Πανεπιστημιο Κρητης

Σχολη Θετικων και Τεχνολογικων Επιστημων

Διατμηματικο Προγραμμα Μεταπτυχιακων Σπουδων
« Μαθηματικα και Εφαρμογες τους »

Το Πρόβλημα του Sylvester--Γεωμετρικές Πιθανότητες

Γεώργιος Πλουμάκης

Επιβλέπουσα Καθηγήτρια
Σουζάννα Παπαδοπούλου

Ηράκλειο, Ιούλιος 2016

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά την επιβλέπουσα καθηγήτρια Σουζάννα Παπαδοπούλου της οποίας η συμβολή ήταν καθοριστική για την ολοκλήρωση της παρούσας εργασίας.
Ευχαριστώ την επιτροπή αξιολόγησης την οποία αποτέλεσαν οι:
Μιχαήλ Κολουντζάκης, Μιχαήλ Παπαδημητράκης και Σουζάννα Παπαδοπούλου.

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγή **1**

2 Η Περίπτωση των Τυχαίων Simplices **7**

3 Η Περίπτωση των Τυχαίων Πολυτόπων **17**

4 Η Περίπτωση για Μέγιστα Σώματα **21**

5 Μοναδικότητα Μέγιστων Επίπεδων Σωμάτων **29**

6 Γραμμικά Παραμετρικά Συστήματα **39**

7 Γενικεύσεις του Συναρτησοειδούς Sylvester **47**

8 Σύνδεση της Εικασίας του Simplex με άλλα Ασυμπτωτικά Προβλήματα της Κυρτής Ανάλυσης **71**

1 Εισαγωγή

Στην παρούσα εργασία θα μελετήσουμε το Πρόβλημα του Sylvester το οποίο διατυπώθηκε το 1864 [32] ως εξής:

Επιλέγονται 4 σημεία ανεξάρτητα και ομοιόμορφα από ένα κυρτό επίπεδο σώμα K εμβαδού 1. Να βρεθεί η πιθανότητα αυτά τα σημεία να σχηματίζουν κυρτό τετράπλευρο.

Στις παραπάνω διαστάσεις η γενίκευση του προβλήματος είναι:

Επιλέγονται $d+2$ σημεία ανεξάρτητα και ομοιόμορφα από ένα κυρτό σώμα K όγκου 1 του $\mathbb{R}^d$. Να βρεθεί η πιθανότητα κανένα σημείο από αυτά να μην ανήκει στην κυρτή θήκη των υπολοίπων.

Πάντα η διάσταση d θα είναι ≥ 2.

Κυρτό *σώμα* στον $\mathbb{R}^d$ είναι κάθε κυρτό και συμπαγές σύνολο με μη-κενό εσωτερικό και *r-simplex* κάθε κυρτός συνδυασμός $r+1$ αφφινικώς ανεξαρτήτων σημείων του $\mathbb{R}^d$. Αν $A_1, ..., A_n \subseteq \mathbb{R}^d$, συμβολίζουμε με $conv(A_1, ..., A_n)$ την *κυρτή θήκη* των $A_1, ..., A_n$, δηλαδή την τομή όλων των κυρτών συνόλων που περιέχουν τα $A_1, ..., A_n$ και με $aff(A_1, ..., A_n)$ την *αφφινική θήκη* των $A_1, ..., A_n$, δηλαδή την τομή όλων των αφφινικών υπόχωρων του $\mathbb{R}^d$ που περιέχουν τα $A_1, ..., A_n$. Επιπλέον, αν το $A \subseteq \mathbb{R}^d$ είναι Lebesgue-μετρήσιμο, συμβολίζουμε με $|A|_d$ τον $d-$διάστατο όγκο του A, δηλαδή το $d-$διάστατο μέτρο Lebesgue του A. Αν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης, θα συμβολίζουμε πιο απλά με $|A|$.
Πολύτοπο στον $\mathbb{R}^d$ θα λέμε οποιοδήποτε κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^d$ το οποίο είναι κυρτή θήκη πεπερασμένου συνόλου του $\mathbb{R}^d$ και *πολύγωνο* θα λέμε κάθε πολύτοπο του $\mathbb{R}^2$.
Ένα σημείο x του κυρτού συνόλου K λέγεται *ακραίο σημείο του* K αν για κάθε $y, z \in K$, $y \neq z$, ώστε $x = \lambda y + (1-\lambda)z$, για κάποιο $0 \leq \lambda \leq 1$ έπεται $\lambda = 0$ ή $\lambda = 1$. Με $exp(K)$ θα συμβολίζουμε το σύνολο των ακραίων σημείων του K. Αν το K είναι πολύτοπο, τα ακραία σημεία του K θα τα λέμε *κορυφές* του K.
Έστω A υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Αν η διάσταση του αφφινικού υποχώρου $affA$ είναι r, θα λέμε τότε ότι η διάσταση του A είναι r. Επίσης, θα συμβολίζουμε με $intA$, clA και ∂A το εσωτερικό, την κλειστότητα και το σύνορο του A ως υποσύνολο του τοπολογικού χώρου $affA$.

Αν $Y_1, ..., Y_{d+2}$ τα σημεία που επιλέγονται ανεξάρτητα και ομοιόμορφα από το K τότε η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\mathbb{P}(K) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{d+2}\{Y_i \in conv\{Y_1, ...Y_{i-1}, Y_{i+1}, ..., Y_{d+2}\}\}\right) =$$

$$1 - (d+2)\mathbb{P}\left(Y_{d+2} \in conv\{Y_1, ...Y_{d+1}\}\right)$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει διότι η τομή οποιωνδήποτε δύο από τα σύνολα έχει πιθανότητα 0. Πράγματι, αν $A_i = \{Y_i \in conv\{Y_1, ..., Y_{i-1}, Y_{i+1}, ..., Y_{d+2}\}\}$, $i = 1, ..., d+2$
και $B = \{|conv\{Y_1, ..., Y_{d+2}\}| > 0\}$ τότε για $i \neq j$,

$$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap B) + \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap B^c).$$

Έχουμε

$$\mathbb{P}(B^c) \leq \mathbb{P}(|conv\{Y_1, ..., Y_{d+1}\}| = 0) = \mathbb{P}(\det[(Y_1, 1), ..., (Y_{d+1}, 1)] = 0) =$$

$\mathbb{P}(\tau\alpha\ (Y_1,1),...,(Y_{d+1},1)$ είναι γραμμικά εξαρτημένα στον $\mathbb{R}^{d+1}) =$

$\mathbb{P}(\tau\alpha\ Y_1,...,Y_{d+1}$ είναι αφφινικά εξαρτημένα στον $\mathbb{R}^d) \leq$

$\sum_{i=1}^{d+1} \mathbb{P}(Y_i \in aff\{Y_1,...,Y_{i-1},Y_{i+1},...,Y_{d+1}\}) =$

$= \sum_{i=1}^{d+1} \int_K \cdots \int_K \int_K \mathbb{1}(y_i \in aff\{y_1,...,y_{i-1},y_{i+1},...,y_{d+1}\}) dy_i dy_d ... dy_{i+1} dy_{i-1} ... dy_1 \leq$

$\sum_{i=1}^{d+1} \int_K \cdots \int_K |aff\{y_1,...,y_{i-1},y_{i+1},...,y_{d+1}\}| dy_d ... dy_{i+1} dy_{i-1} ... dy_1 = 0$

αφού ο όγκος της αφφινικής θήκης οποιασδήποτε d-άδας σημείων του $\mathbb{R}^d$ είναι πάντα 0. Χρησιμοποιήσαμε τον τύπο (τα διανύσματα τα βλέπουμε ως στήλες) (βλ. [34], σελ. 278)

$$|conv\{y_1,...,y_{d+1}\}| = \frac{1}{d!} |\det[(y_1,1),...,(y_{d+1},1)]|$$

Επίσης, αν $|conv\{Y_1,...,Y_{d+2}\}| > 0$, $Y_i \in conv\{Y_1,...,Y_{i-1},Y_{i+1},...,Y_{d+2}\}$ και $Y_j \in conv\{Y_1,...,Y_{j-1},Y_{j+1},...,Y_{d+2}\}$ τότε το πολύτοπο $conv\{Y_1,...,Y_{d+2}\}$ έχει ακριβώς $d+1$ κορυφές, τις $Y_1,...,Y_{i-1},Y_{i+1},...,Y_{d+2}$ και τις $Y_1,...,Y_{j-1},Y_{j+1},...,Y_{d+2}$. Τότε $Y_i = Y_j$. Άρα $A_i \cap A_j \cap B \subseteq \{Y_i = Y_j\}$. Άρα

$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) \leq \mathbb{P}(Y_i = Y_j) = \int_K \int_K \mathbb{1}(y_i = y_j) dy_i dy_j = 0$, για $i \neq j$.

Επιπλέον

$\mathbb{P}\left(Y_{d+2} \in conv\{Y_1,...Y_{d+1}\}\right) =$

$\int_K \cdots \int_K \int_K \mathbb{1}(y_{d+2} \in conv\{y_1,...,y_{d+1}\}) dy_{d+2} dy_1 \ldots dy_{d+1} =$

$\int_K \cdots \int_K |conv\{y_1,...,y_{d+1}\}| dy_1 ... dy_{d+1}$

Επομένως $\mathbb{P}(K) = 1 - (d+2)m(K;d+1)$, όπου

$$m(K;d+1) = \int_K \cdots \int_K |conv\{y_1,...,y_{d+1}\}| dy_1 ... dy_{d+1}$$

Γενικότερα, ορίζουμε τα συναρτησοειδή τύπου Sylvester

$$m_p(K;n,d) = \int_K \cdots \int_K |conv\{y_1,...,y_n\}|^p dy_1 \ldots dy_n$$

με $p \geq 1$, $n \geq d+1$ και K κυρτό σώμα όγκου 1. Αν δεν απαιτούμε το K να έχει όγκο 1 τότε θα χρησιμοποιούμε την μορφή

$$m_p(K;n,d) = \frac{1}{|K|^{n+p}} \int_K \cdots \int_K |conv\{y_1,...,y_n\}|^p dy_1 \ldots dy_n$$

Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι το $m_p(K;n,d)$ είναι αναλλοίωτο ως προς αντιστρέψιμους αφφινικούς μετασχηματισμούς στην κλάση των κυρτών σωμάτων.

Το συναρτησοειδές $m_p(K;n,d)$, εν γένει, δεν υπολογίζεται. Άρα γεννώνται ερωτήματα του τύπου

Για ποιά κυρτά σώματα όγκου 1 η $m_p(K;n,d)$ γίνεται μέγιστη και για ποιά ελάχιστη;

Πριν αποδείξουμε την ύπαρξη minimizer και maximizer του $m_p(K;n,d)$, ορίζουμε την *μετρική Hausdorff* μεταξύ δύο συμπαγών συνόλων ως

$$d(A,B) = \inf\{\lambda > 0 : A \subseteq B + \lambda B_2^d, B \subseteq A + \lambda B_2^d\}$$

όπου $B_2^d = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| \leq 1\}$ η μοναδιαια μπάλλα στον $\mathbb{R}^d$ και $|x| = ||x||_2 = \left(\sum_{i=1}^d (x^i)^2\right)^{1/2}$.

Θα λέμε ότι η ακολουθία των συμπαγών συνόλων (K_n) *συγκλίνει* στο συμπαγές σύνολο K αν $d(K_n, K) \to 0$.

Η Αρχή Επιλογής του Blaschke [34] δηλώνει ότι μία ομοιόμορφα φραγμένη οικογένεια κυρτών συμπαγών συνόλων του $\mathbb{R}^d$ είναι ακολουθιακά συμπαγής:

Αρχή Επιλογής του Blaschke
Έστω (K_n) μία ομοιόμορφα φραγμένη ακολουθία από κυρτά, συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$, δηλαδή όλα τα K_n περιέχονται σε μία μπάλλα. Τότε, υπάρχει υπακολουθία (K_{n_k}) και κυρτό συμπαγές K ώστε $K_{n_k} \to K$.

Πρόταση 1.1. *Η ακολουθία K_n συγκλίνει στο K αν και μόνο αν οι παρακάτω συνθήκες ικανοποιούνται:*

i) Η ακολουθία (K_n) είναι ομοιόμορφα φραγμένη.

ii) Για κάθε $x \in K$ υπάρχουν σημεία $x_n \in K_n$ τέτοια ώστε $x_n \to x$.

iii) Για κάθε υπακολουθία (K_{n_k}) και για κάθε ακολουθία σημείων $x_k \in K_{n_k}$ που συγκλίνει στο x έχουμε $x \in K$.

Απόδειξη. Έστω ότι $K_n \to K$. Τότε το i) είναι άμεσο.
Θέτουμε $d_n = d(K_n, K)$. Τότε $K_n \subseteq K + d_n B_2^d$ και $K \subseteq K_n + d_n B_2^d$. Αν $x \in K$, τότε για κάθε n υπάρχουν $x_n \in K_n$, $y_n \in B_2^d$ ώστε $x = x_n + d_n y_n$. Τότε $x_n \to x$, και έπεται η ii).

Για την iii), έστω $x_{n_k} \in K_{n_k}$ με $x_{n_k} \to x$. Υπάρχουν $y_k \in K$ και $z_k \in B_2^d$ ώστε $x_{n_k} = y_k + d_{n_k} z_k$. Άρα $y_k \to x$, και $x \in K$.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση: αφού η (K_n) είναι ομοιόμορφα φραγμένη, από την Αρχή Επιλογής του Blaschke, υπάρχει υπακολουθία (K_{n_k}) συγκλίνουσα σε κάποιο κυρτό συμπαγές L. Δείχνουμε ότι $K = L$.
Έστω $x \in K$. Υπάρχει ακολουθία $x_n \in K_n$ που συγκλίνει στο x. Αφού $K_{n_k} \to L$ και $x_{n_k} \to x$, παίρνουμε $x \in L$.
Έστω $x \in L$. Αφού $K_{n_k} \to L$, υπάρχει ακολουθία $x_{n_k} \in K_{n_k}$ ώστε $x_{n_k} \to x$. Από υπόθεση, $x \in K$.

Αν πάρουμε μία οποιαδήποτε υπακολουθία της (K_n), αυτή ικανοποιεί τις συνθήκες i)-iii), άρα έχει υπακολουθία που συγκλίνει στο K.

Αποδείξαμε λοιπόν ότι κάθε υπακολουθία της (K_n) έχει υπακολουθία συγκλίνουσα στο K. Έπεται ότι ολόκληρη η (K_n) συγκλίνει στο K.$\square$

Κανόνας διαγραφής
Για το άθροισμα Minkowski ισχύει ο «κανόνας της διαγραφής», δηλαδή αν τα κυρτά συμπαγή A, B, C σύνολα ικανοποιούν την σχέση $A + C \subseteq B + C$ τότε $A \subseteq B$. Πράγματι, έστω $x \in A$ και $z_0 \in C$. Υπάρχουν $y_1 \in B$ και $z_1 \in C$ ώστε $x + z_0 = y_1 + z_1$. Επίσης, υπάρχουν $y_2 \in B$ και $z_2 \in C$ ώστε $x + z_1 = y_2 + z_2$. Συνεχίζοντας έτσι, βρίσκουμε ακολουθίες $z_0, z_1, z_2, ... \in C$, $y_1, y_2, ... \in B$ ώστε $x + z_{n-1} = y_n + z_n$. Τότε $x = \frac{y_1+...+y_n}{n} + \frac{z_n - z_0}{n}$, και $B \ni \frac{y_1+...+y_n}{n} = x - \frac{z_n - z_0}{n} \to x$, άρα $x \in B$.

Παρακάτω αποδεικνύουμε την συνέχεια του συναρτησοειδούς Sylvester.

Θεώρημα 1.1. *Το συναρτησοειδές $m_p(\cdot; n, d)$ είναι συνεχές στην κλάση των κυρτών σωμάτων με την μετρική Hausdorff.*

Απόδειξη.
Βήμα 1: Ο d-διάστατος όγκος είναι συνεχής στην κλάση των κυρτών σωμάτων με την μετρική Hausdorff.
Πράγματι, θεωρούμε κυρτά σώματα K_n, K ώστε $K_n \to K$. Θέτουμε $d(K_n, K) = d_n$. Εφαρμόζοντας κατάλληλη μετατόπιση αν είναι απαραίτητο, μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχει $r > 0$ ώστε $rB_2^d \subseteq K$. Υπάρχει n_0 ώστε $d_n < r$ για κάθε $n \geq n_0$. Τότε

$K_n \subseteq K + d_n B_2^d \subseteq K + \frac{d_n}{r} K = (1 + d_n/r)K$ και

$(1 - d_n/r)K + \frac{d_n}{r} K = K \subseteq K_n + d_n B_2^d \subseteq K_n + \frac{d_n}{r} K$, για κάθε $n \geq n_0$.

Τότε $(1 - d_n/r)K \subseteq K_n \subseteq (1 + d_n/r)K$, άρα

$$(1 - d_n/r)^d |K| \leq |K_n| \leq (1 + d_n/r)^d |K|$$

Επομένως $|K_n| \to |K|$.

Βήμα 2: Γράφουμε

$$\int_K \dots \int_K |conv\{y_1, ..., y_n\}|^p dy_1 ... dy_n = \int_{\tilde{K}} f(y) dy$$

όπου $\tilde{K} = \underbrace{K \times ... \times K}_{n}$, $y = (y_1^1, ..., y_1^d, ..., y_n^1, ..., y_n^d)$ και $f(y) = |conv\{y_1, ..., y_n\}|^p$. Η συνάρτησση f είναι συνεχής διότι ο όγκος είναι συνεχής και εάν $y_{i,k} \to y_i$ καθώς $k \to \infty$, $i = 1, ..., n$ τότε

$d(conv\{y_{1,k}, ..., y_{n,k}\}, conv\{y_1, ..., y_n\}) \leq$

$d(\{y_{1,k}, ..., y_{n,k}\}, \{y_1, ..., y_n\}) \leq |y_{1,k} - y_1| + ... + |y_{n,k} - y_n| \to 0.$

Επίσης, εάν $K_m \to K$ τότε $\tilde{K}_m \to \tilde{K}$ αφού αν K_1, K_2, L_1, L_2 είναι κυρτά σώματα τέτοια ώστε $d(K_1, L_1), d(K_2, L_2) \leq \epsilon$, τότε $d(K_1 \times K_2, L_1 \times L_2) \leq \epsilon\sqrt{2}$.
Επομένως, αρκεί να δείξουμε ότι τα συναρτησοειδή του τύπου

$$\phi(K) = \int_K f(y) dy$$

είναι συνεχή, όπου $f : \mathbb{R}^m \to (0, +\infty)$ συνεχής συνάρτηση.

Βήμα 3: Αρκεί να δείξουμε ότι αν $d(K_n, K) \to 0$ τότε $\rho(K_n, K) \to 0$, όπου ρ η μετρική $\rho(K_1, K_2) = |K_1 \triangle K_2|$ διότι τα συναρτησοειδή ϕ που περιγράφουμε παραπάνω είναι συνεχή ως προς την μετρική ρ.

Βήμα 4: Αν $d(K_n, K) \to 0$ τότε $\rho(K_n, K) \to 0$.
Πράγματι, έστω $\epsilon > 0$. Τότε $K_n \subseteq K + \epsilon B_2^d$ για μεγάλα n. Άρα

$|K_n \backslash K| \leq |(K + \epsilon B_2^d) \backslash K| = |K + \epsilon B_2^d| - |K| \to 0$ καθώς $\epsilon \to 0$ αφού, όπως θα δούμε στην παράγραφο 7, από τον τύπο του Steiner, το όριο

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{|K + \epsilon B_2^d| - |K|}{\epsilon}$$

υπάρχει.
Αν δείξουμε ότι $K \cap K_n \to K$, τότε $|K \backslash K_n| = |K| - |K \cap K_n| \to 0$, από την συνέχεια του όγκου.

Θέτουμε $K_n^{'} = K \cap K_n$. Από την Αρχή Επιλογής του Blaschke, υπάρχει υπακολουθία $(K_{n_l}^{'})$ και κυρτό συμπαγές $L \subseteq \mathbb{R}^d$ ώστε $K_{n_l}^{'} \to L$. Προφανώς, $L \subseteq K$. Δείχνουμε ότι $L = K$. Αν όχι, υπάρχει εσωτερικό σημείο x του K ώστε $x \notin L$. Αφού $K_{n_l} \to K$, τελικά, το x θα είναι εσωτερικό σημείο των K_{n_l}. Πράγματι, $x + rB_2^d \subseteq K$ για κάποιο $r > 0$. Αφού $K_{n_l} \to K$, υπάρχει l_0 ώστε $K \subseteq K_{n_l} + \frac{r}{2} B_2^d$ για κάθε $l \geq l_0$. Τότε $x + rB_2^d \subseteq K_{n_l} + \frac{r}{2} B_2^d$, για κάθε $l \geq l_0$, άρα $x + \frac{r}{2} B_2^d \subseteq K_{n_l}$ για κάθε $l \geq l_0$, από τον κανόνα της διαγραφής. Άρα $x \in K_{n_l}^{'}$, για κάθε $l \geq l_0$. Από την Πρόταση 1.1, $x \in L$, αντίφαση.

Επομένως, κάθε υπακολουθία της $(K_n^{'})$ έχει υπακολουθία που συγκλίνει στο K. Άρα, $K_n^{'} \to K$.$\square$

Είμαστε σε θέση να αποδείξουμε την ύπαρξη minimizers.

Λήμμα 1.1. *Σταθεροποιούμε $n \geq d+1$ και $p \geq 1$. Υπάρχει κυρτό σώμα K_0 όγκου 1 τέτοιο ώστε για κάθε κυρτό σώμα K όγκου 1 ισχύει*

$$m_p(K_0; n, d) \leq m_p(K; n, d)$$

Απόδειξη. Από ένα θεώρημα του John ([22], σελ. 187-204), υπάρχει μία σταθερά $c_d > 0$ που εξαρτάται μόνο από την διάσταση ώστε για κάθε κυρτό σώμα όγκου 1 υπάρχει αφφινικός μετασχηματισμός $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ που διατηρεί τον όγκο με $TK \subseteq c_d B_2^d$. Οπότε, αρκεί να αποδείξουμε το Λήμμα για τα κυρτά σώματα $K \subseteq c_d B_2^d$ όγκου 1, διότι το $m_p(\cdot; n, d)$ διατηρείται από αφφινικούς μετασχηματισμούς που διατηρούν τον όγκο.
Θέτουμε $m_0 = \inf m_p(K; n, d)$, όπου το infimum λαμβάνεται πάνω από όλα τα κυρτά σώματα $K \subseteq c_d B_2^d$ όγκου 1. Έστω K_l ακολουθία τέτοιων σωμάτων με

$$m_p(K_l; n, d) \to m_0$$

Από την αρχή επιλογής του Blaschke, υπάρχει υπακολουθία K_{l_s} ώστε

$$K_{l_s} \to K_0$$

με την μετρική Hausdorff, όπου K_0 κυρτό σώμα. Η συνέχεια του όγκου στην μετρική Hausdorff εξασφαλίζει ότι το K_0 έχει όγκο 1 και η συνέχεια του $m_p(K; n, d)$ εξασφαλίζει ότι

$$m_0 = m_p(K_0; n, d)$$

□
Η απόδειξη για maximizers είναι παρόμοια.

Το K_0 θα αναφέρεται ως το *ελάχιστο σώμα* ως προς το $m_p(K; n, d)$

Αξίζει να σημειώσουμε ότι, παρά το γεγονός ότι στην απόδειξη φαίνεται το K_0 να εξαρτάται από τα n, p, στην πραγματικότητα μπορεί να επιλεγεί ώστε να μην υπάρχει εξάρτηση, όπως θα δουμε αργότερα. Πράγματι, θα δούμε ότι τα ελάχιστα σώματα είναι τα ελλειψοειδή και μόνο αυτά. Η χαρακτηριστική ιδιότητα των ελλειψοειδών που τα κάνουν τα μοναδικά ελάχιστα σώματα είναι ότι σε κάθε διεύθυνση, τα μέσα των ευθύγραμμων τμημάτων που προκύπτουν ως τομές ευθειών της δεδομένης διεύθυνσης με το ελλειψοειδές αποτελούν ένα επίπεδο σύνολο. Η απόδειξή μας βασίζεται στον Groemer. ([17] σελ. 525-533 και [18] σελ. 86-90)

Για την περίπτωση των μέγιστων σωμάτων, αποδεικνύουμε ότι τα τρίγωνα είναι τα μοναδικά μέγιστα σώματα, τουλάχιστον στην περίπτωση του επιπέδου. Συγκεκριμένα, οι Δάλλα-Larman ([9] σελ. 175-180) και Γιαννόπουλος ([14] σελ. 1-14) έδειξαν με διαφορετικό τρόπο ότι τα τρίγωνα είναι μέγιστα σώματα και ο Γιαννόπουλος απέδειξε και την μοναδικότητα στην περίπτωση $p = 1$. Η χαρακτηριστική ιδιότητα του τριγώνου που χρησιμοποιούμε είναι ότι αν μεταφέρουμε τις παράλληλες χορδές του ώστε το ένα άκρο να συμπέσει πάνω σε μία δεδομένη ευθεία με την προϋπόθεση ότι όλα αυτά τα ευθύγραμμα τμήματα βρίσκονται στον ίδιο ημίχωρο που ορίζει αυτή η ευθεία, τότε το νέο σχήμα εξακολουθεί να είναι τρίγωνο. Για τις παραπάνω διαστάσεις, έχουμε ένα ασθενέστερο αποτέλεσμα και παραμένει ανοιχτή η εικασία αν τα simplices είναι τα μοναδικά μέγιστα σώματα.

Έπειτα βλέπουμε μία πιο ευρεία γκάμα κινήσεων των χορδών ενός κυρτού σώματος, τις RS-κινήσεις, και πώς επηρεάζουν το συναρτησοειδές Sylvester. Οι Campi, Colesanti και Gronchi ([7] σελ. 1-16) έδειξαν ότι το συναρτησοειδές Sylvester μίας RS-κίνησης μεταβάλλεται σύμφωνα με μία κυρτή συνάρτηση ως προς τον χρόνο. Βάσει αυτού, βλέπουμε αποτελέσματα τα οποία ισχυροποιούν την εικασία του simplex.

Τις RS-κινήσεις χρησιμοποίησε επίσης ο Σαρόγλου ([29] σελ. 1-18) και γενίκευσε το αποτέλεσμα του Γιαννόπουλου, ότι τα τρίγωνα είναι τα μοναδικά μέγιστα σώματα του συναρτησοειδούς Sylvester στην γενική περίπτωση $p \geq 1$. Επιπρόσθετα, ο Σαρόγλου έδειξε για την γενικευμένη εκδοχή

$$S_p(K_0, ..., K_n; d) = \int_{y_0 \in K_0} \cdots \int_{y_n \in K_n} |conv\{y_0, ..., y_n\}|^p dy_0 ... dy_n$$

του συναρτησοειδούς Sylvester, $n \geq d$, $|K_i| = 1, i = 0, ..., n$, ότι αυτό ελαχιστοποιείται ακριβώς όταν τα $K_0, ..., K_n$ είναι ομόθετα ελλειψοειδή με το ίδιο κέντρο. Για τα συναρτησοειδή του τύπου

$$S_p(K_0, ..., K_n; d, j) = \int_{y_0 \in K_0} \cdots \int_{y_n \in K_n} W_j(conv\{y_0, ..., y_n\})^p dy_0 ... dy_n$$

$n \geq d$, $|K_i| = 1, i = 0, ..., n$ και $W_j, j = 1, ..., d-1$ τα quermassintegrals, έδειξε ότι το $S_p(K_0, ..., K_n; d, j)$ ελαχιστοποιείται ακριβώς όταν τα $K_0, ..., K_n$ είναι μπάλλες με το ίδιο κέντρο, $j = 1, ..., d-1$.

Τέλος, βλέπουμε πώς συνδέεται η εικασία του simplex με άλλα ασυμτωτικά προβλήματα, βασισμένοι στο ([16] σελ. 1-22). Κλειδί αυτής της μελέτης είναι η ισοτροπική σταθερά.

2 Η Περίπτωση των Τυχαίων Simplices

Πριν αποδείξουμε ότι οι minimizers του $m(K; d+1)$ είναι ακριβώς τα ελλειψοειδή, ορίζουμε την *Steiner συμμετρικοποίηση* ενός κυρτού σώματος.

Έστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^d$ και G ευθεία. Με $P_G(K)$ συμβολίζουμε την προβολή του K στον $(d-1)$-διάστατο υπόχωρο $H(G)$ κάθετο στην G. Αλλάζοντας, αν χρειάζεται, σύστημα συντεταγμένων, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $H(G) = \{(x^1, x^2, ..., x^d) : x^d = 0\}$. Τότε υπάρχουν συναρτήσεις $f, g : P_G(K) \to \mathbb{R}$ με την f κυρτή, την g κοίλη τέτοιες ώστε

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^d : x \in P_G(K), f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

Οι f, g δίνονται από τους τύπους

$$f(x) = \inf\{z \in \mathbb{R} : (x, z) \in K\}$$

$$g(x) = \sup\{z \in \mathbb{R} : (x, z) \in K\}$$

Ορίζουμε την *Steiner συμμετρικοποίηση του K ως προς G* ως

$$St_G(K) = \left\{(x, y) : x \in P_G(K), \frac{f(x) - g(x)}{2} \leq y \leq \frac{g(x) - f(x)}{2}\right\}$$

Η $St_G(K)$ παίρνει κάθε ευθύγραμμο τμήμα που είναι τομή του K με παράλληλη ευθεία ως προς την G και το μεταφέρει στην διεύθυνση της G ώστε το μέσον του να βρεθεί στο $H(G)$ και είναι φανερό ότι είναι επίσης κυρτό σώμα διότι η $(f(x) - g(x))/2$ και η $(g(x) - f(x))/2$ είναι κυρτή και κοίλη, αντίστοιχα.

Χαρακτηριστική ιδιότητα της Steiner συμμετρικοποίησης είναι ότι αν μία ακολουθία κυρτών σωμάτων συγκλίνει σε κάποιο κυρτό σώμα, τότε και οι Steiner συμμετρικοποιήσεις των στοιχείων της ακολουθίας (ως προς μία σταθερή κατεύθυνση) συγκλίνουν στην Steiner συμμετρικοποίηση του οριακού σώματος. Πράγματι, έστω $K_n \to K$ και G ευθεία. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το 0 είναι εσωτερικό σημείο του K. Υπάρχουν $r, s > 0$ και $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $rB_2^d \subseteq K \subseteq sB_2^d$ και $rB_2^d \subseteq K_n \subseteq sB_2^d$ για κάθε $n \geq n_0$. Τότε $rB_2^d \subseteq St_G(K) \subseteq sB_2^d$ και $rB_2^d \subseteq St_G(K_n) \subseteq sB_2^d$ για κάθε $n \geq n_0$.
Έστω $\epsilon > 0$. Αφού $K_n \to K$, μπορούμε να υποθέσουμε επιπλέον ότι $K_n \subseteq K + \frac{r\epsilon}{s}B_2^d$ και $K \subseteq K_n + \frac{r\epsilon}{s}B_2^d$ για κάθε $n \geq n_0$. Τότε $K_n \subseteq K + \frac{\epsilon}{s}K = (1 + \frac{\epsilon}{s})K$. Άρα $St_G(K_n) \subseteq St_G((1 + \frac{\epsilon}{s})K) = (1 + \frac{\epsilon}{s})St_G(K) \subseteq St_G(K) + \epsilon B_2^d$, για κάθε $n \geq n_0$.
Ομοίως, $St_G(K) \subseteq St_G(K_n) + \epsilon B_2^d$, για κάθε $n \geq n_0$. Άρα $d(St_G(K), St_G(K_n)) \leq \epsilon$, για κάθε $n \geq n_0$.
Χρησιμοποιήσαμε τις εξής ιδιότητες της Steiner συμμετρικοποίησης:

- $St_G(B_2^d) = B_2^d$.
- Αν $K_1 \subseteq K_2$ τότε $St_G(K_1) \subseteq St_G(K_2)$ για κάθε ευθεία G.
  Πράγματι, σε κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων, η G είναι ο x^d-άξονας. Γράφουμε

  $$K_i = \{(x, y) : x \in H_i, f_i(x) \leq y \leq g_i(x)\}$$

  όπου $H_i = P_G(K_i)$, οι f_i είναι κυρτές και οι g_i κοίλες συναρτήσεις, $i = 1, 2$. Αφού $K_1 \subseteq K_2$, έχουμε $H_1 \subseteq H_2$ και $f_1 \geq f_2$, $g_1 \leq g_2$ στο H_1. Τότε $(f_1 - g_1)/2 \geq (f_2 - g_2)/2$ και $(g_1 - f_1)/2 \leq (g_2 - f_2)/2$ στο H_1. Άρα $St_G(K_1) \subseteq St_G(K_2)$

- Για κάθε $a > 0$ και κάθε ευθεία G, $St_G(aK) = aSt_G(K)$.
  Πράγματι, γράφουμε

$$K = \{(x, y) : x \in H, f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

  Τότε $aK = \{(x, y) : x \in aH, af(x) \leq y \leq ag(x)\}$. Άρα

$$St_G(aK) = \{(x, y) : x \in aH, a\tfrac{f(x)-g(x)}{2} \leq y \leq a\tfrac{g(x)-f(x)}{2}\} =$$

$$a\{(x, y) : x \in H, \tfrac{f(x)-g(x)}{2} \leq y \leq \tfrac{g(x)-f(x)}{2}\} = aSt_G(K).$$

Θα χρησιμοποιήσουμε την Steiner συμμετρικοποίηση για να αποδείξουμε το ακόλουθο:

Θεώρημα 2.1. *Το $m_p(K; d+1) = m_p(K; d+1, d)$ γίνεται ελάχιστο στην κλάση των κυρτών σωμάτων όγκου 1 αν και μόνο αν το K είναι ελλειψοειδές.*

Η ιδέα της απόδειξης είναι ότι η Steiner συμμετρικοποίηση δεν μεγαλώνει το $m_p(\cdot; d+1)$ και υπάρχει διεύθυνση που το μικραίνει γνήσια για σώματα που δεν είναι ελλειψοειδή.

Με $P(G, K)$ συμβολίζουμε το σύνολο των μέσων όλων των ευθύγραμμων τμημάτων που είναι τομές του K με ευθείες παράλληλες της G.

Ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^d$ θα το λέμε *επίπεδο* αν περιέχεται σε κάποιο υπερεπίπεδο.

Λήμμα 2.1. *Έστω D πυκνό υποσύνολο του S^{d-1} και $\mathcal{G} = \{G : G$ ευθεία παράλληλη στο $v, v \in D\}$. Ένα κυρτό σώμα K είναι ελλειψοειδές αν και μόνο αν το σύνολο $P(G, K)$ είναι επίπεδο για κάθε $G \in \mathcal{G}$.*

Για την απόδειξη, θα χρησιμοποιήσουμε το παρακάτω αποτέλεσμα που μας λέει ότι κάθε κυρτό σώμα 'πλησιάζει' το σχήμα της μπάλλας μετά από κατάλληλες Steiner συμμετρικοποιήσεις (βλ. [34] σελ. 313)

Πρόταση 2.1. *Έστω D πυκνό υποσύνολο του S^{d-1} και $\mathcal{G} = \{G : G$ ευθεία παράλληλη στο $v, v \in D\}$. Ισχύουν τα παρακάτω:*

i) Έστω K κυρτό σώμα του $\mathbb{R}^d$. Υπάρχει ακολουθία ευθείών $G_n \in \mathcal{G}$ ώστε η ακολουθία $(St_{G_n} \circ ... \circ St_{G_1}(K))$ να συγκλίνει σε μπάλλα.

ii) Έστω $K_1, ..., K_m$ κυρτά σώματα του $\mathbb{R}^d$. Υπάρχει ακολουθία ευθείών $G_n \in \mathcal{G}$ ώστε η ακολουθία $(St_{G_n} \circ ... \circ St_{G_1}(K_i))$ να συγκλίνει σε μπάλλα, $i = 1, ..., m$.

Απόδειξη. i) Θεωρούμε την οικογένεια

$$\mathcal{S}(K) = \{A \subseteq \mathbb{R}^d : A = St_{G_1} \circ \cdots \circ St_{G_n}(K), n \in \mathbb{N}, G_1, ..., G_n \in \mathcal{G}\}$$

και τον θετικό αριθμό

$$r_1 = \inf\{r > 0 : \text{υπάρχει } A \in \mathcal{S}(K) \text{ τέτοιο ώστε } A \subseteq rB_2^d\}$$

Υπάρχει ακολουθία (K_n) στο $\mathcal{S}(K)$ τέτοια ώστε

$$K_n \subseteq (r_1 + \frac{1}{n})B_2^d$$

Από την Αρχή επιλογής του Blaschke, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η (K_n) συγκλίνει σε κάποιο κυρτό σώμα B. Θα αποδείξουμε ότι $B = r_1 B_2^d$. Η κατεύθυνση $B \subseteq r_1 B_2^d$ είναι άμεση. Υποθέτουμε ότι $B \subsetneq r_1 B_2^d$. Υπάρχει $x_0 \in \partial(r_1 B_2^d)$ και $s > 0$ ώστε $(x_0 + sB_2^d) \cap B = \varnothing$. Επιπλέον, υπάρχουν $x_1, ..., x_m \in \partial(r_1 B_2^d)$ ώστε $\partial(r_1 B_2^d) = C_0 \cup ... \cup C_m$, όπου $C_i = \partial(r_1 B_2^d) \cap (x_i + sB_2^d)$. Αφού το D είναι πυκνό, μπορούμε επιπλέον να επιλέξουμε τα x_i ώστε η ευθεία που ορίζεται από τα x_0, x_i να ανήκει στην $\mathcal{G}$, $i = 1, ..., m$.

Ισχυρισμός: Έστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^d$ και B μπάλλα με κέντρο το 0 και ακτίνα r τέτοια ώστε $K \subseteq B$. Υποθέτουμε ότι το K δεν τέμνει το κλειστό σύνολο $C \subseteq \partial B$. Τότε, για κάθε ευθεία G, το κυρτό σώμα $St_G(K)$ εξακολουθεί να μην τέμνει το C. Επιπλέον, το $St_G(K)$ δεν τέμνει την ανάκλαση του C ως προς τον υπόχωρο, κάθετο προς την G.
Πράγματι, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η ευθεία G είναι ο x^d-άξονας και γράφουμε

$$K = \{(x, y) : x \in H, f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

$$B = \{(x, y) : |x| \leq r, -\sqrt{r^2 - |x|^2} \leq y \leq \sqrt{r^2 - |x|^2}\}$$

Αρχικά, υποθέτουμε ότι $C = \{(x, \sqrt{r^2 - |x|^2}) : x \in A\}$, όπου $A \subseteq \{(x, 0) : |x| \leq r\}$ κλειστό σύνολο. Από την υπόθεσή μας, $g(x) < \sqrt{r^2 - |x|^2}$ στο A. Αφού $K \subseteq B$ παίρνουμε $f(x) \geq -\sqrt{r^2 - |x|^2}$. Επομένως, $\frac{g(x)-f(x)}{2} < \sqrt{r^2 - |x|^2}$ και $\frac{f(x)-g(x)}{2} > -\sqrt{r^2 - |x|^2}$ στο A. Επομένως, το $St_G(K)$ δεν τέμνει ούτε το C ούτε την ανάκλαση του C ως προς το $\{x^d = 0\}$.
Η περίπτωση όπου $C = \{(x, -\sqrt{r^2 - |x|^2}) : x \in A\}$ είναι παρόμοια.
Στην γενική περίπτωση, γράφουμε το $C = C_1 \cup C_2$, με $C_i = \{(x, (-1)^i \sqrt{r^2 - |x|^2}) : x \in A_i\}$, $i = 1, 2$.

Για κάθε $i = 1, ..., m$, θεωρούμε τον $(d-1)$-διάστατο υπόχωρο π_i, κάθετο στο $x_i - x_0$ και την ευθεία G_i που ορίζεται από τα σημεία x_i, x_0. Προφανώς, η ανάκλαση του C_i ως προς το π_i είναι το C_0. Αφού $B \cap C_0 = \varnothing$, από τον Ισχυρισμό έπεται ότι $St_{G_1}(B) \cap (C_0 \cup C_1) = \varnothing$. Ομοίως, $St_{G_2} \circ St_{G_1}(B) \cap (C_0 \cup C_1 \cup C_2) = \varnothing$. Συνεχίζοντας έτσι, προκύπτει ότι $B^* \cap \partial(r_1 B_2^d) = \varnothing$, όπου $B^* = St_{G_m} \circ ... \circ St_{G_1}(B)$. Επομένως, υπάρχει $0 < \epsilon < r_1$ ώστε $B^* + \epsilon B_2^d \subseteq r_1 B_2^d$ άρα $B^* \subseteq (r_1 - \epsilon)B_2^d$, από τον κανόνα διαγραφής. Θεωρούμε τα κυρτά σώματα $K_n^* = St_{G_m} \circ ... \circ St_{G_1}(K_n)$. Τότε $K_n^* \to B^*$. Αφού $B^* \subseteq (r_1 - \epsilon)B_2^d$, $K_n^* \subseteq (r_1 - \epsilon)B_2^d + \frac{\epsilon}{2}B_2^d = (r_1 - \frac{\epsilon}{2})B_2^d$ για κάποιο n. Όμως $K_n^* \in \mathcal{S}(K)$, και καταλήγουμε σε αντίφαση στον ορισμό του r_1.

Δείξαμε λοιπόν ότι για κάθε κυρτό σώμα K και κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχουν ευθείες $G_1, ...G_n \in \mathcal{G}$ ώστε $d(St_{G_n} \circ ... \circ St_{G_1}(K), r_1 B_2^d) \leq \epsilon$.

Έστω $\epsilon > 0$ ώστε $\epsilon < 1$ και $\epsilon < r_1$.
Υπάρχουν τότε ευθείες $G_1^{(1)}, ..., G_{n_1}^{(1)} \in \mathcal{G}$ ώστε
$d\left(St_{G_{n_1}^{(1)}} \circ ... \circ St_{G_1^{(1)}}(K), r_1 B_2^d\right) \leq \epsilon$. Θέτουμε $K^{'} = St_{G_{n_1}^{(1)}} \circ ... \circ St_{G_1^{(1)}}(K)$ και ορίζουμε

$$r_2 = \inf\{r > 0 : \text{υπάρχει } A \in \mathcal{S}(K^{'}) \text{ τέτοιο ώστε } A \subseteq rB_2^d\}$$

Προφανώς, $r_1 \leq r_2$. Υπάρχουν ευθείες $G_1^{(2)}, ..., G_{n_2}^{(2)} \in \mathcal{G}$ ώστε
$d\left(St_{G_{n_2}^{(2)}} \circ ... \circ St_{G_1^{(2)}}(K^{'}), r_2 B_2^d\right) \leq \epsilon^2$.

Συνεχίζοντας έτσι, βρίσκουμε ευθείες $G_1^{(1)}, ..., G_{n_1}^{(1)}, ..., G_1^{(2)}, ..., G_{n_2}^{(2)}, ... \in \mathcal{G}$ και αριθμούς $r_1 \leq r_2 \leq ...$ ώστε $d(L_k, r_k B_2^d) \leq \epsilon^k$, όπου $L_k = St_{G_{n_k}^{(k)}} \circ ... \circ St_{G_1^{(k)}} \circ ... \circ St_{G_{n_1}^{(1)}} \circ ... \circ St_{G_1^{(1)}}(K)$
Για κάθε k έχουμε $r_k > \epsilon^k$. Τότε $r_k B_2^d \subseteq L_k + \epsilon^k B_2^d$, δηλαδή $(r_k - \epsilon^k) B_2^d \subseteq L_k$ απ' όπου προκύπτει $r_k \leq \left(\frac{|K|}{\omega_d}\right)^{1/d} + 1$, όπου $\omega_d = |B_2^d|$. Έστω $r_0 = \lim r_k$. Έχουμε τότε

$d(L_k, r_0 B_2^d) \leq d(L_k, r_k B_2^d) + d(r_k B_2^d, r_0 B_2^d) \to 0$.
Υπάρχει λοιπόν ακολουθία $G_n \in \mathcal{G}$ ώστε η ακολουθία κυρτών σωμάτων $(St_{G_n} \circ ... \circ St_{G_1}(K))$ έχει υπακολουθία που συγκλίνει σε μπάλλα.

Γενικά, δείχνουμε ότι αν $d(K, rB_2^d) \leq \epsilon$ τότε $d(St_G(K), rB_2^d) \leq \epsilon$, όπου $0 < \epsilon \leq r$, και τότε θα έχουμε ότι ολόκληρη η ακολουθία $(St_{G_n} \circ ... \circ St_{G_1}(K))$ συγκλίνει σε μπάλλα. Αφού $d(K, rB_2^d) \leq \epsilon$, τότε $K \subseteq rB_2^d + \epsilon B_2^d$ και $rB_2^d \subseteq K + \epsilon B_2^d$. Τότε $St_G(K) \subseteq St_G(rB_2^d + \epsilon B_2^d) = rB_2^d + \epsilon B_2^d$. Επίσης $(r - \epsilon) B_2^d \subseteq K$ άρα $(r - \epsilon) B_2^d \subseteq St_G(K)$, και $rB_2^d \subseteq St_G(K) + \epsilon B_2^d$, δηλαδή $d(St_G(K), rB_2^d) \leq \epsilon$. Προφανώς, $r_0 = \left(\frac{|K|}{\omega_d}\right)^{1/d}$, όπου $\omega_d = |B_2^d|$.

ii) Έστω $r_i = \left(\frac{|K_i|}{\omega_d}\right)^{1/d}$, $i = 1, ..., m$. Από το i), υπάρχουν ευθείες $G_1^{'}, ..., G_{k_1}^{'} \in \mathcal{G}$ ώστε

$$d(St_{G_{k_1}^{'}} \circ ... \circ St_{G_1^{'}}(K_1), r_1 B_2^d) \leq 1/2$$

Επίσης, υπάρχουν ευθείες $G_{k_1+1}^{'}, ..., G_{k_2}^{'}$ ώστε

$$d(St_{G_{k_2}^{'}} \circ ... \circ St_{G_{k_1+1}^{'}} \circ St_{G_{k_1}^{'}} \circ ... \circ St_{G_1^{'}}(K_2), r_2 B_2^d) \leq 1/2$$

Τότε

$$d(St_{G_{k_2}^{'}} \circ ... \circ St_{G_{k_1+1}^{'}} \circ St_{G_{k_1}^{'}} \circ ... \circ St_{G_1^{'}}(K_1), r_1 B_2^d) \leq 1/2$$

όπως είδαμε πριν. Συνεχίζοντας έτσι, βρίσκουμε $G_1^{'}, ..., G_{k_m}^{'} \in \mathcal{G}$ ώστε

$$d(St_{G_{k_m}^{'}} \circ ... \circ St_{G_1^{'}}(K_i), r_i B_2^d) \leq 1/2, i = 1, ..., m$$

Κάνοντας την προηγούμενη διαδικασία με τα $St_{G_{k_m}^{'}} \circ ... \circ St_{G_1^{'}}(K_i)$, $i = 1, ..., m$ στην θέση των K_i, $i = 1, ..., m$, βρίσκουμε $G_1^{''}, ..., G_{l_m}^{''}$ ώστε

$$d(St_{G_{l_m}^{''}} \circ ... \circ St_{G_1^{''}} \circ St_{G_{k_m}^{'}} \circ ... \circ St_{G_1^{'}}(K_i), r_i B_2^d) \leq 1/3, i = 1, ..., m$$

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, έχουμε το ζητούμενο.□

Παρατήρηση: Οι ακτίνες $r_1, r_2, ...$ και r_0 στην απόδειξη του i) είναι στην πραγματικότητα ίσες. Πράγματι, έχουμε $d(K^{'}, r_1 B_2^d) \leq \epsilon$ και $\epsilon < r_1$. Τότε, από τον κανόνα διαγραφής και την μονοτονία του όγκου,

$$(r_1 - \epsilon)^d \omega_d \leq |K^{'}| \leq (r_1 + \epsilon)^d \omega_d$$

Από την συνέχεια του όγκου, $|K^{'}| = |r_0 B_2^d| = r_0^d \omega_d$. Προφανώς, τα r_0, r_1 είναι ανεξάρτητα του ϵ (το r_0 εξαρτάται μόνο από τον όγκο του K). Λαμβάνοντας το όριο καθώς $\epsilon \to 0$ στην παραπάνω

σχέση, παίρνουμε $r_0 = r_1$.

Παρακάτω αποδεικνύουμε την ύπαρξη, για κάθε κυρτό σώμα K, *ελλειψοειδών ελαχίστου όγκου* που περιέχουν το K:

Λήμμα 2.2. *Αν μία ακολουθία ελλειψοειδών συγκλίνει σε ένα κυρτό σώμα E τότε το E είναι ελλειψοειδές.*

Απόδειξη. Θεωρούμε την ακολουθία ελλειψοειδών (E_n) ώστε $E_n \to E$. Υπάρχουν αφφινικοί μετασχηματισμοί T_n του $\mathbb{R}^d$ ώστε $T_n B_2^d = E_n$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι T_n είναι γραμμικοί. Πράγματι, η ακολουθία σημείων $(T_n(0))$ είναι φραγμένη, άρα έχει υπακολουθία $(T_{n_k}(0))$ συγκλίνουσα σε κάποιο σημείο $c \in \mathbb{R}^d$. Τότε, οι μετασχηματισμοί $T - T_{n_k}(0)$ είναι γραμμικοί και

$(T_{n_k} - T_{n_k}(0))B_2^d = T_{n_k} B_2^d - T_{n_k}(0) \to E - c$, και το E είναι ελλειψοειδές, αφού αυτό ισχύει για το $E - c$.

Χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα:
αν $K_n \to K$ και $x_n \to x$ τότε $K_n + x_n \to K + x$. Πράγματι,
έστω $\epsilon > 0$. Υπάρχει n_0 ώστε $K_n \subseteq K + \epsilon B_2^d$, $K \subseteq K_n + \epsilon B_2^d$ και $b_n = \frac{x_n - x}{\epsilon} \in B_2^d$, για $n \geq n_0$. Για $n \geq n_0$, έστω $y_n \in K_n$. Υπάρχουν $y \in K$ και $b \in B_2^d$ ώστε $y_n = y + \epsilon b$. Τότε $y_n + x_n = y + x + 2\epsilon b^{'}$, όπου $b^{'} = \frac{b_n + b}{2} \in B_2^d$. Άρα $K_n + x_n \subseteq K + x + 2\epsilon B_2^d$. Όμοια παίρνουμε $K + x \subseteq K_n + x_n + 2\epsilon B_2^d$.

Έστω $M > 0$ ώστε $E \subseteq M B_2^d$. Τότε, για μεγάλα n, έχουμε $T_n B_2^d \subseteq E + B_2^d \subseteq (M+1)B_2^d$, δηλαδή η ακολουθία $||T_n|| = \sup_{x \in B_2^d} |T_n x|$ είναι φραγμένη. Υπάρχει τότε γραμμικός μετασχηματισμός T του $\mathbb{R}^d$ ώστε $T_{n_k} \overset{||\cdot||}{\to} T$, για κάποια υπακολουθία της (T_n). Τότε $T_{n_k} B_2^d \to T B_2^d$. Πράγματι, έστω $\epsilon > 0$. Για μεγάλα k, έχουμε $|T_{n_k} x - Tx| \leq \epsilon$, για κάθε $x \in B_2^d$. Τότε $T_{n_k} x = Tx + \epsilon b$, όπου $b = \frac{T_{n_k} x - Tx}{\epsilon} \in B_2^d$. Άρα $T_{n_k} B_2^d \subseteq T B_2^d + \epsilon B_2^d$ και $T B_2^d \subseteq T_{n_k} B_2^d + \epsilon B_2^d$. Άρα $E_{n_k} = T_{n_k} B_2^d \to T B_2^d$.

Επομένως, $T B_2^d = E$, και το E είναι ελλειψοειδές.□

Πρόταση 2.2. *Έστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^d$. Υπάρχει ελλειψοειδές που περιέχει το K και έχει τον ελάχιστο όγκο μεταξύ των ελλειψοειδών με αυτήν την ιδιότητα.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τον θετικό αριθμό $V = \inf |E|$, λαμβάνοντας το infimum πάνω από όλα τα ελλειψοειδή E που περιέχουν το K. Μπορούμε να υποθέσουμε, μετατοπίζοντας το K αν χρειάζεται, ότι $\delta B_2^d \subseteq K$, όπου $\delta > 0$. Επίσης, μπορούμε να υποθέσουμε ότι για την οικογένεια των ελλειψοειδών E που θεωρούμε για να ορίσουμε το V ισχύει $|E| \leq M$, όπου $M > 0$ μία σταθερά.

Ισχυρισμός. Για την οικογένεια των ελλειψοειδών E που θεωρούμε ισχύει $E \subseteq R B_2^d$, όπου R θετική σταθερά που εξαρτάται μόνο από τα d, δ, M.

Απόδειξη Ισχυρισμού. Έστω E ελλειψοειδές του $\mathbb{R}^d$ ώστε $\delta B_2^d \subseteq E$ και $|E| \leq M$. Έστω T αντιστρέψιμος γραμμικός μετασχηματισμός του $\mathbb{R}^d$ και $c \in \mathbb{R}^d$ ώστε $T^{'} B_2^d = E$, όπου $T^{'} = T + c$. Έχουμε $|E| = |\det T||B_2^d| = |\det T|\omega_d$, άρα $|\det T| \leq M/\omega_d$. Η ορίζουσα και η νόρμα του T συνδέονται με την σχέση

$$||T|| \leq |\det T| \cdot ||T^{-1}||^{d-1} \tag{1}$$

Πράγματι, έστω $0 < \lambda_1 \leq ... \leq \lambda_d$ οι ιδιοτιμές του γραμμικού μετασχηματισμού T^*T. Τότε $||T|| = \sqrt{\lambda_d}$ και $||T^{-1}|| = 1/\sqrt{\lambda_1}$. Άρα

$$||T|| \cdot \left(||T^{-1}||^{d-1}\right)^{-1} = \sqrt{\lambda_1^{d-1}\lambda_d} \leq \sqrt{\lambda_1 \cdots \lambda_d} = \sqrt{\det(T^*T)} = |\det T|.$$

Το E είναι συμμετρικό ως προς το c άρα $2c + \delta B_2^d \subseteq E$, και $conv(\delta B_2^d, 2c + \delta B_2^d) \subseteq E$. Επίσης, $c + \delta B_2^d \subseteq conv(\delta B_2^d, 2c + \delta B_2^d)$, άρα $c + \delta B_2^d \subseteq E = TB_2^d + c$. Επομένως, $T^{-1}B_2^d \subseteq \frac{1}{\delta}B_2^d$, και $||T^{-1}|| \leq 1/\delta$. Από την (1) τότε παίρνουμε $||T|| \leq \frac{M}{\omega_d \delta^{d-1}}$. Επιπλέον, $0 \in TB_2^d + c$, άρα υπάρχει $e \in B_2^d$ ώστε $c = Te$, και $|c| \leq ||T||$. Επομένως, $E \subseteq RB_2^d$, όπου $R = \frac{2M}{\omega_d \delta^{d-1}}$.

Βρίσκουμε ακολουθία ελλειψοειδών (E_n) με $K \subseteq E_n \subseteq RB_2^d$ ώστε $|E_n| \to V$. Από την Αρχή Επιλογής του Blaschke, υπάρχει υπακολουθία (E_{n_k}) ώστε $E_{n_k} \to E$, για κάποιο κυρτό συμπαγές E. Αφού $E_{n_k} \supseteq K$, $E \supseteq K$, και $|E| > 0$. Άρα το E είναι κυρτό σώμα και είναι ελλειψοειδές από το Λήμμα 2.2. Από την συνέχεια του όγκου, $|E| = V$. $\square$

Απόδειξη Λήμματος 2.1. Έστω K ελλειψοειδές και ευθεία G. Υπάρχει $\rho > 0$ και αντιστρέψιμος αφφινικός μετασχηματισμός T ώστε $K = T\rho B_2^d$. Προφανώς το $P(T^{-1}G, \rho B_2^d)$ είναι επίπεδο άρα επίπεδο είναι και το $P(G, K) = TP(T^{-1}G, \rho B_2^d)$.
Για την αντίστροφη κατεύθυνση, υποθέτουμε ότι για κάθε $G \in \mathcal{G}$, το $P(G, K)$ είναι επίπεδο. Δείχνουμε ότι τότε το $P(G, K)$ είναι επίπεδο για κάθε ευθεία G. Έστω ότι υπάρχει ευθεία G ώστε το $P(G, K)$ δεν είναι επίπεδο. Σε κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων, η G είναι ο x^d-άξονας και γράφουμε

$$K = \{(x, y) : x \in H, f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

όπου $H = P_G(K)$ και $f, -g : H \to \mathbb{R}$ κυρτές συναρτήσεις. Υπάρχουν $x_k \in H$, $k = 1, ..., d+1$ για τα οποία τα σημεία $w_k = \left(x_k, \frac{f(x_k)+g(x_k)}{2}\right)$ είναι αφφινικά ανεξάρτητα.

Ισχυρισμός: Έστω P επίπεδο κυρτό σώμα, συναρτήσεις $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, f κυρτή, g κοίλη, $f \leq g$ ώστε $P = \{(x, y) : a \leq x \leq y, f(x) \leq y \leq g(x)\}$. Τότε οι f, g είναι συνεχείς.

Απόδειξη Ισχυρισμού. Οι f, g είναι συνεχείς στο (a, b) άρα αρκεί να ελέγξουμε την συνέχεια στα σημεία a, b. Αφού οι $f, -g$ είναι φραγμένες και κυρτές, τα όρια $\lim_{x\to a} f(x), \lim_{x\to b} f(x), \lim_{x\to a} g(x), \lim_{x\to b} g(x)$ υπάρχουν στο $\mathbb{R}$. Άρα οι περιορισμοί των $f, -g$ στο (a, b) επεκτείνονται συνεχώς σε κυρτές συναρτήσεις $\tilde{f}, -\tilde{g}$ στο $[a, b]$. Ορίζουμε το επίπεδο κυρτό σώμα

$$\tilde{P} = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \tilde{f}(x) \leq y \leq \tilde{g}(x)\}$$

Παρατηρούμε ότι το εσωτερικό του P ταυτίζεται με το εσωτερικό του $\tilde{P}$, άρα $d(P, \tilde{P}) = 0$. Επομένως $P = \tilde{P}$, και $f = \tilde{f}$, $g = \tilde{g}$ στο $[a, b]$.

Έστω ότι κάποιο w_k είναι συνοριακό σημείο του K. Υπάρχει $r > 0$ ώστε για κάθε $w \in w_k + rB_2^d$, τα σημεία $w_1, ..., w_{k-1}, w, w_{k+1}, ..., w_{d+1}$ είναι αφφινικά ανεξάρτητα. Θεωρούμε την ευθεία G_k που είναι παράλληλη στην G και περιέχει το w_k, ένα 2-διάστατο επίπεδο Π που περιέχει την G_k και τέμνει το εσωτερικό του K και το επίπεδο κυρτό σώμα $P = K \cap \Pi$. Σε κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων το P γράφεται

$$P = \{(x^1, ..., x^d) : x^2 = ... = x^{d-1} = 0, a \leq x^1 \leq b, f(x^1) \leq x^d \leq g(x^1)\}$$

όπου $f, -g$ κυρτές με $f \leq g$. Προφανώς $P(G, P) = P(G, K) \cap \Pi$ και $w_k = (b, 0, ..., 0, (f(b) + g(b))/2)$. Από τον Ισχυρισμό, η $(f + g)/2$ είναι συνεχής, άρα υπάρχει $x^1 \in (a, b)$ ώστε $\tilde{w}_k =$

$(x^1, 0, ..., 0, (f(x^1) + g(x^1))/2) \in w_k + rB_2^d$, με $\tilde{w}_k$ εσωτερικό σημείο του K.

Συνεχίζοντας έτσι, μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα w_k είναι εσωτερικά σημεία του K.

Έστω $r > 0$ ώστε $w_k + rB_2^d \subseteq K$, $k = 1, ..., d+1$ και αν $z_k \in w_k + rB_2^d$, $k = 1, ..., d+1$ τότε τα z_k είναι αφφινικά ανεξάρτητα. Από την συνέχεια των f, g στο εσωτερικό του H, υπάρχουν $\epsilon > 0$ και $\delta > 0$ ώστε να ισχύει το εξής:
για κάθε $v \in S^{d-1}$ με $|v - e_d| < \epsilon$ $(e_d = (0, ..., 0, 1))$ υπάρχουν $x_k^{(1)}, x_k^{(2)} \in (x_k + \delta B_2^d) \cap H$, $k = 1, ..., d+1$ ώστε τα ευθύγραμμα τμήματα $I_k = \left[(x_k^{(2)}, g(x_k^{(2)})), (x_k^{(1)}, f(x_k^{(1)}))\right]$, $k = 1, ..., d+1$ είναι παράλληλα με το v. Αφού το D είναι πυκνό και οι f, g είναι συνεχείς στα x_k, μπορούμε να επιλέξουμε τέτοιο $v \in D$ ώστε $z_k = \left(\frac{x_k^{(1)}+x_k^{(2)}}{2}, \frac{f(x_k^{(1)})+g(x_k^{(2)})}{2}\right) \in w_k + rB_2^d$, $k = 1, ..., d+1$, και έστω $G' \in \mathcal{G}$ ευθεία παράλληλη στο v. Τότε τα $z_k \in P(G', K)$, $k = 1, ..., d+1$, είναι αφφινικά ανεξάρτητα, αντίφαση στην υπόθεσή μας.

Ο μετασχηματισμός T ο οποίος μας πάει από το K στο $St_G(K)$ είναι αφφινικός λόγω της υπόθεσης ότι τα σύνολα $P(G, K)$ είναι επίπεδα. Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι η ευθεία G είναι ο x^d-άξονας και γράψουμε

$$K = \{(x, y) : x \in H, f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

όπου $H = P_G(K)$, τότε

$$St_G(K) = \left\{(x, y) : x \in H, f(x) - \frac{f(x) + g(x)}{2} \leq y \leq g(x) - \frac{f(x) + g(x)}{2}\right\}$$

Άρα, ο T έχει τύπο $T(x, y) = \left(x, y - \frac{f(x)+g(x)}{2}\right)$, άρα είναι αφφινικός από την υπόθεσή μας ότι η $(f+g)/2$ είναι αφφινική συνάρτηση. Αν T οποιοσδήποτε αντιστρέψιμος αφφινικός μετασχηματισμός, τότε $P(G, TK) = TP(T^{-1}G, K)$, άρα οι αφφινικές εικόνες του K εξακολουθούν να ικανοποιούν την υπόθεση. Επομένως, από την Πρόταση 2.1, έπεται ότι υπάρχουν αφφινικοί μετασχηματισμοί $T_1, T_2, ...$ που διατηρούν τον όγκο ώστε $T_nK \to B$, όπου B μπάλλα. Έστω L ελλειψοειδές ελαχίστου όγκου που περιέχει το K. Έστω ότι $K \subsetneq L$. Τότε $|B| < |L|$. Έστω $\epsilon > 0$ ώστε $|B^\epsilon| < |L|$, όπου $B^\epsilon = B + \epsilon B_2^d$. Αφού $T_nK \to B$, υπάρχει n ώστε $T_nK \subseteq B^\epsilon$. Επομένως έχουμε $K \subseteq T_n^{-1}B^\epsilon$ και $|T_n^{-1}B^\epsilon| < |L|$. Δηλαδή το ελλειψοειδές $T_n^{-1}B^\epsilon$ περιέχει το K και έχει μικρότερο όγκο από το L γεγονός που αντιφάσκει στον ορισμό του L. □

Λήμμα 2.3. *Έστω $G_1, G_2, ..., G_{d+1}$ διαφορετικές ανά δύο παράλληλες ευθείες στον $\mathbb{R}^d$ οι οποίες σε κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων έχουν την μορφή $G_k = \{(c_k^1, c_k^2, ..., c_k^{d-1}, z_k) : z_k \in \mathbb{R}\}$ για κατάλληλες σταθερές $c_k^1, c_k^2, ..., c_k^{d-1} \in \mathbb{R}, k = 1, 2, ..., d+1$ και επιπλέον υποθέτουμε ότι d σημεία από τα $(c_k^1, c_k^2, ..., c_k^{d-1})$, $k = 1, ..., d+1$ είναι αφφινικά ανεξάρτητα. Έστω τα διάστήματα $I_k = \{(c_k^1, c_k^2, ..., c_k^{d-1}, z_k) : |z_k - q_k| \leq l_k\}$, όπου $l_k > 0$. Γράφουμε $z = (z_1, z_2, ..., z_{d+1})$, $q = (q_1, q_2, ..., q_{d+1})$, $e = (1, 1, ..., 1)$, $c_j = (c_1^j, c_2^j, ..., c_{d+1}^j)$, $D(z) = \frac{1}{d!}\det(e, c^1, c^2, ..., c^{d-1}, z)$ και*

$$M(q) = \int_{|z_1 - q_1| \leq l_1} \cdots \int_{|z_{d+1} - q_{d+1}| \leq l_{d+1}} |D(z)|^p dz_1 \ldots dz_{d+1}$$

όπου $p \geq 1$.
Τότε η $M(q)$ γίνεται ελάχιστη ακριβώς στα σημεία q στα οποία το σύνολο $\{(c_k^1, c_k^2, ..., c_k^{d-1}, q_k) : k = 1, 2, ..., d+1\}$ είναι επίπεδο.

Απόδειξη. Έχουμε
$M(q) = \int_{|z_1-q_1|\le l_1} \dots \int_{|z_{d+1}-q_{d+1}|\le l_{d+1}} |D(z-q)+D(q)|^p dz_1 \dots dz_{d+1} =$
$\int_{|u_1|\le l_1} \dots \int_{|u_{d+1}|\le l_{d+1}} |D(u)+D(q)|^p du_1 \dots du_{d+1}$

Ορίζουμε την συνάρτηση $F(y) = \int_{|u_1|\le l_1} \dots \int_{|u_{d+1}|\le l_{d+1}} |D(u)+y|^p du_1 \dots du_{d+1}$, $y \in \mathbb{R}$. Είναι φανερό ότι $F(D(q)) = M(q)$. Επίσης, $\{D(q) : q \in \mathbb{R}^{d+1}\} = \mathbb{R}$. Πράγματι,

$$\det(e, c^1, ..., c^{d-1}, q) = \sum_{i=1}^{d+1} \epsilon_i q_i A_i$$

όπου $\epsilon_i = \pm 1$ και A_i η ορίζουσα του πίνακα που προκύπτει από τον $[e, c^1, ..., c^{d-1}, q]$ αν παραλείψουμε την γραμμή και την στήλη που περιέχεται το στοιχείο q_i. Όμως ο $(d-1)$-διάστατος όγκος του simplex με κορυφές τα $(c_k^1, c_k^2, ..., c_k^{d-1})$, $k \ne i$ είναι $\frac{1}{(d-1)!}|A_i|$. Από την υπόθεσή μας, τα A_i δεν είναι όλα 0, άρα για κάποια επιλογή του q, $\det(e, c^1, ..., c^{d-1}, q) \ne 0$. Το ζητούμενο έπεται από την γραμμικότητα της $D(q)$.

Άρα οι συναρτήσεις $M(q)$, $F(y)$ παίρνουν την ίδια ελάχιστη τιμή και εάν η $F(y)$ παίρνει την ελάχιστή της τιμή μόνο στο y_0 τότε οι λύσεις της εξίσωσης

$$D(q) = y_0$$

είναι ακριβώς τα σημεία ελαχίστου της $M(q)$.
Προφανώς $F(y) = \int_{|u_1|\le l_1} \dots \int_{|u_{d+1}|\le l_{d+1}} |D(u)-y|^p du_1 \dots du_{d+1}$ άρα

$F(y) = \int_{|u_1|\le l_1} \dots \int_{|u_{d+1}|\le l_{d+1}} \frac{1}{2}(|D(u)+y|^p + |D(u)-y|^p) du_1 \dots du_{d+1}$ άρα

$F(y) - F(0) = \frac{1}{2} \int_{|u_1|\le l_1} \dots \int_{|u_{d+1}|\le l_{d+1}} (|D(u)+y|^p + |D(u)-y|^p - 2|D(u)|^p) du_1 \dots du_{d+1}$

Θέτουμε $T(u,y) = |D(u)+y|^p + |D(u)-y|^p - 2|D(u)|^p$. Η T είναι συνεχής.
Η κυρτότητα της συνάρτησης $g(\zeta) = |\zeta|^p$ μας δίνει

$\frac{1}{2}|D(u)+y|^p + \frac{1}{2}|D(u)-y|^p \ge |D(u)|^p$, δηλαδή $T(u,y) \ge 0$.

Παρατηρούμε ότι $T(0,y) > 0$, για κάθε $y \ne 0$ άρα $F(y) - F(0) > 0$, για κάθε $y \ne 0$ από την συνέχεια της $T(u,y)$. Επομένως το $y_0 = 0$ είναι το μοναδικό σημείο ελαχίστου της $F(y)$ άρα τα σημεία ελαχίστου της $M(q)$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης

$$D(q) = 0$$

Αυτά τα q είναι ακριβώς εκείνα για τα οποία τα σημεία $(c_k^1, c_k^2, ..., c_k^{d-1}, q_k)$, $k = 1, 2, ..., d+1$ ανήκουν σε υπερεπίπεδο, αφού $|D(q)|$ είναι ο όγκος του simplex με κορυφές τα σημεία $(c_k^1, c_k^2, ..., c_k^{d-1}, q_k)$, $k = 1, 2, ..., d+1$.□

Απόδειξη Θεωρήματος 2.1. Έστω K έλάχιστο σώμα του $m_p(\cdot; d+1)$ το οποίο δεν είναι ελλειψοειδές. Το Λήμμα 2.1 εξασφαλίζει την ύπαρξη ευθείας $\tilde{G}$ για την οποία το σύνολο $P(\tilde{G}, K)$ δεν είναι επίπεδο. Σε κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων η $\tilde{G}$ είναι ο x^d-άξονας. Υπάρχουν λοιπόν σημεία $\tilde{w}_k = (\tilde{c}_k^1, ..., \tilde{c}_k^{d-1}, \tilde{z}_k) \in P(\tilde{G}, K)$, $k = 1, ..., d+1$ τα οποία είναι αφφινικά ανεξάρτητα. Όπως στην απόδειξη του Λήμματος 2.1, μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα $\tilde{w}_k$ είναι εσωτερικά σημεία του K. Τότε η ορίζουσα $\det[(\tilde{w}_1, 1), ..., (\tilde{w}_{d+1}, 1)]$ είναι μη-μηδενική και αν την αναπτύξουμε ως προς την γραμμή με τα $\tilde{z}_k$ βλέπουμε ότι d από τα σημεία $(\tilde{c}_k^1, ..., \tilde{c}_k^{d-1})$, $k = 1, ..., d+1$ είναι επίσης

αφφινικά ανεξάρτητα. Για κάθε ευθεία G, η οποία σε κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων είναι ο x^d-άξονας, συμβολίζουμε με $G(c)$ την ευθεία που διέρχεται από το $c = (c^1, ..., c^{d-1}, 0)$ και είναι παράλληλη προς την G. Επίσης, συμβολίζουμε με $I(G)$ την τομή του K με την G και

$$M(K; G(c_1), ..., G(c_{d+1})) = \int_{z_1 \in I(G(c_1))} \cdots \int_{z_{d+1} \in I(G(c_{d+1}))} |D(z; c_1, ..., c_{d+1})|^p dz_{d+1} ... dz_1$$

όπου $D(z; c_1, ..., c_{d+1})$ η ορίζουσα που ορίσαμε στο Λήμμα 2.3. Τα μήκη των $I(\tilde{G}(\tilde{c}_k))$ είναι θετικά διότι τα $(\tilde{c}_k^1, ..., \tilde{c}_k^{d-1})$ είναι εσωτερικά σημεία του $H = P_{\tilde{G}}(K)$. Από το Λήμμα 2.3 έχουμε

$$M(St_{\tilde{G}}(K); \tilde{G}(\tilde{c}_1), ..., \tilde{G}(\tilde{c}_{d+1}) < M(K; \tilde{G}(\tilde{c}_1), ..., \tilde{G}(\tilde{c}_{d+1}) \tag{2}$$

και για κάθε ευθεία G και κάθε $c_1, ..., c_{d+1} \in \mathbb{R}^{d-1}$,

$$M(St_G(K); G(c_1), ..., G(c_{d+1})) \leq M(K; G(c_1), ..., G(c_{d+1})) \tag{3}$$

Εύκολα βλέπουμε ότι

$$m_p(K; d+1) = \int_H \dots \int_H M(K; G(c_1), ..., G(c_{d+1})) dc_1 ... dc_{d+1}$$

Από το H^{d+1} αφαιρούμε το σύνολο $A \cup B$ το οποίο είναι μέτρου 0, όπου

$$A = (\partial H \times H \times ... \times H) \cup (H \times \partial H \times ... \times H) \cup ... \cup (H \times H \times ... \times \partial H)$$

και

$$B = \bigcap_{i=1}^{d+1} \{(c_1, ..., c_{d+1}) : \text{τα } c_1, ..., c_{i-1}, c_{i+1}, ..., c_{d+1} \text{ είναι αφφινικά εξαρτημένα}\}$$

Πράγματι,

$|\bigcap_{i=1}^{d+1} \{(c_1, ..., c_{d+1}) \in H^{d+1} : \text{τα } c_1, ..., c_{i-1}, c_{i+1}, ..., c_{d+1} \text{ είναι αφφινικά εξαρτημένα}\}| \leq$

$|\{(c_1, ..., c_{d+1}) \in H^{d+1} : \text{τα } c_1, ..., c_d \text{ είναι αφφινικά εξαρτημένα}\}| \leq$

$\sum_{i=1}^{d} |\{(c_1, ..., c_{d+1}) \in H^{d+1} : c_i \in aff\{c_1, ..., c_{i-1}, c_{i+1}, ..., c_d\}\}| \leq$

$|H|_{d-1} \sum_{i=1}^{d} \int_{c_1 \in H} \cdots \int_{c_{i-1} \in H} \int_{c_{i+1} \in H} \cdots \int_{c_d \in H} |aff\{c_1, ..., c_{i-1}, c_{i+1}, ..., c_d\}|_{d-1} dc_d ... dc_{i+1} dc_{i-1} ... dc_1$

$= 0.$

Επίσης, το σύνορο οποιουδήποτε κυρτού συμπαγούς L στον $\mathbb{R}^d$ έχει μέτρο 0. Αρκεί να το δείξουμε για κυρτά σώματα αλλιώς το L το βλέπουμε σαν κυρτό σώμα του $\mathbb{R}^r$, για κατάλληλο $r \leq d$. Το δείχνουμε με επαγωγή στην διάσταση d. Για $d = 1$ το ζητούμενο είναι προφανές. Υποθέτουμε ότι το ζητούμενο είναι σωστό στην διάσταση d. Έστω L κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^{d+1}$ το οποίο το γράφουμε

$$L = \{(x, y) : x \in H, f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

όπου $f, g : H \to \mathbb{R}$, f κοίλη, g κυρτή και $H \subseteq \mathbb{R}^d \times \{0\}$ κυρτό σώμα. Ορίζουμε $G_f = \{(x, f(x)) : x \in H\}$ και $G_g = \{(x, g(x)) : x \in H\}$. Αρκεί να δείξουμε ότι $|G_f|_{d+1} = |G_g|_{d+1} = 0$. Η f είναι συνεχής στο $intH$ άρα $|\{(x, f(x)) : x \in intH\}|_{d+1} = 0$. (βλέπουμε το H σαν υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$)

Επίσης $|\{(x, f(x)) : x \in \partial H\}|_{d+1} \leq |\partial H \times \mathbb{R}|_{d+1} = 0$ αφού $|\partial H|_d = 0$, από επαγωγική υπόθεση. Άρα $|G_f|_{d+1} = 0$. Όμοια $|G_g|_{d+1} = 0$.

Από τις (2), (3) και την συνέχεια της $M(K; G(w_1), ..., G(w_{d+1}))$ στις μεταβλητές $w_1, ..., w_{d+1} \in intH$, παίρνουμε

$$m_p(St_G(K); d+1) < m_p(K; d+1)$$

αντίφαση στο ότι το K είναι ελάχιστο σώμα για το $m_p(\cdot; d+1)$.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση, δείξαμε ότι τα ελάχιστα σώματα είναι ελλειψοειδή. Αφού υπάρχουν ελάχιστα σώματα και αφού όλα τα ελλειψοειδή είναι αφφινικά ισοδύναμα μεταξύ τους, έπεται ότι όλα τα ελλειψοειδή είναι ελάχιστα σώματα. $\square$

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι η ίδια απόδειξη δίνει το ίδιο αποτέλεσμα για συναρτησοειδή

$$m_h(K; d+1) = \int_K \dots \int_K h(|conv\{y_1, ..., y_{d+1}\}|) dy_1 \dots dy_{d+1}$$

όπου $h : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ μη-αρνητική, γνησίως αύξουσα, κυρτή συνάρτηση.

3 Η Περίπτωση των Τυχαίων Πολυτόπων

Σε αυτήν την παράγραφο θα αποδείξουμε το γενικότερο αποτέλεσμα:

Θεώρημα 3.1. *Το κυρτό σώμα $K \subseteq \mathbb{R}^d$ όγκου 1 είναι ελάχιστο μεταξύ των κυρτών σωμάτων όγκου 1 για το συναρτησοειδές*

$$m_p(K; n, d) = \int_K \dots \int_K |conv\{y_1, ..., y_n\}|^p dy_1 \dots dy_n$$

αν και μόνο αν το K είναι ελλειψοειδές, όπου $n \geq d+1$ και $p \geq 1$.

Η απόδειξη είναι αρκετά παρόμοια με αυτήν της ειδικής περίπτωσης $n = d+1$ αλλά πρέπει να παρακάμψουμε τη δυσκολία ότι ο όγκος των πολυτόπων δεν δίνεται γενικά από τον τύπο με την ορίζουσα. Για αυτόν τον λόγο αποδεικνύουμε το ακόλουθο λήμμα

Λήμμα 3.1. *Έστω H υπερεπίπεδο που σε κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων το γράφουμε*

$$H = \{(x^1, ..., x^d) : x^d = 0\}$$

και έστω τα σημεία $c_1, ..., c_n \in H = \mathbb{R}^{d-1} \times \{0\}$. Θεωρούμε τις ευθείες

$$G_k = \{(c_k, z_k) : z_k \in \mathbb{R}\}, k = 1, ..., n$$

Γράφουμε $z = (z_1, ..., z_n)$, $C(z) = conv\{(c_1, z_1), ..., (c_n, z_n)\}$ και ορίζουμε $V(z) = |C(z)|$. Τότε

$$V\left(\frac{1}{2}\tilde{z} + \frac{1}{2}\bar{z}\right) \leq \frac{1}{2}V(\tilde{z}) + \frac{1}{2}V(\bar{z})$$

Απόδειξη. Έστω $\tilde{z}, \bar{z} \in \mathbb{R}^n$ και $0 < \lambda < 1$. Θεωρούμε την προβολή P των $C(\tilde{z})$, $C(\bar{z})$ στον H. Υπάρχουν συνάρτήσεις $\tilde{f}, \tilde{g}, \bar{f}, \bar{g} : P \to \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε

- $\tilde{f} \leq \tilde{g}$, $\bar{f} \leq \bar{g}$
- $\tilde{f}, \bar{f}$ κυρτές και $\tilde{g}, \bar{g}$ κοίλες
- $C(\tilde{z}) = \{(x, y) : x \in P, \tilde{f}(x) \leq y \leq \tilde{g}(x)\}$, $C(\bar{z}) = \{(x, y) : x \in P, \bar{f}(x) \leq y \leq \bar{g}(x)\}$

Ορίζουμε τις $\hat{f}, \hat{g} : P \to \mathbb{R}$, $\hat{f} = \lambda\tilde{f} + (1-\lambda)\bar{f}$, $\hat{g} = \lambda\tilde{g} + (1-\lambda)\bar{g}$. Έχουμε προφανώς $\hat{f} \leq \hat{g}$, $\hat{f}$ κυρτή, $\hat{g}$ κοίλη. Άρα το σύνολο $C = \{(x, y) : x \in P, \hat{f}(x) \leq y \leq \hat{g}(x)\}$ είναι κυρτό. Έχουμε

$$C(\lambda\tilde{z} + (1-\lambda)\bar{z}) \subseteq C$$

Πράγματι, αρκεί να δείξουμε ότι $(c_k, \lambda\tilde{z}_k + (1-\lambda)\bar{z}_k) \in C$, $k = 1, ..., n$ και για αυτό αρκεί $\hat{f}(c_k) \leq \lambda\tilde{z}_k + (1-\lambda)\bar{z}_k \leq \hat{g}(c_k)$ το οποίο προκύπτει από τους ορισμούς των $\hat{f}, \hat{g}$ και από τις σχέσεις $\tilde{f}(c_k) \leq \tilde{z}_k \leq \tilde{g}(c_k)$, $\bar{f}(c_k) \leq \bar{z}_k \leq \bar{g}(c_k)$. Επομένως

$V(\lambda\tilde{z} + (1-\lambda)\bar{z}) = |C(\lambda\tilde{z} + (1-\lambda)\bar{z})| \leq |C| = \int_H \int_{\hat{f}(x)}^{\hat{g}(x)} dydx =$
$\int_H (\hat{g}(x) - \hat{f}(x))dx \overset{\lambda=1/2}{=} \frac{1}{2}\int_H (\tilde{g}(x) - \tilde{f}(x))dx + \frac{1}{2}\int_H (\bar{g}(x) - \bar{f}(x))dx =$
$\frac{1}{2}V(\tilde{z}) + \frac{1}{2}V(\bar{z})$. $\square$

Το επόμενο λήμμα είναι το αντίστοιχο του Λήμματος 2.3.

Λήμμα 3.2. *Έστω $c_1, ..., c_n \in \mathbb{R}^{d-1}$. Έστω $I_k = \{(c_k, z_k) : |z_k - q_k| \leq l_k\}$, όπου $l_k > 0$, $k = 1, ..., n$. Γράφουμε $z = (z_1, z_2, ..., z_n)$, $q = (q_1, q_2, ..., q_n)$ και*

$$M(q) = \int_{|z_1-q_1|\leq l_1} \dots \int_{|z_n-q_n|\leq l_n} |V(z)|^p dz_1 \dots dz_n$$

όπου $p \geq 1$ και $V(z)$ όπως στο Λήμμα 3.1.
Τότε

$$M(q) \geq M(0)$$

με την ανισότητα γνήσια αν $V(q) > 0$.

Απόδειξη. Έχουμε
$M(q) = \int_{|u_1|\leq l_1} \dots \int_{|u_n|\leq l_n} |V(q+u)|^p du_1 \dots du_n = \int_{|u_1|\leq l_1} \dots \int_{|u_n|\leq l_n} |V(q-u)|^p du_1 \dots du_n$

άρα $M(q) = \int_{|u_1|\leq l_1} \dots \int_{|u_n|\leq l_n} \frac{1}{2}(|V(q+u)|^p + V(q-u)|^p) du_1 \dots du_n =$

$\int_{|u_1|\leq l_1} \dots \int_{|u_n|\leq l_n} \frac{1}{2}(|V(u+q)|^p + V(u-q)|^p) du_1 \dots du_n$

Η τελευταία ισότητα ισχύει διότι τα $C(q-u)$, $C(u-q)$ είναι συμμετρικά ως προς το υπερεπίπεδο $H = \{x^d = 0\}$ άρα έχουν τον ίδιο όγκο.
Από την κυρτότητα της $g(\zeta) = |\zeta|^p$ και το Λήμμα 3.1 παίρνουμε

$\frac{1}{2}(|V(u+q)|^p + V(u-q)|^p) \geq \left|\frac{1}{2}V(u+q) + \frac{1}{2}V(u-q)\right|^p \geq |V(u)|^p$ (1)

Επομένως $M(q) \geq \int_{|u_1|\leq l_1} \dots \int_{|u_n|\leq l_n} |V(u)|^p du_1 \dots du_n = M(0)$ (2)

Αν $u = 0$ και $V(q) > 0$, η δεύτερη ανισότητα στην (1) είναι γνήσια και η ανισότητα τότε στην (2) είναι γνήσια από την συνέχεια της $V(\cdot)$.□

Απόδειξη Θεωρήματος 3.1. Η απόδειξη είναι παρόμοια με αυτήν του Θεωρήματος 2.1.
Έστω K ελάχιστο σώμα του $m_p(\cdot; n, d)$ το οποίο δεν είναι ελλειψοειδές. Από το Λήμμα 2.1, υπάρχει ευθεία $\tilde{G}$ για την οποία το σύνολο $P(\tilde{G}, K)$ δεν είναι επίπεδο. Μπορούμε λοιπόν να βρούμε n σημεία $(\tilde{c}_1, \tilde{q}_1), ..., (\tilde{c}_n, \tilde{q}_n) \in P(\tilde{G}, K)$ τα οποία δεν ανήκουν όλα σε ένα υπερεπίπεδο, αφού $n > d$. Μπορούμε κατά τα γνωστά να υποθέσουμε ότι η $\tilde{G}$ είναι κάθετη στο $\{x^d = 0\}$ και ότι οι ευθείες $\tilde{G}(\tilde{c}_1), ..., \tilde{G}(\tilde{c}_n)$ τέμνουν το K σε μη-τετριμμένα διαστήματα $I(\tilde{G}(\tilde{c}_1)), ..., I(\tilde{G}(\tilde{c}_n))$ όπως στο Λήμμα 3.2. Το $(\tilde{c}_k, \tilde{q}_k)$ είναι το μέσον του $I(\tilde{G}(\tilde{c}_k))$ και θέτουμε $\tilde{q} = (\tilde{q}_1, ..., \tilde{q}_n)$. Τότε $V(\tilde{q}) > 0$ και το Λήμμα 3.2 δίνει $M(K; G(\tilde{c}_1), ..., G(\tilde{c}_n)) > M(St_G(K); G(\tilde{c}_1), ..., G(\tilde{c}_n))$ και για κάθε G και κάθε $c_1, ..., c_n$ έχουμε $M(K; G(c_1), ..., G(c_n)) \geq M(St_G(K); G(c_1), ..., G(c_n))$ (το μέσον κάθε ευθυγράμμου τμήματος στην Steiner συμμετρικοποίηση είναι πάντα το 0). Γράφουμε

$m_p(K; n, d) =$

$\int_{c_1\in H} \dots \int_{c_n\in H} \left[\int_{z_1\in I(G(c_1))} \dots \int_{z_n\in I(G(c_n))} |conv\{(c_1, z_1), ..., (c_n, z_n)\}|^p dz_n \dots dz_1\right] dc_n \dots dc_1 =$

$\int_{c_1\in H} \dots \int_{c_n\in H} M(K; G(c_1), ..., G(c_n)) dc_n \dots dc_1$

όπου $H = P_G(K)$

Επομένως

$\int_{c_1 \in H} \dots \int_{c_n \in H} M(St_G(K); G(c_1), ..., G(c_n)) dc_n \dots dc_1 <$

$\int_{c_1 \in H} \dots \int_{c_n \in H} M(K; G(c_1), ..., G(c_n)) dc_n \dots dc_1$

δηλαδή

$$m_p(St_G(K); n, d) < m_p(K; n, d)$$

Αυτό αντιφάσκει στο ότι το K είναι ελάχιστο σώμα. Επομένως κάθε ελάχιστο σώμα είναι ελλειψοειδές. Η απόδειξη ότι κάθε ελλειψοειδές όγκου 1 είναι ελάχιστο σώμα για το $m_p(\cdot; n, d)$ είναι ακριβώς η ίδια όπως το Θεώρημα 2.1.□

Η ίδια απόδειξη περνάει και για συναρτησοειδή του τύπου

$$m_h(K; n, d) = \int_K \dots \int_K h(|conv\{y_1, ..., y_n\}|) dy_1 \dots dy_n$$

όπου $h : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ μη-αρνητική, γνησίως αύξουσα, κυρτή συνάρτηση.

4 Η Περίπτωση για Μέγιστα Σώματα

Σε αυτήν την παράγραφο μελετάμε την περίπτωση για μέγιστα σώματα του συναρτησοειδούς

$$m_1(K;n,d) = \frac{1}{|K|^{n+1}} \int_K \dots \int_K |conv\{y_1,...,y_n\}| dy_1 \dots dy_n$$

όπου K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^d$ και $n \geq d+1$. Για αυτόν τον σκοπό θα χρειαστούμε έναν μετασχηματισμό, αντίστοιχο της Steiner συμμετρικοποίησης.

Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^d$ κυρτό σώμα και G ευθεία. Έστω H υπερεπίπεδο ορθογώνιο στην G. Υποθέτουμε ότι $H = \{x^d = 0\}$. Γράφουμε το K ως

$$K = \{(x,y) : x \in P_G(K), f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

όπου $f \leq g$, f κυρτή, g κοίλη. Ορίζουμε τον μετασχηματισμό *Schüttelung* του K *ως προς την* G

$$S_G(K) = \{(x,y) : x \in P_G(K), 0 \leq y \leq g(x) - f(x)\}$$

Ο μετασχηματισμός αυτός παίρνει κάθε ευθύγραμμο τμήμα που είναι τομή του K με παράλληλλες ευθείες της G και το μεταφέρει πάνω στην ευθεία στην οποία βρίσκεται έτσι ώστε το ένα άκρο να συμπέσει στο H και όλα αυτά τα ευθύγραμμα τμήματα να βρίσκονται στον ίδιο ημίχωρο.

Εύκολα βλέπουμε ότι το $S_G(K)$ είναι κυρτό σώμα με τον ίδιο όγκο με το K.

Αποδεικνύουμε ότι στην περίπτωση $d = 2$, τα τρίγωνα είναι μέγιστα σώματα.

Συμβολίζουμε $m(K;n) = m_1(K;n,2)$, $n \geq 3$, αν το K είναι επίπεδο κυρτό σώμα και $m(K;n,d) = m_1(K;n,d)$, $n \geq d+1$, αν το K είναι κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^d$.

Θεώρημα 4.1. *Αν $T^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ τρίγωνο, $n \geq 3$, τότε*

$$m(K;n) \leq m(T^2;n)$$

για κάθε κυρτό σώμα K. Η ανισότητα είναι γνήσια αν το K είναι πολύγωνο αλλά όχι τρίγωνο.

Στις περισσότερες διαστάσεις έχουμε το εξής:

Θεώρημα 4.2. *Αν το $T^d \subseteq \mathbb{R}^d$ είναι simplex, $n \geq d+1$, τότε*

$$m(P;n,d) \leq m(T^d;n,d)$$

για κάθε πολύτοπο P με το πολύ $d+2$ κορυφές. Η ανισότητα είναι γνήσια όταν το P δεν είναι simplex.

Αποδεικνύουμε αρχικά κάποια λήμματα.

Λήμμα 4.1. *Έστω (P_k) ακολουθία από πολύτοπα του $\mathbb{R}^d$ με το πολύ p κορυφές, $p \geq d+1$, τέτοια ώστε $P_k \to P$. Τότε υπάρχουν $y_1,...,y_p \in \mathbb{R}^d$ ώστε $P = conv\{y_1,...,y_p\}$.*

Απόδειξη. Έστω $P_k = conv\{y_1^k,...,y_p^k\}$. Οι ακολουθίες (y_i^k) είναι φραγμένες και βρίσκουμε υπακολουθίες $(y_i^{k_l})$ ώστε $y_i^{k_l} \to y_i$. Τότε

$d(conv\{y_1^{k_l},...,y_p^{k_l}\}, conv\{y_1,...,y_p\}) \leq d(\{y_1^{k_l},...,y_p^{k_l}\},\{y_1,...,y_p\}) \leq |y_1^{k_l}-y_1|+...+|y_p^{k_l}-y_p| \to 0.$

Χρησιμοποιήσαμε τις ιδιότητες:

- $d(convA, convB) \leq d(A,B)$

  Πράγματι, έστω $r>0$ ώστε $A \subseteq B + rB_2^d$ και $B \subseteq A + rB_2^d$. Εξ ορισμού της κυρτής θήκης συνόλων, παίρνουμε $convA \subseteq conv(B+rB_2^d) \subseteq convB + rB_2^d$ και $convB \subseteq convA + rB_2^d$. Άρα $d(convA, convB) \leq r$. Επομένως $d(convA, convB) \leq d(A,B)$.

- $d(\{a_1,...,a_k\},\{b_1,...,b_k\}) \leq |a_1-b_1|+...+|a_k-b_k|$

  Πράγματι, για κάθε $i=1,...,k$, $a_i = b_i + (|a_1-b_1|+...+|a_k-b_k|)\frac{a_i-b_i}{|a_1-b_1|+...+|a_k-b_k|}$, με $\frac{a_i-b_i}{|a_1-b_1|+...+|a_k-b_k|} \in B_2^d$. Άρα $\{a_1,...,a_k\} \subseteq \{b_1,...,b_k\}+(|a_1-b_1|+...+|a_k-b_k|)B_2^d$. Όμοια, $\{b_1,...,b_k\} \subseteq \{a_1,...,a_k\}+(|a_1-b_1|+...+|a_k-b_k|)B_2^d$. Επομένως, έχουμε το ζητούμενο.

Άρα $P = conv\{y_1,...,y_p\}$.□

Λήμμα 4.2. *Υπάρχει πολύτοπο Q με το πολύ p κορυφές και θετικό όγκο τέτοιο ώστε*

$$m(K;n,d) \leq m(Q;n,d)$$

για κάθε πολύτοπο K με το πολύ p κορυφές.

Απόδειξη. Η ύπαρξη κυρτού σώματος Q με την ζητούμενη ιδιότητα αποδεικνύεται όπως στο Λήμμα 1.1. Ότι το Q είναι πολύτοπο με το πολύ p κορυφές έπεται από το Λήμμα 4.1.□

Απόδειξη Θεωρήματος 4.1. Αρχικά αποδεικνύουμε ότι το Q στο Λήμμα 4.2 είναι τρίγωνο για κάθε $p \geq 4$, με $d=2$. Έστω ότι δεν είναι και έστω $P_1,...,P_r$, $r \geq 4$ οι κορυφές του και $P_1P_2,...,P_{r-1}P_r, P_rP_1$ οι πλευρές του. Περνώντας σε κατάλληλο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $P_1=(0,0)$, ότι το τμήμα P_2P_r είναι παράλληλο στον $y-$άξονα και ότι βρίσκεται στο ημιεπίπεδο $\{x>0\}$. Επεκτείνουμε τις ημιευθείες $P_{r-1}P_r$, P_3P_2 οι οποίες τέμνουν τον $y-$άξονα στα σημεία $(0,\alpha)$, $(0,-\beta)$ αντίστοιχα, α, $\beta>0$. Υποθέτουμε ότι $\alpha \leq \beta$ και θέτουμε $P_1^+=(0,\alpha)$ και $P_1^-=(0,-\alpha)$ και θεωρούμε τα πολύγωνα

$Q^+ = conv\{P_1^+, P_2,...,P_r\}$, $Q^- = conv\{P_1^-, P_2,...,P_r\}$

Το Q^+ έχει $r-1$ κορυφές και το Q^- έχει r κορυφές, εκτός εάν $\alpha=\beta$ όπου τότε θα έχει $r-1$ κορυφές. Θα δείξουμε ότι

$$m(Q^+;n) > m(Q;n) \text{ ή } m(Q^-;n) > m(Q;n)$$

και θα έχουμε αντίφαση στον ορισμό του Q.

Έστω $[0,\gamma]$ η προβολή των Q, Q^+, Q^- στον $x-$άξονα και $(\delta,0)$ το σημείο που τέμνει η ευθεία P_2P_r τον $x-$άξονα με $0<\delta<\gamma$. Έστω $0 \leq c_1,...,c_n \leq \gamma$. Από κάθε σημείο $(c_i,0)$ φέρνουμε κάθετη ευθεία η οποία τέμνει τα Q, Q^+, Q^- σε διαστήματα ίδιου μήκους, διότι η P_2P_r είναι παράλληλη στον $y-$άξονα. Έστω $[(c_i,q_i-l_i),(c_i,q_i+l_i)]$, $[(c_i,q_i^+-l_i),(c_i,q_i^++l_i)]$, $[(c_i,q_i^--l_i),(c_i,q_i^-+l_i)]$ τα αντίστοιχα διαστήματα, όπου $q_i = \frac{1}{2}q_i^+ + \frac{1}{2}q_i^-$. Έστω $t_1,...,t_n$ με $|t_i| \leq l_i$, $t=(t_1,...,t_n)$ και

$$\begin{aligned} z(t) &= (q_1+t_1,...,q_n+t_n) \\ z^+(t) &= (q_1^++t_1,...,q_n^++t_n) \\ z^-(t) &= (q_1^-+t_1,...,q_n^-+t_n) \end{aligned}$$

Έχουμε $z(t)=\frac{1}{2}z^+(t)+\frac{1}{2}z^-(t)$, και από το Λήμμα 3.1 παίρνουμε

$$V(z(t)) \leq \frac{1}{2}V(z^+(t))+\frac{1}{2}V(z^-(t))$$

Λαμβάνοντας υπόψιν και τον τύπο

$$m(Q;n)=\frac{1}{|Q|^{n+1}}\int_{c_1\in[0,\gamma]}\dots\int_{c_n\in[0,\gamma]}\left[\int_{|t_1|\leq l_1}\dots\int_{|t_n|\leq l_n}V(z(t))dt_n\dots dt_1\right]dc_n\dots dc_1$$

παίρνουμε

$$m(Q;n)\leq\frac{1}{2}m(Q^+;n)+\frac{1}{2}m(Q^-;n)$$

αφού τα Q,Q^+,Q^- έχουν τον ίδιο όγκο.
Δείχνουμε ότι στην πραγματικότητα αυτή η ανισότητα είναι γνήσια.

Έστω P_s μία κορυφή του Q της οποίας η προβολή στον $x-$άξονα είναι $>\delta$. Επιλέγουμε σημεία $(\tilde{c}_1,\tilde{t}_1),...,(\tilde{c}_n,\tilde{t}_n)$ από το P_1P_s τέτοια ώστε $\tilde{c}_1<\delta$ και $\tilde{c}_2,...,\tilde{c}_n>\delta$. Θέτουμε $t_i^*=\tilde{t}_i-\tilde{q}_i$, όπου $(\tilde{c}_i,\tilde{q}_i)$ το μέσον της τομής του Q με την κατακόρυφη ευθεία που διέρχεται από το $(\tilde{c}_i,0)$ και $t^*=(t_1^*,...,t_n^*)$. Ομοίως ορίζουμε τα $\tilde{q}_i^+$, $\tilde{q}_i^-$ από τα Q^+, Q^-, αντίστοιχα. Προφανώς, $\tilde{q}_1\neq\tilde{q}_1^+$, $\tilde{q}_1\neq\tilde{q}_1^-$ και $\tilde{q}_i=\tilde{q}_i^+=\tilde{q}_i^-$, για $i=2,...,n$. Τότε $V(z(t^*))=0$ διότι τα σημεία $(\tilde{c}_1,\tilde{t}_1),...,(\tilde{c}_n,\tilde{t}_n)$ είναι συνευθειακά ενώ $V(z^+(t^*))>0$, $V(z^-(t^*))>0$ διότι τα σημεία $(\tilde{c}_1,\tilde{q}_1^+-\tilde{q}_1+\tilde{t}_1),...,(\tilde{c}_n,\tilde{q}_n^+-\tilde{q}_n+\tilde{t}_n)$ και $(\tilde{c}_1,\tilde{q}_1^--\tilde{q}_1+\tilde{t}_1),...,(\tilde{c}_n,\tilde{q}_n^--\tilde{q}_n+\tilde{t}_n)$ είναι μη-συνευθειακά, αντίστοιχα, διότι το P_1P_s δεν είναι παράλληλο στον $y-$άξονα. Άρα

$$V(z(t^*))<\frac{1}{2}V(z^+(t^*))+\frac{1}{2}V(z^-(t^*))$$

Από την συνέχεια της $V(z(\cdot))$ έχουμε

$$m(Q;n)<\frac{1}{2}m(Q^+;n)+\frac{1}{2}m(Q^-;n)$$

από την οποία έπεται το ζητούμενο. Άρα το Q είναι τρίγωνο.
Αν T^2 οποιοδήποτε τρίγωνο, τότε έχουμε $m(T^2;n)=m(Q;n)$. Επιπλέον, αν K πολύγωνο αλλά όχι τρίγωνο, τότε $m(K;n)<m(T^2;n)$.

