

*Ιωάννης Νικολάου Μάργαρης*

*Σιδηρομαγνητικές επαφές Josephson  
με ανομοιογενή μαγνήτιση*

*Μία εργασία  
που κατατίθεται στο τμήμα Φυσικής του Πανεπιστημίου Κρήτης  
προς μερική εκπλήρωση των προϋποθέσεων για τον τίτλο του  
διδάκτορα της Φυσικής*



Ηράκλειο, Ελλάδα, Φεβρουάριος 2013

Σιδηρομαγνητικές επαφές Josephson  
με ανομοιογενή μαγνήτιση

Συγγραφέας                    Ιωάννης Ν. Μάργαρης

Επιβλέπων                    Νίκος Φλυτζάνης

Εφταμελής επιτροπή        Ν. Φλυτζάνης  
   Γ. Τσιρώνης  
   Γ. Ψαλτάκης  
   Ν. Παπανικολάου  
   Ξ. Ζώτος  
   Π. Τζανετάκης  
   Γ. Κιοσέογλου

Τμήμα Φυσικής Πανεπιστημίου Κρήτης  
Ηράκλειο, Ελλάδα

2013

## Περίληψη Διατριβής

Σε αυτή τη διατριβή μελετούμε βραχείες σιδηρομαγνητικές επαφές Josephson με ανομοιογενή μαγνήτιση. Τα υπεραγώγιμα ηλεκτρόδια είναι συμβατικού τύπου και οι μαγνητίσεις των ενδιάμεσων στρωμάτων μπορούν να έχουν αυθαίρετο σχετικό προσανατολισμό. Ο σιδηρομαγνητισμός των ενδιάμεσων στρωμάτων αντιμετωπίζεται στα πλαίσια του μοντέλου Stoner. Θεωρούμε επίσης ότι οι επαφές που μελετάμε βρίσκονται στο βαλυστικό όριο, δηλαδή δεν λαμβάνουμε υπόψη μας συστήματα που περιέχουν ατέλειες. Το βασικό μας μοντέλο είναι αυτό των Blonder-Tinkham-Klapwijk και οι εξισώσεις που το διέπουν είναι οι εξισώσεις Bogoliubov-de Gennes. Στη θεωρητική μας μελέτη θεωρούμε τις παραμέτρους τάξης του συστήματος, υπεραγώγιμης και σιδηρομαγνητικής, αυτοσυνεπώς καθορισμένες, ενώ στους αριθμητικούς υπολογισμούς μας θεωρούμε ότι αυτές έχουν τις ομογενείς τιμές τους, μέσα στα όρια του κάθε στρώματος.

Δίνουμε ιδιαίτερη έμφαση στη μελέτη των συντελεστών σκέδασης των μονοσωματιδιακών διεγέρσεων μέσα στην επαφή, καθώς αυτοί συνδέονται με το υπερρεύμα μέσω του τύπου των Fufusaki-Tsukada. Συνδέουμε τους συντελεστές σκέδασης με στοιχεία του T-πίνακα μεταξύ στάσιμων καταστάσεων σκέδασης των ασυμπτωτικών χαμιλτονιανών και, αξιοποιώντας αυτή τη σύνδεση, αποδεικνύουμε διάφορες σχέσεις συμμετρίας για τους συντελεστές σκέδασης. Αυτές με τη σειρά τους αξιοποιούνται, μέσω του τύπου των Fufusaki-Tsukada, για την απόδειξη ιδιοτήτων συμμετρίας της σχέσης υπερρεύματος φάσης (CPR). Κεντρικό μας συμπέρασμα είναι ότι υπερρεύμα σε μηδενική διαφορά φάσης δεν μπορεί να υπάρξει, αν οι μαγνητίσεις του συστήματος είναι συνεπίεδα διανύσματα.

Στη θεωρητική μας μελέτη, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι ο ορισμός του T-πίνακα στο σύστημα της επαφής Josephson, που χαρακτηρίζεται από γενικά διαφορετικές ασυμπτωτικές χαμιλτονιανές, είναι ανάλογος με τον ορισμό του T-πίνακα σε κβαντικά συστήματα με πολλά κανάλια σκέδασης. Επίσης αποδεικνύουμε μια σχέση για το υπερρεύμα, που το σχετίζει με τον πίνακα των συνθηκών συρραφής του συστήματος. Ακόμη επεκτείνουμε μία μέθοδο υπολογισμού της συνάρτησης Green σε μονοδιάστατα συστήματα, που βασίζεται στις αναλυτικές επεκτάσεις σε μιγαδική ενέργεια των γραμμικώς ανεξάρτητων λύσεων των εξισώσεων Bogoliubov-de Gennes.

Στους αριθμητικούς υπολογισμούς μας, με τη χρήση του μη αυτοσυνεπούς μοντέλου, μελετούμε επαφές με ένα ενδιάμεσο σιδηρομαγνητικό στρώμα και σπιν ενεργές ενδοεπιφάνειες. Καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η εμφάνιση υπερρεύματος για μηδενική διαφορά φάσης είναι επακόλουθο του μη συνεπίεδου των μαγνητίσεων της επαφής. Επίσης καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι, σε μονοδιάστατες επαφές, το κρίσιμο υπερρεύμα μειώνεται απότομα στο μηδέν στο ημιμεταλλικό όριο και όταν η γεωμετρία

των μαγνητίσεων δεν επιτρέπει σκέδαση σπιν στις ενδοεπιφάνειες. Διαφορετικά, όταν υπάρχει σκέδαση σπιν στις ενδοεπιφάνειες, το κρίσιμο υπερρεύμα είναι σημαντικό βαθιά μέσα στο ημιμεταλλικό όριο. Αντίθετα, σε τριδιάστατες επαφές Josephson, η μείωση του κρίσιμου υπερρεύματος στο μηδέν, για τις γεωμετρίες μαγνητίσεων χωρίς σκέδαση σπιν στις ενδοεπιφάνειες, γίνεται σταδιακά καθώς προσεγγίζουμε το ημιμεταλλικό όριο.

# Abstract

In this thesis we study short ferromagnetic Josephson junctions with inhomogeneous magnetization textures. The superconducting electrodes consist of conventional superconductors and the magnetizations of intermediate layers can have arbitrary relative orientations. The ferromagnetism of intermediate layers is treated in the Stoner model. Also the junctions we study are assumed to be in the ballistic limit, that is we do not consider the effects of impurities. Our basic model is that of Blonder-Tinkham-Klapwijk and the equations that govern it are the Bogoliubov-de Gennes equations. In the theoretical part of this study, we consider the order parameters of the system, superconducting and ferromagnetic, to be determined self-consistently, while in numerical calculations we assume that they assume their bulk values inside each layer.

We give particular emphasis in the study of the scattering amplitudes of one-body excitations in the junction, as they are related to the supercurrent through the Furusaki-Tsukada formula. We connect the scattering amplitudes to the elements of the T-matrix between stationary scattering states of the asymptotic Hamiltonians and, as a result, we prove various symmetry conditions for the scattering amplitudes. In turn these are exploited to prove, through the Furusaki-Tsukada formula, symmetry conditions on the current phase relation (CPR). Our central result is that supercurrent at zero phase difference cannot flow in the junction, if the magnetizations of the system are coplanar.

In the theoretical part of our study, we come to the conclusion that the definition of the T-matrix for the system of the Josephson junction, which is characterized in general by different asymptotic Hamiltonians, is similar to the definition of the T-matrix for quantum systems with many-channel asymptotic scattering states. Also we prove a general formula for the supercurrent, which connects it to the determinant of the matching condition matrix of the junction. In addition we extend a method for evaluating the Green's function for one dimensional systems, which is based on the analytical continuation, with respect to energy, of the linearly independent solutions of the Bogoliubov - de Gennes equations.

In our numerical study, using the nonself-consistent approximation, we focus on Josephson junctions with one ferromagnetic intermediate layer and spin active interfaces. We reach the conclusion that supercurrent flowing at zero phase difference is a result of the noncoplanarity of the magnetizations of the junction. We also conclude that, in one-dimensional junctions, the critical supercurrent is abruptly reduced to zero in the half-metal limit and when the magnetizations of the junction do not allow of spin flip scattering in the interfaces. Otherwise the supercurrent is significant deep inside the half-metal limit. On the contrary, for planar Josephson junctions, the reduction to zero of

the critical supercurrent for magnetization geometries without spin flip scattering in the interfaces is accomplished gradually as the magnetization of the intermediate layer is increased towards the half-metal limit.

## Ευχαριστίες

*Θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου και την ευγνωμοσύνη μου στον επιβλέποντά μου, καθηγητή Ν. Φλυτζάνη, για την καθοδήγησή του στην εκπόνηση αυτής της διατριβής. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τον συνεργάτη μου Β. Παλτόγλου, καθώς η συνεργασία μας υπήρξε εποικοδομητική. Οφείλω ακόμη να ευχαριστήσω τους καθηγητές Ν. Παπανικολάου, Γ. Σαββίδη και Ν. Garcia για χρήσιμες συζητήσεις που είχαν με τον επιβλέποντά μου, καθώς και τον καθηγητή Π. Δήτσα για χρήσιμες συζητήσεις που έκανε μαζί μου. Ακόμη ευχαριστώ το τμήμα Φυσικής του Πανεπιστημίου Κρήτης, για τη στέγη που μου παρείχε. Επίσης ευχαριστώ τον φίλο μου Δ. Σταυρακούδη για τις πολύτιμες συμβουλές του σχετικά με το πρόγραμμα xelatex, με το οποίο στοιχειοθετήθηκε αυτή η διατριβή. Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τους γονείς μου για την υποστήριξή τους κατά τη διάρκεια εκπόνησης αυτής της διατριβής.*

# Περιεχόμενα

Εφταμελής επιτροπή . . . . .	ii
Περίληψη Διατριβής . . . . .	iii
Περίληψη Διατριβής (English) . . . . .	v
Ευχαριστίες . . . . .	vii
<b>1 Εισαγωγή</b>	<b>1</b>
1.1 Υπεραγωγμότητα και το φαινόμενο Josephson . . . . .	1
1.2 Φαινόμενα σχετικά με τις σιδηρομαγνητικές επαφές Josephson . . . . .	12
1.3 Η δομή αυτής της διατριβής . . . . .	15
<b>2 Καταστάσεις σκέδασης στις σιδηρομαγνητικές επαφές Josephson</b>	<b>18</b>
2.1 Μοντέλο σιδηρομαγνητικής επαφής Josephson . . . . .	18
2.2 Ιδιοσυναρτήσεις ενέργειας ομογενούς υπεραγωγού . . . . .	24
2.3 Ιδιοσυναρτήσεις ενέργειας ομογενούς σιδηρομαγνήτη . . . . .	27
2.4 Καταστάσεις σκέδασης στην επαφή . . . . .	30
2.5 Δέσμιες στάσιμες καταστάσεις . . . . .	42
<b>3 T-πίνακας και εξισώσεις Lippmann-Schwinger</b>	<b>43</b>
3.1 Ελεύθερη συνάρτηση Green . . . . .	43
3.2 Τελεστές Møller και εξισώσεις Lippmann-Schwinger . . . . .	50
3.3 T-πίνακας και οι συντελεστές σκέδασης . . . . .	57
3.4 Συνάρτηση Green στις ασυμπτωτικές περιοχές . . . . .	64
3.A □ T-πίνακας σε απλά μοντέλα με διαφορετική ασυμπτωτική συμπεριφορά στα αριστερά και τα δεξιά . . . . .	69
<b>4 Συνθήκες συμμετρίας των συντελεστών σκέδασης I</b>	<b>74</b>
4.1 Μετασχηματισμοί των εξισώσεων BdG . . . . .	74
4.2 Ο μετασχηματισμός της μιγαδικής συζυγίας . . . . .	76
4.3 Ο μετασχηματισμός της αντιστροφής χρόνου . . . . .	84
4.4 Μικτός μετασχηματισμός αντιστροφής χρόνου και στροφής στο επίπεδο των μαγνητίσεων του συστήματος . . . . .	88



4.5	Περαιτέρω συνέπειες του μικτού μετασχηματισμού . . . . .	95
4.6	Ο μετασχηματισμός της συζυγίας Bogoliubov . . . . .	98
<b>5</b>	<b>Συνθήκες συμμετρίας των συντελεστών σκέδασης II</b>	<b>103</b>
5.1	Ο μετασχηματισμός της μιγαδικής συζυγίας . . . . .	103
5.2	Ο μετασχηματισμός της αντιστροφής χρόνου . . . . .	108
5.3	Ο μετασχηματισμός της συζυγίας Bogoliubov . . . . .	109
<b>6</b>	<b>Συνάρτηση Green</b>	<b>112</b>
6.1	Ιδιότητες της συνάρτησης Green . . . . .	112
6.2	Συνάρτηση Green από γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις των εξισώσεων BdG . . . . .	116
6.3	Συνάρτηση Green από γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις των εξισώσεων BdG II . . . . .	124
6.4	Συνάρτηση Green στις ασυμπτωτικές περιοχές . . . . .	126
6.5	Τοπική πυκνότητα καταστάσεων . . . . .	129
6.A	□ Συμμετρία της συνάρτησης Green . . . . .	132
<b>7</b>	<b>Υπολογισμός του υπερρεύματος και ιδιότητές του</b>	<b>134</b>
7.1	Υπερέυμα από τη συνάρτηση Green . . . . .	134
7.2	Τύπος των Furusaki-Tsukada . . . . .	137
7.3	Υπερέυμα από την ορίζουσα του πίνακα των συνθηκών συρραφής . . . . .	140
7.4	Συμμετρίες της σχέσης υπερρεύματος-φάσης και της ορίζουσας του πίνακα των συνθηκών συρραφής . . . . .	143
7.5	Η εξάρτηση του υπερρεύματος από τις διευθύνσεις των μαγνητίσεων της επαφής - Μη αυτοσυνεπές μοντέλο . . . . .	149
<b>8</b>	<b>Αριθμητικά αποτελέσματα</b>	<b>153</b>
8.1	Υπερέυμα μηδενικής διαφοράς φάσης - Γενική παρουσίαση . . . . .	154
8.2	Εξάρτηση του υπερρεύματος μηδενικής φάσης και του κρίσιμου υπερρεύματος από τις ισχύες ενδοεπιφανειακής μαγνήτισης και σκέδασης . . . . .	162
8.3	Εξάρτηση του κρίσιμου υπερρεύματος και του υπερρεύματος μηδενικής φάσης από τη μαγνήτιση και το πάχος του ενδιάμεσου στρώματος - το ημιμεταλλικό όριο $M > 1$ . . . . .	172
8.4	Φάσμα δέσμιων καταστάσεων, πυκνότητα καταστάσεων και συνάρτηση Green . . . . .	188
8.5	Τριδιάστατες σιδηρομαγνητικές επαφές Josephson . . . . .	198
8.6	Συντονισμοί σε τριδιάστατες επαφές Josephson με ομογενή μαγνήτιση και ισχυρή σκέδαση στις ενδοεπιφάνειες . . . . .	209

<b>9</b>	<b>Επίλογος</b>	<b>216</b>
9.1	Προθέσεις μελλοντικής εργασίας . . . . .	219
<b>10</b>	<b>Δημοσιεύσεις</b>	<b>220</b>
	<b>Βιβλιογραφία</b>	<b>221</b>

# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

Σε αυτή τη διατριβή θα μελετήσουμε βραχείες επαφές Josephson (short Josephson junctions) συμβατικών υπεραγωγών με σιδηρομαγνητικά ενδιάμεσα στρώματα, οι μαγνητίσεις των οποίων μπορούν να έχουν αυθαίρετο σχετικό προσανατολισμό. Ιδιαίτερη έμφαση θα δοθεί στην εμφάνιση υπερρεύματος μηδενικής διαφοράς φάσης, που συμβαίνει όταν οι μαγνητίσεις της επαφής έχουν μη συνεπίπεδη γεωμετρία. Σε αυτό το εισαγωγικό κεφάλαιο θα δώσουμε πληροφορίες στις οποίες βασίζεται το πρόβλημά μας, θα αναφέρουμε σε γενικές γραμμές την κατάσταση στο πεδίο έρευνας των σιδηρομαγνητικών επαφών Josephson με ανομοιογενή μαγνήτιση και θα περιγράψουμε τη γενική δομή αυτής της διατριβής.

### 1.1 Υπεραγωγιμότητα και το φαινόμενο Josephson

Το φαινόμενο της υπεραγωγιμότητας ανακαλύφθηκε από τον H. Kamerlingh Onnes το 1911, ως ο απότομος μηδενισμός της αντίστασης μετάλλων, όπως ο μόλυβδος, ο υδράργυρος, το αλουμίνιο και ο κασσίτερος κάτω από μια κρίσιμη θερμοκρασία  $T_c$ , που είναι της τάξης των μερικών βαθμών Kelvin για τους συμβατικούς υπεραγωγούς, χαρακτηριστικής για κάθε υλικό. Αργότερα, το 1933, ανακαλύφθηκε από τους Meissner και Ochsenfeld ότι οι υπεραγωγοί έχουν και μία επιπρόσθετη ιδιότητα, αυτή του τέλειου διαμαγνήτη. Έτσι αν ένας υπεραγωγός, κάτω από την κρίσιμη θερμοκρασία, βρεθεί εντός μαγνητικού πεδίου, αναπτύσσει ηλεκτρικό ρεύμα στην επιφάνειά του και εντός ενός χαρακτηριστικού μήκους  $\lambda_L$  (μήκος διείσδυσης London), το οποίο είναι τέτοιο ώστε να μηδενίσει το μαγνητικό πεδίο εντός του υπεραγωγού και σε βάθος μεγαλύτερο από το μήκος διείσδυσης London, που είναι τυπικά γύρω στα  $100nm$ . Αυτές οι δύο ιδιότητες της μηδενικής αντίστασης και του τέλειου διαμαγνητισμού χαρακτηρίζουν πλήρως την υπεραγωγίμη κατάσταση, η οποία είναι μία κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας. Μια πολύ ωραία, σύντομη και περιεκτική ανασκόπηση της υπεραγωγιμότητας και της

ιστορίας της δίνεται στην αναφορά [1], μαζί με αναφορές στην πρωταρχική βιβλιογραφία.

Η μικροσκοπική θεωρία της υπεραγωγιμότητας ξεκίνησε με την παρατήρηση του Cooper [2] ότι, σε μια γεμάτη θάλασσα Fermi ηλεκτρονίων, δύο ηλεκτρόνια που αλληλεπιδρούν ελκτικά, με οσονδήποτε μικρή ένταση, θα σχηματίσουν μία δέσμια κατάσταση, η οποία δεν είναι δυνατόν να προσεγγιστεί με τη χρήση θεωρίας διαταραχών. Λίγο αργότερα, οι Bardeen, Cooper και Schrieffer [3] κατάφεραν να περιγράψουν τη κατάσταση πολλών σωμάτων της υπεραγωγιμότητας, βασιζόμενοι στο φυσικό επιχείρημα του Cooper και αποδίδοντας την ελκτική αλληλεπίδραση των ηλεκτρονίων στην ανταλλαγή φωνονίων (όπως είχε προτείνει ο Fröhlich [4]). Έτσι αναπτύχθηκε για πρώτη φορά μία θεωρία, η λεγόμενη θεωρία BCS, που εξηγεί ικανοποιητικά όλες τις ιδιότητες της λεγόμενης συμβατικής υπεραγωγιμότητας. Υπάρχει πληθώρα εγχειριδίων που συζητούν αυτή τη θεωρία, μεταξύ των οποίων τα [5–12].

Η θεωρία BCS είναι μια κβαντική θεωρία μέσου πεδίου για ένα σύστημα ηλεκτρονίων με ασθενή ελκτική αλληλεπίδραση μέσω ανταλλαγής φωνονίων, σε μια περιοχή ενεργειών πλάτους  $\omega_D$  (συχνότητα Debye) γύρω από την ενέργεια Fermi  $E_F$ . Εξηγεί ικανοποιητικά την υπεραγωγιμότητα στους συμβατικούς υπεραγωγούς. Λαμβάνει υπόψη της τη δυνατότητα που έχουν τα ηλεκτρόνια να σχηματίσουν ανά ζεύγη δέσμιες καταστάσεις, με αποτέλεσμα ένα ηλεκτρόνιο που κινείται μέσα στον υπεραγωγό να έχει κάποια πιθανότητα να σχηματίσει ένα ζεύγος Cooper με ένα άλλο ηλεκτρόνιο και να δημιουργηθεί μία σπή. Η δυνατότητα αλλαγής του σωματιδιακού χαρακτήρα των στοιχειωδών διεγέρσεων απαιτεί την ύπαρξη ενός δυναμικού μέσου πεδίου  $\Delta(x)$ , εν γένει μιγαδικού, που σκεδάζει τα ηλεκτρόνια σε οπές. Αυτό το δυναμικό ονομάζεται δυναμικό ζεύγους ή συνάρτηση χάσματος, για λόγους που θα φανούν παρακάτω. Έτσι οι εξισώσεις Hartree-Fock-Bogoliubov που προκύπτουν λαμβάνουν υπόψη στις μονοσωματιδιακές κυματοσυναρτήσεις και τη μεταβλητή του σωματιδιακού χαρακτήρα των στοιχειωδών διεγέρσεων του συστήματος. Βέβαια η δυνατότητα αλλαγής του σωματιδιακού χαρακτήρα δημιουργεί πρόβλημα με τη διατήρηση του αριθμού των ηλεκτρονίων στο σύστημα. Αυτό απαιτεί η ανάλυση να γίνεται πάντα στη μεγαλοκανονική συλλογή Gibbs, με σταθερό χημικό δυναμικό και μεταβλητό αριθμό σωματιδίων, ο οποίος όμως έχει αμελητέα σχετική διακύμανση, λόγω του μακροσκοπικού μεγέθους του συστήματος. Αποδεικνύεται [1, 7] ότι ο αριθμός των ηλεκτρονίων και η μιγαδική φάση του δυναμικού ζεύγους  $\Delta(x)$  είναι συζυγείς κβαντικές μεταβλητές και οι διακυμάνσεις τους ικανοποιούν μία αρχή απροσδιοριστίας

$$\Delta N \Delta \chi \geq 1, \quad (1.1)$$

όπου  $N$  ο αριθμός των ηλεκτρονίων και  $\chi$  η φάση του δυναμικού ζεύγους  $\Delta$ . Οι καταστάσεις που μελετά η θεωρία BCS είναι κατάστασεις απόλυτα καθορισμένης φάσης

χ. Η διακύμανση του αριθμού των σωματιδίων γίνεται αισθητή μόνο σε υπεραγώγιμα συστήματα με πολύ μικρές διαστάσεις.

Η θεωρία των Bardeen-Cooper-Schrieffer προβλέπει έναν πολύ ειδικό τύπο ζεύγους ηλεκτρονίων στην κατάσταση της υπεραγωγιμότητας. Συγκεκριμένα προβλέπει ζεύγη Cooper που η κυματοσυνάρτησή τους έχει αντίθετα σπιν για τα δύο ηλεκτρόνια που το αποτελούν, στην αντισυμμετρική singlet κατάσταση, και χωρικό κομμάτι που είναι σφαιρικά συμμετρικό στη σχετική θέση των δύο ηλεκτρονίων. Στην κατάσταση χωρίς υπερρεύμα επίσης προβλέπεται ότι οι ορμές των δύο ηλεκτρονίων είναι αντίθετες και η συνολική ορμή του ζεύγους μηδέν. Τα δεδομένα αυτά δεν είναι συμβατά με την κατάσταση των λεγόμενων μη συμβατικών υπεραγωγών, όπου η συμμετρία της κυματοσυνάρτησης των ζευγών Cooper μπορεί να είναι διαφορετική, πάντα σε αρμονία με την απαγορευτική αρχή του Pauli. Επίσης η απαίτηση για ζεύγη Cooper με μηδενική ορμή κέντρου μάζας στην κατάσταση μηδενικού υπερρεύματος δεν ικανοποιείται στην υπεραγώγιμη κατάσταση των Fulde-Ferrell-Larkin-Ovchinnikov [13, 14], που συνδυάζει την ύπαρξη ζευγών Cooper με μη μηδενική ορμή κέντρου μάζας και δυναμικού ανταλλαγής (exchange field). Ένα ανάλογο της κατάστασης αυτής εμφανίζεται στο ενδιάμεσο στρώμα επαφών Josephson με σιδηρομαγνητικό ενδιάμεσο στρώμα (SFS) [15]. Επίσης εικάζεται η εμφάνισή της σε ορισμένους μη συμβατικούς υπεραγωγούς, όπως ο μεγάλης ενεργού μάζας υπεραγωγός  $\text{CeCoIn}_5$  [16, 17].

Η ενέργεια δέσμευσης των ζευγών Cooper στους συμβατικούς υπεραγωγούς είναι της τάξης των μερικών  $meV$ , που δίνει και το μέτρο του δυναμικού ζεύγους  $\Delta$ . Τα ζεύγη Cooper αποτελούνται από ηλεκτρόνια στην περιοχή της ενέργειας Fermi, σε ένα εύρος ενεργειών που δίνεται από το  $|\Delta|$ <sup>1</sup>. Αυτό σημαίνει ότι ηλεκτρόνια που εισέρχονται στον υπεραγωγό με αυτές τις ενέργειες ζευγαρώνονται αμέσως και δεν μπορούν να διαδοθούν μέσα στον υπεραγωγό. Έτσι το ενεργειακό φάσμα των μονοσωματιδιακών καταστάσεων του υπεραγωγού έχει ένα χάσμα γύρω από την ενέργεια Fermi, πλάτους  $|\Delta|$ . Γι' αυτό το λόγο ονομάζεται και συνάρτηση χάσματος. Για ηλεκτρόνια με μεγαλύτερες ενέργειες υφίσταται μια αλληλεπίδραση με το συμπύκνωμα των ζευγών Cooper, η οποία δίνει την ανάμιξη μεταξύ του ηλεκτρονιακού χαρακτήρα με το χαρακτήρα οπής. Συνεπώς οι στάσιμες καταστάσεις (ιδιοκαταστάσεις ενέργειας) των μονοσωματιδιακών διεγέρσεων σε έναν υπεραγωγό έχουν μικτό χαρακτήρα ηλεκτρονίου-οπής. Ο μικτός αυτός χαρακτήρας είναι πιο έντονος, όσο πιο κοντά είναι η ενέργεια στην ενέργεια Fermi. Αξίζει να αναφέρουμε ότι η ύπαρξη χάσματος είναι μια ιδιότητα του μοντέλου των BCS και μπορεί να μην υφίσταται, όπως σε υπεραγώγιμα συστήματα με μαγνητικές ατέλειες. Τότε και μεν το δυναμικό ζεύγους  $\Delta$  είναι μη μηδενικό στην υπεραγώγιμη κατάσταση, αλλά εμφανίζονται καταστάσεις εντός του χάσματος που, ανάλογα με τη συγκέντρωση

---

<sup>1</sup>Αυτό καθιστά την υπεραγώγιμη κατάσταση χαμηλότερης ενέργειας και άρα πιο ευσταθή από την κανονική.

των ατελειών, μπορούν και να το γεμίσουν [10, 11, 18, 19].

Μπορούμε να εκτιμήσουμε τη χωρική έκταση των ζευγών Cooper στη θεωρία BCS χρησιμοποιώντας την αρχή της απροσδιοριστίας του Heisenberg. Έτσι, εφόσον τα ζεύγη Cooper έχουν μια ενέργεια της τάξης του ενεργειακού χάσματος σε μηδενική θερμοκρασία  $\Delta_0$  και άρα μία διακύμανση στην ορμή που δίνεται από τη σχέση  $\Delta p = \Delta_0/v_F$ , όπου  $v_F$  η ταχύτητα Fermi, η αρχή της απροσδιοριστίας  $\Delta x \Delta p \sim \hbar$  μας δίνει για τη χωρική έκταση  $\xi_0$  του ζεύγους Cooper την εκτίμηση

$$\xi_0 \sim \frac{\hbar v_F}{\Delta_0}. \quad (1.2)$$

Το μήκος  $\xi_0$  ονομάζεται μήκος συνάφειας (coherence length) και διαφέρει σημαντικά ανάλογα με τον υπεραγωγό, είναι όμως πάντα αρκετά μεγαλύτερο από τη μέση απόσταση μεταξύ των ηλεκτρονίων στους συμβατικούς υπεραγωγούς. Επομένως υπάρχει σημαντική χωρική αλληλεπικάλυψη των ζευγών Cooper και άρα μεγάλη πυκνότητα αυτών, κάτι που κάνει τη θεωρία μέσου πεδίου μια πολύ καλή προσέγγιση της υπεραγωγίμης κατάστασης.

Οφείλουμε να διευκρινίσουμε ότι η συνάρτηση  $\Delta(x)$ , που έχουμε έως τώρα αναφέρει ως δυναμικό ζεύγους, είναι το χωρικό κομμάτι του πραγματικού δυναμικού ζεύγους, το οποίο εξαρτάται και από τα σπιν των σωματιδίων που αλληλεπιδρούν. Στη θεωρία BCS των συμβατικών υπεραγωγών εννοείται πάντα ότι το κομμάτι σπιν τους δυναμικού ζεύγους είναι αντισυμμετρικό. Έτσι το δυναμικό ζεύγους στους συμβατικούς υπεραγωγούς δίνεται από τη σχέση

$$\Delta(x) = g \langle \psi_{\uparrow}(x) \psi_{\downarrow}(x) \rangle, \quad (1.3)$$

όπου η μέση τιμή  $\langle \dots \rangle$  είναι ως προς τη θερμοδυναμική κατάσταση ισορροπίας του συστήματος,  $g$  είναι η σταθερά σύζευξης και  $\psi_{\uparrow, \downarrow}(x)$  είναι ο τελεστής καταστροφής ηλεκτρονίου με σπιν πάνω ή κάτω στη θέση  $x$ . Η μέση τιμή στην παραπάνω σχέση μπορεί να ερμηνευθεί ως η κυματοσυνάρτηση ενός ζεύγους Cooper. Επομένως συμπεραίνουμε ότι το δυναμικό ζεύγους ή συνάρτηση χάσματος μας δίνει πληροφορίες για την αλληλεπίδραση ηλεκτρονίων και οπών, για το μέγεθος του χάσματος των μονοσωματιδιακών στάσιμων καταστάσεων και είναι ανάλογο της κυματοσυνάρτησης του ζεύγους Cooper.

Σημειώνουμε ότι σε έναν ομογενή υπεραγωγό το δυναμικό ζεύγους είναι σταθερή συνάρτηση της θέσης, που προσδιορίζει το κέντρο μάζας του ζεύγους Cooper. Όμως σε περιπτώσεις ανομοιογενών χωρικά συστημάτων, όπως οι επαφές υπεραγωγών με άλλα υλικά και οι επαφές Josephson, το δυναμικό ζεύγους μπορεί να είναι χωρικά εξαρτημένο. Η γενίκευση σε ένα χωροεξαρτημένο δυναμικό ζεύγους δόθηκε από το Gor'kov [5], ο οποίος απέδειξε και ότι η θεωρία BCS καταλήγει στην παλαιότερη θεωρία της υπεραγωγιμότητας των Ginzburg και Landau (θεωρία GL) [20], στο όριο που η θερμοκρασία

του υπεραγωγίμου συστήματος είναι πολύ κοντά στην κρίσιμη θερμοκρασία. Το χωροεξαρτημένο δυναμικό ζεύγους προκύπτει ότι είναι ανάλογο με την παράμετρο τάξης  $\psi(x)$ , που εισαγάγει η θεωρία GL και που περιγράφει την υπεραγωγίμη κατάσταση. Το πλεονέκτημα της μεθόδου GL είναι ότι οι εξισώσεις της είναι πολύ απλούστερες και χρησιμοποιείται ευρύτατα ακόμα και σήμερα για την επίλυση συστημάτων ανομοιογενούς υπεραγωγιμότητας. Οι εξισώσεις της θεωρίας GL είναι

$$\alpha\psi + \beta|\psi|^2\psi + \frac{1}{4m} \left( -i\hbar\nabla + \frac{2e}{c}\mathbf{A} \right)^2 \psi = 0 \quad (1.4)$$

και

$$\mathbf{J} = -\frac{e}{m}|\psi|^2 \left( \hbar\nabla\chi + \frac{2e}{c}\mathbf{A} \right), \quad (1.5)$$

όπου

$$\psi(x) = |\psi(x)|e^{i\chi(x)} \propto \Delta(x), \quad (1.6)$$

$e$  η απόλυτη τιμή του φορτίου του ηλεκτρονίου και  $m$  η μάζα του,  $c$  η ταχύτητα του φωτός,  $\mathbf{A}(x)$  το διανυσματικό δυναμικό,  $\mathbf{J}(x)$  το υπερρεύμα και  $\alpha, \beta$  σταθερές. Σε ανομοιογενή συστήματα πρέπει να συμπληρώσουμε τις παραπάνω εξισώσεις με κατάλληλες συνοριακές συνθήκες [7, 12].

Απο τις παραπάνω εξισώσεις θα επικεντρωθούμε στην εξίσωση (1.5). Παρατηρούμε ότι η κλίση της φάσης του δυναμικού ζεύγους (ή της παραμέτρου τάξεως) καθώς και το διανυσματικό δυναμικό παράγουν υπερρεύμα. Επίσης οι εξισώσεις GL είναι αναλλοίωτες κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας. Η συνθήκη η παράμετρος τάξης να είναι μονοσήμαντη συνάρτηση της θέσης έχει την εξής επίπτωση στην περίπτωση ενός υπεραγωγίμου βρόχου, π.χ τοροειδούς σχήματος: αν επιλέξουμε μία κλειστή καμπύλη μέσα στο υπεραγωγίμο υλικό και υπολογίσουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα και των δύο μελών της σχέσης (1.5), καταλήγουμε στη σχέση

$$\Phi' = \Phi + \frac{mc}{2e^2} \oint \frac{1}{|\psi|^2} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{r} = n\Phi_0, \quad (1.7)$$

όπου  $\Phi$  είναι η μαγνητική ροή μέσα από την κλειστή καμπύλη και

$$\Phi_0 = \frac{hc}{2e} = 2.07 \times 10^{-7} Gauss \cdot cm^2 \quad (1.8)$$

είναι το λεγόμενο κβάντο της μαγνητικής ροής. Η ποσότητα  $\Phi'$  ονομάζεται ροοειδές (fluxoid) και είναι κβαντισμένη σε ακέραια πολλαπλάσια του κβάντου της μαγνητικής ροής. Επίσης είναι και μια ποσότητα ανεξάρτητη του χρόνου. Η κβάντωση του ροοειδούς θα μας φανεί χρήσιμη λίγο παρακάτω. Σημειώνουμε ότι, στην εξαγωγή της σχέσης (1.7), έχουμε χρησιμοποιήσει τη σχέση

$$\oint \nabla \chi \cdot d\mathbf{r} = 2\pi n. \quad (1.9)$$

Στην περίπτωση που το υπεραγωγίμο υλικό είναι αρκετά παχύ και επιλέξουμε την καμπύλη ολοκλήρωσης να είναι αρκετά βαθιά μέσα σε αυτό, ώστε το ρεύμα πάνω στην καμπύλη να μηδενίζεται, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η συνολική μαγνητική ροή που περικλείει ο υπεραγωγίμος βρόχος πρέπει να είναι κβαντισμένη.

Οι εξισώσεις GL είναι ο απλούστερος τρόπος για να προσεγγίσουμε το πρόβλημα της ανομοιογενούς υπεραγωγιμότητας, όταν οι συνθήκες είναι κατάλληλες ώστε να ισχύουν οι προσεγγιστικές της απαιτήσεις. Η εφαρμογή ενός μαγνητικού πεδίου σε ένα υπεραγωγίμο υλικό οδηγεί στο φαινόμενο Meissner εξασθενίζοντας όμως την υπεραγωγιμότητα μέχρι το μαγνητικό πεδίο να φτάσει σε μια κρίσιμη τιμή, που εξαρτάται από τη θερμοκρασία, οπότε η υπεραγωγιμότητα καταστρέφεται και το υλικό μεταβαίνει στην κανονική κατάσταση. Αντίστοιχα υπάρχει και ένα κρίσιμο υπερρεύμα, πάνω από το οποίο το μαγνητικό πεδίο που παράγει είναι τόσο ισχυρό, ώστε καταστρέφει την υπεραγωγιμότητα. Το φαινόμενο αυτό συμβαίνει με αυτόν τον τρόπο στους λεγόμενους υπεραγωγούς τύπου I, οι οποίοι χαρακτηρίζονται από μήκος διείσδυσης μικρότερο από το μήκος συνάφειας. Όπως ανακάλυψε ο Abrikosov [21], χρησιμοποιώντας τη θεωρία GL, όταν το μήκος συνάφειας είναι μικρότερο από το μήκος διείσδυσης, τότε η υπεραγωγίμη κατάσταση επιτρέπει πάνω από ένα κρίσιμο μαγνητικό πεδίο  $B_{c1}$  τη διείσδυση του μαγνητικού πεδίου στο εσωτερικό της με τη μορφή γραμμικών περιοχών κανονικής κατάστασης, με διάμετρο της τάξης του μήκους συνάφειας, που περιβάλλονται από υπερρεύματα, με διάμετρο της τάξης του μήκους διείσδυσης, που θωρακίζουν τον υπόλοιπο υπεραγωγό από το μαγνητικό πεδίο. Οι γραμμικές αυτές περιοχές ονομάζονται στρόβιλοι ή δίνες Abrikosov (Abrikosov vortices). Αν το μαγνητικό πεδίο αυξηθεί πάνω από μια κρίσιμη τιμή  $B_{c2} > B_{c1}$ , ο υπεραγωγός μεταπίπτει πάλι στην κανονική κατάσταση. Η κατάσταση δινών των λεγόμενων υπεραγωγών τύπου II, μεταξύ των μαγνητικών πεδίων  $B_{c1}$  και  $B_{c2}$ , είναι μια πολύ ενδιαφέρουσα κατάσταση ανομοιογενούς υπεραγωγιμότητας.

Είδαμε λοιπόν ότι η υπεραγωγιμότητα μπορεί να συμβιώνει με την κανονική κατάσταση, όταν εξωτερικά πεδία τείνουν να την καταστρέψουν. Το ίδιο συμβαίνει και όταν ένα κομμάτι υπεραγωγού “διακόπτεται” από ένα κανονικό υλικό, ή όταν η ακτίνα ενός υπεραγωγίμου σύρματος σε κάποιο σημείο γίνεται πολύ μικρή, σχηματίζοντας μια επαφή Josephson ή, όπως αλλιώς λέγεται, μία ασθενή υπεραγωγίμη σύζευξη (weak link).



Έτσι, στην περίπτωση ασθενούς σύζευξης δύο υπεραγωγίων περιοχών, η υπεραγωγίμη ιδιότητα επιβιώνει, δίνοντας νέα χαρακτηριστικά φαινόμενα ανομοιογενούς υπεραγωγιμότητας. Το υπερρεύμα τώρα ρέει στην περιοχή της επαφής Josephson σε ένα χαρακτηριστικό μήκος διείσδυσης Josephson  $\lambda_J$ , το οποίο είναι γενικά μεγαλύτερο από το μήκος διείσδυσης London  $\lambda_L$ . Η διαφορά φάσης  $\delta\chi$  της παραμέτρου τάξεως μεταξύ των δύο υπεραγωγίων περιοχών παρουσιάζει μεταβολές στη διεύθυνση παράλληλα στην επαφή με χαρακτηριστικό μήκος  $\lambda_J$ , κάθετα στη ροή του υπερρεύματος, που εξαρτάται από το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο και είναι δυνατή η δημιουργία δινών Josephson που ρέουν κυκλικά στην περιοχή της ασθενούς σύζευξης. Επίσης η εφαρμογή μιας σταθερής τάσης στα υπεραγωγία ηλεκτρόδια οδηγεί σε γραμμική μεταβολή της σχετικής φάσης  $\delta\chi$  με το χρόνο και κατά συνέπεια στη ροή ενός χρονικά μεταβαλλόμενου ρευματος στην επαφή. Τα φαινόμενα αυτά τα προέβλεψε θεωρητικά πρώτος ο Josephson και γι' αυτό το γενικό φαινόμενο φέρει το όνομά του [22,23].

Σε αυτή τη διατριβή ασχολούμαστε με επαφές Josephson στο όριο που οι διαστάσεις του συστήματος είναι μικρότερες από το μήκος διείσδυσης Josephson, τις λεγόμενες βραχείες επαφές Josephson (short Josephson junctions). Τότε οι μεταβολές της σχετικής φάσης  $\delta\chi$  της παραμέτρου τάξεως με τη θέση γίνονται αμελητέες και αυτό που ενδιαφέρει πιο πολύ είναι η σχέση του υπερρεύματος που διαρρέει την επαφή με τη διαφορά φάσης μεταξύ των υπεραγωγίων ηλεκτροδίων, την οποία από εδώ και στο εξής θα συμβολίζουμε απλά με  $\chi$ . Επίσης αμελητέα είναι και η επίδραση του μαγνητικού πεδίου του υπερρεύματος της επαφής πάνω στις ιδιότητες του συστήματος και μπορεί να αγνοηθεί. Η μαθηματική σχέση που συνδέει το υπερρεύμα με τη διαφορά φάσης  $\chi$  ονομάζεται σχέση υπερρεύματος φάσης (current phase relation ή CPR). Στην περίπτωση πολύ ασθενούς σύζευξης, όπως π.χ σε επαφές φαινομένου σύρραγγος (tunnel junctions) ή σε άλλου είδους επαφών με θερμοκρασία κοντά στην κρίσιμη θερμοκρασία ή με παράγοντες που ευνοούν την κανονική σκέδαση των μονοσωματιδιακών διεγέρσεων, η σχέση υπερρεύματος φάσης είναι ημιτονοειδής και δίνεται από τη σχέση

$$I(\chi) = I_c \sin \chi, \quad (1.10)$$

όπου  $I_c$  είναι το λεγόμενο κρίσιμο ρεύμα της επαφής. Όποια τιμή και να έχει η διαφορά φάσης  $\chi$ , υπερρεύμα μεγαλύτερο από το  $I_c$  δεν μπορεί να διαρρέει την επαφή. Μια απλή εξαγωγή της παραπάνω σχέσης δίνεται στην αναφορά [7] για επαφή με μικρών διαστάσεων γέφυρα που συνδέει δύο υπεραγωγίμες περιοχές του ίδιου υλικού και χρησιμοποιώντας την θεωρία Ginzburg-Landau. Επίσης στην αναφορά [23] δίνεται μια απόδειξη της ίδιας σχέσης με τη χρήση της μικροσκοπικής θεωρίας του Gor'kov και για την περίπτωση πολύ ασθενούς σύζευξης. Μια μελέτη της CPR σε διάφορου τύπου επαφές και για διάφορα όρια των παραμέτρων δίνεται στην αναφορά [24]. Επίσης η θεωρία της υπεραγωγιμότητας ασθενούς σύζευξης μελετάται στην αναφορά [25].

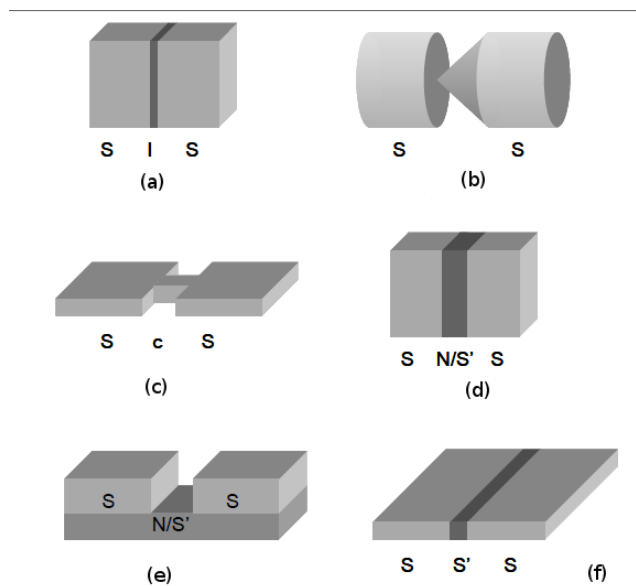
Σε αυτή τη διατριβή θα ασχοληθούμε αποκλειστικά με το λεγόμενο dc φαινόμενο Josephson, δηλ. με καταστάσεις της επαφής που διαρρέονται από σταθερό με το χρόνο υπερρεύμα και τη σχέση αυτού με τη διαφορά φάσης μεταξύ των υπεραγωγών. Όπως έχουμε αναφέρει υπάρχει και το ac φαινόμενο Josephson, όπου σε μία επαφή στην υπεραγωγίμη κατάσταση εφαρμόζεται μια σταθερή διαφορά δυναμικό, με αποτέλεσμα η διαφορά φάσης των υπεραγωγών να αυξάνει γραμμικά με το χρόνο και το υπερρεύμα να είναι ημιτονοειδής συνάρτηση του χρόνου, στην περίπτωση που ισχύει η CPR της σχέσης (1.10). Η σχέση της διαφοράς φάσης  $\chi$  με την τάση  $V$  που εφαρμόζεται στην επαφή ανακαλύφθηκε από τον Josephson και είναι

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = \frac{2eV}{\hbar}. \quad (1.11)$$

Υπάρχουν αρκετοί τρόποι να κατασκευαστεί ένα υπεραγωγίμο σύστημα με ασθενή σύζευξη [26]. Ένας από αυτούς είναι οι επαφές φαινομένου σύρραγος, ένα sandwich υπεραγωγών με μονωτικό υλικό στο ενδιάμεσο. Επίσης ένα τέτοιο sandwich μπορεί να έχει και ένα κανονικό υλικό ή μικρότερης κρίσιμης θερμοκρασίας υπεραγωγίμο υλικό στο ενδιάμεσο. Πολύ σημαντικές είναι και οι λεγόμενες επαφές σημείου (point contacts), όπου η σύζευξη των υπεραγωγίμων ηλεκτροδίων γίνεται μέσω μιας γεωμετρίας σχήματος “βελόνας”. Οι επαφές σημείου περιγράφονται ικανοποιητικά από μονοδιάστατα μοντέλα σκέδασης των μονοσωματιδιακών διεγέρσεων, με τα οποία θα ασχοληθούμε στο μεγαλύτερο μέρος αυτής της διατριβής. Ακόμα πιο ικανοποιητικά περιγράφονται οι λεγόμενες κβαντικές επαφές σημείου (quantum point contacts), στις οποίες οι διαστάσεις της βελόνας είναι τόσο μικρές, ώστε υπάρχει κβάντωση των καταστάσεων των μονοσωματιδιακών διεγέρσεων κάθετα στον άξονα της επαφής. Μελέτη των κβαντικών επαφών σημείου γίνεται στις αναφορές [27–29]. Άλλου τύπου ασθενείς συζεύξεις είναι η γέφυρα Dayem και η γέφυρα μεταβλητού πάχους. Στο Σχ.1.1 απεικονίζονται οι παράπανω τύποι επαφών.

Ο μηχανισμός με τον οποίο το υπερρεύμα περνά μέσα από την περιοχή ασθενούς σύζευξης μπορεί να ειπωθεί από δύο οπτικές γωνίες. Η μία είναι αυτή του φαινομένου σύρραγος των ζευγών Cooper από το ένα ηλεκτρόδιο στο άλλο, που στο όριο της πολύ ασθενούς σύζευξης μπορεί να αντιμετωπιστεί με θεωρία διαταραχών. Η άλλη οπτική γωνία είναι η ύπαρξη δέσμιων καταστάσεων Andreev στο ενδιάμεσο υλικό<sup>2</sup>. Το δυναμικό ζεύγους σε αυτό είναι είτε μικρότερου μέτρου, είτε εντελώς μηδενικό. Έτσι για ενέργειες που αντιστοιχούν στο χάσμα των υπεραγωγίμων ηλεκτροδίων, υπάρχουν καταστάσεις μονοσωματιδιακών διεγέρσεων μέσα στο ενδιάμεσο υλικό, οι οποίες ανακλώνονται στις ενδοεπιφάνειες και αλλάζουν χαρακτήρα ηλεκτρονίου-οπής, καθώς δεν μπορούν να διαδοθούν στα υπεραγωγίμα ηλεκτρόδια. Έτσι είναι δέσμιες καταστάσεις, αφού

<sup>2</sup>Σημειώνουμε ότι, παρότι δέσμιες, οι καταστάσεις Andreev μπορούν να μεταφέρουν υπερρεύμα, όπως θα αναφέρουμε και παρακάτω.



Σχήμα 1.1: (a) Επαφή φαινομένου σύρραγγος, (b) επαφή σημείου (point contact), (c) γέφυρα Dayem, (d) επαφή SNS sandwich, (e) γέφυρα μεταβλητού πάχους, (f) γέφυρα απόθεσης ιόντων (Ion implanted bridge)

είναι χωρικά περιορισμένες. Οι ενέργειές τους είναι διακριτές, ώστε να είναι συμβιβαστές οι ομογενείς λύσεις του ενδιάμεσου στρώματος με το μονοσήμαντο της συνολικής κυματοσυνάρτησης. Ονομάζονται δέσμιες καταστάσεις Andreev, επειδή τις μελέτησε πρώτος ο Andreev στην ενδιάμεση κατάσταση (intermediate state) της υπεραγωγιμότητας [30]. Βλέπουμε ότι οι επαφές Josephson μας παρέχουν ένα σύστημα στο οποίο η υποθετική μας θεώρηση στην αρχή της ενότητας, περί της διάδοσης ενός ηλεκτρονίου ή οπής μέσα σε ένα υπεραγωγίμο υλικό, παίρνει σάρκα και οστά. Εδώ καταστάσεις με έντονο ηλεκτρονικό χαρακτήρα ή χαρακτήρα οπής υπάρχουν στο κανονικό υλικό του ενδιάμεσου στρώματος και εισέρχονται στα υπεραγωγίμα ηλεκτρόδια, βιώνοντας την αλληλεπίδραση τους με το δυναμικό ζεύγους. Έτσι στη μία ενδοεπιφάνεια τα ηλεκτρόνια ζευγαρώνονται δημιουργώντας ζεύγη Cooper, αφήνοντας πίσω τους κενές καταστάσεις που ερμηνεύονται ως οπές, οι οποίες διαδίδονται προς την άλλη ενδοεπιφάνεια και καταστρέφουν ένα ζεύγος Cooper, δίνοντας ένα ηλεκτρόνιο να διαδίδεται προς την αντίθετη κατεύθυνση. Με αυτό τον τρόπο τα ζεύγη Cooper μεταφέρονται από τη μία ενδοεπιφάνεια στην άλλη και δημιουργούν υπερρεύμα. Οι δέσμιες καταστάσεις Andreev εμφανίζονται και στην μικτή κατάσταση των υπεραγωγών τύπου II, στο εσωτερικό των δινών, καθώς και στην ενδιάμεση κατάσταση της υπεραγωγιμότητας. Στην κατάσταση δηλαδή ενός υπεραγωγίμου υλικού με μη τετριμένη γεωμετρία εντός εξωτερικού μαγνη-

τικού πεδίου, έτσι ώστε το συνολικό πεδίο που υπάρχει στο εσωτερικό του υλικού να μην είναι ομογενές και να μην ξεπερνάει την κρίσιμη τιμή του σε όλα τα σημεία του υπεραγωγού, δημιουργώντας έτσι μια αλληλουχία υπεραγωγίων και κανονικών περιοχών μέσα στο υλικό.

Με αυτά τα δεδομένα και όπως θα περιγράψουμε εκτενώς σε αυτή τη διατριβή, μπορούμε να υπολογίσουμε τη σχέση υπερρεύματος φάσης (CPR) σε μια επαφή Josephson. Η CPR που δίνουμε στη σχέση (1.10) είναι μια ειδική περίπτωση και σε επαφές Josephson με μεταλλικό ενδιάμεσο στρώμα (SNS) η CPR είναι διαφορετική και συγκεκριμένα, σε μηδενική θερμοκρασία, πριονωτή συνάρτηση της διαφοράς φάσης. Πρώιμη δουλειά στις επαφές SNS έχει γίνει στις αναφορές [31–34] και πιο πρόσφατα στις αναφορές [35, 36]. Το ίδιο ισχύει και όταν το ενδιάμεσο στρώμα είναι σιδηρομαγνητικό, οπότε ανάλογα με τις παραμέτρους της επαφής μπορεί να εμφανιστεί δεύτερη αρμονική ή αντιστροφή της διεύθυνσης του υπερρεύματος κατά τη λεγόμενη αλλαγή φάσης  $0 - \pi$ . Σε αυτά τα φαινόμενα θα αναφερθούμε στην επόμενη ενότητα.

Ολοκληρώνοντας αυτή την εισαγωγική ενότητα θέλουμε να αναφέρουμε την αρχή του πειραματικού τρόπου μέτρησης της σχέσης υπερρεύματος φάσης. Όπως είδαμε, η διαφορά φάσης μεταξύ των υπεραγωγίων ηλεκτροδίων είναι συνυφασμένη με το υπερρεύμα και χρειάζεται να τη μετρήσουμε πειραματικά, ώστε να κατασκευάσουμε την CPR. Για να το κάνουμε αυτό, προσαρτούμε την επαφή Josephson στην περιφέρεια ενός υπεραγωγίου βρόχου αυτεπαγωγής  $L$  και εφαρμόζουμε ένα εξωτερικό μαγνητικό πεδίο. Τότε το ροοειδές (fluxoid) θα είναι κβαντισμένο και θα ισούται με τη ροή μέσα από τον υπεραγωγίο βρόχο συν τη συνεισφορά του επικαμπυλίου ολοκληρώματος του υπερρεύματος. Η καμπύλη ολοκλήρωσης μπορεί να επιλεγεί μέσα στο υπεραγωγίο υλικό, όπου το ρεύμα είναι μηδέν, εκτός από την περιοχή της βραχείας επαφής Josephson, που είναι ανάλογο της κλίσης της φάσης της παραμέτρου τάξεως. Λαμβάνοντας αυτά υπόψη, καταλήγουμε ότι η σχέση (1.7) μας δίνει

$$\frac{\chi}{2\pi} = \frac{\Phi}{\Phi_0} + n, \quad (1.12)$$

όπου  $\chi$  η διαφορά φάσης στα άκρα της επαφής Josephson,  $\Phi$  είναι η μαγνητική ροή μέσα από τον υπεραγωγίο βρόχο,  $\Phi_0$  το κβάντο της μαγνητικής ροής και  $n$  ένας ακέραιος αριθμός. Ταυτόχρονα, το ρεύμα που θα επαχθεί στον υπεραγωγίο βρόχο δίνεται από τη σχέση

$$\Phi = \Phi_e - I(\chi)L, \quad (1.13)$$

όπου  $\Phi_e$  είναι η εφαρμοζόμενη εξωτερική μαγνητική ροή στον υπεραγωγίο βρόχο. Γνωρίζοντας την αυτεπαγωγή  $L$  και μετρώντας τα  $\Phi$ ,  $\Phi_e$ , μπορούμε να προσδιορίσουμε

και τη διαφορά φάσης και το υπερρεύμα και να κατασκευάσουμε την CPR. Η ακριβής μέτρηση μαγνητικής ροής δεν είναι εύκολη υπόθεση και έχουν αναπτυχθεί διάφορες τεχνικές για τη μέτρηση της CPR [24, 37, 38]

Η ενέργεια του υπεραγωγίμου βρόχου, που περιέχει και την επαφή Josephson, στο εξωτερικό μαγνητικό πεδίο είναι ίση με το άθροισμα της ενέργειας της επαφής Josephson και του μαγνητικού πεδίου που παράγει, εξαιτίας του υπερρεύματος από το οποίο διαρρέεται. Σε κανονικοποιημένες μονάδες είναι [39–41]

$$W(\chi) = \frac{1}{I_c} \int_0^\chi I(\chi') d\chi' + \frac{1}{2} l^{-1} (\chi - \chi_e)^2, \quad (1.14)$$

όπου η ενέργεια  $W$  μετριέται σε μονάδες  $\Phi_0 I_c / 2\pi$  και

$$l = \frac{2\pi}{\Phi_0} I_c L \quad (1.15)$$

είναι η κανονικοποιημένη αυτεπαγωγή του βρόχου, ενώ

$$\chi_e = 2\pi \frac{\Phi_e}{\Phi_0} \quad (1.16)$$

είναι η κανονικοποιημένη μαγνητική ροή μέσα από το βρόχο του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου.

Με δεδομένο το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο, η κατάσταση του υπεραγωγίμου βρόχου ισορροπεί σε μια διαφορά φάσης  $\chi$  που ελαχιστοποιεί την ενέργεια του βρόχου. Όταν η αυτεπαγωγή του βρόχου τείνει στο άπειρο, τότε προφανώς η συνθήκη ελαχιστοποίησης είναι  $I(\chi) = 0$  και  $I'(\chi) > 0$ . Αν η CPR της επαφής έχει μηδενικό υπερρεύμα στο  $\chi = 0$  και θετική κλίση, δηλαδή είναι μια επαφή στην κατάσταση 0, τότε η μαγνητική ροή που διαπερνάει το βρόχο, απουσία εξωτερικού πεδίου, είναι μηδέν. Αν όμως το υπερρεύμα της επαφής μηδενίζεται σε κάποιο σημείο  $\chi_0$  και έχει θετική κλίση εκεί, έχουμε δηλαδή τη λεγόμενη  $\chi_0$ -επαφή, τότε απουσία εξωτερικού μαγνητικού πεδίου ο υπεραγωγίμος βρόχος εμφανίζει μια αυθόρμητη μαγνητική ροή  $\chi_0 \Phi_0 / 2\pi$  και ένα μικρό αυθόρμητο υπερρεύμα. Στην περίπτωση  $\pi$ -επαφών τέτοιες αυθόρμητες μαγνητικές ροές έχουν παρατηρηθεί πειραματικά [42]. Κατά τη μέτρηση της CPR χρησιμοποιούνται βρόχοι με μικρότερη αυτεπαγωγή. Στην περίπτωση μιας  $\chi_0$ -επαφής που χαρακτηρίζεται από υπερρεύμα μηδενικής διαφοράς φάσης και ο υπεραγωγίμος βρόχος ισορροπεί σε μηδενική διαφορά φάσης, η συνολική μαγνητική ροή μέσα από τον υπεραγωγίμο βρόχο είναι μηδέν και το υπερρεύμα μηδενικής διαφοράς φάσης αντισταθμίζει την εξωτερική μαγνητική ροή μέσα από το βρόχο. Υπερρεύμα μηδενικής φάσης εμφανίζεται σε διάφορους τύπους επαφών, όπως θα εξηγήσουμε στην επόμενη ενότητα. Σε αυτή τη διατριβή βρίσκουμε υπερρεύμα μηδενικής φάσης σε σιδηρομαγνητικές επαφές Josephson με μη συνεπίπεδη γεωμετρία μαγνητίσεων.

## 1.2 Φαινόμενα σχετικά με τις σιδηρομαγνητικές επαφές Josephson

Σε αυτή τη διατριβή μελετάμε βραχείες επαφές Josephson με συμβατικούς υπεραγωγούς, όπου η ασθενής σύζευξη επιτυγχάνεται με την προσθήκη στρωμάτων σιδηρομαγνητικών υλικών μεταξύ των υπεραγωγίων ηλεκτροδίων. Συστήματα αυτού του τύπου παρουσιάζουν πολύ ενδιαφέροντα φαινόμενα, καθώς η συμβατική υπεραγωγιμότητα και ο σιδηρομαγνητισμός είναι γενικά φαινόμενα που ανταγωνίζονται μεταξύ τους και δεν συνυπάρχουν στην ομογενή κατάσταση. Αυτό συμβαίνει επειδή αφ' ενός τα ζεύγη Cooper στη θεωρία BCS αποτελούνται από ηλεκτρόνια με αντίθετα σπιν, ο σιδηρομαγνητισμός αφ' ετέρου ευνοεί (και επιβάλλει) την ευθυγράμμιση των μαγνητικών ροπών των ηλεκτρονίων. Υπάρχουν βέβαια ενδείξεις ότι ορισμένα υλικά παρουσιάζουν ταυτόχρονα και τα δύο αυτά φαινόμενα στην ομογενή κατάσταση. Είναι οι λεγόμενοι σιδηρομαγνητικοί υπεραγωγοί (ferromagnetic superconductors), όπως οι  $UGe_2$ ,  $URhGe$ ,  $UCoGe$  [43]. Το πιο πιθανό είναι ότι τα ζεύγη Cooper αυτών των υπεραγωγών έχουν σπιν στην κατάσταση triplet.

Το ενδιαφέρον στις σιδηρομαγνητικές επαφές Josephson (SFS) δημιουργήθηκε από την πρόβλεψη της ύπαρξης αλλαγής φάσης  $0-\pi$ . Μια επαφή Josephson στην κατάσταση  $0$  έχει την CPR της σχέσης (1.10), στο όριο της πολύ ασθενούς σύζευξης, ενώ στην κατάσταση  $\pi$  το υπερρεύμα έχει αντίθετη φορά. Με αλλαγή των παραμέτρων της επαφής SFS μπορούμε να περάσουμε από τη μία κατάσταση στην άλλη. Η αλλαγή φάσης  $0-\pi$  ανακαλύφθηκε θεωρητικά για μία επαφή Josephson με παραμαγνητικές ατέλειες στο ενδιάμεσο μονωτικό στρώμα από τους Bulaevskii *et al.* [44], αλλά μέχρι τώρα δεν έχει επιβεβαιωθεί πειραματικά. Λίγο αργότερα προτάθηκε ότι εμφανίζεται σε επαφές SFS [45]. Για τις επαφές SFS υπάρχει πληθώρα πειραμάτων που την επιβεβαιώνουν [46–52]. Φαινόμενα χαρακτηριστικά της αλλαγής φάσης  $0-\pi$  είναι η φθίνουσα ταλαντωτική συμπεριφορά του κρίσιμου υπερρεύματος συναρτήσει του πάχους του ενδιάμεσου στρώματος της επαφής και η δυνατότητα, ανάλογα με τις παραμέτρους της επαφής, μη μονότονης μεταβολής του κρίσιμου υπερρεύματος με τη θερμοκρασία. Επίσης χαρακτηριστική είναι και η δυνατότητα εμφάνισης δεύτερης αρμονικής στη σχέση υπερρεύματος φάσης σιδηρομαγνητικών επαφών Josephson. Λόγω όμως της μη συμβατότητας της υπεραγωγιμότητας με το σιδηρομαγνητισμό, το κρίσιμο υπερρεύμα μειώνεται γρηγορότερα με την αύξηση του πάχους του ενδιάμεσου στρώματος, από ότι συμβαίνει στην περίπτωση που το ενδιάμεσο στρώμα είναι μη μαγνητικό μέταλλο. Το φαινόμενο αυτό έχει να κάνει με την φθίνουσα συμπεριφορά της παραμέτρου τάξεως στο σιδηρομαγνητικό στρώμα. Ταυτόχρονα παρατηρείται και ταλαντωτική συμπεριφορά, εκτός από τη φθίνουσα, η οποία δίνει τη δυνατότητα αλλαγής φάσης  $0-\pi$  και τη μη μονότονη μεταβολή του κρίσιμου υπερρεύματος με τις παραμέτρους της επαφής. Μια ανασκόπηση της θεωρίας

των σιδηρομαγνητικών επαφών Josephson, καθώς και επαφών υπεραγωγών με σιδηρομαγνήτες, με ομογενή μαγνήτιση και έμφαση στην ημικλασική θεωρία της ανομοιογενούς υπεραγωγιμότητας, δίνεται στην αναφορά [15]. Μελέτη σιδηρομαγνητικών επαφών Josephson στο βαλιστικό όριο, με χρήση των εξισώσεων Bogoliubov-de Gennes, δίνεται στην αναφορά [53].

Η φθίνουσα ταλαντωτική συμπεριφορά της παραμέτρου τάξεως στο εσωτερικό του ενδιάμεσου στρώματος δεν εξαντλεί τα φαινόμενα που χαρακτηρίζουν τις επαφές υπεραγωγών με σιδηρομαγνήτες και τις σιδηρομαγνητικές επαφές Josephson. Αυτό που συμβαίνει είναι ότι σε τέτοιες επαφές και μέσα στους σιδηρομαγνήτες αναπτύσσονται, εκτός από την ανώμαλη συνάρτηση Green με σπιν στην κατάσταση singlet, και οι υπόλοιπες συνιστώσες της ανώμαλης συνάρτησης Green με σπιν στην κατάσταση triplet, αρκεί να υπάρχει ανομοιογενής μαγνήτιση στο σύστημα<sup>3</sup>. Η ανακάλυψη αυτή έγινε θεωρητικά από τους Bergeret *et al.* [54–56]. Μια ανασκόπηση της θεωρίας αυτής, καθώς και υλικό για την επίδραση της υπεραγωγιμότητας στον σιδηρομαγνητισμό σε επαφές, δίνεται στην αναφορά [57]. Στις παραπάνω αναφορές αναδεικνύεται η εμφάνιση της συνιστώσας της ανώμαλης συνάρτησης Green με σπιν στην κατάσταση triplet, αλλά συμμετρική στο χωρικό κομμάτι της και αντισυμμετρική στην ενέργεια. Έτσι τα ζεύγη Cooper, μετασχηματιζόμενα στις ενδοεπιφάνειες από την κατάσταση singlet στην triplet, έχουν τη δυνατότητα να διαδίδονται μέσα από τα σιδηρομαγνητικά στρώματα στο ίδιο χαρακτηριστικό μήκος στο οποίο διαδίδονται τα singlet ζεύγη Cooper σε ένα μη μαγνητικό μέταλλο. Όσον αφορά τις σιδηρομαγνητικές επαφές Josephson, είναι απαραίτητο η αλλαγή της κατάστασης σπιν των ζευγών Cooper να μπορεί να επιτευχθεί και στις δύο ενδοεπιφάνειες με τους συμβατικούς υπεραγωγούς και έτσι ένα μακράς εμβέλειας υπερρεύμα Josephson μπορεί να επιτευχθεί σε επαφές Josephson με τρία σιδηρομαγνητικά στρώματα [58–61]. Τα μακράς εμβέλειας αυτά υπερρεύματα μπορούν να επιβιώσουν ακόμα και όταν το ενδιάμεσο σιδηρομαγνητικό στρώμα είναι ένα ημιμέταλλο, χωρίς ελεύθερους φορείς στη μία ζώνη σπιν. Ταυτόχρονα με αυτή την παρατήρηση, διαπιστώθηκε ότι σε ένα υβριδικό σύστημα με συμβατικούς υπεραγωγούς και σιδηρομαγνήτες εμφανίζονται όλες οι συνιστώσες της ανώμαλης συνάρτησης Green που είναι συμβατές με την αρχή του Pauli (βλ. [62–64]). Επίσης αρκετοί συγγραφείς έχουν ασχοληθεί με ανομοιογενείς μαγνητίσεις σε επαφές SFS με σπιν ενεργές ενδοεπιφάνειες, με μη μαγνητικό μέταλλο στο ενδιάμεσο στρώμα [65] ή με ισχυρούς ή ημιμεταλλικούς σιδηρομαγνήτες στο ενδιάμεσο στρώμα [66–70]. Οι τελευταίες αναφορές εργάζονται στο όριο διάχυσης για το σιδηρομαγνητικό ή ημιμεταλλικό στρώμα και βρίσκουν μια συσχέτιση της κορυφής της τοπικής πυκνότητας καταστάσεων στο ενδιάμεσο στρώμα γύρω από την ενέργεια Fermi με την εμφάνιση των συσχετίσεων triplet (triplet correlations),

<sup>3</sup>Σημειώνουμε ότι η ανώμαλη συνάρτηση Green μπορεί να ερμηνευτεί ως η κυματοσυνάρτηση των ζευγών Cooper.

την triplet δηλ. συνιστώσα της ανώμαλης συνάρτησης Green. Πειραματική επιβεβαίωση των υπερρευσμάτων μακράς εμβέλειας υπάρχει και ξεκίνησε με τους Keizer *et al.* [71], που χρησιμοποίησαν  $\text{CrO}_2$  για το ενδιάμεσο στρώμα. Ακολούθησαν κι άλλες πειραματικές ομάδες, που χρησιμοποίησαν και άλλους σιδηρομαγνήτες, όπως Ni και Gd, Co και Ho ή κράματα Heusler [72–80].

Ακόμα ένα φαινόμενο που εμφανίζεται στις σιδηρομαγνητικές επαφές Josephson είναι η ύπαρξη μη μηδενικού υπερρεύματος μηδενικής φάσης, όταν οι μαγνητίσεις του συστήματος είναι μη συνεπίπεδες. Είναι γνωστό ότι η σχέση υπερρεύματος φάσης έχει την ιδιότητα

$$I(\chi) = -I(-\chi), \quad (1.17)$$

όταν το σύστημα της επαφής δεν παραβιάζει την συμμετρία αντιστροφής χρόνου, με εξαίρεση τη μετατροπή της διαφοράς φάσης στο αντίθετό της. Αν όμως η αντιστροφή χρόνου παραβιάζεται, δηλαδή και κάποια άλλη παράμετρος αλλάζει υπό την επίδρασή της, τότε η παραπάνω σχέση δεν ισχύει και έχουμε ενδεχομένως την εμφάνιση υπερρεύματος μηδενικής φάσης. Η εμφάνιση αυτή έχει προβλεφθεί εδώ και καιρό για επαφές Josephson με μη συμβατικούς υπεραγωγούς [81–84]. Πιο πρόσφατα έχουν μελετηθεί, με τη μέθοδο των εξισώσεων BdG, επαφές Josephson με συμβατικούς και μη συμβατικούς υπεραγωγούς με d-χωρική συμμετρία και την ασθενή σύζευξη να επιτυγχάνεται με σπιν ενεργές ενδοεπιφάνειες και ημιμεταλλικό ενδιάμεσο στρώμα [85]. Και εδώ υπάρχει εμφάνιση υπερρεύματος μηδενικής φάσης. Επίσης έχει γίνει δουλειά σε επαφές Josephson με υπεραγωγούς παραμέτρου τάξεως στην κατάσταση triplet, με εμφάνιση και υπερρεύματος μηδενικής φάσης και ρεύματος σπιν (spin current) στις αναφορές [86–89]. Υπερρέυμα μηδενικής διαφοράς φάσης έχει προβλεφθεί και σε συστήματα με συμβατικούς υπεραγωγούς. Για ασθενή σύζευξη που επιτυγχάνεται με ενδιάμεσα στρώματα που χαρακτηρίζονται από την ύπαρξη αλληλεπίδρασης σπιν-τροχιάς (spin-orbit interaction) υπάρχει αντίστοιχη δουλειά στις αναφορές [90–93] και πιο πρόσφατα στις αναφορές [94, 95].

Επίσης έχει μελετηθεί η εμφάνιση υπερρεύματος μηδενικής φάσης από ορισμένους συγγραφείς σε επαφές Josephson με αποκλειστικά σιδηρομαγνητικά ενδιάμεσα στρώματα. Τότε είναι απαραίτητο οι μαγνητίσεις τους να είναι μη συνεπίπεδες. Αυτό παρατηρείται για παράδειγμα στις αναφορές [96–99]. Σε αυτές γίνεται χρήση της ημικλασικής θεωρίας της υπεραγωγιμότητας. Μία διαφορετική μέθοδος, για σιδηρομαγνήτες στο όριο της διάχυσης, δίνεται στην αναφορά [67]. Λίγο αργότερα [100, 101], δόθηκαν επιχειρήματα συμμετρίας για την εμφάνιση του υπερρεύματος μηδενικής φάσης και συγκεκριμένα η ύπαρξη μιας συμμετρίας συνδυασμού της αντιστροφής χρόνου και μιας στροφής στο χώρο των σπιν, που απαγορεύει την ύπαρξη υπερρεύματος μηδενικής φάσης, όταν οι μαγνητίσεις του συστήματος είναι συνεπίπεδες. Σχεδόν ταυτόχρονα, στην



αναφορά [102], γίνεται συσχέτιση του υπερρεύματος μηδενικής φάσης και της ανάπτυξης της triplet ανώμαλης συνάρτησης της περιττής στην ενέργεια στα ενδιάμεσα στρώματα μιας επαφής Josephson με τρία σιδηρομαγνητικά στρώματα. Με αυτή την ανακάλυψη, οι συγγραφείς μπόρεσαν να δείξουν μεγάλα σε μέγεθος υπερρεύματα μηδενικής φάσης με τη χρήση μικρών σε μέτρο μαγνητίσεων. Επίσης θέλουμε να σημειώσουμε ότι σε δακτύλιους αποτελούμενους από στρώματα σιδηρομαγνητών με μη συνεπίπεδες μαγνητίσεις παρουσιάζονται αυθόρμητα και μόνιμα ρεύματα σε κάτι που μπορεί να χαρακτηριστεί σπιν φαινόμενο Josephson [103, 104].

Ολοκληρώνοντας αυτή την ενότητα, σημειώνουμε ότι στην αναφορά [105] μελετήθηκε μια  $\chi_0$ -επαφή με υπερρεύμα μηδενικής φάσης, που αποτελείται από μία επαφή Josephson στο μαγνητικό πεδίο μιας μαγνητικής τελείας (magnetic dot). Επίσης υπερρεύμα μηδενικής φάσης και μάλιστα με CPR ανάλογη με  $\cos \chi$  έχει προβλεφθεί θεωρητικά σε επαφές πολύ ασθενούς σύζευξης μεταξύ ενός υπεραγωγού με παράμετρο τάξης άρτιας στην ενέργεια και ενός υπεραγωγού με παράμετρο τάξης περιττής στην ενέργεια [106]. Τέλος σημειώνουμε ότι είναι δυνατή η δημιουργία  $\chi_0$ -επαφής χωρίς υπερρεύμα μηδενικής φάσης, αλλά με μηδενισμό της CPR σε κάποιο σημείο  $\chi_0$  και θετική κλίση του υπερρεύματος στο σημείο αυτό, όπως μπορεί να συμβεί όταν η CPR περιέχει μια δεύτερη αρμονική [107].

### 1.3 Η δομή αυτής της διατριβής

Στη συνέχεια αυτής της διατριβής παρουσιάζουμε στο κεφάλαιο 2 τις εξισώσεις Bogoliubov-de Gennes (BdG) [12] και το μοντέλο των Blonder-Tinkham-Klapwijk (BTK) [108] για την περίπτωση σιδηρομαγνητικών επαφών Josephson με μαγνητίσεις σε αυθαίρετες διευθύνσεις. Στη συνέχεια παραθέτουμε τον τρόπο επίλυσης των εξισώσεων BdG και τους τύπους των λύσεών τους, τις στάσιμες καταστάσεις σκέδασης και τις δέσιμες καταστάσεις Andreev. Ιδιαίτερη βαρύτητα θα δοθεί στους συντελεστές ανάκλασης Andreev, με τη βοήθεια των οποίων θα υπολογίσουμε το υπερρεύμα στην επαφή με τη μέθοδο των Furusaki-Tsukada [109].

Στο κεφάλαιο 3 κατασκευάζουμε τις εξισώσεις Lippmann-Schwinger που αντιστοιχούν στις εξισώσεις BdG στην επαφή, οι οποίες χαρακτηρίζονται από διαφορετικές ασυμπτωτικές χαμιλτονιανές στα αριστερά και τα δεξιά. Συνεχίζουμε με την αντιστοίχιση των στάσιμων καταστάσεων σκέδασης, που αναλύσαμε στο κεφάλαιο 2, με τις εξισώσεις Lippmann-Schwinger και έτσι προκύπτει η αναλογία των συντελεστών σκέδασης της επαφής με τα στοιχεία του T-πίνακα, ο οποίος ορίζεται διαφορετικά ανάλογα με τη διεύθυνση πρόσπτωσης και διάδοσης που εκφράζει ο αντίστοιχος συντελεστής σκέδασης. Ο ορισμός αυτός του T-πίνακα είναι σε αντιστοιχία με τον ορισμό του σε προβλήματα σκέδασης με πολλά κανάλια. Επίσης, αξιοποιώντας τα παραπάνω, αποδει-

κνύουμε τις μορφές που παίρνει η συνάρτηση Green με ορίσματα θέσης στις ασυμπτωτικές περιοχές της επαφής.

Στα κεφάλαια 4 και 5 αξιολογούμε τη σχέση μεταξύ συντελεστών σκέδασης και στοιχείων του T-πίνακα, ώστε να εξαγάγουμε συνθήκες συμμετρίας για τους συντελεστές σκέδασης. Οι μετασχηματισμοί στους οποίους υποβάλλουμε τα στοιχεία του T-πίνακα είναι αντιγραμμικοί και περιλαμβάνουν και την αντιστροφή χρόνου. Μετασχηματίζοντας τον τελεστή του T-πίνακα και τις στάσιμες καταστάσεις των ασυμπτωτικών χαμιλτονιανών, που σχηματίζουν το στοιχείο πίνακος, καταλήγουμε σε σχέσεις που πρέπει να ικανοποιούνται μεταξύ των συντελεστών σκέδασης. Στο κεφάλαιο 4 μετασχηματίζουμε πρώτα τα στοιχεία πίνακος και στη συνέχεια παίρνουμε την αναλυτική επέκταση σε μιγαδικές τιμές της ενέργειας, ενώ στο κεφάλαιο 5 παίρνουμε πρώτα την αναλυτική επέκταση των στοιχείων πίνακος και στη συνέχεια εφαρμόζουμε τους μετασχηματισμούς. Έτσι καταλήγουμε σε διαφορετικές σχέσεις συμμετρίας, οι οποίες αξιολογούνται στο κεφάλαιο 7 για να εξαγάγουμε συμμετρίες της σχέσης υπερρεύματος φάσης (CPR) και να απλοποιήσουμε τον τύπο των Furusaki-Tsukada.

Στο κεφάλαιο 6 μελετάμε τρόπους υπολογισμού της συνάρτησης Green των σιδηρομαγνητικών επαφών Josephson, με αξιοποίηση της γνώσης των αναλυτικών επεκτάσεων σε μιγαδική ενέργεια των στάσιμων καταστάσεων σκέδασης των εξισώσεων BdG. Έτσι καταλήγουμε σε γενικές σχέσεις για τον υπολογισμό της πλήρους συνάρτησης Green, αλλά επαληθεύουμε με μία διαφορετική μέθοδο τις μορφές της πλήρους συνάρτησης Green για ορίσματα θέσης στις ασυμπτωτικές περιοχές. Επίσης είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε την ανώμαλη συνάρτηση Green και την τοπική πυκνότητα καταστάσεων.

Στο κεφάλαιο 7 υπολογίζουμε το υπερρεύμα στην επαφή Josephson από τη συνάρτηση Green και καταλήγουμε στον τύπο των Furusaki-Tsukada. Στη συνέχεια επεξεργαζόμαστε αυτό τον τύπο και αποδεικνύουμε ότι είναι ισοδύναμος με έναν τύπο που συνδέει το υπερρεύμα με την ορίζουσα του πίνακα των συνθηκών συρραφής (matching condition matrix), τον οποίο ορίσαμε στο κεφάλαιο 2. Έπειτα αποδεικνύουμε τις συμμετρίες της σχέσης υπερρεύματος φάσης (CPR), με τη βοήθεια των συνθηκών συμμετρίας για τους συντελεστές ανάκλασης, που δείξαμε στο κεφάλαιο 4. Εκεί δείχνουμε ότι, όταν οι μαγνητίσεις του συστήματος είναι συνεπίπεδες, δεν είναι δυνατή η ύπαρξη υπερρεύματος μηδενικής διαφοράς φάσης. Επίσης αξιολογούμε τις σχέσεις του κεφαλαίου 5, για να απλοποιήσουμε τον τύπο των Furusaki-Tsukada. Τέλος, επικεντρωνόμαστε στο μη αυτοσυνεπές μοντέλο των σιδηρομαγνητικών επαφών Josephson και αναλύουμε περαιτέρω του τύπο για το υπερρεύμα συναρτήσει του πίνακα των συνθηκών συρραφής, καταλήγοντας σε μια πιο ειδική μορφή για την CPR και ταυτόχρονα διατυπώνοντας ρητά την εξάρτηση του υπερρεύματος από τις διευθύνσεις των μαγνητίσεων της επαφής.

Ακολουθεί το κεφάλαιο 8, όπου δίνουμε αριθμητικά αποτελέσματα στο μη αυτοσυνεπές μοντέλο για τη σχέση υπερρεύματος φάσης, την εξάρτηση του υπερρεύματος μηδενικής φάσης από τις παραμέτρους της επαφής καθώς και του κρίσιμου υπερρεύμα-

τος. Επίσης δίνουμε και μερικές πληροφορίες για τις δέσμιες καταστάσεις Andreev, την τοπική πυκνότητα καταστάσεων και την ανώμαλη συνάρτηση Green. Αυτά γίνονται σε μονοδιάστατες επαφές, ενώ στις δύο τελευταίες ενότητες δίνουμε αντίστοιχες πληροφορίες και για τριδιάστατες επαφές που είναι ομογενείς στις διευθύνσεις κάθετα στον άξονα της επαφής.

Η διατριβή αυτή ολοκληρώνεται με τον επίλογο, όπου παραθέτουμε συνοπτικά τα συμπεράσματα από τη μελέτη μας.

## Κεφάλαιο 2

# Καταστάσεις σκέδασης στις σιδηρομαγνητικές επαφές Josephson

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε το μοντέλο των σιδηρομαγνητικών επαφών Josephson στο οποίο θα στηρίζουμε τη μελέτη μας. Θα χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις Bogoliubov-de Gennes (BdG) [12] και το μοντέλο των Blonder-Tinkham-Klapwijk (BTK) [108]. Στη συνέχεια θα περιγράψουμε τις λύσεις των εξισώσεων BdG σε ομογενή συστήματα, υπεραγώγιμα ή σιδηρομαγνητικά, καθώς και τις λύσεις που αντιστοιχούν στο ανομοιογενές σύστημα της σιδηρομαγνητικής επαφής Josephson. Οι τελευταίες είναι οι καταστάσεις σκέδασης στην επαφή και οι δέσμιες καταστάσεις Andreev.

### 2.1 Μοντέλο σιδηρομαγνητικής επαφής Josephson

Θεωρούμε μια μονοδιάστατη σιδηρομαγνητική επαφή Josephson που αποτελείται από δύο υπεραγώγιμες περιοχές, μεταξύ των οποίων βρίσκονται στρώματα σιδηρομαγνήτη και ενδοεπιφάνειες με σπιν ενεργές ιδιότητες. Το σύστημα περιγράφεται από την ενεργό χαμιλτονιανή μέσου πεδίου [12]

$$\mathbb{H} = \mathbb{H}_0 + \mathbb{V}, \quad (2.1)$$

όπου

$$\mathbb{H}_0 = \sum_{s,s'} \int dx \psi_s^\dagger(x) \hat{H}_{0s,s'}(x, -i\hbar \frac{d}{dx}) \psi_{s'}(x) \quad (2.2)$$

και

$$\mathbb{V} = \frac{1}{2} \sum_{s,s'} \int dx \left( \hat{\Delta}_{ss'}(x) \psi_s^\dagger(x) \psi_{s'}^\dagger(x) + \hat{\Delta}_{ss'}^*(x) \psi_{s'}(x) \psi_s(x) \right). \quad (2.3)$$

Στις παραπάνω σχέσεις ο υπερδείκτης  $*$  δηλώνει τον μιγαδικό συζυγή και  $\psi_s(x)$  είναι ο τελεστής καταστροφής για ηλεκτρόνια με σπιν  $s$  στη θέση  $x$ . Οι  $2 \times 2$  πίνακες που εμφανίζονται παραπάνω αναφέρονται στους δείκτες σπιν πάνω και κάτω και είναι

$$\hat{H}_0 = (h_0 - \mu) \hat{1} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{M}(x) \quad (2.4)$$

και

$$\hat{\Delta}(x) = i\sigma_y \Delta(x), \quad (2.5)$$

όπου  $\mu$  είναι το χημικό δυναμικό,  $\hat{1}$  είναι ο ταυτοτικός  $2 \times 2$  πίνακας,  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  είναι οι πίνακες Pauli στο χώρο του σπιν και  $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ . Επίσης  $\Delta(x)$  είναι το αυτοσυνεπές δυναμικό ζεύγους (ή συνάρτηση χάσματος) του συστήματος, που είναι μηδέν στα ενδιάμεσα στρώματα της επαφής και παίρνει τις σταθερές τιμές της ομογενούς κατάστασης στη δεξιά και αριστερή ασυμπτωτική περιοχή ( $\Delta_\ell e^{i\chi_\ell}$  και  $\Delta_r e^{i\chi_r}$  αντίστοιχα). Δίνεται από τη σχέση

$$\Delta(x) = g(x) \langle \psi_\uparrow(x) \psi_\downarrow(x) \rangle, \quad (2.6)$$

όπου η μέση τιμή  $\langle \dots \rangle$  είναι ως προς τη θερμοδυναμική κατάσταση ισορροπίας του συστήματος και  $g(x)$  είναι η σταθερά σύζευξης, που είναι μηδέν στα ενδιάμεσα σιδηρομαγνητικά στρώματα και μη μηδενική στους υπεραγωγούς.

Ακόμη  $\mathbf{M}(x)$  είναι η αυτοσυνεπής μαγνήτιση του συστήματος, μετρούμενη σε μονάδες ενέργειας, που είναι μηδέν στις ασυμπτωτικές υπεραγωγίμες περιοχές και μη μηδενική στις περιοχές εγγύτητας των υπεραγωγών, στα ενδιάμεσα στρώματα και στις ενδοεπιφάνειες. Δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{M}(x) = \sum_i \mathbf{M}_i(x) \chi_i(x) + \sum_j \mathbf{N}_j \delta(x - x_j), \quad (2.7)$$

όπου  $\mathbf{M}_i(x)$  είναι η μαγνήτιση στην περιοχή  $i$ , που μπορεί να είναι ένα από τα ενδιάμεσα στρώματα ή οι περιοχές εγγύτητας στους δύο υπεραγωγούς, ακόμα και οι ασυμπτωτικές περιοχές, όπου η μαγνήτιση μηδενίζεται. Επίσης  $\mathbf{N}_j$  είναι αυτό που θα ονομάσουμε μαγνήτιση ενδοεπιφάνειας στην ενδοεπιφάνεια  $j$  και έχει διαστάσεις ενέργειας επί μήκος.

Θα χρησιμοποιήσουμε και τον όρο ισχύς ενδοεπιφανειακής μαγνήτισης για τα  $\mathbf{N}_j$ . Οι ενδοεπιφάνειες με τους υπεραγωγούς θα χαρακτηρίζονται από  $j = \ell, r$  για αριστερά και δεξιά αντίστοιχα, ενώ οι ενδιάμεσες ενδοεπιφάνειες αριθμούνται διαδοχικά. Οφείλουμε να σημειώσουμε ότι με τον όρο μαγνήτιση θα εννοούμε πυκνότητα σπιν και όχι πυκνότητα μαγνητικής ροπής των ηλεκτρονίων, όπως φαίνεται και από την εξάρτηση της χαμιλτονιανής (2.4) από τη μαγνήτιση  $\mathbf{M}(x)$ .

Η χαμιλτονιανή  $h_0$  δίνεται από τη σχέση

$$h_0 = -\frac{d}{dx} \frac{\hbar^2}{2m(x)} \frac{d}{dx} + U(x), \quad (2.8)$$

όπου  $m(x)$  είναι η ενεργός μάζα των ηλεκτρονίων, που έχει τη μορφή

$$m(x) = \sum_i m_i \chi_i(x), \quad (2.9)$$

όπου  $m_i$  είναι η ενεργός μάζα της περιοχής  $i$ , όπως ορίστηκε προηγουμένως, και

$$U(x) = \sum_i U_i(x) \chi_i(x) + \sum_j V_j \delta(x - x_j), \quad (2.10)$$

με  $U_i(x)$  να είναι το κανονικό δυναμικό στην περιοχή  $i$  και  $V_j$  είναι το δυναμικό σκέδασης ενδοεπιφάνειας και έχει διαστάσεις ενέργειας επί μήκος. Για τα  $V_j$  θα χρησιμοποιήσουμε και τον όρο ισχύς ενδοεπιφανειακής κανονικής σκέδασης.

Για να διαγωνιοποιήσουμε τη χαμιλτονιανή  $\mathbb{H}$ , εφαρμόζουμε τον παρακάτω μετασχηματισμό Bogoliubov

$$\psi_s(x) = \sum_n (u_s^n(x) \gamma_n + v_s^n(x)^* \gamma_n^\dagger), \quad (2.11)$$

όπου  $s = \uparrow, \downarrow$  και ο δείκτης  $n$  αριθμεί ένα πλήρες σύνολο ιδιοκαταστάσεων των οιωνεί σωματιδίων Bogoliubov που αντιστοιχεί σε θετικές ενέργειες. Απαιτώντας να ισχύει

$$[\gamma_n, \mathbb{H}] = E_n \gamma_n \quad (2.12)$$

και

$$[\gamma_n^\dagger, \mathbb{H}] = -E_n \gamma_n^\dagger, \quad (2.13)$$

καταλήγουμε στις εξισώσεις Bogoliubov-de Gennes (BdG) [12]

$$\mathcal{H}_{BdG}\Psi(x) = E\Psi(x), \quad (2.14)$$

όπου

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \hat{u}(x) \\ \hat{v}(x) \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

και

$$\mathcal{H}_{BdG} = \begin{pmatrix} \hat{H}_0 & \hat{\Delta} \\ -\hat{\Delta}^* & -\hat{H}_0^* \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

Εδώ

$$\hat{u}(x) = (u_\uparrow(x), u_\downarrow(x))^T$$

και

$$\hat{v}(x) = (v_\uparrow(x), v_\downarrow(x))^T.$$

Επίσης δεν γράφουμε ρητά το δείκτη  $n$  για λόγους συντομίας. Οι εξισώσεις BdG περιέχουν όλες τις πληροφορίες σχετικά με την επαφή Josephson.

Είναι απλή υπόθεση να αναπτύξουμε τις εξισώσεις BdG και να πάρουμε το μιγαδικό συζυγή τους. Τότε καταλήγουμε στις εξισώσεις

$$\mathcal{H}_{BdG} \begin{pmatrix} \hat{v}^*(x) \\ \hat{u}^*(x) \end{pmatrix} = -E \begin{pmatrix} \hat{v}^*(x) \\ \hat{u}^*(x) \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

Επομένως έχουμε καταλήξει στη σχέση μεταξύ των ιδιοσυναρτήσεων των εξισώσεων BdG για θετικές και αρνητικές ενέργειες. Συγκεκριμένα, αν εναλλάξουμε τις ηλεκτρονιακές και τύπου οπής συνιστώσες της κυματοσυνάρτησης και πάρουμε το μιγαδικό συζυγή, πηγαίνουμε από λύσεις θετικής ενέργειας σε λύσεις αρνητικής ενεργειας.

Αξίζει να επεξεργαστούμε λίγο τις ιδιότητες των μετασχηματισμών Bogoliubov. Μία βασική τέτοια ιδιότητα είναι ότι πρέπει να τηρούνται οι σχέσεις αντιμετάθεσης

μετάξύ των τελεστών καταστροφής και δημιουργίας και πριν και μετά το μετασχηματισμό. Πρέπει λοιπόν, εκτός από τις σχέσεις <sup>1</sup>,

$$\left\{ \psi_s(x), \psi_{s'}^\dagger(x') \right\} = \delta_{ss'} \delta(x - x'), \quad (2.18)$$

$$\left\{ \psi_s(x), \psi_{s'}(x') \right\} = 0 \quad (2.19)$$

και τις ερμιτιανές συζυγείς τους, να ισχύουν και οι σχέσεις

$$\left\{ \gamma_n, \gamma_{n'}^\dagger \right\} = \delta_{nn'}, \quad (2.20)$$

$$\left\{ \gamma_n, \gamma_{n'} \right\} = 0 \quad (2.21)$$

και οι ερμιτιανές συζυγείς τους. Αντικαθιστώντας από τη σχέση (2.11) στις παραπάνω αντιμεταθετικές σχέσεις, βρίσκουμε σχέσεις που ικανοποιούν οι συναρτήσεις  $u_s^n(x)$  και  $v_s^n(x)$ . Έτσι, με αντικατάσταση της σχέσης (2.11) στις σχέσεις αντιμετάθεσης για τους τελεστές  $\psi, \psi^\dagger$  και αφού ομαδοποιήσουμε κατάλληλα τις σχέσεις που προκύπτουν, καταλήγουμε τελικά στη σχέση

$$\sum_n \left[ \begin{pmatrix} \hat{u}^n(x) \\ \hat{v}^n(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u}^n(x') \\ \hat{v}^n(x') \end{pmatrix}^\dagger + \begin{pmatrix} \hat{v}^{n*}(x) \\ \hat{u}^{n*}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{v}^{n*}(x') \\ \hat{u}^{n*}(x') \end{pmatrix}^\dagger \right] = \mathbf{1} \delta(x - x'), \quad (2.22)$$

όπου  $\mathbf{1}$  είναι ο ταυτοτικός  $4 \times 4$  πίνακας. Η σχέση αυτή αντιπροσωπεύει αυτό που είναι γνωστό ως ανάλυση της μονάδας στο χώρο καταστάσεων των εξισώσεων BdG, χρησιμοποιώντας ως βάση τις ιδιοσυναρτήσεις της ενέργειας.

Από την άλλη μεριά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τους αντίστροφους μετασχηματισμούς Bogoliubov και να τους αντικαταστήσουμε στις αντιμεταθετικές σχέσεις για τους τελεστές  $\gamma_n$  και  $\gamma_n^\dagger$ . Αυτοί είναι

$$\gamma_n = \sum_s \int dx \left( u_s^{n*}(x) \psi_s(x) + v_s^{n*}(x) \psi_s^\dagger(x) \right), \quad (2.23)$$

κάτι που μπορεί να διαπιστωθεί εύκολα αν η παραπάνω σχέση αντικατασταθεί στη σχέση (2.11) και αξιοποιηθούν οι συνιστώσες της σχέσης (2.22), οπότε προκύπτει μία

<sup>1</sup>τις οποίες χρησιμοποιήσαμε στην εξαγωγή στον εξισώσεων BdG στη σχέση (2.14).



ταυτότητα. Αντικαθιστώντας στις σχέσεις αντιμετάθεσης των  $\gamma_n$  και  $\gamma_n^\dagger$  και ομαδοποιώντας κατάλληλα τις σχέσεις που προκύπτουν, καταλήγουμε στις

$$\int dx \begin{pmatrix} \hat{u}^n(x) \\ \hat{v}^n(x) \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} \hat{u}^{n'}(x) \\ \hat{v}^{n'}(x) \end{pmatrix} = \delta_{nn'}, \quad (2.24)$$

$$\int dx \begin{pmatrix} \hat{v}^{n^*}(x) \\ \hat{u}^{n^*}(x) \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} \hat{v}^{n'^*}(x) \\ \hat{u}^{n'^*}(x) \end{pmatrix} = \delta_{nn'} \quad (2.25)$$

και

$$\int dx \begin{pmatrix} \hat{u}^n(x) \\ \hat{v}^n(x) \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} \hat{v}^{n'^*}(x) \\ \hat{u}^{n'^*}(x) \end{pmatrix} = 0, \quad (2.26)$$

$$\int dx \begin{pmatrix} \hat{v}^{n^*}(x) \\ \hat{u}^{n^*}(x) \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} \hat{u}^{n'}(x) \\ \hat{v}^{n'}(x) \end{pmatrix} = 0. \quad (2.27)$$

Οι σχέσεις αυτές αποτελούν τις σχέσεις ορθοκανονικότητας των ιδιοκαταστάσεων της ενέργειας της χαμιλτονιανής BdG. Προφανώς οι ιδιοκαταστάσεις αρνητικής ενέργειας είναι πάντα ορθογώνιες προς τις καταστάσεις θετικής ενέργειας.

Ολοκληρώνουμε αυτή την ενότητα παραθέτοντας τη σχέση ανάμεσα στο αυτοσυνεπές δυναμικό ζεύγους και τις ιδιοσυναρτήσεις ενέργειας των εξισώσεων BdG. Αυτή μπορεί να υπολογιστεί, αν αντικαταστήσουμε το μετασχηματισμό Bogoliubov (2.11) στη σχέση (2.6). Έτσι έχουμε

$$\Delta(x) = g(x) \sum_n \{ u_\uparrow^n(x) v_\downarrow^{n^*}(x) (1 - f(E_n)) + v_\uparrow^{n^*}(x) u_\downarrow^n(x) f(E_n) \}, \quad (2.28)$$

όπου

$$f(E_n) = \langle \gamma_n^\dagger \gamma_n \rangle = \frac{1}{e^{\beta E_n} + 1} \quad (2.29)$$

είναι ο παραγοντας Fermi. Η σχέση (2.28) ολοκληρώνει την παρουσίαση του βασικού μας μοντέλου.

## 2.2 Ιδιοσυναρτήσεις ενέργειας ομογενούς υπεραγωγού

Εφαρμόζουμε τη γενική εξίσωση BdG (2.14) στην περίπτωση ενός ομογενούς συμβατικού υπεραγωγού, που έχει σταθερό δυναμικό ζεύγους και κατά συνέπεια δεν διαρρέεται από ρεύμα. Λόγω της απουσίας μαγνήτισης στο σύστημα καθώς και του αντισυμμετρικού χαρακτήρα του δυναμικού ζεύγους στις μεταβλητές του σπιν, οι εξισώσεις BdG παίρνουν σύνθετη διαγώνια μορφή και συνεπώς καταλήγουμε σε δύο ανεξάρτητες εξισώσεις όπως παρακάτω:

$$\begin{pmatrix} h_0 - \mu & \Delta \\ \Delta^* & -(h_0^* - \mu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_\uparrow(x) \\ v_\downarrow(x) \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} u_\uparrow(x) \\ v_\downarrow(x) \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

και

$$\begin{pmatrix} h_0 - \mu & -\Delta \\ -\Delta^* & -(h_0^* - \mu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_\downarrow(x) \\ v_\uparrow(x) \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} u_\downarrow(x) \\ v_\uparrow(x) \end{pmatrix}, \quad (2.31)$$

όπου  $\Delta = |\Delta|e^{i\chi}$  είναι το δυναμικό ζεύγους και  $\chi$  η φάση του. Βλέπουμε ότι οι μεταβλητές του σπιν έχουν διαχωριστεί και ότι το δυναμικό ζεύγους αναμιγνύει τις ηλεκτρονιακές και χαρακτήρα οπής συνιστώσες της κυματοσυνάρτησης, με αντίθετα σπιν όμως. Αυτό είναι σε αρμονία με όσα έχουμε εξηγήσει στην εισαγωγή.

