Τίτλος εργασίας

Καθολικές σειρές Taylor

του

Μπάσσφορντ Μιχάλη Δ.

Επιβλέπων καθηγητής: Κωστάκης Γ.

Φεβρουάριος 2016

1 Εισαγωγή

Θα ασχοληθούμε με τις λεγόμενες καθολικές σειρές Taylor.
Αρχικά θα αποδείξουμε την ύπαρξη τέτοιου είδους σειρών και έναν τύπο που εκφράζει το σύνολο τους και έπειτα κάποιες ιδιότητές τους.
Στις αποδείξεις μας, θα δέχτουμε ως δεδομένα κάποια γνωστά τοπολογικά αποτελέσματα καθώς και τα θεωρήματα Mergelyan,Baire,Lusin και το θεώρημα εκτιμήσεων του Cauchy. Η διατύπωση του θεωρήματος Mergelyan και η απόδειξή του βρίσκονται στο [1] της βιβλιογραφίας.

Θεώρημα(Mergelyan)
Αν K συμπαγές σύνολο στο μιγαδικό επίπεδο με συνεκτικό συμπλήρωμα, f συνεχής συνάρτηση στο K και ολόμορφη στο εσωτερικό του K, τότε για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει πολυώνυμο P ώστε: $|\ f(z)$-$P(z)| < \epsilon$, για κάθε z στο K.

Θεώρημα (Baire)
Αν X είναι ένας πλήρης μετρικός χώρος,τότε η τομή αριθμήσιμων το πλήθος συνόλων,όπου κάθε ένα απο αυτά είναι G_δ και πυκνό στον X, είναι ένα G_δ και πυκνό σύνολο στον X.

Θεώρημα (Lusin)
Έστω f μία μιγαδική μετρήσιμη συνάρτηση στο χώρο X, A υποσύνολο του X έτσι ώστε $\mu(A) < \infty, f(x) = 0$ αν $x \notin A$ και $\epsilon > 0$.Τότε υπάρχει $g \in C_c(X)$ έτσι ώστε

$$\mu(\{x : f(x) \neq g(x)\ \}) < \epsilon.$$

Θεώρημα (Εκτιμήσεων του $Cauchy$)
Αν f ολόμορφη σε ένα ανοιχτό σύνολο A και $C(z_0, r)$ κύκλος κέντρου $z_0 \in A$ και ακτίνας r,τότε: $|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{r^n} \cdot M, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,όπου M η μέγιστη τιμή της f στο κύκλο,η οποία υπάρχει επειδή ο κύκλος είναι συμπαγές σύνολο.

2 Ύπαρξη των Καθολικών σειρών Taylor

Ορισμός:
Μία σειρά Taylor λέγεται καθολική σειρά Taylor αν έχει ακτίνα σύγκλισης 1 και αν για κάθε συμπαγές K που δεν τέμνει τον D,όπου D ο ανοιχτός μοναδιαίος δίσκος, με συνεκτικό συμπλήρωμα και για κάθε $f : K \to \mathbb{C}$ συνεχή στο K και ολόμορφη στο εσωτερικό του K, υπάρχει υπακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς που συγκλίνει ομοιόμορφα στην f στο K.Το σύνολο όλων των καθολικών σειρών $Taylor$ θα το συμβολίζουμε με U.Αρχικά παρατηρούμε ότι δεν είναι προφανές πως το σύνολο U είναι μη κενό.

Ορισμός
Αν έχουμε ότι η συνάρτηση f ανήκει στο χώρο των ολόμορφων συναρτήσεων στον ανοιχτό μοναδιαίο δίσκο,$f \in H(D)$,τότε συμβολίζουμε το n-στό μερικό άθροισμα του αναπτύγματος $Taylor$ της f με κέντρο μηδέν ως $S_n(f)(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$,όπου $a_k = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$.

Σημείωση
Θα θεωρήσουμε το U ως υποσύνολο του $H(D)$.

Αρχικά θα δείξουμε μία συνολοθεωρητική έκφραση για το σύνολο U των καθολικών σειρών $Taylor$ και μέσω αυτής θα αποδείξουμε ότι το U είναι G_δ πυκνό στον $H(D)$ και άρα ότι οι καθόλικές σειρές Taylor υπάρχουν.Θα χρειαστούμε τα παρακάτω δύο λήμματα.

Λήμμα 1
Υπάρχουν συμπαγή, μη πεπερασμένα και αριθμήσιμα το πλήθος σύνολα K_m, $m = 1, 2, ...$, έξω απο το D με συνεκτικό συμπλήρωμα, έτσι ώστε κάθε μη κενό συμπαγές K έξω απο το D με συνεκτικό συμπλήρωμα να βρίσκεται μέσα σε κάποιο K_m.

Απόδειξη. Για την απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε τα ακόλουθα τοπολογικά αποτελεσμάτα:

(1) Η πεπερασμένη ένωση συμπαγών συνόλων στο $\mathbb{C}$ είναι συμπαγές σύνολο.

(2)Η τόμη συμπαγών συνόλων στο $\mathbb{C}$ είναι συμπαγές σύνολο.

(3)Η ένωση συνεκτικών συνόλων με μη κενή τομή στο $\mathbb{C}$ είναι συνεκτικό σύνολο.

Έστω K μη κενό συμπαγές σύνολο έξω απο το D με συνεκτικό συμπλήρωμα. Χωρίς βλάβη της γενικότητας,θεωρούμε ότι το K είναι ένα άπειρο σύνολο,διότι σε κάθε πεπερασμένη περίπτωση,μπορούμε να βρούμε ενα άπειρο σύνολο με τις ίδιες ιδιότητες που να το περιέχει. (Για παράδειγμα παίρνουμε κλειστούς δίσκους με κέντρο τα σημεία του K και ακτίνα αρκετά μικρή ώστε οι δίσκοι να βρίσκονται έξω απο το D και να είναι ξένοι μεταξύ τους. Απο το (1),η ένωσή τους είναι συμπαγές σύνολο και αφού είναι ξένοι,η ένωση έχει συνεκτικό συμπλήρωμα.)
Επειδή τώρα το K είναι συμπαγές, υπάρχει φυσικός n ώστε $|z| < n$,για κάθε $z \in$K. Από αυτό,βλέπουμε ότι το K βρίσκεται μέσα στο σύνολο $\{z \in \mathbb{C} : 1 \leqslant |z| \leqslant n\}$.
Θα κατασκευάσουμε τα K_m χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι το συμπλήρωμα του K είναι συνεκτικό. Επειδή το συμπλήρωμα του K είναι συνεκτικό, μπορούμε να ενώσουμε οποιαδήποτε δύο σημεία του συμπληρώματός του με μία πολυγωνική γραμμή που βρισκεται έξω απο το K. Αυτές τις γραμμές τις επιλέγουμε ώστε οι κορυφές τους να έχουν ρητές συντεταγμένες. Παίρνουμε,λοιπόν,εκείνες τις γραμμές Γ που συνδέουν τους αριθμούς 0 και $n+1$.
Το πλήθος των γραμμών αυτών είναι αριθμήσιμο επειδή οι κορυφές έχουν ρητές συντεταγμένες. Από αυτό και από το γεγονός ότι η απόσταση της Γ από το K είναι θετική, μπορούμε να ορίσουμε τα σύνολα

$$L(n, \Gamma, s) := \left\{ z \in \mathbb{C} : 1 \leqslant |z| \leqslant n, dist(z, \Gamma) \geq \frac{1}{s} \right\}$$

τα οποία είναι ακριβώς τα ζητούμενα K_m. Πράγματι, τα σύνολα αυτά είναι μη πεπερασμένα, αφού περιέχουν το K.
Είναι συμπαγή απο το (2) ως τομή δύο συμπαγών, των

$$\{z \in \mathbb{C} : 1 \leqslant |z| \leqslant n\}, \left\{ dist(z, \Gamma) \geq \frac{1}{s} \right\}.$$

Για τη συνεκτικότητα του συμπληρώματος, παρατηρούμε ότι τα $L(n, \Gamma, s)$ εκφράζονται ώς εξής:

$$L(n, \Gamma, s) := \{z \in \mathbb{C} : 1 \leqslant |z|\} \bigcap \left\{ dist(z, \Gamma) \geq \frac{1}{s} \right\} \bigcap \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant n\}.$$

Άρα το συμπλήρωμα γραφεται:

$$[L(n, \Gamma, s)]^c = \{z \in \mathbb{C} : 1 > |z|\} \bigcup \left\{ dist(z, \Gamma) < \frac{1}{s} \right\} \bigcup \{z \in \mathbb{C} : |z| > n\}.$$

Το πρώτο σύνολο στο δεξιό μέλος της τελευταίας σχέσης έχει μη κενή τομή με το δέυτερο σύνολο. Και τα δύο περιέχουν την Γ. Άρα από το (3), η ένωσή τους είναι συνεκτικό σύνολο. Το δεύτερο σύνολο έχει μη κενή τομη με το τρίτο σύνολο. Και τα δύο περιέχουν το $n+1$. Άρα πάλι από το (3) η ένωση του τρίτου με την ένωση του δεύτερου και του πρώτου είναι ένα συνεκτικό σύνολο.

Συνεπώς, τα σύνολά μας $L(n,\Gamma,s)$ είναι συμπαγή, άπειρα με συνεκτικό συμπλήρωμα και τελικά μία απαρίθμησή τους, η οποία είναι δυνατή διότι τα σύνολα αυτά όπως είδαμε είναι αριθμήσιμα το πλήθος,μας διδει τα ζητούμενα K_m. □

Λήμμα 2

Το σύνολο U εκφράζεται ως εξής:

$$U = \bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcap_{s=1}^{\infty}\bigcup_{n=0}^{\infty} E(m,j,s,n),$$

όπου $E(m,j,s,n) := \{g \in H(D) : \sup_{z\in K_m} |S_n(g)(z) - f_j(z)| < \frac{1}{s}\}$,με τα K_m όπως στο λήμμα 1 και σταθεροποιημένα και $f_j, j \in \mathbb{N}$, μία απαρίθμηση των πολυωνύμων με συντελεστές στο $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$.

