ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΗΣ ΑΓΩΓΗΣ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΤΟΜΕΑΣ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
(ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ)

Ερευνητική εργασία Διπλώματος Ειδίκευσης

της Γεωργίας Χαλεπάκη (Α.Μ.: 128)

ΘΕΜΑ: *"Διερεύνηση της συμπεριφοράς και των δυνατοτήτων των μαθητών της Στ΄ τάξης του Δημοτικού σχολείου σε σχέση με τα κριτήρια εκτίμησης και ελέγχου των αλγορίθμων των τεσσάρων αριθμητικών πράξεων"*

ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΕΠΙΤΡΟΠΗ:
Κούρκουλος Μ., *Εντετ. Επίκουρος καθηγητής Π.Τ.Δ.Ε. Πανεπιστημίου Κρήτης (επόπτης)*
Τζανάκης Κ., *Αναπληρωτής Καθηγητής Π.Τ.Δ.Ε. Πανεπιστημίου Κρήτης*
Τρούλης Γ., *Καθηγητής Π.Τ.Δ.Ε. Πανεπιστημίου Κρήτης*

ΡΕΘΥΜΝΟ 2003

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Καθοριστικό ρόλο για την ολοκλήρωση της παρούσας εργασίας διαδραμάτισε ο κ. Μ. Κούρκουλος. Συνέβαλε σημαντικά στο σχεδιασμό και υλοποίηση της ερευνητικής διαδικασίας, στην ανάλυση και ερμηνεία των ερευνητικών δεδομένων, αλλά και στη συγγραφή της εργασίας, με αναρίθμητες προτάσεις, παρατηρήσεις και διορθωτικές παρεμβάσεις. Προσέφερε αμέτρητες συμβουλές μεθοδολογικού, διδακτικού, μαθηματικού-στατιστικού περιεχομένου.

Ιδιαίτερα σημαντική ήταν η συμβολή του κ. Κ. Τζανάκη, ο οποίος συνέβαλε στην ολοκλήρωση της εργασίας με πάμπολλες συμβουλές, εύστοχες παρατηρήσεις και ουσιαστικές, διορθωτικές παρεμβάσεις, τόσο ως προς το περιεχόμενό της, όσο και ως προς τη δομή της και τη συνολική της παρουσία.

Ευχαριστώ θερμά τον κ. Γ. Τρούλη για την υποστήριξή του καθ' όλη τη διάρκεια της ερευνητικής διαδικασίας και της συγγραφής της εργασίας, καθώς και για τις πολύτιμες συμβουλές του σε θέματα που αφορούν στην οργάνωση της διδακτικής παρέμβασης.

Σημαντική υπήρξε η βοήθεια του κ. Γ. Σμυρνάκη, Περιφερειακού Διευθυντή Εκπαίδευσης Κρήτης, ο οποίος υποστήριξε την πραγματοποίηση της διδακτικής παρέμβασης, συνέβαλε στην ανάληψη από μέρους μου της Στ΄3 τάξης του 9ου Δημοτικού Σχολείου Ηρακλείου και φρόντισε να με προμηθεύσει με το Αναλυτικό Πρόγραμμα των Μαθηματικών.

Επίσης, ευχαριστώ το διευθυντή του 9ου Δημοτικού Σχολείου Ηρακλείου (για το έτος 2001-2002) κ. Α. Μαρή, για τη συγκατάθεση και την αμέριστη υποστήριξή του στην πραγματοποίηση της διδακτικής παρέμβασης.

Η έρευνα δεν θα μπορούσε να πραγματοποιηθεί χωρίς τη συμβολή των διευθυντών των Δημοτικών Σχολείων Ηρακλείου (9ου, 18ου, 19ου, 24ου και 46ου), καθώς και των δασκάλων, οι οποίοι είχαν την ευγενή διάθεση να παραχωρήσουν την τάξη τους, για τη συμπλήρωση του ερωτηματολογίου από τους μαθητές.

Αναμφίβολα, η πραγματοποίηση της έρευνας οφείλεται κατά ένα μεγάλο μέρος στους μαθητές της Στ΄ τάξης των παραπάνω Δημοτικών Σχολείων, που έδειξαν προθυμία να συμπληρώσουν το ερωτηματολόγιο με σοβαρότητα και ενδιαφέρον.

Θερμές ευχαριστίες στους μαθητές της Στ΄3 τάξης του 9ου Δημοτικού Σχολείου Ηρακλείου (για το έτος 2001-2002), οι οποίοι συμμετείχαν με ενδιαφέρον και ενεργητικότητα, καθ' όλη τη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης, επιδιώκοντας να κατακτήσουν όσο το δυνατό μεγαλύτερο μέρος της διδασκόμενης ύλης, αλλά και συμπλήρωσαν το ερωτηματολόγιο της έρευνας. Είναι αδιαμφισβήτητο ότι η έρευνα δεν θα μπορούσε να λάβει χώρα, δίχως τη συμμετοχή των μαθητών.

ΣΥΝΟΠΤΙΚΗ ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Προκειμένου να έχει ο αναγνώστης μια συνολική εικόνα για της εργασία, παρουσιάζουμε συνοπτικά το περιεχόμενο κάθε κεφαλαίου:

- Αρχικά, παρουσιάζεται μια ***εισαγωγή***, που στόχο έχει να εισάγει τον αναγνώστη στο θέμα της εργασίας, να αναδείξει το γενικότερο προβληματισμό και να οριοθετήσει το ευρύτερο μεθοδολογικό πλαίσιο της έρευνας.
- Στο δεύτερο κεφάλαιο με τίτλο **"*Τα κίνητρα της έρευνας*"** αναπτύσσονται τα κίνητρα της έρευνας, οι λόγοι που παρώθησαν το συντάκτη της εργασίας στην ανάληψη και υλοποίηση της παρούσας έρευνας.
- Στο τρίτο κεφάλαιο με τίτλο **"*Καθορισμός του προβλήματος της έρευνας* "** οριοθετείται το πρόβλημα της έρευνας, διασαφηνίζονται οι όροι του προβλήματος και τέλος καθορίζεται ο σκοπός και οι επιμέρους στόχοι.
- Στο τέταρτο κεφάλαιο με τίτλο **"*Ανασκόπηση του προβλήματος της έρευνας*"** γίνεται αναδίφηση στην υπάρχουσα βιβλιογραφία και επισκόπηση προγενέστερων συναφών ερευνών με σκοπό την άντληση χρήσιμων πληροφοριών.
- Στο πέμπτο κεφάλαιο με τίτλο **"*Παρουσίαση κριτηρίων εκτίμησης και ελέγχου*"** γίνεται προσπάθεια να παρουσιαστεί ένας, όσο το δυνατό ευρύτερος, κατάλογος κριτηρίων εκτίμησης και ελέγχου, που αφορούν στους αλγορίθμους των τεσσάρων αριθμητικών πράξεων.
- Στο έκτο κεφάλαιο με τίτλο **"*Κατηγοριοποίηση των κριτηρίων εκτίμησης και ελέγχου*"** γίνεται κατηγοριοποίηση των κριτηρίων εκτίμησης και ελέγχου που παρουσιάστηκαν στο τέταρτο κεφάλαιο. Η κατηγοριοποίηση γίνεται με βάση πολλαπλούς άξονες ταξινόμησης: την αποτελεσματικότητά τους ως προς την ορθότητα της πράξης, την εφαρμογή τους στο σύνολο του αλγορίθμου ή σε μια περιοχή του, τον βαθμό δυσκολίας στην εφαρμογή τους, το κόστος εφαρμογής τους και τέλος το μαθησιακό όφελος που προκύπτει από τη χρήση τους.
- Στο έβδομο κεφάλαιο με τίτλο **"*Θεωρητική ανάλυση των χαρακτηριστικών των κριτηρίων εκτίμησης και ελέγχου*"** παρουσιάζεται η θεωρητική ανάλυση των κριτηρίων εκτίμησης και ελέγχου, διερευνάται η σχέση μεταξύ κριτηρίων εκτίμησης και κριτηρίων ελέγχου, αποσαφηνίζονται τα χαρακτηριστικά τους, περιγράφονται οι διαδικασίες για την εφαρμογή τους, οι ικανότητες και οι γνώσεις που συνεισφέρουν κατά την εφαρμογή τους και τέλος οι συνέπειες που προκύπτουν από τη χρήση τους.
- Στο όγδοο κεφάλαιο με τίτλο **"*Οργάνωση της έρευνας*"** περιγράφεται το μεθοδολογικό πλαίσιο της έρευνας, οι μέθοδοι που χρησιμοποιήθηκαν για να υλοποιηθεί η έρευνα: η πειραματική παρέμβαση και το ερωτηματολόγιο, στο πλαίσιο των οποίων καταγράφονται και ποιοτικές παρατηρήσεις. Επίσης, περιγράφεται το δείγμα της έρευνας, το μαθητικό υποσύνολο που αποτέλεσε, τόσο την πειραματική ομάδα, όσο και την ομάδα ελέγχου. Ακόμη, παρουσιάζονται τα όργανα της έρευνας, το ερωτηματολόγιο και το διδακτικό σχήμα της διδακτικής παρέμβασης, και γίνεται λεπτομερής περιγραφή τους και τέλος διατυπώνονται οι υποθέσεις της έρευνας.
- Στο ένατο κεφάλαιο με τίτλο **"*Πραγματοποίηση της έρευνας*"** παρουσιάζεται η υλοποίηση της έρευνας με την εφαρμογή των οργάνων: περιγράφεται η διαδικασία επίδοσης του ερωτηματολογίου και η πραγματοποίση της διδακτικής παρέμβασης.
- Στο δέκατο κεφάλαιο με τίτλο **"*Παρουσίαση αποτελεσμάτων της έρευνας*"** παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της έρευνας, αναλύονται και ερμηνεύονται. Στην §10.1

γίνεται σύγκριση της πειραματικής ομάδας πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση, ώστε να διαπιστωθεί η επίδραση της διδακτικής παρέμβασης. Στην §10.2 γίνεται σύγκριση της πειραματικής ομάδας πριν την υλοποίηση της διδακτικής παρέμβασης, κατά τη διάρκεια της, μετά την υλοποίησή της και ένα μήνα μετά το πέρας της, ώστε να διαφανεί η εξέλιξη της πειραματικής ομάδας. Στην §10.3 γίνεται η σύγκριση της πειραματικής ομάδας και της ομάδας ελέγχου πριν την υλοποίηση της διδακτικής παρέμβασης για τον έλεγχο της μεταξύ τους ισοδυναμίας. Στην §10.4.1 και 10.4.2 γίνεται η σύγκριση των δύο ομάδων μετά την υλοποίηση της διδακτική παρέμβασης.

- Στο ενδέκατο κεφάλαιο με τίτλο **"*Γενικός σχολιασμός των αποτελεσμάτων*"** γίνεται μια συνθετική παρουσίαση των αποτελεσμάτων, όπου παρουσιάζονται τα κυριότερα συμπεράσματα που προέκυψαν από την στατιστική επεξεργασία και ανάλυση των δεδομένων της έρευνας. Επίσης, γίνεται συζήτηση με βάση κάποια ερεθίσματα που προέκυψαν από την ανάλυση των αποτελεσμάτων. Τέλος, τίθενται ερευνητικά ερωτήματα που προέκυψαν, για μελλοντικές έρευνες.
- Στο ***παράρτημα*** παρατίθεται το ερωτηματολόγιο που δόθηκε στην πειραματική ομάδα και στην ομάδα ελέγχου, καθώς και κάποιες από τις δραστηριότητες που δόθηκαν στο πλαίσιο της διδακτικής παρέμβασης.
- Τέλος, παρατίθεται η ***βιβλιογραφία,*** απ' όπου αντλήθηκαν χρήσιμες πληροφορίες, απαραίτητες για την υλοποίηση της έρευνας, καθώς και τη σύνταξη της εν λόγω εργασίας.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η εκτίμηση και ο έλεγχος αποτελούν σύνθετες διαδικασίες, ιδιαίτερα ωφέλιμες στο γενικότερο πλαίσιο της μαθηματικής δραστηριότητας και μπορούν να διαδραματίσουν σημαντικό ρόλο στην προαγωγή της μαθηματικής γνώσης: συμβάλλουν στην καλύτερη κατανόηση των αλγορίθμων, στην εκμάθηση και σωστή εκτέλεσή τους (Κούρκουλος και Τζανάκης, 2000), αλλά και στην καλύτερη κατανόηση των αριθμών και των ιδιοτήτων τους (Sowder, 1992). Η εκτίμηση και ο έλεγχος ενός μαθηματικού αλγορίθμου πραγματοποιείται με την εφαρμογή δραστηριοτήτων, που είναι γνωστές ως κριτήρια εκτίμησης και ελέγχου (βλ. σχετικά §3.2). Πολλαπλά είναι τα οφέλη που απορρέουν από την παραγωγή και χρήση κριτηρίων εκτίμησης και ελέγχου (βλ. σχετικά §7.5).

Η σημαντικότητα των κριτηρίων εκτίμησης και ελέγχου έγκειται σε τρεις βασικούς παράγοντες: α) αποτελούν δομικό στοιχείο της αυτοδιόρθωσης και κατ' επέκταση της μεταγνώσης[1], β) συμβάλλουν στην απόκτηση Μαθηματικής Παιδείας και γ) μπορούν κάποιες φορές να υποκαταστήσουν τον ίδιο τον αλγόριθμο.

Σε ό,τι αφορά τον πρώτο παράγοντα, μέσα από την εφαρμογή κριτηρίων εκτίμησης και ελέγχου ο μαθητής προβαίνει σε έλεγχο του αλγορίθμου που ήδη έχει εκτελέσει: ελέγχει την ορθότητα του αποτελέσματος με βάση την επαλήθευση ή όχι που παρέχει το κριτήριο ελέγχου (π.χ. πλήρεις δοκιμές των πράξεων), ή ακόμη και την ορθότητα των επιμέρους βημάτων του αλγορίθμου (π.χ. κριτήριο του υπολοίπου της διαίρεσης). Αμέσως επόμενο βήμα είναι η εφαρμογή αυτοδιορθωτικών δραστηριοτήτων, σε περίπτωση που το κριτήριο ελέγχου δείξει την ύπαρξη σφάλματος. Ο μαθητής προσπαθεί να εντοπίσει το σφάλμα και προβαίνει στη διόρθωσή του.

Εξάλλου, τα κριτήρια εκτίμησης μπορούν να εφαρμοστούν και ως κριτήρια ελέγχου, για τον έλεγχο της ορθότητας του αποτελέσματος ενός αλγορίθμου (βλ. σχετικά §7.1). Μπορούν δηλαδή να εφαρμοστούν τόσο πριν, όσο και μετά την εκτέλεση του αλγορίθμου.

Κατά συνέπεια, διαπιστώνουμε ότι τα κριτήρια ελέγχου, αλλά και τα κριτήρια εκτίμησης συνιστούν στοιχείο της αυτοδιορθωτικής δραστηριότητας. Η αυτοδιόρθωση, ωστόσο, αποτελεί ιδιαίτερα γόνιμη και σημαντική δραστηριότητα που προκαλεί μάθηση και βελτίωση της κατανόησης (Pluvinage, 1983, Regnier, 1983). Κατά τη διάρκεια αυτοδιορθωτικών δραστηριοτήτων ο μαθητής συνδέει πληροφορίες από διαφορετικές γνωστικές περιοχές, τις αντιπαραβάλλει, εντοπίζει αντιφάσεις και απορρίπτει εσφαλμένες ιδέες (Κούρκουλος, 1998, σ. 80).

Εξάλλου, η αυτοδιόρθωση αποτελεί μια βασική μεταγνωστική δεξιότητα, την οποία ο μαθητής θα πρέπει να αναπτύξει μέσα από συστηματική διδασκαλία, αφού η απόκτηση μεταγνωστικών δεξιοτήτων α) καθιστά το μαθητή ικανό για αυτό-κατευθυνόμενη μάθηση και β) καλλιεργεί στο μαθητή μια θετική στάση προς τη γνώση (Ματσαγγούρας 2000, σ. 102). Ο Brown (1978) αναφέρει ότι οι βασικές δεξιότητες της μεταγνώσης περιλαμβάνουν την πρόγνωση των συνεπειών μιας πράξης ή γεγονότος, τον έλεγχο των αποτελεσμάτων των πράξεων (τα κατάφερα;), την τροποποίηση μιας δραστηριότητας που συντελείται (πώς τα πάω;), τον έλεγχο της πραγματικότητας (είναι αυτό λογικό;), τις διορθωτικές παρεμβάσεις και διάφορες άλλες συμπεριφορές οι οποίες συντονίζουν και ελέγχουν τις προσπάθειες για μάθηση και λύση προβληματικών

[1] Για τη μεταγνώση βλ. σχετικά §8.3.

καταστάσεων (Brown & Deloache, 1983, σ. 194). Κατά τη διάρκεια επίλυσης μιας προβληματικής κατάστασης είναι απαραίτητο ο μαθητής να αυτοελέγχει και να αυτοαξιολογεί την υλοποίηση όσων σχεδιάστηκαν και στο τέλος να ελέγχει και να αξιολογεί το αποτέλεσμα της γνωστικής του πορείας. Με τον τρόπο αυτό αυτοενισχύεται, καθώς ανατροφοδοτείται από τον έλεγχο που ο ίδιος πραγματοποιεί (Πασχάλης, 2000, σ. 67). Κατ' επέκταση, επομένως, η ανάπτυξη και χρήση κριτηρίων εκτίμησης και ελέγχου αποτελούν στοιχείο της μεταγνώσης.

Σε ό,τι αφορά το δεύτερο παράγοντα, ένα από τα χαρακτηριστικά της Μαθηματικής παιδείας, η οποία αποτελεί το μέγιστο γενικό σκοπό της διδασκαλίας των Μαθηματικών στο Δημοτικό σχολείο και αναγκαία προϋπόθεση των Θετικών Επιστημών, σύμφωνα με τον Τζανάκη (1998, σ. 101), είναι "η ανάπτυξη της δυνατότητας εκτίμησης καταστάσεων σε τάξη μεγέθους π.χ. νοητή εκτέλεση πράξεων, προσεγγιστική εκτίμηση διαστάσεων, εμβαδών, όγκων κ.λ.π.". Κατά συνέπεια, διαπιστώνουμε ότι μέσα από την εφαρμογή κριτηρίων εκτίμησης προάγεται η απόκτηση Μαθηματικής Παιδείας (βλ. σχετικά §7.5).

Εξάλλου, αρκετές φορές κάποια κριτήρια εκτίμησης και ελέγχου υποκαθιστούν τον ίδιο τον αλγόριθμο. Για παράδειγμα, η εφαρμογή κριτηρίων που βασίζονται στους από μνήμης προσεγγιστικούς υπολογισμούς δίνει συχνά ταχύτερα αποτελέσματα απ' ότι η χρήση χαρτιού και μολυβιού ή αριθμομηχανής, όταν υπάρχει κατάλληλη εξάσκηση. Έτσι, αρκετές φορές είναι προτιμότερη η χρήση από μνήμης προσεγγιστικών υπολογισμών, παρά η εκτέλεση ακριβών υπολογισμών. Επίσης, είναι σημαντικό ότι δεν απαιτούν υλικό υποστήριγμα και συνεπώς μπορούν με ευκολία να εφαρμοστούν σε περιπτώσεις που δε διαθέτουμε χαρτί και μολύβι ή αριθμομηχανή (Κούρκουλος και Τζανάκης, 2000, σ. 268).

Εξάλλου, τα κριτήρια εκτίμησης και ελέγχου μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον έλεγχο των αποτελεσμάτων που παράγονται με αριθμομηχανή ή ηλεκτρονικό υπολογιστή (Bestgen et al., 1980, Levine, 1982, Κούρκουλος και Τζανάκης, 2000, σ. 268). Τις περισσότερες φορές γίνεται παθητική αποδοχή των αποτελεσμάτων που δίνει ο υπολογιστής τσέπης ή ο Η/Υ, χωρίς όμως να γίνεται αντιληπτό ότι ενδεχόμενο σφάλμα στην εισαγωγή των δεδομένων (π.χ. λάθος τοποθέτηση της υποδιαστολής, λάθος αριθμός των μηδενικών) μπορεί να οδηγήσει στην παραγωγή εσφαλμένου αποτελέσματος. Αν ο χρήστης δεν διαθέτει ανεξάρτητους τρόπους ελέγχου του αποτελέσματος, τότε κινδυνεύει να υποπέσει σε σφάλμα.

Ωστόσο, οι διαδικασίες εκτίμησης και ελέγχου σε αρκετές περιπτώσεις είναι σύνθετες και πολύπλοκες και απαιτείται οργανωμένη καθοδήγηση για την εκμάθηση και δυνατότητα εφαρμογής τους (Κούρκουλος, 1996, 1997, 1998, Kourkoulos & Keyling, 2000).

Μολονότι η παραγωγή και χρήση κριτηρίων εκτίμησης και ελέγχου συνιστά ιδιαίτερα ωφέλιμη δραστηριότητα, ο ρόλος της αγνοείται κατά ένα μεγάλο μέρος, τόσο από το Αναλυτικό Πρόγραμμα (βλ. σχετικά §3.1), όσο και από τους εκπαιδευτικούς και είναι ιδιαίτερα αισθητή η έλλειψη διδακτικής οργάνωσης σε ό,τι αφορά το εν λόγω θέμα, σε όλες τις βαθμίδες της εκπαίδευσης (Κούρκουλος και Τζανάκης, 2000, σ. 265). Τα περισσότερα κριτήρια εκτίμησης και ελέγχου δεν διδάσκονται, και αυτά που περιλαμβάνονται στα σχολικά εγχειρίδια διδάσκονται με τρόπο αποσπασματικό (Κούρκουλος, 1998).

Αρκετές έρευνες έχουν διενεργηθεί με σκοπό την ανάλυση κάποιων όψεων των διαδικασιών εκτίμησης ή ελέγχου (βλ. σχετικά §4.2). Επίσης, σε ό,τι αφορά τους αλγορίθμους των τεσσάρων αριθμητικών πράξεων, έχουν υλοποιηθεί έρευνες που αφορούν στην επίδραση των διδακτικών παρεμβάσεων με θέμα την εκτίμηση πάνω στην επίδοση μαθητών ή ενηλίκων (Nelson 1967, Bestgen et al., 1980, Shcoen et al., 1981, DeCorte & Somers 1982, Edward 1984, Reys et al., 1984, Sowder & Markovits 1990). Ωστόσο, οι έρευνες αυτές είναι περιορισμένες σε χρονική διάρκεια και δε στηρίζονται σ' ένα οργανωμένο διδακτικό σχήμα που περιλαμβάνει όλους τους γνωστικούς παράγοντες που αποτελούν προαπαιτούμενες γνώσεις για την ανάπτυξη της εκτίμησης. Επίσης, δεν συνεξετάζονται οι διαδικασίες ελέγχου.

Με βάση αυτές τις διαπιστώσεις, επιχειρήσαμε να υλοποιήσουμε μια έρευνα, η οποία στηρίχθηκε σε μια διδακτική παρέμβαση σε μαθητές της Στ΄ Δημοτικού, ώστε να διερευνηθεί η συμπεριφορά και οι δυνατότητες των μαθητών σε ό,τι αφορά τα κριτήρια εκτίμησης και ελέγχου των αλγορίθμων των τεσσάρων αριθμητικών πράξεων.

Η έρευνα αυτή πλεονεκτεί σε σχέση με τις προηγούμενες έρευνες που προαναφέρθηκαν στο γεγονός ότι α) στηρίζεται σ' ένα οργανωμένο διδακτικό σχήμα που συμπεριλαμβάνει τη διδασκαλία των κριτηρίων εκτίμησης και ελέγχου, αλλά και των προαπαιτούμενων γνώσεων β) έχει τρίμηνη διάρκεια, με αποτέλεσμα να είναι εφικτή η εμφάνιση σταθερότερων συμπεριφορών από την πλευρά των μαθητών και η δυνατότητα ανάπτυξης μεγαλύτερων ικανοτήτων και γ) συνεξετάζει τα κριτήρια εκτίμησης και ελέγχου και προωθεί το γόνιμο συνδυασμό τους. Επίσης, είναι αξιοσημείωτο ότι μετά το πέρας της παρέμβασης ελέγχεται η επίδρασή της, τόσο πάνω στα κριτήρια εκτίμησης και ελέγχου, όσο και σε άλλες περιοχές των Μαθηματικών.

Η διδακτική παρέμβαση στηρίχθηκε στο θεωρητικό πλαίσιο της έρευνας, το οποίο διαμορφώθηκε σε μια προσπάθεια να εξεταστούν όσο το δυνατό περισσότερες όψεις του εξεταζόμενου θέματος.

Μέσα από την υλοποίηση της συγκεκριμένης έρευνας φιλοδοξούμε, πρώτο να συνειδητοποιήσουν οι εκπαιδευτικοί το μαθησιακό όφελος που απορρέει από την εκμάθηση και χρήση κριτηρίων εκτίμησης και ελέγχου και να παροτρυνθούν ώστε να ενσωματώσουν αυτή τη μαθηματική γνώση στο πλαίσιο της καθημερινής διδασκαλίας και δεύτερο να ευαισθητοποιηθούν οι συντάκτες αναλυτικών προγραμμάτων προς την κατεύθυνση αρμονικής ενσωμάτωσης των κριτηρίων αυτών.

2. ΤΑ ΚΙΝΗΤΡΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Το αρχικό κίνητρο για την ανάληψη και υλοποίηση αυτής της έρευνας προέκυψε από το άρθρο των Κούρκουλου και Τζανάκη (2000), το οποίο αφορά στα κριτήρια εκτίμησης και ελέγχου, στο ευρύτερο πλαίσιο της μαθηματικής και φυσικής δραστηριότητας. Ουσιαστικά γίνεται μια πολλαπλή κατηγοριοποίηση αυτών των κριτηρίων, με αναφορές σε στοιχεία που αντλούνται από την Ιστορία των Μαθηματικών. Μέσα από το άρθρο διαφαίνεται η έμφαση στη σημασία αυτών των κριτηρίων, σε αντιδιαστολή όμως με το διδακτικό κενό που παρατηρείται στο συγκεκριμένο θέμα.

Εξάλλου, έπειτα από την επισκόπηση του νέου αναλυτικού προγράμματος (Δ.Ε.Π.Π.Σ.) για τα Μαθηματικά (βλ. σχετικά §3.1), διαπιστώθηκε μια αντίφαση ανάμεσα στο περιεχόμενό τους και στην εκπαιδευτική πράξη, όπως υλοποιείται με βάση τα διδακτικά εγχειρίδια των Μαθηματικών: ενώ το αναλυτικό πρόγραμμα προβλέπει τη διδασκαλία ορισμένων κριτηρίων εκτίμησης (σε περιορισμένο βέβαια βαθμό βλ. §3.1), στα διδακτικά εγχειρίδια δεν υπάρχουν δραστηριότητες που να εξασκούν τους μαθητές σε τέτοιου είδους μαθηματικές διαδικασίες. Από την άλλη, σε ό,τι αφορά τα κριτήρια ελέγχου, το έλλειμμα παρουσιάζεται τόσο στο αναλυτικό πρόγραμμα., όσο και στα διδακτικά εγχειρίδια, τα οποία περιορίζονται μόνο στις δοκιμές των πράξεων, οι οποίες μάλιστα σύντομα εγκαταλείπονται (Κούρκουλος, 1998, σ. 80).

Επίσης, μέσα από διδακτικές έρευνες διαπιστώθηκε η ανάγκη των μαθητών να μπορούν να προβλέψουν προσεγγιστικά το αποτέλεσμα μιας πράξης, χωρίς να την εκτελέσουν. Ακόμη, διαπιστώθηκε η σημαντικότητα των διαδικασιών ελέγχου και το μαθησιακό όφελος που προκύπτει από τη χρήση τους, καθώς οι μαθητές, αφενός μειώνουν τα λάθη τους και εκτελούν σωστά τον αλγόριθμο και αφετέρου κατανοούν τον ίδιο τον αλγόριθμο (Sowder, 1992, Reys et al., 1982).

Εξάλλου, η καθημερινή πραγματικότητα μας οδήγησε στη συνειδητοποίηση της σημασίας της εκτίμησης του αποτελέσματος μιας πράξης, καθώς σε ποικίλες ανθρώπινες δραστηριότητες, όπου δεν υπάρχει η πολυτέλεια της χρήσης υπολογιστή ή χαρτιού και μολυβιού ή ο χρόνος δεν είναι επαρκής για την εκτέλεση της πράξης, προκύπτει η ανάγκη για γρήγορη εκτίμηση του αποτελέσματος. Για παράδειγμα, η εκτίμηση του κόστους διάφορων βιβλίων στο βιβλιοπωλείο και η απόφαση για το αν τα χρήματα που διαθέτουμε είναι επαρκή (Sowder, 1992, p. 371).

Τέλος, η εκτεταμένη χρήση των ηλεκτρονικών υπολογιστών και ο κίνδυνος που ελλοχεύει στο να καταστήσει το χρήστη του παθητικό, οδήγησε στην ανεύρεση μεθόδων που συνιστούν μια ενεργητική στάση απέναντί του, ώστε να υπάρχει έλεγχος των δεδομένων που εισάγονται και των αποτελεσμάτων που εξάγονται (Bestgen et al., 1980, p. 124, Levine, 1982, p. 350). Τις περισσότερες φορές γίνεται παθητική αποδοχή των αποτελεσμάτων που δίνει ο υπολογιστής τσέπης ή ο Η/Υ, χωρίς όμως να γίνεται αντιληπτό ότι ενδεχόμενο σφάλμα στην εισαγωγή των δεδομένων (π.χ. λάθος τοποθέτηση της υποδιαστολής, λάθος αριθμός των μηδενικών) μπορεί να οδηγήσει στην παραγωγή εσφαλμένου αποτελέσματος. Αν ο χρήστης δεν διαθέτει ανεξάρτητους τρόπους ελέγχου του αποτελέσματος τότε κινδυνεύει να υποπέσει σε σφάλμα. Έτσι, η εκτίμηση του μεγέθους του αποτελέσματος σε κάποια τάξη μεγέθους, η εκτίμηση της σχέσης του αποτελέσματος με τους όρους της πράξης (κριτήρια διάταξης) και εκ των υστέρων ο έλεγχος του αποτελέσματος σε σύγκριση με την αρχική πρόβλεψη, παρεμποδίζει την ουδετερότητα και παθητικότητα που προαναφέρθηκε και σηματοδοτεί την αλληλεπίδραση μεταξύ ανθρώπινου δυναμικού και υλικού υποστηρίγματος. Οι υπολογιστές σύμφωνα με τους Ράπτη και Ράπτη (2001) θα πρέπει να χρησιμοποιούνται ως γνωστικά εργαλεία[2] που χαρακτηρίζονται από την αλληλεπιδραστικότητά τους με το μαθητευόμενο ή το χρήστη γενικότερα και την εμπλοκή του υποκειμένου στη μαθησιακή διαδικασία. Αυτό που προέχει είναι η δράση των μαθητών και η άμεση ανάδραση σε ό,τι εισάγεται και εξάγεται απ' αυτούς.

Οι παράγοντες που προαναφέρθηκαν αποτελούν τα κίνητρα και τις συνισταμένες που μας ώθησαν στην ανάληψη και πραγματοποίηση της συγκεκριμένης έρευνας, ορίζοντας ταυτόχρονα το πλαίσιο για τη βαθιά θεωρητική και εμπειρική διερεύνηση του θέματος που εξετάζεται.

[2] "Νοητικά ή γνωστικά εργαλεία" ονομάζονται τα μαθησιακά εργαλεία που περιλαμβάνουν γνωστικές διαδικασίες και μπορούν να συμβάλλουν στην ανάπτυξη της δημιουργικής μάθησης (Ράπτης – Ράπτη, 2001, σ. 58).

3. ΚΑΘΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

3.1 Οριοθέτηση του προβλήματος

Έρευνες διδακτικού περιεχομένου καταδεικνύουν τη σημασία των διαδικασιών εκτίμησης και ελέγχου. Τα οφέλη που προκύπτουν από τη χρήση κριτηρίων εκτίμησης και ελέγχου είναι πολλαπλά (βλ. σχετικά §7.5). Η χρήση κριτηρίων ελέγχου συνιστά δομικό στοιχείο της αυτοδιόρθωσης, της μεταγνώσης και οδηγεί στην καλύτερη εκμάθηση και κατανόηση μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών (Pluvinage, 1983, Regnier, 1983, Κούρκουλος, 1996, 1998). Εξάλλου, οι διαδικασίες εκτίμησης του αποτελέσματος των αριθμητικών πράξεων συντελούν στην κατανόηση της έννοιας των αριθμών και των ιδιοτήτων τους (Rubenstein, 1985, Case & Sowder, 1990, Sowder, 1992) και συμβάλλουν στην απόκτηση Μαθηματικής Παιδείας (Τζανάκης, 1998, Τζανάκης και Κούρκουλος, 2000β), ενώ συχνά μπορούν να υποκαταστήσουν τον ίδιο τον αλγόριθμο, καθώς δεν απαιτούν υλικό υποστήριγμα και δίνουν ταχύτερα αποτελέσματα απ' ότι η χρήση "χαρτιού και μολυβιού" ή αριθμομηχανής (Κούρκουλος και Τζανάκης, 2000).

Ωστόσο, παρόλο που από την παραγωγή και χρήση κριτηρίων εκτίμησης και ελέγχου απορρέει σημαντικό όφελος, φαίνεται ότι η διδακτική τους αξία αγνοείται, τόσο από τους συντάκτες αναλυτικών προγραμμάτων, όσο και από τους λειτουργούς της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης.

Διδακτικές έρευνες που έχουν διενεργηθεί τις τελευταίες δεκαετίες, αποκαλύπτουν το διδακτικό κενό που παρατηρείται σε ό,τι αφορά τη γνώση και την ικανότητα εφαρμογής τέτοιων κριτηρίων (Levine, 1982, Reys et al., 1991, Κούρκουλος, 1996, 1997).

Το Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών (Δ.Ε.Π.Π.Σ.) του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου, το νέο επίσημο αναλυτικό πρόγραμμα από τον Οκτώβρη του 2001 (Φ.Ε.Κ. 1336 τόμος Β' 18-10-2001) που στηρίζεται στη διαθεματική προσέγγιση, προβλέπει τη διδασκαλία ελάχιστων κριτηρίων εκτίμησης και ελέγχου, τα οποία μάλιστα αντιμετωπίζει μάλλον επιδερμικά.

Συγκεκριμένα:

- Για την Α΄, Β΄, Γ΄ και Δ΄ τάξη του Δημοτικού σχολείου το αναλυτικό πρόγραμμα προβλέπει ότι για την πρόσθεση και αφαίρεση ακεραίων οι μαθητές θα πρέπει να μπορούν "να διακρίνουν ότι η πρόσθεση και η αφαίρεση είναι αντίστροφες πράξεις, να εξοικειωθούν με τις αντίστοιχες ιδιότητές τους, να κάνουν επαλήθευση των πράξεων αυτών με την αντίστροφη πράξη τους" (σσ. 312, 316, 319, 323).
- Για την Δ΄ και Ε΄ τάξη προβλέπει ότι οι μαθητές θα πρέπει να "γνωρίσουν τον αλγόριθμο της Ευκλείδειας Διαίρεσης δύο φυσικών, τον τύπο $Δ=δ·π+υ$, $0≤υ<δ$ και με τη βοήθεια του τύπου αυτού να κάνουν τη δοκιμή της διαίρεσης, να γνωρίσουν ότι ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση είναι αντίστροφες πράξεις, να μπορούν να ελέγχουν το αποτέλεσμα της διαίρεσης με δοκιμή (σσ. 324, 327).
- Για την Ε΄ και Στ΄ τάξη οι μαθητές θα πρέπει να "στρογγυλοποιούν φυσικούς (και δεκαδικούς για την Στ΄), όπου είναι δυνατόν, να ελέγχουν προσεγγιστικά το αποτέλεσμα μιας πράξης -για την Στ΄ τάξη προβλέπεται προσεγγιστικός υπολογισμός στην εκτίμηση ενός αποτελέσματος, πριν, μετά ή χωρίς την πραγματοποίηση μιας πράξης (σσ. 327, 332).

Παρόλο που το νέο αναλυτικό πρόγραμμα προβλέπει τη διδασκαλία κάποιων κριτηρίων ελέγχου και εκτίμησης, ωστόσο:

- Δεν υπάρχει ούτε μία αναφορά για ικανότητα των μαθητών να επαληθεύουν το αποτέλεσμα μιας αριθμητικής πράξης μέσα από άλλες πλήρεις δοκιμές εκτός της αντίστροφης πράξης ή από κριτήρια που βασίζονται στις ιδιότητες των ισοϋπόλοιπων αριθμών. Εξάλλου, δεν υπάρχει καμία αναφορά στους δεκαδικούς αριθμούς και τα κλάσματα. Οι δοκιμές, σύμφωνα λοιπόν με το αναλυτικό πρόγραμμα, αφορούν στους ακέραιους αριθμούς.
- Οι διδακτικές ώρες που προβλέπονται για τη διδασκαλία της στρογγυλοποίησης και τον προσεγγιστικό υπολογισμό του μεγέθους των αποτελεσμάτων των πράξεων είναι μόνο 4 ώρες για την Ε΄ τάξη και 2 ώρες για την Στ΄ τάξη.
- Το παράδοξο είναι ότι με ειδικό έντυπο οδηγιών το Υπουργείο Παιδείας καλεί τους εκπαιδευτικούς της Στ΄ τάξης να μη διδάξουν την στρογγυλοποίηση, αλλά να γίνεται χρήση της στρογγυλοποίησης κατά την επίλυση προβλημάτων, όπου είναι δυνατό (Συμπληρωματικές οδηγίες για τη διδασκαλία των Μαθηματικών στο Δημοτικό Σχολείο, Ο.Ε.Δ.Β., 2001, σ. 42).
- Σε ό,τι αφορά τα κριτήρια εκτίμησης, προβλέπεται ο προσεγγιστικός υπολογισμός μέσα από τη στρογγυλοποίηση των αριθμητικών δεδομένων με βάση το συνήθη κανόνα, χωρίς να δίνεται η δυνατότητα στους μαθητές να προσεγγίσουν το αποτέλεσμα με διαφορετικούς τρόπους.
- Δεν υπάρχει καμία αναφορά στα κριτήρια διάταξης.
- Εξάλλου, παρόλο που έχει διαμορφωθεί νέο αναλυτικό πρόγραμμα, τα διδακτικά εγχειρίδια δεν έχουν αλλάξει, ώστε να προσαρμοστούν στο περιεχόμενο του νέου αναλυτικού προγράμματος.

Έπειτα από την επισκόπηση των σχολικών εγχειριδίων, διαπιστώσαμε ότι προβλέπεται η διδασκαλία των πλήρων δοκιμών για τις τέσσερις πράξεις καθώς και το κριτήριο του σταυρού για τον πολλαπλασιασμό, ενσωματωμένα στην κύρια διδασκαλία των πράξεων και περιορίζονται σε μια διδακτική ώρα. Μόνο στο Α΄ τεύχος της Δ΄ τάξης που η δοκιμή της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού αντιμετωπίζονται σε χωριστή ενότητα (σσ. 58, 103). Αφού διδαχτούν οι βασικοί αλγόριθμοι και γίνει επίδειξη των δοκιμών, στη συνέχεια εγκαταλείπονται, δεν ζητείται πλέον από τους μαθητές να εκτελέσουν δοκιμές, παρά μόνο την επόμενη σχολική χρονιά, όταν θα ξαναδιδαχτεί ο ίδιος αλγόριθμος. Κατά συνέπεια, μαθητές και εκπαιδευτικοί, οι οποίοι λειτουργούν με γνώμονα το διδακτικό εγχειρίδιο κυρίως, αντιμετωπίζουν τις δοκιμές ως απομονωμένη γνώση. Πολύ περισσότερο, δεν μπορούν να αποκτήσουν θετική στάση στο να πραγματοποιούν ελέγχους στις διάφορες μαθηματικές διαδικασίες, αφού ούτε η σημαντικότητα των κριτηρίων ελέγχου τονίζεται, ούτε εθίζονται οι μαθητές σ' αυτή τη στάση. Εξάλλου, δεν προβλέπεται η διδασκαλία των δοκιμών για τους δεκαδικούς αριθμούς ή για τα κλάσματα. Ακόμη, μόνο στο Α΄ τεύχος της Ε΄ τάξης αναφέρεται το κριτήριο του υπολοίπου της διαίρεσης (σ. 34).