Στην γενική περίπτωση, όπου K τυχαίο επίπεδο σώμα, βρίσκουμε ακολουθία πολυγώνων (K_p) τέτοια ώστε $K_p\to K$. Έστω τρίγωνα T_p^2, $|T_p^2|=|K_p|$. Τότε $m(K_p;n)\leq m(T_p^2;n)$. Επειδή τα τρίγωνα είναι αφφινικά ισοδύναμα μεταξύ τους, μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα T_p^2 είναι ισόπλευρα τρίγωνα με κέντρο βάρους στο 0. Έστω $c>0$ ώστε $|T_p^2|\leq c$. Τότε $T_p^2\subseteq\frac{2}{3^{3/4}}\sqrt{c}B_2^2$. Από το θεώρημα επιλογής του Blaschke και το Λήμμα 4.1, παίρνουμε υπακολουθία $(T_{p_k}^2)$ με $T_{p_k}^2\to T^2$, όπου T^2 τρίγωνο. Τότε $m(K;n)\leq m(T^2;n)$.$\square$

Ένα πολύτοπο του $\mathbb{R}^d$ με κορυφές $x_1, ..., x_n$ θα λέμε ότι είναι *πυραμίδα* αν υπάρχει $j = 1, ..., n$ ώστε η διάσταση του $conv\{x_1, ..., x_{j-1}, x_{j+1}, ..., x_n\}$ είναι $d-1$. Τότε θα λέμε ότι το $conv\{x_1, ..., x_{j-1}, x_{j+1}, ..., x_n\}$ είναι *βάση* της πυραμίδας και ότι το x_j είναι *η κορυφή της πυραμίδας*.

Λήμμα 4.3. *Έστω $P \subseteq \mathbb{R}^d$ d-διάστατο πολύτοπο με $d+2$ κορυφές. Ένα από τα παρακάτω ισχύει:*

i) Το P είναι πυραμίδα.

ii) Υπάρχουν simplices T^r και T^s διάστασης r και s αντίστοιχα ώστε $r, s \geq 1$, $r + s = d$, $P = conv(T^r, T^s)$, $exp(T^r) \cup exp(T^r) = exp(P)$ και $intT^r \cap intT^s \neq \varnothing$.

Απόδειξη. Για $d = 2$ το ii) είναι σωστό παίρνοντας $r = s = 1$ και T^r, T^s τις διαγωνίους του τετραπλεύρου P.

Υποθέτουμε ότι $d \geq 3$ και ότι οι κορυφές του P είναι $x_1, ..., x_{d+2}$.

Αν τα $x_2, ..., x_{d+2}$ είναι αφφινικά εξαρτημένα, τότε η διάσταση του $B = conv\{x_2, ..., x_{d+2}\}$ είναι $d-1$. Πράγματι, η διάσταση του B είναι $\leq d-1$ και δε μπορεί να είναι $< d-1$ διότι διαφορετικά η διάσταση του P θα ήταν $< d$. Άρα το P είναι πυραμίδα με βάση B.

Υποθέτουμε ότι κάθε $d+1$ από τις κορυφές $x_1, ..., x_{d+2}$ είναι αφφινικά ανεξάρτητες.
Οι κορυφές $x_1, ..., x_{d+2}$ είναι αφφινικά εξαρτημένες, άρα υπάρχουν $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, ..., d+2$ με $a_1 + ... + a_{d+2} = 0$, $a_1x_1 + ... + a_{d+2}x_{d+2} = 0$ και κάποιο a_j δεν ειναι 0. Τότε $a_i \neq 0$ για κάθε $i = 1, ..., d+2$. Έστω $p, q \geq 1$ με $p + q = d + 2$ και μετάθεση $i_1, ..., i_p, j_1, ..., j_q$ του συνόλου $\{1, ..., d+2\}$ ώστε $a_{i_1}, ..., a_{i_p} > 0$ και $a_{j_1}, ..., a_{j_q} < 0$. Ορίζουμε $b_{j_1} = -a_{j_1}, ..., b_{j_q} = -a_{j_q}$. Τότε $b_{j_k} > 0$, $a_{i_1} + ... + a_{i_p} = b_{j_1} + ... + b_{j_q}$ και $a_{i_1}x_{i_1} + ... + a_{i_p}x_{i_p} = b_{j_1}x_{j_1} + ... + b_{j_q}x_{j_q}$. Ορίζουμε

$$\lambda_n = \frac{a_{i_n}}{a_{i_1} + ... + a_{i_p}}, n = 1, ..., p$$

$$\mu_m = \frac{b_{j_m}}{b_{j_1} + ... + b_{j_q}}, m = 1, ..., q$$

Τότε $\lambda_n, \mu_m > 0$, $n = 1, ..., p, m = 1, ..., q$, $\lambda_1 + ... + \lambda_p = \mu_1 + ... + \mu_q = 1$ και $\lambda_1 x_{i_1} + ... + \lambda_p x_{i_p} = \mu_1 x_{j_1} + ... + \mu_q x_{j_q}$. Τότε $p, q \geq 2$ διότι αν $p = 1$, τότε θα είχαμε $x_{i_1} \in conv\{x_{j_1}, ..., x_{j_q}\}$. Ορίζουμε $r = p - 1$, $s = q - 1$, $T^r = conv\{x_{i_1}, ..., x_{i_p}\}$, $T^s = conv\{x_{j_1}, ..., x_{j_q}\}$ και $x = \lambda_1 x_{i_1} + ... + \lambda_p x_{i_p}$. Τα T^r, T^s είναι simplices με διάσταση r, s αντίστοιχα διότι $p, q \geq 2$. Αφού $\lambda_n > 0$ και $\mu_m > 0$, $x \in intT^r$ και $x \in intT^s$. Τέλος, είναι προφανές ότι $exp(T^r) \cup exp(T^s) = exp(P)$.□

Λήμμα 4.4. *Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^d$ κυρτό σώμα το οποίο το γράφουμε στη μορφή*

$$K = \{(x, y) : x \in H, f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

όπου $f, -g$ κυρτές, $f \leq g$, $H = P_G(K)$, G ο x^d-άξονας , f μη-αφφινική στο $intH$ και $H \subseteq K$. Τότε η εικόνα του $intH$ μέσω του μετασχηματισμού Schüttelung S_G δεν είναι επίπεδο σύνολο.

Απόδειξη. Ο μετασχηματισμός Schüttelung απεικονέζει το σημείο $(x, 0) \in intH$ στο σημείο $(x, -f(x))$. Άρα, η εικόνα του $intH$ μέσω του μετασχηματισμού Schüttelung S_G είναι το $\{(x, -f(x)) : x \in intH\}$, το οποίο δεν είναι επίπεδο σύνολο, αφού η f δεν είναι αφφινική στο $intH$.□

Απόδειξη Θεωρήματος 4.2. Έστω ότι υπάρχει πολύτοπο P με $d+2$ κορυφές $x_1, ..., x_{d+2}$ το οποίο μεγιστοποιεί το $m(\cdot; n, d)$ στην κλάση των πολυτόπων με το πολύ $d+2$ κορυφές. (Αν δεν υπάρχει τέτοιο P, τότε πράγματι μοναδικοί maximizers είναι τα simplices).
Αποδεικνύουμε κατ' αρχήν ότι υπάρχει maximizer που είναι πυραμίδα με το πολύ $d+2$ κορυφές. Αν το P δεν είναι αυτής της μορφής, υπάρχουν T^r, T^s και $x \in intT^r \cap intT^s$ όπως στο Λήμμα 4.3, όπου $T^r = conv\{x_1, ..., x_{r+1}\}$, $T^s = conv\{x_{r+2}, ..., x_{d+2}\}$ και $s \leq r$. Περνώντας σε κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x = 0$ και $T^r \subseteq span\{e_1, ..., e_r\}$, όπου $e_1, ..., e_d$ ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^d$. Επίσης, τα T^r, T^s μπορούν να υποτεθούν ορθογώνια εφαρμόζοντας κατάλληλο αφφινικό μετασχηματισμό T που περιγράφουμε ως εξής: υπάρχει $j = r+2, ..., d+2$ ώστε τα $x_1, ..., x_{j-1}, x_{j+1}, ..., x_{d+2}$ να είναι αφφινικά ανεξάρτητα. Ορίζουμε τότε $Tx_i = x_i$, $i = 1, ..., r+1$, $Tx_i = e_i$, $i = r+2, ..., j-1, j+1, ..., d+2$. Επομένως, $x = 0$, $T^r \subseteq span\{e_1, ..., e_r\}$ και $T^s \subseteq span\{e_{r+1}, ..., e_d\}$.

Έστω $[\alpha e_d, -\beta e_d] = span\{e_d\} \cap T^s$ με $0 < \alpha \leq \beta$. Μετασχηματίζοντας γραμμικά τις τελευταίες s συντεταγμένες, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x_i \neq \alpha e_d$, για κάθε $i = r+2, ..., d+2$. Θεωρούμε τα πολύτοπα

$$P^- = conv(T^r, T^s - \alpha e_d)$$

$$P^+ = conv(T^r, T^s + \alpha e_d)$$

Παρατηρούμε ότι τα P^+, P^- έχουν το πολύ $d+2$ κορυφές. Άρα

$$m(P^+; n, d) \leq m(P; n, d) \quad \text{και} \quad m(P^-; n, d) \leq m(P; n, d) \tag{1}$$

Επιπλέον, το P^- έχει ακριβώς $d+2$ κορυφές. Πράγματι, έστω, για να καταλήξουμε σε άτοπο, ότι π.χ. το $x_{d+2} - \alpha e_d$ γράφεται ως κυρτός συνδυασμός των υπόλοιπων σημείων, δηλαδή έστω $\lambda_i \in [0, 1]$, $i = 1, ..., d+1$ ώστε $\lambda_1 + ... + \lambda_{d+1} = 1$ και

$$x_{d+2} - \alpha e_d = (\lambda_1 x_1 + ...\lambda_{r+1} x_{r+1}) + (\lambda_{r+2}(x_{r+2} - \alpha e_d) + ... + \lambda_{d+1}(x_{d+1} - \alpha e_d))$$

Επειδή $x_{d+2} - \alpha e_d - (\lambda_{r+2}(x_{r+2} - \alpha e_d) + ... + \lambda_{d+1}(x_{d+1} - \alpha e_d)) \in \{0\}^r \times \mathbb{R}^s$ και $\lambda_1 x_1 + ...\lambda_{r+1} x_{r+1} \in \mathbb{R}^r \times \{0\}^s$, παίρνουμε ότι

$$x_{d+2} - \alpha e_d - (\lambda_{r+2}(x_{r+2} - \alpha e_d) + ... + \lambda_{d+1}(x_{d+1} - \alpha e_d)) = 0$$

$$\lambda_1 x_1 + ...\lambda_{r+1} x_{r+1} = 0$$

Θέτουμε $\lambda = \lambda_{r+2} + ... + \lambda_{d+1}$ και διακρίνουμε περιπτώσεις.

Αν $\lambda = 0$, τότε $x_{d+2} = \alpha e_d$, άτοπο.

Αν $\lambda = 1$, τότε $x_{d+2} = \lambda_{r+2} x_{r+2} + ... + \lambda_{d+1} x_{d+1}$, αντίφαση στο ότι το x_{d+2} είναι κορυφή του T^s.

Αν $0 < \lambda < 1$, θέτουμε $\mu = 1/\lambda > 1$ και $\mu_i = \mu\lambda_i$, $i = r+2, ..., d+1$. Τότε $\mu_{r+2} + ... + \mu_{d+1} = 1$ και

$$\mu(x_{d+2} - \alpha e_d) = \mu_{r+2}(x_{r+2} - \alpha e_d) + ... + \mu_{d+1}(x_{d+1} - \alpha e_d)$$

Έχουμε δηλαδή ότι το simplex $T^s - \alpha e_d$ περιέχει τα σημεία 0, $x_{d+2} - \alpha e_d$ και $\mu(x_{d+2} - \alpha e_d)$ με $\mu > 1$, γεγονός το οποίο αντιφάσκει στο ότι το $x_{d+2} - \alpha e_d$ είναι κορυφή του $T^s - \alpha e_d$.

Όμοια ελέγχουμε ότι τα $x_1, ..., x_{r+1}$ είναι κορυφές του P^-.

Επίσης, το P^- είναι πυραμίδα. Πράγματι, $0 \in conv\{x_1, ..., x_{r+1}\}$ και $0 \in conv\{x_{r+2} - \alpha e_d, ..., x_{d+1} - \alpha e_d\}$. Άρα υπάρχουν a_i, $i = 1, ..., d+1$ με $a_1 + ... + a_{r+1} = a_{r+2} + ... + a_{d+1} = 1$ και $0 = a_1 x_1 + ... + a_{r+1} x_{r+1} = a_{r+2}(x_{r+2} - \alpha e_d) + ... + a_{d+1}(x_{d+1} - \alpha e_d)$. Άρα τα $x_1, ..., x_{r+1}, x_{r+2} - \alpha e_d, ..., x_{d+1} - \alpha e_d$ είναι αφφινικά εξαρτημένα και η διάσταση του $aff\{x_1, ..., x_{r+1}, x_{r+2} - \alpha e_d, ..., x_{d+1} - \alpha e_d\}$ είναι $d - 1$.
Αποδεικνύουμε ότι $m(P^-; n, d) = m(P; n, d)$.

Παρατήρηση:
Έστω $z \in (\partial P) \backslash (T^r \cup T^s)$. Υπάρχουν $\lambda, \mu \in (0, 1)$ και $x \in T^r, y \in T^s$ ώστε $\lambda + \mu = 1$ και $z = \lambda x + \mu y$. Αν $x \in intT^r$, τότε $x \in intP$. Πράγματι, αν όχι, τότε $T^r \subseteq \partial P$. Ειδικότερα, $0 \in \partial P$. Το 0 όμως είναι εσωτερικό σημείο του P. Πράγματι, αφού $0 \in intT^r \cap intT^s$ και τα T^r, T^s είναι simplices, υπάρχουν $\lambda_1, ..., \lambda_{d+2} > 0$ ώστε $\lambda_1 + ... + \lambda_{r+1} = \lambda_{r+2} + ... + \lambda_{d+2} = 1$ και $0 = \lambda_1 x_1 + ... + \lambda_{r+1} x_{r+1} = \lambda_{r+2} x_{r+2} + ... + \lambda_{d+2} x_{d+2}$. Αν ορίσουμε $\mu_i = \lambda_i / 2$, τότε $\mu_1 + ... + \mu_{d+2} = 1$, $\mu_i > 0$ και $0 = \mu_1 x_1 + ... + \mu_{d+2} x_{d+2}$. Άρα, το 0 είναι εσωτερικό σημείο του P. Άρα, αν $x \in intT^r$, τότε $z \in intP$, διότι $x \in intP$ και $z \in int[x, y]$. Όμώς $z \in \partial P$. Επομένως, $x \in \partial T^r$. Ομοίως, $y \in \partial T^s$.
Αφού τα T^r, T^s περιέχονται σε ορθογώνιους υπόχωρους, είναι φανερό ότι η παραπάνω παράσταση του z είναι μοναδική. Συνοψίζουμε:
Κάθε συνοριακό σημείο z του P το οποίο δεν είναι σημείο ούτε του T^r ούτε του T^s γράφεται με μοναδικό τρόπο ως $z = \lambda x + (1 - \lambda) y$ όπου x και y συνοριακό σημείο του T^r και T^s, αντίστοιχα και $\lambda \in (0, 1)$. Αν το z είναι συνοριακό σημείο του T^r ή του T^s, θεωρούμε παράσταση του z της παραπάνω μορφής με $\lambda = 1$ ή $\lambda = 0$, αντίστοιχα.

Έστω H και A η προβολή του P και T^s στον υπόχωρο $\{x^d = 0\}$, αντίστοιχα. Έστω επίσης $c \in (intH) \backslash A$. Η ευθεία G η οποία διέρχεται από το c και είναι παράλληλη στο e_d τέμνει το ∂P σε δύο σημεία $z_1, z_2 \notin T^r \cup T^s$. Έστω παραστάσεις $z_i = \lambda_i x_i + (1 - \lambda_i) y_i$, $i = 1, 2$ όπως στην παρατήρηση. Επειδή $x_i \in \mathbb{R}^r \times \{0^s\}$ και $y_i \in \{0\}^r \times \mathbb{R}^s$, $i = 1, 2$, εύκολα βλέπουμε ότι $\lambda_1 x_1 = \lambda_2 x_2$. Η ημιευθεία που ξεκινάει από το 0 και διέρχεται από το x_1 τέμνει το ∂T^r σε μοναδικό σημείο. Αφού $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, έπεται ότι $x_1 = x_2$. Αφού επιπλέον $x_1 \neq 0$, $\lambda_1 = \lambda_2$.
Επομένως, για κάθε συνοριακό σημείο z όπως στην παρατήρηση, συμβολίζουμε με $\lambda(c)$ αυτό το λ.

Το A είναι σύνολο $(d-1)$-διάστατου μέτρου 0. Πράγματι, έχουμε $s \leq d - 1$. Αν $s = d - 1$, τότε το $affT^s$ είναι ένα υπερεπίπεδο κάθετο στο $\{x^d = 0\}$ άρα η προβολή του σε αυτό είναι ένα σύνολο διάστασης $< d - 1$, όπως θα δούμε αργότερα, στο Λήμμα 7.7.
Έστω $c \in (intH) \backslash A$ και G η ευθεία η οποία είναι παράλληλη με τον x^d άξονα και διέρχεται από το c. Η G τέμνει το σύνορο του P στα σημεία $\tilde{w}^+$, $\tilde{w}^-$. Για τα σημεία αυτά η d-συντατεγμένη είναι μη-μηδενική, άρα δεν ανήκουν στο T^r. Από την παρατήρηση, $\tilde{w}^+ = \lambda x + (1 - \lambda) y$, $\tilde{w}^- = \lambda x + (1 - \lambda) y'$ όπου $\lambda \in (0, 1)$, x συνοριακό σημείο του T^r και y, y' συνοριακά σημεία του T^s. Παρατηρούμε ότι τα σημεία w του P έρχονται σε 1-1 αντιστοιχία με τα σημεία $w^+ = w + (1 - \lambda) \alpha e_d$ του P^+ η οποία μεταφέρει την τομή του P με κάθε ευθεία παράλληλη προς την G στην τομή του P^+ με την ίδια ευθεία. Η G τέμνει τα P, P^+ σε διαστήματα που έχουν το ίδιο μήκος, άρα τα P, P^+ έχουν τον ίδιο όγκο. Όμοια προκύπτει ότι τα P, P^- έχουν τον ίδιο όγκο.

Τώρα, επιλέγουμε οποιαδήποτε $w_i = (c_i, z_i) \in P$, $i = 1, ..., n$ με $c_i \in A$. Έστω G_i η ευθεία που περιέχει το c_i και είναι παράλληλη στον x^d-άξονα, $i = 1, ..., n$. Θεωρούμε τα αντίστοιχα $w_i^- = (c_i, z_i - (1 - \lambda_i)\alpha)$, $w_i^+ = (c_i, z_i + (1 - \lambda_i)\alpha)$, όπου $\lambda_i = \lambda(c_i)$, $i = 1, ..., n$. Θέτουμε $z = (z_1, ..., z_n)$, $z^- = (z_1 - (1 - \lambda_1)\alpha, ..., z_n - (1 - \lambda_n)\alpha)$, $z^+ = (z_1 + (1 - \lambda_1)\alpha, ..., z_n + (1 - \lambda_n)\alpha)$

με $z = \frac{1}{2}z^- + \frac{1}{2}z^+$. Από το Λήμμα 3.1,

$$V(z) \leq \frac{1}{2}V(z^-) + \frac{1}{2}V(z^+) \tag{2}$$

Έστω $f, -g : H \to \mathbb{R}$ κυρτές συναρτήσεις ώστε $P = \{(c^{'}, z^{'}) : c^{'} \in H, f(c^{'}) \leq z^{'} \leq g(c^{'})\}$. Ολοκληρώνουμε την (2) πάνω σε όλα τα $c_i \in intH$ και z_i με $f(c_i) \leq z_i \leq g(c_i)$, $i = 1, ..., n$ και παίρνουμε

$$m(P; n, d) \leq \frac{1}{2}m(P^-; n, d) + \frac{1}{2}m(P^+; n, d) \tag{3}$$

Από τις (1) και (3) συμπεραίνουμε ότι $m(P^-; n, d) = m(P; n, d)$. Άρα πράγματι υπάρχει maximizer που είναι πυραμίδα.

Την πυραμίδα P^- την συμβολίζουμε από εδώ και πέρα με P. Αποδεικνύουμε ότι υπάρχει maximizer $\tilde{P}$ με $d + 2$ κορυφές ώστε η ανισότητα (3) να είναι γνήσια. Αυτό είναι άτοπο, άρα δεν υπάρχει P όπως στην αρχή της απόδειξης.

Έστω ότι η κορυφή της πυραμίδας P είναι το y_1 και η βάση της είναι B. Το B είναι ένα $(d-1)$-διάστατο πολύτοπο με $d + 1$ κορυφές $y_2, ..., y_{d+2}$. Έστω ότι το B δεν είναι πυραμίδα. Από το Λήμμα 4.3, μπορούμε, όπως προηγουμένως, να υποθέσουμε ότι υπάρχουν simplices $Q^m \subseteq span\{e_1, ..., e_m\}, Q^k \subseteq span\{e_{m+1}, ..., e_{d-1}\}$ διάστασης m και k αντίστοιχα ώστε $m + k = d - 1$, $0 \in intQ^m \cap intQ^k$ και $B = conv(Q^m, Q^k)$. Τότε $P = conv(y_1, Q^m, Q^k)$. Όπως πριν, θεωρούμε το $[\gamma e_{d-1}, -\delta e_{d-1}] = span\{e_{d-1}\} \cap Q^k$ με $0 < \gamma \leq \delta$ και τα

$$P^- = conv(y_1, Q^m, Q^k - \gamma e_{d-1})$$

$$P^+ = conv(y_1, Q^m, Q^k + \gamma e_{d-1})$$

Επαναλαμβάνοντας την προηγούμενη διαδικασία, βλέπουμε ότι το $conv(Q^m, Q^k - \gamma e_{d-1})$ είναι πυραμίδα και $m(P^-; n, d) = m(P; n, d)$. Δηλαδή, υπάρχει maximizer ο οποίος είναι πυραμίδα και του οποίου η βάση είναι πυραμίδα. Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, βλέπουμε ότι υπάρχουν maximizer $\tilde{P}$ με κορυφές $y_1, ..., y_{d+2}$ και πολύτοπα B_i, $i = 4, ..., d + 2$ ώστε

$y_{i+1} \notin aff\{y_1, ..., y_i\}$, $i = 4, ..., d + 1$, $B_4 = conv\{y_1, ..., y_4\}$, $B_i = conv(y_i, B_{i-1})$, $i = 5, ..., d + 2$ και $\tilde{P} = B_{d+2}$.

Ειδικότερα, το $\tilde{P}$ είναι η κυρτή θήκη του B_4 και ενός $(d - 3)$-διάστατου simplex.

Συμβολίζουμε το $\tilde{P}$ με P και τις κορυφές του με $x_1, ..., x_{d+2}$. Τότε, με κατάλληλη αρίθμηση των x_i και εφαρμόζοντας κατάλληλο αφφινικό μετασχηματισμό, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $T^1 = [x_{d+1}, x_{d+2}] \subseteq span\{e_d\}$, $T^{d-1} = conv\{x_1, ..., x_d\} \subseteq span\{e_1, ..., e_{d-1}\}$, $0 \in (intT^1) \cap T^{d-1}$ και η προβολή του P στο υπερεπίπεδο $\{x^d = 0\}$ είναι το $H = T^{d-1}$. Έστω $T^1 = [\alpha e_d, -\beta e_d]$ με $0 < \alpha \leq \beta$. Ορίζουμε

$$P^- = conv(T^{d-1}, T^1 - \alpha e_d)$$

$$P^+ = conv(T^{d-1}, T^1 + \alpha e_d)$$

και παρατηρούμε ότι το P^- είναι simplex και το P^+ έχει το πολύ $d + 2$ κορυφές. Με παρόμοιο τρόπο όπως πριν, μπορούμε να δούμε ότι κάθε σημείο $z \in P \backslash H$ που είναι συνοριακό σημείο του

P και του οποίου η προβολή στο H είναι εσωτερικό σημείο του H, γράφεται με μοναδικό τρόπο ως $z = \lambda x + (1-\lambda)y$, όπου $x \in \partial T^{d-1}$ και $y = \alpha e_d$, αν $z^d > 0$, $y = -\beta e_d$, αν $z^d < 0$. Επίσης, αν $z^{'}$ συνοριακό σημείο του P ώστε η ευθεία $aff\{z, z^{'}\}$ να είναι παράλληλη στο e_d, τότε $z^{'} = \lambda x + (1-\lambda)y^{'}$ και $\{y, y^{'}\} = \{\alpha e_d, -\beta e_d\}$. Άρα ένα τέτοιο λ εξαρτάται μόνο από την προβολή c του σημείου z. Επομένως, αν $c \in H$ η προβολή του z στο $\{x^d = 0\}$, συμβολίζουμε με $\lambda(c)$ το μοναδικό λ στην παράσταση του z. Τα σημεία w του P έρχονται σε 1-1 αντιστοιχία με τα σημεία $w^+ = w + (1-\lambda)\alpha e_d$ του P^+ καθώς και με τα σημεία $w^- = w - (1-\lambda)\alpha e_d$ του P^-, όπου $\lambda = \lambda(c)$ και c η προβολή του w στο $\{x^d = 0\}$. Όπως πριν, παίρνουμε την ανισότητα (3). Δείχνουμε ότι η ανισότητα είναι στην πραγματικότητα γνήσια.

Παρατηρούμε ότι το P^- είναι ανάκλαση του μετασχηματισμού Schüttelung του P ως προς τον x^d-άξονα. Από το Λήμμα 4.4, υπάρχουν σημεία $\tilde{w}_i = (\tilde{c}_i, 0) \in intH$, $i = 1, ..., n$ ώστε το σύνολο $\{(\tilde{c}_i, -(1-\tilde{\lambda}_i)\alpha)_{i=1}^n\}$ να μην είναι επίπεδο, όπου $\tilde{\lambda}_i = \lambda(\tilde{c}_i)$. Θέτουμε $\tilde{z} = (0, ..., 0) \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{z}^- = (-(1-\tilde{\lambda}_1)\alpha, ..., -(1-\tilde{\lambda}_n)\alpha)$, $\tilde{z}^+ = ((1-\tilde{\lambda}_1)\alpha, ..., (1-\tilde{\lambda}_n)\alpha)$, με $\tilde{z} = \frac{1}{2}\tilde{z}^- + \frac{1}{2}\tilde{z}^+$. Τότε, $V(\tilde{z}) = 0$ και $V(\tilde{z}^-) > 0$ άρα $V(\tilde{z}) < \frac{1}{2}V(\tilde{z}^-) + \frac{1}{2}V(\tilde{z}^+)$, και παίρνουμε γνήσια ανισότητα στην (3).$\square$

5 Μοναδικότητα Μέγιστων Επίπεδων Σωμάτων

Σε αυτήν την παράγραφο μελετάμε την μοναδικότητα των μέγιστων σωμάτων του συναρτησοειδούς $m(\cdot;n)$ $(d=2)$. Πιο συγκεκριμένα, θα δείξουμε με μία διαφορετική μέθοδο ότι τα τρίγωνα εμβαδού 1 είναι μέγιστα σώματα και ότι είναι τα μοναδικά.
Σε αυτήν την παράγραφο θα συμβολίζουμε με $|K|$ το εμβαδόν ενός επίπεδου κυρτού σώματος K.

Θεώρημα 5.1. *Αν T^2 τρίγωνο εμβαδού 1 τότε*

$$m(K;n) \leq m(T^2;n)$$

για κάθε επίπεδο κυρτό σώμα εμβαδού 1. Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν το K είναι τρίγωνο.

Η ιδέα της απόδειξης του Θεωρήματος 5.1 είναι η ίδια όπως στην περίπτωση για ελάχιστα σώματα. Πιο συγκεκριμένα, θα αποδείξουμε τα εξής

Πρόταση 5.1. *Για κάθε επίπεδο κυρτό σώμα K και για κάθε ευθεία G ισχύει*

$$m(K;n) \leq m(S_G(K);n)$$

Πρόταση 5.2. *Αν K επίπεδο κυρτό σώμα αλλά όχι τρίγωνο τότε υπάρχει ευθεία G ώστε*

$$m(K;n) < m(S_G(K);n)$$

Να σημειώσουμε εδώ ότι αυτή η μέθοδος αποτυγχάνει στις διαστάσεις $d > 2$ (βλ. [27], σελ. 309-317).

Όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.1, από τις Προτάσεις 5.1 και 5.2 έπεται το Θεώρημα 5.1.

Έστω λοιπόν K επίπεδο κυρτό σώμα και ευθεία G. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η G είναι ο y-άξονας και ότι το K βρίσκεται στον άνω ημιεπίπεδο. Έστω $P_G(K) = [\alpha, \beta]$ και $K = \{(x,y) : \alpha \leq x \leq \beta, f(x) \leq y \leq g(x)\}$ με $0 \leq f \leq g$, f κυρτή, g κοίλη. Αν $x_1, ..., x_n \in [\alpha, \beta]$, συμβολίζουμε $q_i = \frac{g(x_i)+f(x_i)}{2}$, $l_i = q_i^{'} = \frac{g(x_i)-f(x_i)}{2}$. Με αυτόν τον συμβολισμό έχουμε

$$m(K;n) = \frac{1}{2}\int_{x_1\in[\alpha,\beta]} \dots \int_{x_n\in[\alpha,\beta]} M(x_1,...,x_n)dx_n \dots dx_1$$

όπου
$M(x_1,...,x_n) =$

$\int_{|z_1|\leq l_1} \dots \int_{|z_n|\leq l_n} |conv\{(x_i, q_i + z_i) : i = 1,...,n\}| + |conv\{(x_i, q_i - z_i) : i = 1,...,n\}| dz_n \dots dz_1$

Όμοια,

$$m(S_G(K);n) = \frac{1}{2}\int_{x_1\in[\alpha,\beta]} \dots \int_{x_n\in[\alpha,\beta]} M_G(x_1,...,x_n)dx_n \dots dx_1$$

όπου
$M_G(x_1,...,x_n) =$
$\int_{|z_1|\leq l_1} \dots \int_{|z_n|\leq l_n} |conv\{(x_i, q_i^{'} + z_i) : i = 1,...,n\}| + |conv\{(x_i, q_i^{'} - z_i) : i = 1,...,n\}| dz_n \dots dz_1$

Για να αποδειχθεί λοιπόν η Πρόταση 5.1, αρκεί να δείξουμε ότι

$$M(x_1,...,x_n) \leq M_G(x_1,...,x_n)$$

για κάθε $\alpha \leq x_1 < x_2 < ... < x_n \leq \beta$. Μπορούμε να υποθέτουμε ότι τα $x_1, ..., x_n$ είναι διαφορετικά ανά δύο διότι το σύνολο $\{(x_1, ..., x_n) : x_i = x_j$ για κάποια $i \neq j\}$ έχει μέτρο 0. Σταθεροποιούμε $\alpha \leq x_1 < x_2 < ... < x_n \leq \beta$. Η παραπάνω σχέση προκύπτει, αρκεί να δείξουμε ότι

$$|conv\{(x_i, q_i + z_i)_{i=1}^n\}| + |conv\{(x_i, q_i - z_i)_{i=1}^n\}| \leq |conv\{(x_i, q_i^{'} + z_i)_{i=1}^n\}| + |conv\{(x_i, q_i^{'} - z_i)_{i=1}^n\}|$$

για κάθε $|z_i| \leq l_i$, $i = 1, ..., n$.
Σταθεροποιούμε $|z_i| \leq l_i$. Υπάρχουν $\lambda_i \geq 0$, $\mu_i \geq 0$, $\lambda_i + \mu_i = 1$ τέτοια ώστε

$$q_i + z_i = \lambda_i f(x_i) + \mu_i g(x_i)$$

Τότε

$$\begin{aligned} q_i - z_i &= \mu_i f(x_i) + \lambda_i g(x_i) \\ q_i^{'} + z_i &= -\mu_i f(x_i) + \mu_i g(x_i) \\ q_i^{'} - z_i &= -\lambda_i f(x_i) + \lambda_i g(x_i) \end{aligned}$$

Οπότε έχουμε να δείξουμε ότι

$$|R| + |Q| \leq |R^{'}| + |Q^{'}|$$

όπου

$$\begin{aligned} R &= conv\{(x_i, \lambda_i f(x_i) + \mu_i g(x_i))_{i=1}^n\} \\ Q &= conv\{(x_i, \mu_i f(x_i) + \lambda_i g(x_i))_{i=1}^n\} \\ R^{'} &= conv\{(x_i, \mu_i g(x_i) - \mu_i f(x_i))_{i=1}^n\} \\ Q^{'} &= conv\{(x_i, \lambda_i g(x_i) - \lambda_i f(x_i))_{i=1}^n\} \end{aligned}$$

Προχωράμε με κάποιους συμβολισμούς.
Αν $X = \{(x_i, y_i) : i = 1, ..., n\}$, $x_1 < x_2 < ... < x_n$, θα λέμε ότι το (x_l, y_l) είναι

- *άνω κορυφή του* X αν $i < l < j \Rightarrow y_l > \frac{x_j - x_l}{x_j - x_i} y_i + \frac{x_l - x_i}{x_j - x_i} y_j$

- *κάτω κορυφή του* X αν $i < l < j \Rightarrow y_l < \frac{x_j - x_l}{x_j - x_i} y_i + \frac{x_l - x_i}{x_j - x_i} y_j$

Παρατηρήσεις:
(i) Οι 1, n είναι δείκτες άνω και κάτω κορυφών του X.
(ii) Οι άνω και κάτω κορυφές του X αποτελούν όλα τα ακραία σημεία του $convX$.
(iii) Αν $i < l < j$ και οι i, j δείκτες διαδοχικών άνω (κάτω) κορυφών του X, τότε

$$y_l \leq (\geq) \frac{x_j - x_l}{x_j - x_i} y_i + \frac{x_l - x_i}{x_j - x_i} y_i$$

Αν $I = \{1 = i_0 < i_1 < ... < i_k = n\} \subseteq \{1, 2, ..., n\}$, θα συμβολίζουμε με $\gamma_X^I : [x_1, x_n] \to \mathbb{R}$ την πολυγωνική γραμμή που έχει κορυφές τα σημεία (x_{i_s}, y_{i_s}), $s = 1, ..., k$.

Επιπλέον, αν $J = \{1 = j_0 < j_1 < ... < j_k = n\} \subseteq \{1, 2, ..., n\}$, ορίζουμε

$$E_X(J) = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{k}(x_{j_s} - x_{j_{s-1}})(y_{j_s} + y_{j_{s-1}}) = \int_{x\in[x_1,x_n]} \gamma_X^J(x)dx$$

Με αυτούς τους συμβολισμούς, αν I, J οι δείκτες των άνω και κάτω κορυφών του X αντίστοιχα, τότε έχουμε

$$|convX| = E_X(I) - E_X(J)$$

Λήμμα 5.1. *Έστω I, J οι δείκτες των άνω και κάτω κορυφών του R, αντίστοιχα, K, L οι δείκτες των άνω και κάτω κορυφών του Q, αντίστοιχα, $I^{'}$, $J^{'}$ οι δείκτες των άνω και κάτω κορυφών του $R^{'}$, αντίστοιχα και $K^{'}$, $L^{'}$ οι δείκτες των άνω και κάτω κορυφών του $Q^{'}$, αντίστοιχα. Τότε*

$$I \cup L \subseteq I^{'}, K \cup J \subseteq K^{'}$$

και

$$I \cap L \supseteq L^{'}, K \cap J \supseteq J^{'}$$

Απόδειξη. Έστω $i \in I$ και $j < i < k$. Τότε
$\lambda_i f(x_i) + \mu_i g(x_i) > \frac{x_k - x_i}{x_k - x_j}(\lambda_j f(x_j) + \mu_j g(x_j)) + \frac{x_i - x_j}{x_k - x_j}(\lambda_k f(x_k) + \mu_k g(x_k))$.
Επίσης, $x_i = \frac{x_k - x_i}{x_k - x_j}x_j + \frac{x_i - x_j}{x_k - x_j}x_k$ και από την κυρτότητα της f παίρνουμε
$-f(x_i) \geq -\frac{x_k - x_i}{x_k - x_j}f(x_j) - \frac{x_i - x_j}{x_k - x_j}f(x_k)$. Επομένως
$\mu_i g(x_i) - \mu_i f(x_i) = \lambda_i f(x_i) + \mu_i g(x_i) - f(x_i) > \frac{x_k - x_i}{x_k - x_j}(\mu_j g(x_j) - \mu_j f(x_j)) + \frac{x_i - x_j}{x_k - x_j}(\mu_k g(x_k) - \mu_k f(x_k))$, δηλαδή $i \in I^{'}$.

Όμοια μπορούμε να δούμε τους εγκλεισμούς

$$K \subseteq K^{'}, L \supseteq L^{'}, J \supseteq J^{'}$$

Ορίζουμε

$$R^{''} = conv\{(x_i, \lambda_i f(x_i) - \lambda_i g(x_i))\} \text{ η ανάκλαση του } Q^{'} \text{ ως προς τον } x-\text{άξονα}$$

$$Q^{''} = conv\{(x_i, \mu_i f(x_i) - \mu_i g(x_i))\} \text{ η ανάκλαση του } R^{'} \text{ ως προς τον } x-\text{άξονα}$$

Έστω $I^{''}$, $J^{''}$ και $K^{''}$, $L^{''}$ οι άνω και κάτω κορυφές των $R^{''}$, $Q^{''}$ αντίστοιχα.
Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι

$$I^{''} = L^{'}, J^{''} = K^{'}, K^{''} = J^{'}, L^{''} = I^{'}$$

Όμοια με πριν αποδεικνύεται ότι

$$J \subseteq J^{''}, L \subseteq L^{''}, K \supseteq K^{''}, I \supseteq I^{''}$$

□

Απόδειξη Πρότασης 5.1. Υπενθυμίζουμε ότι για να αποδείξουμε την Πρόταση 5.1 αρκεί να δείξουμε ότι

$$|R| + |Q| \leq |R^{'}| + |Q^{'}|$$

δηλαδή

$$E_R(I) - E_R(J) + E_Q(K) - E_Q(L) \leq E_{R'}(I^{'}) - E_{R'}(J^{'}) + E_{Q'}(K^{'}) - E_{Q'}(L^{'})$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε

$$E_R(I) + E_{Q'}(L^{'}) \leq E_{R'}(I^{'}) + E_Q(L) \tag{1}$$

$$E_Q(K) + E_{R'}(J^{'}) \leq E_{Q'}(K^{'}) + E_R(J) \tag{2}$$

Δείχνουμε την (1) και με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται η (2).

Από το Λήμμα 5.1, $I \cup L \subseteq I^{'}$ άρα $\gamma_{R'}^{I \cup L} \leq \gamma_{R'}^{I^{'}}$ αφού η $\gamma_{R'}^{I^{'}}$ είναι κοίλη. Επομένως,

$$E_{R'}(I \cup L) \leq E_{R'}(I^{'})$$

Άρα, αρκεί να δείξουμε ότι

$$E_R(I) + E_{Q'}(L^{'}) \leq E_{R'}(I \cup L) + E_Q(L) \tag{3}$$

Η (3) θα είναι σωστή, αρκεί

$$\gamma_R^I(x_k) + \gamma_{Q'}^{L^{'}}(x_k) \leq \gamma_{R'}^{I \cup L}(x_k) + \gamma_Q^L(x_k), k = 1, 2, ..., n \tag{4}$$

Με γ_R^I εννοούμε την καμπύλη $\gamma_{\tilde{R}}^I$, όπου $\tilde{R}$ το σύνολο του οποίου την κυρτή θήκη πήραμε για να ορίσουμε το R. Όμοια για τις υπόλοιπες καμπύλες. Από το Λήμμα 5.1, έχουμε $I, L^{'}, L \subseteq I \cup L$ οπότε, αν k_s, k_{s+1} διαδοχικοί δείκτες στο $I \cup L$ τότε οι παραπάνω πολυγωνικές γραμμές είναι γραμμικές στο διάστημα $[x_{k_s}, x_{k_{s+1}}]$. (δηλαδή οι κορυφές τους είναι στο $I \cup L$) Οπότε, αρκεί να δείξουμε την (4) για κάθε $k \in I \cup L$.

Έστω $L^{'} = \{1 = \rho_1 < \rho_2 < ... < \rho_\nu = n\}$, $s = 1, 2, ..., \nu - 1$ και $\rho_s \leq k \leq \rho_{s+1}$. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

Περίπτωση 1 $k = \rho_s$ ή $k = \rho_{s+1}$. Τότε $k \in I$ και $k \in L$ άρα $k \in I$, $k \in L^{'}$, $k \in I \cup L$, $k \in L$, δηλαδή το k είναι κορυφή και των τεσσάρων καμπυλών, άρα

$\gamma_R^I(x_k) + \gamma_{Q'}^{L^{'}}(x_k) = \lambda_k f(x_k) + \mu_k g(x_k) + \lambda_k g(x_k) - \lambda_k f(x_k) = g(x_k) = \mu_k g(x_k) - \mu_k f(x_k) + \mu_k f(x_k) + \lambda_k g(x_k)) = \gamma_{R'}^{I \cup L}(x_k) + \gamma_Q^L(x_k)$

Περίπτωση 2 $k \in I \cap L \backslash L^{'}$. Τότε $k \in I$, $k \in L$, $k \in I \cup L$. Άρα

$$\begin{aligned} \gamma_R^I(x_k) &= \lambda_k f(x_k) + \mu_k g(x_k) \\ \gamma_Q^L(x_k) &= \mu_k f(x_k) + \lambda_k g(x_k) \\ \gamma_{R'}^{I \cup L}(x_k) &= \mu_k g(x_k) - \mu_k f(x_k) \end{aligned}$$

Η (4) γίνεται

$$\gamma_{Q'}^{L'}(x_k) \leq \lambda_k g(x_k) - \lambda_k f(x_k) \tag{5}$$

Επίσης, τα $(x_{\rho_s}, \lambda_{\rho_s} g(x_{\rho_s}) - \lambda_{\rho_s} f(x_{\rho_s}))$, $(x_{\rho_{s+1}}, \lambda_{\rho_{s+1}} g(x_{\rho_{s+1}}) - \lambda_{\rho_{s+1}} f(x_{\rho_{s+1}}))$ είναι διαδοχικές κάτω κορυφές του Q', άρα

$\gamma_{Q'}^{L'}(x_k) = \frac{x_{\rho_{s+1}} - x_k}{x_{\rho_{s+1}} - x_{\rho_s}}(\lambda_{\rho_s} g(x_{\rho_s}) - \lambda_{\rho_s} f(x_{\rho_s})) + \frac{x_k - x_{\rho_s}}{x_{\rho_{s+1}} - x_{\rho_s}}(\lambda_{\rho_{s+1}} g(x_{\rho_{s+1}}) - \lambda_{\rho_{s+1}} f(x_{\rho_{s+1}}))$

Η (5) γίνεται

$\frac{x_{\rho_{s+1}} - x_k}{x_{\rho_{s+1}} - x_{\rho_s}}(\lambda_{\rho_s} g(x_{\rho_s}) - \lambda_{\rho_s} f(x_{\rho_s})) + \frac{x_k - x_{\rho_s}}{x_{\rho_{s+1}} - x_{\rho_s}}(\lambda_{\rho_{s+1}} g(x_{\rho_{s+1}}) - \lambda_{\rho_{s+1}} f(x_{\rho_{s+1}})) \leq \lambda_k g(x_k) - \lambda_k f(x_k)$

η οποία είναι σωστή διότι $\rho_s < k < \rho_{s+1}$ και ρ_s, ρ_{s+1} διαδοχικοί δείκτες κάτω κορυφών του Q'.

Περίπτωση 3 $k \in I \backslash L$. Τότε $k \in I$, $k \in I \cup L$, άρα $k \in I'$. Τότε

$$\begin{aligned} \gamma_R^I(x_k) &= \lambda_k f(x_k) + \mu_k g(x_k) \\ \gamma_{R'}^{I \cup L}(x_k) &= \mu_k g(x_k) - \mu_k f(x_k) \end{aligned}$$

και η (4) γίνεται

$$\gamma_{Q'}^{L'}(x_k) \leq \gamma_Q^L(x_k) - f(x_k) \tag{6}$$

Έστω $l_\tau < l_{\tau+1}$ διαδοχικοί δείκτες στο L τέτοιοι ώστε $\rho_s \leq l_\tau < k < l_{\tau+1} \leq \rho_{s+1}$. (υπάρχουν διότι $L' \subseteq L$, $\rho_s < k < \rho_{s+1}$ και $k \notin L$) Τότε

$$\begin{aligned} \gamma_{Q'}^{L'}(x_k) &= \frac{x_{\rho_{s+1}} - x_k}{x_{\rho_{s+1}} - x_{\rho_s}}(\lambda_{\rho_s} g(x_{\rho_s}) - \lambda_{\rho_s} f(x_{\rho_s})) + \frac{x_k - x_{\rho_s}}{x_{\rho_{s+1}} - x_{\rho_s}}(\lambda_{\rho_{s+1}} g(x_{\rho_{s+1}}) - \lambda_{\rho_{s+1}} f(x_{\rho_{s+1}})) \\ \gamma_Q^L(x_k) &= \frac{x_{l_{\tau+1}} - x_k}{x_{l_{\tau+1}} - x_{l_\tau}}(\mu_{l_\tau} f(x_{l_\tau}) + \lambda_{l_\tau} g(x_{l_\tau})) + \frac{x_k - x_{l_\tau}}{x_{l_{\tau+1}} - x_{l_\tau}}(\mu_{l_{\tau+1}} f(x_{l_{\tau+1}}) + \lambda_{l_{\tau+1}} g(x_{l_{\tau+1}})) \end{aligned}$$

Από την κυρτότητα της f,

$$-f(x_k) \geq -\frac{x_{l_{\tau+1}} - x_k}{x_{l_{\tau+1}} - x_{l_\tau}} f(x_{l_\tau}) - \frac{x_k - x_{l_\tau}}{x_{l_{\tau+1}} - x_{l_\tau}} f(x_{l_{\tau+1}})$$

και η (6) θα είναι σωστή αρκεί

$$\gamma_{Q'}^{L'}(x_k) \leq \frac{x_{l_{\tau+1}} - x_k}{x_{l_{\tau+1}} - x_{l_\tau}}(\lambda_{l_\tau} g(x_{l_\tau}) - \lambda_{l_\tau} f(x_{l_\tau})) + \frac{x_k - x_{l_\tau}}{x_{l_{\tau+1}} - x_{l_\tau}}(\lambda_{l_{\tau+1}} g(x_{l_{\tau+1}}) - \lambda_{l_{\tau+1}} f(x_{l_{\tau+1}})) \tag{7}$$

Όμως

$\lambda_{l_\tau} g(x_{l_\tau}) - \lambda_{l_\tau} f(x_{l_\tau}) \geq$

$$\frac{x_{\rho_{s+1}} - x_{l_\tau}}{x_{\rho_{s+1}} - x_{\rho_s}}(\lambda_{\rho_s} g(x_{\rho_s}) - \lambda_{\rho_s} f(x_{\rho_s})) + \frac{x_{l_\tau} - x_{\rho_s}}{x_{\rho_{s+1}} - x_{\rho_s}}(\lambda_{\rho_{s+1}} g(x_{\rho_{s+1}}) - \lambda_{\rho_{s+1}} f(x_{\rho_{s+1}})) \qquad (8)$$

Πράγματι, αν $\rho_s = l_\tau$ τότε η (8) προφανώς ισχύει με ισότητα. Αν $\rho_s \neq l_\tau$ τότε η (8) ισχύει αφού $\rho_s < l_\tau < \rho_{s+1}$ και ρ_s, ρ_{s+1} διαδοχικοί δείκτες του $L^{'}$, όπως παρατηρήσαμε μετά τον ορισμό των άνω και κάτω κορυφών.

Όμοια,

$\lambda_{l_{\tau+1}} g(x_{l_{\tau+1}}) - \lambda_{l_{\tau+1}} f(x_{l_{\tau+1}}) \geq$

$$\frac{x_{\rho_{s+1}} - x_{l_{\tau+1}}}{x_{\rho_{s+1}} - x_{\rho_s}}(\lambda_{\rho_s} g(x_{\rho_s}) - \lambda_{\rho_s} f(x_{\rho_s})) + \frac{x_{l_{\tau+1}} - x_{\rho_s}}{x_{\rho_{s+1}} - x_{\rho_s}}(\lambda_{\rho_{s+1}} g(x_{\rho_{s+1}}) - \lambda_{\rho_{s+1}} f(x_{\rho_{s+1}})) \qquad (9)$$

Αντικαθιστώντας τα δεξιά μέλη των (8), (9) στην (7), βλέπουμε ότι η (7) επαληθεύεται.