Απόδειξη. Θα δείξουμε το ζητούμενο με δύο εγκλεισμούς.
Έστω $u \in U$.Από τον ορισμό των καθολικών σειρών $Taylor$, σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του συμπληρώματος του D με συνεκτικό συμπλήρωμα και για κάθε συνάρτηση g που είναι συνεχής σε αυτό το υποσύνολο και ολόμορφη στο εσωτερικό του, μπορούμε να βρούμε υπακολουθία των μερικών αθροισμάτων της u που να συγκλίνει ομοιόμορφα στη g στο συμπαγές αυτό υποσύνολο.Σταθεροποιούμε $m, j, s \in \mathbb{N}$. Εφ'όσον $u \in U$, υπάρχει υπακολουθία των μερικών αθροισμάτων της u που συγκλίνει ομοιόμορφα στο K_m στην f_j. Άρα,έχουμε ότι η f_j προσεγγίζεται ομοιόμορφα από μία υπακολουθία της u στο K_m. Δηλαδή $\forall\epsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}$, έτσι ώστε $\sup_{z\in K_m} |S_n(u)(z) - f_j(z)| < \epsilon$, ή ισοδύναμα $\forall s \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε

$$\sup_{z\in K_m} |S_n(u)(z) - f_j(z)| < \frac{1}{s}.$$

Αυτό σημαίνει ότι $u \in \bigcup_{n=0}^{\infty} E(m,j,s,n)$.
Συνεπώς δείξαμε το πρώτο εγκλεισμό.
Αντίστροφα, έστω

$$u \in \bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcap_{s=1}^{\infty}\bigcup_{n=0}^{\infty} E(m,j,s,n).$$

Έστω $K \subset D^c$ με K^c συνεκτικό και $g : K \to \mathbb{C}$ συνεχής και ολόμορφη στο εσωτερικό του K και έστω $\epsilon > 0$.Αρκεί να βρούμε $n \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\sup_{z\in K}|S_n(u)(z) - g(z)| < \epsilon.$$

Απο το λήμμα 1,υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε $K \subset K_m$. Έστω $s \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{s} < \epsilon$. Απο $Mergelyan$,υπάρχει πολυώνυμο f_j ώστε $\sup_{z\in K_m} |g(z) - f_j(z)| < \frac{1}{2s}$.

Όμως, απο την υπόθεσή μας είναι άμεσο ότι υπάρχει $n \in \mathbb{N}$
ώστε $\sup_{z\in K_m} |S_n(u)(z) - f_j(z)| < \frac{1}{2s}$. Από τα παραπάνω, έχουμε ότι:
$\sup_{z\in K}|S_n(u)(z) - g(z)| \leq \sup_{z\in K_m} |S_n(u)(z) - g(z)| =$
$\sup_{z\in K_m} |S_n(u)(z) - g(z) + f_j(z) - f_j(z)| \leq \sup_{z\in K_m} |S_n(u)(z) - f_j(z)| +$
$\sup_{z\in K_m} |g(z) - f_j(z)| < \frac{1}{s} < \epsilon$. Μένει να δείξουμε ότι η σειρά $Taylor$ της u έχει ακτίνα σύγκλισης 1. Επειδή $u \in H(D)$, το ανάπτυγμα $Taylor$ της σειράς της u έχει ακτίνα σύγκλισης τουλάχιστον 1.
Θεωρούμε το $\{z_0\}$, όπου $|z_0| = 1$ και $z_0 \in \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 1\}$.
Το $\{z_0\}$ είναι συμπαγές έξω από τον D με συνεκτικο συμπλήρωμα και άρα απο το παραπάνω που δείξαμε για την u , τα μερικά αθροίσματα του αναπτύγματος $Taylor$ της u στο z_0 προσεγγίζουν κάθε μιγαδικό αριθμό.Από αυτό βλέπουμε ότι το ανάπτυγμα $Taylor$ της u στο z_0 αποκλίνει στο άπειρο και άρα η ακτίνα σύγκλισης είναι ίση με 1. Συνεπώς $u \in U$. □

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι οι καθολικές σειρές $Taylor$ είναι πυκνό υποσύνολο του $H(D)$ και άρα ότι υπάρχουν.

Λήμμα 3
Το σύνολο $E(m, j, s, n)$ είναι ανοιχτό στο χώρο $H(D)$, $\forall m, j, s \in \mathbb{N}$ και $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Απόδειξη. Για να είναι το σύνολο $E(m, j, s, n)$ ανοιχτό στον $H(D)$,
αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $f \in E(m, j, s, n)$, μπορούμε να βρούμε ανοιχτή περιοχή του f , συγκεκριμένα ανοιχτή μπάλα, που περιέχεται στο $E(m, j, s, n)$.
Έστω, λοιπόν, $f \in E(m, j, s, n)$. Θα δείξουμε ότι αν $g \in H(D)$, με
$\sup_{|z|\leq \frac{1}{2}} |f(z) - g(z)| < r$, τότε $g \in E(m, j, s, n)$, δηλαδή ότι η ανοιχτή μπάλα κέντρου f και ακτίνας r περιέχεται στο $E(m, j, s, n)$.
Ο αριθμός r θα προσδιοριστεί παρακάτω και επιπλέον θα φανεί και ο λόγος που περιοριζόμαστε στα z με $|z| \leq \frac{1}{2}$.
Τώρα, για να δείξουμε ότι $g \in E(m, j, s, n)$, αρκεί να δείξουμε ότι
$\sup_{z\in K_m} |S_n(g)(z) - f_j(z)| < \frac{1}{s}$.
Για $z \in K_m$, έχουμε:
$|S_n(g)(z) - f_j(z)| \leq |S_n(g)(z) - f_j(z) + S_n(f)(z) - S_n(f)(z)| \leq |S_n(g - f)(z)| +$
$|S_n(f)(z) - f_j(z)|$.
Θέτουμε $S_n(g - f)(z) = \sum_{\lambda=0}^{n} b_\lambda z^\lambda$. και επειδή $\sup_{|z|\leq \frac{1}{2}} |f(z) - g(z)| < r$, έχουμε

ότι $|b_\lambda| < 2^\lambda r$.
Πράγματι,από τις εκτιμήσεις $Cauchy$ για την $g-f$ στο κύκλο κέντρου μηδέν και ακτίνας $\frac{1}{2}$,έχουμε: $|(g-f)^{(\lambda)}(0) \leq \frac{\lambda!}{(1/2)^\lambda}M|$,όπου M η μέγιστη τιμή της $g-f$ στον κύκλο κέντρου μηδέν και ακτίνας $\frac{1}{2}$,η οποία υπάρχει επειδή ο κύκλος είναι συμπαγές σύνολο.Άρα έχουμε ότι $M < r$ επειδή $sup_{|z|\leq \frac{1}{2}} |f(z)-g(z)| < r$.

Επομένως:

$$|b_\lambda| = |\frac{(g-f)^{(\lambda)}(0)}{\lambda!}| \leq \frac{M}{(1/2)^\lambda} = 2^\lambda M < 2^\lambda r$$

Θέτουμε $r = \dfrac{\frac{1}{s} - \sup_{z\in K_m} |S_n(f)(z) - f_j(z)|}{\sum_{\lambda=0}^{n} 2^\lambda M^\lambda} > 0.$

Για $z \in K_m$, έχουμε:
$|\sum_{\lambda=0}^{n} b_\lambda z^\lambda| < r \cdot [\sum_{\lambda=0}^{n} 2^\lambda M^\lambda]$.
Τελικά, έχουμε ότι:
$\sup_{z\in K_m} |S_n(g)(z) - f_j(z)| < r \cdot [\sum_{\lambda=0}^{n} 2^\lambda M^\lambda] + \sup_{z\in K_m} |S_n(f)(z) - f_j(z)| = \frac{1}{s}$.
Άρα $g \in E(m,j,s,n)$.

□

Λήμμα 4
Το σύνολο $\bigcup_{n=0}^{\infty} E(m,j,s,n)$ είναι ανοιχτό και πυκνό στον $H(D)$, $\forall m,j,s \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε $m,j,s \in \mathbb{N}$. Η ένωση $\bigcup_{n=0}^{\infty} E(m,j,s,n)$ είναι ανοιχτό σύνολο,αφού από το προηγούμενο λήμμα έχουμε ότι τα σύνολα $E(m,j,s,n)$ είναι ανοιχτά.
Θα δείξουμε ότι η ένωση είναι και πυκνό σύνολο στο $H(D)$. Έστω,λοιπόν, $f \in H(D), L \subset D$ μη κενός συμπαγής δίσκος και $\epsilon > 0$.
Για το ζητούμενό μας,αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει $n \geq 0$ και $g \in E(m,j,s,n)$ έτσι ώστε $sup_{z\in L}|f(z) - g(z)| < \epsilon$.
Τα σύνολα K_m και L είναι συμπαγή και άρα η ένωση $K_m \cup L$ είναι συμπαγές σύνολο. Τα συμπληρώματα των K_m και L είναι συνεκτικά. Συνεπώς η τομή των συμπληρωμάτων, δηλαδή το συμπλήρωμα της ένωσής τους, είναι συνεκτικό.
Τώρα,παρατηρούμε ότι η συνάρτηση F με $F(z) = f_j(z)$ στο K_m και $F(z) = f(z)$ στο L είναι συνεχής στο $K_m \cup L$ και ολόμορφη στο εσωτερικό του $K_m \cup L$.

Από το θεώρημα $Mergelyan$, για την F στο $K_m \cup L$, υπάρχει μη μηδενικό πολυώνυμο g τέτοιο ώστε: $|F(z) - g(z)| < min(\epsilon, \frac{1}{s})$ στο $K_m \cup L$.
Αν θέσουμε $n := deg(g) \geq 0$, τότε $S_n(g) = g, sup_{z \in K_m}|S_n(g) - f_j(z)| < \frac{1}{s}$ και $sup_{z \in L}|f(z) - g(z)| < \epsilon$.
Άρα έχουμε ότι $g \in E(m, j, s, n)$ και ότι η g προσεγγίζει την f ομοιόμορφα στον L,κατά ϵ.

