

Πανεπιστήμιο Κρήτης
Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

**Αυτόματη Σχεδίαση Σελίδων:
Μια Γραφοθεωρητική Προσέγγιση μέσω
Προσανατολίσιμων Κύκλων**

Ιωάννης Λ. Νιάρχος

Μεταπτυχιακή Εργασία

Ηράκλειο
Οκτώβριος 2001

Πανεπιστήμιο Κρήτης
Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

**Αυτόματη Σχεδίαση Σελίδων:
Μια Γραφοθεωρητική Προσέγγιση μέσω
Προσανατολισιμων Κύκλων**

Εργασία που υποβλήθηκε από τον
Ιωάννη Α. Νιάρχο
ως μερική εκπλήρωση των απαιτήσεων για την απόκτηση
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟΥ ΔΙΠΛΩΜΑΤΟΣ ΕΙΔΙΚΕΥΣΗΣ

Συγγραφέας:

Ιωάννης Α. Νιάρχος
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
Πανεπιστήμιο Κρήτης

Εισηγητική Επιτροπή:

Γεώργιος Φ. Γεωργακόπουλος
Επίκουρος Καθηγητής, Επόπτης

Απόστολος Τραγανίτης
Αναπληρωτής Καθηγητής, Μέλος

Ευάγγελος Μαρκάτος
Επίκουρος Καθηγητής, Μέλος

Δεκτή:

Πάνος Κωνσταντόπουλος
Καθηγητής, Πρόεδρος Επιτροπής Μεταπτυχιακών Σπουδών

Ηράκλειο
Οκτώβριος 2001

Στην οικογένειά μου

Στο Βασίλη

...φίλε, μας άφησες πολύ νωρίς

Αυτόματη Σχεδίαση Σελίδων: Μια Γραφοθεωρητική Προσέγγιση μέσω Προσανατολισίμων Κύκλων

Ιωάννης Α. Νιάρχος

Μεταπτυχιακή Εργασία

Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

Πανεπιστήμιο Κρήτης

Περίληψη

Το χαρακτηριστικό της *οπτικοποίησης πληροφορίας (information visualization)*, και ειδικότερα η *σχεδίαση γράφων*, αποτελεί μια κρίσιμης σημασίας λειτουργικότητα για τις σύγχρονες εφαρμογές. Η ανάγκη της αυτόματης σχεδίασης γράφων ανακύπτει σε ποικίλες περιοχές, όπως η τεχνολογία λογισμικού, τα πληροφοριακά συστήματα και οι βάσεις δεδομένων.

Στην παρούσα εργασία εισάγουμε μια καινούρια κλάση γράφων, τους οποίους ονομάζουμε *χωροταξικούς γράφους*. Σε έναν χωροταξικό γράφο υπάρχουν ετικέτες της μορφής ‘δεξιά’, ‘κάτω’, ‘αριστερά’, ή ‘επάνω’ επί των ακμών του. Δεδομένου ενός χωροταξικού γράφου G διατυπώνουμε το πρόβλημα της *Σχεδίασης Πλαισίων* ως εξής: Να αποφασισθεί εάν οι κόμβοι του G μπορούν να σχεδιασθούν στο επίπεδο ως ορθογώνια πλαίσια, έτσι ώστε δύο οποιαδήποτε πλαίσια των οποίων οι αντίστοιχοι κόμβοι ενώνονται με μια ακμή του G , να εφάπτονται σύμφωνα με την ετικέτα αυτής της ακμής.

Το πρακτικό πρόβλημα που μοντελοποιούμε είναι το εξής: Έστω ότι διαχειριζόμαστε μια συλλογή D από αντικείμενα πληροφορίας (π.χ. μια βάση δεδομένων), κάθε ένα απ’ τα οποία μπορεί να παρασταθεί οπτικά μέσα σε ένα ορθογώνιο πλαίσιο, όπως λ.χ. βλέπουμε στις διάφορες ιστοσελίδες. Τα αντικείμενα αυτά μπορεί να είναι τμήματα κειμένου, φωτογραφίες, σχήματα, λεζάντες, σύνδεσμοι σελίδων, γραμμές εργαλείων, διαφημιστικά πλαίσια, κ.ά. Ένα υποσύνολο αντικειμένων της D μπορεί να επιλεγεί *δυναμικά* προς εμφάνιση, οπότε πρέπει να δημιουργηθεί μια σελίδα που θα διαμερίζεται σε ένα σύνολο πλαισίων, όπου σε κάθε ένα θα

τοποθετηθεί ένα αντικείμενο. Για δύο αντικείμενα i_1, i_2 της συλλογής D ενδέχεται να υπάρχει η συνθήκη ότι το i_2 θα πρέπει να εμφανίζεται *αμέσως* προς τα δεξιά λ.χ. του i_1 , εκφράζοντας κάποια σχετική σημασία-σπουδαιότητα, οπότε τα αντίστοιχα πλαίσια θα πρέπει να *εφάπτονται κατάλληλα*.

Στην εργασία μας μελετάμε τη δυνατότητα αυτόματης σχεδίασης μιας σελίδας που πρόκειται να εμφανισθεί στην οθόνη ενός υπολογιστή (π.χ. μια ιστοσελίδα). Μοντελοποιούμε κάθε αντικείμενο της συλλογής D με έναν κόμβο στο χωροταξικό μας γράφο G , και κάθε πληροφορία επαφής τους με μία ακμή στον G . Ορίζουμε το πρόβλημα της Σχεδίασης Πλαισίων και το επιλύουμε σε πολυωνυμικό χρόνο σε τρεις φάσεις, μέσω μιας γραμματικής χωρίς συμφραζόμενα, με εφαρμογή της θεωρίας επίπεδων γράφων και του γραμμικού προγραμματισμού. Η εργασία μας αποδεικνύει ότι η αυτόματη σελιδοποίηση (λ.χ. για εφαρμογές στον παγκόσμιο ιστό, ή/και για εφαρμογές που επιχειρούν να εξειδικεύουν την παρουσιαζόμενη πληροφορία με βάση ένα προφίλ χρήστη) είναι θεωρητικά εφικτή (γίνεται σε πολυωνυμικό χρόνο). Απομένει όμως να βελτιστοποιηθούν οι αλγόριθμοί μας ώστε να αποδίδουν σε συνθήκες “πραγματικού” χρόνου.

Automatic Page Layout: A Graph-theoretic Approach through Oriented Cycles

Ioannis L. Niarhos

Master of Science Thesis

Computer Science Department

University of Crete

Abstract

Information visualization, and especially *graph drawing*, is a key component of support tools for many applications in science and engineering. The automatic generation of drawings of graphs finds many applications, including software engineering, information systems and database systems.

In this thesis we introduce a new class of graphs, which we name (*page-*) *layout-graphs*. The edges of a layout-graph are labeled as either ‘right’, ‘down’, ‘left’ or ‘up’. Given a layout-graph G , we define the *Frame Layout* problem as follows: Decide whether the nodes of G can be drawn in the plane as a set of rectangular frames, such that any two frames corresponding to an edge of G touch each other according to the label of this edge.

Our motivation is the following: Suppose we are managing a collection D of information items (e.g., a database), each of which can be visually represented in a rectangular frame, e.g., the way we usually see in the various web-pages. Items may be main text, photos, figures, captions, links, toolbars, banners etc. A subset of items of D may be *dynamically* selected to be presented, so a ‘page’ must be set, divided into a set of frames, where each frame is preserved for each item to be presented. For any two items i_1, i_2 of D , there may exist the condition that i_2 should appear *immediately* to the right of i_1 , expressing some kind of relevance important between i_1 and i_2 , so the corresponding frames should *touch* appropriately.

Our work explores the possibility of the automatic layout of a page which will be presented on a computer monitor (e.g., a web-page). Each item of collection D becomes a

node in our layout graph G , and each contact information between a pair of items becomes an edge in G . We define the Frame Layout problem and solve it in P -time in three phases, through a context-free grammar, planar graphs theory and linear programming. In our thesis we prove that automatic page-layout (e.g., for web applications or/and personalizing applications through user profiles) is theoretically feasible (can be accomplished in P -time). Our algorithms, however, should be optimized in order to be efficient in the context of real-time constraints.

Ευχαριστίες

Φθάνοντας στο τέλος της μεταπτυχιακής μου εργασίας, αισθάνομαι την ανάγκη να ευχαριστήσω όλους αυτούς που με βοήθησαν στην προσπάθειά μου, ο καθένας με το δικό του ξεχωριστό τρόπο.

Καταρχήν, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον (φίλο και) επόπτη καθηγητή μου κ. Γιώργο Φ. Γωργακόπουλο, για την ευκαιρία που μου παρείχε να ασχοληθώ με τον τομέα των Αλγορίθμων, για την αμέριστη, πολυτιμότερη και συνεχή καθοδήγησή του καθόλη τη διάρκεια των σπουδών μου, για τον οργανωμένο τρόπο με τον οποίο με έμαθε να σκέπτομαι και να εργάζομαι, για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε, για τη συμπαράστασή του στις δύσκολες στιγμές, και γιατί διεύρυνε τους πνευματικούς μου ορίζοντες και τις ανησυχίες μου και πέραν από την περιοχή της επιστήμης των υπολογιστών.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους καθηγητές του Τμήματος Επιστήμης Υπολογιστών κ.κ. Απόστολο Τραγανίτη και Ευάγγελο Μαρκάτο για τη συμμετοχή τους στην εισηγητική επιτροπή, για τα σχόλια και τις παρατηρήσεις τους, και για την υπομονή που επέδειξαν κατά την μακροσκελή παρουσίαση της εργασίας μου. Ευχαριστώ τον καθηγητή κ. Πάνο Κωνσταντόπουλο και τα μέλη της ομάδας Πληροφοριακών Συστημάτων του Ινστιτούτου Πληροφορικής του Ιδρύματος Τεχνολογίας και Έρευνας, για τη συνεργασία μας κατά τα αρχικά στάδια της μεταπτυχιακής μου εργασίας.

Ευχαριστώ το Τ.Ε.Υ. του Πανεπιστημίου Κρήτης για το σύνολο των γνώσεων που μου έδωσε την ευκαιρία να αποκτήσω, καθώς και για την υλικοτεχνική υποδομή και την οικονομική ενίσχυση που μου παρείχε κατά τη διάρκεια των σπουδών μου.

Ευχαριστώ τον καθηγητή μου κατά τις προπτυχιακές μου σπουδές κ. Ευάγγελο Μαγείρου, του Τμήματος Πληροφορικής του Οικονομικού Πανεπιστημίου Αθηνών, για τις γνώσεις που μου παρείχε και για την γενικότερη καθοδήγησή του.

Ένα μεγάλο ευχαριστώ οφείλω στους φίλους και στις φίλες μου για τη συμπαράσταση και την υποστήριξή τους, που μαζί μοιραστήκαμε χαρές, λύπες, ανησυχίες και προβληματισμούς. Ευχαριστώ όλους τους μεταπτυχιακούς φοιτητές του Τ.Ε.Υ., με τους οποίους έτυχε να δουλεύουμε μαζί στα δοξασμένα υπόγεια των λευκών κτιρίων, να αστειεύομαστε και να στηρίζουμε αλλήλους. Ιδιαίτερα θα ήθελα να ευχαριστήσω τους: David M^cClurkin, Γιώργο Χαλκιαδάκη, Γρηγόρη Γκίκα, Νίκο Χρυσό, Σοφία Αλεξάκη, Χαρίλαο Μπλάτσιο, Κώστα Χαρτερό, Μαρίνα Μπιτσάκη, Άρη Νικολογιάννη και Χρήστο Ρέτσα. Ευχαριστώ το Νιόνιο, με τον οποίο περάσαμε ωραίες στιγμές κατά τις επισκέψεις μου στην πατρική (και μητρική) οικεία, την Ελένη, τον Αποστόλη και τον Παντελή, που τροφοδοτούσε

τακτικά το αναγνωστήριο αλγορίθμων με ρακή υψηλής ποιότητας (και περιεκτικότητας οίνοπνεύματος).

Τέλος (but not least), ευχαριστώ τους γονείς μου Λεωνίδα και Ελισάβετ, και την αδελφή μου Παναγιώτα, για την αγάπη τους (και όλα τα υπόλοιπα που η αγάπη συνεπάγεται) όλα αυτά τα χρόνια.

Αφιερώνω την εργασία τούτη στην οικογένειά μου και στον εκλιπόντα φίλο μου Βασίλη (φίλε, μας άφησες πολύ νωρίς).

Περιεχόμενα

Περίληψη	i
Abstract	iii
Ευχαριστίες	v
Περιεχόμενα	vii
Κατάλογος Σχημάτων	ix
Κατάλογος Πινάκων	xi
Κεφάλαιο 1. Εισαγωγή	1
§ 1.1. Γενική Εισαγωγή	1
§ 1.2. Συνοπτική Περιγραφή του Προβλήματος – Συνεισφορά της Εργασίας	3
§ 1.3. Οργάνωση του Κειμένου	6
Κεφάλαιο 2. Το Πρόβλημα της Σχεδίασης Πλαισίων	7
§ 2.1. Βασικοί Ορισμοί	7
§ 2.2. Ορισμός του Προβλήματος	10
§ 2.3. Φάσεις του Προβλήματος.....	11
Κεφάλαιο 3. Φάση I: Προσανατολισμός Απλού Κύκλου	14
§ 3.1. Βασικοί Ορισμοί	14
§ 3.2. Ορισμός του Προβλήματος	18
§ 3.3. Επίλυση του Προβλήματος	20
Κεφάλαιο 4. Φάση II: Προσανατολισμένη Επιπεδότητα	38

§ 4.1.	Στοιχεία από τη Θεωρία Επίπεδων Γράφων.....	38
§ 4.2.	Ορισμός του Προβλήματος.....	40
§ 4.3.	Επίλυση του Προβλήματος.....	41
§ 4.4.	Επίλυση της Αμφισημίας των Μη Προσανατολίσιμων Κύκλων.....	45
Κεφάλαιο 5.	Φάση III: Υλοποίηση των Εδρών.....	48
§ 5.1.	Εισαγωγικές Έννοιες.....	48
§ 5.2.	Επίλυση του Προβλήματος.....	60
Κεφάλαιο 6.	Σύνοψη — Μελλοντικές Κατευθύνσεις.....	62
§ 6.1.	Σύνοψη.....	62
§ 6.2.	Ανοικτά Προβλήματα – Μελλοντικές Κατευθύνσεις.....	63
Βιβλιογραφία.....		66

Κατάλογος Σχημάτων

1.1.	Ένας χωροταξικός γράφος και μια ορθογωνική του σχεδίαση	3
2.1.	Ένα πλαίσιο F και οι τέσσερις πλευρές του	8
2.2.	Δύο εφαπτόμενα πλαίσια με την κατεύθυνση της επαφής τους	8
2.3.	Ένας απλός κύκλος πλαισίων	9
2.4.	Ένας χωροταξικός γράφος και μια ορθογωνική του σχεδίαση	10
3.1.	Ένας γραφοκύκλος c , οι συζυγείς μορφές του κ , κ' και οι περιγραφές τους	15
3.2.	Μια ωρολογιακή και μια ανθρωρολογιακή περιγραφή ενός κύκλου πλαισίων K	16
3.3.	Ένας γραφοκύκλος c και τρεις γεωμετρικά διαφορετικοί κύκλοι πλαισίων K_1, K_2, K_3	17
3.4.	Περιγραφές του Σ^* που αντιστοιχούν σε ανέφικτο, ή μη απλό, ή μη προσανατολισμένο κύκλο πλαισίων	19
3.5.	Μια λ - και μια σ -περιγραφή ενός κύκλου πλαισίων	21
3.6.	Το οριζόντιο και το κατακόρυφο κάτοπτρο ενός κύκλου πλαισίων	23
3.7.	Οι ωρολογιακές περιστροφές ενός κύκλου πλαισίων	23
3.8.	Εφαρμογή του κανόνα $\sigma_{RD} \rightarrow \sigma_{RU} \sigma_{UD}$	25
3.9.	Ο μετασχηματισμός $x\text{-Expand}[S, d, c]$	26
3.10.	Ο μετασχηματισμός $\text{Detach}[S, F, F, d]$	27
3.11.	Ο μετασχηματισμός $\text{Push}[S, Z, d]$	27
3.12.	<i>Παραγωγικοί κανόνες</i> : γραμματική και γεωμετρική σκοπιά	30
3.13.	Εφαρμογή του απλοποιητικού κανόνα $\sigma_{XR} \sigma_{RL} \sigma_{LR} \Rightarrow \sigma_{XR}$ σε κύκλο μήκους τουλάχιστον 6	31
3.14.	Εφαρμογή του απλοποιητικού κανόνα $\sigma_{RR} \sigma_{RR} \Rightarrow \sigma_{RR}$	32
3.15.	Μια κλειστή βηματική γραμμή στο εσωτερικό ενός κύκλου πλαισίων, και μια s -στροφή	33
3.16.	<i>Απλοποίηση</i> μιας s -στροφής (4 περιπτώσεις)	35
3.17.	Η περίπτωση όπου ο κανόνας $\sigma_{XR} \sigma_{RR} \Rightarrow \sigma_{RR}$ είναι μη εφαρμόσιμος	36
4.1.	Τα τμήματα B_1, B_2, B_3 ενός γράφου G ως προς έναν υπογράφο του G_1	39
4.2.	(i) Δύο ασύμβατες γέφυρες B_1, B_2 . (ii) Ο βοηθητικός γράφος $G^+(c)$	39
4.3.	<i>Αντίρροποι</i> και <i>ομόρροποι</i> κύκλοι	41
4.4.	<i>Σχεδίαση</i> μιας γέφυρας στην εσωτερική ή στην εξωτερική έδρα ενός κύκλου	43
4.5.	<i>Περιορισμός</i> στη σχεδίαση δύο κύκλων από τη γεωμετρική φύση των κόμβων-ορθογωνίων	44
4.6.	Η μη προσανατολισσιμότητα ενός κύκλου πλαισίων	47
5.1.	Δύο τεμνόμενα διαστήματα I_1, I_2	48

5.2.	Αδυναμία γραμμικής έκφρασης της μη επικαλυπτιμότητας δύο πλαισίων	49
5.3.	Περιορισμοί επαφής πλαισίων	50
5.4.	Τέσσερις τύποι μη απλών καμπυλών	51
5.5.	Ένας σκελετός και τα πλαίσια στήριξης (που σχηματίζουν την $face(K)$) ως προς το $contour(K)$ ενός κύκλου πλαισίων K (υπολογισμένος (σκελετός) σύμφωνα με το Λήμμα 5.3)	53
5.6.	Ο μετασχηματισμός $V-Clear(\cdot)$	54
5.7.	Τρεις τρόποι συγκόλλησης δύο σκελετών	56
5.8.	Ένα μονότονο τμήμα ενός περιγράμματος $contour(K)$	57
5.9.	Αμφισημία της μορφής $RVLVR$, επιλυόμενη από τη διάταξη $\gamma(\cdot)$	58
5.10.	Ενώνοντας τα τμήματα s^* και t^* του K^*	59

Κατάλογος Πινάκων

3.1. Παραγωγικοί κανόνες: γραμματική και γεωμετρική σκοπιά	30
3.2 (Απλοποιητικοί) Κανόνες για την απλοποίηση μιας s -στροφής: γεωμετρική και γραμματική σκοπιά	34

Κεφάλαιο 1. *Εισαγωγή*

Στο εισαγωγικό αυτό κεφάλαιο δίδουμε μια γενική εισαγωγή στον κλάδο της Σχεδίασης Γράφων, παραθέτοντας τα πεδία εφαρμογών και τις συσχετίσεις με άλλες επιστημονικές περιοχές. Περιγράφουμε το αντικείμενο και τη συνεισφορά της εργασίας, κλείνοντας με μια περιγραφή του περιεχομένου των υπολοίπων κεφαλαίων του κειμένου.

§ 1.1. *Γενική Εισαγωγή*

Η οπτικοποίηση (visualization) σύνθετων δομών που χρησιμοποιούνται για την αναπαράσταση πληροφορίας, αποτελεί μια κρίσιμης σημασίας λειτουργικότητα για τα σύγχρονα εργαλεία που απαιτούν οι διάφορες εφαρμογές. Σε αρκετές περιπτώσεις η πληροφορία που μας ενδιαφέρει μπορεί να μοντελοποιηθεί ως ένα σύνολο αντικειμένων και σχέσεων μεταξύ αυτών, οπότε για την αναπαράστασή της χρησιμοποιείται η αφηρημένη δομή των γράφων. Έτσι, πολλά συστήματα που εμπεριέχουν το χαρακτηριστικό της *οπτικοποίησης πληροφορίας (information visualization)* απαιτούν τη σχεδίαση γράφων με τρόπο ευανάγνωστο κι εύκολα αντιληπτό από το χρήστη.

Ο κλάδος της *Σχεδίασης Γράφων (Graph Drawing)* επιλαμβάνεται του προβλήματος της κατασκευής γεωμετρικών αναπαραστάσεων γράφων, σημασιολογικών δικτύων, και σχετικών συνδυαστικών δομών. Η γεωμετρική αναπαράσταση των γράφων έχει μελετηθεί εδώ και πολλές δεκαετίες, τόσο για σκοπούς οπτικοποίησης και αντιληψιμότητας των γράφων, όσο και για αυτή και μόνο την ομορφιά της αλληλεπίδρασης μεταξύ της θεωρίας γράφων και της γεωμετρίας. Στις αρχές της δεκαετίας του 1960, οι επιστήμονες των υπολογιστών άρχισαν να χρησιμοποιούν τη σχεδίαση γράφων ως διαγραμμάτων που θα βοηθούσαν στην κατανόηση της διαδικασίας ανάπτυξης λογισμικού. Το άρθρο του Knuth το 1963 για τη σχεδίαση διαγραμμάτων ροής (flowcharts) [1] αναγνωρίζεται ως το πρώτο άρθρο που παρουσιάζει έναν αλγόριθμο σχεδίασης γράφων για σκοπούς οπτικοποίησης.

Στις μέρες μας η ανάγκη της αυτόματης σχεδίασης γράφων ανακύπτει σε ποικίλες εφαρμογές: Στην τεχνολογία λογισμικού (ιεραρχίες κλάσεων στον οντοκεντρικό (object-oriented) προγραμματισμό), στα πληροφοριακά

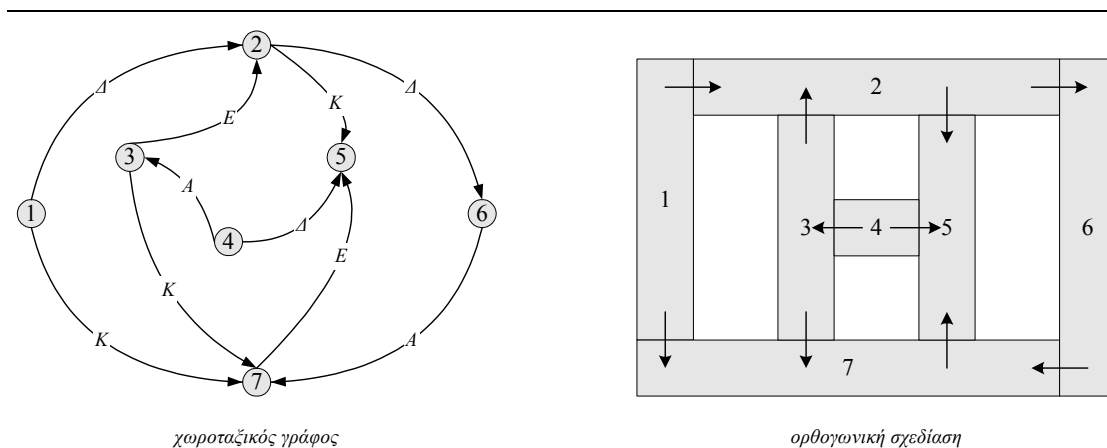
συστήματα (διαγράμματα ροής δεδομένων), στις βάσεις δεδομένων (διαγράμματα οντοτήτων συσχετίσεων), σε συστήματα πραγματικού χρόνου (διαγράμματα μεταβάσεων καταστάσεων (state-transition diagrams)), σε συστήματα στήριξης αποφάσεων (δίκτυα PERT), καθώς και στην τεχνητή νοημοσύνη και τον λογικό προγραμματισμό (διαγράμματα παράστασης γνώσης (knowledge-representation systems) και SLD-δένδρα). Εφαρμογές μπορούν επίσης να εντοπιστούν και σε άλλες περιοχές της επιστήμης πέραν της πληροφορικής και των υπολογιστών, όπως η βιολογία (εξελικτικά δένδρα (evolutionary trees)), η χημεία (απεικόνιση μορίων), και η πολιτική μηχανική (χάρτες σχεδίων ορόφων (floorplan maps)).

Εξαιτίας της συνδυαστικής και γεωμετρικής φύσης των προβλημάτων που μελετώνται αλλά και του ευρέος πεδίου των εφαρμογών, η έρευνα περί της σχεδίασης γράφων έχει διεξαχθεί σε ποικίλες περιοχές, όπως τα διακριτά μαθηματικά (τοπολογική θεωρία γράφων, γεωμετρική θεωρία γράφων, θεωρία διατάξεων (order theory)), η θεωρία αλγορίθμων (αλγόριθμοι γράφων, δομές δεδομένων, υπολογιστική γεωμετρία, VLSI), καθώς και η επικοινωνία ανθρώπου-υπολογιστή (γραφικές διεπαφές χρήστη, οπτικοποίηση λογισμικού). Το άρθρο-βιβλιογραφική έρευνα [2] περί αλγορίθμων σχεδίασης γράφων περιέχει πάνω από 300 σχετικές αναφορές, ενώ εκτεταμένη είναι και η μη αλγοριθμική βιβλιογραφία επί της τοπολογικής και γεωμετρικής θεωρίας γράφων και της θεωρίας διατάξεων.

Στην παρούσα εργασία εισάγουμε μια καινούρια κλάση γράφων, τους οποίους ονομάζουμε χωροταξικούς γράφους, και μελετούμε το εξής πρόβλημα οπτικοποίησης-σχεδίασης: Δεδομένου ενός χωροταξικού γράφου G , το πρόβλημα είναι να αποφασίσουμε αν οι κόμβοι του G μπορούν να σχεδιασθούν στο επίπεδο ως κατάλληλα ορθογώνια πλαίσια, με τέτοιο τρόπο ώστε δύο κόμβοι-ορθογώνια που ενώνονται με μια ακμή του G , να εφάπτονται σύμφωνα με την ετικέτα της ακμής αυτής. Στην επόμενη ενότητα δίδουμε μια συνοπτική περιγραφή του προβλήματος, αναφέροντας παράλληλα τα πραγματικά προβλήματα που μοντελοποιούμε (και λύνουμε) στην εργασία μας (τα οποία αποτέλεσαν και το βασικό κίνητρο για να ασχοληθούμε με τη συγκεκριμένη περιοχή).

