ΚΛΑΣΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΤΗΣ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΚΑΙ Η ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΟΥΣ

Μαρία Δρακάκη

Επιβλέπων Καθηγητής

Μιχάλης Λάμπρου

Μεταπτυχιακή Εργασία

2019

Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Πανεπιστήμιο Κρήτης

CLASSICAL THEOREMS OF EUCLIDEAN GEOMETRY AND THEIR HISTORY

Maria Drakaki

Thesis Advisor

Michael Lambrou

Master of Science Thesis

2019

Department of Mathematics and Applied Mathematics

University of Crete

Η μεταπτυχιακή αυτή εργασία πραγματοποιήθηκε στο Μαθηματικό τμήμα του Πανεπιστημίου Κρήτης, στα πλαίσια του Διατμηματικού Μεταπτυχιακού Προγράμματος «Μαθηματικά και Εφαρμογές τους» στην κατεύθυνση «Μαθηματικά για την Εκπαίδευση».

Η τριμελής επιτροπή είναι:
Μιχαήλ Λάμπρου
Αλέξανδρος Κουβιδάκης
Μαρία Λουκάκη

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Το αντικείμενο της παρούσας εργασίας είναι η παρουσίαση ορισμένων από τα πιο κλασικά θεωρήματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας από την αρχαιότητα έως την σύγχρονη εποχή. Δεν επικεντρώνεται όμως στην διατύπωση και στην απόδειξη αυτών, αλλά καταγράφει την ιστορία τους, η οποία συνήθως είναι αρκετά πολύπλοκη. Για να γίνει αυτό χρειάστηκε αρχειακή έρευνα, ψάχνοντας σε πρωτότυπα, διαφόρων γλωσσών, κείμενα έτσι ώστε να επιβεβαιωθεί ο επινοητής του κάθε θεωρήματος και να παρακολουθήσουμε βήμα βήμα την εξέλιξή του. Στην κάθε περίπτωση εντοπίσαμε την πρώτη δημοσίευσή του, μεταγενέστερους επινοητές του ίδιου θεωρήματος, στηριζόμενοι σε μία μεγάλου εύρους βιβλιογραφία.

Επίσης για το κάθε θεώρημα δίνονται αρκετές και διαφορετικές αποδείξεις, που έχουν δοθεί από την αρχαιότητα έως σήμερα.

Λόγω του περιορισμένου μεγέθους μίας τέτοιας εργασίας, θα ασχοληθούμε με μερικά μόνο θεωρήματα που σχετίζονται με την ύλη της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης, παραλείποντας μάλιστα και κάποια, των οποίων η ιστορία τους είναι ευρέως γνωστή, όπως για παράδειγμα το Πυθαγόρειο θεώρημα.

SUMMARY

The subject of this paper is to present some of the most classic theorems of Euclidean Geometry from ancient times to the modern era. It is not focused on the formulation and proof of such, but it records their history, which is usually quite complex. To do this, it took archival research, looking at original texts of various languages to confirm the inventor of a theorem and follow step by step its evolution. We found the first publication and subsequent inventors of the same theorem, relying on a wide range of literature.

Also for each theorem are given several and different proofs, produced from antiquity until today.

Due to the limited size of such work, we will deal with just some theorems related to the syllabus of secondary schools, avoiding those whose story is widely known, such as the Pythagorean Theorem.

Λέξεις-Κλειδιά

Κύριες: Ευκλείδεια Γεωμετρία, Ιστορία της Γεωμετρίας.

Δευτερεύουσες: Εμβαδόν τριγώνου, Τύπος Ήρωνα, κέντρο περιγεγραμμένου κύκλου, έγκεντρο, ορθόκεντρο, βαρύκεντρο, Θεώρημα Πτολεμαίου, Θεώρημα Μενελάου, Θεώρημα Ceva, Θεώρημα σπασμένης χορδής, Θεώρημα Steiner-Lehmus.

Keys

Primary: Euclidean Geometry, History of Geometry.

Secondary: Area of a triangle, Heron’s formula, circumcetre, incentre, orthocentre, centre of gravity, Ptolemy’s Theorem, Menelaos’ Theorem, Ceva’s Theorem, Broken Chord Theorem, Steiner-Lehmus Theorem.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

1.1 Η Γεωμετρία πριν τον Ευκλείδη

1.1.1 Η Γεωμετρία της Ανατολής

Η Γεωμετρία συγκαταλέγεται στους πρώτους ιστορικά κλάδους των Μαθηματικών, γεγονός που οφείλεται στις άμεσες πρακτικές της εφαρμογές. Ο όρος «Γεωμετρία» προέρχεται από τις λέξεις «Γη» και «μέτρηση». Η ανάγκη της μέτρησης της γης λειτούργησε ως ισχυρό κίνητρο ενασχόλησης με την Γεωμετρία. Ο Ηρόδοτος, ο οποίος ταξίδεψε στην Αίγυπτο γύρω στο 460 π.Χ., ισχυρίζεται ότι η Γεωμετρία έχει τις ρίζες της σε αυτή την χώρα. Την άποψή του επαναλαμβάνει περί το 335 π.Χ. ο Εύδημος ο Ρόδιος, ο πρώτος Ιστορικός της Γεωμετρίας, του οποίου σώζονται αποσπάσματα της Ιστορίας του. Ο Εύδημος συνέδεσε τη γένεση της Γεωμετρίας με την μέτρηση της γης στην Αίγυπτο για την αποκατάσταση των ορίων των χωραφιών που εξαλείφονταν από τις ετήσιες πλημμύρες του Νείλου. Ο Ηρόδοτος αναφέρεται επιπλέον και στην εποχή όταν ο βασιλιά Σέσωστρις[1] μοίρασε τετράγωνα κομμάτια γης εξίσου στους υπηκόους του.

Ο Ισοκράτης γύρω στο 393 π.Χ. δηλώνει ότι η μελέτη της Γεωμετρίας συνιστάται στους νέους της Αιγύπτου[2], ενώ ο Πλάτων αναφέρεται συχνά στα Μαθηματικά της

[1]πρόκειται για τον βασιλιά Ραμσή ΙΙ από την XIX Δυναστεία, ο οποίος έζησε περίπου τα χρόνια 1407-1341 π.Χ.

[2]Ισοκράτη, Βούσιρις Κεφ. 9.

Αιγύπτου και μάλιστα αναφέρει[3] ότι οι Αιγύπτιοι ήδη από την παιδική τους ηλικία διδάσκονται τις μετρήσεις για να προσδιορίζουν το μήκος, το πλάτος και το βάθος.

Της ίδιας άποψης είναι και οι Αριστοτέλης, Διόδωρος ο Σικελός[4], Ήρων ο Αλεξανδρεύς, Στράβων[5] και ο Δημόκριτος[6]. Ο τελευταίος μάλιστα, για να δείξει τις ικανότητές του στη Γεωμετρία, λέει ότι «Εγώ, λοιπόν περιπλανήθηκα σε περισσότερους τόπους της γης απ' τους ανθρώπους της εποχής μου, ερευνώντας τα πιο μακρινά μέρη, και γνώρισα πάρα πολλές χώρες και κλίματα και άκουσα πάρα πολλούς μορφωμένους ανθρώπους, αλλά στη σύνθεση σχημάτων που συνοδεύονται από απόδειξη κανείς ως τώρα δε με ξεπέρασε, ούτε ακόμη και αυτοί από τους Αιγυπτίους που ονομάζονται Αρπεδονάπτες»[7].

Εκτός από την Αίγυπτο, οι ρίζες της Γεωμετρίας εντοπίζονται και σε άλλες αναπτυγμένες κοινωνίες της Ανατολής από την 3η ως και τη 1η χιλιετία π.Χ., όπως στους αρχαίους Βαβυλώνιους, Ινδούς και Κινέζους. Κοινό χαρακτηριστικό των λαών αυτών ήταν ότι ζούσαν κοντά σε μεγάλα ποτάμια, λόγω της γονιμότητας του εδάφους, που όταν όμως πλημμύριζαν αναγκάζονταν να επανακαθορίζουν τα όρια των αγρών, γεγονός που επιβάλλει τη μέτρηση της γης. Η Γεωμετρία για τους ανατολικούς λαούς ήταν λοιπόν ανάγκη και είχε πρακτική εφαρμογή, και θα τη χαρακτήριζε κανείς ως καθαρά εμπειρική.

Στην Αίγυπτο οι μαρτυρίες αυτές έχουν διασωθεί κυρίως σε παπύρους, ενώ στη Μεσοποταμία σε 150 περίπου κείμενα μαθηματικού περιεχομένου, γραμμένα σε σφη-

[3]Πλάτωνα, Νόμοι, σελ 819.

[4]Έλληνας Ιστορικός και συγγραφέας που έζησε γύρω στο 80-20 π.Χ. με σημαντικότερο έργο την *Ιστορική Βιβλιοθήκη*, η οποία αποτελείται από 40 βιβλία, εκ των οποίων σώζονται μόνο 15.

[5]Έλληνας γεωγράφος, φιλόσοφος και Ιστορικός (64 π.Χ.-24 μ.Χ.). Στον 17ο τόμο του έργου του «Γεωγραφικά», του οποίου σώζονται και οι 17 τόμοι, στο Κεφάλαιο 3 βρίσκουμε πληροφορίες για τους Αιγύπτιους και τη σχέση τους με τη Γεωμετρία.

[6]Προσωκρατικός φιλόσοφος (460 π.Χ.-370 π.Χ.), ιδιαίτερα πολυμαθής και με ενασχόληση σχεδόν με όλους τους τομείς της ανθρώπινης γνώσης.

[7]Η ελληνική λέξη «Αρπεδονάπτης» σημαίνει: αυτός που τεντώνει το σκοινί. Καθήκον τους ήταν να μετρούν τη γη, ως υπάλληλοι του κράτους. Επίσης ασχολούνταν με τη θεμελίωση ναών (*Κλήμης ο Αλεξανδρεύς, Στρωματείς*, ed. Potter I , 357).

νοειδή γραφή πάνω σε πήλινα πινακίδια. Κύριες πηγές για τη Γεωμετρία στην Αίγυπτο είναι ο *πάπυρος του Rhind*[8] που περιέχει 87 μαθηματικά προβλήματα, ο κατά δύο αιώνες παλαιότερος *πάπυρος της Μόσχας*, ο οποίος περιέχει 25 προβλήματα και οι *πάπυροι του Kahun*, οι οποίοι είναι μία από τις μεγαλύτερες συλλογές παπύρων που έχουν βρεθεί, μέσα στους οποίους βρίσκονται μαθηματικά προβλήματα.

Σχήμα 1.1: Ο πάπυρος Rhind

Εν γένει η Γεωμετρία των Αιγυπτίων αφορά στη μέτρηση στοιχειωδών γεωμετρικών σχημάτων (ισοσκελή τρίγωνα, ορθογώνια παραλληλόγραμμα, ισοσκελή τραπέζια και κύκλο) και εμφανίζεται με τη μορφή κανόνων αριθμητικής επίλυσης στοιχειωδών γεωμετρικών προβλημάτων πρακτικής κατ' εξοχήν σημασίας. Πολλές λύσεις γίνονταν με τη μέθοδο της δοκιμής και του λάθους και με άλλους εμπειρικούς κανόνες. Γι' αυτό πολλές φορές ήταν εξαιρετικά άκομψες. Διέθεταν όμως μία αρκετά καλή προσέγγιση του αριθμού π, ως το τετράγωνο με πλευρά τα 8/9 της διαμέτρου (πάπυρος του Rhind, Πρόβλημα 51), η οποία δίνει σφάλμα μικρότερο του 1%· Ωστόσο η μέθοδος εύρεσης αυτού του αποτελέσματος δεν είναι γνωστή.

Η Γεωμετρία της Μεσοποταμίας ήταν πιο αξιόλογη από την Αιγυπτιακή και είναι δημιούργημα δύο κυρίως αρχαιοτάτων λαών της Ασίας, των Σουμερίων (3000 π.Χ.) και των Βαβυλωνίων (2η-1η χιλιετία π.Χ.). Εξετάζει ευρύτερο πεδίο γεωμετρικών αντικειμένων, όπως ορισμένα κανονικά πολύγωνα, τον κυκλικό τομέα και τον κόλουρο κώνο. Όπως και οι Αιγύπτιοι, χρησιμοποιούν τόσο ακριβείς μεθόδους υπολογισμού, όσο και προσεγγιστικές. Γνώριζαν ότι το εμβαδόν του κύκλου ισούται με το 1/2 του γινομένου του μήκους της περιφέρειας του κύκλου επί την ακτίνα, όμως έδιναν στο π είτε την τιμή 3, είτε την τιμή $3\frac{1}{8}$. Ο κανόνας αυτός συναντάται και στην Κίνα και στην Ινδία.

Παρά όμως την πρόοδο που σημείωσε η Γεωμετρία στη Μεσοποταμία, απουσιάζει το στοιχείο της λογικής συνοχής ανάμεσα στους πολυάριθμους κανόνες και πουθενά

[8]γνωστός και ως πάπυρος του Ahmes.

δεν βρίσκουμε κάποια απόπειρα να δοθεί «λογική απόδειξη» ενός αποτελέσματος. Αυτός ο τρόπος μαθηματικής σκέψης, που είναι προσανατολισμένος περισσότερο στη διαδικασία επίλυσης ενός προβλήματος παρά στο ίδιο το πρόβλημα, χαρακτηρίζει όλες τις προ-Ελληνικές μαθηματικές παραδόσεις της Ανατολής και διατηρείται για πολλούς αιώνες.

1.1.2 Η Γεωμετρία των Ελλήνων

Με τους αρχαίους Έλληνες όμως, η Γεωμετρία αποκτά τη θεωρητική της διάσταση. Μέσα στην ατμόσφαιρα του ιωνικού ορθολογισμού γεννιούνται τα σύγχρονα Μαθηματικά, στα οποία δεν τίθεται μόνο το ερώτημα «πώς;», αλλά και το «γιατί;». Το ελληνικό πνεύμα επεξεργάστηκε όλο αυτό το υλικό δουλεύοντας σε δύο κατευθύνσεις: Οι Έλληνες Γεωμέτρες συγκέντρωσαν από τη μία όλες αυτές τις προτάσεις που είχαν ανακαλυφτεί εμπειρικά, τους υπολογιστικούς τύπους και τα συστηματοποίησαν, ομαδοποιώντας τα με βάση το κοινό τους στοιχείο και από την άλλη έλεγξαν την ορθότητα του γεωμετρικού τους περιεχομένου και το εμπλούτισαν με αποδείξεις. Και όλο αυτό δεν έγινε σε έναν τόπο, σε μία εποχή ή σε μία σχολή. Ο Θαλής ο Μιλήσιος (γύρω στο 624-540 π.Χ.) έδρασε στην ακτή της Μικράς Ασίας και είναι αυτός που ανέδειξε και ανάπτυξε την αποδεικτική μέθοδο, ο Πυθαγόρας (γύρω στο 580-501 π.Χ.) ζούσε στην κάτω Ιταλία. Εδώ είχε ιδρύσει περίπου 100 χρόνια αργότερα ο Αρχύτας ο Ταραντίνος (430-365 π.Χ.) τη σχολή του. Έπειτα έγινε η Αθήνα το πνευματικό κέντρο χάρη στην Ακαδημία του Πλάτωνα (429-348 π.Χ.) και τέλος στην Αλεξάνδρεια μεγαλούργησε ο Ευκλείδης (γύρω στο 325 π.Χ.), που μέσα από τους 13 τόμους του έργου του *Στοιχεία* ήταν ο πρώτος που τοποθέτησε τη Γεωμετρία σε αξιωματική βάση, κάτι που δικαιολογεί απόλυτα και τον όρο «Ευκλείδεια Γεωμετρία».

Ως αξιόπιστες πηγές για την Ιστορία της Γεωμετρίας μπορούν να θεωρηθούν οι αναφορές στα έργα των συγγραφέων Ιστορίας: Ξενοκράτη (396-314 π.Χ.), Θεόφραστου από Λέσβο (371-287 π.Χ.), μαθητή του Αριστοτέλη και του Ευδήμου του Ρόδιου

(350-290 π.Χ.). Τα έργα των δύο πρώτων έχουν χαθεί ενώ από τα έργα του Ευδήμου σώζονται μόνο αποσπάσματα, αλλά τα γνωρίζουμε από άλλους συγγραφείς που τα μνημονεύουν στα δικά τους έργα. Εκτός από αυτούς τους κατά βάση Ιστορικούς των Μαθηματικών, μάς έχουν αφήσει αξιόλογα έργα οι Σχολιαστές μαθηματικών γραφών, όπως για παράδειγμα οι:

1) Γεμίνος ο Ρόδιος, ο οποίος έζησε τον 1ο αιώνα π.Χ. Το κυριότερο μαθηματικό έργο του είναι το *Μαθηματικών Δόγμα* και παρότι αυτό το έργο του δεν έχει σωθεί, αρκετά αποσπάσματα του υπάρχουν σε έργα των Πρόκλου, Ευτοκίου και άλλων. Μακρά αποσπάσματα του έργου του διασώθηκαν και στα Σχόλια των *Στοιχείων* του Ευκλείδη από τον Άραβα Al-Nayrizi.

2) Θέων ο Σμυρναίος ή Θέων ο Πλατωνικός (70-135 μ.Χ.). Το κύριο μαθηματικό του έργο έχει τίτλο *Των κατά το μαθηματικόν χρησίμων εις την Πλάτωνος ανάγνωσιν*, το οποίο έχει διασωθεί, όχι όμως εντελώς με την αρχική του μορφή. Αυτό το έργο αποτελεί σημαντική πηγή ιστορικών στοιχείων για τα Μαθηματικά, διαιρείται σε τρία μέρη, εκ των οποίων στο πρώτο αναφέρεται και στη Γεωμετρία.

3) Πορφύριος από την Τύρο της Φοινίκης (234-305 μ.Χ.) Έγραψε σχόλια στον Ευκλείδη, τα οποία χρησιμοποίησε ως πηγή ο Πάππος ο Αλεξανδρεύς.

4) Ιάμβλιχος (250-325 μ.Χ.). Σύρος νεοπλατωνικός φιλόσοφος και βιογράφος του Πυθαγόρα.

5) Πάππος ο Αλεξανδρεύς (290-350 μ.Χ.). Ονομαστός Έλληνας Μαθηματικός, Γεωμέτρης και Μηχανικός. Συγκέντρωσε, συστηματικά και συνοπτικά, στο έργο του *Συναγωγή* τα σπουδαιότερα μαθηματικά ευρήματα του ελληνικού κόσμου στους τομείς της Γεωμετρίας και της Αριθμητικής, συμπληρωμένα και σχολιασμένα από τον ίδιο.

6) Πρόκλος (412-485 μ.Χ.). Ένας από τους τελευταίους, σημαντικούς κλασικούς φιλοσόφους. Το κύριο μαθηματικό του έργο είναι τα *Σχόλια στο α′ Βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη*. Εκεί, πέραν των εκτεταμένων σχολίων, παραθέτει στην εισαγωγή ένα ιστορικό σημείωμα των αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών. Ξεκινώντας από την εποχή του Θαλή φτάνει μέχρι την εποχή του Ευκλείδη, διατρέχοντας μία χρονική περίοδο περίπου τριακοσίων ετών, και αναφέρει έναν ονομαστικό κατά-

λογο 24 Γεωμετρών. Αυτό είναι το πληρέστερο ιστορικό σημείωμα που σώζεται και τα στοιχεία του έχουν αντληθεί από την «Ιστορία της Γεωμετρίας» του Ευδήμου.

Οι Γεωμέτρες, που μνημονεύει ο Πρόκλος είναι οι εξής:

Θαλής ο Μιλήσιος (624-546 π.Χ.)
Μάμερκος, ή *Μαμέρτιος* (6ος αιώνας π.Χ.)
Ιππίας ο Ηλείος (443-399 π.Χ.)
Πυθαγόρας (586-500 π.Χ.)
Αναξαγόρας ο Κλαζομένιος (500-428 π.Χ.)
Οινοπίδης ο Χίος (490-420 π.Χ.)
Ιπποκράτης ο Χίος (470-400 π.Χ.)
Θεόδωρος ο Κυρηναίος (465-398 π.Χ.)
Πλάτων (427-347 π.Χ.)
Λεωδάμας ο Θάσιος (5ος-4ος αιώνας π.Χ.)
Αρχύτας ο Ταραντίνος (440-360 π.Χ.)
Θεαίτητος ο Αθηναίος (417-369 π.Χ.)
Νεοκλείδης (4ος αιώνας π.Χ.)
Λέων ο Βυζάντιος (4ος αιώνας π.Χ.)
Εύδοξος ο Κνίδιος (408-355 π.Χ.)
Αμύκλας ο Ηρακλειώτης (4ος αιώνας π.Χ.)
Μέναιχμος (375-320 π.Χ.)
Δεινόστρατος (390-310 π.Χ.)
Θεύδιος ο Μάγνης (4ος αιώνας π.Χ.)
Αθήναιος ο Κυζικηνός (4ος αιώνας π.Χ.)
Ερμότιμος ο Κολοφώνιος (4ος αιώνας π.Χ.)
Φίλιππος ο Μενδαίος (4ος αιώνας π.Χ.)
Ευκλείδης (325-265 π.Χ.)
Αρχιμήδης (287-212 π.Χ.)

7) Ευτόκιος (480-540 μ.Χ.). Έλληνας Μαθηματικός που ασχολήθηκε κυρίως με τη Γεωμετρία. Σχολίασε πολλά έργα του Αρχιμήδη και του Απολλώνιου. Μερικά από τα έργα του που διασώθηκαν είναι τα Σχόλια στα *Περί κωνοειδέων και σφαιροειδέων* του Αρχιμήδη, *Τετραγωνισμός παραβολής* του Αρχιμήδη, στα δύο βιβλία των *Περί επιπέδων ισορροπιών* του Αρχιμήδη καθώς και τα Σχόλια στα *Κωνικά* του Απολλώνιου σε 4 βιβλία.

Η εργασία του Ευτοκίου υπήρξε πολύτιμη, αφού με αυτόν τον τρόπο διέσωσε και ιστορικά στοιχεία σχετικά με το έργο του Αρχιμήδη. Τα σχόλια του Ευτοκίου συμπεριλήφθηκαν στις πλήρεις εκδόσεις του Αρχιμήδη και του Απολλώνιου και είναι πολύ χρήσιμα στη διευκόλυνση της κατανοήσεως των αντίστοιχων έργων. Επιπλέον, μας πληροφορούν για μαθηματικά συγγράμματα που χάθηκαν. Στον Ευτόκιο αποδίδεται και σχολιασμός της *Μαθηματικής Συντάξεως* του Πτολεμαίου.

1.2 Η χρυσή εποχή της Γεωμετρίας

1.2.1 Ευκλείδης και τα *Στοιχεία* του

Τον 3ο αιώνα π.Χ. η Αθήνα χάνει την αίγλη της ως κέντρο πολιτισμού, ενώ συγχρόνως η Αλεξάνδρεια της Αιγύπτου, με τη μεγαλοπρεπή Βιβλιοθήκη της, γίνεται έδρα των επιστημών και των γραμμάτων και πόλος συγκέντρωσης διδασκομένων και διδασκόντων.

Ο πρώτος μεγάλος Μαθηματικός που συναντάμε εδώ είναι ο Ευκλείδης. Είναι ανεξάντλητη η βιβλιογραφία γύρω από το έργο του και κυρίως για τα *Στοιχεία* του, ένα μνημειώδες και ιστορικά σημαντικό έργο που θεωρείται ο πρώτος μεγάλος σταθμός στην ιστορία της οργάνωσης των Μαθηματικών. Η μετέπειτα επίδρασή του στον επιστημονικό τρόπο γραφής είναι αδιαμφισβήτητη.

Ο Πρόκλος έχει δώσει μία εξήγηση της έννοιας του όρου «στοιχεία». Τα στοιχεία μίας αποδεικτικής μελέτης είναι τα πιο σημαντικά θεωρήματα ή τα θεωρήματακλειδιά που χρησιμοποιούνται για την απόδειξη όλων των άλλων θεωρημάτων. Σύμφωνα πάλι με τον Πρόκλο η πρώτη προσπάθεια να γραφτούν Στοιχεία έγινε από τον Ιπποκράτη τον Χίο στα μέσα του 5ου π.Χ. αιώνα. Η επόμενη προσπάθεια ήταν του Λέοντα, που περιείχε μία μεγαλύτερη και πιο χρήσιμη επιλογή προτάσεων από τον Ιπποκράτη. Το βιβλίο που χρησιμοποιούσαν στην Ακαδημία του Πλάτωνα είχε επιμεληθεί ο Θεύδιος ο Μάγνης και θεωρείτο μία θαυμάσια συλλογή στοιχείων. Ο Ευκλείδης την είχε αναμφίβολα στην κατοχή του, οπότε αποτέλεσε και τον άμεσο πρόδρομο της δικής του εργασίας. Γνώριζε επίσης το έργο του Θεαίτητου και του Ευδόξου. Το έργο του Ευκλείδη αποτελεί σε μεγάλο βαθμό συγκέντρωση και επιμέλεια των εργασιών των προγενεστέρων του, αλλά αυτό δεν μειώνει καθόλου την αξία του, αφού η ουσιαστική αξία των *Στοιχείων* βρίσκεται ακριβώς στην επιδεξιότητα με την οποία επιλέχτηκαν και τοποθετήθηκαν σε λογική σειρά οι προτάσεις, ξεκινώντας από μία μικρή ομάδα αρχικών υποθέσεων.

Τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη εκτόπισαν γρήγορα και ολοκληρωτικά όλες τις προηγούμενες εργασίες ανάλογου περιεχομένου και για πάνω από δύο χιλιετίες κυριάρχησαν στο χώρο διδασκαλίας της Γεωμετρίας. Από την πρώτη τυπογραφική έκδοσή τους στα 1482 έχουν γίνει πάνω από χίλιες εκδόσεις.

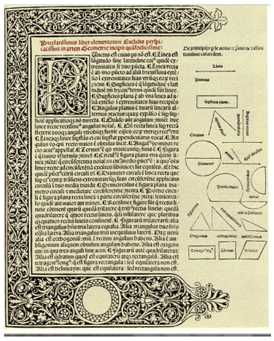
Σχήμα 1.2:

Οι πρώτες πλήρεις μεταφράσεις των *Στοιχείων* στα Λατινικά την εποχή του Μεσαίωνα, δεν έγιναν από τα Ελληνικά, αλλά από τα Αραβικά. Τον 12ο αιώνα ο Adelard of Bath (1080-1152) χρησιμοποίησε για τη δική του μετάφραση στα Λατινικά μία από τις πιο παλιές αραβικές μεταφράσεις. Στο Σχήμα 1.2 βλέπουμε το εξώφυλλο από αυτή τη Λατινική μετάφραση των *Στοιχείων*.

Άλλες Λατινικές μεταφράσεις από τα Αραβικά έκαναν ο Gherardo da Cremona (1114-1187) και 150 χρόνια μετά τον Adelard, ο Campano da Novara ή Giovanni Campano ή Johannes Campanus (1220-1296).

Το 15τομο *Elementa* του Campanus ήταν σημαντικότατο και αποτέλεσε την πλέον χρησιμοποιούμενη έκδοση του Ευκλείδη έως τον 16ο αιώνα. Βασίστηκε σε έκδοση του Robert of Chester και περιλαμβάνει υλικό από το έργο *Arithmetica* του J. Nemorarius, σχόλια στον Ευκλείδη από τον Anaritius και προσθήκες του ίδιου του Campanus. Αποτέλεσε το υλικό για την πρώτη τυπογραφική έκδοση του Ευκλείδη, η οποία εκδόθηκε από τον Erhard Ratdolt στη Βενετία το 1482 με τίτλο *Preclarissimus liber elementorum Euclidis perspicacissimi*. Στο Σχήμα 1.3 βλέπουμε την πρώτη σελίδα αυτής της έκδοσης.

Μία σημαντική λατινική μετάφραση από τα ελληνικά έγινε από τον Federico Comandino με τίτλο *Euclidis elementorum libri XV*. Αυτή η μετάφραση χρησιμοποιήθηκε ως βάση για πολλές άλλες μεταφράσεις που ακολούθησαν, ανάμεσα στις οποίες είναι η έκδοση του Robert Simson που άσκησε σημαντική επιρροή και αποτέλεσε με τη σειρά της βάση για πάρα πολλές αγγλικές εκδόσεις.



Σχήμα 1.3:

Ο Γάλλος Adrien-Marie Legendre (1752-1833) στο πολύ γνωστό έργο του *Eléments de géométrie* (1794), προσπάθησε να πετύχει μία παιδαγωγική βελτίωση των *Στοιχείων* του Ευκλείδη, κάνοντας μία εκτεταμένη αναδιάταξη και απλοποίηση των προτάσεων του Ευκλείδη. Το έργο αυτό έγινε ευνοϊκά δεκτό σε όλο τον Δυτικό κόσμο συμπεριλαμβανομένης της Αμερικής. Μεταφράστηκε σε πολλές γλώσσες συμπεριλαμβανομένων των Ελληνικών και ειδικά στα Αγγλικά και αποτέλεσε το πρότυπο για τα μεταγενέστερα βιβλία Γεωμετρίας.

Το πιο χαρακτηριστικό γνώρισμα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας είναι το *πέμπτο αίτημα* του Ευκλείδη, το οποίο είναι ισοδύναμο με την πρόταση ότι *από σημείο εκτός ευθείας διέρχεται μόνο μία παράλληλος στο επίπεδο*.

Οι Μαθηματικοί, διαχρονικά, προσπάθησαν επανειλημμένα να βελτιώσουν τα αξιώματα του Ευκλείδη. Αναφέραμε ήδη την αξιόλογη προσπάθεια του Legendre το 1794. Επίσης, το 1899, ο Hilbert εμφάνισε ένα νέο σύστημα 21 αξιωμάτων, τα οποία αργότερα μείωσε σε 20, ενώ καθ’ όλη τη διάρκεια του 20ου αιώνα έγιναν προσπάθειες να μειωθεί ακόμα περισσότερο το πλήθος τους[9].

Κατά τη διάρκεια όλων αυτών των 2000 ετών έγιναν πάρα πολλές προσπάθειες απόδειξης του 5ου Αξιώματος από τα άλλα αξιώματα, οι οποίες όμως απέτυχαν, δημιουργώντας την πεποίθηση ότι μία τέτοια απόδειξη είναι αδύνατη. Ο Gauss είχε εκφράσει σε αρκετά γράμματα προς τους φίλους του την ιδέα δημιουργίας μίας εντελώς νέας Γεωμετρίας, στην οποία δεν θα ίσχυε το 5ο Αξίωμα. Την κατασκευή μίας τέτοιας Γεωμετρίας -της επονομαζόμενης *Υπερβολικής Γεωμετρίας*- έκαναν ανεξάρτητα και δημοσίευσαν οι Lobachevsky (1829/30) και Bolyai (1832) και αυτό αποτέλεσε την αρχή για τις *μη ευκλείδειες Γεωμετρίες*. Στην *Υπερβολική Γεωμετρία του Lobachevsky* όπως και στην *σφαιρική Γεωμετρία του Riemann*, από σημείο εκτός ευθείας δε διέρχεται μόνο μία παράλληλος αλλά περισσότερες ή καμιά παράλληλη, αντίστοιχα.

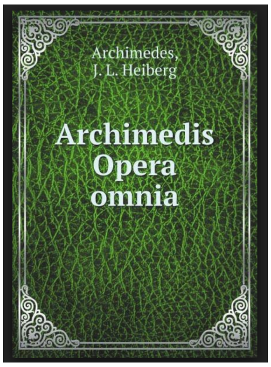
1.2.2 Αρχιμήδης - Απολλώνιος - Ήρων ο Αλεξανδρεύς

Στο βιβλίο *Histoire de la Géométrie* της γαλλικής σειράς *Que Sais-je?* στη σελίδα 29 αναφέρονται τα εξής λόγια του Leibnitz: «Αυτοί που είναι σε θέση να κατανοήσουν τον Αρχιμήδη θαυμάζουν λιγότερο τις ανακαλύψεις των πιο μεγάλων σύγχρονων ανδρών»! Γιατί ο Αρχιμήδης αναμφίβολα είναι το πιο πρωτότυπο, ευρύ, και συνάμα μοντέρνο πνεύμα όλης της Αρχαιότητας. Κορυφαίος επιστήμονας με πληθώρα ανακαλύψεων σε διαφορετικούς τομείς της επιστήμης, όπως στη Φυσική, στη Μηχανική, στην Αστρονομία, στα Μαθηματικά και σπουδαίος εφευρέτης. Μεγάλη ήταν και η συνεισφορά του στη Γεωμετρία. Ο τετραγωνισμός του κύκλου, της έλλειψης και της παραβολής, η μέθοδος της εξάντλησης, που εφάρμοσε για να προσεγγίσει την τιμή του αριθμού π, ο υπολογισμός εμβαδών και όγκων τμημάτων από κώνους, σφαίρες και παραβολοειδή, η ανακάλυψη της σχέσης μεταξύ των όγκων μίας σφαίρας και του περιγεγραμμένου κυλίνδρου του ίδιου ύψους και της ίδιας διαμέτρου, η έλιξ και πολλές άλλες προτάσεις προκαλούν το θαυμασμό. Τα έργα

[9] A. Ostermann, *Geometry by its History*, § 2.7, σελ. 52.

του Αρχιμήδη είχαν γραφτεί στη δωρική διάλεκτο και δεν έχουν διασωθεί όλα. Μερικά από τα διασωθέντα είναι τα: *Περί επιπέδων ισορροπιών*, *Κύκλου μέτρησις*, *Περί ελίκων*, *Περί σφαίρας και κυλίνδρου*, *Περί κωνοειδέων και σφαιροειδέων*, *Πρόβλημα Βοεικόν*, *Τετραγωνισμός Παραβολής*.

Για το τεράστιο και διαχρονικό έργο του υπάρχει πολύ μεγάλη βιβλιογραφία. Θα αναφέρουμε τις σημαντικότερες εκδόσεις:



Σχήμα 1.4:

- J. L. Heiberg, *Archimedes Opera Omnia*. (Η πρώτη έκδοση το 1880-1881)
- T. L. Heath, *The works of Archimedes* (1897)
- Paul ver Eecke, *Œuvres complètes d'Archimède* (1921)
- E.J. Dijksterhuis, *Archimedes* (1938-1944)
- Ε.Σ. Σταμάτη, *Αρχιμήδους Άπαντα* (1970-1974)

Τον 3ο π. Χ. αιώνα, στην αρχή του οποίου μεγαλούργησε ο Ευκλείδης και ακολούθησε ο Αρχιμήδης, θα κλείσει ένας ακόμα πολύ μεγάλος Μαθηματικός, ο Απολλώνιος ο Περγαίος (260-180 π.Χ.), ο συγγραφέας του έργου *Κωνικά*. Ο Απολλώνιος έγραψε οκτώ βιβλία πάνω στις κωνικές τομές. Τα πρώτα τέσσερα διασώθηκαν στο πρωτότυπο, για τα επόμενα τρία διασώθηκε μόνο η αραβική τους μετάφραση ενώ το 8ο και τελευταίο βιβλίο θεωρείται οριστικά χαμένο. Ο Απολλώνιος στα *Κωνικά* παίρνει τις θεωρίες του Ευκλείδη και του Αρχιμήδη, τις αναπτύσσει περαιτέρω και φτάνει ένα βήμα πριν την Αναλυτική Γεωμετρία του Descartes. Μία σημαντική καινοτομία του Απολλώνιου ήταν να θεωρήσει τις τρεις κωνικές τομές ως την τομή κατάλληλου επιπέδου με ένα (μόνο) κώνο.

Ο Απολλώνιος έλυσε το Δήλιο πρόβλημα με τη βοήθεια της τομής ενός κύκλου και μίας υπερβολής. Επίσης έθεσε και επέλυσε το Απολλώνιο πρόβλημα στην αγνοούμενη πραγματεία του *Επαφαί*.

Στην χρονική περίοδο που ακολουθεί θα αναφέρουμε και έναν ακόμα μεγάλο Γεωμέτρη, τον Ήρωνα τον Αλεξανδρέα[10] και συγκεκριμένα θα μιλήσουμε (στο επόμενο κεφάλαιο) για τον τύπο που υπολογίζει το εμβαδόν τριγώνου από τις τρεις πλευρές του και ο οποίος φέρει το όνομά του.
Στους επίγονους αυτών των μεγάλων Γεωμετρών θα αναφέρουμε συνοπτικά τους[11]:

- Νικομήδη, ο οποίος ανακάλυψε την *κογχοειδή καμπύλη*
- Διοκλή, ο οποίος ανακάλυψε την *κισσοειδή καμπύλη*
- Ζηνόδωρο τον Παιανιέα, ο οποίος είναι κυρίως γνωστός για τις μελέτες του σχετικά με τα ισοπεριμετρικά σχήματα
- Υψικλή τον Αλεξανδρέα, ο οποίος έγραψε διατριβή επί των κανονικών πολυέδρων[12] και
- Ίππαρχο τον Ρόδιο (είναι γνωστός και ως Ίππαρχος ο Νικαεύς), ο οποίος αν και μεγαλούργησε ως αστρονόμος θεωρείται ο «θεμελιωτής της Τριγωνομετρίας».

1.3 Η Γεωμετρία την Πρωτοχριστιανική περίοδο

Τα ονόματα των αξιόλογων Γεωμετρών αυτή την εποχή δεν είναι πολλά. Ξεχωρίζει σίγουρα ο Μενέλαος ο Αλεξανδρεύς (70-130 μ.Χ.), του οποίου το μόνο βιβλίο που έχει διασωθεί είναι τα *Σφαιρικά*. Στον Μενέλαο αναφέρεται με μεγάλο σεβασμό ο σύγχρονός του Πλούταρχος[13], ενώ αυτός που μιλά και αναλύει σε σημαντικό βαθμό το έργο του είναι ο Θέων ο Αλεξανδρεύς. Σε πολλά σημεία του έργου του με τίτλο

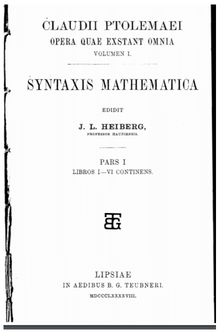
[10] Ο προσδιορισμός της περιόδου που έζησε ο Ήρων έχει δημιουργήσει το «Ηρώνειο ζήτημα». Δεν είναι εξακριβωμένο αν έζησε τον 1ο π.Χ. αιώνα ή αργότερα. Οι μελετητές του πολύπλοκου αυτού ζητήματος τον εντάσσουν χρονικά σε περιόδους που κυμαίνονται μέσα σε διάστημα μεγαλύτερο των τεσσάρων αιώνων.

[11] Moritz Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, Kapitel XVII.

[12] Είναι ο συγγραφέας του λεγόμενου 14ου βιβλίου των *Στοιχείων* του Ευκλείδη που ασχολείται με την εγγραφή κανονικών στερεών στη σφαίρα.

[13] Πλούταρχος, *Περί τοῦ ἐμφανομένου προσώπου τῷ κύκλῳ τῆς σελήνης* (De facie in obe lunae) 930. A.5-A.9. T.L.G.

Σχόλια στη Μαθηματική Σύνταξη του Πτολεμαίου διαβάζουμε τη φράση: «ὡς Μενέλαος ἐν Σφαιρικοῖς», δηλαδή «όπως ο Μενέλαος στα Σφαιρικά του», αποδίδοντας έτσι ορισμένους συλλογισμούς στον επινοητή τους. Τα τρία βιβλία των *Σφαιρικών* δεν τα γνωρίζουμε από τα πρωτότυπά τους, αλλά από Αραβικές και Εβραϊκές μεταφράσεις τους, που αργότερα μεταφράστηκαν στα Λατινικά και επανεκδόθηκαν πολλές φορές.


CLAUDII PTOLEMAEI
OPERA QUAE EXSTANT OMNIA
VOLUMEN I.
SYNTAXIS MATHEMATICA
EDIDIT
J. L. HEIBERG,
PARS I
LIBROS I—VI CONTINENS.
LIPSIAE
IN AEDIBUS B. G. TEUBNERI.

Σχήμα 1.5:

Στο πρώτο βιβλίο ασχολείται με τη γεωμετρία των σφαιρικών τριγώνων και μπορούμε να πούμε ότι εδώ ίσως έχουμε την πρώτη προσπάθεια μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Το δεύτερο είναι αστρονομικού περιεχομένου ενώ το τρίτο θεμελιώνει τη Σφαιρική Τριγωνομετρία και παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον, δεδομένου ότι σ'αυτό αναπτύσσεται το θεώρημα για τις διατέμνουσες σφαιρικών τριγώνων, το οποίο μάς είναι σήμερα γνωστό ως «Θεώρημα Μενελάου». Συγκρότησε επίσης πίνακες χορδών κύκλου,[14] οι οποίοι περιέχονται στο χαμένο έργο του *Περί υπολογισμού των χορδών κύκλου* σε 6 βιβλία. Εδώ βασίστηκε αργότερα ο Πτολεμαίος και τελειοποίησε ό,τι είχαν ξεκινήσει ο Ίππαρχος και ο Μενέλαος.

Ο Κλαύδιος Πτολεμαίος (100-178 μ.Χ.) υπήρξε μία πολύ μεγάλη μορφή των θετικών επιστημών (Αστρονόμος, Μαθηματικός, Γεωγράφος κ.α.). Ήταν πολυγραφότατος και ευτυχώς διασώθηκαν τα περισσότερα συγγράμματά του (ορισμένα μόνο σε αραβική μετάφραση). Το σπουδαιότερο έργο του είναι η *Μαθηματική Σύνταξις*[15] που είναι για την Αστρονομία ό,τι είναι τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη για τη Γεωμετρία.

Η ιστορία της ελληνικής επιστήμης μετά τον 3ο μ.Χ. αιώνα χαρακτηρίζεται από μία διαρκώς φθίνουσα παραγωγή νέων ιδεών και μία παράλληλη διοχέτευση της επιστημονικής δραστηριότητας στη συγγραφή σχολιαστικών υπομνημάτων και εξηγήσεων στα μεγάλα έργα του παρελθόντος και στη σύνταξη εκλαϊκευτικών συμπιλημάτων

[14] Αντίστοιχο πίνακα είχε κάνει πρωτύτερα και ο Ίππαρχος.

[15] Όταν οι Άραβες κατά τον 9ο αιώνα μετέφρασαν το έργο, του έδωσαν τον τίτλο *Κιτάπ Αλ-Ματζέστα*, και έτσι σιγά σιγά επικράτησε διεθνώς το απλοποιημένο όνομα *Αλμαγέστη*.

και επιτομών. Η δημιουργικότητα και το κριτικό πνεύμα που συνοδεύουν καμιά φορά τα έργα αυτά ή η εμφάνιση από καιρού εις καιρόν κάποιου επιγόνου που μπορεί να παραβληθεί με τις μεγάλες μορφές του παρελθόντος δεν αλλάζουν τη γενική εκτίμηση: η ελληνική επιστήμη περνάει πια στη φάση που συνοψίζεται, ανθολογείται και σχολιάζεται, για να περάσει αργότερα στους Άραβες και μέσω αυτών στη Δυτική Ευρώπη.

Ο τελευταίος μεγάλος Έλληνας Γεωμέτρης είναι ο Πάππος ο Αλεξανδρεύς, ο οποίος άκμασε τον 4ο αιώνα μ.Χ. Έγραψε εκτενή σχόλια επί των *Στοιχείων* του Ευκλείδη, από τα οποία ελάχιστα έχουν διασωθεί, επί της *Μαθηματικής Σύνταξης* του Πτολεμαίου, επί του *Περί Μεγεθών και Αποστημάτων* του Αρίσταρχου και επί του *Αναλήμματος* του Διόδωρου. Όλα τα τελευταία έχουν χαθεί. Το πιο σημαντικό του έργο όμως είναι η *Συναγωγή*, όπου συγκέντρωσε, συστηματικά και συνοπτικά, τα σπουδαιότερα μαθηματικά ευρήματα του ελληνικού κόσμου στους τομείς της Γεωμετρίας και της Αριθμητικής, συμπληρωμένα και σχολιασμένα από τον ίδιο. Το μεγαλύτερο μέρος του έργου αυτού έχει διασωθεί. Είναι διαιρεμένο σε 8 βιβλία εκ των οποίων μόνο το πρώτο, μέρος του δευτέρου και μέρος του ογδόου έχουν χαθεί. Σε καθένα από τα υπόλοιπα πραγματεύεται μαθηματικά θέματα όπως: *Περί μέσων όρων και αναρμονικών λόγων*, *Περί τριχοτομήσεως γωνίας*, *Περί ισοπεριμέτρων και κανονικών πολυέδρων*, *Περί επαφών* κλπ. Το έργο του Πάππου ενέπνευσε πολλούς μεταγενέστερους μαθηματικούς, Άραβες ή Δυτικοευρωπαίους.

1.4 Η Γεωμετρία από το τέλος της Αρχαιότητας έως την Αναγέννηση

1.4.1 Η Γεωμετρία των Ινδών και των Αράβων

Ο χρυσός αιώνας της Επιστήμης και των Μαθηματικών στον Ελλαδικό χώρο έχει περάσει. Οι Ρωμαίοι κατακτητές δε μπόρεσαν ούτε να κατανοήσουν ούτε να διαφυλάξουν την μεγάλη πνευματική κληρονομιά των Ελλήνων. Ο πρώτος λατίνος συγγραφέας που αναφέρει έστω τον Ευκλείδη είναι ο Κικέρων (55 π.Χ.). Μία ολοκληρωμένη λατινική μετάφραση των *Στοιχείων* γίνεται από τον Βοήθιο (480-524), η οποία δεν σώζεται ολόκληρη.

Η ελληνική Γεωμετρία έχει γίνει όμως γνωστή ακόμα και στην μακρινή Ινδία. Διακρίνουμε δύο περιόδους των Ινδικών Μαθηματικών, την παλαιότερη και τη νεώτερη. Η παλιά ινδική Γεωμετρία έχει να κάνει αυστηρά με κατασκευή βωμών. Η ύλη της αναφέρεται αποκλειστικά σε εμβαδά, κατασκευή τετραγώνου από πλευρά, τετραγωνισμό του κύκλου και άλλα παρόμοια προβλήματα, ενώ θεωρούνται γνωστά η διαίρεση διαστήματος σε ν ίσα μέρη, και η διαίρεση τετραγώνων και ορθογωνίων από τις διαγώνιες και τις μεσοκαθέτους. Επίσης μπορούν και εργάζονται και με ισοσκελή τραπέζια.

Στη νεώτερη Ινδική Γεωμετρία, που εκφράζεται από τα έργα των Aryabhata (5ος αι., Brahmagupta (6ος αι.), Mahavira (9ος αι.), Bhaskara (12ος αι.) υπάρχει προφανής επιρροή από την αντίστοιχη ελληνική και ιδίως από το έργο του Ήρωνα. Ωστόσο οι Ινδοί δε φαίνεται να έχουν κάνει κάτι καινούριο όσον αφορά στη στοιχειώδη Γεωμετρία. Το μόνο αξιοπρόσεκτο είναι ίσως μία γενίκευση σε εγγεγραμμένα τετράπλευρα του τύπου του Ήρωνα για το εμβαδόν τριγώνου. Δεν κατέχουν όμως καθόλου την αποδεικτική διαδικασία, γεγονός που οδηγεί τον Άραβα Al Biruni να χαρακτηρίσει τα Ινδικά Μαθηματικά ως «ανακάτεμα από διαμάντια και χαλίκια».

Τις ελληνικές και τις ινδικές γνώσεις καλλιέργησαν με μεγάλη προσοχή οι Άραβες. Οι Άραβες μετέφρασαν αρχαία ελληνικά επιστημονικά και φιλοσοσοφικά κείμενα και αυτές οι αραβικές μεταφράσεις διαδραμάτισαν έναν πολύ σημαντικό ρόλο στην Ιστορία για δύο λόγους. Αφ' ενός γιατί η αρχαιοελληνική επιστήμη και φιλοσοφία έγιναν γνωστές στην Ευρώπη, κατά τον όψιμο μεσαίωνα, δια μέσου κυρίως αυτών των μεταφράσεων (όπως είδαμε στο παράδειγμα της μετάδοσης των *Στοιχείων* του Ευκλείδη) και αφ' ετέρου αποδείχθηκαν σημαντικές για τη γνώση ακόμη και αυτής της ίδιας της αρχαίας ελληνικής επιστήμης. Πράγματι, δεν είναι λίγες οι περιπτώσεις κειμένων που το πρωτότυπο έχει χαθεί αλλά τα γνωρίζουμε σήμερα μόνο δια μέσου των αραβικών τους μεταφράσεων.

Κάποιες προσπάθειες γίνονταν και στη μεσαιωνική Ευρώπη, κυρίως σε μοναστήρια, προκειμένου να διατηρηθούν τα έργα των αρχαίων λογίων. Το αποτέλεσμα, όμως, ωχριούσε μπροστά στα επιτεύγματα του αραβικού κόσμου. Ωστόσο, από το δέκατο αιώνα κιόλας παρατηρήθηκε μία αλλαγή, όταν κάποια ψήγματα από μεταφράσεις έργων της αραβικής διανόησης άρχισαν να εισρέουν στη Δύση. Με τον καιρό, το ρυάκι έγινε χείμαρρος και οδήγησε στην επιστημονική αναγέννηση της Ευρώπης.

Οι Άραβες μαθηματικοί ενδιαφέρθηκαν και για τη Γεωμετρία. Τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη έφτασαν ήδη τον 8ο αιώνα στους Άραβες υπό τον Χαλίφη Al-Mansur. Ο Al-Hajjaj (9ος αιώνας) μετέφρασε τα *Στοιχεία* και μάλιστα δύο φορές, μία φορά για τον Χαλίφη Harun, αργότερα σε βελτιωμένη μορφή για το Χαλίφη Al-Mamun. Στο τέλος του 9ου αιώνα γράφτηκε από τον Ishak ibn Hussein μία καινούρια μετάφραση, η οποία ακολουθούσε πιο πιστά το ελληνικό κείμενο και ελέγχθηκε μετά και από τον Tabit ibn Qurra (826-901, Βαγδάτη). Μία τελευταία αραβική επεξεργασία οφείλεται στον Πέρση Αστρονόμο Nasir Eddin Tusi (1201-1274), η οποία τυπώθηκε το 1594 στη Ρώμη.

Η παλαιότερη αραβική Γεωμετρία είναι το έργο του al-Khwarizmi. Εμπεριείχε τους τύπους για τον υπολογισμό του εμβαδού και της περιφέρειας του κύκλου δίδοντας στο π την τιμή 22/7.

Το δεύτερο μισό του 9ου αιώνα ανέπτυξαν αξιόλογη δραστηριότητα οι τρεις αδελφοί Ban$\bar{u}$ M$\bar{u}$s$\bar{a}$ (Muhammad, Ahmad και Hasan). Είχαν ταξιδέψει στο Βυζάντιο για να αποκτήσουν ελληνικά χειρόγραφα και αφιερώθηκαν ιδιαίτερα στη Γεωμετρία. Έκαναν Σχόλια πάνω στα επτά μεταφρασμένα στα αραβικά βιβλία των *Κωνικών* του Απολλωνίου, όπως και στις μετρήσεις επίπεδων σχημάτων και στερεών. Αυτές οι μελέτες, για παράδειγμα πάνω στις μετρήσεις κύκλου και σφαίρας -μεταφρασμένες στα Λατινικά από τον Gherardo da Cremona (1114-1187, Τολέδο)- συνέβαλαν ουσιαστικά στα Μαθηματικά του Λατινικού Μεσαίωνα. Επίσης περιέγραψαν την αρχαία Μέθοδο της Εξάντλησης.