Το L είναι τυχαίος συμπαγής δίσκος του D και επειδή κάθε συμπαγές υποσύνολο του D περιέχεται σε κάποιο συμπαγή δίσκο μέσα στον D , το παραπάνω ισχύει για κάθε συμπαγές υποσύνολο του D. Άρα, πράγματι το $\bigcup_{n=0}^{\infty} E(m, j, s, n)$ είναι πυκνό στον $H(D)$.

□

Το παρακάτω θεώρημα και η απόδειξή του βρίσκονται στο [3].
Θεώρημα:
Το σύνολο U είναι G_δ πυκνό στον $H(D)$ και άρα οι καθολικές σειρές $Taylor$ υπάρχουν.

Απόδειξη. Από τα Λήμματα 2 και 4,το σύνολο U είναι αριθμήσιμη τομή ανοιχτών και πυκνών υποσυνόλων του $H(D)$ και επειδή ο $H(D)$ είναι πλήρης μετρικός χώρος,από το θεώρημα του $Baire$ έχουμε ότι το σύνολο U είναι G_δ πυκνό στο $H(D)$.

□

Πρόταση 1
Έστω $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in U$ και $g(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ ακέραια.
Τότε $f + g \in U$.

Απόδειξη. Έστω $S_n(g(z)) = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k z^k$. Επειδή η g είναι ακέραια, ξέρουμε ότι η $S_n(g)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στη g στα συμπαγή του $\mathbb{C}$.
Έστω K συμπαγές έξω απο το D με συνεκτικό συμπλήρωμα και $h : K \to \mathbb{C}$ συνεχής στο K και ολόμορφη στο εσωτερικό του.
Γία το ζητούμενό μας, αρκεί να βρούμε υπακολουθία S_{k_n} των μερικών αθροισμάτων της $f + g$ που να συγκλίνει ομοιόμορφα στην h στο K. Δηλαδή να έχουμε: $\sup\limits_{z \in K} |S_{k_n}((f + g)(z)) - h(z)| \to 0$,καθώς $n \to \infty$.

Η $h - g$ είναι συνεχής στο K και ολόμορφη στο εσωτερικό του K.
Επειδή $f \in U$,υπάρχει υπακολουθία $S_{k_n}(f)$ των μερικών αθροισμάτων της f που

συγκλίνει ομοιόμορφα στην $h-g$ στο K.
Δηλαδή: $\sup_{z\in K} |S_{k_n}(f(z)) - (h(z)-g(z))| \to 0$,καθώς $n\to\infty$.
Επειδή η g είναι ακέραια,έχουμε: $\sup_{z\in K} |S_n(g)(z) - g(z)| \to 0$,καθώς $n\to\infty$.
Άρα έχουμε ότι :
$\sup_{z\in K} |S_{K_n}((f+g)(z)) - h(z)| \le \sup_{z\in K} |S_{K_n}((f+g)(z)) - h(z) + g(z) - g(z)| \le$
$\sup_{z\in K} |S_{K_n}((f)(z)) - (h(z)-g(z))| + \sup_{z\in K} |S_{K_n}((g)(z)) - g(z)| \to 0$,
καθώς $n\to\infty$. □

Παρατήρηση:
Από τη προηγούμενη πρόταση,έχουμε ότι αν $f\in U$ και P πολυώνυμο,
τότε $f+P\in U$.

3 Ιδιότητές των καθολικών σειρών Taylor

Στη συνέχεια θα δούμε κάποιες ιδιότητες των καθολικών σειρών $Taylor$.Η πρώτη αφορά τις καθολικές τριγωνομετρικές σειρές του $Menchoff$.Θα δείξουμε ότι η ύπαρξη καθολικών σειρών $Taylor$ εξασφαλίζει την ύπαρξη των καθολικών τριγωνομετρικών σειρών του $Menchoff$.

Πρόταση 2
Έστω $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ καθολική σειρά $Taylor$ και $h,g : T \to [-\infty,+\infty]$ δύο μετρήσιμες συναρτήσεις στο μοναδιαίο κύκλο T. Τότε υπάρχει υπακολουθία $S_{k_m}(z) = \sum_{n=0}^{k_m} a_n z^n$ των μερικών αθροισμάτων της καθολικής σειράς $Taylor$, έτσι ώστε:
$Re(S_{k_m}(z)) \to h(z)$ και $Im(S_{k_m}(z)) \to g(z)$, για σχεδόν κάθε $z\in T$.

Απόδειξη. Υπάρχουν ακολουθίες συνεχών συναρτήσεων $\{h_N\},\{g_N\}, N\in\mathbb{N}$,
$h_N, g_N : T\to\mathbb{R}$ με $h_N(z)\to h(z), g_N(z)\to g(z)$, για σχεδόν κάθε $z\in T$, καθώς $N\to\infty$. Αυτό προκύπτει από το Θεώρημα $Lusin$.
Άρα, μπορούμε να βρούμε σύνολο $E\subset T$, με μέτρο $Lebesque$ ίσο με 2π τέτοιο ώστε $h_N(e^{i\theta})\to h(e^{i\theta}), g_N(e^{i\theta})\to g(e^{i\theta})$, για κάθε $e^{i\theta}\in E$, καθώς $N\to\infty$.
Τώρα, το σύνολο $\{e^{i\theta} : \theta\in[1,2\pi-1]\}$ είναι συμπαγές, με κενό εσωτερικό , βρίσκεται έξω απο το D και επειδή σχηματικά είναι ένα τόξο το οποίο δεν 'κλείνει', το συμπλήρωμά του είναι συνεκτικό.
Στο παραπάνω σύνολο οι συναρτήσεις h_1, g_1 είναι συνεχείς αλλά και ολόμορφες στο εσωτερικό του(που είναι κενό). Το ίδιο ισχύει για τη συνάρτηση h_1+ig_1.
Από τον ορισμό των καθολικών σειρών $Taylor$, υπάρχει υπακολουθία $S_{l_m}(z)$ της $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ που συγκλίνει ομοιόμορφα στην h_1+ig_1 στο παραπάνω σύνολο.
Μάλιστα, έχουμε ότι $Re(S_{l_m}(z)) \to h_1(z)$ και $Im(S_{l_m}(z)) \to g_1(z)$ για κάθε $z\in\{e^{i\theta} : \theta\in[1,2\pi-1]\}$, καθώς $m\to\infty$.

Διαλέγουμε $k_1 \in \{l_m\}$ αρκετά μεγάλο ώστε $|h_1(e^{i\theta}) + ig_1(e^{i\theta}) - S_{k_1}(e^{i\theta})| < 1$, $\forall\theta \in [1, 2\pi - 1]$.
Όμοια για τη συνάρτηση $h_2 + ig_2$ στο $[\frac{1}{2}, 2\pi - \frac{1}{2}]$, διαλέγουμε $k_2 \in \{l_m\}$ μεγαλύτερο του k_1 και αρκετά μεγάλο ώστε $|h_2(e^{i\theta}) + ig_2(e^{i\theta}) - S_{k_2}(e^{i\theta})| < \frac{1}{2}$ $\forall\theta \in [\frac{1}{2}, 2\pi - \frac{1}{2}]$. Συνεχίζοντας επαγωγικά,υπάρχει μία ακολουθία ακεραίων $\{k_m\}$ τέτοια ώστε $|h_m(e^{i\theta})+ig_m(e^{i\theta})-S_{k_m}(e^{i\theta})| < \frac{1}{m}$,$\forall\theta \in [\frac{1}{m}, 2\pi-\frac{1}{m}]$. Τώρα, επειδή τα διαστήματα $[\frac{1}{m}, 2\pi-\frac{1}{m}]$ μεγαλώνουν καθώς μεγαλώνει το m και επειδή $E \subset T$, μπορούμε να βρούμε m_0 αρκετά μεγάλο ώστε το $E - \{1\}$ να είναι υποσύνολο του τόξου του T που δε περιέχει το 1, με άκρα $exp(\frac{1}{m}i)$ και $exp((2\pi-\frac{1}{m})i)], \forall m \geq m_0$.

Άρα: $|h_m(e^{i\theta}) + ig_m(e^{i\theta}) - S_{k_m}(e^{i\theta})| < \frac{1}{m}, \forall m \geq m_0$.
Από τα παραπάνω,για κάθε $m \geq m_0$ και για κάθε $e^{i\theta} \in E - \{1\}$, έχουμε ότι:
$|h_m(e^{i\theta}) - Re(S_{k_m}(e^{i\theta}))| \leq |h_m(e^{i\theta}) - Re(S_{k_m}(e^{i\theta}))+$
$i(g_m(e^{i\theta}) - Im(S_{k_m}(e^{i\theta}))| = |h_m(e^{i\theta}) + ig_m(e^{i\theta}) - S_{k_m}(e^{i\theta})| < \frac{1}{m}$.
Όμοια, έχουμε ότι: $|g_m(e^{i\theta}) - Im(S_{k_m}(e^{i\theta})| < \frac{1}{m}$.
Τελικά, επειδή $\lim_{m\to\infty} h_m(e^{i\theta}) = h(e^{i\theta})$ και $\lim_{m\to\infty} g_m(e^{i\theta}) = g(e^{i\theta})$, έχουμε ότι $\lim_{m\to\infty} Re(S_{k_m}(e^{i\theta})) = h(e^{i\theta})$ και $\lim_{m\to\infty} Im(S_{k_m}(e^{i\theta})) = g(e^{i\theta})$,
$\forall e^{i\theta} \in E - \{1\}$ και άρα έχουμε τη σχεδόν παντού σύγκλιση στο T , αφού το $E - \{1\}$ έχει ίδιο μέτρο *Lebesque* με το E.