Το διδακτικό εγχειρίδιο της Ε΄ Δημοτικού απλά περιέχει μια διδακτική ενότητα που αναφέρεται αποκλειστικά στη στρογγυλοποίηση ακεραίων, χωρίς όμως να ζητείται σε ασκήσεις από τους μαθητές να κάνουν εκτίμηση αποτελεσμάτων αριθμητικών πράξεων. Επομένως, σε ό,τι αφορά τα κριτήρια εκτίμησης, αγνοούνται εντελώς από τα διδακτικά εγχειρίδια.

Έγκειται λοιπόν στην καλή θέληση και στην ικανότητα του κάθε εκπαιδευτικού – που συνήθως δεν λαμβάνει υπόψη του το αναλυτικό πρόγραμμα- να δώσει στους μαθητές δραστηριότητες σχετικές με την εκτίμηση αποτελεσμάτων.

Η απόρροια αυτού του γεγονότος είναι οι μαθητές να τελειώνουν το Δημοτικό σχολείο χωρίς να γνωρίζουν, και πολύ περισσότερο να χρησιμοποιούν, τέτοια κριτήρια (Κούρκουλος και Τζανάκης, 2000, σσ. 265-268).

Συνυφασμένο μ' αυτό το γεγονός είναι και το ότι οι μαθητές, ακόμα και οι απόφοιτοι του Δημοτικού σχολείου, κάνουν πολλά σφάλματα κατά την εκτέλεση των βασικών μαθηματικών αλγορίθμων, χωρίς παράλληλα να αποκτούν βαθιά κατανόησή τους (Μπασέτας, 1995). Εξάλλου δυσχεραίνεται η προσπάθεια επίλυσης προβλημάτων, ενώ δεν καλλιεργείται η κριτική τους σκέψη, καθώς εφαρμόζουν μηχανικά τα συγκεκριμένα βήματα των αλγορίθμων που έχουν διδαχθεί. Κατά συνέπεια μπαίνουν στο Γυμνάσιο, έχοντας ελλιπή μαθηματική παιδεία, όπου το διδακτικό κενό πιθανότατα θα διευρυνθεί (βλ. σχετικά Κούρκουλος, 1997).

Η εφαρμογή κριτηρίων εκτίμησης και ελέγχου σε αρκετές περιπτώσεις είναι αρκετά πολύπλοκη και είναι απαραίτητη η εφαρμογή ενός οργανωμένου διδακτικού σχήματος, ώστε να αποκτήσουν οι μαθητές τη γνώση αυτών των κριτηρίων και να μπορούν με ευχέρεια να τα χρησιμοποιούν (Κούρκουλος και Τζανάκης, 2000, σ. 265). Διδακτικές έρευνες που έχουν διενεργηθεί αποκαλύπτουν τη σημαντική επίδραση που μπορεί να έχει μια διδακτική παρέμβαση σε ό,τι αφορά τις διαδικασίες εκτίμησης (Nelson, 1967, Bestgen et al., 1980, Shcoen et al., 1981, DeCorte & Somers 1982, Edward 1984, Reys et al., 1984, Sowder & Markovits 1990) ή ελέγχου (Κούρκουλος, 1996, 1997, Kourkoulos & Keyling, 2000).

Έχοντας ως έρεισμα τις προηγούμενες διαπιστώσεις, το διδακτικό πρόβλημα της εν λόγω έρευνας οριοθετείται ως εξής:

Μπορεί η εφαρμογή ενός οργανωμένου διδακτικού σχήματος σε ένα συνηθισμένο τμήμα Στ΄ τάξης να οδηγήσει στην βελτίωση των μαθητών σε ό,τι αφορά τη χρήση κριτηρίων εκτίμησης και ελέγχου, και να έχει επίδραση στην εκτέλεση αλγορίθμων των τεσσάρων αριθμητικών πράξεων, αλλά και σε άλλες μαθηματικές περιοχές;

Με βάση το συγκεκριμένο διδακτικό πρόβλημα έγινε ο σχεδιασμός και η υλοποίηση της έρευνας, η οποία περιγράφεται στη συνέχεια.

3.2 Διασαφήνιση των όρων του προβλήματος (κριτήριο, εκτίμηση, έλεγχος, αλγόριθμος)

Πριν προβούμε στη περιγραφή και συστηματική ανάλυση του προβλήματος της έρευνας, κρίνεται σκόπιμο να γίνει διασαφήνιση των όρων του, προκειμένου να αποκρυσταλλωθεί η έννοιά τους, να αποφευχθούν τυχόν παρερμηνείες και συγχύσεις και να συνδεθεί το εννοιολογικό τους περιεχόμενο με τους σκοπούς, της υποθέσεις και τα αποτελέσματα της έρευνας. Στη συνέχεια παρατίθενται ορισμοί που έχουν δοθεί από διάφορους συγγραφείς και αντλούνται από την υπάρχουσα βιβλιογραφία, με ταυτόχρονη κριτική και συγκριτική ανάλυση αυτών των ορισμών, ενώ τέλος ακολουθεί ο ορισμός εκείνος που θα υιοθετηθεί για τις ανάγκες της παρούσας έρευνας. Οι ορισμοί, με την αυστηρή έννοια του όρου, που έχουν δοθεί είναι ελάχιστοι. Ωστόσο, μέσα από τα άρθρα που έχουν συγκεντρωθεί και εξεταστεί διαφαίνεται η αντιμετώπιση και η θεώρηση των όρων από τον εκάστοτε συγγραφέα. Παρακάτω λοιπόν γίνεται μια γενική θεώρηση αυτών των όρων, όπως έχουν προσεγγιστεί από τους διάφορους συγγραφείς.

Όσον αφορά στην εκτίμηση[3], οι Siegel, Goldsmith, Madson (1982, p. 211) αναφέρουν[4]: "η εκτίμηση είναι μια διαδικασία η οποία δίνει μια γενική, πρόχειρη λύση σ' ένα πρόβλημα μέτρησης αριθμών ή μεγεθών. Η εκτίμηση αρχίζει με ένα πρόβλημα του πραγματικού κόσμου και τελειώνει με μια μη ακριβή ποσοτική δήλωση π.χ. το μπισκότο είναι περίπου 2 ίντσες στο πλάτος". Αντιμετωπίζουν την εκτίμηση στη βάση ενός μοντέλου το οποίο περιλαμβάνει δύο σχετιζόμενες διαδικασίες: την εκτίμηση με τη χρήση σημείων αναφοράς (π.χ. για την εκτίμηση του μήκους ενός μολυβιού χρησιμοποιείται ως μονάδα σύγκρισης η μία ίντσα και μπορούμε να αποφανθούμε ότι είναι περίπου 6 ίντσες) και την διαμέριση-επανένωση (διαμέριση σε μικρότερα δείγματα ώστε να είναι δυνατή η χρήση σημείου αναφοράς και η επανένωση των μικρότερων δειγμάτων με σκοπό την τελική εκτίμηση). Μια τέτοια προοπτική, η οποία ασφαλώς αναφέρεται στην εκτίμηση μετρήσεων και πληθικότητας, αντιμετωπίζει την εκτίμηση ως μια καθαρά γνωστική διαδικασία και μάλιστα δοσμένη με τρόπο αποσπασματικό, καθώς αποκόπτεται από άλλες μαθηματικές δραστηριότητες, ενώ δεν διαχωρίζει την εκτίμηση πληθικότητας, η οποία αναφέρεται σε διακριτές ποσότητες από την εκτίμηση μετρήσεων η οποία αναφέρεται σε συνεχείς ποσότητες (Sowder, 1992, p. 383).

Η Levine αντιμετωπίζει την εκτίμηση ως μια ικανότητα να εκτιμάς νοερά τα αποτελέσματα των ακριβών υπολογισμών (Levine, 1982, p. 350). Χωρίς να δίνει ένα τυπικό ορισμό ο Gliner (1991, p. 595) προσπαθεί να ορίσει την εκτίμηση ως μια ικανότητα να απαντάς σε ένα αριθμητικό πρόβλημα χωρίς να υπολογίζεις μια ακριβή απάντηση με χαρτί και μολύβι.

Η Dowker (1992, p. 45) ορίζει την εκτίμηση ως τη διαδικασία λογικών εικασιών (μάντεμα) με προσεγγιστικές απαντήσεις σε αριθμητικά προβλήματα, χωρίς την εκτέλεση των ακριβών υπολογισμών.

Η Sowder (1992, p.371), προσπαθώντας να αποσαφηνίσει την έννοια της εκτίμησης, παραθέτει μια σειρά ερωτήσεων και καταστάσεων που απαιτούν την παραγωγή μιας εκτίμησης: "Έχω αρκετά χρήματα να πληρώσω αυτά τα βιβλία; Πόση μπογιά θα χρειαστώ για να βάψω αυτό το δωμάτιο; Πόσοι άνθρωποι είναι στο στάδιο; πόσο ξοδεύω για βενζίνη την εβδομάδα; πόση ώρα θα μου πάρει να οδηγήσω μέχρι τον οδοντογιατρό;" Οι απαντήσεις σ' αυτά τα ερωτήματα αποτελούν εκτίμηση των αποτελεσμάτων των ακριβών υπολογισμών, εκτίμηση μεγεθών, εκτίμηση πλήθους.

Οι Κούρκουλος και Τζανάκης (2000, σ. 265) αναφέρουν ότι: "στις διαδικασίες εκτίμησης συμπεριλαμβάνουμε όλες εκείνες τις δραστηριότητες που συντελούνται **πριν** από τη σύλληψη, επιλογή ή υλοποίηση μιας μαθηματικής δραστηριότητας".

Όσον αφορά στην έννοια του ελέγχου, ο Κούρκουλος (1998), όπως και οι Κούρκουλος και Keyling (2001), χωρίς να δίνει τυπικό ορισμό, αντιμετωπίζει τον έλεγχο ως διαδικασία αυτοδιόρθωσης κατά την οποία γίνεται εντοπισμός τυχόν σφαλμάτων και παραγωγή εναλλακτικών προτάσεων για τη διόρθωσή τους. Θεωρεί ότι πρόκειται για μια

---

[3] Αναφερόμαστε στην εκτίμηση των αποτελεσμάτων των βασικών αλγορίθμων μολονότι κάποιοι συγγραφείς προσπαθούν να αποκρυσταλλώσουν τη γενική της έννοια που περιλαμβάνει και τα τρία είδη (εκτίμηση των αποτελεσμάτων υπολογισμών, εκτίμηση πληθικότητας, εκτίμηση μεγεθών – μήκους, επιφάνειας, όγκου κλπ. (βλ. σχετικά παρακάτω §4.1).

[4] Οι παραθέσεις χωρίων από άρθρα ξένων συγγραφέων είναι σε μετάφραση δική μας.

δυναμική διαδικασία, καθώς για να λάβει χώρα πρέπει ο μαθητής τόσο να διαθέτει κριτήρια ελέγχου, όσο και να τα ενεργοποιεί.

Ο Pluvinage (1983) υιοθετεί την έννοια του *διπλού προγραμματισμού*, (με ταυτόσημη την έκφραση *εναλλακτικά προγράμματα παραγωγής της απάντησης* που χρησιμοποιεί ο Κούρκουλος, 1998). Πρόκειται για διαφορετικούς τρόπους που μπορεί να χρησιμοποιηθούν για την εύρεση της λύσης και οι οποίοι είναι δυνατό να αποτελέσουν κριτήρια ελέγχου του αποτελέσματος που βρέθηκε με τη χρήση του βασικού αλγόριθμου. Για παράδειγμα, για τον πολλαπλασιασμό ή τη διαίρεση ακεραίων και δεκαδικών με αρνητικές δυνάμεις του 10, εκτός από την εφαρμογή του μνημονικού κανόνα κατά τον οποίο γίνεται μεταφορά της υποδιαστολής μπορεί να χρησιμοποιηθεί και η μετατροπή των δεκαδικών – του ενός, ή και των δύο – σε κλάσματα.

Ο Flauvell (1976, σ. 232) θεωρεί τον έλεγχο ως τμήμα μεταγνωστικών διαδικασιών: "η μεταγνώση αναφέρεται στη γνώση κάποιου σχετικά με τις γνωστικές του διαδικασίες, ή οτιδήποτε σχετίζεται με αυτές, για παράδειγμα αν γνωρίζω ότι έχω μεγαλύτερο πρόβλημα να μάθω το Α από το Β. Η μεταγνώση αναφέρεται εξάλλου και στον *ενεργητικό έλεγχο* και συνακόλουθη ρύθμιση και οργάνωση αυτών των διαδικασιών σε σχέση με τα γνωστικά αντικείμενα στα οποία στηρίζονται, συνήθως στην υπηρεσία κάποιου ειδικού ή αντικειμενικού σκοπού". Ωστόσο ο ορισμός αναφέρεται γενικά στη μεταγνώση και όχι εξειδικευμένα στις διαδικασίες ελέγχου, αντιμετωπίζοντάς τις στο πλαίσιο της θεώρησης της μεταγνώσης.

Οι Garofalo και Lester (1985) προτείνουν ένα "γνωστικό – μεταγνωστικό" πλαίσιο προσπαθώντας να τονίσουν σημεία – κλειδιά που υποδηλώνουν την επίδραση που μπορούν να ασκήσουν οι μεταγνωστικές αποφάσεις στη γνωστική δράση. Αυτό το πλαίσιο, το οποίο υιοθετείται και από τους Stillman και Galbraith (1980) αποτελείται από τέσσερις κατηγορίες ενεργειών: *προσανατολισμός, οργάνωση, εκτέλεση, επαλήθευση.*

Ο Schoenfeld (1985a, p. 33) αναφέρεται στον *αποτελεσματικό έλεγχο* λέγοντας ότι ένα σημαντικό κομμάτι του αποτελείται από τον περιοδικό έλεγχο και την αποτίμηση των λύσεων, όπως εκτυλίσσονται και την περικοπή των προσπαθειών που κρίνονται ακατάλληλες.

Ωστόσο τον πληρέστερο ορισμό δίνουν οι Κούρκουλος και Τζανάκης (2000, σ. 265): "στις διαδικασίες ελέγχου συμπεριλαμβάνονται οι δραστηριότητες εκείνες που συντελούνται **μετά** την υλοποίηση μιας μαθηματικής δραστηριότητας", συνδέοντας έτσι την έννοια της εκτίμησης με την έννοια του ελέγχου και θεωρώντας τις κάτω από το πρίσμα ενός ενιαίου ορισμού ως "όψεις του ίδιου νομίσματος".

Προκειμένου να αποσαφηνιστεί πλήρως το πεδίο γύρω από την έννοια του ελέγχου, θα πρέπει να σημειωθεί ότι στις διαδικασίες ελέγχου εμπίπτει και η μαθηματική απόδειξη, η οποία αναφέρεται στον έλεγχο της ορθότητας μιας πρότασης. Σύμφωνα με εργασίες ερευνητών μια από τις λειτουργίες της απόδειξης είναι η επαλήθευση, η εξακρίβωση της αλήθειας μιας πρότασης (Bell 1976, de Villiers 1990, 1999, Hanna & Jahnke 1996) ή ενός αποτελέσματος (Almeida, 2001).

Σύμφωνα με τους Clements και Battista (1992, p. 437) η απόδειξη χρησιμοποιείται από τους μαθηματικούς για την εύρεση της αλήθειας.

Ο Bell (1976) διακρίνει τις λειτουργίες της μαθηματικής απόδειξης: την *επαλήθευση*, δηλαδή την εξακρίβωση της αλήθειας μιας πρότασης, τη *διασαφήνιση*, δηλαδή την αιτιολόγηση της αλήθειας μιας πρότασης και τη *συστηματοποίηση*, δηλαδή την οργάνωση των προτάσεων σε ένα απαγωγικό-αφαιρετικό σύστημα.

Ο Balacheff (1987, 1988a, 1988b) προσδιόρισε τρία επίπεδα της μαθηματικής απόδειξης, με βάση τη φύση των εννοιών που διαπραγματεύονται, το σχηματισμό τους και την εγκυρότητά τους. Πρόκειται για α) *τις πραγματικές αποδείξεις*, β) *τις διανοητικές αποδείξεις*, και γ) *την απόδειξη που στηρίζεται στον απαγωγικό συλλογισμό*.

α) Το χαμηλότερο επίπεδο είναι οι πραγματικές αποδείξεις οι οποίες εμπεριέχουν δύο τύπους αποδείξεων: τον *απλοϊκό εμπειρισμό*, με τη βαρύτητα ενδείξεων από ένα αριθμό περιπτώσεων και τον *αποφασιστικό πειραματισμό*, με τον έλεγχο της ισχύος σε μια συγκεκριμένη περίπτωση[5] (1988a, p. 217).

β) Το μεσαίο επίπεδο είναι οι διανοητικές αποδείξεις και περιλαμβάνει αυτές που δεν συνεπάγονται δράση, αλλά στηρίζονται στις ιδιότητες και στην αναζήτηση σχέσεων μεταξύ τους και εμπεριέχουν δύο τύπους αποδείξεων: το *γενικό παράδειγμα* και το *συλλογιστικό πειραματισμό*, ο οποίος είναι ανεξάρτητος από παραδείγματα[6] (1988a, p. 217).

γ) Το πιο αναπτυγμένο επίπεδο είναι η απόδειξη που στηρίζεται στον απαγωγικό συλλογισμό και απαιτεί συγκεκριμένο πλαίσιο γνώσεων το οποίο πρέπει να οργανωθεί σε μια θεωρία και να αναγνωριστεί, όπως η εγκυρότητα των ορισμών, θεωρημάτων και αφαιρετικών κανόνων (1987, p. 30).

Σύμφωνα με το Miyazaki (2000) απόδειξη με απαγωγικό συλλογισμό σημαίνει "τις ανθρώπινες δραστηριότητες για την αιτιολόγηση μιας πρότασης από υποθέσεις απαγωγικά και την αναπαράσταση της αιτιολόγησης με τυπική γλώσσα" (σ. 66). Υπάρχει μεγάλη απόσταση μεταξύ του απαγωγικού συλλογισμού και της φυσικής επαγωγής (όπως π.χ. με παραδείγματα) η οποία περιέχει στοιχεία εμπειρισμού και άτυπη επιχειρηματολογία και μπορεί να εφαρμοστεί και στις φυσικές επιστήμες (ή της αναλογίας). Η απόδειξη που στηρίζεται στον απαγωγικό συλλογισμό προϋποθέτει την οργάνωση μιας επιχειρηματολογίας-διαδικασίας για την παραγωγή μιας λογικής συζήτησης για ένα αντικείμενο. Η απόδειξη με επαγωγή προσομοιάζει με την απόδειξη η οποία σύμφωνα με την κοινωνική λογική στηρίζεται στην παροχή πειστηρίων (π.χ. σε ένα δικαστήριο) ενώ η απόδειξη που στηρίζεται στον απαγωγικό συλλογισμό προϋποθέτει την οργάνωση μιας σωρευτικής επιχειρηματολογίας που βασίζεται σε αξιώματα και θεωρήματα με αναγνωρισμένη εγκυρότητα. Η διαδικασία της απόδειξης είναι σύνθετη και περιλαμβάνει προσδιορισμό των υποθέσεων, απομόνωση δοσμένων ιδιοτήτων και δομών και οργάνωση λογικών επιχειρημάτων (Healy & Hoyles, 2000, p. 396).

Για μια συστηματικότερη ανάπτυξη της σχέσης απαγωγικού συλλογισμού και επαγωγικής αιτιολόγησης βλ. Τζανάκης και Κούρκουλος 1999, §3, 4, 2000α, §2.1, 3.

Η μαθηματική απόδειξη αποτελεί κριτήριο ελέγχου της ορθότητας μιας πρότασης. Ωστόσο, εμείς θα περιορίσουμε την έρευνά μας σε κριτήρια ελέγχου που αφορούν σε γνωστούς αλγορίθμους των οποίων η ορθότητα δεν αμφισβητείται. Κατ' αυτή την έννοια η μαθηματική απόδειξη δεν εμπίπτει στο αυστηρό πλαίσιο της συγκεκριμένης εργασίας.

[5] Για παράδειγμα για την απόδειξη της πρότασης "ο αριθμός των διαγωνίων ενός πολύγωνου είναι $\frac{n\cdot(n-3)}{2}$ κάποιος μπορεί να κάνει τον έλεγχο για ένα εικοσάγωνο και να επεκτείνει την ισχύ της πρότασης για όλες τις περιπτώσεις (αποφασιστικός πειραματισμός).

[6] Στο προηγούμενο παράδειγμα η εξήγηση γιατί κάθε κορυφή έχει n-3 διαγώνιους και γιατί το n·(n-3) διαιρείται με το 2 προέρχεται από το συλλογιστικό πειραματισμό.

Σύμφωνα με τη συνοπτική παρουσίαση των ορισμών που έχουν δοθεί στο εύρος της υπάρχουσας βιβλιογραφίας, είτε σε επίπεδο τυπικού ορισμού, είτε μέσα από στοιχεία που αντλούνται από την αρθρογραφία που έχει επιλεχθεί και συγκεντρωθεί, την κριτική και συγκριτική ανάλυσή τους, μπορούμε να υιοθετήσουμε τον ακόλουθο ορισμό για τις ανάγκες της παρούσας έρευνας, ο οποίος δόθηκε από τους Κούρκουλο και Τζανάκη (2000, σ. 265): **στις διαδικασίες εκτίμησης συμπεριλαμβάνονται όλες οι δραστηριότητες που σχετίζονται με τον προσδιορισμό (μέρους) του αποτελέσματος μιας μαθηματικής δραστηριότητας και οι οποίες συντελούνται πριν τη σύλληψη, επιλογή και υλοποίηση μιας μαθηματικής δραστηριότητας, ενώ στις διαδικασίες ελέγχου συμπεριλαμβάνονται τέτοιες δραστηριότητες που συντελούνται μετά την υλοποίησή της.** Επίσης υπάρχουν ορισμένες δραστηριότητες κατά τη διάρκεια των οποίων μπορεί να λάβουν χώρα διαδικασίες εκτίμησης και ελέγχου. Για να γίνει αυτό κατανοητό αναφέρουμε την περίπτωση εκτίμησης του αποτελέσματος μιας διαίρεσης, πριν ασφαλώς αυτή εκτελεστεί, ενώ κατά τη διάρκεια εκτέλεσής της μπορούμε να προβούμε σε εκτίμηση του αποτελέσματος ενός μερικού πολλαπλασιασμού, για την εκτίμηση του μερικού πηλίκου. Το ίδιο ισχύει και για τις διαδικασίες ελέγχου. Μετά την εκτέλεση μιας διαίρεσης ακολουθεί η επαλήθευσή της με ένα κριτήριο ελέγχου, ενώ κατά τη διάρκεια εκτέλεσής της μπορούμε να εφαρμόσουμε κριτήριο ελέγχου προκειμένου να ελέγξουμε την ορθότητα ενός πολλαπλασιασμού.

Τα *κριτήρια εκτίμησης και ελέγχου* αποτελούν δραστηριότητες ή προτάσεις οι οποίες ανακαλούνται και εφαρμόζονται προκειμένου να υλοποιηθεί η εκτίμηση ή ο έλεγχος μιας μαθηματικής δραστηριότητας. Ο όρος *κριτήρια* χρησιμοποιείται από τους Κούρκουλο και Τζανάκη (2000), Κούρκουλο και Keyling (2001), ενώ σε παλιότερη αρθρογραφία χρησιμοποιούνται οι όροι τεχνικές, στρατηγικές (Bestgen 1980, Levine 1982, Reys 1991, Gliner 1991, Sowder 1992, Hanson 2000), διαδικασίες (Reys 1982, Forrester 1998). Ο όρος *κριτήριο* υιοθετείται στη συγκεκριμένη έρευνα, καθώς διαφοροποιείται από τις έννοιες τεχνική, στρατηγική, διαδικασία στο ότι αποτελεί ένα μέτρο και γνώμονα, βάσει του οποίου μπορούμε να εκφέρουμε άποψη για το αποτέλεσμα μιας μαθηματικής δραστηριότητας, χωρίς να την εκτελέσουμε (κριτήριο εκτίμησης) ή για την ορθότητα του αποτελέσματος μετά την υλοποίησή της (κριτήριο ελέγχου).

Αλγόριθμος είναι μια βήμα προς βήμα προσδιορισμένη διαδικασία βάσει της οποίας πραγματοποιείται μια δραστηριότητα με στόχο ένα συγκεκριμένο αποτέλεσμα, το οποίο αποτελεί τη λύση, ή την απάντηση σε μια συγκεκριμένη κατηγορία προβλημάτων (Liu 1999, Chabert 1999, Penrose 1994, 1998).

Έτσι, στη συγκεκριμένη έρευνα αναφερόμαστε στους αλγορίθμους των τεσσάρων αριθμητικών πράξεων, ενώ θα ασχοληθούμε με τους ακέραιους και δεκαδικούς αριθμούς.

3.3 Σκοπός της έρευνας και επιμέρους στόχοι

Η σκοπιμότητα της έρευνας, σε συνάρτηση με το ερευνητικό πρόβλημα, όπως οριοθετήθηκε στην §3.1, συνίσταται αφενός μεν στη θεωρητική θεμελίωση όλων των όψεων του υπό εξέταση θέματος και αφετέρου στη διερεύνηση της συμπεριφοράς και των δυνατοτήτων των μαθητών της Στ΄ τάξης απέναντι στα κριτήρια εκτίμησης και ελέγχου.

Πιο συγκεκριμένα ο σκοπός της έρευνας είναι διττός:

(α) να διερευνηθούν και να αναλυθούν σε θεωρητικό επίπεδο όσο το δυνατό περισσότερες όψεις του εξεταζόμενου θέματος, ώστε να υπάρχει αποσαφήνιση του πεδίου, καθώς πρόκειται για ένα πολύπλευρο θέμα που απαιτεί λεπτομερή εξέταση όλων των δομικών του στοιχείων

(β) να διερευνηθεί η συμπεριφορά και οι δυνατότητες των μαθητών της Στ΄ τάξης σε σχέση με τα κριτήρια εκτίμησης και ελέγχου, μέσα στο πλαίσιο ενός οργανωμένου διδακτικού σχήματος, συναποτελούμενου από τα απαραίτητα δομικά στοιχεία που συνιστούν το θέμα, όπως προκύπτουν βάσει της θεωρητικής θεμελίωσης.

Από τον κεντρικό ερευνητικό σκοπό εκπορεύονται ειδικότεροι στόχοι:

*Σε σχέση με το **(α)**:*

- η ανίχνευση όσο το δυνατό περισσότερων στοιχείων που συνιστούν την εκτίμηση και τον έλεγχο
- η προσπάθεια για συστηματική και βαθιά ανάλυση καθεμιάς από τις πλευρές της εκτίμησης και του ελέγχου και η ερμηνεία της λειτουργίας τους
- η ανεύρεση συνεκτικών δεσμών, τόσο μεταξύ της εκτίμησης και του ελέγχου, όσο και των στοιχείων που τους προσδιορίζουν και των όψεων που τις χαρακτηρίζουν
- η καταγραφή και κατηγοριοποίηση των κριτηρίων εκτίμησης και ελέγχου

*Σε σχέση με το **(β)**:*

- η διερεύνηση της διδακτικής κατάστασης που επικρατεί σήμερα στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση, σε ό,τι αφορά τις διαδικασίες εκτίμησης και ελέγχου στις τέσσερις αριθμητικές πράξεις, τόσο σε επίπεδο Αναλυτικών Προγραμμάτων και διδακτικών εγχειριδίων, όσο και σε επίπεδο σχολικής – διδακτικής πραγματικότητας
- ο έλεγχος της επίδρασης ενός οργανωμένου διδακτικού σχήματος, βασισμένου στη θεωρητική θεμελίωση του θέματος, πάνω στα κριτήρια εκτίμησης και ελέγχου στην επίδοση των μαθητών στο συγκεκριμένο θέμα
- ο έλεγχος της επίδρασης στη συμπεριφορά των μαθητών και η ενδεχόμενη παρατήρηση στοιχείων που διερευνήθηκαν στο θεωρητικό πλαίσιο
- ο έλεγχος της επίδρασης σε άλλες μαθηματικές περιοχές
- ο έλεγχος της επίδρασης στη γενικότερη στάση των μαθητών απέναντι στο σύνολο της μαθηματικής δραστηριότητας.

4. ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

4.1. Είδη εκτίμησης

Η υπάρχουσα βιβλιογραφία που αφορά στην εκτίμηση γενικότερα αναλώνεται σε τρία βασικά είδη εκτίμησης τα οποία διαφοροποιούνται μεταξύ τους με βάση το εννοιολογικό τους περιεχόμενο: α)*στην εκτίμηση των αποτελεσμάτων πράξεων,* β)*στην εκτίμηση πληθικότητας* και γ)*στην εκτίμηση μετρήσεων.* Κάθε είδος όμως απαιτεί διαφορετικά είδη κατανόησης και διαφορετικές ικανότητες (Sowder, 1992, p. 371, Forrester, 1998, pp. 334-335). Ωστόσο, τα είδη εκτίμησης δεν περιορίζονται μόνο στα παραπάνω, αλλά επεκτείνονται στο σύνολο της μαθηματικής δραστηριότητας (π.χ. εκτίμηση του κόστους εφαρμογής αλγορίθμων ή και κριτηρίων, εκτίμηση των ιδιοτήτων μιας μεταβλητής μετά από εκτίμηση του μέσου όρου, εκτίμηση της πιθανότητας ενός γεγονότος κ.ά. Παρακάτω αναλύονται μερικά από τα κυριότερα είδη εκτίμησης:

4.1.1 Εκτίμηση των αποτελεσμάτων των πράξεων

Όσον αφορά στην εκτίμηση των αποτελεσμάτων των πράξεων, η Sowder (1992, p. 371) προσπαθεί να καταστήσει περισσότερο κατανοητή την έννοιά της με την παράθεση ερωτημάτων τα οποία αντλούνται από προβληματικές καταστάσεις του καθημερινού μας βιωματικού χώρου. Έτσι, ερωτήματα όπως "έχω αρκετά μετρητά να πληρώσω αυτά τα βιβλία; Πόσα χρήματα ξοδεύω για βενζίνη την εβδομάδα;" Εμπεριέχουν τη διαδικασία της εκτίμησης, καθώς δεν μας ενδιαφέρει μια ακριβής απάντηση. Στην πρώτη περίπτωση, απλώς μια θετική ή αρνητική απάντηση μας ικανοποιεί, ενώ στη δεύτερη αναζητούμε μια εικονική τιμή, καθώς είναι πρακτικά αδύνατο κάθε εβδομάδα να ξοδεύουμε ακριβώς τα ίδια χρήματα. Αξίζει να σημειωθούν κάποιες άλλες προβληματικές καταστάσεις της καθημερινής ζωής, όπου η αναζήτηση μιας προσεγγιστικής τιμής μέσα από τη διαδικασία της εκτίμησης είναι περισσότερο χρήσιμη παρά την εύρεση της ακριβούς λύσης σε συνδυασμό με το μικρό σχετικά κόστος εφαρμογής διαδικασιών εκτίμησης. Για παράδειγμα "ένα παιδί θέλει να αγοράσει 24 γραμματόσημα καθένα από τα οποία κοστίζει 29€. Του φτάνουν τα χρήματα που έχει για να αγοράσει τα γραμματόσημα;". Είναι προφανές ότι σ' αυτή την περίπτωση απλά θέλουμε να ελέγξουμε με γρήγορο και εύκολο τρόπο αν το χρηματικό ποσό που διαθέτουμε είναι αρκετό για να πραγματοποιήσουμε την αγορά μας, πολύ περισσότερο από το να υπολογίσουμε το ακριβές αποτέλεσμα. Επίσης στην εξής περίπτωση: "ο συνολικός λογαριασμός φαγητού σε ένα εστιατόριο είναι 148€. Τι ποσό καλείται να πληρώσει καθένα από τα 12 άτομα της παρέας;". Ασφαλώς ψάχνουμε μια ενδεικτική τιμή και μάλιστα μεγαλύτερη από την πραγματική, ώστε να μείνουν χρήματα για φιλοδώρημα. Δεν μας ενδιαφέρει το ακριβές αποτέλεσμα, καθώς σχεδόν σε καθένα από τα 12 άτομα έπρεπε να δίνονται ρέστα.

Η εκτίμηση σε υπολογισμούς αναφέρεται σε προβλήματα με αριθμητικά δεδομένα, σε αριθμητικές πράξεις χωρίς συγκείμενο, σε αριθμητικές σχέσεις, στατιστικά μεγέθη (μέσος όρος, τυπική απόκλιση κ.ά.). Για παράδειγμα: πόσο περίπου κάνει $1482 \cdot 5684$, τι ποσοστό περίπου του 359 είναι το 18, ποιος είναι περίπου ο μέσος όρος των αριθμών 15, 28, 350, 114.

Η πιο συνηθισμένη διαδικασία προκειμένου να γίνει εκτίμηση ενός υπολογισμού είναι αρχικά η τροποποίηση των δεδομένων κατά προσέγγιση σε άλλους με πιο εύχρηστη μορφή και στη συνέχεια ο νοερός υπολογισμός των νέων δεδομένων (Sowder 1992). Έτσι για παράδειγμα για την εκτίμηση του γινομένου 29·42 στρογγυλοποιούμε και τους δύο παράγοντες, οπότε προκύπτει ο νέος πολλαπλασιασμός 30·40 του οποίου το αποτέλεσμα υπολογίζεται εύκολα νοερά.

Επίσης, σ' αυτή την κατηγορία εκτίμησης ο Rubenstein (1983, 1985) συμπεριλαμβάνει δραστηριότητες που απαιτούν αποφάσεις για το αν ένα αποτέλεσμα είναι λογικό, αν η απάντηση που δίνουμε είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη από το ακριβές αποτέλεσμα, αν η απάντηση είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη από ένα δοσμένο αριθμό αναφοράς ή αν η απάντηση είναι της σωστής τάξης μεγέθους. Για παράδειγμα στο πρόβλημα: "πόσο περίπου κοστίζουν τα 25 μολύβια αν το ένα κάνει 32 λεπτά;", αν πάρουμε τους στρογγυλοποιημένους παράγοντες (30·30) το γινόμενο είναι 900 λεπτά=9€. Είναι λογικό να στοιχίζουν 9 ευρώ τα μολύβια; Το γινόμενο 25·32 αντιστοιχεί σε τριψήφιο αριθμό; Είναι η απάντηση μεγαλύτερη ή μικρότερη από το ακριβές αποτέλεσμα; Δηλαδή έχουμε βάλει περισσότερα ή λιγότερα;

Βέβαια, το ερώτημα που ανακύπτει είναι μέσα σε πιο διάστημα γίνονται αποδεκτές οι λύσεις που προκύπτουν από την εκτίμηση. Σ' αυτό το σημείο υπάρχει διαφωνία μεταξύ των ερευνητών, καθώς άλλοι δέχονται ως αποδεκτές τις απαντήσεις που απέχουν 10-15% από το ακριβές αποτέλεσμα (Levine, 1982, p. 351), ενώ άλλοι υποστηρίζουν ότι η προσέγγιση εξαρτάται κάθε φορά από το ίδιο το πρόβλημα ή από κάποια εξωτερική πηγή π.χ. δάσκαλος ο οποίος ορίζει το διάστημα αποδεκτών απαντήσεων (Sowder, 1992, p. 371). Ασφαλώς, δεν υπάρχει ένας κανόνας που να ορίζει το διάστημα αποδεκτών απαντήσεων σε μια εκτίμηση, καθώς το εκάστοτε πρόβλημα απαιτεί διαφορετικού είδους εκτίμηση, άλλοτε πλησιέστερη στο ακριβές αποτέλεσμα και άλλοτε λιγότερο κοντά. Για παράδειγμα, προκειμένου να ελέγξω αν στον πολλαπλασιασμό 0,5478·54,12 έχω τοποθετήσει σωστά την υποδιαστολή εκτελώντας τον αλγόριθμο, μπορώ να εκτιμήσω το αποτέλεσμα μόνο σε τάξη μεγέθους, λαμβάνοντας υπόψη το κόστος εφαρμογής μιας ακριβέστερης προσέγγισης.

4.1.2 Εκτίμηση μετρήσεων

Η εκτίμηση μεγεθών αφορά στην εκτίμηση του μήκους ενός δρόμου, του εμβαδού ενός οικοπέδου, του βάρους μιας ποσότητας κ.ά. Ο Bright (1976, p. 89) περιγράφει την εκτίμηση μεγεθών ως μια διαδικασία μέσα από την οποία φτάνεις στη μέτρηση, χωρίς όμως να χρησιμοποιηθούν όργανα μέτρησης, ορίζοντας ταυτόχρονα τη μέτρηση (ακριβή μέτρηση) ως τη διαδικασία σύγκρισης ενός φυσικού αντικειμένου με μια ομοειδή προκαθορισμένη μονάδα. Η μέτρηση ορίζει μια σχέση ανάμεσα σε μια ιδιότητα και στους πραγματικούς αριθμούς. Η εκτίμηση όμως διαφέρει, καθώς προϋποθέτει μια νοερή μονάδα αναφοράς, μια νοερή "εικόνα" ή "αίσθηση" για το μέγεθος της μονάδας (Sowder 1992, p. 371). Ο Bright (1976) αναφέρει ότι πρόκειται για μια νοερή διεργασία, παρόλο που συχνά έχει ορατές ή απλές εκφάνσεις. Η εκτίμηση μέτρησης προϋποθέτει διαφορετικές ικανότητες από την εκτίμηση υπολογισμών. Είναι περισσότερο συνδεδεμένη και περιορισμένη στα όρια κάποιου συγκείμενου και μπορεί να γίνει χωρίς τη χρήση αριθμητικών πράξεων, παρόλο που συχνά γίνονται κάποιες απλές. Οι Siegel et al. περιγράφουν ένα μοντέλο εκτίμησης για τη λύση προβλημάτων εκτίμησης το οποίο βασίζεται σε δυο αλληλοσυσχετιζόμενες διαδικασίες: μέτρηση με χρήση σημείου αναφοράς και διαμέριση-επανένωση. Σύμφωνα με την πρώτη διαδικασία γίνεται εφαρμογή με τη σύγκριση γνωστής μονάδας μέτρησης. Για παράδειγμα, για να μετρήσουμε το μήκος ενός τοίχου έχουμε τη νοερή εικόνα του μέτρου την οποία χρησιμοποιούμε ως μονάδα μέτρησης και προβαίνουμε στον υπολογισμό. Όμως σε προβλήματα εκτίμησης μέτρησης δεν είναι διαθέσιμη κάποια μονάδα μέτρησης. Σ' αυτή την περίπτωση εφαρμόζεται η δεύτερη διαδικασία σύμφωνα με την οποία γίνεται διαμέριση του αντικειμένου που πρέπει να μετρηθεί σε μικρότερα ίσα κομμάτια, καθένα από τα οποία μπορούμε να μετρήσουμε με βάση μια μονάδα μέτρησης και στη συνέχεια συντίθενται όλα αυτά τα μικρότερα δείγμα τα προκειμένου να φτάσουμε σε μια τελική εκτίμηση. Έστω για παράδειγμα ότι θέλουμε να μετρήσουμε ένα χώρο στάθμευσης αυτοκινήτων. Μπορούμε να "τεμαχίσουμε" το χώρο σε μικρότερους χώρους παρκαρίσματος ενός αυτοκινήτου, να υπολογίσουμε την επιφάνεια ενός χώρου παρκαρίσματος έχοντας ως μονάδα μέτρησης το 1 μέτρο (πλάτος = 1 μέτρο, μήκος = 3 μέτρα, εμβαδό = 3 τ.μ.) και τέλος να πολλαπλασιάσουμε την επιφάνεια που καλύπτει το ένα αυτοκίνητο με τον αριθμό που των τεμαχίων που αρχικά υπολογίσαμε. Βέβαια εδώ πρόκειται για μια "ομαλή" διαμέριση της επιφάνειας που επρόκειτο να υπολογίσουμε με εκτίμηση, καθώς τα τεμάχια που προκύπτουν έχουν ίσο εμβαδό και κατά συνέπεια αν υπολογίσουμε το εμβαδό του ενός εύκολα προκύπτει με πολλαπλασιασμό και το εμβαδό της συνολικής επιφάνειας (1982, p. 212-213).

