ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΟΛΙΣΘΑΙΝΟΝΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

ΣΤΗΝ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΚΑΙ ΤΗΝ ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΑΝΤΩΝΗΣ Γ. ΣΠΥΡΙΔΑΚΗΣ

ΗΡΑΚΛΕΙΟ

ΜΑΡΤΙΟΣ 2005

Η μεταπτυχιακή αυτή εργασία πραγματοποιήθηκε στο τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Κρήτης, στα πλαίσια του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών « Μαθηματικά και Εφαρμογές τους » στην κατεύθυνση « Μαθηματικά για την Εκπαίδευση » και κατατέθηκε τον Μάρτιο του 2005.

Επιβλέπων Καθηγητής ήταν ο κ. Χρήστος Κουρουνιώτης.

Την επιτροπή αξιολόγησης αποτέλεσαν οι κ.κ.

- Α. Κουβιδάκης
- Χ. Κουρουνιώτης
- Κ. Τζανάκης.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Μερικά σχόλια……………………………………………………………………………1
Πρόλογος ……………………………………………………………………………..…4
Εισαγωγή……………………………………………………………………………...5
Ιστορικά Στοιχεία……………………………………………………………………..9

Κεφάλαιο 1: Ολίσθηση στο Ευκλείδειο επίπεδο
Πρόσθεση μεταξύ εφαρμοστών διανυσμάτων……………………………………..…16
Πρόσθεση μεταξύ ελεύθερων διανυσμάτων……………………………………...…18
Ιδιότητες αθροίσματος…………………………………………………………….…20
Πρόσθεση μεταξύ ολισθαινόντων διανυσμάτων……………………………………..21

Κεφάλαιο 2: Η ολίσθηση στο πλαίσιο του διανυσματικού χώρου των συστημάτων εφαρμοστών διανυσμάτων στον Ευκλείδειο χώρο
Ολίσθηση στον Ευκλείδειο χώρο……………………………………………………30
Στατική ισοδυναμία συστημάτων……………………………………………………35
Ζεύγος διανυσμάτων του χώρου…………………………………………………....47
Προσδιορισμός Κεντρικού Άξονα……………………………………………………56
Ταξινόμηση Συστημάτων………………………………………………………….…58
Εφαρμογές……………………………………………………………………………59

Κεφάλαιο 3: Ολίσθηση σε Αλγεβρική Γλώσσα…………………………………….…63

Κεφάλαιο 4: Ολίσθηση στην Υπερβολική Γεωμετρία
Βασικά στοιχεία Υπερβολικής Γεωμετρίας…………………………………………67
Εύρεση Ισομετρίας Ολίσθησης………………………………………………………69
Πρόσθεση μεταξύ ολισθαινόντων διανυσμάτων……………………………………..72
Ν. Ροπών……………………………………………………………………..………83
Ν. Συνημιτόνων……………………………………………………………………….84
Ζεύγος Διανυσμάτων…………………………………………………………………91

Αναφορές………………………………………………………………………………93

ΜΕΡΙΚΑ ΣΧΟΛΙΑ…

Όταν την Άνοιξη του 2002 έμαθα από έναν φίλο ότι στο Διατμηματικό Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα των τμημάτων Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών «Μαθηματικά και εφαρμογές τους» θα περιεχόταν –για πρώτη φορά– και η κατεύθυνση «Μαθηματικά για την Εκπαίδευση», αποφάσισα να συμμετάσχω στις απαραίτητες εισαγωγικές εξετάσεις της 26ης Ιουλίου. Τρεις συνάδελφοι της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης πετύχαμε σ' αυτές τις εξετάσεις (εγώ, ο Γιάννης και ο Δημήτρης) και αρχίσαμε να παρακολουθούμε σχεδόν καθημερινά τις παραδόσεις (το «σχεδόν» δεν υπονοεί κοπάνες, αλλά σχεδόν καθημερινές παραδόσεις).

Η αλήθεια είναι ότι, όντας απόφοιτος του τμήματος Μαθηματικών του Α. Π. Θ., δεν ήξερα πόσο πιο… αυστηρά ήταν τα πράγματα εδώ, στο τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Κρήτης. Δεν θα αδικήσω φυσικά τους –έτσι κι αλλιώς– αγαπημένους μου καθηγητές του Α. Π. Θ. Δάσκαλοι όπως η Σ. Καλπαζίδου, η Ε. Μπόρα, ο Α. Γαγάτσης, ο Ε. Ψωμόπουλος, ο αείμνηστος και παντοτινά αξέχαστος Δάσκαλος Νίκος Δανίκας, θα μείνουν χαραγμένοι στη μνήμη μου με ανεξίτηλο μελάνι. Όμως εδώ, συνειδητοποίησα ότι όλοι οι καθηγητές είναι για πάντα φοιτητές. Όχι μόνο για τη συνεχή έρευνα που γίνεται. Αλλά και γιατί, διδάσκοντας υποχρεωτικά διαφορετικό μάθημα καθένας τους από το προηγούμενο εξάμηνο, αποκτούν σφαιρική γνώση, ακριβώς όπως ένας φοιτητής. Σε τέτοιο κλίμα λοιπόν, δεν είναι δυνατόν οι μεταπτυχιακοί φοιτητές ούτε να παρακολουθούν από το σπίτι, ούτε να «περνάνε» μάθημα όποτε θέλουν. Κι αυτό είναι κάτι που, αν και δεν ήμασταν σε τομέα με πολλά βαριά μαθηματικά, το γευτήκαμε απολύτως. Και δε νιώθω τίποτα άλλο γι' αυτό, από την εσωτερική ανάγκη να ευχαριστήσω όλο το Τμήμα για αυτές τις συνθήκες. Ήμασταν 2,5 χρόνια κανονικοί μαθητές. Κι αυτό είναι που, τόσο σε μένα, όσο και στο Γιάννη και το Δημήτρη, κατέβασε το ρόλο του από καθ' έδρας καθηγητή που είχαμε στο μυαλό μας. Μακάρι να 'μασταν για πάντα μαθητές, και ας ήταν κουραστικό…

Μου είναι ειλικρινά πολύ δύσκολο να ξεχωρίσω κάποιον από τους καθηγητές που με τόσο πηγαίο και άφθονο ζήλο ένωσαν το πάθος τους για τη Μαθηματική Παιδεία του τόπου μας με το δικό μας. Ποιον απ' όλους να ξεχάσω;

Τον κ. Π. Στράντζαλο -ομότιμο Καθηγητή του τμήματος Μαθηματικών του Π. Αθηνών- που, επί τρία ολόκληρα εξάμηνα (με συνεχή ταξίδια από την Αθήνα) μας έδειχνε πόση δύναμη για διδασκαλία και μάθηση μπορεί να έχει μια ψυχή, ανεξαρτήτως ηλικίας; (Πράγματι, εν αρχή ην ο λόγος κ. Στράντζαλε, και τίποτα μονοσήμαντο, τίποτα τελειωμένο!). Την κ. Ε. Βασιλάκη, -επίκουρη καθηγήτρια του Παιδαγωγικού τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης του Π. Κρήτης- που, αν και άκρως… θεωρητική (ψυχολόγος γαρ), αγκάλιασε το μαθηματικό μας πάθος με τόση στοργή; Την κ. Σ. Παπαδοπούλου, -κα- θηγήτρια του τμήματος Μαθηματικών του Π. Κρήτης- που αντιμετώπισε την… χρονική μας απόσταση από τα βαριά μαθηματικά με τόση υπομονή; Τους κ.κ. Κ. Τζανάκη και Μ. Κούρκουλο, -αναπληρωτή καθηγητή και εντεταλμένο επίκουρο καθηγητή αντίστοιχα του Παιδαγωγικού τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης του Π. Κρήτης- που με το βαθύ θεωρητικό τους υπόβαθρο στα παιδαγωγικά, μας έδωσαν εύπεπτα το νόημα της διδακτικής των μαθηματικών; Τον κ. Θ. Μήτση, -επίκουρο καθηγητή του τμήματος Μαθηματικών του Π. Κρήτης- που με τον καθαρά διαμαντένιο χαρακτήρα του, το αξεπέραστο ήθος του και την ειλικρινή του διάθεση για μετάδοση γνώσεων μας μετέδωσε την όρεξη για μιγαδική ανάλυση; Τον κ. Α. Κουβιδάκη, -αναπληρωτή καθηγητή του τμήματος Μαθηματικών του Π. Κρήτης- που δέχτηκε τόσο πρόθυμα να αποτελέσει μέλος της τριμελούς επιτροπής της μεταπτυχιακής μου εργασίας;

Ή μήπως τον κ. Μ. Λάμπρου, -καθηγητή του τμήματος Μαθηματικών του Π. Κρήτης- στον οποίο οφείλουμε τόσα; Τόσα όσα μόνο αν τον γνωρίσει κάποιος θα καταλάβει; Πόσο αναπολώ τις –ομολογώ– ατέλειωτες ώρες έρευνας για τα σεμινάρια της Παρασκευής, που με τόσο μεράκι οργάνωνε, τις ώρες των μαθημάτων της Ιστορίας που, αν και είμαι πρακτικός τύπος, περνούσαν πριν το καταλάβω, τις έξυπνες ασκησούλες που τόσες φορές στο γραφείο του λύναμε (ο πληθυντικός χαριν ευγένειας προς τον… εαυτό μου). Δεν έχω χτυπήσει ούτε μια φορά τα τρία σχεδόν αυτά χρόνια το γραφείο Η308 (του κ. Λάμπρου) και να νιώσω ότι ενοχλώ – ίσα ίσα.

Δε θα μπορούσα με κανέναν τρόπο να ξεχάσω φυσικά τον άνθρωπο με τον οποίο, επί έναν χρόνο, για πάρα πολλές ώρες, περάσαμε φωτεινά και σκοτεινά μονοπάτια, προσπαθώντας να μεταφέρουμε τη θεωρία των ολισθαινόντων διανυσμάτων σε σύγχρονη γλώσσα, αλλά και να εφαρμόσουμε τη θεωρία αυτή σε άγνωστους –για μας τουλάχιστον– χώρους. Εννοώ τον κ. Χ. Κουρουνιώτη, -επίκουρο καθηγητή του τμήματος Μαθηματικών του Π. Κρήτης- ο οποίος με τόση υπομονή και καρτερικότητα βάδισε μαζί μου, πολλές φορές προς το άγνωστο, χωρίς να λείψει ούτε μια φορά από συνάντησή μας, αν και το πρόγραμμά του γενικά στο Πανεπιστήμιο είναι πολύ φορτωμένο. Χωρίς την άρτια επιστημονική του κατάρτιση, τη μεθοδικότητά του, αλλά προπαντός την ικανότητά του να διαβλέπει μέσα από στοίβες πράξεων και θεωρημάτων, η μεταπτυχιακή αυτή εργασία, είτε δεν θα τελείωνε ποτέ, είτε θα αποτελούσε απλά ένα φτωχό αντίγραφο μιας θεωρίας που ήδη υπήρχε.

Ηράκλειο, Μάρτιος 2005

Αντώνης Σπυριδάκης

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Σκοπός της εργασίας αυτής είναι η παρουσίαση του τρίτου είδους διανυσμάτων, των ολισθαινόντων, μια και τα δύο πρώτα είδη (εφαρμοστά, ελεύθερα) είναι γνωστά. Τα ολισθαίνοντα διανύσματα διδάσκονταν στα σχολεία της χώρας μας ως τα μέσα της δεκαετίας του ’60.

Στο πρώτο κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με έναν καθαρά εποπτικό τρόπο παρουσίασης των ολισθαινόντων διανυσμάτων στο Ευκλείδειο επίπεδο.

Στο δεύτερο κεφάλαιο θα δούμε την ολίσθηση στο χώρο, δηλαδή τη συμπεριφορά των ολισθαινόντων διανυσμάτων στον Ευκλείδειο χώρο, τόσο εποπτικά, όσο και θεωρητικά, εισάγοντας τους απαραίτητους – αλγεβρικούς – συμβολισμούς που θα διευκολύνουν τους υπολογισμούς μας. Για λόγους οικονομίας, με τους συμβολισμούς αυτούς θα γίνει και κάποια αναφορά στο $\mathbb{R}^2$ (που αποτελεί περιορισμό του $\mathbb{R}^3$).

Το τρίτο κεφάλαιο, θα αποτελέσει αφενός την οπτική γωνία της ολίσθησης από μια καθαρά αλγεβρική σκοπιά, και αφετέρου το συνδετικό κρίκο μεταξύ Ευκλείδειου και Υπερβολικού χώρου.

Σκοπός του τελευταίου κεφαλαίου είναι να αναδείξει τη γενίκευση των μαθηματικών κανόνων και δομών, όπου εφαρμόζοντας ολίσθηση στο Υπερβολικό επίπεδο, καταλήγουμε σε δύο σημαντικά συμπεράσματα: στην ισχύ του **Νόμου των ροπών** στη γλώσσα της Υπερβολικής γεωμετρίας, και στην εύρεση της συνισταμένης από τον κανόνα του παραλληλογράμμου στο υπερβολικό επίπεδο δύο διανυσμάτων. Τόσο ο πρώτος νόμος (**Ν. ροπών**) όσο και ο δεύτερος (**Ν. συνημιτόνων**) προσομοιάζουν πολύ στους αντίστοιχους του Ευκλείδειου επιπέδου.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Είναι χρήσιμο να δούμε τη «διανυσματική παιδεία» που επικρατεί τα τελευταία χρόνια στη χώρα μας, αφού ένας από τους βασικότερους στόχους αυτής της εργασίας είναι να αναδείξει την αναγκαιότητα της διδασκαλίας στους μαθητές της Μέσης Εκπαίδευσης μιας σφαιρικότερης και πληρέστερης εικόνας του «κόσμου» των διανυσμάτων.

Η διάκριση μεταξύ «εφαρμοστού» και «ελεύθερου» διανύσματος εξαλείφθηκε με τα νέα βιβλία μαθηματικών το 1992. Ως τότε, τα διανύσματα διαχωρίζονταν σε «εφαρμοστά» και «ελεύθερα», διδάσκονταν όμως παράλληλα με τη βοήθεια ενός αυστηρού θεωρητικού πλαισίου (σχέσεις και κλάσεις ισοδυναμίας, 1-1 και επί απεικονίσεις, γραμμική εξάρτηση – ανεξαρτησία, αλγεβρική τιμή κ.ά.) και σε περισσότερη έκταση απ' ότι αργότερα (58 σελίδες, έναντι 51 αργότερα και 46 σήμερα). Στο τελευταίο σχολικό βιβλίο δεν γίνεται καμία αναφορά για την παραπάνω διάκριση, όμως χρησιμοποιούνται και τα δύο είδη διανυσμάτων .

Πιο συγκεκριμένα, στο βιβλίο «Μαθηματικά Ι – ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ» που εκδόθηκε το 1982 αναφέρονται η σχέση και η κλάση ισοδυναμίας, τόσο αυτοτελώς, δηλαδή συνολοθεωρητικά, όσο και συνδεδεμένες με τα εφαρμοστά διανύσματα. Γίνεται μάλιστα λόγος για ένα προς ένα και για επί απεικονίσεις, στη «βασική απεικόνιση», όπως την αναφέρει $\varphi_0 : \mathcal{E} \rightarrow E$ του συνόλου των διανυσμάτων του **χώρου** στο σύνολο των σημείων του **χώρου**.

Η γραμμική εξάρτηση διανυσμάτων, με επτά παραγράφους, σε σύνολο είκοσι τεσσάρων, αποτελεί ένα από τα τρία βασικά τμήματα στα οποία διαχωρίζεται το κεφάλαιο αυτό. Μάλιστα γίνεται ξεχωριστή αναφορά στη γραμμική εξάρτηση δύο, στη γραμμική εξάρτηση τριών και στη γραμμική εξάρτηση τεσσάρων διανυσμάτων. Οι βάσεις των χώρων των διανυσμάτων της ευθείας, του επιπέδου και του Ευκλείδειου χώρου, καθώς και οι διαστάσεις τους, κλείνουν το πρώτο κεφάλαιο του βιβλίου αυτού. Το δεύτερο κεφάλαιο αναφέρεται πάλι στα διανύσματα, αυτή τη φορά με τη βοήθεια των συντεταγμένων τους. Γίνεται ακόμα λόγος για αλγεβρική τιμή διανύσματος και για τον μερικό λόγο (1).

Στο επόμενο βιβλίο, που εκδόθηκε το 1992, τα διανύσματα παρουσιάστηκαν με λιγότερο θεωρητικό τρόπο. Έτσι, η σχέση και η κλάση ισοδυναμίας παραλείφθηκαν, δεν υπάρχει πουθενά η λέξη «απεικόνιση» (ούτε φυσικά οι όροι «ένα προς ένα» και «επί»), ούτε συμβολίζεται κάπως το σύνολο των διανυσμάτων. Ο χώρος, ως πεδίο «δράσης» των διανυσμάτων έχει περιοριστεί στον ορισμό του διανύσματος θέσης, σε μια εφαρμογή και σε μια άσκηση. Υπάρχει ξεχωριστή παράγραφος (η τελευταία) για τον χώρο, η οποία όμως ήταν πάντα εκτός διδακτέας ύλης. Η γραμμική εξάρτηση έχει επίσης παραλειφθεί, παίρνοντας αναγκαστικά μαζί της τον ορισμό της βάσης και της διάστασης.

Αλγεβρική τιμή επίσης δεν υπάρχει πουθενά, ενώ ο «μερικός λόγος» επανορίζεται ως «απλός λόγος». Πρέπει εδώ να αναφερθεί ότι, ενώ τα διανύσματα στο βιβλίο αυτό παρουσιάζονται πιο «πρακτικά» απ' ότι στο προηγούμενο, οι συγγραφείς εισήγαγαν μια νέα έννοια στην τελευταία παράγραφο, το **εξωτερικό γινόμενο**. Γενικά η τελευταία παράγραφος περιείχε στοιχεία από τη διανυσματική θεωρία στο χώρο, κάτι που δεν υπήρχε στο προηγούμενο. Βέβαια η συστηματική και μόνιμη παράλειψη της παραγράφου αυτής από τη διδακτέα ύλη, την κατέστησε σταθερά ανενεργή [(2)].

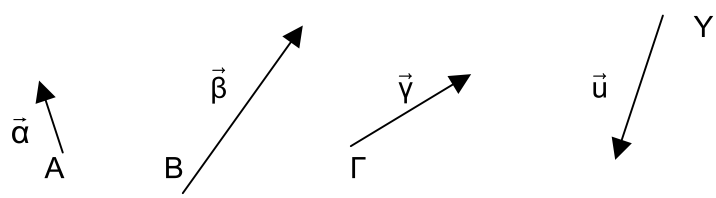
Στο τελευταίο βιβλίο διανυσμάτων (Μάρτιος 1998), το κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται ακόμα πιο απλά: Αν και δεν διαφέρει πολύ σε σχέση με το προηγούμενο βιβλίο, αναφορά στο χώρο δε γίνεται πουθενά, απλός λόγος δεν υπάρχει, ούτε εφαρμογές στην Ευκλείδεια Γεωμετρία [(3)].

Είναι αξιόλογο να αναφέρουμε ακόμα ότι στο πρώτο βιβλίο υπήρχαν σαραντα τέσσερις σελίδες θεωρίας και ογδόντα έξι παραδείγματα και ασκήσεις, ενώ στα δυο επόμενα υπήρχαν είκοσι τέσσερις σελίδες θεωρίας και ενενήντα παραδείγματα και ασκήσεις (στη διδακτέα ύλη) και είκοσι έξι σελίδες θεωρίας και ενενήντα επτά παραδείγματα και ασκήσεις αντίστοιχα.

Η έλλειψη πρακτικών εφαρμογών (π.χ. στη Φυσική) των διανυσμάτων και στα τρία βιβλία είναι εμφανής. Έτσι, δικαιωματικά, τόσο οι υπερασπιστές των –άμεσα– εφαρμοσμένων επιστημών όσο και ένας μεγάλος αριθμός –μη αδιάφορων– μαθητών αναρωτιούνται φωναχτά για τη «χρησιμότητα», δηλαδή τον εφαρμόσιμο χαρακτήρα των μαθηματικών που διδάσκονται. Διότι, αν ένα τόσο βολικό εργαλείο, όπως το διάνυσμα, δεν συνδεθεί μέσα στην τάξη με τα αμέσως σχετικά μεγέθη της καθημερινότητας (δύναμη, ταχύτητα, μετατόπιση κ.ά.), τότε μια πολύ καλή ευκαιρία «κοινωνικοποίησης» των μαθηματικών θα έχει χαθεί.

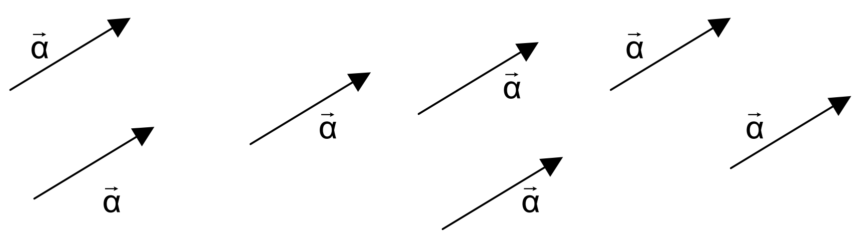
Δεν ισχυρίζομαι ότι πρέπει να επανέλθει το θεωρητικό πλαίσιο διδασκαλίας των διανυσμάτων · αυτό είναι που παγκοσμίως εφαρμόστηκε και απέτυχε. Η διάκριση όμως των διανυσμάτων στα τρία είδη τους θεωρώ ότι θα λειτουργήσει, χωρίς πολύ κόπο, ως προφανής συνδετικός κρίκος ανάμεσα στα «ξερά» Μαθηματικά και την «εφαρμοσμένη» Φυσική και κατά συνέπεια ως πολύτιμο εργαλείο εφαρμογής της «διαθεματικότητας στην Εκπαίδευση», για την οποία τόσος λόγος γίνεται σήμερα.
Τα δύο είδη είναι λίγο πολύ γνωστά:

Εφαρμοστό διάνυσμα στο επίπεδο είναι ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα του επιπέδου:



Αν A (ή B, Γ κ.λπ.) είναι η αρχή του διανύσματος, την ονομάζουμε **σημείο εφαρμογής του.**

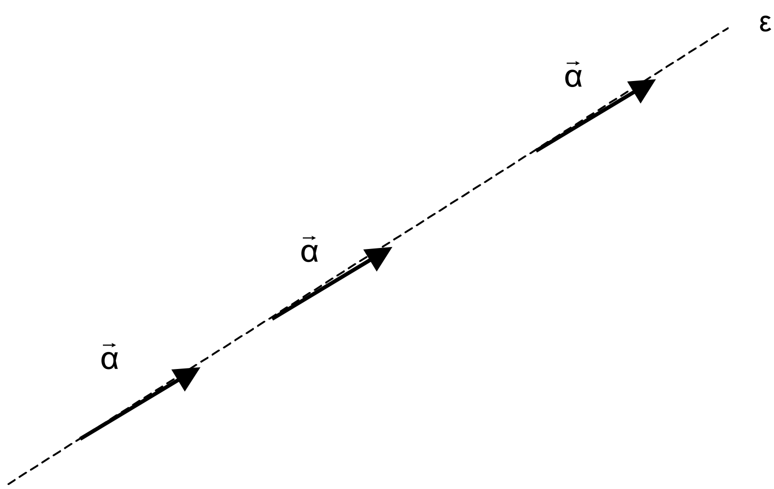
Ελεύθερο διάνυσμα $\vec{\alpha}$ ονομάζουμε την κλάση ισοδυναμίας που αποτελείται από όλα τα εφαρμοστά διανύσματα που είναι ομόρροπα με το $\vec{\alpha}$ και έχουν ίσο μέτρο μ' αυτό, ανεξάρτητα από το σημείο εφαρμογής καθενός:



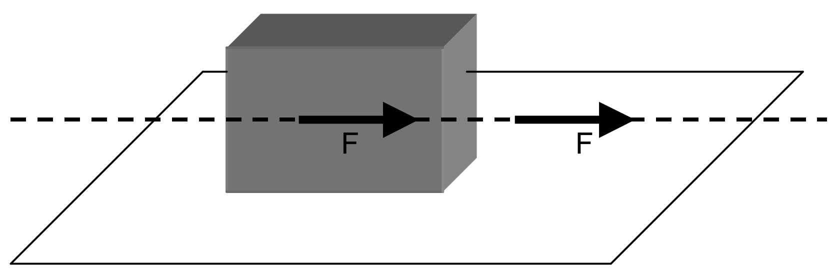
Είναι δηλαδή το σύνολο των εφαρμοστών διανυσμάτων που προκύπτουν με *παράλληλη μεταφορά* στο Ευκλείδειο επίπεδο (σε οποιοδήποτε σημείο του) ενός συγκεκριμένου εφαρμοστού διανύσματος.

Το τρίτο είδος (ολισθαίνον διάνυσμα ή ολισθητής) είναι κάτι «ανάμεσα» στα δύο προηγούμενα:

Ολισθαίνον διάνυσμα $\vec{\alpha}$ λέμε την κλάση ισοδυναμίας που αποτελείται από όλα τα διανύσματα που έχουν ίσο μέτρο με το $\vec{\alpha}$, βρίσκονται στον ίδιο φορέα και έχουν την ίδια φορά μ' αυτό:



Είναι το είδος με το οποίο θα ασχοληθούμε σ' αυτή την εργασία. Στη Φυσική αυτό το είδος περιγράφει πλήρως τις δυνάμεις που ασκούνται σ' ένα στερεό σώμα [4]:



ΙΣΤΟΡΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

Ο νόμος του παραλληλογράμμου για το άθροισμα διανυσμάτων είναι τόσο διαισθητικός, που η καταγωγή του είναι άγνωστη. Ίσως εμφανίστηκε σε μια –χαμένη σήμερα– εργασία του Αριστοτέλη (384 – 322 π. Χ.) και βρίσκεται στα Μηχανικά του Ήρωνα του Αλεξανδρέως (πρώτος αιώνας μ. Χ.). Εκεί εφαρμόζει τον κανόνα του παραλληλογράμμου για να βρει τη συνισταμένη τροχιά που διαγράφει ένα σώμα στο οποίο εφαρμόζονται δύο δυνάμεις («μεταφέρεται με δύο ταχύτητες»): «όταν με ουν εν λόγω τινί φέρηται, επ' ευθείας ανάγκη φέρεσθαι το φερόμενον, και γίνεται διά-μετρος αυτή του σχήματος ο ποιούσιν αι εν τούτω τω λόγω συντεθείσαι γραμμαί» [όταν (ένα σώμα) μεταφέρεται (με δύο ταχύτητες) με δεδομένο λόγο, το σώμα είναι σαν να μεταφέρεται σε ευθεία γραμμή, η οποία είναι η διάμετρος (διαγώνιος) του σχήματος (παραλληλογράμμου) που ορίζεται από τις δύο ταχύτητες] (μηχανικά, 848 b10-13) [(5),(6)]. Ήταν επίσης το πρώτο πόρισμα στην *Principia Mathematica* (1687) του Νεύτωνα (1642 – 1727): «Corpus viribus conjustics diagonalem parallelogrammi codem tempore describere, quo latera separatis» [(7)]. Στο έργο αυτό ο Νεύτων κατά-πιάνεται εξαντλητικά μ' αυτό που σήμερα λέμε διανυσματική οντότητα (π.χ. ταχύτητα, δύναμη) αλλά ποτέ με την έννοια του διανύσματος. Η συστηματική μελέτη και χρήση των διανυσμάτων έλαβε χώρα κατά το 19^{ο} αιώνα και στις αρχές του 20^{ου}.

Τα διανύσματα γεννήθηκαν κατά τις δύο πρώτες δεκαετίες του 19^{ου} αιώνα με τη γεωμετρική αναπαράσταση των μιγαδικών αριθμών. Οι Caspar Wessel (1745 – 1818), Jean Robert Argand (1768 – 1822), Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855) μεταξύ άλλων συνέλαβαν την ιδέα της αναπαράστασης των μιγαδικών αριθμών ως σημεία στο διδιάστατο επίπεδο, δηλαδή ως διανύσματα του $\mathbb{R}^2$. Οι μαθηματικοί, αλλά και άλλοι επιστήμονες δούλεψαν μ' αυτά και εφάρμοσαν τους νέους αυτούς αριθμούς με ποικίλους τρόπους. Ο Gauss για παράδειγμα, έκανε κατάλληλη χρήση των μιγαδικών αριθμών για να αποδείξει, σε ηλικία 22 ετών το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας. Το 1837, ο William Rowan Hamilton (1805 – 1865) έδειξε ότι οι μιγαδικοί αριθμοί θα μπορούσαν να περιγραφούν ως διατεταγμένα ζεύγη (α, β) πραγματικών αριθμών. Η ιδέα αυτή ήταν ένα τμήμα της εκστρατείας πολλών μαθηματικών, συμπεριλαμβανομένου του Hamilton, να ψάξουν για έναν τρόπο να επεκτείνουν τους διδιάστατους «αριθμούς» στις τρείς διαστάσεις. Αλλά κανένας δεν ήταν ικανός να κατορθώσει κάτι τέτοιο, προστατεύοντας ταυτόχρονα τις βασικές αλγεβρικές ιδιότητες των πραγματικών και των μιγαδικών αριθμών.

Το 1827 ο August Ferdinand Möbius δημοσίευσε ένα μικρό βιβλίο με τίτλο *Βαρυκεντρικός Λογισμός* στο οποίο εισήγαγε προσανατολισμένα ευθύγραμμα τμήματα τα οποία δήλωνε με γράμματα του αλφαβήτου, καθ' όλα διανύσματα, αλλά όχι κατ' όνομα. Κατά την έρευνά του για τα κέντρα βάρους και την προβολική γεωμετρία, ο Möbius ανέπτυξε μια αριθμητική αυτών των προσανατολισμένων ευθύγραμμων τμημάτων · τα πρόσθεσε και έδειξε πώς πολλαπλασιάζονται αυτά με πραγματικό αριθμό. Τα ενδιαφέροντά του ήταν οπουδήποτε αλλού παρόλ' αυτά και κανείς άλλος δεν μπήκε στον κόπο να παρατηρήσει τη σπουδαιότητα αυτών των υπολογισμών.

Μετά από μεγάλο αριθμό αποτυχημένων προσπαθειών, ο Hamilton τελικά αποφάσισε διακόψει την παραπάνω έρευνα για ένα τέτοιο τρισδιάστατο «αριθμητικό» σύστημα και αντ' αυτού επινόησε ένα τετραδιάστατο σύστημα, το οποίο απεκάλεσε quaternions (8). Στις 16 Οκτωβρίου του 1843 ο Hamilton έγραφε:

> «*Σήμερα, 16 Οκτωβρίου 1843, που έτυχε να είναι Δευτέρα και μέρα συμβουλίου της Βασιλικής Ακαδημίας της Ιρλανδίας, περπατώντας προς το χώρο της συνέλευσης στην οποία προήδρευα,*(*) *..., κατά μήκος του Βασιλικού καναλιού, ..., μια υποδόρροια σκέψη διέτρεξε το μυαλό μου, η οποία τελικά έδωσε ένα αποτέλεσμα, τη σπουδαιότητα του οποίου δε θα ήταν υπερβολή να πω ότι αμέσως ένιωσα. Μια ηλεκτρική περίμετρος φάνηκε να το περικλείει και μια σπίθα ξεπετάχτηκε έξω απ' αυτήν,... Δεν μπορούσα να αντισταθώ στην ώθηση... να κόψω μ' ένα μαχαίρι πάνω σε μια πέτρα της γέφυρας του Brougham, καθώς την διαβαίναμε, το θεμελιώδη τύπο...*»

Τα quaternions του Hamilton συμβολίζονταν ως $q= w + ix + jy + kz$, όπου w, x, y και z ήταν πραγματικοί αριθμοί. Ο Hamilton γρήγορα αντιλήφθηκε ότι τα quaternions του αποτελούνταν από δύο ξεκάθαρα μέρη: ο πρώτος όρος, τον οποίο απεκάλεσε βαθμωτό και τα «x, y, z για τις ορθογώνιες συνιστώσες ή προβολές στους τρεις

(*) Ο Hamilton έγινε πρόεδρος της Βασιλικής Ακαδημίας της Ιρλανδίας στα 32 του μόλις χρόνια!

ορθογώνιους άξονες, παρακινήθηκε (αναφερόμενος στον εαυτό του) να αποκαλέσει την τρισονόματη αυτή έκφραση όπως επίσης και τη γραμμή που παριστάνει, ένα ΔΙΑΝΥΣΜΑ». Ο Hamilton χρησιμοποίησε τους «θεμελειώδεις τύπους» του $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ για να πολλαπλασιάσει quaternions, και αμέσως ανακάλυψε ότι το γινόμενο $q_1q_2 = - q_2q_1$ δεν ήταν μετατρέψιμο (από κάτι άλλο).

Ο Hamilton τιμήθηκε με το αξίωμα του Ιππότη το 1835 και ήταν ένας λαμπρός επιστήμονας που είχε κάνει θεμελειώδη δουλειά στην οπτική και τη θεωρητική φυσική ως τη στιγμή που επινόησε τα quaternions. Έτσι, αυτά του προσέδωσαν άμεση αναγνώριση όταν, πραγματοποιώντας μια στροφή, τα τελευταία 22 χρόνια της ζωής του αφοσιώθηκε στην ανάπτυξη και την προώθηση των quaternions. Έγραψε δύο αναλυτικά βιβλία, τα *Διαλέξεις για τα quaternions* (1853) και *Στοιχεία των quaternions* (1866), κάνοντας λεπτομερή αναφορά όχι μόνο στην άλγεβρα των quaternions αλλά επίσης στον τρόπο που θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν στη γεωμετρία. Σε ένα σημείο, ο Hamilton έγραψε «πρέπει ακόμα να υποστηρίξω ότι αυτή η ανακάλυψη με παρουσιάζει σαν κάποιον σπουδαίο για τα μέσα του 19^ου^ αιώνα, όπως ήταν η ανακάλυψη της ροής για το κλείσιμο του 17^ου^ αιώνα». Απέκτησε έναν οπαδό, τον Peter Guthrie Tait (1831 – 1901), ο οποίος τη δεκαετία του 1850 άρχισε να εφαρμόζει τα quaternions σε προβλήματα ηλεκτρισμού, μαγνητισμού και σε άλλα προβλήματα φυσικής. Κατά το δεύτερο μισό του 19^ου^ αιώνα, η σθεναρή υπερασπιστική στάση του Tait για τα quaternions προκάλεσε έντονες αντιδράσεις, θετικές και αρνητικές ταυτόχρονα, στην επιστημονική κοινότητα.

Το ίδιο χρονικό διάστημα που ο Hamilton ανακάλυπτε τα quaternions, ο Hermann Grassmann (1809 – 1877) συνέτασσε το *Λογισμό των Επεκτάσεων* (1844), γνωστό σήμερα με το γερμανικό του όνομα Ausdehnungslehre. Το 1832 ο Grassmann άρχισε να αναπτύσσει ένα «καινούριο γεωμετρικό λογισμό» ως ένα τμήμα της έρευνάς του που αφορούσε τη θεωρία των παλιρροιών, και μεταγενέστερα χρησιμοποίησε αυτά τα εργαλεία για να απλοποιήσει τμήματα δύο κλασικών εργασιών , της *Αναλυτικής Μηχανικής* του Joseph Louis Lagrange (1736 – 1813) και της *Ουράνιας Μηχανικής* του Pierre Simon Laplace (1749 – 1827). Κατ' αρχήν, στο Ausdehnungslehre του, ο Grassmann επέκτεινε την έννοια των διανυσμάτων από τις οικείες δύο ή τρεις διαστάσεις σε έναν αυθαίρετο (φυσικό) αριθμό n διαστάσεων· έτσι, επέκτεινε και την έννοια του χώρου . Επίσης, και ακόμα γενικότερα, ο Grassmann ήταν πρωτοπόρος σε μια ουσιαστική ενασχόληση με τους σύγχρονους πίνακες, τη γραμμική άλγεβρα και τη διανυσματική και τανυστική (tensor) ανάλυση.