□

Παρατήρηση:
Επειδή κάθε καθολική σειρά *Taylor* έχει ακτίνα σύγκλισης 1,το άθροισμα δύο καθολικών σειρών *Taylor* έχει ακτίνα σύγκλισης μεγαλύτερη ή ίση με 1. Μάλιστα,ισχύει και το παρακάτω αποτέλεσμα.

Πρόταση 3
Κάθε σειρά *Taylor* με ακτίνα σύγκλισης μεγαλύτρη ή ίση με 1 μπορεί να γραφεί ως το άθροισμα δύο καθολικών σειρών *Taylor* μέσα στον μοναδιαίο δίσκο.

Απόδειξη. Έστω $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n$ μία σειρά *Taylor* με ακτίνα σύγκλισης μεγαλύτερη ή ίση του 1.
Τότε, έχουμε ότι $f \in H(D)$. Πράγματι, η σειρά *Taylor* συγκλίνει για κάθε $z \in D$, άρα είναι ολόμορφη στο D.

Θεωρούμε τον ομοιομορφισμό $W : H(D) \rightarrow H(D)$, έτσι ώστε $W(g) := g + f$, όπου $g \in H(D)$.Επειδή η απεικόνιση W είναι ομοιομορφισμός(δηλαδή είναι συνεχής, $1-1$,επί και η αντίστροφη εικόνα της είναι και αυτή συνεχής)στέλνει G_δπυκνά σε G_δ πυκνά.Επομένως αφού το σύνολο U είναι G_δ πυκνό,έχουμε ότι το $W(U)$είναι G_δ και πυκνό.

Τώρα, επειδή ο χώρος $H(D)$ είναι πλήρης,το θεώρημα $Baire$ μας δείχνει ότι $U \cap W(U) \neq \emptyset \iff U \cap (U+f) \neq \emptyset$.

Άρα υπάρχει στοιχείο $u \in U$,τέτοιο ώστε $u \in U + f$. Δηλαδή,υπάρχει $v \in U$ με $v + f = u$. Άρα $v - u = f$ και επειδή $-u \in U$, η f εκφράζεται ως το άθροισμα δύο στοιχείων του συνόλου U.

$\square$

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι οποιαδήποτε ρητή συνάρτηση δεν είναι καθολική σειρά $Taylor$.Θα χρειαστούμε το επόμενο λήμμα.(Για την απόδειξη δείτε στη βιβλιογραφία το [2].)

Λήμμα

Έστω $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ το ανάπτυγμα $Taylor$ μίας ρητής συνάρτησης f η οποία είναι ολόμορφη στο 0 και όχι πολυώνυμο.

Αν $S_N(z)$ το N-στο μερικό άθροισμα της σειράς, R η ακτίνα σύγκλισης της σειράς και w,με $|w| = R$ πόλος μέγιστης τάξης μεταξύ αυτών που έχουν μέτρο R, δηλαδή όσο η ακτίνα σύγκλισης, τότε $\lim\limits_{N\to\infty} S_N(w) = \infty$.

Πρόταση 4

Έστω $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ μία καθολική σειρά $Taylor$. Τότε η σειρά $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ δεν είναι το ανάπτυγμα $Taylor$ καμμίας ρητής συνάρτησης.

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι το ανάπτυγμα $Taylor$ των πολυωνύμων έχει ακτίνα σύγκλισης $+\infty$. Άρα η σειρά $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ που έχει ακτίνα σύγκλισης 1 δεν είναι το ανάπτυγμα $Taylor$ κάποιου πολυωνύμου. Από το προηγούμενο λήμμα έχουμε ότι αν η σειρά $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ήταν το ανάπτυγμα $Taylor$ ρητής συνάρτησης, τότε θα υπήρχε $z_0 \in \mathbb{C}$, με $|z_0| = 1$, πόλος μέγιστης τάξης μεταξύ αυτών που έχουν μέτρο 1 για τη ρητή συνάρτηση και τέτοιος ώστε $\lim\limits_{N\to\infty} S_N(z_0) = \infty$. Από αυτό,βλέπουμε ότι κάθε υπακολουθία της καθολικής σειράς $Taylor$ αποκλίνει στο ∞. Το $\{z_0\}$ είναι κλειστό και φραγμένο και άρα συμπαγές, είναι έξω από το D και έχει συμπλήρωμα το $\mathbb{C} - \{z_0\}$, το οποίο είναι συνεκτικό. Συνεπώς, από τον ορισμό των καθολικών σειρών $Taylor$, στο $\{z_0\}$ για την $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, έχουμε ότι για κάθε f που είναι συνεχής στο $\{z_0\}$ και ολόμορφη στο εσωτερικό του, δηλαδή στο κενό, υπάρχει υπακολουθία των μερικών αθροισμάτων της $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ που συγκλίνει ομοιόμορφα στην f. Αν,λοιπόν,θεωρήσουμε $a \in \mathbb{C}$ και μία σταθερή συνάρτηση f , με $f(z) = a, \forall z \in \mathbb{C}$, τότε η f είναι συνεχής στο $\{z_0\}$, και ολόμορφη στο εσωτερικό του.

Άρα,υπάρχει υπακολουθία S_{k_m} των μερικών αθροισμάτων της $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ που συγκλίνει ομοιόμορφα στην f στο $\{z_0\}$. Δηλαδή $S_{k_m}(z_0) \to f(z_0) = a$ καθώς $m \to \infty$. Από τα παραπάνω,όμως, έχουμε ότι $S_{k_m}(z_0) \to \infty$. Άτοπο.

Άρα η σειρά $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ δεν μπορεί να είναι το ανάπτυγμα $Taylor$ ρητής συνάρτησης. □

Παρατήρηση:

Αν $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ είναι μία σειρά $Taylor$, τότε $\lim\limits_{N\to\infty} S_N(z_0) \neq \infty, \forall z_0 \in \mathbb{C}$.

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι οι καθολικές σειρές $Taylor$ είναι έξω απο διάφορους χώρους ″ομαλών″ συναρτησεών,όπως για παράδειγμα τον χώρο του $Hardy$.

Ορισμός:

Έστω $f \in H(D)$,με ανάπτυγμά $Taylor$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, όπου $a_n \in \mathbb{C}$.

Τότε λέμε ότι η f ανήκει στο χώρο $Hardy$, $H^2(D)$, αν και μόνο αν $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n|^2 < \infty$.

Πρόταση 5

Αν $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$,όπου $a_n \in \mathbb{C}$,είναι μία καθολική σειρά $Taylor$,τότε δεν ανήκει στο χώρο $Hardy, H^2(D)$.

Απόδειξη. Άρκει να δείξουμε ότι $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n|^2 = \infty$.

Θεωρούμε το τόξο του μοναδιαίου κύκλου με άκρα $e^{i\frac{\pi}{2}}$ και $e^{i\frac{3\pi}{2}}$, κινούμενοι αντίθετα με τη φορά του ρολογιού.

Αυτό το σύνολο είναι συμπαγές,έξω απο το D, με συνεκτικό συμπλήρωμα, αφού το τόξο δεν "κλειναι". Οι σταθερές συναρτήσεις $f(z) = 0, g(z) = 1, \forall z \in \mathbb{C}$, είναι συνεχείς στο παραπάνω τόξο και ολόμορφες στο εσωτερικό του , που είναι το κενό σύνολο. Επομένως υπάρχουν υπακολουθίες των μερικών αθροισμάτων της σειράς $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ που συγκλίνουν ομοιόμορφα στις f, g στο τόξο μας.
Συγκεκριμένα, $\exists S_{l_n}, S_{m_n}$ υπακολουθίες της σειράς, ώστε $S_{l_n} \to 0, S_{m_n} \to 1$, ομοιόμορφα στο τόξο.
Χωρίς βλάβη,θεωρούμε ότι $l_n < m_n < l_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$.(Πράγματι,λόγω της παραπάνω ομοιόμορφης σύγκλισης,αν πάρουμε φυσικό l_1 έτσι ώστε $|S_{l_1}| < 1$,τότε υπάρχει φυσικός $m_1 > l_1$,με $|S_{m_1} - 1| < 1$.Πάλι απο την ομοιόμορφη σύγκλιση,υπάρχει φυσικός $l_2 > m_1$ με $|S_{l_2}| < \frac{1}{2}$.Διαλέγουμε φυσικό $m_2 > l_2$ αρκετά μεγάλο ώστε $|S_{m_2} - 1| < \frac{1}{2}$και $l_3 > m_2$ ώστε $|S_{l_3}| < \frac{1}{3}$.Συνεχίζοντας επαγωγικά αποκτάμε τη ζητούμενη διάταξη.)
Τώρα , παρατηρούμε ότι:
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|S_{m_n}(e^{i\theta}) - S_{l_n}(e^{i\theta})|^2 d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\sum_{k=l_n+1}^{m_n} a_k e^{ik\theta}|^2 d\theta =$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\sum_{k=l_n+1}^{m_n} a_k e^{ik\theta})(\sum_{k=l_n+1}^{m_n} \overline{a_k} e^{-ik\theta}) d\theta =$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\sum_{k=l_n+1}^{m_n}|a_k|^2 + \sum_{\substack{l_n+1 \leq k,j \leq m_n \\ k \neq j}} a_k \overline{a_j} e^{i(k-j)\theta}) d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{k=l_n+1}^{m_n}|a_k|^2 d\theta +$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{\substack{l_n+1 \leq k,j \leq m_n \\ k \neq j}} a_k \overline{a_j}\Big[\frac{(e^{i(k-j)\theta})}{i(k-j)}\Big]_{\theta=0}^{2\pi} d\theta = \sum_{k=l_n+1}^{m_n}|a_k|^2.$$
Επίσης, έχουμε ότι:
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|S_{m_n}(e^{i\theta}) - S_{l_n}(e^{i\theta})|^2 d\theta \geq \frac{1}{2\pi}\int_{\pi/2}^{3\pi/2}|S_{m_n}(e^{i\theta}) - S_{l_n}(e^{i\theta})|^2 d\theta,$$
το οποίο ισχύει γιατί παίρνουμε το ολοκλήρωμα της ίδιας μη αρνητικής συνάρτησης σε ένα μικρότερο τόξο.
Όμως,βάσει των παραπάνω που αναφέραμε,το εσωτερικό του τελευταίου ολοκληρώματος συγκλίνει στο 1 καθώς $n \to \infty$,αφού $S_{l_n} \to 0, S_{m_n} \to 1$,ομοιόμορφα στο

τόξο μας,καθώς $n \to \infty$. Επομένως,στο τελευταίο όρο έχουμε:
$\dfrac{1}{2\pi}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} 1d\theta = \dfrac{1}{2}$, καθώς $n \to \infty$.
Από αυτό, βλέπουμε ότι $\sum\limits_{k=l_n+1}^{m_n} |a_k|^2 \geq \dfrac{1}{3}$ τελικά για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
Άρα $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 = \infty$ και συμπεραίνουμε ότι η σειρά $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ δεν ανήκει στο χώρο $Hardy$.