Ο Bright (1976) περιγράφει τις συνθήκες κάτω από τις οποίες μπορούμε να προβούμε στην εκτίμηση μέτρησης. Οι συνθήκες αυτές ορίζονται ανάλογα μα το αν το αντικείμενο προς μέτρηση είναι παρόν ή απόν, αν η μονάδα μέτρησης είναι παρούσα ή απούσα και αν η μέτρηση ή το αντικείμενο προσδιορίζονται. Για παράδειγμα στο πρόβλημα: "ονόμασε κάτι στην τάξη το οποίο είναι περίπου 1 μέτρο μακρύ ή ψηλό", το αντικείμενο προς μέτρηση είναι απόν, η μονάδα μέτρησης προσδιορίζεται (1 μέτρο) και η μέτρηση είναι προκαθορισμένη (1 μέτρο μακρύ ή ψηλό).

4.1.3 Εκτίμηση πληθικότητας

Κατά τη διαδικασία εκτίμησης πλήθους καλούμαστε να δώσουμε ένα αριθμό που αντιπροσωπεύει το πλήθος μιας ομάδας αντικειμένων, όπως για παράδειγμα τον αριθμό των ανθρώπων σε ένα θέατρο ή σε μια προεκλογική συγκέντρωση ή τον αριθμό των αυτοκινήτων σε ένα πάρκινγκ. Οι Siegel, Goldsmith, Madson (1982, p. 215) δίνουν ένα ορισμό για την εκτίμηση μέτρησης και πλήθους, ο οποίος δίνεται στους 20 μαθητές της πειραματικής ομάδας (2ου έως 6ου επιπέδου[7]): "εκτίμηση είναι αυτό που κάνεις όταν θέλεις να ξέρεις πόσο μεγάλο είναι κάτι ή πόσα πράγματα υπάρχουν, αλλά δε μετράς. Έτσι εκτιμάς˙ προσπαθείς να σχηματοποιήσεις πόσο μεγάλο είναι κάτι ή περίπου πόσα είναι κάποια αντικείμενα".

Σύμφωνα με τη Sowder (1992, p. 371) "η τυπική διαδικασία που χρησιμοποιείται κατά την εκτίμηση πλήθους είναι να πάρεις τον αριθμό ενός μικρού δείγματος και μετά να τον πολλαπλασιάσεις με τον αριθμό τέτοιων δειγμάτων που εκτιμώνται ότι υπάρχουν. Έτσι, για να εκτιμήσουμε τον αριθμό των ανθρώπων σ' ένα παιχνίδι μπέιζμπολ μπορούμε

[7] Στο αμερικανικό εκπαιδευτικό σύστημα το k επίπεδο (k grade) αντιστοιχεί στο Νηπιαγωγείο, τα επίπεδα 1-6 αντιστοιχούν στις 6 τάξεις του ελληνικού Δημοτικού σχολείου, το 7ο επίπεδο (7th grade) αντιστοιχεί στην Α΄ Γυμνασίου του ελληνικού εκπαιδευτικού συστήματος, το 8ο επίπεδο αντιστοιχεί στη Β΄ Γυμνασίου κ.ο.κ. (Overseas Education Centre, www. oecth.com).

να μετρήσουμε ή να εκτιμήσουμε τους ανθρώπους σε μια μικρή περιοχή, να εκτιμήσουμε το πλήθος τέτοιων μικρών περιοχών και να χρησιμοποιήσουμε το γινόμενο ως την εκτίμησή μας του συνόλου". Στην ίδια διαδικασία αναφέρονται και οι Siegel, Goldsmith, Madson (1982, p. 213) σύμφωνα με την οποία γίνεται διάσπαση του συνόλου σε μικρότερα (ίσα) δείγματα, υπολογισμός του ενός και τέλος συνένωση των μικρότερων δειγμάτων και υπολογισμός του συνόλου. Οι ίδιοι αναφέρουν ότι πολλά προβλήματα εκτίμησης είναι δυσκολότερα, καθώς το σύνολο δεν μπορεί να κερματιστεί εύκολα σε μικρότερα δείγματα, όπως κατά την εκτίμηση ενός μεγάλου πλήθους ανθρώπων ή έστω κι αν μπορεί να τεμαχιστεί, ωστόσο δεν μπορούμε να βρούμε ένα αντιπροσωπευτικό δείγμα. Αυτές είναι περιπτώσεις "μη κανονικής διάσπασης". Σ' αυτή την περίπτωση προχωρούμε σε άλλες διαδικασίες εκτίμησης, όπως "να μαντέψουμε", να συγκρίνουμε αυτό που βλέπουμε με προηγούμενες εμπειρίες μας, δηλαδή να υπολογίσουμε πόσο περίπου είναι έχοντας στο μυαλό μας άλλες παρόμοιες καταστάσεις.

Αυτές οι τρεις κατηγορίες είναι οι πιο συχνοί τύποι εκτίμησης που απαντώνται στην υπάρχουσα βιβλιογραφία, καθώς συναντώνται συχνά στην καθημερινή ζωή. Όμως υπάρχουν και άλλες μορφές εκτίμησης. Η στατιστική και οι πιθανότητες είναι περιοχές όπου η εκτίμηση μπορεί να εφαρμοστεί και να οδηγήσει σε βαθύτερη κατανόηση. Για παράδειγμα, μπορούμε να εκτιμήσουμε το μέσο όρο κάποιων στατιστικών δεδομένων, αλλά ακόμα και την τυπική απόκλιση ή ακόμα με τη χρήση του μέσου όρου να εκτιμήσουμε τις ιδιότητες μιας μεταβλητής. Επίσης, μπορούμε να εκτιμήσουμε την πιθανότητα ενός γεγονότος, όπως το πόσες φορές θα χιονίσει τον επόμενο μήνα, λαμβάνοντας υπόψη την περιοχή και την εποχή του χρόνου.

Οι Κούρκουλος και Τζανάκης (2000) περιγράφουν ένα ευρύ φάσμα δραστηριοτήτων όπου καθίσταται ενεργή η διαδικασία εκτίμησης και αφορούν στο σύνολο της μαθηματικής δραστηριότητας. Μεταξύ άλλων αναφέρονται στην εκτίμηση του αποτελέσματος μιας αλγοριθμικής διαδικασίας με βάση την έννοια της συμμετρίας (Κούρκουλος και Τζανάκης, 2000, σσ. 279-280), όπως για παράδειγμα η διαδικασία ολοκλήρωσης ρητών πολυωνυμικών συναρτήσεων ως προς συνx ημx ανάλογα με τις συμμετρίες που διαθέτουν (άρτια, περιττή ως προς συνx ή ημx κ.λ.π.).

Επίσης περιγράφοντας το κριτήριο "μικρές μεταβολές επιφέρουν μικρές μεταβολές" (σσ. 280-281) αναφέρονται στο Νεύτωνα ο οποίος εξετάζει τη μορφή της μικρής μεταβολής του εμβαδού που ορίζει το γράφημα μιας καμπύλης (συνάρτηση) την οποία επιφέρει μια μικρή μεταβολή στην τιμή του διαστήματος όπου ορίζεται η παράμετρος της καμπύλης. Σχολιάζουν λέγοντας ότι Νεύτωνας αποδέχεται σιωπηρά ότι οι μικρές μεταβολές της παραμέτρου επιφέρουν μικρές μεταβολές στο εμβαδό ώστε να σχηματιστεί η παράγωγος που είναι η ίδια αρχική συνάρτηση.

Άλλα παραδείγματα που αναφέρουν ως περιπτώσεις που εφαρμόζονται κριτήρια εκτίμησης είναι η εκτίμηση του μεγιστοβάθμιου όρου πολυωνύμου για τον υπολογισμό του ορίου της μεταβλητής στο άπειρο (σ. 281), η μελέτη ενός ρευστού θεωρώντας ότι αποτελείται από διακριτά μέρη π.χ. μόρια (σσ. 282-283).

4.2 Ανασκόπηση βιβλιογραφίας

Η έρευνα σε διεθνές επίπεδο που αφορά στην εκτίμηση ή στον έλεγχο είναι πενιχρή και αρκετά περιορισμένη ως προς το εύρος που καλύπτει. Η μεγαλύτερη έμφαση έχει δοθεί στην εκτίμηση των αποτελεσμάτων των πράξεων στο πλαίσιο της προσπάθειας να ενταχθεί στο αναλυτικό πρόγραμμα.

Καθώς στην υπάρχουσα βιβλιογραφία δεν υπάρχει ταυτόχρονη θεώρηση της εκτίμησης και του ελέγχου, θα εξετάσουμε χωριστά τη βιβλιογραφία που αναφέρεται στην εκτίμηση και χωριστά αυτή που αναφέρεται στον έλεγχο. Εξαίρεση αποτελεί το άρθρο των Κούρκουλου και Τζανάκη (2000), το οποίο εξετάζει συνολικά τα κριτήρια εκτίμησης και ελέγχου.

4.2.1 Έρευνες σχετικές με διαδικασίες εκτίμησης

Πριν το 1980 ελάχιστα διασκορπισμένα άρθρα εμφανίζονται που όμως εξετάζουν το θέμα μόνο εν μέρει, χωρίς να φωτίζουν όλες τις πλευρές του (Corle 1960, 1963, Faulk 1962, O΄ Daffer 1979, Sauble 1955, Swan & Jones 1971, 1980) καθώς και κάποιες διδακτορικές διατριβές στις οποίες υπάρχουν πλευρές της εκτίμησης υπολογισμών (Fesharaki 1979, Hall 1977, Ibe 1973, Nelson 1967, Paull 1972).

Το 1977 το National Council of Supervisors of Mathematics συμπεριέλαβε την εκτίμηση και την προσέγγιση στις βασικές ικανότητες που πρέπει να αναπτυχθούν. Στη συνέχεια το National Council of teachers of Mathematics (1980) πρότεινε την ενσωμάτωση των διαδικασιών εκτίμησης σε όλες τις πτυχές του προγράμματος.

Η έρευνα που έχει πραγματοποιηθεί ως τώρα επικεντρώνεται σε τέσσερις περιοχές:

i)στη σχέση μεταξύ της ικανότητας για εκτίμηση και άλλων ικανοτήτων (Paul 1971, Rubenstein 1985, Gliner 1991, Hanson & Hogan 2000),

ii)στην επίδραση των διδακτικών παρεμβάσεων με θέμα την εκτίμηση πάνω στην επίδοση μαθητών ή ενηλίκων (Nelson 1966,1967, Bestgen et al., 1980, Shcoen et al., 1981, DeCorte & Somers 1982, Edward 1984, Reys et al., 1984, Sowder & Markovits 1990),

iii)στις στρατηγικές που χρησιμοποιούνται από τους καλούς (Reys et al., 1982, Reys et al., 1991, Dowker 1992) και τους αδύνατους (Levine 1982,) και

iv)στην ανάπτυξη της ικανότητας για εκτίμηση - ψυχολογική προσέγγιση – (Sowder & Wheeler 1987, 1989, Dowker 1989, Case & Sowder 1990).

Εξάλλου μια ξεχωριστή περιοχή θα μπορούσε να αποτελέσει η καταγραφή των στάσεων απέναντι στην εκτίμηση και η δυνατότητα τροποποίησής τους. Ωστόσο οι έρευνες που ανήκουν στην περιοχή αυτή δεν αναλώνονται αποκλειστικά στη διαπραγμάτευση των αντιλήψεων και στάσεων, αλλά συνορεύουν με άλλες περιοχές και μάλιστα μπορούμε να πούμε ότι ο κύριος όγκος τους αφορά σε αυτές τις όμορες περιοχές (βλ. Gliner 1991, Bestgen et al., 1980, Reys et al., 1982).

i) Σχέση μεταξύ της ικανότητας για εκτίμηση και άλλων ικανοτήτων

Ο Paull (1971) παρατήρησε ότι η εκτίμηση υπολογισμών συνδέεται σημαντικά με τη λύση προβλημάτων, τη μαθηματική και λεκτική ικανότητα και την ικανότητα γρήγορου νοερού υπολογισμού.

Ο Rubenstein (1985) πραγματοποίησε έρευνα προκειμένου α) να αναπτύξει όργανα για τη μέτρηση τεσσάρων τύπων των δραστηριοτήτων της εκτίμησης υπολογισμών και αρκετών σχετιζόμενων ικανοτήτων, β) να υπολογίσει την επίδοση στην εκτίμηση στο πλαίσιο αρκετών διαστάσεων και γ) να διερευνήσει τη σχέση μεταξύ της εκτίμησης υπολογισμών και των μαθηματικών ικανοτήτων. Δόθηκε αρχικά ένα ερωτηματολόγιο με 64 ερωτήματα ανοιχτού και κλειστού τύπου σε 309 μαθητές όγδοου επιπέδου. Ανά 16 τα ερωτήματα αφορούσαν σε καθένα από τα τέσσερα είδη των δραστηριοτήτων της εκτίμησης υπολογισμών: ανοιχτά ερωτήματα εκτίμησης, λογική-μη λογική εκτίμηση, απάντηση σε σχέση με ένα αριθμό ως σημείο αναφοράς (αν είναι μεγαλύτερο το ακριβές νούμερο από τον αριθμό αυτό) και εύρεση της τάξης μεγέθους. Στη συνέχεια, δόθηκε ένα ερωτηματολόγιο με 80 ερωτήματα με σκοπό τη μέτρηση 8 μαθηματικών ικανοτήτων που αρχικά προσδιόρισε ότι σχετίζονται με τη διαδικασία της εκτίμησης. Τέλος, δόθηκε ένα ερωτηματολόγιο με 10 ερωτήματα με σκοπό τη μέτρηση ικανοτήτων για την επίλυση προβλημάτων. Τα υποκείμενα συμπλήρωσαν τα ερωτηματολόγια κατά τη διάρκεια 3 περιόδων διδακτικής παρέμβασης. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της έρευνας, η εύρεση της τάξης μεγέθους φαίνεται να είναι σχετικά εύκολη σε αντίθεση με τα ανοιχτά ερωτήματα που αποδείχθηκαν δύσκολα. Τα ερωτήματα που ήταν δοσμένα με αριθμητικά δεδομένα χωρίς συγκείμενο δε φάνηκε να είναι δυσκολότερα από τα ερωτήματα που είναι διατυπωμένα με λόγια (σε αντίθεση με ό,τι υποστήριξαν οι Reys et al. 1980). Εξάλλου, η εκτίμηση όταν τα αριθμητικά δεδομένα είναι δεκαδικοί αριθμοί αποδείχθηκε δυσκολότερη από τους ακεραίους (όπως και Bestgen et al. 1980). Ακόμη τα αγόρια φάνηκε να έχουν καλύτερη επίδοση σε δραστηριότητες εκτίμησης και κυρίως σε ό,τι αφορά την εύρεση της τάξης μεγέθους. Οι μαθηματικές ικανότητες που συνεισφέρουν περισσότερο στην εκτίμηση είναι η πράξεις με δυνάμεις του 10, η ικανότητα να κάνεις συγκρίσεις και η απόφαση για τη σωστή τάξη μεγέθους. Πολύ μικρή σχέση έχουν η γνώση της αξίας της θέσης των ψηφίων, η στρογγυλοποίηση και η ικανότητα εκτέλεσης πράξεων με πολλαπλάσια του 10.

Ο Gliner (1991) προσπάθησε να προσδιορίσει τους παράγοντες που επιδρούν στην ικανότητα για μαθηματική εκτίμηση σε φοιτητές παιδαγωγικών τμημάτων (μελλοντικούς δασκάλους). Σε 141 υποκείμενα δόθηκε τεστ με 25 ερωτήματα. Στους 70 δόθηκε το τεστ με τα ερωτήματα που περιελάμβαναν μόνο αριθμητικά δεδομένα και στους 71 δόθηκε τεστ με προβλήματα που όμως είχαν τα ίδια αριθμητικά δεδομένα. Είχαν προετοιμαστεί δυο τεστ με 25 ερωτήματα το καθένα, από τα οποία το πρώτο περιελάμβανε μόνο αριθμητικά δεδομένα και το δεύτερο προβλήματα που όμως αποτελούνταν από τα ίδια αριθμητικά δεδομένα. Πριν την επίδοση του τεστ οι φοιτητές κλήθηκαν να απαντήσουν σε ερωτήσεις σχετικές με την αυτοαντίληψή τους για την εκτίμηση και τη στάση τους απέναντι στα Μαθηματικά, καθώς και για τους βαθμούς και τα έτη σπουδών στα Μαθηματικά. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι τα προβλήματα ευνοούν πολύ περισσότερο την εκτίμηση που φαίνεται να είναι κατ' αυτό τον τρόπο μια φυσική διαδικασία, ενώ τα σκέτα αριθμητικά δεδομένα τείνουν να οδηγήσουν σε ακριβείς απαντήσεις. Επίσης, άμεση σχέση με την ικανότητα για εκτίμηση έχει η αυτοαντίληψη των φοιτητών (όπως και Bestgen et. all 1980). Ο μέσος όρος βαθμολογίας των φοιτητών στα Μαθηματικά σχετίζεται αρνητικά με την ικανότητα για εκτίμηση (σε αντίθεση με τα αποτελέσματα της έρευνας του Levine 1982). Άλλοι παράγοντες που σχετίζονται με την επιτυχία στη μαθηματική εκτίμηση είναι ο μέσος όρος βαθμολογίας στο κολέγιο, τα έτη σπουδών στα Μαθηματικά και η αρέσκεια απέναντι στα Μαθηματικά. Οι ερευνητές, με βάση τα πορίσματα της έρευνας, προτείνουν ότι οι μαθητές που δεν είναι καλοί σε μαθηματικές δραστηριότητες που απαιτούν χαρτί και μολύβι, μπορεί να έχουν ικανότητες στην εκτίμηση και αν αυτές αναδειχτούν μπορεί να οδηγήσουν σε μεγαλύτερη αυτοεκτίμηση στα Μαθηματικά γενικότερα.

Οι Hanson και Hogan (2000) πραγματοποίησαν έρευνα σε 77 φοιτητές ηλικίας 18 έως 21 ετών, διαφόρων σχολών, προκειμένου να διερευνήσουν την ικανότητα εκτίμησης στην τριτοβάθμια εκπαίδευση. Δόθηκαν τρία ισοδύναμα ερωτηματολόγια – σε τρεις φάσεις – με 20 ερωτήματα τα οποία περιελάμβαναν αριθμητικά δεδομένα με ακέραιους, δεκαδικούς, κλάσματα. Στην πρώτη φάση, οι συμμετέχοντες στην έρευνα εξετάστηκαν σε ομάδες των 25 φοιτητών η καθεμιά. Τα ερωτήματα παρουσιάστηκαν για 10 δευτερόλεπτα το καθένα με τη βοήθεια προβολέα και κατόπιν οι φοιτητές ενημερώθηκαν ότι θα είχαν πολύ λίγο χρόνο να υπολογίσουν μια απάντηση και θα έπρεπε να προβούν σε εκτίμηση του αποτελέσματος. Στη δεύτερη φάση (1-2 εβδομάδες μετά την πρώτη φάση), τα υποκείμενα εξετάστηκαν ατομικά και κλήθηκαν να εκτιμήσουν τις απαντήσεις τους και να σκέφτονται λέγοντας ταυτόχρονα την πορεία που ακολουθούν για να φτάσουν στο αποτέλεσμα. Στην τρίτη φάση, τα υποκείμενα εξετάστηκαν ξανά σε ομάδες (3 εβδομάδες μετά την πρώτη φάση), αλλά αυτή τη φορά τους δόθηκε αρκετός χρόνος για να υπολογίσουν τις απαντήσεις. Η τρίτη φάση στόχευε στην ανάλυση της σχέσης που ενδεχομένως υπήρχε μεταξύ της αποτυχίας για εκτίμηση και της έλλειψης βασικών υπολογιστικών ικανοτήτων. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι οι φοιτητές είχαν καλύτερη επίδοση σε προβλήματα εκτίμησης με πρόσθεση και αφαίρεση ακεραίων σε σχέση με προβλήματα πολλαπλασιασμού και διαίρεσης ακεραίων. Επίσης, αναδύθηκαν αρκετές δυσκολίες σε σχέση με προβλήματα εκτίμησης με κλάσματα και δεκαδικούς, γεγονός που αποδίδουν στην έλλειψη βαθιάς κατανόησης κλασμάτων και δεκαδικών. Ακόμα, είχαν καλύτερη επίδοση στους ακριβείς υπολογισμούς σε σύγκριση με την εκτίμηση, ενώ μεταξύ εκτίμησης και ακριβών υπολογισμών υπήρξε μεγάλη συσχέτιση. Εξάλλου, αρκετοί προσπαθούσαν να βρουν την ακριβή απάντηση του προβλήματος παρόλο που τους είχε ζητηθεί να κάνουν εκτίμηση του αποτελέσματος. Γενικά τα αποτελέσματα της έρευνας αντιτίθενται σε αυτά της έρευνας της Levine (1982) στο ότι στην παρούσα υπάρχει αρκετά καλή επίδοση σε προβλήματα εκτίμησης με ακεραίους, ειδικά στην πρόσθεση και στην αφαίρεση.

Παρατηρούμε ότι οι παραπάνω έρευνες, ενώ ανήκουν στην ίδια εννοιολογική περιοχή προσδιορισμού των παραγόντων που σχετίζονται με την ικανότητα εκτίμησης, παρουσιάζουν διαφορές στο περιεχόμενο ως προς τους παράγοντες που εξετάζουν. Πολύ πιο συγκεκριμένος είναι ο Rubenstein (1985), ο οποίος προσδιορίζει τους γνωστικούς παράγοντες που συνεισφέρουν στην ικανότητα εκτίμησης, σε αντίθεση με τον Gliner (1991) ο οποίος εξετάζει εξωτερικούς, περιβαλλοντικούς περισσότερο παράγοντες, καθώς και παράγοντες που σχετίζονται με την αυτοαντίληψη. Οι Hanson και Hogan (2000) προσπαθούν να προσδιορίσουν τις περιοχές όπου οι φοιτητές έχουν καλή ή κακή επίδοση και να ερμηνεύσει την επίδοση αυτή.

ii) Επίδραση των διδακτικών παρεμβάσεων με θέμα την εκτίμηση πάνω στην επίδοση μαθητών ή ενηλίκων

Όσον αφορά στην έρευνα μέσω διδακτικών παρεμβάσεων πάνω στις διαδικασίες εκτίμησης, ο Nelson (1967) δίδαξε την τεχνική της στρογγυλοποίησης σε 12 μαθητές 4ου και 6ου επιπέδου, οδηγώντας τους σε σημαντική βελτίωση, όπως φάνηκε μέσα από την επίδοση ερωτηματολογίου με θέμα την εκτίμηση. Έρευνες από τους Nelson (1967), Shcoen et al. (1981) δείχνουν ότι οι μαθητές μεσαίου επιπέδου (4-6), μετά από τη διδασκαλία στρατηγικών στρογγυλοποίησης, μπορούν να αποκτήσουν ικανότητες εκτίμησης και να ξεπεράσουν σε απόδοση ομάδα ελέγχου. Επίσης υπήρχαν ενδείξεις ότι η διδασκαλία της εκτίμησης με νοηματικό περιεχόμενο οδηγούσε στη λύση προβλημάτων εκτίμησης. Και οι δυο έρευνες όμως είναι περιορισμένες σε διάρκεια (2 εβδομάδες ή λιγότερο) και στο γεγονός ότι η διδασκαλία περιλαμβάνει λίγες μόνο τεχνικές με ακέραιους αριθμούς. Ο Nelson συνήγαγε το συμπέρασμα ότι η διδασκαλία διαδικασιών εκτίμησης ήταν πιο αποτελεσματικές σε έκτου επιπέδου μαθητές παρά σε τέταρτου επιπέδου.

Οι Bestgen et al. (1980) πραγματοποίησαν έρευνα προκειμένου να χαρακτηρίσουν τα συναισθήματα των μελλοντικών δασκάλων απέναντι στις ικανότητες εκτίμησης, να συλλέξουν δεδομένα πάνω στην επίδοσή τους σε μια ποικιλία προβλημάτων που απαιτούν γρήγορη εκτίμηση και να μελετήσουν την επίδραση μιας διδακτικής παρέμβασης για την κατασκευή τεχνικών προκειμένου να γίνεται εκτίμηση λύσεων σε προβλήματα υπολογισμού. Τα 187 υποκείμενα της έρευνας χωρίστηκαν σε τρεις ομάδες. Η πρώτη ομάδα (T_1) αποτέλεσε την ομάδα ελέγχου, η δεύτερη ομάδα (T_2) ήταν η πειραματική ομάδα η οποία έκανε εβδομαδιαία πρακτική εξάσκηση σε προβλήματα εκτίμησης υπολογισμών, που εμπεριείχε 10 κουίζ εκτίμησης αποτελούμενα από 16 ερωτήματα το καθένα που συνεπάγονταν εκτίμηση, με ακέραιους και δεκαδικούς και τις τέσσερις αριθμητικές πράξεις και την ανατροφοδότηση με τον έλεγχο των απαντήσεών τους και η τρίτη ομάδα (T_3) ήταν η πειραματική ομάδα η οποία διδάχτηκε συγκεκριμένες τεχνικές εκτίμησης και έκανε επίσης εβδομαδιαία πρακτική εξάσκηση όπως και η δεύτερη ομάδα (T_2). Αρχικά δόθηκαν σε όλες τις ομάδες δύο όργανα μέτρησης στάσεων απέναντι στην εκτίμηση το ένα και απέναντι στα Μαθηματικά το άλλο, ένα ερωτηματολόγιο με ερωτήματα υπολογισμών και ένα ερωτηματολόγιο με ερωτήματα εκτίμησης. Προκειμένου να μετρήσουν γενικές στάσεις των υποκειμένων απέναντι στα Μαθηματικά, καθώς και τη στάση τους απέναντι στην εκτίμηση κατασκεύασαν μια πεντάβαθμη κλίμακα Διενεργήθηκαν δέκα μαθήματα καθοδήγησης στην τρίτη ομάδα (T_3) τα οποία είχαν επικεντρωθεί σε συγκεκριμένες ικανότητες ή στρατηγικές σχετικές με μια από τις τέσσερις αριθμητικές πράξεις (π.χ. πολλαπλασιασμός με δεκαδικούς αριθμούς που είναι κοντά σε πολλαπλάσια του 10, όπως $47{,}6 \cdot 0{,}94 \approx 47{,}6 \cdot 1 = 47{,}6$). Στο τέλος δόθηκαν σε όλες τις ομάδες τα δύο όργανα μέτρησης στάσεων που είχαν δοθεί και αρχικά, καθώς και το ερωτηματολόγιο με θέμα την εκτίμηση. Τα αποτελέσματα της έρευνάς τους αποκαλύπτουν ότι αρχικά οι μελλοντικοί δάσκαλοι θεωρούν την εκτίμηση υπολογισμών πολύ χρήσιμη και ωφέλιμη και την αντιμετωπίζουν με μεγάλο σεβασμό. Αυτοί που είναι καλύτεροι στην εκτίμηση έχουν πιο ευνοϊκή στάση και θεωρούν την εκτίμηση περισσότερο κατανοητή και λιγότερο περίπλοκη από τους αδύνατους στην εκτίμηση, οι οποίοι όμως θεωρούν την εκτίμηση περισσότερο χρήσιμη από τους ικανούς. Επίσης φάνηκε ότι η επίδοσή τους ήταν μεγαλύτερη σε προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης απ' ότι σε προβλήματα πολλαπλασιασμού και διαίρεσης και επίσης σε προβλήματα με ακέραιους παρά με δεκαδικούς αριθμούς. Ακόμη, υπήρχε στενή συσχέτιση μεταξύ της αυτοαντίληψης των φοιτητών στη μαθηματική ικανότητα και στην απόδοσή τους στην εκτίμηση υπολογισμών. Εξάλλου, η επίδραση της διδακτικής παρέμβασης στην πειραματική ομάδα ήταν προφανής, καθώς υπήρξε στατιστικά σημαντική διαφορά μεταξύ της πειραματικής ομάδας και της ομάδας ελέγχου, με την πρώτη να υπερέχει στην επίδοση. Όμως, η ομάδα που δεχόταν συστηματική εξάσκηση σε συγκεκριμένες τεχνικές εκτίμησης είχε πιο ευνοϊκή στάση απέναντι στην εκτίμηση από την ομάδα που απλά έκανε εβδομαδιαία πρακτική σε προβλήματα εκτίμησης, ενώ μεταξύ τους δεν υπήρξε στατιστικά σημαντική διαφορά ως προς την επίδοση.

Οι DeCorte και Somers (1982) πραγματοποίησαν ένα πείραμα με μαθητές 12 ετών, το οποίο περιελάμβανε το εξής διδακτικό σχήμα: ανάγνωση και κατανόηση του προβλήματος, εκτίμηση της λύσης, επεξεργασία του προβλήματος και τέλος επαλήθευση της ακριβούς λύσης μέσα από σύγκριση με την εκτίμηση που αρχικά είχε δοθεί. Η εκτίμηση σ' αυτή την περίπτωση αντιμετωπίζεται ως μια ευρετική στρατηγική και με βάση τα αποτελέσματα γίνεται πρόταση για διδακτική θεώρηση της εκτίμησης κατ' αυτό τον τρόπο. Παρατηρούμε ότι στην εν λόγω έρευνα η εκτίμηση μπορεί να αποτελέσει και μέθοδο επαλήθευσης, ενώ εντάσσεται στο πλαίσιο της ανακαλυπτικής μάθησης, καθώς ο μαθητής μπορεί να κάνει εκτιμήσεις και να οδηγείται στη συνέχεια στην αποδοχή της ορθής λύσης μέσα από τη σύγκριση της λύσης με την αρχική εκτίμηση.

Οι Reys et al. (1984) οργάνωσαν διδακτικές δραστηριότητες εκτίμησης για μαθητές μέσης ικανότητας επιπέδων 6, 7 και 8. Η διδασκαλία περιελάμβανε στρατηγικές στρογγυλοποίησης, αλλά και άλλες τεχνικές. Η διδασκαλία πραγματοποιήθηκε σε 24 τμήματα τα οποία συγκρίθηκαν με 24 τμήματα ελέγχου. Η διδασκαλία υλοποιήθηκε σε 10 διδακτικές ώρες καθώς και μικρά (5 έως 10 λεπτά) μαθήματα κατά τη διάρκεια του σχολικού έτους. Ενώ στο μετατέστ η διαφορά μεταξύ πειραματικών ομάδων και ομάδων ελέγχου δεν ήταν στατιστικά σημαντική, ωστόσο ο μέσος όρος επίδοσης ήταν μεγαλύτερος στις ομάδες ελέγχου. Επίσης, σε ορισμένα θέματα οι διαφορές μεταξύ προτέστ και μετατέστ ήταν πολύ μεγάλες. Οι συνεντεύξεις που ακολούθησαν (12 σε κάθε επίπεδο) έδειξαν ότι οι πειραματικές ομάδες κατανοούν ότι κατά την εκτίμηση γίνεται υπολογισμός των κατά προσέγγιση αριθμών και όχι των ακριβών αριθμητικών δεδομένων. Επίσης υπήρξε βελτίωση στην κατανόηση αριθμητικών εννοιών.

Ένα άλλο πείραμα διενεργήθηκε από τον Edward (1984), δουλεύοντας με τους υπαλλήλους επιχειρησιακής ανάπτυξης. Αρχικά προσδιορίστηκαν οι μαθηματικές ικανότητες που έπρεπε να αναπτύξουν, με κυριότερη αυτή της αίσθησης των αριθμών. Όμως, προαπαιτούμενη γνώση ήταν αυτή της εκτίμησης. Στη συνέχεια πραγματοποιήθηκε σειρά μαθημάτων πάνω στην εκτίμηση, καθώς και στον πολλαπλασιασμό. Μετά το τέλος της διδασκαλίας, παρατηρήθηκε βελτίωση στην επίδοση των υποκειμένων.

Βασισμένοι στην ανάλυση των Case και Sowder (1990) για την εκτίμηση, οι Sowder και Markovits (1990) πραγματοποίησαν διδασκαλία στο 7ο επίπεδο (βλ. σχετικά υποσημείωση 7) οργανωμένη πάνω στο νοερό υπολογισμό και στη σύγκριση και διάταξη κλασμάτων και δεκαδικών αριθμών. Όσον αφορά στην εκτίμηση, το επίκεντρο δόθηκε στο να γίνονται λογικές εκτιμήσεις σε περιπτώσεις πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κλασμάτων ή δεκαδικών αριθμών. Η διάρκεια της διδασκαλίας πάνω στην εκτίμηση ήταν 10 μέρες. Οι μαθητές μετά το πέρας της διδασκαλίας ήταν ευέλικτοι και εύστοχοι αρκετά στις μεθόδους για εκτίμηση.

Θεωρώντας συνολικά τις έρευνες που αφορούν σε διδακτικές παρεμβάσεις για τη βελτίωση της ικανότητας για εκτίμηση, συνάγουμε το εξής συμπέρασμα: α)όλες είναι περιορισμένες σε χρονική διάρκεια β)στηρίζονται σε διδακτικό σχήμα που περιλαμβάνει αποκλειστικά στρατηγικές εκτίμησης, χωρίς να λαμβάνονται υπόψη γνωστικοί παράγοντες που σχετίζονται με την εκτίμηση και αποτελούν τη βάση για τη δόμησή της και γ)εξετάζεται η επίδραση της παρέμβασης πάνω σε τεχνικές εκτίμησης οι οποίες διδάχτηκαν, χωρίς να ελέγχεται η επίδρασή της σε άλλες μαθηματικές περιοχές.

iii) Στρατηγικές που χρησιμοποιούνται από τους καλούς και τους αδύνατους

Σχετικά με τις διδακτικές έρευνες που αφορούν στις διαδικασίες – στρατηγικές που επιστρατεύονται για την υλοποίηση μιας εκτίμησης, οι Reys et al. (1982) επιχείρησαν να προσδιορίσουν και να χαρακτηρίσουν τις διαδικασίες που χρησιμοποιούνται για την εκτίμηση υπολογισμών τόσο από τους μαθητές, όσο και από τους ενήλικες. Ειδικότερα, επιχειρούν να περιγράψουν τις τεχνικές που χρησιμοποιούνται από τους καλούς στην εκτίμηση. Για το σκοπό αυτό δόθηκε ένα ερωτηματολόγιο σε περισσότερους από 1200 μαθητές (επιπέδου 7-12) και σε κάποιους επιλεγμένους ενήλικες (μαθηματικούς, φυσικούς, μηχανικούς, επιχειρηματίες). Το ερωτηματολόγιο περιελάμβανε 55 ανοιχτές ερωτήσεις, κάποιες μόνο με αριθμητικά δεδομένα και κάποιες με συγκείμενο[8], με ίση αναλογία περίπου ακεραίων και δεκαδικών αριθμών, καθώς και με λίγα κλάσματα. Κατόπιν ακολούθησαν συνεντεύξεις σε 59 από τους καλύτερους στην εκτίμηση, όπως φάνηκε από τα αποτελέσματα του ερωτηματολογίου. Μέσα από την συνέντευξη οι ερευνητές προσπάθησαν να διαπιστώσουν ποιες στρατηγικές χρησιμοποιήθηκαν για τη λύση προβλημάτων εκτίμησης. Τρεις βασικές διαδικασίες προσδιορίστηκαν, οι οποίες σχετίζονται άμεσα με την ικανότητα για εκτίμηση: α)ο μετασχηματισμός, β)η μετατροπή και γ)η αντιστάθμιση (βλ. §7.3.1). Πολλές στρατηγικές χρησιμοποιήθηκαν, η πιο γνωστή από τις οποίες περιλαμβάνει την στρογγυλοποίηση στο πρώτο ψηφίο και την περικοπή (front-end strategy). Γενικά, οι καλοί στην εκτίμηση έδειξαν ευελιξία και γρηγοράδα στην επιλογή στρατηγικής, η οποία ήταν οικεία σ’ αυτούς και τους παρείχε άνεση στην επίλυση του προβλήματος. Εξάλλου, προσδιορίστηκαν κάποια βασικά χαρακτηριστικά που εντοπίστηκαν στους καλούς στην εκτίμηση, μετά από τη διεξαγωγή των συνεντεύξεων. Πρόκειται για τη γνώση βασικών μαθηματικών εννοιών, τη γνώση της αξίας της θέσης, την ικανότητα για μετασχηματισμό, για νοερούς υπολογισμούς, την ανοχή στο λάθος (βλ. §7.4), την αντιστάθμιση, τη μετατροπή, τη γνώση και χρήση αριθμητικών ιδιοτήτων και ποικιλίας στρατηγικών, την αυτοεκτίμηση στην ικανότητα για εκτίμηση. Αυτά τα χαρακτηριστικά αντιπροσωπεύουν τρεις χωριστές διαστάσεις: α)την ικανότητα για χρήση των αριθμών και των ιδιοτήτων τους, β)τις γνωστικές διαδικασίες και γ)τις στάσεις που συνεπάγεται η εκτίμηση. Ωστόσο η έρευνά τους περιορίζεται στον προσδιορισμό και την ανάλυση στρατηγικών που χρησιμοποιούνται από άτομα που έχουν ικανότητα στην εκτίμηση, χωρίς να ελέγχει άτομα χαμηλότερης ικανότητας. Αποτελέσματα ερευνών που σχετίζουν την ευφυΐα με συγκεκριμένες ικανότητες εκτίμησης δείχνουν ότι οι πιο ευφυείς μαθητές έχουν καλύτερη επίδοση στην εκτίμηση (Nelson 1967) και χρησιμοποιούν μεγάλη ποικιλία στρατηγικών (Brown 1957, Lawson 1978).

Η Levine (1982) πήρε συνέντευξη από 89 φοιτητές (εκτός φοιτητών Μαθηματικού τμήματος) με ίδια έτη μαθηματικής εκπαίδευσης, προκειμένου να διαπιστώσει πόσο καλά εκτιμούν. Το ερώτημα που έθεσε ήταν: “μεταξύ φοιτητών κολεγίου ποια είναι η σχέση ανάμεσα στην ικανότητα εκτέλεσης προσεγγιστικών υπολογισμών, στον αριθμό και το είδος στρατηγικών εκτίμησης που χρησιμοποιούν και στην ικανότητα εκτέλεσης ακριβών νοερών υπολογισμών[9];”. Δόθηκε ένα ερωτηματολόγιο στα υποκείμενα της έρευνας στο οποίο απαντούσαν προφορικά χωρίς τη χρήση χαρτιού και μολυβιού. Το ερωτηματολόγιο περιελάμβανε 10 πολλαπλασιασμούς και 10 διαιρέσεις ακεραίων και

---

[8] Π.χ. ευθύς υπολογισμός: $\frac{347 \cdot 6}{43}$, εφαρμοσμένος υπολογισμός (με συγκείμενο): το 1979 η Super Bowl κέρδισε $21319908 και τα μοίρασε σε 26 ομάδες. Περίπου πόσα χρήματα παίρνει η κάθε ομάδα;

[9] Η συγκεκριμένη έρευνα θα μπορούσε να συμπεριληφθεί στην κατηγορία ερευνών που αφορούν στη σχέση μεταξύ εκτίμησης και άλλων ικανοτήτων. Όμως, καθώς ο κύριος άξονας στον οποίο δομείται είναι το εύρος των στρατηγικών εκτίμησης, τη συγκαταλέγουμε στην παρούσα κατηγορία.