Δυστυχώς, το Ausdehnungslehre είχε δύο σοβαρά μειονεκτήματα: πρώτον, ήταν φοβερά περιεκτικό, χωρίς επεξηγήσεις και παραδείγματα και ήταν γραμμένο βασισμένο σε ένα δυσνόητο στυλ με μια υπερβολικά περίπλοκη σημειογραφία. Ακόμα και όταν ο Möbius το είχε μελετήσει σοβαρά, δεν του ήταν δυνατόν να το κατανοήσει πλήρως. Δεύτερον (και άξιο θαυμασμού), ο Grassmann ήταν ένας καθηγητής μέσης εκπαίδευσης, χωρίς μια κύρια επιστημονική φήμη (συγκρινόμενος με τον Hamilton). Ακόμα και όταν η εργασία του αγνοείτο ευρέως, ο Grassmann προώθησε το μήνυμά του κατά τις δεκαετίες του 1840 και του 1850 με εφαρμογές στην ηλεκτροδυναμική και στη γεωμετρία των καμπυλών και των επιφανειών, αλλά χωρίς πολλή γενική αποδοχή.

Το 1862, ο Grassmann δημοσίευσε μια δεύτερη και αρκετά αναθεωρημένη έκδοση του Ausdehnungslehre του, αλλά ήταν επίσης δυσνόητα γραμμένη και πάλι πολύ περιληπτική για τους μαθηματικούς εκείνης της εποχής, οπότε ακολούθησε αναγκαστικά την ίδια μοίρα με την πρώτη έκδοση. Στα τελευταία χρόνια της ζωής του ο Grassmann στράφηκε μακρια από τα μαθηματικά και καταπιάστηκε με μια δεύτερη και πολύ πετυχημένη έρευνητική καριέρα στη φωνολογία και τη συγκριτικη γλωσσολογία. Τελικά στα τέλη της δεκαετίας του 1860 και του 1870, το Ausdehnungslehre άρχισε αργά - αργά να γίνεται κατανοητό και να εκτιμάται και ο Grassmann άρχισε να δέχεται κάποια ευνοϊκή αναγνώριση για τα «φανταστικά» του μαθηματικά. Μια τρίτη έκδοση του Ausdehnungslehre δημοσιεύτηκε το 1878, ένα χρόνο μετά το θάνατο του Grassmann.

Περί τα μέσα του $19^{ου}$ αιώνα, ο Benjamine Peirce (1809 – 1880) ήταν ο μεγαλύτερος μαθηματικός των Η.Π.Α. Αναφερόμενος στον Hamilton, τον χαρακτήρισε ως τον «μνημειώδη συγγραφέα των quaternions». Ο Peirce ήταν ένας καθηγητής μαθηματικών και αστρονομίας στο πανεπιστήμιο του Harvard από το 1833 ως το 1880 και έγραψε ένα ογκώδες *Σύστημα Αναλυτικής Μηχανικής* (1855, δεύτερη έκδοση 1872), στο οποίο, παραδόξως δεν συμπεριέλαβε τα quaternions . Μάλλον ο Peirce επεκτάθηκε σ' αυτό που αποκαλούσε «αυτή η υπέροχη άλγεβρα

του χώρου» στη σύνταξη του βιβλίου του *Γραμμική συνδετική Άλγεβρα* (1870), μια εργασία αποκλειστικά αφηρημένης άλγεβρας. Έχει ιστορικά καταγραφεί ότι τα quaternions ήταν το αγαπημένο αντικείμενο του Peirce και είχε πλήθος μαθητών που κατά τη διάρκεια της καριέρας τους έγραψαν έναν μεγάλο αριθμό βιβλίων και εργασιών πάνω σ' αυτό το αντικείμενο.

Ο James Clerk Maxwell (1831 – 1879) ήταν ένας διορατικός και προσεκτικά κριτικός εισηγητής των quaternions. Οι Maxwell και Tait ήταν σκωτσέζοι και είχαν σπουδάσει μαζί στο Εδιμβούργο και το Κέμπριτζ και μοιράστηκαν αρκετά από τα ενδιαφέροντά τους που αφορούσαν τη μαθηματική φυσική. Σ' αυτό που ονόμασε «η μαθηματική ταξινόμηση των φυσικών ποσοτήτων», ο Maxwell διέκρινε τα μεγέθη της φυσικής σε δύο κατηγορίες, τα *βαθμωτά* και τα *διανυσματικά*. Κατόπιν, στους όρους αυτού του διαχωρισμού επισήμανε ότι η χρήση quaternions έκανε ολοφάνερες τις μαθηματικές αναλογίες στη φυσική που είχαν ανακαλυφθεί από το Lord Kelvin (Sir William Thomson, 1824 – 1907), μεταξύ της μεταφοράς θερμότητας και της κατανομής των ηλεκτροστατικών δυνάμεων. Παρόλ' αυτά, στις εργασίες του, και ειδικά σ' αυτήν που είχε τη μεγαλύτερη επιρροή, την *Πραγματεία πάνω στον Ηλεκτρισμό και τον Μαγνητισμό* (1873), ο Maxwell έδωσε έμφαση στη σπουδαιότητα αυτού που περιέγραψε ως «έννοια των quaternions... ή η θεωρία των Διανυσμάτων» ως μια «μαθηματική μέθοδος... μια μέθοδος σκέψης». Το ίδιο διάστημα, επισήμανε την ανομοιογενή φύση του προϊόντος των quaternions, και προειδοποίησε τους επιστήμονες να μείνουν μακριά από τη χρήση των «μεθόδων των quaternions» με τις λεπτομέρειες που αναφέρονταν στις τρεις διανυσματικές συνιστώσες. Αναγκαστικά, ο Maxwell πρότεινε μια καθαρά διανυσματική ανάλυση.

Ο William Kingdom Clifford (1845 – 1879) εξέφρασε «βαθύ θαυμασμό» για το Ausdehnungslehre του Grassmann και συμπάθησε ειλικρινά τα διανύσματα, τα οποία συχνά αποκαλούσε βήματα, πάνω από τα quaternions. Στο έργο του *Στοιχεία Δυναμικής* (1878), ο Clifford διέσπασε το γινόμενο δύο quaternions σε δύο πολύ διαφορετικές διανυσματικές συνιστώσες, που τις ονόμασε **βαθμωτή συνιστώσα** (σήμερα γνωστή ως **εσωτερικό γινόμενο**) και **διανυσματική συνιστώσα** (**εξωτερικό γινόμενο**). Για τη διανυσματική ανάλυση υποστήριξε ότι «η πεποίθησή μου είναι ότι οι αρχές της θα ασκήσουν τεράστια επιρροή στο μέλλον της μαθηματικής επιστήμης». Παρόλο που τα *Στοιχεία Δυναμικής* είχαν σκοπό να γίνουν το πρώτο εγχειρίδιο μια ολόκληρης σειράς, ο Clifford δεν είχε ποτέ την ευκαιρία να «κυνηγήσει» αυτές τις ιδέες, μια και ο θάνατος τον βρήκε στα 34 χρόνια του.

Η ανάπτυξη της άλγεβρας των διανυσμάτων και της διανυσματικής ανάλυσης όπως τις ξέρουμε σήμερα, ανακαλύφθηκαν αρχικά σε ομάδες αξιοσημείωτων σημειώσεων φτιαγμένων από τον J. William Gibbs (1839 – 1903) για τους φοιτητές του στο πανεπιστήμιο του Yale. Ο Gibbs ήταν ένας ντόπιος του New Haven στο Connecticat των Η.Π.Α. (ο πατέρας του ήταν επίσης καθηγητής στο Yale). Η κύρια επιστημονική ενασχόλησή του ήταν η *θερμοδυναμική.* Ο Maxwell υποστήριξε σθεναρά τη δουλειά του Gibbs στη θερμοδυναμική, ειδικά τη γεωμετρική αναπαράσταση των αποτελεσμάτων του. Ο Gibbs εισήχθη στα quaternions όταν διάβασε την *Πραγματεία πάνω στον Ηλεκτρισμό και τον Μαγνητισμό* του Maxwell και μελέτησε το Ausdehnungslehre του Grassmann. Συμπέρανε ότι τα διανύσματα θα παρείχαν ένα πιο αποτελεσματικό εργαλείο για τη δουλειά του στη φυσική. Έτσι, αρχίζοντας το 1881, ο Gibbs τύπωσε προσωπικά σημειώσεις διανυσματικής ανάλυσης για τους φοιτητές του, οι οποίοι τις μετέδωσαν σε μαθητές στις Η.Π.Α., τη Βρετανία και όλη την Ευρώπη. Το πρώτο βιβλίο σύγχρονης διανυσματικής ανάλυσης στην Αγγλία ήταν η *Διανυσματική Ανάλυση* (1901), που δεν ήταν τίποτ' άλλο παρά το μοντάρισμα των σημειώσεων του Gibbs από έναν από τους τελευταίους μεταπτυχιακούς φοιτητές του, τον Edwin B. Wilson (1879 – 1964). Κατά ειρωνικό τρόπο ο Wilson έλαβε την προπτυχιακή του εκπαίδευση στο Harvard, όπου είχε μάθει για τα quaternions από τον καθηγητή του, J. Mills Peirce (1834 – 1906), έναν από τους γιους του B. Peirce. Το βιβλίο των Gibbs/Wilson επανεκτυπώθηκε σε χαρτόδετη έκδοση το 1960.

Μια άλλη συμβολή στη σύγχρονη κατανόηση και χρήση των διανυσμάτων υπήρξε εκ μέρους του Jean Frenet (1816 – 1890). Ο Frenet εισήχθη στο *Ecole normale superieure* το 1840, μετά σπούδασε στην Τουλούζη, όπου έγραψε τη διδακτορική του διατριβή το 1847. Η διατριβή του περιέχει τη θεωρία των κυρτών χώρων και τους τύπους που είναι γνωστοί σαν *τύποι Frenet – Serret*. O Frenet έδωσε μόνο έξι τύπους ενώ ο Serret εννιά. O Frenet δημοσίευσε αυτή την πληροφορία στο Journal de mathemetique pures et appliqués, το 1852.

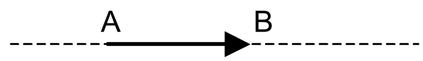
Κατά τη δεκαετία του 1890 και την πρώτη δεκαετία του 20ου αιώνα, ο Tait και μερικοί άλλοι αποδοκίμασαν τα διανύσματα και υπερασπίστηκαν τα quaternions ενώ πλήθος άλλων επιστημόνων και μαθηματικών σχεδίασαν τις δικές τους διανυσματικές μεθόδους. O Oliver Heaviside (1850 – 1925), ένας αυτοδίδακτος φυσικός που είχε σε μεγάλο βαθμό επηρεαστεί από τον Maxwell, δημοσίευσε άρθρα και την *Ηλεκτρομαγνητική θεωρία* του (τρεις τόμοι, 1893, 1899, 1912) στην οποία αντιτάχθηκε στα quaternions και ανέπτυξε τη δική του διανυσματική ανάλυση. O Heaviside είχε λάβει αντίτυπα από τις σημειώσεις του Gibbs και μίλησε πολύ κολακευτικά γι' αυτές. Στην εισαγωγή των θεωριών του Maxwell που αφορούν τον ηλεκτρισμό και το μαγνητισμό στη Γερμανία (1894), οι διανυσματικές μέθοδοι υποστηρίχτηκαν και πλήθος βιβλίων διανυσματικής ανάλυσης ακολούθησαν στη Γερμανία. Οι διανυσματικές μέθοδοι εισήχθηκαν στην Ιταλία (1887, 1888, 1897), τη Ρωσία (1907) και την Ολλανδία (1903). Τα διανύσματα είναι σήμερα η σύγχρονη γλώσσα μιας σημαντικής συμφωνίας μεταξύ της φυσικής και των εφαρμογών στα μαθηματικά και συνεχίζουν να τραβούν το δικό τους, ουσιαστικό, μαθηματικό ενδιαφέρον. [9]

<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1</u>

ΟΛΙΣΘΗΣΗ ΣΤΟ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

Πρόσθεση μεταξύ εφαρμοστών διανυσμάτων

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.1 **Εφαρμοστό** διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ με αρχή Α και πέρας Β στο επίπεδο ονομάζουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα του οποίου τα άκρα θεωρούνται διατεταγμένα: το σημείο Α είναι πρώτο και το σημείο Β δεύτερο.



Η ευθεία ΑΒ λέγεται **φορέας** του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$.

Διεύθυνση του $\overrightarrow{AB}$ λέγεται η διεύθυνση του φορέα του.

Φορά του $\overrightarrow{AB}$ λέγεται η φορά της ημιευθείας ΑΒ.

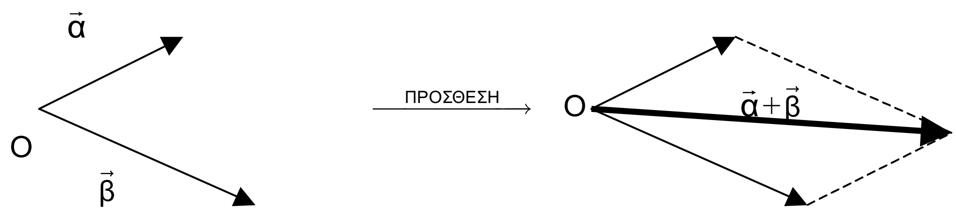
Μέτρο του $\overrightarrow{AB}$ λέγεται ο μη αρνητικός πραγματικός αριθμός που εκφρά – ζει το μήκος του τμήματος ΑΒ.

Ορίζουμε άθροισμα μεταξύ εφαρμοστών διανυσμάτων μόνον όταν έχουν το ίδιο σημείο εφαρμογής. Διαφορετικά, δεν ορίζουμε άθροισμα μεταξύ τους. Υπό τη συνθήκη αυτή, αν δύο εφαρμοστά διανύσματα έχουν κοινό σημείο εφαρμογής και είναι ομόρροπα, τότε το άθροισμά τους θα είναι το ομόρροπο μ' αυτά διάνυσμα που έχει το ίδιο σημείο εφαρμογής και μέτρο ίσο με το άθροισμα των δύο μέτρων.

Αν είναι αντίρροπα, τότε το άθροισμα είναι το συγγραμμικό μ' αυτά διάνυσμα που έχει ίδιο σημείο εφαρμογής, μέτρο ίσο με τη διαφορά των μέτρων και φορά τη φορά του μεγαλύτερου.

Αν είναι μη συγγραμμικά, τότε δεν έχουμε, παρά να εφαρμόσουμε το γνωστό κανόνα του παραλληλογράμμου:

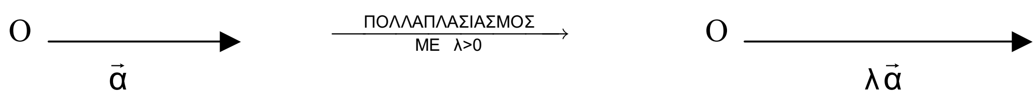
Το άθροισμα δύο εφαρμοστών διανυσμάτων με κοινό σημείο εφαρμογής Ο είναι το εφαρμοστό στο Ο διάνυσμα που ορίζεται από τη διαγώνιο του παραλληλογράμμου που σχηματίζεται με πλευρές τα αρχικά διανύσματα.



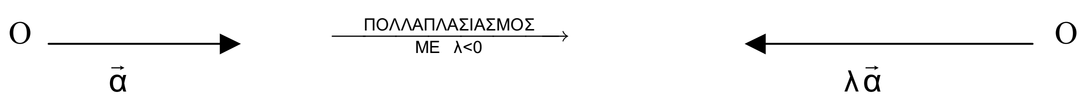
ΣΧΟΛΙΟ Η πρόσθεση μεταξύ εφαρμοστών διανυσμάτων δεν είναι τίποτα άλλο, παρά η εύρεση της συνισταμένης δύναμης που ασκείται σε σημειακό σώμα, αλλά και της ταχύτητας ενός στερεού σώματος. Τόσο ο Ήρωνας επομένως, όσο και ο Νεύτωνας, έκαναν –χωρίς να το διατυπώνουν– πράξεις μεταξύ εφαρμοστών διανυσμάτων.

Ο πολλαπλασιασμός πραγματικού αριθμού λ με εφαρμοστό διάνυσμα $\vec{\alpha}$ γίνεται ως εξής:

Αν $\lambda \geq 0$, τότε το διάνυσμα $\lambda\vec{\alpha}$ έχει ίδιο σημείο εφαρμογής με το $\vec{\alpha}$, ίδια διεύθυνση και φορά, και μέτρο $\lambda|\vec{\alpha}|$.

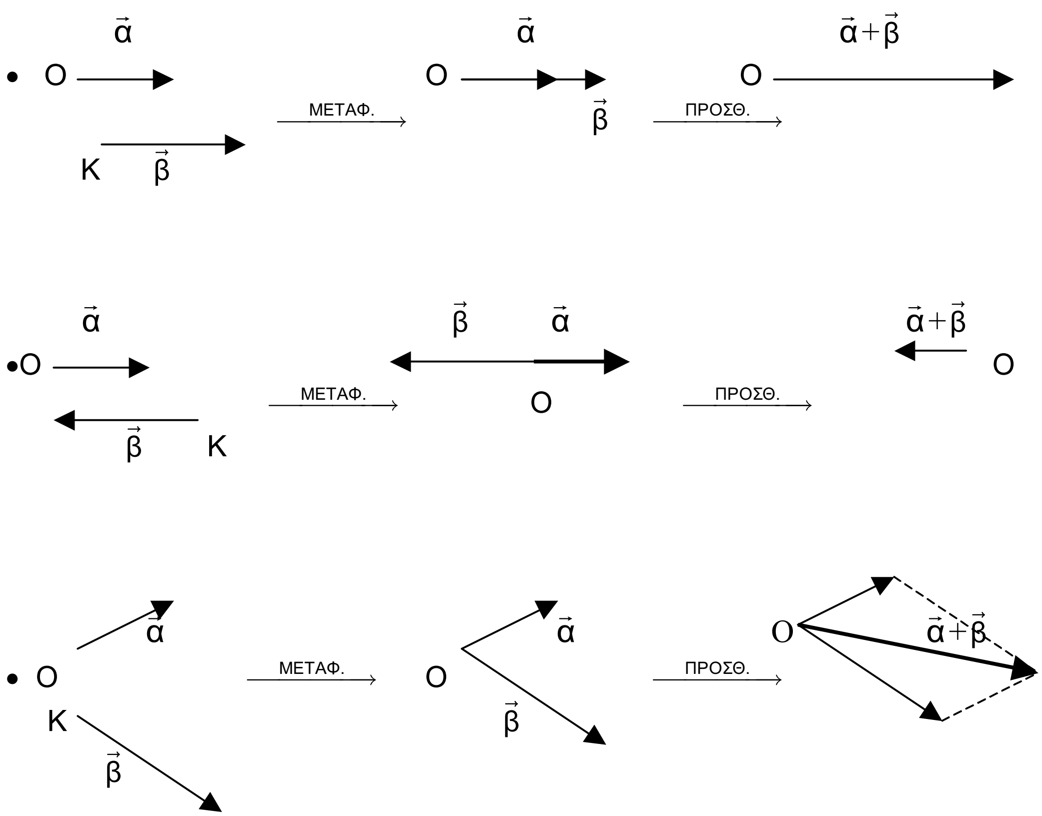


Αν $\lambda<0$, τότε το διάνυσμα $\lambda\vec{\alpha}$ έχει ίδιο σημείο εφαρμογής με το $\vec{\alpha}$, ίδια διεύθυνση, αντίθετη φορά, και μέτρο $-\lambda|\vec{\alpha}|$.

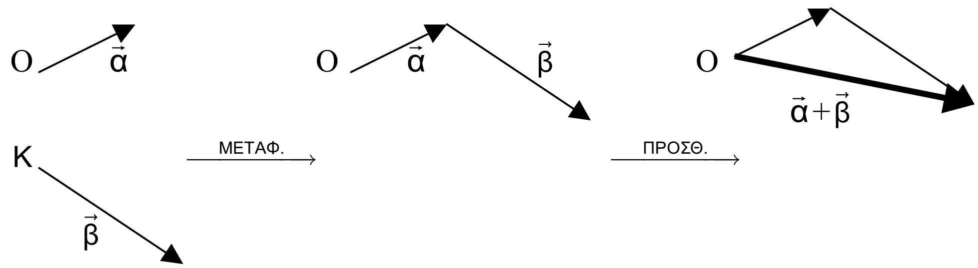


Πρόσθεση μεταξύ ελεύθερων διανυσμάτων

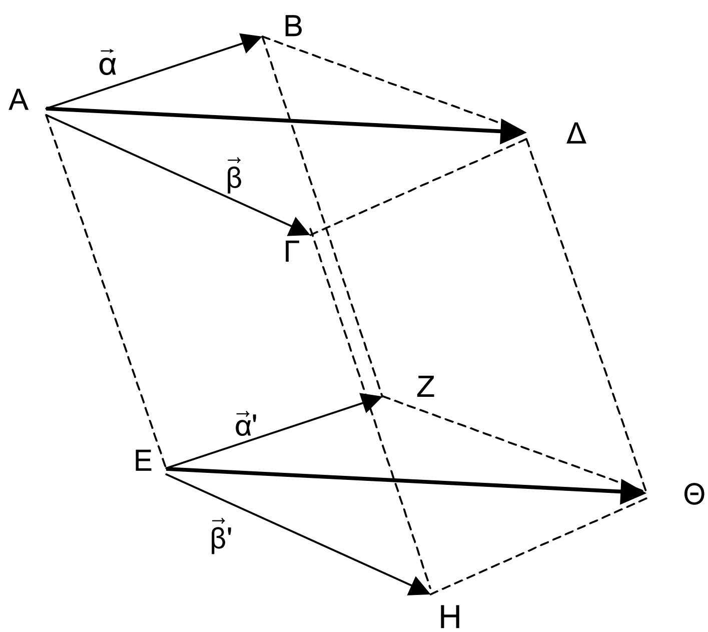
Ο λόγος για τον οποίο ορίστηκαν τα ελεύθερα διανύσματα είναι ο εξής: Η πρόσθεση μεταξύ ελεύθερων διανυσμάτων δεν απαιτεί κοινό σημείο εφαρμογής των υπό πρόσθεση διανυσμάτων. Κι αυτό, γιατί από τον ορισμό των ελεύθερων διανυσμάτων, μπορούμε πάντα να μεταφέρουμε παράλληλα το ένα (ή και τα δύο), θεωρώντας δηλαδή έναν αντιπρόσωπο του ενός στο σημείο εφαρμογής του άλλου και μετά να κάνουμε την πρόσθεση όπως και στα εφαρμοστά.



ΣΧΟΛΙΑ 1. Το άθροισμα δεν αλλοιώνεται, αν, αντί να μεταφέρουμε παράλληλα το διάνυσμα $\vec{\beta}$ ώστε να έχει σημείο εφαρμογής το Ο, το μεταφέραμε ώστε να έχει σημείο εφαρμογής το πέρας του $\vec{\alpha}$. Τότε φυσικά δεν εφαρμόζουμε κανόνα παραλληλογράμμου, αλλά ενώνουμε την αρχή του $\vec{\alpha}$ με το πέρας του $\vec{\beta}$.



2. Το άθροισμα ελεύθερων διανυσμάτων είναι *καλά ορισμένο*.
   Πράγματι, ας θεωρήσουμε δύο άλλους αντιπροσώπους $\vec{\alpha}'$, $\vec{\beta}'$ των υπό πρόσθεση διανυσμάτων $\vec{\alpha},\vec{\beta}$.



Τα τετράπλευρα ΑΓΗΕ, ΓΔΘΗ είναι παραλληλόγραμμα, οπότε ΓΗ // = ΑΕ και ΔΘ // = ΓΗ. Επομένως ΔΘ // = ΑΕ, δηλαδή το τετράπλευρο ΑΔΘΕ είναι παραλληλόγραμμο. Άρα τα διανύσματα $\overrightarrow{ΑΔ}, \overrightarrow{ΕΘ}$ είναι ίσα, δηλαδή το άθροισμα $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ δεν αλλοιώθηκε.

Ιδιότητες αθροίσματος

Η ισχύς της αντιμεταθετικής ιδιότητας $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\vec{\beta}+\vec{\alpha}$ προκύπτει άμεσα, τόσο για τα εφαρμοστά, όσο και για τα ελεύθερα διανύσματα, από τον τρόπο που είδαμε ότι προστίθενται.

Θα αποδείξουμε τώρα την προσεταιριστική ιδιότητα για τρία εφαρμοστά διανύσματα, η οποία θα ισχύει αυτόματα και για τα ελεύθερα.

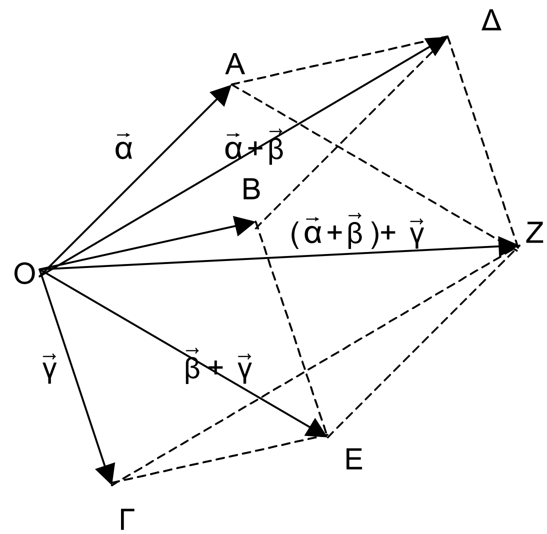
Θεωρούμε τα εφαρμοστά στο Ο διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ όπως στο σχήμα.

Εφαρμόζοντας διαδοχικά τον κανόνα του παραλληλογράμμου παίρνουμε $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\overrightarrow{O\Delta}$ και

$$(\vec{\alpha}+\vec{\beta})+\vec{\gamma}=\overrightarrow{OZ}$$

Αν τώρα $\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\overrightarrow{OE}$ (σχήμα), αρκεί να δείξουμε ότι το τετράπλευρο ΟΑΖΕ είναι παραλληλόγραμμο, ώστε

$$\overrightarrow{OZ}=\vec{\alpha}+(\vec{\beta}+\vec{\gamma}).$$



Έχουμε

$$\left.\begin{array}{lll} O\Delta Z\Gamma & \text{παραλληλογραμμο,} & \text{αρα} \quad \Delta Z /\!/ = O\Gamma \\ OBE\Gamma & \text{παραλληλογραμμο,} & \text{αρα} \quad O\Gamma /\!/ = BE \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ZEB \quad \text{παραλληλογραμμο}$$

Άρα ΔΒ//=ΕΖ

Αλλά το ΟΑΔΒ είναι παραλληλόγραμμο, άρα ΔΒ //=ΟΑ.

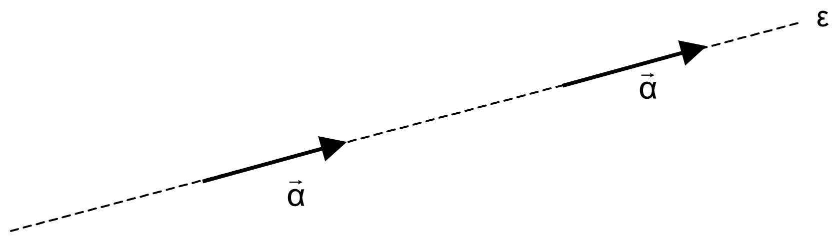
Επομένως ΟΑ //=ΕΖ, δηλαδή το ΟΑΖΕ είναι παραλληλόγραμμο.

Επομένως είναι
- $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\vec{\beta}+\vec{\alpha}$
- $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})+\vec{\gamma}=\vec{\alpha}+(\vec{\beta}+\vec{\gamma})$

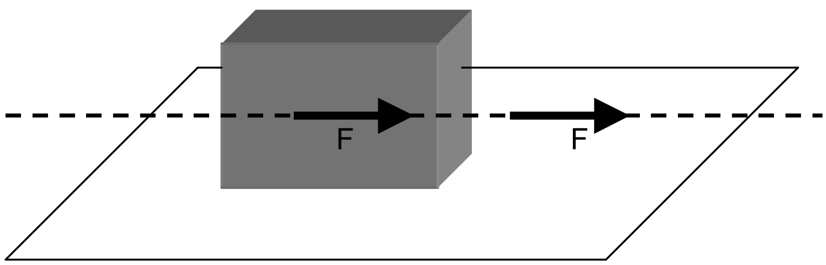
για οποιαδήποτε εφαρμοστά (άρα και για οποιαδήποτε ελεύθερα) διανύσματα του Ευκλείδειου επιπέδου.

Πρόσθεση μεταξύ ολισθαινόντων διανυσμάτων

Όπως είδαμε στην εισαγωγή, ολισθαίνον διάνυσμα $\vec{\alpha}$ είναι η κλάση ισοδυναμίας που αποτελείται από όλα τα διανύσματα που έχουν ίσο μέτρο με το $\vec{\alpha}$, βρίσκονται στον ίδιο φορέα και έχουν την ίδια φορά μ’ αυτό:



Η φυσική του ερμηνεία είναι η δύναμη, αφού, η δράση μιας δύναμης σταθερού μέτρου και κατεύθυνσης σε ένα σώμα, δεν επηρεάζεται από το σημείο εφαρμογής της δύναμης, αλλά μόνο από το φορέα της.

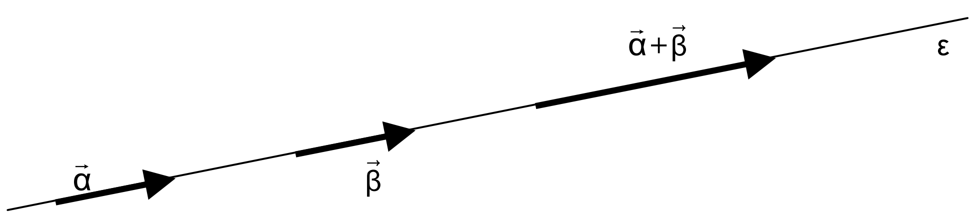


Στην παράγραφο αυτή θα εξετάσουμε γεωμετρικά την πρόσθεση μεταξύ ολισθαινόντων διανυσμάτων.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

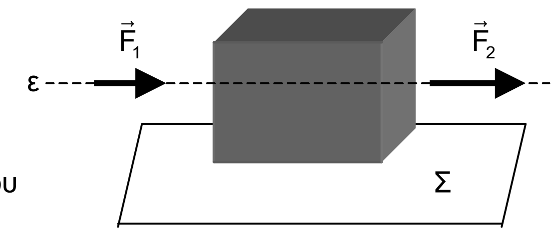
1. Τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ βρίσκονται στον ίδιο φορέα.

   Τότε, το άθροισμά τους είναι το διάνυσμα που έχει τον ίδιο φορέα, και αν είναι ομόρροπα, το άθροισμα έχει μέτρο ίσο με το άθροισμα των μέτρων τους, ενώ αν είναι αντίρροπα, τη διαφορά τους και τη φορά του μεγαλύτερου:



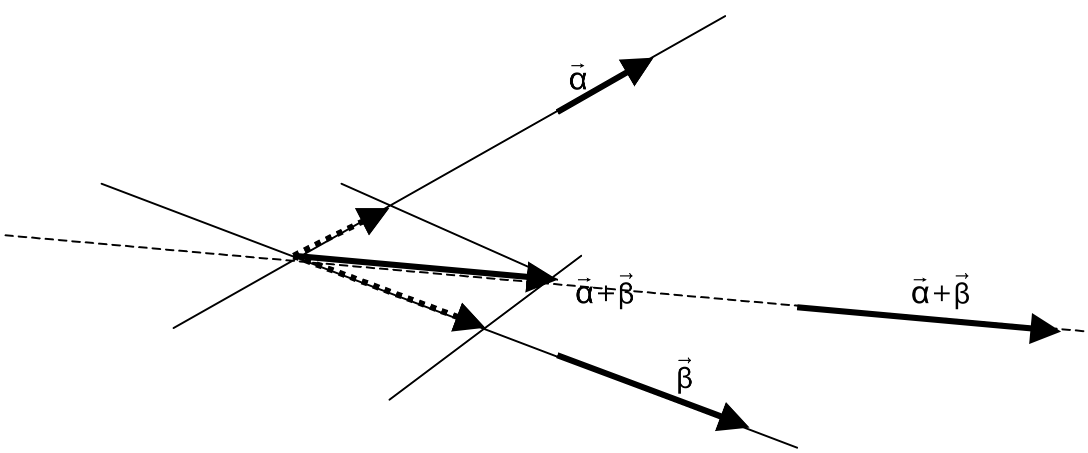
Η πρόσθεση μ' αυτό τον τρόπο εξηγείται από τη φυσική ερμηνεία του ολισθαίνοντος διανύσματος ως δύναμης:

Ας θεωρήσουμε δύο δυνάμεις $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ που ασκούνται κατά τον ίδιο φορέα ε σε ένα στερεό σώμα Σ. Τότε αν οι δυνάμεις είναι ομόρροπες, στο σώμα ασκείται επί του φορέα ε δύναμη μέτρου $|\vec{F}_1|+|\vec{F}_2|$ με φορά τη φορά των $\vec{F}_1, \vec{F}_2$.

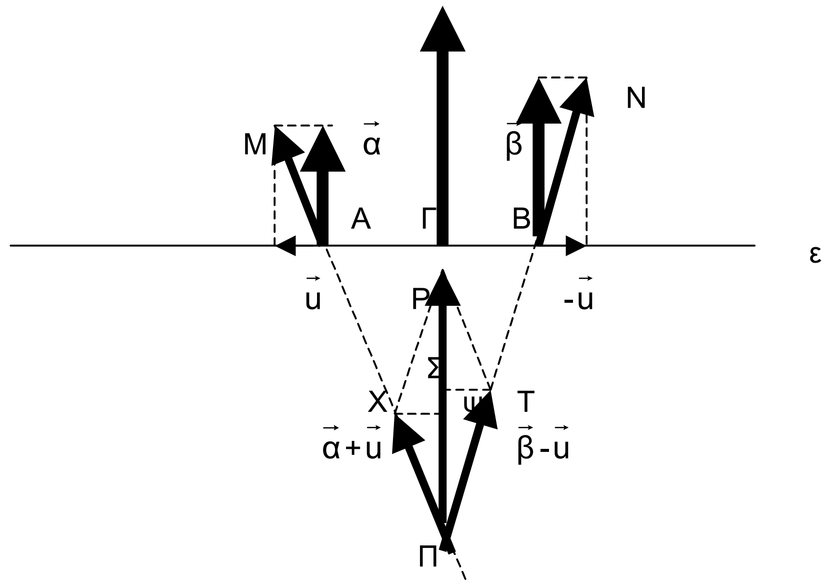


Αν οι δυνάμεις είναι αντίρροπες, στο σώμα ασκείται επί του φορέα ε δύναμη μέτρου $||\vec{F}_1| - |\vec{F}_2||$ με φορά τη φορά της μεγαλύτερης, κατά μέτρο, εκ των $\vec{F}_1, \vec{F}_2$

2. Τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ βρίσκονται σε διαφορετικούς, μη παράλληλους φορείς. Μεταφέρουμε τα διανύσματα στο σημείο τομής των φορέων τους και εφαρμόζουμε τον κανόνα του παραλληλογράμμου: Το άθροισμα είναι ολισθαίνον διάνυσμα του οποίου ο φορέας διέρχεται από το σημείο τομής των φορέων των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και είναι ισοδύναμο ως ελεύθερο διάνυσμα με το $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$.



3. Έστω ότι τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ βρίσκονται σε διαφορετικούς, παράλληλους φορείς και είναι ομόρροπα.



Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, η ευθεία ε στον η οποία είναι κάθετη στο φορέα τους, και τα διανύσματα $\vec{u}$, $-\vec{u}$ της ε. Εάν $\vec{u}$ είναι διάνυσμα με φορέα την ε, τότε έχουμε την ισότητα ελεύθερων διανυσμάτων

$$\vec{\alpha}+\vec{\beta} = (\vec{\alpha}+\vec{u}) + (\vec{\beta} - \vec{u})$$

Θα χρησιμοποιήσουμε αυτή τη σχέση για να ορίσουμε το άθροισμα ολισθαινόντων διανυσμάτων σε αυτή την περίπτωση.

Με τον κανόνα του παραλληλογράμμου τα $\vec{\alpha}$, $\vec{u}$ έχουν άθροισμα $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{\Pi X}$. Όμοια τα διανύσματα $\vec{\beta}$, $-\vec{u}$ έχουν άθροισμα $\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{\Pi T}$. Τα $\overrightarrow{\Pi X}$, $\overrightarrow{\Pi T}$ συντίθενται με τη σειρά τους στο διάνυσμα $\overrightarrow{\Pi P}$, που με ισότητες τριγώνων αποδεικνύεται ότι έχει μέτρο $|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$ και είναι κάθετο στην ε.

Επίσης, έχουμε $\overset{\triangle}{A\Gamma\Pi} \sim \overset{\triangle}{X\Psi\Pi}$, οπότε $\frac{A\Gamma}{X\Psi} = \frac{\Gamma\Pi}{|\vec{\alpha}|}$ και

$\overset{\triangle}{\Gamma B\Pi} \sim \overset{\triangle}{\Sigma T\Pi}$, οπότε $\frac{\Gamma B}{\Sigma T} = \frac{\Gamma\Pi}{|\vec{\beta}|}$ και επειδή ΧΨ = ΣΤ (εύκολο),

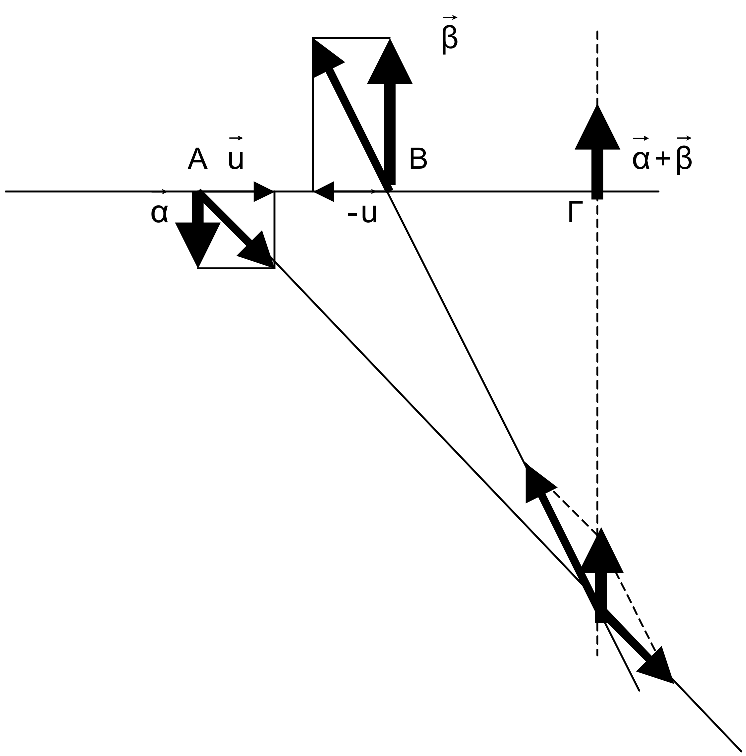
θα είναι $$\frac{\frac{A\Gamma}{X\Psi}}{\frac{\Gamma B}{\Sigma T}} = \frac{\frac{\Gamma\Pi}{|\vec{\alpha}|}}{\frac{\Gamma\Pi}{|\vec{\beta}|}} \Leftrightarrow \frac{A\Gamma}{\Gamma B} = \frac{|\vec{\beta}|}{|\vec{\alpha}|}$$

.

Παρατηρούμε ότι το σημείο Γ είναι ανεξάρτητο του διανύσματος $\vec{u}$. Πρέπει ακόμα να τονίσουμε ότι η καθετότητα του διανύσματος $\vec{u}$ με τα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ δεν είναι απαραίτητη [(10), (11)]. Εφαρμόστηκε για ευκολία στους υπολογισμούς (ισότητα, ομοιότητα τριγώνων) και στο σχήμα γενικά (πάντα μπορούμε να θεωρήσουμε ευθεία ε, κάθετη στο φορέα των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$.

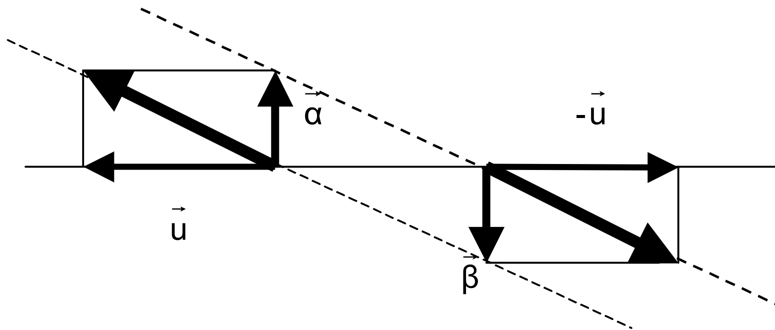
Το διάνυσμα $\overrightarrow{\Pi P}$ που προκύπτει ονομάζεται **άθροισμα** των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$.

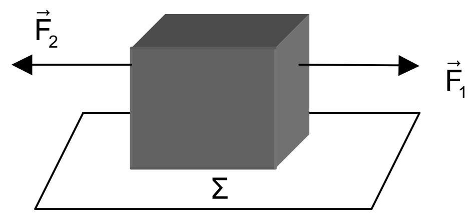
4. Εάν τα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ βρίσκονται σε διαφορετικούς, παράλληλους φορείς και είναι αντίρροπα με άνισα μέτρα, τότε με συλλογισμούς όμοιους με τα προηγούμενα ωθούμαστε να ορίσουμε ως άθροισμα των διανυσμάτων το διάνυσμα που έχει φορά τη φορά του μεγαλύτερου, έχει μέτρο ίσο με τη διαφορά των μέτρων τους και βρίσκεται στο φορέα που χωρίζει **εξωτερικά** το τμήμα που ενώνει τις δύο αρχές τους σε λόγο αντίστροφο προς το λόγο των μέτρων των αρχικών διανυσμάτων. Επίσης, βρίσκεται από τη «μεριά» του μεγαλύτερου διανύσματος.



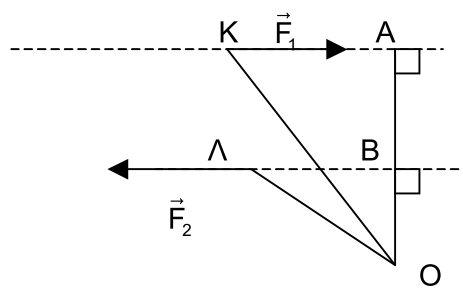
$$\frac{\Gamma A}{\Gamma B} = \frac{|\vec{\beta}|}{|\vec{\alpha}|}$$

5. Εάν τα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ βρίσκονται σε διαφορετικούς, παράλληλους φορείς και είναι αντίρροπα με ίσα μέτρα (**ζεύγος**), τότε δεν ορίζουμε άθροισμά τους και απλά λέμε ότι έχουμε **ζεύγος** διανυσμάτων. Παρατηρούμε ότι υπάρχουν πολλά ζεύγη με ίδια «δράση» όπως τα δύο αρχικά





Για να ερμηνεύσουμε, με τη βοήθεια της Φυσικής, την περίπτωση του ζεύγους, μπορούμε να θεωρήσουμε ένα στερεό σώμα στο οποίο ασκούνται δύο συγγραμμικές δυνάμεις ίσου μέτρου, αλλά αντίθετης φοράς. Αν οι δυνάμεις αυτές βρίσκονται στον ίδιο φορέα, τότε το σώμα θα παραμείνει ακίνητο (συνισταμένη μηδέν). Αν όμως βρίσκονται σε διαφορετικούς φορείς, τότε το σώμα θα **περιστραφεί**. Θα έχουμε δηλαδή ύπαρξη μόνο **ροπής** και όχι μεταφοράς, αφού οι δυνάμεις δεν μπορούν να δώσουν συνισταμένη, παρά μόνο ένα άλλο ζεύγος δυνάμεων.



Πράγματι, αν θεωρήσουμε τις δυνάμεις $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ όπως στο σχήμα και Ο το κέντρο ροπών, τότε η συνολική ροπή των δυνάμεων θα είναι

$$OA\,|\vec{F}_1| - OB\,|\vec{F}_2| = (OA - OB)\,|\vec{F}_1| = AB\,|\vec{F}_1|$$

δηλαδή παρατηρούμε ότι η ροπή του ζεύγους *δεν εξαρτάται από το κέντρο ροπών* [12], *αλλά ισούται (κατά μέτρο) με το μέτρο μιας εκ των δυνάμεων, επί την απόσταση μεταξύ των φορέων τους* [13]. Επομένως είναι ίση με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που ορίζεται από τα διανύσματα του ζεύγους.

Για να καθορίσουμε τη φορά περιστροφής, προσημαίνουμε το εμβαδόν αυτό με θετικό πρόσημο, αν η φορά είναι αντιωρολογιακή και με αρνητικό στην αντίθετη περίπτωση. Έτσι, το εμβαδόν του πρώτου παραλληλογράμμου του σχήματος είναι αρνητικό, ενώ του δεύτερου θετικό.

Συνεπώς, η δράση ενός ζεύγους είναι μόνο περιστροφική, και παραμένει σταθερή (κατά μέτρο) αν το γινόμενο ΑΒ $|\vec{F}_1|$ παραμένει σταθερό.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.2 Ονομάζουμε **σύστημα** διανυσμάτων στο ευκλείδειο επίπεδο E^2 κάθε πεπερασμένη συλλογή εφαρμοστών διανυσμάτων του E^3.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.1 Το άθροισμα των διανυσμάτων ενός συστήματος Σ του $\mathbb{R}^2$ είναι είτε μοναδικό διάνυσμα, είτε μοναδικό ζεύγος.

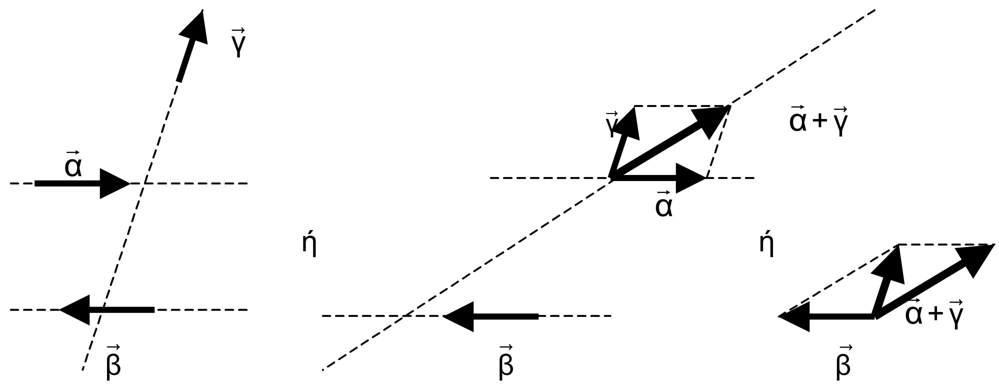
Απόδειξη

Θεωρούμε δύο εφαρμοστά διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ του Σ. Τότε, όπως είδαμε, αυτά είτε θα συντίθενται σε ένα διάνυσμα, είτε θα αποτελούν ζεύγος.

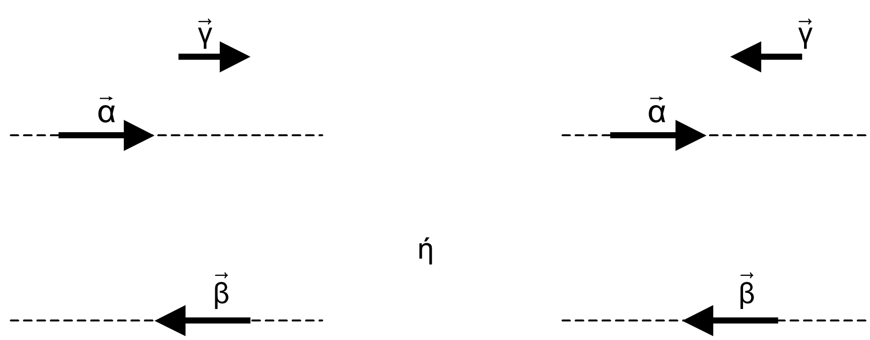
Στην πρώτη περίπτωση, το διάνυσμα (άθροισμα) είτε θα μπορεί να προστεθεί με ένα άλλο διάνυσμα του επιπέδου, είτε θα αποτελεί ζεύγος μ' αυτό.

Στη δεύτερη περίπτωση, αν $\vec{\gamma}$ ένα άλλο διάνυσμα του επιπέδου με $\vec{\gamma} \nparallel \vec{\alpha}$, τότε, αφού $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})+\vec{\gamma} = \vec{\alpha}+(\vec{\beta}+\vec{\gamma})$ έχουμε:

Ολισθαίνουμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\gamma}$ ώστε να αποκτήσουν κοινό σημείο εφαρμογής και βρίσκουμε το άθροισμά τους $\vec{\alpha}+\vec{\gamma}$. Στη συνέχεια, ενεργώντας ανάλογα, βρίσκουμε το άθροισμα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}+\vec{\gamma}$, $\vec{\beta}$ το οποίο προφανώς είναι μοναδικό.



Αν τώρα $\vec{\gamma} // \vec{\alpha}$, τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\gamma}$ δίνουν διάνυσμα αντίρροπο με το $\vec{\beta}$ (ή με το $\vec{\alpha}$) αλλά άνισου μέτρου, οπότε πάλι έχουμε αναγωγή σε ένα (κλάση ισοδυναμίας) διάνυσμα. Επομένως με επαγωγή στον αριθμό των διανυσμάτων του συστήματος, κάθε –πεπερασμένο– σύστημα διανυσμάτων του $\mathbb{R}^2$ ανάγεται είτε σε μοναδικό διάνυσμα (κλάση) είτε σε μοναδικό ζεύγος (κλάση).

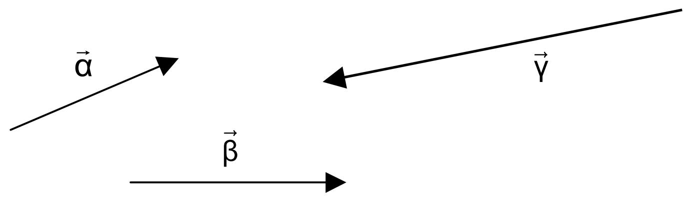


☻

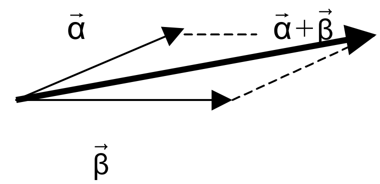
ΘΕΩΡΗΜΑ 1.2 Αν τρία ολισθαίνοντα διανύσματα του επιπέδου βρίσκονται σε μη παράλληλους φορείς ανά δύο και έχουν μηδενικό άθροισμα, τότε οι φορείς τους συντρέχουν.

Απόδειξη

Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ που έχουν μηδενικό άθροισμα ως ολισθαίνοντα διανύσματα.



Ο φορέας του αθροίσματος των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, ως ολισθαινόντων διανυσμάτων διέρχεται από το σημείο τομής των φορέων του $\vec{\alpha}$ και του $\vec{\beta}$.

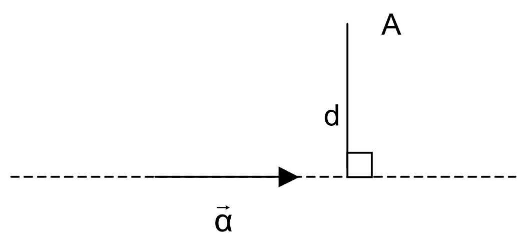


Συνεπώς, το τρίτο διάνυσμα (= – ($\vec{\alpha}+\vec{\beta}$)) πρέπει να βρίσκεται στο φορέα του αθροίσματος των πρώτων δύο, δηλαδή οι φορείς συντρέχουν ☻

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.3 Έστω ολισθαίνον διάνυσμα $\vec{\alpha}$ και δοσμένο σημείο Α. Το $\vec{\alpha}$ ανάγεται σε ένα σύστημα τριών διανυσμάτων: σε ένα διάνυσμα που διέρχεται από το Α που είναι ομόρροπο και ίσου μέτρου με το $\vec{\alpha}$ και σε ένα ζεύγος.

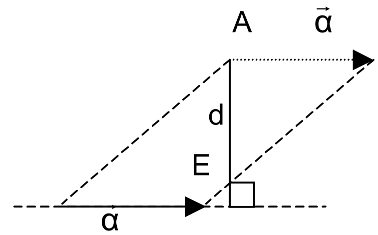
Απόδειξη

Θεωρούμε το ολισθαίνον διάνυσμα $\vec{\alpha}$ και το δοσμένο σημείο Α, ως κέντρο ροπών του επιπέδου.



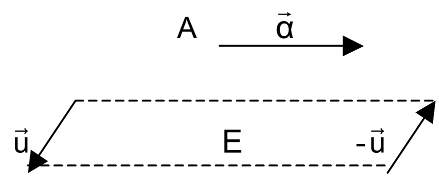
Αφού η φυσική ερμηνεία του $\vec{\alpha}$ είναι η δύναμη, το «σύστημα» Α - $\vec{\alpha}$ (Α: κέντρο ροπών) μπορεί να αναχθεί σε οποιοδήποτε άλλο σύστημα με την ίδια δράση με το αρχικό. Δηλαδή σε οποιοδήποτε σύστημα διανυσμάτων έχει συνισταμένη $\vec{\alpha}$ και ίδια ροπή με το $\vec{\alpha}$ (d$|\vec{\alpha}|$).

Αφού λοιπόν ο στόχος είναι η μεταφορά του $\vec{\alpha}$ στο Α, η αναγωγή θα οδηγήσει και στη «γέννηση» ζεύγους, του οποίου η συνολική ροπή θα είναι ίση με τη ροπή του $\vec{\alpha}$.



Η αρχική ροπή (του $\vec{\alpha}$) ως προς το σημείο Α είναι ίση με το εμβαδόν Ε του παραλληλογράμμου με πλευρά $\vec{\alpha}$ και ύψος d.

Μπορούμε επομένως να οδηγηθούμε στη μεταφορά του $\vec{\alpha}$ στο Α, με ταυτόχρονη όμως δημιουργία ζεύγους που θα ορίζει παραλληλόγραμμο εμβαδού Ε. ☻



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

2.1 ΟΛΙΣΘΗΣΗ ΣΤΟΝ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟ ΧΩΡΟ

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.1 Ο **Ευκλείδειος χώρος** διάστασης 3 (E^3) παριστάνεται από το σύνολο των *διατεταγμένων τριάδων* πραγματικών αριθμών.
Άρα

$$E^3 = \{x / \ x = (\kappa, \lambda, \mu) \ \text{ με } \kappa,\lambda,\mu \in \mathbb{R}\}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.2 **Εφαρμοστό διάνυσμα (x, u) στο σημείο x** του E^3 ονομάζουμε το ζεύγος που αποτελείται από το σημείο x του E^3 και το ελεύθερο διάνυσμα u του $\mathbb{R}^3$.

ΣΧΟΛΙΟ **Μηδενικό** θα ονομάζουμε το εφαρμοστό διάνυσμα (x, 0) στο τυχόν σημείο x και θα το συμβολίζουμε απλώς με 0 (η διάκρισή του από το ελεύθερο μηδενικό θα γίνεται από τα συμφραζόμενα)

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.3 **Εφαπτόμενος χώρος** στο σημείο x του E^3 (T_xE^3) ονομάζεται ο διανυσματικός χώρος που ορίζεται από τα εφαρμοστά στο x διανύσματα με τις πράξεις:

- $(x, u) + (x, v) = (x, u+v)$
- $\lambda(x, u) = (x, \lambda u)$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

Ελέγχουμε ότι ο χώρος $T_xE^3 = \{x\} \times \mathbb{R}^3$ ικανοποιεί τα αξιώματα του διανυσματικού χώρου.

α) $(x, u) + (x, v) = (x, u+v) = (x, v+u) = (x, v) + (x, u)$

β) $(x, u) + [(x, v) + (x, w)] = (x, u) + (x, v+w) = (x, u+v+w)$
$= (x, u+v) + (x, w) = [(x, u) + (x, v)] + (x, w)$

γ) $(x, u) + (x, 0) = (x, u+0) = (x, u)$

δ) $(x, u) + (x, -u) = (x, 0)$

ε) $1\cdot (x, u) = (x, 1u) = (x, u)$

στ) $(\kappa\lambda) (x, u) = (x, (\kappa\lambda)u) = (x, \kappa(\lambda u)) = \kappa(x, \lambda u) = \kappa[\lambda(x, u)]$

ζ) $\lambda [(x, u) + (x, v)] = \lambda (x, u+v) = (x, \lambda u+\lambda v) = (x,\lambda u) + (x, \lambda v)$
$= \lambda(x, u) + \lambda(x, v)$

η) $(\kappa+\lambda)(x, u) = (x, (\kappa+\lambda)u) = (x, \kappa u+\lambda u) = (x,\kappa u) + (x,\lambda u)$

$= \kappa(x, u) + \lambda(x, u)$ ☻

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.4 α) **Εσωτερικό γινόμενο** των διανυσμάτων (x, u) και (x, v) ονομάζουμε τον αριθμό $u \cdot v$, δηλαδή

$$(x, u) \cdot (x, v) = u \cdot v$$

β) **Εξωτερικό γινόμενο** των διανυσμάτων (x, u) και (x, v) ονομάζουμε το διάνυσμα $(x, u \times v)$, δηλαδή

$$(x, u) \times (x, v) = (x, u \times v)$$

ΣΧΟΛΙΟ Ισχύουν όλες οι γνωστές από την αναλυτική γεωμετρία ιδιότητες των δύο γινομένων, μιας και τα διανύσματα u, v είναι ελεύθερα διανύσματα.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.5 **Εφαπτομενική δέσμη** του E^3 (TE^3) ονομάζουμε το σύνολο των εφαρμοστών διανυσμάτων στα σημεία του E^3.

Δηλαδή

$$TE^3 = E^3 \times \mathbb{R}^3$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.6 **Σύστημα** διανυσμάτων στο E^3 ονομάζουμε ένα πεπερασμένο τυπικό άθροισμα $(x_1, u_1) + (x_2, u_2) + \dots + (x_n, u_n)$ στοιχείων του TE^3

Θα συμβολίζουμε ένα σύστημα $\sum_{x \in E^3}(x, u_x)$ ή απλά $\Sigma(x,u_x)$, εννοώντας ότι τα (x, u_x) δεν είναι μηδέν σε πεπερασμένο πλήθος σημείων.

ΣΧΟΛΙΟ **Μηδενικό** θα λέμε το σύστημα $\Sigma(x, u_x)$ όταν για κάθε x, $u_x = 0$, και θα το συμβολίζουμε με $\Sigma(x, 0)$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Για τον ορισμό του μηδενικού συστήματος, δεν είναι αρκετό, να ισχύει $\Sigma u_x = 0$, γιατί τότε ενδεχομένως να έχουμε ροπή (ζεύγος διανυσμάτων).

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.1 Το σύνολο S των συστημάτων του E^3 με τις πράξεις

- $\Sigma(x, u_x) \boxplus \Sigma(x, v_x) = \Sigma(x, u_x+v_x)$ και
- $\lambda(\Sigma(x, u_x)) = \Sigma(x, \lambda u_x)$ για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$

είναι *διανυσματικός χώρος*.

Απόδειξη

α) $\Sigma(x, u_x) \boxplus \Sigma(x, v_x) = \Sigma(x, u_x+v_x) = \Sigma(x, v_x+u_x)= \Sigma(x, v_x) \boxplus \Sigma(x, u_x)$

β) $\Sigma(x, u_x) \boxplus [\Sigma(x, v_x) \boxplus \Sigma(x, w_x)]= \Sigma(x, u_x) \boxplus \Sigma(x, v_x+w_x)$

$= \Sigma(x, ux+v_x+w_x) = \Sigma(x, u_x+v_x) \boxplus \Sigma(x, w_x)$

$= [\Sigma(x, u_x) \boxplus \Sigma(x, v_x)] \boxplus \Sigma(x, w_x)$

γ) $\Sigma(x, u_x) \boxplus \Sigma(x, 0) = \Sigma(x, u+0) = \Sigma(x, u_x)$

δ) $\Sigma(x, u_x) \boxplus \Sigma(x, -u_x) = \Sigma(x, u_x-u_x) = \Sigma(x, 0)$

ε) $1\cdot \Sigma(x, u_x) = \Sigma(x, 1u_x)= \Sigma(x, u_x)$

στ) $(\kappa\lambda) (\Sigma(x, u_x)) = \Sigma(x, (\kappa\lambda)u_x) = \Sigma(x, \kappa(\lambda u_x)) =\kappa \Sigma(x, \lambda u_x)$
$=\kappa[\lambda \Sigma(x, u_x)]$

ζ) $\lambda [\Sigma(x, u_x) \boxplus \Sigma(x, v_x)] = \lambda \Sigma(x, u_x+v_x)= \Sigma(x, \lambda(u_x+v_x))$

$= \Sigma(x, \lambda u_x+\lambda v_x)= \Sigma(x, \lambda u_x) \boxplus \Sigma(x, \lambda v_x)= \lambda\Sigma(x, u_x) \boxplus \lambda\Sigma(x, v_x)$

η) $(\kappa+\lambda) \Sigma(x, u_x) = \Sigma(x, (\kappa+\lambda)u_x) = \Sigma(x, \kappa u_x+\lambda u_x)$

$= \Sigma(x, \kappa u_x) \boxplus \Sigma(x, \lambda u_x) = \kappa\Sigma(x, u_x) \boxplus \lambda\Sigma(x, u_x)$ ☻

Θα ορίσουμε τη σχέση ισοδυναμίας της οποίας οι κλάσεις θα είναι τα ολισθαίνοντα διανύσματα στο χώρο E^3.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.7 Λέμε ότι το στοιχείο $(y, u_y)\in E^3 x\ \mathbb{R}^3$ είναι **ισοδύναμο** με το (x,u_x) και γράφουμε $(x, u_x) \sim (y, u_y)$ αν και μόνο αν $u_x= u_y$ και $u_x = \lambda(x – y)$ για κάποιο $\lambda\in\mathbb{R}$).

Δηλαδή, εάν $u_x \neq 0$, τότε

$$\boxed{(x, u_x) \sim (x+\lambda u_x, u_x)}$$

ενώ όλα τα μηδενικά εφαπτόμενα διανύσματα είναι ισοδύναμα.

Η ισχύς της ανακλαστικότητας είναι προφανής, αφού

$$(x, u_x) \sim (x+0u_x, u_x) = (x, u_x)$$

Για τη συμμετρικότητα έχουμε:

$$(x, u_x) \sim (y, u_y) \Leftrightarrow (u_x= u_y \text{ και } y=x+\lambda u_x) \Leftrightarrow [u_y= u_x \text{ και } x=y+(-\lambda)u_x]$$

$$\Leftrightarrow (y, u_y) \sim (x, u_x)$$

Τέλος, η μεταβατικότητα ισχύει, μια και

$$[(x, u_x) \sim (y, u_y) \ \& \ (y, u_y) \sim (z, u_z)] \Rightarrow [y=x+\lambda u_x, u_x= u_y \ \& \ z=y+\mu u_y, u_y= u_z]$$

$$\Rightarrow [z=(x+\lambda u_x) + \mu u_x, u_x = u_z] \Rightarrow [z=x+(\lambda+\mu)u_x, u_x = u_z]$$

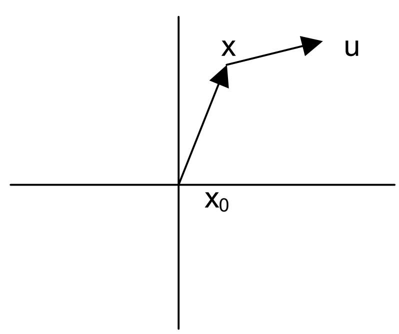
$$\Rightarrow (x,u_x) \sim (z, u_z)$$ ☻

Άρα με την παραπάνω ισοδυναμία ορίζονται **κλάσεις ισοδυναμίας** στα διανύσματα του TE^3.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.8 Θεωρούμε ένα σημείο αναφοράς x_0 στο E^3. Ορίζουμε ως **πλουκεριανές συντεταγμένες του εφαρμοστού διανύσματος** (x, u) ως προς το σημείο αναφοράς x_0 και τις συμβολίζουμε με P((x, u)) το διατεταγμένο ζεύγος (u, $(x–x_0)\times u$) δηλαδή

$$\boxed{P((x, u))= (u, x\times u)}$$

όπου $(x–x_0)\times u$ είναι το εξωτερικό γινόμενο του ελεύθερου διανύσματος u με το εφαρμοστό διάνυσμα που έχει αρχή το σημείο αναφοράς και πέρας το σημείο x.



Πλουκεριανές συντεταγμένες του συστήματος $\Sigma(x, \lambda u_x)$ ως προς το σημείο x_0 λέμε το διατεταγμένο ζεύγος $(\Sigma u_x, \Sigma(x–x_0)\times u_x)$ και τις συμβολίζουμε με $P(\Sigma_x)$ ή απλά P(Σ) δηλαδή

$$\boxed{P(\Sigma)= (\Sigma u_x, \Sigma(x–x_0)\times u_x)}$$

ΣΧΟΛΙΟ Οι πλουκεριανές συντεταγμένες του μηδενικού διανύσματος, αλλά και του μηδενικού συστήματος είναι (0, 0)

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.3 Δύο στοιχεία είναι ισοδύναμα αν και μόνο αν έχουν ίσες πλουκεριανές συντεταγμένες ως προς κάποιο σημείο αναφοράς.

Απόδειξη

Θεωρούμε ως σημείο αναφοράς την αρχή των αξόνων. Τότε $x_0 = 0$ και έστω τα ισοδύναμα στοιχεία (x, u) και $(x+\lambda u, u)$. Τότε

$P((x, u))= (u, x\times u)$ και

$$P((x + \lambda u, u))= (u, (x+\lambda u)\times u)= (u, x\times u + (\lambda u)\times u)$$
$$=(u, x\times u + \lambda(u\times u)) = (u, x\times u +0)$$
$$=(u, x\times u)$$

Αντιστρόφως, αν $P((x, u)) = P((y, v))$ τότε $(u, x\times u)= (v, y\times v)$

Όμως από τον ορισμό των Πλουκεριανών συντεταγμένων ως διατεταγμένο ζεύγος, θα είναι

$(u=v$ και $x\times u= y\times v)$ ή $(u=v$ και $x\times u= y\times u)$ ή $[u=v$ και $(y–x)\times u= 0]$ ή

Αλλά επειδή (γενικά) $u \neq 0$, θα έχουμε

$(u=v$ και $(y–x) = \lambda u)$ ή $(u=v$ και $y= x + \lambda u)$ ή $(y, u)=(x+\lambda u, u)\equiv(x, u)$ ☻

Επομένως σε ισοδύναμα στοιχεία αντιστοιχεί <u>μοναδικό</u> ζεύγος πλουκεριανών συντεταγμένων.

2.2 ΣΤΑΤΙΚΗ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Από την ισοδυναμία $(x, u_x) \sim (x + \lambda u_x, u_x)$, παίρνουμε τη σχέση ~ μεταξύ συστημάτων:

$$\Sigma(x, u_x)=[\Sigma(x, u_x) \boxplus (x_1, -v_{x_1})] \boxplus (x_1, v_{x_1}) \sim [\Sigma(x, u_x) \boxplus (x_1, -v_{x_1})] \boxplus (x_1+\lambda v_{x_1}, v_{x_1})$$

δηλαδή ότι

$$\boxed{\Sigma(x, u_x) \sim [\Sigma(x, u_x) \boxplus (x_1, -v_{x_1})] \boxplus (x_1+\lambda v_{x_1}, v_{x_1})}$$

οπότε

$$[\Sigma(x, u_x) \boxplus (x_1, -v_{x_1})] \boxplus (x_1+\lambda v_{x_1}, v_{x_1}) = [\Sigma(x, u_x) \boxplus (x_1+\lambda v_{x_1}, v_{x_1})] \boxplus (x_1, -v_{x_1})$$

Όμως $(x_1, -v_{x_1}) \sim (x_1 - \lambda(-v_{x_1}), -v_{x_1})$, οπότε

$$[\Sigma(x, u_x) \boxplus (x_1, -v_{x_1})] \boxplus (x_1+\lambda v_{x_1}, v_{x_1}) \sim$$

$$\sim [\Sigma(x, u_x) \boxplus (x_1+\lambda v_{x_1}, v_{x_1})] \boxplus (x_1-\lambda(-v_{x_1}), -v_{x_1})$$

$$= \Sigma(x, u_x) \boxplus [(x_1+\lambda v_{x_1}, v_{x_1}) \boxplus (x_1+\lambda v_{x_1}, -v_{x_1})]$$

$$= \Sigma(x, u_x) \boxplus (x_1+\lambda v_{x_1}, 0) = \Sigma(x, u_x)$$

Άρα η σχέση «~» που ορίστηκε παραπάνω είναι <u>συμμετρική</u> και ανακλαστική. Θα τη χρησιμοποιήσουμε για να ορίσουμε μια σχέση ισοδυναμίας μεταξύ συστημάτων εφαρμοστών διανυσμάτων.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.9 Γράφουμε $\Sigma \equiv T$ και λέμε ότι τα συστήματα Σ, Τ του χώρου όλων των συστημάτων S είναι (στατικά) ισοδύναμα αν υπάρχει πεπερασμένη ακολουθία συστημάτων $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_\kappa$ τέτοια ώστε:
$\Sigma_1=\Sigma$, $\Sigma_\kappa=T$ και $\Sigma_{i+1} \sim \Sigma_i$ για $i = 1, 2, \ldots, \kappa-1$.

Η (στατική) ισοδυναμία συστημάτων είναι τότε

α) ανακλαστική : $\Sigma \equiv \Sigma$ (προφανές)

β) συμμετρική

Απόδειξη

Έστω τα συστήματα Σ, Τ με $\Sigma \equiv T$.

Υπάρχει τότε ακολουθία (Σ_n), $n=1, 2, \ldots, \kappa$ με $\Sigma_1=\Sigma$, $\Sigma_\kappa=T$ και $\Sigma_{i+1} \sim \Sigma_i$ για $i =1, 2, \ldots, \kappa-1$.

Αφού όμως η σχέση «~» είναι συμμετρική, έχουμε $\Sigma_i \sim \Sigma_{i+1}$, οπότε θεωρώντας την ακολουθία $(\Sigma_{\kappa-n+1})$, n=1, 2, …,κ με $\Sigma_\kappa=T$, $\Sigma_1=\Sigma$, θα είναι $T\equiv\Sigma$, αφού για $n = 1 : \Sigma_{\kappa-n+1} = \Sigma_\kappa = T$ και

για $n = \kappa : \Sigma_{\kappa-n+1} = \Sigma_\kappa = \Sigma$ ☻

γ) μεταβατική

Απόδειξη

Θεωρούμε τα συστήματα Σ, Τ, Ρ του S με $\Sigma\equiv T$ και $T\equiv P$.