$\square$

Πόρισμα
Έστω $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n, a_n \in \mathbb{C}$, καθολική σειρά $Taylor$.Τότε δεν υπάρχει υπακολουθία των μερικών αθροισμάτων της $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ που συγκλίνει ομοιόμορφα σε ολόκληρο τον μοναδιαίο κύκλο T.

4 Κάποια επιπλέον αποτελέσματα στις καθολικές σειρές Taylor

Πρόταση 6
Αν $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in U$,με $a_n \in \mathbb{C}$, τότε $\overline{f(\overline{z})} \in U$.

Απόδειξη. Λόγω της συνέχειας της συνάρτησης $g(z) = \overline{z}$,έχουμε ότι $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k(\overline{z})^k \to f(\overline{z})$, καθώς $n \to \infty$,για κάθε $z \in D$. Απο αυτό,έχουμε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \overline{a_k} z^k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \overline{a_k} z^k \in H(D)$. Πάλι απο τη συνέχεια της $g(z) = \overline{z}$, έχουμε:
$\sum\limits_{k=0}^{n} \overline{a_k} z^k \to \overline{f(\overline{z})}$, καθώς $n \to \infty$,για κάθε $z \in D$ και άρα: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \overline{a_k} z^k = \overline{f(\overline{z})} \in H(D)$.
Θα δείξουμε τώρα ότι η $h(z) := \overline{f(\overline{z})}$ ανήκει στο U .
Έστω K συμπάγες έξω απο το D με συνεκτικό συμπλήρωμα και g μία συνάρτηση συνεχής στο K και ολόμορφη στο εσωτερικό του. Απο τον ορισμό των καθολικών σειρών $Taylor$, υπάρχει υπακλολουθία S_{k_n} της f που συγκλίνει ομοιόμορφα στη

g στο K. Από το θεώρημα $Mergelyan$, κάθε συνάρτηση που είναι συνεχής στο K και ολόμορφη στο εσωτερικό του προσεγγίζεται ομοιόμορφα απο πολυώνυμο στο K.
Έστω P το πολυώνυμο που προσεγγίζει την g ομοιόμορφα στο K. Αυτό μας δείχνει πως αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει υπακολουθία S_{k_n} της h που προσεγγίζει το P ομοιόμορφα στο K.
Πράγματι,τότε η υπακολουθία της h κατέπέκταση προσεγγίζει την g ομοιόμορφα στο K και άρα έχουμε το ζητούμενο.
Έστω τώρα ότι $P(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + .. + b_m z^m$,όπου $m \in \mathbb{N}$, και $b_i \in \mathbb{C}$, για $i = 0, 1, .., m$ και έστω $\epsilon > 0$. Ορίζουμε $K^* = \{z \in \mathbb{C} : \overline{z} \in K\}$ το σύνολο των συζυγών σημείων του K.
Το K^* είναι συμπαγές έξω απο το D με συνεκτικό συμπλήρωμα,λόγω συμμετρίας με το K.
Τότε, έχουμε ότι:

$$\sup_{z\in K} |\sum_{l=0}^{k_n} \overline{a_l} z^l - (b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + .. + b_m z^m)| < \epsilon$$

$$\iff \sup_{z\in K} |\sum_{l=0}^{k_n} a_l (\overline{z})^l - (\overline{b_0} + \overline{b_1}\overline{z} + \overline{b_2}(\overline{z})^2 + .. + \overline{b_m}(\overline{z})^m)| < \epsilon$$

$$\iff \sup_{z\in K^*} |\sum_{l=0}^{k_n} a_l z^l - (\overline{b_0} + \overline{b_1} z + \overline{b_2} z^2 + .. + \overline{b_m} z^m)| < \epsilon$$

Η πρώτη ισοδυναμία ισχύει λόγω συζυγίας και η δεύτερη από τον ορισμό του K^* .
Ορίζουμε τώρα το πολυώνυμο $Q(z) = \overline{P}(\overline{z}) = \overline{b_0} + \overline{b_1} z + \overline{b_2} z^2 + .. + \overline{b_m} z^m$ στο K^* . Επειδή $f \in U$,υπάρχει υπακολουθία S_{j_n} των μερικών αθροισμάτων της f η οποία συγκλίνει ομοιόμορφα στο Q στο K^* :

$$\sup_{z\in K^*} |\sum_{l=0}^{j_n} a_l z^l - (\overline{b_0} + \overline{b_1} z + \overline{b_2} z^2 + .. + \overline{b_m} z^m)| < \epsilon \ .$$

Από την παραπάνω ισοδυναμία,έχουμε το ζητούμενο.

□

Πρόταση 7
Το σύνολο U δεν είναι κλειστό ως προς τον πολλαπλασιασμό.
Δηλαδή υπάρχουν $f_1, f_2 \in U$, με $f_1 \cdot f_2 \notin U$.

Απόδειξη. Έστω $f_1(z) := f(z)$, με $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ και $f_2(z) := \overline{f}(\overline{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n} z^n$.
Από τη προηγούμενη πρόταση, έχουμε ότι $f_2(z) \in U$.
Τότε, έχουμε ότι:
$(f_1 \cdot f_2)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$, όπου $b_0 = a_0\overline{a_0}, b_1 = a_0\overline{a_1} + a_1\overline{a_0} b_2 = a_0\overline{a_2} +\ a_2\overline{a_0}$
$+ a_1\overline{a_1}$,κ.λ.π.
Όλα τα b_j είναι πραγματικά.
Πράγματι, $b_0 = |a_0|^2 \in \mathbb{R}, b_1 = a_0\overline{a_1} + a_1\overline{a_0} = 2Re(a_0\overline{a_1}) \in \mathbb{R}, b_2 = a_0\overline{a_2} + a_2\overline{a_0} +$

$|a_1|^2 = 2Re(a_0\overline{a_2}) + |a_1|^2 \in \mathbb{R}$. Για το b_n,με $n = 2l+1, l \in \mathbb{N}$,να είναι περιττός, έχουμε: $b_n = \sum_{k=0}^{n} a_k\overline{a}_{n-k} = \sum_{k=0}^{2l+1} a_k\overline{a}_{2l+1-k} = (a_0\overline{a}_{2l+1} + \overline{a_0}a_{2l+1}) + (a_1\overline{a}_{2l} + a_{2l}\overline{a}_1) + .. + (a_l\overline{a}_{l+1} + a_{l+1}\overline{a}_l) = 2Re(a_0\overline{a}_{2l+1}) + 2Re(a_1\overline{a}_{2l}) + ..+$
$2Re(a_l\overline{a}_{l+1}) \in \mathbb{R}$. Αν ο $n = 2l, l \in \mathbb{N}$,είναι άρτιος,τότε: $b_n = \sum_{k=0}^{n} a_k\overline{a}_{n-k} =$
$\sum_{k=0}^{2l} a_k\overline{a}_{2l-k} = 2Re(a_0\overline{a_{2l}}) + 2Re(a_1\overline{a_{2l-1}}) + .. + 2Re(a_{l-1}\overline{a_{l+1}}) + |a_l|^2 \in \mathbb{R}$.
Τώρα,γνωρίζουμε ότι το σύνολο $\{1\}$ είναι συμπαγές,έξω απο το D και έχει συνεκτικό συμπλήρωμα. Έστω ότι $f_1 \cdot f_2 \in U$. Από τον ορισμό των καθολικών σειρών $Taylor$,για κάθε συνάρτηση h που είναι συνεχής στο $\{1\}$,υπάρχει υπακολουθία των μερικών αθροισμάτων της $f_1 \cdot f_2$ που συγκλίνει ομοιόμορφα στην h στο $\{1\}$. Διαλέγουμε την h έτσι ώστε $h(1) = i$.
Από τα παραπάνω, πρέπει να υπάρχει υπακολουθία S_{k_n} της $f_1 \cdot f_2$ τέτοια ώστε: $S_{k_n}(h(1)) \to i$. Εμείς,όμως,ξέρουμε ότι $S_{k_n}(h(1)) \in \mathbb{R}$,αφού $b_j \in \mathbb{R}$.Άτοπο.
Άρα $f_1 \cdot f_2 \notin U$.

$\square$

Πρόταση 8
Το σύνολο U δεν είναι κλειστό ως προς τη πρόσθεση.
Δηλαδή υπάρχουν $f_1, f_2 \in U$, με $f_1 + f_2 \notin U$.

Απόδειξη. Θεωρούμε,για παράδειγμα,τη σταθερή συνάρτηση $f(z) = 1, \forall z \in \mathbb{C}$.Από τη πρόταση 3 της προηγούμενης παραγράφου,έχουμε ότι υπάρχουν $f_1, f_2 \in U$,με $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$,για κάθε z στο D. Όμως,από τον ορισμό των καθολικών σειρών $Taylor$,ξέρουμε ότι $f \notin U$.Άρα $f_1, f_2 \in U$,αλλά $f_1 + f_2 \notin U$.