Για να διαγωνιοποιήσουμε τις παραπάνω εξισώσεις κάνουμε την αντικατάσταση

$$\begin{pmatrix} u_\uparrow(x) \\ v_\downarrow(x) \end{pmatrix} = e^{ikx} \begin{pmatrix} u_{k\uparrow} \\ v_{k\downarrow} \end{pmatrix}, \quad (2.32)$$

καθώς και μια ανάλογη σχέση για το  $(u_\downarrow(x), v_\uparrow(x))^T$ . Έτσι αντικαθιστώντας έχουμε

$$\begin{pmatrix} \xi_k & \Delta \\ \Delta^* & -\xi_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{k\uparrow} \\ v_{k\downarrow} \end{pmatrix} = E_k \begin{pmatrix} u_{k\uparrow} \\ v_{k\downarrow} \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

και

$$\begin{pmatrix} \xi_k & -\Delta \\ -\Delta^* & -\xi_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{k\downarrow} \\ v_{k\uparrow} \end{pmatrix} = E_k \begin{pmatrix} u_{k\downarrow} \\ v_{k\uparrow} \end{pmatrix}, \quad (2.34)$$

όπου

$$\xi_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + U - \mu. \quad (2.35)$$

Από τις παραπάνω εξισώσεις (2.33) και (2.34) θα προσδιορίσουμε τα  $u_{k\uparrow,\downarrow}$ ,  $v_{k\uparrow,\downarrow}$ , καθώς και τη σχέση διασποράς  $E_k$ . Έτσι έχουμε

$$\frac{u_{k\uparrow,\downarrow}}{v_{k\downarrow,\uparrow}} = \pm \frac{\Delta}{E - \xi_k} \quad (2.36)$$

και

$$\frac{u_{k\uparrow,\downarrow}}{v_{k\downarrow,\uparrow}} = \pm \frac{E + \xi_k}{\Delta^*}, \quad (2.37)$$

όπου το μείον πρόσημο στο δεξί μέλος αντιστοιχεί στη δεύτερη επιλογή των δεικτών του σπιν. Συνδυάζοντας τις δύο παραπάνω σχέσεις αμέσως προκύπτει

$$E_k^2 = \xi_k^2 + |\Delta|^2 \quad (2.38)$$

και για τις δύο επιλογές του σπιν. Επομένως έχουμε εκφυλισμό της ενέργειας, όπως αναμενόταν. Επίσης, ως γνωστόν, παρατηρούμε ότι το ενεργειακό φάσμα του υπεραγωγού εμφανίζει ένα χάσμα μέτρου  $|\Delta|$ . Επιβάλλοντας τη συνθήκη κανονικοποίησης  $|u_{k\uparrow,\downarrow}|^2 + |v_{k\uparrow,\downarrow}|^2 = 1$ , και αξιοποιώντας ξανά τις σχέσεις (2.36) και (2.37), καταλήγουμε στις επιθυμητές ιδιοκαταστάσεις της ενέργειας για έναν ομογενή συμβατικό υπεραγωγό. Συγκεκριμένα, για ενέργειες  $E$  εκτός του χάσματος, βρίσκουμε

$$|u_{k\uparrow,\downarrow}|^2 = \frac{E + \xi_k}{2E}$$

και

$$|v_{k\uparrow,\downarrow}|^2 = \frac{E - \xi_k}{2E}.$$

Μένει να προσδιορίσουμε τη σχετική φάση των  $u$  και  $v$ . Από τις εξισώσεις (2.36) και (2.37) φαίνεται κατ' αρχάς ότι αυτά διαφέρουν κατά έναν παράγοντα φάσης  $e^{i\chi}$ . Επίσης διαφέρουν και κατά ένα πρόσημο  $\text{sgn}(E \pm \sqrt{E^2 - |\Delta|^2}) = \text{sgn}(E)$ , όταν η ενέργεια είναι εκτός του χάσματος. Τέλος υπάρχει ένα επιπλέον σχετικό πρόσημο μείον στην λύση των εξισώσεων (2.34). Έτσι, ορίζοντας τις συναρτήσεις

$$u(E) = \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\Omega}{E} \right)} \quad (2.39)$$

και

$$v(E) = \text{sgn}(E) \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\Omega}{E}\right)}, \quad (2.40)$$

όπου

$$\Omega = \text{sgn}(E) \sqrt{E^2 - |\Delta|^2}, \quad (2.41)$$

καταλήγουμε στις ιδιοσυναρτήσεις της ενέργειας του συμβατικού υπεραγωγού

$$\Psi_{e\uparrow}(x) = \begin{pmatrix} u(E)e^{i\frac{x}{2}} \\ 0 \\ 0 \\ v(E)e^{-i\frac{x}{2}} \end{pmatrix} e^{\pm ik_e x}, \quad (2.42)$$

$$\Psi_{e\downarrow}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ u(E)e^{i\frac{x}{2}} \\ -v(E)e^{-i\frac{x}{2}} \\ 0 \end{pmatrix} e^{\pm ik_e x}, \quad (2.43)$$

$$\Psi_{h\uparrow}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ v(E)e^{i\frac{x}{2}} \\ -u(E)e^{-i\frac{x}{2}} \\ 0 \end{pmatrix} e^{\pm ik_h x}, \quad (2.44)$$

$$\Psi_{h\downarrow}(x) = \begin{pmatrix} v(E)e^{i\frac{x}{2}} \\ 0 \\ 0 \\ u(E)e^{-i\frac{x}{2}} \end{pmatrix} e^{\pm ik_h x}, \quad (2.45)$$

όπου

$$k_{e,h} = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} \left( \mu - U \pm \text{sgn}(E) \sqrt{E^2 - |\Delta|^2} \right)} \quad (2.46)$$

είναι οι λύσεις της εξίσωσης (2.38) ως προς  $k$ , για δεδομένη ενέργεια  $E$  εκτός του χάσματος. Στο δεξί μέλος της σχέσης (2.46), το πρόσημο μπροστά από την παράσταση

$\Omega = \text{sgn}(E)\sqrt{E^2 - |\Delta|^2}$  είναι συν για τον αντίστοιχο δείκτη  $e$  στο  $k$  του αριστερού μέλους και μείον για τον δείκτη  $h$ . Το  $k_e$  είναι το κυματόνυσμα των ηλεκτρονικού χαρακτήρα στοιχειωδών διεγέρσεων του ομογενούς υπεραγωγού και το  $k_h$  το κυματόνυσμα των διεγέρσεων χαρακτήρα οπής. Η συνάρτηση προσήμου  $\text{sgn}(E)$  έχει τοποθετηθεί μπροστά από την τετραγωνική ρίζα στο  $\Omega$ , στη σχέση (2.41), έτσι ώστε στο όριο  $|\Delta| \rightarrow 0$  να παίρνουμε τις σωστές κυματοσυναρτήσεις.

Παρατηρούμε ότι οι λύσεις (2.42) και (2.43) είναι ιδιοκαταστάσεις της ενέργειας με ηλεκτρονικό χαρακτήρα και οι λύσεις (2.44) και (2.45) είναι ιδιοκαταστάσεις της ενέργειας με χαρακτήρα οπής, αφού π.χ για  $E > \Delta$  έχουμε  $|u(E)| > |v(E)|$  και το κυματοδιάνυσμα  $k_e$  ( $k_h$ ) είναι μεγαλύτερο (μικρότερο) από το κυματοδιάνυσμα Fermi  $k_F$ . Πάντως οι ιδιοκαταστάσεις έχουν μικτό χαρακτήρα ηλεκτρονίου - οπής.

Βρήκαμε λοιπόν τις λύσεις για ενέργειες εκτός του χάσματος και άρα για ενέργειες που αντιστοιχούν σε πραγματικά κυματοδιανύσματα και αντίστοιχα οδεύοντα κύματα. Κατάστασεις με ενέργεια εντός του χάσματος δεν μπορούν να υπάρξουν στο εσωτερικό ενός υπεραγωγού. Αν όμως κάποια διέγερση προσπέσει στην επιφάνεια του υπεραγωγού, έχει νόημα να μελετήσουμε πως αυτή αποσβένεται στο εσωτερικό του. Για ενέργειες εντός του χάσματος λοιπόν ( $|E| < |\Delta|$ ) και ακριβώς επειδή τότε το  $\xi_k$  είναι φανταστικό, προκύπτει ότι  $|u_{k\uparrow,\downarrow}|^2 = \frac{1}{2}$  και  $|v_{k\uparrow,\downarrow}|^2 = \frac{1}{2}$ , αν πάρουμε το μετρο στο τετράγωνο και των δύο μελών των σχέσεων (2.36), (2.37) και ληφθεί υπόψη η σχέση (2.38) και η συνθήκη κανονικοποίησης. Από τις ίδιες σχέσεις προκύπτει ότι, εκτός από έναν σχετικό παράγοντα φάσης  $e^{ix}$ , τα  $u_{k\uparrow,\downarrow}$  και  $v_{k\downarrow,\uparrow}$  διαφέρουν κατά τη φάση  $e^{i\phi_E}$ , όπου  $\phi_E = \arccos(\frac{E}{\Delta})$ . Σημειώνουμε ότι, για ενέργειες εντός του χάσματος, έχουμε  $\xi_k = i\sqrt{|\Delta|^2 - E^2}$ . Στα ίδια συμπεράσματα καταλήγουμε και όταν “επεκτείνουμε” την ισχύ των τύπων (2.42)-(2.45) για τις ιδιοκαταστάσεις της ενέργειας στην περίπτωση  $|E| < |\Delta|$ , μόνο που η συνθήκη κανονικοποίησης είναι διαφορετική. Επίσης, για ενέργειες εντός του χάσματος, τα κυματοδιανύσματα είναι μιγαδικά, ώστε να μπορεί να προκύψει η απόσβεση της διέγερσης στο εσωτερικό του υπεραγωγού.

## 2.3 Ιδιοσυναρτήσεις ενέργειας ομογενούς σιδηρομαγνήτη

Στην ενότητα αυτή θα υπολογίσουμε τις ιδιοσυναρτήσεις ενέργειας ενός ομογενούς σιδηρομαγνήτη οδευόντων ηλεκτρονίων μαγνήτισης  $\mathbf{M}$ , σύμφωνα με το μοντέλο Stoner, που θα μας φανούν χρήσιμες σε επόμενες ενότητες. Οι καταστάσεις αυτές μπορούν να προσδιοριστούν, αν θέσουμε  $\Delta = 0$  στις εξισώσεις BdG (2.14). Τότε προκύπτουν οι εξισώσεις

$$\begin{pmatrix} h_0 - \mu - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{M} & \hat{0} \\ \hat{0} & -h_0 + \mu + (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{M})^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u}(x) \\ \hat{v}(x) \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \hat{u}(x) \\ \hat{v}(x) \end{pmatrix}. \quad (2.47)$$

Είναι φανερό ότι οι παραπάνω εξισώσεις μπορούν να διαχωριστούν σε δύο ανεξάρτητες εξισώσεις στον υπόχωρο του χώρου καταστάσεων που αντιστοιχεί στα ηλεκτρόνια και στις οπές αντίστοιχα. Έτσι, έχουμε

$$(h_0 - \mu - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{M})\hat{u}(x) = E\hat{u}(x) \quad (2.48)$$

και

$$(h_0 - \mu - (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{M})^*)\hat{v}(x) = -E\hat{v}(x). \quad (2.49)$$

Το διάνυσμα της μαγνήτισης δίνεται σε πολικές συντεταγμένες, με μέτρο  $M$  και  $\phi$ ,  $\theta$  την πολική και αζιμουθιακή γωνία αντίστοιχα, έτσι ώστε

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{M} = M \begin{pmatrix} \cos \theta & e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}. \quad (2.50)$$

Εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό (2.32) έχουμε, για τα ηλεκτρόνια:

$$\begin{pmatrix} u_{\uparrow}(x) \\ u_{\downarrow}(x) \end{pmatrix} = e^{iqx} \begin{pmatrix} u_{q\uparrow} \\ u_{q\downarrow} \end{pmatrix} \quad (2.51)$$

και

$$\begin{pmatrix} \xi_q - M \cos \theta & -Me^{-i\phi} \sin \theta \\ -Me^{i\phi} \sin \theta & \xi_q + M \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{q\uparrow} \\ u_{q\downarrow} \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} u_{q\uparrow} \\ u_{q\downarrow} \end{pmatrix}, \quad (2.52)$$

όπου το  $\xi_q$  δίνεται από τη σχέση (2.35). Φέρνοντας το δεξί μέλος στο αριστερό και μηδενίζοντας την ορίζουσα του πίνακα που πολλαπλασιάζει την κυματοσυνάρτηση, καταλήγουμε στη σχέση διασποράς

$$E_q = \xi_q - sM, \quad (2.53)$$

όπου  $s = \pm 1$ , με την τιμή  $+1$  να αντιστοιχεί στο σπιν επάνω στον άξονα κβάντωσης και η τιμή  $-1$  να αντιστοιχεί στον σπιν κάτω. Αναπτύσσοντας τις εξισώσεις (2.52) και χρησιμοποιώντας τη σχέση διασποράς (2.53) καθώς και τη συνθήκη κανονικοποίησης  $|u_{q\uparrow}|^2 + |u_{q\downarrow}|^2 = 1$ , καταλήγουμε στις ιδιοκαταστάσεις ενέργειας του ομογενούς σιδηρομαγνήτη με ηλεκτρονικό χαρακτήρα. Αυτές είναι:

$$\Psi_{e\uparrow}(x) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\phi}{2}} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\phi}{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{\pm i q_{e\uparrow} x} \quad (2.54)$$

και

$$\Psi_{e\downarrow}(x) = \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\phi}{2}} \\ \cos \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\phi}{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{\pm i q_{e\downarrow} x}, \quad (2.55)$$

όπου

$$q_{es} = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(\mu - U + sM + E)}. \quad (2.56)$$

Το  $s$  σαν δείκτης αντιστοιχεί στα σύμβολα  $\uparrow, \downarrow$ .

Με ανάλογο τρόπο βρίσκουμε και τις ιδιοκαταστάσεις της ενέργειας με χαρακτήρα οπής. Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι στις εξισώσεις (2.49) προκύπτουν από τις εξισώσεις (2.48) με αλλαγή του προσήμου της ενέργειας και αλλαγή του προσήμου της πολικής γωνίας  $\phi$  της μαγνήτισης. Έτσι η σχέση διασποράς γίνεται

$$E_q = -\xi_q + sM \quad (2.57)$$

και οι ιδιοκαταστάσεις της ενέργειας

$$\Psi_{h\uparrow}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\phi}{2}} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix} e^{\pm i q_{h\uparrow} x} \quad (2.58)$$

και

$$\Psi_{h\downarrow}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sin \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\phi}{2}} \\ \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix} e^{\pm i q_{h\downarrow} x}, \quad (2.59)$$

όπου

$$q_{hs} = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(\mu - U + sM - E)}. \quad (2.60)$$

Συνολικά παρατηρούμε ότι, στην περίπτωση του σιδηρομαγνήτη, το ενεργειακό φάσμα για τις δύο τιμές του σπιν εμφανίζει μια διαφορά ενέργειας ίση προς  $2M$ .

## 2.4 Καταστάσεις σκέδασης στην επαφή

Στην ενότητα αυτή θα προσδιορίσουμε τις στάσιμες καταστάσεις σκέδασης στην επαφή Josepshon για όλους τους δυνατούς τύπους πρόσπτωσης και συνεπώς και τους αντίστοιχους συντελεστές ανάκλασης και διάδοσης. Αυτοί θα μας φανούν χρήσιμοι στον υπολογισμό του υπερρεύματος με τη μέθοδο των Furusaki-Tsukada (βλ. κεφάλαιο 7). Θα ξεκινήσουμε με μία γενική προσέγγιση του προβλήματος, όπου το δυναμικό ζεύγους και η μαγνήτιση θεωρούνται γνωστά και αυτοσυνεπώς προσδιορισμένα και στη συνέχεια θα εξειδικεύσουμε σε ένα πιο ειδικό, μη αυτοσυνεπές μοντέλο. Έτσι, αρχικά θεωρούμε ότι το δυναμικό ζεύγους και η μαγνήτιση αποκτούν τις σταθερές ομογενείς τιμές τους με εκθετικό τρόπο μακριά από τις ενδοεπιφάνειες. Το γεγονός αυτό, που είναι καλά εδραιωμένο, μας επιτρέπει να προσεγγίσουμε το πρόβλημα των καταστάσεων σκέδασης της επαφής με τη βοήθεια των μεθόδων της θεωρίας σκέδασης για δυναμικά μικρής εμβέλειας. Έτσι θεωρούμε ότι υπάρχουν δύο σημεία, σε πεπερασμένη απόσταση μεν, αλλά αρκετά απομακρυσμένα, στα αριστερά και δεξιά της επαφής, εντός της αριστερής και δεξιάς υπεραγωγίσιμης περιοχής αντίστοιχα, πέρα από τα οποία το δυναμικό ζεύγους και η μαγνήτιση έχουν πρακτικά τις σταθερές τιμές που έχουν και στην ομογενή κατάσταση (στην περίπτωση που εξετάζουμε, για τη μαγνήτιση αυτή η τιμή είναι μηδέν). Στη συνέχεια επιλύουμε τις εξισώσεις BdG σε κάθε μια από τις περιοχές που προσδιορίσαμε με τον παραπάνω τρόπο (αριστερή, ενδιάμεση και δεξιά) και οι λύσεις που προκύπτουν συνταιριάζονται στις ενδοεπιφάνειες, ώστε να προκύψει η μοναδική λύση που αντιστοιχεί σε κάθε τύπο πρόσπτωσης. Η αριστερή και η δεξιά περιοχή που προσδιορίσαμε παραπάνω θα αποκαλούνται στο εξής αριστερή και δεξιά ασυμπτωτική περιοχή. Η ενδιάμεση περιοχή θεωρούμε ότι εκτείνεται από  $x = 0$  έως  $x = d$ .

Ας εξετάσουμε λοιπόν τις καταστάσεις σκέδασης προσπίπτοντων διεγέρσεων από τα αριστερά. Αυτό σημαίνει ότι εξετάζουμε ενέργειες εκτός του χάσματος και των δύο υπεραγωγών, στα αριστερά και τα δεξιά. Έχουμε λοιπόν

$$\Psi_{ps\ell}^+(x) = \begin{cases} e^{ipk_{p\ell}x} \phi_{ps\ell} + \sum_{p's'} \alpha_{ps,p's'}^\ell e^{-ip'k_{p'\ell}x} \phi_{p's'\ell} & , x < 0 \\ \sum_i \beta_{ps,i}^\ell \Psi_{I,i}(x) & , 0 < x < d \\ \sum_{p's'} \gamma_{ps,p's'}^\ell e^{ip'k_{p'r}(x-d)} \phi_{p's'r} & , x > d. \end{cases} \quad (2.61)$$



Η στάσιμη κατάσταση σκέδασης  $\Psi_{ps\ell}^+(x)$  αντιστοιχεί σε πρόσπτωση του οιονεί σωματίου  $p$  χαρακτήρα (ηλεκτρονιακού ή οπής) και σπιν  $s$  από τα αριστερά ( $\ell$ ). Ο υπερδείκτης  $+$  σημαίνει ότι η κατάσταση αυτή ήταν στο άπειρα μακρινό παρελθόν η αντίστοιχη ελεύθερη κατάσταση στον αριστερό υπεραγωγό. Η ερμηνεία αυτή είναι αυτολεξεί ακριβής, εαν η στάσιμη και εκτεταμένη κατάσταση θεωρηθεί σαν ένα κυματοπακέτο το οποίο, παρότι πολύ εντοπισμένο στην ορμή και άρα ευρύ αλλά πεπερασμένο στο χώρο, προσπίπτει από τα αριστερά και σκεδάζεται στην επαφή, δίνοντας ένα ανακλώμενο και ένα διαδιδόμενο κυματοπακέτο στο άπειρα μακρινό μέλλον.

Επίσης πρέπει να αναφέρουμε ότι οι δείκτες  $p$  και  $s$  έχουν διπλή χρήση στην παραπάνω σχέση. Η χρήση αυτή έχει να κάνει με την αντιστοίχισή τους σε σύμβολα, όταν χρησιμοποιούνται σαν δείκτες και στην αντιστοίχισή τους σε  $\pm 1$ , όταν χρησιμοποιούνται σε μαθηματικές εκφράσεις. Έτσι λοιπόν ισχύει

$$p = \begin{cases} +1, & (e) \\ -1, & (h) \end{cases}$$

και

$$s = \begin{cases} +1, & (\uparrow) \\ -1, & (\downarrow) \end{cases}$$

Επίσης τα κυματοδιανύσματα δίνονται από τη σχέση

$$k_{p\nu} = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(\mu + p\Omega_\nu)}, \quad (2.62)$$

όπου

$$\Omega_\nu = \text{sgn}(E) \sqrt{E^2 - |\Delta_\nu|^2} \quad (2.63)$$

και τα τετραδιάστατα διανύσματα στήλες δίνονται από τις σχέσεις

$$\phi_{es\nu} = \begin{pmatrix} u_\nu e^{i\chi_\nu/2} A_s \\ s v_\nu e^{-i\chi_\nu/2} A_{\bar{s}} \end{pmatrix} \quad (2.64)$$

και

$$\phi_{hs\nu} = \begin{pmatrix} v_\nu e^{i\chi_\nu/2} A_{\bar{s}} \\ \bar{s} u_\nu e^{-i\chi_\nu/2} A_s \end{pmatrix}, \quad (2.65)$$

όπου  $A_{\uparrow} = (1 \ 0)^T$ ,  $A_{\downarrow} = (0 \ 1)^T$ , η μπάρα πάνω από το δείκτη  $s$  δηλώνει τη συζυγή, ή αντίθετη, τιμή του και  $\chi_{\nu}$  είναι η φάση του δυναμικού ζεύγους στην αριστερή και τη δεξιά ασυμπτωτική περιοχή ( $\nu = l, r$ ). Επίσης

$$u_{\nu} = \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\Omega_{\nu}}{E} \right)}, \quad (2.66)$$

$$v_{\nu} = \text{sgn}(E) \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\Omega_{\nu}}{E} \right)} \quad (2.67)$$

είναι οι παράγοντες συμφωνίας (coherence factors) στον υπεραγωγό  $\nu$  ( $= l, r$ ). Οι παραπάνω ορισμοί είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι συμβαδίζουν με αυτούς προηγούμενης ενότητας.

Στη σχέση (2.61) έχουμε εισάγει τις ιδιοκαταστάσεις ενέργειας στο ενδιάμεσο στρώμα με το σύμβολο  $\Psi_{I,i}(x)$ , όπου ο δείκτης  $i$  παίρνει τιμές από 1 έως 8. Οι συντελεστές  $\beta_{ps,i}^{\ell}$  θα προσδιοριστούν από τις συνθήκες συνέχειας της κυματοσυνάρτησης στις ενδοεπιφάνειες  $x = 0$  και  $x = d$ , όπως θα δούμε παρακάτω. Οι ιδιοκαταστάσεις  $\Psi_{I,i}(x)$  μπορούν να προσδιοριστούν από τη λύση των εξισώσεων BdG στο ενδιάμεσο στρώμα της επαφής, όπου γενικά πρέπει να ληφθεί υπόψη η μεταβολή του δυναμικού ζεύγους και της μαγνήτισης στις περιοχές εγγύτητας της επαφής. Η διαδικασία αυτή απλοποιείται δραστηρικά, αν θεωρήσουμε ένα μη αυτοσυνεπές μοντέλο για την επαφή, όπως θα δείξουμε παρακάτω.

Τώρα θα σχολιάσουμε τους συντελεστές σκέδασης που εμφανίζονται στη σχέση (2.61). Ξεκινούμε με τους συντελεστές ανάκλασης  $\alpha_{ps,p's'}^{\ell}$ . Προκειται για συντελεστές ανάκλασης στο κανάλι με χαρακτήρα  $p'$  και σπιν  $s'$  στα αριστερά μιας διέγερσης που προσπίπτει από τα αριστερά (που δηλώνεται από τον υπερδείκτη  $\ell$ ) με  $p$  χαρακτήρα και σπιν  $s$ . Με άλλα λόγια ο συντελεστής ανάκλασης  $\alpha_{ps,p's'}^{\ell}$  είναι το πλάτος πιθανότητας να προσπέσει μία διέγερση στο κανάλι  $p, s$  από τα αριστερά και να ανακλαστεί προς τα αριστερά στο κανάλι  $p's'$ . Ανάλογα με τις καταστάσεις  $ps$  και  $p's'$ , οι συντελεστές  $\alpha_{ps,p's'}^{\ell}$  περιλαμβάνουν απλή ανάκλαση, ανάκλαση με αλλαγή σπιν ή ανάκλασεις Andreev.

Παρόμοια ισχύουν και για το συμβολισμό των συντελεστών διάδοσης  $\gamma_{ps,p's'}^{\ell}$ . Πρόκειται για τα πλάτη πιθανότητας να διαδοθεί στα δεξιά της επαφής μία διέγερση στο κανάλι  $p's'$ , με δεδομένο ότι έχει προσπέσει από τα αριστερά μία διέγερση στο κανάλι  $ps$ . Ανάλογα με το ποιές είναι οι καταστάσεις  $ps$  και  $p's'$ , οι συντελεστές  $\gamma_{ps,p's'}^{\ell}$  περιγράφουν απλή διάδοση, διάδοση με αλλαγή σπιν ή διάδοση με διασταυρωση κλάδου (branch crossing).

Επίσης χρειάζεται να αποφανθίσουμε το συμβολισμό των συντελεστών της λύσης των εξισώσεων BdG στην ενδιάμεση περιοχή,  $\beta_{ps,i}^{\ell}$ . Ο υπερδείκτης  $\ell$  υποδηλώνει ότι οι

συντελεστές αυτοί αντιστοιχούν στη λύση για πρόσπτωση από αριστερά, διέγερσης με χαρακτήρα  $ps$ , όπως υποδηλώνεται από τους αντίστοιχους δείκτες.

Κατασκευάζουμε στη συνέχεια τις στάσιμες καταστάσεις σκέδασης με πρόσπτωση οριζόντιων σωματιδίων από τα δεξιά της επαφής. Έχουμε

$$\Psi_{psr}^+(x) = \begin{cases} \sum_{p's'} \gamma_{ps,p's'}^r e^{-ip'k_{p'}\ell x} \phi_{p's'\ell} & , x < 0 \\ \sum_i \beta_{ps,i}^r \Psi_{I,i}(x) & , 0 < x < d \\ e^{-ipk_{pr}(x-d)} \phi_{psr} + \sum_{p's'} \alpha_{ps,p's'}^r e^{ip'k_{p'r}(x-d)} \phi_{p's'r} & , x > d. \end{cases} \quad (2.68)$$

Η κατάσταση  $\Psi_{psr}^+(x)$  είναι η στάσιμη κατάσταση σκέδασης που αντιστοιχεί σε πρόσπτωση από τα δεξιά στο μακρινό παρελθόν μιας διέγερσης χαρακτήρα  $ps$  και η ανάκλαση και διάδοση αυτής της διέγερσης στο μακρινό μέλλον. Με  $\alpha_{ps,p's'}^r$  συμβολίζουμε τους συντελεστές ανάκλασης διέγερσης χαρακτήρα  $ps$  σε διέγερση με χαρακτήρα  $p's'$ . Με  $\gamma_{ps,p's'}^r$  συμβολίζουμε τους συντελεστές διάδοσης. Ο υπερδείκτης  $r$  προσδιορίζει σε αυτές τις περιπτώσεις ότι πρόκειται για πρόσπτωση οριζόντιου σωματιδίου από τα δεξιά. Τέλος, οι συντελεστές  $\beta_{ps,i}^r$  προσδιορίζουν την λύση της ενδιάμεσης περιοχής για την περίπτωση πρόσπτωσης  $ps$  οριζόντιου σωματιδίου από τα δεξιά.

Οι σχέσεις (2.61) και (2.68) προσδιορίζουν τις στάσιμες καταστάσεις σκέδασης ως συρραφή γραμμικών συνδυασμών ιδιοκαταστάσεων της ενέργειας στις τρεις περιοχές στις οποίες χωρίσαμε την επαφή (αριστερή ασυμπτωτική, ενδιάμεση και δεξιά ασυμπτωτική). Οι συντελεστές αυτών των γραμμικών συνδυασμών, μεταξύ των οποίων και οι συντελεστές σκέδασης, θα προσδιοριστούν από τις συνθήκες συρραφής (matching conditions) στις ενδοεπιφάνειες που χωρίζουν τις τρεις περιοχές που αναφέρθηκαν. Οι συνθήκες αυτές προκύπτουν κατά το γνωστό τρόπο από τις εξισώσεις BdG. Η συνέχεια των κυματοσυναρτήσεων στις ενδοεπιφάνειες προκύπτει από την απαίτηση ύπαρξης πρώτης παραγώγου και η ασυνέχεια της πρώτης παραγώγου προκύπτει από την ολοκλήρωση των εξισώσεων BdG εκατερωθεν της ενδοεπιφάνειας. Έτσι, για την ενδοεπιφάνεια  $j$  στο σημείο  $x_j$  είναι

$$\begin{pmatrix} \hat{u}(x) \\ \hat{v}(x) \end{pmatrix} \Big|_{x_j^+} = \begin{pmatrix} \hat{u}(x) \\ \hat{v}(x) \end{pmatrix} \Big|_{x_j^-} \quad (2.69)$$

και

$$\frac{\hbar^2}{2m(x)} \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} \hat{u}(x) \\ \hat{v}(x) \end{pmatrix} \Big|_{x_j^+} - \frac{\hbar^2}{2m(x)} \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} \hat{u}(x) \\ \hat{v}(x) \end{pmatrix} \Big|_{x_j^-} = \mathcal{X}_j \begin{pmatrix} \hat{u}(x_j) \\ \hat{v}(x_j) \end{pmatrix}, \quad (2.70)$$

όπου  $m(x)$  είναι η ενεργός μάζα σαν συνάρτηση της θέσης και

$$\mathcal{X}_j = \begin{pmatrix} V_j - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{N}_j & 0 \\ 0 & (V_j - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{N}_j)^* \end{pmatrix}. \quad (2.71)$$

Η σχέση (2.70) θα χρησιμοποιηθεί και στη μορφή

$$\frac{m_\ell}{m(x)} \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} \hat{u}(x) \\ \hat{v}(x) \end{pmatrix} \Big|_{x_j^+} - \frac{m_\ell}{m(x)} \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} \hat{u}(x) \\ \hat{v}(x) \end{pmatrix} \Big|_{x_j^-} = \mathcal{Z}_j \begin{pmatrix} \hat{u}(x_j) \\ \hat{v}(x_j) \end{pmatrix}, \quad (2.72)$$

όπου

$$\mathcal{Z}_j = \begin{pmatrix} \hat{Z}_j & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{Z}_j^* \end{pmatrix} \quad (2.73)$$

και

$$\hat{Z}_j = \frac{2m_\ell}{\hbar^2} V_j \hat{1} - \frac{2m_\ell}{\hbar^2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{N}_j. \quad (2.74)$$

Η ποσότητα  $m_\ell$  είναι η ενεργός μάζα στον αριστερό υπεραγωγό και χρησιμοποιείται για την κανονικοποίηση των μαζών των υπολοίπων περιοχών της επαφής. Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι οι σχέσεις συρραφής των λύσεων ισχύουν σε οποιαδήποτε νοητή ενδοεπιφάνεια επιλέξουμε, με τη διαφορά ότι η παράγωγος της κυματοσυνάρτησης θα είναι συνεχής, εκτός εάν η νοητή αυτή ενδοεπιφάνεια συμπίπτει με κάποια φυσική ενδοεπιφάνεια του συστήματος, την οποία και μοντελοποιούμε με τους όρους δέλτα Dirac στη χαμιλτονιανή του συστήματος, που περιέχονται στο κανονικό δυναμικό σκέδασης  $U(x)$  και στη μαγνήτιση  $\mathbf{M}(x)$ . Οι ενδοεπιφάνειες που έχουμε επιλέξει να χωρίζουν τις ασυμπτωτικές περιοχές από την ενδιάμεση περιοχή μπορούν να χαρακτηριστούν νοητές, εκτός εάν χρησιμοποιούμε το μη αυτοσυνεπές μοντέλο για την επαφή. Τότε οι ασυμπτωτικές περιοχές ταυτίζονται με τις υπεραγωγίμες περιοχές και οι νοητές ενδοεπιφάνειες με τις φυσικές ενδοεπιφάνειες, που χωρίζουν τις υπεραγωγίμες περιοχές από μια ακολουθία σιδηρομαγνητικών στρωμάτων. Προφανώς, μεταξύ των στρωμάτων της προαναφερθείσας ακολουθίας, υπάρχουν κι άλλες φυσικές ενδοεπιφάνειες του συστήματος, τις οποίες μπορούμε να αξιοποιήσουμε επιλύοντας χωριστά τις εξισώσεις BdG σε κάθε στρώμα και χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις συρραφής των λύσεων. Το τί ακριβώς θα κάνουμε είναι θέμα επιλογής, αρκεί να μπορούμε να λύσουμε τις εξισώσεις BdG στις περιοχές που επιλέγουμε. Σε αυτή την εργασία θα επικεντρωθούμε κυρίως στη διαμέριση του άξονα της επαφής στις ασυμπτωτικές περιοχές και στην ενδιάμεση περιοχή, είτε θεωρούμε το αυτοσυνεπές, είτε το μη αυτοσυνεπές μοντέλο για το δυναμικό ζεύγους και τη μαγνήτιση.

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις συρραφής των λύσεων στις τρεις περιοχές που αναφέραμε, καταλήγουμε σε ένα γραμμικό σύστημα εξισώσεων για τους συντελεστές που εμφανίζονται στις σχέσεις (2.61) και (2.68). Παρατάσσουμε αυτές τις εξισώσεις έτσι, ώστε οι εξισώσεις που προκύπτουν από την ηλεκτρονιακή  $\hat{u}$  συνιστώσα της (2.69) να παρουσιάζονται πρώτες, έπειτα να εμφανίζονται οι εξισώσεις που προκύπτουν από την ηλεκτρονιακή  $\hat{v}$  συνιστώσα της (2.70) ή της (2.72) και μετά οι εξισώσεις που προκύπτουν από τις χαρακτήρα οπής  $\hat{v}$  συνιστώσες των εξισώσεων (2.69) και (2.70) ή (2.72), κατά τον ίδιο τρόπο. Επίσης πρέπει να παρατηρήσουμε ότι στο δεξί μέλος των σχέσεων (2.70) και (2.72) μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη μορφή της λύσης είτε στα αριστερά είτε στα δεξιά της ενδοεπιφάνειας, μιας και η κυματοσυνάρτηση είναι συνεχής. Η παρατήρηση αυτή βέβαια είναι γενικού χαρακτήρα, μιας και στη θεώρηση των τριών περιοχών που αναφέραμε, οι ενδοεπιφάνειες είναι νοητές και η ασυνέχεια της παραγωγού της κυματοσυνάρτησης οφείλει να είναι μηδενική. Έχει όμως σημασία, όταν χρησιμοποιούμε το μη αυτοσυνεπές μοντέλο, οπότε οι ασυμπτωτικές περιοχές και η ενδιάμεση περιοχή ταυτίζονται με τις υπεραγωγίμες περιοχές και την σιδηρομαγνητική περιοχή αντίστοιχα. Επίσης έχει σημασία, όταν η επαφή έχει περισσότερα από ένα ενδιάμεσα στρώματα και επιλέγουμε να λύσουμε τις εξισώσεις BdG σε καθένα από αυτά ξεχωριστά.

Με βάση τα παραπάνω και θεωρώντας αρχικά πρόσπτωση οριζώντων σωματιδίων από τα αριστερά, καταλήγουμε στο γραμμικό σύστημα εξισώσεων για τους συντελεστές των λύσεων (2.61):

$$\begin{pmatrix} L_1 & S_{11} & S_{12} & 0 \\ L_2 & S_{21} & S_{22} & 0 \\ 0 & s_{11} & s_{12} & R_1 \\ 0 & s_{21} & s_{22} & R_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{ps}^\ell \\ \beta_{ps}^\ell \\ \gamma_{ps}^\ell \end{pmatrix} = B_{ps\ell}, \quad (2.75)$$

όπου  $L_i, S_{ij}, s_{ij}, R_i$  ( $i, j = 1, 2$ ) είναι  $4 \times 4$  πίνακες,  $\alpha_{ps}^\ell$  και  $\gamma_{ps}^\ell$  είναι τετραδιάστατα διανύσματα στήλες με στοιχεία τους συντελεστές ανάκλασης  $\alpha_{ps,p's'}^\ell$  και τους συντελεστές διάδοσης  $\gamma_{ps,p's'}^\ell$  αντίστοιχα, για τα διάφορα  $p'$  και  $s'$ , τα οποία διατάσσονται σε σειρά  $e \uparrow, e \downarrow, h \downarrow, h \uparrow$ , και  $\beta_{ps}^\ell = (\beta_{ps,1}^\ell, \dots, \beta_{ps,8}^\ell)^T$ . Ακόμη, τα  $B_{ps\ell}$  είναι διανύσματα στήλες διάστασης δεκαέξι και προσδιορίζονται από τις κυματοσυναρτήσεις των ελεύθερων προσπίπτοντων διεγέρσεων από τα αριστερά, που είναι χαρακτήρα  $p$  και  $s$ . Για πρόσπτωση από αριστερά επομένως δίνονται από τις σχέσεις:

$$B_{es\ell} = - \begin{pmatrix} u_\ell A_s \\ ik_{e\ell} u_\ell A_s \\ sv_\ell A_{\bar{s}} \\ isk_{e\ell} v_\ell A_{\bar{s}} \\ 0_{8 \times 1} \end{pmatrix}, \quad (2.76)$$

για πρόπτωση ηλεκτρονιακού χαρακτήρα διέγερσης από τα αριστερά και

$$B_{hs\ell} = - \begin{pmatrix} v_\ell A_{\bar{s}} \\ -ik_{h\ell} v_\ell A_{\bar{s}} \\ \bar{s}u_\ell A_s \\ -i\bar{s}k_{h\ell} u_\ell A_s \\ 0_{8 \times 1} \end{pmatrix}, \quad (2.77)$$

για πρόπτωση διέγερσης χαρακτήρα οπής από τα αριστερά. Επίσης  $0_{8 \times 1}$  είναι διανύσματα στήλης διάστασης οκτώ, με όλα τα στοιχεία τους ίσα με μηδέν.

Οι πίνακες  $S_{ij}, s_{ij}$  προσδιορίζονται από τις γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις στην ενδιάμεση περιοχή. Οι πίνακες  $L_1, L_2$  είναι

$$L_1 = \begin{pmatrix} u_\ell \hat{1} & v_\ell \hat{1} \\ -ik_{e\ell} u_\ell \hat{1} & ik_{h\ell} v_\ell \hat{1} \end{pmatrix} e^{\frac{i\chi_\ell}{2}} \quad (2.78)$$

και

$$L_2 = \begin{pmatrix} v_\ell \hat{1}_a & u_\ell \hat{1}_a \\ -ik_{e\ell} v_\ell \hat{1}_a & ik_{h\ell} u_\ell \hat{1}_a \end{pmatrix} e^{-\frac{i\chi_\ell}{2}}, \quad (2.79)$$

όπου

$$\hat{1}_a = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Επίσης, όπου  $\tilde{m}_r$  είναι η κανονικοποιημένη μάζα του δεξιού υπεραγωγού,

$$R_1 = - \begin{pmatrix} u_r \hat{1} & v_r \hat{1} \\ \frac{ik_{er}}{\tilde{m}_r} u_r \hat{1} & -\frac{ik_{hr}}{\tilde{m}_r} v_r \hat{1} \end{pmatrix} e^{\frac{i\chi_r}{2}} \quad (2.80)$$

και

$$R_2 = - \begin{pmatrix} v_r \hat{1}_a & u_r \hat{1}_a \\ \frac{ik_{er}}{\hat{m}_r} v_r \hat{1}_a & -\frac{ik_{hr}}{\hat{m}_r} u_r \hat{1}_a \end{pmatrix} e^{-\frac{i\chi r}{2}}. \quad (2.81)$$

Η επίλυση του συστήματος (2.75) μας δίνει όλους τους συντελεστές που προσδιορίζουν τις στάσιμες καταστάσεις σκέδασης με πρόσπτωση από τα αριστερά, που δίνονται από τη σχέση (2.61). Η λύση μπορεί να επιτευχθεί με τη μέθοδο του Cramer. Για παράδειγμα έχουμε

$$\alpha_{ps,p's'}^\ell = \frac{\Gamma_{ps,p's'}^{\alpha,\ell}}{\Gamma}, \quad (2.82)$$

όπου  $\Gamma$  είναι η ορίζουσα του  $16 \times 16$  πίνακα που εμφανίζεται στο αριστερό μέλος της εξίσωσης (2.75) και θα την ονομάζουμε ορίζουσα του πίνακα των συνθηκών συρραφής. Επίσης  $\Gamma_{ps,p's'}^{\alpha,\ell}$  είναι η ορίζουσα του ίδιου πίνακα, αλλά με τη στήλη που αντιστοιχεί στο συντελεστή  $\alpha_{ps,p's'}^\ell$  να έχει αντικατασταθεί από τη στήλη  $B_{ps\ell}$ . Ομοίως έχουμε

$$\gamma_{ps,p's'}^\ell = \frac{\Gamma_{ps,p's'}^{\gamma,\ell}}{\Gamma}, \quad (2.83)$$

για το συντελεστή διάδοσης  $\gamma_{ps,p's'}^\ell$ , όπου  $\Gamma_{ps,p's'}^{\gamma,\ell}$  είναι η ορίζουσα  $\Gamma$  με τη στήλη που αντιστοιχεί στον παραπάνω συντελεστή διάδοσης να έχει αντικατασταθεί από τη στήλη  $B_{ps\ell}$ .

Με ανάλογο τρόπο, οι στάσιμες καταστάσεις σκέδασης με πρόσπτωση από τα δεξιά δίνουν την παρακάτω εξίσωση για τους συντελεστές τους:

$$\begin{pmatrix} L_1 & S_{11} & S_{12} & 0 \\ L_2 & S_{21} & S_{22} & 0 \\ 0 & s_{11} & s_{12} & R_1 \\ 0 & s_{21} & s_{22} & R_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{ps}^r \\ \beta_{ps}^r \\ \alpha_{ps}^r \end{pmatrix} = B_{psr}, \quad (2.84)$$

όπου  $\gamma_{ps}^r$  και  $\alpha_{ps}^r$  είναι τετραδιάστατα διανύσματα στήλες με στοιχεία τους συντελεστές διάδοσης  $\gamma_{ps,p's'}^r$  και τους συντελεστές ανάκλασης  $\alpha_{ps,p's'}^r$  αντίστοιχα, για τα διάφορα  $p'$  και  $s'$ , τα οποία διατάσσονται σε σειρά  $e \uparrow, e \downarrow, h \downarrow, h \uparrow$ , και  $\beta_{ps}^r = (\beta_{ps,1}^r, \dots, \beta_{ps,8}^r)^T$ . Επίσης τα  $B_{psr}$  είναι διανύσματα στήλες διάστασης δεκαέξι και προσδιορίζονται από τις κυματοσυναρτήσεις των ελεύθερων προσπίπτοντων διεγέρσεων από τα δεξιά, που είναι χαρακτήρα  $p$  και  $s$ . Για πρόσπτωση από δεξιά επομένως έχουμε

$$B_{esr} = \begin{pmatrix} 0_{8 \times 1} \\ u_r e^{i\frac{\chi_r}{2}} A_s \\ -\frac{ik_{er}}{m_r} u_r e^{i\frac{\chi_r}{2}} A_s \\ s v_r e^{-i\frac{\chi_r}{2}} A_{\bar{s}} \\ -s \frac{ik_{er}}{m_r} v_r e^{-i\frac{\chi_r}{2}} A_{\bar{s}} \end{pmatrix}, \quad (2.85)$$

για πρόσπτωση ηλεκτρονιακού χαρακτήρα διέγερσης από τα δεξιά και

$$B_{hsr} = \begin{pmatrix} 0_{8 \times 1} \\ v_r e^{i\frac{\chi_r}{2}} A_{\bar{s}} \\ \frac{ik_{hr}}{m_r} v_r e^{i\frac{\chi_r}{2}} A_{\bar{s}} \\ \bar{s} u_r e^{-i\frac{\chi_r}{2}} A_s \\ \bar{s} \frac{ik_{hr}}{m_r} u_r e^{-i\frac{\chi_r}{2}} A_s \end{pmatrix}, \quad (2.86)$$

για πρόσπτωση διέγερσης χαρακτήρα οπής από τα δεξιά. Αντίστοιχα με την περίπτωση της πρόσπτωσης από αριστερά, μπορούμε να γράψουμε

$$\alpha_{ps,p's'}^r = \frac{\Gamma_{ps,p's'}^{\alpha,r}}{\Gamma}, \quad (2.87)$$

και

$$\gamma_{ps,p's'}^r = \frac{\Gamma_{ps,p's'}^{\gamma,r}}{\Gamma}. \quad (2.88)$$

Θα εξετάσουμε τώρα τη μορφή που παίρνουν οι παραπάνω εξισώσεις, όταν εφαρμόσουμε ένα μη αυτοσυνεπές τμηματικά συνεχές μοντέλο για μια σιδηρομαγνητική επαφή Josephson, με ένα στρώμα σιδηρομαγνήτη και σπιν ενεργές φυσικές ενδοεπιφάνειες. Θεωρούμε δηλαδή ότι οι ασυμπτωτικές περιοχές ταυτίζονται με τις υπεραγώγιμες περιοχές και ότι το δυναμικό ζεύγους έχει σταθερή μεν, αλλά μιγαδική τιμή στις περιοχές αυτές. Στα σημεία  $x = 0$  και  $x = d$  βρίσκονται φυσικές ενδοεπιφάνειες με σπιν ενεργές ιδιότητες, που χαρακτηρίζονται από μαγνητίσεις ενδοεπιφάνειας  $\mathbf{N}_{\ell,r}$  αντίστοιχα, και μεταξύ αυτών ένα σιδηρομαγνητικό στρώμα σταθερής μαγνήτισης  $\mathbf{M}$ . Σε αυτή την περίπτωση οι γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις μεταξύ των δύο ενδοεπιφανειών βρίσκονται εύκολα, όπως δείξαμε σε προηγούμενη ενότητα. Έτσι λοιπόν, οι καταστάσεις  $\Psi_{I,i}(x)$  γίνονται οι καταστάσεις

$$\Psi_{I,ps\pm}(x) = e^{\pm iq_{ps}x} \varphi_{ps}, \quad (2.89)$$



όπου οι δείκτες  $p$  και  $s$  αντιστοιχούν στο σωματιδιακό βαθμό ελευθερίας και στο βαθμό ελευθερίας του σπιν αντίστοιχα και αντικαταστούν εδώ τον δείκτη  $i$  που χρησιμοποιήσαμε παραπάνω. Επίσης

$$q_{ps} = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(\mu + sM + pE)}. \quad (2.90)$$

Οι  $4 \times 1$  στήλες  $\varphi_{ps}$  είναι

$$\varphi_{es} = \begin{pmatrix} e_s \\ 0_{2 \times 1} \end{pmatrix}, \quad \varphi_{hs} = \begin{pmatrix} 0_{2 \times 1} \\ h_s \end{pmatrix}, \quad (2.91)$$

όπου

$$e_{\uparrow} = \begin{pmatrix} e^{-i\phi/2} \cos \theta/2 \\ e^{i\phi/2} \sin \theta/2 \end{pmatrix}, \quad e_{\downarrow} = \begin{pmatrix} -e^{-i\phi/2} \sin \theta/2 \\ e^{i\phi/2} \cos \theta/2 \end{pmatrix} \quad (2.92)$$

και  $\phi, \theta$  είναι η πολική και αζιμουθιακή γωνία της μαγνήτισης του σιδηρομαγνητικού στρώματος αντίστοιχα. Ακόμη  $h_s = e_s^*$ .

Χρησιμοποιώντας τις λύσεις αυτές ως τις γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις στην ενδιάμεση περιοχή (περιοχή σιδηρομαγνήτη), βρίσκουμε ότι οι πίνακες  $S_{ij}, s_{ij}$  για  $i \neq j$  είναι ίσοι με μηδενικούς πίνακες, ενώ για  $i = j$  έχουμε

$$S_{11} = ( E_+ \mid E_- ) \quad (2.93)$$

και

$$S_{22} = ( H_+ \mid H_- ), \quad (2.94)$$

όπου

$$E_+ = \begin{pmatrix} -e_{\uparrow} & -e_{\downarrow} \\ (-\frac{iq_{e\uparrow}}{\tilde{m}_I} + \hat{Z}_{\ell})e_{\uparrow} & (-\frac{iq_{e\downarrow}}{\tilde{m}_I} + \hat{Z}_{\ell})e_{\downarrow} \end{pmatrix} \quad (2.95)$$

και

$$H_+ = \begin{pmatrix} -h_{\uparrow} & -h_{\downarrow} \\ (-\frac{iq_{h\uparrow}}{\tilde{m}_I} + \hat{Z}_{\ell}^*)h_{\uparrow} & (-\frac{iq_{h\downarrow}}{\tilde{m}_I} + \hat{Z}_{\ell}^*)h_{\downarrow} \end{pmatrix}, \quad (2.96)$$

όπου  $E_{\pm}$  και  $H_{\pm}$  είναι  $4 \times 2$  πίνακες και  $\tilde{m}_I$  είναι η κανονικοποιημένη ως προς την  $m_{\ell}$  ενεργός μάζα στο ενδιάμεσο στρώμα I. Ο πίνακας  $E_-$  βρίσκεται από τον πίνακα  $E_+$ , αν κάνουμε την αλλαγή  $q_{e\uparrow,\downarrow} \rightarrow -q_{e\uparrow,\downarrow}$  και ο  $H_-$  από τον  $H_+$ , αν κάνουμε την αλλαγή  $q_{h\uparrow,\downarrow} \rightarrow -q_{h\uparrow,\downarrow}$ . Επίσης

$$s_{11} = ( E'_+ \mid E'_- ) \quad (2.97)$$

και

$$s_{22} = ( H'_+ \mid H'_- ), \quad (2.98)$$

όπου

$$E'_+ = \begin{pmatrix} e_{\uparrow} e^{iq_{e\uparrow}d} & e_{\downarrow} e^{iq_{e\downarrow}d} \\ (\frac{iq_{e\uparrow}}{\tilde{m}_I} + \hat{Z}_r) e_{\uparrow} e^{iq_{e\uparrow}d} & (\frac{iq_{e\downarrow}}{\tilde{m}_I} + \hat{Z}_r) e_{\downarrow} e^{iq_{e\downarrow}d} \end{pmatrix} \quad (2.99)$$

και

$$H'_+ = \begin{pmatrix} h_{\uparrow} e^{iq_{h\uparrow}d} & h_{\downarrow} e^{iq_{h\downarrow}d} \\ (\frac{iq_{h\uparrow}}{\tilde{m}_I} + \hat{Z}_r^*) h_{\uparrow} e^{iq_{h\uparrow}d} & (\frac{iq_{h\downarrow}}{\tilde{m}_I} + \hat{Z}_r^*) h_{\downarrow} e^{iq_{h\downarrow}d} \end{pmatrix}. \quad (2.100)$$

Οι πίνακες  $E'_-$  και  $H'_-$  προκύπτουν από τους  $E'_+$  και  $H'_+$  με αλλαγή του προσήμου των κυματοδιανυσμάτων. Επίσης αναφέρουμε ότι ο πίνακας  $\hat{Z}_j$  μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\hat{Z}_j = k_{F\ell} Z_{nj} \hat{1} - k_{F\ell} Z_{mj} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_j, \quad (2.101)$$

όπου  $k_{F\ell}$  είναι το κυματοδιάνυσμα Fermi στην αριστερή ασυμπτωτική περιοχή και  $Z_{nj}, Z_{mj}$  είναι οι κανονικοποιημένες ισχύες ενδοεπιφανειακής σκέδασης και μαγνήτισης αντίστοιχα, για την ενδοεπιφάνεια  $j = \ell, r$ . Επίσης

$$\mathbf{n}_j = (\cos \phi_j \sin \theta_j, \sin \phi_j \sin \theta_j, \cos \theta_j)$$

είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στη διεύθυνση της μαγνήτισης της ενδοεπιφάνειας  $j = \ell, r$  και  $\phi_j, \theta_j$  η πολική και η αζιμουθιακή της γωνία. Σημειώνουμε ότι αργότερα θα χρησιμοποιήσουμε και το συμβολισμό  $\mathbf{n}_{\ell} \equiv \boldsymbol{\xi}$ ,  $\mathbf{n}_r \equiv \boldsymbol{\zeta}$  και  $\boldsymbol{\eta}$  για τη διεύθυνση της μαγνήτισης του ενδιάμεσου σιδηρομαγνητικού στρώματος.

Οφείλουμε να παρατηρήσουμε δύο πράγματα σε αυτό το σημείο. Πρώτον, η μορφή των πινάκων  $S_{ij}$  και  $s_{ij}$  παραπάνω προκύπτουν, αν στις εξισώσεις συρραφής και στις δύο ενδοεπιφάνειες ο όρος στο δεξί μέλος των (2.70) και (2.72) υπολογιστεί αντικαθιστώντας τη λύση του ενδιάμεσου στρώματος. Δεύτερον η σειρά με την οποία διατάσσονται οι συντελεστές των γραμμικώς ανεξάρτητων λύσεων του ενδιάμεσου στρώματος στις εξισώσεις (2.75) και (2.84) είναι  $e \uparrow$  και  $e \downarrow$  κινούμενα προς τα δεξιά,  $e \uparrow$  και  $e \downarrow$  κινούμενα προς τα αριστερά και στη συνέχεια  $h \downarrow$ ,  $h \uparrow$  κινούμενα προς τα αριστερά και  $h \downarrow$ ,  $h \uparrow$  κινούμενα προς τα δεξιά.

Μπορούμε να επιλέξουμε να γράψουμε το δεξί μέλος των (2.70) και (2.72) χρησιμοποιώντας τις κυματοσυναρτήσεις του στρώματος που βρίσκεται στα δεξιά της ενδοεπιφάνειας. Τότε, στην περίπτωση μιας σιδηρομαγνητικής επαφής Josephson με ένα σιδηρομαγνητικό στρώμα και σπιν ενεργές ενδοεπιφάνειες, μεταβάλλονται οι πίνακες  $s_{ij}$  και οι πίνακες  $R_1$  και  $R_2$ , καθώς και τα διανύσματα στήλες  $B_{psr}$ , που αντιστοιχούν σε πρόσπτωση διέγερσης από τα δεξιά. Στους πίνακες  $s_{ij}$  πρέπει να μηδενίσουμε τις ποσότητες  $\hat{Z}$ , όπου εμφανίζονται, ενώ

$$R_1 = \begin{pmatrix} -u_r \hat{1} & -v_r \hat{1} \\ \left(-\frac{ik_{er}}{\tilde{m}_r} \hat{1} + \hat{Z}_r\right) u_r & \left(\frac{ik_{hr}}{\tilde{m}_r} \hat{1} + \hat{Z}_r\right) v_r \end{pmatrix} e^{\frac{i\chi_r}{2}} \quad (2.102)$$

και

$$R_2 = \begin{pmatrix} -v_r \hat{1}_a & -u_r \hat{1}_a \\ \left(-\frac{ik_{er}}{\tilde{m}_r} \hat{1} + \hat{Z}_r^*\right) \hat{1}_a v_r & \left(\frac{ik_{hr}}{\tilde{m}_r} \hat{1} + \hat{Z}_r^*\right) \hat{1}_a u_r \end{pmatrix} e^{-\frac{i\chi_r}{2}}. \quad (2.103)$$

Επίσης

$$B_{esr} = \begin{pmatrix} 0_{8 \times 1} \\ u_r e^{i\frac{\chi_r}{2}} A_s \\ -\left(\frac{ik_{er}}{\tilde{m}_r} \hat{1} + \hat{Z}_r\right) u_r e^{i\frac{\chi_r}{2}} A_s \\ s v_r e^{-i\frac{\chi_r}{2}} A_{\bar{s}} \\ -s \left(\frac{ik_{er}}{\tilde{m}_r} \hat{1} + \hat{Z}_r^*\right) v_r e^{-i\frac{\chi_r}{2}} A_{\bar{s}} \end{pmatrix} \quad (2.104)$$

και

$$B_{hsr} = \begin{pmatrix} 0_{8 \times 1} \\ v_r e^{i\frac{\chi_r}{2}} A_{\bar{s}} \\ \left(\frac{ik_{hr}}{\tilde{m}_r} \hat{1} - \hat{Z}_r\right) v_r e^{i\frac{\chi_r}{2}} A_{\bar{s}} \\ \bar{s} u_r e^{-i\frac{\chi_r}{2}} A_s \\ \bar{s} \left(\frac{ik_{hr}}{\tilde{m}_r} \hat{1} - \hat{Z}_r^*\right) u_r e^{-i\frac{\chi_r}{2}} A_s \end{pmatrix}. \quad (2.105)$$

Εφόσον έχουν προσδιοριστεί αυτοί οι πίνακες, οι συντελεστές των γραμμικώς ανεξάρτητων λύσεων μπορούν να βρεθούν π.χ από τον κανόνα του Cramer. Τα αποτελέσματα είναι τα ίδια προφανώς, όποια λύση και να επιλέξουμε να χρησιμοποιήσουμε στο δεξί μέλος των συνθηκών συρραφής (2.70) και (2.72).

## 2.5 Δέσμιες στάσιμες καταστάσεις

Το πρόβλημα σκέδασης που θέσαμε στην προηγούμενη παράγραφο, με βάση τις εξισώσεις BdG, επιδέχεται και λύσεις που είναι εντοπισμένες στο χώρο. Αυτές είναι επομένως δέσμιες στάσιμες καταστάσεις και είναι γνωστές ως καταστάσεις Andreev. Η ενέργεια των καταστάσεων Andreev είναι κβαντισμένη και βρίσκεται εντός του χάσματος που χαρακτηρίζει τις υπεραγώγιμες ασυμπτωτικές περιοχές. Εξαρτώνται επίσης παραμετρικά από τις παραμέτρους της επαφής, όπως π.χ η διαφορά φάσης  $\chi$  κατά μήκος της επαφής. Όπως είναι αναμενόμενο, οι ενέργειες των καταστάσεων Andreev μπορούν να βρεθούν από τη συνθήκη

$$\Gamma(E, \chi) = 0, \tag{2.106}$$

όπου  $\Gamma(E, \chi)$  είναι η ορίζουσα του πίνακα των συνθηκών συρραφής. Η κυματοσυνάρτηση των δέσμιων καταστάσεων Andreev περιλαμβάνει ηλεκτρόνια και οπές που διαδίδονται στο ενδιάμεσο στρώμα και ανακλώνται στις ασυμπτωτικές περιοχές, μετασχηματιζόμενα το ένα στο άλλο, δημιουργώντας έτσι ζεύγη Cooper, που διαδίδονται από τις ασυμπτωτικές περιοχές προς το άπειρο και συνεισφέρουν στο υπερρεύμα. Στην πραγματικότητα το υπερρεύμα μπορεί να χωριστεί σε δύο συνεισφορές, μία από τις καταστάσεις Andreev και μία από τις στάσιμες καταστάσεις σκέδασης. Με αυτές τις παρατηρήσεις ολοκληρώνουμε την περιγραφή μας των λύσεων των χρονοανεξάρτητων εξισώσεων BdG.

## Κεφάλαιο 3

# T-πίνακας και εξισώσεις Lippmann-Schwinger

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε τις εξισώσεις Lippmann-Schwinger για τις στάσιμες καταστάσεις στην επαφή Josephson και θα ορίσουμε το λεγόμενο T-πίνακα, προσδιορίζοντας τους συντελεστές σκέδασης ως στοιχεία πίνακος αυτού. Θα δούμε ότι ο ορισμός του T-πίνακα στις επαφές Josephson είναι ανάλογος με αυτόν στα προβλήματα σκέδασης πολλών καναλιών, το ρόλο των οποίων στην περίπτωση μας παίζουν η αριστερή και η δεξιά ασυμπτωτική χαμιλτονιανή. Στη συνέχεια θα μελετήσουμε την συνάρτηση Green στις ασυμπτωτικές περιοχές της επαφής και θα την εκφράσουμε συναρτήσει των συντελεστών σκέδασης και των λύσεων των εξισώσεων BdG στις ασυμπτωτικές περιοχές. Η θεωρία αυτού του κεφαλαίου είναι η βάση για τη μελέτη των συνηθών συμμετρίας που χαρακτηρίζουν τους συντελεστές σκέδασης της επαφής Josephson, για τον υπολογισμό της συνάρτησης Green και για τον υπολογισμό και την εξαγωγή ιδιοτήτων της σχέσης υπερρεύματος φάσης στις επαφές Josephson.

### 3.1 Ελεύθερη συνάρτηση Green

Στην ενότητα αυτή θα υπολογίσουμε τη συνάρτηση Green ενός ομογενούς μονοδιάστατου υπεραγωγού, ο οποίος δεν διαρρέεται από ρεύμα και χαρακτηρίζεται από σταθερό στο χώρο δυναμικό ζεύγους (pair potential). Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της ανάλυσης του ταυτοτικού τελεστή στο χώρο καταστάσεων του υπεραγωγού, που δίνεται από τη σχέση (2.22). Στην περίπτωση του ομογενούς μονοδιάστατου υπεραγωγού, η μεταβλητή του κυματανύσματος  $k$  μπορεί να απαριθμήσει ένα πλήρες σύνολο ιδιοκαταστάσεων. Περισσότερες πληροφορίες για την πλήρη συνάρτηση Green των επαφών Josephson θα δοθούν στο κεφάλαιο 6. Έτσι έχουμε

$$\mathcal{G}(x, x'; z) = \int \frac{dk}{2\pi} \sum_{\sigma} \left\{ \frac{1}{z - E_k} \begin{pmatrix} \hat{u}^{k\sigma} \\ \hat{v}^{k\sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u}^{k\sigma} \\ \hat{v}^{k\sigma} \end{pmatrix}^{\dagger} + \frac{1}{z + E_k} \begin{pmatrix} \hat{v}^{k\sigma*} \\ \hat{u}^{k\sigma*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{v}^{k\sigma*} \\ \hat{u}^{k\sigma*} \end{pmatrix}^{\dagger} \right\} e^{ik(x-x')}, \quad (3.1)$$

όπου έχουμε αξιοποιήσει τη σταθερότητα των ποσοτήτων που εξαρτώνται από το  $k$  κατά το μετασχηματισμό  $k \rightarrow -k$  και έχουμε βγάλει κοινό παράγοντα το εκθετικό, που αρχικά στο δεύτερο όρο της παραπάνω σχέσης έχει κυματόνυσμα  $k$  με αντίθετο πρόσημο. Επίσης στην παραπάνω σχέση, έχουμε

$$\begin{pmatrix} \hat{u}^{k\uparrow} \\ \hat{v}^{k\uparrow} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_k e^{i\chi/2} \\ 0 \\ 0 \\ v_k e^{-i\chi/2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \hat{v}^{k\uparrow*} \\ \hat{u}^{k\uparrow*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_k e^{i\chi/2} \\ u_k e^{-i\chi/2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

και

$$\begin{pmatrix} \hat{u}^{k\downarrow} \\ \hat{v}^{k\downarrow} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ u_k e^{i\chi/2} \\ -v_k e^{-i\chi/2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \hat{v}^{k\downarrow*} \\ \hat{u}^{k\downarrow*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_k e^{i\chi/2} \\ 0 \\ 0 \\ u_k e^{-i\chi/2} \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

όπου

$$u_k = \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\xi_k}{E_k} \right)} \quad (3.4)$$

και

$$v_k = \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\xi_k}{E_k} \right)}. \quad (3.5)$$

Στη συνέχεια, βγάζοντας κοινό παράγοντα το  $1/(z^2 - E_k^2)$  και αξιοποιώντας τις σχέσεις

$$u_k^2 + v_k^2 = 1, \quad (3.6)$$

$$u_k^2 - v_k^2 = \frac{\xi_k}{E_k} \quad (3.7)$$

και

$$2u_k v_k = \frac{|\Delta|}{E_k}, \quad (3.8)$$

καταλήγουμε στη σχέση

$$\mathcal{G}(x, x'; z) = \int \frac{dk}{2\pi} \frac{1}{z^2 - E_k^2} \left\{ \begin{array}{l} \left( \begin{array}{ccccc} z + \xi_k & 0 & 0 & \Delta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Delta^* & 0 & 0 & z - \xi_k \end{array} \right) + \\ + \left( \begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z + \xi_k & -\Delta & 0 \\ 0 & -\Delta^* & z - \xi_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{array} \right\} e^{ik(x-x')}. \quad (3.9)$$

Συνεχίζουμε με τον υπολογισμό του ολοκληρώματος με τη μέθοδο των ολοκληρωτικών υπολοίπων. Είναι φανερό ότι ο αριθμητής της ολοκληρωτέας ποσότητας είναι μία αναλυτική συνάρτηση του  $k$ , ενώ ο παρονομαστής μηδενίζεται στις ρίζες της εξίσωσης  $z^2 - E_k^2 = 0$ . Άρα η ολοκληρωτέα ποσότητα έχει πόλους στο μιγαδικό  $k$  επίπεδο. Επίσης είναι φανερό ότι για μιγαδικό  $k$  που τείνει ακτινικά στο άπειρο, η ολοκληρωτέα ποσότητα μηδενίζεται είτε για  $\text{Im}(k) > 0$  είτε για  $\text{Im}(k) < 0$ , αντίστοιχα με το αν το πρόσημο του παράγοντα  $x - x'$  στον εκθέτη είναι θετικό ή αρνητικό. Έτσι μπορούμε να επεκτείνουμε την ολοκλήρωση, εκτός από τα  $k$  πάνω στον πραγματικό άξονα, και στα  $k$  πάνω σε ένα άπειρο ημικύκλιο, με διάμετρο στον πραγματικό άξονα και άπειρη ακτίνα, έτσι ώστε να καλύπτει είτε το άνω είτε το κάτω ημιεπίπεδο. Εφόσον η ολοκληρωτέα ποσότητα είναι αναλυτική πάνω και μέσα στο ημικύκλιο, εκτός από την ύπαρξη πόλων, το ολοκλήρωμα θα ισούται με  $2\pi i$  επί το άθροισμα των υπολοίπων των πόλων της ολοκληρωτέας συνάρτησης που βρίσκονται στο εσωτερικό του ημικυκλίου.

Οι πόλοι της ολοκληρωτέας συνάρτησης δίνονται από την εξίσωση

$$z^2 - E_k^2 = 0,$$

ή, αντικαθιστώντας από τη σχέση (2.38),

$$\xi_k^2 = z^2 - |\Delta|^2.$$

Ορίζοντας  $\Omega(z) = \sqrt{z^2 - |\Delta|^2}$  και λύνοντας ως προς  $k$ , έχουμε

$$k_p = \pm \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(\mu - U + p\Omega)}, \quad (3.10)$$

όπου  $p = e, h$  ή  $p = \pm 1$ , όπως έχει οριστεί σε προηγούμενο κεφάλαιο. Για  $z \neq \pm|\Delta|$  οι ρίζες της εξίσωσης είναι διαφορετικές μεταξύ τους και δίνουν απλούς πόλους στην ολοκληρωτέα συνάρτηση.

Ας θεωρήσουμε αρχικά ότι  $x - x' > 0$ . Τότε η ολοκληρωτέα ποσότητα είναι μηδέν πάνω σε άπειρο ημικύκλιο στο επίπεδο  $\text{Im}(k) > 0$  και το ολοκλήρωμα ισούται με το αντίστοιχο μιγαδικό ολοκλήρωμα κατά μήκος του πραγματικού  $k$  άξονα και του άπειρου ημικυκλίου, που σχηματίζουν μία κλειστή καμπύλη. Σύμφωνα με το θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων της μιγαδικής ανάλυσης, το ολοκλήρωμα θα ισούται με  $2\pi i$  επί το άθροισμα των υπολοίπων της ολοκληρωτέας ποσότητας στους πόλους που περικλείονται στην κλειστή καμπύλη ολοκλήρωσης. Μένει να προσδιορίσουμε ποιοι πόλοι βρίσκονται στο άνω ημιεπίπεδο. Αν επιλέξουμε το  $\Omega(z)$  να έχει την εγκοπή κλάδου στο διάστημα  $[-\infty, -|\Delta|] \cup [|\Delta|, \infty]$ , τότε η τιμή της συνάρτησης αυτής θα βρίσκεται πάντα στο άνω μιγαδικό ημιεπίπεδο ( $\text{Im}(\Omega(z)) > 0$ ). Αν στη συνέχεια επιλέξουμε την τετραγωνική ρίζα στον ορισμό των πόλων (3.10) να έχει εγκοπή κλάδου στον αρνητικό πραγματικό ημιάξονα του πεδίου ορισμού της, τότε στο άνω ημιεπίπεδο του μιγαδικού επιπέδου  $k$  θα βρίσκονται πάντα οι πόλοι  $k_e$  και  $-k_h$ . Αντίστοιχα στο κάτω μιγαδικό ημιεπίπεδο  $k$  θα κείται οι πόλοι  $-k_e$  και  $k_h$ , οι οποίοι βρίσκονται εντός της καμπύλης ολοκλήρωσης, όταν  $x - x' < 0$ . Η επιλογή αυτή των εγκοπών κλάδων καθιστά περιττή τη διερεύνηση ως προς τη θέση της μεταβλητής  $z$  στο μιγαδικό επίπεδο, όταν υπολογίζουμε τη συνάρτηση Green.

Ας δώσουμε τα παρακάτω ονόματα στις ολοκληρωτέες συναρτήσεις που εμφανίζονται στη σχέση (3.9):

$$\mathbf{f}_1(k) = \frac{1}{2\pi} \begin{pmatrix} z + \xi_k & 0 & 0 & \Delta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Delta^* & 0 & 0 & z - \xi_k \end{pmatrix} \frac{e^{ik(x-x')}}{z^2 - E_k^2} \quad (3.11)$$

και



$$\mathbf{f}_2(k) = \frac{1}{2\pi} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z + \xi_k & -\Delta & 0 \\ 0 & -\Delta^* & z - \xi_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{e^{ik(x-x')}}{z^2 - E_k^2}. \quad (3.12)$$

Οι συναρτήσεις αυτές έχουν απλούς πόλους, όπως δείξαμε παραπάνω, και τα υπόλοιπά τους δίνονται, σύμφωνα με γνωστό θεώρημα, από την παρακάτω σχέση

$$\text{Res}\{\mathbf{f}_1(k)\}_{k_i} = \frac{1}{2\pi} \begin{pmatrix} z + \xi_k & 0 & 0 & \Delta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Delta^* & 0 & 0 & z - \xi_k \end{pmatrix} \frac{e^{ik(x-x')}}{\left. \frac{d}{dk}(z^2 - E_k^2) \right|_{k_i}} \quad (3.13)$$

και

$$\text{Res}\{\mathbf{f}_2(k)\}_{k_i} = \frac{1}{2\pi} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z + \xi_k & -\Delta & 0 \\ 0 & -\Delta^* & z - \xi_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{e^{ik(x-x')}}{\left. \frac{d}{dk}(z^2 - E_k^2) \right|_{k_i}}, \quad (3.14)$$

όπου

$$\frac{d}{dk}(z^2 - E_k^2) = -2\xi_k \frac{d\xi_k}{dk} = -2\xi_k \frac{\hbar^2}{m} k \quad (3.15)$$

και το  $k_i$  αντιπροσωπεύει ένα από τα  $\pm k_e, \pm k_h$ . Επίσης σημειώνουμε ότι  $\xi_{\pm k_e} = \Omega(z)$  και  $\xi_{\pm k_h} = -\Omega(z)$ . Συνεπώς η ελεύθερη συνάρτηση Green θα δίνεται από τη σχέση

$$\mathcal{G}(x, x'; z) = 2\pi i \sum_{k=\pm k_e, \mp k_h} (\text{Res}\{\mathbf{f}_1(k)\} + \text{Res}\{\mathbf{f}_2(k)\}),$$

όπου τα άνω πρόσημα στα  $k_e, k_h$  ισχύουν για  $x - x' > 0$  και τα κάτω για  $x - x' < 0$ . Έτσι, αντικαθιστώντας από τις σχέσεις (3.13), (3.14) και (3.15), προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}(x, x'; z) = & -\frac{im}{2\hbar^2 k_e(z)\Omega(z)} \begin{pmatrix} z + \Omega(z) & 0 & 0 & \Delta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Delta^* & 0 & 0 & z - \Omega(z) \end{pmatrix} e^{ik_e(z)|x-x'|} \\
& -\frac{im}{2\hbar^2 k_h(z)\Omega(z)} \begin{pmatrix} z - \Omega(z) & 0 & 0 & \Delta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Delta^* & 0 & 0 & z + \Omega(z) \end{pmatrix} e^{-ik_h(z)|x-x'|} \\
& -\frac{im}{2\hbar^2 k_e(z)\Omega(z)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z + \Omega(z) & -\Delta & 0 \\ 0 & -\Delta^* & z - \Omega(z) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} e^{ik_e(z)|x-x'|} \\
& -\frac{im}{2\hbar^2 k_h(z)\Omega(z)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z - \Omega(z) & -\Delta & 0 \\ 0 & -\Delta^* & z + \Omega(z) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} e^{-ik_h(z)|x-x'|}.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί σε πιο συμπαγή μορφή έτσι, ώστε να γίνεται άμεσα αντιληπτό ότι η συνάρτηση Green μπορεί να κατασκευαστεί από τις αναλυτικές επεκτάσεις, για μιγαδική ενέργεια  $z$ , των γραμμικώς ανεξάρτητων λύσεων των εξισώσεων BdG. Για το σκοπό αυτό ορίζουμε

$$\phi_{es} = \begin{pmatrix} u(z)e^{i\chi/2}A_s \\ sv(z)e^{-i\chi/2}A_{\bar{s}} \end{pmatrix} \tag{3.17}$$

και

$$\phi_{hs} = \begin{pmatrix} v(z)e^{i\chi/2}A_{\bar{s}} \\ \bar{s}u(z)e^{-i\chi/2}A_s \end{pmatrix}, \tag{3.18}$$

όπου  $s = \uparrow, \downarrow$  ή  $s = +1, -1$  αντίστοιχα και

$$u(z) = \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\Omega(z)}{z} \right)} \tag{3.19}$$

και

$$v(z) = \text{csgn}(z) \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\Omega(z)}{z} \right)}, \quad (3.20)$$

με  $\text{csgn}(z) = \sqrt{z^2}/z$  και την επιλογή της εγκοπής κλάδου των τετραγωνικών ριζών να είναι στον αρνητικό ημιάξονα του πεδίου ορισμού τους, στο εύρος ορισμάτων  $(-\pi, \pi)$ . Οι παραπάνω ορισμοί ισχύουν για  $\text{Re}(z) \neq 0$ , ενώ για  $\text{Re}(z) = 0$ , δηλ.  $z = i\omega$ , ορίζουμε

$$u(\omega) = \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\bar{\Omega}}{\omega} \right)} \quad (3.21)$$

και

$$v(\omega) = -\text{sgn}(\omega) \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\bar{\Omega}}{\omega} \right)}, \quad (3.22)$$

με

$$\bar{\Omega} = \sqrt{\omega^2 + |\Delta|^2}. \quad (3.23)$$

Οι ορισμοί (3.19), (3.20), (3.21) και (3.22) εξασφαλίζουν ότι θα ισχύει, για κάθε μιγαδική τιμή του  $z$ , η σχέση

$$u(z)v(z) = \frac{|\Delta|}{2z}. \quad (3.24)$$

Επίσης εξασφαλίζουν ότι τα διανύσματα (3.17) και (3.18) ικανοποιούν τις αναλυτικές επεκτάσεις των εξισώσεων BdG για μιγαδική αλλά και καθαρά φανταστική ενέργεια. Ισχύουν επίσης και οι σχέσεις

$$u(z)^2 - v(z)^2 = \frac{\Omega(z)}{z} \quad (3.25)$$

και

$$u(z)^2 + v(z)^2 = 1. \quad (3.26)$$

Έτσι, με τη βοήθεια των παραπάνω και τη χρήση δεικτών, η ελεύθερη συνάρτηση Green μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$\mathcal{G}(x, x'; z) = \sum_{ps} \left( -\frac{imz}{\hbar^2 k_p(z) \Omega(z)} \right) \phi_{ps}(z) \tilde{\phi}_{ps}^T(z) e^{ipk_p(z)|x-x'|}, \quad (3.27)$$

όπου  $p = e, h$  ή  $p = +1, -1$  αντίστοιχα και η περισπωμένη πάνω από το  $\phi_{ps}^T(z)$  σημαίνει ότι η φάση  $\chi$  πηγαίνει στο  $-\chi$ . Προσεκτικές πράξεις στη σχέση (3.27), για  $z \neq 0$ , οδηγούν στη σχέση (3.16) και καθιστούν προφανή και την εισαγωγή της συνάρτησης  $\text{csgn}(z)$ . Η συνάρτηση αυτή είναι ίση με  $+1$  στο ημιεπίπεδο  $\text{Re}(z) > 0$  και  $-1$  στο ημιεπίπεδο  $\text{Re}(z) < 0$ . Για  $z = 0$ , η συνάρτηση Green δίνεται από τη σχέση (3.16) ή από το όριο της σχέσης (3.27).

## 3.2 Τελεστές Møller και εξισώσεις Lippmann-Schwinger

Στο κεφάλαιο 2 περιγράψαμε πως το πρόβλημα της (ανομοιογενούς) υπεραγωγιμότητας, από πρόβλημα συστήματος πολλών σωματιών, μπορεί να αναχθεί σε ένα σύστημα ανεξάρτητων οιονεί σωματιών, που οι στάσιμες καταστάσεις τους δίνονται από την επίλυση των εξισώσεων BdG (2.14), με τη βοήθεια των οποίων μπορούμε να συνθέσουμε την κατάσταση του συστήματος πολλών σωματιών. Οι εξισώσεις BdG, όπως τις παρουσιάσαμε, είναι ανεξάρτητες του χρόνου και ο λόγος είναι ότι, για τη στατιστική ανάλυση της θερμοδυναμικής ισορροπίας, οι στάσιμες καταστάσεις των οιονεί σωματιδίων αρκούν. Μπορούμε όμως να φανταστούμε καταστάσεις των οιονεί σωματιδίων που δεν είναι στάσιμες και επομένως έχουν μη τετριμμένη εξέλιξη συναρτήσει του χρόνου. Είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι αυτή η χρονική εξέλιξη θα δίνεται από χρονοεξαρτημένες εξισώσεις BdG, όπως παρακάτω

$$\mathcal{H}_{BdG} \Psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t), \quad (3.28)$$

όπου

$$\Psi(x, t) = \begin{pmatrix} \hat{u}(x, t) \\ \hat{v}(x, t) \end{pmatrix}. \quad (3.29)$$

Η μελέτη τέτοιων χρονοεξαρτημένων εξισώσεων δεν είναι περιττή, καθώς μπορούμε να εξάγουμε από αυτές σημαντικές πληροφορίες για τις στάσιμες καταστάσεις του συστήματος, χρησιμοποιώντας στοιχεία από τη θεωρία σκέδασης για “δυναμικά” βραχείας εμβέλειας, ή αλλιώς για χαμιλτονιανές που λαμβάνουν αρκετά γρήγορα συγκεκριμένες επιλύσιμες ασυμπτωτικές μορφές, καθώς απομακρυνόμαστε στο χώρο από την περιοχή σκέδασης.

Στο σύστημα που μελετάμε, τις σιδηρομαγνητικές επαφές Josephson, ήδη έχουμε διακρίνει τις ασυμπτωτικές περιοχές και την ενδιάμεση περιοχή. Οι ασυμπτωτικές περιοχές περιγράφονται από χαμιλτονιανές που, όπως είδαμε, επιλύονται εύκολα. Γενικά η κάθε ασυμπτωτική περιοχή περιγράφεται από διαφορετική χαμιλτονιανή μιας και μπορούν να διαφέρουν στην ενεργό μάζα των ηλεκτρονίων, στην ενέργεια Fermi και στο μέτρο του δυναμικού ζεύγους. Ακόμα και αν οι υπεραγώγιμες περιοχές είναι από το ίδιο υλικό, οι ασυμπτωτικές περιοχές μπορούν να διαφέρουν στη φάση του δυναμικού ζεύγους. Έτσι, έχουμε να αντιμετωπίσουμε ένα πρόβλημα, στο οποίο οι ασυμπτωτικές χαμιλτονιανές αριστερά και δεξιά της επαφής είναι γενικά διαφορετικές μεταξύ τους. Το γεγονός αυτό παρουσιάζει μια κάποια περιπλοκή. Ορίζουμε

$$\mathcal{H}_{BdG} = \mathcal{H}_\ell + \mathcal{V}_\ell = \mathcal{H}_r + \mathcal{V}_r, \quad (3.30)$$

όπου  $\mathcal{H}_{\ell,r}$  είναι οι ασυμπτωτικές χαμιλτονιανές στα αριστερά και στα δεξιά αντίστοιχα. Η παραπάνω σχέση είναι στην ουσία ο ορισμός των  $\mathcal{V}_{\ell,r}$ , τα οποία είναι η διαφορά της αντίστοιχης ασυμπτωτικής χαμιλτονιανής από τη χαμιλτονιανή BdG.

Το πρόβλημα της κβαντικής σκέδασης στη μία διάσταση με διαφορετικές ασυμπτωτικές χαμιλτονιανές στα αριστερά και τα δεξιά έχει μελετηθεί από μαθηματική σκοπιά και στο πεδίο της χρονικά εξαρτημένης σκέδασης κυματοπακέτων. Η αρχή έγινε στις αναφορές [110, 111]. Επίσης δουλειά έχει γίνει και όσον αφορά τις στάσιμες καταστάσεις σκέδασης τέτοιων συστημάτων και του ενεργειακού τους φάσματος, με τη χρήση των λύσεων Jost, όπως για παράδειγμα στην αναφορά [112]. Πρόσφατα δίνεται μια σύνοψη της παραπάνω θεωρίας, καθώς και μελέτη της χρονικής καθυστέρησης κυματοπακέτων σε προβλήματα με διαφορετικές ασυμπτωτικές χαμιλτονιανές, στην αναφορά [113], μαζί με αναφορές στη βιβλιογραφία του προβλήματος. Πιο κοντά στη μέθοδο που θα παρουσιάσουμε είναι η αναφορά [114]. Όλες οι παραπάνω αναφορές ασχολούνται με την εξίσωση Schrödinger στη μία διάσταση χωρίς σπιν. Θα δανειστούμε στοιχεία από τις παραπάνω αναφορές και θα διαπιστώσουμε ότι η θεωρία του T-πίνακα στα προβλήματα με διαφορετικές ασυμπτωτικές χαμιλτονιανές ομοιάζει με τη θεωρία του T-πίνακα σε προβλήματα σκέδασης με πολλά κανάλια, που για παράδειγμα εξηγείται στις αναφορές [115, 116]. Η θεωρία των T-πινάκων στην υπεραγωγιμότητα έχει επίσης μελετηθεί από τον Ishii, στην αναφορά [33].

Μετά από αυτή την παρένθεση, συνεχίζουμε τη μελέτη μας. Εφόσον η χαμιλτονιανή BdG είναι χρονικά ανεξάρτητη, η χρονική εξέλιξη των καταστάσεων  $\Psi(x, t)$  θα δίνεται από τη γνωστή εκθετική σχέση

$$\Psi(x, t) = \mathcal{U}_t \Psi(x, 0), \quad (3.31)$$

όπου

$$\mathcal{U}_t = e^{-\frac{it}{\hbar} \mathcal{H}_{BdG}}. \quad (3.32)$$

Οι καταστάσεις ενός κβαντικού συστήματος, που περιλαμβάνει μεταβλητές θέσης, μπορούν να διακριθούν γενικά σε δύο κατηγορίες: στις δέσμιες καταστάσεις και στις εκτεταμένες καταστάσεις ή καταστάσεις σκέδασης. Οι δέσμιες καταστάσεις είναι μη εκτεταμένες, δηλαδή χωρικά περιορισμένες, και οι κυματοσυναρτήσεις τους φθίνουν στο μηδέν στα  $x \rightarrow \pm\infty$ . Οι καταστάσεις σκέδασης είναι κυματοπακέτα που στο άπειρα μακρινό παρελθόν βρίσκονταν στο άπειρο (είτε αριστερά είτε δεξιά), σε πεπερασμένους χρόνους κινούνται στην ενδιάμεση περιοχή και στο άπειρα μακρινό μέλλον διαδίδονται προς το  $+\infty$  και το  $-\infty$ . Η ίδια κατηγοριοποίηση ισχύει και για τις ιδιοκαταστάσεις της ενέργειας, με τη διαφορά ότι οι εκτεταμένες ιδιοκαταστάσεις δεν ανήκουν στο χώρο Hilbert των καταστάσεων του συστήματος και δεν είναι κανονικοποιήσιμες. Ανήκουν σε ένα γενικότερο χώρο που ονομάζεται τροποποιημένος χώρος Hilbert (rigged Hilbert space). Οι καταστάσεις σκέδασης που αναφέραμε στο προηγούμενο κεφάλαιο ανήκουν σε αυτή την κατηγορία. Ονομάζονται και ιδιάζουσες (improper) καταστάσεις. Η χαμιλτονιανή BdG έχει δέσμιες ιδιοκαταστάσεις, τις καταστάσεις Andreev. Οι ασυμπτωτικές χαμιλτονιανές δεν έχουν δέσμιες ιδιοκαταστάσεις, όπως αποδείξαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Μπορούμε να φανταστούμε κυματοπακέτα να διαδίδονται κατά μήκος ενός συστήματος (π.χ ενός ομογενούς υπεραγωγού ή μιας επαφής Josephson), υπό την επιρροή μιας χαμιλτονιανής  $\mathcal{H}$ . Τίθεται το ερώτημα της εύρεσης της διεύθυνσης πρόσπτωσης αυτών των κυματοπακέτων ή των συνιστωσών διάδοσής τους στο μακρινό μέλλον με συγκεκριμένη διεύθυνση. Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα δίνεται με τη βοήθεια των τελεστών [113]

$$\mathcal{F}_\ell^\pm(\mathcal{H}) = \lim_{t \rightarrow \mp\infty} e^{\frac{it}{\hbar} \mathcal{H}} \mathcal{P}_\ell e^{-\frac{it}{\hbar} \mathcal{H}} \mathcal{P}_c(\mathcal{H}) \quad (3.33)$$

και

$$\mathcal{F}_r^\pm(\mathcal{H}) = \lim_{t \rightarrow \mp\infty} e^{\frac{it}{\hbar} \mathcal{H}} \mathcal{P}_r e^{-\frac{it}{\hbar} \mathcal{H}} \mathcal{P}_c(\mathcal{H}), \quad (3.34)$$

όπου  $\mathcal{P}_\ell$  ( $\mathcal{P}_r$ ) είναι ο προβολικός τελεστής στην αριστερή (δεξιά) ασυμπτωτική περιοχή και  $\mathcal{P}_c(\mathcal{H})$  είναι ο τελεστής που προβάλλει στον υπόχωρο των καταστάσεων σκέδασης της χαμιλτονιανής που εμφανίζεται στο όρισμά του. Στην περίπτωση των τελεστών  $\mathcal{H}_\ell$  και  $\mathcal{H}_r$  ο χώρος των καταστάσεων σκέδασης είναι ταυτόσημος με ολόκληρο το χώρο καταστάσεων, αφού δεν υπάρχουν δέσμιες καταστάσεις, και ο τελεστής  $\mathcal{P}_c$  είναι ίσος

με τον ταυτοτικό τελεστή. Επίσης αξίζει να σημειώσουμε ότι οι τελεστές  $\mathcal{F}_{\ell,r}^{\pm}$  είναι ανεξάρτητοι του χρόνου.

Η ερμηνεία των παραπάνω τελεστών είναι απλή. Π.χ ο τελεστής  $\mathcal{F}_{\ell}^{+}$  παίρνει μια κατάσταση σκέδασης σε μια πεπερασμένη τιμή του χρόνου και την εξελίσσει στο άπειρα μακρινό παρελθόν. Στη συνέχεια προβάλλει αυτή την κατάσταση στην αριστερή ασυμπτωτική περιοχή. Αν η κατάσταση αυτή προερχόταν από αριστερή πρόσπτωση, μένει ανέπαφη ενώ, αν προερχόταν από δεξιά πρόσπτωση, μηδενίζεται. Στο θεωρητικό ενδεχόμενο να ήταν μίγμα αριστερής και δεξιάς πρόσπτωσης, επιβιώνει μόνο η συνιστώσα με αριστερή πρόσπτωση. Στη συνέχεια ο τελεστής εξελίσσει πάλι την προβολή αριστερής πρόσπτωσης στην πεπερασμένη χρονική στιγμή. Ανάλογα ισχύουν και για τον τελεστή  $\mathcal{F}_r^{+}$ , που προβάλλει στη συνιστώσα μιας κατάστασης σκέδασης που προέρχεται από τα δεξιά. Με αυτό τον τρόπο, μια κατάσταση σκέδασης μπορεί να αναλυθεί σε δύο συνιστώσες, μία προερχόμενη από τα αριστερά και μία από τα δεξιά. Οι τελεστές  $\mathcal{F}_{\ell,r}^{-}$  εκτελούν την αντίστροφη διαδικασία. Εξελίσσουν μια κατάσταση σκέδασης στο άπειρα μακρινό μέλλον από μια πεπερασμένη χρονική στιγμή και την προβάλλουν στην αριστερή ή δεξιά ασυμπτωτική περιοχή αντίστοιχα, ενώ στη συνέχεια εξελίσσουν πίσω τη αριστερή ή δεξιά συνιστώσα στην πεπερασμένη χρονική στιγμή. Έτσι μια κατάσταση σκέδασης μπορεί να αναλυθεί σε δύο συνιστώσες, η μία από τις οποίες εξελίσσεται στα αριστερά και η άλλη στα δεξιά. Για λόγους πληρότητας αναφέρουμε ότι οι τελεστές  $\mathcal{F}_{\ell,r}^{\pm}$  είναι αυτοσυζυγείς, προβολικοί και ικανοποιούν τις σχέσεις  $\mathcal{F}_{\ell}^{\pm} \mathcal{F}_r^{\pm} = 0$  και  $\mathcal{F}_{\ell}^{\pm} + \mathcal{F}_r^{\pm} = \mathcal{F}_c(\mathcal{H})$ .

Πολύ σημαντικό στη θεωρία σκέδασης είναι η συσχέτιση των ασυμπτωτικά ελεύθερων καταστάσεων σκέδασης με τις “πραγματικές” καταστάσεις σκέδασης, σε πεπερασμένο χρόνο. Θα δεχτούμε ότι, στα συστήματα που μελετάμε, υπάρχει μία ένα προς ένα αντιστοιχία ανάμεσα στις καταστάσεις σκέδασης των χαμιλτονιανών  $\mathcal{H}_{\ell,r}$  και των καταστάσεων σκέδασης της χαμιλτονιανής  $\mathcal{H}_{BdG}$ . Σε κάθε κατάσταση σκέδασης των ασυμπτωτικών χαμιλτονιανών αντιστοιχεί μια κατάσταση σκέδασης της χαμιλτονιανής BdG, η οποία καταλήγει σε αυτές ασυμπτωτικά στο άπειρα μακρινό μέλλον ή παρελθόν. Επίσης δεν υπάρχουν καταστάσεις σκέδασης της χαμιλτονιανής BdG που να μην προκύπτουν ή καταλήγουν σε καταστάσεις σκέδασης των ασυμπτωτικών χαμιλτονιανών. Το γεγονός αυτό, που διαφαίνεται από τα συμπεράσματα του προηγούμενου κεφαλαίου, πιστοποιείται μαθηματικά από την ύπαρξη των κυματικών τελεστών Møller και την ιδιότητα του πίνακα σκέδασης να είναι μοναδιαίος. Οι τελεστές αυτοί δίνονται από τις σχέσεις [113]

$$W^{\pm} = W_{\ell}^{\pm} + W_r^{\pm}, \quad (3.35)$$

όπου

$$W_\ell^\pm = \lim_{t \rightarrow \mp\infty} e^{\frac{it}{\hbar}\mathcal{H}} e^{-\frac{it}{\hbar}\mathcal{H}_\ell} \mathcal{F}_\ell^\pm(\mathcal{H}_\ell) \quad (3.36)$$

και

$$W_r^\pm = \lim_{t \rightarrow \mp\infty} e^{\frac{it}{\hbar}\mathcal{H}} e^{-\frac{it}{\hbar}\mathcal{H}_r} \mathcal{F}_r^\pm(\mathcal{H}_r). \quad (3.37)$$

Η δράση των τελεστών Møller είναι επίσης απλή. Για παράδειγμα ο τελεστής  $W_\ell^+$  δρά πάνω σε ένα κυματοπακέτο και αρχικά προβάλλει τη συνιστώσα αυτού που προέκυψε από πρόσπτωση από τα αριστερά στο μακρινό παρελθόν. Στη συνέχεια εξελίσσει αυτή τη συνιστώσα με βάση τη χαμιλτονιανή  $\mathcal{H}_\ell$  στο μακρινό παρελθόν και έπειτα από το μακρινό παρελθόν στο παρόν με βάση τη χαμιλτονιανή  $\mathcal{H}$ . Το κοινό στοιχείο του κυματοπακέτου στο οποίο δρα ο τελεστής  $W_\ell^+$  με το κυματοπακέτο που προκύπτει από τη δράση του είναι ότι ταυτίζονται στο άπειρα μακρινό παρελθόν στην αριστερή ασυμπτωτική περιοχή. Η κατάσταση στην οποία δρά ο τελεστής Møller λέγεται ασυμπτωτική κατάσταση σκέδασης, ακριβώς επειδή έχει την ίδια ασυμπτωτική συμπεριφορά με την κατάσταση σκέδασης που εξελίσσεται με τη χαμιλτονιανή  $\mathcal{H}$ . Παρόμοια ισχύουν και για τον τελεστή  $W_r^+$  με τη διαφορά ότι δίνει την κατάσταση σκέδασης που προκύπτει από τη συνιστώσα της ασυμπτωτικής κατάστασης σκέδασης που προσπίπτει από τα δεξιά. Έτσι το άθροισμα των δύο μας δίνει την πλήρη κατάσταση σκέδασης ακόμα και στο θεωρητικό ενδεχόμενο που έχουμε πρόσπτωση με γραμμικό συνδυασμό και από τα αριστερά και από τα δεξιά.

Οι τελεστές  $W_\ell^-$  και  $W_r^-$  είναι εύκολο να διαπιστωθεί από τους ορισμούς, με ανάλογο τρόπο όπως και προηγουμένως, ότι δρώντας πάνω στο κυματοπακέτο που από το παρόν καταλήγει με ελεύθερη διάδοση προς τα αριστερά και δεξιά αντίστοιχα, μας δίνει το κυματοπακέτο στο παρόν που καταλήγει με διάδοση σύμφωνα με τη χαμιλτονιανή  $\mathcal{H}$  στην ίδια ακριβώς κατάσταση στο άπειρα μακρινό μέλλον, στα αριστερά και στα δεξιά αντίστοιχα. Το άθροισμά τους μας δίνει τη συνολική κατάσταση στο παρόν που έχει την ίδια ασυμπτωτική συμπεριφορά στο άπειρα μακρινό μέλλον με την ασυμπτωτική κατάσταση σκέδασης.

Αξίζει να αναφέρουμε ότι οι κυματικοί τελεστές Møller είναι ισομετρικοί, αλλά όχι απαραίτητα μοναδιαίοι. Αυτό σημαίνει ότι είναι τελεστές που διατηρούν το εσωτερικό γινόμενο των καταστάσεων που δρουν, αλλά ότι το πεδίο τιμών τους δεν ταυτίζεται με το σύνολο του χώρου καταστάσεων (όπως υποθέτουμε για το πεδίο ορισμού τους, όταν δεν υπάρχουν δέσμιες στάσιμες καταστάσεις των χαμιλτονιανών  $\mathcal{H}_{\ell,r}$ ). Έτσι μεν ισχύει  $W^\dagger W = 1$ , αλλά  $W W^\dagger \neq 1$ . Η σύνδεση των κυματικών τελεστών Møller και του S-πίνακα γίνεται μέσω της σχέσης  $S = W^{-\dagger} W^+$ , ο οποίος απεικονίζει την ασυμπτωτική κατάσταση πρόσπτωσης στην ασυμπτωτική κατάσταση διάδοσης [113, 115, 116].



Μπορούμε να εφαρμόσουμε τους τελεστές Møller και στις στάσιμες καταστάσεις των ελεύθερων χαμιλτονιανών  $\mathcal{H}_{\ell,r}$ , αρκεί να έχουμε υπόψη μας ότι στην πραγματικότητα πρόκειται περί κυματοπακέτων με πολύ εντοπισμένη ενέργεια. Στην περίπτωση μας, που οι ιδιοκαταστάσεις των ασυμπτωτικών χαμιλτονιανών έχουν εκθετική μορφή, μπορούμε να τις θεωρήσουμε διαμορφωμένες με βάση π.χ έναν γκαουσιανό ( $e^{-\epsilon x^2}$ ) παράγοντα, παίρνοντας το όριο  $\epsilon \rightarrow 0$ , αφού εκτελέσουμε τους υπολογισμούς. Θεωρούμε δηλαδή ότι προσεγγίζουμε τις ιδιοκαταστάσεις των ασυμπτωτικών χαμιλτονιανών με μη κανονικοποιημένα κυματοπακέτα μεγάλου χωρικού εύρους, τα οποία προσεγγίζουν επίπεδα κύματα, όταν η παράμετρος  $\epsilon$  τείνει στο μηδέν. Με αυτό το σκεπτικό, η δράση των τελεστών Møller στις ιδιοκαταστάσεις σκέδασης των ασυμπτωτικών χαμιλτονιανών θα δώσει τις στάσιμες καταστάσεις σκέδασης της χαμιλτονιανής BdG. Έτσι έχουμε

$$|\Psi_{ps\ell}^+(x)\rangle = W_\ell^+ |\Phi_{ps\ell}(x)\rangle \quad (3.38)$$

και

$$|\Psi_{psr}^+(x)\rangle = W_r^+ |\Phi_{psr}(x)\rangle, \quad (3.39)$$

όπου  $\Psi_{ps\ell}^+(x)$  και  $\Psi_{psr}^+(x)$  είναι οι στάσιμες καταστάσεις σκέδασης της χαμιλτονιανής BdG που αντιστοιχούν σε πρόσπτωση σωματίου με χαρακτήρα  $p$  και  $s$  από τα αριστερά και δεξιά αντίστοιχα και  $\Phi_{ps\ell}(x)$ ,  $\Phi_{psr}(x)$  είναι οι στάσιμες καταστάσεις σκέδασης των χαμιλτονιανών  $\mathcal{H}_{\ell,r}$  αντίστοιχα με πρόσπτωση επίσης από τα αριστερά και δεξιά αντίστοιχα. Συγκεκριμένα ισχύει

$$\Phi_{ps\ell}(x) = e^{ipk_{p\ell}x} \phi_{ps\ell} \quad (3.40)$$

και

$$\Phi_{psr}(x) = e^{-ipk_{pr}(x-d)} \phi_{psr}. \quad (3.41)$$

Σημειώνουμε ότι θα συμβολίζουμε με  $\Phi_{-ps\ell}(x)$ ,  $\Phi_{-psr}(x)$  τις στάσιμες καταστάσεις των ασυμπτωτικών χαμιλτονιανών που έχουν διεύθυνση διάδοσης αντίθετη από αυτή που αντιστοιχεί σε πρόσπτωση από την περιοχή με χαμιλτονιανή της οποίας είναι ιδιοκατάσταση, δηλαδή τα αριστερά ή τα δεξιά αντίστοιχα. Συγκεκριμένα, έχουμε

$$\Phi_{-ps\ell}(x) = e^{-ipk_{p\ell}x} \phi_{ps\ell} \quad (3.42)$$

και

$$\Phi_{-psr}(x) = e^{ipk_{pr}(x-d)} \phi_{psr}. \quad (3.43)$$

Έτσι είναι φανερό ότι το μείον πρόσημο στο δείκτη της κυματοσυνάρτησης δεν αλλάζει το χαρακτήρα της διέγερσης που αναπαριστά, απλά αλλάζει το πρόσημο του κυματανύσματος στον εκθετικό παράγοντα με τη χωρική εξάρτηση.

