Γρηγορη Παουρη
Μαθηματικου

ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ ΓΙΑ ΤΟΜΕΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΟΛΕΣ ΚΥΡΤΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ

Διδακτορικη Διατριβη

Πανεπιστημιο Κρητης
Ηρακλειο 2004

Εισηγητης: Α. Γιαννοπουλος

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγή **1**

1.1 Βασικές έννοιες και συμβολισμός 1

1.1.1 Εικασία του υπερεπιπέδου και ισοτροπική θέση 3

1.1.2 Μεικτοί όγκοι και η ανισότητα Aleksandrov-Fenchel 9

1.1.3 Πιθανοθεωρητικά και αναλυτικά εργαλεία 12

1.2 Συνοπτική περιγραφή της εργασίας 15

1.2.1 Ψ_2-συμπεριφορά των γραμμικών συναρτησοειδών στα κυρτά σώματα 16

1.2.2 Συγκέντρωση του όγκου και κεντρικές οριακές ιδιότητες ισοτροπικών κυρτών σωμάτων 19

1.2.3 Τοπικές μορφές της ανισότητας Aleksandrov-Fenchel 22

2 Βασικές εκτιμήσεις **27**

2.1 Ανισότητες τύπου Khintchine για πολυώνυμα σε κυρτά σώματα . . . 27

2.1.1 Γραμμικά συναρτησοειδή και το Λήμμα του Borell 27

2.1.2 Βέλτιστες ανισότητες για πολυώνυμα βαθμού d 29

2.2 L_q-κεντροειδή σώματα 32

2.2.1 Ορισμός και βασικές ιδιότητες 32

2.2.2 Γενικευμένο μέσο πλάτος των q-κεντροειδών σωμάτων 35

2.2.3 $I_q(K)$ και $w_q(Z_q(K))$ 37

2.2.4 Αριθμοί Dvoretzky των q-κεντροειδών σωμάτων 38

2.3 Τομές με υπερεπίπεδα σε σταθερή απόσταση από την αρχή των αξόνων 40

2.4 Ψ_α-σώματα 42

2.5 Άνω φράγμα για τη σταθερά ισοτροπίας 46

3 Ψ_2-συμπεριφορά των γραμμικών συναρτησοειδών στα κυρτά σώματα **53**

3.1 Εικασία του υπερεπιπέδου και σώματα με μικρή διάμετρο 53

3.2 Σώματα με μικρή διάμετρο 57

3.2.1 Εισαγωγή 57

3.2.2 Σώματα με μικρή διάμετρο . . . 59
3.2.3 Εφαρμογή στα ζωνοειδή . . . 61
3.3 Ισοτροπικά σώματα με μικρή διάμετρο . . . 65
3.3.1 Εκτιμήσεις των βασικών παραμέτρων . . . 65
3.3.2 Ψ_2-διευθύνσεις . . . 68
3.3.3 Τα ισοτροπικά ψ_2-σώματα έχουν μικρή διάμετρο . . . 69
3.4 Διάμετρος και ψ_2-συμπεριφορά των γραμμικών συναρτησοειδών . . . 72

4 Συγκέντρωση του όγκου και κεντρικές οριακές ιδιότητες ισοτροπικών κυρτών σωμάτων 81
4.1 Εισαγωγή . . . 81
4.2 Αναγωγή στα q-κεντροειδή σώματα . . . 83
4.3 Αναγωγή στη συμπεριφορά της f_K . . . 85
4.4 Παρατηρήσεις σχετικά με το κεντρικό οριακό πρόβλημα . . . 92

5 Τοπικές μορφές της ανισότητας Aleksandrov-Fenchel 95
5.1 Εισαγωγή . . . 95
5.2 Η ανισότητα του Bergstrom στο πλαίσιο των quermassintegrals . . . 99
5.3 Τοπική μορφή της ανισότητας των Aleksandrov και Fenchel . . . 104
5.4 Τοπικές μορφές της ανισότητας των Loomis και Whitney . . . 106

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Βασικές έννοιες και συμβολισμός

Συμβολισμός. Δουλεύουμε στον $\mathbb{R}^n$, τον οποίο θεωρούμε εφοδιασμένο με μια Ευκλείδεια δομή $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Σε ότι ακολουθεί, $L(\mathbb{R}^n)$ είναι το σύνολο των γραμμικών μετασχηματισμών $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, $GL(n)$ η κλάση των αντιστρέψιμων γραμμικών μετασχηματισμών, $SL(n)$ η κλάση των $T\in GL(n)$ με $|\det T|=1$, $O(n)$ η κλάση των ορθογώνιων μετασχηματισμών. Συμβολίζουμε με $|\cdot|$ την Ευκλείδεια νόρμα που επάγεται απο το $\langle\cdot,\cdot\rangle$, και γράφουμε B_2^n για την Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα, και S^{n-1} για τη μοναδιαία σφαίρα. Ο όγκος (n-διάστατο μέτρο Lebesgue) συμβολίζεται με $|\cdot|$. Γράφουμε ω_n για τον όγκο της B_2^n.

Σε αυτή την εργασία, κυρτό σώμα λέμε ένα συμπαγές κυρτό υποσύνολο K του $\mathbb{R}^n$ με $0\in\mathrm{int}(K)$. Το K λέγεται συμμετρικό αν $x\in K\Rightarrow -x\in K$. Το K έχει κέντρο βάρους το 0 αν

$$\int_K\langle x,\theta\rangle dx=0 \tag{1.1.1}$$

για κάθε $\theta\in S^{n-1}$. Η ακτινική συνάρτηση $\rho_K:\mathbb{R}^n\setminus\{0\}\to\mathbb{R}^+$ του K ορίζεται από την

$$\rho_K(x)=\max\{\lambda>0:\lambda x\in K\}. \tag{1.1.2}$$

Η συνάρτηση στήριξης $h_K:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ του K ορίζεται από την

$$h_K(x)=\max\{\langle x,y\rangle:y\in K\}. \tag{1.1.3}$$

Το πλάτος του K στη διεύθυνση του $\theta \in S^{n-1}$ είναι η ποσότητα $w(K,\theta) = h_K(\theta) + h_K(-\theta)$, και το μέσο πλάτος του K ορίζεται από την

$$w(K) = \frac{1}{2}\int_{S^{n-1}} w(K,\theta)\sigma(d\theta) = \int_{S^{n-1}} h_K(\theta)\sigma(d\theta), \tag{1.1.4}$$

όπου σ είναι το αναλλοίωτο ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς μέτρο πιθανότητας στην S^{n-1}. Γράφουμε μ για το Haar μέτρο πιθανότητας στην $O(n)$. Με $G_{n,k}$ συμβολίζουμε την πολλαπλότητα Grassmann των k-διάστατων υποχώρων του $\mathbb{R}^n$. Τότε, η $O(n)$ εφοδιάζει την $G_{n,k}$ με το Haar μέτρο πιθανότητας $\nu_{n,k}$.

Η ακτίνα του K είναι η ποσότητα

$$R(K) = \max\{|x| : x \in K\}. \tag{1.1.5}$$

Το πολικό σώμα K° του K είναι το

$$K^\circ := \{y \in \mathbb{R}^n : \langle x,y\rangle \leq 1 \ \text{ για κάθε } \ x \in K\}. \tag{1.1.6}$$

Η ανισότητα Brunn-Minkowski συνδέει τον όγκο με την πρόσθεση κατά Minkowski: Αν A και B είναι δύο μη κενά συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$, τότε

$$|A+B|^{1/n} \geq |A|^{1/n} + |B|^{1/n}, \tag{1.1.7}$$

όπου $A+B := \{a+b \mid a \in A, b \in B\}$. Έπεται ότι, για κάθε $\lambda \in (0,1)$

$$|\lambda A + (1-\lambda)B|^{1/n} \geq \lambda|A|^{1/n} + (1-\lambda)|B|^{1/n}, \tag{1.1.8}$$

και, από την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου,

$$|\lambda A + (1-\lambda)B| \geq |A|^{\lambda}|B|^{1-\lambda}. \tag{1.1.9}$$

Έστω K συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Η απεικόνιση

$$\|x\|_K = \min\{\lambda \geq 0 : x \in \lambda K\} \tag{1.1.10}$$

είναι νόρμα στον $\mathbb{R}^n$. Ο $\mathbb{R}^n$ εφοδιασμένος με την νόρμα $\|\cdot\|_K$ θα συμβολίζεται με X_K. Αντίστροφα, αν $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ είναι ένας χώρος με νόρμα, τότε η μοναδιαία του μπάλα $K_X = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ είναι συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$.

Η δυϊκή νόρμα $\|\cdot\|_*$ της $\|\cdot\|$ ορίζεται από την $\|y\|_* = \max\{|\langle x,y\rangle| : \|x\| \leq 1\}$. Από τον ορισμό είναι φανερό ότι $|\langle x,y\rangle| \leq \|y\|_*\|x\|$ γιά κάθε $x,y \in \mathbb{R}^n$. Αν $X^* = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_*)$ είναι ο δυϊκός χώρος του X, τότε $K_{X^*} = K_X^\circ$. Θα γράφουμε $\|\cdot\|_{K^\circ}$ ή $\|\cdot\|_*$, και $\|\cdot\|_K$ ή $\|\cdot\|$ χωρίς αυτό να δημιουργεί σύγχυση.

1.1.1 Εικασία του υπερεπιπέδου και ισοτροπική θέση

Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Η κλάση των *θέσεων* του K είναι το σύνολο $\{TK : T \in GL(n)\}$. Στο πρώτο μέρος αυτής της εργασίας ασχολούμαστε με την *ισοτροπική θέση* και τη σχέση της με τον όγκο των $(n-1)$-διάστατων τομών των κυρτών σωμάτων.

1. Ισοτροπική θέση. Ένα κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ λέγεται ισοτροπικό αν έχει όγκο $|K| = 1$, κέντρο βάρους το 0, και ικανοποιεί την ισοτροπική συνθήκη

$$\int_K \langle x, y\rangle^2 dx = A|y|^2 \tag{1.1.11}$$

για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$, όπου $A > 0$ σταθερά. Άμεση συνέπεια της (1.1.11) είναι η

$$\int_K |x|^2 dx = nA. \tag{1.1.12}$$

Λήμμα 1.1.1 *Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ που έχει κέντρο βάρους το 0. Τότε, το K έχει ισοτροπική θέση.*

Απόδειξη: Ο γραμμικός τελεστής $M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ που ορίζεται από την

$$M(y) = \int_K \langle x, y\rangle x dx \tag{1.1.13}$$

είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος, επομένως έχει τετραγωνική ρίζα: υπάρχει συμμετρικός και θετικά ορισμένος S τέτοιος ώστε $M = S^2$. Θεωρούμε τη γραμμική εικόνα $\tilde{K} = S^{-1}(K)$ του K. Το $\tilde{K}$ έχει κέντρο βάρους το 0, και εύκολα ελέγχουμε ότι, για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$

$$\int_{\tilde{K}} \langle x, y\rangle^2 dx = |\mathrm{det} S|^{-1}|y|^2. \tag{1.1.14}$$

Κανονικοποιώντας τον όγκο του $\tilde{K}$ παίρνουμε ισοτροπικό σώμα. $\square$

Η ισοτροπική θέση του K είναι μονοσήμαντα ορισμένη αν αγνοήσουμε ορθογώνιους μετασχηματισμούς, και χαρακτηρίζεται ως λύση ενός προβλήματος ελαχίστου (βλέπε [47]) .

Θεώρημα 1.1.1 *Έστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $|K| = 1$ και κέντρο βάρους το 0. Το K είναι ισοτροπικό αν και μόνο αν*

$$\int_K |x|^2 dx \leq \int_{TK} |x|^2 dx \tag{1.1.15}$$

για κάθε $T \in SL(n)$. Κάθε άλλη θέση του K που ικανοποιεί την (1.1.15) είναι της μορφής $(tU)(K)$, όπου $U \in O(n)$ και $t > 0$. $\square$

Ένας άλλος χαρακτηρισμός της ισοτροπικής θέσης, ο οποίος προκύπτει εύκολα από την (1.1.11) και το Θεώρημα 1.1.1, είναι ο εξής.

Λήμμα 1.1.2 *Το K είναι ισοτροπικό με σταθερά A αν και μόνο αν*

$$\int_K \langle x, Tx\rangle dx = A\cdot(\mathrm{tr}T) \tag{1.1.16}$$

για κάθε $T\in L(\mathbb{R}^n)$. □

Το Θεώρημα 1.1.1 (πιο συγκεκριμένα, η μοναδικότητα της ισοτροπικής θέσης ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς) εξασφαλίζει οτι η σταθερά

$$L_K^2 = \frac{1}{n}\min\left\{\frac{1}{|TK|^{1+\frac{2}{n}}}\int_{TK}|x|^2dx \;\Big|\; T\in GL(n)\right\} \tag{1.1.17}$$

είναι καλά ορισμένη και εξαρτάται μόνο από τη γραμμική κλάση του K. Επίσης, αν το K είναι ισοτροπικό, τότε για κάθε $\theta\in S^{n-1}$ έχουμε

$$\int_K \langle x,\theta\rangle^2 dx = L_K^2. \tag{1.1.18}$$

Η σταθερά L_K ονομάζεται σταθερά ισοτροπίας του K.

2. Το ελλειψοειδές του Binet. Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Το ελλειψοειδές του Binet $E_B(K)$ του K ορίζεται από την

$$\|y\|_{E_B(K)}^2 = \int_K \langle x,y\rangle^2 dx = \langle My, y\rangle. \tag{1.1.19}$$

Μπορούμε λοιπόν να περιγράψουμε την ισοτροπική θέση του K σαν εκείνη τη θέση για την οποία το ελλειψοειδές του Binet γίνεται πολλαπλάσιο της B_2^n. Ακριβέστερα, το K είναι ισοτροπικό αν και μόνο αν $E_B(K)=L_K^{-1}B_2^n$. Ειδικότερα, αν το K είναι ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, έχουμε

$$|E_B(K)| = \omega_n L_K^{-n} \tag{1.1.20}$$

Μια άλλη χρήσιμη παρατήρηση είναι ότι, αν συμβολίσουμε με $M(K)$ τον *πίνακα αδρανείας* του κυρτού σώματος K, που ορίζεται από την

$$[M(K)]_{ij} = \langle Me_i, e_j\rangle = \int_K x_ix_j dx, \tag{1.1.21}$$

τότε

$$M(TK) = TM(K)T^* \tag{1.1.22}$$

για κάθε $T \in SL(n)$. Έπεται ότι, για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ που έχει όγκο 1 και κέντρο βάρους το 0,

$$|\det M(K)| = L_K^{2n}. \tag{1.1.23}$$

Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι στην ισοτροπική θέση ο πίνακας αδρανείας είναι ο $L_K^2 I$. Από την (1.1.20) βλέπουμε ότι

$$|E_B(TK)| = \omega_n |\det M(TK)|^{-1/2} = \omega_n |\det M(K)|^{-1/2} = |E_B(K)| \tag{1.1.24}$$

για κάθε $T \in SL(n)$. Αυτό μας δίνει το εξής.

Λήμμα 1.1.3 *Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, με όγκο 1 και κέντρο βάρους το 0. Τότε,*

$$|E_B(K)| = \omega_n L_K^{-n}. \qquad \square \tag{1.1.25}$$

3. Τομές ισοτροπικών σωμάτων. Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με κέντρο βάρους το 0. Για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f_{K,\theta}(t) = |K \cap (\theta^\perp + t\theta)|. \tag{1.1.26}$$

Από την ανισότητα Brunn-Minkowski έπεται ότι η $f_{K,\theta}$ είναι λογαριθμικά κοίλη στο φορέα της. Αυτό μας επιτρέπει να δείξουμε πολύ ακριβείς σχέσεις ανάμεσα στον όγκο της $(n-1)$-διάστατης τομής $|K \cap \theta^\perp|$ και σε ολοκληρώματα της μορφής

$$I_2^2(K,\theta) := \int_K \langle x, \theta\rangle^2 dx. \tag{1.1.27}$$

Η σχέση αυτή γίνεται σαφής αν, χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Fubini, γράφουμε το παραπάνω ολοκλήρωμα στη μορφή

$$\int_K \langle x, \theta\rangle^2 dx = \int_{\mathbb{R}} t^2 f_{K,\theta}(t) dt. \tag{1.1.28}$$

Πρόταση 1.1.1 *Έστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με όγκο 1 και κέντρο βάρους το 0. Για κάθε $\theta \in S^{n-1}$,*

$$\left(\int_K \langle x, \theta\rangle^2 dx\right)^{1/2} \geq \frac{1}{2\sqrt{3}e} \frac{1}{|K \cap \theta^\perp|}. \tag{1.1.29}$$

Απόδειξη: Έστω $f := f_{K,\theta}$. Θέτουμε $B = \int_0^{+\infty} f(t)dt$, $b_+ = \max\{f(t) : t \geq 0\}$ και ορίζουμε

$$g(t) = b_+ \chi_{[0, B/b_+]}(t). \tag{1.1.30}$$

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα του Hardy (βλέπε [16], Πρόταση 3.6), παίρνουμε

$$\int_0^\infty t^2 f(t)dt \geq \int_0^{B/b_+} t^2 b_+ dt = \frac{B^3}{3b_+^2} \geq \frac{B^3}{3\|f\|_\infty^2}. \tag{1.1.31}$$

Τελείως ανάλογα, αν $A = \int_{-\infty}^0 f(t)dt$, βλέπουμε ότι

$$\int_{-\infty}^0 t^2 f(t)dt \geq \frac{A^3}{3\|f\|_\infty^2}. \tag{1.1.32}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη συμπεραίνουμε οτι

$$\int_K \langle x,\theta\rangle^2 dx \geq \frac{B^3+A^3}{3\|f\|_\infty^2}, \tag{1.1.33}$$

και αφού $A+B=|K|=1$, έπεται ότι

$$\left(\int_K \langle x,\theta\rangle^2 dx\right)^{1/2} \geq \frac{1}{2\sqrt{3}}\frac{1}{\|f\|_\infty}. \tag{1.1.34}$$

Ένα αποτέλεσμα των Makai και Martini (βλέπε [46]) δείχνει ότι αν το κυρτό σώμα K έχει όγκο 1 και κέντρο βάρους το 0, τότε $\|f_{K,\theta}\|_\infty \leq e f_{K,\theta}(0) = e|K\cap\theta^\perp|$ για κάθε $\theta \in S^{n-1}$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Πρόταση 1.1.2 *Έστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με όγκο 1 και κέντρο βάρους το 0. Για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ ισχύει*

$$\left(\int_K \langle x,\theta\rangle^2 dx\right)^{1/2} \leq c\frac{1}{|K\cap\theta^\perp|}, \tag{1.1.35}$$

όπου $c>0$ απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη: Θεωρούμε τα f, A, B όπως στην Πρόταση 1.1.1 και διακρίνουμε δύο περιπτώσεις. Πρώτα υποθέτουμε ότι υπάρχει $s>0$ με την ιδιότητα $f(s) = f(0)/2$. Αφού η f είναι λογαριθμική κοίλη στο $[0,s]$ και $f(0)\geq f(s)$, βλέπουμε ότι $f(t) \geq f(s)$ για κάθε $t\in[0,s]$. Άρα,

$$1 \geq B = \int_0^\infty f(t)dt \geq \int_0^s f(t)dt \geq sf(s) = sf(0)/2. \tag{1.1.36}$$

Αν $t>s$, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η f είναι λογαριθμικά κοίλη, έχουμε $f(s) \geq [f(0)]^{1-s/t}[f(t)]^{s/t}$, το οποίο σημαίνει οτι $f(t) \leq f(0)2^{-t/s}$. Γράφουμε

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty t^2 f(t)dt &= \int_0^s t^2 f(t)dt + \int_s^\infty t^2 f(t)dt \\
&\leq \|f\|_\infty \int_0^s t^2 dt + \int_s^\infty t^2 f(0) 2^{-t/s} dt \\
&\leq f(0)\left(e\frac{s^3}{3} + s^3\int_1^\infty u^2 2^{-u} du\right) \\
&\leq (c/f(0))^2.
\end{aligned}$$

Αν τώρα για κάθε $s>0$ στον φορέα της f ισχύει $f(s)>f(0)/2$, τότε τον ρόλο του s παίζει το $s_0=\max\{s>0: f(s)>0\}$. Είναι $1\geq B\geq f(0)s_0/2$ και

$$\int_0^\infty t^2 f(t)dt=\int_0^{s_0} t^2 f(t)dt\leq ef(0)s_0^3/3, \tag{1.1.37}$$

το οποίο οδηγεί στην ίδια ακριβώς εκτίμηση. Με τον ίδιο τρόπο φράσσουμε το ολοκλήρωμα στο $(-\infty,0]$. Επεται οτι

$$\begin{aligned}\int_K \langle x,\theta\rangle^2 dx &= \int_0^\infty t^2 f(t)dt+\int_{-\infty}^0 t^2 f(t)dt\\ &\leq (c/f(0))^2,\end{aligned}$$

όπου $c>0$ απόλυτη σταθερά. $\square$

Στην περίπτωση που το K είναι ισοτροπικό, οι δύο αυτές Προτάσεις δείχνουν ότι όλες οι $(n-1)$-διάστατες τομές $K\cap\theta^\perp$ του K έχουν περίπου τον ίδιο όγκο.

Θεώρημα 1.1.2 *Έστω K ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $\theta\in S^{n-1}$ ισχύει*

$$\frac{c_1}{L_K}\leq |K\cap\theta^\perp|\leq\frac{c_2}{L_K}, \tag{1.1.38}$$

όπου $c_1,c_2>0$ απόλυτες σταθερές. $\square$

4. Εικασία του υπερεπιπέδου και ισοτροπική θέση. Μία από τις πιο κεντρικές εικασίες στη θεωρία των κυρτών σωμάτων είναι η *εικασία του υπερεπιπέδου.*

> Υπάρχει απόλυτη σταθερά $c>0$ με την εξής ιδιότητα: αν K είναι ένα κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ με κέντρο βάρους το 0, υπάρχει $\theta\in S^{n-1}$ τέτοιο ώστε
> $$|K\cap\theta^\perp|\geq c.$$

Αν υποθέσουμε ότι η εικασία του υπερεπιπέδου ισχύει, τότε για κάθε ισοτροπικό σώμα K *όλες* οι τομές $K\cap\theta^\perp$ έχουν όγκο μεγαλύτερο ή ίσο του c. Τότε, το Θεώρημα 1.1.2 έχει την εξής συνέπεια:

> Αν ισχύει η εικασία του υπερεπιπέδου, τότε υπάρχει απόλυτη σταθερά $C>0$ τέτοια ώστε $L_K\leq C$ για κάθε κυρτό σώμα K με κέντρο βάρους το 0.

Αντίστροφα, αν υπάρχει απόλυτο φράγμα για τη σταθερά ισοτροπίας, τότε έπεται η εικασία του υπερεπιπέδου. Αυτό φαίνεται εύκολα αν χρησιμοποιήσουμε το ελλειψοειδές του Binet. Από το Λήμμα 1.1.3, για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ που έχει όγκο 1 και κέντρο βάρους το 0, έχουμε

$$\frac{|E_B(K)|}{\omega_n}=L_K^{-n}=\int_{S^{n-1}}\|\theta\|_{E_B(K)}^{-n}\sigma(d\theta). \tag{1.1.39}$$

Επομένως, υπάρχει $\theta \in S^{n-1}$ με την ιδιότητα

$$\int_K \langle x, \theta\rangle^2 dx = \|\theta\|^2_{E_B(K)} \leq L_K^2. \tag{1.1.40}$$

Από την Πρόταση 1.1.1 έπεται ότι

$$|K \cap \theta^\perp| \geq \frac{1}{2\sqrt{3}eL_K} \geq c := \frac{1}{2\sqrt{3}eC}. \tag{1.1.41}$$

Με αυτή την έννοια η μελέτη της σταθεράς ισοτροπίας είναι απολύτως ισοδύναμη με τη μελέτη της εικασίας του υπερεπιπέδου. Το πρόβλημα αυτό είναι ισοδύναμο με την ασυμπτωτική εκδοχή πολλών άλλων κλασικών προβλημάτων της κυρτής γεωμετρίας (για περισσότερες λεπτομέρειες και αποδείξεις όσων αποτελεσμάτων αναφέρουμε χωρίς απόδειξη, βλέπε [47]).

5. Γνωστά αποτελέσματα για την ισοτροπική θέση και τη σταθερά ισοτροπίας. Υπάρχουν κάποιες ειδικές κλάσεις σωμάτων για τις οποίες η σταθερά ισοτροπίας φράσσεται εύκολα. Οι πιο χαρακτηριστικές είναι: τα συμμετρικά κυρτά σώματα που τα πολικά τους έχουν φραγμένο λόγο όγκων και τα σώματα που είναι συμμετρικά ως προς τους υποχώρους συντεταγμένων.

(α) Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι το K° περιέχει ελλειψοειδές E και ότι $\left(|K^\circ|/|E|\right)^{1/n} \leq d$ (λέμε ότι ο λόγος όγκων του K° φράσσεται από d). Ισοδύναμα, υπάρχει $S \in GL(n)$ τέτοιος ώστε $B_2^n \subseteq S(K^\circ)$ και $\left(|S(K^\circ)|/\omega_n\right)^{1/n} \leq d$. Αφού $\omega_n^{1/n} \simeq 1/\sqrt{n}$, παίρνοντας $T = t(S^{-1})^*$ για κατάλληλο $t > 0$ και χρησιμοποιώντας την αντίστροφη ανισότητα Santaló, ελέγχουμε ότι υπάρχει γραμμική εικόνα TK του K που έχει όγκο 1 και ικανοποιεί την $TK \subseteq cd\sqrt{n}B_2^n$, όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά. Από την (1.1.12) και το Θεώρημα 1.1.1,

$$nL_K^2 \leq \int_{TK} |x|^2 dx \leq c^2 d^2 n, \tag{1.1.42}$$

δηλαδή, $L_K \leq cd$.

(β) Ας υποθέσουμε ότι το K είναι ισοτροπικό και συμμετρικό ως προς όλους τους υποχώρους συντεταγμένων. Σε αυτή την περίπτωση, ο $M(K)$ είναι διαγώνιος και η Πρόταση 1.1.2 δείχνει ότι

$$L_K^{2n} = |\det M(K)| = \prod_{i=1}^n \int_K x_i^2 dx \leq c^{2n} \left(\prod_{i=1}^n |K_i|\right)^{-2}, \tag{1.1.43}$$

όπου $K_i = K \cap e_i^\perp = P_{e_i^\perp} K$. Από την ανισότητα Loomis-Whitney (βλέπε [42]),

$$\prod_{i=1}^n |K_i| \geq |K|^{n-1} = 1. \tag{1.1.44}$$

Άρα, $L_K \leq c$.

(γ) Αποδεικνύεται εύκολα ότι $L_K \geq L_{B_2^n} \geq c$ για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$, όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά.

Κλείνουμε αυτή την παράγραφο με κάποιες πληροφορίες για τη διάμετρο και το μέσο πλάτος των ισοτροπικών σωμάτων. Για την απόδειξη βλέπε [36] και [32].

Πρόταση 1.1.3 *Έστω K ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$R(K) \leq (n+1)L_K \tag{1.1.45}$$

και

$$w(K) \leq cn^{3/4}L_K, \tag{1.1.46}$$

όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά. □

1.1.2 Μεικτοί όγκοι και η ανισότητα Aleksandrov-Fenchel

1. Μεικτοί όγκοι. Γράφουμε $\mathcal{K}_n$ για την κλάση όλων των μη κενών κυρτών συμπαγών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$. Η $\mathcal{K}_n$ είναι κυρτός κώνος ως προς την πρόσθεση κατά Minkowski και τον πολλαπλασιασμό με μη αρνητικούς πραγματικούς αριθμούς. Το Θεώρημα του Minkowski (που είναι ταυτόχρονα και ο ορισμός των μεικτών όγκων) μας λέει ότι: αν $K_1, \ldots, K_m \in \mathcal{K}_n$, $m \in \mathbb{N}$, τότε ο όγκος του $t_1K_1 + \cdots + t_mK_m$ είναι ομογενές πολυώνυμο βαθμού n ως προς τα $t_i \geq 0$. Δηλαδή,

$$|t_1K_1 + \cdots + t_mK_m| = \sum_{1 \leq i_1, \ldots, i_n \leq m} V(K_{i_1}, \ldots, K_{i_n}) t_{i_1} \ldots t_{i_n}, \tag{1.1.47}$$

όπου οι συντελεστές $V(K_{i_1}, \ldots, K_{i_n})$ επιλέγονται να είναι ανεξάρτητοι από μεταθέσεις των K_{i_j}. Ο συντελεστής $V(A_1, \ldots, A_n)$ είναι ο μεικτός όγκος των $A_1, \ldots, A_n$.

Ειδικότερα, αν $K, L \in \mathcal{K}_n$ τότε η συνάρτηση $|K + tL|$ είναι πολυώνυμο του $t \in \mathbb{R}^+$:

$$|K + tL| = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} V_j(K, L)\, t^j, \tag{1.1.48}$$

όπου $V_j(K, L) = V(K; n-j, L; j)$ είναι ο j-στός μεικτός όγκος των K και L. Από την (1.1.48) έχουμε

$$V_1(K, L) = \frac{1}{n} \lim_{t \to 0^+} \frac{|K + tL| - |K|}{t}, \tag{1.1.49}$$

και, σε συνδυασμό με την ανισότητα Brunn-Minkowski, παίρνουμε την ανισότητα του Minkowski

$$V_1(K,L) \geq |K|^{(n-1)/n}|L|^{1/n} \tag{1.1.50}$$

για κάθε $K, L \in \mathcal{K}_n$.

2. Quermassintegrals. Θέτοντας $L = B_2^n$ παίρνουμε τον τύπο του Steiner

$$|K + tB_2^n| = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} W_j(K) t^j, \tag{1.1.51}$$

όπου $W_j(K) = V(K; n-j, B_2^n; j)$ είναι το *j-στό quermassintegral* του K.

Από τον τύπο του Steiner ελέγχουμε εύκολα ότι η επιφάνεια του K δίνεται από την

$$A(K) = \lim_{t\to 0^+} \frac{|K + tB_2^n| - |K|}{t} = nW_1(K). \tag{1.1.52}$$

Η ανισότητα του Minkowski δείχνει ότι

$$A(K) \geq n\omega_n^{1/n}|K|^{(n-1)/n} \tag{1.1.53}$$

για κάθε $K \in \mathcal{K}_n$. Αυτή είναι η ισοπεριμετρική ανισότητα για κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$.

Ο ολοκληρωτικός τύπος του Kubota

$$W_j(K) = \frac{\omega_n}{\omega_{n-j}} \int_{G_{n,n-j}} |P_H K|_{n-j} \, d\nu_{n,n-j}(H) \tag{1.1.54}$$

εκφράζει το j-στό quermassintegral του K σαν τη μέση τιμή του όγκου των προβολών διάστασης $(n-j)$ του K ως προς το Haar μέτρο πιθανότητας στην $G_{n,n-j}$. Εφαρμόζοντας την (1.1.54) για $j = n-1$ βλέπουμε ότι

$$W_{n-1}(K) = \omega_n w(K). \tag{1.1.55}$$

3. Μεικτά επιφανειακά μέτρα. Θεωρούμε μια $(n-1)$-άδα $\mathcal{C} = \{K_1, \ldots, K_{n-1}\}$ στην κλάση $\mathcal{K}_n$. Για κάθε $L \in \mathcal{K}_n$ ορίζουμε $f(h_L) = V(L, K_1, \ldots, K_{n-1})$, και επεκτείνουμε την f γραμμικά στον υπόχωρο $D(S^{n-1}) = \mathrm{span}\{h_L|_{S^{n-1}}, L \in \mathcal{K}_n\}$ του $C(S^{n-1})$. Από την προσθετικότητα του V_1 ως προς L και από το γεγονός ότι $h_{L_1+L_2} = h_{L_1} + h_{L_2}$ για κάθε $L_1, L_2 \in \mathcal{K}_n$, η f είναι ένα θετικό φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές στον $D(S^{n-1})$, το οποίο επεκτείνεται στον $C(S^{n-1})$. Από το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz, μπορούμε να βρούμε ένα Borel μέτρο $S(\mathcal{C}, \cdot)$ στη μοναδιαία σφαίρα S^{n-1} το οποίο ικανοποιεί την

$$V(L, K_1, \ldots, K_{n-1}) = \frac{1}{n} \int_{S^{n-1}} h_L(u) \, dS(\mathcal{C}, u) \tag{1.1.56}$$

για κάθε $L \in \mathcal{K}_n$. Το $S(\mathcal{C}, \cdot)$ είναι το μεικτό επιφανειακό μέτρο των $K_1, \ldots, K_{n-1}$.

Αν $K \in \mathcal{K}_n$, το j-στό *επιφανειακό μέτρο* του K ορίζεται από την $S_j(K, \cdot) = S(K; j, B_2^n; n-j-1, \cdot)$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$. Έπεται ότι τα quermassintegrals $W_j(K)$ γράφονται στη μορφή

$$W_j(K) = \frac{1}{n} \int_{S^{n-1}} h_K(u) dS_{n-j-1}(K, u) \tag{1.1.57}$$

για $j = 0, 1, \ldots, n-1$, ή

$$W_j(K) = \frac{1}{n} \int_{S^{n-1}} dS_{n-j}(K, u) \tag{1.1.58}$$

για $j = 1, \ldots, n$. Αν υποθέσουμε ότι η h_K είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη, τότε το $S_j(K, \cdot)$ έχει συνεχή πυκνότητα $s_j(K, u)$ ως προς το σ, την j-στή στοιχειώδη συμμετρική συνάρτηση των ιδιοτιμών της Εσσιανής της h_K στο u.

Ειδική περίπτωση είναι το επιφανειακό μέτρο $\sigma_K = S_{n-1}(K, \cdot)$, το οποίο περιγράφεται ισοδύναμα ως εξής: αν A είναι ένα Borel υποσύνολο της S^{n-1}, τότε $\sigma_K(A)$ είναι το $(n-1)$-διάστατο μέτρο του συνόλου όλων των συνοριακών σημείων του K τα οποία έχουν εξωτερικό κάθετο διάνυσμα στο A. Αν το K είναι πολύτοπο με έδρες $F_1, \ldots, F_m$ και κάθετα διανύσματα τα $u_1, \ldots, u_m$ αντίστοιχα, τότε το σ_K φέρεται από το $\{u_1, \ldots, u_m\}$ και $\sigma_K(\{u_j\}) = |F_j|$, $j = 1, \ldots, m$. Παρατηρήστε ότι

$$|K| = W_0(K) = \frac{1}{n} \int_{S^{n-1}} h_K(u) \sigma_K(du). \tag{1.1.59}$$

4. Η ανισότητα Aleksandrov-Fenchel. Η ισχυρότερη γνωστή γενίκευση της ανισότητας Brunn-Minkowski στο πλαίσιο των κυρτών σωμάτων είναι η ανισότητα των Aleksandrov και Fenchel: Αν $K, L, K_3, \ldots, K_n \in \mathcal{K}_n$, τότε

$$V(K, L, K_3, \ldots, K_n)^2 \geq V(K, K, K_3, \ldots, K_n) V(L, L, K_3, \ldots, K_n). \tag{1.1.60}$$

Ειδικότερα, η (1.1.60) δείχνει ότι η ακολουθία $(W_0(K), \ldots, W_n(K))$ είναι λογαριθμικά κοίλη (δηλαδή, αν $i < j < k$ τότε $W_j^{k-i}(K) \geq W_i^{k-j}(K) W_k^{j-i}(K)$). Συνέπεια αυτής της παρατήρησης είναι οι ανισότητες

$$W_i(K+L)^{1/(n-i)} \geq W_i(K)^{1/(n-i)} + W_i(L)^{1/(n-i)} \tag{1.1.61}$$

που ισχύουν για κάθε ζευγάρι κυρτών σωμάτων K, L στον $\mathbb{R}^n$ και για κάθε $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Επίσης, οι ανισότητες του Aleksandrov

$$\left(\frac{W_{n-i}(K)}{\omega_n}\right)^{1/i} \geq \left(\frac{W_{n-j}(K)}{\omega_n}\right)^{1/j}, \tag{1.1.62}$$

για κάθε $1 \leq i < j \leq n$. Θέτοντας $i = 0$ στην (1.1.61) παίρνουμε την ανισότητα Brunn-Minkowski. Θέτοντας $i = n-1$ και $j = n$ στην (1.1.62) παίρνουμε την ισοπεριμετρική ανισότητα. Τέλος, θέτοντας $i = 1$ και $j = n$ στην (1.1.62) και χρησιμοποιώντας την (1.1.55), παίρνουμε την ανισότητα του Urysohn

$$w(K) \geq \left(\frac{|K|}{\omega_n}\right)^{1/n}. \tag{1.1.63}$$

Κλασικές αναφορές για τη θεωρία των μεικτών όγκων είναι το βιβλίο του Schneider [56] και το βιβλίο των Burago και Zalgaller [18].

1.1.3 Πιθανοθεωρητικά και αναλυτικά εργαλεία

Θα χρησιμοποιήσουμε τρία βασικά πιθανοθεωρητικά και αναλυτικά εργαλεία από την ασυμπτωτική θεωρία των χώρων πεπερασμένης διάστασης με νόρμα.

1. Αριθμοί κάλυψης και η ανισότητα του Sudakov. Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Θεωρούμε n ανεξάρτητες τυπικές κανονικές τυχαίες μεταβλητές $g_1, \ldots, g_n$ σε κάποιον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, και την ανέλιξη του Gauss $\mathcal{Z} = \{Z_x \mid x \in K\}$ με

$$Z_x = \langle x, \sum_{i=1}^n g_i e_i \rangle = \sum_{i=1}^n x_i g_i, \tag{1.1.64}$$

όπου $\{e_1, \ldots, e_n\}$ είναι η συνήθης ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$. Μπορούμε να βλέπουμε την $\mathcal{Z}$ σαν υποσύνολο του $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Παρατηρήστε ότι

$$\|Z_x - Z_y\|_2 = |x - y| \tag{1.1.65}$$

για κάθε $x, y \in K$. Γράφουμε B για τη μοναδιαία μπάλα του $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ και για κάθε $t > 0$ ορίζουμε τον t-αριθμό εντροπίας της $\mathcal{Z}$ από τη σχέση

$$N_t(\mathcal{Z}) = \min\left\{N \mid \text{ υπάρχουν } x_1, \ldots, x_N \in K : \mathcal{Z} \subseteq \bigcup_{i=1}^N (Z_{x_i} + tB)\right\}. \tag{1.1.66}$$

Αν το τελευταίο σύνολο είναι κενό, θέτουμε $N_\varepsilon(\mathcal{Z}) = \infty$. Η ανισότητα του Sudakov (βλέπε [41]) δίνει κάτω φράγμα για τη μέση τιμή του supremum της $\mathcal{Z}$ (ισχύει γενικά για ανελίξεις του Gauss).

Θεώρημα 1.1.3 *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $c > 0$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$,*

$$c \sup_{t>0} \left(t\sqrt{\log N_t(\mathcal{Z})}\right) \leq \mathbb{E} \sup_{x \in K} Z_x. \tag{1.1.67}$$

Το θεώρημα αυτό έχει μια άμεση γεωμετρική εφαρμογή. Ορίζουμε τους αριθμούς κάλυψης $N(K,tB_2^n)$ του K από την

$$N(K,tB_2^n) := \min\left\{N \mid \exists x_1,\dots,x_N\in K : K\subseteq \bigcup_{i=1}^{N}(x_i+tB_2^n)\right\}. \tag{1.1.68}$$

Από την (1.1.65) είναι φανερό ότι $N(K,tB_2^n) = N_t(\mathcal{Z})$ για κάθε $t>0$. Από την άλλη πλευρά, ένας απλός υπολογισμός δείχνει ότι

$$\mathbb{E}\sup_{x\in K} Z_x = c_n w(K), \tag{1.1.69}$$

όπου c_n σταθερά που εξαρτάται από τη διάσταση n, με $c_n\simeq\sqrt{n}$. Επομένως, μπορούμε να εκτιμήσουμε τους αριθμούς κάλυψης του K χρησιμοποιώντας σαν παράμετρο το μέσο πλάτος του K.