Τέλος, το όνομα που κλείνει αυτή τη Σχολή των Ινδο-αράβων Γεωμετρών είναι αυτό του Hassan Alhazen[16] (10ος αιώνας), ο οποίος έγραψε πολλά έργα Μαθη-

[16] ή Ibn al-Haytham.

ματικών και Αστρονομίας. Μεταξύ αυτών και το *Ibn al-Haytham's Completion of the Conics*[17].

1.4.2 Η Γεωμετρία στη Δύση

Ό,τι πήρε η Δύση άμεσα από την Αρχαιότητα μέσω του Βοήθιου[18] (480-524 μ.Χ.) και του Gerbert[19] (940-1003 μ.Χ.) είναι πραγματικά πολύ λίγο και περιορίζεται σε αποσπάσματα από τον Ευκλείδη και σε θέματα από την πρακτική Γεωμετρία, όσα λίγα είχαν πάρει ήδη οι Ρωμαίοι *Agrimensores* (επιθεωρητές Γης) από τα έργα του Ήρωνα. Η ελληνική Γεωμετρία στην αυθεντική της μορφή έφτασε στη Δύση, μόνο μέσω των Αράβων και Εβραίων συγγραφέων. Απευθείας λατινικές μεταφράσεις ελληνικών Μαθηματικών υπάρχουν ελάχιστες έως την Αναγέννηση και όσες υπάρχουν, περιορίζονται σε μεμονωμένα χειρόγραφα και σε ορισμένες μόνο περιοχές (όπως για παράδειγμα την Κάτω Ιταλία). Για τις μεταφράσεις των *Στοιχείων* έχει γίνει αναφορά στην υποενότητα 1.2.1. Μεγάλο μεταφραστικό έργο από τις πηγές ανέπτυξε το 1269/70 ο Wilhelm von Moerbecke (Δομηνικανός, 1215-1286, επίσκοπος της Κορίνθου), ο οποίος παρήγαγε λατινικά χειρόγραφα των Αρχιμήδη, Ευτόκιου, Ήρωνα, Πτολεμαίου. Λατινικές μεταφράσεις από τα Αραβικά ήταν επίσης διαδεδομένες, κυρίως μέσω του Gherardo da Cremona και του Plato του Tivoli (γύρω στο 1120).

Όσον αφορά στη Γεωμετρία, πρέπει να αναφερθούν τα ονόματα των Leonardo της Pisa (1220, *Practica Geometriae*) και ιδιαιτέρως του Jordanus Nemorarius (13ος αιώνας, *De Triangulis*), ο οποίος ανακεφαλαίωσε ό,τι είχε αναφερθεί στα έργα των προγενεστέρων του. Οι Αραβικές τους πηγές είναι εν μέρει γνωστές. Έτσι ξέρουμε για παράδειγμα ότι ο Leonardo χρησιμοποίησε σε μεγάλο βαθμό το *Liber embadorum*

[17] Αυτός είναι ο τίτλος της Αγγλικής μετάφρασης μαζί με σχόλια του Αραβικού κειμένου του Alhazen, ο οποίος προσπάθησε στο έργο του αυτό να ανακατασκευάσει το χαμένο όγδοο βιβλίο των *Κωνικών* του Απολλωνίου. Την μετάφραση αυτή έκανε ο J. P. Hogendijk και εκδόθηκε στη Νέα Υόρκη από τον οίκο Springer το 1985.

[18] Ρωμαίος συγκλητικός, ύπατος, μάγιστρος και φιλόσοφος.

[19] Γεννήθηκε με το όνομα Gerbert d' Aurillac και ήταν ένας σπουδαίος λόγιος και δάσκαλος. Ενέκρινε και προώθησε τη μελέτη της αραβικής/ελληνορωμαϊκής Αριθμητικής, Μαθηματικών και Αστρονομίας. Από τις 2 Απριλίου 999 έως το θάνατό του ήταν Πάπας, ο Πάπας Συλβέστρος ο 2ος.

του Savasorda (γύρω στο 1100 μ.Χ., Μπαρτσελόνα) στη λατινική μετάφραση του Plato του Tivoli.
Στη διάρκεια των χρόνων του Μεσαίωνα ο χαρακτήρας της Γεωμετρίας παραμένει πολύ κοντά στο χαρακτήρα της Γεωμετρίας των Ελληνιστικών χρόνων. Από τη μία, ακολουθεί την ελληνική γεωμετρική παράδοση των Ευκλείδη, Αρχιμήδη, Απολλωνίου και από την άλλη εδραιώνεται η διάκριση ανάμεσα στη θεωρητική και την πρακτική Γεωμετρία.

1.5 Η Γεωμετρία στα χρόνια της Αναγέννησης

Τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη συνεχίζουν να διαδραματίζουν βασικό ρόλο στη διδασκαλία της Γεωμετρίας, τόσο στα Πανεπιστήμια όσο και στα νέου τύπου Γυμνάσια. Τη μαζική εξάπλωση των γεωμετρικών γνώσεων διευκόλυνε φυσικά η συγγραφή και εκτύπωση μεγάλου αριθμού βιβλίων, τα οποία αρχίζουν να συντάσσονται στις εθνικές γλώσσες και όχι μόνο στα Λατινικά.
Άξια αναφοράς είναι τα κείμενα του Georg Peuerbach (1423-1461, Πανεπιστήμιο Βιένης) και του μαθητή και συνεργάτη του Johann Regiomontanus (1436-1476) που φανερώνουν μία επιμελημένη μελέτη καλών λατινικών και αραβικών πηγών. Δυστυχώς και οι δύο πέθαναν πολύ νέοι. Το 1460 τους είχε συναντήσει στη Βιένη ο Καρδινάλιος Βησσαρίων[20] και τους είχε προτρέψει να γράψουν μία συνοπτική εκδοχή της *Αλμαγέστης* του Πτολεμαίου. Έγιναν και σχέδια για μελλοντική συνεργασία και χρήση των ελληνικών χειρογράφων που είχε στην κατοχή του ο Βησσαρίων, ο οποίος είχε ως μητρική του γλώσσα τα Ελληνικά λόγω της καταγωγής του από την Τραπεζούντα. Έτσι προέκυψε το έργο *Epitoma in Almagestum Ptolemaei*, το οποίο αποτέλεσε ένα από τα πιο σημαντικά εκπαιδευτικά βιβλία της γεωκεντρικής Αστρονομίας. Ο Peuerbach μπόρεσε να ολοκληρώσει μόνο τα πρώτα έξι μέρη, λόγω του πρόωρου θανάτου του. Πέθανε σε ηλικία μόλις 38 ετών, αφού πριν όρ-

[20] Ο Βησσαρίων ο Τραπεζούντιος ή Βασίλειος Βησσαρίων ήταν Βυζαντινός κληρικός, καρδινάλιος της Καθολικής Εκκλησίας και τιτουλάριος Λατίνος Πατριάρχης Κωνσταντινουπόλεως, καθώς και ένας από τους επιφανείς λόγιους που συνέβαλαν στη σημαντική αναβίωση των γραμμάτων τον 15ο αιώνα.

κισε τον Regiomontanus να ολοκληρώσει το βιβλίο του. Η επιθυμία του εκπληρώθηκε στα επόμενα δύο χρόνια αλλά το έργο εκδόθηκε μόλις το 1496, είκοσι χρόνια μετά το θάνατο του Regiomontanus. Το κυριότερο έργο του Regiomontanus είναι τα πέντε βιβλία *De Triangulis Omnimodis*, το οποίο γράφτηκε πριν το 1464, αλλά εκδόθηκε μετά θάνατον το 1533. Σε αυτό το έργο παρατηρούμε την αποδέσμευση της Τριγωνομετρίας από το αστρονομικό της υπόβαθρο και την εξέλιξή της σε έναν ανεξάρτητο κλάδο των Μαθηματικών. Ο Regiomontanus χρησιμοποιεί την πρόταση των ημιτόνων και εξάγει συμπεράσματα για τις πλευρές και τις γωνίες τόσο για τα σφαιρικά τρίγωνα (στα βιβλία 3 και 4) όσο και για τα επίπεδα τρίγωνα (στα βιβλία 1 και 2). Στο βιβλίο 5 αναφέρεται πάλι στο σφαιρικό τρίγωνο χρησιμοποιώντας τώρα την πρόταση των συνημιτόνων.
Άξιοι αναφοράς για το έργο τους στην Γεωμετρία αυτής της περιόδου είναι και οι Γερμανοί Johannes Werner (1468-1522) και Albrecht Dürer (1471-1528) καθώς και οι Ιταλοί Luca Pacioli (1447-1517) και Francesco Maurolico (1494-1575).

Το 1543 ιδρύεται από τον Ισπανό Ιγνάτιο Λογιόλα το Τάγμα των Ιησουϊτών με πρώτη και κύρια δραστηριότητά του την ίδρυση σχολείων σε όλη την Ευρώπη. Σε λίγο σχετικά χρονικό διάστημα όλη η ανώτερη και ανώτατη εκπαίδευση της Ευρώπης είχε περιέλθει στα χέρια των Ιησουϊτών, αφού θεωρούνταν άτομα με εξαιρετική μόρφωση και κοφτερό πνεύμα. Στα Εκπαιδευτικά Ιδρύματα των Ιησουϊτών η Γεωμετρία κατείχε εξέχουσα θέση. Προέκυψαν εξαίσιες σχολιασμένες εκδόσεις των *Στοιχείων* του Ευκλείδη, όπως για παράδειγμα η έκδοση από τον γερμανό Ιησουΐτη Cristoph Clavius (1537-1612). Δημοσιεύτηκε πρώτη φορά το 1574 στη Ρώμη και μέχρι το 1738 είχε ξεπεράσει τις 20 επανεκδόσεις. Όσον αφορά στο περιεχόμενο, ο Clavius προχώρησε πέρα από το κείμενο του Ευκλείδη. Συμπεριέλαβε εκτός των τελευταίων XIV και XV βιβλίων και άλλα κείμενα, τα οποία πραγματεύονταν αποτελέσματα που είχαν προκύψει στα 1900 χρόνια μετά τον Ευκλείδη. Εντωμεταξύ, ο Matteo Ricci (1552-1610), μαθητής του Clavius και πρώτος ιεραπόστολος στην Κίνα, μετάφρασε τα πρώτα έξι βιβλία των *Στοιχείων* του Clavius στα Κινέζικα, φέρνοντας έτσι την ευρωπαϊκή επιστήμη στην αυλή του Κινέζου Αυτοκράτορα.

Σημαντική πρόοδος στην Γεωμετρία σημειώνεται τον 17ο αιώνα. Ο Γάλλος φιλόσοφος, Μαθηματικός και επιστήμονας φυσικών επιστημών René Descartes (1596-1650) με το βιβλίο του *La Géométrie*, το 1637, συνδέει την Γεωμετρία με την Άλγεβρα και βάζει έτσι τα θεμέλια της *Αναλυτικής Γεωμετρίας*, η οποία μελετά τα γεωμετρικά σχήματα με τη βοήθεια των μεθόδων της Άλγεβρας. Η εφαρμογή των νέων μεθόδων του Διαφορικού Λογισμού στην Αναλυτική Γεωμετρία οδήγησε στον πολλαπλασιασμό των κλάδων της Γεωμετρίας.

1.6 Από την Αναγέννηση έως σήμερα

Η Ευρωπαϊκή Αναγέννηση οδήγησε σε νέα άνθηση της Γεωμετρίας. Στα μέσα του 17ου αιώνα αναπτύσσεται η *Προβολική Γεωμετρία* στις μελέτες του Girard Desargues[21] (1591-1661) και του Blaise Pascal (1623-1662). Ο Desargues συνέδεσε τη θεωρία των κωνικών τομών της αρχαιότητας με τις προβολικές τεχνικές που είχαν αρχίσει να χρησιμοποιούν κάποιοι καλλιτέχνες ήδη στην Αναγέννηση. Ο Pascal σε ηλικία μόλις 16 ετών ανέπτυξε σε μία πραγματεία περί κωνικών τομών το θεώρημα που φέρει το όνομά του. Το αντικείμενο του νέου κλάδου επικεντρώνεται από τον Jean Victor Poncelet (1788-1867) στο έργο του *Traité des propriétés projectives des figures* που εκδίδεται το 1822 και αφορά στη μελέτη των ιδιοτήτων των επίπεδων σχημάτων που παραμένουν αναλλοίωτες κατά την προβολή τους από ένα επίπεδο σε άλλο.

Ο Poncelet ήταν μαθητής του Gaspard Monge (1746-1818), ο οποίος ήταν ο δημιουργός της *Παραστατικής Γεωμετρίας*, πάνω στην οποία βασίστηκε η Προβολική Γεωμετρία. Τον 18ο αιώνα διαμορφώνεται επίσης η *Διαφορική Γεωμετρία* στα έργα των Euler (1707-1783) και του Gaspard Monge. Αντικείμενό της αρχικά γίνονται οποιεσδήποτε λείες καμπύλες και επιφάνειες και οι μετασχηματισμοί τους.

Παράλληλα όμως με την ανάπτυξη των καινούριων κλάδων ανθεί ξανά και η κλασική Ευκλείδεια Γεωμετρία, δίνοντάς μας νέα, θεαματικά αποτελέσματα, όπως για παράδειγμα τα θεωρήματα: Brianchon, Pascal, D'Alembert, Steiner-Lehmus, Nagel,

[21] Γάλλος μηχανικός, αρχιτέκτονας και αυτοδίδακτος στα Μαθηματικά.

την ανακάλυψη νέων σημείων όπως είναι το σημείο Miguel, το σημείο Gergonne, το σημείο Lemoine, το σημείο Fermat ή το σημείο Nagel, την ανακάλυψη ευθειών όπως της ευθείας Euler, της ευθείας Simson και τόσα άλλα ακόμη.

Σε όλους τους παραπάνω κλάδους οι θεμελιακές έννοιες και αξιώματα παρέμεναν σχεδόν τα ίδια από την εποχή της αρχαίας Ελλάδας. Ριζική ανατροπή της εικόνας αυτής παρουσιάζεται στις αρχές του 19ου αιώνα με την ανακάλυψη της μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας από τον Ρώσο Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1792-1856). Ο Lobachevsky βασίστηκε σε αντικατάσταση του *αξιώματος των παραλλήλων* με μία από τις αρνήσεις του. Ανακοίνωσε την ιδέα του για πρώτη φορά το 1826, αλλά δημοσιεύθηκε τρία χρόνια αργότερα, το 1829-1830. Η Γεωμετρία που ανέπτυξε ο Lobachevsky είναι γνωστή σήμερα ως Υπερβολική Γεωμετρία και σύμφωνα με αυτήν από σημείο εκτός ευθείας υπάρχουν πολλές ευθείες παράλληλες με αυτή. Το 1835-38 εκδόθηκε το βιβλίο του *New Foundations of Geometry with a complete Theory of Parallels*.
Ανεξάρτητα από τον Lobachevsky και χωρίς να τον γνωρίζει, ο Ούγγρος János Bolyai (1802-1860) ανάμεσα στα έτη 1820 και 1823 εξεπόνησε μια πραγματεία πάνω σε ένα πλήρες σύστημα μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Αλλά το 1848 ανακάλυψε ότι ο Lobachevsky είχε δημοσιεύσει ήδη μία παρόμοια έρευνα το 1829. Οι δύο επιστήμονες δεν γνώριζαν ο ένας το έργο του άλλου.

Η νέα περίοδος που εγκαινιάζεται με τον Lobachevsky χαρακτηρίζεται από την ανάπτυξη νέων γεωμετρικών θεωριών, την αλλαγή του αντικειμένου της Γεωμετρίας και το διαχωρισμό της έννοιας του «μαθηματικού» από την έννοια του «πραγματικού» χώρου. Η νέα έννοια του γενικευμένου μαθηματικού χώρου διατυπώνεται από τον Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) και ανοίγει νέες προοπτικές στην ανάπτυξη της Γεωμετρίας οδηγώντας στη δημιουργία της λεγόμενης *Riemannian Γεωμετρίας*. Ο Riemann ήταν φοιτητής του Gauss και βρήκε τον σωστό τρόπο να επεκτείνει σε ν διαστάσεις τη Διαφορική Γεωμετρία των επιφανειών, την οποία ο ίδιος ο Gauss είχε αποδείξει με το *theorema egregium*[22]. Με τη δύση του 19ου αιώνα τα θεμέλια της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, αλλά και των άλλων (μη Ευκλείδειων) Γεωμετριών αποσαφηνίζονται και εκτίθενται με τη μορφή συστήματος αξιωμάτων.

[22] η Λατινική ονομασία για τον όρο «αξιόλογο θεώρημα». Είναι ένα σημαντικό αποτέλεσμα της Διαφορικής Γεωμετρίας, που αφορά την καμπυλότητα των επιφανειών. Μία συνέπεια αυτού είναι ότι η Γη δεν μπορεί να εμφανιστεί σε χάρτη χωρίς παραμόρφωση.

Κεφάλαιο 2

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΕΜΒΑΔΩΝ

2.1 Γενικά

Οι Έλληνες θεωρητικοί Μαθηματικοί, όπως ο Ευκλείδης, σπάνια χρησιμοποιούσαν έναν ιδιαίτερο όρο για το περιεχόμενο ενός σχήματος (χωρίον, έμβαδόν), αφού γι' αυτούς ούτως ή άλλως τα σχήματα δεν ήταν απλώς γραμμές, αλλά τμήματα της επιφάνειας. Με τις λέξεις «κύκλος», «τρίγωνο» εννοούσαν εξ αρχής το εμβαδόν του κύκλου, του τριγώνου αντίστοιχα. Οι γεωμέτρες όμως και οι τεχνίτες όπως ο Ήρων χρησιμοποιούσαν ειδικές λέξεις για το εμβαδόν. Στα Λατινικά χρησιμοποιείται είτε ο όρος «embadum», είτε ο όρος «area» και σπανιότερα οι όροι «spatium» ή «planities», «amplitudo», «superficies».

Η αρχαιότερη Γεωμετρία των Βαβυλωνίων και Αιγυπτίων, όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, ήταν περισσότερο μέτρηση και υπολογισμός επιφανειών παρά εύρεση και επεξεργασία γεωμετρικών στοιχείων. Την ανάπτυξή της μπορεί να την παρακολουθήσει κανείς από την 3η χιλιετία προ Χριστού έως και την Ελληνιστική περίοδο.

Ένα εύρημα από την 1η Βαβυλωνιακή Δυναστεία (τέλος της 3ης χιλιετίας π.Χ.) μας δείχνει διακοσμητικά σχέδια ίσως για στρώσιμο επιφάνειας με πλάκες: δίνεται η κύρια επιφάνεια και πρέπει να υπολογιστούν τα μικρότερα κομμάτια-τετράγωνα, κύκλοι, μέρη επιφάνειας αποτελούμενη από τόξα κύκλων-, ή ζητείται να χωριστεί ένα τετράγωνο σε 16 ίσα τετράγωνα ή σε 4 ή 8 ίσα ισοσκελή, ορθογώνια τρίγωνα, ή να εγγραφεί ένα τετράγωνο σ' ένα άλλο τετράγωνο και αυτό σε ένα τρίτο, όπως και να εγγράψουμε έναν κύκλο μέσα σε ένα τετράγωνο, και άλλα.

Πινακίδες σφηνοειδούς γραφής γύρω στο 2000 π.Χ. μας δείχνουν χωράφια με σχήμα ορθογωνίου τριγώνου που χωρίζεται σε χωρία συγκεκριμένων εμβαδών από παράλληλες λουρίδες κατά μήκος μίας καθέτου. Εδώ μπορεί κανείς να ακολουθήσει βήμα βήμα τους υπολογισμούς και να αναγνωρίσει ότι ο Βαβυλώνιος Μαθηματικός είναι σε θέση να υπολογίσει με ακρίβεια το εμβαδόν ορθογωνίων, τριγώνων, τραπεζίων. Επίσης τεκμηριώνεται ότι η επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων του ήταν γνωστή. Γνωστό είναι και το Πυθαγόρειο Θεώρημα. Σε μεταγενέστερες εποχές (γύρω στο 200 π.Χ) αναφέρονται προβλήματα, όπως «Να υπολογιστεί το εμβαδόν ενός ισοσκελούς τριγώνου με βάση 6 και ύψος 5», κάτι που δείχνει τη γνώση της πυθαγόρειας τριάδας 3, 4 και 5. Επίσης, «σε ένα ορθογώνιο να υπολογιστούν το μήκος l, το πλάτος b, και η διαγώνιος d, από το άθροισμα $l + b + d = 40$ και το εμβαδόν $lb = 120$», πρόβλημα για τη λύση του οποίου απαιτείται η γνώση του Πυθαγορείου Θεωρήματος και η επίλυση δευτεροβάθμιας εξίσωσης. Σε άλλη πινακίδα υπολογίζει από τη διαγώνιο ενός τετραγώνου την πλευρά του κατά προσέγγιση[1].

Και τα Αιγυπτιακά Μαθηματικά της ίδιας περιόδου έχουν αρκετές περιπτώσεις υπολογισμού επιφανειών. Στον πάπυρο Rhind, όπως και στον πάπυρο της Μόσχας εκτιμώνται σωστά οι επιφάνειες ορθογωνίων, τριγώνων και τραπεζίων. Ειδικά χρησιμοποιείται ο σωστός τύπος για το εμβαδόν τριγώνου ($\frac{1}{2}$βάση x ύψος). Αργότερα ωστόσο, σε δήλωση στοιχείων για ένα αγροτεμάχιο που υπάρχει σε ένα έγγραφο «δωρεάς» στον ναό του Ώρου στην πόλη Εντφού της Αιγύπτου (γύρω στο 200 π.Χ.) εμφανίζονται και προσεγγιστικοί τύποι, όπως ο τύπος $\frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}$ για το τετράπλευρο με πλευρές τις a, b, c, d, ένας τύπος που μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για τρίγωνο, μηδενίζοντας τη μία πλευρά. Αν πάρει κάποιος ισοσκελές τρίγωνο με $a = c$ το εμβαδόν προσεγγίζει το $a\frac{b}{2}$ αντί για το $a\frac{h}{2}$.

[1]O. Neugebauer, Math. Keilschrifttexte, I, S. 103—104, § 4—5.

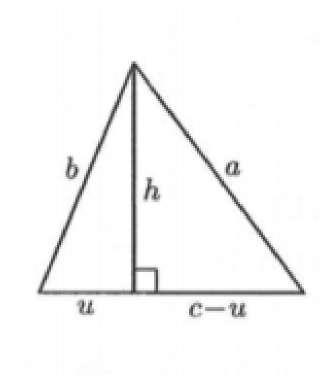
Όσο λάθος και αν είναι αυτοί οι προσεγγιστικοί τύποι, τόσο αξιοποιήσιμοι είναι, αν περιοριστεί κανείς σε ακανόνιστα τετράπλευρα που πλησιάζουν τη μορφή ορθογωνίου. Έτσι μπορεί κανείς εύκολα να καταλάβει γιατί ο πρακτικός γεωμέτρης, ορθότερα, ο γεωδαίτης με τη λιγοστή μαθηματική εκπαίδευσή του, συνεχίζει να χρησιμοποιεί αυτούς τους τύπους βασιζόμενος στην παρατήρηση για τα σχήματα που θα υπολογίσει ακόμα και αφότου οι θεωρητικοί ανέπτυξαν ακριβείς τύπους.
Τη στιγμή που συμπτωματικά ξανασυναντάμε αυτή τη διαδικασία υπολογισμού εμβαδών τετραπλεύρων και τριγώνων σε έργο Γεωμετρίας της Βυζαντινής εποχής[2], εδραιώνεται η σχέση της Ελληνικής Γεωμετρίας με την πανάρχαια Αιγυπτιακή.
Με τον ίδιο τρόπο που εργάζονταν οι Αιγύπτιοι και οι Έλληνες Γεωμέτρες, εργάζονταν επίσης οι Ινδοί και οι Ρωμαίοι. Η πανάρχαια πρακτική των προσεγγιστικών υπολογισμών τριγώνων και τετραπλεύρων ακολουθείται μέσω του έργου του Βοήθιου (5ος αιώνας) μέχρι και το τέλος του Μεσαίωνα.
Ο πρακτικός Γεωμέτρης μπορούσε να αρκεστεί ίσως στις προσεγγίσεις, όχι όμως ο καθαρά θεωρητικός. Το αυστηρά αφηρημένο πνεύμα του Έλληνα Μαθηματικού μεγάλωσε ακόμα περισσότερο αυτό το χάσμα. Η απέχθεια προς οποιαδήποτε πρακτική χρήση καθαρά γεωμετρικών αποτελεσμάτων είναι εμφανής στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη. Χρειάζεται να φτάσουμε στην εποχή του Ήρωνα για να δούμε πρακτικές εφαρμογές της Γεωμετρίας.

Ο Ήρωνας έχει εξαντλήσει το θέμα των προβλημάτων υπολογισμού εμβαδών ευθύγραμμων σχημάτων. Στο έργο του *Γεωμετρικά*, αρχίζει με το τετράγωνο, του οποίου αναζητεί το εμβαδόν και τις διαγώνιους. Έπειτα κάνει το ίδιο για το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Σε αυτήν την περίπτωση ασχολείται και με το αντίστροφο, δηλαδή από το εμβαδόν και την μία πλευρά υπολογίζει την άλλη. Ακολουθούν τα ορθογώνια τρίγωνα. Ο Ήρωνας θεωρεί γνωστές τις δύο πλευρές και από αυτές υπολογίζει την τρίτη και το εμβαδόν, αλλά και με δεδομένα το εμβαδόν και τη μία κάθετο υπολογίζει την άλλη κάθετο, ενώ προσπερνά την περίπτωση που ως δεδομένα λαμβάνονται η υποτείνουσα και το εμβαδόν. Γνωρίζει ότι το εμβαδόν μπορεί να το βρει κανείς

[2] Heron, *De Mensuris*, §54, 55, *Opera* 5, σελίς 206.

ως το ημιγινόμενο των καθέτων πλευρών. Στο ισόπλευρο τρίγωνο βρίσκει από την πλευρά το εμβαδόν και το ύψος χρησιμοποιώντας στρογγυλοποιημένες τιμές για τις τετραγωνικές ρίζες, ενώ αντίστοιχες ασκήσεις υπολογισμού του ύψους και του εμβαδού από τις πλευρές υπάρχουν και για το ισοσκελές τρίγωνο.

Στο τυχαίο τρίγωνο, όταν δίνονται οι τρεις πλευρές, η συνηθισμένη αντιμετώπιση υπολογισμού του εμβαδού έχει ως ακολούθως:



Σχήμα 2.1:

Από τον νόμο των συνημιτόνων είναι

$2uc = b^2 + c^2 - a^2$.

Άρα

$E^2 = \frac{1}{4}h^2c^2 = \frac{1}{4}(b^2 - u^2)c^2$

$= \frac{1}{4}b^2c^2 - \frac{1}{16}(b^2 + c^2 - a^2)^2$

$= \frac{1}{16}(a - b + c)(a + b - c)(b + c - a)(b + c + a)$

Πρόκειται για τον επονομαζόμενο τύπο του Ήρωνα, τον οποίο εξετάζουμε διεξοδικότερα στην επόμενη ενότητα. Ειδικά θα δούμε την απόδειξη του ίδιου του Ήρωνα.

2.2 Ο Τύπος του Ήρωνα

Στην Ευκλείδεια Γεωμετρία, **ο τύπος του Ήρωνα** δίνει το εμβαδόν ενός τριγώνου συναρτήσει του μήκους των πλευρών του. Σύμφωνα με τον τύπο ένα τρίγωνο με μήκη πλευρών a, b, και c έχει εμβαδόν

$$\mathrm{E} = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}$$

$$= \sqrt{\tau(\tau-a)(\tau-b)(\tau-c)},$$

όπου τ είναι η ημιπερίμετρος του τριγώνου.

Ο τύπος του Ήρωνα γενικεύεται για όλα τα εγγράψιμα πολύγωνα.

Η απόδειξη του Ήρωνα μπορεί να βρεθεί στο Πρόβλημα 8 του πρώτου τόμου του έργου του *Μετρικά* (περίπου 100 π.Χ.-100 μ.Χ.). Το χειρόγραφο είχε χαθεί για αιώνες έως το 1894, όταν ο Ιστορικός των Μαθηματικών Paul Tannery ανακάλυψε ένα τμήμα του σε ένα γαλλικό χειρόγραφο του 13ου αιώνα και το 1896, όταν βρέθηκε ένα πλήρες αντίγραφο από τον R. Schöne στην Κωνσταντινούπολη[3].
Η απόδειξη του τύπου με τον ίδιο συλλογισμό απαντάται και στο Πρόβλημα 30 του έργου του *Διόπτρα*, ενώ στα έργα του *Γεωμετρικά*, (Προβλήματα 30 και 31) και *Γεωδαισία*, (Πρόβλημα 12) βρίσκουμε την περιγραφή του τύπου ως αλγοριθμική διαδικασία και εφαρμογή του με αριθμητικά δεδομένα, δηλαδή ως αριθμητικά παραδείγματα υπολογισμού του εμβαδού τριγώνου από τα μήκη των πλευρών του.

Θα δώσουμε τώρα (σε μετάφραση) την πρωτότυπη απόδειξη του Ήρωνα όπως παρουσιάζεται στο Πρόβλημα 8 των *Μετρικών*. Αρχικά ο Ήρων δίνει ένα αριθμητικό παράδειγμα μέτρησης του εμβαδού ενός τριγώνου με πλευρές a=7, b=8 και c=9 μονάδες.

[3]Dunham 1990, σελ 118.

«Πρόσθεσε το 7, το 8 και το 9. Το αποτέλεσμα είναι 24.

Πάρε το μισό αυτού του αθροίσματος, το οποίο δίνει 12.

Βγάλε το 7. Το αποτέλεσμα είναι 5.

Και ξανά, από το 12 βγάλε το 8. Το υπόλοιπο είναι 4.

Και πάλι, από το 12 βγάλε 9. Το υπόλοιπο είναι 3.

Πολλαπλασίασε 12 επί 5. Το αποτέλεσμα είναι 60.

Πολλαπλασίασε το επί 4. Το αποτέλεσμα είναι 240.

Πολλαπλασίασε το επί 3. Το αποτέλεσμα είναι 720.

Πάρε την τετραγωνική ρίζα αυτού και αυτή θα είναι το εμβαδόν του τριγώνου.»

Στο Σχήμα 2.2 βλέπουμε ένα ακόμα αριθμητικό παράδειγμα (από τα *Γεωμετρικά*, για τρίγωνο με πλευρές 13, 14, 15).

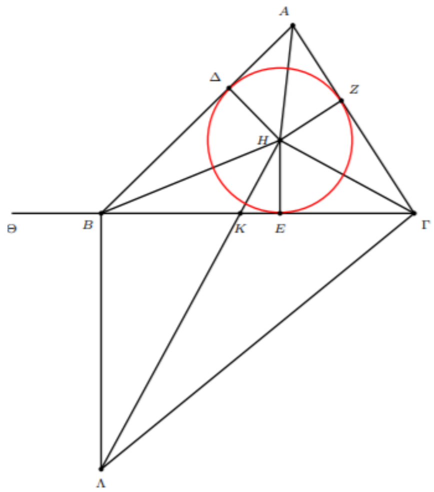
AC 30 *Ἑτέρα μέτρησις καθολικὴ ἐπὶ παντὸς τριγώνου.*

Τρίγωνον οἱονδηποτοῦν μετρήσεις οὕτως· οἷον ἔστω τριγώνου ἡ μὲν τῶν πλευρῶν σχοινίων $\overline{\iota\gamma}$, ἡ δὲ σχοινίων $\overline{\iota\delta}$, ἡ δὲ σχοινίων $\overline{\iota\epsilon}$· εὑρεῖν αὐτοῦ τὸ ἐμβαδόν. ποίει οὕτως· σύνθες τὰ $\overline{\iota\gamma}$ καὶ τὰ $\overline{\iota\delta}$ καὶ τὰ $\overline{\iota\epsilon}$· γίνονται $\overline{\mu\beta}$· τούτων τὸ ∠′ $\overline{\kappa\alpha}$· ἀπὸ τούτων ἄφελε τὰς τρεῖς πλευρὰς κατὰ μίαν, τουτέστιν ἄφελε τὰ $\overline{\iota\gamma}$, λοιπὰ $\overline{\eta}$, καὶ τὰ $\overline{\iota\delta}$, λοιπὰ $\overline{\zeta}$, καὶ τὰ $\overline{\iota\epsilon}$, λοιπὰ $\overline{\varsigma}$. πολυπλασίασον οὖν δι' ἀλλήλων· τὰ $\overline{\kappa\alpha}$ ἐπὶ τὰ $\overline{\eta}$· γίνονται $\overline{\rho\xi\eta}$· ταῦτα ἐπὶ τὰ $\overline{\zeta}$· γίνονται ͵$\overline{\alpha\rho o\varsigma}$· ταῦτα ἐπὶ τὰ $\overline{\varsigma}$· γίνονται ͵$\overline{\zeta\nu\varsigma}$· τούτων πλευρὰ τετραγωνικὴ γίνεται $\overline{\pi\delta}$· τοσούτων σχοινίων γίνεται τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου.

Σχήμα 2.2:

Ακολουθεί η θεωρητική απόδειξη, για την οποία ο διαπρεπής ιστορικός G. Loria στο βιβλίο του *Ιστορία των Μαθηματικών* γράφει ότι ο Ήρωνας χρησιμοποιεί «ένα καθαρώς γεωμετρικόν τέχνασμα τόσον κομψόν κατά την μορφήν και τόσον σημαντικόν κατά την ουσίαν, ώστε ο ίδιος ο Ευκλείδης δεν θα εδίσταζεν ασφαλώς να το επικυρώσει δια της υπογραφής του».

Έστω το δοθέν τρίγωνο ΑΒΓ με δεδομένες τις πλευρές του ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ. Να βρεθεί το εμβαδόν του (Σχήμα 2.3). Έστω ΔΕΖ ο εγγεγραμμένος κύκλος στο τρίγωνο, και



Σχήμα 2.3:

έστω Η το κέντρο του (Ευκλ. IV.4). Φέρνουμε τις ΑΗ, ΒΗ, ΓΗ, ΔΗ, ΕΗ και ΖΗ. Τότε

$$\mathrm{B\Gamma} \cdot \mathrm{EH} = 2(\mathrm{BH\Gamma})$$

$$\Gamma\mathrm{A} \cdot \mathrm{ZH} = 2(\mathrm{AH\Gamma})$$

$$\mathrm{AB} \cdot \Delta\mathrm{H} = 2(\mathrm{ABH}).$$

Προσθέτοντας κατά μέλη έπεται ότι το γινόμενο της περιμέτρου 2τ του τριγώνου ΑΒΓ επί το ΕΗ που είναι η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου ΔΕΖ είναι διπλάσιο του τριγώνου ΑΒΓ, δηλαδή

$$\tau \cdot \mathrm{EH} = (\mathrm{AB\Gamma}).$$

Προεκτείνουμε τη ΒΓ κατά τμήμα ΒΘ=ΑΔ. Τότε ΓΘ =τ επειδή ΑΔ=ΑΖ, ΔΒ=ΒΕ, ΖΓ=ΓΕ (Ευκλ. III.17). Επομένως

$$\Gamma\Theta \cdot \mathrm{EH} = (\mathrm{AB\Gamma}).$$

Άρα

$$(\mathrm{AB\Gamma})^2 = \Gamma\Theta^2 \cdot \mathrm{EH}^2.$$

Φέρνουμε από το Η κάθετη στη ΓΗ και από το Β κάθετη στη ΓΒ και έστω Λ το σημείο τομής των δύο αυτών καθέτων. Τότε, επειδή οι $\widehat{\Gamma\mathrm{H}\Lambda}$ και $\widehat{\Gamma\mathrm{B}\Lambda}$ είναι ορθές, το τετράπλευρο ΓΗΒΛ είναι εγγράψιμο (Ευκλ.ΙΙΙ.31), άρα οι $\widehat{\Gamma\mathrm{HB}}$ και $\widehat{\Gamma\Lambda\mathrm{B}}$ έχουν άθροισμα ίσο με δύο ορθές (Ευκλ.ΙΙΙ.22). Αλλά και $\widehat{\Gamma\mathrm{HB}}+\widehat{\mathrm{AH}\Delta} = 180^o$, επειδή οι γωνίες στο Η διχοτομούνται από τις ΑΗ, ΒΗ, ΓΗ και $\widehat{\Gamma\mathrm{HB}}+\widehat{\mathrm{AH}\Delta}+\widehat{\mathrm{AH}\Gamma}+\widehat{\Delta\mathrm{HB}} = 360^o$. Άρα $\widehat{\mathrm{AH}\Delta} = \widehat{\Gamma\Lambda\mathrm{B}}$ και επομένως τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΗ και ΓΒΛ είναι όμοια.

Θα ισχύουν λοιπόν οι αναλογίες

$$\frac{\mathrm{B}\Gamma}{\mathrm{B}\Lambda} = \frac{\mathrm{A}\Delta}{\Delta\mathrm{H}} = \frac{\mathrm{B}\Theta}{\mathrm{EH}}$$

οπότε με εναλλαγή των μέσων όρων και επειδή ΒΛ//ΕΗ έχουμε

$$\frac{\Gamma\mathrm{B}}{\mathrm{B}\Theta} = \frac{\mathrm{B}\Lambda}{\mathrm{EH}} = \frac{\mathrm{BK}}{\mathrm{KE}},$$

άρα και

$$\frac{\Gamma\Theta}{\mathrm{B}\Theta} = \frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EK}}.$$

Επομένως ισχύει

$$\frac{\Gamma\Theta^2}{\Gamma\Theta\cdot\mathrm{B}\Theta} = \frac{\mathrm{BE}\cdot\mathrm{E}\Gamma}{\Gamma\mathrm{E}\cdot\mathrm{EK}} = \frac{\mathrm{BE}\cdot\mathrm{E}\Gamma}{\mathrm{EH}^2}$$

επειδή στο ορθογώνιο τρίγωνο ΚΗΓ η ΕΗ είναι η κάθετη από την ορθή γωνία προς τη βάση. Άρα

$$(\Gamma\Theta)^2\cdot(\mathrm{EH})^2 = \Gamma\Theta\cdot\mathrm{B}\Theta\cdot\mathrm{BE}\cdot\mathrm{E}\Gamma.$$

Και γνωρίζουμε κάθε μία από τις ΓΘ, ΒΘ, ΒΕ, ΕΓ, αφού η ΓΘ είναι η ημιπερίμετρος τ του τριγώνου ΑΒΓ, και οι ΒΘ, ΒΕ και ΕΓ είναι η υπεροχή (διαφορά) της ημιπεριμέτρου από τις ΓΒ, ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Άρα έτσι και το Εμβαδόν του τριγώνου είναι γνωστό, αφού ισούται με την τετραγωνική ρίζα αυτού του γινομένου.

Ο Brahmagupta, Ινδός Μαθηματικός-αστρονόμος του 7ου μ.Χ. αιώνα διατύπωσε χωρίς απόδειξη τον τύπο

$$\mathrm{E} = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

για την εύρεση του εμβαδού ενός τετραπλεύρου, που είναι μία γενίκευση του Τύπου του Ήρωνα. Όμως ο τύπος αυτός εφαρμόζεται μόνο στα εγγεγραμμένα τετράπλευρα, κάτι που δεν αναφέρεται πουθενά από αυτόν. Φυσικά κάθε τρίγωνο είναι εγγράψιμο και μπορεί να θεωρηθεί ως εκφυλισμένο τετράπλευρο, οπότε κατά κάποιο τρόπο ο τύπος του Ήρωνα είναι ειδική περίπτωση του τύπου του Brahmagupta. Οι μαθηματικές προτάσεις που χρησιμοποιεί ο Brahmagupta διαφέρουν κατά πολύ σε ακρίβεια από τις προτάσεις της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Ο σχολιαστής Bhaskara (γεννηθείς το 1114) κάνει οξεία κριτική στην προσπάθεια του Brahmagupta να υπολογίσει το εμβαδόν του τετραπλεύρου μόνο από τις 4 πλευρές του, χωρίς έναν περαιτέρω περιοριστικό όρο.
Δεν γίνεται καν πιστευτό, ότι ένας Ινδός Μαθηματικός θα μπορούσε να είχε φτάσει σε αυτό τον τύπο με αλγεβρικό τρόπο και ακόμα λιγότερο ότι τα ινδικά Μαθηματικά θα είχαν τέτοια επίδοση στη Γεωμετρία. Αλλά ακόμα και στους Έλληνες δεν υπάρχει κανένα ίχνος του τύπου για το εγγεγραμμένο τετράπλευρο. Επικρατεί απόλυτο σκοτάδι για το ποιος αποκάλυψε στους Ινδούς ότι ο τύπος ισχύει μόνο για τα εγγεγραμμένα τετράπλευρα και σε ποιον χρεώνεται για πρώτη φορά η απόδειξη για αυτό. Μόλις τον 11ο αιώνα ρίχνεται κάποιο φως. Ο Bhaskara σε κάποιο άλλο σημείο αποδίδει τον τύπο στον Shrivara (γεννηθείς το 991) ενώ, όπως είπαμε πριν, πολεμάει τον Brahmagupta.

Εν τω μεταξύ και οι Μουσουλμάνοι είχαν ασχοληθεί με τα Ινδικά Μαθηματικά. Ο Abu'l Raihan Muhammed al-Biruni (973-1038, Πέρσης στην καταγωγή), έξοχος λόγιος, επισκέφτηκε την Ινδία και μελέτησε τους Ινδούς. Γνώριζε τις εργασίες του Brahmagupta και μάλιστα μετάφρασε αποσπάσματα των έργων του στα Αραβικά. Γύρω στο 1036 έγραψε ένα βιβλίο για την ανεύρεση του μήκους χορδών, στο οποίο παρουσιάζει μία σειρά προτάσεων και ασκήσεων που στηρίζονται σε τριγωνομετρική μέθοδο του Αρχιμήδη. Σε κάθε πρόταση αναφέρει και όσες αποδείξεις γι' αυτήν μπόρεσε να βρει. Από αυτό το πολύ σημαντικό έργο πληροφορηθήκαμε για πρώτη φορά ότι ο τύπος του Ήρωνα για το εμβαδόν τριγώνου οφείλεται στον Αρχιμήδη[4]. Την απόδειξη του Αρχιμήδη δεν τη γνωρίζει ο Al-Biruni. Την απόδειξη που παραθέτει ο ίδιος, στο βιβλίο του *Περί Ευρέσεως του Ύψους και του Εμβαδού Τριγώνου εκ των Πλευρών αυτού* την αποδίδει σε έναν νεότερο σύγχρονό του, τον Abu Abdallah Al Shanni (990 μ.Χ.). Αμέσως μετά από αυτή την απόδειξη ακολουθεί μία καινούρια επιγραφή «Απόδειξη του -στους Ινδούς αποδιδόμενου- τραπεζοειδούς, του Abu Abdallah Al Shanni». Εδώ έχουμε επιτέλους μία βάσιμη πληροφορία! Η γενίκευση του τύπου του Brahmagupta ήταν γνωστή επομένως στην Ινδία, αλλά δεν οφείλεται στον Brahmagupta, διαφορετικά ο Al-Biruni που τον γνώριζε καλά θα το είχε αναφέρει, όπως έκανε για τον τύπο του τριγώνου που ενσυνείδητα απέδωσε στον Αρχιμήδη. Η αόριστη φράση «στους Ινδούς αποδιδόμενου» δείχνει ότι δεν μπορεί να ονομάσει γι' αυτό κανέναν συγκεκριμένο Ινδό Μαθηματικό. Το πιθανότερο είναι ότι η απόδειξη δεν έγινε στην Ινδία. Η απόδειξη που δίνει ο Al-Shanni είναι τόσο πολύπλοκη και δύσκολη, που τιμά βέβαια την οξύνειά του, αλλά δείχνει απίθανο να έχει επιτευχθεί σε ινδικό έδαφος λόγω του μηδαμινού υπόβαθρου στη Γεωμετρία. Τη δυσκολία της απόδειξης μπορούμε να την αντιληφθούμε και από το γεγονός ότι η πρώτη σωστή απόδειξη στη Δύση, παρά τις μεγάλες προσπάθειες, επετεύχθη μόλις το 1727.

Η απόδειξη γίνεται με χρήση του «θεωρήματος της σπασμένης χορδής», με το οποίο θα ασχοληθούμε στο επόμενο κεφάλαιο.

Ο ινδικός αυτός τύπος και η αραβική απόδειξη εξαφανίστηκαν πλήρως τους ακόλουθους αιώνες. Το πρόβλημα της εγγραφής τετραπλεύρου σε κύκλο εμφανίζεται ξανά μόλις το 1464 από τον Regiomontanus, ο οποίος σίγουρα δε γνωρίζει τον τύπο του Brahmagupta, γιατί αν τον γνώριζε θα είχε αποφύγει έναν αρκετά πολύπλοκο τρόπο

[4]Van der Waerden 1961, pp. 228 and 277; Coxeter and Greitzer 1967, p. 59; Kline 1990; Bell 1986, p. 58; Dunham 1990, p. 127.

που χρησιμοποίησε για τον υπολογισμό του εμβαδού κάποιων τριγώνων που χρειάστηκε. Οι επιστολές του Regiomontanus φυλάσσονται σε διάφορες συλλογές[5] και γίνεται επανειλημένα αναφορά σε αυτές. Όμως χρειάστηκαν πάνω από 100 χρόνια για να προχωρήσει κάποιος την επεξεργασία αυτού του θέματος. Το 1565 ο Simon Jacob επαναφέρει στο βιβλίο του *Rechenbuch-Ausgabe mit Geometrie*- μέρος III, σελίδα 309, 59 το εγγεγραμμένο τετράπλευρο. Όπως προκύπτει, ούτε αυτός γνώριζε τον τύπο του Brahmagupta.

Ακολούθησαν διάφοροι που ασχολήθηκαν με το θέμα, όπως ο Benedetti, ο J. Scaliger, ο Vieta, ο Praetorius και άλλοι. Ο Ludolph van Ceulen άφησε μία συλλογή μικρών κειμένων στην ολλανδική γλώσσα, τα οποία εξέδωσε στα Λατινικά ο Willibeod Snellius (1580-1626). Το πρώτο από τα προβλήματα στη συλλογή του Ceulen ήταν η κατασκευή ενός εγγράψιμου τετραπλεύρου με πλευρές $6, 8, 9, 18$. Ο μεταφραστής και εκδότης, W. Snellius, ο ίδιος εξαίρετος Μαθηματικός συνοδεύει την έρευνα του Ceulen με προσθήκες και κάνει βελτιώσεις. Και εδώ έχουμε μία έκπληξη! Μέσα σε αυτά που γράφει εμφανίζεται ξανά, για πρώτη φορά από την εποχή των Ινδών και των Αράβων, ο τύπος του Brahmagupta. Λείπει όμως η απόδειξη. Δεν υπάρχει ούτε στη δεύτερη έκδοση του 1619. Ο Snellius σε κάποιο άλλο σημείο[6] ασχολείται εμβριθώς με τον τύπο του Ήρωνα για το τρίγωνο.

Η γνώση του τύπου εξαπλώνεται γρήγορα, αλλά παραμένει ακόμα χωρίς απόδειξη. Επιτέλους, το 1727 καταφέρνει επιτυχώς την απόδειξή του ο Philipp Naudé (1684-1747), ο νεότερος, συνονόματος του πατέρα του (1654-1729). Και οι δύο εργάστηκαν -ο ένας μετά τον άλλο- ως Μαθηματικοί στο Joachimsthalschen Gymnasium και υπήρξαν μέλη της Ακαδημίας του Βερολίνου. Το 1740 δημοσίευσε μία δεύτερη απόδειξη. Στην πρώτη (1727) αποδεικνύεται ότι

$$(ABCD) = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(-a+b+c+d)},$$

[5] όπως η Briefwechsel Regiomontanus-Bianchini.

[6] στο έργο του *Fundamenta Arithmetiea et Oeometrica cumeorundem usu in variis problematis-geometricis, partim solo linearum ductu, partim per numeros irrationales, et tabulas sinuum et Algebram solutis authore Ludolpho A Cevlen Hildesheimmsi e vernaculo in Latinum translata. Lugd. Bat.*, 1619, σελίδα 70, πρόβλημα 35.

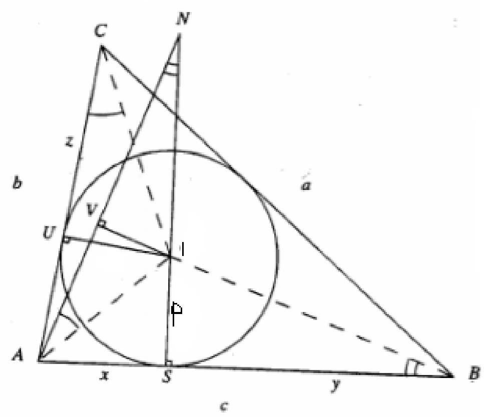
στη δεύτερη (1740) προσφεύγει στον τύπο του Ήρωνα για το τρίγωνο αρχίζοντας από το

$$(ABCD) = (BAD) + (BCD).$$

Ο Euler δίνει το 1750 μία τρίτη απόδειξη[7] και εκφράζει την άποψη ότι «μία απόδειξη από μόνη της δε θα ήταν δύσκολη, αν χρησιμοποιήσει κανείς την Ανάλυση για βοήθεια. Όσοι όμως θέλουν να εργαστούν με γεωμετρική μέθοδο, θα συναντήσουν τις μεγαλύτερες δυσκολίες. Ο Naudé δεν έκανε λίγα ως προς αυτήν την κατεύθυνση και προσκόμισε μία διπλή απόδειξη, όμως και οι δύο ήταν και μπερδεμένες αλλά και γεμάτες από βοηθητικά στοιχεία, έτσι ώστε μόνο με μεγάλη προσοχή μπορούσε κάποιος να τις παρακολουθήσει. Περιείχαν ωστόσο αρκετά ισχυρά ίχνη Ανάλυσης».

Η απόδειξη του Euler είναι ασυγκρίτως απλούστερη, χρησιμοποιεί όμως και αυτή αρκετά στοιχεία Ανάλυσης και έχει ως εξής:

Απόδειξη Euler



Σχήμα 2.4:

Στο τρίγωνο ABC με έγκεντρο I, έχουμε $\rho = \overline{IS} = \overline{IU}$. Έστω ότι η κάθετη από το A προς την BI την τέμνει στο σημείο V και έστω N η τομή των AV και IS. Επειδή

[7] *Variae demonstrationes geometrieae*. Nov. Comm. Petrop. I ad 1747 et 1748, Petersb. 1750, S. 49, § 12.

