



Πανεπιστήμιο Κρήτης

Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
"Μαθηματικά και Εφαρμογές τους" των Τμημάτων
Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Μεταπτυχιακή Εργασία

Μαρίνα Μωραΐτη

Υπολογιστικές Τεχνικές στη Χρηματοοικονομία

Επιβλέπων Καθηγητής
Μιχάλης Λουλάκης

Ηράκλειο, Κρήτη, Ιούνιος, 2009



University of Crete

Postgraduate Program "Mathematics and its Applications"
of the Mathematics and Applied Mathematics Departments

Master Thesis

Marina Moraiti

Computational Methods in Finance

Advisor

Michail Loulakis

Heraklion, Crete, June, 2009

Η Μεταπτυχιακή Εργασία κατατέθηκε στο Τμήμα Μαθηματικών της Σχολής
Θετικών και Τεχνολογικών Επιστημών του Πανεπιστημίου Κρήτης.

Επιβλέπων καθηγητής ήταν ο Μιχάλης Λουλάκης.

Την επιτροπή αξιολόγησης αποτέλεσαν οι κ.κ.

Μάρκος Κατσουλάκης

Γεώργιος Κοσιώρης

Μιχάλης Λουλάκης

This thesis was submitted to the Mathematics Department of the University of
Crete

The master thesis evaluation committee members were:

Markos Katsoulakis

Georgios Kossioris

Michail Loulakis

Ευχαριστίες

Ευχαριστώ τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Μιχάλη Λουλάκη για τη συνεχή καθοδήγηση και για τις αμέτρητες ώρες που μου αφιέρωσε. Ευχαριστώ επίσης τα μέλη της επιτροπής αξιολόγησής μου, κ. Κατσουλάκη και κ. Κοσιώρη, καθώς και τους καθηγητές και τους συμφοιτητές που με βοήθησαν στην προσπάθειά μου. Ιδιαίτερα ευχαριστώ τη φίλη και συμφοιτήτριά μου Λένα για τη στήριξή της και για τις εποικοδομητικές συζητήσεις που είχαμε σε καθημερινή βάση. Ευχαριστώ τους φίλους μου και την οικογένειά μου, τον πατέρα μου, Σταύρο, τη μητέρα μου, Χριστίνα, και την αδερφή μου, Δανάη, για την αγάπη και την υποστήριξή τους. Ιδιαίτερα ευχαριστώ το φίλο μου Μιχάλη για την εμπύχωση και τη συμπαράσταση.

Abstract

Monte Carlo methods are widely used in the simulation of various random phenomena. In the area of Finance they constitute an essential tool both in derivative pricing as well as in risk management. They are based on the analogy between volume and probability.

This thesis examines and implements a variety of Monte Carlo methods in Finance and consists of four parts.

The first part discusses the various methods for simulating random variables and random processes parts, with an emphasis to normally distributed random variables and to Brownian Motion and Geometric Brownian Motion paths.

The second part reviews central concepts from the theory of derivative pricing and introduces Monte Carlo estimates to price several derivatives.

Part three focuses on techniques for reducing the variance of the regular Monte Carlo estimator, by introducing new estimates that share the desired properties of Monte Carlo estimators and at the same time manage to reduce variance.

Finally in part four we talk about some basic models for the dynamics of the interest short rate and briefly about the VaR measure, i.e. the value at risk measure. We also estimate the 1-month VaR with 99% certainty of a specific portfolio, whose constituents' dynamics follow the CIR (Cox-Ingersoll-Ross) model for the evolution of the interest short rate.

keywords: Monte Carlo, Simulation, Estimator Efficiency, Replication, Random Variable Generation, Brownian Motion Simulation, Brownian Bridge, Derivative Pricing, Variance Reduction, Value at Risk, C(ox)I(ngersoll)R(oss)

Εισαγωγή

Αντικείμενο της παρούσας εργασίας είναι η εφαρμογή μεθόδων Monte Carlo στη Χρηματοοικονομία. Οι τεχνικές αυτές αποτελούν βασικό εργαλείο στην υπολογιστική προσομοίωση τυχαίων φαινομένων, και στη Χρηματοοικονομία χρησιμοποιούνται τόσο για την τιμολόγηση χρηματοοικονομικών προϊόντων όσο και για τη διαχείριση του επενδυτικού κινδύνου.

Φιλοσοφικά, η πρώτη αντίληψη για την πιθανότητα ενός ενδεχομένου ήταν η εμπειρική συχνότητα με την οποία αυτό εμφανίζεται σε ανεξάρτητες επαναλήψεις ενός πειράματος. Όταν π.χ. στρίβουμε ένα νόμισμα, ο τρόπος με τον οποίο ο περισσότερος κόσμος αντιλαμβάνεται την έκφραση «η πιθανότητα το αποτέλεσμα να είναι γράμματα είναι $1/2$ » είναι ότι, αν στρίψουμε πολλές φορές το νόμισμα, τις μισές περίπου φορές το αποτέλεσμα θα είναι γράμματα. Η θεωρία των πιθανοτήτων ξέφυγε από τα στενά όρια του στοιχηματισμού και τέθηκε σε μαθηματική βάση με την αξιωματική της θεμελίωση από τον Kolmogorov στις αρχές του 20ου αιώνα. Η σύγχρονη θεωρία πιθανοτήτων βλέπει τις πιθανές εκβάσεις ενός πειράματος σαν σύνολα σημείων ενός χώρου στα οποία αποδίδεται ένα μέτρο της πιθανότητας εμφάνισης τους με την έννοια της θεωρίας μέτρου. Η καινούρια αυτή οπτική έδωσε τη δυνατότητα της μοντελοποίησης και ανάλυσης πολύ πιο πολύπλοκων φαινομένων. Η συνέπεια αυτής της θεώρησης με την προηγούμενη είναι αποτέλεσμα ενός θεωρήματος της θεωρίας πιθανοτήτων, του νόμου των μεγάλων αριθμών: η εμπειρική συχνότητα με την οποία ένα ενδεχόμενο εμφανίζεται σε ανεξάρτητες επαναλήψεις ενός πειράματος συγκλίνει στο μέτρο πιθανότητας αυτού του ενδεχομένου σχεδόν σίγουρα.

Οι μέθοδοι Monte Carlo θεμελιώνονται πάνω σε αυτήν την αναλογία που υπάρχει μεταξύ όγκου (μέτρου πιθανότητας) και εμπειρικής συχνότητας. Συγκεκριμένα, χρησιμοποιούν την ισοδυναμία αυτή, για να εκφράσουν τον όγκο ενός συνόλου ως συχνότητα εμφάνισης.

Ας δούμε ένα απλό παράδειγμα εφαρμογής της μεθόδου, που αφορά στην εκτίμηση του αριθμού π . Υποθέτουμε ότι έχουμε στη διάθεσή μας ένα μηχανισμό που παράγει τυχαία σημεία, ομοιόμορφα κατανομημένα στο τετράγωνο πλευράς d . Αυτό σημαίνει ότι η πιθανότητα ένα τέτοιο σημείο να βρίσκεται σε ένα υποσύνολο A του τετραγώνου είναι ίση με το λόγο του εμβαδού του A προς αυτόν του τετραγώνου. Αν A είναι ο εγγεγραμμένος στο τετράγωνο κύκλος διαμέτρου d , τότε ο λόγος των δύο εμβαδών είναι $\pi/4$. Σύμφωνα με τα παραπάνω, περιμένουμε ότι ο λόγος του πλήθους των τυχαίων σημείων που θα βρίσκονται μέσα στον κύκλο προς το πλήθος των σημείων συνολικά θα συγκλίνει στο $\pi/4$ καθώς το πλήθος των σημείων τείνει στο άπειρο. Επομένως, αν παραγάγουμε ανεξάρτητα N σημεία, ομοιόμορφα κατανομημένα στο τετράγωνο, και μετρήσουμε το πλήθος K εκείνων που βρίσκονται μέσα στον κύκλο, τότε η τιμή του $4 \times K/N$ αποτελεί μία εκτίμηση για τον αριθμό π . Από μία εφαρμογή της μεθόδου για $N = 10.000.000$ σημεία

συνολικά, βρήκαμε ότι $K = 7.854.768$ σημεία έπεσαν μέσα στον κύκλο, οπότε η εκτίμηση της μεθόδου για το π είναι $\pi \approx 3.1419$. Τέτοιου είδους υπολογισμοί μπορούν να χρησιμοποιηθούν στη Χρηματοοικονομία για την εκτίμηση του επενδυτικού κινδύνου, της πιθανότητας δηλαδή η ζημία από μια επένδυση να ξεπεράσει κάποιο ανεκτό όριο.

Αυτή η αναλογία μπορεί να γενικευθεί στον υπολογισμό ολοκληρωμάτων ως προς το μέτρο πιθανότητας, δηλαδή αναμενόμενων τιμών τυχαίων μεταβλητών, πάλι χρησιμοποιώντας το νόμο των μεγάλων αριθμών. Στη χρηματοοικονομία η αξία ενός προϊόντος μπορεί πολλές φορές να εκφραστεί ως αναμενόμενη τιμή ως προς κάποιο μέτρο πιθανότητας της προεξοφλημένης τυχαίας μελλοντικής απόδοσης του προϊόντος.

Θα χρησιμοποιήσουμε λοιπόν τεχνικές Monte Carlo, για να υπολογίσουμε αριθμητικά την αξία προϊόντων από το δειγματικό μέσο όρο της μελλοντικής απόδοσης.

Όταν χρησιμοποιούμε αριθμητικές μεθόδους, έχει μεγάλη σημασία βέβαια να έχουμε μία εκτίμηση για το σφάλμα της μεθόδου. Το κεντρικό οριακό θεώρημα δίνει ακριβώς μία εκτίμηση του σφάλματος προσέγγισης της αναμενόμενης τιμής από το δειγματικό μέσο στο νόμο των μεγάλων αριθμών. Ένα μεγάλο μέρος της εργασίας είναι αφιερωμένο σε τεχνικές που μειώνουν το υπολογιστικό σφάλμα σε τέτοιου είδους υπολογισμούς.

Τεχνικές Monte Carlo μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε στην πράξη οποτεδήποτε υπάρχει ένα οριακό θεώρημα που εγγυάται σχεδόν βέβαιη σύγκλιση. Ο νόμος των μεγάλων αριθμών είναι ένα τέτοιο παράδειγμα. Ένα άλλο παράδειγμα είναι το εργοδικό θεώρημα του Birkhoff. Μπορούμε π.χ. να υπολογίσουμε αναμενόμενες τιμές ως προς το εργοδικό αναλλοίωτο μέτρο μιας αλυσίδας Markov, παίρνοντας το δειγματικό μέσο όρο πάνω στις τιμές της αλυσίδας. Οι τεχνικές αυτές ονομάζονται Markov Chain Monte Carlo, αλλά δε θα ασχοληθούμε με αυτό το θέμα στην παρούσα εργασία.

Η διάρθρωση της εργασίας έχει ως εξής:

Το πρώτο κεφάλαιο ξεκινά με την ανάλυση διαφόρων μεθόδων παραγωγής τυχαίων δειγμάτων που ακολουθούν κάποια κατανομή, δίνοντας ιδιαίτερη έμφαση σε μεθόδους παραγωγής κανονικών τυχαίων δειγμάτων. Ακολουθεί η περιγραφή τρόπων παραγωγής μονοπατιών στοχαστικών ανεπίξεων, με ιδιαίτερη έμφαση στην προσομοίωση μονοπατιών της κίνησης Brown, καθώς, σύμφωνα με τις υποθέσεις που κάνουμε, η τιμή ενός χρηματιστηριακού πρωτογενούς προϊόντος (π.χ. μετοχή) ακολουθεί γεωμετρική κίνηση Brown, και η προσομοίωση των δύο ανεπίξεων είναι αρκετά όμοια.

Στο δεύτερο κεφάλαιο περιγράφουμε το μοντέλο σύμφωνα με το οποίο θα τιμολογήσουμε χρηματιστηριακά συμβόλαια (στη συνέχεια του κειμένου αναφέρονται ως παράγωγα προϊόντα), και γίνεται η σύνδεση της τιμολόγησης παραγώγων προϊόντων με τη μέθοδο Monte Carlo: θα δούμε ότι η αρχική αξία ενός συμβολαίου δίνεται

από μία μέση τιμή ως προς κάποιο μέτρο πιθανότητας. Ακολουθούν εφαρμογές της μεθόδου Monte Carlo στην τιμολόγηση διαφόρων παραγώγων προϊόντων.

Το τρίτο κεφάλαιο αφορά την περιγραφή τρόπων μέσω των οποίων επιτυγχάνουμε ελάττωση της διασποράς της εκτιμήτριας Monte Carlo. Θα δούμε ότι παραλλάσσοντας κατάλληλα την τελευταία εκτιμήτρια, καταφέρνουμε να λάβουμε εκτιμήτριες της ίδιας ποσότητας με μικρότερη διασπορά, με αντίτιμο ένα επιπλέον υπολογιστικό κόστος, το οποίο στις εφαρμογές που θα δούμε είναι μικρό σε σχέση με τη μείωση της διασποράς που επιτυγχάνουμε.

Το τέταρτο και τελευταίο κεφάλαιο ξεκινά με μία σύντομη περιγραφή ενός ευρέως χρησιμοποιούμενου μέτρου του κινδύνου, αυτού της αξίας σε κίνδυνο (VaR), που σκοπό έχει να αποτυπώσει το μέγεθος του κινδύνου της αγοράς στο οποίο εκτίθεται ένας επενδυτής, έχοντας στην κατοχή του ένα σύνολο χρηματιστηριακών προϊόντων (χαρτοφυλάκιο). Ακολουθεί η αναφορά μερικών σημαντικών μοντέλων που περιγράφουν τη δυναμική του επιτοκίου, όταν αυτό μεταβάλλεται τυχαία στο χρόνο. Τέλος, εφαρμόζουμε τη μέθοδο Monte Carlo, για να εκτιμήσουμε την αξία σε κίνδυνο ενός χαρτοφυλακίου, η δυναμική των παραγώγων προϊόντων του οποίου καθορίζεται από τη δυναμική του στοχαστικού επιτοκίου του μοντέλου που έχουμε υποθέσει.

Το κύριο σύγγραμμα πάνω στο οποίο βασίστηκε η εργασία αυτή είναι το Monte Carlo Methods in Financial Engineering του Paul Glasserman [4].

Περιεχόμενα

1 Παραγωγή τυχαίων δειγμάτων	17
1.1 Παραγωγή τυχαίων μεταβλητών	18
1.1.1 Η μέθοδος του αντίστροφου μετασχηματισμού	18
1.1.2 Η μέθοδος αποδοχής - απόρριψης	20
1.1.3 Η μέθοδος Ziggurat	22
1.1.4 Παραγωγή μονοδιάστατων και πολυδιάστατων, κανονικών τυχαίων μεταβλητών	25
1.2 Παραγωγή μονοπατιών στοχαστικών ανελίξεων	42
1.2.1 Προσομοίωση της κίνησης Brown (ανέλιξης Wiener)	42
1.2.2 Προσομοίωση της γεωμετρικής κίνησης Brown	53
2 Τιμολόγηση και εκτιμήτριες MC	57
2.1 Θεωρία τιμολόγησης παραγώγων προϊόντων	57
2.2 Εκτιμήτριες Monte Carlo	69
2.2.1 Παραδείγματα	69
2.2.2 Ρυθμός σύγκλισης του σφάλματος της εκτίμησης	81
2.2.3 Αποτελεσματικότητα των εκτιμητριών της προσομοίωσης	83
3 Τεχνικές ελάττωσης διασποράς	87
3.1 Μέθοδος των μεταβλητών ελέγχου	88
3.1.1 Παραδείγματα	91

3.2	Μέθοδος των αντιθετικών μεταβλητών	98
3.2.1	Εφαρμογή	103
3.3	Importance Sampling	103
4	VaR και μοντέλα επιτοκίου	109
4.1	Αξία σε κίνδυνο (VaR)	109
4.2	Στοχαστικά μοντέλα επιτοκίου	114
4.3	Εφαρμογή	128
	Βιβλιογραφία	155

Κατάλογος Σχημάτων

1.1	Παράδειγμα γενικευμένης αντίστροφης συνάρτησης	19
1.2	Η μέθοδος Ziggurat γραφικά	23
1.3	Κανονική πυκνότητα πιθανότητας για διάφορες τιμές των παραμέτρων μ και σ^2	26
1.4	Διδιάστατη τυπική κανονική πυκνότητα πιθανότητας, $\mu = 0$ και $\Sigma = I$	27
1.5	Εμπειρική κατανομή 1 εκατομμυρίου δειγμάτων που παράχθηκαν με τη μέθοδο Beasley-Springer-Moro	33
1.6	Διπλή εκθετική πυκνότητα, επί τη σταθερά c , και τυπική κανονική πυκνότητα.	34
1.7	Εμπειρική κατανομή 1 εκατομμυρίου δειγμάτων τυπικής κανονικής κατανομής που παράχθηκαν με τη μέθοδο αποδοχής - απόρριψης από τη διπλή εκθετική κατανομή.	35
1.8	Εμπειρική κατανομή 1 εκατομμυρίου δειγμάτων τυπικής κανονικής κατανομής που παράχθηκαν με τη μέθοδο Ziggurat	36
1.9	Εμπειρική κατανομή 1 εκατομμυρίου δειγμάτων που παράχθηκαν με τη μέθοδο Box - Muller	37
1.10	Εμπειρική κατανομή 1 εκατομμυρίου δειγμάτων που παράχθηκαν με την πολική μέθοδο (Marsaglia & Bray).	40
1.11	Μονοπάτι της τυπικής κίνησης Brown στο διάστημα $[0, 10]$ (αριστερά) και το ίδιο μονοπάτι στο διάστημα $[0, 1]$ (δεξιά).	46
1.12	Δύο τυπικά μονοπάτια της κίνησης Brown στο διάστημα $[0, 1]$, που ξεκινούν από το 0, με παράμετρο drift ίση με 0, και διαφορετικούς συντελεστές μεταβλητότητας.	47

1.13	Δύο τυπικά μονοπάτια της κίνησης Brown στο διάστημα $[0, 1]$, που ξεκινούν από το 0, με παράμετρο drift ίση με 1, και διαφορετικούς συντελεστές μεταβλητότητας.	47
1.14	Νόμος του επαναλαμβανόμενου λογαρίθμου (Law of the iterated logarithm)	48
1.15	Μονοπάτι της τρισδιάστατης τυπικής κίνησης Brown	53
1.16	Μονοπάτι της γεωμετρικής κίνησης Brown στο διάστημα $[0, 1]$, με $r = 0.05$, $\sigma = 0.2$, και αρχική τιμή $S(0) = 0.3$	55
2.1	Γραφική παράσταση 10.000 εκτιμήσεων του ολοκληρώματος a , με διασπορά 2.8951×10^{-6}	72
2.2	Ιστόγραμμα 10.000 εκτιμήσεων του $\sqrt{n} \times error$. Η διασπορά ήταν 28.9508.	72
2.3	Γραφική παράσταση 20 εκτιμήσεων για την αρχική αξία του ΕΔΑ	75
2.4	Γράφημα σύγκρισης χρόνων εκτέλεσης κατά την τιμολόγηση ενός δικαιώματος με φράγμα, με γέφυρα και σειριακά	77
2.5	Γραφική παράσταση της έκβασης 50 μονοπατιών της μετοχής κατά την τιμολόγηση του δικαιώματος αγοράς με δύο φράγματα. Μόνο δύο μονοπάτια τερμάτισαν, και κατέληξαν ταυτόχρονα σε τελική τιμή υψηλότερη της παραδοτέας τιμής	78
2.6	Γραφική παράσταση 20 εκτιμήσεων για την τιμή του ασιατικού δικαιώματος αγοράς επί του αριθμητικού μέσου τιμών μιας μετοχής	80
2.7	Γραφική παράσταση των τιμών ενός ασιατικού δικαιώματος αγοράς για τιμές της μεταβλητότητας, σ , που μεταβάλλονται από 0.1 έως 1 με βήμα 0.025 (αριστερά) και από 0.5 έως 11.5 με βήμα 0.5 (δεξιά)	81
3.1	Γραφική παράσταση 1.000 εκτιμήσεων της τιμής του ασιατικού δικαιώματος επί του αριθμητικού μέσου χωρίς μεταβλητή ελέγχου (κόκκινο), και με χρήση μεταβλητής ελέγχου το ασιατικό δικαίωμα αγοράς επί του γεωμετρικού μέσου (πράσινο). Στο σχήμα δεξιά φαίνονται οι πράσινες κουκίδες από το αριστερό σχήμα με μεγαλύτερη ευκρίνεια	97
3.2	Κοινό ιστόγραμμα 1.000 εκτιμήσεων της τιμής του ασιατικού δικαιώματος αγοράς επί του αριθμητικού μέσου: χωρίς μεταβλητή ελέγχου (κόκκινο), με χρήση του ασιατικού δικαιώματος αγοράς επί του γεωμετρικού μέσου ως μεταβλητή ελέγχου (πράσινο). Δεξιά απεικονίζεται ξανά το πράσινο ιστόγραμμα που φαίνεται στο αριστερό σχήμα με μεγαλύτερη ευκρίνεια.	98

3.3	Γραφική παράσταση 1.000 εκτιμήσεων για την τιμή του δικαιώματος με φράγμα, με μεταβλητή ελέγχου το ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς (πράσινο) και χωρίς (κόκκινο)	99
3.4	Ιστογράμματα 1.000 τιμών που προέκυψαν από τιμολόγηση δικαιώματος αγοράς με φράγμα χρησιμοποιώντας τη συμβατική εκτιμήτρια Monte Carlo (κόκκινο) και την εκτιμήτρια μεταβλητών ελέγχου, με μεταβλητή ελέγχου την τιμή του ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς (πράσινο)	99
3.5	Οι κόκκινες κουκίδες παριστούν τις 1000 εκτιμήσεις του ολοκληρώματος με την απλή εκτιμήτρια Monte Carlo, ενώ οι πράσινες παριστούν τις 1000 εκτιμήσεις με χρήση αντιθετικών μεταβλητών κατά την εκτίμηση. Για κάθε μία από τις δύο μεθόδους εκτίμησης, χρησιμοποιήθηκε ακρίβεια 20000 σημείων ανά εκτίμηση. Η μέση τιμή των πράσινων είναι 4.1326, ενώ των κόκκινων 4.1311.	104
3.6	Η πράσινη γραμμή παριστά την εμπειρική κατανομή των εκτιμήσεων Monte Carlo με χρήση αντιθετικών μεταβλητών, ενώ η κόκκινη παριστά την εμπειρική κατανομή χωρίς αντιθετικές μεταβλητές. Τα δύο ιστογράμματα προέκυψαν από 20.000 Monte Carlo εκτιμήσεις του ολοκληρώματος, με 3.000 σημεία ανά εκτίμηση. Η τυπική απόκλιση της πράσινης ήταν 0,0213, ενώ της κόκκινης 0,0383.	104
4.1	$(100 - X)\%$ - Αξία σε κίνδυνο (VaR)	111
4.2	Το σύνολο $A = \{(x, y) : x \leq \sqrt{f(y/x)}\}$	126
4.3	Εμπειρική κατανομή 10.000 τιμών για τη ζημία του χαρτοφυλακίου \mathcal{X} στην περίοδο $[0, t]$, όπου $t = 1/12$ έτος	132
4.4	Γραφική παράσταση 10.000 τιμών για τα κέρδη (πράσινο) και τις ζημίες (κόκκινο) του χαρτοφυλακίου \mathcal{X} στην περίοδο $[0, t]$, όπου $t = 1/12$ έτος	132

Κεφάλαιο 1

Παραγωγή τυχαίων μεταβλητών και μονοπατιών στοχαστικών διαδικασιών

Σε όλο το κεφάλαιο θα υποθέσουμε ότι έχουμε στη διάθεσή μας μια ακολουθία ανεξάρτητων, ομοιόμορφα κατανεμημένων τυχαίων μεταβλητών U_1, U_2, \dots στο διάστημα $[0, 1]$, δηλαδή τέτοιων ώστε

$$\mathbb{P}(U_i \leq x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & x > 1 \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots$$

Θα συμβολίζουμε μια ομοιόμορφη τυχαία μεταβλητή U στο $[0, 1]$ ως:

$$U \sim U([0, 1]).$$

Έχοντας ως βάση αυτές τις ομοιόμορφες τυχαίες μεταβλητές, θα αναπτύξουμε διάφορες μεθόδους, οι οποίες τις μετασχηματίζουν, ούτως ώστε να κατασκευάσουμε τυχαίες μεταβλητές με διαφορετική κατανομή καθώς επίσης και μονοπάτια στοχαστικών ανελίξεων.

1.1 Παραγωγή τυχαίων μεταβλητών

1.1.1 Η μέθοδος του αντίστροφου μετασχηματισμού

Έστω ότι θέλουμε να λάβουμε δείγμα από μια τυχαία μεταβλητή X που έχει συνάρτηση κατανομής $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$. Ας υποθέσουμε αρχικά ότι η F είναι γνησίως αύξουσα. Η μέθοδος του αντίστροφου μετασχηματισμού χρησιμοποιεί το γεγονός ότι, αν $U \sim U([0, 1])$, τότε

$$\mathbb{P}(F^{-1}(U) \leq x) = \mathbb{P}(U \leq F(x)) = F(x),$$

οπότε παράγει δείγμα της τυχαίας μεταβλητής X από την ομοιόμορφη U , θέτοντας $X = F^{-1}(U)$, όπου F^{-1} η αντίστροφη της F . Αν θέλουμε επομένως να παραγάγουμε μια ακολουθία από ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές $X_i \sim F(x)$, θέτουμε $X_i = F^{-1}(U_i)$, όπου $U_i \sim U([0, 1])$, ανεξάρτητες, $i = 1, \dots, n$.

Η συνάρτηση κατανομής είναι εν γένει μια αύξουσα, δεξιά συνεχής συνάρτηση, η οποία ενδέχεται να είναι σταθερή κατά μήκος ενός διαστήματος. Μπορούμε να ορίσουμε τη γενικευμένη αντίστροφη συνάρτηση της F ως:

$$F^{-1}(y) := \inf\{x : F(x) \geq y\}.$$

Όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.1, αν η F είναι σταθερή και ίση με y_0 σε ένα διάστημα $[x_1, x_2]$, τότε η F^{-1} θα κάνει άλμα μήκους $(x_2 - x_1)$ στο σημείο y_0 , ενώ αν η F κάνει άλμα μήκους $(y_2 - y_1)$ στο σημείο x_0 , τότε η F^{-1} θα είναι σταθερή και ίση με x_0 στο διάστημα $[y_1, y_2]$.

Ο ορισμός αυτός συμπίπτει με τον ορισμό της αντίστροφης συνάρτησης, όταν αυτή υπάρχει, ενώ σε κάθε περίπτωση $F^{-1}(y) \leq x \Leftrightarrow y \leq F(x)$.

Παραδείγματα:

1) Αν θέλουμε να πάρουμε δείγμα μιας τυχαίας μεταβλητής X που ακολουθεί εκθετική κατανομή με μέση τιμή θ , δηλαδή με συνάρτηση κατανομής

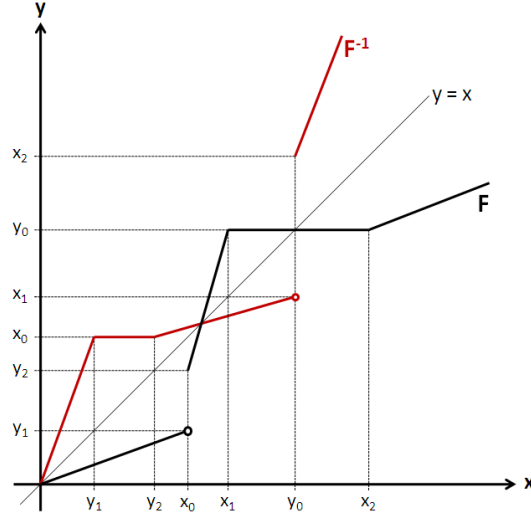
$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{\theta}}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases},$$

χρησιμοποιώντας μία ομοιόμορφη U στο $[0, 1]$, τότε θέτουμε

$$X = F^{-1}(U) = -\theta \log(1 - U) \sim -\theta \log(U),$$

όπου η τυχαία μεταβλητή $1 - U$ είναι επίσης ομοιόμορφη στο $[0, 1]$, όταν η U είναι ομοιόμορφη στο $[0, 1]$.

2) Έστω τώρα ότι θέλουμε να παραγάγουμε μια διακριτή τυχαία μεταβλητή X που παίρνει τιμές $c_1 < c_2 < \dots < c_n$ με πιθανότητα p_1, p_2, \dots, p_n , και αθροιστική πιθανότητα $q_i = \sum_{j=1}^i p_j$, $i = 1, \dots, n$, αντίστοιχα. Τότε, για να λάβουμε δείγμα



Σχήμα 1.1: Παράδειγμα γενικευμένης αντίστροφης συνάρτησης

της διακριτής X , δημιουργούμε μια $U \sim U([0, 1])$, και αν $U \in (q_{k-1}, q_k]$, για κάποιο $k \in \{1, \dots, n\}$, θέτουμε $X = c_k$.

3) Αν τώρα θέλουμε να πάρουμε δείγμα της τυχαίας μεταβλητής $X \sim F$, δεδομένου ότι $X \in (a, b]$, $F(a) < F(b)$, τότε ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή V ως

$$V = F(a) + (F(b) - F(a))U, \quad \text{όπου } U \sim U([0, 1]),$$

η οποία είναι ομοιόμορφη στο $[F(a), F(b)]$, και θέτουμε $X = F^{-1}(V)$. Τότε η X έχει όντως την κατανομή που θέλουμε, διότι

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(F^{-1}(V) \leq x) &= \mathbb{P}(F(a) + (F(b) - F(a))U \leq F(x)) \\ &= \mathbb{P}\left(U \leq \frac{F(x) - F(a)}{F(b) - F(a)}\right) \\ &= \frac{F(x) - F(a)}{F(b) - F(a)} \\ &= \mathbb{P}(X \leq x \mid a < X \leq b). \end{aligned}$$

Ακόμη και αν η αντίστροφη της F δε μπορεί να βρεθεί αναλυτικά, μπορούμε να υπολογίσουμε τιμές της με αριθμητικές μεθόδους. Θα δούμε ένα σχετικό παράδειγμα στην επόμενη ενότητα, όπου θα εκτιμήσουμε τιμές της αντίστροφης συνάρτησης κατανομής μιας τυπικής κανονικής τυχαίας μεταβλητής.

1.1.2 Η μέθοδος αποδοχής - απόρριψης

Μία άλλη μέθοδος παραγωγής τυχαίου δείγματος από μια κατανομή F , που οφείλεται στον Von Neumann [12], είναι η μέθοδος αποδοχής - απόρριψης. Η μέθοδος αυτή παράγει πρώτα δείγματα από μία κατανομή που είναι ευκολότερο να προσομοιωθεί και στη συνέχεια απορρίπτει ένα τυχαίο υποσύνολο των δειγμάτων αυτών με τέτοιο τρόπο, ώστε τα δείγματα που δεν απορρίπτονται να έχουν την επιθυμητή κατανομή.

Αναλυτικότερα, έστω ότι θέλουμε να λάβουμε δείγμα από μια κατανομή με πυκνότητα πιθανότητας $f(\cdot)$ ορισμένη σε κάποιο σύνολο \mathfrak{R} (π.χ. \mathbb{R}, \mathbb{R}^d). Έστω επίσης $g(\cdot)$ μια πυκνότητα στο \mathfrak{R} από την οποία μπορούμε να παραγάγουμε δείγμα ευκολότερα και έστω ότι οι f, g ικανοποιούν:

$$f(x) \leq cg(x), \forall x \in \mathfrak{R},$$

για κάποια σταθερά c .

Τότε, η μέθοδος αποδοχής - απόρριψης παράγει ένα δείγμα X από τη g και το αποδέχεται με πιθανότητα $f(X)/cg(X)$, ενώ το απορρίπτει με πιθανότητα $(1 - f(X)/cg(X))$. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί με τη βοήθεια μιας ομοιόμορφης τυχαίας μεταβλητής U στο $[0, 1]$ ως εξής:

Παράγουμε μια $U \sim U([0, 1])$. Αν $U \leq f(X)/cg(X)$, τότε αποδεχόμαστε τη X ως δείγμα από την f , διαφορετικά την απορρίπτουμε. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται έως ότου κάποιο δείγμα X γίνει αποδεκτό. Ο αλγόριθμος είναι

1. Καλούμε $X \sim g$
2. Καλούμε $U \sim U[0, 1]$
3. Αν $U \leq f(X)/cg(X)$, επιστρέφουμε X διαφορετικά, πηγαινουμε στο 1.

Η μέθοδος αυτή όντως επιστρέφει δείγμα από την κατανομή που θέλουμε. Έστω Y ένα δείγμα που επέστρεψε η μέθοδος. Τότε, αν $A \subset \mathfrak{R}$, έχουμε

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y \in A) &= \mathbb{P}(X \in A \mid U \leq f(X)/cg(X)) \\ &= \frac{\mathbb{P}(X \in A, U \leq f(X)/cg(X))}{\mathbb{P}(U \leq f(X)/cg(X))}, \end{aligned}$$

όπου

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(U \leq f(X)/cg(X)) &= \mathbb{E} [I_{\{u \leq f(x)/cg(x)\}}(U, X)] \\ &= \int_0^1 \int_{\mathfrak{R}} I_{\{u \leq f(x)/cg(x)\}}(u, x) g(x) dx du \\ &= \int_{\mathfrak{R}} g(x) \left(\int_0^{\frac{f(x)}{cg(x)}} du \right) dx \\ &= \int_{\mathfrak{R}} \frac{f(x)}{cg(x)} g(x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}} f(x) dx \\
&= \frac{1}{c},
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \in A, U \leq f(X)/cg(X)) &= \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} I_{\{A\}}(x) I_{\{u \leq \frac{f(x)}{cg(x)}\}}(u, x) g(x) dx du \\
&= \int_A g(x) \left(\int_0^{\frac{f(x)}{cg(x)}} du \right) dx \\
&= \int_A \frac{f(x)}{cg(x)} g(x) dx \\
&= \frac{1}{c} \int_A f(x) dx.
\end{aligned}$$

Άρα,

$$\mathbb{P}(Y \in A) = c \frac{1}{c} \int_A f(x) dx = \int_A f(x) dx.$$

Το σύνολο A είναι τυχαίο, επομένως η Y έχει την επιθυμητή πυκνότητα πιθανότητας f .

Η σχέση $f(x) \leq cg(x)$ συνεπάγεται ότι $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx \leq \int_{\mathbb{R}} cg(x) dx$, οπότε θα πρέπει $c \geq 1$. Είδαμε ότι

$$\mathbb{P}(U \leq f(X)/cg(X)) = \frac{1}{c},$$

δηλαδή η πιθανότητα αποδοχής ενός υποψήφιου δείγματος είναι $1/c$. Άρα όσο πιο κοντά στο 1 είναι η σταθερά c , τόσο μεγαλύτερη είναι η πιθανότητα αποδοχής του δείγματος. Επίσης, ο αναμενόμενος αριθμός των προσπαθειών μέχρι να προκύψει αποδεκτό δείγμα είναι c .

Παράδειγμα:

Αν επιθυμούμε, όπως στο παράδειγμα 3) της προηγούμενης παραγράφου, να πάρουμε δείγμα από μια τυχαία μεταβλητή X με πυκνότητα $g(x)$, δεδομένου ότι $X \in A$, για κάποιο σύνολο A , μπορούμε εναλλακτικά να εφαρμόσουμε αποδοχή - απόρριψη.

Έστω $f(x)$ η δεσμευμένη πυκνότητα, δηλαδή,

$$f(x) = \frac{g(x)I_{\{A\}}(x)}{\mathbb{P}(X \in A)} = \begin{cases} g(x)/\mathbb{P}(X \in A), & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}.$$

Άρα,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} 1/\mathbb{P}(X \in A), & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases} \leq 1/\mathbb{P}(X \in A).$$

Παρατηρούμε ότι, ο λόγος $f(x)/cg(x)$, όπου $c = 1/\mathbb{P}(X \in A)$, είναι είτε 1 (αν $x \in A$) είτε 0 (αν $x \notin A$). Άρα τελικά κρατάμε ακριβώς τα δείγματα που βρίσκονται στο A .

Στην επόμενη ενότητα θα δούμε ένα παράδειγμα παραγωγής τυπικών κανονικών τυχαίων τιμών με τη μέθοδο αποδοχής - απόρριψης.

Ένα πλεονέκτημα της μεθόδου αποδοχής - απόρριψης έναντι της μεθόδου του αντίστροφου μετασχηματισμού είναι ότι δε χρειάζεται να βρούμε την αντίστροφη της εκάστοτε συνάρτησης κατανομής. Έχει όμως το μειονέκτημα ότι δε χρησιμοποιούμε κάποια από τα δείγματα που παράγουμε. Αντιθέτως, κατά τη μέθοδο του αντίστροφου μετασχηματισμού απαιτείται ακριβώς μία ομοιόμορφη τυχαία μεταβλητή ούτως ώστε να λάβουμε μια τυχαία τιμή από την επιθυμητή κατανομή.

1.1.3 Η μέθοδος Ziggurat

Η μέθοδος *Ziggurat* (Marsaglia και Tsang [8]) είναι μία ταχύτατη μέθοδος δειγματοληψίας που βασίζεται στις εξής δύο απλές παρατηρήσεις.

Λήμμα 1. Έστω $f : \mathbb{R} \mapsto [0, +\infty)$ με $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = c < +\infty$ και ας θεωρήσουμε το χωρίο $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq f(x)\}$. Αν η κατανομή του τυχαίου διανύσματος (X, Y) είναι ομοιόμορφη στο V τότε η X έχει πυκνότητα πιθανότητας ανάλογη της f .

Πράγματι,

$$\mathbb{P}[X \leq \ell] = \frac{1}{|V|} \int_{x \leq \ell, 0 \leq y \leq f(x)} dx dy = \int_{-\infty}^{\ell} \frac{f(x)}{c} dx.$$

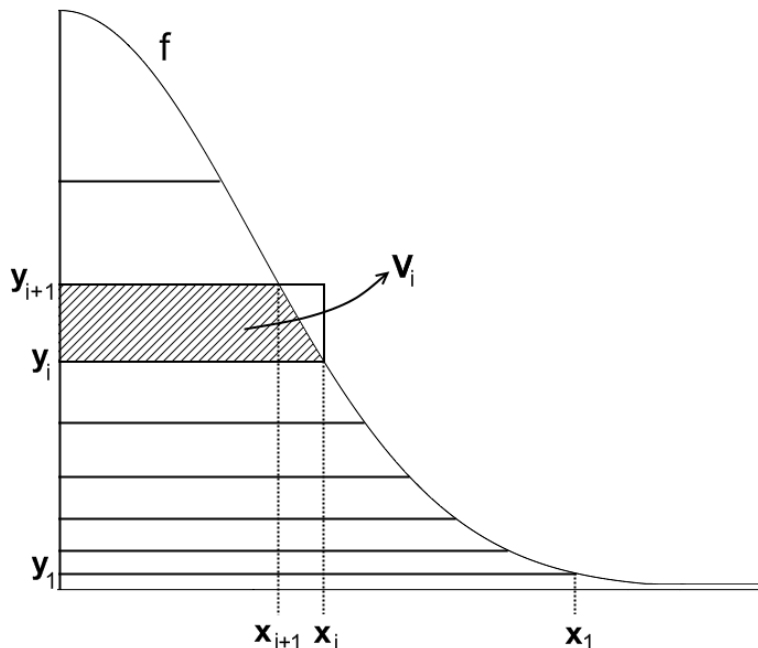
Λήμμα 2. Ας διαμερίσουμε το $V = \bigcup_{j=1}^N V_j$ σε ξένα υποσύνολα, και για $j = 1, \dots, N$ ας θεωρήσουμε τυχαία διανύσματα Z_j με ομοιόμορφη κατανομή στο V_j . Αν η τ.μ. J είναι ανεξάρτητη από τα Z_j με τιμές στο $\{1, 2, \dots, N\}$ και

$$\mathbb{P}[J = k] = \frac{|V_k|}{|V|},$$

τότε το τυχαίο διάνυσμα Z_J ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο V .

Πράγματι,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[Z_J \in A] &= \sum_{k=1}^N \mathbb{P}[Z_k \in A, J = k] \\ &= \sum_{k=1}^N \mathbb{P}[Z_k \in A] \frac{|V_k|}{|V|} \\ &= \sum_{k=1}^N \frac{|A \cap V_k|}{|V_k|} \frac{|V_k|}{|V|} \\ &= \frac{1}{|V|} \sum_{k=1}^N |A \cap V_k| \end{aligned}$$



Σχήμα 1.2: Η μέθοδος Ziggurat γραφικά

$$= \frac{|A \cap V|}{|V|}.$$

Από τα δύο παραπάνω λήμματα προκύπτει ότι αν διαμερίσουμε το V σε ξένα υποσύνολα, επιλέξουμε ένα από τα V_k με πιθανότητα ανάλογη του εμβαδού του, και ένα σημείο ομοιόμορφα στο V_k τότε η τετμημένη αυτού του σημείου είναι δείγμα από μια τ.μ. με πυκνότητα ανάλογη της f . Η ταχύτητα του αλγορίθμου Ziggurat βασίζεται στη δυνατότητά μας να επιλέξουμε τα V_k έτσι ώστε να μπορούμε να πάρουμε εύκολα σημεία ομοιόμορφα κατανεμημένα στα V_k . Ας δούμε τώρα πώς υλοποιείται στην πράξη ο αλγόριθμος, όταν η f είναι θετική μόνο για $x \geq 0$ και φθίνουσα στο $[0, +\infty)$.

Αρχικά διαμερίζουμε το V με οριζόντιες ευθείες σε N ισεμβαδικά χωρία V_0, \dots, V_{N-1} , όπως στο σχήμα και επιλέγουμε τυχαία ένα από αυτά, έστω το V_i .

Αν $i > 0$, ο τρόπος που επιλέγουμε ομοιόμορφα ένα σημείο στο V_i είναι με τη μέθοδο της αποδοχής-απόρριψης. Συγκεκριμένα, επιλέγουμε πρώτα ομοιόμορφα ένα σημείο στο ορθογώνιο $[0, x_i] \times [y_i, y_{i+1}]$ και το κρατάμε αν ανήκει στο V_i . Τέλος επιστρέφουμε την τετμημένη του τυχαίου αυτού σημείου, X , ως δείγμα από τη δοσμένη πυκνότητα f . Οι πράξεις αυτές μπορούν να υλοποιηθούν ως εξής:

Αν $i > 0$

1. Επιλέγουμε μια $U_0 \sim U[0, 1]$ και θέτουμε $X_0 = U_0 x_i$.
2. Αν $X_0 \leq x_{i+1}$ επιστρέφουμε στην έξοδο το X_0 .
3. Διαφορετικά επιλέγουμε μια $U_1 \sim U[0, 1]$ και θέτουμε $Y_0 = y_i + U_1(y_{i+1} - y_i)$.
4. Αν $Y_0 \leq f(X_0)$ επιστρέφουμε στην έξοδο το X_0 , διαφορετικά επιστρέφουμε στο βήμα 1.

Παρατηρήστε ότι με πιθανότητα $\frac{x_{i+1}}{x_i}$ ο αλγόριθμος απαιτεί μόνο την παραγωγή μιας ομοιόμορφης τ.μ., έναν πολλαπλασιασμό και μια σύγκριση, ενώ σε κάθε περίπτωση ο πολυπλοκότερος υπολογισμός είναι η αποτίμηση της f .

Αν $i = 0$ και ο φορέας της f δεν είναι φραγμένος, τότε δε μπορούμε να εφαρμόσουμε την ίδια μέθοδο γιατί το V_0 δεν περιέχεται σε κάποιο πεπερασμένο ορθογώνιο. Μπορούμε όμως να χρησιμοποιήσουμε το λήμμα 2 που είδαμε νωρίτερα. Συγκεκριμένα το V_0 μπορεί να διαμεριστεί στο ορθογώνιο $[0, x_1] \times [0, y_1]$ και στο συμπλήρωμά του \tilde{V}_0 . Επομένως για να επιλέξουμε ένα τυχαίο σημείο από το V_0 αρκεί να επιλέξουμε με πιθανότητα Nx_1y_1 ένα σημείο ομοιόμορφα από το ορθογώνιο, και με πιθανότητα $1 - Nx_1y_1$ ένα σημείο ομοιόμορφα από το \tilde{V}_0 . Στην πρώτη περίπτωση η έξοδος θα είναι μια ομοιόμορφη τ.μ. στο $[0, x_1]$ ενώ στη δεύτερη η έξοδος θα είναι $x_1 + Y$ όπου η Y θα είναι μια τ.μ. με θετικές τιμές και πυκνότητα ανάλογη της $g(x) = f(x_1 + x)$ για $x > 0$. Ένα τέτοιο δείγμα μπορούμε να παραγάγουμε είτε εφαρμόζοντας ξανά τον αλγόριθμο Ziggurat είτε με μια διαφορετική μέθοδο (βλ. [8] για την εκθετική και την τυπική κανονική κατανομή). Αυτό θα επηρεάσει την ταχύτητα του αλγορίθμου ελάχιστα, αφού για μεγάλες τιμές του N , ο αλγόριθμός μας θα φτάνει σπάνια σε αυτό το σημείο. Σχηματικά έχουμε λοιπόν

Αν $i = 0$

1. Επιλέγουμε μια $U_0 \sim U[0, 1]$.
2. Αν $U_0 \leq Nx_1y_1$ επιλέγουμε μια $U_1 \sim U[0, 1]$ και επιστρέφουμε στην έξοδο το $U_1 x_1$.
3. Διαφορετικά επιλέγουμε με κάποιον αλγόριθμο ένα δείγμα Y από μια θετική τ.μ. με πυκνότητα πιθανότητας ανάλογη της $g(x) = f(x_1 + x)$ και επιστρέφουμε στην έξοδο το $Y + x_1$.

Τυχαιοποιώντας το πρόσημο της εξόδου του αλγορίθμου μπορούμε πολύ εύκολα να πάρουμε δείγματα από συμμετρικές κατανομές με πυκνότητα ανάλογη της $f(x) + f(-x)$.

Είναι φανερό ότι το δυσκολότερο υπολογιστικά σημείο του αλγορίθμου Ziggurat είναι ο προσδιορισμός των σημείων x_1, \dots, x_N ώστε να χωριστεί το V σε N

χωρία εμβαδού $1/N$ το καθένα. Αυτό όμως χρειάζεται να γίνει μόνο μια φορά άπαξ, γιατί και η μέθοδος Ziggurat χρησιμοποιείται στην πράξη για την γρήγορη παραγωγή δειγμάτων από κατανομές που χρησιμοποιούμε συχνά. Το όνομα της μεθόδου προέρχεται από τον τρόπο που καλύπτεται η συνάρτηση πυκνότητας από ορθογώνια, καθώς θυμίζει τη μορφή ομόνυμων αρχαίων ναών στη Μεσοποταμία.

1.1.4 Παραγωγή μονοδιάστατων και πολυδιάστατων, κανονικών τυχαίων μεταβλητών

Σε αυτήν την παράγραφο θα αναπτύξουμε πιο ειδικές μεθόδους. Συγκεκριμένα, θα δούμε αποκλειστικά τρόπους παραγωγής κανονικών τυχαίων μεταβλητών, μονοδιάστατων και πολυδιάστατων, καθώς θα παίξουν κεντρικό ρόλο στα επόμενα κεφάλαια.

Μια τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί *κανονική κατανομή* με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2 , αν έχει πυκνότητα πιθανότητας

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, x \in \mathbb{R}.$$

Συμβολισμός: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Ειδικότερα, μια τυχαία μεταβλητή Z ακολουθεί *τυπική κανονική κατανομή* αν ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διασπορά 1.

Συμβολισμός: $Z \sim N(0, 1)$.

Αν $Z \sim N(0, 1)$, τότε η $X = \mu + \sigma Z$ ακολουθεί κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$. Επομένως, αρκεί να δούμε μεθόδους δειγματοληψίας από την τυπική κανονική κατανομή.

Στο Σχήμα 1.3 απεικονίζεται η πυκνότητα πιθανότητας ϕ , για διάφορες τιμές της μέσης τιμής, μ , και της διασποράς, σ^2 .

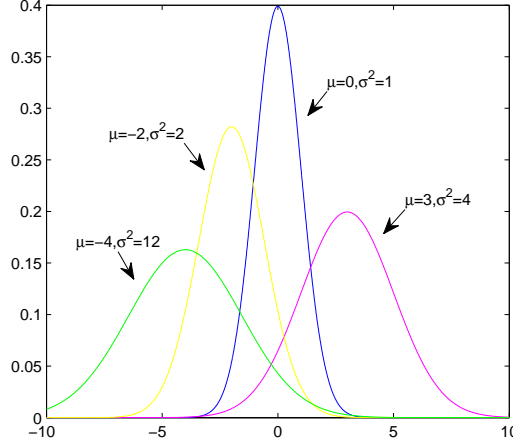
Ένα τυχαίο διάνυσμα $X = (X_1, X_2, \dots, X_d)^\top \in \mathbb{R}^d$ που ακολουθεί d -διάστατη *κανονική κατανομή* χαρακτηρίζεται από ένα διάνυσμα μέσων $\mu \in \mathbb{R}^d$ και έναν πίνακα συνδιασπορών $\Sigma \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, ο οποίος έχει στοιχεία $\Sigma_{ij} = \text{Cov}[X_i, X_j]$ και είναι εν γένει συμμετρικός και θετικά ημιορισμένος. Η i -οστή συνιστώσα του διανύσματος X , X_i , $i = 1, \dots, d$, ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή μ_i και διασπορά $\sigma_i^2 = \Sigma_{ii}$.

Αν ο πίνακας Σ είναι θετικά ορισμένος, τότε το διάνυσμα X έχει πυκνότητα πιθανότητας

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2} |\Sigma|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^\top \Sigma^{-1}(x-\mu)}, x \in \mathbb{R}^d.$$

Συμβολισμός: $X \sim N(\mu, \Sigma)$.

Ειδικότερα, ένα τυχαίο διάνυσμα $Z \in \mathbb{R}^d$ ακολουθεί d -διάστατη *τυπική κανονική κατανομή*, αν έχει την παραπάνω πυκνότητα πιθανότητας, με διάνυσμα μέσων τιμών



Σχήμα 1.3: Κανονική πυκνότητα πιθανότητας για διάφορες τιμές των παραμέτρων μ και σ^2 .

το μηδενικό $0 \in \mathbb{R}^d$, και πίνακα συνδιασπορών τον $d \times d$ μοναδιαίο πίνακα I .

Συμβολισμός: $Z \sim N(0, I)$.

Η 2-διάστατη τυπική κανονική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας φαίνεται στο Σχήμα 1.4

Στο σημείο αυτό παραθέτουμε δύο σημαντικές και ιδιαίτερα χρήσιμες για τη συνέχεια ιδιότητες της πολυδιάστατης κανονικής κατανομής:

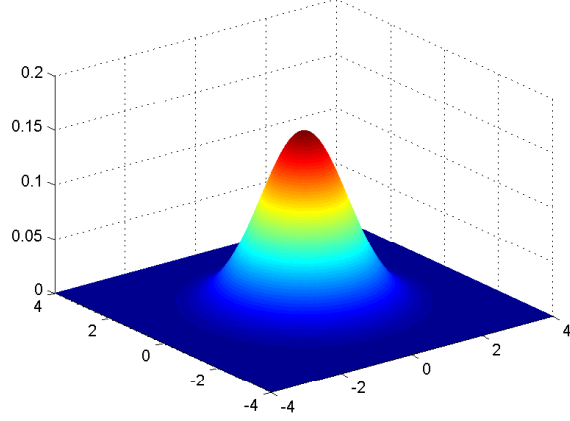
Ιδιότητα 1 (Γραμμικού μετασχηματισμού) Έστω $X \sim N(\mu, \Sigma)$, $X \in \mathbb{R}^d$, και έστω A ένας $k \times d$ πίνακας, $k \in \mathbb{Z}$, και u ένα d -διάστατο διάνυσμα. Τότε, $u + AX \sim N(u + A\mu, A\Sigma A^T)$. Με άλλα λόγια, κάθε γραμμικός μετασχηματισμός ενός κανονικού τυχαίου διανύσματος είναι πάλι ένα κανονικό τυχαίο διάνυσμα.

Ιδιότητα 2 (Δέσμευσης) Έστω $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}\right)$, όπου τα X_1, μ_1 ενδέχεται να είναι διανύσματα και τα $X_2, \mu_2, \Sigma_{11}, \Sigma_{21}, \Sigma_{22}$ διανύσματα ή πίνακες. Υποθέτουμε ότι ο Σ_{22} είναι αντιστρέψιμος. Τότε,

$$(X_1 | X_2 = x) \sim N(\mu_1 + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(x - \mu_2), \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}).$$

Απόδειξη Ιδιότητας 1:

Θα χρειαστούμε την έννοια της χαρακτηριστικής συνάρτησης μιας τυχαίας μεταβλητής X που ορίζεται ως $\phi(\theta) = \mathbb{E}[e^{i\theta^T X}]$, όπου $\theta \in \mathbb{R}^d$. Η ϕ ορίζει μονοσήμαντα την κατανομή της τυχαίας μεταβλητής X .



