ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
«Μαθηματικά και Εφαρμογές τους» των Τμημάτων
Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών.

Μεταπτυχιακή εργασία

Χουστουλάκης Λευτέρης

Στοχαστικός Βέλτιστος έλεγχος με εφαρμογή στο πρόβλημα ρύπανσης της ρηχής λίμνης

Επιβλέπων Καθηγητής
Γεώργιος Κοσιώρης

Ηράκλειο, Κρήτη, Φεβρουάριος 2012

Η Μεταπτυχιακή αυτή εργασία κατατέθηκε στο Τμήμα Μαθηματικών της Σχολής Θετικών και Τεχνολογικών Επιστημών του Πανεπιστημίου Κρήτης, στα πλαίσια του προγράμματος μεταπτυχιακών σπουδών «Μαθηματικών και εφαρμογών τους», στην κατεύθυνση Επιχειρησιακά Μαθηματικά, τον Φεβρουάριο του 2012.

Επιβλέπων καθηγητής ήταν ο Γεώργιος Κοσιώρης.

Την επιτροπή αξιολόγησης αποτέλεσαν οι κ.κ.

Γεώργιος Κοσιώρης

Γεώργιος Ζουράρης

Μιχάλης Πλεξουσάκης

Ευχαριστίες

Ευχαριστώ τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Γεώργιο Κοσιώρη για τη βοήθεια του με τις γνώσεις του και την υπομονή του καθώς και για τη συνολική συμβολή και καθοδήγησή του καθ' όλη τη διάρκεια της μελέτης και συγγραφής της μεταπτυχιακής μου εργασίας. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους τους καθηγητές που μου έκαναν μάθημα τόσο σε προπτυχιακό όσο και σε μεταπτυχιακό επίπεδο για τις γνώσεις που μου παρείχαν στη διάρκεια των μέχρι τώρα σπουδών μου και ιδιαίτερα το κ. Μιχάλη Λουλάκη κάθως και τους κ. Γεώργιο Ζουράρη και κ. Μιχάλη Πλεξουσάκη που ήταν στην επιτροπή αξιολόγησης μου.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά την οικογένεια μου και ειδικά τους γονείς μου, **Γιώργη** και **Αγαθονίκη**, για τη μακροχρόνια οικονομική και ιθηκή υποστήριξη που μου προσέφεραν όλα αυτά τα χρόνια και που ήταν πάντα δίπλα μου σε όλες τις δύσκολες στιγμές. Τέλος, ευχαριστώ τους φίλους που με βοήθησαν κατά τη διάρκεια της φοιτητικής μου πορείας και ιδιαίτερα τη φίλη και συμφοιτήτρια μου Μαρία για τις ώρες διαβάσματος που περάσαμε μαζί καθώς και για την στήριξη της όλα αυτά τα χρόνια.

Η εργασία αυτή αφιερώνεται στους γονείς μου,
Γιώργη και Αγαθονίκη, και στα αδέρφια μου, Αντώνη και Κωστή!

Εισαγωγή

Όπως είναι γνωστό η αρχή μεγίστου, η απαραίτητη προϋπόθεση του βελτίστου ελέγχου, καθιερώθηκε για τον ντετερμινιστικό έλεγχο από την ομάδα του Pontryagin τα έτη 1950 και 1960. Από τότε έχει γίνει πολύ έρευνα σχετικά με το στοχαστικό έλεγχο από τους Bensoussan A, Bismut J.M. , Kushner H.J. , Peng S. κ.α.

Η αρχή μεγίστου αναφέρει ότι οποιοσδήποτε βέλτιστος έλεγχος μαζί με τη βέλτιστη τροχιά πρέπει να λύσει το προκύπτον Χαμιλτονιανό σύστημα, το οποίο είναι ένα δύο σημείων φραγμένο πρόβλημα αξίας σύν μια συνθήκη μεγίστου μιάς συνάρτησης που καλείται Χαμιλτονιανή. Η μαθηματική σπουδαιότητα της αρχής μεγίστου έγκειται στο ότι το να μεγιστοποιήσεις την Χαμιλτονιανή είναι πολύ πιο εύκολο από το να λυθεί το πρωτότυπο πρόβλημα ελέγχου το οποίο είναι απείρων διαστάσεων. Αυτό οδηγεί σε κλειστού τύπου λύσεις για ορισμένες κατηγορίες προβλημάτων βελτίστου ελέγχου, συμπεριλαμβανομένου και της γραμμικής τετραγωνικής περίπτωσης.

Η αρχική έκδοση της αρχής μεγίστου του Pontryagin ήταν για ντετερμινιστικά προβλήματα, όπου η βασική ιδέα προήλθε από τον κλασικό λογισμό μεταβολών. Κατά τον υπολογισμό της αρχής μεγίστου διαταράσσουμε ασθενώς ένα πρόβλημα ελέγχου με τη βοήθεια της λεγόμενης "spike variation" (παραλλαγμένη ακίδα) και κατόπιν εξετάζουμε τον πρώτης τάξεως όρο σε ένα Taylor ανάπτυγμα σε σχέση με αυτή τη διαταραχή. Στέλνοντας λοιπόν τη διαταραχή στο μηδέν οδηγείται κάποιος σε μια ανισότητα μεταβολών. Το τελικό επιθυμητό αποτέλεσμα (η αρχή μεγίστου) προκύπτει από τη δυαδικότητα. Παρ' όλα αυτά συναντά κανείς ουσιαστικές δυσκολίες όταν προσπαθήσει να ακολουθήσει αυτή την ιδέα για ένα πρόβλημα ελέγχου στοχαστικών συστημάτων όπου ο όρος διάχυσης εξαρτάται επίσης από τον έλεγχο. Η κύρια δυσκολία έγκειται στο ότι το στοχαστικό ολοκλήρωμα του Itô, $\int_t^{t+\varepsilon} \sigma dW$, είναι μόνο $\sqrt{\varepsilon}$ τάξεως (αντί ε τάξης όπως είναι το κανονικό κατά Lebesque ολοκλήρωμα) έτσι η συνήθης πρώτης τάξης μέθοδος μεταβολής αποτυγχάνει.

Για να ξεπεραστεί αυτή η δυσκολία χρειάζεται να μελετηθούν ταυτόχρονα και οι πρώτης τάξης αλλά και οι δεύτερης τάξης όροι στο ανάπτυγμα Taylor της "spike variation" και να καταλήξουμε σε μια αρχή στοχαστικού μεγίστου συμπεριλαμβανομένου ενός στοχαστικού χαμιλτονιανού συστήματος το οποίο αποτελείται από μια πρός τα εμπρός και μια πρός τα πίσω στοχαστική διαφορική εξίσωση καθώς και μια συνθήκη μεγίστου με ένα επιπλέον τετραγωνικό όρο στο συντελεστή διάχυσης.

Στην εργασία αυτή επιχειρούμε να περιγράψουμε τις βασικές ιδέες της θεωρίας στοχαστικού ελέγχου και τα κυριότερα συμπεράσματα που αυτή συνεπάγεται. Η δομή της παρουσίασης έχει ως εξής.

Αρχικά θα εισάγουμε το στοχαστικό πρόβλημα βελτίστου ελέγχου που θα μας απασχολήσει, υπό κάποιες υποθέσεις που πρέπει να ισχύουν, το οποίο είναι η ελαχιστοποίηση της συνάρτησης αξίας με τον έλεγχο να είναι περιορισμένος σε ένα σύνολο που θα ορίσουμε. Στη συνέχεια ορίζουμε τις συζυγείς εξισώσεις πρώτης και δεύτερης τάξης οι οποίες παίζουν σημαντικό ρόλο στην αρχή μεγίστου και έπειτα διατυπώνουμε το θεώρημα της αρχής στοχαστικού μεγίστου και παραθέτουμε την απόδειξη του.

Στο δεύτερο κεφάλαιο αναφέρουμε την αρχή δυναμικού προγραμματισμού, μια μέθοδο για την επίλυση προβλημάτων ελέγχου, καθώς και την Hamilton-Jacobi-Bellman εξίσωση της οποίας η λύση, στη περίπτωση που είναι επιλύσιμη, μας εξασφαλίζει ένα βέλτιστο έλεγχο μεγιστοποιώντας ή ελαχιστοποιώντας την αντίστοιχη Χαμιλτονιανή. Στο τέλος αυτού του κεφαλαίου ορίζουμε τις λύσεις ιξώδους οι οποίες ικανοποιούν την Hamilton-Jacobi-Bellman εξίσωση και μας βοηθούν να ορίσουμε σωστά τις ασθενείς λύσεις των μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους που προκύπτουν στο κλασικό δυναμικό προγραμματισμό.

Στο Κεφάλαιο 3 προσπαθούμε να απαντήσουμε στο ερώτημα κατά πόσο υπάρχει σχέση ανάμεσα στην αρχή στοχαστικού μεγίστου και το δυναμικό προγραμματισμό. Έτσι παραθέτουμε κάποια στοιχειώδη θεωρήματα, για τις περιπτώσεις που η συνάρτηση αξίας είναι ομαλή ή όχι, σύμφωνα με τα οποία βλέπουμε πώς η συνάρτηση αξίας (που εμφανίζεται στην αρχή δυναμικού προγραμματισμού) συνδέεται με τις συζυγείς μεταβλητές (που παίζουν ιδιαίτερο ρόλο στην αρχή στοχαστικού μεγίστου).

Τέλος περιγράφουμε το πρόβλημα της ρύπανσης της ρηχής λίμνης και εφαρμόζουμε τη θεωρία του στοχαστικού βελτίστου ελέγχου πάνω σ'αυτό. Ορίζουμε δηλαδή το στοχαστικό δυναμικό σύστημα που ικανοποιεί, εφαρμόζουμε την αρχή στοχαστικού μεγίστου και εξάγουμε τη βέλτιστη Hamilton-Jacobi-Bellman εξίσωση για την οποία παρουσιάζουμε και ένα αριθμητικό σχήμα που προσεγγίζει τη λύση ιξώδους της.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Αρχή στοχαστικού μεγίστου

Σκοπός μας σε αυτό το κεφάλαιο είναι να ορίσουμε το πρόβλημα μας υπό κάποιες υποθέσεις, όπως επίσης να εισάγουμε τις συζυγείς εξισώσεις πρώτης και δεύτερης τάξης καθώς και τη χαμιλτονιανή. Στη συνέχεια αναφέρουμε το θεώρημα της αρχής στοχαστικού μεγίστου μαζί με τη απόδειξη του, η οποία γίνεται με την βοήθεια της τεχνικής μεταβολών και των αναπτυγμάτων Taylor.

1.1 Στοχαστικό πρόβλημα ελέγχου

Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ ένας χώρος πιθανότητας εφοδιασμένος με μια διήθηση $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ τέτοια ώστε

i. Ο χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ να είναι πλήρης.

ii. Η σ-άλγεβρα $\mathcal{F}_0$ να περιέχει όλα τα $\mathbf{P}$-μηδενικά σύνολα στην $\mathcal{F}$ και

iii. Η διήθηση $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ να είναι δεξιά συνεχής δηλαδή: $\mathcal{F}_{t+} := \cap_{s>t}\mathcal{F}_t$

δεδομένης μια m-διάστατης τυπικής κίνησης *Brown* $W(t)$ με $W(0)$=0.

Θεωρούμε το επόμενο στοχαστικό σύστημα ελέγχου

$$\left\{ \begin{array}{l} dx(t) = b(t, x(t), u(t))dt + \sigma(t, x(t), u(t))dW(t), \quad t \in [0, T], \\ x(0) = x_0, \end{array} \right. \tag{1.1}$$

με τη συνάρτηση αξίας

$$J(u(\cdot)) = E\left\{\int_0^T f(t, x(t), u(t))dt + h(x(T))\right\}, \tag{1.2}$$

όπου
$b : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^n$,
$\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^{n\times m}$,
$f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}$ και
$h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

επίσης ορίζουμε

$$\begin{cases} b(t,x,u) = \begin{pmatrix} b^1(t,x,u) \\ \vdots \\ b^n(t,x,u) \end{pmatrix}, \\ \sigma(t,x,u) = \left(\sigma^1(t,x,u), \cdots, \sigma^m(t,x,u)\right), \\ \sigma^j(t,x,u) = \begin{pmatrix} \sigma^{1j}(t,x,u) \\ \vdots \\ \sigma^{nj}(t,x,u) \end{pmatrix}, \qquad 1 \le j \le m. \end{cases} \tag{1.3}$$

Ας κάνουμε τις εξής υποθέσεις

(S0) $\{\mathcal{F}_t\}_{t\ge 0}$ είναι μια φυσική διήθηση.

(S1) (U,d) είναι ένας διαχωρίσιμος μετρικός χώρος, όπου d η μετρική του χώρου U, και $T>0$.

(S2) Οι συναρτήσεις b,σ,f και h είναι μετρήσιμες και υπάρχει μια σταθερά $L>0$ και ένα μέτρο συνέχειας $\varpi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ έτσι ώστε για $\varphi(t,x,u) = b(t,x,u), \sigma(t,x,u), f(t,x,u), h(x)$ να έχουμε

$$\begin{cases} |\varphi(t,x,u) - \varphi(t,\widehat{x},\widehat{u})| \le L|x-\widehat{x}| + \varpi\left(d(u,\widehat{u})\right), \\ \qquad \forall t \in [0,T], \quad x,\widehat{x} \in \mathbb{R}^n, \quad u,\widehat{u} \in U, \\ \qquad |\varphi(t,0,u)| \le L, \qquad \forall (t,u) \in [0,T]\times U. \end{cases} \tag{1.4}$$

(S3) Οι συναρτήσεις b,σ,f και h είναι C^2 ως προς x. Επίσης υπάρχει μια σταθερά $L>0$ και ένα μέτρο συνέχειας $\varpi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ τέτοιο ώστε για φ=b,σ,f,h να έχουμε

$$\begin{cases} |\varphi_x(t,x,u) - \varphi_x(t,\widehat{x},\widehat{u})| \le L|x-\widehat{x}| + \varpi\left(d(u,\widehat{u})\right), \\ |\varphi_{xx}(t,x,u) - \varphi_{xx}(t,\widehat{x},\widehat{u})| \le \varpi\left(|x-\widehat{x}| + d(u,\widehat{u})\right), \\ \qquad \forall t \in [0,T], \quad x,\widehat{x} \in \mathbb{R}^n, \quad u,\widehat{u} \in U. \end{cases} \tag{1.5}$$

Στη συνέχεια ορίζουμε το εξής σύνολο

$$\mathcal{U}[0,T] \triangleq \left\{ u : [0,T]\times\Omega \to U \mid \text{όπου } u \text{ είναι μία προσαρμοσμένη διήθηση } \{\mathcal{F}_t\}_{t\ge 0} \right\}. \tag{1.6}$$

Το πρόβλημα βελτίστου ελέγχου για το οποίο ενδιαφερόμαστε είναι το εξής

Πρόβλημα S : Να ελαχιστοποιηθεί η (1.2) στο σύνολο $\mathcal{U}[0,T]$.

Ορισμός 1.1.1 *Κάθε $\overline{u}(\cdot) \in \mathcal{U}[0,T]$ που ικανοποιεί την*

$$J(\overline{u}(\cdot)) = \inf_{u(\cdot)\in\mathcal{U}[0,T]} J(u(\cdot)) \tag{1.7}$$

καλείται βέλτιστος έλεγχος, ενώ τα $\overline{x}(\cdot) \equiv x(\cdot\,;\overline{u}(\cdot))$ και $(\overline{x}(\cdot),\overline{u}(\cdot))$ καλούνται βέλτιστη τροχιά και βέλτιστο ζευγάρι αντίστοιχα.

1.2 Συζυγείς εξισώσεις $1^{\underline{ης}}$ και $2^{\underline{ης}}$ τάξης

Σ' αυτήν την παράγραφο θα εισάγουμε τις συζυγείς εξισώσεις που εμπλέκονται στην αρχή στοχαστικού μεγίστου καθώς και στο σχετικό στοχαστικό χαμιλτονιανό σύστημα. Στην ντετερμινιστική περίπτωση η συζηγής μεταβλητή $p(\cdot)$ παίζει τον κεντρικό ρόλο στην αρχή μεγίστου και η συζυγής εξίσωση που ικανοποιεί είναι μια οπισθοδρομική συνήθης διαφορική εξίσωση (που σημαίνει ότι η τελική τιμή είναι προσδιορισμένη). Είναι επίσης ισοδύναμη με μια προς τα εμπρός εξίσωση εάν αντιστρέψουμε το χρόνο. Αρχικά εισάγουμε το επόμενο τερματικό πρόβλημα αξίας, που ονομάζεται συζυγής εξίσωση πρώτης τάξης, για μια στοχαστική διαφορική εξίσωση.

-$1^{\underline{ης}}$ τάξης συζυγείς εξισώσεις

$$\begin{cases} dp(t) = -\Big\{ b_x(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t))^\top p(t) + \sum_{j=1}^m \sigma_x^j(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t))^\top q_j(t) \\ \qquad\qquad -f_x(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t))\Big\} dt + q(t)dW(t), \qquad t \in [0,T], \\ p(T) = -h_x(\overline{x}(T)). \end{cases} \tag{1.8}$$

Στην εξίσωση αυτή ο άγνωστος είναι ένα ζευγάρι από $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ προσαρμοσμένες διαδικασίες $(p(\cdot),q(\cdot))$ και καλείται «οπισθοδρομική» στοχαστική διαφορική εξίσωση (ΟΣΔΕ). Κάθε ζευγάρι διαδικασιών $(p(\cdot),q(\cdot)) \in L^2_{\mathcal{F}}(0,T;\mathbb{R}^n) \times \left(L^2_{\mathcal{F}}(0,T;\mathbb{R}^n)\right)^m$ που ικανοποιεί την (1.8) ονομάζεται προσαρμοσμένη λύση της (1.8) (όπου $L^2_{\mathcal{F}}(0,T;\mathbb{R}^n)$ είναι το σύνολο όλων των $\{\mathcal{F}\}_{t\geq 0}$ προσαρμοσμένων $\mathbb{R}^n$ διαδικασιών $X(\cdot)$ έτσι ώστε $\int_0^T |X(t)|^2 dt < \infty$). Υπό τις υποθέσεις $(S0)-(S1)$ για κάθε $(\overline{x}(\cdot),\overline{u}(\cdot)) \in L^2_{\mathcal{F}}(0,T;\mathbb{R}^n) \times \mathcal{U}[0,T]$ η (1.8) έχει μία προσαρμοσμένη λύση $(p(\cdot),q(\cdot))$ η οποία είναι μοναδική.

-$2^{\underline{ης}}$ τάξης συζυγείς εξισώσεις

$$\begin{cases} dP(t) = -\Big\{ b_x(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t))^\top P(t) + P(t) b_x(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t)) \\ \qquad\qquad + \sum_{j=1}^m \sigma_x^j(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t))^\top P(t) \sigma_x^j(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t)) \\ \qquad\qquad + \sum_{j=1}^m \Big\{ \sigma_x^j(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t))^\top Q_j(t) + Q_j(t)\sigma_x^j(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t)) \Big\} \\ \qquad\qquad + H_{xx}(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t),p(t),q(t)) \Big\} dt + \sum_{j=1}^m Q_j(t) dW^j(t), \\ P(T) = -h_{xx}(\overline{x}(T)), \end{cases} \tag{1.9}$$

όπου H είναι η χαμιλτονιανή και ορίζεται ως εξής

$$\begin{aligned} H(t,x,u,p,q) &= \langle p, b(t,x,u)\rangle + \operatorname{tr}\left[q^\top \sigma(t,x,u)\right] - f(t,x,u), \\ &\qquad (t,x,u,p,q) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times m}, \end{aligned} \tag{1.10}$$

(με $\langle \cdot,\cdot \rangle$ συμβολίζουμε το εσωτερικό γινόμενο και $tr(A)$ το ίχνος του πίνακα A) και $(p(\cdot),q(\cdot))$ είναι η λύση της (1.8). Στην εξίσωση (1.9) ο άγνωστος είναι και πάλι ένα ζευγάρι από στοχαστικές διαδικασίες $(P(\cdot),Q(\cdot)) \in L^2_{\mathcal{F}}(0,T;\mathcal{S}^n) \times \left(L^2_{\mathcal{F}}(0,T;\mathcal{S}^n)\right)^m$. Η εξίσωση (1.9) είναι επίσης μια (ΟΣΔΕ) και όπως στην (1.8) έτσι και σ' αυτήν, υπό τις υποθέσεις $(S0)-(S1)$, υπάρχει μία μοναδική λύση $(P(\cdot),Q(\cdot))$. Θα αναφερόμαστε στην (1.8) (αντίστοιχα στην (1.9)) σαν την πρώτης τάξης (αντίστοιχα δεύτερης τάξης) συζυγή εξίσωση και στο $p(\cdot)$

(αντίστοιχα στο $P(\cdot)$) σαν την πρώτης τάξης (αντίστοιχα δεύτερης τάξης) συζυγή διαδικασία. Το $(\overline{x}(\cdot),\overline{u}(\cdot),p(\cdot),q(\cdot),P(\cdot),Q(\cdot))$ θα ονομάζεται βέλτιστη εξάδα (αντίστοιχα αποδεκτή εξάδα) αν το $(\overline{x}(\cdot),\overline{u}(\cdot))$ είναι ένα βέλτιστο (αντίστοιχα αποδεκτό) ζευγάρι, και $(p(\cdot),q(\cdot))$, $(P(\cdot),Q(\cdot))$ είναι προσαρμοσμένες λύσεις των (1.8) και (1.9) αντίστοιχα.

1.3 Θεώρημα της αρχής στοχαστικού μεγίστου

Θεώρημα 1.3.1 *(Αρχή στοχαστικού μεγίστου) Έστω ότι ισχύουν οι υποθέσεις* $(S0)-(S3)$ *και* $(\overline{x}(\cdot),\overline{u}(\cdot))$ *είναι ένα βέλτιστο ζευγάρι του προβλήματος* $\mathbf{S}$*. Τότε υπάρχουν ζευγάρια διαδικασιών*

$$\begin{cases}(p(\cdot),q(\cdot))\in L^2_{\mathcal{F}}(0,T;\mathbb{R}^n)\times\left(L^2_{\mathcal{F}}(0,T;\mathbb{R}^n)\right)^m,\\ (P(\cdot),Q(\cdot))\in L^2_{\mathcal{F}}(0,T;\mathcal{S}^n)\times\left(L^2_{\mathcal{F}}(0,T;\mathcal{S}^n)\right)^m,\end{cases}\tag{1.11}$$

όπου

$$\begin{cases}q(\cdot)=(q_1(\cdot),\cdots,q_m(\cdot)), \quad Q(\cdot)=(Q_1(\cdot),\cdots,Q_m(\cdot)),\\ q_j(\cdot)\in L^2_{\mathcal{F}}(0,T;\mathbb{R}^n), \quad Q_j(\cdot)\in L^2_{\mathcal{F}}(0,T;\mathcal{S}^n), \quad 1\le j\le m,\end{cases}\tag{1.12}$$

που ικανοποιούν την πρώτης και δεύτερης τάξης συζυγείς εξισώσεις (1.8) *και* (1.9) *αντίστοιχα έτσι ώστε*

$$\begin{aligned}&H(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t),p(t),q(t))-H(t,\overline{x}(t),u,p(t),q(t))\\ &\quad-\frac{1}{2}tr\Big(\left\{\sigma(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t))-\sigma(t,\overline{x}(t),u)\right\}^\top P(t)\\ &\quad\cdot\left\{\sigma(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t))-\sigma(t,\overline{x}(t),u)\right\}\Big)\ge 0,\\ &\quad\forall u\in U,\ t\in[0,T]-\sigma.\pi.\ ,\ \mathbf{P}-\sigma.\pi.\ ,\end{aligned}\tag{1.13}$$

ή ισοδύναμα

$$\mathcal{H}(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t))=\max_{u\in U}\mathcal{H}(t,\overline{x}(t),u), \quad t\in[0,T]-\sigma.\pi.\ ,\ \mathbf{P}-\sigma.\pi.\tag{1.14}$$

όπου

$$\begin{aligned}&\mathcal{H}(t,x,u)\\ &\quad\triangleq H(t,x,u,p(t),q(t))-\frac{1}{2}tr\left[\sigma(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t))^\top P(t)\sigma(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t))\right]+\\ &\quad\frac{1}{2}tr\left\{\left[\sigma(t,x,u)-\sigma(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t))\right]^\top P(t)\left[\sigma(t,x,u)-\sigma(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t))\right]\right\}.\end{aligned}\tag{1.15}$$

Η ανισότητα (1.13) *καλείται μεταβολική ανισότητα (variational inequality) ενώ η* (1.14) *ονομάζεται συνθήκη μεγίστου (maximum condition).*

Υπάρχουν δύο ενδιαφέρουσες ειδικές περιπτώσεις οι οποίες είναι οι εξής

1. Αν η διάχυση δεν εξαρτάται από τον έλεγχο δηλαδή

$$\sigma(t,x,u)\equiv\sigma(t,x), \qquad \forall(t,x,u)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n\times U.\tag{1.16}$$

   Σ' αυτήν την περίπτωση η συνθήκη μεγίστου (1.14) μετατρέπεται στην

$$\begin{aligned}H(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t),p(t),q(t))&=\max_{u\in U}H(t,\overline{x}(t),u,p(t),q(t)),\\ t\in[0,T]-\sigma.\pi.\ ,\ &\mathbf{P}-\sigma.\pi.\end{aligned}\tag{1.17}$$

Εδώ παρατηρούμε ότι η περίπτωση αυτή είναι ίδια με την ντετερμινιστική και ότι η εξίσωση (1.9) για τα $(P(\cdot), Q(\cdot))$ δεν χρειάζεται. Οπότε και η δύο φορές διαφορισιμότητα των συναρτήσεων b, σ, f και h στο x δεν είναι απαραίτητη.

