



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΟΠΤΙΚΗ ΚΑΙ ΟΡΑΣΗ



ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ
ΑΠΟΣΤΟΛΟΠΟΥΛΟΥ ΜΙΧΑΛΗ

Επιβλέπων Καθηγητής: Δημήτρης Παπάζογλου

ΕΦΑΡΜΟΓΗ
ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗΣ ΑΒΕΛ
ΣΤΗΝ
ΟΛΟΓΡΑΦΙΚΗ ΜΙΚΡΟΣΚΟΠΙΑ

ΗΡΑΚΛΕΙΟ

ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟ ΕΤΟΣ 2007-2008





ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΟΠΤΙΚΗ ΚΑΙ ΟΡΑΣΗ



**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ
ΑΠΟΣΤΟΛΟΠΟΥΛΟΥ ΜΙΧΑΛΗ**

Επιβλέπων Καθηγητής: Δημήτρης Παπάζογλου

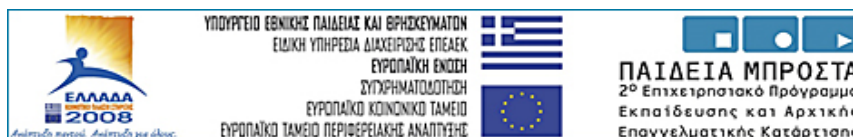
**ΕΦΑΡΜΟΓΗ
ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗΣ ΑΒΕΛ
ΣΤΗΝ
ΟΛΟΓΡΑΦΙΚΗ ΜΙΚΡΟΣΚΟΠΙΑ**

Η παρούσα εργασία υπεβλήθη ως μέρος των υποχρεώσεων για την απονομή του μεταπτυχιακού διπλώματος ειδίκευσης του Διατμηματικού Μεταπτυχιακού Προγράμματος Σπουδών «Οπτική και Όραση» και παρουσιάστηκε στην Τριμελή Επιτροπή αποτελούμενη από τους:

1. Δημήτρη Παπάζογλου
2. Μιχάλη Ταρουδάκη
3. Ιωάννη Ζαχαράκη

ΗΡΑΚΛΕΙΟ 2008

ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟ ΕΤΟΣ 2007-2008



«Το σημαντικότερο πράγμα στη ζωή είναι να γίνει κανείς άνθρωπος των αξιών κι όχι άνθρωπος των επιτυχιών».

A. Einstein

*Στην οικογένειά μου, μια σχέση
αδιαπραγμάτευτη στη ζωή μου.*

Ευχαριστίες

Η παρούσα εργασία πραγματοποιήθηκε στα πλαίσια των υποχρεώσεων για την ολοκλήρωση του μεταπτυχιακού κύκλου σπουδών και την απονομή του μεταπτυχιακού διπλώματος ειδίκευσης του Διατμηματικού Προγράμματος Σπουδών “Οπτική και Όραση” και κατετέθη τον Σεπτέμβριο του 2008. Επιβλέπων καθηγητής ήταν ο κ. Δ. Παπάζογλου τον οποίον ευχαριστώ θερμά, τόσο για την ανάθεση της συγκεκριμένης μελέτης όσο βέβαια και για την βοήθεια, την στήριξη και την επιστημονική καθοδήγηση που μου προσέφερε καθ’ όλη τη διάρκεια της εκπόνησής της, όπου πραγματικά από την συνεργασία μας αποκόμισα πολύτιμες γνώσεις κι εμπειρίες.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον αναπληρωτή καθηγητή του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Κρήτης και διδάσκοντα στο εν λόγω μεταπτυχιακό πρόγραμμα κ. Μ. Ταρουδάκη για την χρήσιμη συμβολή του ως συν-επιβλέπων καθηγητής της μεταπτυχιακής μου διατριβής, την επιστημονική και ηθική υποστήριξη που μου παρείχε, αλλά κυρίως για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε.

Ευχαριστώ επίσης, το Τμήμα Ιατρικής και το Διατμηματικό Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών “Οπτική και Όραση” για την δυνατότητα συμμετοχής μου σε αυτό και για την χορήγηση υποτροφίας κατά το πρώτο έτος των μεταπτυχιακών μου σπουδών.

Θα ήθελα ακόμη, να ευχαριστήσω τον Δρ. Ι. Ζαχαράκη για την αποδοχή της συμμετοχής του στην Τριμελή Επιτροπή αξιολόγησης της παρούσας διατριβής, μαζί με τους κ. κ. Δ. Παπάζογλου και Μ. Ταρουδάκη.

Τέλος, το μεγαλύτερο ευχαριστώ το οφείλω ολόψυχα στους γονείς μου Γιάννη και Άννα και τον αδερφό μου Γιώργο για την αδιάκοπη ηθική και οικονομική υποστήριξη που απλόχερα μου προσέφεραν καθ’ όλη την διάρκεια των σπουδών μου.

Περίληψη

Μελετάμε την ανακατασκευή, με μικρομετρική ακρίβεια, της τρισδιάστατης κατανομής των διαταραχών του δείκτη διάθλασης, που προκαλούνται από τη διάδοση υπερβραχέων παλμών λέιζερ σε διαφανή μέσα. Η εργασία μας εστιάζεται στην ανάκτηση της κατανομής του δείκτη διάθλασης από τις πειραματικά μετρημένες τιμές της διαταραχής ενός μετώπου κύματος, το οποίο διέρχεται τον όγκο. Η διαταραχή του μετώπου κύματος ανασυντίθεται πειραματικά μέσω ολογραφικών τεχνικών.

Προκειμένου να ανακτηθεί η τρισδιάστατη κατανομή της διαταραχής του δείκτη διάθλασης, εφαρμόζουμε τεχνικές αντιστροφής Abel. Οποιαδήποτε τεχνική αντιστροφής Abel, μπορεί να παραχθεί ως ειδική περίπτωση του Θεωρήματος “*Projection-Slice*”, μια θεμελιώδης σχέση στον τομέα της υπολογιστικής τομογραφίας. Η συνηθέστερα χρησιμοποιούμενη μέθοδος για τον υπολογισμό του αντίστροφου μετασχηματισμού Abel στις εφαρμογές απεικόνισης, είναι η τεχνική των Fourier-Hankel. Αυτή η μέθοδος είναι βασισμένη στην αναπαράσταση του αντίστροφου μετασχηματισμού Abel, μέσω του μετασχηματισμού Hankel του μετασχηματισμού Fourier της προβολής. Ωστόσο, η μέθοδος αυτή ενισχύει τον πειραματικό θόρυβο και γίνεται σχεδόν ακατάλληλη προς χρήση σε περιπτώσεις υπερβολικά θορυβωδών εικόνων ή εικόνων με μεγάλη δυναμική περιοχή.

Σε αυτή την εργασία ελέγχουμε την αποτελεσματικότητα μιας νέας τεχνικής που ονομάζεται “*Gaussian basis-set expansion Abel transform*” (*BASEX*) και την συγκρίνουμε σε σχέση με την τεχνική Fourier-Hankel. Η μέθοδος *BASEX* είναι βασισμένη στο ανάπτυγμα της προβολής σε ένα σύνολο βάσης συναρτήσεων, οι οποίες είναι αναλυτικές προβολές γνωστών, καλώς συμπεριφερόμενων συναρτήσεων. Τότε, η τρισδιάστατη κατανομή μπορεί να αναδημιουργηθεί ως γραμμικός συνδυασμός αυτών των καλώς συμπεριφερόμενων συναρτήσεων, οι οποίες έχουν Γκαουσιανή μορφή, με τους ίδιους συντελεστές ανάπτυγματος με την προβολή. Η μέθοδος *BASEX* είναι αποδοτική, απαιτεί λιγότερα υπολογιστικά βήματα κι είναι ιδιαίτερα επιτυχής σε θορυβώδεις εικόνες ή εικόνες με μεγάλη δυναμική περιοχή.

Abstract

We study the reconstruction in fine (micrometer) volume detail of the 3D distribution of the refractive index perturbations induced by the propagation of ultrafast laser pulses in transparent media. Our work is focused on recovering the volume distribution of the refractive index from the experimentally measured values of the perturbation of a probe wave-front that transverses the volume. The probe wave-front perturbation is experimentally reconstructed by use of in-line holographic techniques.

In order to recover the 3D distribution of the perturbation of the refractive index, we apply Abel inversion techniques. Any Abel inversion technique can be derived as a special case of the projection-slice theorem, a fundamental relation in the field of computed tomography. The most commonly used method for calculating the inverse Abel transform in imaging applications is the Fourier-Hankel technique. This method is based on a representation of the inverse Abel transform via the Hankel transform of the Fourier transform of the projection. However, this method magnifies experimental noise and becomes practically unusable in cases of excessively noisy images, or images with a large dynamic range.

In this work we compare the effectiveness of the Fourier-Hankel technique to *Gaussian basis-set expansion Abel transform (BASEX) method*. This method is based on expanding the projection in a basis set of functions that are analytical projections of known well-behaved functions. The 3D distribution can then be reconstructed as a linear combination of these well-behaved functions, which have a Gaussian-like shape, with the same expansion coefficients as the projection. The BASEX method is efficient and it requires less computational steps in progress and is particularly well suited for noisy images, or images with a large dynamic range.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1	9
Εισαγωγή	9
1.1. Εισαγωγή.....	10
1.2. Ευθύς μετασχηματισμός Abel.....	10
1.2.1. Γεωμετρική ερμηνεία μετασχηματισμού Abel.....	11
1.3. Αντίστροφος μετασχηματισμός Abel.....	13
1.4. Τεχνικές υπολογισμού αντίστροφου μετασχηματισμού Abel.....	14
1.4.1. Μετασχηματισμός Radon.....	16
1.4.2. Μετασχηματισμός Fourier-Hankel.....	19
1.5. Η <i>Gaussian basis-set expansion Abel transform (BASEX)</i> μέθοδος.....	21
1.5.1. Γενική περιγραφή της μεθόδου <i>BASEX</i>	21
1.6. Αντικείμενα μελέτης κι εφαρμογής της μεθόδου <i>BASEX</i>	27
Κεφάλαιο 2	28
Εφαρμογή της μεθόδου BASEX σε προσομοιωμένα δεδομένα θορύβου	28
2.1. Εισαγωγή.....	29
2.2. Α΄ Μέρος Εφαρμογών.....	29
2.3. Β΄ Μέρος Εφαρμογών.....	38
Κεφάλαιο 3	47
Εφαρμογή της μεθόδου BASEX σε πειραματικά δεδομένα	47
3.1. Εισαγωγή.....	48
3.2. Αναλυτική παρουσίαση πειραματικών εφαρμογών κι αποτελεσμάτων.....	50
3.3. Σύγκριση της αποτελεσματικότητας της μεθόδου Fourier-Hankel με τη μέθοδο <i>BASEX</i> βάσει των πειραματικών αποτελεσμάτων.....	62
Κεφάλαιο 4	65

Συμπεράσματα	65
Παράρτημα	69
Εισαγωγή.....	70
Ειδική περιγραφή της μεθόδου <i>BASEX</i>	71
Εκτίμηση του εύρους της παραμέτρου κανονικοποίησης q^2	73
Εφαρμογή της μεθόδου <i>BASEX</i> απουσία θορύβου.....	76
Βιβλιογραφία	79

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή

1.1. Εισαγωγή

Στον χώρο της ολογραφικής μικροσκοπίας η αντιμετώπιση αντίστροφων προβλημάτων, όπως για παράδειγμα αυτό της ανάκτησης της διαταραχής του δείκτη διάθλασης μιας τρισδιάστατης κατανομής, επιτυγχάνεται με την εφαρμογή διαφόρων τεχνικών αντιστροφής Abel.

Σε αυτό το εισαγωγικό κεφάλαιο, αρχικά γίνεται λόγος στον μετασχηματισμό Abel, διατυπώνοντας και μελετώντας τις έννοιες του ευθέως και του αντίστροφου μετασχηματισμού Abel αντίστοιχα. Κατόπιν, καταγράφουμε τις σημαντικότερες μεθόδους αντιστροφής Abel, εστιάζοντας περισσότερο στην μέθοδο του αντίστροφου μετασχηματισμού Radon, καθώς και στην πλέον χρησιμοποιούμενη τεχνική αντιστροφής Abel, αυτή των Fourier-Hankel. Τέλος, περιγράφουμε αναλυτικά μία σχετικά πρόσφατη τεχνική αντιστροφής Abel, την *Gaussian basis-set expansion Abel transform (BASEX)* μέθοδο, μία μέθοδο η οποία θα αποτελέσει το κυριότερο αντικείμενο μελέτης επεξεργασίας κι έρευνας της παρούσας διατριβής.

1.2. Ευθύς μετασχηματισμός Abel

Ο μετασχηματισμός Abel – έλαβε το όνομά του από τον Niels Henrik Abel – είναι ένας ολοκληρωτικός μετασχηματισμός που χρησιμοποιείται συχνά στην ανάλυση σφαιρικά συμμετρικών ή αξονικά συμμετρικών συναρτήσεων. Εν γένει, ο μετασχηματισμός Abel μιας συνάρτησης $f(r)$ δίδεται από την παρακάτω σχέση [1]:

$$F(y) = 2 \int_y^{\infty} \frac{f(r) r dr}{\sqrt{r^2 - y^2}} \quad (1.1)$$

Πιο ειδικά, στο χώρο της ανάλυσης εικόνας, ο ευθύς μετασχηματισμός Abel (*forward Abel transform*) χρησιμοποιείται για να προβάλλει, μια αξονικά συμμετρική συνάρτηση εκπομπής, επάνω σε ένα επίπεδο. Τότε, η μετρούμενη ένταση, $I(x)$, δίδεται σε όρους συντελεστών εκπομπής, $f(r)$, μέσω του μετασχηματισμού Abel [2] από την σχέση,

$$I(x) = 2 \int_x^\infty \frac{rf(r)dr}{\sqrt{r^2 - x^2}} \quad (1.2)$$

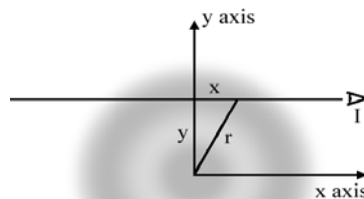
όπου x είναι η μετατόπιση του προφίλ έντασης και r είναι η ακτινική απόσταση από την πηγή. Η μετρούμενη ένταση $I(x)$ απεικονίζει τη μονοδιάστατη προβολή της δισδιάστατης συμμετρικής συνάρτησης έχοντας το $f(r)$ ως ακτινική “φέτα” - τομή.

1.2.1. Γεωμετρική ερμηνεία μετασχηματισμού Abel

Στις δύο διαστάσεις, ο μετασχηματισμός Abel $F(y)$ μπορεί γεωμετρικά να ερμηνευθεί [1] ως η προβολή μιας, για παράδειγμα, κυκλικά συμμετρικής συνάρτησης $f(r)$ κατά μήκος ενός συνόλου παράλληλων γραμμών όρασης, οι οποίες απέχουν απόσταση y από την αρχή των αξόνων (**Σχήμα 1.1.**). Σύμφωνα με το Σχήμα 1.1., ο παρατηρητής (I) θα δει την προβολή,

$$F(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\sqrt{x^2 + y^2})dx \quad (1.3)$$

όπου $f(r)$ είναι η κυκλικά συμμετρική συνάρτηση, η οποία στο Σχήμα 1.1. αναπαρίσταται με γκρι χρώμα. Υποτίθεται ότι ο παρατηρητής βρίσκεται πραγματικά σε άπειρη απόσταση $x = \infty$, γι’ αυτό το λόγο τα όρια του ολοκληρώματος κυμαίνονται από $\pm\infty$, ενώ επίσης όλες οι γραμμές όρασης είναι παράλληλες προς τον άξονα x .



Σχήμα 1.1.: Μια γεωμετρική ερμηνεία του μετασχηματισμού Abel στις δύο διαστάσεις. Ένας παρατηρητής (I) παρατηρεί κατά μήκος μίας γραμμής παράλληλης προς τον άξονα x μία απόσταση y από την αρχή των αξόνων. Αυτό που βλέπει ο παρατηρητής είναι η προβολή της κυκλικά συμμετρικής συνάρτησης $f(r)$ κατά μήκος της γραμμής όρασης. Η συνάρτηση $f(r)$ αναπαρίσταται με γκρι χρώμα. Ο παρατηρητής υποτίθεται ότι βρίσκεται απείρως μακριά από την αρχή των αξόνων, γι’ αυτό λοιπόν τα όρια ολοκλήρωσης κυμαίνονται από $\pm\infty$ [1].

θεωρώντας επίσης, ότι η ακτίνα r σχετίζεται με τα x και y μέσω της σχέσης $r^2 = x^2 + y^2$, τότε προκύπτει ότι [1]

$$dx = \frac{rdr}{\sqrt{r^2 - y^2}}$$

(1.4)

Επιπλέον, η ολοκλήρωση κατά μήκος της ακτίνας r δεν διέρχεται από το μηδέν, οπότε η σχέση (1.3) γίνεται τελικά ως εξής [1]:

$$F(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(r)dx = 2 \int_0^{\infty} f(r)dx \quad , \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

(1.5)

Με ανάλογο τρόπο, αντικαθιστώντας στην σχέση (1.2) την εξίσωση $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, η προβολή μπορεί να γραφεί ως [3]

$$I(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\sqrt{x^2 + y^2})dy$$

(1.6)

Ο μετασχηματισμός Abel μπορεί να επεκταθεί και σε υψηλότερες διαστάσεις. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον αποτελεί η επέκταση του στις τρεις διαστάσεις. Έτσι λοιπόν, εάν έχουμε μία αξονικά συμμετρική συνάρτηση $f(\rho, z)$, όπου $\rho^2 = x^2 + y^2$ η κυλινδρική ακτίνα, τότε θέλουμε να γνωρίζουμε την προβολή αυτής της συνάρτησης επάνω σε ένα επίπεδο παράλληλο προς τον άξονα z . Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το επίπεδο αυτό είναι το yz -επίπεδο, οπότε συνεπάγεται η σχέση [1],

$$F(y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\rho, z)dx = 2 \int_y^{\infty} \frac{f(\rho, z)\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2 - y^2}}$$

(1.7)

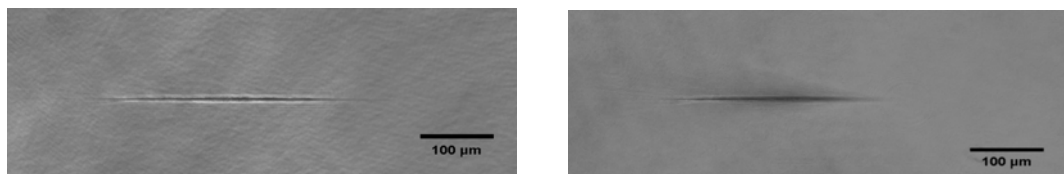
η οποία εκφράζει τον μετασχηματισμό Abel της συνάρτησης $f(\rho, z)$ στο ρ και y . Επιπρόσθετα, ένας ιδιαίτερος τύπος αξονικής συμμετρίας είναι η σφαιρική

συμμετρία. Σε αυτή την περίπτωση, έχουμε μία συνάρτηση $f(r)$, όπου $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Τότε, η προβολή για παράδειγμα, επάνω στο yz- επίπεδο θα είναι κυκλικά συμμετρική και θα εκφράζεται από την συνάρτηση $F(s)$, όπου $s^2 = y^2 + z^2$. Ολοκληρώνοντας προκύπτει η παρακάτω σχέση [1],

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(r) dx = 2 \int_s^{\infty} \frac{f(r) r dr}{\sqrt{r^2 - s^2}} \quad (1.8)$$

η οποία, εκφράζει ξανά τον μετασχηματισμό Abel της συνάρτησης $f(r)$ στο r και s .

Στην εικόνα που ακολουθεί (**Εικόνα 1.1.**) δεικνύεται ένα πρώτο παράδειγμα απεικόνισης της προβολής ενός αντικειμένου μετά από την εφαρμογή ευθέως μετασχηματισμού Abel.



Εικόνα 1.1.: Ένα πρώτο παράδειγμα πώς περίπου απεικονίζεται ένα αντικείμενο ύστερα από την χρησιμοποίηση ευθέως μετασχηματισμού Abel (πειραματική εικόνα).

1.3. Αντίστροφος μετασχηματισμός Abel

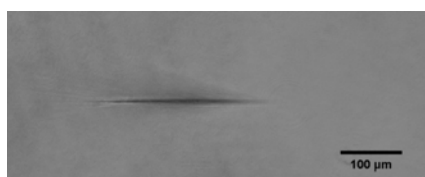
Όπως προείπαμε, στον χώρο της ανάλυσης εικόνας, ο ευθύς μετασχηματισμός Abel χρησιμοποιείται για να προβάλλει μια αξονικά συμμετρική συνάρτηση εκπομπής $f(r)$, επάνω σε ένα επίπεδο, γεγονός που εκφράζεται μέσω της σχέσης (1.1) ή ισοδύναμα της (1.2). Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Abel (*inverse Abel transform*) χρησιμοποιείται προκειμένου να υπολογίσει την συνάρτηση εκπομπής δίδοντας μία προβολή (δηλαδή, μια ανίχνευση ή μια φωτογραφία) αυτής της συνάρτησης διαταραχής [1]. Το ολοκλήρωμα αντιστροφής ή διαφορετικά ο αντίστροφος μετασχηματισμός Abel, δίδεται από την σχέση [3]

$$f(r) = -\frac{1}{\pi} \int_r^\infty \frac{(dI/dx)}{\sqrt{x^2 - r^2}} dx$$

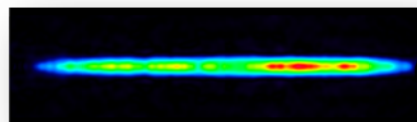
(1.9)

Πρακτικά, είναι αρκετά δύσκολη η εφαρμογή της σχέσης (1.9) λόγω του σημείου ανωμαλίας στο άνω όριο του ολοκληρώματος κι επειδή η παράγωγος της προβολής (dI/dx) τείνει να ενισχύσει κατά πολύ την αλλοίωση των πειραματικών δεδομένων από το θόρυβο. Επιπλέον, η ένταση δεν είναι συνήθως μια συνεχής συνάρτηση, αλλά γνωρίζουμε την τιμή της μόνο σε ορισμένα διακριτά σημεία [3].

Στην παρακάτω εικόνα (**Εικόνα 1.2.**) παρουσιάζουμε ένα παράδειγμα ανάκτησης ενός τρισδιάστατου κυλινδρικού αντικειμένου (**Εικ. 1.2.(β)**) από την δισδιάστατη προβολή του (**Εικ. 1.2.(α)**) μετά την εφαρμογή αντίστροφου μετασχηματισμού Abel.



(α).



(β).

Εικόνα 1.2.: Ένα παράδειγμα ανασύνθεσης ενός τρισδιάστατου κυλινδρικού αντικειμένου (**β**), δεδομένης της δισδιάστατης προβολής του (**α**), χρησιμοποιώντας αντίστροφο μετασχηματισμό Abel (κύρια τομή).

1.4. Τεχνικές υπολογισμού αντίστροφου μετασχηματισμού Abel

Διάφορες προσεγγίσεις, που βασίζονται σε γεωμετρικές τεχνικές ή αριθμητικές μεθόδους και στη χρήση πολυωνύμων, έχουν υιοθετηθεί με σκοπό τον υπολογισμό του αντίστροφου μετασχηματισμού Abel [3]. Οι *Nestor και Olsen* [4], μετασχημάτισαν τις μεταβλητές θέτοντας όπου $r^2 = v$ και $x^2 = u$, έτσι ώστε το ολοκλήρωμα αντιστροφής να μπορεί να προσεγγιστεί από ένα απλούστερο άθροισμα. Ο *Bockasten* [5] εφάρμοσε κατάλληλα, πολυώνυμα τρίτου βαθμού στα πειραματικά

δεδομένα προσεγγίζοντας με αυτόν τρόπο το ολοκλήρωμα μέσω ενός αθροίσματος. Ωστόσο, αυτές οι μέθοδοι (*exact polynomials fits methods*) απαιτούν προγενέστερη ομαλοποίηση των δεδομένων γι' αυτό και δεν θεωρούνται πλήρεις.

Αργότερα, υιοθετήθηκαν κάποιες τεχνικές γνωστές ως μέθοδοι ελαχίστων τετραγώνων με χρήση εμπειρικής καμπύλης (*least squares curve-fitting methods*). Οι τεχνικές αυτές αναπτύχθηκαν για να παράγουν καλύτερα αποτελέσματα σε σχέση με τις προηγούμενες μεθόδους, όταν θα εφαρμόζονται σε θορυβώδη πειραματικά δεδομένα. Οι *Freeman και Katz* [6] χρησιμοποίησαν μία μοναδική πολυωνυμική καμπύλη, με σκοπό την παρεμβολή και το ταίριασμα της με τα δεδομένα. Βρέθηκαν τελικά πολυώνυμα τέταρτης τάξης να δίνουν τα πιο ακριβή αποτελέσματα μεταξύ δοκιμών στις οποίες χρησιμοποιήθηκαν μέχρι και πολυώνυμα δωδέκατης τάξης. Στη συνέχεια, οι *Cremers και Birkebak* [7], αφού συνέκριναν διάφορες τεχνικές αντιστροφής Abel, κατέδειξαν ότι “least squares curve fitting” τεχνικές είναι ευνοϊκότερες έναντι των “exact fit” μεθόδων. Σύντομες περιγραφές διαφόρων άλλων τεχνικών αντιστροφής Abel, καθώς και συγκρίσεις μεταξύ αυτών των τεχνικών υπάρχουν αν ανατρέξει κανείς στην παραπομπή [7].