Θεώρημα 1.1.4 *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C>0$ με την εξής ιδιότητα: αν K είναι ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, τότε*

$$\log N(K,tB_2^n)\leq Cn\frac{w^2(K)}{t^2} \tag{1.1.70}$$

για κάθε $t>0$. □

2. Υποκανονικές ανελίξεις και η ανισότητα του Talagrand. Έστω $(\Omega,\mathcal{A},P)$ χώρος πιθανότητας, και $\mathcal{Y}=(Y_x)_{x\in K}$ μια οικογένεια πραγματικών τυχαίων μεταβλητών. Λέμε ότι η ανέλιξη $\mathcal{Y}=(Y_x)_{x\in K}$ είναι υποκανονική αν

$$\mathbb{E}Y_x = 0 \tag{1.1.71}$$

για κάθε $x\in K$ και αν, για κάθε $x,w\in K$ και κάθε $t>0$,

$$P(|Y_x-Y_w|\geq t)\leq 2\exp\left(-\frac{t^2}{|x-w|^2}\right). \tag{1.1.72}$$

Για κάθε Borel μέτρο πιθανότητας μ στο K θεωρούμε την ποσότητα

$$\gamma_2(K,\mu)=\sup_{x\in K}\int_0^\infty\sqrt{\log\left(\frac{1}{\mu(B(x,t))}\right)}dt. \tag{1.1.73}$$

Το Θεώρημα του Talagrand [58] για τα κυριαρχούντα μέτρα (στο πλαίσιο των κυρτών σωμάτων) είναι το εξής.

Θεώρημα 1.1.5 *Υπάρχει σταθερά $C>0$ με τις εξής ιδιότητες:*

(α) *Για κάθε υποκανονική ανέλιξη* $Y = (Y_x)_{x\in K}$,

$$\mathbb{E}\sup_{x\in K} Y_x \leq C\cdot\gamma_2(K) \tag{1.1.74}$$

όπου $\gamma_2(K) = \inf_\mu \gamma_2(K,\mu)$.

(β) *Αν θεωρήσουμε την ανέλιξη του Gauss* $\mathcal{Z} = (Z_x)_{x\in K}$ *της* (1.1.64), *τότε*

$$\frac{1}{C}\cdot\gamma_2(K) \leq \mathbb{E}\sup_{x\in K} Z_x \leq C\cdot\gamma_2(K). \qquad \square \tag{1.1.75}$$

Άμεση συνέπεια των παραπάνω είναι το εξής θεώρημα σύγκρισης.

Θεώρημα 1.1.6 *Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Αν η ανέλιξη $\mathcal{Y} = (Y_x)_{x\in K}$ είναι υποκανονική, τότε*

$$\mathbb{E}\sup_{x\in K} Y_x \leq C\cdot\mathbb{E}\sup_{x\in K} Z_x, \tag{1.1.76}$$

όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. $\square$

3. Ελάχιστο μέσο πλάτος και η ανισότητα του Pisier. Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Λέμε ότι το K έχει ελάχιστο μέσο πλάτος αν $w(K) \leq w(TK)$ για κάθε $T \in SL(n)$. Ενα απλό επιχείρημα συμπάγειας δείχνει ότι κάθε σώμα έχει θέση με ελάχιστο μέσο πλάτος. Η θέση αυτή χαρακτηρίζεται από το επόμενο θεώρημα (βλέπε [27]).

Θεώρημα 1.1.7 *Ενα κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ έχει ελάχιστο μέσο πλάτος αν και μόνο αν*

$$\int_{S^{n-1}} h_K(u)\langle u,\theta\rangle^2\sigma(du) = \frac{w(K)}{n} \tag{1.1.77}$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$. Επιπλέον, η θέση ελάχιστου μέσου πλάτους είναι μοναδική αν αγνοήσουμε ορθογώνιους μετασχηματισμούς. $\square$

Οι Figiel και Tomczak-Jaegermann έδειξαν (σε γεωμετρική γλώσσα) ότι μπορεί κανείς να δώσει άνω φράγμα για το ελάχιστο μέσο πλάτος ενός συμμετρικού κυρτού σώματος αν διαθέτει μια γενική εκτίμηση για τη «σταθερά K-κυρτότητας» $C(X_K)$ του X_K (βλέπε [53]).

Θεώρημα 1.1.8 *Αν K είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, υπάρχει γραμμική εικόνα $\tilde{K}$ του K με όγκο $|\tilde{K}| = 1$ και μέσο πλάτος*

$$w(\tilde{K}) \leq c\sqrt{n}C(X_K), \tag{1.1.78}$$

όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά. $\square$

Ο Pisier (βλέπε [52]) έδειξε ότι $C(X) \leq c \log n$ για κάθε n-διάστατο χώρο με νόρμα X. Επομένως, κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ έχει γραμμική εικόνα όγκου 1 που έχει μέσο πλάτος $O(\sqrt{n}\log n)$. Ένα απλό επιχείρημα δείχνει ότι η υπόθεση της συμμετρίας δεν είναι απαραίτητη:

Θεώρημα 1.1.9 *Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Υπάρχει γραμμική εικόνα $\tilde{K}$ του K με όγκο 1, τέτοια ώστε*

$$w(\tilde{K}) \leq c\sqrt{n}\log n, \tag{1.1.79}$$

όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη: Θεωρούμε το σώμα διαφορών $K - K$ του K. Υπάρχει γραμμικός μετασχηματισμός T του $\mathbb{R}^n$ τέτοιος ώστε $|T(K-K)| = 1$ και

$$w(T(K-K)) \leq c\sqrt{n}\log n. \tag{1.1.80}$$

Παρατηρούμε ότι $T(K-K) = TK - TK$ και

$$\begin{aligned} w(TK - TK) &= \int_{S^{n-1}} h_{TK-TK}(u)\sigma(du) \\ &= \int_{S^{n-1}} [h_{TK}(u) + h_{-TK}(u)]\sigma(du) \\ &= \int_{S^{n-1}} [h_{TK}(u) + h_{TK}(-u)]\sigma(du) \\ &= 2w(TK). \end{aligned}$$

Επίσης, από την ανισότητα των Rogers και Shephard (βλέπε [55]), έχουμε

$$|TK| \geq 4^{-n}|TK - TK| = 4^{-n}. \tag{1.1.81}$$

Άρα, υπάρχει $c_1 \leq 4$ τέτοια ώστε το $\tilde{K} = c_1 TK$ να έχει όγκο 1. Σύμφωνα με τα παραπάνω,

$$w(\tilde{K}) \leq 4w(TK) \leq 2c\sqrt{n}\log n. \quad \square \tag{1.1.82}$$

1.2 Συνοπτική περιγραφή της εργασίας

Η καλύτερη γνωστή εκτίμηση για το πρόβλημα της σταθεράς ισοτροπίας οφείλεται στον Bourgain. Στην [8] έδειξε ότι υπάρχει απόλυτη σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ να ισχύει

$$L_K \leq c\sqrt[4]{n}\log n. \tag{1.2.1}$$

Μια διαφορετική παρουσίαση αυτής της ανισότητας δόθηκε αργότερα από τον Dar [21]. Στην §2.5 δείχνουμε ότι με κατάλληλη τροποποίηση του επιχειρήματος μπορεί κανείς να επεκτείνει αυτό το αποτέλεσμα στην κλάση όλων των κυρτών σωμάτων. Η προηγούμενη γνωστή εκτίμηση ήταν $L_K \leq c\sqrt{n}$ (βλέπε [21]). Για την ακρίβεια, αν ορίσουμε την ισοτροπική θέση ενός κυρτού σώματος K χωρίς να υποθέσουμε ότι το K έχει κέντρο βάρους το 0, το φράγμα για την L_K εξακολουθεί να ισχύει. Η υπόθεση για το κέντρο βάρους είναι απαραίτητη αν θέλουμε να συνδέσουμε τη σταθερά ισοτροπίας L_K με τον όγκο των $(n-1)$-διάστατων τομών του K.

Θεώρημα Α *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $c > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν K είναι ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, τότε $L_K \leq c\sqrt[4]{n}\log n$.*

Το αρχικό επιχείρημα του Bourgain ουσιαστικά ανάγει το πρόβλημα στην κλάση των ισοτροπικών κυρτών σωμάτων Q με ακτίνα $R(Q) \leq c\sqrt{n}L_Q$, όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Δείχνουμε πλήρως αυτή την αναγωγή του προβλήματος στην §3.1. Από εκεί και πέρα, το βασικό εργαλείο για την απόδειξη της (1.2.1) είναι το γεγονός ότι τα γραμμικά συναρτησοειδή πάνω στα κυρτά σώματα ικανοποιούν την ψ_1-εκτίμηση

$$\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_{\psi_1} \leq C\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_1 \tag{1.2.2}$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$, όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Αυτή η ανισότητα είναι συνέπεια του γεγονότος ότι η $f_{K,\theta}$ είναι λογαριθμικά κοίλη, και δεν επιδέχεται - γενικά - βελτίωση. Υπενθυμίζουμε ότι η Orlicz νόρμα $\|f\|_{\psi_\alpha}$ της $f : K \to \mathbb{R}$ ορίζεται από την

$$\|f\|_{\psi_\alpha} = \inf\left\{t > 0 : \int_K \exp\left((|f(x)|/t)^\alpha\right) dx \leq 2\right\}. \tag{1.2.3}$$

Από την απόδειξη της (1.2.1) στην §3.1 γίνεται φανερό ότι αν είχαμε ισχυρότερη πληροφορία για την ψ_2-συμπεριφορά των γραμμικών συναρτησοειδών στο Q τότε, σε συνδυασμό με το Θεώρημα του Talagrand για τα κυριαρχούντα μέτρα [58] και την ανισότητα του Pisier [52], θα παίρναμε το άνω φράγμα $O(\log n)$ για την L_Q. Μάλιστα, ο Bourgain [9] έδειξε πρόσφατα ότι τα σώματα που έχουν καλή ψ_2-συμπεριφορά σε όλες τις διευθύνσεις έχουν φραγμένη σταθερά ισοτροπίας.

1.2.1 Ψ_2-συμπεριφορά των γραμμικών συναρτησοειδών στα κυρτά σώματα

Δεν είναι σαφές αν κάθε ισοτροπικό κυρτό σώμα ικανοποιεί καλή ψ_2-εκτίμηση για τις περισσότερες διευθύνσεις $\theta \in S^{n-1}$. Εξ' όσων γνωρίζουμε, ακόμα και η ύπαρξη μίας καλής ψ_2-διεύθυνσης δεν έχει επαληθευτεί σε πλήρη γενικότητα. Οι Bobkov και Nazarov (βλέπε [13] και [14]) απέδειξαν πρόσφατα ότι αν το K είναι ισοτροπικό

1-unconditional κυρτό σώμα, τότε $\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_{\psi_2} \simeq \sqrt{n}\|\theta\|_\infty$ για κάθε $\theta \in S^{n-1}$. Ειδικότερα, η διαγώνια διεύθυνση είναι ψ_2-διεύθυνση. Τα ζωνοειδή σχηματίζουν μια δεύτερη κλάση κυρτών σωμάτων για τα οποία η ύπαρξη καλών ψ_2-διευθύνσεων μπορεί να επαληθευτεί. Αυτό προκύπτει από το εξής γενικότερο αποτέλεσμα της §3.2.

Θεώρημα Β *Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με όγκο $|K| = 1$. Υποθέτουμε ότι $K \subseteq \alpha\sqrt{n}B_2^n$. Τότε, υπάρχει $\theta \in S^{n-1}$ τέτοιο ώστε*

$$\left(\int_K |\langle x,\theta\rangle|^p dx\right)^{1/p} \leq C\alpha\sqrt{p}\int_K |\langle x,\theta\rangle| dx \tag{1.2.4}$$

για κάθε $p > 1$, όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Το επιχείρημα που αποδεικνύει το Θεώρημα Β δείχνει ότι για τις «μισές» διευθύνσεις $\theta \in S^{n-1}$ έχουμε «καλή» ψ_2-συμπεριφορά, δεν είναι όμως ικανό να δείξει ότι το μέτρο των καλών διευθύνσεων είναι $1 - o(1)$ όταν η διάσταση τείνει στο άπειρο.

Τα ζωνοειδή έχουν γραμμικές εικόνες που ικανοποιούν την υπόθεση του Θεωρήματος Β για κάποια απόλυτη σταθερά $\alpha > 0$: αν Z είναι ένα ζωνοειδές στη θέση Lewis ή στη θέση Lowner ή στη θέση ελάχιστου μέσου πλάτους, τότε $2R(Z) \leq \sqrt{n}|Z|^{1/n}$. Επομένως, έχουν «καλές» ψ_2-διευθύνσεις.

Μπορούμε επίσης σχετικά εύκολα να αποδείξουμε ότι κυρτά σώματα που έχουν μικρή διάμετρο έχουν μεγάλες $(n-1)$-διάστατες τομές (αυτό μπορεί να επαληθευτεί με διάφορους τρόπους, το επιχείρημα όμως της §3.2 δίνει επιπλέον κάποια εκτίμηση για την κατανομή του όγκου των $(n-1)$-διάστατων τομών). Αυτή είναι άλλη μια ένδειξη για το γεγονός ότι η ψ_2-συμπεριφορά σχετίζεται με την εικασία του υπερεπιπέδου.

Θεώρημα Γ *Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με όγκο $|K| = 1$ και κέντρο βάρους το 0. Υποθέτουμε ότι $K \subseteq \alpha\sqrt{n}B_2^n$. Τότε, για κάθε $t > 0$ έχουμε*

$$\sigma\left(\theta \in S^{n-1} : |K \cap \theta^\perp| \geq \frac{c_3}{t\alpha}\right) \geq 1 - 2e^{-t^2}, \tag{1.2.5}$$

όπου $c_3 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Τα κεντρικά μας αποτελέσματα σχετικά με την ψ_2-συμπεριφορά των γραμμικών συναρτησοειδών περιέχονται στις §3.3 και §3.4. Με αφορμή την αναγωγή του προβλήματος της σταθεράς ισοτροπίας στα ισοτροπικά κυρτά σώματα Q που έχουν ακτίνα $R(Q) \leq c\sqrt{n}L_Q$, μελετάμε την ψ_2-συμπεριφορά των γραμμικών συναρτησοειδών στα **ισοτροπικά** κυρτά σώματα K που έχουν ακτίνα $R(K) \leq A\sqrt{n}L_K$, συναρτήσει της παραμέτρου $A \geq 1$. Για συντομία θα λέμε ότι αυτά είναι «ισοτροπικά σώματα με μικρή διάμετρο». Παρατηρήστε ότι στα Θεωρήματα Β και Γ δεν έχουμε κάνει την υπόθεση ότι το K είναι ισοτροπικό.

Υπάρχουν δύο συναρτήσεις που μπαίνουν φυσιολογικά σε αυτή τη μελέτη. Προκειμένου να ορίσουμε την πρώτη, για κάθε $q \geq 1$ θεωρούμε το q-κεντροειδές σώμα

$Z_q(K)$ του K που έχει σαν συνάρτηση στήριξης την

$$h_{Z_q(K)}(y) = I_q(K,y) := \left(\int_K |\langle x,y\rangle|^q dx\right)^{1/q}, \tag{1.2.6}$$

και κατόπιν εισάγουμε τη συνάρτηση m_K των «αριθμών Dvoretzky»

$$m_K(q) = n\frac{w(Z_q(K))^2}{R(Z_q(K))^2}. \tag{1.2.7}$$

Όπως θα δούμε, η καλή ψ_2-συμπεριφορά σε όλες τις διευθύνσεις είναι ουσιαστικά ισοδύναμη με τη συνθήκη $m_K(q) \simeq n$ για κάθε q. Επομένως, είναι φυσιολογικό να μελετήσουμε την $m_K(q)$ για τα ισοτροπικά σώματα μικρής διαμέτρου.

Η δεύτερη συνάρτηση f_K μετράει τη μέση τιμή του όγκου των τομών του K με τα υπερεπίπεδα που βρίσκονται σε απόσταση $t > 0$ από την αρχή των αξόνων:

$$f_K(t) = \int_{S^{n-1}} f_{K,\theta}(t)\sigma(d\theta). \tag{1.2.8}$$

Όπως θα δούμε, η καλή ψ_2-συμπεριφορά σε όλες τις διευθύνσεις έχει σαν συνέπεια ένα υποκανονικό άνω φράγμα για την $f_K(t)$. Είναι λοιπόν πάλι φυσιολογικό να μελετήσουμε τη συμπεριφορά της f_K για ισοτροπικά κυρτά σώματα μικρής διαμέτρου. Όπως θα δούμε, η «υποκανονική συμπεριφορά» της f_K είναι ισοδύναμη με την ιδιότητα της μικρής διαμέτρου για ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα K.

Οι συναρτήσεις m_K και f_K εισάγονται στις παραγράφους §2.2-2.4, όπου αποδεικνύονται διάφορες βασικές ιδιότητές τους.

Τα θετικά μας αποτελέσματα για τα ισοτροπικά σώματα μικρής διαμέτρου συνοψίζονται στο εξής θεώρημα.

Θεώρημα Δ *Έστω K ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι για κάποια σταθερά $A \geq 1$ ισχύει $K \subseteq (A\sqrt{n}L_K)B_2^n$. Τότε,*

(α) *$m_K(q) \geq c_1\sqrt{n}/A^2$ για κάθε $q \geq 1$, όπου $c_1 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.*

(β) *$f_K(t) \leq \frac{c_2}{L_K}\exp(-c_3t^2/A^2L_K^2)$ για κάθε $t > 0$, όπου $c_2, c_3 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.*

(γ) *$\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_{\psi_2} \leq c_4\sqrt{A}\sqrt[4]{n}L_K$ για κάθε $\theta \in S^{n-1}$, και*

$$\sigma(\theta \in S^{n-1} : \|\langle\cdot,\theta\rangle\|_{\psi_2} \geq c_5AtL_K) \leq \exp(-c_6\sqrt{n}t^2/A^2) \tag{1.2.9}$$

για κάθε $t \geq 1$, όπου $c_4, c_5, c_6 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Με άλλα λόγια, για την τυχαία διεύθυνση $\theta \in S^{n-1}$, ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα με μικρή διάμετρο ικανοποιεί την

$$\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_{\psi_2} \leq CL_K, \tag{1.2.10}$$

αρκεί η παράμετρος A να είναι ομοιόμορφα φραγμένη. Η εκτίμηση όμως του μέτρου των καλών διευθύνσεων δεν είναι ιδιαίτερα ισχυρή (παρατηρήστε την εξάρτηση από την $\sqrt{n}$ στο Θεώρημα Δ, αντί για n που θα ήταν το «επιθυμητό».)

Όπως προκύπτει, όλες οι παραπάνω εκτιμήσεις είναι βέλτιστες. Μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα Q μικρής διαμέτρου, για το οποίο $\min_q m_Q(q) \simeq \sqrt{n}$ και $\max_\theta \|\langle \cdot, \theta\rangle\|_{\psi_2} \simeq \sqrt[4]{n} L_Q$. Αξίζει να σημειωθεί ότι το παράδειγμα δίνεται από ένα σώμα του οποίου η γεωμετρική απόσταση από την Ευκλείδεια μπάλα είναι ομοιόμορφα φραγμένη.

Θεώρημα Ε *Υπάρχει ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα εκ περιστροφής Q στον $\mathbb{R}^n$ με τις ακόλουθες ιδιότητες.*

(α) $c_1\sqrt{n}B_2^n \subseteq Q \subseteq c_2\sqrt{n}B_2^n$, *όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.*

(β) $\|\langle \cdot, e_n\rangle\|_{\psi_2} \geq c_3\sqrt[4]{n}$, *όπου $c_3 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.*

(γ) *Υπάρχει $q_0 \simeq \sqrt{n}$ τέτοιος ώστε $m_Q(q) \simeq n/q$ αν $q \leq q_0$ και $m_Q(q) \simeq q$ αν $q_0 \leq q \leq n$.*

1.2.2 Συγκέντρωση του όγκου και κεντρικές οριακές ιδιότητες ισοτροπικών κυρτών σωμάτων

Έστω K ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,

$$\int_K |x|^2 dx = nL_K^2, \tag{1.2.11}$$

και εφαρμόζοντας την ανισότητα του Markov βλέπουμε ότι $|K \cap (3\sqrt{n}L_K)B_2^n| \geq 8/9$. Από το Λήμμα του Borell (βλέπε §2.1) έπεται το εξής.

Πρόταση 1: *Αν K είναι ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, τότε*

$$\mathrm{Prob}\left(\{x \in K : |x| \geq 3\sqrt{n}L_K t\}\right) \leq \exp(-t) \tag{1.2.12}$$

για κάθε $t \geq 1$.

Ο Alesker [1] έδειξε ότι αν το K είναι ισοτροπικό, τότε η Ευκλείδεια νόρμα $f(x) = |x|$ ικανοποιεί την ψ_2-εκτίμηση

$$\|f\|_{\psi_2} \leq c\|f\|_1 \leq c\sqrt{n}L_K, \tag{1.2.13}$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά (για μια γενίκευση, βλέπε §2.4). Ειδικότερα, παίρνουμε την εξής βελτίωση της ανισότητας της Πρότασης 1.

Πρόταση 2: *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε αν K είναι ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, τότε*

$$\mathrm{Prob}\left(\{x \in K : |x| \geq c\sqrt{n}L_K t\}\right) \leq 2\exp(-t^2) \tag{1.2.14}$$

για κάθε $t \geq 1$.

Οι Bobkov και Nazarov [13] απέδειξαν ένα εντυπωσιακό ισχυρότερο αποτέλεσμα στην περίπτωση των 1-unconditional ισοτροπικών κυρτών σωμάτων.

Πρόταση 3: *Υπάρχει απόλυτη σταθερά* $c > 0$ *τέτοια ώστε αν* K *είναι ένα* 1-*unconditional ισοτροπικό κυρτό σώμα στον* $\mathbb{R}^n$, *τότε*

$$\text{Prob}\left(\{x \in K : |x| \geq c\sqrt{n}t\}\right) \leq \exp\left(-ct\sqrt{n}\right) \tag{1.2.15}$$

για κάθε $t \geq 1$.

Θυμηθείτε ότι $L_K \simeq 1$ στην περίπτωση των 1-unconditional κυρτών σωμάτων. Αφού η ακτίνα $R(K)$ ενός ισοτροπικού κυρτού σώματος K στον $\mathbb{R}^n$ φράσσεται πάντα από $(n+1)L_K$ [36], η ανισότητα στην Πρόταση 3 είναι ισχυρότερη από τις προηγούμενες δύο για κάθε $t \geq 1$. Ένα ερώτημα που προκύπτει φυσιολογικά και διατυπώνεται στην [13] είναι το εξής.

Πρόβλημα: *Είναι σωστό ότι υπάρχουν απόλυτη σταθερά* $c > 0$ *και συνάρτηση* $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ *με* $\phi(n) \to \infty$ *όταν* $n \to \infty$, *τέτοιες ώστε για κάθε ισοτροπικό κυρτό σώμα* K *στον* $\mathbb{R}^n$ *να ισχύει η ανισότητα*

$$\text{Prob}\left(\{x \in K : |x| \geq c\sqrt{n}L_K t\}\right) \leq \exp\left(-\phi(n)t\right) \tag{1.2.16}$$

για κάθε $t \geq 1$;

Όπως θα δούμε, αυτό το πρόβλημα σχετίζεται με τις κεντρικές οριακές ιδιότητες των ισοτροπικών κυρτών σωμάτων. Τα τελευταία χρόνια έχει συζητηθεί η εικασία ότι ο $(n-1)$-διάστατος όγκος $f_{K,\theta}(t)$ των τομών $K \cap (\theta^\perp + t\theta)$ ενός ισοτροπικού κυρτού σώματος K με υπερεπίπεδα κάθετα σε δοθείσα διεύθυνση $\theta \in S^{n-1}$, αν τον δούμε σα συνάρτηση της απόστασης $t \geq 0$ των υπερεπιπέδων από την αρχή των αξόνων, είναι - με μεγάλη πιθανότητα - κοντά στην κανονική πυκνότητα με μέσο 0 και διασπορά L_K^2. Αυτή η εικασία μπορεί να διατυπωθεί ακριβέστερα με πολλούς διαφορετικούς τρόπους (βλέπε [17], [2]) και έχει επαληθευτεί μόνο για κάποιες ειδικές κλάσεις σωμάτων. Οι Bobkov και Koldobsky [11] (βλέπε επίσης [17]) θεώρησαν τη μέση τιμή πάνω στη σφαίρα

$$f_K(t) = \int_{S^{n-1}} f_{K,\theta}(t)\sigma(d\theta), \tag{1.2.17}$$

και έδειξαν ότι αν K είναι ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, τότε

$$\left| f_K(t) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}L_K}\exp(-t^2/(2L_K^2)) \right| \leq C\left(\frac{\sigma_K L_K}{t^2\sqrt{n}} + \frac{1}{n}\right) \tag{1.2.18}$$

για κάθε $0 < t \leq c\sqrt{n}$, όπου $c, C > 0$ είναι απόλυτες σταθερές και η παράμετρος σ_K ορίζεται από την

$$\sigma_K^2 = \frac{\text{Var}(|x|^2)}{nL_K^4}. \tag{1.2.19}$$

Εικάζεται ότι η παράμετρος σ_K φράσσεται από απόλυτη σταθερά (αυτό έχει επαληθευτεί για όλες τις ℓ_p^n-μπάλες από τους Anttila, Ball και Περυσινάκη: βλέπε [2] και [15]).

Το βασικό αποτέλεσμα του Κεφαλαίου 4 δείχνει ότι το αρχικό πρόβλημα συνδέεται στενά με τη συμπεριφορά της συνάρτησης f_K.

Θεώρημα Ζ *Έστω $1 \ll \phi(n) \ll n$ μια θετική σταθερά. Για κάθε ισοτροπικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$, οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:*

(α) *Για κάποιο $\gamma \geq 1$ και για κάθε $t \geq 1$,*

$$\mathrm{Prob}\left(\{x \in K : |x| \geq \gamma\sqrt{n}L_K t\}\right) \leq \exp\left(-\phi(n)t\right). \tag{1.2.20}$$

(β) *Για κάθε $0 < t \leq c_1(\gamma)\sqrt{\phi(n)}L_K$,*

$$f_K(t) \leq \frac{c_2}{L_K}\exp\left(-t^2/(c_3^2(\gamma)L_K^2)\right), \tag{1.2.21}$$

όπου $c_i(\gamma) \simeq \gamma$.
(γ) *Για κάθε $2 \leq q \leq c_4\phi(n)$,*

$$I_q(K) = \left(\int_K |x|^q dx\right)^{1/q} \leq c_5(\gamma)\sqrt{n}L_K, \tag{1.2.22}$$

όπου $c_5(\gamma) \simeq \gamma$.

Με λίγα λόγια, ο όγκος ενός ισοτροπικού κυρτού σώματος που βρίσκεται έξω από μια μπάλα ακτίνας $\sqrt{n}L_K$ πέφτει «απότομα» αν και μόνο αν η f_K είναι υποκανονική σε ένα «μεγάλο αρχικό διάστημα». Επιπλέον, οι δύο αυτές συνθήκες είναι ισοδύναμες με το να ζητήσουμε οι ροπές I_q της Ευκλείδειας νόρμας να παραμένουν σταθερές και περίπου ίσες με $\sqrt{n}L_K$ για μεγάλες τιμές του q. Η ακριβής εξάρτηση των σταθερών $c(\gamma)$ σε καθεμία από τις συνεπαγωγές του θεωρήματος θα γίνει φανερή στις §4.2 και §4.3.

Δεν γνωρίζουμε αν το πρόβλημα έχει καταφατική απάντηση. Όμως, ισχύει το εξής:

Θεώρημα Η *Έστω K ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\mathrm{Prob}\left(\{x \in K : |x| \geq C\sqrt{n}L_K t\}\right) \leq \exp\left(-\phi(K)t\right) \tag{1.2.23}$$

για κάθε $t \geq 1$, όπου

$$\phi(K) = \min\{\log\left(n^2/\mathrm{Var}(|x|^2)\right), \log n\}, \tag{1.2.24}$$

και $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Δεν είναι δύσκολο να ελέγξουμε ότι αν $\sigma_K = O(1)$ τότε $\phi(K) \simeq \log n$, οπότε

$$\mathrm{Prob}\left(\{x \in K : |x| \geq C_1 L_K\sqrt{n}t\}\right) \leq n^{-t}, \tag{1.2.25}$$

για κάθε $t \geq 1$, όπου $C_1 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

1.2.3 Τοπικές μορφές της ανισότητας Aleksandrov-Fenchel

Αφετηρία του Κεφαλαίου 5 είναι μια ανισότητα των Marcus και Lopes [40] για συμμετρικές συναρτήσεις θετικών πραγματικών αριθμών. Η i-στή στοιχειώδης συμμετρική συνάρτηση $E_i(x)$ μιας n-άδας $x=(x_1,\dots,x_n)$ θετικών πραγματικών αριθμών ορίζεται από τις $E_0(x)=1$ και

$$E_i(x)=\sum_{1\leq j_1<\cdots<j_i\leq n} x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_i} \quad , \quad 1\leq i\leq n.$$

Ειδικότερα, $E_1(x)=\sum_{i=1}^n x_i$ και $E_n(x_1,\dots,x_n)=\prod_{i=1}^n x_i$. Με αυτό το συμβολισμό, για κάθε $i=1,\dots,n$ και για οποιεσδήποτε θετικές n-άδες x,y έχουμε

$$\frac{E_i(x+y)}{E_{i-1}(x+y)}\geq \frac{E_i(x)}{E_{i-1}(x)}+\frac{E_i(y)}{E_{i-1}(y)}. \tag{1.2.26}$$

Τυπική συνέπεια της ανισότητας αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου και της (1.2.26) είναι η ανισότητα

$$[E_i(x+y)]^{1/i}\geq [E_i(x)]^{1/i}+[E_i(y)]^{1/i} \tag{1.2.27}$$

(βλέπε [10] (§1.33 και §1.34) για αποδείξεις και επεκτάσεις των παραπάνω.)

Μια ανισότητα του Bergstrom [5], που είναι το ανάλογο της (1.2.26) για πίνακες (βλέπε επίσης [10], §2.17), ισχυρίζεται ότι αν A και B είναι δύο συμμετρικοί θετικά ορισμένοι πίνακες και αν A_i,B_i είναι οι υποπίνακες που προκύπτουν αν διαγράψουμε την i-στή γραμμή και στήλη, τότε

$$\frac{\det(A+B)}{\det(A_i+B_i)}\geq \frac{\det(A)}{\det(A_i)}+\frac{\det(B)}{\det(B_i)}. \tag{1.2.28}$$

Η τελευταία ανισότητα έχει γενικευτεί από τον Ky Fan [24] στη μορφή

$$\left(\frac{\det(A+B)}{\det(A_k+B_k)}\right)^{1/k}\geq \left(\frac{\det(A)}{\det(A_k)}\right)^{1/k}+\left(\frac{\det(B)}{\det(B_k)}\right)^{1/k}, \tag{1.2.29}$$

όπου A_k είναι ο υποπίνακας του A που προκύπτει αν διαγράψουμε k γραμμές και τις αντίστοιχες στήλες του A. Στην περίπτωση $k=n$, αναγόμαστε στην ανισότητα του Minkowski $[\det(A+B)]^{1/n}\geq [\det A]^{1/n}+[\det B]^{1/n}$.

Υπάρχει αξιοσημείωτη αναλογία ανάμεσα σε ανισότητες για συμμετρικές συναρτήσεις (ή ορίζουσες συμμετρικών πινάκων) και ανισότητες για τους μεικτούς όγκους κυρτών σωμάτων. Ειδικότερα, το ανάλογο της (1.2.27) ή της (1.2.29) στη θεωρία Brunn-Minkowski είναι η ανισότητα

$$W_i(A+B)^{1/(n-i)}\geq W_i(A)^{1/(n-i)}+W_i(B)^{1/(n-i)} \quad , \quad i=0,\dots,n-1 \tag{1.2.30}$$

που ισχύει για κάθε ζευγάρι κυρτών σωμάτων A και B στον $\mathbb{R}^n$. Η τελευταία ανισότητα είναι συνέπεια της ανισότητας Aleksandrov-Fenchel (βλέπε §1.1 για τον ορισμό των quermassintegrals $W_i(\cdot)$ και τη σχετική θεωρία).

Με αφορμή αυτές τις αναλογίες, ο Milman ρώτησε αν υπάρχει το ανάλογο της (1.2.26) ή της (1.2.28) στη θεωρία των μεικτών όγκων. Όπως θα δούμε στην επόμενη παράγραφο, μπορεί κανείς να δείξει την τελείως αντίστοιχη πρόταση όταν το B είναι μπάλα:

Θεώρημα Θ *Έστω A ένα κυρτό σώμα και B μια μπάλα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\frac{W_i(A+B)}{W_{i+1}(A+B)} \geq \frac{W_i(A)}{W_{i+1}(A)} + \frac{W_i(B)}{W_{i+1}(B)} \tag{1.2.31}$$

για κάθε $i \in \{0, \dots, n-1\}$.

Η περίπτωση $i = 0$ αυτού του θεωρήματος έχει ήδη εμφανιστεί στη βιβλιογραφία. Στο [23] διατυπώνεται το ερώτημα αν αυτή η ανισότητα ισχύει για τυχόν ζευγάρι μη κενών συμπαγών κυρτών συνόλων A και B. Επίσης αναφέρεται ότι η (1.2.31) προκύπτει από την ανισότητα Aleksandrov-Fenchel όταν $i = 0$ και το B είναι μπάλα.

Η απάντηση στο γενικό ερώτημα είναι αρνητική (βλέπε [26]).

Θεώρημα Ι *Η ανισότητα*

$$\frac{W_i(A+B)}{W_{i+1}(A+B)} \geq \frac{W_i(A)}{W_{i+1}(A)} + \frac{W_i(B)}{W_{i+1}(B)} \tag{1.2.32}$$

ισχύει για κάθε ζευγάρι κυρτών σωμάτων A και B στον $\mathbb{R}^n$ αν και μόνο αν $i = n-1$ ή $i = n-2$.

Παρουσιάζει όμως ενδιαφέρον το να χαρακτηρίσει κανείς την κλάση $\mathcal{B}$ των συμπαγών κυρτών υποσυνόλων B του $\mathbb{R}^n$ για τα οποία η (1.2.32) ισχύει για κάθε κυρτό σώμα A. Ειδικότερα, αν τα ευθύγραμμα τμήματα ανήκουν σε αυτήν την κλάση, τότε παίρνοντας $i = 0$, $A = K$, και $B = [-\theta, \theta]$ για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ βλέπουμε ότι

$$\frac{A(P_{\theta^\perp}(K))}{|P_{\theta^\perp}(K)|} \leq \frac{A(K)}{|K|} \tag{1.2.33}$$

για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$, όπου $P_{\theta^\perp}$ είναι η ορθογώνια προβολή στον $\theta^\perp$ και $A(\cdot)$ είναι η επιφάνεια στην κατάλληλη διάσταση. Οδηγούμαστε έτσι στο εξής ισοπεριμετρικό πρόβλημα:

Πρόβλημα 1: *Έστω $\mathcal{A}$ η κλάση όλων των κυρτών σωμάτων που η προβολή τους στον E είναι δεδομένο κυρτό σώμα A (αυτή είναι η canal class του A με την ορολογία του [56]). Είναι σωστό ότι το infimum των λόγων $A(K)/|K|$ πάνω από όλα τα $K \in \mathcal{A}$ «πιάνεται» για έναν κύλινδρο «άπειρου μήκους» στην $\mathcal{A}$;*

Παρουσιάζουμε δύο προσεγγίσεις σε αυτό το πρόβλημα. Η πρώτη βασίζεται σε μια τοπική έκδοση των ανισοτήτων Aleksandrov-Fenchel για τα quermassintegrals ενός κυρτού σώματος. Με αυτόν τον όρο εννοούμε ένα σύστημα ανισοτήτων για τα quermassintegrals του σώματος και τυχούσας $(n-1)$-διάστατης προβολής του, οι οποίες με ολοκλήρωση στην κατάλληλη πολλαπλότητα Grassmann δίνουν τις κλασικές ανισότητες $W_i(K)^2 \geq W_{i+1}(K)W_{i-1}(K)$ με το κόστος μιας σταθεράς. Η ακριβής διατύπωση είναι η εξής.

Θεώρημα Κ *Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και έστω E ένας $(n-1)$-διάστατος υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\frac{W_{i+1}(K)}{2W_i(K)} \leq \frac{W_i'(P_E(K))}{W_{i-1}'(P_E(K))} \leq \frac{2W_i(K)}{W_{i-1}(K)} \tag{1.2.34}$$

για κάθε $i \in \{1, \ldots, n-1\}$.

Στο παραπάνω θεώρημα, ο τόνος στο W_i' σημαίνει ότι τα quermassintegrals του $P_E(K)$ θεωρούνται στην κατάλληλη διάσταση $n-1$. Η πιο ενδιαφέρουσα περίπτωση είναι όταν $i=1$. Τότε, από το Θεώρημα Κ βλέπουμε ότι

$$\frac{A(P_E(K))}{|P_E(K)|} \leq \frac{2(n-1)}{n}\frac{A(K)}{|K|}, \tag{1.2.35}$$

για κάθε $(n-1)$-διάστατο υπόχωρο E. Όπως αποδείχτηκε τελικά στο [26], η ανισότητα αυτή είναι βέλτιστη (δηλαδή, η απάντηση στο Πρόβλημα 1 είναι αρνητική).

Η δεύτερη προσέγγισή μας, που είναι πιο στοιχειώδης, βασίζεται σε μια τοπική έκδοση της ανισότητας Loomis-Whitney για τις προβολές ενός κυρτού σώματος σε υποχώρους συντεταγμένων.

Ένα άλλο ερώτημα που σχετίζεται με τα παραπάνω είναι το εξής:

Πρόβλημα 2: *Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $t>0$, θεωρούμε την t-επέκταση $K_t := K + tB_2^n$ του K. Είναι σωστό ότι ο λόγος $|K_t|/|K|$ μειώνεται αν προβάλουμε σε τυχόντα υπόχωρο E του $\mathbb{R}^n$;*

Είναι φανερό ότι καταφατική απάντηση στην περίπτωση $\dim(E) = n-1$ αρκεί για τη γενική περίπτωση. Αυτό που είμαστε σε θέση να δείξουμε είναι το εξής.

Θεώρημα Λ *Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και έστω E ένας $(n-1)$-διάστατος υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\frac{|P_E(K) + tB_E|}{|P_E(K)|} \leq \frac{|K + 2tB_2^n|}{|K|} \tag{1.2.36}$$

για κάθε $t>0$.

Σημείωση. Κάποια από τα αποτελέσματα αυτής της εργασίας έχουν ήδη δημοσιευτεί. Πιο συγκεκριμένα:

(α) Τα αποτελέσματα της Παραγράφου 2.5 είναι το αντικείμενο της εργασίας

G. Paouris: *On the isotropic constant of non-symmetric convex bodies*, Geometric Aspects of Functional Analysis (Milman-Schechtman eds.), Lecture Notes in Mathematics **1745**, Springer, Berlin (2000), 238-243.

(β) Τα αποτελέσματα της Παραγράφου 3.2 είναι το αντικείμενο της εργασίας

G. Paouris: *Ψ_2-estimates for linear functionals on zonoids*, Geometric Aspects of Functional Analysis (Milman-Schechtman eds.), Lecture Notes in Mathematics **1807**, Springer, Berlin (2003), 211-222.

(γ) Τα αποτελέσματα της Παραγράφου 5.2 είναι το αντικείμενο της εργασίας

A. Giannopoulos, M. Hartzoulaki and G. Paouris: *On a local version of the Aleksandrov-Fenchel inequality for the quermassintegrals of a convex body*, Proc. Amer. Math. Soc. **130** (2002), 2403-2412.

Κεφάλαιο 2

Βασικές εκτιμήσεις

2.1 Ανισότητες τύπου Khintchine για πολυώνυμα σε κυρτά σώματα

2.1.1 Γραμμικά συναρτησοειδή και το Λήμμα του Borell

Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με όγκο $|K| = 1$. Για κάθε $p > 0$ και για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ ορίζουμε

$$I_p(K,\theta) = \left(\int_K |\langle x, \theta \rangle|^p dx \right)^{1/p}. \tag{2.1.1}$$

Η συμπεριφορά των γραμμικών συναρτησοειδών $x \mapsto \langle x, \theta \rangle$ πάνω στο K περιγράφεται από την επόμενη Πρόταση.