§ 1.2. Συνοπτική Περιγραφή του Προβλήματος – Συνεισφορά της Εργασίας

Ορίζουμε έναν *χωροταξικό γράφο* ως έναν κατευθυνόμενο γράφο, οι ακμές του οποίου έχουν μια ετικέτα της μορφής ‘δεξιά’, ‘κάτω’, ‘αριστερά’, ‘επάνω’, και διατυπώνουμε το *πρόβλημα της Σχεδίασης Πλαισίων* ως εξής: Δεδομένου ενός χωροταξικού γράφου G , το πρόβλημα είναι να αποφασίσουμε εάν οι κόμβοι του G μπορούν να σχεδιασθούν στο επίπεδο όχι απλώς ως σημεία που ενώνονται με μη τεμνόμενες καμπύλες (δηλ. όπως ορίζει το κλασικό πρόβλημα της επιπεδότητας (planarity problem)), αλλά ως ορθογώνια πλαίσια ευθυγραμμισμένα με τους δύο άξονες και ανά δύο μη επικαλυπτόμενα. Για να σέβονται τη συνήθη αναγνωστική φορά (που εκφράζεται μέσα από τις επαφές των πλαισίων, τις οποίες ορίζουν οι ετικέτες των ακμών), οποιαδήποτε δύο πλαίσια των οποίων οι αντίστοιχοι κόμβοι ενώνονται με μια κατευθυνόμενη ακμή του G , θα πρέπει να εφάπτονται σύμφωνα με την ετικέτα της ακμής αυτής, δηλ. να εφάπτονται κατά μήκος της ‘δεξιάς’, ‘κάτω’, ‘αριστεράς’, ή ‘επάνω’ πλευράς του πρώτου ορθογωνίου. Θα ονομάζουμε μια τέτοια σχεδίαση πλαισίων ως *ορθογωνική σχεδίαση* του γράφου G . Στο Σχήμα 1.1 φαίνεται ένας χωροταξικός γράφος (με ετικέτες *Δεξιά*, *Κάτω*, *Αριστερά*, *Επάνω* επί των ακμών του) και μία ορθογωνική του σχεδίαση.



Σχήμα 1.1. Ένας χωροταξικός γράφος και μια ορθογωνική του σχεδίαση. Παρατηρούμε λ.χ. ότι οι κόμβοι 1 και 2 του γράφου ενώνονται με μια ακμή που έχει ετικέτα *Δεξιά*, γι' αυτό στην ορθογωνική σχεδίαση το ορθογώνιο 2 εφάπτεται κατά μήκος της δεξιάς πλευράς του ορθογωνίου 1.

Το πρακτικό πρόβλημα που μοντελοποιούμε είναι το εξής: Έστω ότι διαχειριζόμαστε μια συλλογή D από αντικείμενα πληροφορίας (π.χ. μια βάση δεδομένων), κάθε ένα απ' τα οποία μπορεί να παρασταθεί οπτικά μέσα σε ένα ορθογώνιο πλαίσιο μεταβλητού μεγέθους ευθυγραμμισμένο με τους άξονες, κατά παρόμοιο τρόπο όπως λ.χ. βλέπουμε να εμφανίζονται τα διάφορα αντικείμενα στις ιστοσελίδες του διαδικτύου. Τα αντικείμενα αυτά μπορεί να είναι τμήματα κειμένου, φωτογραφίες, επικεφαλίδες, σχήματα, λεζάντες, σύνδεσμοι σελίδων (links), γραμμές εργαλείων (toolbars), διαφημιστικά πλαίσια (banners), βοηθητικά σχόλια κ.ά.

Ένας χρήστης που έχει πρόσβαση στη συλλογή D μπορεί δυναμικά να επιλέξει προς εμφάνιση ένα υποσύνολο αντικειμένων της D , οπότε πρέπει να δημιουργηθεί μια σελίδα που θα διαμερίζεται σε ένα σύνολο μη επικαλυπτόμενων ορθογωνίων πλαισίων, όπου σε κάθε ένα θα τοποθετηθεί ένα αντικείμενο προς εμφάνιση. Είναι σημαντικό να δημιουργηθεί μια χωροδιάταξη των πλαισίων αυτών τέτοια ώστε να αποδίδει τη σχετική σημασία-σπουδαιότητα των αντίστοιχων αντικειμένων.

Το πρόβλημα αυτό μπορεί να εκφρασθεί μέσω της τήρησης της συνήθους *αναγνωστικής φοράς* (π.χ. από αριστερά προς τα δεξιά κι από πάνω προς τα κάτω, για τη δυτική γραφή). Δύο αντικείμενα i_1, i_2 της συλλογής D μπορεί να είναι σε θέση να διαταχθούν κατά τη σχεδιάσή τους σύμφωνα με την αναγνωστική φορά: το i_1 'πριν από' το i_2 σημαίνει ότι το i_1 θα πρέπει να εμφανιστεί είτε προς τα αριστερά ή προς τα πάνω του i_2 . Αυτό θα ήταν ιδιαίτερα επιθυμητό στην περίπτωση όπου τα αντίστοιχα πλαίσια είναι ευθυγραμμισμένα κατά μήκος της επάνω ή της αριστερής πλευράς τους αντίστοιχα. Η σχετική σημασία που αποδίδεται με αυτή τη διάταξη μπορεί να είναι αλφαβητική σειρά, χρονολογική σειρά, βαθμός σχετικότητας (degree of relevance) ως προς μια επερώτηση επί της D , κ.τ.τ.

Η διάταξη όμως αυτή θα είναι *δευτερευούσης* σημασίας σε σχέση με μια *πρωτεύουσα* και αυστηρότερη-ισχυρότερη συνθήκη: ότι το αντικείμενο i_2 θα πρέπει να εμφανίζεται *αμέσως* προς τα δεξιά (ή κάτω, αριστερά, επάνω) του αντικειμένου i_1 . Αυτό σημαίνει ότι τα αντίστοιχα πλαίσια θα πρέπει να *εφάπτονται* κατάλληλα. Για παράδειγμα, μπορεί να επιθυμούμε μια εικόνα να εμφανίζεται αμέσως προς τα δεξιά ενός τμήματος κειμένου, ένα πλαίσιο πλοήγησης (navigation bar) σε έναν δικτυακό τόπο να εμφανίζεται στο αριστερό άκρο μιας ιστοσελίδας, ένα διαφημιστικό πλαίσιο να εμφανίζεται

στο πάνω μέρος μιας ιστοσελίδας ή κάποιοι σύνδεσμοι να εμφανίζονται στο κάτω μέρος, κ.τ.τ.

Για τις εφαρμογές που εμπεριέχουν οπτικοποίηση πληροφορίας, και κυρίως για τις εφαρμογές που σχετίζονται με τον παγκόσμιο ιστό και το διαδίκτυο, θα ήταν εξαιρετικά χρήσιμο να μπορούν να παράγουν μια καλής ποιότητας (ως προς τα παραπάνω κριτήρια) χωροδιάταξη με αυτόματο τρόπο. Ο τρόπος με τον οποίο οπτικοποιείται στο διαδίκτυο ένα δυναμικά ορισμένο σύνολο αντικειμένων είναι μάλλον φτωχός: συνήθως παρουσιάζεται πληροφορία απρόβλεπτης φύσης και μεγέθους με έναν απλοϊκό, σειριακό τρόπο από πάνω προς τα κάτω. Ένα εργαλείο αυτόματης χωροταξικής σχεδίασης πλαισίων θα ήταν ιδιαίτερα χρήσιμο και στις εφαρμογές που (επιχειρούν να) εξειδικεύουν την παρουσιαζόμενη πληροφορία με βάση ένα προφίλ χρήστη (user profile, personalizing applications).

Στην παρούσα εργασία μελετάμε τη δυνατότητα αυτόματης σχεδίασης μιας σελίδας που πρόκειται να εμφανισθεί στην οθόνη ενός υπολογιστή (π.χ. μια ιστοσελίδα). Σε αντιστοιχία με την αρχική μας συζήτηση, μοντελοποιούμε κάθε αντικείμενο της συλλογής D με έναν κόμβο στο χωροταξικό μας γράφο G , και κάθε πληροφορία σχετικής τοποθέτησής τους με μία ακμή στον G : αν υπάρχει μια πρωτεύουσα συνθήκη επαφής μεταξύ δύο αντικειμένων, τότε οι αντίστοιχοι κόμβοι του G ενώνονται με μια κατευθυνόμενη ακμή που φέρει μια κατάλληλη ετικέτα. Σύμφωνα με την παραπάνω παρουσίαση ορίζουμε το πρόβλημα της Σχεδίασης Πλαισίων και δίδουμε μια λύση για αυτό. Ο αλγόριθμός μας λειτουργεί σε πολυωνμικό χρόνο, και όταν δίδει θετική απάντηση παρέχει επίσης μια εφικτή σχεδίαση. Λύνουμε το πρόβλημα σε τρεις φάσεις-υποπροβλήματα, η επίλυση καθενός απ' τα οποία αποτελεί ένα σημαντικό συμπέρασμα της εργασίας μας: (i) Επιλύουμε το πρόβλημα της Σχεδίασης Πλαισίων για την απλούστερη μη τετριμμένη περίπτωση, όπου ο χωροταξικός γράφος G αποτελείται από έναν μόνο κύκλο. Παραθέτουμε μια γραμματική χωρίς συμφραζόμενα, η οποία αποδεικνύουμε ότι παράγει όλους και μόνο τους κύκλους πλαισίων· (ii) Αντιμετωπίζουμε την περίπτωση όπου ο γράφος G αποτελείται από περισσότερους από έναν κύκλους, και το πρόβλημα είναι να αποφασίσουμε ποιοι από αυτούς θα αποτελέσουν τις έδρες της τελικής επίπεδης σχεδίασης του G . Η λύση μας προκύπτει από την εξέταση των τρόπων σχεδίασης των 'γεφυρών' του G ως προς έναν κύκλο του· (iii) Εν τέλει, επιλύουμε το πρόβλημα της σχεδίασης των κόμβων και ακμών των εδρών του G ως

καταλλήλως εφραπτόμενα μη επικαλυπτόμενα πλαίσια. Εισάγουμε την έννοια των ‘σκελετών’ και καταλήγουμε σε ένα γραμμικό πρόγραμμα.

§ 1.3. Οργάνωση του Κειμένου

Η δομή του υπολοίπου της εργασίας έχει ως εξής:

Στο *Κεφάλαιο 2* ορίζουμε το πρόβλημα που επιλαμβάνεται η εργασία μας και που το ονομάζουμε πρόβλημα της Σχεδίασης Πλαισίων, δίδοντας τις φάσεις επίλυσής του. Ορίζουμε τις έννοιες του πλαισίου, του κύκλου πλαισίων, του χωροταξικού γράφου και της ορθογωνικής σχεδίασης.

Στο *Κεφάλαιο 3* εξετάζουμε την απλούστερη περίπτωση του προβλήματος της Σχεδίασης Πλαισίων, όπου ο χωροταξικός γράφος αποτελείται από έναν κύκλο. Ορίζουμε το πρόβλημα του Προσανατολισμού Απλού Κύκλου, και το επιλύουμε μέσω μιας γραμματικής χωρίς συμφραζόμενα.

Στο *Κεφάλαιο 4* αντιμετωπίζουμε τη γενική περίπτωση όπου ο χωροταξικός γράφος αποτελείται από περισσότερους του ενός κύκλους. Ορίζουμε το πρόβλημα της Προσανατολισμένης Επιπεδότητας, για την επίλυση του οποίου χρησιμοποιούμε έννοιες και τεχνικές από την κλασική θεωρία επί επίπεδων γράφων.

Στο *Κεφάλαιο 5* ασχολούμαστε με το πρόβλημα του να υλοποιήσουμε κατάλληλα τις έδρες του G , δηλ. να ελέγξουμε: (i) αν είναι δυνατόν να σχεδιασθούν όλοι οι κόμβοι του G ως πλαίσια, τα οποία (ii) εφάπτονται σύμφωνα με την ετικέτα κάθε κατευθυνόμενης ακμής και δεν επικαλύπτονται. Ονομάζουμε τούτο το πρόβλημα ως πρόβλημα Υλοποίησης των Εδρών, και το επιλύουμε μέσω του γραμμικού προγραμματισμού.

Τέλος, στο *Κεφάλαιο 6* συνοψίζουμε τη συνεισφορά και τα συμπεράσματα της εργασίας μας, και παραθέτουμε τα προβλήματα που παραμένουν ανοικτά, αποτελώντας έτσι κατευθύνσεις μελλοντικής έρευνας.

Κεφάλαιο 2. Το Πρόβλημα της Σχεδίασης Πλαισίων

Στο κεφάλαιο αυτό περιγράφουμε αναλυτικά το πρόβλημα που επιλαμβάνεται η εργασία μας και που το ονομάζουμε πρόβλημα της Σχεδίασης Πλαισίων, δίδοντας τις (τρεις) φάσεις επίλυσής του. Ορίζουμε τις έννοιες του πλαισίου, του κύκλου πλαισίων, του χωροταξικού γράφου και της ορθογωνικής σχεδίασης. Ας ξεκινήσουμε με τους απαραίτητους ορισμούς.

§ 2.1. Βασικοί Ορισμοί

Θα χρησιμοποιήσουμε τη βασική ορολογία της (επίπεδης) ευκλείδειας γεωμετρίας: **σημείο**, **ευθύγραμμο τμήμα**, **ευθεία (γραμμή)**, **επίπεδο** κ.ά. Ένα σημείο p ορίζεται από τις x - και y - συντεταγμένες του: $p = (x, y)$. Ένα ευθύγραμμο τμήμα s ορίζεται από τα δύο άκρα-σημεία του: $s = [p, q]$.

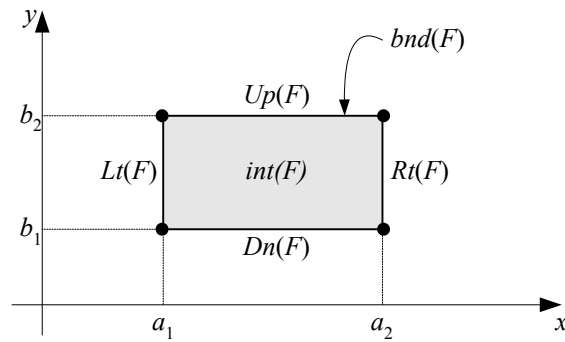
Ορίζουμε ένα **πλαίσιο** F (*Frame*) ως ένα ορθογώνιο ευθυγραμμισμένο με τους δύο άξονες, και θα αναφερόμαστε σε αυτό ορίζοντας την επάνω-αριστερή και την κάτω-δεξιά γωνία του:

$F = \{(a_1, b_2), (a_2, b_1)\}$, $a_1 \leq a_2$, $b_1 \leq b_2$. Τα **σημεία (points)** του πλαισίου F είναι το σύνολο $pts(F) = \{(x, y) : a_1 \leq x \leq a_2, b_1 \leq y \leq b_2\}$, και τα **εσωτερικά σημεία (interior)** του F το σύνολο $int(F) = \{(x, y) : a_1 < x < a_2, b_1 < y < b_2\}$.

Τα **συνοριακά σημεία (περίγραμμα – boundary)** του F είναι το σύνολο $bnd(F) = pts(F) - int(F)$, το οποίο αντιστοιχεί στα εξής τέσσερα ευθύγραμμα τμήματα: $Rt(F) = [(a_2, b_2), (a_2, b_1)]$,

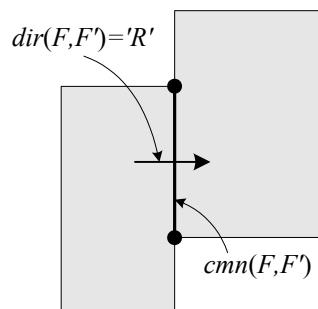
$Dn(F) = [(a_2, b_1), (a_1, b_1)]$, $Lt(F) = [(a_1, b_1), (a_1, b_2)]$, και

$Up(F) = [(a_1, b_2), (a_2, b_2)]$, δηλ. στη δεξιά, κάτω, αριστερή, και επάνω πλευρά του F αντίστοιχα (βλ. Σχήμα 2.1).



Σχήμα 2.1. Ένα πλαίσιο F και οι τέσσερις πλευρές του.

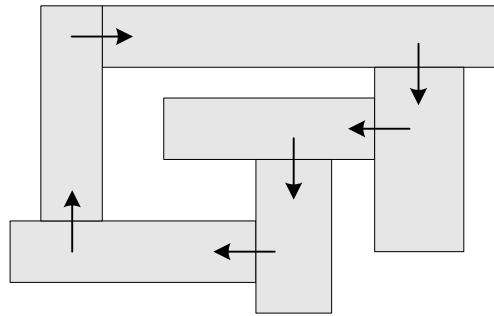
Δύο πλαίσια F, F' θα ονομάζονται **μη επικαλυπτόμενα**, αν και μόνο αν (ανν) δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία: $int(F) \cap int(F') = \emptyset$. Ορίζουμε δύο πλαίσια F, F' ως **εφαπτόμενα**, ανν τα δύο πλαίσια είναι μη επικαλυπτόμενα και η τομή των συνοριακών τους σημείων ορίζει ένα μη τετριμμένο ευθύγραμμο τμήμα $cmn(F, F') = bnd(F) \cap bnd(F')$. Χρησιμοποιώντας το αλφάβητο $\Sigma = \{R, D, L, U\}$ (Right, Down, Left, Up), ορίζουμε για ένα διατεταγμένο ζεύγος εφαπτόμενων πλαισίων (F, F') την **κατεύθυνση της επαφής** τους $dir(F, F')$ ως τύπου 'R' (αντ. 'D', 'L', 'U'), ανν $cmn(F, F') \subseteq Rt(F)$, (αντ. $\subseteq Dn(F), Lt(F), Up(F)$) (βλ. Σχήμα 2.2).



Σχήμα 2.2. Δύο εφαπτόμενα πλαίσια με την κατεύθυνση της επαφής τους.

Ορίζουμε μια **αλυσίδα πλαισίων** ως μια ακολουθία πλαισίων $\langle F_1, F_2, \dots, F_n \rangle$, όπου το πλαίσιο F_k εφάπτεται με το πλαίσιο F_{k+1} , $k = 1, \dots, n-1$, προς μια ορισμένη κατεύθυνση. Ο αριθμός n θα ονομάζεται **μήκος** της αλυσίδας. Ένας **κύκλος πλαισίων** είναι μια αλυσίδα πλαισίων μήκους τουλάχιστον τρία, όπου το τελευταίο πλαίσιο (F_n)

εφάπτεται με το πρώτο (F_1). Μια τέτοια περιγραφή ενός κύκλου πλαισίων, δηλ. ως μια ακολουθία πλαισίων όπου ορίζεται η κατεύθυνση της επαφής μεταξύ των διαδοχικών πλαισίων, θα ονομάζεται **συντακτική περιγραφή** του κύκλου. Ένας κύκλος πλαισίων θα ονομάζεται **απλός**, αν τα πλαίσια του κύκλου είναι ανά δύο μη επικαλυπτόμενα (βλ. Σχήμα 2.3). Στη συνέχεια όταν αναφερόμαστε σε έναν κύκλο πλαισίων θα υποθέτουμε ότι είναι απλός, εκτός κι αν δηλώνεται ρητά το αντίθετο.



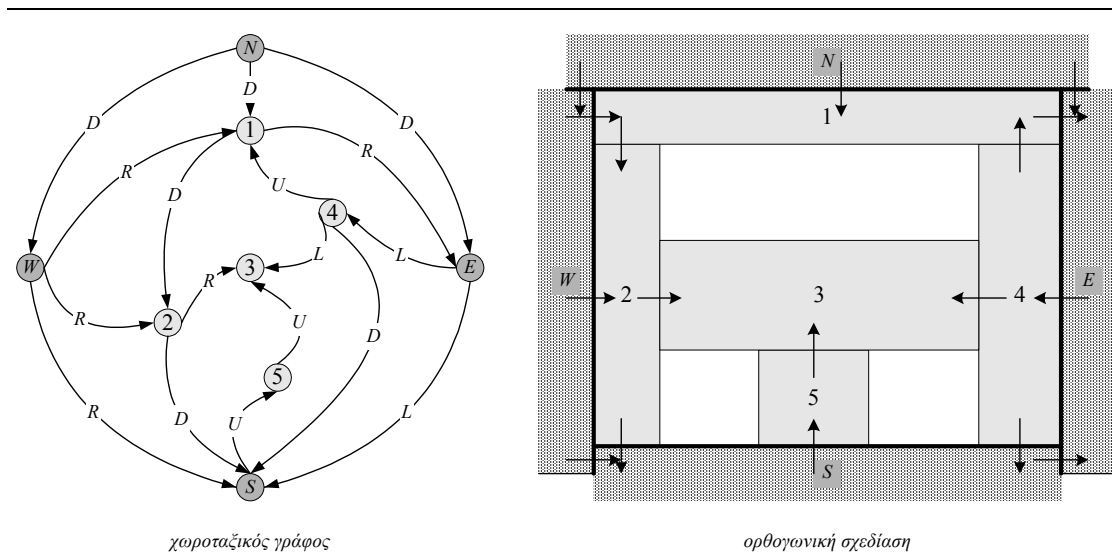
Σχήμα 2.3. Ένας απλός κύκλος πλαισίων.

Ορίζουμε έναν **χωροταξικό γράφο** (*layout graph*) $G = (V, E)$, ως έναν κατευθυνόμενο γράφο με σύνολο κορυφών V και σύνολο ακμών E , όπου κάθε κόμβος u φέρει μια ετικέτα $\gamma(u) \in N$ η οποία διατάσσει πλήρως το σύνολο V , και κάθε ακμή e φέρει μια ετικέτα $\delta(e) \in \Sigma$. Θα φανεί χρήσιμο (για “τεχνικούς λόγους”) να υποθέσουμε ότι το σύνολο V περιέχει τέσσερις ειδικούς κόμβους ($'N'$, $'E'$, $'S'$, $'W'$ — North, East, South, West) καταλλήλως συνδεδεμένους, οι οποίοι θα σχεδιασθούν ως τέσσερα ημιανοικτά πλαίσια που αναπαριστούν τις τέσσερις πλευρές μιας σελίδας έτσι ώστε η τελική σχεδίαση να καλύπτει όλο το επίπεδο. Ορίζουμε μια **ορθογωνική σχεδίαση** (*orthogonal embedding-realization*) ενός χωροταξικού γράφου G , ως ένα σύνολο πλαισίων $F_G = \{F_u : u \in V\}$ (που περιβάλλονται κατάλληλα από τα τέσσερα ειδικά πλαίσια), τέτοιο ώστε για κάθε πλαίσια $F_u, F_v, F_w \in F_G$, $u \neq v \neq w \neq u$:

- Τα πλαίσια F_u, F_v είναι μη επικαλυπτόμενα,
- Αν $(u, v) \in E$, τότε τα πλαίσια F_u, F_v εφάπτονται και ισχύει ότι $dir(F_u, F_v) = \delta((u, v))$,

ειδώλλως, αν τα F_u, F_v εφάπτονται με ένα πλαίσιο F_w κατά μήκος της ίδιας κατακόρυφης (αντ. οριζόντιας) πλευράς του, τότε το πλαίσιο F_u βρίσκεται “προς τα επάνω” (αντ. “προς τα αριστερά”) του πλαισίου F_v αν $\gamma(u) < \gamma(v)$ (η σημασία της διάταξης $\gamma(\cdot)$ θα φανεί στη συνέχεια).

Στο Σχήμα 2.4 φαίνεται ένας χωροταξικός γράφος και μια ορθογωνική του σχεδίαση.



Σχήμα 2.4. Ένας χωροταξικός γράφος και μια ορθογωνική του σχεδίαση.

§ 2.2. Ορισμός του Προβλήματος

Με βάση τους ορισμούς της προηγούμενης ενότητας μπορούμε να ορίσουμε το πρόβλημα της Σχεδίασης Πλαισίων (*Frame Layout*):

ΣΧΕΔΙΑΣΗ ΠΛΑΙΣΙΩΝ

Στιγμιότυπο: Ένας χωροταξικός γράφος G .

Ερώτημα: Να αποφασισθεί αν υπάρχει μια ορθογωνική σχεδίαση του G , κι αν υπάρχει να κατασκευασθεί μια τέτοια.

§ 2.3. Φάσεις του Προβλήματος

Στην εργασία μας επιλύουμε το πρόβλημα της Σχεδίασης Πλαισίων σε τρεις φάσεις, αντιμετωπίζοντας αντίστοιχα τρία αρκετά διαφορετικά υποπροβλήματα:

- *Φάση I:* Επιλύουμε το πρόβλημα της Σχεδίασης Πλαισίων για την απλούστερη μη τετριμμένη περίπτωση, όπου ο χωροταξικός γράφος G αποτελείται από έναν μόνο κύκλο (αφού αν ο G είναι δενδρικής μορφής τότε το πρόβλημα επιλύεται πολύ εύκολα). Ας υποθέσουμε ότι έχουμε στη διάθεσή μας τέσσερα αντικείμενα, η σχετική τοποθέτησή των οποίων πρέπει να γίνει όπως περιγράφει ο κύκλος που αποτελείται από τους κόμβους 1, 2, 3 και 4, στο Σχήμα 1.1. Το πρώτο ερώτημα που τίθεται αφορά το αν είναι εφικτή η αντίστοιχη σχεδίαση κατάλληλα εφαπτόμενων πλαισίων; — στην προκειμένη περίπτωση είναι, όπως φαίνεται στο ίδιο σχήμα. Αν φανταστούμε ένα σημείο στο εσωτερικό (π.χ. στο κέντρο) κάθε πλαισίου, και ενώσουμε όλα τα σημεία με κατάλληλες καμπύλες, τότε σχηματίζουμε μια απλή κλειστή καμπύλη στο εσωτερικό των πλαισίων. Καθώς μπορούμε να διασχίσουμε έναν κύκλο πλαισίων είτε ωρολογιακά ή ανθωρολογιακά, το δεύτερο ερώτημα είναι αν οι προκαθορισμένες επαφές μεταξύ των πλαισίων (δηλ. οι αντίστοιχες κατευθυνόμενες ακμές με τις ετικέτες τους), καθορίζουν έναν μοναδικό προσανατολισμό στην απλή κλειστή καμπύλη (στο παραπάνω παράδειγμα αυτό ισχύει). Αν σε όλες τις δυνατές σχεδιάσεις ενός κύκλου πλαισίων η αντίστοιχη καμπύλη παραμένει προσανατολισμένη κατά την ίδια φορά, τότε θα ονομάζουμε τον κύκλο πλαισίων προσανατολισίμο. Δεδομένου, λοιπόν, ενός (γραφο)κύκλου, το πρόβλημα είναι αν ο κύκλος αυτός δύναται να σχεδιασθεί ως ένας εφικτός κύκλος πλαισίων, και αν είναι προσανατολισίμος (δηλ. αν δύναται να σχεδιασθεί κατά μοναδικό τρόπο). Ονομάζουμε το (υπο)πρόβλημα αυτό ως *Πρόβλημα Προσανατολισμού Απλού Κύκλου (Simple Cycle Orientability problem)* και το λύνουμε σε πολωνυμικό χρόνο, βασιζόμενοι σε μια γραμματική χωρίς συμφραζόμενα (context free grammar). Αναπαριστούμε με ένα τερματικό σύμβολο της γραμματικής τον τρόπο με τον οποίο κάθε πλαίσιο εφάπτεται με το προηγούμενο και το επόμενο του στον κύκλο πλαισίων, και αποδεικνύουμε ότι η γραμματική μας παράγει όλες τις περιγραφές των κύκλων που είναι (τουλάχιστον ωρολογιακά) προσανατολισίμοι (*πρώτο σημαντικό συμπέρασμα*

της εργασίας μας). Ο προσανατολισμός των κύκλων είναι καίριας σημασίας για τη δεύτερη φάση.