Άρα υπάρχουν ακολουθίες (Σ_n), n=1, 2, …, κ και (T_m), m=1, 2, …, ℓ τέτοιες ώστε ($\Sigma_1=\Sigma$, $\Sigma_\kappa=T$ και $\Sigma_{i+1} \sim \Sigma_i$ για i =1, 2, …, κ-1) και

($T_1=T$, $T_\ell=P$ και $T_{j+1} \sim T_j$ για j =1, 2, …, ℓ-1)

Οπότε, θεωρώντας την ακολουθία (P_r), r =1, 2, …, κ+ℓ με $P_r = \Sigma_r$ για r =1, 2, …, κ και $P_r=T_{r-\kappa}$ για r = κ+1, κ+2, …, κ+ℓ, είναι $\Sigma\equiv T$ ☻

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.3 Αν $\Sigma\equiv T$ και $\Sigma'\equiv T'$ τότε $\Sigma\boxplus\Sigma'\equiv T\boxplus T'$ για κάθε Σ, Τ, Σ', Τ' $\in$ S.

Για την απόδειξη αυτή θα χρειαστούμε το

ΛΗΜΜΑ 2.1 Αν $\Sigma\equiv T$ τότε $\Sigma'\boxplus\Sigma\equiv\Sigma'\boxplus T$ για κάθε Σ, Τ, Σ' $\in$ S.

Απόδειξη

Λόγω της ισχύος της μεταβατικότητας, αρκεί να αποδείξουμε την ισοδυναμία για ένα βήμα, δηλαδή για τη σχέση «~».

Έχουμε: $\Sigma \sim T \Leftrightarrow \Sigma=T\boxplus (x, -v) \boxplus (x+\lambda v, v)$

Οπότε $\Sigma'\boxplus\Sigma=\Sigma'\boxplus[T\boxplus (x, -v) \boxplus (x+\lambda v, v)]$, $\lambda\in \mathbb{R}$

και αφού η πράξη «⊞» όπως ορίστηκε, είναι προσεταιριστική,

$$\Sigma'\boxplus\Sigma = (\Sigma'\boxplus T) \boxplus (x, -v) \boxplus (x+\lambda v, v) \sim \Sigma'\boxplus T \quad ☻$$

Έτσι, αν $\Sigma\equiv T$ και $\Sigma'\equiv T'$ έχουμε:

$$\Sigma\boxplus\Sigma'\equiv T\boxplus\Sigma' \equiv T\boxplus T' \quad \text{για κάθε } \Sigma, T, \Sigma', T' \in S \quad ☻$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.4 Αν $\Sigma\equiv T$ τότε $\lambda\Sigma\equiv\lambda T$ για κάθε $\lambda\in \mathbb{R}$ και για κάθε Σ, Τ $\in$ S.

Απόδειξη

Αν $\Sigma\sim T$ τότε $\Sigma=T\boxplus (x, -v) \boxplus (x+\mu v, v)$, $\mu\in \mathbb{R}$ οπότε

$\lambda\Sigma=\lambda T \boxplus (x, -\lambda v) \boxplus (x+\mu v, \lambda v)$

$= \lambda T \boxplus (x, -\lambda v) \boxplus (x+\frac{\mu}{\lambda}(\lambda v), \lambda v)$ ($\lambda\neq 0$. Αν $\lambda=0$ το θεώρημα είναι προφανές)

Θέτοντας $\lambda v = u$ και $\frac{\mu}{\lambda}=\kappa$, έχουμε

$\lambda\Sigma = \lambda T \boxplus (x, -u) \boxplus (x+\kappa v, u)$, οπότε $\lambda\Sigma \sim \lambda T$ ☻

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.5 Το σύνολο των κλάσεων στατικής ισοδυναμίας συστημάτων είναι διανυσματικός χώρος.

Απόδειξη

Συμβολίζουμε C_R την κλάση ισοδυναμίας του συστήματος R.

Τότε α) $C_\Sigma + C_T = C_T + C_\Sigma$, αφού $\Sigma \boxplus T = T \boxplus \Sigma$

β) $(C_\Sigma + C_T) + C_\Phi = C_\Sigma + (C_T + C_\Phi)$,

αφού $(\Sigma \boxplus T) \boxplus \Phi = \Sigma \boxplus (T \boxplus \Phi)$

γ) Αν $L=\Sigma(x, 0)$

$C_\Sigma + C_L = C_\Sigma$, οπότε C_L : μηδενικό στοιχείο της κλάσης

δ) $C_\Sigma + C_{(-1)\Sigma} = C_L$, αφού $\Sigma \boxplus (-1)\Sigma = \Sigma(x, u_x) \boxplus \Sigma(x, -u_x) = \Sigma(x, 0)$

ε) $1 \cdot C_\Sigma = C_\Sigma$

στ) $(\kappa\lambda) C_\Sigma = \kappa(\lambda C_\Sigma)$

ζ) $\lambda(C_\Sigma + C_T) = \lambda C_\Sigma + \lambda C_T$

η) $(\kappa+\lambda) C_\Sigma = \kappa C_\Sigma + \lambda C_\Sigma$ ☻

Θα βρούμε τη **διάσταση** του παραπάνω χώρου:

Ορίζουμε την απεικόνιση $P: S \to \mathbb{R}^3 x \mathbb{R}^3$ όπου P(Σ) οι πλουκεριανές συντεταγμένες του συστήματος Σ, και θα δείξουμε ότι ισοδύναμα συστήματα έχουν ίσες πλουκεριανές συντεταγμένες ως προς δοθέν σημείο. Για την απόδειξη αυτή θα χρειαστούμε το

ΛΗΜΜΑ 2.2 Η απεικόνιση $P: S \to \mathbb{R}^3 x \mathbb{R}^3$ είναι γραμμική.

Απόδειξη

Ας θεωρήσουμε δύο στοιχεία (συστήματα) Σ, Τ του S.

Είναι $P(\Sigma \boxplus T) = P(\Sigma(x, u_x) \boxplus \Sigma(x, v_x)) = P(\Sigma(x, u_x + v_x))$

$$=(\Sigma(u_x + v_x), \Sigma(x \times (u_x + v_x))) =(\Sigma(u_x + v_x), \Sigma(x \times u_x + x \times v_x))$$

$$=(\Sigma u_x + \Sigma v_x, \Sigma x \times u_x + \Sigma x \times v_x) =(\Sigma u_x, \Sigma x \times u_x) + (\Sigma v_x, \Sigma x \times v_x)$$

$$=P(\Sigma) + P(T)$$

Επίσης αν λ πραγματικός αριθμός, θα είναι

$$P(\lambda\Sigma) = P(\lambda\Sigma(x, u_x)) = P(\Sigma(x, \lambda u_x))= (\Sigma(\lambda u_x), \Sigma(x \times (\lambda u_x)))$$

$$= (\lambda \Sigma u_x, \lambda\Sigma x \times u_x) = \lambda(\Sigma u_x, \Sigma x \times u_x)$$

$$=\lambda P(\Sigma)$$ ☻

Άρα η απεικόνιση είναι γραμμική.

Στη συνέχεια, είναι απαραίτητο να αποδείξουμε ότι:

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.6 Ισοδύναμα συστήματα έχουν ίσες πλουκεριανές συντεταγμένες.

Απόδειξη

Έστω τα συστήματα T, T' του S με $T \equiv T'$. Λόγω της μεταβατικότητας, θα αποδείξουμε πάλι τον ισχυρισμό για ένα βήμα, δηλαδή όταν $T \sim T'$.

Έχουμε:

$T \sim T'$ άρα $T = T' \boxplus (x, -u) \boxplus (x+\lambda u, u)$ οπότε

$$P(T) = P(T') + P((x, -u)) + P((x+\lambda u, u))$$

$$= P(T') + (-u, x \times (-u)) + (u, (x+\lambda u) \times u)$$

$$= P(T') + (-u, -x \times u) + (u, x \times u+(\lambda u) \times u)$$

$$= P(T') + (-u, -x \times u) + (u, x \times u)$$

$$= P(T')$$ ☻

Άρα $\boxed{T \equiv T' \Rightarrow P(T) = P(T')}$

Η ισχύς του αντιστρόφου του παραπάνω ισχυρισμού, σημαίνει προφανώς ότι η απεικόνιση P είναι 1-1. Προς την κατεύθυνση αυτή θα αποδείξουμε το επόμενο θεώρημα, που αναφέρεται σε συγκεκριμένης μορφής συστήματα (διμελή).

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.7 Αν για τα μη μηδενικά διανύσματα u, v, w, z και τα σημεία x, x_0, y ισχύουν $u+v = w + z$ και $(x - x_0)\times v = (y - x_0)\times z$

τότε $\{ (x_0, u), (x, v) \} \equiv \{ (x_0, w), (y, z) \}$

Απόδειξη

Το θεώρημα, όπως είπαμε, ισχυρίζεται ότι αν τα δύο παραπάνω – διμελή – συστήματα έχουν ίσες πλουκεριανές συντεταγμένες, τότε αυτά είναι ισοδύναμα.

Οι Πλουκεριανές συντεταγμένες του πρώτου συστήματος είναι

$$P\{ (x_0, u), (x, v)\} = (u+v,\ x_0\times u+x\times v)$$

Όμως από την ισότητα $(x - x_0)\times v = (y - x_0)\times z$ έχουμε

$$x\times v - x_0\times v = y\times z - x_0\times z \Leftrightarrow x\times v- y\times z = x_0\times(v-z)$$

Αλλά $u+v = w + z \Leftrightarrow v - z = w - u$, οπότε $x\times v- y\times z = x_0\times(w-u)$

$$\Leftrightarrow x\times v- y\times z = x_0\times w -x_0\times u \Leftrightarrow x\times v + x_0\times u = x_0\times w + y\times z$$

οπότε $P\{(x_0, u), (x, v)\} = (u+v,\ x_0\times u+x\times v) = (w+z,\ x_0\times w+y\times z)$

$= P\{(x_0, w), (y, z) \}$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $(x - x_0)\times v = (y - x_0)\times z = 0$

  Τότε $(x - x_0 = \lambda v$ και $y - x_0 = \mu z) \Leftrightarrow (x = x_0+ \lambda v$ και $y = x_0 + \mu z)$

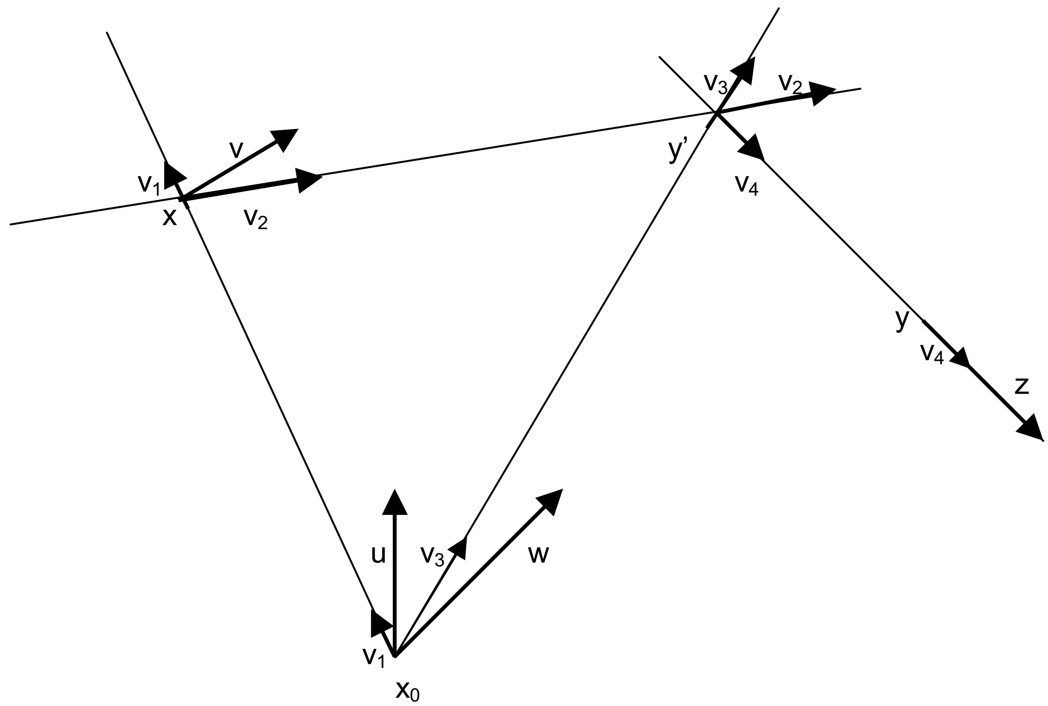
  Έτσι, $\{ (x_0, u), (x, v) \} = \{ (x_0, u), (x_0 + \lambda v, v) \} \equiv\{ (x_0, u), (x_0, v) \}$

  $\equiv \{ (x_0, u + v) \} = \{ (x_0, w + z) \} \equiv \{ (x_0, w), (x_0, z) \}$

  $\equiv \{ (x_0, w), (x_0+\mu z, z) \} = \{(x_0, w), (y, z) \}$

- $(x - x_0)\times v = (y - x_0)\times z = M \neq 0$ (1)

  Τότε τα διανύσματα (x, v), (y, z) βρίσκονται στο κάθετο επίπεδο του M στο σημείο x_0 το οποίο (x_0) από την (1) είναι σαφές ότι βρίσκεται εκτός των φορέων των (x, v), (y, z):



Θεωρώντας το σημείο y' του επιπέδου (x, x_0, y), εκτός των ευθειών xx_0, yx_0 παρατηρούμε ότι το διάνυσμα (x, v) μπορεί να ολισθήσει στα σημεία x_0 και y (σχήμα). Σε αλγεβρική γλώσσα, από την εκλογή του σημείου y', είναι προφανές ότι υπάρχουν γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα v_0, v_0' με αρχή το σημείο x και φορείς τις ευθείες x_0x, xy που αποτελούν μια βάση των διανυσμάτων του επιπέδου (x, x_0, y'). Επομένως $v = \kappa v_0 + \lambda v_0' = v_1 + v_2$

Έτσι, παρατηρώντας το προηγούμενο σχήμα, έχουμε

$$\{ (x_0, u), (x, v) \} \equiv \{(x_0, u), (x, v_1 + v_2)\} \equiv \{(x_0, u), (x, v_1)\} \boxplus (x, v_2)$$

$$\equiv \{(x_0, u), (x, v_1)\} \boxplus (x+\mu v_2, v_2) \equiv \{(x_0, u), (x, v_1)\} \boxplus (y', v_2)$$

$$\equiv \{(x_0, u), (x, v_1)\} \boxplus (y', v_3 + v_4) \equiv \{(x_0, u), (x, v_1)\} \boxplus (y', v_3) \boxplus (y', v_4)$$

$$\equiv \{(x_0, u), (x + \pi v_1, v_1)\} \boxplus (y'+\rho v_3, v_3) \boxplus (y'+\tau v_4, v_4)$$

$$\equiv \{(x_0, u), (x_0, v_1)\} \boxplus (x_0, v_3) \boxplus (y, v_4)$$

$$\equiv \{(x_0, u + v_1 + v_3), (y, v_4)\}$$

Όμως ισοδύναμα συστήματα έχουν ίσες πλουκεριανές συντεταγμένες, άρα

$u+v_1+v_3+v_4 = u+v \Leftrightarrow v_1+v_3+v_4 = v$ και απ' την υπόθεση:

$u+v_1+v_3+v_4= w+z$

και $x_0 \times u+x \times v = x_0 \times (u+v_1+v_3) + y \times v_4 \Leftrightarrow x \times v = x_0 \times (v_1+v_3) + y \times v_4$

$$\Leftrightarrow x_x v = x_0 x(v - v_4) + y_x v_4 \Leftrightarrow x_x v = x_0 x v - x_0 x v_4 + y_x v_4$$

$$\Leftrightarrow (x - x_0)_x v = (y - x_0)_x v_4 \Leftrightarrow (y - x_0)_x z = (y - x_0)_x v_4$$

Όμως,

ΛΗΜΜΑ 2.3 $(\alpha_x\beta = \alpha_x\gamma \neq 0$ και $\beta=\lambda\gamma,\ \lambda\in\mathbb{R}) \Rightarrow \beta = \gamma$

Απόδειξη

$(\alpha x\beta = \alpha x\gamma \neq 0$ και $\beta=\lambda\gamma,\ \lambda\in\mathbb{R}\ ) \Rightarrow\ \alpha x(\lambda\gamma) = \alpha x\gamma$

$\Rightarrow \lambda(\alpha x\gamma) = \alpha x\gamma \Rightarrow\ (\lambda-1)\ \alpha x\gamma = 0.$

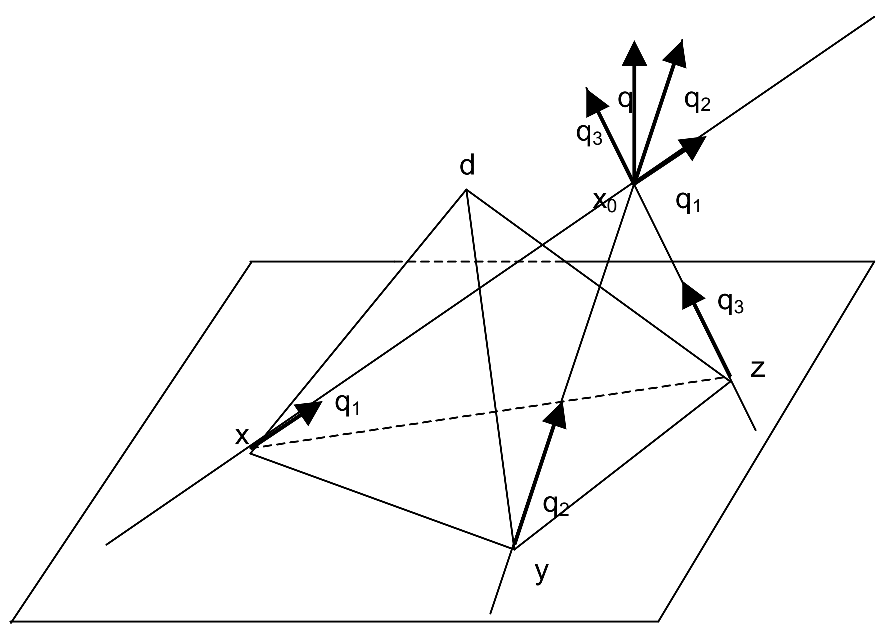
Όμως $\alpha x\gamma \neq 0$ οπότε $\lambda=1$, δηλαδή $\beta=\gamma$ ☻

Επιστρέφοντας στην απόδειξη του θεωρήματος, έχουμε $z=v_4$, επομένως $u + v_1 + v_3 = w$, άρα πάλι $\{ (x_0, u), (x, v) \} \equiv \{ (x_0, w), (y, z) \}$ ☻

Ας δούμε τώρα πώς ένα σύστημα ανάγεται σε ισοδύναμο διμελές. Θα αποδείξουμε κατ' αρχήν ότι:

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.8 Κάθε σύστημα Σ ανάγεται σε ισοδύναμο τριών εφαρμοστών διανυσμάτων, δεδομένων, μη συνευθειακών σημείων εφαρμογής, δηλαδή $\Sigma\equiv \{(x, u), (y, v), (z, w)\}$ με $xy \neq yz$.

Απόδειξη



Θα αποδείξουμε ότι τυχόν διάνυσμα (x_0, q) του Σ αναλύεται σε τρία εφαρμοστά διανύσματα (δι' ολισθήσεως) (x, u), (y, v), (z, w).

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις

(i) $x_0 \notin (x, y, z)$

Τότε, αφού x, y, z μη συνευθειακά, οι ευθείες xx_0, yx_0, zx_0 ορίζουν τρία διανύσματα – βάση του $\mathbb{R}^3$. Συνεπώς το q αναλύεται σε τρία διανύσματα q_1, q_2, q_3 τα οποία με ολίσθηση μεταφέρονται στα σημεία x, y, z αντίστοιχα. Αλγεβρικά, έχουμε:

$$(x_0, q) \equiv (x_0, q_1+q_2+q_3) = (x_0, q_1) \boxplus (x_0, q_2) \boxplus (x_0, q_3)$$

$$\equiv (x_0+\lambda q_1, q_1) \boxplus (x_0+\mu q_2, q_2) \boxplus (x_0+\rho q_3, q_3)$$

$$= (x, q_1) \boxplus (y, q_2) \boxplus (z, q_3)$$

(ii) $x_0 \in (x, y, z)$

Τότε, θεωρώντας σημείο $d \notin (x, y, z)$ ώστε $x_0 \notin yz$, το q αναλύεται όπως πριν σε τρία διανύσματα με σημεία εφαρμογής y, z, d και το διάνυσμα στο d θα αναλύεται σε τρία διανύσματα με σημεία εφαρμογής x, y, z.

Αλγεβρικά, είναι

$$(x_0, q) \equiv (x_0, q_1+q_2+q_3) = (x_0, q_1) \boxplus (x_0, q_2) \boxplus (x_0, q_3)$$

$$\equiv (x_0+\lambda q_1, q_1) \boxplus (x_0+\mu q_2, q_2) \boxplus (x_0+\rho q_3, q_3)$$

$$= (y, q_1) \boxplus (z, q_2) \boxplus (d, q_3) \text{ και απ' την (i)}$$

$$\equiv (y, q_1) \boxplus (z, q_2) \boxplus (y, q_1') \boxplus (z, q_2') \boxplus (x, q_3')$$

$$= (x, q_3') \boxplus (y, q_1 + q_1') \boxplus (z, q_2 + q_2')$$

Άρα κάθε διάνυσμα του Σ αναλύεται σε τρία εφαρμοστά στα σημεία x, y, z. Αν η συνισταμένη στα x, y, z είναι u, v, w αντίστοιχα, τότε καταλήξαμε ότι

$\Sigma \equiv \{(x, u), (y, v), (z, w)\}$ ☻

Τώρα μπορούμε να αποδείξουμε το

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.9 Κάθε σύστημα Σ ανάγεται σε ισοδύναμο δύο εφαρμοστών διανυσμάτων, το ένα εκ των οποίων έχει δεδομένο σημείο εφαρμογής, δηλαδή $\Sigma \equiv \{(x_0, u), (y, v)\}$

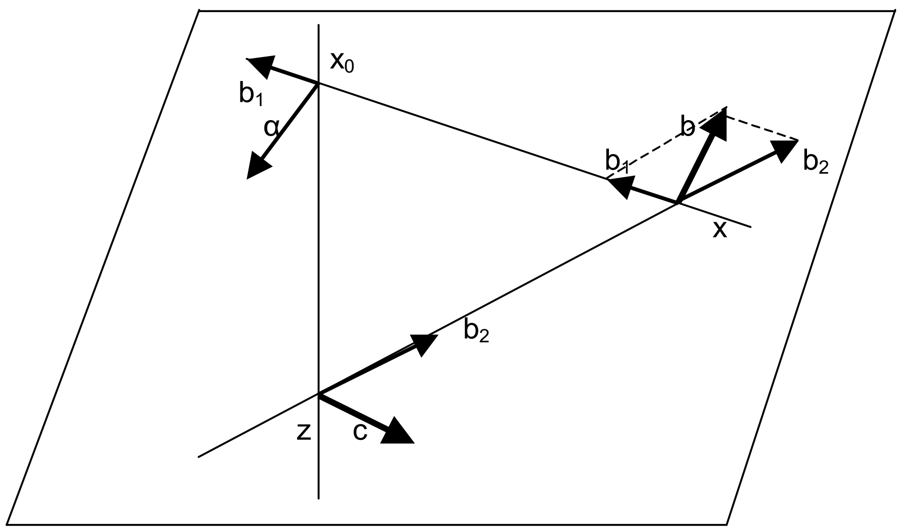
Απόδειξη

Θεωρούμε τα σημεία x, z ώστε $xx_0 \neq x_0z$.

Τότε, από το θεώρημα 2.9 είναι

$\Sigma \equiv \{(x_0, a), (x, b), (z, c)\}$, όπου a, b, c εφαρμοστά διανύσματα με δεδομένα, μη συνευθειακά σημεία εφαρμογής.

Έστω b ή c $\in (x_0, x, z)$. Αν π.χ. b $\in (x_0, x, z)$, τότε το διάνυσμα b αναλύεται σε δύο συνιστώσες b_1, b_2 επί των ευθειών x_0x και xz αντίστοιχα, οι οποίες με ολίσθηση μεταφέρονται στα σημεία x_0, z αντίστοιχα.



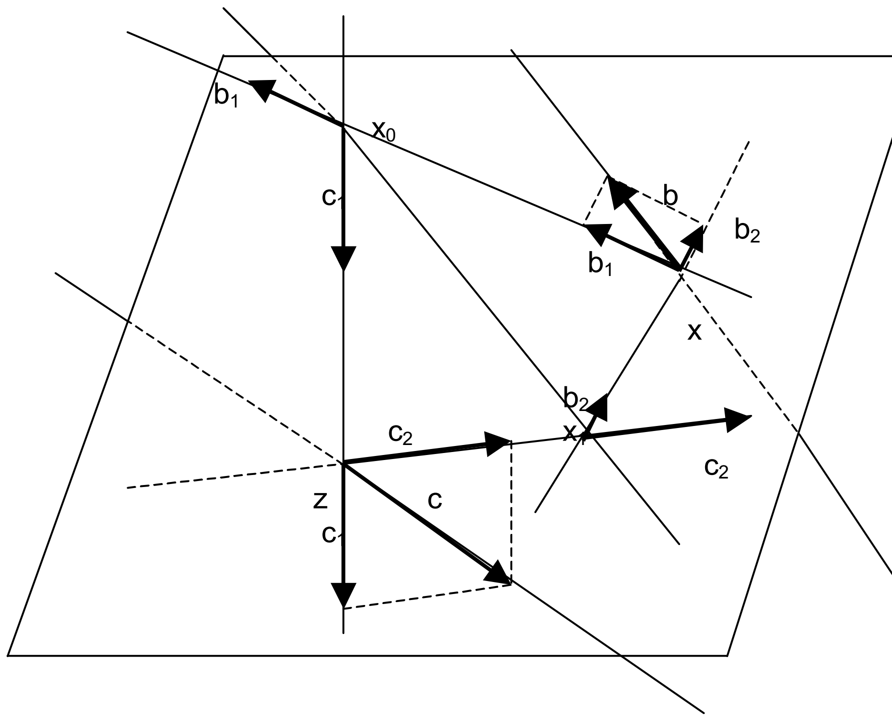
Δηλαδή $\Sigma \equiv \{(x_0, \alpha+b_1), (z, c+b_2)\}$

ΣΧΟΛΙΟ Με το συμβολισμό (u, x_0) (το διάνυσμα προηγείται του σημείου) θα παριστάνουμε το *επίπεδο* που ορίζεται από το εφαρμοστό σε κάποιο σημείο x διάνυσμα u και το σημείο $x_0 \neq x$.

Αν τώρα b και c $\notin (x_0, x, z)$, τα διανύσματα b, c ορίζουν με το x_0 δύο επίπεδα: (b, x_0) και (c, x_0)

αντίστοιχα. Αν x_1 ένα δεύτερο κοινό σημείο αυτών των επιπέδων, τότε

$x_1 \notin (x_0, x, z)$, διότι διαφορετικά η ευθεία x_0x_1 θα βρισκόταν και στα τρία επίπεδα (b, x_0), (c, x_0), (x_0, x, z).



Όμως $\begin{cases} (x_0, x, z) \cap (b, x_0) = x_0x \\ (x_0, x, z) \cap (c, x_0) = x_0z \end{cases}$ οπότε $x_0x_1 = x_0x = x_0z$, άτοπο.

Επίσης $x \notin x_0x_1$, διότι διαφορετικά $x_1x_0 = xx_0 \in (x_0, x, z)$, οπότε $x_1 \in (x_0, x, z)$.

Έτσι το διάνυσμα b αναλύεται σε δύο συνιστώσες, b_1 στη διεύθυνση της ευθείας xx_0 και b_2 στη διεύθυνση της ευθείας xx_1.

Έτσι $(x, b) \equiv (x, b_1) \boxplus (x, b_2) \equiv (x + \lambda b_1, b_1) \boxplus (x + \mu b_2, b_2)$

$$\equiv (x_0, b_1) \boxplus (x_1, b_2)$$

και όμοια

$$(z, c) \equiv (z, c_1) \boxplus (z, c_2) \equiv (z + \rho c_1, c_1) \boxplus (z + \kappa c_2, c_2)$$

$$\equiv (x_0, c_1) \boxplus (x_1, c_2)$$

Επομένως $\Sigma \equiv \{(x_0, a), (x_0, b), (x_0, c_1)\} \boxplus (x_1, b_2) \boxplus (x_1, c_2)$

$$\equiv \{(x_0, a+b+c), (x_1, b_2 + c_2)\}$$ ☻

Έτσι, αποδείξαμε ότι κάθε σύστημα ανάγεται σε ισοδύναμο διμελές (δύο εφαρμοστών διανυσμάτων), δεδομένου του ενός σημείου εφαρμογής.

Συνεπώς ισχύει το

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.10 Αν δύο συστήματα έχουν ίσες πλουκεριανές συντεταγμένες, τότε είναι ισοδύναμα.

Απόδειξη

Σύμφωνα με το θεώρημα 2.7, αν δύο διμελή συστήματα έχουν ίσες πλουκεριανές συντεταγμένες, τότε είναι ισοδύναμα. Όμως (θεώρημα 2.9) κάθε σύστημα ανάγεται σε ισοδύναμο διμελές. Επομένως απόδείχθηκε. ☻

Συνεπώς: $\boxed{\Sigma \equiv T \Leftrightarrow P(\Sigma) = P(T)}$

Δηλαδή η απεικόνιση P είναι 1-1.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.11 Αν $(x, u) \boxplus (y, v) \boxplus (z, w) \equiv 0$, τότε οι φορείς των διανυσμάτων αυτών συντρέχουν.

Απόδειξη

Τα ολισθαίνοντα διανύσματα (x, u), (y, v), (z, w) έχουν μηδενικό άθροισμα. Επομένως η συνισταμένη των δύο από αυτά (η οποία προφανώς περιέχεται στο επίπεδό τους) θα είναι συνεπίπεδη με το τρίτο διάνυσμα. Άρα τα τρία διανύσματα θα είναι συνεπίπεδα (όχι κατ' ανάγκη στο επίπεδο (x, y, z)).

Όμως από το λήμμα 2.2 και το θεώρημα 2.11 έχουμε:

$(x, u) \boxplus (y, v) \boxplus (z, w) \equiv 0 \Leftrightarrow P((x, u) \boxplus (y, v) \boxplus (z, w)) = P(0) \Leftrightarrow$

$(u+v+w=0$ και $x_x u + y_x v + z_x w = 0$

Αν • $u = \lambda v$, $\in \mathbb{R}^*$, τότε

$\lambda v + v + w = 0 \Leftrightarrow w = -(\lambda+1)v$

οπότε και τα τρία διανύσματα βρίσκονται στον ίδιο φορέα

• $u \neq \lambda v$, τότε αν x_1 σημείο τομής των φορέων των u, v,

υπάρχουν μ, $\rho \in \mathbb{R}$ ώστε $x_1 = x + \mu u = y + \rho v$

Αλλά

$x \times (-v - w) + y \times v + z \times w = 0 \Leftrightarrow (y-x) \times v + (z-x) \times w = 0 \Leftrightarrow$

$(\mu u - \rho v) \times v + (z - x_1 + \mu u) \times w = 0 \Leftrightarrow$

$\mu u \times v + (z-x_1) \times w + \mu u \times w = 0 \Leftrightarrow \mu u \times (v+w) + (z-x_1) \times w = 0 \Leftrightarrow$

$\mu u \times (-u) + (z-x_1) \times w \Leftrightarrow (z-x_1) \times w \Leftrightarrow z - x_1 = \kappa w \Leftrightarrow x_1 = z - \kappa w$ ☻

ΖΕΥΓΟΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.11 Ονομάζουμε **ζεύγος** (διανυσμάτων) κάθε σύστημα της μορφής
$\Sigma \equiv \{(x, u), (y, -u)\}$.

ΣΧΟΛΙΟ Αν
- $y = x + \lambda u$, $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε $\Sigma \equiv 0$
- $y \neq x + \lambda u$, $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε τα δύο διανύσματα δεν συντίθενται σε ένα.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.12 **Επίπεδο** του μη μηδενικού ζεύγους $\{(x, u), (y, -u)\}$ ονομάζουμε το επίπεδο που ορίζουν οι φορείς του ζεύγους.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.14 Αν δύο μη μηδενικά ζεύγη είναι ισοδύναμα τότε τα επίπεδά τους είναι παράλληλα.

Αντιστρόφως, αν τα επίπεδα που ορίζουν δύο μη μηδενικά ζεύγη είναι παράλληλα και ορίζουν δύο ομόσημα ισεμβαδικά παραλληλόγραμμα, τότε τα ζεύγη αυτά είναι ισοδύναμα.

Απόδειξη

Έστω τα ζεύγη $\Sigma_1 = \{(x, u), (y, -u)\}$, $\Sigma_2 = \{(z, v), (w, -v)\}$.

Αν $\Sigma_1 \equiv \Sigma_2$ τότε $P(\Sigma_1) = P(\Sigma_2)$ δηλαδή

$$\begin{cases} u + (-u) = v + (-v) \\ u \times x + (-u) \times y = v \times z + (-v) \times w \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \quad \text{ισχυει} \\ u \times (x - y) = v \times (z - w) \end{cases}$$

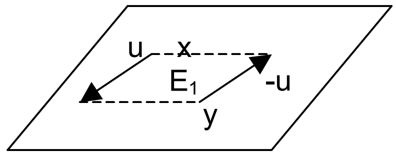
Όμως το διάνυσμα $u \times (x–y)$ είναι κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν τα διανύσματα (x, u), $(y, -u)$ και το διάνυσμα $v \times (z–w)$ είναι κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν τα διανύσματα (z, v), $(w, -v)$.

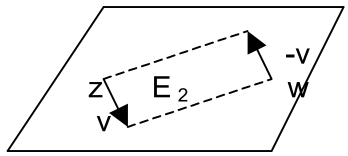
Άρα τα επίπεδα που ορίζουν τα ζεύγη Σ_1 και Σ_2 είναι μεταξύ τους παράλληλα.

Αντιστρόφως τώρα, έστω τα ζεύγη

$\Sigma_1 = \{(x, u), (y, -u)\}$, $\Sigma_2 = \{(z, v), (w, -v)\}$

με τα επίπεδα που ορίζουν τα ζεύγη Σ_1 και Σ_2 να είναι μεταξύ τους παράλληλα και $E_1 = E_2$ (σχήμα)





Τότε, το διάνυσμα $u\times(x\text{-}y)$ είναι προφανώς κάθετο προς το επίπεδο που ορίζουν τα διανύσματα (x, u), (y, -u). Το ίδιο συμβαίνει και με το διάνυσμα $v\times(z\text{-}w)$ και το επίπεδο που ορίζουν τα διανύσματα (z, v), (w, -v).

Επομένως αφού τα παραπάνω επίπεδα είναι μεταξύ τους παράλληλα, τα διανύσματα $u\times(x\text{-}y)$, $v\times(z\text{-}w)$ θα είναι μεταξύ τους επίσης παράλληλα.

Άρα $u\times(x\text{-}y) = \lambda\,[\,v\times(z\text{-}w)\,]$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

Όμως $E_1 = E_2$, οπότε $|\,u\times(x\text{-}y)\,| = |\,v\times(z\text{-}w)\,|$ ή

$|\,\lambda[v\times(z\text{-}w)]\,| = |\,v\times(z\text{-}w)\,|$ ή $|\,\lambda\,|\,|\,v\times(z\text{-}w)\,| = |\,v\times(z\text{-}w)\,|$

Αλλά το διάνυσμα v δεν είναι συγγραμμικό με το διάνυσμα z–w, αφού τότε το ζεύγος θα ήταν μηδενικό.

Επομένως $v\times(z\text{-}w) \neq 0$ ή $|\,v\times(z\text{-}w)| \neq 0$ άρα $|\lambda| = 1 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1$.

Αν λ = 1, η απόδειξη έχει τελειώσει.

