta})\beta\tilde{\Delta}_h\mathbf{U}^{n-\vartheta} + \alpha\vartheta\tilde{\Delta}_h\mathbf{U}^n\} - \tilde{\Delta}_h\mathbf{h}(t^n) + \Pi_h\boldsymbol{\Phi}(t^n),\end{aligned} \tag{4.119}$$

και, σύμφωνα με την (4.111),

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{U}}(t^n) = \mathbf{U}^{n-1} + k_n\{\beta\vartheta\tilde{\Delta}_h\mathbf{U}^{n-1} + \alpha(\vartheta + \tilde{\vartheta})\tilde{\Delta}_h\mathbf{U}^{n-1+\vartheta} \\ + (\vartheta + \tilde{\vartheta})\beta\tilde{\Delta}_h\mathbf{U}^{n-\vartheta} + \alpha\vartheta\tilde{\Delta}_h\mathbf{U}^n\} \\ + k_n\{\vartheta\Pi_h\mathbf{f}(t^{n-1}) + (\vartheta + \tilde{\vartheta})\Pi_h\mathbf{f}(t^{n-\vartheta})\} = \mathbf{U}^n.\end{aligned} \tag{4.120}$$

Επομένως, οι $\hat{\mathbf{U}}$ και $\mathbf{U}$ λαμβάνουν τις ίδιες τιμές στους κόμβους $t^0, \ldots, t^N\cdot$ ειδικότερα η $\hat{\mathbf{U}} : [0,T] \to \mathbf{Z}_h$ είναι συνεχής συνάρτηση στο χρόνο. Επιπλέον,

$$\hat{\mathbf{U}}_t(t) = \tilde{\Delta}_h\mathbf{U}(t) - \tilde{\Delta}_h\mathbf{h}'(t) + \Pi_h\boldsymbol{\varphi}(t) \ \ t \in \ I_n. \tag{4.121}$$

Τώρα θα εισαγάγουμε τις *ανακατασκευές Stokes* των $\mathbf{U}$ και $\hat{\mathbf{U}}$.

Ορισμός 4.3.1. *(Η ανακατασκευή Stokes της* $\mathbf{U}$*) Για* $t \in [0,T]$*, έστω* $(\mathbf{W}, Q) \in$

$\mathbf{V} \times S$ *η ακριβής λύση του στατικού προβλήματος Stokes*

$$
\begin{aligned}
a(\mathbf{W}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, Q) &= -\langle \tilde{\Delta}_h \mathbf{U}(t), \mathbf{v} \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \\
b(\mathbf{W}, q) &= 0 \quad \forall q \in S.
\end{aligned} \tag{4.122}
$$

Θα αναφερόμαστε στην $(\mathbf{W}, Q) = (\mathbf{W}(t), Q(t))$ *ως* ανακατασκευή Stokes του ζεύγους $(\mathbf{U}(t), P(t))$.

Επαναλαμβάνουμε ότι οι $\mathbf{W} \in \mathbf{Z}$ και $Q \in S$ είναι, αντίστοιχα, οι λύσεις των ακόλουθων προβλημάτων

$$
a(\mathbf{W}, \mathbf{v}) = -\langle \tilde{\Delta}_h \mathbf{U}(t), \mathbf{v} \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{Z}, \tag{4.123}
$$

και

$$
b(\mathbf{v}, Q) = -a(\mathbf{W}, \mathbf{v}) - \langle \tilde{\Delta}_h \mathbf{U}(t), \mathbf{v} \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}. \tag{4.124}
$$

Επίσης, ορίζουμε

Ορισμός 4.3.2. *(Η ανακατασκευή Stokes της* $\hat{U}$*) Για* $t \in [0, T]$*, έστω* $(\hat{\mathbf{W}}, \hat{Q}) \in \mathbf{V} \times S$ *η ακριβής λύση του στατικού προβλήματος Stokes*

$$
\begin{aligned}
a(\hat{\mathbf{W}}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, \hat{Q}) &= -\langle \tilde{\Delta}_h \hat{\mathbf{U}}(t), \mathbf{v} \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \\
b(\hat{\mathbf{W}}, q) &= 0 \quad \forall q \in S,
\end{aligned} \tag{4.125}
$$

Θα αναφερόμαστε στην $(\hat{\mathbf{W}}, \hat{Q}) = (\hat{\mathbf{W}}(t), \hat{Q}(t))$ *ως* ανακατασκευή Stokes της $(\hat{\mathbf{U}}(t), P(t))$.

Όπως προηγουμένως, $\hat{\mathbf{W}} \in \mathbf{Z}$ και $\hat{Q} \in S$ είναι, αντίστοιχα, οι λύσεις των ακόλουθων προβλημάτων

$$
a(\hat{\mathbf{W}}, \mathbf{v}) = -\langle \tilde{\Delta}_h \hat{\mathbf{U}}(t), \mathbf{v} \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{Z}, \tag{4.126}
$$

και

$$
b(\mathbf{v}, \hat{Q}) = -a(\hat{\mathbf{W}}, \mathbf{v}) - \langle \tilde{\Delta}_h \hat{\mathbf{U}}(t), \mathbf{v} \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}. \tag{4.127}
$$

Θα προχωρήσουμε τώρα στην απόδειξη δύο βοηθητικών, για την ανάλυσή μας, αποτελεσμάτων.

Λήμμα 4.3.1. *Υποθέτουμε ότι το ζεύγος* $(\mathbf{W}, Q)$ *είναι η μοναδική λύση του προβλήματος του Stokes* (4.122) *και* $(\mathbf{W}_h, Q_h)$ *η ακόλουθη λύση πεπερασμένων στοιχείων*

$$\begin{aligned} a(\mathbf{W}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, Q_h) &= -\langle \tilde{\Delta}_h \mathbf{U}(t), \mathbf{v}_h \rangle \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \\ b(\mathbf{W}_h, q_h) &= 0 \quad \forall q_h \in S_h. \end{aligned} \tag{4.128}$$

Τότε η $(\mathbf{W}_h, Q_h)$ *ικανοποιεί*

$$\mathbf{W}_h(t) = \mathbf{U}(t) \tag{4.129}$$

και

$$\begin{aligned} b(\mathbf{v}_h, Q_h(t)) = -\langle \hat{\mathbf{U}}_t(t), \mathbf{v}_h \rangle - a(\mathbf{U}(t), \mathbf{v}_h) - \langle \tilde{\Delta}_h \mathbf{h}'(t), \mathbf{v}_h \rangle \\ + \langle \Pi_h \boldsymbol{\varphi}(t), \mathbf{v}_h \rangle \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \end{aligned} \tag{4.130}$$

όπου $\mathbf{U}$ *είναι η κατά τμήματα γραμμική παρεμβάλλουσα των τιμών* $\mathbf{U}^n$, $n = 0, \ldots, N$, *που ορίσαμε στην* (4.112), *ενώ* $\mathbf{h}$ *και* $\boldsymbol{\varphi}$ *όπως ορίστηκαν στις* (4.118) *και* (4.115), *αντίστοιχα.*

Απόδειξη. Έστω $\mathbf{v}_h \in \mathbf{Z}_h$· τότε $b(\mathbf{v}_h, Q_h) = 0$ και

$$a(\mathbf{W}_h(t), \mathbf{v}_h) = -\langle \tilde{\Delta}_h \mathbf{U}(t), \mathbf{v}_h \rangle = a(\mathbf{U}(t), \mathbf{v}_h),$$

δηλαδή

$$a(\mathbf{W}_h(t) - \mathbf{U}(t), \mathbf{v}_h) = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{Z}_h. \tag{4.131}$$

Αφού $\mathbf{W}_h,\ \mathbf{U} \in \mathbf{Z}_h$ έχουμε $\mathbf{W}_h(t) = \mathbf{U}(t)$, και το πρώτο αποτέλεσμα του λήμματος έχει αποδειχτεί.

