

Προβλήματα κατασκευών μη επιλύσιμων με κανόνα και διαβήτη

Ιωάννης Ξειδάκης
University of Crete, Greece
xidakis@math.uoc.gr

Περίληψη

Μελέτη προβλημάτων κατασκευής σύμφωνα με το άρθρο του Fursenko

1 Εισαγωγή

Η εργασία αυτή στηρίζεται στην λεξικογραφική ταξινόμηση κατασκευών τριγώνων του Fursenko [Fur37], που περιλαμβάνουν τα επόμενα στοιχεία του τριγώνου με την σειρά που αναγράφεται και η οποία παίζει καθοριστικό ρόλο για την ταξινόμηση.

πλευρές	a	b	c
γωνίες	A	B	C
ύψη	h_a	h_b	h_c
διάμεσοι	m_a	m_b	m_c
διχοτόμοι	b_A	b_B	b_C
ακτ. περ/νου	R		
ακτ. εγγ/νου	r		
ακτ. παρ/νων	r_a	r_b	r_c
περίμετρος	$2p$		
εμβαδόν	Δ		

Όπως σημειώνει ο συγγραφέας οι συνδυασμοί των πρηγουμένων 22 στοιχείων ανά 3 οδηγούν σε 1540 προβλήματα, εκ των οποίων μόνο τα 350 αφορούν σε διαφορετικές κατασκευές. Με την ευκαιρία αυτής της ταξινόμησης, ο συγγραφέας, σημειώνει επίσης ότι εξ' αυτών των προβλημάτων κατασκευών, τα 247 δεν εμφανίζονται σε κανένα από τα γνωστά τότε (1937) σχετικά βιβλία, εγχειρίδια και συλλογές ασκήσεων.

Στο άρθρο του ο Fursenko δίδει ή υποδεικνύει κατασκευές, τις περισσότερες με συνθετικό τρόπο, για 227 εκ των προβλημάτων που παραθέτει. Για τις υπόλοιπες 123 αναφέρει απλώς ότι οι λύσεις τους δεν κατασκευάζονται με κανόνα και διαβήτη χωρίς να αποδεικνύει την μη κατασκευασιμότητα.

Ως γνωστόν, η μη-κατασκευασιμότητα αρρήτων αριθμών α με κανόνα και διαβήτη ανάγεται στην εύρεση πολυωνυμικής εξίσωσης με ακέραιους συντελεστές και ορισμένες πρόσθετες ιδιότητες, της οποίας ο α είναι ρίζα. Η εξίσωση αυτή ωστόσο, ανάλογα με τα δεδομένα του προβλήματος, μπορεί να είναι μεγάλου βαθμού ή/και οι συντελεστές του σχετικού πολυωνύμου να είναι μεγάλοι ακέραιοι. Για παράδειγμα, ένα ανάγωγο πολυώνυμο μέσω του οποίου αποδεικνύεται η μη-κατασκευασιμότητα του τριγώνου από τις τρεις διχοτόμους του είναι 14-ου βαθμού ([MP94]). Ο Fursenko, ως παράδειγμα εξίσωσης με συντελεστές μεγάλους ακέραιους αναφέρει το

$$t^3 - 838t^2 + 379100t - 3611159296 = 0,$$

στο οποίο ανάγεται η μη-κατασκευασιμότητα της λύσης της (A, m_b, r) -κατασκευής. Αν και ισχυρίζεται την αδυναμία της κατασκευής, τόσο στο προηγούμενο παράδειγμα, όσο και στα υπόλοιπα, εν τούτοις, διατυπώνει και ο ίδιος κάποιες επιφυλάξεις για τους υπολογισμούς του. Τελικά στο άρθρο παραμένει το κενό της απόδειξης της μη κατασκευασιμότητας των 123 περιπτώσεων που αναφέρονται ως τέτοιες.

Στην εργασία αυτή γίνεται μία δειγματοληπτική έρευνα, ως προς την κατασκευασιμότητα, που αφορά σε 12 τυχαία επιλεγμένα προβλήματα από τα 123 που θεωρούνται ως μη-κατασκευάσιμα. Και για τα 12 αυτά προβλήματα αποδεικνύεται η ορθότητα του ισχυρισμού.

Η μέθοδος της απόδειξής μας είναι η κλασική, της εύρεσης κατάλληλης πολυωνυμικής εξίσωσης με ακέραιους συντελεστές. Αυτό επιτυγχάνεται με την αναγωγή της κατασκευής ή σε μία βασική, από τις πλευρές και τις γωνίες τριγώνου ή σε μία άλλη, για την οποία είναι γνωστή η κατασκευασιμότητα. Κατά κανόνα η εξίσωση που προκύπτει έχει συντελεστές που, όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, δεν προσφέρονται για εφαρμογή των γνωστών κριτηρίων αναγωγιμότητας, όπως λ.χ. αυτό του Eisenstein [94, 338]. Αυτό καθιστά αναγκαία την αναζήτηση ειδικών μορφών των υπό κατασκευή τριγώνων, για τις οποίες η αντίστοιχη εξίσωση απλοποιείται, έτσι ώστε να καθίσταται εφικτή η χρήση των προαναφερθέντων κριτηρίων. Οι ειδικές μορφές θα πρέπει ταυτόχρονα να μην συμπεριλαμβάνονται σε εκείνες οι οποίες δίδουν κατασκευασιμότητα, παρόλο που η γενική περίπτωση είναι μη-κατασκευάσιμη, όπως, λ.χ. η κατασκευασιμότητα της τριχοτόμησης της γωνίας 90° , σε αντίθεση με την μη-κατασκευασιμότητα της γενικής τριχοτόμησης.

Πριν από την εξέταση των προβλημάτων κατασκευασιμότητας αποδεικνύονται ορισμένες προτάσεις, που χρησιμεύουν στην απόδειξη της μη κατασκευασιμότητας ρίζας μίας τεταρτοβάθμιας εξίσωσης. Η κρίσιμη ιδιότητα που χρησιμεύει στην πράξη είναι ότι όταν μία ρίζα της τεταρτοβάθμιας κατασκευάζεται με κανόνα και διαβήτη τότε όλες οι ρίζες της κατασκευάζονται επίσης με κανόνα και διαβήτη. Το θεώρημα αυτό σχηματίζεται σε κλασικά συγγράμματα, όπως λ.χ. αυτό του Klein [Kle97, σ. 9]. Τα θεωρήματα της πρώτης παραγράφου αντιμετωπίζουν αυτό το θέμα και δίδουν μία απόδειξη χρησιμοποιώντας γενικές αρχές και θεωρήματα της θεωρίας σωμάτων.

2 Αλγεβρικά προαπαιτούμενα

Θεώρημα 2.1 *Αν $E(a), E(a, b), E(r), E(a, r), E(a, b, r)$ είναι επεκτάσεις ενός σώματος E τέτοιες ώστε, για $i \geq 2$:*

1. $a^2 \in E$ και $a \notin E$,
2. $b^2 \in E(a)$ και $b \notin E(a)$,
3. $[E(a, r) : E(a)] = [E(r) : E] = 2^i$,
4. $[E(a, b, r) : E(a, b)] = 2^{i-1}$.

Τότε υπάρχει επέκταση $E(d)$ τέτοια ώστε $E \subseteq E(d) \subseteq E(r)$ και $[E(d) : E] = 2$.

Απόδειξη:

Απο τα δεδομένα προκύπτει ότι: $[E(a) : E] = 2, [E(a, b) : E(a)] = 2, [E(a, r) : E(r)] = 2$

και $[E(a, b, r) : E(a, r)] = 1$ άρα $[E(b, r) : E(r)] \in \{1, 2\}$

A) αν $[E(b, r) : E(r)] = 1$ τότε $b \in E(r)$

$$[E(b) : E] \in \{2, 2^2\}$$

$$[E(r) : E] = [E(b, r) : E] = [E(b, r) : E(b)] \cdot [E(b) : E] \geq [E(a, b, r) : E(a, b)] \cdot [E(b) : E] \Rightarrow$$

$$2^i \geq 2^{i-1} \cdot [E(b) : E] \Leftrightarrow [E(b) : E] \leq 2 \quad \text{άρα} \quad [E(b) : E] = 2$$

$$\text{Οπότε έχω: } E \subseteq E(b) \subseteq E(r) \quad \text{και} \quad [E(b) : E] = 2$$

B) αν $[E(b, r) : E(r)] = 2$ τότε υπάρχουν $k, l \in E(r)$ τέτοια ώστε $b^2 + kb + l = 0$

B1) αν $k = 0$ τότε $b^2 = -l \in E(r)$

Έστω ότι $l \notin E$ τότε $b^2 \notin E$. Όμως $b^2 \in E(a)$ και $[E(a) : E] = 2$

$$\text{αρα} \quad [E(b^2) : E] = 2$$

$$2 = [E(a) : E] = [E(a, b^2) : E] = [E(a, b^2) : E(b^2)] \cdot [E(b^2) : E] =$$

$$= [E(a, b^2) : E(b^2)] \cdot 2.$$

$$\text{Άρα} \quad [E(a, b^2) : E(b^2)] = 1 \quad \text{άρα} \quad a \in E(b^2) \subseteq E(r) \Rightarrow a \in E(r)$$

άτοπο αφού $[E(a, r) : E(r)] = 2$

$$\text{Άρα} \quad l \in E \quad \text{και} \quad \text{συνεπώς} \quad b^2 \in E$$

Όμως $[E(a, b, r) : E(a, r)] = 1$ και $a^2 \in E \subseteq E(r)$.