δεκαδικών, των οποίων το αποτέλεσμα έπρεπε να εκτιμηθεί, λαμβάνοντας ως αποδεκτή απάντηση αυτή που βρισκόταν σε απόσταση 10% από το ακριβές αποτέλεσμα. Για τη μέτρηση της ικανότητας για εκτέλεση από μνήμης προσεγγιστικών υπολογισμών, δόθηκε ένα ερωτηματολόγιο το οποίο περιελάμβανε 50 πολλαπλής επιλογής ερωτήσεις λογικής και υπολογισμού. Στη συνέχεια, τα υποκείμενα εξηγούσαν τη στρατηγική με την οποία έφταναν στο αποτέλεσμα της εκτίμησης. Με βάση την ανάλυση των αποτελεσμάτων, παρατηρήθηκαν 8 είδη στρατηγικών εκτίμησης, οι πιο συχνές από τις οποίες είναι:

- η στρογγυλοποίηση και των δύο αριθμών στο πρώτο ψηφίο
  $(824 \cdot 32 \approx 800 \cdot 30 = 24000)$
- και η αλγοριθμική διαδικασία
  $(64{,}6 \cdot 0{,}16 \rightarrow 6 \cdot 646 = 3876 \approx 3000$ και $10 \cdot 646 = 6460 \approx 6000$ $3000 + 6000 = 9000 \rightarrow 9(,000))$.

Η δεύτερη στρατηγική, σύμφωνα με τη Levine, αντικατοπτρίζει την εξάρτηση σε αλγόριθμους που προϋποθέτουν ακριβείς υπολογισμούς με χαρτί και μολύβι, καθώς και τη μη οικειότητά τους με την έννοια της εκτίμησης. Στην εκτίμηση με στρογγυλοποίηση κατέφυγαν οι φοιτητές με μεγαλύτερη ικανότητα για εκτέλεση υπολογισμών, σε αντίθεση με τους φοιτητές με μικρότερη ικανότητα εκτέλεσης υπολογισμών που χρησιμοποίησαν αλγοριθμικές διαδικασίες. Οι φοιτητές με μεγαλύτερη ικανότητα για εκτέλεση ακριβών νοερών υπολογισμών χρησιμοποίησαν μεγαλύτερο αριθμό στρατηγικών και ήταν καλύτεροι στην εκτίμηση από τους φοιτητές μικρότερης ικανότητας εκτέλεσης ακριβών νοερών υπολογισμών. Η ικανότητα εκτέλεσης ακριβών νοερών υπολογισμών επομένως είναι στενά συνδεδεμένη με την ικανότητα για εκτίμηση, ενώ δε φαίνεται να υπάρχει συσχέτιση μεταξύ εκτίμησης και αριθμού στρατηγικών που χρησιμοποιήθηκαν. Παρόλο όμως που υπήρξε ισχυρή θετική συσχέτιση μεταξύ ικανότητας για εκτέλεση ακριβών από μνήμης υπολογισμών και ικανότητας για εκτίμηση υπολογισμών, ωστόσο η επίδοση όλων των υποκειμένων ήταν χαμηλή. Τα αποτελέσματα της έρευνας της Levine είναι σύμφωνα με αυτά της έρευνας των Reys et al. (1982) παρόλο που χρησιμοποιήθηκε διαφορετική μεθοδολογία και διαφορετικά όργανα μέτρησης. Ωστόσο, η έρευνα της Levine είναι πιο περιορισμένη, καθώς οι κατηγορίες στρατηγικών που υιοθετεί είναι λιγότερες, μη δίνοντας έτσι την ευκαιρία να παρατηρηθούν ικανότητες των υποκειμένων που σχετίζονται με πιο περίπλοκες τεχνικές, όπως για παράδειγμα αντιστάθμιση (Sowder 1992) ή ακόμα και άλλες τεχνικές που ενδεχομένως είχαν αναπτύξει τα υποκείμενα και δεν υπέπιπταν σε κάποια από τις κατηγορίες της Levine.

Η Dowker (1992) προσπάθησε να προσδιορίσει τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι Μαθηματικοί κατά τη διαδικασία εκτίμησης υπολογισμών, προκειμένου να κατανοηθεί η σχέση μεταξύ της αίσθησης των αριθμών και της εκτίμησης. Επέλεξε ως δείγμα μαθηματικούς καθώς είχαν ιδιαίτερες γνώσεις, εμπειρίες, ενδιαφέρον για τους αριθμούς και τις ιδιότητές τους. Στα 44 υποκείμενα της έρευνας δόθηκε ερωτηματολόγιο το οποίο είχε κατασκευαστεί από τη Levine (1982) (βλ. §4.2.1iii). Τα αποτελέσματα της έρευνας καταδεικνύουν το υψηλό επίπεδο ακρίβειας με περιστασιακά μόνο λάθη, την τάση να χρησιμοποιούν στρατηγικές που περιλαμβάνουν αριθμητικές ιδιότητες και το μεγάλο εύρος και την ευελιξία σε σχέση με τις τεχνικές που χρησιμοποιούν.

Οι Reys et al. (1991) πραγματοποίησαν έρευνα προκειμένου να διερευνήσουν τις ικανότητες που διαθέτουν και τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν κατά τη διαδικασία της εκτίμησης οι μαθητές του Μεξικού 5ου και 8ου επιπέδου, καθώς επίσης και να προσθέσουν γνώση στο γενικό πλαίσιο που αφορά στους καλούς στην εκτίμηση. Επίσης έκανε σύγκριση μεταξύ της επίδοσης των μαθητών του Μεξικού και των μαθητών των Η.Π.Α. και της Ιαπωνίας, με βάση δεδομένα που είχαν συλλεχθεί από προηγούμενη έρευνα (1991). Αρχικά δόθηκε ένα τεστ εκτίμησης σε 433 Μεξικανούς μαθητές με σκοπό να επιλεγούν οι "καλοί εκτιμητές". Το τεστ περιελάμβανε 38 ανοιχτά ερωτήματα, τόσο με σκέτα αριθμητικά δεδομένα (με ακεραίους, δεκαδικούς, κλάσματα και ποσοστά), όσο και προβλήματα. Επίσης, στο τέλος υπήρχαν ερωτήματα που αφορούσαν στην αυτοαντίληψη των μαθητών σχετικά με την ικανότητα εκτίμησης. Ακολούθησαν συνεντεύξεις σ' αυτό το επιλεγμένο δείγμα των καλών εκτιμητών. Οι συνεντεύξεις περιελάμβαναν 10 ερωτήματα με αριθμητικά δεδομένα καθώς και προβλήματα. Η έρευνα αποκάλυψε ότι η εκτίμηση είναι πολύ δύσκολη για τους μαθητές τους Μεξικανούς μαθητές. Οι συνεντεύξεις έδειξαν ότι οι τρεις γνωστικές διαδικασίες που ακολούθησαν οι μαθητές είναι ο μετασχηματισμός, η μετατροπή και η αντιστάθμιση, ενώ η στρατηγική που χρησιμοποίησαν κυρίως είναι η στρογγυλοποίηση στο πρώτο ψηφίο. Επίσης διαπιστώθηκε συχνή χρήση της αλγοριθμικής διαδικασίας[10]. Η στρατηγική της στρογγυλοποίησης χρησιμοποιήθηκε μόνο περιστασιακά σε αντίθεση με τους μαθητές της Ιαπωνίας και των Η.Π.Α. που την χρησιμοποιούσαν συχνά. Επίσης, συχνή ήταν η χρήση της στρατηγικής εκτίμησης με βάση κάποιο σημείο αναφοράς, γεγονός που αντικατοπτρίζει την εξωσχολικά εμπειρία τους. Εξάλλου, σπάνια μπορούσαν να αναγνωρίσουν μη λογικές εκτιμήσεις. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι παρατηρείται συνάφεια με τα πορίσματα της έρευνας των Reys et al. (1982), ως προς τις γνωστικές διαδικασίες που χρησιμοποιήθηκαν.

Έπειτα από την επισκόπηση των ερευνών που διαπραγματεύονται το εύρος των στρατηγικών που χρησιμοποιούνται κατά τη διαδικασία εκτίμησης, παρατηρούμε ένα διαχωρισμό σε αυτές που εξετάζουν τις στρατηγικές των "καλών εκτιμητών" (Reys et al., 1982, Reys et al., 1991, Dowker 1992) που συνήθως είναι ειδικοί και των "αδύνατων στην εκτίμηση" (Levine 1982). Είναι σημαντικό ότι προσδιορίζεται μεγάλος αριθμός στρατηγικών και γνωστικών διαδικασιών στις έρευνες των Reys et al. (1982) και των Reys et al. (1991). Η Levine (1982) δίνει πιο περιορισμένο αριθμό στρατηγικών αλλά όμως εξετάζει τη σχέση μεταξύ της ικανότητας για εκτίμηση με την ποσοτική ικανότητα. Μολαταύτα, δεν εξετάζονται οι περιπτώσεις που απαιτούν την εφαρμογή της κατάλληλη στρατηγικής για να είναι αποτελεσματικότερη η εκτίμηση.

iv) Ανάπτυξη της ικανότητας για εκτίμηση - ψυχολογική προσέγγιση

Όσον αφορά στην ανάπτυξη των αντιλήψεων και ικανοτήτων της εκτίμησης η Dowker (1989) διερεύνησε τις δυνατότητες μαθητών ηλικίας 5 έως 9 ετών τους οποίους ταξινόμησε σε τέσσερα επίπεδα ανάλογα με την επίδοσή τους σε προσθετικά προβλήματα εκτίμησης. Τα προβλήματα του πρώτου επιπέδου ήταν του τύπου 217+285. Τα παιδιά εισήχθησαν στην έννοια της εκτίμησης μέσω παραδειγμάτων από υποθετικούς μαθητές των οποίων οι απαντήσεις για το "πόσο περίπου είναι το άθροισμα" κατατάσσονταν σε "καλό μάντεμα" ή "ανόητο μάντεμα". Τα παιδιά του πρώτου επιπέδου είχαν πολύ χειρότερη επίδοση από τα παιδιά υψηλότερων επιπέδων, παρόλο που τα προβλήματα που τους δόθηκαν ήταν αρκετά ευκολότερα. Σε πολλές εκτιμήσεις τους, το άθροισμα ήταν μικρότερο από τον ένα προσθετέο ή περισσότερο από το διπλάσιο της ακριβούς απάντησης. Στα δυο πρώτα επίπεδα, οι μαθητές χρησιμοποίησαν μηχανικές στρατηγικές (βλ. Baroody, 1989) σύμφωνα με τις οποίες κατασκεύαζαν μια δεκάδα από

[10] Εφαρμογή του αλγόριθμου ξεκινώντας από δεξιά προς τα αριστερά, αλλά νοερά.

ένα προσθετέο (για παράδειγμα 8+5=18) ή προσθέτοντας 1 στον τελευταίο προσθετέο (8+5=6) ή προσθέτοντας 1 στο μεγαλύτερο προσθετέο (8+5=9). Στα επίπεδα 3 και 4 κάποιοι μαθητές στρογγυλοποιούσαν στο πρώτο ψηφίο. Τα αποτελέσματα της έρευνας καταδεικνύουν ότι οι μαθητές συχνά χρησιμοποιούν κατάλληλες στρατηγικές για τα προβλήματα εκτίμησης, ελαφρά ανώτερες από το επίπεδό τους, αλλά όχι σε πιο δύσκολα προβλήματα, γεγονός το οποίο η Dowker ερμήνευσε, λέγοντας ότι τα πολύ δύσκολα προβλήματα αποθαρρύνουν τα παιδιά, οδηγώντας τα σε ανόητο μάντεμα.

Οι Sowder και Wheeler (1987) έδωσαν προβλήματα εκτίμησης σε μαθητές επιπέδου 2, 4, 6 και 8 και παρατήρησαν ότι η ικανότητα για να επιλύσουν τα προβλήματα αύξανε ανάλογα με το επίπεδο. Ακολούθησαν συνεντεύξεις σε 4 μαθητές από καθένα επίπεδο, οι οποίες έδειξαν ότι πριν το έκτο επίπεδο οι μαθητές είχαν πολύ λίγες ικανότητες για εκτίμηση και σπάνια κατανοούσαν τι έπρεπε να κάνουν για να λύσουν ένα πρόβλημα εκτίμησης, ΄0πως για παράδειγμα αν 5 δολάρια έφταναν για την αγορά τριών αντικειμένων που βρίσκονταν επάνω στο τραπέζι και των οποίων οι τιμές αναγράφονταν απάνω. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της έρευνας οι Sowder και Wheeler διαπίστωσαν ότι οι έννοιες και οι στρατηγικές εκτίμηση ακολουθούν αργή ανάπτυξη, καθώς και ότι η εκτίμηση υπολογισμών είναι μια σύνθετη διαδικασία με αρκετά στοιχεία.

Σε μια επόμενη ερευνά τους οι Sowder και Wheeler (1989) επιχείρησαν να προσδιορίσουν την ανάπτυξη και κατανόηση των εννοιών και διαδικασιών που συνδέονται άμεσα με την εκτίμηση υπολογισμών. Σε 12 μαθητές μέσης ικανότητας στα μαθηματικά δόθηκαν προβλήματα εκτίμησης υπολογισμών με λύσεις από υποθετικούς μαθητές, καθώς και παρόμοια προβλήματα στα οποία οι ίδιοι καλούνταν να κάνουν εκτίμηση του αποτελέσματος. Η ανάλυση των αποτελεσμάτων έδειξε ότι οι μαθητές επιχειρούσαν να υπολογίσουν πρώτα με τους ακριβείς αριθμούς και μετά να στρογγυλοποιήσουν το αποτέλεσμα ώστε αν έχουν μια εκτίμηση, αντί να βρίσκουν πρώτα την προσέγγιση των και στη συνέχεια να υπολογίζουν το αποτέλεσμα με βάση τους νέους αριθμούς που προέκυψαν από την προσέγγιση. Η διαδικασία πρώτα να βρίσκεις την προσέγγιση και μετά να υπολογίζεις φάνηκε ότι αναπτύσσεται σε αναλογία με το επίπεδο. Επίσης, ανάλογη με το επίπεδο είναι και η αποδοχή πολλαπλών λύσεων. Ακόμη, η ικανότητα για εύρεση της προσέγγισης των αριθμών αυξάνεται ανάλογα με την ηλικία. Εξάλλου, η σημασία της αντιστάθμισης για την επίτευξη καλύτερων εκτιμήσεων αναγνωρίζεται από τους μαθητές των υψηλότερων επιπέδων, ενώ μόνο στο 9ο επίπεδο οι μαθητές επιχειρούν να τη χρησιμοποιήσουν κατά τη διαδικασία εκτίμησης.

Όμως οι παραπάνω έρευνες, παρόλο που προσπάθησαν να φωτίσουν την ανάπτυξη των ικανοτήτων που σχετίζονται με την εκτίμηση, ωστόσο δεν αναφέρονται εκτεταμένα στη σχέση της εκτίμησης με τη γνωστική ανάπτυξη.

Οι Case και Sowder (1990) προσπάθησαν να αναλύσουν την εκτίμηση υπολογισμών μεταξύ δύο ποιοτικά διαφορετικών στοιχείων που σχετίζονται με την εκτίμηση: τη μετατροπή των ακριβών αριθμών σε κατά προσέγγιση αριθμούς και τον (νοερό) υπολογισμό αυτών των αριθμών. Βασισμένοι στη θεωρία του Case (1985) για τη γνωστική ανάπτυξη, σύμφωνα με την οποία η γνωστική ανάπτυξη κατά την διάρκεια των σχολικών χρόνων περνά από δύο βασικά στάδια, καθένα από τα οποία έχει τρία υποστάδια. Το πρώτο είναι το στάδιο της διάστασης (dimensional stage) από 5 έως 10 ετών κατά τη διάρκεια του οποίου τα παιδιά μπορούν να εστιάζουν σε ένα μόνο στοιχείο που έχει μια ή περισσότερες διαστάσεις. Το δεύτερο στάδιο είναι το διανυσματικό (vectorial stage) από 11 έως 18 ετών, κατά τη διάρκεια του οποίου τα παιδιά μπορούν να εστιάσουν σε δύο ή περισσότερα στοιχεία μιας δραστηριότητας. Καθώς λοιπόν η εκτίμηση περιέχει δύο σύνθετα, πολυδιάστατα στοιχεία, την προσέγγιση και το νοερό υπολογισμό, θεωρητικά σύμφωνα με τους ερευνητές ανήκει σε επίπεδο που τα παιδιά βρίσκονται στο διανυσματικό στάδιο της γνωστικής ανάπτυξης. Δόθηκαν κατάλληλα προβλήματα για κάθε υποστάδιο των δύο βασικών σταδίων που προαναφέρθηκαν σε 12 μαθητές επιπέδου k, 2, 4, 7, 9 και 11/12, καθώς και προβλήματα του επόμενου υποσταδίου. Οι προβλέψεις των ερευνητών για την επιτυχία της πλειοψηφίας των μαθητών στα προβλήματα εκτίμησης που αντιστοιχούσαν στο υποστάδιο στο οποίο βρίσκονταν ήταν απόλυτα ακριβείς. Ακριβείς επίσης ήταν και οι προβλέψεις τους για την αποτυχία της πλειοψηφίας των μαθητών σε προβλήματα που αντιστοιχούσαν σε υποστάδιο επόμενο απ' αυτό το οποίο ήδη διένυαν με βάση τα πορίσματα της έρευνας οι ερευνητές προτείνουν ότι δεν θα πρέπει να υπάρχει βιασύνη στη διδασκαλία διαδικασιών εκτίμησης, αλλά να ακολουθείται η πορεία γνωστικής εξέλιξης. Επίσης, θα πρέπει να γίνεται εκμετάλλευση της φυσικής ανάπτυξης τέτοιων ικανοτήτων, ώστε αυτές να ισχυροποιούνται και να επεκτείνονται στο πλαίσιο μιας οργανωμένης διδασκαλίας.

Σε μια συνολική θεώρηση του θέματος της εκτίμησης προβαίνει η Sowder (1992), η οποία με βάση μια επισκόπηση των ερευνών που έχουν υλοποιηθεί προσπαθεί να διερευνήσει το θέμα από όλες του τις πλευρές. Αρχικά προσπαθεί να αναλύσει τα διαφορετικά είδη εκτίμησης (εκτίμηση υπολογισμών, εκτίμηση μεγεθών, εκτίμηση πληθικότητας). Στη συνέχεια, εξετάζει τις έννοιες της εκτίμησης (υπολογισμών) και του ακριβή υπολογισμού καθώς και τη μεταξύ τους σχέση. Κατόπιν, παραθέτει τις ικανότητες των "καλών εκτιμητών", επισημαίνει το ρόλο που διαδραματίζει το συγκείμενο και προτείνει μεθόδους με τις οποίες οι αδύνατοι στην εκτίμηση θα μπορούσαν να εξασκηθούν. Θεωρεί ότι η διαδικασία της εκτίμησης είναι πολυσύνθετη και πολυδιάστατη και επικαλούμενη την έρευνα των Sowder & Wheeler (1989) παραθέτει τα εννοιολογικά στοιχεία που τη συναποτελούν (ρόλος των κατά προσέγγιση αριθμών, πολλαπλές διαδικασίες - πολλαπλά αποτελέσματα, ρόλος του ακριβή νοερού υπολογισμού), τις ικανότητες που απαιτούνται (διαδικασίες, αποφάσεις για τη σωστή τάξη μεγέθους και γα το εύρος των αποδεκτών απαντήσεων), τις σχετικές προαπαιτούμενες γνώσεις (ικανότητα να υπολογίζεις με δυνάμεις του 10, γνώση της αξίας θέσης των αριθμών, ικανότητα να συγκρίνεις αριθμούς, ικανότητα για νοερό υπολογισμό, γνώση βασικών μαθηματικών εννοιών, γνώση των ιδιοτήτων των πράξεων και της κατάλληλης χρήσης τους, αναγνώριση ότι η τροποποίηση των αριθμών μπορεί να αλλάξει το αποτέλεσμα της πράξης), και την επίδραση στη στάση απέναντι στην εκτίμηση, στα Μαθηματικά και στην αυτοαντίληψη (πίστη στην ικανότητα να κάνεις Μαθηματικά, πίστη στην ικανότητα για εκτίμηση, ανοχή στο λάθος, αναγνώριση της χρησιμότητας της εκτίμησης. Αναφέρεται στα ευρήματα της έρευνας των Case & Sowder (1990) για την ανάπτυξη της ικανότητας για εκτίμηση και τονίζει τη θετική επενέργεια της διδακτικής παρέμβασης, με βάση τα πορίσματα παλαιότερων συναφών ερευνών, για την ανάπτυξη της ικανότητας για εκτίμηση και την σταθεροποίησή της, η οποία όμως πρέπει να στηρίζεται στη μαθηματική διαίσθηση όπως αναπτύσσεται. Στη συνέχεια διαπραγματεύεται την "αίσθηση του αριθμού" και επισημαίνει τη συμβολή του νοερού υπολογισμού και της εκτίμησης στην ανάπτυξη και εξέλιξή του. Ακολουθεί μια ανάλυση της εκτίμησης μεγεθών και τέλος αναφέρει τη δυσκολία ενσωμάτωσης των διαδικασιών εκτίμησης στα αναλυτικά προγράμματα, καθώς υπάρχει διαφωνία μεταξύ των ερευνητών ως προς τη θεωρία μάθησης όπου στηρίζεται, ενώ υπάρχει διαφωνία ως προς ποιες περιοχές πρέπει να διερευνηθούν και πως πρέπει να πορευτεί η έρευνα.

Κρίνοντας την εργασία της Sowder (1992) παρατηρούμε ότι αντιμετωπίζει την εκτίμηση ως μια πολυδιάστατη διαδικασία και προσπαθεί να αποσαφηνίσει όλες τις πλευρές τις στηριζόμενοι στα ευρήματα προγενέστερων ερευνών. Ωστόσο, δεν εξετάζει το ρόλο της εκτίμησης ως διαδικασία ελέγχου σε αντίθεση με την εργασία των Κούρκουλου και Τζανάκη (2000), ενώ στα κριτήρια εκτίμησης παραβλέπει τα κριτήρια διάταξης τα οποία είναι πολύ απλά στην εφαρμογή τους με μικρό κόστος και ιδιαίτερα σημαντικά καθώς μπορούν να αποτελέσουν και κριτήρια ελέγχου (βλ. σχετικά κεφ.7)

Έπειτα από τη θεώρηση των ερευνών που προαναφέρθηκαν και αφορούν στην ανάπτυξη της ικανότητας για εκτίμηση συμπεραίνουμε ότι όλες χαρακτηρίζονται από κάποια κοινά σημεία: την αργή ανάπτυξη της ικανότητας για εκτίμηση σε αναλογία με τη γνωστική εξέλιξη και την πολυπλοκότητα και πολυσυνθετότητα της διαδικασίας της εκτίμησης. Όμως, παρατηρούμε ότι μόνο οι Case και Sowder (1990) τονίζουν τη σημασία μιας οργανωμένης διδασκαλίας για την ισχυροποίηση της φυσικής ικανότητας για εκτίμηση. Σε καμία έρευνα από τις προηγούμενες δεν διαφαίνεται η περίπτωση εικονικής απουσίας τέτοιων ικανοτήτων, καθώς, χωρίς την επενέργεια κατάλληλης διδασκαλίας η ικανότητα για εκτίμηση μπορεί να μην είναι έκδηλη με αποτέλεσμα τη χαμηλή επίδοση των μαθητών σε τεστ εκτίμησης (βλ. σχετικά Bestgen et al., 1980, Hanson & Hogan 2000, Nelson 1966,1967, Shcoen et al., 1981, DeCorte & Somers 1982, Edward 1984, Reys et al., 1984, Sowder & Markovits 1990, Reys et al., 1982, Threadyill & Sowder 1984, Reys et al., 1991).

4.2.2 Έρευνες σχετικές με διαδικασίες ελέγχου

Οι έρευνες που έχουν ως τώρα διενεργηθεί σε ό,τι αφορά τις διαδικασίες ελέγχου της μαθηματικής δραστηριότητας είναι αρκετά περιορισμένες. Ανάλογα με τον τρόπο που διαπραγματεύονται τον έλεγχο μπορούμε να εντάξουμε τις υπάρχουσες έρευνες σε τρεις περιοχές: α)σ' αυτές που εντάσσονται περισσότερο στο γενικότερο πλαίσιο που αφορά στις μεταγνωστικές δεξιότητες και αντιμετωπίζουν τον έλεγχο ως χαρακτηριστικό της μεταγνώσης (Stillman & Galbraith 1998, Schoenfeld 1985a, 1987, 1992, Lester 1989), β)σ' αυτές που αναφέρονται στον έλεγχο θεωρώντας τον ως βασικό στοιχείο της αυτοδιόρθωσης (Κούρκουλος 1996, 1997, Kourkoulos, Keyling 2001) και γ)στις εργασίες οι οποίες έχουν ως βασικό εξεταζόμενο θέμα τον έλεγχο και χαρακτηριστικά του (Κούρκουλος 1998, Κούρκουλος, Τζανάκης 2000).

i) ο έλεγχος ως στοιχείο της μεταγνώσης

Οι Stillman και Galbraith (1998) διενήργησαν έρευνα προκειμένου να διερευνήσουν την ικανότητα επίλυσης προβλημάτων μαθητριών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, εστιάζοντας τόσο στη μαθηματική διαδικασία, όσο και στις γνωστικές και μεταγνωστικές δραστηριότητες που οδηγούν σε αυτή τη διαδικασία. Το πλαίσιο στο οποίο βασίστηκαν για να μελετήσουν την ικανότητα επίλυσης προβλημάτων περιλαμβάνει τέσσερις κατηγορίες δραστηριοτήτων που εμπεριέχονται σε μια μαθηματική δραστηριότητα: *προσανατολισμός, οργάνωση, εκτέλεση και επαλήθευση*. Το πλαίσιο αυτό επιλέχθηκε καθώς έχει ως αφετηρία τον προσδιορισμό των σημείων κλειδιών όπου οι μεταγνωστικές αποφάσεις πιθανόν επηρεάζουν τη γνωστική δράση.

Μεθοδολογικά χρησιμοποιήθηκαν χάρτες απαντήσεων[11] για την ανάλυση και κατηγοριοποίηση των γραπτών απαντήσεων που έδωσαν ατομικά οι μαθητές ενώ έγιναν και συνεντεύξεις για την αποκάλυψη μεταγνωστικών γνώσεων, στρατηγικών, αποφάσεων. Με βάση τα πορίσματα της έρευνας φαίνεται ότι οι μεταγνωστικές δραστηριότητες εμπεριέχονται σε όλες τις φάσεις της διαδικασίας επίλυσης ενός προβλήματος. Κατά μέσο όρο, περισσότερος χρόνος αναλώθηκε στη διαδικασία του προσανατολισμού και της εκτέλεσης σε σχέση με τις διαδικασίες της οργάνωσης και της επαλήθευσης. Παρόλα αυτά όμως, τρεις ομάδες με την καλύτερη επίδοση χρησιμοποίησαν 35% λιγότερο χρόνο στον προσανατολισμό. Η επιτυχία συνδυάστηκε με μια τάση να χρησιμοποιείται μεγάλος αριθμός διαδικασιών οργάνωσης, ρύθμισης των δραστηριοτήτων εκτέλεσης, ιδιαίτερα ελέγχοντας την πρόοδο τοπικών και ολικών σχεδίων και επαλήθευσης, ειδικά αποτίμηση της εκτίμησης, όπως αποτίμηση της ακρίβειας της εκτέλεσης, συσχέτιση των μερικών και τελικών αποτελεσμάτων με τα μερικά σχέδια και τις συνθήκες του προβλήματος. Εξάλλου, οι ομάδες με τη μεγαλύτερη επιτυχία χρησιμοποίησαν μιάμιση φορά περισσότερο τις διαδικασίες επαλήθευσης καθ' όλη τη διάρκεια επίλυσης του προβλήματος. Κλείνοντας, προτείνουν την ενσωμάτωση τέτοιου είδους δραστηριοτήτων στις διδακτικές πρακτικές, καθώς και την ενθάρρυνση των μαθητών να επιστρατεύουν όλες τις διαθέσιμες γνωστικές και μεταγνωστικές πηγές τους.

Ο Schoenfeld (1992) συμπεριλαμβάνει τις διαδικασίες αυτορρύθμισης και ελέγχου στις βασικές δραστηριότητες επίλυσης προβλημάτων και τις εντάσσει στο γενικότερο πλαίσιο της μεταγνώσης. Αναφερόμενος σε ευρήματα παλαιότερων ερευνών καταδεικνύει τη σημαντικότητα αυτών των διαδικασιών, αλλά συνάμα την πολυπλοκότητά τους σε ό,τι αφορά την ανάπτυξή τους καθώς συχνά απαιτούν τροποποίηση της συμπεριφοράς ή ακατάλληλων συμπεριφορών ελέγχου που είχαν αναπτυχθεί από προηγούμενη διδασκαλία. Η ανάπτυξη συμπεριφορών ελέγχου αποκτάται συχνά μακροπρόθεσμα και απαιτεί προσοχή τόσο σε γνωστικές, όσο και σε μεταγνωστικές διαδικασίες.

Ο Lester (1989) μελέτησε το ρόλο της μεταγνώσης (γνώση και έλεγχος της γνώσης) στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, μέσα από διδακτική παρέμβαση στο 7ο επίπεδο. Μετά από επισκόπηση των αποτελεσμάτων, φαίνεται μια δυναμική αλληλεπίδραση μεταξύ των διαδικασιών ελέγχου και των γνωστικών διαδικασιών με την κατανόηση μαθηματικών εννοιών. Επίσης, επισημαίνεται η δυσκολία στην εκμάθηση τέτοιων διαδικασιών, οι οποίες όμως θα πρέπει να ενισχύονται προκειμένου να αναπτυχθούν.

Ο Schoenfeld (1985a, 1987) πραγματοποίησε σειρά μαθημάτων σε φοιτητές θέτοντας ως βασικό στόχο την ανάπτυξη ικανοτήτων ελέγχου με αποτέλεσμα τη σημαντική αύξηση στην επιτυχία επίλυσης προβλημάτων. Αρχικά έκανε παρατήρηση στη συμπεριφορά των φοιτητών, καθώς και μαθηματικών, κατά τη διάρκεια επίλυσης άγνωστου προβλήματος συνάγοντας το συμπέρασμα ότι οι μαθηματικοί μπορούν να επιστρατεύονται γνωστικές διαδικασίες και διαδικασίες ελέγχου κατά την επίλυση του προβλήματος, ενώ οι φοιτητές δεν είναι σε θέση να επιλύουν τέτοιου είδους προβλήματα. Κατόπιν πραγματοποίησε διδακτική παρέμβαση στους φοιτητές προκειμένου να αναπτύξουν ικανότητες επίλυσης προβλημάτων ανάλογες με αυτές των μαθηματικών.

[11] Πρόκειται για χάρτες όπου φαίνεται αναλυτικά η πορεία που ακολούθησε ο μαθητής, βήμα προς βήμα, προκειμένου να επιλύσει ένα πρόβλημα.

Μετά το τέλος της παρέμβασης, οι φοιτητές ήταν σε θέση να λύνουν άγνωστα προβλήματα σε επίπεδο όμως κατώτερο απ' αυτό των ειδικών, γεγονός που αποδόθηκε στην έλλειψη προηγούμενης γνώσης. Παρ' όλ' αυτά η ικανότητα της αυτορρύθμισης αύξησε σημαντικά την επιτυχία τους στην επίλυση προβλημάτων.

Παρατηρούμε ότι στις έρευνες που προαναφέρθηκαν ο έλεγχος αποτελεί θεμελιώδες στοιχείο της μεταγνώσης, καταδεικνύεται η βαρύνουσα σημασία του για την κατανόηση μαθηματικών εννοιών (Lester 1989) και για την ικανότητα επίλυσης προβλημάτων (Schoenfeld 1985a, 1987, 1992, Stillman & Galbraith, 1998). Ωστόσο, δεν υπάρχει ουσιαστική και εκτεταμένη ανάλυση της διαδικασίας ελέγχου που απέκτησαν οι φοιτητές, ώστε να φωτιστούν όλες οι πλευρές του και να αποσαφηνιστούν τα βασικά χαρακτηριστικά του.

ii) Ο έλεγχος ως στοιχείο της αυτοδιόρθωσης

Ο Κούρκουλος (1996), αναφερόμενος στην κατάστρωση εξισώσεων πρώτου βαθμού σε προβλήματα ποσοτήτων, επισημαίνει τους χώρους δυσκολιών που συναντούν οι μαθητές και περιγράφει σχήματα διδασκαλίας βασιζόμενος στα αποτελέσματα προγενέστερων πειραματικών διδασκαλιών. Οι χώροι δυσκολιών σε τέτοιου είδους προβλήματα, όπως προκύπτουν από τα αποτελέσματα προηγούμενης έρευνας με ερωτηματολόγιο[12] και συνεντεύξεων[13] σε μαθητές Γ΄ Γυμνασίου αφορούσαν:

- δυσκολίες στην αναπαράσταση των ποσοτήτων (και των σχέσεών τους) με τη χρήση αλγεβρικών συμβόλων
- δυσκολίες στο χωρισμό του προβλήματος σε υποπροβλήματα
- δυσκολίες σχετικές με τη σύλληψη των σχέσεων των ποσοτήτων που συμμετέχουν στα υποπροβλήματα.

Κατόπιν, αναφέρονται τα αποτελέσματα πειραματικής διδασκαλίας που πραγματοποιήθηκε στη Γαλλία το 1987-1988 και στην Ελλάδα το 1991-1992, τα οποία επιβεβαιώνουν τη σημασία που έχει η εκμάθηση της σωστής χρήσης των αλγεβρικών συμβόλων για την αναπαράσταση των σχέσεων των ποσοτήτων. Στη συνέχεια ακολουθεί το διδακτικό σχήμα που ακολουθήθηκε στο πλαίσιο της πειραματικής διδασκαλίας που υλοποιήθηκε στην Ελλάδα σε μαθητές Γ΄ Γυμνασίου και Α΄ Λυκείου σε δύο περιόδους. Στην πρώτη περίοδο (διάρκειας 7 ωρών) δόθηκε ιδιαίτερο βάρος στην κατανόηση του τύπου των δεδομένων και των σχέσεων που αναπαριστώνται με αλγεβρικά σύμβολα, καθώς και στη συνειδητοποίηση και απόρριψη των εσφαλμένων κανόνων αναπαράστασης και εκμάθησης των σωστών, στη δεύτερη περίοδο (διάρκειας 4 ωρών) δόθηκε στους μαθητές που συνέχιζαν να εμφανίζουν ελαττώματα αναπαράστασης ένα οργανωμένο σύστημα αυτοδιορθωτικών ελέγχων που περιελάμβανε τόσο ολικούς ελέγχους (δοκιμή λύσης του συστήματος, έλεγχος συμβατότητας της λύσης με τα δεδομένα του προβλήματος), όσο και μερικούς ελέγχους (έλεγχο ορθού προσδιορισμού των ποσοτήτων και των αγνώστων, έλεγχο σύλληψης και αναπαράστασης των σχέσεων των ποσοτήτων στα υποπροβλήματα, καθώς και έλεγχο επάρκειας ισοτήτων για την επίλυση του συστήματος.

---

[12] Το ερωτηματολόγιο περιελάμβανε προβλήματα που αναφέρονταν σε συνεχείς ποσότητες (χρόνος μήκος, μάζα…) και σε ποσότητες διακριτών αντικειμένων (μπίλιες, καραμέλες…) για την επίλυση των οποίων απαιτούνταν η κατάστρωση απλών συστημάτων πρώτου βαθμού π.χ. $x+y=α$ και $βx+δ=γy$

[13] Οι συνεντεύξεις πραγματοποιήθηκαν σε μέρος του δείγματος (119 μαθητές από τους 354) προκειμένου να αποσαφηνιστεί η κατάσταση σε ό,τι αφορούσε τα ελαττώματα αναπαράστασης με αλγεβρικά σύμβολα.

Ο συγγραφέας παρατηρούμε ότι αντιμετωπίζει τον έλεγχο ως βασικό στοιχείο της αυτοδιορθωτικής δραστηριότητας των μαθητών και θεωρεί ότι αποτελεί ακρογωνιαίο λίθο για τη στήριξη μιας αποτελεσματικής διδασκαλίας στο θέμα της κατάστρωσης πρωτοβάθμιων εξισώσεων προβλημάτων που αναφέρονται σε ποσότητες, ενώ είναι ιδιαίτερα ωφέλιμος για τους αδύνατους μαθητές. Εξάλλου, είναι αξιοσημείωτο ότι διαφοροποιεί τους ολικούς από τους μερικούς ελέγχους, τονίζοντας ιδιαίτερα τη σημασία και των δύο για την αύξηση της επιτυχίας των μαθητών στο συγκεκριμένο θέμα.

Οι Κούρκουλος και Keyling (2001) καταδεικνύουν τη σημασία της αυτοδιόρθωσης στους αλγεβρικούς αλγόριθμους και επισημαίνουν το σπουδαίο ρόλο των μερικών ελέγχων στο πλαίσιο περιορισμένων περιοχών της άσκησης, ειδικά για τους μέσους και αδύνατους μαθητές. Στηριζόμενοι σε αυτή την επισήμανση, κατασκεύασαν ένα εκπαιδευτικό λογισμικό ("Arithm") το οποίο διευκολύνει την αυτοδιορθωτική δραστηριότητα των μαθητών. Η λειτουργία του περιγράφεται ως εξής: "ο μαθητής γράφει στον υπολογιστή γραμμή προς γραμμή τη λύση της άσκησης, όπως θα έκανε στο τετράδιό του. Για κάθε γραμμή, το λογισμικό του δείχνει αν είναι σωστή ή όχι. Μετά, είναι ευθύνη του μαθητή να βρει και να διορθώσει το λάθος (ή τα λάθη) του." Βέβαια, στην περίπτωση των μέσων ή αδύνατων μαθητών, η γραμμή ήταν ήδη αρκετά μεγάλη περιοχή, με αποτέλεσμα ο εκπαιδευτικός να ρυθμίζει το λογισμικό έτσι, ώστε να παροτρύνονται οι μαθητές να υπολογίζουν ένα κομμάτι της γραμμής και να ανατροφοδοτούνται από το λογισμικό, το οποίο του σ ενημέρωνε και στην περίπτωση που παραβιάζεται η προτεραιότητα των πράξεων. Μετά από επαρκή εξάσκηση, το λογισμικό ρυθμίζεται έτσι, ώστε να παρέχει "φθίνουσα βοήθεια" ανάλογα με τις ικανότητες των μαθητών. Επίσης, παρέχει και κάποια στατιστικά στοιχεία χρήσιμα για τον εκπαιδευτικό, σχετικά με την εργασία των μαθητών.