Λαμβάνοντας στη σχέση (4.121) το εσωτερικό γινόμενο με $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$ συμπεραί-

νουμε, για $t \in I_n$, ότι

$$\langle \hat{\mathbf{U}}_t(t) - \tilde{\Delta}_h \mathbf{U}(t) + \tilde{\Delta}_h \mathbf{h}'(t) - \Pi_h \boldsymbol{\varphi}(t), \mathbf{v}_h \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h. \tag{4.132}$$

Για σταθερό $t \in [0, T]$, η προσέγγιση $Q_h(t)$ είναι, κατά τα γνωστά, η λύση του προβλήματος

$$b(\mathbf{v}_h, Q_h(t)) = -\langle \tilde{\Delta}_h \mathbf{U}(t), \mathbf{v}_h \rangle - a(\mathbf{W}_h(t), \mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h.$$

Σύμφωνα με την $\mathbf{W}_h(t) = \mathbf{U}(t)$, και την (4.132) παίρνουμε ότι

$$b(\mathbf{v}_h, Q_h(t)) = -\langle \hat{\mathbf{U}}_t(t), \mathbf{v}_h \rangle - a(\mathbf{U}(t), \mathbf{v}_h) - \langle \tilde{\Delta}_h \mathbf{h}'(t), \mathbf{v}_h \rangle + \langle \Pi_h \boldsymbol{\varphi}(t), \mathbf{v}_h \rangle \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h,$$

και η απόδειξη του λήμματος έχει ολοκληρωθεί. □

Λήμμα 4.3.2. *Υποθέτουμε ότι το ζεύγος* $(\hat{\mathbf{W}}, \hat{Q})$ *είναι η μοναδική λύση του προβλήματος του Stokes* (4.125) *και* $(\hat{\mathbf{W}}_h, \hat{Q}_h)$ *η αντίστοιχη λύση πεπερασμένων στοιχείων, δηλαδή*

$$\begin{aligned} a(\hat{\mathbf{W}}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, \hat{Q}_h) &= -\langle \tilde{\Delta}_h \hat{\mathbf{U}}(t), \mathbf{v}_h \rangle \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \\ b(\hat{\mathbf{W}}_h, q_h) &= 0 \quad \forall q_h \in S_h. \end{aligned} \tag{4.133}$$

Τότε η προσεγγιστική λύση $\hat{\mathbf{W}}_h$ *για την ταχύτητα ικανοποιεί την*

$$\hat{\mathbf{W}}_h(t) = \hat{\mathbf{U}}(t). \tag{4.134}$$

Απόδειξη. Έστω $\mathbf{v}_h \in \mathbf{Z}_h$· τότε $b(\mathbf{v}_h, Q_h) = 0$ και

$$a(\hat{\mathbf{W}}_h(t), \mathbf{v}_h) = -\langle \tilde{\Delta}_h \hat{\mathbf{U}}(t), \mathbf{v}_h \rangle = a(\hat{\mathbf{U}}(t), \mathbf{v}_h),$$

δηλαδή

$$a(\hat{\mathbf{W}}_h(t) - \hat{\mathbf{U}}(t), \mathbf{v}_h) = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{Z}_h. \tag{4.135}$$

Αφού $\hat{\mathbf{W}}_h,\ \hat{\mathbf{U}} \in \mathbf{Z}_h$, έχουμε $\hat{\mathbf{W}}_h(t) = \hat{\mathbf{U}}(t)$, και το λήμμα μόλις αποδείχτηκε. □

4.3.1 Εκτιμήσεις σφάλματος

Σ' αυτή την ενότητα θα αποδείξουμε βέλτιστης τάξης εκ των υστέρων εκτιμήσεις για τις αριθμητικές προσεγγίσεις των πλήρως διακριτών σχημάτων που αναλύσαμε στην αμέσως προηγούμενη παράγραφο. Αρχικά θα αποδείξουμε εκ των υστέρων εκτιμήσεις για την ταχύτητα και στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας αυτές και τη συνθήκη inf-sup, θα αποδείξουμε μια εκ των υστέρων εκτίμηση για την πίεση.

Εισάγουμε τους συμβολισμούς:

$$\hat{\mathbf{e}} := \mathbf{u} - \hat{\mathbf{W}} \quad \text{και} \quad \mathbf{e} := \mathbf{u} - \mathbf{W}. \tag{4.136}$$

Λαμβάνοντας το εσωτερικό γινόμενο με $\mathbf{v} \in \mathbf{Z}$ στην (4.121) παίρνουμε

$$\langle \hat{\mathbf{U}}_t(t), \mathbf{v}\rangle = \langle \tilde{\Delta}_h \mathbf{U}(t), \mathbf{v}\rangle - \langle \tilde{\Delta}_h \mathbf{h}'(t), \mathbf{v}\rangle + \langle \Pi_h \boldsymbol{\varphi}(t), \mathbf{v}\rangle \quad t \in\ I_n. \tag{4.137}$$

Επομένως, για $t \in\ I_n$, βάσει του ορισμού (4.123) της $\mathbf{W}$, έχουμε

$$\langle \hat{\mathbf{U}}_t(t), v\rangle + a(\mathbf{W}(t), \mathbf{v}) = -\langle \tilde{\Delta}_h \mathbf{h}'(t), \mathbf{v}\rangle + \langle \Pi_h \boldsymbol{\varphi}(t), \mathbf{v}\rangle \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{Z}. \tag{4.138}$$

Αφαιρώντας την τελευταία εξίσωση από την

$$\langle \mathbf{u}_t(t), \mathbf{v}\rangle + a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}\rangle, \quad t \in\ I_n, \tag{4.139}$$

καταλήγουμε στην εξίσωση σφάλματος

$$\langle \hat{\mathbf{e}}_t, \mathbf{v}\rangle + a(\mathbf{e}, \mathbf{v}) = \langle \tilde{\Delta}_h \mathbf{h}'(t), \mathbf{v}\rangle + \langle \mathbf{f} - \Pi_h \boldsymbol{\varphi}, \mathbf{v}\rangle + \langle (\hat{\mathbf{U}} - \hat{\mathbf{W}})_t, \mathbf{v}\rangle, \quad t \in\ I_n. \tag{4.140}$$

Εφαρμόζουμε τεχνικές ενέργειας στην παραπάνω εξίσωση σφάλματος για να αποδείξουμε τις ακόλουθες εκτιμήσεις για την ταχύτητα

Θεώρημα 4.3.1. (Εκτιμήσεις σφάλματος στον $L^\infty(\mathbf{H})$ και στον $L^2(\mathbf{V})$ για την ταχύτητα.) *Έστω* $\mathbf{u}$ *η λύση του στατικού προβλήματος Stokes* (4.4) *και* $\mathbf{W}$, $\hat{\mathbf{W}}$ *οι*