2. Αν το πεδίο ορισμού $U \subseteq \mathbb{R}^k$ του ελέγχου είναι κυρτό και όλοι οι συντελεστές είναι C^1 ως προς u τότε η (1.13) δίνει

$$\begin{aligned} &\langle H_u(t, \overline{x}(t), \overline{u}(t), p(t), q(t)), u - \overline{u}(t)\rangle \leq 0, \\ &\qquad \forall u \in U, \quad t \in [0,T] - \sigma.\pi.\ , \ \mathbf{P} - \sigma.\pi. \end{aligned} \tag{1.18}$$

Η παραπάνω ανισότητα αντιστοιχεί στην τοπική μορφή της αρχής μεγίστου σε αντίθεση με την ολική της μορφή (1.13) ή (1.14).

Το σύστημα (1.1) μαζί με τις πρώτης τάξης συζυγείς εξισώσεις μπορεί να γραφεί ως εξής

$$\begin{cases} dx(t) = H_p(t, x(t), u(t), p(t), q(t))dt \\ \qquad\qquad +H_q(t, x(t), u(t), p(t), q(t))dW(t), \\ dp(t) = -H_x(t, x(t), u(t), p(t), q(t))dt + q(t)dW(t), \qquad t \in [0,T], \\ x(0) = x_0, \qquad p(T) = -h_x(x(T)). \end{cases} \tag{1.19}$$

Ο συνδυασμός των (1.19), (1.9) και (1.13) (ή (1.14)) λέγεται στοχαστικό χαμιλτονιανό σύστημα με τη λύση τους να είναι μία εξάδα $(x(\cdot), u(\cdot), p(\cdot), q(\cdot), P(\cdot), Q(\cdot))$.

Παρατήρηση: Στην ντετερμινιστική περίπτωση το αντίστοιχο χαμιλτονιανό σύστημα είναι

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = H_p(t, x(t), u(t), p(t)), \quad t \in [0,T] - \sigma.\pi.\ , \\ \dot{p}(t) = -H_x(t, x(t), u(t), p(t)), \quad t \in [0,T] - \sigma.\pi.\ , \\ x(0) = x_0, \quad p(T) = -h_x(x(T)), \\ H(t, x(t), u(t), p(t)) = \max\limits_{u \in U} H(t, x(t), u, p(t)), \quad t \in [0,T] - \sigma.\pi.\ , \end{cases}$$

όπου η χαμιλτονιανή H σ' αυτήν την περίπτωση ορίζεται ως:

$$H(t, x, u, p) \stackrel{\Delta}{=} \langle p, b(t, x, u)\rangle - f(t, x, u) \ \text{ με } (t, x, u, p) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \times \mathbb{R}^n. \tag{1.20}$$

1.4 Απόδειξη της αρχής στοχαστικού μεγίστου

Σ' αυτήν την παράγραφο θα δώσουμε την απόδειξη της αρχής στοχαστικού μεγίστου για το Θεώρημα 1.3.1. Η κεντρική ιδέα είναι οι τεχνικές μεταβολών, οι οποίες χρησιμοποιούνται και στον ντετερμινιστικό έλεγχο, με κάποιες τροποποιήσεις εξαιτίας της ύπαρξης του συντελεστή διάχυσης $(\sigma(t, x, u))$ που μπορεί να περιέχει τη μεταβλητή του ελέγχου $(u(t))$ έτσι ώστε να προσαρμοστούν στη στοχαστική περίπτωση.

Έστω $(\overline{x}(\cdot), \overline{u}(\cdot))$ το βέλτιστο ζευγάρι το οποίο ικανοποιεί το ακόλουθο στοχαστικό σύστημα

$$\begin{cases} d\overline{x}(t) = b(t, \overline{x}(t), \overline{u}(t))dt + \sigma(t, \overline{x}(t), \overline{u}(t))dW(t), \qquad t \in [0,T], \\ \overline{x}(0) = x_0. \end{cases} \tag{1.21}$$

Για κάποιο $u(\cdot) \in \mathcal{U}[0,T]$ και $\varepsilon > 0$ ορίζουμε

$$u^\varepsilon(t) = \begin{cases} \overline{u}(t), & t \in [0,T] \setminus E_\varepsilon, \\ u(t), & t \in E_\varepsilon, \end{cases} \tag{1.22}$$

όπου το $E_\varepsilon \subseteq [0,T]$ είναι ένα μετρήσιμο σύνολο με $|E_\varepsilon| = \varepsilon$. Έστω ότι το $(x^\varepsilon(\cdot), u^\varepsilon(\cdot))$ ικανοποιεί το ακόλουθο

$$\begin{cases} dx^\varepsilon(t) = b(t, x^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t))dt + \sigma(t, x^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t))dW(t), \ t \in [0,T], \\ x^\varepsilon(0) = x_0. \end{cases} \tag{1.23}$$

Για $\varphi = b^i, \sigma^{ij}, f \ (1 \le i \le n, \ 1 \le j \le m)$, ορίζουμε τα εξής

$$\begin{cases} \varphi_x(t) \triangleq \varphi_x(t, \overline{x}(t), \overline{u}(t)), \quad \varphi_{xx}(t) \triangleq \varphi_{xx}(t, \overline{x}(t), \overline{u}(t)), \\ \delta\varphi(t) \triangleq \varphi(t, \overline{x}(t), u(t)) - \varphi(t, \overline{x}(t), \overline{u}(t)), \\ \delta\varphi_x(t) \triangleq \varphi_x(t, \overline{x}(t), u(t)) - \varphi_x(t, \overline{x}(t), \overline{u}(t)), \\ \delta\varphi_{xx}(t) \triangleq \varphi_{xx}(t, \overline{x}(t), u(t)) - \varphi_{xx}(t, \overline{x}(t), \overline{u}(t)). \end{cases} \tag{1.24}$$

Ακόμη, έστω $y^\varepsilon(\cdot)$ και $z^\varepsilon(\cdot)$ να είναι οι λύσεις των ακόλουθων στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων αντίστοιχα

$$\begin{cases} dy^\varepsilon(t) = b_x(t)y^\varepsilon(t)dt + \sum_{j=1}^m \left\{ \sigma_x^j(t)y^\varepsilon(t) + \delta\sigma^j(t)\chi_{E_\varepsilon}(t) \right\} dW^j(t), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad t \in [0,T], \\ y^\varepsilon(0) = 0, \end{cases} \tag{1.25}$$

και

$$\begin{cases} dz^\varepsilon(t) = \left\{ b_x(t)z^\varepsilon(t) + \delta b(t)\chi_{E_\varepsilon}(t) + \frac{1}{2}b_{xx}(t)y^\varepsilon(t)^2 \right\} dt \\ \qquad + \sum_{j=1}^m \left\{ \sigma_x^j(t)z^\varepsilon(t) + \delta\sigma_x^j(t)y^\varepsilon(t)\chi_{E_\varepsilon}(t) \right. \\ \qquad \left. + \frac{1}{2}\sigma_{xx}^j(t)y^\varepsilon(t)^2 \right\} dW^j(t), \quad t \in [0,T], \\ z^\varepsilon(0) = 0, \end{cases} \tag{1.26}$$

όπου

$$b_{xx}(t)y^\varepsilon(t)^2 \triangleq \begin{pmatrix} \operatorname{tr}\left\{ b_{xx}^1(t)y^\varepsilon(t)y^\varepsilon(t)^\top \right\} \\ \vdots \\ \operatorname{tr}\left\{ b_{xx}^n(t)y^\varepsilon(t)y^\varepsilon(t)^\top \right\} \end{pmatrix}, \tag{1.27}$$

$$\sigma_{xx}^j(t)y^\varepsilon(t)^2 \triangleq \begin{pmatrix} \operatorname{tr}\left\{ \sigma_{xx}^{1j}(t)y^\varepsilon(t)y^\varepsilon(t)^\top \right\} \\ \vdots \\ \operatorname{tr}\left\{ \sigma_{xx}^{nj}(t)y^\varepsilon(t)y^\varepsilon(t)^\top \right\} \end{pmatrix}, \quad 1 \le j \le m. \tag{1.28}$$

Το επόμενο θεώρημα μας δίνει τα αναπτύγματα Taylor της κατάστασης σε σχέση με τη διαταραχή του ελέγχου.

Θεώρημα 1.4.1 *Έστω ότι ισχύουν οι $(S1) - (S3)$. Τότε για οποιοδήποτε $k \ge 1$ ισχύουν τα εξής*

$$\sup_{t \in [0,T]} E|x^\varepsilon(t) - \overline{x}(t)|^{2k} = o(\varepsilon^k), \tag{1.29}$$

$$\sup_{t\in[0,T]} E|y^\varepsilon(t)|^{2k} = o(\varepsilon^k), \tag{1.30}$$

$$\sup_{t\in[0,T]} E|z^\varepsilon(t)|^{2k} = o(\varepsilon^{2k}), \tag{1.31}$$

$$\sup_{t\in[0,T]} E|x^\varepsilon(t) - \overline{x}(t) - y^\varepsilon(t)|^{2k} = o(\varepsilon^{2k}), \tag{1.32}$$

$$\sup_{t\in[0,T]} E|x^\varepsilon(t) - \overline{x}(t) - y^\varepsilon(t) - z^\varepsilon(t)|^{2k} = o(\varepsilon^{2k}). \tag{1.33}$$

Επιπλέον, για τη συνάρτηση αξίας ισχύει το εξής ανάπτυγμα

$$\begin{aligned} J(u^\epsilon(\cdot)) =& J(\overline{u}(\cdot)) + E\langle h_x(\overline{x}(T)), y^\varepsilon(T) + z^\varepsilon(T)\rangle \\ &+ \frac{1}{2}E\langle h_{xx}(\overline{x}(T))y^\varepsilon(T), y^\varepsilon(T)\rangle \\ &+ E\int_0^T \Big\{\langle f_x(t), y^\varepsilon(t) + z^\varepsilon(t)\rangle + \frac{1}{2}\langle f_{xx}(t)y^\varepsilon(t), y^\varepsilon(t)\rangle \\ &+ \delta f(t)\chi_{E_\varepsilon}(t)\Big\}dt + o(\varepsilon). \end{aligned} \tag{1.34}$$

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 1.4.1 βλ. [JXZ] Θεώρημα 4.4 σελ. 129-134.

Λήμμα 1.4.1 *Έστω ότι ισχύουν οι $(S0)-(S3)$ και $y^\varepsilon(\cdot), z^\varepsilon(\cdot)$ είναι οι λύσεις των (1.25) και (1.26) αντίστοιχα. Αν $(p(\cdot), q(\cdot))$ είναι μια προσαρμοσμένη λύση της (1.8) τότε*

$$E\langle p(T), y^\varepsilon(T)\rangle = E\int_0^T \Big\{\langle f_x(t), y^\varepsilon(t)\rangle + tr[q(t)^\top \delta\sigma(t)]\chi_{E_\varepsilon}(t)\Big\}dt \tag{1.35}$$

και

$$\begin{aligned} E\langle p(T), z^\varepsilon(T)\rangle = E\int_0^T &\Big\{\langle f_x(t), z^\varepsilon(t)\rangle + \frac{1}{2}[\langle p(t), b_{xx}(t)y^\varepsilon(t)^2\rangle \\ &+ \sum_{j=1}^m \langle q_j(t), \sigma^j_{xx}(t)y^\varepsilon(t)^2\rangle] \\ &+ \Big[\langle p(t), \delta b(t)\rangle + \sum_{j=1}^m \langle q_j(t), \delta\sigma^j_x(t)y^\varepsilon(t)\rangle\Big]\chi_{E_\varepsilon}(t)\Big\}dt. \end{aligned} \tag{1.36}$$

Απόδειξη: Θα αποδείξουμε πρώτα την (1.35). Εφαρμόζοντας το Πόρισμα 5.6 από το [JXZ] σελ. 37 για τις (1.25) και (1.8) έχουμε

$$\begin{aligned} &\langle p(T), y^\varepsilon(T)\rangle = \langle p(0), y^\varepsilon(0)\rangle \\ &+ \int_0^T \Big\{\langle p(t), b_x(t)y^\varepsilon(t)\rangle + \langle -b_x^\top(t)p(t) - \sum_{j=1}^m \sigma_x^{j\top}(t)q_j(t) + f_x(t), y^\varepsilon(t)\rangle \\ &+ \langle q(t), \sum_{j=1}^m \{\sigma^j_x(t)y^\varepsilon(t) + \delta\sigma^j(t)\chi_{E_\varepsilon}(t)\}\rangle\Big\}dt \\ &+ \int_0^T \Big\{\langle q(t), y^\varepsilon(t)\rangle + \langle p(t), \sum_{j=1}^m \{\sigma^j_x(t)y^\varepsilon(t) + \delta\sigma^j(t)\chi_{E_\varepsilon}(t)\}\rangle\Big\}dW(t), \end{aligned}$$

όμως χρησιμοποιώντας ότι $\langle p(0), y^\varepsilon(0)\rangle = 0$ (αφού $y^\varepsilon(0) = 0$) καθώς και τις ιδιότητες $\langle A+B, C\rangle = \langle A, C\rangle + \langle B, C\rangle$ και $\langle A, B+C\rangle = \langle A, B\rangle + \langle A, C\rangle$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}\langle p(T), y^\varepsilon(T)\rangle = \int_0^T &\Big\{\langle p(t), b_x(t)y^\varepsilon(t)\rangle - \langle b_x^\top(t)p(t), y^\varepsilon(t)\rangle - \langle \sum_{j=1}^m \sigma_x^j(t)^\top q_j(t), y^\varepsilon(t)\rangle \\ &+ \langle f_x(t), y^\varepsilon(t)\rangle + \langle q(t), \sum_{j=1}^m \sigma_x^j(t) y^\varepsilon(t)\rangle + \langle q(t), \sum_{j=1}^m \delta\sigma^j(t)\chi_{E_\varepsilon}(t)\rangle\Big\}dt \\ &+ \int_0^T \Big\{\langle q(t), y^\varepsilon(t)\rangle + \langle p(t), \sum_{j=1}^m \{\sigma_x^j(t)y^\varepsilon(t) + \delta\sigma^j(t)\chi_{E_\varepsilon}(t)\}\rangle\Big\}dW(t),\end{aligned} \tag{1.37}$$

όμως ισχύει ότι $\langle p(t), b_x(t)y^\varepsilon(t)\rangle = \langle b_x^\top(t)p(t), y^\varepsilon(t)\rangle$ αφού

$$\begin{aligned}&\langle p(t), b_x(t)y^\varepsilon(t)\rangle && \text{ιδιότητα: } \langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^\top) \\ &= \mathrm{tr}[p(t)(b_x(t)y^\varepsilon(t))^\top] && \text{ιδιότητα: } (AB)^\top = B^\top A^\top \\ &= \mathrm{tr}[p(t)y^\varepsilon(t)^\top b_x^\top(t)] && \text{ιδιότητα: } \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA) \\ &= \mathrm{tr}[b_x^\top(t)p(t)y^\varepsilon(t)^\top] \\ &= \langle b_x^\top(t)p(t), y^\varepsilon(t)\rangle,\end{aligned}$$

επίσης,

$$\langle \sum_{j=1}^m \sigma_x^j(t)^\top q_j(t), y^\varepsilon(t)\rangle = \langle q(t), \sum_{j=1}^m \sigma_x^j(t) y^\varepsilon(t)\rangle,$$

αφού,

$$\begin{aligned}&\langle q(t), \sum_{j=1}^m \sigma_x^j(t)y^\varepsilon(t)\rangle = \\ &\mathrm{tr}\Big[q(t)\Big(\sum_{j=1}^m \sigma_x^j(t)y^\varepsilon(t)\Big)^\top\Big] = \mathrm{tr}\Big[q(t)\sum_{j=1}^m \big(\sigma_x^j(t)y^\varepsilon(t)\big)^\top\Big] = \\ &\mathrm{tr}\Big[q(t)\sum_{j=1}^m y^\varepsilon(t)^\top \sigma_x^j(t)^\top\Big] = \mathrm{tr}\Big[q(t)y^\varepsilon(t)^\top \sum_{j=1}^m \sigma_x^j(t)^\top\Big] = \\ &\mathrm{tr}\Big[\sum_{j=1}^m \sigma_x^j(t)^\top \cdot q(t)y^\varepsilon(t)^\top\Big] = \langle \sum_{j=1}^m \sigma_x^j(t)^\top q_j(t), y^\varepsilon(t)\rangle.\end{aligned}$$

Οπότε διαγράφοτας τους αντίθετους όρους στην (1.37) παίρνουμε

$$\begin{aligned}\langle p(T), y^\varepsilon(T)\rangle = \int_0^T &\Big\{\langle f_x(t), y^\varepsilon(t)\rangle + \langle q(t), \sum_{j=1}^m \delta\sigma^j(t)\chi_{E_\varepsilon}(t)\rangle\Big\}dt \\ + \int_0^T &\Big\{\langle q(t), y^\varepsilon(t)\rangle + \langle p(t), \sum_{j=1}^m \{\sigma_x^j(t)y^\varepsilon(t) + \delta\sigma^j(t)\chi_{E_\varepsilon}(t)\}\rangle\Big\}dW(t),\end{aligned}$$

άρα, βάζοντας μέση τιμή και στα δύο μέλη και γνωρίζοντας ότι η μέση τιμή του στοχαστικού ολοκληρώματος Itô ισούται με μηδέν έχουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα δηλαδή,

$$E\langle p(T), y^\varepsilon(T)\rangle = E\int_0^T \Big\{\langle f_x(t), y^\varepsilon(t)\rangle + \mathrm{tr}[q(t)^\top \delta\sigma(t)]\chi_{E_\varepsilon}(t)\Big\}dt.$$

Όμοια, εφαρμόζοντας το ίδιο Πόρισμα για τις σχέσεις (1.26) και (1.8) έχουμε

$$\begin{aligned}
&\langle p(T), z^\varepsilon(T)\rangle = \langle p(0), z^\varepsilon(0)\rangle \\
&+ \int_0^T \Big\{\langle p(t), b_x(t)z^\varepsilon(t) + \delta b(t)\chi_{E_\varepsilon}(t) + \frac{1}{2}b_{xx}(t)y^\varepsilon(t)^2\rangle + \langle -b_x^\top(t)p(t) \\
&- \sum_{j=1}^m \sigma_x^j(t)^\top q_j(t) + f_x(t), z^\varepsilon(t)\rangle + \langle q(t), \sum_{j=1}^m \big\{\sigma_x^j(t)z^\varepsilon(t) + \delta\sigma_x^j(t)y^\varepsilon(t)\chi_{E_\varepsilon}(t) \\
&+ \frac{1}{2}\sigma_{xx}^j(t)y^\varepsilon(t)^2\big\}\rangle\Big\}dt + \int_0^T \Big\{\langle q(t), z^\varepsilon(t)\rangle + \langle p(t), \sum_{j=1}^m \big\{\sigma_x^j(t)z^\varepsilon(t) \\
&+ \delta\sigma_x^j(t)y^\varepsilon(t)\chi_{E_\varepsilon}(t) + \frac{1}{2}\sigma_{xx}^j(t)y^\varepsilon(t)^2\big\}\rangle\Big\}dW(t),
\end{aligned}$$

οπότε, με την ίδια διαδικασία όπως πρίν, έχοντας υπ' όψιν ότι $z^\varepsilon(0) = 0$ και αποδεικνύοντας ότι

$$\begin{aligned}
&\langle p(t), b_x(t)z^\varepsilon(t)\rangle = \langle b_x^\top(t)p(t), z^\varepsilon(t)\rangle \text{ και} \\
&\langle \sum_{j=1}^m \sigma_x^j(t)^\top q_j(t), z^\varepsilon(t)\rangle = \langle q(t), \sum_{j=1}^m \sigma_x^j(t)z^\varepsilon(t)\rangle,
\end{aligned}$$

έχουμε

$$\begin{aligned}
\langle p(T), z^\varepsilon(T)\rangle = &\int_0^T \Big\{\langle f_x(t), z^\varepsilon(t)\rangle + \frac{1}{2}[\langle p(t), b_{xx}(t)y^\varepsilon(t)^2\rangle + \sum_{j=1}^m \langle q_j(t), \sigma_{xx}^j(t)y^\varepsilon(t)^2\rangle] \\
&+ \Big[\langle p(t), \delta b(t)\rangle + \sum_{j=1}^m \langle q_j(t), \delta\sigma_x^j(t)y^\varepsilon(t)\rangle\Big]\chi_{E_\varepsilon}(t)\Big\}dt + \int_0^T \Big\{\langle q(t), z^\varepsilon(t)\rangle \\
&+ \langle p(t), \sum_{j=1}^m \big\{\sigma_x^j(t)z^\varepsilon(t) + \delta\sigma_x^j(t)y^\varepsilon(t)\chi_{E_\varepsilon}(t) + \frac{1}{2}\sigma_{xx}^j(t)y^\varepsilon(t)^2\big\}\rangle\Big\}dW(t),
\end{aligned}$$

άρα, παίρνοντας μέση τιμή και στα δύο μέλη, όπως και πρίν, αποδεικνύουμε τη σχέση (1.36) δηλαδή,

$$\begin{aligned}
E\langle p(T), z^\varepsilon(T)\rangle = E &\int_0^T \Big\{\langle f_x(t), z^\varepsilon(t)\rangle + \frac{1}{2}[\langle p(t), b_{xx}(t)y^\varepsilon(t)^2\rangle \\
&+ \sum_{j=1}^m \langle q_j(t), \sigma_{xx}^j(t)y^\varepsilon(t)^2\rangle] + \Big[\langle p(t), \delta b(t)\rangle + \sum_{j=1}^m \langle q_j(t), \delta\sigma_x^j(t)y^\varepsilon(t)\rangle\Big]\chi_{E_\varepsilon}(t)\Big\}dt.
\end{aligned}$$

□

Προσθέτοντας τις (1.35) και (1.36) κατά μέλη και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι

$$E\Big\{\int_0^T \Big[\sum_{j=1}^m \langle q_j(t), \delta\sigma_x^j(t)y^\varepsilon(t)\rangle\Big]\chi_{E_\varepsilon}(t)dt\Big\} = o(\varepsilon),$$

παίρνουμε

$$\begin{aligned}
&E\langle p(T), y^\varepsilon(T)\rangle + E\langle p(T), z^\varepsilon(T)\rangle = \\
&E\int_0^T \Big\{\langle f_x(t), y^\varepsilon(t)\rangle + \langle f_x(t), z^\varepsilon(t)\rangle + \frac{1}{2}\langle p(t), b_{xx}(t)y^\varepsilon(t)^2\rangle \\
&+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^m \langle q_j(t), \sigma^j_{xx}(t)y^\varepsilon(t)^2\rangle + \Big[\langle p(t), \delta b(t)\rangle + tr\Big(q(t)^\top \delta\sigma(t)\Big)\Big]\chi_{E_\varepsilon}(t)\Big\}dt + o(\varepsilon).
\end{aligned}$$

Στη συνέχεια γνωρίζοντας ότι $p(T) = -h_x(\overline{x}(T))$ καθώς και την ιδιότητα $\langle A, B\rangle + \langle A, C\rangle = \langle A, B + C\rangle$ έχουμε

$$\begin{aligned}
&-E\langle h_x(\overline{x}(T)), y^\varepsilon(T) + z^\varepsilon(T)\rangle = \\
&E\int_0^T \Big\{\langle f_x(t), y^\varepsilon(t) + z^\varepsilon(t)\rangle + \frac{1}{2}\langle p(t), b_{xx}(t)y^\varepsilon(t)^2\rangle + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^m \langle q_j(t), \sigma^j_{xx}(t)y^\varepsilon(t)^2\rangle \\
&+\Big[\langle p(t), \delta b(t)\rangle + \mathrm{tr}\Big(q(t)^\top\delta\sigma(t)\Big)\Big]\chi_{E_\varepsilon}(t)\Big\}dt + o(\varepsilon).
\end{aligned}\tag{1.38}$$

Όμως από την εξίσωση (1.34) και το γεγονός ότι το $\overline{u}(\cdot)$ είναι βέλτιστο $\big($οπότε θα ισχύει $J(\overline{u}(\cdot)) \leq J(u^\varepsilon(\cdot))\ \ \forall\varepsilon > 0$ $\big)$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
&0 \geq J(\overline{u}(\cdot)) - J(u^\varepsilon(\cdot)) = -E\langle h_x(\overline{x}(T)), y^\varepsilon(T) + z^\varepsilon(T)\rangle - \frac{1}{2}E\langle h_{xx}(\overline{x}(T))y^\varepsilon(T), y^\varepsilon(T)\rangle \\
&-E\int_0^T \Big\{\langle f_x(t), y^\varepsilon(t) + z^\varepsilon(t)\rangle + \frac{1}{2}\langle f_{xx}(t)y^\varepsilon(t), y^\varepsilon(t)\rangle + \delta f(t)\chi_{E_\varepsilon}(t)\Big\}dt + o(\varepsilon),
\end{aligned}$$