Επίσης, μία άλλη τεχνική αντιστροφής αναπτύχθηκε από τον *R. T. Shelby* [8], στο πλαίσιο της μεταπτυχιακής του διατριβής, ο οποίος διαίρεσε τα δεδομένα σε διάφορα διαστήματα και χρησιμοποίησε μία “least squares polynomial fit” τεχνική σε κάθε διάστημα με σκοπό την λείανση των δεδομένων που είχαν υποστεί σκέδαση. Έπειτα, υπολόγισε την αντιστροφή αναλυτικά αθροίζοντας κατά διαστήματα κι έλαβε έτσι τους συντελεστές εκπομπής. Ακόμη, ο *Maldonado* κι άλλοι ερευνητές [9], εξέφρασαν την αντιστροφή Abel υπό μορφή αναπτύγματος σε σειρά ορθογώνιων πολυωνύμων και παρήγαγαν μία μέθοδο με σκοπό την εύρεση του συντελεστή αναπτύγματος για τα δεδομένα της έντασης. Τέλος, προτάθηκε από τους *P. A. Vicharelli και W. P. Lapatovich* [10] μία επαναληπτική μέθοδο γρήγορης σύγκλισης για τον υπολογισμό του αντίστροφου μετασχηματισμού Abel, βασισμένη σε τεχνικές αποσυνέλιξης. Οι υπολογισμοί σε αυτή την μέθοδο περιλαμβάνουν μόνο τις επαναλαμβανόμενες εφαρμογές του ευθέως μετασχηματισμού Abel, χωρίς να απαιτούνται άλλα παράγωγα.

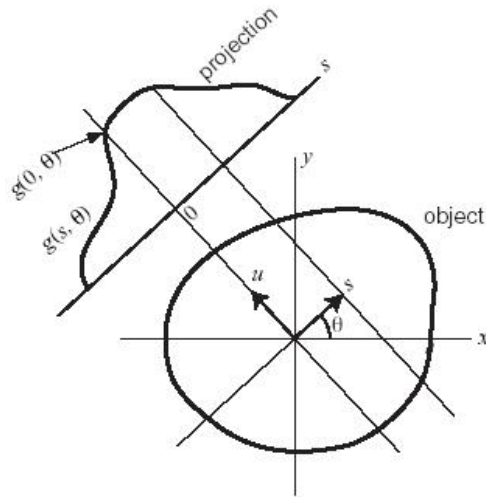
1.4.1 Μετασχηματισμός Radon

Εν γένει, ο μετασχηματισμός Radon (*Radon Transform, RT*) είναι μια τεχνική που επιτρέπει τον προσδιορισμό της προβολής μιας δισδιάστατης συνάρτησης $f(x,y)$ σε συγκεκριμένη διεύθυνση. Ειδικότερα, ο δισδιάστατος μετασχηματισμός Radon, είναι η προβολή της έντασης μιας εικόνας κατά μήκος μιας ακτινικής γραμμής, προσανατολισμένης σε μία συγκεκριμένη γωνία [11]. Ο μετασχηματισμός Radon, εκφράζει το γεγονός της ανασύνθεσης μιας εικόνας, η οποία είναι εφικτή χρησιμοποιώντας τις προβολές που λαμβάνονται μέσω περιστροφικών ανιχνεύσεων. Το Θεώρημά του είναι το ακόλουθο: *Η τιμή μιας δισδιάστατης συνάρτησης σε ένα αυθαίρετο σημείο λαμβάνεται μοναδικά μέσω των ολοκληρωμάτων, κατά μήκος των ευθειών όλων των διευθύνσεων που διέρχονται από το σημείο αυτό.* Ο μετασχηματισμός Radon δεικνύει την σχέση μεταξύ του δισδιάστατου αντικειμένου και των προβολών του [12].

Θεωρούμε μια δισδιάστατη συνάρτηση $f(x,y)$ (**Σχήμα 1.2.**). Ολοκληρώνοντας κατά μήκος της ευθείας, το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα της οποίας βρίσκεται κατά την διεύθυνση της γωνίας θ , οδηγεί στην συνάρτηση $g(s,\theta)$ που είναι η προβολή της δισδιάστατης συνάρτησης $f(x,y)$ στον άξονα s της διεύθυνσης της θ . Όταν το s είναι μηδέν, η συνάρτηση g λαμβάνει την τιμή $g(0,\theta)$, η οποία προκύπτει από την ολοκλήρωση κατά μήκος της ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων του (x,y) συστήματος συντεταγμένων. Τα σημεία της ευθείας το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα των οποίων βρίσκεται στην διεύθυνση της θ και διέρχεται από την αρχή των αξόνων του συστήματος συντεταγμένων (x,y) ικανοποιούν την εξίσωση [16]:

$$\frac{y}{x} = \tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{-\cos\theta}{\sin\theta} \Rightarrow x \cos\theta + y \sin\theta = 0$$

(1.10)



Σχήμα 1.2.: Υπολογισμός του μετασχηματισμού Radon (S. Venturas, I. Flaounas, 2005).

Η ολοκλήρωση κατά μήκος της ευθείας, το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα της οποίας βρίσκεται στην διεύθυνση της θ και διέρχεται από την αρχή των αξόνων του (x,y) συστήματος συντεταγμένων, σημαίνει ότι η ολοκλήρωση της συνάρτησης $f(x,y)$ πραγματοποιείται μόνο για τα σημεία που ικανοποιούν την παραπάνω εξίσωση (1.10). Με τη βοήθεια της συνάρτησης δέλτα (*Dirac function*) δ , η οποία είναι μηδέν για κάθε όρισμα εκτός από το μηδέν και κάθε ολοκλήρωμά της είναι μονάδα, η $g(\theta,\theta)$ εκφράζεται ως εξής:

$$g(\theta, \theta) = \iint f(x, y) \cdot \delta(x \cos \theta + y \sin \theta) dx dy \quad (1.11)$$

Ομοίως, η ευθεία με κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα στην διεύθυνση της θ και απόσταση s από την αρχή των αξόνων ικανοποιεί την παρακάτω εξίσωση:

$$(x - s \cdot \cos \theta) \cdot \cos \theta + (y - s \cdot \sin \theta) \cdot \sin \theta = 0 \Rightarrow x \cdot \cos \theta + y \cdot \sin \theta - s = 0 \quad (1.12)$$

Συνεπώς, η γενική έκφραση του μετασχηματισμού Radon δίδεται από την σχέση [11-14]:

$$g(s, \theta) = \iint f(x, y) \cdot \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - s) dx dy$$

(1.13)

ενώ ο αντίστροφος μετασχηματισμός Radon υπολογίζεται από την ακόλουθη εξίσωση [16],

$$f(x, y) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \rho \cdot R_{\theta}(s(x, y)) d\theta$$

(1.14)

όπου R_{θ} είναι ο μετασχηματισμός Radon, ρ είναι ένα φίλτρο και

$$s(x, y) = x \cos \theta + y \sin \theta .$$

Το πρόβλημα της αναγνώρισης της δομής ενός τρισδιάστατου αντικειμένου από τη γνώση των προβολών του, προκύπτει σε ποικίλες εκφάνσεις οπτικών εφαρμογών. Η γενική λύση αυτού του προβλήματος δίδεται μέσω του αντίστροφου μετασχηματισμού Radon των προβολών του.

Όταν το πεδίο του αντικειμένου είναι εκ των προτέρων γνωστό να είναι ακτινικά συμμετρικό, μπορεί να καθοριστεί χρησιμοποιώντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Abel, μια αρκετά γνωστή διαδικασία που αναπτύχθηκε στις προηγούμενες ενότητες. Στην περίπτωση αυτή, η προβολή σε ένα επίπεδο παρέχει ικανοποιητικά δεδομένα. Όταν όμως, το πεδίο δεν διαθέτει ακτινική συμμετρία, τότε μπορεί να καθοριστεί με τη χρήση του αντίστροφου μετασχηματισμού Radon, μια λιγότερο γνωστή διαδικασία. Σ' αυτή την περίπτωση, απαιτούνται προβολές σε πολλαπλά επίπεδα, με διαφορετικούς προσανατολισμούς, ώστε αυτές να παρέχουν ικανοποιητικά δεδομένα.

Πιο συγκεκριμένα, ο *C. M. Vest* μελέτησε το πρόβλημα αυτό, θεωρώντας ότι το πεδίο αντικειμένου βρίσκεται ενταγμένο σε ένα σύστημα κυλινδρικών συντεταγμένων [17]. Φυσικά, το τρισδιάστατο αυτό αντικείμενο, μπορεί κάλλιστα να αναπαριστά μια κατανομή της οπτικής πυκνότητας, του συντελεστή εκπομπής, ή του δείκτη διάθλασης. Μέσα από την μελέτη του παρόντος προβλήματος, αναπτύχθηκε

μία αρχή υπέρθεσης, βάσει της οποίας ο αντίστροφος μετασχηματισμός Radon μπορεί να προέλθει από τον αντίστροφο μετασχηματισμό Abel, ο οποίος σχετίζεται με αντικείμενα ακτινικής συμμετρίας [17].

1.4.2. Μετασχηματισμός Fourier - Hankel

Κάθε τεχνική αντιστροφής Abel, μπορεί να παραχθεί ως μία ειδική περίπτωση του Θεωρήματος “Projection-slice”, μια θεμελιώδης σχέση στον χώρο της υπολογιστικής τομογραφίας. Υπάρχουν, όπως παρουσιάστηκαν προηγούμενα, διάφορες μέθοδοι αντιστροφής Abel, οι περισσότερες εκ των οποίων όμως περιέχουν μειονεκτήματα. Όμως, η πλέον χρησιμοποιούμενη μέθοδος για τον υπολογισμό του αντίστροφου μετασχηματισμού Abel, στον χώρο των απεικονιστικών εφαρμογών, είναι η τεχνική Fourier-Hankel [3]. Η τεχνική Fourier-Hankel, εν γένει, είναι μία τεχνική που βασίζεται σε ολοκληρωτικούς μετασχηματισμούς, η οποία συμβάλλει στο να ξεπεραστούν πολλές από τις δυσκολίες και τους περιορισμούς που σχετίζονται με τις προαναφερθείσες τεχνικές αντιστροφής Abel. Πιο συγκεκριμένα, η μέθοδος αυτή είναι βασισμένη στην αναπαράσταση του αντίστροφου μετασχηματισμού Abel (1.9) μέσω του μετασχηματισμού Hankel, του μετασχηματισμού Fourier της προβολής [3].

Πιο αναλυτικά, ο μονοδιάστατος μετασχηματισμός Fourier της εξίσωσης (1.6) δίδεται από την σχέση

$$F\{I(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\sqrt{x^2 + y^2}) e^{-i2\pi xq} dx dy \quad (1.15)$$

Εάν τώρα, γίνει αλλαγή των μεταβλητών της ολοκλήρωσης από καρτεσιανές σε πολικές συντεταγμένες, τότε η τελευταία σχέση μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$F\{I(x)\} = 2\pi \int_0^{\infty} r f(r) dy J_0(2\pi r q) dr \quad (1.16)$$

όπου $J_0(\cdot)$ είναι η συνάρτηση Bessel πρώτου είδους μηδενικής τάξης. Η δεξιά πλευρά της εξίσωσης (1.16) είναι ο μετασχηματισμός Hankel μηδενικής τάξης της προβολής $f(r)$, του οποίου ο αντίστροφος μετασχηματισμός έχει την ίδια μορφή με τον ευθύγραμμο μετασχηματισμό. Τότε, μια οποιαδήποτε τρισδιάστατη κατανομή, όπως για παράδειγμα η κατανομή πυκνότητας ενός πλάσματος, μπορεί να ανακτηθεί λαμβάνοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Hankel, του μετασχηματισμού Fourier της προβεβλημένης έντασης, ως εξής,

$$f(r) = 2\pi \int_0^\infty q J_0(2\pi r q) \int_{-\infty}^\infty I(x) e^{-i2\pi x q} dx dq \quad (1.17)$$

Από υπολογιστικής άποψης, ο τύπος αντιστροφής της σχέσης (1.17) έχει διάφορα πλεονεκτήματα έναντι του ολοκληρωτικού τύπου αντιστροφής Abel της σχέσης (1.9). Πρώτον, αποφεύγουμε την δυσκολία που σχετίζεται με το σημείο ανωμαλίας στο άνω όριο της ολοκλήρωσης. Δεύτερον, μετά από την εφαρμογή του μετασχηματισμού Fourier της έντασης $I(x)$, τα φίλτρα μπορούν να εφαρμοστούν άμεσα στο πεδίο της συχνότητας, με σκοπό να μειώσουν τον θόρυβο και να εξομαλύνουν έτσι τα δεδομένα με έναν γνωστό, συστηματικό τρόπο. Τέλος, η εξίσωση (1.17), μπορεί να προσεγγιστεί αριθμητικά με διακριτούς γρήγορους αλγόριθμους μετασχηματισμού (π.χ. *FFT*, *Fast Fourier Transform*) μειώνοντας τον χρόνο υπολογισμού σε σχέση με όλες τις προηγούμενα αναφερθείσες τεχνικές αντιστροφής Abel [3].

Η μέθοδος Fourier-Hankel χρησιμοποιείται ευρέως για την ανασύνθεση απεικονιστικών δεδομένων, δεδομένου ότι πρόκειται για μια υπολογιστικά γρήγορη, όπως αναφέρθηκε, μέθοδο, η οποία παράγει ικανοποιητικά αποτελέσματα για υψηλής ποιότητας εικόνες με μικρή δυναμική περιοχή. Ωστόσο, η μέθοδος ενισχύει τον πειραματικό θόρυβο παράγοντας συγχρόνως τεχνητές δομές, όταν ανασυνθέτει εικόνες με αιχμηρά χαρακτηριστικά υψηλής έντασης. Στην πραγματικότητα, η τεχνική Fourier-Hankel γίνεται πρακτικά ακατάλληλη προς χρήση σε περιπτώσεις υπερβολικά θορυβωδών εικόνων ή εικόνων με μεγάλη δυναμική περιοχή [18].

1.5. Η *Gaussian basis-set expansion Abel transform (BASEX)* μέθοδος

Η *Gaussian basis-set expansion Abel transform* μέθοδος είναι μία νέα μέθοδος αναδημιουργίας τρισδιάστατων εικόνων με κυλινδρική συμμετρία από τις δισδιάστατες προβολές τους, η οποία μπορεί να χρησιμεύσει ως μια εναλλακτική λύση έναντι της τεχνικής μετασχηματισμού Fourier-Hankel, απαλλαγμένη ωστόσο από τους περιορισμούς της.

Η νέα αυτή τεχνική, γνωστή κι ως μέθοδος *BASEX*, αναπτύχθηκε από τους *V. Dribinski* κι άλλους ερευνητές το 2002 κι είναι βασισμένη στο ανάπτυγμα της προβολής σε ένα σύνολο βάσης δισδιάστατων συναρτήσεων, οι οποίες είναι αναλυτικές προβολές γνωστών, καλώς συμπεριφερόμενων συναρτήσεων. Τότε, η τρισδιάστατη κατανομή δύναται να ανακτηθεί ως γραμμικός συνδυασμός αυτών των καλώς συμπεριφερόμενων συναρτήσεων, οι οποίες έχουν Γκαουσιανή μορφή, με τους ίδιους συντελεστές ανάπτυγματος με την προβολή [18].

Η μέθοδος *BASEX* είναι αποδοτική, απαιτεί λιγότερα υπολογιστικά βήματα κι είναι ιδιαίτερος επιτυχής σε θορυβώδεις εικόνες ή εικόνες με μεγάλη δυναμική περιοχή. Ειδικότερα, είναι ιδιαίτερος καλά ταιριασμένη για τον μετασχηματισμό προβολών που λαμβάνονται από πειράματα φωτοϊόντων και φωτοηλεκτονίων [18].

1.5.1. Γενική περιγραφή της μεθόδου *BASEX*

Θα μελετήσουμε γενικά την *BASEX* μέθοδο για ένα κακώς τεθειμένο αντίστροφο πρόβλημα. Θεωρούμε αρχικά ένα σύνολο δισδιάστατων συναρτήσεων $\{f_k(r,z)\}$ ($k = 0, \dots, K - 1$) στον χώρο του αντικειμένου. Ένα κατάλληλο σύνολο τέτοιων δισδιάστατων συναρτήσεων Γκαουσιανής μορφής περιγράφεται από την παρακάτω σχέση [18],

$$\rho_k(r) = \left(\frac{e}{k^2}\right)^{k^2} \left(\frac{r}{\sigma}\right)^{2k^2} e^{-\left(\frac{r}{\sigma}\right)^2}, \quad k = 0, \dots, K_x - 1$$

(1.18)

όπου το σ είναι μία παράμετρος σχετιζόμενη με το εύρος των συναρτήσεων Γκαουσιανής μορφής $\rho_k(r)$. Το παραπάνω σύνολο συναρτήσεων της σχέσης (1.18), για αρκετά μεγάλο k , μπορεί να περιγραφεί προσεγγιστικά από την σχέση,

$$\rho_k(r) \approx e^{-2\left(\frac{r-k}{\sigma}\right)^2}, \quad k=0, \dots, K_x - 1 \quad (1.19)$$

η οποία είναι σχεδόν όμοια με μία συνάρτηση Gauss. Η τελευταία αυτή σχέση (1.19) περιγράφει ένα σύνολο δισδιάστατων συναρτήσεων το οποίο αποτελεί μία βάση ικανή να καλύψει ομοιόμορφα τον χώρο της εικόνας [18]. Να σημειώσουμε ότι αυτή την βάση συναρτήσεων της σχέσης (1.19) επιλέγουμε τελικά να χρησιμοποιήσουμε σε όλες τις εφαρμογές της συγκεκριμένης μεθόδου, τα αποτελέσματα των οποίων παραθέτουμε σε επόμενα κεφάλαια.

Τώρα, το αντίστοιχο μετασχηματισμένο σύνολο διανυσμάτων $\{\mathbf{G}_k \in \mathbf{R}^{N_x \times N_z}\}$ ($k = 0, \dots, K - 1$) του συνόλου των συναρτήσεων $\{f_k(r, z)\}$ ($k = 0, \dots, K - 1$), ορίζεται στο χώρο της προβολής. Τα δυο αυτά σύνολα υποτίθεται ότι σχετίζονται μέσω της σχέσης [18]

$$\mathbf{G}_{kij} = 2 \int h(x - x_i, z - z_j) dx dz \int_{|x|}^{\infty} \frac{r f_k(r, z)}{\sqrt{r^2 - x^2}} dr \quad (1.20)$$

Χάριν απλότητας, θα θεωρήσουμε ότι η συνάρτηση $h(x - x_i, z - z_j)$ είναι ίση με μία συνάρτηση δέλτα η οποία είναι “κεντραρισμένη” στο σημείο $(x - x_i, z - z_j)$. Τότε προκύπτει ότι, $\int h(x - x_i, z - z_j) dx dz = 1$. Άρα, η σχέση (1.20) γίνεται ως εξής:

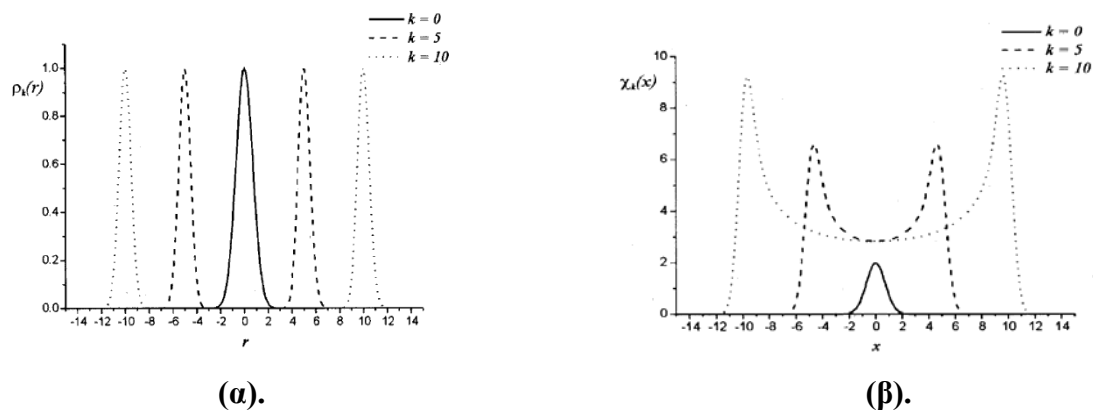
$$\mathbf{G}_{kij} = 2 \int_{|x|}^{\infty} \frac{r f_k(r, z)}{\sqrt{r^2 - x^2}} dr \quad (1.21)$$

Ακολουθώντας την έκφραση της σχέσης (1.6), η παραπάνω σχέση (1.21) μπορεί ισοδύναμα να γραφεί ως

$$\mathbf{G}_{kij} = \int_{-\infty}^{\infty} f_k(\sqrt{x_i^2 + y^2}, z_j) dy \quad (1.22)$$

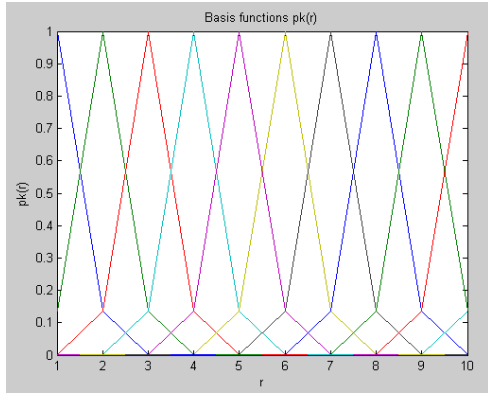
όπου f_k είναι οι ίδιες συναρτήσεις βάσης που ονομάσαμε παραπάνω ως ρ_k . Ουσιαστικά, η δεξιά πλευρά της σχέσης (1.21) ή ισοδύναμα της σχέσης (1.22) είναι ο ευθύς μετασχηματισμός Abel των συναρτήσεων βάσης f_k που οδηγεί στο σύνολο \mathbf{G}_k , ένα σύνολο που περιέχει ως στοιχεία τις προβολές των συναρτήσεων βάσης f_k , για διάφορες τιμές του δείκτη k .

Στο σχήμα που ακολουθεί (**Σχήμα 1.3.**) παρατίθενται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων βάσης $\rho_k(r)$ της σχέσης (1.19) για διαφορετικές τιμές του δείκτη k (**Σχ. 1.3.(α)**) και των αντίστοιχων προβολών τους \mathbf{G}_k που στα συγκεκριμένα γραφήματα καλούμε ως $\chi_k(x)$ (**Σχ. 1.3.(β)**).

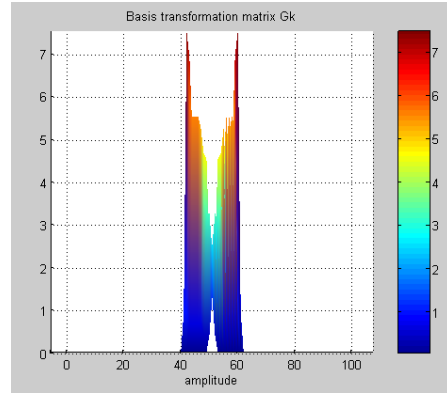


Σχήμα 1.3.: Παραδείγματα των συναρτήσεων βάσης $\rho_k(r)$ (**α**), και των αντίστοιχων προβολών $\chi_k(x)$ (**β**), για $k = 0, 5$, και 10 και $\sigma = 1$ (*V. Dribinski, et al., Rev. Sci. Instrum. 73, 2634 (2002)*).

Στο επόμενο σχήμα (**Σχήμα 1.4.**) δεικνύεται ένα άλλο παράδειγμα συναρτήσεων βάσης και των αντίστοιχων προβολών τους, συναρτήσεις βάσεις πλησιέστερων αυτών που θα χρησιμοποιήσουμε στις εφαρμογές που θα μελετήσουμε. Συγκεκριμένα, παρατίθενται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων βάσης $\rho_k(r)$ της σχέσης (1.19) για $k = 0, \dots, 10$ και $\sigma = 1$ (**Σχ. 1.4.(α)**) και των αντίστοιχων προβολών τους \mathbf{G}_k (**Σχ. 1.4.(β)**).



(α).



(β).

Σχήμα 1.4.: Παράδειγμα συναρτήσεων βάσης $\rho_k(r)$ (α), και των αντίστοιχων προβολών τους \mathbf{G}_k (β), για $k = 0, \dots, 10$ και $\sigma = 1$.