Από τις σχέσεις (3.38), (3.39) μπορούμε να εξάγουμε τις ονομαζόμενες εξισώσεις Lippmann - Schwinger, με τον ακόλουθο τρόπο. Ας ξεκινήσουμε από τη σχέση (3.38). Από τον ορισμό του κυματικού τελεστή Møller (3.36) και για το όριο  $t \rightarrow -\infty$ , γράφουμε το γινόμενο των τελεστών χρονικής εξέλιξης σαν το ολοκλήρωμα της παραγώγου του, οπότε έχουμε

$$W_\ell^+ = \mathcal{F}_\ell^+(\mathcal{H}_\ell) + \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{-\infty} dt e^{\epsilon t} \frac{i}{\hbar} e^{\frac{it}{\hbar} \mathcal{H}} \mathcal{V}_\ell e^{-\frac{it}{\hbar} \mathcal{H}} \mathcal{F}_\ell^+(\mathcal{H}_\ell), \quad (3.44)$$

όπου ο εκθετικός παράγοντας  $e^{\epsilon t}$  με  $\epsilon \rightarrow 0^+$  δεν επηρεάζει, αλλά κάνει πιο προφανή, τη σύγκλιση του ολοκληρώματος [115]. Αντικαθιστώντας στη σχέση (3.38) και λαμβάνοντας υπόψη ότι

$$\mathcal{F}_\ell^+(\mathcal{H}_\ell) |\Phi_{ps\ell}(x)\rangle = |\Phi_{ps\ell}(x)\rangle, \quad (3.45)$$

έχουμε

$$|\Psi_{ps\ell}^+(x)\rangle = |\Phi_{ps\ell}(x)\rangle + \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{-\infty} dt e^{\epsilon t} \frac{i}{\hbar} e^{\frac{it}{\hbar} \mathcal{H}} \mathcal{V}_\ell e^{-\frac{it}{\hbar} E} |\Phi_{ps\ell}(x)\rangle. \quad (3.46)$$

Στην παραπάνω σχέση έχουμε δράσει την στάσιμη κατάσταση  $|\Phi_{ps\ell}(x)\rangle$  πάνω στον τελεστή χρονικής εξέλιξης της  $\mathcal{H}_\ell$ , με αποτέλεσμα να προκύψει ένας παράγοντας φάσης  $e^{-\frac{it}{\hbar} E}$ . Έτσι έχουμε

$$|\Psi_{ps\ell}^+(x)\rangle = |\Phi_{ps\ell}(x)\rangle + \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{-\infty} dt \frac{i}{\hbar} e^{-\frac{it}{\hbar} (E+i\epsilon-\mathcal{H})} \mathcal{V}_\ell |\Phi_{ps\ell}(x)\rangle, \quad (3.47)$$

όπου ορίσαμε ξανά τη σταθερά  $\epsilon$  ( $\epsilon \rightarrow \epsilon/\hbar$ ). Εκτελώντας την ολοκλήρωση ως προς  $t$ , έχουμε

$$|\Psi_{ps\ell}^+(x)\rangle = |\Phi_{ps\ell}(x)\rangle + \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{E+i\epsilon-\mathcal{H}} \mathcal{V}_\ell |\Phi_{ps\ell}(x)\rangle, \quad (3.48)$$

ή

$$|\Psi_{ps\ell}^+(x)\rangle = |\Phi_{ps\ell}(x)\rangle + \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{G}(E + i\epsilon) \mathcal{V}_\ell |\Phi_{ps\ell}(x)\rangle, \quad (3.49)$$

όπου

$$\mathcal{G}(z) = (z - \mathcal{H})^{-1} \quad (3.50)$$

είναι η συνάρτηση Green που αντιστοιχεί στη χαμιλτονιανή BdG ( $\mathcal{H}$ ). Εκτελώντας μια παρόμοια διαδικασία και στη σχέση (3.39), προκύπτει ότι

$$|\Psi_{psr}^+(x)\rangle = |\Phi_{psr}(x)\rangle + \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \mathcal{G}(E + i\epsilon) \mathcal{V}_r |\Phi_{psr}(x)\rangle. \quad (3.51)$$

Οι σχέσεις (3.49) και (3.51) είναι γνωστές ως εξισώσεις Lippmann-Schwinger. Οι εξισώσεις αυτές μπορούν να εξελιχθούν περαιτέρω, αν χρησιμοποιήσουμε την έννοια του T-πίνακα και την ελεύθερη συνάρτηση Green της προηγούμενης ενότητας. Συγκεκριμένα, θέλουμε να συσχετίσουμε τους συντελεστές σκέδασης των σχέσεων (2.61) και (2.68) με τα δυναμικά σκέδασης και τους T-πίνακες. Αυτό το επιχειρούμε στην επόμενη ενότητα.

### 3.3 T-πίνακας και οι συντελεστές σκέδασης

Σε αυτή την ενότητα θα ορίσουμε τον T-πίνακα και τις συνιστώσες του, που αντιστοιχούν σε σκέδαση μεταξύ διαφόρων καναλιών, όπου στην περίπτωσή μας τα κανάλια αντιστοιχούν σε ασυμπτωτικές καταστάσεις σκέδασης με συγκεκριμένη διεύθυνση πρόσπτωσης ή διάδοσης. Θα εξειδικεύσουμε την ανάλυση στο πρόβλημα σκέδασης που ορίζεται από το μοντέλο μας της σιδηρομαγνητικής επαφής Josephson με συμβατικά υπεραγώγιμα ηλεκτρόδια, ανομοιογενή μαγνήτιση ή και σπιν ενεργές ενδοεπιφάνειες.

Ξεκινούμε από την εξίσωση (3.49). Ορίζουμε τον T-πίνακα από το αριστερό στο αριστερό κανάλι  $\mathcal{T}_{\ell\ell}$  μέσω της σχέσης

$$\mathcal{G}_\ell(z) \mathcal{T}_{\ell\ell} = \mathcal{G}(z) \mathcal{V}_\ell, \quad (3.52)$$

όπου  $\mathcal{G}_\ell(z)$  είναι η συνάρτηση Green του αριστερού υπεραγωγού. Ισοδύναμα ισχύει

$$\mathcal{T}_{\ell\ell}(z) = \mathcal{V}_\ell + \mathcal{V}_\ell \mathcal{G}(z) \mathcal{V}_\ell, \quad (3.53)$$

όπως προκύπτει με τη βοήθεια της σχέσης

$$\mathcal{G}_\ell^{-1}(z)\mathcal{G}(z) = 1 + \mathcal{V}_\ell\mathcal{G}(z).$$

Υπολογίζοντας την στάσιμη κατάσταση σκέδασης στο όρισμα  $x$ , όταν αυτό παίρνει τιμές στην αριστερή ασυμπτωτική περιοχή, έχουμε

$$\Psi_{ps\ell}^+(x) = \Phi_{ps\ell}(x) + \int dx' dy \mathcal{G}_\ell^{(+)}(x, x'; E) \mathcal{T}_{\ell\ell}^{(+)}(x', y; E) \Phi_{ps\ell}(y), \quad (3.54)$$

όπου  $\mathcal{G}_\ell^{(+)}(x, x'; E)$  και  $\mathcal{T}_{\ell\ell}^{(+)}(x', y; E)$  είναι η retarded  $4 \times 4$  συνάρτηση Green στον αριστερό υπεραγωγό και ο retarded  $4 \times 4$  T-πίνακας αντίστοιχα, στην αναπαράσταση της θέσης (και φυσικά του σωματιδιακού χώρου και του χώρου του σπιν). Το όρισμα  $x$  της συνάρτησης Green είναι πάντα μικρότερο από το  $x'$ , αφού στην αριστερή ασυμπτωτική περιοχή το  $\mathcal{V}_\ell$  μηδενίζεται και συνεπώς η ολοκλήρωση του  $x'$  εκτείνεται από το  $x = 0$ , που είναι το όριο της αριστερής ασυμπτωτικής περιοχής, μέχρι το  $+\infty$ . Επομένως η συνάρτηση Green της σχέσης (3.27), εφαρμοσμένη για τον αριστερό υπεραγωγό και με δεδομένο ότι  $z = E + i0$ , παίρνει τη μορφή

$$\mathcal{G}_\ell^{(+)}(x, x'; E) = - \sum_{ps} \frac{im_\ell E}{\hbar^2 k_{p\ell}(E) \Omega_\ell(E)} e^{-ipk_{p\ell}(E)(x-x')} \phi_{ps\ell} \phi_{ps\ell}^\dagger, \quad x < x'.$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω συνάρτηση Green στη σχέση (3.54) και συγκρίνοντας με την αριστερή ασυμπτωτική λύση της σχέσης (2.61) (δηλ. για  $x < 0$ ) προκύπτει η συσχέτιση των συντελεστών ανάκλασης με τα στοιχεία πίνακος του T-πίνακα. Αυτό επιτυγχάνεται διαχωρίζοντας τον εκθετικό παράγοντα στη συνάρτηση Green και βγάζοντας έξω από το ολοκλήρωμα το τμήμα του που εξαρτάται από το  $x$ . Έχουμε λοιπόν

$$\alpha_{ps,p's'}^\ell(E) = - \frac{im_\ell E}{\hbar^2 k_{p'\ell} \Omega_\ell(E)} \langle \Phi_{-p's'\ell} | \mathcal{T}_{\ell\ell}^{(+)} | \Phi_{ps\ell} \rangle, \quad (3.55)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το συμβολισμό

$$\begin{aligned} \langle \Phi_{-p's'\ell} | \mathcal{T}_{\ell\ell}^{(+)} | \Phi_{ps\ell} \rangle &= \\ &= \int dx' dy \left( e^{-ip'k_{p'\ell}x'} \phi_{p's'\ell} \right)^\dagger \mathcal{T}_{\ell\ell}^{(+)}(x', y; E) \Phi_{ps\ell}(y). \end{aligned} \quad (3.56)$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι οι συντελεστές ανάκλασης με πρόσπτωση από τα αριστερά είναι ανάλογοι του στοιχείου πίνακος του T-πίνακα από το αριστερό στο αριστερό κανάλι, μεταξύ των ελεύθερων καταστάσεων πρόσπτωσης και ανάκλασης. Παρόλο που ο

T-πίνακας στην αναπαράσταση της θέσης δεν μηδενίζεται στη δεξιά ασυμπτωτική περιοχή, δεν έχουμε πρόβλημα σύγκλισης του ολοκληρώματος, λόγω της υπόθεσης που κάναμε για τη χωρική διαμόρφωση των στάσιμων καταστάσεων αφενός, αφετέρου λόγω του μικρού πραγματικού μέρους στον εκθέτη του εκθετικού παράγοντα που προκύπτει από τη retarded συνάρτηση Green.

Στη συνέχεια θα εκφράσουμε τους συντελεστές διάδοσης στα δεξιά, για πρόσπτωση από αριστερά, συναρτήσει στοιχείων πίνακος του T-πίνακα από το αριστερό στο δεξί κανάλι  $\mathcal{T}_{r\ell}$ . Δίνουμε τον παρακάτω ορισμό

$$\mathcal{G}_r(z)\mathcal{T}_{r\ell}(z) = \mathcal{G}(z)\mathcal{V}_\ell, \quad (3.57)$$

ή, χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$\mathcal{G}_r^{-1}(z)\mathcal{G}(z) = 1 + \mathcal{V}_r\mathcal{G}(z),$$

γράφουμε ισοδύναμα

$$\mathcal{T}_{r\ell}(z) = \mathcal{V}_\ell + \mathcal{V}_r\mathcal{G}(z)\mathcal{V}_\ell. \quad (3.58)$$

Με τη βοήθεια των παραπάνω ορισμών, γράφουμε την εξίσωση Lippmann-Schwinger (3.49) ως εξής

$$|\Psi_{ps\ell}^+(x)\rangle = |\Phi_{ps\ell}(x)\rangle + \mathcal{G}_r^{(+)}(E)\mathcal{T}_{r\ell}^{(+)}(E)|\Phi_{ps\ell}(x)\rangle, \quad (3.59)$$

ή, στην αναπαράσταση της θέσης

$$\Psi_{ps\ell}^+(x) = \Phi_{ps\ell}(x) + \int dx' dy \mathcal{G}_r^{(+)}(x, x'; E)\mathcal{T}_{r\ell}^{(+)}(x', y; E)\Phi_{ps\ell}(y), \quad (3.60)$$

όπου

$$\mathcal{G}_r^{(+)}(x, x'; E) = - \sum_{ps} \frac{im_r E}{\hbar^2 k_{pr}(E)\Omega_r(E)} e^{ipk_{pr}(E)|x-x'|} \phi_{psr}\phi_{psr}^\dagger.$$

Αν θέσουμε το όρισμα  $x$  στη δεξιά ασυμπτωτική περιοχή, με σκοπό να καταλήξουμε σε μια μορφή για την κατάσταση σκέδασης συγκρίσιμη με τη δεξιά ασυμπτωτική λύση της σχέσης(2.61), θα δούμε ότι αυτό δεν είναι εφικτό άμεσα, καθώς ο T-πίνακας από το αριστερό στο δεξί κανάλι στην αναπαράσταση της θέσης δεν μηδενίζεται στη δεξιά

ασυμπτωτική περιοχή. Το πρόβλημα εντοπίζεται στον πρώτο όρο του δεξιού μέλους της σχέσης (3.58), δηλαδή στο δυναμικό  $\mathcal{V}_\ell$ . Έτσι δεν γίνεται να διαχωρίσουμε σε δύο παράγοντες την εξάρτηση της συνάρτησης Green από τις μεταβλητές  $x$  και  $x'$ . Επίσης επιβιώνει η ελεύθερη λύση  $\Phi_{ps\ell}(x)$ , η οποία δεν εμφανίζεται στη σχέση (2.61) για  $x > d$ . Για να αντιμετωπίσουμε αυτή τη δυσκολία πρέπει να εκτελέσουμε την ολοκλήρωση ως προς  $x'$ , κάτι το οποίο είναι εφικτό στην περίπτωση μας, αφού η εξάρτηση ως προς  $x'$  έχει τη μορφή εκθετικών συναρτήσεων. Έτσι, από το δεξιό μέλος της σχέσης (3.60), απομονώνουμε τον όρο

$$X = \int_d^{+\infty} dx' \mathcal{G}_r^{(+)}(x, x'; E) \mathcal{V}_\ell(x') \Phi_{ps\ell}(x').$$

Παραπάνω, εκτός του ότι απομονώσαμε το ολοκλήρωμα που περιέχει μόνο το δυναμικό  $\mathcal{V}_\ell$ , κρατήσαμε και το κομμάτι αυτού που αντιστοιχεί στην περιοχή ολοκλήρωσης ακριβώς επάνω στη δεξιά ασυμπτωτική περιοχή. Το όρισμα  $x$  επίσης θεωρούμε ότι βρίσκεται σε αυτή την περιοχή. Σκοπός μας είναι να εκτελέσουμε τις πράξεις στην παράσταση  $X$ . Για να διευκολυνθούμε, παρατηρούμε το εξής: στη δεξιά ασυμπτωτική περιοχή το δυναμικό  $\mathcal{V}_\ell$  δεν εξαρτάται καθόλου από όρους που αναμιγνύουν τα σπιν των διεγέρσεων. Υπάρχουν μόνο οι κινητικοί όροι, που είναι διαγώνιοι και η ανάμιξη των ηλεκτρονίων και των οπών που συντελείται από τη συνάρτηση χάσματος. Το ίδιο ισχύει και για την ελεύθερη συνάρτηση Green στη δεξιά ασυμπτωτική περιοχή, καθώς και για την κυματοσυνάρτηση  $\Phi_{ps\ell}(x')$ , που εμφανίζεται στην παράσταση  $X$ . Αυτό σημαίνει ότι, με ένα μετασχηματισμό που ισοδυναμεί με ανακατάταξη γραμμών και στηλών, όλοι οι πίνακες στην παράσταση  $X$  γίνονται σύνθετοι διαγώνιοι και κάθε διαγώνιο κομμάτι τους αντιστοιχεί στον υπόχωρο του χώρου καταστάσεων με ηλεκτρόνια σπιν επάνω και οπές σπιν κάτω ή ηλεκτρόνια με σπιν κάτω και οπές με σπιν επάνω. Έτσι, οι πράξεις στη  $X$  μπορούν να εκτελεστούν για κάθε υπόχωρο ξεχωριστά. Στην πραγματικότητα και για τους δύο υπόχωρους οι πράξεις είναι ουσιαστικά ταυτόσημες και θα εκτελέσουμε μόνο αυτές που αντιστοιχούν στον υπόχωρο με ηλεκτρόνια σπιν επάνω και οπές σπιν κάτω.

Στη δεξιά ασυμπτωτική περιοχή και στον υπόχωρο με ηλεκτρόνια σπιν επάνω και οπές σπιν κάτω, το δυναμικό  $\mathcal{V}_\ell$  δίνεται από τη σχέση

$$\mathcal{V}_\ell = \begin{pmatrix} \frac{p^2}{2m_r} - \frac{p^2}{2m_\ell} + V & \Delta_r e^{ix} - \Delta_\ell \\ \Delta_r e^{-ix} - \Delta_\ell & - \left( \frac{p^2}{2m_r} - \frac{p^2}{2m_\ell} + V \right) \end{pmatrix}, \quad (3.61)$$

όπου, χωρίς απώλεια γενικότητας, έχουμε θέσει τη φάση της συνάρτησης χάσματος στην αριστερή ασυμπτωτική περιοχή ίση με μηδέν και τη φάση της δεξιάς ασυμπτωτικής περιοχής ίση με  $\chi$ . Επίσης θεωρήσαμε ότι το σταθερό κανονικό δυναμικό στην αριστερή ασυμπτωτική περιοχή είναι μηδέν και στη δεξιά ασυμπτωτική περιοχή ίσο με  $V$ . Τέλος,

σημειώνουμε ότι στην παράσταση  $X$  δεν έχουμε συμπεριλάβει όρους που περιέχουν συναρτήσεις δέλτα Dirac και που οφείλονται σε ενδεχόμενη ασυνέχεια της ενεργού μάζας μεταξύ ενδιάμεσης και δεξιάς ασυμπτωτικής περιοχής.

Είμαστε σε θέση λοιπόν να εκτελέσουμε τους υπολογισμούς στην παράσταση  $X$ . Έτσι γράφουμε

$$X = \left( \int_d^x dx' + \int_x^{+\infty} dx' \right) \mathcal{G}_r^{(+)}(x, x'; E) \mathcal{V}_\ell(x') \Phi_{ps\ell}(x').$$

Οι ολοκληρώσεις πλέον είναι τετριμένες, μιας και περιλαμβάνουν μόνο εκθετικές συναρτήσεις. Από τους όρους που προκύπτουν κρατάμε μόνο αυτούς που προέρχονται από τα όρια ολοκλήρωσης με τη μεταβλητή  $x$  και σχηματίζουμε την ποσότητα  $X'$ . Εξαιρούμε δηλαδή τον όρο που αντιστοιχεί στο όριο ολοκλήρωσης  $d$  και τον όρο που αντιστοιχεί στο όριο  $+\infty$ , ο οποίος είναι μηδέν λόγω των υποθέσεων που κάναμε σχετικά με τη χωρική διαμόρφωση των επιπέδων κυμάτων. Μετά από μερικές αλγεβρικές πράξεις καταλήγουμε στη σχέση:

$$X' = \sum_{p'} \frac{2m_r}{\hbar^2} \frac{E}{\Omega_r} e^{ipk_{pl}x} \phi_{p'r} (\phi_{p'r}^\dagger \mathcal{V}_\ell \phi_{pl}) \frac{p'}{k_{p'r}^2 - k_{pl}^2}. \quad (3.62)$$

Μένει να υπολογίσουμε τα “στοιχεία πίνακος”  $\phi_{p'r}^\dagger \mathcal{V}_\ell \phi_{pl}$ . Αυτά, μετά από κάποιες πράξεις και χρήση γνωστών σχέσεων μεταξύ των ποσοτήτων που εμφανίζονται, προκύπτει ότι είναι

$$\phi_{er}^\dagger \mathcal{V}_\ell \phi_{el} = \frac{\hbar^2}{2m_r} (k_{el}^2 - k_{er}^2) (-e^{i\chi/2} v_\ell v_r + e^{-i\chi/2} u_\ell u_r), \quad (3.63)$$

$$\phi_{hr}^\dagger \mathcal{V}_\ell \phi_{el} = \frac{\hbar^2}{2m_r} (k_{el}^2 - k_{hr}^2) (-e^{i\chi/2} v_\ell u_r + e^{-i\chi/2} u_\ell v_r), \quad (3.64)$$

$$\phi_{er}^\dagger \mathcal{V}_\ell \phi_{hl} = \frac{\hbar^2}{2m_r} (k_{hl}^2 - k_{er}^2) (-e^{i\chi/2} u_\ell v_r + e^{-i\chi/2} v_\ell u_r) \quad (3.65)$$

και

$$\phi_{hr}^\dagger \mathcal{V}_\ell \phi_{hl} = \frac{\hbar^2}{2m_r} (k_{hl}^2 - k_{hr}^2) (-e^{i\chi/2} u_\ell u_r + e^{-i\chi/2} v_\ell v_r). \quad (3.66)$$

Αντικαθιστώντας στην σχέση (3.62) τις παραπάνω σχέσεις, όποιες είναι απαραίτητες κάθε φορά, και μεταβάλλοντας το δείκτη  $p$ , καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι σε κάθε περίπτωση ισχύει

$$X' = -e^{ipk_{p\ell}x} \phi_{p\ell}. \quad (3.67)$$

Οι πράξεις για τον υπόχωρο του ηλεκτρονίου σπιν κάτω και οπής σπιν επάνω είναι ουσιαστικά πανομοιότυπες με τις παραπάνω και δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα. Επομένως στο σύνολο του χώρου καταστάσεων η παράσταση  $X'$  είναι

$$X' = -\Phi_{ps\ell}(x). \quad (3.68)$$

Συνεπώς η παράσταση  $X'$  απαλοίφεται στην εξίσωση Lippmann-Schwinger (3.60) με την ελεύθερη προσπίπτουσα κυματοσυνάρτηση. Η απαλοιφή αυτή γίνεται στο στάδιο της προσέγγισης Born, μπορούμε να πούμε. Επίσης, ο όρος που εξαιρέθηκε από την παράσταση  $X'$  συνδυάζεται με τους υπόλοιπους για να μας δώσουν το ίδιο αποτέλεσμα που θα παίρναμε, αν η χωρική εξάρτηση της συνάρτησης Green  $\mathcal{G}_r$  μπορούσε να διαχωριστεί σε δύο παράγοντες με τη συνθήκη  $x > x'$ , όπως κάναμε και στην ανάλυση της ανάκλασης. Έτσι σχηματίζεται το στοιχείο πίνακος του T-πίνακα από το αριστερό στο δεξί κανάλι και η εξίσωση Lippmann-Schwinger γίνεται

$$\Psi_{ps\ell}^+(x) = - \sum_{p's'} \frac{im_r E}{\hbar^2 k_{p'r} \Omega_r(E)} e^{ip'k_{p'r}(x-d)} \langle \Phi_{-p's'r}(x) | \mathcal{T}_{r\ell}^{(+)}(E) | \Phi_{ps\ell}(x) \rangle, \quad (3.69)$$

όπου χρησιμοποιούμε το συμβολισμό

$$\begin{aligned} \langle \Phi_{-p's'r} | \mathcal{T}_{r\ell}^{(+)} | \Phi_{ps\ell} \rangle &= \\ &= \int dx' dy \left( e^{ip'k_{p'r}(x'-d)} \phi_{p's'r} \right)^\dagger \mathcal{T}_{r\ell}^{(+)}(x', y; E) \Phi_{ps\ell}(y). \end{aligned} \quad (3.70)$$

Συγκρίνοντας τα παραπάνω με τη λύση (2.61) στη δεξιά ασυμπτωτική περιοχή, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι

$$\gamma_{ps,p's'}^\ell(E) = - \frac{im_r E}{\hbar^2 k_{p'r} \Omega_r(E)} \langle \Phi_{-p's'r} | \mathcal{T}_{r\ell}^{(+)} | \Phi_{ps\ell} \rangle \quad (3.71)$$

Παρατηρούμε ότι οι συντελεστές διάδοσης με πρόσπτωση από τα αριστερά είναι ανάλογοι του στοιχείου πίνακος του T-πίνακα από το αριστερό στο δεξί κανάλι, μεταξύ



των ελεύθερων καταστάσεων πρόσπτωσης και διάδοσης. Παρόλο που ο T-πίνακας στην αναπαράσταση της θέσης έχει όρους που δεν μηδενίζονται στη δεξιά ή την αριστερή ασυμπτωτική περιοχή, δεν έχουμε πρόβλημα σύγκλισης του ολοκληρώματος, λόγω της υπόθεσης που κάναμε για τη χωρική διαμόρφωση των στάσιμων καταστάσεων αφενός, αφετέρου λόγω του μικρού πραγματικού μέρους στον εκθέτη του εκθετικού παράγοντα που προκύπτει από τη retarded συνάρτηση Green.

Οφείλουμε σε αυτό το σημείο να κάνουμε μια παρατήρηση για τον T-πίνακα από το αριστερό στο δεξί κανάλι. Όπως και στη γενική θεωρία σκέδασης πολλών καναλιών, ο ορισμός του T-πίνακα από τις δύο παρακάτω σχέσεις

$$\mathcal{T}_{r\ell}(z) = \mathcal{V}_\ell + \mathcal{V}_r \mathcal{G}(z) \mathcal{V}_\ell$$

και

$$\mathcal{T}_{r\ell}(z) = \mathcal{V}_r + \mathcal{V}_r \mathcal{G}(z) \mathcal{V}_\ell, \quad (3.72)$$

δίνει ισοδύναμα αποτελέσματα αν ο T-πίνακας δρά σε ιδιοκαταστάσεις των ελεύθερων ασυμπτωτικών χαμιλτονιανών. Αυτό συμβαίνει διότι η διαφορά των δύο παραπάνω ορισμών είναι  $\mathcal{H}_r - \mathcal{H}_\ell$ , η οποία μηδενίζεται, όταν δρά, στα αριστερά και τα δεξιά, πάνω σε ιδιοκαταστάσεις των ασυμπτωτικών χαμιλτονιανών.

Αξίζει να αναφέρουμε έναν εναλλακτικό τρόπο να καταλήξουμε στη σχέση (3.71). Για το σκοπό αυτό γράφουμε την εξίσωση Lippmann-Schwinger (3.49) ως εξής

$$|\Psi_{ps\ell}^+(x)\rangle = (1 + \mathcal{G}(E + i0)\mathcal{V}_\ell)|\Phi_{ps\ell}(x)\rangle.$$

Στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε το δεύτερο μέλος από αριστερά με την τελεστή  $\mathcal{G}_r(E + i0)\mathcal{G}_r^{-1}(E + i0) = 1$ , όπου  $\mathcal{G}_r(z)$  είναι η ελεύθερη συνάρτηση Green του δεξιού υπεραγωγού. Τότε εύκολα προκύπτει ότι

$$|\Psi_{ps\ell}^+(x)\rangle = \mathcal{G}_r(E - \mathcal{H}_r + \mathcal{V}_\ell + \mathcal{V}_r \mathcal{G}^{(+)}(E)\mathcal{V}_\ell)|\Phi_{ps\ell}(x)\rangle.$$

Στο σημείο αυτό παρατηρούμε ότι δεν μπορούμε να διαχωρίσουμε τα εκθετικά στη συνάρτηση Green και ότι πρέπει να ακολουθήσαμε τη διαδικασία που περιγράψαμε προηγουμένως, για να βρούμε την κατάσταση σκέδασης στη δεξιά ασυμπτωτική περιοχή. Όμως, παρατηρώντας ότι  $\mathcal{H}_\ell - \mathcal{V}_r = \mathcal{H}_r - \mathcal{V}_\ell$ , η παραπάνω σχέση είναι ισοδύναμη με

$$|\Psi_{ps\ell}^+(x)\rangle = \mathcal{G}_r(E - \mathcal{H}_\ell + \mathcal{V}_r + \mathcal{V}_r \mathcal{G}^{(+)}(E)\mathcal{V}_\ell)|\Phi_{ps\ell}(x)\rangle.$$

Τώρα ο τελεστής  $E - \mathcal{H}_\ell$  δρά στα δεξιά στην ιδιοκατάστασή του και δίνει μηδέν, ενώ το δυναμικό  $\mathcal{V}_r$  μηδενίζεται στη δεξιά ασυμπτωτική περιοχή και συνεπώς μπορούμε να διαχωρίσουμε τα εκθετικά στη συνάρτηση Green, σχηματίζοντας τα στοιχεία πίνακος του T-πίνακα από το αριστερό στο δεξί κανάλι, με τον ορισμό όμως που δίνεται από τη σχέση (3.72). Εφόσον όμως αυτός είναι ισοδύναμος, έχουμε καταλήξει στο ζητούμενο αποτέλεσμα. Με αυτό το σκεπτικό επομένως θα μπορούσαμε να είχαμε προβλέψει την ισχύ της σχέσης (3.68). Επίσης το παρόν επιχείρημα είναι πιο γενικό από το μοντέλο της επαφής που έχουμε υιοθετήσει και καταδεικνύει ότι η σχέση (3.68) έχει γενικότερη ισχύ.

Ανάλογα ισχύουν και για την περίπτωση που έχουμε πρόσπτωση διεγέρσεως από τα δεξιά. Τότε πρέπει να ορίσουμε τον T-πίνακα από το δεξί στο δεξί κανάλι, για να μελετήσουμε την ανάκλαση, και τον T-πίνακα από το δεξί στο αριστερό κανάλι, για να μελετήσουμε τη διάδοση. Έτσι έχουμε

$$\mathcal{T}_{rr}(z) = \mathcal{V}_r + \mathcal{V}_r \mathcal{G}(z) \mathcal{V}_r \quad (3.73)$$

$$\mathcal{T}_{\ell r}(z) = \mathcal{V}_{r,\ell} + \mathcal{V}_\ell \mathcal{G}(z) \mathcal{V}_r. \quad (3.74)$$

Συμβολίζοντας με  $\nu = \ell, r$ , εύκολα καταλήγουμε στη σχέση

$$(\mathcal{T}_{\nu\nu}(z))^\dagger = \mathcal{T}_{\nu\nu}(z^*) \quad (3.75)$$

και, για  $\nu \neq \nu'$ , στη σχέση

$$(\mathcal{T}_{\nu\nu'}(z))^\dagger = \mathcal{T}_{\nu'\nu}(z^*), \quad (3.76)$$

με την προϋπόθεση ότι ισχύει για στοιχεία πίνακος μεταξύ των στάσιμων καταστάσεων σκέδασης των ασυμπτωτικών χαμιλτονιανών. Οι παραπάνω σχέσεις θα μας φανούν χρήσιμες στην εξαγωγή συνθηκών συμμετρίας των συντελεστών σκέδασης, που θα μελετήσουμε στα επόμενα κεφάλαια.

### 3.4 Συνάρτηση Green στις ασυμπτωτικές περιοχές

Στην ενότητα αυτή θα αξιοποιήσουμε τον T-πίνακα, για να εκφράσουμε τη πλήρη συνάρτηση Green, με ορίσματα θέσης στις ασυμπτωτικές περιοχές, συναρτήσει των αναλυτικών επεκτάσεων των συντελεστών σκέδασης για μιγαδική ενέργεια  $z$ . Τέτοιες

σχέσεις είναι χρήσιμες στον υπολογισμό του υπερρεύματος στην επαφή Josephson με τη μέθοδο των Furusaki-Tsukada [109], όπως θα παρουσιάσουμε στο κεφάλαιο 7. Οι ίδιες σχέσεις για τη συνάρτηση Green θα εξαχθούν και με μία διαφορετική μέθοδο στο κεφάλαιο 6.

Η μέθοδός μας στην παρούσα ενότητα βασίζεται στη γνωστή ταυτότητα πινάκων  $A, B$

$$\begin{aligned} A^{-1} &= B^{-1} + B^{-1}(B - A)A^{-1} \\ &= B^{-1} + A^{-1}(B - A)B^{-1}. \end{aligned} \quad (3.77)$$

Θέτοντας τους πίνακες  $A, B$  ίσους με  $z - \mathcal{H}$  και  $z - \mathcal{H}_{\ell,r}$  αντίστοιχα, καταλήγουμε στις παρακάτω, συμβολικά γραμμένες, σχέσεις:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(z) &= \mathcal{G}_{\ell}(z) + \mathcal{G}_{\ell}(z)\mathcal{V}_{\ell}\mathcal{G}(z) \\ &= \mathcal{G}_{\ell}(z) + \mathcal{G}(z)\mathcal{V}_{\ell}\mathcal{G}_{\ell}(z) \end{aligned} \quad (3.78)$$

και

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(z) &= \mathcal{G}_r(z) + \mathcal{G}_r(z)\mathcal{V}_r\mathcal{G}(z) \\ &= \mathcal{G}_r(z) + \mathcal{G}(z)\mathcal{V}_r\mathcal{G}_r(z), \end{aligned} \quad (3.79)$$

οι οποίες ονομάζονται και εξισώσεις Dyson για τη συνάρτηση Green. Οι σχέσεις αυτές παίρνουν τη μορφή που επιζητούμε, όταν εφαρμοστούν για ορίσματα  $x, x'$  τα οποία βρίσκονται στις ασυμπτωτικές περιοχές της επαφής. Τότε διαχωρίζοντας τις ελεύθερες συναρτήσεις Green που εμφανίζονται και χρησιμοποιώντας τους ορισμούς των διαφόρων ειδών T-πίνακα, καταλήγουμε σε σχέσεις για τις ασυμπτωτικές τιμές της συνάρτησης Green που τη συνδέουν με τις αναλυτικές επεκτάσεις των συντελεστών σκέδασης.

Ας ξεκινήσουμε με την υπόθεση ότι τα ορίσματα της συνάρτησης Green  $x$  και  $x'$  ανήκουν στην αριστερή ασυμπτωτική περιοχή ( $x, x' < 0$ ). Τότε αξιοποιούμε τις σχέσεις (3.78) και χρησιμοποιώντας τον ορισμό του πίνακα  $\mathcal{T}_{\ell\ell}$  έχουμε

$$\mathcal{G}(x, x'; z) = \mathcal{G}_{\ell}(x, x'; z) + \int dy dy' \mathcal{G}_{\ell}(x, y) \mathcal{T}_{\ell\ell}(y, y'; z) \mathcal{G}_{\ell}(y', x'). \quad (3.80)$$

Οι ολοκληρώσεις ως προς  $y, y'$  εκτείνονται στην ενδιάμεση περιοχή της επαφής και στη δεξιά ασυμπτωτική περιοχή και συνεπώς η διαφορά τους με τα  $x, x'$  έχει σταθερό πρόσημο. Έτσι οι απόλυτες τιμές στα εκθετικά μπορούν να υπολογιστούν αμέσως και αναδιατάσσοντας τους όρους στο ολοκλήρωμα, όπως περιγράψαμε παραπάνω, καταλήγουμε στη σχέση:

$$\mathcal{G}(x, x'; z) = \mathcal{G}_\ell(x, x'; z) - \sum_{ps, p's'} \frac{im_\ell z}{\hbar^2 k_{p\ell} \Omega_\ell} \alpha_{ps, p's'}^\ell e^{-ip'k_{p'\ell}x - ipk_{p\ell}x'} \phi_{p's'\ell} \tilde{\phi}_{ps\ell}^T, \quad (3.81)$$

όπου

$$\alpha_{ps, p's'}^\ell(z) = -\frac{im_\ell z}{\hbar^2 k_{p'\ell} \Omega_\ell(z)} \int dy dy' e^{ip'k_{p'\ell}y} \tilde{\phi}_{p's'\ell}^T \mathcal{T}_{\ell\ell}(y, y'; z) e^{ipk_{p\ell}y'} \phi_{ps\ell}. \quad (3.82)$$

Με επισκόπηση της σχέσης (3.82) συμπεραίνουμε ότι πρόκειται για την αναλυτική επέκταση των συντελεστών ανάκλασης, για πρόσπτωση διέγερσης χαρακτήρα  $p, s$  από τα αριστερά (σχέση (3.55)). Η σχέση (3.81) είναι η ζητούμενη.

Ομοίως, χρησιμοποιώντας την εξίσωση Dyson (3.79) και τη σχέση

$$\mathcal{G}_r(z) \mathcal{T}_{rr} = \mathcal{G}(z) \mathcal{V}_r, \quad (3.83)$$

μπορούμε να βρούμε τη συνάρτηση Green της επαφής στη δεξιά ασυμπτωτική περιοχή ( $x, x' > d$ ). Τώρα θα ισχύει  $x, x' > y, y'$ . Έτσι έχουμε

$$\mathcal{G}(x, x'; z) = \mathcal{G}_r(x, x'; z) - \sum_{ps, p's'} \frac{im_r z}{\hbar^2 k_{pr} \Omega_r} \alpha_{ps, p's'}^r e^{ip'k_{p'r}(x-d) + ipk_{pr}(x'-d)} \phi_{p's'r} \tilde{\phi}_{psr}^T, \quad (3.84)$$

όπου

$$\alpha_{ps, p's'}^r(z) = -\frac{im_r z}{\hbar^2 k_{p'r} \Omega_r(z)} \int dy dy' e^{-ip'k_{p'r}(y-d)} \tilde{\phi}_{p's'r}^T \mathcal{T}_{rr}(y, y'; z) e^{-ipk_{pr}(y'-d)} \phi_{psr}. \quad (3.85)$$

Και στην παραπάνω σχέση αναγνωρίζουμε την αναλυτική επέκταση των συντελεστών ανάκλασης για πρόσπτωση διέγερσης χαρακτήρα  $p, s$  από τα δεξιά.

Στη συνέχεια θα προσδιορίσουμε τη συνάρτηση Green, όταν το ένα όρισμά της βρίσκεται στη δεξιά και το άλλο στην αριστερή ασυμπτωτική περιοχή. Θεωρούμε αρχικά  $x > x'$  και γράφουμε την εξίσωση Dyson (3.78) ως εξής

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(z) &= \mathcal{G}_\ell(z) + \mathcal{G}(z) \mathcal{V}_\ell \mathcal{G}_\ell(z) \\ &= \mathcal{G}_\ell(z) + \mathcal{G}_r(z) \mathcal{G}_r^{-1}(z) \mathcal{G}(z) \mathcal{V}_\ell \mathcal{G}_\ell(z), \end{aligned} \quad (3.86)$$

ή

$$\mathcal{G}(z) = \mathcal{G}_\ell(z) + \mathcal{G}_r(z)\mathcal{V}_\ell\mathcal{G}_\ell(z) + \mathcal{V}_r\mathcal{G}(z)\mathcal{V}_\ell\mathcal{G}_\ell(z). \quad (3.87)$$

Στο δεύτερο όρο του δεξιού μέλους της παραπάνω σχέσης, παρατηρούμε ότι η ολοκλήρωση του πρώτου ορίσματος θέσης της συνάρτησης Green  $\mathcal{G}_\ell$  εκτείνεται στην ενδιάμεση και τη δεξιά ασυμπτωτική περιοχή, λόγω του  $\mathcal{V}_\ell$ , ενώ το δεύτερο όρισμα θέσης εκτείνεται στην αριστερή ασυμπτωτική περιοχή εξ' υποθέσεως. Επομένως στη συνάρτηση Green  $\mathcal{G}_\ell$  είναι δυνατό να χωρίσουμε τα εκθετικά και τότε βλέπουμε ότι έχουμε κάτι ανάλογο με την παράσταση  $X$  της προηγούμενης ενότητας. Σημειώνουμε ότι οι πράξεις που εκτελέσαμε στην προηγούμενη ενότητα ισχύουν ακόμα και όταν όλες οι ποσότητες είναι συναρτήσεις της μιγαδικής ενέργειας  $z$ . Επομένως, εκτελώντας την ολοκλήρωση ως προς το πρώτο όρισμα της  $\mathcal{G}_\ell$  και απομονώνοντας μία αντίστοιχη παράσταση  $X$ , απαλοίφουμε την ελεύθερη συνάρτηση Green στον πρώτο όρο του δεξιού μέλους της σχέσης (3.87) και οι όροι που μένουνε μας δίνουν τη σχέση

$$\mathcal{G}(x, x'; z) = \int dydy' \mathcal{G}_r(x, y; z) \mathcal{T}_{r\ell}(y, y'; z) \mathcal{G}_\ell(y', x'; z), \quad (3.88)$$

όπου οι εκθετικοί παράγοντες στη συνάρτηση Green  $\mathcal{G}_r$  μπορούν να διαχωριστούν. Έτσι, αντικαθιστώντας τις ελεύθερες συναρτήσεις Green και διαχωρίζοντας τα εκθετικά, καταλήγουμε στη σχέση

$$\mathcal{G}(x, x'; z) = \sum_{ps, p's'} \left( -\frac{im_\ell z}{\hbar^2 k_{p\ell} \Omega_\ell} \right) \gamma_{ps, p's'}^\ell(z) e^{ip'k_{p'r}(x-d) - ipk_{p\ell}x'} \phi_{p's'r} \tilde{\phi}_{ps\ell}^T, \quad (3.89)$$

όπου το  $x$  ανήκει στη δεξιά ασυμπτωτική περιοχή, το  $x'$  ανήκει στην αριστερή ασυμπτωτική περιοχή και

$$\gamma_{ps, p's'}^\ell(z) = -\frac{im_r z}{\hbar^2 k_{p'r} \Omega_r(z)} \int dydy' e^{-ip'k_{p'r}(y-d)} \tilde{\phi}_{p's'r}^T \mathcal{T}_{r\ell}(y, y'; z) e^{ipk_{p\ell}y'} \phi_{ps\ell}. \quad (3.90)$$

Η παραπάνω σχέση μας δίνει την αναλυτική επέκταση των συντελεστών διάδοσης με πρόσπτωση διέγερσης χαρακτήρα  $p, s$  από τα αριστερά. Η σχέση (3.89) εκφράζει τη συνάρτηση Green με ορίσματα θέσης  $x, x'$  στη δεξιά και την αριστερή ασυμπτωτική περιοχή αντίστοιχα συναρτήσεων των αναλυτικών επεκτάσεων των συντελεστών διάδοσης με πρόσπτωση από αριστερά.

Ανάλογα ισχύουν και όταν τα ορίσματα θέσης της συνάρτησης Green είναι το  $x$  στην αριστερή και το  $x'$  στη δεξιά ασυμπτωτική περιοχή αντίστοιχα. Τότε έχουμε

$$\mathcal{G}(x, x'; z) = \sum_{ps, p's'} \left( -\frac{im_r z}{\hbar^2 k_{pr} \Omega_r} \right) \gamma_{ps, p's'}^r(z) e^{-ip'k_{p'\ell}x + ipk_{pr}(x'-d)} \phi_{p's'\ell} \tilde{\phi}_{psr}^T, \quad (3.91)$$

όπου το  $x$  ανήκει στη δεξιά ασυμπτωτική περιοχή, το  $x'$  ανήκει στην αριστερή ασυμπτωτική περιοχή και

$$\gamma_{ps, p's'}^r(z) = -\frac{im_\ell z}{\hbar^2 k_{p'\ell} \Omega_\ell(z)} \int dy dy' e^{ip'k_{p'\ell}y} \tilde{\phi}_{p's'\ell}^T \mathcal{T}_{\ell r}(y, y'; z) e^{-ipk_{pr}(y'-d)} \phi_{psr}. \quad (3.92)$$

Η παραπάνω σχέση μας δίνει την αναλυτική επέκταση των συντελεστών διάδοσης με πρόσπτωση διέγερσης χαρακτήρα  $p, s$  από τα δεξιά. Η σχέση (3.91) εκφράζει τη συνάρτηση Green με ορίσματα θέσης  $x, x'$  στην αριστερή και τη δεξιά ασυμπτωτική περιοχή αντίστοιχα, συναρτήσει των αναλυτικών επεκτάσεων των συντελεστών διάδοσης με πρόσπτωση από δεξιά. Οι σχέσεις (3.89) και (3.91), καθώς και οι σχέσεις (3.81) και (3.84), μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να επαληθεύσουμε τα συμπεράσματα για τη σχέση του T-πίνακα με τους συντελεστές σκέδασης (βλ. παράρτημα 3.A□).

### 3.A □ Τ-πίνακας σε απλά μοντέλα με διαφορετική ασυμπτωτική συμπεριφορά στα αριστερά και τα δεξιά

Στο παράρτημα αυτό θα εφαρμόσουμε τους τύπους που συνδέουν τους συντελεστές σκέδασης με τους Τ-πίνακες σε απλά μονοδιάστατα μοντέλα, με σκοπό να επαληθεύσουμε την ισχύ τους. Θα ξεκινήσουμε με ένα σύστημα μονοδιάστατης σκέδασης ενός σωματιδίου, χωρίς σπιν, που περιλαμβάνει μια βηματική μεταβολή του δυναμικού σκέδασης και μια βηματική μεταβολή της ενεργού μάζας του. Η χαμιλτονιανή του συστήματος αυτού είναι επομένως

$$H = -\frac{d}{dx} \frac{\hbar^2}{2m(x)} \frac{d}{dx} + \theta(x)V. \quad (3.93)$$

Στην παραπάνω σχέση έχουμε

$$\frac{1}{m(x)} = \frac{1}{m_\ell} \theta(-x) + \frac{1}{m_r} \theta(x), \quad (3.94)$$

όπου  $m_\ell, m_r$  είναι οι ενεργές μάζες στα αριστερά και τα δεξιά αντίστοιχα. Επίσης  $\theta(x)$  είναι η συνάρτηση βήματος και  $V$  το σταθερό δυναμικό στα δεξιά ( $x > 0$ ). Στα αριστερά, χωρίς απώλεια γενικότητας θέτουμε  $V = 0$ .

Στην περίπτωση που  $m_\ell = m_r$  είναι πάρα πολύ εύκολο να επαληθεύσουμε την ισχύ των τύπων που συνδέουν τους Τ-πίνακες με τους συντελεστές σκέδασης, καθώς και την ισχύ των εξισώσεων Lippmann-Schwinger. Αυτό μπορεί να γίνει με τον τρόπο που θα περιγράψουμε παρακάτω. Στην περίπτωση όμως που  $m_\ell \neq m_r$ , οι πράξεις είναι πολύ πιο απαιτητικές. Θα δώσουμε στη συνέχεια, σε γενικές γραμμές, πως έχει η διαδικασία, στην περίπτωση που  $m_\ell \neq m_r$ . Είναι αρκετό να ασχοληθούμε με τους συντελεστές σκέδασης για πρόσπτωση από τα αριστερά. Για πρόσπτωση από δεξιά, η διαδικασία είναι πρακτικά η ίδια. Παρόλα αυτά θα μας χρειαστούν και οι κυματοσυναρτήσεις για πρόσπτωση από τα δεξιά, καθώς οι συντελεστές σκέδασης αυτών υπεισέρχονται στον προσδιορισμό της συνάρτησης Green. Έτσι έχουμε

$$\psi_\ell(x) = \begin{cases} e^{ikx} + a_\ell e^{-ikx}, & x < 0 \\ c_\ell e^{iqx}, & x > 0 \end{cases}, \quad (3.95)$$

για την κυματοσυνάρτηση με πρόσπτωση από τα αριστερά και

$$\psi_r(x) = \begin{cases} c_r e^{-ikx}, & x < 0 \\ e^{-iqx} + a_r e^{iqx}, & x > 0 \end{cases}, \quad (3.96)$$

για την κυματοσυνάρτηση με πρόσπτωση από τα δεξιά. Στις παραπάνω σχέσεις ισχύουν

$$k = \sqrt{\frac{2m_\ell E}{\hbar^2}}, \quad q = \sqrt{\frac{2m_r(E - V)}{\hbar^2}} \quad (3.97)$$

και

$$a_\ell = \frac{m_r k - m_\ell q}{m_r k + m_\ell q}, \quad c_\ell = \frac{2m_r k}{m_r k + m_\ell q}. \quad (3.98)$$

Επίσης ισχύουν

$$a_r = \frac{m_\ell q - m_r k}{m_r k + m_\ell q}, \quad c_r = \frac{2m_\ell q}{m_r k + m_\ell q}. \quad (3.99)$$

Χρήσιμες σχέσεις που προκύπτουν από τα παραπάνω είναι

$$V = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_\ell} - \frac{\hbar^2 q^2}{2m_r},$$

$$c_{\ell,r} = 1 + a_{\ell,r}, \quad a_\ell = -a_r, \quad \frac{m_\ell}{k} c_\ell = \frac{m_r}{q} c_r$$

Στη συνέχεια δίνουμε τη συνάρτηση Green:

$$\begin{aligned} G(x, x'; z) = & \theta(-x)\theta(-x') \frac{2m_\ell}{\hbar^2} \frac{1}{2ik} \left\{ e^{ik|x-x'|} + a_\ell e^{-ik(x+x')} \right\} \\ & + \theta(+x)\theta(+x') \frac{2m_r}{\hbar^2} \frac{1}{2iq} \left\{ e^{iq|x-x'|} + a_r e^{iq(x+x')} \right\} \\ & + \theta(-x)\theta(+x') \frac{2m_\ell}{\hbar^2} \frac{1}{2ik} c_\ell e^{-ikx+iqx'} \\ & + \theta(+x)\theta(-x') \frac{2m_r}{\hbar^2} \frac{1}{2iq} c_r e^{iqx-ikx'}. \end{aligned} \quad (3.100)$$

Χρειαζόμαστε επίσης και την πρώτη και δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης Green ως προς τη μεταβλητή  $x$ . Αυτή υπολογίζεται εύκολα από την παραπάνω σχέση, αρκεί να έχουμε υπόψη μας ότι η συνάρτηση Green είναι συνεχής ως προς  $x$  στο σημείο  $x = 0$  και ότι η παράγωγος της βηματικής συνάρτησης είναι η συνάρτηση δέλτα Dirac. Δίνουμε επίσης και τα δυναμικά



$$V_\ell = H - H_\ell = \theta(x) \left( \frac{p^2}{2m_r} - \frac{p^2}{2m_\ell} + V \right) - \frac{\hbar^2}{2} \left( \frac{1}{m_r} - \frac{1}{m_\ell} \right) \delta(x) \frac{d}{dx} \quad (3.101)$$

και

$$V_r = H - H_r = -\theta(-x) \left( \frac{p^2}{2m_r} - \frac{p^2}{2m_\ell} + V \right) - \frac{\hbar^2}{2} \left( \frac{1}{m_r} - \frac{1}{m_\ell} \right) \delta(x) \frac{d}{dx} \quad (3.102)$$

όπου  $p = -i\hbar \frac{d}{dx}$  και

$$H_\ell = \frac{p^2}{2m_\ell}, \quad H_r = \frac{p^2}{2m_r} + V. \quad (3.103)$$

Είμαστε σε θέση τώρα να επαληθεύσουμε τις παρακάτω σχέσεις

$$a_\ell = \frac{2m_\ell}{\hbar^2} \frac{1}{2ik} \langle -k | T_{\ell\ell} | k \rangle \quad (3.104)$$

και

$$c_\ell = \frac{2m_r}{\hbar^2} \frac{1}{2iq} \langle q | T_{r\ell} | k \rangle, \quad (3.105)$$

όπου

$$|k\rangle = e^{ikx}, \quad |q\rangle = e^{iqx} \quad (3.106)$$

και

$$T_{\nu'\nu} = V_\nu + V_{\nu'} G V_\nu, \quad (3.107)$$

με  $\nu, \nu' = \ell, r$ . Εκτελώντας τις πράξεις στο δεξί μέλος των σχέσεων (3.104) και (3.105), καταλήγουμε σε επαλήθευση αυτών. Χρειάζεται όμως να δείξουμε προσοχή σε ένα συγκεκριμένο σημείο της διαδικασίας. Εμφανίζεται ένα ολοκλήρωμα της μορφής

$$\int dx dx' \delta(x) \operatorname{sgn}(x - x') \delta(x'), \quad (3.108)$$

το οποίο προκύπτει από τον όρο στην παράσταση

$$\int dx dx' e^{ikx} V_\ell(x) G(x, x') V_\ell(x') e^{ikx'},$$

ή

$$\int dx dx' e^{-iqx} V_r(x) G(x, x') V_\ell(x') e^{ikx'},$$

όταν συνδυαστούν οι δεύτεροι αθροιστέοι όροι των δυναμικών  $V_{\ell,r}$  στις σχέσεις (3.101), (3.102). Το ολοκλήρωμα (3.108) δεν είναι καλά ορισμένο. Όμως οφείλουμε να θυμηθούμε ότι, ο τρόπος που σχηματίσαμε το στοιχείο πίνακος του T-πίνακα στις εξισώσεις Lippmann-Schwinger, ήταν να εκτελέσουμε πρώτα την ολοκλήρωση ως προς τη μεταβλητή  $x$ . Έτσι και στο ολοκλήρωμα (3.108) οφείλουμε να εκτελέσουμε πρώτα την ολοκλήρωση ως προς  $x$  και στην συνέχεια ως προς  $x'$ . Τότε η ισχύς των τύπων (3.104) και (3.105) επαληθεύεται. Αν παρόλα αυτά επιλέξουμε να εκτελέσουμε πρώτα την ολοκλήρωση ως προς  $x'$ , πριν να δράσουμε με τον τελεστή  $V_{\ell,r}$  στη συνάρτηση Green, τότε το ολοκλήρωμα (3.108) δεν εμφανίζεται και οι υπολογισμοί επαληθεύονται κανονικά. Το ίδιο συμβαίνει και κατά την επαλήθευση της εξίσωσης Lippmann-Schwinger

$$\psi_\ell(x) = e^{ikx} + \int G(x, x') V_\ell(x') e^{ikx'} dx', \quad (3.109)$$

που και αυτή επαληθεύεται κανονικά. Επίσης σημειώνουμε ότι πουθενά στη διαδικασία δεν κάναμε πράξεις που δεν ισχύουν στην περίπτωση που η ενέργεια παίρνει μιγαδικές τιμές  $z$ . Έτσι τα συμπεράσματά μας ισχύουν και σε αυτή την περίπτωση.

Στη συνέχεια αναφέρουμε περιληπτικά την επαλήθευση των τύπων που σχετίζουν τους συντελεστές σκέδασης με τα στοιχεία του T-πίνακα, για την περίπτωση του πιο απλού μοντέλου ανομοιογενούς υπεραγωγιμότητας. Θεωρούμε λοιπόν μία ενδοεπιφάνεια στο  $x = 0$ , που χωρίζει δύο υπεραγωγούς με την ίδια ενεργό μάζα, αλλά διαφορετικές συναρτήσεις χάσματος. Τότε για παράδειγμα ο συντελεστής διάδοσης με πρόσπτωση από αριστερά σωματιδίου με ηλεκτρονιακό χαρακτήρα και διάδοση σωματιδίου με χαρακτήρα οπής, δηλαδή ο συντελεστής διάδοσης με αλλαγή κλάδου (branch crossing), θα δίνεται από τη σχέση

$$\gamma_{e,h}^\ell = -\frac{im_r E}{\hbar^2 k_{hr} \Omega_r} \int dx dx' e^{ik_{hr} x} \begin{pmatrix} v_r e^{i\chi_r/2} \\ u_r e^{-i\chi_r/2} \end{pmatrix}^\dagger \times \mathcal{T}_{r\ell}^+(x, x') \begin{pmatrix} u_r e^{i\chi_\ell/2} \\ v_r e^{-i\chi_\ell/2} \end{pmatrix} e^{ik_{e\ell} x'}, \quad (3.110)$$

όπου

$$\mathcal{T}_{r\ell}^+ = \mathcal{V}_\ell + \mathcal{V}_r \mathcal{G} \mathcal{V}_\ell \quad (3.111)$$

και

$$\mathcal{V}_\ell = \theta(x) \begin{pmatrix} 0 & \Delta_r - \Delta_\ell \\ \Delta_r^* - \Delta_\ell^* & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.112)$$

$$\mathcal{V}_r = -\theta(-x) \begin{pmatrix} 0 & \Delta_r - \Delta_\ell \\ \Delta_r^* - \Delta_\ell^* & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.113)$$

Η συνάρτηση Green που θα χρειαστούμε στη σχέση (3.110) δίνεται από τη σχέση

$$\mathcal{G}(x, x'; E^+) = \sum_{p,p'} \left( -\frac{im_r E}{\hbar^2 k_{pr} \Omega_r} \right) \gamma_{p,p'}^r(E^+) e^{-ip'k_{p'\ell}x + ipk_{pr}x'} \phi_{p'\ell} \tilde{\phi}_{pr}^T. \quad (3.114)$$

Οι πράξεις στο δεξί μέλος της σχέσης (3.110) είναι εξαιρετικά μακροσκελείς, αλλά μας δίνουν το σωστό συντελεστή διάδοσης, ο οποίος υπολογίζεται π.χ με τον κανόνα του Cramer. Φυσικά πρέπει να αξιοποιηθούν όλες οι σχέσεις που ισχύουν μεταξύ των παραγόντων συμφωνίας  $u_{\ell,r}$  και  $v_{\ell,r}$ , καθώς και σχέσεις όπως οι παρακάτω:

$$u_\ell^2 - v_r^2 = u_r^2 - v_\ell^2 = \frac{1}{2E}(\Omega_r + \Omega_\ell), \quad (3.115)$$

$$k_{e\ell}^2 - k_{hr}^2 = k_{er}^2 - k_{h\ell}^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(\Omega_r + \Omega_\ell), \quad (3.116)$$

$$k_{e\ell}^2 - k_{er}^2 = k_{hr}^2 - k_{h\ell}^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(\Omega_\ell - \Omega_r) \quad (3.117)$$

και

$$(k_{e\ell}^2 - k_{hr}^2)(k_{e\ell}^2 - k_{er}^2) = \frac{2m}{\hbar^2}(|\Delta_r|^2 - |\Delta_\ell|^2). \quad (3.118)$$

Επίσης βοηθάει πολύ και η αναπαράσταση των παραγόντων συμφωνίας  $u_{\ell,r}$  και  $v_{\ell,r}$  μέσω τριγωνομετρικών συναρτήσεων:

$$u_\nu = \cos \varphi_\nu, \quad v_\nu = \sin \varphi_\nu. \quad (3.119)$$

Σημειώνουμε και σε αυτή την περίπτωση ότι οι υπολογισμοί ισχύουν και για μιγαδική ενέργεια  $z$ , καθώς δεν έχει γίνει κάποιος χειρισμός που να μην επιτρέπει μια τέτοια επέκταση.

## Κεφάλαιο 4

# Συνθήκες συμμετρίας των συντελεστών σκέδασης I

Στο κεφάλαιο αυτό, αφού περιγράψουμε πως μεταφράζονται οι μοναδιαίοι και αντιμοναδιαίοι μετασχηματισμοί του συστήματος της επαφής Josephson σε μετασχηματισμούς στο χώρο των καταστάσεων των εξισώσεων BdG, θα αποδείξουμε κάποιες κατηγορίες συνθηκών συμμετρίας, που ισχύουν μεταξύ των συντελεστών σκέδασης της επαφής Josephson, καθώς και μεταξύ των αναλυτικών τους επεκτάσεων σε μιγαδική ενέργεια. Οι συνθήκες αυτές είναι επακόλουθο μετασχηματισμών που αφήνουν το πρόβλημά μας αναλλοίωτο, με εξαίρεση την αλλαγή κάποιων παραμέτρων. Η μέθοδος που θα χρησιμοποιήσουμε σε αυτό το κεφάλαιο θα είναι πρώτα η εξαγωγή της συμμετρίας για πραγματικές ενέργειες και μετά η αναλυτική επέκταση του αποτελέσματος. Ενδιαφέρουσες σχέσεις προκύπτουν και με την αντιστροφή αυτής της διαδικασίας, δηλαδή με την εξαγωγή της συμμετρίας με χειρισμό της αναλυτικής επέκτασης των συντελεστών σκέδασης. Αυτές θα δοθούν στο επόμενο κεφάλαιο. Οι μετασχηματισμοί που θα θεωρήσουμε σε αυτό το κεφάλαιο, αλλά και στο επόμενο, είναι αντιγραμμικοί και περιλαμβάνουν και το μετασχηματισμό της αντιστροφής χρόνου. Οι συνθήκες συμμετρίας των συντελεστών σκέδασης που θα προκύψουν, θα χρησιμοποιηθούν σε επόμενα κεφάλαια για να επιβεβαιώσουμε τις διάφορες μορφές που μπορεί να πάρει η συνάρτηση Green, καθώς φυσικά και στο κεντρικό συμπέρασμα αυτής της εργασίας, που είναι η ύπαρξη, υπό συνθήκες, υπερρεύματος για μηδενική διαφορά φάσης στις σιδηρομαγνητικές επαφές Josephson.

### 4.1 Μετασχηματισμοί των εξισώσεων BdG

Στην ενότητα αυτή θα προσδιορίσουμε την αντιστοιχία μεταξύ των μοναδιαίων μετασχηματισμών στο χώρο Fock του συστήματος πολλών σωμάτων που αναπαριστά το

σύστημα της ανομοιογενούς υπεραγωγιμότητας και των μοναδιαίων μετασχηματισμών στο χώρο καταστάσεων των εξισώσεων BdG. Αυτό θα μας δώσει τη δυνατότητα να εργαστούμε πάνω στις συμμετρίες του προβλήματος στο πλαίσιο μονοσωματιδιακών εξισώσεων, όπως είναι οι εξισώσεις BdG.

Όπως γνωρίζουμε, ένας μοναδιαίος ή αντιμοναδιαίος μετασχηματισμός στο χώρο Fock δρά πάνω στους τελεστές καταστροφής με βάση τη σχέση

$$\mathbb{U}\psi(f)\mathbb{U}^\dagger = \psi(Uf), \quad (4.1)$$

όπου  $f$  είναι η κατάσταση που καταστρέφεται από τον τελεστή  $\psi$ . Ο τελεστής καταστροφής εξαρτάται αντιγραμμικά από την κατάσταση  $f$ . Αν ο μετασχηματισμός δεν αναμιγνύει τις τιμές της μεταβλητής του σωματιδιακού βαθμού ελευθερίας (χαρακτήρας ηλεκτρονίου-οπής), τότε

$$\mathbb{U}^\dagger\psi_s(x)\mathbb{U} = \sum_{s'} \hat{U}_{ss'}\psi_{s'}(x), \quad (4.2)$$

όπου  $\hat{U}_{ss'}$  είναι τα στοιχεία του πίνακα-τελεστή του μοναδιαίου μετασχηματισμού και ο οποίος μπορεί να δρά και στη μεταβλητή  $x$ . Σημειώνουμε ότι έχουμε επιλέξει τον τελεστή  $\mathbb{U}^\dagger\psi_s(x)\mathbb{U}$ , αντί του  $\mathbb{U}\psi_s(x)\mathbb{U}^\dagger$ , επειδή η επίδρασή του είναι να μετασχηματίσει με τον  $U^\dagger$  την κατάσταση  $|x\rangle$  και άρα με τον  $U$  την κυματοσυνάρτηση  $|\psi\rangle$  στο χώρο καταστάσεων των εξισώσεων BdG. Αντικαθιστώντας από τη σχέση (2.11) έχουμε

$$\mathbb{U}^\dagger\psi_s(x)\mathbb{U} = \sum_n \left( (\hat{U}\hat{u}^n(x))_s\gamma_n + (\hat{U}^*\hat{v}^n(x))_s^*\gamma_n^\dagger \right). \quad (4.3)$$

Έτσι συμπεραίνουμε ότι, στο χώρο καταστάσεων των εξισώσεων BdG, ένας μοναδιαίος ή αντιμοναδιαίος μετασχηματισμός που δεν αναμιγνύει ηλεκτρόνια και οπές συντελείται από τον τελεστή  $\mathcal{U}$  ως εξής:

$$\mathcal{U} \begin{pmatrix} \hat{u}(x) \\ \hat{v}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{U} & 0 \\ 0 & \hat{U}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u}(x) \\ \hat{v}(x) \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Ο αντίστοιχος μετασχηματισμός της χαμιλτονιανής BdG δίνεται από τη σχέση

$$\mathcal{U}\mathcal{H}_{BdG}\mathcal{U}^\dagger = \begin{pmatrix} \hat{U}\hat{H}_0\hat{U}^\dagger & \hat{U}\hat{\Delta}\hat{U}^T \\ -(\hat{U}\hat{\Delta}\hat{U}^T)^* & -(\hat{U}\hat{H}_0\hat{U}^\dagger)^* \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Θα αναφέρουμε τώρα δυο λόγια για την αναπαράσταση των μοναδιαίων και αντιμοναδιαίων μετασχηματισμών στο χώρο καταστάσεων των εξισώσεων BdG στην περίπτωση που προκαλούν ανάμιξη σωματιδίων και οπών. Θα επικαλεστούμε την αναφορά [117] και θα αναφέρουμε ότι, για να υπάρχει αντιστοιχία μεταξύ ενός μοναδιαίου ή αντιμοναδιαίου τελεστή  $\mathbb{U}$  στο χώρο Fock και ενός μοναδιαίου ή αντιμοναδιαίου τελεστή  $\mathcal{U}$  στο χώρο των μονοσωματιδιακών καταστάσεων των εξισώσεων BdG, πρέπει να ικανοποιείται η συνθήκη

$$\mathcal{U}_C \mathcal{U} = \mathcal{U} \mathcal{U}_C, \quad (4.6)$$

όπου

$$\mathcal{U}_C = \begin{pmatrix} 0 & \hat{1}C \\ \hat{1}C & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

Παραπάνω  $C$  είναι ο συνηθισμένος τελεστής μιγαδικής συζυγίας, που δρά πάνω στις μεταβλητές του χώρου. Επίσης, θα αναφερόμαστε στον τελεστή  $\mathcal{U}_C$  με τον όρο συζυγία Bogoliubov.

Εφαρμογή της συνθήκης (4.6), στην περίπτωση που ο μετασχηματισμός δεν αναμιγνύει σωματίδια και οπές, μας υποδεικνύει ότι τα σύνθετα διαγώνια στοιχεία  $\hat{U}_{11}$  και  $\hat{U}_{22}$ , που είναι (αντί-)μοναδιαία, πρέπει να είναι μιγαδικά συζυγή μεταξύ τους, όπως ήδη συμπεράναμε. Στην περίπτωση που ο μετασχηματισμός αναμιγνύει σωματίδια και οπές, η συνθήκη (4.6) επιβάλλει και τα σύνθετα διαγώνια στοιχεία να είναι μιγαδικά συζυγή μεταξύ τους καθώς και τα αντιδιαγώνια σύνθετα στοιχεία επίσης μεταξύ τους. Φυσικά υπάρχουν και άλλες συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται, ώστε ο τελεστής  $\mathcal{U}$  να είναι (αντι-)μοναδιαίος. Τέλος, σημειώνουμε ότι αυτές οι προϋποθέσεις ικανοποιούνται και από τον ίδιο τον τελεστή  $\mathcal{U}_C$ , τον οποίο θα χρησιμοποιήσουμε και παρακάτω.

## 4.2 Ο μετασχηματισμός της μιγαδικής συζυγίας

Τώρα που έχουμε προσδιορίσει πως αναπαρίστανται οι διάφοροι μοναδιαίοι και αντιμοναδιαίοι μετασχηματισμοί στο χώρο καταστάσεων των εξισώσεων BdG, συνεχίζουμε με την περιγραφή και τις συνέπειες ενός μετασχηματισμού, που αποκαλούμε *μετασχηματισμό μιγαδικής συζυγίας*. Ο τελεστής που αναπαριστά το μετασχηματισμό αυτό στο χώρο καταστάσεων των εξισώσεων BdG δίνεται από τη σχέση

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} \hat{1}C & 0 \\ 0 & \hat{1}C^* \end{pmatrix}, \quad (4.8)$$

όπου  $C$  είναι ο συνηθισμένος τελεστής μιγαδικής συζυγίας, που δρά πάνω στις μεταβλητές του χώρου. Για τον τελεστή αυτόν ισχύουν οι γνωστές σχέσεις  $C^\dagger = C$  και  $C^* = C$ . Η μιγαδική συζυγία είναι προφανώς αντιμοναδιαίος τελεστής. Η επίδραση που έχει πάνω στη χαμιλτονιανή BdG (απλά  $\mathcal{H}$  από δω και στο εξής) δίνεται παρακάτω

$$\mathcal{U}\mathcal{H}\mathcal{U}^\dagger = \begin{pmatrix} C\hat{H}_0C^\dagger & C\hat{\Delta}C^T \\ -(C\hat{\Delta}C^T)^* & -(C\hat{H}_0C^\dagger)^* \end{pmatrix}, \quad (4.9)$$

όπου η εισαγωγή του τελεστή  $C^T$  είναι περιττή, καθώς προφανώς ισχύει  $C^T = C$ , αλλά αναγράφεται για να θυμίζει τη γενική μορφή που παίρνει η δράση ενός τελεστή πάνω στη χαμιλτονιανή. Από τις σχέσεις (2.4), (2.8) και (2.50) είναι φανερό ότι

$$C\hat{H}_0(\phi)C^\dagger = \hat{H}_0(-\phi), \quad (4.10)$$

όπου εδώ το  $\phi$  παριστάνει το σύνολο των πολικών γωνιών των μαγνητίσεων στα ενδιάμεσα στρώματα και στις ενδοεπιφάνειες της επαφής Josephson. Επομένως, η μιγαδική συζυγία αφήνει αναλλοίωτα τα διαγώνια μέρη της χαμιλτονιανής BdG, με μόνη επίδραση την αλλαγή των προσήμων όλων των πολικών γωνιών των μαγνητίσεων. Με παρόμοιο τρόπο καταλήγουμε ότι

$$C\hat{\Delta}C^\dagger = \hat{\Delta}^*, \quad (4.11)$$

δηλαδή το δυναμικό ζεύγους μετασχηματίζεται στο μιγαδικό συζυγή του, με αποτέλεσμα η φάση του να αλλάζει πρόσημο, καθώς και η διαφορά φάσης μεταξύ των υπεραγωγών στα άκρα της επαφής Josephson. Με τα δεδομένα αυτά γράφουμε συμβολικά

$$\mathcal{U}\mathcal{H}(\chi, \phi)\mathcal{U}^\dagger = \mathcal{H}(-\chi, -\phi). \quad (4.12)$$

Η χαμιλτονιανή BdG επομένως διατηρείται αναλλοίωτη κατά το μετασχηματισμό της μιγαδικής συζυγίας, με εξαίρεση την αντιστροφή των πολικών γωνιών των μαγνητίσεων και της φάσης του δυναμικού ζεύγους. Στη συνέχεια υπολογίζουμε την επίδραση του μετασχηματισμού μιγαδικής συζυγίας στους T-πίνακες. Για τον T-πίνακα από το αριστερό στο αριστερό κανάλι, έχουμε

$$\mathcal{T}_{\ell\ell} = \mathcal{G}_\ell^{-1}(z)\mathcal{G}(z)\mathcal{V}_\ell,$$

ή

$$\mathcal{U}\mathcal{T}_{\ell\ell}\mathcal{U}^\dagger = \mathcal{U}(\mathcal{G}_\ell^{-1}(z)\mathcal{G}(z)\mathcal{V}_\ell)\mathcal{U}^\dagger,$$

ή

$$\mathcal{U}\mathcal{T}_{\ell\ell}\mathcal{U}^\dagger = \mathcal{U}\mathcal{G}_\ell^{-1}(z)\mathcal{U}^\dagger\mathcal{U}\mathcal{G}(z)\mathcal{U}^\dagger\mathcal{U}\mathcal{N}_\ell\mathcal{U}^\dagger.$$

Η δράση της μιγαδικής συζυγίας στους επί μέρους τελεστές είναι απλή. Για παράδειγμα

$$\mathcal{U}\mathcal{G}_\ell^{-1}(z)\mathcal{U}^\dagger = \mathcal{U}(z - \mathcal{H}_\ell)\mathcal{U}^\dagger = z^* - \mathcal{H}_\ell = \mathcal{G}_\ell^{-1}(z^*), \quad (4.13)$$

όπου είναι φανερό ότι η αντιγραμμικότητα του μετασχηματισμού της μιγαδικής συζυγίας μετασχηματίζει τη μιγαδική ενέργεια  $z$  στη μιγαδική συζυγή της. Η ελεύθερη χαμιλτονιανή του αριστερού υπεραγωγού δεν χαρακτηρίζεται από την ύπαρξη μαγνητίσεων και η φάση του δυναμικού ζεύγους είναι σταθερή και μπορεί να απαλειφθεί. Επίσης  $\mathcal{U}\mathcal{V}_\ell(\chi, \phi)\mathcal{U}^\dagger = \mathcal{V}_\ell(-\chi, -\phi)$ , αφού  $\mathcal{V}_\ell = \mathcal{H} - \mathcal{H}_\ell$ . Για την πλήρη συνάρτηση Green έχουμε

$$(z - \mathcal{H})\mathcal{G}(z) = 1$$

ή

$$\mathcal{U}(z - \mathcal{H})\mathcal{U}^\dagger\mathcal{U}\mathcal{G}(z)\mathcal{U}^\dagger = 1$$

ή

$$(z^* - \mathcal{H}(-\chi, -\phi))\mathcal{U}\mathcal{G}(z)\mathcal{U}^\dagger = 1$$

και συνεπώς

$$\mathcal{U}\mathcal{G}(z; \chi, \phi)\mathcal{U}^\dagger = \mathcal{G}(z^*; -\chi, -\phi). \quad (4.14)$$

Συγκεντρώνοντας τα παραπάνω αποτελέσματα έχουμε

$$\mathcal{U}\mathcal{T}_{\ell\ell}(z; \chi, \phi)\mathcal{U}^\dagger = \mathcal{T}_{\ell\ell}(z^*; -\chi, -\phi). \quad (4.15)$$



Παρατηρούμε ότι, λόγω της αντιγραμμικής ιδιότητας του τελεστή μιγαδικής συζυγίας, το μιγαδικό όρισμα  $z$  του T-πίνακα μετασχηματίζεται στο μιγαδικό συζυγή του. Επίσης η επίδραση του εν λόγω μετασχηματισμού στις παραμέτρους  $\chi$  και  $\phi$  είναι να τους αλλάξει το πρόσημο.

Ανάλογες σχέσεις συμμετρίας ικανοποιούν τα  $\mathcal{V}_r$  και  $\mathcal{G}_r$ . Συνεπώς και για τον T-πίνακα από το δεξί στο δεξί κανάλι ισχύει

$$\mathcal{U}\mathcal{T}_{rr}(z; \chi, \phi)\mathcal{U}^\dagger = \mathcal{T}_{rr}(z^*; -\chi, -\phi). \quad (4.16)$$

Για τους T-πίνακες με αλλαγή καναλιού σκέδασης θα χρησιμοποιήσουμε τη γενική σχέση

$$\mathcal{T}_{\nu'\nu} = \mathcal{V}_\nu + \mathcal{V}_{\nu'}\mathcal{G}(z)\mathcal{V}_\nu,$$

όπου τα  $\nu, \nu'$  αντιπροσωπεύουν τα  $\ell, r$ . Έχουμε ήδη τους κανόνες μετασχηματισμού για όλες τις ποσότητες που εμφανίζονται στην παραπάνω σχέση. Έτσι συμπεραίνουμε ότι

$$\mathcal{U}\mathcal{T}_{r\ell}(z; \chi, \phi)\mathcal{U}^\dagger = \mathcal{T}_{r\ell}(z^*; -\chi, -\phi) \quad (4.17)$$

και φυσικά μια πανομοιότυπη σχέση για τον  $\mathcal{T}_{\ell r}$ . Έτσι ολοκληρώσαμε την εύρεση των κανόνων μετασχηματισμού των T-πινάκων υπό την επίδραση της μιγαδικής συζυγίας.

Ας προσδιορίσουμε τώρα τις συνθήκες για τους συντελεστές ανάκλασης με πρόπτωση από αριστερά, που παράγονται από το μετασχηματισμό της μιγαδικής συζυγίας. Θα συντομέσουμε τις εκφράσεις, χρησιμοποιώντας το συμβολισμό των ket και bra του Dirac, αλλά πάντα κάνοντας σαφές το τί ακριβώς εννοούμε. Με το συμβολισμό αυτό οι συντελεστές ανάκλασης δίνονται από τη σχέση

$$\alpha_{ps,p's'}^\ell(E) = -\frac{im_\ell E}{\hbar^2 k_{p'\ell} \Omega_\ell(E)} \langle -p'k_{p'\ell}s' | \mathcal{T}_{\ell\ell}^{(+)} | pk_{p\ell}s \rangle, \quad (4.18)$$

όπου το στοιχείο πίνακος της παραπάνω σχέσης δίνεται όπως και στη σχέση (3.56). Εδώ έχουμε αλλάξει το συμβολισμό σε σχέση με το προηγούμενο κεφάλαιο, ώστε να είναι πιο προφανής η εξάρτηση των κυματοσυναρτήσεων από τις μεταβλητές  $p, k_p$  και  $s$ . Το σύμβολο  $p$  μπροστά από το  $k_p$  είναι αριθμός και συμβάλλει ώστε να χαρακτηριστεί η φορά διάδοσης του κύματος που περιγράφεται από το αντίστοιχο ket ή bra.

Στη συνέχεια απομονώνουμε το εν λόγω στοιχείο πίνακος και παίρνουμε το εκτός ενεργειακού κελύφους (off-shell) παράγωγό του. Συγκεκριμένα, ενώ θεωρούμε ότι οι κυματοσυναρτήσεις αντιστοιχούν στην τιμή  $E$  της ενέργειας, το όρισμα του T-πίνακα

αντιστοιχεί σε άλλη τιμή, γενικά μιγαδική,  $z$ . Το τελευταίο βήμα γίνεται περισσότερο για λόγους ευκολίας, παρά για ουσιαστικούς λόγους. Έτσι έχουμε

$$\langle -p'k_{p'\ell s'} | \mathcal{T}_{\ell\ell}(z) | pk_{p\ell s} \rangle = \langle -p'k_{p'\ell s'} | \mathcal{U}^\dagger \mathcal{U} \mathcal{T}_{\ell\ell}(z) \mathcal{U}^\dagger \mathcal{U} | pk_{p\ell s} \rangle,$$

ή, με βάση τα παραπάνω

$$\langle -p'k_{p'\ell s'} | \mathcal{T}_{\ell\ell}(z) | pk_{p\ell s} \rangle = \langle -p'k_{p'\ell s'} | \mathcal{U}^\dagger \mathcal{T}_{\ell\ell}(z^*; -\chi, -\phi) \mathcal{U} | pk_{p\ell s} \rangle.$$

Στη συνέχεια δρούμε τους τελεστές  $\mathcal{U}$  στα bra και στα ket αντίστοιχα. Σημειώνουμε ότι, όταν ένας αντιγραμμικός τελεστής “μεταφέρεται” στο bra, τότε πρέπει να πάρουμε το μιγαδικό συζυγή του στοιχείου πίνακος [118]. Έτσι, λόγω της αντιγραμμικότητας του  $\mathcal{U}$ , έχουμε

$$\langle -p'k_{p'\ell s'} | \mathcal{T}_{\ell\ell}(z) | pk_{p\ell s} \rangle = \langle \mathcal{U}(-p'k_{p'\ell s'}) | \mathcal{T}_{\ell\ell}(z^*; -\chi, -\phi) | \mathcal{U}(pk_{p\ell s}) \rangle^*.$$

Όπως και σε όλο το παρόν κεφάλαιο, θεωρούμε ότι οι κυματοσυναρτήσεις στα στοιχεία του  $T$ -πίνακα αντιστοιχούν σε πραγματικές τιμές της ενέργειας. Θεωρούμε δηλαδή ότι έχουμε πάρει το όριο του  $z \rightarrow E^+$  στις κυματοσυναρτήσεις, πριν επιδράσουμε με τον όποιο τελεστή πάνω σε αυτές. Με αυτή την παρατήρηση κατά νου, συμπεραίνουμε ότι η δράση του τελεστή  $\mathcal{U}$  πάνω στις καταστάσεις  $|pk_{p\ell s}\rangle$  είναι να αλλάξει πρόσημο στην ορμή  $k_{p\ell}$  και στη φάση  $\chi$  του αριστερού υπεραγωγού, διατηρώντας τον  $p$  χαρακτήρα της κατάστασης και το σπιν  $s$ . Συγκεκριμένα έχουμε

$$\mathcal{U} | pk_{p\ell s}; \chi \rangle = | -pk_{p\ell s}; -\chi \rangle, \quad (4.19)$$

όπου εδώ έχουμε εισάγει τη φάση του υπεραγωγού στο συμβολισμό της κατάστασης. Με αυτά τα δεδομένα, έχουμε

$$\langle -p'k_{p'\ell s'} | \mathcal{T}_{\ell\ell}(z) | pk_{p\ell s} \rangle = \langle p'k_{p'\ell s'} | \mathcal{T}_{\ell\ell}(z^*; -\chi, -\phi) | -pk_{p\ell s} \rangle^*.$$

Έπειτα, αξιοποιώντας την προφανή σχέση  $\mathcal{T}_{\ell\ell}(z)^\dagger = \mathcal{T}_{\ell\ell}(z^*)$  και εναλλάσσοντας τη θέση του bra και του ket στο στοιχείο πίνακος του δεξιού μέλους της παραπάνω σχέσης, έχουμε

$$\langle -p'k_{p'\ell s'} | \mathcal{T}_{\ell\ell}(z) | pk_{p\ell s} \rangle = \langle -pk_{p\ell s} | \mathcal{T}_{\ell\ell}(z; -\chi, -\phi) | p'k_{p'\ell s'} \rangle. \quad (4.20)$$

Πολλαπλασιάζοντας τα μέλη της παραπάνω σχέσης με την ίδια ποσότητα, έχουμε

$$\begin{aligned} & \left( -\frac{im_\ell E}{\hbar^2 k_{p'\ell} \Omega_\ell(E)} \right) \left( -\frac{im_\ell E}{\hbar^2 k_{p\ell} \Omega_\ell(E)} \right) \langle -p' k_{p'\ell} s' | \mathcal{T}_{\ell\ell}(z) | p k_{p\ell} s \rangle = \\ & = \left( -\frac{im_\ell E}{\hbar^2 k_{p'\ell} \Omega_\ell(E)} \right) \left( -\frac{im_\ell E}{\hbar^2 k_{p\ell} \Omega_\ell(E)} \right) \langle -p k_{p\ell} s | \mathcal{T}_{\ell\ell}(z; -\chi, -\phi) | p' k_{p'\ell} s' \rangle. \end{aligned}$$

Αν συγκρίνουμε την παραπάνω σχέση με τον τύπο που δίνει τους συντελεστές ανάκλασης συναρτήσεως των στοιχείων πίνακος του T-πίνακα, καταλήγουμε στη σχέση

$$\frac{1}{k_{p\ell}} \alpha_{ps,p's'}^\ell(E + i0; \chi, \phi) = \frac{1}{k_{p'\ell}} \alpha_{p's',ps}^\ell(E + i0; -\chi, -\phi). \quad (4.21)$$

Η παραπάνω σχέση είναι η ισότητα δύο συναρτήσεων του  $z$  πάνω στον πραγματικό άξονα (οριακά από το άνω ημιεπίπεδο  $z$ ), οι οποίες είναι αναλυτικές, εκτός από πόλους στο διάστημα  $[-\min\{\Delta_\ell, \Delta_r\}, \min\{\Delta_\ell, \Delta_r\}]$  και εγκοπή κλάδου πρώτης τάξης στο διάστημα  $[-\infty, -\min\{\Delta_\ell, \Delta_r\}] \cup [\min\{\Delta_\ell, \Delta_r\}, \infty]$  (βλ. Σχ.4.1). Σύμφωνα με γνωστό θεώρημα της μιγαδικής ανάλυσης, τα σημεία μηδενισμού μιας αναλυτικής συνάρτησης είναι απομονωμένα, δηλαδή υπάρχει τουλάχιστον μια περιοχή τους στην οποία η συνάρτηση είναι μη μηδενική [119]. Συνεπώς, με την εις άτοπο απαγωγή, οι δύο συναρτήσεις της σχέσης (4.21) θα πρέπει να είναι ίσες παντού στο πεδίο αναλυτικότητάς τους. Έτσι έχουμε

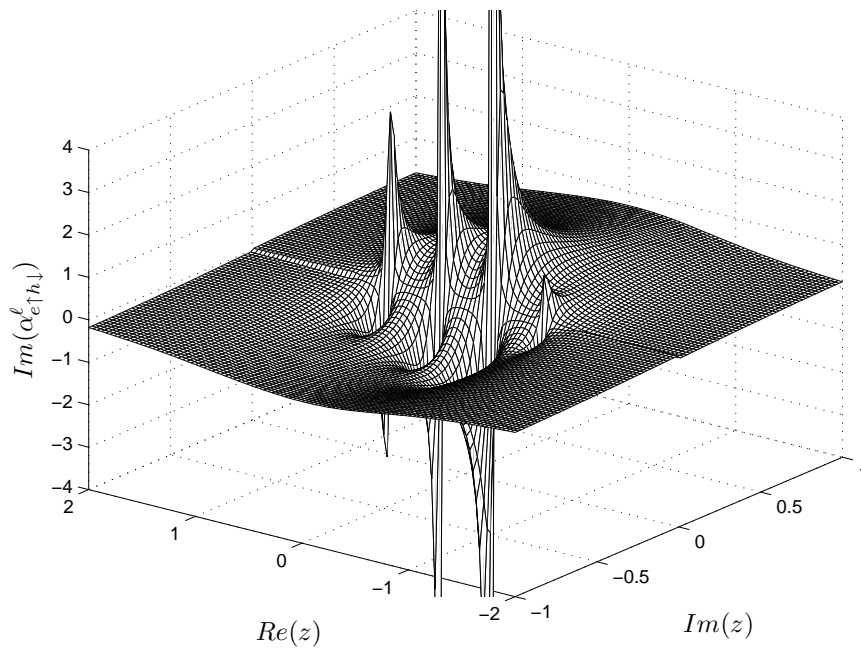
$$\frac{1}{k_{p\ell}(z)} \alpha_{ps,p's'}^\ell(z; \chi, \phi) = \frac{1}{k_{p'\ell}(z)} \alpha_{p's',ps}^\ell(z; -\chi, -\phi). \quad (4.22)$$

Ακολουθεί ένα συγκεκριμένο παράδειγμα της παραπάνω συλλογής συμμετριών, που θα χρησιμοποιηθεί στο κεφάλαιο 7:

$$\frac{1}{k_{e\ell}(z)} \alpha_{e\uparrow,h\downarrow}^\ell(z; \chi, \phi) = \frac{1}{k_{h\ell}(z)} \alpha_{h\downarrow,e\uparrow}^\ell(z; -\chi, -\phi). \quad (4.23)$$

Η διαδικασία εξαγωγής των συνθηκών συμμετρίας που πηγάζουν από τη μιγαδική συζυγία είναι ανάλογη και στην περίπτωση των συντελεστών ανάκλασης με πρόσπτωση από τα δεξιά. Ο T-πίνακας μετασχηματίζεται κατά τον ίδιο τρόπο υπό τη μιγαδική συζυγία, το ίδιο και οι κυματοσυναρτήσεις του στοιχείου του T-πίνακα. Συνεπώς, ακολουθώντας την ίδια διαδικασία καταλήγουμε στη σχέση

$$\frac{1}{k_{pr}(z)} \alpha_{ps,p's'}^r(z; \chi, \phi) = \frac{1}{k_{p'r}(z)} \alpha_{p's',ps}^r(z; -\chi, -\phi). \quad (4.24)$$



Σχήμα 4.1: Το φανταστικό μέρος του συντελεστή σκέδασης  $\alpha_{e\uparrow,h\downarrow}^\ell$  συναρτήσει της μιγαδικής ενέργειας  $z$ . Οι πόλοι και οι εγκοπές κλάδου είναι εμφανείς στον πραγματικό άξονα. Οι παράμετροι της επαφής είναι:  $T/T_c = 0.1$ ,  $\Delta_{\ell,r} = 0.001$ ,  $Z_{nl,r} = 0$ ,  $Z_{ml,r} = 1$ ,  $k_F d = 20$ ,  $M/E_F = 0.5$ . Η γεωμετρία των μαγνητίσεων είναι στις διευθύνσεις  $zxy$  διαδοχικά από την αριστερή ενδοεπιφάνεια, στο ενδιάμεσο στρώμα και στη δεξιά ενδοεπιφάνεια.

Συνεχίζουμε με την εξαγωγή των σχέσεων συμμετρίας που πηγάζουν από τη μιγαδική συζυγία για τους συντελεστές διάδοσης. Παρακάτω δίνουμε τον ορισμό του συντελεστή διάδοσης διέγερσης  $p'$  και σπιν  $s'$  στα δεξιά, για πρόσπτωση από τα αριστερά διέγερσης χαρακτήρα  $p$  και σπιν  $s$ :

$$\gamma_{ps,p's'}^\ell(E+i0) = -\frac{im_r E}{\hbar^2 k_{p'r}\Omega_r} \langle p'k_{p'r}s'; \chi_r | \mathcal{T}_{r\ell}(E^+; \chi, \phi) | pk_{p\ell}s; \chi_\ell \rangle. \quad (4.25)$$

Στη συνέχεια θεωρούμε το εκτός κελύφους στοιχείο του T-πίνακα από το αριστερό στο δεξί κανάλι, που εμφανίζεται στην παραπάνω σχέση, και έχουμε

$$\begin{aligned} \langle p'k_{p'r}s'; \chi_r | \mathcal{T}_{r\ell}(z; \chi, \phi) | pk_{p\ell}s; \chi_\ell \rangle &= \\ &= \langle p'k_{p'r}s'; \chi_r | \mathcal{U}^\dagger \mathcal{U} \mathcal{T}_{r\ell}(z; \chi, \phi) \mathcal{U}^\dagger \mathcal{U} | pk_{p\ell}s; \chi_\ell \rangle, \end{aligned}$$

ή

$$\begin{aligned} \langle p'k_{p'r}s'; \chi_r | \mathcal{T}_{r\ell}(z; \chi, \phi) | pk_{p\ell}s; \chi_\ell \rangle &= \\ &= \langle \mathcal{U}(p'k_{p'r}s'; \chi_r) | \mathcal{T}_{r\ell}(z^*; -\chi, -\phi) | \mathcal{U}(pk_{p\ell}s; \chi_\ell) \rangle^*. \end{aligned}$$

Παρατηρήστε το γεγονός ότι η δράση του αντιγραμμικού τελεστή στο “bra” μας αναγκάζει να πάρουμε το μιγαδικό συζυγές του στοιχείου πίνακος. Λαμβάνοντας υπόψη τη δράση της μιγαδικής συζυγίας στις κυματοσυναρτήσεις που εμφανίζονται παραπάνω, έχουμε

$$\begin{aligned} \langle p'k_{p'r}s'; \chi_r | \mathcal{T}_{r\ell}(z; \chi, \phi) | pk_{p\ell}s; \chi_\ell \rangle &= \\ &= \langle -p'k_{p'r}s'; -\chi_r | \mathcal{T}_{r\ell}(z^*; -\chi, -\phi) | -pk_{p\ell}s; -\chi_\ell \rangle^*. \end{aligned}$$

Στη συνέχεια εξισώνουμε το παραπάνω στοιχείο πίνακος με το συζυγές και ανάστροφο του adjoint του T-πίνακα και έχουμε

$$\begin{aligned} \langle p'k_{p'r}s'; \chi_r | \mathcal{T}_{r\ell}(z; \chi, \phi) | pk_{p\ell}s; \chi_\ell \rangle &= \\ &= \langle -pk_{p\ell}s; -\chi_\ell | \mathcal{T}_{\ell r}(z; -\chi, -\phi) | -p'k_{p'r}s'; -\chi_r \rangle, \end{aligned} \quad (4.26)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη σχέση  $(\mathcal{T}_{r\ell}(z))^\dagger = \mathcal{T}_{\ell r}(z^*)$ . Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της παραπάνω σχέσης με την ποσότητα

$$\left( \frac{-im_r E}{\hbar^2 k_{p'r}\Omega_r} \right) \left( \frac{-im_\ell E}{\hbar^2 k_{p\ell}\Omega_\ell} \right)$$

και στη συνέχεια κάνοντας αναλυτική επέκταση σε μιγαδικές ενέργειες  $z$ , καταλήγουμε στις παρακάτω συνθήκες συμμετρίας:

$$\frac{m_\ell}{k_{p\ell}(z)\Omega_\ell(z)}\gamma_{ps,p's'}^\ell(z; \chi, \phi) = \frac{m_r}{k_{p'r}(z)\Omega_r(z)}\gamma_{p's',ps}^r(z; -\chi, -\phi). \quad (4.27)$$

Έτσι ολοκληρώσαμε την περιγραφή των συμμετριών που επιβάλλει η μιγαδική συζυγία στους συντελεστές σκέδασης. Αξίζει να σημειώσουμε ότι οι σχέσεις στις οποίες καταλήξαμε είναι γενικεύσεις αυτών που αναφέρονται στην αναφορά [109].

### 4.3 Ο μετασχηματισμός της αντιστροφής χρόνου

Στην ενότητα αυτή εξετάζουμε τις σχέσεις συμμετρίας των συντελεστών σκέδασης που προκύπτουν από το μετασχηματισμό της αντιστροφής χρόνου. Ο τελεστής που περιγράφει αυτή τη συμμετρία στο χώρο των καταστάσεων των εξισώσεων BdG είναι

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} \hat{R}_\pi(\mathbf{y})C & 0 \\ 0 & (\hat{R}_\pi(\mathbf{y}))^*C \end{pmatrix}, \quad (4.28)$$

όπου  $\hat{T} = \hat{R}_\pi(\mathbf{y})C$  είναι ο συνήθης τελεστής της αντιστροφής χρόνου στο χώρο καταστάσεων σωματιδίου με σπιν 1/2. Επίσης  $\hat{R}_\pi(\mathbf{y})$  είναι ο τελεστής της στροφής στο χώρο του σπιν 1/2 κατά γωνία  $\pi$  γύρω από τον άξονα  $\mathbf{y}$  και ισούται με  $e^{-i\sigma_y\pi/2} = -i\sigma_y$ , όπου  $\sigma_y$  είναι ο πίνακας του Pauli στην κατεύθυνση  $y$ .

Στη συνέχεια εξετάζουμε πως επιδρά ο μετασχηματισμός της αντιστροφής χρόνου στη χαμιλτονιανή BdG. Η επίδρασή του στον τελεστή της κινητικής ενέργειας είναι να τον αφήσει αναλλοίωτο. Όσον αφορά το δυναμικό ζεύγους, αυτό μετασχηματίζεται ως εξής

$$\hat{T}\hat{\Delta}\hat{T}^T = \hat{\Delta}^*, \quad (4.29)$$

δηλαδή παραμένει αναλλοίωτο με αλλαγή όμως προσήμου της φάσης του  $\chi$ . Μένει λοιπόν να προσδιορίσουμε πως μετασχηματίζεται το κομμάτι της χαμιλτονιανής που περιέχει τις μαγνητίσεις του συστήματος. Το κομμάτι αυτό χωρίζεται σε δύο μέρη, που μπορούν να γραφούν ως εξής

$$\hat{H}_M = - \sum_i \chi_i(x)(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{m}_i)M_i \quad (4.30)$$

και

$$\hat{H} = - \sum_j \delta(x - x_j) (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_j) N_j, \quad (4.31)$$

όπου  $\chi_i(x)$  είναι η συνάρτηση που είναι μηδέν παντού, εκτός από την περιοχή του στρώματος  $i$ , όπου είναι ίση με μονάδα. Επίσης  $\mathbf{m}_i$  είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στη διεύθυνση της μαγνήτισης του στρώματος  $i$  και  $M_i$  το μέτρο της, ενώ  $\mathbf{n}_j$  είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στη κατεύθυνση της μαγνήτισης της ενδοεπιφάνειας  $j$  και  $N_j$  η ισχύς της.

Εφαρμόζοντας την αντιστροφή χρόνου στους τελεστές  $\hat{H}_M, \hat{H}_N$  και λαμβάνοντας υπόψη ότι  $\hat{T}\sigma_i\hat{T}^\dagger = -\sigma_i$ , καθώς η στροφορμή οφείλει να είναι περιττή κατά τον μετασχηματισμό αντιστροφής χρόνου, έχουμε

$$\hat{T}\hat{H}_{M,N}\hat{T}^\dagger = -\hat{H}_{M,N}. \quad (4.32)$$

Συγκεντρώνοντας τα παραπάνω αποτελέσματα, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι

$$\mathcal{U}\mathcal{H}(\mathbf{M}, \chi)\mathcal{U}^\dagger = \mathcal{H}(-\mathbf{M}, -\chi), \quad (4.33)$$

όπου  $\mathbf{M}$  περιλαμβάνει τα διανύσματα μαγνήτισης των στρωμάτων και των ενδοεπιφανειών της επαφής.