άρα αντικαθιστώντας το δεξί μέλος της (1.38) παίρνουμε

$$\begin{aligned}
&0 \geq E\int_0^T \langle f_x(t), y^\varepsilon(t) + z^\varepsilon(t)\rangle dt + \frac{1}{2}E\int_0^T \Big\{\langle p(t), b_{xx}(t)y^\varepsilon(t)^2\rangle + \sum_{j=1}^m \langle q_j(t), \sigma^j_{xx}(t)y^\varepsilon(t)^2\rangle\Big\}dt \\
&+E\int_0^T \Big\{\Big[\langle p(t), \delta b(t)\rangle + \mathrm{tr}\Big(q(t)^\top\delta\sigma(t)\Big)\Big]\chi_{E_\varepsilon}(t)\Big\}dt - \frac{1}{2}E\langle h_{xx}(\overline{x}(T))y^\varepsilon(T), y^\varepsilon(T)\rangle \\
&-E\int_0^T \langle f_x(t), y^\varepsilon(t) + z^\varepsilon(t)\rangle dt - \frac{1}{2}E\int_0^T \langle f_{xx}(t)y^\varepsilon(t), y^\varepsilon(t)\rangle dt - E\int_0^T \delta f(t)\chi_{E_\varepsilon}(t)dt + o(\varepsilon) \Rightarrow \\
&0 \geq \frac{1}{2}E\int_0^T \Big\{\langle p(t), b_{xx}(t)y^\varepsilon(t)^2\rangle + \sum_{j=1}^m \langle q_j(t), \sigma^j_{xx}(t)y^\varepsilon(t)^2\rangle\Big\}dt \\
&+E\int_0^T \Big\{\Big[\langle p(t), \delta b(t)\rangle + \mathrm{tr}\Big(q(t)^\top\delta\sigma(t)\Big)\Big]\chi_{E_\varepsilon}(t)\Big\}dt - \frac{1}{2}E\langle h_{xx}(\overline{x}(T))y^\varepsilon(T), y^\varepsilon(T)\rangle \\
&-\frac{1}{2}E\int_0^T \langle f_{xx}(t)y^\varepsilon(t), y^\varepsilon(t)\rangle dt - E\int_0^T \delta f(t)\chi_{E_\varepsilon}(t)dt + o(\varepsilon),
\end{aligned}$$

έπειτα χρησιμοποιώντας ότι $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^\top) = \mathrm{tr}(A^\top B)$ έχουμε

$$\begin{aligned}
&0 \geq \frac{1}{2}E\mathrm{tr}\Big\{-h_{xx}(\overline{x}(T))y^\varepsilon(T)y^\varepsilon(T)^\top\Big\} + \frac{1}{2}E\int_0^T \Big\{-\mathrm{tr}\big[f_{xx}(t)y^\varepsilon(t)y^\varepsilon(t)^\top\big] + \mathrm{tr}\big[p(t)\big(b_{xx}(t)y^\varepsilon(t)^2\big)^\top\big] \\
&+\sum_{j=1}^m \langle q_j(t), \sigma^j_{xx}(t)y^\varepsilon(t)^2\rangle\Big\}dt + E\int_0^T \Big\{-\delta f(t) + \langle p(t), \delta b(t)\rangle + \mathrm{tr}\Big(q(t)^\top\delta\sigma(t)\Big)\Big\}\chi_{E_\varepsilon}(t)dt + o(\varepsilon),
\end{aligned}$$

οπότε, έχοντας υπ' όψιν τον ορισμό της χαμιλτονιανής (1.10), αντικαθιστούμε τα εξής

$$\begin{aligned}
&H_{xx}(t) := H_{xx}(t, \overline{x}(t), \overline{u}(t), p(t), q(t)),\\
&\delta H(t) := H(t, \overline{x}(t), u(t), p(t), q(t)) - H(t, \overline{x}(t), \overline{u}(t), p(t), q(t)) =\\
&\langle p, b(t, \overline{x}, u)\rangle + \mathrm{tr}\left[q^\top \sigma(t, \overline{x}, u)\right] - f(t, \overline{x}, u) - \langle p, b(t, \overline{x}, \overline{u})\rangle - \mathrm{tr}\left[q^\top \sigma(t, \overline{x}, \overline{u})\right] + f(t, \overline{x}, \overline{u}) =\\
&\langle p, \delta b(t)\rangle + \mathrm{tr}\left[q^\top \delta\sigma(t)\right] - \delta f(t),
\end{aligned}$$

καθώς και $-h_{xx}(\overline{x}(T)) = P(T), Y^\varepsilon(t) := y^\varepsilon(t) y^\varepsilon(t)^\top$ άρα

$$0 \geq \frac{1}{2} E \mathrm{tr}\left\{P(T)Y^\varepsilon(T)\right\} + E\int_0^T \left\{\frac{1}{2}\mathrm{tr}[H_{xx}(t)Y^\varepsilon(t)] + \delta H(t)\chi_{E_\varepsilon}(t)\right\} dt + o(\varepsilon). \tag{1.39}$$

Στη συνέχεια εφαρμόζοντας τον κανόνα του Itô στο $y^\varepsilon(t)y^\varepsilon(t)^\top$ και χρησιμοποιώντας την (1.25) έχω

$$\begin{aligned}
dY^\varepsilon(t) =& \Big\{ b_x(t)Y^\varepsilon(t) + Y^\varepsilon(t)b_x(t)^\top\\
&+ \sum_{j=1}^m \sigma_x^j(t)Y^\varepsilon(t)\sigma_x^j(t)^\top + \sum_{j=1}^m \delta\sigma^j(t)\delta\sigma^j(t)^\top \chi_{E_\varepsilon}(t)\\
&+ \sum_{j=1}^m \Big(\sigma_x^j(t)y^\varepsilon(t)\delta\sigma^j(t)^\top + \delta\sigma^j(t)y^\varepsilon(t)^\top\sigma_x^j(t)^\top\Big)\chi_{E_\varepsilon}(t)\Big\}dt\\
&+ \sum_{j=1}^m \Big(\sigma_x^j(t)Y^\varepsilon(t) + Y^\varepsilon(t)\sigma_x^j(t)^\top\Big)dW^j(t)\\
&+ \sum_{j=1}^m \Big(\delta\sigma^j(t)y^\varepsilon(t)^\top + y^\varepsilon(t)\delta\sigma^j(t)^\top\Big)\chi_{E_\varepsilon}(t)dW^j(t).
\end{aligned} \tag{1.40}$$

Για να καθοριστεί η σχέση δυαδικότητας ανάμεσα στις (1.40) και (1.9) χρειαζόμαστε το ακόλουθο λήμμα, του οποίου η απόδειξη έπεται άμεσα από τον κανόνα του Itô.

Λήμμα 1.4.2 *Έστω $Y(\cdot), P(\cdot) \in L^2_{\mathcal{F}}(0,T;\mathbb{R}^{n\times n})$ τα οποία ικανοποιούν τα ακόλουθα*

$$\begin{cases} dY(t) = \Phi(t)dt + \sum_{j=1}^m \Psi_j(t)dW^j(t),\\ dP(t) = \Theta(t)dt + \sum_{j=1}^m Q_j(t)dW^j(t), \end{cases} \tag{1.41}$$

όπου $\Phi(\cdot), \Psi_j(\cdot), \Theta(\cdot), Q_j(\cdot) \in L^2_{\mathcal{F}}(0,T;\mathbb{R}^{n\times n})$. Τότε ισχύει το εξής

$$\begin{aligned}
E\Big\{&tr[P(t)Y(t)] - tr[P(0)Y(0)]\Big\} =\\
&E\int_0^T \Big\{tr[\Theta(t)Y(t) + P(t)\Phi(t) + \sum_{j=1}^m Q_j(t)\Psi_j(t)]\Big\}dt.
\end{aligned} \tag{1.42}$$

Εφαρμόζοντας το προηγούμενο λήμμα στην (1.40) και (1.9) έχουμε

$$
\begin{aligned}
&E\Big\{\mathrm{tr}\big[P(T)Y^{\varepsilon}(T)\big]-\mathrm{tr}\big[P(0)Y^{\varepsilon}(0)\big]\Big\}=\\
&E\int_0^T\Big\{\mathrm{tr}\Big[-b_x(t)^{\top}P(t)Y^{\varepsilon}(t)-P(t)b_x(t)Y^{\varepsilon}(t)-\sum_{j=1}^{m}\sigma_x^j(t)^{\top}P(t)\sigma_x^j(t)Y^{\varepsilon}(t)-\\
&\sum_{j=1}^{m}\big(\sigma_x^j(t)^{\top}Q_j(t)+Q_j(t)\sigma_x^j(t)\big)Y^{\varepsilon}(t)-H_{xx}(t)Y^{\varepsilon}(t)+\\
&P(t)b_x(t)Y^{\varepsilon}(t)+P(t)Y^{\varepsilon}(t)b_x(t)^{\top}+P(t)\sum_{j=1}^{m}\sigma_x^j(t)Y^{\varepsilon}(t)\sigma_x^j(t)^{\top}+\\
&P(t)\sum_{j=1}^{m}\delta\sigma^j(t)\delta\sigma^j(t)^{\top}\chi_{E_\varepsilon}(t)+\sum_{j=1}^{m}\big(Q_j(t)\sigma_x^j(t)Y^{\varepsilon}(t)+Q_j(t)Y^{\varepsilon}(t)\sigma_x^j(t)^{\top}\big)+\\
&\sum_{j=1}^{m}Q_j(t)\big(\delta\sigma^j(t)Y^{\varepsilon}(t)^{\top}+Y^{\varepsilon}(t)\delta\sigma^j(t)^{\top}\big)\chi_{E_\varepsilon}(t)\Big]\Big\}dt,
\end{aligned}
$$

διαγράφοντας τους αντίθετους όρους, έχοντας υπ' όψιν την ιδιότητα $\mathrm{tr}[AB]=\mathrm{tr}[BA]$ καθώς και ότι $Y^{\varepsilon}(0)=0$ $\big(Y^{\varepsilon}(0)=y^{\varepsilon}(0)y^{\varepsilon}(0)^{\top}=0$ αφού $y^{\varepsilon}(0)=0\big)$ παίρνουμε

$$
\begin{aligned}
E\Big\{\mathrm{tr}\big[P(T)Y^{\varepsilon}(T)\big]\Big\}=&E\int_0^T\mathrm{tr}\Big[\delta\sigma(t)^{\top}P(t)\delta\sigma(t)\chi_{E_\varepsilon}(t)-H_{xx}(t)Y^{\varepsilon}(t)\Big]dt+\\
&E\int_0^T\mathrm{tr}\Big[\sum_{j=1}^{m}Q_j(t)\big(\delta\sigma^j(t)Y^{\varepsilon}(t)^{\top}+Y^{\varepsilon}(t)\delta\sigma^j(t)^{\top}\big)\chi_{E_\varepsilon}(t)\Big]dt,
\end{aligned}
$$

τέλος, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 1.4.1 έχουμε

$$
E\Big\{\mathrm{tr}[P(T)Y^{\varepsilon}(T)]\Big\}=E\int_0^T\mathrm{tr}[\delta\sigma(t)^{\top}P(t)\delta\sigma(t)\chi_{E_\varepsilon}(t)-H_{xx}(t)Y^{\varepsilon}(t)]dt+o(\varepsilon). \quad (1.43)
$$

Οπότε αντικαθιστώντας το δεξί μέλος της (1.43) στην (1.39) έχουμε

$$
\begin{aligned}
&0\geq E\int_0^T\frac{1}{2}\mathrm{tr}[\delta\sigma(t)^{\top}P(t)\delta\sigma(t)\chi_{E_\varepsilon}(t)]-\frac{1}{2}\mathrm{tr}[H_{xx}(t)Y^{\varepsilon}(t)]dt+\\
&E\int_0^T\Big\{\frac{1}{2}\mathrm{tr}[H_{xx}(t)Y^{\varepsilon}(t)]+\delta H(t)\chi_{E_\varepsilon}(t)\Big\}dt+o(\varepsilon)\Rightarrow\\
&o(\varepsilon)\geq E\int_0^T\Big\{\delta H(t)+\frac{1}{2}\mathrm{tr}[\delta\sigma(t)^{\top}P(t)\delta\sigma(t)]\Big\}\chi_{E_\varepsilon}(t)dt,
\end{aligned}
$$

άρα αντικαθιστώντας ξανά $\delta H(t)=H(t,\overline{x}(t),u(t),p(t),q(t))-H(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t),p(t),q(t))$ και $\delta\sigma(t)=\sigma(t,\overline{x}(t),u(t))-\sigma(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t))$ παίρνουμε

$$
\begin{aligned}
&o(\varepsilon)\geq E\int_0^T\Big\{H(t,\overline{x}(t),u(t),p(t),q(t))-H(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t),p(t),q(t))+\\
&\frac{1}{2}\mathrm{tr}\Bigg[\Big(\sigma(t,\overline{x}(t),u(t))-\sigma(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t))\Big)^{\top}P(t)\Big(\sigma(t,\overline{x}(t),u(t))-\sigma(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t))\Big)\Bigg]\Big\}\chi_{E_\varepsilon}(t)dt,
\end{aligned}
$$

δηλαδή,

$$\begin{aligned}
&H(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t),p(t),q(t)) - H(t,\overline{x}(t),u,p(t),q(t)) - \\
&\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[\Big(\sigma(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t)) - \sigma(t,\overline{x}(t),u)\Big)^{\top} P(t)\Big(\sigma(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t)) - \sigma(t,\overline{x}(t),u)\Big)\right] \geq 0,
\end{aligned}$$

οπότε αποδείξαμε την (1.13). Τώρα θα δείξω ότι η σχέση (1.13) είναι ισοδύναμη με την (1.14) με τη βοήθεια της (1.15). Πράγματι

$$\begin{aligned}
&(1.13) \Leftrightarrow \mathcal{H}(t,\overline{x},\overline{u}) + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[\sigma(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t))^{\top} P(t)\sigma(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t))\right] - \\
&\mathcal{H}(t,\overline{x},u) - \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[\sigma(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t))^{\top} P(t)\sigma(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t))\right] + \\
&\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left\{[\sigma(t,\overline{x},u) - \sigma(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t))]^{\top} P(t)\,[\sigma(t,\overline{x},u) - \sigma(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t))]\right\} - \\
&\frac{1}{2}\mathrm{tr}\Big(\{\sigma(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t) - \sigma(t,\overline{x}(t),u)\}^{\top} P(t)\cdot\{\sigma(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t) - \sigma(t,\overline{x}(t),u)\}\Big) \geq 0, \\
&\forall u \in U,\ t \in [0,T] - \sigma.\pi.\ ,\ \mathbf{P} - \sigma.\pi. \Leftrightarrow \\
&\mathcal{H}(t,\overline{x},\overline{u}) \geq \mathcal{H}(t,\overline{x},u)\ \ \forall u \in U,\ t \in [0,T] - \sigma.\pi.\ ,\ \mathbf{P} - \sigma.\pi. \Leftrightarrow \\
&\mathcal{H}(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t)) = \max_{u\in U} \mathcal{H}(t,\overline{x}(t),u),\quad t \in [0,T] - \sigma.\pi.\ ,\ \mathbf{P} - \sigma.\pi.
\end{aligned}$$

Εδώ ολοκληρώνεται η απόδειξη του Θεωρήματος 1.3.1 .

□

Κεφάλαιο 2

Αρχή δυναμικού προγραμματισμού και HJB εξίσωση

Σ' αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε μια άλλη ισχυρή προσέγγιση στο να λύνουμε προβλήματα βελτίστου ελέγχου η οποία ονομάζεται μέθοδος του δυναμικού προγραμματισμού. Ο δυναμικός προγραμματισμός προήρθε από τον R.Bellman στις αρχές τις δεκαετίας του '50, είναι μια μαθηματική τεχνική για την κατασκευή μιας ακολουθίας αλληλένδετων αποφάσεων, η οποία μπορεί να εφαρμοστεί σε πολλά προβλήματα βελτιστοποίησης. Η βασική ιδέα αυτής της μεθόδου που εφαρμόζεται σε βέλτιστο έλεγχο είναι να εξετάσει μια οικογένεια από προβλήματα βελτίστου ελέγχου με διαφορετικούς αρχικούς χρόνους και καταστάσεις, για τη δημιουργία σχέσεων ανάμεσα σε αυτά τα προβλήματα μέσω της αποκαλούμενης Hamilton-Jacobi-Belman (HJB) εξίσωσης, η οποία είναι μια μη γραμμική πρώτης τάξης (στην ντετερμινιστική περίπτωση) ή δεύτερης τάξης (στη στοχαστική περίπτωση) μερική διαφορική εξίσωση. Εάν η HJB εξίσωση είναι επιλύσιμη (είτε αναλυτικά είτε αριθμητικά), τότε μπορεί να εξασφαλιστεί ένας βέλτιστος μηχανισμός ελέγχου με τη λήψη μεγίστου/ελαχίστου της Χαμιλτονιανής ή της γενικευμένης Χαμιλτονιανής που περιέχεται στην HJB εξίσωση. Αυτή είναι η λεγόμενη τεχνική επαλύθευσης (verification technique). Ας σημειώσουμε ότι αυτή η προσέγγιση δίνει λύσεις σε όλες τις οικογένειες προβλημάτων (με διαφορετικούς αρχικούς χρόνους και καταστάσεις), ιδίως στο πρωτότυπο πρόβλημα.

Παρόλα αυτά υπήρχε ένα σημαντικό μειονέκτημα στην προσέγγιση του κλασικού δυναμικού προγραμματισμού. Απαιτούσε η HJB εξίσωση να δέχεται κλασικές λύσεις, που σημαίνει ότι οι λύσεις θα πρέπει να είναι αρκετά ομαλές. Γενικά όμως, η συνάρτηση αξίας δεν είναι αρκετά ομαλή έτσι ώστε να ικανοποιεί τις εξισώσεις δυναμικού προγραμματισμού και επίσης υπάρχουν πολλές συναρτήσεις εκτός από τη συνάρτηση αξίας που ικανοποιούν την εξίσωση, σχεδόν παντού. Για να ξεπεραστεί αυτή η δυσκολία, οι Crandall και Lions εισήγαγαν τις λεγόμενες λύσεις ιξώδους στις αρχές της δεκαετίας του '80. Αυτή η καινούργια έννοια είναι ένα είδος από μή-ομαλές λύσεις για μερικές διαφορικές εξισώσεις, που το βασικό τους χαρακτηριστικό είναι να αντικαθιστούν τις συνήθεις παραγώγους με πεπερασμένες διαφορές διατηρώντας παράλληλα τη μοναδικότητα των λύσεων κάτω από πολύ ήπιες συνθήκες. Αυτές λοιπόν κάνουν τη θεωρία ένα ισχυρό εργαλείο για την αντιμετώπιση προβλημάτων βελτίστου ελέγχου. Οι λύσεις ιξώδους που θα μελετήσουμε σ' αυτό το κεφάλαιο μπορούν να είναι απλά συνεχής και όχι απαραίτητα διαφορίσιμες.

2.1 Η αρχή της στοχαστικής βελτιστοποιήσης και η HJB εξίσωση

Σ' αυτή την ενότητα θα εξετάσουμε το πρόβλημα του στοχαστικού δυναμικού προγραμματισμού και θα ορίσουμε την εξίσωση H-J-B. Στο δυναμικό προγραμματισμό, εισάγουμε μια συνάρτηση V, που την ονομάζουμε συνάρτηση αξίας η οποία είναι η βέλτιστη τιμή της εξόφλησης και θεωρείται ως συνάρτηση των αρχικών δεδομένων. Η συνάρτηση αξίας για το πρόβλημα βελτίστου ελέγχου, στην ντετερμινιστική διατύπωση, ικανοποιεί μια πρώτης τάξης μη γραμμική διαφορική εξίσωση σε αντίθεση με την στοχαστική περίπτωση που λύνει μια στοχαστική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης. (Για περισσότερες λεπτομέρειες για την ντετερμινιστική περίπτωση ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στο [WFS] Κεφάλαιο I)

2.1.1 Στοχαστικός δυναμικός προγραμματισμός

Έστω U ένας μετρικός χώρος, τότε για κάθε $T > 0$ και $(s, y) \in [0, T) \times \mathbb{R}^n$ θεωρούμε την εξίσωση

$$\begin{cases} dx(t) = b(t, x(t), u(t))dt + \sigma(t, x(t), u(t))dW(t) \quad t \in [s, T], \\ x(s) = y, \end{cases} \tag{2.1}$$

με τη συνάρτηση κόστους

$$J(s, y; u(\cdot)) = E\left\{\int_s^T f(t, x(t), u(t))dt + h(x(T))\right\}. \tag{2.2}$$

Ας εισάγουμε κάποιες υποθέσεις (μπορούν να συγκριθούν με αυτές του Κεφαλαίου 1).

(S1)′ Ο (U, d) είναι ένας Πολωνικός χώρος, όπου d η μετρική του χώρου U, και $T > 0$.

(S2)′ Οι συναρτήσεις $b : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^n, \sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^{n\times m}$, $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}$ και $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχείς και υπάρχει μια σταθερά $L > 0$ τέτοια ώστε για $\varphi(t, x, u) = b(t, x, u), \sigma(t, x, u), f(t, x, u), h(x)$ να ισχύει

$$\begin{cases} |\varphi(t, x, u) - \varphi(t, \widehat{x}, u)| \leq L|x - \widehat{x}|, \quad \forall t \in [0, T], x, \widehat{x} \in \mathbb{R}^n, u \in U, \\ |\varphi(t, 0, u)| \leq L, \quad \forall (t, u) \in [0, T] \times U. \end{cases} \tag{2.3}$$

Παρατηρούμε ότι σε αντίθεση με τις υποθέσεις $(S1) - (S2)$, που εισάγαμε στο Κεφάλαιο 1, οι $(S1)' - (S2)'$ απαιτούν ο χώρος U να είναι πλήρης και οι περιεχόμενες συναρτήσεις να είναι συνεχείς στο (t, x, u) συμπεριλαμβανομένου και του t.

Σ' αυτό το σημείο και πρίν ορίσουμε τη συνάρτηση αξίας ας είσαγουμε το σύνολο $\mathcal{U}^w[s, T]$. Για δεδομένο $s \in [0, T)$ συμβολίζουμε με $\mathcal{U}^w[s, T]$ το σύνολο όλων των πεντάδων $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}, W(\cdot), u(\cdot))$ που ικανοποιεί τα ακόλουθα

i. Ο $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ είναι ένας πλήρης χώρος πιθανότητας.

ii. Η $\{W(t)\}_{t\geq s}$ είναι μια m-διάστατη κίνηση Brown ορισμένη στο χώρο $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ επί του $[s, T]$ (με $W(s) = 0$ σ.π.) και η $\mathcal{F}_t^s = \sigma\{W(r) : s \leq r \leq t\}$ είναι επαυξημένη με όλα τα $\mathbf{P}$-μηδενικά σύνολα στο $\mathcal{F}$.

iii. Η $u : [s, T] \times \Omega \to U$ είναι μια $\{\mathcal{F}_t^s\}_{t\geq s}$ προσαρμοσμένη διήθηση στο χώρο $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

iv. Για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$ η εξίσωση (2.1) έχει μοναδική λύση $x(\cdot)$ στο χώρο $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t^s\}_{t\geq s}, \mathbf{P})$.

v. Ισχύει ότι $f(\cdot, x(\cdot), u(\cdot)) \in L^1_{\mathcal{F}}(0,T;\mathbb{R})$ και $h(x(T)) \in L^1_{\mathcal{F}_T}(\Omega;\mathbb{R})$ όπου οι χώροι $L^1_{\mathcal{F}}(0,T;\mathbb{R})$ και $L^1_{\mathcal{F}_T}(\Omega;\mathbb{R})$ είναι ορισμένοι στο δεδομένο φιλτραρισμένο χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t^s\}_{t\geq s}, \mathbf{P})$.

Να τονίσουμε ότι στην εξίσωση (2.1) η αρχική κατάσταση y είναι μια ντετερμινιστική μεταβλητή στο χώρο $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Επίσης στην (2.2) η μέση τιμή E είναι σε σχέση με την πιθανότητα $\mathbf{P}$. Το πρόβλημα βελτίστου ελέγχου λοιπόν μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

Πρόβλημα $(\mathbf{S_{sy}})$: Έστω $(s,y) \in [0,T) \times \mathbb{R}^n$ ένα σταθερό σημείο. Αναζητούμε μια πεντάδα $\overline{u}(\cdot) \equiv (\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{F}}, \overline{\mathbf{P}}, \overline{W}(\cdot), \overline{u}(\cdot)) \in \mathcal{U}^w[s,T]$ έτσι ώστε

$$J(s,y;\overline{u}(\cdot)) = \inf_{u(\cdot)\in\mathcal{U}^w[s,T]} J(s,y;u(\cdot)). \tag{2.4}$$

Ορισμός 2.1.1 *Υπό τις υποθέσεις $(S1)' - (S2)'$, για κάθε σημείο $(s,y) \in [0,T) \times \mathbb{R}^n$ και $u(\cdot) \in \mathcal{U}^w[s,T]$ η εξίσωση (2.1) έχει μοναδική λύση $x(\cdot) \equiv x(\cdot\,; s, y, u(\cdot))$ και η συνάρτηση αξίας (2.2) είναι καλά ορισμένη. Έτσι λοιπόν ορίζουμε την επόμενη συνάρτηση*

$$\begin{cases} V(s,y) = \inf_{u(\cdot)\in\mathcal{U}^w[s,T]} J(s,y;u(\cdot)), \quad \forall (s,y) \in [0,T) \times \mathbb{R}^n, \\ V(T,y) = h(y), \quad \forall y \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{2.5}$$

η οποία ονομάζεται συνάρτηση αξίας του Προβλήματος S (όπου το Πρόβλημα S ορίστηκε στο Κεφάλαιο 1).

Η επόμενη πρόταση περιγράφει μερικές βασικές ιδιότητες της συνάρτησης αξίας.

Πρόταση 2.1.1 *Υπό τις υποθέσεις $(S1)' - (S2)'$ η συνάρτηση αξίας $V(s,y)$ ικανοποιεί τα ακόλουθα*

$$|V(s,y)| \leq K(1+|y|), \quad \forall (s,y) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n, \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned} |V(s,y) - V(\widehat{s},\widehat{y})| \leq K\{|y-\widehat{y}| + (1+|y| \vee |\widehat{y}|)|s-\widehat{s}|^{1/2}\}, \\ \forall s, \widehat{s} \in [0,T], y, \widehat{y} \in \mathbb{R}^n, \\ \text{όπου } a \vee b := \max\{a,b\}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

2.1.2 Η αρχή βελτίστου κατά Bellman και η HJB εξίσωση

Το ακόλουθο θεώρημα μας δίνει τη στοχαστική διατύπωση της αρχής βελτίστου κατά Bellman.