Υπάρχουν $d, h \in E(r)$ με $d \notin E$ ή $h \notin E$ και $d \neq 0$ τέτοια ώστε: $b = d \cdot a + h$
('Αν $\{d, h\} \subseteq E$ τότε $b \in E(a)$ άτοπο,

και αν $d = 0$ τότε $b \in E(r)$ άτοπο αφού $[E(b, r) : E(r)] = 2$)

$$b^2 = d^2 \cdot a^2 + 2 \cdot d \cdot h \cdot a + h^2 \quad \text{με} \quad \{b^2, d, a^2, h\} \subseteq E(r).$$

Άν $h \neq 0$ τότε $a \in E(r)$ πού είναι άτοπο, άρα $h = 0$.

Αφού $h = 0$ έχω: $d \notin E$ και $b^2 = d^2 \cdot a^2 \Rightarrow d^2 \in E$

$$\text{οπότε} \quad E \subseteq E(d) \subseteq E(r) \quad \text{και} \quad [E(d) : E] = 2$$

B2) Αν $k \neq 0$ έχω: $b^2 + kb + l = 0$ με $k, l \in E(r)$ και $k \notin E$ ή $l \notin E$

(αν $\{k, l\} \subseteq E$ τότε $b \in E(a)$, άτοπο)

Άν $b^2 \in E(r)$ τότε $b \in E(r)$ άτοπο αφού $[E(b, r) : E(r)] = 2$

$$\text{άρα} \quad b^2 \notin E(r) \quad \text{άρα} \quad b^2 \notin E$$

όμως $b^2 \in E(a)$ και $[E(a) : E] = 2$ άρα υπάρχουν $d_1, d_2 \in E$ τέτοια ώστε
 $(b^2)^2 + d_1 \cdot b^2 + d_2 = 0 \Leftrightarrow b^4 = -d_1 \cdot b^2 - d_2$

$$\text{όμως} \quad b^2 + kb + l = 0 \Leftrightarrow b^2 + l = -k \cdot b \Rightarrow b^4 + 2l \cdot b^2 + l^2 = b^2 \cdot k^2 \Leftrightarrow$$

$$-d_1 \cdot b^2 - d_2 + 2l \cdot b^2 + l^2 = b^2 \cdot k^2 \Leftrightarrow (k^2 + d_1 - 2l) \cdot b^2 + d_2 - l^2 = 0. \quad \text{Όμως}$$

$\{k, l, d_1, d_2\} \subseteq E(r)$ και $b^2 \notin E(r)$ άρα $k^2 + d_1 - 2l = 0$ και $d_2 - l^2 = 0$
με $d_2 \in E$ άρα $l^2 \in E$

B2a) Άν $l \in E$ τότε $k \notin E$

$$k^2 = 2l - d_1 \in E \quad \text{και} \quad k \in E(r) \quad \text{συνεπώς} \quad E \subseteq E(k) \subseteq E(r) \quad \text{και} \quad [E(k) : E] = 2$$

B2b) Αν $l \notin E$ έχω:

$$l^2 \in E \quad \text{και} \quad l \in E(r) \quad \text{άρα} \quad E \subseteq E(l) \subseteq E(r) \quad \text{και} \quad [E(l) : E] = 2$$

Θεώρημα 2.2 Αν r κατασκευάσιμος με $r \notin Q$ και $[Q(r) : Q] = 2^k$, τότε υπάρχει ακολουθία επεκτάσεων $Q = E_0 \subseteq E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots \subseteq E_k = Q(r)$ τέτοια ώστε $[E_k : E_{k-1}] = [E_{k-1} : E_{k-2}] = \dots = [E_1 : E_0] = 2$

Απόδειξη:

Αφού r κατασκευάσιμος υπάρχει πεπερασμένη ακολουθία επεκτάσεων

$$Q = E_0 \subseteq E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots \subseteq E_n = E_{n-1}(r) \quad \text{τέτοια ώστε} \quad [E_m : E_{m-1}] = 2$$

$\forall m \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Έστω ότι η παραπάνω ακολουθία είναι η ακολουθία με το ελάχιστο πλήθος όρων.

Παίρνω τις επεκτάσεις $Q(r) = E_0(r) \subseteq E_1(r) \subseteq E_2(r) \subseteq \dots \subseteq E_{n-1}(r) = E_n$

Τότε έχω $[E_m(r) : E_{m-1}(r)] \in \{1, 2\}$ και αν $[E_{m-1}(r) : E_{m-1}] = 2^t$ τότε

$$[E_m(r) : E_m] \in \{2^{t-1}, 2^t\} \quad \forall m \in \{1, 2, \dots, n-1\}$$

με $[E_{n-1}(r) : E_{n-1}] = 2$ και $[E_{n-2}(r) : E_{n-2}] = 2^2$ (Αν $[E_{n-2}(r) : E_{n-2}] = 2$

τότε η ακολουθία $E_0, E_1, \dots, E_{n-2}, E_{n-2}(r)$ έχει πλήθος όρων μικρότερο τής αρχικής)

Έστω ότι υπάρχει $i \in \{2, 3, \dots, n-1\}$ τέτοιο ώστε $[E_{n-j}(r) : E_{n-j}] = 2^j$

$\forall j \in \{1, 2, \dots, i\}$ και $[E_{n-i-1}(r) : E_{n-i-1}] = 2^i$ τότε:

$$[E_{n-j+1}(r) : E_{n-j}(r)] = 1 \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, i\} \quad \text{και} \quad [E_{n-i}(r) : E_{n-i-1}(r)] = 2.$$

Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα υπάρχει

$d_1 \in E_{n-i-1}(r) \subseteq E_{n-i}(r) \subseteq \dots \subseteq E_{n-1}(r)$ με $[E_{n-i-1}(d_1) : E_{n-i-1}] = 2$ και

$$[E_{n-i-1}(r) : E_{n-i-1}(d_1)] = 2^{i-1}$$

Θεωρώ την ακολουθία επεκτάσεων

$$E_0 \subseteq E_1 \subseteq \dots \subseteq E_{n-i-1} \subseteq E_{n-i-1}(d_1) \subseteq E_{n-i}(d_1) \subseteq \dots \subseteq E_n(d_1)$$

τότε $[E_{n-j}(d_1) : E_{n-j-1}(d_1)] \in \{1, 2\} \quad \forall j \in \{0, 1, \dots, i\}$ με

$$[E_{n-i}(d_1) : E_{n-i-1}(d_1)] = 2 \quad (\text{ Αν } [E_{n-i}(d_1) : E_{n-i-1}(d_1)] = 1 \text{ τότε}$$

$$[E_{n-i}(r) : E_{n-i}(d_1)] = 2^i > [E_{n-i-1}(r) : E_{n-i-1}(d_1)] \text{ πού είναι άτοπο })$$

και $[E_{n-i}(r) : E_{n-i}(d_1)] = 2^{i-1}$.

‘Αν $[E_{n-j}(r) : E_{n-j}(d_1)] = [E_{n-j+1}(r) : E_{n-j+1}(d_1)]$ για κάποιο $j \in \{0, 1, \dots, i\}$

τότε $[E_{n-j+1}(d_1) : E_{n-j}(d_1)] = 1$

Επειδή το πλήθος των όρων της ακολουθίας $E_{n-i}, E_{n-i+1}, \dots, E_{n-1}$ είναι i

ενώ το πλήθος των όρων της ακολουθίας $2, 2^2, \dots, 2^{i-1}$ είναι $i-1$

υπάρχει ακριβώς ένας $j \in \{3, 4, \dots, i\}$ τέτοιο ώστε

$$[E_{n-j}(r) : E_{n-j}(d_1)] = [E_{n-j+1}(r) : E_{n-j+1}(d_1)]$$

$$\text{και συνεπώς } [E_{n-j+1}(d_1) : E_{n-j}(d_1)] = 1$$

(Αν υπήρχαν περισσότεροι προκύπτει ακολουθία με πλήθος όρων μικρότερο τής αρχικής)