Επιστρέφοντας στην μελέτη του αντίστροφου προβλήματος, υποθέτουμε ότι και τα δυο σύνολα είναι καλώς συμπεριφερόμενα, κι ειδικότερα αποτελούν καλές βάσεις, οπότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα ακόλουθα αναπτύγματα [18]:

$$I(r, z) = \sum_{k=0}^{K-1} \mathbf{C}_k f_k(r, z), \quad (1.23)$$

ή ισοδύναμα

$$I(\sqrt{x_i^2 + y^2}, z_j) = \sum_{k=0}^{K-1} \mathbf{C}_k f_k(\sqrt{x_i^2 + y^2}, z_j) \quad (1.24)$$

και

$$\mathbf{P}_{ij} = \sum_{k=0}^{K-1} \mathbf{C}_k \mathbf{G}_{kij} \quad (1.25)$$

Η σχέση (1.23) ή ισοδύναμα η σχέση (1.24) εκφράζει το γεγονός ότι η τρισδιάστατη κατανομή μπορεί να ανακτηθεί ως γραμμικός συνδυασμός των συναρτήσεων βάσης f_k ή ισοδύναμα των $\rho_k(r)$. Επίσης, η σχέση (1.25) εκφράζει το γεγονός ότι η

προβολή της τρισδιάστατης κατανομής μπορεί να ανακτηθεί ως γραμμικός συνδυασμός των προβολών \mathbf{G}_k των συναρτήσεων βάσης $\rho_k(r)$.

Η τελευταία σχέση (1.25) γράφεται με την μορφή πινάκων ως εξής,

$$\mathbf{P} = \mathbf{C}\mathbf{G}$$

(1.26)

όπου, $\mathbf{C} = (\mathbf{C}_0, \dots, \mathbf{C}_{k-1})$ είναι ο πίνακας των συντελεστών αναπτύγματος που καλούμαστε να υπολογίσουμε και $\mathbf{G} = (\mathbf{G}_0, \dots, \mathbf{G}_{k-1})$ είναι ο πίνακας που περιέχει ως στοιχεία τις προβολές των συναρτήσεων βάσης κι ονομάζεται *πίνακας μετασχηματισμού βάσης (basis transformation matrix)*. Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι γενικά, ο συνολικός αριθμός k των συναρτήσεων βάσης ενδέχεται να είναι μικρότερος ή μεγαλύτερος από τον συνολικό αριθμό, $N_x \times N_z$, των εικονοστοιχείων (*pixels*) της υπό μελέτης εικόνας. Σε τέτοιου είδους περιπτώσεις, ο αντίστροφος πίνακας \mathbf{G}^{-1} δεν υπάρχει. Τότε, μία λύση του αντίστοιχου προβλήματος ελαχίστων-τετραγώνων μπορεί να ληφθεί μέσω της κανονικοποίησης Tikhonov [19]:

$$\mathbf{C} = \mathbf{P}\mathbf{G}^T (\mathbf{G}\mathbf{G}^T + q^2\mathbf{I})^{-1}, \quad q > 0$$

(1.27)

όπου \mathbf{I} είναι ο μοναδιαίος πίνακας και q^2 είναι μία παράμετρος κανονικοποίησης. Η διαδικασία της κανονικοποίησης χρησιμοποιείται με σκοπό την βελτίωση του *δείκτη κατάστασης (condition number)* [21-23] του πίνακα $\mathbf{G}\mathbf{G}^T$ που εκφράζεται από την ακόλουθη σχέση,

$$\text{Cond}(\mathbf{G}\mathbf{G}^T) = \|\mathbf{G}\mathbf{G}^T\|_2 \cdot \|(\mathbf{G}\mathbf{G}^T)^{-1}\|_2 = \frac{\sigma_{\max}(\mathbf{G}\mathbf{G}^T)}{\sigma_{\min}(\mathbf{G}\mathbf{G}^T)} \geq 1$$

(1.28)

Για τον υπολογισμό του *δείκτη κατάστασης (condition number)* του πίνακα $\mathbf{G}\mathbf{G}^T$ χρησιμοποιούμε την συνήθη Ευκλείδεια νόρμα (σχ. 1.26), και τότε ο *δείκτης κατάστασης* του πίνακα $\mathbf{G}\mathbf{G}^T$ ισούται ισοδύναμα, με το λόγο της μέγιστης (

$\sigma_{\max}(\mathbf{G}\mathbf{G}^T)$) προς την ελάχιστη ($\sigma_{\min}(\mathbf{G}\mathbf{G}^T)$) μη κανονική, ιδιάζουσα τιμή (*singular value*) [24-26] του πίνακα $\mathbf{G}\mathbf{G}^T$.

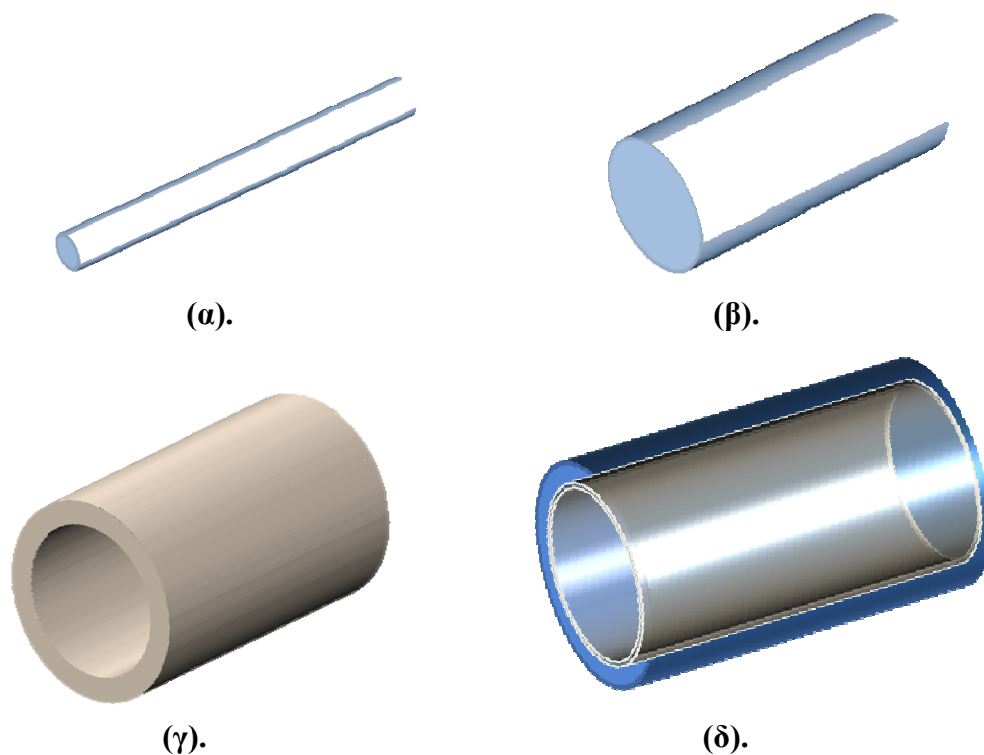
Γενικά, η κανονικοποίηση Tikhonov είναι μία διαδικασία ελαχίστων-τετραγώνων που χρησιμοποιείται με σκοπό την διασφάλιση της ευστάθειας σε ένα κακώς-τεθειμένο πρόβλημα, όπως λόγου χάρη αυτό που μελετούμε, δίδοντας τελικά ακριβείς προσεγγιστικές λύσεις [19]. Από την άλλη, η παράμετρος κανονικοποίησης q^2 είναι μία θετική κι ελεύθερη παράμετρος που υπεισέρχεται στην τελική λύση του προβλήματος (1.27), ενώ η φυσική σημασία της έγκειται στο γεγονός ότι η τιμή που θα διαμορφώσει θα καθορίσει το ποσοστό καταστολής του θορύβου στην ανακτηθείσα προβολή της τρισδιάστατης κατανομής [20]. Μία εκτίμηση για τον υπολογισμό του εύρους της παραμέτρου κανονικοποίησης q^2 παρουσιάζεται αναλυτικά στο *Παράρτημα*.

Ο δείκτης κατάστασης (*condition number*) είναι ένας δείκτης της ευστάθειας ή της ευαισθησίας του πίνακα ή του συστήματος που αυτός ο πίνακας αντιπροσωπεύει [21-23], όπως στην προκειμένη περίπτωση ο πίνακας \mathbf{G} του συστήματος (1.26). Έτσι λοιπόν, πίνακες που έχουν δείκτη κατάστασης πλησίον ή μεγαλύτερο της μονάδας καλούνται καλής κατάστασης (*well-conditioned*) πίνακες, ενώ πίνακες με δείκτη κατάστασης πολύ μεγαλύτερο της μονάδας, της τάξης περίπου του 10^5 , καλούνται κακής κατάστασης (*ill-conditioned*) και θα πρέπει να αποφεύγονται, μια και οδηγούν σε μη επιτρεπτές λύσεις [21-23].

Τέλος, στο *Παράρτημα*, περιγράφουμε το παραπάνω αντίστροφο πρόβλημα στην ειδική περίπτωση που έχουμε να αντιμετωπίσουμε αυστηρώς κυλινδρικά αντικείμενα, οπότε δίνουμε μία διαφορετική προσέγγιση στην διατύπωση των παραπάνω σχέσεων ((1.20) – (1.27)), καθώς επίσης και μία συγκεκριμένη εφαρμογή για την καλύτερη κατανόηση της μεθόδου *BASEX*. Γι' αυτό κρίνεται σκόπιμο να ανατρέξει κανείς στην ανάγνωση και μελέτη του *Παραρτήματος* πριν το πέρασμα στα επόμενα κεφάλαια της παρούσας διατριβής.

1.6. Αντικείμενα μελέτης κι εφαρμογής της μεθόδου *BASEX*

Η μέθοδος *BASEX*, όπως προείπαμε, είναι μία μέθοδος υπολογισμού του αντίστροφου μετασχηματισμού Abel, η οποία συμβάλλει στην αναδημιουργία τρισδιάστατων εικόνων κυλινδρικής συμμετρίας από τις δισδιάστατες προβολές τους. Στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε με την μελέτη ανάκτησης, μέσω της εφαρμογής της μεθόδου *BASEX*, τρισδιάστατων αντικειμένων κυλινδρικής συμμετρίας, όπως για παράδειγμα αυτών που απεικονίζονται στο επόμενο σχήμα (**Σχήμα 1.5.**). Τέτοιου είδους αντικείμενα μπορούν να κατασκευαστούν μέσω των συναρτήσεων βάσης της σχέσης (1.19) (Βλ. *Παράρτημα*).



Σχήμα 1.5.: Παραδείγματα αντικειμένων μελέτης κι εφαρμογής της μεθόδου *BASEX*: **(α)**. Τρισδιάστατο συμπαγές κυλινδρικό αντικείμενο, **(β)**. πιο φαρδύς συμπαγής κύλινδρος **(γ, δ)**. διαφανή σωληνοειδή μέσα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

**Εφαρμογή
της μεθόδου BASEX
σε προσομοιωμένα δεδομένα
με θόρυβο**

2.1. Εισαγωγή

Η εφαρμογή κι ο έλεγχος της μεθόδου *BASEX* σε μία σειρά διαφορετικών προσομοιωμένων δεδομένων με θόρυβο, αποτελούν τα κύρια αντικείμενα μελέτης αυτού του κεφαλαίου. Έχουν προηγηθεί (βλ. *Παράρτημα*) δύο χαρακτηριστικά παραδείγματα εφαρμογής της μεθόδου σε προσομοιωμένα δεδομένα απουσία θορύβου, τα οποία κατέδειξαν την άριστη ποιότητα ανασύνθεσης που προσφέρει η μέθοδος αυτή.

Πιο συγκεκριμένα, κατασκευάζουμε αρχικά διάφορα κυλινδρικά αντικείμενα μέσω του συνόλου των συναρτήσεων βάσης $\rho_k(r)$ της σχέσης (1.19) (βλ. *Κεφ. 1*) δίδοντάς τους διαφορετικά κάθε φορά σχήματα. Κατόπιν, στις προβολές των συνθετικών αντικειμένων, τις οποίες λαμβάνουμε χρησιμοποιώντας ευθύ μετασχηματισμό Abel, προσθέτουμε τυχαίο θόρυβο. Εκτελούμε στη συνέχεια, την μέθοδο *BASEX* για κάθε εφαρμογή ξεχωριστά, λαμβάνοντας την ανασύνθεση τόσο των προβολών όσο και των αντικειμένων αντίστοιχα, ενώ παράλληλα ελέγχουμε την αποτελεσματικότητα της μεθόδου σε ότι αφορά την ποιότητα ανασύνθεσης καθώς και την αντοχή της στα διάφορα τυχαία επίπεδα θορύβου.

Σε κάθε εφαρμογή που παραθέτουμε παρακάτω, χρησιμοποιούμε δύο σύνολα βάσης συναρτήσεων που εξαρτώνται από την μετρούμενη προβολή διαστάσεων 51x201: **(i)**. $K_x = 101$, $\sigma = 1$, $q^2 = 15$ και **(ii)**. $K_x = 52$, $\sigma = 2$, $q^2 = 28$. Τέλος, όλες οι εφαρμογές που ακολουθούν καθώς κι η επεξεργασία των αποτελεσμάτων έχουν πραγματοποιηθεί σε κατάλληλο υπολογιστικό περιβάλλον (*MATLAB*).

2.2. Α' Μέρος Εφαρμογών

1^η Εφαρμογή

(i). Κατασκευάζουμε ένα αρχικό κυλινδρικό αντικείμενο μέσω του συνόλου των συναρτήσεων βάσης $\rho_k(r)$ όπου $k = 0, \dots, 100$ και $\sigma = 1$ (βλ. **Σχ. Π.2.**, *Παράρτημα*) και του δίδουμε κατάλληλο σχήμα πολλαπλασιάζοντάς το με τον συνημιτονοειδή όρο

$\cos\left(\frac{2\pi k}{51}\right)^2$ (**Εικ. 2.1.(α)**, *1^η σειρά ,αριστερό γράφημα*). Στην προβολή του

αντικειμένου (**Εικ. 2.1.(α)**, 1^η σειρά ,δεξί γράφημα) προσθέτουμε τυχαίο θόρυβο της τάξης του 7 % περίπου. Το εύρος διακύμανσης των τιμών για την παράμετρο κανονικοποίησης q^2 εκτιμάται από την σχέση $15 \leq q^2 \leq 47$, με βέλτιστη τιμή $q^2 = 15$ που ισοδυναμεί στην μικρότερη δυνατή παρεμβολή της παραμέτρου στο ίχνος του πίνακα \mathbf{GG}^T . Να σημειωθεί ότι θα επιλέγεται πάντα ως βέλτιστη τιμή της παραμέτρου, η μικρότερη τιμή του εκτιμώμενου εύρους της, μια και αυτή ισοδυναμεί στην μικρότερη δυνατή παρεμβολή στο ίχνος του πίνακα \mathbf{GG}^T , ενώ παράλληλα πετυχαίνεται η πιο βέλτιστη ανασύνθεση τόσο του αρχικού αντικειμένου όσο και της προβολής του. Ένας πίνακας που συνοψίζει την συγκεκριμένη εφαρμογή είναι ο ακόλουθος:

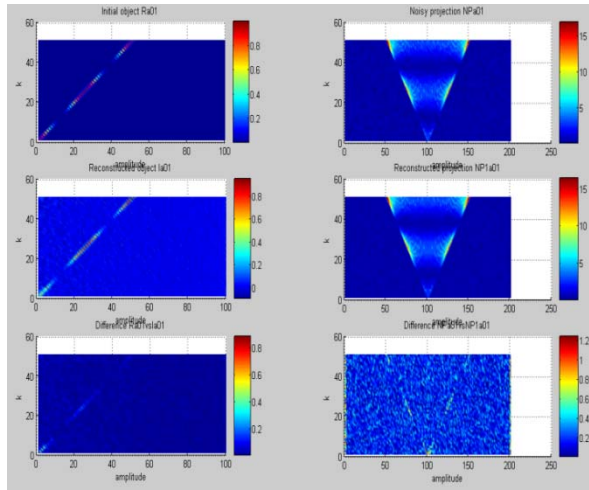
Αρχικό προσομοιωμένο αντικείμενο	$*\cos\left(\frac{2\pi k}{51}\right)^2$
Προστιθέμενος θόρυβος (επί της προβολής)	7 %
Εκτιμώμενο εύρος	$15 \leq q^2 \leq 47$
Βέλτιστη τιμή	$q^2 = 15$
Παρεμβολή της q^2	0.7 %

Πίνακας 2.1.: 1^η εφαρμογή (i).

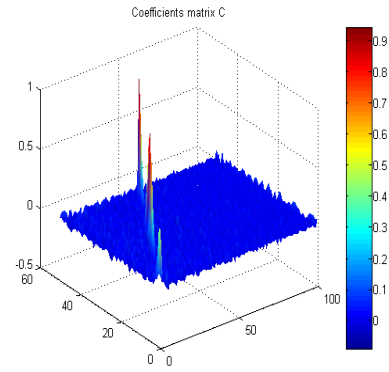
Η επί της εκατό παρεμβολή της παραμέτρου q^2 στο ίχνος του πίνακα υπολογίζεται μέσω του τύπου:

$$\text{Ποσοστό Παρεμβολής} = \frac{|\text{trace}(\mathbf{GG}^T) - \text{trace}(\mathbf{GG}^T + q^2\mathbf{I})|}{\text{trace}(\mathbf{GG}^T)} \cdot 100$$

Τα αποτελέσματα της μεθόδου *BASEX* για την συγκεκριμένη εφαρμογή απεικονίζονται στην παρακάτω εικόνα (**Εικόνα 2.1.**).



(α).



(β).

Εικόνα 2.1.: (α). Αρχικό συνθετικό αντικείμενο ($1^{\text{η}}$ σειρά, αριστερό γράφημα) και η θορυβώδης προβολή του ($1^{\text{η}}$ σειρά, δεξί γράφημα). Η ανασύνθεση του αρχικού αντικειμένου ($2^{\text{η}}$ σειρά, αριστερό γράφημα) και της προβολής του αντίστοιχα ($2^{\text{η}}$ σειρά, δεξί γράφημα) μέσω της χρήσης της μεθόδου *BASEX* ($\sigma = 1$). Στην $3^{\text{η}}$ σειρά της εικόνας, παρατίθενται οι, κατά απόλυτη τιμή, διαφορές του συνθετικού από το ανακατασκευασμένο αντικείμενο (αριστερά) καθώς και των προβολών του αντίστοιχα (δεξιά). (β). Το γράφημα των συντελεστών αναπτύγματος.

Σύμφωνα με την παραπάνω Εικόνα **2.1(α)**., παρατηρούμε ότι σε ό,τι αφορά την προβολή λαμβάνουμε μία αρκετά ικανοποιητική ανασύνθεση, αλλά σε ό,τι αφορά την ανασύνθεση του αντικειμένου εμφανίζει μία απώλεια πληροφορίας περίπου της τάξης του 20 % εξαιτίας του θορύβου. Ωστόσο όμως, η ανασύνθεση του αντικειμένου είναι ιδιαίτερα καλή. Το γεγονός αυτό παρατηρείται και στις παρακάτω εφαρμογές, όπου η συνθετική θορυβώδης προβολή του αντικειμένου προσεγγίζεται από στενή βάση συναρτήσεων ($\sigma = 1$).

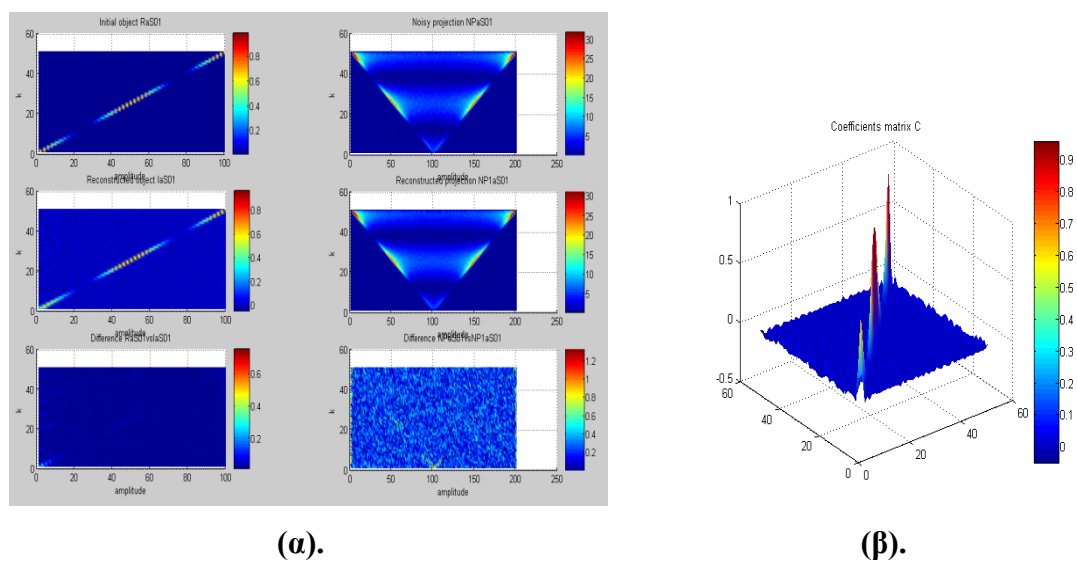
(ii). Τώρα, προσεγγίζουμε την μετρούμενη προβολή μέσω μιας πλατιάς βάσης συναρτήσεων, όπου $K_x = 52$ και $\sigma = 2$ (βλ. **Σχ. Π.3.**, *Παράρτημα*). Το συνθετικό κυλινδρικό αντικείμενο που κατασκευάζεται μέσω αυτής της βάσης απεικονίζεται παρακάτω (**Εικ. 2.2.(α)**, $1^{\text{η}}$ σειρά, αριστερό γράφημα). Στην προβολή του αντικειμένου (**Εικ. 2.2.(α)**, $1^{\text{η}}$ σειρά, δεξί γράφημα) προσθέτουμε τυχαίο θόρυβο της τάξης περίπου του 3.3 %. Το εύρος διακύμανσης των τιμών για την παράμετρο κανονικοποίησης q^2 εκτιμάται από την σχέση $28 \leq q^2 \leq 87$, με βέλτιστη τιμή $q^2 = 28$ που ισοδυναμεί στην μικρότερη δυνατή παρεμβολή της παραμέτρου στο ίχνος του

πίνακα \mathbf{GG}^T . Ένας συνοπτικός πίνακας δεδομένων για αυτήν την περίπτωση είναι ο επόμενος:

Αρχικό προσομοιωμένο αντικείμενο	$* \cos\left(\frac{2\pi k}{51}\right)^2$
Προστιθέμενος θόρυβος (επί της προβολής)	3.3 %
Εκτιμώμενο εύρος	$28 \leq q^2 \leq 87$
Βέλτιστη τιμή	$q^2 = 28$
Παρεμβολή της q^2	0.4 %

Πίνακας 2.2.: 1^η εφαρμογή (ii).

Τα αποτελέσματα της μεθόδου *BASEX* για την δεύτερη αυτή περίπτωση απεικονίζονται στην παρακάτω εικόνα (**Εικόνα 2.2.**).



Εικόνα 2.2.: (α). Αρχικό προσομοιωμένο αντικείμενο (1^η σειρά, αριστερό γράφημα) και η θορυβώδης προβολή του (1^η σειρά, δεξί γράφημα). Η ανασύνθεση του αρχικού αντικειμένου (2^η σειρά, αριστερό γράφημα) και της προβολής του αντίστοιχα (2^η σειρά, δεξί γράφημα) μέσω της χρήσης της μεθόδου *BASEX* ($\sigma = 2$). Στην 3^η σειρά της εικόνας, παρατίθενται οι, κατά απόλυτη τιμή, διαφορές του προσομοιωμένου από το ανακατασκευασμένο αντικείμενο (αριστερά) καθώς και των προβολών του αντίστοιχα (δεξιά). (β). Το γράφημα των συντελεστών αναπτύγματος.

Παρατηρώντας τις Εικόνες **2.1.** και **2.2.**, συμπεραίνουμε ότι η προσέγγιση της μετρούμενης προβολής, τόσο με την στενή ($\sigma = 1$) όσο βέβαια και με την πλατιά βάση συναρτήσεων ($\sigma = 2$), δίδει ιδιαίτερος ικανοποιητικά αποτελέσματα ανασύνθεσης, τόσο του αρχικού προσομοιωμένου αντικειμένου όσο και της προβολής του αντίστοιχα. Το εύρημα αυτό παρατηρείται και στις επόμενες εφαρμογές που θα παρατεθούν και οδηγεί στον ισχυρισμό ότι η μέθοδος *BASEX* δεν είναι τόσο ευαίσθητη στην αλλαγή επιλογής βάσης.

Μετά την αναλυτική περιγραφή της πρώτης εφαρμογής, οι επόμενες εφαρμογές της μεθόδου *BASEX* σε θορυβώδη συνθετικά δεδομένα που θα ακολουθήσουν, θα περιγράφονται παραθέτοντας κάθε φορά έναν συνοπτικό πίνακα δεδομένων κι αποτελεσμάτων, δεικνύοντας με αυτόν τον τρόπο το προφίλ της κάθε εφαρμογής.