λύσεις των δυναμικών προβλημάτων Stokes (4.122) *και* (4.125), *αντίστοιχα. Επίσης έστω* $\mathcal{E}$ *όπως ορίστηκε στην* Υπόθεση 4.1.1. *Τότε, για* $0 < t \leq T$, *έχουμε*

$$\begin{aligned}\|(\mathbf{u}-\hat{\mathbf{W}})(t)\|_{\mathbf{H}}^2 + \int_0^t \|(\mathbf{u}-\mathbf{W})(s)\|_{\mathbf{V}}^2 ds + \frac{1}{4}\int_0^t \|(\mathbf{u}-\hat{\mathbf{W}})(s)\|_{\mathbf{V}}^2 ds \\ \leq \|\mathbf{u}(0)-\hat{\mathbf{W}}(0)\|_{\mathbf{H}}^2 + 4\int_0^t \|\tilde{\Delta}_h \mathbf{h}'(s)\|_{\mathbf{V}^\star}^2 ds + 4\int_0^t \|(\hat{\mathbf{U}}-\hat{\mathbf{W}})_t(s)\|_{\mathbf{V}^\star}^2 ds \\ + 4\int_0^t \|\mathbf{f}(s)-\Pi_h\boldsymbol{\varphi}(s)\|_{\mathbf{V}^\star}^2 ds + \int_0^t \|\mathbf{W}(s)-\hat{\mathbf{W}}(s)\|_{\mathbf{V}^\star}^2 ds.\end{aligned}$$

Απόδειξη. Θέτουμε $\mathbf{v} = \hat{\mathbf{e}}$ στην εξίσωση σφάλματος (4.140) και έχουμε

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\hat{\mathbf{e}}(t)\|_{\mathbf{H}}^2 - \langle \tilde{\Delta}\mathbf{e}(t), \hat{\mathbf{e}}(t)\rangle = \langle \tilde{\Delta}_h \mathbf{h}'(t), \hat{\mathbf{e}}\rangle + \langle \mathbf{f} - \Pi_h\boldsymbol{\varphi}, \hat{\mathbf{e}}\rangle + \langle (\hat{\mathbf{U}}-\hat{\mathbf{W}})_t, \hat{\mathbf{e}}\rangle. \tag{4.141}$$

Τονίζουμε ότι $\hat{\mathbf{e}} \in \mathbf{Z}$ και συνεπώς, βάσει του ορισμού (4.25) του τελεστή Stokes, έχουμε

$$\begin{aligned}-\langle \tilde{\Delta}\mathbf{e}(t), \hat{\mathbf{e}}(t)\rangle &= -\langle \Delta\mathbf{e}(t), \hat{\mathbf{e}}(t)\rangle \\ &= \frac{1}{2}\|\mathbf{e}(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \frac{1}{2}\|\hat{\mathbf{e}}(t)\|_{\mathbf{V}}^2 - \frac{1}{2}\|\hat{\mathbf{e}}(t)-\mathbf{e}(t)\|_{\mathbf{V}}^2,\end{aligned}$$

επομένως,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\hat{\mathbf{e}}(t)\|_{\mathbf{H}}^2 + \frac{1}{2}\|\mathbf{e}(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \frac{1}{2}\|\hat{\mathbf{e}}(t)\|_{\mathbf{V}}^2 \leq \frac{1}{2}\|\hat{\mathbf{e}}(t)-\mathbf{e}(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \|\tilde{\Delta}_h\mathbf{h}'(t)\|_{\mathbf{V}^\star}\|\hat{\mathbf{e}}\|_{\mathbf{V}} \\ + \|(\mathbf{f}-\Pi_h\boldsymbol{\varphi})(t)\|_{\mathbf{V}^\star}\|\hat{\mathbf{e}}(t)\|_{\mathbf{V}} + \|(\hat{\mathbf{U}}-\hat{\mathbf{W}})_t(t)\|_{\mathbf{V}^\star}\|\hat{\mathbf{e}}(t)\|_{\mathbf{V}}.\end{aligned} \tag{4.142}$$

Χρησιμοποιώντας την αριθμητική γεωμετρική ανισότητα στο δεξιό μέλος, έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\hat{\mathbf{e}}(t)\|_{\mathbf{H}}^2 + \frac{1}{2}\|\mathbf{e}(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \frac{1}{2}\|\hat{\mathbf{e}}(t)\|_{\mathbf{V}}^2 \leq \frac{1}{2}\|(\mathbf{W}-\hat{\mathbf{W}})(t)\|_{\mathbf{V}}^2 \\ + 2\|\tilde{\Delta}_h\mathbf{h}'(t)\|_{\mathbf{V}^\star}^2 + \frac{1}{8}\|\hat{\mathbf{e}}(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + 2\|(\mathbf{f}-\Pi_h\boldsymbol{\varphi})(t)\|_{\mathbf{V}^\star}^2 \\ + \frac{1}{8}\|\hat{\mathbf{e}}(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + 2\|(\hat{\mathbf{U}}-\hat{\mathbf{W}})_t(t)\|_{\mathbf{V}^\star}^2 + \frac{1}{8}\|\hat{\mathbf{e}}(t)\|_{\mathbf{V}}^2,\end{aligned}$$

και συνεπώς

$$\frac{d}{dt}\|\hat{\mathbf{e}}(t)\|_{\mathbf{H}}^2 + \|\mathbf{e}(t)\|_{\mathbf{V}}^2 + \frac{1}{4}\|\hat{\mathbf{e}}(t)\|_{\mathbf{V}}^2 \leq \|(\mathbf{W}-\hat{\mathbf{W}})(t)\|_{\mathbf{V}}^2 \\ + 4\|\tilde{\Delta}_h\mathbf{h}'(t)\|_{\mathbf{V}^\star}^2 + 4\|(\mathbf{f}-\Pi_h\boldsymbol{\varphi})(t)\|_{\mathbf{V}^\star}^2 + 4\|(\hat{\mathbf{U}}-\hat{\mathbf{W}})_t\|_{\mathbf{V}^\star}^2 .$$

Ολοκληρώνοντας την τελευταία σχέση στο $[0,t],\ 0 \leq t \leq T$, παίρνουμε

$$\begin{aligned} &\|\hat{\mathbf{e}}(t)\|_{\mathbf{H}}^2 + \int_0^t \|\mathbf{e}(s)\|_{\mathbf{V}}^2 ds + \frac{1}{4}\int_0^t \|\hat{\mathbf{e}}(s)\|_{\mathbf{V}}^2 ds \leq \|\hat{\mathbf{e}}(0)\|_{\mathbf{H}}^2 \\ &+ 4\int_0^t \big\{\|\tilde{\Delta}_h\mathbf{h}'(t)\|_{\mathbf{V}^\star}^2 + \|(\mathbf{f}-\Pi_h\boldsymbol{\varphi})(s)\|_{\mathbf{V}^\star}^2 + \|(\hat{\mathbf{U}}-\hat{\mathbf{W}})_t(s)\|_{\mathbf{V}^\star}^2\big\} ds \\ &+ + \int_0^t \|(\mathbf{W}-\hat{\mathbf{W}})(s)\|_{\mathbf{V}}^2 ds, \end{aligned} \tag{4.143}$$

και έτσι η απόδειξη του θεωρήματος έχει ολοκληρωθεί. □

Ο προσδιορισμός άνω φράγματος για καθένα από τους όρους του δεξιού μέλους μπορεί να γίνει όπως στην αντίστοιχη παράγραφο για τις παραβολικές εξισώσεις. Θα προχωρήσουμε τώρα στην απόδειξη μιας εκ των υστέρων εκτίμησης για την προσέγγιση της πίεσης p.

Εκτίμηση σφάλματος για την πίεση. Σ' αυτήν την παράγραφο θα αποδείξουμε, χρησιμοποιώντας τις εκ των υστέρων εκτιμήσεις σφάλματος για την ταχύτητα, ανάλογες εκτιμήσεις για την πίεση.