η γωνία $\widehat{AIV}$ είναι εξωτερική γωνία του τριγώνου AIB, παρατηρούμε ότι

$$\widehat{\mathrm{A}IV} = \widehat{IAB} + \widehat{IBA} = \frac{A}{2} + \frac{B}{2}$$

Επειδή το τρίγωνο AIV είναι ορθογώνιο, έπεται ότι

$$\widehat{IAV} = 90^o - \frac{A}{2} - \frac{B}{2} = \frac{C}{2}$$

Άρα τα ορθογώνια τρίγωνα IAV και ICU είναι όμοια, έτσι έχουμε ότι

$$\frac{\overline{AV}}{\overline{VI}} = \frac{\overline{CU}}{\overline{IU}} = \frac{z}{\rho}.$$

Επειδη τα τρίγωνα NIV και BAV είναι όμοια, έχουμε:

$$\frac{\overline{AV}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{IV}}{\overline{IN}}.$$

Αυτό δίνει την εξής σχέση

$$\frac{z}{\rho} = \frac{\overline{AB}}{\overline{IN}} = \frac{x+y}{\overline{SN} - \rho}$$

Έτσι,

$$z(\overline{SN}) = \rho(x+y+z) = \rho s$$

Επίσης από την ομοιότητα των τριγώνων NAS και BIS έχουμε

$$\frac{\overline{SN}}{\overline{AS}} = \frac{\overline{BS}}{\overline{IS}}.$$

Αυτό δίνει

$$\frac{\overline{SN}}{x} = \frac{y}{\rho},$$

Τέλος

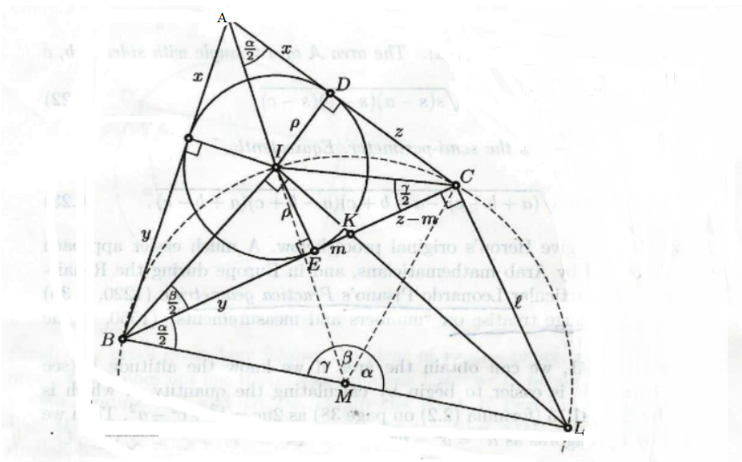
$$E = \rho s = \sqrt{\rho s(\rho s)} = \sqrt{z(\overline{SN})(\rho s)} = \sqrt{z(\frac{xy}{\rho})\rho s} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c).}$$

.

Μία παρόμοια απόδειξη του τύπου του Ήρωνα, με ένα διαφορετικό βοηθητικό τρίγωνο έδωσε ο Heath[8] το 1926.

Απόδειξη Heath

Θεωρούμε γνωστό ότι αν ρ είναι η ακτίνα του εγγεγραμμένου σε τρίγωνο κύκλου,



Σχήμα 2.5:

τότε το εμβαδόν τριγώνου είναι

$$\mathrm{E} = s\rho$$

Οπότε αρκεί να δείξουμε ότι η ακτίνα ρ δίνεται από τον τύπο

$$\rho = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

Έστω I το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο ABC και x, y, z οι αντίστοιχες αποστάσεις των A, B, και C από τα σημεία επαφής F, E, D του κύκλου με το τρίγωνο (Δες σχήμα 2).

[8] *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, 1926, Vol. II, pp.87-88.

Αφού $y+z=a$, $x+z=b$ και $x+y=c$, έχουμε ότι $x+y+z=s$, οπότε $x=s-a$, $y=s-b$, $z=s-c$.

Φέρουμε στο C την κάθετη στην πλευρά c και στο I την κάθετη στη διχοτόμο BI, οι οποίες τέμνονται στο L. Σχεδιάζουμε κύκλο με διάμετρο BL και έστω M το κέντρο του. Αυτός διέρχεται από τα I και C. Αν K το σημείο που η LI τέμνει την c, αποδεικνύεται ότι τα ορθογώνια τρίγωνα BCL και ADI είναι όμοια. Πράγματι η $\widehat{DAI}=\widehat{CBL}=\frac{\widehat{\mathrm{A}}}{2}$ αφού η $\widehat{CBL}$ έχει ως επίκεντρη την $\widehat{CML}$, που είναι παραπληρωματική της $\widehat{CMB}=\widehat{CME}+\widehat{EMB}=\widehat{B}+\widehat{C}$.

Τα τρίγωνα IEK και LCK είναι επίσης όμοια. Εφαρμόζοντας δύο φορές το θεώρημα του Θαλή έχουμε

$$\frac{y+z}{x}=\frac{l}{\rho}=\frac{z-m}{m},\ \mu\varepsilon\, m=KE\,\kappa\alpha\iota\, l=CL$$

Προσθέτοντας 1 και στα δυο μέλη της ισότητας $\frac{y+z}{x}=\frac{z-m}{m}$, παίρνουμε

$$\frac{x+y+z}{x}=\frac{z}{m},$$

άρα $m=\frac{xz}{s}$. Τέλος, ρ είναι το ύψος του ορθογωνίου τριγώνου BIK. Άρα, από τύπο, έχουμε ότι

$$\rho^2=ym=\frac{xyz}{s},$$

η οποία είναι η ζητούμενη σχέση.

Μια άλλη απόδειξη μπορεί να προκύψει με τη βοήθεια του Σχήματος 2.5 και με χρήση τριγωνομετρικών ταυτοτήτων, αφού

$$\rho=xtan\frac{A}{2}=(s-a)tan\frac{A}{2}$$

με

$$tan\frac{\mathrm{A}}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-b)}{(s-a)s}}$$

ή χρησιμοποιώντας τους δύο τύπους $sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-b)}{bc}}$ και $cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)s}{bc}}$ παίρνουμε

$$E = \frac{1}{2}bcsinA = bcsin\frac{A}{2}cos\frac{A}{2}$$

και τελικά

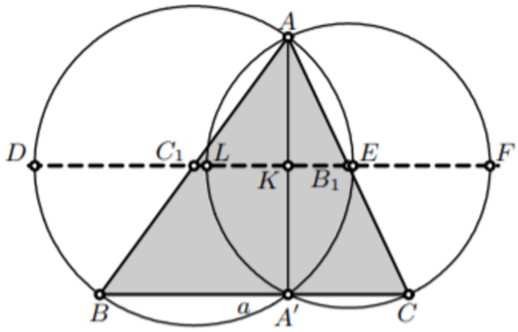
$$\mathrm{E} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Δύο κομψές αποδείξεις[9] έδωσε ο $Victor\, Thébault$(1882-1960).

Για την πρώτη του απόδειξη βλέπουμε το Σχήμα 2.6

Απόδειξη $Thébault$ (1)

Φέρνουμε τους κύκλους με διαμέτρους AB και AC με αντίστοιχα κέντρα C_1, B_1,



Σχήμα 2.6:

ακτίνες $r_1 = \frac{c}{2}$ και $r_2 = \frac{b}{2}$ και ριζικό άξονα τον AKA'. Τότε $E = \frac{1}{2}AA' \cdot BC = 2AK \cdot C_1B_1$

Τότε αφού το τρίγωνο DEA είναι ορθογώνιο, έχουμε

$$E^2 = 4(AK)^2 \cdot (B_1C_1)^2$$

$$= 4(DK \cdot EK)(B_1C_1)^2$$

[9] *The Area of a Triangle as a Function of the Sides*, The American Mathematical Monthly, τόμος 52, τεύχος 9, Νοέμβριος 1945, σελίδες 508-509.

$$= (DK \cdot 2B_1C_1)(EK \cdot 2B_1C_1)$$

Άν $d_1 = KC_1,\ d_2 = KB_1$ και δ=$B_1C_1 = d_1 + d_2$ έχουμε
$r_1^2 - r_2^2 = d_1^2 - d_2^2 = (d_1 + d_2)(d_1 - d_2) = \delta(2d_1 - \delta)$,
οπότε $2d_1\delta = r_1^2 - r_2^2 + \delta^2$.
Άρα $DK \cdot 2B_1C_1 = 2(r_1 + d_1)\delta = 2\delta r_1 + r_1^2 - r_2^2 + \delta^2 = (r_1 + \delta + r_2)(r_1 + \delta - r_2) = DF \cdot DL$, δηλαδή η δύναμη του D ως προς τον δεξιό κύκλο.
Το σημείο E βρίσκεται στον ίδιο κύκλο, έτσι όμοια θα έχουμε ότι
$2B_1C_1 \cdot EK = EF \cdot EL$
Άρα τελικά $E^2 = DF \cdot DL \cdot EF \cdot EL$. Όμως από το σχήμα έχουμε ότι
$DF = DC_1 + C_1B_1 + B_1F = r_1 + \delta + r_2 = \frac{c+a+b}{2}$

$DL = DB_1 - B_1L = DC_1 + C_1B_1 - B_1L = \frac{c+a-b}{2}$

$EF = C_1B_1 + B_1F - C_1E = \frac{a+b-c}{2}$ και

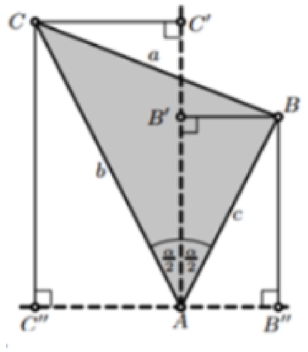
$EL = DE - DL = c - \frac{c+a-b}{2} = \frac{c+b-a}{2}$

Η σχέση μας γίνεται λοιπόν
$E^2 = \frac{1}{16}(a+b+c)(a+c-b)(a+b-c)(c+b-a)$ που δίνει τον τύπο του Ήρωνα.

Για τη δεύτερη απόδειξη (1945) του $Thébault$, η οποία στηρίζεται στην πρόταση III.42 που υπάρχει στα *Κωνικά* του Απολλωνίου, ας δούμε το Σχήμα 2.7.

<u>Απόδειξη $Thébault$ (2)</u>

Προβάλλουμε τα σημεία B και C ορθογώνια πάνω στην εσωτερική και εξωτερική διχοτόμο της Α, οι οποίες είναι κάθετες μεταξύ τους. Έπειτα δείχνουμε ότι το εμβαδόν E είναι ίσο με το εμβαδόν του ορθογωνίου με πλευρές τις AB'' και AC', όπως και με το εμβαδόν του ορθογωνίου με πλευρές τις AB' και AC''. Το κλειδί της απόδειξης είναι η χρήση του πορίσματος της πρότασης του Απολλωνίου III.42.



Σχήμα 2.7:

Αναλυτικότερα:

Ένας τρόπος για να αποδείξουμε τον πρώτο ισχυρισμό μας είναι με τη βοήθεια της τριγωνομετρίας. Το εμβαδόν $E = \frac{1}{2}bcsinA = (csin\frac{A}{2})(bcos\frac{A}{2}) = CC' \cdot BB''$ και όμοια $E = BB' \cdot CC''$

Άρα $E^2 = CC' \cdot BB'' \cdot BB' \cdot CC'' = (BB'' \cdot CC'')(BB' \cdot CC')$

Το πρώτο ζεύγος παραγόντων μπορεί να θεωρηθεί ως το γινόμενο των αποστάσεων των εστιών μιας έλλειψης, η οποία έχει εστίες τα B και C και διέρχεται από το A, από την εφαπτομένη στο σημείο A, ενώ το δεύτερο είναι η ίδια ποσότητα για την αντίστοιχη υπερβολή. Ο λόγος γιαυτό είναι ότι οι εφαπτομένες στο A είναι οι διχοτόμοι της γωνίας. Από τον τύπο $dd' = b^2$, όπου d, d' οι αποστάσεις των εστιών έλλειψης, και b ο μικρός ημιάξονάς της- και έναν παρόμοιο τύπο για την υπερβολή - αυτά τα γινόμενα είναι ίσα με τα τετράγωνα των μικρών ημιαξόνων αυτών των δύο κωνικών τομών. Αφού γνωρίζουμε και για τις δύο κωνικές την τιμή των αποστάσεων εστιών από το A, δηλαδή εδώ τα b και c αντίστοιχα, όπως επίσης και την απόσταση των δυο εστιών μεταξύ τους, εδώ δηλαδή το α, μπορούμε να βρούμε αυτούς τους μικρούς ημιάξονες από γνωστούς τύπους, δηλαδή μπορούμε να βρούμε τα a, b, c. Το αποτέλεσμα του παραπάνω πολλαπλασιασμού θα είναι τότε

$$E^2 = \frac{1}{16}((b+c)^2 - a^2)(a^2 - (b-c)^2)$$

που οδηγεί στο επιθυμητό αποτέλεσμα.

Τέλος, μία σύγχρονη απόδειξη του τύπου είναι η εξής:

Από το νόμο των συνημιτόνων έχουμε

$cosC = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ και άρα

$sinC = \sqrt{1-cos^2C} = \frac{\sqrt{4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2}}{2ab}$

Οπότε

$$E = \frac{1}{2}absinC = \frac{1}{4}\sqrt{4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

<u>ΠΟΡΙΣΜΑ</u> (Lhuilier, 1810/11)

Το εμβαδόν ενός τριγώνου δίνεται από τον τύπο

$$\mathrm{A} = \sqrt{\rho\rho_a\rho_b\rho_c},$$

όπου ρ_a, ρ_b, ρ_c είναι οι ακτίνες των παρεγγεγραμμένων κύκλων.

<u>Απόδειξη</u>

Χρησιμοποιώντας τους τύπους

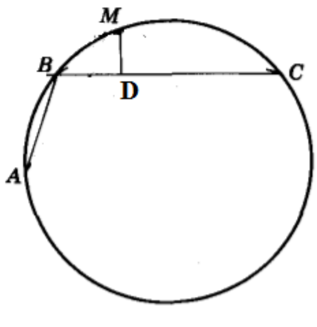
$\rho_a = \frac{s\rho}{s-a}, \rho_b = \frac{s\rho}{s-b}, \rho_c = \frac{s\rho}{s-c}$ και τον $\rho = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$

προκύπτει εύκολα το ζητούμενο κάνοντας χρήση του τύπου του Ήρωνα.

Κεφάλαιο 3

ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΗΣ «ΣΠΑΣΜΕΝΗΣ ΧΟΡΔΗΣ»

Στο προηγούμενο κεφάλαιο αναφέραμε ότι η απόδειξη που δίνει ο Πέρσης Al-Shanni για τον υπολογισμό του εμβαδού τριγώνου από τις πλευρές του χρησιμοποιεί το θεώρημα της «σπασμένης χορδής», ένα θεώρημα που οφείλουμε στον Αρχιμήδη σύμφωνα με Άραβες λόγιους που όπως ξέρουμε έχουν μεταφράσει και σχολιάσει πολλά χαμένα αρχαία έργα. Το «θεώρημα της σπασμένης χορδής» ή «θεώρημα της τεθλασμένης γραμμής» έχει ως εξής:



Σχήμα 3.1:

«Αν σε τυχαίο τόξο κύκλου $\widehat{ABC}$ εγγραφεί τεθλασμένη γραμμή αποτελούμενη από δύο άνισα τμήματα $(AB \neq BC)$ και από το μέσο M του τόξου αχθεί κάθετος MD στο μεγαλύτερο τμήμα αυτής, τότε τα τμήματα στα οποία διαιρέθηκε η τεθλασμένη είναι ίσα, δηλαδή AB+BD=DC».

Δεν γνωρίζουμε αν ο Αρχιμήδης είδε κάποια τριγωνομετρική σημασία σε αυτό το θεώρημα, όμως έχει γραφτεί[1] ότι του χρησίμευσε στις μελέτες του στην αστρονομία ως τύπος ανάλογος του σημερινού $sin(x-y) = sinxcosy - cosxsiny$. Μπορεί κανείς να δει την αντιστοιχία αυτή αν θέσει $\widehat{MC} = 2x$ και $\widehat{BM} = 2y$. Τότε $\widehat{AB} = 2x - 2y$. Οι χορδές που αντιστοιχούν σε αυτά τα τόξα είναι αντίστοιχα MC=2sinx, BM=2siny και AB=2sin(x-y). Επίσης, οι προβολές του MC και MB πάνω στη BC είναι DC=2sinxcosy και DB=2sinycosx. Γράφοντας το θεώρημα της σπασμένης χορδής στη μορφή AB=DC-DB και αντικαθιστώντας τις χορδές με τα τριγωνομετρικά ισοδύναμά τους, προκύπτει ο τύπος $sin(x-y) = sinxcosy - cosxsiny$.

Ο Ελβετός Heinrich Suter (1848-1922), ο οποίος γνώριζε Αραβικά και εθεωρείτο στην εποχή του ο πιο ειδήμων στα Αραβικά Μαθηματικά, έχει μεταφράσει (στα Γερμανικά) και σχολιάσει το έργο του Al Biruni[2] *Το Βιβλίο της Εύρεσης χορδών στον κύκλο*.

Σχήμα 3.2: Ο Al Biruni

Στην έκδοση αυτή (Ζυρίχη, 1910) του Suter, ο Al Biruni διατυπώνει το Θεώρημα της σπασμένης χορδής και παραθέτει 22 αποδείξεις του. Πρώτη αναφέρει την απόδειξη του Αρχιμήδη που ακολουθείται από μία παρεμφερή του Άραβα Djiordjani. Στη συνέχεια παρουσιάζονται και άλλες δύο αποδείξεις του Αρχιμήδη, οι οποίες μαζί με την πρώτη βρίσκονται στην πραγματεία του με τίτλο *Περί των επιψαυόντων κύκλων*[3]. Οι υπόλοιπες αποδείξεις αποδίδονται είτε στον ίδιο είτε σε Άραβες, όπως οι Hashbas, Sidjzi, Shanni, Iraq και άλλοι.

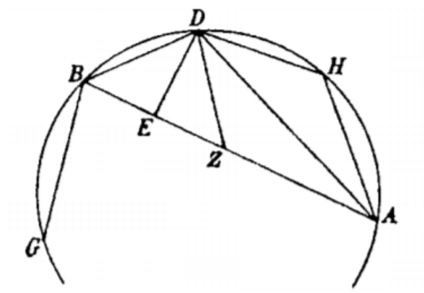
[1] Johannes Tropfke, *Archimedes und die Trigonometrie*, *Archiv für die Geschichte der Mathematik*, 10 (1927-1928), σελίδες 432-463.

[2] Ιρανός πολυμαθής λόγιος (973-1048), που ασχολήθηκε με Φυσική, Μαθηματικά, Αστρονομία και διακρίθηκε μεταξύ άλλων και ως Ιστορικός και Γλωσσολόγος.

[3] Αρχιμήδης, *Περί των επιψαυόντων κύκλων*, πρόταση 14, σελίδες 12-15.

Ας δούμε κάποιες αποδείξεις του θεωρήματος, αρχίζοντας με αυτές του Αρχιμήδη.

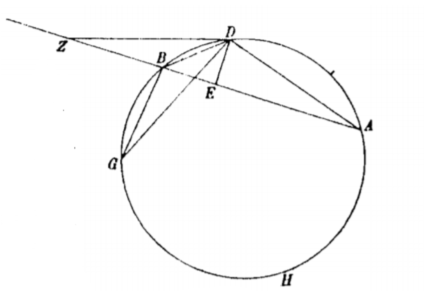
Απόδειξη 1 (Αρχιμήδης)



Σχήμα 3.3:

Αν D το μέσο του $\overset{\frown}{ABG}$, DH=DB και EZ=EB και φέρουμε τις DZ, DA έχουμε ότι DB=DZ, αφού DE κάθετη και διάμεσος στο τρίγωνο BDE, άρα και DH=DZ. Επειδή $\overset{\frown}{DB} = \overset{\frown}{DH}$ θα ισχύει και $\overset{\frown}{AH} = \overset{\frown}{BG}$. Ισχύει ότι $\widehat{HDA} + \widehat{DAB} = \widehat{DBA} = \widehat{DZB}$. Αλλά $\widehat{DZB} = \widehat{ZAD} + \widehat{ZDA}$, άρα $\widehat{ZDA} = \widehat{HDA}$. Συνεπώς τα τρίγωνα DZA, DHA είναι ίσα (αφού DH=DZ, DA κοινή και $\widehat{ZDA} = \widehat{HDA}$) και άρα[4] AZ=AH. Αλλά AH=BG και EZ=EB, επομένως AZ+EZ=EB+BG, που είναι το ζητούμενο.

Απόδειξη 2 (Αρχιμήδης)



Σχήμα 3.4:

Προεκτείνουμε την AB, παίρνουμε EZ=AE και φέρουμε τις DA, DG, DB, και DZ. Επειδή οι χορδές AD, DG είναι ίσες και AD=DZ, όπως και DZ=DG και επειδή $\widehat{DAB} = \widehat{DGB}$, $\widehat{DAE} = \widehat{DZE}$, έπεται ότι $\widehat{DZB} = \widehat{DGB}$.
Επειδή $\overset{\frown}{DA} = \overset{\frown}{DG}$ και το $\overset{\frown}{AHG}$ κοινό, έπεται ότι $\overset{\frown}{DAHG} = \overset{\frown}{DGHA}$.

Αλλά η $\widehat{DBG}$ βαίνει στο $\overset{\frown}{DAHG}$, ενώ οι $\widehat{DAB}$ και $\widehat{ADB}$ μαζί, βαίνουν στο $\overset{\frown}{DGHA}$. Άρα $\widehat{DBG} = \widehat{DAB} + \widehat{ADB}$. Αλλά η $\widehat{DBZ}$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο DBA, άρα
$\widehat{DBZ} = \widehat{DAB} + \widehat{ADB}$. Συνεπώς $\widehat{DBZ} = \widehat{DBG}$. Έχουμε αποδείξει όμως ότι

[4] Ο Αρχιμήδης δεν αναφέρεται -χάρην συντομίας- στην ισότητα των τριγώνων, αλλά περνάει κατευθείαν στην ισότητα των υπολοίπων στοιχείων που προκύπτουν από αυτήν.

$\widehat{DZB} = \widehat{DGB}$, άρα ισχύει και $\widehat{DGB} = \widehat{ZDB}$. Άρα τα τρίγωνα DZB, DBG είναι ίσα και επομένως BG=BZ. Οπότε BG+BE=ZE=AE, που είναι το ζητούμενο.

<u>Απόδειξη 3 (Αρχιμήδης)</u>

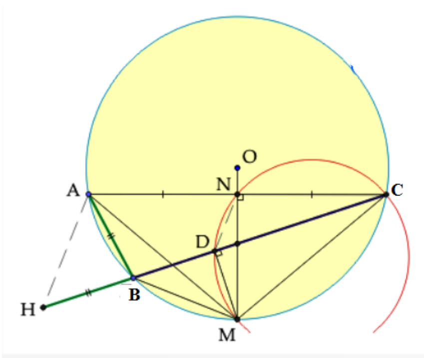
(Σχήμα 3.4)

Επειδή το τόξο $\widehat{DBG}$ είναι μικρότερο του ημικυκλίου, έπεται ότι η γωνία $\widehat{DBG}$ είναι αμβλεία. Επίσης επειδή το τόξο $\widehat{DGA}$ είναι μεγαλύτερο του ημικυκλίου, η $\widehat{DBA}$, η οποία βρίσκεται απέναντι στη χορδή AD, είναι οξεία και άρα η $\widehat{DBZ}$ είναι αμβλεία. Επίσης $\widehat{DZB} = \widehat{DGB}$, όπως και DG=DZ, άρα $\dfrac{DG}{DB} = \dfrac{DZ}{DB}$.

Τα τρίγωνα DBZ και DBG έχουν μία γωνία ίση, τις πλευρές που περιέχουν τις γωνίες τους $\widehat{DBG}$ και $\widehat{DBZ}$ ανάλογες, άρα αφού αυτές είναι αμβλείες, έπεται ότι είναι ίσες και τα τρίγωνα είναι όμοια. Είναι όμως και ίσα, άρα BZ=BG, δηλαδή BG+BE=AE, που είναι και το ζητούμενο.

Στο πνεύμα του Αρχιμήδη είναι και η ακόλουθη απόδειξη

<u>Απόδειξη 4</u>



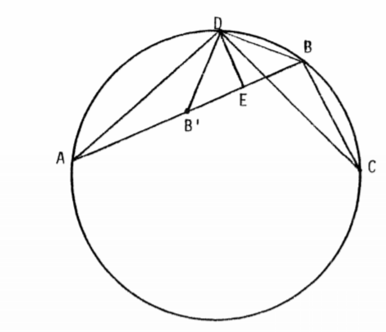
Σχήμα 3.5:

Έστω το σημείο H στην επέκταση της BC, τέτοιο ώστε BA=BH. Τότε η $\widehat{CBA}$ είναι εξωτερική στο ισοσκελές τρίγωνο ABH, οπότε $\widehat{CBA} = 2\widehat{BHA}$. (1)

Αφού το M είναι μέσο του $\widehat{ABC}$ προκύπτει ότι η MO είναι κάθετη στο μέσο της AC και αν N το σημείο τομής της με αυτήν, το τετράπλευρο MDNC είναι εγγράψιμο, άρα $\widehat{CDN} = \widehat{CMN}$.

Αλλά $\widehat{CMN} = \dfrac{\widehat{CMA}}{2}$, επομένως και $\widehat{CDN} = \dfrac{\widehat{CMA}}{2}$, δηλαδή $\widehat{CMA} = 2\widehat{CDN}$ (2).
Όμως $\widehat{CBA} = \widehat{CMA}$ ως εγγεγραμμένες στο μη κυρτό τόξο $\widehat{AC}$. Τότε, από (1) και (2) έπεται ότι ισχύει $\widehat{CDN} = \widehat{BHA}$. Επομένως AH//DN (3). Έτσι, από το τρίγωνο ACH συμπεραίνουμε ότι το D είναι μέσο της CH.
Άρα $AB + BD = HB + BD = HD = DC$.

Μία πολύ κομψή απόδειξη έδωσε ο Gregg Patruno, φοιτητής στο Stuyvesant High School της Νέας Υόρκης[5].
Απόδειξη 5 (Patruno)



Σχήμα 3.6:

Αν D το μέσο του τόξου $\widehat{ABC}$ θα έχουμε DA=DC και αφού $\widehat{DAB} = \widehat{DCB}$, τότε περιστροφή του τριγώνου DBC γύρω από το D θα φέρει το σημείο C στο A και το B σε ένα σημείο B' πάνω στην AB. Τώρα το τρίγωνο DBB' είναι ισοσκελές, έτσι $EB = EB'$ και

$$AE = EB' + AB' = EB + BC$$

.

[5] *Crux Mathematicorum*, Τόμος 6, Ιούνιος-Ιούλιος 1980, σελίς 189

Κεφάλαιο 4

ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΑ ΣΗΜΕΙΑ ΤΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

4.1 Γενικά

Θα μπορούσε να πει κανείς ότι στην Αρχαιότητα δεν έδωσαν τόση σημασία σε αυτά τα σημεία, σε σχέση με τα νεότερα χρόνια. Κατά την κατασκευή του εγγεγραμμένου και του περιγεγραμμένου κύκλου σε τρίγωνο, ο Ευκλείδης (VI, 4, 5) φέρνει μόνο δύο διχοτόμους ή μεσοκαθέτους, αντίστοιχα, ενώ το γεγονός ότι η τρίτη διχοτόμος ή μεσοκάθετος αντίστοιχα περνάει από το ίδιο σημείο, θεωρείται αυτονόητο και δεν αναφέρεται καθόλου και ακόμα λιγότερο δεν χαρακτηρίζεται ως αξιοσημείωτο. Και ο Αρχιμήδης δεν αναφέρει την πρόταση ότι «το βαρύκεντρο είναι το σημείο σύγκλισης των τριών διαμέσων του τριγώνου» ως ιδιαίτερο γεωμετρικό θεώρημα. Άλλωστε η πρόταση του ορθόκεντρου δεν υπάρχει στα Στοιχεία. Από την εποχή του Μεσαίωνα υπάρχουν μόνο λίγες σημειώσεις, αφού κυριαρχούν τα Στοιχεία του Ευκλείδη και σπάνια δίνεται προσοχή σε προτάσεις που δεν περιέχονται σε αυτά. Εντελώς περιστασιακά ο Bramer[1] (1618) υπολογίζει την απόσταση των κέντρων περιγεγραμμένου και εγγεγραμμένου κύκλου.[2]. Μόλις στην αρχή του 18ου αιώνα ξεκίνησε η συστηματική μελέτη των σημείων αυτών. Το 1723 τέθηκε

[1] Γερμανός Μαθηματικός, Αρχιτέκτονας και εφευρέτης (1588-1652).

[2] *Etliche geometrtische Quaestiones*, IX. Frage, S. 16.

το θέμα της κατασκευής τριγώνου, όταν γνωρίζουμε τη θέση του βαρύκεντρου G, του έγκεντρου I και του ορθόκεντρου του H [3]. Οι αρχικοί διεξοδικοί υπολογισμοί δεν οδήγησαν σε αξιόλογα αποτελέσματα, έως το 1765, όταν ο Euler έλυσε επιτέλους αυτό το πρόβλημα[4]. Υπολόγισε με έναν πολύ συνοπτικό τρόπο από τις πλευρές a, b, c του τριγώνου τις αποστάσεις των σημείων H, G και I μεταξύ τους και από το κέντρο O του περιγεγραμμένου κύκλου. Έδειξε ότι τα σημεία H, G, O είναι συνευθειακά και ότι $GO = \frac{1}{2}HG$. Αυτή η ευθεία ονομάστηκε αργότερα προς τιμήν του «ευθεία Euler». Μία γεωμετρική απόδειξη γι' αυτό έδωσε το 1803 ο Γάλλος πολιτικός και λόγιος L.N.M. Carnot (1753 Nolay - 1823 Magdeburg) στο έργο του *Géométrie de position* (§131, σελίδες 163-164). Στα αξιοσημείωτα σημεία τριγώνου εντάσσει ο Ch. Nagel (1823) τα σημεία τομής των τριών ευθυγράμμων τμημάτων που ενώνουν τις κορυφές του τριγώνου με τα σημεία επαφής του εγγεγραμμένου κύκλου του και με τα σημεία επαφής των τριών παραγεγραμμένων του κύκλων.[5] Ο επόμενος που ασχολείται με τα σημεία αυτά είναι ο J. D. Gergonne (1860) στο *Theorèmes sur les cercles qui touchent les côtés d'un triangle. Nouv. Ann. Math. 19, Paris, 1860, S. 354f*

Η ονομασία «αξιοσημείωτο σημείο» έγινε ευρέως γνωστή από τον τίτλο του βιβλίου του Feuerbach. Την είχε όμως χρησιμοποιήσει πρωτύτερα και ο L.W. Gilbert (1798) στο βιβλίο του *Die Geometrie, Teil I, Buch 2, Anhang: Aufgabe 18, §354* και ο F.F. Schweins (1805) στην Γεωμετρία του *Geometrie, I, σελίς 119, §89*. Το 1821 ο J. V. Poncelet (1788-1867, Παρίσι) και ο Ch. Brianchon [6] (1785-1870, Παρίσι) ξεκινώντας από με-

[3] Miscellanea Berolinensia, II, Berlin 1723, S. 89-128, *Problema geometricum* (anonym).

[4] Novi comment. Petrop. XI, ad annum 1765 (1767), S. 103-123: *Solutio facilis problematum quorundam geometricorum diffiicillomorum* (vorgelegt am 21. XII 1763).

[5] *Untersuchungen über die wichtigsten zum Dreieck gehörigen Kreise*. Leipzig 1836, S. 32, § 99. und S. 30, §93.

[6] Annal. Math. p. appl. XI , Nismes, 1820/21, *Recherches sur la détermination d'une hyperbole équilatère au moyen de quatre conditions données,* σελίς 215, Probl. IX.

λέτη της ισοσκελούς υπερβολής, η οποία είναι περιγεγραμμένη σε τρίγωνο, βρήκαν ότι τα μέσα των πλευρών του τριγώνου, τα ίχνη των υψών και τα μέσα των πάνω τμημάτων των υψών είναι όλα σημεία ενός κύκλου. Αυτό το είχε ανακαλύψει ήδη από το 1804 ο B. Bevan. Αυτόν τον κύκλο τον βρήκε επίσης το 1822 και ο K.W. Feuerbach (1800-1834, Erlangen) και παρατήρησε ότι το κέντρο του βρίσκεται στο μέσο του OH και ότι η ακτίνα του ισούται με το μισό της ακτίνας του περιγεγραμμένου κύκλου. Οι Γερμανοί μαθηματικοί ονόμασαν αυτόν τον κύκλο, *κύκλο του Feuerbach*, ενώ οι Άγγλοι προτιμούν το όνομα *κύκλος των εννέα σημείων*. Ο Feuerbach έδειξε επίσης ότι αυτός ο κύκλος εφάπτεται εσωτερικά του εγγεγραμμένου κύκλου και εξωτερικά των παρεγγεγραμμένων κύκλων.
Το 1833 ο J. Steiner έγραψε για τη σχέση όλων αυτών των προτάσεων[7]. Στα χρόνια που ακολούθησαν παρουσιάστηκε ένας μεγάλος αριθμός αποδείξεων για τις προτάσεις αυτές, εν μέρει αρκετά απλοποιημένες[8]. Σε βιβλία στοιχειώδους Γεωμετρίας μπήκε για πρώτη φορά ο κύκλος του Feuerbach από τον C.F.A. Jacobi (1834)[9]. Έκτοτε υπάρχει αρκετή ενασχόληση με την μελέτη ακόμα περισσότερων αξιοσημείωτων σημείων στο τρίγωνο, όπως μπορούμε να δούμε στο έργο του J. Lange (*Berührungskreise eines ebenen Dreiecks*. Programm, Berlin 1884), ή στο βιβλίο του C. Lindemann (*20 merkwürdige Punkte des Dreieckes auf 11 merkwürdigen Geraden,* 1925).

[7] *Steiners Werke* I, σελίς 489.

[8] Π.χ. P. Zühlke, *Einfacher Beweis des Satzes vom Neunpunktkreis*. Z. Math. Nat, Unterricht, 37, 1906, σελίς 264.

[9] *Elemente* Anhang zum V.—VII. Buch, Nr. 515—519, σελίς 236.

4.2 Το Βαρύκεντρο

Η πρόταση σύγκλισης των διαμέσων δεν εμφανίζεται στον Ευκλείδη. Ο Αρχιμήδης, ο οποίος ήταν ιδιοφυής όχι μόνο στα Μαθηματικά, αλλά και στη Μηχανική ανακάλυψε το βαρύκεντρο προσπαθώντας να βρει το κέντρο βάρους του τριγώνου. Απέδειξε ότι το κέντρο βάρους κείται επάνω σε κάθε μία από τις διαμέσους.

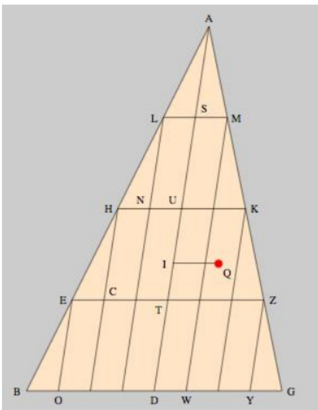
Αυτή είναι η «Πρόταση 13» του έργου του Αρχιμήδη *Περί επιπέδων ισορροπιών*.

Ο Αρχιμήδης έδωσε δύο αποδείξεις γι αυτήν την πρόταση. Στην πρώτη χρησιμοποιεί παράλληλες λωρίδες [10] και στη δεύτερη εμβαδά.

<u>Απόδειξη 1η-του Αρχιμήδη</u>

Σε τρίγωνο ABG φέρνουμε τη διάμεσο AD και θα δείξουμε ότι το βαρύκεντρο είναι πάνω στην AD. Έστω ότι δεν είναι επάνω σε αυτήν, αλλά είναι το σημείο Q. Φέρνουμε την IQ παράλληλη στην BG. Αν λοιπόν η DG διχοτομείται διαρκώς θα φτάσει στιγμή, κατά την οποία θα πάρουμε τμήμα μικρότερο της IQ. Χωρίζουμε τις DG και BD σε ίσα τμήματα και από τις τομές φέρνουμε παράλληλες που τέμνουν τις πλευρές AB και AG στα σημεία E, Z, H, K, L, και M. Τότε οι EZ, HK, LM είναι παράλληλες στην BG (Σχήμα 4.1)[11].

Τα κέντρα βάρους των παραλληλογράμμων με διαγώνιες τις MN, KC και ZO βρί-

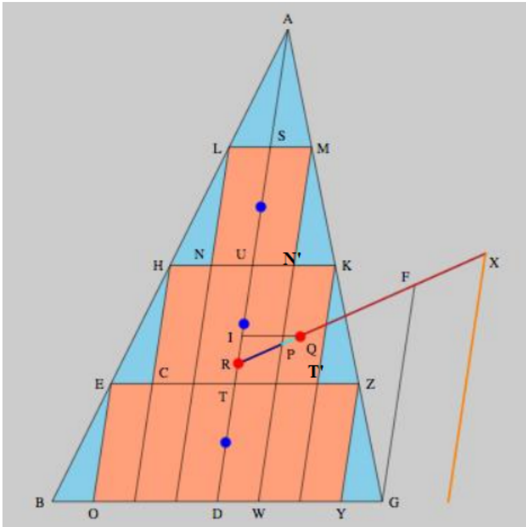


Σχήμα 4.1:

[10]Η απόδειξη αυτή συμπληρωμένη με σχόλια του Ευτόκιου υπάρχει σε έκδοση του Heiberg, που έχει μεταφράσει ο Henry Mendell, (Archimedes, On the Equilibrium of Planes with the notes of Eutocius, Volume 3 of Heiberg's edition pp. 264-318), ο οποίος κάνει και δικές του προσθήκες.

[11]Το πώς προκύπτει αυτή η παραλληλία το αποδεικνύει ο Ευτόκιος στα σχόλιά του.

σκονται πάνω στα US,TU και TD αντίστοιχα (βλέπε Σχήμα 4.2)



Σχήμα 4.2:

άρα το κέντρο βάρους του μεγέθους που αποτελείται από τα τρία αυτά παραλληλόγραμμα είναι πάνω στο SD.[12] Έστω R αυτό το κέντρο βάρους. Προεκτείνουμε το RQ και έστω GF η παράλληλη προς το AD.

Το τρίγωνο ADG έχει λόγο ως προς τα όμοιά του τρίγωνα AMS, MKN', KZT', και ZGY ίσο με το λόγο $\dfrac{GA}{AM}$, επειδή τα AM, MK, ZG, KZ είναι ίσα.

Επίσης το τρίγωνο ADB έχει λόγο προς όλα τα όμοια του τρίγωνα ALS, LHN, HEC και EBO ίσο με $\dfrac{BA}{AL}$.

Επομένως το τρίγωνο ABG έχει αυτόν τον λόγο ως προς όλα τα τρίγωνα που έχουν προαναφερθεί, δηλαδή λόγο ίσο με $\dfrac{GA}{AM}$.

Αλλά ο λόγος $\dfrac{GA}{AM}$ είναι μεγαλύτερος από τον λόγο $\dfrac{FR}{RQ}$, επειδή $\dfrac{GA}{AM} = \dfrac{FR}{RP}$.

Επομένως το τρίγωνοABG έχει επίσης μεγαλύτερο λόγο ως προς τα αναφερθέντα

[12]Ο Heiberg αναφέρει την πρόταση 4 (*Αν δύο ίσα μεγέθη δεν έχουν το ίδιο κέντρο βάρους, τότε το κέντρο βάρους του μεγέθους που προκύπτει από την σύνθεσή τους θα είναι στο μέσο του ευθυγράμμου τμήματος που ενώνει τα κέντρα βάρους τους*) για να δικαιολογήσει αυτό το βήμα, το οποίο όμως σύμφωνα με τον μεταφραστή δε μπορεί να είναι σωστό, αφού τα παραλληλόγραμμα είναι άνισα. Ο Eduard Jan Dijksterhuis στο έργο του *Archimedes*, (σελίς 386) αναφέρεται στην πρόταση 6 (*Σύμμετρα μεγέθη έχουν την ίδια κλίση όταν έχουν τον ίδιο λόγο μηκών αντιστρόφως με τα βάρη τους*), θεωρώντας ίσως ότι τα παραλληλόγραμμα είναι σύμμετρα, αφού πάντα μετρούνται με βάση το πρώτο παραλληλόγραμμο).

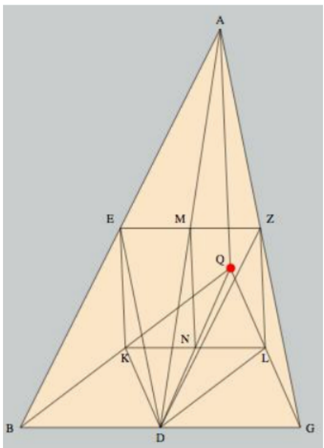
τρίγωνα από τον $\dfrac{FR}{RQ}$.

Έτσι, τα παραλληλόγραμμα με διαγώνιες τις MN, KC, ZO έχουν και αυτά ως προς τα τρίγωνα που έμειναν, μεγαλύτερο λόγο από το λόγο $\dfrac{FQ}{RQ}$.

Ας βάλουμε τώρα στη θέση του QR το XQ. Επειδή υπάρχει ένα σίγουρο μέγεθος, το AGB, του οποίου το κέντρο βάρους είναι το Q, και έχει αφαιρεθεί από αυτό ένα μέγεθος αποτελούμενο από τα τρία παραλληλόγραμμα και κέντρο βάρους το R, γι αυτό το λόγο το κέντρο βάρους του υπόλοιπου μεγέθους που αποτελείται από τα εναπομείναντα τρίγωνα είναι πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα RQ όταν αυτό επεκταθεί και ληφθεί τμήμα πάνω σε αυτό που έχει τον ίδιο λόγο ως προς το QR με αυτόν που έχει το αφαιρεθέν τμήμα ως προς αυτό που έμεινε. Επομένως, το σημείο X είναι το κέντρο βάρους του μεγέθους που αποτελείται από αυτά που έμειναν, το οποίο είναι αδύνατον επειδή όλα τους είναι από την ίδια πλευρά της ευθείας που φέρνουμε από το X παράλληλη στην AD. Και έτσι αυτό που προτάθηκε είναι σαφές.

<u>Μία άλλη εκδοχή της ίδιας απόδειξης</u>

Έστω πάλι ότι το βαρύκεντρο δεν είναι πάνω στην AD αλλά είναι το Q. Σχήμα 4.3). Φέρνουμε τα AQ, QB, QG. Αν E, Z τα μέσα των BA, AG αντίστοιχα, φέρνουμε



Σχήμα 4.3:

τα EK, και ZL παράλληλα στο AG. Φέρνουμε επίσης τις KL, LD, DK, DQ, MN. Επειδή το τρίγωνο ABG είναι όμοιο προς το τρίγωνο DZG διότι η BA είναι παράλληλη προς τη ZD, και το κέντρο βάρους του τριγώνου ABG είναι το σημείο Q

συμπεραίνουμε ότι κέντρο βάρους του τριγώνου ZDG είναι το σημείο L (διότι τα σημεία Q, L είναι ομοίως τοποθετημένα σε κάθε ένα από αυτά τα τρίγωνα αφού σχηματίζουν ίσες γωνίες προς τις ομόλογες πλευρές).
Για τους ίδιους λόγους, κέντρο βάρους του τριγώνου EBD είναι το σημείο K. Έτσι, το κέντρο βάρους του μεγέθους που απαρτίζεται από τα δύο τρίγωνα EBD και ZDG είναι το μέσο της KL. Αυτό είναι το σημείο N επειδή

$$\frac{BE}{EA} = \frac{BK}{KQ}$$

και

$$\frac{GZ}{ZA} = \frac{GL}{LQ}$$

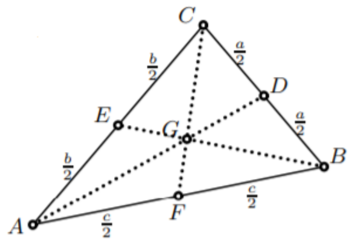
Επομένως $BG//KL$. Έχουμε φέρει και τη DQ. Επομένως ισχύει

$$\frac{BD}{DG} = \frac{KN}{NL}$$

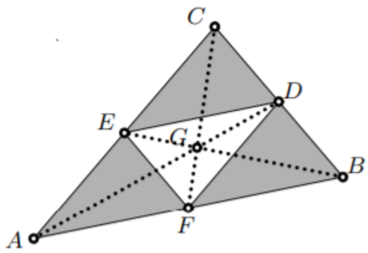
Άρα N είναι όπως είπαμε το κέντρο βάρους του μεγέθους που απαρτίζεται από τα δύο προαναφερθέντα τρίγωνα και M είναι το κέντρο βάρους του παραλληλογράμμου AEDZ. Άρα το κέντρο βάρους του μεγέθους που αποτελείται από όλα τα παραπάνω σχήματα είναι πάνω στην ευθεία MN. Ξέρουμε ότι κέντρο βάρους του τριγώνου ABG είναι το σημείο Q. Άρα η MN όταν προεκταθεί θα περάσει από το σημείο Q, το οποίο είναι αδύνατο. Επομένως δεν είναι αληθές ότι το κέντρο βάρους του τριγώνου ABG δεν είναι επί της ευθείας AD. Άρα είναι πάνω σε αυτήν.

Απόδειξη 2η-του Αρχιμήδη

Ο Αρχιμήδης χώρισε το τρίγωνο σε τέσσερα όμοια τρίγωνα με τη βοήθεια του επονομαζόμενου «μεσαίου τριγώνου» DEF, του οποίου οι κορυφές είναι τα μέσα των πλευρών του τριγώνου ABC. (Σχήμα 4.4). Αυτό το τρίγωνο έχει τις ίδιες διαμέσους με το αρχικό. Επαναλαμβάνοντας αυτή τη διαδικασία με το μεσαίο τρίγωνο (Σχήμα 4.5) κατέληξε στη συρρίκνωση του αρχικού τριγώνου σε ένα σημείο, το G, το οποίο κείται πάνω και στις τρεις διαμέσους.



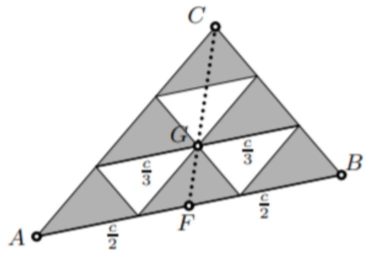
Σχήμα 4.4:



Σχήμα 4.5:

Απόδειξη 3η

Μία άλλη απόδειξη, όπου το αποτέλεσμα φαίνεται άμεσα και όχι μετά από άπειρα σε πλήθος βήματα, προκύπτει αν διαιρέσουμε κάθε πλευρά σε τρία ίσα τμήματα (Σχήμα 4.6).

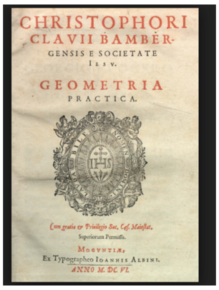


Σχήμα 4.6:

Με τη βοήθεια του θεωρήματος του Θαλή συμπεραίνουμε ότι η διάμεσος CF διέρχεται από το G. Όμοια εργαζόμαστε και για τις άλλες διαμέσους.

Έτσι το σημείο τομής των διαμέσων αποτέλεσε το τρίτο αξιοσημείωτο σημείο στο τρίγωνο, μετά το κέντρο του εγγεγραμμένου και το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου, τα οποία είχαν παρατηρήσει ήδη οι Πυθαγόρειοι. Ξεκάθαρη αναφορά στις ιδιότητες των διαμέσων γίνεται από τον Ήρωνα τον Αλεξανδρέα στα *Μηχανικά* του, τα οποία σώζονται μόνο σε Αραβική μετάφραση. Εκεί δεν ορίζεται μόνο το κέντρο βάρους τριγώνων, αλλά και τετραπλεύρων και πενταγώνων. Στα *Μετρικά* του χρησιμοποιεί το γεγονός ότι αν το σημείο το ενώσουμε με τις κορυφές δίνει τρία ισεμβαδικά τρίγωνα.

Στον Μεσαίωνα, ο πρώτος που συζητά για το πώς τέμνονται οι διάμεσοι είναι ο Leonardo της Pisa[13] (1220, Practica Geometriae). Ο σύγχρονός του J. Nemorarius αναφέρεται στο δεύτερο βιβλίο του *De triangulis* στο σημείο τομής των διαμέσων ακριβώς όπως και ο Ήρωνας στα *Μετρικά* του. Στα μετέπειτα διδακτικά βιβλία συναντάει κανείς μόνο σπάνια την πρόταση σύγκλισης των διαμέσων, όπως στο βιβλίο Αριθμητικής του Simon Jacobs το 1565 και το 1604 στο βιβλίο του Clavius[14] *Geometria Practica, VI* Ο Clavius αποδεικνύει την πρόταση ενώνοντας τα μέσα D, E (Σχήμα 4.4) και αφού όπως έχει αποδείξει σε άλλη πρόταση, η DE είναι παράλληλη στην πλευρά AB, η ευθεία CGF θα τέμνει την AB στο μέσο της.



Την πρόταση αναφέρουν επίσης και οι Ludolph van Ceulen (1615), Maroloys-Girard (1629) και J.Chr. Sturm. Τα βασικά έργα του 18ου αιώνα την προσπερνάνε. Μόλις τον 19ο αιώνα προστίθεται στις προτάσεις της στοιχειώδους Γεωμετρίας.

Ο Chr. Fr. Pfleiderer (1627) στο έργο του *Σχόλια πάνω στο VI. βιβλίο του Ευκλείδη*

[13] Ιταλός Μαθηματικός, γνωστός και ως Leonardo Pisano ή Fibonacci (1175-1240), που έμεινε στην ιστορία για την περίφημη Ακολουθία Fibonacci, και για την εισαγωγή στην Ευρώπη του αραβικού δεκαδικού συστήματος αρίθμησης καθώς και άλλων μαθηματικών καινοτομιών σε μια σκοτεινή εποχή για τις επιστήμες στην Ευρώπη.

[14] Ο Christopher Clavius (1538-1612) γεννήθηκε στην πόλη Bamberg της Γερμανίας, σπούδασε στην Coimbra στην Πορτογαλία και δίδαξε Μαθηματικά, Γεωμετρία, Αστρονομία και Χαρτογραφία στο Collegio Romano στη Ρώμη για όλη του τη ζωή.

αναφέρει την πρόταση, χωρίς να αναφέρεται στην λέξη «διάμεσος», δίνει αποδείξεις καθώς και αντίστροφες προτάσεις. Εδώ βρίσκουμε και την προαναφερθείσα απόδειξη του Clavius καθώς και την εξής απόδειξη:

Απόδειξη 4η (Σχήμα 4.4)

Αν D, E τα μέσα των BC και AC αντίστοιχα ισχύει ότι το καθένα από τα τρίγωνα ABD, BAE είναι το μισό του τριγώνου ABC. Επομένως ABD=BAE και αν αφαιρεθεί το κοινό ABG έχουμε GBD=GAE οπότε και 2GBD=2GAE, και αφού BD=DC, AE=EC, το τρίγωνο GBC=GAC. Ισχύει όμως

$$\frac{GBC}{GBF} = \frac{GAC}{GAF} = \frac{GC}{GF}$$

και άρα GBF=GAF, οπότε και BF=AF.

Μία άλλη πιο λεπτομερή απόδειξη αποδίδει στον Cardanus[15]. Αποδεικνύεται ακόμα ότι αν η μία διάμεσος χωρίζεται σε λόγο 2:1 από το σημείο G, τότε και οι άλλες δύο χωρίζονται στον ίδιο λόγο από αυτό το σημείο. Επίσης ότι αν ενώνοντας ένα σημείο εσωτερικό του τριγώνου με τις τρεις κορυφές του δημιουργούνται τρία ισοδύναμα τρίγωνα, τότε οι προεκτάσεις αυτών των τμημάτων τέμνουν τις απέναντι πλευρές στο μέσο τους. Η πρόταση έγινε πιο γνωστή μέσω των A. Tellkampf (1829), J. H. Van Schwinden-Jacobi (1834), J. A. Grunert (1834).