Άφαιρώντας την επέκταση $E_{n-j+1}(d_1)$ από την ακολουθία έχουμε:

$$[E_{n-i}(r) : E_{n-i}(d_1)] = [E_{n-i-1}(r) : E_{n-i-1}(d_1)] = 2^{i-1} \text{ και}$$

$$[E_{n-i+1}(r) : E_{n-i+1}(d_1)] = 2^{i-2} \text{ άρα υπάρχει } d_2 \in E_{n-i-1}(r) \text{ τέτοιος ώστε}$$

$$[E_{n-i-1}(d_1, d_2) : E_{n-i-1}(d_1)] = 2$$

Επαγωγικά προκύπτει ότι υπάρχει ακολουθία επεκτάσεων

$$E_{n-i-1} \subseteq K_1 \subseteq K_2 \subseteq \dots \subseteq K_{i-1} \subseteq E_{n-i-1}(r) \text{ τέτοια ώστε}$$

$$[E_{n-i-1}(r) : K_{i-1}] = [K_{i-1} : K_{i-2}] = \dots = [K_1 : E_{n-i-1}] = 2$$

Τότε η ακολουθία επεκτάσεων βαθμού 2

$$Q = E_0 \subseteq E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots \subseteq E_{n-i-1} \subseteq K_1 \subseteq K_2 \subseteq \dots \subseteq K_{i-1} \subseteq E_{n-i-1}(r)$$

έχει πλήθος όρων μικρότερο τής αρχικής $Q = E_0 \subseteq E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots \subseteq E_n$ πού είναι άτοπο. Άρα $[E_{n-i}(r) : E_{n-i}] = 2^i \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$\text{Όμως } 2^n = [E_0(r) : E_0] = [Q(r) : Q] = 2^k \text{ άρα } n = k$$

$$\text{Από τα παραπάνω έπεται ότι } [E_m(r) : E_{m-1}(r)] = 1 \quad \forall m \in \{1, 2, \dots, k-1\}$$

$$\text{Άρα } Q(r) = E_{k-1}(r) = E_k.$$

Πόρισμα 2.1 $P(x) \in \mathbb{Q}[x]$ είναι πολυώνυμο τετάρτου βαθμού πού δέν έχει ρητή ρίζα. Αν το $P(x)$ έχει μιá ρίζα κατασκευάσιμη τότε όλες του οι ρίζες είναι κατασκευάσιμες.

Απόδειξη:

$$\text{Έστω } r \text{ κατασκευάσιμη ρίζα τού πολυωνύμου } P(x) \text{ τότε } [Q(r) : Q] \in \{2, 2^2\}$$

α) Αν $[Q(r) : Q] = 2$ υπάρχουν $a_1, a_2, b_1, b_2 \in Q$ τέτοια ώστε:

$$P(x) = (x^2 + a_1x + b_1)(x^2 + a_2x + b_2). \text{ Άρα όλες οι ρίζες τού } P(x) \text{ είναι}$$

κατασκευάσιμες.

β) Αν $[Q(r) : Q] = 2^2$ σύμφωνα μέ τό προηγούμενο θεώρημα υπάρχει $d \in Q(r)$

$$\text{τέτοιος ώστε: } [Q(r) : Q(d)] = [Q(d) : Q] = 2.$$

Τότε υπάρχουν $a_1, a_2, b_1, b_2 \in Q(d)$, άρα κατασκευάσιμοι, τέτοιοι ώστε:

$$P(x) = (x^2 + a_1x + b_1)(x^2 + a_2x + b_2).$$

Άρα όλες οι ρίζες τού $P(x)$ είναι κατασκευάσιμες.

Θεώρημα 2.3 Τό τεταρτοβάθμιο πολυώνυμο $P(x) \in \mathbb{Q}[x]$ πού δέν έχει ρητή ρίζα, έχει μιá κατασκευάσιμη ρίζα (στήν περίπτωση αυτή και οι 4 ρίζες του είναι κατασκευάσιμες), άν και μόνο άν η επιλύουσα του έχει μιá τουλάχιστον ρητή ρίζα.

Απόδειξη:

Έαν $P(x) = x^4 + 4ax^3 + 6bx^2 + 4cx + d$ τότε:

$P(x) = [x^2 + 2(a+m)x + b + 2l - n][x^2 + 2(a-m)x + b + 2l + n]$ με

$$m^2 = l + a^2 - b \quad (1), \quad mn = ab + 2al - c \quad (2), \quad n^2 = (b + 2l)^2 - d \quad (3)$$

[Τζα10]. και l οποιαδήποτε λύση της επιλύουσας $4l^3 - g_2l + g_3 = 0$ όπου

$$d - 4ac + 3b^2 = g_2 \in Q, \quad bd + 2abc - b^3 - c^2 - a^2d = g_3 \in Q$$

Από τις ισότητες (1), (2) και (3) είναι προφανές ότι αν ένας από τους m, n, l είναι κατασκευάσιμος τότε και οι άλλοι δύο είναι κατασκευάσιμοι.

Έστω ότι τό $P(x)$ έχει μιά ρίζα κατασκευάσιμη ρίζα, τότε και οι 4 ρίζες του είναι

κατασκευάσιμες. Έαν x_1, x_2 οι ρίζες τού $h(x) = x^2 + 2(a+m)x + b + 2l - n$

τότε $x_1 + x_2$ κατασκευάσιμος, άρα $a + m$ κατασκευάσιμος και m

κατασκευάσιμος. Συνεπώς l είναι κατασκευάσιμος.

Άρα η επιλύουσα $4l^3 - g_2l + g_3 = 0$ έχει μιά τουλάχιστον ρητή ρίζα.

Αντιστρόφως:

Έστω $l \in Q$ ρίζα της επιλύουσας. Τότε m, n κατασκευάσιμοι. Συνεπώς τό

πολυώνυμο $P(x) = [x^2 + 2(a+m)x + b + 2l - n][x^2 + 2(a-m)x + b + 2l + n]$

έχει και τις 4 ρίζες του είναι κατασκευάσιμες.

Θεώρημα 2.4 Έστω r κατασκευάσιμος με $r \notin Q$ με $[Q(r) : Q] = 2^k$.

Τό r είναι ρίζα ανάγωγου πολυωνύμου $f(x) \in Q[x]$ βαθμού 2^k .

Έστω η ακολουθία επεκτάσεων $Q = E_0 \subseteq E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots \subseteq E_k = Q(r)$

τέτοια ώστε $[E_k : E_{k-1}] = [E_{k-1} : E_{k-2}] = \dots = [E_1 : E_0] = 2$

$$\text{με } E_m = Q(a_1, a_2, \dots, a_m) \quad \forall m \in \{1, 2, \dots, k\} \quad \text{και } a_m^2 \in E_{m-1}$$

Θεωρώ τούς αυτομορφισμούς $\sigma_m : Q(a_1, a_2, \dots, a_m) \rightarrow Q(a_1, a_2, \dots, a_m)$ με

$$\sigma_m(a_m) = -a_m \quad \text{και } \sigma_m(a_i) = a_i, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m-1\}$$

Τότε από τούς παραπάνω αυτομορφισμούς καθώς και τούς συνδιασμούς τών συνθέσεων τους

προκύπτουν όλες οι ρίζες τού πολυωνύμου.

Απόδειξη:

$$a) \sigma_m \sigma_m(a_m) = a_m \quad \text{άρα } \sigma_m \sigma_m(a) = a \quad \forall a \in Q(r)$$

b) Έστω $m < n \leq k$. Έαν $b \in E_{n-1}$ τότε $\sigma_n \sigma_m(b) = \sigma_m \sigma_n(b) = \sigma_m(b)$ και

$$\sigma_m \sigma_n(a_n) = \sigma_m(-a_n) = -\sigma_m(a_n) = \sigma_n \sigma_m(a_n) \quad \text{άρα } \sigma_m \sigma_n(a) = \sigma_n \sigma_m(a) \quad \forall a \in Q(r)$$

Έστω $\sigma_{n_1} \sigma_{n_2} \dots \sigma_{n_i}(r) = \sigma_{m_1} \sigma_{m_2} \dots \sigma_{m_j}(r)$ εφαρμόζοντας αντίστροφους αυτομορφισμούς

και τήν αντιμεταθετική ιδιότητα έχουμε : $\sigma_{k_1}\sigma_{k_2}\dots\sigma_{k_n}(r) = r$ μέ $k_1 < k_2 < \dots < k_n$

Τό r είναι ρίζα ανάγωγου πολυωνύμου βαθμού 2^{k-k_1} μέ συντελεστές $b_i = a + b \cdot a_{k_1}$

μέ $a_{k_1} \in E_{k_1}$ και $a, b \in E_{k_1-1}$ Τότε $\sigma_{k_1}\sigma_{k_2}\dots\sigma_{k_n}(b_i) = b_i \Leftrightarrow \sigma_{k_1}(b_i) = b_i \Leftrightarrow$

$\sigma_{k_1}(a + b \cdot a_{k_1}) = a + b \cdot a_{k_1} \Leftrightarrow a + b \cdot \sigma_{k_1}(a_{k_1}) = a + b \cdot a_{k_1} \Leftrightarrow -b \cdot a_{k_1} = b \cdot a_{k_1} \Leftrightarrow$

$b \cdot a_{k_1} = 0$ τότε $b_i \in E_{k_1-1}$ πού είναι άτοπο. Άρα $\sigma_{n_1}\sigma_{n_2}\dots\sigma_{n_i}(r) \neq \sigma_{m_1}\sigma_{m_2}\dots\sigma_{m_j}(r)$

Τό r είναι ρίζα ανάγωγου πολυωνύμου $f(x) \in Q[x]$ βαθμού 2^k .