$\square$

Πρόταση 9
Λέμε ότι η $f \in H(D)$ ανήκει στο σύνολο V αν για κάθε $\epsilon > 0$,για κάθε συμπαγές K έξω από το D με συνεκτικό συμπλήρωμα και για κάθε h συνεχή στο K και ολόμορφη στο εσωτερικό του,έχουμε: $|S_{k_n}((f)(z)) - g(z)| < \epsilon$, $\forall z \in K$, για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ και όπου k_n αύξουσα ακολουθία φυσικών με $k_n \to \infty$,καθώς $n \to \infty$.
Τότε το V είναι G_δ πυκνό στο χώρο $H(D)$ και άρα μη κενό.

Απόδειξη. Η απόδειξή μας θα είναι όμοια με την απόδειξη ότι το U είναι πυκνό στον $H(D)$.
Από τον ορισμό του V και του U και από τον τύπο που δείξαμε για το U,έχουμε:
$V = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcap_{s=1}^{\infty} \bigcup_{p \in \{k_n\}} E(m,j,s,p).$

Αρκεί να δείξουμε ότι $\bigcup_{p\in\{k_n\}} E(m,j,s,p)$ είναι πυκνό στον $H(D)$.
Από το λήμμα 4 ,το σύνολο $\bigcup_{p\in\mathbb{N}} E(m,j,s,p)$ είναι πυκνό στον $H(D)$.
Έστω $f \in H(D)$, $L \subset D$ μη κενός συμπαγής δίσκος και $\epsilon > 0$.
Αρκεί να βρούμε φυσικό n και $g \in E(m,j,s,k_n)$, έτσι ώστε: $\sup_{z\in L}|f(z)-g(z)| < \epsilon$.
Τα K_m που είχαμε ορίσει στην άρχη και το L είναι ξένα και το συμπαγές $K_m \cup L$,έχει συνεκτικό συμπλήρωμα.
Από το θεώρημα $Mergelyan$ στο $K_m \cup L$, για τη συνάρτηση με τύπο $F(z) = f_j(z)$ στο K_m, όπου f_j πολυώνυμο με ρητούς συντελεστές και $F(z) = f(z)$ στο L, υπάρχει πολυώνυμο g τέτοιο ώστε $|F(z) - g(z)| < min(\epsilon, \frac{1}{s})$.
Αν $r = deg(g)$, τότε $\sup_{z\in K_m} |S_r g(z) - f_j(z)| < \frac{1}{s}$ και $\sup_{z\in L}|f(z) - g(z)| < \epsilon$.
Επειδή, τώρα, για κάθε φυσικό r υπάρχει στοιχείο k_l της $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, τέτοιο ώστε $k_l > r$, ισχύει ότι: $\sup_{z\in K_m} |S_r g(z) - f_j(z)| < \sup_{z\in K_m} |S_{k_l}(g(z)) - f_j(z)| < \frac{1}{s}$, αφού η g είναι πολυώνυμο βαθμού r, ισχύει ότι: $S_r(g(z)) = S_{k_l}(g(z)), \forall k_l \geq r$.
Άρα $g \in E(m,j,s,k_l)$.
Απο τα παραπάνω, έχουμε ότι $\bigcup_{p\in\{k_n\}} E(m,j,s,p)$ είναι πυκνό στον $H(D)$.
Από το θεώρημα $Baire$ έχουμε ότι το V είναι πυκνό στον $H(D)$.

□

Θα δώσουμε τώρα μία απευθείας απόδειξη,χωρίς τη χρήση του λήμματος του $Dienes$,ότι μία ρητή συνάρτηση με πόλους έξω από τον D δεν είναι καθολική σειρά $Taylor$.

Πρόταση 10
Αν Q ρητή συνάρτηση με πόλους έξω από τον D, τότε η Q δεν ανήκει στο U.

Απόδειξη. Έστω $Q(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$, όπου p, q πολυώνυμα.
Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.
Στη πρώτη περίπτωση, θεωρούμε ότι κάθε πόλος της Q έχει μέτρο μεγαλύτερο του 1.
Σε αυτή τη περίπτωση, υπάρχει $r > 1$ ώστε $Q \in H(D(0,r))$.
Τότε, όμως, $S_n(Q) \to Q$ ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του $D(0,r)$ καθώς $n \to \infty$.
Άρα $S_n(Q)(1) \to Q(1)$ και άρα στο $\{1\}$ οι υπακολουθίες των μερικών αθροισμάτων του αναπτύγματος $Taylor$ της Q δεν μπορούν να προσεγγίσουν όλες τις σταθερές συναρτήσεις.
Από αυτό, έχουμε ότι $Q \notin U$.

Στη δεύτερη περίπτωση, θεωρούμε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένας πόλος της Q με μέτρο 1.
Θα περιοριστούμε,όμως,στη περίπτωση που οι αριθμητές των πόλων μέτρου 1 έχουν αριθμητή σταθερά. Χωρίς βλάβη της γενικότητας,μπορούμε να υποθέσουμε ότι:
$Q(z) = \dfrac{A_1}{(z-e^{i\theta_1})^{m_1}} + \dfrac{A_2}{(z-e^{i\theta_2})^{m_2}} + .. + \dfrac{A_l}{(z-e^{i\theta_l})^{m_l}} + \dfrac{P_{l+1}(z)}{(z-b_{l+1})^{m_{l+1}}} + ..+$ $\dfrac{P_s(z)}{(z-b_s)^{m_s}}$, όπου οι αριθμητές A_j είναι σταθερές και P_j πολυώνυμα ,$m_j \in \mathbb{N}$ για $j = 1, 2, .., s$, $|b_i| > 1$ για $i = l+1, .., s$ και $e^{i\theta_j} \neq e^{i\theta_p}$ για $j \neq p$.
Διαλέγουμε ένα πόλο πάνω στη μοναδιαία περιφέρεια που έχει μέγιστη πολλαπλότητα, έστω $e^{i\theta_q}$.
Παρατηρούμε ότι:
$|S_n(Q)(z)| \geq |S_n(\dfrac{A_1}{(z-e^{i\theta_1})^{m_1}} + \dfrac{A_2}{(z-e^{i\theta_2})^{m_2}} + .. + \dfrac{A_l}{(z-e^{i\theta_l})^{m_l}})|$
$-|S_n(\dfrac{P_{l+1}(z)}{(z-b_{l+1})^{m_{l+1}}} + .. + \dfrac{P_{l+1}(z)}{(z-b_k)^{m_k}})(e^{i\theta_q})|$
Ο δεύτερος όρος στο δεξίο μέλος είναι από τη πρώτη περίπτωση φραγμένος από κάποια σταθερά, αφού όπως είδαμε η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων του αναπτύγματος $Taylor$ συγκλίνει.
Επομένως αρκεί να προσδιορίσουμε τον πρώτο όρο.
Ορίζουμε $R(z) = \dfrac{A_1}{(z-e^{i\theta_1})^{m_1}} + \dfrac{A_2}{(z-e^{i\theta_2})^{m_2}} + .. + \dfrac{A_l}{(z-e^{i\theta_l})^{m_l}}$ και θα δείξουμε ότι τα μερικά αθροίσματα του αναπτύγματος $Taylor$ της R στο $e^{i\theta_q}$ αποκλίνουν στο άπειρο.
Άρα αφού η ακολουθία $\{I_n\}$ δεν είναι φραγμένη, $R \notin U$ και $Q \notin U$
Παρατηρούμε ότι $|S_n(R(z))| \geq |\dfrac{A_q}{(z-e^{i\theta_q})^{m_q}}| - \sum_{j=1, j\neq q}^{l} |S_n(\dfrac{A_j}{(z-e^{i\theta_j})^{m_j}})|(*)$
Θεωρούμε τυχαίο $\dfrac{1}{(z-e^{i\theta})^m}$.
Θα βρούμε το ανάπτυγμα $Taylor$ παραγωγίζοντας την $\dfrac{1}{(z-e^{i\theta})}$, $m-1$ φορές.

Γνωρίζουμε ότι $\dfrac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$.
Απο αυτό , έχουμε ότι $\dfrac{1}{1-ze^{-i\theta}} = \sum_{n=0}^{\infty} (ze^{-i\theta})^n$
Άρα $\dfrac{1}{e^{i\theta}-z} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-i\theta}(ze^{-i\theta})^n = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-i\theta}e^{-in\theta}z^n = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-i(n+1)\theta}z^n$.
Παραγωγίζοντας ως προς z έχουμε:
$\dfrac{1}{(e^{i\theta}-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-i(n+1)\theta} n z^{n-1}$.
Παραγωγίζοντας δεύτερη φορά:
$\dfrac{-2(e^{i\theta}-z)(-1)}{(e^{i\theta}-z)^4} = \dfrac{2}{(e^{i\theta}-z)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} e^{-i(n+1)\theta} n(n-1) z^{n-2}$

Παραγωγίζοντας τρίτη φορά:
$\dfrac{2(-3)(e^{i\theta}-z)^2(-1)}{(e^{i\theta}-z)^6} = \dfrac{2\cdot 3}{(e^{i\theta}-z)^4} = \sum\limits_{n=3}^{\infty} e^{-i(n+1)\theta} n(n-1)(n-2)z^{n-3}.$
Παραγωγίζοντας $m-1$ φορές έχουμε: $\dfrac{2\cdot 3..(m-1)}{(e^{i\theta}-z)^m} = \sum\limits_{n=m-1}^{\infty} e^{-i(n+1)\theta} n(n-1)..(n-m+2)z^{n-m+1}$