Μένει να προσδιορίσουμε τους κανόνες μετασχηματισμού του T-πίνακα. Ξεκινούμε με τον T-πίνακα από το αριστερό στο αριστερό κανάλι. Η χαμιλτονιανή του αριστερού υπεραγωγού  $\mathcal{H}_\ell$  παραμένει αναλλοίωτη κατά το μετασχηματισμό της αντιστροφής χρόνου, με εξαίρεση την αλλαγή του προσήμου της φάσης του δυναμικού ζεύγους. Επομένως για το  $\mathcal{V}_\ell = \mathcal{H} - \mathcal{H}_\ell$  θα ισχύει

$$\mathcal{U}\mathcal{V}_\ell(\mathbf{M}, \chi)\mathcal{U}^\dagger = \mathcal{V}_\ell(-\mathbf{M}, -\chi) \quad (4.34)$$

Για τις συναρτήσεις Green έχουμε τους εξής μετασχηματισμούς υπό την αντιστροφή χρόνου:

$$\mathcal{U}\mathcal{G}_\ell(z; \chi_\ell)\mathcal{U}^\dagger = \mathcal{G}_\ell(z^*; -\chi_\ell) \quad (4.35)$$

και, για την πλήρη συνάρτηση Green,

$$\mathcal{U}\mathcal{G}(z; \mathbf{M}, \chi)\mathcal{U}^\dagger = \mathcal{G}(z^*; -\mathbf{M}, -\chi). \quad (4.36)$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω αποτελέσματα, μαζί με τον ορισμό του T-πίνακα από το αριστερό στο αριστερό κανάλι, συμπεραίνουμε ότι

$$\mathcal{U}\mathcal{T}_{\ell\ell}(z; \mathbf{M}, \chi)\mathcal{U}^\dagger = \mathcal{T}_{\ell\ell}(z^*; -\mathbf{M}, -\chi). \quad (4.37)$$

Παρόμοιες σχέσεις ισχύουν και για τους T-πίνακες μεταξύ διαφορετικών καναλιών σκέδασης. Έτσι μπορούμε να γράψουμε γενικά

$$\mathcal{U}\mathcal{T}_{\nu'\nu}(z; \mathbf{M}, \chi)\mathcal{U}^\dagger = \mathcal{T}_{\nu'\nu}(z^*; -\mathbf{M}, -\chi), \quad (4.38)$$

όπου  $\nu', \nu = \ell, r$ . Μένει να προσδιορίσουμε τη δράση του τελεστή της αντιστροφής χρόνου πάνω στις ιδιοκαταστάσεις πραγματικής ενέργειας της χαμιλτονιανής του αριστερού και του δεξιού υπεραγωγού. Με λίγη προσοχή και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.42)-(2.45), καταλήγουμε στην παρακάτω γενική σχέση

$$\mathcal{U}|k_{p\nu}s; \chi_\nu\rangle = ps| -k_{p\nu}\bar{s}; -\chi_\nu\rangle, \quad (4.39)$$

όπου  $p = e, h$  και  $s = \uparrow, \downarrow$  ή αντίστοιχα  $p = +1, -1$  και  $s = +1, -1$ , ανάλογα με το αν χρησιμοποιούνται ως δείκτες ή εντός μαθηματικών σχέσεων. Επίσης  $\bar{s}$  είναι η συμπληρωματική τιμή του σπιν  $s$ . Έτσι παρατηρούμε ότι η δράση της αντιστροφής χρόνου στις ιδιοκαταστάσεις του αριστερού και του δεξιού υπεραγωγού είναι να αλλάξει πρόσημο στο κυματοδιάνυσμα, να διατηρήσει τον  $p$  χαρακτήρα της διέγερσης, να αλλάξει τον προσανατολισμό του σπιν και να αλλάξει πρόσημο στη φάση του δυναμικού ζεύγους. Οι αλλαγές αυτές είναι αναμενόμενες, αν λάβει κανείς υπόψη τη φυσική ερμηνεία της αντιστροφής χρόνου ή, όπως αλλιώς λέγεται, της αντιστροφής της κίνησης. Επίσης υπάρχει και ένα πρόσημο ίσο με  $ps$  στη μετασχηματισμένη ιδιοκατάσταση.

Μπορούμε τώρα να εξετάσουμε τις επιπτώσεις της αντιστροφής χρόνου στους συντελεστές ανάκλασης για πρόσπτωση από αριστερά. Έχουμε, όπως και πριν,

$$\langle -p'k_{p'\ell}s' | \mathcal{T}_{\ell\ell}(z) | pk_{p\ell}s \rangle = \langle -p'k_{p'\ell}s' | \mathcal{U}^\dagger \mathcal{U} \mathcal{T}_{\ell\ell}(z) \mathcal{U}^\dagger \mathcal{U} | pk_{p\ell}s \rangle,$$

ή

$$\langle -p'k_{p'\ell}s' | \mathcal{T}_{\ell\ell}(z) | pk_{p\ell}s \rangle = \langle -p'k_{p'\ell}s' | \mathcal{U}^\dagger \mathcal{T}_{\ell\ell}(z^*; -\mathbf{M}, -\chi) \mathcal{U} | pk_{p\ell}s \rangle.$$

Στη συνέχεια δρούμε τους τελεστές  $\mathcal{U}$  στα bra και στα ket αντίστοιχα και, λόγω της αντιγραμμικότητας τους, έχουμε



$$\langle -p'k_{p'\ell}s' | \mathcal{T}_{\ell\ell}(z) | pk_{p\ell}s \rangle = \langle \mathcal{U}(-p'k_{p'\ell}s') | \mathcal{T}_{\ell\ell}(z^*; -\mathbf{M}, -\chi) | \mathcal{U}(pk_{p\ell}s) \rangle^*.$$

Έπειτα εφαρμόζουμε τη σχέση (4.39) και έχουμε

$$\langle -p'k_{p'\ell}s' | \mathcal{T}_{\ell\ell}(z) | pk_{p\ell}s \rangle = \langle p'k_{p'\ell}\bar{s}' | p's' \mathcal{T}_{\ell\ell}(z^*; -\mathbf{M}, -\chi) | ps \rangle - \langle pk_{p\ell}\bar{s} \rangle^*.$$

Τελικά παίρνουμε το μιγαδικό συζυγή του στοιχείου πίνακος στο δεξί μέλος της παραπάνω σχέσης και έχουμε

$$\langle -p'k_{p'\ell}s' | \mathcal{T}_{\ell\ell}(z) | pk_{p\ell}s \rangle = p's'ps \langle -pk_{p\ell}\bar{s} | \mathcal{T}_{\ell\ell}(z; -\mathbf{M}, -\chi) | p'k_{p'\ell}\bar{s}' \rangle. \quad (4.40)$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με το γινόμενο των συντελεστών αναλογίας μεταξύ των στοιχείων των T-πινάκων που εμφανίζονται και των αντίστοιχων συντελεστών ανάκλασης, όπως και στην προηγούμενη ενότητα, τελικά καταλήγουμε στην εξής σχέση για τους συντελεστές ανάκλασης:

$$\frac{1}{k_{p\ell}(z)} \alpha_{ps,p's'}^{\ell}(z; \mathbf{M}, \chi) = ps p' s' \frac{1}{k_{p'\ell}(z)} \alpha_{p's',p\bar{s}}^{\ell}(z; -\mathbf{M}, -\chi). \quad (4.41)$$

Στην παραπάνω σχέση έχουμε εκτελέσει προφανώς και την αναλυτική επέκταση σε μιγαδικές ενέργειες  $z$ . Σημειώνουμε ότι μια πανομοιότυπη σχέση ισχύει και για τους συντελεστές ανάκλασης με πρόσπτωση από τα δεξιά της επαφής. Δίνουμε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα για την (4.41):

$$\frac{1}{k_{e\ell}(z)} \alpha_{e\uparrow,h\downarrow}^{\ell}(z; \mathbf{M}, \chi) = \frac{1}{k_{h\ell}(z)} \alpha_{h\uparrow,e\downarrow}^{\ell}(z; -\mathbf{M}, -\chi), \quad (4.42)$$

όπου φαίνεται ότι οι συντελεστές ανάκλασης για τις χρονικά αντεστραμμένες διαδικασίες, με αλλαγή προσήμου στα  $\mathbf{M}$  και  $\chi$ , είναι ίσα μεταξύ τους, αν ληφθούν υπόψη και τα κατάλληλα κυματανύσματα.

Ολοκληρώνουμε την παρούσα ενότητα με την εξαγωγή των συνθηκών συμμετρίας που επιβάλλει η αντιστροφή χρόνου για τους συντελεστές διάδοσης. Ο συντελεστής διάδοσης διέγερσης  $p'$ ,  $s'$  στα δεξιά, με πρόσπτωση διέγερσης  $p$ ,  $s$  από τα αριστερά, δίνεται από τη σχέση (4.25). Θεωρούμε το εκτός ενεργειακού κελύφους στοιχείο του T-πίνακα που εμφανίζεται σε αυτή τη σχέση και έχουμε

$$\begin{aligned} \langle p'k_{p'r}s'; \chi_r | \mathcal{T}_{r\ell}(z; \mathbf{M}, \chi) | pk_{p\ell}s; \chi_\ell \rangle &= \\ &= \langle \mathcal{U}(p'k_{p'r}s'; \chi_r) | \mathcal{U} \mathcal{T}_{r\ell}(z; \mathbf{M}, \chi) \mathcal{U}^\dagger | \mathcal{U}(pk_{p\ell}s; \chi_\ell) \rangle^*. \end{aligned}$$

Στη συνέχεια εκτελούμε τους μετασχηματισμούς του T-πίνακα και των κυματοσυναρτήσεων υπό την αντιστροφή χρόνου. Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} \langle p'k_{p'r}s'; \chi_r | \mathcal{T}_{r\ell}(z; \mathbf{M}, \chi) | pk_{p\ell}s; \chi_\ell \rangle &= \\ &= psp's' \langle -p'k_{p'r}\bar{s}'; -\chi_r | \mathcal{T}_{r\ell}(z^*; -\mathbf{M}, -\chi) | -pk_{p\ell}\bar{s}; -\chi_\ell \rangle^*. \end{aligned}$$

Έπειτα εξισώνουμε το δεύτερο μέλος της παραπάνω σχέσης με το μιγαδικό συζυγές και ανάστροφο στοιχείο του adjoint του T-πίνακα. Καταλήγουμε στη σχέση

$$\begin{aligned} \langle p'k_{p'r}s'; \chi_r | \mathcal{T}_{r\ell}(z; \mathbf{M}, \chi) | pk_{p\ell}s; \chi_\ell \rangle &= \\ &= psp's' \langle -pk_{p\ell}\bar{s}; -\chi_\ell | \mathcal{T}_{\ell r}(z; -\mathbf{M}, -\chi) | -p'k_{p'r}\bar{s}'; -\chi_r \rangle. \end{aligned}$$

Η παραπάνω σχέση, με αναλυτική επέκταση, αμέσως μας δίνει τη συνθήκη συμμετρίας

$$\frac{m_\ell}{k_{p\ell}(z)\Omega_\ell(z)} \gamma_{ps,p's'}^\ell(z; \mathbf{M}, \chi) = psp's' \frac{m_r}{k_{p'r}(z)\Omega_r(z)} \gamma_{p'\bar{s}',p\bar{s}}^r(z; -\mathbf{M}, -\chi). \quad (4.43)$$

Έτσι ολοκληρώνουμε τη μελέτη των συνθηκών συμμετρίας που πηγάζουν από την αντιστροφή χρόνου.

## 4.4 Μικτός μετασχηματισμός αντιστροφής χρόνου και στροφής στο επίπεδο των μαγνητίσεων του συστήματος

Στην ενότητα αυτή θα εξετάσουμε την επίπτωση στους συντελεστές σκέδασης ενός μικτού μετασχηματισμού, που αποτελείται από το γινόμενο της αντιστροφής χρόνου και μιας στροφής στο χώρο των σπιν κατά 180 μοίρες, με άξονα κάθετο στο επίπεδο των μαγνητίσεων, στην περίπτωση που αυτές είναι συνεπίπεδες. Ο τελεστής του μετασχηματισμού αυτού στο χώρο καταστάσεων των εξισώσεων BdG δίνεται από την παρακάτω σχέση

$$U = \mathcal{W}\mathcal{T}, \quad (4.44)$$

όπου  $\mathcal{T}$  είναι ο τελεστής της αντιστροφής χρόνου στο χώρο καταστάσεων των εξισώσεων BdG και  $\mathcal{W}$  είναι μία στροφή στον ίδιο χώρο καταστάσεων κατα 180 μοίρες με άξονα κάθετο στο επίπεδο των μαγνητίσεων της επαφής. Πιο αναλυτικά έχουμε

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} \hat{W}\hat{T} & 0 \\ 0 & \hat{W}^*\hat{T}^* \end{pmatrix}, \quad (4.45)$$

με τις προφανείς αντιστοιχίσεις

$$\mathcal{W} = \begin{pmatrix} \hat{W} & 0 \\ 0 & \hat{W}^* \end{pmatrix},$$

όπου  $\hat{W} = \hat{R}_\pi(\mathbf{n})$ , με  $\mathbf{n}$  μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο των μαγνητίσεων, και

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} \hat{T} & 0 \\ 0 & \hat{T}^* \end{pmatrix}.$$

Είναι απλό να προσδιορίσουμε πως μετασχηματίζεται η χαμιλτονιανή BdG υπό την επίδραση του μικτού μετασχηματισμού. Η κινητική ενέργεια παραμένει αμετάβλητη, αφού είναι αναλλοίωτη και στην αντιστροφή χρόνου και είναι και σφαιρικά συμμετρική στο χώρο των σπιν, όπου δρα η στροφή που θεωρήσαμε. Το δυναμικό ζεύγους μετασχηματίζεται στο μιγαδικό συζυγή του, δηλαδή  $(\hat{W}\hat{T})\hat{\Delta}(\hat{W}\hat{T})^T = \hat{\Delta}^*$ , όπως και με τους άλλους αντιγραμμικούς μετασχηματισμούς που θεωρήσαμε, αφού επιπροσθέτως ισχύει  $\hat{R}_\theta(\mathbf{n})i\sigma_y\hat{R}_\theta^T(\mathbf{n}) = i\sigma_y$ , για κάθε γωνία  $\theta$  και άξονα  $\mathbf{n}$ . Η τελευταία σχέση εκφράζει και το αναλλοίωτο της ελεύθερης χαμιλτονιανής ενός ομογενούς υπεραγωγού υπό την επίδραση της ομάδας των στροφών στον χώρο των σπιν, με εξαίρεση την αλλαγή του προσήμου της φάσης του δυναμικού ζεύγους.

Το μόνο κομμάτι της χαμιλτονιανής που δεν έχουμε εξετάσει, όσον αφορά την επίδραση του μικτού μετασχηματισμού, είναι αυτό που περιλαμβάνει τις μαγνητίσεις του συστήματος. Έτσι, με βάση τον ορισμό της  $\hat{H}_M$  στην προηγούμενη ενότητα, έχουμε

$$\hat{W}\hat{T}\hat{H}_M(\hat{W}\hat{T})^\dagger = -\sum_i \chi_i(x)\hat{W}\hat{T}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{m}_i)\hat{T}^\dagger\hat{W}^\dagger M_i,$$

ή, επειδή  $\hat{T}\sigma_i\hat{T}^\dagger = -\sigma_i$ ,

$$\hat{W}\hat{T}\hat{H}_M(\hat{W}\hat{T})^\dagger = \sum_i \chi_i(x)\hat{W}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{m}_i)\hat{W}^\dagger M_i.$$

Τώρα, επειδή  $\hat{W} = e^{-i\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}\pi/2}$  ή  $\hat{W} = -i\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ , όπου  $\mathbf{n}$  κάθετο στο επίπεδο των μαγνητίσεων, έχουμε

$$\hat{W}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{m}_i)\hat{W}^\dagger = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{m}_i)(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}),$$

ή, χρησιμοποιώντας τη γνωστή σχέση  $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{m}) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{m} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{m})$  και το γεγονός ότι υποθέσαμε ότι όλες οι μαγνητίσεις είναι σε ένα επίπεδο κάθετο στο  $\mathbf{n}$ , άρα  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}_i = 0$  για κάθε  $i$ , έχουμε

$$\hat{W}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{m}_i)\hat{W}^\dagger = -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{m}_i.$$

Συνεπώς, καταλήγουμε στη σχέση

$$\hat{W}\hat{T}\hat{H}_M(\hat{W}\hat{T})^\dagger = \hat{H}_M. \quad (4.46)$$

Ανάλογη σχέση ισχύει και για τον τελεστή  $\hat{H}_N$ . Έτσι συμπεραίνουμε ότι η δράση του μικτού μετασχηματισμού στη χαμιλτονιανή BdG είναι η εξής

$$\mathcal{U}\mathcal{H}(\chi)\mathcal{U}^\dagger = \mathcal{H}(-\chi). \quad (4.47)$$

Είναι προφανές ότι  $\mathcal{U}^2 = 1$ . Επομένως μαζί με τον ταυτοτικό τελεστή, ο μικτός μετασχηματισμός  $\mathcal{U}$  αποτελεί μία ομάδα που ανήκει στην κατηγορία των λεγόμενων μαγνητικών ομάδων συμμετρίας (magnetic groups) [120]. Η ομάδα αυτή αφήνει αναλλοίωτη τη χαμιλτονιανή, μετασχηματίζοντας τη φάση του δυναμικού ζεύγους στο αντίθετό της. Το γεγονός ότι οι μαγνητίσεις του συστήματος είναι συνεπίπεδες είναι βασικό για την ύπαρξη αυτής της συμμετρίας, γιατί μόνον τότε μπορεί μια στροφή να επαναφέρει όλες τις μαγνητίσεις του συστήματος στην αρχική τους θέση, μετά την αντιστροφή στην οποία τις υποβάλλει η διεργασία της αντιστροφής χρόνου. Κι αυτό γιατί μόνο στις δύο διαστάσεις η αντιστροφή και μία στροφή 180 μοιρών κάθετα στο επίπεδο συμπίπτουν. Στις τρεις διαστάσεις αυτό δεν ισχύει, αλλά και η διεργασία της αντιστροφής χώρου δεν είναι ικανή να επιτελέσει αυτό το έργο, καθώς αφήνει αναλλοίωτο το σπιν, αφού το τελευταίο είναι ένα αξονικό διάνυσμα.

Με ανάλογο τρόπο, όπως και σε προηγούμενες ενότητες, υπολογίζουμε την επίδραση του μικτού μετασχηματισμού στους T-πίνακες. Έτσι έχουμε

$$\mathcal{U}\mathcal{T}_{\ell\ell}(z, \chi)\mathcal{U}^\dagger = \mathcal{T}_{\ell\ell}(z^*, -\chi). \quad (4.48)$$

Έτσι ο T-πίνακας από το αριστερό στο αριστερό κανάλι έχει την ίδια συμμετρία με τη χαμιλτονιανή BdG, μόνο που το μιγαδικό του όρισμα  $z$  πηγαίνει στο μιγαδικό συζυγή

του, καθώς ο μετασχηματισμός που υφίσταται είναι αντιγραμμικός. Ομοίως, για τον T-πίνακα από το κανάλι  $\nu$  στο κανάλι  $\nu'$  γενικά, έχουμε

$$\mathcal{U}\mathcal{T}_{\nu'\nu}(z, \chi)\mathcal{U}^\dagger = \mathcal{T}_{\nu'\nu}(z^*, -\chi). \quad (4.49)$$

Στην ενότητα αυτή, θα δείξουμε μία συνθήκη για τους συντελεστές ανάκλασης Andreev με πρόσπτωση από τα αριστερά, η οποία οδηγεί στο συμπέρασμα ότι ο μικτός μετασχηματισμός που εξετάζουμε απαγορεύει την ύπαρξη αυθόρμητου ρεύματος στις επαφές Josephson, παρόλο που η συμμετρία αντιστροφής χρόνου έχει σπάσει. Για το λόγο αυτό, θεωρούμε την παρακάτω ποσότητα

$$P = \sum_s \langle k_h \bar{s} | \mathcal{T}_{\ell\ell}(z, \chi) | k_e s \rangle = \sum_s \langle k_h \bar{s} | \mathcal{U}^\dagger \mathcal{U} \mathcal{T}_{\ell\ell}(z, \chi) \mathcal{U}^\dagger \mathcal{U} | k_e s \rangle.$$

Οι δείκτες  $\ell$  στις κυματοσυναρτήσεις, που δηλώνουν ότι πρόκειται για ιδιοκαταστάσεις του αριστερού υπεραγωγού, έχουν παραληφθεί για λόγους απλούστευσης των εκφράσεων.

Αντικαθιστώντας τον μετασχηματισμένο T-πίνακα στο παραπάνω στοιχείο πίνακος και θέτοντας για το μικτό μετασχηματισμό  $\mathcal{U} = \mathcal{W}\mathcal{T}$ , δρούμε την αντιστροφή χρόνου στις κυματοσυναρτήσεις του στοιχείου πίνακος και συνολικά έχουμε

$$P = \sum_s \langle \mathcal{T}(k_h \bar{s}) | \mathcal{W}^\dagger \mathcal{T}_{\ell\ell}(z^*, -\chi) \mathcal{W} | \mathcal{T}(k_e s) \rangle^*,$$

Επίσης σημειώστε ξανά ότι καταλήγουμε με το μιγαδικό συζυγή του στοιχείου πίνακος, αφού δράσαμε με τον αντιγραμμικό τελεστή της αντιστροφής χρόνου πάνω στο “bra”. Αξιοποιώντας τη γνωστή δράση του τελεστή της αντιστροφής χρόνου πάνω στις κυματοσυναρτήσεις, που δίνεται από τη σχέση (4.39), εύκολα καταλήγουμε στη σχέση

$$P = \sum_s \langle -k_h s | \mathcal{W}^\dagger \mathcal{T}_{\ell\ell}(z^*, -\chi) \mathcal{W} | -k_e \bar{s} \rangle^*$$

και εξισώνοντας τα παραπάνω στοιχεία πίνακος με τα μιγαδικά συζυγή και ανάστροφα στοιχεία πίνακος του συζυγούς του τελεστή, έχουμε

$$P = \sum_s \langle -k_e \bar{s} | \mathcal{W}^\dagger \mathcal{T}_{\ell\ell}(z, -\chi) \mathcal{W} | -k_h s \rangle,$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ξανά τη σχέση  $\mathcal{T}_{\ell\ell}(z^*, \chi)^\dagger = \mathcal{T}_{\ell\ell}(z, \chi)$ . Έπειτα, γράφοντας τα στοιχεία πίνακος σε αναπτυγμένη μορφή, έχουμε

$$P = \sum_{\sigma, \sigma'} \int dx dx' e^{ik_e x} N_{\sigma\sigma'} \mathcal{T}_{\ell, \sigma\sigma'}(z, -\chi) e^{-ik_h x'},$$

όπου  $\mathcal{T}_{\ell, \sigma\sigma'}(z, -\chi)$  είναι τα στοιχεία του  $4 \times 4$  τελεστή πίνακα που αντιστοιχούν στον T-πίνακα και

$$N_{\sigma\sigma'} = \sum_s (\mathcal{W}\phi_{e\bar{s}})_{\sigma}^{\dagger} (\mathcal{W}\phi_{hs})_{\sigma'}.$$

Όπως έχουμε πει, ο  $\mathcal{W}$  έχει τη μορφή

$$\mathcal{W} = \begin{pmatrix} \hat{W} & 0 \\ 0 & \hat{W}^* \end{pmatrix}.$$

όπου ο  $\hat{W}$ , ως μία στροφή στον χώρο των σπιν και συνεπώς μέλος της διδιάστατης αναπαράστασης του  $SU(2)$ , έχει τη μορφή

$$\hat{W} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix},$$

όπου  $a, b$  μιγαδικοί αριθμοί με  $|a|^2 + |b|^2 = 1$ . Με αυτά τα δεδομένα και υπολογίζοντας το  $N_{\sigma\sigma'}$  ρητά, βρίσκουμε

$$N_{\sigma\sigma'} = \sum_s (\phi_{e\bar{s}})_{\sigma}^{\dagger} (\phi_{hs})_{\sigma'},$$

δηλαδή οι πίνακες  $\mathcal{W}$ , εξαιτίας του  $SU(2)$  χαρακτήρα τους, απαλοίφονται. Έτσι συμπεραίνουμε ότι η έκφραση  $P$  ισούται με

$$P = \sum_s \langle -k_e \bar{s} | \mathcal{T}_{\ell}(z, -\chi) | -k_h s \rangle.$$

Παίρνοντας τα εντός κελύφους στοιχεία του T-πίνακα και εκτελώντας την αναλυτική επέκταση στο επίπεδο μιγαδικής ενέργειας, καταλήγουμε στην παρακάτω σχέση συμμετρίας

$$\frac{\alpha_{e\uparrow, h\downarrow}^{\ell}(z, \chi)}{k_{e\ell}} + \frac{\alpha_{e\downarrow, h\uparrow}^{\ell}(z, \chi)}{k_{e\ell}} = \frac{\alpha_{h\uparrow, e\downarrow}^{\ell}(z, -\chi)}{k_{h\ell}} + \frac{\alpha_{h\downarrow, e\uparrow}^{\ell}(z, -\chi)}{k_{h\ell}}. \quad (4.50)$$

Η σχέση (4.50), αν εξεταστεί για  $\chi = 0$ , μας δίνει την απαγόρευση αυθόρμητου ρεύματος σε μια σιδηρομαγνητική επαφή Josephton με συνεπίπεδες μαγνητίσεις, όπως θα τονίσουμε ξανά σε επόμενο κεφάλαιο. Επίσης αξίζει να σημειώσουμε ότι η απαλοιφή των πινάκων  $\mathcal{W}$  από την παράσταση  $P$  ισχύει ακόμα και όταν δεν τη συνδυάσουμε με το μετασχηματισμό της αντιστροφής χρόνου, με αποτέλεσμα το συμπέρασμα ότι στροφή όλων μαζί των μαγνητίσεων του συστήματος με την ίδια στροφή δεν επηρεάζει τη σχέση υπερρεύματος φάσης. Αυτό ισχύει και για μη συνεπίπεδες μαγνητίσεις και ισοδυναμεί με την αυθαιρεσία που υπάρχει στην επιλογή του άξονα κβάντωσης του σπιν.

Είναι ενδιαφέρον να εξετάσουμε τις ειδικές μορφές της παραπάνω συμμετρίας, όταν το επίπεδο των μαγνητίσεων είναι παράλληλο ή κάθετο στον άξονα κβάντωσης του σπιν. Σημειώνουμε ότι έχουμε επιλέξει τον άξονα κβάντωσης στη διεύθυνση του άξονα  $z$  και η εξάρτηση των συντελεστών σκέδασης από το σπιν αναφέρεται προφανώς σε αυτό τον άξονα. Επίσης αναφέρουμε ότι η επιλογή του άξονα κβάντωσης να διέρχεται ή να είναι κάθετος στο επίπεδο των μαγνητίσεων είναι καθαρά θέμα σύμβασης. Το ίδιο ισχύει και για μη συνεπίπεδες γεωμετρίες μαγνητίσεων και συνεπώς μπορούμε χωρίς απώλεια γενικότητας να επιλέγουμε τον άξονα κβάντωσης να ταυτίζεται με ένα από τα διανύσματα της μαγνήτισης του συστήματος.

Όταν ο άξονας κβάντωσης είναι κάθετος ή παράλληλος στο κάθετο διάνυσμα του επιπέδου των μαγνητίσεων, τότε η επίδραση της στροφής  $\mathcal{W}$  στις κυματοσυναρτήσεις του στοιχείου του T-πίνακα είναι να διατηρήσει ή να αντιστρέψει απλά το σπιν της κυματοσυναρτήσεως, με πολλαπλασιασμό ενδεχομένως αυτής με κάποιον παράγοντα φάσης. Ας θεωρήσουμε λοιπόν ότι το επίπεδο των μαγνητίσεων διέρχεται από τον άξονα κβάντωσης  $z$  και ότι το κάθετο διάνυσμά του είναι στη διεύθυνση  $y$ . Άρα οι μαγνητίσεις βρίσκονται στο επίπεδο  $zx$ . Τότε ο τελεστής  $\hat{W}$  είναι

$$\hat{W} = e^{-i\frac{\pi}{2}\sigma_y} = -i\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.51)$$

και η επίδρασή του στις κυματοσυναρτήσεις δίνεται από τη σχέση

$$\mathcal{W}|k_{p\nu}s\rangle = ps|k_{p\nu}\bar{s}\rangle. \quad (4.52)$$

Η στροφή  $\mathcal{W}$  είναι κάθετη στον άξονα κβάντωσης με αποτέλεσμα να αλλάζει τη διεύθυνση του σπιν, όταν δρά πάνω στην κυματοσυναρτήση. Με αυτά τα δεδομένα, οι συνθήκες συμμετρίας που προκύπτουν για τους συντελεστές ανάκλασης είναι

$$\frac{1}{k_{el}}\alpha_{e\uparrow,h\downarrow}^\ell(z;\chi) = \frac{1}{k_{h\ell}}\alpha_{h\downarrow,e\uparrow}^\ell(z;-\chi) \quad (4.53)$$

και

$$\frac{1}{k_{el}} \alpha_{e\downarrow, h\uparrow}^{\ell}(z; \chi) = \frac{1}{k_{hl}} \alpha_{h\uparrow, e\downarrow}^{\ell}(z; -\chi). \quad (4.54)$$

Και σε αυτή την ειδική περίπτωση, η γενική σχέση (4.50) παραμένει σε ισχύ. Στο ίδιο αποτέλεσμα για τους κανονικούς συντελεστές ανακλάσης Andreev καταλήγουμε και αν θεωρήσουμε μαγνητίσεις στο  $zy$  επίπεδο, οπότε ο άξονας της στροφής  $\mathcal{W}$  είναι ο άξονας  $x$ . Αυτή τη φορά η δράση του  $\mathcal{W}$  στις κυματοσυναρτήσεις δίνεται από τη σχέση

$$\mathcal{W}|k_{p\nu}s\rangle = -i|k_{p\nu}\bar{s}\rangle, \quad (4.55)$$

όπου φυσικά

$$\hat{W} = e^{-i\frac{\pi}{2}\sigma_x} = -i\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.56)$$

Για τους κανονικούς συντελεστές ανάκλασης Andreev το αποτέλεσμα είναι το ίδιο, όπως και για μαγνητίσεις στο  $zx$  επίπεδο.

Στην περίπτωση που οι μαγνητίσεις βρίσκονται στο  $xy$  επίπεδο, η στροφή  $\mathcal{W}$  είναι γύρω από τον  $z$  άξονα και ο πίνακας  $\hat{W}$  ορίζεται ως

$$\hat{W} = e^{-i\frac{\pi}{2}\sigma_z} = -i\sigma_z = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}. \quad (4.57)$$

Η δράση του τελεστή  $\mathcal{W}$  πάνω στις κυματοσυναρτήσεις είναι

$$\mathcal{W}|k_{p\nu}s\rangle = -i \cdot ps|k_{p\nu}s\rangle. \quad (4.58)$$

Παρατηρούμε ότι στροφή δεν επηρεάζει τη διεύθυνση του σπιν της κυματοσυναρτησης, μιας και ο άξονάς της είναι ο άξονας κβάντωσης  $z$ . Έτσι, οι σχέσεις συμμετρίας που ισχύουν σε αυτή την περίπτωση προκύπτει, με το γνωστό τρόπο, ότι είναι

$$\frac{1}{k_{el}} \alpha_{e\uparrow, h\downarrow}^{\ell}(z; \chi) = \frac{1}{k_{hl}} \alpha_{h\uparrow, e\downarrow}^{\ell}(z; -\chi) \quad (4.59)$$

και

$$\frac{1}{k_{el}} \alpha_{e\downarrow, h\uparrow}^{\ell}(z; \chi) = \frac{1}{k_{hl}} \alpha_{h\downarrow, e\uparrow}^{\ell}(z; -\chi). \quad (4.60)$$

Και σε αυτή την περίπτωση ισχύει η γενική σχέση (4.50). Αξίζει να σημειώσουμε, ολοκληρώνοντας αυτή την ενότητα, ότι ταυτόσημες σχέσεις ισχύουν και για τους συντελεστές ανάκλασης Andreev που αντιστοιχούν σε πρόσπτωση από τη δεξιά ασυμπτωτική περιοχή.



## 4.5 Περαιτέρω συνέπειες του μικτού μετασχηματισμού

Στην ενότητα αυτή αναφέρουμε περαιτέρω συνέπειες του μικτού μετασχηματισμού, που αναλύθηκε στην προηγούμενη ενότητα, οι οποίες όμως δεν έχουν το ίδιο σημαντική φυσική ερμηνεία. Θεωρούμε μία επαφή Josephson με μαγνητίσεις οι οποίες βρίσκονται όλες σε ένα επίπεδο με τυχαία διεύθυνση σε σχέση με τον άξονα κβάντωσης και ότι ο τελεστής  $\mathcal{W}$  περιγράφει μια στροφή κατά 180 μοίρες, με άξονα κάθετο στο επίπεδο των μαγνητίσεων.

Θα ξεκινήσουμε με τους συντελεστές ανάκλασης για αριστερή πρόσπτωση και θα επικεντρωθούμε σε συμμετρίες τους που ισχύουν ανεξάρτητα από τον προσανατολισμό του άξονα κβάντωσης του σπιν σε σχέση με το επίπεδο των μαγνητίσεων. Ορίζουμε ξανά μία ποσότητα την οποία θα επεξεργαστούμε και την ονομάζουμε πάλι με το βοηθητικό σύμβολο  $P$ . Έτσι έχουμε

$$P = \sum_s \langle -pk_p s | \mathcal{T}_{\ell\ell}(z; \chi) | pk_p s \rangle = \sum_s \langle -pk_p s | \mathcal{U}^\dagger \mathcal{U} \mathcal{T}_{\ell\ell}(z; \chi) \mathcal{U}^\dagger \mathcal{U} | pk_p s \rangle.$$

Οι δείκτες  $\ell$  στις κυματοσυναρτήσεις, που δηλώνουν ότι πρόκειται για ιδιοκαταστάσεις του αριστερού υπεραγωγού, έχουν και πάλι παραληφθεί, για λόγους απλούστευσης των εκφράσεων. Επίσης η εξάρτηση των κυματοσυναρτήσεων από τη φάση του αριστερού (και αργότερα του δεξιού) υπεραγωγού υπονοείται, όπως επίσης υπονοείται ότι αυτές μετασχηματίζονται από την αντιστροφή χρόνου όπως και η διαφορά φάσης μεταξύ των υπεραγωγών στο όρισμα του T-πίνακα.

Όπως και στην προηγούμενη ενότητα, εφαρμόζουμε την αντιστροφή χρόνου στις κυματοσυναρτήσεις και μετασχηματίζοντας τον T-πίνακα, παίρνουμε

$$P = \sum_s \langle pk_p \bar{s} | \mathcal{W}^\dagger \mathcal{T}_{\ell\ell}(z^*; -\chi) \mathcal{W} | -pk_p \bar{s} \rangle^*,$$

όπου λάβαμε υπόψη το μετασχηματισμό των ιδιοκαταστάσεων υπό την αντιστροφή χρόνου, που δίνεται από τη σχέση (4.39). Στη συνέχεια, εξισώνουμε την παραπάνω σχέση με τον ανάστροφο μιγαδικό συζυγή του συζυγούς του τελεστή μέσα στο “bra-ket” και έχουμε

$$P = \sum_s \langle -pk_p \bar{s} | \mathcal{W}^\dagger \mathcal{T}_{\ell\ell}(z; -\chi) \mathcal{W} | pk_p \bar{s} \rangle.$$

Στην αναπαράσταση της θέσης οι τελεστές, που εμφανίζονται στην παραπάνω σχέση, έχουν τη μορφή πινάκων με στοιχεία τελεστές που δρουν στη μεταβλητή  $x$  θέσης της

επαφής. Γράφοντας τα παραπάνω στοιχεία πίνακος στην αναπαράσταση αυτή, παίρνουμε τη σχέση

$$P = \sum_{\sigma, \sigma'} \int dx dx' e^{ipk_p x} N_{\sigma\sigma'} \mathcal{T}_{\ell, \sigma\sigma'}(z; -\chi) e^{ipk_p x'},$$

όπου  $\mathcal{T}_{\ell, \sigma\sigma'}(z, -\chi)$  είναι τα στοιχεία του  $4 \times 4$  τελεστή πίνακα που αντιστοιχούν στον T-πίνακα και

$$N_{\sigma\sigma'} = \sum_s (\mathcal{W}\phi_{ps})_{\sigma}^{\dagger} (\mathcal{W}\phi_{ps})_{\sigma'}.$$

Η παραπάνω έκφραση, μετά από πράξεις, μας δίνει

$$N_{\sigma\sigma'} = \sum_s (\phi_{ps})_{\sigma}^{\dagger} (\phi_{ps})_{\sigma'}$$

και για τις δύο τιμές τις παραμέτρου  $p (= e, h)$ . Δηλαδή οι πίνακες  $\mathcal{W}$  απαλοίφονται από την παραπάνω ποσότητα, λόγω του SU(2) χαρακτήρα τους. Έτσι καταλήγουμε στη σχέση

$$P = \sum_s \langle -pk_p s | \mathcal{T}_{\ell}(z; \chi) | pk_p s \rangle = \sum_s \langle -pk_p s | \mathcal{T}_{\ell}(z; -\chi) | pk_p s \rangle,$$

η οποία, μετά από αναλυτική επέκταση σε μιγαδικές ενέργειες  $z$ , μας δίνει

$$\sum_s \alpha_{ps, ps}^{\ell}(z; \chi) = \sum_s \alpha_{ps, ps}^{\ell}(z; -\chi). \quad (4.61)$$

Η παραπάνω σχέση μας λέει ότι, στην περίπτωση επίπεδης γεωμετρίας μαγνητίσεων, το άθροισμα ως προς τη μεταβλητή του σπιν των κανονικών συντελεστών ανάκλασης, είτε αναφέρεται σε ηλεκτρονιακές προσπίπτουσες διεγέρσεις είτε σε διεγέρσεις χαρακτήρα οπής ( $p = e, h$ ), είναι συμμετρική συνάρτηση της διαφοράς φάσης μεταξύ των ασυμπτωτικών υπεραγωγίων περιοχών.

Με ακριβώς την ίδια διαδικασία καταλήγουμε στην ίδια σχέση για τους συντελεστές ανάκλασης για πρόσπτωση από τα δεξιά. Αρκεί να αλλάξουμε τον T-πίνακα από  $\mathcal{T}_{\ell}$  σε  $\mathcal{T}_{rr}$  και τις κυματοσυναρτήσεις στα στοιχεία πίνακος, από ιδιοκαταστάσεις του αριστερού υπεραγωγού, σε ιδιοκαταστάσεις του δεξιού, φροντίζοντας να αλλάξουμε και τα πρόσημα των κυματοδιανυσμάτων, ώστε οι ιδιοκαταστάσεις να περιγράφουν πρόσπτωση από τα δεξιά και ανάκλαση προς τα δεξιά. Έτσι έχουμε

$$\sum_s \alpha_{ps,ps}^r(z; \chi) = \sum_s \alpha_{ps,ps}^r(z; -\chi). \quad (4.62)$$

Σημειώνουμε ότι ανάλογες σχέσεις που να περιλαμβάνουν συντελεστές σκέδασης με αλλαγή του σπιν δεν ισχύουν.

Στη συνέχεια παράγουμε ανάλογες σχέσεις για την περίπτωση επίπεδης γεωμετρίας μαγνητίσεων που αφορούν τους συντελεστές διάδοσης. Για το σκοπό αυτό, ορίζουμε την ποσότητα

$$Q = \sum_s \langle pk_{pr}s | \mathcal{T}_{r\ell}(z; \chi) | pk_{p\ell}s \rangle = \sum_s \langle pk_{pr}s | \mathcal{U}^\dagger \mathcal{U} \mathcal{T}_{r\ell}(z; \chi) \mathcal{U}^\dagger \mathcal{U} | pk_{p\ell}s \rangle.$$

Συνεχίζουμε δρώντας την αντιστροφή χρόνου στα “bra” και στα “ket” και αντικαθιστώντας τον μετασχηματισμένο T-πίνακα. Έχουμε

$$Q = \sum_s \langle -pk_{pr}\bar{s} | \mathcal{W}^\dagger \mathcal{T}_{r\ell}(z^*; -\chi) \mathcal{W} | -pk_{p\ell}\bar{s} \rangle^*,$$

όπου λάβαμε υπόψη φυσικά τις σχέσεις (4.39). Η παραπάνω ποσότητα, με δεδομένο ότι  $\mathcal{T}_{r\ell}(z)^\dagger = \mathcal{T}_{\ell r}(z^*)$ , είναι ίση φυσικά με

$$Q = \sum_s \langle -pk_{p\ell}\bar{s} | \mathcal{W}^\dagger \mathcal{T}_{\ell r}(z; -\chi) \mathcal{W} | -pk_{pr}\bar{s} \rangle.$$

Έπειτα γράφουμε την παραπάνω παράσταση στην αναπαράσταση της θέσης και έχουμε

$$Q = \sum_{\sigma, \sigma'} \int dx dx' e^{ipk_{p\ell}x} N_{\sigma\sigma'} \mathcal{T}_{\ell r, \sigma\sigma'}(z; -\chi) e^{-ipk_{pr}x'},$$

όπου  $\mathcal{T}_{\ell r, \sigma\sigma'}(z, -\chi)$  είναι τα στοιχεία του  $4 \times 4$  πίνακα-τελεστή  $\mathcal{T}_{\ell r}$  και αυτή τη φορά

$$N_{\sigma\sigma'} = \sum_s (\mathcal{W}\phi_{ps\ell})_\sigma^\dagger (\mathcal{W}\phi_{psr})_{\sigma'}.$$

Και σε αυτή την περίπτωση, εφόσον γίνουν οι πράξεις, αποδεικνύεται ότι οι πίνακες  $\mathcal{W}$  απαλοίφονται, λόγω της SU(2) ιδιότητάς τους και συνεπώς καταλήγουμε (μετά από αναλυτική επέκταση ως προς τη μεταβλητή  $z$ ) στη σχέση

$$\sum_s \frac{m_\ell}{k_{p\ell}\Omega_\ell} \gamma_{ps,ps}^\ell(z; \chi) = \sum_s \frac{m_r}{k_{pr}\Omega_r} \gamma_{ps,ps}^r(z; -\chi), \quad (4.63)$$

όπου  $m_\ell$  και  $m_r$  είναι η ενεργός μάζα στην αριστερή και τη δεξιά ασυμπτωτική περιοχή αντίστοιχα.

Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε άλλη μια σχέση για τους συντελεστές διάδοσης με αλλαγή κλάδου (branch crossing), ανάλογη με τη σχέση που αποδείξαμε στην προηγούμενη ενότητα για τους συντελεστές ανακλασης. Και η σχέση αυτή οφείλεται στο μικτό μετασχηματισμό και είναι ανεξάρτητη από το σχετικό προσανατολισμό του άξονα κβάντωσης και του επιπέδου των μαγνητίσεων. Αυτή είναι

$$\sum_s \frac{m_\ell}{k_{p\ell}\Omega_\ell} \gamma_{ps,\bar{p}\bar{s}}^\ell(z; \chi) = \sum_s \frac{m_r}{k_{\bar{p}r}\Omega_r} \gamma_{\bar{p}\bar{s},ps}^r(z; -\chi). \quad (4.64)$$

Με αυτή τη σχέση ολοκληρώνουμε τις περαιτέρω συνέπειες του μικτού μετασχηματισμού.

## 4.6 Ο μετασχηματισμός της συζυγίας Bogoliubov

Στην ενότητα αυτή θα εξετάσουμε την επίδραση του μετασχηματισμού της συζυγίας Bogoliubov στους συντελεστές σκέδασης στην επαφή Josephson. Ο τελεστής που περιγράφει αυτό το μετασχηματισμό στο χώρο καταστάσεων των εξισώσεων BdG είναι

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} 0 & \hat{1}C \\ \hat{1}C & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.65)$$

Στη συνέχεια εξετάζουμε την επίδραση της συζυγίας Bogoliubov στη χαμιλτονιανή BdG.

$$\mathcal{U}\mathcal{H}\mathcal{U}^\dagger = \begin{pmatrix} -C\hat{H}_0^*C^\dagger & -C\hat{\Delta}^*C^\dagger \\ C\hat{\Delta}C^\dagger & C\hat{H}_0C^\dagger \end{pmatrix},$$

ή

$$\mathcal{U}\mathcal{H}\mathcal{U}^\dagger = -\mathcal{H}. \quad (4.66)$$

Επομένως η χαμιλτονιανή BdG μετασχηματίζεται στο αντίθετό της και οι παράμετροι του συστήματος μένουν αναλλοίωτες, όπως η διαφορά φάσης  $\chi$  μεταξύ των υπεραγωγών και η γωνίες που περιγράφουν τις μαγνητίσεις του συστήματος. Το ίδιο ισχύει και για τις ασυμπτωτικές χαμιλτονιανές στα αριστερά και δεξιά της επαφής. Επομένως συμπεραίνουμε ότι

$$\mathcal{U}\mathcal{V}_\nu\mathcal{U}^\dagger = -\mathcal{V}_\nu, \quad (4.67)$$

όπου  $\nu$  είναι ο δείκτης αντιστοιχεί στα  $\ell, r$  και δηλώνει την ασυμπτωτική περιοχή που το δυναμικό  $\mathcal{V}_\nu$  τείνει στο μηδέν.

Επίσης για τη συνάρτηση Green της επαφής έχουμε διαδοχικά

$$(z - \mathcal{H})\mathcal{G}(z) = 1,$$

ή

$$\mathcal{U}(z - \mathcal{H})\mathcal{U}^\dagger\mathcal{U}\mathcal{G}(z)\mathcal{U}^\dagger = 1,$$

ή

$$(z^* + \mathcal{H})\mathcal{U}\mathcal{G}(z)\mathcal{U}^\dagger = 1$$

και συνεπώς

$$\mathcal{U}\mathcal{G}(z)\mathcal{U}^\dagger = -\mathcal{G}(-z^*). \quad (4.68)$$

Τώρα έχουμε όλα τα δεδομένα για να υπολογίσουμε το μετασχηματισμό, υπό τη συζυγία Bogoliubov, του T-πίνακα από το κανάλι  $\nu$  στο κανάλι  $\nu'$ . Έτσι έχουμε

$$\mathcal{T}_{\nu'\nu}(z) = \mathcal{V}_{\nu',\nu} + \mathcal{V}_{\nu'}\mathcal{G}(z)\mathcal{V}_\nu, \quad (4.69)$$

όπου  $\mathcal{V}_{\nu',\nu}$  σημαίνει ένα από τα  $\mathcal{V}_{\nu'}, \mathcal{V}_\nu$ , και συνεπώς

$$\mathcal{U}\mathcal{T}_{\nu'\nu}(z; \chi)\mathcal{U}^\dagger = -\mathcal{T}_{\nu'\nu}(-z^*; \chi). \quad (4.70)$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το T-πίνακας μετασχηματίζεται στο αντίθετό του, με το όρισμα  $z$  να πηγαίνει στο  $-z^*$  και την εξάρτηση από το  $\chi$ , τη διαφορά φάσης μεταξύ

των υπεραγωγών, να παραμένει η ίδια. Το ίδιο ισχύει και για την εξάρτηση του T-πίνακα από τις γωνίες των μαγνητίσεων της επαφής, παρόλο που δεν το αναφέρουμε ρητώς στη σχέση (4.70).

Για να προσδιορίσουμε την επίδραση της συζυγίας Bogoliubov στους συντελεστές σκέδασης, πρέπει να γνωρίζουμε τη δράση της στις ιδιοσυναρτήσεις των ασυμπτωτικών χαμιλτονιανών της επαφής. Για το σκοπό αυτό λαμβάνουμε υπόψη μας τις σχέσεις

$$u_\nu(E^+) = -\text{sgn}(E)v_\nu(-E^-) \quad (4.71)$$

και

$$v_\nu(E^+) = \text{sgn}(E)u_\nu(-E^-), \quad (4.72)$$

όπου ο υπερδείκτης  $+$  στην ενέργεια  $E$  δηλώνει ότι βρίσκεται οριακά στο άνω ημιεπίπεδο  $z$ , ενώ ο υπερδείκτης  $-$  σημαίνει ότι η τιμή  $-E$  βρίσκεται οριακά στο κάτω ημιεπίπεδο  $z$ . Έτσι καταλήγουμε στη σχέση

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(\phi_{ps\nu}(E^+, \chi_\nu) e^{\pm ik_{p\nu}(E^+)(x-d_\nu)}) &= \\ &= s \cdot \text{sgn}(E) \phi_{p\bar{s}\nu}(-E^-, \chi_\nu) e^{\mp ik_{p\nu}(-E^-)(x-d_\nu)}, \end{aligned} \quad (4.73)$$

όπου  $d_\nu = 0, d$  αντίστοιχα, αν  $\nu = \ell$  ή  $\nu = r$ . Παρατηρούμε ότι η δράση της συζυγίας Bogoliubov πάνω στις ιδιοκαταστάσεις των ασυμπτωτικών περιοχών είναι να διατηρήσει το σωματιδιακό χαρακτήρα της ιδιοκατάστασης και τη φάση των υπεραγωγών, αλλά να αλλάξει την μεταβλητή του σπιν καθώς και την ενέργεια στο αντίθετό τους. Ακόμη, τα κυματανύσματα στα εκθετικά αλλάζουν πρόσημο. Επίσης εμφανίζονται οι πολλαπλασιαστικοί παράγοντες  $s$  και  $\text{sgn}(E)$ . Με τη βοήθεια του συμβολισμού Dirac, η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί και ως εξής:

$$\mathcal{U}|\pm pk_{p\nu}s; E^+, \chi_\nu\rangle = s \cdot \text{sgn}(E)|\mp pk_{p\nu}\bar{s}; -E^-, \chi_\nu\rangle. \quad (4.74)$$

Τώρα είμαστε σε θέση να προσδιορίσουμε την επίδραση της συζυγίας Bogoliubov στους συντελεστές σκέδασης. Ξεκινούμε με τους συντελεστές ανάκλασης για πρόσπτωση από αριστερά. Υπενθυμίζουμε αρχικά ότι

$$\alpha_{ps,p's'}^\ell(E) = -\frac{im_\ell E}{\hbar^2 k_{p'\ell} \Omega_\ell(E)} \langle -p'k_{p'\ell}s' | \mathcal{T}_{\ell\ell}^{(+)} | pk_{p\ell}s \rangle.$$

Στη συνέχεια θεωρούμε τον T-πίνακα για μιγαδική ενέργεια  $z$  και μετασχηματίζουμε τα εκτός ενεργειακού κελύφους (off-shell) στοιχεία του T-πίνακα με βάση τη συζυγία Bogoliubov. Σημειώνουμε ότι, κατά τη συνήθη πρακτική σε αυτό το κεφάλαιο, πρώτα θεωρούμε το όριο της ενέργειας να πηγαίνει στον πραγματικό άξονα και μετά εφαρμόζουμε το μετασχηματισμό της συζυγίας Bogoliubov. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} \langle -p'k_{p'\ell}s'; E^+, \chi_\ell | \mathcal{T}_{\ell\ell}(z) | pk_{p\ell}s; E^+, \chi_\ell \rangle &= \\ &= -\langle \mathcal{U}(-p'k_{p'\ell}s'; E^+, \chi_\ell) | \mathcal{T}_{\ell\ell}(-z^*; \chi) | \mathcal{U}(pk_{p\ell}s; E^+, \chi_\ell) \rangle^*, \end{aligned}$$

ή, εφαρμόζοντας τις σχέσεις (4.73),(4.74),

$$\begin{aligned} \langle -p'k_{p'\ell}s'; E^+, \chi_\ell | \mathcal{T}_{\ell\ell}(z) | pk_{p\ell}s; E^+, \chi_\ell \rangle &= \\ &= -s's' \langle p'k_{p'\ell}\bar{s}'; -E^-, \chi_\ell | \mathcal{T}_{\ell\ell}(-z^*; \chi) | -pk_{p\ell}\bar{s}; -E^-, \chi_\ell \rangle^*. \end{aligned} \quad (4.75)$$

Έπειτα, εξισώνοντας το δεύτερο μέλος με το μιγαδικό συζυγές και ανάστροφο στοιχείο πίνακος του συζυγούς (adjoint) του τελεστή T, παίρνουμε

$$\begin{aligned} \langle -p'k_{p'\ell}s'; E^+, \chi_\ell | \mathcal{T}_{\ell\ell}(z) | pk_{p\ell}s; E^+, \chi_\ell \rangle &= \\ &= -s's' \langle -pk_{p\ell}\bar{s}; -E^-, \chi_\ell | \mathcal{T}_{\ell\ell}(-z; \chi) | p'k_{p'\ell}\bar{s}'; -E^-, \chi_\ell \rangle. \end{aligned} \quad (4.76)$$

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της παραπάνω σχέσης με την ποσότητα

$$\left( -\frac{im_\ell E}{\hbar^2 k_{p'\ell} \Omega_\ell(E)} \right) \left( -\frac{im_\ell E}{\hbar^2 k_{p\ell} \Omega_\ell(E)} \right)$$

και σχηματίζουμε τους συντελεστές σκέδασης που σχετίζονται με τα αντίστοιχα στοιχεία του T-πίνακα, προσέχοντας ότι στο δεύτερο μέλος ο συντελεστής που σχηματίζεται αντιστοιχεί σε αρνητική ενέργεια. Στη συνέχεια παίρνοντας την αναλυτική επέκταση της σχέσης που προκύπτει, καταλήγουμε στη σχέση

$$\frac{1}{k_{p\ell}(z)} \alpha_{ps,p's'}^\ell(z, \chi) = s's' \frac{1}{k_{p'\ell}(-z)} \alpha_{p's',p\bar{s}}^\ell(-z, \chi). \quad (4.77)$$

Ακολουθεί ένα παράδειγμα:

$$\frac{1}{k_{e\ell}(z)} \alpha_{e\uparrow,h\downarrow}^\ell(z, \chi) = -\frac{1}{k_{h\ell}(-z)} \alpha_{h\uparrow,e\downarrow}^\ell(-z, \chi). \quad (4.78)$$

Ανάλογες σχέσεις μπορούν να εξαχθούν για τους συντελεστές ανάκλασης με πρόπτωση από δεξιά καθώς και για τους συντελεστές διάδοσης. Έτσι έχουμε

$$\frac{1}{k_{pr}(z)} \alpha_{ps,p's'}^r(z, \chi) = s' s \frac{1}{k_{p'r}(-z)} \alpha_{p'\bar{s}',p\bar{s}}^r(-z, \chi) \quad (4.79)$$

και

$$\frac{m_\ell}{k_{p\ell}(z)\Omega_\ell(z)} \gamma_{ps,p's'}^\ell(z, \chi) = s' s \frac{m_r}{k_{p'r}(-z)\Omega_r(-z)} \gamma_{p'\bar{s}',p\bar{s}}^r(-z, \chi). \quad (4.80)$$

Οι σχέσεις συμμετρίας (4.77) και (4.79) μπορούν να αξιοποιηθούν αποδεικνύοντας ότι στον τύπο των Furusaki-Tsukada αρκεί να αθροίσουμε μόνο τις θετικές συχνότητες Matsubara και να πολλαπλασιάσουμε επί δύο (βλ. κεφάλαιο 7).



## Κεφάλαιο 5

# Συνθήκες συμμετρίας των συντελεστών σκέδασης II

Σε αυτό το κεφάλαιο θα περιγράψουμε την εξαγωγή συνθηκών συμμετρίας για τους συντελεστές σκέδασης που προκύπτουν από το χειρισμό των αναλυτικών επεκτάσεων των στοιχείων του T-πίνακα για μιγαδική ενέργεια  $z$ .

### 5.1 Ο μετασχηματισμός της μιγαδικής συζυγίας

Επανερχόμαστε στο μετασχηματισμό μιγαδικής συζυγίας, με σκοπό αυτή τη φορά να μετασχηματίσουμε την αναλυτική επέκταση των στοιχείων του T-πίνακα και να παράγουμε νέες σχέσεις συμμετρίας για τους συντελεστές σκέδασης. Υπενθυμίζουμε ότι ο μετασχηματισμός αυτός έχει την εξής δράση πάνω στους T-πίνακες:

$$\mathcal{U}\mathcal{T}_{\nu\nu'}(z; \chi, \phi)\mathcal{U}^\dagger = \mathcal{T}_{\nu\nu'}(z^*; -\chi, -\phi), \quad (5.1)$$

όπου  $\nu, \nu'$  είναι ένα από τα  $\ell, r$  που δηλώνουν το αριστερό και το δεξί κανάλι αντίστοιχα και φυσικά

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} \hat{1}C & 0 \\ 0 & \hat{1}C^* \end{pmatrix}. \quad (5.2)$$

Στη συνέχεια υπενθυμίζουμε την έκφραση για την αναλυτική επέκταση σε μιγαδικές ενέργειες  $z$  των συντελεστών ανάκλασης με πρόσπτωση από τα αριστερά ή δεξιά:

$$\alpha_{ps,p's'}^\nu(z) = -\frac{im_\nu z}{\hbar^2 k_{p'\nu} \Omega_\nu(z)} \times \int dy dy' e^{i\nu p' k_{p'\nu}(y-d_\nu)} \tilde{\phi}_{p's'\nu}^T \mathcal{T}_{\nu\nu}(y, y'; z) e^{i\nu p k_{p\nu}(y'-d_\nu)} \phi_{ps\nu}, \quad (5.3)$$

όπου στην παραπάνω σχέση έχουμε τοποθετήσει στα εκθετικά το σύμβολο  $\nu$ , όχι μόνο σαν δείκτη του κυματανύσματος, αλλά και σαν ακέραιο αριθμό  $\pm 1$ , με την αντιστοίχιση

$$\nu = \begin{cases} +1, & (\ell) \\ -1, & (r) \end{cases}$$

Επίσης θυμίζουμε ότι το  $d_\nu$  συμβολίζει το  $d_\ell = 0$  ή το  $d_r = d$ .

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό Dirac για να παραστήσουμε την αναλυτική επέκταση του στοιχείου του T-πίνακα και να απλοποιήσουμε το συμβολισμό κατά την εφαρμογή του μετασχηματισμού της μιγαδικής συζυγίας. Η χρήση του συμβολισμού αυτού διευκολύνει τη διεξαγωγή μετασχηματισμών, αλλά στη περίπτωση που αναπαριστά την αναλυτική επέκταση των στοιχείων πίνακος σε μιγαδικές ενέργειες θέλει προσοχή να ορίσουμε το τί ακριβώς εννοούμε. Θα κάνουμε λοιπόν μια παρένθεση για να αποσαφηνίσουμε το γεγονός αυτό. Ορίζουμε το σύμβολο της δέσης  $\#$  σαν μια “πράξη” ανάλογη του συζυγούς ενός μιγαδικού αριθμού. Έτσι θεωρούμε ότι η “πράξη” αυτή, που δρά σε μια παράσταση, μετασχηματίζει την παράμετρο της ενέργειας  $z$  σε έναν πραγματικό αριθμό, όπου οι συναρτήσεις του  $z$  έχουν πραγματική τιμή, στη συνέχεια παίρνει το μιγαδικό συζυγή του αριθμού που προκύπτει και τελικά επαναφέρει την παράμετρο  $z$  στη μιγαδική της τιμή. Με άλλα λόγια, η “πράξη”  $\#$  παίρνει το μιγαδικό συζυγή όλων των μεταβλητών, εκτός από τη μεταβλητή  $z$ . Αυτό είναι εφικτό, ειδικά στην περίπτωση μας, όπου οι συναρτήσεις των διαφορών μεταβλητών και του  $z$  εμφανίζονται ως γινόμενα.

Αν θεωρήσουμε μοναδιαίους μετασχηματισμούς των κυματοσυναρτήσεων που δεν εξαρτώνται από τη μεταβλητή  $z$ , τότε η δράση τους αφήνει αναλλοίωτα τα εσωτερικά γινόμενα, που ορίζονται με το  $\#$ , αντί με τον μιγαδικό συζυγή. Έτσι έχουμε

$$\sum_i (U_{ik'} \phi_{k'}(z))^{\#T} (U_{ik} \psi_k(z)) = \sum_i \phi_i(z)^{\#T} \psi_i(z), \quad (5.4)$$

όπου συμβολίζουμε γενικά μια κυματοσυνάρτηση με  $\phi_i$  ή  $\psi_j$ , όπου  $i$  και  $j$  είναι δείκτες που αναπαριστούν γενικά μια βάση από τις μεταβλητές από τις οποίες εξαρτάται αυτή η κυματοσυνάρτηση. Επίσης, η άθροιση ως προς τα  $k, k'$  υπονοείται.

Μπορούμε επίσης να ορίσουμε στοιχεία πίνακος τελεστών που εξαρτώνται από το  $z$ , όπως είναι ο T-πίνακας. Τότε διαπιστώνουμε ότι ισχύει

$$\sum_{i,j} \phi_i^{\#T} A_{ij} \psi_j = \left( \sum_{i,j} \psi_j^{\#T} A_{ji}^{\#T} \phi_i \right)^{\#}, \quad (5.5)$$

όπου  $A$  τυχαίος τελεστής. Η σχέση (5.5) δεν μας δίνει καινούριες συμμετρίες των συντελεστών σκέδασης. Έτσι απλά θα εφαρμόσουμε τους μετασχηματισμούς, χωρίς να αλλάξουμε θέσεις στα ket και στα bra. Σημειώνουμε ότι ισχύει

$$(e^{i\nu p k_{p\nu} x} \phi_{ps\nu})^\# = e^{-i\nu p k_{p\nu} x} \tilde{\phi}_{ps\nu}, \quad (5.6)$$

όπου η περισπωμένη συμβολίζει την αλλαγή των παραμέτρων της επαφής  $\chi \rightarrow -\chi$  και  $\phi \rightarrow -\phi$ , με  $\chi$  τη διαφορά φάσης μεταξύ των δύο υπεραγωγών και  $\phi$  τις πολικές γωνίες των μαγνητίσεων της επαφής.

Με αυτές τις σημειώσεις κατά νου, γράφουμε

$$\begin{aligned} \int dy dy' e^{i\nu p' k_{p'\nu}(y-d_\nu)} \tilde{\phi}_{p's'\nu}^T \mathcal{T}_{\nu\nu}(y, y'; z) e^{i\nu p k_{p\nu}(y'-d_\nu)} \phi_{ps\nu} = \\ = \langle -\nu p' k_{p'\nu} s'; z, \chi_\nu | \mathcal{T}_{\nu\nu}(z; \chi, \phi) | \nu p k_{p\nu} s; z, \chi_\nu \rangle, \end{aligned} \quad (5.7)$$

όπου, στη συνήθη αναπαράσταση που χρησιμοποιούμε, έχουμε

$$|\nu p k_{p\nu} s; z, \chi_\nu\rangle = e^{i\nu p k_{p\nu}(z)(y'-d_\nu)} \phi_{ps\nu}(z, \chi_\nu). \quad (5.8)$$

Τώρα μένει να υπολογίσουμε τη δράση του μετασχηματισμού της μιγαδικής συζυγίας στις μιγαδικές κυματοσυναρτήσεις. Για το σκοπό αυτό, λαμβάνουμε υπόψη μας τις σχέσεις

$$u_\nu(z)^* = \text{csgn}(z^*) v_\nu(z^*) \quad (5.9)$$

και

$$v_\nu(z)^* = \text{csgn}(z^*) u_\nu(z^*), \quad (5.10)$$

για  $\text{Re}(z) \neq 0$ , ενώ για  $z = i\omega$  φανταστικό

$$u_\nu(i\omega)^* = v_\nu(i\omega^*) \quad (5.11)$$

και

$$v_\nu(i\omega)^* = u_\nu(i\omega^*). \quad (5.12)$$

Επίσης ισχύει πάντα η σχέση

$$k_p(z)^* = k_{\bar{p}}(z^*). \quad (5.13)$$

Αξιοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις διαπιστώνουμε ότι

$$\mathcal{U}|\nu p k_{p\nu} s; z, \chi_\nu\rangle = \text{csgn}(z^*)|\nu \bar{p} k_{\bar{p}\nu} \bar{s}; z^*, -\chi_\nu\rangle, \quad (5.14)$$

για  $\text{Re}(z) \neq 0$ , ενώ για  $z = i\omega$  φανταστικό

$$\mathcal{U}|\nu p k_{p\nu} s; i\omega, \chi_\nu\rangle = |\nu \bar{p} k_{\bar{p}\nu} \bar{s}; i\omega^*, -\chi_\nu\rangle. \quad (5.15)$$

Έτσι για κάθε  $z$ , εκτός από πόλους και εγκοπές κλάδου στον πραγματικό άξονα, έχουμε την παρακάτω ακολουθία σχέσεων κατά το μετασχηματισμό του στοιχείου του T-πίνακα

$$\begin{aligned} \langle -\nu p' k_{p'\nu} s'; z, \chi_\nu | \mathcal{T}_{\nu\nu}(z; \chi, \phi) | \nu p k_{p\nu} s; z, \chi_\nu \rangle &= \\ &= \langle -\nu p' k_{p'\nu} s'; z, \chi_\nu | \mathcal{U}^\dagger \mathcal{U} \mathcal{T}_{\nu\nu}(z; \chi, \phi) \mathcal{U}^\dagger \mathcal{U} | \nu p k_{p\nu} s; z, \chi_\nu \rangle, \end{aligned}$$

ή, περνώντας το συμμετρικό τελεστή  $\mathcal{U}$  να δράσει στο bra και προσέχοντας ότι περιέχει και τη μιγαδική συζυγία  $C$ ,

$$\begin{aligned} \langle -\nu p' k_{p'\nu} s'; z, \chi_\nu | \mathcal{T}_{\nu\nu}(z; \chi, \phi) | \nu p k_{p\nu} s; z, \chi_\nu \rangle &= \\ &= \langle -\nu \bar{p}' k_{\bar{p}'\nu} \bar{s}'; z^*, -\chi_\nu | \mathcal{T}_{\nu\nu}(z^*; -\chi, -\phi) | \nu \bar{p} k_{\bar{p}\nu} \bar{s}; z^*, -\chi_\nu \rangle^*. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Με βάση την παραπάνω σχέση (5.16) και τις σχέσεις

$$\Omega_\nu(z)^* = -\Omega_\nu(z^*) \quad (5.17)$$

και

$$\frac{-im_\nu z}{\hbar^2 k_{p'\nu}(z) \Omega_\nu(z)} = \left( \frac{-im_\nu z^*}{\hbar^2 k_{\bar{p}'\nu}(z^*) \Omega_\nu(z^*)} \right)^*, \quad (5.18)$$

η σχέση (5.3) μας δίνει την παρακάτω σχέση συμμετρίας για τους συντελεστές ανάκλασης:

$$\alpha_{ps,p's'}^\nu(z; \chi, \phi) = \alpha_{\bar{p}\bar{s},\bar{p}'\bar{s}'}^\nu(z^*; -\chi, -\phi)^*. \quad (5.19)$$

Αυτές είναι οι βασικές σχέσεις μεταξύ των συντελεστών ανάκλασης, που απορρέουν από το μετασχηματισμό μιγαδικής συζυγίας. Συνδυασμός αυτών με τις αντίστοιχες σχέσεις του προηγούμενου κεφαλαίου, για τις επιπτώσεις της μιγαδικής συζυγίας, μας δίνουν τις παρακάτω σχέσεις:

$$\frac{1}{k_{p\nu}} \alpha_{ps,p's'}^\nu(z; \chi, \phi) = \left( \frac{1}{k_{\bar{p}'\nu}(z^*)} \alpha_{\bar{p}'\bar{s}',\bar{p}\bar{s}}^\nu(z^*; \chi, \phi) \right)^*. \quad (5.20)$$

Μια υποκατηγορία αυτών των σχέσεων αξίζει να παρουσιαστεί σε αυτό το σημείο, αυτή που αφορά τους “κανονικούς” συντελεστές ανάκλασης Andreev, δηλαδή τους συντελεστές ανάκλασης με αλλαγή στο χαρακτήρα ηλεκτρονίου-οπής και στο σπιν σε σχέση με την προσπίπτουσα διέγερση. Για πρόσπτωση από αριστερά έχουμε

$$\frac{1}{k_{el}} \alpha_{e\uparrow,h\downarrow}^\ell(z; \chi, \phi) = \left( \frac{1}{k_{el}} \alpha_{e\uparrow,h\downarrow}^\ell(z^*; \chi, \phi) \right)^*, \quad (5.21)$$

$$\frac{1}{k_{el}} \alpha_{e\downarrow,h\uparrow}^\ell(z; \chi, \phi) = \left( \frac{1}{k_{el}} \alpha_{e\downarrow,h\uparrow}^\ell(z^*; \chi, \phi) \right)^*, \quad (5.22)$$

$$\frac{1}{k_{hl}} \alpha_{h\uparrow,e\downarrow}^\ell(z; \chi, \phi) = \left( \frac{1}{k_{hl}} \alpha_{h\uparrow,e\downarrow}^\ell(z^*; \chi, \phi) \right)^*, \quad (5.23)$$

$$\frac{1}{k_{hl}} \alpha_{h\downarrow,e\uparrow}^\ell(z; \chi, \phi) = \left( \frac{1}{k_{hl}} \alpha_{h\downarrow,e\uparrow}^\ell(z^*; \chi, \phi) \right)^*. \quad (5.24)$$

Οι παραπάνω σχέσεις θα μας χρησιμεύσουν στον υπολογισμό του υπερρεύματος στην επαφή Josephson, καθώς θα μας κάνουν φανερό το γεγονός ότι το ρεύμα, όπως θα το υπολογίσουμε, είναι ένας πραγματικός αριθμός.

Ανάλογες σχέσεις προκύπτουν και για τους συντελεστές διάδοσης. Αυτοί δίνονται από τη σχέση

$$\gamma_{ps,p's'}^\nu(z) = -\frac{im_{\nu'}z}{\hbar^2 k_{p'\nu'}(z)\Omega_{\nu'}(z)} \langle -\nu'p'k_{p'\nu'}s'; z, \chi_{\nu'} | \mathcal{T}_{\nu'\nu}(z; \chi, \phi) | \nu p k_{p\nu}s; z, \chi_\nu \rangle \quad (5.25)$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με προηγουμένως καταλήγουμε στη σχέση

$$\begin{aligned} \langle -\nu' p' k_{p'\nu' s'}; z, \chi_{\nu'} | \mathcal{T}_{\nu'\nu}(z; \chi, \phi) | \nu p k_{p\nu s}; z, \chi_{\nu} \rangle = \\ = \langle -\nu' \bar{p}' k_{\bar{p}'\nu' \bar{s}'}; z^*, -\chi_{\nu'} | \mathcal{T}_{\nu'\nu}(z^*; -\chi, -\phi) | \nu \bar{p} k_{\bar{p}\nu \bar{s}}; z^*, -\chi_{\nu} \rangle^*. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Έτσι, οι σχέσεις συμμετρίας για τους συντελεστές διάδοσης που προκύπτουν είναι οι εξής

$$\gamma_{ps, p's'}^{\nu}(z; \chi, \phi) = \gamma_{\bar{p}\bar{s}, \bar{p}'\bar{s}'}^{\nu}(z^*; -\chi, -\phi)^*. \quad (5.27)$$

Οι παραπάνω σχέσεις μπορούν να συνδυαστούν με τις αντίστοιχες του προηγούμενου κεφαλαίου, ώστε να προκύψουν κι άλλες συνθήκες συμμετρίας. Συνεχίζουμε με το μετασχηματισμό της αντιστροφής χρόνου.

## 5.2 Ο μετασχηματισμός της αντιστροφής χρόνου

Στην ενότητα αυτή εξετάζουμε σχέσεις συμμετρίας που προκύπτουν από το μετασχηματισμό της αντιστροφής χρόνου. Θυμίζουμε ότι ο μετασχηματισμός αυτός περιγράφεται από τον τελεστή

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} \hat{R}_{\pi}(\mathbf{y})C & 0 \\ 0 & (\hat{R}_{\pi}(\mathbf{y}))^*C \end{pmatrix}, \quad (5.28)$$

όπου  $\hat{R}_{\pi}(\mathbf{y})$  είναι ο τελεστής της στροφής στο χώρο του σπιν 1/2 κατά γωνία  $\pi$  γύρω από τον άξονα  $\mathbf{y}$  και ισούται με  $e^{-i\sigma_y\pi/2} = -i\sigma_y$ , όπου  $\sigma_y$  είναι ο πίνακας του Pauli στην κατεύθυνση  $y$ . Η επίδραση του τελεστή της αντιστροφής χρόνου στους T-πίνακες για σκέδαση στα διάφορα κανάλια δίνεται από τη σχέση

$$\mathcal{U}\mathcal{T}_{\nu'\nu}(z; \mathbf{M}, \chi)\mathcal{U}^{\dagger} = \mathcal{T}_{\nu'\nu}(z^*; -\mathbf{M}, -\chi). \quad (5.29)$$

Η επόμενη πληροφορία που χρειαζόμαστε είναι η δράση της αντιστροφής χρόνου πάνω στις μιγαδικές κυματοσυναρτήσεις, που εμφανίζονται στις αναλυτικές επεκτάσεις των στοιχείων του T-πίνακα. Λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (5.9), (5.10) και (5.13) καταλήγουμε στη σχέση

$$\mathcal{U}|\nu p k_{p\nu s}; z, \chi_{\nu}\rangle = ps \cdot \text{csgn}(z^*)|\nu \bar{p} k_{\bar{p}\nu \bar{s}}; z^*, -\chi_{\nu}\rangle, \quad (5.30)$$

που ισχύει για  $\text{Re}(z) \neq 0$ , ενώ για  $z = i\omega$  φανταστικό, αξιοποιώντας τις σχέσεις (5.11), (5.12), έχουμε

$$\mathcal{U}|\nu p k_{p\nu} s; i\omega, \chi_\nu\rangle = ps|\nu \bar{p} k_{\bar{p}\nu} s; i\omega^*, -\chi_\nu\rangle. \quad (5.31)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις βλέπουμε ότι, κατά το μετασχηματισμό της αντιστροφής χρόνου, αλλάζει ο χαρακτήρας ηλεκτρονίου-οπής της κυματοσυνάρτησης, ενώ η μεταβλητή του σπιν  $s$  μένει αναλλοίωτη. Φυσικά η φάση της  $\chi_\nu$  μετασχηματίζεται στο αντίθετό της.

Ο μετασχηματισμός του στοιχείου του T-πίνακα  $\mathcal{T}_{\nu'\nu}$  υπό την επίδραση της αντιστροφής χρόνου, δίνει την παρακάτω ισότητα:

$$\begin{aligned} \langle -\nu' p' k_{p'\nu'} s'; z, \chi_{\nu'} | \mathcal{T}_{\nu'\nu}(z; \mathbf{M}, \chi) | \nu p k_{p\nu} s; z, \chi_\nu \rangle = \\ = p' s' ps \langle -\nu' \bar{p}' k_{\bar{p}'\nu'} s'; z^*, -\chi_{\nu'} | \mathcal{T}_{\nu'\nu}(z^*; -\mathbf{M}, -\chi) | \nu \bar{p} k_{\bar{p}\nu} s; z^*, -\chi_\nu \rangle^*. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Η παραπάνω σχέση περιλαμβάνει όλες τις περιπτώσεις πρόσπτωσης και ανάκλασης ή διάδοσης. Μαζί με τη σχέση (5.18) της προηγούμενης ενότητας, μας δίνουν

$$\alpha_{ps, p's'}^\nu(z; \mathbf{M}, \chi) = p' s' ps \alpha_{\bar{p}s, \bar{p}'s'}^\nu(z^*; -\mathbf{M}, -\chi)^* \quad (5.33)$$

και

$$\gamma_{ps, p's'}^\nu(z; \mathbf{M}, \chi) = p' s' ps \gamma_{\bar{p}s, \bar{p}'s'}^\nu(z^*; -\mathbf{M}, -\chi)^*. \quad (5.34)$$

Μπορούμε τώρα να δώσουμε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα των παραπάνω σχέσεων. Έτσι έχουμε

$$\alpha_{e\uparrow, h\downarrow}^\ell(z; \mathbf{M}, \chi) = \alpha_{h\uparrow, e\downarrow}^\ell(z^*; -\mathbf{M}, -\chi)^*. \quad (5.35)$$

Συνεχίζουμε με το μετασχηματισμό της συζυγίας Bogoliubov.

### 5.3 Ο μετασχηματισμός της συζυγίας Bogoliubov

Ο μετασχηματισμός της συζυγίας Bogoliubov μετασχηματίζει τον ενεργειακό χαρακτήρα μιας ιδιοκατάστασης στο αντίθετό του, όταν δρα σε κυματοσυναρτήσεις πραγματικής ενέργειας. Στην ενότητα αυτή θα μετασχηματίσουμε τις αναλυτικές επεκτάσεις των στοιχείων των T-πινάκων και θα δράσουμε τη συζυγία Bogoliubov σε κυματοσυναρτήσεις μιγαδικής ενέργειας  $z$ . Θυμίζουμε ότι ο μετασχηματισμός της συζυγίας Bogoliubov δίνεται από τον τελεστή

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} 0 & \hat{1}C \\ \hat{1}C & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.36)$$

Επίσης θυμίζουμε ότι η δράση της συζυγίας Bogoliubov στους T-πίνακες δίνεται από τη σχέση

$$\mathcal{U}\mathcal{T}_{\nu'}(z)\mathcal{U}^\dagger = -\mathcal{T}_{\nu'}(-z^*). \quad (5.37)$$

Η διαφορά φάσης των υπεραγωγών και οι γωνίες των μαγνητίσεων μένουν αναλλοίωτες. Στη συνέχεια παρουσιάζουμε την επίδραση της συζυγίας Bogoliubov πάνω στις αναλυτικές επεκτάσεις των κυματοσυναρτήσεων. Θα μας χρησιμεύσουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$u_\nu(z)^* = u_\nu(-z^*), \quad (5.38)$$

$$v_\nu(z)^* = -v_\nu(-z^*), \quad (5.39)$$

για  $\text{Re}(z) \neq 0$  και για  $z = i\omega$  φανταστικό

$$u_\nu(i\omega)^* = \text{sgn}(\omega)u_\nu(i\omega), \quad (5.40)$$

$$v_\nu(i\omega)^* = -\text{sgn}(\omega)v_\nu(i\omega). \quad (5.41)$$

Επίσης θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση

$$k_p(z)^* = k_{\bar{p}}(-z^*). \quad (5.42)$$

Με τη βοήθεια αυτών, εύκολα βρίσκουμε ότι

$$\mathcal{U}|\nu p k_{p\nu} s; z\rangle = -s|\nu \bar{p} k_{\bar{p}\nu} s; -z^*\rangle, \quad (5.43)$$

για  $\text{Re}(z) \neq 0$ , ενώ για  $z = i\omega$  φανταστικό έχουμε



$$\mathcal{U}|\nu p k_{p\nu} s; i\omega\rangle = -s \cdot \text{sgn}(\omega) |\nu \bar{p} k_{\bar{p}\nu} s; i\omega\rangle, \quad (5.44)$$

Τώρα είμαστε έτοιμοι να προσδιορίσουμε το μετασχηματισμό των στοιχείων των T-πινάκων. Με το συμπυκνωμένο συμβολισμό που έχουμε παρουσιάσει και με τη βοήθεια των παραπάνω σχέσεων βρίσκουμε ότι για κάθε  $z$ , εκτός από πόλους και εγκοπές κλάδου στον πραγματικό άξονα, ισχύει:

$$\begin{aligned} \langle -\nu' p' k_{p'\nu'} s'; z, \chi_{\nu'} | \mathcal{T}_{\nu'}(z; \chi) | \nu p k_{p\nu} s; z, \chi_{\nu'} \rangle = \\ = -s' s \langle -\nu' \bar{p}' k_{\bar{p}'\nu'} s'; -z^*, \chi_{\nu'} | \mathcal{T}_{\nu'}(-z^*; \chi) | \nu \bar{p} k_{\bar{p}\nu} s; -z^*, \chi_{\nu'} \rangle^*. \end{aligned} \quad (5.45)$$

Παρατηρούμε ότι οι γωνίες των μαγνητίσεων και οι φάσεις στους υπεραγωγούς δεν επηρεάζονται από τη συζυγία Bogoliubov. Με δεδομένο ότι ισχύει η σχέση

$$\frac{-im_{\nu} z}{\hbar^2 k_{p'\nu}(z) \Omega_{\nu}(z)} = - \left( \frac{-im_{\nu}(-z^*)}{\hbar^2 k_{\bar{p}'\nu}(-z^*) \Omega_{\nu}(-z^*)} \right)^*, \quad (5.46)$$

καταλήγουμε στις εξής σχέσεις μεταξύ των συντελεστών ανάκλασης και διάδοσης αντίστοιχα:

$$\alpha_{ps, p's'}^{\nu}(z; \chi) = s' s \alpha_{\bar{p}s, \bar{p}'s'}^{\nu}(-z^*; \chi)^* \quad (5.47)$$

και

$$\gamma_{ps, p's'}^{\nu}(z; \chi) = s' s \gamma_{\bar{p}s, \bar{p}'s'}^{\nu}(-z^*; \chi)^*. \quad (5.48)$$

Επίσης αξιοποιούμε τη σχέση

$$\frac{1}{k_{p\nu}(z)} = \left( \frac{1}{k_{\bar{p}\nu}(-z^*)} \right)^* \quad (5.49)$$

και καταλήγουμε στη σχέση

$$\frac{1}{k_{p\nu}(z)} \alpha_{ps, p's'}^{\nu}(z; \chi) = s' s \left( \frac{1}{k_{\bar{p}\nu}(-z^*)} \alpha_{\bar{p}s, \bar{p}'s'}^{\nu}(-z^*; \chi) \right)^*. \quad (5.50)$$

Δίνουμε ένα παράδειγμα της παραπάνω σχέσης

$$\frac{1}{k_{e\ell}(z)} \alpha_{e\uparrow, h\downarrow}^{\ell}(z; \chi) = - \left( \frac{1}{k_{h\ell}(-z^*)} \alpha_{h\uparrow, e\downarrow}^{\ell}(-z^*; \chi) \right)^*. \quad (5.51)$$

Η σχέση (5.50) θα αξιοποιηθεί στο κεφάλαιο 7 για να απλοποιήσουμε τον τύπο των Furusaki-Tsukada.

# Κεφάλαιο 6

## Συνάρτηση Green

Στο κεφάλαιο αυτό περιγράφουμε τρόπους υπολογισμού της συνάρτησης Green στις επαφές Josephson, που θα φανούν χρήσιμες στον υπολογισμό του ρεύματος, αλλά και άλλων ιδιοτήτων των επαφών, όπως η πυκνότητα καταστάσεων και η κυματοσυνάρτηση των ζευγών Cooper.

### 6.1 Ιδιότητες της συνάρτησης Green

Η συνάρτηση Green ενός σώματος του προβλήματος των σιδηρομαγνητικών επαφών Josephson, που εξετάζουμε, είναι ένας  $4 \times 4$  πίνακας στο Nambu-spin χώρο καταστάσεων, που εξαρτάται από δύο ορίσματα θέσης  $x, x'$  και από τη μιγαδική ενέργεια  $z$ . Γράφουμε

$$\mathcal{G}(x, x'; z) = \begin{pmatrix} \hat{G}(x, x'; z) & \hat{F}(x, x'; z) \\ \hat{F}(x, x'; z) & \hat{G}(x, x'; z) \end{pmatrix}, \quad (6.1)$$

όπου οι σύνθετοι υποπίνακες αντιστοιχούν στις μεταβλητές του σωματιδιακού χαρακτήρα και καθένας από αυτούς έχει τη δομή:

$$\hat{G} = \begin{pmatrix} G_{\uparrow\uparrow} & G_{\uparrow\downarrow} \\ G_{\downarrow\uparrow} & G_{\downarrow\downarrow} \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

και φυσικά ανάλογες σχέσεις για τους υπόλοιπους υποπίνακες στη σχέση (6.1). Οι διαγώνιοι υποπίνακες στη σχέση (6.1) ονομάζονται κανονικές συναρτήσεις Green, ενώ οι αντιδιαγώνιοι είναι οι λεγόμενες ανώμαλες συναρτήσεις Green και είναι μη μηδενικές μόνο όταν το σύστημα είναι υπεραγώγιμο.

Η εξίσωση που ικανοποιεί η συνάρτηση Green είναι

$$(z - \mathcal{H}_x)\mathcal{G}(x, x'; z) = 1\delta(x - x'), \quad (6.3)$$

όπου  $\mathcal{H}_x$  είναι η χαμιλτονιανή BdG που δρα πάνω στη μεταβλητή  $x$ . Η παραπάνω εξίσωση είναι γραμμένη στην αναπαράσταση της θέσης και η αντίστοιχή της με τη χρήση τελεστών είναι

$$\mathcal{G} = \frac{1}{z - \mathcal{H}}. \quad (6.4)$$

Στη συνέχεια, για λόγους που θα διευκολύνουν τη συζήτηση, ορίζουμε

$$\mathcal{M}_x(z) = z - \mathcal{H}_x. \quad (6.5)$$

Έτσι έχουμε

$$\mathcal{M}_x(z)\mathcal{G}(x, x'; z) = 1\delta(x - x'), \quad (6.6)$$

όπου

$$\mathcal{M}_x(z) = \begin{pmatrix} z - \hat{H}_0 & -\hat{\Delta} \\ \hat{\Delta}^* & z + \hat{H}_0^* \end{pmatrix} \quad (6.7)$$

και

$$\hat{H}_0 = -\frac{d}{dx} \frac{\hbar^2}{2m(x)} \frac{d}{dx} - \mu + U(x) - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{M}(x), \quad (6.8)$$

όπου  $m(x)$  είναι η τμηματικά σταθερή ενεργός μάζα,  $\mathbf{M}(x)$  η μαγνήτιση,  $U(x)$  το κανονικό δυναμικό σκέδασης και  $\mu$  το χημικό δυναμικό. Με απλή επισκόπηση της σχέσης (6.7), μπορεί να διαπιστωθεί ότι ισχύει

$$\mathcal{M}_x^*(z^*) = \mathcal{M}_x^T(z) = \mathcal{M}_x^\#(z) = \widetilde{\mathcal{M}}_x(z), \quad (6.9)$$

όπου η περισπωμένη και η “πράξη”  $\#$  έχουν οριστεί στο κεφάλαιο 5. Θυμίζουμε ότι η περισπωμένη σημαίνει πως, στην ποσότητα που την φέρει, οι μεταβλητές της φάσης  $\chi$  και της πολικής γωνίας των μαγνητίσεων  $\phi$  αλλάζουν πρόσημο.

Για να ορίσουμε μοναδικά τη συνάρτηση Green έτσι, ώστε να εξυπηρετεί τους σκοπούς μας, πρέπει να προσδιορίσουμε τις συνοριακές συνθήκες που ικανοποιεί. Για να

είμαστε και σε συμφωνία με την προηγούμενη δουλειά μας για τη συνάρτηση Green, ορίζουμε

$$\mathcal{G}(x \rightarrow -\infty, x'; z) = 0, \quad (6.10)$$

και

$$\mathcal{G}(x \rightarrow +\infty, x'; z) = 0, \quad (6.11)$$

μαζί με άλλες δύο παρόμοιες εξισώσεις όπου το  $x$  είναι σταθερό και το  $x'$  τείνει στο  $\pm\infty$ . Η συνάρτηση Green καθορίζεται από τις παραπάνω συνοριακές συνθήκες, μαζί με τις συνθήκες που ικανοποιούν η ίδια η συνάρτηση Green και η πρώτη της παράγωγος, για  $x \rightarrow x'$ :

$$\mathcal{G}(x, x'; z)|_{x=x'^-}^{x=x'^+} = 0 \quad (6.12)$$

$$\frac{d}{dx}\mathcal{G}(x, x'; z)|_{x=x'^-}^{x=x'^+} = P^{-1}(x) \quad (6.13)$$

όπου  $P(x)$  είναι ο διαγώνιος πίνακας

$$P(x) = \text{diag} \left( \frac{\hbar^2}{2m(x)}, \frac{\hbar^2}{2m(x)}, -\frac{\hbar^2}{2m(x)}, -\frac{\hbar^2}{2m(x)} \right) \quad (6.14)$$

Οι σχέσεις (6.12) και (6.13) προκύπτουν κατά το συνήθη τρόπο, ολοκληρώνοντας τη διαφορική εξίσωση της συνάρτησης Green ως προς τη μεταβλητή  $x$  σε ένα απειροστό διάστημα γύρω από το σημείο  $x'$ . Σημειώνουμε ότι οι παραπάνω σχέσεις ισχύουν, όταν το  $x'$  δεν βρίσκεται πάνω σε κάποια φυσική ενδοεπιφάνεια, όπου η χαμιλτονιανή περιέχει όρους δέλτα Dirac.

Στη συνέχεια θα παραθέσουμε μερικές ιδιότητες συμμετρίας, που ικανοποιεί η συνάρτηση Green. Ξεκινούμε από την πιο γνωστή, που προκύπτει από τον ορισμό (6.4) και είναι

$$\mathcal{G}(z) = \mathcal{G}(z^*)^\dagger, \quad (6.15)$$

ή, στην αναπαράσταση της θέσης

$$\mathcal{G}(x, x'; z) = \mathcal{G}^{*T}(x', x; z^*). \quad (6.16)$$

Ήδη έχουμε δει ορισμένες συμμετρίες της συνάρτησης Green στο κεφάλαιο 4. Έτσι από τη μιγαδική συζυγία (4.14) προκύπτει

$$\tilde{\mathcal{G}}(x, x'; z) = \mathcal{G}^*(x, x'; z^*), \quad (6.17)$$

όπου η περισπωμένη σημαίνει ότι η συνάρτηση Green υπολογίζεται με την αλλαγή των παραμέτρων  $\chi \rightarrow -\chi$  και  $\phi \rightarrow -\phi$ . Επίσης, από τη συζυγία Bogoliubov (4.68) προκύπτει

$$\hat{G}(x, x'; z) = -\hat{G}^*(x, x'; -z^*), \quad (6.18)$$

που συνδέει τις κανονικές συναρτήσεις Green, και

$$\hat{F}(x, x'; z) = -\hat{F}^*(x, x'; -z^*), \quad (6.19)$$

που συνδέει τις ανώμαλες συναρτήσεις Green.

Από τις σχέσεις (6.15) και (6.17) προκύπτει ότι ισχύει η σχέση:

$$\mathcal{G}(x, x'; z) = \tilde{\mathcal{G}}^T(x', x; z). \quad (6.20)$$

Στην παραπάνω σχέση μπορούμε να καταλήξουμε και απευθείας από την εξίσωση που ικανοποιεί η συνάρτηση Green (βλ. παράρτημα 6.A□).

Μπορούμε να αξιοποιήσουμε τις συμμετρίες (6.16) και (6.20), που πραγματοποιούν εναλλαγή των μεταβλητών θέσης  $x$  και  $x'$ , για να βρούμε την εξίσωση που ικανοποιεί η συνάρτηση Green, αν ο τελεστής  $\mathcal{M}$  δράσει πάνω στη δεύτερη μεταβλητή  $x'$ . Έτσι, αντικαθιστώντας στη σχέση (6.6), προκύπτουν οι εξισώσεις

$$\mathcal{M}_{x'}^*(z^*)\mathcal{G}^T(x, x'; z) = 1\delta(x - x'). \quad (6.21)$$

$$\tilde{\mathcal{M}}_{x'}(z)\mathcal{G}^T(x, x'; z) = 1\delta(x - x'). \quad (6.22)$$

Από τη σχέση (6.21) παρατηρούμε ότι η συνάρτηση Green, ως προς τη δεύτερη μεταβλητή, ικανοποιεί τη μιγαδική συζυγή εξίσωση από αυτή που ικανοποιεί ως προς την πρώτη, με όρισμα  $z$  επίσης μιγαδικό συζυγές. Ισοδύναμα, από τη σχέση (6.22) προκύπτει ότι η συνάρτηση Green ικανοποιεί την περισπώμενη διαφορική εξίσωση ως προς τη δεύτερη μεταβλητή, σε σχέση με αυτή που ικανοποιεί ως προς την πρώτη. Τα συμπεράσματα αυτά θα μας βοηθήσουν να εκφράσουμε τη συνάρτηση Green συναρτήσει γραμμικώς ανεξάρτητων λύσεων των ομογενών εξισώσεων BdG. Σε αυτό προχωρούμε στις επόμενες ενότητες.

## 6.2 Συνάρτηση Green από γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις των εξισώσεων BdG

Σε αυτή την ενότητα θα περιγράψουμε την κατασκευή της συνάρτησης Green της επαφής Josephson με τη βοήθεια γραμμικώς ανεξάρτητων λύσεων των εξισώσεων BdG για μιγαδική ενέργεια  $z$ . Η διαδικασία έχει αφετηρία την αναφορά [121] κατάλληλα γενικευμένη, ώστε να αναφέρεται σε προβλήματα με ερμιτιανά μεν αλλά μιγαδικά δυναμικά, σαν και αυτά που εμφανίζονται στις εξισώσεις BdG, όπως το δυναμικό ζεύγους και το δυναμικό της μαγνήτισης του συστήματος. Επίσης η απόδειξη της σχέσης της γενικευμένης Βροσκιανής με τους συντελεστές στο ανάπτυγμα της συνάρτησης Green ως προς γινόμενα γραμμικώς ανεξάρτητων λύσεων των εξισώσεων BdG είναι απλούστερη, πιο ευθύς και πιο πλήρης, σε σχέση με τις αποδείξεις που δίνονται στην αναφορά [121]. Επίσης δείχνουμε ότι η σχέση που δίνει τη συνάρτηση Green συναρτήσεως των γραμμικώς ανεξάρτητων λύσεων είναι αναλλοίωτη, αν επιλέξουμε νέες λύσεις που είναι γραμμικοί συνδυασμοί των προηγούμενων. Τέλος αποδεικνύουμε ότι η γενικευμένη Βροσκιανή είναι σταθερή συνάρτηση του χώρου, ακόμα και στα σημεία όπου η χαμιλτονιανή BdG έχει φυσικές ενδοπιφάνειες και άρα η παράγωγος των κυματοσυναρτήσεων είναι ασυνεχής. Θα θέλαμε ακόμη να σημειώσουμε ότι εφαρμογή της μεθόδου των γραμμικώς ανεξάρτητων λύσεων στην κατασκευή της συνάρτησης Green σε υπεραγώγιμα συστήματα έχει γίνει για παράδειγμα στις αναφορές [122–124], χωρίς να υποστηρίζουμε ότι η λίστα αυτή εξαντλεί τη βιβλιογραφία.

Αναζητούμε επομένως λύσεις του παρακάτω συστήματος εξισώσεων

$$\mathcal{H}_{BdG}\Psi(x) = z\Psi(x). \quad (6.23)$$

Θα χρειαστούμε δύο ειδών λύσεις: Λύσεις που ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες στα αριστερά ( $x \rightarrow -\infty$ ) και που τις συμβολίζουμε με  $\mathcal{U}_\alpha(x)$  ( $\alpha = 1, 2, 3, 4$ ) και λύσεις που ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες στα δεξιά ( $x \rightarrow +\infty$ ), τις οποίες συμβολίζουμε με  $\mathcal{V}_\alpha(x)$ . Οι συνοριακές συνθήκες που επιβάλλουμε είναι

$$\mathcal{U}(x \rightarrow -\infty) = 0 \quad (6.24)$$

και

$$\mathcal{V}(x \rightarrow +\infty) = 0, \quad (6.25)$$

όπου  $\mathcal{U}$  και  $\mathcal{V}$  είναι  $4 \times 4$  πίνακες με στήλες τέσσερις γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις  $\mathcal{U}_\alpha$  και  $\mathcal{V}_\alpha$  αντίστοιχα. Θα χρησιμοποιήσουμε επίσης το συμβολισμό  $\mathcal{U} = (u_{i\alpha})$  και

$\mathcal{V} = (v_{i\alpha})$ , όπου  $i$  είναι ο δείκτης που δηλώνει το στοιχείο της  $4 \times 1$  λύσης  $\mathcal{U}_\alpha$  ή  $\mathcal{V}_\alpha$ . Φυσικά θα ισχύει

$$\mathcal{M}_x \mathcal{U}(x) = 0 \quad (6.26)$$

και

$$\mathcal{M}_x \mathcal{V}(x) = 0. \quad (6.27)$$

Η εξίσωση (6.22) μαζί με την (6.6) μας δίνουν τη δυνατότητα να κατασκευάσουμε τη συνάρτηση Green για μιγαδική ενέργεια  $z$  σαν γραμμικό συνδυασμό στο χώρο του ταυστικού γινομένου λύσεων της (6.6) με λύσεις της (6.22). Με δεδομένο ότι η συνάρτηση Green ικανοποιεί την ομογενή εξίσωση του προβλήματος για  $x \neq x'$ , μπορούμε να γράψουμε

$$\mathcal{G}(x, x') = \begin{cases} \sum_{\alpha\beta} \mathcal{U}_\alpha(x) A_{\alpha\beta} \tilde{\mathcal{V}}_\beta^T(x'), & x < x' \\ \sum_{\alpha\beta} \mathcal{V}_\alpha(x) B_{\alpha\beta} \tilde{\mathcal{U}}_\beta^T(x'), & x > x', \end{cases} \quad (6.28)$$

όπου  $A_{\alpha\beta}$  και  $B_{\alpha\beta}$  είναι οι σταθεροί συντελεστές του γραμμικού συνδυασμού και η εξάρτηση των λύσεων  $\mathcal{U}$  και  $\mathcal{V}$  από τα  $x$  και  $x'$  έχει επιλεγεί έτσι, ώστε η συνάρτηση Green να ικανοποιεί αυτόματα τις συνοριακές συνθήκες στο  $\pm\infty$ . Στην παραπάνω σχέση δεν έχουμε σημειώσει την εξάρτηση της συνάρτησης Green, των κυματοσυναρτήσεων και των σταθερών συντελεστών από τη μεταβλητή  $z$ , για να απλοποιήσουμε τις εκφράσεις.

Ο παραπάνω γραμμικός συνδυασμός, όπως εύκολα διαπιστώνεται, μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\mathcal{G}(x, x') = \begin{cases} \mathcal{U}(x) A \tilde{\mathcal{V}}^T(x'), & x < x' \\ \mathcal{V}(x) B \tilde{\mathcal{U}}^T(x'), & x > x', \end{cases} \quad (6.29)$$

όπου  $A = (A_{\alpha\beta})$  και  $B = (B_{\alpha\beta})$  είναι σταθεροί πίνακες των συντελεστών. Οι  $A$  και  $B$  θα υπολογιστούν από τις συνθήκες (6.12) και (6.13). Προηγουμένως όμως χρειάζεται να εξάγουμε μερικές ιδιότητες των λύσεων των ομογενών εξισώσεων (6.26) και (6.27).

Σχηματίζουμε λοιπόν την ποσότητα

$$\tilde{u}_{i\alpha} \mathcal{M}_{x,ij} v_{j\beta} - v_{j\beta} \tilde{\mathcal{M}}_{x,ji} \tilde{u}_{i\alpha} = 0 \quad (6.30)$$

όπου υπονοείται άθροιση στους επαναλαμβανόμενους δείκτες. Στο άθροισμα της σχέσης (6.30) είναι φανερό ότι οι όροι με  $i \neq j$  δίνουν μηδενική συνεισφορά. Συνεπώς

$$\sum_i \left( \tilde{u}_{i\alpha} \mathcal{M}_{x,ii} v_{i\beta} - v_{i\beta} \widetilde{\mathcal{M}}_{x,ii} \tilde{u}_{i\alpha} \right) = 0$$

ή

$$\sum_i \left( \tilde{u}_{i\alpha} \frac{d}{dx} \left( p_i \frac{d}{dx} v_{i\beta} \right) - v_{i\beta} \frac{d}{dx} \left( p_i \frac{d}{dx} \tilde{u}_{i\alpha} \right) \right) = 0$$

ή

$$\frac{d}{dx} \sum_i \left( \tilde{u}_{i\alpha} p_i \frac{d}{dx} v_{i\beta} - v_{i\beta} p_i \frac{d}{dx} \tilde{u}_{i\alpha} \right) = 0$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει αμέσως το συμπέρασμα ότι η ποσότητα στο αριστερό μέλος είναι σταθερή συνάρτηση του  $x$ . Συμβολίζοντας αυτή τη σταθερά με  $C_{\alpha\beta}$ , έχουμε

$$\sum_i \left( \tilde{u}_{i\alpha} p_i \frac{d}{dx} v_{i\beta} - v_{i\beta} p_i \frac{d}{dx} \tilde{u}_{i\alpha} \right) = C_{\alpha\beta}$$

ή, χρησιμοποιώντας πίνακες

$$\tilde{\mathcal{U}}^T(x) P(x) \frac{d}{dx} \mathcal{V}(x) - \frac{d}{dx} \tilde{\mathcal{U}}^T(x) P(x) \mathcal{V}(x) = C \quad (6.31)$$

Η έκφραση στο αριστερό μέλος είναι μια σταθερή συνάρτηση του  $x$ , όποιες λύσεις των διαφορικών εξισώσεων (6.26) και (6.27) κι αν επιλέξουμε. Μπορούμε να πούμε ότι η έκφραση αυτή αποτελεί μια γενίκευση της έννοιας της Βροσκιανής (Wronskian) σε συστήματα διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης.