Από τούς παραπάνω αυτομορφισμούς καθώς και τούς συνδιασμούς τών συνθέσεων τους

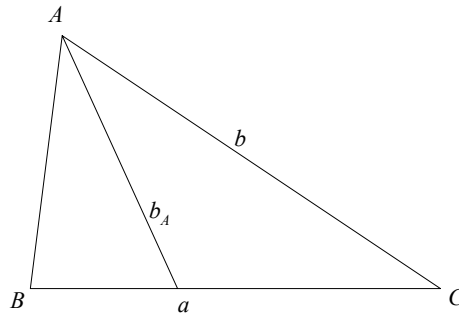
$$\binom{k}{1}, \binom{k}{2}, \dots, \binom{k}{k} \text{ προκύπτουν } \binom{k}{0} + \binom{k}{1} + \dots + \binom{k}{k} = 2^k$$

διαφορετικές ρίζες τού πολυωνύμου. Άρα αυτές ακριβώς είναι οι ρίζες τού πολυωνύμου.

3 Κατασκευή από τα (a, b, b_A)

(Κατασκευή-8 σελίδα 27)

Απο την γενίκευση του πυθαγορείου θεωρήματος στο τρίγωνο ABC και από το θεώρημα



Σχήμα 1: Κατασκευή από τα (a, b, b_A)

διχοτόμων έχω:

$$b_A^2 = \frac{bc(a+b+c)(b+c-a)}{(b+c)^2} \Leftrightarrow$$

$$b_A^2(b^2 + 2bc + c^2) = bc((b+c)^2 - a^2) \Leftrightarrow$$

$$bc^3 + (2b^2 - b_A^2)c^2 + (b^2 - a^2b - 2b_A^2b)c - b_A^2b^2 = 0.$$

Για $b = b_A = 1$ έχω:

$$c^3 + c^2 - (a^2 + 1)c - 1 = 0$$

Ομως αν $A = 2x$ τότε:

$$0 < x < \frac{\pi - x}{2} \Leftrightarrow 0 < x < \frac{\pi}{3}$$

και

$$\frac{a}{\sin 2x} = \frac{1}{\sin \frac{\pi - 3x}{2}} \Leftrightarrow a = \frac{\sin 2x}{\cos \frac{3x}{2}}.$$

οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 0} a(x) = 0$$

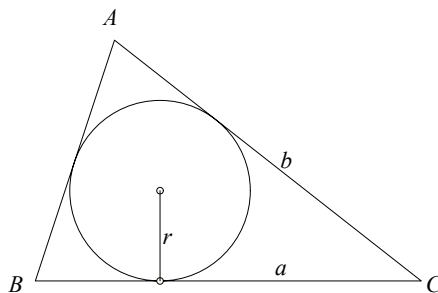
και

$$\lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}} a(x) = +\infty$$

Συνεπώς αφού η $a(x)$ είναι συνεχής, το a παίρνει όλες τις τιμές στο διάστημα $(0, +\infty)$, για $a = 1$ θα προκύπτει: $c^3 + c^2 - 2c - 1 = 0$. Έπεται ότι ο c δεν είναι κατασκευάσιμος αφού είναι ρίζα του πολυωνύμου $x^3 + x^2 - 2x - 1$ που είναι ανάγωγο στο $\mathbb{Q}[x]$.

4 Κατασκευή από τα (a, b, r)

(Κατασκευή-11 σελίδα 27)



Σχήμα 2: Κατασκευή από τα (a, b, r)

$$\begin{aligned} pr &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \Leftrightarrow \\ pr^2 &= (p-a)(p-b)(p-c) \Leftrightarrow \\ r^2(a+b+c) &= \frac{(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}{4} \Leftrightarrow \\ 4r^2(a+b) + 4r^2c &= [c^2 - (a+b)^2](a+b-c) \Leftrightarrow \\ c^3 - (a+b)c^2 + [4r^2 - (a+b)^2]c + (a+b)[4r^2 + (a-b)^2] &= 0. \end{aligned}$$

Για $a = b = 1$ έχω:

$$c^3 - 2c^2 + 4r^2c + 8r^2 = 0$$

με $0 < c < 2$. Για την συνάρτηση

$$r^2 = \frac{c^2(2-c)}{4(2+c)}$$

όταν $0 < c < 2$, τότε

$$0 < r^2 \leq \frac{(3-\sqrt{5})^2}{2(1+\sqrt{5})}.$$

Για

$$r^2 = \frac{1}{32} < \frac{(3-\sqrt{5})^2}{2(1+\sqrt{5})}$$

προκύπτει η εξίσωση:

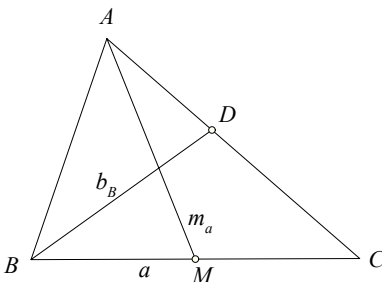
$$8c^3 - 16c^2 + c + 2 = 0.$$

Έπεται ότι ο c δεν είναι κατασκευάσιμος, αφού είναι ρίζα του πολυωνύμου $8x^3 - 16x^2 + x + 2$ που είναι ανάγωγο στο $\mathbb{Q}[x]$.

5 Κατασκευή από (a, m_a, b_B)

(Κατασκευή-73, σελίδα 23)

Έστω $B(0,0)$, $C(a,0)$ και $\widehat{B} = 2x$ τότε $A(c \cdot \cos 2x, c \cdot \sin 2x)$. Αν BD η διχοτόμος της



Σχήμα 3: Κατασκευή από (a, m_a, b_B)

γωνίας B και AM η διάμεσος του τριγώνου τότε $D(b_B \cdot \cos x, b_B \cdot \sin x)$ και $M(\frac{a}{2}, 0)$. Τα σημεία A, D, C είναι συνευθειακά άρα

$$\begin{aligned} a(c \cdot \sin 2x - b_B \cdot \sin x) + c \cdot b_B \cdot \cos 2x \cdot \sin x - c \cdot b_B \cdot \cos x \cdot \sin 2x &= 0 \Leftrightarrow \\ a \cdot \sin x(2 \cdot c \cdot \cos x - b_B) - c \cdot b_B \cdot (\sin 2x \cdot \cos x - \sin x \cdot \cos 2x) &= 0 \Leftrightarrow \\ a \cdot \sin x \cdot (2 \cdot c \cdot \cos x - b_B) - c \cdot b_B \cdot \sin x &= 0 \Leftrightarrow \\ \sin x \cdot (2 \cdot a \cdot c \cdot \cos x - a \cdot b_B - c \cdot b_B) &= 0 \Leftrightarrow \\ \cos x = \frac{(a+c) \cdot b_B}{2ac} \quad \text{και} \quad c = \frac{a \cdot b_B}{2 \cdot a \cdot \cos x - b_B}. \end{aligned}$$

Όμως

$$\begin{aligned} m_a^2 &= \left(c \cdot \cos 2x - \frac{a}{2}\right)^2 + c^2 \cdot \sin^2 2x \\ &= c^2 - a \cdot c \cdot (2\cos^2 x - 1) + \frac{a^2}{4} \\ &= c^2 - a \cdot c \cdot \left(\frac{2(a+c)^2 b_B^2}{4a^2 c^2} - 1\right) + \frac{a^2}{4} \\ &= c^2 - \frac{(a+c)^2 b_B^2}{2ac} + ac + \frac{a^2}{4} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$2 \cdot a \cdot c \cdot m_a^2 = 2ac^3 - (a+c)^2 b_B^2 + 2a^2 c^2 + \frac{a^3 c}{2} \Leftrightarrow$$

$$0 = 2ac^3 + (2a^2 - b_B^2)c^2 + ac \left(\frac{a^2}{2} - 2b_B^2 - 2m_a^2\right) - a^2 b_B^2.$$

Γιά $a = 2$ και $b_B = 1$ έχω:

$$4c^3 + 7c^2 - 4m_a^2c - 4 = 0.$$

Όμως:

$$\begin{aligned} m_a^2 &= c^2 - a \cdot c \cdot \cos 2x + \frac{a^2}{2} \\ &= c^2 - 2 \cdot c \cdot \cos 2x \\ &= \left(\frac{2}{4\cos x - 1} \right)^2 - 2 \frac{2}{4\cos x - 1} \cos 2x + 1 \\ &= \frac{4 - 4(4\cos x - 1)\cos 2x + (4\cos x - 1)^2}{(4\cos x - 1)^2} \end{aligned}$$

Αν $0 < x < \arccos \frac{1}{4}$ έχω:

$$\lim_{x \rightarrow 0} m_a^2 = \frac{1}{9}, \quad \lim_{x \rightarrow \arccos \frac{1}{4}} m_a^2 = +\infty$$

Άρα το m_a παίρνει όλες τις τιμές στο διάστημα $(\frac{1}{3}, +\infty)$. Γιά $m_a = \frac{3}{2}$ έχω:

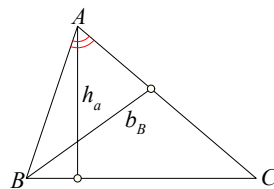
$$4c^3 + 7c^2 - 9c - 4 = 0$$

τότε ο c δέν είναι κατασκευάσιμος αφού είναι ρίζα τού πολυωνύμου $x^3 + 7x^2 - 9x - 4$ που είναι ανάγωγο στο $\mathbb{Q}[x]$.