- *Φάση II:* Αντιμετωπίζουμε την περίπτωση όπου ο γράφος G αποτελείται από περισσότερους του ενός κύκλους. Ο G θα πρέπει προφανώς να είναι επίπεδος (σύμφωνα με την κλασική ορολογία γραφημάτων). Το πρόβλημα εδώ είναι να αποφασίσουμε ποιοι από τους κύκλους του G θα αποτελέσουν τις έδρες της τελικής επίπεδης σχεδίασής του. Η λύση μας (δεύτερο καίριο αποτέλεσμα της εργασίας μας) προκύπτει από την εξέταση των τρόπων σχεδίασης των ‘γεφυρών’ του G ως προς έναν κύκλο του. Ο προσανατολισμός των κύκλων-εδρών του G , αν τις δούμε ως απλές κλειστές καμπύλες, είναι καίριας σημασίας για την επίλυση του προβλήματος τούτου, γι’ αυτό το ονομάζουμε ως *Πρόβλημα Προσανατολισμένης Επιπεδότητας (Oriented Planarity problem)*. Το επιλύουμε σε πολυωνυμικό χρόνο ως εξής: (i) υπολογίζουμε τις γέφυρες του γράφου G ως προς έναν κύκλο του· (ii) καθορίζουμε, σύμφωνα με τη φάση I, τον προσανατολισμό ορισμένων κύκλων και τη σχετική τοποθέτηση των γεφυρών ως προς τον αρχικό κύκλο, και (iii) συνεχίζουμε αναδρομικά για να υπολογίσουμε μια κατάλληλη επίπεδη σχεδίαση για κάθε γέφυρα. Η τελική επίπεδη σχεδίαση που υπολογίζουμε, αν υπάρχει, διαδραματίζει ένα σημαντικό ρόλο για την τρίτη φάση.

- *Φάση III:* Τελικά επιλύουμε το (πλήρες) πρόβλημα της σχεδίασης πλαισίων, δηλ. της σχεδίασης των κόμβων και των ακμών των εδρών της επίπεδης σχεδίασης του γράφου G ως καταλλήλως εφαπτόμενα μη επικαλυπτόμενα πλαίσια στο (ευκλείδειο) επίπεδο. Ονομάζουμε το (υπο)πρόβλημα αυτό ως *Πρόβλημα Υλοποίησης των Εδρών (Face Realizability problem)*. Τα πλαίσια που αναπαριστούν τους κόμβους του G , και που εφάπτονται σύμφωνα με τις ακμές του G , μπορούν να εκφραστούν ως ένα σύνολο μεταβλητών μαζί με ένα σύνολο γραμμικών εξισώσεων και ανισώσεων — αλλά δεν μπορούμε να εκφράσουμε γραμμικά ότι τα πλαίσια πρέπει να μην επικαλύπτονται. Καταφέρνουμε τούτο έμμεσα: αποδεικνύουμε ότι μπορούμε να σχηματίσουμε κατάλληλους ‘σκελετούς’, μαζί με ένα σύνολο βοηθητικών πλαισίων, στο εσωτερικό κάθε έδρας του G , με τη βοήθεια των οποίων καλύπτουμε ολόκληρο το επίπεδο με πλαίσια, εξασφαλίζοντας έτσι (μέσω των περιορισμών για κάθε δύο εφαπτόμενα πλαίσια) ότι τα πλαίσια θα είναι μη επικαλυπτόμενα. Αξίζει να σημειώσουμε ότι το καταφέρνουμε αυτό χωρίς βλάβη της γενικότητας όσον αφορά στην

εφικτότητα του αρχικού μας προβλήματος. Τελικά, σχηματίζουμε ένα γραμμικό πρόγραμμα του οποίου οι περιορισμοί (που εκφράζουν ότι έχουμε ένα σύνολο πλαισίων που εφάπτονται κατάλληλα) εξασφαλίζουν, μεταβατικά, ότι τα πλαίσια είναι μη επικαλυπτόμενα, κάθε λύση του οποίου αποτελεί και μια λύση του γενικού μας προβλήματος της Σχεδίασης Πλαισίων (*τρίτο σημαντικό αποτέλεσμα της εργασίας μας*).

Μέσα από τις φάσεις *I*, *II* και *III* μπορούμε να επιλύσουμε σε πολυωνυμικό χρόνο το πρόβλημα της επίπεδης σχεδίασης για έναν χωροταξικό γράφο G , δηλ. να αποφασίσουμε αν ο G μπορεί να σχεδιασθεί ως ένα σύνολο κατάλληλα εφαιπτόμενων και μη επικαλυπτόμενων πλαισίων. Αν αποφανθούμε θετικά, παρέχουμε και μία (τουλάχιστον) εφικτή σχεδίαση.

Κεφάλαιο 3. **Φάση I: Προσανατολισμός Απλού** **Κύκλου**

Στο κεφάλαιο τούτο εξετάζουμε την απλούστερη μη τετριμμένη περίπτωση του προβλήματος της Σχεδίασης Πλαισίων, όπου ο χωροταξικός γράφος αποτελείται από έναν μόνο κύκλο. Ορίζουμε το πρόβλημα του Προσανατολισμού Απλού Κύκλου, και το λύνουμε μέσω μιας γραμματικής χωρίς συμφραζόμενα.

§ 3.1. Βασικοί Ορισμοί

Ορισμοί για Κύκλους του Γράφου

Έστω $G=(V,E)$ ένας χωροταξικός γράφος και $c=(u_1,u_2,\dots,u_n)$, $u_i \in V$, ένας μη κατευθυνόμενος κύκλος του G , αγνοώντας δηλ. τις κατευθύνσεις των ακμών του. Υπάρχουν δύο τρόποι να “διαβάσουμε προσανατολισμένα” τον κύκλο c , αλλάζοντας τις κατευθύνσεις και τις ετικέτες όσων ακμών χρειάζεται, δηλ. υπάρχουν δύο κατευθυνόμενοι κύκλοι που αντιστοιχούν στον κύκλο c :

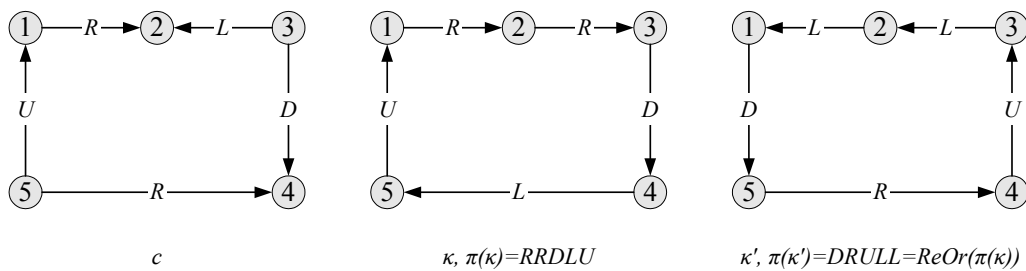
ο κύκλος $\kappa = ((u_1,u_2),(u_2,u_3),\dots,(u_{n-1},u_n),(u_n,u_1))$, και

ο κύκλος $\kappa' = ((u_1,u_n),(u_n,u_{n-1}),\dots,(u_3,u_2),(u_2,u_1)), (u_i,u_j) \in E$,

τους οποίους θα ονομάζουμε **συζυγείς μορφές** του κύκλου c (βλ. Σχήμα 3.1 παρακάτω).

Επιλέγουμε μία από τις δύο συζυγείς μορφές του κύκλου c , έστω τον κύκλο κ . Συνενώνοντας τις ετικέτες $\delta(e_i) \in \Sigma$, $e_i = u_i u_{(i \bmod n)+1}$, $i = 1, \dots, n$, των ακμών του κ , ξεκινώντας από έναν οποιονδήποτε κόμβο, προκύπτει μια λέξη $\pi(\kappa) \in \Sigma^*$ μήκους n που **περιγράφει** τον κύκλο κ , το σύμβολο στη θέση i της οποίας θα είναι: $\pi(\kappa)[i] = \delta(e_i)$. Κάθε κυκλική μετάθεση των συμβόλων της λέξης $\pi(\kappa)$ είναι κι αυτή μια περιγραφή του κύκλου κ , αφού απλά αλλάζει ο αρχικός κόμβος απ’ τον οποίο διαβάζουμε τον κύκλο.

Ομοίως για τον κύκλο κ' μπορεί να προκύψει μια περιγραφή $\pi(\kappa') \in \Sigma^*$ μήκους n , το σύμβολο της οποίας στη θέση i θα είναι: $\pi(\kappa')[i] = \delta(e'_i) \in \Sigma$, $e'_i = u_{(i \bmod n)+1} u_i$, $i = n, \dots, 1$. Κάθε κυκλική μετάθεση των συμβόλων της λέξης $\pi(\kappa')$ είναι κι αυτή μια περιγραφή του κύκλου κ' . Ορίζουμε το μετασχηματισμό $ReOr(\cdot)$ επί (των συμβόλων) μιας λέξης του Σ^* , ο οποίος αντιστρέφει τη λέξη και αλλάζει τα σύμβολα R σε L , τα L σε R , τα U σε D , και τα D σε U (οπότε η λέξη που προκύπτει ανήκει επίσης στο Σ^*), π.χ. $ReOr(RRDLU) = DRULL$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι δεδομένης μιας περιγραφής $\pi(\kappa)$ του κύκλου κ , μπορούμε να σχηματίσουμε μια περιγραφή $\pi(\kappa')$ του κύκλου κ' εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό $ReOr(\cdot)$ επί της $\pi(\kappa)$: $\pi(\kappa') = ReOr(\pi(\kappa))$. Στο Σχήμα 3.1 φαίνεται ένας γραφοκύκλος c , οι συζυγείς μορφές του κ , κ' και οι περιγραφές τους.



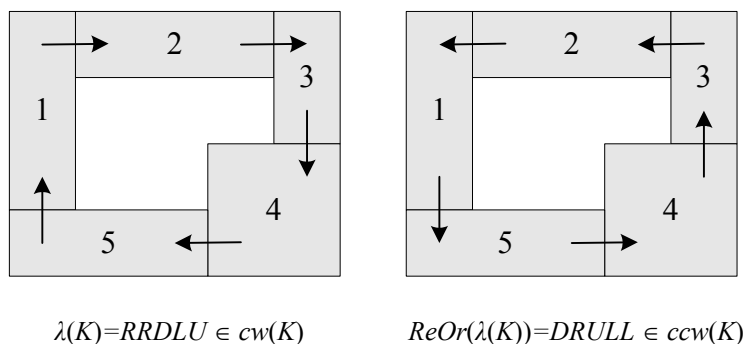
Σχήμα 3.1. Ένας γραφοκύκλος c , οι συζυγείς μορφές του κ , κ' και οι περιγραφές τους.

Θα συμβολίζουμε το σύνολο όλων των δυνατών περιγραφών για έναν γραφοκύκλο c ως $I(c)$, το οποίο θα είναι η ένωση των συνόλων των περιγραφών των συζυγών μορφών του: $I(c) = I(\kappa) \cup I(\kappa')$.

Ορισμοί για Κύκλους Πλαισίων

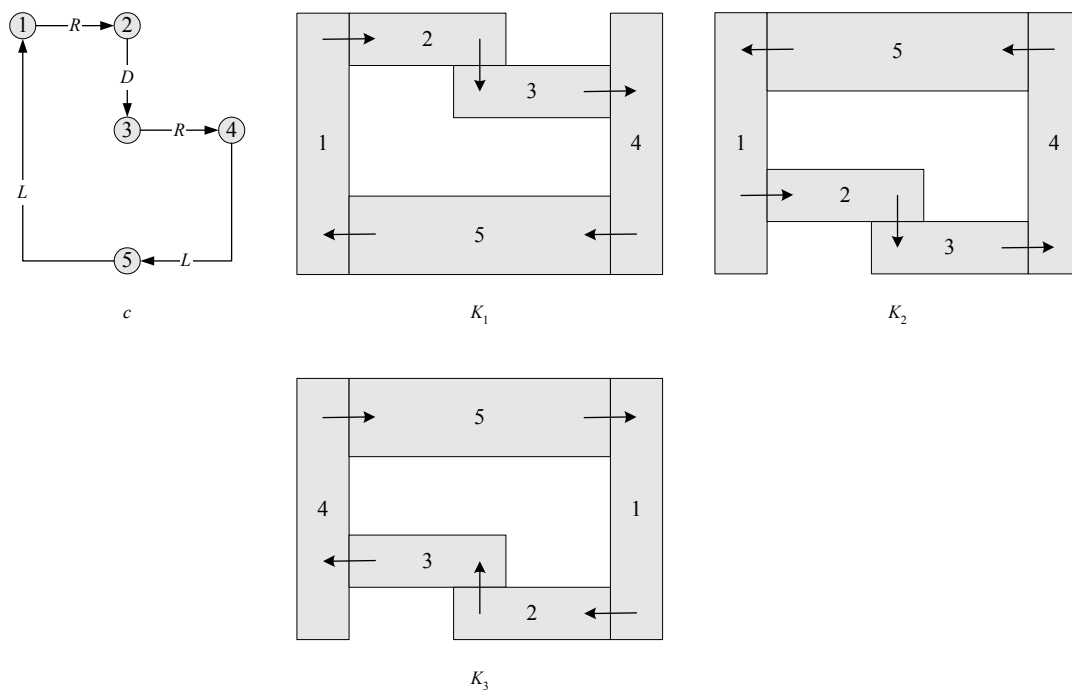
Αντίστοιχα για έναν κύκλο πλαισίων $K = \langle F_1, F_2, \dots, F_n \rangle$ υπάρχουν δύο τρόποι να τον “διαβάσουμε προσανατολισμένα”, αλλάζοντας τις κατευθύνσεις όσων επαφών χρειάζεται, που αντιστοιχούν σε δύο συζυγείς μορφές που ορίζονται όπως και στην περίπτωση ενός γραφοκύκλου. Οι δύο συζυγείς μορφές αντιστοιχούν σε ανάγνωση-διάσχιση του (ίδιου γεωμετρικά) κύκλου κατά την ωρολογιακή ή την ανθρωρολογιακή φορά αντίστοιχα. Ο κύκλος K βρίσκεται εξ ορισμού σε συζυγή μορφή, αφού στην ακολουθία

πλαισίων $\langle F_1, F_2, \dots, F_n \rangle$ ορίζονται διαδοχικά οι κατευθύνσεις των επαφών $dir(F_k, F_{(k \bmod n)+1})$, $k=1, \dots, n$, δηλ. ορίζεται πάντα η κατεύθυνση της επαφής του πλαισίου F_k με το επόμενο του $F_{(k \bmod n)+1}$ και ποτέ το αντίστροφο. Μια **γεωμετρική περιγραφή** ενός κύκλου πλαισίων K προκύπτει από τη συνένωση των κατευθύνσεων των επαφών των διαδοχικών πλαισίων, ξεκινώντας από ένα οποιοδήποτε πλαίσιο, και θα είναι μια λέξη $\lambda(K) \in \Sigma^*$ μήκους n , στην οποία το σύμβολο στη θέση $i=1, \dots, n$ θα είναι $\lambda(K)[i] = dir(F_i, F_{(i \bmod n)+1}) \in \Sigma$ (λ -περιγραφή). Κάθε κυκλική μετάθεση των συμβόλων της λέξης $\lambda(K)$ αποτελεί κι αυτή μια γεωμετρική περιγραφή του K . Όπως και στην περίπτωση των γραφοκύκλων, αν $\lambda(K)$ είναι μια γεωμετρική περιγραφή ενός κύκλου πλαισίων K , τότε μια γεωμετρική περιγραφή της συζυγούς μορφής του K είναι η λέξη $ReOr(\lambda(K))$ (και οι κυκλικές μεταθέσεις των συμβόλων της). Για έναν κύκλο πλαισίων K θα συμβολίζουμε με $cw(K)$ (clockwise) (αντ. $ccw(K)$ (counter-clockwise)) το σύνολο όλων των δυνατών ωρολογιακών (αντ. ανθωρολογιακών) περιγραφών του K , δηλ. των γεωμετρικών περιγραφών που αντιστοιχούν στην ωρολογιακά (αντ. ανθωρολογιακά) συνεπή μορφή του K . Στο Σχήμα 3.2 φαίνεται μια ωρολογιακή και μια ανθωρολογιακή περιγραφή ενός κύκλου πλαισίων K , ο οποίος αντιστοιχεί στο γραφοκύκλο c του Σχήμα 3.1 παραπάνω. Το σύνολο $d(K)$ των δυνατών γεωμετρικών περιγραφών για έναν κύκλο πλαισίων K θα είναι η ένωση $d(K) = cw(K) \cup ccw(K)$.



Σχήμα 3.2. Μια ωρολογιακή και μια ανθωρολογιακή περιγραφή ενός κύκλου πλαισίων K .

Θα λέμε ότι δύο κύκλοι πλαισίων *ταυτίζονται γεωμετρικά*, αν αποτελούν την ορθογωνική σχεδίαση του ίδιου γραφοκύκλου, και μια ωρολογιακή (ισοδ. ανθωρολογιακή) γεωμετρική περιγραφή του ενός ταυτίζεται με μια ωρολογιακή (ισοδ. ανθωρολογιακή) γεωμετρική περιγραφή του άλλου. Ο ορισμός αυτός είναι συνεπής με το γεγονός ότι θεωρούμε τις δύο συζυγείς μορφές ενός κύκλου πλαισίων ως “δύο μορφές – τρόπους ανάγνωσης” του ίδιου κύκλου και όχι ως δύο διαφορετικούς κύκλους. Για παράδειγμα, στο Σχήμα 3.3 οι κύκλοι K_1 , K_2 (των οποίων παρατηρήστε ότι οι συντακτικές περιγραφές ταυτίζονται) είναι γεωμετρικά διαφορετικοί διότι, αποτελούν μεν την ορθογωνική σχεδίαση του ίδιου γραφοκύκλου c , αλλά η ωρολογιακή περιγραφή $RDRLL$ του K_1 (ξεκινώντας απ’ το πλαίσιο 1) αποτελεί ανθωρολογιακή περιγραφή για τον K_2 (ξεκινώντας απ’ το ίδιο πλαίσιο). Επίσης, οι κύκλοι K_2 , K_3 είναι γεωμετρικά διαφορετικοί διότι, η ωρολογιακή περιγραφή $RRLUL$ του K_2 (ξεκινώντας απ’ το πλαίσιο 1) αποτελεί μεν ωρολογιακή περιγραφή για τον K_3 (ξεκινώντας απ’ το πλαίσιο 4), αλλά ο K_3 δεν αποτελεί ορθογωνική σχεδίαση του γραφοκύκλου c .



Σχήμα 3.3. Ένας γραφοκύκλος c και τρεις γεωμετρικά διαφορετικοί κύκλοι πλαισίων K_1 , K_2 , K_3 .

§ 3.2. Ορισμός του Προβλήματος

Αν ο χωροταξικός γράφος δεν περιέχει κύκλους (δηλ. έχει δενδρική δομή), τότε η ορθογωνική του σχεδίαση κατασκευάζεται πολύ εύκολα: επιλέγουμε ένα μονοπάτι του δένδρου και, ξεκινώντας από έναν κόμβο, μπορούμε να κατασκευάσουμε την ορθογωνική του σχεδίαση προσθέτοντας έναν κόμβο-πλαίσιο κάθε φορά (τον γειτονικό), αφού πάντα θα υπάρχει ελεύθερος χώρος για ένα ακόμα πλαίσιο. Αναδρομικά, και για τον ίδιο λόγο, μπορούμε να σχεδιάσουμε όλα τα υπόλοιπα μονοπάτια που ξεκινούν από κάποιον κόμβο του αρχικού μονοπατιού.

Το πρόβλημα της σχεδίασης πλαισίων ανάγεται, λοιπόν, στην απλούστερη μη τετριμμένη μορφή του όταν ο χωροταξικός γράφος εκφυλίζεται σε έναν μόνο κύκλο c , οπότε έχουμε να αποφασίσουμε αν υπάρχει ένας τουλάχιστον κύκλος πλαισίων K που να αποτελεί την ορθογωνική σχεδίαση του c , δηλ. αν υπάρχει ένας τουλάχιστον κύκλος πλαισίων K τέτοιος ώστε:

$$l(c) \subseteq d(K) \Leftrightarrow l(c) \subseteq cw(K) \cup ccw(K) \quad (1)$$

Αν κ , κ' είναι οι συζυγείς μορφές του κύκλου c , τότε για να ισχύει η σχέση (1) πρέπει και αρκεί:

$$(1) \Leftrightarrow l(\kappa) \subseteq cw(K) \vee l(\kappa) \subseteq ccw(K) \quad (2)$$

(όπου μόνο μία από τις δύο σχέσεις της (2) μπορεί να ισχύει κάθε φορά). Για τις συζυγείς μορφές του γραφοκύκλου c , και τα σύνολα των περιγραφών του κύκλου πλαισίων K , ισχύουν οι εξής (προφανείς) ισοδυναμίες:

$$\begin{aligned} l(\kappa) \subseteq cw(K) &\Leftrightarrow l(\kappa') \subseteq ccw(K), \\ l(\kappa) \subseteq ccw(K) &\Leftrightarrow l(\kappa') \subseteq cw(K) \end{aligned} \quad (3)$$

Στο Σχήμα 3.2 παραπάνω απεικονίζεται η ωρολογιακή και η ανθρωπολογιακή μορφή ενός κύκλου πλαισίων K , ο οποίος αποτελεί την ορθογωνική σχεδίαση του γραφοκύκλου c στο Σχήμα 3.1.

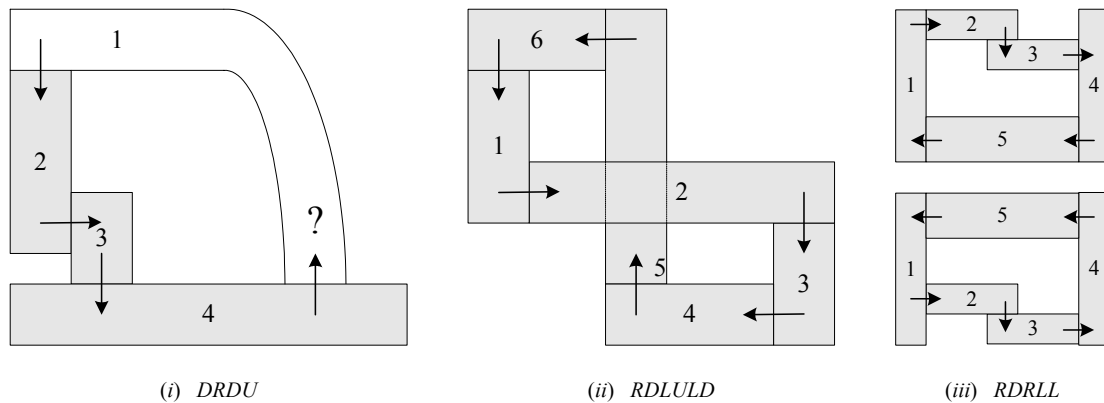
Στα σχήματα αυτά ο κύκλος πλαισίων K που αντιστοιχεί στο γραφοκύκλο c ώστε να ισχύει η σχέση (1) είναι γεωμετρικά μοναδικός. Στην περίπτωση αυτή θα λέμε ότι ο κύκλος c είναι **προσανατολισμός** (*orientable*). Για τη συζυγή μορφή του c , έστω τον κύκλο κ , αν ισχύει ότι $l(\kappa) \subseteq cw(K)$ (αντ. $l(\kappa) \subseteq ccw(K)$) τότε θα λέμε ότι ο κύκλος κ (καθώς και ο κύκλος πλαισίων K που του αντιστοιχεί) είναι ***cw-προσανατολισμός*** (αντ. ***ccw-προσανατολισμός***).

Υπάρχουν όμως γραφοκύκλοι c με συζυγείς μορφές κ, κ' , για τους οποίους υπάρχουν δύο γεωμετρικά διαφορετικοί κύκλοι πλαισίων K_1, K_2 τέτοιοι ώστε:

$$\begin{aligned} l(\kappa) \subseteq cw(K_1) \wedge l(\kappa) \subseteq ccw(K_2) &\Leftrightarrow \\ l(\kappa) \subseteq cw(K_1) \wedge l(\kappa') \subseteq cw(K_2) &\Leftrightarrow \\ l(c) \subseteq d(K_1) \wedge l(c) \subseteq d(K_2) & \end{aligned}$$

Στην περίπτωση αυτή θα λέμε ότι ο κύκλος c (καθώς και οι συζυγείς μορφές του κ, κ' , και οι κύκλοι πλαισίων K_1, K_2) είναι **μη προσανατολίσιμοι**. Στο Σχήμα 3.3 παραπάνω οι (γεωμετρικά διαφορετικοί) κύκλοι πλαισίων K_1, K_2 αντιστοιχούν στο γραφοκύκλο c (ο οποίος βρίσκεται ήδη σε συζυγή μορφή). Να σημειώσουμε ότι οι συντακτικές περιγραφές των δύο αυτών κύκλων πλαισίων ταυτίζονται.

Κάθε λέξη του συνόλου Σ^* αντιστοιχεί σε μια περιγραφή ενός γραφοκύκλου σε συζυγή μορφή. Υπάρχουν, όμως, λέξεις του Σ^* που αντιστοιχούν σε έναν ανέφικτο, ή μη απλό (λόγω επικάλυψης των πλαισίων), ή μη προσανατολίσιμο κύκλο πλαισίων, όπως φαίνεται αντίστοιχα στα Σχήμα 3.4.(i, ii, iii).



Σχήμα 3.4. Περιγραφές του Σ^* που αντιστοιχούν σε ανέφικτο, ή μη απλό, ή μη προσανατολίσιμο κύκλο πλαισίων.

Ορίζουμε το πρόβλημα του Προσανατολισμού Απλού Κύκλου (*Simple Cycle Orientability*) ως εξής:

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ ΑΠΛΟΥ ΚΥΚΛΟΥ

Στιγμιότυπο: Μια λέξη $\mu \in \Sigma^*$.

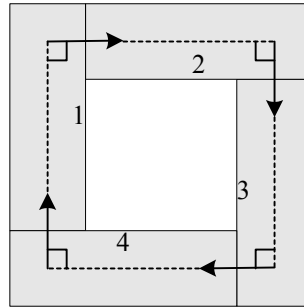
Ερώτημα: Να αποφασισθεί αν υπάρχει ένας κύκλος πλαισίων $K = \langle F_1, F_2, \dots, F_n \rangle$ τέτοιος ώστε:

- Ο K να είναι απλός, και
- Η λέξη μ να ανήκει στο σύνολο των ωρολογιακών γεωμετρικών περιγραφών του K : $\mu \in cw(K)$ — ή, εναλλακτικά, των ανθωρολογιακών: $\mu \in ccw(K)$.

§ 3.3. Επίλυση του Προβλήματος

Το πρώτο σημαντικό συμπέρασμα της εργασίας μας είναι η απόδειξη ότι υπάρχει μια γραμματική χωρίς συμφραζόμενα απ' την οποία παράγονται οι ωρολογιακές περιγραφές όλων των απλών κύκλων πλαισίων και μόνον αυτών.

Θα χρησιμοποιήσουμε μια εναλλακτική γεωμετρική περιγραφή σ (σ -περιγραφή) για τους κύκλους πλαισίων: δεδομένης μιας λ -περιγραφής $\lambda = \lambda[1]\lambda[2]\dots\lambda[n]$ για έναν κύκλο $K = \langle F_1, F_2, \dots, F_n \rangle$, η σ -περιγραφή σ που του αντιστοιχεί είναι η: $\sigma = \sigma_{\lambda[n]\lambda[1]}\sigma_{\lambda[1]\lambda[2]}\dots\sigma_{\lambda[n-1]\lambda[n]}$. Αν φανταστούμε στο εσωτερικό των πλαισίων μια γραμμή που στρέφεται γεωμετρικά ανάλογα με τις κατευθύνσεις των επαφών, τότε κάθε στοιχείο $\sigma_{\lambda[i]\lambda[j]}$ της περιγραφής σ εκφράζει ακριβώς το είδος της γεωμετρικής στροφής (κατά 90°) της γραμμής αυτής, μέσα στο j -οστό πλαίσιο. Στο Σχήμα 3.5 φαίνεται μια λ - και μια σ -περιγραφή ενός κύκλου πλαισίων. Το πρώτο στοιχείο σ_{UR} της σ -περιγραφής δηλώνει ότι η στροφή της εσωτερικής γραμμής μέσα στο πλαίσιο 1 είναι του τύπου “επάνω-δεξιά” (UR), δηλ. έχει ένα πρώτο τμήμα “προς τα επάνω” (U) και ένα δεύτερο τμήμα “προς τα δεξιά” (R).



$$\lambda = RDLU, \quad \sigma = \sigma_{UR} \sigma_{RD} \sigma_{DL} \sigma_{LU}$$

Σχήμα 3.5. Μια λ - και μια σ -περιγραφή ενός κύκλου πλαισίων.