Περίπτωση 4 $k \in L \backslash I$. Τότε $k \in L$, $k \in I \cup L$. Έστω $i_\tau < i_{\tau+1}$ διαδοχικοί δείκτες στο I ώστε $\rho_s \leq i_\tau < k < i_{\tau+1} \leq \rho_{s+1}$. (υπάρχουν διότι $L^{'} \subseteq I$, $\rho_s < k < \rho_{s+1}$ και $k \notin I$) Συνεχίζουμε όπως στην προηγούμενη περίπτωση.

Έτσι λοιπόν τελειώνουμε με την απόδειξη της Πρότασης 5.1.□

Συνεχίζουμε με την απόδειξη της Πρότασης 5.2.

Αν $x_1 < x_2 < ... < x_n$, $h : [x_1, x_n] \to \mathbb{R}$ και $I = \{1 = i_1 < i_2 < ... < i_k = n\}$, θα συμβολίζουμε

$$E_h(I) = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{k}(x_{i_s} - x_{i_{s-1}})(h(x_{i_s}) - h(x_{i_{s-1}}))$$

Θέτουμε $\mu_i = \lambda_i = \frac{1}{2}$ στα πολύγωνα R, Q, $R^{'}$, $Q^{'}$ και παίρνουμε τα πολύγωνα

$$R_0 = Q_0 = conv\{(x_i, q_i)_{i=1}^n\} = conv\{(x_i, \frac{1}{2}f(x_i) + \frac{1}{2}g(x_i))_{i=1}^n\}$$

$$R_0^{'} = Q_0^{'} = conv\{(x_i, q_i^{'})_{i=1}^n\} = conv\{(x_i, \frac{1}{2}g(x_i) - \frac{1}{2}f(x_i))_{i=1}^n\}$$

με δείκτες άνω και κάτω κορυφών I_0, J_0 και $I_0^{'}$, $J_0^{'}$ αντίστοιχα.

Αποδεικνύουμε αρχικά ένα λήμμα.

Λήμμα 5.2. *Αν $|R_0| = |R_0^{'}|$ τότε ισχύουν τα παρακάτω:*

(α) Τα σημεία $(x_i, f(x_i))$, $i \in I_0$ είναι συνευθειακά.

(β) Τα σημεία $(x_j, g(x_j))$, $j \in J_0$ είναι συνευθειακά.

(γ) Αν $j \in J_0$ και $i_k < j < i_{k+1}$, όπου i_k, i_{k+1} διαδοχικοί δείκτες στο I_0 τότε τα σημεία $(x_{i_k}, g(x_{i_k}))$, $(x_j, g(x_j))$, $(x_{i_{k+1}}, g(x_{i_{k+1}}))$ είναι συνευθειακά.

(δ) *Αν* $i \in I_0$ *και* $j_k < i < j_{k+1}$, *όπου* j_k, j_{k+1} *διαδοχικοί δείκτες στο* J_0 *τότε τα σημεία* $(x_{j_k}, f(x_{j_k}))$, $(x_i, f(x_i))$, $(x_{j_{k+1}}, f(x_{j_{k+1}}))$ *είναι συνευθειακά.*

(ϵ) $I_0^{'} = I_0 \cup J_0$

Απόδειξη. Από το Λήμμα 5.1, $I_0 \cup J_0 \subseteq I_0^{'}$. Προφανώς $J_0^{'} = \{1, n\}$. Αφού $|R_0| = |R_0^{'}|$ τότε

$$E_{R_0}(I_0) - E_{R_0}(J_0) = E_{R_0^{'}}(I_0^{'}) - E_{R_0^{'}}(J_0^{'})$$

ισοδύναμα

$$\frac{1}{2}E_f(I_0) + \frac{1}{2}E_g(I_0) - \frac{1}{2}E_f(J_0) - \frac{1}{2}E_g(J_0) = \frac{1}{2}E_g(I_0^{'}) - \frac{1}{2}E_f(I_0^{'}) - \frac{1}{2}E_g(J_0^{'}) + \frac{1}{2}E_f(J_0^{'})$$

ισοδύναμα

$$[E_g(I_0^{'}) - E_g(I_0)] + [E_g(J_0) - E_g(J_0^{'})] + [E_f(J_0^{'}) - E_f(I_0)] + [E_f(J_0) - E_f(I_0^{'})] = 0 \qquad (10)$$

Όλες οι διαφορές στην (10) είναι μη-αρνητικές, π.χ. αφού $I_0 \subseteq I_0^{'}$ και g κοίλη, παίρνουμε $E_g(I_0^{'}) \geq E_g(I_0)$ και αφού $J_0^{'} \subseteq I_0$ και f κυρτή, παίρνουμε $E_f(J_0^{'}) \geq E_f(I_0)$
Άρα η (10) μας δίνει τις σχέσεις

$$\begin{aligned} E_f(J_0^{'}) &= E_f(I_0) && (11)\\ E_g(J_0) &= E_g(J_0^{'}) && (12)\\ E_g(I_0^{'}) &= E_g(I_0) && (13)\\ E_f(J_0) &= E_f(I_0^{'}) && (14) \end{aligned}$$

Αν $F = conv\{(x_i, f(x_i))_{i=1}^n\}$, αφού η f κυρτή και $J_0^{'} \subseteq I_0$ παίρνουμε $\gamma_F^{I_0} \leq \gamma_F^{J_0^{'}}$. Όμως, η (11) γράφεται

$$\int_{x \in [x_1, x_n]} \gamma_F^{J_0^{'}}(x)dx = \int_{x \in [x_1, x_n]} \gamma_F^{I_0}(x)dx$$

Επομένως $\gamma_F^{I_0} = \gamma_F^{J_0^{'}}$, από την οποία έπεται ότι η $\gamma_F^{I_0}$ είναι αφφινική. Έπεται το (α).

Αν $G = conv\{(x_i, g(x_i))_{i=1}^n\}$, αφού η g κοίλη και $J_0^{'} \subseteq J_0$ παίρνουμε $\gamma_G^{J_0^{'}} \leq \gamma_G^{J_0}$. Όπως πριν, έπεται ότι η $\gamma_G^{J_0}$ είναι αφφινική και το (β).

Αφού η g κοίλη και $I_0 \subseteq I_0^{'}$, $\gamma_G^{I_0} \leq \gamma_G^{I_0^{'}}$ και από την (13) έπεται

$$\gamma_G^{I_0} = \gamma_G^{I_0^{'}} \qquad (15)$$

Έστω $j \in J_0$ και $i_k < j < i_{k+1}$, όπου i_k, i_{k+1} διαδοχικοί δείκτες στο I_0. Από την (15) έπεται ότι η $\gamma_G^{I_0^{'}}$ αφφινική στο $[x_{i_k}, x_{i_{k+1}}]$. Αφού $J_0 \subseteq I_0^{'}$, έπεται το (γ).

Από την κυρτότητα της f, από $J_0 \subseteq I_0^{'}$ και από την (14) έπεται, όπως πριν, ότι

$$\gamma_F^{J_0} = \gamma_F^{I_0^{'}} \tag{16}$$

Αν $i \in I_0$ και $j_k < i < j_{k+1}$, όπου j_k, j_{k+1} διαδοχικοί δείκτες στο J_0, από την (16) έπεται ότι η $\gamma_F^{I_0^{'}}$ είναι αφφινική στο $[x_{j_k}, x_{j_{k+1}}]$. Αφού επιπλέον $I_0 \subseteq I_0^{'}$, έπεται το (δ).

Για το (ϵ), έχουμε $W = I_0 \cup J_0 \subseteq I_0^{'}$. Αν $W \subsetneq I_0^{'}$ τότε $W \subsetneq I_0^{'} \cup J_0^{'}$ άρα $R_0^{''} \subsetneq R_0^{'}$ (το $R_0^{''}$ έχει αυστηρά λιγότερα ακραία σημεία από το $R_0^{'}$) άρα $|R_0^{''}| < |R_0^{'}|$, όπου $R_0^{''} = conv\{(x_i, q_i^{'}) : i \in W\}$. Όμως,

$$|conv\{(x_i, q_i) : i \in W\}| \leq |conv\{(x_i, q_i^{'}) : i \in W\}| \tag{17}$$

Αυτό προκύπτει από την ανισότητα $|R| + |Q| \leq |R^{'}| + |Q^{'}|$ που αποδείχθηκε στην απόδειξη της Πρότασης 5.1 (με περιορισμό στους δείκτες στο W). Η (17) είναι ισοδύναμη με $|R_0| \leq |R_0^{''}|$ (το $conv\{(x_i, q_i) : i \in W\}$ ταυτίζεται με το R_0). Έπεται ότι $|R_0| < |R_0^{'}|$, αντίφαση. Επομένως $W = I_0^{'}$.$\square$

Το Θεώρημα Minkowski (βλ. [19], σελ 75) λέει ότι κάθε κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^d$ καθορίζεται πλήρως από τα ακραία σημεία του:

Θεώρημα Minkowski
Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^d$ κυρτό συμπαγές σύνολο. Τότε $K = conv(exp(K))$.

Απόδειξη Πρότασης 5.2. Έστω K επίπεδο κυρτό σώμα εμβαδού 1 το οποίο δεν είναι τρίγωνο. Από το Θεώρημα Minkowski, το K έχει τουλάχιστον 4 ακραία σημεία. Έστω $ABCD$ το κυρτό τετράπλευρο που ορίζουν αυτά τα σημεία. Επιλέγουμε σαν G την ευθεία που ορίζεται από την διαγώνιο AC. Περνώντας σε κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων, μπορούμε να υποθέσουμε τα εξής:

- $K = \{(x, y) : a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$, όπου $0 \leq f \leq g$, f κυρτή, g κοίλη.

- $A = (x_0, g(x_0))$, $C = (x_0, f(x_0))$, όπου $a < x_0 < b$.

Τότε $S_G(K) = \{(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq g(x) - f(x)\}$. Επιλέγουμε σημεία $a \leq \tilde{x}_1 < \tilde{x}_2 < ... < \tilde{x}_n \leq b$, $n \geq 3$, ώστε $\tilde{x}_2 = x_0$. Θέτουμε $\tilde{q}_i = \frac{g(\tilde{x}_i)+f(\tilde{x}_i)}{2}$, $\tilde{q}_i^{'} = \frac{g(\tilde{x}_i)-f(\tilde{x}_i)}{2}$ και $\tilde{R}_0 = conv\{(\tilde{x}_i, \tilde{q}_i)\}$, $\tilde{R}_0^{'} = conv\{(\tilde{x}_i, \tilde{q}_i^{'})\}$, με αντίστοιχα σύνολα δεικτών των άνω και κάτω κορυφών $\tilde{I}_0$, $\tilde{J}_0$ και $\tilde{I}_0^{'}$, $\tilde{J}_0^{'}$. Θα δείξουμε ότι

$$|\tilde{R}_0| < |\tilde{R}_0^{'}| \tag{18}$$

Έστω ότι $|\tilde{R}_0| = |\tilde{R}_0^{'}|$. Από το Λήμμα 5.2($\epsilon$), παίρνουμε $\tilde{I}_0^{'} = \tilde{I}_0 \cup \tilde{J}_0$. Επίσης, το $(\tilde{x}_2, \tilde{q}_2^{'})$ είναι ακραίο σημείο του $\tilde{R}_0^{'}$. Πράγματι, αν όχι, τότε, επειδή τα $(\tilde{x}_i, \tilde{q}_i^{'})$ βρίσκονται στο γράφημα μίας κοίλης συνάρτησης, το $(\tilde{x}_2, \tilde{q}_2^{'})$ είναι εσωτερικό σημείο κάποιας πλευράς του $\tilde{R}_0^{'}$ με άκρα $(\tilde{x}_i, \tilde{q}_i^{'})$ και $(\tilde{x}_j, \tilde{q}_j^{'})$, $i \neq j$. Υπάρχουν τότε $\lambda, \mu > 0$, $\lambda + \mu = 1$ τέτοια ώστε $\tilde{x}_i = \lambda\tilde{x}_i + \mu\tilde{x}_j$ και $\frac{g(\tilde{x}_2)-f(\tilde{x}_2)}{2} = \lambda\frac{g(\tilde{x}_i)-f(\tilde{x}_i)}{2} + \mu\frac{g(\tilde{x}_j)-f(\tilde{x}_j)}{2}$, ισοδύναμα

$$g(\tilde{x}_2) - (\lambda g(\tilde{x}_i) + \mu g(\tilde{x}_j)) = f(\tilde{x}_2) - (\lambda f(\tilde{x}_i) + \mu f(\tilde{x}_j)) \tag{19}$$

Αφού η g κοίλη και η f κυρτή, το αριστερό και το δεξί μέλος της (19) είναι ≥ 0 και ≤ 0 αντίστοιχα. Άρα, από την (19) παίρνουμε $g(\tilde{x}_2) = \lambda g(\tilde{x}_i) + \mu g(\tilde{x}_j)$ και $f(\tilde{x}_2) = \lambda f(\tilde{x}_i) + \mu f(\tilde{x}_j)$, αντίφαση

διότι τα A, C είναι ακραία σημεία του K. Άρα $2 \in \tilde{I}_0' \cup \tilde{J}_0'$.
Αφού επιπλέον $\tilde{J}_0' = \{1, n\}$, $2 \in \tilde{I}_0'$. Επίσης, έχουμε $1 \in \tilde{I}_0 \cap \tilde{J}_0$. Έστω k δείκτης ώστε οι $1, 2, k$ να είναι διαδοχικοί στο $\tilde{I}_0'$ (υπάρχει διότι $n \in \tilde{I}_0'$ και $n \geq 3$).

Περίπτωση 1 $\{1, 2, k\} \subseteq \tilde{I}_0$. Τότε από το Λήμμα 5.2($\alpha$), τα σημεία $(\tilde{x}_1, f(\tilde{x}_1))$, $(\tilde{x}_2, f(\tilde{x}_2)) = C$, $(\tilde{x}_k, f(\tilde{x}_k))$ είναι συνευθειακά, αντίφαση διότι το C είναι ακραίο σημείο του K.

Περίπτωση 2 $\{1, 2, k\} \subseteq \tilde{J}_0$. Τότε από το Λήμμα 5.2($\beta$), τα σημεία $(\tilde{x}_1, g(\tilde{x}_1))$, $(\tilde{x}_2, g(\tilde{x}_2)) = A$, $(\tilde{x}_k, g(\tilde{x}_k))$ είναι συνευθειακά, αντίφαση διότι το A είναι ακραίο σημείο του K.

Περίπτωση 3 $\{1, 2\} \subseteq \tilde{J}_0$, $\{1, k\} \subseteq \tilde{I}_0$. Τότε από το Λήμμα 5.2($\gamma$), τα σημεία $(\tilde{x}_1, g(\tilde{x}_1))$, $(\tilde{x}_2, g(\tilde{x}_2)) = A$, $(\tilde{x}_k, g(\tilde{x}_k))$ είναι συνευθειακά, αντίφαση διότι το A είναι ακραίο σημείο του K.

Περίπτωση 4 $\{1, 2\} \subseteq \tilde{I}_0$, $\{1, k\} \subseteq \tilde{J}_0$. Τότε από το Λήμμα 5.2($\delta$), τα σημεία $(\tilde{x}_1, f(\tilde{x}_1))$, $(\tilde{x}_2, f(\tilde{x}_2)) = C$, $(\tilde{x}_k, f(\tilde{x}_k))$ είναι συνευθειακά, αντίφαση διότι το C είναι ακραίο σημείο του K.

Επομένως η (18) ισχύει από την οποία σχέση και την Πρόταση 5.1 έπεται, όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 4.2,

$$m(K; n) < m(S_G(K); n)$$

□

Κλείνουμε την κουβέντα για τα μέγιστα και ελάχιστα σώματα του συναρτησοειδούς $m(\cdot, n)$ σημειώνοντας ότι ο Buchta ([5], , σελ. 212-220) υπολόγισε την ελάχιστη και την μέγιστη τιμή:

$$m(B; n) = 1 + \frac{2}{3} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} (x - \sin x)^n \sin x dx, \text{ αν } B \text{ έλλειψη και}$$

$$m(T; n) = 1 - \frac{2}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \text{ αν } T \text{ τρίγωνο.}$$

6 Γραμμικά Παραμετρικά Συστήματα

Με την βοήθεια των γραμμικών παραμετρικών συστημάτων θα δούμε πιο μεθοδικά τις αποδείξεις των Θεωρημάτων 3.1, 4.1 και 4.2. Επιπλέον, αυτή η μέθοδος μας λέει ποιοι δεν είναι πιθανοί maximizers του συναρτησοειδούς Sylvester το οποίο θα ενισχύσει περισσότερο την εικασία του simplex. Πριν ξεκινήσουμε να δουλεύουμε προς αυτόν τον στόχο, ας δούμε λίγο πιο προσεκτικά την Steiner συμμετρικοποίηση και τον μετασχηματισμό Schüttelung.

Έστω K κυρτό σώμα και διεύθυνση $v \in S^{d-1}$ και ας υποθέσουμε ότι $v = (0, ..., 0, 1)$ και έστω G ευθεία παράλληλη στο v. Έστω

$$K = \{(x, y) : x \in P_G(K), f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

Μπορούμε να δούμε την ανάκλαση, την Steiner συμμετρικοποίηση και την Schüttelung του K ως αποτέλεσμα μίας μεταφοράς των παράλληλων προς το v χορδών. Πιο συγκεκριμένα, θεωρούμε την οικογένεια των κυρτών σωμάτων

$$K_t = \{(x, y) + t\beta(x, y)v : (x, y) \in K\}, \ -1 \leq t \leq 1$$

Αν $\beta(x, y) = -(f(x) + g(x))$, τότε $K_0 = K$ και K_1 η ανάκλαση του K ως προς το υπερεπίπεδο ορθογώνιο στην G.

Αν $\beta(x, y) = -(f(x) + g(x))/2$, τότε $K_0 = K$ και $K_1 = St_G(K)$.

Αν $\beta(x, y) = -f(x)$, τότε $K_0 = K$ και $K_1 = S_G(K)$.

Μία οικογένεια (K_t), $a \leq t \leq b$, όπου $a < 0 < b$, θα την λέμε γραμμικό παραμετρικό σύστημα του φραγμένου συνόλου $K \subseteq \mathbb{R}^d$ αν είναι της μορφής

$$K_t = conv\{x_i + t\beta(i)v : i \in I\}, \ a \leq t \leq b$$

όπου $K = \{x_i : i \in I\}$, $v \in S^{d-1}$ και $\beta : I \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Σημειώνουμε ότι δεν απαιτούμε τα σημεία του K να βρίσκονται σε 1-1 αντιστοιχία με τους δείκτες του συνόλου I, δηλαδή μπορεί να ισχύει $x_i = x_j$ για κάποια $i, j \in I$ με $i \neq j$.

Οι Rogers-Shephard ([28] σελ. 93-102) απέδειξαν ότι ο όγκος $t \mapsto |K_t|$ είναι κυρτή συνάρτηση.

Ειδική περίπτωση του ορισμού του γραμμικού παραμετρικού συστήματος είναι η εξής: αν έχουμε $x_i \neq x_j$ για κάθε $i, j \in I$ με $i \neq j$, θα βλέπουμε την β σαν συνάρτηση με πεδίο ορισμού το K και τα K_t ως

$$K_t = conv\{x + t\beta(x)v : x \in K\}, \ a \leq t \leq b$$

Σε αυτήν την παράγραφο, από εδώ και πέρα θα θεωρούμε γραμμικά παραμετρικά συστήματα μόνο της ειδικής περίπτωσης.

Αν επιπλέον το K είναι κυρτό σώμα, τα σύνολα $\{x + t\beta(x)v : x \in K\}$ είναι κυρτά και η ταχύτητα β είναι σταθερή σε κάθε χορδή, δηλαδή η $\beta(x_1, ..., x_{d-1}, x_d)$ είναι ανεξάρτητη του x_d (όταν $v = (0, ..., 0, 1)$), τότε την οικογένεια (K_t) θα την λέμε *RS-κίνηση* του K.

Παραδείγματα RS-κινήσεων είναι η ανάκλαση, η Steiner συμμετρικοποίηση και η Schüttelung ενός κυρτού σώματος.

Παρατηρούμε ότι αν σε μία RS-κίνηση η ταχύτητα β είναι αφφινική τότε τα K_t είναι μεταξύ τους αφφινικά ισοδύναμα (με τους μετασχηματισμούς να διατηρούν τον όγκο). Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι $v = (0, ..., 0, 1)$, οι $T_t : K_0 \to K_t$, $T(x^1, ..., x^{d-1}, x^d) = (x^1, ..., x^{d-1}, x^d + t\beta(x^1, ..., x^{d-1}))$ είναι αφφινικοί.

Ένα κυρτό σώμα K θα το λέμε *RS-indecomposable* αν κάθε RS-κίνηση (K_t), $-1 \leq t \leq 1$ του K έχει αφφινική ταχύτητα β. Το K θα το λέμε *RS-decomposable* αν δεν είναι RS-indecomposable.

Είναι προφανές από τον ορισμό ότι δύο αφφινικά ισοδύναμα σώματα είτε θα είναι και τα δύο RS-indecomposable είτε θα είναι και τα δύο RS-decomposable.

Πρόταση 6.1. *Ένα πολύγωνο είναι RS-indecomposable αν και μόνο αν είναι τρίγωνο.*

Απόδειξη. Έστω T τρίγωνο και RS-κίνηση (K_t), $-1 \leq t \leq 1$ με $v = (0, 1)$ και ταχύτητα β. Έστω $K = \{(x, y) : a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$. Αφού το T είναι τρίγωνο, μία από τις f, g είναι αφφινική. Ας υποθέσουμε ότι η f είναι αφφινική. Τα K_t τα γράφουμε στη μορφή

$$K_t = \{(x, y) : a \leq x \leq b, f(x) + t\beta(x) \leq y \leq g(x) + t\beta(x)\}$$

Έστω $x_1, x_2 \in [a, b]$ και $\lambda, \mu \geq 0$, $\lambda + \mu = 1$. Οι $h_t(x) = f(x) + t\beta(x)$, $-1 \leq t \leq 1$ είναι κυρτές, άρα

$$h_t(\lambda x_1 + \mu x_2) \leq \lambda h_t(x_1) + \mu h_t(x_2)$$

και αφού επιπλέον η f αφφινική, παίρνουμε

$$t\beta(\lambda x_1 + \mu x_2) \leq \lambda t\beta(x_1) + \mu t\beta(x_2), -1 \leq t \leq 1 \tag{1}$$

Θέτοντας στην (1) $t = -1$ και $t = 1$ παίρνουμε $\beta(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda\beta(x_1) + \mu\beta(x_2)$.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση, έστω Q πολύγωνο αλλά όχι τρίγωνο με κορυφές $P_1, P_2, ..., P_r$, $r \geq 4$. Υποθέτουμε ότι το Q είναι όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 4.1. Υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε το ευθύγραμμο τμήμα $[(0, -\epsilon), (0, \epsilon)]$ περιέχεται στο $[(0, -\beta), (0, \alpha)]$. Θέτουμε $P_{1,t} = (0, t/\epsilon)$, $-1 \leq t \leq 1$ και θεωρούμε τα πολύγωνα $Q_t = conv\{P_2, ..., P_r\} \cup conv\{P_{1,t}, P_2, P_r\}$, $-1 \leq t \leq 1$. Θεωρούμε την αφφινική συνάρτηση $\sigma : [0, \delta] \to \mathbb{R}$ που ορίζεται από τις σχέσεις $\sigma(0) = 1$, $\sigma(\delta) = 0$. Επεκτείνουμε την σ στο $[0, \gamma]$ θέτοντας $\sigma(x) = 0$, $x \in [\delta, \gamma]$. Τότε τα $Q_t = \{(x, y) + t\sigma(x)v : (x, y) \in Q\}$, $-1 \leq t \leq 1$, όπου $v = (0, 1)$ αποτελούν RS-κίνηση του Q με σ μη-αφφινική στο $[0, \gamma]$.□

Το κλειδί για τον σκοπό μας είναι το παρακάτω

Θεώρημα 6.1. *Έστω $v \in S^{d-1}$ και ευθεία G παράλληλη στο v. Έστω (K_t), $-1 \leq t \leq 1$ RS-κίνηση του κυρτού σώματος K με διεύθυνση v και ταχύτητα β η οποία είναι συνεχής στο εσωτερικό του $P_G(K)$. Τότε το συναρτησοειδές $m_p(K_t; n, d)$ είναι κυρτή συνάρτηση του t.*
Επιπλέον, το $m_p(K_t; n, d)$ είναι γνήσια κυρτή συνάρτηση του t αν και μόνο αν η ταχύτητα β δεν είναι αφφινική στο εσωτερικό του $P_G(K)$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η διεύθυνση της RS-κίνησης είναι $v = (0, ..., 0, 1)$ και έστω G ευθεία παράλληλη στο v. Θέτουμε $H = P_G(K)$ και

$$K_t = \{(x, y) : x \in H, f(x) + t\beta(x) \leq y \leq g(x) + t\beta(x)\}$$

Τότε

$m_p(K_t;n,d) = \int_{(x_1,y_1)\in K_t} \dots \int_{(x_n,y_n)\in K_t} |conv\{(x_1,y_1),...,(x_n,y_n)\}|^p dy_1 \dots dy_n dx_1 \dots dx_n =$

$\int_{x_1\in H} \dots \int_{x_n\in H} \int_{f(x_1)+t\beta(x_1)}^{g(x_1)+t\beta(x_1)} \dots \int_{f(x_n)+t\beta(x_n)}^{g(x_n)+t\beta(x_n)} |conv\{(x_1,y_1),...,(x_n,y_n)\}|^p dy_n \dots dy_1 dx_n \dots dx_1 =$

$\int_{x_1\in H} \dots \int_{x_n\in H} \int_{f(x_1)}^{g(x_1)} \dots \int_{f(x_n)}^{g(x_n)} |conv\{(x_1,y_1+t\beta(x_1)),...,(x_n,y_n+t\beta(x_n))\}|^p dy_n \dots dy_1 dx_n \dots dx_1$

Από το K^n αφαιρούμε το σύνολο $\{((x_1,y_1),...,(x_n,y_n)) : |conv\{(x_1,y_1),...,(x_n,y_n)\}| = 0\}$ το οποίο είναι μέτρου 0. Δείχνουμε ότι η οικογένεια $P_t = conv\{(x_1,y_1+t\beta(x_1)),...,(x_n,y_n+t\beta(x_n))\}$ είναι γραμμικό παραμετρικό σύστημα του πολυτόπου $P = conv\{(x_1,y_1),...,(x_n,y_n)\}$. Τότε η $|P_t|^p$ θα είναι κυρτή συνάρτηση του t, αφού $p \geq 1$ άρα το ίδιο θα ισχύει για το συναρτησοειδές $m_p(K_t;n,d)$.
Έστω $(x,y) \in P$. Υπάρχουν $0 \leq \lambda_1(x,y),...,\lambda_n(x,y) \leq 1$ ώστε $\sum_{i=1}^n \lambda_i(x,y) = 1$ και $(x,y) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(x,y)(x_i,y_i)$. Παίρνουμε $\lambda_j(x_i,y_i) = \delta_{i,j}$. Ορίζουμε $\tilde{\beta}(x,y) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(x,y)\beta(x_i)$. Εύκολα βλέπουμε τότε ότι

$$P_t = conv\{(x, y + t\tilde{\beta}(x,y)) : (x,y) \in P\}$$

Αν η ταχύτητα β είναι αφφινική στο $intH$ τότε τα $intK_t$ είναι αφφινικά ισοδύναμα μεταξύ τους και όλα έχουν τον ίδιο όγκο άρα η $m_p(K_t;n,d)$ είναι σταθερή ως προς t.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση, υποθέτουμε αρχικά ότι $n = d+1$. Έστω ότι η β δεν είναι αφφινική στο $intH$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε κυρτό σώμα K και κάθε RS-κίνηση $(K_t), -1 \leq t \leq 1$, του K έχουμε

$$m_p(K_{-1};d) + m_p(K_1;d) > 2m_p(K_0;d) \tag{2}$$

Πράγματι, αν $(K_t), -1 \leq t \leq 1$ είναι RS-κίνηση του K και αν $-1 \leq t_1 < t_2 \leq 1$, θεωρούμε την RS-κίνηση $\tilde{K}_t = \{(x, y + t\tilde{\beta}(x)) : (x,y) \in \tilde{K}\}$, $-1 \leq t \leq 1$ του κυρτού σώματος $\tilde{K} = K_{(t_1+t_2)/2}$ με $\tilde{K}_{-1} = K_{t_1}$, $\tilde{K}_1 = K_{t_2}$ με μη-αφφινική ταχύτητα $\tilde{\beta} = \frac{t_2-t_1}{2}\beta$. Τότε, αφού $m_p(\tilde{K}_{-1};d) + m_p(\tilde{K}_1;d) > 2m_p(\tilde{K}_0;d)$, έπεται η $m_p(K_t;d)$ δεν είναι αφφινική στο $[t_1,t_2]$. Αφού η επιλογή των t_1,t_2 ήταν τυχαία και η $m(K_t;d)$ είναι κυρτή, έπεται ότι η $m(K_t;d)$ είναι γνήσια κυρτή.

Η (2) γράφεται

$$\int_{x_1\in H} \dots \int_{x_{d+1}\in H} \int_{f(x_1)}^{g(x_1)} \dots \int_{f(x_{d+1})}^{g(x_{d+1})} \psi(x_1,...,x_{d+1},y_1,...,y_{d+1}) dy_{d+1} \dots dy_1 dx_{d+1} \dots dx_1 > 0$$

όπου
$\psi(x_1,...,x_{d+1},y_1,...,y_{d+1}) =$

$|conv\{(x_i, y_i - \beta(x_i))_{i=1}^{d+1}\}|^p + |conv\{(x_i, y_i + \beta(x_i))_{i=1}^{d+1}\}|^p - 2|conv\{(x_i,y_i)_{i=1}^{d+1}\}|^p$

Η ψ είναι μη-αρνητική και η

$$M(x_1,...,x_{d+1}) = \int_{f(x_1)}^{g(x_1)} \dots \int_{f(x_{d+1})}^{g(x_{d+1})} \psi(x_1,...,x_{d+1},y_1,...,y_{d+1}) dy_{d+1} \dots dy_1$$

συνεχής στο $intH \times ... \times intH$. Αρκεί τότε να βρούμε εσωτερικά σημεία $\tilde{x}_i$ του H, $i = 1,...,d+1$ και $f(\tilde{x}_i) \leq \tilde{y}_i \leq g(\tilde{x}_i)$, $i = 1,...,d+1$ ώστε

$$\psi(\tilde{x}_1, ..., \tilde{x}_{d+1}, \tilde{y}_1, ..., \tilde{y}_{d+1}) > 0 \tag{3}$$

Αρκεί η (3) να ισχύει για $p = 1$ αφού η $h(\zeta) = |\zeta|^p$ είναι γνήσια αύξουσα και κυρτή, για $p > 1$.
Έστω $\tilde{x}_1, ..., \tilde{x}_d \in \mathbb{R}^{d-1}$ εσωτερικά σημεία του H αφφινικά ανεξάρτητα. Αφαιρώντας από την β την αφφινική συνάρτηση β' που ορίζεται από τις σχέσεις $\beta'(\tilde{x}_i) = \beta(\tilde{x}_i)$, $i = 1, ..., d$, αν χρειάζεται, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\beta(\tilde{x}_i) = 0$, $i = 1, ..., d$. Τότε τα νέα K_t είναι αφφινικά ισοδύναμα με τα προηγούμενα και το συναρτησοειδές m_p διατηρείται, άρα αρκεί να δείξουμε την (2) για τα νέα K_t.
Υπάρχει $\tilde{x}_{d+1} \in intH$ ώστε $\beta(\tilde{x}_{d+1}) \neq 0$.

Εξετάζουμε αρχικά την περίπτωση όπου $\tilde{x}_{d+1} \in conv\{\tilde{x}_1, ..., \tilde{x}_d\}$. Για κάθε $i = 1, ..., d$ επιλέγουμε $\tilde{y}_i \in \mathbb{R}$ ώστε $\tilde{z}_i = (\tilde{x}_i, \tilde{y}_i) \in K_0$. Θεωρούμε το υπερεπίπεδο $\tilde{H}$ που ορίζουν τα $\tilde{z}_i$ και έστω $\tilde{y}_{d+1} \in \mathbb{R}$ ώστε $\tilde{z}_{d+1} = (\tilde{x}_{d+1}, \tilde{y}_{d+1}) \in \tilde{H}$. Τότε

$$\psi(\tilde{x}_1, ..., \tilde{x}_{d+1}, \tilde{y}_1, ..., \tilde{y}_{d+1}) > 0$$

διότι το σύνολο $\{(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i) : i = 1, ..., d+1\}$ είναι επίπεδο ενώ τα $\{(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1), ..., (\tilde{x}_d, \tilde{y}_d), (\tilde{x}_{d+1}, \tilde{y}_{d+1} - \beta(\tilde{x}_{d+1}))\}$, $\{(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1), ..., (\tilde{x}_d, \tilde{y}_d), (\tilde{x}_{d+1}, \tilde{y}_{d+1} + \beta(\tilde{x}_{d+1}))\}$ δεν είναι.

Εξετάζουμε τώρα την περίπτωση στην οποία $\beta = 0$ στο $conv\{\tilde{x}_1, ..., \tilde{x}_d\}$. Τότε $\tilde{x}_{d+1} \notin conv\{\tilde{x}_1, ..., \tilde{x}_d\}$ και έστω $\tilde{y}_{d+1} \in \mathbb{R}$ ώστε $\tilde{z}_{d+1} = (\tilde{x}_{d+1}, \tilde{y}_{d+1}) \in K_0$. Θεωρούμε ένα υπερεπίπεδο $\bar{H}$ το οποίο περιέχει το $\tilde{z}_{d+1}$, δεν είναι παράλληλο στο $\{x^d = 0\}$ και τέμνει το εσωτερικό του $I = \{(x, y) \in K_0 : x \in conv\{\tilde{x}_1, ..., \tilde{x}_d\}\}$. Επιλέγουμε σημεία $\bar{z}_1 = (\bar{x}_1, \bar{y}_1), ..., \bar{z}_d = (\bar{x}_d, \bar{y}_d) \in \bar{H} \cap I$ ώστε τα $\bar{x}_1, ..., \bar{x}_d \in \mathbb{R}^{d-1}$ να είναι αφφινικά ανεξάρτητα. Θέτουμε $(\bar{x}_{d+1}, \bar{y}_{d+1}) = (\tilde{x}_{d+1}, \tilde{y}_{d+1})$. Τότε

$$\psi(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_{d+1}, \bar{y}_1, ..., \bar{y}_{d+1}) > 0$$

όπως πριν.

Στην γενική περίπτωση $n \geq d+1$, βρίσκουμε όπως πριν σημεία $\tilde{z}_i = (\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)$, $i = 1, ..., d+1$ και θέτουμε $\tilde{z}_i = \tilde{z}_{d+1}$, $i = d+2, ..., n$. Τότε

$$\psi(\tilde{x}_1, ..., \tilde{x}_n, \tilde{y}_1, ..., \tilde{y}_n) > 0$$

□

Από το γεγονός ότι κάθε γνήσια κυρτή συνάρτηση $f : K \to \mathbb{R}$, όπου K κυρτό σώμα, λαμβάνει την μέγιστη τιμή της μόνο σε ακραία σημεία του K (ειδικότερα, κάθε γνήσια κυρτή συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ λαμβάνει την μέγιστή της τιμή είτε στο a είτε στο b), παίρνουμε το παρακάτω:

Πόρισμα 6.1. *Κάθε μέγιστο σώμα του συναρτησοειδούς $m_p(\cdot; n, d)$ είναι RS-indecomposable.*

Απόδειξη. Έστω K κυρτό σώμα το οποίο είναι RS-decomposable και έστω $(K_t), -1 \leq t \leq 1$ RS-κίνηση του K με μη-αφφινική ταχύτητα β. Από το Θεώρημα 6.1, η συνάρτηση $f(t) = m_p(K_t; n, d)$ είναι γνήσια κυρτή. Τότε

$$m_p(K; n, d) = m_p(K_0; n, d) < \max\{m_p(K_{-1}; n, d), m_p(K_1; n, d)\}$$

□

Άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 6.1 είναι το Θεώρημα 3.1. Πράγματι, αν K ελάχιστο σώμα αλλά όχι ελλειψοειδές, από το Λήμμα 2.1, υπάρχει ευθεία G για την οποία το $P(G,K)$ δεν είναι επίπεδο. Υποθέτουμε ότι η G είναι ο x^d-άξονας και έστω $K = \{(x,y) : x \in H, f(x) \leq y \leq g(x)\}$, όπου $H = P_G(K)$. Έχουμε ότι η $h(x) = \frac{1}{2}(f(x)+g(x))$ δεν είναι αφφινική. Θεωρούμε την RS-κίνηση

$$K_t = \left\{(x,y) : x \in H, \frac{1}{2}(f(x)-g(x)) + t\beta(x) \leq y \leq \frac{1}{2}(g(x)-f(x)) + t\beta(x)\right\}, \ -1 \leq t \leq 1$$

με μη-αφφινική ταχύτητα $\beta(x) = -\frac{1}{2}(f(x)+g(x))$ και $K_0 = St_G(K)$, $K_{-1} = K$, K_1 η ανάκλαση του K ως προς το υπερεπίπεδο $\{x^d = 0\}$. Τότε η $m_p(K_t;n,d)$ είναι γνήσια κυρτή και αφού $m_p(K_{-1};n,d) = m_p(K_1;n,d)$, παίρνουμε $m_p(St_G(K);n,d) < m_p(K;n,d)$. Άρα όλα τα ελάχιστα σώματα είναι ελλειψοειδή. Αφού υπάρχει ελάχιστο σώμα και αφού τα ελλειψοειδή είναι αφφινικά ισοδύναμα μεταξύ τους, έπεται ότι όλα τα ελλειψοειδή είναι ελάχιστα σώματα.

Μία άλλη εφαρμογή είναι το Θεώρημα 4.1. Στην κλάση των πολυγώνων με το πολύ k κορυφές, $k \in \mathbb{N}$ τυχαίο, υπάρχει maximizer, έστω Q. Αν το Q έχει $r \geq 4$ κορυφές, τότε θεωρούμε την RS-κίνηση $(Q_t), -1 \leq t \leq 1$ που περιγράφεται στην απόδειξη της Πρότασης 6.1 με μη-αφφινική ταχύτητα, όπου κάθε Q_t είναι πολύγωνο με το πολύ k κορυφές. Όπως στην απόδειξη του Πορίσματος 6.1, $m_p(Q;n,d) < \max\{m_p(Q_{-1};n,d), m_p(Q_1;n,d)\}$, αντίφαση. Επομένως, maximizers στην κλάση των πολυγώνων με το πολύ $k \in \mathbb{N}$ κορυφές είναι μόνο τα τρίγωνα. Προσεγγίζοντας το τυχαίο επίπεδο σώμα με πολύγωνα, παίρνουμε ότι τα τρίγωνα είναι μέγιστα σώματα.

Το παρακάτω θεώρημα μας δίνει άλλη μία κλάση κυρτών σωμάτων τα οποία δεν είναι μέγιστα σώματα.

Θεώρημα 6.2. *Έστω K κυρτό σώμα για το οποίο υποθέτουμε ότι το σύνορο ∂K περιέχει ένα μη-κενό (σχετικά) ανοικτό σύνολο το οποίο είναι $C^{2,+}$, δηλαδή είναι C^2 και σε κάθε σημείο οι κύριες καμπυλότητες είναι θετικές. Τότε το K είναι RS-decomposable.*

Απόδειξη. Αν μία επιφάνεια είναι το γράφημα μίας C^2 συνάρτησης f, τότε οι κύριες καμπυλότητες σε ένα σημείο x της επιφάνειας είναι ακριβώς οι ιδιοτιμές της εσσιανής $Hf(x) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right]_{i,j}$.

Έστω U ένα $C^{2,+}$ ανοικτό υποσύνολο του ∂K. Σε κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων, το $H_d = \{x^d = 0\}$ τέμνει το εσωτερικό του K, $\{x \in \partial K : x^d \leq 0\} \subseteq U$ και το $\{x \in \partial K : x^d \leq 0\}$ είναι το γράφημα κυρτής συνάρτησης h. Τότε η h είναι γνήσια κυρτή. Αφού το H τέμνει το εσωτερικό του K, το σύνολο $\{x \in K : x^d \leq 0\}$ έχει μη-κενό εσωτερικό άρα η προβολή του στον $H_1 = \{x^1 = 0\}$ έχει επίσης μη-κενό εσωτερικό. Αυτή όμως συμπίπτει με την προβολή του $\{x \in \partial K : x^d \leq 0\}$ στον $H_1 = \{x^1 = 0\}$.

Τώρα, το K γράφεται στην μορφή $K = \{(x,y) : y \in H, f(y) \leq x \leq g(y)\}$, όπου $f \leq g$, $f, -g$ γνήσια κυρτές και $H \subseteq H_1$. Αφού η προβολή του $\{x \in \partial K : x^d \leq 0\}$ στον H_1 έχει εσωτερικά σημεία, υπάρχει ανοικτό σύνολο V του οποίου η κλειστότητα περιέχεται στο εσωτερικό του H και $\delta > 0$ ώστε οι εσσιανοί πίνακες $Hf(y)$, $H(-g)(y)$ έχουν ιδιοτιμές $> \delta$ για κάθε $y \in V$. Θεωρούμε $v = (1,0,...,0)$ και συνάρτηση β η οποία είναι ταυτοτικά μηδέν έξω από μία περιοχή της κλειστότητας του V, δεν είναι ταυτοτικά μηδέν στο V και η εσσιανή $H\beta(y)$ έχει ιδιοτιμές στο $(-\delta,\delta)$ για κάθε $y \in V$. Έπεται ότι για κάθε $y \in V$ και κάθε $-1 \leq t \leq 1$, οι ιδιοτιμές των $H(f+t\beta)(y), H(-g-t\beta)(y)$ είναι θετικές, άρα οι $f+t\beta, -g-t\beta$ είναι κυρτές, $-1 \leq t \leq 1$. Επομένως, η οικογένεια κυρτών σωμάτων

$$K_t = \{(x,y) : y \in H, f(y)+t\beta(y) \leq x \leq f(y)+t\beta(y)\}, \ -1 \leq t \leq 1$$

είναι RS-κίνηση του K με μη-αφφινική ταχύτητα.□

Το Θεώρημα 6.2 μας υποδεικνύει να αναζητήσουμε τα μέγιστα σώματα σε εκείνα που κανένα κομμάτι από το σύνορο δεν «καμπυλώνει» (όπως τα πολύτοπα) ή σε εκείνα που δεν «καμπυλώνουν» σε διάφορες κατευθύνσεις (όπως οι κύλινδροι). Την εικασία του simplex ενισχύει το Θεώρημα 4.2 και ένα αποτέλεσμα των Bárány-Buchta ([1] σελ. 467-497): για κάθε κυρτό σώμα $K \subseteq \mathbb{R}^d$ υπάρχει $n(K) \in \mathbb{N}$ ώστε $m(K; n, d) \leq m(T; n, d)$, για κάθε $n \geq n(K)$, όπου T είναι simplex.

Θεώρημα 6.3. *Έστω K κυρτό σώμα τέτοιο ώστε $K = \{(x, y) : x \in H, f(x) \leq y \leq -f(x)\}$, δηλαδή συμμετρικό ως προς κάποιο υπερεπίπεδο, και έστω f μη-αφφινική. Τότε το K είναι RS--decomposable.*

Απόδειξη. Θεωρούμε την RS-κίνηση του μετασχηματισμού Schüttelung

$$K_t = \{(x, y) : x \in H, f(x) + t\beta(x) \leq y \leq -f(x) + t\beta(x)\}, \ -1 \leq t \leq 1$$

με μη-αφφινική ταχύτητα $\beta(x) = -f(x)$.□

Δείχνουμε ότι το simplex στον $\mathbb{R}^3$ είναι RS-indecomposable. Έστω $S \subseteq \mathbb{R}^3$ 3-διάστατο simplex και έστω (S_t), $-1 \leq t \leq 1$ RS-κίνηση του S με διεύθυνση $v \in S^2$ και ταχύτητα β. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $v = (0, 0, 1)$. Έστω x_1, x_2, x_3, x_4 οι κορυφές του S. Έστω ακόμη $c_i \in \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ η προβολή του x_i στον $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$, $z_i = x_i^3 \in \mathbb{R}$ και έστω $H = conv\{c_1, c_2, c_3, c_4\}$ η προβολή του S στον $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$. Οι κορυφές του H είναι είτε 3 είτε 4 στο πλήθος.

Περίπτωση 1. Οι κορυφές του H είναι 3 στο πλήθος.
Υποθέτουμε ότι $c_4 \in conv\{c_1, c_2, c_3\}$. Τότε ο υπόχωρος $aff\{(c_1, z_1), (c_2, z_2), (c_3, z_3)\}$ δεν είναι παράλληλος με τον x^3-άξονα. Θεωρούμε την αφφινική συνάρτηση h η οποία ικανοποιεί

$$\{(x, h(x)) : x \in H\} = conv\{(c_1, z_1), (c_2, z_2), (c_3, z_3)\}$$

Τότε $z_4 \neq h(c_4)$. Υποθέτουμε ότι $z_4 > h(c_4)$. Τότε $z \geq h(c)$, για κάθε $(c, z) \in S$. Πράγματι, οι απεικονίσεις $h_1(c, z) = z$, $h_2(c, z) = h(c)$ είναι αφφινικές και η ανισότητα ισχύει για τις κορυφές του S, άρα και για όλα τα σημεία της κυρτής θήκης τους.
Επομένως, αν γράψουμε

$$S = \{(c, z) : c \in H, f(c) \leq z \leq g(c)\}$$

με $f \leq g$, $f, -g$ κυρτές, τότε $f = h$, και η f είναι αφφινική. Όπως στην απόδειξη της Πρότασης 6.1, έπεται ότι η ταχύτητα β είναι αφφινική.

Περίπτωση 2. Οι κορυφές του H είναι 4 στο πλήθος.
Από το Λήμμα 4.3, μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα $[c_1, c_2]$, $[c_3, c_4]$ τέμνονται στο σημείο c_0. Έστω Π_1, Π_2 τα ανοικτά ημιεπίπεδα στον $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ που ορίζονται από την ευθεία $aff\{c_1, c_2\}$. Θεωρούμε το επίπεδο

$$P = aff\{(c_1, z_1), (c_2, z_2), (c_1, z_1^{'})\}$$

όπου $z_1^{'} \neq z_1$. Προφανώς, $(c_3, z_3) \in H_1$ και $(c_4, z_4) \in H_2$, όπου H_1, H_2 οι ανοικτοί ημίχωροι που ορίζει το P. Έστω (c_0, z_0) η τομή του ευθύγραμμου τμήματος $[(c_3, z_3), (c_4, z_4)]$ με το P. Τότε, τα σημεία $(c_0 z_0), (c_1, z_1), (c_2, z_2)$ είναι αφφινικά ανεξάρτητα, διότι, διαφορετικά θα είχαμε $(c_0, z_0) \in aff\{(c_1, z_1), (c_2, z_2)\}$. Άρα

$$(c_0, z_0), (c_4, z_4) \in aff\{(c_1, z_1), (c_2, z_2), (c_4, z_4)\}$$

και $(c_3, z_3) \in aff\{(c_1, z_1), (c_2, z_2), (c_4, z_4)\}$ το οποίο είναι αδύνατο. Θεωρούμε το 2-διάστατο simplex

$$S^{'} = conv\{(c_0, z_0), (c_1, z_1), (c_2, z_2)\} = S \cap P$$

Έχουμε $c_0 \in [c_1, c_2]$. Επομένως η προβολή του $S^{'}$ στον $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ είναι το $[c_1, c_2]$. Θεωρούμε τα simplices $S^1 = conv((c_3, z_3), S^{'})$, $S^2 = conv((c_4, z_4), S^{'})$ για τα οποία ισχύει ότι η προβολή του S^j στον $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ είναι το $conv\{(c_1, z_1), (c_2, z_2), (c_{2+j}, z_{2+j})\}$, $j = 1, 2$ και $S^1 \cup S^2 = S$. Για $j = 1, 2$, θεωρούμε την RS-κίνηση του S^j, $S^j_t = S_t \cap cl(H_j)$, $-1 \leq t \leq 1$, η οποία έχει διεύθυνση v και ταχύτητα β_j η οποία είναι ο περιορισμός της β στο $cl(\Pi_j)$. Από την προηγούμενη περίπτωση, η β είναι αφφινική στο $H \cap cl(\Pi_j)$, $j = 1, 2$.

Αν ορίσουμε $\Pi^{'}_1, \Pi^{'}_2$ τα ανοικτά ημιεπίπεδα στον $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ που ορίζονται από την ευθεία $aff\{c_3, c_4\}$, με παρόμοιο τρόπο μπορεί να δειχθεί ότι η β είναι αφφινική στο $H \cap cl(\Pi^{'}_j)$, $j = 1, 2$.

Έπεται ότι η β είναι αφφινική στο H.

Με όμοιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι το simplex στον $\mathbb{R}^4$ είναι RS-indecomposable.