Προκειμένου να διερευνηθεί η αποτελεσματικότητα αυτού του λογισμικού στις δραστηριότητες αυτοδιόρθωσης, έγινε στατιστικός έλεγχος μεταξύ τριών πειραματικών ομάδων και τεσσάρων ομάδων ελέγχου με μαθητές Β΄ Γυμνασίου. Οι πειραματικές ομάδες διδάχτηκαν διαδικασίες αυτοδιόρθωσης με τη χρήση υπολογιστή (8-9 ώρες) ενώ οι ομάδες ελέγχου διδάχτηκαν με τον παραδοσιακό τρόπο αριθμητική επαλήθευση και τοπικά κριτήρια ελέγχου, χωρίς τη χρήση υπολογιστή[14] (4-6 ώρες). Η διδασκαλία (συνολικής διάρκειας 22 ωρών) πραγματοποιήθηκε σε τρία επίπεδα: σε απλές εξισώσεις, σε εξισώσεις που περιείχαν παρενθέσεις με ακέραιους συντελεστές και σε εξισώσεις που περιείχαν κλάσματα, μέχρι και αθροίσματα στους αριθμητές. Πριν την έναρξη της διδακτικής παρέμβασης, καθώς και μετά την ολοκλήρωσή της, δόθηκε ερωτηματολόγιο σε όλους του μαθητές. Από την ανάλυσης των αποτελεσμάτων του πρώτου ερωτηματολογίου φαίνεται ότι πειραματικές ομάδες και ομάδες ελέγχου είναι ισοδύναμες. Όμως η ανάλυση του δεύτερου ερωτηματολογίου δείχνει σημαντική διαφοροποίηση των ποσοστών επιτυχίας των πειραματικών ομάδων και των ομάδων ελέγχου. Με βάση τα αποτελέσματα της πειραματικής διαδικασίας επισημαίνεται ότι ο εντοπισμός των λαθών σχετίζεται με την ικανότητα των μαθητών να διασπούν τον αλγόριθμο σε μονάδες υπολογισμού που μπορούν να ελεγχθούν ανεξάρτητα. Οι μαθητές που δεν καταφέρνουν να το επιτύχουν είτε δεν έχουν κατανοήσει την προτεραιότητα των

[14] Οι εκπαιδευτικοί των ομάδων ελέγχου θεώρησαν ότι η επαλήθευση δεν είναι επαρκής για τους αδύνατους και μέσους μαθητές σε πιο σύνθετες εξισώσεις, καθώς είχε μεγάλη διάρκεια και οι ίδιοι αδυνατούν να προσφέρουν εξατομικευμένη βοήθεια στους μαθητές τους καθώς είναι μόνοι τους. Για τους λόγους αυτούς δεν ασχολήθηκαν ιδιαίτερα με αυτή τη διαδικασία.

πράξεων, είτε χρειάζονται μεγαλύτερη εξάσκηση σε αυτοδιορθωτικές δραστηριότητες. Άλλοι παρουσιάζουν αδυναμία εντοπισμού των λαθών τους, ενώ δεν έχουν ιδιαίτερο πρόβλημα στη διάσπαση μιας αλγεβρικής έκφρασης σε μονάδες υπολογισμού που μπορούν να αντιμετωπιστούν ανεξάρτητα. επίσης παρατηρήθηκε η επίδραση της βελτίωσης σε ένα αντικείμενο (π.χ. αποκατάσταση στην εκτέλεση αριθμητικών παραστάσεων) που σχετίζονται με το χωρισμό των αλγορίθμων σε ανεξάρτητες μονάδες και με τον εντοπισμό των μαθών σε άλλες περιοχές. Ακόμη, παρατηρήθηκε αλλαγή στη συμπεριφορά των μαθητών σε σχέση με την αυτοδιόρθωση που αφορά στην αναγνώριση της χρησιμότητας των κριτηρίων ελέγχου και των διαδικασιών αυτοδιόρθωσης και στην αναζήτησή τους στη συνήθη διδασκαλία θεμάτων που διδάχτηκαν μετά το πέρας της πειραματικής εργασίας.

Παρατηρούμε ότι ο έλεγχος αντιμετωπίζεται ως αναπόσπαστο κομμάτι της αυτοδιορθωτικής δραστηριότητας και τονίζεται ιδιαίτερα η σημασία του για την αύξηση της επιτυχίας των μαθητών. Επίσης, γίνεται διαχωρισμός μεταξύ μερικών και ολικών ελέγχων και τονίζεται ιδιαίτερα η σημασία τους για το σύνολο της μαθηματικής δραστηριότητας. Εξάλλου, επισημαίνεται η επίδραση στη γενική στάση των μαθητών απέναντι στις διαδικασίες αυτοδιόρθωσης, οι οποίοι όχι μόνο αναγνωρίζουν τη σημασία τους, αλλά αναζητούν ανάλογα κριτήρια και σε άλλες μαθηματικές δραστηριότητες.

Ο Κούρκουλος (1997), επισημαίνοντας τον ουσιαστικό ρόλο της αυτοδιόρθωσης και των κριτηρίων ελέγχου, αναφέρεται στη δοκιμή των εξισώσεων πρώτου βαθμού καθώς και στη δοκιμή στους ταυτοτικούς μετασχηματισμούς, αναλύοντας βασικά στοιχεία για την εφαρμογή τους. Έτσι, όσον αφορά στη δοκιμή των πρωτοβάθμιων εξισώσεων, επισημαίνει τη σημασία της λύσης και στις ενδιάμεσες γραμμές της άσκησης, προκειμένου να εντοπιστεί μια γραμμή που περιέχει σφάλμα, καθώς και τη δυσκολία εφαρμογής της δοκιμής σε περίπτωση που η λύση που βρίσκει ο μαθητής είναι κλάσμα. Επίσης, τονίζει ότι η δοκιμή δεν επαρκεί ως κριτήριο ελέγχου, αλλά πρέπει ο μαθητής να διαθέτει κριτήρια ελέγχου για τα επιμέρους σημεία της λύσης της εξίσωσης (αλλαγή μέλους σε προσθετέους, αναγωγή όμοιων όρων, ανάπτυξη παρενθέσεων, απαλοιφή παρονομαστών, πράξεις θετικών και αρνητικών αριθμών), καθώς και εξάσκηση ώστε να αποκτήσουν ευχέρεια στη χρήση τους. Όσον αφορά στη δοκιμή των ταυτοτικών μετασχηματισμών, αναφέρει ότι μόνο μια αριθμητική δοκιμή αποτελεί μερικό κριτήριο ελέγχου, ενώ η αποτελεσματικότητά της εξαρτάται από διευκρινίσεις, όπως ποιοι είναι καλοί αριθμοί και ποιοι όχι για να αντικαταστήσουν τις μεταβλητές, η δυνατότητα αντικατάστασης διαφορετικών μεταβλητών με την ίδια αριθμητική τιμή, πλήθος δοκιμών για να είμαστε βέβαιοι ότι ο μετασχηματισμός μιας πολυωνυμικής παράστασης σε μια άλλη είναι σωστός. Επίσης, τονίζει ότι είναι απαραίτητο οι μαθητές να διαθέτουν τοπικά κριτήρια[15] για τον έλεγχο των επιμέρους σημείων της άσκησης. Ο συγγραφέας τονίζει ιδιαίτερα το ρόλο της "υποβοηθούμενης αυτοδιόρθωσης", δηλαδή του εντοπισμού της γραμμής ή της περιοχής που υπάρχει το λάθος, είτε από τον εκπαιδευτικό είτε από ένα κατάλληλο λογισμικό (βλ. σχετικά την επόμενη έρευνα). Αναφέρονται δύο πειραματικές εργασίες, με υποβοηθούμενη αυτοδιόρθωση σε μαθητές Α΄ και Β΄ Γυμνασίου. Η πρώτη διενεργήθηκε το 1993-1994 κατά την οποία οι μαθητές ενός τμήματος Α΄ Γυμνασίου και δύο τμημάτων Γ΄ Γυμνασίου χωρίστηκαν σε ομάδες 4-7 ατόμων, σε καθεμιά από τις οποίες αντιστοιχούσε ένας διδάσκων, ενώ ένα τμήμα της

[15] Κριτήρια ελέγχου που αφορούν επιμέρους και περιορισμένα σημεία της επεξεργασίας της άσκησης. (σ. 58)

Α΄ κανένα τμήμα της Β΄ Γυμνασίου δούλευε ολόκληρο με δύο διδάσκοντες. Οι μαθητές της Α΄ Γυμνασίου δούλεψαν με την υποβοηθούμενη αυτοδιόρθωση στο θέμα της προτεραιότητας των πράξεων, στις πράξεις και παραστάσεις των κλασμάτων, στα προβλήματα των ανάλογων ποσών και ποσοστών. Οι μαθητές της Β΄ Γυμνασίου δούλεψαν στις παραστάσεις με θετικές και αρνητικές δυνάμεις, στην επίλυση εξισώσεων και ανισώσεων και στην κατάστρωση εξισώσεων από προβλήματα. Κατά τη διδακτική παρέμβαση (διάρκειας 3 μηνών) ο διδάσκων αρχικά καθόριζε τις περιοχές όπου οι μαθητές έπρεπε να αναζητήσουν τα λάθη τους και εισήγαγε πληροφορίες και κριτήρια ελέγχου στο εξεταζόμενο θέμα Η ουσιαστική διαφορά είναι ότι στην πρώτη περίπτωση ο διδάσκων κάθε ομάδας μπορούσε να προσφέρει ατομική βοήθεια ενώ στη δεύτερη δεν ήταν δυνατό να το πραγματοποιήσει επαρκώς. Μετά το πέρας της διδασκαλίας δόθηκε ερωτηματολόγιο στις πειραματικές ομάδες καθώς και σε ομάδες ελέγχου και φάνηκε ότι η διαφορά στην επίδοσή τους ήταν στατιστικά σημαντική, ενώ πριν την έναρξη της πειραματικής διδασκαλίας πειραματικές ομάδες και ομάδες ελέγχου ήταν ισοδύναμες, όπως φάνηκε από τα αποτελέσματα του ερωτηματολογίου που δόθηκε. Επίσης, μεταξύ των πειραματικών ομάδων, καλύτερα αποτελέσματα παρουσιάζουν τα τμήματα που δούλεψαν με την πρώτη μορφή αυτοδιόρθωσης. Επίσης, περιγράφεται η πειραματική διδασκαλία που έγινε σε μαθητές Β΄ Γυμνασίου με τη χρήση του εκπαιδευτικού λογισμικού “Αριθμοί”. Εξάλλου, περιγράφονται τα χαρακτηριστικά των κριτηρίων ελέγχου που χρησιμοποιούν οι μαθητές (βλ. παρακάτω Κούρκουλος, 1998).

iii) Ο έλεγχος ως βασικό εξεταζόμενο θέμα

Ο Κούρκουλος (1998) παραθέτει και αναλύει τα χαρακτηριστικά των κριτηρίων ελέγχου που χρησιμοποιούν οι μαθητές κατά την εφαρμογή των αλγορίθμων της αριθμητικής και της άλγεβρας. Προκειμένου να επιτύχει μια πιο εξειδικευμένη ανάλυση, προβαίνει στην κατηγοριοποίησή τους σε τρεις ομάδες:

- σ’ αυτά που αφορούν στην αποτελεσματικότητα του κριτηρίου σε σχέση με τον εντοπισμό και τη διόρθωση του σφάλματος
- σ’ αυτά που αφορούν στο μαθησιακό όφελος που προκύπτει μέσα από την παραγωγή και εφαρμογή του κριτηρίου
- σ’ αυτά που αφορούν στο κόστος παραγωγής και εφαρμογής του κριτηρίου (βλ. σχετικά §6.3).

Σχετικά με την αποτελεσματικότητα του κριτηρίου αρχικά διακρίνει τα τοπικά κριτήρια που αφορούν σε επιμέρους σημεία της επεξεργασίας της άσκησης και τα ολικά, που αφορούν στο σύνολο της άσκησης. Επίσης, διακρίνει τα κριτήρια ελλιπή ελέγχου, επαρκή ελέγχου και τα εναλλακτικά προγράμματα παραγωγής της απάντησης. Τα κριτήρια ελλιπή ελέγχου αποτελούν “αναγκαίες αλλά όχι ικανές συνθήκες για την ορθότητα της απάντησης”, όπως π.χ. η δοκιμή του πολλαπλασιασμού με το σταυρό. Τα κριτήρια επαρκή ελέγχου “αποτελούν ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ορθότητα της απάντησης”, όπως π.χ. η ευκλείδεια δοκιμή της διαίρεσης. Τα εναλλακτικά προγράμματα παραγωγής της απάντησης “αποτελούν διαφορετικούς τρόπους εύρεσης της απάντησης, τους οποίους ο μαθητής μπορεί να χρησιμοποιήσει για να ελέγξει το αποτέλεσμα που βρήκε με το βασικό αλγόριθμο”, όπως π.χ. για την εκτέλεση της πράξης $25{,}4\cdot 0{,}001$ εκτός από τη χρήση του μνημονικού κανόνα μετακίνησης της υποδιαστολής μπορεί να εφαρμοστεί η μετατροπή του ενός ή και των δύο όρων σε κλάσματα (βλ. §5.4). Σχετικά με το μαθησιακό όφελος, αυτό μπορεί να χαρακτηριστεί ως προς δύο άξονες: ως προς τα στοιχεία για τα οποία υπάρχει γνωστικό όφελος και ως προς τη γνωστική απόσταση κριτηρίου – αλγορίθμου. Ως προς τον πρώτο άξονα, παρατηρείται βελτίωση της κατανόησης των επιμέρους στοιχείων του αλγορίθμου, της κατανόησης των επιμέρους στοιχείων του κριτηρίου, της κατανόησης του προβλήματος στο οποίο απαντά ο αλγόριθμος και της λύσης που προσφέρει, καθώς μπορεί να επιφέρει και μεταβολές στον ίδιο τον αλγόριθμο[16]. Ως προς το δεύτερο άξονα, διακρίνονται δύο παράγοντες που συμβάλλουν στη βελτίωση της κατανόησης των επιμέρους στοιχείων του αλγόριθμου και εκείνων του κριτηρίου ελέγχου: η προϋπάρχουσα σύνδεση και το πεδίο έκφρασης και επεξεργασίας και το πλαίσιο. Όσον αφορά στον πρώτο παράγοντα, είτε δημιουργούνται συνδέσεις των στοιχείων του αλγορίθμου με άλλες γνώσεις που προϋπήρχαν αλλά παρέμεναν ασύνδετες με αυτά, ή οι συνέπειές τους είχαν διερευνηθεί εν μέρει, είτε το μαθησιακό όφελος προκύπτει από την αναδιοργάνωση όλων αυτών των γνώσεων[17]. Όσον αφορά στο δεύτερο παράγοντα διακρίνονται οι εξής περιπτώσεις:

- δεν υπάρχει αλλαγή πεδίου έκφρασης και επεξεργασίας ή πλαισίου (π.χ. η δοκιμή της ευκλείδειας διαίρεσης)
- υπάρχει αλλαγή πεδίου έκφρασης και επεξεργασίας (π.χ. η εκτέλεση της πράξης 25,4·0,001 με μετατροπή σε κλάσματα
- υπάρχει αλλαγή πλαισίου (π.χ. η διδασκαλία της ταυτότητας $(\alpha+\beta)^2$ με γεωμετρικό τρόπο (βλ. §6.5β).

Παρατηρούμε ότι ο συγγραφέας επιχειρεί να κάμει μια ουσιαστική και βαθιά ανάλυση του θέματος, αποσαφηνίζοντας βασικά στοιχεία που συνδέονται με αυτό. Επίσης, είναι σημαντικό το ότι προβαίνει σε μια κατηγοριοποίηση των χαρακτηριστικών των κριτηρίων ελέγχου, προκειμένου να καταστήσει σαφέστερη την εικόνα σε ό,τι αφορά το υπό εξέταση θέμα, παραθέτοντας ταυτόχρονα πληθώρα παραδειγμάτων από το σύνολο των μαθηματικών.

4.2.3 Εκτίμηση-έλεγχος: ταυτόχρονη θεώρηση

Οι Κούρκουλος και Τζανάκης (2000) αναλύουν σε θεωρητικό επίπεδο τη λειτουργία και το εννοιολογικό περιεχόμενο ενός μεγάλου αριθμού κριτηρίων εκτίμησης και ελέγχου των μαθηματικών αλγορίθμων, ενώ επεκτείνονται και σε εξωαλγοριθμικές δραστηριότητες, αναφερόμενοι συχνά στο χώρο της Φυσικής, καθότι πιστεύουν ότι η σημασία τέτοιων κριτηρίων αφορά στο σύνολο της μαθηματικής δραστηριότητας. Αρχικά επισημαίνουν το έλλειμμα και τις αντιφάσεις που παρουσιάζει η σημερινή διδασκαλία όσον αφορά στα κριτήρια εκτίμησης και ελέγχου, αναφερόμενοι τόσο στα σχολικά εγχειρίδια, όσο και σε προηγούμενη διδακτική έρευνα κατά την οποία έγινε συνέντευξη σε δασκάλους προκειμένου να διαπιστωθούν οι πρακτικές τους στο υπό εξέταση θέμα. Ταυτόχρονα, για να είναι σαφέστερη η ανάλυση, προβαίνουν σε μια κατηγοριοποίηση των κριτηρίων εκτίμησης και ελέγχου βάσει του εννοιολογικού τους περιεχομένου επιτυγχάνοντας μια μεγαλύτερη προσέγγιση στα κριτήρια που αφορούν στους αλγορίθμους των τεσσάρων αριθμητικών πράξεων και παρουσιάζοντας ένα μεγάλο

[16] Όπως π.χ. 2,45·100 $\rightarrow$ 245000 $\rightarrow$ 2450,00. Δηλαδή οι μαθητές εφαρμόζουν με διαφορετικό τρόπο τον αλγόριθμο, γράφοντας τον πολλαπλασιαστέο χωρίς υποδιαστολή, συμπληρώνοντας στο τέλος του τα μηδενικά του πολλαπλασιαστή και στη συνέχεια χωρίζουν τόσα δεκαδικά ψηφία, όσα έχει ο πολλαπλασιαστής.

[17] Π.χ. η εξήγηση στην Ε΄ Δημοτικού του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης δύο δεκαδικών με τη βοήθεια των αλγορίθμων των κλασμάτων εγκαταλείπεται πολύ γρήγορα με αποτέλεσμα οι συνδέσεις ανάμεσα στους δεκαδικούς και στα κλάσματα να είναι ατελείς.

εύρος απ' αυτά. Στη συνέχεια, παρουσιάζουν δύο ιστορικά παραδείγματα που εντάσσονται στο πλαίσιο των κριτηρίων εκτίμησης και ελέγχου. Πρόκειται για τους *Διορισμούς*[18] και την *αρχή διατήρησης ισοδύναμων μορφών*[19]. Κατόπιν, προβαίνουν σε μια τριπλή κατηγοριοποίηση των κριτηρίων εκτίμησης και ελέγχου: με βάση την περίοδο εφαρμογής του κριτηρίου, με βάση τον προσδιορισμό της λειτουργίας τους και με βάση τα εννοιολογικά τους χαρακτηριστικά. Το σχήμα που ακολουθείται είναι το εξής:

Κατηγοριοποίηση Ι: Περίοδος εφαρμογής του κριτηρίου

Ι.1 Ευρετική περίοδος

α)κριτήρια εκτίμησης κατά την ευρετική φάση αναζήτησης και κατασκευής κατάλληλου αλγορίθμου

β)κριτήρια ελέγχου κατά την ευρετική φάση αναζήτησης και κατασκευής κατάλληλου αλγορίθμου

γ)κριτήρια ελέγχου ή εκτίμησης κατά τη διάρκεια εφαρμογής του αλγορίθμου

Ι.2 Περίοδος εφαρμογής του αλγορίθμου

α)κριτήρια εκτίμησης που μπορούν να εφαρμοστούν πριν την εφαρμογή γνωστών αλγορίθμων

β)κριτήρια ελέγχου σφαλμάτων μετά την επίλυση ενός προβλήματος

γ)κριτήρια εκτίμησης ή ελέγχου κατά τη διάρκεια εφαρμογής του αλγορίθμου

Κατηγοριοποίηση ΙΙ: Προσδιορισμός της λειτουργίας των κριτηρίων εκτίμησης και ελέγχου

ΙΙ.1Στοιχεία του αλγορίθμου που εξετάζονται με τη χρήση του κριτηρίου

α)κριτήρια επιλυσιμότητας και εφαρμοσιμότητας

β)κριτήρια εκτίμησης του "κόστους" εφαρμογής ενός αλγορίθμου (βλ. σχετικά §6.3)

γ)κριτήρια εκτίμησης και ελέγχου της ορθότητας του αποτελέσματος

ΙΙ.2Αποτελεσματικότητα του κριτηρίου ως προς αυτό που εξετάζεται με το κριτήριο

α)κριτήρια που παράγουν το ζητούμενο αποτέλεσμα

β)κριτήρια που δεν προσδιορίζουν πλήρως το ζητούμενο αποτέλεσμα (βέβαια κριτήρια, αβέβαια κριτήρια)

ΙΙ.3 Ολικά και τοπικά κριτήρια εκτίμησης και ελέγχου

ΙΙ.4 Κόστος εφαρμογής του κριτηρίου (με μεγάλο κόστος, με μικρό κόστος)

ΙΙ.5 Το προκύπτον γνωστικό όφελος (βελτίωση της κατανόησης επιμέρους στοιχείων του αλγορίθμου, βελτίωση της κατανόησης επιμέρους στοιχείων του χρησιμοποιηθέντος κριτηρίου, βελτίωση της κατανόησης του προβλήματος που λύθηκε και της λύσης που προσφέρει ο αλγόριθμος, βελτιώσεις του ίδιου του αλγορίθμου

ΙΙ.6 "Γνωστική απόσταση" (βλ. σχετικά §6.5) κριτηρίου ελέγχου – αλγορίθμου (προϋπάρχουσα σύνδεση, πεδίο έκφρασης και επεξεργασίας)

[18] Πρόκειται για προτάσεις που αποτελούν κριτήρια για το κατά πόσο το ζητούμενο είναι δυνατό ή αδύνατο να βρεθεί και σε ποιο βαθμό είναι εφικτό και με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να γίνει (Heath 1981, vol. I p. 371, Heath 1956 vol. I, pp. 130-131, 243)

[19] Πρόκειται για τη σύμβαση κατά την οποία οι οριζόμενες πράξεις και ο χειρισμός των συμβόλων διατηρούν τις βασικές ιδιότητες που είναι γνωστές από τα συνήθη αριθμητικά σύνολα - μεταθετικότητα, προσεταιριστικότητα, επιμεριστικότητα - (Boyer 1968, Dieudonné 1978). Έτσι η ιδέα αυτή αποτελεί κριτήριο για τα πότε το αποτέλεσμα συμβολικών πράξεων με αφηρημένα σύμβολα έχει νόημα και πότε όχι.

Κατηγοριοποίηση ΙΙΙ: κατηγοριοποίηση των κριτηρίων βάσει των εννοιολογικών χαρακτηριστικών

ΙΙΙ.1 Κριτήρια ως κανόνες "διατήρησης" (κριτήρια βασισμένα σε συμμετρίες των υπό εξέταση αντικειμένων, εξέταση ειδικών ή οριακών περιπτώσεων, "μικρές μεταβολές επιφέρουν μικρές μεταβολές"

ΙΙΙ.2 Κριτήρια βασιζόμενα στην εκτίμηση ή τον έλεγχο των ανεξάρτητων, κυρίαρχων παραγόντων που καθορίζουν το υπό εξέταση αντικείμενο

ΙΙΙ.3 Η αλλαγή πλαισίου από το διακριτό στο συνεχές και αντίστροφα.

Η εργασία των εν λόγω συγγραφέων είναι ενδιαφέρουσα για την πορεία εξέλιξης της διαπραγμάτευσης του θέματος που εξετάζουμε, καθώς αντιμετωπίζουν δύο μέχρι τότε ασυσχέτιστες έννοιες ως συνεκτικά και αλληλοσυσχετιζόμενα δομικά στοιχεία της ίδιας μονάδας. Επίσης, με βάση την κατηγοριοποίηση που παραθέτουν, συμπεριλαμβάνουν στην ανάλυσή τους όλες τις όψεις του πολύπλευρου θέματος της εκτίμησης και του ελέγχου. Εξάλλου, αναφέρουν πληθώρα παραδειγμάτων προκειμένου να καταστήσουν σαφέστερη την κατηγοριοποίησή τους, ενώ αντλούν και παραδείγματα από την ιστορία των Μαθηματικών, τα οποία ενσωματώνουν αρμονικά στη σύγχρονη μαθηματική πραγματικότητα

Με βάση την ανασκόπηση που προαναφέρθηκε συνάγεται το συμπέρασμα ότι η υπάρχουσα βιβλιογραφία σε ό,τι αφορά τις διαδικασίες εκτίμησης και ελέγχου είναι αρκετά περιορισμένη. Οι περισσότερες έρευνες αντιμετωπίζουν μονομερώς την εκτίμηση ή τον έλεγχο. Σε ό,τι αφορά την εκτίμηση υπολογισμών, η βαρύτητα έχει δοθεί σε στρατηγικές από μνήμης προσεγγιστικών υπολογισμών, στην ανάπτυξή τους και στη σχέση τους με άλλες ικανότητες. Ωστόσο, η σχέση και η επίδραση της εκτίμησης σε άλλες ικανότητες έχει διερευνηθεί μόνο θεωρητικά και αφορά κυρίως στη σχέση της με την ικανότητα επίλυσης προβλημάτων (Sowder 1989, 1992) και με την καλή κατανόηση των αριθμών και των ιδιοτήτων τους (Rubenstein 1985, Case & Sowder 1990, Sowder 1992). Επίσης, οι έρευνες που αναφέρονται στην εκτίμηση υπολογισμών αφορούν αποκλειστικά στην εκτέλεση από μνήμης προσεγγιστικών υπολογισμών, παραγκωνίζοντας εντελώς τα κριτήρια διάταξης, τα οποία είναι σημαντικά και εύκολα στην εφαρμογή τους. Εξάλλου, η προσπάθεια για πειραματική διερεύνηση του θέματος επικεντρώνεται στην εκμάθηση κάποιων στρατηγικών εκτίμησης υπολογισμών, χωρίς όμως να λαμβάνονται υπόψη οι προαπαιτούμενες γνώσεις στις οποίες στηρίζεται η εκτίμηση. Επίσης, η διάρκεια των διδακτικών παρεμβάσεων ήταν σχετικά περιορισμένη.

Όσον αφορά στη βιβλιογραφία σχετικά με τις διαδικασίες ελέγχου, οι περισσότερες έρευνας αναφέρονται στον έλεγχο θεωρώντας τον ως δομικό στοιχείο της μεταγνώσης (Shcoenfeld 1985a, 1987a, 1992, Lester 1989, Stillman & Galbraith 1998), ή της αυτοδιόρθωσης (Κούρκουλος 1996, 1997, Κούρκουλος & Keyling 2001). Τα στοιχεία της πειραματικής διερεύνησης που έγινε από τους Κούρκουλο 1996, 1997, Κούρκουλο & Keyling 2001 δίνουν πολύτιμες πληροφορίες σχετικά με την ανάπτυξη της διαδικασίας ελέγχου και τη επίδρασής που έχει σε συγκεκριμένες μαθηματικές περιοχές. Ο Κούρκουλος (1998) δίνει μια ολοκληρωμένη ανάλυση σε ό,τι αφορά τον έλεγχο, η οποία εκτός του ότι αποσαφηνίζει βασικές όψεις του θέματος, παρουσιάζει στοιχεία από προηγούμενες πειραματικές διαδικασίες σε θέματα ελέγχου. Οι έρευνες των Schoenfeld 1985a, 1987, Lester 1989, Stillman & Galbraith 1998, παρόλο που δεν αναφέρονται αποκλειστικά στον έλεγχο, ωστόσο τονίζουν τη σημασία του καθώς και τη σχέση του με άλλες μαθηματικές δραστηριότητες.

Η πιο εμπεριστατωμένη εργασία σε ό,τι αφορά τα κριτήρια εκτίμησης και ελέγχου είναι αυτή των Κούρκουλου και Τζανάκη (2000), καθώς αναλύουν ταυτόχρονα τα κριτήρια εκτίμησης και ελέγχου, τονίζοντας ότι συνιστούν αλληλένδετες έννοιες.

Ωστόσο, από τη βιβλιογραφία παρατηρούμε ότι απουσιάζει έρευνα που να επικεντρώνεται στην πειραματική διερεύνηση της συμπεριφοράς των μαθητών σε σχέση με τα κριτήρια εκτίμησης και ελέγχου και την οργάνωση ενός διδακτικού σχήματος με βάση την αλληλεξάρτηση των εννοιών εκτίμησης και ελέγχου, τις προαπαιτούμενες γνώσεις όπου στηρίζεται και τις διαδικασίες που απαιτούνται.

5. ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΚΡΙΤΗΡΙΩΝ ΕΚΤΙΜΗΣΗΣ ΚΑΙ ΕΛΕΓΧΟΥ

Παρακάτω παρατίθενται κριτήρια εκτίμησης και ελέγχου, που αφορούν στις τέσσερις αριθμητικές πράξεις, ταξινομημένα σε τέσσερις κατηγορίες[20]:

1) Πλήρεις δοκιμές των πράξεων και μερικά κριτήρια ελέγχου που απορρέουν άμεσα απ' αυτές τις δοκιμές

2) Κριτήρια ελέγχου που βασίζονται στις ιδιότητες των ισοϋπόλοιπων αριθμών

3) Κριτήρια εκτίμησης του μεγέθους των αποτελεσμάτων των πράξεων

4)Εναλλακτικοί τρόποι εκτέλεσης πράξεων (εναλλακτικά προγράμματα παραγωγής της απάντησης - Κούρκουλος, 1998)

Η ταξινόμηση αυτή επιλέχτηκε, προκειμένου να παρουσιαστεί η καταγραφή όσο το δυνατό περισσότερων κριτηρίων εκτίμησης και ελέγχου που αφορούν στους αλγορίθμους των τεσσάρων αριθμητικών πράξεων, ώστε ο αναγνώστης να έχει μια σαφή εικόνα, καθώς σε πολλά σημεία της εργασίας γίνονται αναφορές και παρατίθενται παραδείγματα με βάση τα κριτήρια αυτά. Εξάλλου, ο σχεδιασμός του διδακτικού σχήματος έγινε, λαμβάνοντας υπόψη την κατηγοριοποίηση αυτή.

5.1 Πλήρεις δοκιμές των πράξεων και μερικά κριτήρια ελέγχου που απορρέουν άμεσα απ' αυτές τις δοκιμές

Στις πλήρεις δοκιμές περιλαμβάνονται οι επαληθεύσεις εκείνες οι οποίες μας παρέχουν τη βεβαιότητα ότι το αποτέλεσμα της πράξης την οποία έχουμε εκτελέσει είναι σίγουρα σωστό ή σίγουρα λάθος και περιλαμβάνουν όλους τους όρους της αριθμητικής πράξης. Επίσης, παρουσιάζονται τα μερικά κριτήρια που απορρέουν από τις πλήρεις δοκιμές των πράξεων, δηλαδή κριτήρια τα οποία αποτελούν αναγκαίες συνθήκες για την ορθότητα της πράξης, αλλά όχι και ικανές, και μπορούν να εφαρμοστούν κατά τη διάρκεια εκτέλεσης μιας αριθμητικής πράξης.

α. Πρόσθεση

Στην πρόσθεση ακεραίων και δεκαδικών αριθμών υπάρχουν δύο πλήρεις δοκιμές, οι οποίες προκύπτουν από την αναδιάταξη των όρων της πρόσθεσης και του αθροίσματος:

i). Η πρώτη δοκιμή προκύπτει από την αντιμετάθεση των όρων της πρόσθεσης, στηρίζεται δηλαδή στην αντιμεταθετική ιδιότητα. Αν το άθροισμα είναι ίδιο με το αρχικό, τότε συμπεραίνουμε ότι η αρχική πράξη είναι σωστή.

Πράξη	Δοκιμή
$α+β=γ$	$β+α=γ$

ii). Η δεύτερη δοκιμή προκύπτει από την αντίστροφη σχέση που συνδέει την πρόσθεση και την αφαίρεση και έχει δύο μορφές:

1) Πράξη	Δοκιμή
$α+β=γ$	$γ-β=α$

Η τυπική απόδειξή της, βάσει των ιδιοτήτων των ακεραίων, έχει ως εξής:

[20] Η ταξινόμηση αυτή βασίζεται στην ταξινόμηση των Κούρκουλου και Τζανάκη (2000, σσ. 265-268) και Κούρκουλου (1998, σ. 81-85).

(α+β=γ $\Leftrightarrow$ α+β+(-β)=γ+(-β) $\Leftrightarrow$ α+$\left[\beta+\left(-\beta\right)\right]$=γ+(-β) $\Leftrightarrow$ α+0=γ-β $\Leftrightarrow$ α=γ-β $\Leftrightarrow$

γ-β=α

2) Πράξη Δοκιμή

α+β=γ γ-α=β

Παραδείγματα:

Πράξη	Επαληθεύσεις
158+236=394	i) 236+158=394
	ii) α) 394-158=236
	β) 394-236=158

Βέβαια η δοκιμή με την εφαρμογή της πρόσθεσης κρίνεται ευκολότερη και με μικρότερο κόστος εφαρμογής, καθώς σε γενική κλίμακα οι μαθητές έχουν καλύτερη επίδοση στην πράξη της πρόσθεσης (Μπασέτας 1995, Φιλίππου, 1991).

β. Αφαίρεση

Στην αφαίρεση, σε αναλογία με την πρόσθεση με την οποία είναι πράξεις αντίστροφες, υπάρχουν δύο πλήρεις δοκιμές:

i) Η πρώτη δοκιμή προκύπτει από την αντίστροφη σχέση που συνδέει την πρόσθεση και την αφαίρεση, την ιδιότητα του αντίθετου ή συμμετρικού στοιχείου που ισχύει για την πράξη της πρόσθεσης στο σύνολο Q των ρητών αριθμών και έχει δύο μορφές:

1) Πράξη Δοκιμή

α-β=γ γ+β=α

(α-β=γ $\Leftrightarrow$ α-β+β=γ+β $\Leftrightarrow$ α=γ+β $\Leftrightarrow$ γ+β=α)

2) Η δεύτερη μορφή της πρώτης δοκιμής στηρίζεται στην αντιμετάθεση των όρων της πρώτης μορφής:

Πράξη Δοκιμή

α-β=γ β+γ=α

ii) Η δεύτερη επαλήθευση στηρίζεται επίσης στην ιδιότητα του συμμετρικού ή αντίθετου στοιχείου:

Πράξη Δοκιμή

α-β=γ α-γ=β

(α-β=γ $\Leftrightarrow$ α-β+β=γ+β $\Leftrightarrow$ α=γ+β $\Leftrightarrow$ α+(-γ)=(-γ)+γ+β $\Leftrightarrow$ α-γ=β

Παραδείγματα:

Πράξη	Επαληθεύσεις
376-179=197	i) α) 197+179=376
	β) 197+179=376
	ii) 376-197=179

Παρατηρούμε ότι η πιο συμφέρουσα επαλήθευση, σε ό,τι αφορά το κόστος εφαρμογής, είναι η δεύτερη, η οποία μπορεί να γίνει απευθείας πάνω στον εφαρμοσμένο αλγόριθμο της αφαίρεσης, χωρίς να γίνει γραπτή εκτέλεση νέου αλγορίθμου. Ή μπορεί να εφαρμοστεί ως εξής:

$$\begin{array}{r} 376 \\ -179 \\ \hline 197 \\ +179 \\ \hline 376 \end{array}$$

Γράφουμε δηλαδή τον αφαιρετέο κάτω από τη διαφορά και κάνουμε πρόσθεση για να βρούμε το μειωτέο.

γ. Πολλαπλασιασμός

Στον πολλαπλασιασμό υπάρχουν δύο πλήρεις δοκιμές, ένας πολλαπλασιασμός και μία διαίρεση:

i) Η πρώτη δοκιμή στηρίζεται στην αντιμεταθετική ιδιότητα που ισχύει για την πράξη του πολλαπλασιασμού στο σύνολο Q των ρητών αριθμών Αν το γινόμενο είναι ίδιο με το αρχικό, τότε συμπεραίνουμε ότι η αρχική πράξη είναι σωστή.

Πράξη	Δοκιμή
α·β=γ	β·α=γ

ii) Η δεύτερη επαλήθευση στηρίζεται στην αντίστροφη σχέση που συνδέει τον πολλαπλασιασμό και την διαίρεση, δηλαδή στην ιδιότητα του αντίστροφου ή συμμετρικού στοιχείου για το σύνολο Q των ρητών αριθμών και έχει δύο μορφές:

1) Πράξη — Δοκιμή

Πράξη	Δοκιμή
α·β=γ	γ:α=β

$$(\alpha\cdot\beta=\gamma \Leftrightarrow \alpha\cdot\beta\cdot\frac{1}{a}=\gamma\cdot\frac{1}{a} \Leftrightarrow \beta\cdot(\alpha\cdot\frac{1}{a})=\gamma\cdot\frac{1}{a} \Leftrightarrow \beta\cdot 1=\gamma\cdot\frac{1}{a} \Leftrightarrow \gamma:\alpha=\beta)$$

2) Η δεύτερη μορφή στηρίζεται και πάλι στην ιδιότητα του αντίστροφου ή συμμετρικού στοιχείου για τον πολλαπλασιασμό στο σύνολο Q των ρητών αριθμών.

Πράξη	Δοκιμή
α·β=γ	γ:β=α

Παραδείγματα:

Πράξη	Επαληθεύσεις
17·24=408	i) 24·17=408
	ii) α) 408:24=17
	β) 408:17=24

δ. Διαίρεση

Στη διαίρεση υπάρχουν δύο πλήρεις δοκιμές:

i) Η πρώτη επαλήθευση είναι πολλαπλασιασμός, στηρίζεται στην ιδιότητα του αντίστροφου ή συμμετρικού στοιχείου για την πράξη του πολλαπλασιασμού στο σύνολο Q των ρητών αριθμών και έχει δύο μορφές. Βέβαια, αφού πραγματοποιηθεί ο πολλαπλασιασμός, πρέπει να προστεθεί και το υπόλοιπο.

1) Πράξη Δοκιμή

$\alpha:\beta=\gamma+\dfrac{\upsilon}{\beta}$ $\gamma\cdot\beta+\upsilon=\alpha$

$$(\alpha:\beta=\gamma+\frac{\upsilon}{\beta} \Leftrightarrow \alpha:\beta=\frac{\gamma\cdot\beta}{\beta}+\frac{\upsilon}{\beta} \Leftrightarrow \alpha:\beta=\frac{\gamma\cdot\beta+\upsilon}{\beta} \Leftrightarrow \alpha\cdot\frac{1}{\beta}\cdot\beta=\gamma\cdot\beta+\upsilon \Leftrightarrow \alpha=\gamma\cdot\beta+\upsilon)$$

2) Η δεύτερη μορφή της πρώτης επαλήθευσης στηρίζεται στην αντιμετάθεση των όρων της πρώτης μορφής:

Πράξη Δοκιμή

$\alpha:\beta=\gamma+\dfrac{\upsilon}{\beta}$ $\beta\cdot\gamma+\upsilon=\alpha$

ii) Η δεύτερη επαλήθευση προκύπτει, αν στη θέση του διαιρέτη βάλουμε το πηλίκο, οπότε το νέο πηλίκο θα πρέπει να είναι ο διαιρέτης.

Πράξη Δοκιμή

$\alpha:\beta=\gamma+\dfrac{\upsilon}{\beta}$ $\alpha:\gamma=\beta+\dfrac{\upsilon}{\gamma}$

$$[\alpha:\beta=\gamma+\frac{\upsilon}{\beta} \Leftrightarrow \alpha:\beta\cdot\beta=\frac{\gamma\cdot\beta+\upsilon}{\beta}\cdot\beta \Leftrightarrow \alpha=(\gamma\cdot\beta+\upsilon) \Leftrightarrow \alpha\cdot\frac{1}{\gamma}=\beta+\frac{\upsilon}{\gamma} \Leftrightarrow \alpha:\gamma=\beta+\frac{\upsilon}{\gamma}]$$

Παραδείγματα:

Πράξη

$5838:16=364+\dfrac{14}{16}$

Επαληθεύσεις

i) α) $364\cdot16+14=5838$

β) $16\cdot364+14=5838$

ii) $5838:364=16+\dfrac{14}{364}$

Παρατηρήσεις:

- Τα υπόλοιπα στη διαίρεση και στην επαλήθευση μέσω διαίρεσης είναι ίδια, καθώς το γινόμενο διαιρέτη-πηλίκου είναι σταθερό.
- Στη διαίρεση δεκαδικών το υπόλοιπο έχει τόσα δεκαδικά ψηφία, όσο είναι το σύνολο των δεκαδικών ψηφίων διαιρέτη-πηλίκου, πράγμα που γίνεται εμφανές από το ακόλουθο παράδειγμα:

Παράδειγμα:

583,8	1,6
103	364,87
07 8	
1 40	
120	
0,0**08**	

Το υπόλοιπο είναι 0,008 (και όχι 8) καθώς έχει τρία δεκαδικά ψηφία (1 του πηλίκου και 2 του διαιρετέου). Εύκολα προκύπτει το υπόλοιπο, αν στοιχίσουμε το υπόλοιπο με το διαιρετέο τραβώντας μια γραμμή και διαπιστώσουμε τον αριθμό των δεκαδικών ψηφίων.