Άρα $\dfrac{1}{(e^{i\theta}-z)^m} = \sum\limits_{n=m-1}^{\infty} \dfrac{e^{-i(n+1)\theta} n(n-1)..(n-m+2)z^{n-m+1}}{2\cdot 3..(m-1)}$ και
$|S_k(\dfrac{1}{(e^{i\theta}-z)^m})(e^{i\theta})| = |\sum\limits_{n=m-1}^{k} \dfrac{e^{-i(n+1)\theta} n(n-1)..(n-m+2)e^{i(n-m+1)\theta}}{2\cdot 3..(m-1)}| \geq$
$|\dfrac{e^{-i(k+1)\theta} k(k-1)..(k-m+2)e^{i\theta(k-m+1)}}{2\cdot 3..(m-1)}| -$
$|\sum\limits_{n=m-1}^{k-1} \dfrac{e^{-i(n+1)\theta} n(n-1)..(n-m+2)e^{i\theta(n-m+1)}}{2\cdot 3..(m-1)}| \approx$
$\frac{k^{m-1}}{(m-1)!} - |\frac{(k-1)^{m-1}}{(m-1)!}| \to \infty$, καθώς $k \to \infty$.
Πηγαίνοντας πίσω στο $(*)$, έχουμε ότι:
$|S_k(R(e^{i\theta_q}))| \approx |\dfrac{k^{m_q-1}A_q}{(m_q-1)!} - \dfrac{(k-1)^{m_q-1}}{(m_q-1)!}|$
$-|\sum\limits_{j=1,j\neq q}^{k-1} \dfrac{A_j j^{m_j-1}}{(m_j-1)!} + \sum\limits_{j=1,j\neq q}^{k-1} \dfrac{(j-1)^{m_j-1}}{(m_j-1)!}| \to +\infty$, καθώς $k \to \infty$,
αφού ο m_q έχει επιλεγεί να είναι ο μεγαλύτερος από τους εκθέτες.
Με αυτό,έχουμε δείξει το ζητούμενο.

$\square$

5 Η αυξητικότητα των συντελεστών στις καθολικές σειρές Taylor

Η επόμενη πρόταση βρίσκεται στο [4] και δείχνει το ρυθμό με τον οποίο οι συντελεστές μίας καθολικής σειράς $Taylor$ αυξάνονται.

Πρόταση 11
Αν $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in U$ και γ_n φθίνουσα ακολουθία θετικών πραγματικών έτσι ώστε $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\gamma_n}{n} < \infty$, τότε $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{|a_n|}{e^{n\gamma_n}} = \infty$.

Απόδειξη. Αρχικά θέτουμε $\delta_n = e\gamma_n$και επειδή $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{n} < \infty$,υπάρχει φυσικός n_0 τέτοιος ώστε $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} \frac{\delta_n}{n} < \frac{1}{2}$.

Ορίζουμε τώρα την 2π-περιοδική συνάρτηση $H_{\delta_n/n}(x) = \frac{n\pi}{\delta_n}$ για $(k-1)\pi < |x| < \delta_n/n + (k-1)\pi$ και $H_{\delta_n/n}(x) = 0$ για $k\pi \geq |x| \geq \delta_n/n + (k-1)\pi$, όπου $k \in \mathbb{N}$.

Οι συντελεστές *fourier* της $H_{\delta_n/n}$ είναι $\hat{H}_{\delta_n/n}(m) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{n\pi}{\delta_m} e^{-imx}dx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{n\pi}{\delta_n} cos(\frac{2\pi mx}{2\pi})dx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\delta_n/n}^{\delta_n/n} \frac{n\pi}{\delta_n} cos(\frac{2\pi mx}{2\pi})dx = \frac{1}{2}\frac{2}{m\delta_n/n} sin(\frac{m\delta_n}{n}) = \frac{sin(\frac{\delta_n}{n}m)}{\frac{\delta_n}{n}m}$, για $m \in \mathbb{Z} - \{0\}$ και για $m = 0$, έχουμε $\hat{H}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{n\pi}{\delta_n}dx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\delta_n/n}^{\delta_n/n} \frac{n\pi}{\delta_n}dx = \frac{1}{2\pi}\frac{2\delta_n}{n}\frac{n\pi}{\delta_n} = 1$.

Άρα έχουμε ότι $|\hat{H}_{\delta_n/n}(m)| \leq 1$ και $|\hat{H}(m)| \leq \frac{n}{|m|\delta_n}$, για $m \in \mathbb{Z} - \{0\}$.

Πράγματι, αφού όπως ξέρουμε η συνάρτηση $\frac{sinx}{x}$ για $|x| > 1$ είναι κατα απόλυτη τιμή μικρότερη του 1 και για $|x| \in (0,1)$ η απόλυτη τιμή της αυξάνεται καθώς το x τείνει στο 0 και έχουμε: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{sinx}{x} = 1$.

Θεωρούμε τώρα το σύνολο K που είναι τόξο της μοναδιαίας περιφέρειας με άκρα $exp(-i\theta/2), exp(i\theta/2)$,κινούμενοι κατά τη θετική φορά.

Το K είναι συμπαγές, βρίσκεται στο συμπλήρωμα του D και έχει συνεκτικό συμπλήρωμα.

Διαλέγουμε τώρα ένα φυσικό $N \geq n_0$ τον οποίο θα σταθεροποιήσουμε αργότερα. Η συνάρτηση $1 + S_{N-1}$,όπου S_{N-1} το $N-1$ μερικό άθροισμα της $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, είναι συνεχής στο K και αφού το K έχει κενό εσωτερικό,από τον ορισμό των καθολικών σειρών *Taylor*,υπάρχει ένα μερικό άθροισμα $S_M, M > N$, της $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, που είναι 'κοντά ' στην $1 + S_N$ στο K. Δηλαδή υπάρχει φυσικός M έτσι ώστε $|S_M(e^{i\theta}) - (1 + S_N(e^{i\theta}))| = |1 - \sum\limits_{m=N}^{M} a_m e^{im\theta}| < \frac{1}{2}$, για κάθε $e^{i\theta} \in K$.

Επομένως, έχουμε $\frac{1}{2} \leq Re(\sum\limits_{n=N}^{M} a_n e^{in\theta})$, με $e^{i\theta} \in K$. $(*)$

Ορίζουμε $f = H_{\delta_{n_0}/n_0} * .. * H_{\delta_M/M}$,όπου με $*$ συμβολίζουμε τη συνέλιξη μεταξύ συναρτήσεων.

Επειδή $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} \dfrac{\delta_n}{n} < \dfrac{1}{2}$, η f είναι μη αρνητική 2π-περιοδική συνάρτηση με $f(\theta) = 0$, για $\dfrac{1}{2} < |\theta| \leq \pi$. Πράγματι,αν θεωρήσουμε την $f_1(x) = H_{\delta_{n_0}/n_0} * H_{\delta_{n_0+1}/n_0+1} = \int_{\mathbb{R}} H_{\delta_{n_0}/n_0}(x-y) H_{\delta_{n_0+1}/n_0+1}(y)dy$,τότε η f_1 μηδενίζεται για $\dfrac{\delta_{n_0+1}}{n_0+1} < y < \pi$ και $\dfrac{\delta_{n_0}}{n_0} < x - y < \pi + \dfrac{\delta_{n_0+1}}{n_0+1}$.Προσθέτοντας τις δύο αυτές σχέσεις έχουμε ότι η f_1 μηδενίζεται για $\dfrac{\delta_{n_0}}{n_0} + \dfrac{\delta_{n_0+1}}{n_0+1} < x < \pi$. Θέτοντας τώρα $f_2 = H_{\delta_{n_0}/n_0} * H_{\delta_{n_0+1}/n_0+1} * H_{\delta_{n_0+2}/n_0+2}$,και δουλεύοντας όπως πριν,έχουμε ότι η f_2 μηδενίζεται για $\dfrac{\delta_{n_0}}{n_0} + \dfrac{\delta_{n_0+1}}{n_0+1} + \dfrac{\delta_{n_0+2}}{n_0+2} < x < \pi$. Συνεχίζοντας επαγωγικά,
η f μηδενίζεται για $\dfrac{\delta_{n_0}}{n_0} + \dfrac{\delta_{n_0+1}}{n_0+1} + .. + \dfrac{\delta_M}{M} < x < \pi$ και επειδή $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} \dfrac{\delta_n}{n} < \dfrac{1}{2}$, έχουμε ότι η f μηδενίζεται για $1/2 < x < \pi$. Ότι η f είναι μη αρνητική και 2π περιοδική το έχουμε επειδή η f είναι συνέλιξη μη αρνητικών και 2π περιοδικών συναρτήσεων.

Στην $(*)$ πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με $f(\theta) \geq 0$ και ολοκληρώνουμε από $-\dfrac{1}{2}$ ως $\dfrac{1}{2}$.
Τότε έχουμε:
$\dfrac{1}{2} \leq \sum\limits_{m=N}^{M} |a_m||\hat{f}(-m)|.(**)$
Πράγματι, στο δεξιό μέλος έχουμε:
$\int\limits_{-1/2}^{1/2} f(\theta) Re(\sum\limits_{n=N}^{M} a_n e^{in\theta}) d\theta \leq$
$|\int\limits_{-1/2}^{1/2} f(\theta) Re(\sum\limits_{n=N}^{M} a_n e^{in\theta}) d\theta| = |\int\limits_{-1/2}^{1/2} f(\theta) \sum\limits_{n=N}^{M} a_n cos(n\theta) d\theta| =$
$|\sum\limits_{n=N}^{M} \int\limits_{-1/2}^{1/2} f(\theta) a_n cos(n\theta) d\theta| \leq \sum\limits_{n=N}^{M} \int\limits_{-1/2}^{1/2} |f(\theta) a_n cos(n\theta) d\theta| =$
$\sum\limits_{n=N}^{M} |a_n|| \int\limits_{-1/2}^{1/2} f(\theta) cos(n\theta) d\theta| = \sum\limits_{n=N}^{M} |a_n||2\pi \dfrac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\theta) cos(n\theta) d\theta| =$
$2\pi \sum\limits_{n=N}^{M} |a_n||\hat{f}(-m)|$
Γνωρίζουμε ότι ο μετασχηματισμός $fourier$ της συνέλιξης είναι ίσος με το γινόμενο των μετασχηματισμών $fourier$ των όρων της συνέλιξης.
Άρα:
$$|\hat{f}(-m)| = |\prod_{n=n_0}^{M} \hat{H}_{\delta_n/n}(-m)| = \prod_{n=n_0}^{M} \frac{|sin(\dfrac{\delta_n}{n} m)|}{\dfrac{\delta_n}{n} m}.$$

Τώρα επειδή η $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\delta_n/n)$ συγκλίνει και η $\{\delta_n\}$ είναι φθίνουσα ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών, έχουμε $\lim_{n\to\infty}\delta_n = 0$. Αν η ακολουθία συνέκλινε σε α- ριθμό $c > 0$,τότε θα υπήρχε φυσικός n_1 έτσι ώστε $\delta_n \geq \frac{c}{2}$,για κάθε $n \geq n_1$ και τότε θα είχαμε $\sum\limits_{n=n_1}^{\infty}\frac{\delta_n}{n} \geq \sum\limits_{n=n_1}^{\infty}\frac{c}{2n} = +\infty$,για κάθε $n \geq n_1$,ενώ ξέρουμε ότι η $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\delta_n/n)$ συγκλίνει.