Ομοίως, αν στη σχέση (6.30) αλλάξουμε το ρόλο των λύσεων  $u$  και  $v$ , καταλήγουμε στη σχέση

$$\mathcal{U}^T(x) P(x) \frac{d}{dx} \tilde{\mathcal{V}}(x) - \frac{d}{dx} \mathcal{U}^T(x) P(x) \tilde{\mathcal{V}}(x) = \tilde{C}, \quad (6.32)$$

ενώ, αν χρησιμοποιήσουμε είτε μόνο λύσεις  $u$  είτε μόνο λύσεις  $v$ , έχουμε

$$\tilde{\mathcal{U}}^T(x) P(x) \frac{d}{dx} \mathcal{U}(x) - \frac{d}{dx} \tilde{\mathcal{U}}^T(x) P(x) \mathcal{U}(x) = 0 \quad (6.33)$$



και

$$\tilde{\mathcal{V}}^T(x)P(x)\frac{d}{dx}\mathcal{V}(x) - \frac{d}{dx}\tilde{\mathcal{V}}^T(x)P(x)\mathcal{V}(x) = 0. \quad (6.34)$$

Στην περίπτωση των εξισώσεων (6.33) και (6.34), η σταθερά με την οποία ισούται η παράσταση στο αριστερό μέλος είναι μηδέν, όπως μπορεί εύκολα να διαπιστωθεί εφαρμόζοντας τις συνοριακές συνθήκες που ικανοποιούν οι λύσεις  $\mathcal{U}$  και  $\mathcal{V}$  στο  $\pm\infty$ . Επίσης από τις σχέσεις (6.33) και (6.34) προκύπτει ότι

$$P(x)\frac{d\mathcal{U}}{dx}\mathcal{U}^{-1} = (P(x)\frac{d\tilde{\mathcal{U}}}{dx}\tilde{\mathcal{U}}^{-1})^T \quad (6.35)$$

και

$$P(x)\frac{d\mathcal{V}}{dx}\mathcal{V}^{-1} = (P(x)\frac{d\tilde{\mathcal{V}}}{dx}\tilde{\mathcal{V}}^{-1})^T, \quad (6.36)$$

αν στη σχέση (6.33) πολλαπλασιάσουμε με  $(\tilde{\mathcal{U}}^T)^{-1}$  από τα αριστερά και με  $\mathcal{U}^{-1}$  από τα δεξιά, ενώ η σχέση (6.36) προκύπτει, αν κάνουμε έναν ανάλογο χειρισμό στη σχέση (6.34).

Σημειώνουμε ότι οι αντίστροφοι των πινάκων  $\mathcal{U}$ ,  $\mathcal{V}$  υπάρχουν, αφού οι στήλες τους αποτελούν γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα. Επίσης αναφέρουμε ότι τα στοιχεία των πινάκων  $C$  και  $\tilde{C}$  δίνονται από τις σχέσεις

$$C_{\alpha\beta} = \tilde{\mathcal{U}}_{\alpha}^T(x)P(x)\frac{d}{dx}\mathcal{V}_{\beta}(x) - \frac{d}{dx}\tilde{\mathcal{U}}_{\alpha}^T(x)P(x)\mathcal{V}_{\beta}(x) \quad (6.37)$$

και

$$\tilde{C}_{\alpha\beta} = \mathcal{U}_{\alpha}^T(x)P(x)\frac{d}{dx}\tilde{\mathcal{V}}_{\beta}(x) - \frac{d}{dx}\mathcal{U}_{\alpha}^T(x)P(x)\tilde{\mathcal{V}}_{\beta}(x) \quad (6.38)$$

όπως προκύπτει εύκολα, αν γίνουν οι πράξεις στις σχέσεις (6.31) και (6.32), ή καλύτερα απευθείας από τη σχέση που προηγείται της (6.31).

Τώρα είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε τους πίνακες των συντελεστών  $A$  και  $B$ , που εμφανίζονται στη σχέση (6.29). Εφαρμόζοντας τις συνθήκες (6.12) και (6.13), έχουμε

$$\mathcal{U}(x)A\tilde{\mathcal{V}}^T(x) = \mathcal{V}(x)B\tilde{\mathcal{U}}^T(x) \quad (6.39)$$

και

$$\frac{d\mathcal{V}(x)}{dx} B\tilde{\mathcal{U}}^T(x) - \frac{d\mathcal{U}(x)}{dx} A\tilde{\mathcal{V}}^T(x) = P^{-1}. \quad (6.40)$$

Μπορούμε να απαλοίσουμε τον πίνακα  $A$  ή τον πίνακα  $B$  στη σχέση (6.40), χρησιμοποιώντας τη σχέση (6.39). Έτσι έχουμε

$$\frac{d\mathcal{V}}{dx} \mathcal{V}^{-1} \mathcal{U} A \tilde{\mathcal{V}}^T - \frac{d\mathcal{U}}{dx} A \tilde{\mathcal{V}}^T = P^{-1}$$

και

$$\frac{d\mathcal{V}}{dx} B \tilde{\mathcal{U}}^T - \frac{d\mathcal{U}}{dx} \mathcal{U}^{-1} \mathcal{V} B \tilde{\mathcal{U}}^T = P^{-1}.$$

Λύνοντας ως προς  $A$  και  $B$  αντίστοιχα, μετά από λίγες αλγεβρικές πράξεις έχουμε

$$A = \left( \tilde{\mathcal{V}}^T (P\mathcal{V}'\mathcal{V}^{-1} - P\mathcal{U}'\mathcal{U}^{-1})\mathcal{U} \right)^{-1}$$

και

$$B = \left( \tilde{\mathcal{U}}^T (P\mathcal{V}'\mathcal{V}^{-1} - P\mathcal{U}'\mathcal{U}^{-1})\mathcal{V} \right)^{-1}.$$

Εφαρμόζοντας τη σχέση (6.36) για το  $A$  και την (6.35) για το  $B$  τελικά προκύπτει ότι

$$A = (\tilde{C}^T)^{-1} \quad (6.41)$$

και

$$B = C^{-1} \quad (6.42)$$

Έτσι η συνάρτηση Green δίνεται από τη σχέση

$$\mathcal{G}(x, x'; z) = \begin{cases} \mathcal{U}(x; z)(\tilde{C}^T(z))^{-1}\tilde{\mathcal{V}}^T(x'; z), & x < x' \\ \mathcal{V}(x; z)C^{-1}(z)\tilde{\mathcal{U}}^T(x'; z), & x > x' \end{cases} \quad (6.43)$$

Απομένει να προσδιορίσουμε τους πίνακες  $C$  και  $\tilde{C}$ . Οι πίνακες αυτοί είναι σταθεροί σαν συνάρτηση της θέσης (όπως αποδείξαμε) και εξαρτώνται μόνο από την επιλογή των

γραμμικώς ανεξάρτητων λύσεων της εξίσωσης (6.23), που ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες στο  $\pm\infty$ . Είναι λοιπόν ενδιαφέρον να εξετάσουμε τη συμπεριφορά της σχέσης (6.43) σε μια αλλαγή βάσης στον χώρο των λύσεων των εξισώσεων BdG με σταθερή μιγαδική ενέργεια  $z$ . Έτσι ορίζουμε νέες γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις  $\mathcal{U}_\alpha^\mu$  και  $\mathcal{V}_\alpha^\mu$  με τις παρακάτω σχέσεις:

$$\mathcal{U}_\alpha^\mu = \sum_{\alpha'} \mathcal{U}_{\alpha'} K_{\alpha'\alpha} \quad (6.44)$$

και

$$\mathcal{V}_\alpha^\mu = \sum_{\alpha'} \mathcal{V}_{\alpha'} L_{\alpha'\alpha}, \quad (6.45)$$

ή, σε μορφή πινάκων  $4 \times 4$ ,

$$\mathcal{U}^\mu = \mathcal{U}K \quad (6.46)$$

και

$$\mathcal{V}^\mu = \mathcal{V}L, \quad (6.47)$$

όπου  $K = (K_{\alpha'\alpha})$  και  $L = (L_{\alpha'\alpha})$  είναι οι πίνακες των συντελεστών του μετασχηματισμού. Η στήλη  $\alpha$  του πίνακα  $K$  ή  $L$  είναι οι συντελεστές που συνδέουν τη στήλη  $\alpha$  του  $\mathcal{U}^\mu$  ή  $\mathcal{V}^\mu$  αντίστοιχα με τις γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις  $\mathcal{U}$  ή  $\mathcal{V}$  αντίστοιχα. Οι πίνακες  $K$  και  $L$  είναι αντιστρέψιμοι, ώστε οι μετασχηματισμένες λύσεις να είναι και αυτές γραμμικώς ανεξάρτητες.

Εκφράζουμε λοιπόν τις γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις στον τύπο (6.43) συναρτήσας των μετασχηματισμένων γραμμικώς ανεξάρτητων λύσεων  $\mathcal{U}^\mu$ ,  $\mathcal{V}^\mu$  και έχουμε, για  $x > x'$ ,

$$\mathcal{G}(x, x') = \begin{cases} \mathcal{U}^\mu(x)K^{-1}(\tilde{C}^T)^{-1}(\tilde{L}^T)^{-1}\tilde{\mathcal{V}}^T(x'), & x < x' \\ \mathcal{V}^\mu(x)L^{-1}C^{-1}(\tilde{K}^T)^{-1}(\tilde{\mathcal{U}}^\mu(x'))^T, & x > x' \end{cases} .$$

Τα γινόμενα πινάκων, που εμφανίζονται μεταξύ των γραμμικώς ανεξάρτητων λύσεων στον παραπάνω τύπο, εύκολα διαπιστώνεται ότι δίνουν

$$K^{-1}(\tilde{C}^T)^{-1}(\tilde{L}^T)^{-1} = (\tilde{C}_\mu^T)^{-1}$$

και

$$L^{-1}C^{-1}(\tilde{K}^T)^{-1} = C_\mu^{-1},$$

όπου

$$C_\mu = (\tilde{U}^\mu(x))^T P(x) \frac{d}{dx} \mathcal{V}^\mu(x) - \frac{d}{dx} (\tilde{U}^\mu(x))^T P(x) \mathcal{V}^\mu(x). \quad (6.48)$$

Έτσι ο τύπος για τη συνάρτηση Green συναρτήσσει των μετασχηματισμένων γραμμικώς ανεξάρτητων λύσεων γίνεται

$$\mathcal{G}(x, x') = \begin{cases} \mathcal{U}^\mu(x) (\tilde{C}_\mu^T)^{-1} (\tilde{\mathcal{V}}^\mu(x'))^T, & x < x' \\ \mathcal{V}^\mu(x) C_\mu^{-1} (\tilde{\mathcal{U}}^\mu(x'))^T, & x > x' \end{cases}. \quad (6.49)$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι ο τύπος (6.43) για τη συνάρτηση Green παραμένει αναλλοίωτος κατά το μετασχηματισμό των γραμμικώς ανεξάρτητων λύσεων σταθερής ενέργειας  $z$ .

Στο μοντέλο μας βέβαια έχουμε ενδοεπιφάνειες μεταξύ των οποίων η διαφορική εξίσωση (6.23) αλλάζει ασυνεχώς, καθώς και σκεδάσεις στις ίδιες τις ενδοεπιφάνειες. Έτσι είναι χρήσιμο να επιβεβαιώσουμε ρητώς ότι η γενικευμένη Βροσκιανή διατηρεί σταθερή τιμή εκατέρωθεν των ενδοεπιφανειών. Για να το κάνουμε αυτό, θεωρούμε μία ενδοεπιφάνεια στο σημείο  $x$  και υπολογίζουμε τον πίνακα  $C$  αριστερά και δεξιά της ενδοεπιφάνειας. Δεξιά από το  $x$  έχουμε

$$C^+ = \tilde{U}^T(x^+) P(x^+) \mathcal{V}'(x^+) - \tilde{U}'^T(x^+) P(x^+) \mathcal{V}(x^+)$$

Οι λύσεις  $\mathcal{U}$  και  $\mathcal{V}$  είναι συνεχείς εκατέρωθεν της ενδοεπιφάνειας, αλλά οι παράγωγοί τους έχουν ασυνέχεια, που δίνεται από τη σχέση

$$\frac{\hbar^2}{2m^+} \frac{d}{dx} \mathcal{U}(x^+) - \frac{\hbar^2}{2m^-} \frac{d}{dx} \mathcal{U}(x^-) = \mathcal{X} \mathcal{U}(x)$$

και ομοίως για το  $\mathcal{V}$ , όπου

$$\mathcal{X} = \begin{pmatrix} U - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{N} & 0 \\ 0 & (U - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{N})^* \end{pmatrix}.$$

Ορίζοντας  $P(x) = \frac{\hbar^2}{2m(x)} P_0$ , όπου  $P_0 = \text{diag}(1, 1, -1, -1)$ , έχουμε

$$C^+ = \tilde{\mathcal{U}}^T(x^-)P_0\frac{\hbar^2}{2m^+}\mathcal{V}'(x^+) - \frac{\hbar^2}{2m^+}\tilde{\mathcal{U}}'^T(x^+)P_0\mathcal{V}(x^-)$$

ή

$$C^+ = \tilde{\mathcal{U}}^T(x^-)P_0\frac{\hbar^2}{2m^-}\mathcal{V}'(x^-) + \tilde{\mathcal{U}}^T(x^-)P_0\mathcal{X}\mathcal{V}(x^-) - \frac{\hbar^2}{2m^-}\tilde{\mathcal{U}}'^T(x^-)P_0\mathcal{V}(x^-) - \tilde{\mathcal{U}}^T(x^-)\tilde{\mathcal{X}}^T P_0\mathcal{V}(x^-)$$

Με δεδομένο ότι  $\tilde{\mathcal{X}}^T = \mathcal{X}$  και  $P_0\mathcal{X} = \mathcal{X}P_0$ , από την παραπάνω σχέση προκύπτει αμέσως ότι

$$C^+ = C^- \quad (6.50)$$

και το ζητούμενο αποδείχθηκε.

Στη συνέχεια θα επιλέξουμε τις γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις που θα σχηματίσουν τους πίνακες  $\mathcal{U}$  και  $\mathcal{V}$  να είναι οι καταστάσεις σκέδασης του κεφαλαίου 2 (ενότητα 2.4) και θα εκφράσουμε τη γενικευμένη Βροσκιανή συναρτήσε των συντελεστών διάδοσης της επαφής Josephson. Έτσι λοιπόν ορίζουμε

$$\mathcal{U}(x; z) = \left( \Psi_{e\uparrow r}(x; z) \quad \Psi_{e\downarrow r}(x; z) \quad \Psi_{h\uparrow r}(x; z) \quad \Psi_{h\downarrow r}(x; z) \right) \quad (6.51)$$

και

$$\mathcal{V}(x; z) = \left( \Psi_{e\uparrow \ell}(x; z) \quad \Psi_{e\downarrow \ell}(x; z) \quad \Psi_{h\uparrow \ell}(x; z) \quad \Psi_{h\downarrow \ell}(x; z) \right), \quad (6.52)$$

όπου  $\Psi_{psv}(x; z)$  είναι οι αναλυτικές επεκτάσεις για μιγαδική ενέργεια  $z$  των καταστάσεων σκέδασης της ενότητας 2.4. Είναι προφανές ότι η παραπάνω επιλογή των πινάκων  $\mathcal{U}$  και  $\mathcal{V}$  ικανοποιεί τις σωστές συνοριακές συνθήκες στο  $x \rightarrow \pm\infty$ . Αντικαθιστώντας τις παραπάνω λύσεις στη σχέση (6.31), υπολογίζουμε τη γενικευμένη Βροσκιανή σαν συνάρτηση της θέσης και του  $z$ . Όμως, όπως δείξαμε, η Βροσκιανή είναι σταθερή συνάρτηση της θέσης και επομένως παίρνουμε το ίδιο αποτέλεσμα, σε όποια τιμή του  $x$  και αν την υπολογίσουμε. Ας θεωρήσουμε επομένως ότι το  $x$  βρίσκεται στη δεξιά ασυμπτωτική περιοχή. Τότε, κάνοντας πράξεις στη σχέση (6.31), καταλήγουμε στο αποτέλεσμα

$$C = \left( -\frac{\hbar^2 k_{p'r}\Omega_r}{im_r z} \gamma_{ps,p's'}^\ell(z; \chi, \phi) \right)^T, \quad (6.53)$$

ή, ισοδύναμα,

$$C = (\langle p'k_{p'r}s' | \mathcal{T}_{r\ell}(z; \chi, \phi) | pk_{p\ell}s \rangle)^T, \quad (6.54)$$

όπου οι δείκτες  $ps$  και  $p's'$  λαμβάνονται ως οι δείκτες ενός  $4 \times 4$  πίνακα και διατάσσονται με τη σειρά  $e \uparrow, e \downarrow, h \uparrow, h \downarrow$ .

Θα μπορούσαμε φυσικά να υπολογίσουμε τη Βροσκιανή και στην αριστερή ασυμπτωτική περιοχή. Αν το κάνουμε αυτό παίρνουμε

$$C = \left( -\frac{\hbar^2 k_{p'\ell} \Omega_\ell}{im_\ell z} \gamma_{ps,p's'}^r(z; -\chi, -\phi) \right), \quad (6.55)$$

ή, ισοδύναμα,

$$C = (\langle -p'k_{p'\ell}s' | \mathcal{T}_{\ell r}(z; -\chi, -\phi) | -pk_{pr}s \rangle). \quad (6.56)$$

Είναι απλή υπόθεση να επαληθεύσουμε ότι η παραπάνω μορφή της Βροσκιανής είναι, στοιχείο προς στοιχείο, ταυτόσημη με τη μορφή των σχέσεων (6.53) και (6.54). Αρκεί να χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις (4.26) και (4.27). Έτσι γίνεται ακόμα μια φορά φανερό ότι η Βροσκιανή είναι ανεξάρτητη της θέσης  $x$ .

### 6.3 Συνάρτηση Green από γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις των εξισώσεων BdG II

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε μια λίγο διαφορετική μέθοδο για την εξαγωγή της συνάρτησης Green από τις γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις των εξισώσεων BdG, που δίνει ισοδύναμα αποτελέσματα. Για το σκοπό αυτό θα αξιοποιήσουμε τις παρακάτω σχέσεις, που ισχύουν για  $\text{Re}(z) \neq 0$ :

$$\mathcal{U}^*(x; z^*) = \text{csgn}(z) \tilde{\mathcal{U}}(x; z) K \quad (6.57)$$

και

$$\mathcal{V}^*(x; z^*) = \text{csgn}(z) \tilde{\mathcal{V}}(x; z) K, \quad (6.58)$$

όπου

$$K = \begin{pmatrix} 0_{2 \times 2} & \sigma_x \\ \sigma_x & 0_{2 \times 2} \end{pmatrix}, \quad (6.59)$$

με  $K^{-1} = K$  και  $K^T = K$ . Για  $z = i\omega$  φαναστικό, έχουμε

$$\mathcal{U}^*(x; i\omega^*) = \tilde{\mathcal{U}}(x; i\omega)K \quad (6.60)$$

και

$$\mathcal{V}^*(x; i\omega^*) = \tilde{\mathcal{V}}(x; i\omega)K, \quad (6.61)$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (6.43) τις σχέσεις (6.57) και (6.58), για  $\text{Re}(z) \neq 0$ , παίρνουμε

$$\mathcal{G}(x, x'; z) = \begin{cases} \mathcal{U}(x; z) \text{csgn}(z) ((\tilde{C}K)^T)^{-1} \mathcal{V}^{*T}(x'; z^*), & x < x' \\ \mathcal{V}(x; z) \text{csgn}(z) (KC)^{-1} \mathcal{U}^{*T}(x'; z^*), & x > x' \end{cases}, \quad (6.62)$$

ενώ για  $z = i\omega$  φανταστικό, έχουμε

$$\mathcal{G}(x, x'; i\omega) = \begin{cases} \mathcal{U}(x; i\omega) ((\tilde{C}K)^T)^{-1} \mathcal{V}^{*T}(x'; i\omega^*), & x < x' \\ \mathcal{V}(x; i\omega) (KC)^{-1} \mathcal{U}^{*T}(x'; i\omega^*), & x > x' \end{cases}. \quad (6.63)$$

Με βάση τις παραπάνω σχέσεις, ορίζουμε μια νέα Βροσκιανή ως εξής

$$C_1(z) = \text{csgn}(z)KC(z), \quad (6.64)$$

για  $\text{Re}(z) \neq 0$ , ενώ για  $z = i\omega$  φανταστικό ορίζουμε

$$C_1(i\omega) = KC(i\omega). \quad (6.65)$$

Με τη βοήθεια των σχέσεων (6.57), (6.58) και των (6.60), (6.61) καθώς και του ορισμού της Βροσκιανής  $C(z)$  (σχέση (6.31)), γράφουμε

$$C_1(z) = \mathcal{U}^{*T}(x; z^*)P(x) \frac{d}{dx} \mathcal{V}(x; z) - \frac{d}{dx} \mathcal{U}^{*T}(x; z^*)P(x) \mathcal{V}(x; z). \quad (6.66)$$

Ομοίως, από τις σχέσεις (6.62), (6.63) για  $x < x'$ , ορίζουμε τη Βροσκιανή

$$C_1^*(z^*) = \text{csgn}(z)\tilde{C}(z)K, \quad (6.67)$$

για  $\text{Re}(z) \neq 0$  και

$$C_1^*(i\omega^*) = \tilde{C}(i\omega)K, \quad (6.68)$$

για  $z = i\omega$  φανταστικό. Με τη βοήθεια της σχέσης του ορισμού της Βροσκιανής  $\tilde{C}(z)$  (σχέση (6.32)) καταλήγουμε στη σχέση:

$$C_1^*(z^*) = \mathcal{U}^T(x; z)P(x)\frac{d}{dx}\mathcal{V}^*(x; z^*) - \frac{d}{dx}\mathcal{U}^T(x; z)P(x)\mathcal{V}^*(x; z^*). \quad (6.69)$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η συνάρτηση Green μπορεί να γραφεί ως εξής

$$\mathcal{G}(x, x'; z) = \begin{cases} \mathcal{U}(x; z)(C_1^*(z^*)^T)^{-1}\mathcal{V}^{*T}(x'; z^*), & x < x' \\ \mathcal{V}(x; z)C_1(z)^{-1}\mathcal{U}^{*T}(x'; z^*), & x > x' \end{cases}. \quad (6.70)$$

Επομένως, αντί να υπολογίσουμε τις γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις και τη Βροσκιανή για δύο γεωμετρίες της επαφής (που αντιστοιχούν στις παραμέτρους  $\chi, \phi$  και  $-\chi, -\phi$ ), για να υπολογίσουμε τη συνάρτηση Green, αρκεί να λάβουμε τους μιγαδικούς συζυγείς ορισμένων ποσοτήτων, όπως φαίνεται στη σχέση (6.70). Αυτό είναι και το πλεονέκτημα της μεθόδου που παρουσιάζουμε σε αυτή την ενότητα.

## 6.4 Συνάρτηση Green στις ασυμπτωτικές περιοχές

Στην ενότητα αυτή θα αποδείξουμε τις μορφές που παίρνει η συνάρτηση Green για ορίσματα θέσης στις ασυμπτωτικές περιοχές της επαφής, με τη μέθοδο του παρόντος κεφαλαίου. Έτσι θα αναπαράγουμε τις σχέσεις που καταλήξαμε στην ενότητα 3.4. Ξεκινούμε όμως με την εύρεση της ελεύθερης συνάρτησης Green ενός ομογενούς συμβατικού υπεραγωγού, που γίνεται πολύ εύκολα με τη μέθοδο του παρόντος κεφαλαίου.

Για να υπολογίσουμε την ελεύθερη συνάρτηση Green του υπεραγωγού, επιλέγουμε τους παρακάτω πίνακες γραμμικώς ανεξάρτητων λύσεων, που μηδενίζονται στα αριστερά και στα δεξιά του υπεραγωγού αντίστοιχα:

$$\mathcal{U}(x; z) = \begin{pmatrix} \phi_{e\uparrow}e^{-ik_e x} & \phi_{e\downarrow}e^{-ik_e x} & \phi_{h\uparrow}e^{ik_h x} & \phi_{h\downarrow}e^{ik_h x} \end{pmatrix} \quad (6.71)$$



και

$$\mathcal{V}(x; z) = \left( \phi_{e\uparrow} e^{ik_e x} \quad \phi_{e\downarrow} e^{ik_e x} \quad \phi_{h\uparrow} e^{-ik_h x} \quad \phi_{h\downarrow} e^{-ik_h x} \right). \quad (6.72)$$

Είναι προφανές ότι ο πίνακας λύσεων  $\mathcal{U}(x; z)$  ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες στα αριστερά ( $x \rightarrow -\infty$ ), ενώ ο πίνακας  $\mathcal{V}(x; z)$  ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες στα δεξιά ( $x \rightarrow \infty$ ). Η Βροσκιανή του συστήματος, για αυτή την επιλογή λύσεων, αποδεικνύεται από τις σχέσεις (6.31), (6.32) ότι δίνεται από τη σχέση

$$C(z) = \tilde{C}(z) = \begin{pmatrix} -\frac{\hbar^2 k_e \Omega}{imz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\hbar^2 k_e \Omega}{imz} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\hbar^2 k_h \Omega}{imz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\hbar^2 k_h \Omega}{imz} \end{pmatrix}. \quad (6.73)$$

Παρατηρούμε ότι οι πίνακες  $C(z)$  και  $\tilde{C}(z)$  είναι διαγώνιοι και ίσοι μεταξύ τους. Αυτό σημαίνει ότι οι στήλες του πίνακα  $\mathcal{U}$  πολλαπλασιάζονται με την αντίστοιχη στήλη του πίνακα  $\mathcal{V}$  στη σχέση (6.43). Επίσης, η διαφορά της ελεύθερης συνάρτησης Green για  $x < x'$  και για  $x > x'$  είναι ένα πρόσημο στους εκθέτες, που περιέχουν τα κυματάνυσματα και την εξάρτηση από τις θέσεις. Έτσι μπορούμε να γράψουμε τη συνάρτηση Green με ένα τύπο και καταλήγουμε στη σχέση (3.27):

$$\mathcal{G}(x, x'; z) = \sum_{ps} \left( -\frac{imz}{\hbar^2 k_p(z) \Omega(z)} \right) \phi_{ps}(z) \tilde{\phi}_{ps}^T(z) e^{ipk_p(z)|x-x'|}.$$

Συνεχίζουμε με τον υπολογισμό της συνάρτησης Green στις ασυμπτωτικές περιοχές. Θα ξεκινήσουμε υπολογίζοντας τη συνάρτηση Green στην αριστερή ασυμπτωτική περιοχή, δηλ. για  $x, x' < 0$ . Πρώτα πρέπει να επιλέξουμε τις γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις που ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες. Για τις λύσεις  $\mathcal{V}(x; z)$ , που μηδενίζονται στα δεξιά της επαφής ( $x \rightarrow \infty$ ), κάνουμε την επιλογή της σχέσης (6.52). Αυτό σημαίνει ότι επιλέγουμε λύσεις με πρόσπτωση διεγέρσεων με σαφή σωματιδιακό χαρακτήρα και σπιν από τα αριστερά, για παράδειγμα προσπίπτουσα διεγερση ηλεκτρονικού χαρακτήρα με σπιν επάνω. Για τις λύσεις  $\mathcal{U}(x; z)$ , που μηδενίζονται στα αριστερά ( $x \rightarrow -\infty$ ), επιλέγουμε λύσεις που έχουν σαφή σωματιδιακό χαρακτήρα και σπιν στην αριστερή ασυμπτωτική περιοχή της επαφής και διαδίδονται προς τα αριστερά. Αυτό επιτυγχάνεται, αν επιλέξουμε κατάλληλους γραμμικούς συνδυασμούς καταστάσεων με πρόσπτωση διεγέρσεων με σαφή σωματιδιακό χαρακτήρα και σπιν από τα δεξιά. Έτσι, για  $x$  στην αριστερή ασυμπτωτική περιοχή ( $x < 0$ ), οι λύσεις που επιλέγουμε είναι

$$\mathcal{U}(x; z) = \begin{pmatrix} \phi_{e\uparrow\ell} e^{-ik_{e\ell}x} & \phi_{e\downarrow\ell} e^{-ik_{e\ell}x} & \phi_{h\uparrow\ell} e^{ik_{h\ell}x} & \phi_{h\downarrow\ell} e^{ik_{h\ell}x} \end{pmatrix}. \quad (6.74)$$

Ο πίνακας των λύσεων  $\mathcal{U}(x; z)$ , για  $x > d$ , έχει στήλες που είναι γραμμικοί συνδυασμοί των λύσεων  $\Psi_{psr}(x; z)$  της ενότητας 2.4. Λόγω της γραμμικής ανεξαρτησίας των  $\Psi_{psr}(x; z)$ , είναι πάντα δυνατό να επιλέξουμε γραμμικούς συνδυασμούς αυτών, ώστε για  $x$  στην αριστερή ασυμπτωτική περιοχή να έχουν τη μορφή που δίνεται στη σχέση (6.74).

Στη συνέχεια οφείλουμε να υπολογίσουμε τη γενικευμένη Βροσκιανή. Αν την υπολογίσουμε στην αριστερή ασυμπτωτική περιοχή, αποδεικνύεται ότι και σε αυτή την περίπτωση δίνεται από τη σχέση (6.73), όπου στις ποσότητες  $m$ ,  $k_p$  και  $\Omega$  προσθέτουμε το δείκτη  $\ell$ . Συνεπώς είναι διαγώνια, πράγμα που διευκολύνει πολύ τα πράγματα. Έτσι, αντικαθιστώντας στη σχέση (6.43), παίρνουμε για  $x > x'$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(x, x'; z) = & - \sum_{ps} \frac{im_\ell z}{\hbar^2 k_{p\ell} \Omega_\ell} e^{ipk_{p\ell}x - ipk_{p\ell}x'} \phi_{ps\ell} \tilde{\phi}_{ps\ell}^T - \\ & - \sum_{ps, p's'} \frac{im_\ell z}{\hbar^2 k_{p\ell} \Omega_\ell} \alpha_{ps, p's'}^\ell e^{-ip'k_{p'\ell}x - ipk_{p\ell}x'} \phi_{p's'\ell} \tilde{\phi}_{ps\ell}^T, \end{aligned} \quad (6.75)$$

ενώ για  $x < x'$  παίρνουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(x, x'; z) = & - \sum_{ps} \frac{im_\ell z}{\hbar^2 k_{p\ell} \Omega_\ell} e^{-ipk_{p\ell}x + ipk_{p\ell}x'} \phi_{ps\ell} \tilde{\phi}_{ps\ell}^T - \\ & - \sum_{ps, p's'} \frac{im_\ell z}{\hbar^2 k_{p'\ell} \Omega_\ell} \tilde{\alpha}_{p's', ps}^\ell e^{-ip'k_{p'\ell}x - ipk_{p\ell}x'} \phi_{p's'\ell} \tilde{\phi}_{ps\ell}^T. \end{aligned} \quad (6.76)$$

Όμως η σχέση συμμετρίας (4.22), που είναι η εξής

$$\frac{1}{k_{p\ell}} \alpha_{ps, p's'}^\ell = \frac{1}{k_{p'\ell}} \tilde{\alpha}_{p's', ps}^\ell,$$

μας επιτρέπει να γράψουμε τη συνάρτηση Green στην αριστερή ασυμπτωτική περιοχή χωρίς διερεύνηση για τη σχετική θέση των  $x$ ,  $x'$ , όπως παρακάτω

$$\mathcal{G}(x, x'; z) = \mathcal{G}_\ell(x, x'; z) - \sum_{ps, p's'} \frac{im_\ell z}{\hbar^2 k_{p\ell} \Omega_\ell} \alpha_{ps, p's'}^\ell e^{-ip'k_{p'\ell}x - ipk_{p\ell}x'} \phi_{p's'\ell} \tilde{\phi}_{ps\ell}^T.$$

Η παραπάνω σχέση είναι η ίδια με τη σχέση (3.81).

Στη συνέχεια υποδεικνύουμε πως υπολογίζεται η συνάρτηση Green, στην περίπτωση που  $x > d$  και  $x' < 0$ , δηλαδή με το όρισμα  $x$  στη δεξιά και το  $x'$  στην αριστερή ασυμπτωτική περιοχή. Τότε ισχύει πάντα  $x > x'$ . Στη θέση του  $\mathcal{U}(x'; z)$  ( $x' < 0$ ) θέτουμε τον πίνακα (6.74) και στη θέση του  $\mathcal{V}(x; z)$  ( $x > d$ ) τις λύσεις  $\Psi_{ps\ell}(x; z)$ , όπως στη σχέση (6.52), που στη δεξιά ασυμπτωτική περιοχή περιέχουν τους συντελεστές διάδοσης για πρόσπτωση από αριστερά. Η Βροσκιανή έχει υπολογιστεί, είναι διαγώνια και σαν αποτέλεσμα παίρνουμε τη σχέση (3.89):

$$\mathcal{G}(x, x'; z) = \sum_{ps, p's'} \left( -\frac{im_\ell z}{\hbar^2 k_{p\ell} \Omega_\ell} \right) \gamma_{ps, p's'}^\ell(z) e^{ip'k_{p'r}(x-d) - ipk_{p\ell}x'} \phi_{p's'r} \tilde{\phi}_{ps\ell}^T.$$

Με ανάλογο τρόπο μπορούμε να καταλήξουμε και στις σχέσεις (3.84), (3.91) της ενότητας 3.4, δηλαδή στην ασυμπτωτική συνάρτηση Green για ορίσματα  $x, x' > d$  και  $x < 0, x' > d$  αντίστοιχα. Σε αυτή την περίπτωση όμως πρέπει να διαλέξουμε τις λύσεις  $\mathcal{U}(x; z)$  να είναι οι αναλυτικές επεκτάσεις των στάσιμων καταστάσεων  $\Psi_{psr}(x; z)$ , που έχουν σαφή σωματιδιακό χαρακτήρα και σπιν για τη διέγερση που προσπίπτει από τα δεξιά. Τότε, ο πίνακας λύσεων  $\mathcal{V}(x; z)$ , που ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες στα δεξιά της επαφής, πρέπει να επιλεγεί έτσι, ώστε οι στήλες του να έχουν σαφή σωματιδιακό χαρακτήρα και σπιν στη δεξιά ασυμπτωτική περιοχή. Αυτό επιτυγχάνεται, όταν οι στήλες του είναι κατάλληλοι γραμμικοί συνδυασμοί των κυματοσυναρτήσεων  $\Psi_{ps\ell}(x; z)$ , που περιγράφουν στάσιμες καταστάσεις με πρόσπτωση από τα αριστερά. Έτσι οι καταστάσεις στις στήλες του  $\mathcal{V}(x; z)$  θα αντιστοιχούν σε πρόσπτωση γραμμικού συνδυασμού καταστάσεων με συγκεκριμένο σωματιδιακό χαρακτήρα και σπιν από τα αριστερά.

## 6.5 Τοπική πυκνότητα καταστάσεων

Ολοκληρώνουμε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζοντας τον τρόπο υπολογισμού της τοπικής πυκνότητας καταστάσεων στις επαφές Josephson. Το μέγεθος αυτό μας δίνει τον αριθμό των καταστάσεων που αντιστοιχούν σε μία θέση  $x$  στην επαφή και σε μία τιμή του σπιν  $s$ , ανά μονάδα ενέργειας και μήκους. Σημαντικό ρόλο στον υπολογισμό της πυκνότητας καταστάσεων παίζει, ως γνωστόν, η συνάρτηση Green.

Η συνάρτηση Green, μιας και εξαρτάται από τη χαμιλτονιανή BdG, είναι διαγώνια στη βάση των ιδιοσυναρτήσεων ενέργειας αυτής. Έτσι, λαμβάνοντας υπόψη μας την ανάλυση της μονάδας (σχέση (2.22)), μπορούμε να γράψουμε

$$\mathcal{G}(x, x'; z) = \sum_n \left[ g_n(z) \begin{pmatrix} \hat{u}^n(x) \\ \hat{v}^n(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u}^n(x') \\ \hat{v}^n(x') \end{pmatrix}^\dagger + \bar{g}_n(z) \begin{pmatrix} \hat{v}^{n*}(x) \\ \hat{u}^{n*}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{v}^{n*}(x') \\ \hat{u}^{n*}(x') \end{pmatrix}^\dagger \right]. \quad (6.77)$$

όπου  $n$  είναι η μεταβλητή που χαρακτηρίζει τις στάσιμες καταστάσεις θετικής ενέργειας των εξισώσεων BdG στην επαφή Josephson, ενώ  $g_n$  και  $\bar{g}_n$  είναι τα διαγώνια στοιχεία της συνάρτησης Green. Δρώντας από αριστερά με τον τελεστή  $z - \mathcal{H}$  και εξισώνοντας με τη μονάδα, αμέσως συμπεραίνουμε ότι

$$g_n(z) = \frac{1}{z - E_n} \quad (6.78)$$

και

$$\bar{g}_n(z) = \frac{1}{z + E_n}, \quad (6.79)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε και τη σχέση (2.17), κατά τη δράση του  $z - \mathcal{H}$  στις ιδιοκαταστάσεις αρνητικής ενέργειας. Είναι εύκολο να δούμε ότι ισχύουν οι σχέσεις

$$g_n(E^+) - g_n(E^-) = -2\pi i \delta(E - E_n) \quad (6.80)$$

και

$$\bar{g}_n(E^+) - \bar{g}_n(E^-) = -2\pi i \delta(E + E_n). \quad (6.81)$$

Αξιοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις, βρίσκουμε ότι

$$\frac{i}{2\pi} (\hat{G}(x, x; E^+) - \hat{G}(x, x; E^-)) = \sum_n \left\{ \delta(E - E_n) \hat{u}^n(x) \hat{u}^{n\dagger}(x) + \delta(E + E_n) \hat{v}^{n*}(x) \hat{v}^n(x)^T \right\}. \quad (6.82)$$

όπου  $\hat{G}$  είναι ο υποπίνακας της συνάρτησης Green που αντιστοιχεί στις σωματιδιακές μεταβλητές  $e$  και  $e$ . Στα διαγώνια στοιχεία του δεξιού μέλους της παραπάνω σχέσης, αναγνωρίζουμε την τοπική πυκνότητα καταστάσεων στη θέση  $x$  με σπιν  $s$ . Συγκεκριμένα

$$\rho_s(x; E) = \sum_n \{ \delta(E - E_n) u_s^n(x) u_s^{n*}(x) + \delta(E + E_n) v_s^{n*}(x) v_s^n(x) \}. \quad (6.83)$$

Έτσι, λαμβάνοντας υπόψη μας τη συμμετρία (6.15), γράφουμε

$$\rho_s(x; E) = -\frac{1}{\pi} \text{Im}(G_{ss}(x, x; E^+)). \quad (6.84)$$

Έχουμε λοιπόν τον τρόπο να υπολογίσουμε την τοπική πυκνότητα καταστάσεων με τη βοήθεια της συνάρτησης Green. Η τοπική πυκνότητα καταστάσεων είναι μια σημαντική μεταβλητή και είναι προσπελάσιμη από το πείραμα με τη μέθοδο της μικροσκοπίας σάρωσης φαινομένου σήραγγος (scanning tunneling microscopy).

## 6.A□ Συμμετρία της συνάρτησης Green

Στο παράρτημα αυτό θα εξάγουμε μία σημαντική ιδιότητα συμμετρίας της συνάρτησης Green. Από τη διαφορική εξίσωση (6.3) προκύπτουν οι παρακάτω σχέσεις

$$\tilde{\mathcal{G}}_{i\ell}(x, x_2)\mathcal{M}_{x,ij}\mathcal{G}_{jk}(x, x_1) = \tilde{\mathcal{G}}_{k\ell}(x, x_2)\delta(x - x_1)$$

και

$$\mathcal{G}_{ik}(x, x_1)\tilde{\mathcal{M}}_{x,ij}\tilde{\mathcal{G}}_{j\ell}(x, x_2) = \mathcal{G}_{\ell k}(x, x_1)\delta(x - x_2),$$

όπου υπονοείται άθροιση στους επαναλαμβανόμενους δείκτες. Επίσης το σύμβολο της περισπωμένης πάνω από τη συνάρτηση Green σημαίνει ότι έχει προκύψει από τη λύση της διαφορικής εξίσωσης με τον περισπώμενο τελεστή  $\mathcal{M}$ , που διαφέρει από τον κανονικό στο ότι τα μη διαγώνια στοιχεία του έχουν εναλλαχθεί μεταξύ τους ή, πράγμα που είναι το ίδιο, τα μη διαγώνια στοιχεία του έχουν αντικατασταθεί από τα μιγαδικά συζυγή τους. Στην δική μας περίπτωση αυτό είναι ισοδύναμο με το να αλλάξουμε στον περισπώμενο τελεστή το πρόσημο της φάσης  $\chi$  του δυναμικού ζεύγους (pair potential) καθώς και το πρόσημο της πολικής γωνίας  $\phi$  των μαγνητίσεων, τόσο στα ενδιάμεσα στρώματα όσο και στις ενδοεπιφάνειες. Η χρησιμότητα αυτής της διαδικασίας θα φανεί παρακάτω.

Αφαιρώντας τις παραπάνω σχέσεις κατά μέλη και ολοκληρώνοντας ως προς  $x$  σε όλο το χώρο, έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left\{ \tilde{\mathcal{G}}_{i\ell}(x, x_2)\mathcal{M}_{x,ij}\mathcal{G}_{jk}(x, x_1) - \mathcal{G}_{ik}(x, x_1)\tilde{\mathcal{M}}_{x,ij}\tilde{\mathcal{G}}_{j\ell}(x, x_2) \right\} = \\ = \tilde{\mathcal{G}}_{k\ell}(x_1, x_2) - \mathcal{G}_{\ell k}(x_2, x_1) \end{aligned} \quad (6.85)$$

όπου πάλι υπονοείται άθροιση στους επαναλαμβανόμενους δείκτες. Θα υπολογίσουμε το αριστερό μέλος της σχέσης (6.85), για να αποδείξουμε ότι το δεξιό της μέλος μηδενίζεται. Ξεκινούμε με τους όρους του αθροίσματος ως προς  $i$  και  $j$  με  $i = j$ :

$$\begin{aligned} \sum_i \int dx \left\{ \tilde{\mathcal{G}}_{i\ell}(x, x_2)\mathcal{M}_{x,ii}\mathcal{G}_{ik}(x, x_1) - \mathcal{G}_{ik}(x, x_1)\tilde{\mathcal{M}}_{x,ii}\tilde{\mathcal{G}}_{i\ell}(x, x_2) \right\} = \\ = \sum_i \int dx \left\{ \tilde{\mathcal{G}}_{i\ell}(x, x_2)\frac{d}{dx} \left( p_i \frac{d}{dx} \mathcal{G}_{ik}(x, x_1) \right) - \mathcal{G}_{ik}(x, x_1)\frac{d}{dx} \left( p_i \frac{d}{dx} \tilde{\mathcal{G}}_{i\ell}(x, x_2) \right) \right\} \end{aligned}$$

όπου  $p_i$  είναι τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα  $P$  (βλ. σχέση (6.14)). Στη συνέχεια, προσθαφαιρώντας τον όρο

$$p_i \frac{d}{dx} \tilde{\mathcal{G}}_{i\ell}(x, x_2) \frac{d}{dx} \mathcal{G}_{ik}(x, x_1)$$

στο δεύτερο μέλος της παραπάνω σχέσης, η ολοκληρωτέα ποσότητα προκύπτει τέλεια παράγωγος και έτσι καταλήγουμε στη σχέση

$$\begin{aligned} & \sum_i \int dx \left\{ \tilde{\mathcal{G}}_{i\ell}(x, x_2) \mathcal{M}_{x,ii} \mathcal{G}_{ik}(x, x_1) - \mathcal{G}_{ik}(x, x_1) \tilde{\mathcal{M}}_{x,ii} \tilde{\mathcal{G}}_{i\ell}(x, x_2) \right\} = \\ & = \sum_i \left\{ \tilde{\mathcal{G}}_{i\ell}(x, x_2) p_i \frac{d}{dx} \mathcal{G}_{ik}(x, x_1) - \mathcal{G}_{ik}(x, x_1) p_i \frac{d}{dx} \tilde{\mathcal{G}}_{i\ell}(x, x_2) \right\} \Big|_{-\infty}^{+\infty} \end{aligned}$$

Λόγω των συνοριακών συνθηκών της συνάρτησης Green στο  $\pm\infty$ , η παραπάνω ποσότητα μηδενίζεται. Ας δούμε τώρα τους όρους του αθροίσματος με  $i \neq j$ . Είναι εύκολο να δει κανείς ότι και αυτοί οι όροι μηδενίζονται, αν γραφούν όπως παρακάτω :

$$\begin{aligned} & \sum_{i>j} \int dx \left\{ \tilde{\mathcal{G}}_{i\ell}(x, x_2) \mathcal{M}_{x,ij} \mathcal{G}_{jk}(x, x_1) - \mathcal{G}_{jk}(x, x_1) \tilde{\mathcal{M}}_{x,ij} \tilde{\mathcal{G}}_{j\ell}(x, x_2) + \right. \\ & \left. + \tilde{\mathcal{G}}_{j\ell}(x, x_2) \mathcal{M}_{x,ji} \mathcal{G}_{ik}(x, x_1) - \mathcal{G}_{ik}(x, x_1) \tilde{\mathcal{M}}_{x,ji} \tilde{\mathcal{G}}_{i\ell}(x, x_2) \right\} = 0 \end{aligned}$$

Με δεδομένο ότι ισχύει  $\tilde{\mathcal{M}}_{x,ij} = \mathcal{M}_{x,ji}$  και ότι τα μη διαγώνια στοιχεία του τελεστή  $\mathcal{M}_x$  δεν περιέχουν διαφορίσεις και άρα μετατίθενται με τα στοιχεία της συνάρτησης Green, η ισχύς της παραπάνω σχέσης είναι προφανής. Εδώ φαίνεται και η χρησιμότητα της εισαγωγής του συμβόλου της περισπωμένης: αφήνει τα διαγώνια στοιχεία του τελεστή  $\mathcal{M}$  αναλοίωτα, ενώ ο ανάστροφος του περισπωμένου τελεστή είναι ίσος με τον τελεστή. Με αυτά τα δεδομένα, καταλήγουμε ότι η συνάρτηση Green ικανοποιεί την παρακάτω συμμετρία :

$$\mathcal{G}(x_1, x_2; z) = \tilde{\mathcal{G}}^T(x_2, x_1; z).$$

Η παραπάνω σχέση είναι η σχέση συμμετρίας (6.20).

# Κεφάλαιο 7

## Υπολογισμός του υπερρεύματος και ιδιότητές του

Στο κεφάλαιο αυτό θα περιγράψουμε πως υπολογίζεται το υπερρέυμα στην επαφή Josephson από τη συνάρτηση Green και θα καταλήξουμε στο τύπο των Furusaki-Tsukada [109], που υπολογίζει το υπερρέυμα συναρτήσει των αναλυτικών επεκτάσεων σε φανταστική ενέργεια των συντελεστών ανάκλασης της επαφής για πρόσπτωση διεγέρσεων από τα αριστερά ή τα δεξιά. Επίσης θα αποδείξουμε μία σχέση που συνδέει το υπερρέυμα με την ορίζουσα  $\Gamma$  του πίνακα των συνθηκών συρραφής [65, 100]. Στη συνέχεια θα εξετάσουμε τις συμμετρίες της σχέσης υπερρεύματος φάσης, όπως προκύπτουν από τις συνθήκες συμμετρίας που αποδείξαμε στα κεφάλαια 4 και 5, καθώς και τις συμμετρίες της ορίζουσας  $\Gamma$  που προκύπτουν από αυτές. Τέλος θα παρουσιάσουμε την εξάρτηση της ορίζουσας των συνθηκών συρραφής, στο μη αυτοσυνεπές μοντέλο, από τις διευθύνσεις των μαγνητίσεων επαφών με ένα ενδιάμεσο σιδηρομαγνητικό στρώμα και δύο μαγνητικές ενδοεπιφάνειες εκατέρωθεν αυτού.

### 7.1 Υπερρέυμα από τη συνάρτηση Green

Ξεκινούμε αναπαράγοντας την εξίσωση της συνέχειας για το ηλεκτρικό ρεύμα σε μια σιδηρομαγνητική επαφή Josephson. Ορίζουμε τον τελεστή πυκνότητας φορτίου στην εικόνα Heisenberg από τη σχέση

$$P_e(x, t) = -e \sum_s \psi_s^\dagger(x, t) \psi_s(x, t), \quad (7.1)$$

όπου  $e$  είναι η απόλυτη τιμή του φορτίου του ηλεκτρονίου και  $\psi_s(x, t)$  ο τελεστής καταστροφής ηλεκτρονίου στη θέση  $x$  και σπιν  $s$  στην εικόνα του Heisenberg. Παίρνοντας την χρονική παράγωγο της παραπάνω σχέσης έχουμε



$$\frac{\partial P_e}{\partial t}(x, t) = -e \sum_s \frac{\partial \psi_s^\dagger}{\partial t}(x, t) \psi_s(x, t) - e \sum_s \psi_s^\dagger(x, t) \frac{\partial \psi_s}{\partial t}(x, t). \quad (7.2)$$

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις κίνησης για τους τελεστές καταστροφής και δημιουργίας

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \begin{array}{c} \psi_s(x, t) \\ \psi_s^\dagger(x, t) \end{array} \right\} = \left[ \left\{ \begin{array}{c} \psi_s(x, t) \\ \psi_s^\dagger(x, t) \end{array} \right\}, \mathbb{H} \right] \quad (7.3)$$

και τις μεταθετικές σχέσεις

$$[\psi_s(x), \mathbb{H}] = \sum_{s'} \left( \hat{H}_{0s, s'}(x, -i\hbar \frac{d}{dx}) \psi_{s'}(x) + \Delta_{ss'} \psi_{s'}^\dagger(x) \right), \quad (7.4)$$

$$[\psi_s^\dagger(x), \mathbb{H}] = -[\psi_s(x), \mathbb{H}]^\dagger, \quad (7.5)$$

όπου τα στοιχεία πίνακος του τελεστή  $\hat{H}_0$  έχουν οριστεί στη σχέση (2.4), καταλήγουμε στην εξίσωση συνέχειας του ηλεκτρικού φορτίου στην επαφή, που είναι η εξής:

$$\frac{\partial P_e}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial I_e}{\partial x}(x, t) = S(x, t), \quad (7.6)$$

όπου

$$I_e(x, t) = \frac{e\hbar}{2im(x)} \sum_s \left\{ \frac{\partial \psi_s^\dagger}{\partial x}(x, t) \psi_s(x, t) - \psi_s^\dagger(x, t) \frac{\partial \psi_s}{\partial x}(x, t) \right\} \quad (7.7)$$

και

$$S(x, t) = \frac{e}{i\hbar} \sum_{ss'} \left\{ \Delta_{ss'}^*(x) \psi_{s'}(x, t) \psi_s(x, t) - \Delta_{ss'}(x) \psi_s^\dagger(x, t) \psi_{s'}^\dagger(x, t) \right\}. \quad (7.8)$$

Τον τελεστή  $I_e$  ονομάζουμε ρεύμα των οιονεί σωματιδίων, ενώ ο τελεστής  $S$  ονομάζεται πηγαίος όρος (source term) και σχετίζεται με το ρεύμα που μεταφέρεται από τα ζεύγη Cooper [109]. Είναι προφανές ότι, στις περιοχές όπου το δυναμικό ζεύγους μηδενίζεται, ο πηγαίος όρος είναι και αυτός μηδέν. Το συνολικό ρεύμα στην επαφή δίνεται από το άθροισμα του ρεύματος των οιονεί σωματιδίων και του ολοκληρώματος του πηγαίου όρου. Έτσι γράφουμε

$$I = \langle I_e(x) \rangle + \int_x^{x_0} \langle S(x) \rangle, \quad (7.9)$$

όπου  $x_0$  είναι ένα σημείο όπου το ρεύμα του πηγαίου όρου μηδενίζεται και η μέση τιμή είναι στη θερμοδυναμική κατάσταση ισορροπίας του συστήματος της επαφής. Η εξάρτηση από το χρόνο  $t$  έχει παραληφθεί λόγω της επίδρασης της μέσης τιμής στην κατάσταση ισορροπίας.

Ολοκληρώνουμε αυτή την ενότητα εκφράζοντας τις μέσες τιμές του ρεύματος οιονεί σωματιδίων και του πηγαίου όρου συναρτήσει της συνάρτησης Green. Για το ρεύμα οιονεί σωματιδίων, από τη σχέση (7.7), έχουμε

$$\langle I_e(x) \rangle = \frac{e\hbar}{2im(x)} \sum_s \lim_{x' \rightarrow x} \frac{\partial}{\partial x'} \{ \langle \psi_s^\dagger(x') \psi_s(x) \rangle - \langle \psi_s^\dagger(x) \psi_s(x') \rangle \}. \quad (7.10)$$

Η μέση τιμή των τελεστών καταστροφής και δημιουργίας στην παραπάνω σχέση σχετίζεται με τη θερμική συνάρτηση Green μέσω της σχέσης

$$\langle \psi_s^\dagger(x') \psi_s(x) \rangle = \frac{1}{\beta} \sum_{\omega_n} e^{i\omega_n 0^+} \ll \psi_s(x); \psi_s^\dagger(x') \gg_{i\omega_n}, \quad (7.11)$$

όπου  $\beta = 1/kT$ ,  $T$  η θερμοκρασία και  $\omega_n$  είναι οι φερμιονικές συχνότητες Matsubara.

Για να είμαστε συνεπείς με τη θεωρία της συνάρτησης Green που αναπτύξαμε στα προηγούμενα κεφάλαια, επιλέγουμε τον ορισμό της θερμικής συνάρτησης Green και του μετασχηματισμού Fourier αυτής να είναι αυτός που αναφέρεται στην αναφορά [6] ή τον ισοδύναμο της αναφοράς [5]. Με αυτά τα δεδομένα, το ρεύμα των οιονεί σωματιδίων γράφεται τελικά

$$\langle I_e(x) \rangle = \frac{e\hbar}{2im(x)} \frac{1}{\beta} \sum_n \lim_{x' \rightarrow x} \frac{\partial}{\partial x'} \{ \text{Tr} \hat{G}(x, x'; i\omega_n) - \text{Tr} \hat{G}(x', x; i\omega_n) \}. \quad (7.12)$$

Ομοίως ισχύουν οι σχέσεις

$$\langle \psi_{s'}(x) \psi_s(x) \rangle = \frac{1}{\beta} \sum_{\omega_n} e^{i\omega_n 0^+} \ll \psi_s(x); \psi_{s'}(x) \gg_{i\omega_n} \quad (7.13)$$

και

$$\langle \psi_s^\dagger(x) \psi_{s'}^\dagger(x) \rangle = \frac{1}{\beta} \sum_{\omega_n} e^{i\omega_n 0^+} \ll \psi_{s'}^\dagger(x); \psi_s^\dagger(x) \gg_{i\omega_n}. \quad (7.14)$$

Επομένως ο πηγαίος όρος γράφεται

$$\langle S(x) \rangle = \frac{e}{i\hbar} \frac{1}{\beta} \sum_n \left\{ \text{Tr} \left( \hat{\Delta}^*(x) \hat{F}^T(x, x; i\omega_n) \right) - \text{Tr} \left( \hat{\Delta}(x) \hat{\bar{F}}(x, x; i\omega_n) \right) \right\}. \quad (7.15)$$

Αξιοποιώντας τη σχέση συμμετρίας της συνάρτησης Green  $\hat{F}(i\omega_n) = -\hat{F}^*(i\omega_n)$ , που οφείλεται στη συζυγία Bogoliubov, και τις ιδιότητες του ίχνους  $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ ,  $\text{Tr}(A^T) = \text{Tr}(A)$  καθώς και τη σχέση  $\hat{\Delta}^T = -\hat{\Delta}$ , μπορούμε να γράψουμε την παραπάνω σχέση πιο απλά ως εξής:

$$\langle S(x) \rangle = \frac{2e}{\hbar} \frac{1}{\beta} \sum_n \text{Im} \left\{ \text{Tr} \left( \hat{\Delta}^*(x) \hat{F}^T(x, x; i\omega_n) \right) \right\}. \quad (7.16)$$

Από την παραπάνω σχέση παρατηρούμε ότι ο πηγαίος όρος είναι μηδέν και όταν το δυναμικό ζεύγους είναι υπολογισμένο αυτοσυνεπώς, μιας και τότε πρέπει να υπολογίσουμε το φανταστικό μέρος ενός πραγματικού αριθμού. Προς εξήγηση του παραπάνω σημειώνουμε ότι

$$\hat{\Delta}(x) = g \frac{1}{\beta} \sum_n \hat{F}^T(x, x; i\omega_n), \quad (7.17)$$

όπου  $g$  είναι μια σταθερά σύζευξης και  $\hat{\Delta}$ ,  $\hat{F}$  η αυτοσυνεπής συνάρτηση χάσματος και η αυτοσυνεπής ανώμαλη συνάρτηση Green αντίστοιχα. Παρατηρούμε όμως ότι το ρεύμα των ζευγών Cooper είναι το ολοκλήρωμα του πηγαίου όρου και επομένως δεν είναι απαραίτητο να μηδενίζεται στα ίδια σημεία με αυτόν.

Με αυτές τις παρατηρήσεις είμαστε σε θέση να προχωρήσουμε στην εξαγωγή του τύπου των Furusaki-Tsukada [109] και στη συνέχεια ενός νέου τύπου για το υπερρεύμα που το εκφράζει συναρτήσει της ορίζουσας του πίνακα των συνθηκών συρραφής [65, 100].

## 7.2 Τύπος των Furusaki-Tsukada

Στην προηγούμενη ενότητα χωρίσαμε το συνολικό ρεύμα σε κάθε θέση  $x$  στην επαφή Josephson σε δύο συνιστώσες. Επειδή δεν υπάρχει συσσώρευση φορτίου κατά μήκος της επαφής στο μοντέλο μας, το συνολικό ρεύμα θα πρέπει να είναι το ίδιο σε κάθε θέση  $x$ . Επομένως μπορούμε να το υπολογίσουμε σε όποια θέση θέλουμε. Επιλέγουμε λοιπόν να το υπολογίσουμε στις ασυμπτωτικές περιοχές της επαφής ( $x < 0$  ή  $x > d$ ). Έχοντας εκφράσει το ρεύμα οιωনী σωματιδίων και τον πηγαίο όρο με τη βοήθεια της συνάρτησης Green, μπορούμε να αντικαταστήσουμε τη μορφή της συνάρτησης Green στις

ασυμπτωτικές περιοχές (σχέσεις (3.81) και (3.84)) και να καταλήξουμε σε μια σχέση για το συνολικό υπερρεύμα συναρτήσει των συντελεστών ανάκλασης για πρόσπτωση διεγέρσεων που είναι ιδιάζουσες ιδιοσυναρτήσεις των ασυμπτωτικών χαμιλτονιανών. Έτσι καταλήγουμε στον ονομαζόμενο τύπο των Furusaki-Tsukada [109] για το υπερρεύμα.

Ας ξεκινήσουμε με το ρεύμα των οιονεί σωματιδίων  $I_e$ . Παρατηρούμε από τον τύπο (7.12) ότι τα τμήματα της συνάρτησης Green που είναι συμμετρικά στην εναλλαγή του  $x$  και του  $x'$  δεν συνεισφέρουν στο ρεύμα. Επισκόπηση των τύπων (3.81) και (3.84) μας υποδεικνύει ότι οι μόνοι όροι στην ασυμπτωτική συνάρτηση Green που συνεισφέρουν είναι αυτοί στο άθροισμα ως προς  $ps, p's'$  με  $p' = \bar{p}$ . Από αυτούς τους όρους, ας μελετήσουμε τα γινόμενα των σπινόρων, στα οποία θα κληθούμε να πάρουμε το ίχνος στο σύνθετο υποπίνακά τους που αντιστοιχεί στην κανονική συνάρτηση Green των ηλεκτρονίων (δηλ. στον υποπίνακα που συνεισφέρει στο  $\hat{G}$  κομμάτι της συνάρτησης Green και αντιστοιχεί στις μεταβλητές  $e$  και  $e$ ). Έτσι έχουμε

$$\phi_{es\nu}\tilde{\phi}_{hs'\nu}^T = \begin{pmatrix} u_\nu v_\nu A_s A_{s'}^T & \bar{s}' u_\nu^2 e^{i\chi_\nu} A_s A_{s'}^T \\ sv_\nu^2 e^{-i\chi_\nu} A_{\bar{s}} A_{\bar{s}'}^T & s\bar{s}' u_\nu v_\nu A_s A_{s'}^T \end{pmatrix} \quad (7.18)$$

και

$$\phi_{hs\nu}\tilde{\phi}_{es'\nu}^T = \begin{pmatrix} u_\nu v_\nu A_{\bar{s}} A_{s'}^T & s' v_\nu^2 e^{i\chi_\nu} A_{\bar{s}} A_{s'}^T \\ \bar{s} u_\nu^2 e^{-i\chi_\nu} A_s A_{s'}^T & \bar{s} s' u_\nu v_\nu A_s A_{s'}^T \end{pmatrix}. \quad (7.19)$$

Με δεδομένο ότι

$$\text{Tr}(A_s A_{s'}^T) = \delta_{ss'}, \quad (7.20)$$

συμπεραίνουμε ότι στο ρεύμα των οιονεί σωματιδίων συμμετέχουν όροι, όχι μόνο με  $p' = \bar{p}$ , αλλά και με  $s' = \bar{s}$ . Έτσι η σχέση (7.12) γράφεται

$$\langle I_e(x) \rangle = -\frac{e\hbar}{2im_\nu} \frac{1}{\beta} \sum_n \left\{ \sum_{ps} \frac{im_\nu \omega_n}{\hbar^2 k_{p\nu} \bar{\Omega}_\nu} \alpha_{ps, \bar{p}\bar{s}}^\nu \text{Tr} \left( \phi_{\bar{p}\bar{s}\nu} \tilde{\phi}_{ps\nu}^T \right) Y(x) \right\}, \quad (7.21)$$

όπου

$$Y(x) = \lim_{x' \rightarrow x} \frac{\partial}{\partial x'} \left( e^{-i\nu\bar{p}k_{\bar{p}\nu}(x-d_\nu) - i\nu pk_{p\nu}(x'-d_\nu)} - e^{-i\nu\bar{p}k_{\bar{p}\nu}(x'-d_\nu) - i\nu pk_{p\nu}(x-d_\nu)} \right), \quad (7.22)$$

$$\bar{\Omega}_\nu = \sqrt{\omega_n^2 + |\Delta_\nu|^2} \quad (7.23)$$

και  $d_\nu$  είναι, είτε  $d_\ell = 0$ , είτε  $d_r = d$ . Επίσης

$$\text{Tr} \left( \phi_{\bar{p}\bar{s}\nu} \tilde{\phi}_{ps\nu}^T \right) = u_\nu v_\nu = \frac{|\Delta_\nu|}{2i\omega_n} \quad (7.24)$$

και η συνάρτηση  $Y(x)$  απλοποιείται ως εξής

$$Y(x) = -i\nu p(k_{p\nu} + k_{\bar{p}\nu}) e^{-i(\nu\bar{p}k_{\bar{p}\nu} + \nu p k_{p\nu})(x-d_\nu)}. \quad (7.25)$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (7.21), τελικά προκύπτει

$$\langle I_e(x) \rangle = \nu \frac{e|\Delta_\nu|}{\hbar\beta} \sum_n \frac{1}{4\bar{\Omega}_\nu} \left\{ \sum_{ps} (k_{p\nu} + k_{\bar{p}\nu}) p \frac{\alpha_{ps,\bar{p}\bar{s}}^\nu}{k_{p\nu}} e^{-i\nu(pk_{p\nu} + \bar{p}k_{\bar{p}\nu})(x-d_\nu)} \right\}. \quad (7.26)$$

Η παραπάνω σχέση μας δίνει το ρεύμα των ιωνεί σωματιδίων στις ασυμπτωτικές περιοχές της επαφής. Το συνολικό ρεύμα είναι ίσο με το ρεύμα των ιωνεί σωματιδίων στα σημεία  $x_0$ , όπου μηδενίζεται το ρεύμα του πηγαιού όρου. Τέτοια σημεία είναι και τα  $d_\nu$ , που ανήκουν στα όρια των ασυμπτωτικών περιοχών. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η ασυμπτωτική μορφή της συνάρτησης Green είναι προσεγγιστική στις ασυμπτωτικές περιοχές και το γεγονός ότι στην ενδιάμεση περιοχή η συνάρτηση χάσματος θεωρείται είτε αυτοσυνεπής, είτε μηδέν. Έτσι στην ενδιάμεση περιοχή ο πηγαιός όρος είναι παντού μηδέν, άρα και το ρεύμα αυτού στα σημεία  $x_0 = d_\nu$  λόγω συνέχειας. Επομένως το συνολικό ρεύμα στην επαφή δίνεται από τη σχέση

$$I = \nu \frac{e|\Delta_\nu|}{\hbar\beta} \sum_n \frac{1}{4\bar{\Omega}_\nu} \left\{ \sum_{ps} (k_{p\nu} + k_{\bar{p}\nu}) p \frac{\alpha_{ps,\bar{p}\bar{s}}^\nu}{k_{p\nu}} \right\}. \quad (7.27)$$

Στην αριστερή ασυμπτωτική περιοχή, η σχέση (7.27) παίρνει τη μορφή <sup>1</sup>

$$I = \frac{e|\Delta_\ell|}{\hbar\beta} \sum_n \frac{1}{4\bar{\Omega}_\ell} (k_{e\ell} + k_{h\ell}) \left\{ \frac{\alpha_{e\uparrow,h\downarrow}^\ell}{k_{e\ell}} + \frac{\alpha_{e\downarrow,h\uparrow}^\ell}{k_{e\ell}} - \frac{\alpha_{h\uparrow,e\downarrow}^\ell}{k_{h\ell}} - \frac{\alpha_{h\downarrow,e\uparrow}^\ell}{k_{h\ell}} \right\}. \quad (7.28)$$

Στη συνέχεια θα δώσουμε μια σύντομη περιγραφή του πως υπολογίζεται το ρεύμα του πηγαιού όρου, ώστε να επαληθεύσουμε τα παραπάνω αποτελέσματα. Ξεκινούμε με

<sup>1</sup>Η σχέση αυτή έχει χρησιμοποιηθεί και στην αναφορά [125].

τη σχέση (7.16) και εκτελούμε την πράξη του ίχνους, η οποία περιλαμβάνει μόνο το γινόμενο των σπινόρων  $\phi_{ps\nu}$ . Συγκεκριμένα πρέπει να υπολογίσουμε τις παραστάσεις

$$\text{Tr} \left( i\sigma_y \left( \phi_{ps\nu} \tilde{\phi}_{p's'\nu}^T \right) \Big|_{\hat{F}} \right),$$

όπου από το γινόμενο των σπινόρων απομονώνεται το σύνθετο κομμάτι του που αντιστοιχεί στο κομμάτι  $\hat{F}$  της συνάρτησης Green, δηλαδή στο σύνθετο κομμάτι του γινομένου των σπινόρων που αντιστοιχεί στις παραμέτρους  $e$  και  $h$ , οι οποίες χαρακτηρίζουν το σωματιδιακό βαθμό ελευθερίας. Τότε παρατηρούμε ότι, από τους όρους στην ασυμπτωτική συνάρτηση Green (3.81) και (3.84), επιβιώνουν μόνο αυτοί που περιέχουν την ελεύθερη συνάρτηση Green και τους συντελεστές κανονικής ανάκλασης με διατήρηση του σπιν ( $\alpha_{ps,ps}^\nu$ ), καθώς και οι όροι που περιέχουν τους συντελεστές ανάκλασης Andreev ( $\alpha_{ps,\bar{p}\bar{s}}^\nu$ ). Οι τελευταίοι όμως είναι αυτοί που επιβιώνουν τελικά, αφού οι κανονικοί συντελεστές ανάκλασης μαζί με την ελεύθερη Green δίνουν συνεισφορά που είναι πραγματικός αριθμός. Αυτό μπορεί να διαπιστωθεί, αν χρησιμοποιηθούν και οι σχέσεις συμμετρίας για τους κανονικούς συντελεστές ανάκλασης που εξάγονται από τη συμμετρία της συζυγίας Bogoliubov (ενότητα 5.3). Στη συνέχεια και με τους όρους που απέμειναν, χρησιμοποιούμε τη σχέση (7.15) και υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα του πηγαίου όρου, φτάνοντας σε ένα αποτέλεσμα ίδιο με αυτό του τύπου (7.26), αλλά με τη διαφορά ότι ο εκθετικός παράγοντας, που περιέχει και την εξάρτηση από τη θέση  $x$ , αντικαθίσταται από  $1 - e^{-i\nu(pk_{p\nu} + \bar{p}k_{\bar{p}\nu})(x-d_\nu)}$ . Προσθέτοντας το ρεύμα των οιονεί σωματιδίων με το ολοκλήρωμα του πηγαίου όρου, καταλήγουμε στο αποτέλεσμα (7.27).

### 7.3 Υπερρέυμα από την ορίζουσα του πίνακα των συνθηκών συρραφής

Σε αυτή την ενότητα θα παρουσιάσουμε έναν νέο τύπο για το υπερρέυμα σε μια επαφή Josephson, που το σχετίζει με την ορίζουσα του πίνακα των συνθηκών συρραφής  $\Gamma$ . Η απόδειξη που θα παρουσιάσουμε θα γίνει με πράξεις στη σχέση (7.28).

Αντικαθιστούμε για κάθε συντελεστή Andreev στη σχέση (7.28) το ισοδύναμό του ηλίκιο ορίζουσών, που δίνεται από τη σχέση (2.82). Οι παρονομαστές είναι ταυτόσημοι για κάθε συντελεστή ανάκλασης και ίσοι με την ορίζουσα του πίνακα συνθηκών συρραφής. Οι αριθμητές είναι ορίζουσες του πίνακα συνθηκών συρραφής με μία από τις τέσσερις πρώτες στήλες τους να έχει αντικατασταθεί με τη στήλη  $B_{psl}$  (βλ. σχέσεις (2.76) και (2.77)). Στη συνέχεια κάνουμε το ανάπτυγμα Laplace κάθε ορίζουσας στον αριθμητή ως προς τις τέσσερις πρώτες στήλες και παίρνουμε σαν αποτέλεσμα ένα άθροισμα γινομένων ελλάσσονων ορίζουσών  $4 \times 4$  με τα αντίστοιχα αλγεβρικά τους συμπληρώματα, με κάθε γινόμενο να αντιστοιχεί σε μία επιλογή τεσσάρων γραμμών

από την αρχική ορίζουσα του αριθμητή  $\Gamma_{ps,\bar{p}\bar{s}}^{\alpha,\ell}$ . Η επιλογή των τεσσάρων γραμμών γίνεται μεταξύ των οχτώ πρώτων γραμμών του πίνακα  $\Gamma_{ps,\bar{p}\bar{s}}^{\alpha,\ell}$ , δηλαδή από τις θέσεις των υποπινάκων  $L_1, L_2$  της αρχικής ορίζουσας  $\Gamma$ . Εφόσον οι ορίζουσες  $\Gamma_{ps,\bar{p}\bar{s}}^{\alpha,\ell}$  στον αριθμητή διαφέρουν από τη  $\Gamma$  και μεταξύ τους κατά μία ή μερικές από τις τέσσερις πρώτες στήλες τους, τα αλγεβρικά συμπληρώματα κατά την ανάπτυξη Laplace όλων αυτών των ορίζουσών είναι ίδια μεταξύ τους. Επομένως έχουμε

$$\alpha_{ps,\bar{p}\bar{s}}^{\ell} = \frac{1}{\Gamma} \sum_{r_1, r_2, r_3, r_4} \Gamma_{ps,\bar{p}\bar{s}}^{\alpha,\ell}[r_1, r_2, r_3, r_4] D[r_1, r_2, r_3, r_4] \quad (7.29)$$

και

$$\Gamma = \sum_{r_1, r_2, r_3, r_4} \Gamma[r_1, r_2, r_3, r_4] D[r_1, r_2, r_3, r_4], \quad (7.30)$$

όπου  $\Gamma_{ps,\bar{p}\bar{s}}^{\alpha,\ell}[r_1, r_2, r_3, r_4]$  και  $\Gamma[r_1, r_2, r_3, r_4]$  είναι οι ελάχιστονες ορίζουσες των  $\Gamma_{ps,\bar{p}\bar{s}}^{\alpha,\ell}$  και  $\Gamma$  αντίστοιχα, που καθορίζονται από τις τέσσερις πρώτες στήλες και τις γραμμές  $r_1, r_2, r_3, r_4$ . Επίσης  $D[r_1, r_2, r_3, r_4]$  είναι τα κοινά τους αλγεβρικά συμπληρώματα. Έτσι έχουμε

$$\frac{\Delta_{\ell}}{4\Omega_{\ell}} (k_{e\ell} + k_{h\ell}) \sum_{ps} p \frac{\alpha_{ps,\bar{p}\bar{s}}^{\ell}}{k_{p\ell}} = \frac{1}{\Gamma} \sum_{r_1, r_2, r_3, r_4} X[r_1, r_2, r_3, r_4] D[r_1, r_2, r_3, r_4], \quad (7.31)$$

όπου

$$X[r_1, r_2, r_3, r_4] = \frac{\Delta_{\ell}}{4\Omega_{\ell}} (k_{e\ell} + k_{h\ell}) \sum_{ps} p \frac{\Gamma_{ps,\bar{p}\bar{s}}^{\alpha,\ell}[r_1, r_2, r_3, r_4]}{k_{p\ell}}. \quad (7.32)$$

Σημειώνουμε ότι οι φάσεις της συνάρτησης χάσματος στα αριστερά και τα δεξιά μπορούν να επιλεγούν αυθαίρετα, αρκεί η διαφορά τους να μένει η ίδια. Επομένως μπορούμε να υποθέσουμε ότι στην αριστερή ασυμπτωτική περιοχή η φάση είναι ίση με  $-\chi$  και ίση με μηδέν στη δεξιά ασυμπτωτική περιοχή. Αυτό έχει σαν συνέπεια ότι η διαφορά φάσης μεταξύ των ασυμπτωτικών περιοχών περιέχεται εξ' ολοκλήρου στους υποπίνακες  $L_1, L_2$  του πίνακα των συνθηκών συρραφής. Τότε οι ποσότητες  $X[r_1, r_2, r_3, r_4]$  μπορούν να κατηγοριοποιηθούν ανάλογα με την εξάρτησή τους από τη διαφορά φάσης  $\chi$ . Έτσι οι ελάχιστονες ορίζουσες που σχηματίζονται από τις τέσσερις πρώτες γραμμές, δηλ. από τις γραμμές του υποπίνακα  $L_1$ , περιέχουν ένα παράγοντα φάσης  $e^{-2i\chi}$ , ενώ οι ελάχιστονες ορίζουσες που σχηματίζονται από τις γραμμές του υποπίνακα  $L_2$  περιέχουν τον παράγοντα φάσης  $e^{2i\chi}$ . Οι ελάχιστονες ορίζουσες που σχηματίζονται από μία

γραμμή από τον υποπίνακα  $L_1$  ( $L_2$ ) και τρεις γραμμές από τον υποπίνακα  $L_2$  ( $L_1$ ) περιέχουν τον παράγοντα  $e^{i\chi}$  ( $e^{-i\chi}$ ), ενώ οι ελάχιστονες ορίζουσες που σχηματίζονται από δύο γραμμές από κάθε έναν από τους  $L_1, L_2$  είναι ανεξάρτητες του  $\chi$ . Τότε, εκτελώντας τις πράξεις στην παράσταση (7.32) και συγκρίνοντας το αποτέλεσμα με την αντίστοιχη ελάχιστονα ορίζουσα  $\Gamma[r_1, r_2, r_3, r_4]$ , που προκύπτει από την ίδια επιλογή γραμμών στο ανάπτυγμα Laplace της  $\Gamma$ , καταλήγουμε στο εξής συμπέρασμα: Οι όροι στην τροποποιημένη ελάχιστονα ορίζουσα  $X$  που είναι ανεξάρτητοι του  $\chi$  μηδενίζονται. Οι όροι που εξαρτώνται από το  $e^{i\chi}$  ( $e^{-i\chi}$ ) είναι ίσοι με  $i(-i)$  επί την αντίστοιχη ελάχιστονα ορίζουσα  $\Gamma[r_1, r_2, r_3, r_4]$ , εκτός από όταν μηδενίζονται και οι δύο. Τέλος οι όροι που περιέχουν τον παράγοντα  $e^{2i\chi}$  ( $e^{-2i\chi}$ ) είναι ίσοι με  $2i(-2i)$  επί την αντίστοιχη ελάχιστονα ορίζουσα  $\Gamma[r_1, r_2, r_3, r_4]$ . Αυτό σημαίνει ότι η παράσταση  $X[r_1, r_2, r_3, r_4]$  είναι ίση με την παράγωγο ως προς  $\chi$  της αντίστοιχης  $\Gamma[r_1, r_2, r_3, r_4]$ . Επομένως γράφουμε

$$I = \frac{e}{\hbar\beta} \sum_n \frac{1}{\Gamma(\chi, i\omega_n)} \frac{\partial \Gamma(\chi, i\omega_n)}{\partial \chi}. \quad (7.33)$$

Ο παραπάνω τύπος, εκτός από τη θεωρητική του αξία και την δυνατότητα αριθμητικής του αξιοποίησης, μας καταδεικνύει το εξής: όπως είναι φανερό από τη συζήτηση στο κεφάλαιο 2 (ενότητα 2.4), η ορίζουσα του πίνακα των συνθηκών συρραφής  $\Gamma$  εξαρτάται μόνο από τις γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις στην αριστερή ασυμπτωτική, τη δεξιά ασυμπτωτική και την ενδιάμεση περιοχή της επαφής και όχι από λύσεις των εξισώσεων BdG που ικανοποιούν συγκεκριμένες συνθήκες πρόσπτωσης. Επομένως το υπερρεύμα της επαφής στην κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας εξαρτάται μόνο από τη δομή της επαφής και όχι από λύσεις με συγκεκριμένες συνθήκες πρόσπτωσης.

Ο τύπος (7.33) παρουσιάστηκε στην αναφορά [100]. Επίσης ένας παρόμοιος τύπος έχει δημοσιευτεί στην αναφορά [65]. Στη δική μας εκδοχή της απόδειξης φαίνεται ότι ο τύπος (7.33) ισχύει, ο,τιδήποτε και αν υπάρχει στην ενδιάμεση περιοχή, καθώς καμία υπόθεση δεν γίνεται περί αυτού. Επομένως ισχύει ακόμα και για αυτοσυνεπή προσδιορισμό της συνάρτησης χάσματος στην ενδιάμεση περιοχή. Ο περιορισμός της είναι ότι ισχύει μόνο για υπεραγώγιμα ηλεκτρόδια συμβατικού τύπου. Παρόλα αυτά το πιο πιθανό είναι ότι μπορεί να δειχθεί ότι ισχύει ακόμα και για ηλεκτρόδια μη συμβατικού τύπου. Αντίθετα, στην αναφορά [65], η απόδειξη του τύπου (7.33) βασίζεται στο μη αυτοσυνεπές τμηματικά σταθερής συνάρτησης χάσματος μοντέλο, με ενδιάμεσο στρώμα χωρίς μαγνήτιση, αλλά σπιν ενεργές ενδοεπιφάνειες.

Ο τύπος (7.33) είναι επίσης γενίκευση ενός τύπου που ισχύει για σιδηρομαγνητικές επαφές Josephson με συγγραμμικές μαγνητίσεις, που δίνεται στην αναφορά [126]. Μπορεί επίσης να γραφεί στη μορφή



$$I = -\frac{e}{\hbar\beta} \sum_n \frac{\partial}{\partial\chi} \ln \frac{1}{\Gamma(\chi, i\omega_n)}. \quad (7.34)$$

Σε αυτή τη μορφή θυμίζει τη γνωστή σχέση για το υπερρεύμα  $I = -\frac{2e}{\hbar} \frac{\partial F}{\partial\chi}$ . Με αυτή την αφετηρία, πιστεύουμε ότι είναι δυνατό η ισχύς του τύπου (7.33) να γενικευτεί και στην περίπτωση που τα υπεραγώγιμα ηλεκτρόδια είναι μη συμβατικού τύπου.

Όπως θα δούμε παρακάτω, η ορίζουσα  $\Gamma$  υπολογισμένη για φανταστική ενέργεια είναι ένας πραγματικός αριθμός. Επομένως ο λογάριθμος στη σχέση (7.34) είναι μια πραγματική συνάρτηση και δεν χρειάζεται προσοχή, όσον αφορά την επιλογή κάποιου κλάδου.

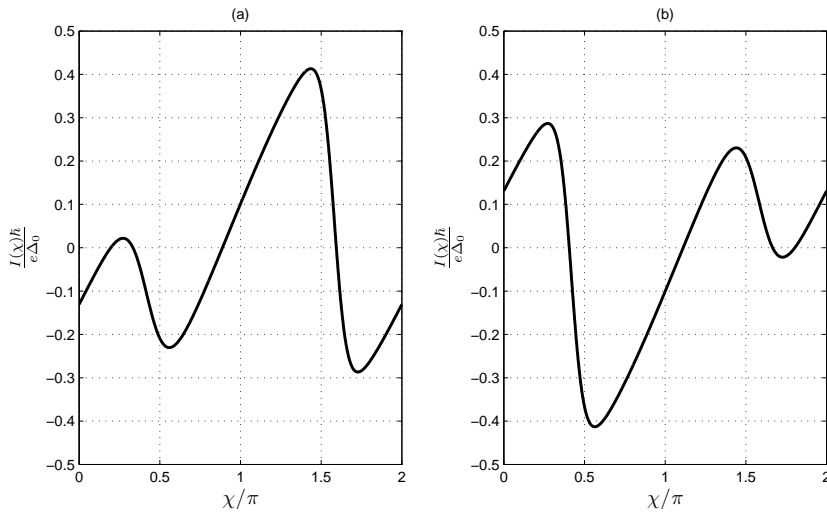
## 7.4 Συμμετρίες της σχέσης υπερρεύματος-φάσης και της ορίζουσας του πίνακα των συνθηκών συρραφής

Σε αυτό το σημείο και αφού έχουμε παρουσιάσει τους τρόπους υπολογισμού του υπερρεύματος, θα θέλαμε να εξετάσουμε τις επιπτώσεις των ιδιοτήτων συμμετρίας που εξετάσαμε στα κεφάλαια 4 και 5 στη σχέση υπερρεύματος φάσης (CPR), στην ορίζουσα του πίνακα των συνθηκών συρραφής και κατ' επέκταση στις δέσμιες καταστάσεις Andreev. Θα παρουσιάσουμε αυτό το υλικό με την ίδια σειρά που παρουσιάστηκαν οι αντίστοιχες συνθήκες συμμετρίας.

Ξεκινούμε από το μετασχηματισμό της μιγαδικής συζυγίας του κεφαλαίου 4. Έχοντας υπόψη μας τη σχέση (7.28) για το υπερρεύμα και αξιοποιώντας τη σχέση συμμετρίας (4.22), καταλήγουμε στη σχέση

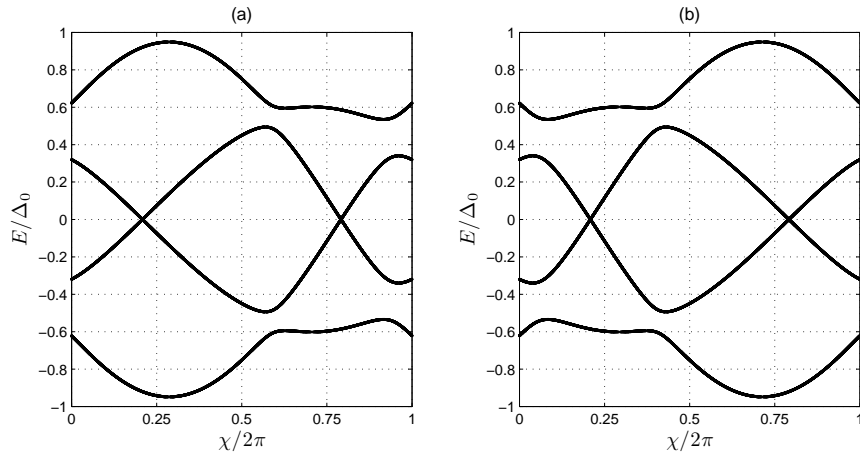
$$I(\phi, \chi) = -I(-\phi, -\chi). \quad (7.35)$$

Ας υποθέσουμε ότι δίνεται η σχέση υπερρεύματος φάσης στο διάστημα  $\chi \in [0, 2\pi]$  για δύο σιδηρομαγνητικές επαφές Josephson που η γεωμετρία των μαγνητίσεων τους διαφέρει στο πρόσημο της πολικής γωνίας και άρα η μία γεωμετρία είναι προβολή της άλλης ως προς το επίπεδο  $zx$ . Τότε η σχέση (7.35) καταδεικνύει ότι δύο σιδηρομαγνητικές επαφές Josephson έχουν σχέσεις υπερρεύματος φάσης που συμπεφτει η μία με την άλλη, αν αλλάξουμε το πρόσημο του ρεύματος και περιστρέψουμε όλη την καμπύλη γύρω από τον άξονα  $\chi = \pi$  κατά 180 μοίρες, όπως φαίνεται στο Σχ.7.1. Η στροφή αυτή είναι αναγκαία, ώστε να φέρει το  $\chi$  στο  $2\pi - \chi$  ή ισοδύναμα στο  $-\chi$ , αφού η σχέση υπερρεύματος φάσης είναι περιοδική ως προς τη μεταβλητή  $\chi$ , με περίοδο  $2\pi$ . Οφείλουμε επίσης να παρατηρήσουμε ότι η σχέση υπερρεύματος φάσης είναι ανεξάρτητη



Σχήμα 7.1: Σχέσεις υπερρεύματος φάσης για δύο επαφές με ένα σιδηρομαγνητικό στρώμα και σπιν ενεργές ενδοεπιφάνειες: (a) με γεωμετρία μαγνητίσεων στις διευθύνσεις  $z, x, y$ , (b) με γεωμετρία μαγνητίσεων  $z, x, -y$  ή  $-z, -x, -y$ . Οι υπόλοιπες παράμετροι είναι: θερμοκρασία  $T/T_c = 0.1$ , συνάρτηση χάσματος μηδενικής θερμοκρασίας  $\Delta_{0\ell,r}/E_F = 0.001$ , κανονικοποιημένη ισχύς κανονικής ενδοεπιφανειακής σκέδασης  $Z_{nl,r} = 0$ , κανονικοποιημένη ισχύς ενδοεπιφανειακής μαγνήτισης  $Z_{ml,r} = 1$ , κανονικοποιημένο πάχος ενδιάμεσου στρώματος  $k_F d = 20$ , μαγνήτιση ενδιάμεσου στρώματος  $M/E_F = 0.5$ .

της επιλογής του άξονα κβάντωσης, που είναι ισοδύναμο με το να πούμε ότι παραμένει η ίδια, αν όλες οι μαγνητίσεις του συστήματος περιστραφούν κατά τον ίδιο τρόπο. Επομένως η επιλογή του επιπέδου  $zx$ , ως προς το οποίο προβάλλονται οι πολικές γωνίες, είναι αυθαίρετη.



Σχήμα 7.2: Ενεργειακό φάσμα δέσμιων καταστάσεων Andreev για δύο επαφές με ένα σιδηρομαγνητικό στρώμα και σπιν ενεργές ενδοεπιφάνειες: (a) με γεωμετρία μαγνητίσεων στις διευθύνσεις  $z, x, y$ , (b) με γεωμετρία μαγνητίσεων  $z, x, -y$  ή  $-z, -x, -y$ . Οι υπόλοιπες παράμετροι είναι όπως στο Σχ.7.1.

Για να βγάλουμε συμπεράσματα για τη συμμετρία της ορίζουσας του πίνακα των συνθηκών συρραφής και κατ' επέκταση για τις δέσμιες καταστάσεις Andreev, θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση

$$\frac{\partial}{\partial \chi} \ln \frac{1}{\Gamma(\chi; z)} = -\frac{i|\Delta_\ell|}{4\Omega_\ell(z)} (k_{e\ell}(z) + k_{h\ell}(z)) \sum_{ps} p \frac{\alpha_{ps, \bar{p}\bar{s}}^\ell(z)}{k_{p\ell}(z)}. \quad (7.36)$$

Ο κλάδος της λογαριθμικής συνάρτησης επιλέγεται να είναι ο αρνητικός πραγματικός ημίαξονας του πεδίου ορισμού της. Παρόλα αυτά, όποιος κλάδος και αν επιλεγεί το αποτέλεσμα είναι το ίδιο, επειδή οι κλάδοι της λογαριθμικής συνάρτησης διαφέρουν κατά έναν σταθερό φανταστικό αριθμό, ο οποίος απαλοίφεται όταν παραγωγιστεί ως προς τη φάση  $\chi$ .

Οφείλουμε να σημειώσουμε ότι η σχέση (7.36) αφορά όλες τις τιμές της μιγαδικής ενέργειας  $z$ , εκτός από τους κλάδους της μιγαδικής συνάρτησης  $\Gamma$  και τα σημεία μηδενισμού της, αφού στην εξαγωγή των τύπων (7.33) και (7.34) από τον τύπο (7.28) των Furusaki-Tsukada εκτελέσαμε μόνο αλγεβρικές πράξεις που παραμένουν σε ισχύ ακόμα και αν δεν υποθέσουμε εξ αρχής ότι  $z = i\omega_n$ . Χρησιμοποιώντας τη σχέση (7.36)

καταλήγουμε στο ακόλουθο συμπέρασμα για την ορίζουσα του πίνακα των συνθηκών συρραφής

$$\Gamma(\chi, \phi; z) = c\Gamma(-\chi, -\phi; z). \quad (7.37)$$

όπου  $c$  είναι μια σταθερά ως προς  $\chi$ , μη μηδενική, αλλά δεν είναι δυνατό να προσδιορίσουμε την εξάρτησή της από τις άλλες παραμέτρους της επαφής από τη σχέση (7.36). Εδώ το  $z$  παίρνει τιμές εκτός των κλάδων της συνάρτησης  $\Gamma$ , αλλά περιλαμβάνει και τα σημεία μηδενισμού της, αφού η συνάρτηση  $\Gamma$  είναι αναλυτική στα σημεία αυτά.

Το ενεργειακό φάσμα των δέσμιων καταστάσεων Andreev προκύπτει από τη συνθήκη

$$\Gamma(\chi, \phi, E) = 0. \quad (7.38)$$

Έτσι, η σχέση (7.37) μας δίνει

$$\begin{aligned} \Gamma(\chi, \phi, E_n(\chi, \phi)) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Gamma(-\chi, -\phi, E_n(\chi, \phi)) &= 0 \end{aligned} \quad (7.39)$$

και συνεπώς

$$E_n(\chi, \phi) = E_n(-\chi, -\phi) \quad (7.40)$$

Επομένως η σχέση (7.37) έχει μια ανάλογη επίπτωση στο φάσμα των δέσμιων καταστάσεων Andreev με αυτή που έχει η σχέση (7.35) στη σχέση υπερρεύματος φάσης. Δηλαδή τα φάσματα των δέσμιων καταστάσεων για τις δύο γεωμετρίες συμπεύτουν μεταξύ τους αν στρέψουμε το ένα κατά 180 μοίρες γύρω από τον άξονα  $\chi = \pi$ . Αυτό φαίνεται στο Σχ.7.2.

Με ανάλογο τρόπο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο των Furusaki-Tsukada και τις σχέσεις συμμετρίας (4.41), που πηγάζουν από την αντιστροφή χρόνου, για να καταλήξουμε στην παρακάτω σχέση

$$I(\mathbf{M}, \chi) = -I(-\mathbf{M}, -\chi). \quad (7.41)$$

Η παραπάνω σχέση σημαίνει ότι οι σχέσεις υπερρεύματος φάσης για δύο επαφές με γεωμετρίες αντίθετων μαγνητίσεων έρχονται σε ταύτιση, αν περιστραφούν γύρω από τον άξονα  $\chi = \pi$  κατά 180 μοίρες και αλλαχθεί το πρόσημο του ρεύματος. Αυτό φαίνεται και στο Σχ.7.1.

Η σχέση (7.41) είναι συμβατή με τη σχέση (7.35), αν λάβουμε υπόψη μας ότι το υπερρεύμα είναι περιοδική συνάρτηση των πολικών γωνιών  $\phi$  με περίοδο  $2\pi$ . Έτσι έχουμε την παρακάτω αλληλουχία σχέσεων

$$\begin{aligned}
 I(-\mathbf{M}, \chi) &= I(\pi + \phi, \pi - \theta, \chi) \\
 &= -I(-\pi - \phi, \pi - \theta, -\chi) \\
 &= -I(\pi - \phi, \pi - \theta, -\chi) \\
 &= I(-\phi, \theta, \chi),
 \end{aligned} \tag{7.42}$$

όπου στη δεύτερη σειρά χρησιμοποιούμε τη συμμετρία που οφείλεται στη μιγαδική συζυγία, στην τρίτη την περιοδικότητα του  $\phi$  και στην τέταρτη την αντιστροφή χρόνου.

Ομοίως, για την ορίζουσα του πίνακα των συνθηκών συρραφής, η αντιστροφή χρόνου δίνει

$$\Gamma(\mathbf{M}, \chi; z) = c\Gamma(-\mathbf{M}, -\chi; z). \tag{7.43}$$

Οι επιπτώσεις των συνθηκών (7.41) και (7.43) στη σχέση υπερρεύματος φάσης και στις δέσμιες καταστάσεις Andreev φαίνονται στο Σχ.7.1 και στο Σχ.7.2.

Στην περίπτωση που έχουμε επίπεδη γεωμετρία μαγνητίσεων, τότε ο μικτός μετασχηματισμός που περιγράψαμε στο κεφάλαιο 4 (ενότητα 4.4) έχει την παρακάτω επίπτωση στη σχέση υπερρεύματος φάσης

$$I(\chi) = -I(-\chi), \tag{7.44}$$

ενώ στην ορίζουσα του πίνακα συνθηκών συρραφής

$$\Gamma(\chi; z) = c\Gamma(-\chi; z). \tag{7.45}$$

Η σχέση (7.44) επιβάλλει η σχέση υπερρεύματος φάσης να έχει κέντρο αντισυμμετρίας το σημείο  $\chi = \pi$ , αν λάβουμε υπόψη μας και την περιοδικότητα ως προς  $\chi$  με περίοδο  $2\pi$ . Επίσης η σχέση (7.45) επιβάλλει το φάσμα των ενεργειών των καταστάσεων Andreev να έχει κέντρο συμμετρίας το σημείο  $\chi = \pi$ . Έτσι συμπεραίνουμε ότι, όταν οι μαγνητίσεις της επαφής είναι συνεπίπεδες, αρκεί να απεικονίζουμε τη σχέση υπερρεύματος φάσης και τις ενέργειες των δέσμιων καταστάσεων μόνο στο διάστημα  $\chi \in [0, \pi]$ . Επίσης είναι φανερό από τη σχέση (7.44) ότι το υπερρεύμα μηδενικής φάσης οφείλει να είναι μηδέν, όταν η γεωμετρία των μαγνητίσεων είναι συνεπίπεδη.

Σε αυτό το σημείο οφείλουμε να σημειώσουμε ότι το υπερρεύμα μηδενικής διαφοράς φάσης σε επαφές με συνεπίπεδη γεωμετρία μαγνητίσεων μπορεί να αποκλειστεί και

από τη σχέση (7.35). Αυτό φαίνεται ως εξής: αν επιλέξουμε το  $zx$  επίπεδο να ταυτίζεται με το επίπεδο των μαγνητίσεων, τότε όλες οι πολικές γωνίες  $\phi$  των μαγνητίσεων μηδενίζονται και από τη σχέση (7.35) καταλήγουμε στη σχέση (7.44). Όπως είπαμε, είμαστε ελεύθεροι να επιλέξουμε τον άξονα κβάντωσης του σπιν σε όποια διεύθυνση θέλουμε, χωρίς να επηρεαστεί το υπερρεύμα. Στη συγκεκριμένη επιλογή του επιπέδου  $zx$ , ο μικτός μετασχηματισμός ταυτίζεται με το μετασχηματισμό της μιγαδικής συζυγίας. Επομένως οι δύο μέθοδοι είναι ισοδύναμες.

Στη συνέχεια εξετάζουμε την επίδραση της συζυγίας Bogoliubov του κεφαλαίου 4 στις ιδιότητες της επαφής. Για τη σχέση υπερρεύματος φάσης δεν παίρνουμε κάποια καινούρια συνθήκη συμμετρίας. Όμως μπορούμε να εξάγουμε το συμπέρασμα, βασισμένοι στις σχέσεις (4.77) και (4.79), ότι η αθροιστέα ποσότητα ως προς  $\omega_n$  στον τύπο (7.27) είναι συμμετρική στα θετικά και αρνητικά  $\omega_n$  και συνεπώς μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε επί δύο και να αθροίσουμε μόνο τις θετικές συχνότητες Matsubara. Έτσι προκύπτει η σχέση

$$I = \nu \frac{e|\Delta_\nu|}{\hbar\beta} \sum_{\omega_n > 0} \frac{1}{2\Omega_\nu} \left\{ \sum_{ps} (k_{p\nu} + k_{\bar{p}\nu}) p \frac{\alpha_{ps, \bar{p}\bar{s}}^\nu}{k_{p\nu}} \right\}, \quad (7.46)$$

καθώς και η σχέση

$$I = \frac{2e}{\hbar\beta} \sum_{\omega_n > 0} \frac{1}{\Gamma(\chi, i\omega_n)} \frac{\partial \Gamma(\chi, i\omega_n)}{\partial \chi}. \quad (7.47)$$

Όσον αφορά την ορίζουσα των συνθηκών συρραφής, η επίδραση της συζυγίας Bogoliubov είναι να δώσει τη σχέση

$$\Gamma(\chi, z) = c\Gamma(\chi, -z). \quad (7.48)$$

Η παραπάνω σχέση έχει ως συνέπεια τη συμμετρία των ενεργειακών φάσματος των καταστάσεων Andreev μεταξύ θετικών και αρνητικών ενεργειών, δηλαδή η ευθεία  $E = 0$  είναι άξονας συμμετρίας του διαγράμματος. Αυτό φαίνεται καθαρά στο Σχ.7.2.