• Η γραφή ενός καταχρηστικού κλάσματος ως μεικτού αριθμού είναι εν δυνάμει η δοκιμή της διαίρεσης του αριθμητή διά του παρονομαστή.

Π.χ. $\frac{5838}{364}=16+\frac{14}{364}=16\frac{14}{364}$

Μερικά κριτήρια:

• Το μερικό υπόλοιπο είναι πάντα μικρότερο από το διαιρέτη. Το κριτήριο αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντικό και εύκολο στην εφαρμογή, καθώς σε κάθε βήμα μπορούμε να ελέγχουμε αν η πορεία της εκτέλεσης της πράξης είναι ορθή. Βέβαια θα πρέπει να σημειωθεί ότι πρόκειται για αναγκαία συνθήκη για την ορθότητα της πράξης, αλλά όχι για ικανή. Δηλαδή δεν αποτελεί ασφαλές κριτήριο για το ότι η πράξη είναι ορθή, αλλά πρόκειται απλά για ένδειξη.

• Το γινόμενο του πηλίκου επί το διαιρέτη (στην αναλυτική μορφή της διαίρεσης[21]), σε κάθε βήμα, είναι ίσο ή μικρότερο από το διαιρετέο (το κομμάτι του διαιρετέου που μας ενδιαφέρει).

5.2. Κριτήρια ελέγχου που βασίζονται στις ιδιότητες των ισοϋπόλοιπων[22] αριθμών

Οι βασικές ιδιότητες των ισοϋπόλοιπων αριθμών, στις οποίες στηρίζονται ορισμένα κριτήρια ελέγχου των τεσσάρων αριθμητικών πράξεων, είναι οι εξής (Κούρκουλος, 1999, σσ. 136-143):

Ιδιότητα 1

Αν διαιρέσουμε το άθροισμα m+n (ή τη διαφορά m-n) δύο ακέραιων αριθμών m και n διά ένα ακέραιο αριθμό $k\neq 0$, τότε το υπόλοιπο της διαίρεσης αυτής θα ισούται με το υπόλοιπο που θα πάρουμε, αν προσθέσουμε (ή αφαιρέσουμε) τα υπόλοιπα των διαιρέσεων m:k και n:k και διαιρέσουμε το άθροισμά τους με το k.

Δηλαδή: $U_k(m\pm n)=U_k(U_k m\pm U_k n)$

Ιδιότητα 2

Αν διαιρέσουμε το γινόμενο m·n δύο ακεραίων αριθμών διά ένα ακέραιο $k\neq 0$, τότε το υπόλοιπο αυτής της διαίρεσης θα ισούται με το υπόλοιπο που προκύπτει, αν πολλαπλασιάσουμε τα υπόλοιπα των

[21] Η διαίρεση διδάσκεται στο Δημοτικό σχολείο αρχικά στη Γ΄ και Δ΄ Δημοτικού με την αναλυτική της μορφή και στην Ε΄ Δημοτικού με τη σύντομη μορφή. Στην αναλυτική μορφή το γινόμενο του διαιρέτη με το πηλίκο γράφεται κάτω από το κομμάτι του διαιρετέου το οποίο έχουμε επεξεργαστεί μέχρι τη συγκεκριμένη στιγμή. Για παράδειγμα:

Αναλυτική μορφή		**Σύντομη μορφή**	
5838	24	5838	24
- 48	243	103	243
103		78	
- 96		6	
78			
-72			
6			

[22] Ισοϋπόλοιποι λέγονται δύο ακέραιοι αριθμοί α και β όταν αφήνουν το ίδιο υπόλοιπο διαιρούμενοι με τον ακέραιο $m\neq 0$, δηλαδή $U_m\alpha=U_m\beta$ όπου $U_m\alpha$ το υπόλοιπο της διαίρεσης του α διά m και $U_m\beta$ το υπόλοιπο της διαίρεσης του β διά m (Κούρκουλος, 1999, σ.135).

διαιρέσεων m:k και n:k και διαιρέσουμε το γινόμενό τους με το k. Δηλαδή, $U_k(m \cdot n) = U_k(U_k m \cdot U_k n)$

Πόρισμα 1: Αν διαιρέσουμε μια δύναμη m^n ενός ακέραιου αριθμού διά ένα ακέραιο $k \neq 0$, τότε το υπόλοιπο αυτής της διαίρεσης θα ισούται με το υπόλοιπο που προκύπτει, αν υψώσουμε στη δύναμη n το υπόλοιπο της διαίρεσης του m διά k. Δηλαδή, $U_k(m^n)=(U_k(m))^n$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω ιδιότητες προκύπτει αμέσως η εξής ιδιότητα:

Ιδιότητα 3

Αν διαιρέσουμε τον ακέραιο $m \cdot \alpha + n \cdot \beta$ *με ένα ακέραιο αριθμό* $k \neq 0$ *(όπου* m, α, n, β *ακέραιοι) τότε:*

το υπόλοιπο της διαίρεσης που προκύπτει, αν, αφού υπολογίσουμε τα γινόμενα $U_k m \cdot U_k \alpha$ *και* $U_k n \cdot U_k \beta$*, πάρουμε τα υπόλοιπά τους σε διαίρεση με το k και στη συνέχεια διαιρέσουμε το άθροισμα αυτών των υπολοίπων με k. Δηλαδή:*

$U_k(m \cdot \alpha + n \cdot \beta) = U_k\, [U_k\, (U_k m \cdot U_k \alpha) + U_k\, (U_k n \cdot U_k \beta)]$

α. Το κριτήριο του “σταυρού”

Βασικό πόρισμα των ιδιοτήτων 1, 2 και 3, χρήσιμο ως μερικό κριτήριο ελέγχου των πράξεων είναι το εξής:

Πόρισμα 2:

α. O m και το άθροισμα των ψηφίων του m είναι ισοϋπόλοιποι ως προς 9.

β. Άθροισμα, διαφορά, γινόμενο των ψηφίων του m με εκείνα του n είναι ισοϋπόλοιποι, ως προς 9, αντίστοιχα με $U_9(m+n)$, $U_9(m\text{-}n)$, $U_9(m \cdot n)$.

<u>Σχόλιο</u>**:** Επανειλημμένες εφαρμογές των πορισμάτων αυτών με προσθέσεις ψηφίων, μέχρι να προκύψουν μονοψήφια αθροίσματα ψηφίων, συνεπάγονται το γνωστό *κριτήριο του σταυρού* για καθεμιά πράξη.

Περιγραφή του κριτηρίου του σταυρού:

Για την πρόσθεση

$U_9(m)$	$U_9(n)$
$\mathbf{U_9(m)+U_9(n)}$	$\mathbf{U_9(m+n)}$

όπου $U_9(m)$, $U_9(n)$ είναι το υπόλοιπο διά 9 του αθροίσματος των ψηφίων του m και n αντίστοιχα και $U_9(m+n)$ είναι το υπόλοιπο διά 9 του αθροίσματος των ψηφίων του αθροίσματος των m και n.

Όμοια εφαρμόζεται για αφαίρεση και πολλαπλασιασμό.

Στην πράξη, η δοκιμή εφαρμόζεται ως εξής: με επανειλημμένες εφαρμογές του πορίσματος 2α, αντικαθιστούμε τους αριθμούς στο σταυρό με το άθροισμα των ψηφίων τους, μέχρι να εμφανίζονται μονοψήφιοι αριθμοί. Τότε θα πρέπει οι δύο αριθμοί στο κάτω μέρος του σταυρού να είναι **ίσοι**, διαφορετικά υπάρχει λάθος. Ας σημειωθεί ότι ορθότητα του κριτηρίου δεν σημαίνει ορθότητα της πράξης. Με άλλα λόγια, το κριτήριο του σταυρού είναι αναγκαία, αλλά όχι ικανή συνθήκη για την ορθότητα της πράξης.

Στην περίπτωση της διαίρεσης, σύμφωνα με την ιδιότητα 3 για την ταυτότητα $\Delta=\delta\cdot\pi+\upsilon$ ($\delta=m$, $\pi=\alpha$, $n=1$ και $\upsilon=\beta$), το υπόλοιπο του αθροίσματος του γινομένου $\delta\cdot\pi+\upsilon$, διαιρούμενο με αριθμό $k\neq 0$ ισούται με το άθροισμα των υπολοίπων του γινομένου των υπολοίπων των δ και π διαιρούμενα με τον αριθμό k και του υ διαιρούμενο με τον αριθμό k.

Η εφαρμογή του κριτηρίου γίνεται ως εξής (k=9):

$$
\begin{array}{r|l}
U_9(\pi) & U_9(\delta) \\
\hline
U_9(\pi)\cdot U_9(\delta) & U_9(\Delta) \\
\hline
U_9(\pi)\cdot U_9(\delta)+U_9(\upsilon) &
\end{array}
$$

Ουσιαστικά εφαρμόζουμε το κριτήριο του "σταυρού" για τον πολλαπλασιασμό, ξεκινώντας από το πηλίκο το οποίο πολλαπλασιάζεται με το διαιρέτη. Η μόνη διαφορά είναι ότι πρέπει να προστεθεί και το υπόλοιπο.

Αντί για το 9, για την εφαρμογή του κριτηρίου του σταυρού στις τέσσερις πράξεις, μπορούμε να πάρουμε οποιονδήποτε φυσικό αριθμό $k\neq 0$, εφαρμόζοντας όμως το αντίστοιχο κριτήριο διαιρετότητας γι' αυτό τον αριθμό. Όμως, προτιμούμε το 9, καθώς:

i) το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός αριθμού διά 9 ισούται με το υπόλοιπο της διαίρεσης του αθροίσματος των ψηφίων του αριθμού διά 9

ii) τα πιθανά υπόλοιπα σε μια διαίρεση με το 9 είναι όλοι οι μονοψήφιοι αριθμοί[23], με συνέπεια να μειώνεται η πιθανότητα να είναι σωστό το κριτήριο ενώ υπάρχει σφάλμα (για παράδειγμα αν χρησιμοποιηθεί το 3 τα πιθανά υπόλοιπα είναι 0, 1 και 2 και συνεπώς είναι περισσότεροι οι αριθμοί που έχουν το ίδιο υπόλοιπο διαιρούμενοι με 3)

iii) στην περίπτωση της χρησιμοποίησης του αριθμού 9 ως διαιρέτη, υπεισέρχονται στο κριτήριο όλα τα ψηφία των όρων της πράξης, παρέχοντας έτσι μεγαλύτερη ασφάλεια για την ορθότητα της πράξης (όχι απόλυτη βεβαιότητα, καθώς πρόκειται για μερικό κριτήριο ελέγχου).

Παραδείγματα:

1. Πρόσθεση (στηρίζεται στην ιδιότητα 1)

1ος τρόπος

Για παράδειγμα κατά την εκτέλεση της πράξης 1273+5267 βρίσκουμε άθροισμα 6540. η εφαρμογή του κριτηρίου είναι ως εξής:

Πράξη		Επαλήθευση					
1273	→ 1+2+7+3=13	1+3=4 →	4	2	←	5+2+6+7=20	2+0=2
+5267	→						
6540		4+2=6 →	**6**	**6**	←	6+5+4+0=15	1+5=6

[23] Στη θέση του υπολοίπου της τέλειας διαίρεσης 0, που δεν προκύπτει ποτέ ως άθροισμα ψηφίων ενός μη μηδενικού αριθμού, δεχόμαστε το 9 που δηλώνει ότι ο αριθμός του οποίου τα ψηφία έχουν άθροισμα 9 διαιρούνται διά 9 (Κούρκουλος, 1999, σ. 152).

2ος τρόπος

Το ίδιο κριτήριο μπορούμε να το εφαρμόσουμε και ως εξής: να υπολογίσουμε συνολικά το άθροισμα των ψηφίων των δύο προσθετέων (αν το άθροισμα είναι διψήφιος προσθέτουμε τα ψηφία του μέχρι να προκύψει μονοψήφιος), να υπολογίσουμε το άθροισμα των ψηφίων του αθροίσματος της πράξης που έχουμε βρει (αν το άθροισμα είναι διψήφιος, προσθέτουμε τα ψηφία του μέχρι να προκύψει μονοψήφιος) και να ελέγξουμε αν τα δύο ψηφία είναι ίδια:

1273	1+2+7+3+5+2+6+7=33	3+3=**6**
+5267	6+5+4+0=15	1+5=**6**
6540		

Το κριτήριο εφαρμόζεται και μ' αυτό τον τρόπο καθώς σύμφωνα με την ιδιότητα 1 το υπόλοιπο του αθροίσματος δύο αριθμών διαιρούμενο με ένα αριθμό $m \neq 0$ (στην περίπτωσή μας το m είναι το 9) είναι ίδιο με το άθροισμα των υπολοίπων των δύο αριθμών διαιρούμενων με τον αριθμό m.

2. Αφαίρεση (στηρίζεται στην ιδιότητα 1)

Για την αποφυγή των αρνητικών αριθμών[24], στο Δημοτικό σχολείο, το κριτήριο του "σταυρού για την αφαίρεση εφαρμόζεται στηριζόμενο στην αντίστροφη σχέση που συνδέει την πρόσθεση και την αφαίρεση (α-β=γ $\Leftrightarrow$ γ+β=α) και εφαρμόζουμε το κριτήριο για την ισοδύναμη πράξη της πρόσθεσης που προκύπτει από την αφαίρεση.

1ος τρόπος

825 → 6+6+7+19 1+9=10 1+0=1 → 1 | 5 ← 1+5+8=14 1+4=5

-158

667 → 1+5=6 → **6** | **6** ← 8+2+5=15 1+5=6

2ος τρόπος

Μπορούμε να εφαρμόσουμε το κριτήριο του "σταυρού" για την αφαίρεση κατ' αναλογία με το δεύτερο τρόπο της πρόσθεσης ως εξής: υπολογίζουμε συνολικά το άθροισμα των ψηφίων της διαφοράς και του αφαιρετέου (αν το άθροισμα είναι διψήφιος προσθέτουμε τα ψηφία του μέχρι να προκύψει μονοψήφιος) και στη συνέχεια υπολογίζουμε το άθροισμα των ψηφίων του μειωτέου (αν το άθροισμα είναι διψήφιος προσθέτουμε τα ψηφία του μέχρι να προκύψει μονοψήφιος) και ελέγχουμε αν τα δύο ψηφία που έχουν προκύψει είναι ίδια.

Για παράδειγμα:

825	6+6+7+1+5+8=33	3+3=**6**
- 158	8+2+5=15	1+5=**6**
667		

[24] Στην αφαίρεση 825-158 το κριτήριο με βάση την ιδιότητα 1 εφαρμόζεται ως εξής:
$U_9(U_9 825+ U_9(-158))=U_9 667 \Leftrightarrow U_9(6+4)=1 \Leftrightarrow 1=1$

3. Πολλαπλασιασμός (στηρίζεται στην ιδιότητα 2)

28 2+8=10 1+0=1 → 1 | 5 ← 3+2=5
x32
56 1 • 5 =5 → **5** | **5** ← 8+9+6=23 2+3=5
\+ 84
896

4. Διαίρεση (στηρίζεται στην ιδιότητα 3)

1524 | 35 4+3+5+4=16 1+7=7 → 7 | 8 ← 3+5=8
124 →
190 | 43,54 7•8=56 5+6=11 1+1=2 → 2
150 2+1+0=3 → **3** | **3** ← 1+5+2+4=12 1+2=3
10

β. Κριτήριο του τελευταίου ψηφίου

Αντί για το 9 μπορούμε να πάρουμε οποιονδήποτε άλλο φυσικό αριθμό, όπως αναφέρθηκε παραπάνω, με βάση πάντοτε το κριτήριο διαιρετότητας γι' αυτό τον αριθμό. Εύκολη είναι η εφαρμογή του κριτηρίου παίρνοντας τον αριθμό 10 (κριτήριο του τελευταίου ψηφίου). Σύμφωνα με το κριτήριο διαιρετότητας[25] του 10, ο αριθμός που διαιρείται ακριβώς με 10 τελειώνει σε 0 και το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός αριθμού διά 10 είναι όσο και το τελευταίο του ψηφίο.

Βέβαια, το κριτήριο μας παρέχει μια απλή ένδειξη για την ορθότητα της πράξης, καθώς δε λαμβάνει καθόλου υπόψη τα άλλα ψηφία των όρων. Θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί μαζί με κάποιο άλλο (μερικό) κριτήριο ελέγχου ή εκτίμησης (που εφαρμόζεται για τον έλεγχο μιας πράξης).

Παραδείγματα:

127**3**+526**7**=654**0** 7+3=1**0** → το τελευταίο ψηφίο είναι μηδέν
654**0** → το τελευταίο ψηφίο είναι μηδέν

82**5-**15**8**=667 7+8=1**5** → το τελευταίο ψηφίο είναι πέντε
82**5** → το τελευταίο ψηφίο είναι πέντε

2**8**·3**2**=89**6** 2·8=1**6**→ το τελευταίο ψηφίο είναι έξι
89**6**→ το τελευταίο ψηφίο είναι έξι

152**4**:3**5**=4**3** και υ=1**9** 3·5=1**5** 5+9=1**4** → το τελευταίο ψηφίο είναι τέσσερα
152**4** → το τελευταίο ψηφίο είναι τέσσερα

25 Κριτήρια διαιρετότητας είναι οι κανόνες με τους οποίους μπορούμε να βρούμε το υπόλοιπο μιας διαίρεσης β:α χωρίς να την εκτελέσουμε (Εξαρχάκος, 1991, σ. 372).

γ. Κριτήριο των υπολοίπων με το 11

Εξάλλου, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε και το 11. Σύμφωνα με το κριτήριο διαιρετότητας ενός αριθμού με 11 το υπόλοιπο της διαίρεσης διά 11 είναι όση η διαφορά του αθροίσματος των ψηφίων περιττής τάξης μείον το άθροισμα των ψηφίων άρτιας τάξης του αριθμού.

Το κριτήριο με το 11 μας παρέχει σχετικά μεγάλη ασφάλεια για την ορθότητα της πράξης, καθώς τα πιθανά υπόλοιπα είναι όλοι οι μονοψήφιοι αριθμοί και συμμετέχουν όλα τα ψηφία για την εύρεση του υπολοίπου. Όμως είναι σχετικά δύσκολο στην εφαρμογή του.

Παράδειγμα:

1273+5267=6540

$U_{11}(1273)=(3+2)-(7+1)=5-8=-3$ δηλαδή 8 (αφού 3+8=11)

$U_{11}(5267)=(7+2)-(6+5)=9-11=-2$ δηλαδή 9 (αφού 2+9=11)

8+9=17 $U_{11}(17)=$ **6**

$U_{11}(6540)=(0+5)-(4+6)=5-10=-5$ δηλαδή **6** (αφού 5+6=11)

$U_{11}(1273)=$ 8 →	8	9	← $U_{11}(5267)=$.9
8+9=17 $U_{11}(17)=$ **6** →	**6**	**6**	← $U_{11}(6540)=$ **6**

δ. Κριτήρια που βασίζονται στα κριτήρια διαιρετότητας των όρων της πράξης

Ένα άλλο σημαντικό κριτήριο ελέγχου που στηρίζεται στις ιδιότητες των ισοϋπόλοιπων αριθμών είναι ότι το γινόμενο σε ένα πολλαπλασιασμό ικανοποιεί τα κριτήρια διαιρετότητας του πολλαπλασιαστή και του πολλαπλασιαστέου. Αυτό είναι ιδιαίτερα χρήσιμο, όταν ο ένας παράγοντας είναι αριθμός του οποίου το κριτήριο διαιρετότητας είναι γνωστό και εύκολο στην εφαρμογή (π.χ. 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 15, 16, 25, 125, 625). Για παράδειγμα στον πολλαπλασιασμό 9·1254 γνωρίζουμε ότι το γινόμενο θα πρέπει να έχει άθροισμα ψηφίων που να διαιρείται με 9.

Σύμφωνα με το ίδιο κριτήριο στη διαίρεση, η διαφορά Δ-υ θα πρέπει να ικανοποιεί τα κριτήρια διαιρετότητας του πηλίκου και του διαιρέτη. Αυτό βέβαια μπορεί να εφαρμοστεί όταν ο διαιρέτης ή το πηλίκο έχουν κριτήρια διαιρετότητας εύκολα στην εφαρμογή (π.χ. είναι αριθμοί όπως 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 15, 16, 25, 125, 625). Έτσι, όταν π.χ. το υπόλοιπο είναι μηδέν και το πηλίκο 25 θα πρέπει τα δύο τελευταία ψηφία του διαιρετέου να διαιρούνται με 25 (δηλαδή να είναι 00, 25, 50 ή 75).

<u>Παρατηρήσεις</u>

Οι παρατηρήσεις που παρατίθενται αφορούν συνολικά στα κριτήρια ελέγχου που αναφέρθηκαν και βασίζονται στις ιδιότητες των ισουπόλοιπων αριθμών.

- Πρόκειται για ελλιπή κριτήρια ελέγχου, δηλαδή κριτήρια τα οποία αν δεν επαληθεύονται, τότε υπάρχει οπωσδήποτε λάθος, ενώ αν επαληθεύονται δεν είναι σίγουρο ότι δεν υπάρχει λάθος. Αποτελούν δηλαδή αναγκαίες αλλά όχι και ικανές συνθήκες για την ορθότητα της πράξης. Η αποτελεσματικότητα των κριτηρίων του σταυρού για το 9 και το 11 έγκειται στο ότι υπάρχει μικρή πιθανότητα να υπάρχει σφάλμα και το αποτέλεσμα της πράξης να δώσει υπόλοιπο διαιρούμενο με το 9 ή 11 ίδιο με το υπόλοιπο που δίνει το σωστό αποτέλεσμα (Τζανάκης, 1990). Μεγαλύτερη είναι η πιθανότητα αυτή για το κριτήριο του τελευταίου ψηφίου.

- Τα κριτήρια εφαρμόζονται και στην περίπτωση που οι όροι της πράξης είναι δεκαδικοί αριθμοί. Τότε η υποδιαστολή δε λαμβάνεται υπόψη. Βέβαια στην περίπτωση αυτή το κριτήριο δεν μπορεί να δείξει λάθη που αφορούν στη θέση της υποδιαστολής (Κούρκουλος, 1999, σ. 153).
- Σφάλματα που έχουν σχέση με την τοποθέτηση περισσότερων, ή λιγότερων μηδενικών (ή 9 στην περίπτωση που λαμβάνονται υπόψη τα υπόλοιπα της διαίρεσης με το 9) στο αποτέλεσμα δεν μπορούν να ανιχνευτούν από το κριτήριο, καθώς το μηδέν (και το 9) δεν διαφοροποιεί το άθροισμα των ψηφίων κάθε όρου (Κούρκουλος, 1999, σ. 153). Στην περίπτωση αυτή όμως, όπως και στην περίπτωση που υπάρχουν δεκαδικοί αριθμοί το κριτήριο θα πρέπει να συνδυάζεται με εκτίμηση του αποτελέσματος και προσεγγιστική εκτέλεση των πράξεων από μνήμης.

5.3 Κριτήρια εκτίμησης του μεγέθους των αποτελεσμάτων των πράξεων

5.3.1 Απλά κριτήρια διάταξης

Κριτήρια διάταξης είναι τα κριτήρια που μας αναφέρουν τη σχέση του αποτελέσματος με τους όρους της πράξης. Για την εφαρμογή τους δεν είναι απαραίτητη η εκτέλεση της πράξης, αλλά αρκούν οι συγκρίσεις των αριθμητικών δεδομένων (Κούρκουλος και Τζανάκης, 2000, σ. 267).

i) Πρόσθεση

Αν $\alpha,\beta \in Q_+$ τότε:

$\beta>0 \Leftrightarrow \alpha+\beta>\alpha$

$\alpha>0 \Leftrightarrow \alpha+\beta>\beta$

Δηλαδή, σε μια πρόσθεση το άθροισμα είναι πάντα μεγαλύτερο από καθένα από τους δύο προσθετέους.

ii) Αφαίρεση

Αν $\alpha,\beta \in Q_+$ τότε:

$\beta>0 \Leftrightarrow -\beta<0 \Leftrightarrow \alpha-\beta<\alpha$

Δηλαδή, η διαφορά είναι πάντα μικρότερη από το μειωτέο.

Επίσης:

$\alpha-\beta \geq 0 \Leftrightarrow \alpha \geq \beta$

Δηλαδή ο μειωτέος είναι πάντα μεγαλύτερος ή ίσος με τον αφαιρετέο.

iii) Πολλαπλασιασμός

Αν $\alpha,\beta \in Q_+$ τότε:

$\alpha \geq 1 \Leftrightarrow \alpha \cdot \beta \geq \beta$

$\alpha<1 \Leftrightarrow \alpha \cdot \beta<\beta$

Δηλαδή, όταν πολλαπλασιάζω ένα αριθμό με κάποιον άλλο που είναι μεγαλύτερο από τη μονάδα τότε αυτός μεγαλώνει, ενώ όταν τον πολλαπλασιάζω με κάποιον άλλο που είναι μικρότερος της μονάδας, τότε αυτός μικραίνει.

Άλλος τρόπος (και περισσότερο κατανοητός στους μαθητές, αφού ξεφεύγει από το συμβολικό επίπεδο) να εξηγηθεί το κριτήριο, σύμφωνα με το οποίο ένας αριθμός μικραίνει όταν πολλαπλασιάζεται με αριθμό μικρότερο από τη μονάδα, είναι η χρησιμοποίηση της κλασματικής γραφής των αριθμών. Έτσι, στην περίπτωση του πολλαπλασιασμού $18 \cdot 0{,}5$ μπορούμε να πούμε:

$18 \cdot 0{,}5 = 18 \cdot \frac{5}{10}$

Αφού λοιπόν από ένα αριθμό παίρνουμε όχι τα $\frac{10}{10}$, που είναι ολόκληρος ο αριθμός, αλλά ένα μέρος από αυτόν, σημαίνει ότι το γινόμενο θα είναι σίγουρα μικρότερο από αυτόν.

Το κριτήριο αυτό μπορεί να εφαρμοστεί και για τους δύο όρους της πράξης, να είναι δηλαδή διπλής κατεύθυνσης. Για παράδειγμα, στον πολλαπλασιασμό 18·0,5 οι μαθητές μπορούν να πουν ότι το γινόμενο θα είναι μικρότερο από το 18, αφού αυτό πολλαπλασιάζεται με το 0,5 που είναι μικρότερο της μονάδας, αλλά θα είναι και μεγαλύτερο από το 0,5 αφού αυτό πολλαπλασιάζεται με το 18 που είναι μεγαλύτερο από τη μονάδα.

iv) Διαίρεση

Αν Δ, δ και π είναι αντίστοιχα ο διαιρετέος, ο διαιρέτης και το πηλίκο σε μια διαίρεση (Δ, $\pi \in Q_+$ και $\delta \in Q^*_+$) τότε:

$\delta > 1 \Leftrightarrow \delta \cdot \pi > \pi \Leftrightarrow \Delta > \pi$

$\delta < 1 \Leftrightarrow \delta \cdot \pi < \pi \Leftrightarrow \Delta < \pi$

Δηλαδή, αν ο διαιρέτης είναι μεγαλύτερος από τη μονάδα, τότε το πηλίκο είναι μικρότερο από το διαιρετέο (ο διαιρετέος μικραίνει, αν διαιρεθεί με αριθμό μεγαλύτερο από τη μονάδα. Αντίστοιχα, αν ο διαιρέτης είναι μικρότερος από τη μονάδα, το πηλίκο είναι μεγαλύτερο από το διαιρετέο (ο διαιρετέος μεγαλώνει, αν διαιρεθεί με αριθμό μικρότερο από τη μονάδα). Για την κατανόηση του κριτηρίου αυτού μπορεί να χρησιμοποιηθεί η κλασματική γραφή των αριθμών. Στην περίπτωση 2:0,75 μπορούμε να πούμε: $2:0{,}75 = 2:\frac{3}{4} = 2 \cdot \frac{4}{3}$. Αφού παίρνουμε τα $\frac{3}{3}$ του αριθμού και κάτι παραπάνω σημαίνει ότι ο αριθμός θα μεγαλώσει.

Ακόμη:

$\Delta > \delta \Leftrightarrow \delta \cdot \pi > \delta \Leftrightarrow \pi > 1$

$\Delta < \delta \Leftrightarrow \delta \cdot \pi < \delta \Leftrightarrow \ \Leftrightarrow \pi < 1$

Δηλαδή, αντίστροφα με το προηγούμενο κριτήριο, όταν ο διαιρετέος είναι μεγαλύτερος/μικρότερος από το διαιρέτη, τότε το πηλίκο είναι μεγαλύτερο/μικρότερο από τη μονάδα. Αυτό το κριτήριο μπορεί να γίνει περισσότερο κατανοητό στους μαθητές, αν εφαρμόσουμε τη δοκιμή της διαίρεσης μέσα από πολλαπλασιασμό και χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο διάταξης για τον πολλαπλασιασμό (βλ. παραπάνω). Για παράδειγμα, στην περίπτωση 2:3,24 το πηλίκο θα είναι ένας αριθμός που όταν πολλαπλασιαστεί με το 3,24 θα δίνει μικρότερο αποτέλεσμα από το 3,24 πράγμα που σημαίνει ότι το πηλίκο θα είναι μικρότερο από τη μονάδα.

v) Κριτήρια διάταξης που βασίζονται σε σχέσεις αναλογίας μεταξύ των όρων της πράξης

Εκτός από τα κριτήρια διάταξης για τις τέσσερις αριθμητικές πράξεις που προαναφέρθηκαν, υπάρχουν και κάποια κριτήρια που βασίζονται σε σχέσεις αναλογίας μεταξύ των όρων της πράξης.

Έτσι, στην περίπτωση της αφαίρεσης, ελέγχουμε τη σχέση του αφαιρετέου με το μισό του μειωτέου (περίπου) και αποφασίζουμε αν η διαφορά είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη και από τον αφαιρετέο.

Αν α ο μειωτέος, β ο αφαιρετέος τότε:

αν $\frac{\alpha}{2}>\beta$ τότε α-β>β ($\frac{\alpha}{2}>\beta \Leftrightarrow \alpha>2\cdot\beta \Leftrightarrow \alpha>\beta+\beta \Leftrightarrow \alpha-\beta>\beta$)

Ομοίως αν $\frac{\alpha}{2}<\beta$.

Έτσι, για παράδειγμα, στην αφαίρεση 1256-325 λέμε ότι το μισό του 1256 είναι περίπου 600 το οποίο είναι μεγαλύτερο από το 325, άρα 1256-325>325.

Επίσης, στον πολλαπλασιασμό μπορούμε να βγάλουμε συμπεράσματα για τη σχέση του γινομένου με τον ένα παράγοντα, ανάλογα με τον άλλο παράγοντα και τη σχέση αναλογίας του με τη μονάδα. Για παράδειγμα, όταν ένας αριθμός πολλαπλασιάζεται με το 0,5 γνωρίζουμε ότι το αποτέλεσμα θα είναι ίσο με το μισό του, αν πολλαπλασιάζεται με αριθμό λίγο μεγαλύτερο από το 0,5 τότε το αποτέλεσμα θα είναι μεγαλύτερο από το μισό του κ.ο.κ. Αν ο αριθμός πολλαπλασιάζεται με αριθμό λίγο μικρότερο από 1,5 τότε το αποτέλεσμα θα είναι λίγο μικρότερο από τον αριθμό συν το μισό του. Έτσι, στον πολλαπλασιασμό 1424·0,62 το αποτέλεσμα θα είναι λίγο μεγαλύτερο από μισό του 1424 δηλαδή λίγο μεγαλύτερο από 712.

Στη διαίρεση αντίστοιχα, μπορούμε να συνάγουμε συμπεράσματα για τη σχέση του πηλίκου με το διαιρετέο ανάλογα με τη σχέση αναλογίας του διαιρέτη με τη μονάδα. Έτσι, αν διαιρούμε αριθμό με άλλο αριθμό που είναι λίγο μικρότερος από 0,5 τότε το πηλίκο θα είναι λίγο μεγαλύτερο από το διπλάσιο του διαιρετέου. Για παράδειγμα, στη διαίρεση 151:0,48 το πηλίκο θα είναι λίγο μεγαλύτερο από το διπλάσιο του 151 δηλαδή λίγο μεγαλύτερο από το 302 (151:0,48=314,58). Αντίστοιχα συμπεράσματα βγάζουμε όταν διαιρούμε με αριθμούς που είναι πολύ κοντά στο 0,25 0,75 1,25 1,5 2,5 κ.ο.κ.

5.3.2 Κριτήρια τα οποία βασίζονται στους από μνήμης προσεγγιστικούς υπολογισμούς

Εδώ εντάσσονται τα κριτήρια τα οποία βασίζονται στην εύρεση της τάξης μεγέθους του αποτελέσματος μιας πράξης ή στην εύρεση προσεγγίσεων μεγαλύτερης ακρίβειας -π.χ. τάξη μεγέθους και πρώτο σημαντικό ψηφίο του αποτελέσματος- (Κούρκουλος και Τζανάκης, 2000, σ. 267). Παρακάτω περιγράφονται προτάσεις τα οποία αναφέρονται στην εύρεση της τάξης μεγέθους του αποτελέσματος της πράξης, καθώς και κριτήρια που αφορούν στην εύρεση προσεγγίσεων μεγαλύτερης ακρίβειας.

5.3.2.1 Εύρεση της τάξης μεγέθους

Ως τάξη μεγέθους ενός αριθμού m ($=\alpha_k\cdot 10^k+\alpha_{k-1}\cdot 10^{k-1}+\ldots+\alpha_1\cdot 10+\alpha_0$) *ορίζουμε τον εκθέτη k της μεγιστοβάθμιας δύναμης του 10 αυξημένο κατά 1 (είναι k+1, όπου k ο εκθέτης της δύναμης του 10 που δίνει το πρώτο, μη μηδενικό ψηφίο).*

Παραδείγματα:

867 ($=8\cdot 10^2+6\cdot 10^1+7\cdot 10^0$) είναι 2+1=3, δηλαδή τρίτης τάξης (εκατοντάδες)

0,0024 ($=2\cdot 10^{-3}+4\cdot 10^{-4}$) είναι -3+1= -2 (χιλιοστά)

i) Πρόσθεση

Στην πρόσθεση (όταν οι προσθετέοι είναι δύο) η τάξη μεγέθους είναι ίδια με αυτή του μεγαλύτερου προσθετέου ή κατά ένα μεγαλύτερη.

Κατά ένα μεγαλύτερη είναι στις εξής περιπτώσεις:

• Οι δύο προσθετέοι είναι ίδιας τάξης και το πρώτο, μη μηδενικό ψηφίο του ενός (το ψηφίο της μεγαλύτερης τάξης) είναι 9.

Π.χ. το αποτέλεσμα της πράξης 945+124 είναι τέταρτης τάξης, κατά ένα μεγαλύτερη από την τάξη των προσθετέων που είναι τρίτης τάξης.

• -Οι δύο προσθετέοι είναι διαφορετικής τάξης, ο μεγαλύτερος προσθετέος είναι μ τάξης και ο μικρότερος προσθετέος είναι ν τάξης (μ,ν∈ N),
-τα μ-ν πρώτα ψηφία του μεγαλύτερου προσθετέου είναι εννιάρια και
-το άθροισμα των ψηφίων της νιοστής τάξης των δύο προσθετέων είναι μεγαλύτερο ή ίσο με το 10.

Π.χ. το αποτέλεσμα της πράξης 99564+621 είναι έκτης τάξης γιατί ο πρώτος προσθετέος έχει τα πρώτα 2 ψηφία (5-3=2 καθώς αφαιρούμε το 3 που υποδηλώνει την τάξη του δεύτερου προσθετέου από το 5 που υποδηλώνει την τάξη του πρώτου προσθετέου) εννιάρια και το άθροισμα των ψηφίων της τρίτης τάξης (όση είναι και η τάξη του δεύτερου προσθετέου) των δύο προσθετέων υπερβαίνει το 10.

• -Οι δύο προσθετέοι είναι διαφορετικής τάξης, ο μεγαλύτερος προσθετέος είναι μ τάξης και ο μικρότερος προσθετέος είναι ν τάξης (μ,ν∈ N),
-τα μ-ν πρώτα ψηφία του μεγαλύτερου προσθετέου είναι εννιάρια,
-το άθροισμα των ψηφίων της νιοστής τάξης των δύο προσθετέων είναι 9,
-το άθροισμα των ψηφίων της ν-1, ν-2…ν-κ (για κάποιο κ<ν, κ∈ N) τάξης των δύο προσθετέων είναι 9 και
-το άθροισμα των ψηφίων της ν-(κ+1) τάξης των δύο προσθετέων είναι μεγαλύτερο ή ίσο του 10.

Π.χ. το αποτέλεσμα της πράξης 9995462+4556 είναι όγδοης τάξης γιατί ο πρώτος προσθετέος έχει τα πρώτα 3 ψηφία (7-4=3 καθώς αφαιρούμε το 4 που υποδηλώνει την τάξη του δεύτερου προσθετέου από το 7 που υποδηλώνει την τάξη του πρώτου προσθετέου) εννιάρια, το άθροισμα των ψηφίων της ν, ν-1 (κ=1) τάξης των δύο προσθετέων είναι 9 και το άθροισμα των ψηφίων της ν-2 [ν-(1+1)] είναι μεγαλύτερο από το 10.

Σε όλες τις υπόλοιπες περιπτώσεις, η τάξη μεγέθους του αθροίσματος είναι ***ίδια*** με αυτή του μεγαλύτερου προσθετέου.

ii) Αφαίρεση

Στην αφαίρεση η τάξη μεγέθους της διαφοράς είναι ίδια με αυτή του μειωτέου ή μικρότερη.

Ίδια με την τάξη μεγέθους του μειωτέου είναι στις ακόλουθες περιπτώσεις:

• Ο μειωτέος είναι ίδιας τάξης με τον αφαιρετέο (ν τάξης, ν∈ N), αλλά η διαφορά των ψηφίων της ν τάξης (μεγαλύτερης) μειωτέου και αφαιρετέου είναι μεγαλύτερη από 1.

Π.χ. 4567-2541=2026. Οι δύο όροι είναι τέταρτης τάξης και η διαφορά των ψηφίων της μεγαλύτερης τάξης είναι 2>1 (4-2=2).

• -Ο μειωτέος και ο αφαιρετέος είναι διαφορετικής τάξης (ν τάξης ο μειωτέος, μ τάξης ο αφαιρετέος, μ,ν∈ N) και
-το ψηφίο της μ τάξης του μειωτέου είναι τουλάχιστον κατά μία μονάδα μεγαλύτερο από το ψηφίο της μ τάξης του αφαιρετέου.

Π.χ. 5632-578=5054, ο μειωτέος είναι τέταρτης τάξης, ο αφαιρετέος είναι τρίτης τάξης και το ψηφίο της τρίτης τάξης του μειωτέου είναι κατά ένα μεγαλύτερο από το ψηφίο της τρίτης τάξης του αφαιρετέου (6-5=1). Έτσι, το αποτέλεσμα είναι τέταρτης τάξης.