Για την παραγωγή ενός κύκλου c , η ιδέα της γραμματικής είναι ότι έχοντας ένα σύνολο από βασικούς κύκλους (μέχρι ενός ορισμένου μήκους), μπορούμε να δημιουργήσουμε τον c με μια σειρά από σταδιακές ‘γεωμετρικές τροποποιήσεις-επεκτάσεις’ στις στροφές ενός βασικού κύκλου, κατάλληλα προσθέτοντας καινούρια πλαίσια. Οι κανόνες της γραμματικής θα περιγράφουν ακριβώς τους τρόπους με τους οποίους μπορεί να επεκταθεί μια στροφή ενός κύκλου (θα δώσουμε συγκεκριμένο παράδειγμα στη συνέχεια).

Μετασχηματισμοί επί του Συνόλου Σ^*

Θα ορίσουμε για μια λέξη $\mu \in \Sigma^*$, μήκους $n = |\mu|$, τους εξής μετασχηματισμούς επί των συμβόλων της $\mu[i] \in \Sigma$, $i = 1, \dots, n$, οι οποίοι δίδουν λέξεις που ανήκουν επίσης στο Σ^* :

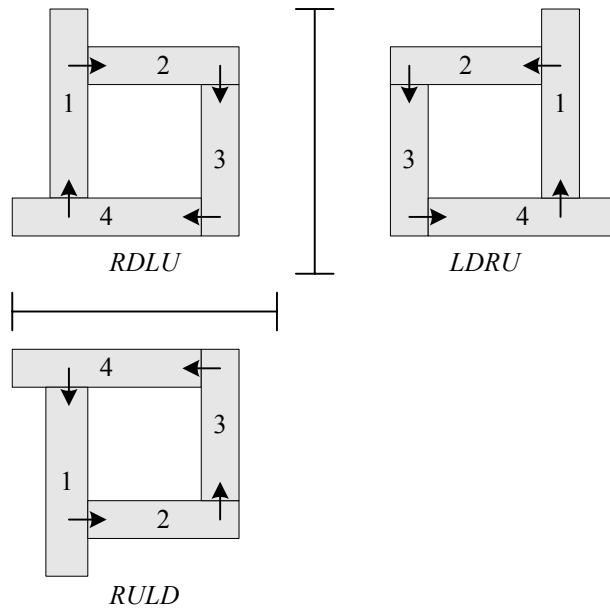
- $RL-X(\cdot)$: αλλαγή των R και L συμβόλων της μ σε L και R αντίστοιχα, π.χ. $\mu = RRDLU$, $RL-X(RRDLU) = LLDRU$.
- $UD-X(\cdot)$: αλλαγή των U και D συμβόλων της μ σε D και U αντίστοιχα, π.χ. $UD-X(RRDLU) = RRULD$.
- $Rot_j(\cdot)$, $j = 1, 2, 3$: εφαρμογή των (κυκλικών) αντικαταστάσεων $R \rightarrow D \rightarrow L \rightarrow U \rightarrow R$ με βήμα 1, 2 ή 3 αντίστοιχα. Για παράδειγμα ο μετασχηματισμός $Rot_3(\cdot)$ θα αλλάξει τα σύμβολα R σε U , τα D σε R , τα L σε D , και τα U σε L : $Rot_3(RRDLU) = UURDL$.

- $Rev(\cdot)$: η καρκινική λέξη της μ , δηλ. αν $\mu = \mu[1]\mu[2]\dots\mu[n]$ τότε $Rev(\mu) = \mu[n]\dots\mu[2]\mu[1]$, π.χ. $Rev(RRDLU) = ULDRR$.
- $ReOr(\cdot)$: διαδοχική εφαρμογή επί της μ των μετασχηματισμών $Rev(\cdot)$, $RL-X(\cdot)$ και $UD-X(\cdot)$, π.χ. $ReOr(RRDLU) = DRULL$. (Το μετασχηματισμό αυτόν τον εισάγαμε στην παράγραφο § 3.1.)

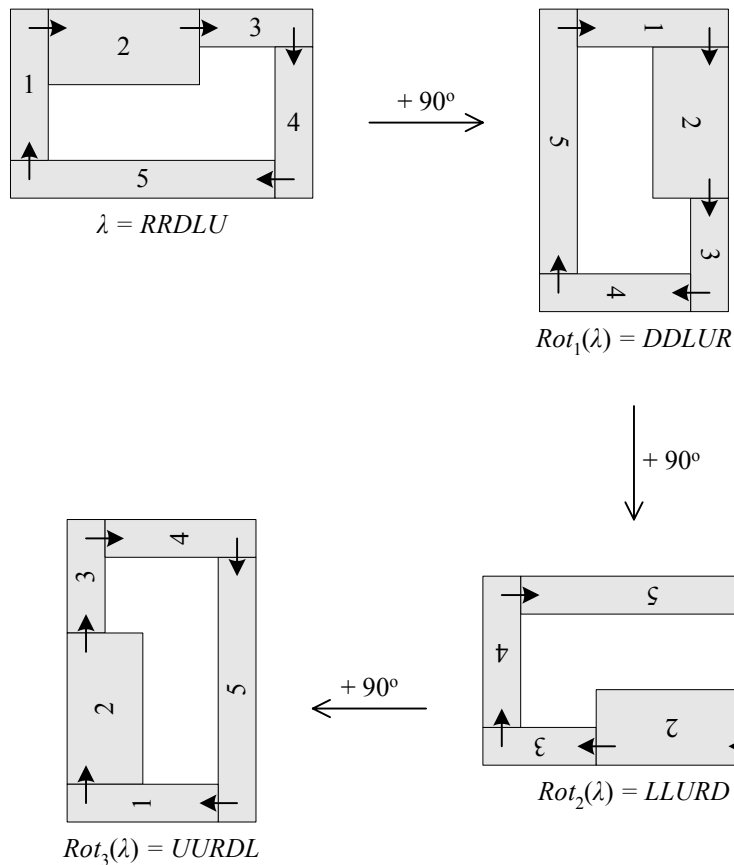
Συμμετρίες Κύκλων Πλαισίων

Έστω ένας κύκλος πλαισίων K με περιγραφή λ . Δεδομένης της σχεδίασης του K στο επίπεδο, μπορούν να προκύψουν *συμμετρικοί (γεωμετρικά) κύκλοι* με βάση τις εξής γεωμετρικές συμμετρίες:

- *Κάτοπτρο (οριζόντιο και κατακόρυφο)*: οι κύκλοι που αποτελούν το οριζόντιο και κατακόρυφο αντίστοιχα κάτοπτρο του K . Η περιγραφή του οριζόντια κατοπτρικού κύκλου προκύπτει με την εφαρμογή του μετασχηματισμού $RL-X(\cdot)$ επί της λ , ενώ του κατακόρυφα κατοπτρικού με την εφαρμογή του $UD-X(\cdot)$ (βλ. Σχήμα 3.6).
- *Περιστροφή (ωρολογιακά)*: οι κύκλοι που προκύπτουν με ωρολογιακή περιστροφή (της σχεδίασης) του K κατά 90° , 180° ή 270° , οι περιγραφές των οποίων προκύπτουν με την εφαρμογή των μετασχηματισμών $Rot_j(\cdot)$, $j=1,2,3$ αντίστοιχα, επί της λ (βλ. Σχήμα 3.7)
- *Αναπροσανατολισμός*: ο συζυγής κύκλος του K , η περιγραφή του οποίου προκύπτει με την εφαρμογή του μετασχηματισμού $ReOr(\cdot)$ επί της λ .



Σχήμα 3.6. Το οριζόντιο και το κατακόρυφο κάτοπτρο ενός κύκλου πλαισίων.



Σχήμα 3.7. Οι ωρολογιακές περιστροφές ενός κύκλου πλαισίων.

Η Γραμματική

Έστω N_k , CW_k , CCW_k τα σύνολα των γεωμετρικών περιγραφών των κύκλων μήκους k οι οποίοι είναι, αντίστοιχα, μη προσανατολισμοί, cw - και ccw -προσανατολισμοί. Έστω Γ_{cw} μια γραμματική χωρίς συμφραζόμενα με αλφάβητο $\Sigma \cup \Sigma_c$, σύνολο τερματικών συμβόλων $\Sigma = \{R, D, L, U\}$, σύνολο μη τερματικών συμβόλων $\Sigma_c = \{\sigma_{XY} : X, Y \in \Sigma\} \cup \{I\}$, αρχικό σύμβολο I , και σύνολο κανόνων $S_B \cup S_R \cup S_+ \cup S_F$, όπου:

$$S_B = \left\{ I \rightarrow \sigma_{\lambda[n]\lambda[1]} \sigma_{\lambda[1]\lambda[2]} \cdots \sigma_{\lambda[n-1]\lambda[n]} : \lambda \in CW_3 \cup CW_4 \cup N_4, n = |\lambda| \right\},$$

$$S_R = \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{XR} \rightarrow \sigma_{XR} \sigma_{RR} : X \in \Sigma - \{L\}, \quad \sigma_{YR} \rightarrow \sigma_{YR} \sigma_{RL} \sigma_{RL} : Y \in \Sigma, \\ \sigma_{RR} \rightarrow \sigma_{RU} \sigma_{UR}, \quad \sigma_{RD} \rightarrow \sigma_{RU} \sigma_{UD} \end{array} \right\},$$

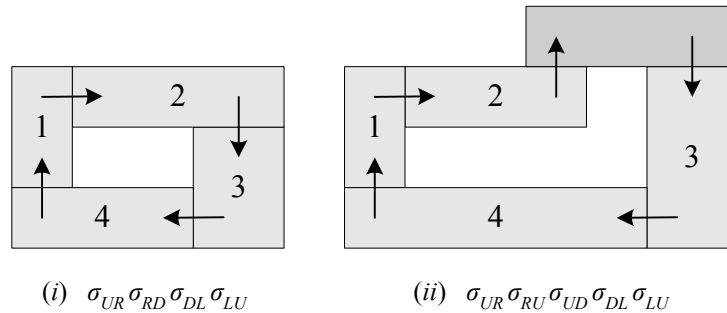
$S_+ =$ Το σύνολο των κανόνων (κλειστότητα του S_R) που προκύπτουν απ' το σύνολο S_R βάσει των συμμετριών: κάτοπτρο, περιστροφή, και αναπροσανατολισμός, ως εξής: θεωρούμε τους υποδείκτες κάθε στοιχείου σ ως λέξεις μήκους δύο, εφαρμόζουμε σε αυτές τους μετασχηματισμούς που αντιστοιχούν σε κάθε συμμετρία, και αντιστρέφουμε τη σειρά των (αλλαγμένων πλέον) στοιχείων σ που βρίσκονται στο δεύτερο μέλος κάθε κανόνα. Για παράδειγμα, ο κανόνας $\sigma_{RR} \rightarrow \sigma_{RU} \sigma_{UR}$ μετατρέπεται μέσω της συμμετρίας του αναπροσανατολισμού (δηλ. με την εφαρμογή του μετασχηματισμού $ReOr(\cdot)$) στον κανόνα $\sigma_{LL} \rightarrow \sigma_{LD} \sigma_{DL}$, και

$$S_F = \{ \sigma_{XY} \rightarrow Y : X, Y \in \Sigma \}.$$

Το σύνολο S_B περιέχει τους κανόνες με τους οποίους το αρχικό σύμβολο I παράγει τις λ -περιγραφές των ωρολογιακά προσανατολισμένων κύκλων πλαισίων μήκους 3, και τις σ -περιγραφές των προσανατολισμένων και μη προσανατολισμένων κύκλων μήκους 4 (παρατηρείστε ότι δεν υπάρχουν μη προσανατολισμοί κύκλοι μήκους 3), οι οποίοι αποτελούν τους βασικούς κύκλους της γραμματικής απ' τους οποίους παράγονται όλοι οι υπόλοιποι (σύμφωνα με τους κανόνες των τριών άλλων συνόλων).

Στο σύνολο S_R περιέχονται οι κανόνες που περιγράφουν πως μπορούν να επεκταθούν οι γεωμετρικές στροφές (δηλ. με τι μπορεί να αντικατασταθεί ένα στοιχείο σ) των οποίων το πρώτο τμήμα είναι του τύπου R . Για παράδειγμα, μέσω του κανόνα $\sigma_{RD} \rightarrow \sigma_{RU} \sigma_{UD}$ η περιγραφή $\sigma_{UR} \sigma_{RD} \sigma_{DL} \sigma_{LU}$

του κύκλου του Σχήμα 3.8.(i) μετατρέπεται στην περιγραφή $\sigma_{UR}\sigma_{RU}\sigma_{UD}\sigma_{DL}\sigma_{LU}$, που αντιστοιχεί στον (πιο σύνθετο) κύκλο του Σχήμα 3.8.(ii). Στη συνέχεια θα αναφερθούμε αναλυτικά σε όλους τους κανόνες του S_R .



Σχήμα 3.8. Εφαρμογή του κανόνα $\sigma_{RD} \rightarrow \sigma_{RU}\sigma_{UD}$.

Το σύνολο S_+ περιέχει τους συμμετρικούς κανόνες του S_R . Τέλος, το σύνολο S_F περιέχει τους κανόνες με τους οποίους ένα στοιχείο σ αναλύεται σε ένα σύμβολο του Σ , ώστε οι σ -περιγραφές που παράγει η γραμματική μέσω των κανόνων των προηγούμενων συνόλων να μετατρέπονται σε λ -περιγραφές που ανήκουν στο Σ^* , π.χ. η σ -περιγραφή $\sigma_{UR}\sigma_{RD}\sigma_{DL}\sigma_{LU}$ του κύκλου του Σχήμα 3.5 παραπάνω, μετατρέπεται μέσω των κανόνων του S_F στη λ -περιγραφή $RDLU$.

(Μερικοί ακόμα) Ορισμοί και Μετασχηματισμοί

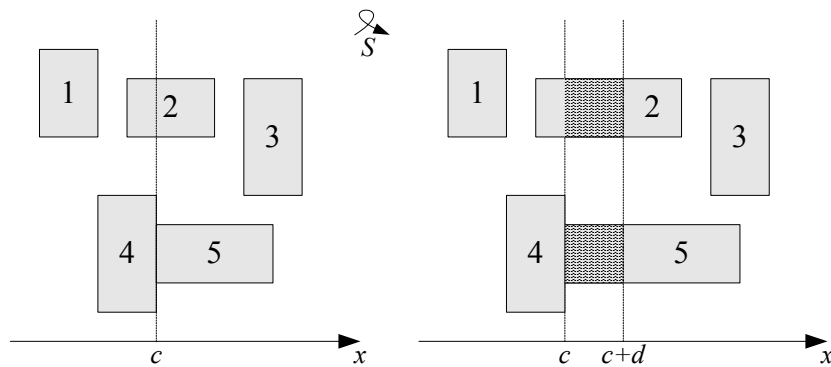
Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη του ότι κάθε λέξη που παράγεται από τη γραμματική αντιστοιχεί σε έναν (απλό, *cw*-προσανατολισμένο) κύκλο πλαισίων, θα παραθέσουμε ορισμένους απαραίτητους ορισμούς.

Για κάθε συντεταγμένη c ορίζουμε ως x -Half $_+(c)$ το (ανοικτό) ημιεπίπεδο $\{(x, y) : x > c, y : o, \text{τιδήποτε}\}$. Για κάθε u, v, c ορίζουμε μια **ζώνη σημείων** x -Zone $_+(u, v, c)$ ως το σύνολο των σημείων $\{(x, y) : u \leq x \leq v, y \geq c\}$, όπου θα ονομάζουμε το ευθύγραμμο τμήμα $[(u, c), (v, c)]$ **βάση** της ζώνης. Για μια θετική συντεταγμένη d και ένα σημείο $p = (x, y)$, ορίζουμε ως $m_d(p)$ το σημείο $(x + d, y)$, και για κάθε u' ,

$u \leq u' \leq v$, ορίζουμε ως $m_{u,u',v}(p)$ το σημείο $\left(v - \frac{(v-x) \cdot (v-u')}{v-u}, y\right)$. Μέσω του μετασχηματισμού $m_{u,u',v}(p)$ κάθε σημείο p του διαστήματος (u, v) απεικονίζεται σε ένα σημείο του διαστήματος (u', v) (το διάστημα (u, v) συρρικνώνεται στο διάστημα (u', v)).

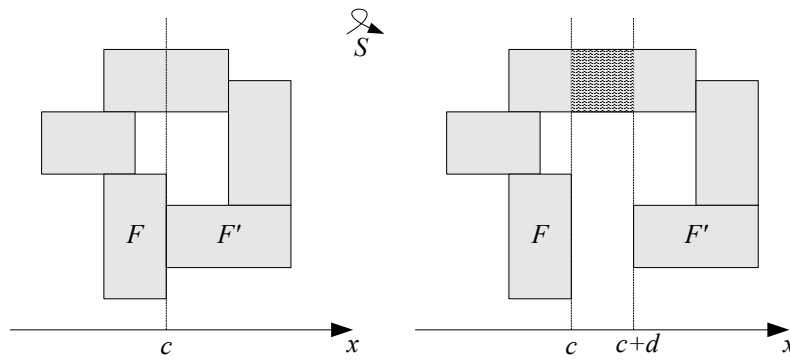
Έστω S ένα σύνολο πλαισίων. Με βάση τους παραπάνω ορισμούς ορίζουμε τους ακόλουθους μετασχηματισμούς επί του S :

- $x\text{-Expand}[S, d, c]$: Εφαρμόζουμε το μετασχηματισμό $m_d(\cdot)$ στις γωνίες κάθε πλαισίου του S που ανήκουν στο ημιεπίπεδο $x\text{-Half}_+(c)$ (βλ. Σχήμα 3.9). Ο μετασχηματισμός αυτός μας βοηθά να σχηματίσουμε ελεύθερο χώρο (ώστε π.χ. να προσθέσουμε καινούρια πλαίσια).



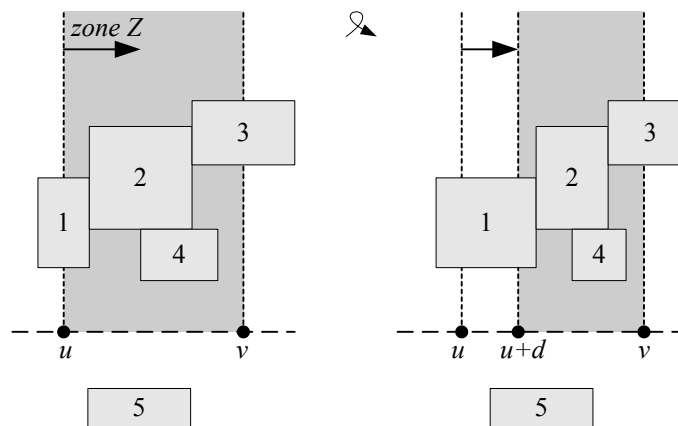
Σχήμα 3.9. Ο μετασχηματισμός $x\text{-Expand}[S, d, c]$.

- $\text{Detach}[S, F, F', d]$: Έστω F, F' δύο εφαπτόμενα πλαίσια του S και έστω ότι η κατεύθυνση της επαφής τους είναι τύπου R . Εφαρμόζουμε το μετασχηματισμό $x\text{-Expand}[S, d, c]$, όπου c είναι η x -συντεταγμένη του ευθυγράμμου τμήματος $\text{cmn}(F, F')$, και στη συνέχεια εφαρμόζουμε το μετασχηματισμό $m_d(\cdot)$ στις γωνίες του πλαισίου F' που βρίσκονται στο τμήμα $\text{cmn}(F, F')$ (βλ. Σχήμα 3.10). Με το μετασχηματισμό τούτο μπορούμε να αποσυνδέσουμε έναν κύκλο κατά μήκος μιας επαφής πλαισίων.



Σχήμα 3.10. Ο μετασχηματισμός $Detach[S, F, F', d]$.

- $Push[S, Z, d]$: Έστω $Z = x\text{-Zone}_+(u, v, c)$, όπου $u + d \leq v$. Για κάθε πλαίσιο του S που έχει εσωτερικά σημεία που ανήκουν στη ζώνη Z , εφαρμόζουμε το μετασχηματισμό $m_{u, u+d, v}(\cdot)$ στις γωνίες του που βρίσκονται εντός της Z (βλ. Σχήμα 3.11). Με το μετασχηματισμό αυτό μπορούμε να μετακινήσουμε πλαίσια.



Σχήμα 3.11. Ο μετασχηματισμός $Push[S, Z, d]$.

Με παρόμοιο τρόπο ορίζονται και τα ακόλουθα: $x\text{-Zone}_-(u, v, c)$, $y\text{-Zone}_\pm(u, v, c)$, $y\text{-Expand}[S, d, c]$, καθώς και ο μετασχηματισμός $Detach[S, F, F', d]$ για τις κατευθύνσεις των επαφών $dir(F, F') = D/L/U$. Είναι σημαντικό (και εποπτικά εύκολα αντιληπτό) ότι μέσα από τους παραπάνω μετασχηματισμούς τα εφαπτόμενα και τα μη επικαλυπτόμενα πλαίσια παραμένουν ως έχουν εκτός από: (i) τα πλαίσια F, F' στο μετασχηματισμό $Detach[S, F, F', d]$ (τα οποία παύουν να εφάπτονται)· (ii)

οποιαδήποτε πλαίσια που εφάπτονται κατά μήκος της ζώνης Z στο μετασχηματισμό $Push[\cdot]$ (τα οποία υπάρχει περίπτωση να παύσουν να εφάπτονται), και (iii) οποιαδήποτε ευθύγραμμα τμήματα τέμνουν τη βάση της ζώνης Z (τα οποία παύουν να είναι ευθυγραμμισμένα με τους άξονες).

Η Απόδειξη

Το πρώτο σημαντικό συμπέρασμα της εργασίας μας καταγράφεται στα δύο ακόλουθα λήμματα, και το επόμενο τους θεώρημα.

Λήμμα 3.1. Για κάθε λέξη θ της γλώσσας που παράγεται από τη γραμματική Γ_{cw} , υπάρχει ένας απλός κύκλος πλαισίων K τέτοιος ώστε $\theta \in cw(K)$.

Απόδειξη: Θα αποδείξουμε το λήμμα με επαγωγή στο μήκος n μιας παραγωγής ρ της θ από τη Γ_{cw} , εξαιρώντας τα βήματα που αφορούν εφαρμογές των κανόνων του συνόλου S_F , δηλ. με την ρ παράγεται από τη Γ_{cw} μια λέξη μ (χωρίς εφαρμογή των κανόνων του S_F), και η μ παράγει τη θ (με εφαρμογή μόνο των κανόνων του S_F). Για παράδειγμα, για να παραχθεί η $\theta = RDLU$, έχουμε μια παραγωγή ρ της μορφής $I \Rightarrow \sigma_{UR}\sigma_{RD}\sigma_{DL}\sigma_{LU} = \mu$ (μέσω του S_B), και στη συνέχεια (μέσω του S_F) έχουμε ότι $\mu \xrightarrow{+} RDLU = \theta$.

Βασικό Βήμα. ($n=1$) Η παραγωγή ρ μπορεί να είναι είτε της μορφής $I \Rightarrow \lambda[1]\lambda[2]\lambda[3] = \mu : \lambda \in CW_3$ (μέσω του S_B), οπότε $\mu \equiv \theta$ και το λήμμα προφανώς ισχύει, είτε της μορφής

$I \Rightarrow \sigma_{\lambda[n]\lambda[1]}\sigma_{\lambda[1]\lambda[2]}\dots\sigma_{\lambda[n-1]\lambda[n]} = \mu : \lambda \in CW_4 \cup N_4$ (μέσω του S_B), οπότε το λήμμα πάλι ισχύει για όλες τις λέξεις θ που παράγονται από την μ (μέσω των κανόνων του S_F).

Επαγωγική Υπόθεση. ($n=k$) Η παραγωγή ρ είναι της μορφής $I \xrightarrow{+} \mu$ με $k \geq 2$ το πολύ βήματα (χωρίς κανόνες από το S_F , άρα η μ είναι μια σ -περιγραφή), και ας υποθέσουμε ότι για όλες τις λέξεις θ που παράγονται από τη μ (μέσω του S_F), υπάρχει ένας απλός κύκλος πλαισίων K τέτοιος ώστε $\theta \in cw(K)$.

Επαγωγικό Βήμα. ($n=k+1$) Η παραγωγή ρ είναι της μορφής $I \xrightarrow{+} \mu$ με $k+1$ βήματα. Έστω μ' η λέξη η οποία $I \xrightarrow{+} \mu'$ με k βήματα, και $\mu' \Rightarrow \mu$ με την εφαρμογή ενός κανόνα ϕ . Από την επαγωγική υπόθεση

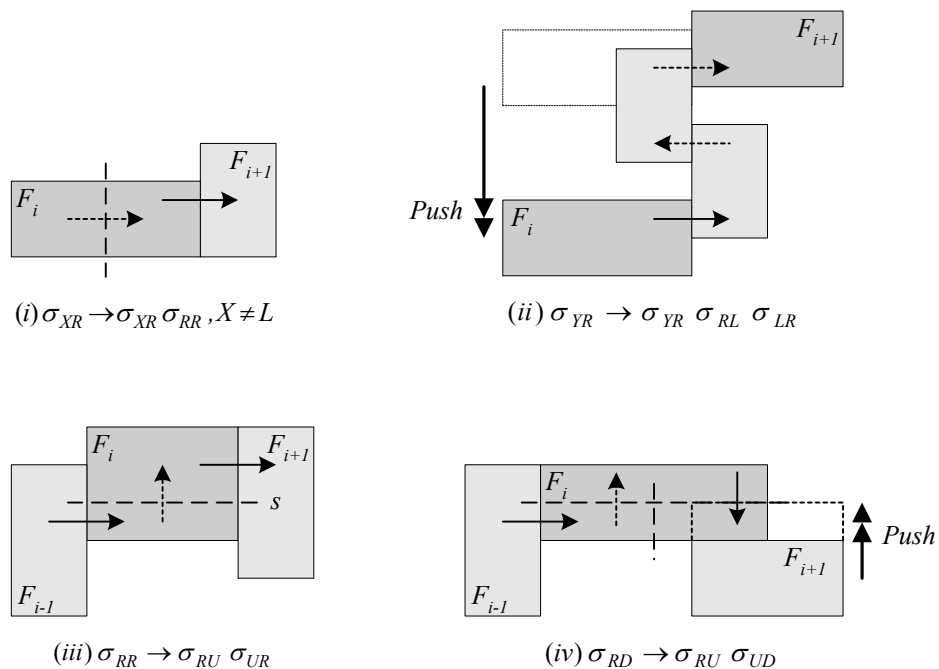
ισχύει ότι, για όλες τις λέξεις θ' που παράγονται από τη μ' , υπάρχει ένας κύκλος πλαισίων K' τέτοιος ώστε $\theta' \in cw(K')$. (Οι μ, μ' είναι σ -περιγραφές, ενώ οι θ, θ' είναι λ -περιγραφές). Θα αποδείξουμε ότι για κάθε κανόνα ϕ , ο K' μπορεί να μετασχηματισθεί σε έναν απλό κύκλο πλαισίων K , τέτοιον ώστε για όλες τις λέξεις θ που παράγονται από τη μ να ισχύει ότι $\theta \in cw(K)$.