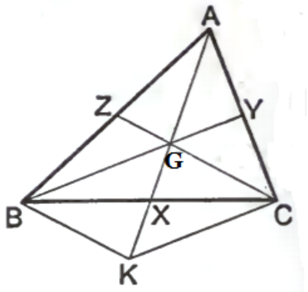
Σε μαθηματικό βιβλίο[16] του 1899 βρίσκουμε την απόδειξη και το πόρισμα που ακολουθούν

Απόδειξη 5η

Έστω ότι οι δύο διάμεσοι BY και CZ τέμνονται στο G. Φέρνω την AG και την προεκτείνω μέχρι να τμήσει την BC στο X. Από το C φέρνω παράλληλη στην BY, που τέμνει την προέκταση της AX στο K. Φέρνω και την BK. Στο τρίγωνο AKC, επειδή Y μέσο της AC και YG//CK, έπεται ότι το G είναι μέσο της AK. Επίσης επειδή

[15] *De subtilitate Libri XXI*. Basil. 1560. Lib. I. σελίς 70.

[16] *Elementary Course of Mathematics*, Hall and Stevens, σελίς 100.



Σχήμα 4.7:

στο τρίγωνο ABK τα Z, G είναι μέσα των AB, AK αντίστοιχα, έπεται ότι GC//BK, άρα το BKCG είναι παραλληλόγραμμο, συνεπώς οι διαγώνιοι του διχοτομούνται, δηλαδή το X είναι το μέσο της BC, άρα η AX είναι διάμεσος του τριγώνου ABC. Επομένως, οι τρεις διάμεσοι του τριγώνου τέμνονται στο σημείο G.

Πόρισμα

Οι τρεις διάμεσοι ενός τριγώνου τέμνουν η μία την άλλη σε ένα σημείο που τις τριχοτομεί, με το μεγαλύτερο τμήμα της κάθε μίας να βρίσκεται προς το μέρος της αντίστοιχης κορυφής.

Πράγματι, στο Σχήμα 4.7 δείξαμε ότι AG=GK, επίσης ότι το GX είναι το μισό του GK, δηλαδή το GX είναι το ένα τρίτο του AX. Όμοια και για τις άλλες διαμέσους.

Παρατήρηση

Με τη βοήθεια αυτού του πορίσματος μπορεί να δειχθεί ότι σε οποιοδήποτε τρίγωνο, η μικρότερη σε μήκος διάμεσος διχοτομεί τη μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου.

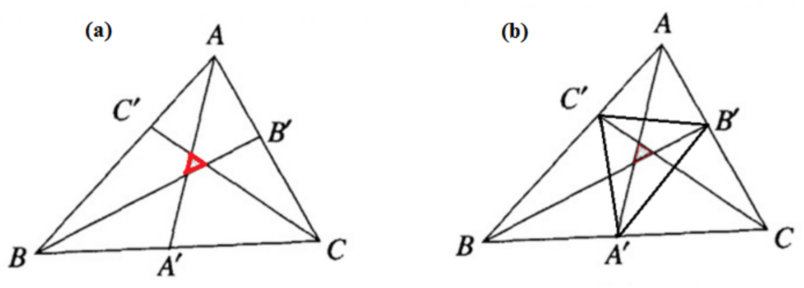
Απόδειξη 6η - των M. Hajja, P. Walker[17]

Έστω ότι οι διάμεσοι AA', BB', CC' του τριγώνου ABC δε συγκλίνουν και ας συμβολίσουμε με $\triangle$ το τρίγωνο που εμπεριέχεται σε αυτές (Σχήμα 4.8.a). Επειδή

$$A'B' : AB = B'C' : BC = C'A' : CA = 1 : 2$$

έπεται ότι οι πλευρές του $\triangle'$ που εμπεριέχεται στις διαμέσους του $A'B'C'$ (Σχήμα

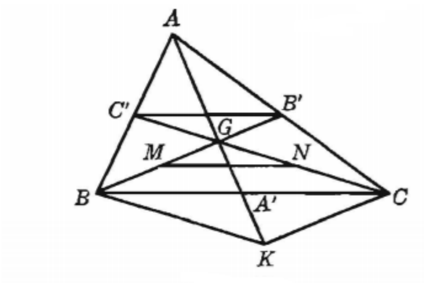
[17]«Why must the triangle's medians be concurrent?»*The Mathematical Gazette*, τόμος 85 (Νοέμβριος 2001), σελίδες 482-483.



Σχήμα 4.8:

4.8.b) είναι μισές στο μήκος από αυτές του $\triangle$. Ωστόσο, τα $AB'A'C'$, $BA'B'C'$ και $CB'C'A'$ είναι παραλληλόγραμμα και γι αυτό οι AA', BB', CC' διχοτομούν τις $B'C', C'A'A'B'$ αντίστοιχα. Επομένως οι AA', BB', CC' είναι οι διάμεσοι και των δύο τριγώνων, των ABC και $A'B'C'$. Αυτό οδηγεί στην αντίφαση ότι τα $\triangle'$ και $\triangle$ είναι ένα και το αυτό τρίγωνο και αποδεικνύει έτσι ότι οι διάμεσοι συγκλίνουν.

Απόδειξη 7η - Με ομοιότητα τριγώνων[18]



Σχήμα 4.9:

Έστω G το σημείο τομής των δύο διαμέσων BB', CC'. Από τα δύο όμοια τρίγωνα $GBC, GB'C'$ έχουμε:

$$\frac{BG}{B'G} = \frac{CG}{C'G} = \frac{BC}{B'C'} = 2:1$$

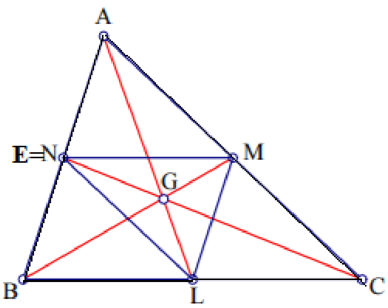
Άρα, οποιεσδήποτε δύο διάμεσοι τριγώνου τριχοτομούν η μία την άλλη, το οποίο αποδεικνύει ότι οι τρεις διάμεσοι θα συγκλίνουν σ' ένα σημείο.

[18] *College Geometry*, Nathan Altshiller-Court,1952, σελίς 65.

Παραθέτουμε[19] μερικές ακόμη αποδείξεις για το σημείο σύγκλισης των διαμέσων, χρησιμοποιώντας κάθε φορά και διαφορετική μέθοδο.

Απόδειξη 8η - *Με χρήση ομοιοθεσίας*

Έστω L, M, N τα μέσα αντιστοίχως των πλευρών BC, AC, AB ενός τριγώνου ABC και G το σημείο της διαμέσου AL που τη χωρίζει σε λόγο 2:1.



Σχήμα 4.10:

Θεωρούμε την ομοιοθεσία κέντρου G και λόγου $-\frac{1}{2}$. Προφανώς, οι εικόνες X′ και Υ′ οποιωνδήποτε σημείων X και Υ ικανοποιούν τη σχέση $\overrightarrow{X'\Upsilon'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{X}\Upsilon}$. Από κατασκευή η εικόνα του A είναι το L. Ονομάζουμε E την εικόνα του C. Τότε $\overrightarrow{LE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Αλλά, λόγω του ορισμού της διαμέσου ενός τριγώνου, $\overrightarrow{LN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ επίσης. Επομένως, E=N, δηλαδή το μέσο N της AB ανήκει στην ευθεία CG.

Απόδειξη 9η - *Με χρήση συντεταγμένων*

Έστω (x_A, y_A) οι συντεταγμένες της κορυφής A ως προς ένα σταθερό σύστημα συντεταγμένων. Παρομοίως, έστω $(x_{\mathrm{B}}, y_{\mathrm{B}})$ και (x_C, y_C) οι συντεταγμένες των B και C. Θεωρούμε το σημείο $G(x_G, y_G)$ που χωρίζει τη διάμεσο AL σε λόγο AG:GL=2:1. Αφού το L είναι μέσο του BC, $x_L = \dfrac{x_B + x_C}{2}$.
Εφόσον το AG ισούται με τα $\frac{2}{3}$ του AL, θα έχουμε

[19] Περιοδικό *Quantum*, Τόμος 2, Τεύχος 1, σελίς 36.

$x_A - x_G = \frac{2}{3}(x_A - x_L)$. Άρα

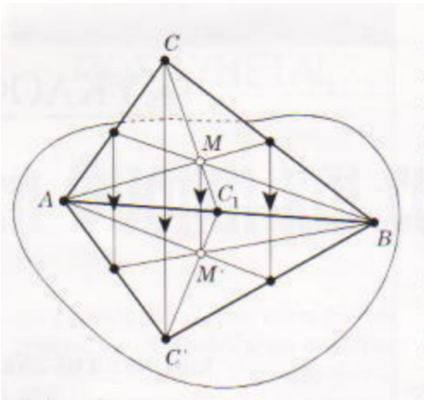
$$x_G = \frac{1}{3}(x_A + 2x_A) = \frac{1}{3}(x_A + x_B + x_C)$$

Και όμοια

$$y_G = \frac{1}{3}(y_A + y_B + y_C)$$

Αυτές οι παραστάσεις είναι συμμετρικές ως προς τις συντεταγμένες των κορυφών του τριγώνου. Επομένως, τα σημεία που διαιρούν τις δύο άλλες διαμέσους σε λόγο 2:1 έχουν τις ίδιες συντεταγμένες με το G, και συνεπώς είναι όλα το ίδιο σημείο.

Απόδειξη 10η - *Με χρήση παράλληλης προβολής*

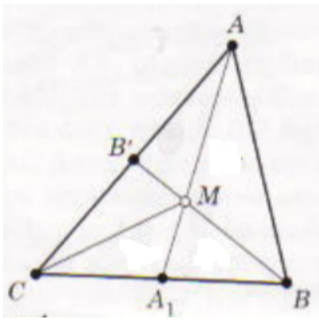


Σχήμα 4.11:

Θεωρούμε ένα επίπεδο διαφορετικό από το επίπεδο του τριγώνου, το οποίο περιέχει την πλευρά AB. Στο επίπεδο αυτό θεωρούμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο ABC' (Σχήμα 4.10). Θεωρούμε τώρα την παράλληλη προβολή του τριγώνου ABC στο επίπεδο ABC' παράλληλα στην CC'. Είναι φανερό ότι το τρίγωνο ABC με τις διαμέσους του προβάλλεται στο τρίγωνο ABC' και τις διαμέσους του. Όμως, οι διάμεσοι ενός ισοπλεύρου τριγώνου συμπίπτουν με τις μεσοκαθέτους του (και με τις διχοτόμους του) που γνωρίζουμε ότι διέρχονται από το ίδιο σημείο, το κέντρο του περιγεγραμμενου κύκλου. Επομένως και οι διάμεσοι του αρχικού τριγώνου διέρχονται επίσης από το ίδιο σημείο. Ως προς τους λόγους τώρα, ξέρουμε ότι ο λόγος στον οποίο διαιρείται ένα τμήμα από οποιοδήποτε σημείο διατηρείται έπειτα από παράλληλη προβολή (λόγω των ανάλογων τμημάτων). Όμως, για το κέντρο O (που τώρα είναι και βαρύκεντρο, και κέντρο περιγεγραμμένου κύκλου, και κέντρο εγγεγραμμένου κύκλου συγχρόνως) του ισόπλευρου τριγώνου ABC' και ας πούμε τη διάμεσο C_1C' έχουμε

$$C_1O : OC' = C_1O : OB = sin30^o = \frac{1}{2}$$

Απόδειξη 11η - *Με χρήση του νόμου των ημιτόνων*



Σχήμα 4.12:

Εφαρμόζουμε το νόμο των ημιτόνων στα τρίγωνα ABB' και CBB' και παίρνουμε

$$\frac{AB'}{B'C} = \frac{ABsin\widehat{ABB'}}{sin\widehat{AB'B}} : \frac{BCsin\widehat{CBB'}}{sin\widehat{CB'B}} = \frac{ABsin\widehat{ABB'}}{CBsin\widehat{CBB'}}$$

διότι $sin\widehat{CB'B} = sin(180^o - \widehat{AB'B}) = sin\widehat{AB'B}$

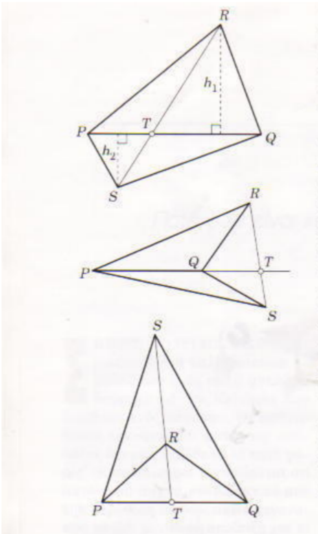
Παρομοίως, από τα τρίγωνα AMB και $\mathrm{A_1}$MB προκύπτει

$$\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{A_1M}} = \frac{ABsin\widehat{ABB'}}{\mathrm{A_1}Bsin\widehat{CBB'}}$$

Αφού $\mathrm{AM} = 2\mathrm{AM_1}$ και $CB = 2A_1B$, διαιρώντας την πρώτη ισότητα με τη δεύτερη έχουμε $\frac{\mathrm{AB'}}{\mathrm{BC'}} = 1$ και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Η ιδέα της επόμενης απόδειξης είναι να εκφράσουμε το λόγο των ευθύγραμμων τμημάτων συναρτήσει λόγου εμβαδών και βασίζεται στο εξής Λήμμα (Σχήμα 4.13)
Αν δύο τρίγωνα PQR, PQS έχουν κοινή βάση, τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο των τμημάτων στα οποία χωρίζει η ευθεία PQ το τμήμα RS, δηλαδή (PQR):(PQS)=RT:TS.

Απόδειξη Λήμματος



Σχήμα 4.13:

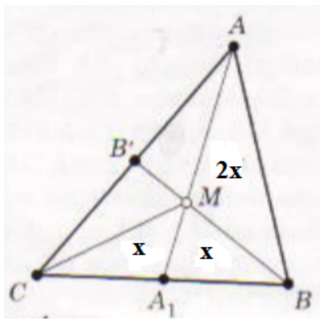
Και για τις τρεις περιπτώσεις του Σχήματος, όπου τα δύο τρίγωνα έχουν κοινή την πλευρά PQ, θα έχουμε
$(PQR):(PQS) =$
$(\frac{1}{2}PQ \cdot h_1) : (\frac{1}{2}PQ \cdot h_2)$, όπου h_1 και h_2 τα ύψη που αντιστοιχούν στην βάση PQ στα δύο τρίγωνα αντίστοιχα. Αλλά από την ομοιότητα των ορθογωνίων τριγώνων έπεται η ζητούμενη ισότητα

$$h_1 : h_2 = RT : TS$$

Απόδειξη 12η - *Με χρήση εμβαδών*

Στο τρίγωνο ABC θεωρούμε τη διάμεσο AA_1 και το σημείο της M, τέτοιο ώστε $\mathrm{AM} : MA_1 = 2.$Έστω x το εμβαδόν του τριγώνου $\mathrm{BA}_1\mathrm{M}$. Τότε, για τα τρίγωνα BMA και $BM\mathrm{A}_1$ από το προηγούμενο λήμμα παίρνουμε

$$\frac{(\mathrm{BMA})}{x} = \frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{MA}_1} = 2.$$



Σχήμα 4.14:

Όμοια, για τα τρίγωνα BMC και BMA_1 έχουμε

$$\frac{(BMC)}{x} = \frac{BC}{BA_1} = 2,$$

άρα (BMA)=(BMC)=2x επομένως

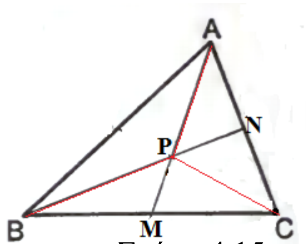
$$\frac{AB'}{B'C} = \frac{(BMA)}{(BMC)} = 1.$$

Άρα BB' διάμεσος. Παρομοίως αποδεικνύεται ότι και η CM είναι διάμεσος.

Στο περιοδικό *Quantum*, Τόμος 6, Τεύχος 5, Σεπτέμβριος/Οκτώβριος 1999, σελίς 38, βρίσκουμε την επόμενη απόδειξη, η οποία βασίζεται στο θεώρημα
Η διάμεσος CM ενός τριγώνου ABC είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων P για τα οποία τα εμβαδά των τριγώνων CPA και CPB είναι ίσα.[20]

Απόδειξη 13η - *Με χρήση εμβαδών*

Έστω ότι οι διάμεσοι AM και BN του τριγώνου ABC τέμνονται στο σημείο P. Τότε, βάσει του παραπάνω θεωρήματος για τον γεωμετρικό τόπο των σημείων της διαμέσου, τα εμβαδά (CAP), (BAP) είναι ίσα όπως και (BAP) = (CBP). Επομένως (CAP) = (CBP) και το P ανήκει στη διάμεσο που φέρουμε από το C.



Σχήμα 4.15:

[20]Η απόδειξη αυτού του θεωρήματος υπάρχει επίσης στη σελίδα 38 του Quantum, Τόμος 6, Τεύχος 5.

4.3 Το Ορθόκεντρο

Παρόμοια είναι και η περίπτωση της πρότασης για το ορθόκεντρο. Το θεώρημα ότι τα ύψη τριγώνου συγκλίνουν δεν υπάρχει στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη (3ος αιώνας π. Χ.), αλλά ο Πρόκλος στο *Υπόμνημα* του (5ος αιώνας μ. Χ.) μάς διαβεβαιώνει ότι ο Ευκλείδης το γνώριζε αλλά δεν το συμπεριέλαβε στο εν λόγω έργο του. Ο ίδιος ο Πρόκλος το διατυπώνει με σαφήνεια, αλλά δεν δίνει την απόδειξη[21]. Όσον αφορά την ονομασία «ορθόκεντρο», αυτή προτάθηκε μόλις το 1866-67 από τους Ferrers και W.H. Besant. Ο τελευταίος την εισήγαγε το 1869 στο έργο του *Conic Sections*, §138. Ο συνήθης συμβολισμός του με το Λατινικό γράμμα H μπορεί να οφείλεται στο γεγονός ότι αυτό είναι το αρχικό γράμμα της λέξης «ύψος» στα Αγγλικά (*Height*), Γαλλικά (*Hauteur*) και Γερμανικά (*Höhe*).

Η παλαιότερη σωζόμενη αναφορά στο θεώρημα είναι μισό αιώνα αργότερα από τον Ευκλείδη, στο *Περί Λημμάτων*, μια συλλογή γεωμετρικών προτάσεων, η οποία αποδίδεται στον Αρχιμήδη, αλλά έχει βρεθεί μόνο σε αραβική μετάφραση. Στο Λήμμα V αναφέρεται ότι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει το σημείο τομής δύο υψών με την τρίτη κορυφή, είναι το τρίτο ύψος.

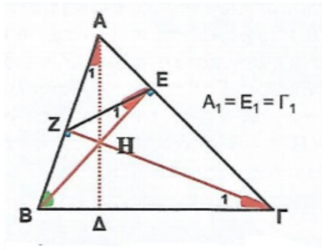
Εξετάζοντας ένα άλλο έργο του Αρχιμήδη, το *Περί Αρχών της Γεωμετρίας* (σώζεται μόνο σε αραβική μετάφραση) είναι πολύ πιθανό η απόδειξη που γνώριζε ο Αρχιμήδης να είναι η ακόλουθη[22]. (Την ίδια απόδειξη βρίσκουμε και το 1776 στο έργο του Robert Simson *Opera Quaedam Beliqua*, σελίς 171).

[21] Proclus, ed. Friedlein, S. 72, Z. 17—19 : . . . *οίον τοις τριγώνοις τάς από των γωνιών καθέτους επί τας πλαγίας καθ' εν σημείον συμπίπτειν.*

[22] Μιχάλης Λάμπρου, *Σημειώσεις Μαθήματος.*

Απόδειξη 1

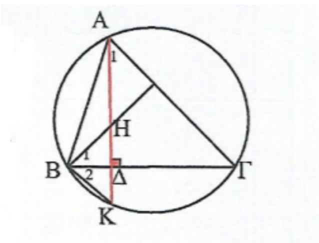
Έστω ότι τα ύψη ΒΕ, ΓΖ τέμνονται στο Η. Φέρνουμε την ΑΗ. Από τα εγγράψιμα τετράπλευρα ΑΖΗΕ, ΒΖΕΓ είναι $\hat{\mathrm{A}_1} = \hat{\mathrm{E}_1} = \hat{\Gamma_1}$, άρα
$\hat{\mathrm{A}_1} + \hat{\mathrm{B}} = \hat{\Gamma_1} + \hat{\mathrm{B}} = 90^o$, οπότε ΑΗ κάθετος στην ΒΓ.



Σχήμα 4.16:

Ο Απολλώνιος επίσης γνώριζε το θεώρημα καθώς το χρησιμοποιεί στην απόδειξη άλλου θεωρήματος στο έργο του *Διορισμένης τομής* (έχουμε μόνο περίληψή του στην *Συναγωγή* του Πάππου). Από τα συμφραζόμενα η απόδειξη του θεωρήματος περί υψών του Απολλωνίου είναι η παρακάτω[23].

Απόδειξη 2



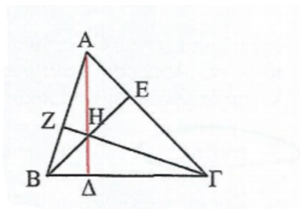
Σχήμα 4.17:

Προεκτείνουμε το ύψος ΑΔ μέχρι να τμήσει τον περιγεγραμμένο κύκλο στο Κ. Ορίζουμε το Η στο ύψος έτσι ώστε ΗΔ=ΔΚ (δηλαδή το Η είναι το συμμετρικό του Κ ως προς την πλευρά ΒΓ). Θα δείξουμε ότι τα ΒΗ, ΓΗ είναι ύψη. Πράγματι, από την ισότητα των ορθογωνίων τριγώνων ΒΗΔ, ΒΔΚ είναι $\hat{\mathrm{B}_1} = \hat{\mathrm{B}_2} = \hat{\mathrm{A}_1}$. Άρα $\hat{\mathrm{B}_1} + \hat{\Gamma} = \hat{\mathrm{A}_1} + \hat{\Gamma} = 90^o$.

Μία απόδειξη που φαίνεται να γνώριζαν ο Αρχιμήδης και ο Απολλώνιος και βασίζεται σε απλή χρήση του Πυθαγορείου είναι η εξής:

Απόδειξη 3

Έστω ότι τα ύψη από τα Β και Γ τέμνονται στο Η. Τότε ισχύει $\mathrm{H\Gamma}^2 - \mathrm{HA}^2 = \mathrm{B\Gamma}^2 - \mathrm{BA}^2$ (Γίνεται χρήση του γεγονότος ότι δοθέντος ευθυγράμμου τμήματος ΚΛ, ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ με $\mathrm{MK}^2 - \mathrm{M\Lambda}^2$ στα-



Σχήμα 4.18:

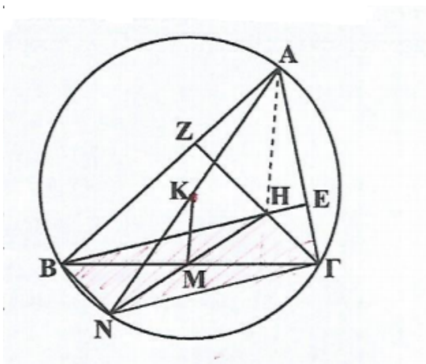
[23]Μιχάλης Λάμπρου, *Σημειώσεις Μαθήματος*.

θερό, είναι ευθεία κάθετος στο ΚΛ, που βέβαια το τέμνει σε σημείο Ν με $\text{NK}^2-\text{N}\Lambda^2$ ίσον η παραπάνω σταθερά). Όμοια $\text{HA}^2-\text{HB}^2=\Gamma\text{A}^2-\Gamma\text{B}^2$. Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε $\text{H}\Gamma^2-\text{HB}^2=\Gamma\text{A}^2-\text{BA}^2$ (= σταθερό). Άρα το Η βρίσκεται στην κάθετο από το Α στην ΒΓ.

Τη γνώση της πρότασης προϋποθέτει και ο Regiomontanus[24] στο κύριο έργο τριγωνομετρίας του, το *De triangulis omnimodis libri quinque*, το οποίο έγραψε περί το 1464, αλλά εκδόθηκε μετά θάνατον, το 1533. Μέσα στην απόδειξη του Θεωρήματος 32 στο βιβλίο Ι παραπέμπει σε μία απόδειξη της πρότασης σε κάποιο άλλο σημείο. Ωστόσο η παραπομπή αυτή δεν έχει βρεθεί και παραμένει ακόμη άγνωστη σε μας.

Ο Ludolph van Ceulen[25] χρησιμοποιεί και αυτός την πρόταση, δίνοντας την ακόλουθη απόδειξη[26]

Απόδειξη 4



Σχήμα 4.19:

Φέρνουμε την διάμετρο ΑΝ του περιγεγραμμένου κύκλου κέντρου Κ στο τρίγωνο ΑΒΓ. Έστω ότι τα ύψη ΒΕ, ΓΖ τέμνονται στο Η. Θα δείξουμε ότι $\text{AH}\perp\text{B}\Gamma$. Επειδή οι ΒΗ, ΝΓ είναι παράλληλες (και οι δύο είναι κάθετες στην ΑΓ) και ομοίως οι ΓΖ, ΒΝ είναι παράλληλες, το ΒΝΓΗ είναι παραλληλόγραμμο. Άρα το σημείο Μ τομής

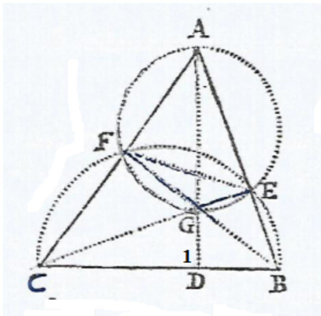
[24]Αυτό είναι το εκλατινισμένο όνομα του Γερμανού Μαθηματικού, Αστρονόμου και Ιστορικού των Μαθηματικών Johann Müller von Königsberg, (1436-1476).

[25]Γερμανο-ολλανδός Μαθηματικός (1540-1610).

[26]*Fundamenta*, 1615, lib. 4, zetema 31, σελίς 165.

των διαγωνίων του είναι το μέσον της ΒΓ, και άρα ΚΜ⊥ΒΓ. Όμως η ΚΜ συνδέει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΝΗ, οπότε είναι παράλληλη της ΑΗ και άρα ΑΗ⊥ΒΓ, όπως θέλαμε να δείξουμε.
Μια πολύ ενδιαφέρουσα απόδειξη με τη βοήθεια εγγεγραμμένου τετραπλεύρου περιέχει η Γεωμετρία των Maroloys[27]- Girard[28] (1629) που ισχύει και για το αμβλυγώνιο τρίγωνο, η οποία είναι παραλλαγή αυτής του Αρχιμήδη.

Απόδειξη 5

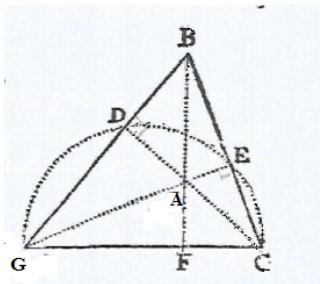


Σχήμα 4.20:

Έστω το τρίγωνο ABC, BF και CE τα δύο ύψη του και G το σημείο τομής τους. Φέρνουμε την AG που τέμνει την BC στο D και θα δείξουμε ότι το AD είναι το τρίτο ύψος. Το CFEB είναι εγγράψιμο, όπως και το FAEG. Γράφουμε τον κύκλο με διάμετρο το BC και τον κύκλο με διάμετρο το AG. Έχουμε

$\widehat{D}_1 = 180 - \widehat{GCD} - \widehat{CGD} = 180^o - \widehat{EFB} - \widehat{AGE} = 180^o - \widehat{GAE} - \widehat{AGE} =$
$= 180^o - (90^o - \widehat{AGE}) - \widehat{AGE} = 90^o.$

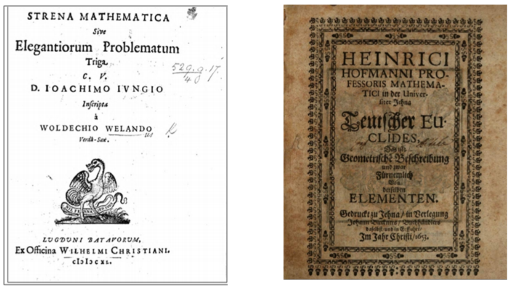
Στην περίπτωση του αμβλυγωνίου τριγώνου ABC θεωρούμε τα δύο ύψη AE και CF που τέμνονται στο G και φέρνουμε τον κύκλο με διάμετρο το CG. Αν ονομάσουμε D το σημείο τομής της GB με αυτόν τον κύκλο θα ισχύει ότι η γωνία GDC είναι ορθή, άρα το BD είναι κάθετο στην AC, δηλαδή αυτό θα είναι το τρίτο ύψος.



Σχήμα 4.21:

[27]Ολλανδός Μαθηματικός και στρατιωτικός Μηχανικός (1572-1627).
[28]Γάλλος Μαθηματικός (1595-1632).

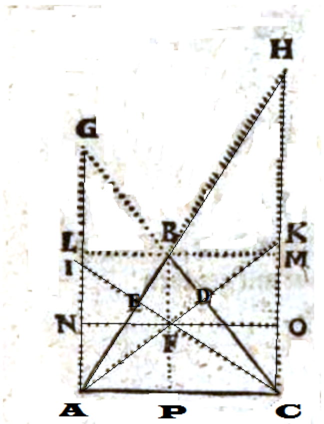
Μία απόδειξη κάνει και ο W. Weland στο έργο του $Strena\ mathematica$ το 1640[29]



Σχήμα 4.22:

ενώ ο H. Hoffmann το 1653 στο βιβλίο $Teutscher\ Euklides$, IV, §50 σελίς 67, δίνει την ακόλουθη απόδειξη

<u>Απόδειξη 6</u>



Σχήμα 4.23:

Στο τρίγωνο ABC φέρνουμε τα ύψη AD, CE που τέμνονται στο F. Θέλουμε να δείξουμε ότι η BP είναι κάθετη στην AC. Φέρνουμε τις AG και CH κάθετες στην AC, και τις NO και LM παράλληλες στην AC έτσι ώστε να διέρχονται από τα F και B αντίστοιχα. Αν ονομάσουμε I και K τα σημεία που τέμνουν οι CE και AD τις AG και CH αντίστοιχα, από τα όμοια τρίγωνα $AIC \approx ACH$ και $ACK \approx ACG$ παίρνουμε

$$\frac{AI}{AC} = \frac{AC}{CH} \kappa\alpha\iota \frac{CK}{AC} = \frac{AC}{AG}$$

Άρα $AI \cdot CH = AC^2 = CK \cdot AG$, άρα

[29] *Strena Mathematica, Problema II, σελίς 8*

$$\frac{AI}{CK} = \frac{AG}{CH}$$

Όμως

$$\frac{AI}{CK} = \frac{NF}{FO} \kappa\alpha\iota \frac{AG}{CH} = \frac{BL}{BM}$$

Επομένως

$$\frac{NF}{FO} = \frac{BL}{BM}$$

Ισοδύναμα

$$\frac{FN}{FO + FN} = \frac{BL}{BL + BM}$$

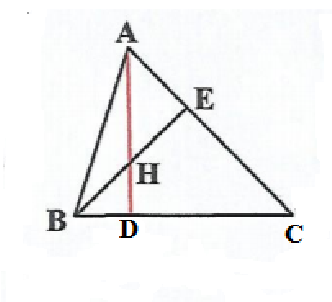
ή

$$\frac{FN}{ON} = \frac{BL}{ML}$$

Αλλά ON=ML, άρα θα ισχύει και FN=BL, δηλαδή στο NFBL έχω FN=//BL. Έπεται ότι το NFBL είναι παραλληλόγραμμο, άρα LN//BF. Αλλά LN είναι κάθετο στο AC, άρα και το BF θα είναι κάθετο στο AC, δηλαδή αποδείξαμε ότο το BP είναι ύψος.

Την ακόλουθη απόδειξη από τον A. Arnaud βρίσκουμε στο $Nouveaux\ \acute{E}l\acute{e}mens$ το 1690. Την ίδια απόδειξη κάνει ανεξάρτητα και ο Newton, όπως μπορεί κανείς να δει στο *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, σε έκδοση του D. T. Whiteside (vol. 4, 1674-1684).

Απόδειξη 7



Σχήμα 4.24:

Φέρνουμε το ύψος AD και έστω ότι το ύψος από το B το τέμνει στο σημείο H. Από τα όμοια τρίγωνα BDH και ACD έχουμε

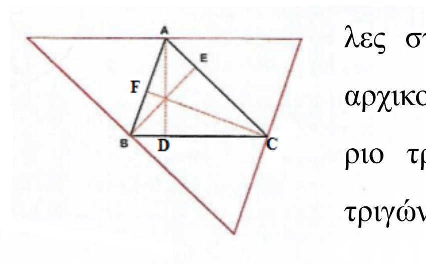
$HD : BD = CD : AD$, οπότε $HD = \frac{BD \cdot CD}{AD}$.

Αν κάνουμε την ίδια εργασία για το τρίτο ύψος θα διαπιστώσουμε ότι τέμνει το AD σε σημείο H' με $H'D = \frac{BD \cdot CD}{AD}$.

Με άλλα λόγια $HD = H'D$, που σημαίνει ότι τα $H, H^{'}$ συμπίπτουν.

Μεταγενέστερα, στο βιβλίο $Géométrie\, de\ Position$ (1803) παρουσιάστηκε από τον Carnot (1753-1823) μία άλλη ισοδύναμη διατύπωση, η οποία θέτει ως βάση το τετράπλευρο ABCH, όπου H είναι το ορθόκεντρο: «Εάν σε ένα πλήρες τετράπλευρο οι απέναντι πλευρές είναι κάθετες μεταξύ τους, θα είναι και οι διαγώνιες». Στην γερμανική μετάφραση του έργου του Carnot από τον H. Chr. Schumacher (1810) δημοσιεύεται για πρώτη φορά η σημερινή συνήθης απόδειξη, η οποία έχει ως εξής:

Απόδειξη 8



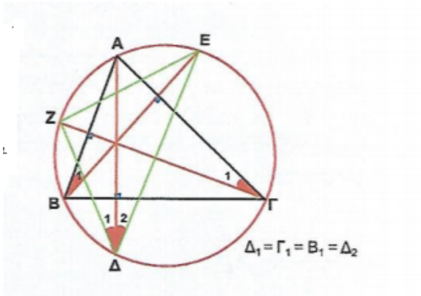
Σχήμα 4.25:

Από τις κορυφές του τριγώνου φέρονται παράλληλες στις απέναντι πλευρές, έτσι ώστε τα ύψη του αρχικού τριγώνου να είναι μεσοκάθετοι στο καινούριο τρίγωνο. Όπως όμως ξέρουμε οι μεσοκάθετοι τριγώνου συγκλίνουν, επομένως προκύπτει το ζητούμενο.

Την συγκεκριμένη απόδειξη την αποδίδει ρητά στον Gauss (1777-1855) και αυτήν υιοθέτησαν αργότερα τόσο ο Crelle, το 1826, στον πρώτο τόμο του έργου του *Lehrbuch der Elemente der Geometrie*, §71, σελίς 51, όσο και ο Grunert, το 1834 στο δεύτερο μέρος (Ebene Geometrie) του βιβλίου του *Lehrbuch der Mathematik für die mittleren Classen höherer Lehranstalten*, §198. Την ίδια απόδειξη είχε δώσει όμως, ανεξάρτητα, και ο Servois το 1804 στο *Solutions peu connues de différens problèmes de Géométrie-pratique*, σελίς 15.
Την πρόταση των υψών δεν την αναφέρουν στις Γεωμετρίες τους καθόλου οι Von Wolf (1710), Kästner (1764), Klügel (1798), Legendre (1800), Thibaut (1801). Υπάρχουν όμως ακόμα πολλές και διαφορετικές αποδείξεις[30]. Θα αναφέρουμε κάποιες από αυτές.

[30]Μιχάλης Λάμπρου, *Σημειώσεις Μαθήματος.*

Απόδειξη 9 (με χρήση διχοτόμων)

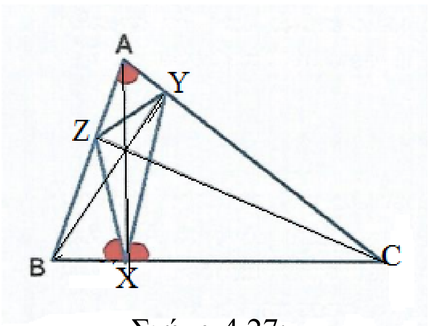


Σχήμα 4.26:

Προεκτείνουμε τα ύψη του ΑΒΓ μέχρι να τμήσουν τον περιγεγραμμένο κύκλο στα Δ, Ε, Ζ. Είναι $\Delta_1 = \Gamma_1$ (ίσα τόξα). Άρα $\Gamma_1 = \mathrm{B}_1$ (και οι δύο συμπληρωματικές της Α), $\mathrm{B}_1 = \Delta_2$ (ίσα τόξα). Άρα $\Delta_1 = \Delta_2$, δηλαδή ΑΔ διχοτόμος. Οι διχοτόμοι του ΔΕΖ συγκλίνουν, οπότε τα ύψη του αρχικού συγκλίνουν.

Απόδειξη 10 (πάλι με χρήση διχοτόμων)[31]

.



Σχήμα 4.27:

Ενώνουμε τα ίχνη X, Y Z των τριών υψών του τριγώνου ABC, δημιουργώντας έτσι το λεγόμενο «ορθικό τρίγωνο». Τα σημεία A, Z, X, C είναι ομοκυκλικά, άρα $\widehat{BXZ} = \widehat{BAC}$ και ομοίως, επειδή τα A, Y, X, C είναι ομοκυκλικά ισχύει $\widehat{CXY} = \widehat{BAC}$, άρα $\widehat{BXZ} = \widehat{CXY}$. Επειδή όμως $\widehat{BXA} = \widehat{CXA}$ έπεται ότι η AX διχοτομεί τη γωνία $\widehat{ZXY}$. Ομοίως η BY διχοτομεί την $\widehat{XYZ}$ και η CZ την $\widehat{YZX}$, δηλαδή τα ύψη του ABC είναι οι διχοτόμοι του ορθικού τριγώνου και αφού οι διχοτόμοι ξέρουμε ότι συγκλίνουν, συμπεραίνουμε το ζητούμενο.

Τις ιδιότητες του ορθικού τριγώνου μελετά ενδελεχώς, ο K. W. Feuerbach (1780-1834). Αναφέρει μεταξύ άλλων την πρόταση ότι τα ύψη του κυρίως τριγώνου είναι διχοτόμοι του ορθικού τριγώνου και μάλιστα τόσο το ορθόκεντρο όσο και οι

[31] Mr. Bernh. Möllmann in Grunert's Archiv, τόμος 17 (1851) σελίς 376

τρεις κορυφές απέχουν το ίδιο από τις πλευρές του ορθικού τριγώνου. Τις ανακαλύψεις του Feuerbach εντάσσει το βιβλίο των Van Swinden και Jacobi *Elemente der Geometrie* (1834) στη βασική ύλη του. Την πρόταση, ότι στο ορθικό τρίγωνο οι διχοτόμοι συμπίπτουν με τα ύψη του κυρίως τριγώνου, την διατύπωσε πρώτος ο Ph. Naudé το έτος 1737 στο έργο του *Trigonoscopiae cujusdam Novae Conspectus*.

Η επόμενη απόδειξη χρησιμοποιεί το θεώρημα Ceva.

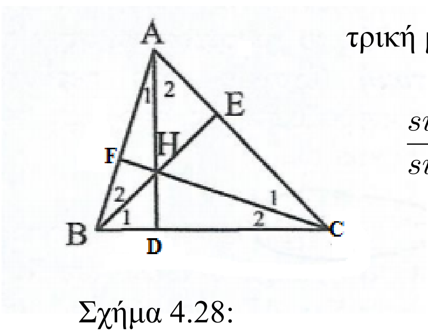
Απόδειξη 11

Έχουμε

$$\frac{BD}{DC}\frac{CE}{EA}\frac{AF}{FB} = \frac{ccosB}{bcosC}\frac{acosC}{ccosA}\frac{bcosA}{acosB} = 1$$

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και την τριγωνομετρική μορφή του θεωρήματος Ceva, λέγοντας

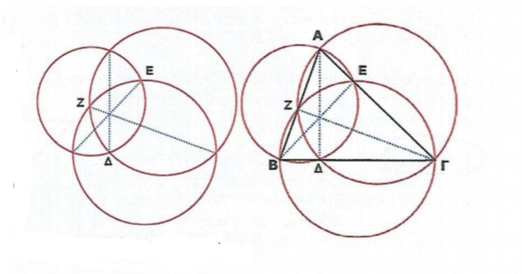
$$\frac{sinA_1}{sinA_2}\frac{sinB_1}{sinB_2}\frac{sinC_1}{sinC_2} = \frac{cosB}{cosC}\frac{cosC}{cosA}\frac{cosA}{cosB} = 1$$



Σχήμα 4.28:

Απόδειξη 12

Η απόδειξη γίνεται με χρήση του θεωρήματος που λέει ότι «οι κοινές χορδές ανά



Σχήμα 4.29:

ζεύγη τριών τεμνόμενων κύκλων συγκλίνουν» (αριστερό σχήμα). Με αυτό ως δεδομένο, θεωρούμε τους κύκλους που ορίζουν τα τρία εγγράψιμα τετράπλευρα ΑΕΔΒ, ΒΖΕΓ, ΓΔΖΑ. Τα ύψη του τριγώνου είναι ακριβώς οι κοινές χορδές τους.

Απόδειξη 13 (με Αναλυτική Γεωμετρία)

Με αρχή των αξόνων το ίχνος της καθέτου από το Α, έχουμε συντεταγμένες Δ(0,0), Α(0,a), Β(b,0), Γ(c,0). Η κλίση της ΑΓ είναι $-\frac{a}{c}$ οπότε η κάθετή της ΒΕ (ύψος) έχει εξίσωση $y = \frac{c}{a}(x - b)$. Θέτοντας $x = 0$ βλέπουμε ότι η ΒΕ τέμνει τον άξονα των y στο σημείο Η(0,$-\frac{bc}{a}$)

Ακολουθεί μία διανυσματική απόδειξη

Απόδειξη 14

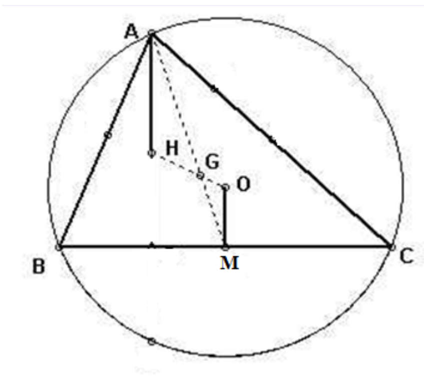
Έστω Ο το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου, οπότε ΟΑ=ΟΒ=ΟΓ=R. Ορίζουμε το σημείο Η από την συνισταμένη $\vec{\mathrm{OA}} + \vec{OB} + \vec{O\Gamma} = \vec{OH}$. Θα δείξουμε ότι το Η βρίσκεται σε όλα τα ύψη. Προς τούτο αρκεί να δείξουμε ότι ΑΗ$\perp$ΒΓ, ισοδύναμα $\vec{\mathrm{AH}} \cdot \vec{\mathrm{B\Gamma}} = 0$, και κυκλικά. Έχουμε

$$\vec{\mathrm{AH}} \cdot \vec{\mathrm{B\Gamma}} = (\vec{\mathrm{OH}} - \vec{\mathrm{OA}}) \cdot \vec{\mathrm{B\Gamma}} = (\vec{\mathrm{OB}} + \vec{\mathrm{O\Gamma}}) \cdot (\vec{\mathrm{O\Gamma}} - \vec{\mathrm{OB}}) = (|\mathrm{O\Gamma}|)^2 - (|\mathrm{OB}|)^2 = 0$$

Η επόμενη πολύ κομψή απόδειξη είναι συγχρόνως απόδειξη της «Ευθείας Euler» στην οποία θα γίνει ξεχωριστή αναφορά στο 6ο κεφάλαιο.

Απόδειξη 15

Θεωρούμε το κέντρο Ο του περιγεγραμμένου κύκλου και το κέντρο βάρους G.



Σχήμα 4.30:

Ορίζουμε το σημείο Η στην προέκταση της OG με $GH = 2OG$. Θα δείξουμε ότι το Η βρίσκεται και στα τρία ύψη. Πράγματι, το G βρίσκεται στην διάμεσο ΑΜ και τη χωρίζει σε λόγο 2:1. Από αυτό εύκολα βλέπουμε ότι τα τρίγωνα OGM, AHG είναι όμοια (ίσες γωνίες G και ανάλογες πλευρές). Έπεται $\widehat{OMG} = \widehat{GAH}$ και άρα οι AH, OM είναι παράλληλες. Αφού η OM είναι κάθετη στη BC (το O είναι κέντρο του κύκλου και BC χορδή του ίδιου κύκλου) έπεται ότι και η AH είναι κάθετη στην BC. Με άλλα λόγια, η AH είναι ύψος του τριγώνου.

Ειδικά δείξαμε ότι τα σημεία O, G, H (περίκεντρο, βαρύκεντρο, ορθόκεντρο) είναι συνευθειακά, και ισχύει $HG = 2GO$. Η εν λόγω ευθεία ονομάζεται **ευθεία Euler**[32].

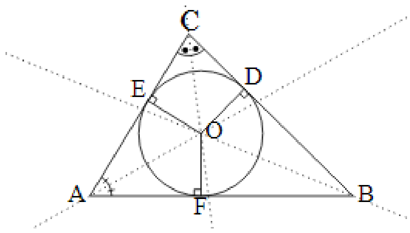
[32] Ο ίδιος πρωτοδημοσίευσε το αποτέλεσμα αυτό (με διαφορετική απόδειξη) στο *Soluti Facilis problematum quorumdam geometricorum difficillimorum*, Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae, 11 (1767), σελίδες 103-123 και αναδημοσιεύτηκε στα *Opera Omnia*, Series 1, Volume 26, σελίδες 139-157.

4.4 Το Έγκεντρο

Όσον αφορά την πρόταση για τις διχοτόμους ενός τριγώνου, ξέρουμε ότι οι Πυθαγόρειοι γνώριζαν ότι το σημείο τομής τους είναι το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου[33], όπως γνώριζαν ότι και το σημείο τομής των μεσοκαθέτων είναι το κέντρο του περιγγεγραμμένου κύκλου[34]. Τη σχέση των τμημάτων στα οποία τέμνεται μια πλευρά από τη διχοτόμο της απέναντι γωνίας τη διδάσκει ο Ευκλείδης στην τρίτη πρόταση του έκτου βιβλίου, ενώ την εξίσου σημαντική πρόταση για τη διχοτόμο της εξωτερικής γωνίας δεν την αναφέρει. Παρόλα αυτά δεν θα μπορούσε να ήταν άγνωστη στην αρχαιότητα, διότι ο Πάππος, ο οποίος έχει δημοσιεύσει σε γενικές γραμμές μια ανθολογία των σημαντικότερων μαθηματικών κειμένων της Αρχαιότητας, με μόνο λίγες δικές του προσθήκες, τη χρησιμοποιεί χωρίς κάποια παρατήρηση στην Πρόταση 39 του έβδομου βιβλίου της *Συναγωγής*.

Θα δώσουμε τώρα -χωρίς να επεκταθούμε ιδιαίτερα- τρεις διαφορετικές αποδείξεις για τη σύγκλιση των διχοτόμων ενός τριγώνου, αρχίζοντας με αυτήν που υπάρχει στο βιβλίο IV των *Στοιχείων* του Ευκλείδη, στην πρόταση 4, όπου ζητείται να εγγραφεί κύκλος σε δοθέν τρίγωνο.

Απόδειξη 1 (Ευκλείδη)



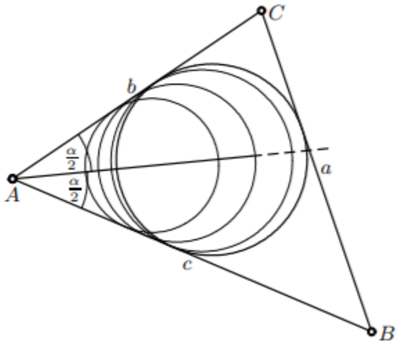
Σχήμα 4.31:

Έστω ότι οι διχοτόμοι των γωνιών A και B τέμνονται στο O. Θέλουμε να δείξουμε ότι η CO διχοτομεί την γωνία C. Φέρνω από το O τα OD, OE, OF κάθετα στις πλευρές του τριγώνου. Τότε τα ορθογώνια τρίγωνα OEA, OFA είναι ίσα, αφού έχουν την OA κοινή και $\widehat{OAF} = \widehat{OAE}$, άρα OE=OF. Όμοια βρίσκουμε και ότι OF=OD. Άρα έχουμε OD=OE=OF. Επομένως τα ορθογώνια τρίγωνα ODC, OEC είναι ίσα, οπότε θα ισχύει και ότι $\widehat{DCO} = \widehat{ECO}$, δηλαδή η CO είναι η τρίτη διχοτόμος.

[33] Ευκλείδης, *Στοιχεία*, Βιβλίο IV, Πρόταση 4 (εγγραφή κύκλου σε τρίγωνο)

[34] Ευκλείδης, *Στοιχεία*, Βιβλίο IV, Πρόταση 5 (να περιγραφεί κύκλος περί τριγώνου)

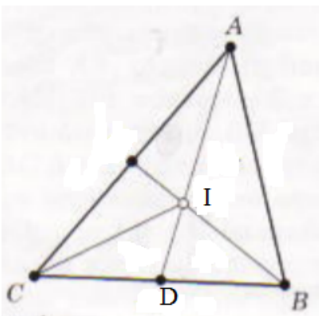
Απόδειξη 2[35]



Σχήμα 4.32:

Το κέντρο οποιουδήποτε κύκλου που εφάπτεται και στις δύο πλευρές AB, AC της γωνίας BAC βρίσκεται πάνω στη διχοτόμο της γωνίας. Υποθέτουμε ότι αυτός ο κύκλος μεγαλώνει ώσπου να εφάπτεται και στην τρίτη πλευρά. Τότε το κέντρο του έχει την ίδια απόσταση και από τις τρεις πλευρές, άρα βρίσκεται πάνω και στις τρεις διχοτόμους. Έτσι αποδεικνύεται το ζητούμενο.

Απόδειξη 3 (με εφαρμογή του θεωρήματος των διχοτόμων)



Σχήμα 4.33:

Έστω το τρίγωνο ABC και έστω ότι η διχοτόμος από το A τέμνει την απέναντι πλευρά στο D. Από το θεώρημα των διχοτόμων έχουμε

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \, (*)$$

Έστω ότι η διχοτόμος από το B τέμνει την AD στο I. Πάλι από το θεώρημα των διχοτόμων στο τρίγωνο ABD έχουμε

$$\frac{\mathrm{A}I}{ID} = \frac{AB}{BD}$$

δηλαδή από την (*)

$$\frac{AI}{ID} = \frac{AC}{DC}$$

από το οποίο έπεται ότι το I βρίσκεται πάνω στη διχοτόμο της γωνίας C.