- -Ο μειωτέος και ο αφαιρετέος είναι διαφορετικής τάξης (ν τάξης ο μειωτέος, μ τάξης ο αφαιρετέος, μ,ν∈ N),

-το ψηφίο της μ τάξης του μειωτέου είναι ίσο με το ψηφίο της μ τάξης του αφαιρετέου,
-το ψηφίο της μ-1, μ-2, μ-κ (κ<μ, κ∈ N) τάξης του μειωτέου είναι ίσο με το ψηφίο της μ-1, μ-2, μ-κ τάξης αντίστοιχα του αφαιρετέου και
-το ψηφίο της (μ-κ)-1 τάξης του μειωτέου είναι τουλάχιστον κατά μία μονάδα μεγαλύτερο από το ψηφίο της (μ-κ)-1 τάξης του αφαιρετέου.

Π.χ. 864795-4773=860022, ο μειωτέος είναι έκτης τάξης, ο αφαιρετέος τέταρτης τάξης, το ψηφίο της τέταρτης τάξης του μειωτέου είναι όμοιο με το ψηφίο της τέταρτης τάξης του αφαιρετέου, όπως και το ψηφίο της τρίτης τάξης, αλλά το ψηφίο της δεύτερης τάξης του μειωτέου είναι κατά δύο μονάδες μεγαλύτερο από το ψηφίο της δεύτερης τάξης του αφαιρετέου (9-7=2). Έτσι, το αποτέλεσμα είναι έκτης τάξης.

Η τάξη μεγέθους της διαφοράς είναι ***διαφορετική*** από την τάξη μεγέθους του μειωτέου στις εξής περιπτώσεις (έστω ν η τάξη μεγέθους του μειωτέου και μ του αφαιρετέου, μ,ν∈ N):

- είναι **ν-1** τάξης όταν:

-το ψηφίο της μ τάξης του μειωτέου είναι μικρότερο από το ψηφίο της μ τάξης του αφαιρετέου (μειωτέος και αφαιρετέος είναι διαφορετικής τάξης) και
-ο αριθμός που σχηματίζουν τα πρώτα μ-ν ψηφία του μειωτέου είναι 10, 100, 1000…

Π.χ. 10005235-7584=9997651

- είναι **ν-1** τάξης όταν:

-το ψηφίο της μ τάξης του μειωτέου είναι ίδιο με το ψηφίο της μ τάξης του αφαιρετέου (μειωτέος και αφαιρετέος είναι διαφορετικής τάξης),
-το ψηφίο της μ-1, μ-2, μ-κ (κ∈ N) τάξης του μειωτέου είναι ίσο με το ψηφίο της μ-1, μ-2, μ-κ τάξης του αφαιρετέου,
-το ψηφίο της (μ-κ)-1 τάξης του μειωτέου είναι τουλάχιστον κατά μία μονάδα μεγαλύτερο από το ψηφίο της (μ-κ)-1 τάξης του αφαιρετέου και
-ο αριθμός που σχηματίζουν τα πρώτα μ-ν ψηφία του μειωτέου είναι 10, 100, 1000…

Π.χ. 105421-5430=99991.

- είναι **ν-κ** τάξης όταν:

-ο μειωτέος και ο αφαιρετέος είναι ίδιας τάξης (ν τάξης) και
-το ψηφίο της ν, ν-1,...,ν-κ (κ∈ N) είναι όμοιο με το ψηφίο της ν, ν-1,…,ν-κ τάξης του αφαιρετέου αντίστοιχα.

Π.χ. 548756-548732=24 (ο μειωτέος και ο αφαιρετέος είναι έκτης τάξης, έχουν τα πρώτα 4 ψηφία (της έκτης, πέμπτης τέταρτης και τρίτης τάξης αντίστοιχα) όμοια, άρα το αποτέλεσμα είναι δεύτερης τάξης (6-4=2).

iii) Πολλαπλασιασμός

Η τάξη μεγέθους του γινομένου δύο παραγόντων είναι *ίση με το άθροισμα των τάξεων των δύο παραγόντων ή κατά ένα μικρότερη* (αν μ,ν οι τάξεις των δύο παραγόντων μ,ν∈ N, η τάξη του γινομένου είναι μ+ν ή (μ+ν)-1). Στην περίπτωση που οι δύο παράγοντες είναι ακέραιοι, η τάξη μεγέθους του γινομένου είναι όσο το σύνολο των ψηφίων των δύο παραγόντων ή κατά ένα μικρότερη.

Έτσι, η τάξη μεγέθους του γινομένου είναι ***όσο το άθροισμα των τάξεων των δύο παραγόντων (μ+ν)*** στην εξής περίπτωση:

- Όταν το γινόμενο των ψηφίων της μεγαλύτερης τάξης των δύο παραγόντων είναι μεγαλύτερο ή ίσο του δέκα (αν ν και μ αντίστοιχα οι τάξεις των παραγόντων, τότε $\nu \cdot \mu \geq 10$).

Π.χ. το γινόμενο 425·78 (=33150) είναι πέμπτης τάξης (3+2=5) αφού 4·7=28>10. Επίσης, το γινόμενο 0,02·0,0078 (=0,000156 είναι –3 τάξης, δηλαδή εκατοντάκις χιλιοστά, αφού –1+(-2)=-3 και 2·7=14>10. Ακόμα, το γινόμενο 969,87·0,000235 (=0,2279) είναι 0 τάξης (δέκατα) αφού 3+(-3)=0 και 9·2=18>10.

Η τάξη μεγέθους του γινομένου είναι ***ίση με το άθροισμα των τάξεων των δύο παραγόντων μειωμένο κατά ένα [(μ+ν)-1]*** στην εξής περίπτωση:

- -Το γινόμενο των ψηφίων της μεγαλύτερης τάξης των δύο παραγόντων είναι μικρότερο από το δέκα (αν ν και μ αντίστοιχα οι τάξεις των δύο παραγόντων είναι $\nu \cdot \mu < 10$) και

-το γινόμενο των ψηφίων της μεγαλύτερης τάξης των δύο παραγόντων αυξημένων κατά μία μονάδα είναι μικρότερο από δέκα.

Π.χ. το γινόμενο 254·2478 (=629412) είναι έκτης τάξης αφού (3+4)-1=6 και (2+1)·(2+1)=9<10. Επίσης το γινόμενο 0,02·0,0025 (=0,00005) είναι –4 τάξης αφού [–1+(-2)]-1=-4 και (2+1)·(2+1)<10.

Υπάρχουν και περιπτώσεις κατά τις οποίες η τάξη μεγέθους του γινομένου είναι αμφίβολο αν ισούται με το άθροισμα των τάξεων των δύο παραγόντων ή είναι κατά ένα μικρότερη απ' αυτό. Αν m, n τα πρώτα ψηφία των δύο παραγόντων, οι αμφίβολοι συνδυασμοί είναι οι εξής:

m	**n**
1	9
2	3
2	4
3	3

Παραδείγματα:

Η τάξη μεγέθους του γινομένου είναι όσο το άθροισμα των τάξεων των δύο παραγόντων μειωμένο κατά ένα (μ+ν):

9012·11=99132	(4+2)-1=5
214·345=73830	(3+3)-1=5
2417·407=983719	(4+3)-1=6
314·31=9734	(3+2)-1=4

Η τάξη μεγέθους του γινομένου είναι όσο το άθροισμα των τάξεων των δύο παραγόντων [(μ+ν)-1]:

9142·12=109704	4+2=6
281·3724=1046444	3+4=7
25·47=1175	2+2=4
3241·312=101119	4+3=7

ιν) Διαίρεση

Η τάξη μεγέθους του πηλίκου προκύπτει αν *από την τάξη του διαιρετέου αφαιρέσουμε την τάξη του διαιρέτη, ή κατά ένα μεγαλύτερη* (αν μ,ν οι τάξεις των δύο παραγόντων μ,ν∈ N, η τάξη του πηλίκου είναι μ-ν ή (μ-ν)+1).

Η τάξη μεγέθους είναι ***ίση με τη διαφορά των τάξεων του διαιρετέου και του διαιρέτη (μ-ν)*** στις εξής περιπτώσεις:

- το πρώτο μη μηδενικό ψηφίο του διαιρετέου είναι μικρότερο από το πρώτο μη μηδενικό ψηφίο του διαιρέτη π.χ.

213300:75=2844 (2<7, 6-2=4)

0,38:45=0,0084 (3<4, 0-2=-2)

- \- αν ο διαιρέτης είναι ακέραιος, έχει m ψηφία και είναι μεγαλύτερος από το πρώτο τμήμα του διαιρετέου που ξεκινά από μη μηδενικό ψηφίο και αποτελείται από m ψηφία:

0,381:39=0,009 (0-2=-2 αφού 39>38)[26]

\- αν ο διαιρέτης είναι δεκαδικός, και πολλαπλασιαζόμενος με μια θετική δύναμη του 10 ώστε να προκύψει ακέραιος, έχει m ψηφία και είναι μεγαλύτερος από το πρώτο τμήμα του αριθμού που προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε το διαιρετέο με την ίδια ή άλλη δύναμη του 10 ώστε να προκύψει ακέραιος που αποτελείται από m ψηφία. Απλούστερα, στην περίπτωση των δεκαδικών αριθμών ισχύει ό,τι και στην περίπτωση των ακεραίων, αν δε λάβουμε υπόψη την υποδιαστολή και τα πρώτα, μηδενικά ψηφία που ενδεχομένως έχουν οι δύο όροι:

5,295:6,3=0,84 (1-1=0 αφού 52<63)

0,048:0,56=0,086 (-1-0=-1 αφού 48<86)

Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις η τάξη μεγέθους του πηλίκου είναι ***μεγαλύτερη κατά μία μονάδα από τη διαφορά των τάξεων διαιρετέου και διαιρέτη [(μ-ν)+1]***:

578:32=18,0625	(3-2)+1=2	αφού 57>32
29724:27=1100,88	(5-2)+1=4	αφού 29>27
260,236:25=10,409	(3-2)+1=2	αφού 26>25
0,057:0,56=0,1017	(-1-0)+1=0	αφού 57>56
0,3684:35=0,0105	(0-2)+1=-1	αφού 36>35

Παρατήρηση:

Όταν ο διαιρέτης είναι μονοψήφιος υπάρχουν οι εξής περιπτώσεις:

\- το πρώτο μη μηδενικό ψηφίο του διαιρετέου είναι μικρότερο από το διαιρέτη, οπότε η τάξη μεγέθους του πηλίκου είναι όσο η τάξη του διαιρετέου μειωμένη κατά ένα:

421:7=60,142

\- το πρώτο μη μηδενικό ψηφίο του διαιρετέου είναι μεγαλύτερο ή ίσο με το διαιρέτη, οπότε η τάξη μεγέθους του πηλίκου είναι όσο η τάξη του διαιρετέου:

0,741:3=0,247

9357:9=1039,66

[26] Είναι φανερό ότι καλύπτει και την πρώτη περίπτωση.

5.3.2.2 Εύρεση προσεγγίσεων μεγαλύτερης ακρίβειας

Για την εύρεση προσεγγίσεων μεγαλύτερης ακρίβειας, δηλαδή τάξη μεγέθους και πρώτο ή δύο πρώτα σημαντικά ψηφία, εφαρμόζονται οι διαδικασίες της στρογγυλοποίησης, με την οποία γίνεται η αναδιατύπωση των αρχικών αριθμητικών δεδομένων σε μια πιο εύχρηστη μορφή και στη συνέχεια γίνεται ο υπολογισμός των νέων αριθμητικών δεδομένων με διάφορους τρόπους, οι οποίοι περιγράφονται παρακάτω.

Για να κάνουμε στρογγυλοποίηση ενός αριθμού σε κάποιο ψηφίο:

- Προσέχουμε το ψηφίο που είναι δεξιά από εκείνο που θέλουμε να γίνει η στρογγυλοποίηση:
  - ➢ αν το ψηφίο αυτό είναι 0,1,2,3,4, τότε το ψηφίο αυτό και όλα τα επόμενά του προς τα δεξιά τα αντικαθιστούμε με μηδενικά· τα προηγούμενα ψηφία προς τα αριστερά παραμένουν ίδια.
  - ➢ αν το ψηφίο αυτό είναι 5,6,7,8,9, τότε το ψηφίο αυτό και όλα τα επόμενά του προς τα δεξιά τα αντικαθιστούμε με μηδενικά και αυξάνουμε κατά μία μονάδα τον αριθμό, που σχηματίζουν όλα μαζί τα προηγούμενα προς τα αριστερά ψηφία.

Παραδείγματα:

Για να στρογγυλοποιήσουμε τον αριθμό 8214 στο πρώτο ψηφίο, το 8 (των μονάδων χιλιάδων) παρατηρούμε το ψηφίο που είναι αμέσως μετά το 8 δηλαδή το 2 το οποίο είναι μικρότερο από 5. Στη συνέχεια αντικαθιστούμε με μηδενικά τα επόμενα από δεξιά ψηφία του 8. Δηλαδή:

$8214 \approx 8000$

Για να στρογγυλοποιήσουμε τον αριθμό 6742 στο πρώτο ψηφίο, το 6 (των μονάδων χιλιάδων) παρατηρούμε το ψηφίο που είναι αμέσως μετά το 6 δηλαδή το 7 το οποίο είναι μεγαλύτερο από 5. Στη συνέχεια αντικαθιστούμε με μηδενικά τα επόμενα από δεξιά ψηφία του 6 και μεγαλώνουμε κατά μία μονάδα το 6. Δηλαδή:

$6742 \approx 7000$

Επίσης:

(στρογγυλοποίηση στο πρώτο μη μηδενικό ψηφίο)

$0{,}7146 \approx 0{,}8$

$0{,}0256 \approx 0{,}03$

(στρογγυλοποίηση στο δεύτερο μη μηδενικό ψηφίο)

$19645 \approx 20000$ (το 19 μεγαλώνει κατά μία μονάδα και γίνεται 20)

$0{,}02547 \approx 0{,}025$

Η στρογγυλοποίηση μπορεί να πραγματοποιηθεί με διάφορους τρόπους στο πρώτο ψηφίο των όρων της πράξης:

- ❖ στρογγυλοποίηση στο πρώτο ψηφίο με βάση το συνήθη κανόνα
- ❖ στρογγυλοποίηση λαμβάνοντας υπόψη μόνο το πρώτο ψηφίο των όρων της πράξης (περικοπή ή προς τα κάτω στρογγυλοποίηση- βλ. §7.3.2)
- ❖ στρογγυλοποίηση μεγαλώνοντας το πρώτο ψηφίο κατά μία μονάδα και μετατρέποντας τα υπόλοιπα ψηφία σε μηδέν (προς τα πάνω στρογγυλοποίηση) π.χ. $274 \cdot 6445 \rightarrow 300 \cdot 7000 = 2100000$

  Κατ’ αντιστοιχία η στρογγυλοποίηση πραγματοποιείται στο δεύτερο ψηφίο του ενός ή και των δύο όρων ως εξής:

- στρογγυλοποίηση στο δεύτερο ψηφίο με βάση το συνήθη κανόνα π.χ. $1421 \cdot 1624 \to 1400 \cdot 1600 = 2240000$
- στρογγυλοποίηση λαμβάνοντας υπόψη μόνο το δεύτερο ψηφίο των όρων της πράξης (περικοπή ή προς τα κάτω στρογγυλοποίηση- βλ. §7.3.2)
- στρογγυλοποίηση μεγαλώνοντας το δεύτερο ψηφίο κατά μία μονάδα και μετατρέποντας τα υπόλοιπα ψηφία σε μηδέν (προς τα πάνω στρογγυλοποίηση) π.χ. $74128:241 \to 75000:250=300$
- στρογγυλοποίηση στο δεύτερο ψηφίο στο πλησιέστερο πολλαπλάσιο του 5 π.χ. $1421 \cdot 1642 \to 1500 \cdot 1500 = 2250000$
- στρογγυλοποίηση στο δεύτερο ψηφίο σε ψηφίο ώστε να υπολογίζεται εύκολα το αποτέλεσμα της πράξης (κατευθείαν ή με αλλαγή πεδίου έκφρασης και επεξεργασίας) π.χ. $731451:329 \approx 720000:300=2400$ (χωρίς αλλαγή πεδίου έκφρασης και επεξεργασίας) και $0{,}231 \cdot 1657 \approx 0{,}25 \cdot 1600 = \frac{1}{4} \cdot 1600 = 400$ (με αλλαγή πεδίου έκφρασης και επεξεργασίας).

Για την επιλογή των διάφορων τύπων στρογγυλοποίησης είναι υπεύθυνο το συγκείμενο, το οποίο σ' ένα μεγάλο βαθμό προσδιορίζει τη χρήση του ενός ή του άλλου τρόπου. Έτσι, αν σ' ένα σούπερ μάρκετ θέλω να δω αν τα χρήματα που διαθέτω είναι επαρκή για την αγορά κάποιων αγαθών κάνω προς τα πάνω στρογγυλοποίηση και βλέπω αν το αποτέλεσμα είναι μικρότερο από το ποσό που διαθέτω. Αν η προς τα κάτω στρογγυλοποίηση δείχνει ότι το ποσό που διαθέτω είναι μικρότερο, τότε σίγουρα δε με φτάνουν τα χρήματα. Αν είναι λίγο μεγαλύτερο από ποσό που διαθέτω, προβαίνω σε νέα στρογγυλοποίηση στο δεύτερο ίσως ψηφίο (βλ. σχετικά §7.2.1)

Εκτός όμως από το συγκείμενο, σημαντικό ρόλο στον προσδιορισμό του τρόπου στρογγυλοποίησης διαδραματίζουν και τα αριθμητικά δεδομένα της πράξης. Συγκεκριμένα, αν το δεύτερο ψηφίο των όρων της πράξης είναι πολύ μεγαλύτερο σε σχέση με το πρώτο ψηφίο, η στρογγυλοποίηση στο πρώτο ψηφίο δεν ενδείκνυται, καθώς το αποτέλεσμα των κατά προσέγγιση αριθμών απέχει κατά πολύ από το ακριβές αποτέλεσμα. Σ' αυτή την περίπτωση προτιμάται η στρογγυλοποίηση στο δεύτερο ψηφίο των όρων που έχουν το δεύτερο ψηφίο τους κατά πολύ μεγαλύτερο από το πρώτο (βλ. σχετικά §7.2.1).

Παρακάτω παρουσιάζονται τέτοιες περιπτώσεις για καθεμιά από τις τέσσερις αριθμητικές πράξεις:

Πράξη	Ακριβές αποτέλεσμα	Στρογγυλοποί-ηση στο πρώτο ψηφίο με βάση το συνήθη κανόνα	Ποσοστό (%) απώλειας επί του ακριβούς αποτελέσματος	Στρογγυλοποίηση του προβληματικού όρου (με βάση τη σχέση πρώτου και δεύτερου ψηφίου) στο δεύτερο ψηφίο	Ποσοστό (%) απώλειας επί του ακριβούς αποτελέσματος
9135+8940	18075	18000	0,5%	-	-
5120+4240	9360	9000	4%	-	-
1440+1480	2920	2000	32%	3000	3%
1657+1789	3446	4000	14%	3500	1,5%
8135-987	7148	7000	3%	-	-
51471-4714	46757	45000	4%	-	-
14470-1426	13040	9000	31%	12600	0,5%
16578-1432	15146	19000	20%	15600	3%
8903·915	8146245	8100000	1%	-	-
52,85·47,88	2530,458	2500	1%	-	-
1432·714	1022448	700000	32%	980000	4%
1521·1549	2356029	4000000	70%	2250000	5%
5785:48	120,52083	120	1%	-	-
642154:514	1249,3268	1200	4%	-	-
148538:283	524,8692	333	37%	500	5%
0,1632:1,48	0,1102	0,2	81%	0,101	8%

Ασφαλώς για την αποφυγή των “κακών” στρογγυλοποιήσεων μπορούν να χρησιμοποιηθούν και άλλες τεχνικές εκτός από τη στρογγυλοποίηση στο δεύτερο ψηφίο των όρων που δημιουργούν πρόβλημα. Έτσι, μπορεί να εφαρμοστεί η στρογγυλοποίηση του “προβληματικού” όρου στο δεύτερο ψηφίο στο 5 ή ακόμα η στρογγυλοποίηση του ενός όρου προς τα πάνω και του άλλου προς τα κάτω για την πρόσθεση (ίδιας τάξης προσθετέων) και τον πολλαπλασιασμό ή προς την ίδια κατεύθυνση για την αφαίρεση (ίδιας τάξης μειωτέου και αφαιρετέου) και τη διαίρεση. Επίσης, μπορούν να στρογγυλοποιηθούν στο δεύτερο ψηφίο, με τρόπο όμως που να υπολογίζεται εύκολα το αποτέλεσμα.

Παραδείγματα:

- 1412·1526 ≈ 1500·1500=2250000 (ακριβές αποτέλεσμα=2154712)

Στην περίπτωση αυτή, με την στρογγυλοποίηση των όρων στο δεύτερο ψηφίο στο 5, αποφεύγεται ο πολλαπλασιασμός 14·15 που ίσως είναι αρκετά χρονοβόρος και αντικαθίσταται από το 15^2 που υπολογίζεται εύκολα[27].

[27] Για να υπολογίσουμε το τετράγωνο διψήφιου αριθμού που τελειώνει σε 5 (15, 25…) πολλαπλασιάζουμε το ψηφίο των δεκάδων του αριθμού επί το ψηφίο των δεκάδων αυξημένο κατά ένα και συμπληρώνουμε το γινόμενο με τον αριθμό 25.

Πράγματι: $(10α+5)^2=100α^2+2·5·10α+25=α·(α+1)·100+25$

Π.χ. 15^2=1•(1+1)= 1•2= **2** άρα 15^2= **6**25

- 27145+16217 $\approx$ 30000+10000=40000 (ακριβές αποτέλεσμα=43362)
- 2521014-1465104 $\approx$ 3000000-2000000=1000000(ακριβές αποτέλεσμα=1055910)

1615·154 $\approx$ 2000·100=200000 (ακριβές αποτέλεσμα=2154712)

1742154:1441 $\approx$ 2000000:2000=1000 (ακριβές αποτέλεσμα=1208,9895)

- 1457:22 $\approx$ 1400:20=70 (ακριβές αποτέλεσμα=66,227)
- 1481145+2614541 $\approx$ 1400000+2600000=4000000(ακριβές αποτέλεσμα = 4095686)

Βέβαια, στις παραπάνω περιπτώσεις καλύτερη προσέγγιση επιτυγχάνουμε με τη στρογγυλοποίηση των προβληματικών όρων στο δεύτερο ψηφίο με βάση το συνήθη κανόνα στρογγυλοποίησης. Όμως, κάποιες φορές το κόστος εφαρμογής είναι αυτό που προσδιορίζει τα μέτρα που θα ληφθούν για την αντιμετώπιση τέτοιων περιπτώσεων "κακής" στρογγυλοποίησης.

Αφού αναδιατυπωθούν τα αριθμητικά δεδομένα με του τρόπους που προαναφέρθηκαν, γίνεται ο νοερός υπολογισμός τους. Το αποτέλεσμα που προκύπτει από τον υπολογισμό των αριθμητικών δεδομένων που έχουν προκύψει από τη στρογγυλοποίηση το συγκρίνουμε με το αποτέλεσμα της πράξης μετά το πέρας της ή κατά τη διάρκεια εκτέλεσής της ώστε να γίνεται και έλεγχος. Για το σκοπό αυτό, υπάρχει η δυνατότητα εύρεσης άνω και κάτω φράγματος και έλεγχος αν το αποτέλεσμα εμπίπτει μέσα στο διάστημα αυτό. Για παράδειγμα, στην πράξη 324·4751 με στρογγυλοποίηση των δύο παραγόντων προς τα κάτω έχουμε: 300·4000=1200000. Με στρογγυλοποίηση προς τα πάνω έχουμε: 400·5000=2000000. Συνεπώς, το ακριβές αποτέλεσμα βρίσκεται στο διάστημα (1200000,2000000).

Για τον ευχερέστερο νοερό υπολογισμό τους μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι ιδιότητες των πράξεων καθώς και ποικίλες τεχνικές.

Οι τεχνικές εύκολου νοερού υπολογισμού και οι ιδιότητες των πράξεων μπορούν να συνδράμουν σημαντικά στην εκτίμηση του αποτελέσματος μιας αριθμητικής πράξης και στη συνέχεια στον έλεγχο του. Με τη γνώση των παραπάνω στοιχείων είναι δυνατό η αναδιατύπωση των αριθμητικών δεδομένων να γίνει με τέτοιο τρόπο που να ευνοείται στη συνέχεια ο νοερός υπολογισμός. Για παράδειγμα, για τον υπολογισμό του γινομένου 0,23·1654 η αναδιατύπωση μπορεί να γίνει 0,25·1600, καθώς ο πολλαπλασιασμός με το 0,25 είναι αρκετά εύκολος (υπολογίζουμε το $\frac{1}{4}$) του άλλου παράγοντα, ενώ παράλληλα το 1600 είναι ακριβές πολλαπλάσιο του 4. Έτσι 0,23·1654 → 0,25·1600=$\frac{1}{4}$·1600=400.

Επίσης:

755421:31→750000:30=(600000:30)+(150000:30)=20000+5000=25000

5.4 Εναλλακτικοί τρόποι εκτέλεσης πράξεων (εναλλακτικά προγράμματα παραγωγής της απάντησης - Κούρκουλος, 1998)

Ως κριτήρια ελέγχου μπορούν να χρησιμοποιηθούν και διάφοροι εναλλακτικοί τρόποι εκτέλεσης των αριθμητικών πράξεων, το αποτέλεσμα των οποίων συγκρίνεται με το αποτέλεσμα του αρχικού αλγόριθμου που εκτελέστηκε. Οι εναλλακτικοί αυτοί τρόποι κάποιες φορές απαιτούν αλλαγή πεδίου έκφρασης και επεξεργασίας ή αλλαγή πλαισίου (βλ. σχετικά §7.3.1 και Κούρκουλος 1998) και πολλές φορές αντλούνται μέσα από την Ιστορία των Μαθηματικών και τις τεχνικές υπολογισμού που χρησιμοποιούσαν οι διάφοροι λαοί. Παρακάτω παρατίθενται διάφοροι τέτοιοι εναλλακτικοί τρόποι εκτέλεσης πράξεων:

• Εκτέλεση πολλαπλασιασμού δεκαδικών με τη μετάβαση σε μια κλασματική γραφή των αριθμών (αλλαγή πεδίου έκφρασης και επεξεργασίας). Για παράδειγμα, για την εκτέλεση της πράξης 0,08·0,06 οι μαθητές μπορούν να χρησιμοποιήσουν ως κριτήριο ελέγχου την εκτέλεση της πράξης με τη χρήση της κλασματικής γραφής των αριθμών: $0{,}08 \cdot 0{,}06 = \frac{8}{100} \cdot \frac{6}{100} = \frac{48}{100} = 0{,}48$

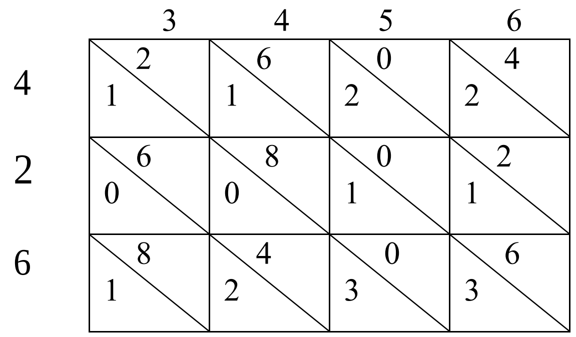
• Εκτέλεση ενός πολλαπλασιασμού ακεραίων με τη μέθοδο του "διατετραγωνισμού", ινδικό τρόπο εκτέλεσης πολλαπλασιασμών ακεραίων[28] (δεν υπάρχει αλλαγή πεδίου έκφρασης και επεξεργασίας και πλαισίου). Για παράδειγμα για την εκτέλεση του πολλαπλασιασμού 3456·624 σχηματίζουμε ένα ορθογώνιο πίνακα με τέσσερις στήλες και τρεις σειρές.

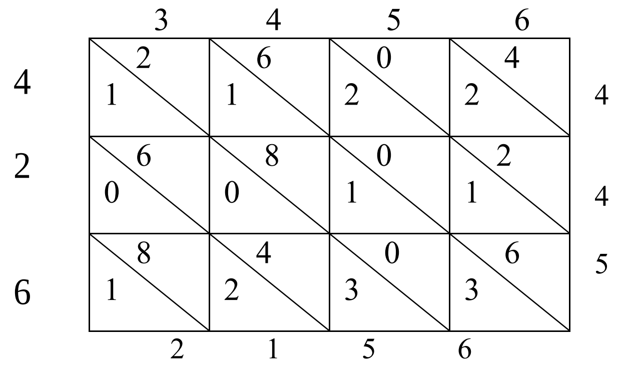
Πάνω από τον πίνακα και από τα αριστερά προς τα δεξιά γράφουμε τα ψηφία 3,4,5,6 του πολλαπλασιαστέου και αριστερά του πίνακα από κάτω προς τα πάνω γράφουμε τα ψηφία 6,2,4 του πολλαπλασιαστή. Στη συνέχεια, διαιρούμε κάθε τετράγωνο του πίνακα σε δυο τρίγωνα χαράζοντας τη διαγώνιο που ενώνει την επάνω αριστερά κορυφή με την κάτω δεξιά. Έπειτα, σε κάθε τετράγωνο γράφουμε το γινόμενο των δυο αριθμών που βρίσκονται στην αρχή της γραμμής και πάνω από τη στήλη αντίστοιχα. Απ' αυτό το γινόμενο, γράφουμε το ψηφίο των δεκάδων στο κάτω αριστερά τρίγωνο και το ψηφίο των μονάδων στο πάνω δεξιά. Αν μια από προς δυο τάξεις δεν υπάρχει βάζουμε το μηδέν στην αντίστοιχη θέση. Στο εξωτερικό κάθε ορθογωνίου προσθέτουμε έπειτα προς αριθμούς κάθε διαγωνίου, αρχίζοντας απ' αυτή που σχηματίζεται από τον αριθμό 3 επάνω δεξιά στον πίνακα. Συνεχίζουμε μετά διαγώνιο-διαγώνιο από δεξιά προς αριστερά και από πάνω προς τα κάτω. Τα κρατούμενα προς μιας διαγωνίου τα μεταφέρουμε στην επόμενη και σιγά-σιγά στο εξωτερικό του ορθογωνίου σχηματίζεται το τελικό γινόμενο το οποίο διαβάζεται από αριστερά προς δεξιά. Είναι ο αριθμός 2.156.544.

$\boxed{3456 \bullet 624}$

	3	4	5	6
4				
2				
6				

[28]Μετά τον 6ο αιώνα άρχισαν να τελειοποιούν τον τρόπο εκτέλεσης πράξεων. Για τον πολλαπλασιασμό χρησιμοποιούσαν τη μέθοδο του *διατετραγωνισμού* ή αλλιώς *με πίνακα.* (D. E. Smith, 1958, Ifrah, p. 264-265).





3456•624=2156544

• Εκτέλεση ενός πολλαπλασιασμού με τη βοήθεια των ιδιοτήτων των δυνάμεων (αλλαγή πεδίου έκφρασης και επεξεργασίας). Για παράδειγμα, για την εκτέλεση του πολλαπλασιασμού 125·64 γράφουμε τους όρους σε μια εκθετική μορφή και εκτελούμε την πράξη:

$125\cdot 64=5^3\cdot 2^6=5^3\cdot(2^3\cdot 2^3)=(5^3\cdot 2^3)\cdot 2^3=(5\cdot 2)^3\cdot 2^3=10^3\cdot 2^3=1000\cdot 8=8000$[29].

Βέβαια, θα πρέπει να τονιστεί ότι για να εφαρμοστεί ο παραπάνω τρόπος εκτέλεσης ενός πολλαπλασιασμού πρέπει να τα αριθμητικά δεδομένα να μπορούν να γραφούν σαν δύναμη άλλων αριθμών.

• Εκτέλεση διαίρεσης δεκαδικών με τη μετάβαση σε μια κλασματική γραφή των αριθμών (αλλαγή πεδίου έκφρασης και επεξεργασίας-Κούρκουλος, 1998). Για παράδειγμα, για την εκτέλεση της πράξης 1,2:0,9 οι μαθητές μπορούν να χρησιμοποιήσουν ως κριτήριο ελέγχου την εκτέλεση της πράξης με τη χρήση της κλασματικής γραφής των αριθμών: $1{,}2:0{,}004=\frac{12}{10}:\frac{4}{1000}=\frac{12}{10}\cdot\frac{1000}{4}=\frac{12000}{40}=300$

• Εκτέλεση διαίρεσης με τη βοήθεια των ιδιοτήτων των δυνάμεων (αλλαγή πεδίου έκφρασης και επεξεργασίας). Για παράδειγμα, για την εκτέλεση της διαίρεσης 216:8 γράφουμε τους όρους σε μια εκθετική μορφή και εκτελούμε την πράξη:

$216:8=6^3:2^3=(6:2)^3=3^3=27$

[29] Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η πράξη αυτή μπορεί να εκτελεστεί με την εφαρμογή τεχνικής εύκολου νοερού υπολογισμού, αφού ο ένας όρος είναι το 125:

$125\cdot 64=64\cdot 100+\frac{1}{4}\cdot 64\cdot 100=6400+1600=8000$

- Εφαρμογή του αλγόριθμου των μερικών πηλίκων (Reisman, 1982), σύμφωνα με τον οποίο στοχεύουμε στην εύρεση ενός όσο το δυνατό μεγαλύτερου πολλαπλάσιου του 10 το οποίο πολλαπλασιαζόμενο με το διαιρέτη θα δώσει γινόμενο που όσο το δυνατό πλησιέστερα στο διαιρετέο (Αγαλιώτης, 2000, σ. 315). Έτσι, για τη διαίρεση 18282:6 έχουμε:

18282	6
- 18000	
282	3000
- 240	40
42	+ 7
- 42	3047
0	

- Εκτέλεση ενός πολλαπλασιασμού π.χ. διψήφιου επί διψήφιο με την εύρεση του εμβαδού ενός ορθογωνίου με πλευρές τους δύο παράγοντες και τη διαμέρισή του σε μικρότερα ορθογώνια (βλ. σχετικά αλλαγή πλαισίου §6.5β).

6. ΚΑΤΗΓΟΡΙΟΠΟΙΗΣΗ ΤΩΝ ΚΡΙΤΗΡΙΩΝ ΕΚΤΙΜΗΣΗΣ ΚΑΙ ΕΛΕΓΧΟΥ

Τα κριτήρια εκτίμησης και ελέγχου μπορούμε να τα κατηγοριοποιήσουμε με βάση πολλαπλούς άξονες. Οι άξονες που θα χρησιμοποιήσουμε και που εξυπηρετούν τις ανάγκες της παρούσας έρευνας είναι κάποιοι από αυτούς που ορίζουν οι Κούρκουλος και Τζανάκης (2000):

1. η αποτελεσματικότητά τους ως προς την ορθότητα της πράξης
2. η εφαρμογή τους στο σύνολο του αλγορίθμου ή σε μια περιοχή του
3. ο βαθμός δυσκολίας στην εφαρμογή τους
4. το κόστος εφαρμογής
5. το μαθησιακό όφελος

Αρχικά, επιλέχτηκε ως άξονας κατηγοριοποίησης η αποτελεσματικότητα των κριτηρίων εκτίμησης και ελέγχου ως προς την ορθότητα της πράξης, δηλαδή ταξινομήθηκαν με βάση το αν αποτελούν ικανές ή/και αναγκαίες συνθήκες. Όλα τα κριτήρια δεν έχουν την ίδια αποτελεσματικότητα. Έτσι, θεωρήθηκε σημαντική μια τέτοια κατηγοριοποίηση, ώστε να αποσαφηνιστεί ο στόχος της εφαρμογής τους και να ομαδοποιηθούν με άλλα κριτήρια της ίδιας κατηγορίας. Στη διδακτική παρέμβαση που πραγματοποιήθηκε, οι μαθητές ενημερώθηκαν για την αποτελεσματικότητα του κάθε κριτηρίου.

Ο επόμενος άξονας με βάση τον οποίο έγινε μια νέα κατηγοριοποίηση είναι το κόστος εφαρμογής του εκάστοτε κριτηρίου. Όλα τα κριτήρια εκτίμησης και ελέγχου δεν έχουν το ίδιο κόστος εφαρμογής και κατά συνέπεια κρίνεται σκόπιμο να ταξινομηθούν ανάλογα με το αν έχουν μεγάλο ή μικρό κόστος εφαρμογής. Μέσα στο πλαίσιο της διδακτικής παρέμβασης οι μαθητές στην πλειοψηφία τους ήταν σε θέση να εκτιμήσουν το κόστος εφαρμογής ενός κριτηρίου και να προβούν σε συμπεράσματα για την καταλληλότητα της εφαρμογής τους σε διαφορετικές περιπτώσεις, σε συνδυασμό με τη βεβαιότητα που παρέχουν για την ορθότητα της πράξης.

Στη συνέχεια επιλέχτηκε ως άξονας για την κατηγοριοποίησή τους ο βαθμός δυσκολίας για την εφαρμογή τους. Είναι σαφές ότι όλα τα κριτήρια τα οποία περιγράφονται στην πρώτη κατηγοριοποίηση έχουν διαφορετικό βαθμό δυσκολίας για τους μαθητές και κατά συνέπεια θα ήταν ενδιαφέρον να παρουσιαστεί μια τέτοια ταξινόμηση. Εξάλλου, στην οργάνωση του διδακτικού σχήματος λήφθηκε υπόψη ο βαθμός δυσκολίας αυτών των κριτηρίων, με αποτέλεσμα κάποια απ' αυτά να παραληφθούν και κάποια άλλα να παρουσιαστούν σε ορισμένους μόνο μαθητές οι οποίοι είχαν την ικανότητα και τις προαπαιτούμενες γνώσεις για την κατανόησή τους και τη δυνατότητα εφαρμογής τους.

Τέλος, τα κριτήρια κατηγοριοποιήθηκαν με βάση το μαθησιακό όφελος που προκύπτει από τη χρήση τους, το οποίο αποκρυσταλλώθηκε κυρίως μέσα από τη διεξαγωγή της διδακτικής παρέμβασης και τις επιδράσεις της στη συμπεριφορά των μαθητών.

6.1 Κατηγοριοποίηση των κριτηρίων με βάση την αποτελεσματικότητά τους ως προς την ορθότητα της πράξης

Με βάση αυτή την κατηγοριοποίηση τα κριτήρια εκτίμησης και ελέγχου ταξινομούνται ανάλογα με την αποτελεσματικότητά τους ως προς το αν ο αλγόριθμος που έχει εφαρμοστεί είναι ορθός (βλ. σχετικά Κούρκουλος και Τζανάκης 2000 σ. 274). Διακρίνονται δύο περιπτώσεις:

α) Κριτήρια που παράγουν το ζητούμενο αποτέλεσμα. Εδώ συγκαταλέγονται οι εναλλακτικοί αλγόριθμοι (βλ. §5.4).

β) Κριτήρια που δεν παράγουν το ζητούμενο αποτέλεσμα. Σ' αυτή την υποκατηγορία υπάρχουν οι εξής περιπτώσεις:

- **βέβαια κριτήρια**, δηλαδή κριτήρια που σε σχέση με την εφαρμογή του αλγορίθμου αποτελούν:

i) Ικανές και αναγκαίες συνθήκες. Εδώ εντάσσονται οι πλήρεις δοκιμές των πράξεων, οι οποίες είναι απαραίτητο να δείχνουν ότι δεν υπάρχει σφάλμα ενώ ταυτόχρονα όταν δείχνουν ότι δεν υπάρχει σφάλμα, δεν υπάρχει.

ii) Μόνο αναγκαίες συνθήκες. Εδώ εντάσσονται τα ελλιπή κριτήρια ελέγχου όπως τα κριτήρια που βασίζονται στους ισοϋπόλοιπους αριθμούς, η εύρεση της τάξης μεγέθους ή προσεγγίσεων μεγαλύτερης ακρίβειας, καθώς και τα κριτήρια διάταξης. Πρόκειται για κριτήρια τα οποία είναι απαραίτητο να δείχνουν ότι δεν υπάρχει σφάλμα για την εξασφάλιση της ορθότητας της πράξης, αλλά όταν δείχνουν ότι δεν υπάρχει σφάλμα δεν είναι σίγουρο ότι δεν υπάρχει.