Όπως είδαμε στην απόδειξη του Λήμματος 4.3.1, ενώ η $\mathbf{U}(t)$ είναι η λύση πεπερασμένων στοιχείων για την ταχύτητα του στατικού προβλήματος (4.122), δεν συμβαίνει το ίδιο με την πίεση $P(t)$. Η $P(t)$ δεν ταυτίζεται με τη λύση πεπερασμένων στοιχείων Q_h του στατικού προβλήματος Stokes με ακριβή λύση το ζεύγος $(\mathbf{W}, Q)$. Λαμβάνοντας υπόψιν τους ορισμούς (4.112) και (4.114) των συναρτήσεων $\mathbf{U}$ και P, αντίστοιχα το τελευταίο στάδιο της $\vartheta-$κλασματικής μεθόδου (4.108), για $t \in I_n$, μπορεί να γραφεί ως,

$$\begin{aligned} &\langle \mathbf{U}_t(t), \mathbf{v}_h\rangle + a(\mathbf{U}(t^n_{\alpha,\vartheta}), \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, P(t)) \\ &\qquad = a(\mathbf{h}'(t^n), \mathbf{v}_h) + \langle \vartheta\mathbf{f}(t^{n-1}) + (\vartheta+\tilde{\vartheta})\mathbf{f}(t^{n-\vartheta}), \mathbf{v}_h\rangle \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h \end{aligned} \tag{4.144}$$

με

$$t^n_{\alpha,\vartheta} = \beta t^{n-1} + \alpha(\vartheta + \tilde{\vartheta})t^{n-1+\vartheta} + \beta(\vartheta + \tilde{\vartheta})t^{n-\vartheta} + \alpha\vartheta t^n, \quad n = 1, \dots, N.$$

Για να αποδείξουμε τις επιθυμητές εκ των υστέρων εκτιμήσεις θα διασπάσουμε πάλι, όπως και στην περίπτωση της μεθόδου Crank-Nicolson, το σφάλμα της πίεσης ως

$$\varepsilon := p - P = (p - Q) + (Q - Q_h) + (Q_h - P). \tag{4.145}$$

Επίσης, ορίζουμε τις κατά τμήματα σταθερές στο χρόνο συναρτήσεις:

$$\bar{Q}_h(t) = \frac{1}{k_m} \int_{t^{m-1}}^{t^m} Q_h(s)ds, \quad t \in I_m, \tag{4.146}$$

$$\bar{p}(t) = \frac{1}{k_m} \int_{t^{m-1}}^{t^m} p(t)dt, \quad t \in I_m \tag{4.147}$$

και

$$\bar{Q}(t) = \frac{1}{k_m} \int_{t^{m-1}}^{t^m} Q(t)dt, \quad t \in I_m, \tag{4.148}$$

οι οποίες θα χρησιμοποιηθούν στην απόδειξη του βασικού αποτελέσματος αυτής της παραγράφου. Αρχικά θα αποδείξουμε δύο ενδιάμεσα αποτελέσματα στη μορφή λημμάτων.

Λήμμα 4.3.3. *Έστω Q_h η λύση πεπερασμένων στοιχείων για την πίεση που ορίσαμε στο Λήμμα 4.3.1 και $P(t)$ η κατά τμήματα σταθερή συνάρτηση που ορίσαμε στην* (4.114). *Τότε, για $t \in I_m$, ισχύει*

$$\begin{aligned} \beta^\star \|\bar{Q}_h(t) - P(t))\|_S \le \Big\{ \frac{1}{k_m} \int_{t^{m-1}}^{t^m} \|\boldsymbol{\varphi}(t) - \Pi_h \boldsymbol{\varphi}(t)\|^2_{V^\star} dt \Big\}^{1/2} \\ + \big\{ \|\mathbf{h}'(t^m)\|_{\mathbf{V}} + \|\tilde{\Delta}_h \mathbf{h}'(t^m)\|_{\mathbf{V}^\star} \big\}. \end{aligned} \tag{4.149}$$

Απόδειξη. Λύνοντας την (4.144) ως προς $b(\mathbf{v}_h, P(t))$ και έπειτα αφαιρώντας την

κατά μέλη από τη σχέση για την πίεση του Λήμματος ;;, για $t \in I_m$, παίρνουμε

(4.150)
$$\begin{aligned} b(\mathbf{v}_h, Q_h(t) - P(t)) = &-\langle[\hat{\mathbf{U}}_t(t) - \mathbf{U}_t(t)], \mathbf{v}_h\rangle - a(\mathbf{U}(t) - \mathbf{U}(t^n_{\alpha,\vartheta}), \mathbf{v}_h) \\ &- a(\mathbf{h}'(t^n), \mathbf{v}_h) - \langle\tilde{\Delta}_h \mathbf{h}'(t^n), \mathbf{v}_h\rangle \\ &- \langle\vartheta \mathbf{f}(t^{n-1}) + (\vartheta + \tilde{\vartheta})\mathbf{f}(t^{n-\vartheta}) - \Pi_h \boldsymbol{\varphi}(t), \mathbf{v}_h\rangle \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h. \end{aligned}$$

Ολοκληρώνοντας την (4.150) ως προς t στο διάστημα I_m και διαιρώντας στη συνέχεια με k_m, έχουμε

$$\begin{aligned} b(\mathbf{v}_h, \bar{Q}_h(t) - P(t)) = &-\langle\frac{1}{k_m}\int_{t^{m-1}}^{t^m}[\hat{\mathbf{U}}_t(t) - \mathbf{U}_t(t)]dt, \mathbf{v}_h\rangle \\ &- a(\frac{1}{k_m}\int_{t^{m-1}}^{t^m}[\mathbf{U}(t) - \mathbf{U}(t^n_{\alpha,\vartheta})]dt, \mathbf{v}_h) \\ &- a(\frac{1}{k_m}\int_{t^{m-1}}^{t^m}\mathbf{h}'(t^n)dt, \mathbf{v}_h) - \langle\frac{1}{k_m}\int_{t^{m-1}}^{t^m}\tilde{\Delta}_h \mathbf{h}'(t^n)dt, \mathbf{v}_h\rangle \\ &- \langle\frac{1}{k_m}\int_{t^{m-1}}^{t^m}\vartheta \mathbf{f}(t^{n-1}) + (\vartheta + \tilde{\vartheta})\mathbf{f}(t^{n-\vartheta}) - \Pi_h \boldsymbol{\varphi}(t)dt, \mathbf{v}_h\rangle \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h. \end{aligned} \tag{4.151}$$

Θα υπολογίσουμε αρχικά τον πρώτο όρο του δεξιού μέλους της (4.151). Έχουμε

$$\begin{aligned} \langle\frac{1}{k_m}\int_{t^{m-1}}^{t^m}[\hat{\mathbf{U}}_t(t) - \mathbf{U}_t(t)]dt, \mathbf{v}_h\rangle = &\frac{1}{k_m}\langle[\hat{\mathbf{U}}(t^m) - \mathbf{U}(t^m)], \mathbf{v}_h\rangle \\ &- \frac{1}{k_m}\langle[\hat{\mathbf{U}}(t^{m-1}) - \mathbf{U}(t^{m-1})], \mathbf{v}_h\rangle = 0, \end{aligned} \tag{4.152}$$

αφού οι $\mathbf{U}$ και $\hat{\mathbf{U}}$ έχουν τις ίδιες τιμές στους κόμβους $t^0, \ldots, t^N$. Επίσης, για το δεύτερο όρο του δεξιού μέλους της (4.151), παίρνουμε

$$a(\frac{1}{k_m}\int_{t^{m-1}}^{t^m}[\mathbf{U}(t) - \mathbf{U}(t^n_{\alpha,\vartheta})]dt, \mathbf{v}_h) = 0, \tag{4.153}$$