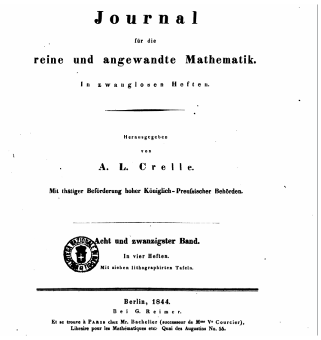
[35] *Geometry by its History*, Alexander Ostermann, Gerhard Wanner, 2012, σελίς 83

Κεφάλαιο 5

ΘΕΩΡΗΜΑ STEINER-LEHMUS

Το 1840 ο Γερμανός μαθηματικός C.L. Lehmus (1780-1863) σε μία επιστολή του στον Γάλλο μαθηματικό Sturm ζητούσε μία καθαρά γεωμετρική απόδειξη μίας φαινομενικά απλής πρότασης. Ο Sturm την μεταβίβασε σε άλλους μαθηματικούς και ο Ελβετός γεωμέτρης Jacob Steiner ήταν από τους πρώτους που έδωσαν λύση[1].

Η πρόταση που έμεινε γνωστή ως Θεώρημα Steiner-Lehmus είναι η εξής: *«Αν ένα τρίγωνο έχει δύο διχοτόμους ίσες τότε αυτό είναι ισοσκελές»*



Journal

für die

reine und angewandte Mathematik.

In zwanglosen Heften.

Herausgegeben

von

A. L. Crelle.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preufsischer Behörden.

Acht und zwanzigster Band.

In vier Heften.

Mit sieben lithographirten Tafeln.

Berlin, 1844.

Bei G. Reimer.

Et se trouve à Paris chez Mr. Bachelier (successeur de Mme Ve Courcier), Libraire pour les Mathématiques etc. Quai des Augustins No. 55.

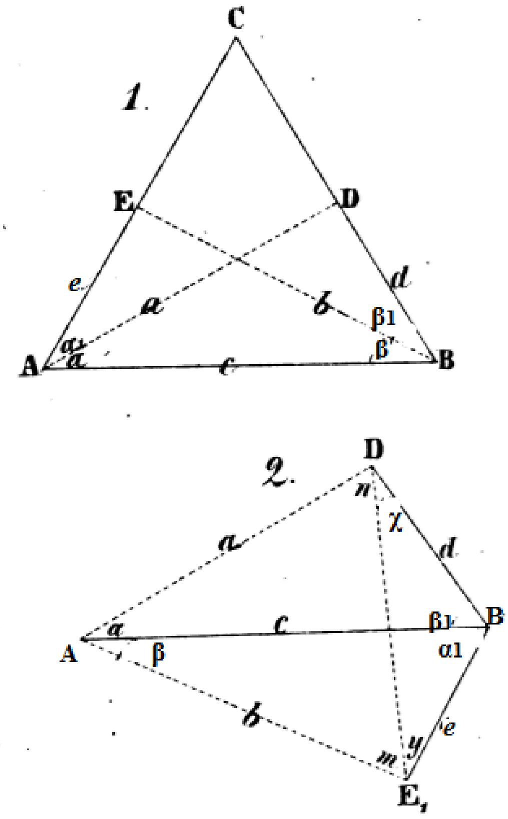
Σχήμα 5.1:

Η «πρόκληση» του Lehmus προκάλεσε μεγάλο ενδιαφέρον και πολλές συζητήσεις, σε βαθμό που ο Steiner αποφάσισε το 1844 -προς αποφυγήν παρεξηγήσεων, όπως γράφει- να δημοσιεύσει την απόδειξη που είχε κάνει στο περιοδικό *Journal für die reine und angewandte Mathematik* μαζί με μία μελέτη για την περίπτωση των εξωτερικών διχοτόμων (όπου δεν ισχύει πάντα)[2].

[1] *Geometry Revisited* by H.S.M. Coxeter and S.L. Greitzer.

[2] *Elementare Lösung einer Aufgabe über das ebene und sphärische Dreieck*, Steiner, J. τόμος 28, σελίδες 375-379.

Απόδειξη 1 (Steiner)



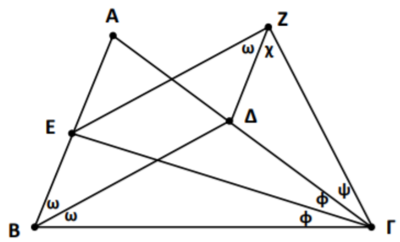
Σχήμα 5.2:

Έστω το τρίγωνο ACB, στο οποίο ισχύουν τα εξής: $\hat{\alpha} = \hat{\alpha_1}$, $\hat{\beta} = \hat{\beta}_1$ και AD=BE και ας υποθέσουμε ότι $\hat{\alpha} > \hat{\beta}$. Τα τρίγωνα ADB και BEA έχουν δύο ίσες πλευρές, αλλά την περιεχόμενη γωνία τους άνιση, άρα θα ισχύει και BD > AE, ή d>e και $\widehat{ADB} > \widehat{BEA}$ (επειδή $\hat{\alpha_1}+\hat{\alpha}+\hat{\beta} > \hat{\beta}_1+\hat{\beta}+\hat{\alpha}$). Αυτά τα τρίγωνα τα φανταζόμαστε (για λόγους ευκολίας, λέει ο Steiner) ότι έχουν μεταφερθεί προς στιγμή σε τέτοια θέση όπως στο σχέδιο 2, δηλαδή βρίσκονται εκατέρωθεν της κοινής πλευράς AB=c και όλα τα τμήματα να είναι ίσα με εκείνα που συμβολίζονται στο σχέδιο 1 με τα ίδια γράμματα. Επειδή α=b (δηλαδή τα AD=BE στο σχέδιο 1), αν φέρουμε το DE_1 θα έχουμε και $\hat{n} = \hat{m}$ και άρα, αφού $\widehat{ADB} > \widehat{BEA} = \widehat{BE_1A}$ έχουμε και $\hat{\chi} > \hat{y}$, και άρα θα έπρεπε e>d, το οποίο αντιφάσκει με το προηγούμενο d>e. Κατά συνέπεια οι γωνίες $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$ δεν μπορεί να είναι άνισες, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

Η κεντρική ιδέα της απόδειξης του Steiner είναι η δημιουργία ενός ισοσκελούς τριγώνου με πλευρές τις ίσες διχοτόμους του αρχικού και χρησιμοποιείται επίσης στην απόδειξη του Γάλλου Μηχανικού Descube, η οποία δημοσιεύτηκε το 1880[3], με την εξής διαφορά. Ο Descube παρακάμπτει την ανάγκη μετατόπισης του ενός από τα δύο τρίγωνα που σχηματίζουν οι ίσες διχοτόμοι με τη βάση του τριγώνου.

[3]M. Descube: Théorème de Géométrie *Journal de Mathématiques Élémentaires et Spéciales* Tome Quatrième, 538-539 (1880).

Απόδειξη 2 (Descube)



Σχήμα 5.3:

Έστω ΒΔ και ΕΓ οι διχοτόμοι των γωνιών Β και Γ. Από το Ε φέρνουμε την ΕΖ//= ΒΔ και ενώνουμε το Ζ με τα Δ και Γ. Θα είναι ΕΖ=ΒΔ=ΓΕ, οπότε λόγω του παραλληλογράμμου ΕΒΔΖ και του ισοσκελούς τριγώνου ΖΕΓ θα ισχύει ότι $\hat{\omega} + \hat{\chi} = \hat{\varphi} + \hat{\psi}$.

Ας υποθέσουμε ότι $\hat{\mathrm{B}} > \hat{\Gamma}$ ή $2\hat{\omega} > 2\hat{\varphi}$ ή $\hat{\omega} > \hat{\varphi}$, τότε θα είναι και $\hat{\chi} < \hat{\psi}$ επομένως στο τρίγωνο ΔΖΓ θα ισχύει και ΓΔ<ΔΖ ή ΓΔ<ΒΕ, αφού ΔΖ=ΒΕ. Τα τρίγωνα ΔΒΓ και ΕΒΓ έχουν την πλευρά ΒΓ κοινή, ΒΔ=ΓΕ και ΓΔ<ΒΕ, άρα είναι άνισα με $\hat{\omega} < \hat{\varphi}$ ή $2\hat{\omega} < 2\hat{\varphi}$ δηλαδή $\hat{\mathrm{B}} < \hat{\Gamma}$, το οποίο είναι άτοπο. Όμοια εργαζόμαστε αν υποθέσουμε ότι $\hat{\mathrm{B}} < \hat{\Gamma}$.

Όμως ο πρώτος που δημοσίευσε μία απόδειξη γι’ αυτό το θεώρημα ήταν ο Γάλλος μαθηματικός Charles Ernest Rougevin[4] το 1842 στο περιοδικό *Nouvelles Annales de Mathématiques*[5]. Στον ίδιο τόμο, στη σελίδα 311, υπάρχει και μία δεύτερη, διαφορετική απόδειξη από τον H. Grout de Saint Paer[6]. Η απόδειξη του Rougevin χρησιμοποιεί ένα κριτήριο ισότητας τριγώνων, το οποίο και αποδεικνύει. Πριν δούμε την απόδειξη του Rougevin, θα δώσουμε την απόδειξη του κριτηρίου, το οποίο δεν ανήκει στα συνηθισμένα, εμφανίζεται όμως και σε άλλες αποδείξεις καθιστώντας τις αρκετά πιο απλές.

Κριτήριο ισότητας δύο τριγώνων

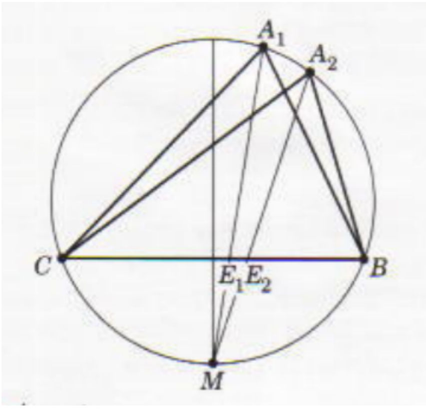
«Δύο τρίγωνα είναι ίσα αν έχουν αντίστοιχα ίσα τα εξής στοιχεία: μία πλευρά, τη γωνία απέναντι από αυτή την πλευρά και τη διχοτόμο αυτής της γωνίας».

[4]Σπουδαστής στο *College Louis le Grand*.

[5]Terquem and Gerono’s , *Nouvelles Annales de Mathématiques*, σελίδες 138-139.

[6]Σπουδαστής στο *Collège de Versailles*.

Απόδειξη



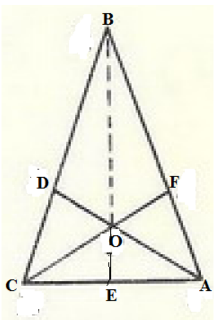
Σχήμα 5.4:

Τοποθετούμε τα τρίγωνα έτσι ώστε να συμπέσουν οι ίσες πλευρές τους (έστω BC η κοινή πλευρά) και έστω $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2$ οι κορυφές τους. Ας υποθέσουμε ότι αυτές οι κορυφές αυτές δεν συμπίπτουν. Σχεδιάζουμε τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου A_1BC.

Αφού $\widehat{B\mathrm{A}_1C} = \widehat{BA_2C}$, έπεται ότι το σημείο A_2 ανήκει επίσης στον περιγεγραμμένο κύκλο. Στη συνέχεια σχεδιάζουμε τις διχοτόμους $\mathrm{A}_1\mathrm{E}_1$ και $\mathrm{A}_2\mathrm{E}_2$ στα τρίγωνα A_1BC και A_2BC. Από υπόθεση $\mathrm{A}_1\mathrm{E}_1 = \mathrm{A}_2\mathrm{E}_2$. Προεκτείνουμε τις διχοτόμους μέχρι το σημείο M, στο οποίο τέμνουν τον κοινό περιγεγραμμένο κύκλο των τριγώνων (και οι δύο διχοτόμοι τέμνουν τον κύκλο στο ίδιο σημείο, το μέσο του τόξου BC). Φέρνουμε τη διάμετρο του κύκλου που διέρχεται από το σημείο M-είναι κάθετη στη BC. Στην περίπτωση του Σχήματος 5.4 έχουμε $\mathrm{MA}_2 < \mathrm{MA}_1$. Ταυτόχρονα, $\mathrm{ME}_2 > \mathrm{ME}_1$. Αν αφαιρέσουμε τη δεύτερη ανισότητα από την πρώτη, βρίσκουμε τελικά ότι $\mathrm{A}_2\mathrm{E}_2 < \mathrm{A}_1\mathrm{E}_1$ που έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεσή μας.

Οπότε η απόδειξη του Rougevin έχει συνοπτικά ως εξής

Απόδειξη 3 (Rougevin)



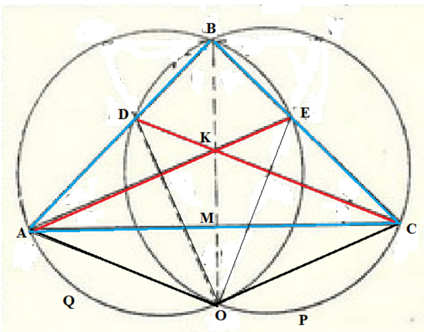
Σχήμα 5.5:

Έστω AD, BE, CF οι διχοτόμοι των γωνιών στο τρίγωνο ABC και AD=CF. Τα δύο τρίγωνα FBC και ABD έχουν FC = AD, $\widehat{FBC} = \widehat{ABD}$ και η διχοτόμος BO της $\widehat{FBC}$ είναι επίσης η διχοτόμος της $\widehat{ABD}$. Σύμφωνα με το κριτήριο που αποδείξαμε νωρίτερα[7], τα τρίγωνα FBC και ABD είναι ίσα. Επομένως θα ισχύει και BC=BA.

[7] O Rougevin το αποδεικνύει σε αυτό το σημείο της απόδειξής του.

Η δεύτερη απόδειξη που βρίσκουμε στο ίδιο περιοδικό είναι η ακόλουθη

Απόδειξη 4 (Grout de Saint Paer)



Σχήμα 5.6:

Αν K είναι το σημείο τομής των ίσων διχοτόμων AE και CD και M το σημείο που η προέκταση της BK τέμνει την AC, η BKM είναι διχοτόμος της γωνίας ABC. Φέρνω τον κύκλο που διέρχεται από τα σημεία D, B, C και έστω O το σημείο τομής του με την BKM. Το σημείο O είναι το μέσο του τόξου DPC. Τα τρίγωνα DKO, DBO είναι όμοια και δίνουν

$$(OK + BK)OK = DO^2$$

Φέρνω τον κύκλο που περνάει από τα A, B και E, ο οποίος εύκολα φαίνεται ότι είναι ίσος με αυτόν που περνάει από τα D, B, C και ισχυρίζομαι ότι θα περνάει από το O. Πράγματι, αν ονομάσω α την απόσταση του σημείου K από το μέσο του τόξου AQE, και δείξω ότι α=OK, θα σημαίνει ότι το O είναι το μέσο του τόξου AQE. Αλλά αν ενώσουμε αυτό το μέσο με το σημείο E και παρατηρώντας ότι η χορδή που δημιουργείται ισούται με την DO, θα έχουμε

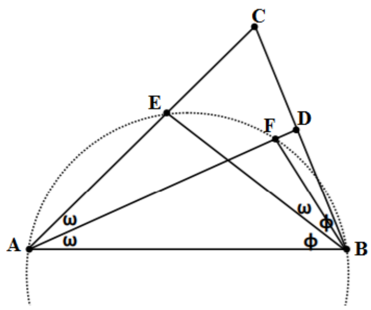
$$(\alpha + \mathrm{BK})\alpha = DO^2,$$

άρα α=OK. Αλλά αν το O είναι μέσο του τόξου AQE θα έχουμε AO = OC, επομένως οι γωνίες AOB, COB είναι ίσες, άρα $\widehat{ABO} = \widehat{OBC}$, η πλευρά BO είναι κοινή, επομένως τα δύο τρίγωνα OAB, OCB είναι ίσα και άρα AB=BC.

Από το 1844 έως το 1852 έγιναν πολλές αποδείξεις, τις οποίες μπορούμε να βρούμε στο *Grunert's Archiv der Mathematik*.

Ο ίδιος ο Lehmus, το 1850, είχε κάνει μία απόδειξη, την οποία αναφέρει ο Th. Lange στο άρθρο «*Nachtrag zu dem Aufsatze in Thl. XIII. Nr. XXXIII.*» που βρίσκεται στο βιβλίο του Grunert *Archiv der Mathematik und Physik*, Fünfzehnter Theil (15), 221-226 του 1850. Στο ίδιο άρθρο αναφέρεται και μία δεύτερη απόδειξη του Lehmus, που έχει γίνει με τη βοήθεια μετρικών σχέσεων.

Απόδειξη 5 (Lehmus)



Σχήμα 5.7:

Στο τρίγωνο ABC οι διχοτόμοι AD και BE είναι ίσες. Θέλουμε να δείξουμε ότι $\hat{A} = \hat{B}$. Υποθέτουμε ότι $\widehat{EAD} < \widehat{DBE}$. Τότε υπάρχει σημείο F στο εσωτερικό της γωνίας $\widehat{DBE}$, τέτοιο ώστε να ισχύει $\widehat{EBF} = \widehat{EAD}$. Άρα τα σημεία A, E, F και B είναι ομοκυκλικά. Επίσης η $\widehat{\mathrm{BAE}} = \omega + \omega < \varphi + \omega = \widehat{ABF}$ και $\widehat{ABF} < 90^0$, επομένως προκύπτει ότι BE<AF άρα BE<AD (AF<AD), που αντίκειται στην υπόθεση μας.

Η κεντρική ιδέα αυτής της απόδειξης (να κατασκευαστεί γωνία ίση με το μισό της μικρότερης από τις δύο γωνίες της βάσης του τριγώνου) χρησιμοποιήθηκε σε ορισμένες παραλλαγές της απόδειξης αυτής, στις οποίες δεν χρησιμοποιούνται ιδιότητες κύκλου, (όπως για παράδειγμα οι αποδείξεις 8 και 10 που ακολουθούν)· γεγονός που ίσως συνέβαλε να περιέλθει η απόδειξη του Lehmus σε αφάνεια. Ας σημειωθεί ότι στις αρχές της δεκαετίας του 1960 στο περιοδικό *American Mathematical Monthly* δημοσιεύτηκε εκ νέου η απόδειξη του Lehmus ως νέα ανακάλυψη δύο Άγγλων μηχανικών, και μάλιστα με την επιβράβευση ως η απλούστερη απόδειξη του θεωρήματος Steiner-Lehmus. Αργότερα αποκαλύφθηκε η λογοκλοπή και αποκαταστάθηκε η προτεραιότητα των αποδείξεων.

Απόδειξη 6 (με μετρικές σχέσεις)

Έστω δ_b και δ_c οι ίσες διχοτόμοι του τριγώνου με πλευρές a, b, c και s η ημιπερίμετρος του. Ισχύουν οι τύποι

$$\delta_b = \frac{2}{a+c}\sqrt{acs(s-b)}$$

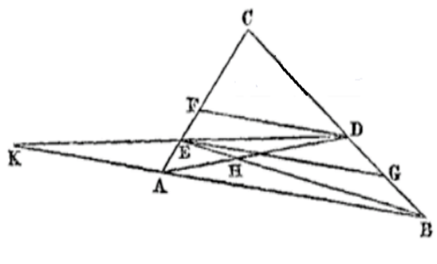
$$\delta_c = \frac{2}{a+b}\sqrt{abs(s-c)}$$

Αφού $\delta_b = \delta_c$, μετά από πράξεις θα καταλήξουμε ότι $c = b$, δηλαδή ότι το τρίγωνό μας είναι ισοσκελές.

Το 1850-51 το θεώρημα έφτασε στην Αγγλία και μάλιστα έγινε και θέμα σε εξετάσεις στο Cambridge, με έναν επιπλέον όρο: η απόδειξη να είναι άμεση, δηλαδή χωρίς απαγωγή εις άτοπο. Αυτός ο όρος τράβηξε την προσοχή του J.J. Sylvester, ο οποίος εκείνη την εποχή εργαζόταν πάνω στις εξισώσεις και τις ρίζες τους, και τον Οκτώβριο του 1852 δημοσιεύει στο περιοδικό *Philosophical Magazine* δύο έμμεσες αποδείξεις, η μία εκ των οποίων -η απλούστερη- από τον B.L. Smith της Σχολής των Ιησουϊτών του Cambridge[8].

Η απόδειξη του Smith είναι η εξής

Απόδειξη 7 (Smith)



Σχήμα 5.8:

Έστω AD, BE οι ίσες διχοτόμοι των γωνιών A και B στο τρίγωνο ABC. Υποθέτουμε ότι η $\widehat{DAB}$ είναι μεγαλύτερη από την $\widehat{EBA}$. Τότε μπορεί να δειχθεί εύκολα ότι το σημείο D θα βρίσκεται ψηλότερα σε σχέση με την AB από το σημείο E. Έτσι, αν φέρουμε DF, EG παράλληλες στην AB, το DF θα είναι ψηλότερα από το EG. Εύκολα αποδεικνύεται ότι DF=AF, EG=BG, και επομένως DF<EG και AF<BG, άρα η $\widehat{DFA}$, η οποία είναι παραπληρωματική της διπλάσιας της $\widehat{DAB}$

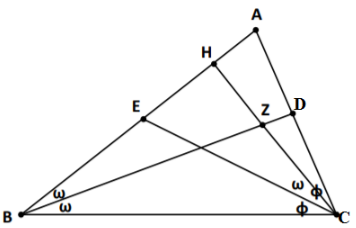
[8] *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, Volume 4, 1852, σελίδες 366-369.

θα είναι μικρότερη από την $\widehat{EGB}$ που είναι παραπληρωματική της διπλάσιας της $\widehat{FBA}$. Σύμφωνα λοιπόν με πρόταση του Ευκλείδη έπεται ότι DA<EB, το οποίο όμως αντιφάσκει στην υπόθεσή μας. Έτσι καμμία από τις γωνίες της βάσης δε μπορεί να είναι μεγαλύτερη από την άλλη, δηλαδή το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

Παρατήρηση

Με τις αποδείξεις των Smith και Lehmus αποδεικνύεται ουσιαστικά μια γενικότερη πρόταση από το θεώρημα Steiner-Lehmus: *Αν δύο γωνίες ενός τριγώνου είναι άνισες, τότε οι αντίστοιχες εσωτερικές διχοτόμοι είναι άνισες και στη μικρότερη γωνία αντιστοιχεί η μεγαλύτερη διχοτόμος*[9].

Απόδειξη 8 (Miller)[10] (παραλλαγή της ιδέας του Lehmus)



Σχήμα 5.9:

Όπως και στη μέθοδο Lehmus, με υπόθεση ω<φ, κατασκευάζεται στο εσωτερικό της γωνίας $\widehat{ECA} = \varphi$ μία γωνία $\widehat{ECH} = \omega$ και ονομάζεται Z το σημείο στο οποίο η CH τέμνει τη διχοτόμο BD. Επειδή ω+φ > ω+ω, από το τρίγωνο HBC προκύπτει ότι είναι BH>CH.

Επίσης, από την ομοιότητα των τριγώνων BHZ και CEH, προκύπτει ότι

$$\frac{BH}{CH} = \frac{BZ}{CE}$$

.

Επειδή όμως BH>CH, έπεται από την τελευταία ότι είναι BZ>CE, το οποίο αντιφάσκει προς την υπόθεση ότι οι διχοτόμοι BD και CE είναι ίσες.

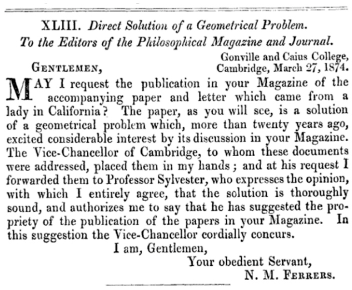
[9]Ουσιαστικά μιλάμε για την αντιθετοαντίστροφη πρόταση του θεωρήματος μας, η οποία εμφανίζεται από τη δεκαετία του 1940 ως ένα βασικό λήμμα στο οποίο ανάγονται πολλές έμμεσες αποδείξεις του.

[10]Ο Miller την έστειλε το 1866 στον Mackay που την δημοσίευσε το 1901 στο *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, Volume 20, σελίδες 18-22.

Από το 1852-1874 μόνο στην Αγγλία βρίσκει κανείς αρκετές αποδείξεις στο περιοδικό *Lady's and Gentleman's Diary*, αλλά και σε άλλα περιοδικά. Για παράδειγμα, μία παρεμφερής απόδειξη με αυτή του Rougevin δημοσιεύτηκε από τον T. Wilkinson στο τεύχος του *Lady's and Gentleman's Diary for 1857*, σελίδες 58-59, ο οποίος συνεχίζοντας το θέμα και στα επόμενα τεύχη των ετών 1859 (σελίς 87) και 1860 (σελίς 84) αναφέρεται στη λύση που έδωσε ο Rougevin το 1842, λέγοντας ότι μοιάζει στη δική του και σχολιάζει ότι αν αυτό το κριτήριο ισότητας τριγώνων που αποδείξαμε συμπεριλαμβανόταν στη στοιχειώδη Γεωμετρία ως «γνωστό» θα απλοποιούσε πολλές αποδείξεις.
Αναφέρεται επίσης και στην δεύτερη απόδειξη που δημοσιεύτηκε εκείνη τη χρονιά στο περιοδικό, εκείνη του Grout de Saint Paer, η οποία είναι τελείως διαφορετική από τη δική του.

Το 1874 εμφανίζεται μία από τις πιο γνωστές λύσεις. Την έστειλε η Christine Chart, από το Oakland California στον N.M. Ferrers, ο οποίος την προώθησε στο περιοδικό *Philosophical Magazine and Journal of Science*, το οποίο και τη δημοσίευσε στον τόμο XLVII του 1874, σελίδες 354-357.

.



XLIII. *Direct Solution of a Geometrical Problem.*

To the Editors of the Philosophical Magazine and Journal.

Gonville and Caius College, Cambridge, March 27, 1874.

GENTLEMEN,

MAY I request the publication in your Magazine of the accompanying paper and letter which came from a lady in California? The paper, as you will see, is a solution of a geometrical problem which, more than twenty years ago, excited considerable interest by its discussion in your Magazine. The Vice-Chancellor of Cambridge, to whom these documents were addressed, placed them in my hands; and at his request I forwarded them to Professor Sylvester, who expresses the opinion, with which I entirely agree, that the solution is thoroughly sound, and authorizes me to say that he has suggested the propriety of the publication of the papers in your Magazine. In this suggestion the Vice-Chancellor cordially concurs.

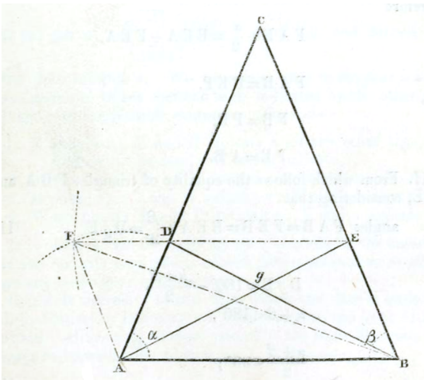
I am, Gentlemen,
Your obedient Servant,
N. M. FERRERS.

Σχήμα 5.10:

Στην πραγματικότητα, η συγκεκριμένη απόδειξη είχε βρεθεί από τον φίλο της Chart, τον F.G. Hesse το 1842.

Απόδειξη 9 (Hesse)

Έστω AE και BD οι ίσες διχοτόμοι των γωνιών A και B του τριγώνου ABC. Βρίσκουμε σημείο F, έτσι ώστε FA=AD και FE=AB και φέρνουμε την FB. Τότε τα τρίγωνα FAE, ADB είναι ίσα. (I)



Σχήμα 5.11:

Επίσης $\widehat{ADB} + \dfrac{\widehat{\alpha}}{2} = \widehat{DgE}$

και $\widehat{B\text{EA}} + \dfrac{\widehat{\beta}}{2} = \widehat{DgE}$

Άρα

$\widehat{ADB} + \dfrac{\widehat{\alpha}}{2} = \widehat{B\text{EA}} + \dfrac{\widehat{\beta}}{2}.$

Αλλά από την (I) έχουμε ότι $\widehat{ADB} = \widehat{FAE}$, $\widehat{FEA} = \dfrac{\widehat{\beta}}{2}$.

Επομένως $\widehat{FAE} + \dfrac{\widehat{\alpha}}{2} = \widehat{BEA} + \widehat{FEA}$ ή $\widehat{FAB} = \widehat{BEF}$. (II)

Επίσης FB=FB και FE=AB, από τα οποία έπεται η ισότητα των τριγώνων FBA και FBE, λαμβάνοντας υπόψιν ότι $\widehat{FAB} = \widehat{FEB} = \widehat{BEA} + \dfrac{\widehat{\beta}}{2} = \widehat{DgE}$.

Αλλά $\widehat{DgE} = 180^o - \dfrac{\widehat{\alpha+\beta}}{2}$, $\widehat{\alpha+\beta} < 180^o$, και $\dfrac{\widehat{\alpha+\beta}}{2} < 90^o$

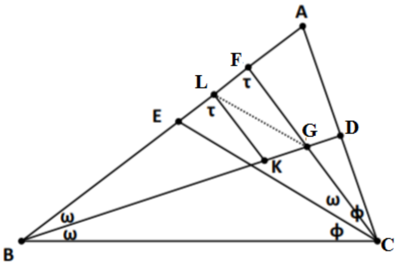
άρα $\widehat{DgE}$ ή $\widehat{FAB} > 90^o$.

Από τα προηγούμενα έπεται ότι FA=BE και εκ κατασκευής FA=AD, άρα BE=AD, από το οποίο προκύπτει η ισότητα των τριγώνων ABE και ABD, και άρα $\widehat{\alpha} = \widehat{\beta}$, το οποίο ήταν και το ζητούμενο.

Τη μέθοδο της αντιθετοαντιστροφής χρησιμοποιεί η απόδειξη που αποδίδεται στον John Casey και έχει δημοσιευτεί το 1933 στο περιοδικό *Mathematical Gazette*, όπως μας πληροφορεί ο J.A. M'Bride στο άρθρο του «The equal internal bisectors theorem, 1840-1940. Many solutions or none? A centenary account». *The Edinburgh Mathematical Notes*, Volume 33, 1-13 (1943), το οποίο αποτελεί ιστορική ανασκόπηση της πρώτης εκατονταετηρίδας του θεωρήματος Steiner-Lehmus.

Η απόδειξη του Casey, η οποία είναι και αυτή παραλλαγή της ιδέας του Lehmus, έχει ως εξής

Απόδειξη 10 (Casey)



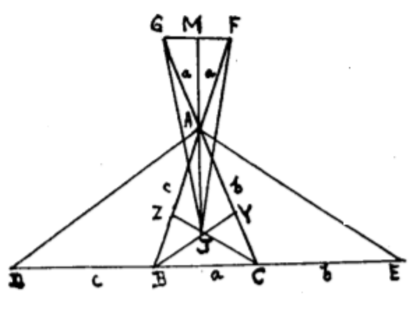
Σχήμα 5.12:

Έστω $\hat{C} > \hat{B}$. Στο εσωτερικό της γωνίας $\widehat{ECA} = \varphi$ κατασκευάζουμε τη γωνία $\widehat{ECF} = \omega$. Από το τρίγωνο FBC συμπεραίνουμε ότι BF>CF αφού ω+φ>ω+ω. Άρα υπάρχει στο εσωτερικό του BF σημείο L τέτοιο ώστε BL=CF. Με κορυφή το L κατασκευάζεται γωνία $\widehat{BLK} = \widehat{BFC}$ (K σημείο της BD). Έτσι δημιουργείται το τρίγωνο BLK ίσο προς το τρίγωνο CFE, από όπου συνάγεται ότι BK=CE και κατά συνέπεια ισχύει BD>CE.

Ο M'Bride θεωρεί ότι το τελευταίο βήμα χρήζει περαιτέρω αιτιολόγησης και συμπληρώνει την απόδειξη του Casey ως εξής: Φέρει το LG, (G το σημείο τομής της CF με τη διχοτόμο BD), και σημειώνει ότι επειδή $\widehat{BLG} > \widehat{BFG}$, θα είναι επίσης $\widehat{BLG} > \widehat{BLK}$ άρα το K θα κείται μεταξύ των B και G, επομένως και μεταξύ των B και D. Από τα παραπάνω, γράφει ο M'Bride ολοκληρώνοντας την απόδειξη, συμπεραίνουμε ότι αν υποτεθεί AB>AC, τότε BD>CE. Αυτή όμως είναι η αντιθετοαντίστροφη της πρότασης «Αν BD=CE, τότε AB=AC»

Ο ίδιος ο M'Bride έδωσε το 1939 μία δική του διαφορετική απόδειξη, την εξής

Απόδειξη 11 (M'Bride)



Σχήμα 5.13:

Προεκτείνουμε το BC παίρνοντας τμήμα BD=AB και CE=AC, προεκτείνουμε επίσης τα BA, CA παίρνοντας AF=AG=α. Φέρνουμε τα AD, AE, JF, JG και προεκτείνουμε το JA έως το M. Τότε τα τρίγωνα JBC, ADE είναι όμοια, αφού έχουν τρεις γωνίες αντίστοιχα ίσες ($\frac{1}{2}$B, $\frac{1}{2}C, 90^o + \frac{1}{2}A$)

και

$$\frac{BY}{\alpha} = \frac{AD}{\alpha + c}, \; \frac{CZ}{\alpha} = \frac{AE}{\alpha + b},$$

$$BY = CZ, \; \frac{BF}{CG} = \frac{\alpha + c}{\alpha + b} = \frac{AD}{AE} = \frac{JB}{JC}$$

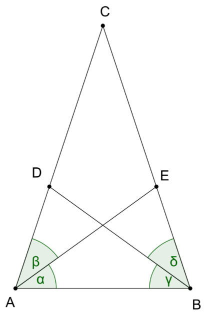
Η JAM διχοτομεί κάθετα την FG, JF=JG, $\widehat{JGA} = \widehat{JFA}$. Τα τρίγωνα BJF, CJG έχουν (i) ίσες γωνίες στα F και G (ii) $\frac{JB}{FB} = \frac{JC}{CG}$, (iii) Τα τρίγωνα BJF, CJG είναι και τα δύο αμβλυγώνια, επομένως είναι όμοια. Επίσης JF=JG, άρα συντρέχουν και α+b=α+c. Επομένως b=c.

Από τότε έως και τις μέρες μας έχουμε την εμφάνιση πολλών εργασιών πάνω στην πρόταση και σχετικών δημοσιεύσεων, ενώ είναι γνωστές περισσότερες από 80 αποδείξεις (όχι μόνο γεωμετρικές) που έχουν δημοσιευτεί σε διάφορα περιοδικά και γλώσσες.
Αν προσπαθήσουμε να κατηγοριοποιήσουμε αυτές τις αποδείξεις, μπορούμε να τις χωρίσουμε σε «άμεσες» και «έμμεσες», αν και για κάποιες δεν είναι σαφής αυτός ο διαχωρισμός, αλλά επίσης και σε αυτές που χρησιμοποιούν κάποια κατασκευή, σε αντίθεση με αυτές που χρησιμοποιούν Τριγωνομετρία. Και πάλι όμως το πλήθος και η διαφορετικότητα των αποδείξεων αυτών είναι τέτοια που δικαιολογούν πλήρως τη γοητεία που ασκεί η ενασχόληση με το θεώρημα αυτό. Κατά περιόδους προκλήθηκαν εκτεταμένες συζητήσεις για τον άμεσο (modus ponens) ή έμμεσο χαρακτήρα (reductio ad absurdum και modus tollens) αποδείξεων που έχουν δοθεί, ενώ σημαίνοντες μαθηματικοί όπως ο James Joseph Sylvester (1814-1897) και πιο πρόσφατα ο John Conway (1937 -) έχουν επιχειρήσει να ερμηνεύσουν τα βαθύτερα αίτια της δυσκολίας.

Μία από τις απλούστερες αποδείξεις είναι η επόμενη (Απόδειξη 12), η οποία κάνει χρήση του ακόλουθου λήμματος.

Λήμμα Αν ένα τρίγωνο έχει δύο διαφορετικές γωνίες, η μικρότερη γωνία έχει τη μεγαλύτερη σε μήκος εσωτερική διχοτόμο[11].

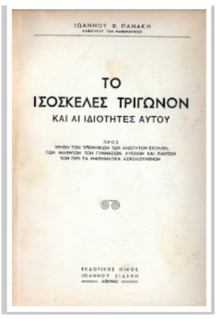
<u>Απόδειξη 12</u>



Σχήμα 5.14:

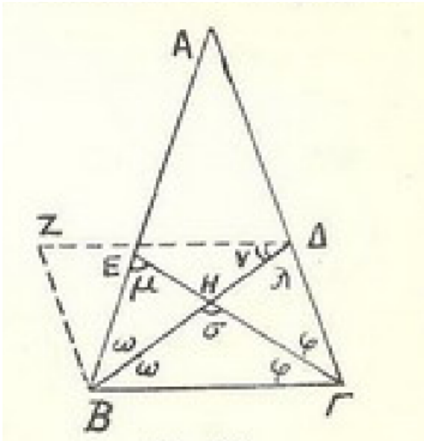
Αρκεί να αποδείξουμε ότι αν στο τρίγωνο ABC (AE και BD διχοτόμοι)
$B \neq A$, τότε $BD \neq AE$.
Αλλά αυτό είναι άμεση συνέπεια του προηγούμενου Λήμματος.

Επειδή προφανώς στη συγκεκριμένη εργασία δε μπορούμε να αναφέρουμε όλες τις αποδείξεις που έχουν δημοσιευτεί, θα αναφέρουμε ακόμα κάποιες που έχει συλλέξει ο Έλληνας Γεωμέτρης Ιωάννης Πανάκης στο βιβλίο του *Το ισοσκελές τρίγωνον και αι ιδιότητες αυτού*, §87, σελίδες 61-72 και θα δώσουμε μία ανακεφαλαίωση της ιστορίας του θεωρήματος όπως μας την δίνει ο M'Bride στο προαναφερθέν του έργο, όπου κανείς μπορεί να βρει περισσότερες αποδείξεις.



Σχήμα 5.15:

[11]Geometry Revisited by H.S.M. Coxeter and S.L. Greitzer, Lemma 1.512, p. 14

h 

Σχήμα 5.16:

Απόδειξη 13

Με πλευρά τη διχοτόμο ΒΔ κατασκευάζουμε τρίγωνο ΖΒΔ με $\widehat{\mathrm{Z}\mathrm{B}\Delta} = \widehat{\mathrm{B}\mathrm{E}\Gamma} = \hat{\mu}$ και τη γωνία $\hat{\nu} = \hat{\varphi}$. Τότε τα τρίγωνα ΖΒΔ και ΕΒΓ είναι ίσα και άρα ΖΔ=ΒΓ.

Ισχύουν $\hat{\sigma} = \hat{\mu} + \hat{\omega}$ και $\hat{\sigma} = \hat{\lambda} + \hat{\varphi}$, επομένως έχουμε

$\hat{\lambda} + \hat{\varphi} = \hat{\mu} + \hat{\omega} \Leftrightarrow \hat{\lambda} + \hat{\nu} = \widehat{\mathrm{Z}\mathrm{B}\Delta} + \hat{\omega} = \widehat{\mathrm{Z}\mathrm{B}\Gamma} \Leftrightarrow \widehat{\mathrm{Z}\Delta\Gamma} = \widehat{\mathrm{Z}\mathrm{B}\Gamma}$.

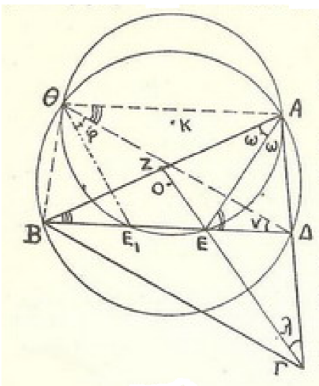
Άρα το ΖΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε

$\hat{\nu} = \hat{\omega} \Leftrightarrow \hat{\varphi} = \hat{\omega} \Leftrightarrow 2\hat{\varphi} = 2\hat{\omega} \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = \hat{\mathrm{B}}$, δηλαδή ΑΒΓ ισοσκελές.

Απόδειξη 14

Έστω Ε το σημείο τομής των ίσων διχοτόμων ΒΔ και ΓΖ. Φέρνουμε την ΑΕ, η οποία θα είναι διχοτόμος της $\hat{\mathrm{A}}$.

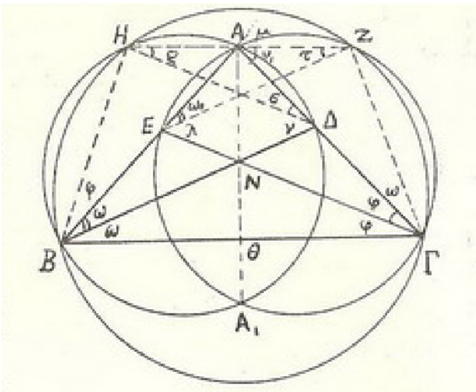
Με πλευρά την ΒΔ και κορυφές τα Β και Δ κατασκευάζουμε την $\widehat{\Delta\mathrm{B}\Theta}$ ίση με την $\widehat{\mathrm{A}\mathrm{Z}\Gamma}$ και την $\hat{\lambda} = \hat{\nu} = \frac{\hat{\Gamma}}{2}$.



Σχήμα 5.17:

Οι άλλες πλευρές αυτών τέμνονται στο Θ. Έτσι τα τρίγωνα ΘΒΔ και ΑΖΓ θα είναι ίσα και άρα $\widehat{\mathrm{B}\Theta\Delta} = \widehat{\mathrm{Z}\mathrm{A}\Gamma} = \widehat{\mathrm{B}\mathrm{A}\Delta}$ και ΘΔ=ΑΓ. Αν $\Theta\mathrm{E}_1$ η διχοτόμος του τριγώνου ΘΒΔ, θα είναι $\Theta\mathrm{E}_1$=ΑΕ και $\hat{\omega} = \hat{\varphi}$, λόγω της ισότητας των τριγώνων ΑΓΕ και $\Theta\mathrm{E}_1\Delta$. Επειδή $\widehat{\mathrm{B}\Theta\Delta} = \widehat{\mathrm{B}\mathrm{A}\Delta}$, το τετράπλευρο ΑΘΒΔ θα είναι εγγράψιμο σε κύκλο κέντρου Ο. Επομένως $\widehat{\mathrm{A\Theta\Delta}} = \widehat{\mathrm{AB\Delta}} = \frac{\hat{\mathrm{B}}}{2}$ και $\widehat{\mathrm{AE\Delta}} = \widehat{\mathrm{BAE}} + \widehat{\mathrm{ABE}} = \frac{\hat{\mathrm{A}}}{2} + \frac{\hat{\mathrm{B}}}{2} = \widehat{\Delta\Theta\mathrm{E}_1} + \widehat{\mathrm{A\Theta\Delta}} = \widehat{\mathrm{A\Theta E}_1}$, οπότε και το τετράπλευρο $\mathrm{A\Theta E_1 E}$ θα είναι εγγράψιμο σε κύκλο κέντρου Κ. Δείξαμε ότι $\Theta\mathrm{E}_1$=ΑΕ, άρα αυτό είναι ισοσκελές τραπέζιο, οπότε ΑΘ//EE_1, άρα ΑΘ//ΔΒ. Άρα και το τετράπλευρο ΑΘΒΔ θα είναι ισοσκελές τραπέζιο. Επομένως ΑΒ=ΘΔ ως διαγώνιοι ισοσκελούς τραπεζίου. Επειδή όμως ΘΔ=ΑΓ, έπεται ότι και ΑΒ=ΑΓ, δηλαδή το ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

Απόδειξη 15



Σχήμα 5.18:

Από τα Δ και Ε φέρνουμε ευθείες παράλληλες προς τα ΓΕ και ΒΔ αντιστοίχως, οι οποίες τέμνουν την εξωτερική διχοτόμο της γωνίας Α στα σημεία Η και Ζ αντιστοίχως. Φέρνουμε τις ΗΒ και ΖΓ. Τότε $\hat{\sigma} = \hat{\varphi}$ $\hat{\omega_1} = \hat{\omega}$, $\hat{\mu} = \hat{\nu_1}$. Η διχοτόμος ΑΘ της $\hat{\mathrm{A}}$ είναι κάθετη στην ΗΖ. Από το τρίγωνο ΗΑΔ θα έχουμε $\hat{\rho} = 180^o - \widehat{\mathrm{HA\Delta}} - \hat{\sigma} =$
$= 180^o - (90^o + \frac{\hat{\mathrm{A}}}{2}) - \hat{\varphi} = 90^o - \frac{\hat{\mathrm{A}}}{2} - \frac{\hat{\Gamma}}{2} =$
$\frac{\hat{\mathrm{B}}}{2} = \hat{\omega_1}$

Οπότε το τετράπλευρο ΗΑΔΒ θα είναι εγγράψιμο σε κύκλο, άρα θα είναι και $\widehat{\mathrm{BH\Delta}} = \widehat{\mathrm{BA\Delta}} = \widehat{\mathrm{BA\Gamma}}$. Επίσης θα είναι και $\widehat{\mathrm{HBA}} = \hat{\sigma} = \hat{\varphi} = \frac{\hat{\Gamma}}{2}$.

Αλλά $\hat{\nu} + \hat{\sigma} = 2\hat{\varphi} + \hat{\omega} \Leftrightarrow \hat{\nu} = 2\hat{\varphi} - \hat{\sigma} + \hat{\omega} = 2\hat{\varphi} - \hat{\varphi} + \hat{\omega} = \hat{\varphi} + \hat{\omega} = \widehat{\mathrm{HB\Delta}}$.

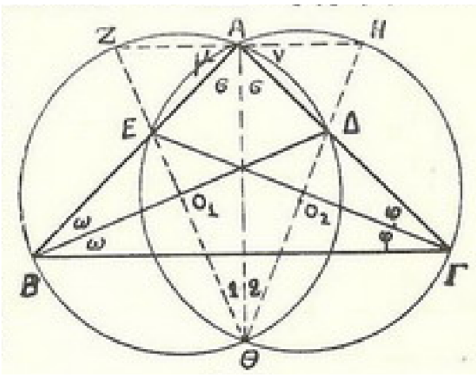
Δηλαδή το τρίγωνο ΗΒΔ είναι ισοσκελές.

Όμοια αποδεικνύουμε ότι και το τρίγωνο ΖΕΓ είναι ισοσκελές. Τα δύο αυτά ισοσκελή τρίγωνα είναι ίσα και άρα ΗΒ=ΖΓ.

Επειδή $\widehat{\mathrm{BHA}} + \widehat{\mathrm{B\Gamma Z}} = (\widehat{\mathrm{BH\Delta}} + \hat{\rho}) + (\hat{\Gamma} + \hat{\omega}) = \hat{\mathrm{A}} + \frac{\hat{\mathrm{B}}}{2} + \hat{\Gamma} + \frac{\hat{\mathrm{B}}}{2} = \hat{\mathrm{A}} + \hat{\mathrm{B}} + \hat{\Gamma} = 180^o$, το τετράπλευρο ΒΓΖΗ είναι εγγράψιμο και μάλιστα είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Άρα οι γωνίες της βάσης του θα είναι ίσες, δηλαδή $2\hat{\varphi} + \hat{\omega} = 2\hat{\omega} + \hat{\varphi}$, επομένως $2\hat{\varphi} = 2\hat{\omega}$ ή $\hat{\Gamma} = \hat{\mathrm{B}}$.

Απόδειξη 16



Σχήμα 5.19:

Γράφουμε τους περιγεγραμμένους κύκλους των τριγώνων ΑΒΔ και ΑΕΓ με κέντρα τα O_1 και O_2 αντίστοιχα, οι οποίοι τέμνονται και στο σημείο Θ. Οι κύκλοι είναι ίσοι (αφού ΒΔ=ΓΕ και φαίνονται από το Α υπό την ίδια γωνία $\widehat{\mathrm{B}\mathrm{A}\Gamma}$, άρα τα τόξα ΑΕΘ και ΑΔΘ είναι ίσα. Αν Ζ και Η τα σημεία τομής των ΘΕ και ΘΔ με τους κύκλους και ενώσουμε το Α με τα Ζ, Η και Θ, έχουμε $\widehat{\Theta}_1 = \widehat{\varphi}$ και $\widehat{\Theta}_2 = \widehat{\omega}$. Άρα $\widehat{\mathrm{E}\Theta\Delta} = \widehat{\Theta}_1 + \widehat{\Theta}_2 = \widehat{\varphi}+\widehat{\omega}$. Επειδή το τετράπλευρο ΑΕΘΗ είναι εγγεγραμμένο, θα έχουμε, αν $\widehat{\mathrm{B}\mathrm{A}\Gamma} = 2\sigma$, ότι

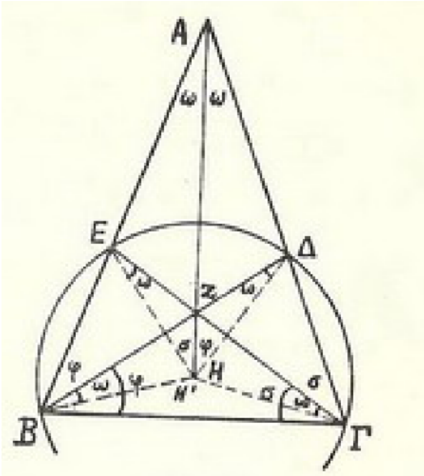
$$\widehat{\mathrm{E}\mathrm{A}\mathrm{H}} = 180^o - \widehat{\mathrm{E}\Theta\mathrm{H}} = 180^o - \widehat{\mathrm{E}\Theta\Delta} = (2\widehat{\sigma}+2\widehat{\omega}+2\widehat{\varphi})-(\widehat{\varphi}+\widehat{\omega}) = 2\widehat{\sigma}+\widehat{\varphi}+\widehat{\omega}.$$

Επομένως $\widehat{\nu} = \widehat{\mathrm{E}\mathrm{A}\mathrm{H}} - 2\widehat{\sigma} = (2\widehat{\sigma}+\widehat{\varphi}+\widehat{\omega}) - 2\widehat{\sigma} = \widehat{\varphi}+\widehat{\omega}$

Ομοίως από το εγγεγραμμένο ΑΔΘΖ μπορούμε να βρούμε επίσης ότι $\widehat{\mu} = \widehat{\varphi}+\widehat{\omega}$ και άρα $\widehat{\nu} = \widehat{\mu}$. Εξάλλου $\widehat{\mu} + 2\widehat{\sigma} + \widehat{\nu} = 180^o$ οπότε τα σημεία Ζ, Α, Η είναι συνευθειακά. Επίσης οι εγγεγραμμένες γωνίες $\widehat{\mathrm{A}\mathrm{H}\Theta}$, $\widehat{\mathrm{A}\mathrm{Z}\Theta}$ είναι ίσες, δηλαδή το τρίγωνο ΘΖΗ είναι ισοσκελές, άρα ΘΖ=ΘΗ. Οπότε ΘΑ είναι κάθετη στην ΖΗ, δηλαδή ύψος του ισοσκελούς τριγώνου ΘΖΗ, επομένως και διχοτόμος της γωνίας της κορυφής Θ. Άρα $\widehat{\Theta}_1 = \widehat{\Theta}_2$ ή $\widehat{\varphi} = \widehat{\omega}$, οπότε και $\widehat{\mathrm{B}} = \widehat{\Gamma}$.