Επειδή,λοιπόν,$\lim_{n\to\infty}\delta_n = 0$,μπορούμε να βρούμε $N \in \mathbb{N}$ αρκετά μεγάλο έτσι ώστε:

$\frac{\delta_{n_0}}{n_0}N > e$ και $\delta_N < e$.

Οπότε για κάθε $m \in \{N, .., M\}$ έχουμε:

$\frac{\delta_{n_0}}{n_0}m \geq \frac{\delta_{n_0}}{n_0}N > e$ και $\frac{\delta_m}{m}m = \delta_m \leq \delta_N < e$.

Απο αυτό, βλέπουμε ότι υπάρχει $k \in \{n_0, .., m-1\}$ έτσι ώστε:

$\frac{\delta_k}{k}m \geq e$ και $\frac{\delta_{k+1}}{k+1}m < e$.

Άρα:

$|\hat{f}(-m)| \leq \prod\limits_{n=n_0}^{k}\frac{n}{\delta_n m} = \frac{n_0 \cdots k}{\delta_{n_0}\cdots\delta_k \cdot m^{k+1-n_0}} \leq (\frac{k}{\delta_k m})^{k+1-n_0}$, επειδή η $\{\delta_n\}$ είναι φθίνουσα. (γιατί το γινόμενο ισχύει; απο κ+1 τι εχουμε; ή περιορίζουμε το Μ να είναι Μ=κ;)

Λόγω της σχέσης $\frac{k}{\delta_k m} \leq \frac{1}{e}$, έχουμε $|\hat{f}(-m)| \leq \frac{1}{e^{k+1-n_0}}$ και η επιλογή του k μας δείχνει ότι: $k+1 > \frac{\delta_{k+1}}{e}m \geq \frac{\delta_m}{e}m = m\gamma_m$.

Άρα: $|\hat{f}(-m)| \leq \frac{e^{n_0}}{e^{k+1}} = \frac{e^{n_0}}{e^{m\gamma_m}}$. Αντικαθιστώντας στην $(**)$ έχουμε:

$\sum\limits_{m=N}^{M}|a_m|\frac{e^{n_0}}{e^{m\gamma_m}} > \frac{1}{2}$ και επειδή τα παραπάνω ισχύουν για άπειρα M, N,

η σειρά $\sum\limits_{m=1}^{\infty}|a_m|\frac{e^{n_0}}{e^{m\gamma_m}} = \infty$. $\square$

Πρόταση 12

Αν $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in U$,και $b_n, n \in \mathbb{N}$,μία φθίνουσα ακολουθία έτσι ώστε $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(b_n/n) < \infty$, τότε $\lim\limits_{n} sup \dfrac{|a_n|}{e^{nb_n}} = +\infty$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $M < \infty$,έτσι ώστε $|a_n| \leq Me^{nb_n}, \forall n \in \mathbb{N}$ και καταλήγουμε σε άτοπο. Έστω $\gamma_n = max(b_n, 1/\sqrt{n})$και $\delta_n = 2\gamma_n$.Επειδή οι ακολουθιές b_n και $1/\sqrt{n}$ είναι φθίνουσες και η $1/\sqrt{n}$ μη μηδενική, η δ_n είναι φθίνουσα και μη μηδενική. Ξέρουμε ότι $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(b_n/n) < \infty$ και $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}) < \infty$, άρα $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\gamma_n/n) < \infty$. Από τη πρόταση 11,έχουμε ότι $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(|a_n|/e^{n\delta_n}) = \infty$. Επίσης,έχουμε ότι $|a_n| \leq M'e^{n\gamma_n}$. Επομένως:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{e^{n\delta_n}} \leq M' \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{n(\delta_n - \gamma_n)}} = M' \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{n\delta_n}}.$$

Τώρα,επειδή $1/\sqrt{n} \leq \gamma_n$,έχουμε:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{e^{n\delta_n}} \leq M'' \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{\sqrt{n}}} < \infty.$$

Όμως,ξέρουμε ότι $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{|a_n|}{e^{n\delta_n}} = \infty$. Άτοπο.

□

Πόρισμα

Έστω $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in U$.Τότε η $\{a_n\}, n = 0, 1, 2, ..,$ δεν μπορεί να έχει πολυωνυμική αυξητικότητα.Μάλιστα,η $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ δεν είναι (C, k) αθροίσιμη,για κανένα $|z| = 1$,όπου $k \in \mathbb{N}$.

Σημείωση

Μία σειρά $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ λέγεται (C, k) αθροίσιμη,$k \in \mathbb{N}$, αν $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{(k)} < \infty$, όπου $a_n^{(k)} = \dfrac{A_n^{(k)}}{E_n^{(k)}}$, και $A_n^{(k)} = \sum\limits_{\nu=1}^{n} \dfrac{(k+n-\nu)!}{k!(n-\nu)!} a_\nu, A_n = A_n^{(0)}, E_n^{(k)} = \dfrac{(k+n)!}{k!(n!)}$.

Απόδειξη. Έστω $M < \infty$ και $r \geq 0$ έτσι ώστε $|a_n| \leq Mn^r$,για κάθε $n \in \mathbb{N}$.Εφαρμώζοντας τη πρόταση 12 στην ακολουθία $b_n = r\dfrac{\log n}{n}$,για $n = 3, 4, ..,$ καταλήγουμε σε άτοπο. Αν $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n {z_0}^n$ είνσι (C, k) αθροίσιμη για κάποιο z_0,με $|z_0| = 1$ και κάποιο k φυσικό, τότε $\dfrac{|a_n|}{n^k} \to 0$,καθώς $n \to \infty$.Επομένως,η ακολουθία $\{a_n\}$ αυξάνεται με ρυθμό πολυωνύμου,πράγμα που είναι αδύνατο βάσει του προηγούμενου που δείξαμε. □

Ορισμός

-Συμβολίζουμε με $H^p(D), 0 < p \leq \infty$,το χώρο $Hardy$,όλων των συναρτήσεων $f \in H(D)$,για τις οποιές ισχύει $sup\{\int\limits_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta : 0 \leq r < 1\} < \infty$ και $sup\{\sup_\theta |f(re^{i\theta})| < \infty : 0 \leq r < 1\} < \infty$.

-Ονομάζουμε άλγεβρα του δίσκου το σύνολο $A(D)$, το οποίο αποτελείται από τις συναρτήσεις που είναι αναλυτικές στο D και συνεχείς στη κλειστότητα του D.

-Συμβολίζουμε με $\mathcal{N}$ την $Nevanlinna$ κλάση, δηλαδή το σύνολο των συναρτήσεων $f \in H(D)$ για τις οποίες

$$\sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta < \infty.$$

Πόρισμα

Έστω $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in U$ και $M \in (0, +\infty)$.Τότε έχουμε ότι $\lim_n sup(\dfrac{|a_n|}{e^{M\sqrt{n}}}) = +\infty$ και $U \cap \mathcal{N} = \emptyset$,όπου $\mathcal{N}$ το σύνολο των συναρτήσεων που ανήκουν στη κλάση $Nevanlinna$.

Απόδειξη. Το πρώτο ζητούμενο προκύπτει αν εφαρμώσουμε τη πρόταση 12 στην ακολουθία $b_n = M/\sqrt{n}, n \in \mathbb{N}$. Τώρα,αν $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \gamma_n z^n \in \mathcal{N}$, τότε από ένα αποτέλεσμα του $Mergelyan$,υπάρχει $C \in (0, +\infty)$ έτσι ώστε $|\gamma_n| \leq e^{C\sqrt{n}}$,για κάθε φυσικό n.Άρα υπάρχει $M > C$ τέτοιο ώστε: $\lim_n sup(\dfrac{|\gamma_n|}{e^{M\sqrt{n}}}) \leq \lim_n sup(\dfrac{e^{C\sqrt{n}}}{e^{M\sqrt{n}}}) < \infty$. Επομένως,από το πρώτο που δείξαμε,$U \cap \mathcal{N} = \emptyset$.

□

Σημείωση

Από το τελευταίο πόρισμα έχουμε ότι $U \cap A(D) = \emptyset$ και $U \cap H^p(D) = \emptyset$.Πράγματι, αφού οι χώροι $A(D), H^p(D)$,είναι υπόχωροι του $\mathcal{N}$και άρα σε αυτούς τους χώρους έχουμε πολυωνυμική αυξητικότητα ενώ,όπως είδαμε,αυτό δεν ισχύει στο U.

Βιβλιογραφία

[1] W.Rudin, Real and Complex Analysis.

[2] P.Dienes, The Taylor Series, Dover Pub. Inc., New York, 1957.

[3] V.Nestoridis, Universal Taylor Series,Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 46 (1996),1293-1306.

[4] A.Melas,V.Nestoridis,I.Papadoperakis, Growth of coefficients of Universal Taylor Series and comparison of two classes of functions, journal d'analyse mathématique, Vol. 73 (1997).