Επίσης, κάθε Πλατωνικό πολύεδρο εκτός του τετραέδρου έχει επίπεδο συμμετρίας οποιοδήποτε επίπεδο που διχοτομεί κάποια από τις δίεδρες γωνίες του. Από το Θεώρημα 6.3 έπεται ότι μόνο το κανονικό τετράεδρο είναι RS-indecomposable (άρα ο μόνος πιθανός maximizer) μεταξύ των Πλατωνικών πολυέδρων του $\mathbb{R}^3$.

7 Γενικεύσεις του Συναρτησοειδούς Sylvester

Ανάλογα των αποτελεσμάτων του συναρτησοειδούς Sylvester παρουσιάζουμε και για άλλα συναρτησοειδή.

Έστω $n \geq d$ και K κυρτό σώμα όγκου 1. Ορίζουμε

$$S_h(K;n,d) = \int_{y_0 \in K} \dots \int_{y_n \in K} h(|conv\{y_0, ..., y_n\}|) dy_n ... dy_1$$

όπου $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ γνησίως αύξουσα και συνεχής (όχι απαραίτητα κυρτή) συνάρτηση και $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$.

Έστω $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ γνησίως αύξουσα. Αν h κυρτή, έχουμε αποδείξει ότι οι minimizers του $S_h(\cdot;n,d)$ είναι ακριβώς τα ελλειψοειδή και αν επιπλέον $d = 2$, h η ταυτοτική απεικόνιση, οι maximizers είναι ακριβώς τα τρίγωνα. Ο Schöpf ([31] σελ. 331-337) έδειξε, χωρίς την υπόθεση της κυρτότητας της h, ότι οι minimizers είναι ακριβώς τα ελλειψοειδή στην περίπτωση $n = d$ και οι Γιαννόπουλος-Τσολομύτης ([16] σελ. 13-21) έδειξαν ότι τα ελλειψοειδή είναι minimizers στην γενική περίπτωση $n \geq d$. Ο Busemann ([6] σελ. 1-12) όρισε το συναρτησοειδές

$$B_h(K;n,d) = \int_{y_1 \in K} \dots \int_{y_n \in K} h(|conv\{0, y_1, ..., y_n\}|) dy_n ... dy_1$$

και έδειξε ότι πάλι τα ελλειψοειδή είναι οι μόνοι minimizers. Επιπρόσθετα, έδειξε ότι το συναρτησοειδές

$$B(K_1, ..., K_d) = \int_{y_1 \in K_1} \dots \int_{y_d \in K_d} h(|conv\{0, y_1, ..., y_d\}|) dy_d ... dy_1$$

ικανοποιεί την σχέση

$$B(K_1, ..., K_d) \geq B(B_1, ..., B_d) \tag{1}$$

όταν B_i είναι μπάλλες με κέντρο το 0 και όγκους $|B_i| = |K_i|$. Η ισότητα στην (1) ισχύει αν και μόνο αν τα K_i είναι ομόθετα ελλειψοειδή με κέντρο στο 0.
Οι Bourgain, Milman, Meyer και Pajor ([3] σελ. 271-282) όρισαν

$$I_h(K_1, ..., K_n; d) = \int_{y_1 \in K_1} \dots \int_{y_n \in K_n} h\left(|\sum_{i=1}^{n} [0, y_i]| \right) dy_n ... dy_1$$

όπου $h(\zeta) = |\zeta|^p$, $p \geq 0$, το οποίο επίσης ικανοποιεί την σχέση

$$I_h(K_1, ..., K_n; d) \geq I_h(B_1, ..., B_n; d) \tag{2}$$

όπου B_i μπάλλες με κέντρο στο 0 και όγκους $|B_i| = |K_i|$.
Σημειώνουμε ότι $|\sum_{i=1}^{d} [0, y_i]| = |\det(y_1, ..., y_d)| = d! |conv\{0, y_1, ..., y_d\}|$, άρα, για $h(\zeta) = |\zeta|^p$, $p \geq 0$, το τελευταίο αποτελεί γενίκευση του αποτελέσματος του Busemann.

Ορίζουμε

$$S_h(K_0, ..., K_n; d) = \int_{y_0 \in K_0} \dots \int_{y_n \in K_n} h(|conv\{y_0, ..., y_n\}|) dy_n ... dy_1$$

$$B_h(K_0, K_1, ..., K_n; d) = \int_{y_1 \in K_1} \dots \int_{y_n \in K_n} h(|conv\{0, ..., y_n\}|) dy_n ... dy_1$$

$$I_h(K_0, K_1, ..., K_n; d) = \int_{y_1 \in K_1} \dots \int_{y_n \in K_n} h\left(|\sum_{i=1}^{n} [0, y_i]| \right) dy_n ... dy_1$$

όπου $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ γνησίως αύξουσα και κυρτή συνάρτηση και $K_0 = \{0\}$, για τα B_h, I_h. Με ανάλογο τρόπο όπως την (1), δείχνουμε τις ανισότητες όπως την (2) για τα συναρτησοειδή S_h και B_h και μελετάμε τις περιπτώσεις ισότητας.
Θα συμβολίζουμε με $D_h(K_0, ..., K_n; d)$ τα συναρτησοειδή S_h, B_h, I_h όπου θα είναι σαφές κάθε φορά σε ποιο αναφερόμαστε. Για λόγους ομοιομορφίας, θα συμβολίζουμε $K_0 = \{0\}$ στις περιπτώσεις $D = B$ ή $D = I$. Θα αποδείξουμε το ακόλουθο:

Θεώρημα 7.1. *Για όλα τα κυρτά σώματα $K_0, ..., K_n$ του $\mathbb{R}^d$ ισχύει*

$$D_h(K_0, ..., K_n; d) \geq D_h(B_0, ..., B_n; d)$$

όπου B_i, $i = 0, ..., n$ μπάλλες με $|B_i| = |K_i|$ και κέντρο το 0. Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν τα K_i, $i = 0, ..., n$ είναι ομόθετα ελλειψοειδή με ίδιο κέντρο όταν $D = S$ ή αν και μόνο αν τα K_i, $i = 1, ..., n$ είνια ομόθετα ελλειψοειδή με κέντρο το 0 όταν $D = I$ ή $D = B$.

Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι το D_h είναι αναλλοίωτο από μετασχηματισμούς T με την έννοια ότι $D_h(TK_0, ..., TK_n; d) = D_h(K_0, ..., K_n; d)$, όπου $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ αφφινικός μετασχηματισμός που διατηρεί τον όγκο, όταν $D = S$, γραμμικός όταν $D = B$ ή $D = I$. Τότε, η μία κατεύθυνση για την περίπτωση της ισότητας στο Θεώρημα 7.1 είναι φανερή.

Ορίζουμε τα *quermassintegrals* W_j, $j = 0, 1, ..., d$, από τον τύπο του Steiner (βλ. [30], σελ. 197)

$$|K + \lambda B_2^d| = \sum_{j=0}^{d} \binom{d}{j} W_j(K) \lambda^j, \ \lambda \geq 0$$

όπου K κυρτό σώμα. Παρατηρούμε ότι $W_0(K) = |K|$ και ότι $\lim_{\lambda \to 0^+} \frac{|K + \lambda B_2^d| - |K|}{\lambda} = dW_1(K)$, δηλαδή η ποσότητα $dW_1(K)$ έχει την έννοια του «εμβαδού της επιφάνειας» του K.

Έστω $K, L \subseteq \mathbb{R}^d$ κυρτά σώματα και $K^{'}, L^{'}$ οι ανακλάσεις τους ως προς ένα υπερεπίπεδο H που διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Είναι εύκολο να δούμε ότι η ανάκλαση του $K + L$ ως προς το H είναι $K^{'} + L^{'}$. Συνεπώς, η ανάκλαση του $K + \lambda B_2^d$ είναι $K^{'} + \lambda B_2^d$, και $|K + \lambda B_2^d| = |K^{'} + \lambda B_2^d|$. Επομένως, από τον τύπο του Steiner παίρνουμε ότι

$$W_j(K) = W_j(K^{'}), j = 0, ..., d$$

Ισχύει ο τύπος του Kubota ([4], σελ. 279)

$$W_j(K) = \frac{\omega_d}{\omega_{d-j}} \int_{\mathcal{G}_{d,d-j}} |K|E|_{d-j} d\nu_{d,d-j}(E)$$

όπου $\omega_d = |B_2^d|_d$ και $\cdot|E = P_E(\cdot)$ η ορθογώνια προβολή στον υπόχωρο E. Με $\mathcal{G}_{d,j}$ συμβολίζουμε την Grassmannian, το σύνολο όλων των j-διάστατων υπόχωρων του $\mathbb{R}^d$. Για μία πιο αναλυτική περιγραφή της Grassmannian, βλ. [24] σελ. 48. Ο $\mathcal{G}_{d,j}$ είναι συμπαγής αν τον εφοδιάσουμε με την μετρική $\rho(E_1, E_2) = ||P_{E_1} - P_{E_2}||$. Έστω ν το Haar μέτρο πιθανότητας στο σύνολο των ορθογώνιων μετασχηματισμών $\mathcal{O}(d)$ του $\mathbb{R}^d$. Τότε το μέτρο πιθανότητας $\nu_{d,j}$ στην $\mathcal{G}_{d,j}$ ορίζεται από τον τύπο $\nu_{d,j}(\mathcal{E}) = \nu(\{T \in \mathcal{O}(d) : TV \in \mathcal{E}\})$, όπου $V \in \mathcal{G}_{d,j}$, το οποίο είναι αναλλοίωτο από στροφές με την έννοια ότι $\nu_{d,j}(T\mathcal{E}) = \nu_{d,j}(\mathcal{E})$, για κάθε $T \in \mathcal{O}(d)$ και κάθε σύνολο Borel $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{G}_{d,j}$. Το $\nu_{d,j}$ είναι ανεξάρτητο από την επιλογή του V. Αφού ο $\mathcal{G}_{d,j}$ είναι συμπαγής και το $\nu_{d,j}$ είναι

ομοιόμορφα κατανεμημένο, δηλαδή το μέτρο μίας μπάλλας του $\mathcal{G}_{d,j}$ εξαρτάται μόνο από την ακτίνα της, $\nu_{d,j}(\mathcal{U}) > 0$, για κάθε $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{G}_{d,j}$ ανοιτό, μη-κενό.

Έστω (K_t), $-1 \leq t \leq 1$ γραμμικό παραμετρικό σύστημα ενός κυρτού σώματος K και $j = 0, ..., d$. Για κάθε j-διάστατο υπόχωρο E, έχουμε ότι $K_t|E$, $-1 \leq t \leq 1$, είναι γραμμικό παραμετρικό σύστημα του $K|E$ (βλ. [28] 93-102) επομένως η συνάρτηση $t \mapsto |K_t|E|$ είναι κυρτή. Συνεπώς, από τον τύπο του Kubota, η συνάρτηση $t \mapsto W_j(K_t)$ είναι κυρτή. Τότε, αν $K_{-1} = K$, $K_0 = St_G(K)$ και K_1 η ανάκλαση του K ως προς τον υπόχωρο $G^{\perp}$, παίρνουμε

$$W_j(St_G(K)) \leq W_j(K)$$

Επίσης, τα W_j είναι συνεχή ως προς μετρική Hausdorff. Πράγματι, έστω $K_n \to K$ και $\epsilon > 0$. Για μεγάλα n, $K_n \subseteq K + \epsilon B_2^d$ και $K \subseteq K_n + \epsilon B_2^d$. Για κάθε $(d-j)$-διάστατο υπόχωρο, που υποθέτουμε ότι είναι ο $\mathbb{R}^{d-j}$ σε κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων, έχουμε $K_n|E \subseteq K|E + \epsilon B_2^{d-j}$ και $K|E \subseteq K_n|E + \epsilon B_2^{d-j}$, για μεγάλα n. Επομένως, $K_n|E \to K|E$, και το συμπέρασμα έπεται από τον τύπο του Kubota και την συνέχεια του όγκου.
Επομένως, από την Πρόταση 2.1 προκύπτει η ισοπεριμετρικού τύπου ανισότητα

$$W_j(K) \geq W_j(B)$$

όπου B μπάλλα ίδιου όγκου με το K. Γενικά, από τον τύπο του Steiner παίρνουμε ότι το W_j είναι $(d-j)$-ομογενές, δηλαδή $W_j(\lambda K) = \lambda^{d-j} W_j(K)$, άρα $\frac{W_j(\lambda K)^d}{|\lambda K|^{d-j}} = \frac{W_j(K)^d}{|K|^{d-j}}$, επομένως

$$\frac{W_j(K)^d}{|K|^{d-j}} \geq \frac{W_j(B)^d}{|B|^{d-j}}$$

όπου K κυρτό σώμα και B μπάλλα.
Ορίζουμε

$$S_h(K_0, ..., K_n; d, j) = \int_{y_0 \in K_0} \cdots \int_{y_n \in K_n} h(W_j(conv\{y_0, ..., y_n\}))dy_n...dy_0$$

$$B_h(K_1, ..., K_n; d, j) = \int_{y_1 \in K_1} \cdots \int_{y_n \in K_n} h(W_j(conv\{0, y_1, ..., y_n\}))dy_n...dy_1$$

$$I_h(K_1, ..., K_n; d, j) = \int_{y_1 \in K_1} \cdots \int_{y_n \in K_n} h(W_j(\sum_{i=1}^{n}[0, y_i]))dy_n...dy_1$$

Οι Χαρτζουλάκη-Παούρης ([21] σελ. 430-438) έδειξαν ότι οι μπάλλες είναι minimizers του $S_h(K; n, d, j) = S_h(K, ..., K; d, j)$ και αν επιπλέον η h είναι κυρτή, είναι οι μοναδικοί. Θα αποδείξουμε το ανάλογο του Θεωρήματος 7.1

Θεώρημα 7.2. *Για όλα τα κυρτά σώματα $K_0, ..., K_n$ του $\mathbb{R}^d$, $n \geq d$, ισχύει*

$$D_h(K_0, ..., K_n; d, j) \geq D_h(B_0, ..., B_n; d, j), \ j = 1, ..., d-1$$

όπου B_i μπάλλες με $|B_i| = |K_i|$ και ίδιο κέντρο, αν $D = S$ ή κέντρο το 0, αν $D = B$ ή $D = I$. Αν για κάποιο j ισχύει η ισότητα, τότε $K_i = B_i$, $i = 0, ..., n$.

Όσον αφορά τους maximizers, έχουμε ήδη δει ότι για το συναρτησοειδές Sylvester $m(K; n) = S_h(K, ..., K; d = 2, j = 0)$, όπου $h(\zeta) = |\zeta|$, οι μοναδικοί maximizers είναι τα τρίγωνα. Το Θεώρημα 7.3 γενικεύει αυτό το αποτέλεσμα για συναρτήσεις $h(\zeta) = |\zeta|^p$, $p \geq 1$. Επιπλέον, τα τρίγωνα με μία κορυφή στην αρχή των αξόνων είναι maximizers του $m_p(K; n) = S_h(K, ...K; d = 2, j = 0)$,

$h(\zeta) = |\zeta|^p$, $p \geq 1$ στην κλάση των επίπεδων κυρτών σωμάτων που περιέχουν το 0. Επίσης, οι maximizers του $m_p(K;n)$ στην κλάση των κεντρικά συμμετρικών σωμάτων (με κέντρο την αρχή των αξόνων) είναι τα παραλληλόγραμμα (παραλληλόγραμμα με κέντρο την αρχή των αξόνων).

Θεώρημα 7.3. *Έστω D ένα συνεχές, αναλλοίωτο από αντιστρέψιμους αφφινικούς (γραμμικούς) μετασχηματισμούς, συναρτησοειδές από την κλάση των επίπεδων κυρτών σωμάτων (που περιέχουν το 0) στο $(0, +\infty)$. Έστω ότι το D έχει τις παρακάτω ιδιότητες*

i) Αν K_t, $t_0 \leq t \leq t_1$, όπου $t_0 < 0 < t_1$, RS-κίνηση του κυρτού σώματος K (με $0 \in K_t$) με διεύθυνση $v \in S^{d-1}$ και ταχύτητα συνεχή στο εσωτερικό του $K|v^\perp$, τότε η $D(K_t)$ είναι κυρτή συνάρτηση του t.

ii) Έστω β η ταχύτητα μίας RS-κίνησης K_t, $t_0 \leq t \leq t_1$, όπου $t_0 < 0 < t_1$, του κυρτού σώματος K (με $0 \in K_t$) με διεύθυνση $v \in S^{d-1}$. Αν η β είναι συνεχής και μη-αφφινική (μη-γραμμική) στο εσωτερικό του $K|v^\perp$, τότε η $D(K_t)$ δεν είναι σταθερή.

Τότε τα τρίγωνα (τρίγωνα με μία κορυφή στην αρχή των αξόνων) είναι οι μοναδικοί maximizers του D στην κλάση των κυρτών σωμάτων (που περιέχουν το 0) του $\mathbb{R}^2$ και τα παραλληλόγραμμα (με κέντρο στο 0) είναι οι μοναδικοί maximizers του D στην κλάση των κεντρικά συμμετρικών σωμάτων.

Απόδειξη. Έστω K επίπεδο κυρτό σώμα που μεγιστοποιεί το D, περιέχει το 0 και δεν είναι τρίγωνο. Έστω κατεύθυνση v και ευθεία G παράλληλη στο v. Υποθέτουμε ότι η G είναι ο y-άξονας και γράφουμε

$$K = \{(x, y) : x \in [a, b], f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

Για να δείξουμε ότι το K δεν είναι maximizer, αρκεί να βρούμε κατεύθυνση v ώστε αν πάρουμε τον y-άξονα παράλληλο προς το v, να υπάρχει RS-κίνηση $K_t = \{(x, y) : x \in [a, b], f(x) + t\beta(x) \leq y \leq g(x) + t\beta(x)\}$, $t_0 \leq t \leq 1$ του K, όπου $t_0 < 0 < t_1$, με ταχύτητα β η οποία να είναι συνεχής και μη-αφφινική (μη-γραμμική) στο (a, b) και να ικανοποιεί $\beta(0) = 0$.

Ειδική περίπτωση: Υπάρχουν δύο ιδιάζοντα σημεία στο σύνορο του K για τα οποία το ευθύγραμμο τμήμα που τα ενώνει δεν περιέχεται εξ ολοκλήρου στο σύνορο του K.

Αν πάρουμε ως v την διεύθυνση αυτού του ευθυγράμμου τμήματος, στρέψουμε κατάλληλα τους άξονες (διατηρώντας το 0) και γράψουμε το K στην παραπάνω μορφή, μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχει σημείο $0 \leq x_0 \in (a, b)$ στο οποίο οι f, g δεν είναι παραγωγίσιμες. Ορίζουμε $\beta(x) = 0$, $a \leq x \leq x_0$ και $\beta(x) = x - x_0$, $x_0 \leq x \leq b$. Θεωρούμε τα σύνολα $K_t = \{(x, y) : a \leq x \leq b, f(x) + t\beta(x) \leq y \leq g(x) + t\beta(x)\}$, $t_0 \leq t \leq t_1$, όπου $t_0 = f'_-(x_0) - f'_+(x_0) < 0$, $t_1 = g'_-(x_0) - g'_+(x_0) > 0$. Για κάθε $t \in [t_0, t_1]$, η συνάρτηση $F(x) = f(x) + t\beta(x)$, $a \leq x \leq b$ είναι συνεχής στο x_0 και κυρτή σε καθένα από τα διαστήματα $[a, x_0]$, $[x_0, b]$. Επίσης, $F'_-(x_0) = f'_-(x_0)$ και $F'_+(x_0) = f'_+(x_0) + t \geq f'_+(x_0) + t_0 = f'_-(x_0) = F'_-(x_0)$. Άρα η F είναι κυρτή στο $[a, b]$. Όμοια, η $G(x) = g(x) + t\beta(x)$ είναι κοίλη στο $[a, b]$. Άρα τα σύνολα K_t είναι κυρτά. Επομένως, $K_t = \{x + t\beta(x)v : x \in K\}$, $t_0 \leq t \leq t_1$ είναι RS-κίνηση του K με $v = (0, 1)$ και ταχύτητα β μη-αφφινική και συνεχή στο (a, b) ώστε $\beta(0) = 0$. Από υπόθεση, η $D(K_t)$ είναι κυρτή αλλά όχι σταθερή, άρα $D(K_0) < \max\{D(K_{t_0}), D(K_{t_1})\}$, αφού $0 \in (t_0, t_1)$.

Γενική περίπτωση: Υπάρχουν τουλάχιστον 4 ακραία σημεία (x_i, y_i), $i = 1, ..., 4$ του K τα οποία τα διατάσσουμε στο ∂K σύμφωνα με την αρνητική φορά. Στρέφοντας κατάλληλα τους άξονες

(διατηρώντας το 0) και αλλάζοντας την αρίθμηση των 4 σημείων, αν χρειάζεται, μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχει ευθεία παράλληλη στον x-άξονα η οποία στηρίζει το K στο (x_2, y_2), $y_2 > 0$ και ότι το 0 ανήκει στο κλειστό ημιεπίπεδο που ορίζει η ευθεία $aff\{(x_1, y_1), (x_3, y_3)\}$ στον οποίο ανήκει το (x_4, y_4). Δείχνουμε ότι υπάρχουν μη-ιδιάζοντα σημεία $(\tilde{x}, \tilde{y})$, $(\bar{x}, \bar{y})$ στα ανοικτά τόξα A_1, A_2 με άκρα (x_1, y_1), (x_2, y_2) και (x_2, y_2), (x_3, y_3) αντίστοιχα (τα οποία δεν περιέχουν το (x_4, y_4)) ώστε οι ευθείες στήριξης l_1, l_2 σε αυτά τα σημεία να τέμνονται σε ένα σημείο p, το οποίο βρίσκεται στο ημιεπίπεδο που ορίζει η ευθεία $aff\{(\tilde{x}, \tilde{y}), (\bar{x}, \bar{y})\}$ και στο οποίο βρίσκεται το σημείο (x_2, y_2).

Κάθε κυρτή συνάρτηση είναι σχεδόν παντού παραγωγίσιμη (βλ. [19], σελ. 25). Άρα, αφού το σύνορο κάθε κυρτού σώματος είναι τοπικά το γράφημα κυρτής συνάρτησης, έπεται ότι το σύνολο των μη ιδιαζόντων σημείων κάθε κυρτού σώματος είναι πυκνό στο σύνορο.

Έστω ότι το γράφημα της $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ παριστά το σύνορο του K τοπικά στο (x_2, y_2), όπου το $[a, b]$ το περιορίζουμε κατάλληλα ώστε το αντίστοιχο γράφημα να περιέχεται στο $A_1 \cup A_2 \cup \{(x_2, y_2)\}$. Τότε το x_2 είναι εσωτερικό σημείο του $[a, b]$ και η h κοίλη αφού $y_2 > 0$ και $0 \in K$. Αφού η ευθεία $y = y_2$ στηρίζει το K στο (x_2, y_2), έχουμε $h'_+(x_2) \geq 0 \geq h'_-(x_2)$. Επιπλέον, αφού οι $h'_+, h'_- : (a, b) \to \mathbb{R}$ είναι φθίνουσες, $h'_+ \geq 0$ στο (a, x_2) και $h'_- \leq 0$ στο (x_2, b). Επιλέγουμε $\tilde{x} \in (a, x_2)$ και $\bar{x} \in (x_2, b)$ ώστε οι $h'(\tilde{x}), h'(\bar{x})$ να υπάρχουν και θέτουμε $\tilde{y} = h(\tilde{x})$, $\bar{y} = h(\bar{x})$. Τότε, $h'(\tilde{x}) \geq 0 \geq h'(\bar{x})$ με την μία ανισότητα να είναι γνήσια, διότι διαφορετικά, θα είχαμε $h'_- = h'_+ = 0$ στο $[\tilde{x}, \bar{x}]$, η h θα ήταν σταθερή στο $[\tilde{x}, \bar{x}]$ και το (x_2, y_2) δεν θα ήταν ακραίο σημείο του K. Επιπρόσθετα, αν k η αφφινική συνάρτηση με $k(\tilde{x}) = \tilde{y}$, $k(\bar{x}) = \bar{y}$, τότε $k < h$ στο διάστημα $(\tilde{x}, \bar{x})$. Οι ευθείες στήριξης l_1, l_2 του K στα σημεία $(\tilde{x}, \tilde{y}), (\bar{x}, \bar{y})$ αντίστοιχα τέμνονται στο σημείο p του οποίου η προβολή στον x-άξονα ανήκει στο διάστημα $(\tilde{x}, \bar{x})$.

Έστω H_1, H_2 οι ανοικτοί ημίχωροι που ορίζονται από την ευθεία των σημείων $(\tilde{x}, \tilde{y})$, $(\bar{x}, \bar{y})$ (η οποία τέμνει το εσωτερικό του K διότι τα $(x_2, y_2), (x_4, y_4)$ είναι ακραία σημεία του K) , όπου ο H_1 περιέχει το (x_2, y_2). Τότε $p \in H_1$. Βρίσκουμε ακολουθία κυρτών σωμάτων $K_n \subseteq K$ η οποία συγκλίνει στο K έτσι ώστε $K_n \cap clH_2 = K \cap clH_2$ και τα $P_n = K_n \cap clH_1$ είναι πολύγωνα, κάθε ένα από τα οποία έχει πλευρά το $conv\{(\tilde{x}, \tilde{y}), (\bar{x}, \bar{y})\}$.

Έστω $n \in \mathbb{N}$. Έστω ότι οι κορυφές του P_n είναι (w_i, z_i), $i = 1, ..., k$, $k \geq 3$ τις οποίες τις διατάσσουμε με την αρνητική φορά. Επιλέγουμε 3 διαδοχικές κορυφές (w_i, z_i), $i = j+1, j+2, j+3 \pmod k$ ώστε $(w_{j+2}, z_{j+2}) \notin l_1 \cup l_2$ (αν δεν υπάρχουν ή αν το P_n είναι τρίγωνο, δεν κάνουμε τίποτα, και τότε το P_n έχει 3 ή 4 κορυφές). Θεωρούμε την ευθεία l που είναι παράλληλη στην $aff\{(w_{j+1}, z_{j+1}), (w_{j+3}, z_{j+3})\}$ και διέρχεται από το σημείο (w_{j+2}, z_{j+2}). Η l τέμνει τις ευθείες $l_1, l_2, aff\{(w_j, z_j), (w_{j+1}, z_{j+1})\}$ και $aff\{(w_{j+3}, z_{j+3}), (w_{j+4}, z_{j+4})\}$ στα σημεία W_1, W_2, W_3, W_4. Έστω $[Z', Z'']$ η τομή όλων των ευθύγραμμων τμημάτων με άκρα από τα σημεία W_1, W_2, W_3, W_4 τα οποία περιέχουν το (w_{j+2}, z_{j+2}) στο εσωτερικό τους. Έστω $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ ώστε $t_0(Z'' - Z') = Z' - (w_{j+2}, z_{j+2})$ και $t_1(Z'' - Z') = Z'' - (w_{j+2}, z_{j+2})$. Τότε $t_0 < 0 < t_1$. Έστω $Z_t = (w_{j+2}, z_{j+2}) + t(Z'' - Z')$, $t_0 \leq t \leq t_1$. Παρατηρούμε ότι $Z_t \in H_1 \cap conv(K, p)$. Όπως στην απόδειξη της Πρότασης 6.1, η οικογένεια $P_t = conv\{(w_1, z_1), ..., (w_{j+1}, z_{j+1}), Z_t, (w_{j+3}, z_{j+3}), ..., (w_k, z_k)\}$, $t_0 \leq t \leq t_1$ είναι RS-κίνηση του P_n με ταχύτητα β η οποία είναι μη-αφφινική και συνεχής στο εσωτερικό του $P_n|v^\perp$, όπου $v \in S^{d-1}$ παράλληλο στην ευθεία l.

Έχουμε $P_t \subseteq clH_1 \cap conv(K, p)$. Αφού η $D(P_t)$ είναι κυρτή συνάρτηση του t,
$D(P_n) \leq \max\{D(P_{t_0}), D(P_{t_1})\}$, και υποθέτουμε ότι $D(P_n) \leq D(P_{t_1})$. Το P_{t_1} έχει πλευρά το $conv\{(\tilde{x}, \tilde{y}), (\bar{x}, \bar{y})\}$. Επιπλέον, έχουμε ότι το πλήθος των κορυφών του P_{t_1} είναι κατά 1 μικρότερο από το πλήθος των κορυφών του P_n ή το πλήθος των κορυφών του P_{t_1} στο εσωτερικό του τριγώνου $conv\{(\tilde{x}, \tilde{y}), (\bar{x}, \bar{y}), p\}$ είναι κατά 1 μικρότερο από το πλήθος των κορυφών του P_n στο εσωτερικό του

τριγώνου $conv\{(\tilde{x},\tilde{y}),(\bar{x},\bar{y}),p\}$. Κάνουμε την ίδια διαδικασία όπως πριν αλλά έχοντας στην θέση του P_n το P_{t_1}. Συνεχίζοντας έτσι, βρίσκουμε πολύγωνο $P_n^{'} \subseteq clH_1 \cap conv(K,p)$ του οποίου οι κορυφές είναι 3 ή 4, δηλαδή το $P_n^{'}$ είναι είτε τρίγωνο είτε τετράπλευρο. Επιπλέον, $D(P_n^{'}) \geq D(P_n)$. Κάνοντας την ίδια διαδικασία όπως πριν στα πολύγωνα P_n αλλά επισυνάπτοντας το $K \cap clH_2$, παίρνουμε $D(K_n^{'}) \geq D(K_n)$, όπου $K_n = P_n \cup (K \cap clH_2)$ και $K_n^{'} = P_n^{'} \cup (K \cap clH_2) \subseteq conv(K,p)$.

Έχουμε ότι $D(K_n) \to D(K)$. Από την Αρχή Επιλογής του Blaschke, βρίσκουμε υπακολουθία $(K_{n_m}^{'})$ ώστε $K_{n_m}^{'} \to K^{'}$, όπου $K^{'} \cap clH_2 = K \cap clH_2$ και $K^{'} \cap clH_1$ είναι τρίγωνο ή τετράπλευρο με δύο από τις κορυφές του να είναι οι $(\tilde{x},\tilde{y}),(\bar{x},\bar{y})$ και έχει τουλάχιστον άλλη μία κορυφή, έστω $(x_4^{'},y_4^{'})$. Επομένως $D(K_{n_m}) \leq D(K_{n_m}^{'}) \leq D(K)$, και $D(K^{'}) = D(K)$. Παρατηρούμε ότι τα (x_1,y_1), (x_3,y_3), (x_4,y_4) είναι ακραία σημεία του $K^{'}$. Άρα η χορδή με άκρα $(x_4^{'},y_4^{'})$ και οποιοδήποτε σημείο στο εσωτερικό του τόξου A με άκρα (x_1,y_1) και (x_3,y_3) που περιέχει το (x_4,y_4), τέμνει το εσωτερικό του $K^{'}$ διότι, διαφορετικά, κάποιο από τα $(x_1,y_1),(x_3,y_3)$ δεν θα ήταν ακραίο σημείο του $K^{'}$.

Εάν το σύνολο $\exp(K^{'}) \cap A_0$ είναι πεπερασμένο, όπου $A_0 = A \backslash \{(x_1,y_1),(x_3,y_3)\}$, τότε τα $(x_4^{'},y_4^{'}),(x_4,y_4)$ είναι ιδιάζοντα σημεία του συνόρου του $K^{'}$ και το $[(x_4^{'},y_4^{'}),(x_4,y_4)]$ τέμνει το εσωτερικό του $K^{'}$. Σε αυτήν την περίπτωση, το $K^{'}$ είναι της μορφής της ειδικής περίπτωσης που εξετάσαμε προηγουμένως. Αν όχι, το $\exp(K^{'}) \cap A_0$ έχει σημείο συσσώρευσης στο A. Είτε το 0 είναι σημείο συσσώρευσης του $\exp(K^{'}) \cap A_0$ είτε όχι, μπορούμε να επιλέξουμε $(x_1^{'},y_1^{'}),(x_2^{'},y_2^{'})$, $(x_3^{'},y_3^{'}) \in \exp(K) \cap A_0$ διατεταγμένα με την αρνητική φορά ώστε να ισχύει το εξής: αν $A_1^{'}$ το τόξο του συνόρου του $K^{'}$ με άκρα $(x_1^{'},y_1^{'}),(x_2^{'},y_2^{'})$ και το οποίο δεν περιέχει το $(x_4^{'},y_4^{'})$ και $A_2^{'}$ το τόξο του $K^{'}$ με άκρα $(x_2^{'},y_2^{'}),(x_3^{'},y_3^{'})$ και το οποίο δεν περιέχει το $(x_4^{'},y_4^{'})$ τότε το 0 δεν ανήκει στο κυρτό σύνολο το οποίο έχει σύνορο το $A_1^{'} \cup A_2^{'} \cup [(x_1^{'},y_1^{'}),(x_3^{'},y_3^{'})]$. Όπως πριν, βρίσκουμε μη-ιδιάζοντα σημεία $(\tilde{x}^{'},\tilde{y}^{'}) \in A_1^{'} \backslash \{(x_1^{'},y_1^{'}),(x_2^{'},y_2^{'})\}$ και $(\bar{x}^{'},\bar{y}^{'}) \in A_2^{'} \backslash \{(x_2^{'},y_2^{'}),(x_3^{'},y_3^{'})\}$ ώστε οι αντίστοιχες εφαπτομένες $l_1^{'},l_2^{'}$ να τέμνονται σε ένα σημείο $p^{'}$ το οποίο βρίσκεται στο ημιεπίπεδο που ορίζει η ευθεία $aff\{(\tilde{x}^{'},\tilde{y}^{'}),(\bar{x}^{'},\bar{y}^{'})\}$ και στο οποίο βρίσκεται το σημείο $(x_2^{'},y_2^{'})$. Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία όπως πριν, βρίσκουμε κυρτό σώμα $K^{''}$ το οποίο είναι maximizer, περιέχει το 0 και έχει δύο τουλάχιστον ιδιάζοντα σημεία (ένα είναι το $(x_4^{'},y_4^{'})$) των οποίων η κυρτή θήκη τέμνει το εσωτερικό του $K^{''}$. Άρα το $K^{''}$ είναι της μορφής της ειδικής περίπτωσης.

Ειδικότερα, αν το D δεν είναι αναλλοίωτο από μεταφορές, επειδή οι μεταφορές είναι RS-κινήσεις με μη-γραμμική ταχύτητα, αναγκαστικά το 0 πρέπει να είναι ακραίο σημείο του τριγώνου. Πράγματι, αν το τρίγωνο K περιέχει το 0 αλλά όχι ως ακραίο σημείο, υπάρχει $x \neq 0$ ώστε το ευθύγραμμο τμήμα $J = [-x,x]$ περιέχεται στο K. Τότε, η οικογένεια $K_t = K + tx$, $-1 \leq t \leq 1$ είναι RS-κίνηση του K με διεύθυνση $v = \frac{x}{|x|}$, συνεχή και μη-γραμμική ταχύτητα στο εσωτερικό του $K|v^{\perp}$ και $0 \in K_t$, $-1 \leq t \leq 1$. Άρα, το K δε μπορεί να είναι maximizer.

Για την περίπτωση των συμμετρικών σωμάτων:

Ειδική περίπτωση: Υπάρχουν δύο ζεύγη αντιδιαμετρικών ιδιαζόντων σημείων (P_1,P_2) και (Q_1,Q_2) του K έτσι ώστε το ευθύγραμμο τμήμα $[P_1,Q_1]$ (άρα και το $[P_2,Q_2]$) να τέμνει το εσωτερικό του K. Εφαρμόζουμε RS-κίνηση με ταχύτητα περιττή ως προς το κέντρο συμμετρίας του K, μηδενική στην λωρίδα που ορίζεται από τα παραπάνω ευθύγραμμα τμήματα και μη-μηδενική έξω από αυτήν.

Γενική περίπτωση: Αν το K δεν είναι παραλληλόγραμμο, υπάρχουν ζεύγη αντιδιαμετρικών ακραίων σημείων (P_1,P_2), (Q_1,Q_2) και (R_1,R_2) του K έτσι ώστε τα σημεία P_1,Q_1,R_1,P_2,Q_2,R_2 να είναι διατεταγμένα με την αρνητική φορά. Εφαρμόζοντας RS-κινήσεις των οποίων η ταχύτητα

είναι περιττή ως προς το κέντρο συμμετρίας του K, σχηματίζουμε κυρτό σώμα $K^{'}$, συμμετρικό ως προς το ίδιο κέντρο, το οποίο είναι maximizer και έχει ζεύγη αντιδιαμετρικών ακραίων σημείων τα $(P_1, P_2), (Q_1^{'}, Q_2^{'}), (R_1, R_2)$, όπου το $Q_1^{'}$ είναι ιδιάζον και βρίσκεται μεταξύ των P_1, R_1 (όταν το σύνορο διατρέχεται με την αρνητική φορά). Όμοια, υπάρχει συμμετρικό κυρτό σώμα $K^{''}$ (με το ίδιο κέντρο) και ζεύγη αντιδιαμετρικών ακραίων σημείων τα $(P_1^{'}, P_2^{'})$, $(Q_1^{'}, Q_2^{'}), (R_1, R_2)$, όπου τα $P_1^{'}, P_2^{'}$ είναι ιδιάζοντα και τα $P_1^{'}, Q_1^{'}, R_1, P_2^{'}, Q_2^{'}, R_2$ να είναι διατεταγμένα με την αρνητική φορά. Τότε, το ευθύγραμμο τμήμα $[Q_1^{'}, P_2^{'}]$ δε μπορεί να βρίσκεται ολόκληρο στο σύνορο του $K^{''}$ αφού τα R_1, R_2 είναι ακραία σημεία. Συνεπώς, το $K^{''}$ εμπίπτει στην ειδική περίπτωση.□

Απόδειξη των ανισοτήτων στα Θεωρήματα 7.1 και 7.2. Από την Πρόταση 2.1, αρκεί να δείξουμε ότι το $D_h(K_0, ..., K_n; d, j)$, $j = 0, 1, ..., d-1$ δεν μεγαλώνει όταν εφαρμόζουμε στα $K_0, ..., K_n$ την Steiner συμμετρικοποίηση ως προς μία κατεύθυνση. Έστω $X = (x_0, ..., x_n) \in (\mathbb{R}^{d-1})^{n+1}$ και $y = (y_0, ..., y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ ώστε $d+1$ από τα σημεία $(x_0, y_0), ..., (x_n, y_n)$ να είναι αφφινικά ανεξάρτητα. Θέτουμε

$\Phi_{S,X,j}(y) =$

$$W_j(conv\{(x_0, y_0), ..., (x_n, y_n)\}) = \frac{\omega_d}{\omega_{d-j}} \int_{\mathcal{G}_{d,d-j}} |conv\{(x_0, y_0), ..., (x_n, y_n)\}|E|_{d-j} d\nu_{d,d-j}(E)$$

$\Phi_{B,X,j}(y) =$

$$W_j(conv\{0, (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)\}) = \frac{\omega_d}{\omega_{d-j}} \int_{\mathcal{G}_{d,d-j}} |conv\{0, (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)\}|E|_{d-j} d\nu_{d,d-j}(E)$$

$$\Phi_{I,X,j}(y) = W_j(\sum_{i=1}^{n}[0, (x_i, y_i)]) = \frac{\omega_d}{\omega_{d-j}} \int_{\mathcal{G}_{d,d-j}} |\sum_{i=1}^{n}[0, (x_i, y_i)]|E|_{d-j} d\nu_{d,d-j}(E)$$

Οι $\Phi_{D,X,j}$ είναι κυρτές συναρτήσεις ως προς y διότι οι υπο ολοκλήρωση ποσότητες είναι κυρτές. Πράγματι, για την περίπτωση $D = S$, δείχνουμε ότι η

$$V(y) = |conv\{((x_0, y_0), ..., (x_n, y_n)\}|E|_{d-j}$$

είναι κυρτή συνάρτηση ως προς y, για κάθε $(d-j)$-διάστατο υπόχωρο του $\mathbb{R}^d$ (μία γενίκευση του Λήμματος 3.1). Έστω $y_1 = (y_{0,1}, ..., y_{n,1}), y_2 = (y_{0,2}, ..., y_{n,2}) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Θεωρούμε το γραμμικό παραμετρικό σύστημα

$$P_t = conv\left\{(x_0, (y_{0,2} - y_{0,1})t/2 + (y_{0,2} + y_{0,1})/2), ..., (x_n, (y_{n,2} - y_{n,1})t/2 + (y_{n,2} + y_{,1})/2)\right\} \big|E$$

με $-1 \leq t \leq 1$. Τότε, η συνάρτηση $f(t) = |P_t|$ είναι κυρτή στο $[-1, 1]$, δηλαδή η V είναι κυρτή στο $[y_1, y_2]$.

Με παρόμοιο τρόπο δουλεύουμε τις περιπτώσεις $D = B, I$, όπου στην περίπτωση $D = I$ χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι το άθροισμα Minkowski γραμμικών παραμετρικών συστημάτων με ίδια διεύθυνση είναι γραμμικό παραμετρικό σύστημα (βλ. [8] σελ. 134).

Έστω G μία ευθεία και υποθέτουμε ότι είναι ο x^d-άξονας. Γράφουμε

$$K_i = \{(x, y) : x \in H_i, f_i(x) \leq y \leq g_i(x)\}$$

Τότε

$$St_G(K_i) = \{(x, y) : x \in H_i, -k_i(x) \leq y \leq k_i(x)\}$$

$$K_i = \{(x, y) : x \in H_i, -k_i(x) + u_i(x) \leq y \leq k_i(x) + u_i(x)\}$$

όπου $k_i = (g_i - f_i)/2$, $u_i = (g_i + f_i)/2$. Έχουμε

$D_h(K_0, ..., K_n; d, j) =$

$$\int_{x_0 \in H_0} \cdots \int_{x_n \in H_n} \int_{-k_0+u_0}^{k_0+u_0} \cdots \int_{-k_n+u_n}^{k_n+u_n} h(\Phi_{D,X,j}(y)) dy_n ... dy_0 dx_n ... dx_0$$

όπου $k_i = k_i(x_i)$, $u_i = u_i(x_i)$. Στην περίπτωση $D = B, I$, οι ολοκληρώσεις ως προς τις μεταβλητές x_0, y_0 θα παραλείπονται. Θέτουμε επίσης

$$T = T(X) = [-k_0(x_0), k_0(x_0)] \times ... \times [-k_n(x_n), k_n(x_n)]$$

$$u = u(X) = (u_0(x_0), ..., u_n(x_n))$$

Στην περίπτωση $D = B, I$, έχουμε $k_0 = u_0 = 0$ και το T θα το θεωρούμε υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$.

Από τον τύπο

$$\int_D f(y) dy = \int_0^{+\infty} |D \cap \{f \geq t\}| dt$$

όπου $D \subseteq \mathbb{R}^d$ συμπαγές, $f \in L^\infty(D; \mathbb{R}_+)$, παίρνουμε
$D_h(K_0, ..., K_n; d, j) =$

$$\int_{x_0 \in H_0} \cdots \int_{x_n \in H_n} \int_0^M |(T + u) \cap \{h \circ \Phi_{D,X,j} \geq t\}| dt dx_n ... dx_0$$

Επίσης,
$D_h(St_G(K_0), ..., St_G(K_n); d, j) =$

$$\int_{x_0 \in H_0} \cdots \int_{x_n \in H_n} \int_0^M |T \cap \{h \circ \Phi_{D,X,j} \geq t\}| dt dx_n ... dx_0$$

όπου $m = \inf_{x \in \mathbb{R}_+} h(x)$, $M = \sup_{x \in \mathbb{R}_+} h(x)$. Αφού η h είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής, το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $[m, M)$. Έχουμε

$$|(T + u) \cap \{h \circ \Phi_{D,X,j} \geq t\}| = |T| - |(T + u) \cap \{\Phi_{D,X,j} < h^{-1}(t)\}|$$

για κάθε t στο σύνολο τιμών της h. Παρατηρούμε ότι $\{h \circ \Phi_{D,X,j} \geq t\} = \{h \circ \Phi_{D,X,j} \geq m\}$ για κάθε $t \in [0, m]$ και $\{h \circ \Phi_{D,X,j} \geq t\} = \varnothing$ για κάθε $t \geq M$. Θέτουμε $k = n + 1$ αν $D = S$ και $k = n$ αν $D = B$ ή $D = I$. Θα δείξουμε ότι,

$$|(T + y) \cap \{\Phi_{D,X,j} < \zeta\}| \leq |T \cap \{\Phi_{D,X,j} < \zeta\}| \tag{3}$$

για κάθε $y \in \mathbb{R}^k$ και κάθε $\zeta > 0$. Τότε, σταθεροποιώντας $X \in H_0 \times ... \times H_n$ και παίρνοντας $\zeta = h^{-1}(t)$ και $u = u(X) = y$, όπου $t \in [m, M)$, θα έχουμε

$$|(T+u)\cap\{h\circ\Phi_{D,X,j}\geq t\}|\geq|T\cap\{h\circ\Phi_{D,X,j}\geq t\}|$$

Ολοκληρώντας αυτήν την σχέση πάνω σε όλα τα $X\in H_0\times...\times H_n$ και όλα τα $t\in[0,M)$, θα έχουμε

$$D_h(K_0,...,K_n;d,j)\geq D_h(St_G(K_0),...,St_G(K_n);d,j)$$

Θεωρούμε την συνάρτηση

$$\eta(y)=|(T+y)\cap\{\Phi_{D,X,j}<\zeta\}|$$

όπου $\zeta>0$ τέτοιο ώστε το μέτρο του $\{\Phi_{D,X,j}<\zeta\}$ να είναι θετικό. Υποθέτουμε επίσης ότι το μέτρο του T είναι θετικό. Η η είναι άρτια διότι τα T, $\{\Phi_{D,X,j}<\zeta\}$ είναι συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων. Το ότι το $\{\Phi_{D,X,j}<\zeta\}$ είναι συμμετρικό σύνολο έπεται άμεσα από το γεγονός ότι οι $\Phi_{D,X,j}$ είναι άρτιες συναρτήσεις. Πράγματι, τα σύνολα $conv\{(x_0,-y_0),...(x_n,-y_n)\}, conv\{0,(x_1,-y_1),...(x_n,-y_n)\}$ και $\sum_{i=1}^n[0,(x_i,-y_i)]$ είναι οι ανακλάσεις των $conv\{(x_0,y_0),...(x_n,y_n)\}, conv\{0,(x_1,y_1),...(x_n,y_n)\}$ και $\sum_{i=1}^n[0,(x_i,y_i)]$ ως προς το $\{x^d=0\}$, αντίστοιχα, άρα

$$W_j(conv\{(x_0,-y_0),...(x_n,-y_n)\})=W_j(conv\{(x_0,y_0),...(x_n,y_n)\})$$

$$W_j(conv\{0,(x_1,-y_1),...(x_n,-y_n)\})=W_j(conv\{0,(x_1,y_1),...(x_n,y_n)\})$$

$$W_j(\sum_{i=1}^n[0,(x_i,-y_i)])=W_j(\sum_{i=1}^n[0,(x_i,y_i)])$$

όπως παρατηρήσαμε αμέσως μετά τον ορισμό των quermassintegrals. Επίσης, η η είναι log-κοίλη. Αυτό το βλέπουμε χρησιμοποιώντας την ανισότητα Brunn-Minkowski (βλ. [33] σελ. 55):

Ανισότητα Brunn-Minkowski
Έστω A,B κυρτά, συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$ και $\lambda,\mu\geq 0$ με $\lambda+\mu=1$. Τότε

$$|\lambda A+\mu B|^{1/d}\geq\lambda|A|^{1/d}+\mu|B|^{1/d}$$

Με τις ίδιες υποθέσεις, χρησιμοποιώντας την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου, βλέπουμε ότι

$$|\lambda A+\mu B|\geq|A|^{\lambda}|B|^{\mu}$$

Το επόμενο λήμμα (που θα δούμε αμέσως μετά) εξασφαλίζει ότι

$$\eta(y)=|(T+y)\cap\{\Phi_{D,X,j}\leq\zeta\}|$$

Για να δείξουμε ότι η η είναι log-κοίλη, θέτουμε $A=T$ και $B=\{\Phi_{D,X,j}\leq\zeta\}$. Έστω $\lambda,\mu\geq 0$ με $\lambda+\mu=1$ και $y_1,y_2\in\mathbb{R}^m$. Προφανώς

$$\lambda\left[(A+y_1)\cap B\right]+\mu\left[(A+y_2)\cap B\right]\subseteq\left[\lambda(A+y_1)+\mu(A+y_2)\right]\cap B$$

Τότε

$\eta(\lambda y_1 + \mu y_2) = |(A + \lambda y_1 + \mu y_2) \cap B| = |[\lambda(A + y_1) + \mu(A + y_2)] \cap B| \geq$

$|\lambda\,[(A + y_1) \cap B] + \mu\,[(A + y_2) \cap B]\,| \geq |(A + y_1) \cap B|^{\lambda}|(A + y_2) \cap B|^{\mu} = \eta(y_1)^{\lambda}\eta(y_2)^{\mu}$

Επομένως η η παίρνει την μέγιστή της τιμή στο 0 και η (3) έπεται.□

Για την μοναδικότητα στο Θεώρημα 7.1, αποδεικνύουμε αρχικά κάποια γεωμετρικά λήμματα.

Λήμμα 7.1. *Έστω K κυρτό σώμα του $\mathbb{R}^d$ και $\Phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση για την οποία υποθέτουμε ότι λαμβάνει την ελάχιστή της τιμή στο K στο σημείο $z_0 \in K$. Θεωρούμε την συνάρτηση $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με τύπο $V(t) = |K \cap \{\Phi < t\}|$. Τα παρακάτω ισχύουν:*

i) Αν το K το γράψουμε στη μορφή

$$K = \{(x, y) : x \in H, f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

όπου $f \leq g$, $f, -g$ κυρτές και $k(x_0) = 0$ για κάποιο $x_0 \in \partial H$, όπου $k = (g - f)/2$, τότε οι f, g είναι συνεχείς στο x_0.

ii) Ισχύει $V(t) = |K \cap \{\Phi \leq t\}|$, για κάθε $t \neq t_0$, όπου $t_0 = \Phi(z_0)$ και η V είναι συνεχής στο $\mathbb{R}\backslash\{t_0\}$. Επιπλέον, η V είναι συνεχής στο t_0 αν και μόνο αν $|K \cap \{\Phi = t_0\}| = 0$.