Απόδειξη 17

Έστω ότι $\widehat{\mathrm{A}} < \widehat{\mathrm{B}}$. Με πλευρά τη ΔΒ και κορυφή το Δ, κατασκευάζουμε τη γωνία $\widehat{\mathrm{B}\Delta\mathrm{H}} = \frac{\widehat{\mathrm{A}}}{2} = \widehat{\omega}$, όπου Η το σημείο τομής της άλλης της πλευράς με την ΑΖ. Φέρνουμε την ΗΒ. Το τετράπλευρο ΑΔΗΒ είναι εγγράψιμο, οπότε $\widehat{\Delta\mathrm{B}\mathrm{H}} = \widehat{\Delta\mathrm{A}\mathrm{H}} = \widehat{\omega}$, δηλαδή το τρίγωνο ΗΒΔ είναι ισοσκελές, άρα ΗΒ=ΗΔ. Επειδή έχουμε υποθέσει $\widehat{\mathrm{A}} < \widehat{\mathrm{B}}$, δηλαδή $\widehat{\omega} < \widehat{\varphi}$, έπεται ότι το Η είναι εντός του τριγώνου ΑΒΓ.



Σχήμα 5.20:

Τα τρίγωνα ΔΖΗ και ΔΑΗ είναι όμοια, άρα θα έχουμε

$$\frac{\Delta\mathrm{H}}{\mathrm{AH}} = \frac{\mathrm{ZH}}{\Delta\mathrm{H}} \Rightarrow (\Delta\mathrm{H})^2 = (\mathrm{AH})(\mathrm{ZH})\,(*)$$

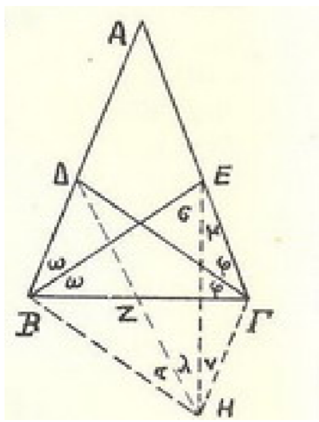
Εργαζόμαστε παρόμοια και κατασκευάζουμε γωνία $\widehat{\Gamma\mathrm{EH}'} = \hat{\omega}$, και καταλήγουμε στη σχέση

$$\frac{\mathrm{EH}'}{\mathrm{AH}'} = \frac{\mathrm{ZH}'}{\mathrm{EH}'} \Rightarrow (\mathrm{EH}')^2 = (\mathrm{AH}')(\mathrm{ZH}')\,(**.)$$

Τα τρίγωνα όμως ΒΔΗ και ΓΕΗ$'$ είναι ίσα, άρα ΔΗ=ΕΗ$'$, οπότε από τις σχέσεις $(*)$ και $(**)$ έχουμε ότι $(\mathrm{AH})(\mathrm{ZH}) = (\mathrm{AH}')(\mathrm{ZH}')$, η οποία γράφεται ως εξής:
$(\mathrm{AH})(\mathrm{AH}-\mathrm{AZ}) = (\mathrm{AH}')(\mathrm{AH}'-\mathrm{AZ})$, η οποία μετά από πράξεις δίνει τη σχέση $(\mathrm{AH}-\mathrm{AH}')(\mathrm{AH}+\mathrm{AH}'-\mathrm{AZ}) = 0$. Επειδή ο δεύτερος παράγοντας είναι διάφορος του μηδενός, πρέπει αναγκαστικά $\mathrm{AH} = \mathrm{AH}'$, η οποία εκφράζει ότι το σημείο Η$'$ συμπίπτει με το Η και άρα ΗΔ=ΗΕ=ΗΒ=ΗΓ, δηλαδή τα σημεία Β, Γ, Δ, Ε βρίσκονται σε περιφέρεια κύκλου κέντρου Η.
Άρα θα είναι και $\hat{\varphi} = \widehat{\mathrm{EB}\Delta} = \widehat{\mathrm{E}\Gamma\Delta} = \hat{\sigma}$, ή $2\hat{\varphi} = 2\hat{\sigma}$ ή $\hat{\mathrm{B}} = \hat{\Gamma}$.

Απόδειξη 18

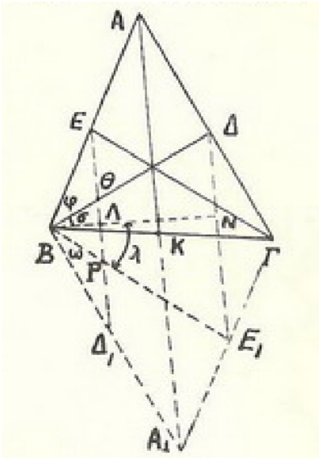
Φέρνουμε τη ΔΖ, όπου Ζ το μέσο της ΒΓ και παίρνουμε πάνω στην προέκτασή της τμήμα ΖΗ=ΔΖ. Το ΔΒΗΓ είναι παραλληλόγραμμο, επομένως ΒΗ=ΔΓ=ΒΕ, δηλαδή το τρίγωνο ΒΕΗ είναι ισοσκελές, οπότε
$\hat{\tau} + \hat{\lambda} = \hat{\sigma}$. (1) Υποθέτουμε ότι $\hat{\Gamma} > \hat{\mathrm{B}}$, δηλαδή $\hat{\varphi} > \hat{\omega}$. Τότε τα τρίγωνα ΒΕΓ και ΒΔΓ



Σχήμα 5.21:

είναι άνισα, άρα ΓΕ<ΔΒ=ΓΗ, δηλαδή ΓΕ<ΓΗ, οπότε και $\hat{\nu} < \hat{\mu}$ (2). Προσθέτοντας τις (1) και (2) παίρνουμε τελικά $\widehat{\mathrm{B}\Delta\Gamma} < \widehat{\mathrm{BE}\Gamma}$ ή $180^o - \hat{\mathrm{B}} - \frac{\hat{\Gamma}}{2} < 180^o - \hat{\Gamma} - \frac{\hat{\mathrm{B}}}{2}$, που δίνει ότι $\hat{\mathrm{B}} > \hat{\Gamma}$, το οποίο είναι άτοπο λόγω της αρχικής μας υπόθεσης. Σε άτοπο καταλήγουμε και αν υποθέσουμε $\hat{\mathrm{B}} > \hat{\Gamma}$. Κατ' ανάγκη λοιπόν θα είναι $\hat{\mathrm{B}} = \hat{\Gamma}$.

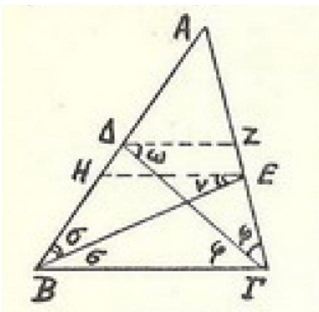
Απόδειξη 19



Σχήμα 5.22:

Έστω $\hat{\mathrm{B}} > \hat{\Gamma}$. Για τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΒΓΕ ισχύει τότε ΓΔ>ΒΕ (1). Πάνω στην προέκταση της ΑΚ, όπου Κ το μέσο της ΒΓ, παίρνουμε τμήμα $\mathrm{KA}_1 = \mathrm{AK}$ και ενώνουμε το A_1 με τα Β και Γ. Το τρίγωνο $\mathrm{A}_1\mathrm{B}\Gamma$ είναι συμμετρικό του ΑΒΓ ως προς Κ, άρα ίσο με αυτό. Αν BE_1 και $\Gamma\Delta_1$ οι διχοτόμοι του τριγώνου $\mathrm{A}_1\mathrm{B}\Gamma$, θα είναι $\mathrm{BE}_1 = \Gamma\mathrm{E} = \mathrm{B}\Delta$, δηλαδή το τρίγωνο $\mathrm{B}\Delta\mathrm{E}_1$ είναι ισοσκελές και $\Delta\mathrm{E}_1 // \mathrm{E}\Delta_1$. Αν ΒΝ το ύψος του ισοσκελούς $\mathrm{B}\Delta\mathrm{E}_1$, αυτό θα είναι κάθετο και στο $\mathrm{E}\Delta_1$ και θα ισχύει $\hat{\lambda} = \hat{\sigma}$. Οπότε $\hat{\varphi} + \hat{\sigma} > \hat{\omega} + \hat{\lambda}$ ή $\widehat{\mathrm{EB}\Lambda} > \widehat{\Lambda\mathrm{B}\Delta_1}$, οπότε θα είναι και $\mathrm{BE} > \mathrm{B}\Delta_1$. Αλλά $\mathrm{B}\Delta_1 = \Gamma\Delta$, άρα ΒΕ>ΓΔ, το οποίο είναι άτοπο λόγω της (1). Άρα $\hat{\mathrm{B}} = \hat{\Gamma}$.

Απόδειξη 20



Σχήμα 5.23:

Έστω $\hat{\mathrm{B}} < \hat{\Gamma}$. Φέρνουμε τις ΔΖ, ΕΗ παράλληλες στη ΒΓ. Είναι $\hat{\nu} = \hat{\sigma}$, άρα ΗΕ=ΗΒ και $\hat{\omega} = \hat{\varphi}$, άρα ΔΖ=ΖΓ. Άρα για τα ισοσκελή τρίγωνα ΒΗΕ και ΔΖΓ θα ισχύει ΗΕ<ΔΖ (1). Επειδή όμως ΒΕ και ΓΔ διχοτόμοι και ισχύει ΑΓ<ΑΒ, θα έχουμε

$$\frac{\Gamma\mathrm{E}}{\mathrm{AE}} = \frac{\mathrm{B}\Gamma}{\mathrm{AB}} < \frac{\mathrm{B}\Gamma}{\mathrm{A}\Gamma} = \frac{\Delta\mathrm{B}}{\mathrm{A}\Delta},$$

οπότε

$$\frac{\Gamma\mathrm{E}}{\mathrm{AE}}+1<\frac{\Delta\mathrm{B}}{\mathrm{A}\Delta}+1 \Leftrightarrow \frac{\Gamma\mathrm{E}+\mathrm{AE}}{\mathrm{AE}}<\frac{\Delta\mathrm{B}+\mathrm{A}\Delta}{\mathrm{A}\Delta} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{A}\Gamma}{\mathrm{AE}}<\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A}\Delta} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{B}\Gamma}{\mathrm{EH}}<\frac{\mathrm{B}\Gamma}{\Delta\mathrm{Z}}$$

επομένως ΔΖ<ΕΗ, άτοπο λόγω της (1).

Ακολουθεί η ανακεφαλαίωση του M'Bride

I. ΓΕΡΜΑΝΙΑ

1840. Ο Lehmus (Berlin) ζητάει από τον Jacob Steiner μία απόδειξη. Η απόδειξη εστάλη, και επεκτείνεται και στην περίπτωση των εξωτερικών διχοτόμων, που ισχύει με κάποιους περιοριστικούς όρους.

1844. *Crelle's Journal*, XXVIII., Η λύση του Steiner (αναπαράγεται στο Steiner's Gesammelte Werke II. 323-b, 1882).

1844. *Grunert's Archiv der Mathematik*, IV. (δύο αποδείξεις από τον Mossburger).

1848. XI. (Franz Knopf): 1849, XIII. (T. Lange and J.A. Grunert).

1850. XV. (T. Lange, Lehmus, W. Mink): 1851, XVI. (Balizer, Seebeck, August, Zech).

1852. XVIII. (Schmidt): 1853, XX. (Clausen): 1864, XLI. (Niegemann)

1864, XLII. (Grunert).

II. ΓΑΛΛΙΑ

1842. *Nouvelles Annales de Mathematiques*. (Rougevin, Grout de St Paer).

1880. *Journal de Math. Elem. et Speciales*, IV., pp. 538–9.

1903–1904. *Bulletin des Sciences Math. et Phys. Elem.*, p. 195.

1895. *Mathesis*, 261-2 (Soons): 1895, p. 154: 1907, p. 184 (Neuberg).

1923. P. 337, and 1930, pp. 97, 55.

III. ΑΓΓΛΙΑ

1852. *Lond. Edin. and Dub. Phil. Mag*. On Direct and Indirect Demonstration (A. De Morgan).

1853. Δύο έμμεσες αποδείξεις από τους J.J. Sylvester and B.L. Smith. Έρευνα (τριγωνομετρική) από τον Sylvester, και απόπειρα να δείξει ότι μία άμεση λύση είναι αδύνατη. Συνθήκες για να αληθεύει η πρόταση για ίσες εξωτερικές διχοτόμους. Αργότερα τρεις εργασίες από τον Dr. Adamson, που διαφωνεί με τον Sylvester, και υποδεικνύει μία άμεση απόδειξη. Απόδειξη του Sylvester's Test Theorem από τον T.K. Abbott.

1874. Η απόδειξη του F.G. Hesse προωθημένη από την Christine Chart, Oakland, California, στον Rev. Dr.N.M. Ferrers, που την δείχνει στον Sylvester, ο οποίος φέρεται να δέχεται την εγκυρότητά της. Ο Hesse την είχε κάνει το 1842.

1913. Απόδειξη από τον J.W. Stewart, Ayr Academy.

1856. *Lady's and Gentleman's Diary* (είχε προταθεί από τον J.W. Elliott).

1857. Απόδειξη από τον T.T. Wilkinson.

1859. Μία ακόμη απόδειξη από τον T.T. Wilkinson.

1860. Δύο αποδείξεις από τον Rev.W. Mason (προωθημένες από τον T.T. Wilkinson).

1878. *The Schoolmaster*. Απόδειξη από τον Richard Jones.

Mathematical Questions from Educational Times, Τόμος 74, σελίς 73 (Rev. T. Roach, δύο αποδείξεις του R. Charters, D. Biddle), το 1866, μία απόδειξη από τον Andrew Miller, Dundee H.S.

1933. *School Science and Mathematics* Pp. 781–3.

Mathematical Gazette

1932. XVI. 200 (Newell): 1933, XVII. (122, 243) (Boon, Dobbs).

1934. XVIII. 120, 255 (Altschiller-Court, Thébault).

1935. XIX. 144 (J. W. Stewart): 1937, XXI. 52, 153 (δύο από Thébault).

1938. XXII. 365 (McCarthy).

Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society

1939. Article and Solutions by Dr. J.S. Mackay, with references.

IV. ΑΜΕΡΙΚΗ

1879. *The Analyst*, σελίς 89 (Prof. M.C. Stevens). 1895. *American Math. Monthly*, Solutions σελίδες 189–191, και μία ακόμη απόδειξη το 1917, σελίς 344.

Κεφάλαιο 6

Η ΕΥΘΕΙΑ ΚΑΙ Ο ΚΥΚΛΟΣ ΤΟΥ EULER

6.1 Η Ευθεία του Euler

Ο Ελβετός Leonard Euler (1707-1783) θεωρείται ο κατ' εξοχήν μαθηματικός του 18ου αιώνα και ένας από τους σημαντικότερους μαθηματικούς όλων των εποχών. Είναι επιπλέον ένας από τους πιο παραγωγικούς μαθηματικούς, αφού τα άπαντά του καταλαμβάνουν 60-80 οκτασέλιδους τόμους. Εργάστηκε σε όλους σχεδόν τους τομείς των Μαθηματικών καθώς και σε τομείς της Φυσικής.

Σχήμα 6.1: Πορτραίτο του Euler από τον Handmann. Σε αυτό διακρίνεται το πρόβλημα του δεξιού βλεφάρου και πιθανός στραβισμός. Το αριστερό μάτι, το οποίο απεικονίζεται υγιές προσβλήθηκε αργότερα από καταρράκτη.

Στο Κεφάλαιο 4 αναφερθήκαμε στην ευθεία πάνω στην οποία βρίσκονται το βαρύκεντρο, το περίκεντρο και το ορθόκεντρο ενός τριγώνου και η οποία ονομάστηκε μεταγενέστερα -σύμφωνα με τον ιστορικό Johannes Tropfke[1]- «Ευθεία Euler» προς τιμήν του Euler που την ανακάλυψε[2].
Στα βιβλία ως και του 19ου αιώνα υπάρχει αναφορά μόνο στην «πρόταση του Euler», που αφορά ακριβώς στη συγγραμμικότητα των προαναφερθέντων σημείων, φαινόμενο που μελετούσε ο Euler γύρω στο 1760 στο Βερολίνο.
Έκτοτε πάρα πολλοί λάτρεις της Γεωμετρίας ασχολήθηκαν με αυτό το φαινόμενο. Μόνο στο διαδίκτυο μπορεί να βρει κανείς αυτή τη στιγμή πάνω από 700 σχετικές εργασίες, και σχεδόν όλα τα εκπαιδευτικά βιβλία Γεωμετρίας της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης ασχολούνται με την ευθεία Euler. Η προσέγγιση γίνεται όμως καθαρά γεωμετρικά και η συγκεκριμένη ευθεία χρησιμοποιείται και ως παράδειγμα για την διαδικασία της ομοιοθεσίας.

Σύμφωνα με τον Tropfke, η πρώτη καθαρά γεωμετρική απόδειξη γι αυτό δόθηκε μόλις το 1803 από τον Γάλλο πολιτικό και λόγιο L.N.M. Carnot (1753 Nolay - 1823 Magdeburg) στο έργο του *Géométrie de position* (§131, σελίδες 163-164). Αυτή είναι τόσο στοιχειώδης, που δε θα εξέπληττε κανέναν αν η σχετική πρόταση βρισκόταν στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη. Οι γεωμετρικές αποδείξεις βασίζονται σε ομοιότητα σχημάτων και αναλογίες ομολόγων στοιχείων.

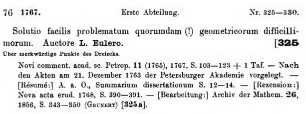
Τελείως διαφορετικά αντιμετώπισε το ζήτημα ο Euler, ο οποίος -όπως αναφέραμε- ασχολήθηκε με το θέμα περίπου 40 χρόνια πριν τον Carnot. Λαμβάνοντας υπόψιν την απλότητα της απόδειξης του Carnot καθώς και άλλων γεωμετρικών αποδείξεων, είναι απίθανο, αυτά τα γεωμετρικά δεδομένα να ήταν άγνωστα στον Euler.
Εντούτοις ο Euler προσεγγίζει αρχικά το θέμα με «αναλυτική Γεωμετρία» και μά-

[1]*Johannes Tropfke. Geschichte der Elementar-Mathematik.*Vierter Band: Ebene Geometrie. Berlin und Leipzig, 1923. Σελίς 226.

[2]Ο Euler αφήνει να φανεί ότι τελείως συμπτωματικά οδηγήθηκε στο συμπέρασμα της ύπαρξης αυτής της ευθείας, καθώς προσπαθούσε να λύσει το πρόβλημα της κατασκευής ενός τριγώνου όταν δίνονται το βαρύκεντρο, το ορθόκεντρο και το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου του.

λιστα αφήνει να φανεί ότι τελείως συμπτωματικά οδηγήθηκε στο συμπέρασμα της συγγραμμικότητας των σημείων αυτών, καθώς προσπαθούσε να λύσει το πρόβλημα της κατασκευής ενός τριγώνου όταν δίνονται το βαρύκεντρο, το ορθόκεντρο και το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου του. Το πρόβλημα αυτό είχε τεθεί[3] το 1723 από την Ακαδημία του Βερολίνου[4] και ο Euler το έλυσε χρησιμοποιώντας μία φορά το βαρύκεντρο, το κέντρο του εγγεγραμμένου και το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου και μία με δεδομένα το ορθόκεντρο και τα κέντρα του εγγεγραμμένου και περιγεγραμμένου κύκλου. Και στις δύο περιπτώσεις χρειάζονται μόνο δύο από τα σημεία της ευθείας του Euler, αφού το (πάντα απαραίτητο) κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου βρίσκεται πάνω στην ευθεία Euler μόνο στην περίπτωση του ισοσκελούς τριγώνου. Ο Euler ακολούθησε τα κλασσικά βήματα: *Ανάλυση, Σύνθεση, Απόδειξη, Διερεύνηση*.

Η εργασία αυτή του Euler φέρει τον τίτλο «*Solutio facilis problematum quorumdam geometricorum difficillimorum*». Με αυτόν τον τίτλο υπάρχει και στον κλασσικό κατάλογο έργων του Gustav Eneström (Σχήμα 6.2).


76 **1767.** Erste Abteilung. Nr. 325—330.

Solutio facilis problematum quorumdam (!) geometricorum difficillimorum. Auctore **L. Eulero.** [**325**

Über merkwürdige Punkte des Dreiecks.

Novi comment. acad. sc. Petrop. **11** (1765), 1767, S. 103—123 + 1 Taf. — Nach den Akten am 21. Dezember 1763 der Petersburger Akademie vorgelegt. — [Résumé:] A. a. O., Summarium dissertationum S. 12—14. — [Rezension:] Nova acta erud. 1768, S. 390—391. — [Bearbeitung:] Archiv der Mathem. **26**, 1856, S. 343—350 (Grunert) [**325a**].

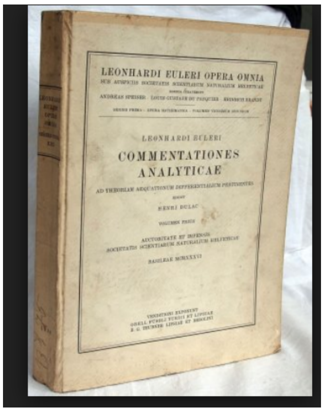
Σχήμα 6.2: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. *Κατάλογος των έργων του Leonard Euler* του Gustav Eneström, Λειψία 1910, σελίς 76.

Γνωρίζοντας τον πλήρη τίτλο της εργασίας, αυτή γίνεται σήμερα εύκολα προσβάσιμη στο διαδίκτυο. Βρίσκεται στην έκδοση των έργων του Euler, *Opera omnia Leonardi Euleri*[5].

[3] Δυστυχώς ο Tropfke δεν αναφέρει το όνομα του συνεργάτη της Ακαδημίας που έθεσε το πρόβλημα.

[4] *Miscellanea Berolinensia, II*, Berlin 1723, σελίδες 89-128, Problema geometricum.

[5] Το έργο διαιρείται σε τρεις σειρές: I. Μαθηματικά (29 τόμοι), II. Μηχανική και Αστρονομία (31 τόμοι) και III. Φυσική και διάφορα άλλα (12 τόμοι).



Σχήμα 6.3:

Τη συγκέντρωση των διασκορπισμένων εργασιών του Euler σε μία συλλογή οφείλουμε σε μεγάλο βαθμό στον Ferdinand Rudio[6] (1856-1929), ο οποίος ήταν μεγάλος θαυμαστής του. Το 1883, στη συμπλήρωση 100 χρόνων από το θάνατο του Euler, ο Rudio εκφώνησε σε ένα μικρό σεμινάριο για τον εορτασμό της επετείου αυτής στη Ζυρίχη, έναν σύντομο βιογραφικό λόγο για τον Euler[7] και πρότεινε με αυτή την ευκαιρία το σχέδιο της συλλογής των έργων του Euler. Την ιδέα του αυτή υποστήριξε σθεναρά και στο πρώτο Διεθνές Συνέδριο Μαθηματικών, που έλαβε χώρα στη Ζυρίχη από 9 έως 11 Αυγούστου το 1897. Το σχέδιο αυτό όμως εγκρίθηκε μόλις το 1909, δηλαδή 26 χρόνια αργότερα από τότε που το πρότεινε αρχικά και ο Rudio ορίστηκε ο γενικός συντάκτης του έργου. Συνολικά επιμελήθηκε την παραγωγή περισσοτέρων από 30 τόμων, που άρχισαν να εμφανίζονται από το 1910. Στην επιτυχία όμως αυτού του μεγαλεπήβολου σχεδίου συνέβαλλαν και άλλοι 20 Μαθηματικοί διεθνούς φήμης, οι οποίοι συμφώνησαν να εργαστούν ως εκδότες ενός ή παραπάνω τόμων. Μεταξύ αυτών αναφέρουμε τους Jacques Hadamard από το Παρίσι, Gustav Eneström από τη Στοκχόλμη, Tullio Levi-Civita από την Πάδοβα, Gerhard Kowalewski από την Πράγα και Heinrich Weber από το Στρασβούργο, ο οποίος ήταν ο εκδότης του πρώτου τόμου το 1911. Οι τόμοι 26 έως 29 της Συλλογής *Opera omnia, series 1, opera mathematica* φέρουν τον τίτλο *Commentationes geometricae* και εκδόθηκαν από τον Andreas Speiser (1885-1970), καθηγητή των Μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο της Ζυρίχης.

Προηγήθηκαν βέβαια πολύ νωρίτερα και συγκεκριμένα τη δεκαετία του 1830, κά-

[6] Καθηγητής Μαθηματικών στο Ομοσπονδιακό Πολυτεχνείο της Ελβετίας (ETH) στη Ζυρίχη, εκδότης επιστημονικού περιοδικού, διευθυντής της Βιβλιοθήκης του Πολυτεχνείου και Ιστορικός των Μαθηματικών.

[7] Το κείμενο του οποίου δημοσιεύεται το 1907 στα πλαίσια του εορτασμού των 200 χρόνων από τη γέννηση του Euler.

ποιες άλλες απόπειρες έκδοσης των έργων του Euler,[8] οι οποίες όμως δεν ολοκληρώθηκαν.

Το «*Solutio facilis*», το πρωτότυπο λατινικό κείμενο του Euler, φέρει όπως βλέπουμε στο Σχήμα 6.2 το νούμερο 325 στην κατάταξη του Eneström και βρίσκεται στα άρθρα της Ακαδημίας του Petersburg, σύμφωνα με τα αρχεία της οποίας, η εργασία αυτή παρουσιάστηκε στην Ακαδημία στις 21 Δεκεμβρίου 1763, αλλά δημοσιεύτηκε τέσσερα χρόνια αργότερα, δηλαδή το 1767.

Η εργασία του Euler, η οποία βρίσκεται στον πρώτο τόμο των *Commentationes geometricae* δηλαδή στον τόμο 26 του *Opera omnia, series 1* ξεκινά με την παρουσίαση των τεσσάρων αξιοσημείωτων σημείων, δηλαδή των σημείων (σύμφωνα με τον πρωτότυπο συμβολισμό) E (ορθόκεντρο), F (βαρύκεντρο), H (περίκεντρο) και G (έγκεντρο), από τα οποία τα σημεία E, F και H σχηματίζουν την ευθεία Euler. Ο αναγνώστης της εργασίας, ο οποίος γνωρίζει την ευθεία Euler ως ανεξάρτητο φαινόμενο, θα διαπιστώσει έκπληκτος ότι ο συγγραφέας αρχικά δεν έχει καμία πρόθεση να αποδείξει ότι το σημείο E ανήκει στην HF ή ότι το F ανήκει στην HE, αλλά δείχνει ότι η ευθεία Euler προκύπτει τελείως τυχαία κατά την επίλυση του προβλήματος της κατασκευής του τριγώνου που καταλαμβάνει και το μεγαλύτερο με διαφορά μέρος της 19 σέλιδης εργασίας του.

Ο Euler λύνει την άσκηση σε μεμονωμένα μικρά βήματα, τα οποία αριθμεί ως παραγράφους και συγκεκριμένα υπάρχουν 34 βήματα-παράγραφοι. Για την ευθεία Euler γίνεται λόγος στην Παράγραφο 18 σε μόλις δύο σειρές, χωρίς απολύτως κανέναν ενθουσιασμό για την ανακάλυψη αυτή. Αντιθέτως δίνεται η εντύπωση ότι πρόκειται απλώς για μία επιβεβαίωση με άλλον τρόπο ενός ήδη γνωστού γεγονότος. Μόνο η πρόταση που κλείνει την Παράγραφο 3 αναφέρεται στην «σπουδαιότητα για τη Γεωμετρία των σχέσεων που υπάρχουν ανάμεσα στα τέσσερα αυτά σημεία του τριγώνου»[9]

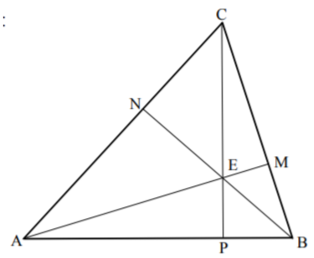
[8] Andreas Kleinert, *Leonhardi Euleri Opera Omnia: Editing The Works and Correspondence of Leonhard Euler*, 2015.

[9] *..insignes quaedam affectiones inter illa quatuor puncta se prodent, quarum cognitio in Geometria haud levis momenti est censenda.*

Ο Euler εισάγει ένα σύστημα συντεταγμένων (η πλευρά AB του τριγώνου λαμβάνεται ως ο άξονας των x, και η κάθετος στο A ως ο άξονας των y) και υπολογίζει τις συντεταγμένες των «αξιοσημείωτων σημείων» E, F, G και H. Αποδεικνύεται ότι αυτές εκφράζονται συναρτήσει των πλευρών a, b, c του τριγώνου και επιπλέον οι συντεταγμένες των σημείων E, F και H είναι ανάλογες. Άρα οι αποστάσεις EF, FH και EH είναι υπολογίσιμες. Αλλά, επειδή προκύπτει ότι EH=EF+FH, σημαίνει ότι βρίσκονται και πάνω στην ίδια ευθεία και μάλιστα με τέτοιο τρόπο, ώστε το βαρύκεντρο F ως εσωτερικό σημείο να διαιρεί την απόσταση EH με λόγο 2:1, δηλαδή EF:FH = 2:1.

Εδώ πρέπει να αναφέρουμε ότι ένα μέρος της άσκησης, συγκεκριμένα τον υπολογισμό της απόστασης του κέντρου του εγγεγραμμένου κύκλου από το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου συναρτήσει των πλευρών του, την είχε λύσει ήδη το 1618, σχεδόν 150 χρόνια πριν τον Euler, ο Benjamin Bramer[10] (1588-1650).

Ας δούμε συνοπτικά πώς φτάνει ο Euler στη συγγραμμικότητα των σημείων αυτών. Στην Παράγραφο 6 παρουσιάζει το ορθόκεντρο E και υπολογίζει τις συντεταγμένες του (Σχήμα 6.4).



Σχήμα 6.4:

Είναι γνωστό από τη στοιχειώδη Γεωμετρία ότι

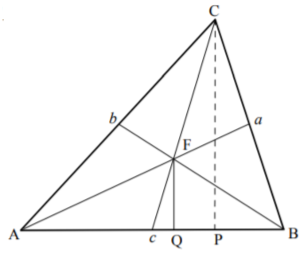
$$AP = \frac{c^2+b^2-a^2}{2c},\ BM = \frac{a^2+c^2-b^2}{2a}$$

και ότι A $= \frac{1}{2}$AM $\cdot BC$, όπου A συμβολίζει το εμβαδόν του τριγώνου. Με βάση αυτές και την ομοιότητα των τριγώνων ABM και AEP προκύπτει ότι

$$EP = \frac{(c^2+b^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)}{8cA}.$$

[10]*Etliche geometrtische Quaestiones*, IX. Frage, S. 16.

Ξέροντας λοιπόν τα AP και PE καθορίζεται η θέση του ορθόκεντρου E σε σχέση με την πλευρά AB.

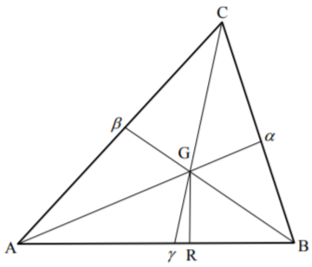


Σχήμα 6.5:

Στην Παράγραφο 7 προσδιορίζει τη θέση του βαρύκεντρου F ως προς την πλευρά AB καταλήγοντας στους τύπους

$$AQ = \frac{3c^2 + b^2 - a^2}{6c}, \; QF = \frac{2\mathrm{E}}{3c}$$

Εδώ πρέπει να επισημάνουμε τη διπλή χρήση των συμβόλων. Το c συμβολίζει και την πλευρά AB και το μέσο της. Επίσης το A είναι και η κορυφή του τριγώνου, και το σύμβολο του εμβαδού του.



Σχήμα 6.6:

Ακολούθως, στην Παράγραφο 8 προσδιορίζει τη θέση του κέντρου G του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου και έχουμε τους εξής τύπους:

$$AR = \frac{c + b - a}{2}, \; RG = \frac{2A}{a + b + c}$$

Μία σύγκριση των συντεταγμένων των σημείων E, F και H θα έπρεπε ήδη από αυτό το σημείο να φανερώσει την αναλογία τους και συνεπώς την ύπαρξη της ευθείας Euler. O Euler όμως αναβάλλει αυτή την ανακάλυψη για επόμενο βήμα.

Στις Παραγράφους 12 έως 17 υπολογίζονται τα τετράγωνα των αποστάσεων των σημείων E, F, G και H μεταξύ τους. Σε ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων, η απόσταση AB δύο σημείων A=(x_{A}, y_A) και B=(x_B, y_B) είναι η υποτείνουσα ενός ορθογωνίου τριγώνου, του οποίου οι κάθετες πλευρές είναι οι διαφορές $\Delta x = x_B - x_A$ και $\Delta y = y_B - y_A$. Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα βρίσκει τις ζητούμενες αποστάσεις . Έτσι για τις αποστάσεις EF, EG, EH, FG, FH και GH και τα τετράγωνά τους καταλήγει στους τύπους I έως VI, τους οποίους συγκεντρώνει στην Παράγραφο 18. Συγκεκριμένα, έχουμε

I. $EF^2 = \dfrac{r^2}{4A^2} - \frac{4}{9}(p^2 - 2q)$

II. $EG^2 = \dfrac{r^2}{4A^2} - p^2 + 3q - \dfrac{4r}{p}$

III. $EH^2 = \dfrac{9r^2}{16A^2} - (p^2 - 2q)$

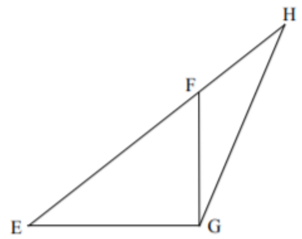
IV. $FG^2 = \dfrac{-1}{9}p^2 + \dfrac{5}{9}q - \dfrac{2r}{p}$

V. $FH^2 = \dfrac{r^2}{16A^2} - \dfrac{1}{9}(p^2 - 2q)$

VI. $GH^2 = \dfrac{r^2}{16A^2} - \dfrac{r}{p}$,

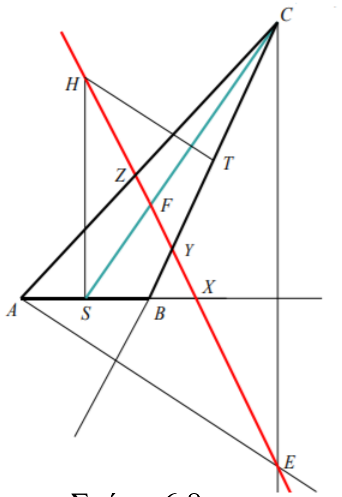
όπου $r = abc$, $p = a + b + c$, $q = ab + ac + bc$ και όπου προφανώς ισχύει $EH = \frac{3}{2}EF$ και $FH = \frac{1}{2}EF$.

Επομένως το σημείο H προσδιορίζεται αυτομάτως από τα σημεία E, F, αφού όταν τα τρία σημεία E, F, G σχηματίζουν ένα τρίγωνο EFG, το τέταρτο σημείο H θα βρίσκεται στην προέκταση του EF, έτσι ώστε να ισχύουν οι $FH = \frac{1}{2}EF$ και άρα $EH = \frac{3}{2}EF$. Από εδώ έπεται επίσης και η σχέση $4GH^2 + 2EG^2 = 3EF^2 + 6FG^2$, που επαληθεύεται από τους παραπάνω τύπους.



Σχήμα 6.7:

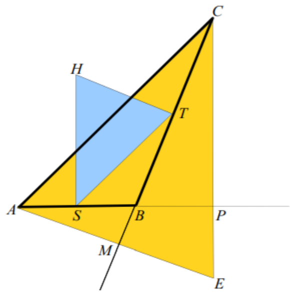
Αν κάποιος παραβλέψει την κατασκευή του τριγώνου και προσπαθήσει να δείξει με συνθετική Ευκλείδεια Γεωμετρία ότι τα σημεία E, F, H βρίσκονται στην ίδια ευθεία, είναι κάτι πάρα πολύ απλό. Το μόνο που χρειάζεται είναι προτάσεις ομοιότητας σχημάτων και ότι το βαρύκεντρο ενός τριγώνου τριχοτομεί τις διαμέσους. Ας το αποδείξουμε σε ένα αμβλυγώνιο τρίγωνο, όπου είναι πιο ευκρινή τα σημεία, αφού περίκεντρο και ορθόκεντρο βρίσκονται εκτός τριγώνου. (Η απόδειξη ακολουθεί τα ίδια βήματα και στο οξυγώνιο τρίγωνο, όπου τα σημεία αυτά βρίσκονται εντός του τριγώνου, πολύ κοντά το ένα στο άλλο).



Σχήμα 6.8:

Ενώνουμε αρχικά το περίκεντρο H και το ορθόκεντρο E και έστω F το σημείο που τέμνει την HE η διάμεσος CS. Η μεσοκάθετος SH όπως και το ύψος EC είναι κάθετα στην πλευρά AB του τριγώνου, άρα είναι μεταξύ τους παράλληλες. Επομένως, $\widehat{FHS} = \widehat{FEC}$. Έχουμε και $\widehat{SFH} = \widehat{CFE}$, συνεπώς τα τρίγωνα SFH και CFE είναι όμοια.

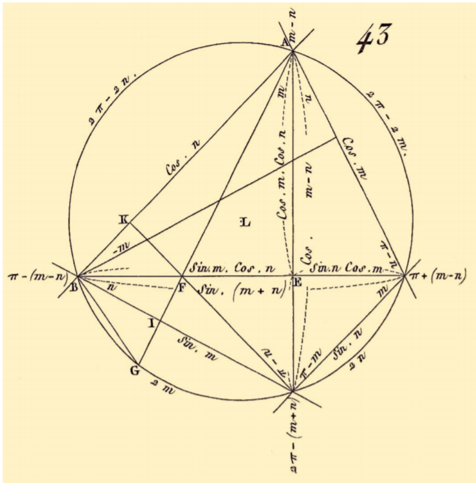
Αλλά από τα όμοια τρίγωνα AEC και THS ($\widehat{HST} = 90^o - \widehat{A} = \widehat{ECA}$, $\widehat{STH} = 90^o - \widehat{C} = \widehat{CAE}$, $\widehat{THS} = 180^o - \widehat{B} = \widehat{AEC}$) έχουμε ότι EC=2SH, αφού AC=2ST. Άρα και όλες οι άλλες αποστάσεις στο τρίγωνο CFE θα είναι διπλάσιες από τις ομόλογές τους στο τρίγωνο SFH και ιδιαιτέρως θα έχουμε FC=2SF. Το σημείο F λοιπόν τέμνει τη διάμεσο CS με λόγο 2:1. Αυτό είναι όμως μία χαρακτηριστική ιδιότητα του βαρύκεντρου κάθε τριγώνου. Άρα το F ταυτίζεται με το βαρύκεντρο του τριγώνου ABC.



Σχήμα 6.9:

Στις ίδιες προτάσεις που βασίζεται η γεωμετρική απόδειξη που αναφέραμε παραπάνω, βασίζεται και η απόδειξη του Carnot, με μόνη διαφορά ότι χρησιμοποιεί τριγωνομετρικές συναρτήσεις, κυρίως τις συναρτήσεις του συνημιτόνου και του ημιτόνου.
Ο Euler χρησιμοποίησε στην Παράγραφο 34 της εργασίας του μικρά ελληνικά γράμματα για να ονομάσει τις γωνίες. Ο Carnot, ο οποίος γενικότερα συμβολίζει τις γωνίες με τα τρία γράμματα, με μεσαίο την κορυφή, χρησιμοποιεί εδώ τα λατινικά m και n για να ονομάσει τις δύο γωνίες, στις οποίες χωρίζεται η γωνία A από το ύψος

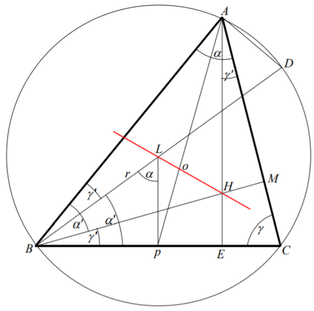
ΑΕ. Επίσης πρέπει να αναφέρουμε ότι το σύμβολο π που εμφανίζεται ισοδυναμεί με γωνία 90^o και όχι με γωνία 180^o, όπως ισχύει σήμερα.



Σχήμα 6.10: L.N.M. Carnot.$Géométrie\, de\, position$,1803, Σχήμα 43.

O Carnot χρησιμοποιεί για την απόδειξή του έναν μοναδιαίο κύκλο, ο οποίος ωστόσο έχει τη διάμετρό του (και όχι την ακτίνα του) ίση με τη μονάδα. Στο Σχήμα 6.10 παρουσιάζεται το πρωτότυπο σχήμα που υπάρχει στο βιβλίο του Carnot, με τον αριθμό 43. Απουσιάζουν όμως σε αυτό κάποια στοιχεία, που ωστόσο τα χρησιμοποιεί στο κείμενό του όπως για παράδειγμα η κορυφή C, το ορθόκεντρο H και το p, που συμβολίζει το μέσο της πλευράς BC, η μεσοκάθετος Lp και η ακτίνα του κύκλου LB. Για διευκόλυνσή μας θα χρησιμοποιήσουμε το Σχήμα 6.11 που βασίζεται στο Σχήμα 45 του Carnot, συμπληρωμένο όμως με τα στοιχεία που λείπουν στο Σχήμα 43 και με μερικές βοηθητικές γραμμές. Στο Σχήμα αυτό με τα α', γ' συμβολίζονται οι συμπληρωματικές γωνίες των γωνιών $\alpha = \widehat{A}$ και $\gamma = \widehat{\Gamma}$ αντίστοιχα.

Σύμφωνα με τον Carnot (§131) είναι εύκολο να δει κανείς ότι $Lp = \frac{1}{2}cos\alpha$, ή $Lp = \frac{1}{2}cos(m+n)$. (O Carnot θέτει όπως είπαμε 2r=1 και α=m+n). Αλλά σύμφωνα με τον πίνακα που έχει βρει στην §122 και ο οποίος δίνει τις σχέσεις των



Σχήμα 6.11:

ημιτόνων και των συνημιτόνων γωνιών τριγώνου, ισχύει AH=cos(m+n), που είναι το διπλάσιο. Επομένως AH=2Lp.

Πράγματι, η χορδή BD είναι διάμετρος στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου, άρα το τρίγωνο ABD είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την BD. Από το σχήμα βλέπουμε ότι

$$\mathrm{AB} = c = 2rcos\gamma' = 2rcos(90^o - \gamma) = 2rsin\gamma$$

Επίσης από τα ορθογώνια τρίγωνα ABM και AHM, όπου M είναι το ίχνος του ύψους BH πάνω στην AC, έχουμε

$$AM = ccos\alpha = 2rsin\gamma cos\alpha \text{ και } \mathrm{AM} = AHcos\gamma' = AHsin\gamma$$

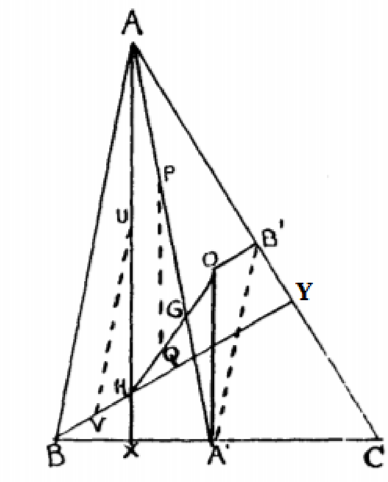
Επειδή $rcos\alpha = Lp$, έπεται από την ισότητα AM=AHsinγ=2rsinγcosα=2Lpsinγ ότι AH=2Lp.

Από την παραλληλία της μεσοκαθέτου Lp με το ύψος AE προκύπτει ότι $\widehat{LpA} = \widehat{\mathrm{EA}p}$. Τα σημεία L και H ορίζουν την ευθεία LH, η οποία τέμνεται από την διάμεσο Lp στο σημείο o. Τα τρίγωνα Lpo και HAo είναι όμοια και επειδή AH=2Lp, όλες οι ομόλογες αποστάσεις στο τρίγωνο HAo θα είναι διπλάσιες σε μήκος από εκείνες του τριγώνου Lpo. Ιδιαίτερα θα ισχύει oA=2po, δηλαδή το σημείο o είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου ABC.

Ως σημείο τομής των ευθειών LH και Ap, το σημείο o βρίσκεται και στις δύο, και συγκεκριμένα στην LH. Άρα, το περίκεντρο L, το ορθόκεντρο H και το βαρύκεντρο o βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία, ή χρησιμοποιώντας τα λόγια του Carnot *sont toujours placé sur une même ligne droite.*

Στην απόδειξη του Carnot αναφέρεται και ο Mackay στο σχετικό άρθρο του για την ευθεία του Euler στο περιοδικό *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 1883, σελίς 97, σχολιάζοντας ότι αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί και ως απόδειξη για τη σύγκλιση των διαμέσων ενός τριγώνου.
Ακολούθως δίνει άλλες δύο αποδείξεις, που όπως ο ίδιος λέει είναι απομιμήσεις της απόδειξης του Carnot, αλλά που θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν ως αποδείξεις για τη σύγκλιση των μεσοκαθέτων και των υψών ενός τριγώνου αντίστοιχα. Εκτός από αυτές τις τρεις αποδείξεις δίνει και μία τέταρτη για την οποία σχολιάζει ότι χρειάζονται μόνο προτάσεις από το πρώτο βιβλίο των *Στοιχείων* του Ευκλείδη και οι άμεσες συνέπειές τους. Η απόδειξη αυτή είναι η ακόλουθη:

Έστω H το ορθόκεντρο (AX, BY ύψη) και O το περίκεντρο ($\mathrm{A'O}$, $\mathrm{B'O}$ μεσοκάθετοι) του τριγώνου ABC. Ενώνουμε τα H και O και έστω G το σημείο τομής της HO με την διάμεσο $\mathrm{AA'}$.
Ονομάζουμε U, V, P, Q τα μέσα των AH, BH, AG και GH αντίστοιχα. Φέρνουμε τις UV, PQ και $\mathrm{A'B'}$.



Σχήμα 6.12:

Τότε $\mathrm{A'B'}// = \frac{1}{2}\mathrm{AB}$ και $UV// = \frac{1}{2}\mathrm{AB}$ άρα $\mathrm{A'B'}// = UV$.
Επίσης
$OA'//HU$, $OB'//HV$.
Επομένως τα τρίγωνα $\mathrm{OA'B'}$ και HUV είναι ίσα αφού έχουν ίσες γωνίες και $\mathrm{A'B'} = UV$. Άρα
$OA' = HU = \frac{1}{2}AH$.
Ακόμα έχουμε $PQ// = \frac{1}{2}AH$,
άρα $PQ// = OA'$. Επομένως τα τρίγωνα $A'GO$ και PGQ είναι ίσα και άρα $A'G = PG = \frac{1}{2}AG$ και άρα το G είναι το

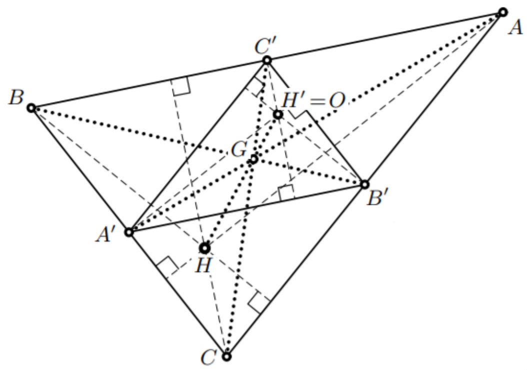
βαρύκεντρο, επομένως $OG = QG = \frac{1}{2}HG$. Η ευθεία HGO είναι η ευθεία Euler.

Στο Κεφάλαιο 4 αυτής της εργασίας και συγκεκριμένα στην Ενότητα 4.3 υπάρχει μία ακόμη πολύ κομψή απόδειξη και συγκεκριμένα αναφερόμαστε στην 15η απόδειξη που δώσαμε για τη σύγκλιση των υψών ενός τριγώνου. Από αυτήν την απόδειξη προκύπτει και το εξής πόρισμα:

Πόρισμα

Η απόσταση του ορθόκεντρου από μία κορυφή του ισούται με το διπλάσιο της απόστασης του περίκεντρου από την απέναντι πλευρά.

Τέλος, μία πολύ σύντομη απόδειξη βρίσκουμε στο βιβλίο *Geometry by its History* των Alexander Ostermann και Gerhard Wanner, σελίς 91. Ξεκινάει με την ομοιότητα του τριγώνου ABC με το τρίγωνο $A'B'C'$ που σχηματίζεται με κορυφές τα μέσα των πλευρών του αρχικού και το οποίο θα ονομάζουμε για συντομία μεσοτρίγωνο του ABC[11], η οποία είναι προφανής.



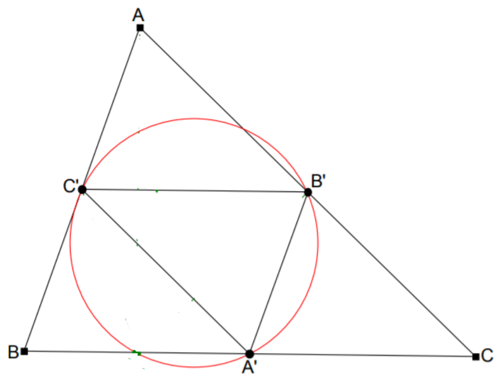
Σχήμα 6.13:

Τα τρίγωνα ABC και $A'B'C'$ είναι λοιπόν όμοια και μάλιστα το ορθόκεντρο H' του $A'B'C'$ συμπίπτει με το περίκεντρο Ο του ABC. Το τρίγωνο $A'B'C'$ έχει παράλληλες πλευρές με το ABC αλλά μισές σε μήκος. Μιλάμε για μία ομοιοθεσία

[11]Το συγκεκριμένο τρίγωνο αναφέρεται στην ξένη βιβλιογραφία ως το medial τρίγωνο ενός τριγώνου.

με παράγοντα 1/2. Άρα όλες οι γραμμές που ενώνουν αντίστοιχα σημεία όπως οι AA', BB', CC' (αυτές είναι οι διάμεσοι) και η HH' (αυτή είναι η ευθεία Euler) πρέπει να περνάνε από το ίδιο σημείο G. Και επιπλέον, το G διαιρεί όλες αυτές τις γραμμές στον ίδιο λόγο, δηλαδή σε 2:1.

6.2 Ο Κύκλος του Euler



Σχήμα 6.14:

Ο περιγεγραμμένος κύκλος του μεσοτριγώνου $A'B'C'$ για το οποίο μιλήσαμε κλείνοντας την προηγούμενη ενότητα (δηλαδή του τριγώνου που ως κορυφές έχει τα μέσα των πλευρών ενός τριγώνου ABC) λέγεται ***κύκλος του Euler*** ή ***κύκλος των εννέα σημείων*** ή και ***κύκλος του Feuerbach***.

Μία πρώτη αναφορά σε αυτόν τον κύκλο κάναμε στην Ενότητα 4.1 μιλώντας για τα αξιοσημείωτα σημεία ενός τριγώνου, τα οποία μελέτησε ο Feuerbach, του οποίου το όνομα φέρει -κυρίως στη Γερμανική βιβλιογραφία- ο κύκλος αυτός[12].