2^η Εφαρμογή

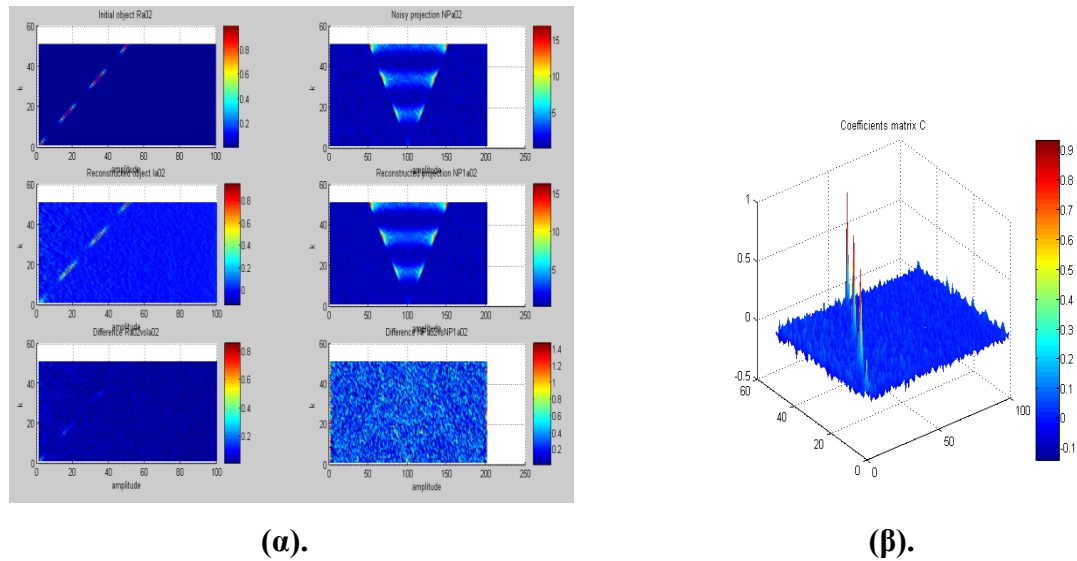
Η ουσιαστική διαφορά αυτής της εφαρμογής έναντι της προηγούμενης έγκειται στο ότι το αρχικό κυλινδρικό αντικείμενο που κατασκευάζουμε κάθε φορά μέσω του συνόλου των συναρτήσεων βάσης $\rho_k(r)$ όπου $k = 0, \dots, 100$ και $\sigma = 1$ (βλ. **Σχ. Π.2.**, *Παράρτημα*) λαμβάνει τώρα διαφορετικό σχήμα μια και πολλαπλασιάζεται τώρα με τον συνημιτονοειδή όρο $\cos\left(\frac{3\pi k}{51}\right)^4$, ενώ αυξάνεται ο τυχαίος προστιθέμενος θόρυβος επί της προβολής σε σχέση με πριν.

(i).

Αρχικό προσομοιωμένο αντικείμενο	$* \cos\left(\frac{3\pi k}{51}\right)^4$
Προστιθέμενος θόρυβος (επί της προβολής)	10 %
Εκτιμώμενο εύρος	$15 \leq q^2 \leq 47$
Βέλτιστη τιμή	$q^2 = 15$
Παρεμβολή της q^2	0.7 %

Πίνακας 2.3.: 2^η εφαρμογή (i).

Τα αποτελέσματα της μεθόδου *BASEX* της συγκεκριμένης εφαρμογής απεικονίζονται στην παρακάτω εικόνα (Εικόνα 2.3.).



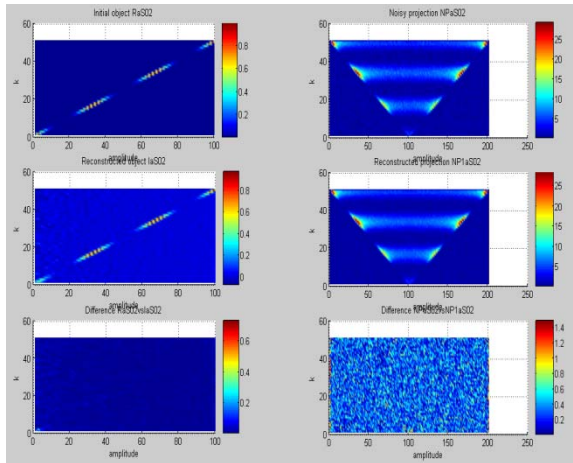
Εικόνα 2.3.: (α). Αρχικό συνθετικό αντικείμενο ($1^{\text{η}}$ σειρά, αριστερό γράφημα) και η θορυβώδης προβολή του ($1^{\text{η}}$ σειρά, δεξί γράφημα). Η ανασύνθεση του αρχικού αντικειμένου ($2^{\text{η}}$ σειρά, αριστερό γράφημα) και της προβολής του αντίστοιχα ($2^{\text{η}}$ σειρά, δεξί γράφημα) μέσω της χρήσης της μεθόδου *BASEX* ($\sigma = 1$). Στην $3^{\text{η}}$ σειρά της εικόνας, παρατίθενται οι, κατά απόλυτη τιμή, διαφορές του συνθετικού από το ανακατασκευασμένο αντικείμενο (αριστερά) καθώς και των προβολών του αντίστοιχα (δεξιά). (β). Το γράφημα των συντελεστών αναπτύγματος.

(ii).

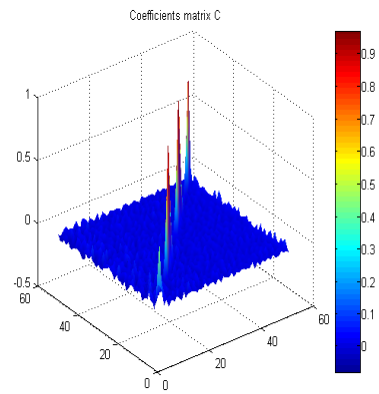
Αρχικό προσομοιωμένο αντικείμενο	$* \cos\left(\frac{3\pi k}{51}\right)^4$
Προστιθέμενος θόρυβος (επί της προβολής)	6 %
Εκτιμώμενο εύρος	$28 \leq q^2 \leq 87$
Βέλτιστη τιμή	$q^2 = 28$
Παρεμβολή της q^2	0.4 %

Πίνακας 2.4.: $2^{\text{η}}$ εφαρμογή (ii).

Τα αποτελέσματα της μεθόδου *BASEX* για την δεύτερη αυτή περίπτωση απεικονίζονται στην παρακάτω εικόνα (Εικόνα 2.4.).



(α).



(β).

Εικόνα 2.4.: (α). Αρχικό προσομοιωμένο αντικείμενο ($1^{\text{η}}$ σειρά, αριστερό γράφημα) και η θορυβώδης προβολή του ($1^{\text{η}}$ σειρά, δεξί γράφημα). Η ανασύνθεση του αρχικού αντικειμένου ($2^{\text{η}}$ σειρά, αριστερό γράφημα) και της προβολής του αντίστοιχα ($2^{\text{η}}$ σειρά, δεξί γράφημα) μέσω της χρήσης της μεθόδου *BASEX* ($\sigma = 2$). Στην $3^{\text{η}}$ σειρά της εικόνας, παρατίθενται οι, κατά απόλυτη τιμή, διαφορές του προσομοιωμένου από το ανακατασκευασμένο αντικείμενο (αριστερά) καθώς και των προβολών του αντίστοιχα (δεξιά). (β). Το γράφημα των συντελεστών αναπτύγματος.

3^η Εφαρμογή

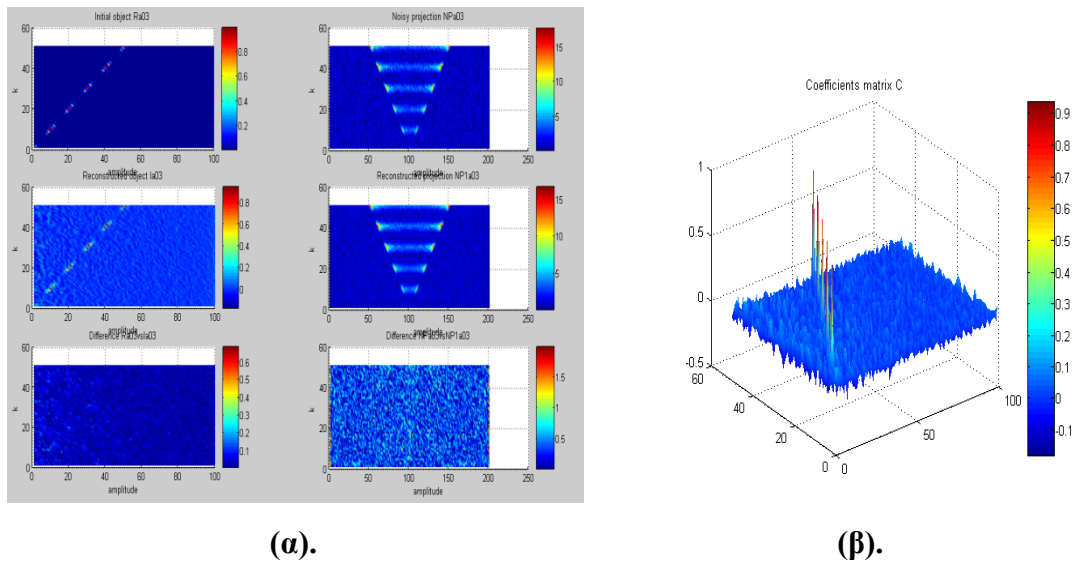
Σε αυτήν την τελευταία εφαρμογή του πρώτου μέρους, στο αρχικό κυλινδρικό αντικείμενο που κατασκευάζουμε του δίδουμε ένα διαφορετικό σχήμα πολλαπλασιάζοντάς το με έναν διαφορετικό συνημιτονοειδή όρο $\cos\left(\frac{5\pi k}{51}\right)^6$, ενώ ο τυχαίος θόρυβος που προσθέτουμε στην προβολή του αντικειμένου είναι ο υψηλότερος σε σχέση με τις δύο προηγούμενες εφαρμογές.

(i).

Αρχικό προσομοιωμένο αντικείμενο	$*\cos\left(\frac{5\pi k}{51}\right)^6$
Προστιθέμενος θόρυβος (επί της προβολής)	13.3 %
Εκτιμώμενο εύρος	$15 \leq q^2 \leq 47$
Βέλτιστη τιμή	$q^2 = 15$
Παρεμβολή της q^2	0.7 %

Πίνακας 2.5.: 3^η εφαρμογή (i).

Τα αποτελέσματα της μεθόδου *BASEX* της συγκεκριμένης εφαρμογής παρατίθενται στην παρακάτω εικόνα (Εικόνα 2.5.).



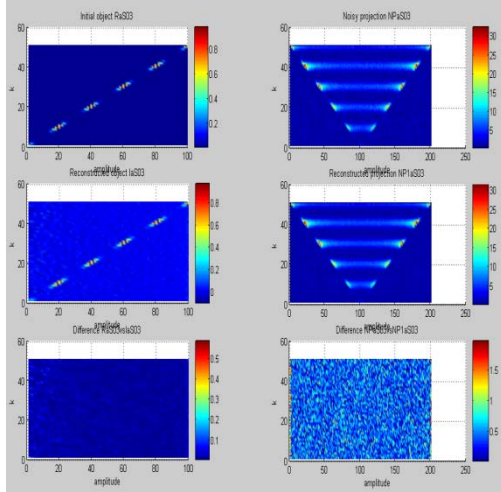
Εικόνα 2.5.: (α). Αρχικό συνθετικό αντικείμενο (1^η σειρά, αριστερό γράφημα) και η θορυβώδης προβολή του (1^η σειρά, δεξί γράφημα). Η ανασύνθεση του αρχικού αντικειμένου (2^η σειρά, αριστερό γράφημα) και της προβολής του αντίστοιχα (2^η σειρά, δεξί γράφημα) μέσω της χρήσης της μεθόδου *BASEX* ($\sigma = 1$). Στην 3^η σειρά της εικόνας, παρατίθενται οι, κατά απόλυτη τιμή, διαφορές του συνθετικού από το ανακατασκευασμένο αντικείμενο (αριστερά) καθώς και των προβολών του αντίστοιχα (δεξιά). (β). Το γράφημα των συντελεστών αναπτύγματος.

(ii).

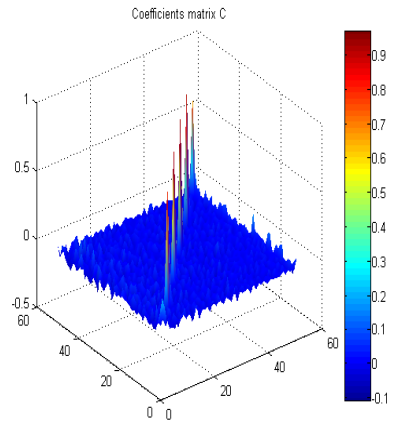
Αρχικό προσομοιωμένο αντικείμενο	$*\cos\left(\frac{5\pi k}{51}\right)^6$
Προστιθέμενος θόρυβος (επί της προβολής)	7 %
Εκτιμώμενο εύρος	$28 \leq q^2 \leq 87$
Βέλτιστη τιμή	$q^2 = 28$
Παρεμβολή της q^2	0.4 %

Πίνακας 2.6.: 3^η εφαρμογή (ii).

Τα αποτελέσματα της μεθόδου *BASEX* για την δεύτερη αυτή περίπτωση παρατίθενται στην παρακάτω εικόνα (Εικόνα 2.6.).



(α).



(β).

Εικόνα 2.6.: (α). Αρχικό προσομοιωμένο αντικείμενο ($1^{\text{η}}$ σειρά, αριστερό γράφημα) και η θορυβώδης προβολή του ($1^{\text{η}}$ σειρά, δεξί γράφημα). Η ανασύνθεση του αρχικού αντικειμένου ($2^{\text{η}}$ σειρά, αριστερό γράφημα) και της προβολής του αντίστοιχα ($2^{\text{η}}$ σειρά, δεξί γράφημα) μέσω της χρήσης της μεθόδου *BASEX* ($\sigma = 2$). Στην $3^{\text{η}}$ σειρά της εικόνας, παρατίθενται οι, κατά απόλυτη τιμή, διαφορές του προσομοιωμένου από το ανακατασκευασμένο αντικείμενο (αριστερά) καθώς και των προβολών του αντίστοιχα (δεξιά). (β). Το γράφημα των συντελεστών αναπτύγματος.

2.3. Β' Μέρος Εφαρμογών

Κατά το δεύτερο μέρος των εφαρμογών, μελετούμε την μέθοδο *BASEX* κατασκευάζοντας τώρα θορυβώδη συνθετικά αντικείμενα διαφορετικού τύπου από αυτά του πρώτου μέρους. Πιο συγκεκριμένα, κατασκευάζουμε κυλινδρικά αντικείμενα τα οποία εκτείνονται παράλληλα προς τον άξονα z (π.χ. Βλ. **Εικ. 2.7.(α)**, $1^{\text{η}}$ σειρά, αριστερό διάγραμμα). Και πάλι, παραθέτουμε σε μορφή πίνακα το προφίλ της κάθε εφαρμογής, όπου περιέχονται δεδομένα κι αποτελέσματα από την εκτέλεση της μεθόδου *BASEX*.

4^η Εφαρμογή

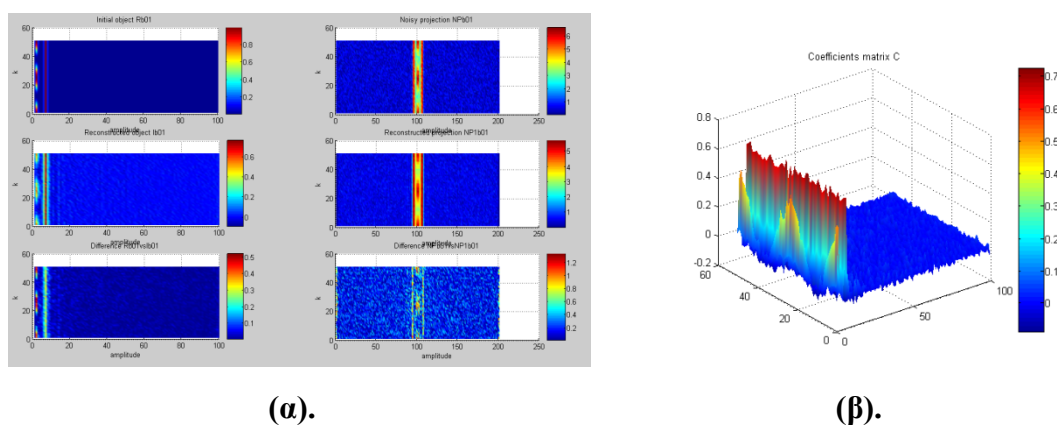
Το πρώτο κυλινδρικό αντικείμενο που εκτείνεται παράλληλα προς τον άξονα z κατασκευάζεται ως εξής: Πολλαπλασιάζουμε την μηδενική συνάρτηση βάσης με έναν συνημιτονοειδή όρο $\cos\left(\frac{2\pi k}{51}\right)^2$ και έπειτα προσθέτουμε την πέμπτη συνάρτηση βάσης (**Εικ. 2.7(α)**, $1^{\text{η}}$ σειρά, αριστερό γράφημα). Στην προκύπτουσα προβολή του αντικειμένου που κατασκευάζουμε προσθέτουμε τυχαίο θόρυβο χαμηλού επιπέδου, όμοιου με αυτού της πρώτης εφαρμογής.

(i_a).

Αρχικό προσομοιωμένο αντικείμενο	$\cos\left(\frac{2\pi k}{51}\right)^2 * \rho_0(r) + \rho_5(r)$
Προστιθέμενος θόρυβος (επί της προβολής)	17 %
Εκτιμώμενο εύρος	$15 \leq q^2 \leq 47$
Βέλτιστη τιμή	$q^2 = 15$
Παρεμβολή της q^2	0.7 %

Πίνακας 2.7.: 4^η εφαρμογή (i_a).

Τα αποτελέσματα της μεθόδου *BASEX* για αυτή την περίπτωση παρατίθενται στην παρακάτω εικόνα (**Εικόνα 2.7.**).



Εικόνα 2.7.: (α). Αρχικό συνθετικό αντικείμενο ($1^{\text{η}}$ σειρά, αριστερό γράφημα) και η θορυβώδης προβολή του ($1^{\text{η}}$ σειρά, δεξί γράφημα). Η ανασύνθεση του αρχικού αντικειμένου ($2^{\text{η}}$ σειρά, αριστερό γράφημα) και της προβολής του αντίστοιχα ($2^{\text{η}}$ σειρά, δεξί γράφημα) μέσω της χρήσης της μεθόδου *BASEX* ($\sigma = 1$). Στην $3^{\text{η}}$ σειρά της εικόνας, παρατίθενται οι, κατά απόλυτη τιμή, διαφορές του συνθετικού από το ανακατασκευασμένο αντικείμενο (αριστερά) καθώς και των προβολών του αντίστοιχα (δεξιά). (β). Το γράφημα των συντελεστών αναπτύγματος.

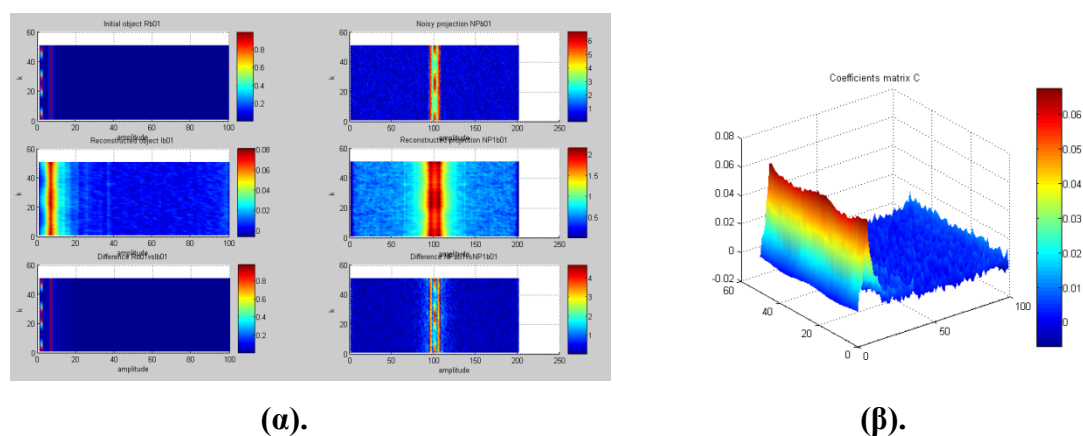
Βάσει της Εικόνας **2.7.(α)**, προκύπτει ότι λαμβάνουμε μία αρκετά ικανοποιητική ανασύνθεση της συνθετικής προβολής, αλλά σε ότι αφορά την ανακατασκευή του αντικειμένου αυτή επισκιάζεται από την παρουσία θορύβου, η οποία οδηγεί σε απώλεια μέρους της πραγματικής πληροφορίας. Παρόλα αυτά, η μέθοδος *BASEX* παρέχει μια αρκετά καλή ανασύνθεση του αρχικού αντικειμένου.

(i_b).

Αρχικό προσομοιωμένο αντικείμενο	$\cos\left(\frac{2\pi k}{51}\right)^2 * \rho_0(r) + \rho_5(r)$
Προστιθέμενος θόρυβος (επί της προβολής)	17 %
Εκτιμώμενο εύρος	$15 \leq q^2 \leq 47$
Βέλτιστη τιμή	$q^2 = 2200$
Παρεμβολή της q^2	98 %

Πίνακας 2.8.: $4^{\text{η}}$ εφαρμογή (i_b).

Τα αποτελέσματα της μεθόδου *BASEX* για την ειδική αυτή περίπτωση απεικονίζονται στην ακόλουθη εικόνα (**Εικόνα 2.8.**).



Εικόνα 2.8.: Παράδειγμα μη επιτρεπτής λύσης: (α). Αρχικό συνθετικό αντικείμενο ($1^{\text{η}}$ σειρά, αριστερό γράφημα) και η θορυβώδης προβολή του ($1^{\text{η}}$ σειρά, δεξί γράφημα). Η ανασύνθεση του αρχικού αντικειμένου ($2^{\text{η}}$ σειρά, αριστερό γράφημα) και της προβολής του αντίστοιχα ($2^{\text{η}}$ σειρά, δεξί γράφημα) μέσω της χρήσης της μεθόδου *BASEX* ($\sigma = 1$). Στην $3^{\text{η}}$ σειρά της εικόνας, παρατίθενται οι, κατά απόλυτη τιμή, διαφορές του συνθετικού από το ανακατασκευασμένο αντικείμενο (αριστερά) καθώς και των προβολών του αντίστοιχα (δεξιά). **(β).** Το γράφημα των συντελεστών αναπτύγματος.

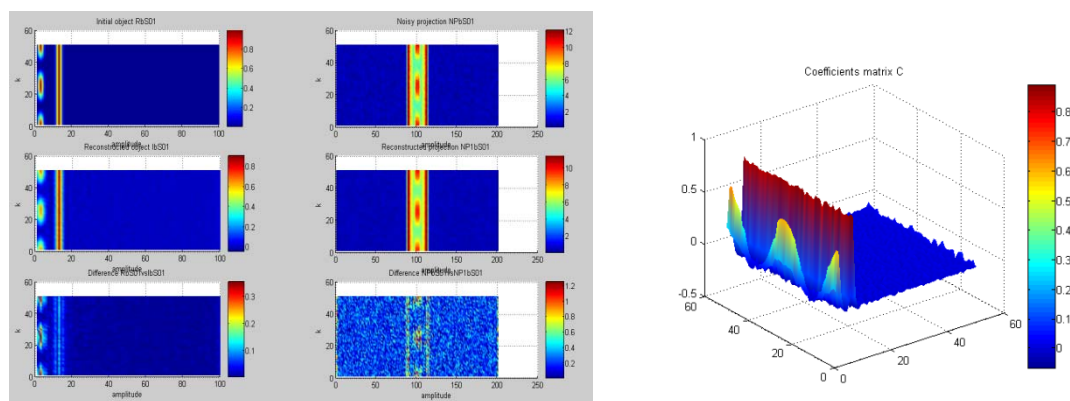
Η μελέτη και παρουσίαση της ειδικής αυτής περίπτωσης εφαρμογής της μεθόδου *BASEX*, αποτελεί ενδεικτικό παράδειγμα αποφυγής τιμών που δεν περιέχονται στο εκτιμώμενο διάστημα της παραμέτρου κανονικοποίησης q^2 , πολλών δε μάλλον, αποφυγής πολύ μεγάλων τιμών. Σε αντίθετη περίπτωση, η επιλογή τέτοιων ακραίων τιμών για το q^2 οδηγεί σε σημαντική απώλεια πραγματικής πληροφορίας και κατ' επέκταση σε πολύ κακή ανασύνθεση τόσο του αντικειμένου όσο και της προβολής του (Βλ. **Εικ. 2.8.**), γεγονός που οφείλεται στην υψηλή παρεμβολή της παραμέτρου q^2 στο ίχνος του πίνακα \mathbf{GG}^T που στο εν λόγω παράδειγμα είναι περίπου της τάξης του **98 %**. Όλα τα παραπάνω, επιβεβαιώνουν τα όσα έχουν ήδη αναφερθεί στο *Παράρτημα*.