6 Κατασκευή από (\hat{A}, h_a, b_B)

(Κατασκευή-139 σελίδα 29)

Αν $\hat{A} = \frac{\pi}{2}$ ισχύει:



Σχήμα 4: Κατασκευή από (\hat{A}, h_a, b_B)

$$\begin{aligned}
0 < x < \frac{\pi}{4} \text{ και } \sin 2x &= \frac{h_a}{c}, \quad \sin x = \frac{c \cdot \tan x}{b_B} \Rightarrow \\
\sin 2x \sin x &= \frac{h_a \tan x}{b_B} \Leftrightarrow \\
2 \sin x \cos^2 x &= \frac{h_a}{b_B} \Leftrightarrow \\
2 \sin x (1 - \sin^2 x) &= \frac{h_a}{b_B} \Leftrightarrow \\
2 \sin^3 x - 2 \sin x + \frac{h_a}{b_B} &= 0
\end{aligned}$$

Γιὰ

$$\frac{h_a}{b_B} = \frac{1}{2}$$

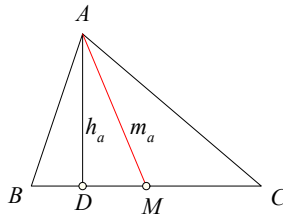
εχω:

$$4 \sin^3 x - 4 \sin x + 1 = 0.$$

Υπάρχει x στο διάστημα $(0, \arcsin \frac{\sqrt{3}}{3})$ που είναι ρίζα της εξίσωσης. Τό $\sin x$ δεν είναι όμως κατασκευάσιμος αφού είναι ρίζα τού πολυωνύμου $4x^3 - 4x + 1$ που είναι ανάγωγο στο $\mathbb{Q}[x]$.

7 Κατασκευή από $(h_a, m_a, 2p)$

(Κατασκευή-229 σελίδα 38)



Σχήμα 5: Κατασκευή από $(h_a, m_a, 2p)$

$$\begin{aligned}
b^2 - c^2 &= 2a|MD| = 2a\sqrt{m_a^2 - h_a^2} \Leftrightarrow \\
(b^2 - c^2)^2 &= 4a^2(m_a^2 - h_a^2) \Leftrightarrow \\
(b - c)^2(b + c)^2 &= 4(2p - b - c)^2(m_a^2 - h_a^2) \Leftrightarrow \\
(b - c)^2(b + c)^2 &= 4[4p^2 + (b + c)^2 - 4p(b + c)](m_a^2 - h_a^2).
\end{aligned}$$

Όμως:

$$\begin{aligned}
b^2 + c^2 &= 2m_a^2 + \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow \\
b^2 + c^2 &= 2m_a^2 + \frac{(2p - b - c)^2}{2} \Leftrightarrow \\
2b^2 + 2c^2 &= 4m_a^2 + 4p^2 + (b + c)^2 - 4p(b + c) \Leftrightarrow \\
(b - c)^2 &= 4m_a^2 + 4p^2 - 4p(b + c).
\end{aligned}$$

Άρα

$$4[m_a^2 + p^2 - p(b+c)](b+c)^2 = 4[4p^2 + (b+c)^2 - 4p(b+c)](m_a^2 - h_a^2).$$

Θέτω $b+c = t$, $h_a = 1$, $m_a = 2$ η εξίσωση γίνεται:

$$pt^3 + (p^2 - 1) - 6pt + 12p^2 = 0 \Leftrightarrow \\ b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2} = 8 + \frac{a^2}{2},$$

και

$$b^2 - c^2 = 2a \cdot |DM| = 2\sqrt{3}a$$

αλλά

$$2p = a + b + c \Rightarrow 2p = a + \sqrt{4 + \frac{a^2}{4} + a\sqrt{3}} + \sqrt{4 + \frac{a^2}{4} - a\sqrt{3}}$$

Όμως:

$$\lim_{a \rightarrow 0} 2p = 4, \quad \lim_{a \rightarrow +\infty} 2p = +\infty$$

Άρα το p παίρνει την τιμή 8. Για $p = 8$ η εξίσωση γίνεται:

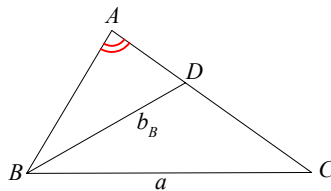
$$8t^3 - 63t^2 - 48t + 2^8 \cdot 3 = 0.$$

Συνεπώς ο t δεν είναι κατασκευάσιμος, αφού είναι ρίζα τού πολυωνύμου $8x^3 - 6x^2 - 48x + 2^8 \cdot 3$ που είναι ανάγωγο στο $\mathbb{Q}[x]$.

8 Κατασκευή από (a, \hat{A}, b_B)

(Κατασκευή-22 σελίδα 28)

Έστω $\hat{B} = 2x$ Τότε Έχω:



Σχήμα 6: Κατασκευή από (a, \hat{A}, b_B)

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin 2x} \Leftrightarrow \\ b = \frac{2a \sin x \cos x}{\sin A}.$$

Αν BD η διχοτόμος της γωνίας B τα σημεία A, D, C είναι συνευθειακά άρα

$$\cos x = \frac{b_B(a+c)}{2ac} \quad \text{τότε}$$

$$b^2 = \frac{4a^2 \sin^2 x \cos^2 x}{\sin^2 A} =$$

$$\frac{4a^2(1 - \cos^2 x) \cos^2 x}{\sin^2 A} =$$

$$\frac{[4a^2 c^2 - b^2(a+c)^2] b_B^2(a+c)^2}{4a^2 c^4 \sin^2 A}.$$

Όμως:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos 2x \Leftrightarrow$$

$$\frac{[4a^2 c^2 - b^2(a+c)^2] b_B^2(a+c)^2}{4a^2 c^4 \sin^2 A} =$$

$$a^2 + c^2 - 2ac \frac{b_B^2(a+c)^2 - 2a^2 c^2}{2a^2 c^2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{[4a^2 c^2 - b^2(a+c)^2] b_B^2(a+c)^2}{4a^2 c^4 \sin^2 A} = a^3 c + ac^3 - b^2 B(a+c)^2 + 2a^2 c^2 \Leftrightarrow$$

$$b_B^2(a+c)^2 [4a^2 c^2 - b_B^2(a+c)^2] = 4a \sin^2 A [a^3 c^4 + ac^6 + b_B^2 c^3(a+c)^2 + 2a^2 c^5] \Leftrightarrow$$

$$4a^2 \sin^2 A c^6 + 4a(b_B^2 + 2a^2) \sin^2 A c^5 + 4(a^4 \sin^2 A + 2a^2 b_B^2 \sin^2 A - a^2 b_B^2 + b_B^4) c^4 + 4(a^3 b_B^2 \sin^2 A - 2a^3 b_B^2 + 4ab_B^4) c^3 - 2a^2 b_B^2 (2a^2 - 3b_B^2) c^2 + 4a^3 b_B^4 c + a^4 b_B^4 = 0.$$

Θέτω $b_B^2 = ka^2$ και η εξίσωση γίνεται:

$$4a^2 \sin^2 A c^6 + 4a^3(k+2) \sin^2 A c^5 + 4(a^4 \sin^2 A + 2ka^4 \sin^2 A - ka^4 + k^2 a^4) c^4 + 4(ka^5 \sin^2 A - 2ka^5 + k^2 a^5) c^3 - 2ka^4(2a^2 - 3ka^2) c^2 + 4k^2 a^7 c + k^2 a^8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$4 \sin^2 A c^6 + 4a(k+2) \sin^2 A c^5 + 4a^2[(1+2k) \sin^2 A + k^2 - k] c^4 + 4a^3(k \sin^2 A - 2k + k^2) c^3 - 2ka^4(2-3k) c^2 + 4k^2 a^5 c + k^2 a^6 = 0$$