Σχήμα 1.4: Διδιάστατη τυπική κανονική πυκνότητα πιθανότητας, $\mu = 0$ και $\Sigma = I$.

Θα δείξουμε αρχικά ότι η χαρακτηριστική συνάρτηση που αντιστοιχεί σε μια κανονική τυχαία μεταβλητή $X \sim N(\mu, \Sigma)$, στην περίπτωση που ο πίνακας Σ είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος, είναι $\phi_X(\theta) = e^{i\theta^\top \mu - \frac{1}{2}\theta^\top \Sigma \theta}$. Για το σκοπό αυτό θα χρειαστούμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Ισχυρισμός: Αν H ένας πραγματικός, θετικά ορισμένος, συμμετρικός $d \times d$ πίνακας, τότε $\int_{\mathbb{R}^d} e^{-x^\top H x} dx = \frac{\pi^{d/2}}{(\det H)^{1/2}}$

Απόδειξη: Θα χρειαστούμε το αποτέλεσμα $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$. Ο πίνακας H είναι πραγματικός, θετικά ορισμένος, συμμετρικός πίνακας. Επομένως μπορεί να γραφεί ως $H = Q^\top D Q$, όπου Q $d \times d$ ορθογώνιος πίνακας και D $d \times d$ διαγώνιος πίνακας. Αυτό σημαίνει ότι $D = Q H Q^\top$. Κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $x = Q^\top y$, $y \in \mathbb{R}^d$. Οπότε, $dx = \det Q^\top dy = \det Q dy = dy$, διότι η ορίζουσα ενός ορθογώνιου πίνακα ισούται με 1. Τότε, έχουμε:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-x^\top H x} dx &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-(Q^\top y)^\top H Q^\top y} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-y^\top Q H Q^\top y} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-y^\top D y} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\sum_{i=1}^d d_{ii} (y_i)^2} dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \prod_{i=1}^d \int_{\mathbb{R}} e^{-d_{ii}y_i^2} dy_i \\
&= \prod_{i=1}^d \frac{1}{\sqrt{d_{ii}}} \int_{\mathbb{R}} e^{-z_i^2} dz_i \\
&= \prod_{i=1}^d \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{d_{ii}}} \\
&= \frac{\pi^{d/2}}{(\det D)^{1/2}}, \det D = \det H \\
&= \frac{\pi^{d/2}}{(\det H)^{1/2}},
\end{aligned}$$

όπου κάναμε την αλλαγή μεταβλητής $z_i = \sqrt{d_{ii}}y_i$.

Με χρήση του ισχυρισμού, θα υπολογίσουμε τη $\phi'_X(\theta) = \mathbb{E}[e^{\theta^\top X}]$, όπου $\theta \in \mathbb{R}^d$:

$$\begin{aligned}
\phi'_X(\theta) &= \mathbb{E}[e^{\theta^\top X}] \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} e^{\theta^\top x} f_X(x) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} e^{\theta^\top x} \frac{1}{(2\pi)^{d/2} (\det \Sigma)^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^\top \Sigma^{-1}(x-\mu)} dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{d/2} (\det \Sigma)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{x^\top \theta - \frac{1}{2}(x-\mu)^\top \Sigma^{-1}(x-\mu)} dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{d/2} (\det \Sigma)^{1/2}} e^{\mu^\top \theta} \int_{\mathbb{R}^d} e^{(x-\mu)^\top \theta - \frac{1}{2}(x-\mu)^\top \Sigma^{-1}(x-\mu)} dx \\
&= \frac{e^{\theta^\top \mu}}{(2\pi)^{d/2} (\det \Sigma)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-(x-\mu)^\top (\frac{1}{2}\Sigma^{-1}(x-\mu) - \theta)} dx
\end{aligned}$$

Ο πίνακας Σ^{-1} είναι συμμετρικός, αντιστρέψιμος, και για A συμμετρικό, αντιστρέψιμο εύκολα επαληθεύεται ότι

$$x^\top (Ax + u) = (x + \frac{1}{2}A^{-1}u)^\top A(x + \frac{1}{2}A^{-1}u) - \frac{1}{4}u^\top A^{-1}u.$$

Εδώ, $x = x - \mu$, $A = \frac{1}{2}\Sigma^{-1}$, $u = -\theta$ και $(\frac{1}{2}\Sigma^{-1})^{-1} = 2\Sigma$. Άρα,

$$\begin{aligned}
\phi'_X(\theta) &= \frac{e^{\theta^\top \mu}}{(2\pi)^{d/2} (\det \Sigma)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-(x-\mu)^\top (\frac{1}{2}\Sigma^{-1}(x-\mu) - \theta)} dx \\
&= \frac{e^{\theta^\top \mu}}{(2\pi)^{d/2} (\det \Sigma)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-(x-\mu - \frac{1}{2}2\Sigma\theta)^\top \frac{1}{2}\Sigma^{-1}(x-\mu - \frac{1}{2}2\Sigma\theta) + \frac{1}{4}\theta^\top 2\Sigma\theta} dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^{\theta^\top \mu + \frac{1}{2} \theta^\top \Sigma \theta}}{(2\pi)^{d/2} (\det \Sigma)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-(x-\mu-\frac{1}{2}2\Sigma\theta)^\top \frac{1}{2}\Sigma^{-1}(x-\mu-\frac{1}{2}2\Sigma\theta)} dx \\
&= \frac{e^{\theta^\top \mu + \frac{1}{2} \theta^\top \Sigma \theta}}{(2\pi)^{d/2} (\det \Sigma)^{1/2}} \frac{\pi^{d/2}}{(\det \frac{1}{2}\Sigma^{-1})^{1/2}} \\
&= \frac{e^{\theta^\top \mu + \frac{1}{2} \theta^\top \Sigma \theta}}{(2\pi)^{d/2} (\det \Sigma)^{1/2}} \frac{\pi^{d/2}}{(\det \frac{1}{2}\Sigma^{-1})^{1/2}} \\
&= \frac{e^{\theta^\top \mu + \frac{1}{2} \theta^\top \Sigma \theta}}{(2\pi)^{d/2} (\det \Sigma)^{1/2}} \pi^{d/2} (2^d \det \Sigma)^{1/2} \\
&= e^{\theta^\top \mu + \frac{1}{2} \theta^\top \Sigma \theta}.
\end{aligned}$$

Οι συναρτήσεις

$$\phi'_X(z) = \mathbb{E}[e^{z^\top X}] \quad \text{και} \quad g(z) = e^{z^\top \mu + \frac{1}{2} z^\top \Sigma z},$$

$z \in \mathbb{C}^d$, είναι αναλυτικές. Από την τελευταία σειρά εξισώσεων, προκύπτει ότι συμπίπτουν στον \mathbb{R}^d . Επομένως θα συμπίπτουν και στον \mathbb{C}^d . Άρα, η χαρακτηριστική συνάρτηση της $X \sim N(\mu, \Sigma)$ θα είναι

$$\phi_X(\theta) = \phi'_X(i\theta) = e^{i\theta^\top \mu - \frac{1}{2} \theta^\top \Sigma \theta}.$$

Ας υπολογίσουμε τώρα τη χαρακτηριστική συνάρτηση της τυχαίας μεταβλητής $Y = AX + u$:

$$\begin{aligned}
\phi_Y(\theta) &= \mathbb{E}[e^{i\theta^\top Y}] \\
&= \mathbb{E}[e^{i\theta^\top AX + i\theta^\top u}] \\
&= e^{i\theta^\top u} \mathbb{E}[e^{i(A^\top \theta)^\top X}], X \sim N(\mu, \Sigma) \\
&= e^{i\theta^\top u} e^{i(A^\top \theta)^\top \mu - \frac{1}{2} (A^\top \theta)^\top \Sigma A^\top \theta} \\
&= e^{i\theta^\top (u + A\mu) - \frac{1}{2} \theta^\top (A\Sigma A^\top) \theta}.
\end{aligned}$$

Συνεπώς, $Y \sim N(u + A\mu, A\Sigma A^\top)$.

Απόδειξη Ιδιότητας 2:

Ας υποθέσουμε ότι $X_1 \in \mathbb{R}^n$ και $X_2 \in \mathbb{R}^m$, οπότε, $\mu_1 \in \mathbb{R}^n$, $\mu_2 \in \mathbb{R}^m$, $\Sigma_{11} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\Sigma_{12} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\Sigma_{21} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, και $\Sigma_{22} \in \mathbb{R}^{m \times m}$.

Το γεγονός ότι οι X_1, X_2 είναι από κοινού κανονικές με διάνυσμα μέσων τιμών $\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$ και πίνακα συνδιακυμάνσεων $\begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}$, έπεται ότι $X_1 \sim N(\mu_1, \Sigma_{11})$ και $X_2 \sim N(\mu_2, \Sigma_{22})$.

Η X_1 μπορεί να γραφεί ως

$$X_1 = \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} X_2 + (X_1 - \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} X_2).$$

Τότε,

$$\begin{aligned}
\text{Cov}((X_1 - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}X_2), X_2) &= \text{Cov}(X_1, X_2) + \text{Cov}(-\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}X_2, X_2) \\
&= \text{Cov}(X_1, X_2) - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\text{Cov}(X_2, X_2) \\
&= \Sigma_{12} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{22} \\
&= \Sigma_{12} - \Sigma_{12} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\text{Cov}(AZ, W) = A\text{Cov}(Z, W)$, $Z, W \in \mathbb{R}^d$, $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$. (Αντίστοιχα ισχύει ότι $\text{Cov}(Z, AW) = \text{Cov}(Z, W)A^\top$). Επομένως, οι τυχαίες μεταβλητές X_2 και $Z = X_1 - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}X_2$ είναι ασυσχέτιστες μεταξύ τους. Επιπροσθέτως, οι Z και X_2 έχουν από κοινού κανονική κατανομή. Έπεται ότι είναι ανεξάρτητες.

Γράφουμε τη Z ως

$$Z = \begin{bmatrix} I_n & -\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix},$$

όπου I_n ο $n \times n$ μοναδιαίος πίνακας. Έστω $B = \begin{bmatrix} I_n & -\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1} \end{bmatrix}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times (n+m)}$. Τότε, από την Ιδιότητα 1, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
Z = 0 + B \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} &= X_1 - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}X_2 \sim N\left(0 + B \begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_2 \end{bmatrix}, B \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix} B^\top\right) \\
&= N(\mu_1 - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\mu_2, \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}).
\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
(X_1 | X_2 = x) &= \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}x + Z \\
&\sim N(\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}x + \mu_1 - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\mu_2, \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}) \\
&= N(\mu_1 + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(x - \mu_2), \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}),
\end{aligned}$$

όπου κάναμε ξανά χρήση της Ιδιότητας 1.

Με χρήση της ιδιότητας του γραμμικού μετασχηματισμού, μπορούμε να ορίσουμε το κανονικά κατανομημένο διάνυσμα $X \sim N(\mu, \Sigma)$, στην περίπτωση που ο πίνακας Σ είναι θετικά ημιορισμένος αλλά όχι θετικά ορισμένος, ως

$$X = \mu + AZ,$$

όπου $Z \sim N(0, I_d)$ και A ένας $d \times d$ πίνακας που ικανοποιεί $AA^\top = \Sigma$.

Παραγωγή μονοδιάστατων τυπικών κανονικών τυχαίων μεταβλητών

- Με τη μέθοδο του αντίστροφου μετασχηματισμού

Έστω ότι επιθυμούμε να πάρουμε δείγματα της τυπικής κανονικής κατανομής με χρήση του αντίστροφου μετασχηματισμού. Η συνάρτηση κατανομής που αντιστοιχεί σε μια τυπική κανονική τυχαία μεταβλητή είναι

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1.1)$$

Θα θέλαμε να εκτιμήσουμε τιμές της Φ^{-1} . Το πρόβλημα εύρεσης μιας τιμής $x = \Phi^{-1}(u)$, μπορεί να ειπωθεί ως πρόβλημα εύρεσης μιας ρίζας της εξίσωσης $\Phi(x) - u = 0$. Ξεκινώντας με μία αρχική προσέγγιση, x_0 , για τη ρίζα, μπορούμε να εφαρμόσουμε για παράδειγμα τη μέθοδο του Newton για να καταλήξουμε στην τιμή x . Κατά τη μέθοδο Newton, κάθε επόμενη προσέγγιση για τη x λαμβάνεται από την προηγούμενη μέσω της αναδρομικής σχέσης

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{\Phi(x_n) - u}{\Phi'(x_n)} \\ &= x_n - \frac{\Phi(x_n) - u}{\phi(x_n)} \\ &= x_n + (u - \Phi(x_n)) e^{0.5x_n^2 + c}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \end{aligned}$$

όπου $c = \log(\sqrt{2\pi})$. Ως σημείο εκκίνησης έχει προταθεί από τους Marsaglia, Zaman, και Marsaglia [9] το

$$x_0 = \pm \sqrt{|-1.6 \log(1.0004 - (1 - 2u)^2)|},$$

όπου παίρνουμε θετικό πρόσημο όταν $u \geq 0$ και αρνητικό όταν $u < 0$. Με εκκίνηση το σημείο αυτό η μέθοδος Newton δίνει πολύ καλή εκτίμηση της $x = \Phi^{-1}(u)$.

Η συνάρτηση κατανομής στην 1.1 είναι συμμετρική, άρα

$$\Phi^{-1}(1 - u) = -\Phi^{-1}(u), \quad 0 < u < 1.$$

Επομένως, αρκεί να εκτιμήσουμε τη Φ^{-1} είτε στο διάστημα $[0.5, 1)$ είτε στο $(0, 0.5]$.

Οι Beasley και Springer [1] πρότειναν την εκτίμηση

$$\Phi^{-1}(u) \approx \frac{\sum_{n=0}^3 a_n (u - \frac{1}{2})^{2n+1}}{1 + \sum_{n=0}^3 b_n (u - \frac{1}{2})^{2n}}, \quad 0.5 \leq u \leq 0.92,$$

ενώ για $u > 0.92$ χρησιμοποιούν μία ρητή συνάρτηση του $\sqrt{\log(1 - u)}$. Οι σταθερές a_n, b_n δίνονται παρακάτω

$$\begin{array}{ll} a_0 = 2.50662823884 & b_0 = -8.47351093090 \\ a_1 = -18.61500062529 & b_1 = 23.08336743743 \\ a_2 = 41.39119773534 & b_2 = -21.06224101826 \\ a_3 = -25.44106049637 & b_3 = 3.13082909833 \end{array}$$

Για μεγαλύτερη ακρίβεια στο διάστημα $[0.92, 1)$, ο Moro [10] αντικατέστησε την εκτίμηση των Beasley-Springer με την εκτίμηση

$$\Phi^{-1}(u) \approx g(u) = \sum_{n=0}^8 c_n [\log(-\log(1-u))]^n, \quad 0.92 \leq u < 1,$$

όπου

$$\begin{aligned} c_0 &= 0.3374754822726147 & c_5 &= 0.0003951896511919 \\ c_1 &= 0.9761690190917186 & c_6 &= 0.0000321767881768 \\ c_2 &= 0.1607979714918209 & c_7 &= 0.0000002888167364 \\ c_3 &= 0.0276438810333863 & c_8 &= 0.0000003960315187 \\ c_4 &= 0.0038405729373609 & & \end{aligned}$$

Από τη συμμετρία της Φ ,

$$\Phi^{-1}(u) \approx -g(1-u), \quad 0 < u \leq 0.8.$$

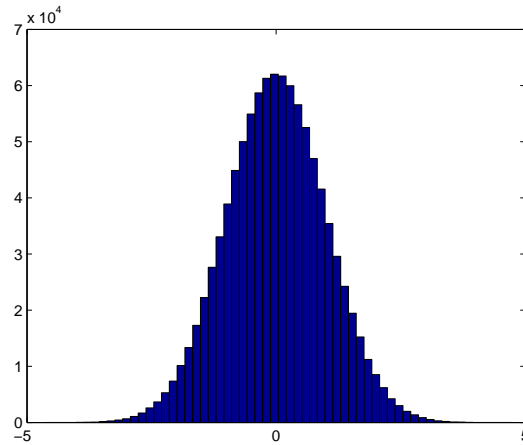
Με την παραλλαγή αυτή πετυχαίνουμε μέγιστο απόλυτο σφάλμα εκτίμησης της τάξης του 10^{-9} , όταν $u \in [\Phi(-7), \Phi(7)]$.

Ο συνδυασμένος αλγόριθμος των Beasley-Springer-Moro συνοπτικά είναι:

1. Καλούμε $U \sim U[0, 1]$
2. Θέτουμε $Y = U - 0.5$
3. Αν $|Y| < 0.42$,
θέτουμε $R = Y^2$,
και $Z = Y(((a_3R + a_2)R + a_1)R + a_0)/(((b_3R + b_2)R + b_1)R + b_0)R + 1)$
διαφορετικά,
θέτουμε $R = U$, και
αν $Y > 0$, θέτουμε $R = 1 - U$, $R = \log(-\log(R))$, και
 $Z = c_0 + R(c_1 + R(c_2 + R(c_3 + R(c_4 + R(c_5 + R(c_6 + R(c_7 + Rc_8))))))$), ενώ
αν $Y < 0$, θέτουμε $R = \log(-\log(R))$, και $Z = -(c_0 + R(c_1 + R(c_2 + R(c_3 + R(c_4 + R(c_5 + R(c_6 + R(c_7 + Rc_8))))))$).

Στο Σχήμα 1.5 φαίνεται το ιστόγραμμα 1 εκατομμυρίου δειγμάτων που προέκυψαν από τον αλγόριθμο προσέγγισης της αντίστροφης τυπικής κανονικής κατανομής των Beasley-Springer-Moro. Για αυτό το πλήθος σημείων χρειάστηκαν κατά μέσο όρο 0.56 δευτερόλεπτα.

Η μέθοδος Newton, όπως και άλλες μέθοδοι εύρεσης ριζών εξισώσεων, δίνει ακριβέστερες εκτιμήσεις για τη Φ^{-1} από ό,τι οι άλλες δύο προσεγγίσεις. Ωστόσο, απαιτεί περισσότερο χρόνο κατά την προσομοίωση. Ένας τρόπος να μειώσουμε ακόμη περισσότερο το σφάλμα της εκτίμησης είναι να πάρουμε μία εκτίμηση για τη Φ^{-1} από μία εκ των δύο προσεγγίσεων, και στη συνέχεια να εφαρμόσουμε τη μέθοδο του Newton, με σημείο εκκίνησης την τιμή αυτή. Η τάξη του σφάλματος μπορεί να μειωθεί στο 10^{-15} αν εφαρμόσουμε ένα βήμα Newton στην τιμή που θα επιστρέψει η προσέγγιση του Moro [10].



Σχήμα 1.5: Εμπειρική κατανομή 1 εκατομμυρίου δειγμάτων που παράχθηκαν με τη μέθοδο Beasley-Springer-Moro

•Με τη μέθοδο αποδοχής - απόρριψης

1) Έστω ότι θέλουμε τυχαίο δείγμα από την τυπική κανονική κατανομή. Η τυπική κανονική πυκνότητα είναι

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, x \in \mathbb{R}.$$

Η διπλή εκθετική πυκνότητα είναι

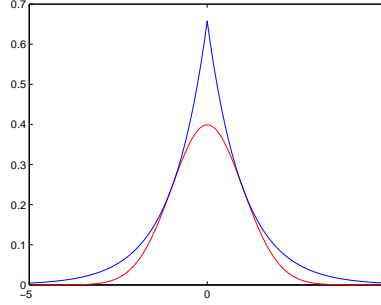
$$g(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}, x \in \mathbb{R}$$

και ο λόγος των δύο είναι

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}}{\frac{1}{2} e^{-|x|}} \\ &= \sqrt{\frac{2e}{\pi}} e^{-\frac{1}{2}(|x|-1)^2} \leq \sqrt{\frac{2e}{\pi}} \approx 1.3155 \end{aligned}$$

Για τη συγκεκριμένη λοιπόν πυκνότητα g , $c = 1.3155$. Η σχέση των f και $c \cdot g$ φαίνεται στο Σχήμα 1.6. Συνεπώς, για να πάρουμε τυχαίες τιμές της τυπικής κανονικής κατανομής, παράγουμε δείγμα από τη g με τη μέθοδο του αντίστροφου μετασχηματισμού και στη συνέχεια εφαρμόζουμε αποδοχή - απόρριψη.

Έστω X μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί εκθετική κατανομή με μέση τιμή 1 και έστω \tilde{U} τυχαία μεταβλητή με κατανομή $\mathbb{P}(\tilde{U} = 1) = \mathbb{P}(\tilde{U} = -1) = 1/2$, ανεξάρτητη της X . Τότε, η τυχαία μεταβλητή $\tilde{U}X$ ακολουθεί τη διπλή εκθετική κατανομή:



Σχήμα 1.6: Διπλή εκθετική πυκνότητα, επί τη σταθερά c , και τυπική κανονική πυκνότητα.

Έστω $z \geq 0$. Έχουμε,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tilde{U}X \leq z) &= \frac{1}{2}\mathbb{P}(X \leq z) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(-X \leq z) \\ &= \frac{1}{2}(1 - e^{-z}) + \frac{1}{2} \\ &= 1 - \frac{1}{2}e^{-z}, \end{aligned}$$

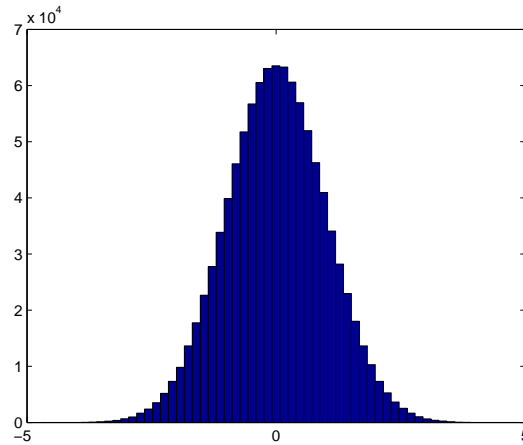
που είναι η διπλή εκθετική κατανομή, για θετικό z . Άρα παίρνουμε δείγμα από τη g παράγοντας μια εκθετική, όπως στο παράδειγμα 1, και τυχαιοποιώντας το πρόσημό της με μία \tilde{U} όπως παραπάνω.

Αν V μια ομοιόμορφη τυχαία μεταβλητή στο $[0, 1]$, τότε η συνθήκη απόρριψης θα είναι

$$V > \frac{f(\tilde{U}X)}{cg(\tilde{U}X)} = e^{-\frac{(|\tilde{u}x|-1)^2}{2}} = e^{-\frac{(|x|-1)^2}{2}}.$$

Επομένως, η \tilde{U} δε συμμετέχει στον έλεγχο αποδοχής - απόρριψης, και άρα δε χρειάζεται να την καλέσουμε πριν αποδεχτούμε κάποιο δείγμα. Στην περίπτωση που το δείγμα γίνει αποδεκτό, καθορίζουμε το πρόσημο της διπλής εκθετικής τιμής. Έτσι, τα βήματα που ακολουθούμε είναι τα εξής: Παράγουμε μία εκθετική με μέση τιμή 1. Κάνουμε έπειτα τον έλεγχο αποδοχής - απόρριψης με χρήση μιας ομοιόμορφης. Τέλος, αν το δείγμα γίνει αποδεκτό, το πολλαπλασιάζουμε με τη \tilde{U} , και το επιστρέφουμε ως δείγμα από την τυπική κανονική κατανομή. Συνοπτικά, ο αλγόριθμος είναι

1. Καλούμε $U, V \sim U[0, 1]$
2. Θέτουμε $X = -\log(U)$
3. Αν $V > e^{-(|X|-1)^2/2}$ επιστρέφουμε στο βήμα 1
4. Διαφορετικά καλούμε \tilde{U} όπως παραπάνω και επιστρέφουμε $X\tilde{U}$.



Σχήμα 1.7: Εμπειρική κατανομή 1 εκατομμυρίου δειγμάτων τυπικής κανονικής κατανομής που παράχθηκαν με τη μέθοδο αποδοχής - απόρριψης από τη διπλή εκθετική κατανομή.

Στο Σχήμα 1.7 βλέπουμε την εμπειρική κατανομή 1 εκατομμυρίου δειγμάτων που προέκυψαν από τη μέθοδο αποδοχής - απόρριψης για την παραγωγή τυπικής κανονικής κατανομής από τη διπλή εκθετική. Κατά μέσο όρο χρειάστηκαν 0.61 δευτερόλεπτα για αυτό το πλήθος σημείων.

•Με τη μέθοδο Ziggurat

Η γλώσσα προγραμματισμού Matlab χρησιμοποιεί τη μέθοδο Ziggurat για παραγωγή τυπικών κανονικών τιμών, μέσω της εντολής `randn`. Στο Σχήμα 1.8 φαίνεται η εμπειρική κατανομή 1 εκατομμυρίου δειγμάτων τυπικής κανονικής κατανομής που προέκυψαν από τη μέθοδο Ziggurat. Κατά μέσο όρο χρειάστηκαν 0.04 δευτερόλεπτα για την παραγωγή αυτού του πλήθους σημείων.

Ακολουθούν δύο ακόμη μέθοδοι παραγωγής τυπικών κανονικών τυχαίων τιμών.

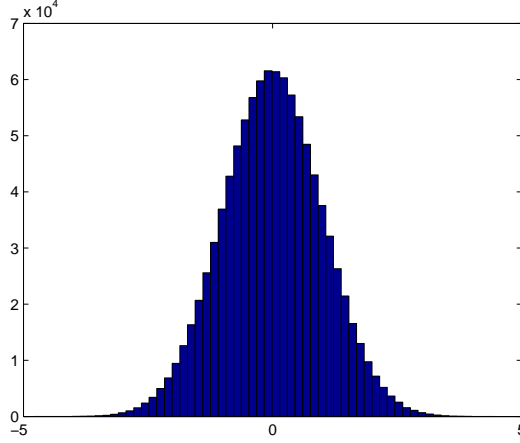
•Η μέθοδος Box - Muller

Η μέθοδος αυτή παράγει ένα δείγμα από τη δισδιάστατη τυπική κανονική κατανομή. Οπότε, οι συνιστώσες του δείγματος αυτού αποτελούν ανεξάρτητα δείγματα από τη μονοδιάστατη τυπική κανονική κατανομή.

Ο αλγόριθμος χρησιμοποιεί τις ακόλουθες δύο ιδιότητες της δισδιάστατης τυπικής κανονικής κατανομής:

Αν Z_1, Z_2 ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, $(Z_1, Z_2) \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{I}_2)$, τότε,

i) η τυχαία μεταβλητή $R = \frac{(Z_1)^2 + (Z_2)^2}{2}$ ακολουθεί την εκθετική κατανομή με μέση τιμή 1, έχει δηλαδή κατανομή $\mathbb{P}(R \leq x) = 1 - e^{-x}$, $x > 0$, και



Σχήμα 1.8: Εμπειρική κατανομή 1 εκατομμυρίου δειγμάτων τυπικής κανονικής κατανομής που παράχθηκαν με τη μέθοδο Ziggurat

ii) η τυχαία μεταβλητή $\Theta = \text{Arg}(Z_1 + iZ_2)$ ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[0, 2\pi]$, και είναι ανεξάρτητη της R .

Απόδειξη:

Η από κοινού πυκνότητα πιθανότητας των Z_1, Z_2 είναι $f_{Z_1 Z_2}(y, z) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{y^2+z^2}{2}}$.

Έχουμε

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(R \leq x, \Theta \leq w) &= \mathbb{P}(Z_1^2 + Z_2^2 \leq 2x, \text{Arg}(Z_1 + iZ_2) \leq w) \\ &= \int_{\{(y,z): y^2+z^2 \leq 2x, \text{Arg}(Z_1+iZ_2) \leq w\}} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{y^2+z^2}{2}} dydz \end{aligned}$$

Κάνουμε αλλαγή μεταβλητών σε πολικές συντεταγμένες:

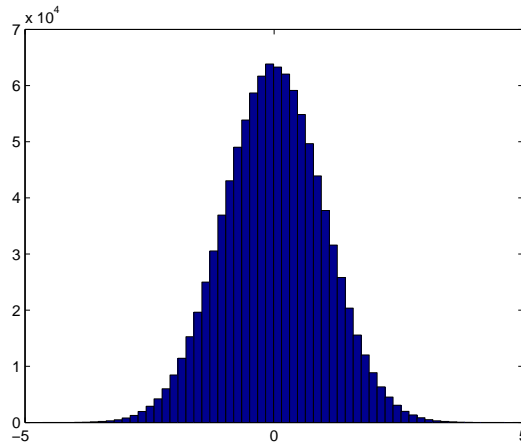
$$y = r \cos \theta, z = r \sin \theta, y^2 + z^2 = r^2, I = r,$$

με όρια ολοκλήρωσης:

$$0 \leq \theta \leq w, 0 < r \leq \sqrt{2x}.$$

Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(R \leq x, \Theta \leq w) &= \int_0^w \int_0^{\sqrt{2x}} \frac{1}{2\pi} r e^{-\frac{r^2}{2}} dr d\theta \\ &= \frac{w}{2\pi} \int_0^{\sqrt{2x}} r e^{-\frac{r^2}{2}} dr \\ &= \frac{w}{2\pi} (1 - e^{-x}). \end{aligned}$$



Σχήμα 1.9: Εμπειρική κατανομή 1 εκατομμυρίου δειγμάτων που παράχθηκαν με τη μέθοδο Box - Muller

Συμπεραίνουμε ότι οι R, Θ είναι ανεξάρτητες, εφόσον η από κοινού συνάρτηση κατανομής πιθανότητας είναι το γινόμενο μιας ομοιόμορφης στο $[0, 2\pi]$, ($w/2\pi$), και μιας εκθετικής συνάρτησης κατανομής πιθανότητας, $(1 - e^{-x})$.

Επομένως, για να παραγάγουμε το διάνυσμα (Z_1, Z_2) , δημιουργούμε ένα δείγμα της τυχαίας μεταβλητής R και ένα δείγμα της τυχαίας μεταβλητής Θ και στη συνέχεια θέτουμε:

$$Z_1 = \sqrt{2R} \cos \Theta, Z_2 = \sqrt{2R} \sin \Theta.$$

Για τη δημιουργία της εκθετικής R χρησιμοποιούμε τη μέθοδο του αντίστροφου μετασχηματισμού και θέτουμε $R = -\ln(U_1)$, όπου $U_1 \sim U([0, 1])$. Για να παραγάγουμε την ομοιόμορφη γωνία Θ στο $[0, 2\pi]$, καλούμε μια $U_2 \sim U([0, 1])$, ανεξάρτητα της U_1 , και θέτουμε $\Theta = 2\pi U_2$.

Συνοπώς, τα βήματα που ακολουθούμε είναι τα εξής:

1. Καλούμε $U_1, U_2 \sim U([0, 1])$, ανεξάρτητες
2. Θέτουμε $Z_1 = \sqrt{-2 \ln U_1} \cos(2\pi U_2)$ και $Z_2 = \sqrt{-2 \ln U_1} \sin(2\pi U_2)$

Ο αλγόριθμος επιστρέφει τα ανεξάρτητα, τυπικά κανονικά κατανομημένα δείγματα Z_1, Z_2 . Στο Σχήμα 1.9 φαίνεται η εμπειρική κατανομή 1 εκατομμυρίου τυπικών κανονικών τυχαίων σημείων που προέκυψαν από τη μέθοδο Box - Muller. Κατά μέσο όρο χρειάστηκαν 0.43 δευτερόλεπτα για αυτό το πλήθος σημείων.

Η μέθοδος *Box - Muller* είναι ίσως η απλούστερη μέθοδος παραγωγής τυπικών κανονικών τυχαίων δειγμάτων. Δεν είναι όμως από τις πιο γρήγορες ή βολικές μεθόδους.

• Η πολική μέθοδος (Marsaglia & Bray)

Η πολική μέθοδος αποτελεί μία παραλλαγή της μεθόδου *Box - Muller*, η οποία υπερτερεί έναντι της τελευταίας, καθώς με αποφυγή των υπολογισμών του ημιτόνου και του συνημιτόνου, επιτυγχάνει μείωση του υπολογιστικού χρόνου.

Η ιδέα είναι η εξής:

Έστω ότι έχουμε στη διάθεσή μας ένα ζεύγος τυχαίων αριθμών (U, V) , το οποίο είναι ομοιόμορφα κατανομημένο στο μοναδιαίο δίσκο, έχει δηλαδή κατανομή

$$\mathbb{P}((U, V) \in A) = E(A)/E(\text{μοναδιαίου δίσκου}) = E(A)/\pi,$$

όπου $E(A)$ το εμβαδό του συνόλου A . Τότε, η τυχαία μεταβλητή $R = U^2 + V^2$ είναι ομοιόμορφα κατανομημένη στο διάστημα $[0, 1]$,

$$\mathbb{P}(R \leq x) = \mathbb{P}(\sqrt{R} \leq \sqrt{x}) = \pi\sqrt{x^2}/\pi = x, x > 0,$$

ενώ η τυχαία μεταβλητή $\Theta = \text{Arg}(U + iV)$ είναι ομοιόμορφα κατανομημένη στο διάστημα $[0, 2\pi]$,

$$\mathbb{P}(\Theta \leq \theta) = E(\text{κυκλικού τομέα})/E(\text{μοναδιαίου δίσκου}) = \theta/2\pi.$$

Επομένως, η τυχαία μεταβλητή $\Psi = \Theta/2\pi$ θα είναι ομοιόμορφη στο διάστημα $[0, 1]$. Επιπλέον, οι R, Θ είναι ανεξάρτητες, εφόσον η από κοινού συνάρτηση κατανομής πιθανότητας είναι το γινόμενο των περιθωρίων συναρτήσεων κατανομών τους:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(R \leq x, \Theta \leq \theta) &= \frac{E(\text{κυκλικού τμήματος}(\sqrt{x}, \theta))}{E(\text{κύκλου ακτίνας } 1)} \\ &= \frac{\frac{1}{2}(\sqrt{x})^2\theta}{\pi} \\ &= \frac{\theta}{2\pi}x. \end{aligned}$$

Έπεται ότι και οι R, Ψ θα είναι ανεξάρτητες.

Από τον ορισμό της Θ έχουμε ότι

$$\cos(2\pi\Psi) = \cos \Theta = U/\sqrt{U^2 + V^2}$$

και

$$\sin(2\pi\Psi) = \sin \Theta = V/\sqrt{U^2 + V^2}.$$

Εκφράσαμε δηλαδή το ημίτονο και το συνημίτονο της γωνίας Θ συναρτήσει των U, V .

Συνεπώς, για να λάβουμε ένα διδιάστατο τυχαίο διάνυσμα τυπικών κανονικών τυχαίων μεταβλητών (Z_1, Z_2) , θέτουμε τώρα:

$$Z_1 = \sqrt{-2\ln(U^2 + V^2)} \frac{U}{\sqrt{U^2 + V^2}} = \sqrt{-2\frac{\ln(U^2 + V^2)}{U^2 + V^2}} U$$

και

$$Z_2 = \sqrt{-2 \ln(U^2 + V^2)} \frac{V}{\sqrt{U^2 + V^2}} = \sqrt{-2 \frac{\ln(U^2 + V^2)}{U^2 + V^2}} V.$$

Μένει λοιπόν να φτιάξουμε με κάποιο τρόπο το ομοιόμορφα κατανομημένο στο μοναδιαίο δίσκο ζεύγος (U, V) . Αυτό μπορεί να γίνει με χρήση της μεθόδου αποδοχής - απόρριψης ως εξής:

Έστω $U', V' \sim U([0, 1])$ ανεξάρτητες. Τότε, οι τυχαίες μεταβλητές $U = 2U' - 1, V = 2V' - 1$ θα είναι ανεξάρτητες και ομοιόμορφα κατανομημένες στο διάστημα $[-1, 1]$. Άρα το ζεύγος (U, V) θα έχει την ομοιόμορφη κατανομή στο τετράγωνο $[-1, 1] \times [-1, 1]$. Για να πάρουμε ομοιόμορφα ένα τυχαίο δείγμα στο μοναδιαίο δίσκο, έχοντας παραγάγει ένα τυχαίο δείγμα (U, V) στο τετράγωνο $[-1, 1] \times [-1, 1]$, εφαρμόζουμε αποδοχή - απόρριψη: αν $U^2 + V^2 = 0$ ή $U^2 + V^2 > 1$ απορρίπτουμε το δείγμα, διαφορετικά το αποδεχόμαστε.

Συγκεντρωτικά, τα βήματα της πολικής μεθόδου είναι τα εξής:

1. Καλούμε $U, V \sim U([-1, 1])$, ανεξάρτητες
2. Θέτουμε $R = U^2 + V^2$
3. Αν $R = 0$ ή $R > 1$ πάμε στο βήμα 1

διαφορετικά, $Z_1 = \sqrt{-2 \frac{\ln R}{R}} U$ και $Z_2 = \sqrt{-2 \frac{\ln R}{R}} V$

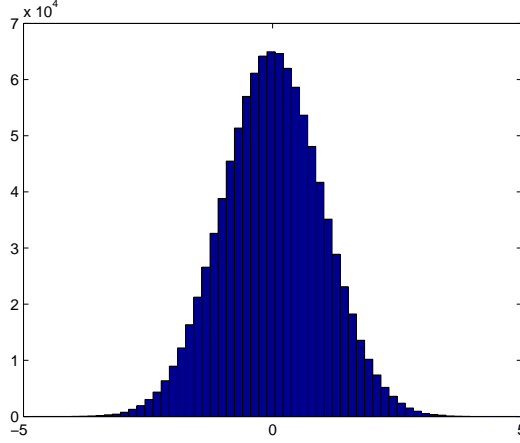
Ο αλγόριθμος επιστρέφει τις Z_1, Z_2 ως ανεξάρτητες τυχαίες τιμές της τυπικής κανονικής κατανομής. Στο Σχήμα 1.10 φαίνεται το ιστόγραμμα 1 εκατομμυρίου δειγμάτων τυπικής κανονικής κατανομής που έδωσε η πολική μέθοδος. Κατά μέσο όρο, χρειάστηκαν 0.4 δευτερόλεπτα για την παραγωγή αυτού του πλήθους τυχαίων σημείων.

Συγκριτικά χαρακτηριστικά των τελευταίων δύο μεθόδων:

Όπως είδαμε παραπάνω, η μέθοδος *Box - Muller* απαιτεί τον υπολογισμό των τριγωνομετρικών συναρτήσεων \sin και \cos , ο οποίος κοστίζει σε υπολογιστικό χρόνο. Η πολική μέθοδος αποφεύγει τον υπολογισμό τριγωνομετρικών συναρτήσεων, ωστόσο λόγω της χρήσης της μεθόδου αποδοχής - απόρριψης δεν χρησιμοποιεί ένα ποσοστό (περίπου $1-\pi/4$) των δειγμάτων που παράγει. Συνολικά, η πολική μέθοδος είναι ταχύτερη.

Ας σημειώσουμε τέλος ξανά τους χρόνους που χρειάστηκε καθένα από τις πέντε μεθόδους που αναφέρθηκαν για την παραγωγή ενός εκατομμυρίου τυπικών κανονικών τιμών.

Μέθοδος	Ziggurat	Πολική	Box-Muller	Moro	Διπλή Εχθετική
Χρόνος (seconds)	0.04	0.40	0.44	0.56	0.61



Σχήμα 1.10: Εμπειρική κατανομή 1 εκατομμυρίου δειγμάτων που παράχθηκαν με την πολική μέθοδο (Marsaglia & Bray).

Παραγωγή πολυδιάστατων κανονικών τυχαίων μεταβλητών

Μία πολυδιάστατη κανονική τυχαία μεταβλητή $X \in \mathbb{R}^d$, $X \sim N(\mu, \Sigma)$, χαρακτηρίζεται, όπως αναφέραμε, από το διάνυσμα μέσων τιμών της, μ , και από τον πίνακα συνδιασπορών της, Σ . Από την ιδιότητα του γραμμικού μετασχηματισμού γνωρίζουμε ότι, αν $Z \sim N(0, I_d)$ και $X = \mu + AZ$, τότε $X \sim N(\mu, AA^T)$. Επομένως, για να λάβουμε δείγμα από την πολυδιάστατη κανονική X , αρκεί να μπορούμε να παραγάγουμε την πολυδιάστατη τυπική κανονική Z και να βρούμε έναν $d \times k$ πίνακα A , $k \in \mathbb{Z}$, τέτοιον, ώστε $AA^T = \Sigma$.

Οι συνιστώσες του τυχαίου διανύσματος $Z \sim N(0, I_d)$ είναι τυπικές κανονικές τυχαίες μεταβλητές και παράλληλα ασυσχέτιστες μεταξύ τους, άρα ανεξάρτητες. Συνεπώς, για να κατασκευάσουμε τη Z παράγουμε d ανεξάρτητες τυπικές κανονικές τυχαίες μεταβλητές Z_1, Z_2, \dots, Z_d , χρησιμοποιώντας μία από τις μεθόδους που αναπτύξαμε παραπάνω. Έτσι, το πρόβλημα λήψης δείγματος από την πολυδιάστατη κανονική κατανομή ανάγεται στην εύρεση ενός πίνακα A για τον οποίο $AA^T = \Sigma$.

Για να μειώσουμε τις υπολογιστικές πράξεις κατά την προσομοίωση της πολυδιάστατης κανονικής τυχαίας μεταβλητής X , μέσω της σχέσης $X = \mu + AZ$, θα θέλαμε ο πίνακας A να έχει όσο το δυνατόν απλούστερη μορφή. Επιλέγοντας για παράδειγμα τον πίνακα A ως κάτω τριγωνικό, επιτυγχάνουμε ελάττωση των απαιτούμενων πράξεων περίπου στο μισό.

Από το *Θεώρημα Cholesky* γνωρίζουμε ότι, αν ο πίνακας Σ έχει μέγιστη τάξη, d , τότε υπάρχει μοναδικός κάτω τριγωνικός πίνακας $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ με θετικά διαγώνια στοιχεία, ώστε $AA^T = \Sigma$. Η αναπαράσταση αυτή του πίνακα Σ καλείται

παραγοντοποίηση *Cholesky*.

Λύση της $AA^T = \Sigma$, ή ισοδύναμα του συστήματος

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{d1} & a_{d2} & \dots & a_{dd} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{d1} \\ & a_{22} & \dots & a_{d2} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{dd} \end{pmatrix} = \Sigma,$$

θα μας δώσει τα στοιχεία του πίνακα A που είναι:

$$a_{ij} = \frac{\Sigma_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} a_{ik}a_{jk}}{a_{jj}}, j < i$$

και

$$a_{ii} = \sqrt{\Sigma_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik}^2}.$$

Άρα, για την παραγωγή της $X = (X_1, X_2, \dots, X_d)$ θέτουμε

$$\begin{aligned} X_1 &= \mu_1 + a_{11}Z_1 \\ X_2 &= \mu_2 + a_{21}Z_1 + a_{22}Z_2 \\ &\vdots \\ X_d &= \mu_d + a_{d1}Z_1 + a_{d2}Z_2 + \dots + a_{dd}Z_d. \end{aligned}$$

Έστω τώρα ότι ο πίνακας Σ που αντιστοιχεί στην κανονική τυχαία μεταβλητή $X \in \mathbb{R}^d$ έχει τάξη $m < d$. Στην περίπτωση αυτή, δε μπορούμε να εφαρμόσουμε παραγοντοποίηση *Cholesky* στον Σ . Ωστόσο, μπορούμε να γράψουμε τη X σαν γραμμικό συνδυασμό m συνιστωσών της, οι οποίες να αντιστοιχούν σε έναν $m \times m$ πίνακα συνδιασπορών μεγίστης τάξης, ούτως ώστε να αναγάγουμε το πρόβλημα στην προηγούμενη περίπτωση. Μπορούμε δηλαδή να βρούμε ένα διάνυσμα $X' \in \mathbb{R}^m$ από συνιστώσες της X , με πίνακα συνδιασπορών Σ' , τάξης m , και έναν $d \times m$ πίνακα B και να την εκφράσουμε ως $X = BX'$. Τότε, εφαρμόζοντας παραγοντοποίηση *Cholesky* στον πίνακα Σ' , βρίσκουμε τον κάτω τριγωνικό πίνακα A' που λύνει την εξίσωση $A'A'^T = \Sigma'$. Επομένως, η X' μπορεί να παραχθεί από την ανάθεση $X' = A'Z$, όπου $Z \sim N(0, I_m)$. Κατά συνέπεια, δείγμα από τη X λαμβάνουμε από τη σχέση $X = BA'Z$.

Ένας άλλος τρόπος επίλυσης της εξίσωσης $AA^T = \Sigma$ είναι με διαγωνοποίηση του πίνακα Σ . Εφόσον ο Σ είναι συμμετρικός πίνακας, θα έχει d πραγματικές ιδιοτιμές. Επιπλέον, οι ιδιοτιμές του θα είναι μη αρνητικές και στις δύο περιπτώσεις (Σ θετικά ορισμένος, Σ θετικά ημιορισμένος). Άρα ο Σ γράφεται ως:

$$\Sigma = U\Lambda U^T,$$

όπου U ο ορθογώνιος πίνακας που έχει ως στήλες τα ιδιοδιανύσματα του Σ και Λ ο διαγώνιος πίνακας που έχει ως διαγώνια στοιχεία τις ιδιοτιμές του Σ . Τότε, αν

διαλέξουμε τον πίνακα A να είναι ο

$$A = U\sqrt{\Lambda},$$

έχουμε το ζητούμενο, $AA^T = U\sqrt{\Lambda}\sqrt{\Lambda}U^T = \Sigma$.

Δύο συναρτήσεις κατανομής που θα χρειαστούμε επίσης σε επόμενο κεφάλαιο, είναι η κατανομή Γάμμα και η κατανομή Poisson. Θα αναφερθούμε αναλυτικά στις μεθόδους παραγωγής τυχαίων δειγμάτων από τις κατανομές αυτές στο κεφάλαιο 4.

1.2 Παραγωγή μονοπατιών στοχαστικών ανελίξεων

Ορισμός 1 Καλούμε *στοχαστική ανέλιξη* μια οικογένεια από τυχαίες μεταβλητές, $\{X_t\}_{t \in T}$, ορισμένες σε κάποιο χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, όπου T ένα συνεχές σύνολο (π.χ. $[0, 1]$, $[0, \infty)$, \mathbb{R}).

Αν σταθεροποιήσουμε ένα χρόνο $\bar{t} \in T$, τότε η $X_{\bar{t}}(\omega)$ είναι μια τυχαία μεταβλητή, ενώ αν σταθεροποιήσουμε ένα ενδεχόμενο $\bar{\omega} \in \Omega$, τότε η $X_{\bar{\omega}}(t)$ είναι μια συνάρτηση του χρόνου που καλείται *δειγματικό μονοπάτι* της ανέλιξης.

Θα ονομάζουμε την $\{X_t\}_{t \in T}$ ανέλιξη Gauss αν για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και κάθε $(t_1, \dots, t_k) \in T^k$ η κατανομή του διανύσματος $(X_{t_1}, \dots, X_{t_k})$ είναι κανονική.

Στην παρούσα ενότητα θα αναπτύξουμε μεθόδους που προσομοιώνουν ακριβώς ανελίξεις Gauss συνεχούς χρόνου σε ένα διακριτό σύνολο χρονικών στιγμών D . Οι μέθοδοι αυτές είναι ακριβείς υπό την έννοια ότι η από κοινού κατανομή των προσομοιούμενων τιμών συμπίπτει με την από κοινού κατανομή των τιμών της ανέλιξης συνεχούς χρόνου στο D .

1.2.1 Προσομοίωση της κίνησης Brown (ανελίξης Wiener)

Μονοδιάστατη κίνηση Brown

Ορισμός 1 Η μονοδιάστατη τυπική κίνηση Brown [6], στο διάστημα $[0, T]$, είναι μια στοχαστική ανέλιξη, $\{W(t), 0 \leq t \leq T\}$, με τις εξής ιδιότητες:

- i) $W(0) = 0$
- ii) η απεικόνιση $t \rightarrow W(t)$ είναι μια συνεχής συνάρτηση στο $[0, T]$ σ.σ.
- iii) οι τυχαίες μεταβλητές $\{W(t_1), W(t_2) - W(t_1), \dots, W(t_n) - W(t_{n-1})\}$ είναι ανεξάρτητες $\forall k, \forall 0 < t_1 < \dots < t_k \leq T$ (ανεξάρτητες προσαυξήσεις)
- iv) $W(t) - W(s) \sim N(0, t - s), \forall 0 \leq s < t \leq T$.

Από τις ιδιότητες *i)* και *iv)* του ορισμού 1 προκύπτει ότι $W(t) \sim N(0, t)$, $\forall t \in [0, T]$.

Ορισμός 2 Η μονοδιάστατη κίνηση Brown $\{X(t)\}$ με συνελεστή drift μ και συνελεστή μεταβλητότητας σ^2 , $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$, ορίζεται ως $X(t) = \mu t + \sigma W(t)$, $\forall t$, όπου $W(t)$ η τυπική ανέλιξη Wiener.

Οπότε, για κάθε σταθεροποιημένο t , η τυχαία μεταβλητή $X(t)$ ακολουθεί την κατανομή $N(\mu t, \sigma^2 t)$.

Κατά την προσομοίωση της κίνησης Brown, προσομοιώνουμε τιμές των στοχαστικών ανελιξεων $\{W(t)\}$, $\{X(t)\}$ σε ένα σταθεροποιημένο σύνολο σημείων $0 < t_1 < \dots < t_n$, προσομοιώνουμε δηλαδή τις τιμές $(W(t_1), \dots, W(t_n))$ και $(X(t_1), \dots, X(t_n))$ αντίστοιχα.

Η ανέλιξη Wiener είναι μια ανέλιξη Gauss:

$\forall k \in \mathbb{Z}^+, \forall 0 < t_1 < \dots < t_k$,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} W_{t_1} \\ W_{t_2} \\ \vdots \\ W_{t_k} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} W_{t_1} \\ W_{t_1} + (W_{t_2} - W_{t_1}) \\ \vdots \\ W_{t_1} + (W_{t_2} - W_{t_1}) + \dots + (W_{t_k} - W_{t_{k-1}}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & \dots & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_{t_1} \\ W_{t_2} - W_{t_1} \\ \vdots \\ W_{t_k} - W_{t_{k-1}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

και η $\begin{pmatrix} W_{t_1} \\ W_{t_2} - W_{t_1} \\ \vdots \\ W_{t_k} - W_{t_{k-1}} \end{pmatrix}$ είναι μια πολυδιάστατη κανονική τυχαία μεταβλητή.

Άρα, από την ιδιότητα του γραμμικού μετασχηματισμού, η $\begin{pmatrix} W_{t_1} \\ W_{t_2} \\ \vdots \\ W_{t_k} \end{pmatrix}$ θα ακολουθεί την πολυδιάστατη κανονική κατανομή $N(m, \Sigma)$, με διάνυσμα μέσων τιμών

$$m = \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{E}[W_{t_1}] \\ \vdots \\ \mathbb{E}[W_{t_k}] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

και με πίνακα συνδιασπορών, για $i < j$,

$$\Sigma_{ij} = Cov[W_{t_i}, W_{t_j}]$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E}[W_{t_i} W_{t_j}] - \mathbb{E}[W_{t_i}] \mathbb{E}[W_{t_j}] \\
&= \mathbb{E}[W_{t_i} (W_{t_j} - W_{t_i} + W_{t_i})] - 0 \\
&= \mathbb{E}[W_{t_i} (W_{t_j} - W_{t_i})] + \mathbb{E}[W_{t_i}^2] \\
&= 0 + \text{Var}[W_{t_i}] \\
&= t_i,
\end{aligned}$$

όπου στην προτελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε την ανεξάρτησία των W_{t_i} , $(W_{t_j} - W_{t_i})$ και το γεγονός ότι $\mathbb{E}[W_t] = 0$, $\forall t$. Επομένως, $\Sigma_{ij} = \min\{t_i, t_j\}$, δηλαδή,

$$\Sigma = \begin{pmatrix} t_1 & t_1 & \dots & t_1 \\ t_1 & t_2 & \dots & t_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_1 & t_2 & \dots & t_k \end{pmatrix}.$$

Άρα, αν πάρουμε

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{t_1} & 0 & \dots & 0 \\ \sqrt{t_1} & \sqrt{t_2 - t_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sqrt{t_1} & \sqrt{t_2 - t_1} & \dots & \sqrt{t_k - t_{k-1}} \end{pmatrix},$$

τότε, $AA^\top = \Sigma$. Συνεπώς, από την ιδιότητα του γραμμικού μετασχηματισμού, για να πάρουμε δείγμα του μονοπατιού $(W_{t_1}, W_{t_2}, \dots, W_{t_k}) \sim N(0, \Sigma)$ της τυπικής κίνησης Brown, θέτουμε

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} W_{t_1} \\ W_{t_2} \\ \vdots \\ W_{t_k} \end{pmatrix} &= AZ \\
&= \begin{pmatrix} \sqrt{t_1} & 0 & \dots & 0 \\ \sqrt{t_1} & \sqrt{t_2 - t_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sqrt{t_1} & \sqrt{t_2 - t_1} & \dots & \sqrt{t_k - t_{k-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_k \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sqrt{t_1} Z_1 \\ \sqrt{t_1} Z_1 + \sqrt{t_2 - t_1} Z_2 \\ \vdots \\ \sqrt{t_1} Z_1 + \sqrt{t_2 - t_1} Z_2 + \dots + \sqrt{t_k - t_{k-1}} Z_k \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sqrt{t_1} Z_1 \\ W_{t_1} + \sqrt{t_2 - t_1} Z_2 \\ \vdots \\ W_{t_{k-1}} + \sqrt{t_k - t_{k-1}} Z_k \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

όπου το διάνυσμα Z είναι ένα τυπικά κανονικά κατανομημένο διάνυσμα που έχουμε παραγάγει με τις μεθόδους της παραγράφου 1.1.4.