(ii).

Αρχικό προσομοιωμένο αντικείμενο	$\cos\left(\frac{2\pi k}{51}\right)^2 * \rho_0(r) + \rho_5(r)$
Προστιθέμενος θόρυβος (επί της προβολής)	8.3 %
Εκτιμώμενο εύρος	$28 \leq q^2 \leq 87$
Βέλτιστη τιμή	$q^2 = 28$
Παρεμβολή της q^2	0.4 %

Πίνακας 2.9.: 4^η εφαρμογή (ii).

Τα αποτελέσματα της μεθόδου *BASEX* για την περίπτωση φαρδιάς βάσης απεικονίζονται στην παρακάτω εικόνα (Εικόνα 2.9.).



(α).

(β).

Εικόνα 2.9.: (α). Αρχικό προσομοιωμένο αντικείμενο (1^{η} σειρά, αριστερό γράφημα) και η θορυβώδης προβολή του (1^{η} σειρά, δεξί γράφημα). Η ανασύνθεση του αρχικού αντικειμένου (2^{η} σειρά, αριστερό γράφημα) και της προβολής του αντίστοιχα (2^{η} σειρά, δεξί γράφημα) μέσω της χρήσης της μεθόδου *BASEX* ($\sigma = 2$). Στην 3^{η} σειρά της εικόνας, παρατίθενται οι, κατά απόλυτη τιμή, διαφορές του προσομοιωμένου από το ανακατασκευασμένο αντικείμενο (αριστερά) καθώς και των προβολών του αντίστοιχα (δεξιά). (β). Το γράφημα των συντελεστών αναπτύγματος.

Συγκρίνοντας την Εικόνα 2.9. με την 2.7., παρατηρούμε μία βελτίωση στα αποτελέσματα ανασύνθεσης που λαμβάνουμε με την πλατιά βάση συναρτήσεων ($\sigma = 2$), ωστόσο, όμως και οι δύο βάσεις εξίσου οδηγούν σε αρκετά ικανοποιητικά αποτελέσματα ανασύνθεσης. Παραπλήσια αποτελέσματα ανασύνθεσης σημειώνονται και στις δύο τελευταίες εφαρμογές που ακολουθούν.

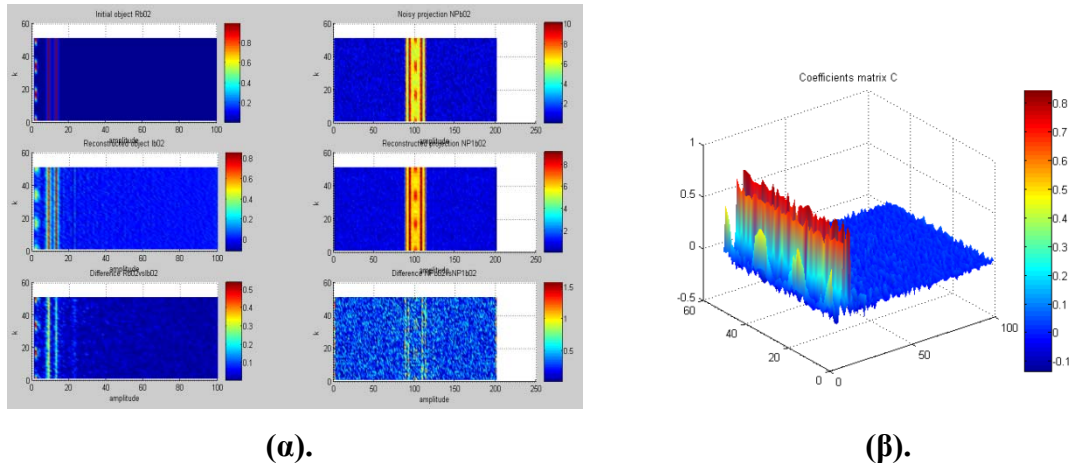
5^η Εφαρμογή

Σε αυτήν την εφαρμογή κατασκευάζεται ένα διαφορετικό αντικείμενο σε σχέση με αυτό της προηγούμενης εφαρμογής, το οποίο συνθέεται βάση της σχέσης που σημειώνεται στην πρώτη σειρά του παρακάτω πίνακα κι εκτείνεται παράλληλα προς τον άξονα z (Εικ. 2.10(α), 1^η σειρά, αριστερό γράφημα). Στην προβολή του προστίθεται τυχαίος θόρυβος ίδιου επιπέδου με εκείνο που προστέθηκε στην προβολή της δεύτερης εφαρμογής.

(i).

Αρχικό προσομοιωμένο αντικείμενο	$\cos\left(\frac{3\pi k}{51}\right)^4 * \rho_0(r) + \rho_7(r) + \rho_{11}(r)$
Προστιθέμενος θόρυβος (επί της προβολής)	15 %
Εκτιμώμενο εύρος	$15 \leq q^2 \leq 47$
Βέλτιστη τιμή	$q^2 = 15$
Παρεμβολή της q^2	0.7 %

Πίνακας 2.10.: 5^η εφαρμογή (i).

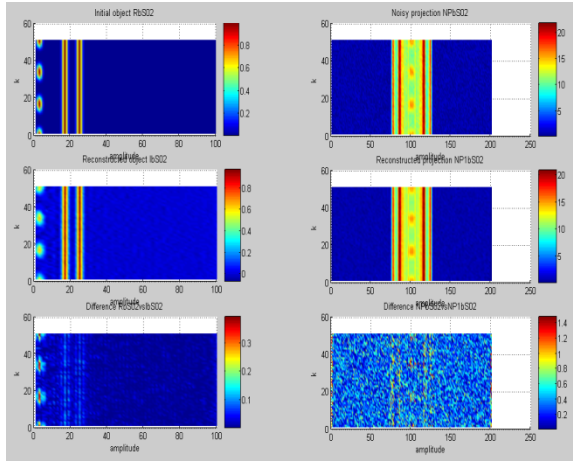


Εικόνα 2.10.: (α). Αρχικό συνθετικό αντικείμενο (1^{η} σειρά, αριστερό γράφημα) και η θορυβώδης προβολή του (1^{η} σειρά, δεξί γράφημα). Η ανασύνθεση του αρχικού αντικειμένου (2^{η} σειρά, αριστερό γράφημα) και της προβολής του αντίστοιχα (2^{η} σειρά, δεξί γράφημα) μέσω της χρήσης της μεθόδου *BASEX* ($\sigma = 1$). Στην 3^{η} σειρά της εικόνας, παρατίθενται οι, κατά απόλυτη τιμή, διαφορές του συνθετικού από το ανακατασκευασμένο αντικείμενο (αριστερά) καθώς και των προβολών του αντίστοιχα (δεξιά). (β). Το γράφημα των συντελεστών αναπτύγματος.

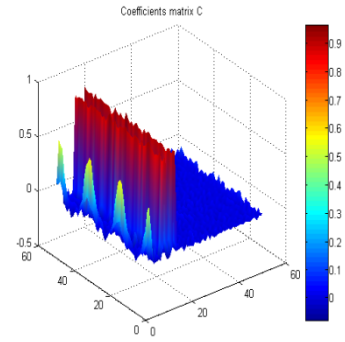
(ii).

Αρχικό προσομοιωμένο αντικείμενο	$\cos\left(\frac{3\pi k}{51}\right)^4 * \rho_0(r) + \rho_7(r) + \rho_{11}(r)$
Προστιθέμενος θόρυβος (επί της προβολής)	7.5 %
Εκτιμώμενο εύρος	$28 \leq q^2 \leq 87$
Βέλτιστη τιμή	$q^2 = 28$
Παρεμβολή της q^2	0.4 %

Πίνακας 2.11.: 5^{η} εφαρμογή (ii).



(α).



(β).

Εικόνα 2.11.: (α). Αρχικό προσομοιωμένο αντικείμενο ($1^{\text{η}}$ σειρά, αριστερό γράφημα) και η θορυβώδης προβολή του ($1^{\text{η}}$ σειρά, δεξί γράφημα). Η ανασύνθεση του αρχικού αντικειμένου ($2^{\text{η}}$ σειρά, αριστερό γράφημα) και της προβολής του αντίστοιχα ($2^{\text{η}}$ σειρά, δεξί γράφημα) μέσω της χρήσης της μεθόδου *BASEX* ($\sigma = 2$). Στην $3^{\text{η}}$ σειρά της εικόνας, παρατίθενται οι, κατά απόλυτη τιμή, διαφορές του προσομοιωμένου από το ανακατασκευασμένο αντικείμενο (αριστερά) καθώς και των προβολών του αντίστοιχα (δεξιά). (β). Το γράφημα των συντελεστών αναπτύγματος.

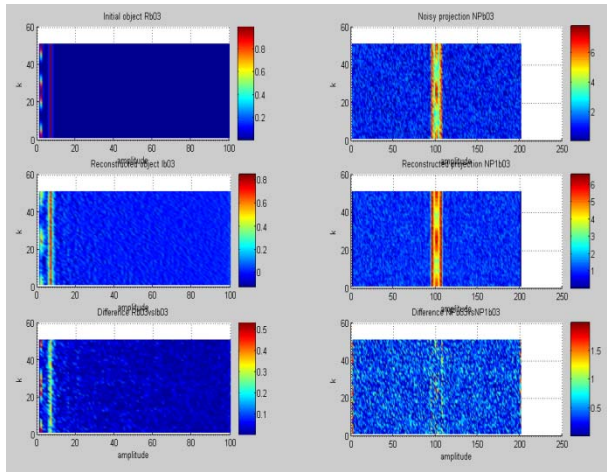
6^η Εφαρμογή

Στην τελευταία αυτή εφαρμογή του δευτέρου μέρους, στην προβολή του στην προβολή του αντικειμένου που κατασκευάσαμε στην τέταρτη εφαρμογή προσθέτουμε υψηλού επιπέδου θόρυβο ίδιου επιπέδου με εκείνου που χρησιμοποιήθηκε για την εκτέλεση της τρίτης κατά σειράν εφαρμογής.

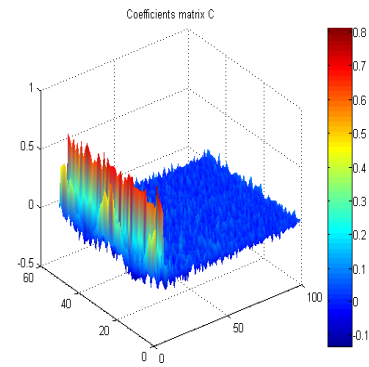
(i).

Αρχικό προσομοιωμένο αντικείμενο	$\cos\left(\frac{2\pi k}{51}\right)^2 * \rho_0(r) + \rho_5(r)$
Προστιθέμενος θόρυβος (επί της προβολής)	25 %
Εκτιμώμενο εύρος	$15 \leq q^2 \leq 47$
Βέλτιστη τιμή	$q^2 = 15$
Παραμβολή της q^2	0.7 %

Πίνακας 2.12.: 6^η εφαρμογή (i).



(α).



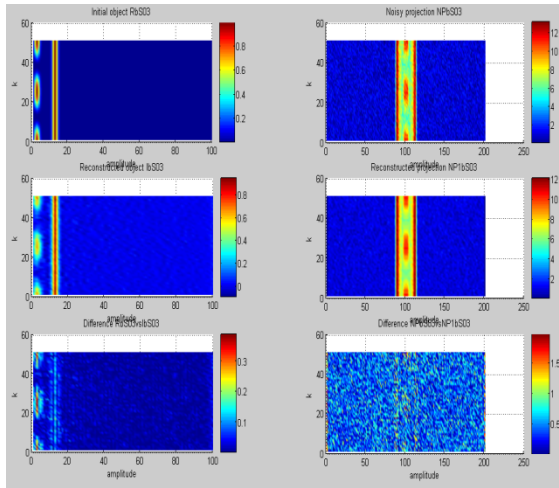
(β).

Εικόνα 2.12.: (α). Αρχικό συνθετικό αντικείμενο (1^{η} σειρά, αριστερό γράφημα) και η θορυβώδης προβολή του (1^{η} σειρά, δεξί γράφημα). Η ανασύνθεση του αρχικού αντικειμένου (2^{η} σειρά, αριστερό γράφημα) και της προβολής του αντίστοιχα (2^{η} σειρά, δεξί γράφημα) μέσω της χρήσης της μεθόδου *BASEX* ($\sigma = 1$). Στην 3^{η} σειρά της εικόνας, παρατίθενται οι, κατά απόλυτη τιμή, διαφορές του συνθετικού από το ανακατασκευασμένο αντικείμενο (αριστερά) καθώς και των προβολών του αντίστοιχα (δεξιά). (β). Το γράφημα των συντελεστών αναπτύγματος.

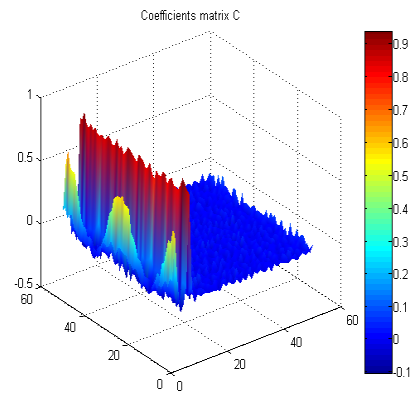
(ii).

Αρχικό προσομοιωμένο αντικείμενο	$\cos\left(\frac{2\pi k}{51}\right)^2 * \rho_0(r) + \rho_5(r)$
Προστιθέμενος θόρυβος (επί της προβολής)	17 %
Εκτιμώμενο εύρος	$28 \leq q^2 \leq 87$
Βέλτιστη τιμή	$q^2 = 28$
Παραμβολή της q^2	0.4 %

Πίνακας 2.13.: 6^η εφαρμογή (ii).



(α).



(β).

Εικόνα 2.13.: (α). Αρχικό προσομοιωμένο αντικείμενο ($1^{\text{η}}$ σειρά, αριστερό γράφημα) και η θορυβώδης προβολή του ($1^{\text{η}}$ σειρά, δεξί γράφημα). Η ανασύνθεση του αρχικού αντικειμένου ($2^{\text{η}}$ σειρά, αριστερό γράφημα) και της προβολής του αντίστοιχα ($2^{\text{η}}$ σειρά, δεξί γράφημα) μέσω της χρήσης της μεθόδου *BASEX* ($\sigma = 2$). Στην $3^{\text{η}}$ σειρά της εικόνας, παρατίθενται οι, κατά απόλυτη τιμή, διαφορές του προσομοιωμένου από το ανακατασκευασμένο αντικείμενο (αριστερά) καθώς και των προβολών του αντίστοιχα (δεξιά). (β). Το γράφημα των συντελεστών αναπτύγματος.

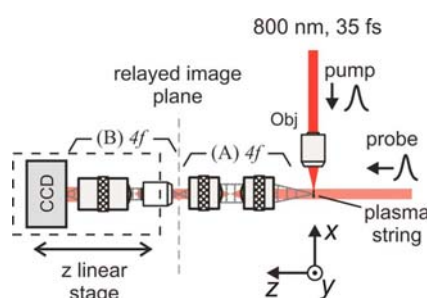
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

**Εφαρμογή
της μεθόδου BASEX
σε πειραματικά
δεδομένα**

3.1. Εισαγωγή

Στο προηγούμενο κεφάλαιο, μελετήσαμε και ελέγξαμε την μέθοδο *BASEX* μέσα από την εφαρμογή της σε μία σειρά συνθετικών εικόνων απεικόνισης ποικίλων κυλινδρικών αντικειμένων, υπό την παρουσία τυχαίων επιπέδων θορύβου. Βάσει του συνόλου των αποτελεσμάτων που παρουσιάστηκαν, μπορούμε γενικά να ισχυριστούμε, ότι η μέθοδος *BASEX* προσφέρει ιδιαίτερος ικανοποιητικά αποτελέσματα ανασύνθεσης, ειδικότερα δε στις περιπτώσεις εκείνες, όπου οι θορυβώδεις προσομοιωμένες προβολές των αρχικών αντικειμένων προσεγγίζονται από πλατιά βάση συναρτήσεων ($\sigma = 2$).

Στο κεφάλαιο αυτό, προχωρούμε στην προσέγγιση και μελέτη ενός άλλου ζητήματος, που συγχρόνως αποτελεί και το αμέσως επόμενο βήμα της παρούσας διατριβής, το οποίο σχετίζεται με την εφαρμογή της τεχνικής *BASEX* σε πραγματικά πειραματικά δεδομένα. Πιο συγκεκριμένα, εξετάζουμε την μέθοδο *BASEX* σε τέσσερις διαφορετικές πειραματικές εικόνες, οι οποίες ελήφθησαν μέσω κατάλληλης πειραματικής διάταξης (**Εικόνα 3.1.**). Η πειραματική αυτή διάταξη συμβάλλει στην διαδικασία εκτέλεσης μίας ισχυρής πειραματικής μεθόδου - περιγράφεται αναλυτικά αν κανείς ανατρέξει στην παραπομπή [27] - βασισμένης στην ολογραφική μικροσκοπία.

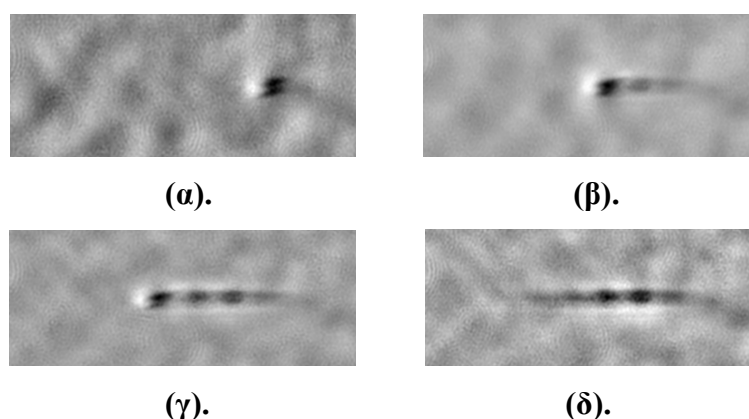


Εικόνα 3.1.: Πειραματική διάταξη. (Fig. 1, [27]).

Η εν λόγω πειραματική τεχνική, χρησιμοποιείται για την ανάκτηση, με μικρομετρική χωρική ακρίβεια, της χωροχρονικής κατανομής μικρών διαταραχών ($< 10^{-3}$) του δείκτη διάθλασης που προκαλούνται κατά την διάδοση υπερβραχέων παλμών λέιζερ σε διαφανή μέσα. Κατ' ουσία, πρόκειται για μία αριθμητική

επαναληπτική προσέγγιση της διάδοσης του μετώπου κύματος, η οποία ανασυνθέτει επακριβώς την φάση και το εύρος της διαταραγμένης διερευνητικής δέσμης του μετώπου κύματος, ενώ χρησιμοποιώντας κατάλληλη τεχνική αντιστροφής Abel ανακτάται η τρισδιάστατη κατανομή του δείκτη διάθλασης, όπως αυτή περιγράφεται από τον όγκο του αντικειμένου φάσης [27].

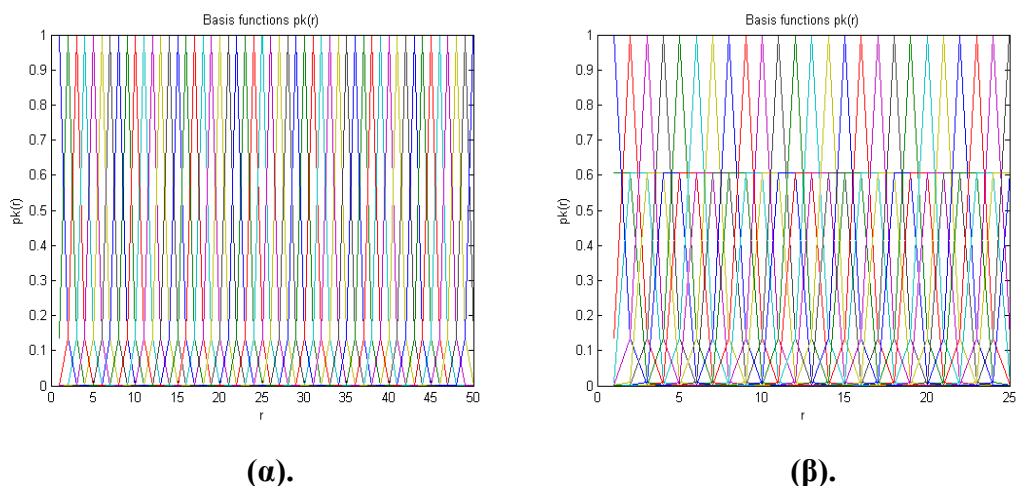
Οι ακόλουθες πειραματικές εικόνες (προβολές) (**Εικόνα 3.2.**) απεικονίζουν την μη γραμμική διάδοση υπερβραχέων (35 fs) παλμών στον αέρα. Καθώς η δέσμη λέιζερ διαδίδεται στον αέρα προκαλεί πολυφωτονικό ιονισμό και κατά συνέπεια δημιουργεί πλάσμα. Το πλάσμα αυτό χωρικά έχει την μορφή ενός νηματίου (filament) και αποτελεί ουσιαστικά ένα φασικό αντικείμενο. Το συγκεκριμένο πειραματικό παράδειγμα προσεγγίζεται αναλυτικά μέσω της προαναφερθείσας ισχυρής πειραματικής τεχνικής χρησιμοποιώντας την παραπάνω πειραματική διάταξη (**Εικ. 3.1.**) [27].



Εικόνα 3.2.: Οι ανακτηθείσες πειραματικές εικόνες της κατανομής φάσης για διάφορες χρονικές καθυστερήσεις του διερευνητικού μετώπου κύματος, **(α)** 0 fs , **(β)**. 230 fs , **(γ)** 358 fs και **(δ)**. 1120 fs αντίστοιχα. Η δέσμη λέιζερ που προκαλεί τον ιονισμό του αέρα διαδίδεται από δεξιά προς τα αριστερά. Το γκρι χρώμα αναπαριστά φάση = 0, το μαύρο χρώμα φάση < 0, και το λευκό φάση > 0. Οι ληφθείσες εικόνες είναι διαστάσεων 370x145.

Στην συνέχεια, για κάθε μία από τις προβολές (**Εικ. 3.3.**), θεωρούμε κυλινδρική συμμετρία κι εφαρμόζουμε συγκριτικά τις μεθόδους αντιστροφής Abel BASEX και Fourier-Hankel [27] με σκοπό την εκτίμηση της τρισδιάστατης κατανομής του δείκτη διάθλασης στον όγκο του φασικού αντικειμένου που προκαλεί την αλλαγή φάσης.

Σε κάθε εφαρμογή που αναλυτικά παραθέτουμε παρακάτω, χρησιμοποιούμε δύο σύνολα βάσης συναρτήσεων που εξαρτώνται από την πειραματική μετρούμενη προβολή και συγκεκριμένα από το πλάτος αυτής: **(i)**. $K_x = 51$, $\sigma = 1$ (**Σχήμα 3.1(α)**.) και $q^2 = 10$ και **(ii)**. $K_x = 26$, $\sigma = 2$ (**Σχήμα 3.1(β)**.) και $q^2 = 18$. Τέλος, όλες οι εφαρμογές που ακολουθούν καθώς κι η επεξεργασία των αποτελεσμάτων έχουν πραγματοποιηθεί σε υπολογιστικό περιβάλλον (*MATLAB*).



Σχήμα 3.1.: Επιλεγόμενα σύνολα βάσης συναρτήσεων για τις πειρατικές εφαρμογές: **(α)**. $K_x = 51$, $\sigma = 1$ και **(β)**. $K_x = 26$, $\sigma = 2$.

3.2. Αναλυτική παρουσίαση πειραματικών εφαρμογών κι αποτελεσμάτων

1^η Εφαρμογή

Από το πείραμα λαμβάνουμε αρχικά μία πειραματική εικόνα (*προβολή φάσης*) όπως αυτή της Εικόνας **3.2(α)**. Κατόπιν η εικόνα αυτή υφίσταται κατάλληλη επεξεργασία («κόψιμο εικόνας – image cropping, «κεντράρισμα» εικόνας). Στην τελευταία αυτή επεξεργασμένη πειραματική προβολή εφαρμόζουμε την μέθοδο *BASEX* πρώτα για στενή βάση συναρτήσεων (**Σχ. 3.1(α)**.) κι έπειτα για πλατιά βάση συναρτήσεων (**Σχ. 3.1(β)**.) Σημειώνουμε επίσης ότι:

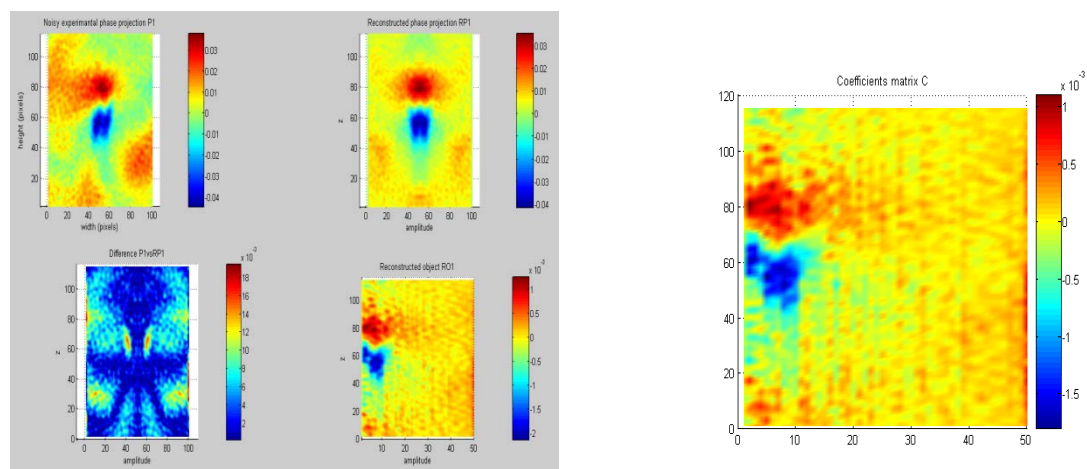
(i). Σε ότι αφορά την στενή βάση συναρτήσεων, όπου $K_x = 51$, $\sigma = 1$, για την εκτίμηση του εύρους της παραμέτρου κανονικοποίησης q^2 προκύπτει ότι $10 \leq q^2 \leq 31$

επιλέγοντας ως βέλτιστη τιμή την $q^2 = 10$. Τότε, η παρεμβολή της παραμέτρου κανονικοποίησης q^2 στο ίχνος του πίνακα \mathbf{GG}^T είναι της τάξης του **1 %** περίπου.