δεδομένου ότι ο κανόνας (;;) ολοκληρώνει ακριβώς γραμμικές συναρτήσεις. Επίσης,

έχουμε

(4.154)
$$-\frac{1}{k_m}\int_{t^{m-1}}^{t^m}\big\{a(\mathbf{h}'(t^n),\mathbf{v}_h)+\langle\tilde{\Delta}_h\mathbf{h}'(t^n),\mathbf{v}_h\rangle\big\}=-\big\{a(\mathbf{h}'(t^n),\mathbf{v}_h)+\langle\tilde{\Delta}_h\mathbf{h}'(t^n),\mathbf{v}_h\rangle\big\}$$
$$\leq\big\{\|\mathbf{h}'(t^m)\|_{\mathbf{V}}+\|\tilde{\Delta}_h\mathbf{h}'(t^m)\|_{\mathbf{V}^\star}\big\}\|\mathbf{v}_h\|_{\mathbf{V}}\quad\forall\mathbf{v}_h\in\mathbf{V}_h.$$

Τέλος, για τον τελευταίο όρο του δεξιού μέλους της (4.151), έχουμε

$$\begin{aligned}\langle\vartheta\mathbf{f}(t^{n-1})+(\vartheta+\tilde{\vartheta})\mathbf{f}(t^{n-\vartheta})-\Pi_h\boldsymbol{\varphi}(t),\mathbf{v}_h\rangle&=\langle\boldsymbol{\varphi}(t)-\Pi_h\boldsymbol{\varphi}(t),\mathbf{v}_h\rangle\\&+\langle\vartheta\mathbf{f}(t^{n-1})+(\vartheta+\tilde{\vartheta})\mathbf{f}(t^{n-\vartheta})-\boldsymbol{\varphi}(t),\mathbf{v}_h\rangle\end{aligned}\tag{4.155}$$

για κάθε $\mathbf{v}_h\in\mathbf{V}_h$. Βάσει του ορισμού της (4.115), η $\boldsymbol{\varphi}$ είναι η γραμμική παρεμβάλλουσα των τιμών $f(t^{n-1})$ και $f(t^{n-\vartheta})$, επομένως επαναλαμβάνοντας το επιχείρημα ότι ο κανόνας αριθμητικής ολοκλήρωσης (;;) είναι ακριβής για γραμμικές συναρτήσεις, συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned}&\langle\frac{1}{k_m}\int_{t^{m-1}}^{t^m}[\vartheta\mathbf{f}(t^{n-1})+(\vartheta+\tilde{\vartheta})\mathbf{f}(t^{n-\vartheta})-\boldsymbol{\varphi}(t)]dt,\mathbf{v}_h\rangle\\&\qquad\langle\frac{1}{k_m}\int_{t^{m-1}}^{t^m}[\vartheta\boldsymbol{\varphi}(t^{n-1})+(\vartheta+\tilde{\vartheta})\boldsymbol{\varphi}(t^{n-\vartheta})-\boldsymbol{\varphi}(t)]dt,\mathbf{v}_h\rangle=0,\end{aligned}\tag{4.156}$$

για κάθε $\mathbf{v}_h\in\mathbf{V}_h$. Επομένως,

$$\begin{aligned}\langle\frac{1}{k_m}\int_{t^{m-1}}^{t^m}[\mathbf{f}(t^{n-\frac{1}{2}})-\Pi_h\boldsymbol{\varphi}(t)],\mathbf{v}_h\rangle&=\frac{1}{k_m}\int_{t^{m-1}}^{t^m}\langle\boldsymbol{\varphi}(t)-\Pi_h\boldsymbol{\varphi}(t),\mathbf{v}_h\rangle\\&\leq\frac{1}{k_m}\int_{t^{m-1}}^{t^m}\|\boldsymbol{\varphi}(t)-\Pi_h\boldsymbol{\varphi}(t)\|_{V^\star}\|\mathbf{v}_h\|_V\\&\leq\big\{\frac{1}{k_m}\int_{t^{m-1}}^{t^m}\|\boldsymbol{\varphi}(t)-\Pi_h\boldsymbol{\varphi}(t)\|_{V^\star}^2dt\big\}^{1/2}\|\mathbf{v}_h\|_V\end{aligned}\tag{4.157}$$

Συνδυάζοντας τις (4.152), (4.153), (4.154) και (4.157), από την (4.151) παίρνουμε, για $t\in I_m$,

(4.158)
$$b(\mathbf{v}_h,\bar{Q}_h(t)-P(t))\leq\big\{\frac{1}{k_m}\int_{t^{m-1}}^{t^m}\|\boldsymbol{\varphi}(t)-\Pi_h\boldsymbol{\varphi}(t)\|_{V^\star}^2dt\big\}^{1/2}\|\mathbf{v}_h\|_V\quad\forall\mathbf{v}_h\in\mathbf{V}_h.$$

Σ' αυτό το σημείο εφαρμόζουμε τη διακριτή συνθήκη inf-sup (4.15) και έχουμε

$$\begin{aligned}\beta^\star\|\bar{Q}_h(t)-P(t)\|_S &\le \sup_{\mathbf{v}_h\in\mathbf{V}_h}\frac{b(\mathbf{v}_h,\bar{Q}_h(t)-P(t))}{\|\mathbf{v}_h\|_{\mathbf{V}_h}}\\ &\le \Big\{\frac{1}{k_m}\int_{t^{m-1}}^{t^m}\|\boldsymbol{\varphi}(t)-\Pi_h\boldsymbol{\varphi}(t)\|^2_{V^\star}dt\Big\}^{1/2}.\end{aligned} \tag{4.159}$$

□

Λαμβάνοντας στη σχέση (4.121) το εσωτερικό γινόμενο με $\mathbf{v}\in\mathbf{V}$ συμπεραίνουμε ότι, για $t\in\ I_n$, ισχύει

$$\langle\hat{\mathbf{U}}_t(t)-\tilde{\Delta}_h\mathbf{U}(t))+\tilde{\Delta}_h\mathbf{h}'(t)-\Pi_h\boldsymbol{\varphi}(t),\mathbf{v}\rangle=0\quad\forall\mathbf{v}\in\mathbf{V}. \tag{4.160}$$

Αφαιρώντας κατά μέλη την (4.124) από τη διαφορική εξίσωση (4.8), έχουμε

$$\begin{aligned}b(\mathbf{v},p(t)-Q(t)) &= -a(\mathbf{u}-\mathbf{W},\mathbf{v})-\langle[\mathbf{u}(t)-\hat{\mathbf{U}}(t)]_t,\mathbf{v}\rangle\\ &\quad+\langle\tilde{\Delta}_h\mathbf{h}'(t),\mathbf{v}\rangle+\langle\mathbf{f}(t)-\Pi_h\boldsymbol{\varphi}(t),\mathbf{v}\rangle\quad\forall\mathbf{v}\in\mathbf{V}.\end{aligned} \tag{4.161}$$

Λήμμα 4.3.4. *Έστω $\bar{p}$ και $\bar{Q}$ όπως ορίστηκαν στις σχέσεις* (4.147) *και* (4.148), *αντίστοιχα. Τότε, για $t\in I_m$, ισχύει*

$$\begin{aligned}\hat{\beta}\|\bar{p}(t)-\bar{Q}(t)\|_S &\le \Big\{\frac{1}{k_m}\int_{t^{m-1}}^{t^m}\|\mathbf{u}(t)-\mathbf{W}(t)\|^2_{\mathbf{V}}dt\Big\}^{1/2}\\ &\quad+\sum_{j=m-1}^{m}\big\{\|\mathbf{u}(t^j)-\hat{\mathbf{W}}(t^j)\|_{\mathbf{V}^\star}+\|\hat{\mathbf{W}}(t^j)-\hat{\mathbf{U}}(t^j)\|_{\mathbf{V}^\star}\big\}\\ &\quad+\|\tilde{\Delta}_h\mathbf{h}'(t^m)\|_{\mathbf{V}^\star}+\Big\{\frac{1}{k_m}\int_{t^{m-1}}^{t^m}\|\mathbf{f}(t)-\Pi_h\boldsymbol{\varphi}(t)\|^2_{\mathbf{V}^\star}dt\Big\}^{1/2},\end{aligned} \tag{4.162}$$

όπου $\hat{\beta}$ η σταθερά της συνθήκης inf-sup (4.10).