Τελικά, οι τιμές του μονοπατιού παράγονται διαδοχικά μέσω της σχέσης

$$W_{t_{i+1}} = W_{t_i} + \sqrt{t_{i+1} - t_i} Z_{i+1},$$

$i = 0, \dots, k-1$ και με αρχική τιμή $W_0 = 0$.

Ένα μονοπάτι $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_k})$, της ανέλιξης $\{X(t)\}$ με drift μ και αστασία σ^2 , προκύπτει αναλόγως. Εφόσον η ανέλιξη $\{X(t)\}$ είναι μια ανέλιξη Gauss, το διάνυσμα $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_k})$ θα έχει $\forall k$ και $\forall 0 < t_1 < \dots < t_k$ την κανονική κατανομή $N(m', \Sigma')$ με διάνυσμα μέσων τιμών

$$m' = \begin{pmatrix} m'_1 \\ \vdots \\ m'_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{E}[X_{t_1}] \\ \vdots \\ \mathbb{E}[X_{t_k}] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu t_1 \\ \vdots \\ \mu t_k \end{pmatrix}$$

και πίνακα συνδιασπορών

$$\Sigma' = \sigma^2 \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma^2 t_1 & \sigma^2 t_1 & \dots & \sigma^2 t_1 \\ \sigma^2 t_1 & \sigma^2 t_2 & \dots & \sigma^2 t_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma^2 t_1 & \sigma^2 t_2 & \dots & \sigma^2 t_k \end{pmatrix}.$$

Αν $A' = \sigma A$, τότε $A' A'^T = \Sigma'$.

Συνεπώς, για να λάβουμε ένα δειγματικό μονοπάτι της $\{X_t\}$ θέτουμε

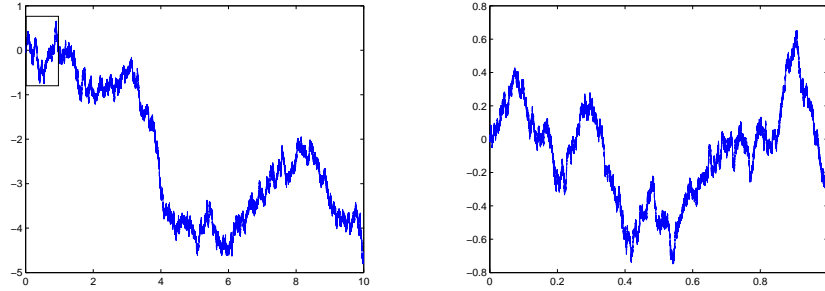
$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} X_{t_1} \\ X_{t_2} \\ \vdots \\ X_{t_k} \end{pmatrix} &= m' + A' Z \\ &= m' + \sigma A Z \\ &= \begin{pmatrix} \mu t_1 \\ \mu t_2 \\ \vdots \\ \mu t_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma \sqrt{t_1} & 0 & \dots & 0 \\ \sigma \sqrt{t_1} & \sigma \sqrt{t_2 - t_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma \sqrt{t_1} & \sigma \sqrt{t_2 - t_1} & \dots & \sigma \sqrt{t_k - t_{k-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_k \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

όπου Z τυπικό κανονικό τυχαίο διάνυσμα.

Αντίστοιχα με πριν, η αναδρομική σχέση που παράγει τα σημεία του μονοπατιού είναι η

$$X_{t_{i+1}} = X_{t_i} + \mu(t_{i+1} - t_i) + \sigma \sqrt{t_{i+1} - t_i} Z_{i+1}, i = 0, \dots, k-1. \quad (1.2)$$

Με ανάλογο τρόπο μπορούμε να προσομοιώσουμε και άλλες ανελιξεις Gauss. Όπως θα δούμε στο κεφάλαιο 4 θα χρησιμοποιήσουμε την ανέλιξη Ornstein - Uhlenbeck για τη μοντελοποίηση της δυναμικής ενός στοχαστικού στιγμιαίου επιτοκίου.



Σχήμα 1.11: Μονοπάτι της τυπικής κίνησης Brown στο διάστημα $[0, 10]$ (αριστερά) και το ίδιο μονοπάτι στο διάστημα $[0, 1]$ (δεξιά).

Το Σχήμα 1.11 παριστά ένα μονοπάτι της τυπικής κίνησης Brown στο διάστημα $[0, 10]$, καθώς και το ίδιο μονοπάτι στο διάστημα $[0, 1]$. Η προσομοίωση έγινε με ακρίβεια 1 εκατομμυρίου χρονικών σημείων.

Στα Σχήματα 1.12 και 1.13 απεικονίζονται μονοπάτια της μονοδιάστατης κίνησης Brown για διάφορες τιμές των παραμέτρων drift, μ , και μεταβλητότητας, σ , στο διάστημα $[0, 1]$. Η προσομοίωση έγινε με ακρίβεια 1 εκατομμυρίου χρονικών σημείων.

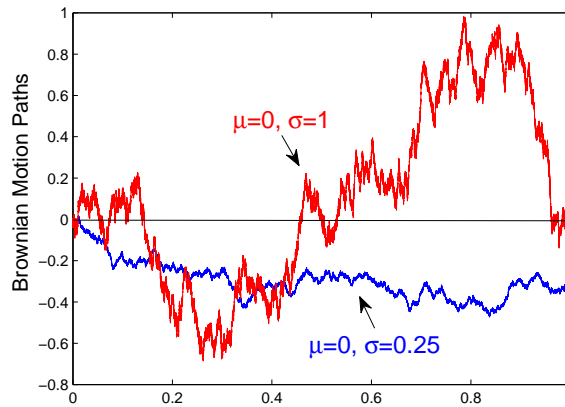
Στο Σχήμα 1.14 φαίνεται η συμπεριφορά των μονοπατιών της τυπικής κίνησης Brown για χρόνους t που προσεγγίζουν το 0 από τα δεξιά, σύμφωνα με το Νόμο του επαναλαμβανόμενου λογαρίθμου [6]:

$$\limsup_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{|W(\epsilon)|}{\sqrt{2\epsilon \log \log(1/\epsilon)}} = 1.$$

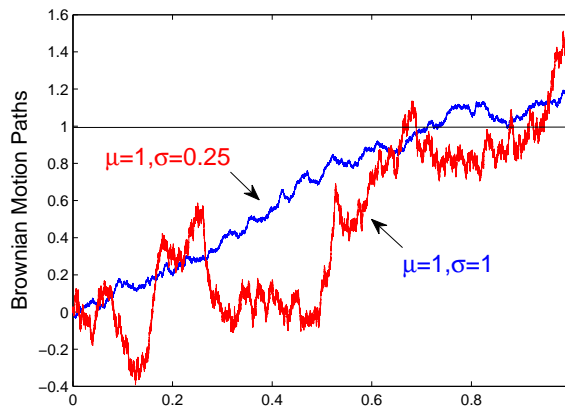
Στο σχήμα φαίνονται και οι συναρτήσεις $\pm \sqrt{2t \log \log(1/t)}$ μαζί με 30 μονοπάτια της τυπικής κίνησης Brown στο διάστημα $[0, 0.001]$. Κάθε μονοπάτι προσομοιώθηκε με ακρίβεια 10000 χρονικών σημείων.

Μέχρι τώρα είδαμε πώς προκύπτει ένα δειγματικό μονοπάτι της κίνησης Brown αν τα σημεία που θέλουμε να προσομοιώσουμε παραχθούν διαδοχικά. Εναλλακτικά, μπορούμε να παραγάγουμε τα σημεία αυτά με τυχαία σειρά. Παραδείγματος χάριν, μπορούμε να παραγάγουμε πρώτα το τελικό σημείο του μονοπατιού, έχοντας παραγάγει το αρχικό, έπειτα να παραγάγουμε το μεσαίο, έχοντας παραγάγει τα δύο ακριανά κ.ο.κ., ή με οποιαδήποτε σειρά εμείς επιθυμούμε, αρκεί να παίρνουμε κάθε φορά δείγμα από τη σωστή δεσμευμένη κατανομή, γνωρίζοντας ήδη τις τιμές που έχουν παραχθεί. Για το σκοπό αυτό θα χρειαστούμε την ιδιότητα της δέσμευσης που αναφέραμε στην παράγραφο 1.1.4.

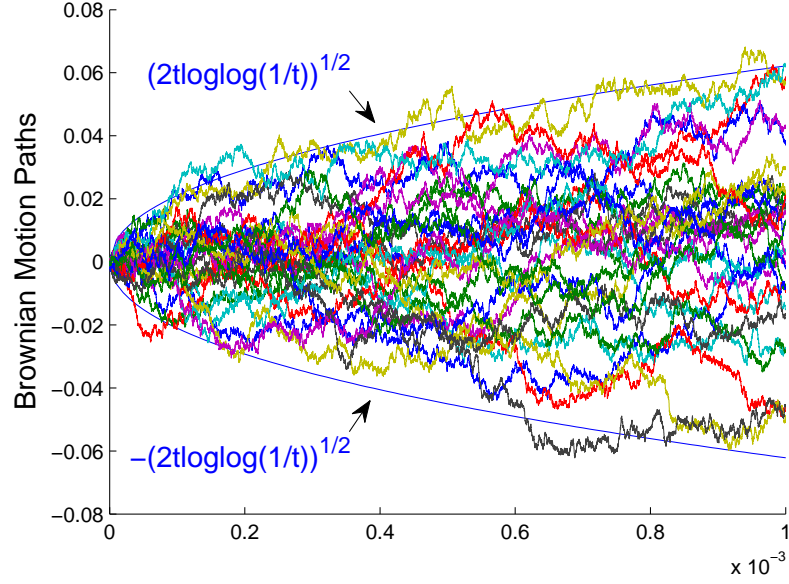
Έστω ότι έχουμε παραγάγει δύο τιμές του μονοπατιού $W_u = x$, $W_t = y$, $0 < u < t$, και ότι δεδομένων αυτών θέλουμε να παραγάγουμε μία ενδιάμεση τιμή W_s ,



Σχήμα 1.12: Δύο τυπικά μονοπάτια της κίνησης Brown στο διάστημα $[0, 1]$, που ξεκινούν από το 0, με παράμετρο drift ίση με 0, και διαφορετικούς συντελεστές μεταβλητότητας.



Σχήμα 1.13: Δύο τυπικά μονοπάτια της κίνησης Brown στο διάστημα $[0, 1]$, που ξεκινούν από το 0, με παράμετρο drift ίση με 1, και διαφορετικούς συντελεστές μεταβλητότητας.



Σχήμα 1.14: Νόμος του επαναλαμβανόμενου λογαρίθμου (Law of the iterated logarithm)

$0 < u < s < t$. Γνωρίζουμε ότι η από κοινού κατανομή των W_s, W_u, W_t είναι κανονική. Συγκεκριμένα,

$$\begin{pmatrix} W_s \\ W_u \\ W_t \end{pmatrix} \sim N \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} s & u & s \\ u & u & u \\ s & u & t \end{pmatrix} \right).$$

Από την ιδιότητα της δέσμευσης, δεδομένου του διανύσματος ($W_u = x, W_t = y$), η τυχαία μεταβλητή W_s θα ακολουθεί την κανονική κατανομή, με μέση τιμή

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[W_s | W_u = x, W_t = y] &= 0 + (u \ s) \begin{pmatrix} u & u \\ u & t \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \dots \\ &= \frac{(t-s)x + (s-u)y}{t-u} \end{aligned}$$

και διασπορά

$$\begin{aligned} \text{Var}[W_s | W_u = x, W_t = y] &= s - (u \ s) \begin{pmatrix} u & u \\ u & t \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} u \\ s \end{pmatrix} \\ &= \dots \end{aligned}$$

$$= \frac{(t-s)(s-u)}{t-u}.$$

Δηλαδή,

$$(W_s | (W_u = x, W_t = y)) \sim N\left(\frac{(t-s)x + (s-u)y}{t-u}, \frac{(t-s)(s-u)}{t-u}\right), \quad (1.3)$$

$$0 < u < s < t.$$

Γενικότερα τώρα, έστω ότι έχουμε καθορίσει k τιμές του μονοπατιού, $W_{s_1} = x_1$, $W_{s_2} = x_2, \dots, W_{s_k} = x_k$, στις χρονικές στιγμές $0 < s_1 < s_2 < \dots < s_k$, και ότι θέλουμε να λάβουμε δείγμα της W_s δεδομένων των τιμών αυτών. Ας υποθέσουμε ότι $s_i < s < s_{i+1}$. Η κίνηση Brown έχει τη *Μαρκοβιανή ιδιότητα*:

«δεδομένης της W_{s_i} , η W_s είναι ανεξάρτητη όλων των W_t , για $t < s_i$, και δεδομένης της $W_{s_{i+1}}$, είναι ανεξάρτητη όλων των W_t , για $t > s_{i+1}$ ».

Επομένως, δέσμευση ως προς τις τιμές $(W_{s_1} = x_1, W_{s_2} = x_2, \dots, W_{s_k} = x_k)$ ισοδυναμεί με δέσμευση ως προς τις τιμές $(W_{s_i} = x_i, W_{s_{i+1}} = x_{i+1})$. Άρα, η τυχαία μεταβλητή $(W_s | W_{s_1} = x_1, W_{s_2}, \dots, W_{s_k} = x_k)$ θα έχει την ίδια κατανομή με την $(W_s | W_{s_i} = x_i, W_{s_{i+1}} = x_{i+1})$. Συγκεκριμένα, από την 1.3, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} (W_s | W_{s_1} = x_1, W_{s_2}, \dots, W_{s_k} = x_k) &\sim (W_s | W_{s_i} = x_i, W_{s_{i+1}} = x_{i+1}) \\ &\sim N(\mu, \sigma^2), \end{aligned}$$

όπου

$$\mu = \frac{(s_{i+1} - s)x_i + (s - s_i)x_{i+1}}{s_{i+1} - s_i}$$

και

$$\sigma^2 = \frac{(s_{i+1} - s)(s - s_i)}{s_{i+1} - s_i}.$$

Για να πάρουμε δείγμα από αυτήν τη δεσμευμένη κατανομή, θέτουμε

$$W_s = \mu + \sigma Z,$$

όπου $Z \sim N(0, 1)$, ανεξάρτητη των W_{s_1}, \dots, W_{s_k} .

Χρησιμοποιώντας επαναλαμβανόμενα το παραπάνω, μπορούμε να παραγάγουμε όλα τα σημεία του μονοπατιού $(W_{t_1}, \dots, W_{t_n})$ της κίνησης Brown, με οποιαδήποτε σειρά.

Μπορούμε για παράδειγμα να ξεκινήσουμε την προσομοίωση του μονοπατιού παίρνοντας δείγμα της τελικής τιμής $W_{t_n} \sim N(0, t_n)$, και έπειτα, σε κάθε βήμα, να παραγάγουμε την επόμενη τιμή δεσμεύοντας ως προς τις δύο κοντινότερες τιμές εκατέρωθεν της. Αν υποθέσουμε ότι το πλήθος των σημείων του μονοπατιού, n , είναι μία δύναμη του 2, $n = 2^l$, $l \in \mathbb{N}$, τότε, θέτοντας $W_0 = 0$, μπορούμε να παραγάγουμε τη μεσαία τιμή $W_{t_{n/2}}$, δεδομένης της αρχικής και της τελικής τιμής. Στη συνέχεια την τιμή $W_{t_{n/4}}$, δεδομένων των W_0 και $W_{t_{n/2}}$, και την τιμή $W_{t_{3n/4}}$, δεδομένων των $W_{t_{n/2}}$ και W_{t_n} , και ούτω καθεξής.

Αν πάλι τα σημεία δεν είναι ακριβώς 2^l για κάποιο $l \in \mathbb{N}$, τότε εφαρμόζουμε το παραπάνω σε ένα υποσύνολο των σημείων $2^{l'} < n$, $l' \in \mathbb{N}$, και συμπληρώνουμε στο τέλος τις εναπομείνουσες τιμές του μονοπατιού.

Η διαδικασία αυτή προσομοίωσης ενός μονοπατιού της κίνησης Brown καλείται *γέφυρα Brown*. Θα μας φανεί ιδιαίτερα χρήσιμη σε επόμενα κεφάλαια, όταν θα μιλήσουμε για τιμολόγηση παραγώγων προϊόντων, των οποίων η απόδοση εξαρτάται όχι από ολόκληρο το μονοπάτι της μετοχής, αλλά για παράδειγμα από το αν η μετοχή έχει ξεπεράσει ένα άνω φράγμα. Σε αυτές τις περιπτώσεις, η προσομοίωση της τιμής της μετοχής με γέφυρα Brown είναι χρονικά αποδοτικότερη, καθώς η συνολική εικόνα του μονοπατιού ξεκινά να φαίνεται πολύ νωρίτερα, από ό,τι αν προσομοιώναμε το μονοπάτι βρίσκοντας διαδοχικά τις τιμές της μετοχής. Έτσι, στην περίπτωση που αναφέραμε, εφαρμόζοντας γέφυρα Brown διαφαίνεται νωρίτερα αν το μονοπάτι ξεπερνά ή όχι το άνω φράγμα.

Ακολουθεί ο αλγόριθμος προσομοίωσης της γέφυρας Brown στην περίπτωση που το πλήθος των σημείων στα οποία θέλουμε να γίνει η προσομοίωση του μονοπατιού είναι μία δύναμη του 2, έστω $N = 2^m$:

1. Παράγουμε $(Z_1, \dots, Z_{2^m}) \sim N(0, I)$
2. Θέτουμε $h = 2^m$, $j_{\max} = 1$, $W_h = \sqrt{t_h} Z_h$, $t_0 = 0$, $W_0 = 0$
3. Για $k = 1, \dots, m$, θέτουμε

$$i_{\min} = h/2, i = i_{\min}$$

$$l = 0, r = h$$
 για $j = 1, \dots, j_{\max}$, θέτουμε

$$a = ((t_r - t_i)W_l + (t_i - t_l)W_r)/(t_r - t_l)$$

$$b = \sqrt{(t_i - t_l)(t_r - t_i)/(t_r - t_l)}$$

$$W_i = a + bZ_i$$

$$i = i + h; l = l + h; r = r + h$$

$$j_{\max} = 2 * k_{\max}$$

$$h = i_{\min}$$

Ο αλγόριθμος επιστρέφει το διάνυσμα (W_1, \dots, W_{2^m}) για το διακριτοποιημένο μονοπάτι της κίνησης Brown.

Έως εδώ κατασκευάσαμε τη *γέφυρα Brown* για την τυπική ανάλυση Wiener. Όταν έχουμε κίνηση Brown με drift παράμετρο μ , δηλαδή με διάνυσμα μέσων τιμών $m = (\mu_{s_1}, \dots, \mu_{s_k})$, τότε από την ιδιότητα της δέσμευσης, η τυχαία μεταβλητή

$$(X_s | X_{s_1} = x_1, X_{s_2} = x_2, \dots, X_{s_k} = x_k) \sim (X_s | X_{s_i} = x_i, X_{s_{i+1}} = x_{i+1})$$

ακολουθεί, για κάθε $s > 0$, κανονική κατανομή με παραμέτρους

$$\mathbb{E}[X_s | X_{s_i} = x_i, X_{s_{i+1}} = x_{i+1}] = \mu_s + \frac{(s_{i+1} - s)(x_i - \mu_{s_i}) + (s - s_i)(x_{i+1} - \mu_{s_{i+1}})}{s_{i+1} - s_i}$$

$$= \dots$$

$$= \frac{(s_{i+1} - s)x_i + (s - s_i)x_{i+1}}{s_{i+1} - s_i},$$

ίδια με πριν, και

$$\text{Var}[X_s | X_{s_i} = x_i, X_{s_{i+1}} = s_{i+1}] = \frac{(s_{i+1} - s)(s - s_i)}{s_{i+1} - s_i},$$

ίδια με πριν, αφού δεν εξαρτάται από τη μέση τιμή. Κατά συνέπεια, για την κατασκευή γέφυρας για μια κίνηση Brown με drift μ , ακολουθούμε τα βήματα κατασκευής της γέφυρας Brown για την τυπική κίνηση Brown, με τη μόνη διαφορά ότι στο πρώτο βήμα, δηλαδή κατά την παραγωγή της τελικής τιμής X_{t_n} , αντικαθιστούμε την ανάθεση

$$X_{t_n} = \sqrt{t_n}Z_n$$

με την

$$X_{t_n} = \mu t_n + \sqrt{t_n}Z_n,$$

όπου Z_n τυπική κανονική τυχαία μεταβλητή, ανεξάρτητη των X_1, \dots, X_{n-1} .

Αν επιπλέον η κίνηση Brown έχει συντελεστή τετραγωνικής μεταβλητότητας σ^2 , δηλαδή πίνακα συνδιασπορών

$$\sigma^2 \begin{pmatrix} t_1 & t_1 & \dots & t_1 \\ t_1 & t_2 & \dots & t_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_1 & t_2 & \dots & t_n \end{pmatrix},$$

τότε η μέση τιμή της κανονικής κατανομής που ακολουθεί η

$$(X_s | X_{s_i} = x_i, X_{s_{i+1}} = x_{i+1})$$

παραμένει η ίδια, ενώ η διασπορά πολλαπλασιάζεται με σ^2 . Επομένως, αυτό που αλλάζει είναι ότι σε κάθε βήμα της κατασκευής της γέφυρας πολλαπλασιάζουμε με τον όρο σ πριν από κάθε τυπική κανονική Z_{i+1} .

Πολυδιάστατη κίνηση Brown

Ορισμός 3 Η τυπική κίνηση Brown στον \mathbb{R}^d είναι μια ανέλιξη

$$W(t) = (W_1(t), \dots, W_d(t))^T, 0 \leq t \leq T,$$

με τις ακόλουθες ιδιότητες:

- i) $W(0) = (0, \dots, 0)$
- ii) τα δειγματικά της μονοπάτια είναι συνεχή
- iii) έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις
- iv) $W(t) - W(s) \sim N(\mathbf{0}, (t - s)I), \forall 0 \leq s < t \leq T.$

Δηλαδή, κάθε μία από τις ανεξίτητες $W_i(t)$, $i = 1, \dots, d$, είναι μία μονοδιάστατη τυπική κίνηση Brown και, εφόσον $Cov[W_i(t), W_j(s)] = 0$, για $i \neq j$, $\forall t, s \geq 0$, και W_i, W_j κανονικές, οι ανεξίτητες $W_i(\cdot)$ και $W_j(\cdot)$ θα είναι ανεξάρτητες.

Ορισμός 4 Η κίνηση Brown στον \mathbb{R}^d με drift $\mu \in \mathbb{R}^d$ και μεταβλητότητα $\Sigma \in \mathbb{R}^{d \times d}$ είναι μια ανέλιξη $X(t) = (X_1(t), \dots, X_d(t))^T$ με συνεχή δειγματικά μονοπάτια και με ανεξάρτητες προσαυξήσεις, για την οποία $X(t) - X(s) \sim N((t-s)\mu, (t-s)\Sigma)$.

Τα στοιχεία του πίνακα Σ καθορίζουν τις συνδιακυμάνσεις των συντελεστών του διανύσματος X , στους χρόνους s, t , μέσω της

$$Cov[X_i(s), X_j(t)] = \min\{s, t\}\Sigma_{ij},$$

για $i \neq j$.

Αν υποθέσουμε ότι $X(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, τότε

$$\begin{pmatrix} X_1(t) \\ \vdots \\ X_d(t) \end{pmatrix} \sim N \left(\begin{pmatrix} t\mu_1 \\ \vdots \\ t\mu_d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t\Sigma_{11} & \dots & t\Sigma_{1d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t\Sigma_{d1} & \dots & t\Sigma_{dd} \end{pmatrix} \right).$$

Αν B είναι ένας $d \times k$ πίνακας που ικανοποιεί την $BB^T = \Sigma$ και αν W μια τυπική k -διάστατη κίνηση Brown, τότε η γενική κίνηση Brown X μπορεί να οριστεί ως

$$X(t) = \mu t + BW(t). \quad (1.4)$$

Όπως και στη μονοδιάστατη περίπτωση, για να κατασκευάσουμε ένα μονοπάτι της πολυδιάστατης κίνησης Brown, σταθεροποιούμε ένα σύνολο χρονικών στιγμών $0 < t_1 < \dots < t_n$ και προσομοιώνουμε τις τιμές της εκάστοτε ανέλιξης στα σημεία αυτά.

Η προσομοίωση ενός μονοπατιού της d -διάστατης τυπικής κίνησης Brown, $W(t)$, είναι άμεση, εφόσον οι συνιστώσες της, $W_1(t), W_2(t), \dots, W_d(t)$, αποτελούν ανεξάρτητες τυπικές κινήσεις Brown στον \mathbb{R} :

Αν Z^1, Z^2, \dots, Z^d ανεξάρτητα τυχαία διανύσματα στον \mathbb{R}^n , καθένα από τα οποία ακολουθεί την κατανομή $N(\mathbf{0}, I_n)$, τότε θέτουμε

$$W_j(0) = 0$$

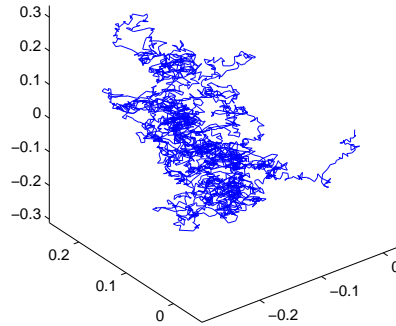
και

$$W_j(t_{i+1}) = W_j(t_i) + \sqrt{t_{i+1} - t_i} Z_{i+1}^j,$$

$j = 1, \dots, d$, $i = 0, 1, \dots, n-1$.

Για να προσομοιώσουμε τώρα ένα μονοπάτι της γενικής κίνησης Brown, $X(t)$, στον \mathbb{R}^d , αρκεί να βρούμε έναν $d \times k$ πίνακα B τέτοιον, ώστε $BB^T = \Sigma$. Διότι τότε, από την 1.4, αν

$$Z^1, Z^2, \dots, Z^d$$



Σχήμα 1.15: Μονοπάτι της τρισδιάστατης τυπικής κίνησης Brown

ανεξάρτητα, τυπικά κανονικά τυχαία διανύσματα στον \mathbb{R}^k , θέτουμε

$$X_j(0) = 0$$

και

$$X_j(t_{i+1}) = X_j(t_i) + \mu_j(t_{i+1} - t_i) + \sqrt{t_{i+1} - t_i} B_j Z^j, \quad (1.5)$$

$j = 1, \dots, d, i = 0, 1, \dots, n - 1$, όπου B_j η j -οστή γραμμή του πίνακα B .

Στο Σχήμα 1.15 φαίνεται ένα μονοπάτι της τρισδιάστατης τυπικής κίνησης Brown, με ακρίβεια 3500 σημείων.

1.2.2 Προσομοίωση της γεωμετρικής κίνησης Brown

Μία διάσταση

Η γεωμετρική κίνηση Brown είναι μια στοχαστική ανέλιξη $S(t)$ που ορίζεται ως $S(t) = e^{X(t)}$, όπου $X(t)$ μια κίνηση Brown. Αποτελεί το πιο θεμελιώδες μοντέλο στη μοντελοποίηση χρηματιστηριακών προϊόντων. Το πλεονέκτημά της έναντι της απλής κίνησης Brown είναι ότι παίρνει πάντα θετικές τιμές, γεγονός που την κάνει πιο κατάλληλη για την προσομοίωση τιμών μετοχών. Επιπλέον, στη γεωμετρική κίνηση Brown, οι ποσοστιαίες μεταβολές

$$\frac{S(t_2) - S(t_1)}{S(t_1)}, \frac{S(t_3) - S(t_2)}{S(t_2)}, \dots, \frac{S(t_n) - S(t_{n-1})}{S(t_{n-1})}$$

είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, για $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$, και όχι οι απόλυτες μεταβολές $S(t_{i+1}) - S(t_i)$.

Ορισμός Καλούμε γεωμετρική κίνηση Brown με drift παράμετρο μ και συντελεστή αστασίας σ τη στοχαστική ανέλιξη $S(t)$ που λύνει τη στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$dS(t) = S(t)\mu dt + S(t)\sigma dW(t), \quad (1.6)$$

όπου $W(t)$ μια τυπική κίνηση Brown.

Εφαρμόζοντας τον κανόνα του Itô στην $\ln S(t)$, έχουμε

$$d \ln S(t) = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW(t).$$

Συνοπάγεται ότι η λύση της 1.6, με αρχική συνθήκη $S(0)$, είναι

$$S(t) = S(0) e^{(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2)t + \sigma dW(t)}.$$

Γενικότερα, αν $u < t$, τότε

$$S(t) = S(u) e^{(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2)(t-u) + \sigma(W(t) - W(u))}. \quad (1.7)$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει και η ανεξαρτησία των ποσοστιαίων μεταβολών της γεωμετρικής κίνησης Brown.

Εφόσον οι προσαιζήσεις της κίνησης Brown, W , στην 1.7 είναι ανεξάρτητες και κανονικά κατανομημένες, οι τιμές της S στους χρόνους $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ προσομοιώνονται διαδοχικά ως εξής:

$$S(t_{i+1}) = S(t_i) e^{(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2)(t_{i+1} - t_i) + \sigma \sqrt{t_{i+1} - t_i} Z_{i+1}}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1, \quad (1.8)$$

όπου Z_1, \dots, Z_n ανεξάρτητες τυπικές κανονικές τυχαίες μεταβλητές.

Παρατηρούμε εδώ ότι, αν παίρναμε εκθετικό στα δύο μέλη της σχέσης 1.2, που προσομοιώνει τις τιμές της κίνησης Brown, αλλάζοντας μόνο την drift παράμετρο από μ σε $(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2)$, θα καταλήγαμε πάλι στην 1.8.

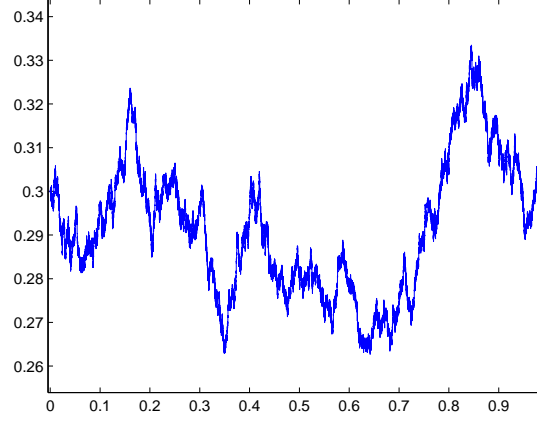
Στο Σχήμα 1.16 βλέπουμε ένα μονοπάτι της γεωμετρικής κίνησης Brown. Χρησιμοποιήθηκε ακρίβεια 1 εκατομμυρίου σημείων.

Πολλές διαστάσεις

Η πολυδιάστατη γεωμετρική κίνηση Brown μπορεί να καθοριστεί από ένα σύστημα στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων της μορφής:

$$\frac{dS_i(t)}{S_i(t)} = \mu_i dt + \sigma_i dX_i(t), \quad i = 1, \dots, d, \quad (1.9)$$

όπου κάθε X_i αποτελεί μια μονοδιάστατη τυπική κίνηση Brown.



Σχήμα 1.16: Μονοπάτι της γεωμετρικής κίνησης Brown στο διάστημα $[0, 1]$, με $r = 0.05$, $\sigma = 0.2$, και αρχική τιμή $S(0) = 0.3$.

Αν $c_{ij} = \text{Cov}[X_i(t), X_j(t)]$, $i \neq j$, και Σ ένας $d \times d$ πίνακας με στοιχεία $\Sigma_{ij} = \sigma_i \sigma_j c_{ij}$, τότε η ανέλιξη $X_\sigma(t) = (\sigma_1 W_1(t), \dots, \sigma_d W_d(t))$ είναι μια d -διάστατη κίνηση Brown με drift το μηδενικό διάνυσμα και πίνακα μεταβλητότητας Σ .

Το διάνυσμα drift της πολυδιάστατης ανέλιξης $S(t) = (S_1(t), \dots, S_d(t))^T$ στην 1.9 είναι

$$(\mu_1 S_1(t), \dots, \mu_d S_d(t))$$

και οι συνδιασπορές των στοιχείων της δίνονται από

$$\text{Cov}[S_i(t), S_j(t)] = S_i(0)S_j(0)e^{(\mu_i + \mu_j)t} (e^{c_{ij}\sigma_i\sigma_j} - 1), i \neq j.$$

Από τη σχέση 1.4 της παραγράφου 1.2.1., έχουμε ότι, αν B ένας $d \times m$ πίνακας τέτοιος, ώστε $BB^T = \Sigma$, τότε η $X_\sigma(t)$ μπορεί να γραφεί ως

$$X_\sigma(t) = BW(t),$$

όπου $W(t)$ μια m -διάστατη τυπική κίνηση Brown. Επομένως, η 1.9 γράφεται ισοδύναμα ως:

$$\frac{dS_i(t)}{S_i(t)} = \mu_i dt + B^i dW(t), i = 1, \dots, d,$$

όπου B^i η i -οστή γραμμή του πίνακα B .

Αναλυτικότερα:

$$\frac{dS_i(t)}{S_i(t)} = \mu_i dt + \sum_{j=1}^m B_{ij} dW_j(t), i = 1, \dots, d. \quad (1.10)$$

Από την 1.10 έπεται ότι για να προσομοιώσουμε ένα μονοπάτι της d -διάστατης γεωμετρικής κίνησης Brown, στους χρόνους $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$, μπορούμε να θέσουμε

$$S_i(t_{k+1}) = S_i(t_k) e^{(\mu_i - \frac{1}{2}\sigma_i^2)(t_{k+1} - t_k) + \sqrt{t_{k+1} - t_k} \sum_{j=1}^m B_{ij} Z_j^{k+1}}, \quad (1.11)$$

$i = 1, \dots, d$, $k = 0, \dots, n - 1$, όπου Z^1, \dots, Z^n ανεξάρτητα τυπικά κωνονικά τυχαία διανύσματα στον \mathbb{R}^m .

Η ίδια αναπαράσταση στην 1.11 προκύπτει, αν πάρουμε εκθετικό στα δύο μέλη της 1.5 και αλλάξουμε την drift παράμετρο από μ_i σε $(\mu_i - \frac{1}{2}\sigma_i^2)$, $i = 1, \dots, d$.

Αν στην 1.11 επιλέξουμε ως πίνακα B τον κάτω τριγωνικό που προκύπτει από την παραγοντοποίηση Cholesky, επιτυγχάνουμε σημαντική μείωση των απαραίτητων πράξεων σε κάθε βήμα.

Κεφάλαιο 2

Θεωρία τιμολόγησης παραγώγων και εκτιμήτριες Monte Carlo

2.1 Θεωρία τιμολόγησης παραγώγων προϊόντων

Παράγωγο προϊόν, ή απλώς *παράγωγο*, καλούμε ένα συμβόλαιο επί ενός ή περισσότερων χρηματιστηριακών προϊόντων, όπως μια μετοχή, μια συναλλαγματική ισοτιμία, ένας χρηματιστηριακός δείκτης, ένα επιτόκιο ή κάποιο αγαθό, όπως το πετρέλαιο, που συνυπογράφεται από δύο συμβαλλόμενες πλευρές (τράπεζα - ιδιώτης, τράπεζα - χρηματιστηριακή εταιρία, κράτος - τράπεζα) και αφορά μια συναλλαγή επί των προϊόντων αυτών που πρόκειται να λάβει χώρα στο μέλλον. Τα ίδια τα παράγωγα αποτελούν χρηματιστηριακά προϊόντα επί των οποίων γίνονται συμφωνίες. Υπάρχουν δηλαδή και παράγωγα επί άλλων παραγώγων.

Κάθε παράγωγο έχει μια ημερομηνία λήξης που καλείται *ωρίμανση* του παραγώγου και η οποία καθορίζεται τη στιγμή που υπογράφεται το συμβόλαιο. Κατά την ημερομηνία αυτή οι συμβαλλόμενες πλευρές αναλαμβάνουν να τηρήσουν τις υποχρεώσεις, ή να ασκήσουν τα δικαιώματα που τους αντιστοιχούν, με βάση τους όρους του εκάστοτε συμβολαίου.

Η αξία ενός παραγώγου εξαρτάται από την αξία των προϊόντων πάνω στα οποία έχει γίνει η συμφωνία. Η αξία του στην ωρίμανση καλείται *απόδοση* του παραγώγου και μπορεί να εξαρτάται από τις τιμές των προϊόντων σε ολόκληρο το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί μεταξύ έναρξης και ωρίμανσης του συμβολαίου, από τις τιμές τους σε καθορισμένες χρονικές στιγμές στο μεσοδιάστημα, ή αποκλειστικά

από τις τιμές τους στην ωρίμανση. Κάθε παράγωγο έχει μια αρχική αξία ή τιμή, η οποία μπορεί να είναι και μηδέν.

Θα λέμε ότι ένας συμβαλλόμενος σε ένα παράγωγο παίρνει θετική θέση σε αυτό, αν είναι ο αγοραστής του και αντίστοιχα αρνητική θέση, αν είναι ο πωλητής του. Κατά το κλείσιμο μιας συμφωνίας, η ενδιαφερόμενη πλευρά που έχει πάρει θετική θέση σε ένα παράγωγο είναι υποχρεωμένη να καταβάλλει το αντίτιμο της αρχικής του αξίας στην πλευρά που έχει πάρει αρνητική θέση.

Ακολουθούν μερικά παραδείγματα παραγώγων:

1) επί ενός προϊόντος

Ένα προθεσμιακό συμβόλαιο με ωρίμανση T και παραδοτέα τιμή K (συμβολισμός: (T, K)) είναι μια συμφωνία που υποχρεώνει αυτόν που έχει πάρει θετική θέση να αγοράσει το προϊόν, τη χρονική στιγμή T , έναντι K , από αυτόν που έχει πάρει αρνητική θέση. Η απόδοση του προθεσμιακού συμβολαίου εξαρτάται από την τιμή του υποκείμενου προϊόντος στην ωρίμανση, $S(T)$, και ισούται με $S(T) - K$.

Ένα ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς (T, K) είναι ένα συμβόλαιο που προσδίδει στον αγοραστή του το δικαίωμα να αγοράσει από τον πωλητή του το προϊόν, στην ωρίμανση T , έναντι K . Η απόδοση του δικαιώματος αυτού εξαρτάται από την τιμή του εκάστοτε προϊόντος στο χρόνο T και είναι ίση με $(S(T) - K)^+ = \max\{S(T) - K, 0\}$.

Ένα αμερικάνικο δικαίωμα αγοράς (T, K) είναι μια συμφωνία, στην οποία ο έχων θετική θέση δικαιούται να αγοράσει το προϊόν έναντι K από τον έχοντα αρνητική θέση, οποιαδήποτε χρονική στιγμή ο πρώτος επιθυμεί, μέχρι και την ωρίμανση T .

Είναι φανερό ότι σε μια δίκαιη αγορά το αμερικάνικο δικαίωμα αγοράς θα είναι ακριβότερο του αντίστοιχου ευρωπαϊκού, ενώ το τελευταίο θα είναι ακριβότερο του προθεσμιακού συμβολαίου.

Ένα ασιατικό δικαίωμα πώλησης (T, K) είναι ένα συμβόλαιο επί του μέσου όρου των τιμών ενός προϊόντος, σε ένα διακριτό ή σε ένα συνεχές σύνολο χρονικών στιγμών, και έχει απόδοση στην ωρίμανση $(\bar{S} - K)^+$, όπου $\bar{S} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S(t_i)$ ή $\bar{S} = \frac{1}{t-s} \int_s^t S(u) du$, σε ένα διάστημα $[s, t]$, αντίστοιχα.

2) επί περισσότερων του ενός προϊόντων

Μια συλλογή από χρηματιστηριακά προϊόντα που μπορεί να ανήκει π.χ. σε μια χρηματιστηριακή εταιρία, έναν ιδιώτη ή μια τράπεζα, καλείται χαρτοφυλάκιο.

Ένα δικαίωμα αγοράς "basket" (T, K) είναι ένα δικαίωμα επί ενός χαρτοφυλακίου. Υποθέτοντας ότι το χαρτοφυλάκιο έχει d προϊόντα, μία πιθανή απόδοση για το δικαίωμα αυτό είναι

$$([S_1(T) + S_2(T) + \dots + S_d(T)] - K)^+.$$

Ένα ευρωπαϊκό δικαίωμα (T, K) με φράγμα L , επί δύο προϊόντων, μπορεί να έχει απόδοση $I_{\{\tau > T\}}(K - S_1(T))^+$, όπου $\tau = \inf\{0 \leq t \leq T : S_2(t) < L\}$, ένας χρόνος στάσης. Αυτό σημαίνει ότι το δικαίωμα αυτό έχει απόδοση $(K - S_1(t))^+$, αν η τιμή του προϊόντος S_2 δεν πέσει ποτέ κάτω από την τιμή L , μέχρι και την ωρίμανση, ενώ έχει μηδενική απόδοση διαφορετικά.

Στο τέταρτο κεφάλαιο θα δούμε παράγωγα επί επιτοκίων, όπου οι εκάστοτε ρυθμοί επιτοκίου μεταβάλλονται στοχαστικά.

Αντικείμενο της ενότητας αυτής είναι το πώς υπολογίζεται η αρχική αξία ενός παραγωγού, ούτως ώστε να είναι δίκαιη προς τις δύο συμβαλλόμενες πλευρές. Θα ξεκινήσουμε περιγράφοντας το μοντέλο.

Έστω ότι η αγορά αποτελείται από d χρηματιστηριακά προϊόντα, τα οποία έχουν τιμές $S_1(t), S_2(t), \dots, S_d(t)$, στο χρόνο t , και έστω ότι η δυναμική των τιμών τους περιγράφεται από το ακόλουθο σύστημα στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων:

$$\frac{dS_i(t)}{S_i(t)} = \mu_i(S(t), t)dt + \sum_{j=1}^k \sigma_{ij}(t, S(t))dW_j^0(t), i = 1, \dots, d, \quad (2.1)$$

όπου $W^0(t) = (W_1^0(t), \dots, W_k^0(t))$ μια k -διάστατη τυπική κίνηση Brown, $S(t) = (S_1(t), S_2(t), \dots, S_d(t))$ το διάνυσμα της παρούσας κατάστασης των τιμών, $\mu_i \in \mathbb{R}$, $\sigma_i \in \mathbb{R}^k$, και σ_{ij} η j συνιστώσα του σ_i .

Η παράμετρος της αστασίας, σ , αποτελεί ένα μέτρο του κινδύνου που επιφέρει η ύπαρξη ενός προϊόντος ή η συνύπαρξη δύο προϊόντων σε ένα χαρτοφυλάκιο. Μετρά το μέγεθος των διακυμάνσεων στις τιμές των προϊόντων και, κατά συνέπεια, είναι μια ένδειξη για το μέγεθος της επίδρασης που αυτές μπορεί να έχουν στην αξία του χαρτοφυλακίου. Η παράμετρος drift μ αντικατοπτρίζει το μέσο ρυθμό αύξησης των προϊόντων S_i .

Πριν συνεχίσουμε την ανάλυσή μας, παραθέτουμε εδώ κάποιες βασικές έννοιες της χρηματοοικονομίας που θα μας χρειαστούν παρακάτω.

Κάθε χαρτοφυλάκιο χαρακτηρίζεται από ένα διάνυσμα $\theta \in \mathbb{R}^d$, όπου κάθε θ_i αντιπροσωπεύει τις μονάδες που περιέχει το χαρτοφυλάκιο από το i -οστό προϊόν, $i = 1, \dots, d$. Η αξία του χαρτοφυλακίου τη χρονική στιγμή t θα είναι

$$\theta_1 S_1(t) + \dots + \theta_d S_d(t) = \theta^\top S(t).$$

Μια στρατηγική αντιστάθμισης είναι μια στοχαστική ανέλιξη $\{\theta(t)\}$ αποτελούμενη από στοχαστικά διανύσματα. Θα υποθέσουμε ότι η $\{\theta(t)\}$ είναι μια προσαρμοσμένη ανέλιξη, δηλαδή είναι $\mathcal{F}_t = \sigma(S(q); q \leq t)$ -μετρήσιμη.

Αν αφήσουμε αμετάβλητο το διάνυσμα θέσεων του χαρτοφυλακίου, $\bar{\theta} = \bar{\theta}(t) = (\bar{\theta}_1(t), \dots, \bar{\theta}_d(t))$, για το χρονικό διάστημα $[t, t+h]$, τότε η μεταβολή της αξίας του χαρτοφυλακίου για το i -οστό προϊόν θα είναι

$$\bar{\theta}_i(t) [S_i(t+h) - S_i(t)]$$

και του χαρτοφυλακίου στο σύνολο

$$\bar{\theta}^\top [S(t+h) - S(t)].$$

Αντίστοιχα, στο συνεχή χρόνο, ορίζουμε τα κέρδη από το χαρτοφυλάκιο στο διάστημα $[0, t]$ μέσω του στοχαστικού ολοκληρώματος, ως προς $S(t)$,

$$\int_0^t \theta(u)^\top dS(u),$$

υπό τις κατάλληλες συνθήκες ούτως ώστε αυτό να ορίζεται [6].

Μία στρατηγική αντιστάθμισης $\{\theta(t)\}$ θα λέγεται *αυτοχρηματοδοτούμενη* αν ικανοποιεί τη σχέση

$$\theta(t)^\top S(t) - \theta(0)^\top S(0) = \int_0^t \theta(u)^\top dS(u), \quad (2.2)$$

αν δηλαδή η μεταβολή της αξίας του χαρτοφυλακίου από το χρόνο 0 στο χρόνο t (αριστερό μέλος) προέρχεται αποκλειστικά από τη μεταβολή της αξίας των προϊόντων του χαρτοφυλακίου στο ίδιο χρονικό διάστημα (δεξί μέλος).

Η 2.2 ισοδύναμα γράφεται

$$\theta(t)^\top S(t) = \theta(0)^\top S(0) + \int_0^t \theta(u)^\top dS(u), \quad (2.3)$$

δηλαδή, αν ξεκινήσουμε από μια αρχική επένδυση αξίας $V(0) = \theta(0)^\top S(0)$, τότε μπορούμε να καταλήξουμε σε μια επένδυση αξίας $V(t) = \theta(t)^\top S(t)$, στο χρόνο t , αν στο διάστημα $[0, t]$ ακολουθήσουμε τη στρατηγική συναλλαγών $\theta(\cdot)$.

Έστω τώρα ένα παράγωγο με απόδοση $f(S(T))$ τη χρονική στιγμή της ωρίμανσής του, T , όπου f μια συνάρτηση. Έστω ότι η αξία του τη χρονική στιγμή $t \in [0, T]$ εξαρτάται μόνο από το t και την $S(t)$ μέσω μιας ομαλής συνάρτησης $V(S(t), t)$, δηλαδή, $V(t) = V(S(t), t)$. Εφόσον η δυναμική των μετοχών στην 2.1 εξαρτάται μόνο από το διάνυσμα της παρούσας κατάστασης $S(t)$ και το χρόνο t , περιμένουμε να συμβαίνει το ίδιο και με την αξία του παραγώγου V . Αν η V είναι αρκετά ομαλή συνάρτηση, τότε από τον κανόνα του Itô έχουμε ότι

$$\begin{aligned} V(S(t), t) = & V(S(0), 0) + \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial V(S(u), u)}{\partial s_i} dS_i(u) \\ & + \int_0^t \left[\frac{\partial V(S(u), u)}{\partial u} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d S_i(u) S_j(u) \Sigma_{ij}(S(u), u) \frac{\partial^2 V(S(u), u)}{\partial s_i \partial s_j} \right] du, \end{aligned} \quad (2.4)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι

$$\langle S_i, S_j \rangle_u \stackrel{2.1}{=} \left\langle (S_i \sigma_i^\top \bullet W^0)_u, (S_j \sigma_j^\top \bullet W^0)_u \right\rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \left\langle \sum_{l=1}^k \int_0^u S_i(s) \sigma_{i,l}(S(s), s) dW_l^0(s), \sum_{m=1}^k \int_0^u S_j(s) \sigma_{j,m}(S(s), s) dW_m^0(s) \right\rangle \\
&= \sum_{l,m=1}^k \left\langle \int_0^u S_i(s) \sigma_{i,l}(S(s), s) dW_l^0(s), \int_0^u S_j(s) \sigma_{j,m}(S(s), s) dW_m^0(s) \right\rangle \\
&\stackrel{(*)}{=} \sum_{l,m=1}^k \int_0^u S_i(s) S_j(s) \sigma_{i,l}(S(s), s) \sigma_{j,l}(S(s), s) d \langle W_l^0, W_m^0 \rangle_s \\
&= \int_0^u \sum_{l=1}^k S_i(s) S_j(s) \sigma_{i,l}^\top(S(s), s) \sigma_{j,l}(S(s), s) ds \\
&= \int_0^u S_i(s) S_j(s) \sigma_i^\top(S(s), s) \sigma_j(S(s), s) ds \\
&= \int_0^u S_i(s) S_j(s) \Sigma_{ij}(S(s), s) ds \\
\Rightarrow d \langle S_i, S_j \rangle_u &= S_i(u) S_j(u) \Sigma_{ij}(S(u), u) du,
\end{aligned}$$

όπου

$\Sigma_{ij}(S(s), s) = \sigma_i^\top(S(s), s) \sigma_j(S(s), s)$, W^0 η k -διάστατη τυπική κίνηση Brown, W_i^0, W_j^0 ανεξάρτητες για $i \neq j$ (*), $(X \bullet Y)_u$ συμβολίζει το $\int_0^u X(t) dY(t)$ και $\sigma_{i,l}, \sigma_{j,l}$ το l -οστό στοιχείο των διανυσμάτων σ_i και σ_j αντίστοιχα, $l = 1, \dots, k$, και όπου κάναμε χρήση της ταυτότητας Kunita - Watanabe [6]:

$$\begin{aligned}
\left\langle \int_0^u A(s) dW_l(s), \int_0^u B(s) dW_m(s) \right\rangle &= \int_0^u A(s) B(s) d \langle W_l(s), W_m(s) \rangle \\
&= \int_0^u A(s) B(s) \delta_{lm} ds.
\end{aligned}$$

Αν η αξία $V(S(t), t)$ μπορεί να αναπαραχθεί από μια αρχική αξία $V(S(0), 0)$ με τη βοήθεια μιας αυτοχρηματοδοτούμενης στρατηγικής θ , τότε, από την 2.3

$$V(S(t), t) = V(S(0), 0) + \int_0^t \sum_{i=1}^d \theta_i(u) dS_i(u). \quad (2.5)$$

Συγκρίνοντας τις 2.3 και 2.5, θα πρέπει

$$\theta_i(u) = \frac{\partial V(S(u), u)}{\partial S_i}, \quad i = 1, \dots, d, \quad (2.6)$$

και

$$\frac{\partial V(S, u)}{\partial u} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \Sigma_{ij}(S, u) S_i(u) S_j(u) \frac{\partial^2 V(S, u)}{\partial S_i \partial S_j} = 0. \quad (2.7)$$

Εφόσον $V(S(t), t) = \theta^\top(t) S(t)$, από την 2.6 έχουμε ότι

$$dV(S(t), t) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial V(S(t), t)}{\partial S_i} dS_i(t) \quad (2.8)$$

Επίσης, στην ωρίμανση του παραγώγου, T , η αξία του, V , θα πρέπει να ισούται με την απόδοσή του

$$V(S(T), T) = f(S(T)). \quad (2.9)$$

Οι σχέσεις 2.7, 2.8 και 2.9 αποτελούν ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών, η λύση του οποίου θα μας δώσει την αξία V . Υπολογίζοντας την V στο $(S(0), 0)$, παίρνουμε την αρχική αξία του παραγώγου.

Η στρατηγική θ στη σχέση 2.6 καλείται *αντιστάθμιση δέλτα*.

Έστω τώρα \mathbb{P}_0 το μέτρο πιθανότητας που καθιστά την W^0 στην 2.1 μια k -διάστατη τυπική κίνηση Brown.

Θα λέμε ότι μια αυτοχρηματοδοτούμενη στρατηγική $\{\theta(t)\}$ είναι *στρατηγική επιτηδειότητας*, αν ικανοποιεί μία από τις ακόλουθες συνθήκες, για κάποιο t :

$$i) \theta(0)^\top S(0) < 0 \text{ και } \mathbb{P}_0(\theta(t)^\top S(t) \geq 0) = 1 \quad (2.10)$$

$$\text{ή } ii) \theta(0)^\top S(0) = 0, \mathbb{P}_0(\theta(t)^\top S(t) \geq 0) = 1 \text{ και } \mathbb{P}_0(\theta(t)^\top S(t) > 0) > 0. \quad (2.11)$$

Μία στοχαστική ανέλιξη $\{V(t)\}$ θα καλείται *εφικτή αξία*, αν υπάρχει αυτοχρηματοδοτούμενη στρατηγική $\theta(t)$ τέτοια, ώστε $V(t) = \theta(t)^\top S(t)$.