Θεώρημα 2.1.1 *Έστω ότι ισχύουν οι υποθέσεις $(S1)' - (S2)'$, τότε για κάθε σημείο $(s,y) \in [0,T) \times \mathbb{R}^n$, ισχύει*

$$\begin{aligned} V(s,y) = \inf_{u(\cdot)\in\mathcal{U}^w[s,T]} E\left\{\int_s^{\widehat{s}} f(t, x(t;s,y,u(\cdot)), u(t))dt + V(\widehat{s}, x(\widehat{s};s,y,u(\cdot)))\right\}, \\ \forall 0 \leq s \leq \widehat{s} \leq T. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Απόδειξη: Ας συμβολίσουμε το δεξί μέλος της (2.8) με $\overline{V}(s,y)$, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει ένα $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}, W(\cdot), u(\cdot)) \in \mathcal{U}^w[s,T]$ ώστε

$$\begin{aligned}
&V(s,y) + \varepsilon > J(s,y;u(\cdot)) \\
&\quad = E\left\{\int_s^T f(t,x(t;s,y,u(\cdot)),u(t))dt + h(x(T;s,y,u(\cdot)))\right\} \\
&\quad = E\left\{\int_s^{\widehat{s}} f(t,x(t;s,y,u(\cdot)),u(t))dt + E\Big[\int_{\widehat{s}}^T f(t,x(t;s,y,u(\cdot)),u(t))dt + h(x(T;s,y,u(\cdot))) \mid \mathcal{F}_{\widehat{s}}^s\Big]\right\} \\
&\quad = E\left\{\int_s^{\widehat{s}} f(t,x(t;s,y,u(\cdot)),u(t))dt + E\Big[\int_{\widehat{s}}^T f(t,x(t;\widehat{s},x(\widehat{s}),u(\cdot)),u(t))dt + h(x(T;\widehat{s},x(\widehat{s}),u(\cdot))) \mid \mathcal{F}_{\widehat{s}}^s\Big]\right\} \\
&\quad = E\left\{\int_s^{\widehat{s}} f(t,x(t;s,y,u(\cdot)),u(t))dt + J(\widehat{s},x(\widehat{s};s,y,u(\cdot));u(\cdot))\right\} \\
&\quad \geq E\left\{\int_s^{\widehat{s}} f(t,x(t;s,y,u(\cdot)),u(t))dt + V(\widehat{s},x(\widehat{s};s,y,u(\cdot)))\right\} \geq \overline{V}(s,y).
\end{aligned}$$

Αντιστρόφως, για οποιοδήποτε $\varepsilon > 0$, από την Πρόταση 2.1.1, υπάρχει ένα δ=δ(ε) τέτοιο ώστε αν $|y - \widehat{y}| < \delta$ να ισχύει

$$|J(\widehat{s},y;u(\cdot)) - J(\widehat{s},\widehat{y};u(\cdot))| + |V(\widehat{s},y) - V(\widehat{s},\widehat{y})| \leq \varepsilon, \quad \forall u(\cdot) \in \mathcal{U}^w[\widehat{s},T]. \tag{2.9}$$

Έστω $\{D_j\}_{j\geq 1}$ μια Borel διχοτόμηση του $\mathbb{R}^n$ (δηλαδή $D_j \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $\bigcup_{j\geq 1} D_j = \mathbb{R}^n$ και $D_i \bigcap D_j = \emptyset$ για $i \neq j$) με διάμετρο $\mathrm{diam}(D_j) < \delta$. Έστω $x_j \in D_j$. Για κάθε j, υπάρχει $(\Omega_j, \mathcal{F}_j, \mathbf{P}_j, W_j(\cdot), u_j(\cdot)) \in \mathcal{U}^w[\widehat{s},T]$ τέτοιο ώστε

$$J(\widehat{s},x_j;u_j(\cdot)) \leq V(\widehat{s},x_j) + \varepsilon. \tag{2.10}$$

Επομένως, για κάθε $x \in D_j$, συνδυάζοντας τις (2.9) και (2.10) έχουμε

$$J(\widehat{s},x;u_j(\cdot)) \leq J(\widehat{s},x_j;u_j(\cdot)) + \varepsilon \leq V(\widehat{s},x_j) + 2\varepsilon \leq V(\widehat{s},x) + 3\varepsilon. \tag{2.11}$$

Από τον ορισμό της w-αποδεκτής πεντάδας $(\Omega_j, \mathcal{F}_j, \mathbf{P}_j, W_j(\cdot), u_j(\cdot))$, υπάρχει μια συνάρτηση $\psi_j \in \mathcal{A}_T^m(U)$ τέτοια ώστε

$$u_j(t,\omega) = \psi_j(t, W_j(\cdot \wedge t, \omega)), \quad \mathbf{P}_j - \sigma.\pi.,\ \omega \in \Omega_j,\ \forall t \in [\widehat{s},T].$$

Τώρα, για κάθε $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}, W(\cdot), u(\cdot)) \in \mathcal{U}^w[s,T]$, έστω $x(\cdot) \equiv x(\cdot;s,y,u(\cdot))$ να συμβολίζει την αντίστοιχη τροχιά κατάστασης του προβλήματος (S_{sy}). Ορίζουμε ένα νέο έλεγχο

$$\tilde{u}(t,\omega) = \begin{cases} u(t,\omega), & \text{αν } t \in [s,\widehat{s}), \\ \psi_j(t, W(\cdot \wedge t,\omega) - W(\widehat{s},\omega), & \text{αν } t \in [\widehat{s},T] \text{ και } x(t,\omega) \in D_j. \end{cases}$$

Προφανώς ισχύει $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}, W(\cdot), \tilde{u}(\cdot)) \in \mathcal{U}^w[s,T]$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
V(s,y) &\leq J(s,y;\tilde{u}(\cdot)) \\
&= E\Big\{ \int_s^T f(t, x(t;s,y,\tilde{u}(\cdot)), \tilde{u}(t))dt + h(x(T;s,y,\tilde{u}(\cdot)))\Big\} \\
&= E\Big\{ \int_s^{\widehat{s}} f(t, x(t;s,y,u(\cdot)), u(t))dt \\
&+ E\Big[\int_{\widehat{s}}^T f(t, x(t;\widehat{s}, x(\widehat{s}), u(\cdot)), \tilde{u}(t))dt + h(x(T;\widehat{s}, x(\widehat{s}), \tilde{u}(\cdot))) \mid \mathcal{F}^s_{\widehat{s}}\Big]\Big\} \\
&= E\Big\{ \int_s^{\widehat{s}} f(t, x(t;s,y,u(\cdot)), u(t))dt + J(\widehat{s}, x(\widehat{s};s,y,u(\cdot));\tilde{u}(\cdot))\Big\} \\
&\leq E\Big\{ \int_s^{\widehat{s}} f(t, x(t;s,y,u(\cdot)), u(t))dt + V(\widehat{s}, x(\widehat{s};s,y,u(\cdot))) + 3\varepsilon\Big\},
\end{aligned}$$

όπου η τελευταία ανισότητα προκύπτει από την (2.11). Οπότε, παίρνοντας το infimum για $u(\cdot) \in \mathcal{U}^w[s,T]$ λαμβάνουμε την (2.8).

□

Θεώρημα 2.1.2 *Έστω ότι ισχύουν οι υποθέσεις* $(S1)' - (S2)'$. *Αν* $(\overline{x}(\cdot), \overline{u}(\cdot))$ *είναι ένα βέλτιστο ζευγάρι του προβλήματος* (S_{sy}) *τότε*

$$V(t, \overline{x}(t)) = E\Big\{ \int_t^T f(r, \overline{x}(r), \overline{u}(r))dr + h(\overline{x}(T)) \mid \mathcal{F}^s_t\Big\} \qquad \mathbf{P} - \sigma.\pi., \quad \forall t \in [s,T]. \tag{2.12}$$

Όπως στην ντετερμινιστική περίπτωση έτσι και εδώ, ονομάζουμε την εξίσωση (2.8) *εξίσωση δυναμικού προγραμματισμού.* Αυτή η εξίσωση είναι πολύ σύνθετη και δίχνει αδύνατον το να τη λύσουμε απευθείας. Έτσι λοιπόν, εισάγουμε την ακόλουθη πρόταση, σύμφωνα με την οποία, η συνάρτηση αξίας είναι λύση ενός τερματικού προβλήματος που είναι πιο εύκολο να λυθεί σε σχέση με την εξίσωση (2.8). Έστω $\mathcal{C}^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R}^n)$ το σύνολο όλων των συνεχών συναρτήσεων $\upsilon : [0,T]\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ έτσι ώστε οι υ_t, υ_x και υ_{xx} να είναι όλες συνεχείς ως προς (t,x).

Πρόταση 2.1.2 *Έστω ότι ισχύουν οι υποθέσεις* $(S1)' - (S2)'$ *και η συνάρτηση αξίας* $V \in \mathcal{C}^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R}^n)$. *Τότε η* V *είναι μια λύση του ακόλουθου τερματικού προβλήματος αξίας*

$$\begin{cases} -\upsilon_t + \sup\limits_{u\in U} G(t,x,u,-\upsilon_x,-\upsilon_{xx}) = 0, & (t,x) \in [0,T)\times\mathbb{R}^n, \\ \upsilon\mid_{t=T} = h(x), & x\in\mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{2.13}$$

όπου

$$\begin{aligned} G(t,x,u,p,P) &\stackrel{\Delta}{=} \frac{1}{2} tr(P\sigma(t,x,u)\sigma(t,x,u)^\top) + \langle p, b(t,x,u)\rangle - f(t,x,u), \\ &\forall (t,x,u,p,P) \in [0,T]\times\mathbb{R}^n\times U\times\mathbb{R}^n\times\mathcal{S}^n \\ &\text{όπου } \mathcal{S}^n \text{είναι το σύνολο όλων των } n\times n \text{ πινάκων.} \end{aligned} \tag{2.14}$$

Απόδειξη: Έστω $(s, y) \in [0, T) \times \mathbb{R}^n$ ένα σταθερό σημείο, $u \in U$ και $x(\cdot)$ να είναι η τροχιά κατάστασης που αντιστοιχεί στον έλεγχο $u(\cdot) \in \mathcal{U}^w[s, T]$ του προβλήματος (S_{sy}) με $u(t) \equiv u$. Από την εξίσωση (2.8) με $\widehat{s} \downarrow s$ και από τον κανόνα του Itô έχουμε τα εξής

$$\begin{aligned} 0 &\geq -\frac{E\left\{V(\widehat{s}, x(\widehat{s})) - V(s, y)\right\}}{\widehat{s} - s} - \frac{1}{\widehat{s} - s} E \int_s^{\widehat{s}} f(t, x(t), u) dt \\ &= -\frac{1}{\widehat{s} - s} E \int_s^{\widehat{s}} \left\{-V_t(t, x(t)) + G(t, x(t), u(t), -V_x(t, x(t)), -V_{xx}(t, x(t)))\right\} dt \\ &\rightarrow V_t(s, y) + G(s, y, u, -V_x(s, y), -V_{xx}(s, y)), \quad \forall u \in U, \end{aligned}$$

οπότε από την παραπάνω ανισότητα έχουμε

$$0 \geq -V_t(s, y) + \sup_{u \in U} G(s, y, u, -V_x(s, y), -V_{xx}(s, y)). \tag{2.15}$$

Επίσης, για κάθε $\varepsilon > 0$, $0 \leq s < \widehat{s} \leq T$ με $\widehat{s} - s > 0$ αρκετά μικρό, υπάρχει ένα $u(\cdot) \equiv u_{\varepsilon, \widehat{s}}(\cdot) \in \mathcal{U}^w[s, T]$ τέτοιο ώστε

$$V(s, y) + \varepsilon(\widehat{s} - s) \geq E\Big\{ \int_s^{\widehat{s}} f(t, x(t), u(t)) dt + V(\widehat{s}, x(\widehat{s}))\Big\}.$$

Οπότε από τον κανόνα του Itô και για $\widehat{s} \downarrow s$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} -\varepsilon &\leq -\frac{E\left\{V(\widehat{s}, x(\widehat{s})) - V(s, y)\right\}}{\widehat{s} - s} - \frac{1}{\widehat{s} - s} E \int_s^{\widehat{s}} f(t, x(t), u(t)) dt \\ &= \frac{1}{\widehat{s} - s} \int_s^{\widehat{s}} \left\{-V_t(t, x(t)) + G(t, x(t), u(t), -V_x(t, x(t)), -V_{xx}(t, x(t)))\right\} dt \\ &\leq \frac{1}{\widehat{s} - s} \int_s^{\widehat{s}} \left\{-V_t(t, x(t)) + \sup_{u \in U} G(t, x(t), u, -V_x(t, x(t)), -V_{xx}(t, x(t)))\right\} dt \\ &\rightarrow -V_t(s, y) + \sup_{u \in U} G(s, y, u, -V_x(s, y), -V_{xx}(s, y)). \end{aligned}$$

Άρα

$$0 \leq -V_t(s, y) + \sup_{u \in U} G(s, y, u, -V_x(s, y), -V_{xx}(s, y)). \tag{2.16}$$

Για την απόδειξη του προηγούμενου ορίου, χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι

$$\lim_{t \downarrow s} \sup_{y \in \mathbb{R}^n, u \in U} |\varphi(t, y, u) - \varphi(s, y, u)| = 0,$$

για $\varphi = b, \sigma, f$ το οποίο συνεπάγεται από την ομοιόμορφη συνέχεια των συναρτήσεων b, σ και f όπως περιγράφεται στην υπόθεση $(S2)'$. Συνδυάζοντας λοιπόν τις (2.15) και (2.16) παίρνουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα.

□

Η εξίσωση (2.13) ονομάζεται εξισωση *Hamilton-Jacobi-Bellman* (HJB) για το πρόβλημα (S) η οποία είναι δεύτερης τάξης, σε σχέση με την αντίστοιχη εξίσωση του ντετερμινιστικού προβλήματος που είναι πρώτης. Η συνάρτηση $G(t, x, u, p, P)$ που ορίζεται απο την (2.14) ονομάζεται *γενικευμένη χαμιλτονιανή*.

2.2 Λύσεις ιξώδους

Όπως είδαμε, στην Πρόταση 2.1.2 η απόδειξη βασίστηκε στην υπόθεση ότι η V είναι $C^{1,2}$ δηλαδή αρκετά ομαλή. Στην περίπτωση λοιπόν που η V δεν είναι ομαλή θα πρέπει να μελετήσουμε την επίλυση της (2.13) με τη βοήθεια ασθενών λύσεων. Οπότε, όπως στην ντετερμινιστική περίπτωση, έτσι και στην περίπτωση του στοχαστικού προβλήματος, θα εισάγουμε την έννοια τών ασθενών λύσεων ιξώδους και θα χαρακτηρίσουμε τη συνάρτηση αξίας σαν τη μοναδική λύση ιξώδους της αντίστοιχης HJB εξίσωσης (2.13).

2.2.1 Ορισμοί-μοναδικότητα λύσεων

Ορισμός 2.2.1 *Μια συνάρτηση $v \in C([0,T]\times\mathbb{R}^n)$ ονομάζεται υπολύση ιξώδους (ή υπερλύση) της εξίσωσης (2.13) εάν ισχύουν τα εξής*

$$v(T,x) \le h(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad (\text{ή } v(T,x) \ge h(x)), \tag{2.17}$$

και για οποιαδήποτε $\varphi \in C^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R}^n)$ κάθε φορά που η διαφορά $v-\varphi$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο (ελάχιστο) στο $(t,x)\in[0,T)\times\mathbb{R}^n$, έχουμε

$$-\varphi_t(t,x) + \sup_{u\in U} G(t,x,u,-\varphi_x(t,x),-\varphi_{xx}(t,x)) \le 0, \quad (\ge 0). \tag{2.18}$$

Εάν η $v \in C([0,T]\times\mathbb{R}^n)$ είναι ταυτόχρονα και υπολύση και υπερλύση ιξώδους της (2.13) τότε καλείται λύση ιξώδους αυτής της εξίσωσης.

Θεώρημα 2.2.1 *Υπό τις υποθέσεις $(S1)'-(S2)'$ η συνάρτηση αξίας V, όπως ορίζεται από την (2.5), είναι μια λύση ιξώδους της εξίσωσης (2.13).*

Απόδειξη: Έστω μια οποιαδήποτε συνάρτηση $\varphi \in C^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R})$ ώστε η $V-\varphi$ να παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $(s,y)\in[0,T)\times\mathbb{R}^n$. Έστω ένα δεδομένο $u\in U$ και $x(\cdot) = x(\cdot;s,y,u)$ να είναι η τροχιά κατάστασης με τον έλεγχο $u(t)\equiv u$. Οπότε από την αρχή βελτίστου κατά Bellman (2.8) και τον κανόνα του Itô, για $\widehat{s}-s>0$ αρκετά μικρό έχουμε

$$\begin{aligned}
0 &\le \frac{E\{V(s,y)-\varphi(s,y)-V(\widehat{s},x(\widehat{s}))+\varphi(\widehat{s},x(\widehat{s}))\}}{\widehat{s}-s} \\
&\le \frac{1}{\widehat{s}-s} E\left\{\int_s^{\widehat{s}} f(t,x(t),u)dt - \varphi(s,y) + \varphi(\widehat{s},x(\widehat{s}))\right\} \\
&\to \varphi_t(s,y) + \frac{1}{2}\sigma^2(t,x,u)\varphi_{xx} + b(t,x,u)\varphi_x + f(t,x,u) \\
&= \varphi_t(s,y) - G(s,y,u,-\varphi_x(s,y),-\varphi_{xx}(s,y)), \quad \forall u \in U \\
&\Rightarrow -\varphi_t(s,y) + G(s,y,u,-\varphi_x(s,y),-\varphi_{xx}(s,y)) \le 0, \quad \forall u\in U.
\end{aligned}$$

Οπότε

$$-\varphi_t(s,y) + \sup_{u\in U} G(s,y,u,-\varphi_x(s,y),-\varphi_{xx}(s,y)) \le 0, \tag{2.19}$$

το οποίο σημαίνει ότι η V είναι μια υπολύση ιξώδους της εξίσωσης (2.13).

Αντιθέτως, εάν η $V-\varphi$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $(s,y)\in[0,T)\times\mathbb{R}^n$ τότε για κάθε

$\varepsilon>0$ και $\widehat{s}>s$ (με $\widehat{s}-s>0$ αρκετά μικρό) μπορούμε να βρούμε ένα $u(\cdot)=u_{\varepsilon,\widehat{s}}(\cdot)\in\mathcal{U}^w[s,T]$ τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned}0 &\geq E\{V(s,y)-\varphi(s,y)-V(\widehat{s},x(\widehat{s}))+\varphi(\widehat{s},x(\widehat{s}))\}\\ &\geq -\varepsilon(\widehat{s}-s)+E\left\{\int_s^{\widehat{s}} f(t,x(t),u(t))dt-\varphi(s,y)+\varphi(\widehat{s},x(\widehat{s}))\right\}.\end{aligned}$$

Διαιρώντας με $\widehat{s}-s$ και εφαρμόζοντας τον κανόνα του Itô στην ανέλιξη $\varphi(t,x(t))$ έχουμε

$$\begin{aligned}&\varepsilon \geq \frac{1}{\widehat{s}-s}E\left\{\int_s^{\widehat{s}} f(t,x(t),u(\cdot))dt-\varphi(s,y)+\varphi(\widehat{s},x(\widehat{s}))\right\}\\ &= \frac{1}{\widehat{s}-s}E\left\{\int_s^{\widehat{s}}\left[\varphi_t(t,x(t))+\frac{1}{2}\sigma^2(t,x(t),u(\cdot))\varphi_{xx}+b(t,x(t),u(\cdot))\varphi_x+f(t,x(t),u(\cdot))\right]dt\right\}\\ &\Rightarrow -\varepsilon \leq \frac{1}{\widehat{s}-s}E\left\{\int_s^{\widehat{s}}\{-\varphi_t(t,x(t))+G(t,x(t),u,-\varphi_x(t,x(t)),-\varphi_{xx}(t,x(t)))\}dt\right\}\\ &\leq \frac{1}{\widehat{s}-s}E\left\{\int_s^{\widehat{s}}\{-\varphi_t(t,x(t))+\sup_{u\in U}G(t,x(t),u,-\varphi_x(t,x(t)),-\varphi_{xx}(t,x(t)))\}dt\right\}\\ &\to -\varphi_t(s,y)+\sup_{u\in U}G(s,y,u,-\varphi_x(s,y),-\varphi_{xx}(s,y)).\end{aligned}$$

Οπότε

$$-\varphi_t(s,y)+\sup_{u\in U}G(s,y,u,-\varphi_x(s,y),-\varphi_{xx}(s,y))\geq 0, \tag{2.20}$$

από το οποίο συνεπάγεται ότι η V είναι μια υπερλύση ιξώδους της εξίσωσης (2.13).

Συνδυάζοντας λοιπόν τις (2.19) και (2.20) συμπεραίνουμε ότι η V είναι μια λύση ιξώδους της (2.13).

□

Σ' αυτό το σημείο θα εισάγουμε την έννοια των γενικευμένων διαφορικών δεύτερης τάξης με τη βοήθεια των οποίων θα δώσουμε ένα εναλλακτικό ορισμό της λύσης ιξώδους που ικανοποιεί η H-J-B εξίσωση.

Ορισμός 2.2.2 *Για $v\in C([0,T]\times\mathbb{R}^n)$ και $(t,x)\in[0,T)\times\mathbb{R}^n$ ορίζουμε το δεύτερης−τάξης παραβολικό υπερδιαφορικό του v στο (t,x) ως εξής:*

$$\begin{aligned}D_{t,x}^{1,2,+}v(t,x) \triangleq \Big\{&(q,p,P)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathcal{S}^n \mid\\ &\varlimsup_{\substack{s\to t,s\in[0,T)\\ y\to x}}\frac{1}{|s-t|+|y-x|^2}\Big[v(s,y)-v(t,x)\\ &-q(s-t)-\langle p,y-x\rangle-\frac{1}{2}(y-x)^\top P(y-x)\Big]\leq 0\Big\}.\end{aligned}\tag{2.21}$$

Όμοια ορίζουμε το δεύτερης−τάξης παραβολικό υποδιαφορικό του v στο (t,x) ως εξής:

$$\begin{aligned}D_{t,x}^{1,2,-}v(t,x) \triangleq \Big\{&(q,p,P)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathcal{S}^n \mid\\ &\varliminf_{\substack{s\to t,s\in[0,T)\\ y\to x}}\frac{1}{|s-t|+|y-x|^2}\Big[v(s,y)-v(t,x)\\ &-q(s-t)-\langle p,y-x\rangle-\frac{1}{2}(y-x)^\top P(y-x)\Big]\geq 0\Big\}.\end{aligned}\tag{2.22}$$

Το δεύτερης−τάξης δεξιό παραβολικό υπερ/υποδιαφορικό $D^{1,2,+}_{t+,x}\upsilon(t,x)$ και $D^{1,2,-}_{t+,x}\upsilon(t,x)$ ορίζονται περιορίζοντας $s \downarrow t$ στις $(2.21), (2.22)$ αντίστοιχα.

Ένας άλλος ορισμός των λύσεων ιξώδους που περιέχει τα διαφορικά δεύτερης τάξης είναι ο εξής:

Ορισμός 2.2.3 *Μια συνάρτηση $\upsilon \in C([0,T]\times\mathbb{R}^n)$ είναι μια υπολύση ιξώδους της (2.13) άν και μόνο άν $\upsilon(T,x) \le h(x)$ και*

$$-q + \sup_{u\in U} G(t,x,u,-p,-P) \le 0, \quad \forall (q,p,P) \in D^{1,2,+}_{t,x}\upsilon(t,x), \tag{2.23}$$

αντίστοιχα, μια συνάρτηση $\upsilon \in C([0,T]\times\mathbb{R}^n)$ είναι μια υπερλύση ιξώδους της (2.13) άν και μόνο άν $\upsilon(T,x) \ge h(x)$ και

$$-q + \sup_{u\in U} G(t,x,u,-p,-P) \ge 0, \quad \forall (q,p,P) \in D^{1,2,-}_{t,x}\upsilon(t,x). \tag{2.24}$$

Επειδή στην Πρόταση 2.1.2 χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η συνάρτηση αξίας V είναι ομαλή, πράγμα το οποίο δεν ισχύει γενικά, θα δώσουμε το ακόλουθο θεώρημα που αποτελεί μια εναλλακτική διατύπωση της Πρότασης 2.1.2 με τη βοήθεια των γενικευμένων διαφορικών.

Θεώρημα 2.2.2 *Έστω ότι ισχύουν οι υποθέσεις $(S1)' - (S2)'$. Τότε η συνάρτηση αξίας $V(\cdot,\cdot) \in C([0,T]\times\mathbb{R}^n)$ του προβλήματος (S) είναι η μόνη συνάρτηση που ικανοποιεί τις $(2.6) - (2.7)$ και το ακόλουθο: Για όλα τα $(t,x) \in [0,T)\times\mathbb{R}^n$, ισχύει*

$$\begin{cases} -q + \sup\limits_{u\in U} G(t,x,u,-p,-P) \le 0, \quad \forall (q,p,P) \in D^{1,2,+}_{t+,x}V(t,x), \\ -q + \sup\limits_{u\in U} G(t,x,u,-p,-P) \ge 0, \quad \forall (q,p,P) \in D^{1,2,-}_{t+,x}V(t,x), \\ V(T,x) = h(x). \end{cases} \tag{2.25}$$

Το Θεώρημα 2.2.1 αναφέρει την ύπαρξη λύσης ιξώδους για την H-J-B εξίσωση. Όσον αφορά όμως τη μοναδικότητα λύσεων βελτίστου ελέγχου, έχει αποδειχθεί αναλυτικά στο [PLL] για την περίπτωση που η H-J-B εξίσωση είναι πρώτης τάξης (ντετερμινιστική) και στο [HIL] για την περίπτωση που είναι δεύτερης τάξης (στοχαστική).