Αρκεί να εξετάσουμε τους κανόνες ϕ που ανήκουν στο σύνολο S_R , αφού από το S_B εφαρμόζεται μόνο ένας κανόνας (στο πρώτο βήμα της παραγωγής), από το S_F δεν έχουμε εφαρμογή κανόνων, και οι κανόνες του S_+ είναι συμμετρικοί με αυτούς του S_R . Έστω ότι ο ϕ εφαρμόζεται στο στοιχείο σ_{XY} στη θέση i της μ' , οπότε στον κύκλο K' θα ισχύει ότι $dir(F_{i-1}, F_i) = X$ και $dir(F_i, F_{i+1}) = Y$. Θα δείξουμε ότι σε κάθε περίπτωση είναι δυνατή η εφαρμογή του κανόνα ϕ , εκτελώντας εν γένει τα ακόλουθα βήματα (αν και σε ορισμένες περιπτώσεις μπορούμε πολύ πιο απλά να εφαρμόσουμε έναν κανόνα, όπως θα φανεί στην ανάλυση των κανόνων): (i) αποσυνδέουμε τον κύκλο K' κατά μήκος της επαφής των πλαισίων F_i, F_{i+1} . (ii) εφαρμόζουμε κατάλληλους μετασχηματισμούς στα δύο άκρα, και (iii) προσθέτουμε καινούρια πλαίσια σύμφωνα με τον ϕ , σχηματίζοντας τον καινούριο κύκλο K . Εξετάζουμε λοιπόν $|S_R| = 4$ το πλήθος περιπτώσεις, όπως φαίνεται στον Πίνακας 3.1.

(i) $\sigma_{XR} \rightarrow \sigma_{XR}\sigma_{RR}$	Διαιρούμε το πλαίσιο F_i σε δύο πλαίσια μέσω ενός κατακόρυφου ευθυγράμμου τμήματος (βλ. Σχήμα 3.12.(i)).
(ii) $\sigma_{YR} \rightarrow \sigma_{YR}\sigma_{RL}\sigma_{RL}$	Εφαρμόζουμε το μετασχηματισμό $Push[\cdot]$ επί του πλαισίου F_i , κατά μήκος μιας ζώνης με βάση επί της ευθείας που ανήκει το τμήμα $cmn(F_i, F_{i+1})$. Στον ελεύθερο χώρο που δημιουργείται προσθέτουμε δύο καινούρια πλαίσια που εφάπτονται κατάλληλα με τα F_i, F_{i+1} (βλ. Σχήμα 3.12.(ii)).
(iii) $\sigma_{RR} \rightarrow \sigma_{RU}\sigma_{UR}$	Εφαρμόζουμε το μετασχηματισμό $Push[\cdot]$ επί του πλαισίου F_i , έτσι ώστε να υπάρχει ένα οριζόντιο τμήμα s που να ενώνει τα τμήματα $cmn(F_{i-1}, F_i)$ και $cmn(F_i, F_{i+1})$ (αν ένα τέτοιο τμήμα δεν

	υπάρχει ήδη). Διαιρούμε το F_i μέσω του s σε δύο πλαίσια, και εφαρμόζουμε τον $Push[\cdot]$ στο κατώτερο απ' τα δύο ώστε να μην εφάπτεται με το πλαίσιο F_{i+1} (βλ. Σχήμα 3.12.(iii))
(iv) $\sigma_{RD} \rightarrow \sigma_{RU} \sigma_{UD}$	Διαιρούμε το πλαίσιο F_i σε δύο πλαίσια με ένα οριζόντιο τμήμα, και διαιρούμε το κατώτερο απ' τα δύο επίσης σε δύο πλαίσια, με ένα κατακόρυφο τμήμα. Εφαρμόζουμε κατάλληλα το μετασχηματισμό $Push[\cdot]$ ώστε το πλαίσιο F_{i+1} να εφάπτεται με το άνω μέρος του F_i (βλ. Σχήμα 3.12.(iv)).

Πίνακας 3.1. Παραγωγικοί κανόνες: γραμματική και γεωμετρική σκοπιά.



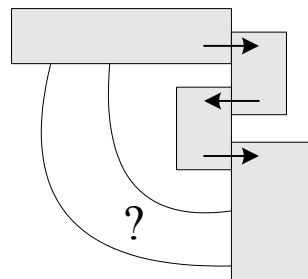
Σχήμα 3.12. Παραγωγικοί κανόνες: γραμματική και γεωμετρική σκοπιά.

□

Προχωρούμε τώρα στη διατύπωση και απόδειξη του αντιστρόφου του Λήμμα 3.1.

Λήμμα 3.2. Κάθε απλός κύκλος πλαισίων K έχει μια ωρολογιακή περιγραφή που μπορεί να παραχθεί από τη γραμματική Γ_{cw} .

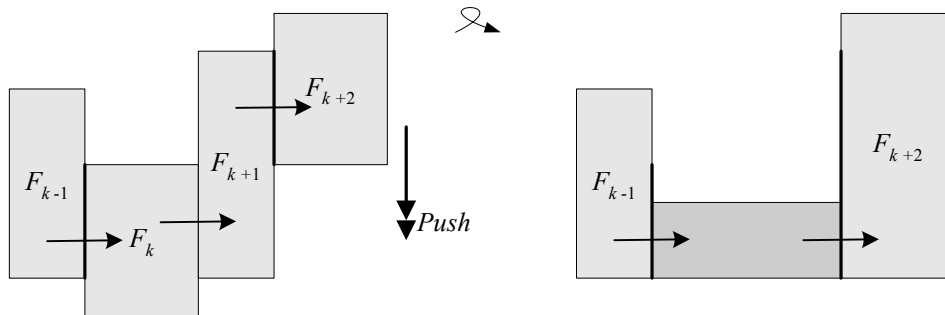
Απόδειξη: Ορίζουμε έναν *απλοποιητικό κανόνα*, ως μια παραγωγή της μορφής $X \Rightarrow Y$, όπου: (i) $X \in \Sigma_c^*$ και $Y \in \Sigma_c$; (ii) το μήκος του X είναι μεγαλύτερο ή ίσο του δύο, και (iii) το X παράγεται από το Y μέσω ενός κανόνα της Γ_{cw} . Έστω ένας απλός κύκλος πλαισίων $K = \langle F_1, F_2, \dots, F_n \rangle$, με μήκος $n \geq 5$ και με σ -περιγραφή σ_K . Θα αποδείξουμε ότι είναι πάντα εφικτή η εύρεση μιας υπακολουθίας του K (της μορφής είτε $\langle F_k, \dots, F_{k'} \rangle$ ή $\langle F_k, \dots, F_n, F_1, \dots, F_{k'} \rangle$) που περιγράφεται από ένα τμήμα X της σ_K που είναι *απλοποιήσιμο*, με την έννοια ότι μπορούμε να μετασχηματίσουμε τον K σε έναν κύκλο K' , όπου ο K' είναι επίσης απλός, έχει αυστηρά μικρότερο μήκος απ' τον K , έχει τον ίδιο προσανατολισμό με τον K , και μια σ -περιγραφή του K' προκύπτει απ' την σ_K , αντικαθιστώντας το X με το Y (μέσω ενός απλοποιητικού κανόνα). Μια ακολουθία από τέτοιες απλοποιήσεις μας δίνει, σε αντίστροφη σειρά, μια παραγωγή της σ_K (μέσω των κανόνων της Γ_{cw}) από τις σ -περιγραφές των ωρολογιακά προσανατολισμένων κύκλων μήκους 4, οι οποίες παράγονται από την Γ_{cw} μέσω των κανόνων του συνόλου S_B , οπότε το λήμμα μας θα έχει αποδειχθεί (αφού, προφανώς, αν παράγεται η σ -περιγραφή ενός κύκλου K από τη Γ_{cw} , τότε παράγεται και η λ -περιγραφή του K). Να σημειώσουμε εδώ ότι οι διαδοχικές απλοποιήσεις θα καταλήγουν πάντα σε κύκλο μήκους 4 (κι όχι 3, για τους οποίους η γραμματική μάς δίνει τις λ - και όχι τις σ -περιγραφές): Ο μόνος κανόνας που μειώνει κατά δύο (κι όχι κατά ένα) το μήκος (της περιγραφής) ενός κύκλου K είναι ο $\sigma_{XR} \sigma_{RL} \sigma_{LR} \Rightarrow \sigma_{XR}$. Για να περιέχει όμως ο K αυτήν την απλοποιήσιμη ακολουθία δεν μπορεί να έχει μήκος 5 (οπότε θα καταλήγαμε σε κύκλο μήκους 3), αλλά πρέπει να έχει μήκος τουλάχιστον 6 (βλ. Σχήμα 3.13).



Σχήμα 3.13. Εφαρμογή του απλοποιητικού κανόνα $\sigma_{XR} \sigma_{RL} \sigma_{LR} \Rightarrow \sigma_{XR}$ σε κύκλο μήκους τουλάχιστον 6.

Η απλοποίηση (της περιγραφής σ_K) του κύκλου K γίνεται σε τρεις φάσεις:

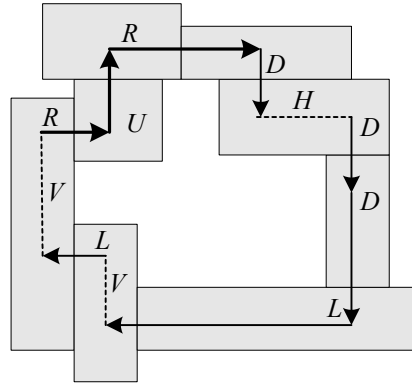
1. Απλοποιούμε (τμήματα της περιγραφής του K που αντιστοιχούν σε) διαδοχικά πλαίσια του K που εφάπτονται μόνο οριζόντια (ή κατακόρυφα). Σε μια υπακολουθία της μορφής $\sigma_{XR}\sigma_{RR}\sigma_{RR}\sigma_{RY}$, που περιγράφει τις επαφές των πλαισίων $\langle F_{k-1}, F_k, F_{k+1}, F_{k+2} \rangle$ αντίστοιχα, τα πλαίσια F_k, F_{k+1} μπορούν να αντικατασταθούν από ένα νέο πλαίσιο (κατάλληλα εφαπτόμενο με τα F_{k-1}, F_{k+2}), αν εφαρμόσουμε κατάλληλα το μετασχηματισμό $Push[\cdot]$ επί του πλαισίου F_{k+2} , ώστε τα τμήματα $cmn(F_{k-1}, F_k)$ και $cmn(F_{k+1}, F_{k+2})$ να μπορούν να ενωθούν με ένα ευθύγραμμο τμήμα (βλ. Σχήμα 3.14). Ο απλοποιητικός κανόνας είναι: $\sigma_{RR}\sigma_{RR} \Rightarrow \sigma_{RR}$ (πρβλ. Πίνακας 3.1.(i)).



Σχήμα 3.14. Εφαρμογή του απλοποιητικού κανόνα $\sigma_{RR}\sigma_{RR} \Rightarrow \sigma_{RR}$.

2. Απλοποιούμε τμήματα του K που σχηματίζουν μια s -στροφή, την οποία ορίζουμε στη συνέχεια. Ορίζουμε ένα **βήμα** (*step*) s , ως ένα κατακόρυφο ή οριζόντιο ευθύγραμμο τμήμα $s = [p, q]$, και μια **βηματική γραμμή** (*step-line*), ως μια ακολουθία βημάτων $s_i = [p_i, q_i]$, όπου $p_{i+1} = q_i$, $i = 1, \dots, n-1$. Ο αριθμός n θα λέγεται *μήκος* της γραμμής, και τα σημεία p_i, q_i τα *άκρα* αυτής. Η βηματική γραμμή θα λέγεται *κλειστή* αν $q_n = p_1$. Στο εσωτερικό των πλαισίων ενός κύκλου $K = \langle F_1, F_2, \dots, F_n \rangle$, ορίζεται η κλειστή βηματική γραμμή ελαχίστου μήκους $\zeta(K)$, η οποία έχει ένα ή δύο άκρα σε κάθε πλαίσιο (βλ. Σχήμα 3.15). Σε κάθε βήμα της $\zeta(K)$ δίδουμε μια ετικέτα της μορφής ' H ' (*Horizontal* – οριζόντιο) ή ' V ' (*Vertical* – κατακόρυφο), και ειδικότερα για τα βήματα που διασχίζουν ένα ευθύγραμμο

τιμήμα $cmn(F_i, F_{i+1})$, ορίζουμε την ετικέτα τους να είναι η κατεύθυνση της επαφής $dir(F_i, F_{i+1})$.



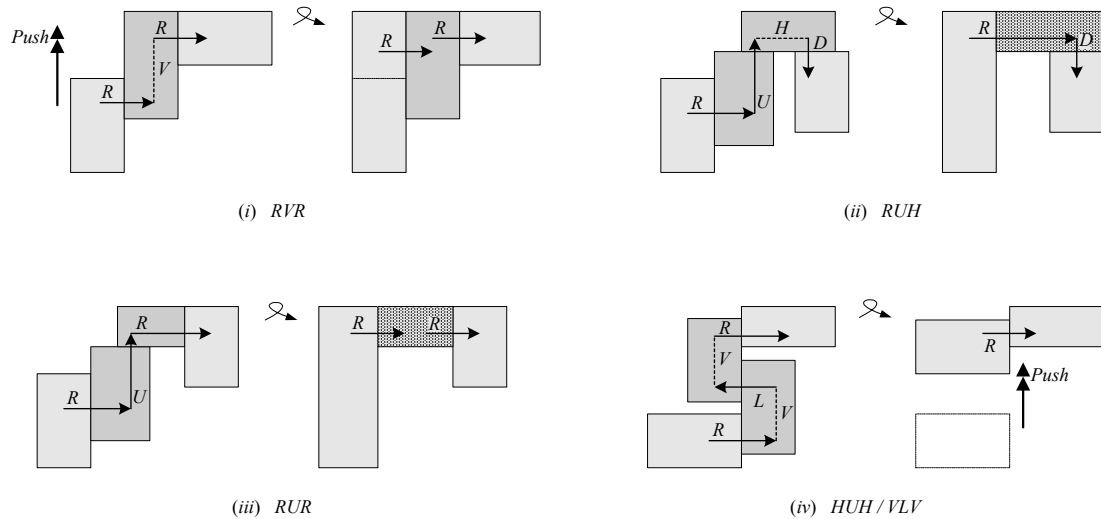
Σχήμα 3.15. Μια κλειστή βηματική γραμμή στο εσωτερικό ενός κύκλου πλαισίων, και μια s -στροφή.

Η βηματική γραμμή $\zeta(K)$ θα έχει το πολύ ένα βήμα με ετικέτα H ή V στο εσωτερικό κάθε πλαισίου, και ακριβώς δύο βήματα με ετικέτες R, D, L , ή U που θα τέμνουν το περίγραμμα κάθε πλαισίου. Παρατηρείστε ότι δεν μπορούν να εμφανισθούν στη $\zeta(K)$ δύο διαδοχικά βήματα με ετικέτες H ή V . Ονομάζουμε **s -στροφή** (s -turn) μια ακολουθία βημάτων όπου, καθώς τα διασχίζουμε, οι μόνες στροφές που πραγματοποιούνται είναι μία μετά το πρώτο βήμα και μία πριν το τελευταίο βήμα, και είναι αντίθετης κατεύθυνσης (δηλ. η πρώτη προς τα δεξιά και η δεύτερη προς τα αριστερά ή το αντίθετο). Αν η $\zeta(K)$ έχει τέσσερις στροφές, προχωρούμε στη φάση (3).

Η απλή, αλλά κρίσιμη, παρατήρηση είναι ότι αν η $\zeta(K)$ έχει πέντε τουλάχιστον στροφές, τότε απαραίτητα θα περιέχει μια s -στροφή, αλλιώς θα εξελίσσεται σπειροειδώς κάνοντας συνεχώς δεξιές (ή συνεχώς αριστερές) στροφές, κάτι που δεν μπορεί να συμβαίνει σε μια απλή, κλειστή γραμμή. Θα δείξουμε ότι μπορούμε να απαλείψουμε όλες τις s -στροφές, της μορφής XYZ , όπου $X, Z = R$ ή H , και $Y = U$ ή V (και τις συμμετρικές τους). Από τις οκτώ δυνατές περιπτώσεις, οι RVH , HVR και HVH είναι αδύνατο να εμφανισθούν, η HUR είναι συμμετρική με την RUH , και οι εναπομείναντες τέσσερις αντιμετωπίζονται όπως φαίνεται στον Πίνακα 3.2. (Οι s -στροφές της μορφής XYZ αντιμετωπίζονται παρόμοια, και της μορφής $XYYZ$ απλοποιούνται όπως δείξαμε στη φάση (1)).

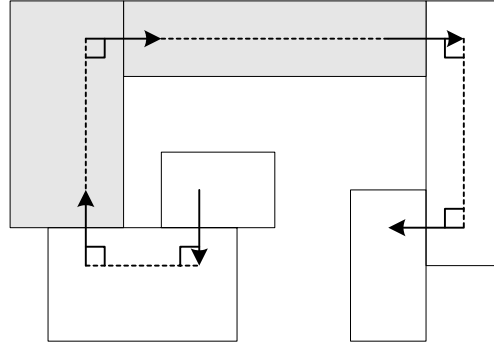
RVR	Μπορούμε να απαλείψουμε μια s -στροφή αυτού του τύπου από τη γραμμή $\zeta(K)$ εφαρμόζοντας κατάλληλα το μετασχηματισμό $Push[\cdot]$ επί του πρώτου πλαισίου. Στην περίπτωση αυτή δεν ελαττώνεται το μήκος του κύκλου K , παρά ταύτα έχουμε μια απλοποίηση (μια απαλοιφή μιας s -στροφής) της $\zeta(K)$ (βλ. Σχήμα 3.16.(i)).
RUH	Αφού τα τελευταία βήματα της s -στροφής είναι του τύπου U και H , το επόμενο βήμα της $\zeta(K)$ θα είναι αναγκαστικά τύπου D . Τα δύο πλαίσια μέσα στα οποία πραγματοποιούνται οι στροφές RU και $U(H)D$ (που αποτελούν την s -στροφή) της $\zeta(K)$, μπορούν να αντικατασταθούν από ένα (βλ. Σχήμα 3.16.(ii), πρβλ. Πίνακας 3.1.(iv)). Ο απλοποιητικός κανόνας είναι: $\sigma_{RU}\sigma_{UD} \Rightarrow \sigma_{RD}$.
RUR	Τα δύο πλαίσια μέσα στα οποία πραγματοποιούνται οι στροφές RU και UR (που αποτελούν την s -στροφή) της $\zeta(K)$ μπορούν να αντικατασταθούν από ένα (βλ. Σχήμα 3.16.(iii), πρβλ. Πίνακας 3.1.(iii)). Ο απλοποιητικός κανόνας είναι: $\sigma_{RU}\sigma_{UR} \Rightarrow \sigma_{RR}$.
HUH	Θα εξετάσουμε τη συμμετρική s -στροφή VLV (αφού αυτή τυχαίνει να περιγράψουμε στο σύνολο κανόνων S_B της γραμματικής Γ_{cw}). Αφού το πρώτο και το τελευταίο βήμα της s -στροφής είναι του τύπου V , κι αφού το μεσαίο βήμα είναι του τύπου L , το προηγούμενο και το επόμενο βήμα της $\zeta(K)$ θα είναι του τύπου R . Τα δύο πλαίσια μέσα στα οποία πραγματοποιούνται οι στροφές RU και UR (που αποτελούν την s -στροφή) της $\zeta(K)$ μπορούν να εξαλειφθούν, και με εφαρμογή του μετασχηματισμού $Push[\cdot]$ μπορούμε να “επανασυγκολλήσουμε” τον κύκλο K (βλ. Σχήμα 3.16.(iv), πρβλ. Πίνακας 3.1.(ii)). Ο απλοποιητικός κανόνας είναι: $\sigma_{XR}\sigma_{RL}\sigma_{LR} \Rightarrow \sigma_{XR}$.

Πίνακας 3.2 (Απλοποιητικοί) Κανόνες για την απλοποίηση μιας s -στροφής: γεωμετρική και γραμματική σκοπιά.



Σχήμα 3.16. Απλοποίηση μιας s -στροφής (4 περιπτώσεις).

3. Απλοποιούμε τμήματα του K μήκους 4, όπου τα πλαίσια εφάπτονται μόνο οριζόντια (ή κατακόρυφα). Σε μια υπακολουθία της μορφής $\sigma_{XR}\sigma_{RR}\sigma_{RY}$, που περιγράφει τις επαφές των πλαισίων $\langle F_{k-1}, F_k, F_{k+1} \rangle$ αντίστοιχα, το μεσαίο πλαίσιο F_{k+1} μπορεί να εξαλειφθεί (με παρόμοιο τρόπο όπως στη φάση (1)), αρκεί η κάτω-δεξιά γωνία του F_{k-1} και η κάτω-αριστερή γωνία του F_{k+1} να μην είναι κατειλημμένες από άλλα εφαπτόμενα πλαίσια, ώστε να μην μπορούν να ‘ελευθερωθούν’ με χρήση του μετασχηματισμού $Push[\cdot]$ (για να εφάπτονται κατάλληλα τα F_{k-1}, F_{k+1}) — αυτό όμως δεν μπορεί να συμβαίνει παρά μόνον αν η βηματική γραμμή $\zeta(K)$ έχει πέντε (τουλάχιστον) δεξιές (ή αριστερές) στροφές (βλ. Σχήμα 3.17), οπότε θα βρισκόμασταν ακόμη στη φάση (2). Ο απλοποιητικός κανόνας είναι $\sigma_{XR}\sigma_{RR} \Rightarrow \sigma_{XR}$ (πρβλ. Πίνακας 3.1.(i)).



Σχήμα 3.17. Η περίπτωση όπου ο κανόνας $\sigma_{XR} \sigma_{RR} \Rightarrow \sigma_{RR}$ είναι μη εφαρμόσιμος.

□

Ολοκληρώνουμε την ανάλυσή μας με το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 3.1. Για κάθε λέξη $\mu \in \Sigma^*$ μπορούμε να υπολογίσουμε σε πολωνυμικό χρόνο τα εξής:

1. αν υπάρχει ένας απλός κύκλος πλαισίων K τέτοιος ώστε $\mu \in cw(K)$, ή εναλλακτικά $\mu \in ccw(K)$.
2. αν ο κύκλος K είναι προσανατολισμένος,
3. έναν κύκλο K τέτοιον ώστε $\mu \in cw(K)$, αν ένας τέτοιος κύκλος υπάρχει.

Απόδειξη: Αν υπάρχει ένας κύκλος πλαισίων K τέτοιος ώστε $\mu \in cw(K)$, τότε σύμφωνα με το Λήμμα 3.2 μπορούμε να βρούμε μια παραγωγή μιας λέξης που ανήκει στο σύνολο $cw(K)$, η οποία θα αποτελεί μια κυκλική μετάθεση (των συμβόλων) της μ . Άρα αρκεί να ελέγξουμε όλες τις κυκλικές μεταθέσεις της μ μέχρι να βρούμε μία που παράγεται από τη γραμματική Γ_{cw} . Αφού η Γ_{cw} είναι μια γραμματική χωρίς συμφραζόμενα, ο έλεγχος για το αν μια λέξη μ παράγεται από τη Γ_{cw} μπορεί να γίνει σε πολωνυμικό χρόνο ως προς το μέγεθος της μ (για την ακρίβεια η πολυπλοκότητα είναι της τάξης $O(|\mu|^3)$ (βλ. [4])).

Για να ελέγξουμε αν ο κύκλος K είναι προσανατολισμένος ή όχι, σχηματίζουμε τη “συμμετρική” γραμματική χωρίς συμφραζόμενα Γ_{ccw} που παράγει τις περιγραφές όλων και μόνον των ccw -προσανατολισμένων κύκλων (αλλάζοντας στο σύνολο S_b τα σύνολα CW_3, CW_4 με τα CCW_3, CCW_4 και

αφήνοντας όλα τα υπόλοιπα σύνολα ως έχουν), και ελέγχουμε αν η μ ανήκει στη γλώσσα που παράγεται από την Γ_{ccw} . Ο κύκλος K θα είναι ccw -προσανατολισμένος (αντ. ccw -προσανατολισμένος, μη προσανατολισμένος) αν η μ παράγεται μόνο από την Γ_{cw} (αντ. μόνο από την Γ_{ccw} , κι απ' τις δύο Γ_{cw} , Γ_{ccw}). (Σημειώστε ότι η απόδειξη του Λήμμα 3.1 είναι κατασκευαστική).

□

Σημείωση

Θα κλείσουμε το τρέχον κεφάλαιο επεξηγώντας τους λόγους που μας οδήγησαν στη χρήση των σ -περιγραφών για τους κύκλους πλαισίων. Χρησιμοποιώντας τις λ -περιγραφές, οι κανόνες της γραμματικής μας θα περιέγραφαν τους τρόπους με τους οποίους μπορεί να επεκταθεί μια επαφή σε έναν κύκλο πλαισίων, κι άρα να προκύψει ένας κύκλος μεγαλύτερου μήκους. Για παράδειγμα, για να δηλώσουμε ότι μια επαφή τύπου R μπορεί να επεκταθεί σε RLR , θα είχαμε τον κανόνα $R \rightarrow RLR$ (βέβαια θα χρησιμοποιούσαμε διαφορετικά σύμβολα απ' τα τερματικά σύμβολα R, D, L, U). Αντίστοιχα, κατά την απλοποίηση της περιγραφής ενός κύκλου πλαισίων θα είχαμε τον απλοποιητικό κανόνα $RLR \Rightarrow R$.

Το πρόβλημα εδώ είναι ότι η ακολουθία επαφών RUR δεν απλοποιείται σε ένα σύμβολο αλλά σε δύο: $RUR \Rightarrow RR$, οπότε δεν μπορούμε να έχουμε στη γραμματική μας έναν (παραγωγικό) κανόνα χωρίς συμφραζόμενα (όπως στην προηγούμενη περίπτωση). Χρησιμοποιώντας όμως τις σ -περιγραφές, ο απλοποιητικός κανόνας γίνεται $\sigma_{RU}\sigma_{UR} \Rightarrow \sigma_{RR}$, οπότε μπορούμε να έχουμε στη γραμματική τον χωρίς συμφραζόμενα κανόνα $\sigma_{RR} \rightarrow \sigma_{RU}\sigma_{UR}$.

Κεφάλαιο 4. Φάση II: Προσανατολισμένη Επιπεδότητα

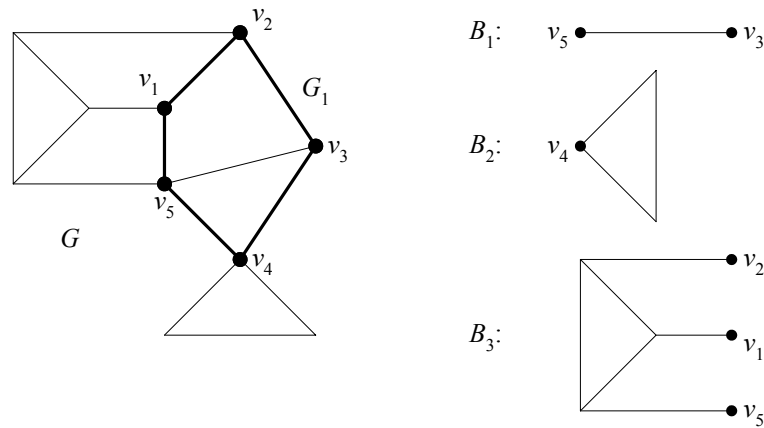
Στο κεφάλαιο αυτό αντιμετωπίζουμε τη γενική περίπτωση όπου ο χωροταξικός γράφος αποτελείται από περισσότερους του ενός κύκλους. Ορίζουμε το πρόβλημα της Προσανατολισμένης Επιπεδότητας, για την επίλυση του οποίου επιστρατεύουμε έννοιες και τεχνικές από την κλασική θεωρία επίπεδων γράφων.