Μια αυστηρά θετική στοχαστική ανέλιξη $Z(t)$ θα καλείται *numeraire* ως προς το \mathbb{P}_0 , αν ο λόγος $V(t)/Z(t)$ είναι ένα martingale κάτω από το μέτρο \mathbb{P}_0 , για κάθε εφικτή ανέλιξη $V(t)$, προσαρμοσμένη στην \mathcal{F}_t , δηλαδή, αν

$$\mathbb{E}_0 \left[\frac{V(T)}{Z(T)} \mid \mathcal{F}_t \right] = \frac{V(t)}{Z(t)}, \forall t < T, \forall \text{ εφικτή } V(t), \quad (2.12)$$

όπου $\mathcal{F}_t = \sigma(W^0(q); q \leq t)$, και W^0 η τυπική κίνηση Brown. Η παραπάνω σχέση δηλώνει ότι η αξία κάθε εφικτής ανέλιξης V μετρημένη σε μονάδες Z είναι \mathbb{P}_0 -martingale.

Συνήθως αποκαλούμε την $1/Z(t)$ προεξοφλητικό παράγοντα. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $Z(0) = 1$, εφόσον κάθε πολλαπλάσιο ενός numeraire είναι επίσης ένα numeraire.

Από την 2.12 προκύπτει ότι

$$V(0) = \mathbb{E}_0 \left[\frac{V(T)}{Z(T)} \right]. \quad (2.13)$$

Η ύπαρξη ενός προεξοφλητικού παράγοντα $1/Z(t)$ αποκλείει την ύπαρξη επιτηδειότητας:

Αν η θ είναι μια αυτοχρηματοδοτούμενη στρατηγική, τότε η ανέλιξη $\theta(t)^\top S(t)$ θα είναι μια εφικτή ανέλιξη, ενώ η $(\theta(t)^\top S(t))/Z(t)$ ένα martingale. Επομένως,

$$\theta(0)^\top S(0) = \mathbb{E}_0 \left[\frac{\theta(T)^\top S(T)}{Z(T)} \right], \quad (2.14)$$

όπου Z αυστηρά θετική ανέλιξη εξ ορισμού.

Από την 2.14 και εφόσον $Z(t) > 0$, προκύπτει ότι, αν $\theta(T)^\top S(T) \geq 0$ με πιθανότητα 1, τότε σίγουρα $\theta(0)^\top S(0) \geq 0$, ενώ αν $\theta(T)^\top S(T) > 0$ με θετική πιθανότητα και $\theta(T)^\top S(T) \geq 0$ με πιθανότητα 1, τότε σίγουρα $\theta(0)^\top S(0) > 0$. Άρα, η ύπαρξη ενός προεξοφλητικού παράγοντα καταργεί μέσω της 2.14 τις σχέσεις 2.10 και 2.11, αποκλείοντας έτσι την ύπαρξη επιτηδειότητας.

Μια ειδική περίπτωση τιμολόγησης, είναι η *αδιάφορη κινδύνου τιμολόγηση* (risk neutral pricing), την οποία θα αναλύσουμε παρακάτω. Υποθέτουμε ότι μεταξύ των d προϊόντων που διατίθενται στην αγορά υπάρχει ένα $S_0(\cdot)$ που δεν περιέχει κίνδυνο. Δηλαδή, οι παράμετροι αστασίας σ_{0j} , $j = 1, \dots, k$, που σχετίζονται με αυτό, στο μοντέλο 2.1, ισούνται με μηδέν. Υποθέτουμε επίσης ότι η drift παράμετρος του ισούται με r και μπορεί να ερμηνευθεί ως ένα *άνευ κινδύνου επιτόκιο*. Θα συμβολίζουμε το προϊόν αυτό με $\beta(t)$ και θα το αποκαλούμε *καταθετικό λογαριασμό*. Η δυναμική του επομένως θα είναι

$$\frac{d\beta(t)}{\beta(t)} = r dt \Rightarrow \beta(t) = \beta(0) e^{rt} = e^{rt},$$

όπου υποθέσαμε ότι $\beta(0) = 1$.

Η $\beta(t)$ είναι μια εφικτή ανέλιξη, διότι η αξία της μπορεί να αναπαραχθεί αν $\theta(t) = e_0(t) = (1, 0, \dots, 0)$.

Αν στην αγορά υπάρχει ένας προεξοφλητικός παράγοντας $1/Z(t)$, τότε, η διαδικασία $\beta(t)/Z(t)$ θα είναι ένα martingale. Επιπλέον, η διαδικασία αυτή θα είναι θετική και $\beta(0)/Z(0) = 1$, θα έχει δηλαδή αρχική αξία 1.

Γνωρίζουμε ότι μια μη αρνητική martingale ανέλιξη με μέση τιμή 1, ορίζει μια συνεπή, ως προς τη διήθηση $\{\mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$ οικογένεια μέτρων πιθανότητας, για κάποιο σταθεροποιημένο χρόνο T , μέσω της

$$\left(\frac{d\mathbb{P}_\beta}{d\mathbb{P}_0} \right) \Big|_{\mathcal{F}_t} = \frac{\beta(t)}{Z(t)}, 0 \leq t \leq T. \quad (2.15)$$

Αυτό σημαίνει ότι, $\forall A \in \mathcal{F}_t$,

$$\mathbb{P}_\beta(A) = \mathbb{E}_0 \left[I_A \left(\frac{d\mathbb{P}_\beta}{d\mathbb{P}_0} \right) \Big|_{\mathcal{F}_t} \right] = \mathbb{E}_0 \left[I_A \frac{\beta(t)}{Z(t)} \right].$$

Επομένως, θα ισχύει ότι

$$\mathbb{E}_\beta[X] = \mathbb{E}_0 \left[X \frac{\beta(t)}{Z(t)} \right], \quad (2.16)$$

\forall μη αρνητική \mathcal{F}_t -μετρήσιμη τυχαία μεταβλητή X .

Εφόσον $\frac{d\mathbb{P}_\beta}{d\mathbb{P}_0} > 0$, τα μέτρα \mathbb{P}_0 και \mathbb{P}_β είναι ισοδύναμα, δηλαδή $\mathbb{P}_0(A) = 0$ ανν $\mathbb{P}_\beta(A) = 0$.

Θα καλούμε το μέτρο \mathbb{P}_β *αδιάφορο κινδύνου μέτρο*.

Συγκρίνοντας τις σχέσεις 2.14 και 2.16, έχουμε ότι η αρχική αξία θα είναι

$$V(0) = \mathbb{E}_0 \left[\frac{V(T)}{Z(T)} \right] = \mathbb{E}_\beta \left[\frac{V(T)}{\beta(T)} \right] = e^{-rT} \mathbb{E}_\beta[V(T)]. \quad (2.17)$$

Αυτό που καταφέραμε υπολογίζοντας τη μέση τιμή στην 2.17 ως προς το αδιάφορο κινδύνου μέτρο πιθανότητας \mathbb{P}_β , αντί του μέτρου \mathbb{P}_0 , είναι ότι τώρα η αρχική αξία αποτιμάται μέσω του παράγοντα e^{-rT} , ενώ πριν αποτιμούνταν μέσω ενός στοχαστικού παράγοντα $1/Z(T)$. Αυτό είναι ένα χαρακτηριστικό της αδιάφορης κινδύνου τιμολόγησης, ιδιαίτερα σημαντικό κατά την προσομοίωση με εκτιμήτριες Monte Carlo όπως θα δούμε στην επόμενη ενότητα.

Η 2.17 γενικεύεται στην

$$V(t) = \mathbb{E}_\beta \left[V(T) \frac{\beta(t)}{\beta(T)} \mid \mathcal{F}_t \right] = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_\beta [V(T) \mid \mathcal{F}_t], t < T. \quad (2.18)$$

Για να γίνει η τιμολόγηση υπό το αδιάφορο κινδύνου μέτρο \mathbb{P}_β , μένει να προσδιοριστεί η δυναμική των τιμών των προϊόντων, $S_i(t)$, $i = 1, \dots, d$, υπό το μέτρο αυτό ώστε να υπολογιστεί η μέση τιμή $\mathbb{E}_\beta[V(T)]$.

Οι $S_i(t)$ είναι εφικτές διαδικασίες, εφόσον η αξία τους αναπαράγεται μέσω της τετριμμένης στρατηγικής $\theta(t) = e_i, \forall t$. Επίσης, $\beta(t) > 0, \forall t$, επομένως οι ανελίξεις $S_i(t)/\beta(t)$ θα είναι martingales υπό το μέτρο \mathbb{P}_β . Άρα, αν βρούμε τη δυναμική που καθιστά τις ανελίξεις $S_i(t)/\beta(t)$ \mathbb{P}_β -martingales, θα έχουμε βρει και τη δυναμική των τιμών $S_i(t)$ υπό το \mathbb{P}_β .

Πιο αναλυτικά, έστω ότι η δυναμική των τιμών της 2.1 μπορεί να εκφραστεί μέσω του συστήματος

$$\frac{dS_i(t)}{S_i(t)} = rdt + \sigma_i(S(t), t)^\top dW^\beta(t), i = 1, \dots, d, \quad (2.19)$$

όπου W^β μια τυπική k -διάστατη κίνηση Brown υπό το μέτρο \mathbb{P}_β .

Εφαρμόζοντας τον κανόνα του Itô στην $S_i(t)/\beta(t)$, για $i = 1, \dots, d$, έχουμε

$$d \left(\frac{S_i(t)}{\beta(t)} \right) = \left(\frac{S_i(t)}{\beta(t)} \right) \sigma_i(S(t), t)^\top dW^\beta(t). \quad (2.20)$$

Το δεξί μέλος της 2.20 αποτελεί μια martingale ανελίξη $\forall i$, οπότε, οι ανελίξεις $S_i(t)/\beta(t)$ είναι όντως martingales υπό το μέτρο $\mathbb{P}_\beta, \forall i$.

Το σύστημα στην 2.19 είναι πολύ πιο απλό από το σύστημα στην 2.1, διότι στο πρώτο όλες οι drift παράμετροι μ_i έχουν αντικατασταθεί από τη σταθερά r . Δηλαδή, η δυναμική των τιμών των προϊόντων κάτω από το αδιάφορο κινδύνου μέτρο \mathbb{P}_β δεν εμπεριέχει τα περίπλοκα δυναμικά drifts της 2.1. Αυτό σημαίνει ότι

το επιτόκιο που αντιστοιχεί σε κάθε προϊόν σε μια αγορά που δε λαμβάνει υπόψη της τον κίνδυνο, θα είναι σταθερό και ίσο με το άνευ κινδύνου επιτόκιο r .

Για να είναι συνεπή τα δύο συστήματα, 2.1 και 2.19, θα πρέπει

$$\mu_i(S(t), t)dt + \sigma_i(S(t), t)^\top dW^0(t) = rdt + \sigma_i(S(t), t)^\top dW^\beta(t), i = 1, \dots, d.$$

Θα πρέπει δηλαδή οι W^0 και W^β να σχετίζονται μέσω της

$$dW^\beta(t) = \nu(t)dt + dW^0(t), \quad (2.21)$$

όπου $\nu(t) \in \mathbb{R}^k$ τέτοιο, ώστε $\mu_i(S(t), t) = r + \sigma_i(S(t), t)^\top \nu(t)$, $i = 1, \dots, d$. Ισοδύναμα,

$$\mu = re + \Sigma\nu,$$

όπου $e = (1, \dots, 1)$, και $\Sigma_{ij} = \sigma_{i,j}$. Αν η παραπάνω εξίσωση έχει λύση ως προς ν θα λέμε ότι η αγορά είναι *πλήρης*, ενώ η ν ονομάζεται αγοράία τιμή κινδύνου (market value of risk.) Η εξίσωση αυτή λύνεται πάντα αν ο πίνακας Σ είναι τετραγωνικός και αντιστρέψιμος.

Η συνθήκη 2.21 δηλώνει ότι το αντικειμενικό μέτρο της αγοράς, \mathbb{P}_0 , και το αδιάφορο κινδύνου μέτρο \mathbb{P}_β συνδέονται μέσω ενός μετασχηματισμού Girsanov [6],

$$\left. \frac{d\mathbb{P}_\beta}{d\mathbb{P}_0} \right|_{\mathcal{F}_t} = e^{-\int_0^t \nu(s) dW_s^0 - \frac{1}{2} \int_0^t |\nu(s)|^2 ds}.$$

Οι παράμετροι μεταβλητότητας σ_i στα δύο συστήματα παραμένουν οι ίδιες. Το γεγονός αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντικό, διότι μας εξασφαλίζει ότι κατά την περιγραφή της δυναμικής των τιμών των μετοχών υπό το μέτρο \mathbb{P}_β , θα μπορούμε να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους του συστήματος, αντλώντας πληροφορίες από την αγορά, δηλαδή κάτω από το πραγματικό μέτρο \mathbb{P}_0 .

Στη συνέχεια θα δούμε ένα μοντέλο που χρησιμοποιείται ευρέως στην τιμολόγηση ευρωπαϊκών δικαιωμάτων, αυτό των *Black & Scholes*. Βάσει αυτού θα τιμολογήσουμε ένα ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς.

Το μοντέλο των Black & Scholes υποθέτει ότι στην αγορά υπάρχουν δύο προϊόντα. Το πρώτο, που συμβολίζεται με S και αναφέρεται ως μετοχή, εμπεριέχει κίνδυνο. Η δυναμική του περιγράφεται από μια στοχαστική διαφορική εξίσωση της μορφής

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sigma dW^0(t), \quad (2.22)$$

όπου W^0 μονοδιάστατη τυπική κίνηση Brown υπό το μέτρο \mathbb{P}_0 . Το δεύτερο είναι ένας καταθετικός λογαριασμός β και αυξάνει ντετερμινιστικά σύμφωνα με την

$$\frac{d\beta(t)}{\beta(t)} = rdt, \beta(0) = 1, \quad (2.23)$$

όπως είδαμε και παραπάνω, όπου r ο σταθερός ρυθμός αύξησης ή αλλιώς το άνευ κινδύνου επιτόκιο. Υπό το αδιάφορο κινδύνου μέτρο \mathbb{P}_β , η δυναμική της μετοχής

στην 2.22 γίνεται

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = rdt + \sigma dW^\beta(t), \quad (2.24)$$

όπου W^β μονοδιάστατη τυπική κίνηση Brown υπό το \mathbb{P}_β . Από την 2.24 έχουμε ότι

$$S(T) = S(0) e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma W^\beta(T)}.$$

Έστω λοιπόν ότι έχουμε να τιμολογήσουμε ένα ευρωπαϊκό δικαίωμα που έχει απόδοση $f(S(T))$, όπου f μια συνάρτηση. Τότε, η αρχική του αξία, σύμφωνα με όλα τα παραπάνω, θα είναι

$$V(0) = \mathbb{E}_\beta [e^{-rT} f(S(T))]. \quad (2.25)$$

Η αρχική αξία ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς (ΕΔΑ), που έχει απόδοση $(S(T) - K)^+$, όπου K η παραδοτέα τιμή, θα είναι άρα

$$V_{\text{ΕΔΑ}}(0) = \mathbb{E}_\beta [e^{-rT} (S(T) - K)^+]. \quad (2.26)$$

Η παραπάνω τιμή υπολογίζεται ακριβώς. Εφόσον ξέρουμε ότι η κατανομή της $W(T)$ είναι κανονική με μέση τιμή 0 και διασπορά T , βρίσκουμε από την 2.26, μετά από πράξεις, ότι

$$V_{\text{ΕΔΑ}}(0) = S(0)N(d_1) - e^{-rT} KN(d_2), \quad (2.27)$$

όπου

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy,$$

$$d_1 = \frac{\ln(S(0)/K) + (r + (1/2)\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} \text{ και } d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

Ας σημειώσουμε εδώ ότι, αν αντί του υπολογισμού της αναμενόμενης τιμής στην 2.26, λύναμε το πρόβλημα συνοριακών τιμών των 2.7, 2.8 και 2.9, αντικαθιστώντας τις παραμέτρους του μοντέλου Black & Scholes, θα καταλήγαμε στο ίδιο αποτέλεσμα.

Συγκεκριμένα, αντικαθιστώντας και απλοποιώντας, καταλήγουμε στη διαφορική εξίσωση

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rS \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV = 0, V = V(S, t), S = S(t), \quad (2.28)$$

με συνοριακή συνθήκη για το ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς

$$V(S(T), T) = (S(T) - K)^+. \quad (2.29)$$

Η διαφορική εξίσωση στην 2.28 ονομάζεται *μερική διαφορική εξίσωση Black & Scholes* για την τιμή ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς. Λύση του παραπάνω θα μας δώσει την 2.27.

Το γεγονός ότι τα αποτελέσματα των δύο τρόπων τιμολόγησης συμπίπτουν ήταν αναμενόμενο, εφόσον και οι δύο τρόποι υπαγορεύονται από τη μη ύπαρξη επιτηδειότητας.

Η αδιάφορη κινδύνου τιμολόγηση αποτελεί, όπως είπαμε, μια ειδική περίπτωση τιμολόγησης παραγώγων, σύμφωνα με την οποία η δυναμική όλων των προϊόντων της αγοράς καθορίζεται από έναν άνευ κινδύνου καταθετικό λογαριασμό β και η τιμολόγηση γίνεται κάτω από εκείνο το μέτρο που καθιστά τους λόγους $S_i(t)/\beta(t)$ martingales. Στην πραγματικότητα, το ρόλο του β μπορεί να παίξει οποιοδήποτε από τα d προϊόντα της αγοράς. Ανάλογα με την επιλογή του προϊόντος αυτού, θα αναζητάμε ένα μέτρο πιθανότητας ως προς το οποίο το προϊόν είναι *numeraire*. Η δυναμική των υπολοίπων κάτω από αυτό το μέτρο πιθανότητας θα υπαγορεύει και την αρχική αξία ενός παραγώγου ως αναμενόμενη τιμή. Η επιλογή ενός κατάλληλου προϊόντος ως *numeraire* μπορεί να απλοποιήσει δραματικά την τιμολόγηση ενός παραγώγου, όπως θα δούμε παρακάτω.

Έστω ότι διαλέγουμε το n -οστό προϊόν, S_n , $n \in \{1, \dots, d\}$, ως *numeraire*. Αυτή τη φορά θα θεωρήσουμε ως μέτρο αφετηρίας το αδιάφορο κινδύνου μέτρο \mathbb{P}_β και όχι το αντικειμενικό μέτρο της αγοράς \mathbb{P}_0 . Ακολουθώντας ανάλογα βήματα με πριν, θα ορίσουμε το νέο μέτρο πιθανότητας \mathbb{P}_{S_n} σε σχέση με το \mathbb{P}_β . Η ανέλιξη $S_n(t)/\beta(t)$ είναι ένα θετικό martingale υπό το \mathbb{P}_β . Διαιρώντας την με την αρχική της αξία $S_n(0)/\beta(0)$, παίρνουμε ένα θετικό martingale με μέση τιμή 1. Οπότε, το μέτρο πιθανότητας \mathbb{P}_{S_n} που αντιστοιχεί στο να επιλέξουμε το S_n ως *numeraire*, μπορεί να οριστεί μέσω της

$$\left(\frac{d\mathbb{P}_{S_n}}{d\mathbb{P}_\beta} \right)_t = \frac{S_n(t)}{\beta(t)} \Big/ \frac{S_n(0)}{\beta(0)}.$$

Επομένως, η αναμενόμενη τιμή μιας \mathcal{F}_t -μετρήσιμης τυχαίας μεταβλητής X , υπό το καινούριο μέτρο \mathbb{P}_{S_n} , θα είναι

$$\mathbb{E}_{S_n}[X] = \mathbb{E}_\beta \left[X \left(\frac{d\mathbb{P}_{S_n}}{d\mathbb{P}_\beta} \right)_t \right] = \mathbb{E}_\beta \left[X \frac{S_n(t)\beta(0)}{\beta(t)S_n(0)} \right] = \mathbb{E}_\beta \left[X \frac{S_n(t)}{\beta(t)S_n(0)} \right]. \quad (2.30)$$

Συνεπώς, από την 2.17, η αρχική αξία υπολογισμένη υπό το \mathbb{P}_{S_n} θα είναι

$$V(0) = \mathbb{E}_\beta \left[\frac{V(T)}{\beta(T)} \right] = S_n(0) \mathbb{E}_{S_n} \left[\frac{V(T)}{S_n(T)} \right]. \quad (2.31)$$

Ανάλογα, $\forall 0 < t < T$,

$$V(t) = S_n(t) \mathbb{E}_{S_n} \left[\frac{V(T)}{S_n(T)} \mid \mathcal{F}_t \right]. \quad (2.32)$$

Άρα, όταν τιμολογούμε υπό το \mathbb{P}_{S_n} , χρησιμοποιούμε ως προεξοφλητικό παράγοντα τον $(S_n(t))^{-1}$.

Η χρησιμότητα των παραπάνω γίνεται εμφανής με τα ακόλουθα παραδείγματα.

Έστω ένα δικαίωμα επί δύο προϊόντων, S_1, S_2 , με απόδοση $(S_1(T) - S_2(T))^+$ στην ωρίμανση T . Δηλαδή, είναι ένα παράγωγο που δίνει στον κάτοχό του το δικαίωμα να ανταλλάξει το προϊόν S_2 για το προϊόν S_1 στην ωρίμανση. Αν τιμολογήσουμε το δικαίωμα αυτό ως προς το μέτρο \mathbb{P}_β , τότε η αρχική του αξία θα είναι

$$V(0) = e^{-rT} \mathbb{E}_\beta [(S_1(T) - S_2(T))^+].$$

Εναλλακτικά, μπορούμε να το τιμολογήσουμε ως προς το μέτρο που καθιστά το προϊόν S_2 numeraire. Από την 2.31, η τιμή του θα είναι

$$V(0) = S_2(0) \mathbb{E}_{S_2} \left[\frac{1}{S_2(T)} (S_1(T) - S_2(T))^+ \right] = S_2(0) \mathbb{E}_{S_2} \left[\left(\frac{S_1(T)}{S_2(T)} - 1 \right)^+ \right].$$

Η τελευταία εξίσωση φανερώνει ότι, αν επιλέξουμε το S_2 ως numeraire, τότε ανάγουμε τη σύνθετη τιμολόγηση του δικαιώματος ανταλλαγής, στην τιμολόγηση ενός πιο απλού δικαιώματος που θυμίζει ένα ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς επί του λόγου S_1/S_2 και με παραδοτέα τιμή 1. Εύκολα βλέπει κανείς ότι η S_2 είναι numeraire ως προς το μέτρο \mathbb{P}_2 με

$$\left. \frac{d\mathbb{P}_2}{d\mathbb{P}_\beta} \right|_{\mathcal{F}_t} = e^{\int_0^t \sigma_2(s) dW^\beta(s) - \frac{1}{2} \int_0^t |\sigma_2(s)|^2 ds},$$

ενώ

$$\frac{S_1(t)}{S_2(t)} = \frac{S_1(0)}{S_2(0)} e^{\int_0^t (\sigma_1 - \sigma_2)(s) dW^\beta(s) - \frac{1}{2} \int_0^t |\sigma_1 - \sigma_2|^2(s) ds}.$$

Ας θεωρήσουμε στη συνέχεια ένα δικαίωμα αγοράς επί ενός προϊόντος σε ξένο νόμισμα, S_1 , με παραδοτέα τιμή K , η απόδοση του οποίου αναμένεται να μετατραπεί σε μονάδες εσωτερικού νομίσματος κατά την ωρίμανση T . Θα συμβολίσουμε με S_2 την ισοτιμία του εσωτερικού νομίσματος ανά μονάδες του ξένου. Επομένως, η απόδοση του δικαιώματος σε μονάδες εσωτερικού νομίσματος θα είναι $S_2(T)(S_1(T) - K)^+$. Υποθέτουμε επιπλέον ότι σε κάθε μονάδα του ξένου νομίσματος αντιστοιχεί ένα αδιάφορο κινδύνου επιτόκιο r_ξ . Η τιμή του δικαιώματος υπό το \mathbb{P}_β ισούται με

$$V(0) = e^{-rT} \mathbb{E}_\beta [S_2(T)(S_1(T) - K)^+].$$

Ας δούμε όμως πως απλοποιείται η τελευταία παράσταση για την αρχική αξία, αν διαλέξουμε ως numeraire το $\bar{S}_2(t) \equiv e^{r_\xi t} S_2(t)$. Τότε,

$$\begin{aligned} V(0) &= \bar{S}_2(0) \mathbb{E}_{\bar{S}_2} \left[\frac{1}{e^{r_\xi T} S_2(T)} S_2(T)(S_1(T) - K)^+ \right] \\ &= e^{-r_\xi T} S_2(0) \mathbb{E}_{\bar{S}_2} [(S_1(T) - K)^+]. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι η τιμή της ισοτιμίας στο χρόνο T , $S_2(T)$, απουσιάζει από την τελευταία ισότητα. Επομένως, για τον υπολογισμό της τιμής μάς αρκεί η τιμή $S_2(0)$, που είναι γνωστή στο χρόνο 0.

2.2 Εκτιμήτριες Monte Carlo

Προτού ξεκινήσουμε με την περιγραφή των μεθόδων εκτίμησης Monte Carlo, παραθέτουμε τα ακόλουθα δύο θεωρήματα της θεωρίας πιθανοτήτων:

Ισχυρός νόμος των μεγάλων αριθμών Αν X_1, X_2, \dots είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, $\mathbb{E}[X_i] = \mu$, $i = 1, 2, \dots$, τότε

$$\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu \quad \text{σχεδόν σίγουρα.}$$

Κεντρικό οριακό θεώρημα Αν X_1, X_2, \dots είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, $\mathbb{E}[X_i] = \mu$, $\text{Var} X_i = \sigma^2 < \infty$, $i = 1, 2, \dots$, τότε

$$\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N(0, 1) \quad \text{κατά κατανομή.}$$

Ισοδύναμα, η παραπάνω γράφεται ως

$$\sqrt{n} \times \text{error}_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N(0, \sigma^2), \quad \text{κατά κατανομή,}$$

όπου

$$\text{error}_n = \left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \mu \right).$$

Οι μέθοδοι Monte Carlo βασίζονται στην αναλογία που υπάρχει μεταξύ «όγκου» και «πιθανότητας». Η πιθανότητα ενός ενδεχομένου ορίζεται ως το μέτρο ή ο όγκος του ενδεχομένου διά τον όγκο όλων των πιθανών ενδεχομένων που αντιστοιχούν στο δειγματικό χώρο που κανονικοποιείται στη μονάδα. Οι εκτιμήτριες Monte Carlo χρησιμοποιούν αυτή την ισοδυναμία αντίστροφα. Υπολογίζουν δηλαδή τον όγκο ενός συνόλου αναπαριστώντας τον όγκο σαν μια πιθανότητα. Αυτό το επιτυγχάνουν λαμβάνοντας τυχαία δείγματα από το χώρο όλων των πιθανών ενδεχομένων και υπολογίζοντας στη συνέχεια το ποσοστό των δειγμάτων που ανήκουν στο επιθυμητό σύνολο. Το ποσοστό αυτό είναι η εκτίμηση για τον όγκο του συνόλου. Ο νόμος των μεγάλων αριθμών εξασφαλίζει ότι καθώς ο αριθμός των δειγμάτων αυξάνει, η εκτίμηση αυτή συγκλίνει στον πραγματικό όγκο του συνόλου. Επιπροσθέτως, το κεντρικό οριακό θεώρημα παρέχει πληροφορία για το μέγεθος του σφάλματος της εκτιμήτριας, όταν λάβουμε πεπερασμένο πλήθος δειγματικών σημείων.

2.2.1 Παραδείγματα

Ας ξεκινήσουμε με ένα απλό παράδειγμα προς αποσαφήνιση των παραπάνω.

Έστω ότι θέλουμε να εκτιμήσουμε την τιμή του ολοκλήρωματος

$$\alpha = \int_0^1 f(x) dx, \quad (2.33)$$

όπου f μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο $[0, 1]$. Εκτίμηση του παραπάνω ολοκληρώματος ισοδυναμεί με εκτίμηση της μέσης τιμής της τυχαίας μεταβλητής $f(U)$, όπου U μια ομοιόμορφα κατανομημένη τυχαία μεταβλητή στο διάστημα $[0, 1]$. Δηλαδή,

$$\alpha = \mathbb{E}[f(U)], U \sim U[0, 1].$$

Επομένως, αν παραγάγουμε n ανεξάρτητα, ομοιόμορφα κατανομημένα στο διάστημα $[0, 1]$ σημεία U_1, U_2, \dots, U_n και υπολογίσουμε την

$$\hat{\alpha}_n = \frac{\sum_{i=1}^n f(U_i)}{n}, \quad (2.34)$$

τότε, από τον ισχυρό νόμο των μεγάλων αριθμών, $\hat{\alpha}_n \rightarrow \alpha$, καθώς $n \rightarrow \infty$, σχεδόν σίγουρα. Η εκτιμήτρια $\hat{\alpha}_n$ στην 2.34 είναι η *Monte Carlo εκτιμήτρια* του ολοκληρώματος α .

Αν επιπλέον υποθέσουμε ότι η f είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη στο $[0, 1]$, τότε μπορούμε να εκτιμήσουμε το σφάλμα $e_n = \hat{\alpha}_n - \alpha$ της εκτιμήτριας ως εξής:

Έστω

$$\sigma_f = \sqrt{\int_0^1 (f(x) - \alpha)^2 dx}$$

η τυπική απόκλιση της $f(U)$. Τότε, από το κεντρικό οριακό θεώρημα, το σφάλμα e_n της εκτιμήτριας Monte Carlo ακολουθεί ασυμπτωτικά κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και τυπική απόκλιση $\frac{\sigma_f}{\sqrt{n}}$, καθώς $n \rightarrow \infty$.

Εφόσον η τιμή α είναι άγνωστη, θα χρειαστεί να εκτιμήσουμε την τυπική απόκλιση παραπάνω χρησιμοποιώντας τη δειγματική τυπική απόκλιση

$$s_f = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (f(U_i) - \hat{\alpha}_n)^2}.$$

Επομένως, από τις τιμές $f(U_1), \dots, f(U_n)$ παίρνουμε όχι μόνο μια εκτιμήτρια για το ολοκλήρωμα α , αλλά και ένα μέτρο για το σφάλμα της εκτιμήτριας.

Η μορφή της τυπικής απόκλισης του σφάλματος, $\frac{\sigma_f}{\sqrt{n}}$, είναι ένα κεντρικό στοιχείο της εκτιμήτριας Monte Carlo. Για να μειώσουμε για παράδειγμα την τυπική απόκλιση στο μισό, θα χρειαστεί να τετραπλασιάσουμε τα δειγματικά σημεία, εφόσον έχουμε « \sqrt{n} - σύγκλιση». Η $O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ σύγκλιση της μεθόδου Monte Carlo δεν είναι και τόσο γρήγορη σε σύγκριση με άλλες μεθόδους όταν πρόκειται για ολοκληρώματα στον \mathbb{R} . Ωστόσο, η $O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ σύγκλιση ισχύει και για ολοκληρώματα σε περισσότερες διαστάσεις. Για το λόγο αυτό, οι εκτιμήτριες Monte Carlo γίνονται ελκυστικές όταν έχουμε να εκτιμήσουμε ολοκληρώματα σε πολλές διαστάσεις.

Εφαρμογή:

Θα εκτιμήσουμε με Monte Carlo το ολοκλήρωμα

$$a = \int_{-\infty}^{\infty} e^x e^{-x^2/2} dx,$$

το οποίο ισοδύναμα γράφεται ως

$$a = \sqrt{2\pi} \mathbb{E}[e^X], \quad X \sim N(0, 1).$$

Η ακριβής τιμή του ολοκληρώματος είναι $a = \sqrt{2\pi} e \approx 4.1327$. Η εκτιμήτρια Monte Carlo του ολοκληρώματος είναι η

$$\hat{a} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{C}_i,$$

όπου $\hat{C}_i = \sqrt{2\pi} e^{X_i}$, όπου $X_i \sim N(0, 1)$, $i = 1, \dots, n$. Εφόσον γνωρίζουμε την ακριβή τιμή του ολοκληρώματος στην περίπτωση αυτή, μπορούμε να υπολογίσουμε και τη διασπορά της \hat{C}_i , $i = 1, \dots, n$, που είναι

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \text{Var}[\sqrt{2\pi} e^X] \\ &= \mathbb{E}[(\sqrt{2\pi} e^X)^2] - (\mathbb{E}[\sqrt{2\pi} e^X])^2 \\ &= 2\pi \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2x} e^{-x^2/2} dx - a^2 \right) \\ &= 2\pi(e^2 - e) \\ &\approx 29.3473 \end{aligned}$$

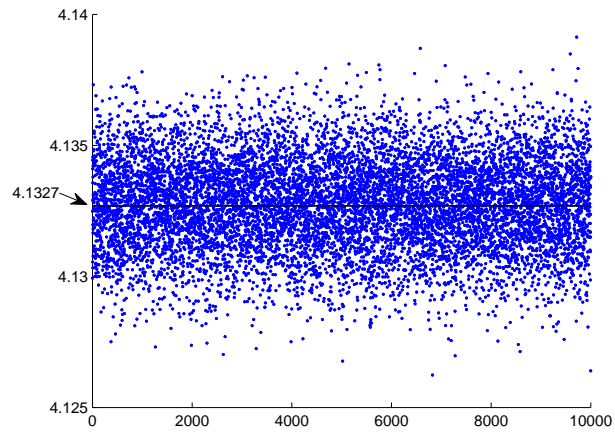
Επομένως, περιμένουμε ότι

$$\sqrt{n}(\hat{a} - a) \xrightarrow{d} N(0, 29.3473), \quad \text{καθώς } n \rightarrow \infty.$$

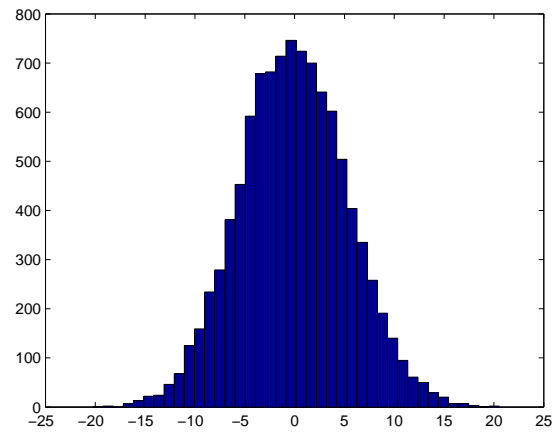
Στο Σχήμα 2.1 φαίνονται 10.000 εκτιμήσεις του ολοκληρώματος με ακρίβεια $n = 10.000.000$ σημείων ανά εκτίμηση. Η διασπορά των 10.000 τιμών ήταν 2.8951×10^{-6} , και η μέση τους τιμή 4.1328. Κατά την προσομοίωση, κατά μέσο όρο, χρειάστηκαν 2 δευτερόλεπτα για μία εκτίμηση του ολοκληρώματος με $n = 10.000.000$ επαναλήψεις. Το Σχήμα 2.2 παριστά το ιστόγραμμα του $\sqrt{n} \times \text{error}$, όπου $\text{error} = (\hat{a} - a)$, που αντιστοιχεί στις 10.000 τιμές της εκτίμησης του a . Η διασπορά των 10.000 σημείων $\sqrt{n} \times \text{error}$ ήταν 28.9508.

Η σύνδεση των εκτιμητριών Monte Carlo με τη Χρηματοοικονομία είναι πλέον εμφανής, εφόσον όπως είδαμε στην προηγούμενη ενότητα, η τιμή ενός παραγώγου μπορεί να αναπαρασταθεί σαν μια μέση τιμή. Το επόμενο παράδειγμα είναι μια εφαρμογή της μεθόδου στην τιμολόγηση ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς, υπό τις υποθέσεις του υποδείγματος των Black & Scholes.

Έστω $S(t)$ η τιμή μιας μετοχής στο χρόνο t . Έστω ένα ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς επί της μετοχής με παραδοτέα τιμή K και ωρίμανση T . Η απόδοση του δικαιώματος



Σχήμα 2.1: Γραφική παράσταση 10.000 εκτιμήσεων του ολοκληρώματος a , με διασπορά 2.8951×10^{-6} .



Σχήμα 2.2: Ιστόγραμμα 10.000 εκτιμήσεων του $\sqrt{n} \times error$. Η διασπορά ήταν 28.9508.

στην ωρίμανση είναι $V_T = (S(T) - K)^+$. Αν υποθέσουμε ότι η δυναμική της μετοχής υπαγορεύεται από τη διαφορική εξίσωση των Black & Scholes, τότε από την προηγούμενη ενότητα γνωρίζουμε ότι η τιμή ή αρχική αξία του παραγώγου αυτού μπορεί να υπολογιστεί ακριβώς. Άρα στη συγκεκριμένη περίπτωση δε χρειάζεται να εφαρμόσουμε τεχνικές εκτίμησης. Ας δούμε όμως πως εκτιμάται αυτή η τιμή με χρήση Monte Carlo.

Η δυναμική της μετοχής περιγράφεται από τη $\frac{dS(t)}{S(t)} = rdt + \sigma dW(t)$, όπου W μονοδιάστατη τυπική κίνηση Brown. Επομένως, $S(t) = S(0) e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma\sqrt{t}Z}$, $t \in [0, T]$, $Z \sim N(0, 1)$. Η αρχική τιμή του ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς δίνεται από $\mathbb{E}[e^{-rT} (S(T) - K)^+]$. Τα βήματα που ακολουθούμε για να πάρουμε την εκτιμήτρια Monte Carlo για την τιμή είναι τα εξής:

Παράγουμε n ανεξάρτητες, τυπικές κανονικές τυχαίες τιμές Z_i , $i = 1, \dots, n$. Από αυτές παράγουμε n τιμές για την τελική τιμή της μετοχής, $S_i(T)$, μέσω της ανάθεσης $S_i(T) = S(0) e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}Z_i}$. Στη συνέχεια λαμβάνουμε n τυχαίες τιμές για την τιμή του δικαιώματος, C_i , μέσω της $C_i = e^{-rT} (S_i(T) - K)^+$. Τέλος, η εκτιμήτρια Monte Carlo για την τιμή είναι ο μέσος όρος των C_i , θέτουμε δηλαδή

$$\hat{C}_n = \frac{C_1 + \dots + C_n}{n}.$$

Συνοπτικά, κάνουμε την ακόλουθη σειρά αναθέσεων:

$$Z_i \rightarrow S_i(T) \rightarrow C_i \rightarrow \hat{C}_n.$$

Ας σημειώσουμε ότι η εκτιμήτρια \hat{C}_n είναι αμερόληπτη, δηλαδή η μέση τιμή της ισούται με την πραγματική τιμή του δικαιώματος, C :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\hat{C}_n] &= \frac{\mathbb{E}[C_1] + \dots + \mathbb{E}[C_n]}{n}, \quad C_1, \dots, C_n \text{ ανεξάρτητες και ισόνομες} \\ &= \frac{n\mathbb{E}[C_1]}{n} \\ &= \mathbb{E}\left[e^{-rT} (S_1(T) - K)^+\right], \quad S_1(T) \sim S(T) \\ &= \mathbb{E}\left[e^{-rT} (S(T) - K)^+\right] \\ &= C. \end{aligned}$$

Επίσης, η \hat{C}_n είναι αυστηρά συνεπής, διότι $\hat{C}_n \rightarrow C$, καθώς $n \rightarrow \infty$, σχεδόν σίγουρα.

Επιπροσθέτως, έχουμε διάστημα εμπιστοσύνης για τη \hat{C}_n :

Αν

$$S_C = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (C_i - \hat{C}_n)^2}$$

η δειγματική τυπική απόκλιση των C_1, \dots, C_n , και z_δ το $(1 - \delta)$ -ποσοστημόριο της τυπικής κανονικής κατανομής, τότε

$$\begin{aligned} 1 - \delta &= \mathbb{P}(Z \leq z_\delta) \\ &= \mathbb{P}(|Z| \leq z_{\delta/2}) \\ &= \mathbb{P}\left(\sqrt{n} \left| \frac{\hat{C}_n - C}{S_C} \right| \leq z_{\delta/2}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(C \in \left[\hat{C}_n - z_{\delta/2} \frac{S_C}{\sqrt{n}}, \hat{C}_n + z_{\delta/2} \frac{S_C}{\sqrt{n}}\right]\right), \end{aligned}$$

καθώς $n \rightarrow \infty$.

Εφαρμογή:

Ας δούμε την τιμολόγηση ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς με συγκεκριμένες παραμέτρους. Θεωρούμε το δικαίωμα επί μίας μετοχής S , με τιμή $S(t)$ σε κάθε χρονική στιγμή, η δυναμική της οποίας καθορίζεται από το μοντέλο Black & Scholes. Υποθέτουμε ότι η ωρίμανση του δικαιώματος είναι $T = 1$ έτος, η αρχική αξία της μετοχής είναι $S_0 = \text{€}40$, η παραδοτέα τιμή είναι $K = \text{€}40$, το ετήσιο επιτόκιο είναι $0,04$, και η μεταβλητότητα είναι $\sigma = 0,2$ ανά τετραγωνική ρίζα έτους. Η αρχική αξία του δικαιώματος υπολογίζεται από την 2.27. Αντικαθιστώντας τις παραμέτρους, βρίσκουμε ότι

$$V_{\text{ΕΔΑ}}(0) = \text{€}3,97$$

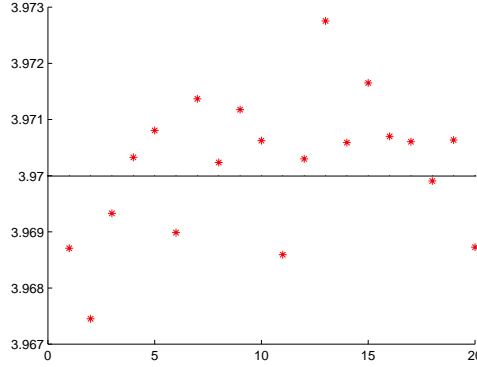
πράγμα που σημαίνει ότι πρέπει να καταβάλουμε το ποσό αυτό σήμερα ούτως ώστε μετά από ένα έτος να έχουμε το δικαίωμα να αγοράσουμε τη μετοχή στην τιμή των $\text{€}35$.

Με ακρίβεια $n = 20.000.000$ επαναλήψεων, η εκτιμήτρια Monte Carlo της αρχικής αξίας του ΕΔΑ, έδωσε τις 20 τιμές που φαίνονται στο Σχήμα 2.3. Ο μέσος όρος των 20 τιμών είναι $\text{€}3,9702$. Κατά μέσο όρο χρειάστηκαν περίπου 5 δευτερόλεπτα για κάθε τιμολόγηση.

Επίσης, για μία προσομοίωση Monte Carlo, με $n = 20.000.000$ μονοπάτια, βρίσκουμε ένα 99% διάστημα εμπιστοσύνης για την τιμή του ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς. Με πιθανότητα 0.99, βρήκαμε ότι η πραγματική αρχική αξία του δικαιώματος θα βρισκείται στο διάστημα:

$$\begin{aligned} V_{\text{ΕΔΑ}}(0) &\in \left[\hat{C}_n \pm z_{0.01/2} \frac{S_C}{\sqrt{n}}\right] \\ &= \left[3.9681 \pm 2.33 \frac{5.7661}{20.000.000}\right] \\ &= [3.9651, 3.9711] \end{aligned}$$

Εφαρμογή:



Σχήμα 2.3: Γραφική παράσταση 20 εκτιμήσεων για την αρχική αξία του ΕΔΑ

Θα τιμολογήσουμε τώρα ένα παράγωγο του οποίου η απόδοση στην ωρίμανση εξαρτάται από το πώς εξελίχθηκε η τροχιά του μονοπατιού της μετοχής μέχρι την ωρίμανση, και όχι μόνο από την τελική τιμή της μετοχής. Έστω ένα δικαίωμα αγοράς επί μιας μετοχής S με ωρίμανση $T = 1$ έτος, παραδοτέα τιμή $K = \text{€}40$, και κάτω και εκτός φράγμα $M = \text{€}37$. Υποθέτουμε ότι η δυναμική της μετοχής ακολουθεί το μοντέλο των Black & Scholes, με αρχική τιμή $S_0 = \text{€}40$. Έστω επίσης $r = 0,04$ το ετήσιο επιτόκιο και $\sigma = 0,2$ η μεταβλητότητα ανά τετραγωνικό έτος. Η απόδοση του δικαιώματος στην ωρίμανση είναι

$$V_{barr}(T) = I_{\{S(t) > 37; 0 \leq t \leq T\}}(S(T) - 40)^+.$$

Άρα, η αρχική του αξία δίνεται από

$$V_{barr}(0) = e^{-rT} \mathbb{E}[V_{barr}(T)]. \quad (2.35)$$

Πριν κάνουμε προσομοίωση Monte Carlo για την εκτίμηση της αρχικής αξίας $V_{barr}(0)$, ας υπολογίσουμε τη θεωρητική τιμή του δικαιώματος αναλυτικά. Περιμένουμε η αξία του δικαιώματος αυτού να είναι μικρότερη του αντίστοιχου δικαιώματος χωρίς φράγμα που τιμολογήσαμε στο προηγούμενο παράδειγμα.

Για την εύρεση της θεωρητικής τιμής του δικαιώματος με φράγμα, θα χρησιμοποιήσουμε το αποτέλεσμα ότι, αν $C(t, S(t))$ η αξία του ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς τη στιγμή t , με τις ίδιες παραμέτρους, και M το φράγμα του δικαιώματος με κάτω και εκτός φράγμα, τότε, η αξία του δικαιώματος αγοράς με κάτω και εκτός φράγμα, σε κάθε χρονική στιγμή, δίνεται (βλ. [5]) από την

$$C_{do}(t, S(t)) = C(t, S(t)) - \left(\frac{S(t)}{M}\right)^{1-\frac{2r}{\sigma^2}} C\left(t, \frac{M^2}{S(t)}\right).$$

Επομένως, η θεωρητική αρχική αξία του θα είναι

$$C_{do}(0) = C_0 - \left(\frac{S_0}{M}\right)^{1-\frac{2r}{\sigma^2}} C_0\left(0, \frac{M^2}{S_0}\right). \quad (2.36)$$

Επομένως, αρκεί να υπολογίσουμε την αρχική αξία του δικαιώματος αγοράς του προηγούμενου παραδείγματος, καθώς και την αρχική αξία του ίδιου δικαιώματος αγοράς, με τη μόνη διαφορά ότι $S'_0 = M^2/S_0 = \text{€}34,225$. Με χρήση της 2.27 ξανά, υπολογίζουμε την τιμή αρχική αξία του ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς με S'_0 , και αντικαθιστώντας στη συνέχεια το αποτέλεσμα στην 2.36, βρίσκουμε ότι

$$C_{do}(0) = \text{€}2,8034$$

Αν $D_N = \{\frac{j}{N}T : j = 1, 2, \dots, N\}$ τότε η Monte Carlo εκτιμήτρια για την αρχική αξία του παραπάνω παραγώγου είναι η

$$\hat{C}_{do} = \sum_{i=1}^n \frac{\hat{C}_i}{n},$$

όπου

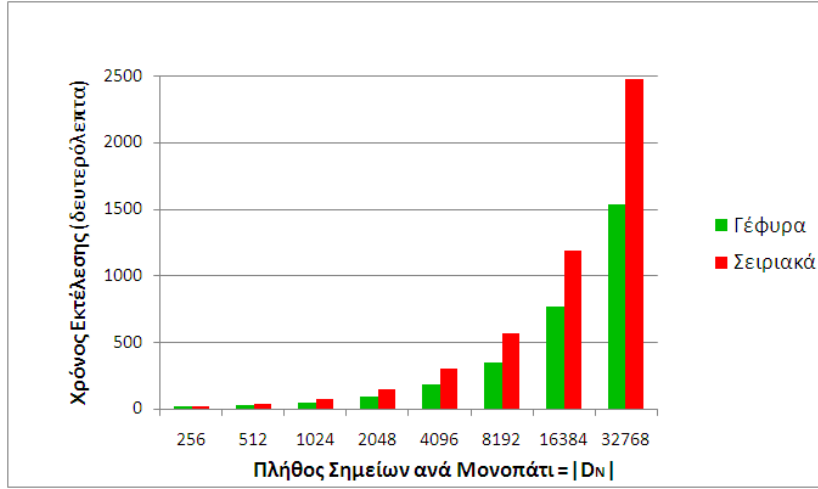
$$\hat{C}_i = e^{-rT} \hat{I}_i(\hat{S}_i(T) - 40)^+, \quad i = 1, \dots, n,$$

όπου $\hat{S}_i(\cdot)$ είναι οι τιμές της μετοχής στο i -οστό μονοπάτι της προσομοίωσης και

$$\hat{I}_i = I_{\{\hat{S}_i(t) > 37, \forall t \in D_N\}}.$$

Στο παράδειγμα αυτό περιμένουμε ότι η προσομοίωση των μονοπατιών με γέφυρα Brown θα είναι πιο αποδοτική από ό,τι η προσομοίωση με διαδοχική παραγωγή των τιμών του μονοπατιού της μετοχής, αφού η παραγωγή μονοπατιών με τη μέθοδο της γέφυρας Brown κατασκευάζει γρήγορα την αδρή εικόνα του μονοπατιού και μπορεί σύντομα να ανιχνεύσει μονοπάτια που καταλήγουν κάτω από την παραδοτέα τιμή K ή που πέφτουν κάτω από το φράγμα. Τιμολογήσαμε το παράγωγο αυτό προσομοιώνοντας το μονοπάτι της μετοχής τόσο διαδοχικά όσο και με γέφυρα Brown. Ακολουθούν ένας πίνακας και το Σχήμα 2.4 όπου συγκρίνονται οι χρόνοι των δύο μεθόδων προσομοίωσης του μονοπατιού, και όπου φαίνεται ξεκάθαρα ότι η γέφυρα Brown είναι προτιμητέα για την προσομοίωση του μονοπατιού όταν έχουμε το συγκεκριμένο δικαίωμα με φράγμα. Βέβαια, το πόσο πιο γρήγορη είναι η μέθοδος της γέφυρας από τη σειριακή, εξαρτάται από το πόσο κοντά είναι οι τιμές του φράγματος και η αρχική αξία της μετοχής, καθώς επίσης και το πόσο πιθανό είναι η τιμή της μετοχής στην ωρίμανση να πέσει κάτω από την παραδοτέα τιμή, πράγμα που στην περίπτωση δικαιωμάτων αγοράς, μηδενίζει την αξία του μονοπατιού εξαρχής, με αποτέλεσμα να μη χρειάζεται η παραγωγή περαιτέρω τιμών πέρα από την τελική στα μονοπάτια αυτά.

1.000.000 μονοπάτια	k	$N = 2^k$	$T_{\text{Γέφυρα}}(\text{sec})$	$T_{\text{Σειριακό}}(\text{sec})$
	8	256	15	19
	9	512	27	37
	10	1.024	49	72
	11	2.048	93	143
	12	4.096	181	303
	13	8.192	345	568
	14	16.384	762	1.182
	15	32.768	1.531	2.476



Σχήμα 2.4: Γράφημα σύγκρισης χρόνων εκτέλεσης κατά την τιμολόγηση ενός δικαιώματος με φράγμα, με γέφυρα και σειριακά

Εφαρμογή:

Μέχρι τώρα τιμολογήσαμε παράγωγα, των οποίων η αρχική αξία μπορεί να υπολογιστεί και αναλυτικά. Ένα παράδειγμα παραγώγου όπου η τιμή δεν υπολογίζεται ακριβώς και απαιτεί προσομοίωση είναι ένα δικαίωμα με δύο φράγματα, ένα άνω & εκτός και ένα κάτω & εκτός. Κάνουμε τις ίδιες υποθέσεις για τις παραμέτρους του παραγώγου όπως και στο τελευταίο παράδειγμα, με τη μόνη προσθήκη ενός άνω & εκτός φράγματος στα €47. Η αξία του δικαιώματος με τα δύο φράγματα στην ωρίμανση θα είναι

$$V_{2barr}(T) = I_{\{S(t) > 37 \text{ and } S(t) < 47, 0 \leq t \leq T\}} (S(T) - 40)^+,$$

και αντίστοιχα στο χρόνο 0,

$$V_{2barr}(0) = e^{-rT} \mathbb{E}[V_{2barr}(T)].$$

Η Monte Carlo εκτιμήτρια για την παραπάνω αρχική αξία δίνεται από

$$\hat{V}_{2barr} = \sum_{i=1}^n \frac{\hat{C}_i}{n},$$

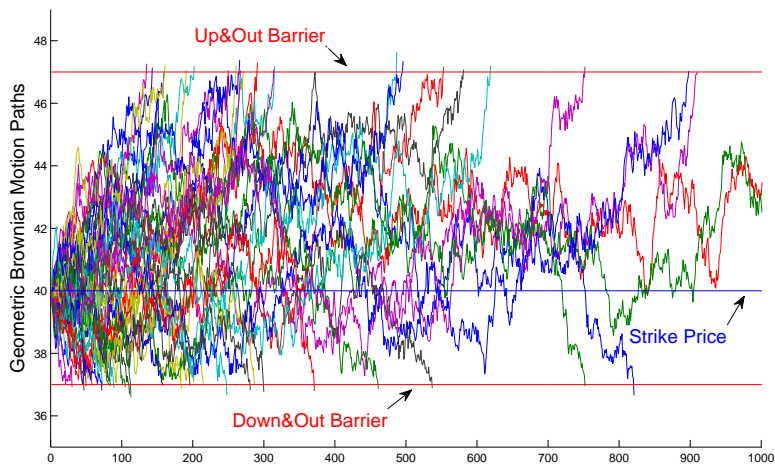
όπου

$$\hat{C}_i = e^{-rT} \hat{I}_i (\hat{S}_i(T) - 40)^+, \quad i = 1, \dots, n,$$

με

$$\hat{I}_i = I_{\{\hat{S}_i(t) > 37 \text{ and } \hat{S}_i(t) < 47 \forall t \in D_N\}}.$$

Δηλαδή, διακριτοποιούμε το μονοπάτι, και ελέγχουμε μόνον σε αυτές τις χρονικές στιγμές αν το μονοπάτι ξεπέρασε το άνω φράγμα ή έπεσε κάτω από το κάτω



Σχήμα 2.5: Γραφική παράσταση της έκβασης 50 μονοπατιών της μετοχής κατά την τιμολόγηση του δικαιώματος αγοράς με δύο φράγματα. Μόνον δύο μονοπάτια τερμάτισαν, και κατέληξαν ταυτόχρονα σε τελική τιμή υψηλότερη της παραδοτέας τιμής

φράγμα. Η προσομοίωση του μονοπατιού της μετοχής έγινε με γέφυρα Brown. Η τιμολόγηση έδωσε ότι η αρχική αξία του δικαιώματος με τα δύο φράγματα είναι προσεγγιστικά ίση με

$$V_{2barr}(0) \approx \text{€}0.0823$$

Έγινε με ακρίβεια 2048 χρονικών σημείων σε κάθε μονοπάτι, και για 100.000 μονοπάτια. Από τα 100.000 μονοπάτια, 3.186 τερμάτισαν ως την ωρίμανση, 12.894 βγήκαν από το πάνω φράγμα, 13.775 από το κάτω, ενώ 70.145 τερμάτισαν αμέσως μετά τον υπολογισμό της τελικής τιμής της μετοχής, εφόσον αυτή βγήκε εκτός του εύρους των δύο φραγμάτων ή βρέθηκε κάτω από την παραδοτέα τιμή. Χρειάστηκαν περίπου 434 δευτερόλεπτα.