Αν λ= -1, τότε τα (προσημασμένα) εμβαδά E_1, E_2 είναι ετερόσημα, σε αντίθεση με την υπόθεση. ☻

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.15 Ισχύει ότι: $(x, u) \boxplus (y, \lambda u) \equiv (\frac{x+\lambda y}{1+\lambda}, (1+\lambda)u)$, $\lambda\in R\text{-}\{-1\}$

Απόδειξη

Αρκεί να δείξω ότι $(x, u) \boxplus (y, \lambda u) \boxplus (\frac{x+\lambda y}{1+\lambda}, (-1-\lambda)u) \equiv 0$

Έχω: $u + \lambda u + (-1-\lambda)\,u = 0$ και

$$u \times x + (\lambda u) \times y + (-1-\lambda)\, u \times \frac{x+\lambda y}{1+\lambda} =$$

$$u \times x + \lambda(u \times y) + \frac{-(1+\lambda)}{1+\lambda} u \times (x+\lambda y) =$$

$$u \times x + \lambda(u \times y) - u \times x - u \times (\lambda y) = \lambda(u \times y) - \lambda(u \times y) = 0 \quad ☻$$

ΣΧΟΛΙΟ • Για $\lambda = 1$ είναι $(x, u) \boxplus (y, u) \equiv (\frac{x+y}{2}, 2u)$

• Για $\lambda = -1$ προκύπτει ζεύγος.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.13 Λέμε ότι το σύστημα Σ είναι γραμμικός συνδυασμός των συστημάτων $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$ αν υπάρχουν πραγματικοί $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ώστε $\Sigma = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i \Sigma_i)$

Στο επόμενο θεώρημα εξετάζουμε συστήματα στο επίπεδο.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.16 Δίνεται το σημείο x_0 του E^2, τα διανύσματα (x_0, u_0), (x_0, v_0) με $u_0 \nparallel v_0$ και το ζεύγος $\{(y_0, w_0), (-y_0, -w_0)\} \neq 0$. Τότε κάθε σύστημα Σ του επιπέδου E^2γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των συστημάτων $\Sigma_1 = \{(x_0, u_0)\}$, $\Sigma_2 = \{(x_0, v_0)\}$ και $\Sigma_3 = \{(y_0, w_0), (-y_0, -w_0)\}$ δηλαδή υπάρχουν μοναδικοί πραγματικοί κ, λ, μ ώστε

$\Sigma \equiv \kappa\Sigma_1 \boxplus \lambda\Sigma_2 \boxplus \mu\Sigma_3$.

Απόδειξη

Από το θεώρημα 1.1 κάθε σύστημα Σ του E^2 ανάγεται είτε σε μοναδικό ζεύγος διανυσμάτων $\{(x, u), (y, -u)\}$, είτε σε μοναδικό διάνυσμα (z, v).

Στην πρώτη περίπτωση έχουμε

$\Sigma \equiv \Sigma' = \{(x, u), (y, -u)\}$.

Θα αποδείξω ότι υπάρχει μοναδικός $\mu \in \mathbb{R}$ ώστε $\Sigma' \equiv \mu\Sigma_3$,

δηλαδή: $\Sigma \equiv 0\Sigma_1 \boxplus 0\Sigma_2 \boxplus \mu\Sigma_3$.

Αρκεί να δείξω ότι υπάρχει μοναδικός πραγματικός μ ώστε

$P(\Sigma') = P(\mu\Sigma_3)$, ή, ότι

$u + (-u) = \mu w_0 + \mu(-w_0)$, που ισχυει και

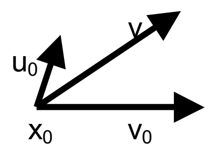
$u \times x + (-u) \times y = \mu w_0 \times y_0 + \mu(-w_0) \times (-y_0) \Leftrightarrow$

$u_x(x\text{-}y) = (2\mu)\ (w_0{}_x y_0)$

Όμως, αφού τα διανύσματα $u_x(x\text{-}y)$, $w_0{}_x y_0$ είναι κάθετα στο ίδιο επίπεδο, θα είναι μεταξύ τους συγγραμμικά, οπότε πράγματι υπάρχει, και μάλιστα μοναδικός πραγματικός μ ώστε $u_x(x\text{-}y) = (2\mu)\ (w_0{}_x y_0)$ ☻

Στη δεύτερη περίπτωση, όπου έχουμε μοναδικό διάνυσμα (z, v), από το Θεώρημα 1.3 είναι

$$\Sigma \equiv \{(x_0, v)\} \boxplus \{(x, u), (y, -u)\}$$



επομένως υπάρχουν μοναδικοί κ, λ $\in \mathbb{R}$ ώστε $v = \kappa u_0 + \lambda v_0$

δηλαδή
$$\begin{aligned}\Sigma &\equiv \{(x_0, \kappa u_0 + \lambda v_0)\} \boxplus \{(x, u), (y, -u)\}\\ &\equiv (x_0, \kappa u_0) \boxplus (x_0, \lambda v_0) \boxplus \{(x, u), (y, -u)\}\\ &\equiv \kappa(x_0, u_0) \boxplus \lambda(x_0, v_0) \boxplus \{(x, u), (y, -u)\}\end{aligned}$$

και απ' την πρώτη περίπτωση παίρνουμε:

$$\Sigma \equiv \kappa\Sigma_1 \boxplus \lambda\Sigma_2 \boxplus \mu\Sigma_3$$ ☻

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ Ο χώρος των κλάσεων στατικής ισοδυναμίας συστημάτων ολισθαινόντων διανυσμάτων του E^2 είναι **διάστασης 3**.

Τώρα θα επιστρέψουμε στη μελέτη των συστημάτων του χώρου.

Θα αποδείξουμε ότι:

Ο χώρος των κλάσεων στατικής ισοδυναμίας συστημάτων ολισθαινόντων διανυσμάτων του E^3 είναι **διάστασης 6**.

Απόδειξη

Έχουμε ορίσει την απεικόνιση

$P : S \to \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ όπου
P: Πλουκεριανές συντεταγμένες συστήματος
S: Χώρος συστημάτων

και έχουμε δει (Λήμμα 2.2) ότι είναι **γραμμική**.

Σύμφωνα τώρα με το Θεώρημα 2.6, ισοδύναμα συστήματα έχουν ίσες πλουκεριανές συντεταγμένες (ως προς δοθέν σημείο). Για το λόγο αυτό, η απεικόνιση P ορίζει επαγόμενη απεικόνιση

$$P_{\equiv} : S_{\equiv} \to \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$$

στο χώρο $S_{\equiv}$ των κλάσεων στατικής ισοδυναμίας συστημάτων.

Θα αποδείξουμε ότι η παραπάνω απεικόνιση είναι **ισομορφισμός**, συνεπώς διάσταση του χώρου $S_{\equiv}$ είναι 3+3=6.

Ας θεωρήσουμε δύο κλάσεις C_1, C_2 του $S_{\equiv}$ και ας υποθέσουμε ότι έχουν ίσες πλουκεριανές συντεταγμένες, δηλαδή ότι

$$P_{\equiv}(C_1) = P_{\equiv}(C_2).$$

Θα αποδείξουμε ότι $C_1 = C_2$.

Έχουμε αποδείξει ότι (Θ. 2.9) **Κάθε σύστημα ανάγεται σε ισοδύναμο δύο εφαρμοστών διανυσμάτων (δηλαδή <u>*διμελές*</u>).**

Άρα υπάρχουν **διμελή** συστήματα $\Sigma_1 \in C_1$ και $\Sigma_2 \in C_2$.

Όμως οι πλουκεριανές συντεταγμένες του πρώτου συστήματος είναι ίσες με τις πλουκεριανές συντεταγμένες της κλάσης του (από το Θ. 2.6).

Δηλαδή $P(\Sigma_1) = P_{\equiv}(C_1)$ και $P(\Sigma_2) = P_{\equiv}(C_2)$

Αλλά $P_{\equiv}(C_1) = P_{\equiv}(C_2)$, επομένως $P(\Sigma_1) = P(\Sigma_2)$.

Αλλά (Θ. 2.7) **αν δύο <u>*διμελή*</u> συστήματα έχουν ίσες πλουκεριανές συντεταγμένες, τότε αυτά είναι ισοδύναμα**.

Συνεπώς $\Sigma_1 \equiv \Sigma_2$, άρα $C_1 = C_2$.

Η απόδειξη της **«επί»** ιδιότητας της $P_{\equiv}$ είναι απλή:

Θεωρούμε τυχαίο ζεύγος (u, m) διανυσμάτων του $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ και σημείο αναφοράς O [όχι απαραίτητα το (0, 0, 0)] στο χώρο. Τότε υπάρχει ζευγάρι διανυσμάτων (x, υ) του $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ τέτοια ώστε $m = x \times υ$.

Αν τώρα ορίσουμε το σύστημα

$$T= \{(O, u\text{-}u), (O+x, u)\}$$

τότε οι πλουκεριανές συντεταγμένες του είναι πράγματι

$P(T)= (u, x\times u) =(u, m)$ ☻

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.17 Κάθε σύστημα Σ του E^3 ανάγεται σε ισοδύναμο ενός εφαρμοστού διανύσματος με δεδομένο σημείο εφαρμογής και ενός ζεύγους.

Δηλαδή: $\Sigma \equiv \{(x_0, u), (y, v), (z, -v)\}$

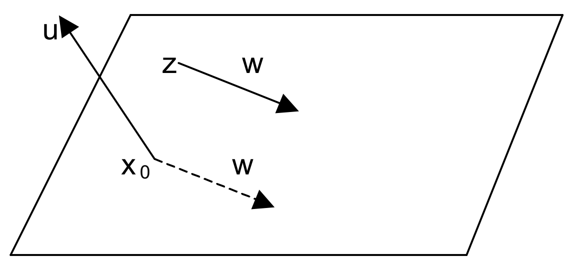
Απόδειξη

Σύμφωνα με το θεώρημα 2.9 είναι $\Sigma \equiv \{(x_0, u), (z, w)\}$.

Αν u, w συνεπίπεδα, τότε θα είναι είτε

- $u = -w$, οπότε $\Sigma \equiv \{(x, 0), (x_0, u), (z, -u)\}$, είτε
- $u \neq -w$, οπότε $\Sigma \equiv \{(x, u+v), (y, v), (y, -v)\}$.

Αν u, w μη συνεπίπεδα, από το Θεώρημα 1.3 (στο επίπεδο που ορίζεται από το διάνυσμα (z, w) και το σημείο x_0)



είναι $\{(z, w)\} \equiv \{(x_0, w), (y, v), (z, -v)\}$, άρα

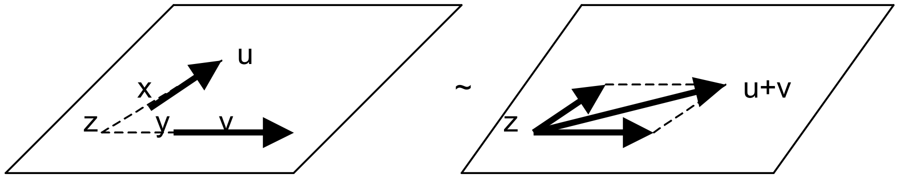
$\Sigma \equiv \{(x_0, u), (x_0, w), (y, v), (z, -v)\} \equiv \{(x_0, u+w), (y, v), (z, -v)\}$ ☻

ΛΗΜΜΑ 2.5 Κάθε σύστημα Σ του E^3 μη μηδενικής συνισταμένης ανάγεται σε ισοδύναμο είτε δύο διανυσμάτων, το ένα εκ των οποίων έχει δεδομένη διεύθυνση, είτε ενός διανύσματος δεδομένης διεύθυνσης και ενός ζεύγους.

Απόδειξη

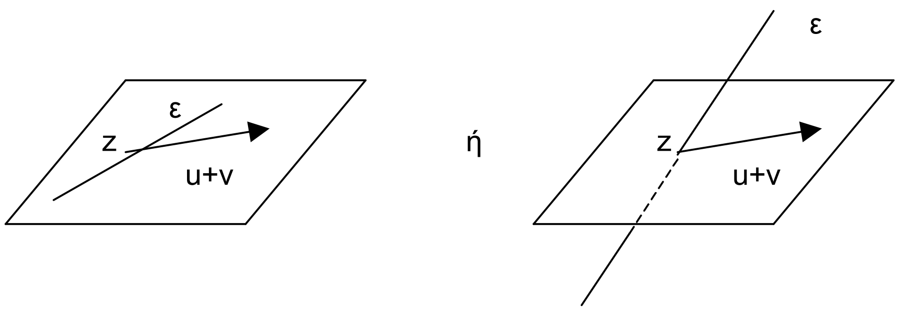
Από το θεώρημα 2.9 είναι $\Sigma \equiv \{(x, u), (y, v)\}$. Εξετάζουμε δύο περιπτώσεις.

Αν τα (x, u), (y, v) είναι συνεπίπεδα, τότε με τον γνωστό κανόνα της πρόσθεσης ολισθαινόντων διανυσμάτων, θα έχουμε



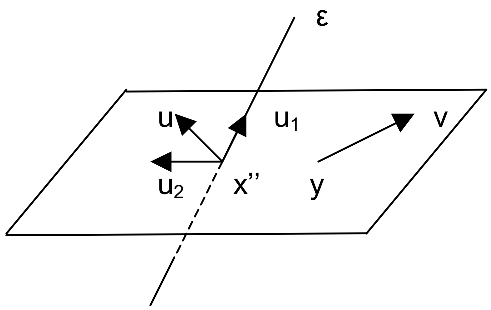
(αν u//v, τότε πάλι προκύπτει μοναδικό άθροισμα, ενώ αποκλείεται η περίπτωση u + v = 0, αφού τότε θα είχαμε μηδενική συνισταμένη)

Αν τώρα ε η δεδομένη διεύθυνση και αυτή είναι παράλληλη με τη συνισταμένη των διανυσμάτων (x, u) και (y, v), έχουμε τελειώσει. Αν όμως η ε είναι παράλληλη με το επίπεδο που ορίζεται από τα διανύσματα (x, u) και (y, v), αλλά δεν είναι παράλληλη με τη συνισταμένη τους, τότε η ευθεία είτε μπορεί να «μεταφερθεί» στο επίπεδο των u, v είτε τέμνει το επίπεδό τους.



Σε κάθε περίπτωση είναι προφανές ότι το άθροισμα (x, u) + (y, v) αναλύεται σε δύο συνιστώσες, η μία εκ των οποίων κατά τη διεύθυνση της ε.

Αν τα (x, u), (y, v) είναι μη συνεπίπεδα, τότε θεωρούμε ένα επίπεδο που περιέχει το (y, v) και ο φορέας του (x, u) τέμνει το επίπεδο αυτό στο x’’. Τότε, αναλύοντας το διάνυσμα u σε δύο άλλα, το ένα εκ των οποίων κατά τη διεύθυνση της ε.



Αν $\{(x'', u_2), (y, v)\}$ ζεύγος, τότε πετύχαμε αναγωγή σε διάνυσμα δεδομένης διεύθυνσης και ζεύγους. Αν $\{(x'', u_2), (y, v)\}$ δεν είναι ζεύγος, τότε συντίθενται σε ένα διάνυσμα, δηλαδή πετύχαμε αναγωγή σε δύο διανύσματα, όπου το ένα έχει δεδομένη διεύθυνση ☻

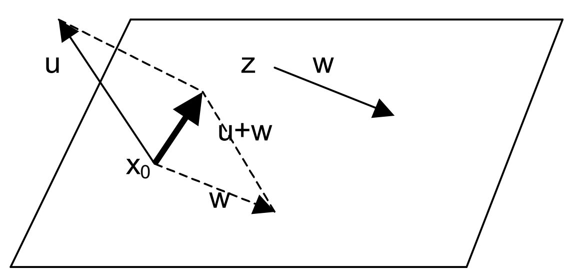
ΘΕΩΡΗΜΑ 2.18 Κάθε μη μηδενικό σύστημα Σ διανυσμάτων του E^3 ανάγεται σε ισοδύναμο ενός διανύσματος και ενός ζεύγους του οποίου το επίπεδο είναι κάθετο στο διάνυσμα, δηλαδή $\Sigma \equiv \{(x, u), (y, v), (z, -v)\}$ με το διάνυσμα (x, u) να είναι κάθετο στο επίπεδο που ορίζεται από τα διανύσματα (y, v) και $(z, -v)$.

Απόδειξη

Η διεύθυνση του διανύσματος u είναι σταθερή, αφού αυτό αποτελεί την (ελεύθερη) συνισταμένη των διανυσμάτων του Σ. Επομένως αρκεί να βρεθεί αναγωγή του Σ τέτοια, ώστε το επίπεδο των (y, v), $(z, -v)$ να έχει διεύθυνση δικής μας επιλογής (οπότε μπορεί να είναι και κάθετο στο u). Αν η (ελεύθερη) συνισταμένη του Σ είναι μηδενική, δεν έχουμε τίποτα να αποδείξουμε.

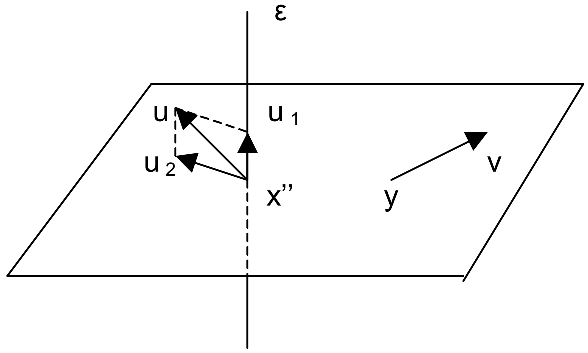
Αν δεν είναι, σύμφωνα με το Λήμμα 2.5 το Σ ανάγεται είτε σε δύο διανύσματα, όπου το ένα έχει διεύθυνση δικής μας επιλογής, είτε σε ένα διάνυσμα με διεύθυνση δικής μας επιλογής και σε ένα ζεύγος.

Στην πρώτη περίπτωση, ας παρατηρήσουμε το σχήμα της απόδειξης του Θεωρήματος 2.17.



Βλέπουμε ότι αν το διάνυσμα w επιλεγεί με κατάλληλη διεύθυνση, δηλαδή το επίπεδο που ορίζεται από το διάνυσμα (z, w) και το σημείο x_0 να είναι κάθετο στο διάνυσμα (x_0, u+w), τότε έχουμε τελειώσει (το διάνυσμα (x_0, u+w) είναι **σταθερής διεύθυνσης**, αλλά τα διανύσματα u, w δεν είναι σταθερά, αφού οποιοδήποτε διάνυσμα του χώρου μπορεί να αναλύθεί με άπειρους τρόπους σε δύο συνιστώσες, έστω κι αν το x_0 είναι σταθερό σημείο).

Στη δεύτερη περίπτωση, παρατηρώντας το τελευταίο σχήμα της απόδειξης του Λήμματος 2.5,



βλέπουμε ότι αν η επιλογή της ευθείας ε ήταν κατάλληλη, δηλαδή αν η ε ήταν κάθετη στο επίπεδο που ορίζουν το διάνυσμα v και το σημείο x'', θα είχαμε πάλι τελειώσει. ☻

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.14 Την παραπάνω αναγωγή ενός συστήματος θα την ονομάζουμε **κανονικοποίηση.**

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.15 Ο φορέας της μη μηδενικής συνισταμένης ενός κανονικοποιημένου συστήματος λέγεται **κεντρικός άξονας του συστήματος**.

ΣΧΟΛΙΟ Η φυσική ερμηνεία του κεντρικού άξονα δεν είναι άλλη από τη διαδρομή που ακολουθεί ένα σώμα στο οποίο ασκείται πλήθος δυνάμεων.

Αν κατά την κανονικοποίηση, το ζεύγος δίνει μηδενικό άθροισμα (με την έννοια του αθροίσματος ολισθαινόντων διανυσμάτων), το σώμα μόνο μεταφέρεται «επάνω» στον κεντρικό άξονα. Αν το άθροισμα αυτό δεν είναι μηδενικό, το σώμα ακολουθεί μεταφορική και περιστροφική κίνηση: μεταφέρεται «επάνω» στον κεντρικό άξονα και περιστρέφεται ανάλογα με τη φορά του ζεύγους.

Προσδιορισμός Κεντρικού άξονα [13]

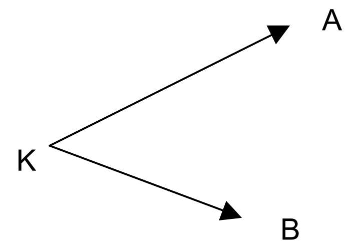
ΛΗΜΜΑ 2.6 Θεωρούμε ελεύθερο διάνυσμα $\vec{u}$, σημείο αναφοράς Κ και τυχαία σημεία Α, Β του χώρου. Αν $\vec{M}_A$, $\vec{M}_B$ οι ροπές του διανύσματος $\vec{u}$ στα Α, Β αντίστοιχα, τότε

$$\vec{M}_B - \vec{M}_A = \vec{u} \times \overrightarrow{AB}$$

δηλαδή η διαφορά των ροπών είναι ανεξάρτητη του σημείου αναφοράς.

Απόδειξη

$$\text{Είναι } \vec{M}_B - \vec{M}_A = \vec{u} \times \overrightarrow{KB} - \vec{u} \times \overrightarrow{KA}$$
$$= \vec{u} \times (\overrightarrow{KB} - \overrightarrow{KA})$$
$$= \vec{u} \times \overrightarrow{AB}$$

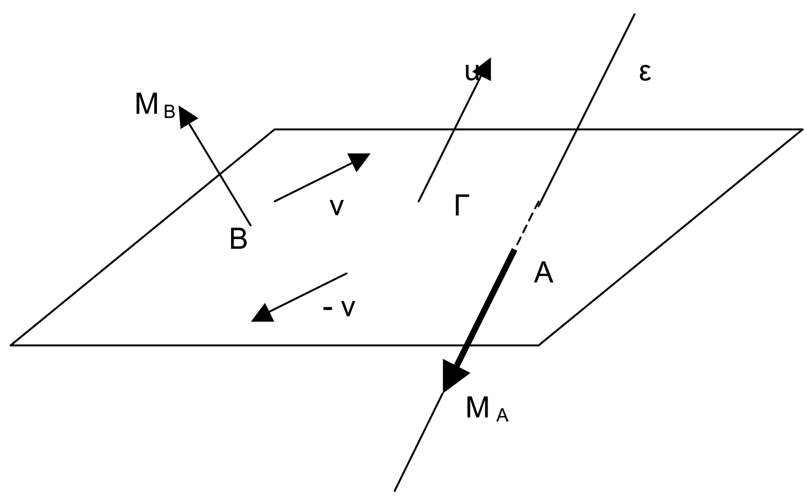


Κατασκευή Κεντρικού Άξονα

Όπως είδαμε, ο κεντρικός άξονας είναι κάθετος στο ζεύγος του συστήματος, άρα παράλληλος με το διάνυσμα της ροπής του συστήματος.

Έτσι, αν u η συνισταμένη του συστήματος και Α τυχόν σημείο του κεντρικού άξονα ε, τότε θα έχουμε

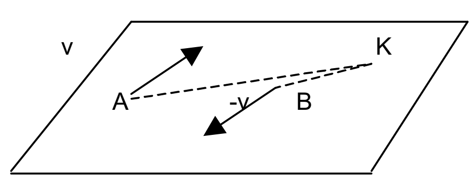
$u \times M_A = 0$



Θεωρούμε Β τυχόν σημείο εφαρμογής της ροπής M_B (σχήμα) που προκαλείται από το ζεύγος v, -v(∗)

(∗) Η ροπή ζεύγους διανυσμάτων είναι ελεύθερο διάνυσμα, αφού αν Κ το σημείο αναφοράς (σχήμα), τότε η συνολική ροπή M_ζ το υ ζεύγους θα είναι

$$M_\zeta = M_v + M_{-v} = v \times KA + (-v) \times KB$$
$$= v \times KA - v \times KB = v \times (KA - KB)$$
$$= v \times BA$$



Τότε

$$M_A - M_B = u \times BA \Leftrightarrow M_A = M_B + u \times BA$$

Οπότε

$$u \times (M_B + u \times BA) = 0 \Leftrightarrow u \times M_B + u \times (u \times BA) = 0 \Leftrightarrow$$

$$u \times MB + u \times (AB \times u) = 0 \Leftrightarrow u \times M_B + u^2 AB - (u \bullet AB)\, u = 0$$

Αφού τώρα το Α ήταν τυχαίο σημείο της ε, μπορούμε να θεωρήσουμε τέτοιο Α, ώστε το διάνυσμα ΑΒ να ανήκει σε επίπεδο κάθετο στο u.

Όμως τότε θα είναι $u \bullet AB = 0$, οπότε

$$u \times M_B + u^2 AB = 0 \Leftrightarrow BA = \frac{u \times M_B}{u^2}$$

Αλλά το διάνυσμα M_B είναι ελεύθερο διάνυσμα, οπότε μπορεί να «μεταφερθεί» σε σημείο Γ του φορέα του u (σχήμα).

Επομένως ο αριθμητής του παραπάνω κλάσματος είναι διάνυσμα με αρχή τυχαίο σημείο του φορέα της συνισταμένης u του συστήματος.

Έτσι, για να κατασκευάσουμε τον κεντρικό άξονα:

- θεωρούμε δύο τυχαία σημεία B_1, B_2 του φορέα της συνισταμένης του συστήματος

- Βρίσκουμε τα πέρατα A_1, A_2 των εφαρμοστών διανυσμάτων που ορίζονται από τις ισότητες $\begin{cases} B_1A_1 = \dfrac{u \times M_B}{u^2} \\ B_2A_2 = \dfrac{u \times M_B}{u^2} \end{cases}$

- ενώνουμε τα A_1, A_2· ο κεντρικός άξονας είναι η ευθεία A_1A_2 ☻

Ταξινόμηση Συστημάτων

Στο Θεώρημα 2.9 είδαμε ότι κάθε σύστημα διανυσμάτων του χώρου ανάγεται σε ισοδύναμο σύστημα δύο διανυσμάτων.
Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

Α) Τα διανύσματα αυτά είναι συνεπίπεδα και

α) έχουν *συνισταμένη μηδέν και ροπή μηδέν*.
Τότε το σύστημα είναι **μηδενικό**.

β) έχουν *συνισταμένη μηδέν και μη μηδενική ροπή.*
Τότε το σύστημα ανάγεται μόνο σε **ζεύγος**, και η φυσική του ερμηνεία είναι η **περιστροφή** (και όχι μεταφορά) του σώματος.

γ) έχουν *μη μηδενική συνισταμένη*.
Τότε έχουμε αναγωγή σε μοναδικό ολισθητή, που στη γλώσσα της Φυσικής μεταφράζεται ως **μεταφορά** (και όχι περιστροφή) του σώματος.

Β) Τα διανύσματα δεν είναι συνεπίπεδα

Τότε, από το Θεώρημα 2.17 έχουμε αναγωγή σε διάνυσμα και ζεύγος. Στη Φυσική θα λέγαμε ότι το σώμα στο οποίο εφαρμόζεται το σύστημα μεταφέρεται και περιστρέφεται ταυτόχρονα, δηλαδή **κοχλιώνεται** με κατεύθυνση περιστροφής που δίνεται από το γνωστό κανόνα του δεξιόστροφου κοχλία.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

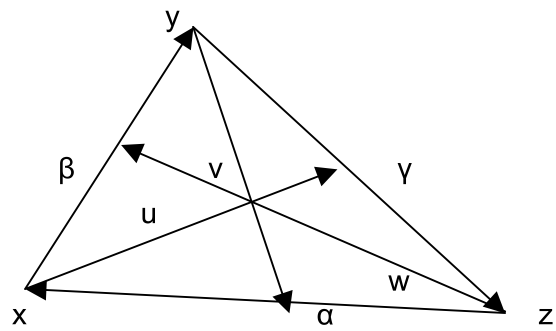
1. Οι διάμεσοι τριγώνου συντρέχουν.

Απόδειξη

Έστω το διπλανό τρίγωνο

Αρκεί να αποδείξουμε ότι

(x, u) ⊞ (y, v) ⊞ (z, w) ≡ 0



Είναι

2[(x, u) ⊞ (y, v) ⊞ (z, w)]

≡(x, β-α) ⊞ (y, γ-β) ⊞ (z, α-γ)

≡ (x, β) ⊞ (x, -α) ⊞ (y, γ)

+(y, -β) ⊞ (z, α) ⊞ (z, -γ)

≡ (x, β) ⊞ (x-α, -α) ⊞ (y, γ) ⊞ (y-β, -β) ⊞ (z, α) ⊞ (z-γ, -γ)

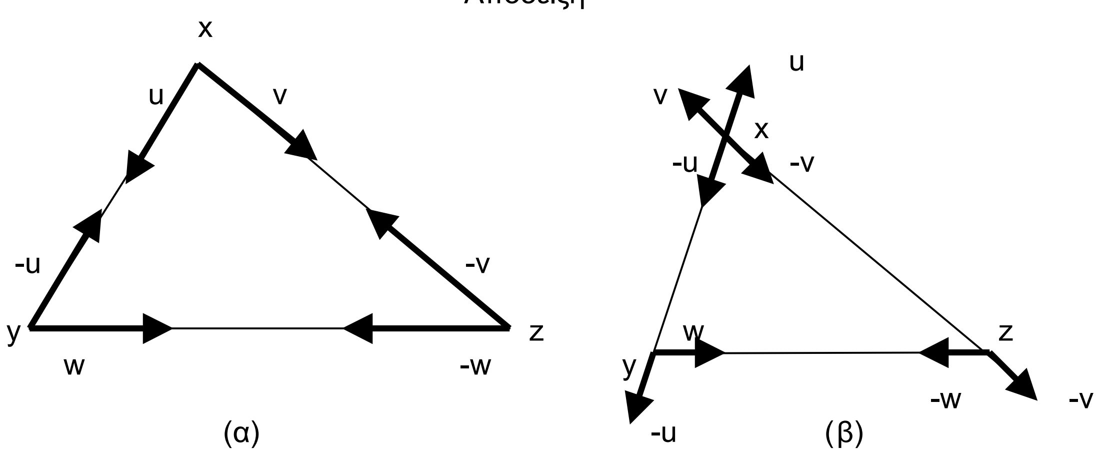
≡ (x, β) ⊞ (z, -α) ⊞ (y, γ) ⊞ (x, -β) ⊞ (z, α) ⊞ (y, -γ)

≡ (x, 0) ⊞ (y, 0) ⊞ (z, 0) ≡ 0 ☻

2. (α) Οι εσωτερικές διχοτόμοι τριγώνου συντρέχουν

(β) Οι 2 εξωτερικές διχοτόμοι τριγώνου και η απέναντι εσωτερική συντρέχουν

Απόδειξη



Θεωρούμε τα ίσου μέτρου διανύσματα u, v, w όπως στα σχήματα. Τότε,αρκεί να δείξω ότι: (x, u+v) ⊞ (y, w-u) ⊞ (z, -w-v) ≡0.

Έχω: (x, u+v) ⊞ (y, w-u) ⊞ (z, -w-v) ≡

(x, u) ⊞ (x, v) ⊞ (y, w) ⊞ (y, -u) ⊞ (z, -w) ⊞ (z, -v) ≡

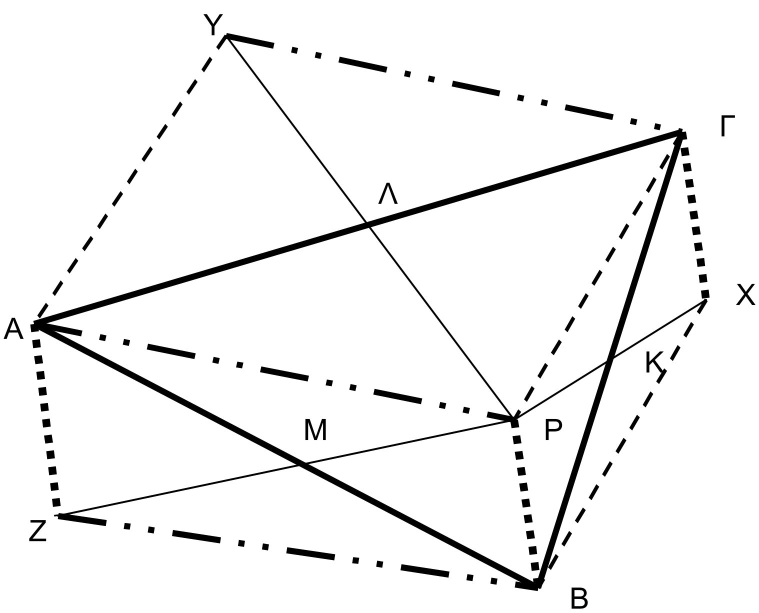
$(x+\lambda u, u) \boxplus (x+\mu v, v) \boxplus (y+\kappa w, w) \boxplus (y, -u) \boxplus (z, -w) \boxplus (z, -v) \equiv$

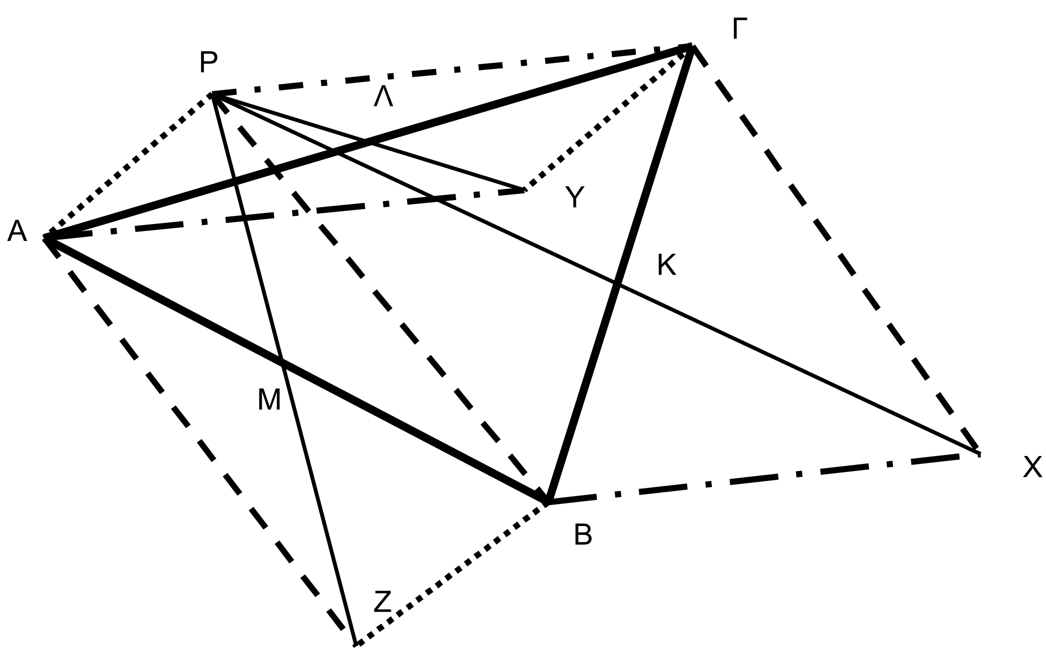
$(y, u) \boxplus (z, v) \boxplus (z, w) \boxplus (y, -u) \boxplus (z, -w) \boxplus (z, -v) \equiv$

$(y, 0) \boxplus (z, 0) \boxplus (z, 0) \equiv 0$ ☻

3. Στο επίπεδο τριγώνου ΑΒΓ θεωρούμε σημείο Ρ. Ενώνουμε το Ρ με τα μέσα Κ, Λ, Μ των πλευρών ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ αντίστ. και προεκτείνουμε κατά ίσα τμήματα ΚΧ=ΡΚ, ΛΥ=ΡΛ, ΜΖ=ΡΜ. Να αποδειχθεί ότι οι ΑΧ, ΒΥ, ΓΖ συντρέχουν.

Απόδειξη





Για λόγους ευκολίας, έστω (ένα κεφ. γράμμα)=(σημείο) & (2 κεφ. γράμ.)= (διάνυσμα)

Θα αποδείξω ότι (Α, ΑΧ) $\boxplus$ (Β, -κΒΥ) $\boxplus$ (Γ, -λΓΖ) $\equiv$ 0 (1) για κάποιους, μη μηδενικούς πραγματικούς κ, λ.