Απόδειξη. Ολοκληρώνοντας την (4.161) ως προς t στο διάστημα I_m, και διαιρώντας

με k_m, έχουμε

$$
\begin{aligned}
b(\mathbf{v}, \bar{p}(t) - \bar{Q}(t)) &= -a(\frac{1}{k_m}\int_{t^{m-1}}^{t^m}[\mathbf{u}(t) - \mathbf{W}(t)]dt, \mathbf{v}) \\
&- \langle \frac{1}{k_m}\int_{t^{m-1}}^{t^m}[\mathbf{u}(t) - \hat{\mathbf{U}}(t)]_t(t)dt, \mathbf{v}\rangle + \langle \frac{1}{k_m}\int_{t^{m-1}}^{t^m}\tilde{\Delta}_h\mathbf{h}'(t)dt, \mathbf{v}\rangle \\
&+ \langle \frac{1}{k_m}\int_{t^{m-1}}^{t^m}[\mathbf{f}(t) - \Pi_h\boldsymbol{\varphi}(t)]dt, \mathbf{v}\rangle \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}.
\end{aligned} \tag{4.163}
$$

Θα εκτιμήσουμε χωριστά κάθε όρο του δεξιού μέλους της παραπάνω σχέσης. Για τον πρώτον όρο έχουμε

$$
-a(\frac{1}{k_m}\int_{t^{m-1}}^{t^m}[\mathbf{u}(t) - \mathbf{W}(t)]dt, \mathbf{v}) \leq \frac{1}{k_m}\int_{t^{m-1}}^{t^m}\|[\mathbf{u}(t) - \mathbf{W}(t)]dt\|_{\mathbf{V}}\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}. \tag{4.164}
$$

Τώρα

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{k_m}\int_{t^{m-1}}^{t^m}\|\mathbf{u}(t) - \mathbf{W}(t)\|_{\mathbf{V}}dt &\leq \frac{1}{k_m}\Big\{\int_{t^{m-1}}^{t^m}1dt\Big\}^{1/2}\Big\{\int_{t^{m-1}}^{t^m}\|\mathbf{u}(t) - \mathbf{W}(t)\|_{\mathbf{V}}^2dt\Big\}^{1/2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{k_m}}\Big\{\int_{t^{m-1}}^{t^m}\|\mathbf{u}(t) - \mathbf{W}(t)\|_{\mathbf{V}}^2dt\Big\}^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Επομένως, για κάθε $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, έχουμε την εκτίμηση

$$
-a(\frac{1}{k_m}\int_{t^{m-1}}^{t^m}[\mathbf{u}(t) - \mathbf{W}(t)]dt, \mathbf{v}) \leq \frac{1}{\sqrt{k_m}}\Big\{\int_{t^{m-1}}^{t^m}\|\mathbf{u}(t) - \mathbf{W}(t)\|_{\mathbf{V}}^2dt\Big\}^{1/2}\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}. \tag{4.165}
$$

Ομοίως, για κάθε $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, αποδεικνύουμε ότι

$$
\begin{aligned}
\langle \frac{1}{k_m}\int_{t^{m-1}}^{t^m}[\mathbf{u}(t) - \hat{\mathbf{U}}(t)]_t(t)dt, \mathbf{v}\rangle &\leq \|\frac{1}{k_m}\int_{t^{m-1}}^{t^m}[\mathbf{u}(t) - \hat{\mathbf{U}}(t)]_t(t)dt\|_{\mathbf{V}^\star}\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}} \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{k_m}}\|[\mathbf{u}(t^m) - \hat{\mathbf{U}}(t^m)] - [\mathbf{u}(t^{m-1}) - \hat{\mathbf{U}}(t^{m-1})]\|_{\mathbf{V}^\star}\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}.
\end{aligned} \tag{4.166}
$$

Χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα, παίρνουμε

$$
\|\mathbf{u}(t^j) - \hat{\mathbf{U}}(t^j)\|_{\mathbf{V}^\star} \leq \|\mathbf{u}(t^j) - \hat{\mathbf{W}}(t^j)\|_{\mathbf{V}^\star} + \|\hat{\mathbf{W}}(t^j) - \hat{\mathbf{U}}(t^j)\|_{\mathbf{V}^\star}, \tag{4.167}
$$

με $j = m-1, m$, επομένως

(4.168)
$$\langle \frac{1}{k_m}\int_{t^{m-1}}^{t^m}[\mathbf{u}(t)-\hat{\mathbf{U}}(t)]_t(t)dt, \mathbf{v}\rangle \le \|\frac{1}{k_m}\int_{t^{m-1}}^{t^m}[\mathbf{u}(t)-\hat{\mathbf{U}}(t)]_t(t)dt\|_{\mathbf{V}^\star}\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}$$
$$\le \frac{1}{\sqrt{k_m}}\{\sum_{j=m-1}^{m}\|\mathbf{u}(t^j)-\hat{\mathbf{W}}(t^j)\|_{\mathbf{V}^\star}+\|\hat{\mathbf{W}}(t^j)-\hat{\mathbf{U}}(t^j)\|_{\mathbf{V}^\star}\}\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}.$$

Επίσης, έχουμε

$$\langle \frac{1}{k_m}\int_{t^{m-1}}^{t^m}\tilde{\Delta}_h\mathbf{h}'(t)dt, \mathbf{v}\rangle \le \|\frac{1}{k_m}\int_{t^{m-1}}^{t^m}\tilde{\Delta}_h\mathbf{h}'(t)dt\|_{\mathbf{V}^\star}\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}$$
$$\le \{\frac{1}{k_m}\int_{t^{m-1}}^{t^m}\|\tilde{\Delta}_h\mathbf{h}'(t)\|^2_{\mathbf{V}^\star}dt\}^{1/2}\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}} \quad \forall \mathbf{v}\in\mathbf{V}, \tag{4.169}$$

όπου

$$\frac{1}{k_m}\int_{t^{m-1}}^{t^m}\|\tilde{\Delta}_h\mathbf{h}'(t)\|_{\mathbf{V}^\star} = \|(\vartheta+\tilde{\vartheta})\tilde{\Delta}_h\{\alpha[\mathbf{U}(t^{n-1+\vartheta})-\mathbf{U}^{n-1+\vartheta}]$$
$$+\beta[\mathbf{U}(t^{n-\vartheta})-\mathbf{U}^{n-\vartheta}]\}\|^2_{\mathbf{V}^\star} \tag{4.170}$$