Πρόταση 2.1.1 *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $c > 0$ με την ακόλουθη ιδιότητα: Αν K είναι ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με όγκο $|K| = 1$, και αν $\theta \in \mathbb{R}^n$, τότε γιά κάθε $p > 1$ ισχύει η ανισότητα*

$$I_p(K,\theta) \leq cpI_1(K,\theta). \tag{2.1.2}$$

Η απόδειξη βασίζεται στο Λήμμα του Borell (βλέπε [48]):

Λήμμα 2.1.1 *Έστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με όγκο $|K| = 1$. Υποθέτουμε ότι A είναι ένα συμμετρικό κυρτό σύνολο στον $\mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $|K \cap A| = \theta > 1/2$. Τότε, γιά κάθε $t > 1$ έχουμε*

$$|(\mathbb{R}^n \setminus tA) \cap K| \leq \theta \left(\frac{1-\theta}{\theta} \right)^{(t+1)/2}. \tag{2.1.3}$$

□

Για την απόδειξη της Πρότασης 2.1.1 θέτουμε $I := I_1(K,\theta)$ και

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n : |\langle x,\theta\rangle| \leq 3I\}. \tag{2.1.4}$$

Το A είναι συμμετρικό κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, και από την ανισότητα του Markov,

$$|A \cap K| \geq 2/3. \tag{2.1.5}$$

Παρατηρούμε ότι $\{x \in K : |\langle x,\theta\rangle| \geq t\} = K \cap \big(\mathbb{R}^n \setminus (t/3I)A\big)$, και γράφουμε

$$\begin{aligned} \int_K |\langle x,\theta\rangle|^p dx &= \int_0^{3I} pt^{p-1}|K \cap (\mathbb{R}^n \setminus (t/3I)A)|dt \\ &\quad + \int_{3I}^{\infty} pt^{p-1}|K \cap (\mathbb{R}^n \setminus (t/3I)A)|dt. \end{aligned}$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα φράσσεται από

$$\int_0^{3I} pt^{p-1}dt = (3I)^p, \tag{2.1.6}$$

ενώ για το δεύτερο κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $t = 3Is$ και χρησιμοποιώντας το Λήμμα του Borell παίρνουμε

$$\begin{aligned} \int_{3I}^{\infty} pt^{p-1}|K \cap (\mathbb{R}^n \setminus (t/3I)A)|dt &= (3I)^p \int_1^{\infty} ps^{p-1}|K \cap (\mathbb{R}^n \setminus sA)|ds \\ &\leq (3I)^p \int_1^{\infty} ps^{p-1}2^{-s/2}ds. \end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω και εκτιμώντας το τελευταίο ολοκλήρωμα, παίρνουμε

$$\int_K |\langle x,\theta\rangle|^p dx \leq (3I)^p\big[1 + (c_1p)^p\big] \tag{2.1.7}$$

για κάποια απόλυτη σταθερά $c_1 > 0$, απ' όπου έπεται η (2.1.2). □

Η ανισότητα της Πρότασης 2.1.1 διατυπώνεται στην εξής ισοδύναμη μορφή:

Πρόταση 2.1.2 *Έστω K κυρτό σώμα όγκου 1. Για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ ισχύει*

$$\int_K \exp(|\langle x,\theta\rangle|/CI_1(K,\theta))dx \leq 2, \tag{2.1.8}$$

όπου $C > 0$ απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη: Αναπτύσσουμε το ολοκλήρωμα και επιλέγουμε τη σταθερά C στο τέλος. Από την Πρόταση 2.1.1 έχουμε

$$\int_K \exp(|\langle x,\theta\rangle|/CI_1(K,\theta))dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\int_K \frac{|\langle x,\theta\rangle|^k}{C^kI_1(K,\theta)^k}dx$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \quad 1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{ckI_1(K,\theta)}{CI_1(K,\theta)}\right)^k\\
&\leq \quad 1+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{ck}{C(k!)^{1/k}}\right)^k\\
&\leq \quad 1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\leq 2,
\end{aligned}
$$

αν επιλέξουμε $C = 3ec$. □

Πόρισμα 2.1.1 *Έστω K κυρτό σώμα όγκου 1. Για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ και κάθε $s > 0$ ισχύει*

$$\mathrm{Prob}\,(x \in K : |\langle x, \theta\rangle| \geq CI_1(K,\theta)s) \leq 2e^{-s}, \tag{2.1.9}$$

όπου $C > 0$ η σταθερά της Πρότασης 2.1.2. □

2.1.2 Βέλτιστες ανισότητες για πολυώνυμα βαθμού d

Συμβολίζουμε με $\mathcal{P}_{d,n}$ το χώρο των πολυωνύμων $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ βαθμού μικρότερου ή ίσου από d. Τα αποτελέσματα της προηγούμενης παραγράφου γενικεύονται ως εξής: για κάθε $0 \leq q, r \leq \infty$ υπάρχει σταθερά $c_{q,r} > 0$ που εξαρτάται μόνο από τα q, r και d, τέτοια ώστε

$$\left(\int_K |f(x)|^q dx\right)^{1/q} \leq c_{q,r}\left(\int_K |f(x)|^r dx\right)^{1/r} \tag{2.1.10}$$

για κάθε $f \in \mathcal{P}_{d,n}$ και κάθε κυρτό σώμα K όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Εκτιμήσεις αυτού του είδους αποδείχθηκαν πρώτα από τον Bourgain [8] και, αργότερα, από τον Bobkov [7].

Πρόσφατα, οι Carbery και Wright [20] έδωσαν πλήρη απάντηση στο πρόβλημα της εξάρτησης της σταθεράς $c_{q,r}$ από τα q, r και d. Για την ακριβή διατύπωση του θεωρήματός τους εισάγουμε κάποιο συμβολισμό: αν $f \in \mathcal{P}_{d,n}$, ορίζουμε

$$f^{\#}(x) = |f(x)|^{1/d}. \tag{2.1.11}$$

Για κάθε $q > 0$ και για κάθε κυρτό σώμα K όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ θεωρούμε την q-νόρμα

$$\|f^{\#}\|_q = \left(\int_K f^{\#}(x)^q dx\right)^{1/q} = \left(\int_K |f(x)|^{q/d} dx\right)^{1/q}. \tag{2.1.12}$$

Τέλος, θέτουμε $\|f^{\#}\|_\infty$ τη συνήθη ∞-νόρμα της $f^{\#}$, και

$$\|f^{\#}\|_0 = \exp\left(\int_K \log f^{\#}(x) dx\right). \tag{2.1.13}$$

Θεώρημα 2.1.1 *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε κυρτό σώμα K όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$, για κάθε πολυώνυμο $f \in \mathcal{P}_{d,n}$ και για κάθε $0 \leq r \leq q \leq \infty$,*

$$\|f^{\#}\|_q \leq C \frac{[nB(n,q+1)]^{1/q}}{[nB(n,r+1)]^{1/r}} \|f^{\#}\|_r, \tag{2.1.14}$$

όπου B η συνάρτηση Βήτα. □

Σημείωση: Η ποσότητα $nB(n,q+1)$ ισούται με $-\int_0^1 s^q d(1-s)^n$, και στις περιπτώσεις $q=0$ και $q=\infty$ θεωρούμε ότι $[nB(n,q+1)]^{1/q} = 1/n$ και 1 αντίστοιχα. Με αυτή τη σύμβαση, η ανισότητα του Θεωρήματος 2.1.1 ισχύει για όλα τα ζευγάρια $r \leq q$ στο $[0,\infty]$. Διακρίνοντας περιπτώσεις και εκτιμώντας τη συνάρτηση Βήτα, μπορούμε να διατυπώσουμε το Θεώρημα 2.1.1 στην εξής μορφή.

Θεώρημα 2.1.2 *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε κυρτό σώμα K όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ και για κάθε πολυώνυμο $f \in \mathcal{P}_{d,n}$ ισχύουν τα εξής:*
(α) *Αν $n \leq r \leq q \leq \infty$, τότε*

$$\|f^{\#}\|_q \leq C \|f^{\#}\|_r. \tag{2.1.15}$$

(β) *Αν $0 \leq r \leq n \leq q \leq \infty$, τότε*

$$\|f^{\#}\|_q \leq C \frac{n}{\max\{r,1\}} \|f^{\#}\|_r. \tag{2.1.16}$$

(γ) *Αν $0 \leq r \leq q \leq n$, τότε*

$$\|f^{\#}\|_q \leq C \frac{\max\{q,1\}}{\max\{r,1\}} \|f^{\#}\|_r. \tag{2.1.17}$$

Ειδικότερα,

$$\|f^{\#}\|_q \leq C \frac{q}{r} \|f^{\#}\|_r \tag{2.1.18}$$

αν $1 \leq r \leq q < \infty$. □

Θα εφαρμόσουμε το Θεώρημα 2.1.2 για γραμμικά συναρτησοειδή $f(x) = \langle x, \theta \rangle$ και για το πολυώνυμο $f(x) = |x|^2$. Για κάθε $p > 0$ ορίζουμε

$$I_p(K) = \left(\int_K |x|^p dx \right)^{1/p}. \tag{2.1.19}$$

Πρόταση 2.1.3 *Έστω K κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ και έστω $p, q \geq 1$. Τότε,*

$$I_{pq}(K,\theta) \leq C q I_p(K,\theta) \tag{2.1.20}$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$, και

$$I_{pq}(K) \leq C q I_p(K), \tag{2.1.21}$$

όπου C η σταθερά του Θεωρήματος 2.1.2.

Απόδειξη: (α) Έστω $\theta \in S^{n-1}$. Θεωρούμε το γραμμικό συναρτησοειδές $f(x) = \langle x, \theta \rangle$. Έχουμε $f^{\#}(x) = |\langle x, \theta \rangle|$, οπότε το Θεώρημα 2.1.2 μας δίνει

$$\|f^{\#}\|_{pq} \leq Cq\|f^{\#}\|_{p}, \tag{2.1.22}$$

δηλαδή

$$I_{pq}(K,\theta) \leq CqI_p(K,\theta). \tag{2.1.23}$$

(β) Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 2.1.2 για το πολυώνυμο $f(x) = |x|^2$. Έχουμε $f^{\#}(x) = |x|$ και $\|f^{\#}\|_{pq} \leq Cq\|f^{\#}\|_p$. □

Οι ανισότητες αυτές μας επιτρέπουν να γενικεύσουμε το Πόρισμα 2.1.1. Γενικότερα, για κάθε πολυώνυμο $f \in \mathcal{P}_{d,n}$ έχουμε το εξής.

Λήμμα 2.1.2 *Έστω K κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ και έστω πολυώνυμο $f \in \mathcal{P}_{d,n}$. Τότε,*

$$\mathrm{Prob}\left(x \in K : f^{\#}(x) \geq 3C\|f^{\#}\|_q s\right) \leq e^{-qs} \tag{2.1.24}$$

για κάθε $q \geq 1$ και $s \geq 1$, όπου C η σταθερά του Θεωρήματος 2.1.2.

Απόδειξη: Από το Θεώρημα 2.1.2, για κάθε $p \geq 1$ έχουμε

$$\int_K f^{\#}(x)^{qp}dx \leq (Cp)^{qp}\|f^{\#}\|_q^{qp}. \tag{2.1.25}$$

Από την ανισότητα του Markov,

$$(3C\|f^{\#}\|_q s)^{qp}\mathrm{Prob}\left(x \in K : f^{\#}(x) \geq 3C\|f^{\#}\|_q s\right) \leq (Cp)^{qp}\|f^{\#}\|_q^{qp}, \tag{2.1.26}$$

δηλαδή

$$\mathrm{Prob}\left(x \in K : f^{\#}(x) \geq 3C\|f^{\#}\|_q s\right) \leq \left(\frac{p}{3s}\right)^{qp}. \tag{2.1.27}$$

Επιλέγοντας $p = 3s/e \geq 1$, παίρνουμε

$$\mathrm{Prob}\left(x \in K : f^{\#}(x) \geq 3C\|f^{\#}\|_q s\right) \leq e^{-3qs/e} \leq e^{-qs} \tag{2.1.28}$$

δηλαδή την (2.1.24). □

Άμεση εφαρμογή του Λήμματος 2.1.2 είναι η εξής.

Πρόταση 2.1.4 *Έστω K κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ και έστω $q \geq 1$. Τότε,*

$$\mathrm{Prob}\left(x \in K : |\langle x, \theta \rangle| \geq 3CI_q(K,\theta)s\right) \leq e^{-qs} \tag{2.1.29}$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ και $s \geq 1$, και

$$\mathrm{Prob}\left(x \in K : |x| \geq 3CI_q(K)s\right) \leq e^{-qs} \tag{2.1.30}$$

για κάθε $s \geq 1$, όπου $C > 0$ απόλυτη σταθερά. □

2.2 L_q-κεντροειδή σώματα

2.2.1 Ορισμός και βασικές ιδιότητες

Έστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με όγκο $|K| = 1$. Για κάθε $q \geq 1$ ορίζουμε το q-κεντροειδές σώμα $Z_q(K)$ του K παίρνοντας σαν συνάρτηση στήριξής του την

$$h_{Z_q(K)}(y) = I_q(K, y) := \left(\int_K |\langle x, y\rangle|^q dx\right)^{1/q}. \tag{2.2.1}$$

Όταν είναι σαφές για ποιό κυρτό σώμα μιλάμε, θα γράφουμε

$$H_q(y) := h_{Z_q(K)}(y). \tag{2.2.2}$$

Αφού $|K| = 1$, για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$ έχουμε

$$H_q(y) \leq \max_{x\in K} |\langle x, y\rangle| = H_\infty(y) := h_{\hat{K}}(y), \tag{2.2.3}$$

όπου $\hat{K} = \mathrm{co}\{K, -K\}$. Χρησιμοποιώντας και την ανισότητα του Hölder παίρνουμε:

Λήμμα 2.2.1 *Έστω K κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$Z_1(K) \subseteq Z_p(K) \subseteq Z_q(K) \subseteq \hat{K} \tag{2.2.4}$$

για κάθε $1 \leq p \leq q \leq \infty$. □

Τα q-κεντροειδή σώματα συμπεριφέρονται καλά ως προς τους γραμμικούς μετασχηματισμούς που διατηρούν τον όγκο:

Λήμμα 2.2.2 *Έστω K κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$Z_q(TK) = T(Z_q(K)) \tag{2.2.5}$$

για κάθε $T \in SL(n)$ και κάθε $q \in [1, \infty]$.

Απόδειξη: Έστω $\theta \in S^{n-1}$. Έχουμε $h_{T(Z_q(K))}(\theta) = h_{Z_q(K)}(T^*\theta)$ και

$$\begin{aligned} h^q_{Z_q(TK)}(\theta) &= \int_{TK} |\langle x, \theta\rangle|^q dx = \int_K |\langle Tx, \theta\rangle|^q dx \\ &= \int_K |\langle x, T^*\theta\rangle|^q dx = h^q_{Z_q(K)}(T^*\theta). \end{aligned}$$

Δηλαδή, $h_{Z_q(TK)}(\theta) = h_{T(Z_q(K))}(\theta)$. □

Αν $q \geq n$, τότε ουσιαστικά έχουμε $Z_q(K) \simeq \hat{K}$. Η παρατήρηση αυτή είναι άμεση συνέπεια του εξής Λήμματος.

Λήμμα 2.2.3 *Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με όγκο 1 και κέντρο βάρους το 0. Τότε, για κάθε $\theta \in S^{n-1}$,*

$$\int_K |\langle x,\theta\rangle|^q dx \geq \frac{\Gamma(q+1)\Gamma(n)}{2e\Gamma(q+n+1)} \max\left\{h_K^q(\theta), h_K^q(-\theta)\right\}. \tag{2.2.6}$$

Απόδειξη: Θεωρούμε τη συνάρτηση $f_{K,\theta}(t) = |K \cap (\theta^\perp + t\theta)|$. Από την αρχή του Brunn, η $f_\theta^{1/(n-1)}$ είναι κοίλη. Έπεται ότι

$$f_{K,\theta}(t) \geq \left(1 - \frac{t}{h_K(\theta)}\right)^{n-1} f_{K,\theta}(0) \tag{2.2.7}$$

για κάθε $t \in [0, h_K(\theta)]$. Άρα,

$$\begin{aligned}
\int_K |\langle x,\theta\rangle|^q dx &= \int_0^{h_K(\theta)} t^q f_{K,\theta}(t)dt + \int_0^{h_K(-\theta)} t^q f_{K,-\theta}(t)dt \\
&\geq \int_0^{h_K(\theta)} t^q \left(1 - \frac{t}{h_K(\theta)}\right)^{n-1} f_{K,\theta}(0)dt \\
&\quad + \int_0^{h_K(-\theta)} t^q \left(1 - \frac{t}{h_K(-\theta)}\right)^{n-1} f_{K,\theta}(0)dt \\
&= f_{K,\theta}(0)\left(h_K^{q+1}(\theta) + h_K^{q+1}(-\theta)\right)\int_0^1 s^q(1-s)^{n-1}ds \\
&= \frac{\Gamma(q+1)\Gamma(n)}{\Gamma(q+n+1)} f_{K,\theta}(0)\left(h_K^{q+1}(\theta) + h_K^{q+1}(-\theta)\right) \\
&\geq \frac{\Gamma(q+1)\Gamma(n)}{2\Gamma(q+n+1)} f_{K,\theta}(0)\left(h_K(\theta) + h_K(-\theta)\right)\cdot \max\left\{h_K^q(\theta), h_K^q(-\theta)\right\}.
\end{aligned}$$

Αφού το K έχει κέντρο βάρους το 0, έχουμε $\|f_{K,\theta}\|_\infty \leq e f_{K,\theta}(0)$ (βλέπε [46]), επομένως

$$1 = |K| = \int_{-h_K(-\theta)}^{h_K(\theta)} f_{K,\theta}(t)dt \leq e\left(h_K(\theta) + h_K(-\theta)\right) f_{K,\theta}(0). \tag{2.2.8}$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Πόρισμα 2.2.1 *Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με όγκο 1 και κέντρο βάρους το 0. Τότε, για κάθε $q \geq n$ έχουμε*

$$c\hat{K} \subseteq Z_q(K) \subseteq \hat{K} \tag{2.2.9}$$

όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη: Από τα Λήμματα 2.2.1 και 2.2.3, για κάθε $q \geq n$ έχουμε

$$\begin{aligned} h_{Z_q(K)}(\theta) &\geq h_{Z_n(K)}(\theta) \\ &\geq \left[\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(n)}{2e\Gamma(2n+1)}\right]^{1/n} \max\left\{h_K(\theta), h_K(-\theta)\right\} \end{aligned}$$

Ο συντελεστής είναι ασυμπτωτικά ίσος με

$$\frac{1}{\sqrt[n]{2en}}\binom{2n}{n}^{-1/n} \geq \frac{1}{4\sqrt[n]{2en}} \geq c \tag{2.2.10}$$

όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά. Δηλαδή, $h_{Z_q(K)} \geq ch_{\hat{K}}$ για κάθε $q \geq n$. □

Σημείωση. Τα q-κεντροειδή σώματα έχουν εμφανιστεί στη βιβλιογραφία με έναν κάπως διαφορετικό ορισμό. Αν $|K| = 1$ και $1 \leq q \leq \infty$, το σώμα $\Gamma_q(K)$ ορίζεται από την

$$h_{\Gamma_q(K)}(y) = \left(\frac{1}{c_{n,q}}\int_K |\langle x, y\rangle|^q dx\right)^{1/q}, \tag{2.2.11}$$

όπου

$$c_{n,q} = \frac{\omega_{n+q}}{\omega_2\omega_n\omega_{q-1}}. \tag{2.2.12}$$

Δηλαδή, $Z_q(K) = c_{n,q}^{1/q}\Gamma_q(K)$. Η διαφορετική κανονικοποίηση του όγκου επιλέγεται έτσι ώστε να ισχύει η ισότητα

$$\Gamma_q(B_2^n) = B_2^n \tag{2.2.13}$$

για κάθε q. Οι Lutwak, Yang και Zhang (βλέπε [45]) έχουν αποδείξει την εξής ανισότητα για τον όγκο των q-κεντροειδών σωμάτων.

Θεώρημα 2.2.1 *Έστω K ένα κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $q \geq 1$,*

$$|\Gamma_q(K)| \geq 1, \tag{2.2.14}$$

με ισότητα αν και μόνο αν το K είναι ελλειψοειδές όγκου 1 με κέντρο συμμετρίας το 0. □

Παίρνοντας υπ' όψιν τη σταθερά $c_{n,q}$ καταλήγουμε στο εξής συμπέρασμα.

Πρόταση 2.2.1 *Έστω K κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$|Z_q(K)|^{1/n} \geq c\sqrt{\frac{q}{n}} \tag{2.2.15}$$

για κάθε $1 \leq q \leq n$, όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά. □

2.2.2 Γενικευμένο μέσο πλάτος των q-κεντροειδών σωμάτων

Έστω V ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, και έστω $\|\cdot\|$ η νόρμα που επάγει το V στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $q \geq 1$ ορίζουμε

$$M_q := M_q(V) = \left(\int_{S^{n-1}} \|\theta\|^q \sigma(d\theta) \right)^{1/q}. \tag{2.2.16}$$

Οι παράμετροι M_q μελετήθηκαν από τους Litvak, Milman και Schechtman [44].

Θεώρημα 2.2.2 *Έστω V ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και έστω $\|\cdot\|$ η επαγόμενη νόρμα. Συμβολίζουμε με b τη μικρότερη θετική σταθερά για την οποία η ανισότητα $\|x\| \leq b|x|$ ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\max\left\{ M_1, c_1 \frac{b\sqrt{q}}{\sqrt{n}} \right\} \leq M_q \leq \max\left\{ 2M_1, c_2 \frac{b\sqrt{q}}{\sqrt{n}} \right\} \tag{2.2.17}$$

για κάθε $q \in [1,n]$, όπου c_1, c_2 είναι απόλυτες θετικές σταθερές.

Απόδειξη: Η συνάρτηση $\|x\| : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ είναι Lipschitz με σταθερά b. Από τη σφαιρική ισοπεριμετρική ανισότητα (βλέπε [48]) έπεται ότι

$$\sigma\big(x \in S^{n-1} : \big|\, \|x\| - M_1 \,\big| > t\big) \leq 2\exp(-ct^2 n/b^2) \tag{2.2.18}$$

για κάθε $t > 0$. Επομένως,

$$\begin{aligned} \int_{S^{n-1}} \big|\, \|x\| - M_1 \,\big|^q \sigma(dx) &\leq 2q \int_0^\infty t^{q-1} \exp(-ct^2 n/b^2) dt \\ &= \left(\frac{b}{\sqrt{cn}} \right)^q 2q \int_0^\infty s^{q-1} \exp(-s^2) ds \\ &\leq \left(C \frac{b\sqrt{q}}{\sqrt{n}} \right)^q, \end{aligned}$$

για κάποια απόλυτη σταθερά $C > 0$. Από την τριγωνική ανισότητα στον $L^q(S^{n-1})$ έπεται ότι

$$M_q - M_1 \leq \big\| \, \|x\| - M_1 \big\|_q \leq C \frac{b\sqrt{q}}{\sqrt{n}}, \tag{2.2.19}$$

δηλαδή

$$M_q \leq 2\max\left\{ M_1, C \frac{b\sqrt{q}}{\sqrt{n}} \right\}. \tag{2.2.20}$$

Για την αριστερή ανισότητα παρατηρούμε ότι ο $1/b$ είναι το ελάχιστο πλάτος του V, δηλαδή υπάρχει $z \in S^{n-1}$ τέτοιο ώστε $V \subset \{y : |\langle y, z\rangle| \leq 1/b\}$. Έπεται ότι

$$\{x \in S^{n-1} : \|x\| \geq t\} \supset C_t := \{x \in S^{n-1} : |\langle x, z\rangle| \geq t/b\} \tag{2.2.21}$$

για κάθε $t>0$. Απλός υπολογισμός δείχνει ότι

$$\sigma(C_t) \geq c\sqrt{n}\frac{t}{b}\exp(-cnt^2/b^2) \tag{2.2.22}$$

για κάθε $t \leq b/3$, όπου $c>0$ απόλυτη σταθερά. Πράγματι,

$$\sigma(C_t) = \frac{2}{I_{n-2}}\int_{\varepsilon}^{\pi/2}\cos^{n-2}(u)du,$$

όπου $\varepsilon = \arcsin(t/b)$ και $I_k = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^k(u)du$. Αφού $I_k \simeq 1/\sqrt{k}$ (βλέπε [48]), έχουμε

$$\sigma(C_t) \geq c\sqrt{n}\int_{\varepsilon}^{\varepsilon_1}\cos^{n-2}(u)du \geq c(\varepsilon_1-\varepsilon)\sqrt{n}\cos^{n-2}(\varepsilon_1)$$

για κάθε $\varepsilon_1 \in (\varepsilon, \pi/2)$. Επομένως, αν $t \leq b/3$ μπορούμε να επιλέξουμε $\varepsilon_1 = \arcsin(2t/b)$, το οποίο οδηγεί στην (2.2.22). Τότε,

$$\begin{aligned} M_q &= \left(q\int_0^{\infty} t^{q-1}\sigma(\{x : \|x\| \geq t\})dt\right)^{1/q} \\ &\geq \left(q\int_0^{\infty} t^{q-1}\sigma(C_t)dt\right)^{1/q} \\ &\geq s[\sigma(C_s)]^{1/q} \\ &\geq s\left(\frac{c\sqrt{n}s}{b}\right)^{1/q}\exp(-cns^2/qb^2) \end{aligned}$$

για κάθε $s \leq b/3$, και επιλέγοντας $s = b\sqrt{q}/3\sqrt{n}$ παίρνουμε το ζητούμενο. □

Παρατηρήσεις (α) Η μεταβολή συμπεριφοράς της παραμέτρου M_q συμβαίνει όταν $q \simeq n(M_1/b)^2$. Η ποσότητα αυτή συνδέεται άμεσα με το Θεώρημα του Dvoretzky. Για συντομία, θα ονομάζουμε *αριθμό Dvoretzky* του V το μεγαλύτερο ακέραιο $k = k(V)$ για τον οποίο

$$\nu_{n,k}\left(E \in G_{n,k} : (M_1/2)|x| \leq \|x\| \leq 2M_1|x| \text{ για κάθε } x \in E\right) \geq \frac{1}{2},$$

όπου $G_{n,k}$ είναι η πολλαπλότητα Grassmann των k-διάστατων υποχώρων του $\mathbb{R}^n$ και $\nu_{n,k}$ είναι το Haar μέτρο πιθανότητας στην $G_{n,k}$. Δηλαδή, $k(V)$ είναι ο μεγαλύτερος φυσικός για τον οποίο η πλειοψηφία των k-διάστατων κεντρικών τομών του V είναι 4-Ευκλείδειες.

(β) Είναι φανερό ότι $M_p \leq M_q \leq b$ αν $p \leq q$. Άρα, $M_q \simeq b$ αν $q \geq n$. Δηλαδή, μια δεύτερη μεταβολή συμπεριφοράς της παραμέτρου M_q συμβαίνει στο σημείο $q=n$.

Θα εφαρμόσουμε το Θεώρημα 2.2.2 παίρνοντας σαν V το πολικό σώμα του $Z_q(K)$. Τότε, $b = R(Z_q(K))$ και $M_1 = w(Z_q(K))$. Για κάθε $p, q \geq 1$ ορίζουμε

$$w_p(Z_q(K)) = \left(\int_{S^{n-1}} h^p_{Z_q(K)}(\theta)\sigma(d\theta)\right)^{1/p}. \tag{2.2.23}$$

Τότε, το Θεώρημα 2.2.2 διατυπώνεται ως εξής.

Θεώρημα 2.2.3 *Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με όγκο 1. Για κάθε $p, q \in [1, n]$ έχουμε*

$$\begin{aligned} \max\left\{w(Z_q(K)), c_1\frac{R(Z_q(K))\sqrt{p}}{\sqrt{n}}\right\} &\leq w_p(Z_q(K)) \\ &\leq \max\left\{2w(Z_q(K)), c_2\frac{R(Z_q(K))\sqrt{p}}{\sqrt{n}}\right\}. \end{aligned}$$

Αν $p \geq n$, τότε $w_p(Z_q(K)) \simeq R(Z_q(K))$. □

Από το Θεώρημα 2.2.3 προκύπτει άμεσα ότι οι ποσότητες $w_q(Z_p(K))$ συγκρίνονται ως εξής.

Πόρισμα 2.2.2 *Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με όγκο 1. Για κάθε $q \in [1, n]$ και $1 \leq p \leq r \leq n$, έχουμε*

$$w_r(Z_q(K)) \leq c\sqrt{r/p}\, w_p(Z_q(K)), \tag{2.2.24}$$

όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά. □

2.2.3 $I_q(K)$ και $w_q(Z_q(K))$

Στην §2.1.2 ορίσαμε την ποσότητα

$$I_q := I_q(K) = \left(\int_K |x|^q dx\right)^{1/q} \tag{2.2.25}$$

για κάθε $q > 0$. Η σχέση του $I_q(K)$ με τα q-κεντροειδή σώματα του K έπεται από το εξής Λήμμα.

Λήμμα 2.2.4 *Για κάθε $q \geq 1$ και κάθε $x \in \mathbb{R}^n$,*

$$\left(\int_{S^{n-1}} |\langle x, \theta\rangle|^q \sigma(d\theta)\right)^{1/q} \simeq \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{q+n}}|x|. \tag{2.2.26}$$

Απόδειξη: Παρατηρούμε ότι

$$\int_{B_2^n} |\langle x, y\rangle|^q dy = |B_2^n|\frac{n}{n+q}\int_{S^{n-1}} |\langle x, \theta\rangle|^q \sigma(d\theta). \tag{2.2.27}$$

Από την άλλη πλευρά,

$$\begin{aligned}\int_{B_2^n}|\langle x,y\rangle|^q dy &= |x|^q\int_{B_2^n}|\langle e_1,y\rangle|^q dy\\ &= 2|B_2^{n-1}|\cdot|x|^q\int_0^1 t^q(1-t^2)^{(n-1)/2}dt\\ &= |B_2^{n-1}|\cdot|x|^q\frac{\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{q+n+2}{2}\right)}.\end{aligned}$$

Αφού $|B_2^k|=\pi^{k/2}/\Gamma\big(\frac{k+2}{2}\big)$, παίρνουμε

$$\int_{S^{n-1}}|\langle x,\theta\rangle|^q\sigma(d\theta)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{n+q}{n}\frac{\Gamma\big(\frac{q+1}{2}\big)\Gamma\big(\frac{n+2}{2}\big)}{\Gamma\big(\frac{q+n+2}{2}\big)}|x|^q. \tag{2.2.28}$$

Το αποτέλεσμα προκύπτει από τον τύπο του Stirling. □

Πρόταση 2.2.2 *Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με όγκο 1. Για κάθε $q\geq 1$,*

$$w_q(Z_q(K))\simeq\sqrt{\frac{q}{q+n}}I_q(K). \tag{2.2.29}$$

Απόδειξη: Με απλή εφαρμογή του Θεωρήματος του Fubini παίρνουμε

$$\begin{aligned}w_q(Z_q(K)) &= \left(\int_{S^{n-1}}\int_K|\langle x,\theta\rangle|^q dx\sigma(d\theta)\right)^{1/q}\\ &= \left(\int_K\int_{S^{n-1}}|\langle x,\theta\rangle|^q dx\sigma(d\theta)\right)^{1/q}\\ &= \sqrt{\frac{q}{q+n}}\left(\int_K|x|^q dx\right)^{1/q},\end{aligned}$$

δηλαδή την (2.2.29). □

2.2.4 Αριθμοί Dvoretzky των q-κεντροειδών σωμάτων

Σταθεροποιούμε μια απόλυτη σταθερά $\beta>0$ τέτοια ώστε $R^2(V)<\beta n w^2(V)$ για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα V στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε κυρτό σώμα K όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ με κέντρο βάρους το 0, ορίζουμε μια συνάρτηση $m_K:[1,\infty)\to(1,\infty)$ με

$$m_K(q)=\beta n\frac{w^2(Z_q(K))}{R^2(Z_q(K))}. \tag{2.2.30}$$

Είναι φανερό ότι η m_K παίρνει τιμές στο διάστημα $(1,\beta n]$. Θεωρούμε τα σύνολα

$$\begin{aligned}P_K &= \{q\in[1,2\beta n): q\geq m_K(q)\}\\ N_K &= \{q\in[1,2\beta n): q\leq m_K(q)\}\end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι $[\beta n, 2\beta n) \subseteq P_K$ και ότι $1 \in N_K$. Η m_K είναι συνεχής συνάρτηση και τα P_K, N_K είναι μη κενά, επομένως υπάρχει ένα ελάχιστο στοιχείο q_0 του P_K, για το οποίο ισχύει η ισότητα $m_K(q_0) = q_0$.

Λήμμα 2.2.5 *Αν $p, q \geq 1$ και $p \leq m_K(q)$, τότε*

$$w(Z_q(K)) \geq c w_p(Z_q(K)), \tag{2.2.31}$$

όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη: Από την $p \leq m_K(q)$ έχουμε

$$w(Z_q(K)) \geq R(Z_q(K))\sqrt{p}/\sqrt{\beta n}, \tag{2.2.32}$$

άρα

$$w(Z_q(K)) \geq c \max\left\{w(Z_q(K)), R(Z_q(K))\sqrt{p}/\sqrt{n}\right\} \geq w_p(Z_q(K)). \tag{2.2.33}$$

Από το Θεώρημα 2.2.3 παίρνουμε το ζητούμενο (η $\beta > 0$ είναι απόλυτη σταθερά). $\square$

Πρόταση 2.2.3 *Υπάρχουν σταθερές $c_1, c_2, c_3 > 0$ τέτοιες ώστε: αν K είναι ένα κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$, τότε ισχύουν τα εξής.*
(1) *Αν $q \in N_K$, τότε*

$$m_K(q) \geq c_1 \frac{m_K(2)}{q}. \tag{2.2.34}$$

(2) *Αν $m_K(2) > 1/c_2^2$, τότε*

$$[1, c_2\sqrt{m_K(2)}] \subset N_K. \tag{2.2.35}$$

(3) *Αν $q \in P_K$, τότε*

$$R(Z_q(K)) \geq c_2\sqrt{n} w(Z_2(K)). \tag{2.2.36}$$

Απόδειξη: (1) Αφού $q \leq m_K(q)$, από το Λήμμα 2.2.5 και το Πόρισμα 2.2.2 παίρνουμε

$$\begin{aligned} w(Z_q(K)) &\geq c w_q(Z_q(K)) \geq c' \sqrt{\frac{q}{n}} I_q(K) \\ &\geq c' \sqrt{\frac{q}{n}} I_2(K) \\ &\simeq \sqrt{q} w_2(Z_2(K)) \geq c'' \sqrt{q} w(Z_2(K)). \end{aligned}$$

Από την Πρόταση 2.1.1 βλέπουμε ότι

$$R(Z_q(K)) \leq c q R(Z_2(K)). \tag{2.2.37}$$

Άρα,

$$m_K(q) = \beta n \frac{w(Z_q(K))^2}{R(Z_q(K))^2} \geq c_1 \beta n \frac{q w(Z_2(K))^2}{q^2 R(Z_2(K))^2} = c_1 \frac{m_K(2)}{q}. \tag{2.2.38}$$

(2) Αν $q_0 = \min P_K$ έχουμε $m_K(q_0) = q_0$ και από το (1),

$$q_0^2 \geq c_1 m_K(2). \tag{2.2.39}$$

Άρα, $[1, c_2\sqrt{m_K(2)}] \subset N_K$, όπου $c_2 = \sqrt{c_1}$.
(3) Για το q_0 έχουμε $w(Z_{q_0}(K)) \simeq w_{q_0}(Z_{q_0}(K))$ από το Θεώρημα 2.2.3, άρα

$$R(Z_{q_0}(K)) = \sqrt{\beta n} \frac{w(Z_{q_0}(K))}{\sqrt{q_0}} \geq c\sqrt{n} \frac{w_{q_0}(Z_{q_0}(K))}{\sqrt{q_0}} \simeq I_{q_0}(K) \geq c I_2(K). \tag{2.2.40}$$

Όμως $I_2(K) \simeq \sqrt{n} w_2(Z_2(K)) \geq \sqrt{n} w(Z_2(K))$. Άρα,

$$R(Z_{q_0}(K)) \geq c\sqrt{n} w(Z_2(K)). \tag{2.2.41}$$

Αν $q \in P_K$ τότε $R(Z_q(K)) \geq R(Z_{q_0}(K))$, απ' όπου έπεται το ζητούμενο. □

Στην περίπτωση που το K είναι ισοτροπικό έχουμε $Z_2(K) = L_K B_2^n$, άρα ισχύουν οι $R(Z_2(K)) = w(Z_2(K)) = L_K$ και $m_K(2) \simeq n$. Επομένως, η Πρόταση 2.2.3 παίρνει την εξής μορφή.

Πρόταση 2.2.4 *Έστω K ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*
(1) Για κάθε $q \in N_K$ έχουμε $m_K(q) \geq c_1 n/q$, όπου $c_1 > 0$ απόλυτη σταθερά.
(2) $[1, c_2\sqrt{n}] \subset N_K$, όπου $c_2 > 0$ απόλυτη σταθερά.
(3) Για κάθε $q \in P_K$ έχουμε $R(Z_q(K)) \geq c_3\sqrt{n} L_K$, όπου $c_3 > 0$ απόλυτη σταθερά.
□

2.3 Τομές με υπερεπίπεδα σε σταθερή απόσταση από την αρχή των αξόνων

Για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ και $t \in \mathbb{R}$ ορίζουμε

$$E_\theta(t) = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \theta \rangle = t\}. \tag{2.3.1}$$

Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με όγκο $|K| = 1$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f_{K,\theta}(t) = |K \cap E_\theta(t)| = |K \cap (\theta^\perp + t\theta)| \tag{2.3.2}$$

και ορίζουμε $f_K : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με

$$f_K(t) = \int_{S^{n-1}} f_{K,\theta}(t)\sigma(d\theta) = \int_{S^{n-1}} |K \cap E_\theta(t)|\sigma(d\theta). \tag{2.3.3}$$

Η επόμενη Πρόταση δίνει έναν ολοκληρωτικό τύπο για την f_K (η συγκεκριμένη απόδειξη οφείλεται στους Bobkov και Koldobsky [11]).

Πρόταση 2.3.1 *Για κάθε κυρτό σώμα K όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ και για κάθε $t > 0$,*

$$f_K(t) = c_n \int_{U_K(t)} \frac{1}{|x|}\left(1 - \frac{t^2}{|x|^2}\right)^{\frac{n-3}{2}} dx, \tag{2.3.4}$$

όπου

$$c_n = \Gamma\big(\frac{n}{2}\big)/\big[\sqrt{\pi}\Gamma\big(\frac{n-1}{2}\big)\big] \simeq \sqrt{n} \tag{2.3.5}$$

και $U_K(t) = \{x \in K : |x| \geq t\}$.

Απόδειξη: Συμβολίζουμε με $\lambda_{\theta,t}$ το μέτρο Lebesgue στο υπερεπίπεδο $E_\theta(t)$. Θεωρούμε το μέτρο

$$\lambda_t = \int_{S^{n-1}} \lambda_{\theta,t}\sigma(d\theta). \tag{2.3.6}$$

Τότε, το λ_t είναι θετικό μέτρο στον $\mathbb{R}^n$ και

$$f_K(t) = \int_{S^{n-1}} \int_{E_\theta(t)} \chi_K(x) d\lambda_{\theta,t}(x)\sigma(d\theta) = \lambda_t(K). \tag{2.3.7}$$

Η πυκνότητα του λ_t είναι αναλλοίωτη ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς, δηλαδή

$$\frac{d\lambda_t}{dx} = p_t(|x|) \tag{2.3.8}$$

όπου $p_t : [t,+\infty) \to [0,+\infty)$. Για να βρούμε την p_t, υπολογίζουμε με δύο τρόπους το $\lambda_t(B(0,r))$, όπου $r > t$. Κατ' αρχήν,

$$\lambda_t(B(0,r)) = \int_{B(0,r)} p_t(|x|)dx = n\omega_n \int_t^r p_t(s)s^{n-1}ds. \tag{2.3.9}$$

Από την άλλη πλευρά, αφού η τομή της $B(0,r)$ με το υπερεπίπεδο $E_\theta(t)$ είναι μια $(n-1)$-διάστατη μπάλα ακτίνας $\sqrt{r^2 - t^2}$, παίρνουμε

$$\lambda_t(B(0,r)) = \int_{S^{n-1}} \lambda_{\theta,t}(B(0,r))\sigma(d\theta) = \omega_{n-1}(r^2 - t^2)^{(n-1)/2}. \tag{2.3.10}$$

Παραγωγίζοντας ως προς $r \geq t$, βλέπουμε ότι

$$\omega_{n-1}\frac{n-1}{2}(r^2-t^2)^{(n-3)/2}2r = n\omega_n p_t(r) r^{n-1}, \tag{2.3.11}$$

δηλαδή

$$p_t(r) = \frac{(n-1)\omega_{n-1}}{n\omega_n}\frac{(r^2-t^2)^{(n-3)/2}}{r^{n-2}}. \tag{2.3.12}$$

Άρα,

$$f_K(t) = \int_{U_K(t)} p_t(|x|)dx = \frac{(n-1)\omega_{n-1}}{n\omega_n}\int_{U_K(t)}\frac{(|x|^2-t^2)^{(n-3)/2}}{|x|^{n-2}}dx, \tag{2.3.13}$$

απ' όπου έπεται το συμπέρασμα. $\square$

Η συνάρτηση f_K σχετίζεται με το «κεντρικό οριακό πρόβλημα» (βλέπε [2]) το οποίο θα συζητήσουμε στο Κεφάλαιο 4. Για κάποιες ειδικές κλάσεις ισοτροπικών κυρτών σωμάτων, έχει αποδειχθεί ότι προσεγγίζεται από την κανονική πυκνότητα που έχει μέσο 0 και διασπορά L_K^2 (βλέπε [17] και [11]).