Επειδή τα ΑΧ, ΒΥ, ΓΖ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, θα είναι ΑΧ = κΒΥ + λΓΖ για κάποιο ζεύγος (κ,λ) με κλ $\neq$ 0. Για 'κείνο το ζεύγος θα αποδείξω την (1).

Έχω:
- ΑΧ - κΒΥ – λΓΖ =0 ισχύει

και
- ΑΧxΟΑ + (-κΒΥ)xΟΒ +(--λΓΖ)xΟΓ= ΑΧxΟΑ + κΒΥxΒΟ +λΓΖxΓΟ=
  (κΒΥ + λΓΖ) xΟΑ + κΒΥxΒΟ +λΓΖxΓΟ= κΒΥxΒΑ +λΓΖxΓΑ=
  κ(ΒΑ+ΑΥ)xΒΑ +λ(ΓΑ+ΑΖ)xΓΑ= κΑΥxΒΑ +λΑΖxΓΑ= κΒΧxΒΑ +λΓΧxΓΑ=
  κ(ΒΑ+ΑΧ)xΒΑ +λ(ΓΑ+ΑΧ)xΓΑ= κΑΧxΒΑ +λΑΧxΓΑ= ΑΧx(κΒΑ +λΓΑ)

  Αλλά

$$\begin{aligned}
ΑΧ = κΒΥ + λΓΖ &\Leftrightarrow ΑΧ= κΒΑ + κΑΥ + λΓΑ + λΑΖ \\
&\Leftrightarrow κΒΑ + λΓΑ = ΑΧ - κΑΥ - λΑΖ \\
&\qquad = ΑΧ - κΒΧ - λΓΧ \\
&\qquad = ΑΧ – κΒΑ – κΑΧ - λΓΑ - λΑΧ \\
&\Leftrightarrow κΒΑ + λΓΑ = \frac{1-κ-λ}{2} ΑΧ. ☻
\end{aligned}$$

<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3</u>

ΟΛΙΣΘΗΣΗ ΣΕ ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΓΛΩΣΣΑ

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε την ολίσθηση των διανυσμάτων του Ευκλείδειου χώρου υπό μια αυστηρή αλγεβρική οπτική γωνία.

Θεωρούμε γνωστούς τους συμβολισμούς της αρχής του $2^{ου}$ κεφαλαίου (Ευκλείδειου Χώρου, Εφαπτόμενου Χώρου, Εφαπτομενικής Δέσμης κ.τ.λ.).

Έστω U, V δύο διανυσματικοί χώροι πάνω από ένα σώμα K. Ορίζουμε ως ευθύ άθροισμα των χώρων αυτών και το συμβολίζουμε $U \oplus V$ το σύνολο το σύνολο

$U\text{x}V =$

$\{(u, v)/\ u \in U,\ v \in V\}$ με πράξεις κατά συνιστώσα

$$(u_1, v_1) + (u_2, v_2) = (u_1 + u_2, v_1 + v_2) \quad \text{και} \quad \lambda(u_1, v_1) = (\lambda u_1, \lambda v_1),\ \ \lambda \in K$$

Το ευθύ άθροισμα επεκετείνεται αναδρομικά σε ευθύ άθροισμα πεπερασμένου πλήθους διανυσματικών χώρων:

$$U_1 \oplus U_2 \oplus \ldots \oplus U_n = (U_1 \oplus U_2 \oplus \ldots \oplus U_{n-1}) \oplus U_n$$

Εάν έχουμε άπειρο πλήθος διανυσματικών χώρων, U_i, $i \in I$, το ευθύ άθροισμα $\bigoplus\limits_{i \in I} U_i$ ορίζεται ως ο χώρος των συναρτήσεων

$$g : I \longrightarrow \bigcup_{i \in I} u_i$$

με τις ιδιότητες:

i) $g(i) \in U_i$

ii) $g(i) = 0$ για όλα εκτός από πεπερασμένο πλήθος από $i \in I$.

Οι πράξεις στο $\bigoplus\limits_{i \in I} U_i$ ορίζονται κατά σημείο: εάν $g_1, g_2 \in \bigoplus\limits_{i \in I} U_i$, ορίζουμε

$$(g_1 + g_2)(i) = g_1(i) + g_2(i)$$

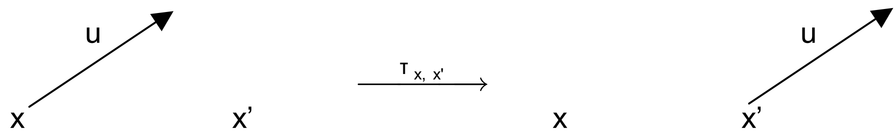
και $$(\lambda g_1)(i) = \lambda\, g_1(i)$$

ΣΧΟΛΙΟ Το σύνολο των συναρήσεων που ικανοποιούν το (i), αλλά όχι υποχρεωτικά και το (ii), είναι το «ευθύ γινόμενο» των U_i, $i \in I$. Εάν το πλήθος των διανυσματικών χώρων U_i είναι πεπερασμένο, το ευθύ άθροισμα και το ευθύ γινόμενο συμπίπτουν, αλλά για άπειρο πλήθος, το ευθύ άθροισμα είναι γνήσιο υποσύνολο του ευθέως γινομένου.

Ας θεωρήσουμε τώρα τα σημεία x, x’ του E^3 και την απεικόνιση

$$\tau_{x,x'}: \quad T_x E^3 \longrightarrow T_{x'} E^3$$

που αντιστοιχίζει κάθε εφαρμοστό διάνυσμα του εφαπτόμενου χώρου $T_x E^3$ στο διάνυσμα ίσου μέτρου και κατεύθυνσης με το αρχικό, με σημείο εφαρμογής στο x’.

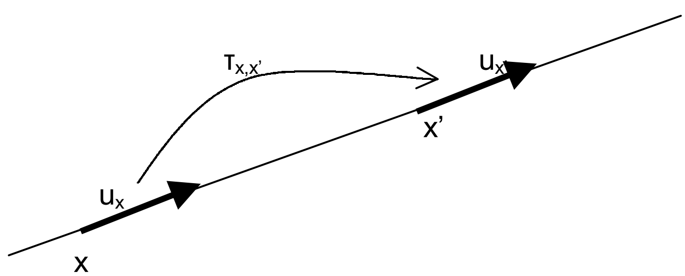


Θα αποδείξουμε ότι ο χώρος των συστημάτων εφαρμοστών διανυσμάτων του E^3, τον οποίο συμβολίσαμε με S, είναι ισόμορφος με το χώρο $\bigoplus_{x \in E^3} T_x E^3$.

Θεωρούμε τους υπόχωρους του S,

$$U_1 = < u_x - \tau_{x,x'}(u_x) \;/\; u_x \in T_x E^3, \;\; x, x' \in E^3 >$$
$$U_2 = < u_x - \tau_{x,x'}(u_x) \;/\; u_x \in T_x E^3, \;\; x, x' \in E^3 \text{ με } x' = x + \lambda u, \lambda \in \mathbb{R} >$$

Στο σύνολο U_2 δηλαδή, η απεικόνιση $\tau_{x,x'}$ αντιστοιχίζει κάθε εφαρμοστό διάνυσμα του εφαπτόμενου χώρου $T_x E^3$ σε ένα ίσο με το αρχικό και στον ίδιο φορέα:



Ο διανυσματικός χώρος πηλίκο S / U_1 είναι ισόμορφος με το διανυσματικό χώρο των ελεύθερων διανυσμάτων του χώρου.

Η κλάση ισοδυναμίας ενός ελεύθερου διανύσματος είναι το σύνολο των ομόρροπων και ίσου μέτρου με κάποιο εφαρμοστό διάνυσμα, διανυσμάτων. Δηλαδή η κλάση αυτή προκύπτει με παράλληλη μεταφορά ενός αντιπροσώπου της σε οποιαδήποτε θέση του επιπέδου ή του χώρου, και αν το διάνυσμα $u_{x'}$ προκύπτει με παράλληλη μεταφορά του u_x, τότε η διαφορά τους βρίσκεται στο U_1 και αντιστρόφως.

$$u_x \sim u_{x'} \Leftrightarrow (u_x - u_{x'}) \in U_1$$

Πράγματι, αν $u_x, u_{x'} \in V$ με

$$u_x + U_1 = u_{x'} + U_1 \Leftrightarrow$$
$$u_x + (-u_{x'}) + U_1 = u_{x'} + (-u_{x'}) + U_1 \Leftrightarrow$$
$$(u_x - u_{x'}) + U_1 = U_1 \Leftrightarrow (u_x - u_{x'}) \in U_1$$

Ο χώρος πηλίκο S / U_2 είναι ισόμορφος με το διανυσματικό χώρο των ολισθαινόντων διανυσμάτων του χώρου E^3.
Η απόδειξη, λόγω μεταβατικότητας θα γίνει σε ένα βήμα.

Αν δύο συστήματα $\Sigma(x, u_x)$, $\Sigma(y, u_y)$ είναι ισοδύναμα, τότε

$$\Sigma(y, u_y) = \Sigma(x, u_x) \boxplus (x_1, -v_{x_1})] \boxplus (x_1+\lambda v_{x_1}, v_{x_1})$$

οπότε $\Sigma(y, u_y) - \Sigma(x, u_x) = (x_1, -v_{x_1}) \boxplus (x_1+\lambda v_{x_1}, v_{x_1})$

$$= (x_1+\lambda v_{x_1}, v_{x_1}) \boxplus (x_1, -v_{x_1})$$
$$= (x_1+\lambda v_{x_1}, v_{x_1}) - (x_1, v_{x_1}) \in U_2.$$

Αντιστρόφως, αν $\Sigma(y, u_y) - \Sigma(x, u_x) \in U_2$, τότε

$$\Sigma(y, u_y) - \Sigma(x, u_x) = (x, u_x) - (x', u_x)$$
$$= (x, u_x) - (x+\lambda u_x, u_x) \text{ ή}$$
$$\Sigma(y, u_y) = \Sigma(x, u_x) \boxplus (x, u_x) \boxplus (x+\lambda u_x, -u_x)$$

οπότε τα συστήματα είναι ισοδύναμα.

ΣΧΟΛΙΟ Με τους παραπάνω συμβολισμούς μπορούμε να επεκταθούμε και σε άλλους χώρους, όπως στο $\mathbb{R}^n$, αλλά και στην Υπερβολική γεωμετρία.

<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4</u>

ΟΛΙΣΘΗΣΗ ΣΤΗΝ ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΗ[14] ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Βασικά στοιχεία Υπερβολικής Γεωμετρίας

Υπερβολικό επίπεδο είναι το επίπεδο με τα αξιώματα του Ευκλείδη, εκτός από το 5^{ο} αίτημα, το οποίο αντικαθίσταται από το «από σημείο εκτός ευθείας, διέρχονται τουλάχιστον δύο παράλληλες προς αυτήν».

Μοντέλο για το Υπερβολικό επίπεδο χρησιμοποιούμε το **ημιεπίπεδο**

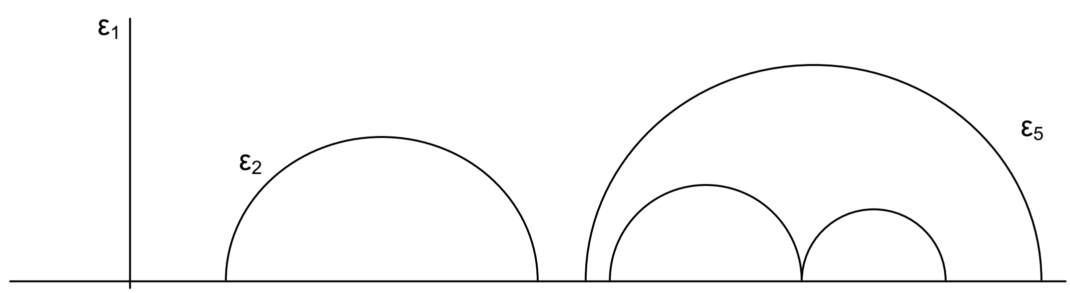
$$H^2 = \{ x + yi,\ x, y \in \mathbb{R},\ y > 0 \}$$

όπου, φυσικά, i είναι η γνωστή μιγαδική μονάδα.

Απόσταση μεταξύ δύο σημείων Α, Β του υπερβολικού επιπέδου, τα οποία είναι εικόνες των μιγαδικών z, w ονομάζουμε τον αριθμό

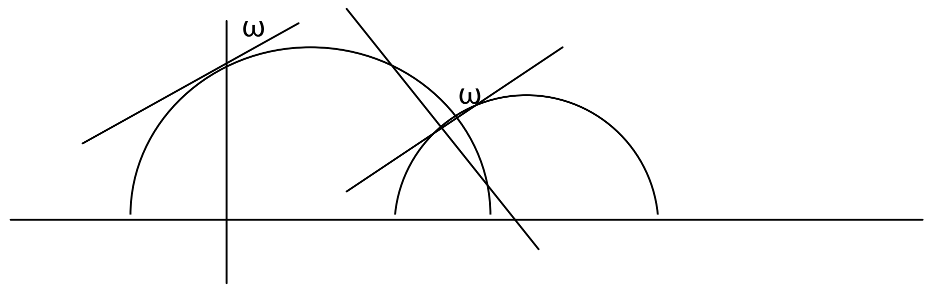
$$d(A, B) = \ln\frac{|z-\overline{w}|+|z-w|}{|z-\overline{w}|-|z-w|}$$

Γεωδαισιακές του Υπερβολικού επιπέδου είναι τα ημικύκλια (ή καμπύλες ελάχιστου μήκους) που έχουν τα κέντρα τους στο σύνορο του παραπάνω ημιεπιπέδου (άπειρο), αλλά και κατακόρυφες (ευκλείδειες) ημιευθείες:



Τα πέρατα των γεωδαισιακών στο άπειρο, αν και δεν είναι σημεία του υπερβολικού επιπέδου, χρησιμεύουν για να χαρακτηρίσουν τη σχετική θέση δύο γεωδαισιακών.

Παράλληλες είναι οι γεωδαισιακές (ημικύκλια ή κατακόρυφες) που έχουν ένα κοινό πέρας στο άπειρο (ε_3 και ε_4), **ξένες** όταν δεν έχουν κανένα κοινό σημείο (ε_1 και ε_2 ή ε_3 και ε_5), ενώ **τεμνόμενες** είναι όσες έχουν ένα κοινό σημείο (στο εσωτερικό του υπερβολικού επιπέδου):

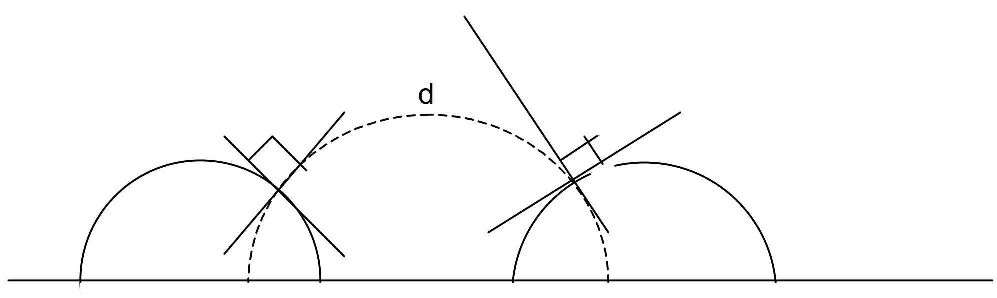


Δύο παράλληλες γεωδαισιακές είναι **ασύμπτωτες**.

Δύο τεμνόμενες γεωδαισιακές σχηματίζουν **γωνία** ω, ίση με τη γωνία μεταξύ των εφαπτομένων τους στο σημείο τομής (σχήμα).

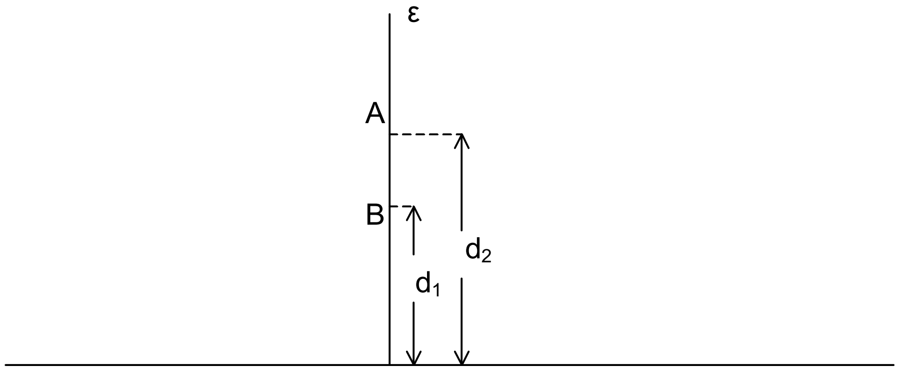
Ορθογώνιες ονομάζονται δύο γεωδαισιακές αν η παραπάνω γωνία ω των εφαπτομένων τους στο σημείο επαφής είναι ορθή.

Δύο ξένες γεωδαισιακές έχουν *μοναδική κοινή κάθετο*, και η απόσταση μεταξύ των σημείων τομής με την κοινή κάθετο είναι η **απόσταση** μεταξύ των δύο γεωδαισιακών.

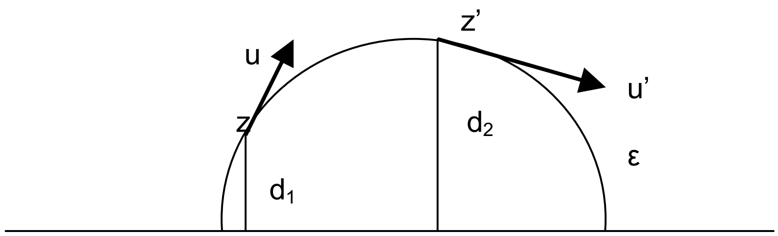


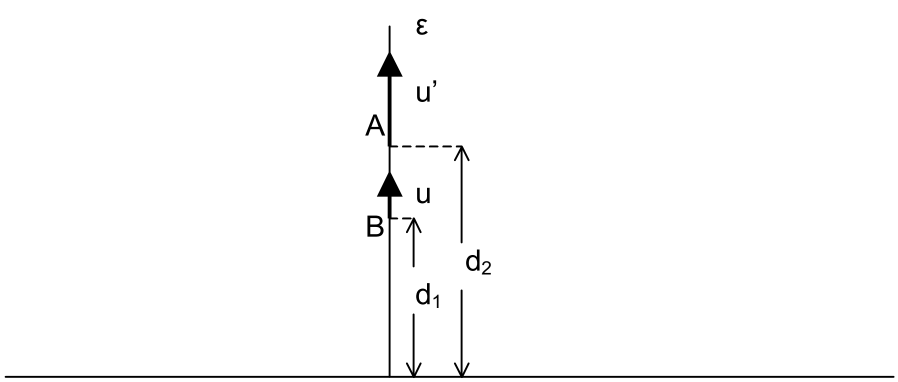
Η υπερβολική απόσταση μεταξύ δύο *σημείων* μιας *κατακόρυφης* γεωδαισιακής είναι ο μη αρνητικός φυσικός λογάριθμος του λόγου των φανταστικών μερών τους (δηλαδή των τεταγμένων τους).

Δηλαδή $$d(A,B) = |\ln\frac{d_2}{d_1}|$$



Εφαρμοστό διάνυσμα u του H^2 στο σημείο του z, είναι το ζεύγος που αποτελείται από τον μιγαδικό z και το εφαρμοστό στον z διάνυσμα u του $\mathbb{R}^2$. Τα διανύσματα u, u' του παρακάτω σχήματος προσδιορίζουν (καθένα) και τη μοναδική γεωδαισιακή (ημικύκλιο ή ευθεία) στην οποία εφάπτονται.





Ως **εφαπτόμενο χώρο** στο σημείο z (T_zH^2) ονομάζουμε τον διανυσματικό χώρο που ορίζεται, όπως και στο $\mathbb{R}^2$, από τα εφαρμοστά στο z διανύσματα του H^2 με τις γνωστές πράξεις

- $(z, u) + (z, v) = (z, u+v)$
- $\lambda(z, u) = (z, \lambda u)$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

Οπότε $T_z H^2 = \{z\} \times \mathbb{R}^2$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι το σύνολο

$$U = \{ (z, u) \,/\, z \in \mathbb{C},\ u \in \mathbb{R}^2,\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$$

εφοδιασμένο με τις πράξεις που ορίσαμε, είναι διανυσματικός χώρος.

Το υπερβολικό μέτρο $||u||_h$ ενός εφαρμοστού διανύσματος u είναι ο λόγος του Ευκλείδειου μέτρου $||u||$ του u προς την Ευκλείδεια απόσταση της d αρχής του από το σύνορο του Υπερβολικού επιπέδου: $||u||_h = \dfrac{||u||}{d}$

Προσοχή: Καθώς το u «ολισθαίνει» πάνω στη γεωδαισιακή ε, το ευκλείδειο μήκος του <u>αλλάζει</u>, ώστε ο παραπάνω <u>λόγος να παραμένει σταθερός</u>, δηλαδή

$$\boxed{\frac{||u||}{d_1} = \frac{||u'||}{d_2}}$$

Ένα χρήσιμο μέσο για τον ορισμό των ολισθαινόντων διανυσμάτων στο υπερβολικό επίπεδο είναι οι ισομετρίες του.

Δοσμένης ισομετρίας φ, υπάρχει μια ισομετρία $\tau(z) = \dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ με $\alpha\beta - \gamma\delta > 0$ (μετασχηματισμός Möbius) τέτοια ώστε η $\tau \circ \varphi$ αφήνει τον θετικό άξονα των φανταστικών αμετάβλητο.

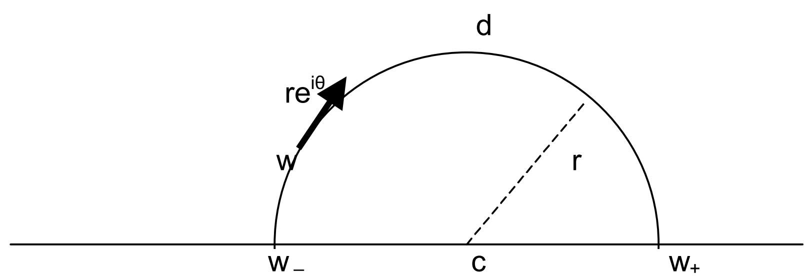
Οι ισομετρίες αυτές, από τη φύση τους, διατηρούν τις υπερβολικές αποστάσεις μεταξύ σημείων.

Για τα εφαρμοστά διανύσματα οι παραπάνω ισομετρίες παίζουν το ρόλο του μέσου που «μεταφέρει παράλληλα» τα διανύσματα του υπερβολικού επιπέδου σε άλλες θέσεις του. Πράγματι, αυτό φαίνεται από το επόμενο θεώρημα της υπερβολικής γεωμετρίας: *υπάρχει ισομετρία που απεικονίζει δοθέν εφαρμοστό διάνυσμα του υπερβολικού επιπέδου σε οποιοδήποτε άλλο εφαρμοστό διάνυσμα ίσου μέτρου*.

Στη συνέχεια θα ορίσουμε τα ολισθαίνοντα διανύσματα, βρίσκοντας την ισομετρία που «μεταφέρει παράλληλα» δοθέν εφαρμοστό διάνυσμα του υπερβολικού επιπέδου κατά μήκος της γεωδαισιακής του.

Εύρεση Ισομετρίας Ολίσθησης

Θεωρούμε το υπερβολικό ημιεπίπεδο, το μιγαδικό $w = x+iy$, και το εφαπτόμενο σε μια γεωδαισιακή διάνυσμα $u = r\,e^{i\theta}$, $-\pi < \theta \leq \pi$.
Για να ορίσουμε την κλάση ισοδυναμίας του (ολισθαίνοντος) διανύσματος (z_0, u_0), αρκεί να βρούμε το Möbius μετασχηματισμό $\tau(z) = \dfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$ όπου $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ που μεταφέρει το διάνυσμα u απόσταση d κατά μήκος της γεωδαισιακής του.



Θεωρούμε τους μιγαδικούς w_-, w_+ ως άκρα του ημικυκλίου και c την τετμημένη του κέντρου.
Τότε

$$c = x + y\tan\theta \qquad \text{και} \qquad r = \frac{w_+ - w_-}{2} = \frac{y}{\cos\theta}$$

οπότε

$$w_- = c - r = x + y\tan\theta - \frac{y}{\cos\theta} = x + y(\tan\theta - \frac{1}{\cos\theta})$$
$$w_+ = c + r = x + y\tan\theta + \frac{y}{\cos\theta} = x + y(\tan\theta + \frac{1}{\cos\theta})$$

Από την Υπερβολική γεωμετρία όμως είναι γνωστό ότι ο πίνακας που παριστάνει την υπερβολική ισομετρία με άξονα (u, υ) και μήκος μετατόπισης d είναι

$$A = \begin{pmatrix} \cosh\frac{1}{2}d + \frac{\upsilon+u}{\upsilon-u}\sinh\frac{1}{2}d & -\frac{2u\upsilon}{\upsilon-u}\sinh\frac{1}{2}d \\ \frac{2}{\upsilon-u}\sinh\frac{1}{2}d & \cosh\frac{1}{2}d - \frac{\upsilon+u}{\upsilon-u}\sinh\frac{1}{2}d \end{pmatrix}$$

Στην προκειμένη περίπτωση είναι $u = w_-$ και $\upsilon = w_+$.

Επομένως

$$\frac{\upsilon+u}{\upsilon-u}=\frac{(x+y\tan\theta)\cos\theta}{y}=\frac{x\cos\theta+y\sin\theta}{y},$$

$$u\upsilon = (x+y\tan\theta)^2-\frac{y^2}{\cos^2\theta}=$$

$$x^2+2xy\tan\theta+y^2(\tan^2\theta-\frac{1}{\cos^2\theta}) =$$

Όμως $\frac{\sin^2\theta-1}{\cos^2\theta}=-1 \Leftrightarrow \tan^2\theta-\frac{1}{\cos^2\theta}=-1$

Άρα

$$u\upsilon = x^2 + 2xy \tan\theta - y^2$$

και ο πίνακας της ισομετρίας γίνεται

$$A = \begin{pmatrix} \cosh\frac{1}{2}d+\frac{x\cos\theta+y\sin\theta}{y}\sinh\frac{1}{2}d & -\frac{(x^2+2xy\tan\theta-y^2)\cos\theta}{y}\sinh\frac{1}{2}d \\ \frac{\cos\theta}{y}\sinh\frac{1}{2}d & \cosh\frac{1}{2}d-\frac{x\cos\theta+y\sin\theta}{y}\sinh\frac{1}{2}d \end{pmatrix}$$

Έχοντας τώρα βρει το μετασχηματισμό Möbius, ορίζουμε την ισοδυναμία διανυσμάτων:

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.1 Το στοιχείο (z, u) του TH^2 είναι ισοδύναμο με το (z', u'), δηλαδή

$$(z, u) \sim (z', u')$$

αν και μόνο αν [z' = τ(z) και u' = Dτ(z) u]

Άρα (z, u) ~ (τ(z), Dτ(z) u)

Αλλά $D\tau(z) = \frac{d\tau}{dz} = (\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta})' = \frac{\alpha(\gamma z+\delta)-(\alpha z+\beta)}{(\gamma z+\delta)^2} = \frac{1}{(\gamma z+\delta)^2}$

Οπότε

$$\boxed{(z, u) \sim (\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}, \frac{u}{(\gamma z+\delta)^2})}$$

όπου, α, β, γ, δ οι (πραγματικοί που βρήκαμε παραπάνω).

Με την παραπάνω ισοδυναμία ορίζονται κλάσεις ισοδυναμίας διανυσμάτων στη H^2, αφού

i) (z, u) ~ (τ(z), Dτ(z) u) ~ ($\tau(\tau^{-1}(\zeta))$, $D\tau(\tau^{-1}(z))$ u) = (z, u)

ii) $(z, u) \sim (w, v) \Leftrightarrow \begin{cases} w = \tau(z) \\ v = D\tau(z)\,u \end{cases}$

Αλλά $D\tau(z) : T_z H^2 \to T_{\tau(z)} H^2$ και αν $w = \tau(z)$

Τότε

$$D_{\tau^{-1}(w)} : T_w H^2 \to T_{\tau^{-1}(w)} H^2$$

Άρα $(w, v) \sim (\tau^{-1}(w), D\tau^{-1}(w)\, v) = (z, D\tau^{-1}(w)\, D\tau(z)\, u) = (z, u)$

iii) Αν [$(x, u) \sim (y, v)$ και $(y, v) \sim (z, w)$ τότε [$(x, u) \sim (z, w)$

Απόδειξη

$$(x, u) \sim (y, v) \Leftrightarrow \begin{cases} y = \tau_1(x) \\ v = D\tau_1(x)\,u \end{cases}$$

οπότε $z = \tau_2(\tau_1(x))$ και $w = D\tau_2(\tau_1(x))\, D\tau_1(x)\, u$

$$(y, v) \sim (z, w) \Leftrightarrow \begin{cases} z = \tau_2(y) \\ w = D\tau_2(y)\,v \end{cases}$$

Θέτω $\tau_2 \circ \tau_1 = \sigma$, οπότε έχω $\begin{cases} z = \sigma(x) \\ w = D\sigma(x)\,u \end{cases}$

άρα $(x, u) \sim (z, w)$ ☻

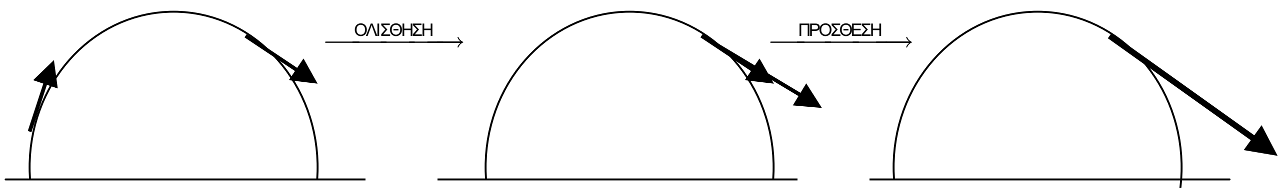
Θεωρώντας τώρα $W = \bigoplus_{z \in H^2} T_z H^2$ το χώρο των συστημάτων εφαρμοστών διανυσμάτων του υπερβολικού επιπέδου H^2, και το σύνολο

$$U = < u - D\tau(z)\, u \,/\, u \in T_z H^2,\ \ z \in H^2 >$$

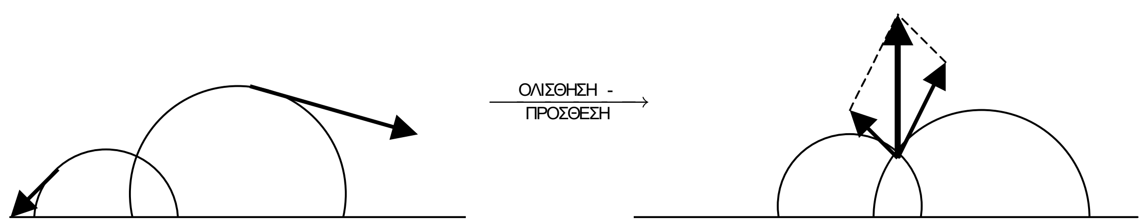
τότε ο χώρος πηλίκο W / U είναι η αλγεβρική μετάφραση του συνόλου των ολισθαινόντων διανυσμάτων του υπερβολικού επιπέδου.

Πρόσθεση μεταξύ ολισθαινόντων διανυσμάτων

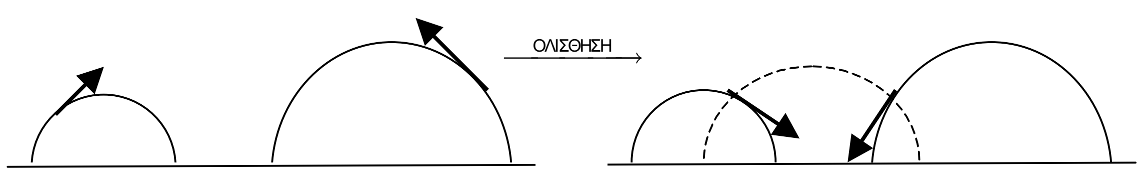
Πώς όμως θα προσθέσουμε δύο ολισθαίνοντα διανύσματα στην Υπερβολική Γεωμετρία; Αν αυτά βρίσκονται στην ίδια ευθεία, δεν έχουμε παρά να ολισθήσουμε το ένα προς το μέρος του άλλου, ώστε να αποκτήσουν κοινή αρχή. Μετά, η πρόσθεσή τους γίνεται όπως και στο Ευκλείδειο επίπεδο:



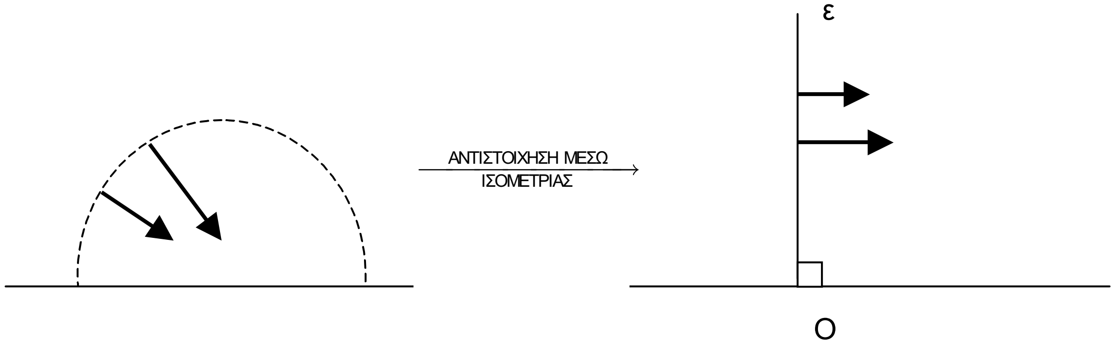
Αν τα διανύσματα ήταν αντίρροπα, θα αφαιρούσαμε τα μέτρα τους, όπως ξέρουμε.
Αν τα διανύσματα βρίσκονται σε τεμνόμενες γεωδαισιακές, τα ολισθαίνουμε και τα δύο στο σημείο τομής των γεωδαισιακών και κάνουμε την πρόσθεσή τους:



Τι γίνεται τώρα όταν τα διανύσματα βρίσκονται σε ξένες μεταξύ τους γεωδαισιακές;
Θα ακολουθήσουμε την εξής στρατηγική:
Ολισθαίνουμε τα διανύσματα στα σημεία εκείνα των γεωδαισιακών τους, από τα οποία διέρχεται η κοινή κάθετός τους, αφού, όπως είπαμε, υπάρχει τέτοια, και μάλιστα μοναδική:



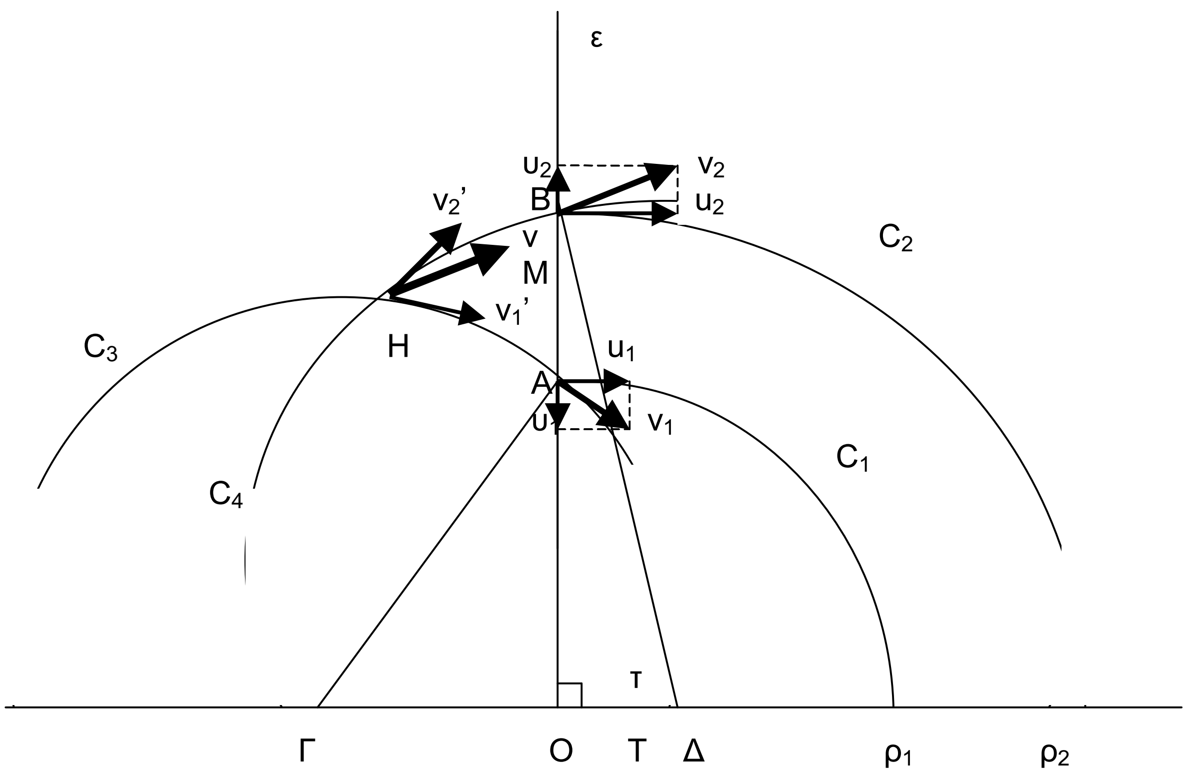
Σύμφωνα όμως με θεώρημα που αναφέραμε παραπάνω, μπορούμε, μέσω μιας ισομετρίας, να απεικονίσουμε την κοινή κάθετη των παραπάνω γεωδαισιακών σε μια κατακόρυφη γεωδαισιακή :



Δεν έχουμε τώρα, παρά να προσθέσουμε τα δύο διανύσματα που είναι κάθετα στην ε (κάτι ανάλογο κάναμε και στο Ευκλείδειο επίπεδο).