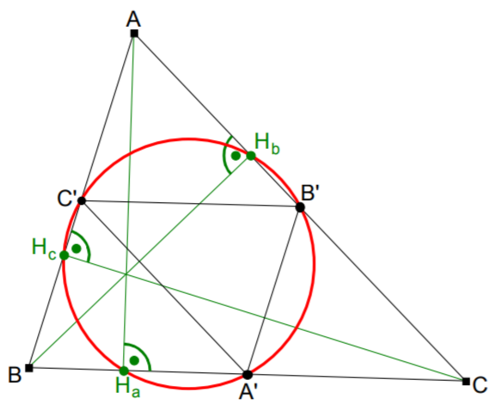
Ο Karl Wilhelm Feuerbach (1800-1834) ασχολήθηκε με πάθος με τα Μαθηματικά και ιδιαιτέρως με την Γεωμετρία του τριγώνου. Η διδακτορική διατριβή του «*Eigenschaften einiger merkwürdigen Punkte des geradlinigen Dreiecks, und mehrerer durch sie bestimmten Linien und Figuren. Eine analytisch-trigonometrische Abhandlung*» (Ιδιότητες αξιοσημείωτων σημείων του επιπέδου τριγώνου και ευθειών και σχημάτων που ορίζονται από αυτά. Μία αναλυτικο-τριγωνομετρική μελέτη) το 1822 ήταν στην πραγματικότητα μία εκ των πρώτων ανακεφαλαιωτικών εργασιών στη Γεωμετρία του τριγώνου. Επειδή το πρωτότυπο έργο ήταν δύσκολα προσβάσιμο, επανατυπώθηκε το 1908 συμπληρωμένο με έξι σελίδες βιβλιογραφικές αναφορές. Το βιβλίο αρχίζει με έναν πρόλογο 14 σελίδων από τον Karl Buzengeiger, ο οποίος φιλοσοφεί σε αυτές για τον ρόλο της Γεωμετρίας και των Μαθηματικών

[12] J. Tropfke, *Geschichte der Elementar-Mathematik*, Vierter Band, Ebene Geometrie, σελίς 226.

γενικότερα. Η εργασία η ίδια χωρίζεται σε έξι ενότητες, η καθεμία εκ των οποίων χωρίζεται επίσης σε αρκετές αριθμημένες παραγράφους.
Η μέθοδος, με την οποία ο Feuerbach εργάζεται, είναι «αναλυτικο-τριγωνομετρική». Αυτό σημαίνει ότι -σε αντίθεση με την συνθετική μέθοδο- οι προτάσεις αποδεικνύονται με τριγωνομετρικούς υπολογισμούς και όχι με γεωμετρικό σκεπτικό στο πνεύμα του Ευκλείδη. Ωστόσο, ο Feuerbach στην τελευταία από τις έξι ενότητες δίνει τις συνθετικές (δηλαδή καθαρά γεωμετρικές) αποδείξεις εννέα αποτελεσμάτων, τα οποία προηγουμένως έχει αποδείξει με αναλυτική μέθοδο.
Τα περισσότερα αποτελέσματα του Feuerbach είναι αλγεβρικές σχέσεις ανάμεσα σε διάφορα μεγέθη και μήκη ενός τριγώνου. Υπάρχουν όμως περιστασιακά και γεωμετρικές προτάσεις, όπως η ακόλουθη στην §56 της μελέτης του.

Πρόταση 1

Τα μέσα A', B', C' των πλευρών ενός τριγώνου ABC και τα ίχνη H_a, H_b, H_c των υψών του βρίσκονται πάνω σε έναν κύκλο (Σχήμα 6.15).

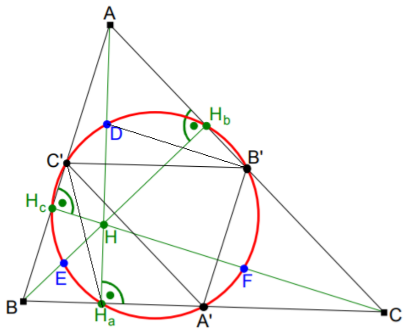


Σχήμα 6.15:

Για την απόδειξη αυτής της πρότασης ο Feuerbach χρησιμοποιεί πολύπλοκους τύπους για τις αποστάσεις ανάμεσα σε αυτά τα σημεία. Όπως ξέρουμε όμως σήμερα, υπάρχει πολύ πιο απλός και γρήγορος τρόπος.
Ο Feuerbach δεν ήταν όμως ο πρώτος που ανακάλυψε αυτόν τον κύκλο. Ήδη το

1821, δηλαδή έναν χρόνο πριν τη δημοσίευση της διατριβής του, οι Charles-Julien Brianchon και Jean Victor Poncelet αποδεικνύουν την εξής πρόταση, στην οποία περιέχεται και η προαναφερθείσα Πρόταση 1.

Πρόταση 2



Σχήμα 6.16:

Τα μέσα A', B', C' των πλευρών ενός τριγώνου ABC, τα ίχνη H_a, H_b, H_c των υψών του και τα μέσα D, E, F των αποστάσεων των κορυφών A, B, C αντίστοιχα από το ορθόκεντρο H βρίσκονται πάνω σε έναν κύκλο[13].

Τα σημεία D, E, και F είναι λοιπόν τρία νέα σημεία πάνω στον κύκλο του Feuerbach. Αυτός είναι και ο λόγος εξαιτίας του οποίου ο κύκλος του Feuerbach ονομάζεται συχνά -κυρίως από τους Γάλλους[14]- κύκλος των εννέα σημείων. Αντίθετα ο John Casey ακόμα και το 1861 τον αναφέρει ως ο κύκλος των 6 σημείων.

Ο Feuerbach ανακάλυψε όμως μία ακόμη ιδιότητα, εξαιτίας της οποίας πολλοί συγγραφείς αποκαλούν τον εν λόγω κύκλο, κύκλο του Feuerbach. Πρόκειται για το γνωστό θεώρημα του Feuerbach, που είναι το εξής

Θεώρημα Feuerbach

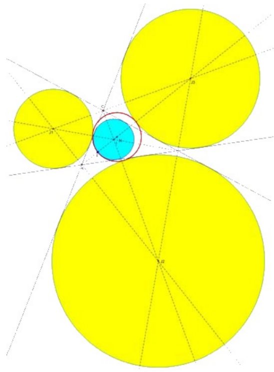
Ο κύκλος των εννέα σημείων εφάπτεται τόσο στον εγγεγραμμένο κύκλο όσο και σε όλους τους παραγεγραμμένους κύκλους ενός τριγώνου.

Στην πραγματικότητα ο κύκλος Euler δεν εφάπτεται μόνο στους 4 προαναφερθέντες κύκλους, αλλά και σε 60 ακόμη κύκλους που συνδέονται με το τρίγωνο.

---

[13] Ο Poncelet ενδιαφέρεται για τον κύκλο του Feuerbach ως τον γεωμετρικό τόπο όλων των ορθογώνιων υπερβολών που διέρχονται από τις γωνίες του τριγώνου ABC.

[14] Για παράδειγμα ο Bobillier ήδη από το 1832 και ο Mention *Nouvelles annales 9*, 1850.



Σχήμα 6.17:

Ας δούμε τώρα την ιστορία του κύκλου από την αρχή, με τη βοήθεια του J.S. Mackay και το άρθρο του «History of the Nine-point Circle», το οποίο δημοσιεύτηκε το 1892 στο περιοδικό *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*. Σύμφωνα με τον Mackay η εύρεση του κύκλου των 9 σημείων αποδίδεται λανθασμένα στον Euler υποστηρίζοντας ότι κανένας δεν έχει κάνει κάποια αναφορά σε συγκεκριμένη παράγραφο κειμένου του Euler, στην οποία να γίνεται λόγος είτε άμεσα είτε έμμεσα στην ιδιότητα που χαρακτηρίζει αυτόν τον κύκλο. Βασιζόμενοι λοιπόν σε αυτήν την μελέτη του Mackay μπορούμε να πούμε ότι υπήρξαν πολλοί και σε διαφορετικές χώρες, οι οποίοι -ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο- ανακάλυψαν τον κύκλο των 9 σημείων. Ακολουθεί ένας κατάλογος (με χρονολογική σειρά) των δημοσιεύσεων που αναφέρονται σε αυτή την ανακάλυψη.

1804

Ο Benjamin Bevan προτείνει ως πρόβλημα στο *Leybourn's Mathematical Repository* ένα θεώρημα, το οποίο αποδεικνύει ότι ο Bevan γνωρίζει ότι ο κύκλος των εννέα σημείων διχοτομεί την απόσταση περικέντρου-ορθοκέντρου και ότι η ακτίνα του είναι το ήμισυ της ακτίνας του περιγεγραμμένου κύκλου.

Η απόδειξη του θεωρήματος του Bevan δίνεται στο *Mathematical Repository*, Vol. I, Part I, σελίς 143 απο τον John Butterworth of Haggate.

1807

Ο John Butterworth θέτει ένα ερώτημα[15] σχετικά με τον κύκλο των 9 σημείων στο

[15] «*When the base and vertical angle are given, what is the locus of the centre of the circle passing through the three centres of the circles touching one side and the prolongation of the other two sides*

Gentleman's Mathematical Companion.

1808

Δίνονται δύο λύσεις στο πρωτότυπο ερώτημα του Butterworth στο *Gentleman's Mathematical Companion*, η μία από τον ίδιο τον Butterworth και η άλλη από τον John Whitley.

1821

Τα εννέα σημεία αναφέρονται με σαφήνεια στο *Gergonne's Annales de Mathématiques*, τόμος xi., σε ένα άρθρο του Brianchon and Poncelet, στο οποίο όπως έχουμε ήδη δει υπάρχει (σελίς 215) το θεώρημα για την χαρακτηριστική ιδιότητα του εν λόγω κύκλου.

1822

Η πρώτη σαφής διατύπωση του θεωρήματος Feuerbach, στην οποία συμπεριλαμβάνεται η πρώτη δημοσιευμένη απόδειξη, εμφανίζεται -όπως ξέρουμε- στην εργασία του Karl Wilhelm Feuerbach «*Eigenschaften einiger merkwürdigen Punkte des geradlinigen Dreiecks*», μαζί με πολλές άλλες ενδιαφέρουσες αποδείξεις σχετικές με τον κύκλο των 9 σημείων.

1827

Στο άρθρο *Symmetrical Properties of Plane Triangles*, που δημοσιεύεται στο *Philosophical Magazine II, 1827*, σελίδες 29-31, ο T.S. Davies αποδεικνύει την χαρακτηριστική ιδιότητα του κύκλου των 9 σημείων και παρατηρεί ότι το βαρύκεντρο βρίσκεται πάνω στην ευθεία που περιέχει το ορθόκεντρο, το κέντρο του κύκλου των 9 σημείων και το περίκεντρο.

1828

Στο *Gergonne's Annales de Mathématiques, xix*, σελίδες 37-64, ο Steiner δείχνει σε ένα άρθρο[16] με τον τίτλο «*Développement d'une série de théorèmes relatifs aux sections coniques*», μεταξύ άλλων, ότι η ιδιότητα του κύκλου των εννέα σημείων είναι μόνο μία ιδιαίτερη περίπτωση ενός γενικότερου θεωρήματος. Παρατηρεί επίσης ότι το βαρύκεντρο βρίσκεται στην ίδια ευθεία με το ορθόκεντρο και το περίκεντρο,

---

of a plane triangle?»

[16] Αναδημοσιευμένο στο *Steiner's Gesammelte Werke, I*, σελίδες 191-210, (1881).

ιδιότητα που αποδίδει στον Carnot, ενώ την ανακάλυψε ο Euler. Δηλώνει επίσης ότι τα τέσσερα σημεία, το περίκεντρο, το βαρύκεντρο, το κέντρο του κύκλου των 9 σημείων και το ορθόκεντρο σχηματίζουν μία αρμονική τετράδα και ότι το ορθόκεντρο και το βαρύκεντρο είναι τα κέντρα ομοιοθεσίας του κύκλου των 9 σημείων και του περιγεγραμμένου κύκλου. Τέλος προσθέτει, χωρίς απόδειξη, ότι ο κύκλος των 9 σημείων εφάπτεται στον εγγεγραμμένο κύκλο και στους παραγεγραμμένους κύκλους.

1833

Ο Steiner, σε ένα μακροσκελές σχόλιο[17] πάνω στην §12 της εργασίας του «*Die geometri-schen Konstruкtionen, ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises*» διατυπώνει το θεώρημα ότι δώδεκα σημεία σχετικά με το τρίγωνο βρίσκονται σε έναν και τον αυτό κύκλο και κλείνοντας, αναφέρει ότι όταν ανακοίνωσε το θεώρημα ότι ο κύκλος των 9 σημείων εφάπτεται στον εγγεγραμμένο και τους παραγεγραμμένους κύκλους του τριγώνου, δε γνώριζε ότι αυτό το συμπέρασμα το ήξερε ήδη ο Feuerbach.

1842

Έως αυτήν την εποχή ο εν λόγω κύκλος δεν είχε λάβει κάποιο συγκεκριμένο όνομα. Το όνομα «ο κύκλος των εννέα σημείων» (*le cercle des neuf points*) του αποδίδεται από τον Terquem, έναν από τους εκδότες του *Nouvelles Annales* (Τόμος I, σελίς 198). Είχε ονομαστεί ως τώρα επίσης και ως «ο κύκλος των 6 σημείων», «ο κύκλος των 12 σημείων», «ο κύκλος του Feuerbach», «ο κύκλος του Euler», «ο κύκλος του Terquem» και με άλλα περιγραφικά ονόματα.

Ο Terquem στη σελίδα 196 του ίδιου περιοδικού δίνει μία απόδειξη για την χαρακτηριστική ιδιότητα του κύκλου των 9 σημείων και δημοσιεύει επίσης τη δεύτερη αναλυτική απόδειξη του θεωρήματος ότι ο κύκλος των εννέα σημείων εφάπτεται στον εγγεγραμμένο και τους παραγεγραμμένους κύκλους του τριγώνου. (Η πρώτη ήταν αυτή του Feuerbach το 1822).

Αποδείξεις για την χαρακτηριστική ιδιότητα του κύκλου των 9 σημείων υπάρχουν

[17] Αναδημοσιευμένο στο *Steiner's Gesammelte Werke, I*, σελίδες 489-492.

πολλές και διαφορετικές.

Εκτός από την απόδειξη που έδωσε ο Terquem το 1842, έχουμε μία δεύτερη το 1843 από τον C. Adams στο *Die Lehre von Transversalen,* σελίς 37, και μία ακόμη από τον ίδιο το 1846 στο *Die merkwürdigsten Eigenschaften des geradlinigen Dreiecks*, σελίδες 14-16. Μία τέταρτη απόδειξη δόθηκε από τον T.T. Wilkinson στο *Lady's and Gentleman's Diary* για το έτος 1855 στη σελίδα 67, ενώ μία πέμπτη βρίσκουμε το 1867 στο *Mathematical Questions from the Educational Times*, VII., σελίδες 86-87, από τον William Godward.

Πέρα από αυτές υπάρχουν και άλλες, που όμως δε διαφέρουν πολύ από τις προαναφερθείσες, όπως για παράδειγμα οι εξής:

Του Αιδεσιμώτατου Joseph Wolstenholme, το 1858 στο *Quarterly Journal of Mathematics*, II, σελίδες 138-139.

Του W.H. Besant, το 1866 στο *Oxford Cambridge and Dublin Messenger of Mathematics*, III, σελίδες 222-223.

Του Desboves, το 1875 στο *Questions de Géométrie Elémentaire*, δεύτερη έκδοση, σελίδες 146-147.

Του Captain Mennesson, το 1878 στο *Nouvelle Correspondance Mathématique*, IV, σελίδες 241-242.

Του Αιδεσιμώτατου John Wilson, το 1888 στο *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, VI, σελίδες 38-40.

Επίσης, έχουμε

Το 1850

Ο J. Mention, σε ένα άρθρο με τίτλο «*Note sur le triangle rectiligne*», το οποίο δημοσιεύτηκε στο *Nouvelles Annales, IX*, σελίδες 401-403, μας δίνει την πρώτη γεωμετρική απόδειξη του θεωρήματος του Feuerbach.

1854

Ο W.H. Levy παρουσιάζει μία άλλη γεωμετρική απόδειξη του θεωρήματος του Feuerbach στο περιοδικό *Lady's and Gentlemen's Diary*, σελίς 56.

1857

Ο John Joshua Robinson διατυπώνει και αποδεικνύει ένα καινούριο θεώρημα σχετικό με τον κύκλο των εννέα σημείων, το οποίο δημοσιεύεται στο *Lady's and Gentlemen's Diary*, σελίδες 86-89.

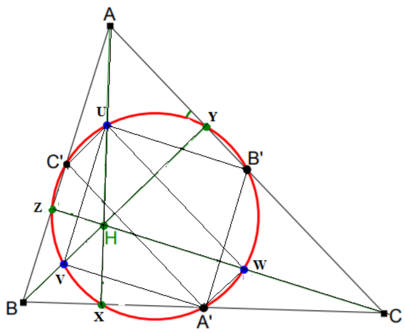
1860

Ο αιδεσιμώτατος George Salmon ασχολείται με το θεώρημα του Feuerbach σε ένα άρθρο με ημερομηνία 17 Ιουλίου 1860, το οποίο όμως δημοσιεύεται το 1861 στο *Quaterly Journal of Mathematics*, τόμος IV, σελίδες 152-154.

Στον ίδιο τόμο του *Quarterly Journal* (σελίδες 245-252), ο John Casey έχει ένα άρθρο, με ημερομηνία 27 Νοεμβρίου 1860, στο οποίο όχι μόνο αποδεικνύει το θεώρημα του Feuerbach, αλλά επίσης επεκτείνει την επαφή προς έναν αόριστο αριθμό κύκλων.

Ας δούμε τώρα κάποιες από τις αποδείξεις της Πρότασης 2.

Απόδειξη 1 (Poncelet, 1821)



Σχήμα 6.18:

Έστω X, Y, Z τα ίχνη των υψών και A', B', C' τα μέσα των πλευρών του τριγώνου ABC. Τα ορθογώνια τρίγωνα CBZ και ABX είναι όμοια, επομένως έχουμε

$$BC : BZ = AB : BX$$

και συνεπώς αφού τα A' και C' είναι τα μέσα των BC και AB έχουμε

$$BA' \cdot BX = BC' \cdot BZ,$$

το οποίο σημαίνει ότι τα τέσσερα σημεία A', X, C', Z είναι ομοκυκλικά.

Όμοια αποδεικνύεται ότι ομοκυκλικά είναι επίσης τα B', Y, C', Z, καθώς και τα A', X, B', Y. Το ζητούμενο είναι να δείξουμε ότι αυτοί οι τρεις κύκλοι δεν μπορεί παρά να ταυτίζονται. Έστω ότι αυτό δεν ισχύει. Τότε θα έπρεπε οι κοινές χορδές τους ανά δύο να τέμνονται σ'ένα και μόνο σημείο. Αυτές οι χορδές είναι όμως οι πλευρές του τριγώνου, οι οποίες δε μπορεί να περνάνε από το ίδιο σημείο. Άρα οι τρεις αυτοί κύκλοι είναι ένας και ο αυτός.

Έστω τώρα U, V, W τα μέσα των αποστάσεων HA, HB, HC, όπου H το ορθόκεντρο του τριγώνου. Τα ορθογώνια τρίγωνα CHX, CBZ είναι όμοια, συνεπώς

$$CH : CX = CB : CZ.$$

Αλλά τα W και A' είναι τα μέσα των αποστάσεων CH και CB, άρα έχουμε

$$CW \cdot CZ = CX \cdot CA'$$

το οποίο σημαίνει ότι ο κύκλος που διέρχεται από τα A', X, Z διέρχεται επίσης και από το W. Με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι διέρχεται και από τα άλλα δύο σημεία, U, V.

Επομένως διέρχεται συγχρόνως και από τα 9 σημεία X, Y, Z, A', B', C', U, V, W.

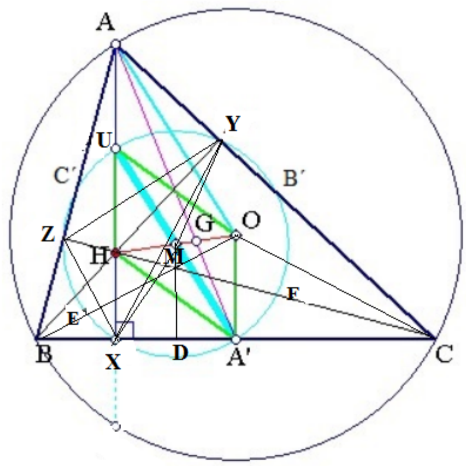
Η απόδειξη αυτή σε πιο απλή μορφή υπάρχει δημοσιευμένη στο περιοδικό *Annals of Mathematics*, I του 1884 από τον R.D. Bohannan.

Απόδειξη 2 (Feuerbach, 1822)

Έστω H το σημείο τομής των υψών AX, BY, και CZ του τριγώνου ABC, O το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του, A', B', C' τα μέσα των πλευρών του και M το μέσο της απόστασης OH. Φέρνουμε τα OA, OH και το OA' κάθετο στην BC. Προεκτείνουμε το $A'M$ και έστω ότι η προέκταση τέμνει το ύψος AX στο U.

Επειδή $MH = MO$, $\widehat{HMU} = \widehat{OMA'}$, $\widehat{MHU} = \widehat{MOA'}$, έπεται ότι $HU = OA'$ και $UM = A'M$.

Αλλά επειδή το OA' ισούται με το μισό του AH, συνεπάγεται ότι και το HU είναι ίσο με το μισό του AH και $AU = OA'$.



Σχήμα 6.19:

Επίσης, επειδή $AU//OA'$ έπεται ότι $UA' = AO$ και $A'M = \frac{1}{2}AO$. Από το M φέρνουμε τη MD κάθετη στη BC καθώς και τη MX. Τότε επειδή τα τμήματα HX, MD, OA' είναι παράλληλα μεταξύ τους, θα ισχύει

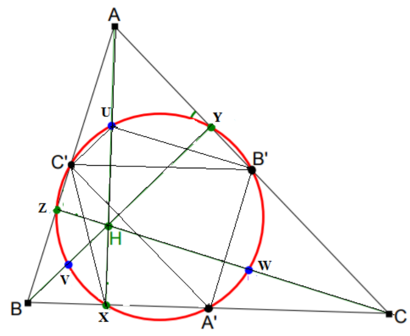
$$HM : OM = XD : A'D$$

και επειδή $HM = OM$ έπεται ότι $XD = A'D$ και συνεπώς $MA' = MX$. Και επειδή $MA' = \frac{1}{2}AO$ ισχύει και $MX = \frac{1}{2}AO$. Όμοια $MY = \frac{1}{2}BO$ και $MZ = \frac{1}{2}CO$. Τώρα, αφού $AO = BO = CO$ συνάγεται ότι $MX = MY = MZ$ και το M, ως μέσο του OH, θα είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου XYZ.

Μία απλοποιημένη μορφή αυτής της απόδειξης υπάρχει στο βιβλίο Th. Spieker's *Lehrbuch der ebenen Geometrie*, 15^{η} έκδοση, σελίς 216, ή §220, του 1881.

Απόδειξη 3 (Terquem, 1842)

Έστω ABC ένα τρίγωνο, A', B', C' τα μέσα των πλευρών του, X, Y, Z τα ίχνη των υψών του, H το σημείο τομής των υψών και U, V, W τα μέσα των AH, BH και CH αντίστοιχα.



Σχήμα 6.20:

Φέρνουμε τα $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$, $C'X$. Τότε

$$C'X = \frac{1}{2}AB = A'B'$$

και επομένως τα B', C', A', X είναι οι κορυφές ενός τραπεζίου που έχει ίσες διαγώνιες και άρα εγγράψιμου. Αυτό σημαίνει ότι τα τρία ίχνη των υψών και τα τρία μέσα των πλευρών είναι ομοκυκλικά.

Αν φέρουμε το $B'U$, αυτό θα είναι παράλληλο στο CZ και επομένως κάθετο στο $A'B'$, το οποίο είναι παράλληλο στο AB.

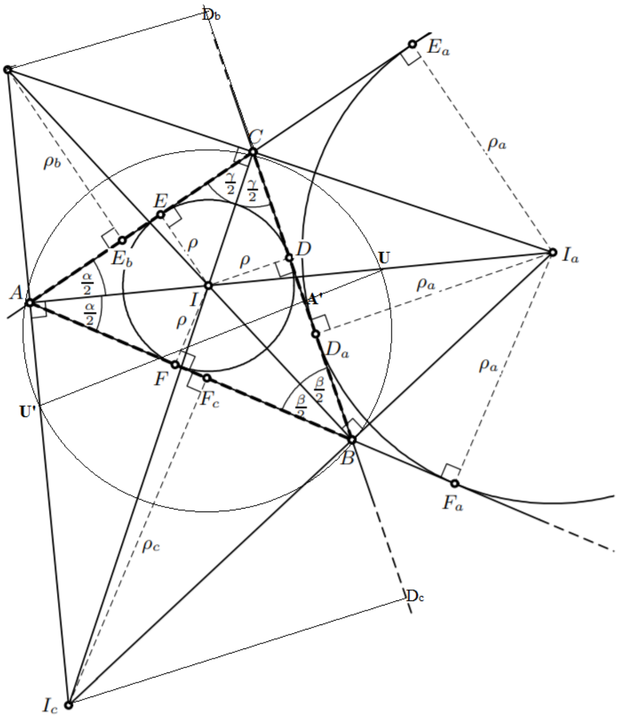
Όμοια, το $C'U$ είναι κάθετο στο $A'C'$ και επομένως τα τρία μέσα των πλευρών και το U είναι οι κορυφές ενός εγγράψιμου τετραπλεύρου και άρα τα εννέα προαναφερθέντα σημεία βρίσκονται σ' έναν κύκλο ακτίνας ίση με το μισό της ακτίνας του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.

Απόδειξη 4 (Adams, 1846)

Έστω ABC τρίγωνο, και I, I_a, I_b, I_c τα κέντρα του εγγεγραμμένου και των παραγεγραμμένων κύκλων του αντίστοιχα. Τότε το I είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου $I_aI_bI_c$ και το ABC είναι το ορθικό τρίγωνο.

Φέρνουμε τον περιγεγραμμένο κύκλο του ABC και έστω ότι αυτός τέμνει το AI_a στο U και το I_bI_c στο U'. Ενώνουμε τα U και U' και φέρνουμε τα ID, I_aD_a, I_bD_b, I_cD_c κάθετα στο BC. Επειδή τα AU AU' διχοτομούν παραπληρωματικές γωνίες, η $\widehat{UAU'}$ είναι ορθή, άρα η UU' είναι διάμετρος του κύκλου ABC. Και επειδή το τόξο BU ισούται με το τόξο CU, η UU' διέρχεται από το A$'$, (το μέσο του BC) και είναι κάθετο στο BC. Επίσης, αφού $BD_b = CD_c$, τα D_b και D_c ισαπέχουν από το A. Και επειδή $BD = CD_a$, τα D και D_a ισαπέχουν από το A'.

Τέλος, επειδή το A$'$ είναι το μέσο του D_bD_c και επειδή τα I_bD_b, I_cD_c και $U'A'$ είναι παράλληλα, έπεται ότι το U' είναι το μέσο του I_bI_c. Όμοια, επειδή A' είναι

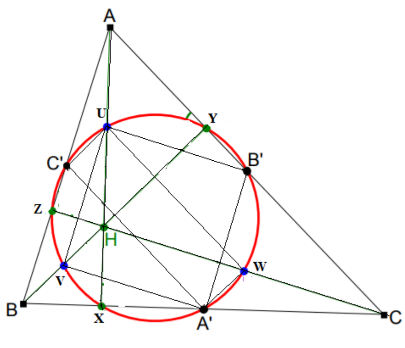


Σχήμα 6.21:

το μέσο του DD_a και επειδή ID, I_aD_a και UA' είναι παράλληλα έπεται ότι το U είναι το μέσο του II_a.

Αυτό σημαίνει ότι ο κύκλος ABC διέρχεται από τα μέσα των I_bI_c και II_a. Επομένως, διέρχεται και από τα μέσα των I_cI_a, II_b και I_aI_b. Με άλλα λόγια, είναι ο κύκλος των εννέα σημείων του τριγώνου $I_aI_bI_c$.

Απόδειξη 5 (Wilkinson, 1855)



Σχήμα 6.22:

Έστω το τρίγωνο ABC, X, Y, Z τα ίχνη των υψών του, A', B', C' τα μέσα των πλευρών του και U, V, W τα μέσα των τμημάτων AH, BH και CH.

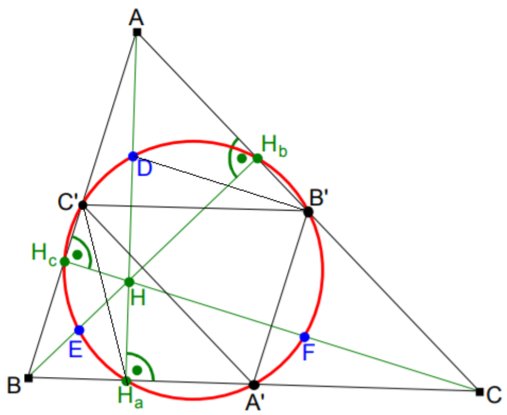
Αν πάρουμε τα τέσσερα σημεία U, C', A', W έχουμε ότι UC' και WA' είναι ίσα και παράλληλα με το $\frac{1}{2}BH$. Επίσης τα UW και $C'A'$ είναι παράλληλα και ίσα με το $\frac{1}{2}AC$, άρα το τετράπλευρο $UWA'C'$ είναι ορθογώνιο. Άρα τα τέσσερα αυτά σημεία βρίσκονται πάνω σε έναν κύκλο με διάμετρο UA' ή WC'.

Όμοια, και το $UVA'B'$ είναι ορθογώνιο, οπότε τα τέσσερα σημεία U, V, A', B' είναι επίσης πάνω σε έναν κύκλο διαμέτρου UA' ή VB'.

Αλλά $\widehat{UXA'} = \widehat{VYB'} = \widehat{WZC'} = 90^o$. Επομένως τα σημεία X, Y, Z βρίσκονται στον ίδιο κύκλο με τα σημεία U, A', V, B', W και C'.

Στο ίδιο πνεύμα είναι η επόμενη απόδειξη

Απόδειξη 6



Σχήμα 6.23:

Δείχνουμε ότι i) το τετράπλευρο $H_aA'B'C'$ είναι εγγράψιμο.

ii) το τετράπλευρο $DH_aA'B'$ είναι επίσης εγγράψιμο και

iii) τα σημεία A', B', C', H_a, H_b, H_c, D, E, και F είναι ομοκυκλικά.

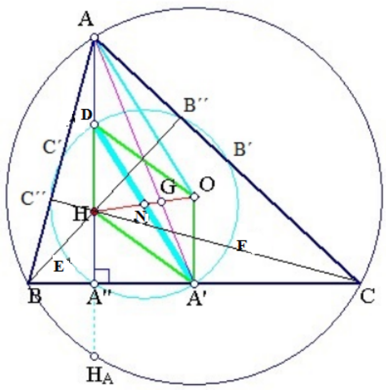
Για το i) έχουμε ότι $B'C'//BC$, δηλαδή το τετράπλευρο $H_aA'B'C'$ είναι τραπέζιο. Επίσης $A'B' = \dfrac{AB}{2}$ (1). Στο ορθογώνιο τρίγωνο AH_aB το H_aC' είναι διάμεσος, άρα $H_aC' = \dfrac{AB}{2}$ (2). Από (1) και (2) έπεται ότι $A'B' = H_aA'$, άρα το $H_aA'B'C'$ είναι ισοσκελές τραπέζιο και επομένως εγγράψιμο.

Για το ii) έχουμε ότι στο τρίγωνο AHC ισχύει DB' // CH. Αλλά $A'B'$ // AB. Έτσι και επειδή $CH \perp AB$ προκύπτει ότι $DB' \perp A'B'$. Οπότε στο τετράπλευρο $DH_aA'B'$ έχουμε $\widehat{H_a} + \widehat{B'} = 90^o + 90^o = 180^o$, το οποίο σημαίνει ότι το $DH_aA'B'$ είναι εγγράψιμο.

Για το iii): Από το i) προκύπτει ότι το H_a είναι σημείο του κύκλου $(A'B'C')$. Όμοια και τα H_b, H_c είναι σημεία του ίδιου κύκλου. Από το ii) συμπεραίνουμε ότι το D είναι σημείο του κύκλου $(H_aA'B')$, ο οποίος σύμφωνα με το i) ταυτίζεται με τον $(A'B'C')$, άρα το D είναι σημείο του κύκλου $(A'B'C')$. Όμοια και τα σημεία E, F είναι σημεία του ίδιου κύκλου. Άρα τα 9 σημεία που αναφέρονται στην πρόταση 2 είναι ομοκυκλικά σημεία.

Και ως τελευταία θα δώσουμε μία πολύ σύντομη απόδειξη

Απόδειξη 7



Σχήμα 6.24:

Το $DHA'O$ είναι παραλληλόγραμμο. Το σημείο τομής των διαγωνίων του είναι το μέσο Ν της ΟΗ και η διαγώνιος Α$'D$ είναι παράλληλη και ίση προς την ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου. Συνεπώς τα σημεία D, A'', A' είναι στον κύκλο με κέντρο Ν και διάμετρο ίση με την ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου. Το ίδιο θα ισχύει και για τις ανάλογες τριάδες σημείων E, B'', B' και F, C'', C'.

Έτσι αποδείξαμε επιπλέον και ότι

Πρόταση 3

Το κέντρο του κύκλου των εννέα σημείων βρίσκεται πάνω στην ευθεία Euler και μάλιστα είναι το μέσο της απόστασης του περίκεντρου του τριγώνου ABC από το ορθόκεντρό του και η ακτίνα του ισούται με το μισό της ακτίνας του περιγεγραμμένου κύκλου.

Τα σημεία D, E, και F ονομάζονται ενίοτε και «σημεία Euler» του τριγώνου ABC, ενώ το τρίγωνο DEF τρίγωνο Euler. Ο κύκλος του Feuerbach είναι ο περιγεγραμμένος κύκλος του μεσοτριγώνου. Συγχρόνως όμως είναι ο περιγεγραμμένος κύκλος του ορθικού τριγώνου και του τριγώνου Euler.

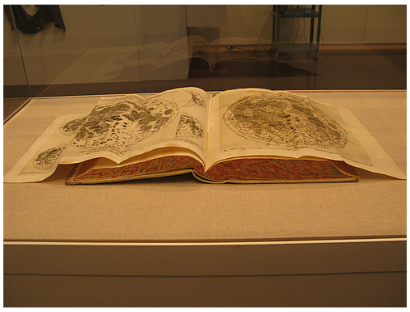
Κεφάλαιο 7

ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΠΤΟΛΕΜΑΙΟΥ

Για τον Κλαύδιο Πτολεμαίο (100-178) μιλήσαμε στην Ενότητα 1.3 και όπως είπαμε ήταν πολυγραφότατος. Θεωρείται ο τελευταίος μεγάλος Έλληνας αστρονόμος. Ο Κλαύδιος Πτολεμαίος ήταν για την Αστρονομία ό,τι ήταν ο Ευκλείδης για την Γεωμετρία.

Το μεγαλύτερο έργο του, ως γνωστόν, είναι το αριστούργημα «Μαθηματική Σύνταξις», η γνωστή μας «Αλμαγέστη», το οποίο υπήρξε το Ευαγγέλιο της Αστρονομίας για 1500 έτη και επέδρασε σε ολόκληρο τον επιστημονικό κόσμο όσο ελάχιστα άλλα αρχαιοελληνικά συγγράμματα.

Το έργο αυτό αποτελείται από 13 βιβλία που φέρουν αρίθμηση από Α΄ μέχρι ΙΓ΄. Στο Α΄ Βιβλίο αναπτύσσεται το «πτολεμαϊκό σύστημα του κόσμου», το οποίο και αναλύεται στα επόμενα δύο βιβλία Β΄ και Γ΄. Τα Δ΄ και Ε΄ αναφέρονται στις κινήσεις της Σελήνης ενώ το Στ΄ στις κινήσεις και τις παραλλάξεις Σελήνης και Ηλίου.



Σχήμα 7.1: Η «Αλμαγέστη»

Το Ζ΄ αναφέρεται στο φαινόμενο της μετάπτωσης των ισημεριών, όμως από το βιβλίο αυτό αρχίζει και ο θαυμαστός κατάλογος των αστέρων, σύμφωνα με τις παρατηρήσεις που έκαναν ο Ίππαρχος και ο Κλαύδιος Πτολεμαίος, ο οποίος κατάλογος τελειώνει στο πρώτο ήμισυ του Η΄ Βιβλίου. Το υπόλοιπο του Η΄ Βιβλίου αναφέρεται στα περί Γαλαξία και τα υπόλοιπα βιβλία από το Θ΄ και μετά αναφέρονται στους πλανήτες. Επίσης στο σύγγραμμα αυτό περιλαμβάνονται επίπεδη και σφαιρική τριγωνομετρία, καθώς και περιγραφή αστρονομικών οργάνων της εποχής του Πτολεμαίου.

Οι έρευνες του Πτολεμαίου αναφέρονται στην ανάπτυξη του τριγωνομετρικού λογισμού. Από αυτήν την άποψη συνεχίζει το έργο του Ιππάρχου. Τα τριγωνομετρικά του θεωρήματα περιέχονται στα Κεφάλαια 10 έως 16 του πρώτου βιβλίου της Αλμαγέστης. Στο ίδιο βιβλίο δίνει και κατάλογο των τιμών των χορδών[1], οι οποίες αντιστοιχούν στις επίκεντρες γωνίες του κύκλου. Αρχίζει από χορδή που αντιστοιχεί σε γωνία μισής μοίρας και προχωράει με διαδοχικές αυξήσεις της μισής μοίρας έως τη γωνία των 180 μοιρών. Διαιρεί τον κύκλο σε 360 μοίρες και τη διάμετρο σε 120 τμήματα. Έπειτα διαιρεί κάθε μοίρα και κάθε τμήμα σε 60 πρώτα λεπτά, και κάθε ένα από αυτά σε 60 δεύτερα λεπτά.

Για τις τιμές των χορδών χρησιμοποιεί το εξηκονταδικό σύστημα, όπως στα Βαβυλωνιακά Μαθηματικά. Έτσι η χορδή τόξου 72^o είναι πλευρά κανονικού πενταγώνου και ισούται με 103 τμήματα, 53 πρώτα λεπτά και 23 δεύτερα. Η χορδή τόξου 60^o είναι πλευρά κανονικού εξαγώνου και ισούται με 60 τμήματα ακριβώς. Η χορδή τόξου 90^o μοιρών είναι πλευρά κανονικού τετραγώνου και ισούται με 82 τμήματα, 51 πρώτα και 10 δεύτερα λεπτά. Η δε χορδή τόξου 120^o είναι πλευρά

[1]Έναν τέτοιο κατάλογο -σύμφωνα με τον Θέωνα τον Αλεξανδρέα- είχε παρουσιάσει τρεις αιώνες νωρίτερα ο Ίππαρχος, ο οποίος εισήγαγε πρώτος στην Ελλάδα τη διαίρεση του κύκλου σε 360 μοίρες. Ο μεταγενέστερος πίνακας του Κλαύδιου πιστεύεται ότι είχε πολλά στοιχεία από την πραγματεία του Ίππαρχου.

ισοπλεύρου τριγώνου και ισούται με 103 τμήματα, 55 πρώτα και 23 δεύτερα λεπτά.

ια′. Κανόνιον τῶν ἐν κύκλῳ εὐθειῶν.

περιφερειῶν	εὐθειῶν			ἑξηκοστῶν			
∠′	ο	λα	κε	ο	α	β	ν
α	α	β	ν	ο	α	β	ν
α∠′	α	λδ	ιε	ο	α	β	ν
β	β	ε	μ	ο	α	β	ν
β∠′	β	λζ	δ	ο	α	β	μη
γ	γ	η	κη	ο	α	β	μη
γ∠′	γ	λθ	νβ	ο	α	β	μη
δ	δ	ια	ιϛ	ο	α	β	μζ
δ∠′	δ	μβ	μ	ο	α	β	μζ
ε	ε	ιδ	δ	ο	α	β	μϛ
ε∠′	ε	με	κζ	ο	α	β	με
ϛ	ϛ	ιϛ	μθ	ο	α	β	μδ
ϛ∠′	ϛ	μη	ια	ο	α	β	μγ
ζ	ζ	ιθ	λγ	ο	α	β	μβ
ζ∠′	ζ	ν	νδ	ο	α	β	μα
η	η	κβ	ιε	ο	α	β	μ
η∠′	η	νγ	λε	ο	α	β	λθ
θ	θ	κδ	νά	ο	α	β	λη
θ∠′	θ	νϛ	ιγ	ο	α	β	λζ
ι	ι	κζ	λβ	ο	α	β	λε
ι∠′	ι	νη	μθ	ο	α	β	λγ
ια	ια	λ	ε	ο	α	β	λβ
ια∠′	ιβ	α	κα	ο	α	β	λ
ιβ	ιβ	λβ	λϛ	ο	α	β	κη

Ο πίνακας αυτός είναι ισοδύναμος με πίνακα ημιτόνων των γωνιών μεταξύ 0^o και 90^o ανά τέταρτο μοίρας. Πράγματι σύμφωνα με τον τύπο υπολογισμού χορδής α που αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία α έχουμε:
$\alpha = 2R \cdot sin\frac{a}{2}$. Οι τιμές που δίνει ο Πτολεμαίος αντιστοιχούν σε R = 60.
Για τη χορδή της γωνίας 1^o έχει βρει την τιμή

$$(1, 2, 50) = \frac{1}{60} + 2\frac{1}{60^2} + 50\frac{1}{60^3} = 0,17453$$

και για το π έχει δώσει την τιμή

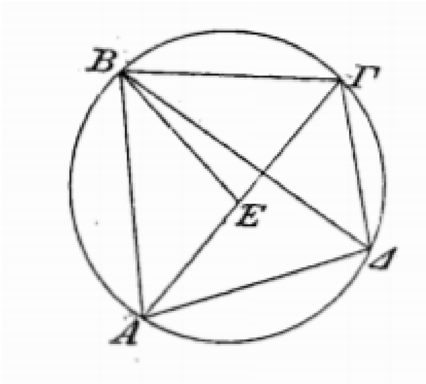
$$(3, 8, 30) = 3\frac{1}{60}+8\frac{1}{60^2}+30\frac{1}{60^3}120 = 3,14166.$$

Στην Αλμαγέστη συναντάμε και τα ανάλογα των τύπων για το ημίτονο και το συνημίτονο του αθροίσματος και της διαφοράς δύο γωνιών, καθώς επίσης και μία απαρχή Σφαιρικής Τριγωνομετρίας. Η διατύπωση των θεωρημάτων ήταν γεωμετρική. Ο τωρινός τριγωνομετρικός συμβολισμός χρονολογείται σε πολύ μεταγενέστερη εποχή.

Στη *Μαθηματικήν Σύνταξιν*, στο πρώτο βιβλίο βρίσκουμε και το θεώρημα που φέρει το όνομά του, το λεγόμενο «θεώρημα τού Πτολεμαίου», με τη βοήθεια του οποίου ο Πτολεμαίος κατάρτισε τους πίνακες χορδών που αναφέραμε παραπάνω. Πιθανολογείται ότι και ο Ίππαρχος πρέπει να γνώριζε αυτήν την πρόταση καθώς και τη χρήση της.
Ας δούμε πώς το διατυπώνει[2] και το αποδεικνύει ο ίδιος ο Πτολεμαίος:
«*Ἔστω γὰρ κύκλος ἐγγεγραμμένον ἔχων τετράπλευρον τυχὸν τὸ ΑΒΓΔ καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΑΓ καὶ ΒΔ, δεικτέον ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ καὶ ΒΔ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον*

[2]Heiberg, *Syntaxis Mathematica*, 1898, τόμος I, σελίς 36.

ἐστὶν συναμφοτέροις τῷ τε ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΔΓ καὶ τῶν ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΒΓ», που σημαίνει ότι



Σχήμα 7.2:

«Αν ΑΒΓΔ είναι ένα εγγεγραμμένο τετράπλευρο, τότε το γινόμενο των διαγωνίων του ισούται με το άθροισμα των γινομένων των απέναντι πλευρών του», δηλαδή ότι

$$\mathrm{A\Gamma} \cdot \mathrm{B\Delta} = \mathrm{AB} \cdot \Gamma\Delta + \mathrm{B\Gamma} \cdot \mathrm{A\Delta}$$

Απόδειξη 1

Κατασκευάζουμε $\widehat{\mathrm{ABE}} = \widehat{\Delta\mathrm{B}\Gamma}$. Προσθέτουμε και στις δύο την $\widehat{\mathrm{EB}\Delta}$ και παίρνουμε $\widehat{\mathrm{AB}\Delta} = \widehat{\mathrm{EB}\Gamma}$. Όμως ισχύει και $\widehat{\mathrm{B}\Delta\mathrm{A}} = \widehat{\mathrm{B}\Gamma\mathrm{E}}$ επειδή βαίνουν στο ίδιο τόξο, άρα τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΕ είναι όμοια. Επομένως έχουμε την αναλογία $\mathrm{B\Gamma} : \Gamma\mathrm{E} = \mathrm{B}\Delta : \Delta\mathrm{A}$ άρα

$$\mathrm{B\Gamma} \cdot \Delta\mathrm{A} = \Gamma\mathrm{E} \cdot \mathrm{B}\Delta \ (1)$$

Έχουμε όμως ότι $\widehat{\mathrm{ABE}} = \widehat{\Delta\mathrm{B}\Gamma}$ και $\widehat{\mathrm{BAE}} = \widehat{\mathrm{B}\Delta\Gamma}$, άρα τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΒΓΔ είναι όμοια. Ισχύει λοιπόν η αναλογία $\mathrm{BA} : \mathrm{AE} = \mathrm{B}\Delta : \Delta\Gamma$, άρα

$$\mathrm{BA} \cdot \Delta\Gamma = \mathrm{AE} \cdot \mathrm{B}\Delta \ (2)$$

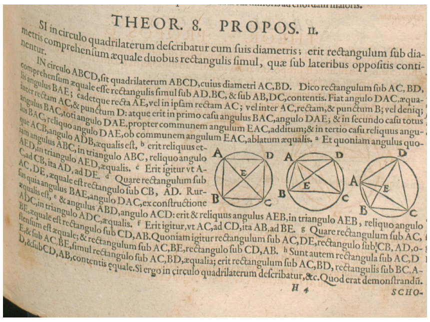
Προσθέτοντας τις σχέσεις (1) και (2) παίρνουμε

$$\mathrm{B\Gamma} \cdot \Delta\mathrm{A} + \mathrm{BA} \cdot \Delta\Gamma = \mathrm{B}\Delta(\Gamma\mathrm{E} + \mathrm{AE})$$

και αφού ΑΕ+ΓΕ=ΑΓ δείξαμε το ζητούμενο.

Η απόδειξη του Πτολεμαίου είναι η πιο καθιερωμένη σύμφωνα με τον Tropfke.

Την ασπάζεται επίσης ο Fibonacci[3] στο βιβλίο του *Practica geometriae* το 1220. Σε μεταγενέστερα διδακτικά βιβλία, στα οποία δεν δίνεται ιδιαίτερη βαρύτητα στην Τριγωνομετρία, το θεώρημα του Πτολεμαίου δεν συναντάται συχνά ως ανεξάρτητη πρόταση. Αν όμως περιέχεται σε κάποιο βιβλίο, τότε πάντα συνοδεύεται από την ελληνική απόδειξή της, όπως για παράδειγμα συμβαίνει στο βιβλίο του Kopernicus (1473-1543) *De Revolutionibus orbium coelestium*[4], (1566), σελίς 13, Θεώρημα 2. Την πρόταση παρουσιάζουν στα βιβλία τους το 1583 ο Thomas Fink (ή Fincke)[5] και το 1612 ο Christopher Clavius[6].



THEOR. 8. PROPOS. 11.

SI in circulo quadrilaterum describatur cum suis diametris; erit rectangulum sub diametris comprehensum æquale duobus rectangulis simul, quæ sub lateribus oppositis continentur.

IN circulo ABCD, sit quadrilaterum ABCD, cuius diametri AC, BD. Dico rectangulum sub AC, BD, comprehensum æquale esse rectangulis simul sub AD, BC, & sub AB, DC, contentis. Fiat angulo DAC, æqualis angulus BAE; cadetque recta AE, vel in ipsam rectam AC; vel inter AC, rectam, & punctum B; vel deniq; inter rectam AC, & punctum D: atque erit in primo casu angulus BAC, angulo DAE; & in secundo casu totus angulus BAC, toti angulo DAE, propter communem angulum EAC, additum; & in tertio casu reliquus angulus BAC, reliquo angulo DAE, ob communem angulum EAC, ablatum æqualis. a Et quoniam angulus quoque ACB, angulo ADB, æqualis est, b erit reliquus etiam angulus ABC, in triangulo ABC, reliquo angulo AED, in triangulo AED, æqualis. c Erit igitur vt AC, ad CB, ita AD, ad DE. d Quare rectangulum sub AC, DE, æquale est rectangulo sub CB, AD. Rursus quia angulus BAE, angulo DAC, ex constructione æqualis est, e & angulus ABD, angulo ACD: erit & reliquus angulus AEB, in triangulo AEB, reliquo angulo ADC, in triangulo ADC, æqualis. f Erit igitur, vt AC, ad CD, ita AB, ad BE. g Quare rectangulum sub AC, BE, æquale est rectangulo sub CD, AB. Quoniam igitur rectangulum sub AC, DE, rectangulo sub CB, AD, ostensum est æquale; & rectangulum sub AC, BE, rectangulo sub CD, AB. h Sunt autem rectangula sub AC, DE, & sub AC, BE, simul rectangulo sub AC, BD, æqualia; erit rectangulum sub AC, BD, rectangulis sub BC, AD, & sub CD, AB, contentis æquale. Si ergo in circulo quadrilaterum describatur, &c. Quod erat demonstrandũ.

H 4 SCHO-

Σχήμα 7.3: Clavius, το θεώρημα του Πτολεμαίου

Ακολουθεί το 1615 ο Ludolph van Ceulen[7], το 1627 ο Ardüser[8], ο οποίος δίνει μία λανθασμένη απόδειξη, και το 1629 οι Maroloys-Girard[9]. Σύμφωνα με τον Tropfke[10], το θεώρημα αναφέρουν στα βιβλία τους και οι: Oughtred (1631), Lamy (1692), ο οποίος δίνει απόδειξη σε αλγεβρική μορφή, De Oppfl (1746), ο οποίος παρουσιάζει το Πυθαγόρειο Θεώρημα ως μία ειδική περίπτωση του θεωρήματος του Πτολεμαίου, Th. Simpson (1760), Bertrand (1778). Ο Legendre παρουσιάζει το θεώρημα σαν ανεξάρτητη πρόταση και προχωράει στην παραγωγή των αθροισμάτων τριγωνομετρικών συναρτήσεων άμεσα, χωρίς αυτό. Άλλοι, οι οποίοι εργάστηκαν επίσης με τον ίδιο τρόπο, παρέλειψαν τελείως το θεώρημα του Πτολεμαίου, ως μη αναγκαίο. Αυτό συνέβη για παράδειγμα με τους

[3] *Scritti di Leonardo Pisano*, τόμος II, σελίς 104.

[4] Το έργο του αυτό ολοκληρώθηκε το 1533, η πρώτη έκδοση του βιβλίου έγινε το 1543 στη Νυρεμβέργη και ακολούθησαν και άλλες, όπως αυτές του 1566 στη Βασιλεία, του 1617 στο Άμστερνταμ, του 1854 στη Βαρσοβία και του 1873 στην πόλη Thorn της Ολλανδίας. Η τελευταία είναι σε γερμανική μετάφραση και περιέχει γραπτές διορθώσεις του Κοπέρνικου, δοσμένες ως υποσημειώσεις.