2.3 Βέλτιστος στοχαστικός έλεγχος άπειρου χρονικού ορίζοντα

Θεωρούμε το στοχαστικό σύστημα ελέγχου

$$\begin{cases} dx(t) = b(x(t),u(t))dt + \sigma(x(t),u(t))dW(t) \quad & t>0, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{2.26}$$

και ορίζουμε την αντίστοιχη συνάρτηση κόστους

$$J(x_0,u(\cdot)) = E\left\{\int_0^{+\infty} e^{-\rho t}\tilde{f}(x(t),u(t))dt\right\}, \tag{2.27}$$

όπου $\rho > 0$ είναι το προεξοφλητικό επιτόκιο. Η συνάρτηση αξίας αυτού του προβλήματος βελτίστου ελέγχου είναι

$$V(x_0) = \inf_{u(\cdot)\in\mathcal{U}^\infty} J(x(t), u(\cdot)), \tag{2.28}$$

όπου,

$$\mathcal{U}^\infty = \Big\{ u : [0, +\infty) \to U \mid \text{όπου } u \text{ είναι μια μετρήσιμη και προσαρμοσμένη διήθηση } \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0} \Big\}.$$

Το πρόβλημα βελτίστου ελέγχου στην περίπτωση του άπειρου χρονικού ορίζοντα ορίζεται ως εξής:

Πρόβλημα ($\mathbf{S}^\infty$) : Να ελαχιστοποιηθεί η (2.27) που υπόκειται στην εξίσωση (2.26) στο σύνολο $\mathcal{U}^\infty$.

Ας υποθέσουμε προσωρινά ότι υπάρχει ένα βέλτιστο ζευγάρι $(\overline{x}(t), \overline{u}(t))$ τέτοιο ώστε

$$V(x_0) = J(x_0, \overline{u}(\cdot)) = E\left\{ \int_0^{+\infty} e^{-\rho t} \tilde{f}(\overline{x}(t), \overline{u}(t)) dt \right\}, \tag{2.29}$$

άρα για $T > 0$ έχουμε ότι

$$J(x_0, \overline{u}(\cdot)) = E\left\{ \int_0^{T} e^{-\rho t} \tilde{f}(\overline{x}(t), \overline{u}(t)) dt + \int_T^{+\infty} e^{-\rho t} \tilde{f}(\overline{x}(t), \overline{u}(t)) dt \right\}. \tag{2.30}$$

Από την ιδιότητα,

$$\overline{x}(t+s, \overline{u}) = \overline{x}_{\overline{x}(t,\overline{u})}(s, \overline{u}(\cdot + t)) \quad t, s > 0,$$

παίρνουμε το εξής αποτέλεσμα

$$V(x_0) = E\left\{ \int_0^{T} e^{-\rho t} \tilde{f}(\overline{x}(t), \overline{u}(t)) dt + V(\overline{x}(T)) e^{-\rho T} \right\}, \tag{2.31}$$

που ισχύει για κάθε $T > 0$ και $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Στη γενική περίπτωση (χωρίς την ύπαρξη βελτίστου ελέγχου), η (2.31) αντικαθιστάται από την

$$V(x_0) = \inf_{u(\cdot)\in\mathcal{U}^\infty} E\left\{ \int_0^{T} e^{-\rho t} \tilde{f}(x(t), u(t)) dt + V(x(T)) e^{-\rho T} \right\}, \tag{2.32}$$

η οποία αποτελεί την κατάσταση της *αρχής δυναμικού προγραμματισμού* για το συγκεκριμένο πρόβλημα.

Την αντίστοιχη Hamilton Jacobi Bellman εξίσωση, στο πρόβλημα που εξετάζουμε, μας τη δίνει το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 2.3.1 *Η HJB εξίσωση που ικανοποιεί η συνάρτηση αξίας V (στην περίπτωση που είναι αρκετά ομαλή) είναι*

$$\rho V = \sup_{u\in U^\infty} G(x, u, DV, D^2 V), \tag{2.33}$$

όπου η συνάρτηση G ορίζεται από την (2.14). Με $DV(x)$ συμβολίζουμε την πρώτη παράγωγο της V δηλαδή την V_x και με $D^2V(x)$ την δεύτερη παράγωγο V_{xx}.

Απόδειξη: Θέτω $f(t,x(t),u(t)) = e^{-\rho t}\tilde{f}(x(t),u(t))$ και $\upsilon = e^{-\rho t}V$. Οπότε αντικαθιστώντας στην εξίσωση (2.13) παίρνουμε

$$\rho e^{-\rho t}V + \sup_{u\in U^\infty} G(x,u,-e^{-\rho t}V_x,-e^{-\rho t}V_{xx}) = 0, \tag{2.34}$$

και από την (2.14) παίρνουμε το εξής

$$\begin{aligned}
&G(x,u,-e^{-\rho t}V_x,-e^{-\rho t}V_{xx}) = \\
&\frac{1}{2}\mathrm{tr}(-e^{-\rho t}V_{xx}\sigma(t,x,u)\sigma(t,x,u)^\top) + \langle -e^{-\rho t}V_x, b(t,x,u)\rangle - f(t,x,u) \Rightarrow \\
&G(x,u,-e^{-\rho t}V_x,-e^{-\rho t}V_{xx}) = \\
&\frac{1}{2}e^{-\rho t}\mathrm{tr}(-V_{xx}\sigma(t,x,u)\sigma(t,x,u)^\top) + e^{-\rho t}\langle -V_x, b(t,x,u)\rangle - e^{-\rho t}\tilde{f}(t,x,u) \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$G(x,u,-e^{-\rho t}V_x,-e^{-\rho t}V_{xx}) = e^{-\rho t}G(x,u,-V_x,-V_{xx}), \tag{2.35}$$

άρα αντικαθιστώντας την (2.35) στην (2.34) έχουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα

$$\begin{aligned}
&\rho e^{-\rho t}V + e^{-\rho t}\sup_{u\in U^\infty} G(x,u,-V_x,-V_{xx}) = 0 \Rightarrow \\
&\rho V + \sup_{u\in U^\infty} G(x,u,-V_x,-V_{xx}) = 0 \Rightarrow \\
&\rho V = \sup_{u\in U^\infty} G(x,u,V_x,V_{xx}) = 0.
\end{aligned}$$

□

Στη συνέχεια δίνουμε τον ορισμό των λύσεων ιξώδους για την εξίσωση (2.33).

Ορισμός 2.3.1 *Μια συνάρτηση $\upsilon \in C(\mathbb{R}^n)$ είναι λύση ιξώδους της HJB εξίσωσης (2.33) αν ικανοποιούνται τα ακόλουθα*

i. Για οποιαδήποτε $\varphi \in C^{1,2}(\mathbb{R}^n)$, αν $y \in \mathbb{R}^n$ είναι ένα τοπικό μέγιστο για την $\upsilon - \varphi$ τότε

$$\rho\upsilon(y) \leq \sup_{u\in U} G(y,u,D\varphi,D^2\varphi).$$

ii. Για οποιαδήποτε $\varphi \in C^{1,2}(\mathbb{R}^n)$, αν $y \in \mathbb{R}^n$ είναι ένα τοπικό ελάχιστο για την $\upsilon - \varphi$ τότε

$$\rho\upsilon(y) \geq \sup_{u\in U} G(y,u,D\varphi,D^2\varphi).$$

Οποιαδήποτε συνάρτηση υ που ικανοποιεί την (i) λέγεται υπολύση ιξώδους της HJB εξίσωσης ενώ αν ικανοποιεί την (ii) λέγεται υπερλύση ιξώδους.

Παρακάτω ορίζουμε τα υπερδιαφορικά και υποδιαφορικά όπως διαμορφώνονται στην περίπτωση που έχουμε άπειρο χρονικό ορίζοντα.

Ορισμός 2.3.2 *Για $\upsilon \in C(\mathbb{R}^n)$ και $x \in \mathbb{R}^n$ ορίζουμε τον δεύτερης−τάξης παραβολικό υπερδιαφορικό του υ στο x ως εξής:*

$$\begin{aligned}
D_x^{1,2,+}\upsilon(x) \triangleq \Big\{(p,P) \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}^n \mid \varlimsup_{y\to x} \frac{1}{|y-x|^2}[\upsilon(y) - \upsilon(x) \\
- \langle p, y-x\rangle - \frac{1}{2}(y-x)^\top P(y-x)] \leq 0\Big\}.
\end{aligned}$$

Όμοια ορίζουμε τον δεύτερης−τάξης παραβολικό υποδιαφορικό του υ στο x ως εξής:

$$D_x^{1,2,-}\upsilon(x) \triangleq \Big\{(p,P) \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}^n \mid \varliminf_{y\to x} \frac{1}{|y-x|^2}[\upsilon(y)-\upsilon(x) - \langle p, y-x\rangle - \frac{1}{2}(y-x)^\top P(y-x)] \geq 0\Big\}.$$

Επίσης ο Ορισμός 2.2.2 διαμορφώνεται ως εξής

Ορισμός 2.3.3 *Μια συνάρτηση $\upsilon \in C(\mathbb{R}^n)$ είναι μια υπολύση ιξώδους της (2.33) άν και μόνο άν:*

$$\rho\upsilon(x) \leq \sup_{u\in U} G(x,u,p,P), \quad \forall (p,P) \in D_x^{1,2,+}\upsilon(x), \tag{2.36}$$

αντίστοιχα, μια συνάρτηση $\upsilon \in C(\mathbb{R}^n)$ είναι μια υπερλύση ιξώδους της (2.33) άν και μόνο άν:

$$\rho\upsilon(x) \geq \sup_{u\in U} G(x,u,p,P), \quad \forall (p,P) \in D_x^{1,2,-}\upsilon(x). \tag{2.37}$$

Τέλος, το Θεώρημα 2.3.1 διατυπώνεται με εναλλακτικό τρόπο με τη χρήση των γενικευμένων διαφορικών ως εξής

Θεώρημα 2.3.2 *Υπό τις υποθέσεις $(S1)' - (S2)'$ η συνάρτηση αξίας $V(\cdot,\cdot) \in C([0,T] \times \mathbb{R}^n)$ του προβλήματος (S^∞) είναι η μόνη συνάρτηση που ικανοποιεί το ακόλουθο: Για όλα τα $(t,x) \in [0,+\infty) \times \mathbb{R}^n$, ισχύει*

$$\begin{cases} \rho\upsilon(x) \leq \sup\limits_{u\in U} G(x,u,p,P), & \forall (p,P) \in D_x^{1,2,+}\upsilon(x), \\ \rho\upsilon(x) \geq \sup\limits_{u\in U} G(x,u,p,P), & \forall (p,P) \in D_x^{1,2,-}\upsilon(x). \end{cases} \tag{2.38}$$

Κεφάλαιο 3

Σχέση αρχής μεγίστου και δυναμικού προγραμματισμού

Στα Κεφάλαια 1,2 μελετήσαμε την αρχή μεγίστου (ΑΜ εν συντομία) και τον κατά Bellman δυναμικό προγραμματισμό (ΔΠ εν συντομία). Αυτές οι προσεγγίσεις είναι δύο από τα πιο σημαντικά εργαλεία για την επίλυση προβλημάτων βελτίστου ελέγχου. Και η ΑΜ και ο ΔΠ μπορούν να θεωρηθούν ως οι αναγκαίες συνθήκες για την ύπαρξη βελτίστων ελέγχων. Ένα ενδιαφέρον φαινόμενο που μπορεί κάποιος να παρατηρήσει είναι ότι σ' ένα μεγάλο βαθμό αυτές οι δύο μέθοδοι έχουν αναπτυχθεί ξεχωριστά και ανεξάρτητα η κάθε μία. Έτσι γεννιέται η εξής ερώτηση: Υπάρχει κάποια σύνδεση ανάμεσα σ' αυτές τις δύο προσεγγίσεις; Σ' αυτό λοιπόν το κεφάλαιο θα απαντήσουμε αυτή την ερώτηση.

Τα χαμιλτονιανά συστήματα που συνδέονται με την ΑΜ, στη μεν ντετερμινιστική περίπτωση είναι συνήθης διαφορικές εξισώσεις (ΣΔΕ), στη δε στοχαστική αποτελούνται από στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις (ΣτΔΕ). Στη μέθοδο του δυναμικού προγραμματισμού τώρα, οι εξισώσεις HJB που εμφανίζονται είναι μερικές διαφορικές εξισώσεις (ΜΔΕ), πρώτης τάξης για το ντετερμινιστικό πρόβλημα και δεύτερης τάξης για το στοχαστικό. Επομένως η σχέση μεταξύ της ΑΜ και του ΔΠ είναι στην ουσία μια σχέση μεταξύ των χαμιλτονιανών συστημάτων και των HJB εξισώσεων ή, ακόμη πιο γενικά, σχέση μεταξύ των ΣΔΕ, ΣτΔΕ και ΜΔΕ.

Ας κάνουμε όμως πρώτα μια αναφορά στη περίπτωση του ντετερμινιστικού προβλήματος βελτίστου ελέγχου και στη συνέχεια θα δούμε αναλυτικά τη στοχαστική διατύπωση.

Θεωρούμε το ντετερμινιστικό σύστημα ελέγχου

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = b(t, x(t), u(t)), & t \in [s, T] - \sigma.\pi. \,, \\ x(s) = y, \end{cases} \tag{3.1}$$

με τη συνάρτηση αξίας

$$J(s, y; u(\cdot)) = \int_s^T f(t, x(t), u(t))dt + h(x(T)), \tag{3.2}$$

όπου $(s, y) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$ ένα σταθερό σημείο, το οποίο αντιπροσωπεύει τον αρχικό χρόνο και την αρχική κατάσταση του συστήματος. Ο έλεγχος $u(\cdot)$ παίρνει τιμές στο παρακάτω σύνολο

$$\mathcal{V}[s, T] \stackrel{\Delta}{=} \{u : [s, T] \to U \mid \text{ όπου } u(\cdot) \text{ μετρήσιμο}\}.$$

Το πρόβλημα βελτίστου ελέγχου είναι το εξής:

Πρόβλημα (D_{sy}). Για ένα σταθερό σημείο $(s,y) \in [0,T) \times \mathbb{R}^n$, να ελαχιστοποιηθεί η (3.2), υπό την (3.1), στο σύνολο $\mathcal{V}[s,T]$.

Η συνάρτηση αξίας ορίζεται ως εξής

$$\begin{cases} V(s,y) = \inf\limits_{u(\cdot)\in\mathcal{V}[s,T]} J(s,y;u(\cdot)), \quad (s,y) \in [0,T) \times \mathbb{R}^n, \\ V(T,y) = h(y), \quad y \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{3.3}$$

Ας κάνουμε τις εξής υποθέσεις:

(D1) (U,d) είναι ένας διαχωρίσιμος μετρικός χώρος, όπου d η μετρική του χώρου U, και $T > 0$.

(D2) Οι συναρτήσεις $b : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^n$, $f : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}$ και $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχείς και υπάρχει μια σταθερά $L > 0$ τέτοια ώστε για $\varphi(t,x,u) = b(t,x,u), f(t,x,u), h(x)$ να ισχύει:

$$\begin{cases} |\varphi(t,x,u) - \varphi(t,\widehat{x},u)| \leq L|x - \widehat{x}|, \quad \forall t \in [0,T], x, \widehat{x} \in \mathbb{R}^n, u \in U, \\ |\varphi(t,0,u)| \leq L, \quad \forall (t,u) \in [0,T] \times U. \end{cases}$$

(D3) Οι συναρτήσεις b, f και h είναι C^1 ως προς x. Επίσης υπάρχει ένα μέτρο συνέχειας $\overline{\omega} : [0,\infty) \to [0,\infty)$ τέτοιο ώστε για $\varphi(t,x,u) = b(t,x,u), f(t,x,u), h(x)$ να έχουμε:

$$|\varphi_x(t,x,u) - \varphi_x(t,\widehat{x},u)| \leq \overline{\omega}(|x - \widehat{x}|), \quad \forall t \in [0,T], \quad x, \widehat{x} \in \mathbb{R}^n, \quad u \in U.$$

Η συζυγής μεταβλητή $p(\cdot)$ και η συνάρτηση αξίας $V(\cdot,\cdot)$ παίζουν τον κύριο ρόλο στην αρχή μεγίστου και το δυναμικό προγραμματισμό αντίστοιχα. Το ακόλουθο θεώρημα λοιπόν, μας δίνει τη σχέση που υπάρχει ανάμεσα στο $p(\cdot)$ και στη συνάρτηση αξίας $V(\cdot,\cdot)$ με την προϋπόθεση ότι η $V(\cdot,\cdot)$ είναι αρκετά ομαλή.

Θεώρημα 3.0.3 *Έστω ότι ισχύουν οι υποθέσεις $(D1) - (D3)$ και $(s,y) \in [0,T) \times \mathbb{R}^n$ ένα σταθερό σημείο. Έστω ακόμη $(\overline{x}(\cdot), \overline{u}(\cdot), p(\cdot))$ να είναι μια βέλτιστη τριάδα του Προβλήματος D_{sy} . Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση αξίας $V \in C^{1,1}([0,T] \times \mathbb{R}^n)$. Τότε:*

$$\begin{aligned} V_t(t,\overline{x}(t)) =& H(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t),-V_x(t,\overline{x}(t))) \\ &= \max_{u\in U} H(t,\overline{x}(t),u,-V_x(t,\overline{x}(t))), \quad t \in [s,T] - \sigma.\pi. \,. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Επιπλέον, άν $V \in C^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R}^n)$ και η V_{tx} είναι επίσης συνεχής, τότε:

$$V_x(t,\overline{x}(t)) = -p(t), \quad \forall t \in [s,T].$$

Όπου η χαμιλτονιανή H ορίζεται από την (1.20). Την αντίστοιχη διατύπωση του Θεωρήματος 3.0.3, δηλαδή όταν η συνάρτηση αξίας είναι μη-ομαλή, μας τη δίνει το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 3.0.4 *Έστω ότι ισχύουν οι υποθέσεις* $(D1)-(D3)$ *και* $(s,y)\in[0,T)\times\mathbb{R}^n$ *ένα σταθερό σημείο. Έστω ακόμη* $(\overline{x}(\cdot),\overline{u}(\cdot),p(\cdot))$ *να είναι μια βέλτιστη τριάδα του Προβλήματος* D_{sy} *. Τότε:*

$$\begin{aligned} D^{1,-}_{t,x}V(t,\overline{x}(t)) &\subseteq \{(Ht,\overline{x}(t),\overline{u}(t),p(t),-p(t))\} \\ &\subseteq D^{1,+}_{t,x}V(t,\overline{x}(t)),\quad t\in[s,T]-\sigma.\pi.\ , \end{aligned}$$

$$D^{1,-}_{x}V(t,\overline{x}(t))\subseteq\{-p(t)\}\subseteq D^{1,+}_{x}V(t,\overline{x}(t)),\quad \forall t\in[s,T],$$

και

$$\begin{aligned} q =& H(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t),-p)=\max_{u\in U}H(t,\overline{x}(t),u,-p), \\ &\forall(q,p)\in D^{1,+}_{t,x}V(t,\overline{x}(t))\cup D^{1,-}_{t,x}V(t,\overline{x}(t)),\quad t\in[s,T]-\sigma.\pi.\ . \end{aligned}$$

(Για τον ορισμό των υπερ και υποδιαφορικών βλ. [JXZ] σελ 172.)

3.1 Ομαλή συνάρτηση αξίας

Θα ξεκινήσουμε λοιπόν τη μελέτη μας με την περίπτωση που η συνάρτηση αξίας $V(s,y)$ είναι αρκετά ομαλή και στη συνέχεια όταν δεν είναι ομαλή.

Θεώρημα 3.1.1 *Έστω ότι ισχύουν οι υποθέσεις* $(S1)'-(S2)'$ *(της Ενότητας 2.1.1) και έστω* $(s,y)\in[0,T)\times\mathbb{R}^n$ *ένα σταθερό σημείο. Έστω ότι το* $(\overline{x}(\cdot),\overline{u}(\cdot),p(\cdot),q(\cdot))$ *είναι μια βέλτιστη τετράδα του προβλήματος* (S_{sy}). *Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση αξίας* $V\in C^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R}^n)$. *Τότε ισχύει:*

$$\begin{aligned} V_t(t,\overline{x}(t)) &= G(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t),-V_x(t,\overline{x}(t)),-V_{xx}(t,\overline{x}(t))) \\ &= \max_{u\in U}G(t,\overline{x}(t),u,-V_x(t,\overline{x}(t)),-V_{xx}(t,\overline{x}(t))), \\ &\qquad t\in[s,T]-\sigma.\pi.\ ,\quad \mathbf{P}-\sigma.\pi. \end{aligned}\tag{3.5}$$

Επιπλέον, εάν $V\in C^{1,3}([0,T]\times\mathbb{R}^n)$ *και η* V_{tx} *είναι επίσης συνεχής, τότε:*

$$\begin{cases} V_x(t,\overline{x}(t))=-p(t),\quad \forall t\in[s,T],\ \mathbf{P}-\sigma.\pi.\ , \\ V_{xx}(t,\overline{x}(t))\sigma(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t))=-q(t),\quad t\in[s,T]-\sigma.\pi.\ ,\ \mathbf{P}-\sigma.\pi. \end{cases}\tag{3.6}$$

Απόδειξη: Από το Θεώρημα 2.1.2 έχουμε ότι

$$\begin{aligned} V(t,\overline{x}(t)) &= E\Big\{\int_t^T f(r,\overline{x}(r),\overline{u}(r))dr+h(\overline{x}(T))\mid\mathcal{F}^s_t\Big\}, \\ &\quad \mathbf{P}-\sigma.\pi.,\quad \forall t\in[s,T]. \end{aligned}\tag{3.7}$$

Ορίζουμε

$$m(t)\triangleq E\Big\{\int_s^T f(r,\overline{x}(r),\overline{u}(r))dr+h(\overline{x}(T))\mid\mathcal{F}^s_t\Big\},\quad t\in[s,T].\tag{3.8}$$

Ισχύει ότι το $m(\cdot)$ είναι ένα τετραγωνικό ολοκληρώσιμο $\mathcal{F}^s_t-martingale$ (υπενθυμίζοντας ότι το $s\in[0,T)$ είναι σταθερό σημείο). Έτσι από το Θεώρημα αναπαράστασης ενός martingale (βλ. [IKS] Θεώρημα 3.4.15 σελ 170) έχουμε

$$m(t)=m(s)+\int_s^t M(r)dW(r)\Rightarrow$$

$$m(t) = V(s,y) + \int_s^t M(r)dW(r), \quad t \in [s,T], \tag{3.9}$$

όπου $M \in (L^2_{\mathcal{F}}(s,T;\mathbb{R}^n))^m$. Οπότε από τις (3.7) και (3.9) ισχύει

$$\begin{aligned} V(t,\overline{x}(t)) &= m(t) - \int_s^t f(r,\overline{x}(r),\overline{u}(r))dr \\ &= V(s,y) - \int_s^t f(r,\overline{x}(r),\overline{u}(r))dr + \int_s^t M(r)dW(r). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Επιπλέον, εφαρμόζοντας τον κανόνα του Itô στην $V(t,\overline{x}(t))$ έχουμε το εξής

$$\begin{aligned} dV(t,\overline{x}(t)) = &\Big\{ V_t(t,\overline{x}(t)) + \langle V_x(t,\overline{x}(t)), b(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t))\rangle \\ &+ \frac{1}{2}\mathrm{tr}\Big(\sigma(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t))^\top V_{xx}(t,\overline{x}(t)\sigma(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t))\Big)\Big\}dt \\ &+ V_x(t,\overline{x}(t))^\top \sigma(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t))dW(t). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Συγκρίνοντας την (3.11) με την (3.10) συμπεραίνουμε ότι:

$$\begin{cases} V_t(t,\overline{x}(t)) + \langle V_x(t,\overline{x}(t)), b(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t))\rangle \\ \quad +\frac{1}{2}\mathrm{tr}\Big(\sigma(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t))^\top V_{xx}(t,\overline{x}(t))\sigma(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t))\Big) \\ \quad = -f(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t)), \\ V_x(t,\overline{x}(t))^\top \sigma(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t)) = M(t). \end{cases} \tag{3.12}$$

Από τη σχέση (3.12) λοιπόν και τον ορισμό της γενικευμένης χαμιλτονιανής G σχέση (2.14) παίρνουμε την πρώτη ισότητα της (3.5). Επίσης, αφού η $V \in C^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R}^n)$ τότε ικανοποιεί την HJB εξίσωση (2.13) έτσι λοιπόν συνεπάγεται και η δεύτερη ισότητα στη σχέση (3.5). Ακόμη από την εξίσωση (2.13) έχουμε

$$\begin{aligned} G(t,&\overline{x}(t),\overline{u}(t),-V_x(t,\overline{x}(t)),-V_{xx}(t,\overline{x}(t))) - V_t(t,\overline{x}(t)) = 0 \\ &\geq G(t,x,\overline{u}(t),-V_x(t,x),-V_{xx}(t,x)) - V_t(t,x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Συνεπώς, αν $V \in C^{1,3}([0,T]\times\mathbb{R}^n)$ και η V_{tx} να είναι επίσης συνεχής, τότε

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big\{G(t,x,\overline{u}(t),-V_x(t,x),-V_{xx}(t,x)) - V_t(t,x)\Big\}\Big|_{x=\overline{x}(t)} = 0. \tag{3.14}$$

Από την (2.14) η παραπάνω σχέση γράφεται ως εξής

$$\begin{aligned} &V_{tx}(t,\overline{x}(t)) + V_{xx}(t,\overline{x}(t))b(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t)) \\ &\quad + b_x(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t))^\top V_x(t,\overline{x}(t)) \\ &\quad + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\Big(\sigma(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t))^\top V_{xxx}(t,\overline{x}(t))\sigma(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t))\Big) \\ &\quad + \sum_{j=1}^m \Big(\sigma_x^j(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t))\Big)^\top \Big(V_{xx}(t,\overline{x}(t))\sigma(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t))\Big)^j \\ &\quad + f_x(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t)) = 0, \end{aligned} \tag{3.15}$$

όπου

$$\mathrm{tr}(\sigma^\top V_{xxx}\sigma) \triangleq \Big(\mathrm{tr}(\sigma^\top((V_x)^1)_{xx}\sigma),\ldots,\mathrm{tr}(\sigma^\top((V_x)^n)_{xx}\sigma)\Big)^\top,$$

με

$$((V_x)^1, \dots (V_x)^n)^\top \equiv V_x.$$

Επιπλέον, εφαρμόζοντας τον κανόνα του Itô για τη συνάρτηση $V_x(t, \overline{x}(t))$ παίρνουμε (με τη βοήθεια και της σχέσης 3.15)

$$\begin{aligned} &dV_x(t, \overline{x}(t)) = \\ &\quad \Big\{ V_{tx}(t, \overline{x}(t)) + V_{xx}(t, \overline{x}(t)) b(t, \overline{x}(t), \overline{u}(t)) \\ &\quad + \frac{1}{2} \mathrm{tr}\Big(\sigma(t, \overline{x}(t), \overline{u}(t))^\top V_{xxx}(t, \overline{x}(t)) \sigma(t, \overline{x}(t), \overline{u}(t)) \Big) \Big\} dt \\ &\quad + V_{xx}(t, \overline{x}(t)) \sigma(t, \overline{x}(t), \overline{u}(t)) dW(t) = \\ &\quad - \Big\{ b_x(t, \overline{x}(t), \overline{u}(t)))^\top V_x(t, \overline{x}(t)) + f_x(t, \overline{x}(t), \overline{u}(t)) \\ &\quad + \sum_{j=1}^m \Big(\sigma_x^j(t, \overline{x}(t), \overline{u}(t)) \Big)^\top \Big(V_{xx}(t, \overline{x}(t))^\top \sigma(t, \overline{x}(t), \overline{u}(t)) \Big)^j \Big\} dt \\ &\quad + V_{xx}(t, \overline{x}(t)) \sigma(t, \overline{x}(t), \overline{u}(t)) dW(t). \end{aligned} \tag{3.16}$$

Ακόμη έχουμε ότι

$$-V_x(T, \overline{x}(T)) = -h_x(\overline{x}(T)).$$

Έτσι από τη μοναδικότητα των λύσεων της (1.8) (με $t \in [s, T]$) παίρνουμε την (3.6).