(ii). Για την πλατιά βάση συναρτήσεων, όπου $K_x = 26$, $\sigma = 2$, η εκτίμηση του εύρους της παραμέτρου q^2 κυμαίνεται από $18 \leq q^2 \leq 58$ με βέλτιστη τιμή την $q^2 = 18$. Σε αυτή την περίπτωση η παρεμβολή είναι της τάξης του **0.5 %** περίπου.

Ακολουθούν τα αποτελέσματα της πρώτης εφαρμογής για κάθε βάση συναρτήσεων χωριστά.

(i).

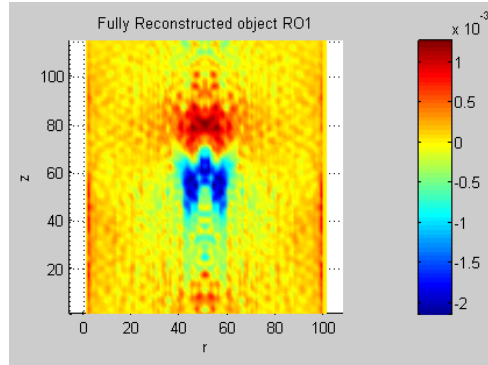


(α).

(β).

Εικόνα 3.4.: (α). Η επεξεργασμένη πειραματική εικόνα (προβολή φάσης) ($1^{\text{η}}$ σειρά, αριστερό γράφημα). Η ανασύνθεση της πειραματικής προβολής φάσης ($1^{\text{η}}$ σειρά, δεξί γράφημα) μέσω της χρήσης *BASEX* ($\sigma = 1$). Η διαφορά, κατά απόλυτη τιμή, της πειραματικής προβολής φάσης από την ανακατασκευασμένη προβολή ($2^{\text{η}}$ σειρά, αριστερό γράφημα). Η ανάκτηση της προβολής του όγκου του αντικειμένου φάσης ως προς το μισό της εύρος ($2^{\text{η}}$ σειρά, δεξί γράφημα) χρησιμοποιώντας την μέθοδο *BASEX* ($\sigma = 1$). (β). Το γράφημα των συντελεστών αναπτύγματος.

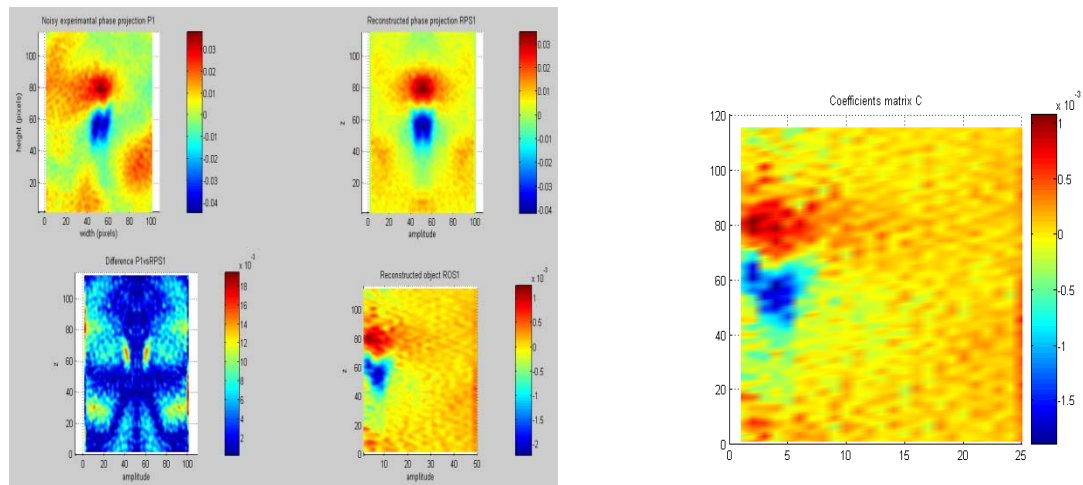
Λαμβάνοντας υπόψη τα αποτελέσματα όπως αυτά παρατίθενται στην παραπάνω Εικόνα 3.4(α), συνοψίζουμε την συγκεκριμένη εφαρμογή (Εικόνα 3.5) απεικονίζοντας την ανακτηθείσα προβολή, μέσω της τεχνικής *BASEX*, του όγκου του αντικειμένου φάσης σε όλο της το εύρος.



Εικόνα 3.5.: Η ανάκτηση της προβολής του συνολικού όγκου του φασικού αντικειμένου μέσω χρήσης *BASEX* ($\sigma = 1$).

Σύμφωνα με την Εικόνα 3.4., παρατηρούμε ότι η μέθοδος *BASEX* δίδει μία εξαιρετικά ικανοποιητική ανασύνθεση της πειραματικής προβολής φάσης (Εικ. 3.4(α)., 1^η σειρά, δεξί γράφημα) σε σχέση με την αρχική πειραματική φασική προβολή (Εικ. 3.4(α)., 1^η σειρά, αριστερό γράφημα). Τώρα, σε ότι αφορά την ανακτηθείσα προβολή του όγκου του φασικού αντικειμένου, παρατηρώντας την ανακτηθείσα προβολή του όγκου του αντικειμένου φάσης ως προς το μισό της εύρος (Εικ. 3.4(α)., 2^η σειρά, δεξί γράφημα), μπορούμε να σημειώσουμε ότι η τεχνική *BASEX* παρέχει μία αρκετά ικανοποιητική εκτίμηση της ανακτηθείσας προβολής του όγκου του αρχικού φασικού αντικειμένου. Το γεγονός αυτό ισχυροποιείται ακόμη περισσότερο αν εστιάσουμε την προσοχή μας στο διάγραμμα της Εικόνας 3.5. λαμβάνοντας παράλληλα υπόψη την ανακατασκευασμένη φασική προβολή (Εικ. 3.4(α)., 1^η σειρά, δεξί γράφημα). Οι παραπάνω ισχυρισμοί και παρατηρήσεις ισχύουν και στην περίπτωση εφαρμογής της μεθόδου *BASEX* για πλατιά βάση συναρτήσεων ($\sigma = 2$) με την μόνη διαφορά ότι το ποσοστό παρεμβολής είναι υποδιπλάσιο [**0.5 %** ($\sigma = 2$) έναντι **1 %** ($\sigma = 1$)], γεγονός όμως που διατηρεί αναλλοίωτα τα αποτελέσματα ανασύνθεσης.

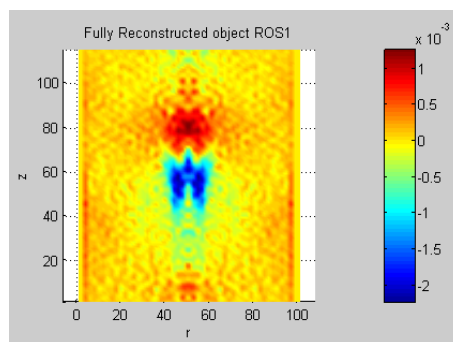
(ii).



(α).

(β).

Εικόνα 3.6.: (α). Η επεξεργασμένη πειραματική εικόνα (προβολή φάσης) ($1^{\text{η}}$ σειρά, αριστερό γράφημα). Η ανασύνθεση της πειραματικής προβολής φάσης ($1^{\text{η}}$ σειρά, δεξί γράφημα) μέσω της χρήσης *BASEX* ($\sigma = 2$). Η διαφορά, κατά απόλυτη τιμή, της πειραματικής προβολής φάσης από την ανακατασκευασμένη προβολή ($2^{\text{η}}$ σειρά, αριστερό γράφημα). Η ανάκτηση της προβολής του όγκου του αντικειμένου φάσης ως προς το μισό της εύρος ($2^{\text{η}}$ σειρά, δεξί γράφημα) χρησιμοποιώντας την μέθοδο *BASEX* ($\sigma = 2$). (β). Το γράφημα των συντελεστών αναπτύγματος.

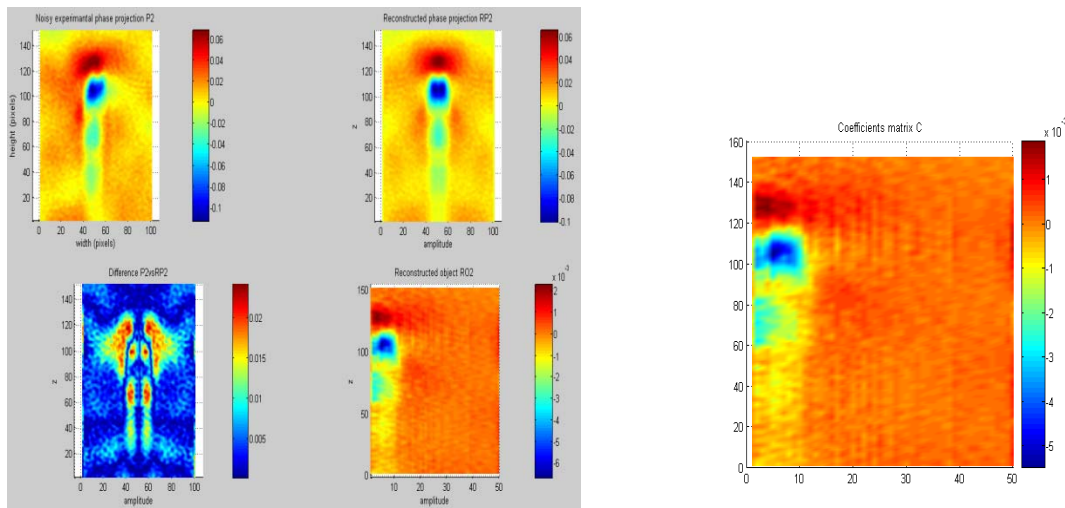


Εικόνα 3.7.: Η ανάκτηση της προβολής του συνολικού όγκου του φασικού αντικειμένου μέσω χρήσης *BASEX* ($\sigma = 2$).

2^η Εφαρμογή

Από το πείραμα λαμβάνουμε αρχικά μία πειραματική εικόνα (προβολή φάσης) όπως αυτή της Εικόνας 3.2(β). Αφού αυτή υποστεί κατάλληλη επεξεργασία ((«κόψιμο εικόνας – image cropping, «κεντράρισμα» εικόνας), στην τελευταία αυτή επεξεργασμένη πειραματική προβολή εφαρμόζουμε την μέθοδο *BASEX* (i). για στενή βάση συναρτήσεων (Σχ. 3.1(α).) και βέλτιστη τιμή $q^2 = 10$ κι έπειτα (ii). για πλατιά βάση συναρτήσεων (Σχ. 3.1(β).) και $q^2 = 18$. Εργαζόμενοι σε υπολογιστικό περιβάλλον (*MATLAB*) προκύπτουν τα ακόλουθα αποτελέσματα.

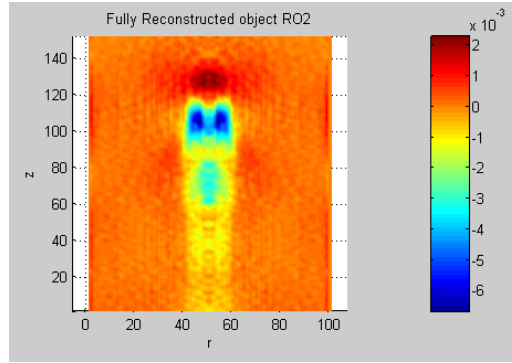
(i).



(α).

(β).

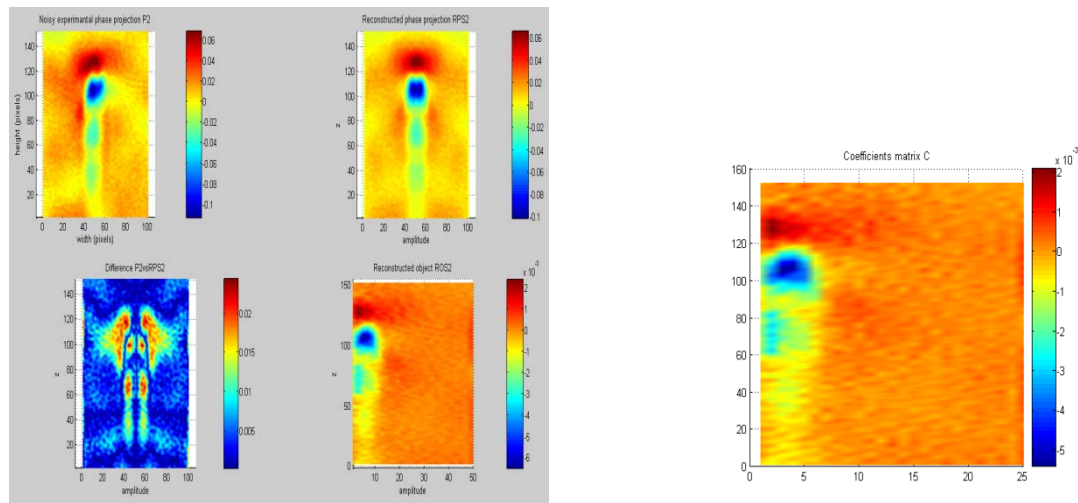
Εικόνα 3.8.: (α). Η επεξεργασμένη πειραματική εικόνα (προβολή φάσης) (1^η σειρά, αριστερό γράφημα). Η ανασύνθεση της πειραματικής προβολής φάσης (1^η σειρά, δεξί γράφημα) μέσω της χρήσης *BASEX* ($\sigma = 1$). Η διαφορά, κατά απόλυτη τιμή, της πειραματικής προβολής φάσης από την ανακατασκευασμένη προβολή (2^η σειρά, αριστερό γράφημα). Η ανάκτηση της προβολής του όγκου του αντικειμένου φάσης ως προς το μισό της εύρος (2^η σειρά, δεξί γράφημα) χρησιμοποιώντας την μέθοδο *BASEX* ($\sigma = 1$). (β). Το γράφημα των συντελεστών αναπτύγματος.



Εικόνα 3.9.: Η ανάκτηση της προβολής του συνολικού όγκου του φασικού αντικειμένου μέσω χρήσης *BASEX* ($\sigma = 1$).

Βάσει της Εικόνας **3.8(α)**, παρατηρούμε ότι με τη χρήση της μεθόδου *BASEX* λαμβάνουμε μία εξαιρετικά ικανοποιητική ανασύνθεση της πειραματικής φασικής προβολής (**Εικ. 3.8(α)**, 1^η σειρά, δεξί γράφημα) σε σύγκριση με την αρχική προβολή φάσης (**Εικ. 3.8(α)**, 1^η σειρά, αριστερό γράφημα). Όμως, σε ότι αφορά την ανάκτηση μέσω *BASEX* ($\sigma = 1$) της προβολής του όγκου του αρχικού φασικού αντικειμένου (**Εικ. 3.8(α)**, 2^η σειρά, δεξί γράφημα) παρατηρείται μία απώλεια πληροφορίας στο τρίτο λοβό του διαγράμματος λαμβάνοντας συγχρόνως υπόψη την ανασύνθεση της πειραματικής φασικής προβολής (**Εικ. 3.8(α)**, 1^η σειρά, δεξί γράφημα). Η παρατήρηση αυτή επιβεβαιώνεται συμπεριλαμβανομένης και της ανάκτησης της προβολής του συνολικού όγκου του αρχικού αντικειμένου φάσης (**Εικ. 3.9**). Ωστόσο, η χρήση της μεθόδου *BASEX* για πλατιά βάση συναρτήσεων ($\sigma = 2$) οδηγεί σε μία μικρή βελτίωση της εκτίμησης ανάκτησης της προβολής του αρχικού φασικού αντικειμένου (Βλ. **Εικ. 3.10(α)**, 2^η σειρά, δεξί γράφημα και **Εικ. 3.11**).

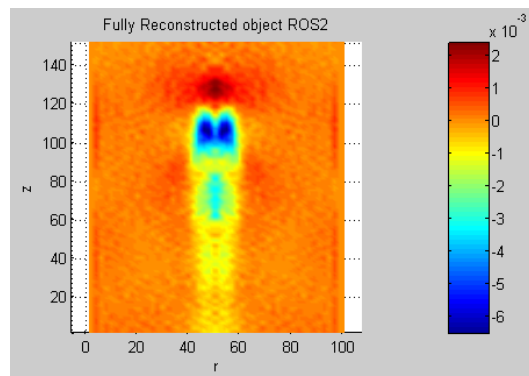
(ii).



(α).

(β).

Εικόνα 3.10.: (α). Η επεξεργασμένη πειραματική εικόνα (προβολή φάσης) ($1^{\text{η}}$ σειρά, αριστερό γράφημα). Η ανασύνθεση της πειραματικής προβολής φάσης ($1^{\text{η}}$ σειρά, δεξί γράφημα) μέσω της χρήσης *BASEX* ($\sigma = 2$). Η διαφορά, κατά απόλυτη τιμή, της πειραματικής προβολής φάσης από την ανακατασκευασμένη προβολή ($2^{\text{η}}$ σειρά, αριστερό γράφημα). Η ανάκτηση της προβολής του όγκου του αντικειμένου φάσης ως προς το μισό της εύρος ($2^{\text{η}}$ σειρά, δεξί γράφημα) χρησιμοποιώντας την μέθοδο *BASEX* ($\sigma = 2$). (β). Το γράφημα των συντελεστών αναπτύγματος.

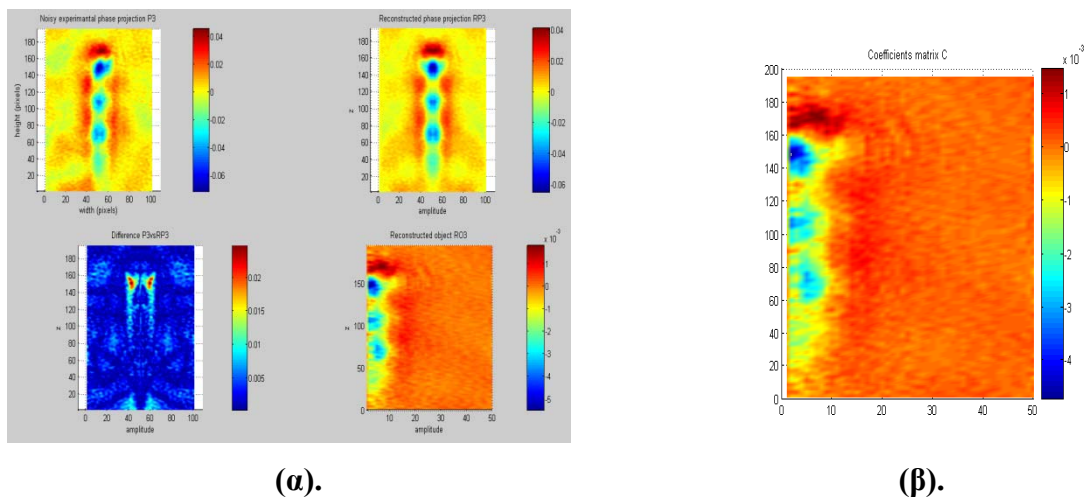


Εικόνα 3.11.: Η ανάκτηση της προβολής του συνολικού όγκου του φασικού αντικειμένου μέσω χρήσης *BASEX* ($\sigma = 2$).

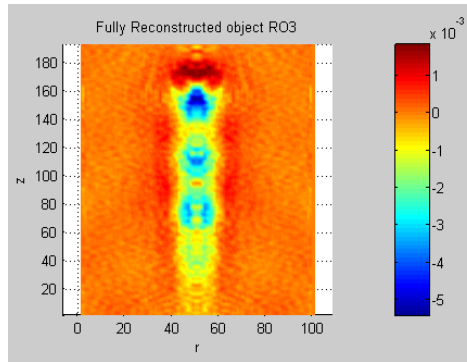
3^η Εφαρμογή

Από το πείραμα λαμβάνουμε αρχικά μία πειραματική εικόνα (προβολή φάσης) όπως αυτή της Εικόνας 3.2(γ). Κατόπιν κατάλληλης επεξεργασίας, στην τελευταία αυτή επεξεργασμένη θορυβώδη πειραματική προβολή εφαρμόζουμε την μέθοδο *BASEX* (i). για στενή βάση συναρτήσεων ($K_x = 51$, $\sigma = 1$) και $q^2 = 10$ κι έπειτα (ii). για πλατιά βάση συναρτήσεων ($K_x = 26$, $\sigma = 2$) και $q^2 = 18$. Τα αποτελέσματα της συγκεκριμένης εφαρμογής παρουσιάζονται αναλυτικά παρακάτω.

(i).

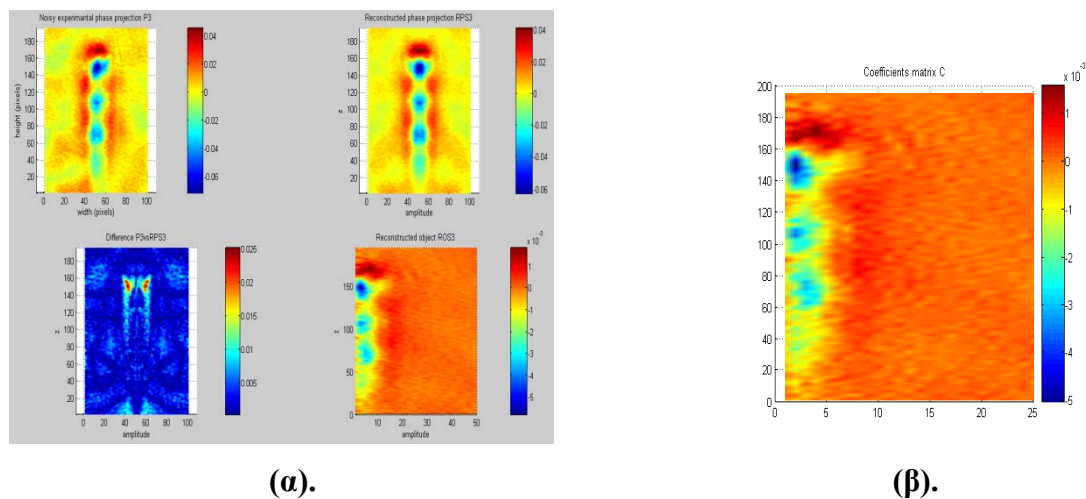


Εικόνα 3.12.: (α). Η επεξεργασμένη πειραματική εικόνα (προβολή φάσης) (1^η σειρά, αριστερό γράφημα). Η ανασύνθεση της πειραματικής προβολής φάσης (1^η σειρά, δεξί γράφημα) μέσω της χρήσης *BASEX* ($\sigma = 1$). Η διαφορά, κατά απόλυτη τιμή, της πειραματικής προβολής φάσης από την ανακατασκευασμένη προβολή (2^η σειρά, αριστερό γράφημα). Η ανάκτηση της προβολής του όγκου του αντικειμένου φάσης ως προς το μισό της εύρος (2^η σειρά, δεξί γράφημα) χρησιμοποιώντας την μέθοδο *BASEX* ($\sigma = 1$). (β). Το γράφημα των συντελεστών αναπτύγματος.

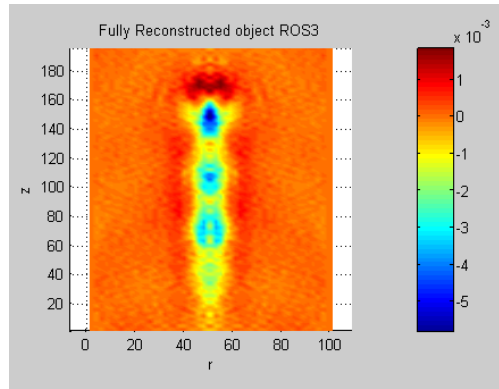


Εικόνα 3.13.: Η ανάκτηση της προβολής του συνολικού όγκου του φασικού αντικειμένου μέσω χρήσης *BASEX* ($\sigma = 1$).

(ii).