2.4 Ψ_α-σώματα

Σε αυτή την παράγραφο θεωρούμε ένα κυρτό σώμα K όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Αν $f : K \to \mathbb{R}$ είναι μια φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση και αν $\alpha \geq 1$, η Orlicz νόρμα $\|f\|_{\psi_\alpha}$ της f ορίζεται από την

$$\|f\|_{\psi_\alpha} = \inf\left\{t > 0 : \int_K \exp\left((|f(x)|/t)^\alpha\right) dx \leq 2\right\}. \tag{2.4.1}$$

Η Orlicz νόρμα τάξης α της f περιγράφεται ισοδύναμα ως εξής.

Πρόταση 2.4.1 *Αν $f : K \to \mathbb{R}$ είναι μια φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση και αν $\alpha \geq 1$, τότε*

$$\|f\|_{\psi_\alpha} \simeq \sup\left\{\frac{\|f\|_p}{p^{1/\alpha}} : p \geq \alpha\right\}. \tag{2.4.2}$$

Απόδειξη: Αν

$$\|f\|_p \leq \gamma p^{1/\alpha} \tag{2.4.3}$$

για κάποια σταθερά $\gamma > 0$ και για κάθε $p \geq \alpha$, τότε

$$\int_K \exp\left((|f(x)|/c_1\gamma)^\alpha\right) dx = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{\|f\|_{\alpha k}^{\alpha k}}{(c_1\gamma)^{\alpha k}} \leq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha^k k^k}{k! c_1^{\alpha k}} \leq 2 \tag{2.4.4}$$

αν επιλέξουμε $c_1 \sim (e\alpha)^{1/\alpha}$. Δηλαδή, υπάρχει απόλυτη σταθερά $c_1 > 0$ τέτοια ώστε

$$\|f\|_{\psi_\alpha} \leq c_1 \sup\left\{\frac{\|f\|_p}{p^{1/\alpha}} : p \geq \alpha\right\}. \tag{2.4.5}$$

Αντίστροφα,

$$\frac{\|f\|_{\alpha k}^{\alpha k}}{k!\|f\|_{\psi_\alpha}^{\alpha k}} \leq \int_K \exp\left((|f(x)|/\|f\|_{\psi_\alpha})^\alpha\right) dx \leq 2 \tag{2.4.6}$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$, δηλαδή

$$\|f\|_{\alpha k} \leq c k^{1/\alpha}\|f\|_{\psi_\alpha}, \tag{2.4.7}$$

απ' όπου έπεται ότι

$$\|f\|_p \leq c' p^{1/\alpha}\|f\|_{\psi_\alpha} \tag{2.4.8}$$

για κάθε $p \geq \alpha$. Αυτό συμπληρώνει την απόδειξη της (2.4.2). □

Ορισμός. Έστω $\alpha \geq 1$ και $y \neq 0$ στον $\mathbb{R}^n$. Λέμε ότι το K ικανοποιεί ψ_α-εκτίμηση με σταθερά b_α στη διεύθυνση του y αν

$$\|\langle\cdot, y\rangle\|_{\psi_\alpha} \leq b_\alpha \|\langle\cdot, y\rangle\|_1. \tag{2.4.9}$$

Λέμε ότι το K είναι ψ_α-σώμα με σταθερά b_α αν η (2.4.9) ισχύει για κάθε $y \neq 0$. Απλός υπολογισμός δείχνει ότι αν το K ικανοποιεί ψ_α-εκτίμηση με σταθερά b_α στη διεύθυνση του y και αν $T \in SL(n)$, τότε το $T(K)$ ικανοποιεί ψ_α-εκτίμηση με την ίδια σταθερά στη διεύθυνση του $T^*(y)$. Έπεται ότι το $T(K)$ είναι ψ_α-σώμα με σταθερά b_α αν και μόνο αν το K είναι ψ_α-σώμα με την ίδια σταθερά.

Από την Πρόταση 2.1.2 έχουμε ένα πρώτο πολύ γενικό αποτέλεσμα.

Θεώρημα 2.4.1 *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ και για κάθε $y \neq 0$,*

$$\|\langle\cdot, y\rangle\|_{\psi_1} \leq C\|\langle\cdot, y\rangle\|_1. \qquad \square \tag{2.4.10}$$

Με άλλα λόγια, υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε κάθε κυρτό σώμα K να είναι ψ_1-σώμα με σταθερά C. Στην πρόταση αυτή ενσωματώνεται όλη η πληροφορία που μπορεί να μας δώσει η ανισότητα Brunn-Minkowski για τα γραμμικά συναρτησοειδή σε κυρτά σώματα.

Στη συνέχεια θεωρούμε ότι το K είναι ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και δίνουμε κάποια πρώτα αποτελέσματα για την ψ_α-συμπεριφορά των γραμμικών συναρτησοειδών και της Ευκλείδειας νόρμας.

Πρόταση 2.4.2 *Κάθε ισοτροπικό κυρτό σώμα K είναι ψ_α-σώμα με σταθερά*

$$b_\alpha \leq c\left(\frac{R(K)}{L_K}\right)^{1-\frac{1}{\alpha}}. \tag{2.4.11}$$

Απόδειξη: Για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ και για κάθε $p \geq \alpha$ έχουμε

$$\begin{aligned} I_p(K,\theta) &= \left(\int_K |\langle x,\theta\rangle|^{p/\alpha}|\langle x,\theta\rangle|^{p(1-1/\alpha)}dx\right)^{1/p} \\ &\leq R(K)^{1-1/\alpha} I_{p/\alpha}(K,\theta)^{1/\alpha} \\ &\leq R(K)^{1-1/\alpha}\left(c\frac{p}{\alpha}I_1(K,\theta)\right)^{1/\alpha} \\ &\leq R(K)^{1-1/\alpha}\left(c\frac{p}{\alpha}L_K\right)^{1/\alpha} \\ &\leq c_1 R(K)^{1-1/\alpha}L_K^{1/\alpha}p^{1/\alpha}. \end{aligned}$$

Από την Πρόταση 2.4.1 έπεται ότι

$$\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_{\psi_\alpha} \leq cR(K)^{1-1/\alpha}L_K^{1/\alpha}, \tag{2.4.12}$$

που είναι το ζητούμενο. □

Η επόμενη Πρόταση δείχνει ότι δεν μπορούμε να περιμένουμε την ύπαρξη ψ_α σωμάτων όταν $\alpha > 2$ (η σταθερά b_α αυξάνει αναγκαστικά στο άπειρο με τη διάσταση).

Πρόταση 2.4.3 *Έστω $\alpha > 2$ και έστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με όγκο 1 και κέντρο βάρους το 0. Αν το K είναι ψ_α-σώμα με σταθερά B, τότε*

$$B \geq cn^{1/2-1/\alpha}. \tag{2.4.13}$$

όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη: Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το K είναι ισοτροπικό. Τότε,

$$R(K) \geq I_2(K) = \sqrt{n}L_K. \tag{2.4.14}$$

Αφού το K είναι ψ_α-σώμα με σταθερά B, έχουμε

$$I_q(K,\theta) \leq c_1 B q^{1/\alpha} I_1(K,\theta) \leq c_1 B q^{1/\alpha} L_K \tag{2.4.15}$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ και για κάθε $q \geq 1$, όπου $c_1 > 0$ απόλυτη σταθερά. Από το Λήμμα 2.2.3 έπεται ότι

$$R(K) \leq c_2 R(Z_n(K)) \leq c_3 B n^{1/\alpha} L_K. \tag{2.4.16}$$

Από τις (2.4.14) και (2.4.16) έπεται άμεσα το ζητούμενο. □

Περνάμε τώρα σε ψ_α εκτιμήσεις για την Ευκλείδεια νόρμα. Από την ανισότητα των Carbery και Wright (βλέπε Πρόταση 2.1.3) ή, πιο απλά, από το Λήμμα του Borell (επαναλαμβάνοντας ουσιαστικά την απόδειξη της Πρότασης 2.1.1) έχουμε

$$I_q(K) \leq cqI_1(K) \tag{2.4.17}$$

για κάθε κυρτό σώμα K όγκου 1 και κάθε $q \geq 1$. Έπεται το εξής.

Πρόταση 2.4.4 *Έστω K κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Αν $f(x) = |x|$,*

$$\|f\|_{\psi_1} \leq c\|f\|_1 \tag{2.4.18}$$

όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά. Ειδικότερα,

$$\mathrm{Prob}(x \in K : |x| \geq cI_1(K)s) \leq 2\exp(-s) \tag{2.4.19}$$

για κάθε $s > 0$. □

Στην περίπτωση που το K είναι ισοτροπικό κυρτό σώμα, ο Alesker [1] έδειξε ότι η Ευκλείδεια νόρμα ικανοποιεί ψ_2-εκτίμηση.

Θεώρημα 2.4.2 *Έστω K ισοτροπικό κυρτό σώμα. Αν $f(x) = |x|$, τότε*

$$\|f\|_{\psi_2} \leq c\|f\|_1 \leq c\sqrt{n}L_K, \tag{2.4.20}$$

όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά. Ειδικότερα,

$$\mathrm{Prob}(x \in K : |x| \geq c\sqrt{n}L_K s) \leq 2\exp(-s^2) \tag{2.4.21}$$

για κάθε $s > 0$.

Θα αποδείξουμε ένα γενικότερο Θεώρημα το οποίο έχει σαν άμεση συνέπεια την ανισότητα του Alesker.

Θεώρημα 2.4.3 *Έστω K κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Αν $1 \leq p \leq q \leq m_K(p)$, τότε*

$$I_q(K) \leq c\sqrt{\frac{q}{p}}I_p(K), \tag{2.4.22}$$

όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη: Από την Πρόταση 2.2.2, η (2.4.22) γράφεται ισοδύναμα

$$w_q(Z_q(K)) \leq c_1 \frac{q}{p} w_p(Z_p(K)). \tag{2.4.23}$$

Από την Πρόταση 2.1.3 έχουμε

$$H_q(\theta) \leq c_1 \frac{q}{p} H_p(\theta) \tag{2.4.24}$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$. Άρα,

$$\begin{aligned} w_q(Z_q(K)) &= \left(\int_{S^{n-1}} H_q^q(\theta)\sigma(d\theta) \right)^{1/q} \\ &\leq c_1 \frac{q}{p} \left(\int_{S^{n-1}} H_p^q(\theta)\sigma(d\theta) \right)^{1/q} \\ &= c_1 \frac{q}{p} w_q(Z_p(K)). \end{aligned}$$

Όμως $q \leq m_K(p)$, άρα το Λήμμα 2.2.5 μας δίνει

$$w_q(Z_p(K)) \simeq w_p(Z_p(K)) \simeq w(Z_p(K)). \tag{2.4.25}$$

Αυτό αποδεικνύει την (2.4.23). □

Σημείωση: Το Θεώρημα 2.4.2 προκύπτει από την παρατήρηση ότι για κάθε ισοτροπικό κυρτό σώμα K το $Z_2(K)$ είναι μπάλα, άρα $m_K(2) \simeq n$. Έχουμε

$$I_q(K) \leq c\sqrt{q} I_2(K) = c\sqrt{q}\sqrt{n} L_K \tag{2.4.26}$$

για κάθε $2 \leq q \leq \beta n$, ενώ για $q \geq \beta n$ η (2.4.26) είναι προφανής, αφού $R(K) \leq (n+1)L_K$.

2.5 Άνω φράγμα για τη σταθερά ισοτροπίας

Το φράγμα $L_K = O(\sqrt[4]{n}\log n)$ του Bourgain [8] βασίζεται στην ψ_1-συμπεριφορά των γραμμικών συναρτησοειδών. Η απόδειξη που δίνουμε ακολουθεί την παρουσίαση του [49] και δεν απαιτεί τη συμμετρία του K (βλέπε επίσης [21]).

Θεώρημα 2.5.1 *Έστω K ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Ισχύει η ανισότητα*

$$L_K \leq c\sqrt[4]{n}\log n, \tag{2.5.1}$$

όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά.

Η απόδειξη θα βασιστεί στο Λήμμα 1.1.2 που χαρακτηρίζει τα ισοτροπικά σώματα και στην ανισότητα του Pisier. Θα χρειαστούμε ακόμα δύο τεχνικά εργαλεία.

1. Μέση τιμή του μέγιστου γραμμικών συναρτησοειδών σε κυρτά σώματα

Θεωρούμε ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$, το οποίο ικανοποιεί την ψ_α-εκτίμηση

$$\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_{\psi_\alpha} \leq B\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_1 \leq BL_K \tag{2.5.2}$$

για κάθε $\theta\in S^{n-1}$, όπου $\alpha\in[1,2]$ και $B>0$ μια σταθερά.

Πρόταση 2.5.1 *Αν $\theta_1,\dots,\theta_N\in S^{n-1}$, τότε*

$$\int_K \max_{1\leq i\leq N}|\langle x,\theta_i\rangle|\,dx \leq CBL_K(\log n)^{1/\alpha}, \tag{2.5.3}$$

όπου $C>0$ απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη: Από την (2.5.2), για κάθε $t>0$ ισχύει

$$\begin{aligned}\mathrm{Prob}\left(x\in K:\max_{1\leq i\leq N}|\langle x,\theta_i\rangle|\geq t\right) &\leq \sum_{i=1}^N \mathrm{Prob}\left(x\in K:|\langle x,\theta_i\rangle|\geq t\right)\\ &\leq 2N\exp\left(-(t/BL_K)^\alpha\right).\end{aligned}$$

Για κάθε $A>0$ μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}\int_K\max_{1\leq i\leq N}|\langle x,\theta_i\rangle|dx &= \int_0^\infty \mathrm{Prob}\left(x\in K:\max_{1\leq i\leq N}|\langle x,\theta_i\rangle|\geq t\right)dt\\ &\leq A+\int_A^\infty \mathrm{Prob}\left(x\in K:\max_{1\leq i\leq N}|\langle x,\theta_i\rangle|\geq t\right)dt\\ &\leq A+2N\int_A^\infty \exp\left(-(t/BL_K)^\alpha\right)dt.\end{aligned}$$

Επιλέγοντας $A=4BL_K(\log N)^{1/\alpha}$ έχουμε

$$\begin{aligned}\int_A^\infty \exp\left(-(t/BL_K)^\alpha\right)dt &= 4BL_K(\log N)^{1/\alpha}\int_1^\infty \exp(-4^\alpha s\log N)ds\\ &\leq 4BL_K(\log N)^{1/\alpha}\exp(-2\log N)\int_1^\infty e^{-s}ds\\ &\leq 4BL_K(\log N)^{1/\alpha}N^{-2},\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την

$$\exp(-4^\alpha s\log N)\leq \exp(-2\log N)\cdot e^{-s} \tag{2.5.4}$$

η οποία ισχύει για κάθε $s \geq 1$. Έπεται ότι

$$\int_K \max_{1\leq i\leq N} |\langle x, \theta_i\rangle| dx \leq CBL_K(\log N)^{1/\alpha}, \tag{2.5.5}$$

όπου $C = 12$. □

2. Η διάσπαση Dudley-Fernique

Θεωρούμε ένα κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε οτι $0 \in K$ και γράφουμε R για την ακτίνα του K. Για κάθε $j \in \mathbb{N}$ βρίσκουμε πεπερασμένο υποσύνολο N_j του K τέτοιο ώστε

$$|N_j| = N(K, (R/2^j)B_2^n), \tag{2.5.6}$$

και

$$K \subseteq \bigcup_{y\in N_j} (y + (R/2^j)B_2^n). \tag{2.5.7}$$

Τέλος, θέτουμε $N_0 = \{0\}$ και ορίζουμε

$$W_j = N_j - N_{j-1} = \{y - y' \mid y \in N_j, y' \in N_{j-1}\} \tag{2.5.8}$$

για κάθε $j \geq 1$.

Λήμμα 2.5.1 *Για κάθε $x \in K$ και κάθε $m \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $z_j \in W_j \cap (3R/2^j)B_2^n$, $j = 1, \dots, m$ και $w_m \in (R/2^m)B_2^n$ τέτοια ώστε*

$$x = z_1 + \cdots + z_m + w_m. \tag{2.5.9}$$

Απόδειξη: Εστω $x \in K$. Από τον ορισμό του N_j, για κάθε $j = 1, \dots, m$ μπορούμε να βρούμε $y_j \in N_j$ τέτοιο ώστε

$$|x - y_j| \leq \frac{R}{2^j}. \tag{2.5.10}$$

Γράφουμε

$$x = 0 + (y_1 - 0) + (y_2 - y_1) + \cdots + (y_m - y_{m-1}) + (x - y_m) \tag{2.5.11}$$

και θέτουμε $y_0 = 0$ και $w_m = x - y_m$, $z_j = y_j - y_{j-1}$ για $j = 1, \dots, m$. Τότε, $|w_m| = |x - y_m| \leq R/2^m$, και $z_j \in N_j - N_{j-1} = W_j$. Επίσης,

$$|z_j| \leq |x - y_j| + |x - y_{j-1}| \leq \frac{R}{2^j} + \frac{R}{2^{j-1}} = \frac{3R}{2^j}. \tag{2.5.12}$$

Τέλος, $x = z_1 + \cdots + z_m + w_m$. □

Ορίζουμε $Z_j = W_j \cap (3R/2^j)B_2^n$. Παίρνοντας υπόψιν μας και την ανισότητα του Sudakov (Θεώρημα 1.1.4) μπορούμε να διατυπώσουμε το ακόλουθο θεώρημα (διάσπαση Dudley - Fernique).

Θεώρημα 2.5.2 *Έστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, με $0 \in K$ και ακτίνα R. Υπάρχουν πεπερασμένα σύνολα $Z_j \subseteq (3R/2^j)B_2^n$, $j \in \mathbb{N}$, τέτοια ώστε*

$$\log |Z_j| \leq cn \left(\frac{2^j w(K)}{R} \right)^2, \tag{2.5.13}$$

που ικανοποιούν το εξής: για κάθε $x \in K$ και κάθε $m \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $z_j \in Z_j$, $j = 1, \ldots, m$ και $w_m \in (R/2^m)B_2^n$ τέτοια ώστε $x = z_1 + \cdots + z_m + w_m$. □

3. Απόδειξη του Θεωρήματος 2.5.1

Θα αποδείξουμε ένα γενικότερο αποτέλεσμα, το οποίο δείχνει τι συμβαίνει με το επιχείρημα αν υποθέσουμε ότι το K έχει καλύτερη «ψ_α-συμπεριφορά».

Θεώρημα 2.5.3 *Έστω K ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και έστω $B > 0$. Υποθέτουμε ότι, για κάποιο $1 \leq \alpha < 2$, το K ικανοποιεί την ψ_α-εκτίμηση*

$$\|\langle \cdot, \theta \rangle\|_{\psi_\alpha} \leq B \|\langle \cdot, \theta \rangle\|_1 \leq B L_K \tag{2.5.14}$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$. Τότε,

$$L_K \leq C B^{\alpha/2} (2-\alpha)^{-\alpha/2} n^{1/2 - \alpha/4} \log n \tag{2.5.15}$$

όπου $C > 0$ απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη: Η ανισότητα του Pisier (Θεώρημα 1.1.9) μας εξασφαλίζει ότι υπάρχει συμμετρικός θετικά ορισμένος $T \in SL(n)$ τέτοιος ώστε

$$w(TK) \leq c\sqrt{n} \log n. \tag{2.5.16}$$

Από το Λήμμα 1.1.2,

$$\int_K \langle x, Sx \rangle dx = \frac{\mathrm{tr} S}{n} \int_K |x|^2 dx \tag{2.5.17}$$

για κάθε $S \in L(\mathbb{R}^n)$. Ο T έχει θετικές πραγματικές ιδιοτιμές και ορίζουσα 1, άρα $\mathrm{tr} T \geq n$. Επομένως,

$$n L_K^2 = \int_K |x|^2 dx \leq \frac{\mathrm{tr} T}{n} \int_K |x|^2 = \int_K \langle x, Tx \rangle dx. \tag{2.5.18}$$

Για κάθε $x \in K$ έχουμε

$$\langle x, Tx \rangle \leq \max_{y \in TK} |\langle x, y \rangle|, \tag{2.5.19}$$

άρα,

$$n L_K^2 \leq \int_K \max_{y \in TK} |\langle y, x \rangle| dx. \tag{2.5.20}$$

Χρησιμοποιούμε τώρα τη διάσπαση Dudley-Fernique του TK. Αν R είναι η ακτίνα του TK, είδαμε ότι για $j = 1, \dots, m$, $m \in \mathbb{N}$ υπάρχουν πεπερασμένα σύνολα $Z_j \subset (3R/2^j)B_2^n$ τέτοια ώστε

$$\log |Z_j| \leq cn \left(\frac{w(TK)2^j}{R} \right)^2, \tag{2.5.21}$$

και κάθε $y \in TK$ γράφεται στη μορφή $y = z_1 + \cdots + z_m + w_m$, όπου $z_j \in Z_j$ και $w_m \in (R/2^m)B_2^n$. Έπεται ότι

$$\begin{aligned} \max_{y \in TK} |\langle y, x \rangle| &\leq \sum_{j=1}^m \max_{z \in Z_j} |\langle z, x \rangle| + \max_{w \in (R/2^m)B_2^n} |\langle w, x \rangle| \\ &\leq \sum_{j=1}^m \frac{3R}{2^j} \max_{z \in Z_j} |\langle \overline{z}, x \rangle| + \frac{R}{2^m} |x|, \end{aligned}$$

όπου $\overline{z}$ το μοναδιαίο διάνυσμα στη διεύθυνση του z. Χρησιμοποιώντας το παραπάνω, καθώς και την $\int_K |x| dx \leq \sqrt{n} L_K$, βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} nL_K^2 &\leq \sum_{j=1}^m \frac{3R}{2^j} \int_K \max_{z \in Z_j} |\langle \overline{z}, x \rangle| dx + \frac{R}{2^m} \int_K |x| dx \\ &\leq \sum_{j=1}^m \frac{3R}{2^j} \int_K \max_{z \in Z_j} |\langle \overline{z}, x \rangle| dx + \frac{R}{2^m} \sqrt{n} L_K. \end{aligned}$$

Από την Πρόταση 2.5.1 παίρνουμε

$$nL_K^2 \leq \sum_{j=1}^m \frac{3R}{2^j} c'' n^{1/\alpha} L_K \left(\frac{w(TK)2^j}{R} \right)^{2/\alpha} B + \frac{R}{2^m} \sqrt{n} L_K. \tag{2.5.22}$$

Το άθροισμα στο δεξιό μέλος φράσσεται από

$$\frac{c_1}{(2-\alpha)} L_K n^{1/\alpha} w(TK)^{2/\alpha} 2^{m(2/\alpha - 1)} R^{1-2/\alpha} B. \tag{2.5.23}$$

Λύνοντας την εξίσωση

$$B \frac{n^{1/\alpha} w(TK)^{2/\alpha} 2^{m(2/\alpha-1)}}{R^{2/\alpha-1}(2-\alpha)} = \frac{R\sqrt{n}}{2^m} \tag{2.5.24}$$

βρίσκουμε τη βέλτιστη τιμή του m: πρέπει να ικανοποιεί την

$$\frac{1}{2^m} = \frac{n^{1/2-\alpha/4} w(TK)}{(2-\alpha)^{\alpha/2} R} B^{\alpha/2}. \tag{2.5.25}$$

Επιστρέφοντας στην (2.5.22) παίρνουμε

$$nL_K^2 \leq c_2 (2-\alpha)^{-\alpha/2} n^{1-\alpha/4} w(TK) L_K B^{\alpha/2}, \tag{2.5.26}$$

και, αφού $w(TK) \leq c_3\sqrt{n}\log n$, καταλήγουμε στην (2.5.15). $\square$

Σημείωση: Στην περίπτωση που το K ικανοποιεί την εκτίμηση (2.5.2) για $\alpha = 2$, το παραπάνω επιχείρημα δίνει $L_K \leq CB\log^2 n$. Στο επόμενο Κεφάλαιο θα μελετήσουμε τα «ψ_2-σώματα» λεπτομερέστερα.

Κεφάλαιο 3

Ψ_2-συμπεριφορά των γραμμικών συναρτησοειδών στα κυρτά σώματα

3.1 Εικασία του υπερεπιπέδου και σώματα με μικρή διάμετρο

Η μελέτη των σωμάτων με μικρή διάμετρο έχει σαν αφετηρία την εξής παρατήρηση σχετικά με το πρόβλημα της σταθεράς ισοτροπίας.

Πρόταση 3.1.1 *Έστω K ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Υπάρχει ισοτροπικό κυρτό σώμα Q στον $\mathbb{R}^n$ με $L_Q \simeq L_K$ και $R(Q) \leq c\sqrt{n}L_Q$.*

Για την απόδειξη θα χρειαστούμε μια απλή παρατήρηση σχετικά με την «ευστάθεια» της ισοτροπικής θέσης.

Λήμμα 3.1.1 *Έστω K κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ με κέντρο βάρους το 0. Υποθέτουμε ότι για κάποιον $L>0$ και κάποιες σταθερές $a,b>0$ έχουμε*

$$a^{-2}L^2 \leq \int_K \langle x,\theta\rangle^2 dx \leq b^2L^2 \tag{3.1.1}$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$. Τότε,

$$a^{-1}L \leq L_K \leq bL. \tag{3.1.2}$$

Απόδειξη: Θεωρούμε το ελλειψοειδές του Binet $E_B(K)$ που ορίζεται από την

$$\|\theta\|_{E_B(K)}^2 = \int_K \langle x,\theta\rangle^2 dx. \tag{3.1.3}$$

Από την υπόθεση έχουμε $(a/L)B_2^n \supseteq E_B(K) \supseteq (1/bL)B_2^n$ οπότε

$$1/(bL)\omega_n^{1/n} \leq |E_B(K)|^{1/n} \leq (a/L)\omega_n^{1/n}, \tag{3.1.4}$$

ενώ, από το Λήμμα 1.1.3,

$$|E_B(K)|^{1/n} = L_K^{-1}\omega_n^{1/n}. \tag{3.1.5}$$

Συνδυάζοντας τις (3.1.4) και (3.1.5) έχουμε το συμπέρασμα. □

Απόδειξη της Πρότασης 3.1.1: Το K είναι ισοτροπικό, άρα

$$\int_K |x|^2 dx = nL_K^2. \tag{3.1.6}$$

Για κάθε $r>0$ ορίζουμε

$$K_r = \{x\in K : |x| \leq r\sqrt{n}L_K\}. \tag{3.1.7}$$

Από την ανισότητα του Markov έχουμε

$$|K_r| \geq 1 - r^{-2}. \tag{3.1.8}$$

Τότε, για κάθε $\theta\in S^{n-1}$,

$$\begin{aligned}\int_{K_r}\langle x,\theta\rangle^2 dx &= \int_K \langle x,\theta\rangle^2 dx - \int_{K\setminus K_r}\langle x,\theta\rangle^2 dx\\ &\geq L_K^2 - |K\setminus K_r|^{1/2}\left(\int_K \langle x,\theta\rangle^4 dx\right)^{1/2}\\ &\geq L_K^2 - r^{-1}(4c)^2 L_K^2,\end{aligned}$$

όπου $c>0$ η σταθερά της Πρότασης 2.1.1. Αν επιλέξουμε $r = 32c^2$, έχουμε

$$(1/2)L_K^2 \leq \int_{K_r}\langle x,\theta\rangle^2 dx \leq L_K^2 \tag{3.1.9}$$

για κάθε $\theta\in S^{n-1}$. Αφού $|K_r|\geq 1-r^{-2}$, μπορούμε να βρούμε σταθερά $a\geq 1$ με $a^n \leq c_1 := 1/(1-r^{-2})$, έτσι ώστε για το $W = aK_r$ να έχουμε $|W|=1$. Τότε,

$$\int_W \langle x,\theta\rangle^2 dx = a^{n+2}\int_{K_r}\langle x,\theta\rangle^2 dx \geq L_K^2/2 \tag{3.1.10}$$

και

$$\int_W \langle x,\theta\rangle^2 dx \leq a^{n+2}\int_{K_r}\langle x,\theta\rangle^2 dx \leq c_1^2 L_K^2, \tag{3.1.11}$$

δηλαδή

$$(1/2)L_K^2|y|^2 \leq \int_W \langle x,y\rangle^2 dx \leq c_1^2 L_K^2|y|^2 \tag{3.1.12}$$

για κάθε $y\in\mathbb{R}^n$. Από το Λήμμα 3.1.1 συμπεραίνουμε ότι $L_W\simeq L_K$.

Έστω $T\in SL(n)$ τέτοιος ώστε το $Q=T(W)$ να είναι ισοτροπικό. Από την (3.1.12), για κάθε $\theta\in S^{n-1}$ έχουμε

$$L_W^2=\int_Q\langle x,\theta\rangle^2 dx=\int_W\langle x,T^*\theta\rangle^2 dx \simeq |T^*\theta|^2 L_K^2. \tag{3.1.13}$$

Χρησιμοποιώντας και την $L_Q=L_W\simeq L_K$, παίρνουμε

$$c_2\leq |T^*\theta|\leq c_3 \tag{3.1.14}$$

για κάθε $\theta\in S^{n-1}$. Άρα,

$$R(Q)\leq \|T:\ell_2^n\to\ell_2^n\|R(W)\leq c_3 ar\sqrt{n}L_K\leq c_4\sqrt{n}L_K\leq c\sqrt{n}L_Q \tag{3.1.15}$$

όπου $c>0$ απόλυτη σταθερά. □

Χρησιμοποιώντας αυτή την παρατήρηση μπορούμε να δώσουμε μια δεύτερη απόδειξη της εκτίμησης $O(\sqrt[4]{n}\log n)$ για τη σταθερά ισοτροπίας. Θα χρησιμοποιήσουμε την εξής άμεση συνέπεια της Πρότασης 2.4.2.

Λήμμα 3.1.2 *Έστω Q ισοτροπικό σώμα με $R(Q)\leq A\sqrt{n}L_Q$. Για κάθε $\theta\in S^{n-1}$ έχουμε*

$$\Big\|\frac{\langle\cdot,\theta\rangle}{L_Q}\Big\|_{\psi_2}\leq c\sqrt{A}\sqrt[4]{n}, \tag{3.1.16}$$

όπου $c>0$ απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη: Από την Πρόταση 2.4.2,

$$\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_{\psi_2}\leq cR(Q)^{1/2}L_Q^{1/2}\leq c\sqrt{A}\sqrt[4]{n}L_Q, \tag{3.1.17}$$

το οποίο είναι ισοδύναμο με το ζητούμενο. □

Θεώρημα 3.1.1 *Έστω K ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Ισχύει η ανισότητα*

$$L_K\leq c\sqrt[4]{n}\log n, \tag{3.1.18}$$

όπου $c>0$ απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη: Από την Πρόταση 3.1.1, υπάρχει ισοτροπικό κυρτό σώμα Q στον $\mathbb{R}^n$ με $L_Q \simeq L_K$ και $R(Q) \leq c\sqrt{n}L_Q$. Αρκεί λοιπόν να εκτιμήσουμε την L_Q.

Επαναλαμβάνοντας το αρχικό κομμάτι της απόδειξης του Θεωρήματος 2.5.3, βλέπουμε ότι για κάθε συμμετρικό και θετικά ορισμένο $T \in SL(n)$,

$$nL_Q^2 \leq \int_Q \max_{y\in TQ} |\langle y, x\rangle| dx. \tag{3.1.19}$$

Από το Λήμμα 3.1.2 έχουμε

$$\Big\| \frac{\langle \cdot, y\rangle}{c_1 \sqrt[4]{n} L_Q |y|} \Big\|_{\psi_2} \leq 1 \tag{3.1.20}$$

για κάθε $y \neq 0$, όπου $c_1 > 0$ απόλυτη σταθερά. Άρα,

$$\mathrm{Prob}(\{x \in Q : |\langle x, y\rangle| \geq c_1 \sqrt[4]{n} L_Q t\}) \leq 2\exp(-t^2/|y|^2) \tag{3.1.21}$$

για κάθε $y \neq 0$ και κάθε $t > 0$.

Θεωρούμε την ανέλιξη $\mathcal{X} = (X_y)_{y\in TQ}$, $X_y : Q \to \mathbb{R}$ με

$$X_y(x) = \frac{\langle x, y\rangle}{c_1 \sqrt[4]{n} L_Q}. \tag{3.1.22}$$

Τότε, για κάθε $y \neq z \in TQ$ και για κάθε $t > 0$,

$$\begin{aligned} \mathrm{Prob}(|X_y - X_z| \geq t) &= \mathrm{Prob}(\{x \in Q : |\langle y - z, x\rangle| \geq c_1 \sqrt[4]{n} L_Q t\}) \\ &\leq 2\exp\left(-t^2/|y-z|^2\right), \end{aligned}$$

δηλαδή η $\mathcal{X}$ είναι υποκανονική ως προς την Ευκλείδεια απόσταση στο TQ.

Θεωρούμε τη συνήθη ανέλιξη του Gauss $\mathcal{Z} = (Z_y)_{y\in TQ}$ με

$$Z_y(\omega) = \langle G(\omega), y\rangle. \tag{3.1.23}$$

Οι $\mathcal{X}$ και $\mathcal{Z}$ ικανοποιούν τις υποθέσεις του Θεωρήματος 1.1.6. Άρα,

$$\mathbb{E} \sup_{y\in TQ} X_y \leq C \cdot \mathbb{E} \sup_{y\in TQ} Z_y, \tag{3.1.24}$$

όπου $C > 0$ απόλυτη σταθερά. Παίρνοντας υπόψιν και την

$$\mathbb{E} \sup_{y\in TQ} Z_y \simeq \sqrt{n} w(TQ), \tag{3.1.25}$$

βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} nL_Q^2 &\leq c_1 \sqrt[4]{n} L_Q \cdot \mathbb{E} \sup_{y\in TQ} X_y \\ &\leq c_1 C \sqrt[4]{n} L_Q \cdot \sqrt{n} w(TQ), \end{aligned}$$

δηλαδή,

$$L_Q \leq c_2 w(TQ)/\sqrt[4]{n}, \tag{3.1.26}$$

όπου $c_2 > 0$ απόλυτη σταθερά. Την απόδειξη συμπληρώνει η ανισότητα του Pisier (Θεώρημα 1.1.9): για κάποιον συμμετρικό θετικά ορισμένο $T \in SL(n)$ έχουμε $w(TQ) = O(\sqrt{n}\log n)$. □

3.2 Σώματα με μικρή διάμετρο

3.2.1 Εισαγωγή

Η απόδειξη του φράγματος $O(\sqrt[4]{n}\log n)$ για τη σταθερά ισοτροπίας βασίζεται στην ψ_α-συμπεριφορά των γραμμικών συναρτησοειδών $x \mapsto \langle x, \theta\rangle$. Σε πλήρη γενικότητα, το μόνο που μπορούμε να υποθέσουμε για ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα K είναι η

$$\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_{\psi_1} \leq CL_K, \tag{3.2.1}$$

όπου η θετική σταθερά C είναι ανεξάρτητη από τη διάσταση n, από το σώμα K, και από τη διεύθυνση θ. Τα δύο επιχειρήματα που παρουσιάσαμε στις §2.5 και §3.1 γεννούν δύο φυσιολογικά ερωτήματα:

1. Είναι σωστό ότι κάθε ισοτροπικό σώμα ικανοποιεί ψ_2-εκτίμηση με «καλή σταθερά» για τις περισσότερες διευθύνσεις $\theta \in S^{n-1}$;
2. Είναι σωστό ότι για κάθε ισοτροπικό κυρτό σώμα K τα σώματα $K_r := K \cap (r\sqrt{n}L_K)D_n$ έχουν «καλύτερη» ψ_2-συμπεριφορά;

Στην περίπτωση που κάποιο από αυτά τα δύο ερωτήματα έχει καταφατική απάντηση, μπορεί κανείς να φανταστεί μια καλύτερη οργάνωση κάποιου από τα προηγούμενα επιχειρήματα, η οποία θα μπορούσε να οδηγήσει σε καλύτερη εκτίμηση της L_K.

Το πρώτο πρόβλημα είναι τελείως ανοικτό: εξ όσων γνωρίζουμε, ακόμα και η ύπαρξη έστω μίας καλής ψ_2-διεύθυνσης δεν έχει επαληθευτεί σε πλήρη γενικότητα. Κάτι τέτοιο θα αποτελούσε ένα «κατά σημείο ανάλογο» του αποτελέσματος του Alesker (Θεώρημα 2.4.2): Αν K είναι ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και αν $f(x) = |x|$, τότε

$$\|f\|_{\psi_2} \leq c\sqrt{n}L_K, \tag{3.2.2}$$

όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά. Επομένως,

$$\mathrm{Prob}(x \in K : |x| \geq c\sqrt{n}L_K t) \leq 2\exp(-t^2) \tag{3.2.3}$$

για κάθε $t > 0$.

Αυτό είναι το μόνο «γενικό ψ_2-αποτέλεσμα» που υπάρχει. Πρόσφατα, οι Bobkov και Nazarov μελέτησαν την ψ_2-συμπεριφορά των γραμμικών συναρτησοειδών στα 1-unconditional ισοτροπικά σώματα. Γι' αυτά τα σώματα μπορούμε να υποθέσουμε ότι η συνήθης ορθοκανονική βάση $\{e_1, \ldots, e_n\}$ του $\mathbb{R}^n$ είναι 1-unconditional βάση για την $\|\cdot\|_K$, δηλαδή

$$\left\| \sum_{i=1}^n t_i e_i \right\|_K = \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i t_i e_i \right\|_K \tag{3.2.4}$$

για κάθε επιλογή πραγματικών αριθμών $t_1, \ldots, t_n$ και προσήμων $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$. Επιπλέον, στο Κεφάλαιο 1 είδαμε ότι $L_K \leq C$, όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Το βασικό αποτέλεσμα των Bobkov και Nazarov (βλέπε [14]) είναι το εξής.

Θεώρημα 3.2.1 *Έστω K ένα ισοτροπικό 1-unconditional σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$ και κάθε $p \geq 1$ ισχύει η ανισότητα*

$$\left(\int_K |\langle x, y\rangle|^p dx \right)^{1/p} \leq C\sqrt{p}\sqrt{n}\|y\|_\infty L_K. \tag{3.2.5}$$

Με άλλα λόγια, για κάθε $y \in S^{n-1}$ έχουμε

$$\|\langle \cdot, y\rangle\|_{\psi_2} \leq c\sqrt{n}\|y\|_\infty L_K \tag{3.2.6}$$

όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά. □

Το αποτέλεσμα αυτό δίνει πολύ ακριβείς ψ_2-εκτιμήσεις: για παράδειγμα, αν $\sqrt{n}y = (\pm 1, \ldots, \pm 1)$ τότε $b_2(y) := \|\langle \cdot, y\rangle\|_{\psi_2}/L_K \leq c$, δηλαδή οι «διαγώνιες» διευθύνσεις είναι ψ_2. Από την (3.2.6) έπεται ότι κατά μέσο όρο το K έχει «λογαριθμική ψ_2-σταθερά»:

$$\int_{S^{n-1}} b_2(\theta)\, \sigma(d\theta) \leq c\sqrt{\log n}. \tag{3.2.7}$$

Επίσης, οι Bobkov και Nazarov (βλέπε [13]) απέδειξαν ότι, στην περίπτωση των 1-unconditional σωμάτων, το αποτέλεσμα του Alesker επιδέχεται την εξής βελτίωση.

Θεώρημα 3.2.2 *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε: για κάθε ισοτροπικό 1-unconditional κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ και κάθε $t \geq 1$,*

$$\mathrm{Prob}(x \in K : |x| \geq ct\sqrt{n}\}\big| \leq \exp\left(-ct\sqrt{n}\right). \tag{3.2.8}$$

Παρατηρήστε ότι η ανισότητα του Θεωρήματος 3.2.2 είναι ισχυρότερη από την (3.2.3) για όλες τις τιμές του $t \geq 1$: η διάμετρος ενός ισοτροπικού 1-unconditional σώματος στον $\mathbb{R}^n$ φράσσεται από $C \cdot n$, όπου $C > 0$ απόλυτη σταθερά.