□

3.2 Μη ομαλή συνάρτηση αξίας: διαφορικά χωρικής μεταβλητής

Σ' αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε την περίπτωση όπου η συνάρτηση αξίας δεν είναι απαραίτητα ομαλή. Να σημειώσουμε ότι αυτό είναι πιθανόν να συμβεί αν το υποκείμενο στοχαστικό σύστημα είναι εκφυλιζόμενο. Για άλλη μια φορά λοιπόν θα χρησιμοποιήσουμε την θεωρία των λύσεων ιξώδους ΜΔΕ δεύτερης τάξης, ώστε να μελετήσουμε τη σχέση ανάμεσα στην ΑΜ και το ΔΠ. Θα εξάγουμε λοιπόν, την διατύπωση της (3.6) στη περίπτωση που η συνάρτηση αξίας δεν είναι ομαλή ενώ στην επόμενη ενότητα θα ασχοληθούμε με την αντίστοιχη περίπτωση της (3.5).

Ας δώσουμε όμως τώρα τους ορισμούς των μερικών υπερ- και υποδιαφορικών για κάθε μία από τις μεταβλητές t και x.

Ορισμός 3.2.1 *Για $\upsilon \in C([0,T] \times \mathbb{R}^n)$ και $(\widehat{t}, \widehat{x}) \in [0, T) \times \mathbb{R}^n$ ορίζουμε:*

$$\begin{cases} D_x^{2,+} \upsilon(\widehat{t}, \widehat{x}) = \Big\{ (p, P) \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}^n \mid \\ \qquad \varlimsup_{x \to \widehat{x}} \dfrac{\upsilon(\widehat{t}, x) - \upsilon(\widehat{t}, \widehat{x}) - \langle p, x - \widehat{x} \rangle - \frac{1}{2}(x - \widehat{x})^\top P (x - \widehat{x})}{|x - \widehat{x}|^2} \leq 0 \Big\}, \\ D_x^{2,-} \upsilon(\widehat{t}, \widehat{x}) = \Big\{ (p, P) \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}^n \mid \\ \qquad \varliminf_{x \to \widehat{x}} \dfrac{\upsilon(\widehat{t}, x) - \upsilon(\widehat{t}, \widehat{x}) - \langle p, x - \widehat{x} \rangle - \frac{1}{2}(x - \widehat{x})^\top P (x - \widehat{x})}{|x - \widehat{x}|^2} \geq 0 \Big\}, \end{cases} \tag{3.17}$$

και

$$\begin{cases} D^{1,+}_{t+}v(\widehat{t},\widehat{x}) = \Big\{ q \in \mathbb{R} \mid \overline{\lim_{t\downarrow\widehat{t}}} \dfrac{v(t,\widehat{x}) - v(\widehat{t},\widehat{x}) - q(t-\widehat{t})}{|t-\widehat{t}|} \le 0 \Big\}, \\ D^{1,-}_{t+}v(\widehat{t},\widehat{x}) = \Big\{ q \in \mathbb{R} \mid \underline{\lim_{t\downarrow\widehat{t}}} \dfrac{v(t,\widehat{x}) - v(\widehat{t},\widehat{x}) - q(t-\widehat{t})}{|t-\widehat{t}|} \ge 0 \Big\}. \end{cases} \tag{3.18}$$

Για ευκολία ορίζουμε $[S,\infty) \overset{\Delta}{=} \Big\{ \widehat{S} \in \mathcal{S}^n \mid \widehat{S} \ge S \Big\}$ για κάθε $S \in \mathcal{S}^n$, όμοια και για το $(-\infty, S]$. Το ακόλουθο λοιπόν θεώρημα μας δίνει την αντίστοιχη διατύπωση της (3.6) για μη-ομαλή συνάρτηση αξίας .

Θεώρημα 3.2.1 *Έστω ότι ισχύουν οι υποθέσεις $(S1)'$, $(S2)'$ (της Ενότητας 2.1.1) και $(S3)$ (της Ενότητας 1.1) και $(s,y) \in [0,T)\times\mathbb{R}^n$ ένα σταθερό σημείο. Αν το $(\overline{x}(\cdot),\overline{u}(\cdot),p(\cdot),q(\cdot),P(\cdot),Q(\cdot))$ είναι μια βέλτιστη εξάδα του προβλήματος (S_{sy}) τότε:*

$$\{-p(t)\} \times [-P(t),\infty) \subseteq D^{2,+}_x V(t,\overline{x}(t)), \quad \forall t \in [s,T],\ \mathbf{P}-\sigma.\pi.\ , \tag{3.19}$$

$$D^{2,-}_x V(t,\overline{x}(t)) \subseteq \{-p(t)\} \times (-\infty,-P(t)], \quad \forall t \in [s,T],\ \mathbf{P}-\sigma.\pi. \tag{3.20}$$

Απόδειξη: Η απόδειξη χωρίζεται σε τρία βήματα.
Βήμα 1. Εξισώσεις μεταβολών.

Έστω $t \in [s,T]$. Για οποιοδήποτε $z \in \mathbb{R}^n$, συμβολίζουμε με $x^z(\cdot)$ τη λύση της ακόλουθης εξίσωσης στο $[t,T]$, η οποία είναι μια ΣΔΕ στο χώρο $\Big(\Omega,\mathcal{F},\{\mathcal{F}^s_r\}_{r\ge s},\mathbf{P}(\cdot \mid \mathcal{F}^s_t)(\omega)\Big)$ για $\mathbf{P}-\sigma.\pi.$

$$x^z(r) = z + \int_t^r b(\alpha,x^z(\alpha),\overline{u}(\alpha))d\alpha + \int_t^r \sigma(\alpha,x^z(\alpha),\overline{u}(\alpha))dW(\alpha). \tag{3.21}$$

Θέτω $\xi^z(r) = x^z(r) - \overline{x}(r)$. Οπότε ισχύει η ακόλουθη ανισότητα για κάθε $k \ge 1$ (βλ. [JXZ] Κεφάλαιο 1, Θεώρημα 6.3)

$$E\left\{ \sup_{t\le r\le T} |\xi^z(r)|^{2k} \mid \mathcal{F}^s_t \right\} \le K|z-\overline{x}(t)|^{2k}, \quad \mathbf{P}-\sigma.\pi. \tag{3.22}$$

Τώρα γράφουμε την εξίσωση για το $\xi^z(\cdot)$ με δύο διαφορετικούς τρόπους βασισμένοι σε διαφορετικές τάξεις αναπτυγμάτων

$$\begin{cases} d\xi^z(r) = \overline{b}_x(r)\xi^z(r)dr + \sum_{j=1}^m \overline{\sigma}^j_x(r)\xi^z(r)dW^j(r) \\ \qquad\qquad +\varepsilon_{z1}(r)dr + \sum_{j=1}^m \varepsilon^j_{z2}(r)dW^j(r), \quad r \in [t,T], \\ \xi^z(t) = z - \overline{x}(t), \end{cases} \tag{3.23}$$

και

$$\begin{cases} d\xi^z(r) = \Big\{ \overline{b}_x(r)\xi^z(r) + \dfrac{1}{2}\xi^z(r)^\top \overline{b}_{xx}(r)\xi^z(r) \Big\} dr \\ \qquad + \sum_{j=1}^m \Big\{ \overline{\sigma}^j_x(r)\xi^z(r) + \dfrac{1}{2}\xi^z(r)^\top \overline{\sigma}^j_{xx}(r)\xi^z(r) \Big\} dW^j(r) \\ \qquad +\varepsilon_{z3}(r)dr + \sum_{j=1}^m \varepsilon^j_{z4}(r)dW^j(r), \quad s \in [t,T], \\ \xi^z(t) = z - \overline{x}(t), \end{cases} \tag{3.24}$$

όπου

$$\begin{cases} \overline{b}_x(r) \triangleq b_x(r, \overline{x}(r), \overline{u}(r)), \quad \overline{\sigma}_x^j(r) \triangleq \sigma_x^j(r, \overline{x}(r), \overline{u}(r)), \\ \xi^z(r)^\top \overline{b}_{xx}(r)\xi^z(r) \triangleq (\xi^z(r)^\top \overline{b}_{xx}^1(r)\xi^z(r), \ldots, \xi^z(r)^\top \overline{b}_{xx}^n(r)\xi^z(r))^\top, \\ \xi^z(r)^\top \overline{\sigma}_{xx}^j(r)\xi^z(r) \triangleq (\xi^z(r)^\top \overline{\sigma}_{xx}^{1j}(r)\xi^z(r), \ldots, \xi^z(r)^\top \overline{\sigma}_{xx}^{nj}(r)\xi^z(r))^\top, \\ \overline{b}_{xx}^i(r) \triangleq b_{xx}^i(r, \overline{x}(r), \overline{u}(r)), \\ \overline{\sigma}_{xx}^{ij}(r) \triangleq \sigma_{xx}^{ij}(r, \overline{x}(r), \overline{u}(r)), \end{cases}$$

και

$$\begin{cases} \varepsilon_{z1}(r) \triangleq \int_0^1 \{b_x(r, \overline{x}(r) + \theta\xi^z(r), \overline{u}(r)) - \overline{b}_x(r)\}\xi^z(r)d\theta, \\ \varepsilon_{z2}^j(r) \triangleq \int_0^1 \{\sigma_x^j(r, \overline{x}(r) + \theta\xi^z(r), \overline{u}(r)) - \overline{\sigma}_x^j(r)\}\xi^z(r)d\theta, \\ \varepsilon_{z3}(r) \triangleq \int_0^1 (1-\theta)\xi^z(r)^\top \{b_{xx}(r, \overline{x}(r) + \theta\xi^z(r), \overline{u}(r)) - \overline{b}_{xx}(r)\}\xi^z(r)d\theta, \\ \varepsilon_{z4}^j(r) \triangleq \int_0^1 (1-\theta)\xi^z(r)^\top \{\sigma_{xx}^j(r, \overline{x}(r) + \theta\xi^z(r), \overline{u}(r)) - \overline{\sigma}_{xx}^j(r)\}\xi^z(r)d\theta. \end{cases}$$

Βήμα 2. Εκτιμήσεις των υπόλοιπων όρων.

Για οποιοδήποτε $k \geq 1$ υπάρχει μια ντετερμινιστική συνεχής και αύξουσα συνάρτηση $\delta : [0, \infty) \to [0, \infty)$, ανεξάρτητη του $z \in \mathbb{R}^n$ με $\lim_{r \to 0} \dfrac{\delta(r)}{r} = 0$ έτσι ώστε

$$\begin{cases} E\left[\int_t^T |\varepsilon_{z1}(r)|^{2k} dr \mid \mathcal{F}_t^s\right](\omega) \leq \delta(|z - \overline{x}(t,\omega)|^{2k}), \quad \mathbf{P} - \sigma.\pi.\ , \\ E\left[\int_t^T |\varepsilon_{z2}^j(r)|^{2k} dr \mid \mathcal{F}_t^s\right](\omega) \leq \delta(|z - \overline{x}(t,\omega)|^{2k}), \quad \mathbf{P} - \sigma.\pi.\ , \end{cases} \tag{3.25}$$

και

$$\begin{cases} E\left[\int_t^T |\varepsilon_{z3}(r)|^{k} dr \mid \mathcal{F}_t^s\right](\omega) \leq \delta(|z - \overline{x}(t,\omega)|^{2k}), \quad \mathbf{P} - \sigma.\pi.\ , \\ E\left[\int_t^T |\varepsilon_{z4}^j(r)|^{k} dr \mid \mathcal{F}_t^s\right](\omega) \leq \delta(|z - \overline{x}(t,\omega)|^{2k}), \quad \mathbf{P} - \sigma.\pi. \end{cases} \tag{3.26}$$

(Για τις αποδείξεις των (3.25) και (3.26) βλ. [JXZ] σελ 258-259).

Βήμα 3. Σχέση δυαδικότητας.

Εφαρμόζοντας το Λήμμα 1.4.2 (σχέση δυαδικότητας) για τα $\xi^z(\cdot)$ και $p(\cdot)$, που ικανοποιούν τις (3.24) και (1.8) (με $t \in [s,T]$) αντίστοιχα, και ορίζοντας $\overline{f}_x(r) := f_x(r, \overline{x}(r), \overline{u}(r))$ παίρνουμε τα εξής

$$\begin{aligned} &E\Big\{\mathrm{tr}[p(t)\xi^z(t)] - \mathrm{tr}[p(T)\xi^z(T)]\Big\} = \\ &E\int_t^T \Big\{\mathrm{tr}\Big[-\overline{b}_x(r)^\top p(r)\xi^z(r) - \sum_{j=1}^m \overline{\sigma}_x^j(r)^\top q_j(r)\xi^z(r) + \overline{f}_x(r)\xi^z(r) + \overline{b}_x(r)\xi^z(r)p(r) + \\ &\frac{1}{2}\xi^z(r)^\top \overline{b}_{xx}(r)\xi^z(r)p(r) + \varepsilon_{z3}(r)p(r) + \sum_{j=1}^m \big\{q_j(r)\overline{\sigma}_x^j(r)\xi^z(r) + \\ &\frac{1}{2}\xi^z(r)^\top \overline{\sigma}_{xx}^j(r)\xi^z(r)q_j(r) + \varepsilon_{z4}^j(r)q_j(r)\big\}\Big]\Big\}dr. \end{aligned}$$

Οπότε, διαγράφοντας τους αντίθετους όρους και αντικαθιστώντας $p(T) = -h_x(\overline{x}(T))$ έχουμε

$$E\Big\{\mathrm{tr}[p(t)\xi^z(t)] + \mathrm{tr}[h_x(\overline{x}(T))\xi^z(T)]\Big\} =$$
$$E\int_t^T \Big\{tr\Big[\overline{f}_x(r)\xi^z(r) + \frac{1}{2}\xi^z(r)^\top \overline{b}_{xx}(r)\xi^z(r)p(r) + \varepsilon_{z3}(r)p(r) +$$
$$\sum_{j=1}^m \big\{\frac{1}{2}\xi^z(r)^\top \overline{\sigma}^j_{xx}(r)\xi^z(r)q_j(r) + \varepsilon^j_{z4}(r)q_j(r)\big\}\Big]\Big\}dr,$$

τέλος, χρησιμοποιώντας την ιδιότητα $\mathrm{tr}[AB^\top] = \langle A, B\rangle$ καταλήγω στην

$$\begin{aligned} E\Big\{ \int_t^T &\langle \overline{f}_x(r), \xi^z(r)\rangle dr + \langle h_x(\overline{x}(T)), \xi^z(T)\rangle \mid \mathcal{F}^s_t\Big\} \\ &= \langle -p(t), \xi^z(t)\rangle - E\Big\{\frac{1}{2}\int_t^T \{\langle p(r), \xi^z(r)^\top \overline{b}_{xx}(r)\xi^z(r)\rangle \\ &+ \sum_{j=1}^m \langle q_j(r), \xi^z(r)^\top \overline{\sigma}^j_{xx}(r)\rangle\}dr - \\ &\int_t^T \{\langle p(r), \varepsilon_{z3}(r)\rangle + \sum_{j=1}^m \langle q_j(r), \varepsilon^j_{z4}(r)\rangle\}dr \mid \mathcal{F}^s_t\Big\}, \quad \mathbf{P}-\sigma.\pi. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Επιπλέον, θέτοντας $\Phi^z(r) \triangleq \xi^z(r)\xi^z(r)^\top$ και εφαρμόζοντας τον κανόνα του Itô έχουμε

$$\left\{\begin{array}{l} d\Phi^z(r) = \{\overline{b}_x(r)\Phi^z(r) + \Phi^z(r)\overline{b}_x(r)^\top \\ \qquad + \sum_{j=1}^m \overline{\sigma}^j_x(r)\Phi^z(r)\overline{\sigma}^j_x(r)^\top + \varepsilon_{z5}(r)\}dr \\ \qquad + \sum_{j=1}^m\{\overline{\sigma}^j_x(r)\Phi^z(r) + \Phi^z(r)\overline{\sigma}^j_x(r)^\top + \varepsilon^j_{z6}(r)\}dW^j(r), \quad r\in[t,T], \\ \Phi^z(t) = \xi^z(t)\xi^z(t)^\top, \end{array}\right. \tag{3.28}$$

όπου

$$\left\{\begin{array}{l} \varepsilon_{z5}(r) \triangleq \varepsilon_{z1}(r)\xi^z(r)^\top + \xi^z(r)\varepsilon_{z1}(r)^\top \\ \qquad + \sum_{j=1}^m\{\overline{\sigma}^j_x(r)\xi^z(r)\varepsilon^j_{z2}(r)^\top + \varepsilon^j_{z2}(r)\xi^z(r)^\top\overline{\sigma}^j_x(r)^\top + \varepsilon^j_{z2}(r)\varepsilon^j_{z2}(r)^\top\}, \\ \varepsilon^j_{z6}(r) \triangleq \varepsilon^j_{z2}(r)\xi^z(r)^\top + \xi^z(r)\varepsilon^j_{z2}(r)^\top. \end{array}\right.$$

Εφαρμόζοντας ξανά το Λήμμα 1.4.2 για τα $\Phi^z(\cdot)$ και $P(\cdot)$, που ικανοποιούν τις (3.28) και (1.9) (με $t\in[s,T]$) αντίστοιχα, έχουμε

$$E\Big\{\mathrm{tr}[P(t)\Phi^z(t)] - \mathrm{tr}[P(T)\Phi^z(T)]\Big\} =$$
$$\int_t^T \Big\{\mathrm{tr}\Big[-\overline{b}_x(r)^\top P(r)\Phi^z(r) - P(r)\overline{b}_x(r)\Phi^z(r) - \sum_{j=1}^m \overline{\sigma}^j_x(r)^\top P(r)\overline{\sigma}^j_x(r)\Phi^z(r) -$$
$$\sum_{j=1}^m \big\{\overline{\sigma}^j_x(r)^\top Q_j(r)\Phi^z(r) + Q_j(r)\overline{\sigma}^j_x(r)\Phi^z(r)\big\} - H_{xx}(r)\Phi^z(r) + \overline{b}_x(r)\Phi^z(r)P(r) +$$
$$\Phi^z(r)\overline{b}_x(r)^\top P(r) + \sum_{j=1}^m \overline{\sigma}^j_x(r)\Phi^z(r)\overline{\sigma}^j_x(r)^\top P(r) + \varepsilon_{z5}(r)P(r) +$$
$$\sum_{j=1}^m \overline{\sigma}^j_x(r)\Phi^z(r)Q_j(r) + \Phi^z(r)\overline{\sigma}^j_x(r)^\top Q_j(r) + \varepsilon^j_{z6}(r)Q_j(r)\Big]\Big\}dr.$$

Διαγράφοντας τους αντίθετους όρους και αντικαθιστώντας $P(T) = -h_{xx}(\overline{x}(T))$ έχουμε

$$E\Big\{\mathrm{tr}[P(t)\Phi^z(t)] + \mathrm{tr}[h_{xx}(\overline{x}(T)\Phi^z(T)]\Big\} =$$
$$\int_t^T \Big\{\mathrm{tr}\Big[-H_{xx}(r)\Phi^z(r) + \varepsilon_{z5}(r)P(r) + \sum_{j=1}^m \varepsilon_{z6}^j(r)Q_j(r)\Big]\Big\}dr.$$

Επίσης, κάνοντας την εξής αντικατάσταση $\Phi^z(t) = \xi^z(t)\xi^z(t)^\top$ παίρνουμε

$$E\Big\{\mathrm{tr}[P(t)\xi^z(t)\xi^z(t)^\top] + \mathrm{tr}[h_{xx}(\overline{x}(T)\xi^z(t)\xi^z(t)^\top]\Big\} =$$
$$\int_t^T \Big\{\mathrm{tr}\Big[-H_{xx}(r)\xi^z(t)\xi^z(t)^\top + \varepsilon_{z5}(r)P(r) + \sum_{j=1}^m \varepsilon_{z6}^j(r)Q_j(r)\Big]\Big\}dr,$$

οπότε από εδώ καταλήγουμε στην

$$\begin{aligned}
&-E\Big\{\int_t^T \xi^z(r)^\top H_{xx}(r)\xi^z(r)dr + \xi^z(T)^\top h_{xx}(\overline{x}(T))\xi^z(T) \mid \mathcal{F}_t^s\Big\} \\
&\quad = -\xi^z(t)^\top P(t)\xi^z(t) - E\Big\{\int_t^T \mathrm{tr}[P(r)\varepsilon_{z5}(r) + \sum_{j=1}^m Q_j(r)\varepsilon_{z6}^j(r)]dr \mid \mathcal{F}_t^s\Big\}, \quad \mathbf{P}-\sigma.\pi.
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Βήμα 4. Ολοκλήρωση της απόδειξης.

Ας συμβολίσουμε ένα $z \in \mathbb{R}^n$ ρητό άν όλες του οι συντεταγμένες είναι ρητοί αριθμοί. Αφού το σύνολο όλων των ρητών $z \in \mathbb{R}^n$ είναι μετρήσιμο, μπορούμε να βρούμε ένα υποσύνολο $\Omega_0 \subseteq \Omega$ με $P(\Omega_0) = 1$ έτσι ώστε για κάθε $\omega_0 \in \Omega_o$ να ισχύει

$$\begin{cases}
V(t,\overline{x}(t,\omega_0)) = E\Big\{\int_t^T f(r,\overline{x}(r),\overline{u}(r))dr + h(\overline{T}) \mid \mathcal{F}_t^s\Big\}(\omega_0), \\
\text{οι } (3.23), (3.25), (3.26), (3.27), (3.29) \text{ ικανοποιούνται για κάθε ρητό } z, \\
(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot \mid \mathcal{F}_t^s)(\omega_0), W(\cdot) - W(t); \overline{u}(\cdot)\mid_{[t,T]}) \in \mathcal{U}^w[t,T] \text{ και} \\
\sup\limits_{s\le r\le T}(|p(r,\omega_0)| + |P(r,\omega_0)|) < +\infty.
\end{cases}$$

Η πρώτη ισότητα ισχύει λόγο της αρχής βελτίστου κατά Bellman (Θεώρημα 2.1.2) ενώ η τελευταία ανισότητα ισχύει δεδομένου ότι $E\sup\limits_{s\le r\le T}(|p(r)|^2 + |P(r)|^2) < +\infty$ (βλ. [JXZ] σελ 349). Έστω ένα σταθερό $\omega_0 \in \Omega_0$ και ορίζουμε $E^t \triangleq E(\cdot \mid \mathcal{F}_t^s)(\omega_0)$. Τότε για κάθε ρητό $z \in \mathbb{R}^n$ έχουμε

$$\begin{aligned}
&V(t,z) - V(t,\overline{x}(t,\omega_0)) \\
&\quad \le E^t\Big\{\int_t^T \{f(r,x^z(r),\overline{u}(r)) - \overline{f}(r)\}dr + h(x^z(T)) - h(\overline{x}(T))\Big\} \\
&\quad = E^t\Big\{\int_t^T \langle \overline{f}_x(r), \xi^z(r)\rangle dr + \langle h_x(\overline{x}(T)), \xi^z(T)\rangle\Big\} \\
&\quad + \frac{1}{2}E^t\Big\{\int_t^T \xi^z(r)^\top \overline{f}_{xx}(r)\xi^z(r)dr + \xi^z(T)^\top h_{xx}(\overline{x}(T))\xi^z(T)\Big\} \\
&\quad + o(|z-\overline{x}(t,\omega_0)|^2).
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Από τις σχέσεις (3.27) και (3.29) ισχύει

$$\begin{aligned} V(t,z) - V(t,\overline{x}(t,\omega_0)) &\leq -\langle p(t,\omega_0), \xi^z(t,\omega_0)\rangle \\ &- E^t\Big\{\frac{1}{2}\int_t^T \xi^z(r)^\top H_{xx}(r)\xi^z(r)dr + \frac{1}{2}\xi^z(T)^\top h_{xx}(\overline{x}(T))\xi^z(T)\Big\} \\ &+ o(|z-\overline{x}(t,\omega_0)|^2) = -\langle p(t,\omega_0), \xi^z(t,\omega_0)\rangle \\ &- \frac{1}{2}\xi^z(t,\omega_0)^\top P(t,\omega_0)\xi^z(t,\omega_0) + o(|z-\overline{x}(t,\omega_0)|^2) = -\langle p(t,\omega_0), z-\overline{x}(t,\omega_0)\rangle \\ &- \frac{(z-\overline{x}(t,\omega_0))^\top P(t,\omega_0)(z-\overline{x}(t,\omega_0))}{2} + o(|z-\overline{x}(t,\omega_0)|^2). \end{aligned} \tag{3.31}$$

Να σημειώσουμε ότι ο όρος $o(|z-\overline{x}(t,\omega_0)|)$ εξαρτάται μόνο από το μέγεθος του $|z-\overline{x}(t,\omega_0)|$ και είναι ανεξάρτητος του z. Επομένως από τη συνέχεια της $V(t,\cdot)$ έχουμε ότι η (3.31) ισχύει για κάθε $z \in \mathbb{R}^n$ και συνεπώς

$$(-p(t), -P(t)) \in D_x^{2,+}V(t,\overline{x}(t)). \tag{3.32}$$

Έτσι από την (3.17) λαμβάνουμε την (3.19).
Ας αποδείξουμε τώρα την (3.20). Έστω ένα δεδομένο $\omega \in \Omega$ έτσι ώστε η (3.31) να ισχύει για κάθε $z \in \mathbb{R}^n$. Για οποιοδήποτε $(p,P) \in D_x^{2,-}V(t,\overline{x}(t))$, από τον Ορισμό 3.2.1, έχουμε

$$\begin{aligned} 0 &\leq \varliminf_{x\to\overline{x}(t)} \frac{V(t,z) - V(t,\overline{x}(t)) - \langle p, z-\overline{x}(t)\rangle - \frac{1}{2}(z-\overline{x}(t))^\top P(z-\overline{x}(t))}{|z-\overline{x}(t)|^2} \\ &\leq \varliminf_{x\to\overline{x}(t)} \frac{-\langle p(t)+p, z-\overline{x}(t)\rangle - \frac{1}{2}(z-\overline{x}(t))^\top (P(t)+P)(z-\overline{x}(t))}{|z-\overline{x}(t)|^2}, \end{aligned}$$

όπου η τελευταία ανισότητα ισχύει λόγο της (3.31). Επομένως

$$p = -p(t), \quad P \leq -P(t).$$

Οπότε ισχύει η (3.20) .