Τέλος αναφέρουμε το βασικό συμπέρασμα στο οποίο μας οδηγούν οι συνθήκες συμμετρίας του κεφαλαίου 5, το οποίο είναι ότι το υπερρεύμα, όπως δίνεται από τον τύπο των Furusaki-Tsukada, είναι μια πραγματική ποσότητα. Αυτό προκύπτει αμέσως από τη σχέση (5.20) και τις σχέσεις που την ακολουθούν (5.21) έως (5.24), δείχνοντας ότι  $I = I^*$ , αν μαζί με αυτές χρησιμοποιήσουμε και τη συμμετρία της αθροιστέας ποσότητας στο μετασχηματισμό  $z \rightarrow -z$ .

Επίσης, χρησιμοποιώντας τη σχέση (5.50) του κεφαλαίου 5, μπορούμε να απαλοίσουμε από τον τύπο των Fugusaki-Tsukada τους συντελεστές ανάκλασης που αντιστοιχούν σε πρόσπτωση διέγερσης χαρακτήρα οπής και να καταλήξουμε στη σχέση

$$I = \nu \frac{e|\Delta_\nu|}{\hbar\beta} \sum_{\omega_n > 0} \frac{1}{\Omega_\nu} (k_{e\nu} + k_{h\nu}) \operatorname{Re} \left\{ \frac{\alpha_{e\uparrow, h\downarrow}^\nu}{k_{e\nu}} + \frac{\alpha_{e\downarrow, h\uparrow}^\nu}{k_{e\nu}} \right\}. \quad (7.49)$$

Ολοκληρώνουμε αυτή την ενότητα με δύο παρατηρήσεις. Κατ' αρχάς η σταθερά αναλογίας  $c$ , που εμφανίζεται στις σχέσεις συμμετρίας για την ορίζουσα  $\Gamma$ , είναι πιθανότατα ίση με τη μονάδα, όπως προκύπτει από αριθμητικούς υπολογισμούς στο μη αυτοσυνεπές μοντέλο. Απλά με τη μέθοδο που χρησιμοποιούμε δεν μπορεί να προσδιοριστεί περαιτέρω θεωρητικά. Επίσης με προσεχτικούς υπολογισμούς στην ορίζουσα  $\Gamma$  μπορούμε να αποδείξουμε ότι

$$\Gamma(z)^* = \Gamma(-z^*), \quad (7.50)$$

παίρνοντας το μιγαδικό συζυγή και αναδιατάσσοντας γραμμές και στήλες της ορίζουσας. Έτσι αποδεικνύεται ότι η ορίζουσα του πίνακα των συνθηκών συρραφής είναι μια πραγματική ποσότητα στο πεδίο των συχνοτήτων Matsubara. Η σχέση αυτή μπορεί να δειχθεί, με απροσδιοριστία μιας πολλαπλασιαστικής σταθεράς, από τη σχέση συμμετρίας (5.50), μέσω της σχέσης (7.36). Σίγουρα όμως θα πρέπει να υπάρχει μια σχέση που να συνδέει την ορίζουσα απευθείας με γνωστά μετασχηματιζόμενες ποσότητες, κι όχι μέσω της παραγώγου της.

## 7.5 Η εξάρτηση του υπερρεύματος από τις διευθύνσεις των μαγνητίσεων της επαφής - Μη αυτοσυνεπές μοντέλο

Στην παρούσα ενότητα θα υπολογίσουμε την ορίζουσα  $\Gamma$  του πίνακα των συνθηκών συρραφής, για να αντλήσουμε πληροφορίες για την εξάρτηση του υπερρεύματος από τις διευθύνσεις των μαγνητίσεων του συστήματος. Θα θεωρήσουμε μία επαφή με ένα ενδιάμεσο στρώμα και μαγνητικές ενδοεπιφάνειες εκατέρωθεν αυτού. Επίσης θα χρησιμοποιήσουμε την προσέγγιση του τμηματικά σταθερού δυναμικού ζεύγους, όπως το περιγράψαμε στο κεφάλαιο 2. Αυτό σημαίνει ότι το δυναμικό ζεύγους δεν είναι αυτοσυνεπές. Έτσι όμως διευκολύνονται οι πράξεις, που παρόλα αυτά είναι ακόμη πολύ απαιτητικές.

Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο του αναπτύγματος Laplace, για να υπολογίσουμε την ορίζουσα  $\Gamma$ . Επίσης είναι βολικό να διακρίνουμε τους όρους του αναπτύγματος ανάλογα με την εξάρτησή τους από τη διαφορά φάσης  $\chi$  μεταξύ των δύο υπεραγωγών. Αυτή τη φορά θα θέσουμε, χωρίς απώλεια γενικότητας,  $\chi_\ell = 0$  και  $\chi_r = \chi$ . Το τελικό αποτέλεσμα για την ορίζουσα  $\Gamma$  έχει την ακόλουθη εξάρτηση από τη διαφορά φάσης  $\chi$ :

$$\Gamma(\chi, i\omega_n) = A \cos 2\chi + B \sin \chi + C \cos \chi + D, \quad (7.51)$$

όπου τα  $A, B, C, D$  είναι ανεξάρτητα του  $\chi$ , αλλά κατά τα άλλα πολύπλοκες συναρτήσεις των κυματανυσμάτων, του πάχους  $d$  της επαφής, των μαγνητίσεων του σιδηρομαγνητικού στρώματος και των ενδοεπιφανειών, των ισχύων κανονικής σκέδασης των ενδοεπιφανειών και των  $u_\nu, v_\nu, \nu = \ell, r$ . Αντικαθιστώντας στην σχέση (7.33), έχουμε

$$I = -\frac{e}{\hbar\beta} \sum_n \frac{2A \sin 2\chi - B \cos \chi + C \sin \chi}{A \cos 2\chi + B \sin \chi + C \cos \chi + D}. \quad (7.52)$$

Παρατηρούμε ότι ο όρος  $\cos \chi$  στον αριθμητή (που προέρχεται από τον όρο  $\sin \chi$  στον παρονομαστή) είναι αιτία για την πιθανή ύπαρξη υπερρεύματος μηδενικής φάσης στην επαφή. Είναι επίσης φανερό ότι ο όρος αυτός θα έχει επίδραση στο υπερρέυμα ακόμα και για μη μηδενικές τιμές της διαφοράς φάσης. Για να πετύχουμε μεγαλύτερη κατανόηση αυτού του φαινομένου, συνεχίζουμε με τον υπολογισμό, έστω μερικό, της ορίζουσας  $\Gamma$ .

Αναπτύσσουμε την ορίζουσα  $\Gamma$  ως προς τις πρώτες και τις τελευταίες τέσσερις στήλες. Τότε η ορίζουσα ισούται με ένα άθροισμα γινομένων  $8 \times 8$  ελασσόνων οριζουσών επί τα αλγεβρικά τους συμπληρώματα. Είναι προφανές ότι ο μόνος τρόπος αυτές οι ελάσσονες ορίζουσες να μην περιέχουν γραμμές μηδενικών είναι να επιλέξουμε τέσσερις από τις γραμμές από τους υποπίνακες  $L_1, L_2$  και άλλες τέσσερις από τους υποπίνακες  $R_1, R_2$ . Τότε οι ελάσσονες ορίζουσες είναι σύνθετα διαγώνιες, με το ένα σύνθετο τμήμα να αποτελείται από έναν  $4 \times 4$  υποπίνακα του  $(L_1; L_2)$  και το άλλο να αποτελείται από έναν  $4 \times 4$  υποπίνακα του  $(R_1; R_2)$ . Εδώ το ερωτηματικό σημαίνει ότι οι πίνακες που χωρίζει ενώνονται κάθετα. Και τα αλγεβρικά συμπληρώματα όμως των ελασσόνων οριζουσών παίρνουν σύνθετη διαγώνια ή αντιδιαγώνια μορφή.

Κατ' αρχάς θα απομονώσουμε όρους από το ανάπτυγμα Laplace που περιέχουν τον παράγοντα φάσης  $e^{\pm 2i\chi}$ . Ο μόνος όρος που περιέχει τον παράγοντα  $e^{2i\chi}$  ( $e^{-2i\chi}$ ) είναι αυτός που προκύπτει από επιλογή των τεσσάρων γραμμών του  $L_2$  ( $L_1$ ) μαζί με τις τέσσερις γραμμές του  $R_1$  ( $R_2$ ). Το αντίστοιχο αλγεβρικό συμπλήρωμα ανάγεται στο γινόμενο οριζουσών  $\det(S_{11})\det(s_{22})$  ( $\det(s_{11})\det(S_{22})$ ). Οι συντελεστές των  $e^{2i\chi}$  και  $e^{-2i\chi}$  προκύπτουν ταυτόσημοι και αθροίζοντάς τους παίρνουμε



$$A = 32 \prod_{\nu} (k_{e\nu} + k_{h\nu})^2 u_{\nu}^2 v_{\nu}^2 \prod_{p,s} q_{ps}. \quad (7.53)$$

Είναι φανερό ότι, στο πεδίο των συχνοτήτων Matsubara, ο συντελεστής  $A$  είναι μία πραγματική ποσότητα.

Οι υπόλοιποι συντελεστές  $B, C, D$  δεν είναι τόσο εύκολο να υπολογιστούν. Είναι πολύπλοκες συναρτήσεις των παραμέτρων της επαφής και συνεπώς αρκετά μακροσκελείς, ώστε να μην είναι παρουσιάσιμες. Μπορούμε όμως να παρουσιάσουμε με σχετική ευκολία την εξάρτηση αυτών των συντελεστών από τις διευθύνσεις των μαγνητίσεων της επαφής. Για να το κάνουμε αυτό για τους συντελεστές  $B$  και  $C$ , πρέπει να απομονώσουμε τους όρους του αναπτύγματος Laplace της ορίζουσας  $\Gamma$  που περιέχουν τους παράγοντες φάσης  $e^{\pm i\chi}$ . Οι όροι που περιέχουν τον παράγοντα  $e^{i\chi}$  ( $e^{-i\chi}$ ) προκύπτουν από την επιλογή τριών γραμμών από τον  $R_1$  ( $R_2$ ) και μιας γραμμής από τον  $R_2$  ( $R_1$ ). Για να μην μηδενίζονται ταυτοτικά τα αλγεβρικά συμπληρώματα, είμαστε υποχρεωμένοι να επιλέξουμε μία μόνο γραμμή από τον  $L_1$  ( $L_2$ ) και τρεις γραμμές από τον  $L_2$  ( $L_1$ ), συμπληρώνοντας έτσι τις οκτώ γραμμές που χρειάζονται. Προκύπτει ότι όλοι οι όροι αυτής της κατηγορίας (δηλαδή αυτοί που περιέχουν τον παράγοντα  $e^{\pm i\chi}$ ) εμφανίζονται σε μιγαδικά συζυγή ζεύγη, ώστε η συνεισφορά τους στην ορίζουσα  $\Gamma$  να είναι πραγματική. Η εξάρτηση των  $B$  και  $C$  από τις διευθύνσεις των μαγνητίσεων είναι

$$B = a \boldsymbol{\xi} \cdot (\boldsymbol{\eta} \times \boldsymbol{\zeta}) \quad (7.54)$$

και

$$C = a_0 + a_1 \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\eta} + a_2 \boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\zeta} + a_3 \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\zeta} + a_4 (\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\eta})(\boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\zeta}), \quad (7.55)$$

όπου  $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\zeta}$  είναι οι κατευθύνσεις των ενδοεπιφανειακών μαγνητίσεων αριστερά και δεξιά αντίστοιχα και  $\boldsymbol{\eta}$  είναι η κατεύθυνση της μαγνήτισης του ενδιάμεσου σιδηρομαγνήτη. Επίσης τα  $a$  είναι πολύπλοκες συναρτήσεις των κυματανυσμάτων, του πάχους  $d$ , των ισχύων ενδοεπιφανειακής μαγνήτισης και σκέδασης και των  $u_{\nu}, v_{\nu}, \nu = \ell, r$ .

Απο τις παραπάνω σχέσεις, η σχέση (7.54) είναι ιδιαίτερης σημασίας, επειδή καταδεικνύει άμεσα αυτό που ήδη γνωρίζουμε από τα επιχειρήματα της συμμετρίας: ότι δηλαδή υπερρεύμα μηδενικής φάσης μπορεί να υπάρξει, όταν το τριπλό γινόμενο των κατευθύνσεων των μαγνητίσεων του συστήματος είναι μη μηδενικό. Αυτό είναι ισοδύναμο με το μη συνεπίπεδο των μαγνητίσεων του συστήματος. Παρόλα αυτά όμως, είναι προφανές ότι ο όρος  $\cos \chi$  στον αριθμητή της σχέσης (7.52) επηρεάζει το υπερρεύμα, ακόμα και για μη μηδενικές τιμές της φάσης  $\chi$ . Σημειώνουμε ότι στο όριο της πολύ

ασθενούς σύζευξης, οπότε η CPR είναι ημιτονοειδής, η ύπαρξη του τριπλού γινομένου των μαγνητίσεων ως συντελεστή του όρου  $\cos \chi$  δίνεται στην αναφορά [67]. Επίσης το τριπλό γινόμενο των μαγνητίσεων υπεισέρχεται και στο σπιν φαινόμενο Josephson της αναφοράς [103].

Τέλος χρειάζεται να προσδιορίσουμε την εξάρτηση του συντελεστή  $D$ , που δεν εξαρτάται από το  $\chi$ , από τις κατευθύνσεις των μαγνητίσεων. Η πλήρης έκφραση του  $D$  είναι πιο πολύπλοκη από αυτές των  $B$  και  $C$ . Προκύπτει, αν λάβουμε υπόψη μας τους ανεξάρτητους του  $\chi$  όρους στο ανάπτυγμα Laplace της ορίζουσας  $\Gamma$ , δηλαδή αν επικεντρωθούμε σε όρους που προκύπτουν από την επιλογή δύο γραμμών από κάθε έναν από τους υποπίνακες  $R_1, R_2, L_1, L_2$ . Πάλι όλοι οι όροι που εμφανίζονται είναι είτε πραγματικοί, είτε μιγαδικά συζυγείς κατά ζεύγη. Έτσι επιβεβαιώνεται ότι η ορίζουσα  $\Gamma$ , σαν συνάρτηση της φανταστικής ενέργειας, είναι ένας πραγματικός αριθμός. Το ίδιο φαίνεται και από τον αριθμητικό υπολογισμό της. Η εξάρτηση του  $D$  από τις κατευθύνσεις των μαγνητίσεων είναι

$$\begin{aligned}
D = & b_0 + b_1 \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\eta} + b_2 (\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\eta})^2 + b_3 \boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\zeta} + b_4 (\boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\zeta})^2 + b_5 \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\zeta} \\
& + b_6 (\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\zeta})^2 + b_7 (\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\eta})(\boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\zeta}) + b_8 (\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\eta})(\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\zeta}) \\
& + b_9 (\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\zeta})(\boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\zeta}) + b_{10} (\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\eta})(\boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\zeta})^2 + b_{11} (\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\eta})^2(\boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\zeta}) \\
& + b_{12} (\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\eta})(\boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\zeta})(\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\zeta}) + b_{13} (\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\eta})^2(\boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\zeta})^2,
\end{aligned} \tag{7.56}$$

όπου τα  $b$  είναι πολύπλοκες συναρτήσεις των κυματανυσμάτων, του πάχους  $d$ , των ισχύων ενδοεπιφανειακής μαγνήτισης και σκέδασης και των  $u_\nu, v_\nu, \nu = \ell, r$ . Είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι ο ανεξάρτητος του  $\chi$  συντελεστής  $D$  εξαρτάται μόνο από τα εσωτερικά γινόμενα των κατευθύνσεων των μαγνητίσεων του συστήματος. Το τριπλό γινόμενο απουσιάζει σε αυτή την περίπτωση.

# Κεφάλαιο 8

## Αριθμητικά αποτελέσματα

Στο κεφάλαιο αυτό θα παραθέσουμε αποτελέσματα που προκύπτουν από αριθμητικούς υπολογισμούς στο μοντέλο που περιγράψαμε στα προηγούμενα κεφάλαια και συγκεκριμένα στο προσεγγιστικό μοντέλο της τμηματικά σταθερής συνάρτησης χάσματος. Έτσι θα γίνουν πιο κατανοητά συμπεράσματα που έχουν εξαχθεί θεωρητικά, αλλά θα προκύψουν και νέα, τα οποία είναι, κατά την τωρινή μας εκτίμηση, απροσπέλαστα από τους αναλυτικούς υπολογισμούς.

Σε αυτό το σημείο θα θέλαμε να αναφέρουμε μερικές παρατηρήσεις σχετικά με τις κανονικοποιημένες παραμέτρους που χρησιμοποιούμε. Κανονικοποιούμε το μήκος  $d$  του ενδιάμεσου στρώματος σε μονάδες  $k_F^{-1}$ , του αντίστροφου κυματάνυσματος του αριστερού υπεραγωγού και των υπόλοιπων στρωμάτων, αφού θεωρούμε την ενέργεια Fermi να είναι σταθερή στην επαφή. Θα χρησιμοποιήσουμε σαν παράδειγμα τις παραμέτρους του υπεραγωγίου νιοβίου (Nb), που έχει ενέργεια Fermi  $E_F = 5.32eV$  και  $\Delta_0 = 1.5meV$ . Τότε το κυματάνυσμα Fermi, μιας και η ενεργός μάζα είναι περίπου ίση με τη μάζα του ελεύθερου ηλεκτρονίου, είναι

$$k_F = 1.2 \cdot 10^{10} m^{-1}. \quad (8.1)$$

Η μονάδα του ρεύματος που θα χρησιμοποιήσουμε, αν το χάσμα είναι αυτό του νιοβίου, είναι

$$I_u = \frac{e\Delta_0}{\hbar} \simeq 10^{-1} \mu A. \quad (8.2)$$

Για την πυκνότητα ρεύματος χρησιμοποιούμε τη μονάδα

$$J_u = \frac{e\Delta_0}{h} k_F^2 \simeq 5 \mu A/nm^2. \quad (8.3)$$

Χρήσιμο επίσης είναι να αποκτήσουμε μια αίσθηση για τις κανονικοποιημένες ισχύες κανονικής σκέδασης και μαγνήτισης. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι

$$Z_{n,m} = \frac{E_{n,m}}{E_F}(k_F d), \quad (8.4)$$

όπου  $E_{n,m}$  είναι η χαρακτηριστική ενέργεια του δυναμικού στην ενδοεπιφάνεια και  $d$  το χαρακτηριστικό της μήκος. Έτσι, αν  $k_F d = 1$  και  $E_{n,m} = E_F$ , τότε  $Z_{n,m} = 1$ .

Επίσης αναφέρουμε ότι θα θεωρήσουμε θετικό το ρεύμα των αρνητικών φορτίων και θυμίζουμε ότι η μαγνήτιση έχει οριστεί σαν πυκνότητα σπιν και όχι μαγνητικής ροπής.

Στο κεφάλαιο αυτό πραγματευόμαστε μονοδιάστατες επαφές Josephson, με εξαίρεση τις ενότητες 8.5 και 8.6, όπου θεωρούμε τριδιάστατες επαφές Josephson.

Τέλος σημειώνουμε ότι στους υπολογισμούς έχουν χρησιμοποιηθεί οι συχνότητες Ozaki [127], αντί των συχνοτήτων Matsubara, στα αθροίσματα συχνοτήτων.

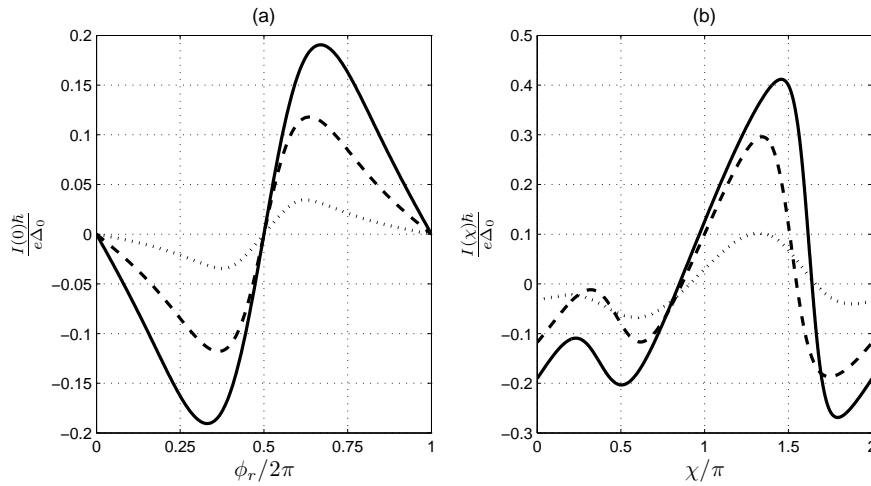
## 8.1 Υπερρεύμα μηδενικής διαφοράς φάσης - Γενική παρουσίαση

Σε αυτή την ενότητα θα παρουσιάσουμε τις σχέσεις υπερρεύματος και διαφοράς φάσης (current phase relation ή συντόμως CPR) για επιλεγμένες παραμέτρους της επαφής Josephson, με κύριο στόχο να τονιστεί η ύπαρξη του υπερρεύματος μηδενικής φάσης και η εξάρτηση του από τη μη συνεπίπεδη γεωμετρία των μαγνητίσεων της επαφής. Επίσης κάνουμε και μια γενική επισκόπηση της εξάρτησης του υπερρεύματος μηδενικής φάσης από τις παραμέτρους της σιδηρομαγνητικής επαφής Josephson.

Οι κοινές παράμετροι των επαφών σε αυτή την ενότητα είναι η θερμοκρασία  $T/T_c = 0.1$  και τα μηδενικής θερμοκρασίας δυναμικά ζεύγους  $\Delta_{\ell 0}/E_F = \Delta_{r 0}/E_F = 0.001$ , κανονικοποιημένα στην κρίσιμη θερμοκρασία των υπεραγωγών και την ενέργεια Fermi αντίστοιχα. Η συνάρτηση χάσματος των υπεραγωγίων ηλεκτροδίων δίνεται από τη σχέση  $\Delta_{\ell,r} = \Delta_0 \tanh(1.74 \sqrt{T_c/T - 1})$ . Επίσης θεωρούμε τις ισχύες ενδοεπιφανειακής μαγνήτισης και σκέδασης στην αριστερή και δεξιά ενδοεπιφάνεια συμμετρικές, δηλαδή  $Z_{m\ell} = Z_{mr} = Z_m$  και  $Z_{n\ell} = Z_{nr} = Z_n$ .

Στο Σχ.8.1(a) παρουσιάζουμε το υπερρεύμα μηδενικής φάσης για επαφές με ένα ενδιάμεσο σιδηρομαγνητικό στρώμα και ενδοεπιφανειακές μαγνητίσεις εκατέρωθεν αυτού, συναρτήσει της πολικής γωνίας της δεξιάς ενδοεπιφανειακής μαγνήτισης. Θέτουμε τη διεύθυνση της αριστερής ενδοεπιφανειακής μαγνήτισης στον  $z$  άξονα και τη διεύθυνση της μαγνήτισης του ενδιάμεσου στρώματος στον  $x$  άξονα. Η δεξιά ενδοεπιφανειακή μαγνήτιση μεταβάλλεται στο επίπεδο  $xy$ . Το μέτρο της μαγνήτισης του ενδιάμεσου στρώματος είναι  $M = 0.8$  και το πάχος του  $k_F d = 25$ . Επίσης  $Z_m = 1$  και

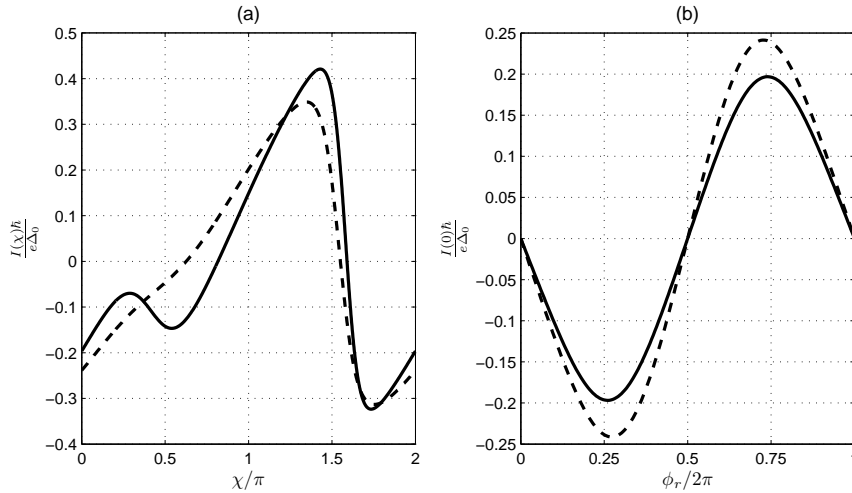
$Z_n = 0.5, 1, 2$  (συμπαγής γραμμή, διακεκομμένη γραμμή, γραμμή με τελείες αντίστοιχα). Στο Σχ.8.1(b) δίνονται οι αντίστοιχες στα  $Z_n$  σχέσεις υπερρεύματος φάσης, για γωνίες  $\phi_r$  που αντιστοιχούν στα μέγιστα της απόλυτης τιμής του υπερρεύματος μηδενικής φάσης στο εύρος γωνιών 0 έως  $\pi$ . Αντίστοιχα με τα  $Z_n$ , οι τιμές των γωνιών αυτών είναι κατά προσέγγιση  $\phi_r = 0.66\pi, 0.73\pi, 0.75\pi$ .



Σχήμα 8.1: (a) Το υπερρέυμα μηδενικής φάσης συναρτήσει της πολικής γωνίας  $\phi_r$  της δεξιάς ενδοεπιφανειακής μαγνήτισης, για επαφές με ένα ενδιάμεσο στρώμα και  $Z_n = 0.5, 1, 2$  (συμπαγής γραμμή, διακεκομμένη γραμμή, γραμμή με τελείες αντίστοιχα), (b) οι αντίστοιχες σχέσεις υπερρεύματος φάσης για γωνίες  $\phi_r = 0.66\pi, 0.73\pi, 0.75\pi$ , που μεγιστοποιούν το  $|I(0)|$ . Οι κοινές παράμετροι των επαφών είναι  $k_F d = 25$ ,  $M = 0.8$ ,  $Z_m = 1$  και οι διευθύνσεις των μαγνητίσεων είναι, η αριστερή στον  $z$  άξονα, του ενδιάμεσου στρώματος στον  $x$  άξονα και της δεξιάς ενδοεπιφάνειας στο  $xy$  επίπεδο. Επίσης  $T = 0.1$  και  $\Delta_0 = 0.001$ .

Στο διάγραμμα του Σχ.8.1(a) παρατηρούμε ότι το υπερρέυμα μηδενικής φάσης μηδενίζεται για πολικές γωνίες της δεξιάς ενδοεπιφανειακής μαγνήτισης  $\phi_r$  ίσες με  $0, \pi, 2\pi$ , όπως είναι αναμενόμενο, αφού τότε η γεωμετρία των μαγνητίσεων είναι συνεπίπεδη. Για τις υπόλοιπες τιμές του  $\phi_r$  είναι μη μηδενικό και τα μέγιστά του κατ' απόλυτη τιμή δεν συμβαίνουν για τις γωνίες  $\phi_r = \pi/2, 3\pi/2$ , οι οποίες αντιστοιχούν στο μέγιστο της απόλυτης τιμής του τριπλού γινομένου των μοναδιαίων διανυσμάτων στις διευθύνσεις των μαγνητίσεων της επαφής. Αυτό το φαινόμενο οφείλεται προφανώς στον παρονομαστή της σχέσης (7.52). Φαίνεται επίσης ότι το φαινόμενο γίνεται εντονότερο με την αύξηση της ισχύος ενδοεπιφανειακής σκέδασης  $Z_n$ . Παρόλα αυτά παρουσιάζεται με περιοδικότητα ακόμα και για  $Z_n = 0$ , μεταβάλλοντας τις παραμέτρους  $k_F d$  και  $M$ . Στο

διάγραμμα του Σχ.8.1(b) απεικονίζονται οι σχέσεις υπερρεύματος φάσης και η ύπαρξη του υπερρεύματος μηδενικής φάσης είναι εμφανής. Επίσης εμφανής είναι η ύπαρξη μιας δεύτερης αρμονικής, που εξασθενεί με την αύξηση της ισχύος ενδοεπιφανειακής σκέδασης  $Z_n$  μαζί με το κρίσιμο υπερρεύμα.



Σχήμα 8.2: (a) Σχέσεις υπερρεύματος φάσης για δύο επαφές με μη συνεπίπεδη γεωμετρία μαγνητίσεων. Η συμπαγής γραμμή αντιστοιχεί σε μία επαφή με ένα ενδιάμεσο στρώμα και η διακεκομμένη γραμμή σε μία επαφή με δύο ενδιάμεσα στρώματα. (b) Το υπερρεύμα μηδενικής φάσης για τις δύο επαφές, συναρτήσει της πολικής γωνίας της δεξιάς ενδοεπιφανειακής μαγνήτισης. Οι παράμετροι της επαφής με ένα ενδιάμεσο στρώμα είναι όμοιες με αυτές του Σχ.8.1, αλλά  $Z_n = 0$ . Για την επαφή των δύο στρωμάτων, τα πάχη είναι  $k_F d = 25$  το καθένα,  $M_1 = 0.8$ ,  $M_2 = 0.7$  με διευθύνσεις  $\theta_1 = 90^\circ$ ,  $\phi_1 = 0^\circ$  και  $\theta_2 = 45^\circ$ ,  $\phi_2 = 0^\circ$  αντίστοιχα,  $Z_{nI} = 1$  και  $Z_{mI} = 0$  στην ενδοεπιφάνεια μεταξύ των στρωμάτων και  $Z_{n\ell} = Z_{nr} = 0$ . Οι διευθύνσεις των ενδοεπιφανειακών μαγνητίσεων είναι  $z$  αριστερα και  $y$  δεξιά.

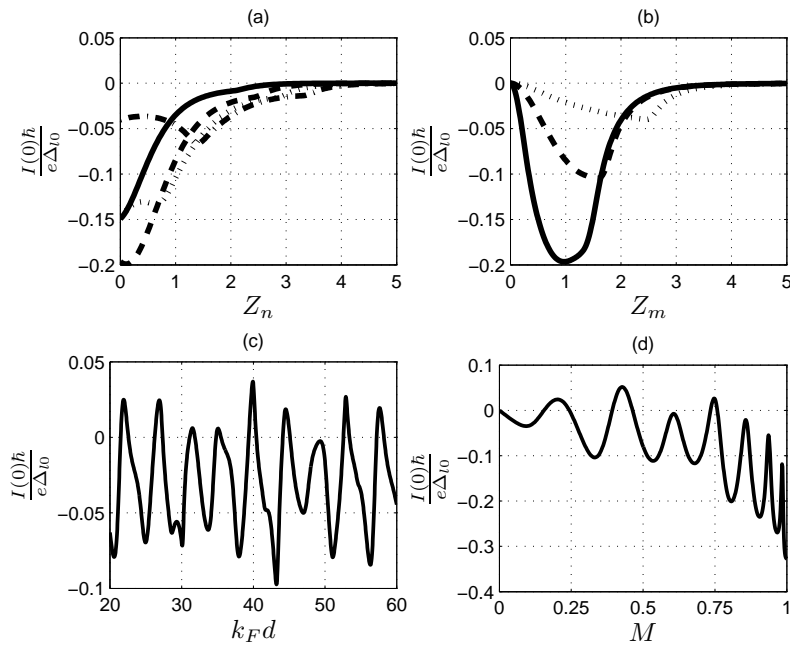
Στο Σχ.8.2(a) παρουσιάζουμε τη σχέση υπερρεύματος φάσης για δύο περιπτώσεις σιδηρομαγνητικών επαφών με μη συνεπίπεδη γεωμετρία μαγνητίσεων. Οι κατευθύνσεις της αριστερής και της δεξιάς μαγνήτισης ενδοεπιφάνειας παίρνουν τις τιμές  $\theta_\ell = 0^\circ$ ,  $\phi_\ell = 0^\circ$  and  $\theta_r = 90^\circ$ ,  $\phi_r = 90^\circ$ , δηλαδή στη θετική  $z$  και στη θετική  $y$  κατεύθυνση αντίστοιχα. Οι κανονικοποιημένες ισχύες των μαγνητίσεων ενδοεπιφάνειας είναι  $Z_m = 1$  και οι κανονικοποιημένες ισχύες των κανονικών σκεδάσεων ενδοεπιφάνειας είναι  $Z_n = 0$ . Η συμπαγής γραμμή είναι η σχέση υπερρεύματος φάσης για μια επαφή με ένα ενδιάμεσο σιδηρομαγνητικό στρώμα μήκους  $k_F d = 25$  και μαγνήτισης  $M = 0.8E_F$ , με διεύθυνση  $\theta = 90^\circ$ ,  $\phi = 0^\circ$ , δηλαδή στην θετική διεύθυνση του άξονα

*x*. Η διακεκομμένη γραμμή αντιστοιχεί στην σχέση υπερρεύματος φάσης μιας επαφής με δύο σιδηρομαγνητικά ενδιάμεσα στρώματα μήκους  $k_F d = 25$  το καθένα, μαγνητίσεις  $M_1/E_F = 0.8$ ,  $M_2/E_F = 0.7$ , με διεθύνσεις  $\theta_1 = 90^\circ$ ,  $\phi_1 = 0^\circ$  και  $\theta_2 = 45^\circ$ ,  $\phi_2 = 0^\circ$  αντίστοιχα, και  $Z_{nI} = 1$ ,  $Z_{mI} = 0$  για την ενδοεπιφάνεια μεταξύ των στρωμάτων αυτών. Και οι δύο επαφές έχουν μη συνεπίπεδη γεωμετρία μαγνητίσεων και παρατηρούμε από το Σχ.8.2(a) ότι το υπερρεύμα μηδενικής φάσης είναι σημαντικό και στις δύο περιπτώσεις.

Στο Σχ.8.2(b) παρουσιάζουμε το υπερρεύμα μηδενικής φάσης συναρτήσει της πολικής γωνίας της δεξιάς μαγνήτισης ενδοεπιφάνειας για τις δύο περιπτώσεις επαφών που προαναφέρθηκαν. Η συμπαγής γραμμή αντιστοιχεί στην επαφή με ένα ενδιάμεσο στρώμα και η διακεκομμένη γραμμή αντιστοιχεί στην επαφή με τα δύο ενδιάμεσα στρώματα. Παρατηρούμε πάλι ότι, για  $\phi_r = 0, \pi, 2\pi$ , το υπερρεύμα μηδενικής φάσης μηδενίζεται, όπως οφείλει, αφού τότε οι μαγνητίσεις του συστήματος είναι συνεπίπεδες. Έτσι καταδεικνύεται ότι η ύπαρξη του υπερρεύματος μηδενικής φάσης είναι άμεση συνέπεια του μη συνεπίπεδου της γεωμετρίας των μαγνητίσεων, ανεξάρτητα από το πλήθος των ενδιάμεσων στρωμάτων και ενδοεπιφανειών. Επίσης, παρατηρούμε ξανά ότι η επαφή με το ένα ενδιάμεσο στρώμα παρουσιάζει μετατόπιση του μέγιστου υπερρεύματος μηδενικής φάσης από τη γωνία που μεγιστοποιεί την απόλυτη τιμή του τριπλού γινομένου των διευθύνσεων των μαγνητίσεων, όταν δηλαδή οι μαγνητίσεις του συστήματος είναι αμοιβαίως ορθογώνιες. Το ίδιο ισχύει και για την επαφή των δύο σιδηρομαγνητικών στρωμάτων, με το μέγιστο σε απόλυτη τιμή υπερρεύμα μηδενικής φάσης να μην αντιστοιχεί σε  $\phi_r = \pi/2, 3\pi/2$ , που καθιστά την δεξιά μαγνήτιση ενδοεπιφάνειας ορθογώνια στο επίπεδο των υπολοίπων μαγνητίσεων της επαφής.

Θα παραθέσουμε τώρα μερικά διαγράμματα, που καταδεικνύουν την εξάρτηση του υπερρεύματος μηδενικής φάσης από τις παραμέτρους της σιδηρομαγνητικής επαφής. Στο Σχ.8.3 θέτουμε εκ νέου  $T/T_c = 0.1$ ,  $\Delta_{\ell 0}/E_F = \Delta_{r0}/E_F = 0.001$  και  $\theta_\ell = 0^\circ$ ,  $\phi_\ell = 0^\circ$ ,  $\theta = 90^\circ$ ,  $\phi = 0^\circ$ ,  $\theta_r = 90^\circ$ ,  $\phi_r = 90^\circ$  για την αριστερή, την ενδιάμεση και τη δεξιά κατεύθυνση της μαγνήτισης αντίστοιχα. Επίσης θέτουμε  $k_F d = 25$  και  $M = 0.8E_F$ , στις περιπτώσεις που αυτές οι παράμετροι δεν μεταβάλλονται ως ανεξάρτητες μεταβλητές, ή δεν δηλώνεται διαφορετικά. Στο Σχ.8.3(a) απεικονίζεται το υπερρεύμα μηδενικής φάσης συναρτήσει του  $Z_{n\ell} = Z_{nr} = Z_n$  για διάφορες τιμές των  $Z_{m\ell} = Z_{mr} = Z_m$  ( $Z_m = 0.5, 1, 1.5, 2$  που αντιστοιχούν στη συμπαγή γραμμή, τη διακεκομμένη γραμμή, τη γραμμή με τελείες και τη διακεκομμένη γραμμή με τελείες με αυτή τη σειρά). Παρατηρούμε ότι το υπερρεύμα μηδενικής φάσης φθίνει στο μηδέν καθώς το  $Z_n$  αυξάνει, όχι όμως μονότονα, όταν το  $Z_m$  είναι αρκετά μεγάλο. Στο Σχ.8.3(b) το υπερρεύμα μηδενικής φάσης απεικονίζεται συναρτήσει του  $Z_{m\ell} = Z_{mr} = Z_m$  για διάφορες τιμές του  $Z_{n\ell} = Z_{nr} = Z_n$  ( $Z_n = 0, 1, 2$  συμπαγής γραμμή, διακεκομμένη γραμμή και γραμμή με τελείες αντίστοιχα). Το υπερρεύμα μηδενικής φάσης φαίνεται ότι είναι μηδέν για  $Z_m = 0$ , ενώ στη συνέχεια αυξάνεται κατ' απόλυτη τιμή και παρουσιάζει μέγιστο,

φθίνοντας στη συνέχεια καθώς το  $Z_m$  αυξάνεται περαιτέρω. Απουσιάζει φαινόμενο αλλαγής προσήμου σε αυτή την περίπτωση, όπως και στην εξάρτηση του υπερρεύματος μηδενικής φάσης από το  $Z_n$ . Όπως θα δούμε όμως στην επόμενη ενότητα, τέτοια συμπεριφορά μπορεί να εμφανιστεί στην περιοχή των παραμέτρων  $k_F d$  και  $M$  όπου το υπερρέυμα μηδενικής φάσης μηδενίζεται.



Σχήμα 8.3: Το υπερρέυμα μηδενικής φάσης συναρτίζει (a) της κανονικοποιημένης ισχύος κανονικής ενδοεπιφανειακής σκέδασης  $Z_n$  για τιμές της  $Z_m = 0.5, 1, 1.5, 2$  και  $k_F d = 25, M = 0.8$ , (b) της κανονικοποιημένης ισχύος ενδοεπιφανειακής μαγνήτισης  $Z_m$  για τιμές της  $Z_n = 0, 1, 2$  και σταθερά τα  $k_F d = 25, M = 0.8$ , (c) του κανονικοποιημένου μήκους ενδιάμεσου στρώματος  $k_F d$  για  $M = 0.5, Z_n = 1, Z_m = 1$  και (d) του κανονικοποιημένου δυναμικού ανταλλαγής  $M$  για  $k_F d = 25, Z_n = 0, Z_m = 1$ . Επίσης  $T = 0.1$  και  $\Delta_0 = 0.001$ . Η γεωμετρία των μαγνητίσεων είναι  $zxy$ .

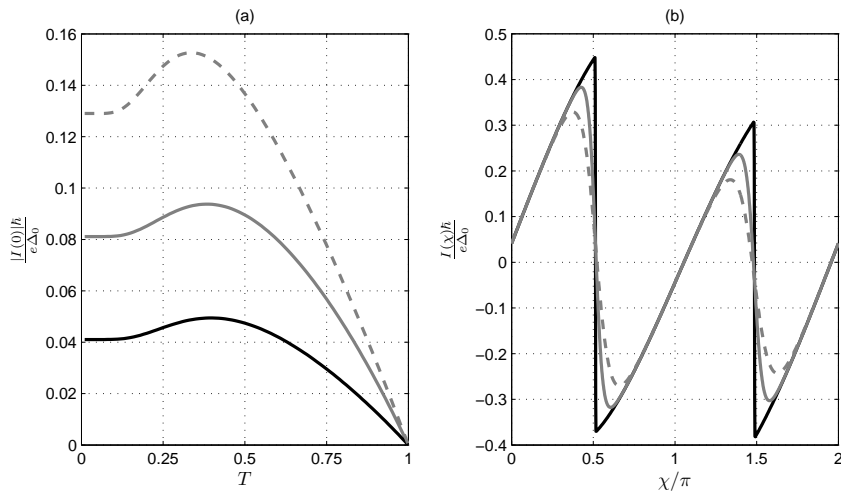
Στο Σχ.8.3(c) το υπερρέυμα μηδενικής φάσης απεικονίζεται σαν συνάρτηση του κανονικοποιημένου μήκους του ενδιάμεσου στρώματος  $k_F d$ , για  $Z_n = 1, Z_m = 1$  και  $M = 0.5E_F$ . Παρατηρούμε την ταλαντωτική συμπεριφορά του υπερρεύματος μηδενικής φάσης, που είναι αναμενόμενη με βάση την εξάρτηση αυτού από το κανονικοποιημένο μήκος μέσω τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Επίσης παρατηρούμε ότι το υπερρέυμα μηδενικής φάσης μπορεί να μηδενιστεί για ορισμένες τιμές του  $k_F d$ , παρόλο που η γεωμετρία των μαγνητίσεων είναι σαφέστατα μη συνεπίπεδη. Αυτό το φαινόμενο χα-



ρακτηρίζεται ως τυχαίος εκφυλισμός (ή τυχαίος μηδενισμός στην περίπτωση μας) στη θεωρία συμμετρίας της κβαντομηχανικής. Δηλαδή, παρότι οι συνθήκες συμμετρίας δεν επιβάλλουν το μηδενισμό του υπερρεύματος, αυτό παρόλα αυτά μηδενίζεται.

Στο Σχ.8.3(d) παρουσιάζεται το υπερρέυμα μηδενικής φάσης σαν συνάρτηση της κανονικοποιημένης μαγνήτισης του ενδιάμεσου στρώματος για  $Z_n = 0$  και  $Z_m = 1$ . Παρατηρούμε πάλι τις γρήγορες ταλαντώσεις του υπερρεύματος μηδενικής φάσης, που οφείλονται στις τριγωνομετρικές συναρτήσεις μέσω των οποίων η μαγνήτιση επηρεάζει το υπερρέυμα και οι οποίες εντείνονται καθώς πλησιάζουμε την τιμή  $M = E_F$ . Επίσης βλέπουμε ότι το υπερρέυμα μηδενικής φάσης μηδενίζεται για διάφορες τιμές της μαγνήτισης, παρόλο που η γεωμετρία των μαγνητίσεων της επαφής είναι μη συνεπίπεδη.

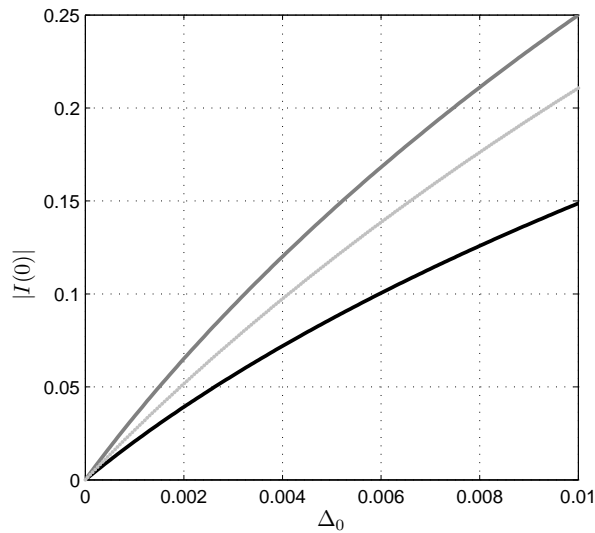
Ένα σημείο που αξίζει να σημειωθεί είναι ότι, καθώς η μαγνήτιση, σε μονάδες ενέργειας, πλησιάζει την ενέργεια Fermi, η τιμή του υπερρεύματος μηδενικής φάσης δεν τείνει στο μηδέν. Το ίδιο ισχύει και για το κρίσιμο υπερρέυμα. Θα επανέλθουμε σε αυτό το ζήτημα σε επόμενη ενότητα του παρόντος κεφαλαίου.



Σχήμα 8.4: (a) Απόλυτη τιμή του υπερρεύματος μηδενικής φάσης συναρτήσει της κανονικοποιημένης θερμοκρασίας για  $k_F d = 25.26, 26.8, 28.5$  (γκρι συμπαγής, μαύρη συμπαγής και γκρι διακεκομμένη γραμμή αντίστοιχα). (b) Με  $k_F d = 26.8$ , οι σχέσεις υπερρεύματος φάσης για  $T = 0.001, 0.05, 0.1$  (μαύρη συμπαγής, γκρι συμπαγής και γκρι διακεκομμένη γραμμή αντίστοιχα). Οι άλλες παράμετροι είναι  $\Delta_0 = 0.001, Z_n = 0, Z_m = 1, M = 0.5$ . Η επαφή έχει ένα ενδιάμεσο στρώμα με μαγνήτιση στη διεύθυνση  $x$  και ενδοεπιφανειακές μαγνητίσεις στις διευθύνσεις  $z$  αριστερά και  $y$  δεξιά.

Στη συνέχεια δίνουμε μερικά διαγράμματα με την εξάρτηση του υπερρεύματος μηδενικής φάσης από τη θερμοκρασία της επαφής Josephson. Στο Σχ.8.4(a) παρατηρούμε

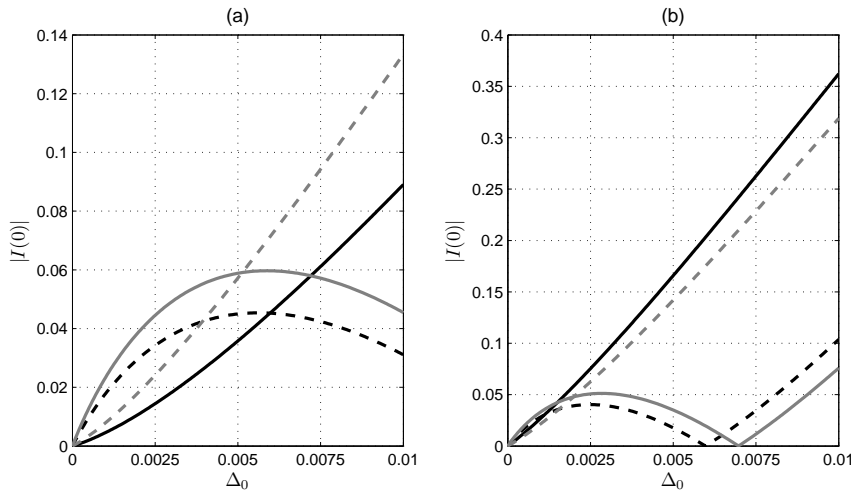
μια τυπική μορφή που έχει αυτή η εξάρτηση. Το υπερρεύμα μηδενικής φάσης είναι σταθερό για χαμηλές θερμοκρασίες, στη συνέχεια αυξάνεται προς ένα τοπικό μέγιστο και έπειτα φθίνει μέχρι το μηδέν, για θερμοκρασία ίση με 1. Οι τιμές των παραμέτρων δίδονται στη λεζάντα του Σχ.8.4. Αναφέρουμε ότι η επιλογή των τιμών της παραμέτρου  $k_F d$  έγινε ώστε να αντιστοιχούν σε τοπικά μέγιστα του υπερρεύματος μηδενικής φάσης, όταν οι υπόλοιπες παράμετροι παραμένουν σταθερές και είναι όπως δίνονται στο Σχ.8.4. Στο Σχ.8.4(b) δίνονται οι σχέσεις υπερρεύματος φάσης για  $k_F d = 26.8$ , που αντιστοιχεί στην μαύρη συμπαγή γραμμή του Σχ.8.4(a), και τιμές της θερμοκρασίας  $T = 0.001, 0.05, 0.1$ . Είναι φανερό ότι το υπερρεύμα μηδενικής φάσης είναι ταυτόσημο και για τις τρεις περιπτώσεις, κάτι που επιβεβαιώνει το πλατώ του διαγράμματος  $I(0)$  συναρτήσει του  $T$ , για μικρές θερμοκρασίες.



Σχήμα 8.5: Το υπερρεύμα μηδενικής φάσης, κανονικοποιημένο στο  $e\Delta_0/\hbar$  για  $\Delta_0 = 0.001$ , συναρτήσει της συνάρτησης χάσματος  $\Delta_0$  για  $Z_m = 0.5, 1, 1.5$  η μαύρη, γκρί σκούρα και γκρί ανοιχτή γραμμή αντίστοιχα. Οι άλλες παράμετροι είναι  $T = 0.1$ ,  $Z_n = 0$ ,  $k_F d = 25$ ,  $M = 0.1$ . Η επαφή έχει ένα ενδιάμεσο στρώμα με μαγνήτιση στη διεύθυνση  $x$  και ενδοεπιφανειακές μαγνητίσεις στις διευθύνσεις  $z$  αριστερά και  $y$  δεξιά.

Κλείνουμε αυτή την ενότητα παρουσιάζοντας την εξάρτηση του υπερρεύματος μηδενικής φάσης σε σιδηρομαγνητικές επαφές Josephson από το μέγεθος της σταθερής συνάρτησης χάσματος μηδενικής θερμοκρασίας των δύο συμβατικών υπεραγωγών εκατέρωθεν της επαφής. Θεωρούμε ότι οι υπεραγωγοί είναι ταυτόσημοι στα αριστερά και

τα δεξιά και συνεπώς η συνάρτηση χάσματος τους ταυτίζεται. Θεωρούμε μία επαφή με ένα σιδηρομαγνητικό στρώμα και ενδοεπιφανειακές μαγνητίσεις εκατέρωθεν αυτού. Θέτουμε  $T = 0.1$ ,  $Z_n = 0$ , για μαγνητίσεις στις διευθύνσεις  $z, x, y$  με μέτρο  $M = 0.1$  στο ενδιάμεσο στρώμα και  $k_F d = 25$ . Στο Σχ.8.5 παρουσιάζουμε την απόλυτη τιμή του υπερρεύματος μηδενικής φάσης, κανονικοποιημένο στην μονάδα ρεύματος  $e\Delta_0/\hbar$  που αντιστοιχεί σε  $\Delta_0 = 0.001$ , για τιμές της ισχύος ενδοεπιφανειακής μαγνήτισης  $Z_{m\ell} = Z_{mr} = 0.5, 1, 1.5$  με η μαύρη, γκρι σκούρα και γκρι ανοιχτή γραμμή αντίστοιχα. Παρατηρούμε την μονότονη αύξηση του υπερρεύματος μηδενικής φάσης με την αύξηση του μέτρου της συνάρτησης χάσματος.



Σχήμα 8.6: Το υπερρεύμα μηδενικής φάσης, κανονικοποιημένο στο  $e\Delta_0/\hbar$  για  $\Delta_0 = 0.001$ , συναρτήσει της συνάρτησης χάσματος  $\Delta_0$ . (a) Για διάφορες τιμές της μαγνήτισης  $M = 0.15, 0.18, 0.21, 0.25$  (μαύρη συμπαγής, μαύρη διακεκομμένη, γκρι συμπαγής και γκρι διακεκομμένη γραμμή αντίστοιχα) και  $k_F d = 25$ . (b) Για διάφορες τιμές του  $k_F d = 26, 26.5, 27, 27.5$  (μαύρη συμπαγής, μαύρη διακεκομμένη, γκρι συμπαγής και γκρι διακεκομμένη γραμμή αντίστοιχα) και  $M = 0.5$ . Οι άλλες παράμετροι είναι  $T = 0.1$ ,  $Z_n = 0$ ,  $Z_m = 1$ . Η επαφή έχει ένα ενδιάμεσο στρώμα με μαγνήτιση στη διεύθυνση  $x$  και ενδοεπιφανειακές μαγνητίσεις στις διευθύνσεις  $z$  αριστερά και  $y$  δεξιά.

Σημειώνουμε ότι το υπερρεύμα μηδενικής φάσης, για  $\Delta_0 = 0.001$  και  $Z_n = 0$ ,  $Z_m = 1$ ,  $k_F d = 25$  είναι κοντά στην τοπικά μέγιστη απόλυτη τιμή του σαν συνάρτηση του  $M$ , για  $M = 0.1$  που είναι η τιμή της μαγνήτισης που θεωρήσαμε στο Σχ.8.5. Αυτό φαίνεται και στο Σχ.8.3(d). Σε περιοχές των παραμέτρων  $M$  και  $k_F d$  που το υπερρεύμα μηδενικής φάσης μηδενίζεται, μπορεί να παρατηρηθεί και μη μονότονη εξάρτηση του  $I(0)$  συναρτήσει της συνάρτησης χάσματος, με ύπαρξη και αλλαγής προσήμου. Στο Σχ.8.6(a)

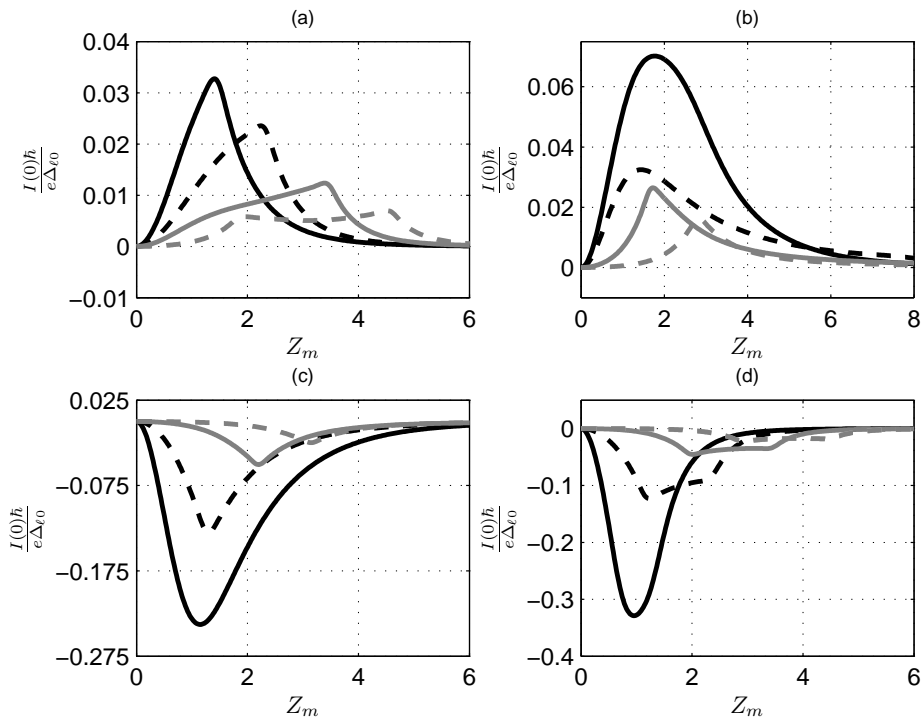
παρουσιάζεται το διάγραμμα του  $|I(0)|$ , κανονικοποιημένου όπως και προηγουμένως, συναρτήσει του  $\Delta_0$ , για τιμές των παραμέτρων  $T = 0.1$ ,  $Z_n = 0$ ,  $Z_m = 1$ ,  $k_F d = 25$  και τιμές της μαγνήτισης γύρω από την τιμή  $M = 0.2$  ( $M = 0.15, 0.18, 0.21, 0.25$  αντίστοιχα η μαύρη συμπαγής, μαύρη διακεκομμένη, γκρι συμπαγής και γκρι διακεκομμένη γραμμή). Σημειώνουμε ότι στην τιμή  $M = 0.2$  το  $I(0)$  μηδενίζεται για τις ίδιες λοιπές παραμέτρους και  $\Delta_0 = 0.015$ . Παρατηρούμε λοιπόν μη μονότονη συμπεριφορά της εξάρτησης του  $|I(0)|$  από τη συνάρτηση χάσματος, η οποία υφίσταται σε ένα διάστημα γύρω από την τιμή  $M = 0.2$ . Ανάλογα ισχύουν και για μεταβολή της παραμέτρου  $k_F d$ . Στο Σχ.8.6(b), για τις ίδιες παραμέτρους και  $M = 0.5$ , δίνουμε το  $|I(0)|$  συναρτήσει του  $\Delta_0$  για διάφορες τιμές του  $k_F d$  γύρω από την τιμή 27.23, που αντιστοιχεί σε μηδενικό του  $I(0)$ , όπως προσεγγιστικά φαίνεται στο Σχ.8.3(c), που αντιστοιχεί όμως σε  $Z_n = 1$ . Οι τιμές του  $k_F d$  είναι 26, 26.5, 27, 27.5 (μαύρη συμπαγής, μαύρη διακεκομμένη, γκρι συμπαγής και γκρι διακεκομμένη γραμμή αντίστοιχα). Παρατηρούμε ξανά τη μη μονότονη εξάρτηση του  $I(0)$  από τη συνάρτηση χάσματος για  $k_F d = 26.5$  και  $k_F d = 27$ . Επίσης και στα δύο διαγράμματα του Σχ.8.6 παρατηρούμε μία σχετική μείωση του μεγέθους του  $|I(0)|$  με μη μονότονη συμπεριφορά, σε σύγκριση με το διάγραμμα του Σχ.8.5.

## 8.2 Εξάρτηση του υπερρεύματος μηδενικής φάσης και του κρίσιμου υπερρεύματος από τις ισχύες ενδοεπιφανειακής μαγνήτισης και σκέδασης

Στην πρώτη ενότητα αυτού του κεφαλαίου είδαμε επιγραμματικά τη γενική εξάρτηση του υπερρεύματος μηδενικής φάσης από τις παραμέτρους της σιδηρομαγνητικής επαφής Josephson. Στην παρούσα ενότητα θα μελετήσουμε περαιτέρω τα χαρακτηριστικά της σιδηρομαγνητικής επαφής Josephson κατά τη μεταβολή των κανονικοποιημένων ισχύων ενδοεπιφανειακής σκέδασης  $Z_{ml,r}$  και  $Z_{nl,r}$ . Στη μελέτη μας θα θεωρήσουμε σταθερές τις παρακάτω βασικές παραμέτρους της επαφής: τη θερμοκρασία  $T = 0.1T_c$  και τις συναρτήσεις χάσματος  $\Delta_{\ell 0} = \Delta_{r0} = 0.001E_F$ . Επίσης θεωρούμε επαφές Josephson με ένα ενδιάμεσο στρώμα και δύο ενδοεπιφάνειες, οι οποίες είναι συμμετρικές όσον αφορά τις τιμές των ισχύων μαγνήτισης και σκέδασης, δηλ.  $Z_{ml} = Z_{mr}$  και  $Z_{nl} = Z_{nr}$ . Οι διευθύνσεις των μαγνητίσεων της επαφής είναι αμοιβαίως ορθογώνιες και συγκεκριμένα  $\theta_\ell = 0$ ,  $\theta = \pi/2$ ,  $\phi = 0$  και  $\theta_r = \pi/2$ ,  $\phi_r = \pi/2$ .

Θα ξεκινήσουμε με την εξάρτηση του υπερρεύματος μηδενικής φάσης από την κανονικοποιημένη ισχύ ενδοεπιφανειακής μαγνήτισης  $Z_m$ . Είναι λογικό, όπως είδαμε και στην προηγούμενη ενότητα, ότι το υπερρεύμα μηδενικής φάσης αυξάνεται αρχικά καθώς το  $Z_m$  αυξάνει, παρουσιάζει ένα μέγιστο και στη συνέχεια μειώνεται, λόγω της ισχυρής σκέδασης στις ενδοεπιφάνειες. Εδώ ανταγωνίζονται δύο τάσεις. Η μία είναι ευ-

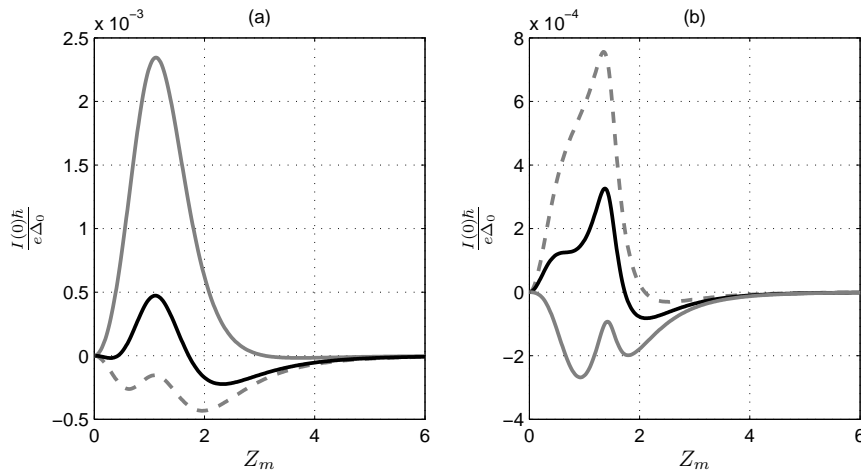
νοϊκή για το υπερρεύμα μηδενικής φάσης μέσω του συντελεστή του  $\sin \chi$  στην ορίζουσα  $\Gamma$  και η άλλη είναι καταστροφική, καθώς η ισχυροποίηση της σκέδασης καταστρέφει τις υπεραγωγίμες συσχετίσεις στο εσωτερικό της επαφής. Μια τυπική συμπεριφορά που εμφανίζεται στην εξάρτηση του υπερρεύματος μηδενικής φάσης από την ισχύ μαγνήτισης ενδοεπιφάνειας  $Z_m$ , για διάφορες τιμές του  $Z_n$ , είναι αυτή που απεικονίζεται στο Σχ.8.7(a)-(d). Σε κάθε διάγραμμα δίνεται το  $I(0)$  συναρτήσει του  $Z_m$ , για μαγνήτιση (a)  $M = 0.2$ , (b)  $M = 0.43$ , (c)  $M = 0.9$ , (d)  $M = 1$ . Σε κάθε διάγραμμα δίνονται καμπύλες για τιμές του  $Z_n = 0, 1, 2, 3$  αντίστοιχα η μαύρη συμπαγής γραμμή, η μαύρη διακεκομμένη, η γκρι συμπαγής και η γκρι διακεκομμένη γραμμή.



Σχήμα 8.7: Διαγράμματα του υπερρεύματος μηδενικής φάσης συναρτήσει του  $Z_m$  για διάφορες τιμές της μαγνήτισης: (a)  $M = 0.2$ , (b)  $M = 0.43$ , (c)  $M = 0.9$ , (d)  $M = 1$ . Οι υπόλοιπες παράμετροι είναι  $k_F d = 25$  και  $Z_n = 0, 1, 2, 3$  αντίστοιχα η μαύρη συμπαγής γραμμή, η μαύρη διακεκομμένη, η γκρι συμπαγής και η γκρι διακεκομμένη γραμμή. Φυσικά  $T = 0.1$  και  $\Delta_0 = 0.001$ . Οι διευθύνσεις των μαγνητίσεων είναι  $z, x$  και  $y$ .

Παρατηρούμε ότι η αύξηση του  $Z_m$  οδηγεί αρχικά σε αύξηση και έπειτα μείωση του υπερρεύματος μηδενικής φάσης. Η παράλληλη αύξηση όμως του  $Z_n$ , εκτός από τη μείωση της τιμής του μέγιστου υπερρεύματος μηδενικής φάσης, οδηγεί σε μια συ-

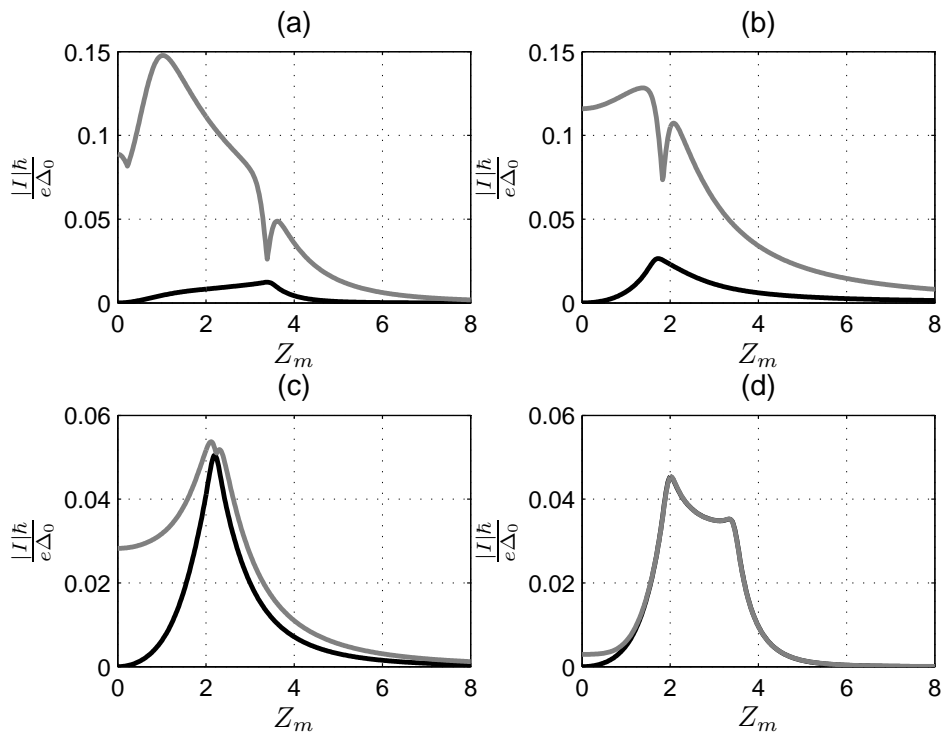
μπεριφορά που χαρακτηρίζεται από δύο τοπικά μέγιστα του υπερρεύματος μηδενικής φάσης στις περιπτώσεις των Σχ.8.7(a) και (d). Η συμπεριφορά αυτή συνοδεύεται από την ύπαρξη μιας περιοχής της παραμέτρου  $Z_m$ , μεταξύ των δύο μεγίστων, όπου το υπερρέυμα μηδενικής φάσης έχει προσεγγιστικά σταθερή τιμή. Αντίθετα στα διαγράμματα των Σχ.8.7(b) και (c) εμφανίζεται μόνο ένα μέγιστο για όλες τις τιμές του  $Z_n$ . Παρόλα αυτά διαπιστώνεται ότι, για αρκετά μεγάλη τιμή του  $Z_n$ , η εμφάνιση του δεύτερου μεγίστου είναι γεγονός, ακόμα και για τις περιπτώσεις (b) και (d). Όμως το μέτρο του υπερρεύματος μηδενικής φάσης έχει γίνει πια πάρα πολύ μικρό. Έτσι η αξιοποίηση αυτού του φαινομένου δεν είναι πάντοτε εφικτή. Επίσης οφείλουμε να αναφέρουμε ότι το φαινόμενο της εμφάνισης του δεύτερου μεγίστου είναι πολύ ευαίσθητο στην τιμή της μαγνήτισης  $M$ . Έτσι η εμφάνιση του δεύτερου μεγίστου με επαρκή ένταση παρουσιάζεται ή απουσιάζει διαδοχικά από τα διαγράμματα του  $I(0)$  ως προς  $Z_m$  έντονα περιοδικά με τη μαγνήτιση της επαφής. Επίσης έντονη περιοδικότητα του φαινομένου εμφανίζεται και με την μεταβολή της παραμέτρου  $k_F d$ .



Σχήμα 8.8: Διαγράμματα του υπερρεύματος μηδενικής φάσης συναρτήσει του  $Z_m$  για  $Z_n = 0$  και (a)  $M = 0.5$  για  $k_F d = 27.31, 27.325, 27.33$  με γκρι συμπαγή, μαύρη συμπαγή και γκρι διακεκομμένη γραμμή αντίστοιχα, (b)  $k_F d = 25$  για  $M = 0.155, 0.1555, 0.156$  με γκρι συμπαγή, μαύρη συμπαγή και γκρι διακεκομμένη γραμμή αντίστοιχα. Φυσικά  $T = 0.1$  και  $\Delta_0 = 0.001$ . Οι διευθύνσεις των μαγνητίσεων είναι  $z$ ,  $x$  και  $y$ .

Επίσης παρατηρούμε ότι οι μεταβολές της ισχύος ενδοεπιφανειακής μαγνήτισης δεν αλλάζουν το πρόσημο του υπερρεύματος μηδενικής φάσης. Το γεγονός αυτό φαίνεται να ισχύει για όλες τις αλλαγές των παραμέτρων  $k_F d$  και  $M$ , εκτός από την περίπτωση που σε μια περιοχή κάποιας από αυτές το υπερρέυμα μηδενικής φάσης μηδενίζεται.

Σε αυτά τα σημεία το διάγραμμα του υπερρεύματος μηδενικής φάσης συναρτήσει της ισχύος ενδοεπιφανειακής μαγνήτισης  $Z_m$  εμφανίζει ταλαντωτική συμπεριφορά και το  $I(0)$  μπορεί να αλλάξει πρόσημο κατά τη μεταβολή του  $Z_m$ . Το φαινόμενο αυτό παρουσιάζεται στο Σχ.8.8(a), για την περιοχή  $k_F d = 27.32$  και  $M = 0.5$ ,  $Z_n = 0$  και στο Σχ.8.8(b), για την περιοχή  $M = 0.1555$  και  $k_F d = 25$ ,  $Z_n = 0$ , όπου το υπερρέυμα μηδενικής φάσης μηδενίζεται για  $Z_m = 1$ . Στα διαγράμματα αυτά παρατηρούμε ότι το υπερρέυμα μηδενικής φάσης παραμένει μικρό σε απόλυτη τιμή και έτσι είναι σχετικά ασφαλές να μιλήσουμε για διατήρηση του προσήμου του υπερρεύματος μηδενικής φάσης ως προς την παράμετρο  $Z_m$ . Ανάλογο συμπέρασμα ισχύει και για τη μεταβολή του υπερρεύματος συναρτήσει της ισχύος ενδοεπιφανειακής κανονικής σκέδασης  $Z_n$ . Έτσι το πρόσημο του υπερρεύματος μηδενικής φάσης  $I(0)$  φαίνεται να εξαρτάται μόνο από το πάχος του ενδιάμεσου στρώματος  $k_F d$  και την τιμή της μαγνήτισης  $M$ .



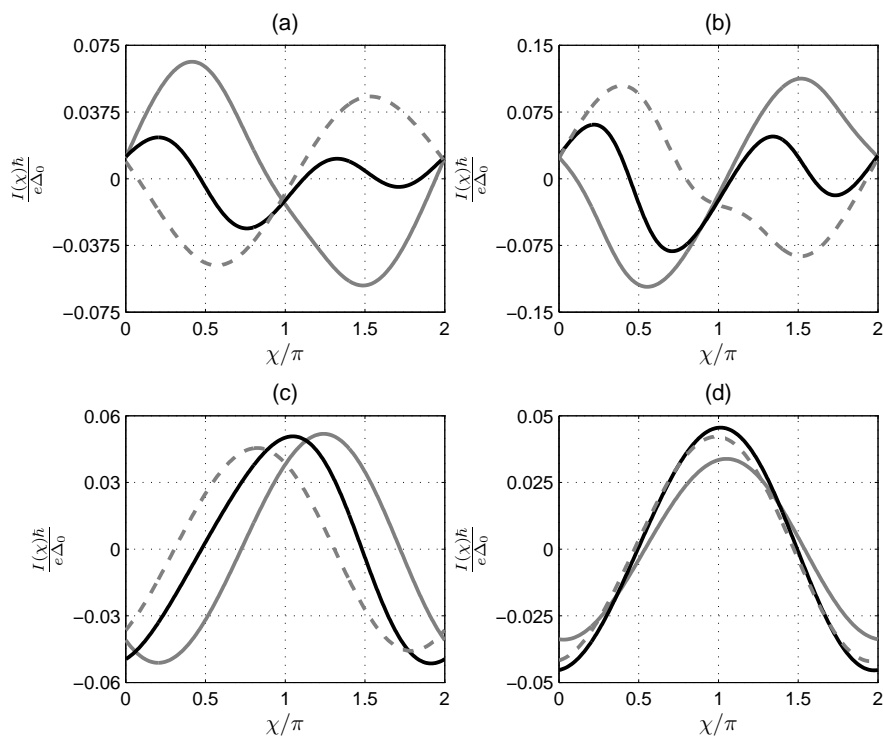
Σχήμα 8.9: Διαγράμματα της απόλυτης τιμής του υπερρεύματος μηδενικής φάσης και του κρίσιμου υπερρεύματος (αντίστοιχα η μαύρη συμπαγής γραμμή και η γκρι συμπαγής γραμμή) συναρτήσει του  $Z_m$ , για διάφορες τιμές της μαγνήτισης: (a)  $M = 0.2$ , (b)  $M = 0.43$ , (c)  $M = 0.9$ , (d)  $M = 1$ . Οι υπόλοιπες παράμετροι είναι  $T = 0.1$ ,  $\Delta_0 = 0.001$ ,  $k_F d = 25$  και  $Z_n = 2$ . Οι διευθύνσεις των μαγνητίσεων είναι  $z, x$  και  $y$ .

Έχει ενδιαφέρον να εξετάσουμε, παράλληλα με το υπερρεύμα μηδενικής φάσης, και το κρίσιμο υπερρεύμα σαν συνάρτηση της ισχύος ενδοεπιφανειακής μαγνήτισης  $Z_m$ . Στο Σχ.8.9(a)-(d) παρουσιάζονται σε κοινά διαγράμματα το κρίσιμο υπερρεύμα και το υπερρεύμα μηδενικής φάσης συναρτήσει του  $Z_m$ , για επαφές με ένα ενδιάμεσο στρώμα και  $k_F d = 25$ ,  $Z_n = 2$  και τιμές τις μαγνήτισης  $M$  ίδιες με αυτές του Σχ.8.7 αντίστοιχα στα διαγράμματα (a) έως (d). Παρατηρούμε ότι τα μέγιστα της απόλυτης τιμής του  $I(0)$  συναρτήσει του  $Z_m$  συμπεφτουν με τα σημεία στα οποία το κρίσιμο υπερρεύμα παρουσιάζει ασυνέχεια της παραγώγου και κατά συνέπεια αλλαγή του προσήμου του μέγιστου υπερρεύματος της επαφής, δηλαδή  $0 - \pi$  αλλαγή φάσης. Η παρατήρηση αυτή είναι γενική, όταν η ισχύς ενδοεπιφανειακής σκέδασης  $Z_n$  είναι αρκετά μεγάλη, αλλά δεν ισχύει όταν είναι σχετικά μικρή. Σε αυτή την περίπτωση η αλλαγή φάσης  $0 - \pi$ , αν υπάρχει, δεν συμβαίνει στην ίδια τιμή του  $Z_m$ , για την οποία μεγιστοποιείται η απόλυτη τιμή του  $I(0)$ . Για παράδειγμα στις καμπύλες του  $I(0)$  συναρτήσει του  $Z_m$  για  $Z_n = 0$  στα διαγράμματα του Σχ.8.7(a)-(d) τα μέγιστα δεν αντιστοιχούν σε αλλαγή φάσης  $0 - \pi$ .

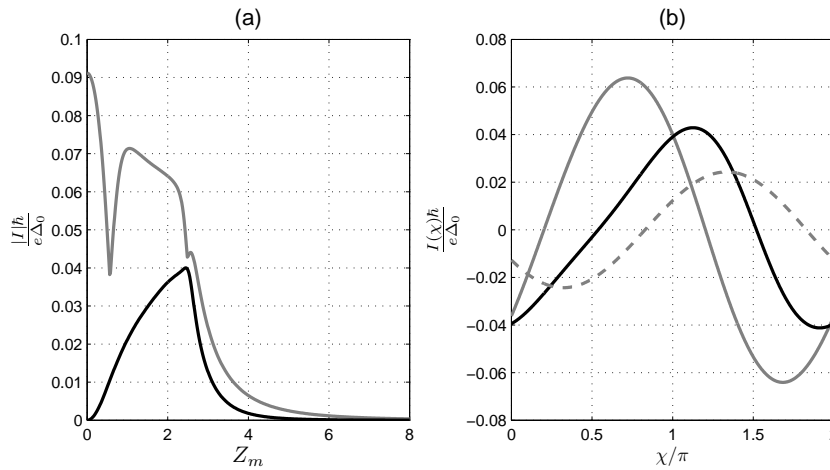
Στο Σχ.8.10(a)-(d) παρουσιάζονται οι σχέσεις υπερρεύματος φάσης αντίστοιχα με τις ίδιες παραμέτρους του Σχ.8.9(a)-(d) και τιμές του  $Z_m$  γύρω από τα σημεία που αναφέρθηκαν προηγουμένως, συγκεκριμένα κατά προσέγγιση (a)  $Z_m = 3.4$ , (b)  $Z_m = 1.8$ , (c)  $Z_m = 2.25$  και (d)  $Z_m = 2$ . Παρατηρούμε ότι στις περιπτώσεις μεγάλης μαγνήτισης ( $M = 0.9$ ,  $M = 1$ ) και ειδικά για  $M = 1$ , τα σημεία που επιλέξαμε δεν είναι ακριβώς ασυνέχειες της παραγώγου που σχετίζονται με αλλαγές φάσης. Παρόλα αυτά τα μέγιστα του υπερρεύματος μηδενικής φάσης ταυτίζονται με αυτά και μάλιστα, ειδικά για  $M = 1$ , οι δύο καμπύλες ταυτίζονται σε ένα μεγάλο φάσμα τιμών του  $Z_m$ . Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι για  $M = 1$ , η σχέση υπερρεύματος φάσης “κλειδώνει” στη μορφή  $-\cos \chi$ , με αποτέλεσμα η απόλυτη τιμή του υπερρεύματος μηδενικής φάσης να είναι πολύ κοντά στο κρίσιμο υπερρεύμα. Για  $M = 0.9$ , παρατηρούμε στο διάγραμμα του Σχ.8.10(c) ότι η μεταβολή του  $Z_m$  οδηγεί σε ελαφρά μετατόπιση της σχέσης υπερρεύματος φάσης, κάτι που μπορεί να θυμίσει μία  $0 - \pi$  αλλαγή φάσης. Περαιτέρω αύξηση του  $Z_m$  παρόλα αυτά δεν οδηγεί σε μία καθαρή τέτοια μετάβαση. Το ίδιο και ακόμα περισσότερο ισχύει για  $M = 1$ , όπου η σχέση υπερρεύματος φάσης παραμένει “κλειδωμένη” στη μορφή  $-\cos \chi$ . Αντίθετα, για  $M = 0.2$  και  $M = 0.43$ , η  $0 - \pi$  αλλαγή φάσης είναι εμφανής, στα διαγράμματα του Σχ.8.10(a) και (b).

Παρόλα αυτά οι σχέσεις υπερρεύματος φάσης που παρουσιάζονται σε αυτά τα διαγράμματα (Σχ.8.10) είναι σχετικά συμβατικές, με την έννοια ότι η μορφή τους, με τη μία αρμονική και, κατά την αλλαγή φάσης, με τη δεύτερη, εμφανίζεται και σε επαφές με συνεπίπεδη γεωμετρία μαγνητίσεων. Επίσης το υπερρεύμα μηδενικής φάσης είναι σχετικά μικρό, συγκρινόμενο με το κρίσιμο υπερρεύμα. Έτσι, στο Σχ.8.11(a), παρουσιάζουμε το διάγραμμα του κρίσιμου υπερρεύματος και της απόλυτης τιμής του υπερρεύματος μηδενικής φάσης συναρτήσει του  $Z_m$ , για τις ίδιες παραμέτρους με το Σχ.8.10, αλλά με  $M = 0.8$ . Παρατηρούμε ότι το μέγιστο της απόλυτης τιμής του  $I(0)$  γίνεται στο σημείο





Σχήμα 8.10: Σχέσεις υπερρεύματος φάσης για επαφές με τις ίδιες παραμέτρους, όπως και στο Σχ.8.9, και για τιμές του  $Z_m$  γύρω από τις οποίες έχουμε απότομη μεταβολή του κρίσιμου υπερρεύματος και μέγιστο του υπερρεύματος μηδενικής φάσης: (a)  $Z_m = 3.2, 3.4, 3.6$ , (b)  $Z_m = 1.6, 1.8, 2$ , (c)  $Z_m = 2, 2.25, 2.5$  και (d)  $Z_m = 1.8, 2, 2.2$ . Οι τιμές του  $Z_m$ , με τη σειρά που αναφέρονται, αντιστοιχούν στη καμπύλη με την γκρι συμπαγή, τη μαυρη συμπαγή και τη γκρι διακεκομμένη γραμμή σε κάθε διάγραμμα. Οι άλλες παράμετροι είναι ακριβώς όπως και στο Σχ.8.9(a)-(d) αντίστοιχα.



Σχήμα 8.11: Για τις ίδιες παραμέτρους με το Σχ.8.10, αλλά με  $M = 0.8$ , δίνουμε: (a) το κρίσιμο υπερρεύμα (γκρι γραμμή) και την απόλυτη τιμή του υπερρεύματος μηδενικής φάσης (μαύρη γραμμή) συναρτήσει του  $Z_m$  και (b) τις σχέσεις υπερρεύματος φάσης για τιμές του  $Z_m = 2, 2.5, 3$  (γκρί συμπαγής, μαύρη συμπαγής, γκρί διακεκομμένη γραμμή) γύρω από το μέγιστο του  $I(0)$  στο  $Z_m = 2.5$ .

που το κρίσιμο υπερρεύμα έχει τη δεύτερη ασυνέχεια παραγώγου. Και οι δύο ασυνέχειες της παραγώγου του κρίσιμου υπερρεύματος αντιστοιχούν σε αλλαγή φάσης  $0 - \pi$ . Η πρώτη όμως δεν αντιστοιχεί σε μέγιστο του  $I(0)$ . Σημειώνουμε ότι, π.χ για  $Z_n = 4$ , η κατάσταση διατηρείται με τη διαφορά ότι έχει αναπτυχθεί και ένα δεύτερο μέγιστο του  $I(0)$ , το οποίο συμπέφτει με την πρώτη ασυνέχεια παραγώγου του κρίσιμου υπερρεύματος. Βέβαια το μέγεθος του υπερρεύματος πέφτει σημαντικά. Έτσι επιβεβαιώνεται ο κανόνας που αναφέραμε παραπάνω για αρκούντως μεγάλη τιμή του  $Z_n$ . Στο Σχ.8.11(b) δίνονται οι αντίστοιχες σχέσεις υπερρεύματος φάσης για τιμές του  $Z_m$  γύρω από το μέγιστο του  $I(0)$  ( $Z_m = 2, 2.5, 3$ ). Παρατηρούμε ότι το υπερρεύμα μηδενικής φάσης είναι αυξημένο σε σχέση με το κρίσιμο υπερρεύμα και ότι η αλλαγή φάσης γίνεται με “παράμορφωση” της σχέσης υπερρεύματος φάσης και όχι με ευκρινή εμφάνιση δεύτερης αρμονικής. Γενικότερα μπορούμε να κάνουμε το εξής σχόλιο: Οι σχέσεις υπερρεύματος φάσης, με μη συνεπίπεδη γεωμετρία μαγνητίσεων, δείχνουν ότι πρόκειται για επαφές που δεν μπορούν να χαρακτηριστούν ως ευρισκόμενες αμιγώς σε φάση  $0$  ή  $\pi$ , στις περισσότερες των περιπτώσεων, παρόλο που μπορεί να περιέχουν προσεγγιστικά μία μόνο αρμονική. Η ύπαρξη υπερρεύματος μηδενικής φάσης και ο όρος  $\sin \chi$  στην ορίζουσα  $\Gamma$ , και κατά συνέπεια ο όρος  $\cos \chi$  στον αριθμητή της σχέσης (7.52), επηρεάζουν το υπερρεύμα για όλες τις τιμές της φάσης, περιορίζοντας το ενδεχόμενο να υπάρχει κέντρο αντισυμμετρίας στο διάγραμμα της CPR και διατηρώντας μόνο την περιοδικότητα

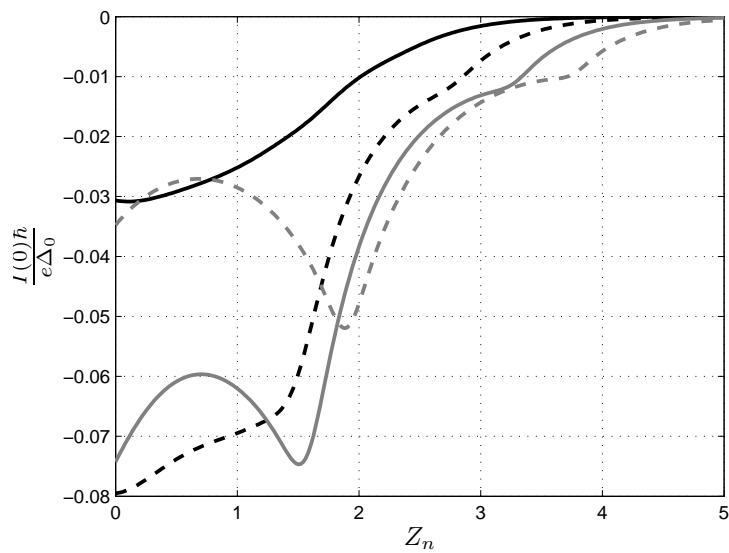
κατά τη μετατόπιση της φάσης κατά  $2\pi$ .

Κλείνουμε αυτή την ενότητα με μερικές ανάλογες παρατηρήσεις με τις προηγούμενες, που αφορούν την εξάρτηση του υπερρεύματος μηδενικής φάσης από την ισχύ ενδοεπιφανειακής κανονικής σκέδασης  $Z_n$ . Η εξάρτηση από το  $Z_n$  κρίνεται λιγότερο σημαντική, καθώς δεν είναι απαραίτητη για την ύπαρξη του υπερρεύματος μηδενικής φάσης, ούτε για τα σημαντικά υπερρεύματα που παρατηρούνται σε ημιμεταλλικές επαφές Josephson με γεωμετρία μαγνητίσεων που επιτρέπει την αλλαγή σπιν των διεγέρσεων κατά τη σκέδαση στις ενδοεπιφάνειες, σε σχέση με την κατάσταση σπιν που βρίσκονται μέσα στο σιδηρομαγνητικό στρώμα. Παρόλα αυτά μια σύντομη συζήτηση είναι χρήσιμη.

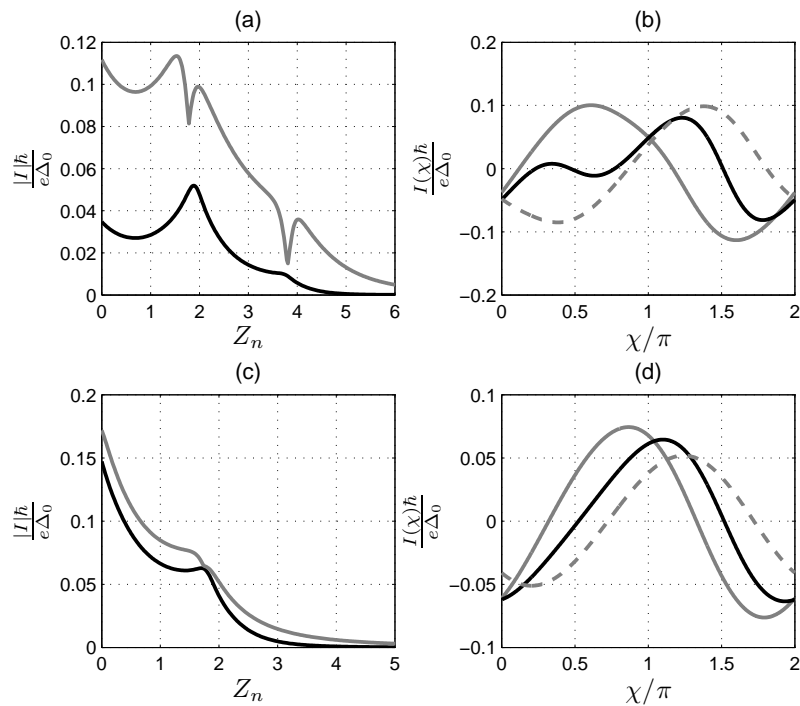
Στο Σχ.8.12 δίνεται το υπερρέυμα μηδενικής φάσης συναρτήσει της ισχύος ενδοεπιφανειακής σκέδασης  $Z_n$ , για διάφορες τιμές της ισχύος ενδοεπιφανειακής μαγνήτισης  $Z_m$ . Οι ακριβείς παράμετροι της επαφής φαίνονται στη λεζάντα του σχήματος. Παρατηρούμε, όπως και στην πρώτη ενότητα, ότι για μικρά  $Z_m (= 0.5)$  το υπερρέυμα μηδενικής φάσης είναι πιο ασθενές και φθίνει μονότονα στο μηδέν με την αύξηση του  $Z_n$  (μάυρη συμπαγής γραμμή). Η αύξηση όμως του  $Z_m$  οδηγεί σε αύξηση του υπερρεύματος μηδενικής φάσης, σχεδόν για κάθε  $Z_n$ , αλλά και στην ύπαρξη μιας κορυφής συναρτήσει του  $Z_n$ , η ύπαρξη της οποίας είναι αντίθετη με την “κοινή” λογική. Θα περιμέναμε δηλαδή μονότονη πτώση. Αυτό το φαινόμενο πιθανόν οφείλεται σε συντονισμούς που εμφανίζονται στην επαφή. Τέλος παρατηρούμε ότι περαιτέρω αύξηση του  $Z_m (= 2)$  οδηγεί σε μείωση του υπερρεύματος μηδενικής φάσης, παρόλο που η κορυφή που αναφέραμε συνεχίζει να υφίσταται.

Στο Σχ.8.13(a) δίνουμε στο ίδιο διάγραμμα το κρίσιμο υπερρέυμα και την απόλυτη τιμή του υπερρεύματος μηδενικής φάσης συναρτήσει του  $Z_n$ , για τις ίδιες παραμέτρους όπως και στο Σχ.8.12 και για  $Z_m = 2$ . Παρατηρούμε ότι, όπως και στα αντίστοιχα διαγράμματα συναρτήσει του  $Z_m$ , οι κορυφές ή απότομες μεταβολές του υπερρεύματος μηδενικής φάσης συμπεφτουν με τα σημεία ασυνέχειας της παραγωγού του κρίσιμου υπερρεύματος. Το φαινόμενο αυτό είναι σχετικά γενικό, αλλά απαιτεί αρκούντως ισχυρή τιμή του  $Z_m$  για να εμφανιστεί. Στο Σχ.8.13(b) δίνουμε τις σχέσεις υπερρεύματος φάσης για τιμές του  $Z_n$  γύρω από το πρώτο μέγιστο του  $|I(0)|$ , περίπου στο  $Z_n = 1.78$ . Παρατηρούμε ότι γύρω από το σημείο αυτό έχουμε  $0 - \pi$  αλλαγή φάσης.

Στο Σχ.8.13(c) δίνουμε πάλι στο ίδιο διάγραμμα το κρίσιμο υπερρέυμα και την απόλυτη τιμή του υπερρεύματος μηδενικής φάσης συναρτήσει του  $Z_n$ , αλλά για  $M = 0.9$ . Παρατηρούμε ότι το κρίσιμο υπερρέυμα έχει μία ασυνέχεια στην παράγωγό του, γύρω στο  $Z_n = 1.75$ , και ότι η απόλυτη τιμή του υπερρεύματος μηδενικής φάσης τείνει να συμπεσει με την καμπύλη του κρίσιμου ρεύματος. Η κορυφή που εμφανίζει το υπερρέυμα μηδενικής φάσης συμπεφτει με την ασυνέχεια της παραγωγού του κρίσιμου υπερρεύματος. Όμως σε αυτό το σημείο δεν έχουμε μια καθαρή  $0 - \pi$  αλλαγή φάσης, όπως φαίνεται στο Σχ.8.13(d). Εκεί δίνουμε τις αντίστοιχες σχέσεις υπερρεύματος φάσης για τιμές του



Σχήμα 8.12: Διάγραμμα του υπερρεύματος μηδενικής φάσης συναρτήσει του  $Z_n$ , για τιμές του  $Z_m = 0.5, 1, 1.5, 2$  (μαύρη συμπαγής, μαύρη διακεκομμένη, γκρι συμπαγής, γκρι διακεκομμένη γραμμή). Οι τιμές των άλλων παραμέτρων είναι:  $M = 0.5, k_F d = 25$ . Η γεωμετρία των μαγνητίσεων είναι  $zxy$ .



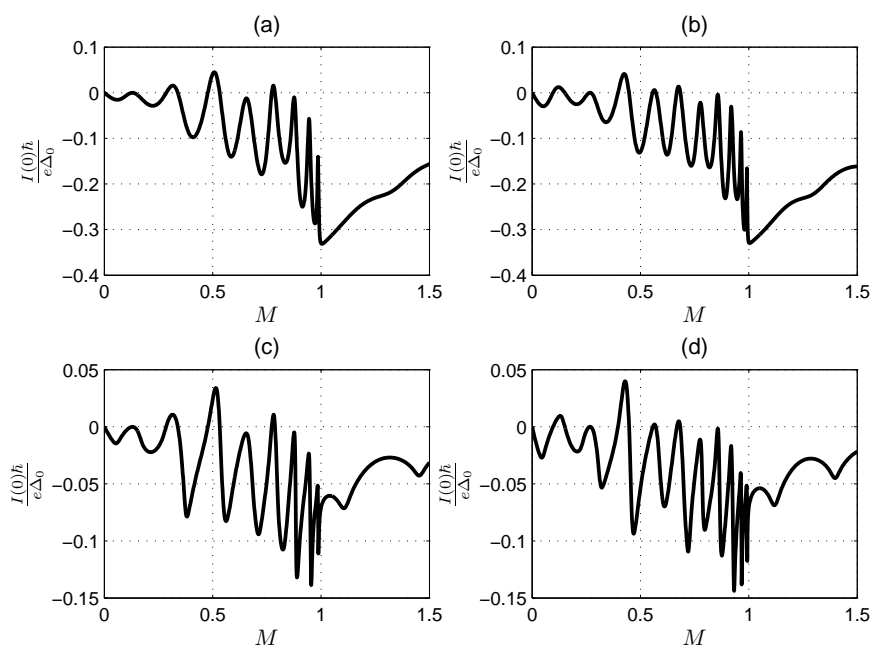
Σχήμα 8.13: (a) Διάγραμμα του κρίσιμου υπερρεύματος (γκρι γραμμή) και του υπερρεύματος μηδενικής φάσης (μαύρη γραμμή) συναρτήσει του  $Z_n$  για  $M = 0.5$  και (b) οι αντίστοιχες σχέσεις υπερρεύματος φάσης για  $Z_n = 1.5, 1.78, 2$  (γκρι συμπαγής, μαύρη συμπαγής, γκρι διακεκομμένη γραμμή αντίστοιχα). (c) Διάγραμμα του κρίσιμου υπερρεύματος (γκρι γραμμή) και του υπερρεύματος μηδενικής φάσης (μαύρη γραμμή) συναρτήσει του  $Z_n$  για  $M = 0.9$  και (d) οι αντίστοιχες σχέσεις υπερρεύματος φάσης για  $Z_n = 1.5, 1.75, 2$  (γκρι συμπαγής, μαύρη συμπαγής, γκρι διακεκομμένη γραμμή αντίστοιχα). Οι άλλες παράμετροι είναι  $Z_m = 2$  και  $k_F d = 25$ . Η γεωμετρία των μαγνητίσεων είναι  $zxy$ .

$Z_n$  γύρω από το 1.75. Υπάρχει μια μετατόπιση των καμπυλών, καθώς το  $Z_n$  αυξάνει, αλλά η κατάσταση αυτή δεν αλλάζει, όσο κι αν απομακρυνθούμε από το εν λόγω σημείο ( $Z_n = 1.75$ ). Φαίνεται ότι οι σχέσεις υπερρεύματος φάσης σε αυτή την περίπτωση τείνουν να “κλειδώσουν” στη μορφή  $-\cos \chi$ . Με βάση όλα τα παραπάνω, συμπεραίνουμε ότι η εξάρτηση του υπερρεύματος από το  $Z_n$  παρουσιάζει πολλές αναλογίες με την εξάρτησή του από την ισχύ της ενδοεπιφανειακής μαγνήτισης  $Z_m$ .

### 8.3 Εξάρτηση του κρίσιμου υπερρεύματος και του υπερρεύματος μηδενικής φάσης από τη μαγνήτιση και το πάχος του ενδιάμεσου στρώματος - το ημιμεταλλικό όριο $M > 1$

Στην παρούσα ενότητα θα παραθέσουμε μερικά διαγράμματα που καταδεικνύουν την εξάρτηση του υπερρεύματος μηδενικής φάσης, καθώς και του κρίσιμου υπερρεύματος, από τη μαγνήτιση και το πάχος του ενδιάμεσου στρώματος σιδηρομαγνητικής επαφής Josephson. Θα θεωρήσουμε ότι η επαφή Josephson έχει ένα ενδιάμεσο στρώμα και σπιν ενεργές ενδοεπιφάνειες στα αριστερά και τα δεξιά. Επίσης θα υποθέσουμε ξανά ότι  $T = 0.1$  και  $\Delta_0 = 0.001$ , όπου  $\Delta_0$  είναι η συνάρτηση χάσματος σε μηδενική θερμοκρασία και είναι η ίδια και για την αριστερή και τη δεξιά υπεραγώγιμη περιοχή. Οι ισχύες ενδοεπιφανειακής μαγνήτισης και κανονικής σκέδασης στην αριστερή και τη δεξιά ενδοεπιφάνεια θεωρούνται συμμετρικές. Οι διευθύνσεις της αριστερής ενδοεπιφανειακής μαγνήτισης και της μαγνήτισης του ενδιάμεσου στρώματος επιλέγονται στη  $z$  και την  $x$  διεύθυνση αντίστοιχα. Η διεύθυνση της δεξιάς ενδοεπιφανειακής μαγνήτισης μεταβάλλεται τόσο στο επίπεδο  $xy$ , όσο και στα επίπεδα  $zy$  και  $zx$ . Επίσης θα μεταβάλλουμε το μέτρο της μαγνήτισης του ενδιάμεσου στρώματος σε εύρος τιμών που περιλαμβάνει τιμές μεγαλύτερες της μονάδος, οπότε το ενδιάμεσο στρώμα έχει ιδιότητες ημιμεταλλικού σιδηρομαγνήτη, αφού η μία ζώνη σπιν βρίσκεται πάνω από την ενέργεια Fermi και είναι κενή σε μηδενική θερμοκρασία.