3.2.2 Σώματα με μικρή διάμετρο

Λέμε ότι ένα κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ με κέντρο βάρους το 0 έχει «μικρή διάμετρο» αν $|K|=1$ και $R(K)=\alpha\sqrt{n}B_2^n$, όπου η σταθερά α είναι «καλά φραγμένη». Παρατηρήστε ότι ένα κυρτό σώμα έχει γραμμική εικόνα με μικρή διάμετρο αν και μόνο αν το πολικό του σώμα έχει φραγμένο λόγο όγκων (βλέπε §1.1.1). Σκοπός μας σε αυτή την υποπαράγραφο είναι να δείξουμε ότι τα σώματα που έχουν «μικρή διάμετρο» έχουν «καλές» ψ_2-διευθύνσεις.

Λήμμα 3.2.1 *Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με όγκο $|K|=1$ και κέντρο βάρους το 0. Τότε,*

$$\sigma\left(\theta\in S^{n-1}:\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_1\geq c_1\right)\geq 1-2^{-n}, \tag{3.2.9}$$

όπου $c_1>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη: Θεωρούμε το ελλειψοειδές Binet $E_B(K)$ του K. Έχουμε

$$\|\theta\|_{E_B(K)}=\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_2\simeq\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_1, \tag{3.2.10}$$

και από το Λήμμα 1.1.3,

$$\int_{S^{n-1}}\|\theta\|_{E_B(K)}^{-n}\sigma(d\theta)=\frac{|E_B(K)|}{|B_2^n|}=L_K^{-n}. \tag{3.2.11}$$

Από την ανισότητα του Markov,

$$\sigma\left(\theta\in S^{n-1}:\|\theta\|_{E_B(K)}\geq L_K/2\right)\geq 1-\frac{1}{2^n}. \tag{3.2.12}$$

Αφού $L_K\geq c$ και $\|\theta\|_{E_B(K)}\simeq\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_1$, προκύπτει το συμπέρασμα. □

Λήμμα 3.2.2 *Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με όγκο $|K|=1$ και κέντρο βάρους το 0. Υποθέτουμε ότι $K\subseteq\alpha\sqrt{n}B_2^n$. Τότε,*

$$\int_{S^{n-1}}\int_K\exp\left(\frac{|\langle x,\theta\rangle|}{c_2\alpha}\right)^2dx\sigma(d\theta)\leq 2, \tag{3.2.13}$$

όπου $c_2>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη: Για κάθε $s>0$ έχουμε

$$\int_{S^{n-1}}\int_K\exp\left(\frac{|\langle x,\theta\rangle|}{s}\right)^2dx\sigma(d\theta)=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!s^{2k}}\int_K\int_{S^{n-1}}|\langle x,\theta\rangle|^{2k}\sigma(d\theta)dx.$$

Χρησιμοποιώντας την $\int_K |x|^{2k}dx \leq \alpha^{2k}n^k$ και το Λήμμα 2.2.4, βλέπουμε ότι η τελευταία ποσότητα φράσσεται από

$$1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!s^{2k}}\left(\frac{c\cdot 2k}{2k+n}\right)^k\int_K |x|^{2k}dx \leq 1+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{c'\alpha}{s}\right)^{2k}, \tag{3.2.14}$$

όπου $c, c' > 0$ είναι απόλυτες σταθερές. Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη, παίρνουμε $s = c_2\alpha$ όπου $c_2 = \sqrt{2}c'$. □

Με απλή εφαρμογή της ανισότητας του Markov παίρνουμε το εξής.

Πόρισμα 3.2.1 *Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με όγκο $|K| = 1$ και κέντρο βάρους το 0. Υποθέτουμε ότι $K \subseteq \alpha\sqrt{n}B_2^n$. Τότε, για κάθε $A > 2$ έχουμε*

$$\sigma\left(\theta\in S^{n-1} : \int_K \exp\left(\frac{|\langle x,\theta\rangle|}{c_2\alpha}\right)^2 dx < A\right) > 1-\frac{2}{A} \tag{3.2.15}$$

όπου $c_2 > 0$ είναι η σταθερά του Λήμματος 3.2.2. □

Θεώρημα 3.2.3 *Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με όγκο $|K| = 1$ και κέντρο βάρους το 0. Υποθέτουμε ότι $K \subseteq \alpha\sqrt{n}B_2^n$. Τότε, υπάρχει $\theta \in S^{n-1}$ τέτοιο ώστε*

$$\left(\int_K |\langle x,\theta\rangle|^p dx\right)^{1/p} \leq C\alpha\sqrt{p}\int_K |\langle x,\theta\rangle| dx \tag{3.2.16}$$

για κάθε $p > 1$, όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη: Επιλέγουμε $A = 6$. Από το Λήμμα 3.2.1 και το Πόρισμα 3.2.1 βλέπουμε ότι αν $n \geq 3$, τότε με πιθανότητα μεγαλύτερη από 1/2, μια διεύθυνση $\theta \in S^{n-1}$ ικανοποιεί ταυτόχρονα τις

$$\int_K |\langle x,\theta\rangle| dx \geq c_1 \quad \text{και} \quad \int_K \exp\left(\frac{|\langle x,\theta\rangle|}{c_2\alpha}\right)^2 dx < 6. \tag{3.2.17}$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα $e^z > z^k/k!$ $(z > 0)$, συμπεραίνουμε ότι

$$\int_K |\langle x,\theta\rangle|^{2k} dx \leq 6k!(c_2\alpha)^{2k} \tag{3.2.18}$$

για κάθε $k \geq 1$, άρα

$$\left(\int_K |\langle x,\theta\rangle|^{2k} dx\right)^{1/(2k)} \leq c\alpha\sqrt{2k} \leq \frac{c}{c_1}\alpha\sqrt{2k}\int_K |\langle x,\theta\rangle| dx. \tag{3.2.19}$$

Αυτό είναι το συμπέρασμα του Θεωρήματος όταν $p = 2k$. Η γενική περίπτωση έπεται εύκολα. □

Μπορούμε επίσης σχετικά εύκολα να αποδείξουμε ότι κυρτά σώματα που έχουν μικρή διάμετρο έχουν μεγάλες $(n-1)$-διάστατες τομές (αυτό μπορεί να επαληθευτεί με διάφορους τρόπους, το επιχείρημα όμως που ακολουθεί δίνει επιπλέον κάποια εκτίμηση για την κατανομή του όγκου των $(n-1)$-διάστατων τομών).

Πρόταση 3.2.1 *Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με όγκο $|K| = 1$ και κέντρο βάρους το 0. Υποθέτουμε ότι $K \subseteq \alpha\sqrt{n}B_2^n$. Τότε, για κάθε $t > 0$ έχουμε*

$$\sigma\left(\theta \in S^{n-1} : |K \cap \theta^{\perp}| \geq \frac{c_3}{t\alpha}\right) \geq 1 - 2e^{-t^2}, \tag{3.2.20}$$

όπου $c_3 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη: Εφαρμόζοντας την ανισότητα του Jensen στο Λήμμα 3.2.2, παίρνουμε

$$\int_{S^{n-1}} \exp\left(\left(\frac{\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_1}{c_2\alpha}\right)^2\right) \sigma(d\theta) \leq 2. \tag{3.2.21}$$

Η ανισότητα του Markov δείχνει ότι

$$\sigma\left(\theta \in S^{n-1} : \|\langle \cdot, \theta\rangle\|_1 \geq c_2\alpha t\right) \leq 2e^{-t^2} \tag{3.2.22}$$

για κάθε $t > 0$. Από την άλλη πλευρά, το Θεώρημα 1.1.2 δείχνει ότι αν το K έχει όγκο 1 και κέντρο βάρους το 0, τότε

$$\int_K |\langle x, \theta\rangle|\, dx \simeq \frac{1}{|K \cap \theta^{\perp}|} \tag{3.2.23}$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$. Αυτό συμπληρώνει την απόδειξη. □

3.2.3 Εφαρμογή στα ζωνοειδή

Υπενθυμίζουμε πρώτα κάποιο συμβολισμό και δίνουμε κάποια βασικά στοιχεία για τα ζωνοειδή. Η συνάρτηση στήριξης ενός κυρτού σώματος K ορίζεται από την $h_K(y) = \max_{x\in K}\langle x, y\rangle$ για κάθε $y \neq 0$. Το μέσο πλάτος του K δίνεται από την

$$w(K) = \int_{S^{n-1}} h_K(u)\sigma(du). \tag{3.2.24}$$

Λέμε ότι το K έχει ελάχιστο μέσο πλάτος αν $w(K) \leq w(TK)$ για κάθε $T \in SL(n)$.

Ένας ισοδύναμος ορισμός του επιφανειακού μέτρου $\sigma_K = S_{n-1}(K, \cdot)$ ενός κυρτού σώματος K (που ορίστηκε στην §1.1.1) είναι ο εξής: για κάθε Borel $V \subseteq S^{n-1}$ θέτουμε

$$\sigma_K(V) = \nu(\{x \in \mathrm{bd}(K) : u_K(x) \in V\}), \tag{3.2.25}$$

όπου $u_K(x)$ είναι το εξωτερικό κάθετο διάνυσμα του K στο x, και ν είναι το $(n-1)$-διάστατο επιφανειακό μέτρο του K. Είναι φανερό ότι $\sigma_K(S^{n-1}) = A(K)$, η επιφάνεια του K. Λέμε ότι το K έχει ελάχιστη επιφάνεια αν $A(K) \leq A(TK)$ για κάθε $T \in SL(n)$.

Ζωνοειδή λέμε τα κυρτά σώματα που είναι όρια αθροισμάτων (με την έννοια του Minkowski) ευθυγράμμων τμημάτων με τη μετρική Hausdorff. Ισοδύναμα, ένα συμμετρικό κυρτό σώμα Z είναι ζωνοειδές αν και μόνο αν το πολικό του σώμα είναι η μοναδιαία μπάλα ενός n-διάστατου υπόχωρου κάποιου χώρου L_1: ακριβέστερα, αν υπάρχει θετικό μέτρο μ (το μέτρο στήριξης του Z) στην S^{n-1} τέτοιο ώστε

$$\|x\|_{Z^\circ} = \frac{1}{2}\int_{S^{n-1}} |\langle x, y\rangle| \mu(dy). \tag{3.2.26}$$

Η κλάση των ζωνοειδών ταυτίζεται με την κλάση των σωμάτων προβολών. Ορίζουμε το σώμα προβολών ΠK ενός κυρτού σώματος K να είναι το συμμετρικό κυρτό σώμα που έχει συνάρτηση στήριξης την

$$h_{\Pi K}(\theta) = |P_{\theta^\perp}(K)|, \quad \theta \in S^{n-1} \tag{3.2.27}$$

όπου $P_{\theta^\perp}(K)$ είναι η ορθογώνια προβολή του K επί του $\theta^\perp$. Από την ολοκληρωτική αναπαράσταση

$$|P_{\theta^\perp}(K)| = \frac{1}{2}\int_{S^{n-1}} |\langle u, \theta\rangle|\, d\sigma_K(u) \tag{3.2.28}$$

που επαληθεύεται εύκολα στην περίπτωση των πολυτόπων και επεκτείνεται με προσέγγιση σε κάθε κυρτό σώμα K, βλέπουμε ότι το σώμα προβολών του K είναι ζωνοειδές που έχει σαν μέτρο στήριξης το σ_K. Επιπλέον, αν συμβολίσουμε με $\mathcal{C}_n$ την κλάση των συμμετρικών κυρτών σωμάτων και με $\mathcal{Z}$ την κλάση των ζωνοειδών, το θεώρημα μοναδικότητας του Aleksandrov δείχνει ότι η απεικόνιση του Minkowski $\Pi : \mathcal{C}_n \to \mathcal{Z}$ με $K \mapsto \Pi K$, είναι ένα προς ένα. Σημειώνουμε επίσης ότι η $\mathcal{Z}$ είναι αναλλοίωτη ως προς αντιστρέψιμους γραμμικούς μετασχηματισμούς (και μάλιστα, $\Pi(TK) = (T^{-1})^*(\Pi K)$ για κάθε $T \in SL(n)$) και κλειστή ως προς τη μετρική Hausdorff. Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τα ζωνοειδή, βλέπε [56] και [12].

Θα δούμε ότι τρεις φυσιολογικές θέσεις των ζωνοειδών έχουν μικρή διάμετρο με την έννοια της §3.2. Η απόδειξη χρησιμοποιεί την ισοτροπική περιγραφή αυτών των θέσεων, η οποία επιτρέπει τη χρήση της ανισότητας των Brascamp και Lieb.

1. Η θέση του Lewis: Ο Lewis [39] (βλέπε επίσης [4]) έχει δείξει ότι κάθε ζωνότοπο Z έχει γραμμική εικόνα Z_1 (η «θέση Lewis» του Z) με την ακόλουθη ιδιότητα: υπάρχουν μοναδιαία διανύσματα $u_1, \ldots, u_m$ και θετικοί πραγματικοί αριθμοί $c_1, \ldots, c_m$ τέτοιοι ώστε

$$h_{Z_1}(x) = \sum_{j=1}^{m} c_j |\langle x, u_j\rangle| \tag{3.2.29}$$

και

$$I = \sum_{j=1}^{m} c_j u_j \otimes u_j \tag{3.2.30}$$

όπου I είναι ο ταυτοτικός τελεστής στον $\mathbb{R}^n$. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Brascamp-Lieb, ο Ball απέδειξε στο [4] ότι, κάτω από αυτές τις υποθέσεις,

$$|Z_1^\circ| \leq \frac{2^n}{n!} \quad \text{και} \quad B_2^n \subseteq \sqrt{n} Z_1^\circ. \tag{3.2.31}$$

Η αντίστροφη ανισότητα Santaló για τα ζωνοειδή (βλέπε [54] και [31]) δείχνει ότι

$$|Z_1| \geq 2^n \quad \text{και} \quad Z_1 \subseteq \sqrt{n} B_2^n. \tag{3.2.32}$$

Άρα,

$$2R(Z_1) \leq \sqrt{n} |Z_1|^{1/n}. \tag{3.2.33}$$

2. Η θέση του Loẅner: Υποθέτουμε ότι η B_2^n είναι το ελλειψοειδές ελάχιστου όγκου που περιέχει ένα ζωνοειδές Z_2 (τότε λέμε ότι το Z_2 βρίσκεται στη θέση του Loẅner). Έστω Z_1 η θέση Lewis του Z_2. Τότε,

$$\frac{|B_2^n|}{|Z_2|} \leq \frac{|\sqrt{n} B_2^n|}{|Z_1|}. \tag{3.2.34}$$

Τώρα, οι (3.2.32) και (3.2.34) δείχνουν ότι

$$2R(Z_2) \leq 2 \leq |Z_1|^{1/n} \leq \sqrt{n} |Z_2|^{1/n}. \tag{3.2.35}$$

3. Θέση ελάχιστου μέσου πλάτους: Υποθέτουμε ότι $Z_3 = \Pi K$ είναι ένα ζωνοειδές όγκου 1 που έχει ελάχιστο μέσο πλάτος. Τα αποτελέσματα των [29] και [31] δείχνουν ότι το επιφανειακό μέτρο σ_K είναι ισοτροπικό, δηλαδή

$$\int_{S^{n-1}} \langle u, \theta \rangle^2 d\sigma_K(u) = \frac{A(K)}{n} \tag{3.2.36}$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$, όπου $A(K)$ είναι η επιφάνεια του K. Επιπλέον, ένα αποτέλεσμα του Petty [51] δείχνει ότι το K έχει ελάχιστη επιφάνεια. Απλή εφαρμογή της ανισότητας Cauchy-Schwarz και η (3.2.36) δείχνουν ότι

$$h_{Z_3}(\theta) = \frac{1}{2} \int_{S^{n-1}} |\langle \theta, u \rangle| d\sigma_K(u) \leq \frac{A(K)}{2\sqrt{n}} \tag{3.2.37}$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$. Θα χρησιμοποιήσουμε μια ανισότητα από το [29]:

Λήμμα 3.2.3 *Αν το K έχει ελάχιστη επιφάνεια, τότε*

$$A(K) \leq n |\Pi K|^{1/n}. \tag{3.2.38}$$

Έπεται ότι $h_{Z_3}(\theta) \leq \sqrt{n}/2$ για κάθε $\theta \in S^{n-1}$. Με άλλα λόγια,

$$2R(Z_3) \leq \sqrt{n} |Z_3|^{1/n}. \tag{3.2.39}$$

Η συζήτηση που προηγήθηκε δείχνει ότι τα ζωνοειδή έχουν θέσεις που έχουν μικρή διάμετρο. Η ακριβής διατύπωση έχει ως εξής.

Θεώρημα 3.2.4 *Έστω Z ένα ζωνοειδές στη θέση Lewis ή στη θέση Lowner ή στη θέση ελάχιστου μέσου πλάτους. Τότε,*

$$R(Z) \leq (\sqrt{n}/2)|Z|^{1/n}. \tag{3.2.40}$$

Πόρισμα 3.2.2 *Έστω Z ένα ζωνοειδές στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, $L_Z \leq 1/2$.* □

Έπεται ότι τα αποτελέσματα της §3.2.2 εφαρμόζονται στην κλάση των ζωνοειδών: κάθε ζωνοειδές έχει ψ_2-διευθύνσεις με την έννοια του Θεωρήματος 3.2.3.

Παρατήρηση: Δεν γνωρίζουμε αν τα ισοτροπικά ζωνοειδή έχουν μικρή διάμετρο. Μπορούμε να ελέγξουμε ότι το μέσο πλάτος τους φράσσεται από $c\sqrt{n}$ (έχει τη μικρότερη δυνατή τάξη μεγέθους):

Πρόταση 3.2.2 *Έστω Z ένα ισοτροπικό ζωνοειδές στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, $w(Z) \leq c\sqrt{n}$ όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά.*

Για την απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε έναν τύπο για τον όγκο των ζωνοειδών.

Λήμμα 3.2.4 *Έστω Z ζωνοειδές με μέτρο στήριξης το μ. Τότε,*

$$|Z| = \frac{1}{n}\int_{S^{n-1}} |P_{x^\perp} Z| d\mu(x), \tag{3.2.41}$$

όπου $P_{x^\perp} Z$ είναι η ορθογώνια προβολή του Z στον $x^\perp$.

Απόδειξη: Από τον τύπο του Cauchy έχουμε

$$|P_{x^\perp} Z| = \frac{1}{2}\int_{S^{n-1}} |\langle x, \theta\rangle| d\sigma_Z(\theta), \tag{3.2.42}$$

όπου σ_Z είναι το επιφανειακό μέτρο του Z. Άρα,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}\int_{S^{n-1}} |P_{x^\perp} Z| d\mu(x) &= \frac{1}{2n}\int_{S^{n-1}}\int_{S^{n-1}} |\langle x, \theta\rangle| d\sigma_Z(\theta) d\mu(x) \\ &= \frac{1}{2n}\int_{S^{n-1}}\int_{S^{n-1}} |\langle x, \theta\rangle| d\mu(x) d\sigma_Z(\theta) \\ &= \frac{1}{n}\int_{S^{n-1}} \|\theta\|_{Z^\circ} d\sigma_Z(\theta) \\ &= |Z|, \end{aligned}$$

αφού, από την (1.1.57), η τελευταία ισότητα ισχύει για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα. □

Απόδειξη της Πρότασης 3.2.2: Για κάθε $x \in S^{n-1}$ έχουμε $Z \cap x^\perp \subseteq P_{x^\perp} Z$. Από το Λήμμα 3.2.4,

$$|Z| \geq \frac{1}{n}\int_{S^{n-1}} |Z \cap x^\perp| d\mu(x).$$

Το Z είναι ισοτροπικό, άρα $|Z| = 1$ και $L_Z \leq 1/2$ από το Πόρισμα 3.2.2. Επομένως, $|Z \cap x^{\perp}| \geq c_1/L_Z \geq 2c_1$ για κάθε $x \in S^{n-1}$, όπου $c_1 > 0$ απόλυτη σταθερά. Αυτό δείχνει ότι

$$\|\mu\| \leq c_2 n. \tag{3.2.42}$$

Από την άλλη πλευρά,

$$\begin{aligned} w(Z) &= \int_{S^{n-1}} \|x\|_{Z^\circ} \sigma(dx) \\ &= \frac{1}{2} \int_{S^{n-1}} \int_{S^{n-1}} |\langle y, x\rangle| \sigma(dx)\mu(dy) \\ &\leq \frac{c_3}{\sqrt{n}} \int_{S^{n-1}} \mu(dy) = \frac{c_3}{\sqrt{n}} \|\mu\|. \end{aligned}$$

Συνδυάζοντας με την (3.2.42) ολοκληρώνουμε την απόδειξη. □

3.3 Ισοτροπικά σώματα με μικρή διάμετρο

Σε αυτή την παράγραφο υποθέτουμε ότι K είναι ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με διάμετρο $R(K) = A\sqrt{n}L_K$, όπου A είναι μια θετική παράμετρος. Δηλαδή, το K έχει όγκο 1, κέντρο βάρους το 0, ικανοποιεί την ισοτροπική συνθήκη

$$\int_K \langle x, \theta\rangle^2 dx = L_K^2 \tag{3.3.1}$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$, και $|x| \leq A\sqrt{n}L_K$ για κάθε $x \in K$.

3.3.1 Εκτιμήσεις των βασικών παραμέτρων

Λήμμα 3.3.1 *Για κάθε $q \geq 1$ έχουμε*

$$w(Z_q(K)) \leq w_q(Z_q(K)) \leq c_1 A\sqrt{q} L_K, \tag{3.3.2}$$

όπου $c_1 > 0$ απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη: Η αριστερή ανισότητα είναι απλή συνέπεια της ανισότητας του Hölder, ενώ για τη δεξιά μπορούμε να υποθέσουμε ότι $q \leq n$. Από την Πρόταση 2.2.2 έχουμε

$$w_q(Z_q(K)) \leq c\sqrt{\frac{q}{n}} I_q(K) \leq c\sqrt{\frac{q}{n}} A\sqrt{n}L_K = cA\sqrt{q}L_K, \tag{3.3.3}$$

αφού

$$I_q(K) = \left(\int_K |x|^q dx\right)^{1/q} \leq A\sqrt{n}L_K \tag{3.3.4}$$

για κάθε $q > 0$. □

Λήμμα 3.3.2 *Για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ έχουμε*

$$\big\|\langle \cdot, \theta\rangle\big\|_{\psi_2} \leq c_2\sqrt{A}\sqrt[4]{n}L_K, \tag{3.3.5}$$

όπου $c_2 > 0$ απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη: Έστω $\theta \in S^{n-1}$. Από την Πρόταση 2.4.2 έχουμε

$$\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_{\psi_2} \leq c_2 R(K)^{1/2}L_K^{1/2} = c_2\sqrt{A}\sqrt[4]{n}L_K \tag{3.3.6}$$

για κάποια απόλυτη σταθερά $c_2 > 0$. □

Πρόταση 3.3.1 *Για κάθε $q \geq 1$ έχουμε*

$$m_K(q) \geq c_3\sqrt{n}/A^2, \tag{3.3.7}$$

όπου $c_3 > 0$ απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη: Από την Πρόταση 2.2.4 υπάρχει $q_1 \simeq \sqrt{n}$ με την ιδιότητα $[1, q_1] \subset N_K$. Από το Λήμμα 2.2.5,

$$w(Z_{q_1}(K)) \geq cw_{q_1}(Z_{q_1}(K)) \simeq \sqrt{q_1}I_{q_1}(K)/\sqrt{n} \geq \sqrt{q_1}I_2(K)/\sqrt{n} = \sqrt{q_1}L_K.$$

Άρα, για κάθε $q \geq q_1$ έχουμε

$$w(Z_q(K)) \geq w(Z_{q_1}(K)) \geq c\sqrt{q_1}L_K \geq c'\sqrt[4]{n}L_K. \tag{3.3.8}$$

Από την άλλη πλευρά,

$$R(Z_q(K)) \leq R(K) \leq A\sqrt{n}L_K, \tag{3.3.9}$$

άρα αν $q \geq q_1$ έχουμε

$$m_K(q) = \beta n\frac{w(Z_q(K))^2}{R(Z_q(K))^2} \geq c\sqrt{n}/A^2. \tag{3.3.10}$$

Αν $q \leq q_1$ τότε $q \in N_K$, οπότε πάλι από την Πρόταση 2.2.4 παίρνουμε

$$m_K(q) \geq c_1\frac{n}{q} \geq c_1\frac{n}{q_1} \geq c_1'\sqrt{n}. \tag{3.3.11}$$

Σε κάθε περίπτωση έχουμε το ζητούμενο. □

Τέλος, δείχνουμε ότι η συνάρτηση $f_K(t)$ συμπεριφέρεται σαν την $\exp(-t^2/L_K^2)$.

Πρόταση 3.3.2 *Για κάθε $t > 0$ έχουμε*

$$f_K(t) \leq \frac{c_1}{L_K}\exp(-c_2t^2/A^2L_K^2), \tag{3.3.12}$$

όπου $c_1, c_2 > 0$ απόλυτες σταθερές.

Απόδειξη: Από την Πρόταση 2.3.1 έχουμε

$$f_K(t) \leq c\sqrt{n}\int_{U_K(t)} \frac{1}{|x|}\left(1-\frac{t^2}{|x|^2}\right)^{\frac{n-3}{2}} dx. \tag{3.3.17}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : [t, A\sqrt{n}L_K] \to \mathbb{R}$, με

$$g(s) = \frac{1}{s}\left(1-\frac{t^2}{s^2}\right)^{\frac{n-3}{2}}. \tag{3.3.18}$$

Η παράγωγος της g ισούται με

$$g'(s) = \frac{1}{s^4}\left(1-\frac{t^2}{s^2}\right)^{\frac{n-5}{2}}\cdot\left[t^2(n-2)-s^2\right]. \tag{3.3.19}$$

Αν $t \geq 2AL_K$ και $n > 3$, τότε η $g(|x|)$ είναι αύξουσα συνάρτηση του $|x|$ στο $U_K(t)$. Επομένως,

$$\begin{aligned} f_K(t) &\leq c\sqrt{n}|U_K(t)|\cdot\frac{1}{AL_K\sqrt{n}}\left(1-\frac{t^2}{A^2L_K^2 n}\right)^{\frac{n-3}{2}} \\ &\leq \frac{c}{AL_K}\exp(-c_2t^2/A^2L_K^2) \\ &\leq \frac{c_1}{L_K}\exp(-c_2t^2/A^2L_K^2). \end{aligned}$$

Για κάθε $t > 0$ έχουμε $f_K(t) \leq c/L_K$, οπότε η ανισότητα ισχύει τετριμμένα αν $0 < t < 2AL_K$. $\square$

Παρατήρηση. Η ανισότητα της Πρότασης 3.3.2 αντιστρέφεται με την εξής έννοια: για κάθε $t \leq \frac{\sqrt{n}}{2}L_K$ ισχύει η ανισότητα

$$f_K(t) \geq \frac{c_3}{A^3L_K}\exp(-c_4t^2/L_K^2). \tag{3.3.20}$$

Για την απόδειξη, παρατηρούμε πρώτα ότι

$$nL_K^2 = \int_K |x|^2dx \leq |U_K(\sqrt{n}L_K/2)|\cdot A^2nL_K^2 + (1-|U_K(\sqrt{n}L_K/2)|)\cdot nL_K^2/4,$$

άρα $|U_K(\sqrt{n}L_K/2)| \geq 3/(4A^2)$. Επομένως, αν $0 < t \leq \sqrt{n}L_K/2$ έχουμε

$$\begin{aligned} f_K(t) &\geq c\sqrt{n}\int_{U_K(t)}\frac{1}{|x|}\left(1-\frac{t^2}{|x|^2}\right)^{\frac{n-3}{2}}dx \\ &\geq \frac{c}{AL_K}\int_{U_K(\sqrt{n}L_K/2)}\exp(-c_4t^2/L_K^2)dx \\ &\geq \frac{c_3}{A^3L_K}\exp(-c_4t^2/L_K^2). \end{aligned}$$

3.3.2 Ψ_2-διευθύνσεις

Στην §3.2 είδαμε ότι αν το K έχει όγκο 1, κέντρο βάρους το 0, και αν $K \subseteq \alpha\sqrt{n}B_2^n$, τότε

$$\sigma(\theta \in S^{n-1} : \|\langle \cdot, \theta\rangle\|_{\psi_2} \geq c_2 \alpha t) \leq \frac{2}{t} \tag{3.3.21}$$

για κάθε $t > 0$, όπου $c_2 > 0$ απόλυτη σταθερά. Σε αυτήν την υποπαράγραφο υποθέτουμε ότι το K είναι επιπλέον ισοτροπικό, και έχει ακτίνα $R(K) = A\sqrt{n}L_K$. Θα δούμε ότι η εκτίμηση του μέτρου στην (3.3.21) βελτιώνεται: το σύνολο των διευθύνσεων με «μεγάλη» ψ_2-σταθερά έχει «εκθετικά μικρό» μέτρο.

Λήμμα 3.3.3 *Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι για κάποιον $R > 0$ έχουμε $h_K(\theta) \leq R$ για κάθε $\theta \in S^{n-1}$. Τότε,*

$$\sigma(\theta \in S^{n-1} : h_K(\theta) \geq 3tw(K)) \leq \exp\left(-c\frac{w^2(K)t^2 n}{R^2}\right) \tag{3.3.22}$$

για κάθε $t \geq 1$.

Απόδειξη: Έστω m ο μέσος Lévy της h_K στην S^{n-1}. Αφού η h_K είναι Lipschitz συνεχής με σταθερά R, η σφαιρική ισοπεριμετρική ανισότητα (βλέπε [48]) δίνει

$$\sigma(\theta \in S^{n-1} : h_K(\theta) \geq m + tw(K)) \leq \exp\left(-c\frac{w^2(K)t^2 n}{R^2}\right) \tag{3.3.23}$$

για κάθε $t > 0$. Παρατηρούμε ότι $m \leq 2w(K)$, κι αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. $\square$

Θεώρημα 3.3.1 *Έστω K ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $R(K) = A\sqrt{n}L_K$ για κάποια σταθερά $A > 1$. Τότε,*

$$\sigma(\theta \in S^{n-1} : \|\langle \cdot, \theta\rangle\|_{\psi_2} \geq c_1 A t L_K) \leq \exp\left(-c_2\sqrt{n}t^2/A^2\right) \tag{3.3.24}$$

για κάθε $t \geq 1$, όπου $c_1, c_2 > 0$ απόλυτες σταθερές.

Απόδειξη: Για κάθε $q \geq 2$ και κάθε $\theta \in S^{n-1}$ έχουμε

$$L_K \leq H_q(\theta) \leq R(Z_q(K)). \tag{3.3.25}$$

Έστω $t \geq 1$. Από το Λήμμα 3.3.3 έχουμε

$$\begin{aligned} \sigma(\theta \in S^{n-1} : H_q(\theta) \geq 3tw(Z_q(K))) &\leq \exp\left(-c\frac{nw^2(Z_q(K))t^2}{R^2(Z_q(K))}\right) \\ &\leq \exp(-c_2 m_K(q) t^2). \end{aligned}$$

Από το Λήμμα 3.3.1 έχουμε

$$w(Z_q(K)) \leq c_1 A\sqrt{q} L_K, \tag{3.3.26}$$

άρα

$$\sigma\big(\theta \in S^{n-1} : H_q(\theta) \geq c_3 t A\sqrt{q} L_K\big) \leq \exp(-c_2 m_K(q) t^2). \tag{3.3.27}$$

Τέλος, από την Πρόταση 3.3.1, $m_K(q) \geq c_4\sqrt{n}/A^2$ άρα

$$\sigma\big(\theta \in S^{n-1} : H_q(\theta) \geq c_3 t A\sqrt{q} L_K\big) \leq \exp(-c_5\sqrt{n} t^2/A^2). \tag{3.3.28}$$

Από το Πόρισμα 2.2.1 έχουμε

$$\{\theta \in S^{n-1} : \|\langle\cdot,\theta\rangle\|_{\psi_2} \geq c_6 t A L_K\} \subseteq \bigcup_{q=2}^{n} J_q \tag{3.3.29}$$

για κάποια απόλυτη σταθερά $c_6 > 0$, όπου

$$J_q := \{\theta \in S^{n-1} : H_q(\theta) \geq c_3 t A\sqrt{q} L_K\}. \tag{3.3.30}$$

Χρησιμοποιώντας και την (3.3.28) παίρνουμε το ζητούμενο για $n \geq n_0(A)$. □

3.3.3 Τα ισοτροπικά ψ_2-σώματα έχουν μικρή διάμετρο

Όπως θα δούμε σε αυτήν την υποπαράγραφο, η υπόθεση ότι κάποιο κυρτό σώμα είναι ψ_2-σώμα είναι πολύ περιοριστική.

Θεώρημα 3.3.2 *Έστω K ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι το K είναι ψ_2-σώμα με σταθερά b_2. Τότε,*

$$K \subseteq C b_2^2 \log(1+b_2)\sqrt{n} B_2^n, \tag{3.3.31}$$

όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη: Αφού το K είναι ψ_2-σώμα με σταθερά b_2, η Πρόταση 2.4.1 και το Πόρισμα 2.2.1 δείχνουν ότι

$$\frac{c h_K(\theta)}{\sqrt{n}} \leq \|\langle\cdot,\theta\rangle\|_{\psi_2} \leq b_2 \|\langle\cdot,\theta\rangle\|_1 \tag{3.3.32}$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$. Αφού το K είναι ισοτροπικό, έχουμε

$$\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_1 \leq L_K \tag{3.3.33}$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$. Ο Bourgain [9] απέδειξε πρόσφατα ότι

$$L_K \leq c' b_2 \log(1+b_2). \tag{3.3.34}$$

Συνδυάζοντας αυτές τις ανισότητες παίρνουμε την (3.3.31). □

Σημείωση: Το Θεώρημα 3.3.2 δείχνει ότι τα ψ_2-σώματα ανήκουν σε μία πολύ περιορισμένη κλάση (τα πολικά τους σώματα έχουν φραγμένο λόγο όγκων). Ένα ενδιαφέρον ερώτημα είναι αν τα ζωνοειδή είναι ψ_2-σώματα ή όχι.

Ας υποθέσουμε ότι το ισοτροπικό κυρτό σώμα K ικανοποιεί την $\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_{\psi_2} \leq b_2 L_K$ για κάθε $\theta \in S^{n-1}$. Τότε το K έχει μικρή διάμετρο, οπότε η απόδειξη της Πρότασης 3.3.2 μας εξασφαλίζει ότι

$$f_K(t) \leq c_1(b_2)\exp(-c_2(b_2)t^2) \tag{3.3.35}$$

για κάθε $t \ll c(b_2)\sqrt{n}$. Η επόμενη πρόταση δείχνει ότι αυτή και μόνο η υπόθεση επιβάλλει στο σώμα K να έχει μικρή διάμετρο.

Πρόταση 3.3.3 *Έστω K ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Αν για κάποιον $A > 0$ έχουμε*

$$f_K(t) \leq \frac{c_1}{L_K}\exp(-t^2/A^2L_K^2) \tag{3.3.36}$$

για κάθε $t > 0$, τότε

$$R(K) \leq c_2 A\sqrt{n} L_K. \tag{3.3.37}$$

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι ισχύει η (3.3.36). Θα χρειαστούμε το εξής λήμμα.

Λήμμα 3.3.4 *Υπάρχει σταθερά $s \in (0, 1/2)$ τέτοια ώστε*

$$\mathrm{Prob}(x \in K : |x| \geq sR(K)) \geq s^n. \tag{3.3.38}$$

Απόδειξη του Λήμματος: Από την Πρόταση 2.2.2, το Πόρισμα 2.2.1 και το Θεώρημα 2.2.3,

$$I_n(K) \simeq w_n(Z_n(K)) \simeq R(Z_n(K)) \simeq R(K). \tag{3.3.39}$$

Υπάρχει λοιπόν απόλυτη σταθερά $0 < C < 1$ τέτοια ώστε

$$\int_K |x|^n dx \geq C^n R(K)^n. \tag{3.3.40}$$

Αφού

$$\int_K |x|^n dx \leq |U_K(sR(K))| R(K)^n + (1 - |U_K(sR(K))|) s^n R(K)^n \tag{3.3.41}$$

για κάθε $s > 0$, αν πάρουμε $s = C/2$ βλέπουμε ότι

$$|U_K(sR(K))| \geq \frac{C^n - (C/2)^n}{1-(C/2)^n} \geq (C/2)^n = s^n. \tag{3.3.42}$$

Αυτό αποδεικνύει το Λήμμα. □

Απόδειξη της Πρότασης 3.3.3: Παίρνουμε $t = sR(K)/2$. Τότε,

$$\begin{aligned} f_K(t) &\geq c\sqrt{n}\int_{U_K(t)} \frac{1}{|x|}\left(1-\frac{t^2}{|x|^2}\right)^{\frac{n-3}{2}} dx \\ &\geq \frac{c\sqrt{n}}{R(K)}\int_{U_K(2t)}\left(1-\frac{1}{4}\right)^{\frac{n-3}{2}} dx \\ &\geq \frac{c\sqrt{n}}{R(K)}(3s/4)^n \geq e^{-c'n} \end{aligned}$$

για κάποια απόλυτη σταθερά $c' > 0$. Από την υπόθεση για την f_K και το γεγονός ότι $L_K \geq c$ έχουμε

$$c'' \exp(-c_2t^2/A^2L_K^2) \geq \exp(-c'n). \tag{3.3.43}$$

Άρα,

$$c'n \geq \frac{s^2R(K)^2}{4A^2L_K^2}, \tag{3.3.44}$$

απ' όπου έπεται ότι $R(K) \leq c_3AL_K\sqrt{n}$ για κάποια απόλυτη σταθερά $c_3 > 0$. □

Παρατηρήσεις: Κλείνουμε αυτή την παράγραφο με δύο απλές παρατηρήσεις για τη σχέση της ψ_2-συμπεριφοράς του K με τη συνάρτηση m_K.

(α) Υποθέτουμε πρώτα ότι το K είναι ισοτροπικό και ικανοποιεί την $\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_{\psi_2} \leq b_2L_K$ για κάθε $\theta \in S^{n-1}$. Τότε,

$$R(Z_q(K)) \leq cb_2\sqrt{q}L_K \tag{3.3.45}$$

για κάθε $q \geq 1$. Ειδικότερα,

$$R(K) \simeq R(Z_n(K)) \leq c'b_2\sqrt{n}L_K. \tag{3.3.46}$$

Με το συμβολισμό της §2.2.4, αν $q \in N_K$ τότε

$$w(Z_q(K)) \geq cw_q(Z_q(K)) \geq c'\sqrt{q/n}I_q(K) \geq c'\sqrt{q}L_K. \tag{3.3.47}$$

Χρησιμοποιώντας και την (3.3.45) παίρνουμε

$$m_K(q) = \beta n\frac{w(Z_q(K))^2}{R(Z_q(K))^2} \geq c''n/b_2^2. \tag{3.3.47}$$

Ειδικότερα,

(3.3.48) $$q_0 = \min P_K = m_K(q_0) \geq c'' n / b_2^2,$$

οπότε, για κάθε $q \in P_K$ έχουμε

(3.3.49) $$m_K(q) = \beta n \frac{w(Z_q(K))^2}{R(Z_q(K))^2} \geq \beta n \frac{w(Z_{q_0}(K))^2}{R(K)^2} \geq cn \frac{q_0 L_K^2}{b_2^2 n L_K^2} \geq cn/b_2^4.$$

Δηλαδή,

(3.3.50) $$m_K(q) \geq cn/b_2^4 \ \text{ για κάθε } \ q \geq 1.$$

(β) Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι $R(K) \leq A\sqrt{n} L_K$ και ότι $m_K(q) \geq \alpha n$ για κάθε $q \geq 1$. Τότε,

(3.3.51) $$R(Z_q(K)) \leq \frac{c}{\sqrt{\alpha}} w(Z_q(K))$$

για κάθε $q \geq 1$. Όμως,

(3.3.52) $$w(Z_q(K)) \leq w_q(Z_q(K)) \simeq \sqrt{q/n} I_q(K) \leq c\sqrt{q} A L_K.$$

Άρα,

(3.3.53) $$R(Z_q(K)) \leq \frac{c_1 A}{\sqrt{\alpha}} \sqrt{q} L_K$$

το οποίο αποδεικνύει ότι

(3.3.54) $$\|\langle \cdot, \theta \rangle\|_{\psi_2} \leq \frac{c_2 A}{\sqrt{\alpha}} L_K$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$.