Στο Σχήμα 2.5 αναπαριστώνται 50 μονοπάτια της μετοχής κατά την εφαρμογή μίας τιμολόγησης του δικαιώματος με δύο φράγματα, που έχουν παραχθεί σειριακά. Όπως φαίνεται και στο Σχήμα, από τα 50 μονοπάτια, 2 κατάφεραν να φτάσουν ως την ωρίμανση του συμβολαίου, και επίσης να τερματίσουν πάνω από την παραδοτέα τιμή. Τα υπόλοιπα 48 διέσχισαν είτε το πάνω είτε το κάτω φράγμα του συμβολαίου, κάποια χρονική στιγμή πριν την ωρίμανση.

Όπως ήταν αναμενόμενο, για τις τιμές των τριών δικαιωμάτων που είδαμε ισχύει

$$V_{\text{EDA}}(0) > V_{barr}(0) > V_{2barr}(0).$$

Παράδειγμα:

Ας δούμε τώρα πώς προκύπτει η Monte Carlo εκτιμήτρια για την αρχική αξία ενός δικαιώματος, όταν η απόδοσή του εξαρτάται από ένα διακριτό πλήθος τιμών της μετοχής πριν την ωρίμανση. Για παράδειγμα, ας τιμολογήσουμε ένα ασιατικό δικαίωμα αγοράς επί του μέσου όρου των τιμών μιας μετοχής σε m χρονικές στιγμές $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = T$. Όπως έχουμε δει, η απόδοση του δικαιώματος αυτού είναι

$$(\bar{S} - K)^+, \quad \text{όπου} \quad \bar{S} = \frac{\sum_{j=1}^m S(t_j)}{m}.$$

Υποθέτουμε επίσης, όπως και στα προηγούμενα παραδείγματα, ότι η δυναμική της μετοχής καθορίζεται από την

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = rdt + \sigma dW(t),$$

δηλαδή,

$$S(t) = S(0) e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W(t)},$$

$t \in [0, T]$, όπου W μονοδιάστατη τυπική κίνηση Brown.

Η τιμολόγηση δεν μπορεί να γίνει αναλυτικά. Για να υπολογίσουμε την αρχική αξία του δικαιώματος, $\mathbb{E}[e^{-rT} (\bar{S} - K)^+]$, θα πρέπει να παραγάγουμε δείγματα της \bar{S} . Αυτό γίνεται με προσομοίωση του μονοπατιού $S_{t_1}, S_{t_2}, \dots, S_{t_m}$ και έπειτα με τον υπολογισμό του μέσου όρου κατά μήκος του μονοπατιού. Δεδομένου ενός μονοπατιού, υπολογίζουμε την \bar{S} και έπειτα την $e^{-rT} (\bar{S} - K)^+$.

Για την εκτιμήτρια Monte Carlo θα χρειαστούμε n μέσους όρους \bar{S} , που αντιστοιχούν σε n μονοπάτια. Για κάθε μονοπάτι θα χρειαστεί να υπολογίσουμε m τιμές της μετοχής, για κάθε χρονική στιγμή. Οι τιμές της μετοχής σε κάθε χρονική στιγμή λαμβάνονται διαδοχικά θέτοντας:

$$S_{i,j+1} = S_{i,j} e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(t_{j+1} - t_j) + \sigma \sqrt{t_{j+1} - t_j} Z_{i,j+1}}, \quad j = 0, \dots, m-1,$$

όπου $Z_{i,j+1} \sim N(0, t_{j+1} - t_j)$. Δεδομένου του i -οστού μονοπατιού, $i = 1, \dots, n$ υπολογίζουμε το μέσο όρο \bar{S}_i .

Συνολικά, ο αλγόριθμος είναι ο εξής:

1. για κάθε μονοπάτι $i = 1, \dots, n$, για κάθε τιμή $j = 1, \dots, m$,

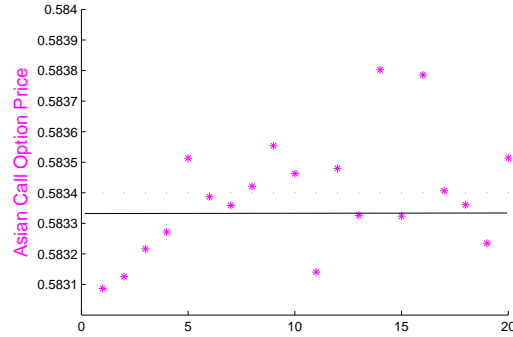
2. παράγουμε τυπικά κανονικά τυχαία σημεία $Z_{i,j}$,

3. θέτουμε $S_i(t_j) = S_i(t_{j-1}) e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(t_j - t_{j-1}) + \sigma \sqrt{t_j - t_{j-1}} Z_{i,j}}$,

$$\bar{S}_i = \frac{S_i(t_1) + \dots + S_i(t_m)}{m},$$

$$C_i = e^{-rT} (\bar{S}_i - K)^+.$$

4. Τέλος, θέτουμε $\hat{C}_n = \frac{C_1 + \dots + C_n}{n}$.



Σχήμα 2.6: Γραφική παράσταση 20 εκτιμήσεων για την τιμή του ασιατικού δικαιώματος αγοράς επί του αριθμητικού μέσου τιμών μιας μετοχής

Η τελευταία είναι η εκτιμήτρια Monte Carlo της τιμής του ασιατικού δικαιώματος αγοράς.

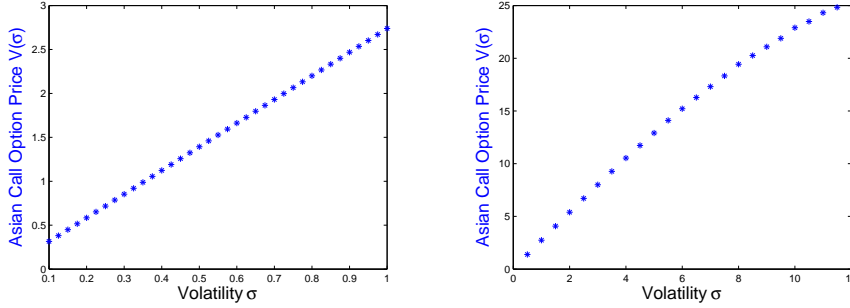
Εφαρμογή:

Ας κάνουμε την τιμολόγηση πιο συγκεκριμένη, θεωρώντας ένα ασιατικό δικαίωμα αγοράς επί του μέσου όρου 30 τιμών μιας μετοχής, S , της οποίας η δυναμική καθορίζεται από το μοντέλο των Black & Scholes. Υποθέτουμε ότι η αρχική τιμή της μετοχής είναι $\text{€}S_0 = 40$, η παραδοτέα τιμή είναι $\text{€}K = 40$, η ωρίμανση είναι $T = 30$ ημέρες ή $T = 30/365$ έτη, το ετήσιο επιτόκιο είναι $r = 0.05$, ενώ η μεταβλητότητα είναι $\sigma = 0.2$ ανά τετραγωνική ρίζα έτους.

20 τιμές που προέκυψαν για την αρχική αξία του ασιατικού δικαιώματος αγοράς με Monte Carlo φαίνονται στο Σχήμα 2.6. Κάθε τιμολόγηση έγινε με ακρίβεια 10.000.000 μονοπατιών, και χρειάστηκε περίπου 100 δευτερόλεπτα. Ο μέσος όρος τους (οριζόντια γραμμή) είναι $\text{€}0.5834$. Επίσης, από μία τιμολόγηση του ασιατικού δικαιώματος, με ακρίβεια επίσης 10.000.000 μονοπατιών, λάβαμε την εκτίμηση $\text{€}0.5834$, καθώς και το 99% διάστημα εμπιστοσύνης για τη θεωρητική αρχική αξία του δικαιώματος

$$\begin{aligned} V_{asian}(0) &\in \left[\hat{C}_{asian}^n(0) \pm z_{0.01/2} \frac{S_C}{\sqrt{n}} \right] \\ &= \left[0.5834 \pm 2.33 \frac{0.8387}{\sqrt{10.000.000}} \right] \\ &= [0.5828, 0.5841]. \end{aligned}$$

Στο Σχήμα 2.7 φαίνεται η συσχέτιση μεταξύ μεταβλητότητας, σ , και αρχικής αξίας του ασιατικού δικαιώματος, για διάφορες τιμές της μεταβλητότητας σ . Κάθε τιμολόγηση έγινε με χρήση 10.000.000 μονοπατιών. Βλέπουμε ότι η τιμή του δικαιώματος τείνει να αυξάνει καθώς η μεταβλητότητα αυξάνει.



Σχήμα 2.7: Γραφική παράσταση των τιμών ενός ασιατικού δικαιώματος αγοράς για τιμές της μεταβλητότητας, σ , που μεταβάλλονται από 0.1 έως 1 με βήμα 0.025 (αριστερά) και από 0.5 έως 11.5 με βήμα 0.5 (δεξιά)

2.2.2 Ρυθμός σύγκλισης του σφάλματος της εκτίμησης

Ας επιστρέψουμε στο αρχικό παράδειγμα της εκτίμησης του ολοκληρώματος

$$\alpha = \int_0^1 f(x) dx.$$

Όπως έχουμε δει, για την Monte Carlo εκτιμήτρια

$$\hat{\alpha}_n = \frac{f(U_1) + \dots + f(U_n)}{n},$$

όπου U_i ανεξάρτητες, ομοιόμορφες στο $[0, 1]$, ισχύει ότι

$$\hat{\alpha}_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha \quad \text{σχεδόν σίγουρα.}$$

Δηλαδή, για το σφάλμα, $e_n = \hat{\alpha}_n - \alpha$, έχουμε

$$e_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{σχεδόν σίγουρα.}$$

Πόσο γρήγορη είναι όμως η σύγκλιση του σφάλματος στο 0; Θα δούμε ότι, αν η f είναι φραγμένη, έτσι ώστε $\mathbb{E}[e^{tf(U)}] = \int_0^1 e^{tf(x)} dx < \infty, \forall t$, τότε

$$\mathbb{P}(|e_n| \geq \epsilon) \leq e^{-I(\epsilon)n},$$

όπου $I(\epsilon)$ μια θετική συνάρτηση του ϵ . Άρα το σφάλμα φθίνει εκθετικά στο 0.

Για μια τυχαία μεταβλητή X , ισχύει ότι

$$\mathbb{P}(X > u) = \int I_{\{X > u\}} d\mathbb{P} \leq e^{-tu} \int e^{tX} d\mathbb{P}, \forall t > 0. \quad (2.37)$$

Απόδειξη:

Αν $X > u$, τότε $\mathbb{P}(X > u) = 1$. Εφόσον $X - u > 0$, έχουμε $e^{t(X-u)} > 1$, έτσι ώστε $e^{-tu} \int e^{tX} d\mathbb{P} \geq 1$, και η ανισότητα ισχύει. Αν $X < u$, τότε $\mathbb{P}(X > u) = 0$, και $e^{t(X-u)} > 0$ πάντα. Οπότε $e^{-tu} \int e^{tX} d\mathbb{P} \geq 0$, και έτσι η ανισότητα ισχύει.

Έστω X_1, \dots, X_n ανεξάρτητες, ισόνομες τυχαίες μεταβλητές. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $\mathbb{E}[X_i] = 0$ (διαφορετικά θεωρούμε τις τ.μ. $X_i - \mathbb{E}[X_i]$). Έστω $t > 0$. Έχουμε

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} > \epsilon \right) &= \mathbb{P}(X_1 + \dots + X_n > n\epsilon) \\ &\leq e^{-tn\epsilon} \int e^{t(X_1 + \dots + X_n)} d\mathbb{P} \\ &= e^{-tn\epsilon} \mathbb{E} \left[e^{t(X_1 + \dots + X_n)} \right] \\ &= e^{-tn\epsilon} \left(\mathbb{E}[e^{tX_1}] \right)^n \\ &= e^{-tn\epsilon + n \log \mathbb{E}[e^{tX_1}]}, \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την 2.37 και το γεγονός ότι οι X_i ανεξάρτητες και ισόνομες. Επομένως,

$$\mathbb{P} \left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} > \epsilon \right) \leq e^{-n \sup_{t>0} (et - \log \mathbb{E}[e^{tX_1}])}.$$

Μένει να δείξουμε ότι η $I(\epsilon) = \sup_{t>0} (et - \log \mathbb{E}[e^{tX}])$ είναι θετική. Από το θεώρημα Taylor έχουμε

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e^{tX}] &= \mathbb{E} \left[1 + tX + t^2 \frac{X^2}{2} + \dots \right] \\ &= 1 + t\mathbb{E}[X] + t^2 \frac{\mathbb{E}[X^2]}{2} + \dots, \end{aligned}$$

άρα,

$$\log \mathbb{E}[e^{tX}] \sim t\mathbb{E}[X] + O(t^2) = O(t^2), \quad \text{καθώς } t \rightarrow \infty.$$

Συνεπώς, $et - \log \mathbb{E}[e^{tX}] > 0$, για κατάλληλα μικρά $t > 0$, και άρα $I(\epsilon) > 0$.

Ας υποθέσουμε για παράδειγμα ότι $X_i \sim N(0, \sigma^2)$. Τότε,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e^{tX_1}] &= \int \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{tx} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx \\ &= e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}} \int \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-t\sigma^2)^2}{2\sigma^2}} dx \\ &= e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}}. \end{aligned}$$

Άρα,

$$\log \mathbb{E}[e^{tX_1}] = \frac{1}{2}t^2\sigma^2,$$

και

$$\begin{aligned} I(\epsilon) &= \sup_{t>0} \left(\epsilon t - \frac{1}{2} t^2 \sigma^2 \right) \\ &= \sup_{t>0} \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon}{\sigma} - \sigma t \right)^2 + \frac{\epsilon^2}{2\sigma^2} \right) \\ &= \frac{\epsilon^2}{2\sigma^2}. \end{aligned}$$

Συνεπώς, σύμφωνα με τα παραπάνω, όταν X_i κανονικές,

$$\mathbb{P} \left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} > \epsilon \right) \leq e^{-n \frac{\epsilon^2}{2\sigma^2}}.$$

2.2.3 Αποτελεσματικότητα των εκτιμητριών της προσομοίωσης

Σε αυτήν την ενότητα θα εστιάσουμε σε τρόπους βελτίωσης των εκτιμητριών Monte Carlo. Παρακάτω περιγράφουμε τα κριτήρια βάσει των οποίων συγκρίνουμε εναλλακτικές μεθόδους. Τα πιο σημαντικά από αυτά είναι ο υπολογιστικός χρόνος, η μεροληψία και η διασπορά.

Μια εκτιμήτρια \hat{C}_n είναι αμερόληπτη όταν $\mathbb{E}[\hat{C}_n] = C$, όπου C η ποσότητα προς εκτίμηση.

Έστω η εκτιμήτρια $\hat{C}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n C_i$ της $\mathbb{E}[C_i]$, όπου C_i ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, με $\mathbb{E}[C_i] = C$, $Var[C_i] = \sigma_C^2 < \infty$. Όπως έχουμε αναφέρει, το κεντρικό οριακό θεώρημα μας εξασφαλίζει ότι, καθώς $n \rightarrow \infty$, η κανονικοποιημένα εκτιμήτρια

$$\frac{\hat{C}_n - C}{\frac{\sigma_C}{\sqrt{n}}} \rightarrow N(0, 1) \quad \text{κατά κατανομή,}$$

δηλαδή,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\frac{\hat{C}_n - C}{\frac{\sigma_C}{\sqrt{n}}} \leq x \right) = \phi(x), \quad \forall x,$$

όπου ϕ η τυπική κανονική συνάρτηση κατανομής.

Μάλιστα, το παραπάνω ισχύει εάν η σ_C αντικατασταθεί από τη δειγματική τυπική απόκλιση s_C . Αυτό διότι $s_C/\sigma_C \rightarrow 1$, καθώς $n \rightarrow \infty$.

Επίσης, για $n \rightarrow \infty$ έχουμε το ασυμπτωτικό $(1 - \delta)$ διάστημα εμπιστοσύνης:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(C \in \left[\hat{C}_n - z_{\delta/2} \frac{s_C}{\sqrt{n}}, \hat{C}_n + z_{\delta/2} \frac{s_C}{\sqrt{n}} \right] \right) = 1 - \delta.$$

Αν τεθεί διαφορετικά, το κεντρικό οριακό θεώρημα μας λέει ότι η κατανομή του σφάλματος, $(\hat{C}_n - C)$, της εκτιμήτριας κατά την προσομοίωση ικανοποιεί

$$\sqrt{n}(\hat{C}_n - C) \xrightarrow{d} N(0, \sigma_C^2).$$

Κατά τη σύγκριση άρα δύο εκτιμητριών της ίδιας ποσότητας, θα προτιμήσουμε εκείνη με τη μικρότερη διασπορά.

Τι γίνεται όμως όταν καλούμαστε να επιλέξουμε μεταξύ δύο εκτιμητριών, όπου η εκτιμήτρια με τη μικρότερη διασπορά απαιτεί περισσότερο υπολογιστικό χρόνο κατά την προσομοίωση; Ας υποθέσουμε ότι και οι δύο εκτιμήτριες είναι αμερόληπτες. Για να απαντήσουμε στο ερώτημα αυτό, θα πρέπει να βρούμε ένα μέτρο που να συνδυάζει τη διασπορά και τον υπολογιστικό χρόνο της προσομοίωσης της κάθε εκτιμήτριας.

Έστω ότι η παραγωγή μιας C_i απαιτεί ένα συγκεκριμένο υπολογιστικό χρόνο τ . Έστω s ο υπολογιστικός μας προϋπολογισμός, δηλαδή ο συνολικός υπολογιστικός χρόνος που έχουμε στη διάθεσή μας, μετρημένος στις ίδιες μονάδες με το τ . Τότε, ο αριθμός των παραγωγών που μπορούμε να κάνουμε δεδομένου του s είναι $[s/\tau]$, όπου $[\cdot]$ το ακέραιο μέρος. Επομένως, η εκτιμήτρια που θα προκύψει θα είναι η

$$\hat{C}_{[s/\tau]} = \frac{C_1 + \dots + C_{[s/\tau]}}{[s/\tau]}.$$

Τότε, θα έχουμε ότι

$$\sqrt{[s/\tau]} [\hat{C}_{[s/\tau]} - C] \xrightarrow{s \rightarrow \infty} N(0, \sigma_C^2).$$

Ισχύει ότι $[s/\tau]/s \rightarrow 1/\tau$, καθώς $s \rightarrow \infty$, άρα

$$\sqrt{s} [\hat{C}_{[s/\tau]} - C] \xrightarrow{s \rightarrow \infty} N(0, \sigma_C^2 \tau). \quad (2.38)$$

Η τελευταία παράσταση μάς λέει ότι, δεδομένου ενός υπολογιστικού προϋπολογισμού s , το σφάλμα της εκτιμήτριας θα είναι περίπου κανονικά κατανοημένο με διασπορά $\sigma_C^2 \tau/s$. Η ιδιότητα αυτή μάς παρέχει ένα κριτήριο σύγκρισης εναλλακτικών αμερόληπτων εκτιμητριών.

Έστω για παράδειγμα ότι έχουμε δύο αμερόληπτες εκτιμήτριες που είναι μέσοι όροι ανεξάρτητων επαναλήψεων. Έστω ότι η διασπορά ανά επανάληψη σ_1^2 της πρώτης είναι μεγαλύτερη της διασποράς ανά επανάληψη σ_2^2 της δεύτερης, ενώ οι υπολογιστικοί τους χρόνοι τ_1, τ_2 ανά επανάληψη ικανοποιούν $\tau_1 < \tau_2$. Τότε, η 2.38 μάς λέει ότι καθώς $s \rightarrow \infty$, θα πρέπει να προτιμήσουμε την εκτιμήτρια με τη μικρότερη τιμή $\sigma_i^2 \tau_i$, διότι αυτή θα παράγει την ακριβέστερη εκτίμηση και το μικρότερο διάστημα εμπιστοσύνης δεδομένου του προϋπολογισμού s .

Το επιχείρημα που μας οδήγησε στην 2.38 απαιτεί ο υπολογιστικός χρόνος ανά επανάληψη να είναι σταθερός. Στην προσομοίωση του ασιατικού δικαιώματος για παράδειγμα όλες οι επαναλήψεις απαιτούσαν προσομοίωση ίσου αριθμού μεταβάσεων, και ο χρόνος ανά μετάβαση ήταν σχεδόν σταθερός. Το στοιχείο αυτό είναι χαρακτηριστικό πολλών προβλημάτων τιμολόγησης παραγώγων, όπου ο χρόνος ανά επανάληψη καθορίζεται κυρίως από τον αριθμό των χρονικών βημάτων που προσομοιώθηκαν. Ωστόσο, υπάρχουν περιπτώσεις όπου ο υπολογιστικός χρόνος μπορεί να ποικίλει σε κάθε επανάληψη. Κατά την τιμολόγηση ενός δικαιώματος με φράγμα

για παράδειγμα, ένα μονοπάτι τερματίζεται την πρώτη φορά που η προσομοιωμένη τιμή της μετοχής συναντά το φράγμα. Επομένως, σε αυτήν την περίπτωση ο αριθμός των μεταβάσεων έως ότου αν συμβεί αυτό είναι τυχαίος, πράγμα που κάνει τυχαίο και τον υπολογιστικό χρόνο ανά επανάληψη.

Για να γενικεύσουμε τη 2.38 ώστε να περιλαμβάνει και την περίπτωση όπου ο χρόνος τ είναι τυχαίος, αντικαθιστούμε την υπόθεση του σταθερού υπολογιστικού χρόνου ανά επανάληψη με τη συνθήκη ότι οι $(C_1, \tau_1), (C_2, \tau_2), \dots$ είναι ανεξάρτητες και ομοιόμορφα κατανομημένες τυχαίες μεταβλητές, με C_i όπως πριν, και τ_i τον υπολογιστικό χρόνο που απαιτείται για την i -οστή επανάληψη. Ο αριθμός των επαναλήψεων που μπορούν να ολοκληρωθούν δεδομένου ενός υπολογιστικού προϋπολογισμού s είναι τώρα

$$N(s) = \sup \left\{ n \geq 0 : \sum_{i=1}^n \tau_i \leq s \right\},$$

και είναι επίσης τυχαίος. Η εκτιμήτριά μας με βάση το s γίνεται

$$\hat{C}_{N(s)} = \frac{C_1 + \dots + C_{N(s)}}{N(s)}.$$

Η υπόθεση ότι (C_i, τ_i) ανεξάρτητες και ισόνομες μας εξασφαλίζει ότι

$$\frac{N(s)}{s} \xrightarrow{s \rightarrow \infty} \frac{1}{\mathbb{E}[\tau]} \quad \text{με πιθανότητα 1.}$$

Έτσι, η 2.38 γενικεύεται στην

$$\sqrt{s} \left[\hat{C}_{N(s)} - C \right] \xrightarrow{s \rightarrow \infty} N(0, \sigma_C^2 \mathbb{E}[\tau]) \quad \text{κατά κατανομή.} \quad (2.39)$$

Το όριο στην 2.39 παρέχει ένα μέτρο ασυμπτωτικής σχετικής αποτελεσματικότητας όταν ο υπολογιστικός χρόνος ανά επανάληψη είναι μεταβλητός. Καταδεικνύει ότι κατά τη σύγκριση διαφορετικών εκτιμητριών, καθεμία από τις οποίες είναι ένας μέσος όρος από αμερόληπτες, ανεξάρτητες και ισόνομες επαναλήψεις, θα πρέπει να προτιμούμε εκείνη για την οποία το γινόμενο

(διασπορά/επανάληψη) \times (αναμενόμενος υπολογιστικός χρόνος/επανάληψη)

είναι μικρότερο.

Όταν έχουμε ασυμπτωτικά αμερόληπτες εκτιμήτριες, όπως υποθέσαμε παραπάνω, τότε η διασπορά και ο υπολογιστικός χρόνος των εκτιμητριών είναι οι πιο σημαντικές παράμετροι προς εξέταση. Ωστόσο, η ελαχιστοποίηση των δύο αυτών παραμέτρων θα ήταν ανούσια, αν οι εκτιμήτριες δεν ήταν αμερόληπτες, μια και θα επιτάχυνε τη σύγκλιση προς κάτι λανθασμένο.

Κεφάλαιο 3

Τεχνικές ελάττωσης διασποράς

Έστω Y_1, \dots, Y_n αποτελέσματα που λάβαμε μετά από n επαναλήψεις μιας προσομοίωσης. Υποθέτουμε ότι οι Y_i έχουν προκύψει ανεξάρτητα και ακολουθούν την ίδια κατανομή, με πεπερασμένη μέση τιμή. Σκοπός μας είναι να εκτιμήσουμε την πραγματική μέση τιμή $\mathbb{E}[Y]$ της κατανομής από την οποία προήλθαν. Η συνήθης εκτιμήτρια είναι ο δειγματικός μέσος όρος

$$\bar{Y} = \frac{Y_1 + \dots + Y_n}{n},$$

η οποία είναι αμερόληπτη και συγκλίνει στην πραγματική μέση τιμή σχεδόν σίγουρα, καθώς $n \rightarrow \infty$. Γνωρίζουμε επίσης ότι, με πιθανότητα $(1 - \delta)$, η $\mathbb{E}[Y]$ βρίσκεται σε ένα διάστημα $[l_\delta, r_\delta]$. Από το κεντρικό οριακό θεώρημα έχουμε δει ότι, αν z_δ το $(1 - \delta)$ -ποσοστημόριο της τυπικής κανονικής πυκνότητας, τότε

$$\mathbb{E}[Y] \in \left(\bar{Y} - z_{\delta/2} \frac{\sigma_Y}{\sqrt{n}}, \bar{Y} + z_{\delta/2} \frac{\sigma_Y}{\sqrt{n}} \right), \quad \text{με πιθανότητα } (1 - \delta), \quad (3.1)$$

όπου σ_Y η τυπική απόκλιση της Y . Ανάλογο αποτέλεσμα έχουμε αν η σ_Y αντικατασταθεί από τη δειγματική τυπική απόκλιση, S_Y .

Το εύρος του διαστήματος είναι $2z_\delta \frac{\sigma_Y}{\sqrt{n}}$. Άρα, όσο μικρότερο το δ , τόσο μεγαλύτερο το z_δ . Έστω ότι επιθυμούμε επίπεδο βεβαιότητας $(1 - \delta)$ για το διάστημα εμπιστοσύνης στην 3.1. Τότε, είναι φανερό ότι το διάστημα μικραίνει αν ελαττώσουμε τον παράγοντα $\frac{\sigma_Y}{\sqrt{n}}$. Υπάρχουν δύο τρόποι να ελαττώσουμε τον παράγοντα αυτό: είτε αυξάνοντας το πλήθος των επαναλήψεων n , είτε ελαττώνοντας τη διασπορά σ_Y^2 .

Ο δεύτερος είναι και το αντικείμενο του παρόντος κεφαλαίου: μέθοδοι για να επιτύχουμε ελάττωση της διασποράς του σφάλματος της εκτιμήτριας.

Η ιδέα είναι η εξής: αντί των Y_1, \dots, Y_n και της εκτιμήτριας $(Y_1 + \dots + Y_n)/n$ παίρνουμε τις $\tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_n$ και την $\tilde{Y}' = (\tilde{Y}_1 + \dots + \tilde{Y}_n)/n$ έτσι, ώστε $\tilde{Y}' \rightarrow \mathbb{E}[Y]$ σχεδόν σίγουρα, και ταυτόχρονα $\sigma_{\tilde{Y}} < \sigma_Y$. Οι τεχνικές ελάττωσης διασποράς μας δίνουν τρόπους για να επιλέξουμε αυτές τις \tilde{Y}_i .

3.1 Μέθοδος των μεταβλητών ελέγχου (Control Variates)

Η τεχνική μεταβλητών ελέγχου είναι η πιο αποτελεσματική και ευρέως διαδεδομένη μέθοδος για τη μείωση της διασποράς. Αυτό που κάνει είναι να αξιοποιεί την πληροφορία που σχετίζεται με μια γνωστή ποσότητα για να εκτιμήσει μια άλλη ποσότητα, υπό την προϋπόθεση ότι οι δύο ποσότητες σχετίζονται μεταξύ τους. Ας δούμε πως λειτουργεί.

Έστω ότι θέλουμε να εκτιμήσουμε την $\mathbb{E}[Y]$. Έστω επίσης ότι μπορούμε να υπολογίσουμε την $\mathbb{E}[X]$, όπου υποθέτουμε ότι οι X, Y έχουν κάποια συσχέτιση. Για κάθε μία παραγωγή Y_i , $i = 1, \dots, n$, υπολογίζουμε ακόμη μία τιμή, X_i , όπου υποθέτουμε ότι τα ζεύγη (X_i, Y_i) είναι ανεξάρτητα και ισόνομα, για διαφορετικά i . Υποθέτουμε επιπλέον ότι $\mathbb{E}[X_i] = \mathbb{E}[X]$. Τότε, αν θεωρήσουμε ένα $b \in \mathbb{R}$, μπορούμε να υπολογίσουμε την

$$Y_i(b) = Y_i - b(X_i - \mathbb{E}[X])$$

για κάθε $i = 1, \dots, n$, και στη συνέχεια το δειγματικό μέσο όρο

$$\bar{Y}(b) = \bar{Y} - b(\bar{X} - \mathbb{E}[X]) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - b(X_i - \mathbb{E}[X])). \quad (3.2)$$

Η παραπάνω καλείται *εκτιμήτρια μεταβλητής ελέγχου*. Το παρατηρούμενο σφάλμα, $(\bar{X} - \mathbb{E}[X])$, στην 3.2 λειτουργεί ως ένας έλεγχος κατά την εκτίμηση της $\mathbb{E}[Y]$.

Η εκτιμήτρια 3.2 είναι αμερόληπτη:

$$\mathbb{E}[\bar{Y}(b)] = \mathbb{E}[\bar{Y} - b(\bar{X} - \mathbb{E}[X])] = \mathbb{E}[\bar{Y}] = \mathbb{E}[Y],$$

και συνεπώς με πιθανότητα 1:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{Y}(b) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i(b) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (Y_i - b(X_i - \mathbb{E}[X])) \\ &= \mathbb{E}[Y - b(X - \mathbb{E}[X])] \quad \sigma.\sigma \\ &= \mathbb{E}[Y]. \end{aligned}$$

Κάθε $Y_i(b)$ έχει διασπορά

$$\begin{aligned} \text{Var}[Y_i(b)] &= \text{Var}[Y_i - b(X_i - \mathbb{E}[X])] \\ &= \sigma_Y^2 - 2b\text{Cov}(X, Y) + b^2\sigma_X^2 \\ &= \sigma_Y^2 - 2b\sigma_X\sigma_Y\rho_{XY} + b^2\sigma_X^2 \equiv \sigma^2(b), \end{aligned} \quad (3.3)$$

όπου $\sigma_X^2 = \text{Var}[X]$, $\sigma_Y^2 = \text{Var}[Y]$, και ρ_{XY} ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης των X, Y ,

$$\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X\sigma_Y}.$$

Έπεται ότι η εκτιμήτρια μεταβλητής ελέγχου έχει διασπορά

$$\text{Var}[\bar{Y}(b)] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}[Y_i(b)] = \frac{1}{n} \sigma^2(b).$$

Ο συμβατικός δειγματικός μέσος όρος (για $b = 0$) έχει διασπορά σ_Y^2/n . Έτσι, η εκτιμήτρια μεταβλητής ελέγχου έχει μικρότερη διασπορά από τη συνήθη εκτιμήτρια αν

$$b^2\sigma_X - 2b\sigma_Y\rho_{XY} < 0.$$

Ο βέλτιστος συντελεστής b^* που ελαχιστοποιεί τη διασπορά στην 3.3 δίνεται από

$$b^* = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}(X)}. \quad (3.4)$$

Αν αντικαταστήσουμε την 3.4 στην 3.3, βρίσκουμε ότι ο λόγος της διασποράς της βέλτιστης εκτιμήτριας μεταβλητής ελέγχου, $\bar{Y}(b^*)$, προς τη διασπορά της συνήθους εκτιμήτριας είναι

$$\begin{aligned} \frac{\text{Var}[\bar{Y} - b^*(\bar{Y} - \mathbb{E}[X])]}{\text{Var}[\bar{Y}]} &= \frac{\frac{1}{n}\sigma^2(b^*)}{\frac{1}{n}\text{Var}[Y]} \\ &= \frac{\sigma_Y^2 - 2\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\rho_{XY}\sigma_X\sigma_Y\rho_{XY} + \frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2}\rho_{XY}^2\sigma_X^2}{\sigma_Y^2} \\ &= 1 - \rho_{XY}^2, \end{aligned}$$

δηλαδή,

$$\text{Var}[\bar{Y}(b^*)] = \text{Var}[Y](1 - \rho_{XY}^2). \quad (3.5)$$

Καταφέραμε να μειώσουμε τη διασπορά, παράλληλα όμως, αυξήσαμε το πλήθος των υπολογισμών, διότι σε κάθε επανάληψη χρειάζεται να υπολογίσουμε και τα δείγματα από τις X_i . Το ερώτημα λοιπόν που ανακύπτει είναι, πότε συμφέρει να χρησιμοποιήσουμε μεταβλητές ελέγχου: ενδεχομένως όταν η ρ_{XY} είναι κοντά στο 1. Σημειώνουμε εδώ ότι, το πρόσημο της συσχέτισης των X, Y δεν παίζει κάποιο ρόλο, αρκεί η συσχέτιση να είναι διάφορη του μηδενός. Ας υποθέσουμε για παράδειγμα ότι η παραγωγή μιας Y_i απαιτεί χρόνο τ , ενώ η παραγωγή ενός

ζεύγους (X_i, Y_i) απαιτεί χρόνο 2τ . Έστω ότι ο συνολικός χρόνος που έχουμε στη διάθεσή μας είναι T . Τότε, χωρίς μεταβλητή ελέγχου, ο παράγοντας σ/\sqrt{n} είναι

$$\sqrt{\text{Var}(Y) \frac{\tau}{T}},$$

ενώ με μεταβλητή ελέγχου, ο ίδιος παράγοντας ισούται με

$$\sqrt{\text{Var}(Y)(1 - \rho_{XY}^2)2 \frac{\tau}{T}}.$$

Συνεπώς, σε αυτήν την περίπτωση, μας συμφέρει να εισαγάγουμε μεταβλητή ελέγχου στην εκτίμηση εάν $2(1 - \rho_{XY}^2) < 1$.

Παρατηρήσεις:

Σύμφωνα με την 3.5, η αποτελεσματικότητα μιας εκτιμήτριας μεταβλητής ελέγχου, καθορίζεται από το πόσο μεγάλη είναι η συσχέτιση, ρ_{XY} , μεταξύ της ποσότητας που θέλουμε να εκτιμήσουμε, Y , και της μεταβλητής ελέγχου, X .

Αν η υπολογιστική προσπάθεια που απαιτείται με ή χωρίς τη μεταβλητή ελέγχου είναι ίδια, τότε η 3.5 μετρά πόσο επιταχύνεται η υπολογιστική διαδικασία εξαιτίας της χρήσης της μεταβλητής ελέγχου κατά την εκτίμηση. Ακριβέστερα, για να επιτύχουμε την ίδια διασπορά που μας δίνει η εκτιμήτρια μεταβλητής ελέγχου μετά από n επαναλήψεις, όταν χρησιμοποιούμε τη συνήθη εκτιμήτρια, θα πρέπει ο αριθμός των επαναλήψεων να είναι $n/(1 - \rho_{XY}^2)$.

Ο συντελεστής ελάττωσης διασποράς, $1/(1 - \rho_{XY}^2)$, αυξάνει πολύ απότομα καθώς $|\rho_{XY}| \rightarrow 1$, ενώ φθίνει πολύ απότομα καθώς η $|\rho_{XY}|$ φθίνει μακριά από το 1. Αυτό υποδεικνύει ότι, όσο πιο υψηλά συσχετισμένες είναι η ποσότητα προς εκτίμηση και η μεταβλητή ελέγχου που θα χρησιμοποιήσουμε, τόσο ουσιαστικότερα είναι τα αποτελέσματα από τη χρήση μεταβλητών ελέγχου.

Οι παραπάνω παρατηρήσεις σε συνδυασμό με την 3.5 εφαρμόζονται εφόσον γνωρίζουμε την παράμετρο b^* . Εφόσον όμως η $\mathbb{E}[Y]$ είναι άγνωστη, είναι ακόμη πιο δύσκολο να γνωρίζουμε τις σ_Y και ρ_{XY} . Ακόμη και έτσι, μπορούμε να εκμεταλλευτούμε προς όφελός μας μια μεταβλητή ελέγχου κατά την εκτίμηση, εκτιμώντας την τιμή της b^* . Μπορούμε δηλαδή να αντικαταστήσουμε τις $\text{Cov}(X, Y)$, $\text{Var}(X)$ στην 3.4 από τις αντίστοιχες δειγματικές:

$$\hat{b}_n = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}.$$

Διαιρώντας αριθμητή και παρανομαστή με n στην τελευταία παράσταση, έχουμε από το νόμο των μεγάλων αριθμών ότι $\hat{b}_n \rightarrow b^*$ σχεδόν σίγουρα, $n \rightarrow \infty$. Άρα τώρα, η βέλτιστη εκτιμήτρια ελέγχου γίνεται η $\bar{Y}(\hat{b}_n)$, δηλαδή ο δειγματικός μέσος των $Y_i(\hat{b}_n) = Y_i - \hat{b}_n(X_i - \mathbb{E}[X])$, $i = 1, \dots, n$.

Πόσο διαφέρουν οι $\bar{Y}(b^*)$, $\bar{Y}(\hat{b}_n)$; Έχουμε:

$$\bar{Y}(\hat{b}_n) - \bar{Y}(b^*) = (\hat{b}_n - b^*) \left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \mathbb{E}[X] \right) \rightarrow 0, \quad \text{σχεδόν σίγουρα.} \quad (3.6)$$

Η αντικατάσταση της b^* από την \hat{b}_n ωστόσο, εισάγει μεροληψία στην εκτίμηση, καθώς επίσης οι $Y_i(\hat{b}_n)$ δεν είναι ανεξάρτητες για διαφορετικά i .

Η βέλτιστη εκτιμήτρια μεταβλητής ελέγχου, όταν ο βέλτιστος συντελεστής b^* εκτιμάται μέσω της 3.6, δίνεται από

$$\bar{Y}(\hat{b}_n) = \bar{Y} - \hat{b}_n(\bar{X} - \mathbb{E}[X]).$$

Αντικαθιστώντας την 3.6 στην τελευταία παράσταση, έχουμε

$$\begin{aligned} \bar{Y}(\hat{b}_n) &= \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} (\bar{X} - \mathbb{E}[X]) \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})Y_i}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} (\bar{X} - \mathbb{E}[X]) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n} + \frac{(\bar{X} - X_i)(\bar{X} - \mathbb{E}[X])}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \right) Y_i \\ &= \sum_{i=1}^n w_i Y_i, \quad \text{όπου} \quad \sum_{i=1}^n w_i = 1. \end{aligned}$$

Δηλαδή, η εκτιμήτρια μεταβλητής ελέγχου είναι ένας σταθμισμένος μέσος των Y_1, \dots, Y_n , όπου, όπως είδαμε, οι Y_i δεν είναι ανεξάρτητες, για διαφορετικά i . Τα βάρη, w_i , ως προς τα οποία σταθμίζουμε, εξαρτώνται αποκλειστικά από τις παρατηρήσεις X_1, \dots, X_n της μεταβλητής ελέγχου. Ας δούμε τι επίδραση έχουν τα βάρη αυτά στην εκτιμήτρια, και γιατί, διαισθητικά, επιτυγχάνουμε ελάττωση διασποράς.

Έστω ότι οι μεταβλητές X, Y είναι θετικά συσχετισμένες. Αν για την ποσότητα X λάβουμε ένα δείγμα X_i για το οποίο $X_i > \bar{X}$, τότε πιθανότατα και το δείγμα Y_i θα υπερεκτιμά την \bar{Y} αντίστοιχα. Αυτό που κάνει η μέθοδος, είναι ότι μειώνει το βάρος, $1/n$, που έχει η συγκεκριμένη Y_i στη συνήθη εκτιμήτρια Monte Carlo, προσθέτοντας στο βάρος αυτό τον όρο

$$(\bar{X} - X_i) \frac{\bar{X} - \mathbb{E}[X]}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2},$$

όπου $(\bar{X} - X_i) < 0$.

3.1.1 Παραδείγματα

Παράδειγμα 1) Έχουμε δει ότι η απουσία επιτηδειότητας στην αγορά ισοδυναμεί με τη συνθήκη ότι οι προεξοφλημένες τιμές των προϊόντων είναι martingales. Αυτό

σημαίνει ότι, αν γνωρίζουμε την αρχική τιμή ενός πρωτογενούς προϊόντος, και εφόσον αυτή είναι martingale, τότε γνωρίζουμε αυτόματα και τη μέση τιμή του σε κάθε μελλοντική στιγμή. Επομένως, αν έχουμε να τιμολογήσουμε ένα παράγωγο επί ενός πρωτογενούς προϊόντος, τότε το ίδιο το πρωτογενές προϊόν αποτελεί μία εν δυνάμει μεταβλητή ελέγχου για την εκτίμηση της τιμής του παραγώγου.

Πιο συγκεκριμένα, έστω ότι δουλεύουμε υπό το άνευ κινδύνου μέτρο πιθανότητας και έστω r το άνευ κινδύνου επιτόκιο. Υποθέτουμε ότι το υποκείμενο προϊόν είναι μία μετοχή $S(t)$. Τότε, η $e^{-rt} S(t)$ είναι ένα martingale με μέση τιμή $S(0)$. Έστω ότι θέλουμε να τιμολογήσουμε ένα δικαίωμα επί της S , το οποίο έχει προεξοφλημένη απόδοση Y , η οποία εξαρτάται από το μονοπάτι της μετοχής για $t \in [0, T]$. Έστω ότι έχουμε στη διάθεσή μας n προσομοιωμένα μονοπάτια της μετοχής, S_i , $i = 1, \dots, n$. Τότε, η εκτιμήτρια μεταβλητής ελέγχου για την τιμή του παραγώγου είναι

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - b[X_i - \mathbb{E}[X_i]]) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - b[S_i(t) - e^{rT} S(0)]).$$

Ειδικότερα, αν έχουμε να τιμολογήσουμε ένα ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς, δηλαδή, αν $Y = e^{-rT}(S(T) - K)^+$, τότε η συσχέτιση των Y και S , και κατ' επέκταση η αποτελεσματικότητα της μεταβλητής ελέγχου, εξαρτάται από την παραδοτέα τιμή K . Αν $K = 0$, τότε η συσχέτιση θα ήταν 1. Αν K μεγάλη, τότε η συσχέτιση θα ήταν μικρή. Συμπεραίνουμε ότι η αποτελεσματικότητα μιας μεταβλητής ελέγχου εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από τις παραμέτρους του προβλήματος.

Παράδειγμα 2) Έστω ότι θέλουμε να εκτιμήσουμε την $\mathbb{E}[e^{Y_T}]$, όπου η δυναμική της Y καθορίζεται από την

$$dY_t = \mu dt + \sigma(Y_t) dW_t, \quad Y_0 = 0.$$

Η παραπάνω στοχαστική διαφορική εξίσωση δεν επιδέχεται αναλυτική λύση. Μπορούμε όμως να λύσουμε ακριβώς την

$$dX_t = \mu dt + \sigma^* dW_t, \quad X_0 = 0,$$

δηλαδή,

$$X_t = \mu t + \sigma^* W_t.$$

Με τη συνήθη εκτιμήτρια, θα παίρναμε δείγματα $Y_T^{(1)}, \dots, Y_T^{(n)}$, και θα υπολογίζαμε

$$\frac{e^{Y_T^{(1)}} + \dots + e^{Y_T^{(n)}}}{n}.$$

Εναλλακτικά, εφόσον η μέση τιμή της e^{X_T} υπολογίζεται, και είναι

$$\mathbb{E}[e^{X_T}] = \mathbb{E}[e^{\mu T + \sigma^* W_T}] = e^{(\mu + \frac{\sigma^{*2}}{2})T},$$

μπορούμε να κάνουμε την εκτίμηση της $\mathbb{E}[e^{Y_t}]$ χρησιμοποιώντας τη X_t σαν μεταβλητή ελέγχου. Οι τιμές $Y_T^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, n$, παράγονται με σχήμα Euler ως εξής:

$$Y_{k\delta t}^{(i)} = Y_{(k-1)\delta t}^{(i)} + \mu\delta t + \sigma(Y_{(k-1)\delta t}^{(i)})W_{k\delta t}$$

$$= Y_{(k-1)\delta t}^{(i)} + \mu\delta t + \sigma(Y_{(k-1)\delta t}^{(i)})\sqrt{\delta t}Z_k^{(i)}, \quad k = 1, 2, \dots, T/\delta t,$$

όπου $Z_k^{(i)}$, $k = 1, 2, \dots, T/\delta t$, ανεξάρτητες τυπικές κανονικές.

Παράγουμε επίσης τις τιμές $X_T^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, n$:

$$X_T^{(i)} = e^{\mu T + \sigma^* \sqrt{\delta t} (Z_1^{(i)} + \dots + Z_{T/\delta t}^{(i)})}.$$

Τότε, η εκτιμήτρια μεταβλητής ελέγχου για την $\mathbb{E}[e^{Y_T}]$, με μεταβλητές ελέγχου τις $X_T^{(i)}$ θα είναι

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ e^{Y_T^{(i)}} + b \left(e^{X_T^{(i)}} - e^{\left(\mu + \frac{\sigma^{*2}}{2}\right)T} \right) \right\},$$

για κάποιο b . Η βέλτιστη τιμή για το b θα ήταν

$$b^* = -\frac{Cov(e^{X_T}, e^{Y_T})}{Var(e^{X_T})}.$$

Ας σημειώσουμε εδώ ότι, ο υπολογισμός της συνδιακύμανσης δύο τυχαίων μεταβλητών απαιτεί τη γνώση τουλάχιστον μίας μέσης τιμής εκ των $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[Y]$ (όχι απαραίτητα και τις δύο), διότι,

$$Cov(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])Y] = \mathbb{E}[X(Y - \mathbb{E}[Y])].$$

Παράδειγμα 3) Έστω ότι θέλουμε να εκτιμήσουμε την τιμή ενός ασιατικού δικαιώματος αγοράς επί του αριθμητικού μέσου k τιμών μιας μετοχής S ,

$$\bar{S}_A = \sum_{i=1}^k S(t_i)/n.$$

Η απόδοση στην ωρίμανση είναι $(\bar{S}_A - K)^+$, K η παραδοτέα τιμή. Άρα για την τιμολόγηση πρέπει να εκτιμήσουμε την προεξοφλημένη αναμενόμενη απόδοση

$$e^{-rT} \mathbb{E}[(\bar{S}_A - K)^+].$$

Υποθέτουμε ότι η S είναι μια γεωμετρική κίνηση *Brown*. Η εύρεση της παραπάνω τιμής του δικαιώματος απαιτεί προσομοίωση, μια και δε μπορεί να υπολογιστεί ακριβώς. Ωστόσο, δικαιώματα αγοράς επί του γεωμετρικού μέσου k τιμών,

$$\bar{S}_G = \left(\prod_{i=1}^k S(t_i) \right)^{1/k},$$

τιμολογούνται ακριβώς, διότι στην περίπτωση που η S είναι γεωμετρική κίνηση *Brown*, η κατανομή του γεωμετρικού μέσου είναι λογαριθμική κανονική. Πιο συγκεκριμένα, έστω ότι

$$S(t_i) = S(t_0) e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t_i + \sigma W(t_i)},$$

για $i = 1, \dots, k$, με $t_0 = 0$, όπου W μια τυπική κίνηση Brown. Τότε,

$$\begin{aligned}\bar{S}_G &= \left(\prod_{i=1}^k S(t_i) \right)^{1/k} \\ &= e^{\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \log S(t_i)}.\end{aligned}$$

Επομένως, η τυχαία μεταβλητή

$$\log \bar{S}_G = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \log S(t_i)$$

ακολουθεί κανονική κατανομή. Η μέση της τιμή είναι

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\log \bar{S}_G] &= \mathbb{E} \left[\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \log S(t_i) \right] \\ &= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left(\log S(0) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t_i \right) \\ &= \log S(0) + \frac{1}{k} \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \sum_{i=1}^k t_i.\end{aligned}$$

Αν υποθέσουμε ότι $t_i - t_{i-1} = \Delta t$, για κάθε $i = 1, \dots, k$, τότε,

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k t_i = \frac{k+1}{2} \Delta t,$$

οπότε,

$$\mathbb{E}[\log \bar{S}_G] = \log S(0) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t \frac{k+1}{2}.$$

Η διασπορά της είναι

$$\begin{aligned}\text{Var}[\log \bar{S}_G] &= \text{Var} \left[\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \log S(t_i) \right] \\ &= \text{Var} \left[\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \sigma W(t_i) \right] \\ &= \frac{\sigma^2}{k^2} \text{Var} \left[\sum_{i=1}^k W(t_i) \right].\end{aligned}$$

Η $W(t_i)$ μπορεί να γραφεί ως

$$W(t_i) = \sum_{j=0}^{i-1} (W(t_{j+1}) - W(t_j)),$$

εφόσον $W(0) = 0$, επομένως,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k W(t_i) &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=0}^{i-1} (W(t_{j+1}) - W(t_j)) \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=j+1}^k (W(t_{j+1}) - W(t_j)) \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} (W(t_{j+1}) - W(t_j))(k-j). \end{aligned}$$

Συνεπώς, λόγω ανεξάρτητων προσαυξήσεων της κίνησης Brown,

$$\begin{aligned} \text{Var}[\log \bar{S}_G] &= \frac{\sigma^2}{k^2} \text{Var} \left[\sum_{j=0}^{k-1} (W(t_{j+1}) - W(t_j))(k-j) \right] \\ &= \frac{\sigma^2}{k^2} \sum_{j=0}^{k-1} \text{Var} [(W(t_{j+1}) - W(t_j))(k-j)] \\ &= \frac{\sigma^2}{k^2} \sum_{j=0}^{k-1} (k-j)^2 (t_{j+1} - t_j) \\ &= \frac{\sigma^2}{6} \frac{(k+1)(2k+1)}{k} \Delta t. \end{aligned}$$

Τελικά,

$$\log \bar{S}_G \sim N \left(\log S(0) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{k+1}{2} \Delta t, \frac{\sigma^2}{6} \frac{(k+1)(2k+1)}{k} \Delta t \right).$$

Έπεται ότι μπορούμε να υπολογίσουμε την ακριβή μέση τιμή της απόδοσης του δικαιώματος επί του γεωμετρικού μέσου,

$$\mathbb{E} \left[(\bar{S}_G - K)^+ \right].$$

Μεταξύ των αποδόσεων των δύο δικαιωμάτων είναι λογικό να αναμένουμε ότι υπάρχει συσχέτιση, επομένως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την απόδοση του ασιατικού δικαιώματος επί του γεωμετρικού μέσου ως μεταβλητή ελέγχου κατά την εκτίμηση της μέσης τιμής της απόδοσης του ασιατικού δικαιώματος επί του αριθμητικού μέσου.

Η χρήση δικαιωμάτων, τα οποία είναι εύκολο να τιμολογηθούν, ως μεταβλητές ελέγχου κατά την τιμολόγηση πιο πολύπλοκων δικαιωμάτων, είναι μερικές φορές πιο αποτελεσματική από τη χρήση του υποκείμενου προϊόντος ως μεταβλητή ελέγχου. Δικαιώματα επί του γεωμετρικού μέσου χρησιμοποιούνται συχνά ως μεταβλητές ελέγχου κατά την τιμολόγηση δικαιωμάτων που δε μπορούν να τιμολογηθούν ακριβώς.