□

Είναι ενδιαφέρον να σημειώσουμε ότι αν $V \in C^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R}^n)$ τότε οι (3.19) – (3.20) γράφονται στη μορφή

$$\begin{cases} V_x(t,\overline{x}) = -p(t), \\ V_{xx}(t,\overline{x}(t)) \leq -P(t). \end{cases} \tag{3.33}$$

3.3 Μη ομαλή συνάρτηση αξίας: διαφορικά χρονικής μεταβλητής

Σ' αυτή την παράγραφο προχωρούμε στη μελέτη των υπερ- και υποδιαφορικών της συνάρτησης αξίας στην μεταβλητή του χρόνου t μαζί με μια βέλτιστη τροχιά. Παρρόλο που στην ντετερμινιστική περίπτωση τα υπερδιαφορικά της συνάρτησης αξίας στο χρόνο t εκφράζονται με τη βοήθεια της $H(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t),p(t))$, η οποία είναι η μέγιστη τιμή της $H(t,\overline{x}(t),u,p(t))$ ως προς $u \in U$, στη στοχαστική περίπτωση δεν είναι η γενικευμένη χαμιλτονιανή G που θα μεγιστοποιηθεί κατά την αρχή μεγίστου (εκτός και αν η V είναι αρκετά ομαλή, δες (3.5)). Αντί λοιπόν αυτής (της γενικευμένης χαμιλτονιανής) εμφανίζεται στην αρχή στοχαστικού μεγίστου η ακόλουθη συνάρτηση

$$\mathcal{H}(t,x,u) \stackrel{\Delta}{=} G(t,x,u,p(t),P(t)) + \mathrm{tr}\Big(\sigma(t,x,u)^\top [q(t) - P(t)\sigma(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t))]\Big), \qquad (3.34)$$

όπου $p(\cdot), q(\cdot)$ και $P(\cdot)$ είναι οι λύσεις των (1.8) και (1.9) που σχετίζονται με το βέλτιστο ζευγάρι $(\overline{x}(\cdot), \overline{u}(\cdot))$. Έτσι λοιπόν έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 3.3.1 *Υπό τις ίδιες υποθέσεις του Θεωρήματος 3.2.1 έχουμε:*

$$\mathcal{H}(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t)) \in D^{1,+}_{t+} V(t,\overline{x}(t)), \quad t \in [s,T] - \sigma.\pi.\ ,\ \mathbf{P} - \sigma.\pi. \qquad (3.35)$$

Απόδειξη: Η μέθοδος της απόδειξης είναι παρόμοια με αυτή του Θεωρήματος 3.2.1 . (Για πιο αναλυτικά ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στο [JXZ] σελ 263).

□

Κεφάλαιο 4

Το πρόβλημα ρύπανσης της ρηχής λίμνης

4.1 Περιγραφή του προβλήματος

Οι ρηχές λίμνες είναι ένα από τα πιο εύθραστα είδη οικοσυστημάτων στον κόσμο και είναι γενικά τα πρώτα που επηρεάζονται άμεσα από τις διάφορες αναπτυξιακές δραστηριότητες. Εκατομμύρια άνθρωποι ζούν κοντά στις όχθες ρηχών λιμνών και οι ζωές τους εξαρτώνται από την περιβαντολογική κατάσταση των λιμνών. Επιπλέον, οι ρηχές λίμνες, συνήθως, βρίσκονται κοντά σε καλλιεργήσιμες εκτάσεις το οποίο τις κάνει ακόμη πιο ευάλωτες στις ανθρώπινες δραστηριότητες. Έτσι, μπορεί εύκολα να γίνει κατανοητό γιατί υπάρχει μια ειδική μελέτη των ρηχών λιμνών, που ωστόσο έχει γίνει πιο έντονη μόνο πρόσφατα.

Η ρύπανση των ρηχών λιμνών είναι ένα φαινόμενο το οποίο παρατηρείται αρκετά συχνά και οφείλεται κυρίως στη βαριά χρήση λιπασμάτων στις γύρω περιοχές και στην αυξημένη εισροή λυμάτων από τους οικισμούς και τις βιομηχανίες. Ο φώσφορος, ο οποίος περιέχεται είτε στα λιπάσματα είτε σε ζωϊκά απόβλητα, είναι το κύριο θρεπτικό συστατικό των φυκιών και των ζηζανίων που ζούν στο νερό. Όταν λοιπόν αυξάνεται υπερβολικά, τότε αναπτύσονται τα φύκη τα οποία ελλατώνουν την περιεκτικότητα του οξυγόνου μέσα στη λίμνη και το φώς του ήλιου δέν είναι σε θέση να διεισδύσει στο νερό. Έτσι μια καθαρή, γαλάζια λίμνη (ολιγοτροφική λίμνη) με πράσινα φυτά μετατρέπεται σε μια λίμνη με πολύ μικρή ορατότητα, με σχεδόν καθόλου πράσινα φυτά και μείωση του πλήθους των ψαριών και γενικά των υδρόβιων ειδών (ευτροφική λίμνη).

Τα παραπάνω δημιουργούν την ανάγκη μιάς βέλτιστης διαχείρισης αυτού του είδους των οικοσυστημάτων. Το πρόβλημα βελτίστου ελέγχου που μελετάμε εδώ προέρχεται από το συνδυασμό δύο παραγόντων: από τη μια η ωφελιμότητα που μπορεί να προσφέρει η λίμνη για διάφορες γεωργικές δραστηριότητες και από την άλλη η χρησιμότητα μιας καθαρής λίμνης σε πολλές δραστηριότητες αναψυχής (αλίευση, πηγή πόσιμου νερού, εκδρομές κτλ.).

Πρόσφατες έρευνες έχουν εξάγει κάποια συμπεράσματα για το μέγιστο δυνατό επίπεδο του φωσφόρου μέσα στη λίμνη ώστε να βελτιστοποιείται η διαχείριση της στις διάφορες καταστάσεις που μπορεί να βρεθεί (ολιγοτροφική ή ευτροφική). Όμως οι περισσότερες έρευνες έχουν επικεντρωθεί στο ντετερμινιστικό μοντέλο και έτσι η στοχαστική δυναμική για τήν βέλτιστη διαχείριση των ρηχών λιμνών βρίσκεται σε αρχικά στάδια μελέτης.

Η σύζευξη του θορύβου σε μή γραμμικές ντετερμινιστικές εξισώσεις κίνησης μπορεί να οδηγήσει σε μή τετριμμένα αποτελέσματα. Για παράδειγμα ο θόρυβος μπορεί να σταθεροποιήσει μια ασταθή ισορροπία και να μετατοπίσει διακλαδώσεις, δηλαδή την τιμή της παραμέτρου κατά την οποία η δυναμική αλλάζει ποιοτικά. Ο θόρυβος μπορεί να οδηγήσει σε εναλλαγές μεταξύ συνυπαρχόντων ντετερμινιστικών σταθερών καταστάσεων. Ενδιαφέρον προκαλεί ακόμη το γεγονός ότι ο θόρυβος μπορεί να προκαλέσει στατιστικά προτιμώμενες καταστάσεις που δεν έχουν ντετερμινιστικό ανάλογο. Στο παρόν κεφάλαιο λοιπόν θα εισάγουμε τη στοχαστική έκδοση της οικονομικής ανάλυσης της ρύπανσης μιας ρηχής λίμνης.

4.2 Η βέλτιστη (optimal) Hamilton-Jacobi-Bellman εξίσωση (OHJB)

Το στοχαστικό δυναμικό σύστημα του προβλήματος είναι το εξής

$$\begin{cases} dx(t) = \left(u(t) - bx(t) + \dfrac{x^2(t)}{x^2(t)+1}\right)dt + \sigma x(t)dW(t), \quad t > 0, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{4.1}$$

όπου $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$ και $u_1(t), u_2(t)$ είναι οι ποσότητες του φωσφόρου με τις οποίες επιβαρύνουν η καθεμία από τις δύο κοινότητες στη λίμνη, $x(t)$ είναι η ποσότητα του φωσφόρου στα φύκη, b το ποσοστό που χάνεται εξαιτίας της καθίζησης, της διαρροής και της δέσμευσης από άλλες βιομάζες και σ ένας γραμμικά πολλαπλασιαστικός θόρυβος.

Υποθέτουμε ότι $u_i(t)>0,\ i = 1, 2,\ t \in [0, +\infty)$ και έχουμε ότι το τρέχων κόστος για την κάθε κοινότητα είναι $\ln(u_i) - cx^2$. Η λίμνη έχει αξία ως δεξαμενή γεωργικών αποβλήτων για τη γεωργία ($\ln u_i$) και επίσης παρέχει οικολογικές υπηρεσίες που μειώνονται με την ποσότητα του φωσφόρου ($-cx^2$). Η παράμετρος c (που στο πρόβλημα μας θεωρούμε ότι $c = 2$) καθορίζει το σχετικό βάρος για κάθε μια από αυτές τις δυο καταστάσεις.

Υποθέτουμε επίσης ότι το πρόβλημα έχει άπειρο χρονικό ορίζοντα, οπότε οι στόχοι W_i γίνονται

$$W_i = E\left\{\int_0^\infty e^{-\rho t}\left[\ln u_i(t) - cx^2(t)\right]dt\right\}, \quad i = 1, 2, \quad c = 2, \tag{4.2}$$

όπου $\rho>0$ είναι το προεξοφλητικό επιτόκιο. Η βέλτιστη διαχείριση της λίμνης (που είναι και ο σκοπός αυτού του κεφαλαίου) απαιτεί να μεγιστοποιήσουμε το άθροισμα όλων των W_i, υπό το δυναμικό σύστημα (4.1). Αυτό είναι ένα πρόβλημα βελτίστου ελέγχου και η συνάρτηση αξίας που το αντιπροσωπεύει είναι η

$$V(x_0) = \sup_{(u_1,u_2)\in U} E\left\{\int_0^\infty e^{-\rho t}[\ln(u_1(t)) + \ln(u_2(t)) - 2x^2(t)]dt\right\}. \tag{4.3}$$

Η γενικευμένη χαμιλτονιανή σ' αυτή την περίπτωση σύμφωνα με την (2.14) είναι η εξής

$$G(x, u, p, P) = \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 P + p\left(u - bx + \frac{x^2}{x^2+1}\right) + \sum_{i=1}^{2}\ln u_i - 2x^2. \tag{4.4}$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.3.1 και υποθέτοντας ότι η V είναι αρκετά ομαλή τότε ικανοποιεί την HJB εξίσωση (2.33), δηλαδή

$$\rho V = \sup_{u_1,u_2 \in B} G(x,u,DV,D^2V). \tag{4.5}$$

Όπου U είναι το σύνολο όλων των μετρήσιμων συναρτήσεων $(u_1,u_2) : [0,+\infty) \to B$ με $B = (0,+\infty)^2$.

Το παρακάτω λήμμα μας δίνει τη μορφή που μπορεί να πάρει η HJB εξίσωση (4.5) για τις διάφορες τιμές του DV.

Λήμμα 4.2.1 *Η Hamilton-Jacobi-Bellman εξίσωση που ικανοποιεί η συνάρτηση αξίας V παίρνει τη μορφή $\rho V = \left(\frac{x^2}{x^2+1} - bx\right) DV - 2\left(\ln(-DV) + x^2 + 1\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 D^2 V$ στην περίπτωση που $DV < 0$, ενώ αν $DV \geq 0$ τότε η χαμιλτονιανή G δεν μεγιστοποιείται .*

Απόδειξη: Από την (HJB) εξίσωση έχουμε

$$\begin{gathered}\rho V = \sup_{u_1,u_2 \in B}\left[\left(u - bx + \frac{x^2}{x^2+1}\right) DV + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 D^2 V + \sum_{i=1}^{2} \ln u_i - 2x^2\right] = \\ \left(-bx + \frac{x^2}{x^2+1}\right) DV + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 D^2 V - 2x^2 + \sup_{u \in B}\left[uDV + \sum_{i=1}^{2} \ln u_i\right].\end{gathered} \tag{4.6}$$

Ορίζω: $g(u) = g(u_1,u_2) = u_1 DV + u_2 DV + \ln u_1 + \ln u_2$.
Αν $DV < 0$ τότε:

$$\frac{\partial g(u_1,u_2)}{\partial u_1} = DV + \frac{1}{u_1} = 0 \Rightarrow u_1 = -\frac{1}{DV},$$
$$\frac{\partial g(u_1,u_2)}{\partial u_2} = DV + \frac{1}{u_2} = 0 \Rightarrow u_2 = -\frac{1}{DV},$$
$$\frac{\partial^2 g(u_1,u_2)}{\partial u_1^2} = -\frac{1}{u_1^2} < 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 g(u_1,u_2)}{\partial u_1^2}\left(-\frac{1}{DV}, -\frac{1}{DV}\right) = -DV^2,$$
$$\frac{\partial^2 g(u_1,u_2)}{\partial u_2^2} = -\frac{1}{u_2^2} < 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 g(u_1,u_2)}{\partial u_2^2}\left(-\frac{1}{DV}, -\frac{1}{DV}\right) = -DV^2,$$
$$\frac{\partial^2 g(u_1,u_2)}{\partial u_1 \partial u_2} = 0 \text{ και } D = \left(\frac{\partial^2 g(u_1,u_2)}{\partial u_1^2}\right)\left(\frac{\partial^2 g(u_1,u_2)}{\partial u_2^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 g(u_1,u_2)}{\partial u_1 \partial u_2}\right)^2 = DV^4 > 0.$$

Οπότε στο σημείο $\left(-\frac{1}{DV}, -\frac{1}{DV}\right)$ η συνάρτηση g παρουσιάζει μέγιστο το $g\left(-\frac{1}{DV}, -\frac{1}{DV}\right) = -1 - 1 + \ln\left(-\frac{1}{DV}\right) + \ln\left(-\frac{1}{DV}\right) = -2 - \ln(-DV) - \ln(-DV) = -2 - 2\ln(-DV)$.

Επομένως από την (4.6) έχω

$$\rho V = \left(\frac{x^2}{x^2+1} - bx\right) DV + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 D^2 V - 2x^2 - 2 - 2\ln(-DV) \Rightarrow$$
$$\rho V = \left(\frac{x^2}{x^2+1} - bx\right) DV - 2\left(\ln(-DV) + x^2 + 1\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 D^2 V.$$

Όμως, αν $DV \geq 0$ τότε η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}^2$ με

$$\lim_{(u_1,u_2)\to(+\infty,+\infty)} g(u_1,u_2) = +\infty$$

οπότε δεν παρουσιάζει μέγιστο, άρα η η χαμιλτονιανή G δεν μεγιστοποιείται .

$\square$

Παρατήρηση: Στην περίπτωση που η συνάρτηση αξίας V είναι ομαλή και η παράγωγος της είναι αρνητική, δηλαδή $DV < 0$, αναμένουμε ότι θα ικανοποιεί μια βέλτιστη (optimal) Hamilton-Jacobi-Bellman εξίσωση (OHJB), δηλαδή το sup της χαμιλτονιανής να ορίζεται, και αυτή θα είναι η εξής

$$\rho V = \left(\frac{x^2}{x^2+1} - bx\right) DV - 2\left(\ln(-DV) + x^2 + 1\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 D^2 V \quad \textbf{(OHJB)} \tag{4.7}$$

4.3 Στοχαστικό χαμιλτονιανό σύστημα

Στο Κεφάλαιο 1 μελετήσαμε το στοχαστικό πρόβλημα ελέγχου και είδαμε το Θεώρημα της αρχής στοχαστικού μεγίστου καθώς και το στοχαστικό χαμιλτονιανό σύστημα. Στο παρακάτω θεώρημα λοιπόν, εφαρμόζοντας αυτές τις θεωρίες για το πρόβλημα της ρηχής λίμνης που μελετάμε εδώ, εξάγουμε το βέλτιστο στοχαστικό χαμιλτονιανό σύστημα.

Θεώρημα 4.3.1 *Το βέλτιστο στοχαστικό χαμιλτονιανό σύστημα του προβλήματος μας είναι το εξής*

$$\begin{cases} d\bar{x}(t) = \left(\dfrac{-2e^{-\rho t}}{p(t)} - b\bar{x}(t) + \dfrac{\bar{x}^2(t)}{\bar{x}^2(t)+1}\right) dt + \sigma\bar{x}(t)dW(t), \\ dp(t) = \left[\left(b - \dfrac{2\bar{x}}{(\bar{x}^2+1)^2}\right) p(t) - \sigma q(t) + 4\bar{x}e^{-\rho t}\right] dt + q(t)dW(t), \end{cases} \tag{4.8}$$

με την προϋπόθεση ότι $p(t) < 0$, όπου $p(t), q(t)$ οι συζυγείς μεταβλητές και $\overline{x}(t)$ η βέλτιστη τροχιά.

Απόδειξη: Από τη στοχαστική διαφορική εξίσωση (1.8) έχουμε ότι

$$dp(t) = -\left[\left(-b + \frac{2\bar{x}}{(\bar{x}^2+1)^2}\right) p(t) + \sigma q(t) - 4\bar{x}e^{-\rho t}\right] dt + q(t)dW(t). \tag{4.9}$$

Επίσης σύμφωνα με την εξίσωση (1.10) η Χαμιλτονιανή H ορίζεται ως

$$H(t,x,u,p,q) = pu_1(t) + pu_2(t) - pbx + \frac{px^2}{x^2+1} + q\sigma x + \left(\ln(u_1) + \ln(u_2) - 2x^2\right) e^{-\rho t}.$$

Οπότε από την αρχή στοχαστικού μεγίστου (Θεώρημα 1.3.1 ειδική περίπτωση 1) έχω

$$H(t,\overline{x}(t), \overline{u}(t), p(t), q(t)) = \max_{u\in U} H(t, \overline{x}(t), u, p(t), q(t)).$$

Έστω λοιπόν η συνάρτηση

$$g(u_1(t), u_2(t)) = pu_1(t) + pu_2(t) - pbx + \frac{px^2}{x^2+1} + q\sigma x + \left(\ln(u_1) + \ln(u_2) - 2x^2\right) e^{-\rho t},$$

θα βρώ για πιό σημείο $(u_1(t), u_2(t))$ μεγιστοποιείται.

Έχω λοιπόν:
$\dfrac{\partial g(u_1,u_2)}{\partial u_1} = p + \dfrac{e^{-\rho t}}{u_1} = 0 \Rightarrow u_1 = -\dfrac{e^{-\rho t}}{p}$,
$\dfrac{\partial g(u_1,u_2)}{\partial u_2} = p + \dfrac{e^{-\rho t}}{u_2} = 0 \Rightarrow u_2 = -\dfrac{e^{-\rho t}}{p}$,
$\dfrac{\partial^2 g(u_1,u_2)}{\partial u_1^2} = -\dfrac{e^{-\rho t}}{u_1^2} < 0$,
$\dfrac{\partial^2 g(u_1,u_2)}{\partial u_2^2} = -\dfrac{e^{-\rho t}}{u_2^2} < 0$,
$\dfrac{\partial^2 g(u_1,u_2)}{\partial u_1^2}\left(-\dfrac{e^{-\rho t}}{p}, -\dfrac{e^{-\rho t}}{p}\right) = -p^2 e^{\rho t} = \dfrac{\partial^2 g(u_1,u_2)}{\partial u_2^2}\left(-\dfrac{e^{-\rho t}}{p}, -\dfrac{e^{-\rho t}}{p}\right)$,
$\dfrac{\partial^2 g(u_1,u_2)}{\partial u_1 \partial u_2} = 0$ και
$D = \left(\dfrac{\partial^2 g(u_1,u_2)}{\partial u_1^2}\right)\left(\dfrac{\partial^2 g(u_1,u_2)}{\partial u_2^2}\right) - \dfrac{\partial^2 g(u_1,u_2)}{\partial u_1 \partial u_2} = p^4 e^{2\rho t} > 0.$

Οπότε σύμφωνα με το κριτήριο μεγίστου στο $(\bar{u}_1, \bar{u}_2) = \left(-\dfrac{e^{-\rho t}}{p}, -\dfrac{e^{-\rho t}}{p}\right)$ έχω ολικό μέγιστο. Επομένως,

$$\bar{u}(t) = \bar{u}_1(t) + \bar{u}_2(t) = 2\bar{u}_1(t) \Rightarrow \bar{u}(t) = \frac{-2}{p(t)e^{\rho t}} \Rightarrow \bar{u}(t) = \frac{-2e^{-\rho t}}{p(t)}, \tag{4.10}$$

(αφού $\bar{u}_1(t) = \bar{u}_2(t)$)
άρα αντικαθιστώντας την (4.10) στην (4.1) και έχοντας υπ' όψιν τη σχέση (4.9) παίρνουμε το ακόλουθο βέλτιστο στοχαστικό χαμιλτονιανό σύστημα

$$\begin{cases} d\bar{x}(t) = \left(\dfrac{-2e^{-\rho t}}{p(t)} - b\bar{x}(t) + \dfrac{\bar{x}^2(t)}{\bar{x}^2(t)+1}\right)dt + \sigma\bar{x}(t)dW(t), \\ dp(t) = \left[\left(b - \dfrac{2\bar{x}}{\left(\bar{x}^2+1\right)^2}\right)p(t) - \sigma q(t) + 4\bar{x}e^{-\rho t}\right]dt + q(t)dW(t). \end{cases} \tag{4.11}$$

□

4.4 Μελέτη της συνάρτησης αξίας

4.4.1 Η συνάρτηση αξίας σαν μιά λύση ιξώδους

Στο πρόβλημα μας ο Ορισμός 2.3.1, των λύσεων ιξώδους, γράφεται ως εξής

Ορισμός 4.4.1 *Μία συνάρτηση V είναι λύση ιξώδους της HJB εξίσωσης στο $O \subseteq \mathbb{R}$, όπου O είναι ένα ανοιχτό διάστημα, αν ικανοποιούνται τα ακόλουθα:*

i. Για οποιαδήποτε $\varphi \in C^{1,2}(O)$, αν $y \in O$ είναι ένα τοπικό μέγιστο για την $V - \varphi$ τότε

$$\rho V(y) \leq \sup_{u \in U} G(y, u, D\varphi, D^2\varphi)$$

ii. Για οποιαδήποτε $\varphi \in C^{1,2}(O)$, αν $y \in O$ είναι ένα τοπικό ελάχιστο για την $V - \varphi$ τότε

$$\rho V(y) \geq \sup_{u \in U} G(y, u, D\varphi, D^2\varphi).$$

Οποιαδήποτε συνάρτηση V που ικανοποιεί την (i) λέγεται υπολύση ιξώδους της HJB εξίσωσης ενώ αν ικανοποιεί την (ii) λέγεται υπερλύση ιξώδους.

Όπως αναφαίραμε και στην Ενότητα 2.3, υπάρχει ένας ισοδύναμος τρόπος να διατυπώσουμε τις συνθήκες (i) και (ii) από την άποψη των υπερδιαφορικών και υποδιαφορικών της V στο σημείο x (Ορισμός 2.3.3). Αλλά πρώτα ας δούμε πως ο Ορισμός 2.3.2 των υπερ- και υποδιαφορικών απλοποιείται στο δικό μας πρόβλημα.