Εικόνα 3.14.: (α). Η επεξεργασμένη πειραματική εικόνα (προβολή φάσης) ($1^{\text{η}}$ σειρά, αριστερό γράφημα). Η ανασύνθεση της πειραματικής προβολής φάσης ($1^{\text{η}}$ σειρά, δεξί γράφημα) μέσω της χρήσης *BASEX* ($\sigma = 2$). Η διαφορά, κατά απόλυτη τιμή, της πειραματικής προβολής φάσης από την ανακατασκευασμένη προβολή ($2^{\text{η}}$ σειρά, αριστερό γράφημα). Η ανάκτηση της προβολής του όγκου του αντικειμένου φάσης ως προς το μισό της εύρος ($2^{\text{η}}$ σειρά, δεξί γράφημα) χρησιμοποιώντας την μέθοδο *BASEX* ($\sigma = 2$). (β). Το γράφημα των συντελεστών αναπτύγματος.

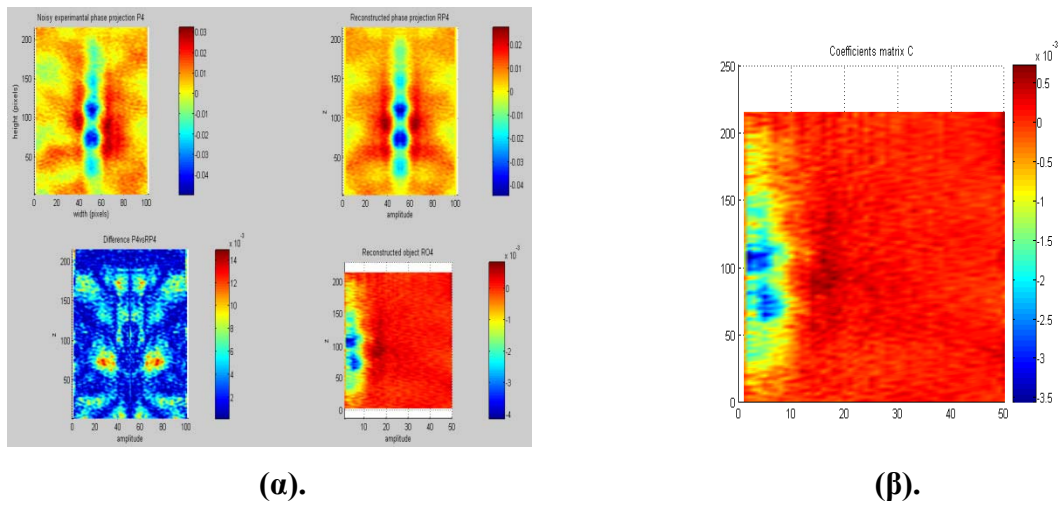


Εικόνα 3.15 Η ανάκτηση της προβολής του συνολικού όγκου του φασικού αντικειμένου μέσω χρήσης *BASEX* ($\sigma = 2$).

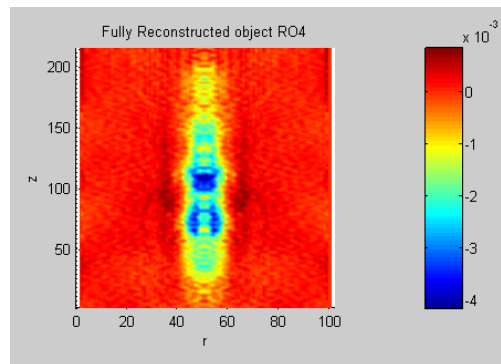
4^η Εφαρμογή

Από το πείραμα λαμβάνουμε αρχικά μία πειραματική εικόνα (*προβολή φάσης*) όπως αυτή της Εικόνας **3.2(δ)**. Στην επεξεργασμένη πειραματική προβολή που προκύπτει, εφαρμόζουμε την μέθοδο *BASEX* **(i)**, για στενή ($K_x = 51$, $\sigma = 1$, $q^2 = 10$) και **(ii)**, για πλατιά ($K_x = 26$, $\sigma = 2$, $q^2 = 18$) βάση συναρτήσεων. Τα αποτελέσματα της τελευταίας αυτής εφαρμογής παρατίθενται στα διαγράμματα των επόμενων εικόνων.

(i).

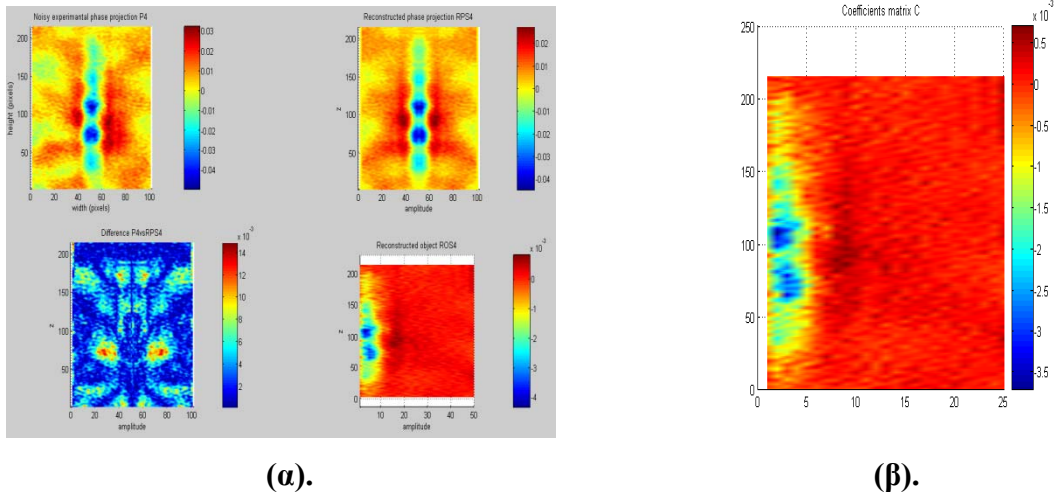


Εικόνα 3.16.: (α). Η επεξεργασμένη πειραματική εικόνα (προβολή φάσης) ($1^{\text{η}}$ σειρά, αριστερό γράφημα). Η ανασύνθεση της πειραματικής προβολής φάσης ($1^{\text{η}}$ σειρά, δεξί γράφημα) μέσω της χρήσης *BASEX* ($\sigma = 1$). Η διαφορά, κατά απόλυτη τιμή, της πειραματικής προβολής φάσης από την ανακατασκευασμένη προβολή ($2^{\text{η}}$ σειρά, αριστερό γράφημα). Η ανάκτηση της προβολής του όγκου του αντικειμένου φάσης ως προς το μισό της εύρος ($2^{\text{η}}$ σειρά, δεξί γράφημα) χρησιμοποιώντας την μέθοδο *BASEX* ($\sigma = 1$). (β). Το γράφημα των συντελεστών αναπτύγματος.

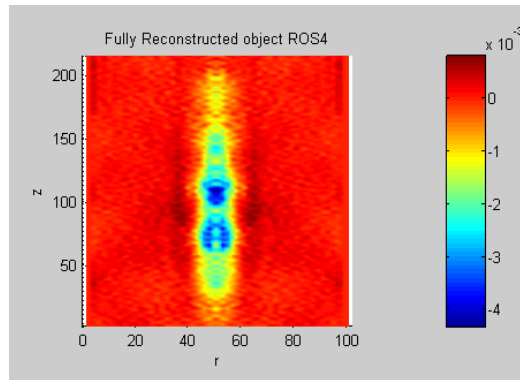


Εικόνα 3.17.: Η ανάκτηση της προβολής του συνολικού όγκου του φασικού αντικειμένου μέσω χρήσης *BASEX* ($\sigma = 1$).

(ii).

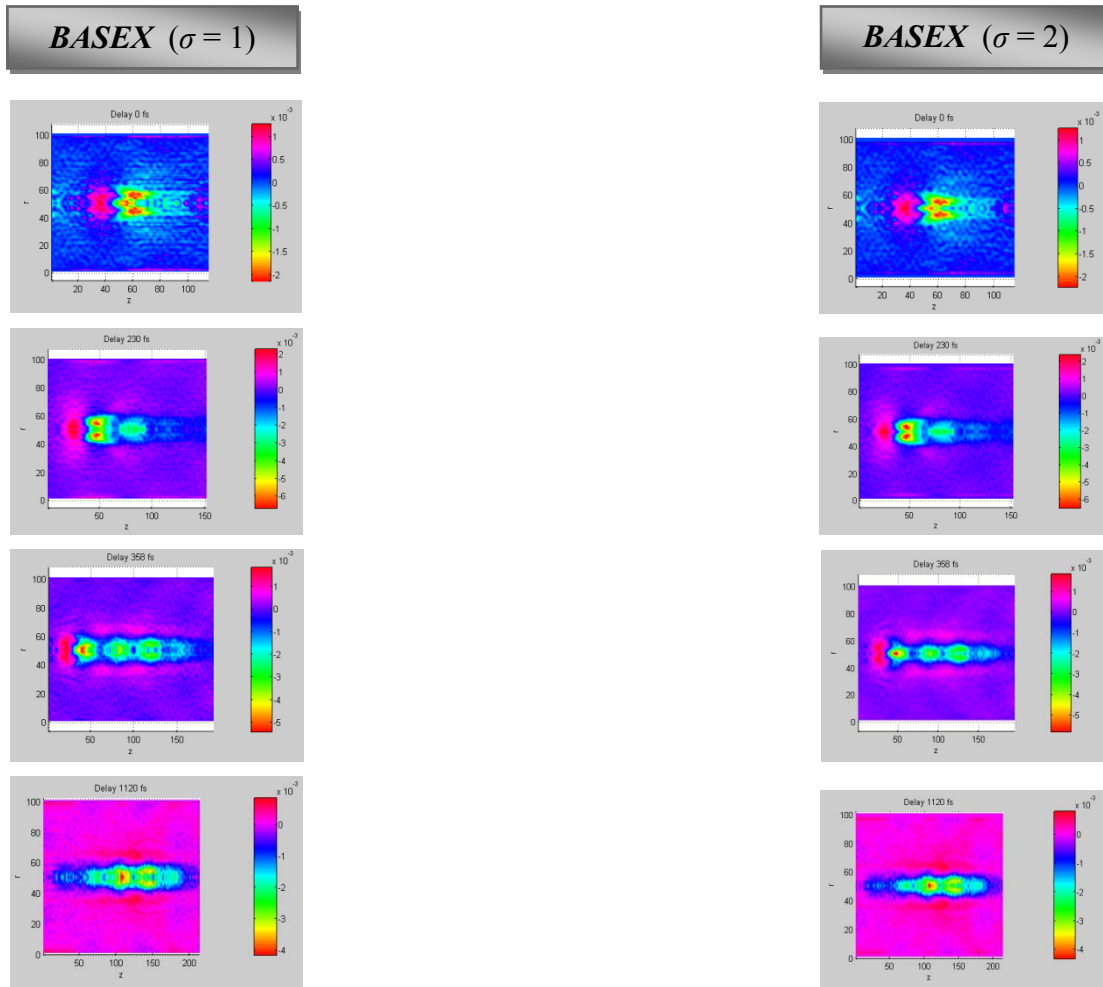


Εικόνα 3.18.: (α). Η επεξεργασμένη πειραματική εικόνα (προβολή φάσης) ($1^{\text{η}}$ σειρά, αριστερό γράφημα). Η ανασύνθεση της πειραματικής προβολής φάσης ($1^{\text{η}}$ σειρά, δεξί γράφημα) μέσω της χρήσης *BASEX* ($\sigma = 2$). Η διαφορά, κατά απόλυτη τιμή, της πειραματικής προβολής φάσης από την ανακατασκευασμένη προβολή ($2^{\text{η}}$ σειρά, αριστερό γράφημα). Η ανάκτηση της προβολής του όγκου του αντικειμένου φάσης ως προς το μισό της εύρος ($2^{\text{η}}$ σειρά, δεξί γράφημα) χρησιμοποιώντας την μέθοδο *BASEX* ($\sigma = 2$). (β). Το γράφημα των συντελεστών αναπτύγματος.

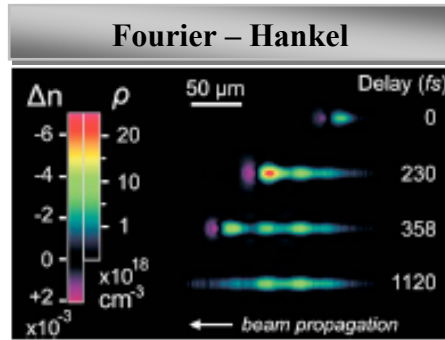


Εικόνα 3.19.: Η ανάκτηση της προβολής του συνολικού όγκου του φασικού αντικειμένου μέσω χρήσης *BASEX* ($\sigma = 2$).

3.3. Σύγκριση της αποτελεσματικότητας της μεθόδου Fourier-Hankel με τη μέθοδο *BASEX* βάσει των πειραματικών αποτελεσμάτων



Εικόνα 3.20.: Η ανάκτηση της κατανομής των διαταραχών του δείκτη διάθλασης (*προβολή όγκου φασικού αντικειμένου*) κατά μήκος της διάδοσης του παλμού λέιζερ για τις διάφορες καθυστερήσεις μέσω χρήσης μεθόδου *BAXEX*.



Εικόνα 3.21.: Η προκύπτουσα χωροχρονική κατανομή των μεταβολών του δείκτη διάθλασης που προκαλούνται κατά την διάρκεια της μη γραμμικής διάδοσης ταχύτατων παλμών λέιζερ στον αέρα για διάφορες καθυστερήσεις με τη χρήση της τεχνικής Fourier-Hankel (Fig. 3, [27]).

Στα πλαίσια της παρούσας διατριβής, ο έλεγχος της μεθόδου *BASEX* σε πραγματικά πειραματικά δεδομένα πραγματοποιήθηκε, όπως είδαμε στο κεφάλαιο αυτό, με την αναλυτική εφαρμογή της σε τέσσερις διαφορετικές πειραματικές εικόνες, αφού προηγουμένως αυτές υπέστησαν κατάλληλη επεξεργασία (Βλ. *Εικ. 3.2.*). Τα αποτελέσματα της εφαρμογής της μεθόδου *BASEX* στις εν λόγω πειραματικές εικόνες παρατίθενται στον παραπάνω συγκεντρωτική εικόνα (**Εικόνα 3.20.**). Όμως, στις συγκεκριμένες ληφθείσες από το πείραμα εικόνες υπήρξε αντίστοιχα προηγούμενη εφαρμογή της συνήθως χρησιμοποιούμενης τεχνικής αντιστροφής Abel, δηλαδή της τεχνικής μετασχηματισμού Fourier-Hankel. Τα αποτελέσματα αυτά (**Εικόνα 3.21.**) περιλαμβάνονται, μεταξύ άλλων, σε πρόσφατη δημοσιευμένη ερευνητική μελέτη [27].

Συγκρίνοντας τώρα, τα πειραματικά αποτελέσματα από την εφαρμογή των δύο τεχνικών αντιστροφής Abel, μέσω προσεκτικής παρατήρησης της *Εικόνας 3.20.* και της *Εικόνας 3.21.*, συμπεραίνουμε ότι προκύπτει ταύτιση τιμών όσον αφορά τις μεταβολές του δείκτη διάθλασης για τις ανακτηθείσες κατανομές του όγκου του αντικειμένου φάσης και στις τέσσερις διαφορετικές χρονικές καθυστερήσεις. Επίσης, από την σύγκριση προκύπτει ταύτιση και σε ότι αφορά την απεικόνιση των ποιοτικών χαρακτηριστικών των κατανομών.

Συνοψίζοντας λοιπόν όλα τα παραπάνω συνάγεται το συμπέρασμα ότι, βάσει των εν λόγω πειραματικών αποτελεσμάτων, οι δύο μέθοδοι αντιστροφής Abel οδηγούν σε παρόμοιες εκτιμήσεις των τρισδιάστατων κατανομών των διαταραχών του δείκτη διάθλασης, κι άρα πρόκειται για δύο εξίσου αποτελεσματικές κι ιδιαιτέρως

αποδοτικές τεχνικές. Ωστόσο, η μέθοδος *BASEX* πλεονεκτεί έναντι της τεχνικής Fourier-Hankel στο ότι πρόκειται για μία μέθοδο υπολογιστικά γρήγορη που απαιτεί σαφώς λιγότερα υπολογιστικά βήματα, γεγονός που επιβεβαιώνεται και στις παρούσες πειραματικές εφαρμογές.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Συμπεράσματα

Η αναλυτική περιγραφή, η μελέτη κι η έρευνα της μεθόδου *BASEX*, μιας σχετικά πρόσφατα αναπτυχθείσας τεχνικής αντιστροφής Abel, αποτέλεσε το κυριότερο αντικείμενο ενασχόλησης κι επικέντρωσης στα πλαίσια της παρούσας εργασίας. Η μέθοδος *BASEX*, κρίνεται ιδιαίτερος χρήσιμη κι αποτελεσματική για την αντιμετώπιση αντίστροφων προβλημάτων που ορίζονται σε εφαρμογές της ολογραφικής μικροσκοπίας. Ένα συγκεκριμένο αντίστροφο πειραματικό πρόβλημα που εξετάστηκε ήταν αυτό της ανάκτησης της τρισδιάστατης κατανομής των διαταραχών του δείκτη διάθλασης μέσω του όγκου του αντικειμένου φάσης που προκαλούνται κατά την διάρκεια της μη γραμμικής διάδοσης υπερβραχέων παλμών λέιζερ στον αέρα. Η εφαρμογή της μεθόδου *BASEX* για την επίλυση του εν λόγω προβλήματος αποδείχθηκε ιδιαίτερος αποδοτική κι επιτυχής.

Σε ότι αφορά την μέθοδο *BASEX* αυτή καθαυτή μπορούμε να προβούμε στην εξαγωγή των ακόλουθων συμπερασμάτων:

- Η συμβολή της ανισωτικής σχέσης, $\sqrt{\frac{\text{trace}(\mathbf{G}\mathbf{G}^T)}{10N}} \leq q^2 \leq \sqrt{\frac{\text{trace}(\mathbf{G}\mathbf{G}^T)}{N}}$, για την εκτίμηση του εύρους διακύμανσης τιμών της παραμέτρου κανονικοποίησης q^2 κρίνεται ιδιαίτερος σημαντική, δεδομένου ότι παρέχει ένα διάστημα πιθανών βέλτιστων τιμών, αποτρέποντας έτσι την επιλογή πολύ μεγάλων ή πολύ μικρών τιμών που θα οδηγούσαν σε μη επιθυμητά αποτελέσματα ανασύνθεσης.
- Ο υπολογισμός του ποσοστού παρεμβολής της παραμέτρου q^2 στο ίχνος του πίνακα $\mathbf{G}\mathbf{G}^T$ αποτελεί το κρίσιμο εκείνο μέγεθος για την επιλογή της βέλτιστης τιμής και κατ' επέκταση της βέλτιστης λύσης του προβλήματος.
- Θα πρέπει οι όποιες εφαρμογές να μελετώνται προσεχτικά ως προς το εύρος μεταβολής των παραμέτρων του προβλήματος που ορίζονται, ώστε να αποφεύγονται μη επιτρεπτές λύσεις.

Σχετικά με τις εφαρμογές της μεθόδου *BASEX* προκύπτουν τα παρακάτω συμπεράσματα:

- Σε συνθετικές εικόνες απουσία θορύβου, η μέθοδος δίδει εξαιρετικά ακριβή αποτελέσματα ανασύνθεσης χωρίς την παρουσία τεχνητών δομών (*artifacts*).

- Σε προσομοιωμένα δεδομένα με θορύβο, η μέθοδος παρέχει πολύ καλά αποτελέσματα ανασύνθεσης σε χαμηλό θόρυβο και ιδιαίτεως ικανοποιητικά σε μεσαίο κι υψηλό θόρυβο αντίστοιχα και ως προς τις δύο βάσεις συναρτήσεων που χρησιμοποιήθηκαν. Το γεγονός αυτό οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η μέθοδος *BASEX* δεν είναι τόσο ευαίσθητη στην αλλαγή επιλογής βάσης. Ωστόσο, αξίζει να σημειωθεί ότι, η ποιότητα της αναδημιουργίας εξαρτάται κι από το είδος των υπό μελέτη αντικειμένων.
- Ο τρόπος υπολογισμού του ποσοστού του τυχαίου θορύβου που προστίθεται στις διάφορες συνθετικές προβολές, προκύπτει από τον λόγο του θορύβου προς την μέγιστη τιμή του σήματος (*noise – to – signal ratio*) ή περιγραφικά από την σχέση,

$$\text{Ποσοστό θορύβου} = \frac{\text{θόρυβος(τυχαίος)}}{\text{σήμα(μέγιστη τιμή)}} \cdot 100 \ .$$

Σε ότι αφορά, τώρα, την μέθοδο *BASEX* σε σχέση με τον θόρυβο μπορούμε να σχολιάσουμε ότι, η μέθοδος *BASEX : α)*, αστοχεί σε εκείνες τις περιπτώσεις όπου το σήμα είναι κάτω από το επίπεδο του θορύβου, ενώ *β)*, παρέχει πολύ καλά αποτελέσματα ανασύνθεσης σε περιοχές όπου το σήμα βρίσκεται πάνω από το επίπεδο του θορύβου. Είναι ενδεικτικό ότι για την δεύτερη αυτή περίπτωση, η μέθοδος Fourier-Hankel δίδει τελείως αντίθετα αποτελέσματα ανασύνθεσης. Δηλαδή, σε περιοχές όπου το σήμα βρίσκεται πάνω από το επίπεδο θορύβου, η τεχνική Fourier-Hankel δίδει πολύ κακά αποτελέσματα ανασύνθεσης τα οποία συνοδεύονται παρουσία τεχνητών δομών (*artifacts*). Το γεγονός αυτό αποτελεί κι ένα ακόμη πλεονέκτημα της μεθόδου *BASEX* έναντι της Fourier-Hankel, πέραν του ότι πρόκειται για μία ιδιαίτεως γρήγορη υπολογιστικά μέθοδο, κάτι που σημειώνουμε ευθύς παρακάτω. Αξίζει επίσης να υπογραμμίσουμε ότι η μέθοδος *BASEX* παρουσιάζει ευαισθησία σε περιοχές της περιφέρειας της εικόνας.

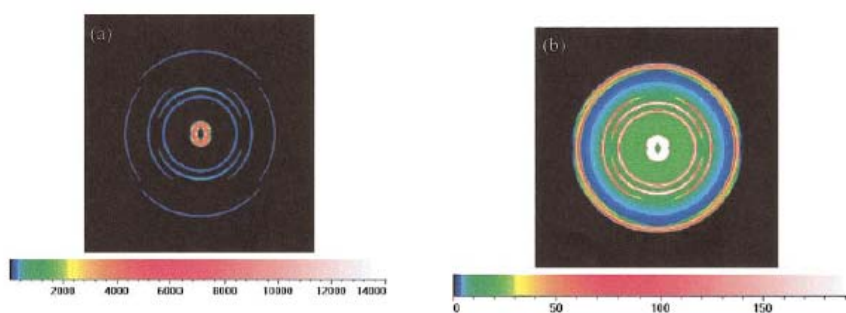
- Τέλος, από την σύγκριση της μεθόδου *BASEX* με την τεχνική Fourier-Hankel βάσει των εξαγομένων πειραματικών αποτελεσμάτων,

συμπεραίνουμε ότι η *BASEX* στην συγκεκριμένη πειραματική εφαρμογή είναι εξίσου αποτελεσματική με την Fourier-Hankel, γεγονός που επιβεβαιώνεται από τα παρόμοια ανακτηθέντα αποτελέσματα. Όμως, το ισχυρό πλεονέκτημα της μεθόδου *BASEX* έναντι της Fourier-Hankel, έγκειται στο ότι απαιτεί λιγότερα υπολογιστικά βήματα κι άρα λιγότερο χρόνο εκτέλεσης.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

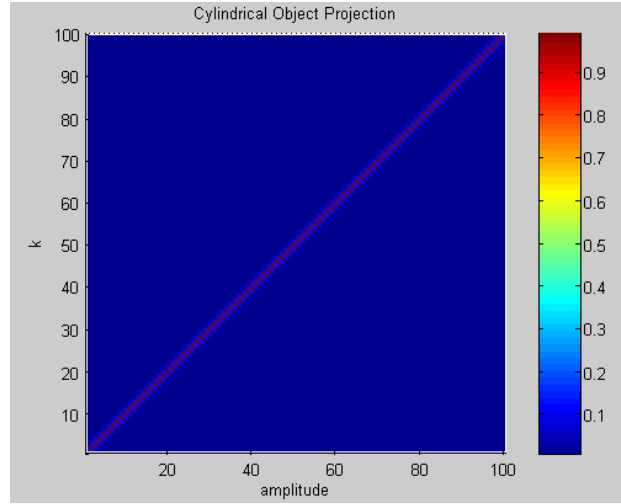
Εισαγωγή

Στην ενότητα 1.5.1. του πρώτου κεφαλαίου, περιγράψαμε γενικά την μέθοδο *BASEX* για ένα κακώς τεθειμένο πρόβλημα, βασιζόμενοι στην διατύπωση του προβλήματος, όπως αυτό παρουσιάζεται στην αναφορά [18]. Η περιγραφή του εν λόγω προβλήματος μέσα από την διατύπωση των σχέσεων ((1.21) – (1.27)), απαντά περισσότερο στην χρήση της μεθόδου για την ανάκτηση προβολών σφαιρικών αντικειμένων [18]. Στην παρακάτω εικόνα (**Εικόνα Π.1.**), παρουσιάζουμε ενδεικτικά κάποια παραδείγματα προβολών που χρησιμοποιήθηκαν στην δημοσιευμένη εργασία [18].