Θέτω $\sin^2 A = \frac{1}{2}$ τότε η εξίσωση γίνεται:

$$2c^6 + 2a(k+2)c^5 + 2a^2(1+2k^2)c^4 + 2a^3(-3k+2k^2)c^3 - 2ka^4(2-3k)c^2 + 4k^2 a^5 c + k^2 a^6 = 0.$$

Ο c είναι κατασκευάσιμος αν και μόνο αν ο $\frac{1}{c}$ είναι κατασκευάσιμος. Για $c = \frac{1}{y}$ έχω:

$$k^2 a^6 y^6 + 4k^2 a^5 y^5 - 2ka^4(2-3k)y^4 + 2ka^3(2k-3)y^3 + 2a^2(2k^2+1)y^2 + 2a(k+2)y + 2 = 0$$

Όμως $0 < x < \frac{\pi - A}{2}$ και $k = \frac{b_B^2}{a^2} = \frac{\sin^2(2x+A)}{\sin^2(x+A)}$ Όμως

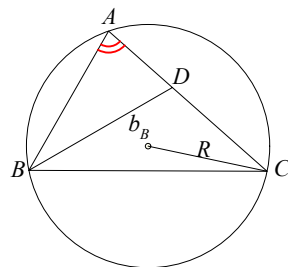
$$\lim_{x \rightarrow 0} k = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi-A}{2}} k = 0.$$

Για $k = \frac{1}{2n+1}$ με n φυσικό και για a περιττό το πολυώνυμο είναι ανάγωγο.

9 Κατασκευή από (\widehat{A}, b_B, R)

(Κατασκευή-188 σελίδα 33)

Λόγω της σχέσης



Σχήμα 7: Κατασκευή από (\widehat{A}, b_B, R)

$$\frac{a}{\sin A} = 2R \Leftrightarrow a = 2R \sin A$$

Η απόδειξη ανάγεται στην προηγούμενη.

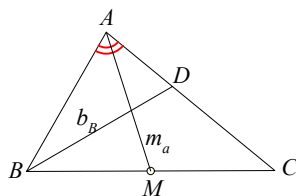
10 Κατασκευή από (\widehat{A}, m_a, b_B)

(Κατασκευή-162 σελίδα 31)

Έστω $B(0,0)$ και BD η διχοτόμος με $D(b_B, 0)$ και $B = 2x$. Τότε $A(c \cos x, c \sin x)$ και $C(a \cos x, -a \sin x)$. Τα σημεία A, D, C είναι συνευθειακά άρα:

$$\begin{aligned} b_B(c \sin x + a \sin x) - 2ac \sin x \cos x &= 0 \Leftrightarrow \\ (a+c)b_B &= 2ac \cos x \Leftrightarrow \\ \cos x &= \frac{(a+c)b_B}{2ac} \end{aligned}$$

Όμως



Σχήμα 8: Κατασκευή από (\widehat{A}, m_a, b_B)

$$\begin{aligned} m_a^2 &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 + c^2 - accos2x = \\ &= \frac{a^2}{4} + c^2 - ac(2\cos^2 x - 1) = \\ &= \left(\frac{a}{2} + c\right)^2 - 2ac \frac{(a+c)^2 b_B^2}{(2ac)^2} \Leftrightarrow \\ c^2 \left(\frac{a}{2c} + 1\right)^2 &= m_a^2 + \frac{\left(\frac{a}{c} + 1\right)^2 b_B^2}{2ac}. \end{aligned}$$

Θέτω $a = ct$ τότε έχω:

$$c^2 = \frac{4m_a^2 t + 2(t+1)^2 b_B^2}{t(t+2)^2} \quad \text{και} \quad \cos x = \frac{(t+1)b_B}{2ct}$$

αλλά

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin 2x} \Leftrightarrow$$

$$\frac{a^2}{\sin^2 A} = \frac{b^2}{\frac{(t+1)^2 b_B^2 [4c^2 t^2 - (t+1)^2 b_B^2]}{4c^4 t^4}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{c^2 t^2}{\sin^2 A} = \frac{4c^4 t^4 [c^2 t^2 + c^2 - 2c^2 t(2\cos^2 x - 1)]}{(t+1)^2 b_B^2 [4c^2 t^2 - (t+1)^2 b_B^2]} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\sin^2 A} = \frac{4c^2 t^2 \left[c^2 t^2 + c^2 - 2c^2 t \left(2 \frac{(t+1)^2 b_B^2}{4c^2 t^2} - 1 \right) \right]}{(t+1)^2 b_B^2 [4c^2 t^2 - (t+1)^2 b_B^2]} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\sin^2 A} = \frac{4c^2 t [c^2 t^3 + c^2 t - (t+1)^2 b_B^2 + 2c^2 t^2]}{(t+1)^2 b_B^2 [4c^2 t^2 - (t+1)^2 b_B^2]} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\sin^2 A} = \frac{4c^2 t (t+1)^2 (c^2 t - b_B^2)}{(t+1)^2 b_B^2 [4c^2 t^2 - (t+1)^2 b_B^2]} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\sin^2 A} = \frac{4c^2 t (c^2 t - b_B^2)}{b_B^2 [4c^2 t^2 - (t+1)^2 b_B^2]} \Leftrightarrow$$

$$b_B^2 [4c^2 t^2 - (t+1)^2 b_B^2] = 4c^2 t (c^2 t - b_B^2) \sin^2 A \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} & b_B^2 \left[4 \frac{4m_a^2 t + 2(t+1)^2 b_B^2}{t(t+2)^2} t^2 - (t+1)^2 b_B^2 \right] = \\ & 4 \frac{4m_a^2 t + 2(t+1)^2 b_B^2}{t(t+2)^2} t \left[\frac{4m_a^2 t + 2(t+1)^2 b_B^2}{t(t+2)^2} t - b_B^2 \right] \sin^2 A \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & b_B^2 \left[4 \frac{4m_a^2 t + 2(t+1)^2 b_B^2}{(t+2)^2} t - (t+1)^2 b_B^2 \right] = \\ & 4 \frac{4m_a^2 t + 2(t+1)^2 b_B^2}{(t+2)^2} \left[\frac{4m_a^2 t + 2(t+1)^2 b_B^2}{(t+2)^2} - b_B^2 \right] \sin^2 A \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& b_B^2(t+2)^2[16m_a^2t^2 + 8t(t+1)^2b_B^2 - (t+2)^2(t+1)^2b_B^2] = \\
& 8[2m_a^2t + (t+1)^2b_B^2][4m_a^2t + 2(t+1)^2b_B^2 - (t+2)^2b_B^2]\sin^2 A \Leftrightarrow \\
& b_B^4(t+2)^2 \left[16\left(\frac{m_a}{b_B}\right)^2t^2 + 8t(t+1)^2 - (t+2)^2(t+1)^2 \right] = \\
& 8b_B^4 \left[2\left(\frac{m_a}{b_B}\right)^2t + (t+1)^2 \right] \left[4\left(\frac{m_a}{b_B}\right)^2t + 2(t+1)^2 - (t+2)^2 \right] \sin^2 A \Leftrightarrow \\
& (t+2)^2 \left[16\left(\frac{m_a}{b_B}\right)^2t^2 + 8t(t+1)^2 - (t+2)^2(t+1)^2 \right] = \\
& 8 \left[2\left(\frac{m_a}{b_B}\right)^2t + (t+1)^2 \right] \left[4\left(\frac{m_a}{b_B}\right)^2t + 2(t+1)^2 - (t+2)^2 \right] \sin^2 A.
\end{aligned}$$

Θέτω

$$\left(\frac{m_a}{b_B}\right)^2 = k \text{ και } t+2 = y.$$

Τότε η εξίσωση γίνεται:

$$y^6 - 10y^5 - (16k - 33 - 8\sin^2 A)y^4 - 8[5 - 8k + 6(k-1)\sin^2 A]y^3 + 8[2(1-4k) + (3(1-4k) + 8(k-1)^2)\sin^2 A]y^2 + 64\sin^2 A(k-1)(1-4k)y + 16\sin^2 A(1-4k)^2 = 0.$$

Γιά

$$\sin^2 A = \frac{1}{8} \text{ και } k = \frac{1}{2}$$

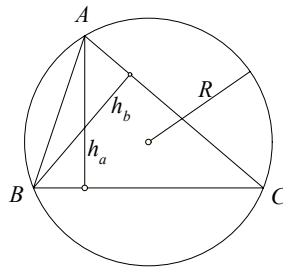
έχω:

$$y^6 - 10y^5 + 26y^4 - 35y^3 - 17y^2 - 4y + 2 = 0.$$

τότε ο y δέν είναι κατασκευάσιμος αφού είναι ρίζα του πολυωνύμου

$$x^6 - 10x^5 + 26x^4 - 35x^3 - 17x^2 - 4x + 2 \text{ που είναι ανάγωγο στο } \mathbb{Q}[x].$$

11 Κατασκευή από (h_a, h_b, R)