§ 4.1. Στοιχεία από τη Θεωρία Επίπεδων Γράφων

Ένας γράφος καλείται επίπεδος αν μπορεί να σχεδιασθεί στο επίπεδο έτσι ώστε δύο οποιεσδήποτε ακμές του να μην τέμνονται. Ακριβέστερα, ένας γράφος G καλείται *επίπεδος* αν είναι ισομορφικός¹ με έναν γράφο G' , τέτοιον ώστε οι κόμβοι και οι ακμές του G' να περιέχονται στο ίδιο επίπεδο, και κάθε σημείο του επιπέδου να καταλαμβάνεται από έναν το πολύ κόμβο, ή να ανήκει σε μία το πολύ ακμή, του G' . Ο γράφος G' καλείται ενσωματωμένος (embedded) στο επίπεδο, και αποτελεί μια *επίπεδη σχεδίαση* (planar embedding) του G . Θα συμβολίζουμε μια επίπεδη σχεδίαση του G ως \tilde{G} .

Έστω ένας γράφος $G = (V, E)$, και $G_1 = (V_1, E_1)$ ένας υπογράφος του G . Ένα *τμήμα* (piece) του G ως προς τον G_1 θα είναι: είτε (i) μια ακμή $(u, v) \in E$, όπου $(u, v) \notin E_1$ και $u, v \in V_1$, ή (ii) μια συνεκτική συνιστώσα του γράφου $(G - G_1)$ (αφαίρεση ακμών), μαζί με τις γειτονικές ακμές της συνιστώσας αυτής. Στο Σχήμα 4.1 φαίνεται ένας γράφος G και ένας υπογράφος του G_1 , που είναι ο κύκλος $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_1)$. Τα B_1, B_2, B_3 είναι τα τμήματα του G ως προς τον G_1 .

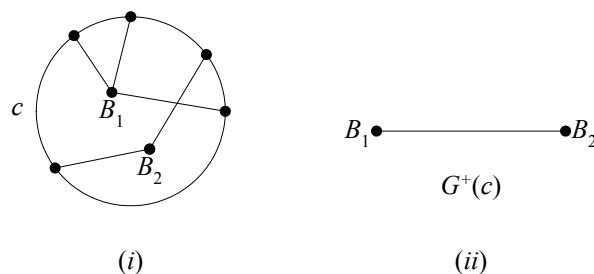
¹ Δύο γράφοι G_1, G_2 καλούνται *ισομορφικοί*, αν υπάρχει μια ένα προς ένα αντιστοιχία μεταξύ των κόμβων του G_1 και των κόμβων του G_2 , τέτοια ώστε το πλήθος των ακμών που ενώνουν δύο κόμβους του G_1 να ισούται με το πλήθος των ακμών που ενώνουν τους αντίστοιχους δύο κόμβους του G_2 .



Σχήμα 4.1. Τα τμήματα B_1, B_2, B_3 ενός γράφου G ως προς έναν υπογράφο του G_1 .

Γενικά, για κάθε τμήμα B ενός γράφου G ως προς έναν υπογράφο του G_1 , οι κορυφές του B που είναι κοινές με αυτές του G_1 ονομάζονται **σημεία επαφής** (συνδετικοί κόμβοι) του B με τον G_1 . Έτσι, στο Σχήμα 4.1 τα σημεία επαφής του B_1 λ.χ. είναι οι κόμβοι v_3, v_5 . Ένα τμήμα που έχει τουλάχιστον δύο σημεία επαφής καλείται **γέφυρα** (*bridge*) Έτσι, τα B_1, B_3 είναι γέφυρες αλλά το B_2 δεν είναι.

Έστω ένας γράφος G και c ένας κύκλος που είναι υπογράφος του G . Η επίπεδη σχεδίαση \tilde{c} του c διαιρεί το επίπεδο σε δύο έδρες, μια *εσωτερική* και μια *εξωτερική*. Δύο γέφυρες του G ως προς τον c καλούνται **ασύμβατες** (*incompatible*) αν, όταν τοποθετηθούν στην ίδια έδρα του επιπέδου που ορίζεται απ' το \tilde{c} , δύο τουλάχιστον ακμές τους τέμνονται. (Κάθε γέφυρα σχεδιάζεται ως ένας κόμβος που ενώνεται με μια ακμή με κάθε σημείο επαφής της γέφυρας με τον c — βλ. Σχήμα 4.2.(i)).



Σχήμα 4.2. (i) Δύο ασύμβατες γέφυρες B_1, B_2 . (ii) Ο βοηθητικός γράφος $G^+(c)$.

Ο **βοηθητικός γράφος** (*auxiliary graph*) $G^+(c)$ του G ως προς τον c , είναι ένας γράφος που έχει μια κορυφή για κάθε γέφυρα του G ως προς τον c , και μια ακμή μεταξύ δύο κόμβων που αντιστοιχούν σε ασύμβατες γέφυρες (βλ. Σχήμα 4.2.(ii)). Για τους βοηθητικούς γράφους ισχύει το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 4.1. Ένας γράφος G είναι επίπεδος αν ο βοηθητικός γράφος $G^+(c)$ του G ως προς κάθε κύκλο του c είναι διμερής (bipartite).

Απόδειξη: (βλ. [3]). □

§ 4.2. Ορισμός του Προβλήματος

Ο χωροταξικός γράφος G πρέπει (προφανώς) να είναι επίπεδος, αλλιώς το πρόβλημά μας στη γενική του διατύπωση δεν έχει λύση. Η βασική ιδέα είναι ότι οι έδρες (faces) της τελικής επίπεδης σχεδίασης του G αντιστοιχούν σε κύκλους του G , κι αυτοί με τη σειρά τους αντιστοιχούν σε απλούς κύκλους πλαισίων. Ο προσανατολισμός των κύκλων του γράφου μπορεί να καθορίσει σε μεγάλο βαθμό τη σχετική τοποθέτηση-σχεδίασή τους, άρα και τις έδρες της επίπεδης σχεδίασης του G . Αυτό που πρωτίστως μας ενδιαφέρει είναι να (εξετάσουμε αν είναι εφικτό να) σχεδιασθούν όλοι οι κύκλοι του G με το συγκεκριμένο προσανατολισμό που έχουν. Η τήρηση της διάταξης $\gamma(\cdot)$ που ορίζεται επί των κόμβων του G (βλ. ορισμό του χωροταξικού γράφου, § 2.1) θα μας απασχολήσει δευτερευόντως (σε περίπτωση που χρειαστεί), όπως περιγράφουμε στην ενότητα § 4.4 παρακάτω.

Ονομάζουμε *Orient* τον αλγόριθμο ο οποίος αποφασίζει αν ένας κύκλος του γράφου θα πρέπει να σχεδιασθεί στο επίπεδο ως ένας cw - ή ccw -προσανατολισμένος κύκλος πλαισίων. Μπορούμε να υποθέσουμε (χάριν απλότητας και μιας ομοιόμορφης παρουσίασης) ότι αν ένας κύκλος πρέπει να σχεδιασθεί ccw -προσανατολισμένα, τότε μετατρέπεται στη συζυγή μορφή του (που θα πρέπει προφανώς να σχεδιασθεί cw -προσανατολισμένα).

Το πρόβλημα της *Προσανατολισμένης Επιπεδότητας* (*Oriented Planarity*) ορίζεται ως ακολούθως:

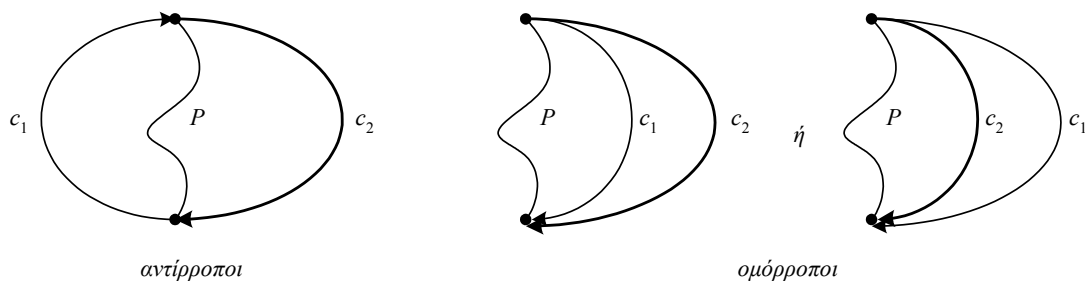
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΕΝΗ ΕΠΙΠΕΔΟΤΗΤΑ

Στιγμιότυπο: Ένας γράφος G και ένας αλγόριθμος *Orient*.

Ερώτημα: Να αποφασισθεί αν υπάρχει μια επίπεδη σχεδίαση του G , έτσι ώστε όλες οι έδρες του να είναι προσανατολισμένες (θεωρώντας τις ως απλές κλειστές γραμμές στο επίπεδο) κατά την ίδια φορά με τους κύκλους του G στους οποίους αντιστοιχούν.

§ 4.3. Επίλυση του Προβλήματος

Θα χρειαστούμε τους ακόλουθους ορισμούς: Έστω c_1, c_2 δύο κύκλοι του γράφου με συγκεκριμένο προσανατολισμό, οι οποίοι έχουν ένα κοινό μονοπάτι P . Οι δύο κύκλοι θα ονομάζονται **ομόρροποι** (αντ. **αντίρροποι**) αν (οι σχεδιάσεις τους στο επίπεδο) διασχίζουν το P κατά την ίδια (αντ. αντίθετη) φορά. Στην περίπτωση που οι δύο κύκλοι είναι αντίρροποι, ο ένας θα πρέπει να σχεδιασθεί στο επίπεδο εξωτερικά του άλλου (και υπάρχει ένας μοναδικός τρόπος να γίνει αυτό), ενώ αν είναι ομόρροποι θα πρέπει ο ένας να σχεδιασθεί στο εσωτερικό του άλλου (και υπάρχουν δύο τρόποι να γίνει αυτό) (βλ. Σχήμα 4.3)



Σχήμα 4.3. Αντίρροποι και ομόρροποι κύκλοι.

Το δεύτερο καίριο αποτέλεσμα της εργασίας μας είναι η λύση του προβλήματος της ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΕΝΗΣ ΕΠΙΠΕΔΟΤΗΤΑΣ, η οποία καταγράφεται στο ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 4.2. Μπορούμε να αποφασίσουμε σε πολωνυμικό χρόνο (υπολογίζοντας κάθε εκτέλεση του *Orient* ως ένα βήμα) αν ένας γράφος G μπορεί να σχεδιασθεί στο επίπεδο με έναν προκαθορισμένο προσανατολισμό επί των ακμών του.

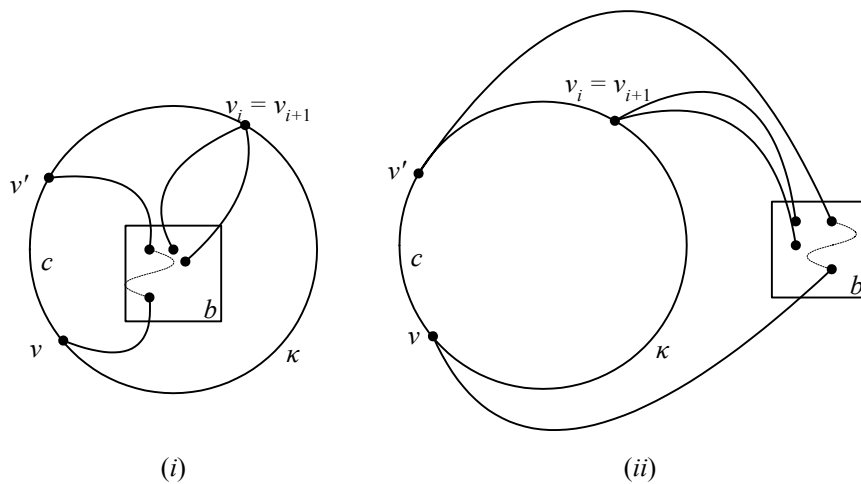
Απόδειξη: Έστω G ένας γράφος (αγνοώντας τις κατευθύνσεις των ακμών) και κ ένας κύκλος του G . Σχηματίζουμε τις γέφυρες του G ως προς τον κ . Για μια

γέφυρα b , έστω (u_i, v_i) , $i=1..n$, οι συνδετικές ακμές της με τον κ , όπου u_i θα είναι οι συνδετικοί κόμβοι επί της b , και v_i οι συνδετικοί κόμβοι επί του κ , σε cw -σειρά (σημειώστε ότι μπορεί να υπάρχει i τέτοιο ώστε $u_i = u_{i+1}$ ή $v_i = v_{i+1}$).

Η b μπορεί να σχεδιασθεί μόνο σε μία από τις δύο έδρες της επίπεδης σχεδίασης $\tilde{\kappa}$ του κ (αφού είναι μια συνεκτική συνιστώσα) (βλ. Σχήμα 4.4). Η σχεδίαση της b στην εσωτερική έδρα του $\tilde{\kappa}$ γίνεται κατά μοναδικό τρόπο, ενώ υπάρχουν n τρόποι να σχεδιασθεί στην εξωτερική έδρα: σε κάθε μία περίπτωση το τόξο $(v_k, v_{(k \bmod n)+1})$ του $\tilde{\kappa}$ θα εμφανίζεται στην εξωτερική έδρα της επίπεδης σχεδίασης του $\kappa + b$. Για να καθορίσουμε την τελική επίπεδη σχεδίαση του G αρκεί να καθορίσουμε για κάθε γέφυρα αν θα σχεδιασθεί στην εσωτερική ή στην εξωτερική έδρα του $\tilde{\kappa}$. Αν μια γέφυρα δεν περιέχει κύκλους (δηλ. είναι δένδρο), τότε η σχεδίασή της (αφότου αποφασισθεί σε ποια έδρα του $\tilde{\kappa}$ θα γίνει) μπορεί να γίνει εύκολα. Αν περιέχει έναν κύκλο τότε εφαρμόζουμε αναδρομικά την παρακάτω διαδικασία.

Υπάρχουν τρεις παράγοντες που καθορίζουν το αν μια γέφυρα θα σχεδιασθεί στο εσωτερικό ή στο εξωτερικό του $\tilde{\kappa}$:

1. *Επιπεδότητα*: Αν δύο γέφυρες είναι ασύμβατες, τότε δεν μπορούν να σχεδιασθούν στην ίδια έδρα του $\tilde{\kappa}$, οπότε η τοποθέτηση της μιας εξ αυτών σε κάποια έδρα καθορίζει την τοποθέτηση της άλλης.
2. *Προσανατολισμός*: Έστω μια γέφυρα b και v, v' δύο διαφορετικοί συνδετικοί κόμβοι της b , ωρολογιακά διαδοχικοί επί του $\tilde{\kappa}$. Το τόξο (v, v') του $\tilde{\kappa}$, μαζί με ένα μονοπάτι στο εσωτερικό της b που συνδέει τον κόμβο v με τον v' , σχηματίζει έναν κύκλο c . Υπάρχουν δύο μόνο εφικτές περιπτώσεις σχεδίασης (βλ. Σχήμα 4.4.(i, ii)): (i) ο κύκλος κ είναι ομόρροπος με όλους τους δυνατούς κύκλους c , οπότε η b πρέπει να σχεδιασθεί στο εσωτερικό του $\tilde{\kappa}$. (ii) ο κ είναι αντίρροπος με όλους τους δυνατούς κύκλους c εκτός από έναν, έστω αυτόν που σχηματίζεται απ' το τόξο (v, v') , οπότε η b πρέπει να σχεδιασθεί στο εξωτερικό του $\tilde{\kappa}$, και κατά τέτοιον τρόπο ώστε να αφήνει το τόξο (v, v') στην εξωτερική έδρα της επίπεδης σχεδίασης του $\kappa + b$.

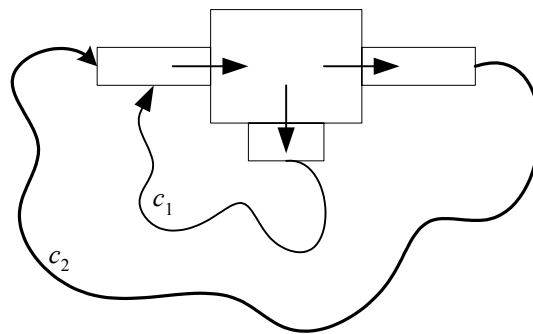


Σχήμα 4.4. Σχεδίαση μιας γέφυρας στην εσωτερική ή στην εξωτερική έδρα ενός κύκλου.

3. *Συνδεδετικοί κόμβοι:* Αν μια γέφυρα b περιέχει συνδεδετικούς κόμβους για οποιονδήποτε κύκλο, τότε οι κόμβοι αυτοί πρέπει να εμφανίζονται στην εξωτερική έδρα της σχεδίασης του $\kappa + b$, οπότε η b πρέπει να σχεδιασθεί στο εξωτερικό του $\tilde{\kappa}$, και μάλιστα κατά τέτοιον τρόπο ώστε να μην καλύπτονται τυχόντες συνδεδετικοί κόμβοι επί του κ .

Σχηματίζουμε το βοηθητικό γράφο $G^+(\kappa)$ του γράφου G ως προς τον κύκλο κ . Ο $G^+(\kappa)$ είναι ένας διμερής γράφος, αφού ο G είναι επίπεδος. Από τις περιπτώσεις 1, 2, 3 παραπάνω δίδουμε ένα “χρώμα” ‘in’ ή ‘out’ σε κάθε κόμβο-γέφυρα του $G^+(\kappa)$, που δηλώνει αν η γέφυρα αυτή θα σχεδιαστεί στο εσωτερικό ή στο εξωτερικό του $\tilde{\kappa}$ αντίστοιχα. Ελέγχοντας το πρόβλημα του διχρωματισμού του $G^+(\kappa)$ με βάση τα ανατεθέντα χρώματα, μπορούμε να καθορίσουμε την τοποθέτηση κάθε γέφυρας (εντός ή εκτός του $\tilde{\kappa}$), ή να καταλήξουμε στο ότι δεν υπάρχει συμβατή τοποθέτηση των γεφυρών. Αν αποφανθούμε θετικά για την τοποθέτηση μιας γέφυρας, συνεχίζουμε αναδρομικά (επαναλαμβάνοντας τα βήματα 1, 2, 3 παραπάνω για έναν κύκλο της γέφυρας) για να καθορίσουμε επακριβώς τον τρόπο σχεδίασης της. Επειδή η τοποθέτηση των γεφυρών ως προς έναν κύκλο είναι μοναδική (αν είναι εφικτή), μετά τον καθορισμό της (έδρας) σχεδίασής τους μπορούμε να ελέγξουμε: (i) αν είναι δυνατόν να ενώσουμε τους συνδεδετικούς κόμβους των γεφυρών με τους αντίστοιχους κόμβους επί των κύκλων (έλεγχος συνδεσιμότητας), (ii) αν οι έδρες που προκύπτουν έχουν τον προκαθορισμένο προσανατολισμό, και (iii) αν τηρούνται οι επιπλέον

περιορισμοί που προκύπτουν από τη γεωμετρική υπόσταση κάθε κόμβου ως ορθογώνιου πλαισίου. Για παράδειγμα, έχουμε αναφέρει ότι υπάρχουν δύο τρόποι σχεδίασης δύο ομόρροπων κύκλων, ανάλογα με το ποιος θα τοποθετηθεί στο εσωτερικό του άλλου (βλ. Σχήμα 4.3). Όπως φαίνεται όμως στην περίπτωση του Σχήμα 4.5, αν και οι κύκλοι c_1 , c_2 είναι ομόρροποι, ο c_1 πρέπει υποχρεωτικά να σχεδιασθεί στο εσωτερικό του c_2 και δεν μπορεί να γίνει το αντίθετο, γεγονός που επιβάλλεται από τη συγκεκριμένη γεωμετρία των ορθογωνίων και τον τρόπο που εφάπτονται.



Σχήμα 4.5. Περιορισμός στη σχεδίαση δύο κύκλων από τη γεωμετρική φύση των κόμβων-ορθογωνίων.

Για τον έλεγχο συνδεσιμότητας αρκεί να ελέγξουμε αν η σειρά με την οποία εμφανίζονται οι συνδετικοί κόμβοι επί μιας γέφυρας και επί του αντίστοιχου κύκλου είναι η ίδια ή η αντίστροφη, ανάλογα με το αν η γέφυρα έχει σχεδιασθεί εντός ή εκτός του κύκλου αντίστοιχα.

Συνοψίζουμε την ανάλυσή μας στον ακόλουθο (Pascal-like) ψευδοκώδικα:

```
function Placement( b:Bridge, k:Cycle;): in_out
{
  /* using algorithm Orient */
  Check the orientation of cycles of b+k;
  Return the placement /* 'in' ή 'out' */ of b w.r.t. k;
}
procedure BridgeLayout( b:Bridge, k:Cycle, p:in_out)
{
  if ( b contains a cycle c) then
  { Let  $b_i$ ,  $i=1, \dots, \#(c)$ , be the bridges of b w.r.t. c;
    Mark the connect-nodes of  $b_i$  w.r.t. c;
    for  $i= 1.. \#(c)$ 
       $p_i :=$  Placement(  $b_i$ , c);
```

```

    if ( all  $p_i$  respect connect-nodes and planarity)
      /* that is:
      /* for the connect-nodes */
      if (  $b_i$  contains connect-nodes) then
        placement_of_ $b_i$  := 'out';
      if ( placement_of_ $b_i$  = 'out') then
         $b_i$  must not cover connect-nodes of  $c$ ;
      /* for planarity */
        bridges both 'in' or 'out' must not be
        incompatible;
      */
    then
      for  $i = 1..#(c)$ 
        BridgeLayout(  $b_i$ ,  $c$ ,  $p_i$ );
    else
      Reject;
  }
  Check connect-nodes of  $b$  and  $k$  (with placement  $p$ 
  w.r.t.  $k$ ) for connectability;
}
procedure OrientedPlanar(  $G$ : Layout_Graph)
{
  Let  $k$  be the 'N-E-S-W' cycle of  $G$ ;
  BridgeLayout(  $G-k$ ,  $k$ , 'in');
}

```

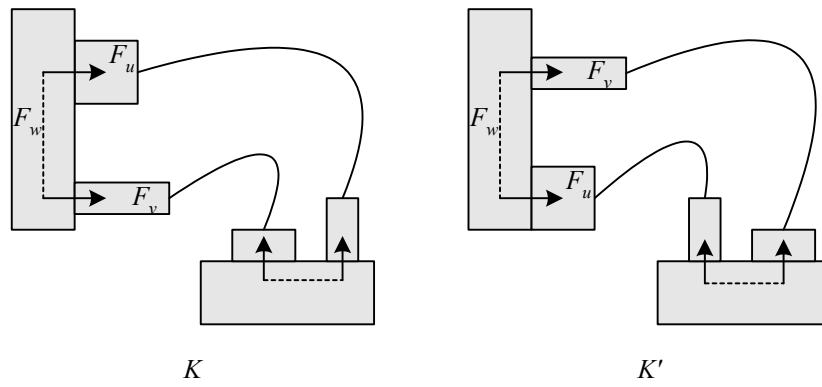
Όλες οι λειτουργίες που περιλαμβάνονται στους παραπάνω αλγορίθμους (εύρεση κύκλων και γεφυρών, προσανατολισμός κύκλων, έλεγχος τοποθέτησης μιας γέφυρας, σύγκριση της σειράς εμφάνισης των συνδετικών κόμβων, και έλεγχος του προβλήματος του διχρωματισμού) μπορούν να περατωθούν σε πολωνυμικό χρόνο. Ο αλγόριθμος στο σύνολό του εκτελείται σε πολωνυμικό χρόνο ως προς το μέγεθος του γράφου G , αφού εκτελείται αναδρομικά σε στιγμότυπα αυστηρά μικρότερου μεγέθους κάθε φορά, το συνολικό άθροισμα των οποίων είναι αυστηρά μικρότερο του αρχικού. \square

§ 4.4. Επίλυση της Αμφισημίας των Μη Προσανατολίσιμων Κύκλων

Έστω λ η περιγραφή ενός κύκλου k του G . Αν ο k είναι μη προσανατολίσιμος, τότε θα υπάρχουν δύο κύκλοι πλαισίων K και K' τέτοιοι ώστε $\lambda \in cw(K) \wedge \lambda \in ccw(K')$. Εφαρμόζοντας κατάλληλα το μετασχηματισμό $Push[\cdot]$ (βλ. σελ. 27) μπορούμε να μετατρέψουμε τον K

έτσι ώστε να περιέχει μια βηματική γραμμή $\zeta(K)$ ελαχίστου μήκους, η περιγραφή της οποίας προκύπτει από την λ προσθέτοντας ένα βήμα τύπου H (αντ. V) ανάμεσα σε δύο διαδοχικά σύμβολα της μορφής UD ή DU (αντ. RL ή LR). Για ένα σημείο q μιας βηματικής γραμμής τ , δηλώνουμε ως $a(q)$ τη **γωνία** ($\pm 90^\circ$) που σχηματίζουν τα δύο βήματα της τ που τελειώνουν και αρχίζουν στο q .

Έστω $\zeta(K')$ η αντίστοιχη βηματική γραμμή για τον K' , και για κάθε σημείο p της $\zeta(K)$, έστω p' το αντίστοιχο σημείο της $\zeta(K')$. Έστω Δ το σύνολο των σημείων της $\zeta(K)$ για τα οποία ισχύει ότι $a(p) \neq a(p')$, δηλ. ισχύει ότι $a(p) = -a(p')$. Τα σημεία του Δ μπορεί να είναι μόνο άκρα βημάτων τύπου H ή V . Το άθροισμα όλων των γωνιών $a(p)$ (αντ. των $a(p')$) πρέπει να ισούται με $+360^\circ$ (αντ. -360°), άρα το άθροισμα όλων των $a(p)$, για τα $p \in \Delta$, πρέπει επίσης να ισούται με $+360^\circ$. Συνεπώς υπάρχει τουλάχιστον ένα (για την ακρίβεια δύο) βήμα τύπου H ή V στη $\zeta(K)$, δηλ. υπάρχουν δύο πλαίσια F_u, F_v που εφάπτονται στην ίδια, οριζόντια ή κατακόρυφη αντίστοιχα, πλευρά ενός τρίτου πλαισίου F_w (βλ. Σχήμα 4.6). Έτσι, χρησιμοποιώντας τη διάταξη των πλαισίων F_u, F_v ως προς το F_w που μας προσφέρει η διάταξη $\gamma(\cdot)$ (βλ. ορισμό του προβλήματος της ΣΧΕΔΙΑΣΗΣ ΠΛΑΙΣΙΩΝ, § 2.1), μπορούμε να προσανατολίσουμε τον κύκλο κ και να επιλέξουμε μεταξύ του K και του K' . Αφού, λοιπόν, επιλύσουμε το πρόβλημα των μη προσανατολίσιμων κύκλων, μπορούμε, σύμφωνα με τους αλγόριθμους της προηγούμενης παραγράφου, να αποφασίσουμε αν ο γράφος G επιδέχεται μια κατάλληλη 'προσανατολισμένη' επίπεδη σχεδίαση.