Εικόνα Π.1.: Παραδείγματα συνθετικών – προσομοιωμένων εικόνων σφαιρικών αντικειμένων (*Fig. 2., V. Dribinski, et al., Rev. Sci. Instrum. 73, 2634 (2002)*).

Όπως προαναφέραμε, στην παρούσα διατριβή, θα επικεντρωθούμε στην χρήση της μεθόδου *BASEX* σε εφαρμογές τόσο συνθετικών – προσομοιωμένων όσο και πειραματικών εικόνων που αφορούν προβολές τρισδιάστατων κυλινδρικών κατανομών, όμοιων με αυτών που απεικονίζονται στο Σχήμα 1.5. (Βλ. *Κεφ. 1*). Παραθέτουμε ακολούθως (**Εικόνα Π.2.**), ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα μιας συνθετικής – προσομοιωμένης εικόνας που απεικονίζει την προβολή ενός τρισδιάστατου κυλινδρικού αντικειμένου. Το κυλινδρικό αυτό αντικείμενο κατασκευάζεται μέσω του συνόλου των συναρτήσεων βάσης που περιγράφονται από την σχέση (1.19) (Βλ. *Κεφ. 1*) για $k = 0, \dots, 100$ και $\sigma = 1$, η προβολή του οποίου προσομοιάζει ένα κυλινδρικό αντικείμενο, όπως αυτό του Σχήματος 1.5(α).



Εικόνα Π.2.: Μία συνθετική – προσομοιωμένη εικόνα της προβολής ενός κυλινδρικού αντικειμένου, το οποίο κατασκευάζεται μέσω του συνόλου των συναρτήσεων βάσης (1.19) για $k = 0, \dots, 100$ και $\sigma = 1$.

Ειδική περιγραφή της μεθόδου BASEX

Θα μελετήσουμε και πάλι την μέθοδο *BASEX* για ένα κακώς τεθειμένο πρόβλημα, με σκοπό αυτή να απαντά σε εφαρμογές που σχετίζονται με τη μελέτη τρισδιάστατων κυλινδρικών κατανομών που βρίσκονται σε συνθήκες κυλινδρικής συμμετρίας.

Όπως και στην ενότητα 1.5.1 του πρώτου κεφαλαίου, έτσι και τώρα, θεωρούμε αρχικά ένα σύνολο δισδιάστατων συναρτήσεων $\{f_k(r,z)\}$ ($k = 0, \dots, K - 1$) στον χώρο της εικόνας. Ένα σύνολο τέτοιων δισδιάστατων συναρτήσεων, όπως έχει λεχθεί προηγούμενα, μπορεί να περιγραφεί από συναρτήσεις βάσης, όπως αυτές της σχέσης (1.19), δηλαδή,

$$\rho_k(r) \approx e^{-2\left(\frac{r-k}{\sigma}\right)^2}, \quad k = 0, \dots, K_x - 1 .$$

Το αντίστοιχο μετασχηματισμένο σύνολο διανυσμάτων $\{\mathbf{G}_k \in \mathbf{R}^{N_x \times N_z}\}$ ($k = 0, \dots, K - 1$) του συνόλου των συναρτήσεων $\{f_k(r,z)\}$ ($k = 0, \dots, K - 1$), ορίζεται στο χώρο της προβολής. Θα πρέπει όμως να σημειωθεί ότι για το παρόν πρόβλημα που μελετούμε, λόγω της κυλινδρικής συμμετρίας κατά τον άξονα z , ο ευθύς

μετασχηματισμός Abel εφαρμόζεται μόνο κατά τον άξονα x . Για τον λόγο αυτόν, μπορούμε να συμπτύξουμε τις δύο συνιστώσες (i, j) . Έτσι λοιπόν, η σχέση (1.21) που συνδέει τα δύο σύνολα, μέσω της σύμπτυξης, μπορεί να γραφεί ως

$$\mathbf{G}_{ki}^j = \int_{-\infty}^{\infty} f_k(\sqrt{x_i^2 + y^2}, \cdot) dy \quad (\text{Π.1})$$

όπου f_k είναι οι ίδιες συναρτήσεις βάσης που ονομάσαμε παραπάνω ως ρ_k , ενώ επίσης θεωρούμε ότι $\mathbf{G}_{kij} = \mathbf{G}_{ki1} = \mathbf{G}_{ki}$, $\forall j$ και $K = \frac{N_x + 1}{2}$. Η δεξιά πλευρά της σχέσης (Π.1) εκφράζει τον ευθύ μετασχηματισμό Abel των συναρτήσεων βάσης f_k που οδηγεί στο σύνολο \mathbf{G}_k , ένα σύνολο που περιέχει ως στοιχεία τις προβολές των συναρτήσεων βάσης f_k , για διάφορες τιμές του δείκτη k και για όλα τα j του άξονα z .

Υποθέτουμε ότι και τα δυο σύνολα είναι καλώς συμπεριφερόμενα και – ειδικότερα- αποτελούν καλές βάσεις, οπότε βάσει των παραπάνω παρατηρήσεων, τα αναπτύγματα (1.23) και (1.24) γράφονται ως εξής:

$$I(\sqrt{x_i^2 + y^2}, \cdot) = \sum_{k=0}^{K-1} \mathbf{C}_i f_k(\sqrt{x_i^2 + y^2}, \cdot) \quad (\text{Π.2})$$

και

$$\mathbf{P}_i^j = \sum_{k=0}^{K-1} \mathbf{C}_i^j \mathbf{G}_{ki}^j \quad (\text{Π.3})$$

Η σχέση (Π.2) δηλώνει ότι μία τρισδιάστατη κατανομή, λόγω χάρη ένα κυλινδρικό αντικείμενο, μπορεί να ανακτηθεί ως γραμμικός συνδυασμός των συναρτήσεων βάσης f_k ή ισοδύναμα των $\rho_k(r)$. Επίσης, η σχέση (Π.3) δηλώνει ότι η προβολή της τρισδιάστατης κατανομής μπορεί να ανακτηθεί ως γραμμικός συνδυασμός των προβολών \mathbf{G}_k των συναρτήσεων βάσης $\rho_k(r)$.

Η τελευταία σχέση (Π.3) γράφεται με την μορφή πινάκων ως εξής,

$$\mathbf{P} = \mathbf{C}\mathbf{G}$$

(Π.4)

Η λύση του παραπάνω συστήματος (Π.4) προκύπτει όπως αναφέραμε, μέσω μίας διαδικασίας ελαχίστων τετραγώνων, γνωστή ως κανονικοποίηση Tikhonov, από την ακόλουθη σχέση:

$$\mathbf{C} = \mathbf{P}\mathbf{G}^T (\mathbf{G}\mathbf{G}^T + q^2\mathbf{I})^{-1}, \quad q > 0$$

(Π.5)

όπου q^2 μία παράμετρος που ονομάζεται παράμετρος κανονικοποίησης (Βλ. Κεφ. 1).

Εκτίμηση του εύρους της παραμέτρου κανονικοποίησης q^2

Να σημειώσουμε ξανά ότι η μέθοδος κανονικοποίησης κατά Tikhonov και κατ' επέκταση η παράμετρος κανονικοποίησης (*regularization parameter*) q^2 που υπεισέρχεται στην τελική λύση (Π.5) του ανωτέρω αντίστροφου προβλήματος, χρησιμοποιείται με σκοπό την βελτίωση του *δείκτη κατάστασης* του πίνακα $\mathbf{G}\mathbf{G}^T$.

Η παράμετρος q είναι μία αυστηρά θετική κι ελεύθερη παράμετρος. Ωστόσο όμως, θα πρέπει να αποφεύγονται πολύ μικρές τιμές της παραμέτρου q^2 , διότι σε διαφορετική περίπτωση οι εικόνες ανασύνθεσης παρουσιάζουν υψηλής συχνότητας τμήματα θορύβου [19, 22, 23]. Επίσης, θα πρέπει να αποφεύγονται πολύ υψηλές τιμές της παραμέτρου q^2 , μια και οδηγούμαστε σε απώλεια πραγματικής πληροφορίας [19, 22, 23]. Βάσει αυτών των δεδομένων είναι αναγκαίος ο προσδιορισμός ενός εκτιμώμενου εύρους τιμών για την παράμετρο q^2 , ούτως ώστε να αποφευχθούν απορριπτικές και μη επιτρεπτές λύσεις για το συγκεκριμένο πρόβλημα.

Έτσι λοιπόν, μία εκτίμηση για το εύρος της παραμέτρου κανονικοποίησης q^2 δίδεται από την επόμενη ανισωτική σχέση,

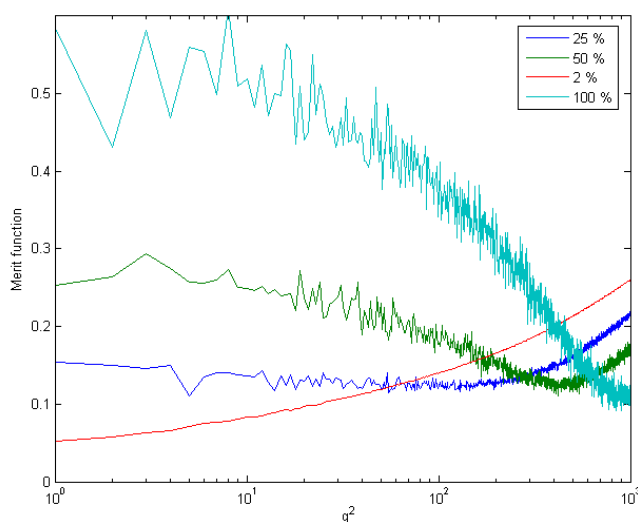
$$\sqrt{\frac{\text{trace}(\mathbf{G}\mathbf{G}^T)}{10N}} \leq q^2 \leq \sqrt{\frac{\text{trace}(\mathbf{G}\mathbf{G}^T)}{N}}$$

(Π.6)

όπου N το μέγεθος (οι διαστάσεις) των πινάκων του αρχικού αντικειμένου (*original object*) και του αντίστοιχου ανακτηθέντος (*reconstructed object*).

Στην αμέσως επόμενη εικόνα (**Εικόνα Π.3.**) παραθέτουμε τις γραφικές παραστάσεις της μετρικής συνάρτησης συναρτήσει της παραμέτρου κανονικοποίησης q^2 για μια συγκεκριμένη προσομοιωμένη θορυβώδης προβολή σε τέσσερα διαφορετικά επίπεδα θορύβου. Από τα παρακάτω γραφήματα της Εικόνας Π.3., παρατηρείται μία ανύψωση της γραφικής παράστασης συναρτήσει της αύξησης του θορύβου, γεγονός που ισοδυναμεί με μετακύλιση του εκτιμώμενου εύρους και κατ' επέκταση της τελικής επιλεγόμενης βέλτιστης τιμής σε όλο και μεγαλύτερες τιμές της παραμέτρου q^2 . Όμως, σε ότι αφορά τα χαμηλότερα επίπεδα θορύβου (2 % και 25 %) οι γραφικές παραστάσεις δείχνουν να οδηγούν σε διαστήματα εκτίμησης κι εν τέλει επιλογής της βέλτιστης τιμής της παραμέτρου, εφάμιλλα με εκείνα που λαμβάνονται με την μετρική – ανισωτική σχέση (Π.6) που θα χρησιμοποιήσουμε σε όλες τις εφαρμογές της παρούσας διατριβής.

Τέλος, αξίζει να ειπωθεί, ότι η μετρική συνάρτηση της σχέσης (Π.7.) μπορεί να αποτελέσει την βάση για την μελλοντική ανάπτυξη μιας ακριβούς υπολογιστικής τεχνικής με σκοπό την εύρεση της βέλτιστης τιμής σε κάθε υπό μελέτη αντίστροφο πρόβλημα.

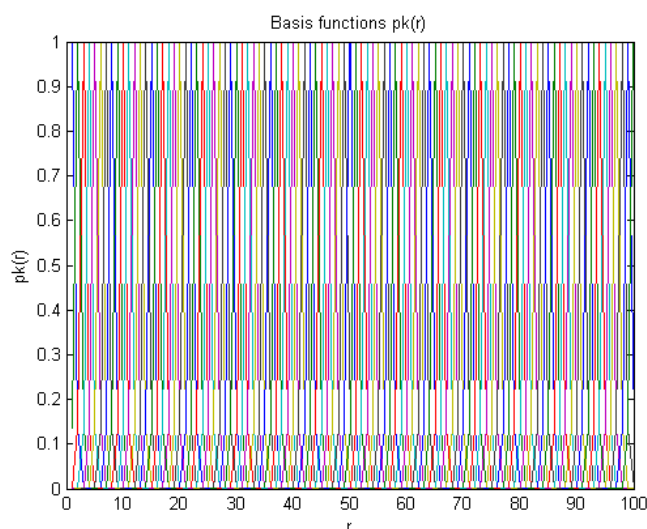


Εικόνα Π.3.: Οι γραφικές παραστάσεις της μετρικής συνάρτησης συναρτήσει της παραμέτρου κανονικοποίησης q^2 για ένα συγκεκριμένο συνθετικό θορυβώδες παράδειγμα σε τέσσερα διαφορετικά επίπεδα θορύβου (*λογαριθμική κλίμακα*).

Εφαρμογή της μεθόδου *BASEX* απουσία θορύβου

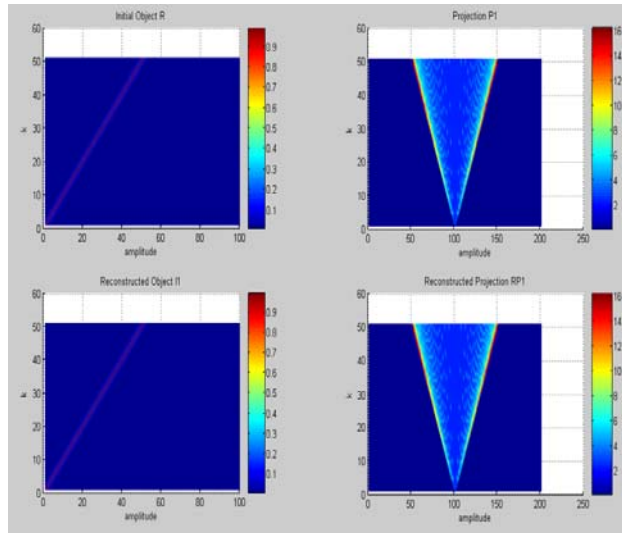
Παρουσιάζουμε μία πρώτη εφαρμογή ελέγχου της μεθόδου *BASEX* σε μία συνθετική – προσομοιωμένη εικόνα και σε περιβάλλον ιδανικών συνθηκών, απουσία θορύβου.

Αρχικά, κατασκευάζουμε ένα κυλινδρικό αντικείμενο μέσω του συνόλου των συναρτήσεων βάσης $\rho_k(r)$, για $k = 0, \dots, 100$ και $\sigma = 1$ (**Σχήμα Π.2.**), όπως αυτό απεικονίζεται στην Εικόνα Π.3. (**Εικ. Π.3.**, πάνω αριστερό γράφημα). Έπειτα, εργαζόμενοι σε κατάλληλο υπολογιστικό περιβάλλον (*MATLAB*), εφαρμόζουμε αναλυτικά τις σχέσεις (Π.1) έως (Π.5) με σκοπό την επίλυση του παρόντος προβλήματος.



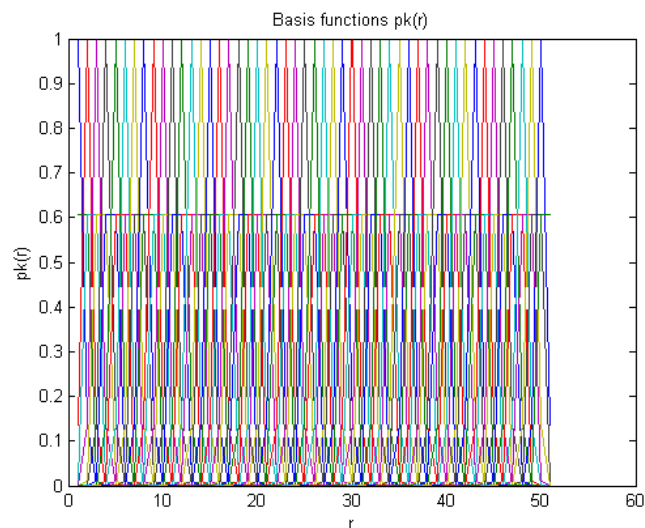
Σχήμα Π.2.: Οι συναρτήσεις βάσης $\rho_k(r)$ για $k = 0, \dots, 100$ και $\sigma = 1$.

Σύμφωνα με την παρακάτω εικόνα, λαμβάνουμε τελικά μία άριστη ανασύνθεση τόσο σε ότι αφορά την προβολή όσο βέβαια και σε ότι αφορά το κυλινδρικό αντικείμενο, για κατάλληλη τιμή της παραμέτρου q^2 ίσης με $q^2 = 10^{-3}$, η παρεμβολή της οποίας στο ίχνος του πίνακα \mathbf{GG}^T είναι σχεδόν μηδενική (για την ακρίβεια $4.4496 \cdot 10^{-5}$).

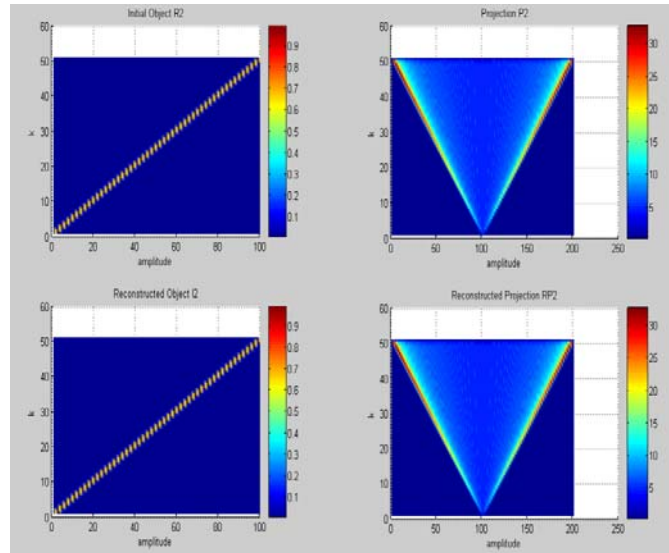


Εικόνα Π.4.: Η συνθετική – προσομοιωμένη εικόνα του αρχικού κυλινδρικού αντικειμένου (πάνω αριστερά) και η προβολή του αντικειμένου αυτού μετά την εφαρμογή ευθέως μετασχηματισμού Abel (πάνω δεξιά). Η ανασύνθεση του αντικειμένου (κάτω αριστερά) και της προβολής αντίστοιχα (κάτω δεξιά) μέσω της χρήσης της μεθόδου BASEX ($\sigma = 1$).

Μελετώντας την παραπάνω εφαρμογή για πλατιά βάση συναρτήσεων ($\sigma = 2$), κατασκευάζουμε ένα κυλινδρικό αντικείμενο (Εικ. Π.5., πάνω αριστερό γράφημα) μέσω του συνόλου των συναρτήσεων βάσης $\rho_k(r)$, όπου τώρα $k = 0, \dots, 51$ και $\sigma = 2$ (Σχήμα Π.3.).



Σχήμα Π.3.: Οι συναρτήσεις βάσης $\rho_k(r)$ για $k = 0, \dots, 51$ και $\sigma = 2$.



Εικόνα Π.5.: Η προσομοιωμένη εικόνα του νέου κυλινδρικού αντικειμένου (πάνω αριστερά) και η αντίστοιχη προβολή του ύστερα από την εφαρμογή ευθέως μετασχηματισμού Abel (πάνω δεξιά). Η ανασύνθεση του αντικειμένου (κάτω αριστερά) και της προβολής (κάτω δεξιά) μέσω της εφαρμογής της μεθόδου *BASEX* ($\sigma = 2$).

Παρατηρώντας την Εικόνα Π.5., προκύπτει και πάλι μία άριστη ανασύνθεση της προβολής και της συνθετικής εικόνας του αντικειμένου αντίστοιχα, για βέλτιστη τιμή παραμέτρου $q^2 = 10^{-3}$, η οποία προκαλεί σχεδόν μηδενική παρεμβολή στο ίχνος του πίνακα \mathbf{GG}^T (για την ακρίβεια $1.3095 \cdot 10^{-5}$).

Βιβλιογραφία

- [1]. Wikipedia, http://en.wikipedia.org/wiki/Abel_transform, accessed 15 June 2008.
- [2]. H. R. Griem, *Plasma Spectroscopy*, McGraw-Hill, New York, NY (1964).
- [3]. L. Montgomery Smith, Dennis R. Keefer, S. I. Sudharsanan, *Abel inversion using transform techniques*, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, **39** (5), 367 (1988).
- [4]. O. H. Nestor and H. N. Olsen, *SIAM Rev.* **22**, 200 (1960).
- [5]. K. Bockasten, *JOSA* **51**, 943 (1961).
- [6]. M. J. Freeman and D. Katz, *JOSA* **53**, 1172 (1963).
- [7]. C. J. Cremers and R. C. Birkebak, *Appl. Opt.* **5**, 1057 (1966).
- [8]. R. T. Shelby, Master's Thesis, Department of Mathematics, University of Tennessee, Knoxville, TN (1976).
- [9]. C. D. Maldonado, A. P. Caron, H. N. Olsen, *JOSA* **55**, 1247 (1965).
- [10]. Pablo A. Vicharelli, Walter P. Lapatovich, *Iterative method for computing the inverse Abel transform*, *Appl. Phys. Lett.*, **50** (10), 557 (1987).
- [11]. Mathworks, <http://www.mathworks.com>, accessed 15 August 2008.
- [12]. A. Asano, *Radon transformation and projection theorem*, Topic 5, Lecture notes of subject Pattern information processing, 2002 Autumn Semester, <http://kuva.mis.hiroshima-u.ac.jp/~asano/Kougi/02a/PIP/>
- [13]. A. Averbuch, R.R. Coifman, D.L. Donoho, M. Israeli, J. Wald'en, Fast Slant Stack, *A notion of Radon Transform for Data in a Cartesian Grid which is Rapidly Computible, Algebraically Exact, Geometrically Faithful and Invertible*, *SIAM J. Scientific. Computing*, (2001).

- [14]. P. Milanfar, *A Model of the Effect of Image Motion in the Radon Transform Domain*, [IEEE Transactions on Image processing](#), **8** (9), (1999).
- [15]. E. Kupce, R. Freeman, *The Radon Transform: A New Scheme for Fast Multidimensional NMR*, [Concepts in Magnetic Resonance](#), Wiley Periodicals, **22**, 4 (2004).
- [16]. S. Venturas, I. Flaounas, *Study of Radon Transformation and Application of its Inverse to NMR*, (2005).
- [17]. C. M. Vest, *Formation of images from projections: Radon and Abel transforms*, [J. Opt. Soc. Am.](#) **64** (9), 1215 (1974).
- [18]. V. Dribinski, A. Ossadchi, V. A. Mandelshtam, H. Reisler, *Reconstruction of Abel-transformable images: The Gaussian basis-set expansion Abel transform method*, [Rev. Sci. Instrum.](#), **73** (7), 2634 (2002).
- [19]. A. N. Tikhonov, *Solution of Incorrectly Formulated Problems and the Regularization Method*, [Sov. Math. Dokl.](#) **4**, 1035 (1963).
- [20]. Esben Høgh-Rasmussen, *Tikhonov-Regularization is a Viable Reconstruction Method*, Neurobiology Research Unit Copenhagen University Hospital, DK-2100 Copenhagen, Denmark, www.nru.dk/research/projects/tikhonov_snm2006.pdf .
- [21]. Wikipedia, http://en.wikipedia.org/wiki/Condition_number, accessed 3 July 2008.
- [22]. <http://eteal.gmu.edu/ececourses/ece699/notes/note4.html>, accessed 5 July 2008, web-posted on Feb 3 (1998).
- [23]. Golub and Van Loan, *Matrix Computations*, **3rd edition**, John Hopkins University Press (1996).
- [24]. M. Marcus and H. Minc, *Introduction to Linear Algebra*, New York: Dover, p. 191 (1988).

[25]. M. Marcus and H. Minc, *A Survey of Matrix Theory and Matrix Inequalities*, New York: Dover, p. 69 (1992).

[26]. E. Whittaker and G. N. Watson, *A course in Modern Analysis*, **4th ed.**, Cambridge, England: Cambridge University Press, pp. 524-528 (1990).

[27]. D. G. Papazoglou, S. Tzortzakis, *In-line holography for the characterization of ultrafast laser filamentation in transparent media*, [Appl. Phys. Lett.](#), **93**, 041120 (2008).