Απόδειξη. i) Έστω (x_k) ακολουθία στο H με $x_k \to x_0$. Επιλέγουμε υπακολουθία (x_{k_m}) ώστε $f(x_{k_m}) \to a = \liminf_k f(x_k)$ και $g(x_{k_m}) \to b \leq \limsup_k g(x_k)$.
Τότε $[(x_{k_m}, f(x_{k_m})), (x_{k_m}, g(x_{k_m}))] \to [(x_0, a), (x_0, b)]$. Αφού $[(x_{k_m}, f(x_{k_m})), (x_{k_m}, g(x_{k_m}))] \subseteq K$, τότε $[(x_0, a), (x_0, b)] \subseteq K$, άρα $f(x_0) \leq a \leq b \leq g(x_0)$. Αφού $f(x_0) = g(x_0)$, $\liminf_k f(x_k) = f(x_0)$.
Αν επιλέξουμε την υπακολουθία (x_{k_m}) έτσι ώστε $f(x_{k_m}) \to \limsup_k f(x_k)$, θα πάρουμε $\limsup_k f(x_k) = f(x_0)$. Επομένως, η f είναι συνεχής στο x_0. Με όμοιο τρόπο παίρνουμε ότι η g είναι συνεχής στο x_0.□

ii) Έστω $t > t_0$. Τότε $intK \cap \{\Phi < t\} \neq \varnothing$. Έστω $x \in intK$ ώστε $\Phi(x) = t' < t$.

Δείχνουμε ότι $cl(intK \cap \{\Phi < t\}) = K \cap \{\Phi \leq t\}$. Προφανώς, $cl(intK \cap \{\Phi < t\}) \subseteq K \cap \{\Phi \leq t\}$. Έστω $y \in K$ ώστε $\Phi(y) \leq t$. Αν $\Phi(y) < t$, τότε $\Phi < t$ σε μία περιοχή του y. Όμως κάθε περιοχή του y περιέχει σημεία του $intK$, άρα $y \in cl(intK \cap \{\Phi < t\})$. Αν $\Phi(y) = t$, θεωρούμε την αφφινική συνάρτηση $h : [x, y] \to \mathbb{R}$ που ορίζεται από τις σχέσεις $h(x) = t'$, $h(y) = t$ και την κυρτή συνάρτηση $\phi : [x, y] \to \mathbb{R}$ με $\phi((1 - s)x + sy) = \Phi((1 - s)x + sy)$. Τότε $\phi \leq h$. Θεωρούμε την ακολουθία $z_k = \frac{1}{k}x + (1 - \frac{1}{k})y \in intK$, $k \in \mathbb{N}$. Τότε $z_k \to y$ και $\Phi(z_k) = \phi(z_k) \leq h(z_k) < t$, άρα $y \in cl(intK \cap \{\Phi < t\})$.
Ειδικότερα, $cl(K \cap \{\Phi < t\}) = K \cap \{\Phi \leq t\}$.

Επίσης, $int\{\Phi \leq t\} = \{\Phi < t\}$. Πράγματι, προφανώς $int\{\Phi \leq t\} \supseteq \{\Phi < t\}$. Έστω $y \in int\{\Phi \leq t\}$. Υπάρχει $r > 0$ ώστε $\Phi \leq t$ στο $y + rB_2^d$. Αν είχαμε $\Phi(y) = t$, τότε $\Phi = t$ στο $y + rB_2^d$. Εύκολα μπορούμε να δούμε τότε ότι $t = \min_{x \in \mathbb{R}^d} \Phi(x)$, το οποίο είναι αδύνατο.
Επομένως $int\{\Phi \leq t\} = \{\Phi < t\}$, και $int(K \cap \{\Phi \leq t\}) = intK \cap \{\Phi < t\}$.

Επομένως $\partial(K \cap \{\Phi \leq t\}) \subseteq \partial K \cup \partial\{\Phi \leq t\}$ και αφού το σύνορο κυρτού συνόλου στον $\mathbb{R}^d$ είναι μέτρου 0, παίρνουμε

$|K \cap \{\Phi \leq t\}| = |intK \cap \{\Phi < t\}| = |K \cap \{\Phi < t\}| = V(t)$. Αν $t < t_0$, τότε $\{\Phi < t\} = \{\Phi \leq t\} = \varnothing$, άρα $V(t) = |K \cap \{\Phi \leq t\}| = 0$.

Δείξαμε λοιπόν ότι $V(t) = \tilde{V}(t)$, για κάθε $t \neq t_0$, όπου $\tilde{V}(t) = |K \cap \{\Phi \leq t\}|$. Η V είναι συνεχής από τα αριστερά στο $\mathbb{R}$ και η $\tilde{V}$ είναι συνεχής από τα δεξιά στο $\mathbb{R}$, άρα και οι δύο είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}\backslash\{t_0\}$.

Αν η V είναι συνεχής στο t_0 τότε $V(t_0) = \tilde{V}(t_0)$. Άρα $|K \cap \{\Phi = t_0\}| = 0$.
Αντίστροφα, αν $|K \cap \{\Phi = t_0\}| = 0$, τότε $V(t_0) = \tilde{V}(t_0)$. Άρα $V = \tilde{V}$ στο $\mathbb{R}$ και όπως πριν, οι $V, \tilde{V}$ είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$.□

Λήμμα 7.2. *Αν*

$$D_h(St_G(K_0), ..., St_G(K_n); d, j) = D_h(K_0, ..., K_n; d, j) \tag{4}$$

και $k_i(x) = 0$, για κάθε $x \in \partial H_i$, $i = 1, ..., n$, τότε για κάθε $X \in H_0 \times ... \times H_n$, υπάρχει μία κορυφή L του $T(X)$ τέτοια ώστε η $\Phi_{D,X,j}(L + tu(X))$, $-1 \leq t \leq 1$ είναι σταθερή.
(Οι χρησιμοποιούμενοι συμβολισμοί είναι όπως στην παραπάνω απόδειξη των ανισοτήτων.)

Απόδειξη. Δείχνουμε αρχικά ότι αρκεί να αποδείξουμε το ζητούμενο για $X \in R$, όπου R πυκνό υποσύνολο του $H_0 \times ... \times H_n$. (Αν $D = B$ ή I, θέτουμε $intH_0 = \{0\}$.)

Πράγματι, έστω $X = (x_0, ..., x_n) \in H_0 \times ... \times H_n$ και $X_k = (x_{0,k}, ..., x_{n,k})$ ακολουθία στο R ώστε $X_k \to X$. Από την υπόθεσή μας, για καθε $k \in \mathbb{N}$ υπάρχει κορυφή L_k του $T_k = T(X_k)$ ώστε $\Phi_{D,X_k,j}(L_k + tu(X_k)) = c_k$, για κάθε $-1 \leq t \leq 1$, όπου $c_k \in \mathbb{R}$ σταθερές. Αφού, από το Λήμμα 7.1 και την υπόθεση για τις συναρτήσεις k_i, οι f_i, g_i είναι συνεχείς στο H_i, $i = 1, ..., n$, έχουμε $k_i(x_{i,k}) \to k_i(x_i)$, $i = 1, ..., n$. Τα παραλληλεπίπεδα T_k συγκλίνουν τότε στο παραλληλεπίπεδο $T = T(X)$. Οι κορυφές του T_k είναι οι $(\pm k_0(x_{0,k}), ..., \pm k_n(x_{n,k}))$ και οι κορυφές του T είναι οι $(\pm k_0(x_0), ..., \pm k_n(x_n))$ (κάποιες ίσως επαναλαμβάνονται, αν κάποια από τα $k_i(x_i)$ είναι 0). Επομένως, περνώντας σε υπακολουθία αν χρειάζεται, οι κορυφές L_k συγκλίνουν σε κορυφή του T, έστω L.

Έστω $-1 \leq t \leq 1$. Έχουμε $X_k \to X$ άρα $L_k + tu(X_k) \to L + tu(X)$, από την συνέχεια της u. Εύκολα βλέπουμε από τον ορισμό των $\Phi_{D,X,j}$ και την συνέχεια των quermassintegrals ότι $\Phi_{D,X_k,j}(L_k + tu(X_k)) \to \Phi_{D,X,j}(L + tu(X))$. Επομένως, $c_k \to \Phi_{D,X,j}(L + tu(X))$, για κάθε $-1 \leq t \leq 1$, και η $\Phi_{D,X,j}(L + tu(X)), -1 \leq t \leq 1$ είναι σταθερή.

Από την (4) παίρνουμε

$\int_{x_0 \in H_0} \cdots \int_{x_n \in H_n} \int_0^{+\infty} |T \cap \{h \circ \Phi_{D,X,j} \geq t\}| dt dx_n ... dx_0 =$

$\int_{x_0 \in H_0} \cdots \int_{x_n \in H_n} \int_0^{+\infty} |(T + u) \cap \{h \circ \Phi_{D,X,j} \geq t\}| dt dx_n ... dx_0$

ενώ $|(T + u) \cap \{\Phi_{D,X,j} \geq h^{-1}(t)\}| \geq |T \cap \{\Phi_{D,X,j} \geq h^{-1}(t)\}|$, για κάθε X και κάθε $t \in h(\mathbb{R}_+)$. Άρα

$$|(T + u) \cap \{\Phi_{D,X,j} \geq h^{-1}(t)\}| = |T \cap \{\Phi_{D,X,j} \geq h^{-1}(t)\}|$$

για κάθε $X \in ((H_0 \times ... \times H_n) \times h(\mathbb{R}_+))\backslash\tilde{N}$, όπου $\tilde{N} \subseteq (H_0 \times ... \times H_n) \times h(\mathbb{R}_+)$ σύνολο μέτρου 0. Τότε, υπάρχει σύνολο $N_1 \subseteq H_0 \times ... \times H_n$ μέτρου 0 ώστε για κάθε $X \in (H_0 \times ... \times H_n)\backslash N_1$, το

σύνολο $(\{X\} \times h(\mathbb{R}_+)) \cap \tilde{N}$ είναι μέτρου 0. Έστω $N_2 = \{(x_0, ..., x_n) : |conv\{x_0, ..., x_n\}|_{d-1} = 0\}$ το οποίο είναι μέτρου 0, όπως έχουμε ξαναδει και $N_3 = (\partial H_0 \times H_1 ... \times H_n) \cup (H_0 \times \partial H_1 \times ... \times H_n) \cup ... \cup (H_0 \times H_1 \times ... \times \partial H_n)$ το οποίο είναι επίσης σύνολο μέτρου 0 (αν $D = B$ ή I, θέτουμε $\partial H_0 = \varnothing$). Επομένως, το σύνολο $R = (H_0 \times ... \times H_n) \backslash (N_1 \cup N_2 \cup N_3)$ είναι πυκνό στο $H_0 \times ... \times H_n$.

Το σύνολο $h(\mathbb{R}_+)$ είναι ένα διάστημα. Επομένως, για κάθε $X \in R$, υπάρχει πυκνό σύνολο $J' = J'(X)$ στο $h(\mathbb{R}_+)$ ώστε $|(T + u) \cap \{\Phi_{D,X,j} \geq h^{-1}(t)\}| = |T \cap \{\Phi_{D,X,j} \geq h^{-1}(t)\}|$, για κάθε $t \in J'$. Η $h^{-1} : h(\mathbb{R}_+) \to \mathbb{R}_+$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής, άρα απεικονίζει πυκνά υποσύνολα του $h(\mathbb{R}_+)$ σε πυκνά υποσύνολα του $\mathbb{R}_+$. Επομένως, το $J = J(X) = h^{-1}(J')$ είναι πυκνό στο $\mathbb{R}_+$.

Δείξαμε λοιπόν ότι

$$|(T + u) \cap \{\Phi_{D,X,j} < \zeta\}| = |T \cap \{\Phi_{D,X,j} < \zeta\}| = |(T - u) \cap \{\Phi_{D,X,j} < \zeta\}| \tag{5}$$

για κάθε $X \in R$ και κάθε $\zeta \in J(X)$, όπου η δεύτερη ισότητα ισχύει διότι η η που ορίσαμε προηγουμένως είναι άρτια.

Έστω $X \in R$. Αποδεικνύουμε ότι ισχύει για αυτό το συμπέρασμα του Λήμματος.
Η $\Phi_{D,X,j}$ είναι άρτια και κυρτή, άρα λαμβάνει την ελάχιστή της τιμή στο 0. Έστω $\zeta_1 = \Phi_{D,X,j}(0)$. Από το Λήμμα 7.1, η $V_1(\zeta) = |T \cap \{\Phi_{D,X,j} < \zeta\}|$ είναι συνεχής για $\zeta \neq \zeta_1$. Θεωρούμε την συνάρτηση $V_2(\zeta) = |(T + u) \cap \{\Phi_{D,X,j} < \zeta\}|$ και τον αριθμό $\zeta_2 = \min\{\Phi_{D,X,j}(y) : y \in T + u\}$. Αν $\zeta_2 = \zeta_1$, τότε η V_2 είναι συνεχής για κάθε $\zeta \neq \zeta_1$, από το Λήμμα 7.1. Αν $\zeta_2 > \zeta_1$, τότε $|\{\tilde{\Phi} = \zeta_2\}| = 0$, όπου $\tilde{\Phi}$ ο περιορισμός της $\Phi_{D,X,j}$ στο $T + u$. Πράγματι, έστω ότι $|\{\tilde{\Phi} = \zeta_2\}| > 0$. Τότε το $L = \{\tilde{\Phi} = \zeta_2\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ είναι κυρτό σώμα και $\Phi_{D,X,j} = \zeta_2$ στο L. Έπεται ότι η ελάχιστη τιμή της $\Phi_{D,X,j}$ είναι το ζ_2, αντίφαση. Από το Λήμμα 7.1, η V_2 είναι συνεχής σε κάθε ζ.

Άρα, η (5) ισχύει για κάθε $\zeta > 0$ με $\zeta \neq \zeta_1$.

Αφού η $\Phi_{D,X,j}$ είναι συνεχής, αν το $\zeta > 0$ είναι αρκετά μεγάλο, $T \subseteq \{\Phi_{D,X,j} < \zeta\}$. Επομένως, ορίζεται καλά ο αριθμός

$$\zeta_0 = \inf\{\zeta > 0 : T \subseteq \{\Phi_{D,X,j} < \zeta\}\}$$

Προφανώς, $T \subseteq \{\Phi_{D,X,j} \leq \zeta_0\}$. Ειδικότερα, $\zeta_1 \leq \zeta_0$. Δείχνουμε ότι $\zeta_1 < \zeta_0$. Αν είχαμε $\zeta_1 = \zeta_0$, τότε $\Phi_{D,X,j} = \zeta_0$ στο T. Δείχνουμε ότι αυτό δεν είναι δυνατό.

Θέτουμε $m = n + 1$, αν $D = S$ και $m = n$, αν $D = B, I$. Αφού $|T| > 0$ και $0 \in T$, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $\delta B_2^m \subseteq T$.

Περίπτωση 1. $j = 0$, δηλαδή $W_j(\cdot) = |\cdot|_d$. Έχουμε $\Phi_{D,X,0}(0) = 0$, άρα $\zeta_1 = \zeta_0 = 0$. Τότε $\Phi_{D,X,0} = 0$ στο T. Επιλέγουμε $y \in \delta B_2^m$ ώστε $|conv\{(x_0, y_0), ..., (x_n, y_n)\}|_d > 0$ (μπορούμε διότι $|conv\{x_0, ..., x_n\}|_{d-1} > 0$). Τότε $y \in T$ και $\Phi_{D,X,0}(y) > 0$, αντίφαση.

Περίπτωση 2. $j = 1, ..., d - 1$. Επιλέγουμε $y = (0, ..., 0, y_n) \in \delta B_2^m \subseteq T \subseteq \mathbb{R}^m$ ώστε το σώμα $A = conv\{(x_0, 0), ..., (x_{n-1}, 0), (x_n, y_n)\}$ να έχει θετικό d-διάστατο όγκο και να μην είναι συμμετρικό ως προς το υπερεπίπεδο $\{x^d = 0\}$. Συμβολίζουμε με G τον x^d-άξονα. Δείχνουμε ότι $W_j(H) < W_j(A)$, όπου $H = conv\{x_0, ..., x_n\}$ η προβολή του A στο $G^\perp = \{x^d = 0\}$ και τότε θα έχουμε $\Phi_{D,X,j}(y) = W_j(A) > W_j(H) = \Phi_{D,X,j}(0)$ και $y \in T$, γεγονός που αντιφάσκει στο ότι η $\Phi_{D,X,j}$ είναι σταθερή στο T. Έχουμε $H \subseteq St_G(A)$, άρα $W_j(H) \leq W_j(St_G(A))$ από την μονοτονία

των quermassintegrals (βλ. [19], σελ. 105). Επίσης, έχουμε δει ότι $W_j(St_G(A)) \leq W_j(A)$. Επομένως, $W_j(H) \leq W_j(St_G(A)) \leq W_j(A)$. Αν είχαμε $W_j(H) = W_j(A)$, τότε $W_j(St_G(A)) = W_j(A)$. Σε αυτήν την περίπτωση (βλ. [23], σελ. 208) το A είναι συμμμετρικό ως προς το $\{x^d = 0\}$, αντίφαση.

Επομένως, $\zeta_1 < \zeta_0$, και η (5) ισχύει για $\zeta = \zeta_0$. Επιπλέον, $|(T+u) \cap \{\Phi_{D,X,j} \leq \zeta_0\}| = |T| = |(T-u) \cap \{\Phi_{D,X,j} \leq \zeta_0\}|$, από το Λήμμα 7.1, αφού $T \subseteq \{\Phi_{D,X,j} \leq \zeta_0\}$. Έπεται ότι $T \pm u \subseteq \{\Phi_{D,X,j} \leq \zeta_0\}$. Πράγματι, αν είχαμε π.χ. $T + u \nsubseteq \{\Phi_{D,X,j} \leq \zeta_0\}$, τότε $0 = |T+u| - |(T+u) \cap \{\Phi_{D,X,j} \leq \zeta_0\}| = |(T+u) \backslash \{\Phi_{D,X,j} \leq \zeta_0\}| > 0$.

Έχουμε $exp(T) \cap \partial\{\Phi_{D,X,j} \leq \zeta_0\} \neq \varnothing$. Αν όχι, θα έχουμε $T \subseteq int\{\Phi_{D,X,j} \leq \zeta_0\} = \{\Phi_{D,X,j} < \zeta_0\}$, όπως είδαμε στην απόδειξη του προηγούμενου λήμματος. Έστω $y_0 \in T$ ώστε $\Phi_{D,X,j}(y_0) = \underset{T}{max}\Phi_{D,X,j}$. Τότε $T \subseteq \{\Phi_{D,X,j} < \zeta_\epsilon\}$, για κάποιο $\epsilon > 0$ με $\zeta_\epsilon = \Phi_{D,X,j}(y_0) + \epsilon < \zeta_0$, αντίφαση στον ορισμό του ζ_0. Άρα, υπάρχει κορυφή L του T ώστε $L \in \partial\{\Phi_{D,X,j} \leq \zeta_0\}$. Άρα, οι κορυφές $L+u$, $L-u$ των $T+u$, $T-u$ αντίστοιχα, βρίσκονται στο $\{\Phi_{D,X,j} \leq \zeta_0\}$. Αφού επιπλέον το L ανήκει στο $\partial\{\Phi_{D,X,j} \leq \zeta_0\}$ έπεται ότι ολόκληρο το ευθύγραμμο τμήμα $[L-u, L+u]$ περιέχεται στο $\partial\{\Phi_{D,X,j} \leq \zeta_0\} = \{\Phi_{D,X,j} = \zeta_0\}$.$\square$

Ένα σημείο $c \in \mathbb{R}^d$ λέμε ότι είναι το *κέντρο βάρους* του κυρτού σώματος $K \subseteq \mathbb{R}^d$ αν $c = \mathbb{E}X$, όπου $X \sim \mathcal{U}(K)$, δηλαδή η X έχει πυκνότητα πιθανότητας

$$f_X(x) = \frac{1}{|K|}\mathbb{1}(x \in intK)$$

Παρακάτω βλέπουμε διάφορες ιδιότητες του κέντρου βάρους.

Έστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^d$ και $c \in \mathbb{R}^d$. Παρατηρούμε ότι τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

i) Το c είναι το κέντρο βάρους του K.

ii) Για κάθε $i = 1, ..., d$, $\frac{1}{|K|}\int_K x^i dx = c^i$, όπου $x = (x^1, ..., x^d)$.

iii) Για κάθε $\theta \in S^{d-1}$, $\frac{1}{|K|}\int_K \langle x, \theta\rangle dx = \langle c, \theta\rangle$.($\langle\cdot,\cdot\rangle$ το ευκλείδιο εσωτερικό γινόμενο)

Πράγματι, έστω $X \sim \mathcal{U}(K)$. Προφανώς, τα i), ii) είναι ισοδύναμα αφού $c^i = \mathbb{E}[X^i]$. Επίσης είναι προφανής η ισοδυναμία ii) $\Leftrightarrow$ iii).

Έστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^d$ με κέντρο βάρους το c και έστω G ευθεία. Τότε το κέντρο βάρους του $St_G(K)$ είναι το $c|G^\perp$. Πράγματι, σε κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων, η G είναι ο x^d-άξονας και γράφουμε

$$K = \{x : x' \in H, f(x') \leq x^d \leq g(x')\}$$

όπου $x' = (x^1, ..., x^{d-1})$. Για $i = 1, ..., d-1$, έχουμε:

$\frac{1}{|St_G(K)|}\int_{St_G(K)} x^i dx = \frac{1}{|K|}\int_{x' \in H}\left(\int_{\frac{f-g}{2}(x')}^{\frac{g-f}{2}(x')} x^i dx^d\right) dx' = \frac{1}{|K|}\int_{x' \in H}\left(\int_{f(x')}^{g(x')} x^i dx^d\right) dx' = \frac{1}{|K|}\int_K x^i dx = c^i$.

Για $i = d$, $\frac{1}{|St_G(K)|}\int_{St_G(K)} x^d dx = \frac{1}{|K|}\int_{x' \in H}\left(\int_{\frac{f-g}{2}(x')}^{\frac{g-f}{2}(x')} x^d dx^d\right) dx' = \frac{1}{|K|}\int_{x' \in H} 0 dx' = 0$.

Άρα το κέντρο βάρους του $St_G(K)$ είναι το $(c^1, ..., c^{d-1}, 0) = c|G^\perp$.

Αν το κυρτό σώμα K είναι συμμετρικό ως προς το σημείο c, δηλαδή $-c + K = c - K$, τότε το c είναι το κέντρο βάρους του K. Πράγματι,

$\frac{1}{|K|}\int_K x^i dx = \frac{1}{|K|}\int_{-c+K}(y^i + c^i)dy = \frac{1}{|K|}\int_{c-K} y^i dy + \frac{1}{|K|}c^i|c - K| = \frac{1}{|K|}\int_K (c^i - x^i)dx + c^i = 2c^i - \frac{1}{|K|}\int_K x^i dx$, άρα $\frac{1}{|K|}\int_K x^i dx = c^i$.

Τέλος, δείχνουμε, με επαγωγή στη διάσταση d, το εξής: έστω $K \subseteq \mathbb{R}^d$ κυρτό σώμα και $Y = (Y^1, ..., Y^d)$ τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $\mathbb{R}^d$ η οποία έχει πυκνότητα πιθανότητας $f_{Y^1,...,Y^d} = f_{Y^1,...,Y^d}(y^1, ..., y^d)$ με $f_{Y^1,...,Y^d} > 0$ στο $intK$ και $f_{Y^1,...,Y^d} = 0$ στο $\mathbb{R}^d \backslash intK$. Τότε $\mathbb{E}Y \in intK$. Ειδικότερα, το κέντρο βάρους ενός κυρτού σώματος είναι εσωτερικό του σημείο.

Αν $d = 1$, έστω $K = [a, b]$, $a < b$. Για κάθε $a < y < b$, έχουμε $af_Y(y) < yf_Y(y) < bf_Y(y)$ άρα $\int_a^b af_Y(y)dy < \int_a^b yf_Y(y)dy < \int_a^b bf_Y(y)dy$, και $a < \mathbb{E}Y < b$.

Υποθέτουμε ότι το ζητούμενο ισχύει αν η διάσταση είναι $d - 1$.
Γράφουμε

$$K = \{(c, z) : c \in H, f(c) \leq z \leq g(c)\}$$

όπου $f, -g$ κυρτές, $f \leq g$ και H η προβολή του K στο $\{x^d = 0\}$, ένα $(d-1)$-διάστατο κυρτό σώμα. Η πυκνότητα πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής $Y' = (Y^1, ..., Y^{d-1})$ είναι η

$$f_{Y^1,...,Y^{d-1}}(y^1, ..., y^{d-1}) = \int_{f(y^1,...,y^{d-1})}^{g(y^1,...,y^{d-1})} f_{Y^1,...,Y^d}(y^1, ..., y^d)dy^d$$

Αν $(y^1, ..., y^{d-1}) \notin intH$, τότε $(y^1, ..., y^d) \notin intK$, για κάθε $y^d \in \mathbb{R}$. Άρα $f_{Y^1,...,Y^d}(y^1, ..., y^d) = 0$, για κάθε $y^d \in \mathbb{R}$, και $f_{Y^1,...,Y^{d-1}}(y^1, ..., y^{d-1}) = 0$.
Αν $(y^1, ..., y^{d-1}) \in intH$, τότε $f(y^1, ..., y^{d-1}) < g(y^1, ..., y^{d-1})$. Έχουμε $f_{Y^1,...,Y^d}(y^1, ..., y^d) > 0$, για κάθε $f(y^1, ..., y^{d-1}) < y^d < g(y^1, ..., y^{d-1})$. Τότε

$f_{Y^1,...,Y^{d-1}}(y^1, ..., y^{d-1}) = \int_{f(y^1,...,y^{d-1})}^{g(y^1,...,y^{d-1})} f_{Y^1,...,Y^d}(y^1, ..., y^d)dy^d > 0.$

Από επαγωγική υπόθεση, $\mathbb{E}Y' \in intH$.

Αφού το ∂H είναι μέτρου 0, έχουμε:

$\mathbb{E}Y^d = \int_{c\in intH}\left[\int_{f(c)<z<g(c)} zf_{Y^1,...,Y^d}(c, z)dz\right]dc$. Για κάθε $c \in intH$ και κάθε $f(c) < z < g(c)$, έχουμε $f(c)f_{Y^1,...,Y^d}(c, z) < zf_{Y^1,...,Y^d}(c, z) < g(c)f_{Y^1,...,Y^d}(c, z)$. Επομένως

$\int_{c\in intH}\left[\int_{f(c)<z<g(c)} f(c)f_{Y^1,...,Y^d}(c, z)dz\right]dc < \int_{c\in intH}\left[\int_{f(c)<z<g(c)} zf_{Y^1,...,Y^d}(c, z)dz\right]dc <$

$\int_{c\in intH}\left[\int_{f(c)<z<g(c)} g(c)f_{Y^1,...,Y^d}(c, z)dz\right]dc.$

Όμως $\int_{c\in intH}\left[\int_{f(c)<z<g(c)} f(c)f_{Y^1,...,Y^d}(c, z)dz\right]dc = \int_{c\in intH} f(c)f_{Y^1,...,Y^{d-1}}(c)dc = \mathbb{E}f(Y') \geq f(\mathbb{E}Y')$, από την ανισότητα Jensen.
Όμοια, $\int_{c\in intH}\left[\int_{f(c)<z<g(c)} g(c)f_{Y^1,...,Y^d}(c, z)dz\right]dc \leq g(\mathbb{E}Y')$.

Δείξαμε λοιπόν ότι η $\mathbb{E}Y = (\mathbb{E}Y', \mathbb{E}Y^d)$ ικανοποιεί τις ανισότητες $f(\mathbb{E}Y') < \mathbb{E}Y^d < g(\mathbb{E}Y')$. Επομένως, το $\mathbb{E}Y$ είναι εσωτερικό σημείο του K.

Λήμμα 7.3. *i) Έστω $n \geq 1$ και $K_0, ..., K_n \subseteq \mathbb{R}^d$ κυρτά σώματα τα οποία δεν έχουν όλα το ίδιο κέντρο βάρους. Τότε υπάρχουν ευθείες $G_0, ..., G_n$ τέτοιες ώστε τα $St_{G_n} \circ ... \circ St_{G_0}(K_0), ..., St_{G_n} \circ ... \circ St_{G_0}(K_n)$ περιέχουν το 0 ως εσωτερικό σημείο και δεν έχουν όλα το ίδιο κέντρο βάρους.*

ii) Αν τα κυρτά σώματα $K_1, ..., K_n$ δεν έχουν όλα το 0 ως κέντρο βάρους τότε υπάρχουν ευθείες $G_0, ..., G_n$ τέτοιες ώστε τα $St_{G_n} \circ ... \circ St_{G_0}(K_1), ..., St_{G_n} \circ ... \circ St_{G_0}(K_n)$ περιέχουν το 0 ως εσωτερικό σημείο και δεν έχουν όλα το 0 ως κέντρο βάρους.

Απόδειξη. i) Έστω c_i το κέντρο βάρους του K_i, $i = 0, ..., n$. Υπάρχει $j = 1, ..., n$ ώστε $c_0 \neq c_j$. Επιλέγουμε σημείο x_0 στο εσωτερικό του K_0 τέτοιο ώστε το ευθύγραμμο τμήμα $[0, x_0]$ να μην είναι παράλληλο στο $[c_0, c_j]$. Επιλέγουμε G_0 ευθεία παράλληλη στο $[0, x_0]$ και παρατηρούμε ότι $c_0|G_0^\perp \neq c_j|G_0^\perp$. Επίσης, το 0 είναι εσωτερικό σημείο του $St_{G_0}(K_0)$. Είναι επίσης προφανές ότι κάθε Steiner συμμετρικοποίηση του $St_{G_0}(K_0)$ έχει το 0 ως εσωτερικό σημείο. Τα $St_{G_0}(K_0), ..., St_G(K_n)$ έχουν τις ίδιες ιδιότητες με τα $K_0, ..., K_n$ αλλά επιπλέον το $St_{G_0}(K_0)$ έχει εσωτερικό σημείο το 0. Έστω $K_i' = St_{G_0}(K_i)$, $i = 0, ..., n$ και c_i' το κέντρο βάρους του K_i'. Υπάρχει $j = 0, , 2, ..., n$ ώστε $c_1' \neq c_j'$. Όπως προηγουμένως, υπάρχει ευθεία G_1 ώστε τα $St_{G_1}(K_i')$, $i = 0, ..., n$ δεν έχουν όλα το ίδιο κέντρο βάρους και τα $St_{G_1}(K_0')$, $St_{G_1}(K_1')$ έχουν το 0 εσωτερικό σημείο. Συνεχίζουμε έτσι και παίρνουμε το ζητούμενο.

ii) Εφαρμόζουμε το i) στα κυρτά σώματα $K_0, ..., K_n$, όπου $K_0 = B_2^d$.□

Για την απόδειξη της μοναδικότητας στα Θεωρήματα 7.1 και 7.2, το Λήμμα 7.3 μας επιτρέπει να υποθέσουμε ότι το 0 είναι εσωτερικό σημείο όλων των K_i. Πράγματι, για την περίπτωση π.χ. του $D = S$ στο Θ.7.1, αν τα εσωτερικά των K_i τέμνονται, τότε τελειώσαμε. Αν όχι, τα K_i δεν έχουν το ίδιο κέντρο βάρους και από το Λήμμα 7.3, θεωρούμε τα κυρτά σώματα $K_0', ..., K_n'$, τις διαδοχικές συμμετρικοποιήσεις των $K_0, ..., K_n$ ως προς τις ευθείες $G_0, ..., G_n$ του Λήμματος 7.3 i). Επομένως, τα $K_0', ..., K_n'$ ελαχιστοποιούν, περιέχουν το 0 στο εσωτερικό τους, δεν έχουν όλα το ίδιο κέντρο βάρους και είναι ελλειψοειδή, ομόθετα μεταξύ τους με το ίδιο κέντρο, πράγμα που δε μπορεί να συμβαίνει.
Στην περίπτωση $D = B, I$, χρησιμοποιούμε το ii) του Λήμματος 7.3.

Από ένα αποτέλεσμα των Ewald, Larman και Rogers ([12] σελ. 1-20), παίρνουμε το παρακάτω.

Λήμμα 7.4. *Έστω K κυρτό σώμα. Σχεδόν για κάθε κατεύθυνση $v \in S^{d-1}$, αν υποθέσουμε ότι $v = (0, ..., 0, 1)$ και γράψουμε*

$$K = \{(x, y) : x \in H, f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

όπου $H = K|v^\perp$, τότε $f = g$ στο ∂H.

Στο παρακάτω λήμμα χαρακτηρίζουμε τα ομόθετα ελλειψοειδή.

Λήμμα 7.5. *Έστω K_1, K_2, $K \subseteq \mathbb{R}^d$ ελλειψοειδή και έστω 0 το κέντρο του K. Έστω $D \subseteq S^{d-1}$ πυκνό και $\mathcal{G} = \{G : G$ ευθεία παράλληλη στο $v, v \in D\}$. Ισχύουν τα παρακάτω:*

i) Το K είναι μπάλλα αν και μόνο αν για κάθε $G \in \mathcal{G}$ οι υπόχώροι $G^\perp$, $span P(G, K)$ ταυτίζονται, όπου $P(G, K)$ όπως στο Λήμμα 2.1.

ii) Αν για κάθε $G \in \mathcal{G}$ έχουμε

$$aff(P(G,K_1)) = aff(P(G,K_2))$$

τότε τα K_1, K_2 είναι ομόθετα με το ίδιο κέντρο.

Απόδειξη. i) Η μία κατεύθυνση είναι προφανής.
Έστω ότι για κάθε ευθεία $G \in \mathcal{G}$, $G^{\perp} = spanP(G,K)$. Έπεται ότι για κάθε $G \in \mathcal{G}$, το K και η Steiner συμμετρικοποίηση $St_G(K)$ ταυτίζονται. Άρα το K είναι συμμετρικό ως προς κάθε $G^{\perp}$, $G \in \mathcal{G}$, άρα και ως προς κάθε υπερεπίπεδο που περνάει από το 0. Άρα το K είναι μπάλλα.

ii) Δείχνουμε αρχικά ότι $aff(P(G,K_1)) = aff(P(G,K_2))$ για κάθε ευθεία G.

Έστω H υπερεπίπεδο του $\mathbb{R}^d$. Υπάρχουν μοναδικά $a = (a_1, ..., a_d) \in S^{d-1}$ και $e \in \mathbb{R}$ ώστε $|a| = 1$, η πρώτη μη-μηδενική συντεταγμένη του a να είναι > 0 και $H = \{a_1x^1 + ... + a_dx^d = e\}$.

Αν $H_1 = \{a_1x^1 + ... + a_dx^d = e\}$ και $H_2 = \{b_1x^1 + ... + b_dx^d = f\}$ δύο υπερεπίπεδα του $\mathbb{R}^d$ των οποίων οι εξισώσεις είναι όπως πριν, ορίζουμε

$$\rho(H_1, H_2) = |a_1 - b_1| + ... + |a_d - b_d| + |e - f|$$

Προφανώς, η ρ είναι μετρική στον χώρο των υπερεπιπέδων του $\mathbb{R}^d$. Συμβολίζουμε $H_n \to H$ όταν $\rho(H_n, H) \to 0$.

Έστω $H = \{a_1x^1 + ... + a_dx^d = e\}$ υπερεπίπεδο και T αντιστρέψιμος αφφινικός μετασχηματισμός του $\mathbb{R}^d$, τον οποίο γράφουμε στη μορφή $Tx = Ax + c$, όπου A αντιστρέψιμος πίνακας και $c \in \mathbb{R}^d$. Εύκολα ελέγχουμε ότι, αν $H^{'} = \{b_1x^1 + ... + b_dx^d = f\}$ είναι η εικόνα του H μέσω του T και $a = (a_1, ..., a_d)^T \in \mathbb{R}^d$, $b = (b_1, ..., b_d)^T \in \mathbb{R}^d$, τότε τα b, f καθορίζονται από τις σχέσεις $b = \frac{\epsilon}{|A^{-1}a|}A^{-1}a$, $f = \frac{\epsilon}{|A^{-1}a|}(b \cdot c + e)$, όπου $\epsilon = \pm 1$ το πρόσημο της πρώτης μη-μηδενικής συντεταγμένης του $A^{-1}a$. Συμπεραίνουμε ότι, αν $H_n \to H$ και T αντιστρέψιμος αφφινικός μετασχηματισμός του $\mathbb{R}^d$, τότε $TH_{n_k} \to TH$, για κάποια υπακολουθία (TH_{n_k}).

Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^d$ ελλειψοειδές και T αντιστρέψιμος αφφινικός μετασχηματισμός του $\mathbb{R}^d$ ώστε $TB_2^d = K$ και $v_n \in S^{d-1}$ ώστε $v_n \to v$. Έστω G_n ευθεία παράλληλη στο v_n, $n \in \mathbb{N}$ και G ευθεία παράλληλη στο v. Προφανώς $aff(P(G_n, B_2^d)) \to aff(P(G, B_2^d))$, άρα $aff(P(TG_{n_k}, K)) \to aff(P(TG, K))$, για κάποια υπακολουθία (G_{n_k}). Συμπεραίνουμε ότι, αν $v_n \in S^{d-1}$ ώστε $v_n \to v$, G_n ευθεία παράλληλη στο v_n και G ευθεία παράλληλη στο v, τότε $aff(P(G_{n_k}, K)) \to aff(P(G, K))$, για κάποια υπακολουθία (G_{n_k}).

Από τα παραπάνω και την υπόθεση, παίρνουμε $aff(P(G,K_1)) = aff(P(G,K_2))$ για κάθε ευθεία G.

Έστω $\tilde{\mathcal{G}}$ το σύνολο όλων των ευθειών του $\mathbb{R}^d$ και T_1, T_2 αντιστρέψιμοι αφφινικοί μετασχηματισμοί ώστε $T_1B_2^d = K_1$ και $T_2B_2^d = K_2$. Προφανώς $\{0\} = \bigcap_{G \in \tilde{\mathcal{G}}} aff(P(G, B_2^d))$ άρα

$$\{T_10\} = \bigcap_{G \in \tilde{\mathcal{G}}} aff(T_1P(G, B_2^d)) = \bigcap_{G \in \tilde{\mathcal{G}}} aff(P(T_1G, K_1)) = \bigcap_{G \in \tilde{\mathcal{G}}} aff(P(T_1G, K_2)) = \{T_20\}.$$

Επομένως, τα κέντρα των K_1, K_2 ταυτίζονται. Υποθέτουμε λοιπόν ότι το κέντρο των K_1, K_2 είναι το 0, συνεπώς, οι T_1, T_2 είναι γραμμικοί. Για κάθε $G \in \tilde{\mathcal{G}}$, έχουμε $aff(P(G, T_1B_2^d)) = aff(P(G, T_2B_2^d))$ άρα $aff(P(T_1^{-1}G, B_2^d)) = aff(P(T_1^{-1}G, T_1^{-1}T_2B_2^d))$. Από το i), υπάρχει $\alpha > 0$

ώστε $T_1^{-1}T_2B_2^d = \alpha B_2^d$, και $K_2 = \alpha K_1$.$\square$

Απόδειξη μοναδικότητας στο Θ.7.1. Έστω $K_0, ..., K_n$ κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^d$ για τα οποία το $D_h(\cdot; d)$ ελαχιστοποιείται. Τότε η (4), με $j = 0$, ισχύει για κάθε διεύθυνση όπως προκύπτει από την απόδειξη της ανισότητας στο Θ.7.1. Σταθεροποιούμε μία διεύθυνση v για την οποία έχουμε $k_i = 0$ στο ∂H_i, $i = 0, ..., n$. Άρα ικανοποιείται η υπόθεση του Λ.7.2. Υποθέτουμε ότι $v = (0, ..., 0, 1)$. Επιλέγουμε $x_i \in H_i$, $i = 0, 1, ..., d-1$ ώστε $x_0 = 0$ και τα $x_0, x_1, ..., x_{d-1}$ να είναι αφφινικά ανεξάρτητα. Από το Λήμμα 7.3, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το 0 είναι εσωτερικό σημείο των $K_0, ..., K_n$. Άρα, το 0 είναι εσωτερικό σημείο των $H_0, ..., H_n$. Θεωρούμε μία ημιευθεία του $\{x^d = 0\}$ με άκρο το 0. Αυτή η ημιευθεία τέμνει το ∂H_i στο σημείο x_i, $i = d, ..., n$. Τότε, το x_0 είναι άκρο του ευθύγραμμου τμήματος $J = conv\{x_0, x_d, ..., x_n\}$, αν $D = S, B$ ή του $J = \sum_{i=d}^n [0, x_i]$, αν $D = I$. Τότε $J = [x_0, x_j]$, για κάποιο $j = d, ..., n$, αν $D = S, B$ ή $J = [0, x_d + ... + x_n]$, αν $D = I$. Έστω $x \neq 0$ άκρο του J. Το Λήμμα 7.2 εξασφαλίζει την ύπαρξη μίας κορυφής $L = (l_0, ..., l_n)$ του $T = T(X)$ ώστε η $\Phi_{D,X,0}(L + tu(X))$, $-1 \leq t \leq 1$ να είναι σταθερή, όπου $X = (x_0, ..., x_d)$. Έχουμε $l_i = \pm k_i$, $i = 0, ..., n$, άρα $l_i = 0$, $i = d, ..., n$, αφού $k_i = 0$ στο ∂H_i, $i = 0, ..., n$. Αν $D = S, B$, υπάρχει $j = d, ..., n$ ώστε $x = x_j$. Θέτουμε τότε $\beta_0 = u_j$ και θεωρούμε το γραμμικό παραμετρικό σύστημα

$$P_t = conv\{(x_i, l_i + tu_i)_{i=0}^{d-1}, (x, t\beta_0)\}, \quad -1 \leq t \leq 1$$

Αφού επιπλέον $l_j = 0$, παίρνουμε

$$|conv(\{(x_i, l_i + tu_i)_{i=0}^{d-1}\} \cup \{(x, t\beta_0)\}| \leq |conv\{(x_i, l_i + tu_i)_{i=0}^{n}\}| \tag{6}$$

Αν $D = I$, έχουμε $x = x_d + ... + x_n$. Θέτουμε $\beta_0 = u_d + ... + u_n$ και θεωρούμε την οικογένεια

$$P_t = \sum_{i=1}^{d-1} [0, (x_i, l_i + tu_i)] + [0, (x, t\beta_0)], \quad -1 \leq t \leq 1$$

η οποία είναι γραμμικό παραμετρικό σύστημα (βλ. [8], σελ. 134). Ισχύει $[0, (x, t\beta_0)] \subseteq \sum_{i=d}^n [0, (x_i, l_i + tu_i)]$, αφού $l_d = ... = l_n = 0$. Επομένως

$$\left| \sum_{i=1}^{d-1} [0, (x_i, l_i + tu_i)] + [0, (x, t\beta_0)] \right| \leq \left| \sum_{i=0}^{n} [0, (x_i, l_i + tu_i)] \right| \tag{6'}$$

αφού, στην περίπτωση $D = I$, έχουμε $x_0 = 0$ και $u_0 = l_0 = 0$. Σε κάθε περίπτωση, το δεξί μέλος της (6) και της (6′) είναι σταθερό, το αριστερό μέλος κυρτή συνάρτηση του t και έχουμε ισότητα για $t = 0$. Άρα, το αριστερό μέλος της (6) και της (6′) είναι σταθερή συνάρτηση του t. Συμπεραίνουμε ότι η ορίζουσα $\det[(x_0, l_0 + tu_0, 1), ..., (x_{d-1}, l_{d-1} + tu_{d-1}, 1), (x, t\beta_0, 1)]$ είναι σταθερή ως προς t, στην περίπτωση $D = S$, ενώ η ορίζουσα $\det[(x_1, l_1 + tu_1), ..., (x_{d-1}, l_{d-1} + tu_{d-1}), (x, t\beta_0)]$ είναι σταθερή ως προς t, στην περίπτωση $D = B, I$. Χρησιμοποιήσαμε τον τύπο

$$\left| \sum_{i=1}^{d} [0, y_i] \right| = |\det(y_1, ..., y_d)|$$

Εξισώνοντας τις τιμές για $t = 0$ και $t = 1$, παίρνουμε

$$\det[(x_0, u_0, 1), ..., (x_{d-1}, u_{d-1}, 1), (x, \beta_0, 1)] = 0$$

αν $D = S$, ενώ

$$\det[(x_1,u_1),...,(x_{d-1},u_{d-1}),(x,\beta_0)]=0$$

αν $D=B,I$. Όμως,

$$\det[(x_1,u_1),...,(x_{d-1},u_{d-1}),(x,\beta_0)]=\det[(x_0,u_0,1),...,(x_{d-1},u_{d-1},1),(x,\beta_0,1)]$$

αφού $x_0=0$ και $u_0=l_0=0$. Σε κάθε περίπτωση, τα σημεία $(x_0,u_0),...,(x_{d-1},u_{d-1}),(x,\beta_0)$ ανήκουν σε ένα υπερεπίπεδο. Τα σημεία x_1,x_2 έχουν επιλεγεί τυχαία, επομένως οι συναρτήσεις $u_i=\frac{f_i+g_i}{2}$, $i=1,2$ είναι αφφινικές και ίσες σε όλα τα σημεία που ορίζονται ταυτόχρονα. Επαναλαμβάνοντας τον ίδιο ισχυρισμό για όλες τις μεταθέσεις $K_{i_0},...,K_{i_n}$, παίρνουμε ότι οι u_i, $i=0,...,n$ είναι αφφινικές και ίσες στα σημεία που ορίζονται ταυτόχρονα. Δείξαμε λοιπόν ότι τα σύνολα $P(v,K_i)=\{(x,u_i(x)):x\in H_i\}$, $i=0,...,n$ περιέχονται όλα σε ένα υπερεπίπεδο. Απο το Λήμμα 7.4, αυτό ισχύει για σχεδόν κάθε διεύθυνση $v\in S^{d-1}$. Από το Λήμμα 2.1, όλα τα K_i είναι ελλειψοειδή. Επιπλέον, από το Λημμα 7.5, τα K_i είναι ομόθετα με το ίδιο κέντρο. Ειδικότερα, αν $D=B,I$, τότε $K_0=\{0\}$, και το κέντρο είναι η αρχή των αξόνων.□

Προχωράμε στην απόδειξη του Θεωρήματος 7.2.

Λήμμα 7.6. *Έστω $Q\subseteq\mathbb{R}^d$ πολύτοπο το οποίο παράγεται από τα σημεία $v_1,...,v_n$. Έστω ότι τα σημεία $v_1,...,v_k$, $k\geq d$ παράγουν ένα υπερεπίπεδο στήριξης H του Q και έστω x ένα σημείο του πολυτόπου το οποίο παράγεται από τα $v_1,...,v_k$. Θεωρούμε το γραμμικό παραμετρικό σύστημα*

$$Q_t=conv(\{v_1+\beta_1t\nu,...,v_n+\beta_nt\nu,x+\beta_0t\nu\},P_t),\ t_0\leq t\leq t_1$$

όπου $\beta_0,...,\beta_n\in\mathbb{R}$, $t_0<0<t_1$, $\nu\in S^{d-1}$ και P_t γραμμικό παραμετρικό σύστημα με διεύθυνση ν. Αν ο όγκος $|Q_t|$ είναι αφφινική συνάρτηση του t και $Q_0=Q$ τότε, για κάθε t, τα σημεία $v_1+\beta_1t\nu,...,v_k+\beta_kt\nu$ ανήκουν σε ένα υπερεπίπεδο το οποίο στηρίζει το Q_t.

Απόδειξη. Χωρίζουμε την απόδειξη σε διάφορα βήματα:

Βήμα 1.
Στην περίπτωση όπου η διάσταση του Q είναι $<d$, έχουμε $|Q_t|=0$, για κάθε t, αφού ο όγκος $|Q_t|$ είναι αφφινική συνάρτηση του t, άρα το Q_t είναι επίπεδο σύνολο και το ζητούμενο έπεται. Έστω λοιπόν ότι η διάσταση του Q είναι d. Επίσης, αν το ν είναι παράλληλο στο H, τότε το συμπέρασμα είναι άμεσο διότι αν ένα σημείο ανήκει σε έναν από τους δύο ανοικτούς ημίχωρους που ορίζει το H, τότε κάθε μεταφορά του με διεύθυνση ν ανήκει στον ίδιο ημίχωρο και αν ένα σημείο ανήκει στο H τότε κάθε μεταφορά του με διεύθυνση ν ανήκει στο H. Υποθέτουμε λοιπόν ότι το ν δεν είναι παράλληλο στο H.
Έχουμε

$$|Q_t|=\int_{Q|\nu^\perp}|Q_t\cap(z+\nu\mathbb{R})|_1dz$$

με την υπο-ολοκλήρωση συνάρτηση κυρτή ως προς t, για κάθε $z\in Q|\nu^\perp$ (βλ. [28], σελ. 93-102).

Βήμα 2. Δείχνουμε ότι η $|Q_t\cap(z+\nu\mathbb{R})|_1$ είναι αφφινική συνάρτηση του t, για κάθε $z\in Q|\nu^\perp$.