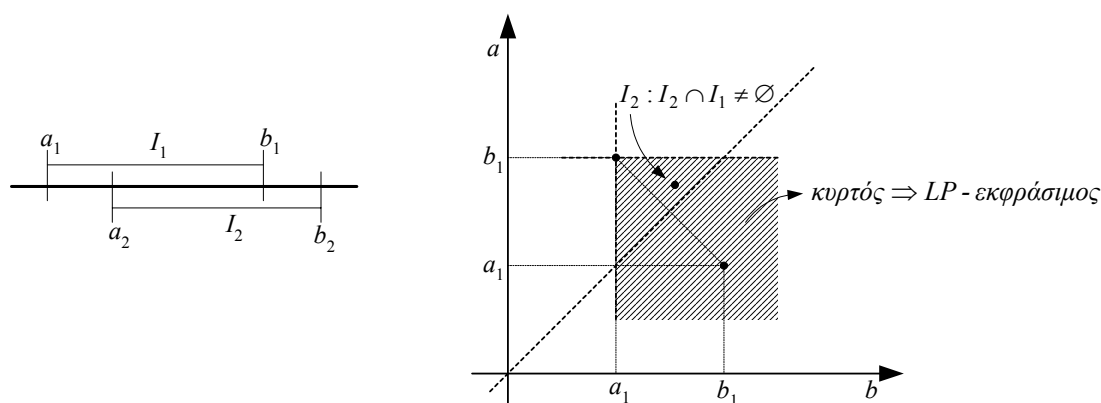
Σχήμα 4.6. Η μη προσανατολισσιμότητα ενός κύκλου πλαισίων.

Κεφάλαιο 5. Φάση III: Υλοποίηση των Εδρών

Έστω ότι έχουμε απαντήσει θετικά στο πρόβλημα της σχεδίασης ενός χωροταξικού γράφου G , ώστε κάθε μεμονωμένη έδρα να μπορεί να σχεδιασθεί σαν ένας απλός κύκλος πλαισίων. Απομένει στη συνέχεια να ελέγξουμε αν μπορούμε να υλοποιήσουμε κατάλληλα τις έδρες του G , δηλ. να ελέγξουμε: (i) αν είναι δυνατόν να σχεδιασθούν όλοι οι κόμβοι του G ως πλαίσια, τα οποία (ii) εφάπτονται σύμφωνα με την ετικέτα κάθε κατευθυνόμενης ακμής και δεν επικαλύπτονται. Ονομάζουμε τούτο το πρόβλημα ως πρόβλημα *Υλοποίησης των Εδρών* (*Face Realizability*), και το επιλύουμε μέσω του γραμμικού προγραμματισμού (linear programming).

§ 5.1. Εισαγωγικές Έννοιες

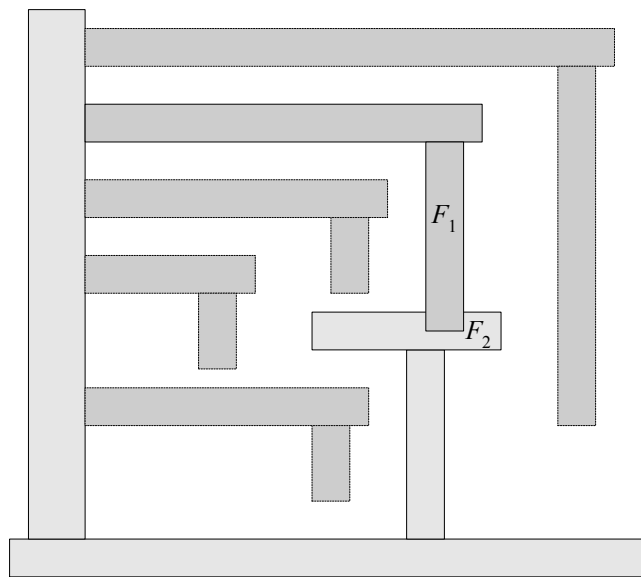
Έστω δύο διαστήματα $I_1 = (a_1, b_1)$, $I_2 = (a_2, b_2)$ (έστω παράλληλα στον άξονα των τετημένων, με την ίδια τεταγμένη) (βλ. Σχήμα 5.1). Για να υφίστανται αυτά τα δύο διαστήματα θα πρέπει να ισχύουν οι ανισώσεις $a_1 < b_1$ και $a_2 < b_2$. Μπορούμε να παραστήσουμε γραμμικά το γεγονός ότι τα δύο διαστήματα τέμνονται, με τις ανισώσεις $a_2 < b_1$ και $a_1 < b_2$.



Σχήμα 5.1. Δύο τεμνόμενα διαστήματα I_1, I_2 .

Αναπαριστούμε κάθε πλαίσιο με δύο σημεία (x_l, y_u) , (x_r, y_d) για την επάνω-αριστερή και την κάτω-δεξιά γωνία του αντίστοιχα, για τα οποία πρέπει να ισχύουν οι γραμμικές ανισώσεις: $x_l \leq x_r \wedge y_d \leq y_u$ (περιορισμοί πλαισίου). Έτσι, μπορούμε να εκφράσουμε το γεγονός ότι δύο πλαίσια F , F' εφάπτονται και η κατεύθυνση της επαφής τους είναι λ.χ. $dir(F, F') = R$, με το εξής γραμμικό σύστημα: $x_r = x_l \wedge y'_d < y_u \wedge y_d < y'_u$ (περιορισμοί επαφής).

Δεν μπορούμε όμως να εκφράσουμε γραμμικά το ότι δύο πλαίσια δεν επικαλύπτονται. Για παράδειγμα, στο Σχήμα 5.2, θα πρέπει να εξασφαλίσουμε ότι τα πλαίσια F_1 , F_2 δε θα επικαλύπτονται. Όπως φαίνεται όμως, το F_1 μπορεί κάλλιστα να σχεδιασθεί είτε προς τα δεξιά, ή προς τα επάνω, ή αριστερά ή κάτω του F_2 . Όλες αυτές οι περιπτώσεις αποτελούν εφικτούς τρόπους σχεδίασης, και δεν μπορούμε να επιλέξουμε έναν και να τον επιβάλουμε.



Σχήμα 5.2. Αδυναμία γραμμικής έκφρασης της μη επικαλυψιμότητας δύο πλαισίων.

Θα εξασφαλίσουμε τη γραμμική έκφραση της μη επικαλυψιμότητας με έναν έμμεσο τρόπο.

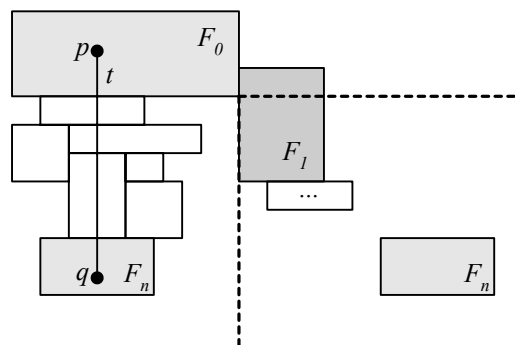
Ονομάζουμε ένα σύνολο πλαισίων S **κατάλληλα εφαπτόμενο** αν: (i) κάθε σημείο του περιγράμματος ενός πλαισίου του S αποτελεί σημείο επαφής με ένα άλλο πλαίσιο του S (δηλ. τα πλαίσια είναι **πλήρως εφαπτόμενα**), και (ii) για κάθε δύο εφαπτόμενα πλαίσια έχουμε ένα σύνολο

γραμμικών περιορισμών που εξασφαλίζουν ότι τα πλαίσια αυτά είναι μη επικαλυπτόμενα. (Για να μετατρέψουμε ένα σύνολο πλαισίων σε κατάλληλα εφαπτόμενο (όσον αφορά στα ‘εξωτερικά’ πλαίσια), προσθέτουμε κατάλληλα ημι-ανοιχτά πλαίσια — βλ. ορισμό του προβλήματος της ΣΧΕΔΙΑΣΗΣ ΠΛΑΙΣΙΩΝ, § 2.1).

Θα αποδείξουμε ότι σε ένα κατάλληλα εφαπτόμενο σύνολο πλαισίων ισχύει η ιδιότητα της μη επικαλυψιμότητας για δύο οποιαδήποτε πλαίσια.

Λήμμα 5.1. Σε ένα κατάλληλα εφαπτόμενο σύνολο πλαισίων S , οι υπάρχοντες περιορισμοί εξασφαλίζουν ότι δύο οποιαδήποτε πλαίσια είναι μη επικαλυπτόμενα.

Απόδειξη: Έστω F_0, F_n δύο πλαίσια του S . Αν υπάρχει ένα (οριζόντιο ή κατακόρυφο) ευθύγραμμο τμήμα $t = [p, q]$, όπου το σημείο p να ανήκει στο πλαίσιο F_0 και το q στο F_n (βλ. Σχήμα 5.3), τότε, (αφού τα πλαίσια του S είναι πλήρως εφαπτόμενα) θα υπάρχει μια αλυσίδα εφαπτόμενων πλαισίων κατά μήκος του t με πρώτο πλαίσιο το F_0 και τελευταίο το F_n , οπότε οι υπάρχοντες περιορισμοί (για τα διαδοχικά εφαπτόμενα πλαίσια) εξασφαλίζουν (μεταβατικά) ότι τα F_0, F_n είναι μη επικαλυπτόμενα.



Σχήμα 5.3. Περιορισμοί επαφής πλαισίων.

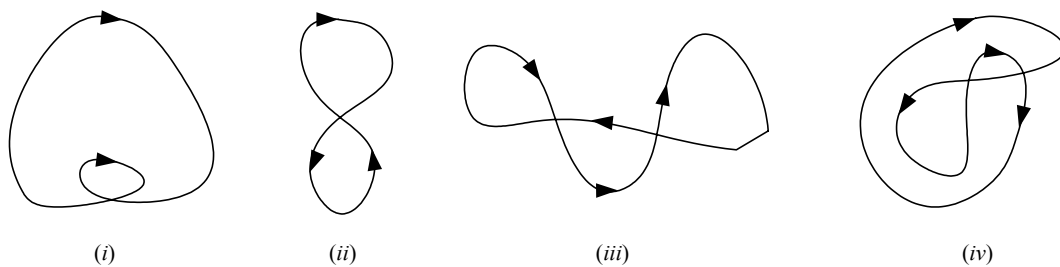
Αν δεν υπάρχει ένα τέτοιο ευθύγραμμο τμήμα, τότε το F_n έγκειται σε ένα ‘τεταρτημόριο’ που ορίζεται από μία από τις τέσσερις γωνίες του F_0 και επεκτείνεται εκτός αυτού. Χωρίς απώλεια γενικότητας ας υποθέσουμε ότι έγκειται στο κάτω-δεξιό τεταρτημόριο του F_0 . Αφού τα πλαίσια του S είναι πλήρως εφαπτόμενα, θα υπάρχει ένα πλαίσιο F_1 που θα εφάπτεται προς τα δεξιά (η προς τα κάτω) του F_0 και θα επεκτείνεται στο εσωτερικό του

προηγούμενου τεταρτημορίου. Το πλαίσιο F_n δεν μπορεί να βρίσκεται 'προς τα επάνω' ούτε 'προς τα αριστερά' του F_1 , οπότε για να αποδείξουμε ότι τα πλαίσια F_0 , F_n είναι μη επικαλυπτόμενα μπορούμε να εφαρμόσουμε αναδρομικά την ίδια διαδικασία για τα F_1 , F_n . Το πλαίσιο F_1 βρίσκεται πλησιέστερα στο F_n απ' ό τι το F_0 , οπότε η διαδικασία αυτή έχει σημείο τερματισμού. \square

Δεδομένου ενός χωροταξικού γράφου G και ενός συνόλου πλαισίων S που αποτελεί μια εφικτή λύση (αν υπάρχει) του προβλήματος της ΣΧΕΔΙΑΣΗΣ ΠΛΑΙΣΙΩΝ του G , μπορούμε να μετατρέψουμε το S σε κατάλληλα εφαπτόμενο σύνολο προσθέτοντας βοηθητικά πλαίσια, σύμφωνα με την έννοια των σκελετών που εισάγουμε στη συνέχεια.

Η Έννοια των Σκελετών

Ας θεωρήσουμε μια κλειστή καμπύλη που διέρχεται από το εσωτερικό των πλαισίων ενός κύκλου, η οποία αποτελεί μια απλοϊκή αναπαράσταση του κύκλου. Αν η καμπύλη αυτή τέμνει τον εαυτό της, τότε ο αντίστοιχος κύκλος δεν μπορεί να παρασταθεί με μη επικαλυπτόμενα, εφαπτόμενα πλαίσια. Υπάρχουν τέσσερις τύποι καμπυλών που τέμνουν τον εαυτό τους, όπως φαίνεται στα Σχήμα 5.4.(i, ii, iii, iv).

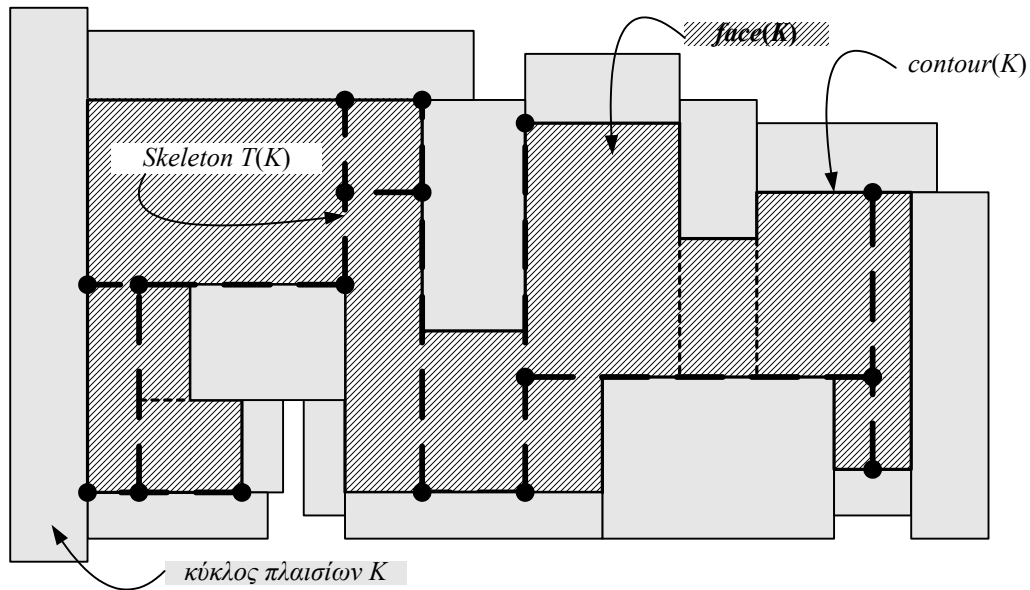


Σχήμα 5.4. Τέσσερις τύποι μη απλών καμπυλών.

Στις περιπτώσεις (i) και (ii) η τομή στην καμπύλη είναι αναπόφευκτη, και οι κύκλοι πλαισίων που τους αντιστοιχούν δεν αναγνωρίζονται από τη γραμματική μας (βλ. Κεφάλαιο 3) (όπως και θα έπρεπε). Στις περιπτώσεις όμως (iii) και (iv) οι καμπύλες μπορούν να σχεδιασθούν χωρίς να τέμνουν τον εαυτό τους, κάτι που πρέπει να εξασφαλίσουμε για τη σχεδίαση των αντίστοιχων κύκλων πλαισίων, που (φυσιολογικά) αναγνωρίζονται από τη γραμματική μας. Για την περίπτωση (iv), εξασφαλίζουμε ότι ένας κύκλος

πλαισίων δε θα τέμνει τον εαυτό του με αυτόν τον τρόπο, μέσα από τους περιορισμούς επαφής για τα πλαίσια κάποιου δεύτερου κύκλου ο οποίος θα συνορεύει κατάλληλα με τον πρώτο (θα έχει κοινό ένα τμήμα του περιγράμματος που σχηματίζει την “κοιλότητα” που φαίνεται στο σχήμα). Δεν έχουμε όμως τρόπο να εξασφαλίσουμε ότι ένας κύκλος πλαισίων δε θα τέμνει τον εαυτό του όπως φαίνεται στην περίπτωση (iii). Για να εξασφαλίσουμε λοιπόν ότι ένας κύκλος πλαισίων “θα διαθέτει εσωτερικό”, εισάγουμε την έννοια των σκελετών.

Κάθε απλός κύκλος πλαισίων K διαιρεί το επίπεδο σε τρεις περιοχές: στα εσωτερικά σημεία των πλαισίων του K , σε μια ανοικτή περιοχή, και σε μια φραγμένη περιοχή, την οποία θα ονομάζουμε *έδρα* του K (συμβ. $face(K)$) (βλ. Σχήμα 5.5). Δηλώνουμε ως *περίγραμμα* του K (συμβ. $contour(K)$) την κλειστή βηματική γραμμή η οποία φράσσει την περιοχή $face(K)$. Ορίζουμε έναν *σκελετό* $T(K)$ (*skeleton*) του K ως ένα σύνολο από οριζόντια ή ευθύγραμμα τμήματα, τα οποία θα ονομάζουμε *άξονες* του σκελετού $T(K)$, τέτοια ώστε: (i) ο γράφος τομής τους (δηλ. ο γράφος που έχει έναν κόμβο για κάθε άξονα και μια ακμή για κάθε τομή δύο αξόνων) είναι δένδρο, και (ii) κάθε άκρο ενός άξονα βρίσκεται είτε επί του περιγράμματος $contour(K)$ ή επί ενός άλλου άξονα. Ένα *πλαίσιο στήριξης* (*supporting frame*) για έναν σκελετό $T(K)$, θα είναι ένα (βοηθητικό) πλαίσιο (διαφορετικό από τα πλαίσια που αντιστοιχούν σε κάθε κόμβο του G) του οποίου μια πλευρά θα βρίσκεται επί ενός τμήματος του $contour(K)$ και η απέναντι πλευρά θα βρίσκεται επί ενός άξονα του $T(K)$, τα οποία (τμήμα και άξονα) θα λέμε ότι *στηρίζει*. Τα υπόλοιπα πλαίσια θα ονομάζονται *κανονικά* (*normal*). Ένας *σκελετός στήριξης* του κύκλου πλαισίων K είναι ένας σκελετός $T(K)$ μαζί με ένα σύνολο μη επικαλυπτόμενων πλαισίων στήριξης του $T(K)$, η ένωση των οποίων αποτελεί την έδρα $face(K)$.



Σχήμα 5.5. Ένας σκελετός και τα πλαίσια στήριξης (που σχηματίζουν την $face(K)$) ως προς το $contour(K)$ ενός κύκλου πλαισίων K (υπολογισμένος (σκελετός) σύμφωνα με το Λήμμα 5.3).

Ο λόγος που εισάγαμε την έννοια των σκελετών καταδεικνύεται στο ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 5.2. Έστω F_G ένα σύνολο πλαισίων που αποτελεί μια λύση του προβλήματος της ΣΧΕΔΙΑΣΗΣ ΠΛΑΙΣΙΩΝ για ένα χωροταξικό γράφο G , μαζί με ένα σκελετό στήριξης για κάθε έδρα αυτού. Το σύνολο όλων των πλαισίων (κανονικών και στήριξης) αποτελεί ένα κατάλληλα εφαπτόμενο σύνολο πλαισίων.

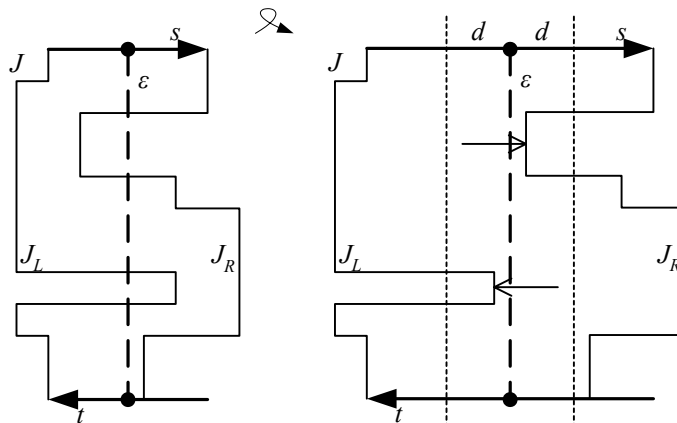
Απόδειξη: Καταρχήν, είναι εύκολα αντιληπτό μέσω γεωμετρικής εποπτείας ότι δεν απομένει ελεύθερος-ακάλυπτος χώρος στην τελική επίπεδη σχεδίαση του G (θυμηθείτε ότι η ‘εξωτερική’ έδρα σχηματίζεται με τέσσερα ημιανοικτά πλαίσια). Ένα κανονικό πλαίσιο εφάπτεται πλήρως είτε με ένα ημιανοικτό πλαίσιο, ή με άλλα κανονικά πλαίσια, ή με πλαίσια στήριξης, και ήδη δείξαμε ότι εύκολα μπορούμε να διατυπώσουμε τους περιορισμούς επαφής για δύο πλαίσια. Αντίστοιχα, ένα πλαίσιο στήριξης εφάπτεται πλήρως είτε με ένα κανονικό πλαίσιο ή με άλλα πλαίσια στήριξης (οπότε διατυπώνουμε ανάλογους περιορισμούς επαφής), διαφορετικά, διαχωρίζονται από έναν άξονα του σκελετού. Να σημειώσουμε ότι ο τρόπος με τον οποίο εφάπτονται τα πλαίσια είναι πλήρως καθορισμένος από το συγκεκριμένο στιγμιότυπο (χωροταξικό γράφο) του προβλήματος της ΕΠΙΠΕΔΗΣ ΣΧΕΔΙΑΣΗΣ, από την

τελική επίπεδη σχεδίαση που λαμβάνουμε ως λύση του προβλήματος της ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΕΝΗΣ ΕΠΙΠΕΔΟΤΗΤΑΣ (φάση II), και από τους σκελετούς στήριξης που έχουν υπολογισθεί. \square

Για την εύρεση ενός σκελετού στήριξης ισχύει το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 5.3. Για κάθε απλό κύκλο πλαισίων μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν σκελετό στήριξης σε πολυωνυμικό χρόνο.

Απόδειξη: Θα χρησιμοποιήσουμε ορισμένες έννοιες που ορίστηκαν για βηματικές γραμμές (βλ. απόδειξη για το Λήμμα 3.2, σελ. 30): Έστω J μια κλειστή βηματική γραμμή και s, t δύο βήματα της J τέτοια ώστε: (i) το s είναι τύπου R και το t είναι τύπου L ; (ii) το s βρίσκεται προς τα επάνω σε σχέση με το t , και (iii) τα s και t μπορούν να ενωθούν με ένα κατακόρυφο ευθύγραμμο τμήμα ε (βλ. Σχήμα 5.6).



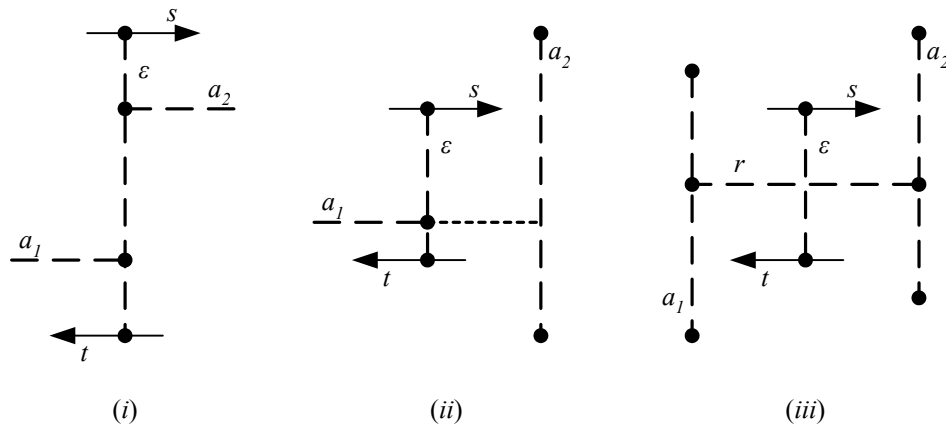
Σχήμα 5.6. Ο μετασχηματισμός $V\text{-Clear}(\cdot)$.

Ορίζουμε το μετασχηματισμό $V\text{-Clear}[J, s, t]$ ως εξής: Έστω J_L τα βήματα της J που οδηγούν από το t στο s , και J_R τα βήματα που οδηγούν από το s στο t . Υπάρχει (η ανεπιθύμητη) περίπτωση το τμήμα ε να τέμνει κάποια οριζόντια βήματα της J_L ή/και της J_R , και θα δείξουμε ότι μπορούμε να καταργήσουμε τέτοιες τομές. *Επεκτείνουμε* την J κατά d προς τα αριστερά και προς τα δεξιά του ε (κατ' αναλογία με το μετασχηματισμό $x\text{-Expand}[\cdot]$ που ορίστηκε για ένα σύνολο πλαισίων — βλ. σελ. 26), δημιουργώντας μια ζώνη πλάτους $2d$. Έτσι, μπορούμε να συμπτύξουμε τα τμήματα εκείνα της J_L που βρίσκονται προς τα δεξιά του ε μετακινώντας τα κατά d προς τα

αριστερά, οπότε, αν το d είναι αρκετά μεγάλο, το ε παύει να τέμνει την J_L . Συμμετρικά μπορούμε να κάνουμε το τμήμα ε να μην τέμνει ούτε την J_R , δημιουργώντας έτσι μια ‘καθαρή’ συνδετική γραμμή από το s στο t κατά μήκος του ε . Παρόμοια ορίζεται ο μετασχηματισμός $H\text{-Clear}[J, s, t]$ για ένα οριζόντιο ευθύγραμμο τμήμα ε . Οι μετασχηματισμοί αυτοί επεκτείνονται για ένα σύνολο πλαισίων που αποτελούν έναν απλό κύκλο K , όπου η βηματική γραμμή J θα είναι το περίγραμμα $\text{contour}(K)$ του K , και θα θέλαμε να ενώσουμε δύο τμήματα s, t του K με έναν άξονα ε του σκελετού $T(K)$.