Επίσης, έχουμε

(4.171)
$$\langle \frac{1}{k_m}\int_{t^{m-1}}^{t^m}\tilde{\Delta}_h\mathbf{h}'(t)dt, \mathbf{v}\rangle = \langle \tilde{\Delta}_h\mathbf{h}'(t^m), \mathbf{v}\rangle \le \|\tilde{\Delta}_h\mathbf{h}'(t^m)\|_{\mathbf{V}^\star}\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}} \quad \forall \mathbf{v}\in\mathbf{V}.$$

Για τον τελευταίο όρο της (4.163), έχουμε

$$\langle \frac{1}{k_m}\int_{t^{m-1}}^{t^m}[\mathbf{f}(t)-\Pi_h\boldsymbol{\varphi}(t)]dt, \mathbf{v}\rangle \le \|\frac{1}{k_m}\int_{t^{m-1}}^{t^m}[\mathbf{f}(t)-\Pi_h\boldsymbol{\varphi}(t)]dt\|_{\mathbf{V}^\star}\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}}$$
$$\le \{\frac{1}{k_m}\int_{t^{m-1}}^{t^m}\|\mathbf{f}(t)-\Pi_h\boldsymbol{\varphi}(t)\|^2_{\mathbf{V}^\star}dt\}^{1/2}\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}} \quad \forall \mathbf{v}\in\mathbf{V}. \tag{4.172}$$

Ο ισχυρισμός του λήμματος έπεται από τις (4.165), (4.168), (4.171) και (4.172) σε συνδυασμό με τη συνθήκη inf-sup (4.10). □

Τελικά έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα εκ των υστέρων εκτίμησης του σφάλματος για την πίεση σε πλήρως διακριτά σχήματα στα οποία για τη χρονική διακριτο-

ποίηση χρησιμοποιείται η μέθοδος Crank-Nicolson.

Θεώρημα 4.3.2. (Εκτιμήσεις σφάλματος για την πίεση.) *Έστω* $(\mathbf{u}, p)$ *η λύση του δυναμικού προβλήματος Stokes* (4.4) *και* $\left(P^n\right)_{0\le n\le N}$ *η ακολουθία προσεγγίσεων για την πίεση που παράγεται από το πλήρως διακριτό σχήμα* (4.30). *Επίσης, θεωρούμε τις κατά τμήματα σταθερές συνάρτησεις* $\bar{p}$ *και* P *που ορίστηκαν στις* (4.81) *και* (4.34), *αντίστοιχα, και τον εκτιμητή* $\mathcal{E}_{\text{pres}}$ *που ορίστηκε στην* Υπόθεση 4.1.1. *Τότε, για* $0 < t^n \le T$, *έχουμε*

$$\begin{aligned}
\max_{0\le t\le t^n} \|\bar{p}(t) - P(t)\|_S \le{}& \frac{1}{\beta^\star}\sum_{m=1}^{n}\Big\{\frac{1}{k_m}\int_{t^{m-1}}^{t^m} \|\boldsymbol{\varphi}(t) - \Pi_h\boldsymbol{\varphi}(t)\|_{V^\star}^2 dt\Big\}^{1/2} \\
&+ \frac{1}{\beta^\star}\big\{\|\mathbf{h}'(t^m)\|_{\mathbf{V}} + \|\tilde{\Delta}_h\mathbf{h}'(t^m)\|_{\mathbf{V}^\star}\big\} \\
&+ \frac{1}{\hat{\beta}}\|\tilde{\Delta}_h\mathbf{h}'(t^m)\|_{\mathbf{V}^\star} + \frac{1}{\hat{\beta}}\sum_{m=1}^{n}\Big\{\frac{1}{k_m}\int_{t^{m-1}}^{t^m} \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{W}(t)\|_{\mathbf{V}}^2 dt\Big\}^{1/2} \\
&+ \frac{1}{\hat{\beta}}\sum_{m=1}^{n}\sum_{j=m-1}^{m}\big\{\|\mathbf{u}(t^j) - \hat{\mathbf{W}}(t^j)\|_{\mathbf{V}^\star} + \|\hat{\mathbf{W}}(t^j) - \hat{\mathbf{U}}(t^j)\|_{\mathbf{V}^\star}\big\} \\
&+ \frac{1}{\hat{\beta}}\sum_{m=1}^{n}\Big\{\frac{1}{k_m}\int_{t^{m-1}}^{t^m} \|\mathbf{f}(t) - \Pi_h\boldsymbol{\varphi}(t)\|_{\mathbf{V}^\star}^2 dt\Big\}^{1/2} \\
&+ \mathcal{E}_{\text{pres}}((\mathbf{W}_h, Q_h), \tilde{\Delta}_h\mathbf{U}; S)
\end{aligned}$$

Απόδειξη. Ολοκληρώνοντας τη σχέση (4.145) ως προς t στο διάστημα I_m και διαιρώντας και τα δύο μέλη με k_m, έχουμε

(4.173)
$$\begin{aligned}
\frac{1}{k_m}\int_{t^{m-1}}^{t^m}[p(t) - P(t)]dt = \frac{1}{k_m}\int_{t^{m-1}}^{t^m}[p(t) - Q(t)]dt + \frac{1}{k_m}\int_{t^{m-1}}^{t^m}[Q(t) - Q_h(t)]dt \\
+ \frac{1}{k_m}\int_{t^{m-1}}^{t^m}[Q(t) - P(t)]dt.
\end{aligned}$$

Τότε, για $t \in I_m$, βάσει των ορισμών των κατά τμήματα σταθερών συναρτήσεων στο χρόνο $\bar{p}$, $\bar{Q}$, και $\bar{Q}_h$ και της τριγωνικής ανισότητας, έχουμε

$$\begin{aligned}
\|\bar{p}(t) - P^m\|_S &= \|\bar{p}(t) - P(t)\|_S \\
&\le \|\bar{p}(t) - \bar{Q}(t)\|_S + \|\bar{Q}(t) - \bar{Q}_h(t)\|_S + \|\bar{Q}_h(t) - P(t)\|_S.
\end{aligned} \tag{4.174}$$

Τονίζουμε ότι ο μεσαίος όρος του δεξιού μέλους μπορεί να εκτιμηθεί χρησιμοποιώντας την Υπόθεση 4.1.1, αφού η Q_h είναι η λύση πεπερασμένων στοιχείων του στατικού προβλήματος Stokes με ακριβή λύση την Q. Για την εκτίμηση των άλλων δύο όρων χρησιμοποιούμε τα αποτελέσματα στα Λήμματα 4.2.3 και 4.2.4 και η απόδειξη του θεωρήματος ολοκληρώθηκε. $\square$

[1] M. Ainsworth and J. Oden. *A posteriori error estimation in finite element analysis*. Wiley Interscience, New York, 2000. pages 6, 67

[2] M. Ainsworth and J. T. Oden. A posteriori error estimators for the Stokes and Oseen equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 34(1):228–245, 1997. pages 37

[3] G. Akrivis, C. Makridakis, and R. H. Nochetto. A posteriori error estimates for the Crank-Nicolson method for parabolic equations. *Math. Comp.*, 75:511–531, 2006. pages 10, 11, 63, 66, 67, 68, 91

[4] D. N. Arnold and R. S. Falk. A uniformly accurate finite element method for the Reissner–Mindlin plate. *SIAM J. Numer. Anal.*, 26:1276–1290, 1989. pages 45

[5] A. Bergam, C. Bernardi, and Z. Mghazli. A posteriori analysis of the finite element discretization of some parabolic equations. *Math. Comp*, 74(251):1117–1138(electronic), 2005. pages 7, 14

[6] C. Bernardi and G. Raugel. A conforming finite element method for the time-dependent Navier-Stokes equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 22(3):455–473, 1985. pages 30