Στο Σχ.8.14 δίνουμε το υπερρέυμα μηδενικής φάσης συναρτήσει της κανονικοποιημένης μαγνήτισης  $M$  του ενδιάμεσου στρώματος. Και στα τέσσερα διαγράμματα αυτού του σχήματος έχουμε θέσει  $Z_m = 1$ , ενώ στα διαγράμματα (a) και (b) το κανονικοποιημένο πάχος του ενδιάμεσου στρώματος είναι  $k_F d = 26.8, 33.2$  αντίστοιχα και η ισχύς της ενδοεπιφανειακής κανονικής σκέδασης είναι  $Z_n = 0$ . Στα διαγράμματα (c) και (d) έχουμε πάλι  $k_F d = 26.8, 33.2$  αντίστοιχα, αλλά  $Z_n = 1$ . Η γεωμετρία των μαγνήτισεων είναι  $zxy$ . Το εύρος των τιμών της μαγνήτισης  $M$  εκτείνεται από το μηδέν έως το 1.5. Περιλαμβάνει δηλαδή και την περιοχή  $[1, 1.5]$ , στην οποία το μοντέλο μας αποτελεί μια απλοϊκή περιγραφή ημιμεταλλικού σιδηρομαγνητικού ενδιάμεσου στρώματος.



Σχήμα 8.14: Διαγράμματα του υπερρεύματος μηδενικής φάσης συναρτήσει της μαγνητικής  $M$  του ενδιάμεσου στρώματος για (a)  $k_F d = 26.8$  και  $Z_n = 0$ , (b)  $k_F d = 33.2$  και  $Z_n = 0$ , (c)  $k_F d = 26.8$  και  $Z_n = 1$  και (d)  $k_F d = 33.2$  και  $Z_n = 1$ . Σε όλα τα διαγράμματα  $Z_m = 1$ ,  $T = 0.1$  και  $\Delta_0 = 0.001$ . Η γεωμετρία των μαγνητίσεων είναι  $zxy$ .

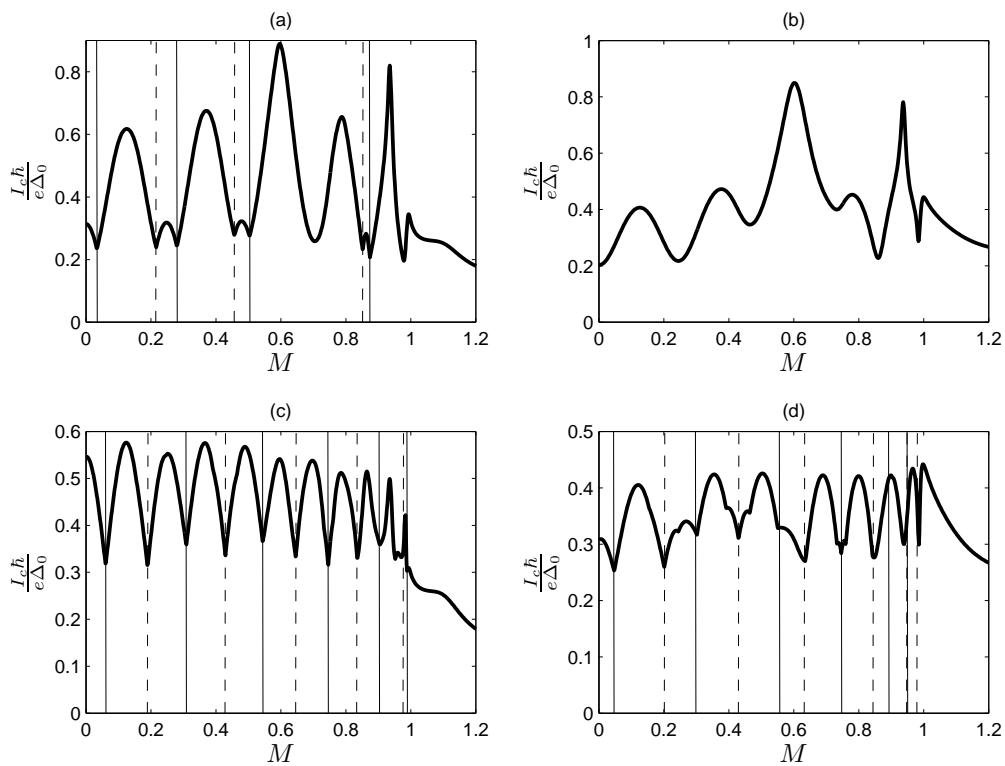
Από τα διαγράμματα του Σχ.8.14 παρατηρούμε τις γρήγορες ταλαντώσεις του υπερρεύματος μηδενικής φάσης συναρτήσει της μαγνήτισης  $M$ . Επίσης παρατηρούμε ότι αυτό μηδενίζεται ακόμα και για μη μηδενικές τιμές της μαγνήτισης, όπως παρατηρήσαμε και στην πρώτη ενότητα αυτού του κεφαλαίου. Με την αύξηση του  $k_F d$  (από το (a) στο (b) και από το (c) στο (d)) διαπιστώνουμε ότι η περίοδος της ταλάντωσης τείνει να μειωθεί, και όντως μειώνεται, όπως προκύπτει αν επιλέξουμε ακόμα μεγαλύτερες τιμές του κανονικοποιημένου πάχους. Αυτό είναι αναμενόμενο, αν αναλογιστούμε ότι η εξάρτηση του υπερρεύματος από τη μαγνήτιση είναι μέσω των κυματοδιανυσμάτων, τα οποία εμφανίζονται και μέσα σε τριγωνομετρικές συναρτήσεις ημίτονου και συνημίτονου, πολλαπλασιασμένα επί  $k_F d$ . Για  $Z_n = 1$ , στα διαγράμματα (c) και (d), παρατηρούμε μια κάποια μείωση του υπερρεύματος μηδενικής φάσης, για όλες τις τιμές του  $M$ . Επίσης παρατηρούμε ότι, ενώ για  $Z_n = 0$  στο  $M = 1$  η τιμή του υπερρεύματος μηδενικής φάσης είναι μέγιστη κατ' απόλυτη τιμή, για  $Z_n = 1$  αυτό δεν ισχύει πλέον. Το υπερρέυμα μηδενικής φάσης για  $M > 1$  είναι μειωμένο, όταν  $Z_n = 1$ , και εμφανίζει πτώση, καθώς αυξάνεται το  $M$ , με πιο ευκρινείς κορυφές. Η πτώση οφείλεται στην αυξημένη κανονική σκέδαση στην επαφή, ενώ οι ευκρινείς κορυφές σε συντονισμούς, που επιτρέπουν τη διέλευση των σωματιδίων παρά την ισχυρή κανονική σκέδαση.

Είναι αξιοπερίεργο επίσης γιατί δεν εμφανίζονται γρήγορες ταλαντώσεις, λόγω της εξάρτησης από τα κυματανύσματα μέσω τριγωνομετρικών συναρτήσεων, όταν  $M > 1$ . Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι, τα ημίτονα και συνημίτονα που αναφέραμε, εμφανίζονται στον αριθμητή της σχέσης (7.52) σε αθροίσματα με όρους που εξαρτώνται και από τα δύο κυματανύσματα, που αντιστοιχούν στις δύο προβολές του σπιν. Όταν  $M > 1$ , η φάση που αντιστοιχεί στο σπιν το αντίθετο της μαγνήτισης ( $q_{e\downarrow} k_F d$ ) γίνεται φανταστική και μετατρέπει το ημίτονο ή το συνημίτονο στην αντίστοιχη υπερβολική τριγωνομετρική συνάρτηση. Έτσι αυτή αθροιζόμενη με το ημίτονο ή συνημίτονο της πραγματικής φάσης ( $q_{e\uparrow} k_F d$ ), που αντιστοιχεί στο σπιν το παράλληλο στη μαγνήτιση, εξαφανίζει την ταλαντωτική συμπεριφορά. Οδηγούμαστε λοιπόν σε μια πιο απλή εξάρτηση του υπερρεύματος από τις παραμέτρους της επαφής.

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε μερικά διαγράμματα που συσχετίζουν το κρίσιμο υπερρέυμα με την τιμή της μαγνήτισης. Επίσης θα περιγράψουμε ποια είναι η σχέση της μεταβολής της μαγνήτισης με την εμφάνιση  $0 - \pi$  αλλαγής φάσης στην επαφή. Στην περίπτωση που οι μαγνητίσεις της επαφής είναι μη συνεπίπεδες, η σχέση υπερρεύματος φάσης έχει μηδενικά σε τιμές της φάσης που διαφέρουν από τις τιμές  $0$  και  $\pi$ . Έτσι δεν έχει νόημα να μιλήσουμε για κατάσταση  $0$  ή κατάσταση  $\pi$ . Τότε λέγεται ότι η επαφή βρίσκεται σε κατάσταση  $\chi_0$ , όπου  $\chi_0$  είναι η φάση που μηδενίζεται το υπερρέυμα και η ενέργεια της επαφής έχει ελάχιστο. Παρόλα αυτά έχει νόημα να ορίσουμε μια επαφή να βρίσκεται στην κατάσταση  $0$  ή  $\pi$  ανάλογα με το αν το μέγιστο, κατ' απόλυτη τιμή, του υπερρεύματος στη σχέση υπερρεύματος φάσης και στο διάστημα  $[0, \pi]$  είναι θετικό ή αρνητικό. Έτσι, αν μια επαφή με μη συνεπίπεδη γεωμετρία μαγνητίσεων έχει μικρό



υπερρεύμα μηδενικής φάσης και κατά συνέπεια μικρή φάση μηδενισμού, μπορεί να της αποδοθεί ο χαρακτηρισμός μηδενικής  $0$  ή  $\pi$  επαφής. Κυρίως αυτό που μας ενδιαφέρει είναι αν το πρόσημο του υπερρεύματος αλλάζει απότομα ή ομαλά, με τη μεταβολή κάποιας παραμέτρου. Γενικά η αλλαγή είναι απότομη όταν  $M < 1$ , όπως είδαμε στην προηγούμενη ενότητα (Σχ.8.10). Για  $M > 1$  η CPR κλειδώνει σε προσεγγιστικά πρωτοτή ή ημιτονοειδή μορφή και με μεταβολή των σχετικών γωνιών του πρώτου και του τρίτου στρώματος επιτυγχάνουμε τη μετατόπισή της [96].



Σχήμα 8.15: Διαγράμματα του κρίσιμου υπερρεύματος συναρτήσει της μαγνήτισης του ενδιάμεσου στρώματος: (a)  $Z_m = 0.7$  και γεωμετρία μαγνητίσεων  $z x z$ , (b)  $Z_m = 1$  και γεωμετρία μαγνητίσεων  $z x z$ , (c)  $Z_m = 0.7$  και γεωμετρία μαγνητίσεων  $z x y$  και (d)  $Z_m = 1$  και γεωμετρία μαγνητίσεων  $z x y$ . Οι υπόλοιπες παράμετροι είναι  $Z_n = 0$ ,  $k_F d = 25$ . Οι κάθετες γραμμές συμβολίζουν την  $0 - \pi$  αλλαγή φάσης. Στο διάγραμμα (b) δεν υπάρχει αλλαγή φάσης. Για  $M$  κοντά στη μονάδα, ο ορισμός της  $0 - \pi$  αλλαγής φάσης είναι απλά ενδεικτικός για τη γεωμετρία  $z x y$ .

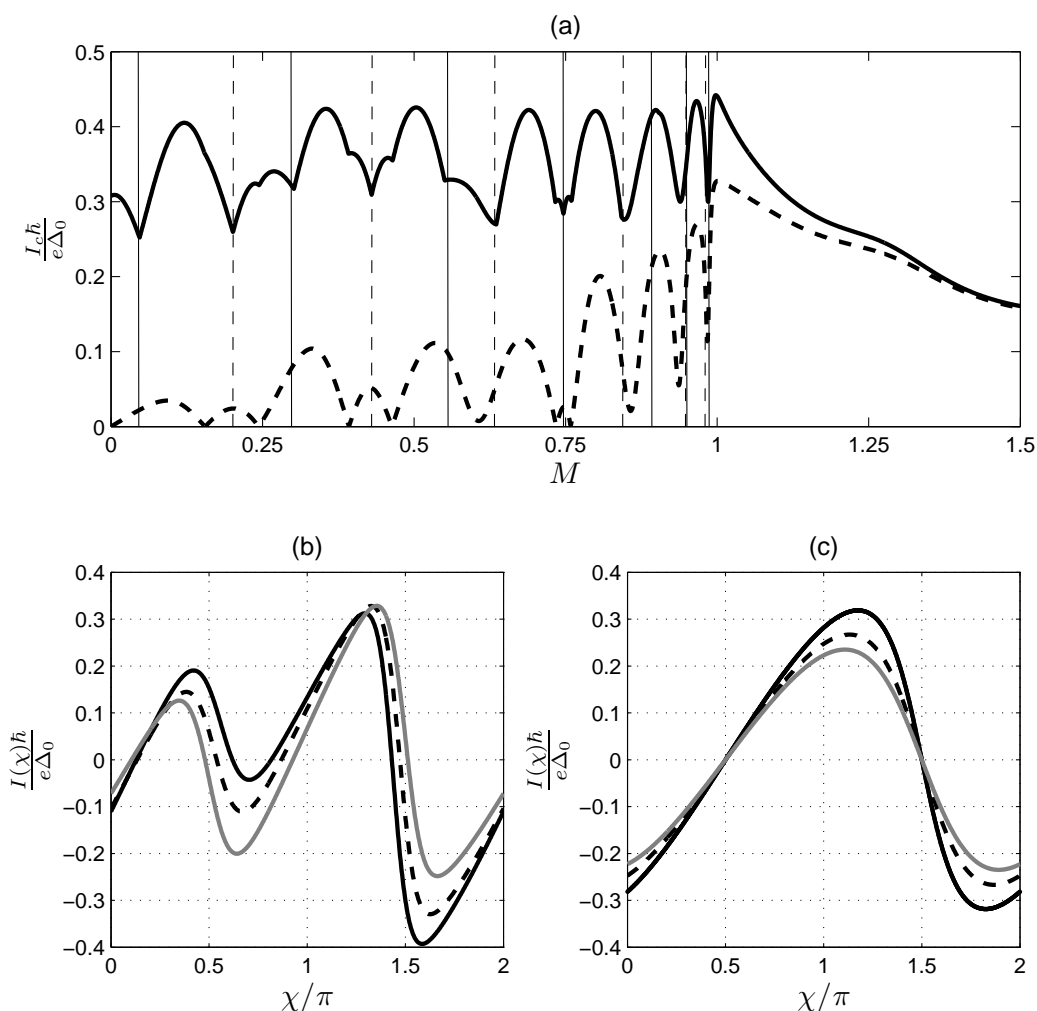
Στο Σχ.8.15 δίνουμε διαγράμματα του κρίσιμου υπερρεύματος συναρτήσει της μα-

γνήτισης  $M$  του ενδιάμεσου στρώματος. Στο Σχ.8.15(a) οι παράμετροι είναι  $Z_m = 0.7$ ,  $Z_n = 0$ ,  $k_F d = 25$  και η γεωμετρία των μαγνητίσεων είναι  $zxz$ . Οι κάθετες γραμμές συμβολίζουν την αλλαγή φάσης, με τις συμπαγείς γραμμές να σημαίνουν αλλαγή από 0 σε  $\pi$  και οι διακεκομμένες το αντίστροφο. Παρατηρούμε ότι για  $M > 1$  το κρίσιμο υπερρεύμα είναι μη μηδενικό, σε αντίθεση με το υπερρεύμα μηδενικής φάσης, που είναι μηδέν, αφού η γεωμετρία των μαγνητίσεων είναι συνεπίπεδη. Επίσης παρατηρούμε ότι μετά το  $M > 1$  δεν έχουμε αλλαγές φάσης. Αυτό επιβεβαιώνει ότι η μορφή της CPR για  $M > 1$  είναι ανεξάρτητη των μαγνητίσεων της επαφής.

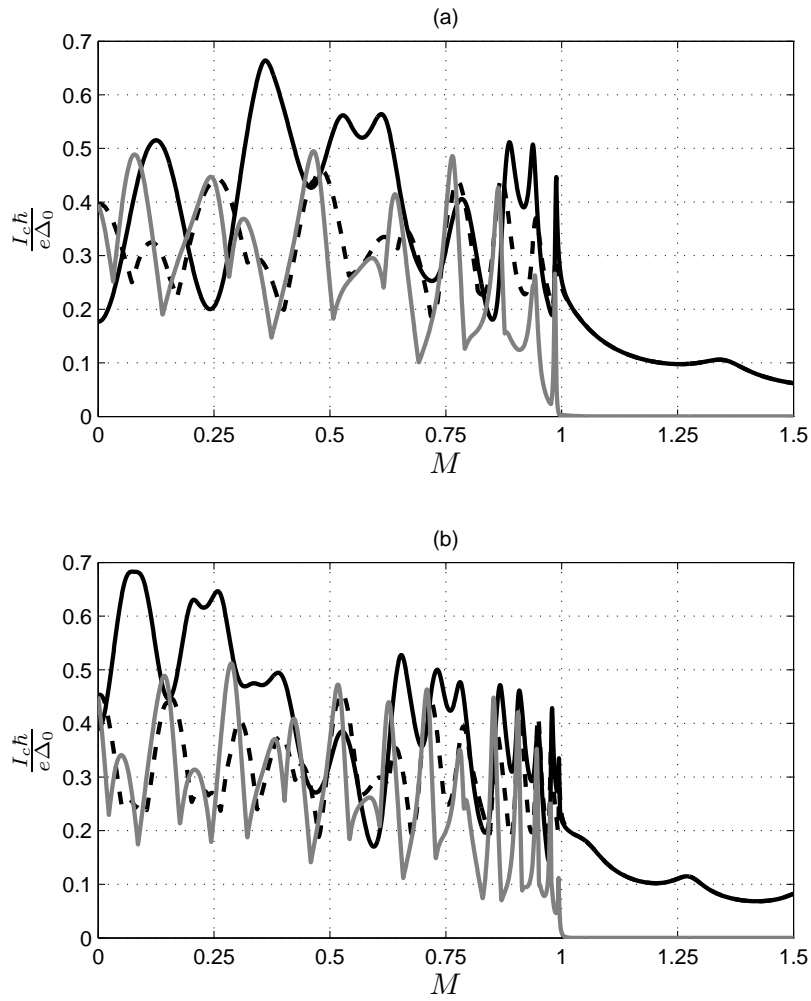
Στο Σχ.8.15(b) έχουμε θέσει  $Z_m = 1$  και όλες τις άλλες παραμέτρους ίδιες με το Σχ.8.15(a). Παρατηρούμε ανάλογη συμπεριφορά, με τη διαφορά ότι δεν εμφανίζεται αλλαγή φάσης για ολόκληρο το εύρος τιμών της παραμέτρου  $M$ . Στα Σχ.8.15(c) και (d) έχουμε αλλάξει τη γεωμετρία των μαγνητίσεων σε  $zxy$  και έχουμε  $Z_m = 0.7$  στο (c) και  $Z_m = 1$  στο (d). Οι άλλες παράμετροι είναι οι ίδιες. Παρατηρούμε τις αλλαγές φάσης κατά μήκος των τιμών της παραμέτρου  $M$ , μέχρι την τιμή μονάδα. Από εκεί και πέρα δεν υπάρχουν αλλαγές φάσης.

Στο Σχ.8.16(a) δίνουμε ξανά το Σχ.8.15(d) μαζί με την απόλυτη τιμή του υπερρεύματος μηδενικής φάσης, με τη μαύρη διακεκομμένη γραμμή. Παρατηρούμε ότι τα μέγιστα των καμπυλών ταυτίζονται προσεγγιστικά. Αυτό το συμπέρασμα είναι γενικό, στο βαθμό που μπορούμε να κρίνουμε. Επίσης, βαθιά μέσα στην περιοχή  $M > 1$  οι καμπύλες τείνουν να ταυτιστούν. Στο διάγραμμα του Σχ.8.16(b) παρουσιάζονται οι σχέσεις υπερρεύματος φάσης για τρεις τιμές της μαγνήτισης, που αναφέρονται στο Σχ.8.16(a) ( $M = 0.53$  με μαύρη συμπαγής γραμμή,  $M = 0.55$  με μαύρη διακεκομμένη γραμμή και  $M = 0.57$  με γκρι συμπαγής γραμμή). Οι τιμές αυτές είναι κοντά στο σημείο αλλαγής φάσης από 0 σε  $\pi$ . Παρατηρούμε την ύπαρξη της δεύτερης αρμονικής και τη σταδιακή ενίσχυση του αρνητικού λοβού σε σχέση με το θετικό. Στο διάγραμμα του Σχ.8.16(c) δείχνουμε τις σχέσεις υπερρεύματος φάσης για  $M = 1.1$  (μαύρη συμπαγής γραμμή),  $M = 1.2$  (μαύρη διακεκομμένη γραμμή) και  $M = 1.3$  (γκρί συμπαγής γραμμή). Παρατηρούμε ότι η CPR, καθώς αυξάνεται η μαγνήτιση, τείνει να γίνει ημιτονοειδής. Επίσης φαίνεται ότι η γενική μορφή της CPR μένει αναλλοίωτη με τη μεταβολή της μαγνήτισης, όπως συμβαίνει και με τη μεταβολή των παραμέτρων  $Z_m$  και  $Z_n$ . Π.χ τα σημεία μηδενισμού παραμένουν τα ίδια. Όπως έχουμε αναφέρει, μετατόπιση της CPR επιτυγχάνεται με μεταβολή των γωνιών των μαγνητίσεων ενδοεπιφάνειας.

Στο Σχ.8.17(a) και (b) δίνουμε το κρίσιμο υπερρεύμα συναρτήσεως της μαγνήτισης του ενδιάμεσου στρώματος για τρεις γεωμετρίες μαγνητίσεων. Η μαύρη συμπαγής γραμμή αντιστοιχεί στη γεωμετρία  $zxz$ , η μαύρη διακεκομμένη γραμμή αντιστοιχεί στη γεωμετρία  $zxy$  και η γκρι συμπαγής γραμμή αντιστοιχεί στη γεωμετρία  $zxx$ . Στο Σχ.8.17(a) έχουμε  $k_F d = 25$  και στο (b) θέτουμε  $k_F d = 40$ . Οι υπόλοιπες παράμετροι είναι  $Z_m = 1$  και  $Z_n = 0.5$ . Παρατηρούμε ότι οι συντονισμοί του κρίσιμου υπερρεύματος για  $M < 1$  είναι πιο ισχυροί για την περίπτωση της γεωμετρίας  $zxz$  και για τις δύο τιμές του  $k_F d$ .



Σχήμα 8.16: Στο (a) δίνουμε ξανά το Σχ.8.15(d) μαζί με την απόλυτη τιμή του υπερρεύματος μηδενικής φάσης (διακεκομμένη μαύρη γραμμή). Στο (b) δίνουμε τις σχέσεις υπερρεύματος φάσης γύρω από σημείο  $M = 0.55$  του διαγράμματος (a) (μαύρη διακεκομμένη γραμμή) και συγκεκριμένα και στα σημεία  $M = 0.53$  (μαύρη συμπαγής γραμμή) και  $M = 0.57$  (γκρί συμπαγής γραμμή). Στο (c) δίνουμε τις σχέσεις υπερρεύματος φάσης για  $M = 1.1$  (μαύρη συμπαγής γραμμή),  $M = 1.2$  (μαύρη διακεκομμένη γραμμή) και  $M = 1.3$  (γκρί συμπαγής γραμμή).



Σχήμα 8.17: Στα παραπάνω διαγράμματα δίνουμε τις καμπύλες του κρίσιμου υπερρεύματος συναρτήσει της μαγνήτισης  $M$  για τρεις γεωμετρίες μαγνητίσεων:  $zxx$  με μαύρη συμπαγή γραμμή,  $zxy$  με μαύρη διακεκομμένη γραμμή και  $zxx$  με γκρι συμπαγή γραμμή. Στο (a) έχουμε  $k_F d = 25$  και στο (b) έχουμε  $k_F d = 40$ . Οι υπόλοιπες παράμετροι είναι κοινές και είναι  $Z_n = 0.5$  και  $Z_m = 1$ .

Η παρατήρηση αυτή φαίνεται να είναι γενική και αφορά και τη μεταβολή άλλων παραμέτρων πέραν του πάχους του ενδιάμεσου στρώματος. Το φαινόμενο πιθανώς οφείλεται στο ότι η μαγνητίσεις στο πρώτο και στο τρίτο στρώμα είναι στην ίδια διεύθυνση και επιτρέπουν ευκολότερα τη διέλευση των διεγέρσεων με κατάσταση σπιν στον άξονα κβάντωσης. Παρατηρούμε επίσης ότι, στο ημιμεταλλικό όριο  $M > 1$ , το κρίσιμο υπερρεύμα των γεωμετριών  $zxz$  και  $zxy$  είναι το ίδιο, ενώ το κρίσιμο υπερρεύμα για τη γεωμετρία  $zxx$  μηδενίζεται. Επομένως συμπεραίνουμε ότι για την ύπαρξη φαινομένου Josephson σε ημιμεταλλικές επαφές είναι απαραίτητη η ύπαρξη περιοχών μεταξύ του ενδιάμεσου στρώματος και των υπεραγωγών που να χαρακτηρίζονται από διαφορετική μαγνήτιση, ώστε να είναι δυνατή η μετατροπή των ζευγών Cooper από την κατάσταση singlet στους υπεραγωγούς στην κατάσταση triplet στο ημιμεταλλικό στρώμα. Αυτό είναι σε συμφωνία με τα ευρήματα της αναφοράς [64]. Επιπρόσθετα, βλέπουμε ότι το κρίσιμο υπερρεύμα είναι το ίδιο, ανεξάρτητα από τη ανομοιογενή γεωμετρία  $zxz$  ή  $zxy$ , και αυτό έχει να κάνει με το γεγονός ότι η μορφή της CPR δεν αλλάζει, όπως είδαμε, αλλά απλά μετατοπίζεται με τη μεταβολή των σχετικών γωνιών των μαγνητίσεων ενδο-επιφάνειας στα αριστερά και στα δεξιά.

Τα παραπάνω συμπεράσματα επιβεβαιώνονται και από τα Σχ.8.18 και Σχ.8.19. Οι παράμετροι στις οποίες αναφέρονται τα διαγράμματα δίνονται στις αντίστοιχες λεζάντες. Έτσι φαίνεται ότι και με μεταβολή των παραμέτρων  $Z_m$  και  $Z_n$  το κρίσιμο υπερρεύμα εξακολουθεί να έχει πιο έντονους συντονισμούς για τη γεωμετρία  $zxz$ . Επίσης και τα συμπεράσματα για το ημιμεταλλικό όριο επιβεβαιώνονται.

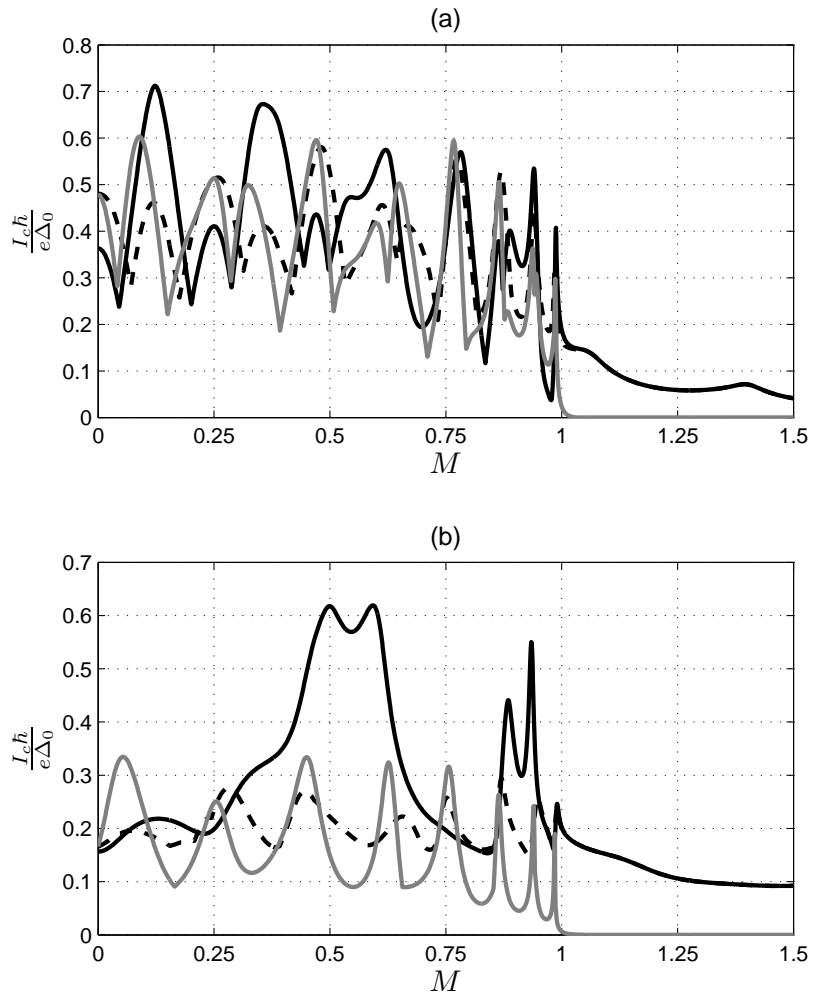
Συνεχίζουμε με την παράθεση διαγραμμάτων του υπερρεύματος μηδενικής φάσης και του κρίσιμου υπερρεύματος συναρτήσεως του κανονικοποιημένου πάχους του ενδιάμεσου στρώματος  $k_F d$ . Στο Σχ.8.20 δίνουμε το υπερρεύμα μηδενικής φάσης συναρτήσεως του κανονικοποιημένου πάχους. Οι κοινές παράμετροι είναι  $Z_n = 0.5$ ,  $Z_m = 1$ . Στο (a) θέτουμε  $M = 0.1$  και παρατηρούμε ότι κυριαρχούν ταλαντώσεις δύο περιόδων, μία της τάξης του  $3k_F d$  και η άλλη της τάξης του  $60k_F d$ . Οι περίοδοι αυτοί μπορούν να ερμηνευτούν, αν προσεγγίσουμε τα κυματοδιανύσματα στο ενδιάμεσο στρώμα με τις σχέσεις

$$q_{\uparrow} = \sqrt{1 + M}, \quad q_{\downarrow} = \sqrt{1 - M}. \quad (8.5)$$

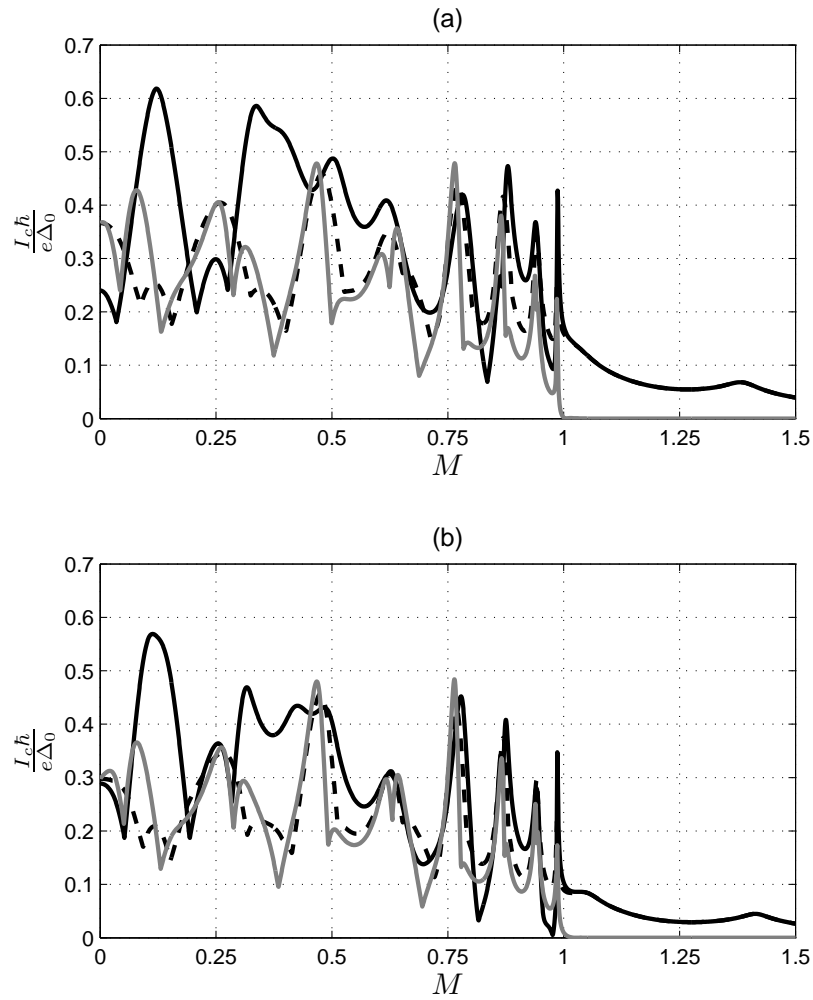
Τότε η εξάρτηση του υπερρεύματος μηδενικής φάσης από το κανονικοποιημένο πάχος προέρχεται από τριγωνομετρικές συναρτήσεις των παραστάσεων

$$S_{\uparrow,\downarrow} = 2q_{\uparrow,\downarrow} k_F d, \quad (8.6)$$

$$\Delta_{-} = (q_{\uparrow} - q_{\downarrow}) k_F d \quad (8.7)$$



Σχήμα 8.18: Στα παραπάνω διαγράμματα δίνουμε τις καμπύλες του κρίσιμου υπερρεύματος συναρτήσει της μαγνήτισης  $M$  για τρεις γεωμετρίες μαγνητίσεων:  $zxx$  με μαύρη συμπαγή γραμμή,  $zxy$  με μαύρη διακεκομμένη γραμμή και  $zxx$  με γκρί συμπαγή γραμμή. Στο (a) έχουμε  $Z_m = 0.75$  και στο (b) έχουμε  $Z_m = 1.5$ . Οι υπόλοιπες παράμετροι είναι κοινές και είναι  $Z_n = 0.5$  και  $k_F d = 25$ .



Σχήμα 8.19: Στα παραπάνω διαγράμματα δίνουμε τις καμπύλες του κρίσιμου υπερρεύματος συναρτήσει της μαγνήτισης  $M$  για τρεις γεωμετρίες μαγνητίσεων:  $zxx$  με μαύρη συμπαγή γραμμή,  $zxy$  με μαύρη διακεκομμένη γραμμή και  $zxx$  με γκρί συμπαγή γραμμή. Στο (a) έχουμε  $Z_n = 0.75$  και στο (b) έχουμε  $Z_n = 1$ . Οι υπόλοιπες παράμετροι είναι κοινές και είναι  $Z_m = 1$  και  $k_F d = 25$ .

και

$$\Delta_+ = (q_\uparrow + q_\downarrow)k_F d. \quad (8.8)$$

Η περίοδος των συνιστωσών του υπερρεύματος προκύπτει από την εξίσωση των παραπάνω παραστάσεων με  $2\pi$ . Έτσι προκύπτουν οι περίοδοι

$$\frac{2\pi}{S_{\uparrow,\downarrow}} \simeq \frac{2\pi}{\Delta_+} \simeq 3 \quad (8.9)$$

και

$$\frac{2\pi}{\Delta_-} \simeq 60. \quad (8.10)$$

Επίσης, όσον αφορά το διάγραμμα Σχ.8.20(a), παρατηρούμε ότι το υπερρέυμα μηδενικής φάσης μηδενίζεται για συγκεκριμένες τιμές του  $k_F d$ , παρόλο που η γεωμετρία των μαγνητίσεων είναι μη συνεπίπεδη.

Στο διάγραμμα του Σχ.8.20(b) παρουσιάζεται το υπερρέυμα μηδενικής φάσης συναρτήσει του  $k_F d$  για  $M = 0.5$ . Ξανά παρατηρούμε ότι το υπερρέυμα μηδενικής φάσης μηδενίζεται για ορισμένες τιμές του  $k_F d$  περιοδικά. Επίσης, αν και δεν είναι τόσο εμφανείς όσο στο (a), διακρίνονται προσεγγιστικά δύο περίοδοι να συνυπάρχουν στο διάγραμμα του Σχ.8.20(b). Έτσι έχουμε

$$\frac{2\pi}{S_{\uparrow,\downarrow}} \simeq \frac{2\pi}{\Delta_+} \simeq 2.5 \quad - \quad 4.5 \quad (8.11)$$

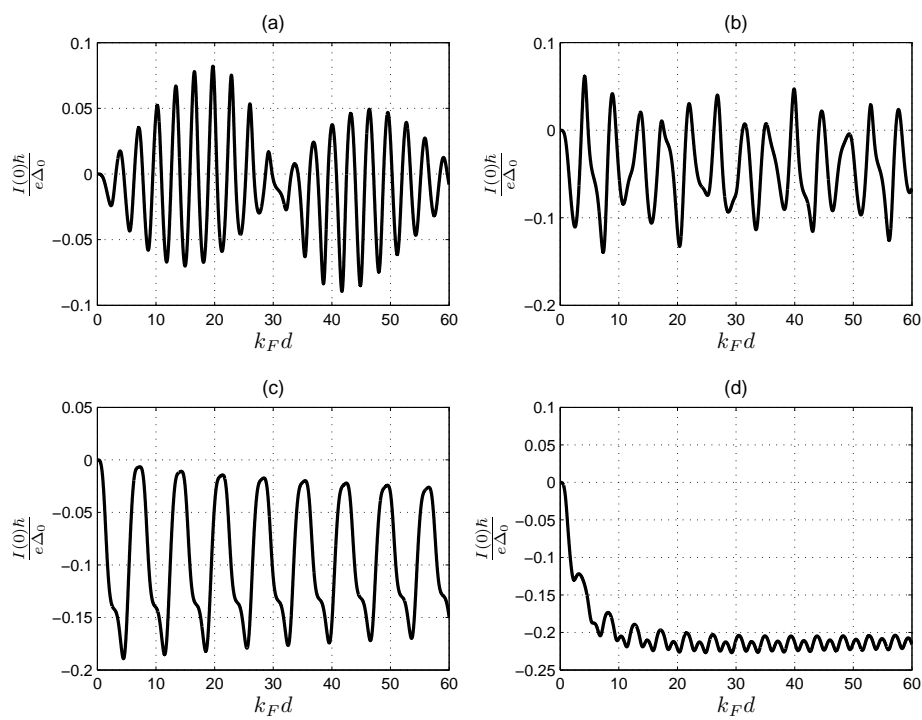
και

$$\frac{2\pi}{\Delta_-} \simeq 12. \quad (8.12)$$

Στο διάγραμμα του Σχ.8.20(c) παρουσιάζεται το υπερρέυμα μηδενικής φάσης για  $M = 0.8$ . Εδώ παρατηρούμε ότι, σε όλο το εύρος τιμών του  $k_F d$ , το υπερρέυμα μηδενικής φάσης έχει αρνητική τιμή και δεν τέμνει τον οριζόντιο άξονα. Επίσης, με βάση τη προσεγγιστική λογική που παρουσιάσαμε προηγουμένως, εμφανής είναι μία ταλάντωση με περίοδο  $\sim 7$ , που αντιστοιχεί στις φάσεις  $\Delta_-$  ή  $S_\downarrow$ . Συγκεκριμένα

$$\frac{2\pi}{S_\downarrow} = \frac{2\pi}{\Delta_-} = 7.024. \quad (8.13)$$





Σχήμα 8.20: Διαγράμματα του υπερρεύματος μηδενικής φάσης συναρτήσει του κανονικοποιημένου πάχους  $k_F d$ : (a)  $M = 0.1$ , (b)  $M = 0.5$ , (c)  $M = 0.8$  και (d)  $M = 1$ . Οι υπόλοιπες παράμετροι είναι  $Z_n = 0.5$ ,  $Z_m = 1$ . Η γεωμετρία των μαγνητίσεων είναι  $zxy$ .

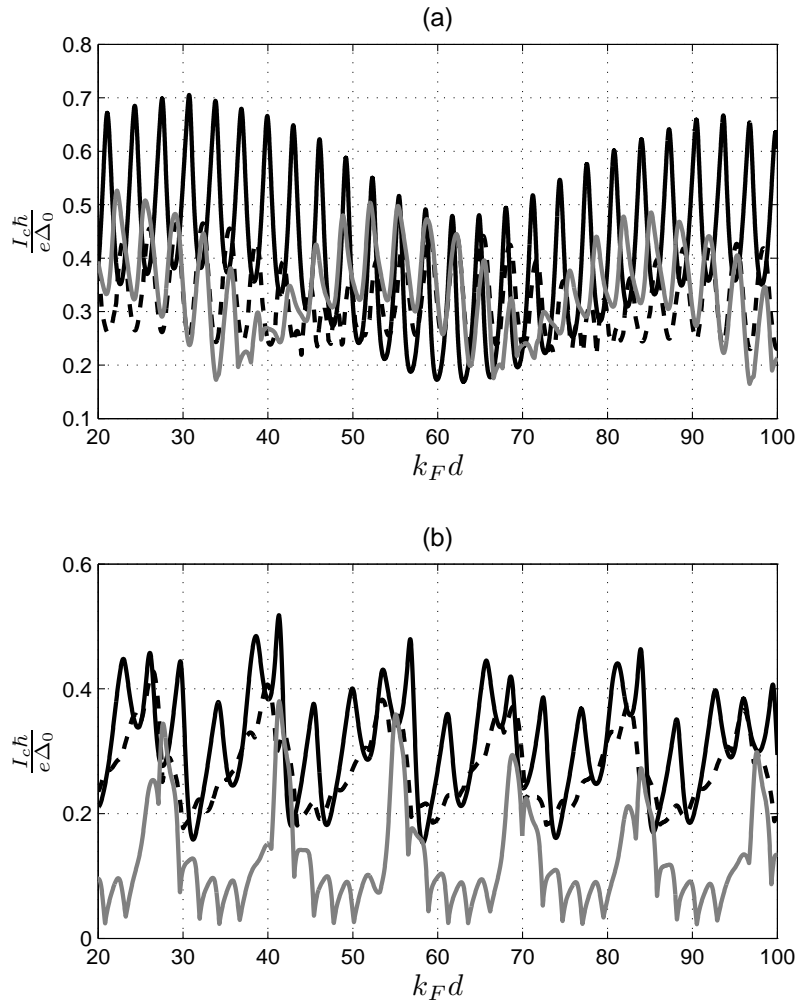
Στο Σχ.8.20(d) έχουμε θέσει  $M = 1$ . Το υπερρεύμα μηδενικής φάσης αυξάνεται σε συνάρτηση με το  $k_F d$  και αποκτά σταθερή τιμή, με μικρές ταλαντώσεις που, με την αύξηση του  $k_F d$ , σταθεροποιούνται με περίοδο που αντιστοιχεί στη φάση  $S_{\uparrow}$ . Αυτό είναι αναμενόμενο, διότι μόνο αυτή η φάση είναι πραγματική συνάρτηση του  $k_F d$ , αφού αντιστοιχεί σε διεγέρσεις που βρίσκονται στην κατειλημμένη ζώνη, κάτω από την ενέργεια Fermi. Επίσης, το υπερρεύμα μηδενικής φάσης παραμένει μη μηδενικό σε όλο το εύρος τιμών του  $k_F d$ .

Στο Σχ.8.21 δίνουμε το κρίσιμο υπερρεύμα συναρτήσει του κανονικοποιημένου πάχους  $k_F d$  για τρεις γεωμετρίες μαγνήτισεων. Με μαύρη συμπαγή γραμμή παριστάνουμε τη γεωμετρία  $zxz$ , με μαύρη διακεκομμένη γραμμή τη γεωμετρία  $zxy$  και με γκρι συμπαγή γραμμή τη γεωμετρία  $zxx$ . Οι τιμές των παραμέτρων είναι ίδιες με αυτές του Σχ.8.20, ενώ στο (a) έχουμε  $M = 0.1$  και στο (b) έχουμε  $M = 0.95$ . Στο Σχ.8.21(a) παρατηρούμε την ίδια περιοδικότητα που είδαμε στο αντίστοιχο διάγραμμα του υπερρεύματος μηδενικής φάσης Σχ.8.20(a). Επίσης παρατηρούμε ότι η τιμή του κρίσιμου υπερρεύματος είναι παρόμοια για τις γεωμετρίες  $zxy$  και  $zxx$  και λίγο μεγαλύτερη για τη γεωμετρία  $zxz$  σε σχέση με τις προηγούμενες. Το τελευταίο συμπέρασμα είναι σχετικά γενικό. Τέλος παρατηρούμε ότι το κρίσιμο υπερρεύμα φθίνει πολύ αργά, καθώς αυξάνεται το πάχος του ενδιάμεσου στρώματος. Αυτό το φαινόμενο οφείλεται και στο γεγονός ότι το μοντέλο μας είναι μονοδιάστατο.

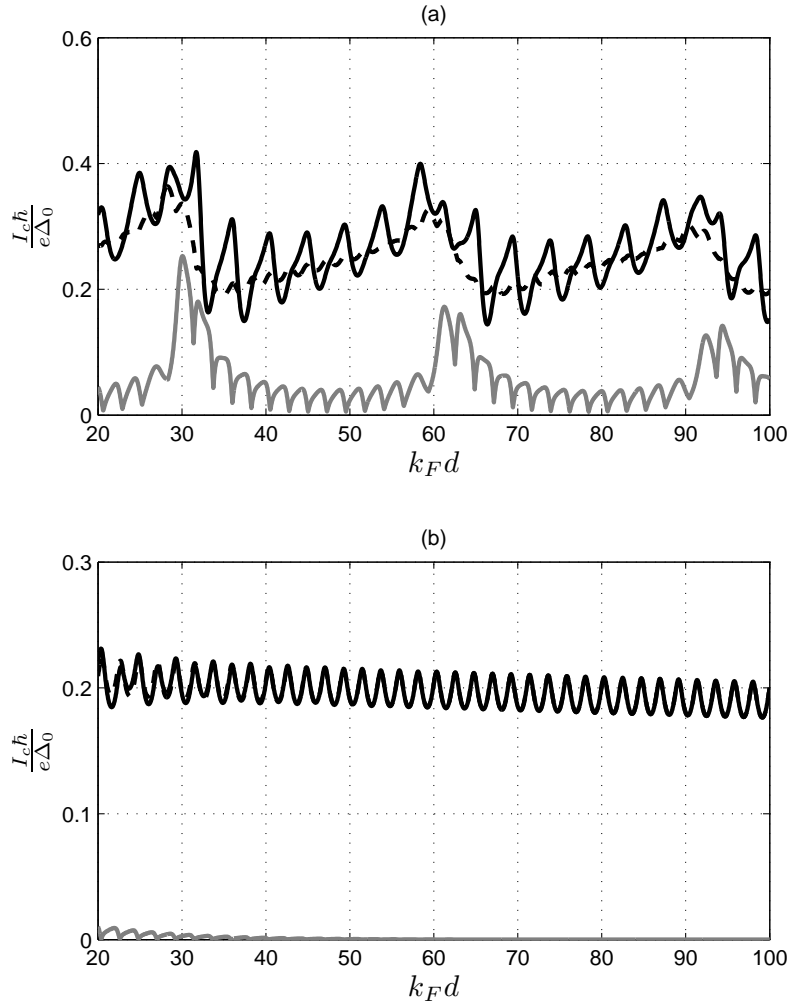
Στο Σχ.8.21(b) δίνουμε το κρίσιμο υπερρεύμα για μαγνήτιση  $M = 0.95$ . Οι υπόλοιποι παράμετροι και οι συμβάσεις είναι ίδιες με το (a). Εδώ παρατηρούμε ότι το κρίσιμο υπερρεύμα της γεωμετρίας  $zxx$  αρχίζει να μειώνεται σε σχέση με τις γεωμετρίες  $zxz$  και  $zxy$ , που επιφέρουν αλλαγή του σπιν στις ενδοεπιφάνειές τους. Παρόλα αυτά η διαφορά δεν είναι μεγάλη. Οι τρεις γεωμετρίες εμφανίζουν παρόμοια περιοδικότητα, που χαρακτηρίζεται με μεγαλύτερη ευκρίνεια από τον παράγοντα φάσης  $S_{\downarrow}$  ( $2\pi/S_{\downarrow} \simeq 14$ ). Η περίοδος αυτή αυξάνει καθώς το  $M$  πλησιάζει τη μονάδα και εξαφανίζεται (τείνει στο άπειρο), όταν  $M > 1$ .

Στο Σχ.8.22 κάνουμε το ίδιο με το Σχ.8.21, αλλά για  $M = 0.99$  στο (a) και  $M = 1.01$  στο (b). Στο (a) δεν παρατηρούμε κάποια αξιοσημείωτη διαφορά σε σχέση με το Σχ.8.21(a), παρά μόνον την αύξηση της περιόδου που οφείλεται στο  $S_{\downarrow}$ . Στο Σχ.8.22(b) όμως η αλλαγή είναι δραματική. Οι γεωμετρίες  $zxz$  και  $zxy$  δίνουν διαγράμματα που ταυτίζονται, ενώ η γεωμετρία  $zxx$  είναι μια τάξη μεγέθους μικρότερη και φθίνει γρήγορα στο μηδέν, καθώς το πάχος του ενδιάμεσου στρώματος αυξάνεται. Το αξιοσημείωτο είναι ότι η μεταβολή αυτή γίνεται απότομα γύρω από την τιμή της μαγνήτισης  $M = 1$ . Η χαρακτηριστική περίοδος των γεωμετριών  $zxz$  και  $zxy$  είναι  $2\pi/S_{\uparrow} \simeq 2$ .

Ολοκληρώνουμε αυτή την ενότητα δίνοντας, στο Σχ.8.23, τις σχέσεις υπερρεύματος φάσης για μία επαφή με πάχος  $k_F d = 40$ , μαγνήτιση  $M = 1$ , και ισχύες ενδοεπιφανειακής σκέδασης και μαγνήτισης  $Z_n = 0$ ,  $Z_m = 1$ . Στο Σχ.8.23(a) κρατάμε σταθερή την πολική γωνία  $\phi_r$  της δεξιάς ενδοεπιφανειακής μαγνήτισης στο  $\pi/2$  και μεταβάλ-

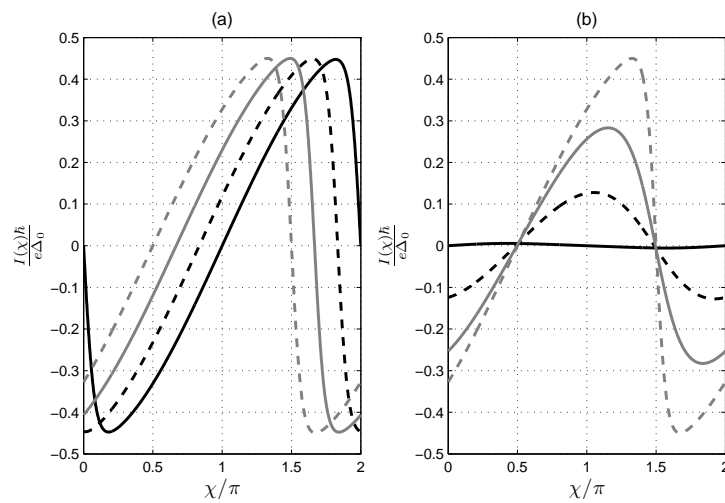


Σχήμα 8.21: Διαγράμματα του κρίσιμου υπερρεύματος συναρτήσει του κανονικοποιημένου πάχους  $k_F d$ : (a)  $M = 0.1$ , (b)  $M = 0.95$ . Με μαύρη συμπαγή γραμμή είναι η γεωμετρία  $z x z$ , με μαύρη διακεκομμένη γραμμή είναι η γεωμετρία  $z x y$  και με γκρι συμπαγή γραμμή η γεωμετρία  $z x x$ . Οι υπόλοιπες παράμετροι είναι  $Z_n = 0.5$ ,  $Z_m = 1$ .



Σχήμα 8.22: Διαγράμματα του κρίσιμου υπερρεύματος συναρτήσει του κανονικοποιημένου πάχους  $k_F d$ : (a)  $M = 0.99$ , (b)  $M = 1.01$ . Με μαύρη συμπαγή γραμμή είναι η γεωμετρία  $z x z$ , με μαύρη διακεκομμένη γραμμή είναι η γεωμετρία  $z x y$  και με γκρι συμπαγή γραμμή η γεωμετρία  $z x x$ . Οι υπόλοιπες παράμετροι είναι  $Z_n = 0.5$ ,  $Z_m = 1$ .

λουμε την αζιμουθιακή γωνία  $\theta_r$  από μηδέν μέχρι  $\pi/2$ , με βήμα  $\pi/6$ . Παρατηρούμε ότι η μορφή της CPR είναι πριονωτή και ότι μετατοπίζεται οριζόντια κατά τη μεταβολή της αζιμουθιακής γωνίας, αποκτώντας σημαντικό υπερρεύμα μηδενικής φάσης. Ανάλογες CPR έχουν δοθεί στη βιβλιογραφία [96]. Ο πριονωτός χαρακτήρας της επαφής οφείλεται στην απουσία σημαντικής κανονικής σκέδασης, και υποχωρεί σε ημιτονοειδή χαρακτήρα, αν αυξηθούν κάποιες από τις μεταβλητές  $M$ ,  $Z_n$ ,  $Z_m$  ή η θερμοκρασία  $T$ .

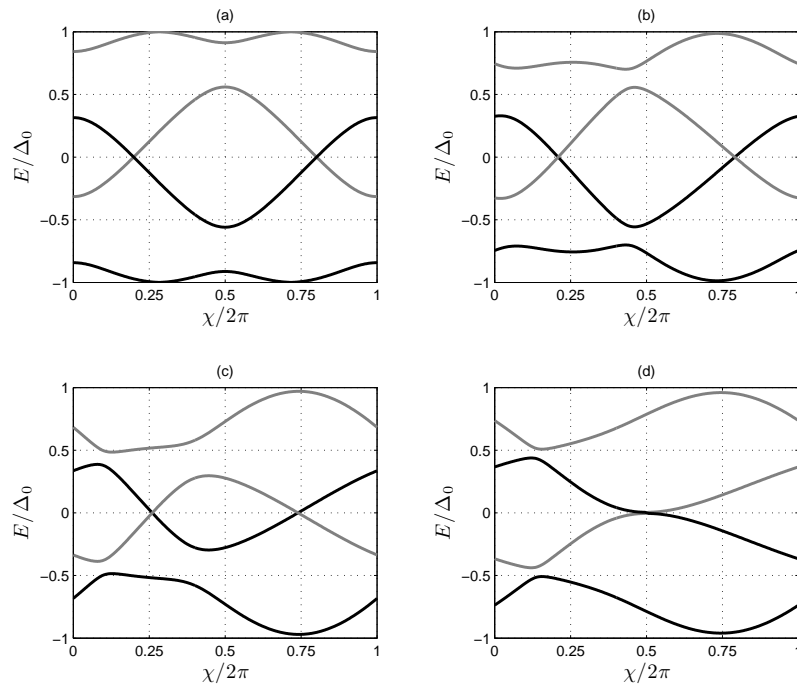


Σχήμα 8.23: Σχέσεις υπερρεύματος φάσης: (a) για  $\phi_r = \pi/2$  και  $\theta_r = 0, \pi/6, \pi/3, \pi/2$  (μαύρη συμπαγής, μαύρη διακεκομμένη, γκρι συμπαγής, γκρι διακεκομμένη αντίστοιχα) και (b) για  $\theta_r = \pi/2$  και  $\phi_r = 0, \pi/6, \pi/3, \pi/2$  (μαύρη συμπαγής, μαύρη διακεκομμένη, γκρι συμπαγής, γκρι διακεκομμένη αντίστοιχα). Οι κοινές παράμετροι είναι  $k_F d = 40$ ,  $M = 1$ ,  $Z_n = 0$ ,  $Z_m = 1$ .

Με τις ίδιες παραμέτρους, αλλά κρατώντας σταθερή τη δεξιά αζιμουθιακή γωνία σε  $\theta_r = \pi/2$ , μεταβάλλουμε την πολική γωνία  $\phi_r$  από μηδέν έως  $\pi/2$ , με βήμα  $\pi/6$  (Σχ.8.23(b)). Σε αυτή την περίπτωση παρατηρούμε ότι το υπερρεύμα μηδενικής φάσης υποχωρεί μαζί με το κρίσιμο ρεύμα, καθώς πλησιάζουμε τη συνεπίπεδη γεωμετρία  $zxx$ . Στην περίπτωση της γεωμετρίας  $zxy$ , η μορφή της CPR είναι πριονωτή και πάλι λόγω της απουσίας κανονικής σκέδασης. Διαφορετικά και σε αυτή τη γεωμετρία η CPR είναι ημιτονοειδής, όπως και στις υπόλοιπες γεωμετρίες, καθώς πλησιάζουμε τη γεωμετρία  $zxx$  με μεταβολή της πολικής γωνίας  $\phi_r$ .

## 8.4 Φάσμα δέσμιων καταστάσεων, πυκνότητα καταστάσεων και συνάρτηση Green

Σε αυτή την ενότητα θα αναφέρουμε μερικές παρατηρήσεις σχετικά με το ενεργειακό φάσμα των δέσμιων καταστάσεων στις σιδηρομαγνητικές επαφές Josephson. Επίσης θα δώσουμε και μερικές πληροφορίες για την τοπική πυκνότητα καταστάσεων και τη συνάρτηση Green στο εσωτερικό της επαφής. Θα περιοριστούμε στο μονοδιάστατο μοντέλο και, όπως έχει προκύψει από τη μέχρι τώρα ανάλυση, θα δώσουμε ιδιαίτερη προσοχή στο ημιμεταλλικό όριο  $M = 1$ , όπου οι ιδιότητες της επαφής αλλάζουν δραστικά. Σημειώνουμε ότι θα κρατήσουμε σταθερές τις παραμέτρους  $T = 0.1$ ,  $\Delta_0 = 0.001$  και τη γεωμετρία των μαγνητίσεων σε  $xzy$ . Φυσικά θα εξετάσουμε επαφές με ένα ενδιάμεσο στρώμα και σπιν ενεργές ενδοεπιφάνειες.



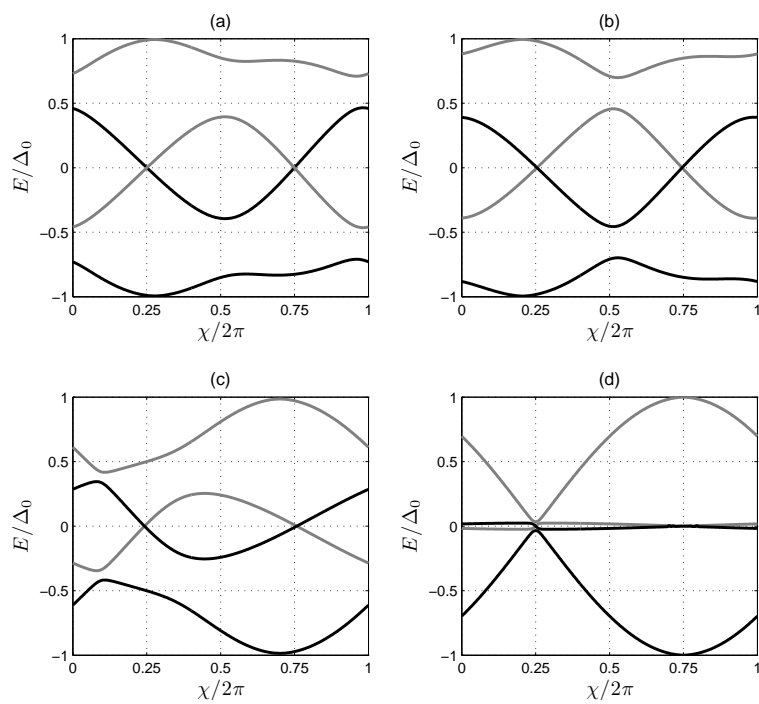
Σχήμα 8.24: Ενεργειακό φάσμα των δέσμιων καταστάσεων συναρτήσει της διαφοράς φάσης  $\chi$ . Οι παράμετροι είναι  $T = 0.1$ ,  $\Delta_0 = 0.001$ ,  $Z_n = 0$ ,  $k_F d = 40$ ,  $M = 0.8$  και η γεωμετρία των μαγνητίσεων  $xzy$ . Για το  $Z_m$  έχουμε: (a)  $Z_m = 0$ , (b)  $Z_m = 0.5$ , (c)  $Z_m = 1$  και (d)  $Z_m = 1.5$ .

Στο Σχ.8.24 δίνουμε το ενεργειακό φάσμα των δέσμιων καταστάσεων συναρτήσει

της διαφοράς φάσης  $\chi$ , για επαφές με κοινές παραμέτρους τις  $Z_n = 0$ ,  $k_F d = 40$ ,  $M = 0.8$  και γεωμετρία των μαγνητίσεων  $xzy$ . Για το  $Z_m$  έχουμε, (a)  $Z_m = 0$ , (b)  $Z_m = 0.5$ , (c)  $Z_m = 1$  και (d)  $Z_m = 1.5$ . Παρατηρούμε ότι για  $Z_m = 0$  (Σχ.8.24 (a)), που η γεωμετρία των μαγνητίσεων μπορεί να χαρακτηριστεί συνεπίπεδη, το ενεργειακό φάσμα των δέσμιων καταστάσεων είναι συμμετρικό ως προς το  $\chi = \pi$ , όπως έχουμε δείξει στην ενότητα 7.4. Με την αύξηση του  $Z_m$  όμως, γρήγορα το φάσμα χάνει αυτή τη συμμετρία (Σχ.8.24 (b), (c), (d)). Παρατηρούμε επίσης ότι οι δύο συμμετρικές ακραίες δέσμιες καταστάσεις πλησιάζουν με τις δύο συμμετρικές μεσαίες κοντά στα σημεία  $\chi = \pi$  (Σχ.8.24(b)) και  $\chi = 0$  (Σχ.8.24(c)) και για  $Z_m = 1.3$ , για παράδειγμα, ταυτίζονται (κοντά στο  $\chi = 0$ ). Σε αυτή την περίπτωση έχουμε αυτό που ονομάζεται στη θεωρία της συμμετρίας τυχαίος εκφυλισμός, καθώς δεν υπαγορεύεται από κάποια συμμετρία, παρά από τη μεταβολή των παραμέτρων της επαφής και της διαφοράς φάσης  $\chi$ . Ανάλογα ισχύουν και για τη συμβολή των δύο μεσαίων συμμετρικών δέσμιων καταστάσεων κοντά στα σημεία  $\chi = \pi/2$  και  $\chi = 3\pi/2$ . Εδώ παρατηρούμε ότι, για  $Z_m = 1.5$ , οι τομές των δύο μεσαίων δέσμιων καταστάσεων πλησιάζουν μεταξύ τους και εκφυλίζονται σε μία. Φυσικά, υπολογισμοί δείχνουν ότι στο υπερρεύμα συνεισφέρουν οι τρεις ενεργειακά πιο χαμηλές δέσμιες καταστάσεις και ότι η συνεισφορά του συνεχούς στο υπερρεύμα είναι πολύ μικρή.

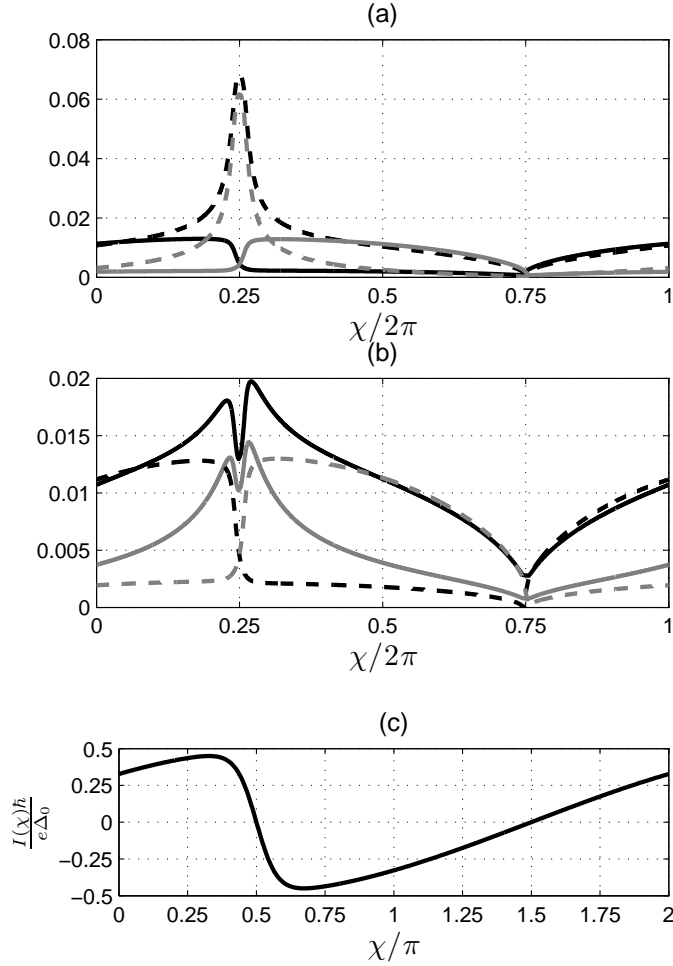
Στο Σχ.8.25 παρουσιάζουμε το ενεργειακό φάσμα των δέσμιων καταστάσεων συναρτήσει της διαφοράς φάσης  $\chi$  για (a)  $M = 0.5$ , (b)  $M = 0.7$ , (c)  $M = 0.95$  και (d)  $M = 1$ . Οι υπόλοιπες παράμετροι είναι  $Z_n = 0$ ,  $k_F d = 40$ ,  $Z_m = 1$  και η γεωμετρία των μαγνητίσεων  $xzy$ . Η μορφή του φάσματος των δέσμιων καταστάσεων “ταλαντώνεται” με τη μεταβολή της μαγνήτισης, με μετατόπιση των μεγαλύτερων ενεργειών στα αριστερά ή στα δεξιά του διαγράμματος. Έτσι η παράθεση των διαγραμμάτων με αυτές τις τιμές της μαγνήτισης που επιλέξαμε είναι λίγο παραπλανητική, όσον αφορά το είδος της ασυμμετρίας ως προς το  $\chi = \pi$ . Ανάλογες παρατηρήσεις με προηγούμενως, ισχύουν και εδώ, όσον αφορά την “επαφή” μεταξύ των δέσμιων καταστάσεων. Τέλος, για  $M = 1$ , παρατηρούμε ότι οι μεσαίες δέσμιες καταστάσεις έχουν γίνει σχεδόν επίπεδες και δεν συνεισφέρουν καθόλου στο υπερρεύμα. Το ίδιο ισχύει και για την ακραία δέσμια κατάσταση, εδώ όμως λόγω της απόστασής της από την ενέργεια Fermi. Έτσι το υπερρεύμα μεταφέρεται αποκλειστικά από τη δέσμια κατάσταση χαμηλότερης ενέργειας. Εδώ ενδιαφέρον έχει να εξετάσουμε τη βαρύτητα που έχουν οι γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις, που έχουμε επιλέξει στο κεφάλαιο 2, στην κυματοσυνάρτηση της δέσμιας κατάστασης που φέρει το υπερρεύμα.

Έτσι στο Σχ.8.26 δίνουμε τις απόλυτες τιμές των συντελεστών των γραμμικώς ανεξάρτητων λύσεων στην κυματοσυνάρτηση της φέρουσας το υπερρεύμα δέσμιας κατάστασης του Σχ.8.25(d), συναρτήσει της διαφοράς φάσης  $\chi$ : (a)  $|C_{e\uparrow+}|$ ,  $|C_{h\downarrow-}|$ ,  $|C_{e\uparrow-}|$ ,  $|C_{h\downarrow+}|$  με μαύρη συμπαγή, μαύρη διακεκομμένη, γκρι συμπαγή, γκρι διακεκομμένη γραμμή αντίστοιχα και (b)  $|C_{e\downarrow+}|$ ,  $|C_{h\uparrow-}|$ ,  $|C_{e\downarrow-}|$ ,  $|C_{h\uparrow+}|$  με μαύρη συμπαγή, μαύρη



Σχήμα 8.25: Ενεργειακό φάσμα των δέσμιων καταστάσεων συναρτήσει της διαφοράς φάσης  $\chi$ . Οι παράμετροι είναι  $T = 0.1$ ,  $\Delta_0 = 0.001$ ,  $Z_n = 0$ ,  $k_F d = 40$ ,  $Z_m = 1$  και η γεωμετρία των μαγνητίσεων  $xzy$ . Για το  $M$  έχουμε: (a)  $M = 0.5$ , (b)  $M = 0.7$ , (c)  $M = 0.95$  και (d)  $M = 1$ .





Σχήμα 8.26: Απόλυτες τιμές των συντελεστών των γραμμικώς ανεξάρτητων λύσεων στην κυματοσυνάρτηση της φέρουσας το υπερρεύμα δέσμιας κατάστασης του Σχ.8.25(d), συναρτήσει της διαφοράς φάσης  $\chi$ : (a)  $|C_{e\uparrow+}|$ ,  $|C_{h\downarrow-}|$ ,  $|C_{e\uparrow-}|$ ,  $|C_{h\downarrow+}|$  με μαύρη συμπαγή, μαύρη διακεκομμένη, γκρι συμπαγή, γκρι διακεκομμένη γραμμή αντίστοιχα και (b)  $|C_{e\downarrow+}|$ ,  $|C_{h\uparrow-}|$ ,  $|C_{e\downarrow-}|$ ,  $|C_{h\uparrow+}|$  με μαύρη συμπαγή, μαύρη διακεκομμένη, γκρι συμπαγή, γκρι διακεκομμένη γραμμή αντίστοιχα. Οι παράμετροι της επαφής είναι  $Z_n = 0$ ,  $k_F d = 40$ ,  $Z_m = 1$ ,  $M = 1$  και η γεωμετρία των μαγνητίσεων  $xzy$ . Στο διάγραμμα (c) δίνεται η CPR.

διακεκομμένη, γκρι συμπαγή, γκρι διακεκομμένη γραμμή αντίστοιχα. Ο δείκτης + ή – στους συντελεστές συμβολίζει τη διεύθυνση διάδοσης προς τα δεξιά ή αριστερά αντίστοιχα. Θυμίζουμε ότι ισχύει  $M = 1$  και συνεπώς η μία ζώνη (σπιν κάτω) βρίσκεται πάνω από την ενέργεια Fermi. Παρόλα αυτά, βλέπουμε στο Σχ.8.26(a) και (b) ότι οι συντελεστές που αντιστοιχούν στο σπιν κάτω είναι μη μηδενικοί. Αυτό δεν είναι πρόβλημα όμως, αφού ναι μεν για τα ηλεκτρόνια με σπιν κάτω η αντίστοιχη γραμμικώς ανεξάρτητη λύση είναι πραγματική συνάρτηση της θέσης, καθώς είναι επίπεδο κύμα με φανταστικό κυματόνυσμα, για τις οπές με σπιν κάτω το πραγματικό κυματόνυσμά τους είναι τάξεις μεγέθους μικρότερο από το κυματόνυσμα των λύσεων με σπιν επάνω. Το ίδιο ισχύει για τα ηλεκτρόνια με σπιν κάτω, πέραν από το ότι το κυματόνυσμά τους είναι φανταστικό. Θυμίζουμε ότι

$$q_{e\downarrow} = k_F \sqrt{1 - M - E} \quad (8.14)$$

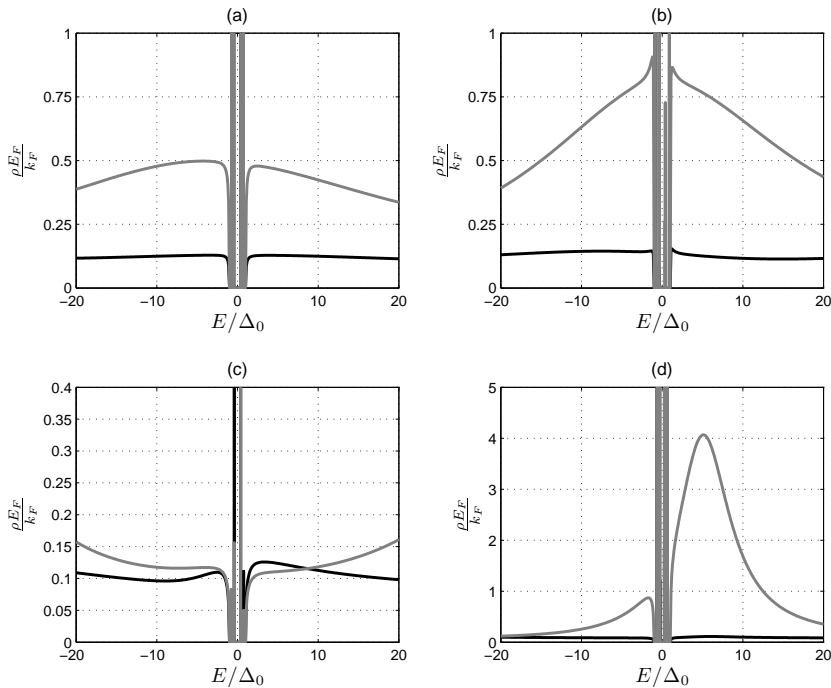
και

$$q_{h\downarrow} = k_F \sqrt{1 - M + E} \quad (8.15)$$

και ότι οι ενέργειες της δέσμιας κατάστασης είναι αρνητικές, ενώ  $M = 1$ . Έτσι το ρεύμα πιθανότητας των λύσεων με σπιν κάτω στην κυματοσυνάρτηση της δέσμιας κατάστασης μηδενίζεται ή είναι αμελητέο και κατά συνέπεια το ίδιο ισχύει και για το υπερρεύμα που φέρουν αυτές οι καταστάσεις. Το υπερρεύμα επομένως δημιουργείται από τους συντελεστές του Σχ.8.26(a) που αντιστοιχούν στις συμπαγείς γραμμές (δηλ. τους συντελεστές των ηλεκτρονίων με σπιν επάνω) και από τους συντελεστές του Σχ.8.26(b) που αντιστοιχούν στις διακεκομμένες γραμμές (δηλ. τους συντελεστές των οπών με σπιν επάνω). Έτσι, για  $\chi = 0$ , βλέπουμε ότι επικρατούν οι συντελεστές του ηλεκτρονίου με σπιν επάνω που κινείται προς τα δεξιά και της οπής με σπιν πάνω που διαδίδεται προς τα αριστερά. Το υπερρεύμα (ηλεκτρονίων) είναι θετικό, δηλαδή τα αρνητικά φορτία κινούνται προς τη θετική (δεξιά) κατεύθυνση. Καθώς αυξάνει η φάση  $\chi$ , οι συντελεστές του ηλεκτρονίου σπιν επάνω που διαδίδεται προς τα δεξιά και του ηλεκτρονίου με σπιν πάνω που διαδίδεται προς τα αριστερά γίνονται ίσοι μεταξύ τους (Σχ.8.26(a)). Το ίδιο ισχύει και για τις οπές με σπιν επάνω που διαδίδονται σε αντίθετες κατευθύνσεις (Σχ.8.26(b)). Έτσι το υπερρεύμα μηδενίζεται στο  $\chi = \pi/2$ . Στη συνέχεια επικρατούν οι συντελεστές των ηλεκτρονίων σπιν επάνω που κινούνται προς τα αριστερά και των οπών σπιν επάνω που κινούνται προς τα δεξιά με αποτέλεσμα το υπερρεύμα (ηλεκτρονίων) να είναι αρνητικό, δηλαδή τα αρνητικά φορτία κινούνται προς την αρνητική (αριστερή) κατεύθυνση. Ακριβώς στο σημείο  $\chi = 3\pi/2$ , όλοι οι συντελεστές που συνεισφέρουν στο υπερρεύμα μηδενίζονται και η δέσμια κατάσταση είναι οριακά σε ενέργεια  $E/\Delta_0 = 1$  και παύει

να υπάρχει (βλ. Σχ.8.25(d)). Το υπερρεύμα φυσικά μηδενίζεται και στη συνέχεια, μέχρι το  $\chi = 2\pi$ , γίνεται θετικό, λόγω της επικράτησης των συντελεστών του ηλεκτρονίου με σπιν επάνω που διαδίδεται προς τα δεξιά και της οπής με σπιν επάνω που διαδίδεται προς τα αριστερά. Η CPR φαίνεται στο Σχ.8.26(c).

Αυτό που διαπιστώνουμε από την παραπάνω ανάλυση είναι ότι το υπερρεύμα μεταφέρεται από ηλεκτρόνια και οπές με το ίδιο σπιν. Έτσι είναι λογικό να υποθέσουμε ότι τα ζεύγη Cooper από σπιν singlet μετατρέπονται στις ενδοεπιφάνειες σε σπιν triplet και μεταφέρονται έτσι στο ενδιάμεσο στρώμα, που μπορεί να φέρει οδεύοντα κύματα μόνο του σπιν επάνω. Αντίστοιχα συμπεράσματα, με διαφορετική μέθοδο, υπάρχουν και στη βιβλιογραφία, βλ. π.χ [98].

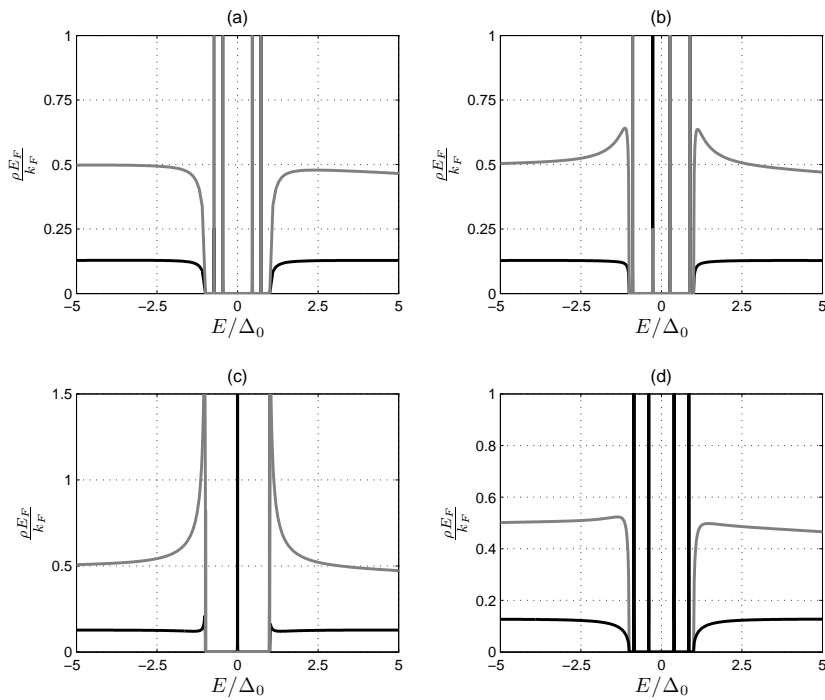


Σχήμα 8.27: Τοπική πυκνότητα καταστάσεων  $\rho$  στο μέσο του ενδιάμεσου στρώματος, σε μονάδες  $k_F/E_F$ , συναρτήσει της κανονικοποιημένης ενέργειας  $E/\Delta_0$ : (a)  $M = 0.5$ , (b)  $M = 0.7$ , (c)  $M = 0.9$ , (d)  $M = 0.95$ . Οι υπόλοιπες παράμετροι είναι ίδιες με αυτές του Σχ.8.25. Η διαφορά φάσης  $\chi$  είναι μηδέν. Οι μαύρες γραμμές αντιστοιχούν στην τοπική πυκνότητα καταστάσεων του σπιν πάνω και οι γκρι του σπιν κάτω.

Στη συνέχεια δίνουμε μερικά διαγράμματα της τοπικής πυκνότητας καταστάσεων  $\rho$  στο μέσο του ενδιάμεσου στρώματος, σε μονάδες  $k_F/E_F$ , συναρτήσει της κανονικοποι-

ημένης ενέργειας  $E/\Delta_0$ , για διάφορες μαγνητίσεις μιας επαφής με παραμέτρους ίδιες με αυτές του Σχ.8.25, αλλά με μαγνητίσεις: (a)  $M = 0.5$ , (b)  $M = 0.7$ , (c)  $M = 0.9$ , (d)  $M = 0.95$ . Οι μαύρες γραμμές αντιστοιχούν στην τοπική πυκνότητα καταστάσεων του σπιν πάνω και οι γκρί του σπιν κάτω. Τα διαγράμματα αυτά φαίνονται στο Σχ.8.27(a)-(d). Η διαφορά φάσης  $\chi$  είναι μηδέν. Στα διαγράμματα αυτά έχουμε βάλει ένα μικρό φανταστικό μέρος στην ενέργεια (της τάξης του  $10^{-5}\Delta_0$ ), έτσι ώστε να είναι ορατές οι δέσμιες καταστάσεις στην περιοχή ενεργειών  $|E| < \Delta_0$ . Μπορεί να διαπιστωθεί ότι οι ενέργειες στις οποίες εμφανίζονται οι δέσμιες καταστάσεις είναι ίδιες με αυτές που προκύπτουν από το Σχ.8.25. Εκτός του ενεργειακού χάσματος, η τοπική πυκνότητα καταστάσεων εμφανίζει σημαντικές μεταβολές ανάλογα με τη μαγνήτιση. Αυτές όμως δεν έχουν να κάνουν με την υπεραγωγίμη ιδιότητα της επαφής, αλλά είναι αποτέλεσμα της ανομοιογενούς μαγνήτισης του συστήματος. Οι επιδράσεις της υπεραγωγιμότητας είναι στην ύπαρξη των δέσμιων καταστάσεων και σε μικρές μεταβολές στην περιοχή των σημείων  $|E| = \Delta_0$ . Τέτοιες μεταβολές για παράδειγμα προκαλεί η μεταβολή της φάσης  $\chi$  σε μη μηδενικές τιμές. Έτσι στο Σχ.8.28 δίνουμε την τοπική πυκνότητα καταστάσεων στο μέσο του ενδιάμεσου στρώματος για (a)  $\chi = 0$ , (b)  $\chi = \pi/4$ , (c)  $\chi = \pi/2$ , (d)  $\chi = \pi$ . Οι υπόλοιπες παράμετροι είναι ίδιες με αυτές του Σχ.8.25(a) και του Σχ.8.27(a). Παρατηρούμε ότι η τοπική πυκνότητα καταστάσεων εμφανίζει έντονες κορυφές στο όριο  $|E| = \Delta_0$ , όταν οι ενέργειες των δέσμιων καταστάσεων πλησιάζουν αυτό το όριο με τη μεταβολή της φάσης  $\chi$  (διαγράμματα (b), (c)). Αυτό μπορεί να δώσει ενίσχυση του υπερρεύματος που οφείλεται στο συνεχές φάσμα, αν και οι υπόλοιποι παράγοντες το επιτρέψουν. Αντίθετα, όταν οι ενέργειες των δέσμιων καταστάσεων απομακρύνονται από το  $|E| = \Delta_0$ , οι κορυφές, κοντά στο σημείο αυτό της ενέργειας και από τη μεριά του συνεχούς φάσματος, εξομαλύνονται. Αξίζει να σημειώσουμε ότι στο διάγραμμα του Σχ.8.28(c), που αντιστοιχεί σε φάση  $\chi = \pi/2$ , και οι δύο δέσμιες καταστάσεις που συναντώνται σε αυτό το σημείο και σε ενέργεια  $E = 0$  έχουν αμιγώς σπιν επάνω. Το γεγονός ότι οι δέσμιες αυτές καταστάσεις διασταυρώνονται φαίνεται καθαρά στο Σχ.8.25(a).

Κλείνουμε αυτή την ενότητα με μερικές παρατηρήσεις για τη συνάρτηση Green στις σιδηρομαγνητικές επαφές Josephson και συγκεκριμένα τις συνιστώσες αυτής που χαρακτηρίζονται ως συνιστώσες της ανώμαλης συνάρτησης Green ( $\hat{F}(x, x')$ ). Η ανώμαλη συνάρτηση Green μας δίνει την κυματοσυνάρτηση των ζευγών Cooper κατά μήκος της επαφής. Όπως είναι γνωστό, η ύπαρξη ανομοιογενούς μαγνήτισης σε μια επαφή Josephson καθιστά τις συνιστώσες της ανώμαλης συνάρτησης Green με τον ίδιο δείκτη σπιν μη μηδενικές στο χώρο της ενδιάμεσης περιοχής της επαφής [57], παρόλο που στη συνάρτηση χάσματος στις υπεραγωγίμες περιοχές συμμετέχει μόνο η συνιστώσα της συνάρτησης Green με αντίθετους δείκτες σπιν ( $F_{\downarrow\uparrow}$ ). Η ύπαρξη μέσα στην επαφή μη μηδενικής ανώμαλης συνάρτησης Green με δείκτες σπιν που αντιστοιχούν στην triplet κατάσταση σπιν των ζευγών Cooper, σηματοδοτεί τη δυνατότητα μεταφοράς των ζευγών Cooper με αλλαγή της κατάστασης σπιν αυτών μέσα από τους σιδηρομαγνήτες και



Σχήμα 8.28: Τοπική πυκνότητα καταστάσεων  $\rho$  στο μέσο του ενδιάμεσου στρώματος, σε μονάδες  $k_F/E_F$ , συναρτήσει της κανονικοποιημένης ενέργειας  $E/\Delta_0$ : (a)  $\chi = 0$ , (b)  $\chi = \pi/4$ , (c)  $\chi = \pi/2$ , (d)  $\chi = \pi$ . Οι υπόλοιπες παράμετροι είναι ίδιες με αυτές του Σχ.8.25(a). Οι μαύρες γραμμές αντιστοιχούν στην τοπική πυκνότητα καταστάσεων του σπιν πάνω και οι γκρι του σπιν κάτω.

παρακάμψη της καταστροφής των συμβατικών ζευγών Cooper (κατάσταση singlet) από τη μαγνήτιση, η οποία τείνει να προσανατολίσει τα σπιν των συμβατικών ζευγών Cooper και να τα καταστρέψει. Στις ασυμπτωτικές περιοχές βέβαια υπάρχουν μόνο συμβατικά ζεύγη Cooper.

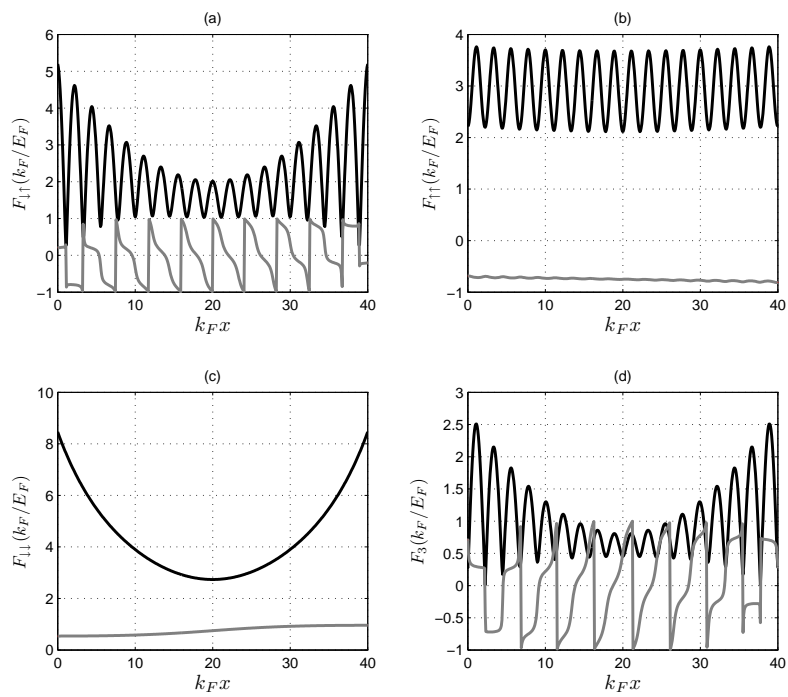
Σύμφωνα όμως με την απαγορευτική αρχή του Pauli, η συνολική κυματοσυνάρτηση των ζευγών Cooper πρέπει να είναι αντισυμμετρική στην εναλλαγή των μεταβλητών των ηλεκτρονίων που το αποτελούν, όπως είναι το σπιν, η θέση και ο χρόνος. Έτσι, αν ένα ζεύγος Cooper βρίσκεται στην κατάσταση σπιν triplet, που είναι συμμετρική, και αν έχει συμμετρική κυματοσυνάρτηση ως προς τη θέση, η εξάρτησή της ανώμαλης συνάρτησης Green από το χρόνο πρέπει να είναι αντισυμμετρική. Αυτό συνεπάγεται ότι η κυματοσυνάρτηση του ζεύγους Cooper στο πεδίο της ενέργειας είναι αντισυμμετρική ως προς την ενέργεια  $z = 0$ . Τότε λέμε ότι είναι περιττή ως προς την ενέργεια. Φυσικά είναι δυνατόν η κυματοσυνάρτηση ως προς τη θέση να είναι περιττή, οπότε ένα triplet ζεύγος Cooper να είναι άρτιο ως προς την ενέργεια. Γενικά, όλες οι δυνατές συμμετρίες της ανώμαλης συνάρτησης Green εμφανίζονται σε επαφές με ανομοιογενή μαγνήτιση [62, 63].

Στα διαγράμματα του Σχ.8.29 δίνουμε τις συνιστώσες της άρτιας στη θέση ανώμαλης συνάρτησης Green  $\hat{F}(x, x)$ , για την επαφή του Σχ.8.25(d), συναρτήσει της θέσης  $x$  στην επαφή: (a)  $F_{\downarrow\uparrow}(x, x)$ , (b)  $F_{\uparrow\uparrow}(x, x)$ , (c)  $F_{\downarrow\downarrow}(x, x)$ , (d)  $F_3(x, x)$ . Με μαύρη γραμμή είναι η απόλυτη τιμή της αντίστοιχης συνιστώσας και με γκρι η φάση της διά  $\pi$ . Η διαφορά φάσης  $\chi$  είναι μηδέν. Με  $F_3(x, x)$  εννοούμε

$$F_3(x, x) = \frac{1}{2}(F_{\downarrow\uparrow}(x, x) + F_{\uparrow\downarrow}(x, x)), \quad (8.16)$$

και είναι η κυματοσυνάρτηση των ζευγών Cooper στην triplet κατάσταση σπιν, αλλά με προβολή σπιν στον άξονα κβάντωσης ίση με μηδέν. Επίσης θυμίζουμε ότι η γεωμετρία των μαγνητίσεων είναι  $xzy$  και ότι η μαγνήτιση του ενδιάμεσου στρώματος είναι  $M = 1$ . Σημειώνουμε ότι η ανώμαλη συνάρτηση Green  $F_{\downarrow\uparrow}(x, x)$  έχει αθροιστεί ως προς 26 το πλήθος συχνότητες Ozaki [127], θετικές και αρνητικές, που αντιστοιχεί σε μία συχνότητα αποκοπής της τάξεως του 0.025 της ενέργειας Fermi, που είναι εφικτή από την κλάση των συμβατικών υπεραγωγών. Οι υπόλοιπες συνιστώσες της ανώμαλης συνάρτησης Green, που είναι περιττές στην ενέργεια, έχουν αθροιστεί μόνο στις αρνητικές συχνότητες Ozaki.

Παρατηρούμε λοιπόν στο Σχ.8.29(a) και (d) ότι η singlet ανώμαλη συνάρτηση Green και η triplet με σπιν μηδέν στον άξονα κβάντωσης ταλαντώνονται με μειούμενο πλάτος προς το κέντρο του ενδιάμεσου στρώματος, κάτι το οποίο δεν ισχύει για το διάγραμμα του Σχ.8.29(b), που αντιστοιχεί στην ανώμαλη συνάρτηση Green με δύο δείκτες σπιν επάνω. Αυτή ναι μεν ταλαντώνεται, αλλά διατηρεί σταθερή μέση τιμή μέσα στο ενδιάμεσο στρώμα, κάτι το οποίο συνεχίζει να ισχύει και για μεγαλύτερα πάχη. Αντίθετα η



Σχήμα 8.29: Συνιστώσες της άρτιας στη θέση ανώμαλης συνάρτησης Green  $\hat{F}(x, x)$ , για την επαφή του Σχ.8.25(d), συναρτήσε της θέσης  $k_F x$  στην επαφή: (a)  $F_{1\uparrow}(x, x)$ , (b)  $F_{1\uparrow}(x, x)$ , (c)  $F_{1\downarrow}(x, x)$ , (d)  $F_3(x, x)$ . Με μαύρη γραμμή είναι η απόλυτη τιμή της αντίστοιχης συνιστώσας και με γκρι η φάση της διά  $\pi$ . Η διαφορά φάσης  $\chi$  είναι μηδέν.

ανώμαλη συνάρτηση Green με δείκτες σπιν κάτω δεν ταλαντώνεται, αφού  $M = 1$  και η σπιν κάτω ζώνη βρίσκεται πάνω από την ενέργεια Fermi. Έτσι τα κυματανύσματα που συμμετέχουν σε αυτή τη συνιστώσα της συνάρτησης Green έχουν μεγαλύτερο φανταστικό μέρος (θυμίζουμε ότι τώρα οι ενέργειες είναι φανταστικές) και οι αντίστοιχοι εκθετικοί παράγοντες έχουν ισχυρά πραγματικά εκθετικά. Επίσης παρατηρούμε ότι η φάση των συναρτήσεων  $F_{\uparrow\uparrow}(x, x)$  και  $F_{\downarrow\downarrow}(x, x)$ , παρότι ταλαντώνεται έντονα στις υπεραγωγίμες περιοχές, στο ενδιάμεσο στρώμα έχει μια πολύ ομαλή εξέλιξη. Σημειώνουμε ότι στην περίπτωση επαφής με ομογενή μαγνήτιση στον άξονα  $z$  ( $0z0$ ), δηλαδή χωρίς σπιν ενεργές ενδοεπιφάνειες, οι συναρτήσεις  $F_{\uparrow\uparrow}(x, x)$  και  $F_{\downarrow\downarrow}(x, x)$  μηδενίζονται και μόνο η συνάρτηση  $F_3(x, x)$ , καθώς φυσικά και η  $F_{\downarrow\uparrow}(x, x)$ , δε μηδενίζονται. Επίσης, για λόγους σύγκρισης, παραθέτουμε στο Σχ.8.30 τα ίδια διαγράμματα με το Σχ.8.29, αλλά με γεωμετρία μαγνητίσεων  $xzx$ . Ποιοτικά παρατηρούμε την ίδια συμπεριφορά, με τη διαφορά ότι η φάση των συναρτήσεων  $F_{\uparrow\uparrow}(x, x)$  και  $F_{\downarrow\downarrow}(x, x)$  παραμένει σταθερή στο ενδιάμεσο στρώμα. Αυτό πιθανώς οφείλεται στην ανυπαρξία υπερρεύματος μηδενικής φάσης στη συνεπίπεδη γεωμετρία  $xzx$ , κάτι που μας προετοιμάζει να θέσουμε το παρακάτω ερώτημα.

Ενδιαφέρον λοιπόν θα είχε να μπορούσαμε να σχετίσουμε αυτές τις ιδιότητες της συνάρτησης Green με ένα τμήμα του υπερρεύματος μηδενικής φάσης ή του υπερρεύματος γενικά. Πιστεύουμε ότι αυτό είναι δυνατό, αν μετατρέψουμε τη διαφορική εξίσωση που ικανοποιεί η συνάρτηση Green σε ολοκληρωτική, όπως παρακάτω

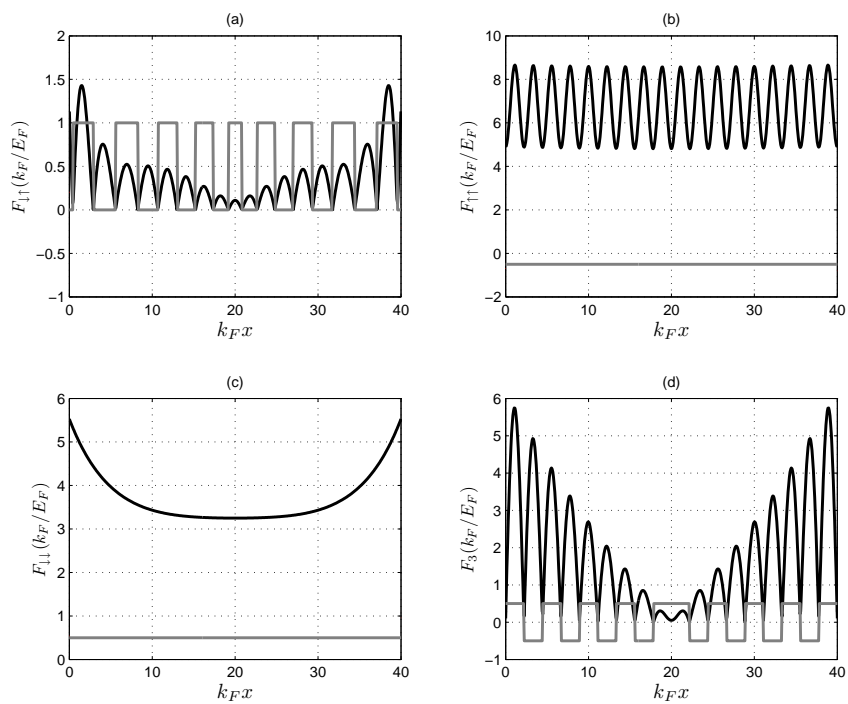
$$\mathcal{G}(x, x') = \mathcal{G}_0(x, x') + \int dy \mathcal{G}_0(x, y) \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{\Delta}(y) \\ -\hat{\Delta}(y)^* & \hat{0} \end{pmatrix} \mathcal{G}(y, x'), \quad (8.17)$$

όπου  $\mathcal{G}_0(x, x')$  είναι η συνάρτηση Green του συστήματος που προκύπτει, αν μηδενίσουμε τη συνάρτηση χάσματος στις υπεραγωγίμες περιοχές. Στη συνέχεια αντικαθιστούμε το κανονικό κομμάτι της συνάρτησης Green στον τύπο του ρεύματος (7.12) και σημειώνουμε ότι το κανονικό κομμάτι της  $\mathcal{G}_0(x, x')$  δίνει μηδενικό υπερρεύμα. Έτσι απομένει το κανονικό κομμάτι του δεύτερου όρου της σχέσης (8.17), το οποίο αναμιγνύει το κανονικό κομμάτι της  $\mathcal{G}_0(x, x')$  με την ανώμαλη πλήρη συνάρτηση Green. Με αυτό τον τρόπο μπορούμε να αποδώσουμε, για κάθε θέση  $x$  μέσα στο ενδιάμεσο στρώμα, το υπερρεύμα που φέρει κάθε συνιστώσα της ανώμαλης συνάρτησης Green. Το εγχείρημα αυτό δεν θα επιχειρηθεί στα πλαίσια αυτής της εργασίας.