Σχήμα 9: Κατασκευή από (h_a, h_b, R)

$$\begin{aligned}
bc = 2Rh_a, ac = 2Rh_b \quad \text{και} \quad a^2 &= b^2 + c^2 - 2bccosA \quad \Leftrightarrow \\
\cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad \Rightarrow \\
1 - \sin^2 A &= \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right)^2 \quad \Leftrightarrow \\
1 - \frac{h_B^2}{c^2} &= \left(\frac{\frac{4R^2 h_a^2}{c^2} + c^2 - \frac{4R^2 h_b^2}{c^2}}{\frac{4Rh_a c}{c}} \right)^2 \quad \Leftrightarrow \\
c^2 - h_b^2 &= \left(\frac{4R^2 h_a^2 - 4R^2 h_b^2 + c^4}{4Rch_a} \right)^2 \quad \Leftrightarrow \\
[c^4 + 4R^2(h_a^2 - h_b^2)]^2 &= 16R^2 c^2 h_a^2 (c^2 - h_b^2)
\end{aligned}$$

Θέτω $c^2 = x \neq 0$ τότε έχω:

$$\begin{aligned}
[x^2 + 4R^2(h_a^2 - h_b^2)]^2 &= 16R^2 h_a^2 x(x - h_b^2) \quad \Leftrightarrow \\
x^4 + [8R^2(h_a^2 - h_b^2) - 16R^2 h_a^2] x^2 &+ 16R^2 h_a^2 h_b^2 x + 16R^4 (h_a^2 - h_b^2)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \\
x^4 - 8R^2(h_a^2 + h_b^2)x^2 &+ 16R^2 h_a^2 h_b^2 x + 16R^4 (h_a^2 - h_b^2)^2 = 0.
\end{aligned}$$

Γιά $h_a = h_b$ η εξίσωση γίνεται:

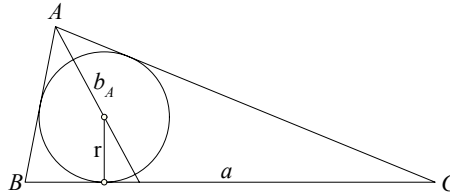
$$\begin{aligned}
x^4 - 16R^2 h_a^2 x^2 + 16R^2 h_a^4 x &= 0 \quad \Leftrightarrow \\
x^3 - 16R^2 h_a^2 x + 16R^2 h_a^4 &= 0
\end{aligned}$$

Γιά $R = \sqrt{3}h_a$ και $h_a^2 \in N$ με $h_a^2 \neq 0 \text{ modulo } 3$ έχω:

$$x^3 - 48h_a^4 x + 48h_a^6 = 0$$

το οποίο είναι ανάγωγο πολυώνυμο.

12 Κατασκευή από (a, b_A, r)



Σχήμα 10: Κατασκευή από (a, b_A, r)

(Κατασκευή-93 σελίδα 25)

$$(ABC) = tr = \sqrt{t(t-a)(t-b)(t-c)}$$

$$\begin{aligned}
b_A^2 &= \frac{bc(a+b+c)(b+c-a)}{(b+c)^2} \\
&= \frac{2tbc(2t-2a)}{(2t-a)^2} \\
&= \frac{4tbc(t-a)}{(2t-a)^2}
\end{aligned}$$

Όμως

$$\begin{aligned}
(t-b)(t-c) &= t^2 - (b+c)t + bc && \Leftrightarrow \\
bc &= (t-b)(t-c) + (b+c)t - t^2 && \Rightarrow \\
b_A^2 &= \frac{4t(t-a)[(t-b)(t-c) + (b+c)t - t^2]}{(2t-a)^2} && \Leftrightarrow \\
b_A^2 &= \frac{4t(t-a)(t-b)(t-c) + 4t^2(b+c-t)(t-a)}{(2t-a)^2} && \Leftrightarrow \\
&= \frac{4t^2r^2 + 4t^2(t-a)^2}{(2t-a)^2} && \Leftrightarrow \\
b_A^2(4t^2 - 4at + a^2) &= 4t^2r^2 + 4t^2(t^2 - 2at + a^2) && \Leftrightarrow \\
t^4 - 2at^3 + (r^2 + a^2 - b_A^2)t^2 + ab_A^2t - \frac{a^2b_A^2}{4} &= 0.
\end{aligned}$$

Γιά $a = 3, b_A = 2\sqrt{6}, r = 1$ έχω:

$$t^4 - 6t^3 - 14t^2 + 72t - 54 = 0$$

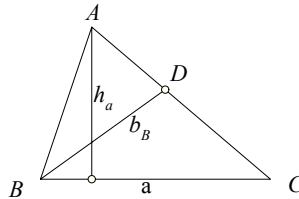
το οποίο είναι ανάγωγο πολυώνυμο με αναλλοίωτες $g_2 = -\frac{211}{3}$ και $g_3 = \frac{3359}{2 \cdot 3^3}$

. Η επιλύουσα τριτοβάθμια εξίσωση της είναι:

$$4l^3 + \frac{211}{3}l - \frac{3359}{2 \cdot 3^3} = 0 \Leftrightarrow (6l)^3 + 3 \cdot 211(6l) - 3359 = 0$$

πού δεν έχει ρητή ρίζα.

13 Κατασκευή από (a, h_a, b_B)



Σχήμα 11: Κατασκευή από (a, h_a, b_B)

(Κατασκευή-50 σελίδα 21)

Έστω τρίγωνο ABC με $B(0,0), C(a,0), B = 2x$ και BD η διχοτόμος του b_B

τότε: $A(ccos2x, csin2x)$ και $D(b_Bcosx, b_Bsinx)$

$$sin2x = \frac{h_a}{c} \Leftrightarrow c = \frac{h_a}{2sinxcosx}.$$

Τα σημεία A, D, C είναι συνευθειακά άρα:

$$a(csin2x - b_Bsinx) + cb_Bcos2xsinx - cb_Bcosxsin2x = 0 \Leftrightarrow$$

$$asinx(2ccosx - b_B) - cb_Bsinx = 0 \Leftrightarrow$$

$$a(2ccosx - b_B) = cb_B \Leftrightarrow$$

$$a\left(\frac{h_a}{sinx} - b_B\right) = \frac{h_a b_B}{2sinxcosx} \Leftrightarrow$$

$$2acosx(h_a - b_Bsinx) = h_a b_B \Leftrightarrow$$

$$(h_a^2 - 2h_a b_B sinx + b_B^2 sin^2 x)(1 - sin^2 x) = \frac{h_a^2 b_B^2}{4a^2} \Leftrightarrow$$

$$b_B^2 sin^4 x - 2h_a b_B sin^3 x + (h_a^2 - b_B^2) sin^2 x + 2h_a b_B sinx + h_a^2 \left(\frac{b_B^2}{4a^2} - 1\right) = 0$$

Υπάρχει τρίγωνο τέτοιο ώστε $h_a = b_B$ οπότε για $h_a = b_B$ έχω:

$$b_B^2 sin^4 x - 2b_B^2 sin^3 x + 2b_B^2 sinx + b_B^2 \left(\frac{b_B^2}{4a^2} - 1\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$sin^4 x - 2sin^3 x + 2sinx + \frac{b_B^2}{4a^2} - 1 = 0$$

Απο την σχέση $2acosx(h_a - b_Bsinx) = h_a b_B$ για $h_a = b_B$ έχω: $\frac{b_B}{a} = 2cosx(1 - sinx)$ και

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{b_B}{a} = 2, \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{b_B}{a} = 0$$

$$\text{Για } \frac{b_B}{a} = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ έχω: } 3sin^4 x - 6sin^3 x + 6sinx - 2 = 0$$

το οποίο είναι ανάγωγο πολυώνυμο του $sinx$

Θέτω $sinx = y$. Η εξίσωση γίνεται: $y^4 - 2y^3 + 2y^2 - \frac{2}{3} = 0$ με αναλλοίωτες

$$g_2 = -\frac{1}{3} \text{ και } g_3 = -\frac{5}{2 \cdot 3^3}. \text{ Η επιλύουσα τριτοβάθμια εξίσωση της είναι:}$$

$$4l^3 + \frac{1}{3}l - \frac{5}{2 \cdot 3^3} = 0 \Leftrightarrow (6l)^3 + 3(6l) - 5 = 0 \text{ πού δεν έχει ρητή ρίζα.}$$

14 Κατασκευή από $(A, b_B, 2p)$

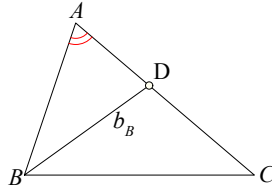
(Κατασκευή-193 σελίδα 34)