Ορισμός 4.4.2 *Έστω V μια συνάρτηση απο το (α, β) στο $\mathbb{R}$ και $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Τότε το υπερδιαφορικό της V στο x_0 είναι το σύνολο των $p_0, P_0 \in \mathbb{R}$, το οποίο συμβολίζεται με $D_x^{1,2,+}V(x_0)$ έτσι ώστε να ισχύει*

$$V(x) \leq V(x_0) + p_0(x - x_0) + \frac{(x - x_0)^2 P_0}{2} + O((x - x_0)^2). \tag{4.12}$$

Όμοια, το υποδιαφορικό της V στο x_0 είναι το σύνολο των $p_0, P_0 \in \mathbb{R}$, το οποίο συμβολίζεται με $D_x^{1,2,-}V(x_0)$ έτσι ώστε να ισχύει

$$V(x) \geq V(x_0) + p_0(x - x_0) + \frac{(x - x_0)^2 P_0}{2} + O((x - x_0)^2). \tag{4.13}$$

Οπότε στη περίπτωση μας, οι υπολύσεις και υπερλύσεις ιξώδους μπορούν επίσης να οριστούν ως εξής

Ορισμός 4.4.3 *Η συνθήκη i ισχύει αν και μόνο αν*

$$\rho V(x_0) \leq \sup_{u \in U} G(x_0, u, p, P), \quad \forall x_0 \in O, \forall (p, P) \in D_x^{1,2,+}V(x_0).$$

Όμοια η ii ισχύει αν και μόνο αν

$$\rho V(x_0) \geq \sup_{u \in U} G(x_0, u, p, P), \quad \forall x_0 \in O, \forall (p, P) \in D_x^{1,2,-}V(x_0).$$

Παρατήρηση: Αν $D\varphi < 0$ τότε οι συνθήκες i και ii του Ορισμού 4.4.1 παίρνουν τις εξής μορφές

i. Για οποιαδήποτε $\varphi \in C^{1,2}(O)$, αν $y \in O$ είναι ένα τοπικό μέγιστο για την $V - \varphi$ τότε

$$\rho V(y) \leq \sup_{u \in U} G(y, u, D\varphi, D^2\varphi) \Rightarrow$$
$$\rho V(y) \leq \left(\frac{y^2}{y^2 + 1} - by \right) D\varphi - 2\left(\ln(-D\varphi) + y^2 + 1\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 y^2 D^2\varphi.$$

ii. Για οποιαδήποτε $\varphi \in C^{1,2}(O)$, αν $y \in O$ είναι ένα τοπικό ελάχιστο για την $V - \varphi$ τότε

$$\rho V(y) \geq \sup_{u \in U} G(y, u, D\varphi, D^2\varphi) \Rightarrow$$
$$\rho V(y) \geq \left(\frac{y^2}{y^2 + 1} - by \right) D\varphi - 2\left(\ln(-D\varphi) + y^2 + 1\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 y^2 D^2\varphi.$$

4.4.2 Σχέση αρχής μεγίστου και δυναμικού προγραμματισμού

Σ' αυτή την ενότητα θα δούμε πώς συνδέεται η αρχή στοχαστικού μεγίστου με το δυναμικό προγραμματισμό. Συγκεκριμένα θα αναφαίρουμε το παρακάτω θεώρημα που μας δίνει τη σχέση ανάμεσα στις συζυγείς μεταβλητές $p(\cdot)$, $q(\cdot)$ και τη συνάρτηση αξίας V.

Θεώρημα 4.4.1 *Έστω ότι η συνάρτηση αξίας V είναι αρκετά ομαλή και $(\overline{x}(\cdot), \overline{u}(\cdot), p(\cdot), q(\cdot))$ να είναι μια βέλτιστη τετράδα του προβλήματος μας. Οι σχέσεις που συνδέουν την πρώτη και τη δεύτερη παράγωγο, ως προς x, της συνάρτηση αξίας, V_x και V_{xx} αντίστοιχα, με τις συζυγείς μεταβλητές $p(\cdot)$, $q(\cdot)$ είναι οι εξής*

$$\begin{cases} V_x(t, \overline{x}(t)) = -p(t), \\ V_{xx}(t, \overline{x}(t))\sigma(t, \overline{x}(t), \overline{u}(t)) = -q(t), \end{cases} \tag{4.14}$$

ενώ η σχέση που συνδέει την παράγωγο της V ως προς το χρόνο t, δηλαδη V_t, με την πρώτη και τη δεύτερη παράγωγο ως προς x είναι

$$V_t(t, \overline{x}(t)) = -\frac{\sigma^2 \overline{x}(t)^2 V_{xx}}{2} - 2(\overline{x}(t)^2 + 1 + \ln(V_x)) + V_x\Big(b\overline{x}(t) - \frac{\overline{x}(t)^2}{\overline{x}(t)^2 + 1}\Big). \tag{4.15}$$

Απόδειξη: Το σύστημα (4.14) βγαίνει άμμεσα από τη σχέση (3.6) του Θεωρήματος 3.1.1. Επίσης από το ίδιο θεώρημα έχουμε ότι

$$V_t(t, \overline{x}(t)) = \max_{u \in B} G(t, \overline{x}(t), u, -V_x(t, \overline{x}(t)), -V_{xx}(t, \overline{x}(t))), \tag{4.16}$$

οπότε από την σχέση (4.4) παίρνουμε,

$$\max_{u \in B} G(\overline{x}, u, -V_x, -V_{xx}) = -\frac{1}{2}\sigma^2 \overline{x}^2 V_{xx} - 2\overline{x}^2 + V_x b\overline{x} - V_x \frac{\overline{x}^2}{\overline{x}^2 + 1} + \max_{u \in B} \Big\{ -V_x u + \sum_{i=1}^{2} \ln u_i \Big\}. \tag{4.17}$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία που κάναμε στην απόδειξη του Λήμματος 4.2.1, η εξίσωση (4.17) παίρνει την εξής μορφή

$$\max_{u \in B} G(\overline{x}, u, -V_x, -V_{xx}) = -\frac{\sigma^2 \overline{x}^2 V_{xx}}{2} - 2(\overline{x}^2 + 1 + \ln(V_x)) + V_x\Big(b\overline{x} - \frac{\overline{x}^2}{\overline{x}^2 + 1}\Big). \tag{4.18}$$

Άρα, από την (4.16) και (4.18) παίρνουμε ότι

$$V_t(t, \overline{x}(t)) = -\frac{\sigma^2 \overline{x}^2 V_{xx}}{2} - 2(\overline{x}^2 + 1 + \ln(V_x)) + V_x\Big(b\overline{x} - \frac{\overline{x}^2}{\overline{x}^2 + 1}\Big).$$

□

Σχόλιο: Συνδυάζοντας τις σχέσεις (4.14) και (4.15) λαμβάνουμε το παρακάτω αποτέλεσμα

$$V_t(t, \overline{x}(t)) = \frac{\sigma \overline{x}(t) q(t)}{2} - 2(\overline{x}^2(t) + 1 + \ln(-p(t))) - p(t)\Big(b\overline{x}(t) - \frac{\overline{x}^2(t)}{\overline{x}^2(t) + 1}\Big).$$

4.5 Το αριθμητικό σχήμα

Ο σκοπός αυτής της ενότητας είναι να προσεγγίσουμε αριθμητικά τη συνάρτηση αξίας, μέσω της σύγκλισης μονότονου σχήματος, προσεγγίζοντας τη λύση ιξώδους της (OHJB). Υποθέτοντας ότι $DV < 0$, δηλαδή η V είναι γνησίως φθίνουσα, παρουσιάζουμε το παρακάτω σχήμα (για προσεγγιστικά σχήματα βλ. [GBS])

$$\begin{cases} V_i^{(l+1)} = \dfrac{\alpha_i \frac{V_i^{(l+1)} - V_{i-1}^{(l)}}{\Delta x} - 2\left[\ln\left(-\frac{V_{i+1}^{(l)} - V_i^{(l+1)}}{\Delta x}\right) + \beta_i\right] + \frac{\sigma^2 x_i^2}{2}\frac{V_{i+1}^{(l)} + V_{i-1}^{(l)} - 2V_i^{(l+1)}}{(\Delta x)^2}}{\rho} \\ i = 1, 2, \ldots, L-1\ ,\ l = 0, 1, 2, \ldots \\ V_0^{(r)} = V(x_{s_1})\ ,\ V_L^{(r)} = V(x_{s_2})\ ,\ r = 0, 1, 2, \ldots \\ V_i^0\ ,\ i = 1, 2, \ldots, L-1 \ \text{ είναι γραμμικός συνδυασμός των } V_0^0, V_L^0 \end{cases} \tag{4.19}$$

όπου: $\Delta x = \dfrac{x_{s_2} - x_{s_1}}{L}$ με x_{s_1}, x_{s_2} να είναι τα σαγματικά σημεία.

Ας εξηγήσουμε όμως τώρα πως κατασκευάστηκε αυτό το σχήμα. Πρώτα υπολογίσαμε τα σαγματικά σημεία και την αρχική συνθήκη της (OHJB) εξίσωσης. Αντικαταστήσαμε λοιπόν την πρώτη, από το δεξί μέλος, παράγωγο DV στην (OHJB) με την «οπισθοδρομική» προσέγγιση πεπερασμένης διαφοράς $DV(x_i) \simeq \dfrac{V(x_i) - V(x_{i-1})}{\Delta x}$, ενώ η άλλη παράγωγος DV αντικαταστήθηκε από την «προς τα εμπρός» προσέγγιση πεπερασμένης διαφοράς $DV(x_i) \simeq \dfrac{V(x_{i+1}) - V(x_i)}{\Delta x}$ και τέλος η δεύτερη παράγωγος D^2V έδωσε τη θέση της στην $D^2V(x_i) \simeq \dfrac{V(x_{i+1}) + V(x_{i-1}) - 2V(x_i)}{(\Delta x)^2}$. Έτσι, έχουμε την παρακάτω διακριτή προσέγγιση της (OHJB)

$$\rho V_i = \left(\frac{x_i^2}{x_i^2+1} - bx_i\right)\frac{V_i - V_{i-1}}{\Delta x} - 2\left[\ln\left(-\frac{V_{i+1} - V_i}{\Delta x}\right) + x_i^2 + 1\right] + \frac{\sigma^2 x_i^2 (V_{i+1} + V_{i-1} - 2V_i)}{2(\Delta x)^2},$$

την οποία αν τη λύσουμε ως προς το V_i του αριστερού μέλους και θέτοντας $\alpha_i = \dfrac{x_i^2}{x_i^2+1} - bx_i$ και $\beta_i = x_i^2 + 1$ παίρνουμε την (4.19).
Στη συνέχεια ακολουθεί ένα θεώρημα σύγκλισης.

Θεώρημα 4.5.1 *Το αριθμητικό σχήμα (4.19) είναι συνεπές και μονότονο, επιπλέον είναι σταθερό και συγκλίνει στη σωστή οριακή λύση ιξώδους.*

Απόδειξη: Η απόδειξη του θεωρήματος αποτελείται από τα ακόλουθα βήματα

- Κατ' αρχήν θα αποδείξουμε ότι το αριθμητικό σχήμα (4.19) είναι συνεπές. Αυτό θα γίνει με τον κλασικό τρόπο για μεθόδους πεπερασμένων διαφορών. Ξαναγράφουμε το σχήμα (4.19) αντικαθιστώντας το V_i με $V(x_i)$ οπότε έχουμε ένα σφάλμα r_i που προστίθεται στο τέλος της εξίσωσης και επιπλέον χρησιμοποιούμε τα αναπτύγματα Taylor για τις προσεγγίσεις πεπερασμένων διαφορών, δηλαδή

$$\frac{V_{i+1}-V_i}{\Delta x} \simeq V' + \frac{\Delta x V''}{2},$$
$$\frac{V_i - V_{i-1}}{\Delta x} \simeq V' - \frac{\Delta x V''}{2},$$
$$\frac{V_{i+1}+V_{i-1}-2V_i}{(\Delta x)^2} \simeq V'' + \frac{(\Delta x)^2 V^{(4)}}{12},$$

οπότε γίνεται

$$\begin{aligned}\rho V(x_i) =&\alpha_i \left[V'(x_i) + \frac{\Delta x V''(x_i)}{2}\right] - 2\left[\ln\left(-V'(x_i) + \frac{\Delta x V''(x_i)}{2}\right)\right] - 2\beta_i \\ &+ \frac{\sigma^2 x_i^2}{2}\left[V''(x_i) + \frac{(\Delta x)^2 V^{(4)}(x_i)}{12}\right] + r_i.\end{aligned} \tag{4.20}$$

Έπειτα αφαιρώντας την (4.20) από την (OHJB) εξίσωση και χρησιμοποιώντας την ανίσωση $\ln x \leq x-1,\ x \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}&r_i = -2\ln(-V'(x_i)) - \alpha_i\left(\frac{\Delta x V''(x_i)}{2}\right) + 2\left[\ln\left(-V'(x_i) + \frac{\Delta x V''(x_i)}{2}\right)\right] \\ &- \frac{\sigma^2 x_i^2}{2}\left(\frac{(\Delta x)^2 V^{(4)}(x_i)}{12}\right) \leq -2(-V'(x_i)-1) + (V'(x_i)+1)^2 + \cdots + \\ &2\left(-V'(x_i) + \frac{\Delta x V''(x_i)}{2} - 1\right) - \alpha_i\left(\frac{\Delta x V''(x_i)}{2}\right) - \frac{\sigma^2 x_i^2}{2}\left(\frac{(\Delta x)^2 V^{(4)}(x_i)}{12}\right) \\ &\leq (V'(x_i)+1)^2 + \cdots + \Delta x V''(x_i)\left(\frac{2-\alpha_i}{2}\right) - \frac{\sigma^2 x_i^2}{2}\left(\frac{(\Delta x)^2 V^{(4)}(x_i)}{12}\right) \\ &\Rightarrow |r_i| \leq (V'(x_i)+1)^2 + \cdots + \Delta x |V''(x_i)|\left(\frac{2-\alpha_i}{2}\right) + \frac{\sigma^2 x_i^2}{24}(\Delta x)^2 |V^{(4)}(x_i)| \\ &\Rightarrow \max_{1\leq i \leq L-1} |r_i| \leq K_1 + \cdots + \Delta x K_2 + (\Delta x)^2 K_3 \leq K_1(\Delta x)^2 + \cdots + K_2(\Delta x)^2 + K_3(\Delta x)^2 \\ &= C(\Delta x)^2 \Rightarrow \max_{1\leq i\leq L-1}|r_i| \leq C(\Delta x)^2,\end{aligned}$$

όπου K_1, K_2, K_3, C θετικές σταθερές. Αυτή η σχέση λοιπόν δείχνει ότι το σχήμα (4.19) είναι συνεπές.

- Το αριθμητικό σχήμα (4.19) είναι ένα προσεγγιστικό σχήμα της μορφής

$$g(r, x, u^r(x_{i-1}), u^r(x_{i+1}), u^r) = 0 \text{ στο } \overline{\Omega},$$

όπου η $g : \mathbb{R}^+ \times \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathrm{B}(\overline{\Omega}) \to \mathbb{R}$ είναι τοπικά φραγμένη ($\mathbb{R}^+ \equiv [0, +\infty)$ και το $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι ανοιχτό και φραγμένο). Εδώ, $r = \Delta x$, $x = x_i$ και u^r είναι μια συνάρτηση ορισμένη στο $\Delta_{\Delta x} = \{x_i = 0, \ldots, L\}$ με $u^r(x_{i-1}) = V_{i-1}$ και $u^r(x_{i+1}) = V_{i+1}$. Έτσι το αριθμητικό σχήμα (4.19) γράφεται ως εξής

$$g(\Delta x, x_i, V_{i-1}, V_{i+1}, V) = 0,$$

όπου

$$g(k,y,t,d,u) = \rho u_i - \alpha_i \frac{u_i - t}{k} + 2\left[\ln\left(-\frac{d-u_i}{k}\right) + \beta_i\right] - \frac{\sigma^2 y^2 (d+t-2u_i)}{2k^2},$$

με $\alpha_i = \dfrac{y^2}{y^2+1} - by$, $\beta_i = y^2+1$, $k \geq 0$, $y \in \Delta_{\Delta x}$, $t,d \in R$ και $u \in B(\Delta_{\Delta x})$.

- Το αριθμητικό σχήμα (4.19) είναι μονότονο. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι

$$g(k,y,t,d,u) \leq g(k,y,t,d,\upsilon) \text{ αν } u \geq \upsilon,$$

για όλα τα $k \geq 0$, $y \in \Delta_{\Delta x}$, $t,d \in \mathbb{R}$ και $u,\upsilon \in B(\Delta_{\Delta x})$ με $u_i = \upsilon_i = w$.
Έχουμε λοιπόν

$$\begin{gathered} u \geq \upsilon \Rightarrow u_{i-1} \geq \upsilon_{i-1} \Rightarrow -u_{i-1} \leq -\upsilon_{i-1} \Rightarrow \\ \frac{w-u_{i-1}}{k} \leq \frac{w-\upsilon_{i-1}}{k} \overset{\alpha_i \leq 0}{\Rightarrow} \alpha_i \frac{w-u_{i-1}}{k} \geq \alpha_i \frac{w-\upsilon_{i-1}}{k} \Rightarrow \\ -\alpha_i \frac{w-u_{i-1}}{k} \leq -\alpha_i \frac{w-\upsilon_{i-1}}{k}, \end{gathered} \tag{4.21}$$

ακόμη

$$\begin{gathered} u \geq \upsilon \Rightarrow u_{i+1} \geq \upsilon_{i+1} \Rightarrow -\frac{u_{i+1}-w}{k} \leq -\frac{\upsilon_{i+1}-w}{k} \Rightarrow \\ 2\left[\ln\left(-\frac{u_{i+1}-w}{k}\right) + \beta_i\right] \leq 2\left[\ln\left(-\frac{\upsilon_{i+1}-w}{k}\right) + \beta_i\right], \end{gathered} \tag{4.22}$$

και τέλος ισχύει

$$\begin{gathered} \left.\begin{array}{l} u \geq \upsilon \Rightarrow u_{i+1} \geq \upsilon_{i+1} \\ u \geq \upsilon \Rightarrow u_{i-1} \geq \upsilon_{i-1} \end{array}\right\} \overset{+}{\Rightarrow} u_{i+1} + u_{i-1} \geq \upsilon_{i+1} + \upsilon_{i-1} \Rightarrow \\ \frac{u_{i+1}+u_{i-1}-2w}{k^2} \geq \frac{\upsilon_{i+1}+\upsilon_{i-1}-2w}{k^2} \Rightarrow \\ -\frac{1}{2}\sigma^2 y^2 \frac{u_{i+1}+u_{i-1}-2y}{k^2} \leq -\frac{1}{2}\sigma^2 x_i^2 \frac{\upsilon_{i+1}+\upsilon_{i-1}-2y}{k^2} \Rightarrow \\ -\frac{1}{2}\sigma^2 x_i^2 \frac{u_{i+1}+u_{i-1}-2w}{k^2} + \rho w \leq -\frac{1}{2}\sigma^2 y^2 \frac{\upsilon_{i+1}+\upsilon_{i-1}-2w}{k^2} + \rho w. \end{gathered} \tag{4.23}$$

Οπότε προσθέτωντας κατά μέλη τις (4.21), (4.22), (4.23) έχουμε

$$u \geq \upsilon \Rightarrow g(k,y,t,d,u) \leq g(k,y,t,d,\upsilon).$$

Που σημαίνει λοιπόν ότι το σχήμα είναι μονότονο.

- Το συνεπές και μονότονο σχήμα για την H-J-B εξίσωση είναι ευσταθές και συγκλίνει στη σωστή λύση ιξώδους (βλ. [JAS], σελίδα 104) .

□

Στη συνέχεια παραθέτουμε μια πρόταση για τη μοναδικότητα της λύσης V_i του σχήματος (4.19).

Πρόταση 4.5.1 *Η πεπερασμένη διαφορική εξίσωση (4.19) έχει μοναδική λύση ως προς* V_i *αν το* Δx *ικανοποιεί την ακόλουθη συνθήκη*

$$\Delta x \leq \min_{i=1,\dots,L-1} \left\{ \left(V_{i-1}^{(l)} - V_{i+1}^{(l)} \right) e^{\frac{\rho V_{i-1}^{(l)}}{2} + \beta_i - \frac{\sigma^2 \gamma_i \left(V_{i+1}^{(l)} - V_{i-1}^{(l)} \right)}{4(\Delta x)^2}} \right\}, \tag{4.24}$$

για $l = 0, 1, 2, \dots$ *με* $\gamma_i = x_i^2$.

Απόδειξη: Ορίζω

$$g(y) = \frac{a_i}{\rho \Delta x} \cdot (y - V_{i-1}) - \frac{2}{\rho} \cdot \left[ln \left(\frac{y - V_{i+1}}{\Delta x} \right) + \beta_i \right] + \frac{\sigma^2 \gamma_i}{2\rho \left(\Delta x\right)^2} \left(V_{i+1} + V_{i-1} - 2y \right)$$

με $y \in (V_{i+1}, V_{i-1})$.

Οπότε έχω

$$g'(y) = \frac{\Delta x \cdot a_i (y - V_{i+1}) - 2(\Delta x)^2 - (y - V_{i+1}) \cdot \sigma^2 \cdot \gamma_i}{\rho \cdot (\Delta x)^2 \cdot (y - V_{i+1})} < 0 \quad \forall y \in (V_{i+1}, V_{i-1}),$$

αφού $\alpha_i < 0,\ \Delta x > 0,\ \rho > 0$ και $\gamma_i > 0$. Άρα η $g(y)$ είναι γνησίως φθίνουσα. Επίσης ορίζω τη συνάρτηση $h(y) = g(y) - y$ η οποία είναι και αυτή γνησίως φθίνουσα στο (V_{i+1}, V_{i-1}) και ισχύει ότι

$$\lim_{y \to V_{i+1}^+} h(y) = \lim_{y \to V_{i+1}^+} (g(y) - y) = +\infty.$$

Επομένως $h(V_{i+1}) > 0$. Οπότε για να έχει η h μοναδική ρίζα στο διάστημα (V_{i+1}, V_{i-1}), αφού είναι γνησίως μονότονη (δηλαδή έχει το πολύ μία), αρκεί να ισχύει ότι $h(V_{i-1}) \leq 0$. Έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned}
h(V_{i-1}) \leq 0 &\Leftrightarrow g(V_{i-1}) \leq V_{i-1} \\
&\Leftrightarrow -\frac{2}{\rho} \left[\ln \left(\frac{V_{i-1} - V_{i+1}}{\Delta x} \right) + \beta_i \right] + \frac{\sigma^2 \gamma_i}{2\rho(\Delta x)^2} (V_{i+1} - V_{i-1}) \leq V_{i-1} \\
&\Leftrightarrow \ln \left(\frac{V_{i-1} - V_{i+1}}{\Delta x} \right) + \beta_i - \frac{\sigma^2 \gamma_i}{4(\Delta x)^2} (V_{i+1} - V_{i-1}) \geq -\frac{\rho V_{i-1}}{2} \\
&\Leftrightarrow \ln(V_{i-1} - V_{i+1}) - \ln \Delta x - \frac{\sigma^2 \gamma_i}{4(\Delta x)^2} (V_{i+1} - V_{i-1}) \geq -\frac{\rho V_{i-1}}{2} - \beta_i \\
&\Leftrightarrow \ln \Delta x + \frac{\sigma^2 \gamma_i}{4(\Delta x)^2} (V_{i+1} - V_{i-1}) \leq \ln(V_{i-1} - V_{i+1}) + \frac{\rho V_{i-1}}{2} + \beta_i \\
&\Leftrightarrow \ln \left[\Delta x \cdot e^{\frac{\sigma^2 \gamma_i (V_{i+1} - V_{i-1})}{4(\Delta x)^2}} \right] \leq \ln(V_{i-1} - V_{i+1}) + \frac{\rho V_{i-1}}{2} + \beta_i \\
&\Leftrightarrow \Delta x \cdot e^{\frac{\sigma^2 \gamma_i (V_{i+1} - V_{i-1})}{4(\Delta x)^2}} \leq (V_{i-1} - V_{i+1})\, e^{\frac{\rho V_{i-1}}{2} + \beta_i} \\
&\Leftrightarrow \Delta x \leq (V_{i-1} - V_{i+1})\, e^{\frac{\rho V_{i-1}}{2} + \beta_i - \frac{\sigma^2 \gamma_i (V_{i+1} - V_{i-1})}{4(\Delta x)^2}}.
\end{aligned}$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει για κάθε $i = 1, 2, \dots, L-1$ λόγο της (4.24). Έτσι η $h(y) = g(y) - y$ έχει μοναδική λύση στο διάστημα (V_{i+1}, V_{i-1}).

□

Βιβλιογραφία

[JXZ] Jiongmin Yong , Xun Yu Zhou: Stochastic Controls Hamiltonian Systems and HJB Equations

[WDS] W.D.Dechert , S.I.O'Donnell: The stochastic Lake Game:A numerical Solution

[WFS] Wendell H. Fleming, H. Mete Soner: Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions

[XPZ] Χρ.Ζωχιός:Ασθενείς λύσεις ιξώδους για μή γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους και εφαρμογές -τρισδιάστατη αναδόμηση εικόνας

[GBS] G.Barles, P.E. Souganidis: Convergence of approximation schemes for fully nonlinear second order equations

[JAS] J. A. Sethian: Level Set Methods and Fast Marching Methods (2nd edition), Cambridge University Press, 1999.

[BCD] M.Bardi,I.C.Dolcetta: Optimal control and viscosity solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations

[PLL] P. L. Lions: Neumann type boundary conditions for Hamilton-Jacobi equations, Duke J. Math. 52 (1985), 793-820

[HIL] H. Ishii and P. L. Lions: Viscosity solutions of fully nonlinear second-order elliptic partial differential equations, J. Differential Equations 83 (1990), 26-78

[IKS] I. Karatzas and S.E. Shreve (1991): Brownian Motion and Stochastic Calculus. Second Edition, Springer-Verlag, New York.