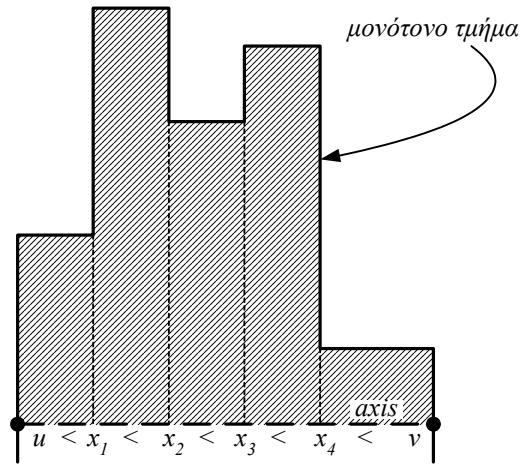
Ο αλγόριθμός μας είναι του τύπου «διαίρει και βασίλευε». Το λήμμα μας ισχύει κατά τετριμμένο τρόπο για κύκλους πλαισίων μήκους 3 ή 4. Ένας κύκλος K μήκους τουλάχιστον 5 θα περιέχει μία τουλάχιστον s -στροφή στο περίγραμμά του $\text{contour}(K)$ (αλλιώς το λήμμα μας προφανώς ισχύει). Χρησιμοποιούμε ένα ευθύγραμμο τμήμα ε κατά μήκος της γραμμής που ορίζεται από το μεσαίο τμήμα αυτής της s -στροφής, για να διαιρέσουμε («διαίρει») το $\text{contour}(K)$ σε δύο μέρη C_1, C_2 , το μέγεθος των οποίων είναι *αυστηρά μικρότερο* απ’ αυτό του $\text{contour}(K)$. Εφαρμόζουμε κατάλληλα τους μετασχηματισμούς $H_V\text{-Clear}[\cdot]$ ώστε το ε να μην τέμνει κανένα τμήμα του $\text{contour}(K)$. Υπολογίζουμε αναδρομικά τους σκελετούς $T(C_1), T(C_2)$, και τους συγκολλούμε («βασίλευε») με έναν από τους εξής τρεις δυνατούς τρόπους (βλ. Σχήμα 5.7.(i, ii, iii): (i) αν υπάρχουν δύο άξονες a_1, a_2 των σκελετών $T(C_1)$ και $T(C_2)$ αντίστοιχα, με ένα άκρο απ’ τον καθένα να βρίσκεται επί του τμήματος ε , τότε το ίδιο το ε γίνεται ένας άξονας που συγκολλά τους δύο σκελετούς, διαφορετικά (ii) αν ένας άξονας ενός μόνο σκελετού έχει ένα άκρο του επί του ε , έστω ένας άξονας a_1 του $T(C_1)$, τότε υπάρχει ένα τμήμα του ε που περιέχει αυτό το άκρο και που στηρίζεται από ένα πλαίσιο στήριξης του $T(C_2)$, το οποίο εφάπτεται με έναν άξονα a_2 του $T(C_2)$, οπότε μπορούμε να επεκτείνουμε τον άξονα a_1 ενώνοντάς τον με τον a_2 , συγκολλώντας τους δύο σκελετούς, διαφορετικά (iii) αν κανένας άξονας των δύο σκελετών δεν έχει ένα άκρο επί του ε , τότε θα υπάρχει ένα τμήμα του ε που στηρίζεται από δύο πλαίσια στήριξης που εφάπτονται, αντίστοιχα, με έναν άξονα a_1 του $T(C_1)$ και έναν άξονα a_2 του

$T(C_2)$, οπότε μπορούμε να προσθέσουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα r κάθετο στους δύο άξονες, που συγκολλά τους δύο σκελετούς. Στις περιπτώσεις (ii) και (iii) κάποια πλαίσια στήριξης μπορεί να διαιρεθούν κατάλληλα.



Σχήμα 5.7. Τρεις τρόποι συγκόλλησης δύο σκελετών.

Ορίζουμε ένα **οριζόντια** (αντ. **κατακόρυφο**) **μονότονο** τμήμα του περιγράμματος $\text{contour}(K)$, ως ένα σύνολο από διαδοχικά βήματα του $\text{contour}(K)$, του οποίου τα οριζόντια (αντ. κατακόρυφα) βήματα είναι τύπου μόνο R ή μόνο L (αντ. μόνο U ή μόνο D) (βλ. Σχήμα 5.8). Ο αναδρομικός υπολογισμός των σκελετών $T(C_1)$ και $T(C_2)$ σταματά όταν το C_1 ή το C_2 , αντίστοιχα, σχηματίζουν ένα μονότονο τμήμα ως προς το ‘τμήμα διαίρεσης’ ε . Αν n είναι το πλήθος των βημάτων του $\text{contour}(K)$, τότε το μέγεθος του σκελετού στήριξης είναι της τάξης $O(n)$ και μπορεί να υπολογιστεί σε χρόνο $O(n^2)$.



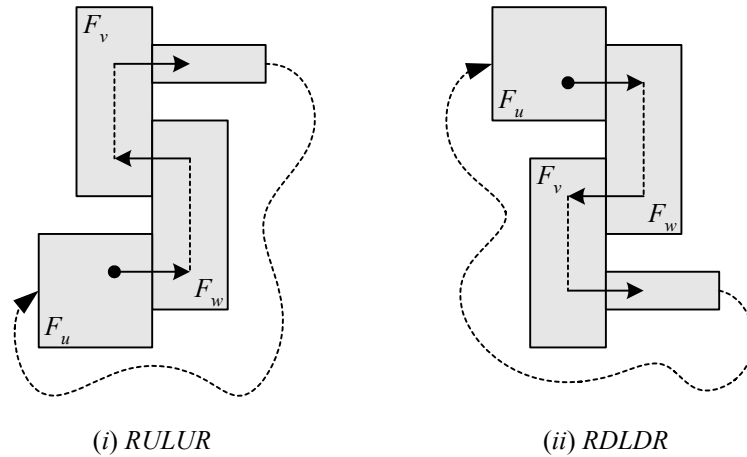
Σχήμα 5.8. Ένα μονότονο τμήμα ενός περιγράμματος $\text{contour}(K)$.

□

Προς την επίλυση του προβλήματός μας θα μας φανούν απαραίτητα τα δύο παρακάτω λήμματα.

Λήμμα 5.4. Σε ένα στιγμιότυπο του προβλήματος της ΕΠΙΠΕΔΗΣ ΣΧΕΔΙΑΣΗΣ, η περιγραφή ενός κύκλου πλαισίων K ορίζει μοναδικά την περιγραφή του περιγράμματος $\text{contour}(K)$.

Απόδειξη: Η μόνη αμφισημία μπορεί να προέλθει από τμήματα της περιγραφής του K της μορφής RLR (και των συμμετρικών περιπτώσεων), που δημιουργούν ένα αντίστοιχο τμήμα της περιγραφής του $\text{contour}(K)$ της μορφής $RVLVR$, όπου τα δύο V μπορεί να ισοδυναμούν με U ή D (βλ. Σχήμα 5.9). Στην περίπτωση όμως αυτή μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη διάταξη $\gamma(\cdot)$ που έχει ανατεθεί στους κόμβους του συγκεκριμένου χωροταξικού γράφου και να επιλύσουμε την αμφισημία (βλ. ορισμό του χωροταξικού γράφου, § 2.1).



Σχήμα 5.9. Αμφισημία της μορφής $RVLVR$, επιλυόμενη από τη διάταξη $\gamma(\cdot)$.

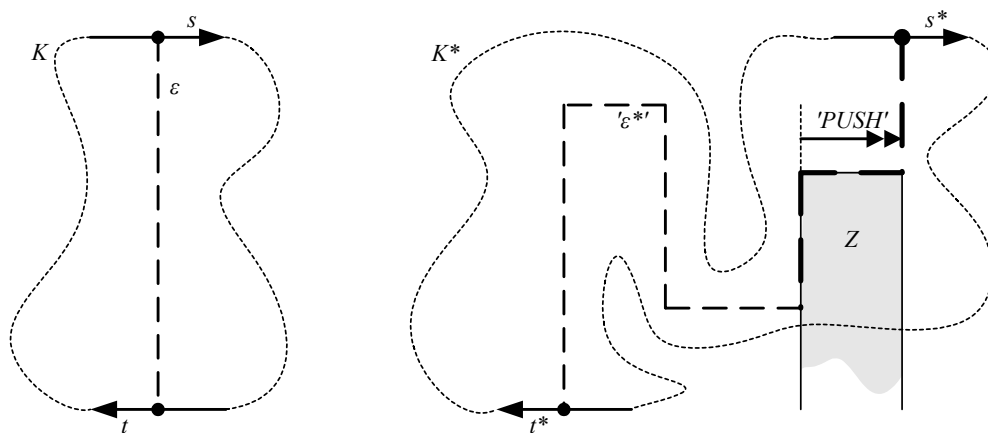
□

Λήμμα 5.5. Έστω F_G ένα σύνολο πλαισίων που αποτελεί μια λύση του προβλήματος της ΣΧΕΔΙΑΣΗΣ ΠΛΑΙΣΙΩΝ για ένα χωροταξικό γράφο G , και K^* ένας απλός κύκλος πλαισίων που αποτελεί μια έδρα του G . Μπορούμε να σχηματίσουμε έναν σκελετό στον K^* χωρίς να επηρεάσουμε κανέναν σκελετό που έχει ήδη σχηματισθεί σε άλλες έδρες του G .

Απόδειξη: Εκτελούμε τον αλγόριθμο του Λήμμα 5.3 σε ένα αντίγραφο K του K^* . Το ευθύγραμμο τμήμα ε που διαιρεί τον κύκλο K σε δύο μέρη σύμφωνα με τον αλγόριθμο, τέμνει δύο βήματα s και t του περιγράμματος $\text{contour}(K)$. Θα δείξουμε ότι μπορούμε να μετασχηματίσουμε το σύνολο F_G , έτσι ώστε τα αντίστοιχα τμήματα s^* και t^* του $\text{contour}(K^*)$ να μπορούν επίσης να ενωθούν με ένα ευθύγραμμο τμήμα ε^* .

Είδαμε ότι τα s και t μπορούν να ενωθούν με ένα τμήμα ε , το οποίο μπορούμε να θεωρήσουμε ως μια ανοικτή βηματική γραμμή με συνολική στροφή 0° . Την ίδια συνολική στροφή έχει το τμήμα εκείνο του $\text{contour}(K)$ που ενώνει το s με το t , άρα, σύμφωνα με το Λήμμα 5.4, την ίδια στροφή θα έχει το αντίστοιχο τμήμα του $\text{contour}(K^*)$ που ενώνει το s^* με το t^* . Συνεπώς τα s^* και t^* μπορούν επίσης να ενωθούν με μια βηματική γραμμή συνολικής στροφής 0° . Σε μια (ανοικτή) βηματική γραμμή συνολικής στροφής 0° και μήκους μεγαλύτερο του 1, θα εμφανίζεται μια s -στροφή. Σχηματίζουμε μια ζώνη σημείων με βάση ένα ευθύγραμμο τμήμα στο

εσωτερικό της έδρας $face(K^*)$, η οποία (βάση) περιλαμβάνει το μεσαίο βήμα αυτής της s -στροφής, και εφαρμόζουμε κατάλληλα το μετασχηματισμό $Push[\cdot]$ έτσι ώστε το πρώτο και το τρίτο βήμα της s -στροφής να συμπτυχθούν σε ένα (βλ. Σχήμα 5.10). Επαναλαμβάνοντας τούτη τη διαδικασία όσες φορές χρειάζεται, μπορούμε να απαλείψουμε όλες τις s -στροφές και να ενώσουμε τα s^* και t^* με ένα ευθύγραμμο τμήμα ε^* . Αφού οι μετασχηματισμοί $Push[\cdot]$ εκτελούνται σε μια ζώνη σημείων με βάση στο εσωτερικό της $face(K^*)$, οι σκελετοί που έχουν σχηματισθεί σε άλλες έδρες του G παραμένουν ανεπηρέαστοι. Μπορούμε δηλαδή να εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο του Λήμμα 5.3 επί του K^* όπως και επί του αντιγράφου K , και να σχηματίσουμε στον K^* έναν σκελετό παρόμοιο με αυτόν που υπολογίσαμε για τον K όταν τον εξετάζαμε ανεξάρτητα από τους άλλους κύκλους-έδρες του G .



Σχήμα 5.10. Ενώνοντας τα τμήματα s^* και t^* του K^* .

□

§ 5.2. Επίλυση του Προβλήματος

Το *τρίτο σημαντικό αποτέλεσμα* της εργασίας μας αποτελεί η λύση στο πρόβλημα της Υλοποίησης των Εδρών, η οποία συνοψίζεται στο τελευταίο μας θεώρημα.

Θεώρημα 5.1. Έστω G ένας χωροταξικός γράφος. Μπορούμε να σχηματίσουμε σε πολυωνυμικό χρόνο ένα γραμμικό πρόγραμμα Φ τέτοιο ώστε, αν το πρόβλημα της ΕΠΙΠΕΔΗΣ ΣΧΕΔΙΑΣΗΣ του G έχει λύση, τότε το Φ είναι εφικτό.

Απόδειξη: Αν δεν είναι εφικτή μια επίπεδη σχεδίαση του G όπως περιγράψαμε στη Φάση II, τότε απλώς απορρίπτουμε το συγκεκριμένο στιγμιότυπο του προβλήματός μας, ειδάλλως υπολογίζουμε έναν σκελετό για κάθε έδρα.

Οι *μεταβλητές* του γραμμικού προγράμματος Φ είναι οι εξής: τέσσερις για κάθε πλαίσιο (κανονικό ή στήριξης), και τρεις για κάθε άξονα κάθε σκελετού.

Οι *περιορισμοί* του Φ είναι οι εξής:

- Δύο για κάθε πλαίσιο, που εκφράζουν τη διάταξη των άκρων του (περιορισμοί πλαισίου).
- Ένας για κάθε ακμή του G , που εκφράζει την επαφή μεταξύ δύο κανονικών πλαισίων (περιορισμοί επαφής).
- Ένας για κάθε άξονα κάθε σκελετού, που εκφράζει τη διάταξη των άκρων του καθώς και την επαφή μεταξύ δύο πλαισίων στήριξης.
- Δύο για κάθε τομή δύο αξόνων κάθε σκελετού.
- Ένας για κάθε άκρο κάθε πλαισίου στήριξης, το οποίο (άκρο) βρίσκεται επί ενός άξονα, που εκφράζει τη διάταξή τους επί του άξονα (βλ. και Σχήμα 5.8).
- Ένας για κάθε πλαίσιο στήριξης, για να εκφράσουμε το ότι το πλαίσιο αυτό βρίσκεται σε μια από τις δύο πλευρές του αντίστοιχου άξονα, και
- Ένας ή δύο για κάθε πλαίσιο στήριξης, για να εκφράσουμε την επαφή του με το αντίστοιχο τμήμα του περιγράμματος της έδρας στην οποία ανήκει.

Παρατηρήστε ότι το μέγεθος του προγράμματος Φ είναι πολυωνυμικό ως προς το μέγεθος του γράφου G .

Έστω ότι υπάρχει ένα σύνολο πλαισίων F_G που αποτελεί μια λύση για το πρόβλημα της ΕΠΙΠΕΔΗΣ ΣΧΕΔΙΑΣΗΣ του G . Τότε, σύμφωνα με το Λήμμα 5.5, μπορούμε να σχηματίσουμε σε κάθε έδρα του F_G έναν σκελετό παρόμοιο με αυτόν που σχηματίσαμε όταν εξετάζαμε την έδρα ανεξάρτητα απ' τις άλλες (όπως στο Λήμμα 5.3). Οι περιορισμοί που θα (πρέπει να) ισχύουν για το F_G θα είναι ίδιοι με αυτούς του γραμμικού προγράμματος Φ , αφού το είδος και το πλήθος των περιορισμών καθορίζεται πλήρως από το συγκεκριμένο στιγμιότυπο του προβλήματός μας και τους σκελετούς που έχουν εδραιωθεί. Το σύνολο F_G μαζί με τα πλαίσια στήριξης για κάθε σκελετό αποτελεί ένα κατάλληλα εφαπτόμενο σύνολο και λύση της ΕΠΙΠΕΔΗΣ ΣΧΕΔΙΑΣΗΣ του G , άρα το Φ θα είναι εφικτό. Επιπλέον, όποια λύση μας επιστραφεί θα αποτελεί ένα σύνολο από κατάλληλα εφαπτόμενα και μη επικαλυπτόμενα πλαίσια, δηλ. θα αποτελεί μια εφικτή λύση για το πρόβλημα της ΕΠΙΠΕΔΗΣ ΣΧΕΔΙΑΣΗΣ του G . Αν το πρόβλημα αυτό δεν έχει λύση, τότε το Φ ή θα είναι είτε ανέφικτο ή θα μας παράσχει μια μη αποδεκτή λύση, οπότε αυτό που έχουμε να κάνουμε είναι να επιλύσουμε το Φ και να αποφανθούμε καταφατικά για το πρόβλημα της ΕΠΙΠΕΔΗΣ ΣΧΕΔΙΑΣΗΣ, αν το Φ είναι εφικτό και η επιστρεφόμενη λύση είναι σύμφωνη με τους (περι)ορισμούς του προβλήματός μας.

Από την μέχρι τώρα ανάλυση, έχειδειχθεί ότι τόσο η τελική επίπεδη σχεδίαση του G όσο και οι σκελετοί για κάθε έδρα του μπορούν να υπολογιστούν σε πολυωνυμικό χρόνο, οπότε το γραμμικό πρόγραμμα Φ μπορεί να σχηματισθεί σε πολυωνυμικό χρόνο. Μπορεί επίσης να λυθεί σε πολυωνυμικό χρόνο, οπότε τελικά καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι μπορούμε να αποφανθούμε για το πρόβλημα της ΕΠΙΠΕΔΗΣ ΣΧΕΔΙΑΣΗΣ, κατασκευαστικά, σε πολυωνυμικό χρόνο. \square

Κεφάλαιο 6. *Σύνοψη – Μελλοντικές Κατευθύνσεις*

Στο τελευταίο αυτό κεφάλαιο συνοψίζουμε τη συνεισφορά και τα συμπεράσματα της εργασίας μας, και παραθέτουμε τα προβλήματα που παραμένουν ανοικτά, αποτελώντας έτσι κατευθύνσεις μελλοντικής έρευνας.

§ 6.1. *Σύνοψη*

Στην παρούσα εργασία ασχοληθήκαμε με το πρόβλημα της αυτόματης κατασκευής μιας σελίδας, όπου μας δίδεται ένα σύνολο από αντικείμενα τα οποία πρέπει να παρασταθούν ως ορθογώνια πλαίσια μέσα στη σελίδα. Παράλληλα μας δίδεται ένα σύνολο από απαιτούμενες επαφές μεταξύ των αντικειμένων, οι οποίες πρέπει να τηρηθούν κατά τη σχεδίαση των (εφαπτόμενων πλέον) αντίστοιχων πλαισίων.

Το πρόβλημα τούτο αντικατοπτρίζει την αυτόματη, δυναμική κατασκευή μιας σελίδας σε διάφορες εφαρμογές που διαχειρίζονται μια συλλογή αντικειμένων απ' την οποία επιλέγεται δυναμικά ένα σύνολο προς εμφάνιση. Κλασικό παράδειγμα αποτελεί η δυναμική κατασκευή μιας ιστοσελίδας, όπως αυτές που επισκεπτόμαστε καθημερινά στο διαδίκτυο: τα αντικείμενα μπορεί να είναι τμήματα κειμένου, φωτογραφίες, λεζάντες, γραμμές εργαλείων, υπερσύνδεσμοι κ.τ.ό., τα οποία ανασύρονται δυναμικά από μια βάση δεδομένων (λ.χ. ως απάντηση σε μια επερώτηση του χρήστη), και θεωρούμε ότι το καθένα πρέπει να σχεδιασθεί μέσα σε ένα πλαίσιο στη σελίδα. Οι επαφές μεταξύ των αντικειμένων εκφράζουν κάποια νοηματική συνάφεια ή μια χωροταξική προτίμηση: θα θέλαμε λ.χ. δίπλα σε ένα άρθρο που αναφέρεται στην παχυσαρκία να υπάρχει η διαφήμιση ενός κέντρου αδυνατίσματος, ή ένα κείμενο που σχολιάζει τα καινούρια μοντέλα αυτοκινήτων να εφάπτεται με τις αντίστοιχες φωτογραφίες, ή τη σημαία των Η.Π.Α. να εμφανίζεται δίπλα σε ένα άρθρο που αναφέρεται στην παγκόσμια τρομοκρατία, ή θα θέλαμε ένα διαφημιστικό πλαίσιο να εμφανίζεται στο πάνω μέρος της ιστοσελίδας, ή ένα σύνολο υπερσυνδέσμων που καθοδηγούν την πλοήγηση του χρήστη να εμφανίζεται στο αριστερό μέρος κ.τ.τ.

Στην προσέγγισή μας μοντελοποιήσαμε το πρόβλημα εισάγοντας την έννοια του χωροταξικού γράφου: αναπαραστήσαμε κάθε αντικείμενο ως έναν κόμβο του γράφου, και κάθε απαιτούμενη επαφή ως μια κατευθυνόμενη ακμή μεταξύ των αντίστοιχων κόμβων, που φέρει μια κατάλληλη ετικέτα. Ορίσαμε το πρόβλημα της ΣΧΕΔΙΑΣΗΣ ΠΛΑΙΣΙΩΝ για έναν χωροταξικό γράφο, που αντικατοπτρίζει το πρόβλημα της σχεδίασης μιας σελίδας. Λύσαμε το πρόβλημα αυτό σε τρεις φάσεις, αντιμετωπίζοντας αντίστοιχα τρία αρκετά διαφορετικά υποπροβλήματα:

Στην πρώτη φάση εξετάσαμε την πιο απλή περίπτωση, όπου ο χωροταξικός γράφος αποτελείται από έναν μόνο κύκλο. Ορίσαμε το πρόβλημα του ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΑΠΛΟΥ ΚΥΚΛΟΥ, και το λύσαμε μέσω μιας γραμματικής χωρίς συμφραζόμενα, η οποία αποδείξαμε ότι παράγει όλες και μόνον τις περιγραφές των προσανατολίσιμων κύκλων πλαισίων.

Στη δεύτερη φάση αντιμετωπίσαμε τη γενικότερη περίπτωση, όπου ο γράφος μας αποτελείται από πολλούς κύκλους. Διατυπώσαμε το πρόβλημα της ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΕΝΗΣ ΕΠΙΠΕΔΟΤΗΤΑΣ, για την επίλυση του οποίου επιστρατεύσαμε στοιχεία από τη θεωρία επί επίπεδων γράφων (γέφυρες ενός γράφου, βοηθητικός γράφος). Στη φάση αυτή επιλύσαμε και την αμφισημία μεταξύ των μη προσανατολίσιμων κύκλων.

Τέλος, στην τρίτη φάση εξετάσαμε την υλοποίηση των κύκλων-εδρών του χωροταξικού γράφου ως κατάλληλα εφαπτόμενα, μη επικαλυπτόμενα πλαίσια. Εισάγαμε την έννοια των σκελετών, για τους οποίους διατυπώσαμε και αποδείξαμε ένα σύνολο από χρήσιμες ιδιότητες. Με τη βοήθεια των σκελετών λύσαμε το τελικό πρόβλημα μέσω του γραμμικού προγραμματισμού.

§ 6.2. *Ανοικτά Προβλήματα – Μελλοντικές Κατευθύνσεις*

- *Αναζήτηση λύσεων:* Στην εργασία μας επιλύουμε το (πρακτικό) πρόβλημα της ΣΧΕΔΙΑΣΗΣ ΠΛΑΙΣΙΩΝ για ένα χωροταξικό γράφο. Υπάρχουν δύο λόγοι για τους οποίους ο αλγόριθμός μας μπορεί να μη δώσει λύση για ένα συγκεκριμένο στιγμιότυπο του προβλήματος (γράφο G): (i) Ο G μπορεί να μην είναι επίπεδος. Σε αυτήν την περίπτωση μπορούμε να αναθέσουμε κατάλληλα ‘βάρη’ επί των ακμών του G , τα οποία θα εκφράζουν τη σπουδαιότητα της αντίστοιχης συνάφειας για κάθε δύο κόμβους-πλαίσια που ενώνονται με μια ακμή, και να

- επιλύσουμε το πρόβλημα της ΣΧΕΔΙΑΣΗΣ ΠΛΑΙΣΙΩΝ για ένα επίπεδο υπογράφο του G μεγίστου βάρους. Το πρόβλημα αυτό είναι NP -complete (βλ. [6]), αλλά μπορεί να λυθεί προσεγγιστικά (βλ. [7]). (ii) Ο γράφος G μπορεί να είναι επίπεδος, αλλά παρόλα αυτά να μην επιδέχεται τη ζητούμενη σχεδίαση. Στην περίπτωση αυτή θα θέλαμε να έχουμε την ευχέρεια να ‘χαλαρώσουμε’ τους περιορισμούς μας (π.χ. να καταργήσουμε ορισμένες ακμές – επαφές πλαισίων) ώστε να καταλήξουμε σε κάποια λύση.
- *Επί του ορισμού του χωροταξικού γράφου:* Θα θέλαμε να ορίσουμε πιο αυστηρά τον τρόπο με τον οποίο αποδίδονται οι επαφές $\delta(\cdot)$ και η αναγνωστική φορά $\gamma(\cdot)$ επί των κόμβων πλαισίων του χωροταξικού γράφου, ώστε να παρέχουμε αποτελέσματα μεστά νοήματος για το χρήστη. Επίσης, είναι απαραίτητη μια φιλική διεπαφή χρήστη που θα επιτρέπει τον ορισμό των προδιαγραφών του προβλήματος, λ.χ. απόδοση των επαφών μεταξύ αντικειμένων ή μεταξύ κατηγορίες αντικειμένων.
 - *Αποτελεσματικότητα:* Με μια πρώτη (όχι και τόσο λεπτομερή) ανάλυση προκύπτει ότι η πολυπλοκότητα της λύσης που προτείνουμε για έναν γράφο $G = (V, E)$, είναι της τάξης $O(|V|^4)$. Προφανώς θα θέλαμε οι αλγόριθμοί μας να είναι (πολύ) πιο αποτελεσματικοί. Θα ήταν ιδιαίτερα επιθυμητός ένας ταχύς αλγόριθμος parsing της γραμματικής που παραθέσαμε στη φάση *I*, καθώς και ένας ταχύς τρόπος υλοποίησης του αλγορίθμου σχεδίασης των γεφυρών της φάσης *II*. Επίσης, πρέπει να σχηματίσουμε το γραμμικό πρόγραμμα της φάσης *III* κατά έναν ‘οικονομικό’ τρόπο, με όσο το δυνατόν λιγότερες μεταβλητές και περιορισμούς. Η εύρεση ενός αποτελεσματικού αλγορίθμου κατασκευής των σκελετών της φάσης *III* είναι ένα ακόμα ανοικτό πρόβλημα.
 - *Παράκαμψη του γραμμικού προγραμματισμού:* Θα θέλαμε να παρακάμψουμε τη χρήση γραμμικού προγραμματισμού στη Φάση *III*, βρίσκοντας έναν τρόπο να εκφράσουμε τη λύση του προβλήματος με συνδυαστικό (combinatorial) τρόπο.
 - *Περιορισμοί εμβαδού:* Η χρήση του γραμμικού προγραμματισμού στη φάση *III* μας παρέχει τη δυνατότητα να εισάγουμε περιορισμούς ως προς το εμβαδόν που θα καταλαμβάνουν τα πλαίσια, π.χ. να απαιτήσουμε αυτή να είναι η ελάχιστη δυνατή. Το εμβαδόν που καταλαμβάνει ένα

πλαίσιο δεν εκφράζεται (προφανώς) γραμμικά άμεσα, αλλά η περίμετρος ενός πλαισίου είναι ένα εύλογο μέτρο του ‘μεγέθους’ του, και μπορεί να εκφρασθεί γραμμικά ως προς τις μεταβλητές που αναπαριστούν το πλαίσιο. Ανάλογοι περιορισμοί μπορούν να εισαχθούν για παρόμοιες μετρικές, π.χ. το ύψος των πλαισίων, το aspect-ratio, κ.τ.τ.

Βιβλιογραφία

- [1] Knuth D. E., *Computer Drawn Flowcharts*, Comm. ACM, 6, 1963.
- [2] Di Battista G., Eades P., Tamassia R., Tollis I. G., *Algorithms for Drawing Graphs: An Annotated Bibliography*, Comput. Geom. Theory Appl., 4, 235-282, 1994.
- [3] Gibbons A., *Algorithmic Graph Theory*, σελ. 75-80, Cambridge University Press, 1989.
- [4] Hopcroft J. E., Ullman J. D., *Introduction to Automata Theory, Languages and Computation*, 139-141, Addison Wesley, 1979.
- [5] Khachiyan L. G., *Polynomial Algorithms in Linear Programming*, USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics, 20:53-72, 1980.
- [6] Garey M. R., Johnson D. S., *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*, σελ. 197, W. H. Freeman, 1979.
- [7] Calinescu G., Fernandes C. G., Karloff H., Zelikovski A., *A New Approximation Algorithm for Finding Heavy Planar Subgraphs*, submitted for journal publication, <http://www.cs.iit.edu/~calinesc>.