Η διαδικασία έχει, επομένως, ως εξής:

Στο υπερβολικό επίπεδο θεωρούμε την κατακόρυφη γεωδαισιακή ε, όπως στο παρακάτω σχήμα:



Θεωρούμε επίσης τα διανύσματα u_1, u_2 που είναι κάθετα στην ε στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, και τα οποία είναι εφαπτόμενα στις γεωδαισιακές C_1, C_2 αντίστοιχα (με ακτίνες ρ_1, ρ_2, όπως στο σχήμα).

Έστω ακόμα τα διανύσματα υ_1, υ_2, τα οποία εφάπτονται στην ε (δηλαδή ανήκουν σ' αυτήν), είναι αντίρροπα και έχουν ίσα (υπερβολικά) μέτρα.
Δηλαδή

$$\frac{||\upsilon_2||}{\rho_2} = \frac{||\upsilon_1||}{\rho_1} \quad ή \quad ||\upsilon_2|| = \frac{\rho_2}{\rho_1}||\upsilon_1||$$

Ονομάζουμε v_1 τη συνισταμένη των διανυσμάτων υ_1, u_1 στο σημείο A και v_2 των υ_2, u_2 στο σημείο B.

Οι γεωδαισιακές στις οποίες εφάπτονται τα διανύσματα u_1, u_2 είναι αντίστοιχα:

$$C_1:\ x^2 + y^2 = \rho_1^2 \qquad και \qquad C_2:\ x^2 + y^2 = \rho_2^2$$

Θα βρούμε τις εξισώσεις των κύκλων C_3, C_4 (τις γεωδαισιακές) που έχουν τα κέντρα τους (Γ, Δ αντίστοιχα) στον οριζόντιο άξονα (άπειρο) και εφάπτονται στις παραπάνω συνισταμένες. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι οι κύκλοι αυτοί είναι μοναδικοί.

Κατ' αρχήν, ας δούμε τη σχέση των γωνιών $Γ\hat{A}O = \theta_1$ και $Δ\hat{B}O = \theta_2$.
Η πρώτη έχει πλευρές κάθετες με τη γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα u_1, v_1.

Επομένως $εφ\theta_1 = \dfrac{||\upsilon_1||}{||u_1||}$. Ομοίως, θα είναι και $εφ\theta_2 = \dfrac{||\upsilon_2||}{||u_2||}$.

Αν τώρα θεωρήσουμε το λόγο των (υπερβολικών) μέτρων των διανυσμάτων u_2, u_1 ίσο με ένα θετικό πραγματικό α, θα έχουμε:

$$\frac{||u_2||_h}{||u_1||_h} = \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\dfrac{||u_2||}{\rho_2}}{\dfrac{||u_1||}{\rho_1}} = \alpha \quad \Leftrightarrow \quad ||u_2|| = \alpha\frac{\rho_2}{\rho_1}||u_1||$$

Άρα $$εφ\theta_2 = \frac{\dfrac{\rho_2}{\rho_1}||\upsilon_1||}{\alpha\dfrac{\rho_2}{\rho_1}||u_1||} = \frac{||\upsilon_1||}{\alpha||u_1||} = \frac{1}{\alpha}εφ\theta_1 \quad ή \quad \boxed{εφ\theta_1 = \alpha\ εφ\theta_2}$$

Ας βρούμε τώρα την εξίσωση του κύκλου C_3.

Επειδή $εφ\theta_1 = -\dfrac{ΟΓ}{\rho_1}$, θα είναι $ΟΓ = -\rho_1\ εφ\theta_1$, οπότε $ΑΓ^2 = \rho_1^2(1 + εφ^2\theta_1)$

Επομένως $C_3:\ (x + \rho_1\, εφ\theta_1)^2 + y^2 = \rho_1^2(1 + εφ^2\theta_1)$

ή

$$\boxed{C_3:\ (x + \alpha\,\rho_1\, εφ\theta_2)^2 + y^2 = \rho_1^2(1 + \alpha^2 εφ^2\theta_2)}$$

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, έχω:

$$\boxed{C_4 : \quad (x - \rho_2 \varepsilon\varphi\theta_2)^2 + y^2 = \rho_2^2(1 + \varepsilon\varphi^2\theta_2)}$$

Για να βρω το σημείο τομής Η των παραπάνω γεωδαισιακών (πάντα μπορούμε να έχουμε σημείο τομής, αρκεί να κάνουμε κατάλληλη επιλογή των διανυσμάτων $υ_1$ και $υ_2$) αρκεί να λύσω το σύστημα των παραπάνω εξισώσεων:

$$H: \begin{cases} x^2 + 2\alpha\rho_1\varepsilon\varphi\theta_2 x + y^2 = \rho_1^2 \\ x^2 - 2\rho_2\varepsilon\varphi\theta_2 x + y^2 = \rho_2^2 \end{cases}$$

Με αφαίρεση κατά μέλη, έχω

$$2x\varepsilon\varphi\theta_2(\alpha\rho_1 + \rho_2) = \rho_1^2 - \rho_2^2 \quad \text{ή} \quad x_H = \frac{\rho_1^2 - \rho_2^2}{2\varepsilon\varphi\theta_2(\alpha\rho_1 + \rho_2)}$$

οπότε, με αντικατάσταση, έχω $\quad y_H = \sqrt{\dfrac{\rho_1\rho_2(\rho_1 + \alpha\rho_2)}{\alpha\rho_1 + \rho_2} - \left(\dfrac{\rho_1^2 - \rho_2^2}{2\varepsilon\varphi\theta_2(\alpha\rho_1 + \rho_2)}\right)^2}$

Μεταφέροντας τώρα τα διανύσματα v_1, v_2 κατά μήκος των γεωδαισιακών τους C_3, C_4 ως το σημείο Η, προκύπτουν τα διανύσματα v_1', v_2' αντίστοιχα, για τα μέτρα των οποίων ισχύουν

$$||v_1||_h = ||v_1'||_h \quad \text{ή} \quad \frac{||v_1||}{\rho_1} = \frac{||v_1'||}{y_H} \quad \text{ή} \quad ||v_1'|| = \frac{||v_1||}{\rho_1} y_H \qquad \text{και όμοια}$$

$$||v_2'|| = \frac{||v_2||}{\rho_2} y_H$$

Αν τώρα $\lambda_{v_1'}$, $\lambda_{ΓΗ}$ είναι οι συντελεστές διεύθυνσης των διανυσμάτων v_1' και ΓΗ αντίστοιχα, θα έχουμε $\lambda_{v_1'}\lambda_{ΓΗ} = -1$ ή $\lambda_{v_1'} = -\dfrac{1}{\lambda_{ΓΗ}}$

Έτσι αν $v_1' = (x, y)$, τότε

$$\frac{y}{x} = -\frac{1}{\lambda_{ΓΗ}} \quad \text{ή} \quad x = -\lambda_{ΓΗ}\, y$$

Άρα

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{||v_1||}{\rho_1} y_H \qquad \text{ή} \quad \lambda_{ΓΗ}^2 y^2 + y^2 = \frac{v_1^2}{\rho_1^2} y_H^2$$

ή $$y^2(1 + \lambda_{ΓΗ}^2) = \frac{v_1^2}{\rho_1^2} y_H^2 \quad \text{ή} \quad y = \pm\frac{||v_1||}{\rho_1}\frac{y_H}{\sqrt{1 + \lambda_{ΓΗ}^2}}$$

οπότε $$x = \mp\frac{||v_1||}{\rho_1}\frac{y_H}{\sqrt{1 + \lambda_{ΓΗ}^2}}\lambda_{ΓΗ}$$

Δηλαδή $\quad v_1' = \left(-\frac{\|v_1\|}{\rho_1}\frac{y_H}{\sqrt{1+\lambda_{\Gamma H}^2}}\lambda_{\Gamma H},\ \frac{\|v_1\|}{\rho_1}\frac{y_H}{\sqrt{1+\lambda_{\Gamma H}^2}}\right)$

ή

$$v_1' = \left(\frac{\|v_1\|}{\rho_1}\frac{y_H}{\sqrt{1+\lambda_{\Gamma H}^2}}\lambda_{\Gamma H},\ -\frac{\|v_1\|}{\rho_1}\frac{y_H}{\sqrt{1+\lambda_{\Gamma H}^2}}\right)$$

Παρατηρώντας το σχήμα, διαπιστώνουμε ότι πράγματι, όταν το σημείο τομής Η των δύο ευθειών βρίσκεται αριστερότερα της τετμημένης x_Γ του Γ, είναι $\lambda_{\Gamma H} < 0$ και $\lambda_{v_1'} > 0$ οπότε έχουμε την πρώτη περίπτωση, ενώ όταν βρίσκεται δεξιότερα, είναι $\lambda_{\Gamma H} > 0$ και $\lambda_{v_1'} < 0$ και έχουμε τη δεύτερη περίπτωση.

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο βρίσκουμε ότι

$$v_2' = \left(-\frac{\|v_2\|}{\rho_2}\frac{y_H}{\sqrt{1+\lambda_{\Delta H}^2}}\lambda_{\Delta H},\ \frac{\|v_2\|}{\rho_2}\frac{y_H}{\sqrt{1+\lambda_{\Delta H}^2}}\right)$$

Εδώ δεν έχουμε δύο περιπτώσεις, αφού, από την κατασκευή, παρατηρούμε ότι πάντα είναι $\lambda_{\Delta H} < 0$ και $\lambda_{v_2'} > 0$.

Άρα

$$v = \left(-\frac{\|v_1\|}{\rho_1}\frac{y_H}{\sqrt{1+\lambda_{\Gamma H}^2}}\lambda_{\Gamma H} - \frac{\|v_2\|}{\rho_2}\frac{y_H}{\sqrt{1+\lambda_{\Delta H}^2}}\lambda_{\Delta H},\right.$$
$$\left.\frac{\|v_1\|}{\rho_1}\frac{y_H}{\sqrt{1+\lambda_{\Gamma H}^2}} + \frac{\|v_2\|}{\rho_2}\frac{y_H}{\sqrt{1+\lambda_{\Delta H}^2}}\right)$$

όταν $\lambda_{\Gamma H} < 0$ και $\lambda_{v_1'} > 0$ και

$$v = \left(\frac{\|v_1\|}{\rho_1}\frac{y_H}{\sqrt{1+\lambda_{\Gamma H}^2}}\lambda_{\Gamma H} - \frac{\|v_2\|}{\rho_2}\frac{y_H}{\sqrt{1+\lambda_{\Delta H}^2}}\lambda_{\Delta H},\right.$$
$$\left.-\frac{\|v_1\|}{\rho_1}\frac{y_H}{\sqrt{1+\lambda_{\Gamma H}^2}} + \frac{\|v_2\|}{\rho_2}\frac{y_H}{\sqrt{1+\lambda_{\Delta H}^2}}\right)$$

όταν $\lambda_{\Gamma H} > 0$ και $\lambda_{v_1'} < 0$.

Έστω τώρα C ο (μοναδικός) κύκλος που έχει το κέντρο του Τ(τ,0) στον οριζόντιο άξονα και εφάπτεται του διανύσματος v στο Η. Αν αυτός τέμνει τον κατακόρυφο άξονα του σχήματος στο σημείο Μ με τεταγμένη ρ_3, θα έχω

$$C: (x-\tau)^2 + y^2 = (TH)^2 \qquad ή \qquad (x-\tau)^2 + y^2 = \left(\tau - \frac{\rho_1^2-\rho_2^2}{2\varepsilon\varphi\theta_2(\alpha\rho_1+\rho_2)}\right)^2 + y_H^2$$

οπότε $(0 - \tau)^2 + \rho_3{}^2 = \tau^2 - 2\tau \dfrac{\rho_1^2 - \rho_2^2}{2\varepsilon\varphi\theta_2(\alpha\rho_1 + \rho_2)} + \dfrac{\rho_1\rho_2(\rho_1 + \alpha\rho_2)}{\alpha\rho_1 + \rho_2}$

ή

$$\boxed{\tau = \frac{\varepsilon\varphi\theta_2(\alpha\rho_1 + \rho_2)}{\rho_1^2 - \rho_2^2}\left(\frac{\rho_1\rho_2(\rho_1 + \alpha\rho_2)}{\alpha\rho_1 + \rho_2} - \rho_3{}^2\right)}$$

Ακόμα, έχουμε

$$v_1{}^2 = u^2{}_1 + \upsilon_1{}^2 = u^2{}_1 + u^2{}_1\,\alpha^2\,\varepsilon\varphi^2\theta_2 = u^2{}_1(1 + \alpha^2\,\varepsilon\varphi^2\theta_2),$$

άρα $\|v_1\| = \|u_1\|\sqrt{1 + \alpha^2\varepsilon\varphi^2\theta_2}$

και

$$v_2{}^2 = u^2{}_2 + \upsilon_2{}^2 = \alpha^2\frac{\rho_2^2}{\rho_1^2}u_1^2 + \frac{\rho_2^2}{\rho_1^2}\upsilon_1^2 = \frac{\rho_2^2}{\rho_1^2}(\alpha^2 u_1^2 + \upsilon_1^2) = \frac{\rho_2^2}{\rho_1^2}(\alpha^2 u_1^2 + u_1^2\varepsilon\varphi^2\theta_1)$$

$$= \frac{\rho_2^2}{\rho_1^2}(\alpha^2 u_1^2 + u_1^2\alpha^2\varepsilon\varphi^2\theta_2) = \alpha^2 u_1^2\frac{\rho_2^2}{\rho_1^2}(1 + \varepsilon\varphi^2\theta_2),$$

άρα $\|v_2\| = \alpha\dfrac{\rho_2}{\rho_1}\|u_1\|\sqrt{1 + \varepsilon\varphi^2\theta_2}$

Έτσι, το διάνυσμα v γίνεται

$$v = \left(-\frac{\|u_1\|\sqrt{1+\alpha^2\varepsilon\varphi^2\theta_2}}{\rho_1}\frac{y_H}{\sqrt{1+\lambda_{\Gamma H}^2}}\lambda_{\Gamma H} - \frac{\alpha\frac{\rho_2}{\rho_1}\|u_1\|\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2\theta_2}}{\rho_2}\frac{y_H}{\sqrt{1+\lambda_{\Delta H}^2}}\lambda_{\Delta H},\right.$$

$$\left.\frac{\|u_1\|\sqrt{1+\alpha^2\varepsilon\varphi^2\theta_2}}{\rho_1}\frac{y_H}{\sqrt{1+\lambda_{\Gamma H}^2}} + \frac{\alpha\frac{\rho_2}{\rho_1}\|u_1\|\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2\theta_2}}{\rho_2}\frac{y_H}{\sqrt{1+\lambda_{\Delta H}^2}}\right) =$$

$$-\frac{\|u_1\|y_H}{\rho_1}\left(\frac{\lambda_{\Gamma H}\sqrt{1+\alpha^2\varepsilon\varphi^2\theta_2}}{\sqrt{1+\lambda_{\Gamma H}^2}} + \frac{\alpha\lambda_{\Delta H}\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2\theta_2}}{\sqrt{1+\lambda_{\Delta H}^2}},\ -\frac{\sqrt{1+\alpha^2\varepsilon\varphi^2\theta_2}}{\sqrt{1+\lambda_{\Gamma H}^2}} - \frac{\alpha\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2\theta_2}}{\sqrt{1+\lambda_{\Delta H}^2}}\right)$$

όταν $\lambda_{\Gamma H} < 0$ και $\lambda_{v_1'} > 0$ και

$$v = \frac{\|u_1\|y_H}{\rho_1}\left(\frac{\lambda_{\Gamma H}\sqrt{1+\alpha^2\varepsilon\varphi^2\theta_2}}{\sqrt{1+\lambda_{\Gamma H}^2}} - \frac{\alpha\lambda_{\Delta H}\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2\theta_2}}{\sqrt{1+\lambda_{\Delta H}^2}},\ -\frac{\sqrt{1+\alpha^2\varepsilon\varphi^2\theta_2}}{\sqrt{1+\lambda_{\Gamma H}^2}} + \frac{\alpha\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2\theta_2}}{\sqrt{1+\lambda_{\Delta H}^2}}\right)$$

όταν $\lambda_{\Gamma H} > 0$ και $\lambda_{v_1'} < 0$.

Τα διανύσματα τώρα ΤΗ, v είναι κάθετα, συνεπώς το εσωτερικό τους γινόμενο θα είναι μηδενικό. Αυτή θα είναι η εξίσωση (ΤΗ v = 0) που θα δώσει τη ζητούμενη τιμή του ρ_3.

Για την περίπτωση $\lambda_{\Gamma H} < 0$, με τη βοήθεια του Maple 7, ορίζω:

```
> R1:=(r1*r2*(r1+a*r2))/(a*r1+r2);
```
(r1=ρ_1, r2=ρ_2)

```
R2:=(r1^2-r2^2)/(2*t*(a*r1+r2));restart;
```
(t=εφθ_2)

```
yH:=sqrt(R1-R2^2);
```
(η τεταγμένη του σημείου Η)

$$R1 := \frac{r1\, r2\, (r1 + a\, r2)}{a\, r1 + r2}$$

$$R2 := \frac{1}{2}\, \frac{r1^2 - r2^2}{t\, (a\, r1 + r2)}$$

$$yH := \sqrt{R1 - R2^2}$$

```
> LGH:=yH/(R2+a*r1*t);
```
(ο συντελεστής διεύθυνσης του διανύσματος ΓΗ)

$$LGH := \frac{\sqrt{R1 - R2^2}}{R2 + a\, r1\, t}$$

```
> LDH:=yH/(R2-r2*t);
```
(ο συντελεστής διεύθυνσης του διανύσματος ΔΗ)

$$LDH := \frac{\sqrt{R1 - R2^2}}{R2 - r2\, t}$$

```
> TetmhmTH:=R2-(1/(2*R2)*(R1-r3^2));
```
(η τετμημένη του διανύσματος ΤΗ)

$$TetmhmTH := R2 - \frac{1}{2}\, \frac{R1 - r3^2}{R2}$$

```
> TetagmTH:=yH;
```
(η τεταγμένη του διανύσματος ΤΗ)

$$TetagmTH := \sqrt{R1 - R2^2}$$

```
>TetmhmV:=(sqrt(1+(a*t)^2)*LGH)/(sqrt(1+LGH^2))+(a*sqrt(1+t^
2)*LDH)/(sqrt(1+LDH^2));
```
(η τετμημένη του διανύσματος v, χωρίς το –σταθερό- συντελεστή $-||u_1||/\rho_1$)

$$Tetmhm V = \frac{\sqrt{1+a^2 t^2}\sqrt{R1-R2^2}}{(R2+a r1 t)\sqrt{1+\frac{R1-R2^2}{(R2+a r1 t)^2}}} + \frac{a\sqrt{1+t^2}\sqrt{R1-R2^2}}{(R2-r2 t)\sqrt{1+\frac{R1-R2^2}{(R2-r2 t)^2}}}$$

>TetagmV:=-sqrt(1+(a*t)^2)/(sqrt(1+LGH^2))-a*sqrt(1+t^2)/(sqrt(1+LDH^2)); (η τεταγμένη του διανύσματος v, χωρίς το -σταθερό- συντελεστή $-\|u_1\|/\rho_1$)

$$TetagmV := -\frac{\sqrt{1+a^2 t^2}}{\sqrt{1+\frac{R1-R2^2}{(R2+a\,r1\,t)^2}}} - \frac{a\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{1+\frac{R1-R2^2}{(R2-r2\,t)^2}}}$$

>EXIS:=TetmhmTH*TetmhmV+TetagmTH*TetagmV=0; (η εξίσωση TH v = 0)

$$EXIS := \left(R2 - \frac{1}{2}\frac{R1-r3^2}{R2}\right)\left(\frac{\sqrt{1+a^2 t^2}\sqrt{R1-R2^2}}{(R2+a\,r1\,t)\sqrt{1+\frac{R1-R2^2}{(R2+a\,r1\,t)^2}}} + \frac{a\sqrt{1+t^2}\sqrt{R1-R2^2}}{(R2-r2\,t)\sqrt{1+\frac{R1-R2^2}{(R2-r2\,t)^2}}}\right) + \sqrt{R1-R2^2}\left(-\frac{\sqrt{1+a^2 t^2}}{\sqrt{1+\frac{R1-R2^2}{(R2+a\,r1\,t)^2}}} - \frac{a\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{1+\frac{R1-R2^2}{(R2-r2\,t)^2}}}\right) = 0$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι δευτεροβάθμια ως προς r_3. Ή, ακόμα καλύτερα, πρωτοβάθμια ως προς r_3^2 (αφού δεν υπάρχει πρωτοβάθμιος όρος του r_3). Έτσι, αν βρεθεί θετική ρίζα (ως προς r_3), αυτή θα είναι μοναδική.

Θα αποδείξω ότι η ζητούμενη ρίζα είναι αριθμός $\sqrt{R_1}$ ή $\sqrt{\dfrac{r_1 r_2(r_1+ar_2)}{ar_1+r_2}}$.

Για την τιμή αυτή του r_3, η παραπάνω εξίσωση γίνεται:

$$R2\left(\frac{\sqrt{1+a^2 t^2}\sqrt{R1-R2^2}}{(R2+a\,r1\,t)\sqrt{1+\frac{R1-R2^2}{(R2+a\,r1\,t)^2}}} + \frac{a\sqrt{1+t^2}\sqrt{R1-R2^2}}{(R2-r2\,t)\sqrt{1+\frac{R1-R2^2}{(R2-r2\,t)^2}}}\right)$$

$$+\sqrt{R1 - R2^2}\left(-\frac{\sqrt{1+a^2 t^2}}{\sqrt{1+\frac{R1-R2^2}{(R2+a\,r1\,t)^2}}} - \frac{a\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{1+\frac{R1-R2^2}{(R2-r2\,t)^2}}}\right) = 0$$

και αυτή με απλή παραγοντοποίηση γίνεται:

$$\sqrt{R_1 - R_2^2}\ \ [\ \frac{\sqrt{1+\alpha^2 t^2}}{\sqrt{1+\frac{R_1-R_2^2}{(R_2+\alpha r_1 t)^2}}}\left(\frac{R_2}{R_2+\alpha r_1 t}-1\right) + \frac{\alpha\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{1+\frac{R_1-R_2^2}{(R_2-r_2 t)^2}}}\left(\frac{R_2}{R_2-r_2 t}-1\right)\ ] = 0$$

ή

$$\sqrt{R_1 - R_2^2}\ \ [\ \frac{\sqrt{1+\alpha^2 t^2}}{\sqrt{1+\frac{R_1-R_2^2}{(R_2+\alpha r_1 t)^2}}}\ \frac{-\alpha r_1 t}{R_2+\alpha r_1 t} + \frac{\alpha\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{1+\frac{R_1-R_2^2}{(R_2-r_2 t)^2}}}\ \frac{r_2 t}{R_2-r_2 t}\ ] = 0$$

ή

$$\alpha t\sqrt{R_1 - R_2^2}\ \ [\ \frac{\sqrt{1+\alpha^2 t^2}}{\sqrt{1+\frac{R_1-R_2^2}{(R_2+\alpha r_1 t)^2}}}\ \frac{-r_1}{R_2+\alpha r_1 t} + \frac{\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{1+\frac{R_1-R_2^2}{(R_2-r_2 t)^2}}}\ \frac{r_2}{R_2-r_2 t}\ ] = 0$$

ή

$$\alpha t\sqrt{R_1 - R_2^2}\ \ [-\frac{r_1\sqrt{1+\alpha^2 t^2}}{\sqrt{(R_2+\alpha r_1 t)^2+R_1-R_2^2}\ \frac{R_2+\alpha r_1 t}{|R_2+\alpha r_1 t|}} + \frac{r_2\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{(R_2-r_2 t)^2+R_1-R_2^2}\ \frac{R_2-r_2 t}{|R_2-r_2 t|}}\ ] = 0$$

Όμως βρισκόμαστε στην πρώτη περίπτωση, όπου $\lambda_{ΓΗ} < 0$ και αφού

$$LGH := \frac{\sqrt{R1 - R2^2}}{R2 + a\,r1\,t}$$

θα είναι $R_2 + \alpha r_1 t < 0$, οπότε $|\ R_2 + \alpha r_1 t\ | = -(\ R_2 + \alpha r_1 t\ )$.

Επίσης, αφού

$$LDH := \frac{\sqrt{R1 - R2^2}}{R2 - r2\,t}$$

και $\lambda_{ΔΗ} < 0$, θα είναι $R_2 + \alpha r_1 t < 0$, οπότε $|\ R_2 - r_2 t\ | = -(\ R_2 - r_2 t\ )$.

Έτσι, έχουμε

$$\alpha t\sqrt{R_1 - R_2^2}\ \ [\ \frac{r_1\sqrt{1+\alpha^2 t^2}}{\sqrt{(R_2+\alpha r_1 t)^2+R_1-R_2^2}} - \frac{r_2\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{(R_2-r_2 t)^2+R_1-R_2^2}}\ ] = 0$$

Ενεργώντας ανάλογα, για την περίπτωση $\lambda_{\Gamma H} > 0$, έχουμε

```
TetmhmV:=(sqrt(1+(a*t)^2)*LGH)/(sqrt(1+LGH^2))-
(a*sqrt(1+t^2)*LDH)/(sqrt(1+LDH^2));
```

$$TetmhmV := \frac{\sqrt{1+a^2 t^2}\,\sqrt{R1-R2^2}}{(R2+a\,r1\,t)\sqrt{1+\frac{R1-R2^2}{(R2+a\,r1\,t)^2}}} - \frac{a\sqrt{1+t^2}\,\sqrt{R1-R2^2}}{(R2-r2\,t)\sqrt{1+\frac{R1-R2^2}{(R2-r2\,t)^2}}}$$

```
TetagmV:=-
sqrt(1+(a*t)^2)/(sqrt(1+LGH^2))+a*sqrt(1+t^2)/(sqrt(1+LDH
^2));
```

$$TetagmV := -\frac{\sqrt{1+a^2 t^2}}{\sqrt{1+\frac{R1-R2^2}{(R2+a\,r1\,t)^2}}} + \frac{a\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{1+\frac{R1-R2^2}{(R2-r2\,t)^2}}}$$

```
EXIS:=TetmhmTH*TetmhmV+TetagmTH*TetagmV=0;
```

$$EXIS := \left(R2 - \frac{1}{2}\frac{R1-r3^2}{R2}\right)\left(\frac{\sqrt{1+a^2 t^2}\,\sqrt{R1-R2^2}}{(R2+a\,r1\,t)\sqrt{1+\frac{R1-R2^2}{(R2+a\,r1\,t)^2}}} - \frac{a\sqrt{1+t^2}\,\sqrt{R1-R2^2}}{(R2-r2\,t)\sqrt{1+\frac{R1-R2^2}{(R2-r2\,t)^2}}}\right)$$

$$+\sqrt{R1-R2^2}\left(-\frac{\sqrt{1+a^2 t^2}}{\sqrt{1+\frac{R1-R2^2}{(R2+a\,r1\,t)^2}}} + \frac{a\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{1+\frac{R1-R2^2}{(R2-r2\,t)^2}}}\right) = 0$$

οπότε, φτάνοντας με τον ίδιο τρόπο στο σημείο

$$\alpha t\sqrt{R_1-R_2^2}\ \left[-\frac{r_1\sqrt{1+\alpha^2 t^2}}{\sqrt{(R_2+\alpha r_1 t)^2+R_1-R_2^2}\,\frac{R_2+\alpha r_1 t}{|R_2+\alpha r_1 t|}} - \frac{r_2\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{(R_2-r_2 t)^2+R_1-R_2^2}\,\frac{R_2-r_2 t}{|R_2-r_2 t|}}\right]$$

παρατηρούμε ότι, επειδή $\lambda_{\Gamma H} > 0$ και αφού πάλι

$$LGH := \frac{\sqrt{R1-R2^2}}{R2+a\,r1\,t}$$

θα είναι $R_2 + \alpha r_1 t > 0$, οπότε $| R_2 + \alpha r_1 t | = R_2 + \alpha r_1 t$.

Έτσι, έχουμε πάλι

$$\alpha t\sqrt{R_1 - R_2^2}\ \left[\ \frac{r_1\sqrt{1+\alpha^2 t^2}}{\sqrt{(R_2 + \alpha r_1 t)^2 + R_1 - R_2^2}} - \frac{r_2\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{(R_2 - r_2 t)^2 + R_1 - R_2^2}}\ \right] = 0$$

Αρκεί λοιπόν να αποδείξω ότι

$$\frac{r_1\sqrt{1+\alpha^2 t^2}}{\sqrt{(R_2 + \alpha r_1 t)^2 + R_1 - R_2^2}} = \frac{r_2\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{(R_2 - r_2 t)^2 + R_1 - R_2^2}}$$

για κάθε τιμή των μεταβλητών που εμφανίζονται.

Πράγματι, ισοδύναμα, έχω:

$$\frac{r_1\sqrt{1+\alpha^2 t^2}}{\sqrt{\alpha^2 r_1^2 t^2 + 2R_2\alpha r_1 t + R_1}} = \frac{r_2\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{r_2^2 t^2 - 2R_2 r_2 t + R_1}}$$

ή

$$r_1^2(1+\alpha^2 t^2)(r_2^2 t^2 - 2R_2 r_2 t + R_1) = r_2^2(1+t^2)(\alpha^2 r_1^2 t^2 + 2R_2\alpha r_1 t + R_1)$$

ή

$$r_1^2(1+\alpha^2 t^2)\left(r_2^2 t^2 - \cancel{2}\,\frac{r_1^2 - r_2^2}{\cancel{2}\,\cancel{t}(\alpha r_1 + r_2)}\,r_2\,\cancel{t} + \frac{r_1 r_2(r_1 + \alpha r_2)}{\alpha r_1 + r_2}\right) =$$

$$= r_2^2(1+t^2)\left(\alpha^2 r_1^2 t^2 + \cancel{2}\,\frac{r_1^2 - r_2^2}{\cancel{2}\,\cancel{t}(\alpha r_1 + r_2)}\,\alpha r_1\,\cancel{t} + \frac{r_1 r_2(r_1 + \alpha r_2)}{\alpha r_1 + r_2}\right)$$

ή

$$r_1^2(1+\alpha^2 t^2)\ [\ (\alpha r_1 + r_2)r_2^2 t^2 - \cancel{r_1^2 r_2} + r_2^3 + \cancel{r_1^2 r_2} + r_1 r_2^2\alpha\ ] =$$

$$= r_2^2(1+t^2)\ [\ (\alpha r_1 + r_2)\alpha^2 r_1^2 t^2 + \alpha r_1^3 - \cancel{\alpha r_1 r_2^2} + r_1^2 r_2 + \cancel{r_1 r_2^2}\alpha\ ]$$

ή

$$r_1^2 r_2^2(1+\alpha^2 t^2)\ \ (\alpha r_1 t^2 + r_2 t^2 + r_2 + r_1\alpha)\ \ =\ \ r_1^2 r_2^2(1+t^2)\ (\ \alpha^3 r_1 t^2 + \alpha^2 r_2 t^2 + \alpha r_1 + r_2)$$

ή

$$r_1^2 r_2^2(\alpha r_1 t^2 + r_2 t^2 + r_2 + r_1\alpha + \alpha^3 r_1 t^4 + \alpha^2 r_2 t^4 + \alpha^2 r_2 t^2 + \alpha^3 r_1 t^2) =$$

$$= r_1^2 r_2^2(\alpha^3 r_1 t^2 + \alpha^2 r_2 t^2 + \alpha r_1 + r_2 + \alpha^3 r_1 t^4 + \alpha^2 r_2 t^4 + \alpha r_1 t^2 + r_2 t^2)$$

που ισχύει.

Αποδείξαμε λοιπόν ότι

$$\rho_3 = \sqrt{\frac{\rho_1\rho_2(\rho_1+\alpha\rho_2)}{\rho_2+\alpha\rho_1}}$$

Ν. Ροπών

Από την τελευταία σχέση, ισοδύναμα, έχουμε:

$$\rho_3^2(\rho_2+\alpha\rho_1)=\rho_1\rho_2(\rho_1+\alpha\rho_2) \quad \text{ή} \quad \rho_3^2\rho_2-\rho_1^2\rho_2=\alpha\rho_2^2\rho_1-\alpha\rho_3^2\rho_1$$

ή $$\frac{\rho_3^2-\rho_1^2}{\rho_1}=\alpha\frac{\rho_2^2-\rho_3^2}{\rho_2} \quad \text{ή} \quad \frac{\rho_3^2-\rho_1^2}{\rho_1\rho_3}=\alpha\frac{\rho_2^2-\rho_3^2}{\rho_2\rho_3}$$

ή $$\frac{\rho_3}{\rho_1}-\frac{\rho_1}{\rho_3}=\alpha(\frac{\rho_2}{\rho_3}-\frac{\rho_3}{\rho_2}) \quad \text{ή} \quad e^{\ln\frac{\rho_3}{\rho_1}}-e^{\ln\frac{\rho_1}{\rho_3}}=\alpha(e^{\ln\frac{\rho_2}{\rho_3}}-e^{\ln\frac{\rho_3}{\rho_2}})$$

ή $$\frac{e^{\ln\frac{\rho_3}{\rho_1}}-e^{\ln\frac{\rho_1}{\rho_3}}}{2}=\alpha\,\frac{e^{\ln\frac{\rho_2}{\rho_3}}-e^{\ln\frac{\rho_3}{\rho_2}}}{2}$$

ή $$\sinh(\ln\frac{\rho_3}{\rho_1})=\alpha\sinh(\ln\frac{\rho_2}{\rho_3})$$

Επομένως αν συμβολίσουμε με d(M, A)), d(M, B) τις υπερβολικές αποστάσεις μεταξύ των σημείων M, A και M, B αντίστοιχα, θα έχουμε

$$\sinh(d(M,A)) = \alpha\sinh(d(M,B)) \quad \text{ή} \quad \frac{\sinh(d(M,A))}{\sinh(d(M,B))}=\alpha$$

Έτσι,

$$\frac{\sinh(d(M,A))}{\sinh(d(M,B))}=\frac{\|u_2\|_h}{\|u_1\|_h} \quad \text{ή}$$

$$\boxed{\sinh(d(M,A))\|u_1\|_h = \sinh(d(M,B))\|u_2\|_h}$$

Αποδείξαμε λοιπόν το

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.1 Αν u_1, u_2 είναι ολισθαίνοντα διανύσματα, με ξένους φορείς ε_1 και ε_2, τότε ο φορέας της συνισταμένης τους τέμνει την κοινή κάθετο AB των ε_1, ε_2 σε σημείο M τέτοιο ώστε

$$\sinh(d(M,A))\,||u_1||_h = \sinh(d(M,B))||u_2||_h$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ. **1.** Αν αντικαταστήσουμε την τιμή της $\rho_3 = \sqrt{\dfrac{\rho_1\rho_2(\rho_1+\alpha\rho_2)}{\rho_2+\alpha\rho_1}}$ στην τετμημένη τ του κέντρου του κύκλου C ($\tau = \dfrac{\varepsilon\varphi\theta_2(\alpha\rho_1+\rho_2)}{\rho_1^2-\rho_2^2}\left(\dfrac{\rho_1\rho_2(\rho_1+\alpha\rho_2)}{\alpha\rho_1+\rho_2} - \rho_3^2\right)$), παρατηρούμε ότι αυτή μηδενίζεται, γεγονός που σημαίνει ότι ο κύκλος C τέμνει κάθετα τη γεωδαισιακή ε.