Αν $BD = b_B$ η διχοτόμος της γωνίας B και $A = \frac{\pi}{2}$ έχω:

$$a = 2p - b - c \Leftrightarrow$$

$$a^2 = 4p^2 + b^2 + c^2 - 4pb - 4pc + 2bc \Leftrightarrow$$

$$c = \frac{2p(p - b)}{2p - b}$$



Σχήμα 12: Κατασκευή από $(A, b_B, 2p)$

Όμως

$$\begin{aligned} \frac{AD}{b} &= \frac{c}{a+c} \Leftrightarrow \\ \frac{AD^2}{b^2} &= \frac{c^2}{(a+c)^2} \Leftrightarrow \\ \frac{b_B^2 - c^2}{b^2} &= \frac{c^2}{(2p-b)^2} \Leftrightarrow \\ \frac{b_B^2 - \frac{4p^2(p-b)^2}{(2p-b)^2}}{b^2} &= \frac{4p^2(p-b)^2}{(2p-b)^2} \Leftrightarrow \\ (2p-b)^4 b_B^2 &= 4p^2 b^2 (p-b)^2 + 4p^2 (p-b)^2 (2p-b)^2 \Leftrightarrow \\ (2p-b)^4 \frac{b_B^2}{4p^2} &= b^2 (p-b)^2 + (p-b)^2 (2p-b)^2 \Leftrightarrow \\ \left(\frac{2p}{b} - 1\right)^4 \frac{b_B^2}{4p^2} &= \left(\frac{p}{b} - 1\right)^2 \left[1 + \left(\frac{2p}{b} - 1\right)^2\right] \end{aligned}$$

Θέτω $\frac{2p}{b} - 1 = x$ τότε έχω:

$$\begin{aligned} x^4 \frac{b_B^2}{p^2} &= (x-1)^2 (1+x^2) \Leftrightarrow \\ \left(\frac{b_B^2}{p^2} - 1\right) x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Αποδεικνύεται ότι:

$$\frac{b_B^2}{p^2} = 4 \frac{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{c}{a}\right)^2}}{\left(1 + \frac{c}{a}\right)^2} \quad \mu\epsilon \quad 0 < c < a$$

και

$$\lim_{c \rightarrow 0} \frac{b_B^2}{p^2} = 0, \quad \lim_{c \rightarrow a} \frac{b_B^2}{p^2} = 1$$

. Για $\frac{b_B^2}{p^2} = \frac{2}{3}$ έχω:

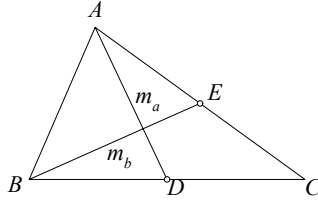
$$x^4 - 6x^3 + 6x^2 - 6x + 3 = 0$$

το οποίο είναι ανάγωγο πολυώνυμο με αναλλοίωτες $g_2 = -3$ και $g_3 = -\frac{5}{2}$

.Η επιλύουσα τριτοβάθμια εξίσωση της είναι:

$$4l^3 + 3l - \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow (2l)^3 - 3(2l) - 5 = 0 \text{ που δεν έχει ρητή ρίζα.}$$

15 Κατασκευή από $(m_a, m_b, 2p)$



Σχήμα 13: Κατασκευή από $(m_a, m_b, 2p)$

(Κατασκευή-280 σελίδα 41)

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{4}{3}(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) \text{ και } b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2}.$$

Άρα

$$a^2 = \frac{4}{9}(2m_b^2 + 2m_c^2 - m_a^2)$$

ομοίως

$$b^2 = \frac{4}{9}(2m_a^2 + 2m_c^2 - m_b^2) \text{ και } c^2 = \frac{4}{9}(2m_a^2 + 2m_b^2 - m_c^2), a + b + c = 2p \Leftrightarrow$$

$$\frac{2}{3} \left(\sqrt{2m_b^2 + 2m_c^2 - m_a^2} + \sqrt{2m_a^2 + 2m_c^2 - m_b^2} + \sqrt{2m_a^2 + 2m_b^2 - m_c^2} \right) = 2p.$$

Θέτω $t^2 = 2m_a^2 + 2m_b^2 - m_c^2$ με $t > 0$ και η εξίσωση γίνεται:

$$\sqrt{6m_b^2 + 3m_a^2 - 2t^2} + t = 3p - \sqrt{6m_a^2 + 3m_b^2 - 2t^2}$$

Όμως

$$0 < \frac{3p}{2} - (m_a + m_b) < m_c < 3p - (m_a + m_b)$$

. Για $p = 1, m_a = \sqrt{\frac{1}{3}}$ και $m_b = \sqrt{\frac{2}{3}}$ έχω:

$$\sqrt{5 - 2t^2} + \sqrt{4 - 2t^2} = 3 - t \Leftrightarrow$$

$$9t^4 - 60t^3 + 108t^2 - 80 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(3t)^4 - 20(3t)^3 + 108(3t)^2 - 720 = 0.$$

$$\text{Γιά } 3t = y \text{ έχω: } y^4 - 20y^3 + 108y^2 - 720 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{y}{2}\right)^4 - 10\left(\frac{y}{2}\right)^3 + 27\left(\frac{y}{2}\right)^2 - 45 = 0$$

πού δέν έχει ρητή ρίζα. Οι αναλλοίωτες της είναι οι $g_2 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$ και $g_3 = -2^3 \cdot 3^2 \cdot 11$.

Η επιλύουσα τριτοβάθμια εξίσωση της είναι:

$$4l^3 - 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7l - 2^3 \cdot 3^2 \cdot 11 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{l}{3}\right)^3 - 7\left(\frac{l}{3}\right) - \frac{2 \cdot 11}{3} = 0$$

Θέτω $\frac{l}{3} = \frac{1}{x}$ και η εξίσωση γίνεται: $22x^3 + 21x^2 - 3 = 0$ που δεν έχει ρητή ρίζα.

16 Κατασκευή από (h_a, m_b, R)

(Κατασκευή- 235 σελίδα 39)

Έστω $BM = m_b$ και $MN = \frac{h_a}{2}$ τό ύψος του τριγώνου BMC

Έστω $c < a$ Από την γενίκευση του πυθαγορείου θεωρήματος στο τρίγωνο BMC

$$\text{έχω: } \frac{b^2}{4} = m_b^2 + a^2 - 2a\sqrt{m_b^2 - \frac{h_a^2}{4}} \quad \text{Γιά } m_b = \sqrt{2} \quad \text{και } h_a = 2 \quad \text{έχω:}$$

$$b^2 = 4(a^2 - 2a + 2) = 4[(a-1)^2 + 1] \quad \text{Όμως } b \cdot c = 2R \cdot h_a \Leftrightarrow b \cdot c = 4R \quad \text{και}$$

$$a^2 + c^2 = 2m_b^2 + \frac{b^2}{2} \quad \text{Άρα } a^2 + \frac{16R^2}{b^2} = 4 + \frac{b^2}{2} \Leftrightarrow a^2 \cdot b^2 + 16R^2 = 4b^2 + \frac{b^4}{2} \Leftrightarrow$$

$$4a^2[(a-1)^2 + 1] + 16R^2 = 16[(a-1)^2 + 1] + 8[(a-1)^2 + 1]^2 \quad \text{θέτω } a-1 = t$$

η εξίσωση γίνεται: $(t+1)^2(t^2+1) + 4R^2 = 4(t^2+1) + 2(t^2+1)^2 \Leftrightarrow$

$$t^4 - 2t^3 + 6t^2 - 2t + 5 - 4R^2 = 0 \quad \text{μέ } 2R > m_b \quad \text{και } 2R > h_a$$

$$\text{Γιά } R^2 = \frac{11}{4} \quad \text{έχω: } t^4 - 2t^3 + 6t^2 - 2t - 6 = 0$$

$$\text{το οποίο είναι ανάγωγο πολυώνυμο με αναλλοίωτες } g_2 = -4 \quad \text{και } g_3 = -\frac{21}{4}$$

Η επιλύουσα τριτοβάθμια εξίσωση της είναι:

$$4l^3 + 4l - \frac{21}{4} = 0 \Leftrightarrow 2(2l)^3 + 8(2l) - 21 = 0. \quad \text{Θέτω } 2l = \frac{1}{y}$$

η εξίσωση γίνεται: $21y^3 - 8y^2 - 2 = 0$ πού δεν έχει ρητή ρίζα.

Αναφορές

[Τζα10] Τζανάκης, Ν.: *Σημειώσεις Θεωρίας Σωμάτων*. Πανεπιστήμιο Κρήτης, 2010.

[Fur37] Fursenko, V.B.: *Lexicographical account of constructional problems of triangle geometry*. Mathematics in school (in Russian), 5:4–30, 1937.

[Kle97] Klein, Felix: *Famous Problems of Elementary Geometry*. Ginn and Company, Boston, 1897.

[MP94] Mironescu, P. and L. Panaitopol: *The existence of a triangle with prescribed angle bisector lengths*. Amer. Math. Monthly, 101:58–60, 1994.

[94] John Fraleigh: *Εισαγωγή στην Άλγεβρα*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 1994.