[7] S. C. Brenner and L. R. Scott. *The mathematical theory of finite element methods*. Springer-Verlag, New York, 1994. pages 38, 42

[8] F. Brezzi and M. Fortin. *Mixed and Hydrid Finite Element Method*. Springer Series in Computational Mathematics. Spinger-Verlag, New York, 1991. pages 18

[9] P. Chatzipantelidis. Finite volume method for elliptic pde's: A new approach. *Math. Model. and Numer. Anal.*, 36:307–324, 2002. pages 55, 56, 59

[10] P. Chatzipantelidis, R. Lazarov, and V. Thomée. Error estimates for a finite volume element method for parabolic equations in convex polygonal domains. *Numer. Methods Partial Differential Equations*, 20(5):650–674, 2004. pages 55

[11] P. Chatzipantelidis, C. Makridakis, and M. Plexousakis. A–posteriori error estimates for a finite volume method for the Stokes problem in two dimensions. *Appl. Num. Math.*, 46:45–58, 2003. pages 55, 56, 57, 59, 61

[12] Z. Chen and F. Jia. An adaptive finite element algorithm with reliable and efficient error control for linear parabolic problems. *Math. Comp.*, 73(247):1167–1193 (electronic), 2004. pages 7, 14

[13] S. H. Chou. Analysis and convergence of a covolume method for the generalized Stokes problem. *Math. Comp.*, 66(217):85–104, 1997. pages 55

[14] S. H. Chou and D. Y. Kwak. Analysis and convergence of a MAC-like scheme for the generalized Stokes problem. *Numer. Methods Partial Differential Equations*, 13(2):147–162, 1997. pages 55

[15] P. Ciarlet and J. Lions, editors. *Finite Element Method (Part 1)*, volume II of *Handbook of Numerical Analysis*. North Holland, Amsterdam, 1991. pages 38

[16] M. Crouzeix and P.-A. Raviart. Conforming and nonconforming finite element methods for solving the stationary Stokes equations. I. *Rev. Française Automat. Informat. Recherche Opérationnelle Sér. Rouge*, 7(R-3):33–75, 1973. pages 39, 41, 42

[17] E. Dari, R. Durán, and C. Padra. Error estimators for nonconforming finite element approximations of the Stokes problem. *Math. Comp.*, 64(211):1017–1033, 1995. pages 11, 37, 42, 44, 48, 59

[18] R. Dautray and J.-L. Lions. *Mathematical analysis and numerical methods for science and technology. Vol. 6.* Springer-Verlag, Berlin, 1993. Evolution problems. II, With the collaboration of Claude Bardos, Michel Cessenat, Alain Kavenoky, Patrick Lascaux, Bertrand Mercier, Olivier Pironneau, Bruno Scheurer and Rémi Sentis. pages 4, 5, 93

[19] K. Eriksson and C. Johnson. Adaptive finite element methods for parabolic problems. I. A linear model problem. *SIAM J. Numer. Anal.*, 28(1):43–77, 1991. pages 7, 14, 32, 36

[20] K. Eriksson and C. Johnson. Adaptive finite element methods for parabolic problems. II. Optimal error estimates in $L_\infty L_2$ and $L_\infty L_\infty$. *SIAM J. Numer. Anal.*, 32(3):706–740, 1995. pages 7

[21] K. Eriksson and C. Johnson. Adaptive finite element methods for parabolic problems. IV. Nonlinear problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 32(6):1729–1749, 1995. pages 7

[22] K. Eriksson, C. Johnson, and S. Larsson. Adaptive finite element methods for parabolic problems. VI. Analytic semigroups. *SIAM J. Numer. Anal.*, 35(4):1315–1325 (electronic), 1998. pages 7

[23] V. Girault and P.-A. Raviart. *Finite element methods for Navier-Stokes equations. Theory and algorithms*, volume 5 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1986. pages 42

[24] J. G. Heywood and R. Rannacher. Finite element approximation of the nonstationary Navier-Stokes problem. I. Regularity of solutions and second-order error estimates for spatial discretization. *SIAM J. Numer. Anal.*, 19(2):275–311, 1982. pages 15, 29, 97

[25] J. G. Heywood and R. Rannacher. An analysis of stability concepts for the Navier-Stokes equations. *J. Reine Angew. Math.*, 372:1–33, 1986. pages 97

[26] V. John. A posteriori L^2-error estimates for the nonconforming P_1/P_0-finite element discretization of the Stokes equations. *J. Comput. Appl. Math.*, 96(2):99–116, 1998. pages 37, 42, 49, 52

[27] H. Koch and V. A. Solonnikov. L_p-estimates for a solution to the nonstationary Stokes equations. Function theory and phase transitions. *J. Math. Sci. (New York)*, 106(3):3042–3072, 2001. pages 30

[28] H. Koch and V. A. Solonnikov. L_q-estimates of the first-order derivatives of solutions to the nonstationary Stokes problem. In *Nonlinear problems in mathematical physics and related topics, I*, volume 1 of *Int. Math. Ser.*, pages 203–218. Kluwer/Plenum, New York, 2002. pages 30

[29] O. A. Ladyzhenskaya. *The mathematical theory of viscous incompressible flow.* Gordon and Breach, 1969. pages 5

[30] O. Lakkis and C. Makridakis. Duality and elliptic reconstruction in a posteriori error control for parabolic problems. In preparation, IACM-FORTH, Heraklion, Greece, 2003. pages 36

[31] O. Lakkis and C. Makridakis. A posteriori error estimates and elliptic reconstruction in fully discrete approximations to parabolic problems. *Math. Comp.*, 75(256):1627–1658 (electronic), 2006. pages 7, 10, 14

[32] J. Leray. Etude de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problémes que pose l'hydrodynamique. *J. Math. Pures Appl.*, 12:1–82, 1933. pages 4

[33] P. L. Lions. *Mathematical topics in fluid mechanics. Volume 1: Incompressible models.* Oxford science Publications, 1996. pages 5

[34] C. Makridakis and R. H. Nochetto. Elliptic reconstruction and a posteriori error estimates for parabolic problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 41(4):1585–1594 (electronic), 2003. pages 7, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 63, 69, 70

[35] R. H. Nochetto, G. Savaré, and C. Verdi. A posteriori error estimates for variable time-step discretizations of nonlinear evolution equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 53(5):525–589, 2000. pages 7, 10

[36] M. Picasso. Adaptive finite elements for a linear parabolic problem. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 167(3-4):223–237, 1998. pages 7, 14

[37] L. R. Scott and S. Zhang. Finite element interpolation of nonsmooth functions satisfying boundary conditions. *Math. Comp.*, 54(190):483–493, 1990. pages 41

[38] V. A. Solonnikov. Estimates for solutions of a non-stationary linearized system of Navier-Stokes equations. *Trudy Mat. Inst. Steklov.*, 70:213–317, 1964. pages 30

[39] R. Temam. *Navier-Stokes equations. Theory and numerical analysis.* AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2001. Reprint of the 1984 edition. pages 4, 5, 41, 93

[40] V. Thomée. *Galerkin finite element methods for parabolic problems.* Springer-Verlag, Berlin, 1997. pages 32, 36

[41] R. Verfürth. A posteriori error estimation and adaptive mesh refinement techniques. *J. Comput. Appl. Math.*, 50(1-3):67–83, 1994. pages 67

[42] R. Verfürth. *A review of* a posteriori *error estimation and adaptive mesh-refinement techniques.* Wiley-Teubner, Chichester-Stuttgart, 1996. pages 6, 37, 42