Εφαρμογή:

Με στόχο την ελάττωση διασποράς στην εκτίμηση, θα τιμολογήσουμε ξανά το ασιατικό δικαίωμα αγοράς επί του αριθμητικού μέσου 30 τιμών μιας μετοχής, που είδαμε στο κεφάλαιο 2, με μεταβλητή ελέγχου το ασιατικό δικαίωμα αγοράς επί του γεωμετρικού μέσου των 30 τιμών. Αντί της συμβατικής εκτιμήτριας Monte Carlo για την αρχική αξία του δικαιώματος,

$$\hat{V}_{asian}(0) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{Y}_i,$$

όπου

$$\hat{Y}_i = e^{-rT} (\bar{S}_A^i - K)^+,$$

και

$$\bar{S}_A^i = \frac{\hat{S}_1^i + \dots + \hat{S}_{30}^i}{30},$$

θα χρησιμοποιήσουμε την εκτιμήτρια μεταβλητής ελέγχου

$$\hat{V}_{asiancontrol}(0) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{Y}_i',$$

όπου

$$\hat{Y}_i' = \hat{Y}_i - b^*(\hat{X}_i - \mathbb{E}[X]),$$

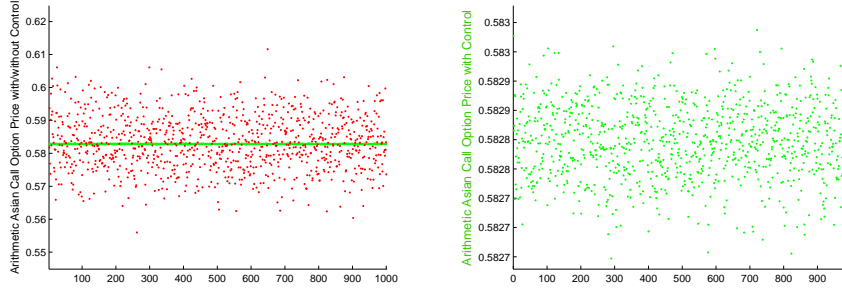
με

$$\begin{aligned} \hat{X}_i &= e^{-rT} (\bar{S}_G^i - k)^+, \\ \bar{S}_G^i &= (\hat{S}_1^i \dots \hat{S}_{30}^i)^{1/30}, \\ b^* &= \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{X}_i - \sum_{i=1}^n \frac{\hat{X}_i}{n}) (\hat{Y}_i - \hat{V}_{asian}(0))}{\sum_{i=1}^n (\hat{X}_i - \hat{V}_{asian}(0))^2}, \end{aligned}$$

και $\mathbb{E}[X] = V_{geometric}(0)$ η θεωρητική αρχική αξία του ασιατικού δικαιώματος επί του γεωμετρικού μέσου που υπολογίζεται ακριβώς, και ισούται με €0.5769.

Στο Σχήμα 3.1 φαίνονται οι τιμές που έδωσαν 1.000 τιμολογήσεις του ασιατικού δικαιώματος επί του αριθμητικού μέσου χωρίς μεταβλητή ελέγχου (κόκκινες κουκκίδες), και 1.000 τιμολογήσεις του ίδιου δικαιώματος με χρήση του ασιατικού δικαιώματος επί του γεωμετρικού μέσου ως μεταβλητή ελέγχου (πράσινες κουκκίδες). Χρησιμοποιήθηκε ακρίβεια 10.000 μονοπατιών ανά τιμολόγηση. Ο χρόνος ανά τιμολόγηση χωρίς μεταβλητή ελέγχου είναι κατά μέσο όρο $\tau_{nocontrol} = 0.11$ δευτερόλεπτα, ενώ με χρήση μεταβλητής ελέγχου είναι $\tau_{control} = 0.12$ δευτερόλεπτα. Το Σχήμα 3.2 απεικονίζει τα δύο ιστογράμματα που πήραμε από τις ίδιες τιμολογήσεις με μεταβλητή ελέγχου (πράσινο) και χωρίς μεταβλητή ελέγχου (κόκκινο). Η διασπορά της κόκκινης εμπειρικής κατανομής των τιμών χωρίς μεταβλητή ελέγχου είναι $\sigma_{nocontrol}^2 = 6.9279e - 005$. Αντίστοιχα η διασπορά των τιμών στην πράσινη γραμμή είναι $\sigma_{control}^2 = 4.82112e - 009$. Οπότε έχουμε

$$\sigma_{control}^2 \times \mathbb{E}[\tau_{control}] = 5.7734e - 010 < 8.3135e - 006 = \sigma_{nocontrol}^2 \times \mathbb{E}[\tau_{nocontrol}],$$



Σχήμα 3.1: Γραφική παράσταση 1.000 εκτιμήσεων της τιμής του ασιατικού δικαιώματος επί του αριθμητικού μέσου χωρίς μεταβλητή ελέγχου (κόκκινο), και με χρήση μεταβλητής ελέγχου το ασιατικό δικαίωμα αγοράς επί του γεωμετρικού μέσου (πράσινο). Στο σχήμα δεξιά φαίνονται οι πράσινες κουκίδες από το αριστερό σχήμα με μεγαλύτερη ευκρίνεια

που σημαίνει ότι στην περίπτωση του ασιατικού δικαιώματος επί του αριθμητικού μέσου μάς συμφέρει η εισαγωγή της μεταβλητής ελέγχου του αντίστοιχου δικαιώματος επί του γεωμετρικού μέσου στην εκτίμηση.

Εφαρμογή:

Οι αποδόσεις ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς επί μιας μετοχής και του αντίστοιχου δικαιώματος αγοράς με φράγμα επί της ίδιας μετοχής περιμένουμε να σχετίζονται. Παρακάτω θα δούμε πώς ελαττώνουμε τη διασπορά της εκτιμήτριας για την εύρεση της αρχικής αξίας του δικαιώματος αγοράς με κάτω και εκτός φράγμα που τιμολογήσαμε στο κεφάλαιο 2, χρησιμοποιώντας την αρχική αξία του αντίστοιχου ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς ως μεταβλητή ελέγχου.

Η συνήθης εκτιμήτρια για την αρχική αξία του δικαιώματος με κάτω και εκτός φράγμα είναι

$$\hat{V}_{barr}(0) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{Y}_i,$$

όπου

$$\hat{Y}_i = e^{-rT} \hat{I}_i (\hat{S}_i(T) - 40)^+,$$

με

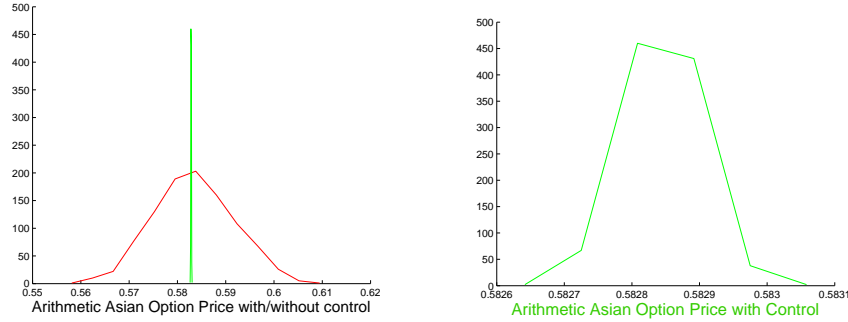
$$\hat{I}_i = I_{\{\hat{S}_i(t) > 37 \forall t \in D_N\}}.$$

Η εκτιμήτρια μεταβλητής ελέγχου είναι

$$\hat{V}_{barrcontrol}(0) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{Y}'_i,$$

όπου

$$\hat{Y}'_i = \hat{Y}_i - b^*(\hat{X}_i - \mathbb{E}[X]),$$



Σχήμα 3.2: Κοινό ιστόγραμμα 1.000 εκτιμήσεων της τιμής του ασιατικού δικαιώματος αγοράς επί του αριθμητικού μέσου: χωρίς μεταβλητή ελέγχου (κόκκινο), με χρήση του ασιατικού δικαιώματος αγοράς επί του γεωμετρικού μέσου ως μεταβλητή ελέγχου (πράσινο). Δεξιά απεικονίζεται ξανά το πράσινο ιστόγραμμα που φαίνεται στο αριστερό σχήμα με μεγαλύτερη ευκρίνεια.

$$\hat{X}_i = e^{-rT}(\hat{S}_i(T) - 40)^+,$$

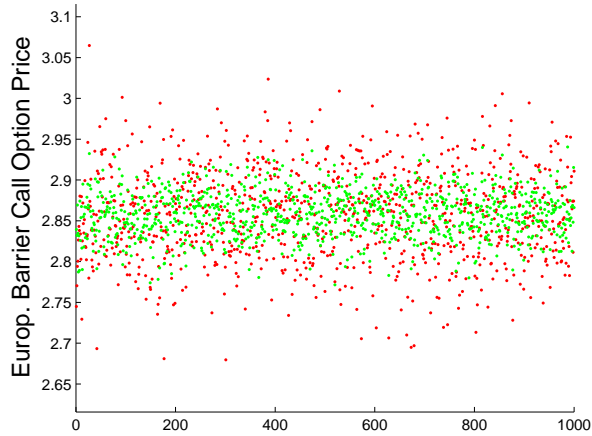
$$b^* = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{X}_i - \sum_{i=1}^n \frac{\hat{X}_i}{n})(\hat{Y}_i - \hat{V}_{\text{E}\Delta\Delta}(0))}{\sum_{i=1}^n (\hat{X}_i - \hat{V}_{\text{E}\Delta\Delta}(0))^2},$$

και $\mathbb{E}[X]$ η θεωρητική αρχική αξία του ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς.

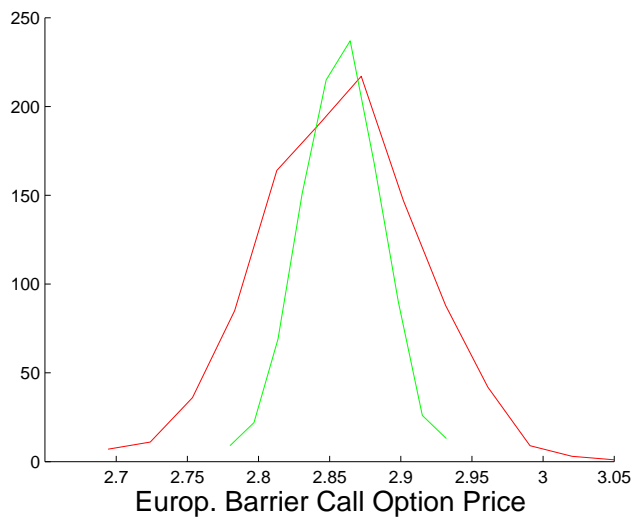
Εφαρμόζοντας απλή εκτίμηση Monte Carlo καθώς και με μεταβλητή ελέγχου, λάβαμε τα συγκριτικά αποτελέσματα που απεικονίζονται στα Σχήματα 3.4 και 3.3. Κάθε τιμολόγηση έγινε με ακρίβεια 10.000 μονοπατιών και 2048 σημείων ανά μονοπάτι. Η διασπορά των τιμών χωρίς χρήση μεταβλητής ελέγχου είναι $\sigma_{nocontrol}^2 = 0.031$, ενώ με χρήση μεταβλητής ελέγχου είναι $\sigma_{control}^2 = 7.887 \times 10^{-4}$. Η μέση τιμή των κόκκινων σημείων είναι €2.8569 και των πράσινων είναι €2.8578. Ο μέσος χρόνος εκτέλεσης μίας τιμολόγησης με την ακρίβεια αυτή είναι $\tau_{nocontrol} = 3$ δευτερόλεπτα χωρίς μεταβλητή ελέγχου και $\tau_{control} = 3$ δευτερόλεπτα με μεταβλητή ελέγχου επίσης. Συνεπάγεται ότι προτιμούμε την εκτιμήτρια μεταβλητής ελέγχου καθότι δίνει μικρότερη διασπορά και απαιτεί την ίδια υπολογιστική προσπάθεια με τη συμβατική εκτιμήτρια Monte Carlo.

3.2 Μέθοδος των αντιθετικών μεταβλητών (Antithetic Variates)

Η μέθοδος των αντιθετικών μεταβλητών επιχειρεί να μειώσει τη διασπορά μιας εκτιμήτριας, εισάγοντας αντιθετικά ζεύγη τιμών κατά την εκτίμηση μιας ποσότητας. Με τον όρο αντιθετικό ζεύγος τιμών εννοούμε δύο τιμές που προέρχονται από την ίδια κατανομή και παράλληλα η μία αντισταθμίζει την άλλη, με την έν-



Σχήμα 3.3: Γραφική παράσταση 1.000 εκτιμήσεων για την τιμή του δικαιώματος με φράγμα, με μεταβλητή ελέγχου το ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς (πράσινο) και χωρίς (κόκκινο)



Σχήμα 3.4: Ιστογράμματα 1.000 τιμών που προέκυψαν από τιμολόγηση δικαιώματος αγοράς με φράγμα χρησιμοποιώντας τη συμβατική εκτιμήτρια Monte Carlo (κόκκινο) και την εκτιμήτρια μεταβλητών ελέγχου, με μεταβλητή ελέγχου την τιμή του ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς (πράσινο)

νοια ότι, αν μία από τις δύο λάβει μία ασυνήθιστα μεγάλη τιμή, η άλλη θα λάβει μία ανάλογα μικρή τιμή. Παράδειγμα ενός αντιθετικού ζεύγους τιμών αποτελεί το $(U, 1-U)$, όπου $U \sim U([0, 1])$. Οι τιμές U και $1-U$ έχουν την ίδια κατανομή, και αν η U μεγάλη, τότε η $(1-U)$ μικρή. Επομένως, αν παραγάγουμε ένα μονοπάτι τιμών χρησιμοποιώντας n ανεξάρτητες, ομοιόμορφες τιμές, U_1, \dots, U_n , μπορούμε να παραγάγουμε ακόμη ένα, χρησιμοποιώντας τις $1-U_1, \dots, 1-U_n$. Τότε, όλες αυτές οι τιμές προέρχονται από την ίδια κατανομή, και τα ζεύγη $(U_i, 1-U_i)$ είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους, για διαφορετικά i . Συνδυάζοντας τα n αντιθετικά ζεύγη, λαμβάνουμε πάλι ένα μονοπάτι, και ως αποτέλεσμα, επιτυγχάνουμε μείωση της διασποράς κατά την εκτίμηση της εκάστοτε ποσότητας.

Το ίδιο μπορούμε να πράξουμε και με άλλες κατανομές, μέσω της μεθόδου του αντίστροφου μετασχηματισμού. Αν F μια συνάρτηση κατανομής, τότε οι τυχαίες τιμές $F^{-1}(U)$ και $F^{-1}(1-U)$ έχουν την ίδια κατανομή, καθώς επίσης αποτελούν ένα ζεύγος αντιθετικών τιμών, μια και η F^{-1} είναι μονότονη συνάρτηση. Επίσης, αν η κατανομή είναι συμμετρική γύρω από το μηδέν, με την έννοια ότι $\mu_F(A) = \mu_F(-A)$, για κάθε Borel-μετρήσιμο σύνολο $A \in \mathbb{R}$, όπου $\mu_F(-\infty, x] = F(x)$, τότε οι $F^{-1}(1-x)$ και $F^{-1}(x)$ είναι ίδιες κατ' απόλυτη τιμή, αλλά έχουν αντίθετα πρόσημα.

Αν λόγου χάρη κατά την εκτίμηση μιας ποσότητας πρόκειται να χρησιμοποιήσουμε n ανεξάρτητες, τυπικές κανονικές τιμές, Z_1, \dots, Z_n , τότε θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε αντιθετικές μεταβλητές και να συνδυάσουμε τις n αυτές τιμές με τις $-Z_1, \dots, -Z_n$. Πιο συγκεκριμένα, αν θέλουμε να εκτιμήσουμε την $\mathbb{E}[f(Z)]$, $Z \sim N(0, 1)$, όπου f μια αύξουσα συνάρτηση, τότε μπορούμε αντί του δειγματικού μέσου, να χρησιμοποιήσουμε την *εκτιμήτρια αντιθετικών μεταβλητών*

$$f(\bar{Z}) = \frac{\sum_{i=1}^n (f(Z_i) + f(-Z_i))}{2n},$$

όπου Z_i ανεξάρτητες τυπικές κανονικές τιμές, $i = 1, \dots, n$.

Από το νόμο των μεγάλων αριθμών,

$$f(\bar{Z}) \rightarrow \mathbb{E}[f(Z)] \quad \text{σχεδόν σίγουρα,}$$

διότι τα αντιθετικά ζεύγη $(Z_i, -Z_i)$ είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους, ενώ επίσης

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\frac{f(Z_i) + f(-Z_i)}{2} \right] &= \frac{1}{2} (\mathbb{E}[f(Z_i)] + \mathbb{E}[f(-Z_i)]) \\ &= \mathbb{E}[f(Z_i)], \end{aligned}$$

εφόσον $-Z_i \sim N(0, 1)$ όταν $Z_i \sim N(0, 1)$.

Ας δούμε μέσα από ένα παράδειγμα πώς επιτυγχάνουμε ελάττωση διασποράς κατά την εκτίμηση.

Παράδειγμα Θα εκτιμήσουμε την $\mathbb{E}[e^{\alpha X}]$, όπου $X \sim N(0, 1)$, με χρήση αντιθετικών μεταβλητών. Παραγάγουμε n ανεξάρτητες τυπικές κανονικές τιμές X_1, \dots, X_n , κα-

θώς και τις αντιθετικές τους, $-X_1, \dots, -X_n$. Αντί του δειγματικού μέσου,

$$\hat{E} = \frac{e^{\alpha X_1} + \dots + e^{\alpha X_n}}{n},$$

υπολογίζουμε την εκτιμήτρια αντιθετικών μεταβλητών,

$$\hat{E}_{ant} = \frac{e^{\alpha X_1} + e^{-\alpha X_1} + \dots + e^{\alpha X_n} + e^{-\alpha X_n}}{2n}.$$

Στην πρώτη περίπτωση, η διασπορά είναι:

$$\begin{aligned} \text{Var}[e^{\alpha X}] &= \mathbb{E}[e^{2\alpha X}] - (\mathbb{E}[e^{\alpha X}])^2 \\ &= e^{2\alpha^2} - e^{\alpha^2} \\ &= e^{\alpha^2}(e^{\alpha^2} - 1), \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι $\mathbb{E}[e^{\alpha X}] = e^{\alpha\mu + \frac{1}{2}\alpha^2\sigma^2}$, όταν $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Γνωρίζουμε ότι

$$\mathbb{E}\left[\frac{e^{\alpha X} + e^{-\alpha X}}{2}\right] = \mathbb{E}[e^{\alpha X}].$$

Άρα, στην περίπτωση των αντιθετικών μεταβλητών, έχουμε:

$$\begin{aligned} \text{Var}\left[\frac{e^{\alpha X} + e^{-\alpha X}}{2}\right] &= \mathbb{E}\left[\left(\frac{e^{\alpha X} + e^{-\alpha X}}{2}\right)^2\right] - \mathbb{E}\left[\frac{e^{\alpha X} + e^{-\alpha X}}{2}\right]^2 \\ &= \mathbb{E}\left[\frac{e^{2\alpha X} + e^{-2\alpha X} + 2}{4}\right] - e^{\alpha^2} \\ &= \frac{2e^{2\alpha^2} + 2}{4} - e^{\alpha^2} \\ &= \frac{(e^{\alpha^2} - 1)^2}{2}. \end{aligned}$$

Συγκρίνοντας τη διασπορά των δύο, έχουμε ότι

$$\sigma_{ant}^2 = \frac{e^{\alpha^2} - 1}{2e^{\alpha^2}}\sigma^2 < \frac{1}{2}\sigma^2,$$

δηλαδή, η εκτιμήτρια \hat{E}_{ant} μάς δίνει μικρότερη διασπορά από τη συμβατική, \hat{E} .

Γενικότερα, έστω f μία πραγματική συνάρτηση ορισμένη σε ένα χώρο \mathbb{X} , και X μια τυχαία μεταβλητή που παίρνει τιμές στον \mathbb{X} , με κατανομή

$$\mu_X(A) = \mathbb{P} \circ X^{-1}(A) = \mathbb{P}(\omega : X(\omega) \in A).$$

Έστω R μία συνάρτηση από το \mathbb{X} στο \mathbb{X} , όπου υποθέτουμε ότι $R^2 = I$, και ότι η R αφήνει την κατανομή της X αναλλοίωτη, δηλαδή, $\mu_X \circ R^{-1} = \mu_X$. Τότε, οι X και RX θα έχουν την ίδια κατανομή, διότι

$$\mu_{RX} = \mathbb{P} \circ (R \circ X)^{-1} = \mathbb{P} \circ X^{-1} \circ R^{-1} = \mu_X \circ R^{-1} = \mu_X.$$

Η συνάρτηση f μπορεί να γραφεί ως

$$f(x) = f_s(x) + f_{as}(x) = \frac{f(x) + f(Rx)}{2} + \frac{f(x) - f(Rx)}{2},$$

όπου f_s το συμμετρικό και f_{as} το αντισυμμετρικό κομμάτι της f , με την έννοια ότι $f_s(Rx) = f_s(x)$ και $f_{as}(Rx) = -f_{as}(x)$. Παρατηρούμε ότι $\mathbb{E}[f_{as}(X)] = 0$, διότι

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f_{as}(X)] &= \mathbb{E} \left[\frac{f(X) - f(RX)}{2} \right] \\ &= \int \frac{f(x) - f(Rx)}{2} d\mu_X(x), \quad y = Rx, x = Ry \\ &= \int \frac{f(Ry) - f(y)}{2} d\mu_X \circ R^{-1}(y) \\ &= \int \frac{f(Ry) - f(y)}{2} d\mu_X(y) \\ &= \mathbb{E} \left[\frac{f(RX) - f(X)}{2} \right] \\ &= -\mathbb{E}[f_{as}(X)]. \end{aligned}$$

Συνοπάγεται ότι

$$\mathbb{E}[f(X)] = \mathbb{E}[f_s(X)].$$

Επομένως, αν η ποσότητα προς εκτίμηση είναι η $\mathbb{E}[f(X)]$, τότε αντί της εκτιμήτριας

$$f(\bar{X}) = \frac{f(X_1) + \dots + f(X_n)}{n},$$

θεωρούμε την *εκτιμήτρια αντιθετικών μεταβλητών*

$$\begin{aligned} f_s(\bar{X}) &= \frac{f_s(X_1) + \dots + f_s(X_n)}{n} \\ &= \frac{f(X_1) + f(RX_1) + \dots + f(X_n) + f(RX_n)}{2n}. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την $f_s(\bar{X})$ αντί της $f(\bar{X})$ επιτυγχάνουμε ελάττωση διασποράς:

$$\begin{aligned} \text{Var}[f_s(X)] &= \text{Var} \left[\frac{f(X) + f(RX)}{2} \right] \\ &= \frac{1}{4} \text{Var}[f(X) + f(RX)] \\ &= \frac{1}{4} (\text{Var}[f(X)] + \text{Var}[f(RX)] + 2\text{Cov}[f(X), f(RX)]) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4}(2\text{Var}[f(X)] + 2\text{Cov}[f(X), f(RX)]) \\
&\leq \frac{1}{4}(2\text{Var}[f(X)] + 2\sqrt{\text{Var}[f(X)]}\sqrt{\text{Var}[f(RX)]}) \\
&= \text{Var}[f(X)],
\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα Cauchy-Schwarz.

3.2.1 Εφαρμογή

Στο δεύτερο κεφάλαιο εκτιμήσαμε με προσομοίωση Monte Carlo την τιμή του ολοκληρώματος

$$a = \int_{-\infty}^{\infty} e^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi} e$$

Στα Σχήματα 3.5 και 3.6 φαίνεται η ελάττωση διασποράς που πετυχαίνουμε κατά την εκτίμηση αν αντί της συμβατικής εκτιμήτριας Monte Carlo για το ολοκλήρωμα,

$$\hat{a} = \sqrt{2\pi} \frac{\sum_{i=1}^n e^{X_i}}{n},$$

χρησιμοποιήσουμε την εκτιμήτρια αντιθετικών μεταβλητών

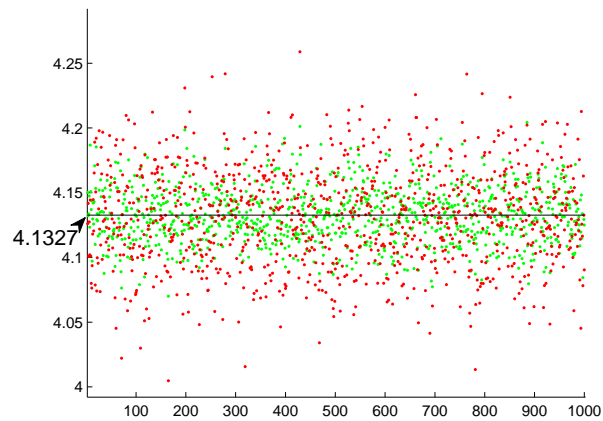
$$\hat{a}_{ant} = \sqrt{2\pi} \frac{\sum_{i=1}^n \{e^{X_i} + e^{-X_i}\}}{2n}.$$

Κατά μέσο όρο, η πραγματοποίηση μίας εκτίμησης του ολοκληρώματος με $n = 20000$ σημεία, μέσω της απλής εκτιμήτριας Monte Carlo, \hat{a} , απαιτεί $\tau_{noantithetic} = 0.0044$ δευτερόλεπτα, ενώ η πραγματοποίηση μιας εκτίμησης μέσω της εκτιμήτριας αντιθετικών μεταβλητών, \hat{a}_{ant} , χρειάζεται $\tau_{antithetic} = 0.0067$ δευτερόλεπτα. Παράλληλα, η εισαγωγή αντιθετικών μεταβλητών ελαττώνει τη διασπορά της εκτίμησης σε σχέση με την εκτίμηση χωρίς αντιθετικές μεταβλητές. Συγκεκριμένα, από στοιχεία που έδωσε το Σχήμα 3.5, τα πράσινα σημεία, που αντιστοιχούν στην εκτίμηση με αντιθετικές μεταβλητές έχουν διασπορά $\sigma_{antithetic}^2 = 0.0215^2$, ενώ τα κόκκινα σημεία, που προέξυψαν από τη συμβατική εκτιμήτρια έχουν διασπορά $\sigma_{noantithetic}^2 = 0.0382^2$. Συγκρίνοντας τα γινόμενα $\sigma^2 \times \tau$, βρίσκουμε ότι η εκτιμήτρια αντιθετικών μεταβλητών στην περίπτωση αυτή είναι αποδοτικότερη:

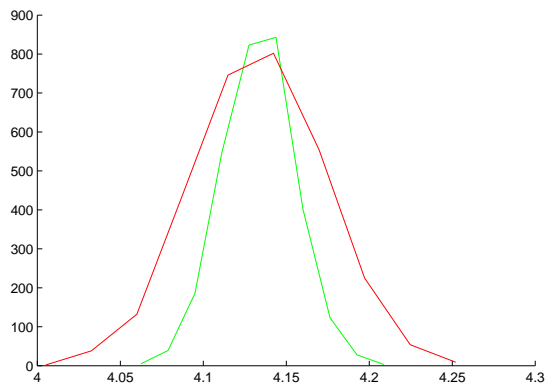
$$\sigma_{noantithetic}^2 \times \tau_{noantithetic} = 6.42 \times 10^{-6} > 3.097 \times 10^{-6} = \sigma_{antithetic}^2 \times \tau_{antithetic}.$$

3.3 Importance Sampling

Στο δεύτερο κεφάλαιο είδαμε ότι μία αλλαγή του μέτρου πιθανότητας, ως προς το οποίο υπολογίζουμε μία μέση τιμή, μπορεί να διευκολύνει σημαντικά τον υπολογισμό της μέσης τιμής. Στην παρούσα ενότητα, θα δούμε πώς μία αλλαγή



Σχήμα 3.5: Οι κόκκινες κουκίδες παριστούν τις 1000 εκτιμήσεις του ολοκληρώματος με την απλή εκτιμήτρια Monte Carlo, ενώ οι πράσινες παριστούν τις 1000 εκτιμήσεις με χρήση αντιθετικών μεταβλητών κατά την εκτίμηση. Για κάθε μία από τις δύο μεθόδους εκτίμησης, χρησιμοποιήθηκε ακρίβεια 20000 σημείων ανά εκτίμηση. Η μέση τιμή των πράσινων είναι 4.1326, ενώ των κόκκινων 4.1311.



Σχήμα 3.6: Η πράσινη γραμμή παριστά την εμπειρική κατανομή των εκτιμήσεων Monte Carlo με χρήση αντιθετικών μεταβλητών, ενώ η κόκκινη παριστά την εμπειρική κατανομή χωρίς αντιθετικές μεταβλητές. Τα δύο ιστογράμματα προέκυψαν από 20.000 Monte Carlo εκτιμήσεις του ολοκληρώματος, με 3.000 σημεία ανά εκτίμηση. Η τυπική απόκλιση της πράσινης ήταν 0,0213, ενώ της κόκκινης 0,0383.

μέτρου πιθανότητας μπορεί να ελαττώσει τη διασπορά κατά την εκτίμηση. Η αλλαγή μέτρου αφορά την κατανομή από την οποία προέρχονται τα εκάστοτε μονοπάτια της εκτίμησης. Αλλάζοντας μέτρο, κατά τη μέθοδο του importance sampling, προσπαθούμε να δώσουμε περισσότερο βάρος σε «σημαντικά» δείγματα, αυξάνοντας με τον τρόπο αυτόν την αποτελεσματικότητα της δειγματοληψίας, και κατά συνέπεια την αποτελεσματικότητα της εκτίμησης.

Πιο συγκεκριμένα, ας υποθέσουμε ότι η ποσότητα προς εκτίμηση είναι η μέση τιμή

$$\alpha = \mathbb{E}[h(X)] = \int h(x)f(x)dx, \quad (3.7)$$

όπου h μία συνάρτηση από τον \mathbb{R}^d στον \mathbb{R} , και X μία τυχαία μεταβλητή στον \mathbb{R}^d , με πυκνότητα πιθανότητας f . Αν X_1, \dots, X_n ανεξάρτητες τυχαίες τιμές που λάβαμε από την πυκνότητα f , τότε η συνήθης Monte Carlo εκτιμήτρια είναι η

$$\hat{\alpha} = \hat{\alpha}(n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(X_i).$$

Έστω τώρα g μία άλλη πυκνότητα πιθανότητας στον \mathbb{R}^d , από την οποία μπορούμε να λάβουμε εύκολα δείγμα, και η οποία ικανοποιεί

$$g(x) > 0 \text{ οποτεδήποτε } f(x) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

Τότε μπορούμε να ξαναγράψουμε την 3.7 ως εξής

$$\alpha = \int h(x) \frac{f(x)}{g(x)} g(x) dx. \quad (3.8)$$

Το ολοκλήρωμα στην 3.8 μπορεί να ειπωθεί ως η αναμενόμενη τιμή της τυχαίας μεταβλητής $h(X)f(X)/g(X)$ ως προς την πυκνότητα πιθανότητας g . Επομένως η 3.7 μπορεί να γραφεί ως

$$\alpha = \tilde{\mathbb{E}} \left[h(X) \frac{f(X)}{g(X)} \right],$$

όπου η $\tilde{\mathbb{E}}$ δηλώνει ότι η X ακολουθεί κατανομή με πυκνότητα g . Επομένως, η importance sampling εκτιμήτρια που σχετίζεται με τη g θα είναι

$$\hat{\alpha}_g = \hat{\alpha}_g(n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(X_i) \frac{f(X_i)}{g(X_i)},$$

όπου X_1, \dots, X_n ανεξάρτητες τυχαίες τιμές που προήλθαν από την πυκνότητα g . Το βάρος $f(X_i)/g(X_i)$ είναι η Radon-Nikodym παράγωγος υπολογισμένη στο σημείο X_i .

Η εκτιμήτρια $\hat{\alpha}_g(n)$ είναι αμερόληπτη, καθώς $\tilde{\mathbb{E}}[\hat{\alpha}_g(n)] = \alpha$.

Ας συγκρίνουμε τη διασπορά της συμβατικής εκτιμήτριας Monte Carlo με την importance sampling εκτιμήτρια, $\hat{\alpha}_g(n)$. Η μέση τιμή και των δύο είναι α , επομένως

αρκεί να συγκρίνουμε τις δεύτερες ροπές τους. Έχουμε

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbb{E}} \left[\left(h(X) \frac{f(X)}{g(X)} \right)^2 \right] &= \int h(x)^2 \frac{f(x)^2}{g(x)^2} g(x) dx \\ &= \int h(x)^2 \frac{f(x)}{g(x)} f(x) dx \\ &= \mathbb{E} \left[h(X)^2 \frac{f(X)}{g(X)} \right].\end{aligned}$$

Επομένως, ανάλογα με την επιλογή της πυκνότητας g , η τελευταία παράσταση μπορεί να είναι μικρότερη ή μεγαλύτερη από τη δεύτερη ροπή της συμβατικής εκτιμήτριας, $\mathbb{E}[h(X)^2]$. Συνεπώς, η αποτελεσματικότητα της importance sampling εκτιμήτριας είναι αλληλένδετη με την επιλογή της κατάλληλης πυκνότητας g .

Ας υποθέσουμε ότι h θετική. Τότε, αν μπορούσαμε να επιλέξουμε ως g την

$$g = \frac{h(x)f(x)}{\int h(x)f(x)dx},$$

θα είχαμε

$$\begin{aligned}\tilde{Var} \left[h(X) \frac{f(X)}{g(X)} \right] &= \tilde{\mathbb{E}} \left[\left(h(X) \frac{f(X)}{g(X)} \right)^2 \right] - \left(\tilde{\mathbb{E}} \left[h(X) \frac{f(X)}{g(X)} \right] \right)^2 \\ &= \int \frac{h(x)^2 f(x)^2}{\int h(y)f(y)dy} dx - \left(\int h(x)f(x)dx \right)^2 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Συμπεραίνουμε ότι αυτή θα ήταν η βέλτιστη επιλογή για την πυκνότητα g , μια και η διασπορά εκμηδενίζεται. Ωστόσο, ο ορισμός της g παραπάνω απαιτεί γνώση της $\mathbb{E}[h(X)]$, που είναι και η ποσότητα προς εκτίμηση. Άρα, η επιλογή αυτής της g είναι αδύνατη. Παρ' όλα αυτά, από τη μορφή της βέλτιστης g , περιμένουμε ότι, για να βελτιώσουμε την εκτίμηση, θα πρέπει η δειγματοληψία να γίνεται από μια τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα πιθανότητας ανάλογη του γινομένου $h \cdot f$. Επιλέγουμε, δηλαδή, τη g ανάλογη του γινομένου των h και f . Κατά την τιμολόγηση παραγώγων, η h είναι συνήθως μία προεξοφλημένη απόδοση, ενώ η f είναι η άνευ κινδύνου πυκνότητα πιθανότητας που αντιστοιχεί σε ένα διακριτό μονοπάτι τιμών προϊόντων. Σε αυτήν την περίπτωση, όσο μεγαλύτερο είναι το γινόμενο της προεξοφλημένης απόδοσης επί την πυκνότητα πιθανότητας ενός μονοπατιού, τόσο σημαντικότερο θεωρείται το συγκεκριμένο μονοπάτι.

Παραδείγματα:

Παράδειγμα 1) Έστω X μία τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα f . Αν θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα ενός συνόλου $A \subset \mathbb{R}^d$, τότε η h είναι η δείκτρια συνάρτηση του συνόλου αυτού, $h(x) = I_{\{x \in A\}}$. Η importance sampling εκτιμή-

τρια που δίνει μηδενική διασπορά θα είναι η

$$g(x) = \frac{h(x)f(x)}{\mathbb{P}(X \in A)}.$$

Η παραπάνω είναι η δεσμευμένη πυκνότητα πιθανότητας της X δεδομένου ότι $X \in A$. Σύμφωνα με τα παραπάνω, όταν εφαρμόσουμε τη μέθοδο του importance sampling για να βρούμε την πιθανότητα $\mathbb{P}(X \in A)$, θα πρέπει η g που θα επιλέξουμε να προσεγγίζει τη δεσμευμένη πυκνότητα. Δηλαδή, θα πρέπει η g να δίνει περισσότερο βάρος στο ενδεχόμενο $\{X \in A\}$.

Παράδειγμα 2) Έστω ότι έχουμε να υπολογίσουμε την

$$\mathbb{E}[(e^X - 1)^+],$$

όπου $X \sim N(0, 1)$. Θα θέλαμε να επιλέξουμε την πυκνότητα g έτσι, ώστε $g(x) \sim (e^x - 1)^+ e^{-x^2/2}$, όμως η τελευταία δεν είναι εύκολο να προσομοιωθεί. Ωστόσο, για μικρά $x > 0$,

$$(e^x - 1)^+ e^{-x^2/2} \sim x^+ e^{-x^2/2},$$

ενώ για μεγάλα x , οι δύο συναρτήσεις παίρνουν μικρές τιμές. Συμπεραίνουμε ότι η $(e^x - 1)^+ e^{-x^2/2}$ έχει τα ίδια ποιοτικά χαρακτηριστικά με την $x^+ e^{-x^2/2}$, η οποία είναι η πυκνότητα πιθανότητας της τετραγωνικής ρίζας μιας εκθετικής τυχαίας μεταβλητής, και η εκθετική προσομοιώνεται εύκολα. Έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(e^X - 1)^+] &= \int_{-\infty}^{\infty} (e^x - 1)^+ e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(e^x - 1)^+}{|x|} |x| e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \\ &= \int_0^{\infty} \frac{e^x - 1}{x} x e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}, \quad y = x^2/2 \\ &= \int_0^{\infty} \frac{e^{\sqrt{2y}} - 1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2y}} e^{-y} dy \\ &= \tilde{\mathbb{E}} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{\sqrt{2Y}} - 1}{\sqrt{2Y}} \right], \end{aligned}$$

όπου $Y \sim \text{exp}(1)$, και η $\tilde{\mathbb{E}}$ δηλώνει μέση τιμή ως προς την εκθετική κατανομή με παράμετρο 1. Αν $Y \sim \text{exp}(1)$, τότε $\sqrt{2Y} \sim x^+ e^{-\frac{x^2}{2}}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\sqrt{2Y} \leq y) &= \mathbb{P}\left(Y \leq \frac{y^2}{2}\right) \\ &= \int_0^{y^2/2} e^{-x} dx, \quad x = z^2/2 \\ &= \int_0^y z e^{-z^2/2} dz \end{aligned}$$

$$= \int_{-\infty}^y z^+ e^{-z^2/2} dz.$$

Κεφάλαιο 4

Αξία σε κίνδυνο και στοχαστικά μοντέλα επιτοκίου

Ένα χαρτοφυλάκιο αποτελούμενο από χρηματιστηριακά προϊόντα εμπεριέχει κίνδυνο. Με τον όρο κίνδυνος του χαρτοφυλακίου εννοούμε όλους τους παράγοντες που μπορεί να επιφέρουν μεγάλες και απότομες μεταβολές στις τιμές των προϊόντων του χαρτοφυλακίου και, κατά συνέπεια, ζημιά στον κάτοχό του. Ο στόχος είναι η μοντελοποίηση και η μέτρηση του κινδύνου που σχετίζεται με ένα χαρτοφυλάκιο. Στο παρόν κεφάλαιο θα αναφερθούμε συνοπτικά στους λόγους για τους οποίους είναι απαραίτητη η μέτρηση του κινδύνου. Αρχικά θα ορίσουμε ένα συγκεκριμένο μέτρο κινδύνου, ιδιαίτερα διαδεδομένο, και στη συνέχεια θα δούμε τους διαφορετικούς τρόπους μέτρησής του. Έπειτα θα εφαρμόσουμε τη θεωρία αυτή σε ένα συγκεκριμένο χαρτοφυλάκιο.

4.1 Αξία σε κίνδυνο (VaR)

Το καλοκαίρι του 1988 ξεκίνησε μία προσπάθεια διαμόρφωσης ενός συστήματος κανόνων για τις τράπεζες, με τη δημοσίευση του Συμφώνου της Βασιλείας για την Κεφαλαιακή Επάρκεια με τίτλο "Διεθνής Σύγκληση της Κεφαλαιακής Μέτρησης και των Κεφαλαιακών Προτύπων". Στόχος του Συμφώνου ήταν η ενίσχυση της ικανότητας των τραπεζών να απορροφούν ζημίες, σε περίπτωση που επέλθουν απρόβλεπτοι κίνδυνοι, στους οποίους εκτίθενται οι τράπεζες με τη λειτουργία τους. Το Σύμφωνο αυτό έχει διαμορφωθεί σταδιακά από τότε. Το 1996 έγινε μία σημαντική τροποποίησή του. Εκτός από τον πιστωτικό κίνδυνο (credit risk) προστέθηκε και ο κίνδυνος αγοράς (market risk).

Σήμερα, το ισχύον σύστημα κανόνων καλείται Σύμφωνο για την Κεφαλαιακή Επάρκεια (Βασιλεία II) και εκδόθηκε στις 26 Ιουνίου του 2004. Είναι αποτέλεσμα της προσπάθειας που ξεκίνησε το 1999 με στόχο τη ριζική τροποποίηση του πλαισίου προκειμένου να αντανακλά σε μεγαλύτερο βαθμό τις πρακτικές της αγοράς. Προάγει την ενισχυμένη διαχείριση του κινδύνου από τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα, γεγονός που συμβάλλει στη σταθερότητα του χρηματοπιστωτικού συστήματος, και αναμένεται να εμπνέει την εμπιστοσύνη των καταναλωτών και να ενισχύσει την προστασία των επενδύσεών τους. Οι προτάσεις που περιλαμβάνονται στη Βασιλεία II κινούνται πάνω στους εξής άξονες:

- 1) Υπολογισμός ελάχιστων κεφαλαιακών υποχρεώσεων έναντι του πιστωτικού και του επενδυτικού κινδύνου
- 2) Διαδικασία εποπτικής αξιολόγησης
- 3) Ενίσχυση της πειθαρχίας που επιβάλλει η αγορά στις τράπεζες μέσω της καθιέρωσης κανόνων γνωστοποίησης οικονομικών και άλλων στοιχείων.

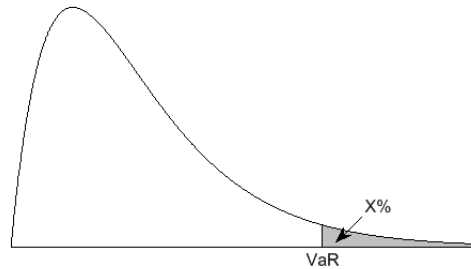
Το Σύμφωνο Βασιλεία II τέθηκε σε εφαρμογή τον Ιανουάριο του 2007, και οι κανόνες του έχουν ενσωματωθεί στο ελληνικό δίκαιο.

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με την ποσοτικοποίηση του επενδυτικού κινδύνου ενός χαρτοφυλακίου.

Υπάρχουν διάφορα μέτρα που σκοπό έχουν να καταγράψουν το μέγεθος του κινδύνου που εμπεριέχει ένα χαρτοφυλάκιο. Τα μέτρα αυτά εστιάζουν συνήθως σε διαφορετικούς παράγοντες του κινδύνου το καθένα. Σε ένα πολύπλοκο χαρτοφυλάκιο το πλήθος των παραμέτρων που επηρεάζουν τις τιμές των παραγώγων του είναι πολύ μεγάλο. Αυτό καθιστά τα πολλά και διαφορετικά μέτρα του κινδύνου αναποτελεσματικά όταν καλούνται να αποτυπώσουν τον κίνδυνο ενός χαρτοφυλακίου καθολικά. Παραδείγματα μέτρων που εξαρτώνται από διαφορετικές παραμέτρους αποτελούν οι παράμετροι Greeks του χαρτοφυλακίου, όπως η ευαισθησία της αξίας του χαρτοφυλακίου σε μεταβολές της αξίας ενός προϊόντος, σε μεταβολές της αξίας του επιτοκίου κ.τ.λ. Η αξία σε κίνδυνο είναι ένα μέτρο που προσπαθεί να συγκεντρώσει το μέγεθος του κινδύνου ενός χαρτοφυλακίου σε έναν και μόνο αριθμό. Αναγνωρίστηκε ευρέως ως ένα μέτρο του κινδύνου στα τέλη της δεκαετίας του '90. Αποτελεί το πιο ευρέως διαδεδομένο μέτρο κινδύνου. Ακριβέστερα, η αξία σε κίνδυνο θα μπορούσε να καλείται μέτρο κεφαλαιακής επάρκειας, μια και χρησιμοποιείται συνήθως για να προσδιοριστεί το απαραίτητο κεφάλαιο που ένας χρηματιστηριακός οργανισμός πρέπει να διαθέτει ώστε να μπορέσει να αντεπεξέλθει στους πιθανούς και αναπάντεχους κινδύνους της αγοράς.

Ο υπολογισμός της αξίας σε κίνδυνο σε καθημερινή βάση και η αποταμίευση επαρκούς κεφαλαίου ανάλογα με την τιμή της, είναι ένας υποχρεωτικός κανόνας που πρέπει να ακολουθεί κάθε τραπεζικός οργανισμός σήμερα. Ο κανόνας αυτός, μεταξύ άλλων, προβλέπεται από το πλαίσιο κεφαλαιακής επάρκειας που ορίζει η Επιτροπή της Βασιλείας για την Τραπεζική Εποπτεία.

Η αξία σε κίνδυνο μετρά -με κάποια πιθανότητα- τη μέγιστη ζημία που μπορεί να



Σχήμα 4.1: $(100 - X)\%$ – Αξία σε κίνδυνο (VaR)

επιφέρει ένα χαρτοφυλάκιο μέσα σε ένα πεπερασμένο χρονικό ορίζοντα. Είναι ένα ποσοστημόριο της κατανομής της ζημίας σε ένα σταθεροποιημένο ορίζοντα. Πιο συγκεκριμένα,

αν είμαστε $X\%$ βέβαιοι ότι η ζημία ενός χαρτοφυλακίου A δε θα ξεπεράσει τις V μονάδες χρήματος μέσα στις επόμενες N ημέρες, τότε η αξία σε κίνδυνο του χαρτοφυλακίου A είναι η ποσότητα V .

Πιο αναλυτικά, αν F_L είναι η κατανομή της ζημίας L ή της μεταβολής της αξίας του χαρτοφυλακίου, έπειτα από N ημέρες, τότε η $(100 - X)\%$ αξία σε κίνδυνο είναι ένα σημείο V που ικανοποιεί

$$\mathbb{P}(L > V) = 1 - F_L(V) = X,$$

όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.1.

Η VaR εξαρτάται από δύο παράγοντες: το N , που είναι ο χρονικός ορίζοντας, και το X , που παριστά το επίπεδο εμπιστοσύνης.

Ένα ποσοστημόριο παρέχει έναν απλό τρόπο για να κωδικοποιήσουμε μια πληροφορία για την ουρά μιας κατανομής.

Αξίζει να σημειωθεί ότι η κατανομή της ζημίας κατά τη διαχείριση του κινδύνου είναι η κατανομή υπό το αντικειμενικό μέτρο πιθανότητας που περιγράφει τα παρατηρούμενα γεγονότα της αγοράς, και όχι το άνευ κινδύνου μέτρο ή κάποιο άλλο martingale μέτρο. Κατά συνέπεια, τα ιστορικά γεγονότα είναι άμεσα συσχετισμένα με τη μοντελοποίηση της μεταβολής της αξίας του χαρτοφυλακίου.

Κατά τον υπολογισμό της αξίας σε κίνδυνο, οι τράπεζες χρησιμοποιούν χρονικό ορίζοντα 10 ημερών και επίπεδο εμπιστοσύνης 99%. Ενδιαφέρονται, δηλαδή, για εκείνο το επίπεδο της ζημίας που, μέσα στις επόμενες 10 ημέρες, θα ξεπεραστεί με πιθανότητα μόνο στα 1%. Αφού υπολογιστεί η τιμή της, η απαίτηση είναι η τράπεζα να διαθέτει κεφάλαιο μεγαλύτερο η ίσο με 3 φορές την αξία της σε κίνδυνο.

Υπολογισμός της αξίας σε κίνδυνο

Η παράμετρος του χρονικού ορίζοντα δεν παίζει ιδιαίτερο ρόλο στην πράξη, καθότι οι τιμές της αξίας σε κίνδυνο με χρονικό ορίζοντα μεγαλύτερο της μίας ημέρας εκτιμώνται από την αξία σε κίνδυνο με ορίζοντα μία ημέρα. Δηλαδή, μπορούμε να θέσουμε $N = 1$. Αυτό συμβαίνει διότι, δεν υπάρχουν δεδομένα για να εκτιμήσουμε τη συμπεριφορά των μεταβλητών της αγοράς σε διάστημα μεγαλύτερο της μίας ημέρας. Έτσι, για να βρούμε την N ημερών αξία σε κίνδυνο, βρίσκουμε την μίας ημέρας αξία σε κίνδυνο, και στη συνέχεια θέτουμε

$$N - \text{ημερών } VaR = \sqrt{N} \times (1 - \text{ημέρας } VaR). \quad (4.1)$$

Στην περίπτωση που οι μεταβολές της αξίας του χαρτοφυλακίου, από μέρα σε μέρα, είναι ανεξάρτητες, κανονικές τυχαίες μεταβλητές, με μέση τιμή 0, η 4.1 υπολογίζει την αξία σε κίνδυνο για περίοδο N ημερών ακριβώς. Διαφορετικά, ο υπολογισμός είναι προσεγγιστικός.

Υπάρχουν τρεις τρόποι για να υπολογίσουμε την αξία σε κίνδυνο: με ιστορική προσομοίωση, με την προσέγγιση διακυμάνσεων - συνδιακυμάνσεων, ή με προσομοίωση Monte Carlo.

Ιστορική προσομοίωση

Κατά την ιστορική προσομοίωση για τον υπολογισμό της αξίας σε κίνδυνο, χρησιμοποιούμε δεδομένα από το παρελθόν ως οδηγό για να εκτιμήσουμε τι πρόκειται να συμβεί στο μέλλον. Προτού προχωρήσουμε στην εκτίμηση της αξίας σε κίνδυνο, πρέπει να προσδιορίσουμε τις διάφορες μεταβλητές που επηρεάζουν την αξία του χαρτοφυλακίου, να εντοπίσουμε δηλαδή τις πηγές του κινδύνου για το χαρτοφυλάκιό μας. Παράγοντες κινδύνου είναι παραδείγματος χάριν οι δείκτες ισοτιμίας, οι δείκτες επιτοκίου, κ.ά.

Έστω ότι έχουμε στη διάθεσή μας δεδομένα που αφορούν τις ημερήσιες μεταβολές των τιμών των μεταβλητών που επηρεάζουν το χαρτοφυλάκιο, για μία περίοδο K ημερών στο παρελθόν. Τότε, αυτές οι K διαφορετικές τιμές μεταβολής αποτελούν K διαφορετικά σενάρια για το τι πρόκειται να συμβεί στην τιμή κάθε μεταβλητής από σήμερα έως αύριο. Το i -οστό σενάριο είναι η μεταβολή στις μεταβλητές κινδύνου από την $(i-1)$ -οστή στην i -οστή ημέρα στο παρελθόν, $i = 1, 2, \dots, K$. Κατά συνέπεια, είναι διαφορετικά σενάρια για τη μεταβολή της αξίας του χαρτοφυλακίου από τη σημερινή ημέρα στην αυριανή. Τα διαφορετικά αυτά σενάρια μάς παρέχουν μία κατανομή πιθανότητας για τις ημερήσιες μεταβολές της αξίας του χαρτοφυλακίου. Η $(100 - X)\%$, 1-ημέρας αξία σε κίνδυνο προσδιορίζεται από την $[XK/100]$ -οστή μεγαλύτερη σε μείωση μεταβολή της αξίας του χαρτοφυλακίου, μεταξύ των K σεναρίων.

Συνεπώς, αν υποθέσουμε ότι τα ιστορικά δεδομένα στα οποία βασιστήκαμε ανακλούν τις πιθανές μεταβολές στην αξία του χαρτοφυλακίου σήμερα, θα είμαστε $(100 - X)\%$ βέβαιοι ότι δε θα έχουμε μεγαλύτερη ζημία από την αξία σε κίνδυνο που υπολογίσαμε.

Αναλυτικότερα, έστω ότι σήμερα βρισκόμαστε στην ημέρα m και επιθυμούμε να εκτιμήσουμε την 1-ήμερας αξία σε κίνδυνο. Έστω v_i η παρατηρούμενη τιμή μίας μεταβλητής κινδύνου κατά την ημέρα i , $i = 1, 2, \dots, K$. Το i -οστό σενάριο υποθέτει ότι η αυριανή τιμή της μεταβλητής θα είναι

$$v_{m+1} = v_m \frac{v_i}{v_{i-1}}.$$

Τον ίδιο υπολογισμό κάνουμε και για τις υπόλοιπες μεταβλητές κινδύνου στην αγορά, και, συλλέγοντας όλες αυτές τις τιμές, υπολογίζουμε τη μεταβολή της αξίας του χαρτοφυλακίου από τη μέρα m στη μέρα $(m+1)$. Έχοντας K το πλήθος διαφορετικές πιθανές τιμές για τη μεταβολή, μία για κάθε ημέρα στο παρελθόν, τις διατάσσουμε, και βρίσκουμε την $[XK/100]$ -οστή χειρότερη μεταβολή, δηλαδή την $[XK/100]$ -οστή μεγαλύτερη μείωση στην αξία του χαρτοφυλακίου. Η τιμή αυτή αποτελεί την εκτίμηση για την 1-ήμερας αξία σε κίνδυνο με επίπεδο εμπιστοσύνης $X\%$.