## 8.5 Τριδιάστατες σιδηρομαγνητικές επαφές Josephson

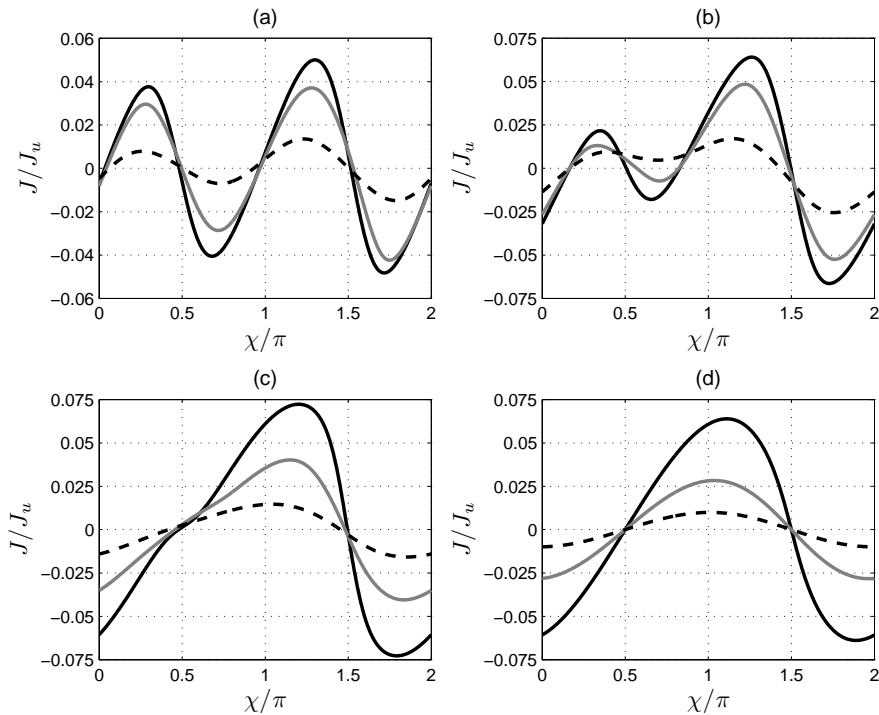
Στην παρούσα ενότητα θα μελετήσουμε εν συντομία ιδιότητες των τριδιάστατων σιδηρομαγνητικών επαφών Josephson, που είναι αντίστοιχες με αυτές που μελετήσαμε





Σχήμα 8.30: Συνιστώσες της άρτιας στη θέση ανώμαλης συνάρτησης Green  $\hat{F}(x, x)$  συναρτήσεως της θέσης  $k_F x$  στην επαφή: (a)  $F_{\downarrow\uparrow}(x, x)$ , (b)  $F_{\uparrow\uparrow}(x, x)$ , (c)  $F_{\uparrow\downarrow}(x, x)$ , (d)  $F_3(x, x)$ . Οι παράμετροι είναι ίδιες με αυτές του Σχ.8.25(d), αλλά η γεωμετρία των μαγνητίσεων είναι  $xzx$ . Με μαύρη γραμμή είναι η απόλυτη τιμή της αντίστοιχης συνιστώσας και με γκρι η φάση της διά  $\pi$ . Η διαφορά φάσης  $\chi$  είναι μηδέν.

προηγουμένως για την περίπτωση των μονοδιάστατων επαφών Josephson. Με τον όρο τριδιάστατες επαφές Josephson εννοούμε επαφές που είναι ομογενείς στις διευθύνσεις  $y$  και  $z$  και που οι ιδιότητές τους μεταβάλλονται μόνο κατά τη διάσταση  $x$ . Σε αυτή την περίπτωση οι στάσιμες καταστάσεις του συστήματος εξαρτώνται από τη μεταβλητή  $k_{\parallel}$ , που είναι η ορμή των οριζόντιων σωματιδίων στο επίπεδο  $yz$ . Τότε, για να βρούμε το υπερρεύμα στην επαφή Josephson, πρέπει να ολοκληρώσουμε αυτή τη μεταβλητή, στην περιοχή του επιπέδου  $yz$  που το μέτρο της είναι μικρότερο του  $k_F$ . Αυτή η απλή μαθηματική διαδικασία οδηγεί σε αξιοσημείωτες διαφορές στις ιδιότητες της επαφής Josephson, παρόλο που βασικά χαρακτηριστικά, όπως οι επιπτώσεις των συνθηκών συμμετρίας, παραμένουν αναλλοίωτα.



Σχήμα 8.31: Σχέσεις υπερρεύματος φάσης για τριδιάστατες επαφές Josephson στη γεωμετρία  $zxy$ , για  $Z_n = 0, 0.5, 1$  με συμπαγή μαύρη, συμπαγή γκρι και μαύρη διακεκομμένη γραμμή αντίστοιχα: (a)  $M = 0.1$ , (b)  $M = 0.4$ , (c)  $M = 0.8$  και (d)  $M = 1$ . Το κανονικοποιημένο πάχος είναι  $k_F d = 40$ . Οι υπόλοιπες παράμετροι είναι  $T = 0.1$ ,  $\Delta_0 = 0.001$  και  $Z_m = 1$ .

Σημειώνουμε ότι παρακάτω θα χρησιμοποιήσουμε ως μονάδα της πυκνότητας ρεύματος την ποσότητα

$$J_u = \frac{e\Delta_0}{h} k_F^2, \quad (8.18)$$

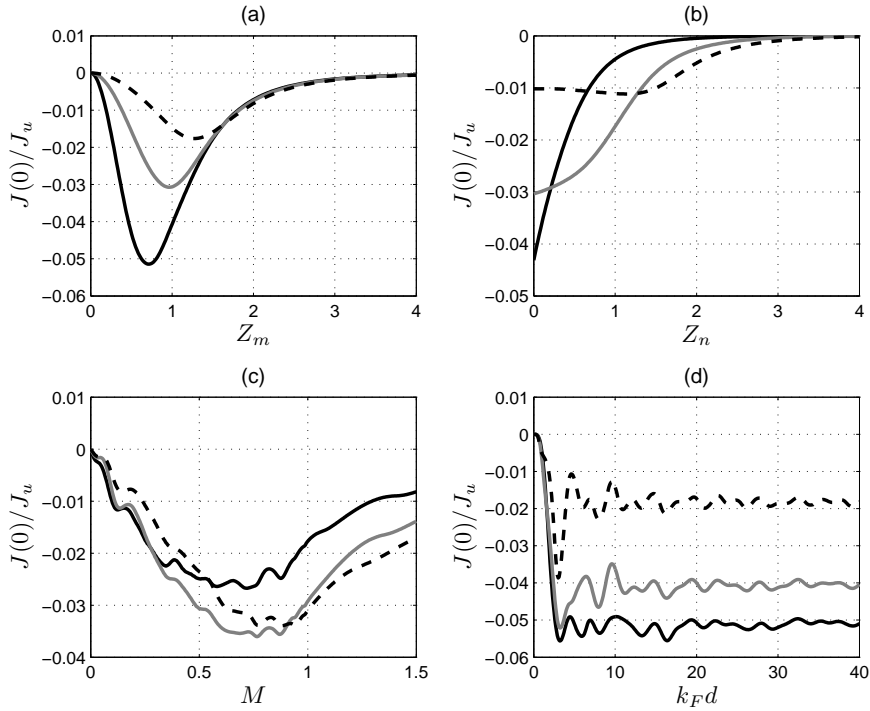
όπου  $e$  το φορτίο του ηλεκτρονίου,  $\Delta_0$  η συνάρτηση χάσματος σε μηδενική θερμοκρασία για τον ομογενή υπεραγωγό,  $h$  η σταθερά του Planck και  $k_F$  το κυματοδιάνυσμα Fermi. Επίσης σημειώνουμε ότι στα αποτελέσματα που θα παρουσιάσουμε σε αυτή την ενότητα έχουμε  $T = 0.1$  και  $\Delta_0 = 0.001$  και τις ισχύες ενδοεπιφανειακής σκέδασης και μαγνήτισης στα αριστερά και τα δεξιά ίσες μεταξύ τους.

Στο Σχ.8.31 παρουσιάζουμε τις σχέσεις υπερρεύματος φάσης τριδιάστατων επαφών Josephson για μαγνητίσεις (a)  $M = 0.1$ , (b)  $M = 0.4$ , (c)  $M = 0.8$  και (d)  $M = 1$ . Σε κάθε διάγραμμα δίνουμε τη CPR για τρεις τιμές του  $Z_n$  (0, 0.5 και 1). Οι υπόλοιπες παράμετροι είναι  $k_F d = 40$ ,  $Z_m = 1$  και η γεωμετρία των μαγνητίσεων είναι  $zxy$ . Παρατηρούμε σε όλα τα διαγράμματα την ύπαρξη υπερρεύματος μηδενικής φάσης το οποίο βαίνει αυξανόμενο, καθώς αυξάνεται η μαγνήτιση. Επίσης παρατηρούμε ότι η μορφή της CPR αποκτά πολύ γρηγορότερα, όσον αφορά τη μαγνήτιση  $M$ , την πριονωτή μορφή που παίρνει στο μονοδιάστατο μοντέλο για  $M = 1$ . Αυτό αποτελεί ένδειξη για μια πιο ομαλή μετάβαση των ιδιοτήτων της επαφής Josephson στο ημιμεταλλικό όριο.

Στο Σχ.8.32 απεικονίζουμε την πυκνότητα υπερρεύματος μηδενικής φάσης συναρτήσει των παραμέτρων της επαφής. Στο Σχ.8.32(a) δίνουμε την πυκνότητα υπερρεύματος μηδενικής φάσης συναρτήσει της ισχύος ενδοεπιφανειακής μαγνήτισης  $Z_m$ , για  $Z_n = 0, 0.5, 1$  με μαύρη συμπαγή, γκρι συμπαγή, μαύρη διακεκομμένη γραμμή αντίστοιχα. Επίσης  $k_F d = 25$  και  $M = 0.5$ . Παρατηρούμε ότι η πυκνότητα υπερρεύματος μηδενικής φάσης είναι μηδέν, για  $Z_m = 0$ , στη συνέχεια αυξάνεται μέχρι ένα μέγιστο και έπειτα φθίνει στο μηδέν, με περαιτέρω αύξηση του  $Z_m$ . Αυτή η συμπεριφορά είναι παρόμοια με την αντίστοιχη στο μονοδιάστατο μοντέλο, μόνο που εδώ δεν παρατηρούμε την ύπαρξη κορυφών, που εμφανίζονται στο μονοδιάστατο μοντέλο με την αύξηση της κανονικής ενδοεπιφανειακής σκέδασης  $Z_n$ . Έτσι τα πλατώ που αναφέραμε στο μονοδιάστατο μοντέλο απουσιάζουν.

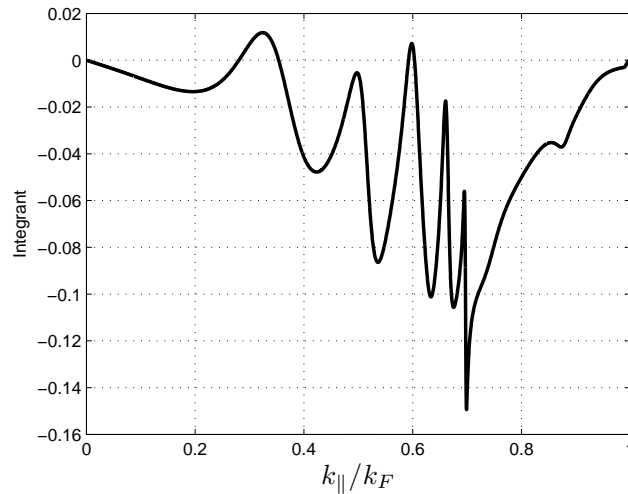
Στο Σχ.8.32(b) δίνουμε την πυκνότητα υπερρεύματος μηδενικής φάσης συναρτήσει του  $Z_n$ , για  $Z_m = 0.5, 1.2, 1.8$  με μαύρη συμπαγή, γκρι συμπαγή, μαύρη διακεκομμένη γραμμή αντίστοιχα. Επίσης  $k_F d = 25$  και  $M = 0.5$ . Παρατηρούμε ότι για αρκετά μικρό  $Z_m$  η πυκνότητα υπερρεύματος μηδενικής φάσης φθίνει μονότονα στο μηδέν, ενώ με την αύξηση του  $Z_m$  τείνει να εμφανιστεί μία κορυφή και να καταστήσει την εξάρτηση του υπερρεύματος μηδενικής φάσης από το  $Z_n$  μη μονότονη. Η συμπεριφορά αυτή είναι ανάλογη με αυτή που εμφανίζεται στο μονοδιάστατο μοντέλο, μόνο που είναι πολύ πιο ήπια σε ένταση.

Στο Σχ.8.32(c) δίνεται η πυκνότητα υπερρεύματος μηδενικής φάσης συναρτήσει της μαγνήτισης  $M$ , για  $Z_m = 0.7, 1, 1.3$  με μαύρη συμπαγή, γκρι συμπαγή, μαύρη διακεκομμένη γραμμή αντίστοιχα. Επίσης  $k_F d = 25$  και  $Z_n = 0.5$ . Εδώ παρατηρούμε αξιο-



Σχήμα 8.32: (a) Πυκνότητα υπερρεύματος μηδενικής φάσης συναρτήσει του  $Z_m$ , για  $Z_n = 0, 0.5, 1$  με μαύρη συμπαγή, γκρι συμπαγή, μαύρη διακεκομμένη γραμμή αντίστοιχα. Επίσης  $k_F d = 25$  και  $M = 0.5$ . (b) Πυκνότητα υπερρεύματος μηδενικής φάσης συναρτήσει του  $Z_n$ , για  $Z_m = 0.5, 1.2, 1.8$  με μαύρη συμπαγή, γκρι συμπαγή, μαύρη διακεκομμένη γραμμή αντίστοιχα. Επίσης  $k_F d = 25$  και  $M = 0.5$ . (c) Πυκνότητα υπερρεύματος μηδενικής φάσης συναρτήσει της μαγνήτισης  $M$ , για  $Z_m = 0.7, 1, 1.3$  με μαύρη συμπαγή, γκρι συμπαγή, μαύρη διακεκομμένη γραμμή αντίστοιχα. Επίσης  $k_F d = 25$  και  $Z_n = 0.5$ . (d) Πυκνότητα υπερρεύματος μηδενικής φάσης συναρτήσει του κανονικοποιημένου πάχους  $k_F d$ , για  $Z_m = 0.7, 1, 1.5$  με μαύρη συμπαγή, γκρι συμπαγή, μαύρη διακεκομμένη γραμμή αντίστοιχα. Επίσης  $M = 0.5$  και  $Z_n = 0$ . Σε όλα τα παραπάνω η γεωμετρία των μαγνητίσεων είναι  $zxy$ .

σημειώτη διαφορά σε σχέση με το μονοδιάστατο μοντέλο. Οι γρήγορες ταλαντώσεις του υπερρεύματος μηδενικής φάσης έχουν εξαφανιστεί και τώρα αυτό διατηρεί σταθερό πρόσημο σε όλο το εύρος των τιμών της μαγνήτισης  $M$ . Το φαινόμενο αυτό εξηγείται, αν αναλογιστούμε ότι η συνεισφορά στο υπερρέυμα από τις ορμές στο  $yz$  επίπεδο με μέτρο μεταξύ  $k_{\parallel}$  και  $k_{\parallel} + dk_{\parallel}$ <sup>1</sup> στο τριδιάστατο μοντέλο είναι ανάλογη με την εξάρτηση του υπερρεύματος από τη μαγνήτιση στο μονοδιάστατο μοντέλο. Αυτό φαίνεται και στο Σχ.8.33. Όμως η ολοκλήρωση ως προς  $k_{\parallel}$  δίνει αποτέλεσμα με συγκεκριμένο πρόσημο, αφού οι ταλαντώσεις της ολοκληρωτέας ποσότητας τείνουν να μετατοπίζουν το κέντρο τους προς μία συγκεκριμένου προσήμου τιμή, καθώς αυξάνεται το  $k_{\parallel}$ , όπως συμβαίνει και με την εξάρτηση του υπερρεύματος μηδενικής φάσης από τη μαγνήτιση στο μονοδιάστατο μοντέλο. Σημειώνουμε μόνο ότι για κατάλληλη επιλογή του  $k_F d$  (π.χ  $\simeq 40$  με τις άλλες παραμέτρους ίδιες) μπορούμε να πετύχουμε μια πολύ μικρή ταλάντωση του  $J(0)$  στην περιοχή τιμών του  $M$  κοντά στο μηδέν, πρακτικά όμως το διάγραμμα του Σχ.8.32(c) παραμένει αναλλοίωτο.



Σχήμα 8.33: Ολοκληρωτέα ποσότητα συναρτήσεως του μέτρου της ορμής στο  $yz$  επίπεδο για  $\chi = 0$ ,  $M = 0.5$  και τις υπόλοιπες παραμέτρους ίδιες με το Σχ.8.32(c)

Επίσης οφείλουμε να παρατηρήσουμε ότι η ολοκληρωτέα ποσότητα του Σχ.8.33 δεν μηδενίζεται για μέτρο  $k_{\parallel} > \sqrt{1 - M} \simeq 0.7$ , πέρα από το οποίο η μία ζώνη σπιν δεν δύναται να φέρει οδεύοντα κύματα. Το γεγονός αυτό οφείλεται στη συνιστώσα triplet της ανώμαλης συνάρτησης Green, που επιτρέπει τη μετατροπή των ζευγών Cooper από

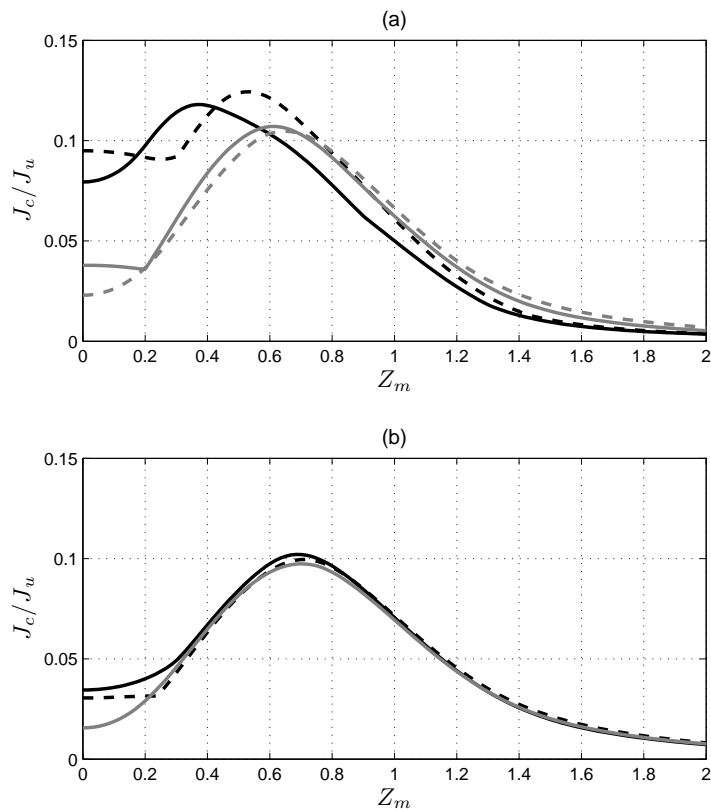
<sup>1</sup>Εδώ με  $k_{\parallel}$  εννοούμε το μέτρο της ορμής στο επίπεδο  $yz$ .

σπιν μηδέν σε 1 μέσα στην επαφή και κατά συνέπεια συνεισφέρει στο υπερρεύμα ακόμα και όταν η μία ζώνη σπιν δεν φέρει οδεύοντα κύματα [98].

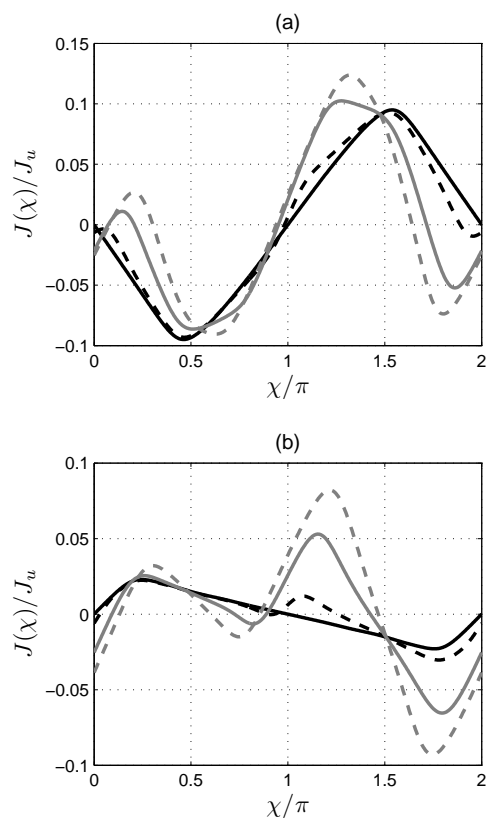
Στο Σχ.8.32(d) δίνουμε την πυκνότητα υπερρεύματος μηδενικής φάσης συναρτήσει του κανονικοποιημένου πάχους  $k_F d$ , για  $Z_m = 0.7, 1, 1.5$  με μαύρη συμπαγή, γκρι συμπαγή, μαύρη διακεκομμένη γραμμή αντίστοιχα. Επίσης  $M = 0.5$  και  $Z_n = 0$ . Παρατηρούμε ξανά ότι οι ταλαντώσεις του υπερρεύματος μηδενικής φάσης σε σχέση με την απόλυτη τιμή του έχουν μειωθεί σε σχέση με το μονοδιάστατο μοντέλο. Η συμπεριφορά μάλιστα του υπερρεύματος ομοιάζει πιο πολύ στην συμπεριφορά του  $I(0)$  για  $M = 1$  του μονοδιάστατου μοντέλου. Αυτό πιθανώς οφείλεται στο ότι, για όλες τις τιμές της μαγνήτισης, υπάρχουν καταστάσεις σκέδασης στην επαφή που δεν μπορούν να προσπελάσουν τη μία ζώνη σπιν, για αρκετά μεγάλο  $k_{||}$ , με αποτέλεσμα η συνεισφορά στο υπερρεύμα να γίνεται μέσω της triplet συνιστώσας της ανώμαλης συνάρτησης Green. Αντίθετα, στο μονοδιάστατο μοντέλο, η μία από τις δύο ζώνες γίνεται απροσπέλαστη μόνον όταν  $M = 1$ .

Στο Σχ.8.34 απεικονίζουμε την κρίσιμη πυκνότητα υπερρεύματος συναρτήσει του  $Z_m$ . Στο Σχ.8.34(a) θέτουμε  $k_F d = 40$ ,  $Z_n = 0$  και  $M = 0.1, M = 0.2, M = 0.3, M = 0.4$  με μαύρη συμπαγή, μαύρη διακεκομμένη, γκρι συμπαγή και γκρι διακεκομμένη γραμμή αντίστοιχα. Η γεωμετρία των μαγνητίσεων είναι  $zxy$ . Παρατηρούμε ότι για τις τιμές της μαγνήτισης  $M = 0.2$  και  $M = 0.4$  (μαύρη διακεκομμένη και γκρι διακεκομμένη γραμμή αντίστοιχα) και για μικρά  $Z_m$  εμφανίζεται ένα πλατώ στο κρίσιμο υπερρεύμα, που καταλήγει σε απότομη μεταβολή της παραγώγου της καμπύλης. Θα περιμέναμε να υπάρχει μια αλλαγή φάσης  $0 - \pi$  σε αυτό το σημείο, όμως δεν είναι ακριβώς έτσι. Στο Σχ.8.35(a) δίνουμε τις CPR για  $Z_m = 0, Z_m = 0.15, Z_m = 0.35, Z_m = 5$  με μαύρη συμπαγή, μαύρη διακεκομμένη, γκρι συμπαγή, γκρι διακεκομμένη γραμμή αντίστοιχα: (a)  $M = 0.2$ , (b)  $M = 0.4$ . Εκεί διαπιστώνουμε ότι δεν υπάρχει αλλαγή φάσης, παρά η CPR εμφανίζει απότομες μεταβολές της παραγώγου της, που παράγουν και την απότομη μεταβολή στο διάγραμμα του Σχ.8.34(a) και οι οποίες τείνουν να εξομαλυνθούν με την αύξηση του  $Z_m$ . Η εμφάνιση αυτού του πλατώ στο διάγραμμα του Σχ.8.34(a) γίνεται περιοδικά με τη μαγνήτιση. Το ίδιο ισχύει και για τη μεταβολή του κανονικοποιημένου πάχους της επαφής. Στο Σχ.8.34(b) δίνουμε το κρίσιμη πυκνότητα ρεύματος συναρτήσει του  $Z_m$  για  $M = 0.5$ ,  $Z_n = 0$  και  $k_F d = 32.5, k_F d = 35, k_F d = 37.5$  με μαύρη συμπαγή, μαύρη διακεκομμένη και γκρι συμπαγή γραμμή αντίστοιχα. Η γεωμετρία μαγνητίσεων είναι  $zxy$ . Το πλατώ εμφανίζεται και εξαφανίζεται περιοδικά και οι CPR κατά μήκος της καμπύλης εμφανίζουν απότομες μεταβολές της παραγώγου, που τείνουν να εξομαλυνθούν με την αύξηση του  $Z_m$ .

Στο Σχ.8.36 δίνουμε την κρίσιμη πυκνότητα ρεύματος συναρτήσει του  $Z_n$  για τρεις τιμές του  $Z_m = 0.5, 1.2, 1.8$ , με μαύρη συμπαγή, μαύρη διακεκομμένη και γκρι συμπαγή γραμμή αντίστοιχα. Επίσης έχουμε  $k_F d = 25$ ,  $M = 0.5$ . Παρατηρούμε ότι το κρίσιμο υπερρεύμα μειώνεται μονότονα, αλλά όσο μεγαλώνει το  $Z_m$  τείνει να εμφανίσει



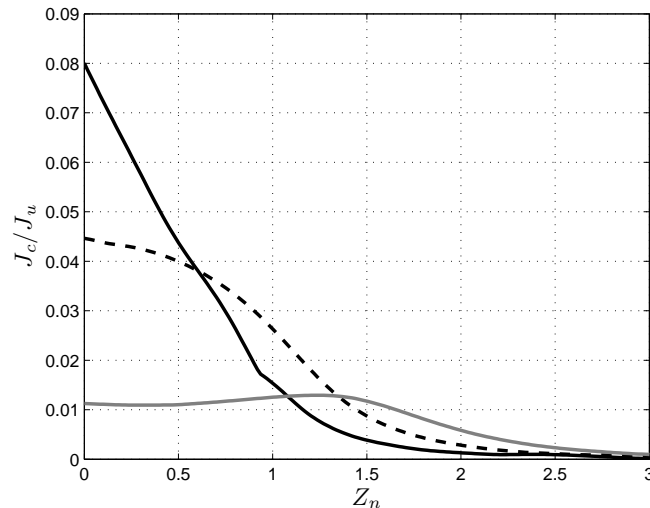
Σχήμα 8.34: Κρίσιμη πυκνότητα υπερρεύματος συναρτήσει του  $Z_m$ : (a)  $k_F d = 40$ ,  $Z_n = 0$  και  $M = 0.1$ ,  $M = 0.2$ ,  $M = 0.3$ ,  $M = 0.4$  με μαύρη συμπαγή, μαύρη διακεκομμένη, γκρι συμπαγή και γκρι διακεκομμένη γραμμή αντίστοιχα. (b)  $M = 0.5$ ,  $Z_n = 0$  και  $k_F d = 32.5$ ,  $k_F d = 35$ ,  $k_F d = 37.5$  με μαύρη συμπαγή, μαύρη διακεκομμένη και γκρι συμπαγή γραμμή αντίστοιχα. Η γεωμετρία μαγνητίσεων είναι πάντα  $zxy$ .



Σχήμα 8.35: Σχέσεις υπερρεύματος φάσης για τις επαφές του Σχ.8.34(a) για  $Z_m = 0$ ,  $Z_m = 0.15$ ,  $Z_m = 0.35$ ,  $Z_m = 5$  με μαύρη συμπαγή, μαύρη διακεκομμένη, γκρι συμπαγή, γκρι διακεκομμένη γραμμή αντίστοιχα: (a)  $M = 0.2$ , (b)  $M = 0.4$ .



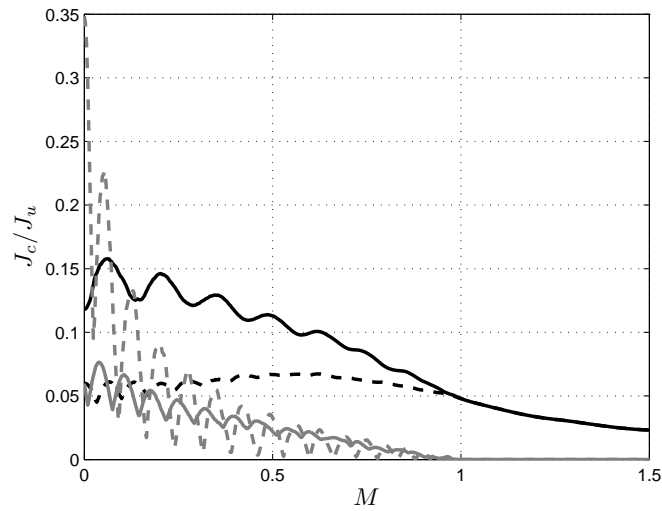
μία κορυφή κοντά στο  $Z_m = 1.5$ . Αυτή η συμπεριφορά είναι σε συμφωνία και με το μονοδιάστατο μοντέλο, μόνο που στην περίπτωση της τριδιάστατης επαφής τα πράγματα είναι πιο ομαλά.



Σχήμα 8.36: Κρίσιμη πυκνότητα υπερρεύματος συναρτήσει του  $Z_n$ . Έχουμε θέσει  $k_F d = 25$ ,  $M = 0.5$  και  $Z_m = 0.5, 1.2, 1.8$ , με μαύρη συμπαγή, μαύρη διακεκομμένη και γκρι συμπαγή γραμμή αντίστοιχα. Η γεωμετρία μαγνητίσεων είναι πάντα  $zxy$ .

Προχωρούμε παρουσιάζοντας διαγράμματα της κρίσιμης πυκνότητας υπερρεύματος συναρτήσει της μαγνήτισης  $M$  και του πάχους  $k_F d$  του ενδιάμεσου στρώματος. Στο Σχ.8.37 η κρίσιμη πυκνότητα υπερρεύματος δίνεται συναρτήσει της μαγνήτισης  $M$  για γεωμετρία  $zxx$  με μαύρη συμπαγή γραμμή, για γεωμετρία  $zxy$  με μαύρη διακεκομμένη γραμμή, για γεωμετρία  $zxx$  με γκρι συμπαγή γραμμή, για γεωμετρία  $0x0$  (δηλ.  $Z_m = 0$  και η μαγνήτιση του στρώματος στη διεύθυνση  $x$ ) με γκρι διακεκομμένη γραμμή. Οι άλλες παράμετροι της επαφής είναι  $k_F d = 40$ ,  $Z_n = 0.2$  και  $Z_m = 1$ . Παρατηρούμε ότι οι γρήγορες ταλαντώσεις που βρήκαμε στο μονοδιάστατο μοντέλο παύουν να υπάρχουν. Επίσης βλέπουμε ότι οι γεωμετρίες  $zxx$  και  $0x0$  φθίνουν γρήγορα με τη μαγνήτιση και όχι απότομα στην τιμή  $M = 1$ , όπως συμβαίνει στις μονοδιάστατες επαφές. Αντίθετα, οι γεωμετρίες  $zxx$  και  $zxy$ , στις οποίες τα οιωνοειδή σώματα έχουν τη δυνατότητα να αλλάξουν σπιν, σκεδαζόμενα στις ενδοεπιφάνειες, παραμένουν με σημαντικό κρίσιμο ρεύμα σε όλο το εύρος τιμών που απεικονίζεται στο Σχ.8.37. Μάλιστα μετά το  $M = 1$  το κρίσιμο υπερρεύμα τους ταυτίζεται. Για  $M < 1$  η γεωμετρία  $zxx$  έχει σταθερά μεγαλύτερο κρίσιμο υπερρεύμα από τη γεωμετρία  $zxy$ , καθώς και από τη γεωμετρία  $zxx$ . Μόνο κοντά στο  $M = 0$ , η γεωμετρία  $0x0$  έχει το μεγαλύτερο κρίσιμο υπερρεύμα από όλες

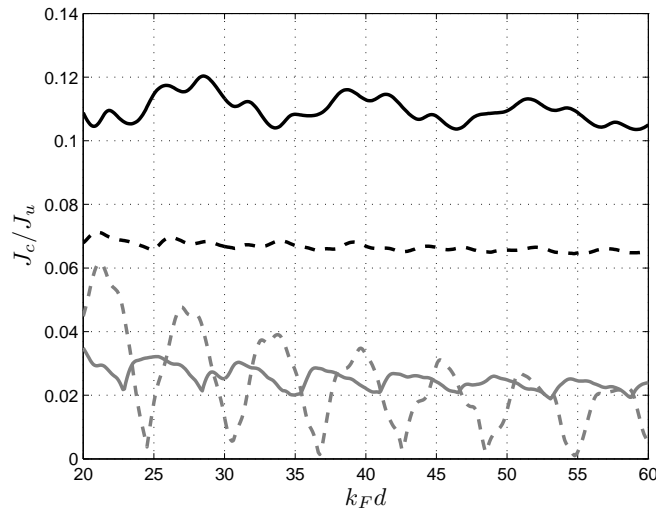
τις γεωμετρίες. Αυτό εξηγείται από το γεγονός ότι, όσο μεγαλώνει η μαγνήτιση, όλο και λιγότερες καταστάσεις μπορούν να διαπεράσουν την επαφή γεωμετρίας  $zxx$  ή  $0x0$ , αφού η μαγνήτιση εισάγει ένα όριο στις επιτρεπτές τιμές του  $k_{\parallel}$ . Στις γεωμετρίες  $zxx$  και  $zxy$  όμως, τα ζεύγη Cooper μπορούν να διέλθουν και μέσω μίας μόνο ζώνης σπιν, με αποτέλεσμα να συνεισφέρουν όλες οι καταστάσεις με  $k_{\parallel}$  μικρότερο του  $k_F$ . Τέλος οφείλουμε να σημειώσουμε ότι όλες οι γεωμετρίες εμφανίζουν αλλαγές φάσης  $0 - \pi$  στο διάστημα  $M \in [0, 1]$ , εκτός από τη γεωμετρία  $zxx$ , που παραμένει σε σταθερή φάση. Οι παραπάνω παρατηρήσεις είναι σχετικά γενικές και δεν εξαρτώνται από την επιλογή των παραμέτρων της επαφής.



Σχήμα 8.37: Κρίσιμη πυκνότητα υπερρεύματος συναρτήσει της μαγνήτισης  $M$ : για γεωμετρία  $zxx$  με μαύρη συμπαγή γραμμή, για γεωμετρία  $zxy$  με μαύρη διακεκομμένη γραμμή, για γεωμετρία  $zxx$  με γκρί συμπαγή γραμμή, για γεωμετρία  $0x0$  (δηλ.  $Z_m = 0$  και η μαγνήτιση του ενδιάμεσου στρώματος στη διεύθυνση  $x$ ) με γκρί διακεκομμένη γραμμή. Οι παράμετροι της επαφής είναι  $k_F d = 40$ ,  $Z_n = 0.2$  και  $Z_m = 1$ .

Στο Σχ.8.38 απεικονίζουμε την κρίσιμη πυκνότητα υπερρεύματος συναρτήσει του πάχους  $k_F d$  του ενδιάμεσου στρώματος, για γεωμετρία  $zxx$  με μαύρη συμπαγή γραμμή, για γεωμετρία  $zxy$  με μαύρη διακεκομμένη γραμμή, για γεωμετρία  $zxx$  με γκρί συμπαγή γραμμή, για γεωμετρία  $0x0$  (δηλ.  $Z_m = 0$  και η μαγνήτιση του στρώματος στη διεύθυνση  $x$ ) με γκρί διακεκομμένη γραμμή. Οι άλλες παράμετροι της επαφής είναι  $M = 0.5$ ,  $Z_n = 0.2$  και  $Z_m = 1$ . Ξανά παρατηρούμε ότι οι γρήγορες ταλαντώσεις του μονοδιάστατου μοντέλου δεν υφίστανται στο τριδιάστατο και ότι η γεωμετρία  $zxx$  έχει μεγαλύτερο κρίσιμο υπερρεύμα. Επίσης όλες οι γεωμετρίες έχουν αλλαγές φάσης  $0 - \pi$ ,

εκτός από τη  $zxx$ . Τέλος, αν και στο εύρος τιμών του  $k_F d$  που επιλέξαμε δεν φαίνεται, το υπερρεύμα στις γεωμετρίες  $zxx$ ,  $zxy$  και  $zxx$  επιβιώνει με ελάχιστη πτώση για μεγάλα πάχη ( $k_F d > 100$ ), σε αντίθεση με το υπερρεύμα της γεωμετρίας  $0x0$ , που γίνεται τάξη μεγέθους μικρότερο.

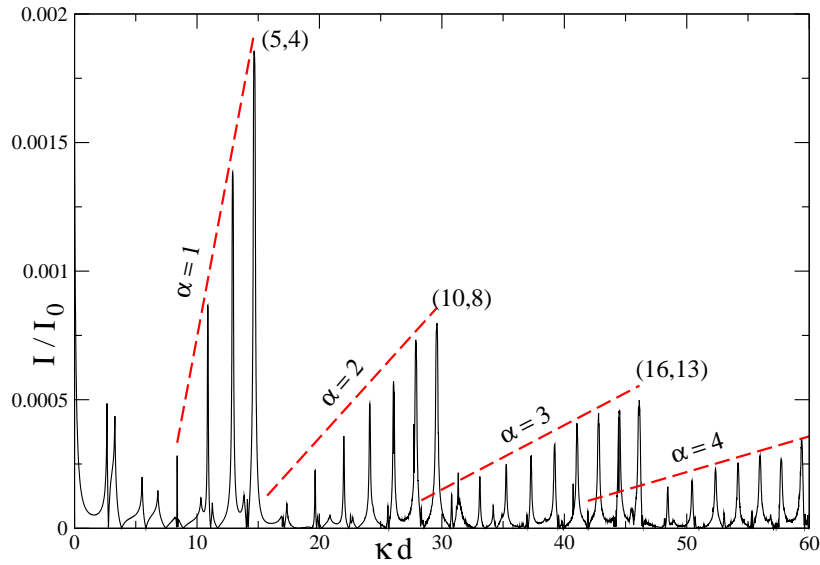


Σχήμα 8.38: Κρίσιμη πυκνότητα υπερρεύματος συναρτήσει του πάχους  $k_F d$  του ενδιάμεσου στρώματος: για γεωμετρία  $zxx$  με μαύρη συμπαγή γραμμή, για γεωμετρία  $zxy$  με μαύρη διακεκομμένη γραμμή, για γεωμετρία  $zxx$  με γκρι συμπαγή γραμμή, για γεωμετρία  $0x0$  (δηλ.  $Z_m = 0$  και η μαγνήτιση του ενδιάμεσου στρώματος στη διεύθυνση  $x$ ) με γκρι διακεκομμένη γραμμή. Οι παράμετροι της επαφής είναι  $M = 0.5$ ,  $Z_n = 0.2$  και  $Z_m = 1$ .

## 8.6 Συντονισμοί σε τριδιάστατες επαφές Josephson με ομογενή μαγνήτιση και ισχυρή σκέδαση στις ενδοεπιφάνειες

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε μια μελέτη τριδιάστατων σιδηρομαγνητικών επαφών Josephson με ένα στρώμα, ομογενή μαγνήτιση σε αυτό, χωρίς σπιν ενεργές ενδοεπιφάνειες, αλλά με ισχυρή ενδοεπιφανειακή κανονική σκέδαση. Αυτό που συμβαίνει σε αυτά τα συστήματα είναι ότι το κρίσιμο υπερρεύμα μειώνεται δραστικά, όμως σαν συνάρτηση του  $k_F d$  εμφανίζει έντονες κορυφές, που αντιστοιχούν σε συντονισμούς

των οιωνεί σωματιδίων μέσα στην επαφή. Στη μονοδιάστατη περίπτωση αυτοί οι συντονισμοί συμβαίνουν αναγκαστικά πάντα σε κάθετη πρόσπτωση των σωματιδίων στην επαφή και φθίνουν σε ένταση σαν συνάρτηση του  $k_F d$  σχετικά αργά [128, 129]. Στην τριδιάστατη περίπτωση υπάρχει όμως και η δυνατότητα συντονισμών που αντιστοιχούν σε πρόσπτωση υπό συγκεκριμένη, μη ορθή γωνία. Παρόλα αυτά, οι συντονισμοί αυτοί έχουν μικροτερη ένταση εξαιτίας της ολοκλήρωσης ως προς  $k_{\parallel}$  και του γεγονότος ότι έχουν αντίθετη συνεισφορά εκατέρωθεν της γωνίας πρόσπτωσης (βλ. Σχ.8.41). Συμβαίνει όμως για επιλεγμένα  $k_F d$  να υπάρχει σύμπτωση συντονισμών με διαφορετικό σπιν, με αποτέλεσμα θετική συνεισφορά για γωνίες πρόσπτωσης εκατέρωθεν του συντονισμού. Έτσι παράγονται εντονότερες κορυφές στο διάγραμμα του κρίσιμου υπερρεύματος συναρτήσει του  $k_F d$ , δημιουργώντας μια χαρακτηριστική εικόνα, που επιτρέπει την ομαδοποίηση των συντονισμών (βλ. Σχ.8.39).



Σχήμα 8.39: Κανονικοποιημένη κρίσιμη πυκνότητα υπερρεύματος συναρτήσει του  $k_F d$  για  $Z_n = 9$  και  $M = 0.2$ . Επίσης  $T = 0.1$  και  $\Delta_0 = 0.001$ .

Οι συντονισμοί που αναφέρουμε, δίνονται προσεγγιστικά από τις εξισώσεις

$$q_{\uparrow} k_F d = n\pi, \quad q_{\downarrow} k_F d = m\pi, \quad (8.19)$$

όπου

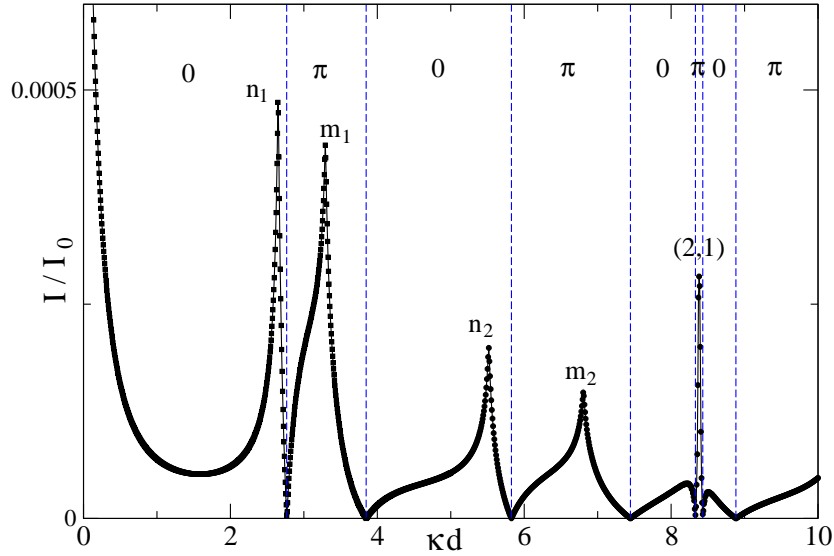
$$q_{\uparrow, \downarrow} = \sqrt{1 \pm M - k_{\parallel}^2}, \quad (8.20)$$

ή

$$q_{\uparrow,\downarrow} = \sqrt{\frac{1}{u^2} \pm M}, \quad (8.21)$$

όπου  $u = 1/\cos \theta$  και  $k_{\parallel} = k_F \sin \theta$ , με  $\theta$  τη γωνία πρόσπτωσης.

Στο Σχ.8.39 δίνουμε την κρίσιμη πυκνότητα υπερρεύματος συναρτήσεως του  $k_F d$  για  $Z_n = 9$  και  $M = 0.2$ . Παρατηρούμε την ύπαρξη συντονισμών, οι πιο έντονοι των οποίων αντιστοιχούν σε σύμπτωση συντονισμών σωματιδίων με σπιν επάνω και σπιν κάτω. Τους ομαδοποιούμε ανάλογα με την ποσότητα  $\alpha = n - m$ . Κάθε συντονισμός σύμπτωσης θα συμβολίζεται με  $(n, m)$ , όπου  $n, m$  οι ακέραιοι που εμφανίζονται στη σχέση (8.19). Οι συντονισμοί με μικρότερο δείκτη  $\alpha$  εμφανίζονται σε μικρότερα  $k_F d$ . Η γωνία πρόσπτωσης του κάθε συντονισμού είναι διαφορετική γενικά από την κάθετη, αλλά όσο πιο κοντά σε αυτή τόσο πιο έντονος ο συντονισμός. Επίσης εμφανίζονται και συντονισμοί του ενός μόνο σπιν, είτε πάνω είτε κάτω, που είναι πιο ασθενείς από τους συντονισμούς σύμπτωσης και είναι πιο εμφανείς στα μικρά πάχη ( $k_F d < 8$ ).



Σχήμα 8.40: Κανονικοποιημένη κρίσιμη πυκνότητα υπερρεύματος συναρτήσεως του  $k_F d$  για  $Z_n = 9$  και  $M = 0.2$ , στο εύρος τιμών  $k_F d = 0 - 10$ . Οι συντονισμοί ενός σπιν σε κάθετη πρόσπτωση και ο συντονισμός σύμπτωσης  $(2, 1)$  σημειώνονται. Επίσης σημειώνονται και οι περιοχές  $0$  ή  $\pi$  επαφής. Οι άλλες παράμετροι είναι  $T = 0.1$  και  $\Delta_0 = 0.001$ .

Στο Σχ.8.40 απεικονίζουμε την κρίσιμη πυκνότητα υπερρεύματος για  $k_F d = 0 - 10$  και παρατηρούμε την ακολουθία απλών συντονισμών (για ένα σπιν)  $n_1 = 1, m_1 = 1,$

$n_2 = 2$  και  $m_2 = 2$ , που αντιστοιχούν σε κάθετη πρόσπτωση. Η έντονη κορυφή στα δεξιά ( $k_F d \simeq 8.4$ ) είναι ο συντονισμός σύμπτωσης (2, 1). Παρατηρούμε ότι εκατέρωθεν του συντονισμού (2, 1) υπάρχουν δύο μικρά μέγιστα, που αντιστοιχούν στο άθροισμα του συντονισμού  $n = 3$  και του (2, 1), ο οποίος έχει συνεισφορά στο υπερρεύμα αντίθετου προσήμου. Επίσης δείχνουμε τις περιοχές 0 και  $\pi$  επαφής και συνεπώς και τις αντίστοιχες αλλαγές φάσης. Έτσι βλέπουμε ότι εκατέρωθεν των απλών συντονισμών υπάρχει αλλαγή φάσης από 0 σε  $\pi$  επαφή, ενώ ο συντονισμός σύμπτωσης δεν επιφέρει αλλαγή φάσης.

Θα κάνουμε σε αυτό το σημείο μια παρένθεση για να δώσουμε μερικές πληροφορίες σχετικά με το ανάπτυγμα της ορίζουσας των συνθηκών συρραφής με διαγραμματικούς όρους. Θυμίζουμε ότι η ορίζουσα των συνθηκών συρραφής υπεισέρχεται στον παρονομαστή της έκφρασης για το υπερρεύμα. Έχει λοιπόν αποδειχθεί [128, 130] ότι για επαφές με ένα σιδηρομαγνητικό στρώμα χωρίς σπιν ενεργές ενδοεπιφάνειες, η ορίζουσα των συνθηκών συρραφής μπορεί να γραφεί ως εξής

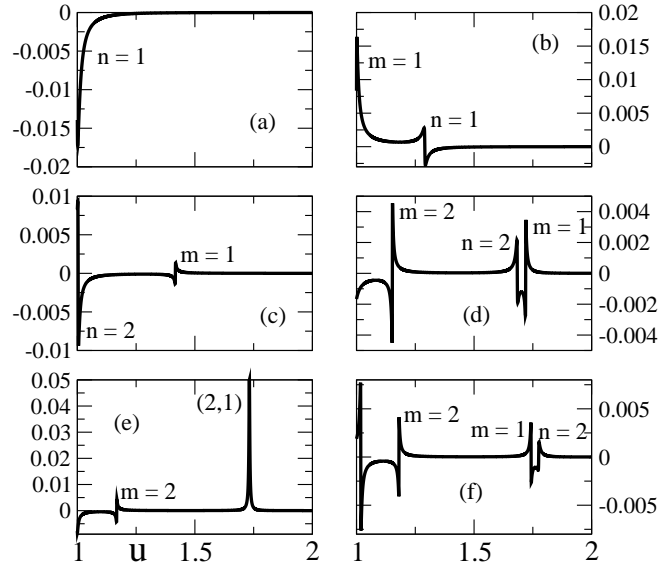
$$\Gamma = 1 - \gamma, \quad (8.22)$$

όπου

$$\gamma = x_{S1} + x_{S2} + x_{S3} + x_{S4} - (x_{S1}x_{S2} + x_{S3}x_{S4} - x_{S5} - x_{S6}). \quad (8.23)$$

Στην παραπάνω σχέση ο όρος  $x_{S1}$  περιγράφει διαγραμματικά την κανονική σκέδαση των ηλεκτρονιακών οιωনী σωματιδίων στο ενδιάμεσο στρώμα, ο  $x_{S2}$  την κανονική σκέδαση των σωματιδίων χαρακτήρα οπής, οι όροι  $x_{S3}, x_{S4}$  τις σκεδάσεις Andreev των σωματιδίων και οι όροι  $x_{S5}, x_{S6}$  τη σύνθεση κανονικών σκεδάσεων και σκεδάσεων Andreev. Στην περίπτωση επαφών με ισχυρή κανονική σκέδαση, η κύρια συνεισφορά έρχεται από τους όρους  $x_{S1}, x_{S2}$  και το γινόμενό τους. Στην περίπτωση των συντονισμών σύμπτωσης, οι όροι αυτοί γίνονται πολύ μικροί, με αποτέλεσμα να συνεισφέρουν και οι όροι  $x_{S3}, x_{S4}$ , όχι όμως και το γινόμενό τους, που είναι μικρότερης τάξης. Αγνοώντας επομένως μόνο τους όρους  $x_{S5}, x_{S6}$  και  $x_{S3}x_{S4}$ , υπολογίζουμε το κρίσιμο υπερρεύμα στο διάγραμμα του Σχ.8.40 και παρατηρούμε ότι το αποτέλεσμα ταυτίζεται με αυτό του πλήρους υπολογισμού της ορίζουσας συνθηκών συρραφής.

Στα διαγράμματα του Σχ.8.41 παρουσιάζουμε την ολοκληρωτέα ποσότητα του κρίσιμου υπερρεύματος σαν συνάρτηση του  $u$ , δηλ. ουσιαστικά της γωνίας πρόσπτωσης του οιωনী σωματιδίων στην επαφή. Παρατηρούμε ότι, για κάθε τιμή του  $k_F d$ , το κρίσιμο υπερρεύμα έχει συνεισφορά από διάφορους συντονισμούς, όμως χαρακτηρίζουμε την επαφή με βάση τον συντονισμό εκείνο που είναι κυρίαρχος. Χαρακτηριστική είναι στο διάγραμμα (e) η κορυφή που αντιστοιχεί στο συντονισμό σύμπτωσης (2, 1) και

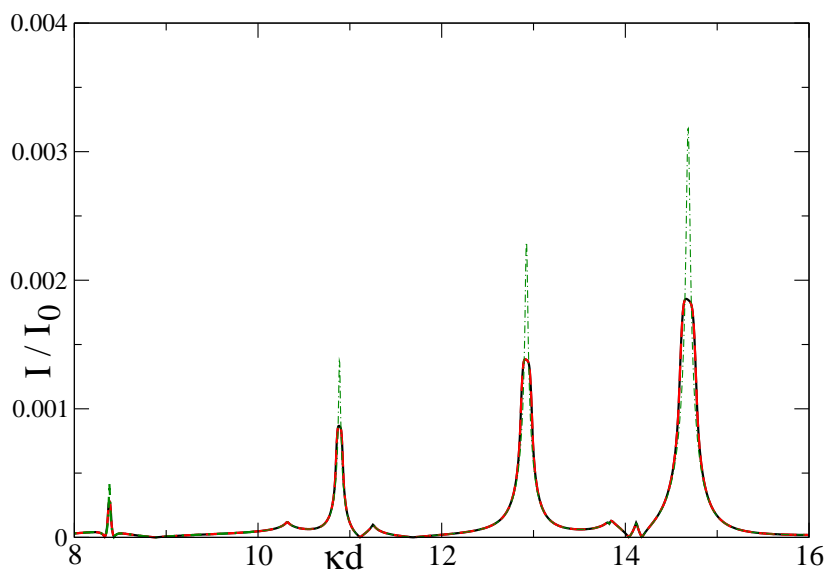


Σχήμα 8.41: Η ολοκληρωτέα ποσότητα του κρίσιμου υπερρεύματος συναρτήσει του  $u$  για  $Z_n = 9$  και  $M = 0.2$ . (a)  $k_F d = 2.67$ , (b)  $k_F d = 3.28$ , (c)  $k_F d = 5.51$ , (d)  $k_F d = 8.2235$ , (e)  $k_F d = 8.370$  και (f)  $k_F d = 8.503$ . Επίσης  $T = 0.1$  και  $\Delta_0 = 0.001$ .

συμβαίνει σε μη κάθετη πρόσπτωση. Επίσης είναι εμφανής η αλλαγή προσήμου της ολοκληρωτέας ποσότητας στους απλούς συντονισμούς.

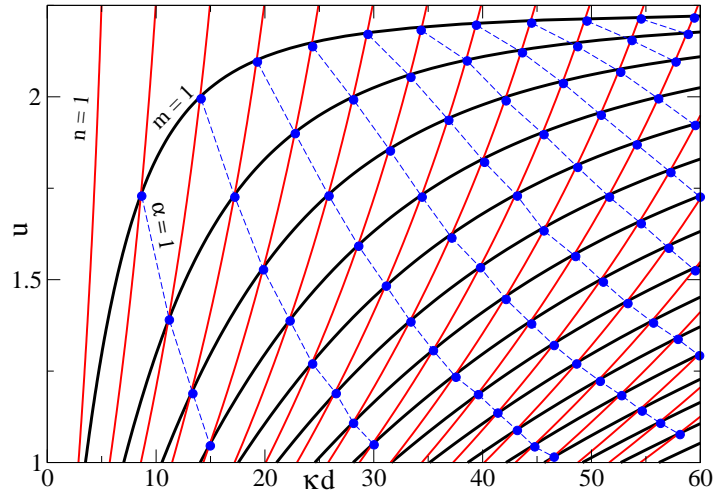
Στο Σχ.8.42 δίνουμε την κανονικοποιημένη κρίσιμη πυκνότητα υπερρεύματος συναρτήσει του  $k_F d$  για  $Z_n = 9$  και  $M = 0.2$ , στο εύρος τιμών  $k_F d = 8 - 16$ , που καλύπτει τη συλλογή συντονισμών σύμπτωσης με  $\alpha = 1$ . Με συμπαγή γραμμή είναι το πλήρες αποτέλεσμα, ενώ με διακεκομμένη είναι η προσέγγιση  $\Gamma = (1 - x_{S1})(1 - x_{S2})$ . Το αποτέλεσμα που κρατάει και τους όρους  $x_{S3}$ ,  $x_{S4}$  δεν διακρίνεται από το πλήρες αποτέλεσμα. Παρατηρούμε τους συντονισμούς σύμπτωσης  $(5, 4)$ ,  $(4, 3)$ ,  $(3, 2)$ ,  $(2, 1)$ , σε σειρά μειούμενης έντασης. Ο συντονισμός  $(6, 5)$  απουσιάζει, επειδή αντιστοιχεί σε  $u < 1$ , δηλαδή σε φανταστική γωνία πρόσπτωσης. Στα αριστερά του συντονισμού σύμπτωσης  $(5, 4)$  παρατηρούμε το συντονισμό σύμπτωσης  $(3, 1)$ , που ανήκει στην ομάδα  $\alpha = 2$  και είναι πολύ μικρότερης έντασης. Επίσης παρατηρούμε τους απλούς συντονισμούς  $m = 3$  και  $n = 4$ , εκατέρωθεν του συντονισμού σύμπτωσης  $(3, 2)$ .

Στο Σχ.8.43 παρουσιάζουμε το διάγραμμα του  $u$  των συντονισμών σπιν επάνω (γκρι γραμμές) και των συντονισμών σπιν κάτω (μαύρες γραμμές) συναρτήσει του κανονικοποιημένου πάχους  $k_F d$ . Οι τομές τους αντιστοιχούν στις γωνίες πρόσπτωσης των συντονισμών σύμπτωσης. Επίσης με διακεκομμένες γραμμές έχουμε ενώσει τις οικογένειες συντονισμών σύμπτωσης με σταθερό  $\alpha$ . Καθώς κινούμαστε κατακόρυφα σε αυτό το διάγραμμα, για σταθερό  $k_F d$ , τέμνουμε τις γραμμές των απλών συντονισμών, οπότε



Σχήμα 8.42: Κανονικοποιημένη κρίσιμη πυκνότητα υπερρεύματος συναρτήσει του  $k_F d$  για  $Z_n = 9$  και  $M = 0.2$ , στο εύρος τιμών  $k_F d = 8 - 16$ , που καλύπτει την συλλογή συντονισμών σύμπτωσης με  $\alpha = 1$ . Με συμπαγή γραμμή είναι το πλήρες αποτέλεσμα, ενώ με διακεκομμένη είναι η προσέγγιση  $\Gamma = (1 - x_{S1})(1 - x_{S2})$ . Το αποτέλεσμα που κρατάει και τους όρους  $x_{S3}, x_{S4}$  δεν διακρίνεται από το πλήρες αποτέλεσμα. Επίσης  $T = 0.1$  και  $\Delta_0 = 0.001$ .





Σχήμα 8.43: Διάγραμμα του  $u$  των συντονισμών σπιν επάνω (γκρι γραμμές) και των συντονισμών σπιν κάτω (μαύρες γραμμές) συναρτήσει του κανονικοποιημένου πάχους  $k_F d$ . Οι τομές τους αντιστοιχούν στις γωνίες πρόσπτωσης των συντονισμών σύμπτωσης. Έχουμε  $Z_n = 9$ ,  $M = 0.2$ ,  $T = 0.1$  και  $\Delta_0 = 0.001$ .

η συνεισφορά του ρεύματος αλλάζει πρόσημο, εκτός αν περάσουμε από ένα σημείο συντονισμού σύμπτωσης, οπότε το ρεύμα κρατά σταθερό πρόσημο. Όσο πιο κοντά βρίσκεται σε κάθετη πρόσπτωση ( $u = 1$ ) ένας συντονισμός σύμπτωσης, τόσο μεγαλύτερη είναι η συνεισφορά του. Τέλος, όσο αυξάνουμε το  $k_F d$ , τόσο ασθενέστεροι γίνονται οι απλοί συντονισμοί.

# Κεφάλαιο 9

## Επίλογος

Ολοκληρώνοντας αυτή τη διατριβή θα κάνουμε μία σύνοψη των συμπερασμάτων στα οποία καταλήξαμε. Ξεκινούμε με το κεφάλαιο 2, όπου δείξαμε πως από την χαμιλτονιανή πολλών σωμάτων μέσου πεδίου του συστήματος της σιδηρομαγνητικής επαφής Josephson καταλήγουμε, με τη βοήθεια των μετασχηματισμών Bogoliubov, στις εξισώσεις Bogoliubov-de Gennes (BdG), που διέπουν τη δυναμική των μονοσωματιδιακών διεγέρσεων του υπεραγώγιμου συστήματος. Στη συνέχεια δώσαμε τις λύσεις των εξισώσεων σε ομογενή συστήματα υπεραγωγών και σιδηρομαγνητών στο μοντέλο Stoner, που φάνηκαν χρήσιμες στη μελέτη του μη ομογενούς συστήματος της σιδηρομαγνητικής επαφής Josephson. Ένας τρόπος να επιλύσουμε τις εξισώσεις BdG της σιδηρομαγνητικής επαφής Josephson είναι να χωρίσουμε την επαφή σε περιοχές, όπου οι εξισώσεις BdG επιλύονται ευκολότερα και να συνδέσουμε τις λύσεις με τη βοήθεια των συνθηκών συρραφής των λύσεων αυτών και των παραγώγων τους. Τότε οι συντελεστές των γραμμικών συνδυασμών των λύσεων σε κάθε περιοχή ξεχωριστά είναι οι άγνωστοι ενός γραμμικού συστήματος εξισώσεων, που μπορεί να επιλυθεί, για παράδειγμα, με τον κανόνα του Cramer. Μας ενδιαφέρουν ιδιαίτερα οι συντελεστές ανάκλασης Andreev στις ασυμπτωτικές περιοχές, καθώς μας δίνουν το υπερρεύμα με τη βοήθεια του τύπου των Furusaki-Tsukada.

Στο κεφάλαιο 3 επεξεργαζόμαστε έναν διαφορετικό τρόπο να υπολογίσουμε δυναμικά τους συντελεστές σκέδασης. Αναπτύσσουμε τη θεωρία των εξισώσεων Lippmann-Schwinger για συστήματα με διαφορετικές ασυμπτωτικές χαμιλτονιανές, με τις εξισώσεις BdG της σιδηρομαγνητικής Josephson σαν γενικό μοντέλο, βασιζόμενοι στη βιβλιογραφία, αλλά και επεκτείνοντας τη γνωστή θεωρία. Έτσι καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι οι συντελεστές σκέδασης της επαφής μπορούν να εκφραστούν με τη βοήθεια στοιχείων του λεγόμενου T-πίνακα μεταξύ καταστάσεων πρόσπτωσης και ανάκλασης ή διάδοσης στις ασυμπτωτικές περιοχές. Ανάλογα με τις ασυμπτωτικές περιοχές που συμμετέχουν σε μια διαδικασία σκέδασης, που περιγράφεται από κάποιο συντελεστή σκέδασης, ο T-πίνακας έχει διαφορετική μορφή. Για κάθε τύπο πρόσπτωσης και ανάκλασης

ή διάδοσης αντιστοιχεί ένας T-πίνακας, ακριβώς όπως συμβαίνει και στη θεωρία σκέδασης σε συστήματα με πολλά κανάλια. Με αυτό τον τρόπο μπορούμε να εξάγουμε και τη μορφή της συνάρτησης Green με ορίσματα θέσης στις ασυμπτωτικές περιοχές, που μας χρησιμεύουν στον υπολογισμό του υπερρεύματος.

Στα επόμενα δύο κεφάλαια (κεφ.4 και κεφ.5) αξιοποιούμε τη σχέση των συντελεστών σκέδασης με τα στοιχεία του T-πίνακα και εξάγουμε συνθήκες συμμετρίας για τους συντελεστές σκέδασης, που προκύπτουν από αντιγραμμικούς μετασχηματισμούς οι οποίοι αφήνουν την χαμιλτονιανή BdG αναλλοίωτη, με εξαίρεση την αλλαγή κάποιων παραμέτρων, όπως είναι η διαφορά φάσης  $\chi$  και οι πολικές γωνίες  $\phi$  των μαγνητίσεων. Στο κεφάλαιο 4 μετασχηματίζουμε τα στοιχεία του T-πίνακα πρώτα και μετά παίρνουμε την αναλυτική επέκταση σε μιγαδικές ενέργειες, ενώ στο κεφάλαιο 5 μετασχηματίζουμε απευθείας τις αναλυτικές επεκτάσεις των στοιχείων του T-πίνακα. Έτσι προκύπτουν διακριτές συνθήκες συμμετρίας, τις οποίες αξιοποιούμε αργότερα στην εργασία μας.

Στο κεφάλαιο 6, με βάση τη βιβλιογραφία, γενικεύουμε και αναπτύσσουμε περαιτέρω έναν τρόπο υπολογισμού της συνάρτησης Green στην επαφή Josephson, για κάθε δυνατή τιμή των ορισμάτων θέσης. Αυτό επιτυγχάνεται συνδυάζοντας κατάλληλα γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις των εξισώσεων BdG για μιγαδική ενέργεια. Έτσι επιβεβαιώνουμε τις σχέσεις για τη συνάρτηση Green με ορίσματα θέσης στις ασυμπτωτικές περιοχές και είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε την ανώμαλη συνάρτηση Green και την τοπική πυκνότητα καταστάσεων.

Στο κεφάλαιο 7 αξιοποιούμε τον τύπο των Furusaki-Tsukada για να αποδείξουμε μια σχέση που μας δίνει το υπερρέυμα στην επαφή συναρτήσει της ορίζουσας του πίνακα των συνθηκών συρραφής. Στη συνέχεια, πάλι βασιζόμενοι στον τύπο των Furusaki-Tsukada, αλλά και στις συνθήκες συμμετρίας των συντελεστών ανάκλασης Andreev, δείχνουμε σχέσεις συμμετρίας για τη σχέση υπερρεύματος φάσης (CPR) στις σιδηρομαγνητικές επαφές Josephson. Βασικό συμπέρασμά μας είναι ότι, όταν οι μαγνητίσεις του συστήματος είναι συνεπίπεδες, τότε απαγορεύεται η ύπαρξη υπερρεύματος μηδενικής φάσης. Αν όμως οι μαγνητίσεις του συστήματος δεν είναι συνεπίπεδες, τότε δεν υπάρχει επιχείρημα συμμετρίας που να μηδενίζει το υπερρέυμα μηδενικής φάσης, το οποίο υφίσταται, όπως δείχνουμε στο κεφάλαιο 8. Επίσης εξιδεικεύουμε το μοντέλο μας σε σταθερή τμηματικά παράμετρο τάξης και καταλήγουμε σε μία σχέση για το υπερρέυμα (σχέση (7.52)), η οποία είναι ενδεικτική της εξάρτησης του υπερρεύματος από τη διαφορά φάσης  $\chi$  μεταξύ των υπεραγωγών και από τις διευθύνσεις των μαγνητίσεων της επαφής. Μάλιστα, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι οι όροι που συνεισφέρουν στο υπερρέυμα μηδενικής φάσης είναι ανάλογοι του τριπλού γινομένου των μαγνητίσεων μιας επαφής με ένα ενδιάμεσο στρώμα και σπιν ενεργές ενδοεπιφάνειες. Φυσικά αυτοί οι όροι έχουν μη τετριμμένη συνεισφορά στο υπερρέυμα, ακόμα και όταν η διαφορά φάσης  $\chi$  είναι μη μηδενική.

Στο κεφάλαιο 8 δίνουμε αριθμητικά αποτελέσματα για το μη αυτοσυνεπές, με τμη-

ματικά σταθερή παράμετρο τάξης, μοντέλο μιας σιδηρομαγνητικής επαφής Josephson. Κυρίως ασχολούμαστε με μονοδιάστατες επαφές. Καταδεικνύουμε την ύπαρξη υπερρεύματος μηδενικής φάσης, όταν οι μαγνητίσεις του συστήματος είναι μη συνεπίπεδες. Η εξάρτηση του υπερρεύματος μηδενικής φάσης από τις παραμέτρους της επαφής δίνεται σε πληθώρα διαγραμμάτων. Επικεντρωνόμαστε στη γεωμετρία μαγνητίσεων  $zxy$ . Η ισχύς ενδοεπιφανειακής μαγνήτισης αυξανόμενη αυξάνει το υπερρεύμα μηδενικής φάσης μέχρι κάποιο μέγιστο, οπότε περαιτέρω αύξησή της οδηγεί σε μείωση του υπερρεύματος μηδενικής φάσης. Η ισχύς ενδοεπιφανειακής κανονικής σκέδασης τείνει να μειώσει το υπερρεύμα μηδενικής φάσης, αν και όχι μονότονα. Η εξάρτηση του υπερρεύματος μηδενικής φάσης από τη μαγνήτιση του ενδιάμεσου στρώματος και του πάχους αυτού είναι έντονα ταλαντωτική. Το κρίσιμο υπερρεύμα έχει ανάλογη συμπεριφορά και μάλιστα, για μικρές μαγνητίσεις, οι απότομες μεταβολές της κλίσης του συναρτήσεων των ισχύων ενδοεπιφανειακής μαγνήτισης και σκέδασης, που αντιστοιχούν σε αλλαγές φάσης  $0-\pi$ , συμπίπτουν με τα σημεία που μεγιστοποιείται το υπερρεύμα μηδενικής φάσης. Για μεγάλες μαγνητίσεις, κοντά στο  $M = 1$ , το κρίσιμο υπερρεύμα και το υπερρεύμα μηδενικής φάσης τείνουν να ταυτιστούν και η σχέση υπερρεύματος φάσης διατηρεί σταθερή μορφή με την αλλαγή των παραμέτρων, μετατοπιζόμενη με τη μεταβολή των γωνιών των μαγνητίσεων της επαφής. Το κρίσιμο υπερρεύμα για τη γεωμετρία  $zxx$  είναι ελαφρώς πιο ισχυρό από αυτό της γεωμετρίας  $zxy$  για κανονικοποιημένες μαγνητίσεις μικρότερες της μονάδας, ενώ για  $M > 1$  (στο ημιμεταλλικό όριο) τείνουν να ταυτιστούν. Για τη γεωμετρία  $zxx$ , όπου δεν επιτελείται σκέδαση σπιν στη δεξιά ενδοεπιφάνεια, το κρίσιμο υπερρεύμα φθίνει απότομα στο μηδέν, στο ημιμεταλλικό όριο  $M = 1$ . Έτσι συμπεραίνουμε ότι μόνο σε γεωμετρίες με σκέδαση σπιν στις ενδοεπιφάνειες επιβιώνει το κρίσιμο υπερρεύμα στο ημιμεταλλικό όριο. Ειδικά για  $M = 1$  μελετήσαμε τη συνεισφορά των δέσμιων καταστάσεων στο υπερρεύμα και είδαμε ότι αυτό οφείλεται σε συνιστώσες της κυματοσυνάρτησης της κατώτερης ενεργειακά δέσμιας κατάστασης που αντιστοιχούν σε ηλεκτρόνια και οπές με το ίδιο σπιν. Έτσι καταδείξαμε ότι η επιβίωση του υπερρεύματος στο ημιμεταλλικό όριο οφείλεται σε μετατροπή της κατάστασης σπιν των ζευγών Cooper από singlet σε triplet.

Επίσης μελετήσαμε αριθμητικά και σιδηρομαγνητικές επαφές Josephson στις τρεις διαστάσεις. Ισχύουν ανάλογα συμπεράσματα, με τη διαφορά ότι η πτώση του κρίσιμου υπερρεύματος για τις γεωμετρίες μαγνητίσεων χωρίς σκέδαση σπιν στις ενδοεπιφάνειες είναι πολύ πιο ομαλή σαν συνάρτηση της μαγνήτισης και δεν συμβαίνει απότομα στο  $M = 1$ , όπως στη μονοδιάστατη περίπτωση. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι οι διεγέρσεις με παράλληλη στις ενδοεπιφάνειες ορμή πέρα από την τιμή αποκοπής μπορούν να διαδοθούν στην επαφή με σκέδαση σπιν στις ενδοεπιφάνειες, ενισχύοντας το υπερρεύμα, ενώ αυτό δεν ισχύει σε γεωμετρίες χωρίς σκέδαση σπιν και η παράλληλη ορμή έχει όριο αποκοπής που, σε αυτή την περίπτωση, μειώνεται με την αύξηση της μαγνήτισης. Επίσης άλλο ένα χαρακτηριστικό των τριδιάστατων επαφών είναι η απουσία έντο-

νων ταλαντώσεων του κρίσιμου υπερρεύματος και του υπερρεύματος μηδενικής φάσης με τη μαγνήτιση και το πάχος του ενδιάμεσου στρώματος, που εξηγείται από την επίδραση της ολοκλήρωσης ως προς την παράλληλη ορμή στον υπολογισμό της πυκνότητας υπερρεύματος.

## 9.1 Προθέσεις μελλοντικής εργασίας

Μία ενδιαφέρουσα προοπτική για έρευνα είναι να αναλύσουμε, σε σιδηρομαγνητικές επαφές Josephson, το υπερρεύμα σε συνιστώσες, ανάλογα με τη συμμετρία της παραμέτρου τάξεως που φέρει την καθεμία, στο πλαίσιο των εξισώσεων Bogoliubov-de Gennes. Έτσι, σε κάθε θέση  $x$  της επαφής, θα μπορούμε να γνωρίζουμε τις συνιστώσες του υπερρεύματος και το πως αλληλεπιδρούν μεταξύ τους κατά μήκος της επαφής. Αυτό θα ήταν ενδιαφέρον να συσχετιστεί με την εικόνα του υπερρεύματος ως αποτέλεσμα της κλίσης των δέσμιων καταστάσεων Andreev συναρτήσει της φάσης. Μια τέτοια ανάλυση θα ήταν χρήσιμη, ειδικά για το υπερρεύμα μηδενικής διαφοράς φάσης.

Επίσης, η μέθοδος για τον υπολογισμό της συνάρτησης Green που επεξεργαστήκαμε στο κεφάλαιο 6 μπορεί να μας δώσει το εργαλείο, για να δουλέψουμε αριθμητικά το πρόβλημα της αυτοσυνεπούς επίλυσης των επαφών Josephson και να κατασκευάσουμε αποτελεσματικούς και ταχείς κώδικες για το σκοπό αυτό.

Ακόμη ενδιαφέρον έχει να προσπαθήσουμε να αξιοποιήσουμε τη θεωρία του T-πίνακα που αναπτύξαμε για τον άμεσο υπολογισμό των συντελεστών σκέδασης, καθώς και άλλων μεθόδων της θεωρίας σκέδασης για τον υπολογισμό χρήσιμων ποσοτήτων, όπως για παράδειγμα η χρονική καθυστέρηση των σκεδαζόμενων διεγέρσεων σε μια επαφή Josephson. Τέτοιες τεχνικές μπορούν να φανούν χρήσιμες και στην απόδειξη του τύπου (7.33) για την περίπτωση μη συμβατικών υπεραγωγίων ηλεκτροδίων.

# Κεφάλαιο 10

## Δημοσιεύσεις

- Andreev spectrum and supercurrent in a multilayer ferromagnetic clean Josephson junction, V. Paltoglou, I. Margaritis and N. Flytzanis, J. Phys. A: Math. Gen. **39** 9861 (2006).
- Andreev spectrum and supercurrent in double ferromagnet clean Josephson junction, V. Paltoglou, I. Margaritis and N. Flytzanis, Mod. Phys. Lett. B **21**, 505 (2007).
- A diagrammatic approach for a clean multiferromagnetic Josephson junction, V. Paltoglou, I. Margaritis and N. Flytzanis, J. Phys. A: Math. Theor. **40** 12829 (2007).
- A diagrammatic approach for a clean double-barrier ferromagnetic Josephson junction, V. Paltoglou, I. Margaritis and N. Flytzanis, J. Phys. A: Math. Theor. **41** 455301 (2008).
- Zero phase difference supercurrent in ferromagnetic Josephson junctions, I. Margaritis, V. Paltoglou and N. Flytzanis, J. Phys.: Condens. Matter **22** 445701 (2010).
- T-matrix formalism for 1D systems with different spatial asymptotics applied to ferromagnetic Josephson junctions, I. Margaritis, V. Paltoglou and N. Flytzanis (σε προετοιμασία)
- Triplet supercurrents in ferromagnetic Josephson junctions: The role of magnetization, I. Margaritis, V. Paltoglou and N. Flytzanis (σε προετοιμασία)

# Βιβλιογραφία

- [1] Schrieffer, J. & Tinkham, M. Superconductivity. *Rev. Mod. Phys.* **71**, S313 (1999).
- [2] Cooper, L. N. Bound electron pairs in a degenerate fermi gas. *Phys. Rev.* **104**, 1189 (1956).
- [3] Bardeen, J., Cooper, L. N. & Schrieffer, J. R. Theory of superconductivity. *Phys. Rev.* **108**, 1175 (1957).
- [4] Fröhlich, H. Interaction of electrons with lattice vibrations. *Proc. R. Soc. Lond. A* **215**, 291 (1952).
- [5] Fetter, A. L. & Walecka, J. D. *Quantum Theory of Many-Particle Systems* (Dover, 2003).
- [6] Ψαλλάκης, Γ. Χ. *Κβαντικά συστήματα πολλών σωματιδίων* (Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2008).
- [7] Tinkham, M. *Introduction to Superconductivity* (Dover, 2004).
- [8] Poole, C. P., Farach, H. A., Creswick, R. J. & Prozorov, R. *Superconductivity* (Academic Press, 2007).
- [9] Ketterson, J. B. & Song, S. N. *Superconductivity* (Cambridge University Press, 1999).
- [10] Lévy, L. P. *Magnetism and Superconductivity* (Springer, 2000).
- [11] Kopnin, N. *Theory of Nonequilibrium Superconductivity* (Oxford Science Publications, 2001).
- [12] De Gennes, P. G. *Superconductivity of Metals and Alloys* (Westview Press, 1999).
- [13] Fulde, P. & Ferrell, R. A. Superconductivity in a strong spin-exchange field. *Phys. Rev.* **135**, A550 (1964).

- [14] Larkin, A. & Ovchinnikov, Y. Inhomogeneous state of superconductors. *Sov. Phys. JETP* **20**, 762 (1965).
- [15] Buzdin, A. I. Proximity effects in superconductor–ferromagnet heterostructures. *Rev. Mod. Phys.* **77**, 935–976 (2005).
- [16] Matsuda, Y. & Shimahara, H. Fulde–Ferrell–Larkin–Ovchinnikov state in heavy fermion superconductors. *J. Phys. Soc. Jpn.* **76**, 051005 (2007).
- [17] Bianchi, A., Movshovich, R., Capan, C., Pagliuso, P. G. & Sarrao, J. L. Possible Fulde–Ferrell–Larkin–Ovchinnikov superconducting state in CeCoIn<sub>5</sub>. *Phys. Rev. Lett.* **91**, 187004 (2003).
- [18] Abrikosov, A. A. & Gor'kov, L. P. Contribution to the theory of superconducting alloys with paramagnetic impurities. *Sov. Phys. JETP* **12**, 1243 (1961).
- [19] Ambegaokar, V. & Griffin, A. Theory of the thermal conductivity of superconducting alloys with paramagnetic impurities. *Phys. Rev.* **137**, A1151 (1965).
- [20] Ginzburg, V. L. & Landau, L. D. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **20**, 1064 (1950).
- [21] Abrikosov, A. A. *Sov. Phys. JETP* **5**, 1174 (1957).
- [22] Josephson, B. D. Possible new effects in superconductive tunnelling. *Phys. Lett.* **1**, 251 (1962).
- [23] Josephson, B. D. Supercurrents through barriers. *Advances in Physics* **14:56**, 419–451 (1965).
- [24] Golubov, A. A., Kupriyanov, M. Y. & Il'ichev, E. The current–phase relation in Josephson junctions. *Rev. Mod. Phys.* **76**, 411 (2004).
- [25] Likharev, K. K. Superconducting weak links. *Rev. Mod. Phys.* **51**, 101 (1979).
- [26] Hadfield, R. H. *Josephson Junctions fabricated by Focused Ion Beam*. Ph.D. thesis, Trinity College Cambridge (2002).
- [27] Furusaki, A., Takayanagi, H. & Tsukada, M. Josephson effect of the superconducting quantum point contact. *Phys. Rev. B* **45**, 10563 (1992).
- [28] Furusaki, A. Josephson current carried by Andreev levels in superconducting quantum point contacts. *Superlattices and Microstructures* **25**, 809 (1999).



- [29] Beenacker, C. W. J. & van Houten, H. Josephson current through a superconducting quantum point contact shorter than the coherence length. *Phys. Rev. Lett.* **66**, 3056 (1991).
- [30] Andreev, A. F. The thermal conductivity of the intermediate state in superconductors. *Sov. Phys. JETP* **19**, 1228 (1964).
- [31] Bardeen, J. & Johnson, J. L. Josephson current flow in pure superconducting–normal–superconducting junctions. *Phys. Rev. B* **5**, 72 (1972).
- [32] Kulik, I. O. Macroscopic quantization and the proximity effect in S–N–S junctions. *Sov. Phys. JETP* **30**, 944 (1970).
- [33] Ishii, C. Josephson currents through junctions with normal metal barriers. *Progress of Theoretical Physics* **44**, 1525 (1970).
- [34] Ishii, C. Thermodynamical properties of Josephson junction with a normal metal barrier. *Progress of Theoretical Physics* **47**, 1464 (1972).
- [35] Furusaki, A. & Tsukada, M. Current–carrying states in Josephson junctions. *Phys. Rev. B* **43**, 10164 (1991).
- [36] Bagwell, P. F. Suppression of the Josephson current through a narrow, mesoscopic, semiconductor channel by a single impurity. *Phys. Rev. B* **46**, 12573 (1992).
- [37] Frolov, S. M. *Current–phase relations of Josephson junctions with ferromagnetic barriers*. Ph.D. thesis, University of Illinois at Urbana-Champaign (2005).
- [38] Hansma, P. K. Superconducting single junction interferometers with small critical currents. *J. Appl. Phys.* **44**, 4191 (1973).
- [39] Barone, A. & Paterno, G. *Physics and Applications of the Josephson Effect* (Wiley, 1982).
- [40] Radovic, Z., Dobrosavljevic-Grujic, L. & Vujicic, B. Spontaneous currents in Josephson devices. *Phys. Rev. B* **60**, 6844 (1999).
- [41] Radovic, Z., Dobrosavljevic-Grujic, L. & Vujicic, B. Coexistence of stable and metastable 0 and  $\pi$  states in Josephson junctions. *Phys. Rev. B* **63**, 214512 (2001).
- [42] Bauer, A. *et al.* Spontaneous supercurrent induced by ferromagnetic pi–junctions. *Phys. Rev. Lett.* **92**, 217001 (2004).

- [43] Aoki, D. & Flouquet, J. Ferromagnetism and superconductivity in uranium compounds. *J. Phys. Soc. Jpn.* **81**, 011003 (2012).
- [44] Bulaevskii, L. N., Kuzii, V. V. & Sobyenin, A. A. Superconducting system with weak coupling with current in the ground state. *JETP Letters* **25**, 290 (1977).
- [45] Buzdin, A. I., Bulaevskii, L. N. & Paniukov, S. V. Critical current oscillations as a function of the exchange field and thickness of the ferromagnetic metal (F) in a S–F–S Josephson junction. *JETP Letters* **35**, 178 (1982).
- [46] Kontos, T., Aprili, M., Lesueur, J. & Grison, X. Inhomogeneous superconductivity induced in a ferromagnet by proximity effect. *Phys. Rev. Lett.* **86**, 304 (2001).
- [47] Ryazanov, V. V. *et al.* Coupling of two superconductors through a ferromagnet: Evidence for a  $\pi$  junction. *Phys. Rev. Lett.* **86**, 2427 (2001).
- [48] Bannykh, A. A. *et al.* Josephson tunnel junctions with a strong ferromagnetic interlayer. *Phys. Rev. B* **79**, 054501 (2009).
- [49] Blum, Y., Tsukernik, A., Karpovski, M. & Palevski, A. Oscillations of the superconducting critical current in Nb-Cu-Ni-Cu-Nb junctions. *Phys. Rev. Lett.* **89**, 187004 (2002).
- [50] Robinson, J. W. A., Piano, S., Burnell, G., Bell, C. & Blamire, M. G. Critical current oscillations in strong ferromagnetic  $\pi$  junctions. *Phys. Rev. Lett.* **97**, 177003 (2006).
- [51] Born, F. *et al.* Multiple  $0-\pi$  transitions in superconductor / insulator / ferromagnet / superconductor Josephson tunnel junctions. *Phys. Rev. B* **74**, 140501 (2006).
- [52] Bell, C., Loloee, R., Burnell, G. & Blamire, M. G. Characteristics of strong ferromagnetic Josephson junctions with epitaxial barriers. *Phys. Rev. B* **71**, 180501 (2005).
- [53] Radovic, Z., Lazarides, N. & Flytzanis, N. Josephson effect in double-barrier superconductor-ferromagnet junctions. *Phys. Rev. B* **68**, 014501 (2003).
- [54] Bergeret, F. S., Volkov, A. F. & Efetov, K. B. Enhancement of the Josephson current by an exchange field in superconductor-ferromagnet structures. *Phys. Rev. Lett.* **86**, 3140 (2001).
- [55] Bergeret, F. S., Volkov, A. F. & Efetov, K. B. Long-range proximity effects in superconductor-ferromagnet structures. *Phys. Rev. Lett.* **86**, 4096 (2001).

- [56] Bergeret, F. S., Volkov, A. F. & Efetov, K. B. Josephson current in superconductor-ferromagnet structures with a nonhomogeneous magnetization. *Phys. Rev. B* **64**, 134506 (2001).
- [57] Bergeret, F. S., Volkov, A. F. & Efetov, K. B. Odd triplet superconductivity and related phenomena in superconductor-ferromagnet structures. *Rev. Mod. Phys.* **77**, 1321 (2005).
- [58] Houzet, M. & Buzdin, A. I. Long range triplet Josephson effect through a ferromagnetic trilayer. *Phys. Rev. B* **76**, 060504 (2007).
- [59] Volkov, A. F., Anishchanka, A. & Efetov, K. B. Odd triplet superconductivity in a superconductor / ferromagnet system with a spiral magnetic structure. *Phys. Rev. B* **73**, 104412 (2006).
- [60] Volkov, A. F. & Efetov, K. B. Odd spin-triplet superconductivity in a multilayered superconductor-ferromagnet Josephson junction. *Phys. Rev. B* **81**, 144522 (2010).
- [61] Alidoust, M. & Linder, J. Spin-triplet supercurrent through inhomogeneous ferromagnetic trilayers. *Phys. Rev. B* **82**, 224504 (2010).
- [62] Eschrig, M., Kopu, J., Cuevas, J. C. & Schön, G. Theory of half-metal / superconductor heterostructures. *Phys. Rev. Lett.* **90**, 137003 (2003).
- [63] Eschrig, M. *et al.* Symmetries of pairing correlations in superconductor - ferromagnet nanostructures. *Journal of Low Temperature Physics* **147**, 457 (2007).
- [64] Eschrig, M. & Löfwander, T. Triplet supercurrents in clean and disordered half-metallic ferromagnets. *Nat. Phys.* **4**, 138 (2008).
- [65] Kalenkov, M. S., Galaktionov, A. V. & Zaikin, A. D. Josephson current in ballistic heterostructures with spin-active interfaces. *Phys. Rev. B* **79**, 014521 (2009).
- [66] Asano, Y., Tanaka, Y. & Golubov, A. A. Josephson effect due to odd-frequency pairs in diffusive half metals. *Phys. Rev. Lett.* **98**, 107002 (2007).
- [67] Asano, Y., Sawa, Y., Tanaka, Y. & Golubov, A. A. Odd-frequency pairs and Josephson current through a strong ferromagnet. *Phys. Rev. B* **76**, 224525 (2007).
- [68] Alidoust, M., Linder, J., Rashedi, G., Yokoyama, T. & Sudbø, A. Spin-polarized Josephson current in superconductor / ferromagnet / superconductor junctions with inhomogeneous magnetization. *Phys. Rev. B* **81**, 014512 (2010).

- [69] Linder, J. & Sudbø, A. Triplet supercurrent due to spin-active zones in a Josephson junction. *Phys. Rev. B* **82**, 020512 (2010).
- [70] Yoshizaki, D., Golubov, A. A., Tanaka, Y. & Asano, Y. Theory of proximity effect in ferromagnet / superconductor heterostructures in the presence of spin dependent interfacial phase shift. *Jpn. J. Appl. Phys.* **51**, 010108 (2012).
- [71] Keizer, R. S. *et al.* A spin triplet supercurrent through the half-metallic ferromagnet CrO<sub>2</sub>. *Nature (London)* **439**, 825 (2006).
- [72] Sprungmann, D., Westerholt, K., Zabel, H., Weides, M. & Kohlstedt, H. Evidence for triplet superconductivity in Josephson junctions with barriers of the ferromagnetic Heusler alloy Cu<sub>2</sub>MnAl. *Phys. Rev. B* **82**, 060505 (2010).
- [73] Sprungmann, D., Westerholt, K., Zabel, H., Weides, M. & Kohlstedt, H. Josephson tunnel junctions with ferromagnetic Fe<sub>0.75</sub>Co<sub>0.25</sub> barriers. *J. Phys. D: Appl. Phys.* **42**, 075005 (2009).
- [74] Robinson, J. W. A., Chiodi, F., Egilmez, M., Halász, G. B. & Blamire, M. G. Josephson tunnel junctions with ferromagnetic Fe<sub>0.75</sub>Co<sub>0.25</sub> barriers. *Scientific Reports* **2:699** (2012).
- [75] Robinson, J. W. A., Witt, J. D. S. & Blamire, M. G. Controlled injection of spin-triplet supercurrents into a strong ferromagnet. *Science* **329**, 59 (2010).
- [76] Anwar, M. S., Veldhorst, M., Brinkman, A. & Aarts, J. Long range supercurrents in ferromagnetic CrO<sub>2</sub> using a multilayer contact structure. *Appl. Phys. Lett.* **100**, 052602 (2012).
- [77] Khasawneh, M. A., Khaire, T. S., Klose, C., Pratt Jr, W. P. & Birge, N. O. Spin-triplet supercurrent in Co-based Josephson junctions. *Supercond. Sci. Technol.* **24**, 024005 (2011).
- [78] Khaire, T. S., Khasawneh, M. A., Pratt, W. P. & Birge, N. O. Observation of spin-triplet superconductivity in Co-based Josephson junctions. *Phys. Rev. Lett.* **104**, 137002 (2010).
- [79] Klose, C. *et al.* Optimization of spin-triplet supercurrent in ferromagnetic Josephson junctions. *Phys. Rev. Lett.* **108**, 127002 (2012).
- [80] Wang, Y., Pratt, W. P. & Birge, N. O. Area-dependence of spin-triplet supercurrent in ferromagnetic Josephson junctions. *Phys. Rev. B* **85**, 214522 (2012).

- [81] Geshkenbein, V. B. & Larkin, A. I. The Josephson effect in superconductors with heavy fermions. *JETP Letters* **43**, 395 (1986).
- [82] Yip, S. Josephson current-phase relationships with unconventional superconductors. *Phys. Rev. B* **52**, 3087 (1995).
- [83] Sigrist, M. Time-reversal symmetry breaking states in high-temperature superconductors. *Prog. Theor. Phys.* **99**, 899 (1998).
- [84] Kashiwaya, S. & Tanaka, Y. Tunnelling effects on surface bound states in unconventional superconductors. *Rep. Prog. Phys.* **63**, 1641 (2000).
- [85] Enoksen, H., Linder, J. & Sudbø, A. Spin-flip scattering and critical currents in ballistic half-metallic *d*-wave Josephson junctions. *Phys. Rev. B* **85**, 014512 (2012).
- [86] Brydon, P. M. R., Kastening, B., Morr, D. K. & Manske, D. Interplay of ferromagnetism and triplet superconductivity in a Josephson junction. *Phys. Rev. B* **77**, 104504 (2008).
- [87] Manske, D. & Brydon, P. M. R. Green's function analysis of a triplet superconductor–ferromagnet–triplet superconductor Josephson junction. *J. Phys.: Conf. Ser.* **108**, 012042 (2008).
- [88] Brydon, P. M. R. Spontaneous spin current due to triplet superconductor-ferromagnet interfaces. *Phys. Rev. B* **80**, 224520 (2009).
- [89] Brydon, P. M. R., Manske, D. & Sigrist, M. Origin and control of spin currents in a magnetic triplet Josephson junction. *J. Phys. Soc. Jpn.* **77**, 103714 (2008).
- [90] Krive, I. V., Kadigrobov, A. M., Shekhter, R. I. & Jonson, M. Influence of the Rashba effect on the Josephson current through a superconductor/Luttinger liquid/superconductor tunnel junction. *Phys. Rev. B* **71**, 214516 (2005).
- [91] Buzdin, A. Direct coupling between magnetism and superconducting current in the Josephson  $\varphi_0$  junction. *Phys. Rev. Lett.* **101**, 107005 (2008).
- [92] Reynoso, A. A., Usaj, G., Balseiro, C. A., Feinberg, D. & Avignon, M. Anomalous Josephson current in junctions with spin polarizing quantum point contacts. *Phys. Rev. Lett.* **101**, 107001 (2008).
- [93] Zazunov, A., Egger, R., Jonckheere, T. & Martin, T. Anomalous Josephson current through a spin-orbit coupled quantum dot. *Phys. Rev. Lett.* **103**, 147004 (2009).

- [94] Liu, J.-F., Chan, K. S. & Wang, J. Anomalous Josephson current through a ferromagnet–semiconductor hybrid structure. *J. Phys. Soc. Jpn.* **80**, 124708 (2011).
- [95] Reynoso, A. A., Usaj, G., Balseiro, C. A., Feinberg, D. & Avignon, M. Spin-orbit-induced chirality of Andreev states in Josephson junctions. *Phys. Rev. B* **86**, 214519 (2012).
- [96] Braude, V. & Nazarov, Y. V. Fully developed triplet proximity effect. *Phys. Rev. Lett.* **98**, 077003 (2007).
- [97] Galaktionov, A. V., Kalenkov, M. S. & Zaikin, A. D. Josephson current and Andreev states in superconductor - half metal - superconductor heterostructures. *Phys. Rev. B* **77**, 094520 (2008).
- [98] Grein, R., Eschrig, M., Metalidis, G. & Schön, G. Spin-dependent Cooper pair phase and pure spin supercurrents in strongly polarized ferromagnets. *Phys. Rev. Lett.* **102**, 227005 (2009).
- [99] Trifunovic, L. & Radović, Z. Long-range spin-triplet proximity effect in Josephson junctions with multilayered ferromagnets. *Phys. Rev. B* **82**, 020505 (2010).
- [100] Margaris, I., Paltoglou, V. & Flytzanis, N. Zero phase difference supercurrent in ferromagnetic Josephson junctions. *J. Phys.: Condens. Matter* **22**, 445701 (2010).
- [101] Liu, J.-F. & Chan, K. S. Relation between symmetry breaking and the anomalous Josephson effect. *Phys. Rev. B* **82**, 125305 (2010).
- [102] Liu, J.-F. & Chan, K. S. Anomalous Josephson current through a ferromagnetic trilayer junction. *Phys. Rev. B* **82**, 184533 (2010).
- [103] Tatara, G. & Kohno, H. Permanent current from noncommutative spin algebra. *Phys. Rev. B* **67**, 113316 (2003).
- [104] Tatara, G. & Garcia, N. Quantum toys for quantum computing: Persistent currents controlled by the spin Josephson effect. *Phys. Rev. Lett.* **91**, 076806 (2003).
- [105] Samokhvalov, A. V. Current-phase relation in a Josephson junction coupled with a magnetic dot. *Phys. Rev. B* **80**, 134513 (2009).
- [106] Tanaka, Y., Golubov, A. A., Kashiwaya, S. & Ueda, M. Anomalous Josephson effect between even- and odd-frequency superconductors. *Phys. Rev. Lett.* **99**, 037005 (2007).

- [107] Goldobin, E., Koelle, D., Kleiner, R. & Buzdin, A. Josephson junctions with second harmonic in the current-phase relation: Properties of  $\varphi$  junctions. *Phys. Rev. B* **76**, 224523 (2007).
- [108] G. E. Blonder, M. T. & Klapwijk, T. M. Transition from metallic to tunneling regimes in superconducting microconstrictions: Excess current, charge imbalance, and supercurrent conversion. *Phys. Rev. B* **25**, 4515 (1982).
- [109] Furusaki, A. & Tsukada, M. Dc Josephson effect and Andreev reflection. *Solid State Commun.* **78**, 299 (1991).
- [110] Ruijsenaars, S. N. M. & Bongaarts, P. J. M. Scattering theory for one-dimensional step potentials. *Ann. Inst. Henri Poincaré (A) Physique théorique* **26**, 1 (1977).
- [111] Davies, E. B. & Simon, B. Scattering theory for systems with different spatial asymptotics on the left and right. *Commun. math. Phys.* **63**, 277 (1978).
- [112] Pötz, W. Scattering theory for mesoscopic quantum systems with non-trivial spatial asymptotics in one dimension. *J. Math. Phys.* **36**, 1707 (1995).
- [113] Amrein, W. O. & Jacquet, P. Time delay for one-dimensional quantum systems with steplike potentials. *Phys. Rev. A* **75**, 022106 (2007).
- [114] Baute, A. D., Egusquiza, I. L. & Muga, J. G. Moller operators and Lippmann-Schwinger equations for steplike potentials. *J. Phys. A: Math. Gen.* **34**, 5341 (2001).
- [115] Taylor, J. R. *Scattering Theory: The quantum theory of nonrelativistic collisions* (Dover, 2006).
- [116] Newton, R. G. *Scattering theory of waves and particles* (Dover, 2002).
- [117] Ruijsenaars, S. N. M. On Bogoliubov transformations. II. The general case. *Annals of Physics* **116**, 105 (1978).
- [118] Tung, Wu-Ki. *Group theory in physics* (World Scientific Publishing Company, 1985).
- [119] Dettman, J. W. *Applied complex variables* (Dover, 1984).
- [120] Hamermesh, M. *Group theory and its applications to physical problems* (Dover, 1989).
- [121] Sisman, T. C. & Tekin, B. Green's matrix for a second order self-adjoint matrix differential operator. *J. Phys. A: Math. Theor.* **43**, 125205 (2010).

- [122] McMillan, W. L. Theory of superconductor-normal-metal interfaces. *Phys. Rev.* **175**, 559 (1968).
- [123] Rodriguez-Coppola, H., Velasco, V. R., Garcia-Moliner, F. & Pérez-Alvarez, R. Transfer matrix and matrix Green function: The matching problem. *Physica Scripta* **42**, 115 (1990).
- [124] Zheng, Z. M. & Xing, D. Y. Josephson supercurrent with spin-equal pairing through a half-metallic link. *J. Phys.: Condens. Matter* **21**, 385703 (2009).
- [125] Pajović, Z., Božović, M., Radović, Z., Cayssol, J. & Buzdin, A. Josephson coupling through ferromagnetic heterojunctions with noncollinear magnetizations. *Phys. Rev. B* **74**, 184509 (2006).
- [126] Paltoglou, V., Margaritis, I. & Flytzanis, N. Andreev spectrum and supercurrent in a multilayer ferromagnetic clean Josephson junction. *J. Phys. A: Math. Gen.* **39**, 9861 (2006).
- [127] Ozaki, T. Continued fraction representation of the Fermi-Dirac function for large-scale electronic structure calculations. *Phys. Rev. B* **75**, 035123 (2007).
- [128] Paltoglou, V. A. *Hybrid superconducting junctions*. Ph.D. thesis, University of Crete (2009).
- [129] Paltoglou, V., Margaritis, I. & Flytzanis, N. A diagrammatic approach for a clean double-barrier ferromagnetic Josephson junction. *J. Phys. A: Math. Theor.* **41**, 455301 (2008).
- [130] Paltoglou, V., Margaritis, I. & Flytzanis, N. A diagrammatic approach for a clean multiferromagnetic Josephson junction. *J. Phys. A: Math. Theor.* **40**, 12829 (2007).