Θεωρούμε συνάρτηση $g=g(z,t):(Q|\nu^\perp)\times[t_0,t_1]\to\mathbb{R}$ η οποία είναι κυρτή ως προς t για κάθε $z\in Q|\nu^\perp$, συνεχής στο $int(Q|\nu^\perp)$, για κάθε $t\in[t_0,t_1]$ και συνεχής ως συνάρτηση του z πάνω σε κάθε ευθύγραμμο τμήμα $[x,y]\subseteq Q|\nu^\perp$ το οποίο τέμνει το $int(Q|\nu^\perp)$,για κάθε $t\in[t_0,t_1]$. Αν η

συνάρτηση $f(t) = \int_{Q|\nu^\perp} g(z,t)dz$ είναι αφφινική, τότε η g είναι αφφινική συνάρτηση ως προς t, για κάθε $z \in Q|\nu^\perp$.

Πράγματι, έστω $z \in int(Q|\nu^\perp)$, $t_0 \leq t_2, t_3 \leq t_1$ και $0 \leq \lambda \leq 1$. Έχουμε $g(z, \lambda t_2 + (1-\lambda)t_3) \leq \lambda g(z,t_2) + (1-\lambda)g(z,t_3)$. Αν είχαμε $g(z, \lambda t_2 + (1-\lambda)t_3) < \lambda g(z,t_2) + (1-\lambda)g(z,t_3)$, από την συνέχεια των $g(\cdot, \lambda t_2 + (1-\lambda)t_3)), g(\cdot, t_2), g(\cdot, t_3)$ στο z, θα παίρναμε $f(z, \lambda t_2 + (1-\lambda)t_3) < \lambda f(t_2) + (1-\lambda)f(t_3)$, αντίφαση. Άρα το ζητούμενο είναι σωστό αν $z \in int(Q|\nu^\perp)$

Έστω $z \in \partial(Q|\nu^\perp)$. Θεωρούμε σημείο $y \in int(Q|\nu^\perp)$ και ακολουθία $z_k \in [z,y]\backslash\{z\}$ ώστε $z_k \to z$. Τότε $z_k \in int(Q|\nu^\perp)$ και $g(z_k,t) \to g(z,t)$, για κάθε $t \in [t_0,t_1]$, από υπόθεση. Έχουμε ότι $g(z_k,t)$ είναι αφφινική συνάρτηση του t, άρα η $g(z,t)$ είναι αφφινική συνάρτηση του t επίσης. Οι υποθέσεις του ισχυρισμού μας ικανοποιούνται, με $f(t) = |Q_t|$ και $g(z,t) = |Q_t \cap (z + \nu\mathbb{R})|_1$. Έπεται ότι η $|Q_t \cap (z+\nu\mathbb{R})|_1$ είναι αφφινική ως προς t, για κάθε $z \in Q|\nu^\perp$.

Βήμα 3. Δείχνουμε ότι το $x + \beta_0 t\nu$ είναι συνοριακό σημείο του Q_t.

Έστω $[x,y] = Q \cap (x+\nu\mathbb{R})$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα $v_1, ..., v_d$ είναι αφφινικά ανεξάρτητα και $x \in conv\{v_1, ..., v_d\}$, από το Θεώρημα του Καραθεοδωρή (βλ. [19], σελ. 43). Τότε $x = \sum_{i=1}^d \lambda_i v_i$, $y = \sum_{i=1}^d \mu_i v_{j_i}$ για κάποια $\lambda_i, \mu_i \geq 0$ με $\sum_{i=1}^d \lambda_i = \sum_{i=1}^d \mu_i = 1$ και κάποια $j_1, ..., j_d \in \{1, ..., n\}$, από το Θεώρημα του Καραθεοδωρή, αφού το y ανήκει σε κάποια πλευρά του Q. Θέτουμε $\gamma = \sum_{i=1}^d \lambda_i \beta_i$ και $\delta = \sum_{i=1}^d \lambda_{j_i} \beta_{j_i}$. Εύκολα ελέγχουμε ότι $x + \beta_0 t\nu, x + \gamma t\nu, y + \delta t\nu \in Q_t \cap (x + \mathbb{R}\nu)$, άρα

$$|[x + \beta_0 t\nu, y + \delta t\nu]|_1, |[x + \gamma t\nu, y + \delta t\nu]|_1 \leq |Q_t \cap (x + \mathbb{R}\nu)|_1 \tag{7}$$

για κάθε t, με τις δύο ποσότητες στο αριστερό μέλος της (7) να είναι κυρτές ως προς t, το δεξί μέλος αφφινική συνάρτηση του t και έχουμε ισότητα για $t = 0$. Έπεται ότι έχουμε ισότητα στην (7) για κάθε $t \in [t_0, t_1]$, και $[x+\beta_0 t\nu, y+\delta t\nu] = [x+\gamma t\nu, y+\delta t\nu] = Q_t \cap (x+\mathbb{R}\nu)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, απ' όπου παίρνουμε $\beta_0 = \gamma$. Άρα $x+\beta_0 t\nu = \sum_{i=1}^d \lambda_i (v_i + \beta_i t\nu)$, και τα σημεία $v_1+\beta_1 t\nu, ..., v_d+\beta_d t\nu, x+\beta_0 t\nu$ ανήκουν σε υπερεπίπεδο. Επιπλέον, το $x + \beta_0 t\nu$ είναι συνοριακό σημείο του Q_t.

Βήμα 4. Δείχνουμε ότι για κάθε d-άδα δεικτών $i_1, ..., i_d \in \{1, ..., k\}$ για την οποία έχουμε ότι τα $v_{i_1}, ..., v_{i_d}$ είναι αφφινικά ανεξάρτητα, τα $v_{i_1} + \beta_{i_1} t\nu, ..., v_{i_d} + \beta_{i_d} t\nu$ παράγουν ένα υπερεπίπεδο που στηρίζει το Q_t.

Έστω ότι τα $v_{i_1}, ..., v_{i_d}$ είναι αφφινικά ανεξάρτητα, με $i_j \in \{1, ..., k\}$. Έστω z εσωτερικό σημείο του simplex $conv\{v_{i_1}, ..., v_{i_d}\}$. Τότε $z = \sum_{j=1}^d \xi_j v_{i_j}$ με $\xi_j > 0$, $\sum_{j=1}^d \xi_j = 1$. Θέτουμε $\zeta = \sum_{j=1}^d \xi_j \beta_{i_j}$. Αφού το ν δεν είναι παράλληλο στο H, τα $v_{i_1} + \beta_{i_1} t\nu, ..., v_{i_d} + \beta_{i_d} t\nu$ είναι αφφινικά ανεξάρτητα. Πράγματι, εύκολα μπορούμε να δούμε, γενικά, ότι αν τα $x_1, ..., x_d \in \mathbb{R}^d$ είναι αφφινικά ανεξάρτητα, $a_1, ..., a_d \in \mathbb{R}$ και το $v \in \mathbb{R}^d$ είναι τέτοιο ώστε τα $x_1 + a_1 v, , ..., x_d + a_d v$ είναι αφφινικά εξαρτημένα, τότε το v είναι παράλληλο στο υπερεπίπεδο $aff\{x_1, ..., x_d\}$. Άρα το $z + t\zeta\nu$ είναι εσωτερικό σημείο του simplex $conv\{v_{i_1} + \beta_{i_1} t\nu, ..., v_{i_d} + \beta_{i_d} t\nu\}$. Έχουμε $Q_t = conv(\{v_1 + \beta_1 t\nu, ..., v_n + t\beta_n, z + \zeta t\nu\}, \tilde{P}_t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, όπου $\tilde{P}_t = conv(P_t, \{x + \beta_0 t\nu\})$. Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία όπως στο βήμα 3, συμπεραίνουμε ότι τα $v_{i_1}+\beta_{i_1} t\nu, ..., v_{i_d}+\beta_{i_d} t\nu, z+\zeta t\nu$ ανήκουν σε ένα υπερεπίπεδο και το $z + \zeta t\nu$ είναι συνοριακό σημείο του Q_t. Επομένως, τα $v_{i_1} + \beta_{i_1} t\nu, ..., v_{i_d} + \beta_{i_d} t\nu$ παράγουν ένα υπερεπίπεδο που στηρίζει το Q_t.

Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη, αρκεί να δείξουμε ότι τα σημεία $v_1+\beta_1 t\nu, ..., v_k+\beta_k t\nu$ ανήκουν σε ένα υπερεπίπεδο.

Βημα 5.
Έστω $d \geq 1$ και έστω $R \subseteq \mathbb{R}^d$ d-διάστατο πολύτοπο το οποίο παράγεται από τα k σημεία $v_1, ..., v_k \in \mathbb{R}^d$, $k \geq d+2$. Δείχνουμε ότι υπάρχουν δείκτες $i_1, ..., i_{d+1}, j_{d+1}, ..., j_{k-1} \in \{1, ..., k\}$ ώστε $\{i_l\}_{l=1}^{d+1} \cup \{j_l\}_{l=d+1}^{k-1} = \{1, ..., k\}$ και τα

$$R_1 = conv\{v_{i_1}, ..., v_{i_d}, v_{i_{d+1}}\}, R_2 = conv\{v_{i_1}, ..., v_{i_d}, v_{j_{d+1}}, ..., v_{j_{k-1}}\}$$

να είναι διάστασης d. Επιπλέον, τα εσωτερικά των R_1, R_2 τέμνονται.

Εύκολα βλέπουμε ότι αν το ζητούμενο ισχύει για $k = d+2$ τότε ισχύει για όλα τα $k \geq d+2$. Επίσης, στην περίπτωση π.χ. όπου $v_{d+2} \in conv\{v_1, ..., v_d, v_{d+1}\}$ μπορούμε να πάρουμε $F = conv\{v_1, ..., v_d\}$, $R_1 = conv\{v_1, ..., v_d, v_{d+1}\}$ και $R_2 = conv\{v_1, ..., v_d, v_{d+2}\}$ με την προϋπόθεση ότι $v_{d+2} \notin conv\{v_1, ..., v_d\}$. Υποθέτουμε λοιπόν ότι τα $v_1, ..., v_{d+2}$ είναι κορυφές του R. Δείχνουμε, με επαγωγή στην διάσταση d, ότι κάποια $(d-1)$-διάστατη πλευρά F του R έχει ακριβώς d κορυφές. Για $d = 1, 2$, το ζητούμενο είναι προφανές. Έστω $R \subseteq \mathbb{R}^d$ d-διάστατο πολύτοπο με $d+2$ κορυφές, έστω τις $v_1, ..., v_{d+2}$, και έστω F μία $(d-1)$-διάστατη πλευρά του. Αν το F έχει d κορυφές, τελειώσαμε. Αν όχι, τότε το F έχει $d+1$ κορυφές, έστω τις $v_1, ..., v_{d+1}$. Από την επαγωγική υπόθεση, μία $(d-2)$-διάστατη πλευρά του F έχει $d-1$ κορυφές, έστω τις $v_3, ..., v_{d+1}$. Τότε, το $F' = conv\{v_3, ..., v_{d+2}\}$ είναι $(d-1)$-διάστατη πλευρά του R.
Υποθέτουμε λοιπόν ότι το $F = conv\{v_1, ..., v_d\}$ είναι $(d-1)$-διάστατη πλευρά του R. Θέτουμε $R_1 = conv\{v_1, ..., v_d, v_{d+1}\}$, $R_2 = conv\{v_1, ..., v_d, v_{d+2}\}$. Τα R_1, R_2 είναι διάστασης d. Μένει να δείξουμε ότι $intR_1 \cap intR_2 \neq \varnothing$. Έστω $x \in intF$, G η ευθεία που είναι ορθογώνια στο $affF$ και διέρχεται από το x. Η G τέμνει τα R_1, R_2 σε μη-τετριμμένα ευθύγραμμα τμήματα $[x, y_1], [x, y_2]$, αντίστοιχα. Το εσωτερικό της τομής αυτών των ευθυγράμμων τμημάτων αποτελείται από εσωτερικά σημεία και των δύο simplices R_1, R_2.

Βήμα 6. Δείχνουμε με επαγωγή στο $k \geq d$ ότι τα $v_1 + \beta_1 t\nu, ..., v_k + \beta_k t\nu$ παράγουν ένα υπερεπίπεδο που στηρίζει το Q_t.

Για $k = d$, έχουμε ότι τα $v_1, ..., v_d$ είναι αφφινικά ανεξάρτητα. Από το βήμα 4, έπεται το ζητούμενο.

Υποθέτουμε ότι το ζητούμενο ισχύει για $k = d, ..., m-1$ και το δείχνουμε για $k = m$.
Εφαρμόζουμε τον ισχυρισμό του βήματος 5 στο $R = conv\{v_1, ..., v_m\}$ και παίρνουμε, μετά από κατάλληλη αρίθμηση, ότι τα $R_1 = conv\{v_1, ..., v_{d-1}, v_d\}$, $R_2 = conv\{v_1, ..., v_{d-1}, v_{j_d}, ..., v_{j_{m-1}}\}$ είναι διάστασης $d-1$, τα εσωτερικά τους τέμνονται και $\{1, ..., d, j_d, ..., j_{m-1}\} = \{1, ..., m\}$. Έστω $z \in intR_1 \cap intR_2$. Έχουμε $z = \sum_{i=1}^d \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^d \xi_i v_{k_i}$, όπου $\lambda_i, \xi_i > 0$, $\sum_{i=1}^d \lambda_i = \sum_{i=1}^d \xi_i = 1$, $k_i \in \{1, ..., d-1, j_d, ..., j_{m-1}\}$, $i = 1, ..., d$ και τα $v_{k_1}, ..., v_{k_d}$ είναι αφφινικά ανεξάρτητα. Θέτουμε $\zeta_1 = \sum_{i=1}^d \lambda_i \beta_i$ και $\zeta_2 = \sum_{i=1}^d \xi_i \beta_{k_i}$. Τότε, $Q_t = conv(\{v_1 + \beta_1 t\nu, ..., v_n + t\beta_n, z + \zeta_1 t\nu\}, \tilde{P}_t)$, $0 \leq t \leq t_1$, όπου $\tilde{P}_t = conv(P_t, \{x + \beta_0 t\nu\})$. Όπως στο βήμα 3, παίρνουμε ότι $\zeta := \zeta_1 = \zeta_2$. Όπως στο βήμα 4, παίρνουμε ότι το $z + \zeta t\nu$ είναι εσωτερικό σημείο και των δύο simplices $conv\{v_1 + \beta_1 t\nu, ..., v_d + \beta_d t\nu\}, conv\{v_{k_1} + \beta_{k_1} t\nu, ..., v_{k_d} + \beta_{k_d} t\nu\}$. Όπως στο βήμα 4, παίρνουμε ότι τα $conv\{v_1 + \beta_1 t\nu, ..., v_d + \beta_d t\nu\}$, $conv\{v_{k_1} + \beta_{k_1} t\nu, ..., v_{k_d} + \beta_{k_d} t\nu\}$ περιέχονται στο σύνορο του Q_t και ότι τα εσωτερικά τους τέμνονται. Άρα, αυτά περιέχονται στην ίδια πλευρά του Q_t. Από επαγωγική υπόθεση, τα $v_1 + \beta_1 t\nu, ..., v_{d-1} + \beta_{d-1} t\nu, ..., v_{j_d} + \beta_{j_d} t\nu, ..., v_{j_{m-1}} + \beta_{j_{m-1}} t\nu$ παράγουν ένα υπερεπίπεδο H_t που στηρίζει το Q_t. Προφανώς $H_t = aff\{v_{k_1} + \beta_{k_1} t\nu, ..., v_{k_d} + \beta_{k_d} t\nu\}$ και $aff\{v_1 + \beta_1 t\nu, ..., v_d + \beta_d t\nu\} = aff\{v_{k_1} + \beta_{k_1} t\nu, ..., v_{k_d} + \beta_{k_d} t\nu\}$, αφού τα $v_1 + \beta_1 t\nu, ..., v_d + \beta_d t\nu, v_{k_1} + \beta_{k_1} t\nu, ..., v_{k_d} + \beta_{k_d} t\nu$ ανήκουν στην ίδια πλευρά του Q_t. Επομένως, $v_1 + \beta_1 t\nu, ..., v_k + \beta_k t\nu \in H_t$. $\square$

Θα λέμε ότι δύο αφφινικοί υπόχωροι $A_1, A_2 \subseteq \mathbb{R}^d$ είναι *παράλληλοι* αν υπάρχει $x \in \mathbb{R}^d$ ώστε $A_1 + x \subseteq A_2$ ή $A_2 + x \subseteq A_1$. Επίσης, θα λέμε ότι ο αφφινικός υπόχωρος $A \subseteq \mathbb{R}^d$ είναι *κάθετος* στο υπερεπίπεδο $H \subseteq \mathbb{R}^d$ αν υπάρχει ευθεία G η οποία είναι παράλληλη στον A και ορθογώνια στο H. Παρατηρούμε ότι αν υπάρχουν δύο τέτοιες ευθείες, τότε αυτές είναι αναγκαστικά παράλληλες.

Λήμμα 7.7. *Έστω H_1, H_2 δύο υπερεπίπεδα του $\mathbb{R}^d$. Τα παρακάτω ισχύουν:*

i) Αν το H_1 είναι κάθετο στο H_2 τότε $H_1|H_2 = H_1 \cap H_2$ ενώ αν το H_1 δεν είναι κάθετο στο H_2 τότε $H_1|H_2 = H_2$.

ii) Αν το H_1 είναι κάθετο στο H_2, τότε το H_2 είναι κάθετο στο H_1.

iii)Αν κάθε υπερεπίπεδο το οποίο είναι κάθετο στο H_1, είναι κάθετο και στο H_2, τα H_1, H_2 είναι παράλληλα.

Απόδειξη. Σε κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων, $H_2 = \{x^d = 0\}$.

i) Έστω ότι το H_1 είναι κάθετο στο H_2. Τότε, ο x^d-άξονας είναι παράλληλος στο H_1. Έστω $(c, 0) \in H_1|H_2$, όπου $c \in \mathbb{R}^{d-1}$. Υπάρχει $z \in \mathbb{R}$ ώστε $(c, z) \in H_1$. Επομένως, η ευθεία που διέρχεται από το (c, z) και είναι παράλληλη στον x^d-άξονα περιέχεται στο H_1 άρα $(c, 0) \in H_1$, και $(c, 0) \in H_1 \cap H_2$.
Έστω $(c, 0) \in H_1 \cap H_2$. Έχουμε ότι, αν $z \in \mathbb{R}$, $(c, z) \in H_1$. Όμως, $(c, 0) = (c, 0)|H_2$, άρα $(c, 0) \in H_1|H_2$.

Έστω ότι το H_1 δεν είναι κάθετο στο H_2. Τότε, ο x^d-άξονας δεν είναι παράλληλος στο H_1. Έστω $(c, 0) \in H_2$. Η ευθεία που διέρχεται από το $(c, 0)$ και είναι παράλληλη στον x^d-άξονα τέμνει το H_1 σε μοναδικό σημείο, έστω $(c, z) \in H_1$. Τότε, $(c, 0) = (c, z)|H_2$, και $(c, 0) \in H_1|H_2$.

ii) Έστω G ευθεία η οποία περιέχεται στο H_1 και η οποία είναι ορθογώνια στο H_2. Έστω x η τομή της G με το H_2. Θεωρούμε την ευθεία $G^{'}$ που διέρχεται από το x και είναι ορθογώνια στο H_1. Έχουμε ότι η $G^{'}$ είναι ορθογώνια στο H_1 και $G \subseteq H_1$. Τότε, οι $G, G^{'}$ είναι ορθογώνιες. Έπεται ότι $G^{'} \subseteq H_2$.

iii) Έστω $A_1, A_2 \subseteq \mathbb{R}^d$ αφφινικοί χώροι ώστε ο $A_1 \cap A_2$ να έχει διάσταση ≥ 1 και έστω ευθεία $G \subseteq \mathbb{R}^d$ η οποία είναι παράλληλη και στους δύο υπόχωρους A_1, A_2. Δείχνουμε ότι η G είναι παράλληλη στον $A_1 \cap A_2$. Έστω $\tilde{G}$ ευθεία παράλληλη της G η οποία τέμνει το $A_1 \cap A_2$ στο σημείο x. Τότε, η $\tilde{G}$ είναι παράλληλη στον A_1 και τον τέμνει στο σημείο x. Τότε $\tilde{G} \subseteq A_1$. Όμοια, $\tilde{G} \subseteq A_2$, άρα $\tilde{G} \subseteq A_1 \cap A_2$.

Τώρα, έστω A_1, A_2 όπως πριν αλλά με την επιπλέον υπόθεση ότι οι A_1, A_2 είναι και οι δύο κάθετοι σε ένα υπερεπίπεδο H. Δείχνουμε ότι και ο $A_1 \cap A_2$ είναι κάθετος στο H. Υπάρχει ευθεία G_i η οποία είναι παράλληλη στον A_i και ορθογώνια στο H, $i = 1, 2$. Τότε, οι G_1, G_2 είναι παράλληλες. Άρα υπάρχει ευθεία G η οποία είναι παράλληλη στον A_1 και στον A_2 και ορθογώνια στο H. Τότε η G είναι παράλληλη στον $A_1 \cap A_2$. Το ζητούμενο έπεται.
Έχουμε συνεπώς ότι, αν οι αφφινικοί υπόχωροι $A_1, ..., A_m$ είναι κάθετοι στο H και η διάσταση του $A_1 \cap ... \cap A_m$ είναι ≥ 1, τότε ο $A_1 \cap ... \cap A_m$ είναι επίσης κάθετος στο H.

Θεωρούμε υπερεπίπεδα $A_1, ..., A_{d-1}$ τα οποία είναι κάθετα στο H_1 και η τομή τους είναι μία ευθεία G. Από υπόθεση, τα $A_1, ..., A_{d-1}$ είναι κάθετα στο H_2. Από τα προηγούμενα, η G είναι ορθογώνια και στα δύο υπερεπίπεδα H_1, H_2. Επομένως, τα H_1, H_2 είναι παράλληλα.□

Απόδειξη μοναδικότητας Θ.7.2. Έστω ότι $D = S, B$.
Έστω $K_0, ..., K_n$ στα οποία ελαχιστοποιείται το $D_h(\cdot; d, j)$, όπου $j = 1, ..., d-1$. Τότε η σχέση (4) ικανοποιείται. Έστω διεύθυνση $v \in S^{d-1}$ ώστε $k_i = 0$ στο ∂H_i, $i = 0, ..., n$, άρα οι u_i, $i = 0, ..., n$ είναι συνεχείς, και υποθέτουμε ότι $v = (0, ..., 0, 1)$. Από το Λήμμα 7.3, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το 0 είναι εσωτερικό σημείο όλων των K_i. Θέτουμε $k = d - j$. Επιλέγουμε τα $x_i \in H_i$, $i = 0, 2, ..., n$, ώστε $x_2 = 0$, το πολύτοπο $conv\{x_0, x_2, ..., x_k\}$ να είναι $(k-1)$-διάστατο simplex και $x_i = x_k$, $i = k+1, ..., n$. Το σύνολο N των $x_1 \in H_1$ για τα οποία η διάσταση του $conv\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ είναι $k-1$ είναι ακριβώς το σύνολο $N = \{x_1 \in H_1 : x_1 \in aff\{x_0, x_2, ..., x_n\}\}$. Επειδή η διάσταση του H_1 είναι $d-1$ και $d-1 > k-1$, το N είναι σύνολο ($(d-1)$-διάστατου) μέτρου 0.

Έστω $x_1 \in H_1 \backslash N$. Θα δείξουμε ότι $u_1(x_1) = u_0(x_0)$, δηλαδή η $u_1 : H_1 \backslash N \to \mathbb{R}$ είναι σταθερή. Θα συμπεράνουμε ότι η $u_1 : H_1 \to \mathbb{R}$ είναι σταθερή, αφού είναι συνεχής. Αν $D = S$, επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία για όλες τις μεταθέσεις $K_{i_0}, ..., K_{i_n}$ και παίρνουμε ότι οι συναρτήσεις $u_0, ..., u_n$ είναι σταθερές, και ίσες στο $H_0 \cap ... \cap H_n$. Αν $D = B$, $u_0(x_0) = 0$ και επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία για όλες τις μεταθέσεις $K_{i_0}, ..., K_{i_n}$ με $i_0 = 0$ και παίρνουμε ότι οι συναρτήσεις $u_1, ..., u_n$ είναι οι μηδενικές συναρτήσεις. Από το Λήμμα 2.1 και το Λήμμα 7.4, αυτό θα ισχύει για σχεδόν κάθε διεύθυνση $v \in S^{d-1}$. Θα συμπεράνουμε από το Λήμμα 7.5 ότι, αν $D = B$, τα $K_1, ..., K_n$ είναι μπάλλες με κέντρο το 0 ενώ αν $D = S$, τα $K_0, ..., K_n$ είναι μπάλλες με το ίδιο κέντρο.

Από το Λήμμα 7.2, υπάρχει κορυφή L του $T(X)$ ώστε

$$\Phi_{D,X,j}(L + tu) = \Phi_{D,X,j}(L)$$

για κάθε $-1 \leq t \leq 1$, άρα από τον τύπο του Kubota,

$$\int_{\mathcal{G}_{d,k}} |conv\{(x_i, l_i + tu_i)_{i=0}^n\}|E|_k d\nu_{d,k}(E) = \int_{\mathcal{G}_{d,k}} |conv\{(x_i, l_i)_{i=0}^n\}|E|_k d\nu_{d,k}(E), \ -1 \leq t \leq 1 \quad (8)$$

Ισχυρισμός. Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^d$ κυρτό σώμα και $E_m, E \subseteq \mathcal{G}_{d,j}$, $m \in \mathbb{N}$ ώστε $E_m \to E$ με την μετρική ρ. Τότε $|K|E_m|_k \to |K|E|_k$, δηλαδή η απεικόνιση $\mathcal{G}_{d,j} \ni E \mapsto |K|E|_k$ είναι συνεχής.

Απόδειξη του Ισχυρισμού. Έστω $M > 0$ ώστε $K \subseteq MB_2^d$. Θέτουμε $a_m = \sup\{|P_{E_m}(y) - P_E(y)| : y \in K\}$. Έστω $x \in P_{E_m}K$. Υπάρχει $y \in K$ ώστε $P_{E_m}(y) = x$. Έχουμε $P_{E_m}(y) = P_E(y) + |P_{E_m}(y) - P_E(y)|b$, για κάποιο $b \in B_2^d$. Άρα $x \in P_E K + |P_{E_m}(y) - P_E(y)|B_2^d$. Επομένως, $P_{E_m}K \subseteq P_E K + a_m B_2^d$. Όμοια, $P_E K \subseteq P_{E_m}K + a_m B_2^d$. Επομένως, $d(P_{E_m}K, P_E K) \leq a_m$, όπου d η μετρική Hausdorff. Από την άλλη μεριά,

$$a_m = \sup\{|P_{E_m}(y) - P_E(y)| : y \in K, y \neq 0\} \leq M \sup\left\{\left|\frac{P_{E_m}(y)}{|y|} - \frac{P_E(y)}{|y|}\right| : y \in \mathbb{R}^d, y \neq 0\right\} =$$

$$= M||P_{E_m} - P_E|| \to 0.$$

Το ζητούμενο έπεται από την συνέχεια του όγκου $|\cdot|_k$.

Από τον ισχυρισμό και ένα επιχείρημα ανάλογο αυτού της απόδειξης του Ισχυρισμού στο Λήμμα 7.6, από την σχέση (8) έπεται ότι για κάθε k-διάστατο γραμμικό υπόχωρο E, ο όγκος $|conv\{(x_i, l_i +$

$tu_i)_{i=0}^n\}|E|_k$, $-1 \leq t \leq 1$ είναι αφφινική συνάρτηση του t.

Θεωρούμε το πολύτοπο $P = conv\{(x_i, l_i)\colon i = 0, ..., n\}$. Έχουμε ότι η διάσταση του $conv\{x_0, ..., x_n\}$ είναι k. Αν $l_k = ... = l_n$, το P έχει διάσταση k και κορυφές $(x_0, l_0), ..., (x_k, l_k)$. Αν $\#\{l_k, ..., l_n\} \geq 2$, το P έχει διάσταση $k+1$ και οι κορυφές του είναι, έστω, $(x_0, l_0), ..., (x_k, l_k), (x_k, l_{k+1})$. Έστω $G \subseteq \mathbb{R}^d$ ένας $(k+1)$-διάστατος γραμμικός υπόχωρος ο οποίος περιέχει το P. Έχουμε $(x_2, l_2) = (0, l_2) \in P$ και $l_2 = \pm k_2 \neq 0$, αφού $x_2 = 0 \in intH_2$, άρα $v \in G$. Το υπερεπίπεδο $A_0 = aff\{(x_0, l_0), ..., (x_k, l_k)\}$ του G στηρίζει το P και δεν είναι παράλληλο στο v, διότι τα $x_0, ..., x_k$ είναι αφφινικά ανεξάρτητα. Θεωρούμε E υπερεπίπεδο του G το οποίο είναι κάθετο στο A_0.

Θέτουμε $Q = P|E$. Αν η διάσταση του P είναι $k+1$ τότε η διάσταση του Q είναι k. Αν η διάσταση του P είναι k τότε το $A_0 = affP$ είναι ένα υπερεπίπεδο του G, κάθετο στο E. Από το Λήμμα 7.7 i), η διάσταση του $(affP)|E = aff(P|E)$, άρα και του Q, είναι $k-1$. Αφού το E είναι κάθετο στο A_0, από το Λήμμα 7.7 i), η διάσταση του $A_0|E = aff\{(x_0, l_0)|E, ..., (x_k, l_k)|E\}$ είναι $k-1$. Είτε η διάσταση του P είναι $k+1$ είτε είναι k, τα $(x_0, l_0)|E, ..., (x_k, l_k)|E$ περιέχονται στην ίδια $(k-1)$-διάστατη πλευρά του Q. Θεωρούμε το γραμμικό παραμετρικό σύστημα

$$Q_t = conv\{(x_0, l_0 + tu_0), ..., (x_n, l_n + tu_n)\}|E$$

και έχουμε ότι η συνάρτηση $|Q_t|_k$, $-1 \leq t \leq 1$ είναι αφφινική ως προς t. Έχουμε ότι η διάσταση του $Q = Q_0$ είναι k ή $k-1$. Θεωρούμε τους αφφινικούς υπόχωρους $A_t = aff\{(x_0, l_0 + tu_0), ..., (x_k, l_k + tu_k)\}$, $-1 \leq t \leq 1$, του G και δείχνουμε ότι είναι διάστασης k. Πράγματι, τα σημεία $x_0, ..., x_k$ είναι αφφινικά ανεξάρτητα, άρα τα $(x_0, l_0), ..., (x_k, l_k)$ είναι αφφινικά ανεξάρτητα και το υπερεπίπεδο $A_0 = aff\{(x_0, l_0), ..., (x_k, l_k)\}$ δεν είναι παράλληλο στο $v = e_d \in G$. Τότε τα $(x_0, l_0 + tu_0), ..., (x_k, l_k + tu_k) \in G$ είναι αφφινικά ανεξάρτητα.

Θέτουμε $v_i = (x_i, l_i)|E$, $\beta_i = u_i$, $i = 0, ..., n$, $\nu = e_d|E$, $x = v_1$, $\beta_0' = \beta_1$ και $P_t = conv(\{v_i + t\beta_i\nu\}_{i=0}^n)$. Τότε

$$Q_t = conv(\{v_0 + \beta_0 t\nu, ..., v_n + \beta_n t\nu, x + \beta_0' t\nu\}, P_t), \quad -1 \leq t \leq 1$$

Αν $\nu = 0$, τότε έχουμε ότι τα σημεία $v_0 + t\beta_0\nu, ..., v_k + t\beta_k\nu$, δηλαδή τα σημεία $(x_0, l_0 + tu_0)|E, ..., (x_k, l_k + tu_k)|E$ ανήκουν στο ίδιο υπερεπίπεδο του E που στηρίζει το Q_t, $-1 \leq t \leq 1$. Αν $\nu \neq 0$, κανονικοποιώντας και θεωρώντας νέα β_i αν χρειάζεται, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\nu \in S^{d-1}$. Έχουμε ότι τα $v_0, ..., v_k$ παράγουν ένα υπερεπίπεδο (το $A_0|E$) του E που στηρίζει το Q, $x \in conv\{v_0, ..., v_k\}$ και $Q_0 = Q$. Από το Λήμμα 7.6, τα σημεία $v_0 + \beta_0 t\nu, ..., v_k + \beta_k t\nu$, δηλαδή τα σημεία $(x_0, l_0 + tu_0)|E, ..., (x_k, l_k + tu_k)|E$ ανήκουν στο ίδιο υπερεπίπεδο του E που στηρίζει το Q_t, $-1 \leq t \leq 1$. Έχουμε ότι η διάσταση του $A_t|E$ είναι $\leq k-1$, άρα $A_t|E \neq E$ άρα, από το Λήμμα 7.7 i), το υπερεπίπεδο A_t είναι κάθετο στο E, $-1 \leq t \leq 1$. Από το Λήμμα 7.7 ii), το E είναι κάθετο στο A_t, $-1 \leq t \leq 1$.

Δείξαμε ότι κάθε k-διάστατος υπόχωρος E του G, κάθετος στον A_0, είναι επίσης κάθετος στον $A_1 \subseteq G$. Από το Λήμμα 7.7 iii), οι A_0, A_1 είναι παράλληλοι. Επειδή το v δεν είναι παράλληλο στα υπερεπίπεδα A_0, A_1 του G, βλέπουμε ότι το A_i είναι το γράφημα αφφινικής συνάρτησης h_i, $i = 0, 1$ και, επιπλέον, υπάρχει σταθερά $c \in \mathbb{R}$ ώστε $h_1 = h_0 + c$. Οι h_0, h_1 ικανοποιούν $h_0(x_i) = l_i$, $h_1(x_i) = l_i + u_i$, $i = 0, ..., k$, άρα $c = u_0$, και $u_1(x_1) = u_0(x_0)$.

Έστω τώρα ότι $D = I$. Η απόδειξη είναι παρόμοια με την προηγούμενη. Την περιγράφουμε χωρίς όλες τις λεπτομέρειες.
Έστω $x_1 \in H_1$, $x_1 \neq 0$. Θα δείξουμε ότι $u_1(x_1) = 0$. Όπως στην προηγούμενη περίπτωση, τα

$K_1, ..., K_n$ θα είναι μπάλλες με κέντρο το 0.

Επιλέγουμε τα $x_i \in H_i$, $i = 2, ..., n$ ώστε $x_{k+1} = ... = x_n = 0$ και τα $x_1, ..., x_k$ να είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Έστω $L = (l_1, ..., l_n)$ κορυφή του $T(X)$ όπως στο Λήμμα 7.2. Τότε $l_{k+1} \neq 0$. Ορίζουμε τον πίνακα $M(X, L)$ που έχει στήλες τα (x_i, l_i), $i = 1, ..., n$. Ο $M(X, L)$ έχει τότε τάξη ακριβώς $k+1$ και το $P = \sum_{i=1}^{n}[0, (x_i, l_i)]$ είναι η εικόνα του κύβου $[0, 1]^n$ μέσω του $M(X, L)$. Επομένως, η διάσταση του P είναι $k+1$. Όπως πριν, ο όγκος $|\sum_{i=1}^{n}[0, (x_i, l_i + tu_i)]|E|_k$, $-1 \leq t \leq 1$ είναι αφφινική συνάρτηση του t, για κάθε k-διάστατο γραμμικό υπόχωρο E του $\mathbb{R}^d$. Επειδή η τάξη του πίνακα $M^{'}(X, L)$ που έχει στήλες τα $(x_i, l_i), i = 1, ..., k$ είναι k και επειδή το $P^{'} = \sum_{i=1}^{k}[0, (x_i, l_i)]$ είναι η εικόνα του κύβου $[0, 1]^k$, το $P^{'}$ έχει διάσταση k. Έχουμε $\sum_{i=k+1}^{n}[0, (x_i, l_i)] = [-av, bv]$, για κάποια $a, b \geq 0$, άρα $P = P^{'} + [-av, bv] = conv(P^{'} - av, P^{'} + bv)$. Τα $aff(P^{'} - av), aff(P^{'} + bv)$ είναι παράλληλα αλλά δεν ταυτίζονται αφού το P έχει διάσταση $k+1$, άρα το v δεν είναι παράλληλο σε αυτά. Επιπλέον, το $F = P^{'} + bv$ είναι k-διάστατη πλευρά του P. Θεωρούμε $A_0 = affF$, $G = affP$ και E έναν k-διάστατο υπόχωρο του G κάθετο στο A_0. Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία όπως στην προηγούμενη περίπτωση, τα A_0, $A_1 = affF_1$ είναι παράλληλα, όπου $F_1 = \sum_{i=1}^{k}[0, (x_i, l_i + u_i)]$. Επομένως, οι υπόχωροι $span(\sum_{i=1}^{k}[0, (x_i, l_i)]), span(\sum_{i=1}^{k}[0, (x_i, l_i + u_i)])$ ταυτίζονται, και $u_i(x_i) = 0$, $i = 1, ..., k$.$\square$

8 Σύνδεση της Εικασίας του Simplex με άλλα Ασυμπτωτικά Προβλήματα της Κυρτής Ανάλυσης

Σε αυτήν την παράγραφο εξετάζουμε κάποια ασυμπτωτικά προβλήματα της Κυρτής Ανάλυσης και αποδεικνύουμε την ισοδυναμία τους με την *ασυμπτωτική* εκδοχή της εικασίας του simplex:

Ασυμπτωτική Εικασία του Simplex
Υπάρχει απόλυτη σταθερά C ώστε για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^d$ όγκου 1 να ισχύει

$$m(K; d+1) \leq C^d m(S; d+1)$$

όπου το $S \subseteq \mathbb{R}^d$ simplex με όγκο $|S| = 1$.

Ξεκινάμε με την ισοτροπική θέση ενός κυρτού σώματος και την σταθερά ισοτροπίας.

Ένα κυρτό σώμα K με όγκο 1 και κέντρο βάρους στο 0 θα λέμε ότι είναι *ισοτροπικό* αν υπάρχει $\alpha > 0$ ώστε

$$\int_K \langle x, y\rangle^2 dx = \alpha^2 |y|^2$$

για κάθε $y \in \mathbb{R}^d$. Ένα κυρτό σώμα K όγκου 1 και κέντρο βάρους στο 0 είναι ισοτροπικό αν και μόνο αν μία από τις ακόλουθες συνθήκες ικανοποιείται:

1) Για κάθε $i, j = 1, ..., d$,

$$\int_K x^i x^j dx = \alpha^2 \delta_{ij}$$

2) Για κάθε γραμμικό μετασχηματισμό T του $\mathbb{R}^d$,

$$\int_K \langle x, Tx\rangle dx = \alpha^2 trT$$

Πράγματι, έστω ότι το K είναι ισοτροπικό. Θεωρώντας $y = e_i$, $i = 1, ..., d$, παίρνουμε $\int_K (x^i)^2 dx = \alpha^2$. Έστω $i \neq j$. Θεωρώντας $y = (y^1, ..., y^d)$ με $y^k = 1$, για $k \in \{i, j\}$ και $y^k = 0$, για $k \notin \{i, j\}$, παίρνουμε

$2\alpha^2 = \int_K (\sum_{k=1}^d (x^k y^k)^2 + \sum_{k \neq l} x^k x^l y^k y^l) dx = \int_K (x^i)^2 dx + \int_K (x^j)^2 dx + 2\int_K x^i x^j dx = 2\alpha^2 + 2\int_K x^i x^j dx$, άρα $\int_K x^i x^j dx = 0$.

Αντίστροφα, για κάθε $y \in \mathbb{R}^d$,

$\int_K \langle x, y\rangle^2 dx = \int_K \sum_{k,l} x^k x^l y^k y^l dx = \sum_{k,l} y^k y^l \int_K x^k x^l dx = \sum_{k,l} y^k y^l \delta_{kl} = \alpha^2 \sum_k (y^k)^2 = \alpha^2 |y|^2$.

Επίσης, οι συνθήκες στις 1) και 2) είναι ισοδύναμες. Πράγματι, έστω ότι ισχύει η 1). Αν ο T έχει πίνακα με στοιχεία (a_{ij}), τότε

$\int_K \langle x, Tx\rangle dx = \int_K \sum_{i,j} a_{ij} x^i x^j dx = \sum_{i,j} a_{ij} \alpha^2 \delta_{ij} = \alpha^2 \sum_i a_{ii} = \alpha^2 trT$.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση, θεωρούμε τους γραμμικούς μετασχηματισμούς T_{ij} με πίνακες που έχουν στοιχεία $a_{ji} = a_{ij} = 1$ και παντού αλλού 0 στην περίπτωση $i \neq j$ ή $a_{ii} = a_{jj} = 1$ και παντού αλλού 0 στην περίπτωση $i = j$.

Επομένως, αν το K είναι ισοτροπικό τότε

$$\int_K |x|^2 dx = d\alpha^2$$

Το K είναι ισοτροπικό αν και μόνο αν το UK είναι ισοτροπικό, όπου U ορθογώνιος μετασχηματισμός του $\mathbb{R}^d$. Η επόμενη πρόταση μας εξασφαλίζει την ύπαρξη ισοτροπικού σώματος στην γραμμική κλάση οποιουδήποτε κυρτού σώματος με κέντρο βάρους στο 0.

Πρόταση 8.1. *Αν K κυρτό σώμα με κέντρο βάρους στο 0, τότε υπάρχει αντιστρέψιμος μετασχηματισμός T για τον οποίο το TK είναι ισοτροπικό.*

Απόδειξη. Ο μετασχηματισμός $My = \int_K \langle x, y\rangle x dx$, $y \in \mathbb{R}^d$ είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος. Για το τελευταίο, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι $\langle y, My\rangle = \int_K \langle x, y\rangle^2 dx$ και εάν $\int_K \langle x, y\rangle^2 dx = 0$ τότε $y = 0$, αφού το 0 είναι εσωτερικό σημείο του K. Άρα ο M έχει συμμετρική και θετικά ορισμένη τετραγωνική ρίζα S. Θεωρούμε το κυρτό σώμα $\tilde{K} = TK$ με κέντρο βάρους στο 0 και όγκο 1, όπου $T = |\det S|^{1/d} S^{-1}$. Για κάθε $y \in \mathbb{R}^d$ έχουμε τότε

$\int_{\tilde{K}} \langle x, y\rangle^2 dx = |\det S|^{2/d} \int_K \langle S^{-1}x, y\rangle^2 dx = |\det S|^{2/d} \int_K \langle x, S^{-1}y\rangle^2 dx = |\det S|^{2/d} \langle S^{-1}y, MS^{-1}y\rangle =$

$|\det S|^{2/d} \langle S^{-1}y, Sy\rangle = |\det S|^{2/d} |y|^2. \square$

Θέση ενός κυρτού σώματος ορίζεται να είναι κάθε εικόνα του μέσω ενός γραμμικού μετασχηματισμού που διατηρεί τον όγκο.

Η Πρόταση 8.1 εξασφαλίζει την ύπαρξη ισοτροπικής θέσης για κάθε κυρτό σώμα με κέντρο βάρος στο 0 και όγκο 1. Το επόμενο θεώρημα μας δείχνει ότι η ισοτροπική θέση ενός κυρτού σώματος είναι μοναδικά ορισμένη αν εξαιρέσουμε θέσεις που προκύπτουν από ορθογώνιους μετασχηματισμούς και είναι η λύση ενός προβλήματος ελαχιστοποίησης.

Θεώρημα 8.1. *Έστω K κυρτό σώμα του $\mathbb{R}^d$ όγκου 1 και κέντρο βάρους στο 0. Ορίζουμε*

$$B(K) = \inf \int_{TK} |x|^2 dx$$

όπου το infimum λαμβάνεται πάνω σε όλους τους γραμμικούς μετασχηματισμούς T που διατηρούν τον όγκο. Τότε, μία θέση SK του K είναι ισοτροπική αν και μόνο αν

$$\int_{SK} |x|^2 dx = B(K) \tag{1}$$

Επιπλέον, αν S_1K, S_2K δύο ισοτροπικές θέσεις του K τότε υπάρχει ορθογώνιος μετασχηματισμός U ώστε $S_2 = US_1$.

Απόδειξη. Έστω SK μία ισοτροπική θέση του K. Τότε υπάρχει $\alpha > 0$ ώστε

$$\int_{SK} \langle x, Tx\rangle dx = \alpha^2 trT$$

για κάθε γραμμικό μετασχηματισμό T. Επίσης,

$$\int_{SK} |x|^2 dx = d\alpha^2$$

Αν T γραμμικός μετασχηματισμός που διατηρεί τον όγκο, έχουμε

$\int_{TSK} |x|^2 dx = \int_{SK} |Tx|^2 dx = \int_{SK} \langle x, T^*Tx\rangle dx = \alpha^2 tr(T^*T) = \alpha^2(\lambda_1 + ... + \lambda_d) \geq d\alpha^2(\lambda_1 \cdots \lambda_d)^{1/d} = d\alpha^2(\det T)^{2/d} = \int_{SK} |x|^2 dx.$

από την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου, όπου $\lambda_1, ..., \lambda_d > 0$ οι ιδιοτιμές του T^*T. Αφού ο T είναι τυχαίος, παίρνουμε την (1) και, επιπλέον, το infimum είναι minimum.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση, έστω T μετασχηματισμός που διατηρεί τον όγκο ώστε το TK να είναι ισοτροπικό. Τότε

$$\int_{TK} |x|^2 dx = B(K) = \int_{SK} |x|^2 dx$$

Τότε η παραπάνω ανισότητα είναι ισότητα αν θέσουμε τον $U = TS^{-1}$ στην θέση του T και παίρνουμε

$$tr(U^*U) = d$$

Επομένως, όλες του οι ιδιοτιμές του U^*U είναι 1, δηλαδή $U^*U = I$, και ο U είναι ορθογώνιος. Επίσης, $T = US$.□

Για κάθε κυρτό σώμα K με κέντρο βάρους στο 0, ορίζεται η ποσότητα

$$L_K = \left[\frac{1}{d} \min\left(\frac{1}{|TK|^{1+\frac{2}{d}}} \int_{TK} |x|^2 dx\right)\right]^{1/2}$$

όπου το minimum λαμβάνεται πάνω σε όλους τους αντιστρέψιμους γραμμικούς μετασχηματισμούς T. Το minimum είναι το ίδιο εάν περιορισθούμε σε μετασχηματισμούς T που διατηρούν τον όγκο. Η L_K λέγεται *ισοτροπική σταθερά* του K και αν το K είναι ισοτροπικό τότε, από το προηγούμενο θεώρημα και τον ορισμό του ισοτροπικού σώματος, προκύπτει ότι

$$\int_K \langle x, \theta\rangle^2 dx = L_K^2$$

για κάθε $\theta \in S^{d-1}$. Είναι επίσης προφανές ότι αν το K έχει κέντρο βάρους στο 0 και ο T είναι αντιστρέψιμος γραμμικός μετασχηματισμός, τότε

$$L_K = L_{TK}$$

Εικασία της ισοτροπικής σταθεράς

Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ ώστε για κάθε κυρτό K σώμα με κέντρο βάρους στο 0, να ισχύει

$$L_K \leq C$$

Ειδικότερα, αν το K είναι ισοτροπικό τότε

$$\int_K \langle x, \theta\rangle^2 dx \leq C^2$$

για κάθε $\theta \in S^{d-1}$.

Ωστόσο, είναι σωστό ότι υπάρχει κάτω φράγμα:

Πρόταση 8.2. *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $c > 0$ ώστε*

$$L_K \geq c$$

για κάθε ισοτροπικό σώμα K.

Απόδειξη. Θέτουμε $r_d = \omega_d^{-1/d}$. Άρα η μπάλλα $r_d B_2^d$ έχει όγκο 1 και κέντρο βάρους στο 0 και, αφού $UB_2^d = B_2^d$ για κάθε ορθογώνιο μετασχηματισμό U, είναι ισοτροπική. Τότε, για κάθε ισοτροπικό σώμα έχουμε

$dL_K^2 = \int_K |x|^2 dx = \int_{K \cap r_d B_2^d} |x|^2 dx + \int_{K \setminus r_d B_2^d} |x|^2 dx \geq \int_{K \cap r_d B_2^d} |x|^2 dx + \int_{K \setminus r_d B_2^d} |r_d|^2 dx =$

$\int_{K \cap r_d B_2^d} |x|^2 dx + \int_{r_d B_2^d \setminus K} |r_d|^2 dx \geq \int_{K \cap r_d B_2^d} |x|^2 dx + \int_{r_d B_2^d \setminus K} |x|^2 dx = \int_{r_d B_2^d} |x|^2 dx = dL_{r_d B_2^d}^2.$

Επιπλέον,

$L_{r_d B_2^d}^2 = \frac{1}{d} \int_{r_d B_2^d} |x|^2 dx = \frac{1}{d} \int_{\rho=0}^{r_d} \int_{\theta \in \partial(\rho B_2^d)} |\theta|^2 ds(\theta) d\rho$, όπου s το μέτρο Hausdorff στην επιφάνεια $\partial(\rho B_2^d) = \rho S^{d-1}$. Έχουμε $s(\rho S^{d-1}) = d\omega_d \rho^{d-1}$, επομένως

$L_{r_d B_2^d}^2 = \int_{\rho=0}^{r_d} \rho^{d+1} \omega_d d\rho = \omega_d \frac{r_d^{d+2}}{d+2} = \frac{\omega_d^{-2/d}}{d+2}$. Από τον τύπο του Stirling

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\Gamma(t+1)}{\sqrt{2\pi t}(\frac{t}{e})^t} = 1$$

και τον τύπο για τον όγκο

$$\omega_d = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}$$

παίρνουμε ότι $\frac{\omega_d^{-2/d}}{d+2} \to \frac{1}{2\pi e}$, καθώς $d \to \infty$, άρα $c^2 \leq \frac{\omega^{-2/d}}{d+2} \leq C^2$ για κάποιες απόλυτες σταθερές $c, C > 0$. Επομένως

$$L_K \geq L_{r_d B_2^d} \geq c$$

□

Συνέπεια του Θεωρήματος του John, [33] σελ. 84, είναι μία άνω εκτίμηση της ισοτροπικής σταθεράς για συμμετρικά σώματα.