Η εκτίμηση της αξίας σε κίνδυνο συντελείται κάθε μέρα. Με το πέρας της μέρας $(m+1)$, γνωρίζουμε τις παρατηρούμενες στην αγορά μεταβολές των μεταβλητών κινδύνου, και θέλουμε να υπολογίσουμε την αξία σε κίνδυνο για την επόμενη ημέρα, τη $(m+2)$. Θεωρούμε λοιπόν τη μέρα $(m+1)$ ως την K -οστή ημέρα των ιστορικών δεδομένων μας, και με χρήση των K σεναρίων ακολουθούμε την παραπάνω διαδικασία για να υπολογίσουμε την αυριανή αξία σε κίνδυνο, κ.ο.κ.

Μοντελοποίηση της μεταβολής της αξίας του χαρτοφυλακίου (Προσέγγιση διακυμάνσεων - συνδιακυμάνσεων)

Η παράμετρος της αστασίας

Στο μοντέλο αυτό υποθέτουμε ότι για μικρό χρονικό ορίζοντα οι μεταβολές στις τιμές των προϊόντων με κίνδυνο ακολουθούν κανονική κατανομή με μέση τιμή μηδέν, οπότε οι παράμετροι που το χαρακτηρίζουν είναι οι διακυμάνσεις και οι συνδιακυμάνσεις των τιμών των προϊόντων. Κατά την τιμολόγηση παραγώγων, ο χρόνος μετρείται σε έτη, και έτσι, η αστασία των προϊόντων της αγοράς υπολογίζεται σε έτη επίσης. Παραπάνω είδαμε ότι, η αξία σε κίνδυνο υπολογίζεται σε ημερήσια βάση. Για το λόγο αυτό, όταν χρησιμοποιούμε την προσέγγιση διακυμάνσεων - συνδιακυμάνσεων για να εκτιμήσουμε την αξία σε κίνδυνο, μετράμε το χρόνο σε ημέρες, και κατά συνέπεια η αστασία των προϊόντων θεωρείται ημερήσια.

Η σχέση που συνδέει την ημερήσια με την ετήσια αστασία ενός προϊόντος είναι η ακόλουθη:

$$\sigma_{ET} = \sigma_{HM} \sqrt{252},$$

όπου σ_{ET} η ετήσια, και σ_{HM} η ημερήσια αστασία του προϊόντος. Επίσης, υποθέσαμε ότι 252 είναι το πλήθος των ημερών ανά έτος που θεωρούνται ημέρες διαξαγωγής συναλλαγών. Ισοδύναμα, η ημερήσια αστασία προκύπτει από την ετήσια μέσω της

$$\sigma_{HM} = \frac{\sigma_{ET}}{\sqrt{252}}.$$

Έτσι, η ημερήσια αστασία ενός προϊόντος ισούται περίπου με το 6% της ετήσιας αστασίας.

Προσομοίωση Monte Carlo

Θα τη δούμε μέσα από μία εφαρμογή στο τέλος του κεφαλαίου.

4.2 Στοχαστικά μοντέλα επιτοκίου

Στα προηγούμενα κεφάλαια θεωρήσαμε ότι το επιτόκιο r είναι μια ντετερμινιστική ποσότητα. Στην πραγματικότητα, τα επιτόκια μεταβάλλονται με έναν τρόπο που δε μπορούμε να προβλέψουμε. Στην παρούσα ενότητα θα αναπτύξουμε μερικά στοχαστικά μοντέλα επιτοκίου.

Θα θέλαμε να μοντελοποιήσουμε στοχαστικά τη δυναμική ενός στιγμιαίου, συνεχώς ανατοχιζόμενου ρυθμού επιτοκίου, $r(t)$.

Έστω ότι τη χρονική στιγμή 0 κάνουμε μία επένδυση αξίας 1 σε έναν καταθετικό λογαριασμό με ρυθμό επιτοκίου $r(u)$ στο χρόνο u . Τότε, η αξία της επένδυσης στο χρόνο $t > u$ θα είναι

$$\beta(t) = e^{\int_0^t r(u) du}.$$

Η παραπάνω ποσότητα είναι στοχαστική. Ωστόσο, εξακολουθεί να αποτελεί το numeraire κατά την άνευ κινδύνου τιμολόγηση.

Η αρχική αξία ενός παραγώγου με απόδοση X στην ωρίμανση T , θα είναι η αναμενόμενη τιμή ως προς το μέτρο \mathbb{P}_β της $X/\beta(T)$:

$$V_0 = \mathbb{E} \left[e^{-\int_0^T r(u) du} X \right].$$

Ειδικότερα, η αρχική αξία ενός ομολόγου όψεως 1 στην ωρίμανση T , δίνεται από:

$$B(0, T) = \mathbb{E} \left[e^{-\int_0^T r(u) du} \right].$$

Σε αυτά που ακολουθούν, εστιάζουμε κυρίως στη δυναμική του ρυθμού επιτοκίου $r(t)$ υπό το μέτρο \mathbb{P}_β .

Μοντέλο Ho-Lee

Στο μοντέλο Ho-Lee, υποθέτουμε ότι η δυναμική του επιτοκίου καθορίζεται από τη στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$dr(t) = g(t)dt + \sigma dW(t), \quad (4.2)$$

όπου g μια ντετερμινιστική συνάρτηση του χρόνου.

Μοντέλο Vasicek

Το μοντέλο αυτό περιγράφει τη δυναμική του ρυθμού επιτοκίου μέσω μιας διαδικασίας Ornstein-Uhlenbeck, δηλαδή μέσω της εξίσωσης

$$dr(t) = a(b - r(t))dt + \sigma dW(t), \quad (4.3)$$

όπου W μια τυπική κίνηση Brown, και a, b, σ θετικές σταθερές. Η drift παράμετρος στην 4.3, $(b - r(t))$, είναι θετική αν $b > r(t)$ και αρνητική αν $b < r(t)$. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα το $r(t)$ να έλκεται προς την παράμετρο b . Η ιδιότητα αυτή καλείται mean reversion, και αποτελεί ένα σημαντικό χαρακτηριστικό του μοντέλου. Ως επακόλουθο, μπορούμε να σκεφτόμαστε το b ως το μακροχρόνιο ρυθμό επιτοκίου, και το a ως το ρυθμό με τον οποίο το b έλκει το $r(t)$.

Οι διαφορικές εξισώσεις 4.3 και 4.2 ορίζουν διαδικασίες Gauss, υπό την έννοια ότι το διάνυσμα $(r(t_1), \dots, r(t_n))$ ακολουθεί πολυδιάστατη κανονική κατανομή για κάθε σταθεροποιημένο διάνυσμα χρονικών στιγμών (t_1, \dots, t_n) . Επιπλέον, ορίζουν διαδικασίες Markov, και υπάγονται στη γενικότερη κατηγορία των γενικευμένων ανελίξεων Gauss-Markov, οι οποίες ορίζονται μέσω της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης

$$dr(t) = [g(t) + h(t)r(t)] dt + \sigma(t)dW(t), \quad (4.4)$$

όπου οι g, h, σ ντετερμινιστικές συναρτήσεις του χρόνου, t . Από τον κανόνα του Itô, η λύση της 4.4 είναι

$$r(t) = e^{\int_0^t h(u)du} r(0) + \int_0^t e^{\int_s^t h(u)du} g(s)ds + \int_0^t e^{\int_s^t h(u)du} \sigma(s)dW(s). \quad (4.5)$$

Επομένως, η 4.4 παράγει μια διαδικασία Gauss και συνεπώς, προσομοίωση των επιτοκίων $r(t_1), \dots, r(t_n)$ ανάγεται στο πρόβλημα δειγματοληψίας από την πολυδιάστατη κανονική κατανομή.

Ας δούμε πως γίνεται η προσομοίωση στα παραπάνω δύο μοντέλα. Σύμφωνα με την 4.5, η λύση της 4.3, αν υποθέσουμε ότι $b = b(t)$, είναι

$$r(t) = e^{-at} r(0) + a \int_0^t e^{-a(t-s)} b(s)ds + \sigma \int_0^t e^{-a(t-s)} dW(s),$$

και ανάλογα, για κάθε $0 < u < t$, έχουμε

$$r(t) = e^{-a(t-u)} r(u) + a \int_u^t e^{-a(t-s)} b(s)ds + \sigma \int_0^t e^{-a(t-s)} dW(s).$$

Η τελευταία σχέση δηλώνει ότι, δεδομένης της τιμής $r(u)$, το $r(t)$ έχει την κανονική κατανομή με μέση τιμή

$$\mu(u, t) = e^{-a(t-u)} r(u) + a \int_u^t e^{-a(t-s)} b(s)ds, \quad (4.6)$$

και διασπορά

$$\sigma_r^2(u, t) = \sigma^2 \int_u^t e^{-2a(t-s)} ds = \frac{\sigma^2}{2a} (1 - e^{-2a(t-u)}). \quad (4.7)$$

Άρα, ο ρυθμός επιτοκίου r που περιγράφεται από το μοντέλο του Vasicek προσομοιώνεται διαδοχικά στους χρόνους $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ ως εξής:

$$r(t_{i+1}) = e^{-a(t_{i+1}-t_i)} r(t_i) + \mu(t_i, t_{i+1}) + \sigma_r(t_i, t_{i+1}) Z_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1, \quad (4.8)$$

όπου Z_1, \dots, Z_n ανεξάρτητες τυπικές κανονικές τυχαίες τιμές. Ο αλγόριθμος αυτός είναι ακριβής, διότι το διάλυμα τιμών $(r(t_1), \dots, r(t_n))$ που παράγει ακολουθεί την ίδια κατανομή με αυτήν της διαδικασίας Vasicek, στους χρόνους t_1, \dots, t_n , με κοινή αρχική τιμή $r(0)$.

Αντιθέτως, η προσομοίωση με διαδοχικές προσεγγίσεις Euler,

$$r(t_{i+1}) = r(t_i) + a(b(t_i) - r(t_i))(t_{i+1} - t_i) + \sigma \sqrt{t_{i+1} - t_i} Z_{i+1},$$

δεν είναι ακριβής, διότι περιέχει σφάλμα διακριτοποίησης.

Η ακριβής προσομοίωση της διαδικασίας Ho-Lee στην 4.2 συμπίπτει με την προσομοίωση της κίνησης Brown όταν η drift παράμετρος μεταβάλλεται με το χρόνο. Επομένως, έχουμε

$$r(t_{i+1}) = r(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} g(s) ds + \sigma \sqrt{t_{i+1} - t_i} Z_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Ας επιστρέψουμε στο μοντέλο Vasicek, όπου η συνάρτηση b είναι σταθερή, $b(t) = b$. Τότε, η προσομοίωση στην 4.8 απλοποιείται στην

$$r(t_{i+1}) = e^{-a(t_{i+1}-t_i)} r(t_i) + b \left(1 - e^{-a(t_{i+1}-t_i)}\right) + \sigma \sqrt{\frac{1}{2a} (1 - e^{-2a(t_{i+1}-t_i)})} Z_{i+1}, \quad (4.9)$$

$i = 0, \dots, n-1$. Αν επιπλέον υποθέσουμε ότι $a > 0$, τότε από τις 4.6 και 4.7 έχουμε

$$\mathbb{E}[r(t)] = e^{-at} r(0) + (1 - e^{-at}) b \xrightarrow{t \rightarrow \infty} b,$$

και

$$\text{Var}[r(t)] = \frac{\sigma^2}{2a} (1 - e^{-2at}) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{\sigma^2}{2a}.$$

Δηλαδή, ο ρυθμός επιτοκίου, $r(t)$, έχει οριακή μέση τιμή και οριακή διασπορά, καθώς επίσης ακολουθεί κανονική κατανομή. Δηλαδή,

$$\mathbb{P}(r(t) \leq x) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \Phi\left(\frac{x - b}{\sigma/\sqrt{2a}}\right), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

όπου Φ η τυπική κανονική συνάρτηση κατανομής.

Το γεγονός ότι ο ρυθμός $r(t)$ έχει οριακή κατανομή, αντανακλά την ιδιότητα mean reversion που έχει η drift παράμετρος $(b(t) - r(t))$ στο μοντέλο Vasicek με $b = b(t)$. Η οριακή κατανομή του $r(t)$ είναι μία στάσιμη κατανομή με την έννοια ότι, αν ο αρχικός ρυθμός επιτοκίου $r(0)$ είναι μια τυχαία μεταβλητή με την κατανομή αυτή, τότε, για κάθε t , ο $r(t)$ θα έχει επίσης αυτήν την κατανομή. Εφόσον η προσομοίωση στην 4.9 είναι ακριβής, η κατανομή $N(b, \sigma^2/2a)$ θα είναι επίσης στάσιμη για τη διακριτοποιημένη διαδικασία που παράγει ο αλγόριθμος. Έτσι, για να προσομοιώσουμε μία στάσιμη εκδοχή της διαδικασίας, αρκεί να λάβουμε μια τυχαία αρχική τιμή $r(0) \sim N(b, \sigma^2/2a)$, και έπειτα να ακολουθήσουμε τις διαδοχικές αναθέσεις της 4.9 για να πάρουμε τις υπόλοιπες τιμές.

Τα μοντέλα Ho-Lee και Vasicek μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την τιμολόγηση προϊόντων όπως για παράδειγμα τα ομόλογα. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, αν οι τιμές διαπραγμάτευσης των ομολόγων στην αγορά μάς είναι γνωστές, τότε μπορούμε να εκτιμήσουμε τη συνάρτηση g στο μοντέλο Ho-Lee και τη συνάρτηση b στο μοντέλο Vasicek, αν υποθέσουμε ότι η b μεταβάλλεται με το χρόνο t .

Έχουμε δει ότι, η αρχική αξία ενός ομολόγου με ωρίμανση T και αξία όψεως 1 είναι

$$B(0, T) = \mathbb{E} \left[e^{-\int_0^T r(u) du} \right].$$

Η $r(u)$ είναι μια διαδικασία Gauss. Έπεται ότι η τυχαία μεταβλητή $\int_0^T r(u) du$ ακολουθεί κανονική κατανομή. Γνωρίζουμε ότι, αν $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, τότε $\mathbb{E}[e^X] = e^{\mu + \sigma^2/2}$. Άρα εδώ,

$$B(0, T) = e^{-\mathbb{E}[\int_0^T r(t) dt] + \frac{1}{2} \text{Var}[\int_0^T r(t) dt]}. \quad (4.10)$$

Όταν το επιτόκιο καθορίζεται από τη стоχαστική διαφορική εξίσωση Ho-Lee, έχουμε:

$$r(t) = r(0) + \int_0^t g(s) ds + \sigma W(t),$$

επομένως,

$$\int_0^T r(u) du = r(0)T + \int_0^T \int_0^u g(s) ds du + \sigma \int_0^T W(u) du.$$

Άρα, στην περίπτωση αυτή,

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T r(t) dt \right] = r(0)T + \int_0^T \int_0^u g(s) ds du,$$

και

$$\begin{aligned} \text{Var} \left[\int_0^T r(t) dt \right] &= \text{Var} \left[\sigma \int_0^T W(u) du \right] \\ &= \sigma^2 \text{Var} \left[\int_0^T W(u) du \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sigma^2 \left[\mathbb{E} \left[\left(\int_0^T W(u) du \right)^2 \right] - \overbrace{\left(\mathbb{E} \left[\int_0^T W(u) du \right] \right)^2}^{=0} \right] \\
&= \sigma^2 \mathbb{E} \left[\int_0^T W(u) du \int_0^T W(t) dt \right] \\
&= \sigma^2 \int_0^T \int_0^T \mathbb{E}[W(u)W(t)] dt du, \quad \mathbb{E}[W(u)W(t)] \text{ συμμετρική} \\
&\quad \text{ως προς την ευθεία } u = t, \\
&= 2\sigma^2 \int_0^T \int_0^u \mathbb{E}[W(u)W(t)] dt du, \quad u < t \\
&= 2\sigma^2 \int_0^T \int_0^u t dt du \\
&= \sigma^2 \frac{T^3}{3}.
\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στην 4.10, παίρνουμε

$$B(0, T) = e^{-r(0)T - \int_0^T \int_0^u g(s) ds du + \sigma^2 \frac{T^3}{3}}. \quad (4.11)$$

Έστω ότι έχουμε στη διάθεσή μας ένα σύνολο τιμών ομολόγων $B(0, T)$ στο χρόνο 0. Στόχος μας είναι να προσδιορίσουμε τη συνάρτηση g , λύνοντας την 4.11. Για το σκοπό αυτό, εκφράζουμε την τιμή του ομολόγου μέσω της

$$B(0, T) = e^{-\int_0^T f(0, t) dt},$$

όπου το $f(0, t)$ παριστά το στιγμιαίο προθεσμιακό επιτόκιο τη χρονική στιγμή t , ξεκινώντας από τη χρονική στιγμή 0. Εξισώνοντας την τελευταία εξίσωση με την 4.11, και παίρνοντας λογάριθμο και στις δύο πλευρές, έχουμε

$$\begin{aligned}
r(0)T + \int_0^T \int_0^u g(s) ds du - \sigma^2 \frac{T^3}{3} &= \int_0^T f(0, t) dt \\
\frac{\partial^2}{\partial T^2} 0 + g(T) - \sigma^2 T &= \frac{\partial}{\partial T} f(0, T) \\
\Rightarrow g(t) &= \left[\frac{\partial}{\partial T} f(0, T) \right]_{T=t} + \sigma^2 t
\end{aligned}$$

Επομένως, οι τιμές που παράγει το μοντέλο Ho-Lee θα είναι κοντά στις πραγματικές τιμές $B(0, T)$ που παρατηρούνται στην αγορά, αν η συνάρτηση g και η αρχική προθεσμιακή καμπύλη $f(0, T)$ σχετίζονται σύμφωνα με την παραπάνω εξίσωση, δηλαδή, αν

$$dr(t) = \left(\left[\frac{\partial}{\partial T} f(0, T) \right]_{T=t} + \sigma^2 t \right) dt + \sigma dW(t).$$

Συνεπώς, η προσομοίωση τώρα θα γίνει

$$r(t_{i+1}) = r(t_i) + f(0, t_{i+1}) - f(0, t_i) + \sigma^2 \frac{t_{i+1}^2 - t_i^2}{2} + \sigma \sqrt{t_{i+1} - t_i} Z_{i+1},$$

δηλαδή, δε χρειάζεται να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα της g . Η προσομοίωση απλοποιείται ακόμη περισσότερο αν απαιτήσουμε οι προσομοιωμένες τιμές του επιτοκίου να ταιριάζουν με τις αγοραίες τιμές των ομολόγων μόνο σε ένα πεπερασμένο πλήθος χρονικών στιγμών, t_1, \dots, t_n .

Όταν η δυναμική του επιτοκίου ακολουθεί τη στοχαστική διαφορική εξίσωση Vasicek με $b = b(t)$, τότε,

$$r(t) = r(0) e^{at} + a \int_0^t e^{-a(t-s)} b(s) ds + \sigma \int_0^t e^{-a(t-s)} dW(s). \quad (4.12)$$

Επιθυμούμε πάλι να προσδιορίσουμε την $B(0, T)$. Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\int_0^T r(t) dt \right] &= \int_0^T \mathbb{E}[r(t)] dt \\ &= \int_0^T \left\{ r(0) e^{at} + a \int_0^t e^{-a(t-s)} b(s) ds \right\} dt \\ &= \frac{1}{a} r(0) (1 - e^{-aT}) + a \int_0^T \left(\int_0^t e^{-a(t-s)} b(s) ds \right) dt, \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \text{Var} \left[\int_0^T r(t) dt \right] &= \mathbb{E} \left[\int_0^T r(t) dt - \mathbb{E} \left[\int_0^T r(t) dt \right] \right]^2 \\ &= \mathbb{E} \left[\int_0^T \int_0^T (r(t) - \mathbb{E}[r(t)]) (r(u) - \mathbb{E}[r(u)]) dt du \right] \\ &= \int_0^T \int_0^T \mathbb{E} [(r(t) - \mathbb{E}[r(t)]) (r(u) - \mathbb{E}[r(u)])] dt du \\ &= \int_0^T \int_0^T \text{Cov}[r(t), r(u)] dt du \\ &= 2 \int_0^T \int_0^t \text{Cov}[r(t), r(u)] du dt. \end{aligned}$$

Αν $u \leq t$, έχουμε ότι,

$$\begin{aligned} \text{Cov}[r(t), r(u)] &= \text{Cov} \left[\sigma \int_0^t e^{-a(t-s)} dW(s), \sigma \int_0^u e^{-a(u-s)} dW(s) \right] \\ &= \sigma^2 \mathbb{E} \left[\int_0^t e^{-a(t-s)} dW(s) \int_0^u e^{-a(u-s)} dW(s) \right] - 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sigma^2 \mathbb{E} \left[\left(\int_0^u e^{-a(t-s)} dW(s) + \int_u^t e^{-a(t-s)} dW(s) \right) \int_0^u e^{-a(u-s)} dW(s) \right] \\
&= \sigma^2 \left(\mathbb{E} \left[\int_0^u e^{-a(t-s)} dW(s) \int_0^u e^{-a(u-s)} dW(s) \right] \right. \\
&\quad \left. + \mathbb{E} \left[\int_u^t e^{-a(t-s)} dW(s) \int_0^u e^{-a(u-s)} dW(s) \right] \right) \\
&= \sigma^2 \int_0^u e^{-a(t-s)} e^{-a(u-s)} ds \\
&= \frac{\sigma^2}{2a} \left(e^{a(u-t)} e^{-a(u+t)} \right),
\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι το $\int_0^t e^{-a(t-s)} dW(s)$ είναι ένα martingale, καθώς και την ανεξαρτησία των $\int_u^t e^{-a(t-s)} dW(s)$, $\int_0^u e^{-a(u-s)} dW(s)$. Επομένως, βρίσκουμε ότι,

$$\begin{aligned}
Var \left[\int_0^T r(t) dt \right] &= 2 \int_0^T \int_0^t \frac{\sigma^2}{2a} \left(e^{a(u-t)} e^{-a(u+t)} \right) dudt \\
&= \dots \\
&= \frac{\sigma^2}{a^2} \left(T + \frac{1}{2a} (1 - e^{-2aT}) + \frac{2}{a} (1 - e^{-aT}) \right).
\end{aligned}$$

Συνεπώς, η τιμή του ομολόγου στο μοντέλο του Vasicek είναι

$$B(0, T) = e^{\left\{ -\frac{1}{a} r(0)(1 - e^{-aT}) - a \int_0^T \left(\int_0^t e^{-a(t-s)} b(s) ds \right) dt + \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{a^2} \left(T + \frac{1}{2a} (1 - e^{-2aT}) \right) + \frac{2}{a} (1 - e^{-aT}) \right\}}.$$

Παρατηρούμε ότι, η διασπορά του $\int_0^T r(t) dt$ δεν εξαρτάται από το αρχικό επιτόκιο, $r(0)$, ενώ η μέση του τιμή είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός του $r(0)$. Αν θέσουμε

$$A(t, T) = \frac{1}{a} (1 - e^{-a(T-t)}),$$

και

$$\begin{aligned}
C(t, T) &= -a \int_t^T \int_t^u e^{-a(u-s)} b(s) ds du \\
&\quad + \frac{\sigma^2}{2a^2} \left[(T-t) + \frac{1}{2a} (1 - e^{-2a(T-t)}) + \frac{2}{a} (e^{-a(T-t)} - 1) \right],
\end{aligned}$$

τότε,

$$B(0, T) = e^{-A(0, T)r(0) + C(0, T)},$$

και γενικότερα,

$$B(t, T) = e^{-A(t, T)r(t) + C(t, T)}.$$

Δηλαδή, το $\log B(t, T)$ είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός του $r(t)$. Όπως και πριν, η συνάρτηση b παραπάνω μπορεί να επιλεγεί έτσι, ώστε να συμφωνεί με

ένα σύνολο αγοραίων τιμών ομολόγων $B(0, T)$. Αν ενδιαφερόμαστε για αντιστοίχιση με ένα πεπερασμένο σύνολο αγοραίων τιμών, $B(0, t_1), \dots, B(0, t_n)$, τότε χρειάζεται να βρεθούν μόνο οι τιμές των ολοκληρωμάτων

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{-a(t_{i+1}-s)} b(s) ds.$$

Το μειονέκτημα του μοντέλου Vasicek είναι ότι επιτρέπει στο επιτόκιο $r(t)$ να λάβει αρνητικές τιμές. Ένα μοντέλο που έχει προταθεί για να αντιμετωπιστεί το πρόβλημα αυτό, και το οποίο θα αναλύσουμε παρακάτω, είναι το μοντέλο CIR. Ανήκει στην κατηγορία των μοντέλων, όπου η αστασία της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης που καθορίζει τη συμπεριφορά του επιτοκίου πολλαπλασιάζεται με τον όρο $\sqrt{r(t)}$, δηλαδή με την τετραγωνική ρίζα του επιτοκίου.

Μοντέλο CIR (Cox, Ingersoll, Ross)

Κεντρικό χαρακτηριστικό του μοντέλου αυτού είναι η μορφή του συντελεστή αστασίας στη δυναμική που ακολουθεί το επιτόκιο. Υποθέτουμε ότι, η συμπεριφορά του επιτοκίου, r , διέπεται από τη στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$dr(t) = a(b - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t), \quad (4.13)$$

όπου W μονοδιάστατη, τυπική κίνηση Brown. Θα εξετάσουμε την περίπτωση όπου οι παράμετροι a, b είναι θετικές. Αν $r(0) > 0$, τότε το $r(t)$ θα είναι πάντοτε μη αρνητικό, ενώ, αν $2ab \geq \sigma^2$, τότε το $r(t)$ παραμένει αυστηρά θετικό, για κάθε t , σχεδόν σίγουρα. Όπως και στο μοντέλο Vasicek, ο ρυθμός $r(t)$ τείνει στη σταθερά b , με ρυθμό που ελέγχεται από την παράμετρο a . Ωστόσο, σε αντίθεση με το μοντέλο Vasicek, στο μοντέλο CIR ο συντελεστής αστασίας, $\sigma\sqrt{r(t)}$, φθίνει στο 0 καθώς $r(t) \rightarrow 0$, γεγονός που εξασφαλίζει ότι το επιτόκιο r δε θα λάβει αρνητικές τιμές. Το τελευταίο στοιχείο κάνει μοντέλα όπως το CIR ελκυστικά όταν χρειάζεται να μοντελοποιήσουμε επιτόκια.

Όλοι οι συντελεστές στην εξίσωση 4.13 θα μπορούσαν να είναι συναρτήσεις του χρόνου. Στην πράξη, είναι χρήσιμο η παράμετρος b να εξαρτάται από το χρόνο, $b = b(t)$. Τότε, όπως και στα μοντέλα Ho-Lee και Vasicek, μπορούμε να προσαρμόσουμε το μοντέλο μας στις παρατηρούμενες στην αγορά τιμές παραγώγων του επιτοκίου.

Μπορούμε να προσομοιώσουμε ένα μονοπάτι της 4.13 στους χρόνους t_1, \dots, t_n με Euler ως εξής

$$r(t_{i+1}) = r(t_i) + a(b - r(t_i))[t_{i+1} - t_i] + \sigma\sqrt{r(t_i)}\sqrt{t_{i+1} - t_i}Z_{i+1},$$

$i = 0, \dots, n-1$, όπου Z_1, \dots, Z_n ανεξάρτητες, τυπικές κανονικές τιμές. Παίρνουμε το θετικό μέρος του $r(t)$ παραπάνω, διότι η διακριτοποίηση Euler μπορεί να δώσει αρνητικές τιμές για το επιτόκιο κατά την προσομοίωση.

Η εξίσωση 4.13 δεν επιδέχεται αναλυτική λύση, όπως τα προηγούμενα δύο μοντέλα. Ωστόσο, γνωρίζουμε την κατανομή μετάβασης για τη διαδικασία που ορίζεται από την 4.13. Συγκεκριμένα, σύμφωνα με τους Feller [3] και Cox, Ingersoll, και Ross [2], η τυχαία μεταβλητή $(r(t) | r(u))$, για σταθεροποιημένο t και για κάποιο $u < t$, ακολουθεί μη κεντρική χ^2 κατανομή. Έτσι, μπορούμε να προσομοιώσουμε τα μονοπάτια της 4.13 ακριβώς, αρκεί να μπορούμε να λάβουμε δείγμα από την κατανομή αυτή. Θα δούμε πως γίνεται αυτό, σύμφωνα με την προσέγγιση του Scott [11].

Μία μη κεντρική χ^2 τυχαία μεταβλητή, $\chi_\nu'^2(\lambda)$, με ν βαθμούς ελευθερίας και παράμετρο λ , έχει κατανομή

$$\begin{aligned} F_{\chi_\nu'^2(\lambda)}(y) &= \mathbb{P}(\chi_\nu'^2(\lambda) \leq y) \\ &= e^{-\frac{\lambda}{2}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2}\lambda)^j / j!}{2^{(\nu/2)+j} \Gamma(\frac{\nu}{2} + j)} \int_0^y z^{(\nu/2)+j-1} e^{-z/2} dz, \quad \text{για } y > 0. \end{aligned}$$

Ο νόμος μετάβασης που διέπει το ρυθμό επιτοκίου στην 4.13 μπορεί να εκφραστεί ως

$$r(t) = \frac{\sigma^2(1 - e^{-a(t-u)})}{4a} \chi_d'^2 \left(\frac{4a e^{-a(t-u)}}{\sigma^2(1 - e^{-a(t-u)})} r(u) \right), \quad (4.14)$$

για $u < t$, όπου $d = 4ba/\sigma^2$. Δηλαδή, δεδομένου του $r(u)$, το $r(t)$ είναι κατανομημένο σαν

$$\sigma^2(1 - e^{-a(t-u)})/4a \quad \text{φορές μια μη κεντρική } \chi^2 \text{ τυχαία μεταβλητή,}$$

με d βαθμούς ελευθερίας, και παράμετρο λ ίση με

$$\lambda = \frac{4a e^{-a(t-u)}}{\sigma^2(1 - e^{-a(t-u)})} r(u).$$

Ισοδύναμα,

$$\mathbb{P}(r(t) \leq y | r(u)) = F_{\chi_d'^2(\lambda)} \left(\frac{4ay}{\sigma^2(1 - e^{-a(t-u)})} \right),$$

όπου το λ δίνεται από την τελευταία σχέση. Συνεπώς, μπορούμε να προσομοιώσουμε ακριβώς τη διαδικασία στην 4.13, σε διακριτές χρονικές στιγμές, αρκεί να μπορούμε να λάβουμε δείγμα από την κατανομή $F_{\chi_d'^2(\lambda)}$.

Όπως και στο μοντέλο του Vasicek, το μοντέλο CIR έχει οριακή στάσιμη κατανομή. Για $t \rightarrow \infty$, το $r(t)$ συγκλίνει κατά κατανομή στην τυχαία μεταβλητή

$$\frac{\sigma^2}{4a} \times \chi_d'^2(0),$$

δηλαδή, $\sigma^2/4a$ φορές μια τυπική $\chi_d'^2$ τυχαία μεταβλητή.

Ας δούμε τώρα πως παίρνουμε δείγμα από την κατανομή των τυχαίων μεταβλητών χ^2 και μη κεντρικής χ^2 .

Αν $\nu > 0$, ακέραιος, και Z_1, \dots, Z_ν ανεξάρτητες τυπικές κανονικές τυχαίες μεταβλητές, τότε η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής

$$Z_1^2 + Z_2^2 + \dots + Z_\nu^2$$

ονομάζεται χ^2 κατανομή με ν βαθμούς ελευθερίας. Θα συμβολίζουμε την τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί χ^2 κατανομή με ν βαθμούς ελευθερίας ως χ_ν^2 . Η κατανομή της χ_ν^2 δίνεται από

$$\mathbb{P}(\chi_\nu^2 \leq y) = \frac{1}{2^{\nu/2} \Gamma(\nu/2)} \int_0^y e^{-z/2} z^{(\nu/2)-1} dz,$$

όπου $\Gamma(\cdot)$ η συνάρτηση Γ , που ορίζεται ως

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt,$$

και ικανοποιεί $\Gamma(n) = (n-1)!$, αν $n \in \mathbb{N}$. Ο ορισμός της παραπάνω κατανομής επεκτείνεται και για μη ακέραιο ν .

Αν $\nu > 0$, ακέραιος, και $\alpha_1, \dots, \alpha_\nu$ σταθερές, τότε η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής

$$(Z_1 + \alpha_1)^2 + (Z_2 + \alpha_2)^2 + \dots + (Z_\nu + \alpha_\nu)^2$$

λέγεται μη κεντρική χ^2 κατανομή με ν βαθμούς ελευθερίας και παράμετρο $\lambda = \sum_{i=1}^\nu \alpha_i^2$. Όπως και πριν, ο ορισμός της κατανομής αυτής επεκτείνεται και για μη ακέραιο ν .

Ισχυρισμός: Αν $\nu > 1$, ακέραιος, τότε

$$\chi_\nu'^2(\lambda) \stackrel{d}{=} \chi_1'^2(\lambda) + \chi_{\nu-1}^2,$$

όπου οι δυο τυχαίες μεταβλητές στο δεξί μέλος της εξίσωσης είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, και το d δηλώνει ισότητα κατά κατανομή.

Απόδειξη: Έστω Z_1, \dots, Z_ν ανεξάρτητες, τυπικές κανονικές τυχαίες μεταβλητές, και $\alpha_1, \dots, \alpha_\nu$ σταθερές. Θεωρούμε τα διανύσματα $Z = (Z_1 \dots Z_\nu)^\top$ και $\alpha = (\alpha_1 \dots \alpha_\nu)^\top$. Έστω επίσης $|\cdot|$ η Ευκλείδεια νόρμα στον \mathbb{R}^ν . Έχουμε,

$$\begin{aligned} \chi_\nu'^2(\lambda) &\stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^\nu (Z_i + \alpha_i)^2 \\ &= |Z + \alpha|^2 \\ &= |Z|^2 + |\alpha|^2 + 2\alpha^\top Z \\ &= * \end{aligned}$$

Κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $Y = UZ$, όπου U ο ορθογώνιος πίνακας για τον οποίο

$$U \frac{\alpha}{|\alpha|} = e_\nu,$$

με $e_\nu = (0 \ 0 \ \dots \ 1)^\top$.

Τότε,

$$\begin{aligned} * &= |U^\top Y|^2 + |\alpha|^2 + 2\alpha^\top U^\top Y \\ &= |Y|^2 + |\alpha|^2 + 2\alpha^\top U^\top Y \\ &= \sum_{i=1}^{\nu-1} Y_i^2 + Y_\nu^2 + |\alpha|^2 + 2|\alpha| \frac{(U\alpha)^\top}{|\alpha|} Y \\ &= \chi_{\nu-1}^2 + Y_\nu^2 + |\alpha|^2 + 2|\alpha|Y_\nu \\ &= \chi_{\nu-1}^2 + (Y_\nu + |\alpha|)^2 \\ &= \chi_{\nu-1}^2 + \chi_1'^2(\lambda), \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η ευκλείδεια νόρμα είναι αναλλοίωτη κάτω από ορθογώνιο μετασχηματισμό, δηλαδή, αν U ορθογώνιος πίνακας, τότε $|Ux| = |x|$, $\forall x$.

Έτσι, για να παραγάγουμε μια τυχαία τιμή της $\chi_\nu'^2(\lambda)$, $\nu > 1$, αρκεί να παραγάγουμε την τυπική $\chi_{\nu-1}^2$ και μια ανεξάρτητη τυπική κανονική τιμή, Z , και στη συνέχεια να θέσουμε

$$\chi_\nu'^2(\lambda) = (Z + \sqrt{\lambda})^2 + \chi_{\nu-1}^2. \quad (4.15)$$

Επομένως, η δειγματοληψία από τη μη κεντρική χ^2 κατανομή, ανάγεται σε δειγματοληψία από την τυπική χ^2 κατανομή και την τυπική κανονική κατανομή, όταν $\nu > 1$. Η 4.15 λύνει το πρόβλημα δειγματοληψίας από την $\chi_d'^2$ όταν $d-1 = 4ba/\sigma^2 - 1 \in \mathbb{N}$. Αν η παράμετρος αυτή δεν είναι φυσικός αριθμός, τότε χρειάζεται να κάνουμε τα ακόλουθα.

Για κάθε $\nu > 0$, η κατανομή της $\chi_\nu'^2$ μπορεί να αναπαρασταθεί ως μια τυπική χ^2 κατανομή με μια τυχαία παράμετρο βαθμών ελευθερίας. Αναλυτικότερα, έστω N μια Poisson τυχαία μεταβλητή, με μέση τιμή λ , δηλαδή τέτοια, ώστε

$$\mathbb{P}(N = j) = e^{-\lambda/2} \frac{(\lambda/2)^j}{j!}, \quad j = 0, 1, \dots$$

Θεωρούμε μια τυχαία μεταβλητή $\chi_{\nu+2N}^2$, όπου $N \sim Poisson(\lambda)$. Τότε, δεδομένου ότι $N = j$, η μεταβλητή αυτή ακολουθεί την τυπική χ^2 κατανομή, με $\nu+2j$ βαθμούς ελευθερίας, δηλαδή

$$\mathbb{P}(\chi_{\nu+2N}^2 \leq y \mid N = j) = \frac{1}{2^{(\nu/2)} \Gamma((\nu/2) + j)} \int_0^y e^{-z/2} z^{(\nu/2)+j-1} dz,$$

που είναι ακριβώς η μη κεντρική χ^2 κατανομή. Συμπεραίνουμε ότι, μπορούμε να πάρουμε δείγμα της $\chi_\nu'^2(\lambda)$ παράγοντας πρώτα μία τυχαία τιμή Poisson, N , και

στη συνέχεια, δεσμεύοντας ως προς N , να λάβουμε δείγμα της χ^2 με $\nu + 2N$ βαθμούς ελευθερίας. Ανάγουμε επομένως τη δειγματοληψία μιας μη κεντρικής χ^2 σε δειγματοληψία μιας συνήθους χ^2 και μιας Poisson.

Η χ^2 κατανομή είναι μια ειδική περίπτωση της κατανομής Γάμμα. Παρακάτω θα δούμε πως κάνουμε δειγματοληψία από τις κατανομές Γάμμα και Poisson.

Κατανομή Γάμμα

Η κατανομή Γάμμα με παραμέτρους α, β έχει συνάρτηση πυκνότητας

$$f(y) = f_{\alpha, \beta}(y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \beta^\alpha y^{\alpha-1} e^{-y/\beta}, y \geq 0,$$

μέση τιμή $\alpha\beta$, και διασπορά $\alpha\beta^2$. Η χ^2 είναι μια ειδική περίπτωση της Γάμμα, με παραμέτρους $\alpha = \nu/2$, και $\beta = 2$.

Περιπτώσεις: *i)* $\alpha \leq 1$, *ii)* $\alpha > 1$.

Στην περίπτωση του μοντέλου CIR παραπάνω, η παράμετρος α δίνεται από $4ab/2\sigma^2$.

Στα μοντέλα στοχαστικού επιτοκίου που είναι προσαρμοσμένα σε τιμές πραγματικών αγορών η τιμή του $4ab/\sigma^2$ είναι συνήθως μεγαλύτερη του 2, επομένως θα εστιάσουμε στην περίπτωση *ii)*. Επίσης, αν η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κατανομή Γάμμα με παραμέτρους α και 1, τότε η βX έχει την κατανομή Γάμμα με παραμέτρους α και β . Επομένως, αρκεί να μελετήσουμε την περίπτωση όπου $\beta = 1$.

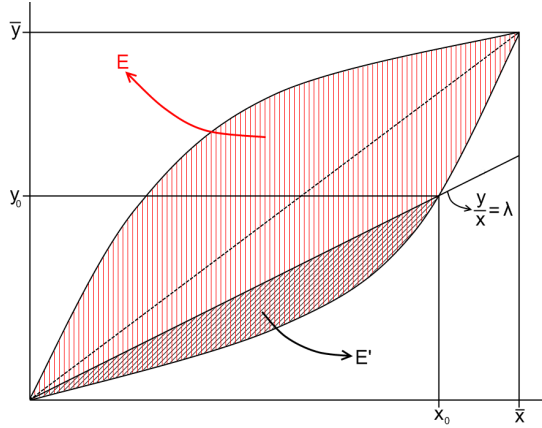
Για την περίπτωση *ii)* θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο του λόγου ομοιόμορφων. Έστω f μια μη αρνητική, ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο $[0, \infty)$. Αν το ζεύγος (X, Y) είναι ομοιόμορφα κατανομημένο στο σύνολο $A = \{(x, y) : x \leq \sqrt{f(y/x)}\}$, τότε η πυκνότητα του λόγου Y/X είναι ανάλογη της f . Αν το σύνολο A περιέχεται σε ένα φραγμένο ορθογώνιο, τότε για να λάβουμε ομοιόμορφο δείγμα από το A , μπορούμε να παίρνουμε διαδοχικά δείγματα, (X, Y) , ομοιόμορφα κατανομημένα στο τετράγωνο, και να κρατάμε το πρώτο που ικανοποιεί τη σχέση $X \leq \sqrt{f(Y/X)}$. Η μέθοδος αυτή επιστρέφει το λόγο Y/X ως ένα δείγμα από την πυκνότητα που είναι ανάλογη της f .

Το σύνολο A απεικονίζεται στο Σχήμα 4.2. Έχουμε:

$$\mathbb{P}\left(\frac{Y}{X} \leq \lambda\right) = \frac{E'}{E},$$

όπου

$$\begin{aligned} E' &= \int_0^{\bar{x}} \int_{f(\frac{y}{x}) \geq x^2, y \leq \lambda x} dy dx, \quad u = \frac{y}{x} \\ &= \int_0^{\bar{x}} \int_{f(u) \geq x^2, u \leq \lambda x} x du dx \end{aligned}$$



Σχήμα 4.2: Το σύνολο $A = \{(x, y) : x \leq \sqrt{f(y/x)}\}$

$$\begin{aligned} &= \int_0^\lambda \int_0^{\min(\sqrt{f(u)}, \bar{x})} x dx du \\ &= \int_0^\lambda \frac{1}{2} f(u) du. \end{aligned}$$

Αντίστοιχα,

$$E = \int_0^\infty \frac{1}{2} f(u) du.$$

Οπότε,

$$\mathbb{P}\left(\frac{Y}{X} \leq \lambda\right) = \frac{\int_0^\lambda \frac{1}{2} f(x) dx}{\int_0^\infty \frac{1}{2} f(u) du},$$

και άρα η πυκνότητα της τυχαίας μεταβλητής Y/X δίνεται από

$$g_{Y/X}(x) = \frac{f(x)}{\int_0^\infty \frac{1}{2} f(u) du},$$

είναι επομένως ανάλογη της f .

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω επιχειρήμα, για να λάβουμε δείγμα από την πυκνότητα Γάμμα, με $\alpha > 1$, ορίζουμε το σύνολο A ως

$$A = \left\{ (x, y) : 0 \leq x \leq \sqrt{(y/x)^{\alpha-1} e^{-y/x}} \right\}.$$

Το σύνολο αυτό περιέχεται στο ορθογώνιο $[0, \bar{x}] \times [0, \bar{y}]$, όπου

$$\bar{x} = \left(\frac{\alpha-1}{e}\right)^{\frac{\alpha-1}{2}} \quad \text{και} \quad \bar{y} = \left(\frac{\alpha+1}{e}\right)^{\frac{\alpha+1}{2}}.$$

Ο αναμενόμενος αριθμός των δειγμάτων που απαιτούνται από την ομοιόμορφη στο ορθογώνιο, έως ότου κάποιο δείγμα πέσει στο σύνολο A , δίνεται από το λόγο του εμβαδού του A προς το εμβαδό του ορθογωνίου. Ο λόγος αυτός είναι, από τον τύπο του Stirling, $O(\sqrt{\alpha})$, δηλαδή ο χρόνος που απαιτείται για τη μέθοδο αυτή μεγαλώνει ανάλογα με την παράμετρο α της κατανομής Γάμμα.

Ας δούμε πως παίρνουμε δείγμα από τη Γάμμα στην περίπτωση i), χρησιμοποιώντας τη μέθοδο αποδοχής - απόρριψης. Έστω $p = e / (\alpha + e)$. Ορίζουμε την πυκνότητα

$$g(z) = \begin{cases} p\alpha z^{\alpha-1}, & 0 \leq z \leq 1 \\ (1-p)e^{-z+1}, & z > 1 \end{cases}$$

η οποία είναι ένας συνδυασμός των πυκνοτήτων $\alpha z^{\alpha-1}$, στο $[0, 1]$, και e^{-z+1} , στο $(1, \infty)$, με βάρη p και $(1-p)$ αντίστοιχα. Για να λάβουμε δείγμα από τη g παίρνουμε δείγμα από τις δύο αυτές πυκνότητες με τις πιθανότητες που τους αντιστοιχούν. Με χρήση της μεθόδου του αντίστροφου μετασχηματισμού, θέτουμε

$$X_1 = U^{1/\alpha},$$

για την $X_1 \sim \alpha z^{\alpha-1}$ στο $[0, 1]$, και

$$X_2 = 1 - \log(U),$$

για την $X_2 \sim e^{-z+1}$ στο $(1, \infty)$, όπου $U \sim U[0, 1]$.

Ο λόγος

$$\frac{f_{\alpha,1}(z)}{g(z)},$$

όπου $f_{\alpha,1}$ η πυκνότητα Γάμμα, είναι φραγμένος. Έτσι, χρησιμοποιούμε τα δείγματα της g για να εφαρμόσουμε αποδοχή - απόρριψη και να καταλήξουμε σε δείγματα της Γάμμα. Μια υποψήφια τυχαία τιμή, Z , στο $[0, 1]$ γίνεται αποδεκτή με πιθανότητα e^{-Z} , ενώ στο $(1, \infty)$ με πιθανότητα $Z^{\alpha-1}$. Το φράγμα δίνεται από

$$\frac{f_{\alpha,1}(z)}{g(z)} \leq \frac{\alpha + e}{\alpha e \Gamma(\alpha)} \leq 1.39$$

Κατανομή Poisson

Η κατανομή Poisson με μέση τιμή $\theta > 0$ δίνεται από

$$\mathbb{P}(N = k) = e^{-\theta} \frac{\theta^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Συμβολίζουμε ως $N \sim \text{Poisson}(\theta)$. Είναι η κατανομή του αριθμού των γεγονότων που συμβαίνουν στο διάστημα $[0, 1]$, όταν οι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών γεγονότων είναι ανεξάρτητες, εκθετικές τυχαίες μεταβλητές, με μέση τιμή $1/\theta$. Επομένως, μία μέθοδος για να πάρουμε δείγμα από την Poisson είναι να παραγάγουμε εκθετικές τυχαίες τιμές, με τη μέθοδο του αντίστροφου μετασχηματισμού,

$$X_i = -\frac{\log(U_i)}{\theta}, \quad i = 1, \dots, N,$$

από ανεξάρτητες, ομοιόμορφες $U_i \sim U[0, 1]$, και στη συνέχεια να πάρουμε ως N το μεγαλύτερο ακέραιο για τον οποίο

$$X_1 + \dots + X_N \leq 1.$$

Εναλλακτικά, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο του αντίστροφου μετασχηματισμού απευθείας. Ψάχνουμε το μικρότερο n , για το οποίο $F(n) \leq U$, όπου F η συνάρτηση κατανομής της Poisson, και $U \sim U[0, 1]$. Έχουμε

$$F(n) = \mathbb{P}(N = 0) + \dots + \mathbb{P}(N = n).$$

Για λιγότερους υπολογισμούς, χρησιμοποιούμε τη σχέση

$$\mathbb{P}(N = k + 1) = \mathbb{P}(N = k) \frac{\theta}{k + 1}.$$

4.3 Εφαρμογή

Έστω \mathcal{X} ένα χαρτοφυλάκιο αποτελούμενο από 5 προϊόντα: 3 ομόλογα, ένα συμβόλαιο ανταλλαγής επιτοκίου (swap), και ένα δικαίωμα ανταλλαγής επιτοκίου, με διάφορες ωριμάνσεις. Σκοπός μας είναι να εφαρμόσουμε Monte Carlo για να εκτιμήσουμε την t -ημερών αξία σε κίνδυνο του \mathcal{X} . Ας δούμε πρώτα πως ορίζεται το καθένα από αυτά τα προϊόντα, καθώς και την αξία του καθενός στην ωρίμανση, στο χρόνο 0, καθώς και στη χρονική στιγμή t , κατά την οποία επιθυμούμε να υπολογίσουμε την αξία σε κίνδυνο του χαρτοφυλακίου.

Γνωρίζουμε από προηγούμενες ενότητες ότι ένα ομόλογο όψεως $\mathbf{€}1$ και ωρίμανσης T είναι ένα προϊόν που έχει αξία $\mathbf{€}1$ στην ωρίμανση. Η αξία του σε κάθε χρονική στιγμή $0 \leq t \leq T$ συμβολίζεται με $B(t, T)$, όπου $B(T, T) = 1$.

Ένα *συμβόλαιο ανταλλαγής επιτοκίου (swap)* είναι η εξής συμφωνία: Έστω ότι έχουμε να εξοφλήσουμε ένα A ποσό σε τόκους κατά την περίοδο $[t, T]$ στο μέλλον, με κυμαινόμενο επιτόκιο περιόδου $r(t, T)$. Η υπογραφή της συμφωνίας ανταλλαγής επιτοκίου μάς υποχρεώνει να διενεργήσουμε την πληρωμή αυτή με σταθερό επιτόκιο R αντί του μεταβλητού επιτοκίου $r(t, T)$. Θα συμβολίζουμε με $V_{\text{swap}}(t)$ την αξία του συμβολαίου ανταλλαγής επιτοκίου σε κάθε χρονική στιγμή $0 \leq t \leq T$. Φυσικά $V_{\text{swap}}(T) = A(r(t, T) - R)(T - t)$.

Ένα *δικαίωμα ανταλλαγής επιτοκίου* είναι μια συμφωνία παρόμοια με το συμβόλαιο ανταλλαγής επιτοκίου, με τη μόνη διαφορά ότι προσδίδει το δικαίωμα στον κάτοχό του, αλλά όχι την υποχρέωση, να μεταβεί από την εξόφληση με κυμαινόμενο επιτόκιο σε εξόφληση με σταθερό επιτόκιο για μια σειρά από μελλοντικές πληρωμές τόκων. Θα συμβολίζουμε την αξία του δικαιώματος ανταλλαγής επιτοκίου με $V_{\text{swaption}}(t)$, για $0 \leq t \leq T$.

Υποθέτουμε ότι η δυναμική του ρυθμού επιτοκίου r κάτω από το αδιάφορο κινδύνου μέτρου πιθανότητας καθορίζεται από τη στοχαστική διαφορική εξίσωση 4.13 του

μοντέλου CIR. Οι παράμετροι που θα χρησιμοποιήσουμε στο μοντέλο είναι οι εξής: ρυθμός σύγκλισης $a = 0.2$, μακροχρόνιος ρυθμός επιτοκίου $b = 0.05$, μεταβλητότητα ανά τετραγωνικό έτος $\sigma = 0.1$, και αρχική τιμή επιτοκίου $r(0) = 0.04$.

Αναλυτικά, τα 5 προϊόντα του χαρτοφυλακίου \mathcal{X} είναι τα ακόλουθα:

Τρία ομόλογα όψεως €1, με ωρίμανση $T_1 = 1/3$ έτη, $T_2 = 2/3$ έτη, και $T_3 = 1$ έτη αντίστοιχα, δηλαδή, 4, 8, και 12 μήνες αντίστοιχα. Το i -οστό ομόλογο έχει αξία $B(t, T_i)$, τη χρονική στιγμή t , $i = 1, 2, 3$.

Ένα συμβόλαιο ανταλλαγής επιτοκίου επί μιας πληρωμής $A = \text{€}100$ κατά την περίοδο $[t, T_2]$, έναντι σταθερού επιτοκίου $R_1 = 0.0425$. Η αξία του συμβολαίου τη χρονική στιγμή της ωρίμανσης T_2 θα είναι $V_{\text{swap}}(T_2) = A(r(t, T_2) - R_1)(T_2 - t)$.

Ένα δικαίωμα ανταλλαγής επιτοκίου επί μιας πληρωμής $B = \text{€}200$ κατά την περίοδο $[t, T_3]$, με σταθερό επιτόκιο $R_2 = 0.045$. Η αξία του συμβολαίου τη χρονική στιγμή T_3 θα είναι $V_{\text{swaption}}(T_3) = B(r(t, T_3) - R_2)^+(T_3 - t)$.

Ας υπολογίσουμε τώρα την αξία κάθε προϊόντος τη στιγμή t , καθώς και την αξία του τη στιγμή 0, ούτως ώστε να υπολογίσουμε τη ζημία του χαρτοφυλακίου μεταξύ των δύο χρόνων.