Μ' άλλα λόγια, η συνισταμένη των διανυσμάτων u_1, u_2 είναι παράλληλη σ' αυτά, ακριβώς όπως συμβαίνει και στο Ευκλείδειο επίπεδο.

2. Αν $||u_2||_h > ||u_1||_h$, τότε, για $d(M, A) > 0$, θα έχουμε

$$\sinh(d(M, A))\,||u_2||_h > \sinh(d(M, A))\,||u_1||_h$$

ή

$$\sinh(d(M, A))\,||u_2||_h > \sinh(d(M, B))\,||u_2||_h$$

ή

$$\sinh(d(M, A)) > \sinh(d(M, B))$$

ή

$d(M, A) > d(M, B)$ (αφού το sinhx είναι γν. αύξουσα συνάρτηση στο $\mathbb{R}$).

Δηλαδή, όπως και στην Ευκλείδεια Γεωμετρία πάλι, η συνισταμένη βρίσκεται πιο «κοντά», στη γλώσσα της Υπερβολικής Γεωμετρίας, στο μεγαλύτερο διάνυσμα.

Ν. Συνημιτόνων

Θα αποδείξουμε τώρα ότι το υπερβολικό μέτρο του διανύσματος v δεν εξαρτάται από τα διανύσματα υ_1, υ_2.

Δηλαδή ο λόγος $\dfrac{||v||}{y_H}$ είναι σταθερός.

Για την περίπτωση ($\lambda_{\Gamma H} < 0$) που

$$v = -\frac{\| u_1 \| y_H}{\rho_1} \left(\frac{\lambda_{\Gamma H}\sqrt{1+\alpha^2 \varepsilon\varphi^2\theta_2}}{\sqrt{1+\lambda_{\Gamma H}^2}} + \frac{\alpha\lambda_{\Delta H}\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2\theta_2}}{\sqrt{1+\lambda_{\Delta H}^2}}, \quad -\frac{\sqrt{1+\alpha^2\varepsilon\varphi^2\theta_2}}{\sqrt{1+\lambda_{\Gamma H}^2}} - \frac{\alpha\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2\theta_2}}{\sqrt{1+\lambda_{\Delta H}^2}} \right)$$

έχω:

$$\frac{\| v \|^2}{y_H^{\ 2}} = \frac{u_1^{\ 2}}{\rho_1^{\ 2}} \left[\left(\frac{\lambda_{\Gamma H}\sqrt{1+\alpha^2\varepsilon\varphi^2\theta_2}}{\sqrt{1+\lambda_{\Gamma H}^2}} + \frac{\alpha\lambda_{\Delta H}\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2\theta_2}}{\sqrt{1+\lambda_{\Delta H}^2}} \right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\sqrt{1+\alpha^2\varepsilon\varphi^2\theta_2}}{\sqrt{1+\lambda_{\Gamma H}^2}} + \frac{\alpha\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2\theta_2}}{\sqrt{1+\lambda_{\Delta H}^2}} \right)^2 \right]$$

Θέτω $\quad \varepsilon\varphi\theta_2 = t, \quad \frac{\sqrt{1+\alpha^2\varepsilon\varphi^2\theta_2}}{\sqrt{1+\lambda_{\Gamma H}^2}} = x \quad$ και $\quad \frac{\alpha\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2\theta_2}}{\sqrt{1+\lambda_{\Delta H}^2}} = y \quad$ και έχω

$$\frac{\| v \|^2}{y_H^{\ 2}} = \frac{u_1^{\ 2}}{\rho_1^{\ 2}} \left[(x\lambda_{\Gamma H} + y\lambda_{\Delta H})^2 + (x + y)^2 \right]$$

$$= \frac{u_1^{\ 2}}{\rho_1^{\ 2}} \left[(1 + \lambda_{\Gamma H}^{\ 2}) x^2 + (1 + \lambda_{\Delta H}^{\ 2}) y^2 + 2(1 + \lambda_{\Gamma H}\lambda_{\Delta H}) x y \right]$$

Όμως $\quad (1 + \lambda_{\Gamma H}^2) x^2 = (1 + \lambda_{\Gamma H}^2) \frac{1+\alpha^2 t^2}{1+\lambda_{\Gamma H}^{\ 2}} = 1 + \alpha^2 t^2$

και $\quad (1 + \lambda_{\Delta H}^2) y^2 = (1 + \lambda_{\Delta H}^2) \frac{\alpha^2(1+t^2)}{1+\lambda_{\Delta H}^{\ 2}} = \alpha^2 + \alpha^2 t^2$

Επίσης $\quad 2(1 + \lambda_{\Gamma H}\lambda_{\Delta H}) x y = 2\left(1 + \frac{y_H - y_\Gamma}{x_H - x_\Gamma}\frac{y_H - y_\Delta}{x_H - x_\Delta}\right) x y =$

$$2\left(1+ \frac{y_H}{\frac{\rho_1^2-\rho_2^2}{2t(\alpha\rho_1+\rho_2)} + \alpha\rho_1 t} \frac{y_H}{\frac{\rho_1^2-\rho_2^2}{2t(\alpha\rho_1+\rho_2)} - \rho_2 t}\right) \frac{\sqrt{1+\alpha t^2}}{\sqrt{1+\lambda_{\Gamma H}^{\ 2}}} \frac{\alpha\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{1+\lambda_{\Delta H}^{\ 2}}}$$

$$2\left(1+ \frac{y^2_H}{\left(\frac{\rho_1^2-\rho_2^2}{2t(\alpha\rho_1+\rho_2)} + \alpha\rho_1 t\right)\left(\frac{\rho_1^2-\rho_2^2}{2t(\alpha\rho_1+\rho_2)} - \rho_2 t\right)}\right) \frac{\sqrt{1+\alpha t^2}}{\sqrt{1+\lambda_{\Gamma H}^{\ 2}}} \frac{\alpha\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{1+\lambda_{\Delta H}^{\ 2}}}$$

Όμως $\quad 1 + \frac{y^2_H}{\left(\frac{\rho_1^2-\rho_2^2}{2t(\alpha\rho_1+\rho_2)} + \alpha\rho_1 t\right)\left(\frac{\rho_1^2-\rho_2^2}{2t(\alpha\rho_1+\rho_2)} - \rho_2 t\right)} =$

$$1+\frac{\dfrac{\rho_1\rho_2(\rho_1+\alpha\rho_2)}{\alpha\rho_1+\rho_2}-\left(\dfrac{\rho_1^2-\rho_2^2}{2t(\alpha\rho_1+\rho_2)}\right)^2}{\left(\dfrac{\rho_1^2-\rho_2^2}{2t(\alpha\rho_1+\rho_2)}\right)^2-\rho_2\dfrac{\rho_1^2-\rho_2^2}{2(\alpha\rho_1+\rho_2)}+\alpha\rho_1\dfrac{\rho_1^2-\rho_2^2}{2(\alpha\rho_1+\rho_2)}-\alpha\rho_1\rho_2t^2}=$$

$$\frac{\dfrac{\rho_1\rho_2(\rho_1+\alpha\rho_2)}{\alpha\rho_1+\rho_2}+\dfrac{-\rho_1^2\rho_2+\rho_2^3+\alpha\rho_1^3-\alpha\rho_2^2\rho_1}{2(\alpha\rho_1+\rho_2)}-\alpha\rho_1\rho_2t^2}{\left(\dfrac{\rho_1^2-\rho_2^2}{2t(\alpha\rho_1+\rho_2)}\right)^2-\rho_2\dfrac{\rho_1^2-\rho_2^2}{2(\alpha\rho_1+\rho_2)}+\alpha\rho_1\dfrac{\rho_1^2-\rho_2^2}{2(\alpha\rho_1+\rho_2)}-\alpha\rho_1\rho_2t^2}=$$

$$\frac{\dfrac{2\rho_1^2\rho_2+2\alpha\rho_1\rho_2^2-\rho_1^2\rho_2+\rho_2^3+\alpha\rho_1^3-\alpha\rho_2^2\rho_1}{2(\alpha\rho_1+\rho_2)}-\alpha\rho_1\rho_2t^2}{\left(\dfrac{\rho_1^2-\rho_2^2}{2t(\alpha\rho_1+\rho_2)}+\alpha\rho_1t\right)\left(\dfrac{\rho_1^2-\rho_2^2}{2t(\alpha\rho_1+\rho_2)}-\rho_2t\right)}=$$

$$\frac{\dfrac{\rho_1^2(\rho_2+\alpha\rho_1)+\rho_2^2(\rho_2+\alpha\rho_1)}{2(\alpha\rho_1+\rho_2)}-\alpha\rho_1\rho_2t^2}{\left(\dfrac{\rho_1^2-\rho_2^2}{2t(\alpha\rho_1+\rho_2)}+\alpha\rho_1t\right)\left(\dfrac{\rho_1^2-\rho_2^2}{2t(\alpha\rho_1+\rho_2)}-\rho_2t\right)}=\frac{\rho_1^2+\rho_2^2-2\alpha\rho_1\rho_2t^2}{2\left(\dfrac{\rho_1^2-\rho_2^2}{2t(\alpha\rho_1+\rho_2)}+\alpha\rho_1t\right)\left(\dfrac{\rho_1^2-\rho_2^2}{2t(\alpha\rho_1+\rho_2)}-\rho_2t\right)}$$

και

$$\frac{\sqrt{1+\alpha t^2}}{\sqrt{1+\lambda_{\Gamma H}{}^2}}=\frac{\sqrt{1+\alpha t^2}}{\sqrt{1+\dfrac{y_H{}^2}{\left(\dfrac{\rho_1^2-\rho_2^2}{2t(\alpha\rho_1+\rho_2)}+\alpha\rho_1t\right)^2}}}=\frac{\sqrt{1+\alpha t^2}}{\sqrt{1+\dfrac{\dfrac{\rho_1\rho_2(\rho_1+\alpha\rho_2)}{\alpha\rho_1+\rho_2}-\left(\dfrac{\rho_1^2-\rho_2^2}{2t(\alpha\rho_1+\rho_2)}\right)^2}{\left(\dfrac{\rho_1^2-\rho_2^2}{2t(\alpha\rho_1+\rho_2)}+\alpha\rho_1t\right)^2}}}=$$

$$\frac{\sqrt{1+\alpha t^2}}{\sqrt{\dfrac{\dfrac{\rho_1^2\rho_2+\alpha\rho_1\rho_2^2+\alpha\rho_1^3-\alpha\rho_1\rho_2^2}{(\alpha\rho_1+\rho_2)}+\alpha^2\rho_1^2t^2}{\left(\dfrac{\rho_1^2-\rho_2^2}{2t(\alpha\rho_1+\rho_2)}+\alpha\rho_1t\right)^2}}}=\frac{\sqrt{1+\alpha t^2}}{\sqrt{\dfrac{\dfrac{\rho_1^2(\rho_2+\alpha\rho_1)}{(\alpha\rho_1+\rho_2)}+\alpha^2\rho_1^2t^2}{\left(\dfrac{\rho_1^2-\rho_2^2}{2t(\alpha\rho_1+\rho_2)}+\alpha\rho_1t\right)^2}}}=$$

$$\frac{\sqrt{1+\alpha t^2}}{\sqrt{\dfrac{\rho_1^2(1+\alpha^2t^2)}{\left(\dfrac{\rho_1^2-\rho_2^2}{2t(\alpha\rho_1+\rho_2)}+\alpha\rho_1t\right)^2}}}=\frac{\left|\dfrac{\rho_1^2-\rho_2^2}{2t(\alpha\rho_1+\rho_2)}+\alpha\rho_1t\right|}{\rho_1}$$

Με τον ίδιο τρόπο καταλήγουμε στην ισότητα

$$\frac{\alpha\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{1+\lambda_{\Delta H}{}^2}} = \frac{\alpha\left|\dfrac{\rho_1^2-\rho_2^2}{2t(\alpha\rho_1+\rho_2)} - \rho_2 t\right|}{\rho_2}$$

Έτσι, έχουμε

$$2(1+\lambda_{\Gamma H}\lambda_{\Delta H})\,x\,y =$$

$$2\frac{\rho_1{}^2+\rho_2^2-2\alpha\rho_1\rho_2 t^2}{2\left(\dfrac{\rho_1^2-\rho_2^2}{2t(\alpha\rho_1+\rho_2)}+\alpha\rho_1 t\right)\left(\dfrac{\rho_1^2-\rho_2^2}{2t(\alpha\rho_1+\rho_2)}-\rho_2 t\right)}\;\frac{\alpha\left|\dfrac{\rho_1^2-\rho_2^2}{2t(\alpha\rho_1+\rho_2)}+\alpha\rho_1 t\right|\left|\dfrac{\rho_1^2-\rho_2^2}{2t(\alpha\rho_1+\rho_2)}-\rho_2 t\right|}{\rho_1\rho_2}$$

Παρατηρούμε τώρα ότι $\dfrac{\rho_1^2-\rho_2^2}{2t(\alpha\rho_1+\rho_2)}-\rho_2 t < 0$ (αφού $0 < \rho_1 < \rho_2$, $\alpha>0$ και $t > 0$).

Όμως η ποσότητα $\dfrac{\rho_1^2-\rho_2^2}{2t(\alpha\rho_1+\rho_2)}+\alpha\rho_1 t$, όπως είδαμε παραπάνω ($R_2$ + ar_1t) , είναι

ομόσημη του $\lambda_{\Gamma H}$, επομένως στην περίπτωση αυτή είναι αρνητική.

Άρα η παραπάνω παράσταση γίνεται:

$$2\alpha\frac{\rho_1{}^2+\rho_2^2-2\alpha\rho_1\rho_2 t^2}{\rho_1\rho_2}$$

Έτσι, $(1+\lambda_{\Gamma H}{}^2)\,x^2 + (1+\lambda_{\Delta H}{}^2)\,y^2 + 2(1+\lambda_{\Gamma H}\lambda_{\Delta H})\,x\,y =$

$$1+\alpha^2t^2+\alpha^2+\alpha^2t^2+2\alpha\frac{\rho_1{}^2+\rho_2^2-2\alpha\rho_1\rho_2 t^2}{\rho_1\rho_2} =$$

$$1+\alpha^2+2\alpha^2t^2-2\alpha^2t^2+\alpha\frac{\rho_1{}^2+\rho_2^2}{\rho_1\rho_2} = \boxed{1+\alpha^2+\alpha\frac{\rho_1{}^2+\rho_2^2}{\rho_1\rho_2}}$$

δηλαδή δεν εξαρτάται από την εφθ_2 (t).

Για την περίπτωση ($\lambda_{\Gamma H} > 0$) που

$$v = \frac{\|u_1\|\,y_H}{\rho_1}\left(\frac{\lambda_{\Gamma H}\sqrt{1+\alpha^2\varepsilon\varphi^2\theta_2}}{\sqrt{1+\lambda_{\Gamma H}^2}} - \frac{\alpha\lambda_{\Delta H}\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2\theta_2}}{\sqrt{1+\lambda_{\Delta H}^2}},\quad -\frac{\sqrt{1+\alpha^2\varepsilon\varphi^2\theta_2}}{\sqrt{1+\lambda_{\Gamma H}^2}} + \frac{\alpha\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2\theta_2}}{\sqrt{1+\lambda_{\Delta H}^2}}\right)$$

έχω:

$$\frac{\|v\|^2}{y_H{}^2} = \frac{u_1{}^2}{\rho_1{}^2}\Big[\ \Big(\ \frac{\lambda_{\Gamma H}\sqrt{1+\alpha^2\varepsilon\varphi^2\theta_2}}{\sqrt{1+\lambda_{\Gamma H}^2}} - \frac{\alpha\lambda_{\Delta H}\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2\theta_2}}{\sqrt{1+\lambda_{\Delta H}^2}}\Big)^2 +$$

$$+\Big(\frac{\sqrt{1+\alpha^2\varepsilon\varphi^2\theta_2}}{\sqrt{1+\lambda_{\Gamma H}^2}} - \frac{\alpha\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2\theta_2}}{\sqrt{1+\lambda_{\Delta H}^2}}\Big)^2$$

και κάνοντας τις ίδιες πράξεις καταλήγουμε, ανάλογα, στην παράσταση

$$(1 + \lambda_{\Gamma H}{}^2)\, x^2 + (1 + \lambda_{\Delta H}{}^2)\, y^2 - 2(1 + \lambda_{\Gamma H}\, \lambda_{\Delta H})\, x\, y$$

Όμως τώρα

$$- 2(1 + \lambda_{\Gamma H}\, \lambda_{\Delta H})\, x\, y =$$

$$-2\frac{\rho_1{}^2+\rho_2^2-2\alpha\rho_1\rho_2 t^2}{2\Big(\frac{\rho_1^2-\rho_2^2}{2t(\alpha\rho_1+\rho_2)}+\alpha\rho_1 t\Big)\Big(\frac{\rho_1^2-\rho_2^2}{2t(\alpha\rho_1+\rho_2)}-\rho_2 t\Big)}\ \frac{\alpha\left|\frac{\rho_1^2-\rho_2^2}{2t(\alpha\rho_1+\rho_2)}+\alpha\rho_1 t\right|\left|\frac{\rho_1^2-\rho_2^2}{2t(\alpha\rho_1+\rho_2)}-\rho_2 t\right|}{\rho_1\rho_2}$$

με $\frac{\rho_1^2-\rho_2^2}{2t(\alpha\rho_1+\rho_2)}+\alpha\rho_1 t > 0.$

Με την απλοποίηση επομένως, θα έχουμε πάλι

$$- 2(1 + \lambda_{\Gamma H}\, \lambda_{\Delta H})\, x\, y = 2\alpha\frac{\rho_1{}^2+\rho_2^2-2\alpha\rho_1\rho_2 t^2}{\rho_1\rho_2}$$

και καταλήγουμε στο ίδιο με πριν αποτέλεσμα.

ΛΗΜΜΑ 4.1 Είναι $\|v'\| = \|u_1\| + \|u_2\|$

Απόδειξη

Επειδή $\frac{\|v\|}{y_H} = \frac{\|v'\|}{\rho_3}$

Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\frac{\|v\|}{y_H} = \frac{\|u_1\|+\|u_2\|}{\rho_3} \quad \text{ή ότι} \quad \frac{\|v\|}{y_H} = \frac{\|u_1\|+\|u_2\|}{\sqrt{\frac{\rho_1\rho_2(\rho_1+\alpha\rho_2)}{\rho_2+\alpha\rho_1}}}$$

Αλλά $\frac{v^2}{y_H{}^2} = \frac{u_1{}^2}{\rho_1{}^2}\ (1 + \alpha^2 + \alpha\frac{\rho_1{}^2+\rho_2^2}{\rho_1\rho_2})$, οπότε θα αποδείξουμε ότι

$$\frac{u_1^2}{\rho_1^2}\left(1+\alpha^2+\alpha\frac{\rho_1^2+\rho_2^2}{\rho_1\rho_2}\right)=\frac{(\|u_1\|+\|u_2\|)^2}{\frac{\rho_1\rho_2(\rho_1+\alpha\rho_2)}{\rho_2+\alpha\rho_1}}$$

Είναι $\|u_2\|=\alpha\frac{\rho_2}{\rho_1}\|u_1\|$, οπότε έχω

$$\frac{u_1^2}{\rho_1^2}\left(1+\alpha^2+\alpha\frac{\rho_1^2+\rho_2^2}{\rho_1\rho_2}\right)=\frac{(\|u_1\|+\alpha\frac{\rho_2}{\rho_1}\|u_1\|)^2}{\frac{\rho_1\rho_2(\rho_1+\alpha\rho_2)}{\rho_2+\alpha\rho_1}}\Leftrightarrow$$

$$\frac{u_1^2}{\rho_1^2}\left(1+\alpha^2+\alpha\frac{\rho_1^2+\rho_2^2}{\rho_1\rho_2}\right)=\frac{u_1^2(1+\alpha\frac{\rho_2}{\rho_1})^2}{\frac{\rho_1\rho_2(\rho_1+\alpha\rho_2)}{\rho_2+\alpha\rho_1}}\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\rho_1^2}\left(1+\alpha^2+\alpha\frac{\rho_1^2+\rho_2^2}{\rho_1\rho_2}\right)=\frac{(\frac{\rho_1+\alpha\rho_2}{\rho_1})^2}{\frac{\rho_1\rho_2(\rho_1+\alpha\rho_2)}{\rho_2+\alpha\rho_1}}\Leftrightarrow$$

$$1+\alpha^2+\alpha\frac{\rho_1^2+\rho_2^2}{\rho_1\rho_2}=\frac{\rho_1+\alpha\rho_2}{\frac{\rho_1\rho_2}{\rho_2+\alpha\rho_1}}\Leftrightarrow$$

$$\rho_1\rho_2+\rho_1\rho_2\,\alpha^2+\alpha(\rho_1^2+\rho_2^2)=(\rho_1+\alpha\rho_2)(\rho_2+\alpha\rho_1)$$

που ισχύει.

Θα αποδείξουμε τώρα το

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.2 Για το (υπερβολικό) μέτρο της συνισταμένης v' των διανυσμάτων u_1, u_2 του υπερβολικού επιπέδου των οποίων οι γεωδαισιακές είναι ξένες και απέχουν απόσταση d, ισχύει:

$$\boxed{\|v'\|_h^2=\|u_1\|_h^2+\|u_2\|_h^2+2\|u_1\|_h\|u_2\|_h\cosh d}$$

Απόδειξη

Θα χρησιμοποιήσουμε τις μεταβλητές του αρχικού σχήματος.

Είδαμε παραπάνω ότι αν v' η συνισταμένη των διανυσμάτων u_1, u_2, τότε

$$\|v'\|=\|u_1\|+\|u_2\|$$

Άρα, $\rho_3\|v'\|_h=\rho_1\|u_1\|_h+\rho_2\|u_2\|_h$

ή $$\|v'\|_h = \frac{\rho_1}{\rho_3}\|u_1\|_h + \frac{\rho_2}{\rho_3}\|u_2\|_h$$

Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι

$$\|u_1\|_h^2 + \|u_2\|_h^2 + 2\|u_1\|_h\|u_2\|_h \cosh(d(A,B)) = \left(\frac{\rho_1}{\rho_3}\|u_1\|_h + \frac{\rho_2}{\rho_3}\|u_2\|_h\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\|u_1\|_h^2 + \|u_2\|_h^2 + 2\|u_1\|_h\|u_2\|_h \frac{e^{\ln\frac{\rho_1}{\rho_2}} + e^{\ln\frac{\rho_2}{\rho_1}}}{2} = \left(\frac{\rho_1}{\rho_3}\|u_1\|_h + \frac{\rho_2}{\rho_3}\|u_2\|_h\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\|u_1\|_h^2 + \|u_2\|_h^2 + \|u_1\|_h\|u_2\|_h \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} + \frac{\rho_2}{\rho_1}\right) = \left(\frac{\rho_1}{\rho_3}\|u_1\|_h + \frac{\rho_2}{\rho_3}\|u_2\|_h\right)^2 \Leftrightarrow$$

Για συντομία, θέτω $\|u_1\|_h = x$ και $\|u_2\|_h = y$ και έχω:

$$x^2 + \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} + \frac{\rho_1}{\rho_2}\right)xy + y^2 = \frac{\rho_1^2}{\rho_3^2}x^2 + \frac{\rho_2^2}{\rho_3^2}y^2 + 2\frac{\rho_1\rho_2}{\rho_3^2}xy \Leftrightarrow$$

$$1 + \frac{\rho_2^2 + \rho_1^2}{\rho_1\rho_2}\frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \frac{\rho_1^2}{\frac{\rho_1\rho_2(\rho_1 + \alpha\rho_2)}{\rho_2 + \alpha\rho_1}} + \frac{\rho_2^2}{\frac{\rho_1\rho_2(\rho_1 + \alpha\rho_2)}{\rho_2 + \alpha\rho_1}}\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\frac{\rho_1\rho_2}{\frac{\rho_1\rho_2(\rho_1 + \alpha\rho_2)}{\rho_2 + \alpha\rho_1}}\frac{y}{x} \Leftrightarrow$$

$$1 + \frac{\rho_2^2 + \rho_1^2}{\rho_1\rho_2}\alpha + \alpha^2 = \frac{\rho_1(\rho_2 + \alpha\rho_1)}{\rho_2(\rho_1 + \alpha\rho_2)} + \frac{\rho_2(\rho_2 + \alpha\rho_1)}{\rho_1(\rho_1 + \alpha\rho_2)}\alpha^2 + 2\frac{\rho_2 + \alpha\rho_1}{\rho_1 + \alpha\rho_2}\alpha \Leftrightarrow$$

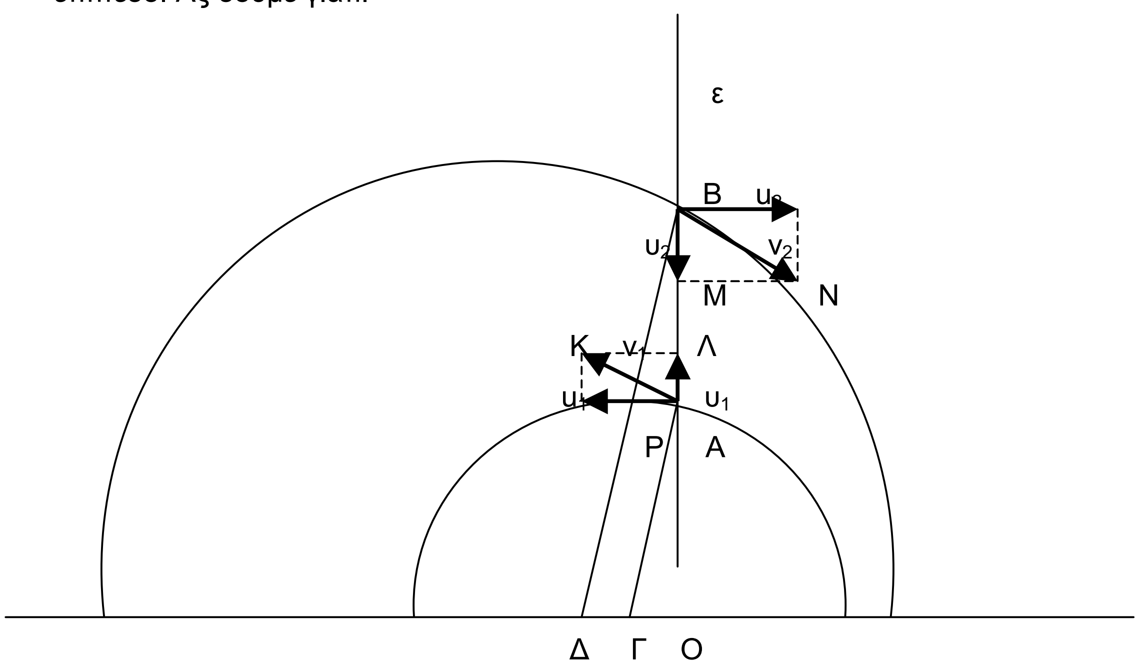
$$\rho_1\rho_2(\rho_1 + \alpha\rho_2) + (\rho_2^2 + \rho_1^2)(\rho_1 + \alpha\rho_2)\alpha + \alpha^2\rho_1\rho_2(\rho_1 + \alpha\rho_2) =$$
$$\rho_1^2(\rho_2 + \alpha\rho_1) + \rho_2^2(\alpha\rho_1 + \rho_2)\alpha^2 + 2\rho_1\rho_2(\rho_2 + \alpha\rho_1)\alpha \Leftrightarrow$$

$$\rho_1^2\rho_2 + \alpha\rho_1\rho_2^2 + \alpha\rho_2^2\rho_1 + \alpha^2\rho_2^3 + \alpha\rho_1^3 + \alpha^2\rho_2\rho_1^2 + \alpha^2\rho_1^2\rho_2 + \alpha^3\rho_1\rho_2^2 =$$
$$\Leftrightarrow \rho_1^2\rho_2 + \alpha\rho_1^3 + \alpha^3\rho_2^2\rho_1 + \alpha^2\rho_2^3 + 2\alpha\rho_1\rho_2^2 + 2\alpha^2\rho_1^2\rho_2$$

που ισχύει. ☻

Ζεύγος Διανυσμάτων

Τι συμβαίνει όμως όταν έχουμε την περίπτωση του ζεύγους; Τα διανύσματα ανάγονται πάλι σε ένα άλλο ζεύγος, όπως στο E^2, ή αυτή τη φορά συντίθενται σε ένα διάνυσμα; Η απάντηση στην ερώτηση αυτή είναι η πρώτη, δηλαδή συμβαίνει ό,τι και στο Εκλείδειο επίπεδο. Ας δούμε γιατί.



Έστω πάλι τα διανύσματα u_1, u_2, με αντίθετες κατευθύνσεις και ίσα υπερβολικά μέτρα, όπως στο σχήμα.

Δηλαδή $\qquad ||u_1||_h = ||u_2||_h \quad$ ή $\quad \dfrac{||u_1||}{OA} = \dfrac{||u_2||}{OB} \quad$ ή $\quad \dfrac{||u_1||}{||u_2||} = \dfrac{OA}{OB}$

Όμως και τα διανύσματα υ_1, υ_2 είναι ίσα κατά μέτρο, οπότε

$$||\upsilon_1||_h = ||\upsilon_2||_h \quad \text{ή} \quad \frac{||\upsilon_1||}{OA} = \frac{||\upsilon_2||}{OB} \quad \text{ή} \quad \frac{||\upsilon_1||}{||\upsilon_2||} = \frac{OA}{OB}$$

Άρα $\qquad \dfrac{||u_1||}{||u_2||} = \dfrac{||\upsilon_1||}{||\upsilon_2||}$

Επομένως τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΚΛ και ΒΜΝ είναι όμοια, συνεπώς οι γωνίες $K\hat{A}\Lambda$ και $M\hat{B}N$ είναι ίσες. Αυτό σημαίνει ότι οι συνισταμένες v_1 και v_2 είναι μεταξύ τους παράλληλες (στη γλώσσα της Ευκλείδειας γεωμετρίας). Άρα οι ακτίνες ΑΓ, ΒΔ των φορέων τους (ημικυκλίων) θα είναι μεταξύ τους παράλληλες. Θα αποδείξουμε ότι οι φορείς αυτοί δεν τέμνονται, οπότε τα διανύσματα v_1, v_2 θα αποτελούν ένα νέο ζεύγος (είναι εύκολο να παρατηρήσει κανείς ότι τα υπερβολικά μέτρα των διανυσμάτων αυτών θα είναι ίσα, αφού, από την ομοιότητα των παραπάνω τριγώνων θα είναι

$$\frac{||v_1||}{||v_2||} = \frac{||u_1||}{||u_2||} = \frac{OA}{OB} \quad ή \quad \frac{||v_1||}{OA} = \frac{||v_2||}{OB} \quad ή \quad ||v_1||_h = ||v_2||_h\ )$$

Παρατηρούμε ότι το τετράπλευρο ΑΓΔΡ είναι παραλληλόγραμμο, αφού ΑΓ//ΔΡ και ΑΡ//ΓΔ. Άρα ΑΓ=ΔΡ και ΑΡ=ΓΔ.

Από το ορθογώνιο τώρα τρίγωνο ΒΑΡ είναι

$$ΑΡ < ΒΡ \Leftrightarrow ΓΔ < ΒΔ – ΔΡ \Leftrightarrow ΓΔ < ΒΔ – ΑΓ$$

Δηλαδή η διάκεντρος των δύο κύκλων είναι μικρότερη από τη διαφορά των ακτίνων τους, οπότε ο ένας είναι εσωτερικός του άλλου. Συνεπώς δεν τέμνονται, οπότε δεν μπορούμε να συνθέσουμε τα αρχικά διανύσματα σε ένα. ☻

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Βασική βιβλιογραφική αναφορά σε όλη την Ευκλείδεια ολίσθηση αποτέλεσε το:

Καζαντζίδης Γεώργιος, *Διανυσματικός Λογισμός, Μέρος Α': Άλγεβρα*, Θεσσαλονίκη, 1966

Άλλες σημαντικές αναφορές είναι:

(1) Βαρουχάκης Ν. – Αδαμόπουλος Λ. κ.ά., *Μαθηματικά Ι Γ' Λυκείου – Αναλυτική Γεωμετρία*, Ο.Ε.Δ.Β., Αθήνα, 1982, σελ. 41, 48

(2) Ανδρεαδάκης Σ. – Κουσέρας Ν. κ.ά., *Μαθηματικά Γ' Λυκείου*, Ο.Ε.Δ.Β., Αθήνα, 1992, σελ. 132

(3) Αδαμόπουλος Λ. – Βισκαδουράκης Β. κ.ά., *Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής κατεύθυνσης Β΄ Λυκείου*, Ο.Ε.Δ.Β., Αθήνα, 1998, σελ 9 - 54

(4) Edelen, Dominic – Kydoniefs, Anastasios, *An introduction to Linear Algebra for Science and Engeneering*, Elsevier, 1985, σελ. 36

(5) Heath, Thomas, *Mathematics in Aristotle*, Clarendon Press, Oxford, 1949, σελ. 230

(6) T.L.G. (*Thesaurus of -ancient- Greek Language*)

(7) Chandrasekbar, *Newton's principia*, Clarendon Press, Oxford, 1997

(8) E.T. Bell, *Οι Μαθηματικοί*, τ. ΙΙ, Π.Ε.Κ., Ηράκλειο 1993, σελ. 102, 113

(9) http://occawlonline.pearsoned.com/bookbind/pubbooks/thomas_awl/chapter1/medialib/custom3/topics/vectors.htm

(10) Bleksley, A., *Textbook of applied Mathematics*, Central News Agency Ltd, South Africa, 1966, σελ. 167

(11) Lambe, G., *Applied Mathematics*, The English Universities Press Ltd, 1970, σελ. 40

(12) Γρατσιάτος Ι. *Διανυσματικός Λογισμός*, *τ. Α'*, Θεσσαλονίκη, 1968, σελ. 49

(12) Κανελλόπουλος Α., *Τεχνική Μηχανική – Αρχαί Στατικής*, Θεσσαλονίκη, 1974 σελ. 56, 67

(14) Beardon, Alan, *The Geometry of Discrete Groups, Springer – Verlag, Cambridge, 1992*