(γ) Με λίγα λόγια, τα (α) και (β) δείχνουν ότι ένα ισοτροπικό σώμα K είναι ψ_2-σώμα αν και μόνο αν έχει μικρή διάμετρο και ικανοποιεί την $m_K(q) \simeq n$ για κάθε $q \geq 1$.

3.4 Διάμετρος και ψ_2-συμπεριφορά των γραμμικών συναρτησοειδών

Έστω $\mathcal{C}(D)$ η κλάση όλων των κυρτών σωμάτων K στον $\mathbb{R}^n$ που έχουν ακτίνα $R(K) \leq D$, όπου $D > 0$ δοθείσα σταθερά. Θέτουμε

$$c_D := \max_{K \in \mathcal{C}(D)} \max_{\theta \in S^{n-1}} \|\langle \cdot, \theta \rangle\|_{L^{\psi_2}(K)}.$$

Αν για κάποιο $K_0 \in \mathcal{C}(D)$ και κάποιο $\theta \in S^{n-1}$ ικανοποιείται η $\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_{L^{\psi_2}(K_0)} = c_D$, τότε η Schwarz συμμετρικοποίηση K_1 του K_0 ως προς θ ανήκει στην $\mathcal{C}(D)$ και ικανοποιεί την

$$\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_{L^{\psi_2}(K_1)} = \|\langle \cdot, \theta\rangle\|_{L^{\psi_2}(K_0)} = c_D.$$

Αυτό υποδεικνύει ότι αν θέλουμε να προσδιορίσουμε τη χειρότερη ψ_2-συμπεριφορά για την κλάση των ισοτροπικών κυρτών σωμάτων στον $\mathbb{R}^n$ που έχουν ακτίνα το πολύ ίση με $A\sqrt{n}L_K$, πρέπει να κοιτάξουμε τα εκ περιστροφής σώματα στη διεύθυνση του άξονά τους.

Σταθεροποιούμε $R > 0$ και θεωρούμε συμμετρικά κυρτά σώματα εκ περιστροφής, της μορφής

$$K = \{(x,t) : |t| \leq R, |x| \leq f(|t|)\}, \tag{3.4.1}$$

όπου $f : [0,R] \to \mathbb{R}^+$ φθίνουσα γραμμική συνάρτηση. Μπορούμε να γράψουμε

$$f(t) = a - bt, \tag{3.4.2}$$

όπου $a > 0$ και $a - bR \geq 0$, δηλαδή $0 \leq b \leq a/R$. Υποθέτουμε ότι $|K| = 1$, το οποίο μας δίνει τη συνθήκη

$$2\omega_{n-1} \int_0^R (a-bt)^{n-1} dt = 1, \tag{3.4.3}$$

και συμβολίζουμε με I την ποσότητα

$$I := I_1(K, e_n) = \int_K |\langle x, e_n\rangle| dx = 2\omega_{n-1} \int_0^R t(a-bt)^{n-1} dt. \tag{3.4.4}$$

Λήμμα 3.4.1 *Για κάθε $\delta \in [0,1]$ ισχύει*

$$\int_0^{1-\delta} t(1-t)^{n-1} dt = \frac{1}{n+1}\left(\int_0^{1-\delta} (1-t)^{n-1} dt - \delta^n (1-\delta)\right). \tag{3.4.5}$$

Απόδειξη: Γράφουμε

$$\begin{aligned}
\int_0^{1-\delta} t(1-t)^{n-1} dt &= \int_0^{1-\delta} (1-t)^n \frac{t}{1-t} dt \\
&= -\frac{1}{n+1} \int_0^{1-\delta} \left[(1-t)^{n+1}\right]' \frac{t}{1-t} dt \\
&= -\frac{(1-t)^n t}{n+1}\Big|_0^{1-\delta} + \frac{1}{n+1} \int_0^{1-\delta} (1-t)^{n+1} \left[\frac{t}{1-t}\right]' dt \\
&= -\frac{\delta^n (1-\delta)}{n+1} + \frac{1}{n+1} \int_0^{1-\delta} (1-t)^{n-1} dt,
\end{aligned}$$

απ' όπου προκύπτει η (3.4.5). □

Λήμμα 3.4.2 *Υπάρχουν απόλυτες σταθερές $c_1, c_2, c_3 > 0$ με την εξής ιδιότητα. Αν θεωρήσουμε το σώμα K όπως παραπάνω, και αν $R \geq c_1 I$, τότε*

$$c_2 \frac{a}{nI} \leq b \leq c_3 \frac{a}{nI}. \tag{3.4.6}$$

Απόδειξη: Ορίζουμε $\delta \in [0,1)$ από την εξίσωση

$$1 - \delta = \frac{bR}{a}. \tag{3.4.7}$$

Επίσης θέτουμε

$$M := 2\omega_{n-1} a^{n-1} \quad \text{και} \quad J := \int_0^{1-\delta} (1-t)^{n-1} dt = \frac{1-\delta^n}{n}. \tag{3.4.8}$$

Η (3.4.3) γράφεται

$$1 = |K| = M \cdot \frac{a}{b} \cdot J = M \cdot \frac{R}{1-\delta} \cdot J, \tag{3.4.9}$$

ενώ η (3.4.4), σε συνδυασμό με το Λήμμα 3.4.1 παίρνει τη μορφή

$$I = \frac{M}{n+1} \cdot \frac{a^2}{b^2} \cdot \Big(J - \delta^n (1-\delta) \Big) = \frac{M}{(n+1)} \cdot \frac{R^2}{(1-\delta)^2} \cdot \Big(J - \delta^n (1-\delta) \Big). \tag{3.4.10}$$

Από την (3.4.9) έχουμε

$$\delta^n = 1 - nJ. \tag{3.4.11}$$

Αντικαθιστώντας στην (3.4.10) και χρησιμοποιώντας την (3.4.9), γράφουμε

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{(n+1)J} \frac{R}{1-\delta} \cdot \Big(J - (1-nJ)(1-\delta) \Big) \\ &= \frac{nR}{n+1} + \frac{R}{(n+1)(1-\delta)} - \frac{R}{(n+1)J} \\ &= \frac{nR}{n+1} + \frac{R}{(n+1)(1-\delta)} - \frac{MR^2}{(n+1)(1-\delta)}. \end{aligned}$$

Λύνοντας ως προς $1-\delta$ παίρνουμε

$$1 - \delta = \frac{bR}{a} = \frac{MR^2 - R}{nR - (n+1)I}, \tag{3.4.12}$$

δηλαδή,

$$b = \frac{a}{nI} \cdot \frac{MR - 1}{\frac{R}{I} - \frac{n+1}{n}}. \tag{3.4.13}$$

Παρατηρούμε ότι

$$M = 2\omega_{n-1}a^{n-1} = 2|K \cap e_n^{\perp}| \simeq \frac{1}{I}, \tag{3.4.14}$$

οπότε, αν η σταθερά c_1 είναι αρκετά μεγάλη, έχουμε $MR \simeq R/I \gg 1$. Αυτό μας εξασφαλίζει την (3.4.6) για κάποιες απόλυτες σταθερές $c_2, c_3 > 0$. □

Η σημασία της συνθήκης του Λήμματος 3.4.2 γίνεται φανερή από το επόμενο Λήμμα.

Λήμμα 3.4.3 *Θεωρούμε ένα σώμα K όπως παραπάνω, το οποίο ικανοποιεί την $R \geq c_1 I$. Αν $s \leq c' \min\{R, a/b\}$, τότε*

$$\mathrm{Prob}(|t| \geq s) \geq c_4 \exp(-c_5 s/I), \tag{3.4.15}$$

όπου $c', c_4, c_5 > 0$ απόλυτες σταθερές.

Απόδειξη: Η πιθανότητα είναι ίση με

$$\begin{aligned} \mathrm{Prob}(|t| \geq s) &= 2\omega_{n-1}\int_s^R (a-bt)^{n-1}dt \\ &= 2\omega_{n-1}\frac{a^n}{nb}\left(\left(1-\frac{bs}{a}\right)^n - \left(1-\frac{bR}{a}\right)^n\right). \end{aligned}$$

Παρατηρούμε πρώτα ότι

$$\omega_{n-1}a^{n-1} = |K \cap e_n^{\perp}| \geq c/I. \tag{3.4.16}$$

Παίρνοντας υπόψιν μας και την $b \leq c_3 a/(nI)$, βλέπουμε ότι

$$2\omega_{n-1}\frac{a^n}{nb} \geq c \tag{3.4.17}$$

για κάποια απόλυτη σταθερά $c > 0$. Αν $s \leq a/2b$, χρησιμοποιώντας την $1-x \geq e^{-2x}$ για $x \in [0, 1/2]$, παίρνουμε

$$\left(1-\frac{bs}{a}\right)^n \geq \exp(-2bns/a). \tag{3.4.18}$$

Από την άλλη πλευρά,

$$\left(1-\frac{bR}{a}\right)^n \leq \exp(-bRn/a). \tag{3.4.19}$$

Αν $s \ll R$, τότε χρησιμοποιώντας και την $R \geq c_1 I$ παίρνουμε

$$\exp(-bRn/a) \leq \frac{1}{2}\exp(-2bns/a). \tag{3.4.20}$$

Από τα παραπάνω έπεται ότι: αν $s \leq c' \min\{R, a/b\}$, τότε

$$\mathrm{Prob}(|t| \geq s) \geq (c/2)\exp(-2bns/a) \geq (c/2)\exp(-2c_2 s/I). \tag{3.4.21}$$

Έπεται το ζητούμενο, με $c_4 = c/2$ και $c_5 = 2c_2$. □

Λήμμα 3.4.4 *Θεωρούμε το σώμα K όπως παραπάνω. Για κάθε $j = 1, \ldots, n-1$ έχουμε*

$$c_6 \frac{\sqrt{n}}{a} \leq |K \cap e_j^{\perp}| \leq c_7 \sqrt[n-1]{R}, \tag{3.4.22}$$

όπου $c_6, c_7 > 0$ απόλυτες σταθερές.

Απόδειξη: Για το άνω φράγμα χρησιμοποιούμε την ανισότητα του Hölder:

$$\begin{aligned} |K \cap e_j^{\perp}| &= 2\omega_{n-2} \int_0^R (a-bt)^{n-2} dt \leq 2\omega_{n-2} \left(\int_0^R (a-bt)^{n-1} dt \right)^{\frac{n-2}{n-1}} R^{1/(n-1)} \\ &= 2\omega_{n-2} (2\omega_{n-1})^{-\frac{n-2}{n-1}} R^{1/(n-1)} \leq c_7 \sqrt[n-1]{R}, \end{aligned}$$

όπου $c_7 > 0$ απόλυτη σταθερά. Για το κάτω φράγμα παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} |K \cap e_j^{\perp}| &= 2\omega_{n-2} \int_0^R (a-bt)^{n-2} dt \geq \frac{\omega_{n-2}}{a\omega_{n-1}} 2\omega_{n-1} \int_0^R (a-bt)^{n-1} dt \\ &= \frac{\omega_{n-2}}{a\omega_{n-1}} \geq c_6 \frac{\sqrt{n}}{a}, \end{aligned}$$

όπου $c_6 > 0$ απόλυτη σταθερά. □

Λήμμα 3.4.5 *Υπάρχουν $a \simeq \sqrt{n}$ και $b \simeq 1/\sqrt{n}$ τέτοια ώστε το συμμετρικό κυρτό σώμα εκ περιστροφής*

$$W = \{y = (x,t) : |t| \leq a, |x| \leq a - b|t|\} \tag{3.4.23}$$

να έχει όγκο 1 και να ικανοποιεί την

$$c_8 \leq \int_W \langle y, \theta \rangle^2 dy \leq c_9 \tag{3.4.24}$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$, όπου $c_8, c_9 > 0$ απόλυτες σταθερές.

Απόδειξη: Αν $r = 1/\sqrt[n-1]{\omega_{n-1}}$, για το σώμα

$$K = \{(x,t) : |t| \leq r, |x| \leq r - |t|/\sqrt{n}\} \tag{3.4.25}$$

έχουμε

$$|K| = 2\omega_{n-1}r^{n-1}\cdot\sqrt{n}r\cdot\frac{1-\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n}{n}\simeq 1, \tag{3.4.26}$$

αφού $r\simeq\sqrt{n}$. Θεωρούμε $s>0$ τέτοιο ώστε το $W:=sK$ να έχει όγκο 1. Τότε, $s^n\simeq 1$, και το W γράφεται στη μορφή (3.4.23), όπου $a\simeq\sqrt{n}$ και $b=1/\sqrt{n}$. Επίσης,

$$I^{-1}\simeq |W\cap e_n^{\perp}| = \omega_{n-1}r^{n-1}s^{n-1}\simeq 1, \tag{3.4.27}$$

άρα

$$\int_W \langle y,e_n\rangle^2 dy\simeq I^2\simeq 1. \tag{3.4.28}$$

Παρατηρούμε ότι το W είναι συμμετρικό ως προς τους υποχώρους συντεταγμένων, άρα η (3.4.24) ισχύει για κάθε $\theta\in S^{n-1}$ αν έχουμε

$$c_8\leq\int_W\langle y,e_j\rangle^2 dy\leq c_9 \tag{3.4.29}$$

για κάθε $j=1,\ldots,n$. Λόγω της (3.4.28), αρκεί να ελέγξουμε την (3.4.29) για $j\leq n-1$. Από το Λήμμα 3.4.4, για κάθε $j=1,\ldots,n-1$ έχουμε

$$c_6'\leq c_6\frac{\sqrt{n}}{a}\leq |W\cap e_j^{\perp}|\leq c_7\sqrt[n-1]{a}\leq c_7', \tag{3.4.30}$$

άρα

$$\int_W\langle y,e_j\rangle^2 dy\simeq |W\cap e_j^{\perp}|^{-2}\simeq 1. \tag{3.4.31}$$

Αυτό αποδεικνύει το Λήμμα. □

Από το σώμα W μπορούμε εύκολα να περάσουμε σε «παρόμοιο» ισοτροπικό σώμα.

Θεώρημα 3.4.1 *Υπάρχουν $a_1, R_1\simeq\sqrt{n}$ και $b_1\simeq 1/\sqrt{n}$ τέτοια ώστε το συμμετρικό κυρτό σώμα εκ περιστροφής*

$$Q=\{y=(x,t): |t|\leq R_1, |x|\leq a_1-b_1|t|\} \tag{3.4.32}$$

να είναι ισοτροπικό.

Απόδειξη: Θεωρούμε το σώμα W του προηγούμενου λήμματος. Υπάρχει διαγώνιος τελεστής $T=\mathrm{diag}(u,\ldots,u,v)$ τέτοιος ώστε το $Q=T(W)$ να είναι ισοτροπικό. Η απόδειξη της Πρότασης 3.1.1 και το Λήμμα 3.4.4 δείχνουν ότι $u,v\simeq 1$. Το Q γράφεται στη μορφή (3.4.16) με $R_1=av$, $a_1=au$ και $b_1=bu/v$. Αυτό αποδεικνύει το Θεώρημα. □

Τα επόμενα δύο Λήμματα περιγράφουν δύο «αντικρουόμενες» ιδιότητες του Q.

Λήμμα 3.4.6 *Υπάρχουν απόλυτες σταθερές $c, C > 0$ τέτοιες ώστε*

$$c\sqrt{n}B_2^n \subseteq Q \subseteq C\sqrt{n}B_2^n. \tag{3.4.33}$$

Απόδειξη: Το πρόβλημα είναι ουσιαστικά διδιάστατο. Για κάθε $y = (x,t) \in Q$ έχουμε

$$|y|^2 = |x|^2 + t^2 \leq a_1^2 + R_1^2 \leq C^2 n, \tag{3.4.34}$$

όπου $C > 0$ απόλυτη σταθερά, γιατί $a_1, R_1 \simeq \sqrt{n}$. Αυτό αποδεικνύει τον δεξιό εγκλεισμό. Για τον αριστερό, παρατηρούμε ότι η ακτίνα της εγγεγραμμένης μπάλας του Q ισούται με $\min\{R_1, d\}$, όπου d είναι η απόσταση του $(0,0)$ από την ευθεία $y = a_1 - b_1 t$ στο $\mathbb{R}^2$. Έχουμε

$$d = \frac{a_1}{\sqrt{1+b_1^2}} \simeq \sqrt{n}, \tag{3.4.35}$$

άρα $Q \supseteq c\sqrt{n}B_2^n$ για κάποια απόλυτη σταθερά $c > 0$. □

Λήμμα 3.4.7 *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε*

$$\|\langle \cdot, e_n\rangle\|_{\psi_2} \geq c\sqrt[4]{n}. \tag{3.4.36}$$

Απόδειξη: Για κάθε $q \geq 1$ έχουμε

$$I_q := I(Q, e_n) \leq c_1 q I \leq c_2 q, \tag{3.4.37}$$

όπου $c_2 > 0$ απόλυτη σταθερά. Επίσης, από την Πρόταση 2.1.4 έχουμε

$$\mathrm{Prob}(y \in Q : |\langle y, e_n\rangle| \geq 3CI_q) \leq e^{-q} \tag{3.4.38}$$

για κάθε $q \geq 1$. Αν $3C \cdot c_2 q \leq c' \min\{R_1, a_1/b_1\}$ όπου c' η σταθερά του Λήμματος 3.4.3, έχουμε

$$\mathrm{Prob}(y \in Q : |\langle y, e_n\rangle| \geq 3CI_q) \geq \exp(-3c_5 CI_q/I). \tag{3.4.39}$$

Γι' αυτά τα q έπεται ότι $qI \leq 3c_5 CI_q$, και αφού $I \simeq 1$,

$$\frac{I_q}{\sqrt{q}} \geq c''\sqrt{q}, \tag{3.4.40}$$

όπου $c'' > 0$ απόλυτη σταθερά. Δεδομένου ότι $\min\{R_1, a_1/b_1\} = R_1 \simeq \sqrt{n}$, η μέγιστη τιμή του q για την οποία ισχύει η (3.4.40) είναι της τάξης της $\sqrt{n}$. Από την Πρόταση 2.4.1 έπεται ότι

$$\|\langle \cdot, e_n\rangle\|_{\psi_2} = \sup\left\{\frac{\|\langle \cdot, e_n\rangle\|_q}{\sqrt{q}} : q \geq 1\right\} \geq c\sqrt[4]{n} \tag{3.4.41}$$

για κάποια απόλυτη σταθερά $c > 0$. □

Συνοψίζουμε στο εξής Θεώρημα.

Θεώρημα 3.4.2 *Υπάρχει ισοτροπικό κυρτό σώμα εκ περιστροφής Q στον $\mathbb{R}^n$ με τις εξής ιδιότητες:*

$$c_1\sqrt{n}B_2^n \subseteq Q \subseteq c_2\sqrt{n}B_2^n \tag{3.4.42}$$

και

$$\|\langle\cdot, e_n\rangle\|_{\psi_2} \geq c_3\sqrt[4]{n} \tag{3.4.43}$$

όπου $c_1, c_2, c_3 > 0$ απόλυτες σταθερές. □

Παρατηρήσεις Το Θεώρημα 3.4.2 δείχνει ότι η απλή ψ_2-εκτίμηση του Λήμματος 3.3.2 δεν βελτιώνεται, ακόμα και για σώματα που είναι ομοιόμορφα ισομορφικά με την Ευκλείδεια μπάλα. Υπ' αυτήν την έννοια, η απάντηση στο 2ο ερώτημα της §3.2.1 είναι αρνητική.

Μπορούμε επίσης να δούμε ότι η Πρόταση 3.3.1 είναι ακριβής: αν την εφαρμόσουμε στο Q έχουμε

$$m_Q(q) \geq c_4\sqrt{n} \tag{3.4.44}$$

για κάθε $q \geq 1$. Θεωρούμε το μέγιστο $q_0 \geq 1$ για το οποίο ισχύει η (3.4.40). Τότε,

$$R(Z_{q_0}(Q)) \geq cq_0 \tag{3.4.45}$$

και, από το Λήμμα 3.3.1,

$$w(Z_{q_0}(Q)) \leq C\sqrt{q_0}. \tag{3.4.46}$$

Άρα,

$$m_Q(q_0) = \beta n\frac{w(Z_{q_0}(Q))^2}{R(Z_{q_0}(Q))^2} \leq \beta n\frac{C^2q_0}{c^2q_0^2} \leq C_1n/q_0. \tag{3.4.47}$$

Δεδομένου ότι $q_0 \simeq \sqrt{n}$, συμπεραίνουμε ότι

$$\inf_{q\geq 1} m_Q(q) \simeq \sqrt{n}. \tag{3.4.48}$$

Με άλλα λόγια, όλες οι εκτιμήσεις των βασικών παραμέτρων που δώσαμε στην §3.3.1 για τα σώματα με μικρή διάμετρο, ήταν ακριβείς.

Μπορούμε μάλιστα να δώσουμε πλήρη περιγραφή των L_q-κεντροειδών σωμάτων του Q χρησιμοποιώντας το εξής αποτέλεσμα των Lutwak, Yang και Zhang (βλέπε Πρόταση 2.2.1 [45]).

Πρόταση 3.4.1 *Έστω K κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$|Z_q(K)|^{1/n} \geq c\sqrt{\frac{q}{n}} \tag{3.4.49}$$

για κάθε $1 \leq q \leq n$, όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά. □

Θεώρημα 3.4.3 *Έστω Q το ισοτροπικό κυρτό σώμα του Θεωρήματος 3.4.2. Υπάρχει $q_0 \simeq \sqrt{n}$ τέτοιος ώστε:*

1. *Για κάθε $1 \leq q \leq n$,*
$$w(Z_q(Q)) \simeq \sqrt{q}.$$
2. *Αν $1 \leq q \leq q_0$ τότε $R(Z_q(Q)) \simeq q$, και αν $q \geq q_0$ τότε $R(Z_q(Q)) \simeq \sqrt{n}$.*
3. *Αν $1 \leq q \leq q_0$ τότε $m_Q(q) \simeq n/q$, και αν $q_0 \leq q \leq n$ τότε $m_Q(q) \simeq q$.*

Απόδειξη: Θέτουμε q_0 τον μέγιστο $q \geq 1$ για τον οποίο ισχύει η (3.4.40).

(α) Από την Πρόταση 3.4.1 και από την ανισότητα του Urysohn, για κάθε $1 \leq q \leq n$ έχουμε

$$w(Z_q(Q)) \geq \sqrt{n}|Z_q(Q)|^{1/n} \geq c\sqrt{q}. \tag{3.4.50}$$

Από την άλλη πλευρά, αφού $R(Q) = O(\sqrt{n})$, έχουμε

$$w(Z_q(Q)) \leq w_q(Z_q(Q)) \simeq \sqrt{q/n} I_q(Q) \leq c'\sqrt{q}. \tag{3.4.51}$$

(β) Από την (3.4.45) έχουμε $R(Z_{q_0}(Q)) \simeq q_0$. Άρα, για κάθε $q \geq q_0$ έχουμε

$$\sqrt{n} \simeq q_0 \simeq R(Z_{q_0}(Q)) \leq R(Z_q(Q)) \leq R(Q) \simeq \sqrt{n}. \tag{3.4.52}$$

Για κάθε $q \leq q_0$ ισχύει η (3.4.45), άρα

$$R(Z_q(Q)) \simeq q. \tag{3.4.53}$$

(γ) Αφού έχουν προσδιοριστεί τα $R(Z_q(Q))$ και $w(Z_q(Q))$ για όλες τις τιμές του $q \in [1, n]$, μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή της παραμέτρου $m_Q(q)$ από τα (α) και (β). □

Κεφάλαιο 4

Συγκέντρωση του όγκου και κεντρικές οριακές ιδιότητες ισοτροπικών κυρτών σωμάτων

4.1 Εισαγωγή

Το πρόβλημα με το οποίο θα ασχοληθούμε σε αυτή την παράγραφο είναι η σχέση της «μέσης συμπεριφοράς» των γραμμικών συναρτησοειδών σε ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα με τη συγκέντρωση του όγκου γύρω από μια μπάλα ακτίνας $\sqrt{n}L_K$.

Πρόβλημα: Αληθεύει ότι υπάρχει συνάρτηση $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ με $\phi(n) \to \infty$ όταν $n \to \infty$, η οποία ικανοποιεί το εξής: για κάθε ισοτροπικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$

$$\text{Prob}\left(x \in K : |x| \geq c\sqrt{n}L_K t\right) \leq \exp\left(- \phi(n)t\right) \tag{4.1.1}$$

για κάθε $t \geq 1$, όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά;

Αφετηρία για τη μελέτη αυτού του προβλήματος είναι ένα πρόσφατο αποτέλεσμα των Bobkov και Nazarov [13] σχετικά με την κλάση των ισοτροπικών 1-unconditional σωμάτων.

Θεώρημα 4.1.1 *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε: για κάθε ισοτροπικό 1-unconditional κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ και κάθε $t \geq 1$,*

$$\text{Prob}\left(x \in K : |x| \geq ct\sqrt{n}\right) \leq \exp\left(-ct\sqrt{n}\right). \tag{4.1.2}$$

Για το γενικό ισοτροπικό σώμα, τα μόνα αποτελέσματα αυτού του είδους είναι συνέπειες του Λήμματος του Borell και του Θεωρήματος του Alesker που έχουμε ήδη αναφέρει. Στην §2 είδαμε ότι αν K είναι ένα κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$, τότε για κάθε $q \geq 1$ και $t \geq 1$ έχουμε

$$\mathrm{Prob}\,(x \in K : |x| \geq 3CI_q(K)t) \leq e^{-qt} \tag{4.1.3}$$

για κάθε $s \geq 1$, όπου $C > 0$ απόλυτη σταθερά. Ειδικότερα, αν το K είναι ισοτροπικό τότε $I_2(K) = \sqrt{n}L_K$, οπότε

$$\mathrm{Prob}\left(x \in K : |x| \geq 3C\sqrt{n}L_K t\right) \leq e^{-2t} \tag{4.1.4}$$

για κάθε $t \geq 1$. Σύμφωνα με το Θεώρημα του Alesker, αν K είναι ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα και αν $f(x) = |x|$, τότε

$$\|f\|_{\psi_2} \leq c\|f\|_1 \leq c\sqrt{n}L_K, \tag{4.1.5}$$

όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά. Ειδικότερα,

$$\mathrm{Prob}(x \in K : |x| \geq c\sqrt{n}L_K t) \leq 2\exp(-t^2) \tag{4.1.6}$$

για κάθε $t > 0$. Αν το πρόβλημα είχε καταφατική απάντηση, τότε θα είχαμε ισχυρότερη συγκέντρωση του όγκου γύρω από την ακτίνα $\sqrt{n}L_K$. Η (4.1.1) είναι ισχυρότερη από τις (4.1.4) και (4.1.6) για μικρά t.

Στην §4.2 παρουσιάζουμε μια πρώτη αναγωγή: το πρόβλημα έχει καταφατική απάντηση αν και μόνο αν οι ροπές $I_q(K)$ της Ευκλείδειας νόρμας παραμένουν σταθερές για ένα μεγάλο αρχικό διάστημα τιμών του $q \geq 2$.

Θεώρημα 4.1.2 *Έστω $\phi(n) \geq 2$ και έστω K ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $\gamma \geq 1$ τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(α) *Για κάθε $t \geq 1$,*

$$\mathrm{Prob}\left(x \in K : |x| \geq \gamma\sqrt{n}L_K t\right) \leq \exp\left(-\phi(n)t\right). \tag{4.1.7}$$

(β) *Για κάθε $2 \leq q \leq c_1\phi(n)$,*

$$I_q(K) \leq c_2(\gamma)\sqrt{n}L_K, \tag{4.1.8}$$

όπου $c_1 > 0$ απόλυτη σταθερά και $c_2(\gamma) \simeq \gamma$.

Χρησιμοποιώντας αυτή την αναγωγή, στην §4.3 δείχνουμε ότι το αρχικό πρόβλημα συνδέεται στενά με τη συμπεριφορά της συνάρτησης f_K.

Θεώρημα 4.1.3 *Έστω $\phi(n) \geq 2$ και έστω K ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $\gamma \geq 1$ τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(α) *Για κάθε* $t \geq 1$,

$$\text{Prob}\big(x \in K : |x| \geq \gamma\sqrt{n}L_K t\big) \leq \exp\big(-\phi(n)t\big). \tag{4.1.9}$$

(β) *Για κάθε* $0 < t \leq c_1(\gamma)\sqrt{\phi(n)}L_K$,

$$f_K(t) \leq \frac{c_2}{L_K}\exp(-t^2/(c_3(\gamma)L_K)^2), \tag{4.1.10}$$

όπου $c_i(\gamma) \simeq \gamma$.

Δεν γνωρίζουμε αν το πρόβλημα έχει καταφατική απάντηση. Χρησιμοποιώντας όμως το Θεώρημα 4.1.3 και ένα πρόσφατο αποτέλεσμα των Bobkov και Koldobsky [11], στην §4.4 παίρνουμε την εξής γενική εκτίμηση.

Θεώρημα 4.1.4 *Έστω* K *ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον* $\mathbb{R}^n$. *Τότε,*

$$\text{Prob}\big(\{x \in K : |x| \geq C\sqrt{n}L_K t\}\big) \leq \exp\big(-\phi(K)t\big) \tag{4.1.11}$$

για κάθε $t \geq 1$, *όπου*

$$\phi(K) = \min\left\{\log\big(\frac{n^2}{\text{Var}(|x|^2)}\big), \log n\right\}, \tag{4.1.12}$$

και $C > 0$ *είναι μια απόλυτη σταθερά.*

Συνέπεια μιας (αναπόδεικτης) εικασίας των Bobkov και Koldobsky είναι η $\phi(K) \simeq \log n$. Αν αυτό ισχύει, το Θεώρημα 4.1.3 μας δίνει

$$\text{Prob}\big(\{x \in K : |x| \geq C_1\sqrt{n}t\}\big) \leq n^{-t}, \tag{4.1.13}$$

για κάθε $t \geq 1$ και κάθε ισοτροπικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$, όπου $C_1 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

4.2 Αναγωγή στα q-κεντροειδή σώματα

Σε αυτή την παράγραφο περιγράφουμε μια πρώτη αναγωγή του προβλήματος. Αν K είναι ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, τότε ο όγκος του K που βρίσκεται έξω από μια μπάλα ακτίνας $t\sqrt{n}L_K$ πέφτει απότομα με το t αν και μόνο αν οι ροπές $I_q(K)$ παραμένουν σταθερές και ίσες με $\sqrt{n}L_K$ για αρκετά μεγάλα $q \geq 2$.

Πρόταση 4.2.1 *Έστω* K *ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον* $\mathbb{R}^n$ *το οποίο ικανοποιεί την*

$$\text{Prob}\big(x \in K : |x| \geq \gamma\sqrt{n}L_K t\big) \leq \exp\big(-\phi(n)t\big) \tag{4.2.1}$$

για κάθε $t \geq 1$, *όπου* $\gamma \geq 1$ *και* $\phi(n) \gg 1$ *είναι δύο θετικές σταθερές. Τότε,*

$$I_q(K) \leq 2\gamma\sqrt{n}L_K \tag{4.2.2}$$

για κάθε $2 \leq q \leq c_1\phi(n)$, *όπου* $c_1 > 0$ *απόλυτη σταθερά.*

Απόδειξη: Γράφουμε

$$\begin{aligned} I_q^q(K) &= \int_K |x|^q dx = q\int_0^\infty s^{q-1}\mathrm{Prob}\,(x \in K : |x| \geq s)\,ds \\ &\leq q\int_0^{\gamma\sqrt{n}L_K} s^{q-1}ds + \int_{\gamma\sqrt{n}L_K}^\infty qs^{q-1}\exp(-\phi(n)s/\gamma\sqrt{n}L_K)ds \\ &\leq \left(\gamma\sqrt{n}L_K\right)^q + \left(\frac{\gamma\sqrt{n}L_K}{\phi(n)}\right)^q \int_1^\infty qt^{q-1}e^{-t}dt \\ &\leq \gamma^q n^{q/2} L_K^q \left(1 + \sqrt{q}\left(\frac{cq}{\phi(n)}\right)^q\right), \end{aligned}$$

όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά. Αν $cq \leq \phi(n)$, τότε

$$I_q(K) \leq 2\gamma\sqrt{n}L_K, \tag{4.2.3}$$

δηλαδή έχουμε το ζητούμενο για κάθε $2 \leq q \leq c_1\phi(n)$, όπου $c_1 := 1/c$. □

Πρόταση 4.2.2 *Έστω* K *ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον* $\mathbb{R}^n$ *και* $\gamma \geq 1$, $\psi(n) > 2$ *δύο σταθερές. Αν*

$$I_q(K) \leq \gamma\sqrt{n}L_K \tag{4.2.4}$$

για κάθε $2 \leq q \leq \psi(n)$, *τότε*

$$\mathrm{Prob}\left(x \in K : |x| \geq c\gamma\sqrt{n}L_K t\right) \leq \exp\left(-\psi(n)t\right) \tag{4.2.5}$$

για κάθε $t \geq 1$, *όπου* $c > 0$ *απόλυτη σταθερά.*

Απόδειξη: Από την Πρόταση 2.1.4 έχουμε

$$\mathrm{Prob}\,(x \in K : |x| \geq 3CI_q(K)t) \leq e^{-qt} \tag{4.2.6}$$

για κάθε $t \geq 1$, όπου $C > 0$ απόλυτη σταθερά. Θέτοντας $q = \psi(n)$ και χρησιμοποιώντας την (4.2.4) παίρνουμε

$$\mathrm{Prob}\left(x \in K : |x| \geq 3C\gamma\sqrt{n}L_K t\right) \leq \exp(-\psi(n)t) \tag{4.2.7}$$

για κάθε $t \geq 1$, δηλαδή το ζητούμενο με $c := 3C$. □

Από την Πρόταση 2.2.2 έχουμε $w_q(Z_q(K)) \simeq \sqrt{q/n}I_q(K)$ για κάθε ισοτροπικό κυρτό σώμα K και κάθε $q \leq n$. Συνδυάζοντας αυτή την ισότητα με τις δύο προηγούμενες Προτάσεις, παίρνουμε το εξής.

Θεώρημα 4.2.1 *Έστω $\phi(n) \gg 1$ και έστω K ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $\gamma \geq 1$ τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(α) *Για κάθε $t \geq 1$,*

$$\mathrm{Prob}\big(x \in K : |x| \geq \gamma\sqrt{n}L_K t\big) \leq \exp\big(-\phi(n)t\big). \tag{4.2.8}$$

(β) *Για κάθε $2 \leq q \leq c_1\phi(n)$,*

$$I_q(K) \leq c_2(\gamma)\sqrt{n}L_K, \tag{4.2.9}$$

όπου $c_2(\gamma) \simeq \gamma$.

(γ) *Για κάθε $2 \leq q \leq c_3\phi(n)$,*

$$w_q(Z_q(K)) \leq c_4(\gamma)\sqrt{q}L_K, \tag{4.2.10}$$

όπου $c_4(\gamma) \simeq \gamma$. □

4.3 Αναγωγή στη συμπεριφορά της f_K

Σε αυτή την παράγραφο παρουσιάζουμε μια δεύτερη αναγωγή του προβλήματος, αυτή τη φορά στη συμπεριφορά της συνάρτησης f_K. Κύριο εργαλείο μας θα είναι κάποιες τεχνικές ανισότητες που συνδέουν τα γενικευμένα πλάτη των q-κεντροειδών σωμάτων με την f_K. Για ευκολία αλλάζουμε κάπως το συμβολισμό των δύο προηγούμενων Κεφαλαίων.

Συμβολισμός. Έστω K ένα κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $q > 0$ και $t > 0$ θέτουμε

$$Z(q) = w_q(Z_q(K)) = \left(\int_{S^{n-1}}\int_K |\langle x,\theta\rangle|^q dx\, \sigma(d\theta)\right)^{1/q} \tag{4.3.1}$$

και

$$Z(q,t) = \left(\int_{S^{n-1}}\int_{B_{K,\theta}(t)} |\langle x,\theta\rangle|^q dx\, \sigma(d\theta)\right)^{1/q} \tag{4.3.2}$$

όπου

$$B_{K,\theta}(t) = \{x \in K : |\langle x,\theta\rangle| \leq t\}. \tag{4.3.3}$$

Παρατηρήστε ότι $Z(q,t) \leq Z(q)$ για κάθε $t > 0$. Επίσης, η $Z(q)$ είναι αύξουσα και συνεχής συνάρτηση του q.

Λήμμα 4.3.1 *Για κάθε $t > 0$ ισχύει η ταυτότητα*

$$Z^q(q,t) = 2\int_0^t r^q f_K(r)dr. \tag{4.3.4}$$

Απόδειξη: Είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος του Fubini:

$$\begin{aligned} Z^q(q,t) &= 2\int_{S^{n-1}}\int_0^t r^q f_{K,\theta}(r)dr\sigma(d\theta) = 2\int_0^t r^q \int_{S^{n-1}} f_{K,\theta}(r)\sigma(d\theta)dr \\ &= 2\int_0^t r^q f_K(r)dr, \end{aligned}$$

από τον ορισμό της f_K. □

Αφού $Z(q) = w_q(Z_q(K))$, η Πρόταση 2.2.2 παίρνει την εξής μορφή.

Λήμμα 4.3.2 *Έστω K ένα κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$Z(q) \simeq \sqrt{\frac{q}{q+n}} I_q(K). \tag{4.3.5}$$

για κάθε $q \geq 1$. □

Για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ και $q \geq 1$ θέτουμε $H_q(\theta) = \|\langle\cdot,\theta\rangle\|_q$. Το επόμενο λήμμα δείχνει ότι με ολοκλήρωση της συνάρτησης $|\langle\cdot,\theta\rangle|^q$ στη λωρίδα $B_{K,\theta}(H_q(\theta)s)$ για $s \simeq 1$ ουσιαστικά πιάνουμε την τιμή της $H_q^q(\theta)$.

Λήμμα 4.3.3 *Για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ και για κάθε $q, s \geq 1$,*

$$\left(1 - e^{-qs/2}(2C)^q\right) H_q^q(\theta) \leq \int_{B_{K,\theta}(3CH_q(\theta)s)} |\langle x,\theta\rangle|^q dx, \tag{4.3.6}$$

όπου $C > 0$ είναι η σταθερά στο Θεώρημα 2.1.2.

Απόδειξη: Η Πρόταση 2.1.4 δείχνει ότι

$$|K \setminus B_{K,\theta}(3CH_q(\theta)s)| \leq \exp(-qs) \tag{4.3.7}$$

για κάθε $q, s \geq 1$. Γράφουμε

$$\begin{aligned} H_q^q(\theta) &= \int_{B_{K,\theta}(3CH_q(\theta)s)} |\langle x,\theta\rangle|^q dx + \int_{K\setminus B_{K,\theta}(3CH_q(\theta)s)} |\langle x,\theta\rangle|^q dx \\ &\leq \int_{B_{K,\theta}(3CH_q(\theta)s)} |\langle x,\theta\rangle|^q dx + \exp(-qs/2)\left(\int_K |\langle x,\theta\rangle|^{2q} dx\right)^{1/2} \\ &\leq \int_{B_{K,\theta}(3CH_q(\theta)s)} |\langle x,\theta\rangle|^q dx + \exp(-qs/2)(2C)^q H_q^q(\theta), \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την (4.3.7), την ανισότητα Cauchy-Schwarz και την Πρόταση 2.1.3 με το q στο ρόλο του p και τον 2 στο ρόλο του q. $\square$

Το βασικό τεχνικό εργαλείο μας είναι η επόμενη πρόταση: δείχνει ότι $Z(q) \simeq Z(q,t)$ όταν το t γίνει περίπου ίσο με $Z(q)$.