Γνωρίζουμε ότι, αν $V(T)$ είναι η απόδοση ενός προϊόντος στην ωρίμανσή του, τότε η αξία του σε κάθε χρονική στιγμή $0 \leq t \leq T$ δίνεται από την

$$V(t) = \mathbb{E} \left[e^{-\int_t^T r(s)ds} V(T) \mid \mathcal{F}_t \right]. \quad (4.16)$$

Κάθε ομόλογο έχει απόδοση 1 στην ωρίμανση, οπότε, για κάθε $i = 1, 2, 3$,

$$B(t, T_i) = \mathbb{E} \left[e^{-\int_t^{T_i} r(s)ds} \mid \mathcal{F}_t \right].$$

Η παραπάνω αξία, όταν το επιτόκιο καθορίζεται από το μοντέλο CIR, υπολογίζεται ακριβώς [7]:

$$B(t, T_i) = e^{-A(t, T_i)r(t) + C(t, T_i)}, \quad (4.17)$$

όπου

$$A(t, T_i) = \frac{2(e^{\gamma(T_i-t)} - 1)}{(\gamma + a)(e^{\gamma(T_i-t)} - 1) + 2\gamma}$$

και

$$C(t, T_i) = \frac{2ab}{\sigma^2} \log \left(\frac{2\gamma e^{(a+\gamma)(T_i-t)/2}}{(\gamma + a)(e^{\gamma(T_i-t)} - 1) + 2\gamma} \right)$$

και $\gamma = \sqrt{a^2 + 2\sigma^2}$. Επομένως γνωρίζουμε ακριβώς την αξία κάθε ομολόγου σε κάθε χρονική στιγμή πριν την ωρίμανσή του.

Η αξία του συμβολαίου ανταλλαγής επιτοκίου έχει αξία τη στιγμή t

$$V_{\text{swap}}(t) = \mathbb{E} \left[e^{-\int_t^{T_2} r(s)ds} V_{\text{swap}}(T_2) \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E} \left[e^{-\int_t^{T_2} r(s) ds} A(r(t, T_2) - R_1)(T_2 - t) \mid \mathcal{F}_t \right] \\
&= A(r(t, T_2) - R_1)(T_2 - t) \mathbb{E} \left[e^{-\int_t^{T_2} r(s) ds} \right] \\
&= A(r(t, T_2) - R_1)(T_2 - t) B(t, T_2). \tag{4.18}
\end{aligned}$$

Άρα μπορούμε να υπολογίσουμε την αξία στο χρόνο t μέσω της 4.17. Η αρχική αξία του συμβολαίου ανταλλαγής υπολογίζεται ακριβώς. Έχουμε

$$\begin{aligned}
V_{\text{swap}}(0) &= \mathbb{E} \left[e^{-\int_0^t r(s) ds} V_{\text{swap}}(t) \right] \\
&= \mathbb{E} \left[A(r(t, T_2) - R_1)(T_2 - t) e^{-\int_0^t r(s) ds} B(t, T_2) \right] \\
&= A \mathbb{E} \left[r(t, T_2)(T_2 - t) B(t, T_2) e^{-\int_0^t r(s) ds} \right] \\
&\quad - A(T_2 - t) R_1 \mathbb{E} \left[e^{-\int_0^t r(s) ds} B(t, T_2) \right] \\
&= A \mathbb{E} \left[(1 - B(t, T_2)) e^{-\int_0^t r(s) ds} \right] - A(T_2 - t) R_1 \mathbb{E} \left[e^{-\int_0^t r(s) ds} B(t, T_2) \right] \\
&= A \{ B(0, t) - B(0, T_2) [1 + R_1(T_2 - t)] \}, \tag{4.19}
\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη σχέση που συνδέει την αξία ενός ομολόγου $B(t, T)$ με το επιτόκιο περιόδου $r(t, T)$,

$$B(t, T) = \frac{1}{1 + r(t, T)(T - t)},$$

και το γεγονός ότι

$$\mathbb{E} \left[e^{-\int_0^t r(s) ds} B(t, T_2) \right] = B(0, T_2).$$

Επομένως, η αξία του συμβολαίου ανταλλαγής επιτοκίου στους χρόνους t και 0 υπολογίζεται ακριβώς από τις τιμές των ομολόγων.

Η αξία του διακαώματος ανταλλαγής επιτοκίου στο χρόνο t είναι

$$\begin{aligned}
V_{\text{swaption}}(t) &= \mathbb{E} \left[e^{-\int_0^{T_3} r(s) ds} V_{\text{swaption}}(T_3) \mid \mathcal{F}_t \right] \\
&= \mathbb{E} \left[e^{-\int_0^{T_3} r(s) ds} B(r(t, T_3) - R_2)^+(T_3 - t) \mid \mathcal{F}_t \right] \\
&= B(r(t, T_3) - R_2)^+(T_3 - t) B(t, T_2). \tag{4.20}
\end{aligned}$$

Τη χρονική στιγμή 0 η αξία του δεν υπολογίζεται ακριβώς, και θα χρειαστεί να κάνουμε προσομοίωση Monte Carlo. Η αξία είναι

$$\begin{aligned}
V_{\text{swaption}}(0) &= \mathbb{E} \left[e^{-\int_0^{T_3} r(s) ds} B(r(t, T_3) - R_2)^+(T_3 - t) \right] \\
&= B \mathbb{E} \left[e^{-\int_0^{T_3} r(s) ds} (r(t, T_3)(T_3 - t) - R_2(T_3 - t))^+ \right] \\
&= B \mathbb{E} \left[e^{-\int_0^{T_3} r(s) ds} \left(\frac{1}{B(t, T_3)} - 1 - R_2(T_3 - t) \right)^+ \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= B\mathbb{E} \left[e^{-\int_0^t r(s)ds} \left(\frac{1}{B(t, T_3)} - 1 - R_2(T_3 - t) \right)^+ B(t, T_3) \right] \\
&= B\mathbb{E} \left[e^{-\int_0^t r(s)ds} (1 - B(t, T_3)(1 + R_2(T_3 - t)))^+ \right] \quad (4.21)
\end{aligned}$$

Η προσομοίωση για την εύρεση της $V_{\text{swaption}}(0)$ γίνεται ως εξής:

Η εκτιμήτρια Monte Carlo για την αρχική αξία του δικαιώματος είναι

$$\hat{a} = \frac{\sum_{j=1}^n \hat{C}_j}{n},$$

όπου η j -οστή επανάληψη είναι

$$\hat{C}_j = B e^{-\hat{I}_j} \left(1 - \hat{B}_j(t, T_3)(1 + R_2(T_3 - t)) \right)^+,$$

με \hat{I}_j τη j -οστή εκτίμηση του ολοκληρώματος $\int_0^t r(s)ds$,

$$\hat{I}_j = \sum_{k=1}^m \hat{r}_j(t_k) \Delta t_k, \quad \Delta t_k = t_k - t_{k-1},$$

$t_m = t, t_0 = 0$, και $\hat{B}_j(t, T_3)$ τη j -οστή εκτίμηση της αξίας του ομολόγου, δηλαδή,

$$\hat{B}_j(t, T_3) = e^{A(t, T_3)\hat{r}_j(t) + C(t, T_3)},$$

με A και C όπως στην 4.17.

Το διακριτοποιημένο μονοπάτι του επιτοκίου, \hat{r}_j , το λαμβάνουμε προσομοιώνοντας τη στοχαστική διαφορική εξίσωση 4.13 του μοντέλου CIR από το νόμο μετάβασης που δίνεται από την 4.14. Έχοντας τα διαδοχικά επιτόκια $\hat{r}_j(t_k)$, $k = 0, \dots, m-1$, για $j = 1, \dots, n$, υπολογίζουμε τις \hat{I}_j και $\hat{B}_j(t, T_3)$, έπειτα την \hat{C}_j , και τέλος την εκτίμηση για την αρχική τιμή του δικαιώματος, \hat{a} .

Έτσι, παίρνουμε τις αξίες όλων των προϊόντων του χαρτοφυλακίου \mathcal{X} στο χρόνο t και στο χρόνο 0, και βρίσκουμε την αξία του χαρτοφυλακίου στο χρόνο t και 0 αντίστοιχα:

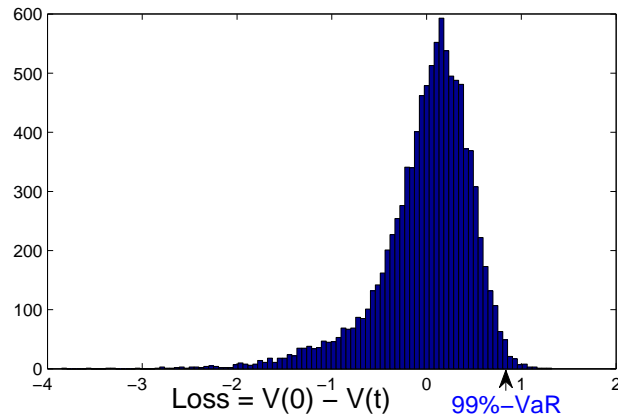
$$V_{\mathcal{X}}(t) = B(t, T_1) + B(t, T_2) + B(t, T_3) + V_{\text{swap}}(t) + V_{\text{swaption}}(t),$$

και

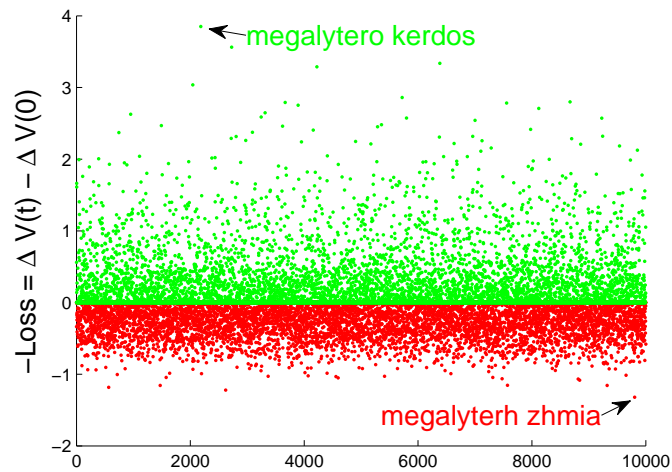
$$V_{\mathcal{X}}(0) = B(0, T_1) + B(0, T_2) + B(0, T_3) + V_{\text{swap}}(0) + V_{\text{swaption}}(0).$$

Υπολογίζοντας τη διαφορά των 2, λαμβάνουμε τη ζημία του χαρτοφυλακίου \mathcal{X} :

$$Loss_{[0,t]}(\mathcal{X}) = V_{\mathcal{X}}(0) - V_{\mathcal{X}}(t).$$



Σχήμα 4.3: Εμπειρική κατανομή 10.000 τιμών για τη ζημία του χαρτοφυλακίου \mathcal{X} στην περίοδο $[0, t]$, όπου $t = 1/12$ έτος



Σχήμα 4.4: Γραφική παράσταση 10.000 τιμών για τα κέρδη (πράσινο) και τις ζημιές (κόκκινο) του χαρτοφυλακίου \mathcal{X} στην περίοδο $[0, t]$, όπου $t = 1/12$ έτος

Κάνοντας τον υπολογισμό αυτόν N φορές, παίρνουμε N σενάρια για την τιμή της ζημίας του χαρτοφυλακίου. Έτσι, προκύπτει η εμπειρική κατανομή για τη ζημία του χαρτοφυλακίου. Υπολογίζοντας το 99% ποσοστημόριο της εμπειρικής αυτής κατανομής, βρίσκουμε μία εκτίμηση για την αξία σε κίνδυνο του χαρτοφυλακίου στον ορίζοντα $[0, t]$. Σημειώνουμε εδώ ότι για τον υπολογισμό της αξίας σε κίνδυνο θα πρέπει η κατανομή των τιμών για το στιγμιαίο επιτόκιο $r(t)$ που θα χρησιμοποιήσουμε για να παραγάγουμε αυτά τα σενάρια πρέπει να καθορίζεται από το πραγματικό μοντέλο της αγοράς που αντανακλά τις πεποιθήσεις μας, που δεν συμπίπτει κατ' ανάγκη με το αδιάφορο κινδύνου μέτρο. Στο παράδειγμά μας για να απλουστεύσουμε τους υπολογισμούς κάνουμε την υπόθεση ότι τα δύο μοντέλα συμπίπτουν.

Η εμπειρική κατανομή 10.000 τυχαίων τιμών για τη ζημία του χαρτοφυλακίου \mathcal{X} κατά την περίοδο $[0, (1/12)\text{έτη}]$ φαίνεται στο Σχήμα 4.4. Η προσομοίωση για το κάθε μονοπάτι, έγινε με ακρίβεια 10.000 χρονικών στιγμών για την παραγωγή του κάθε μονοπατιού του επιτοκίου στο μοντέλο CIR, για τον υπολογισμό της εκτίμησης του ολοκληρώματος \hat{I} , και με ακρίβεια 10.000 επαναλήψεων για την εκτίμηση Monte Carlo της αρχικής αξίας του δικαιώματος ανταλλαγής επιτοκίου \hat{a} . Η εκτίμηση για την 99% αξία σε κίνδυνο του \mathcal{X} για την περίοδο $[0, 1/12]$, που παίρνουμε από τις 10.000 τιμές, αντιστοιχεί στο 99-οστό ποσοστημόριο της εμπειρικής τους κατανομής, και είναι

$$99\% - VaR_{[0,1/12]}(\mathcal{X}) = \text{€}0.8127$$

Δηλαδή, μόνον 1% των φορών θα χάσουμε περισσότερα από €0.8127 μέσα σε περίοδο ενός μήνα, έχοντας στην κατοχή μας το χαρτοφυλάκιο \mathcal{X} . Επίσης, η μέγιστη πιθανή ζημία από τις 10.000 είναι €1.3209, ενώ το μέγιστο πιθανό κέρδος είναι €3.8499. Ο διάμεσος είναι €0.0804, που σημαίνει ότι η πιθανότητα να έχουμε ζημία είναι μεγαλύτερη από την πιθανότητα να έχουμε κέρδος.

Παράρτημα

Αλγόριθμοι Matlab

Μέθοδος Moro

function $Z = \text{typikh kanonikh methodos antistrofoy metasxhmatismoy}(N)$

Παράγει N το πλήθος τυπικές κανονικές τιμές με τη μέθοδο Moro (προσέγγιση τιμών της αντίστροφης της τυπική κανονικής κατανομής) και παριστά το αποτέλεσμα σε ιστόγραμμα.

```
 $a_0 = 2.50662823884;$   
 $a_1 = -18.61500062529$   
 $a_2 = 41.39119773534;$   
 $a_3 = -25.44106049637;$ 
```

```
 $b_0 = -8.47351093090;$   
 $b_1 = 23.08336743743;$   
 $b_2 = -21.06224101826;$   
 $b_3 = 3.13082909833;$ 
```

```
 $c_0 = 0.3374754822726147;$   
 $c_1 = 0.9761690190917186;$   
 $c_2 = 0.1607979714918209;$   
 $c_3 = 0.0276438810333863;$   
 $c_4 = 0.0038405729373609;$   
 $c_5 = 0.0003951896511919;$   
 $c_6 = 0.0000321767881768;$   
 $c_7 = 0.0000002888167364;$   
 $c_8 = 0.0000003960315187;$ 
```

```
 $Z = \text{zeros}(1, N);$ 
```

```
for  $i = 1 : N$ 
```

```
 $U = \text{rand};$ 
```

```
 $Y = U - 0.5;$ 
```

```
if  $\text{abs}(Y) < 0.42$ 
```

```
 $R = Y * Y;$ 
```

```
 $Z(i) = Y * (((a_3 * R + a_2) * R + a_1) * R + a_0) / (((b_3 * R + b_2) * R + b_1) * R + b_0) * R + 1);$ 
```

```
else
```

```
 $R = U;$ 
```

```
if  $Y > 0$ 
```

```
 $R = 1 - U;$ 
```

```
 $R = \log(-\log(R));$ 
```

```
 $Z(i) = c_0 + R * (c_1 + R * (c_2 + R * (c_3 + R * (c_4 + R * (c_5 + R * (c_6 + R * (c_7 + R * c_8))))))));$ 
```

```
else  $R = \log(-\log(R));$ 
```

```
 $Z(i) = -(c_0 + R * (c_1 + R * (c_2 + R * (c_3 + R * (c_4 + R * (c_5 + R * (c_6 + R * (c_7 +$ 
```

```

R * c8))))))));
end
end
end
hist(Z, 60)

```

Τυπική Κανονική από Διπλή Εκθετική

```
function Z = typikh kanonikh apo diplh ekthetikh(N)
```

Παράγει N το πλήθος τυπικές κανονικές τιμές με τη μέθοδο αποδοχής - απόρριψης από τη διπλή εκθετική κατανομή και παριστά το αποτέλεσμα σε ένα ιστόγραμμα.

```

k = 1;
Z = zeros(1, N);
while (k <= N)
U1 = rand;
U2 = rand;
X = -log(U1);
if(U2 <= exp(-0.5 * (X - 1) * (X - 1)))
Z(k) = X;
if(rand > 0.5)
Z(k) = -Z(k);
end
k = k + 1;
end
end
hist(Z, 60)

```

Πολική Μέθοδος (Marsaglia & Bray)

```
function [Z1, Z2] = polikh methodos(N)
```

Παράγει $2N$ το πλήθος τυπικές κανονικές τυχαίες τιμές με την πολική μέθοδο και παριστά το αποτέλεσμα σε ένα ιστόγραμμα.

```

Z1 = zeros(1, N);
Z2 = zeros(1, N);
i = 1;
a = 4/3;
Nbig = floor(a * N);
U1 = 2 * rand(1, Nbig) - 1;
U2 = 2 * rand(1, Nbig) - 1;
X = U1.^2 + U2.^2;
j = 1;
while(i <= N)
if (X(j) <= 1 && X(j) = 0)
Y = sqrt((-2 * log(X(j)))/(X(j)));
Z1(i) = U1(j) * Y;

```

```

Z2(i) = U2(j) * Y;
i = i + 1;
end
j = j + 1;
end
Z = [Z1, Z2];
hist(Z, 60)

```

Μέθοδος Box - Muller

```
function [X, Y] = box muller(N)
```

Παράγει N το πλήθος διδιάστατα τυπικά κανονικά διανύσματα με τη μέθοδο Box - Muller, οι συνιστώσες των οποίων είναι ανεξάρτητες τυπικές κανονικές τιμές.

```

U1 = rand(1, N);
U2 = rand(1, N);
R = sqrt(-2 * log(U1));
theta = 2 * pi * U2;
X = R. * cos(theta);
Y = R. * sin(theta);

```

Κίνηση Brown στο $[0, T]$

```
function [t, W] = Brownian Motion 0 T
```

Προσομοιώνει και παριστά γραφικά ένα μονοπάτι της μονοδιάστατης τυπική κίνησης Brown στο διάστημα $[0, T]$

```

T = input('Please enter a value for the endpoint of the interval T :');
N = input('Please enter a value for the number of points N :');
W = zeros(1, N + 1);
W(1) = 0;
K = sqrt(T/N);
t = zeros(1, N + 1);
t(1) = 0;
Z = randn(1, N);
for i = 1 : N
W(i + 1) = W(i) + K * Z(i);
t(i + 1) = (i * T)/N;
end
plot(t, W)

```

Γεωμετρική Κίνηση Brown

```
function S = Geometric Brownian Motion(N, s)
```

Προσομοιώνει ένα μονοπάτι της μονοδιάστατης γεωμετρικής κίνησης Brown με drift r , μεταβλητότητα σ , και αρχική τιμή $S(1)$, σε N το πλήθος χρονικά σημεία, με βήμα dt , και το παριστά γραφικά.

```

Z = randn(N, 1);
S = zeros(N, 1);
S(1) = 40;
%T = 30/365;
dt = 1/365;
D = sqrt(dt);
r = 0.05;
const1 = exp((r - (1/2) * s * s) * dt);
const2 = s * D;
for i = 1 : N
S(i + 1) = S(i) * const1 * exp(const2 * Z(i));
end
plot(S)

```

Γέφυρα Brown στο $[0, T]$

function [W] = Brownian Bridge

Προσομοιώνει και παριστά γραφικά ένα μονοπάτι της μονοδιάστατης τυπικής κίνησης Brown στο $[0, T]$ με γέφυρα Brown

```

T = input('Please enter a value for right endpoint of time interval :');
N = input('Please enter a value for the number of points :');
if (floor(log2(N)) - log2(N)) = 0;
error('The value for the number of points must be a power of 2');
end
t(1, 1) = 0;
for i = 2 : N + 1
t(i, 1) = (i - 1) * (T/N);
end
m = log(N)/log(2);
Z = randn(1, N);
j_max = 1;
W(N + 1, 1) = sqrt(T) * Z(N);
W(1, 1) = 0;
V = T/N;
for k = 1 : m
i_min = N/2;
i = i_min;
l = 0;
r = N;
for j = 1 : j_max
a = ((r - i) * W(l + 1, 1) + (i - l) * W(r + 1, 1))/(r - l);
b = sqrt(((i - l) * (r - i))/(r - l)) * V;
W(i + 1, 1) = a + b * Z(i);
i = i + N;
l = l + N;

```

```

r = r + N;
end
j_max = 2 * j_max;
N = i_min;
end
plot(t, W)

```

Τιμολόγηση Ευρωπαϊκού Δικαιώματος Αγοράς

```
function [Co] = Timologhsh Eyrwpaikoy Dikaiwmatos Agoras
```

Τιμολογεί ένα ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς επί μιας μετοχής, η δυναμική της οποίας ακολουθεί το μοντέλο Black & Scholes.

```

n = input('Dwste to plththos tw'n epanalhpsewn sth Monte Carlo :');
T = 1; %wrimansh se eth
r = 0.04; %ethsio epitokio
proejoflsh = exp(-r * T);
So = 40; %arxikh ajia metoxhs
K = 40; %paradotea timh
s = 0.2; %metavlthtotha ana tetragwnikh riza etoys
m = (r - (1/2) * s^2) * T; %drift gewmetrikhs kinshs Brown
vol = s * sqrt(T); %volatility gewm. Brown
Z = randn(n, 1);
S = So * exp(m + vol * Z);
C = max(S - K, 0);
Co = proejoflsh * mean(C);
SC = proejoflsh * std(C) %deigmatikh typikh apoklish toy C
Zninety-nine = 2.33;
halfeyros = (Zninety-nine * SC) / (sqrt(n));
diasthma_empistosynhs_left = Co - halfeyros;
diasthma_empistosynhs_right = Co + halfeyros;
%99% diasthma empistosynhs gia thn arxikh ajia toy dikaiwmatos

```

Τιμολόγηση Δικαιώματος Αγοράς με Κάτω & Εκτός Φράγμα (Προσομοίωση Μονοπατιού με Γέφυρα)

```
function [Codo] = Timologhsh Dikaiwmatos Agoras me Fragma Bridge fastest
```

Τιμολογεί ένα δικαίωμα αγοράς με κάτω & εκτός φράγμα. Η δυναμική της μετοχής ακολουθεί το μοντέλο Black & Scholes και η προσομοίωση του μονοπατιού της μετοχής γίνεται με γέφυρα Brown.

```

R = input('Please enter a value for the number of evaluations (paths) :');
N_power = input('Please enter m (where "Number of points" = 2^m) :');
r = 0.04;
s = 0.2;
s2 = s * s;
T = 1;

```

```

sqrtT = sqrt(T);
constssqrtT = s * sqrtT;
Strike = 40;
Fragma = 37;
Numtimepoints = 2Npower;
drift = (r - (s2)/2);
const2T = drift * T;
Y = zeros(Numtimepoints + 1, 1);
S = zeros(Numtimepoints + 1, 1);
S(1) = 40;
Y(1) = log(S(1));
C = 0;
Z1 = randn(1, R);
vhma = T/Numtimepoints;
m = (0 : vhma : T) * drift + Y(1);
b = zeros(Numtimepoints + 1, 1);
%Precalculate b
N = Numtimepoints;
jmax = 1;
k = 1;
mmax = Npower;
while(k <= mmax)
tmin = N/2;
t = tmin;
tl = 0;
tr = N;
j = 1;
while(j <= jmax)
b(t + 1) = s * sqrt((tr - t) * (t - tl)/(Numtimepoints * (tr - tl)));
t = t + N;
tl = tl + N;
tr = tr + N;
j = j + 1;
end
jmax = 2 * jmax;
N = tmin;
k = k + 1;
end
mmax = Npower;
for path = 1 : R %Foreachpath
N = Numtimepoints;
jmax = 1;
S(N+1) = S(1)*exp(const2T+constssqrtT*Z1(path)); %ypologismos telikhs timhsST
telikhtimh = S(N + 1);
Y(N + 1) = log(telikhtimh);
k = 1;

```

```

notdone = true;
if(telikhtimh > Strike)
while(notdone&&k <= m_max)
t_min = N/2;
t = t_min;
tl = 0;
tr = N;
j = 1;
Rand_st = randn(j_max, 1);
while(notdone&&j <= j_max)
a = m(t + 1) + ((tr - t) * (Y(tl + 1) - m(tl + 1)) + (t - tl) * (Y(tr + 1) - m(tr + 1)))/(tr - tl);
Y(t + 1) = a + b(t + 1) * Rand_st(j);
S(t + 1) = exp(Y(t + 1));
if(S(t + 1) <= Fragma)
notdone = false;
end
t = t + N;
tl = tl + N;
tr = tr + N;
j = j + 1;
end
j_max = 2 * j_max;
N = t_min;
k = k + 1;
end
if(notdone)
C = C + (telikhtimh - Strike);
end
end
end
C_do = exp((-r) * T) * (C/R);
Akrivhs timh toy Paragwgoy = 2.8034

```

Τιμολόγηση Δικαιώματος Αγοράς με Κάτω & Εκτός Φράγμα (Προσομοίωση Μονοπατιού Σειριακά)

```
function [Co] = Timologhsh Dikaiwmatos Agoras me Fragma Seiriaka
```

Τιμολογεί ένα δικαίωμα αγοράς με κάτω & εκτός φράγμα. Η δυναμική της μετοχής ακολουθεί το μοντέλο Black & Scholes και η προσομοίωση του μονοπατιού της μετοχής γίνεται σειριακά. Δίνει ένα 99% διάστημα εμπιστοσύνης για την τιμή του δικαιώματος.

```

R = input('Please enter a value for the number of evaluations (paths) :');
N = input('Please enter a value for the number of points in each evaluation :');

```

```

r = 0.04; %annual interest rate
s = 0.2; %volatility per square root year
s2 = s * s; %volatility squared of stock price per year
arxikhtimh = 40; %initial stock price
strike = 40; %strike price
fragma = 37;
T = 1; %expiration date in years
k = (r - s2/2);
proejoflhsh = exp(-r * T);
l1 = T/N;
l2 = sqrt(T/N);
C = 0;
S = zeros(N + 1, 1);
for path = 1 : R
S(1) = arxikhtimh;
Z = randn(1, N);
notdone = true;
for i = 1 : N
if S(i) > fragma
S(i + 1) = S(i) * exp(k * l1 + s * l2 * Z(i));
else
notdone = false;
end
end
if(S(N + 1) > strike && notdone)
C = C + (S(N + 1) - strike);
end
end
Co = proejoflhsh * (C/R);
VarC = (proejoflhsh^2) * (C^2/(R)) - (Co^2)
%Ypologizei th diaspora ths t.m. (exp(-rT)1(t > T)(ST - K)^+) opoy t =
inf {u > 0 : Su <= fragma}
DiasthmaEmpostosynhsleft = Co - (sqrt(VarC) * 2.33)/sqrt(R)
DiasthmaEmpostosynhsright = Co + (sqrt(VarC) * 2.33)/sqrt(R)
Akrivhs timh toy paragwgoy = 2.8034

```

Τιμολόγηση Δικαιώματος με Κάτω & Εκτός Φράγμα με μεταβλητή ελέγχου το Ευρωπαϊκό Δικαίωμα Αγοράς χωρίς φράγμα

```

function [EuroBarrierPrice, EuroBarrierPriceControlVariate] = Timologhsh
Dikaiwmatos Agoras me Fragma Bridge fastest control(R, Npower)

```

Τιμολογεί ένα δικαίωμα αγοράς με κάτω & εκτός φράγμα χρησιμοποιώντας την αξία του αντίστοιχου ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς ως μεταβλητή ελέγχου. Η δυναμική της μετοχής ακολουθεί το μοντέλο Black & Scholes. Η προσομοίωση του μονοπατιού της μετοχή γίνεται με γέφυρα Brown.


```

r = 0.04; %annual interest rate
s = 0.2; %volatility per square root year
s2 = s * s; %volatility squared per year
T = 1; %expiration date in years
sqrtT = sqrt(T);
const_ssqrtT = s * sqrtT;
proejoflhsh = exp(-r * T); %proejoflhtikos paragontas
Strike = 40; %strikeprice
Fragma = 37;
Num_timepoints = 2^N_power;
drift = (r - (s2)/2);
const2T = drift * T;
Y = zeros(Num_timepoints + 1, 1);
S = zeros(Num_timepoints + 1, 1);
S(1) = 40; %initial stock price
Y(1) = log(S(1)); C = 0;
log2 = log(2);
Z1 = randn(1, R);
vhma = T/Num_timepoints;
m = (0 : vhma : T) * drift + Y(1);
b = zeros(Num_timepoints + 1, 1);
ControlVariate = zeros(R, 1);
EvaluatedVariate = zeros(R, 1);
EuroCallSum = 0;
EuroBarrierSum = 0;
%Precalculatib
N = Num_timepoints;
j_max = 1;
k = 1;
m_max = N_power;
while(k <= m_max)
t_min = N/2;
t = t_min;
tl = 0;
tr = N;
j = 1;
while(j <= j_max) b(t+1) = s * sqrt((tr-t)*(t-tl)/(Num_timepoints*(tr-tl)));
t = t + N;
tl = tl + N;
tr = tr + N;
j = j + 1;
end
j_max = 2 * j_max;
N = t_min;
k = k + 1;
end

```

```

m_max = N_power;
for path = 1 : R
N = Num_timepoints;
j_max = 1;
S(N + 1) = S(1) * exp(const2_T + const_ssqrT * Z1(path));
%ypologismos telikhs timhs S_T
telikhtimh = S(N + 1);
Y(N + 1) = log(telikhtimh);
k = 1;
notdone = true;
if(telikhtimh > Strike)
ControlVariate(path,1) = (telikhtimh - Strike); %metavlth elegroy : (S_T -
strike)^+
EuroCallSum = EuroCallSum + ControlVariate(path, 1);
while(notdone && k <= m_max)
t_min = N/2;
t = t_min;
tl = 0;
tr = N;
j = 1;
Rand_st = randn(j_max, 1);
while(notdone && j <= j_max)
a = m(t + 1) + ((tr - t) * (Y(tl + 1) - m(tl + 1)) + (t - tl) * (Y(tr + 1) - m(tr +
1)))/(tr - tl);
Y(t + 1) = a + b(t + 1) * Rand_st(j);
S(t + 1) = exp(Y(t + 1));
if(S(t + 1) <= Fragma)
notdone = false;
end
t = t + N;
tl = tl + N;
tr = tr + N;
j = j + 1;
end
j_max = 2 * j_max;
N = t_min;
k = k + 1;
end
if(notdone)
EuroBarrierSum = EuroBarrierSum + (telikhtimh - Strike);
EvaluatedVariate(path, 1) = (telikhtimh - Strike);
end
end
end
EuroBarrierPrice = proejoflsh * (EuroBarrierSum/R);
%ypologismos ths arxikhs timhstoy BarrierCall

```

```

EuroCallPrice = proejoflhsh * (EuroCallSum/R);
%ypologismos ths arxikhs timhstoy EuroCall
Theoretical Call Price = 3.97;
Covariance = sum((ControlVariate - EuroCallPrice).*(EvaluatedVariate -
EuroBarrierPrice));
Variance = sum((ControlVariate - EuroCallPrice).^2);
b_star = Covariance/Variance;
EuroBarrierPriceControlVariate = EuroBarrierPrice - b_star*(EuroCallPrice -
TheoreticalCallPrice);
Theoretical Barrier Price = 2.8034;

```

Τιμολόγηση Δικαιώματος Αγοράς με Κάτω & Εκτός και Πάνω & Εκτός Φράγμα

```
function [Co] = Call 2 Barriers Bridge fastest
```

Τιμολογεί ένα δικαίωμα αγοράς με δύο φράγματα: κάτω & εκτός και πάνω & εκτός. Η δυναμική της μετοχής ακολουθεί το μοντέλο Black & Scholes. Η προσομοίωση του μονοπατιού της μετοχής γίνεται με γέφυρα Brown. Μετρά επίσης τον αριθμό των μονοπατιών που βγήκαν από το πάνω και τον αριθμό των μονοπατιών που βγήκαν από το κάτω φράγμα.

```

R = input('Please enter a value for the number of evaluations (paths):');
N_power = input('Please enter m where "Number of points" = 2^m (each path):');
r = 0.04;
s = 0.2;
s2 = s * s;
T = 1;
sqrtT = sqrt(T);
const_ssqrtT = s * sqrtT;
Strike = 40;
Fragmakatw = 37;
Fragmapanw = 47;
Num_timepoints = 2^N_power;
drift = (r - (s2)/2);
const2T = drift * T;
Y = zeros(Num_timepoints + 1, 1);
S = zeros(Num_timepoints + 1, 1);
S(1) = 40;
Y(1) = log(S(1));
C = 0;
used = 0;
not_used = 0;
out_down = 0;
out_up = 0;
log2 = log(2);
Z1 = randn(1, R);

```

```

vhma = T/Numtimepoints;
m = (0 : vhma : T) * drift + Y(1);
b = zeros(Numtimepoints + 1, 1); %Precalculate b
N = Numtimepoints;
j_max = 1;
k = 1;
m_max = N_power;
while(k <= m_max)
t_min = N/2;
t = t_min;
tl = 0;
tr = N;
j = 1;
while(j <= j_max)
b(t + 1) = s * sqrt((tr - t) * (t - tl) / (Numtimepoints * (tr - tl)));
t = t + N;
tl = tl + N;
tr = tr + N;
j = j + 1;
end
j_max = 2 * j_max;
N = t_min;
k = k + 1;
end
m_max = N_power;
for path = 1 : R
N = Numtimepoints;
j_max = 1;
S(N + 1) = S(1) * exp(const2T + const_ssqrtT * Z1(path));
telikh_timh = S(N + 1);
Y(N + 1) = log(telikh_timh);
k = 1;
within_bounds = false;
if(telikh_timh > Strike && telikh_timh > FragmaKatw && telikh_timh <
FragmaPanw)
within_bounds = true;
end
while(within_bounds && k <= m_max)
t_min = N/2;
t = t_min;
tl = 0;
tr = N;
j = 1;
Rand_st = randn(j_max, 1);
while(within_bounds && j <= j_max)
a = m(t + 1) + ((tr - t) * (Y(tl + 1) - m(tl + 1)) + (t - tl) * (Y(tr + 1) - m(tr +

```

```

1)))/(tr - tl);
Y(t + 1) = a + b(t + 1) * Randst(j);
S(t + 1) = exp(Y(t + 1));
if(S(t + 1) <= Fragmakatw || S(t + 1) >= Fragmapanw)
if(S(t + 1) <= Fragmakatw)
outdown = outdown + 1;
else
outup = outup + 1;
end
withinbounds = false;
end
t = t + N;
tl = tl + N;
tr = tr + N;
j = j + 1;
end
jmax = 2 * jmax;
N = tmin;
k = k + 1;
end
if(withinbounds)
C = C + (telikhtimh - Strike);
used = used + 1;
else
notused = notused + 1;
end
end
Co = exp((-r) * T) * (C/R);
pathsused = used
notused
outdown
outup

```

Τιμολόγηση Ασιατικού Δικαιώματος Αγοράς επί του Αριθμητικού Μέσου Τιμών μιας μετοχής

```
function Coasian = Asian Option(n)
```

Τιμολογεί ένα ασιατικό δικαίωμα αγοράς επί του αριθμητικού μέσου όρου M τιμών μιας μετοχής που ακολουθεί το μοντέλο των Black & Scholes.

```

n = input('Dwste ton arithmo twn monopatiwn:');
s = input('Dwste thn timh toy volatility s:');
C = zeros(1, n);
M = 30; %plthos timwn gia to meso oro
K = 40; %paradoteatimh
S = zeros(1, M);

```

```

S(1) = 40;
T = M/365;
dt = 1/365;
sqdt = sqrt(dt);
r = 0.05;
const1 = exp((r - (1/2) * s * s) * dt);
const2 = s * sqdt;
const = 40/30;
for i = 1 : n
Z = randn(M, 1);
for j = 1 : M(j + 1) = S(j) * const1 * exp(const2 * Z(j));
end
S_bar = sum(S)/30 - const;
C(i) = max((S_bar - K), 0);
end
proejoflsh = exp(-r * T);
Co_asian = proejoflsh * mean(C);

```

Τιμολόγηση Ασιατικού Δικαιώματος Αγοράς επί του Αριθμητικού Μέσου με Μεταβλητή Ελέγχου το Ασιατικό Δικαίωμα Αγοράς επί του Γεωμετρικού Μέσου

function *Co_asian arithmetic control variate* = Asian Option Control Variate Geometric

Τιμολογεί ένα ασιατικό δικαίωμα αγοράς επί του αριθμητικού μέσου M τιμών μιας μετοχής, χρησιμοποιώντας την αξία του αντίστοιχου ασιατικού δικαιώματος αγοράς επί του γεωμετρικού μέσου ως μεταβλητή ελέγχου. Η μετοχή ακολουθεί το μοντέλο Black & Scholes.

```

n = input('Dwste ton arithmo twn monopatiwn:');
C_arithmetic = zeros(1, n);
% dianysma tw n ektimhtriwn monte carlo gia thn arxikh ajia toy asiatikoy dik
agoras epi toy arithmhtikoy mesoy
C_geometric = zeros(1, n);
% dianysma tw n ektimhtriwn monte carlo gia thn arxikh ajia toy asiatikoy dik
agoras epi toy gewmetrikoy mesoy
M = 30; % plthos timwn gia toys mesoys oroys Sarithmetic kai Sgeometric
K = 40; % strike price
S = zeros(1, M + 1); % monopati M timwn ths gewmetrikhs kinshs Brown
S(1) = 40; % arxikh ajia metoxhs S
afairesh_50 = S(1)/M;
T = M/365; % wrimansh dikaiwmatwn se eth
dt = 1/365; % xronos poy mesolavei metajy twn diadoxikwn timwn ths metoxhs se
eth (hmerisies times)
sqdt = sqrt(dt);
s = 0.2; % metavlhtothta ana tetragwniko etos

```

```

r = 0.05; %drift parametros ths gewmetrikhs kinshs Brown
const1 = exp((r - (1/2) * s * s) * dt);
const2 = s * sqdt;
S_arithmetic = zeros(1, n);
%diagnosis arithmhtikwn meswn orwn (gia kathe monopati)
S_geometric = zeros(1, n);
%diagnosis gewmetrikwn meswn orwn (gia kathe monopati)
for i = 1 : n %gia kathe monopati
Z = randn(M, 1);
for j = 1 : M %gia kathe mera
S(j + 1) = S(j) * const1 * exp(const2 * Z(j)); %ypologismos timhs ths metoxhs
end
S_arithmetic(i) = (sum(S)/30) - afaireshso;
%ypologismos arithmhtikoy mesoy oroy
C_arithmetic(i) = max((S_arithmetic(i) - K), 0);
%i-osth ektimhtria monte carlo ths timhs toy arithmetic asian option
S_geometric(i) = (prod(S)/S(1))^(1/M);
%ypologismos gewmetrikoy mesoy oroy
C_geometric(i) = max((S_geometric(i) - K), 0);
%i-osth ektimhtria monte carlo ths timhs toy geometric asian option
end
C_asiarithmetic = exp(-r * T) * mean(C_arithmetic)
%Monte Carlo ektimhtria gia thn timh toy arithmetic asian option
C_asiangeometric = exp(-r * T) * mean(C_geometric)
%Monte Carlo ektimhtria gia thn timh toy geometric asian option
%ypologismostoybeltistoyb* :
Var_X = sum((C_geometric - C_asiangeometric).^2);
%ypologismos ths "dakymanshs" ths metavlthhs elegxoy, X = C_geometric
Cov_XY = sum((C_geometric - C_asiangeometric) .* (C_arithmetic - C_asiarithmetic));
%ypologismos "syndiakymanshs twN X, Y"
b_optimal = Cov_XY / Var_X;
Akrivhs ajia asian option geometric = 0.5769;
C_asiarithmeticControlVariate = C_asiarithmetic - b_optimal * (C_asiangeometric -
Akrivhs ajia asian option geometric)

```

Εκτίμηση ολοκληρώματος $\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} e^x e^{-x^2/2} dx$ **και εμπειρική κατανομή**
του $\sqrt{N} \times error_N$

1) function $\hat{a}_N = \text{monte carlo EeX}(N)$

Εκτιμά το ολοκλήρωμα $\int_{\mathbb{R}} e^x e^{-x^2/2} dx$ με Monte Carlo. Παίρνει ως όρισμα το πλήθος των επαναλήψεων N .

```

X = randn(N, 1);
a_N = sqrt(2 * pi) * mean(exp(X));

```

2)

Εκτιμά M φορές το $\sqrt{N} \times error_N = \sqrt{N} \times (\hat{a}_N - a)$, παριστά την εμπειρική κατανομή και υπολογίζει τη διασπορά του

```

M = input('Please enter a value for the number of evaluations:');
N = input('Please enter a value for the number of points:');
K = sqrt(2 * pi * exp(1));
sqrNerr = zeros(M,1);
sqN = sqrt(N);
C = zeros(M,1);
for i = 1 : M
C(i) = monte carlo EeX(N);
sqrNerr(i) = sqN * (K - C(i));
end
Variance = var(sqrNerr)
hist(sqrNerr, 40)

```

Εκτίμηση ολοκληρώματος $\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} e^x e^{-x^2/2} dx$ με αντιθετικές μεταβλητές

```
function  $\hat{\alpha}_{Antithetic}$  = Antithetic Monte Carlo EeX(N)
```

Εκτιμά το ολοκλήρωμα $\int_{\mathbb{R}} e^x e^{-x^2/2} dx$ με την εκτιμήτρια αντιθετικών μεταβλητών. Παίρνει ως όρισμα το πλήθος των επαναλήψεων N .

```

N = input('Please enter a value for the number of points in each evaluation:');
X = randn(1, N);
 $\hat{\alpha}_{Antithetic}$  = sqrt(pi/2) * (mean(exp(X) + exp(-X))/2);

```

Μοντέλο CIR

```
function CIR = Simulation of CIR model(n)
```

Προσομοιώνει ένα μονοπάτι του στιγμιαίου επιτοκίου r , όταν η δυναμική του καθορίζεται από τη ΣΔΕ $'dr(t) = a(b - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t)'$, όπου W τυπική κίνηση Brown, στις χρονικές στιγμές $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$, με $d = 4ba/\sigma^2$. Η προσομοίωση γίνεται με σχήμα Euler. Παίρνει ως όρισμα το πλήθος των χρονικών σημείων n .

```

% Parametroi sto montelo CIR:
a = 0.2;
b = 0.05;
s = 0.1;
t = 1/12;
d = 4 * b * a / s^2; %(d > 1)
dt = t/N;
CIR = zeros(1, N + 1);
CIR(1) = 0.04; %arxikh timh stigmiaioy epitokioy
X = gamrnd(2, (d - 1)/2, [1N]);

```



```

for i = 1 : N
c = (s^2 * (1 - exp(-a * dt)))/(4 * a);
lamda = CIR(i) * (exp(-a * dt))/c;
Z = randn;
CIR(i + 1) = c * ((Z + sqrt(lamda))^2 + X(i));
end

```

Παραγωγή Τυχαίων Τιμών $r \sim CIR$

```
function r = Paragwgh tyxaiwn timwn r CIR(N, t)
```

Παράγει N το πλήθος τιμές για το στιγμιαίο επιτόκιο $r(t)$ (δεσμεύοντας ως προς το χρόνο 0), όταν η κατανομή του καθορίζεται από το μοντέλο CIR. Ως ορίσματα παίρνει το πλήθος των τιμών N καθώς και το χρόνο t .

```

if t == 0
fprintf('Error: Second input argument, t, must be strictly positive')
end
r = zeros(1, N + 1);
r(1) = 0.04; %arxikh timh stigmiaioy epitokioy
%ParametroimonteloyCIR : s = 0.1;
a = 0.2;
b = 0.05;
d = (4 * b * a)/s^2;
c = (s^2 * (1 - exp(-a * t)))/(4 * a);
lamda = (r(1) * (exp(-a * t)))/c;
Z = randn(1, N);
X = gamrnd(2, (d - 1)/2, 1, N);
for i = 1 : N
r(i + 1) = c * ((Z(i) + sqrt(lamda))^2 + X(i));
end

```

Τιμολόγηση Ομολόγων

```
function BtT = Timologhsh Omologwn(t, T)
```

Τιμολογεί ομόλογα $B(t, T)$ όψεως 1 και ωρίμανσης T , τη χρονική στιγμή t , όταν το στιγμιαίο επιτόκιο r καθορίζεται από τη ΣΔΕ του μοντέλου CIR. Δέχεται ως ορίσματα τους χρόνους t και T .

```

a = 0.2; %speed parameter in CIR
b = 0.05; %long term interest rate in CIR
s = 0.1; %volatility in CIR
gamma = sqrt(a^2 + 2 * s^2);
if t == 0
r = 0.04;
else
rdiplo = Paragwgh tyxaiwn timwn r CIR(1, t);

```

```

r = r_diplo(2);
end
A = (2 * (exp(gamma * (T - t)) - 1)) / ((gamma + a) * (exp(gamma * (T - t)) - 1) + 2 * gamma);
C = ((2 * a * b) / s^2) * log((2 * gamma * exp(((a + gamma) * (T - t)) / 2)) / ((gamma + a) * (exp(gamma * (T - t)) - 1) + 2 * gamma));
B_tT = exp(-A * r + C); %timh omologoy

```

Τιμολόγηση Δικαιώματος Ανταλλαγής Επιτοκίου

```
function swaption price = Timologhsh dikaiwmatos antallaghs epitokioy
```

Τιμολογεί το δικαίωμα να ανταλλάξουμε στο χρόνο t μία πληρωμή σε μεταβλητό επιτόκιο περιόδου $r(t, T)$ με πληρωμή σε σταθερό επιτόκιο R , όταν το επιτόκιο ακολουθεί το μοντέλο CIR.

```

N = input
('Dwse to plthos tw n xronikwn stigmwn sto sxhma Euler gia thn proseggish
toy  $\int_0^t r(s)ds$ :');
M = input
('Dwse to plthos tw n epanalhpswn gia thn ektimhtria Monte Carlo ths
arxikhs ajias toy dikaiwmatos:');
T = 1; %wrimansh enas xronos
t = 1/12;
R = 0.0425; %stathero epitokio
r_arxiko = 0.04;
swaption price = 0;
for j = 1 : M
r_stigmiaiwn epitokiwn = Simulation of CIR model(N);
Integral = (sum(r_stigmiaiwn epitokiwn) - r_arxiko) / (12 * N);
%ektimhsh toy  $\int_0^t r(s)ds$  me akriveia N shmeiwn
ajia_omologoy = Timologhsh Omologwn(t, T);
epanalhps h monte carlo = exp(-Integral) * max(0, (1 - ajia_omologoy * (1 + R *
(T - t))));
swaption price = swaption price + epanalhps h monte carlo;
endswaption price = swaption price / M;

```

Υπολογισμός Ζημίας Χαρτοφυλακίου

```
function Loss = Eyresh Loss of Portfolio over 0 t(t, N, M)
```

Υπολογίζει τη ζημία $L = V(0) - V(t)$ ενός χαρτοφυλακίου με 3 ομόλογα, ένα συμβόλαιο ανταλλαγής επιτοκίου (swap) και ένα δικαίωμα ανταλλαγής επιτοκίου, στο διάστημα $[0, t]$, όταν η δυναμική του επιτοκίου καθορίζεται από το μοντέλο CIR. Ως ορίσματα παίρνει το χρόνο t , το πλήθος των σημείων κατά την προσομοίωση τιμών επιτοκίου CIR, και το πλήθος των επαναλήψεων M κατά την τιμολόγηση του δικαιώματος ανταλλαγής επιτοκίου.

```

R_stathero = [0.0425; 0.045];
%to prwto einai to stathero epitokio antallaghs gia to swap
%to deytero to stathero epitokio antallaghs gia to dik antallaghs
T = [1/3; 2/3; 1]; %wrimanseis tw n triwn omologwn se eth
V_OMOLOGWNt = zeros(3, 1); %dianysma timwn omologwn sto xrono t
ArrikesTimesOMOLOGWN = zeros(3, 1); %dianysma arxikwn timwn
omologwn
for i = 1 : 3
V_OMOLOGWNt(i) = Timologhsh Omologwn(t, T(i));
ArrikesTimesOMOLOGWN(i) = Timologhsh Omologwn(0, T(i));
end
r_periodoy = ((1./V_OMOLOGWNt) - 1) .* (1./(T - t)); %eyresh epitokiwn periodoy
A = 100; %to swap einai epi posoy A euro
V_swap t = A * (r_periodoy(2) - R_stathero(1)) * (T(2) - t) * V_OMOLOGWNt(2);
%ajia swap epi toy epitokioy periodoyr(t, T(2))th stigmh t
B = 200; %to dik antallaghs epitokioy einai epi posoy B euro
V_SwapOptiont = B * max(r_periodoy(3) - R_stathero(2), 0) * (T(3) - t) * V_OMOLOGWNt(3);
%ajia dik antallaghs epitokioy periodoyr(t, T(3))th stigmh t
r_arxiko = 0.04;
swaption price = 0;
for j = 1 : M
r_StigmiaiwnEpitokiwn = Simulation of CIR model(N);
Integral = ((sum(r_StigmiaiwnEpitokiwn) - r_arxiko) * t) / (N);
%ektimhsh toy  $\int_0^t r(s) ds$  me akriveia N shmeiwn
ajia_omologoy = Timologhsh Omologwn(t, T(3));
epanalhps h_MonteCarlo = exp(-Integral) * max(0, (1 - ajia_omologoy * (1 + R_stathero(2)) *
(T(3) - t)));
swaption price = swaption price + epanalhps h_MonteCarlo;
end
swaption price = B * swaption price / M;
V_swap0 = A * (Timologhsh Omologwn(0, t) - ArrikesTimesOMOLOGWN(2) *
(1 + R_stathero(1)) * (T(2) - t));
V_portfolio t = sum(V_OMOLOGWNt) + V_swap t + V_swapoption t;
%ajia xartofylakioy th stigmh t
V_portfolio 0 = sum(ArrikesTimesOMOLOGWN) + V_swap 0 + swaption price;
Loss = V_portfolio 0 - V_portfolio t; %zhmia xartofylakioy thn periodo[0, t]

```

Υπολογισμός Αξίας σε Κίνδυνο

Υπολογίζει K φορές την τιμή της ζημίας του χαρτοφυλακίου, στο διάστημα $[0, t]$, και παριστά τα K σημεία σε ένα ιστόγραμμα. Εκτιμά έπειτα την $[0, t]$ -αξία σε κίνδυνο του χαρτοφυλακίου, υπολογίζοντας ένα ποσοστημοριο της εμπειρικής κατανομής της ζημίας.

```

K = input('Dwste to plthos tw n forwn poy tha vroyme thn ajia toy xartofylakioy:');
t = input('Dwste to t gia to opoio theloyme na ypologisoyme thn ajia kathe fora:');
Loss = zeros(K, 1);

```

```
for i = 1 : K
Loss(i) = Eyresh Loss of Portfolio over 0 t(t, 10000, 10000);
end
hist(Loss, 50)%istogramma K timwn zhmiat toy xartofylakioy
VaR = prctile(Loss, 99)%ypologismos ajias se kindyno
```

Βιβλιογραφία

- [1] Beasley, J.D., and Springer, S.G. (1977) The percentage points of the normal distribution, *Applied Statistics* 26:118-121.
- [2] Cox, J.C., Ingersoll, J.E., and Ross, S.A. (1985) A theory of the term structure of interest rates, *Econometrica* 53:129-151
- [3] Feller, W. (1951) Two singular diffusion problems, *Annals of Mathematics* 54:173-182
- [4] Glasserman, P. (2004) Monte Carlo Methods in Financial Engineering, Springer
- [5] Hull, J. (2005) Futures, Options and other Derivatives, 6th ed., Prentice Hall.
- [6] Karatzas, I., Shreve, S. (1991) *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer-Verlag, New York.
- [7] Lambertson, D., and Lapeyre, B. (1996) *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance*, Chapman & Hall, London.
- [8] Marsaglia, G., and Tsang, W.W. (2000) The Ziggurat Method for Generating Random Variables, *Journal of Statistical Software* 5 (8)
- [9] Marsaglia, G., Zaman, A., and Marsaglia, J.C.W. (1994) Rapid evaluation of the inverse of the normal distribution function, *Statistics and Probability Letters* 19:259-266.
- [10] Moro, B. (1995) The full monte, *Risk* 8(Feb):57-58
- [11] Scott, L.O. (1996) Simulating a multi-factor term structure model over relatively long discrete time periods, in *Proceedings of the IAFE First Annual Computational Finance Conference*, Graduate School of Business, Stanford University
- [12] Von Neumann, J. (1951) Various techniques used in connection with random digits, *Applied Mathematics Series*, 12, National Bureau of Standards, Washington, D.C.