[5] Finke, *Geometriae rotundi*, III, 16, σελίδες 47-48.

[6] Στο *De sinibus ac lineis tangentibus et secantibus*, Θεώρημα 8, Πρόταση II, Opera, II, σελίς 91.

[7] *Fundamenta*, σε έκδοση του W. Snellius, σελίς 189.

[8] *Geometriae theoricae et practicae* Βιβλίο VII, σελίς 187.

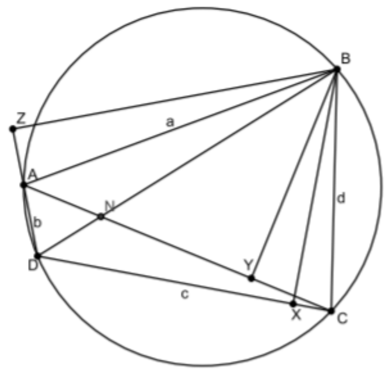
[9] *Geometrie*, σελίς 73, Th. XVII.

[10] *Ebene Geometrie*, σελίδες 227-228.

Kästner (1764), Karsten (1768), Teilkampf (1829), Crelle (1826).
Αυτός που ξαναέβαλε το θεώρημα του Πτολεμαίου στην ύλη της Γεωμετρίας στα σχολικά βιβλία ήταν ο Grunert το 1834 στο βιβλίο του *Lehrbuch für die mittleren Klassen, II, Ebene Geometrie*, §389.
Τον 19ο αιώνα καθιερώθηκε και η ονομασία της πρότασης ως «θεώρημα του Πτολεμαίου» και τον ίδιο αιώνα έχουμε και την εμφάνιση της αντίστροφης πρότασης από τον J.Ph. Grüson το 1833, τον P. Gerwien και άλλους.

Ας γυρίσουμε πάλι στις αποδείξεις του θεωρήματος του Πτολεμαίου. Υπάρχουν διάφορες παραλλαγές της απόδειξης του Πτολεμαίου, δηλαδή αποδείξεις που χρησιμοποιούν ομοιότητα τριγώνων. Για παράδειγμα

Απόδειξη 2[11]



Σχήμα 7.4:

Έστω ABCD εγγράψιμο τετράπλευρο και έστω AB = a, BC = d, CD = c, AD = b, BX, BY, BZ κάθετες στις DC, AC και DA αντίστοιχα. Επειδή το ABCD είναι εγγράψιμο, έχουμε $\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$, $\widehat{ACB} = \widehat{ADB}$, $\widehat{BAZ} = \widehat{BCX}$, $\widehat{AYB} = \widehat{DXB} = \widehat{DZB} = 90^o$.
Επομένως τα τρίγωνα ABY και DBX είναι όμοια, καθώς και τα τρίγωνα BYC και DBZ, άρα και το τρίγωνο ABZ είναι όμοιο με το τρίγωνο BXC. Έτσι έχουμε τις αναλογίες

$$\frac{AY}{DX} = \frac{AB}{BD}\ (1),\ \ \frac{CY}{DZ} = \frac{BC}{BD}\ (2)$$

και

$$\frac{AZ}{CX} = \frac{AB}{BC} \Leftrightarrow AZ \cdot BC = AB \cdot CX\ (3).$$

[11] *A Concise Elementary Proof for the Ptolemy's Theorem*, Global Journal of Advanced Research on Classical and Modern Geometries, ISSN: 2284-5569, Vol.2, Issue 1, 2013, pp.20-25.

Αλλά AY = AC − CY και DX = DC - CX, επομένως από την (1) έχουμε

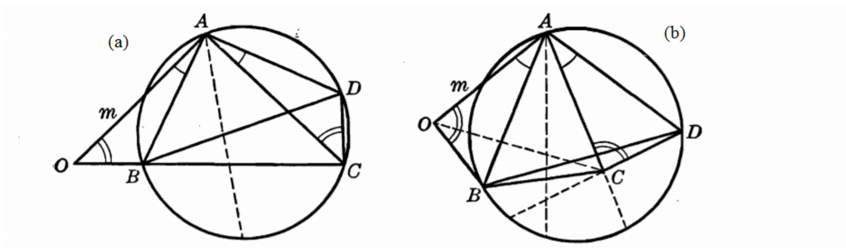
$AC \cdot BD = AB \cdot DC + BD \cdot CY - AB \cdot CX$ (4)

Επίσης DZ = AD + AZ, οπότε η (2) δίνει BD · CY = AD · BC + AZ · BC (5)

Προσθέτοντας τις (3), (4) και (5), παίρνουμε τη ζητούμενη σχέση, δηλαδή την

$$AC \cdot BD = AB \cdot DC + AD \cdot BC = ac + bd.$$

Απόδειξη 3[12]



Σχήμα 7.5:

Θεωρούμε ένα τετράπλευρο ABCD (Σχήμα 7.5a και 7.5b), στο οποίο AB=a, BC=b, CD=c, DA=d, AC=x, BD=y και έστω m η συμμετρική της AD ως προς την διχοτόμο της $\widehat{BAC}$. Η ευθεία m περιέχει ένα και μόνο ένα σημείο O τέτοιο ώστε $\widehat{AOB} = \widehat{ACD}$. Από τα τρίγωνα ACD, AOB έχουμε $\widehat{ABO} = \widehat{ADC}$. Έτσι εάν το ABCD είναι κυκλικό, το σημείο O βρίσκεται πάνω στην πλευρά BC και μόνο σε αυτήν την περίπτωση ισχύει και το αντίστροφο· δηλαδή, αν το σημείο O βρίσκεται πάνω στην BC, το ABCD είναι κυκλικό (Σχήμα a). Τα τρίγωνα AOB, ACD είναι όμοια, είτε το σημείο O βρίσκεται πάνω στην BC είτε όχι. Επομένως:

$$AO : AC = AB : AD = OB : CD \ (1.)$$

Επίσης, τα τρίγωνα OAC, BAD είναι όμοια αφού $\widehat{OAC} = \widehat{BAD}$ και οι πλευρές που τις περιέχουν είναι ανάλογες, όπως προκύπτει από την (1). Έτσι,

$$OC : BD = AC : AD \ (2).$$

[12] Nathan, Altshiller-Court, *College Geometry*, σελίδες 128-129.

Εάν το ABCD είναι κυκλικό, έχουμε (Σχήμα a):

$$OC = OB + BC.$$

Αλλά BC=b και από τις (1) και (2) έπεται ότι

$$OB = ac : d, \ OC = xy : d$$

επομένως αντικαθιστώντας και απλοποιώντας, παίρνουμε

$$xy = ac + bd,$$

το οποίο αποδεικνύει την ευθεία πρόταση.
Αν το ABCD δεν είναι κυκλικό (Σχήμα 7.5b), έχουμε ότι

$$OC < OB + BC$$

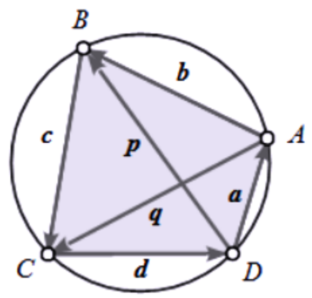
ή

$$xy < ac + bd,$$

δηλαδή σε ένα μη κυκλικό τετράπλευρο το γινόμενο των διαγωνίων του είναι μικρότερο από το άθροισμα των γινομένων των απέναντι πλευρών. Αυτή η πρόταση μαζί με την ευθεία απόδειξη οδηγούν στο αντίστροφο του θεωρήματος του Πτολεμαίου.

Ακολουθούν αποδείξεις με διαφορετικές μεθόδους από τις προαναφερθείσες.

Απόδειξη 4 (με χρήση διανυσμάτων)



Σχήμα 7.6:

Θεωρούμε τις πλευρές και τις διαγώνιες του τετραπλεύρου ABCD ως τα διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{p}$ και $\vec{q}$ αντίστοιχα, με $|\vec{a}|$=a, $|\vec{b}|$=b και λοιπά. Εκφράζοντας το διάνυσμα $\vec{p}$ της διαγωνίου συναρτήσει των πλευρών και υψώνοντας στο τετράγωνο, παίρνουμε
$\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} = -(\vec{c} + \vec{d})$ και

$$p^2 = a^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + b^2 = c^2 + 2\vec{c} \cdot \vec{d} + d^2 \; (1)$$

Αφού $\widehat{A} + \widehat{C} = 180^o$, έπεται ότι $cosA = -cosC$. Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε ότι

$$\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ab} = -\frac{\vec{c} \cdot \vec{d}}{cd} \text{ ισοδύναμα } (\vec{a} \cdot \vec{b})cd + (\vec{c} \cdot \vec{d})ab = 0 \; (2)$$

Λύνοντας ως προς τα εσωτερικά γινόμενα $\vec{a} \cdot \vec{b}$ και $\vec{c} \cdot \vec{d}$ την (1) και αντικαθιστώντας τα στην (2), παίρνουμε

$$(p^2 - a^2 - b^2)cd + (p^2 - c^2 - d^2)ab = 0$$

από την οποία έπεται ότι

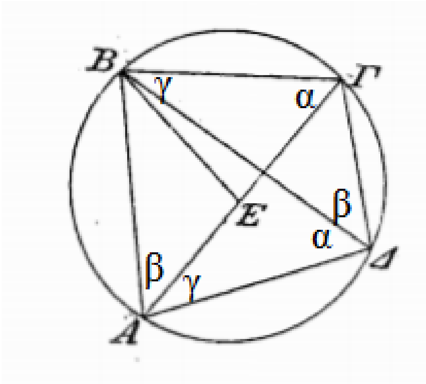
$$p^2 = \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd} \; (3)$$

Όμοια για την διαγώνιο $\vec{q}$ έχουμε $\vec{q} = \vec{b} + \vec{c} = -(\vec{d} + \vec{a})$ και καταλήγουμε στη σχέση

$$q^2 = \frac{(ab + cd)(ac + bd)}{ad + bc} \; (4)$$

Πολλαπλασιάζοντας τις σχέσεις (3) και (4) παίρνουμε τη ζητούμενη $pq = ac + bd$

Απόδειξη 5 (τριγωνομετρικά)



Σχήμα 7.7:

Ονομάζω α, β, γ τις εγγεγραμμένες γωνίες στα τόξα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ αντίστοιχα και έστω R η ακτίνα του περιγεγραμμένου στο τρίγωνο κύκλου. Τότε θα ισχύουν τα εξής:

ΑΒ $= 2Rsin\alpha$, ΒΓ $= 2Rsin\beta$,

ΓΔ $= 2Rsin\gamma$,

ΑΔ $= 2Rsin(180^o - (\alpha + \beta + \gamma))$,

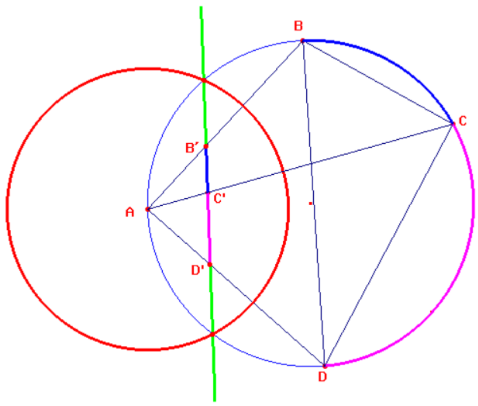
ΑΓ $= 2Rsin(\alpha+\beta)$ και ΒΔ $= 2Rsin(\beta+\gamma)$,

οπότε αυτό που πρέπει να αποδειξουμε είναι ότι

$$sin(\alpha + \beta)sin(\beta + \gamma) = sin\alpha sin\gamma + sin\beta sin(\alpha + \beta + \gamma)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις $sin(x + y) = sinxcosy + sinycosx$ και $cos(x + y) = cosxcosy - sinxsiny$ προκύπτει εύκολα το ζητούμενο.

Απόδειξη 6 (με αντιστροφή)



Σχήμα 7.8:

Αντιστρέφουμε ως προς την κορυφή Α του τετραπλεύρου και με δύναμη ίση με την μονάδα, οπότε ο κύκλος της αντιστροφής έχει ακτίνα ίση με τη μονάδα. Ο κύκλος θα γίνει ευθεία και το A μένει στη θέση του. Αν B', C', D' τα αντίστροφα των B, C, D, αντίστοιχα, τότε, λόγω ευθείας θα ισχύει $B'C' + C'D' = B'D'$ (*). Όμως, ως γνωστόν

$$B'C' = \frac{BC}{AB \cdot AC},\ C'D' = \frac{CD}{AC \cdot AD},\ B'D' = \frac{BD}{AC \cdot BD}$$

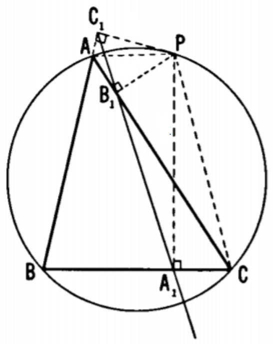
Αντικατάσταση αυτών στην (*) δίνει το ζητούμενο.

Μία απόδειξη που χρησιμοποιεί την ευθεία Simson παρουσιάζεται στη Γεωμετρία των Coxeter-Greitzer.[13]

Απόδειξη 7

Ευθεία Simson είναι η ευθεία, πάνω στην οποία βρίσκονται τα τρία ίχνη των καθέτων που φέρουμε από ένα σημείο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου προς τις τρεις πλευρές του.

Επίσης αν οι αποστάσεις του σημείου αυτού από τις κορυφές A, B, C του τριγώνου είναι x, y, z αντίστοιχα, τότε οι πλευρές του ποδικού τριγώνου $A_1B_1C_1$ (αν και εκφυλισμένο) υπολογίζονται από τους τύπους:



Σχήμα 7.9:

$$B_1C_1 = \frac{BC \cdot x}{2R}$$

$$A_1C_1 = \frac{AC \cdot y}{2R}$$

$$A_1B_1 = \frac{AB \cdot z}{2R}$$

Αφού όμως $A_1B_1 + B_1C_1 = A_1C_1$, συμπεραίνουμε ότι

$$AB \cdot CP + BC \cdot AP = AC \cdot BP$$

[13] Coxeter and Greitzer, *Geometry Revisited* σελίς 42.

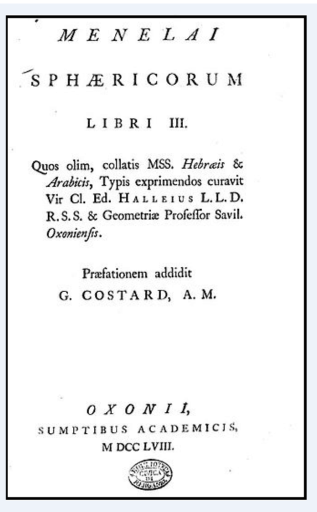
Επειδή το ABCP είναι ένα εγγεγραμμένο τετράπλευρο έχουμε οδηγηθεί στο ζητούμενο θεώρημα.

Κεφάλαιο 8

ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΝΕΛΑΟΥ - ΘΕΩΡΗΜΑ CEVA

8.1 Θεώρημα Μενελάου

Ο Μαθηματικός και Αστρονόμος Μενέλαος έδρασε κυρίως στην Αλεξάνδρεια στα τέλη του 1ου αιώνα μ.Χ. αλλά έζησε και στη Ρώμη. Θεωρείται ο πατέρας της Σφαιρικής Τριγωνομετρίας. Υπήρξε ο πρώτος που μελέτησε την Τριγωνομετρία ως ανεξάρτητο μαθηματικό κλάδο, διαχωρίζοντάς την από την Αστρονομία.



MENELAI

SPHÆRICORUM

LIBRI III.

Quos olim, collatis MSS. *Hebræis* & *Arabicis*, Typis exprimendos curavit Vir Cl. Ed. HALLEIUS L.L.D. R.S.S. & Geometriæ Professor Savil. *Oxoniensis*.

Præfationem addidit G. COSTARD, A. M.

OXONII, SUMPTIBUS ACADEMICIS, M DCC LVIII.

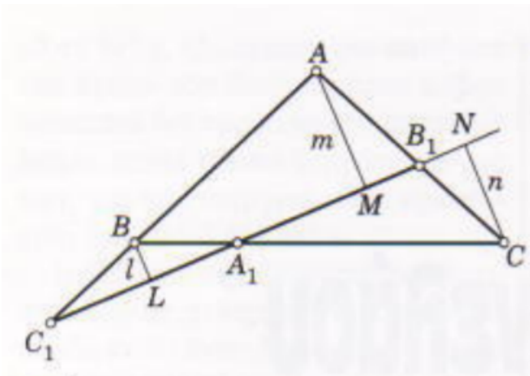
Σχήμα 8.1:

Κανένα από τα έργα του δε σώζεται στο ελληνικό πρωτότυπο. Τα *Σφαιρικά* του σώζονται, σε αρκετά χειρόγραφα, σε αραβική μετάφραση του 10ου αιώνα. Από τα Αραβικά μεταφράστηκαν στα Εβραϊκά και στα Λατινικά. Τα *Σφαιρικά* αποτελούνται από τρία βιβλία. Στο τρίτο βιβλίο υπάρχει η διατύπωση (χωρίς απόδειξη, αφού το θεωρεί γνωστό) το λεγόμενο σήμερα Θεώρημα του Μενελάου, το οποίο επεκτείνει (με απόδειξη) στα σφαιρικά τρίγωνα. Το θεώρημα αυτό αποτελεί ένα μικρό διαμάντι των μαθηματικών της αρχαιότητας και θα μας απασχολήσει σε αυτό το κεφάλαιο.

Το θεώρημα του Μενελάου αφορά μία ευθεία που τέμνει και τις τρεις πλευρές του τριγώνου. Μία τέτοια ευθεία την ονομάζουμε «διατέμνουσα» του τριγώνου. Το θεώρημα του Μενελάου διατυπώνεται ως εξής

Έστω ότι μία διατέμνουσα του τριγώνου ABC τέμνει τις πλευρές του στα σημεία A_1, B_1 και C_1. Τότε, λαμβάνοντας υπόψιν και τους προσανατολισμούς θα είναι

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = -1$$



Σχήμα 8.2:

Αξίζει να τονιστεί ότι ο τύπος της πρότασης, με τον οποίο την εκφράζουν ο Μενέλαος και οι διάδοχοί του, είναι πάντα μία αναλογία με σύνθετη σύσταση, γνωστή με το όνομα «regula sex quantitatum» (στο Μεσαίωνα ήταν γνωστή και ως *Figura cata*):

$$a_1 : a_2 = b_2c_2 : b_1c_1$$

Μόλις από τον 16ο αιώνα και έπειτα χρησιμοποιήθηκε ο τύπος

$$a_1 \cdot b_1 \cdot c_1 = a_2 \cdot b_2 \cdot c_2.$$

που εκφράζει τη σχέση με την οποία συνδέονται τα τμήματα a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 στα οποία τέμνονται οι πλευρές ενός τριγώνου από μία ευθεία.

Το σχήμα που ανήκει στην πρόταση του Μενελάου μπορεί να θεωρηθεί ως ένα πλήρες τετράπλευρο. Περιλαμβάνει συνολικά τέσσερα τρίγωνα για το καθένα από τα οποία μπορεί να εφαρμοσθεί ο τύπος της πρότασης. Τις δύο από αυτές τις σχέσεις τις είχε αναφέρει ο Μενέλαος, ενώ ο Θέων ο Αλεξανδρεύς αναφέρει[1] και τις τέσσερις. Το ότι δεν υπάρχουν περισσότεροι από τέσσερις τύποι αποδείχτηκε μόλις το 13ο αιώνα από τον Πέρση Nasir al-Din al-Tussi (1201-1274), ο οποίος ήταν στην Αυλή του ηγέτη των Μογγόλων Hulagu και με τη βοήθεια των προτάσεων που παρήγαγε από αυτό δημιούργησε μία πλήρη Τριγωνομετρία[2].

Σύμφωνα με τον Tropfke[3]για μεγάλο χρονικό διάστημα επικρατούσε μία λανθασμένη αντίληψη όσον αφορά στην πρώτη εμφάνιση της πρότασης.
Το γεγονός ότι στην *Μαθηματική Σύνταξη* του Πτολεμαίου[4] εμφανίζεται και αποδεικνύεται η συγκεκριμένη πρόταση, χωρίς όμως να αποδοθεί σε κάποιον, κατά τη διαδικασία της απόδειξης της αντίστοιχης πρότασης για σφαιρικά τρίγωνα, είχε ως αποτέλεσμα να επικρατήσει έως και τον 17ο αιώνα η πεποίθηση ότι η πρόταση αυτή οφειλόταν στον Πτολεμαίο.
Η πρόταση του Μενελάου έγινε ευρέως γνωστή εξαιτίας της σημαντικής θέσης που της έδωσε -ως θεώρημα του Πτολεμαίου- στην *Επιτομή της Αλμαγέστης* ο Regiomontanus, ο οποίος συνέχισε και ολοκλήρωσε την αντίστοιχη εργασία του Peuerbach μετά τον θάνατο του τελευταίου το 1461. Σχεδόν όλοι οι Γεωμέτρες την γνώριζαν και τη χρησιμοποιούσαν ως ένα πολύτιμο εργαλείο για την εξαγωγή άλλων προτάσεων. Λεπτομέρειες γι αυτό το θέμα μας δίνει ο Chasles (1793-1880) στο βιβλίο του *Apercu historique sur l'origine et le développement des méthodes de Geometrie*, στο υπόμνημα VI, στις σελίδες 291-292, καλύπτοντας μία χρονική περίοδο 200 ετών[5].

[1] Θέων ο Αλεξανδρεύς, *Σχόλια*, εκδόσεις Halma, σελίδες 234 και 238.
[2] Anton von Braunmühl, *Nassir Eddin Tusi und Regiomontan*, εκδόσεις Halle, 1897, σελίς 36.
[3] J.Tropfke, *Ebene Geometrie*, σελίς 229.
[4] Ptolemaeus, έκδοση Heiberg, I, κεφάλαιο XIII, σελίδες 68-69.
[5] Ο Chasles πιστεύει ότι την πρόταση θα μπορούσε ίσως να την είχε συμπεριλάβει και ο Ευκλείδης

Μαθηματικοί, οι οποίοι ασχολήθηκαν με την πρόταση αυτή και αναφέρονται στο βιβλίο του είναι οι:

Oronce Finée (1494-1555), Michael Stiffel (1487-1567), Gerolamo Cardano (1501-1576), Gemma Frisius (1508-1555), Johannes Schöner (1477-1547), Φραγκίσκος Μαυρόλυκος (1494-1575), Maurice Bressieu (1546-1617), ο Πατήρ Mersenne (1588-1648), ο οποίος ήταν ο πρώτος που υπέδειξε την ύπαρξη αυτής της πρότασης στα *Σφαιρικά* του Μενελάου, Simon Stevin (1548-1620), Willebrord Snellius (1580-1626), Jean Beaugrand (1590-1640), Girard Desargues (1591-1661), Blaise Pascal (1623-1662), Frans van Schooten (1615-1660) και Guarino Guarini (1624-1683). Μερικά χρόνια αργότερα, το 1678, ένας άλλος Ιταλός Γεωμέτρης, ο Giovanni Ceva την παράγει εκ νέου με έναν μοναδικό και εντελώς ανεξάρτητο τρόπο. Με τον Ceva θα ασχοληθούμε ιδιαιτέρως στην επόμενη ενότητα.

Είναι αξιοσημείωτο, ότι η πρόταση ξεχάστηκε σχετικά τους επόμενους αιώνες έως περίπου το τέλος του 18ου αιώνα, όταν ασχολούνται ξανά μαζί της σε άρθρα τους που βρίσκονται στις συλλογές της Ακαδημίας του Petersburg ο F.Th. Schubert[6] το 1794 και ο Nik. Fuss[7] το 1797.

Στη νεώτερη Γεωμετρία η πρόταση του Μενελάου καταλαμβάνει εξέχουσα θέση, γεγονός στο οποίο συνέβαλε και ο Carnot (1753-1823), ο οποίος απέδειξε και ο ίδιος αυτό το θεώρημα μαζί με πολλά άλλα που αφορούσαν το επίπεδο τετράπλευρο, ενώ στα σχολικά Μαθηματικά επανήλθε κυρίως μέσω της μετάφρασης από τον Jacobi των *Στοιχείων της Γεωμετρίας* του Swinden[8] το 1834.

Ας δούμε τώρα κάποιες αποδείξεις του θεωρήματος του Μενελάου.

στο χαμένο έργο του *Πορίσματα*.

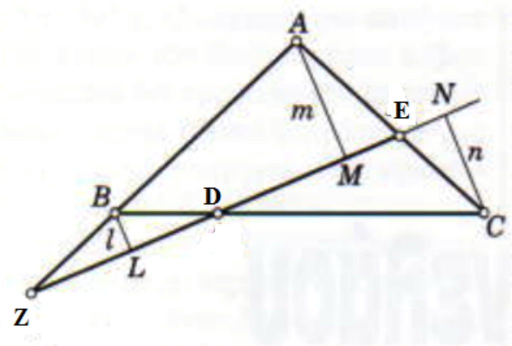
[6] F.Th. Schubert, *Trigonometria sphaerica e Ptolemaeo,* Nova Acta de Petersburg, τόμος XII, σελίς 165.

[7] N. Fuss, *Démonstrations de quelques théorèmes de Géometrie*, Nova Acta Petropolitana, τόμος 14, σελίς 140.

[8] Van Swindens, *Elemente der Geometrie*, Anhang zum 4. Buch, σελίς 146, § 354.

Απόδειξη 1 (με θεώρημα Θαλή)

Από τις κορυφές A, B, C φέρνω τις m, l, n αντίστοιχα κάθετες στη DEZ. Τότε, αφού m // l // n ισχύουν οι εξής σχέσεις



Σχήμα 8.3:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{l}{n}$$

$$\frac{CE}{EA} = \frac{n}{m}$$

$$\frac{AZ}{ZB} = \frac{m}{l}$$

Πολλαπλασιάζοντας τις τρεις αυτές σχέσεις κατά μέλη παίρνουμε το ζητούμενο. Πράγματι

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = \frac{l}{n} \cdot \frac{n}{m} \cdot \frac{m}{l} = 1 \ (*)$$

(Αν πάρω τα τμήματα προσημασμένα το αποτέλεσμα είναι -1)

Ισχύει και η αντίστροφη πρόταση, δηλαδή

Αν ισχύει η σχέση (*), τότε τα σημεία D, E, Z είναι συνευθειακά.

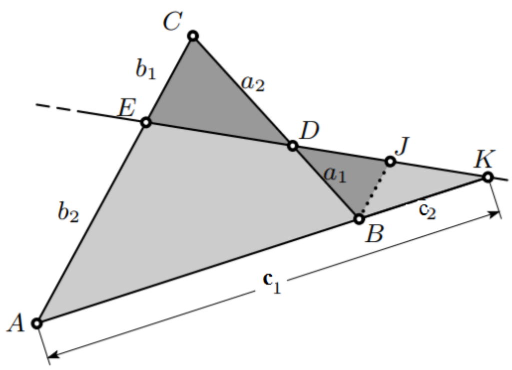
Απόδειξη της αντίστροφης πρότασης

Έστω ότι ισχύει η πρόταση (*) και ότι η DE τέμνει την AB στο σημείο Z'. Τότε από το θεώρημα του Μενελάου για τα σημεία Z', D, E θα έχω

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AZ'}{Z'B} = 1.$$

Όμως, από την υπόθεση ισχύει και η (*). Οπότε $\dfrac{AZ}{ZB} = \dfrac{AZ'}{Z'B}$, που σημαίνει ότι τα σημεία Z και Z' ταυτίζονται.

Απόδειξη 2 (με θεώρημα Θαλή)



Σχήμα 8.4:

Από το B φέρνω BJ // AC. Τα τρίγωνα ECD, DBJ είναι όμοια και άρα

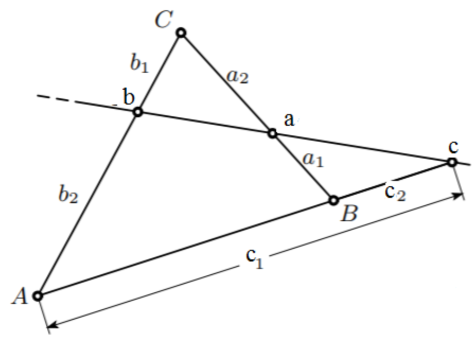
$$BJ = \frac{b_1 a_1}{a_2}$$

Επίσης, όμοια είναι και τα τρίγωνα BJK, AEK, άρα

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{BJ}{AE} = \frac{b_1 a_1}{b_2 a_2}$$

που μας δίνει τη ζητούμενη σχέση.

Απόδειξη 3 (Ceva, με βάρη)[9]



Σχήμα 8.5:

Έστω το τρίγωνο ABC του οποίου οι πλευρές AB, BC, CA τέμνονται αντίστοιχα στα c, a, b από μία τυχαία διατέμνουσα. Υποθέτουμε ότι στα σημεία a, C, A έχουμε τοποθετήσει τρία υλικά σημεία των οποίων η μάζα a' του πρώτου είναι τυχαία, ενώ οι μάζες C', A' στα δύο άλλα επιλέγονται έτσι ώστε το σημείο B να είναι το κέντρο βάρους των δύο υλικών σημείων που είναι τοποθετημένα στα a και C, και το σημείο b να είναι το κέντρο βάρους των δύο υλικών σημείων στα C και A. Το κέντρο βάρους των τριών μαζών θα είναι το σημείο τομής

[9] Chasles, *Apercu historique sur l'origine et le développement des méthodes de Geometrie*», στο υπόμνημα VII, σελίς 294.

c των τμημάτων ab, AB. Ή σύμφωνα με το νόμο της στατικής

$$\frac{aB}{aC} = \frac{C'}{a' + C'}$$

Όμως $C' = A'\dfrac{Ab}{Cb}$ και τα βάρη a' και C' μπορούν να αντικατασταθούν από ένα, το $(a' + C')$, που είναι τοποθετημένο στο B, άρα δεδομένου και του A', θα έχουμε

$$a' + C' = A'\frac{Ac}{Bc}$$

και τελικά

$$\frac{aB}{aC} = \frac{Ab}{Cb} \cdot \frac{Bc}{Ac}$$

ή

$$aB \cdot bC \cdot cA = aC \cdot cB \cdot bA,$$

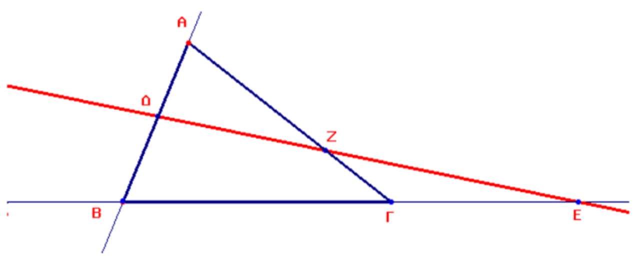
δηλαδή προκύπτει η ζητούμενη σχέση του θεωρήματος του Μενελάου

$$a_1 b_1 c_1 = a_2 b_2 c_2$$

.

Απόδειξη 4 (με ομοιοθεσία)[10]

Θεωρούμε τις δύο ομοιοθεσίες:



Σχήμα 8.6:

την ομοιοθεσία $\mathrm{H}_1(\Delta, \lambda_1)$, με $\lambda_1 = -\dfrac{\Delta \mathrm{A}}{\Delta \mathrm{B}}$, η οποία μετακινεί το σημείο B στη θέση του σημείου A και

[10] Δόρτσιος Κ., Μενέλαος ο Αλεξανδρινός

την ομοιοθεσία $\mathrm{H}_2(\mathrm{Z}, \lambda_2)$, με $\lambda_2 = -\dfrac{\mathrm{Z\Gamma}}{\mathrm{ZA}}$, η οποία μετακινεί το σημείο Α στη θέση του σημείου Γ.

Επειδή $\lambda_1\lambda_2 \neq 1$ (αν $\lambda_1\lambda_2 = 1$, τότε $\dfrac{\Delta\mathrm{A}}{\Delta\mathrm{B}} = \dfrac{\mathrm{ZA}}{\mathrm{Z\Gamma}}$, το οποίο είναι άτοπο) θα ισχύει σύμφωνα με θεώρημα[11] ότι το γινόμενο των δύο αυτών ομοιοθεσιών είναι μία νέα ομοιοθεσία που οδηγεί το σημείο Β στο σημείο Γ. Η νέα αυτή ομοιοθεσία έχει λόγο

$$\lambda_3 = \lambda_1\lambda_2 = \frac{\Delta\mathrm{A}}{\Delta\mathrm{B}} \cdot \frac{\mathrm{Z\Gamma}}{\mathrm{ZA}} \neq 1$$

και κέντρο την τομή της ευθείας των κέντρων Δ και Ζ των δύο αυτών ομοιοθεσιών και της ευθείας που ορίζουν δύο ομόλογα σημεία, που είναι τα Β και Γ. Άρα το κέντρο της νέας ομοιοθεσίας είναι το σημείο τομής των ευθειών ΔΖ και ΒΓ δηλαδή το σημείο Ε. Άρα

$$\frac{\mathrm{E\Gamma}}{\mathrm{EB}} = \frac{\Delta\mathrm{A}}{\Delta\mathrm{B}} \cdot \frac{\mathrm{Z\Gamma}}{\mathrm{ZA}}$$

ή

$$\frac{\mathrm{EB}}{\mathrm{E\Gamma}} \cdot \frac{\Delta\mathrm{A}}{\Delta\mathrm{B}} \cdot \frac{\mathrm{Z\Gamma}}{\mathrm{ZA}} = 1.$$

Το θεώρημα του Μενελάου ισχύει και για τα σφαιρικά τρίγωνα με την εξής διατύπωση

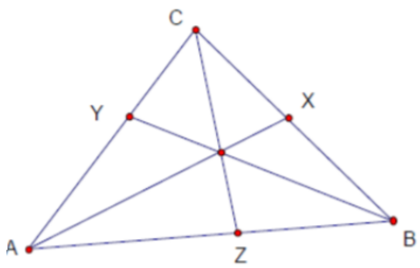
Αν ABC σφαιρικό τρίγωνο και ένας μέγιστος κύκλος στην ίδια σφαίρα τέμνει τις πλευρές του στα σημεία A_1, B_1 και C_1 τότε θα είναι

$$\frac{sin\,\widehat{AB_1}}{sin\,\widehat{B_1C}} \cdot \frac{sin\,\widehat{CA_1}}{sin\,\widehat{A_1B}} \cdot \frac{sin\,\widehat{BC_1}}{sin\,\widehat{C_1A}} = -1.$$

[11] Το γινόμενο δύο ομοιοθεσιών $(\mathrm{O}_1, \lambda_1)$ και $(\mathrm{O}_2, \lambda_2)$, όταν $\lambda_1\lambda_2 \neq 1$ είναι μία νέα ομοιοθεσία με λόγο $\lambda_3 = \lambda_1\lambda_2$ και κέντρο το σημείο τομής δύο ομολόγων σημείων της νέας ομοιοθεσίας με τη ευθεία που ορίζουν τα κέντρα O_1 και O_2.

8.2 Θεώρημα Ceva

Το θεώρημα του Ceva διατυπώνεται ως εξής



Σχήμα 8.7:

Έστω τρίγωνο ABC και σημεία X, Y, Z πάνω στις πλευρές του BC, AC, AB αντίστοιχα. Τότε οι AX, BY και CZ συγκλίνουν εάν και μόνο εάν ισχύει η σχέση

$$\frac{CX}{XB} \cdot \frac{BZ}{ZA} \cdot \frac{AY}{YC} = 1$$

Οι AX, BY και CZ ονομάζονται σεβιανές.

Το θεώρημα αυτό, το οποίο φέρει και το όνομά του απέδειξε γύρω στο 1678 ο Giovanni Ceva και δημοσίευσε το αποτέλεσμα στο βιβλίο του *De Lineis Rectis*[12].


DE
LINEIS RECTIS
SE INVICEM SECANTIBVS
STATICA CONSTRVCTIO:
AD SERENISSIMVM
FERDINANDVM
CAROLVM
Ducem Mantuæ, Montisferrati,
Guastallæ, &c.
AVCTORE
IOANNE CEVA
Mediolanensi.
MEDIOLANI

Σχήμα 8.8:

Ο Ceva αποδεικνύει την πρόταση αρχικά με χρήση του κέντρου βάρους και των σχετικών ιδιοτήτων του. Την απόδειξή του όμως αυτή ακολουθούν και δύο καθαρά γεωμετρικές αποδείξεις, τις οποίες αποδίδει[13] στον μαθητή και συνεργάτη του Petro Paulo Caravaggio (1617-1668).

Η ίδια αυτή πρόταση διατυπώθηκε αργότερα ακόμη μία φορά από τον Johann Bernoulli I (1667-1748), με αποτέλεσμα να του αποδίδεται συχνά η πατρότητα της συγκεκριμένης πρότασης[14].

Με την πρόταση ασχολείται διεξοδικά και ιδιαίτερα με την ακόμα σπουδαιότερη αντίστροφή της ο De Oppel στο βιβλίο του *Analysis triangulorum*, 1746, (§153, 154), την εφαρμόζει στο ορθόκεντρο και στο βαρύκεντρο (§155, 164), τη διατυπώ-

[12]Βιβλίο I, Πρόταση X, σελίς 15.
[13]Ceva, *De lineis rectis*, σελίς 15.
[14]Johannis Bernoulli, 1742, *Opera, τόμος 4, ΑΝΕΚΔΟΤΑ*, σελίς 33.

νει και στην τριγωνομετρική μορφή της, δηλαδή

$$sin\alpha_1 sin\beta_1 sin\gamma_1 = sin\alpha_2 sin\beta_2 sin\gamma_2$$

και αναφέρει και την αντίστροφή της (§150, 152).

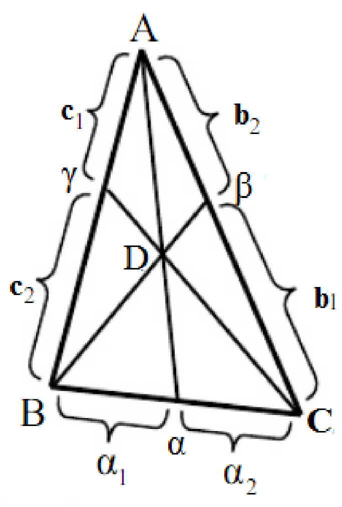
Και ο Carnot συμπεριλαμβάνει την πρόταση του Ceva στο βιβλίο του *Géométrie de position* το 1803[15].

Την πρόταση και τις σχέσεις που είχε συμπεράνει ο Oppel ανακαλύπτει εκ νέου ο Crelle το 1816, όπως βλέπει κανείς στο βιβλίο του *Eigenschaften des ebenen geradlinigen Dreiecks*, §4 και §5, σελίδες 6-7.

Από την εποχή του Crelle και έπειτα, όλα τα βιβλία Γεωμετρίας στην Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση συμπεριλαμβάνουν στην ύλη τους την πρόταση του Ceva.

Ας δούμε τώρα αποδείξεις του θεωρήματος Ceva, ξεκινώντας από αυτήν που έδωσε ο ίδιος, χρησιμοποιώντας νόμους της Μηχανικής.

Απόδειξη 1 - Ceva



Σχήμα 8.9:

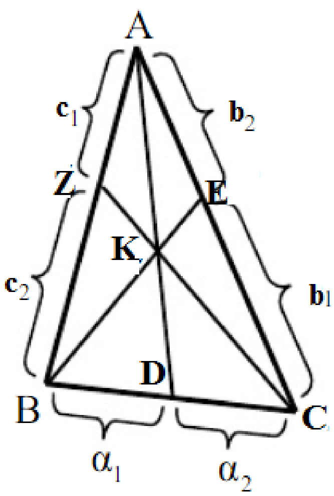
Έστω το τρίγωνο ABC και Aα, Bβ, Cγ τρεις ευθείες που διέρχονται από το ίδιο σημείο D και τέμνουν τις πλευρές του τριγώνου στα α, β, γ. Τοποθετούμε στο A ένα υλικό σημείο, του οποίου τη μάζα A′ έχουμε επιλέξει τυχαία και στα B και C δύο άλλα υλικά σημεία, των οποίων οι μάζες B', C' είναι τέτοιες ώστε το κέντρο βάρους των δύο μαζών A′, B' να είναι στο γ και το κέντρο βάρους των δύο μαζών A′ και C' να είναι στο β. Το κέντρο βάρους των τριών μαζών θα είναι η τομή των τμημάτων Bβ, Cγ, δηλαδή το D. Άρα το σημείο α θα είναι το κέντρο βά-

[15] *Géométrie de position*, IV, §228, σελίς 286.

ρους των δύο μαζών B', C'. Και επομένως παίρνουμε $\dfrac{\mathrm{B}a}{Ca} = \dfrac{C'}{B'}$
Επίσης
$$\frac{C'}{A'} = \frac{A\beta}{C\beta}, \ \frac{B'}{A'} = \frac{A\gamma}{B\gamma}$$
Τελικά παίρνουμε
$$\frac{\mathrm{B}a}{Ca} \cdot \frac{C\beta}{A\beta} \cdot \frac{A\gamma}{B\gamma} = 1$$

δηλαδή τη ζητούμενη σχέση $\dfrac{a_1}{a_2}\dfrac{b_1}{b_2}\dfrac{c_1}{c_2} = 1.$

Απόδειξη 2 (Caravaggio)



Σχήμα 8.10:

Τα τρίγωνα BKD και CKD έχουν το ίδιο ύψος, άρα ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο των βάσεών τους, δηλαδή
$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{(BKD)}{(CKD)}$$
Όμοια για τα τρίγωνα ABD και ACD θα ισχύει
$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{(ABD)}{(ACD)}$$
Δηλαδή
$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{(BKD)}{(CKD)} = \frac{(ABD)}{(ACD)}$$
άρα και
$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{(ABD)-(BKD)}{(ACD)-(CKD)} = \frac{(AKB)}{(AKC)}$$
Το ίδιο ισχύει και για τους λόγους $\dfrac{b_1}{b_2}$ και $\dfrac{c_1}{c_2}$. Δηλαδή έχουμε τις σχέσεις

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{(AKB)}{(AKC)} \quad (1)$$

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{(BKC)}{(AKB)} \quad (2)$$

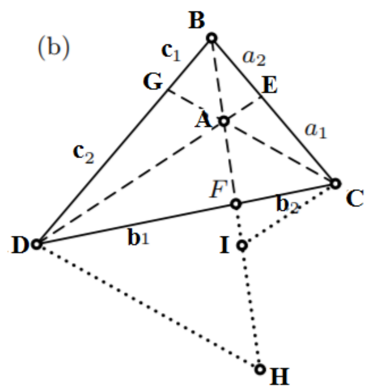
$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{(AKC)}{(BKC)} \quad (3)$$

Πολλαπλασιάζοντας τις σχέσεις (1)-(3) κατά μέλη, παίρνουμε το ζητούμενο.

Παρεμφερής με αυτή την απόδειξη είναι και η απόδειξη που δίνει ο Crelle στο έργο του *Eigenschaften des ebenen geradlinigen Dreiecks*, §4 και §5, σελίδες 6-7, και γι' αυτό το λόγο δεν θα την περιγράψουμε αναλυτικά. Χρησιμοποιεί και αυτός σχέσεις εμβαδών των διαφόρων τριγώνων που σχηματίζονται, παραμένοντας πιο κοντά στις μεθόδους του Ευκλείδη.

Η επόμενη απόδειξη είναι του Bernoulli, ο οποίος χρησιμοποίησε ομοιότητες τριγώνων και το Θεώρημα του Θαλή και δείχνει να έχει κάνει την απόδειξη ανεξάρτητα από τον Ceva.

Απόδειξη 3 (J. Bernoulli)[16]



Σχήμα 8.11:

Έστω το τρίγωνο BCD και οι τρεις ευθείες BF, DE, CG τέμνονται στο A. Προεκτείνουμε την BF και φέρνουμε τις DH, CI παράλληλες προς τις AC, AD αντίστοιχα. Τότε τα τρίγωνα ACI, HDA είναι όμοια, όπως και τα AFC, HFD. Οπότε έχουμε τελικά

$$\frac{b_2}{b_1} = \frac{AI}{AH} \quad (1)$$

[16]Johannis Bernoulli, *Opera Omnia, 1742, τόμος IV, σελίς 33.*

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Θαλή στα τρίγωνα BCI και BDH και παίρνουμε

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{AB}{AI} \quad (2)$$

και

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{AH}{AB} \quad (3)$$

Πολλαπλασιάζοντας τις (1)-(3) κατά μέλη, παίρνουμε το ζητούμενο.

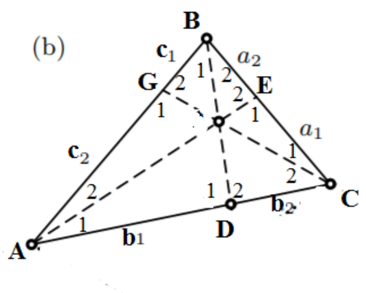
Το θεώρημα Ceva υπάρχει και σε τριγωνομετρική μορφή. Συγκεκριμένα

Ισχύει

$$\frac{sinA_1}{sinA_2}\frac{sinB_1}{sinB_2}\frac{sinC_1}{sinC_2} = 1$$

Απόδειξη

Εφαρμόζουμε το νόμο των ημιτόνων στα έξι τρίγωνα ABD, BDC, AEC, BEA, BCG, ACG και παίρνουμε



Σχήμα 8.12:

Από το ABD: $\frac{AD}{sinB_1} = \frac{c}{sinD_1} \Leftrightarrow \frac{sinB_1}{AD} = \frac{sinD_1}{c}$ (1)

Από το BDC: $\frac{CD}{sinB_2} = \frac{a}{sinD_2}$ (2)

Από το AEC: $\frac{CE}{sinA_1} = \frac{b}{sinE_1} \Leftrightarrow \frac{sinA_1}{CE} = \frac{sinE_1}{b}$ (3)

Από το ABE: $\frac{BE}{sinA_2} = \frac{c}{sinE_2}$ (4)

Από το BCG: $\frac{BG}{sinC_1} = \frac{a}{sinG_2} \Leftrightarrow \frac{sinC_1}{BG} = \frac{sinG_2}{a}$ (5)

Από το ACG: $\dfrac{AG}{sinC_2} = \dfrac{b}{sinG_1}$ (6)

Πολλαπλασιάζουμε τις σχέσεις (1)-(6) κατά μέλη και παίρνουμε

$$\frac{sinA_1}{sinA_2}\frac{sinB_1}{sinB_2}\frac{sinC_1}{sinC_2}\frac{CD}{DA}\frac{BE}{EC}\frac{AG}{BG} = \frac{sinD_1}{sinD_2}\frac{sinE_1}{sinE_2}\frac{sinG_2}{sinG_1}\frac{a}{b}\frac{c}{a}\frac{b}{c}\ (*)$$

Αλλά $\dfrac{CD}{DA}\dfrac{BE}{EC}\dfrac{AG}{BG} = \dfrac{b_2}{b_1}\dfrac{a_2}{a_1}\dfrac{c_2}{c_1} = 1$ (από θεώρημα Μενελάου),

$sinD_1 = sinD_2$ αφού D_1, D_2 παραπληρωματικές. Ομοίως $sin\mathrm{E}_1 = sin\mathrm{E}_2$ και $sinG_1 = sinG_2$

Μετά τις απλοποιήσεις στην (*) προκύπτει το ζητούμενο.

Τα θεωρήματα Μενελάου και Ceva έχουν πάρα πολλές εφαρμογές και αποτελούν σημαντικό εργαλείο για να αποδείξουμε πολλές γνωστές προτάσεις της Γεωμετρίας και της Τριγωνομετρίας, όπως για παράδειγμα τις ακόλουθες

* Οι διάμεσοι τριγώνου περνούν από το ίδιο σημείο.
* Τα ύψη τριγώνου περνούν από το ίδιο σημείο.
* Οι διχοτόμοι τριγώνου περνούν από το ίδιο σημείο.
* Σημείο Gergonne
* Σημείο Lemoine
* Σημείο Nagel

και γενικά αποτελούν έναν πολύ εύκολο τρόπο για να αποδείξουμε ότι τρεις ευθείες συγκλίνουν, ή ότι τρία σημεία είναι συνευθειακά.

Βιβλιογραφία

[1] Bernoulli, Johannis, *Opera Omnia*,Volume 4, 1742.

[2] Boyer, Carl, *A History of Mathematics*, Wiley editions, USA, 1968.

[3] Bramer, Benjamin, *Etliche Geometrische Quaestiones*, Egenollf, Marburg, 1618.

[4] Cantor, Moritz *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, erster Band, Teubner, Leibzig 1880.

[5] Carnot, L.M.N., *Géométrie de Position*, Duprat, Paris, 1803.

[6] Ceva, Ioanne, *De Lineis Rectis*, Mediolani, 1678.

[7] Chasles M., *Apercu historique sur l'origine et le développement des méthodes de Geometrie*, Hayez, Bruxelles, 1837.

[8] Coxeter H.S.M., Greitzer S.L., *Geometry Revisited*, The Mathematical Association of America, Washington, 1967.

[9] Dunham William, *Journey Through Genius: Great Theorems of Mathematics*, Wiley Science Editions, USA 1990.

[10] Grunert Johann August*Archiv der Mathematik und Physik*, Koch, 1843.

[11] Grunert, Johann August *Archiv der Mathematik und Physik*, Koch, 1850.

[12] Hall, H.S., Stevens, F.H., *An Elementary Course of Mathematics*, Macmillan and Co, London, 1899.

[13] Heath, Thomas, *A History of Greek Mathematics*, Volume I, Oxford, 1921.

[14] Heath, Thomas, *A History of Greek Mathematics*, Volume II, Oxford, 1921.

[15] Heath, Thomas, *The Thirteen Books of Euclid's Elements, translated from the text of Heiberg, with introduction and commentary*, second ed., 3 vols., University Press, Cambridge 1926; Dover reprint 1956.

[16] Heiberg, J.L., *Syntaxis Mathematica*, Volume I, Teubner, Leipzig, 1898.

[17] Loria, Gino, *Ιστορία των Μαθηματικών*, Τόμος I, Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, Εκδόσεις Παπαζήση, Αθήνα, 1971.

[18] Nathan, Altshiller-Court, *College Geometry*, Dover Editions, New York, 1952.

[19] Neugebauer, O., *Mathematische Keilschrift-Texte*, Springer, Berlin Heidelberg, 1935.

[20] Ostermann, A., Wanner, G., *Geometry by Its History*, Springer, Berlin Heidelberg 2012.

[21] Steiner, Jacob, *Gesammelte Werke*, Reimer, Berlin, 1881.

[22] Tropfke, Johannes, *Geschichte der Elementar Mathematik*, Band 4, Ebene Geometrie, Berlin 1940.

[23] Tropfke, Johannes, Archimedes und die Trigonometrie, *Archiv für die Geschichte der Mathematik, der Natunwissenschaften und der Technik*, 10, 1928, 432-461.

[24] Waerden, B.L. Van Der, *Science Awakening I*, Springer, 1975.

ΠΕΡΙΟΔΙΚΑ

[25] *The American Mathematical Monthly*, Mathematical Association of America

[26] Crelle, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*

[27] *Lady's and Gentleman's Diary*

[28] *Quantum*, Ελληνική Έκδοση

[29] *Nouvelles Annales de Mathématiques*

[30] *The Philosophical Magazine*

[31] *Crux Mathematicorum*