Πρόταση 4.3.1 *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $\beta > 0$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε κυρτό σώμα K όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ και για κάθε $q \geq 1$,*

$$Z^q(q) \leq 2Z^q(q, \beta Z(q)). \tag{4.3.8}$$

Απόδειξη: Για κάθε $t > 0$ θέτουμε $U_t = \{\theta \in S^{n-1} : H_q(\theta) \geq tZ(q)\}$. Η ανισότητα του Markov δείχνει ότι $\sigma(U_t) \leq t^{-q}$. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 4.3.3, για κάθε $s \geq 1$ γράφουμε

$$\begin{aligned}
(1 - e^{-qs/2}(2C)^q)Z^q(q) &\leq \int_{S^{n-1}\setminus U_t} \int_{B_{K,\theta}(3CH_q(\theta)s)} |\langle x, \theta\rangle|^q dx\sigma(d\theta) \\
&\quad + \int_{U_t} \int_{B_{K,\theta}(3CH_q(\theta)s)} |\langle x, \theta\rangle|^q dx\sigma(d\theta) \\
&\leq \int_{S^{n-1}} \int_{B_{K,\theta}(3CtsZ(q))} |\langle x, \theta\rangle|^q dx\sigma(d\theta) \\
&\quad + \sigma(U_t)^{1/2} \left(\int_{S^{n-1}} \int_K |\langle x, \theta\rangle|^{2q} dx\sigma(d\theta) \right)^{1/2} \\
&\leq Z^q(q, 3CtsZ(q)) + t^{-q/2} Z^q(2q) \\
&\leq Z^q(q, 3CtsZ(q)) + (2C)^q t^{-q/2} Z^q(q),
\end{aligned}$$

γιατί $Z(2q) \leq 2CZ(q)$ (αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι $I_{2q}(K,\theta) \leq 2CI_q(K,\theta)$ για κάθε $\theta \in S^{n-1}$). Επιλέγουμε τώρα τα s, t ώστε να ικανοποιούν τις $\sqrt{t} = 8C$ και $e^{s/2} = 8C$. Τότε,

$$(1 - 4^{-q})Z^q(q) \leq Z^q(q, 3CtsZ(q)) + 4^{-q} Z^q(q). \tag{4.3.9}$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των t, s στην (4.3.9) υπολογίζουμε την τιμή της σταθεράς β. $\square$

Σημείωση: Το επιχείρημα δίνει

$$\left(1 - (2C)^q(e^{-qs/2} + t^{-q/2})\right) Z^q(q) \leq Z^q(q, 3CtsZ(q)) \tag{4.3.10}$$

για κάθε $t, s \geq 1$.

Λήμμα 4.3.4 *Έστω K ένα κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Η f_K είναι φθίνουσα συνάρτηση.*

Απόδειξη: Άμεσο, από την ισότητα

$$f_K(t) = c_n \int_{U_K(t)} \frac{1}{|x|}\left(1 - \frac{t^2}{|x|^2}\right)^{\frac{n-3}{2}} dx$$

(όπου $U_K(t) = \{x \in K : |x| \geq t\}$) η οποία ισχύει για κάθε $t > 0$. □

Πρόταση 4.3.2 *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $c > 0$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε κυρτό σώμα K όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ και για κάθε $q \geq 1$,*

$$f_K(cZ(q)) \leq \frac{1}{Z(q)} \exp(-q). \tag{4.3.11}$$

Απόδειξη: Θέτουμε $G(t) = Z^q(q,t)$. Από την 4.3.10 και από τον ορισμό της $Z(q,t)$ έχουμε

$$(1 - (2C)^q(e^{-qs/2} + t^{-q/2}))Z(q)^q \leq G(3CtsZ(q)) \leq Z(q)^q \tag{4.3.12}$$

για κάθε $t, s \geq 1$. Από το Λήμμα 4.3.1, για κάθε $u < v$ έχουμε

$$G(v) - G(u) = 2\int_u^v r^q f_K(r)dr \geq 2f_K(v)\frac{v^{q+1} - u^{q+1}}{q+1} \tag{4.3.13}$$

αφού η f_K είναι φθίνουσα. Άρα, για κάθε $t, s \geq 1$ έχουμε

$$f_K(6CtsZ(q)) \leq \frac{q+1}{2}\frac{(2C)^q(e^{-qs/2} + t^{-q/2})}{(6CtsZ(q))^{q+1} - (3CtsZ(q))^{q+1}} Z(q)^q. \tag{4.3.14}$$

Επιλέγοντας $s = 1$ και $t = e$ έχουμε

$$f_K(6CeZ(q)) \leq \frac{q+1}{2^{q+1} - 1}\frac{1}{Z(q)}(3e/2)^{-q}e^{-q/2} \leq \frac{1}{Z(q)}e^{-q}, \tag{4.3.15}$$

το οποίο αποδεικνύει την Πρόταση, με $c := 6Ce$. □

Μπορούμε τώρα να δούμε την ακριβή σχέση του προβλήματος που μελετάμε με τη συμπεριφορά της f_K.

Θεώρημα 4.3.1 *Έστω $\gamma \geq 1$, $1 \ll \phi(n) \ll n$ και έστω K ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Αν*

$$\mathrm{Prob}\left(\{x \in K : |x| \geq \gamma\sqrt{n}L_K t\}\right) \leq \exp\left(-\phi(n)t\right) \tag{4.3.16}$$

για κάθε $t \geq 1$, τότε

$$f_K(t) \leq \frac{c_1}{L_K}\exp\left(-c_2 t^2/\gamma^2 L_K^2\right) \tag{4.3.17}$$

για κάθε $0 < t \leq c_3\gamma\sqrt{\phi(n)}L_K$.

Πρώτη απόδειξη: Υποθέτουμε ότι $n > 3$. Έχουμε

$$f_K(t) = c_n \int_{U_K(t)} g_t(|x|)dx \tag{4.3.18}$$

για κάθε $t \geq 0$, όπου η g_t ορίζεται από την

$$g_t(s) = \frac{1}{s}\left(1 - \frac{t^2}{s^2}\right)^{\frac{n-3}{2}} \tag{4.3.19}$$

στο $[t, \infty)$, και $c_n \simeq \sqrt{n}$. Παραγωγίζοντας την g_t βλέπουμε ότι είναι αύξουσα στο $[t, t\sqrt{n-2}]$ και μετά φθίνουσα. Έστω $0 < t \leq c_3\gamma\sqrt{\phi(n)}L_K$, όπου η απόλυτη σταθερά $c_3 > 0$ θα επιλεγεί κατάλληλα. Υποθέτουμε πρώτα ότι $\gamma\sqrt{n}L_K \leq t\sqrt{n-2}$ (αυτό ικανοποιείται αν $t \geq \sqrt{2}\gamma L_K$). Τότε, γράφουμε

$$\begin{aligned} f_K(t) &= c_n \int_{K\cap\{t\leq |x|\leq \gamma\sqrt{n}L_K\}} g_t(|x|)dx + c_n \int_{U_K(\gamma\sqrt{n}L_K)} g_t(|x|)dx \\ &\leq c_n g_t(\gamma\sqrt{n}L_K) + \exp(-\phi(n))c_n g_t(t\sqrt{n-2}) \\ &= \frac{c_n}{\gamma\sqrt{n}L_K}\left(1 - \frac{t^2}{\gamma^2 n L_K^2}\right)^{\frac{n-3}{2}} + \exp(-\phi(n))\frac{c_n}{t\sqrt{n-2}}\left(1 - \frac{1}{n-2}\right)^{\frac{n-3}{2}} \\ &\leq \frac{c_1'}{L_K}\exp(-c_2t^2/\gamma^2L_K^2) + \frac{c_1''}{L_K}\exp(-\phi(n)) \\ &\leq \frac{c_1}{L_K}\exp(-c_2t^2/\gamma^2L_K^2), \end{aligned}$$

αν ταυτόχρονα $t \leq c\gamma\sqrt{\phi(n)}L_K$ (χρησιμοποιήσαμε και την $c_n \simeq \sqrt{n}$).

Αν $0 < t \leq \min\{\sqrt{2}\gamma L_K, c\gamma\sqrt{\phi(n)}L_K\}$, τότε

$$f_K(t) \leq \frac{c_5}{L_K} \leq \frac{c_6}{L_K}\exp(-c_7t^2/\gamma^2L_K^2), \tag{4.3.20}$$

γιατί $f_{K,\theta}(t) \leq c_5/L_K$ και $\exp(-c_7t^2/\gamma^2L_K^2) \geq \exp(-2c_7) \geq 1/2$ αν η $c_7 > 0$ επιλεγεί κατάλληλα. Άρα η (4.3.17) ισχύει για κάθε $0 < t \leq c\gamma\sqrt{\phi(n)}L_K$. □

Δεύτερη απόδειξη: Από την Πρόταση 4.2.1 και το Λήμμα 4.3.2 έχουμε

$$Z(q) = w_q(Z_q(K)) \leq c_2\gamma\sqrt{q}L_K \tag{4.3.21}$$

για κάθε $2 \leq q \leq \psi(n) := c_1\phi(n)$.

Έστω $c > 0$ η σταθερά της Πρότασης 4.3.2. Η συνάρτηση $D : [2, \psi(n)] \to \mathbb{R}$ με $D(q) = cZ(q)$ είναι αύξουσα και συνεχής. Αφού $D(q) = cZ(q) \geq c_3\sqrt{q}L_K$ για κάθε $q \geq 1$, έχουμε

$$D[2, \psi(n)] \supseteq [cL_K, c_3\sqrt{\psi(n)}L_K]. \tag{4.3.22}$$

Αν λοιπόν $cL_K \le t \le c_3\sqrt{\psi(n)}L_K$, υπάρχει $q(t) \in [2, \psi(n)]$ τέτοιο ώστε $cZ(q(t)) = D(q(t)) = t$. Επιπλέον, $Z(q(t)) \le c_2\gamma\sqrt{q(t)}L_K$, άρα

$$t \le c_4\gamma\sqrt{q(t)}L_K. \tag{4.3.23}$$

Από την Πρόταση 4.3.2 συμπεραίνουμε ότι

$$f_K(t) \le \frac{1}{Z(q(t))}\exp(-q(t)) \le \frac{c}{t}\exp\left(-t^2/c_4^2\gamma^2L_K^2\right). \tag{4.3.24}$$

Αφού $c/t \le 1/L_K$, παίρνουμε

$$f_K(t) \le \frac{c_5}{L_K}\exp(-c_6t^2/\gamma^2L_K^2). \tag{4.3.25}$$

Η (4.3.25) ισχύει προφανώς αν $0 < t < cL_K$, αρκεί να μεταβάλλουμε την τιμή των (απόλυτων) σταθερών c_5, c_6 αν χρειαστεί. $\square$

Η αντίστροφη κατεύθυνση είναι συνέπεια της Πρότασης 4.3.1.

Θεώρημα 4.3.2 *Έστω $\gamma \simeq 1$ και έστω K ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι*

$$f_K(t) \le \frac{c_1}{L_K}\exp\left(-t^2/\gamma^2L_K^2\right) \tag{4.3.26}$$

για κάθε $0 < t \le \gamma\psi(n)L_K$. Τότε, για κάθε $2 \le q \le c_2\psi^2(n)$ έχουμε

$$I_q(K) \le c_3\gamma\sqrt{n}L_K. \tag{4.3.27}$$

Απόδειξη: Παρατηρήστε ότι $Z(2) = L_K$ και $Z(n) \ge c_0R(K)$ για κάποια απόλυτη σταθερά $c_0 > 0$.

Υποθέτουμε πρώτα ότι $\beta \le \gamma\psi(n) < \beta c_0R(K)/L_K$. Τότε, υπάρχει $2 \le s \le n$ τέτοιος ώστε $\beta Z(s) = \gamma\psi(n)L_K$. Από το Λήμμα 4.3.1 και την Πρόταση 4.3.1 παίρνουμε

$$\begin{aligned}
Z^s(s) &\le 2Z^s(s, \beta Z(s)) = 4\int_0^{\beta Z(s)} r^s f_K(r)dr \\
&\le 4\int_0^{\gamma\psi(n)L_K} r^s f_K(r)dr \\
&\le \frac{4c_1}{L_K}\int_0^{\gamma\psi(n)L_K} r^s\exp(-r^2/\gamma^2L_K^2)dr \\
&\le \frac{4c_1}{L_K}\int_0^{\infty} r^s\exp(-r^2/\gamma^2L_K^2)dr \\
&\le (c\gamma\sqrt{s}L_K)^s.
\end{aligned}$$

Με άλλα λόγια,

$$Z(s) \leq c\gamma\sqrt{s}L_K. \tag{4.3.28}$$

Τότε,

$$I_s(K) \simeq \sqrt{n/s}Z(s) \leq c\gamma\sqrt{n}L_K, \tag{4.3.29}$$

και από την ανισότητα του Hölder παίρνουμε

$$I_q(K) \leq I_s(K) \leq c\gamma\sqrt{n}L_K \tag{4.3.30}$$

για κάθε $q \leq s$. Από την άλλη πλευρά,

$$s \geq \frac{Z^2(s)}{c^2\gamma^2 L_K^2} = \frac{\psi^2(n)}{c^2\beta^2}, \tag{4.3.31}$$

και η απόδειξη είναι πλήρης σε αυτή την περίπτωση.

Παρατηρούμε τώρα ότι το διάστημα $\beta \leq \gamma\psi(n) \leq \beta c_0 R(K)/L_K$ είναι αυτό που παρουσιάζει ενδιαφέρον για την παράμετρο $\psi(n)$. Αν $0 < \gamma\psi(n) < \beta$, τότε το συμπέρασμα του Θεωρήματος ικανοποιείται κατά τετριμμένο τρόπο. Αν $\gamma\psi(n) \geq \beta c_0 R(K)/L_K$ τότε έχουμε την (4.3.26) για κάθε $t > 0$. Ακολουθώντας το προηγούμενο επιχείρημα, ελέγχουμε ότι $I_n(K) \simeq Z(n) \leq c\gamma\sqrt{n}L_K$. Όμως $I_n(K) \simeq R(K)$, και αυτό δίνει την (4.3.27) για κάθε $q \geq 2$. □

Από τα Θεωρήματα 4.3.1, 4.3.2 και από την αναγωγή του προβλήματος στην §4.2 έπεται το εξής.

Θεώρημα 4.3.3 *Έστω $1 \ll \phi(n) \ll n$ και έστω K ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $\gamma \simeq 1$ τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(α) *Για κάθε $t \geq 1$,*

$$\mathrm{Prob}\big(x \in K : |x| \geq \gamma\sqrt{n}L_K t\big) \leq \exp\big(-\phi(n)t\big). \tag{4.3.32}$$

(β) *Για κάθε $0 < t \leq c_1(\gamma)\sqrt{\phi(n)}L_K$,*

$$f_K(t) \leq \frac{c_2}{L_K}\exp(-t^2/(c_3(\gamma)L_K)^2), \tag{4.3.33}$$

όπου $c_i(\gamma) \simeq \gamma$. □

Άμεσο πόρισμα του Θεωρήματος 4.3.3 και του αποτελέσματος των Bobkov-Nazarov για τα 1-unconditional σώματα είναι το εξής.

Πόρισμα 4.3.1 *Υπάρχουν απόλυτες σταθερές $c_i > 0$ τέτοιες ώστε: αν K είναι ένα ισοτροπικό 1-unconditional κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, τότε*

$$f_K(t) \leq c_1 \exp(-c_2 t^2) \tag{4.3.34}$$

για κάθε $0 < t \leq c_3\sqrt[4]{n}$. □

Σημείωση: Μπορούμε να κατασκευάσουμε παραδείγματα 1-unconditional και ισοτροπικών σωμάτων στον $\mathbb{R}^n$ για τα οποία το μήκος του διαστήματος στο οποίο ισχύει η ανισότητα (4.3.34) δεν μπορεί να έχει τάξη μεγαλύτερη της $\sqrt[4]{n}$.

4.4 Παρατηρήσεις σχετικά με το κεντρικό οριακό πρόβλημα

Τα τελευταία χρόνια έχει συζητηθεί η εικασία ότι ο $(n-1)$-διάστατος όγκος $f_{K,\theta}(t)$ των τομών $K\cap(\theta^\perp+t\theta)$ ενός ισοτροπικού κυρτού σώματος K με υπερεπίπεδα κάθετα σε δοθείσα διεύθυνση $\theta\in S^{n-1}$, αν τον δούμε σα συνάρτηση της απόστασης $t\geq 0$ των υπερεπιπέδων από την αρχή των αξόνων, είναι - με μεγάλη πιθανότητα - κοντά στην κανονική πυκνότητα με μέσο 0 και διασπορά L_K^2. Αυτή η εικασία μπορεί να διατυπωθεί ακριβέστερα με πολλούς διαφορετικούς τρόπους (βλέπε [17], [2]) και έχει επαληθευτεί μόνο για κάποιες ειδικές κλάσεις σωμάτων. Οι Bobkov και Koldobsky [11] (βλέπε επίσης [17]) θεώρησαν τη μέση τιμή πάνω στη σφαίρα

$$f_K(t)=\int_{S^{n-1}}f_{K,\theta}(t)\sigma(d\theta), \tag{4.4.1}$$

και έδειξαν το εξής.

Πρόταση 4.4.1 *Αν K είναι ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, τότε*

$$\left|f_K(t)-\frac{1}{\sqrt{2\pi}L_K}\exp(-t^2/(2L_K^2))\right|\leq C\left(\frac{\sigma_K L_K}{t^2\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\right) \tag{4.4.2}$$

για κάθε $0<t\leq c\sqrt{n}$, όπου $c,C>0$ είναι απόλυτες σταθερές και η παράμετρος σ_K ορίζεται από την

$$\sigma_K^2=\frac{\mathrm{Var}(|x|^2)}{nL_K^4}. \tag{4.4.3}$$

Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 4.4.1 και το βασικό αποτέλεσμα αυτού του Κεφαλαίου παίρνουμε εύκολα το εξής.

Θεώρημα 4.4.1 *Έστω K ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\mathrm{Prob}\left(\{x\in K:|x|\geq C\sqrt{n}L_Kt\}\right)\leq\exp\big(-\phi(K)t\big) \tag{4.4.4}$$

για κάθε $t\geq 1$, όπου

$$\phi(K)\simeq\min\{\log(n^2/\mathrm{Var}(|x|^2)),\log n\}, \tag{4.4.5}$$

και $C>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη: Έστω C η σταθερά της Πρότασης 4.4.1 και έστω $c>0$ μια απόλυτη σταθερά που θα επιλεγεί κατάλληλα (αρκετά μικρή). Από την (4.4.5) και από τον ορισμό της σ_K έχουμε

$$\phi(K)\leq \log\left(\frac{n}{\sigma_K^2L_K^4}\right)=2\log\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma_KL_K^2}\right). \tag{4.4.6}$$

Αν $\sqrt{C}\leq t\leq c\sqrt{\phi(K)}L_K$, τότε η (4.4.6) δείχνει ότι

$$\frac{\sigma_KL_K^2}{\sqrt{n}}\leq e^{-t^2/2c^2L_K^2}. \tag{4.4.7}$$

Παρατηρούμε ότι $C/t^2\leq 1$, άρα

$$C\frac{\sigma_KL_K}{t^2\sqrt{n}}\leq \frac{1}{L_K}e^{-2t^2/c^2L_K^2}. \tag{4.4.8}$$

Επίσης, αν η c είναι αρκετά μικρή και $n\gg 1$, έχουμε $\exp(t^2/L_K^2)\leq n^{c^2}\leq n/(CL_K)$ αφού $c_1\leq L_K\leq c_2\sqrt{n}$ (αυτά είναι τα απλά φράγματα για την L_K: βλέπε [47]). Έπεται ότι

$$\frac{C}{n}\leq \frac{1}{L_K}\exp(-t^2/L_K^2). \tag{4.4.9}$$

Άρα,

$$\begin{aligned} f_K(t) &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}L_K}\exp(-t^2/(2L_K^2))+C\frac{\sigma_KL_K}{t^2\sqrt{n}}+\frac{C}{n}\\ &\leq \frac{c'}{L_K}\exp(-c''t^2/L_K^2), \end{aligned}$$

για κάθε $t\in[\sqrt{C},c\sqrt{\phi(K)}L_K]$, όπου $c',c''>0$ είναι απόλυτες σταθερές. Παρόμοιο φράγμα ισχύει για τετριμμένους λόγους αν $0<t\leq\sqrt{C}$. Από την Πρόταση 4.4.1 έπεται το συμπέρασμα. □

Εικάζεται ότι η παράμετρος σ_K φράσσεται από απόλυτη σταθερά (αυτό έχει επαληθευτεί για όλες τις ℓ_p^n-μπάλες από τους Ball και Περυσινάκη [15]). Δεν είναι δύσκολο να ελέγξουμε ότι αν $\sigma_K=O(1)$ τότε $\phi(K)\simeq\log n$, οπότε το Θεώρημα 4.4.1 δίνει καταφατική απάντηση στο αρχικό μας πρόβλημα: αν K είναι ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, τότε

$$\mathrm{Prob}\left(\{x\in K:|x|\geq C_1\sqrt{n}t\}\right)\leq n^{-t}, \tag{4.4.10}$$

για κάθε $t\geq 1$, όπου $C_1>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Ας προσθέσουμε μια δεύτερη απόδειξη αυτού του αποτελέσματος: Για κάθε $s>0$ έχουμε

$$\begin{aligned} \mathrm{Prob}(x\in K:\big|\,|x|-\sqrt{n}L_K\,\big|\geq s\sqrt{n}L_K) &\leq \mathrm{Prob}(x\in K:\big|\,|x|^2-nL_K^2\big|\geq snL_K^2)\\ &\leq \frac{\mathrm{Var}(|x|^2)}{s^2n^2L_K^4}. \end{aligned}$$

Από τον ορισμό της σ_K^2 έπεται ότι

$$\frac{\mathrm{Var}(|x|^2)}{s^2n^2L_K^4} = \frac{\sigma_K^2 n L_K^4}{s^2n^2L_K^4} \leq \frac{\sigma_K^2}{s^2n}. \tag{4.4.11}$$

Άρα,

$$\mathrm{Prob}(x \in K : |x| \geq (1+s)\sqrt{n}L_K) \leq \frac{\sigma_K^2}{s^2n}. \tag{4.4.12}$$

Επομένως,

$$\mathrm{Prob}(x \in K : |x| \geq (1+2\sigma_K)\sqrt{n}L_K) \leq \frac{1}{4n}. \tag{4.4.13}$$

Εφαρμόζοντας το Λήμμα του Borell παίρνουμε:

Θεώρημα 4.4.2 *Έστω K ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$|\{x \in K : |x| \geq (1+2\sigma_K)\sqrt{n}L_K t\}| \leq n^{-\frac{t}{2}} \tag{4.4.14}$$

για κάθε $t \geq 1$. □

Πόρισμα 4.4.1 *Έστω ότι υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε $\sigma_K^2 \leq C$ για κάθε ισοτροπικό κυρτό σώμα K. Τότε, η (4.1.1) ισχύει με $\phi(n) \simeq \log n$.* □

Μια τελευταία παρατήρηση είναι η εξής: Ας υποθέσουμε ότι

$$\int_{S^{n-1}} \|\langle \cdot, \theta\rangle\|_{L^{\psi_2}(K)}\sigma(d\theta) \leq \alpha L_K. \tag{4.4.15}$$

Τότε,

$$w(Z_q(K)) = \int_{S^{n-1}} \|\langle \cdot, \theta\rangle\|_{L^q(K)}\sigma(d\theta) \leq c_1\alpha\sqrt{q}L_K \tag{4.4.16}$$

για κάθε $q \geq 2$ (από την Πρόταση 2.4.1). Από την Πρόταση 2.2.4 έχουμε $q \leq m_K(q)$ για κάθε $q \leq c_2\sqrt{n}$. Από το Λήμμα 2.2.5 έπεται ότι

$$w_q(Z_q(K)) \leq c_3\alpha\sqrt{q}L_K \tag{4.4.17}$$

για κάθε $q \leq c_2\sqrt{n}$. Τώρα, το Λήμμα 2.2.4 δείχνει ότι

$$I_q(K) \leq c_4\alpha\sqrt{n}L_K \tag{4.4.18}$$

για κάθε $q \leq c_2\sqrt{n}$. Από το Θεώρημα 4.1.2,

$$\mathrm{Prob}(x \in K : |x| \geq c_5\alpha\sqrt{n}L_K t) \leq \exp(-c_6 t\sqrt{n}) \tag{4.4.19}$$

για κάθε $t \geq 1$. Δηλαδή, «καλή μέση ψ_2-συμπεριφορά» έχει σαν συνέπεια την (4.1.1).

Κεφάλαιο 5

Τοπικές μορφές της ανισότητας Aleksandrov-Fenchel

5.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το Κεφάλαιο αποδεικνύουμε κάποιες ανισότητες για τους μεικτούς όγκους κυρτών σωμάτων. Οι μεικτοί όγκοι ορίζονται μέσω του κλασικού θεωρήματος του Minkowski (βλέπε §1.1.2 για μια σύντομη εισαγωγή και το συμβολισμό που θα χρησιμοποιήσουμε): Αν $K_1, \ldots, K_m \in \mathcal{K}_n$, $m \in \mathbb{N}$, τότε ο όγκος του $t_1K_1 + \cdots + t_mK_m$ είναι ομογενές πολυώνυμο βαθμού n ως προς $t_i \geq 0$ (βλέπε [18], [56]). Δηλαδή,

$$(5.1.1) \qquad \left|t_1K_1 + \cdots + t_mK_m\right| = \sum_{1\leq i_1,\ldots,i_n\leq m} V(K_{i_1}, \ldots, K_{i_n})t_{i_1}\ldots t_{i_n},$$

όπου οι συντελεστές $V(K_{i_1}, \ldots, K_{i_n})$ επιλέγονται να είναι ανεξάρτητοι από μεταθέσεις των K_{i_j}. Ο συντελεστής $V(K_{i_1}, \ldots, K_{i_n})$ είναι ο μεικτός όγκος της n-άδας $(K_{i_1}, \ldots, K_{i_n})$.

Ο τύπος του Steiner είναι ειδική περίπτωση του θεωρήματος του Minkowski: αν $K \in \mathcal{K}_n$ και $t > 0$, τότε

$$(5.1.2) \qquad |K + tB_2^n| = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} W_j(K)t^j,$$

όπου $W_j(K) := V(K, n-j; B_2^n, j)$ είναι το j-στό quermassintegral του K.

Η ανισότητα Aleksandrov-Fenchel ισχυρίζεται ότι αν $K, L, K_3, \ldots, K_n \in \mathcal{K}_n$, τότε

$$(5.1.3) \qquad V(K, L, K_3, \ldots, K_n)^2 \geq V(K, K, K_3, \ldots, K_n)V(L, L, K_3, \ldots, K_n).$$

Ειδικότερα, αυτό σημαίνει ότι η n-άδα $(W_0(K),\dots,W_n(K))$ είναι λογαριθμικά κοίλη. Συνέπειες της ανισότητας Aleksandrov-Fenchel είναι η ανισότητα Brunn-Minkowski και η γενίκευσή της

$$W_i(K+L)^{1/(n-i)} \geq W_i(K)^{1/(n-i)} + W_i(L)^{1/(n-i)}, \tag{5.1.4}$$

για κάθε $i=0,\dots,n-1$.

Υπάρχει στενή σχέση ανάμεσα σε ανισότητες για τα quermassintegrals κυρτών σωμάτων και ανισότητες για συμμετρικές συναρτήσεις θετικών πραγματικών αριθμών ή ορίζουσες συμμετρικών πινάκων. Για παράδειγμα, μια ανισότητα του Bergstrom [5] δείχνει ότι αν A και B είναι συμμετρικοί θετικά ορισμένοι πίνακες και A_i, B_i είναι οι υποπίνακες που προκύπτουν αν διαγράψουμε την i-στή γραμμή και στήλη τους, τότε

$$\frac{\det(A+B)}{\det(A_i+B_i)} \geq \frac{\det(A)}{\det(A_i)} + \frac{\det(B)}{\det(B_i)}. \tag{5.1.5}$$

Ο Milman ρώτησε αν υπάρχει κάποιο ανάλογο της ανισότητας του Bergstrom στη θεωρία των μεικτών όγκων. Το πρόβλημα μπορεί να διατυπωθεί ως εξής: για ποιές τιμές του i ισχύει ότι

$$\frac{W_i(K+L)}{W_{i+1}(K+L)} \geq \frac{W_i(K)}{W_{i+1}(K)} + \frac{W_i(L)}{W_{i+1}(L)} \tag{5.1.6}$$

για κάθε ζευγάρι κυρτών σωμάτων K και L στον $\mathbb{R}^n$; Αν αυτό ίσχυε για κάθε $i=0,\dots,n-1$, τότε ένα τυπικό επιχείρημα «αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου» θα έδινε την (5.1.4).

Το ίδιο ερώτημα (περίπτωση $i=0$) τέθηκε από τους Dembo, Cover και Thomas στο [23], όπου η ανισότητα

$$\frac{|K+L|}{|A(K+L)|} \geq \frac{|K|}{|A(K)|} + \frac{|L|}{|A(L)|} \tag{5.1.7}$$

προτείνεται ως η δυϊκή της ανισότητας του Fisher

$$J(X+Y)^{-1} \geq J(X)^{-1} + J(Y)^{-1} \tag{5.1.8}$$

από τη θεωρία της πληροφορίας. Εδώ, $A(V)$ είναι η επιφάνεια του V, ενώ $J(X)$ είναι η πληροφορία κατά Fisher του τυχαίου διανύσματος X στον $\mathbb{R}^n$.

Στην §5.2 δείχνουμε ότι το ερώτημα έχει καταφατική απάντηση αν το ένα από τα δύο σώματα είναι μπάλα. Η περίπτωση $i=0$ αυτού του θεωρήματος έχει ήδη εμφανιστεί στη βιβλιογραφία (βλέπε [23]).

Θεώρημα 5.1.1 *Έστω K ένα κυρτό σώμα και B μια μπάλα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\frac{W_i(K+B)}{W_{i+1}(K+B)} \geq \frac{W_i(K)}{W_{i+1}(K)} + \frac{W_i(B)}{W_{i+1}(B)} \tag{5.1.9}$$

για κάθε $i \in \{0,\dots,n-1\}$.

Η απάντηση όμως είναι γενικά αρνητική. Οι μόνες τιμές του i για τις οποίες η (5.1.6) ισχύει πάντα στον $\mathbb{R}^n$ είναι οι $i = n-1$ και $i = n-2$. Αυτό το αποτέλεσμα αποδεικνύεται στο [26] (και θα παρουσιάσουμε την απόδειξή του για λόγους πληρότητας).

Θεώρημα 5.1.2 *Η ανισότητα*

$$\frac{W_i(K+L)}{W_{i+1}(K+L)} \geq \frac{W_i(K)}{W_{i+1}(K)} + \frac{W_i(L)}{W_{i+1}(L)} \tag{5.1.10}$$

ισχύει για κάθε ζευγάρι κυρτών σωμάτων K και L στον $\mathbb{R}^n$ αν και μόνο αν $i = n-1$ ή $i = n-2$.

Ένα ενδιαφέρον ερώτημα είναι να χαρακτηρίσει κανείς την κλάση $\mathcal{L}$ των συμπαγών κυρτών υποσυνόλων L του $\mathbb{R}^n$ για τα οποία η (5.1.6) ισχύει για κάθε κυρτό σώμα K. Ειδικότερα, αν τα ευθύγραμμα τμήματα ανήκουν σε αυτή την κλάση, τότε παίρνοντας $i = 0$, $L = [-\theta, \theta]$ για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ βλέπουμε ότι

$$\frac{A(P_{\theta^\perp}(K))}{|P_{\theta^\perp}(K)|} \leq \frac{A(K)}{|K|} \tag{5.1.11}$$

για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$, όπου $P_{\theta^\perp}$ είναι η ορθογώνια προβολή στον $\theta^\perp$ και $A(\cdot)$ είναι η επιφάνεια στην κατάλληλη διάσταση. Οδηγούμαστε έτσι στο εξής ισοπεριμετρικό πρόβλημα:

Πρόβλημα 1: Έστω $\mathcal{A}$ η κλάση όλων των κυρτών σωμάτων που η προβολή τους στον E είναι δεδομένο κυρτό σώμα A (αυτή είναι η canal class του A με την ορολογία του [56]). Είναι σωστό ότι το infimum των λόγων $A(K)/|K|$ πάνω από όλα τα $K \in \mathcal{A}$ «πιάνεται» για έναν κύλινδρο «άπειρου μήκους» στην $\mathcal{A}$;

Παρουσιάζουμε δύο προσεγγίσεις σε αυτό το πρόβλημα. Η πρώτη (βλέπε §5.3) βασίζεται σε μια τοπική έκδοση των ανισοτήτων Aleksandrov-Fenchel για τα quermassintegrals ενός κυρτού σώματος. Με αυτό τον όρο εννοούμε ένα σύστημα ανισοτήτων για τα quermassintegrals του σώματος και τυχούσας $(n-1)$-διάστατης προβολής του, οι οποίες με ολοκλήρωση στην κατάλληλη πολλαπλότητα Grassmann δίνουν τις κλασικές ανισότητες $W_i(K)^2 \geq W_{i+1}(K)W_{i-1}(K)$ με το κόστος μιας σταθεράς. Η ακριβής διατύπωση είναι η εξής.

Θεώρημα 5.1.3 *Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και έστω E ένας $(n-1)$-διάστατος υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\frac{W_{i+1}(K)}{2W_i(K)} \leq \frac{W_i'(P_E(K))}{W_{i-1}'(P_E(K))} \leq \frac{2W_i(K)}{W_{i-1}(K)} \tag{5.1.12}$$

για κάθε $i \in \{1, \ldots, n-1\}$.

Στο παραπάνω θεώρημα, ο τόνος στο W_i' σημαίνει ότι τα quermassintegrals του $P_E(K)$ θεωρούνται στην κατάλληλη διάσταση $n-1$. Η πιο ενδιαφέρουσα περίπτωση είναι όταν $i=1$. Τότε, από το Θεώρημα 5.1.3 βλέπουμε ότι

$$\frac{A(P_E(K))}{|P_E(K)|} \leq \frac{2(n-1)}{n}\frac{A(K)}{|K|}, \tag{5.1.13}$$

για κάθε $(n-1)$-διάστατο υπόχωρο E.

Η δεύτερη προσέγγισή μας (βλέπε §5.4), που είναι πιο στοιχειώδης, βασίζεται σε μια τοπική έκδοση της ανισότητας Loomis-Whitney για τις προβολές ενός κυρτού σώματος σε υποχώρους συντεταγμένων.

Σημείωση: Η απάντηση στο Πρόβλημα 1 είναι πάλι αρνητική. Στο [26] αποδεικνύεται ότι η σταθερά $2(n-1)/n$ στο Θεώρημα 5.1.4 είναι βέλτιστη. Επιπλέον, αποδεικνύεται η εξής γενίκευση.

Θεώρημα 5.1.4 *Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και έστω $0 \leq k \leq p \leq n$. Τότε, για κάθε p-διάστατο υπόχωρο E του $\mathbb{R}^n$, αν P_EK είναι η ορθογώνια προβολή του K στον E, έχουμε*

$$\frac{W_k(K)}{|K|} \geq \frac{1}{\binom{n-p+k}{n-p}}\frac{W_k(P_EK)}{|P_EK|} = \frac{1}{\prod_{i=1}^k\left(1+\frac{n-p}{i}\right)}\frac{W_k(P_EK)}{|P_EK|}. \tag{5.1.14}$$

Οι σταθερές στο Θεώρημα 5.1.4 είναι βέλτιστες αν και δεν υπάρχουν περιπτώσεις ισότητας.

Ένα άλλο ερώτημα που σχετίζεται με τα παραπάνω είναι το εξής:

Πρόβλημα 2: Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $t>0$, θεωρούμε την t-επέκταση $K_t := K + tB_2^n$ του K. Είναι σωστό ότι ο λόγος $|K_t|/|K|$ μειώνεται αν προβάλουμε σε τυχόντα υπόχωρο E του $\mathbb{R}^n$;

Είναι φανερό ότι καταφατική απάντηση στην περίπτωση $\dim(E)=n-1$ αρκεί για τη γενική περίπτωση. Αυτό που είμαστε σε θέση να δείξουμε είναι το εξής.

Θεώρημα 5.1.5 *Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και έστω E ένας $(n-1)$-διάστατος υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\frac{|P_E(K)+tB_E|}{|P_E(K)|} \leq \frac{|K+2tB_2^n|}{|K|} \tag{5.1.15}$$

για κάθε $t>0$.

5.2 Η ανισότητα του Bergstrom στο πλαίσιο των quermassintegrals

Δείχνουμε πρώτα ότι το αρχικό ερώτημα αυτού του Κεφαλαίου έχει καταφατική απάντηση αν το ένα από τα δύο σώματα είναι μπάλα.

Θεώρημα 5.2.1 *Έστω K ένα κυρτό σώμα και B μια μπάλα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\frac{W_i(K+B)}{W_{i+1}(K+B)} \geq \frac{W_i(K)}{W_{i+1}(K)} + \frac{W_i(B)}{W_{i+1}(B)} \tag{5.2.1}$$

για κάθε $i \in \{0, \ldots, n-1\}$.

Απόδειξη: Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $B = tB_2^n$ για κάποιον $t > 0$. Για κάθε $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ ορίζουμε $f_i(s) = W_i(K + sB_2^n)$. Τότε, από τη γραμμικότητα των μεικτών όγκων βλέπουμε ότι

$$f_i(s+\varepsilon) = f_i(s) + \varepsilon(n-i)f_{i+1}(s) + O(\varepsilon^2), \tag{5.2.2}$$

για κάθε $i \leq n-1$, άρα

$$f_i'(s) = (n-i)f_{i+1}(s). \tag{5.2.3}$$

Από την ανισότητα Aleksandrov-Fenchel έχουμε $f_{i+1}^2(s) \geq f_i(s)f_{i+2}(s)$ για κάθε $i \leq n-2$. Έπεται ότι

$$\begin{aligned} f_i'(s)f_{i+1}(s) - f_i(s)f_{i+1}'(s) &= (n-i)f_{i+1}^2(s) - (n-i-1)f_i(s)f_{i+2}(s) \\ &= f_{i+1}^2(s) + (n-i-1)[f_{i+1}^2(s) - f_i(s)f_{i+2}(s)] \\ &\geq f_{i+1}^2(s) \end{aligned}$$

αν $0 \leq i \leq n-2$. Αν λοιπόν ορίσουμε $g_i : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ με $g_i(s) = W_i(K + sB_2^n)/W_{i+1}(K + sB_2^n)$, τότε η g_i ικανοποιεί την $g_i'(s) \geq 1$. Δηλαδή, $g_i(t) \geq g_i(0) + t$ για κάθε $t \geq 0$. Αυτό είναι ακριβώς το συμπέρασμα του Θεωρήματος.

Παρατηρήστε ότι όταν $i = n-1$, τότε το Θεώρημα ανάγεται στην ανισότητα $W_{n-1}(K+B) \geq W_{n-1}(K) + W_{n-1}(B)$, η οποία ισχύει σαν ισότητα για κάθε ζευγάρι κυρτών σωμάτων. Το μέσο πλάτος είναι γραμμικό ως προς την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό κατά Minkowski. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Άμεση συνέπεια της απόδειξης του Θεωρήματος 5.2.1 είναι το εξής:

Πόρισμα 5.2.1 *Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $0 \leq j < i \leq n-1$, η συνάρτηση*

$$\frac{W_j(K + tB_2^n)}{W_i(K + tB_2^n)} \tag{5.2.4}$$

είναι αύξουσα ως προς $t \in [0, +\infty)$. □

Έστω $k \in \{1,\ldots,n-1\}$. Από το Πόρισμα 5.2.1, βλέπουμε αμέσως ότι η συνάρτηση $W_0(K+tB_2^n)/W_k(K+tB_2^n)$ είναι αύξουσα. Ο τύπος του Kubota δείχνει ότι

(5.2.5)
$$\int_{G_{n,n-k}} |P_E(K)|\nu_{n,n-k}(dE) \geq \frac{|K|}{|K+tB_2^n|}\int_{G_{n,n-k}} |P_E(K)+tB_E|\nu_{n,n-k}(dE)$$

για κάθε $t>0$, άρα το πρόβλημά μας για τις t-επεκτάσεις έχει καταφατική απάντηση κατά μέσο όρο (για κάθε συνδιάσταση k). Ειδικότερα, για κάθε $t>0$ έχουμε

$$\frac{|K+tB_2^n|}{A(K+tB_2^n)} \geq \frac{|K|}{A(K)}. \tag{5.2.6}$$

Περνάμε στην απόδειξη του Θεωρήματος 5.1.2. Το βασικό μας λήμμα είναι μια συνέπεια της ανισότητας Aleksandrov-Fenchel. Παρόμοιες ανισότητες και η ιστορία τους εμφανίζονται στο [56], §6.4.