Θεώρημα 8.2. *Για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K του $\mathbb{R}^d$,*

$$L_K \leq c\sqrt{d}$$

όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Έστω K συμμετρικό κυρτό σώμα. Από το Θεώρημα του John, υπάρχει ελλειψοειδές E με κέντρο στο 0 ώστε

$$E \subseteq K \subseteq \sqrt{d}E$$

Τότε, υπάρχει $r > 0$ και γραμμικός μετασχηματισμός T ώστε $|TK| = 1$ και

$$rB_2^d \subseteq TK \subseteq \sqrt{d} r B_2^d$$

Αφού $rB_2^d \subseteq TK$ και $|TK| = 1$, παίρνουμε

$$r \leq \omega_d^{-1/d} \leq c\sqrt{d}$$

για κάποια απόλυτη σταθερά $c > 0$, από τον τύπο του Stirling. Ορίζουμε $R = \max\{|x| : x \in TK\}$. Τότε

$L_K^2 \leq \frac{1}{d}\int_{TK}|x|^2dx \leq R^2/d \leq r^2 \leq c^2d.\square$

Η επόμενη πρόταση είναι συνέπεια της αντίστροφης ανισότητας Santalo (βλ. [4] σελ. 256) :

$$(|K||K^\circ|)^{1/d} \geq c/d$$

για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα, όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά και

$$K^\circ = \{y \in \mathbb{R}^d : \langle x, y\rangle \leq 1, \text{ για κάθε } x \in K\}$$

το *πολικό* του K.

Πρόταση 8.3. *Για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K,*

$$L_K^2 L_{K^\circ}^2 \leq cd\phi(K)$$

όπου

$$\phi(K) = \frac{1}{|K||K^\circ|}\int_K\int_{K^\circ}\langle x, y\rangle^2 dxdy$$

Ειδικότερα, $L_K L_{K^\circ} \leq c'\sqrt{d}$.

Απόδειξη. Για κάθε αντιστρέψιμο γραμμικό μετασχηματισμό T έχουμε

$(TK)^\circ = \{y : \langle x, y\rangle \leq 1, \text{για κάθε } x \in TK\} = \{y : \langle Tx, y\rangle \leq 1, \text{για κάθε } x \in K\} = \{y : \langle x, T^*y\rangle \leq 1, \text{για κάθε } x \in K\} = \{(T^*)^{-1}y : \langle x, y\rangle \leq 1, \text{για κάθε } x \in K\} = (T^*)^{-1}(K^\circ)$. Επομένως,

$\phi(TK) = \frac{1}{|TK||(TK)^\circ|}\int_{TK}\int_{(TK)^\circ}\langle x, y\rangle^2 dxdy =$

$[|\det T||K||\det((T^*)^{-1})||K^\circ|]^{-1}\int_K\int_{K^\circ}\langle (T^*)^{-1}x, Ty\rangle^2|\det T||\det((T^*)^{-1})|dxdy =$

$\frac{1}{|K||K^\circ|}\int_K\int_{K^\circ}\langle x, (((T^*)^{-1})^*Ty\rangle^2 dxdy = \frac{1}{|K||K^\circ|}\int_K\int_{K^\circ}\langle x, y\rangle^2 dxdy = \phi(K)$.

Επίσης, μπορεί να αποδειχθεί ότι $(K^\circ)^\circ = K$, άρα $\phi(K^\circ) = \phi(K)$. Επομένως, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το K° είναι ισοτροπικό. Έχουμε τότε:

$\phi(K) = \frac{1}{|K|}\int_K\left(\int_{K^\circ}\langle x, y\rangle^2 dx\right)dy = \frac{1}{|K|}\int_K L_{K^\circ}^2|y|^2dy \geq \frac{L_{K^\circ}^2}{|K|}d|K|^{1+2/d}L_K^2 = dL_K^2L_{K^\circ}^2(|K||K^\circ|)^{2/d} \geq$

$\frac{c}{d}L_K^2L_{K^\circ}^2.\square$

Θεώρημα 8.3. *Για κάθε ισοτροπικό σώμα K ισχύει*

$$R(K) \leq (d+1)L_K, \text{ όπου } R(K) = \max\{|x| : x \in K\}$$

Απόδειξη. Για κάθε $x \in K$ ορίζουμε

$$h(u) = \max\{t > 0 : x + tu \in K\},\ u \in S^{d-1}$$

Τότε ισχύει ο τύπος ολοκλήρωσης:

$$\int_K f(y)dy = d\omega_d \int_{S^{d-1}} \int_0^{h(u)} f(x+tu)t^{d-1}dtd\sigma(u)$$

όπου σ το Haar μέτρο πιθανότητας στο S^{d-1}. Ειδικότερα,

$$1 = |K| = \omega_d \int_{S^{d-1}} h(u)^d d\sigma(u)$$

Τότε, για κάθε $x \in K$, $\theta \in S^{d-1}$, έχουμε

$L_K^2 = \int_K \langle y, \theta\rangle^2 dy = d\omega_d \int_{S^{d-1}} \int_0^{h(u)} \langle x+tu, \theta\rangle^2 t^{d-1}dtd\sigma(u) =$

$d\omega_d \int_{S^{d-1}} \int_0^{h(u)} (\langle x, \theta\rangle^2 + t^2\langle u, \theta\rangle^2 + 2t\langle x, \theta\rangle\langle u, \theta\rangle)t^{d-1}dtd\sigma(u) =$

$d\omega_d \int_{S^{d-1}} \left(\langle x, \theta\rangle^2 \frac{h(u)^d}{d} + \langle u, \theta\rangle^2 \frac{h(u)^{d+2}}{d+2} + 2\langle x, \theta\rangle\langle u, \theta\rangle \frac{h(u)^{d+1}}{d+1}\right) d\sigma(u) =$

$d\omega_d \int_{S^{d-1}} \frac{h(u)^d}{d(d+1)^2}\langle x, \theta\rangle^2 + \left[\frac{\sqrt{d+2}}{d+1}h(u)^{d/2}\langle x, \theta\rangle + \frac{1}{\sqrt{d+2}}h(u)^{d/2+1}\langle u, \theta\rangle\right]^2 d\sigma(u) \geq$

$\omega_d \int_{S^{d-1}} \frac{h(u)^d}{(d+1)^2}\langle x, \theta\rangle^2 d\sigma(u) = \frac{\langle x,\theta\rangle^2}{(d+1)^2}$.

Επομένως, $|\langle x, \theta\rangle| \leq (d+1)L_K$, για κάθε $x \in K$ και κάθε $\theta \in S^{d-1}$, άρα $|x| \leq (d+1)L_K$, για κάθε $x \in K$, και $R(K) \leq (d+1)L_K$.$\square$

Από την ασυμπτωτική εικασία του simplex έπεται η εικασία της ισοτροπικής σταθεράς. Για να το δούμε αυτό, θα χρησιμοποιήσουμε το συναρτησοειδές

$$S_p(K; d+1) = \frac{1}{|K|^{d+p}} \int_K \cdots \int_K |conv\{0, y_1, ..., y_d\}|^p dy_1...dy_d$$

Πρόταση 8.4. *Για κάθε κυρτό σώμα K όγκου 1 με κέντρο βάρους στο 0 και κάθε εκθέτη $p \geq 1$ ισχύει*

$$S_p(K; d+1) \leq m_p(K; d+1) \leq (d+1)^p S_p(K; d+1)$$

Απόδειξη. Ορίζουμε την συνάρτηση

$$S(x) = \int_K \cdots \int_K |conv\{x, y_1, ..., y_d\}|^p dy_1...dy_d,\ x \in K$$

η οποία είναι κυρτή, αφού ο όγκος

$$|conv\{x, y_1, ..., y_d\}| = \frac{1}{d!}|\det[(x,1), (y,1), ..., (y_d,1)]|$$

είναι κυρτή συνάρτηση ως προς την μεταβλητή x. Από την ανισότητα Jensen παίρνουμε

$S_p(K; d+1) = S(0) = S(\int_K xdx) \leq \int_K S(x)dx = m_p(K; d+1)$.

Για την δεύτερη ανισότητα, αναπτύσσοντας την ορίζουσα $\det((y_1,1),...,(y_{d+1},1))$ ως προς την γραμμή $(1,...,1)$, παίρνουμε

$|conv\{y_1,...,y_{d+1}\}| = \frac{1}{d!}|\det((y_1,1),...,(y_{d+1},1))| \leq \frac{1}{d!}\sum_{i=1}^{d+1}|\det(y_1,...,y_{i-1},y_{i+1},...,y_{d+1})| =$

$\frac{1}{d!}\sum_{i=1}^{d+1}|\det((0,1),(y_1,1),...,(y_{i-1},1),(y_{i+1},1),...,(y_{d+1},1))| = \sum_{i=1}^{d+1}|conv(\{0\}\cup\{y_j : j\neq i\})|$

όπου $0\in\mathbb{R}^d$. Επομένως

$m_p(K;d+1) = \int_K\cdots\int_K |conv\{y_1,...,y_{d+1}\}|^p dy_1...dy_{d+1} \leq$

$\int_K\cdots\int_K \left(\sum_{i=1}^{d+1}|conv(\{0\}\cup\{y_j : j\neq i\})|\right)^p dy_1...dy_{d+1} \leq$

$\left(\sum_{i=1}^{d+1}\left(\int_K\cdots\int_K |conv(\{0\}\cup\{y_j : j\neq i\})|^p dy_1...dy_{d+1}\right)^{1/p}\right)^p =$

$(d+1)^p S_p(K;d+1).\square$

Οι ροπές S_2, S_1 σχετίζονται (βλ. [15] σελ. 8) με την ανισότητα

$$S_2(K;d+1) \leq c^d S_1(K;d+1)^2 \tag{2}$$

για κάθε κυρτό σώμα K με όγκο 1 και κέντρο βάρους στο 0, όπου $c>0$ απόλυτη σταθερά.

Για κάθε κυρτό σώμα K με κέντρο βάρους στο 0, ορίζουμε τον συμμετρικό και θετικά ορισμένο *πίνακα αδράνειας* $M(K)$ του K με στοιχεία

$$M(K)_{ij} = \int_K x^i x^j dx$$

Πρόταση 8.5. *Αν το K είναι κυρτό σώμα με όγκο 1 και κέντρο βάρους στο 0, τότε*

$$S_2(K;d+1) = \frac{1}{d!}\det(M(K))$$

Απόδειξη. Για κάθε πίνακα $A=[\alpha_{ij}]\in\mathbb{R}^{d\times d}$ έχουμε

$$\det A = \sum_\sigma \epsilon_\sigma \prod_{i=1}^d \alpha_{i,\sigma(i)}$$

όπου η άθροιση είναι πάνω σε όλες τις μεταθέσεις σ του συνόλου $\{1,...,d\}$ και ϵ_σ το πρόσημο της μετάθεσης σ. Επίσης

$$|conv\{0,y_1,...,y_d\}| = \frac{1}{d!}|\det(y_1,...,y_d)|$$

Επομένως, αν $y_i=(y_i^1,...,y_i^d)$, $i=1,...,d$, τότε

$(d!)^2 S_2(K;d+1) = \int_K\cdots\int_K |\det((y_1,...,y_d)|^2 dy_1...dy_d =$

$\int_K\cdots\int_K \left(\sum_\sigma \epsilon_\sigma \prod_{i=1}^d y_i^{\sigma(i)}\right)\left(\sum_\tau \epsilon_\tau \prod_{i=1}^d y_i^{\tau(i)}\right) dy_1...dy_d =$

$\int_K\cdots\int_K \sum_{\sigma,\tau}\epsilon_\sigma\epsilon_\tau \prod_{i=1}^d y_i^{\sigma(i)} y_i^{\tau(i)} dy_1...dy_d =$

$\int_K \cdots \int_K \sum_{\sigma,\phi} \epsilon_\phi \prod_{i=1}^d y_i^{\sigma(i)} y_i^{\phi\circ\sigma(i)} dy_1 ... dy_d =$

$\sum_{\sigma,\phi} \epsilon_\phi \int_K \cdots \int_K \prod_{i=1}^d y_i^{\sigma(i)} y_i^{\phi\circ\sigma(i)} dy_1 ... dy_d =$

$\sum_{\sigma,\phi} \epsilon_\phi \prod_{i=1}^d \int_K y^i y^{\phi(i)} dy = d! \det(M(K)).\square$

Θεώρημα 8.4. *Για κάθε κυρτό σώμα K όγκου 1 και κέντρο βάρους στο 0,*

$$L_K^{2d} = d! S_2(K; d+1)$$

Απόδειξη. Από την Πρόταση 8.5, για κάθε μετασχηματισμό T που διατηρεί τον όγκο, έχουμε

$$\det(M(TK)) = \det(M(K))$$

Επιλέγουμε T ώστε το TK να είναι ισοτροπικό. Τότε $M(TK) = L_{TK}^2 I = L_K^2 I$, άρα

$$d! S_2(K; d+1) = \det(M(K)) = L_K^{2d}$$

$\square$

Πόρισμα 8.1. *Για κάθε κυρτό σώμα K με κέντρο βάρους στο 0 και όγκο 1 ισχύει*

$$L_K \leq \sqrt{d}$$

Απόδειξη.

$L_K \leq \sqrt[2d]{d!} \leq \sqrt{d}.\square$

Θεώρημα 8.5. *Η Ασυμπτωτική Εικασία του Simplex είναι ισοδύναμη με την Εικασία της Ισοτροπικής Σταθεράς.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η Ασυμπτωτική Εικασία του Simplex είναι σωστή. Θεωρούμε το πολύτοπο

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^d : -\frac{1}{d+1} \leq x^i \leq \frac{d}{d+1}, i = 1, ..., d, x^1 + ... + x^d \leq \frac{1}{d+1} \right\}$$

Θέτουμε $a = \frac{1}{d+1}$ και $b = \frac{d}{d+1}$ και θεωρούμε τις κορυφές v_i, $i = 0, ..., d$ του ορθογωνίου $P = [-a, b]^d$ που ικανοποιούν $v_0^i = -a$, $i = 1, ..., d$ και $v_i^j = b$, αν $i = j$, $v_i^j = -a$, αν $i \neq j$, $i, j = 1, ..., d$. Εύκολα βλέπουμε ότι τα $v_0, ..., v_d$ είναι αφφινικά ανεξάρτητα. Έχουμε ότι το simplex $\Sigma = conv\{v_0, ..., v_d\}$ περιέχεται στο S. Δείχνουμε ότι $S \subseteq \Sigma$.
Έστω $x = (x^1, ..., x^d) \in S$. Θεωρούμε τους αριθμούς $\lambda_0 = 1 - da - (x^1 + ... + x^d) \in [0, 1]$, $\lambda_i = x^i + a \in [0, 1]$, $i = 1, ..., d$, με $\lambda_0 + ... + \lambda_d = 1$. Τότε, $x = \lambda_0 v_0 + ... + \lambda_d v_d \in \Sigma$.

Επομένως, το S είναι d-διάστατο simplex. Το S γράφεται και στην μορφή

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^d : -\frac{1}{d+1} \leq x^1 \leq \frac{d}{d+1}, -\frac{1}{d+1} \leq x^{i+1} \leq \frac{d-i}{d+1} - (x^1 + ... + x^i), i = 1, ..., d-1 \right\}$$

Μπορούμε να δούμε ότι για κάθε $x^1 \in \left[-\frac{1}{d+1}, \frac{d}{d+1}\right]$,

$$\int_{-\frac{1}{d+1}}^{\frac{d-1}{d+1}-x^1} \int_{-\frac{1}{d+1}}^{\frac{d-2}{d+1}-(x^1+x^2)} \cdots \int_{-\frac{1}{d+1}}^{\frac{1}{d+1}-(x^1+...+x^{d-1})} dx^d...dx^2 = \frac{\left(\frac{d}{d+1}-x^1\right)^{d-1}}{(d-1)!}$$

Άρα

$$\int_S (x^1)^k dx = \int_{-1/(d+1)}^{d/(d+1)} t^k \frac{\left(\frac{d}{d+1}-t\right)^{d-1}}{(d-1)!} dt = \int_0^1 \left(t-\frac{1}{d+1}\right)^k \frac{(1-t)^{d-1}}{(d-1)!} dt$$

Θέτουμε $k = 0, 1, 2$ και παίρνουμε

$$\int_S dx = \frac{1}{d!}$$

$$\int_S x^i dx = 0$$

$$\int_S (x^i)^2 dx \leq \frac{1}{(d+2)!}$$

για $i = 1, ..., d$. Επομένως, το simplex $S' = (d!)^{1/d} S$ έχει όγκο 1, κέντρο βάρους στο 0 και ο πίνακας $M(S')$ έχει διαγώνια στοιχεία $\leq \frac{(d!)^{1+2/d}}{(d+2)!} \leq 1$.

Έστω M ένας $d \times d$ συμμετρικός και θετικά ορισμένος πίνακας με διαγώνια στοιχεία $m_{11}, ..., m_{dd}$. Τότε υπάρχει κάτω τριγωνικός πίνακας L ώστε ο M να γράφεται στην μορφή

$$M = LL^T$$

Αν $v_1, ..., v_d$ οι γραμμές του L, τότε $|v_i|^2 = m_{ii}$ και από την ανισότητα του Hadamard (βλ. [13], σελ. 233) παίρνουμε

$|\det M| = |\det L|^2 \leq |v_1|^2 \cdot ... \cdot |v_d|^2 = m_{11} \cdot ... \cdot m_{dd}$.

Επομένως, ο $M(S')$ έχει ορίζουσα ≤ 1, και $S_2(S'; d+1) \leq \frac{1}{d!}$

Έστω $c > 0$ η σταθερά στην σχέση (2). Τότε για κάθε κυρτό σώμα K όγκου 1 και με κέντρο βάρους στο 0, έχουμε

$L_K^d = (d! S_2(K; d+1))^{1/2} \leq \sqrt{d!} c^{d/2} S_1(K; d+1) \leq$

$\sqrt{d!} c^{d/2} m_1(K; d+1) \leq \sqrt{d!} c^{d/2} C^d m_1(S'; d+1) \leq \sqrt{d!}(d+1) c^{d/2} C^d S_1(S'; d+1) \leq$

$\sqrt{d!}(d+1) c^{d/2} C^d S_2(S'; d+1)^{1/2} \leq (d+1) c^{d/2} C^d$.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση, έστω K κυρτό σώμα όγκου 1 και S simplex όγκου 1 και έστω $C > 0$ απόλυτη σταθερά ώστε $L_K \leq C$. Αν δείξουμε το ζητούμενο για το συναρτησοειδές $m_2(\cdot; d+1)$, τότε θα έχουμε

$m_1(K; d+1) \leq m_2(K; d+1)^{1/2} \leq C^d m_2(S; d+1)^{1/2} \leq C^d (d+1) S_2(S; d+1)^{1/2} \leq$

$C^d(d+1)c_1^d S_1(S;d+1) \leq C_1^d m_1(S;d+1)$.

Έχουμε

$m_2(K;d+1) \leq (d+1)^2 S_2(K;d+1) = \frac{(d+1)^2}{d!} L_K^{2d} \leq C_2^d \frac{(d+1)^2}{d!}$, όπου $C_2 = C^2$.

Ο Reed ([26] σελ. 183-198) υπολόγισε την ακριβή τιμή του συναρτησοειδούς στα simplices:

$$m_2(S;d+1) = \frac{d!}{(d+1)^d(d+2)^d}$$

Από τον τύπο του Stirling παίρνουμε

$$\frac{(d+1)^2(d+1)^d(d+2)^d}{(d!)^2} \leq c_1^d$$

για κάποια απόλυτη σταθερά $c_1 > 0$. Επομένως

$m_2(K;d+1) \leq C_2^d c_1^d m_2(S;d+1) = C_3^d m_2(S;d+1)$, όπου $C_3 = c_1 C_2$.$\square$

Έστω K κυρτό σώμα όγκου 1 και με κέντρο βάρους στο 0. Έχουμε ότι $\left(\int_K \langle x,y\rangle^2 dx\right)^{1/2} = \langle M(K)y,y\rangle^{1/2}$. Ορίζουμε τη νόρμα στον $\mathbb{R}^d$:

$$||y||_{E_B(K)} = \left(\int_K \langle x,y\rangle^2 dx\right)^{1/2} = \langle M(K)y,y\rangle^{1/2}$$

Ορίζουμε το *ελλειψοειδές Binet αδράνειας* του K, $E_B(K)$, ως την μοναδιαία μπάλλα του $\mathbb{R}^d$ ως προς αυτήν την νόρμα. Παρατηρούμε ότι το K είναι ισοτροπικό αν και μόνο αν $E_B(K) = L_K^{-1} B_2^d$. Ειδικότερα, για ισοτροπικό σώμα K, ισχύει $|E_B(K)| = \omega_d L_K^{-d}$. Έχουμε:

i) Για κάθε αντιστρέψιμο γραμμικό μετασχηματισμό T,

$E_B(TK) = \{y : ||y||^2_{E_B(TK)} \leq 1\} = \{y : \int_{TK} \langle x,y\rangle^2 dx \leq 1\} = \{y : \int_K \langle Tx,y\rangle^2 |\det T| dx \leq 1\} =$

$\{y : \int_K \langle x,T^*y\rangle^2 |\det T| dx \leq 1\} = \{y : \int_K \langle x, \sqrt{|\det T|}T^*y\rangle^2 \leq 1\} = (\sqrt{|\det T|}T^*)^{-1} E_B(K)$.

Άρα $E_B(K) = \sqrt{|\det T|}T^* E_B(TK)$. Παίρνοντας μία ισοτροπική θέση TK του K, βλέπουμε, πράγματι, ότι το $E_B(K)$ είναι ελλειψοειδές.

ii) Για κάθε κυρτό σώμα K επιλέγουμε την ισοτροπική θέση TK και παίρνουμε

$|E_B(K)| = |E_B(TK)| = \omega_d L_{TK}^{-d} = \omega_d L_K^{-d}$.

Για κάθε συμμετρικό σώμα K, το συναρτησοειδές Minkowski ορίζει μία νόρμα στον $\mathbb{R}^d$:

$$||x||_K = \min\{\lambda \geq 0 : x \in \lambda K\}$$

Η *ακτινική* συνάρτηση του K ορίζεται ως

$$\rho_K(x) = \max\{\lambda \geq 0 : \lambda x \in K\},\ x \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$$

Εύκολα ελέγχεται ότι $||x||_K \rho_K(x) = 1$.

Θεώρημα 8.6. *Για κάθε κυρτό σώμα K όγκου 1 και κέντρο βάρους στο 0, υπάρχουν $\theta_1, \theta_2 \in S^{d-1}$ ώστε*

$$\int_K \langle x, \theta_1 \rangle^2 dx \leq L_K^2 \leq \int_K \langle x, \theta_2 \rangle^2 dx$$

Αποδειξη. Όπως έχουμε δει προηγουμένως,

$L_K^{-d} = \frac{1}{\omega_d}|E_B(K)| = d\int_{S^{d-1}} \int_0^{\rho_{E_B(K)}(\theta)} u^{d-1} du d\sigma(\theta) = \int_{S^{d-1}} \rho_{E_B(K)}(\theta)^d d\sigma(\theta) =$

$\int_{S^{d-1}} ||\theta||_{E_B(K)}^{-d} d\sigma(\theta)$.

Επομένως,

$$\min\{||\theta||_{E_B(K)}^2 : \theta \in S^{d-1}\} \leq L_K^2 \leq \max\{||\theta||_{E_B(K)}^2 : \theta \in S^{d-1}\}$$

□

Ένα άλλο ασυμπτωτικό πρόβλημα το οποίο σχετίζεται με την ασυμπτωτική εικασία του simplex είναι το εξής:

Εικασία (Το Πρόβλημα των Τομών)
Για κάθε κυρτό σώμα K με όγκο 1 και κέντρο βάρους στο 0, υπάρχει $\theta \in S^{d-1}$ ώστε

$$|K \cap \theta^\perp|_{d-1} \geq c$$

όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά.

Πρωταρχικό ρόλο παίζει η συνάρτηση

$$f_{K,\theta}(t) = |K \cap (\theta^\perp + t\theta)|_{d-1}, \ t \in \mathbb{R}$$

Διάφορες ιδιότητες της $f_{K,\theta}$ συνοψίζονται παρακάτω.

Πρόταση 8.6. *Έστω K κυρτό σώμα. Τα παρακάτω ισχύουν:*

i) Για κάθε $p \geq 0$,

$$\int_K \langle x, \theta \rangle^p dx = \int_{\mathbb{R}} t^p f_{K,\theta}(t) dt$$

ii) Η $f_{K,\theta}^{\frac{1}{d-1}}$ είναι κοίλη στον φορέα της.
iii) Η $f_{K,\theta}$ είναι log-κοίλη στον φορέα της.
iv) Αν το K είναι συμμετρικό, τότε

$$||f_{K,\theta}||_\infty = f_{K,\theta}(0)$$

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\theta = (0, ..., 0, 1) \in \mathbb{R}^d$. Ορίζουμε

$$K(t) = \{x \in \mathbb{R}^{d-1} : (x, t) \in K\}$$

Τότε $f_{K,\theta}(t) = |K(t)|_{d-1}$.

i) $\int_{y\in K}\langle y,\theta\rangle^p dy = \int_{t\in\mathbb{R}}\int_{x\in K(t)}\langle (x,t),\theta\rangle^p dxdt = \int_{t\in\mathbb{R}}\int_{x\in K(t)} t^p dxdt = \int_{\mathbb{R}} t^p f_{K,\theta}(t)dt$.

ii) Έστω I ο φορέας της $f_{K,\theta}$. Παρατηρούμε ότι

$$\lambda K(t) + (1-\lambda)K(s) \subseteq K(\lambda t + (1-\lambda)s)$$

για κάθε $0 < \lambda < 1$ και κάθε $s, t \in I$. Το συμπέρασμα έπεται από την ανισότητα Brunn-Minkowski.

iii) Άμεσο.

iv) Αν το K είναι συμμετρικό, η $f_{K,\theta}$ είναι άρτια συνάρτηση και αφού επιπλέον είναι log-κοίλη, παίρνει την μέγιστή της τιμή στο 0.□

Αν το K δεν υποτεθεί συμμετρικό, η μέγιστη τομή συγκρίνεται με την τομή που περιέχει το 0:

Θεώρημα 8.7. *Έστω K κυρτό σώμα με όγκο 1 και με κέντρο βάρους στο 0. Τότε*

$$||f_{K,\theta}||_\infty \leq c|K\cap\theta^\perp|_{d-1}$$

όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Έστω $I = [-a,b], a,b > 0$ ο φορέας της $f_{K,\theta}$ και έστω $f_{K,\theta}(t_0) = ||f_{K,\theta}||_\infty$. Αν $f_{K,\theta}(t_0) = f_{K,\theta}(0)$, τότε η ανισότητα ισχύει με $c = 1$. Αντικαθιστώντας το θ με το $-\theta$ αν χρειάζεται, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $t_0 > 0$. Υποθέτουμε επίσης ότι $f_{K,\theta}(0) < f_{K,\theta}(t_0)$. Έχουμε

$\int_{-a}^{b} t f_{K,\theta}(t)dt = \int_K \langle x,\theta\rangle dx = 0$

άρα

$\int_{-a}^{0}(-t)f_{K,\theta}(t)dt = \int_0^b t f_{K,\theta}(t)dt \geq \int_0^{t_0} t f_{K,\theta}(t)dt.$

Θέτουμε $h = f_{K,\theta}^{\frac{1}{d-1}}$ και θεωρούμε την αφφινική συνάρτηση g που ικανοποιεί τις σχέσεις $g(0) = h(0)$ και $g(t_0) = h(t_0)$. Αφού η h είναι κοίλη στο $[-a,b]$, ισχύει $g \geq h$ στο $[-a,0]$ και $g \leq h$ στο $[0,t_0]$. Αφού $g(0) < g(t_0)$, $g(t) = \alpha(t+\gamma)$ για κάποια $\alpha > 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$. Ισχύει $g(t) \geq h(t) > 0$, για κάθε $t \in (-a,0]$. Αφού επιπλέον η g είναι γνήσια αύξουσα, $g > 0$ στο $(-a,+\infty)$. Αφού $g(-\gamma) = 0$, έπεται ότι $-\gamma \leq -a$. Αφού, $g \geq 0$ στο $[-\gamma,0]$,

$\int_{-\gamma}^{0}(-t)g(t)^{d-1}dt \geq \int_{-a}^{0}(-t)g(t)^{d-1}dt \geq \int_{-a}^{0}(-t)h(t)^{d-1}dt \geq \int_0^{t_0} th(t)^{d-1}dt \geq \int_0^{t_0} tg(t)^{d-1}dt.$

Άρα

$0 \geq \int_{-\gamma}^{t_0} tg(t)^{d-1}dt = \alpha^{d-1}\int_{-\gamma}^{t_0} t(t+\gamma)^{d-1}dt = \frac{\alpha^{d-1}}{d}\left(t_0(t_0+\gamma)^d - \frac{(t_0+\gamma)^{d+1}}{d+1}\right)$

απ' όπου προκύπτει $\frac{\gamma}{d} \geq t_0$. Άρα,

$\frac{f_{K,\theta}(0)}{f_{K,\theta}(t_0)} = \left(\frac{g(0)}{g(t_0)}\right)^{d-1} = \left(\frac{\gamma}{\gamma+t_0}\right)^{d-1} \geq \left(\frac{d}{d+1}\right)^{d-1}.$

Επομένως

$$||f_{K,\theta}||_\infty \leq c f_{K,\theta}(0)$$

όπου $c = e$.$\square$

Οι τομές $|K \cap \theta^\perp|_{d-1}$ σχετίζονται άμεσα με τα ολοκληρώματα $\int_K \langle x, \theta \rangle^2 dx$ όπως δείχνει το παρακάτω:

Πρόταση 8.7. *Έστω K κυρτό σώμα όγκου 1 και με κέντρο βάρους στο 0. Τότε για κάθε $\theta \in S^{d-1}$,*

$$\left(\int_K \langle x, \theta \rangle^2 dx \right)^{1/2} \geq \frac{c}{|K \cap \theta^\perp|_{d-1}}$$

όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Θέτουμε $A = \int_0^{+\infty} f_{K,\theta}(t)dt$ και ορίζουμε

$$g(t) = ||f_{K,\theta}||_\infty \mathbb{1}_{[0, A/||f_{K,\theta}||_\infty]}(t)$$

Προφανώς

$$\int_0^s f_{K,\theta}(t)dt \leq \int_0^s g(t)dt$$

για κάθε $0 \leq s \leq A/||f_{K,\theta}||_\infty$ και αφού επιπλέον $\int_0^{+\infty} f_{K,\theta}(t)dt = \int_0^{+\infty} g(t)dt$, παίρνουμε

$$\int_s^{+\infty} f_{K,\theta}(t)dt \geq \int_s^{+\infty} g(t)dt$$

για κάθε $s \geq 0$. Τότε,
$\int_0^{+\infty} t^2 f_{K,\theta}(t)dt = \int_0^{+\infty} \int_0^t 2s f_{K,\theta}(t)dsdt = \int_0^{+\infty} 2s \left(\int_s^{+\infty} f_{K,\theta}(t)dt \right) ds \geq$
$\int_0^{+\infty} 2s \left(\int_s^{+\infty} g(t)dt \right) ds = \int_0^{+\infty} t^2 g(t)dt = \frac{A^3}{3||f_{K,\theta}||_\infty^2}$.

Όμοια, αν ορίσουμε $B = \int_{-\infty}^0 f_{K,\theta}(t)dt$, υπολογίζουμε

$$\int_{-\infty}^0 t^2 f_{K,\theta}(t)dt \geq \frac{B^3}{3||f_{K,\theta}||_\infty^2}$$

Αφού $A + B = 1$,

$\int_K \langle x, \theta \rangle^2 dx = \int_{\mathbb{R}} t^2 f_{K,\theta}(t)dt \geq \frac{A^3+B^3}{3||f_{K,\theta}||_\infty^2} \geq \frac{1}{12||f_{K,\theta}||_\infty^2}$, και το αποτέλεσμα είναι άμεσο από το Θεώρημα 8.7.$\square$

Η αντίστροφη εκτίμηση είναι επίσης σωστή:

Πρόταση 8.8. *Έστω K κυρτό σώμα όγκου 1 και με κέντρο βάρους στο 0. Τότε για κάθε $\theta \in S^{d-1}$,*

$$\left(\int_K \langle x, \theta \rangle^2 dx \right)^{1/2} \leq \frac{c}{|K \cap \theta^\perp|_{d-1}}$$

όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Έστω $A, B > 0$ όπως πριν και $[-a, b]$ ο φορέας της $f_{K,\theta}$.

Περίπτωση 1. Υπάρχει $0 < s \leq b$ ώστε $f_{K,\theta}(s) = f_{K,\theta}(0)/2$.

Αφού η $f_{K,\theta}$ είναι log-κοίλη, για κάθε $0 \leq \lambda \leq 1$, ισχύει

$f_{K,\theta}(\lambda s) \geq f_{K,\theta}(0)^{\lambda} f_{K,\theta}(s)^{1-\lambda} \geq f_{K,\theta}(s)$, άρα

$1 \geq A \geq \int_0^s f_{K,\theta}(t)dt \geq s f_{K,\theta}(s) = s f_{K,\theta}(0)/2$.

Για κάθε $t > s$, $f_{K,\theta}(s) \geq f_{K,\theta}(0)^{1-\frac{s}{t}} f_{K,\theta}(t)^{\frac{s}{t}}$ απ' όπου $f_{K,\theta}(t) \leq f_{K,\theta}(0) 2^{-\frac{t}{s}}$.

Από το Θεώρημα 8.7,

$\int_0^{+\infty} t^2 f_{K,\theta}(t)dt = \int_0^s t^2 f_{K,\theta}(t)dt + \int_s^{+\infty} t^2 f_{K,\theta}(t)dt \leq ||f_{K,\theta}||_\infty \frac{s^3}{3} + \int_s^{+\infty} t^2 f_{K,\theta}(0) 2^{-\frac{t}{s}} dt \leq$

$c_0 f_{K,\theta}(0) \frac{s^3}{3} + f_{K,\theta}(0) s^3 \int_1^{+\infty} u^2 2^{-u} du \leq c_0 f_{K,\theta}(0) \frac{(2/f_{K,\theta}(0))^3}{3} + f_{K,\theta}(0)(2/f_{K,\theta}(0))^3 \int_1^{+\infty} u^2 2^{-u} du =$

$\frac{c_1^2}{f_{K,\theta}(0)^2}$.

Περίπτωση 2. Για κάθε $0 < t \leq b$, $f_{K,\theta}(t) \neq f_{K,\theta}(0)/2$.

Τότε $f_{K,\theta}(t) > f_{K,\theta}(0)/2$, για κάθε $0 < t \leq b$. Ορίζουμε $s = b$. Όπως πριν, παίρνουμε $s \leq 2/f_{K,\theta}(0)$ και

$\int_0^{+\infty} t^2 f_{K,\theta}(t)dt = \int_0^s t^2 f_{K,\theta}(t)dt \leq c_0 f_{K,\theta}(0) s^3/3 \leq \frac{c_2^2}{f_{K,\theta}(0)^2}$.

Άρα, και στις δύο περιπτώσεις παίρνουμε ότι $\int_0^{+\infty} t^2 f_{K,\theta}(t)dt \leq \frac{c_3^2}{f_{K,\theta}(0)^2}$.
Όμοια ελέγχουμε $\int_{-\infty}^0 t^2 f_{K,\theta}(t)dt \leq \frac{c'}{f_{K,\theta}(0)^2}$. Επομένως

$$\int_K \langle x, \theta \rangle^2 dx = \int_{\mathbb{R}} t^2 f_{K,\theta}(t)dt \leq \frac{c^2}{f_{K,\theta}(0)^2}$$

□

Προκύπτει ότι για ισοτροπικά σώματα, όλες οι τομές έχουν περίπου τον ίδιο όγκο:

Θεώρημα 8.8. *Αν K ισοτροπικό σώμα, τότε για κάθε $\theta \in S^{d-1}$, $|K \cap \theta^{\perp}|_{d-1} \simeq \frac{1}{L_K}$, δηλαδή*

$$\frac{c_1}{L_K} \leq |K \cap \theta^{\perp}|_{d-1} \leq \frac{c_2}{L_K}$$

όπου $c_1, c_2 > 0$ απόλυτες σταθερές.

Θεώρημα 8.9. *Η Εικασία της Ισοτροπικής Σταθεράς είναι ισοδύναμη με το Πρόβλημα των Τομών.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η Εικασία της Ισοτροπικής Σταθεράς είναι σωστή και έστω $C > 0$ η απόλυτη σταθερά ώστε

$$L_K \leq C$$

για κάθε κυρτό σώμα με κέντρο βάρους στο 0. Έστω K ένα τέτοιο σώμα. Από το Θεώρημα 8.6, υπάρχει διεύθυνση θ ώστε

$$\int_K \langle x, \theta \rangle^2 dx \leq L_K^2 \leq C^2$$

Τότε

$$|K \cap \theta^\perp|_{d-1} \geq \frac{c}{C}$$

όπου $c > 0$ η απόλυτη σταθερά της Πρότασης 8.7.

Αντίστροφα, έστω ότι το Πρόβλημα των Τομών έχει θετική απάντηση με απόλυτη σταθερά $c > 0$. Έστω K κυρτό σώμα όγκου 1 και κέντρο βάρους στο 0. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το K είναι ισοτροπικό. Τότε

$$L_K \leq \frac{c_2}{c}$$

όπου $c_2 > 0$ η απόλυτη σταθερά του Θεωρήματος 8.8. $\square$

Ο τύπος του Busemann συνδέει τον όγκο κυρτών σωμάτων K με τις τομές $|K \cap \theta^\perp|_{d-1}$ και τα συναρτησοειδή

$$S_1(K \cap \theta^\perp) = \frac{1}{|K \cap \theta^\perp|_{d-1}^d} \int_{K \cap \theta^\perp} \cdots \int_{K \cap \theta^\perp} |conv\{0, y_1, ..., y_{d-1}\}|_{d-1} dy_1 ... dy_{d-1}$$

Θεώρημα 8.10. *Έστω K κυρτό σώμα το οποίο περιέχει το 0 στο εσωτερικό του. Τότε*

$$|K|_d^{d-1} = \frac{d! \omega_d}{2} \int_{S^{d-1}} |K \cap \theta^\perp|_{d-1}^d S_1(K \cap \theta^\perp) d\sigma(\theta)$$

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 8.10, βλ. [16], σελ. 19.

Θεωρούμε K συμμετρικό κυρτό σώμα. Τότε, τα $(d-1)$-διάστατα κυρτά σώματα $K \cap \theta^\perp$, $\theta \in S^{d-1}$ έχουν κέντρο βάρους στο 0, αφού είναι συμμετρικά. Από τον τύπο του Stirling παίρνουμε

$$c_1^d \leq \frac{d! \omega_d}{\sqrt{(d-1)!}} \leq c_2^d$$

για κάποιες απόλυτες σταθερές $c_1, c_2 > 0$. Από την Πρόταση 8.2, το Θεώρημα 8.4 και την σχέση (2), παίρνουμε τις εξής συνέπειες του τύπου του Busemann:

Πόρισμα 8.2. *Για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K,*

$$|K|_d^{d-1} \leq c^d \int_{S^{d-1}} L_{K \cap \theta^\perp}^{d-1} |K \cap \theta^\perp|_{d-1}^d d\sigma(\theta)$$

όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. $|K|_d^{d-1} = \frac{d! \omega_d}{2} \int_{S^{d-1}} |K \cap \theta^\perp|_{d-1}^d S_1(K \cap \theta^\perp) d\sigma(\theta) \leq$

$\frac{d! \omega_d}{2} \int_{S^{d-1}} |K \cap \theta^\perp|_{d-1}^d S_2(K \cap \theta^\perp)^{1/2} d\sigma(\theta) =$

$\frac{d! \omega_d}{2} \int_{S^{d-1}} |K \cap \theta^\perp|_{d-1}^d \frac{L_{K \cap \theta^\perp}^{d-1}}{\sqrt{(d-1)!}} d\sigma(\theta) \leq c^d \int_{S^{d-1}} L_{K \cap \theta^\perp}^{d-1} |K \cap \theta^\perp|_{d-1}^d d\sigma(\theta)$. $\square$

Πόρισμα 8.3. *Για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K,*

$$|K|_d^{d-1} \geq c^d \int_{S^{d-1}} |K \cap \theta^\perp|_{d-1}^d d\sigma(\theta)$$

όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. $|K|_d^{d-1} = \frac{d!\omega_d}{2} \int_{S^{d-1}} |K \cap \theta^\perp|_{d-1}^d S_1(K \cap \theta^\perp) d\sigma(\theta) \geq$

$\frac{d!\omega_d}{2} \int_{S^{d-1}} |K \cap \theta^\perp|_{d-1}^d c_1^{d-1} S_2(K \cap \theta^\perp)^{1/2} d\sigma(\theta) = \frac{d!\omega_d}{2} \int_{S^{d-1}} |K \cap \theta^\perp|_{d-1}^d c_1^{d-1} \frac{L_{K\cap\theta^\perp}^{d-1}}{\sqrt{(d-1)!}} d\sigma(\theta) \geq$

$\frac{d!\omega_d}{2} \int_{S^{d-1}} |K \cap \theta^\perp|_{d-1}^d c_1^{d-1} \frac{c_2^{d-1}}{\sqrt{(d-1)!}} d\sigma(\theta) \geq c^d \int_{S^{d-1}} |K \cap \theta^\perp|_{d-1}^d d\sigma(\theta)$. $\square$

Αυτό το αποτέλεσμα οδηγεί στην εξής εικασία:

Το Πρόβλημα των Busemann-Petty
Αν K_1, K_2 συμμετρικά κυρτά σώματα για τα οποία ισχύει

$$|K_1 \cap \theta^\perp|_{d-1} \leq |K_2 \cap \theta^\perp|_{d-1}, \text{ για κάθε } \theta \in S^{d-1}$$

τότε

$$|K_1|_d \leq c|K_2|_d$$

όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά.

Το πρόβλημα είχε αρχικά διατυπωθεί χωρίς την απόλυτη σταθερά και έχει αποδειχθεί ότι αληθεύει στις διαστάσεις $d \leq 4$ και ότι αποτυγχάνει στις παραπάνω διαστάσεις.

Θεώρημα 8.11. *Η Εικασία της Ισοτροπικής Σταθεράς, για την κλάση των συμμετρικών σωμάτων, είναι ισοδύναμη με το Πρόβλημα Busemann-Petty.*

Απόδειξη. Η μία κατεύθυνση είναι άμεση από τα Πορίσματα 8.2 και 8.3.
Για την αντίθετη κατεύθυνση, έστω K συμμετρικό κυρτό σώμα το οποίο μπορούμε να το υποθέσουμε ισοτροπικό. Επιλέγουμε $\theta_0 \in S^{d-1}$ και $r > 0$ τέτοια ώστε

$$\omega_{d-1} r^{d-1} = |K \cap \theta_0^\perp|_{d-1} = \max_{\theta \in S^{d-1}} |K \cap \theta^\perp|_{d-1}$$

Τότε, για κάθε $\theta \in S^{d-1}$, ισχύει

$|K \cap \theta^\perp|_{d-1} \leq \omega_{d-1} r^{d-1} = |rB_2^d \cap \theta^\perp|_{d-1}$.

Τότε, από υπόθεση,

$1 = |K|_d^{d-1} \leq c_1^{d-1} |rB_2^d|_d^{d-1} = c_1^{d-1} r^{d(d-1)} \omega_d^{d-1} = c_1^{d-1} \frac{\omega_d^{d-1}}{\omega_{d-1}^d} |K \cap \theta_0^\perp|_{d-1}^d =: A$

Από το Πόρισμα 8.2, παίρνουμε

$\omega_d^{d-1} = |B_2^d|_d^{d-1} \leq c_2^d \int_{S^{d-1}} L_{B_2^d \cap \theta^\perp}^{d-1} |B_2^d \cap \theta^\perp|_{d-1}^d d\sigma(\theta) = c_2^d \int_{S^{d-1}} L_{B_2^{d-1}}^{d-1} |B_2^{d-1}|_{d-1}^d d\sigma(\theta) = c_2^d L_{B_2^{d-1}}^{d-1} \omega_{d-1}^d$.

Στην απόδειξη της Πρότασης 8.2 δείξαμε ότι $L_{B_2^{d-1}} \leq c_3$, άρα $A \leq c_4^d |K \cap \theta_0^\perp|_{d-1}^d$, για κάποια απόλυτη σταθερά $c_4 > 0$. Από το Θεώρημα 8.8,

$\frac{1}{L_K} \simeq |K \cap \theta_0^\perp|_{d-1} \geq \frac{1}{c_4}$

Επομένως $L_K \leq C$, όπου $C > 0$ απόλυτη σταθερά.$\square$

Αναφορές

[1] Bárány I. and Buchta C., *Random polytopes in a convex polytope, independence of shape, and concentration of vertices*, Math. Ann. **297**, 1993, p. 467-497

[2] Blaschke W., Kreis and Kugel, *Walter de Gruyter*, Berlin, 1956

[3] Bourgain J., Meyer M., Milman V.D. and Pajor A., *On a geometric inequality*, Geometric Aspects of Functional Analysis, Lecture Notes in Mathematics, **1317**, 1988, p. 271-282

[4] Brazitikos S., Giannopoulos A., Valettas P. and Vritsiou B. H., *Geometry of isotropic convex bodies*, American Mathematical Society, **196**, 2014

[5] Buchta C., *Zufallspolygons in konvexen Vielecken*, J. für reine u. angew. Math. **347**, 1984, p. 212-220

[6] Busemann H., *Volumes in terms of concurrent cross-sections*, Pacific Journal of Mathematics, **3**, 1953, p. 1-12

[7] Campi S., Colesanti A. and Gronchi P., *A note on Sylvester's problem for random polytopes in a convex body*, Rendiconti dell'Istituto di Matematica dell'Università di Trieste. An International Journal of Mathematics, **31**, 1999, p. 79-94

[8] Campi S. and Gronchi P., *Extremal convex sets for Sylvester-Busemann type functionals*, Applicable Analysis, **85**, 2006, p. 129-141

[9] Dalla L. and Larman D.G., *Volumes of a random polytope in a convex set*, Applied Geometry and Discrete Mathematics: The Victor Klee Festschrift, **4**, 1991, p. 175-180

[10] Danzer L., Laugwitz D. and Lenz H., *Über das Löwnersche Ellipsoid und sein Analogon unter dem einem Eikörper einbeschriebenen Ellipsoiden*, Arch. d. Math., **8**, 1957, p. 214-219

[11] Ewald G., *Combinatorial Convexity and Algebraic Geometry*, New York: Springer, 1996

[12] Ewald G., Larman D.G. and Rogers C.A., *The directions of the line segments and of the r-dimensional balls on the boundary of a convex body in Euclidean space*, Mathematika, **17**, 1970, p. 1-20

[13] Garling D.J.H., *Inequalities: A Journey into Linear Analysis*, Cambridge University Press, 2007

[14] Giannopoulos A., *On the mean value of the area of a random polygon in a plane convex body*, Mathematika, **39**, 1992, p. 279- 290

[15] Giannopoulos A.A., *Notes on isotropic convex bodies*, Warsaw, 2003, p. 1-22

[16] Giannopoulos A.A. and Tsolomitis A., *Volume radius of a random polytope in a convex body*, Math. Proc. Camp. Phil. Soc., **134**, 2003, p. 13-21

[17] Gröemer H., *On some mean values associated with a randomly selected simplex in a convex set*, Pacific J. Math., **45**, 1973, p. 525-533

[18] Gröemer H., *On the Mean Value of the Volume of a Random Polytope in a Convex Set*, Arch. Math., **25**, 1974, p. 86-90

[19] Gruber M.P., *Convex and Discrete Geometry*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, **336**, 2007

[20] Hadwiger H., *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*, Grundl. d. math. Wiss., Bd. **93**, Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1957

[21] Hartzoulaki M. and Paouris G., *Quermassintegrals of a random polytope in a convex body*, Arch. Math., **80**, 2003, p. 430-438

[22] John F., *Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions*, Interscience, New York, 1948, 187-204

[23] Leichtweiss K., *Konvexe Mengen*, Springer-Verlag, Berlin Heiddelberg New York, 1980

[24] Mattila P., *Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces, fractals and rectifiability*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **44**, 1995

[25] Parapatits L., Schuster F.E., *The Steiner formula for Minkowski valuations*, Advances in Mathematics, **230**, 2012,, p. 978–994

[26] Reed W.J., *Random points in a simplex*, Pacific Journal of Mathematics, **54**, 1974, 183-198

[27] Pfiefer R.E., *The historical development of J.J. Sylvester's four point problem*, Math. Mag. **62**, 1989, p. 309-317

[28] Rogers C.A. and Shephard G.C., *Some extremal problems for convex bodies*, Mathematika **5**, 1958, p. 93- 102

[29] Saroglou C., *Characterizations of extremals for some functionals on convex bodies*, Canad. J. Math, **62**, 2010, p. 1404-1418

[30] Schneider R., *Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory, Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, Cambridge University Press, **44**, 1993

[31] Schöpf P., *Gewichtete Volumsmittelwerte vonn Simpicies, welche zufällig in einem konvexen Körper der* $\mathbb{R}^n$ *gewählt werden*, Mh. Math., **83**, 1977, p. 331-337

[32] Sylvester J. J., The Educational Times, London, 1864

[33] Thompson A.C., *Minkowski Geometry*, Cambridge University Press, **63**, 1996

[34] Webster R.J., *Convexity*, Oxford University Press, New York, 1994