Λήμμα 5.2.1 *Έστω $\mathcal{C}=(K_3,\ldots,K_n)$ μια $(n-2)$-άδα συνόλων $K_j\in\mathcal{K}_n$. Αν $A,B\in\mathcal{K}_n$, συμβολίζουμε το μεικτό όγκο $V(A,B,\mathcal{C})$ με $V(A,B)$. Τότε, για κάθε $A,B,C\in\mathcal{K}_n$ έχουμε*

$$\begin{aligned}(V(B,A)V(C,A)-V(B,C)V(A,A))^2 &\leq [V(B,A)^2-V(A,A)V(B,B)]\\ &\quad\times[V(C,A)^2-V(A,A)V(C,C)].\end{aligned}$$

Απόδειξη: Από την ανισότητα Aleksandrov-Fenchel, για κάθε $t,s\geq 0$ έχουμε

$$V(B+tA,C+sA)^2-V(B+tA,B+tA)V(C+sA,C+sA)\geq 0 \tag{5.2.7}$$

και

$$V(sB+tC,A)^2-V(sB+tC,sB+tC)V(A,A)\geq 0. \tag{5.2.8}$$

Χρησιμοποιώντας τη γραμμικότητα των μεικτών όγκων, από την πρώτη ανισότητα καταλήγουμε στην

$$\begin{aligned}0 &\leq g(t,s)+t^2\left(V(C,A)^2-V(A,A)V(C,C)\right)\\ &\quad+s^2\left(V(B,A)^2-V(A,A)V(B,B)\right)\\ &\quad+2ts\left(V(B,C)V(A,A)-V(B,A)V(C,A)\right),\end{aligned}$$

όπου g είναι μια γραμμική συνάρτηση των t και s. Έπεται ότι ο τετραγωνικός όρος είναι μη αρνητικός, άρα είτε $V(B,C)V(A,A)>V(B,A)V(C,A)$ ή η διακρίνουσα

$$\begin{aligned}(V(B,A)V(C,A)-V(B,C)V(A,A))^2 &- [V(B,A)^2-V(A,A)V(B,B)]\\ &\quad\times[V(C,A)^2-V(A,A)V(C,C)]\end{aligned}$$

είναι μικρότερη ή ίση του μηδενός.

Δουλεύοντας όμοια με την (5.2.8), καταλήγουμε στην

$$\begin{aligned} 0 \;\leq\; & t^2(V(C,A)^2 - V(A,A)V(C,C)) + s^2(V(B,A)^2 - V(A,A)V(B,B)) \\ & +2ts(V(B,A)V(C,A) - V(B,C)V(A,A)). \end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει ότι αν $V(B,C)V(A,A) > V(B,A)V(C,A)$ τότε η διακρίνουσα αυτής της δεύτερης τετραγωνικής μορφής (που είναι η ίδια όπως πριν) είναι μικρότερη ή ίση του μηδενός. □

Συνέπεια του Λήμματος 5.2.1 είναι η εξής ανισότητα.

Πρόταση 5.2.1 *Έστω $\mathcal{C} = (K_3, \dots, K_n)$ μια $(n-2)$-άδα συνόλων $K_j \in \mathcal{K}_n$. Με το συμβολισμό του Λήμματος 5.2.1, για κάθε $A, B, C \in \mathcal{K}_n$ έχουμε*

$$\frac{V(B+C,B+C)}{V(B+C,A)} \geq \frac{V(B,B)}{V(B,A)} + \frac{V(C,C)}{V(C,A)}. \tag{5.2.9}$$

Απόδειξη: Από το Λήμμα 5.2.1 και την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου παίρνουμε

$$\begin{aligned} & V(B,A)V(C,A) - V(B,C)V(A,A) \\ & \leq \big(V(B,A)^2 - V(A,A)V(B,B)\big)^{1/2}\big(V(C,A)^2 - V(A,A)V(C,C)\big)^{1/2} \\ & \leq \frac{1}{2} \times \frac{V(C,A)}{V(B,A)}\big(V(B,A)^2 - V(A,A)V(B,B)\big) \\ & \quad +\frac{1}{2} \times \frac{V(B,A)}{V(C,A)}\big(V(C,A)^2 - V(A,A)V(C,C)\big). \end{aligned}$$

Άρα,

$$2V(B,C) \geq \frac{V(C,A)}{V(B,A)} \times V(B,B) + \frac{V(B,A)}{V(C,A)} \times V(C,C). \tag{5.2.10}$$

Χρησιμοποιώντας και τη γραμμικότητα των μεικτών όγκων βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} V(B+C,B+C) &= V(B,B) + 2V(B,C) + V(C,C) \\ &\geq V(B,B)\left(1 + \frac{V(C,A)}{V(B,A)}\right) + V(C,C)\left(1 + \frac{V(B,A)}{V(C,A)}\right), \end{aligned}$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{V(B+C,B+C)}{V(B+C,A)} \geq \frac{V(B,B)}{V(B,A)} + \frac{V(C,C)}{V(C,A)}. \quad \square \tag{5.2.11}$$

Θέτοντας $B = K$, $C = L$ και $A = K_3 = \dots = K_n = B_2^n$, παίρνουμε άμεσα το εξής.

Πρόταση 5.2.2 *Έστω K και L δύο κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\frac{W_{n-2}(K+L)}{W_{n-1}(K+L)} \geq \frac{W_{n-2}(K)}{W_{n-1}(K)} + \frac{W_{n-2}(L)}{W_{n-1}(L)}. \qquad \square \tag{5.2.12}$$

Στη συνέχεια δείχνουμε ότι αν $0 \leq i \leq n-3$, τότε η ανισότητα (5.1.6) δεν ισχύει για όλα τα ζευγάρια κυρτών σωμάτων K και L στον $\mathbb{R}^n$. Το επιχείρημα χρησιμοποιεί τα λεγόμενα εφαπτομενικά σώματα. Έστω $0 \leq p \leq n-1$. Αν K και M είναι κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$ και $M \subseteq K$, τότε το K λέγεται p-εφαπτομενικό σώμα του M αν κάθε $(n-p-1)$-ακραίο επίπεδο στήριξης του K είναι επίπεδο στήριξης του M (παραπέμπουμε στο [56] §2.2 για περισσότερες λεπτομέρειες). Ελέγχεται εύκολα ότι αν $p < q \leq n-1$ τότε κάθε p-εφαπτομενικό σώμα του M είναι q-εφαπτομενικό σώμα του M. Τα εφαπτομενικά σώματα της μπάλας συνδέονται στενά με το πρόβλημα της ισότητας στις ανισότητες Aleksandrov-Fenchel για τα quermassintegrals κυρτών σωμάτων. Θα χρειαστούμε το εξής αποτέλεσμα (βλέπε [57] και [56], Θεώρημα 6.6.19).

Πρόταση. *Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και έστω $1 \leq i \leq n-1$. Τότε,*

$$W_i(K)^2 = W_{i+1}(K)W_{i-1}(K) \tag{5.2.13}$$

αν και μόνο αν το K είναι $(n-i-1)$-εφαπτομενικό σώμα Ευκλείδειας μπάλας.

Θα χρησιμοποιήσουμε επίσης την παρατήρηση ότι για κάθε $0 \leq p < n-2$ υπάρχουν συμμετρικά $(p+1)$-εφαπτομενικά σώματα της μπάλας που δεν είναι p-εφαπτομενικά σώματα της μπάλας. Μπορούμε να κατασκευάσουμε εύκολα τέτοια παραδείγματα παίρνοντας την κυρτή θήκη της μπάλας και $2(p+1)$ κατάλληλα επιλεγμένων σημείων έξω από αυτήν (βλέπε επίσης τον χαρακτηρισμό των p-εφαπτομενικών σωμάτων στο [56], Θεώρημα 2.2.8).

Λήμμα 5.2.2 *Έστω $0 \leq i \leq n-1$. Υποθέτουμε ότι η (5.1.6) ισχύει για όλα τα κυρτά σώματα K και L στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, η συνάρτηση*

$$g(t) = \frac{W_i(K+tL)}{W_{i+1}(K+tL)} \tag{5.2.14}$$

είναι κοίλη στο $[0,+\infty)$ για κάθε K και L. Ειδικότερα, αν $0 \leq i \leq n-3$, για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ έχουμε

$$\begin{aligned} &(n-i)W_{i+2}(K)\big(W_{i+1}^2(K) - W_i(K)W_{i+2}(K)\big) \\ \geq\ &(n-i-2)W_i(K)\big(W_{i+2}^2(K) - W_{i+1}(K)W_{i+3}(K)\big). \end{aligned}$$

Απόδειξη: Ελέγχουμε ότι

$$\begin{aligned} g\left(\frac{t+s}{2}\right) &= \frac{W_i((K+tL)/2+(K+sL)/2)}{W_{i+1}((K+tL)/2+(K+sL)/2)} \\ &\geq \frac{W_i((K+tL)/2)}{W_{i+1}((K+tL)/2)} + \frac{W_i((K+sL)/2)}{W_{i+1}((K+sL)/2)} \\ &= \frac{1}{2}\frac{W_i(K+tL)}{W_{i+1}(K+tL)} + \frac{1}{2}\frac{W_i(K+sL)}{W_{i+1}(K+sL)} \\ &= \frac{g(t)+g(s)}{2}. \end{aligned}$$

Για το δεύτερο ισχυρισμό, θεωρούμε τυχόν κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$. Για κάθε $i \geq 0$ θέτουμε $f_i(t) = W_i(K+tB_n)$. Τότε,

$$f_i'(t) = (n-i)f_{i+1}(t). \tag{5.2.15}$$

Η παράγωγος της συνάρτησης

$$g_i(t) = \frac{f_i(t)}{f_{i+1}(t)} = \frac{W_i(K+tB_n)}{W_{i+1}(K+tB_n)} \tag{5.2.16}$$

δίνεται από την

$$g_i'(t) = (n-i) - (n-i-1)\frac{f_i(t)f_{i+2}(t)}{f_{i+1}^2(t)}, \tag{5.2.17}$$

Από το πρώτο μέρος του Λήμματος, η g_i είναι κοίλη. Έπεται ότι η f_if_{i+2}/f_{i+1}^2 είναι αύξουσα συνάρτηση, και παραγωγίζοντας βλέπουμε ότι

$$(n-i)f_{i+1}^2f_{i+2} + (n-i-2)f_if_{i+1}f_{i+3} - 2(n-i-1)f_if_{i+2}^2 \geq 0 \tag{5.2.18}$$

στο $(0,+\infty)$. Ισοδύναμα μπορούμε να γράψουμε

$$(n-i)f_{i+2}(f_{i+1}^2 - f_if_{i+2}) \geq (n-i-2)f_i(f_{i+2}^2 - f_{i+1}f_{i+3}). \tag{5.2.19}$$

Αφήνοντας το $t \to 0^+$, ολοκληρώνουμε την απόδειξη. □

Πρόταση 5.2.3 *Έστω $0 \leq i \leq n-3$. Υπάρχουν κυρτά σώματα K και L στον $\mathbb{R}^n$ για τα οποία η (5.1.6) δεν ισχύει.*

Απόδειξη: Υποθέτουμε το αντίθετο και παίρνουμε σαν K ένα συμμετρικό $(n-i-2)$-εφαπτομενικό σώμα της μπάλας. Τότε, $W_{i+1}^2(K) - W_i(K)W_{i+2}(K) = 0$ και το Λήμμα 5.2.2 δείχνει ότι $W_{i+2}^2(K) - W_{i+1}(K)W_{i+3}(K) = 0$. Όμως τότε, το K είναι $(n-i-3)$-εφαπτομενικό σώμα της μπάλας. Αφού για κάθε $0 \leq p < n-2$ υπάρχουν συμμετρικά $(p+1)$-εφαπτομενικά σώματα της μπάλας που δεν είναι p-εφαπτομενικά σώματα της μπάλας, καταλήγουμε σε άτοπο. □

Τέλος, παρατηρούμε ότι στην περίπτωση $i = n-1$ η (5.1.6) είναι ισοδύναμη με την $W_{n-1}(A+B) \geq W_{n-1}(A) + W_{n-1}(B)$, η οποία ισχύει σαν ισότητα για κάθε ζευγάρι κυρτών σωμάτων (το μέσο πλάτος είναι γραμμικό ως προς την πρόσθεση κατά Minkowski). Συνδυάζοντας αυτή την παρατήρηση με τις Προτάσεις 5.2.2 και 5.2.3 παίρνουμε το εξής.

Θεώρημα 5.2.2 *Η ανισότητα*

$$\frac{W_i(K+L)}{W_{i+1}(K+L)} \geq \frac{W_i(K)}{W_{i+1}(K)} + \frac{W_i(L)}{W_{i+1}(L)} \tag{5.1.20}$$

ισχύει για κάθε ζευγάρι κυρτών σωμάτων K και L στον $\mathbb{R}^n$ αν και μόνο αν $i = n-1$ ή $i = n-2$.

Παρατήρηση. Μια ενδιαφέρουσα ειδική περίπτωση παίρνουμε όταν $n = 3$ και $i = 1$. Ισχύει η ανισότητα

$$\frac{A(K+L)}{w(K+L)} \geq \frac{A(K)}{w(K)} + \frac{A(L)}{w(L)} \tag{5.2.21}$$

για κάθε ζευγάρι κυρτών σωμάτων K και L στον $\mathbb{R}^3$.

5.3 Τοπική μορφή της ανισότητας των Aleksandrov και Fenchel

Για κάθε $u \in S^{n-1}$, γράφουμε J_u για το ευθύγραμμο τμήμα $[0, u]$. Υπολογίζοντας τον όγκο του $K + tJ_u$, βλέπουμε ότι $nV(K, n-1; J_u) = |P_E(K)|$, όπου $E = u^{\perp}$. Η γραμμικότητα των μεικτών όγκων δείχνει ότι

$$nV(K_1, \ldots, K_{n-1}, J_u) = V_E(P_E(K_1), \ldots, P_E(K_{n-1})) \tag{5.3.1}$$

για κάθε $K_1, \ldots, K_{n-1} \in \mathcal{K}_n$, όπου με V_E συμβολίζουμε τους μεικτούς όγκους στον E. Υπάρχει μάλιστα μια γενίκευση της (5.3.1), η οποία οφείλεται στον Fedotov (βλέπε [18]):

Λήμμα 5.3.1 *Έστω $E \in G_{n,k}$ και $L_1, \ldots, L_{n-k}$ συμπαγή κυρτά υποσύνολα του $E^{\perp}$. Αν $K_1, \ldots, K_k \in \mathcal{K}_n$, τότε*

$$\binom{n}{k} V(K_1, \ldots, K_k, L_1, \ldots, L_{n-k}) = V_E(P_E(K_1), \ldots, P_E(K_k)) V_{E^{\perp}}(L_1, \ldots, L_{n-k}), \tag{5.3.2}$$

όπου με $V_E, V_{E^{\perp}}$ συμβολίζουμε τους μεικτούς όγκους στους $E, E^{\perp}$ αντίστοιχα. □

Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, ορίζουμε την παράμετρο

$$d_i := d_i(K) = \frac{W_{i-1}(K)W_{i+1}(K)}{W_i^2(K)}. \tag{5.3.3}$$

Είναι φανερό ότι $d_i(K) > 0$, και οι ανισότητες Aleksandrov-Fenchel δείχνουν ότι $d_i(K) \leq 1$. Όπως ήδη αναφέραμε, στη συμμετρική περίπτωση, ο Schneider [57] έχει αποδείξει ότι $d_i(K) = 1$ αν και μόνο αν το K είναι $(n-i-1)$-εφαπτομενικό σώμα μιας μπάλας.

Θεώρημα 5.3.1 *Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $(n-1)$-διάστατο υπόχωρο E του $\mathbb{R}^n$ και κάθε $i \in \{1, \ldots, n-2\}$, έχουμε*

$$\left(1 - \sqrt{1-d_i}\right)\frac{W_i(K)}{W_{i-1}(K)} \leq \frac{W_i'(P_E(K))}{W_{i-1}'(P_E(K))} \leq \left(1 + \sqrt{1-d_i}\right)\frac{W_i(K)}{W_{i-1}(K)}. \tag{5.3.4}$$

[*Συμβολισμός:* Γράφουμε $W_i'(P_E(K))$ για τον $V_E(P_E(K), n-1-i; D_E, i)$, όπου V_E είναι ο μεικτός όγκος στον E.]

Απόδειξη: Έστω $\mathcal{C}$ η $(n-2)$-άδα $(K, n-i-1; B_2^n, i-1)$ και ας υποθέσουμε ότι $E = u^{\perp}$, $u \in S^{n-1}$.

Στο Λήμμα 5.2.1 θέτουμε $A = K$, $B = J_u$ και $C = B_2^n$. Παρατηρούμε ότι $V(J_u, J_u) = 0$, οπότε

$$\frac{W_i(K)}{W_{i-1}(K)} - \frac{V(J_u, B_2^n)}{V(J_u, K)} \leq \frac{1}{W_{i-1}(K)}\left(W_i(K)^2 - W_{i-1}(K)W_{i+1}(K))\right)^{1/2}, \tag{5.3.5}$$

και το Λήμμα 5.3.1 δίνει

$$\left(1 - \sqrt{1-d_i}\right)\frac{W_i(K)}{W_{i-1}(K)} \leq \frac{V(J_u, B_2^n)}{V(J_u, K)} = \frac{W_i'(P_E(K))}{W_{i-1}'(P_E(K))}. \tag{5.3.6}$$

Από την (5.3.6) παίρνουμε την αριστερή ανισότητα του Θεωρήματος. Για τη δεξιά ανισότητα, επιλέγουμε $A = B_2^n$, $B = J_u$ και $C = K$ στο Λήμμα 5.2.1, και ακολουθούμε τα ίδια βήματα. Έχουμε

$$\frac{V(J_u, B_2^n)}{V(J_u, K)} - \frac{W_{i+1}(K)}{W_i(K)} \leq \frac{V(J_u, B_2^n)}{V(J_u, K)}\left(W_i(K)^2 - W_{i-1}(K)W_{i+1}(K))\right)^{1/2}, \tag{5.3.7}$$

το οποίο μέσω του Λήμματος 5.3.1 δίνει

$$\frac{W_i'(P_E(K))}{W_{i-1}'(P_E(K))} \leq \frac{1}{1-\sqrt{1-d_i}}\frac{W_{i+1}(K)}{W_i(K)} = \left(1 + \sqrt{1-d_i}\right)\frac{W_i(K)}{W_{i-1}(K)}. \tag{5.3.8}$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Απόδειξη των Θεωρημάτων 5.1.3 και 5.1.5: Αφού $d_i(K) \leq 1$ για κάθε $1 \leq i \leq n-1$, απλή άλγεβρα δίνει

$$\frac{W_{i+1}(K)}{2W_i(K)} \leq \frac{W_i'(P_E(K))}{W_{i-1}'(P_E(K))} \leq \frac{2W_i(K)}{W_{i-1}(K)} \tag{5.3.9}$$

για κάθε $(n-1)$-διάστατο υπόχωρο E του $\mathbb{R}^n$ και κάθε $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Αυτό αποδεικνύει το Θεώρημα 5.1.3.

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 5.1.5, εφαρμόζουμε πρώτα διαδοχικά την (5.3.9) καταλήγοντας στην

$$\frac{W_i'(P_E(K))}{|P_E(K)|} \leq \frac{2^i W_i(K)}{|K|} \tag{5.3.10}$$

για κάθε $i \in \{1, \dots, n-1\}$, και κατόπιν χρησιμοποιούμε τον τύπο του Steiner:

$$\begin{aligned}
|P_E(K) + tB_E| - |P_E(K)| &= \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i} W_i'(P_E(K)) t^i \\
&\leq \frac{|P_E(K)|}{|K|} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{n-i}{n} \binom{n}{i} W_i(K)(2t)^i,
\end{aligned}$$

το οποίο δίνει

$$\frac{|P_E(K) + tB_E| - |P_E(K)|}{|P_E(K)|} \leq \frac{n-1}{n} \frac{|K + 2tB_2^n| - |K|}{|K|}. \tag{5.3.11}$$

Η τελευταία ανισότητα είναι ελαφρώς ισχυρότερη από τον ισχυρισμό του Θεωρήματος 5.1.5. □

5.4 Τοπικές μορφές της ανισότητας των Loomis και Whitney

Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Γράφουμε $P_i(K)$ για την ορθογώνια προβολή του K στον $e_i^{\perp}$, $i = 1, \dots, n$. Η ανισότητα Loomis-Whitney [42] συγκρίνει τον $|K|$ με το γεωμετρικό μέσο των $|P_i(K)|$:

$$|K|^{n-1} \leq \prod_{i=1}^{n} |P_i(K)|. \tag{5.4.1}$$

Θα δείξουμε ότι μπορεί κανείς να εκτιμήσει τον $|K|$ χρησιμοποιώντας μικρότερο αριθμό προβολών:

Λήμμα 5.4.1 *Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και $i \neq j \in \{1, \ldots, n\}$. Αν $P_{ij}(K) = P_{\langle e_i, e_j\rangle^\perp}(K)$, τότε*

$$|P_i(K)| \cdot |P_j(K)| \geq \frac{n}{2(n-1)}|K| \cdot |P_{ij}(K)|. \tag{5.4.2}$$

Για την απόδειξη του Λήμματος 5.4.1, θα χρησιμοποιήσουμε μια κλασική ανισότητα του Berwald [6]:

Λήμμα 5.4.2 *Έστω A ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^k$, και $\phi : A \to \mathbb{R}^+$ μια κοίλη συνάρτηση. Τότε, για κάθε $0 < p < q$,*

$$\left[\binom{k+q}{k}\frac{1}{|A|}\int_A |\phi(x)|^q dx\right]^{1/q} \leq \left[\binom{k+p}{k}\frac{1}{|A|}\int_A |\phi(x)|^p dx\right]^{1/p}. \quad \square \tag{5.4.3}$$

Απόδειξη του Λήμματος 5.4.1: Χωρίς απώλεια της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $i = n-1$ και $j = n$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ γράφουμε $x = (y, t, s)$ όπου $y \in \mathbb{R}^{n-2}$ και $t, s \in \mathbb{R}$. Για κάθε $y \in P_{ij}(K)$ ορίζουμε τα σύνολα

$$K_i(y) = \{s \in \mathbb{R} : (y, 0, s) \in P_i(K)\}, \quad K_j(y) = \{t \in \mathbb{R} : (y, t, 0) \in P_j(K)\} \tag{5.4.4}$$

και

$$K_{ij}(y) = \{(t, s) \in \mathbb{R}^2 : (y, t, s) \in K\}. \tag{5.4.5}$$

Τότε, τα $K_i(y)$ και $K_j(y)$ είναι οι ορθογώνιες προβολές του $K_{ij}(y)$ στους άξονες συντεταγμένων του $\mathbb{R}^2$, επομένως

$$|K_{ij}(y)| \leq |K_i(y)| \cdot |K_j(y)| \tag{5.4.6}$$

για κάθε $y \in P_{ij}(K)$. Με απλή εφαρμογή της ανισότητας Cauchy-Schwarz βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} |P_i(K)| \cdot |P_j(K)| &= \left(\int_{P_{ij}(K)} |K_i(y)| dy\right)\left(\int_{P_{ij}(K)} |K_j(y)| dy\right) \\ &\geq \left(\int_{P_{ij}(K)} |K_i(y)|^{1/2} |K_j(y)|^{1/2} dy\right)^2 \\ &\geq \left(\int_{P_{ij}(K)} |K_{ij}(y)|^{1/2} dy\right)^2. \end{aligned}$$

Από την ανισότητα Brunn-Minkowski, η συνάρτηση $\phi : P_{ij}(K) \to \mathbb{R}$ με $\phi(y) = |K_{ij}(y)|^{1/2}$ είναι κοίλη. Εφαρμόζοντας το Λήμμα 5.4.2 με $A = P_{ij}(K)$, $k = n-2$,

$p=1$ και $q=2$, παίρνουμε

$$\begin{aligned}\left(\int_{P_{ij}(K)}|K_{ij}(y)|^{1/2}dy\right)^2 &\geq \frac{n}{2(n-1)}|P_{ij}(K)|\int_{P_{ij}(K)}|K_{ij}(y)|dy\\ &= \frac{n}{2(n-1)}|K|\cdot|P_{ij}(K)|.\end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω ανισότητες, έχουμε το Λήμμα. □

Παρατήρηση Η εκτίμηση του Λήμματος 5.4.1 είναι ακριβής όταν $n=3$, όπως φαίνεται από το ακόλουθο παράδειγμα: Έστω $K=\mathrm{conv}\{Q_2,\pm e_3\}$ όπου $Q_2=[-1,1]^2$ είναι το μοναδιαίο τετράγωνο στον $\mathbb{R}^2$. Τότε, $|P_1(K)|=|P_2(K)|=2$, $|P_{12}(K)|=2$ και $|K|=8/3$.

Είμαστε τώρα έτοιμοι να αποδείξουμε την (5.1.13).

Θεώρημα 5.4.1 *Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $u\in S^{n-1}$ έχουμε*

$$\frac{A(K)}{|K|}\geq\frac{n}{2(n-1)}\frac{A(P_{u^\perp}(K))}{|P_{u^\perp}(K)|}. \tag{5.4.7}$$

Απόδειξη: Από το Λήμμα 5.4.1 έχουμε

$$|P_{\theta^\perp}(K)|\cdot|P_{u^\perp}(K)|\geq\frac{n}{2(n-1)}|K|\cdot|P_{\langle\theta,u\rangle^\perp}(K)| \tag{5.4.8}$$

για κάθε θ στη μοναδιαία σφαίρα $S(u^\perp)$ του $u^\perp$. Ολοκληρώνουμε τα δύο μέλη ως προς το αναλλοίωτο ως προς τις στροφές μέτρο πιθανότητας σ_u στην $S(u^\perp)$ και χρησιμοποιούμε τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy. Το δεξιό μέλος δίνει

$$\begin{aligned}\frac{n}{2(n-1)}|K|\cdot\int_{S(u^\perp)}|P_{\langle\theta,u\rangle^\perp}(K)|\sigma_u(d\theta) &= \frac{n}{2(n-1)}|K|\cdot c_{n-1}A(P_{u^\perp}(K))\\ &= \frac{n}{2(n-1)}c_{n-1}|K|\cdot A(P_{u^\perp}(K)).\end{aligned}$$

όπου $c_{n-1}=\omega_{n-2}/(n-1)\omega_{n-1}$, και από το αριστερό μέλος παίρνουμε

$$\begin{aligned}|P_{u^\perp}(K)|\int_{S(u^\perp)}|P_{\theta^\perp}(K)|\sigma_u(d\theta) &= |P_{u^\perp}(K)|\cdot\frac{1}{2}\int_{S(u^\perp)}\int_{S^{n-1}}|\langle\theta,\xi\rangle|\sigma_K(d\xi)\sigma_u(d\theta)\\ &= |P_{u^\perp}(K)|\cdot\frac{1}{2}\int_{S^{n-1}}\int_{S(u^\perp)}|\langle\theta,\xi\rangle|\sigma_u(d\theta)\sigma_K(d\xi)\\ &= |P_{u^\perp}(K)|\cdot c_{n-1}\int_{S^{n-1}}\sqrt{1-\langle\xi,u\rangle^2}\sigma_K(d\xi)\\ &\leq c_{n-1}|P_{u^\perp}(K)|\cdot A(K).\end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$|P_{u^\perp}(K)|\cdot A(K)\geq\frac{n}{2(n-1)}|K|\cdot A(P_{u^\perp}(K)).$$

□

Βιβλιογραφία

[1] S. Alesker, *ψ_2-estimate for the Euclidean norm on a convex body in isotropic position*, Geom. Aspects of Funct. Analysis (Lindenstrauss-Milman eds.), Oper. Theory Adv. Appl. **77** (1995), 1-4.

[2] M. Anttila, K.M. Ball and I. Perissinaki, *The central limit problem for convex bodies*, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003), 4723-4735.

[3] K.M. Ball, *Normed spaces with a weak Gordon-Lewis property*, Lecture Notes in Math. **1470** (1991), 36-47.

[4] K.M. Ball, *Volume ratios and a reverse isoperimetric inequality*, J. London Math. Soc. (2) **44** (1991), 351-359.

[5] H. Bergstrom, *A triangle inequality for matrices*, Den Elfte Skandinaviski Matematiker-kongress, Trondheim, 1949. Oslo: Johan Grundt Tanums Forlag 1952.

[6] L. Berwald, *Verallgemeinerung eines Mittelswertsatzes von J. Favard, für positive konkave Functionen*, Acta Math. **79** (1947), 17-37.

[7] S.G. Bobkov, *Remarks on the growth of L^p-norms of polynomials*, Geom. Aspects of Funct. Analysis (Milman-Schechtman eds.), Lecture Notes in Math. **1745** (2000), 27-35.

[8] J. Bourgain, *On the distribution of polynomials on high dimensional convex sets*, Geom. Aspects of Funct. Analysis (Lindenstrauss-Milman eds.), Lecture Notes in Math. **1469** (1991), 127-137.

[9] J. Bourgain, *On the isotropy constant for ψ_2-bodies*, Geom. Aspects of Funct. Analysis (Milman-Schechtman eds.), Lecture Notes in Math. **1807** (2003), 114-121.

[10] E.F. Beckenbach and R. Bellman, *Inequalities*, Springer-Verlag (1971).

[11] S.G. Bobkov and A. Koldobsky, *On the central limit property of convex bodies*, Geom. Aspects of Funct. Analysis (Milman-Schechtman eds.), Lecture Notes in Math. **1807** (2003), 44-52.

[12] J. Bourgain and J. Lindenstrauss, *Projection bodies*, Lecture Notes in Mathematics **1317**, Springer, Berlin (1988), 250-270.

[13] S.G. Bobkov and F.L. Nazarov, *On convex bodies and log-concave probability measures with unconditional basis*, Geom. Aspects of Funct. Analysis (Milman-Schechtman eds.), Lecture Notes in Math. **1807** (2003), 53-69.

[14] S.G. Bobkov and F.L. Nazarov, *Large deviations of typical linear functionals on a convex body with unconditional basis*, Preprint.

[15] K.M. Ball and I. Perissinaki, *The subindependence of coordinate slabs in ℓ_p^n balls*, Israel J. Math. **107** (1998), 289-299.

[16] C. Bennett and R. Sharpley, *Interpolation of operators*, Academic Press (1988).

[17] U. Brehm and J. Voigt, *Asymptotics of cross sections for convex bodies*, Beiträge Algebra Geom. **41** (2000), 437-454.

[18] Y.D. Burago and V.A. Zalgaller, *Geometric Inequalities*, Springer Series in Soviet Mathematics, Springer-Verlag, Berlin-New York (1988).

[19] S. Campi and P. Gronchi, *The L^p-Busemann-Petty centroid inequality*, Adv. in Math. **167** (2002), 128-141.

[20] A. Carbery and J. Wright, *Distributional and L^q-norm inequalities for polynomials over convex bodies in $\mathbb{R}^n$*, Math. Res. Lett. **8** (2001), 233-248.

[21] S. Dar, *Remarks on Bourgain's problem on slicing of convex bodies*, in Geom. Aspects of Funct. Analysis (Lindenstrauss-Milman eds.), Operator Theory: Advances and Applications **77** (1995), 61-66.

[22] S. Dar, *On the isotropic constant of non-symmetric convex bodies*, Israel J. Math. **97** (1997), 151-156.

[23] A. Dembo, T.M. Cover and J.A. Thomas, *Information theoretic inequalities*, IEEE Trans. Information Theory **37** (1991), 1501-1518.

[24] Ky Fan, *Some inequalities concerning positive-definite hermitian matrices*, Proc. Cambridge Phil. Soc. **51** (1955), 414-421.

[25] T. Figiel and N. Tomczak-Jaegermann, *Projections onto Hilbertian subspaces of Banach spaces*, Israel J. Math. **33** (1979), 155-171.

[26] M. Fradelizi, A. Giannopoulos and M. Meyer, *Some inequalities about mixed volumes*, Israel J. Math. **135** (2003), 157-180.

[27] A.A. Giannopoulos and V.D. Milman, *Extremal problems and isotropic positions of convex bodies*, Israel J. Math. **117** (2000), 29-60.

[28] A. Giannopoulos and V.D. Milman, *Concentration property on probability spaces*, Advances in Math. **156** (2000), 77-106.

[29] A. Giannopoulos and M. Papadimitrakis, *Isotropic surface area measures*, Mathematika **46** (1999), 1-13.

[30] A. Giannopoulos, V.D. Milman and M. Rudelson, *Convex bodies with minimal mean width*, Lecture Notes in Mathematics **1745**, Springer, Berlin (2000), 81-93.

[31] Y. Gordon, M. Meyer and S. Reisner, *Zonoids with minimal volume product - a new proof*, Proc. Amer. Math. Soc. **104** (1988), 273-276.

[32] M. Hartzoulaki, *Probabilistic methods in the theory of convex bodies*, Ph.D. Thesis, Department of Mathematics, University of Crete (2003).

[33] M. Junge, *Proportional subspaces of spaces with unconditional basis have good volume properties*, in Geom. Aspects of Funct. Analysis (Lindenstrauss-Milman eds.), Operator Theory: Advances and Applications **77** (1995), 121-129.

[34] M. Junge, *On the hyperplane conjecture for quotient spaces of L_p*, Forum Math. **6** (1994), 617–635.

[35] A. Koldobsky and M. Lifshitz, Average volume of sections of star bodies, Geom. Aspects of Funct. Analysis (Milman-Schechtman eds.), Lecture Notes in Math. **1745** (2000), 119-146.

[36] R. Kannan, L. Lovasz and M. Simonovits, *Isoperimetric problems for convex bodies and a localization lemma*, Discrete Comput. Geom. **13** (1995), 541-559.

[37] H. König, M. Meyer and A. Pajor, *The isotropy constants of the Schatten classes are bounded*, Math. Ann. **312** (1998), 773-783.

[38] D.R. Lewis, *Ellipsoids defined by Banach ideal norms*, Mathematika **26** (1979), 18-29.

[39] D.R. Lewis, *Finite dimensional subspaces of L_p*, Studia Math. **63** (1978), 207-212.

[40] L. Lopes and M. Marcus, *Inequalities for symmetric functions and Hermitian matrices*, Canad. J. Math. **8** (1956), 524-531.

[41] M. Ledoux and M. Talagrand, *Probability in Banach spaces*, Ergeb. Math. Grenzgeb., 3. Folge, Vol. 23 Springer, Berlin (1991).

[42] L.H. Loomis and H. Whitney, *An inequality related to the isoperimetric inequality*, Bull. Amer. Math. Soc. **55** (1949), 961-962.

[43] E. Lutwak and G. Zhang, *Blaschke-Santaló inequalities*, J. Differential Geom. **47** (1997), 1-16.

[44] A. Litvak, V.D. Milman and G. Schechtman, *Averages of norms and quasi-norms*, Math. Ann. **312** (1998), 95-124.

[45] E. Lutwak, D. Yang and G. Zhang, *L^p affine isoperimetric inequalities*, J. Differential Geom. **56** (2000), 111-132.

[46] E. Makai, Jr. and H. Martini, *The cross-section body, plane sections of convex bodies and approximation of convex bodies, I*, Geom. Dedicata **63** (1996), 267-296.

[47] V.D. Milman and A. Pajor, *Isotropic position and inertia ellipsoids and zonoids of the unit ball of a normed n-dimensional space*, Geom. Aspects of Funct. Analysis (Lindenstrauss-Milman eds.), Lecture Notes in Math. **1376** (1989), 64-104.

[48] V.D. Milman and G. Schechtman, *Asymptotic Theory of Finite Dimensional Normed Spaces*, Lecture Notes in Math. **1200** (1986), Springer, Berlin.

[49] G. Paouris, *On the isotropic constant of non-symmetric convex bodies*, Geom. Aspects of Funct. Analysis (Milman-Schechtman eds.), Lecture Notes in Math. **1745** (2000), 238-243 .

[50] G. Paouris, *Ψ_2-estimates for linear functionals on zonoids*, Geom. Aspects of Funct. Analysis (Milman-Schechtman eds.), Lecture Notes in Math. **1807** (2003), 211-222.

[51] C.M. Petty, *Surface area of a convex body under affine transformations*, Proc. Amer. Math. Soc. **12** (1961), 824-828.

[52] G. Pisier, *Holomorphic semi-groups and the geometry of Banach spaces*, Ann. of Math. **115** (1982), 375-392.

[53] G. Pisier, *The Volume of Convex Bodies and Banach Space Geometry*, Cambridge Tracts in Mathematics **94** (1989).

[54] S. Reisner, *Zonoids with minimal volume product*, Math. Z. **192** (1986), 339-346.

[55] C.A. Rogers and G. Shephard, *The difference body of a convex body*, Arch. Math. **8** (1957), 220-233.

[56] R. Schneider, *Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications **44**, Cambridge University Press, Cambridge (1993).

[57] R. Schneider, *On the Aleksandrov-Fenchel inequality*, Discrete Geometry and Convexity (eds J.E. Goodman, E. Lutwak, J. Malkevitch and R. Pollack), Ann. New York Acad. Sci. **440** (1985), 132-141.

[58] M. Talagrand, *Regularity of Gaussian processes*, Acta Math. **159** (1987), 99-147.

ABSTRACT

The starting point of this thesis is Bourgain's upper bound $L_K \leq c\sqrt[4]{n}\log n$ for the isotropic constant of a convex body K in $\mathbb{R}^n$. Bourgain's argument reduces the problem to the class of isotropic convex bodies Q with diameter $\mathrm{diam}(Q) \leq c\sqrt{n}L_Q$, where $c > 0$ is an absolute constant. The other main ingredient in his argument is the fact that linear functionals on convex bodies satisfy the ψ_1-estimate $\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_{\psi_1} \leq C\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_1$ for all $\theta \in S^{n-1}$. Stronger information on the ψ_2-behaviour of linear functionals on Q might be useful for the problem.

1. In Chapter 3 we study the ψ_2-behaviour of linear functionals on isotropic convex bodies K with $\mathrm{diam}(K) \leq \alpha\sqrt{n}L_K$ in terms of the parameter $\alpha \geq 1$. We call these "isotropic bodies with small diameter". There are two functions which enter into this discussion. First, for every $q \geq 1$ we consider the q-centroid body $Z_q(K)$ of K and introduce the function m_K of "Dvoretzky numbers" $m_K(q) \simeq n\frac{w(Z_q(K))^2}{\mathrm{diam}(Z_q(K))^2}$. Good ψ_2-behavior in every direction is proved to be equivalent to the condition $m_K(q) \simeq n$ for all q.

The second function f_K measures the average decay of hyperplane sections of K at distance $t > 0$ from the origin: $f_K(t) = \int_{S^{n-1}} |K \cap (\theta^\perp + t\theta)|\sigma(d\theta)$. Subgaussian decay of f_K is equivalent to small diameter for an isotropic convex body K.

Our main results are the following: If K is isotropic and $\mathrm{diam}(K) \leq \alpha\sqrt{n}L_K$, then

$$\sigma(\theta \in S^{n-1} : \|\langle\cdot,\theta\rangle\|_{\psi_2} \geq c_1\alpha t L_K) \leq \exp(-c_2\sqrt{n}t^2/\alpha^2)$$

for every $t \geq 1$. On the other hand, there exists an isotropic convex body of revolution Q in $\mathbb{R}^n$ with uniformly bounded geometric distance from the Euclidean ball, for which $\max_\theta \|\langle\cdot,\theta\rangle\|_{\psi_2} \simeq \sqrt[4]{n}L_Q$.

2. In Chapter 4 we discuss the following question: Do there exist an absolute constant $c > 0$ and a sequence $\phi(n)$ tending to infinity with n, such that for every isotropic convex body K in $\mathbb{R}^n$ the inequality $\mathrm{Prob}\big(\{x \in K : \|x\|_2 \geq c\sqrt{n}L_K t\}\big) \leq \exp\big(-\phi(n)t\big)$ holds true for every $t \geq 1$? In the case where K is 1-unconditional, Bobkov and Nazarov have proved that this is true with $\phi(n) \simeq \sqrt{n}$.

We prove that for every isotropic convex body K in $\mathbb{R}^n$, the following statements are equivalent:

(a) For some $\gamma \geq 1$ and for every $t \geq 1$, $\mathrm{Prob}\big(\{x \in K : \|x\|_2 \geq \gamma\sqrt{n}L_K t\}\big) \leq \exp\big(-\phi(n)t\big)$.

(b) For every $0 < t \leq c_1(\gamma)\sqrt{\phi(n)}L_K$, $f_K(t) \leq \frac{c_2}{L_K}\exp\big(-t^2/(c_3(\gamma)L_K^2)\big)$, where $c_i(\gamma) \simeq \gamma$.

3. In Chapter 5 we discuss the analogue in the Brunn-Minkowski theory of the inequalities of Marcus-Lopes and Bergstrom about symmetric functions of positive reals and determinants of symmetric positive matrices respectively. We obtain a local version of the Aleksandrov-Fenchel inequality $W_i^2 \geq W_{i-1}W_{i+1}$ which relates the quermassintegrals of a convex body K to those of an arbitrary hyperplane projection of K. A consequence is the following fact: for any convex body K, for any $(n-1)$-dimensional subspace E of $\mathbb{R}^n$ and any $t>0$,

$$\frac{|P_E(K)+tB_E|}{|P_E(K)|} \leq \frac{|K+2tB_2^n|}{|K|},$$

where B denotes the Euclidean unit ball and $|\cdot|$ denotes volume in the appropriate dimension.