Έτσι, τα κριτήρια που βασίζονται στους ισοϋπόλοιπους αριθμούς ενδέχεται να αποτελούν ένδειξη ότι η πράξη που εκτελέστηκε είναι ορθή, ωστόσο μπορεί να υπάρχει λάθος καθώς δεν λαμβάνουν υπόψη τους μηδενικά ή την υποδιαστολή. μάλιστα κάποια απ' αυτά δε λαμβάνουν υπόψη τους το σύνολο των ψηφίων των όρων της πράξης και κατά συνέπεια μειώνεται η εγκυρότητά τους ως προς τη βεβαιότητα που παρέχουν για την ορθότητα της πράξης. Περισσότερο "βέβαια" μπορούμε να πούμε ότι είναι τα κριτήρια στα οποία υπολογίζεται το υπόλοιπο της διαίρεσης διά 9 και διά 11, ενώ λιγότερο βέβαια είναι τα υπόλοιπα κριτήρια. Για παράδειγμα, το κριτήριο του τελευταίου ψηφίου παρέχει απλή ένδειξη για την ορθότητα της πράξης, καθώς τα υπόλοιπα ψηφία των όρων της πράξης δε συμμετέχουν στη δοκιμή.

Εξάλλου, τα κριτήρια εύρεσης της τάξης μεγέθους ή προσεγγίσεων μεγαλύτερης ακρίβειας αποτελούν μόνο αναγκαίες συνθήκες για την ορθότητα της πράξης καθώς απλά επιβεβαιώνουν την τάξη μεγέθους και το πρώτο ή τα δύο πρώτα σημαντικά ψηφία, χωρίς να μας πληροφορούν για τα υπόλοιπα ψηφία.

Ο συνδυασμός των κριτηρίων που βασίζονται στους ισοϋπόλοιπους αριθμούς, με τα κριτήρια που αφορούν στην εύρεση της τάξης μεγέθους ή προσεγγίσεων μεγαλύτερης ακρίβειας, συνιστούν ένα πιο ασφαλές μέτρο για την ορθότητα της πράξης και καθώς έχουν σχετικά μικρό κόστος εφαρμογής, αποτελούν τον αντίποδα στη βεβαιότητα που παρέχουν οι πλήρεις δοκιμές οι οποίες όμως έχουν σχετικά μεγάλο κόστος εφαρμογής (βλ. §6.3), τουλάχιστον για τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση.

- **αβέβαια κριτήρια.** Πρόκειται για πιθανοθεωρητικά κριτήρια τα οποία "δεν έχουν το χαρακτήρα μιας λογικής (ικανής ή/και αναγκαίας) συνθήκης για το αποτέλεσμα της αλγοριθμικής διαδικασίας, αλλά συνιστούν εκτίμηση ή έλεγχο του αποτελέσματος με υψηλή ή με χαμηλή πιθανότητα ορθότητας του συμπεράσματος" (Κούρκουλος και

Τζανάκης 2000, σ. 274). Ένα τέτοιο κριτήριο είναι η παραγωγή ακέραιου αποτελέσματος σε μια διαίρεση πολυψήφιων ακέραιων αριθμών. Βέβαια παρατηρείται το φαινόμενο το κριτήριο αυτό να θεωρείται από τους μαθητές και ως ικανή συνθήκη για την ορθότητα της πράξης που έχουν εκτελέσει (Κούρκουλος και Τζανάκης 2000, σ. 274). Άλλο τέτοιο κριτήριο είναι η εύρεση ενός μεγάλου αριθμού στον πολλαπλασιασμό πολυψήφιων ακεραίων.

6.2 Κατηγοριοποίηση των κριτηρίων με βάση την εφαρμογή τους στο σύνολο του αλγόριθμου ή σε μια περιοχή του

Εδώ διακρίνονται τα ολικά και τα τοπικά κριτήρια εκτίμησης και ελέγχου (Κούρκουλος και Τζανάκης 2000, σ. 275):

α) Ολικά κριτήρια είναι αυτά που εφαρμόζονται στο σύνολο του αλγόριθμου και είναι οι πλήρεις δοκιμές των πράξεων, τα κριτήρια που βασίζονται στους ισοϋπόλοιπους αριθμούς, οι εναλλακτικοί αλγόριθμοι, τα κριτήρια διάταξης, η εύρεση της τάξης μεγέθους ή ακριβέστερων προσεγγίσεων, όταν εφαρμόζονται πριν ή μετά την εκτέλεση της πράξης.

β) Τοπικά κριτήρια είναι αυτά που εφαρμόζονται σε μια περιοχή του αλγόριθμου κατά τη διάρκεια εκτέλεσής του και μπορούν να είναι οι πλήρεις δοκιμές των πράξεων, τα κριτήρια που βασίζονται στους ισοϋπόλοιπους αριθμούς, τα κριτήρια διάταξης, η εύρεση της τάξης μεγέθους ή ακριβέστερων προσεγγίσεων. Βέβαια, συνηθέστερα είναι τα κριτήρια διάταξης, το κριτήριο του τελευταίου ψηφίου, το κριτήριο του υπολοίπου σε κάθε βήμα της διαίρεσης και η εύρεση της τάξης μεγέθους και πρώτου σημαντικού ψηφίου καθώς έχουν μικρό κόστος εφαρμογής. Στο πλαίσιο εκτέλεσης μιας διαίρεσης είναι δυνατή η εφαρμογή των προαναφερθέντων κριτηρίων εκτίμησης ή ελέγχου προκειμένου να εκτιμηθεί αν το γινόμενο του μερικού πηλίκου επί το διαιρέτη υπερβαίνει το τμήμα του διαιρετέου του οποίου το πηλίκο αν διαιρεθεί με το διαιρέτη αναζητούμε, ή αν ελεγχθεί αν ο προηγούμενος πολλαπλασιασμός που έχει ήδη γίνει είναι ορθός. Το ίδιο μπορεί να γίνει κατά τη διάρκεια εκτέλεσης ενός πολλαπλασιασμού όπου εφαρμόζονται κριτήρια ελέγχου για τα μερικά γινόμενα ή κριτήρια εκτίμησης και ελέγχου για το άθροισμα των μερικών γινομένων[30].

6.3 Κατηγοριοποίηση των κριτηρίων με βάση το κόστος εφαρμογής τους

Το κόστος εφαρμογής ενός αλγορίθμου αφορά στον απαιτούμενο χρόνο εφαρμογής του, στο πλήθος, το μέγεθος και την πολυπλοκότητα των απαιτούμενων βημάτων για την εφαρμογή του (Κούρκουλος και Τζανάκης, 2000, σ. 273).

Τα κριτήρια εκτίμησης και ελέγχου με βάση αυτή την κατηγοριοποίηση ταξινομούνται σε δύο κατηγορίες:

α) Κριτήρια με μεγάλο κόστος εφαρμογής τα οποία έχουν μακροσκελή και χρονοβόρα εφαρμογή. Τέτοια κριτήρια είναι οι πλήρεις δοκιμές των πράξεων, ειδικά του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης, οι εναλλακτικοί αλγόριθμοι, η εύρεση της τάξης

[30] Αν υπάρχει αριθμητική παράσταση, τα κριτήρια που εφαρμόζονται για τον έλεγχο μιας πράξης αποτελούν τοπικά κριτήρια ελέγχου.

μεγέθους στην πρόσθεση και την αφαίρεση όταν οι όροι δεν είναι της ίδιας τάξης και η εύρεση τάξης μεγέθους και δύο πρώτων σημαντικών ψηφίων έπειτα από στρογγυλοποίηση των όρων της πράξης στο δεύτερο ψηφίο ειδικά στην αφαίρεση, τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση[31].

β) Κριτήρια με μικρό κόστος εφαρμογής τα οποία δεν απαιτούν πολλαπλά βήματα και μακρύ χρόνο. Τέτοια είναι τα κριτήρια διάταξης, τα κριτήρια που βασίζονται στους ισοϋπόλοιπους αριθμούς και ιδιαίτερα το κριτήριο του τελευταίου ψηφίου, το κριτήριο του υπολοίπου, η εύρεση της τάξης μεγέθους (στην πρόσθεση και την αφαίρεση οι όροι είναι ίδιας τάξης) και του πρώτου σημαντικού ψηφίου του αποτελέσματος και τα πιθανοθεωρητικά κριτήρια. Εδώ συγκαταλέγονται και κριτήρια που αφορούν στην εύρεση της τάξης μεγέθους και του δεύτερου σημαντικού ψηφίου όταν τα αναδιατυπωμένα αριθμητικά δεδομένα ευνοούν τον ευχερή νοερό υπολογισμό ή ευνοούν τη χρήση των ιδιοτήτων των πράξεων και κατά συνέπεια τον εύκολο υπολογισμό τους.

6.4 Κατηγοριοποίηση των κριτηρίων με βάση τη δυσκολία εφαρμογής τους

Με βάση τη δυσκολία εφαρμογής τους τα κριτήρια εκτίμησης και ελέγχου των τεσσάρων αριθμητικών πράξεων διακρίνονται σε:

α) Κριτήρια με μεγάλη δυσκολία εφαρμογής. Εδώ εντάσσονται οι πλήρεις δοκιμές του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης οι οποίες απαιτούν πολλά και ειδικά στη διαίρεση ($\Delta=\delta\cdot\pi+\upsilon$ – ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης) πολύπλοκα βήματα, καθώς και οι πλήρεις δοκιμές της πρόσθεσης και της αφαίρεσης με αφαίρεση. Ακόμη, η εύρεση της τάξης μεγέθους στην πρόσθεση και την αφαίρεση όταν οι όροι είναι διαφορετικής τάξης. Επίσης εντάσσονται τα κριτήρια εκτίμησης και ελέγχου με εύρεση της τάξης μεγέθους και δύο πρώτων σημαντικών ψηφίων με τη στρογγυλοποίηση των όρων στο δεύτερο ψηφίο. Για παράδειγμα, για την εκτίμηση του αποτελέσματος του πολλαπλασιασμού $1782\cdot1631$ αν η στρογγυλοποίηση των όρων γίνει στο δεύτερο ψηφίο θα πρέπει να εκτελεστεί νοερά ο πολλαπλασιασμός διψήφιου επί διψήφιο $17\cdot16$ ο οποίος, αν γίνει χωρίς τη χρήση κάποιας ιδιαίτερης τεχνικής, είναι ιδιαίτερα δύσκολος, καθώς η μνήμη επιφορτίζεται με πολλά μερικά γινόμενα.

β) Κριτήρια με μικρή δυσκολία. Σ’ αυτή την κατηγορία συμπεριλαμβάνονται τα κριτήρια διάταξης, τα κριτήρια που βασίζονται στους ισοϋπόλοιπους αριθμούς, οι πλήρεις δοκιμές της πρόσθεσης και της αφαίρεσης με πρόσθεση, το κριτήριο του υπολοίπου στη διαίρεση, η εύρεση της τάξης μεγέθους και του πρώτου σημαντικού ψηφίου, οι εναλλακτικοί τρόποι εκτέλεσης μιας πράξης. Επίσης εντάσσονται τα κριτήρια εκτίμησης και ελέγχου που στηρίζονται στην κατάλληλη αναδιατύπωση των αριθμητικών δεδομένων (με ή χωρίς αλλαγή πλαισίου), ώστε με τη χρήση των ιδιοτήτων των πράξεων να είναι ευχερής ο υπολογισμός τους. Βέβαια, απαραίτητη προϋπόθεση είναι η ευχέρεια του μαθητή για την κατάλληλη αναδιατύπωση των αριθμητικών δεδομένων και η επαρκής γνώση των ιδιοτήτων των πράξεων και των δυνάμεων.

[31] Υπάρχουν περιπτώσεις όπου τα τροποποιημένα αριθμητικά δεδομένα ευνοούν τον εύκολο νοερό υπολογισμό τους ακόμα κι αν είναι στρογγυλοποιημένα στο δεύτερο ψηφίο π.χ. $0{,}23\cdot1654\approx0{,}25\cdot1600$.

6.5 Κατηγοριοποίηση των κριτηρίων με βάση το μαθησιακό όφελος

Μέσα από τη χρήση κριτηρίων εκτίμησης και ελέγχου επιτυγχάνεται η καλύτερη εκμάθηση του αλγόριθμου. Οι Κούρκουλος και Τζανάκης (2000, σσ. 276-278) χαρακτηρίζουν το μαθησιακό όφελος που προκύπτει μέσα από την παραγωγή και χρήση κριτηρίων εκτίμησης και ελέγχου ως προς δύο άξονες: ως προς το προκύπτον “γνωστικό όφελος” και ως προς τη “γνωστική απόσταση” κριτηρίου ελέγχου – αλγορίθμου. Διακρίνονται οι εξής περιπτώσεις:

α) Γνωστικό όφελος που προκύπτει (Κούρκουλος και Τζανάκης, 2000, σ. 275-276).

i) Βελτίωση της κατανόησης επιμέρους στοιχείων του αλγορίθμου

Έτσι, με την εφαρμογή του διπλού προγραμματισμού παρατηρείται βελτίωση σε ό,τι αφορά το μνημονικό κανόνα εκτέλεσης της πράξης - αρχική θέση υποδιαστολής, κατεύθυνση μετακίνησης της υποδιαστολής, πλήθος θέσεων μετακίνησης (Κούρκουλος, 1998, σ. 87, όπως και πειραματική διδασκαλία §9.2.1, Α΄ φάση, ε και στ).

Με την εφαρμογή κριτηρίων εκτίμησης πριν την εκτέλεση διαιρέσεων στις οποίες ο διαιρέτης είναι πολύ κοντά σε κάποιο πολλαπλάσιο του 10 (π.χ. 1083:19) οι μαθητές βελτιώνονται στην εύρεση των μερικών πηλίκων. Επίσης, με την εφαρμογή κριτηρίων για την εύρεση της τάξης μεγέθους βελτιώνουν σφάλματα που έχουν σχέση με την παράλειψη μηδενικών ή της υποδιαστολής ή λάθος τοποθέτηση της υποδιαστολής.

Ακόμη, μέσα από την εύρεση της τάξης μεγέθους του αποτελέσματος και του πρώτου ή των δύο πρώτων σημαντικών ψηφίων οι μαθητές κατανοούν βασικά χαρακτηριστικά του αποτελέσματος.

Τέλος, μέσα από την εφαρμογή των ιδιοτήτων των πράξεων για την εύρεση προσεγγιστικών υπολογισμών υπάρχει κατανόηση επιμέρους βημάτων των αλγορίθμων, οι οποίοι ουσιαστικά στηρίζονται σ’ αυτές: η πρόσθεση και η αφαίρεση στην προσεταιριστική και ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση στην επιμεριστική.

ii) Βελτίωση της κατανόησης επιμέρους στοιχείων του κριτηρίου που χρησιμοποιείται.

Έτσι, μέσα από την εφαρμογή του διπλού προγραμματισμού επιτυγχάνεται η κατανόηση των πράξεων μεταξύ δεκαδικών κλασμάτων (Κούρκουλος, 1998, σ. 87).

Ακόμη, με την εφαρμογή της δοκιμής της ευκλείδειας διαίρεσης (Δ=δ·π+υ) βελτιώνεται η κατανόηση του υπολοίπου ως στοιχείο του κριτηρίου, καθώς η εσφαλμένη αντίληψη της τάξης μεγέθους του μπορεί να οδηγήσει σε αποτέλεσμα που δείχνει ότι η εκτέλεση του βασικού αλγορίθμου είναι λάθος.

Επίσης, επιτυγχάνεται η βελτίωση στην εφαρμογή των διάφορων κριτηρίων καθώς και στην εφαρμογή των ιδιοτήτων των πράξεων και των δυνάμεων.

iii) Βελτίωση της κατανόησης του προβλήματος που λύθηκε.

Μέσα από την εφαρμογή των διάφορων κριτηρίων υπάρχει η κατανόηση της σχέσης που συνδέει τους όρους της πράξης π.χ. σχέση πολλαπλασιαστή, πολλαπλασιαστέου και αποτελέσματος, διαιρετέου, διαιρέτη, πηλίκου και υπολοίπου (κυρίως μέσα από τις πλήρεις δοκιμές και τα κριτήρια διάταξης). Ειδικότερα, μέσα από την εφαρμογή των πλήρων δοκιμών και συγκεκριμένα της πρόσθεσης μέσα από αφαίρεση, της αφαίρεσης μέσα πρόσθεση, του πολλαπλασιασμού μέσα από διαίρεση και της διαίρεσης με την ευκλείδεια ταυτότητα (Δ=δ·π+υ) διαπιστώνονται οι αντίστροφες σχέσεις μεταξύ των πράξεων. Ιδιαίτερα σημαντική είναι η δοκιμή της ευκλείδειας διαίρεσης, καθώς αποσαφηνίζει τη σχέση μεταξύ των τεσσάρων στοιχείων της διαίρεσης (διαιρετέου, διαιρέτη, πηλίκου και υπολοίπου) και αποκαθιστά εσφαλμένες αντιλήψεις σχετικά με την τάξη μεγέθους του υπολοίπου (αν είναι δεκαδικός αριθμός ενώ είναι ακέραιος). Ακόμη, μέσα από την εύρεση της τάξης μεγέθους οι μαθητές κατανοούν τη σχέση του αποτελέσματος με τους όρους της πράξης.

iv)Βελτιώσεις του ίδιου του αλγόριθμου.

Πολλές φορές μέσα από την εφαρμογή κριτηρίων εκτίμησης και ελέγχου υπάρχει τροποποίηση του βασικού αλγορίθμου (Κούρκουλος, 1997,1998 καθώς και πειραματική διδασκαλία §9.2.1, Α΄ φάση, β και δ). Για παράδειγμα, μέσα από το διπλό προγραμματισμό για την εκτέλεση πολλαπλασιασμών δεκαδικών με θετικές δυνάμεις του 10 οι μαθητές δεν εφαρμόζουν πλέον το βασικό κανόνα σύμφωνα με τον οποίο μετακινούμε προς τα δεξιά την υποδιαστολή τόσες θέσεις όσα και τα μηδενικά αλλά γράφουν το δεκαδικό αριθμό χωρίς υποδιαστολή, συμπληρώνουν με τα μηδενικά της θετικής δύναμης του 10 και χωρίζουν στη συνέχεια τόσα δεκαδικά ψηφία όσα και αυτά του αρχικού δεκαδικού αριθμού. (2,45·1000=2450,00)

β) Γνωστική απόσταση κριτηρίου ελέγχου-αλγόριθμου (Κούρκουλος και Τζανάκης, 2000, σ. 277-278).

1) Προϋπάρχουσα σύνδεση

i) Δημιουργούνται συνδέσεις με άλλες γνώσεις του μαθητή, οι οποίες προϋπήρχαν, αλλά παρέμεναν ασύνδετες με τον αλγόριθμο και τα επιμέρους στοιχεία του. Έτσι, με τη χρήση του εμβαδού του παραλληλογράμμου για τον έλεγχο πολλαπλασιασμού διψήφιου επί διψήφιο δημιουργούνται συνδέσεις με τις γεωμετρικές γνώσεις των μαθητών σχετικά με την εύρεση του εμβαδού ορθογωνίου παραλληλογράμμου (ή τετραγώνου), οι οποίες προϋπήρχαν, αλλά δεν συνδέονταν με τον αλγόριθμο του πολλαπλασιασμού.

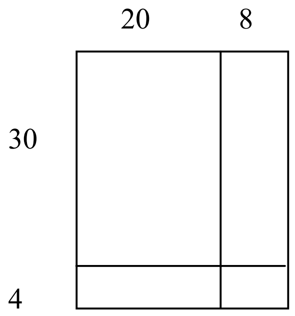
ii) Διερευνώνται συνδέσεις μεταξύ των στοιχείων του αλγόριθμου με άλλα στοιχεία του γνωστικού οικοδομήματος του μαθητή, οι οποίες προϋπήρχαν, αλλά οι συνέπειές τους είχαν διερευνηθεί μόνο εν μέρει (Κούρκουλος, 1998, σ. 86). Έτσι με την εφαρμογή του διπλού προγραμματισμού οι μαθητές αντιλαμβάνονται ότι πολλαπλασιασμός επί 0,001 ισοδυναμεί με διαίρεση με το 1000. Ταυτόχρονα συνειδητοποιούν γιατί ένας αριθμός που πολλαπλασιάζεται/διαρείται με αριθμό μικρότερο της μονάδας, μικραίνει/μεγαλώνει αντίστοιχα (ή το αντίστροφο) και αποστεγανοποιούνται τυχόν πλάνες στις οποίες είχαν υποπέσει οι μαθητές. Επίσης, η εφαρμογή κριτηρίων εκτίμησης ή ελέγχου που στηρίζονται στη χρήση των ιδιοτήτων των πράξεων οδηγεί στη σύνδεση των αλγορίθμων με τις ιδιότητες αυτές, οι οποίες προϋπήρχαν στο πεδίο γνώσεων του μαθητή, αλλά σύντομα εγκαταλείφθηκαν χωρίς να διερευνηθούν όλες οι όψεις σύνδεσης με τους αλγορίθμους. .

2) Πεδίο έκφρασης και επεξεργασίας, πλαίσιο

i) Δεν υπάρχει αλλαγή πεδίου έκφρασης και επεξεργασίας και πλαισίου. Εδώ εντάσσονται οι πλήρεις δοκιμές των πράξεων και τα κριτήρια που βασίζονται στις ιδιότητες των ισοϋπόλοιπων αριθμών, τα κριτήρια διάταξης, η εύρεση της τάξης μεγέθους και του πρώτου ή των δύο πρώτων σημαντικών ψηφίων, η μέθοδος του διατετραγωνισμού ως εναλλακτικός αλγόριθμος.

ii) Υπάρχει αλλαγή πεδίου έκφρασης και επεξεργασίας. Σ’ αυτή την κατηγορία συγκαταλέγεται το κριτήριο του διπλού προγραμματισμού, στο οποίο υπάρχει μετάβαση από την δεκαδική γραφή των αριθμών στην κλασματική, κριτήρια εύρεσης της τάξης και ακριβέστερων προσεγγίσεων με τη βοήθεια ιδιοτήτων των δυνάμεων περνώντας από τη δεκαδική γραφή των αριθμών στην εκθετική.

iii) Υπάρχει αλλαγή πλαισίου. Εδώ μπορούν να ενταχθούν κριτήρια ελέγχου που χρησιμοποιούν τη μετάβαση από το αριθμητικό πλαίσιο στο γεωμετρικό, όπως π.χ. ο πολλαπλασιασμός $28\cdot34$.



$$\begin{array}{lcr} 28\cdot34= & 20\cdot30 & 600 \\ & 30\cdot8 & 240 \\ & 20\cdot4 & 80 \\ & 4\cdot8 & +\ \ 32 \\ \hline & & 952 \end{array}$$

Για τον υπολογισμό αυτό χρησιμοποιούμε το σχήμα ενός ορθογωνίου με πλευρές 28 και 34 και προσπαθούμε να υπολογίσουμε το εμβαδό του με τη διαμέριση του σε μικρότερα ορθογώνια.

7.ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΩΝ ΤΩΝ ΚΡΙΤΗΡΙΩΝ ΕΚΤΙΜΗΣΗΣ ΚΑΙ ΕΛΕΓΧΟΥ

Παρακάτω επιχειρούμε μια θεωρητική επισκόπηση και ανάλυση των στοιχείων που χαρακτηρίζουν τα κριτήρια εκτίμησης και ελέγχου, σε μια προσπάθεια να προσδιοριστούν και να αποσαφηνιστούν όσο το δυνατό περισσότερες όψεις του εξεταζόμενου θέματος. Όπως ήδη έχει επισημανθεί, πρόκειται για ένα πολυσύνθετο και πολύπλευρο θέμα, η εξέταση του οποίου απαιτεί τόσο μονομερή ανάλυση των ιδιαίτερων όψεών του, όσο και συνολική αντιμετώπιση αυτών, στο επίπεδο της ενιαίας δομικής μονάδας που συνιστούν. Έτσι, παρακάτω εξετάζονται 1) ο συσχετισμός των κριτηρίων εκτίμησης και ελέγχου, 2) τα εννοιολογικά χαρακτηριστικά των κριτηρίων εκτίμησης και ελέγχου, 3)οι διαδικασίες που λαμβάνουν χώρα κατά την εφαρμογή τους, 4)οι ικανότητες που απαιτούνται για τη χρήση τους και 5)οι συνέπειες από τη χρήση κριτηρίων εκτίμησης και ελέγχου. Σε ό,τι αφορά το 1), γίνεται προσπάθεια να διαφανεί η σχέση μεταξύ των κριτηρίων εκτίμησης και ελέγχου και η δυνατότητα να λειτουργήσουν συμπληρωματικά. Σε ό,τι αφορά το 2), 3), 4) και 5), για την λεπτομερέστερη ανάλυση και την παροχή σαφέστερης εικόνας, εξετάζονται χωριστά τα κριτήρια εκτίμησης και ελέγχου σε ό,τι αφορά τα 2) και 3) ενώ αντιμετωπίζονται συνολικά ως προς το, 4) και 5), καθώς, όπως διαφαίνεται στη συνέχεια, ταυτίζονται. Επίσης, κατά την εξέταση των κριτηρίων εκτίμησης γίνεται χωριστή αναφορά στα απλά κριτήρια διάταξης και χωριστά στα κριτήρια εκτίμησης που βασίζονται στους από μνήμης προσεγγιστικούς υπολογισμούς σε ό,τι αφορά τα 2) και 3) καθώς διαφοροποιούνται.

7.1 Συσχετισμός κριτηρίων εκτίμησης και ελέγχου

Σύμφωνα με τους Κούρκουλο και Τζανάκη (2000, σ. 270), "οι διαδικασίες εκτίμησης και ελέγχου είναι αλληλένδετες, αποτελώντας τις δύο όψεις του ίδιου νομίσματος". Η άποψη αυτή εδραιώνεται με βάση τη λογική ότι η εκτίμηση του αποτελέσματος ενός αλγορίθμου μπορεί να λειτουργήσει ως έλεγχος, μετά την εκτέλεση του αλγορίθμου.

Ειδικότερα, σε ό,τι αφορά τους αλγορίθμους των τεσσάρων αριθμητικών πράξεων, τα κριτήρια εκτίμησης του αποτελέσματος μιας πράξης μπορούν να αποτελέσουν και κριτήρια ελέγχου, μετά την εκτέλεση της πράξης. Συγκεκριμένα, αφού γίνει η εκτίμηση του αποτελέσματος της πράξης, εκτελείται ο αλγόριθμος και τέλος γίνεται σύγκριση του αποτελέσματος με την αρχική εκτίμηση.

Όλα τα κριτήρια εκτίμηση μπορούν να χρησιμοποιηθούν και ως κριτήρια ελέγχου. Έτσι, αφού εφαρμοστούν τα απλά κριτήρια διάταξης και εκτελεστεί στη συνέχεια ο αλγόριθμος, ελέγχουμε αν το παραγόμενο αποτέλεσμα συμφωνεί με αυτά τα κριτήρια διάταξης. Το ίδιο ισχύει και στην περίπτωση που εφαρμοστεί ως κριτήριο εκτίμησης από μνήμης προσεγγιστικός υπολογισμός, είτα σε τάξη μεγέθους, είτε προσέγγιση μεγαλύτερης ακρίβειας. Για παράδειγμα, εκτιμούμε ότι το γινόμενο $7835 \cdot 2948$ είναι περίπου 24000000 (στρογγυλοποιώντας τους όρους στο πρώτο ψηφίο με βάση το συνήθη κανόνα στρογγυλοποίησης). Αφού εκτελέσουμε τον αλγόριθμο του πολλαπλασιασμού, ελέγχουμε αν το γινόμενο είναι περίπου ίσο με το 24000000.

Βέβαια, θα πρέπει να σημειωθεί ότι τα κριτήρια εκτίμησης που χρησιμοποιούνται ως κριτήρια ελέγχου αποτελούν ελλιπή κριτήρια (βλ. §6.1), καθώς αποτελούν μόνο αναγκαίες συνθήκες για την ορθότητα της πράξης.

Όλα τα κριτήρια εκτίμησης μπορούν να χρησιμοποιηθούν και ως κριτήρια ελέγχου, έχοντας κατ' αυτό τον τρόπο διπλή λειτουργία και εφαρμόζονται τόσο πριν, όσο και μετά την εκτέλεση του αλγορίθμου. Όμως, υπάρχουν κριτήρια ελέγχου τα οποία εφαρμόζονται μόνο μετά την εκτέλεση του αλγορίθμου -πλήρεις δοκιμές, κριτήρια που βασίζονται στις ιδιότητες των ισοϋπόλοιπων αριθμών, εναλλακτικοί τρόποι εκτέλεση του αλγορίθμου (Κούρκουλος και Τζανάκης, 2000, σ. 272).

Με βάση τα παραπάνω διαπιστώνουμε ότι μεταξύ των κριτηρίων εκτίμησης και ελέγχου υπάρχει μια αμφίδρομη σχέση και λειτουργούν αλληλένδετα.

Κατά την εφαρμογή ελλιπών κριτηρίων ελέγχου, είναι δυνατή η παράλληλη χρήση και κριτηρίων εκτίμησης ως κριτήρια ελέγχου, ώστε να ενισχύεται η βεβαιότητα για την ορθότητα του αλγοριθμικά παραγόμενου αποτελέσματος. Για παράδειγμα, πριν από τον ακριβή υπολογισμό του γινομένου 0,321·0,0028 εκτιμούμε ότι το αποτέλεσμα είναι περίπου 0,0009. Εκτελούμε τον αλγόριθμο και εφαρμόζουμε το κριτήριο του σταυρού ως κριτήριο ελέγχου. Ωστόσο, το κριτήριο του σταυρού, στην προκειμένη περίπτωση, αφήνει απαρατήρητα λάθη που σχετίζονται με τη θέση της υποδιαστολής και το πλήθος των δεκαδικών ψηφίων. Για το λόγο αυτό, χρησιμοποιούμε επικουρικά ως κριτήριο ελέγχου την αρχική εκτίμηση του αποτελέσματος.

7.2 Εννοιολογικά χαρακτηριστικά[32] κριτηρίων εκτίμησης και ελέγχου

7.2.1 Κριτήρια εκτίμησης

Κριτήρια διάταξης

Σε ό,τι αφορά τα απλά κριτήρια διάταξης και την εφαρμογή τους, γίνεται σαφές ότι η πρόβλεψη αφορά, όχι σε συγκεκριμένο αριθμό, αλλά στη σχέση του αποτελέσματος με τους όρους της πράξης. Για παράδειγμα, για τον πολλαπλασιασμό 2,37·0,74 γίνεται η πρόβλεψη ότι το γινόμενο θα είναι *μικρότερο* από τον πρώτο παράγοντα (αφού ο δεύτερος παράγοντας είναι μικρότερος από τη μονάδα) και *μεγαλύτερο* από το δεύτερο (αφού ο πρώτος παράγοντας είναι μεγαλύτερος από τη μονάδα). Δεν γίνεται όμως αναφορά σε συγκεκριμένο αριθμό, αλλά μόνο σε μια σχέση διάταξης (μεγαλύτερο ή μικρότερο). Αυτή ακριβώς η λειτουργία της σχέσης διάταξης πρέπει να συνειδητοποιηθεί, προκειμένου να γίνει κατανοητή και να μπορούν οι μαθητές να προβαίνουν στην ευχερή χρήση της.

Επίσης, είναι σημαντικό ότι οι όροι της πράξης προσδιορίζουν τη σχέση του αποτελέσματος με αυτούς. Δηλαδή στον πολλαπλασιασμό 3,42·0,14 γίνεται η εκτίμηση ότι το αποτέλεσμα θα είναι μικρότερο από τον πρώτο παράγοντα (αφού ο δεύτερος παράγοντας είναι μικρότερος από τη μονάδα) και μεγαλύτερο από το δεύτερο (αφού ο πρώτος παράγοντας είναι μεγαλύτερος από τη μονάδα). Έτσι, η σχέση διάταξης ορίζεται

[32] Με τον όρο εννοιολογικά χαρακτηριστικά αναφερόμαστε σε χαρακτηριστικά που αφορούν στις έννοιες της εκτίμησης και του ελέγχου και που τις προσδιορίζουν. Κυρίως αναφερόμαστε στη σχέση αυτών των χαρακτηριστικών γνωρισμάτων με το άτομο που τις διαχειρίζεται και τη στάση που έχει, ή πρέπει να έχει απέναντι σ' αυτές.

με βάση τους όρους της πράξης, χωρίς να εμπλέκονται ανεξάρτητοι αριθμοί. Οι μαθητές θα πρέπει να συνειδητοποιήσουν αυτήν ακριβώς τη σχέση, ώστε να κατανοήσουν τη λειτουργία της και το ρόλο της.

Εξάλλου, η ίδια η πράξη είναι αυτή που ορίζει τη σχέση του αποτελέσματος με τους όρους της. Έτσι, αν τους αριθμούς 2,32 και 0,24 τους συνδέει ένας πολλαπλασιασμός, τότε γίνεται η πρόβλεψη ότι το αποτέλεσμα θα είναι μικρότερο από τον πρώτο παράγοντα (αφού ο δεύτερος παράγοντας είναι μικρότερος από τη μονάδα) και μεγαλύτερο από το δεύτερο (αφού ο πρώτος παράγοντας είναι μεγαλύτερος από τη μονάδα). Αν όμως έχουμε τη διαίρεση 2,32:0,24 τότε γίνεται η εκτίμηση ότι το πηλίκο θα είναι μεγαλύτερο από το διαιρετέο και μεγαλύτερο από το διαιρέτη (όπως προκύπτει από τη δοκιμή 0,24 επί αριθμό μεγαλύτερο από τη μονάδα προκύπτει αριθμός μεγαλύτερος από το 0,24). Αν τους συνδέει μια πρόσθεση, τότε προκύπτει ότι το άθροισμα θα είναι μεγαλύτερο και από τους δύο όρους, ενώ στην περίπτωση της αφαίρεσης 2,32-0,24 γίνεται εκτίμηση ότι το αποτέλεσμα θα είναι μικρότερο από το 2,32.

Βέβαια αυτή η σχέση των όρων με το αποτέλεσμα και την πράξη ορίζει επίπεδα κατανόησης και αντίληψης από την πλευρά του μαθητή:

✓ Κάποιοι μαθητές αντιλαμβάνονται μόνο ότι η πράξη προσδιορίζει τη σχέση του αποτελέσματος με τους όρους και μάλιστα με μονοσήμαντο τρόπο. Συγκεκριμένα, αντιλαμβάνονται ότι ο πολλαπλασιασμός και η πρόσθεση παράγουν ένα αποτέλεσμα μεγαλύτερο από τους παράγοντες, ενώ η διαίρεση και η αφαίρεση παράγουν αποτέλεσμα μικρότερο από το διαιρετέο και το μειωτέο αντίστοιχα.

✓ Κάποιοι μαθητές αντιλαμβάνονται ότι τουλάχιστον ο ένας όρος προσδιορίζει τη σχέση του αποτελέσματος με τον άλλο όρο. Έτσι, στον πολλαπλασιασμό 2,32·0,24 αντιλαμβάνονται ότι το γινόμενο θα είναι μικρότερο από το 2,32 καθώς ο άλλος όρος είναι μικρότερος από τη μονάδα. Στη διαίρεση 2,32:0,24 συνειδητοποιούν ότι το πηλίκο θα είναι μεγαλύτερο από το 2,32 καθώς ο διαιρέτης είναι μικρότερος της μονάδας.

✓ Κάποιοι μαθητές αντιλαμβάνονται ότι τα κριτήρια διάταξης μπορούν να χρησιμοποιηθούν για δίπλευρο έλεγχο. Έτσι, στον πολλαπλασιασμό 2,32·0,24 το γινόμενο θα είναι μικρότερο από το 2,32 (αφού ο δεύτερος παράγοντας είναι μικρότερος από τη μονάδα) και μεγαλύτερο από το 0,24 (αφού ο πρώτος παράγοντας είναι μεγαλύτερος από τη μονάδα).

✓ Σε ένα τέταρτο επίπεδο αντίληψης οι μαθητές αντιλαμβάνονται τη σχέση διάταξης μέσα από την αντίστροφη σχέση (δοκιμή). Έτσι, στη διαίρεση 2,32:1,24 οι μαθητές αντιλαμβάνονται ότι το πηλίκο θα είναι μικρότερο από το 2,32 (αφού 1,24>1) αλλά μεγαλύτερο από τη μονάδα, καθώς κατά την εκτέλεση της δοκιμής πολλαπλασιάζουμε το 1,24 με το πηλίκο και προκύπτει αριθμός μεγαλύτερος από το 1,24 (2,32>1,24). Άρα το πηλίκο πρέπει να είναι μεγαλύτερο από τη μονάδα, αφού το 1,24 μεγαλώνει πολλαπλασιαζόμενο με αυτό.

✓ Σε ένα επόμενο επίπεδο οι μαθητές αντιλαμβάνονται σχέσεις διάταξης σε συνδυασμό με σχέσεις αναλογίας. Έτσι, στην περίπτωση της αφαίρεσης 2,32-0,24 οι μαθητές αντιλαμβάνονται ότι το αποτέλεσμα θα είναι όχι μόνο μικρότερο από το 2,32 αλλά και μεγαλύτερο από το 0,24 καθώς το 0,24 είναι μικρότερο από το μισό του 2,32 (ή ακόμα μεγαλύτερο από το μισό του 2,32).

Τα παραπάνω επίπεδα προσδιορίζουν το βαθμό αντίληψης του μαθητή σχετικά με τη λειτουργία των κριτηρίων διάταξης. Το πρώτο επίπεδο είναι και το πιο στοιχειώδες και μπορεί να οδηγήσει σε πλάνες σχετικά με το αποτέλεσμα της πράξης. Για παράδειγμα, στην πράξη 5,46·0,78 εκτιμούν ότι το γινόμενο θα είναι μεγαλύτερο από το 5,78 αφού “όταν πολλαπλασιάζουμε ένα αριθμό μεγαλώνει”. Αντίθετα τα υπόλοιπα επίπεδα μπορούν να αποβούν σημαντικά και να συνεισφέρουν τόσο στην ικανότητα χρήσης κριτηρίων εκτίμησης και ελέγχου, αλλά και στη γενικότερη βελτίωση στην κατανόηση και εκτέλεση των αλγορίθμων.

Κριτήρια που βασίζονται στους από μνήμης προσεγγιστικούς υπολογισμούς

Κατά πρώτο λόγο, θεμελιώδη ρόλο στη διαδικασία εκτίμησης του αποτελέσματος των πράξεων διαδραματίζουν οι κατά προσέγγιση αριθμοί. Για την εκτίμηση του αποτελέσματος δε χρησιμοποιούνται πλέον οι ακριβείς όροι της πράξης, αλλά αριθμοί που προέρχονται από την κατάλληλη τροποποίηση αυτών των αριθμητικών δεδομένων. Έτσι, για παράδειγμα κατά την εκτίμηση του αποτελέσματος του πολλαπλασιασμού 421·28, αντί για τους αριθμούς 421 και 28 μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι αριθμοί 400 και 30, οι οποίοι προέρχονται από την τροποποίηση των αρχικών αριθμητικών δεδομένων μέσα από τη διαδικασία στρογγυλοποίησης στο πρώτο ψηφίο. Πρέπει επομένως να αναγνωριστεί η σημασία των κατά προσέγγιση αριθμών κατά τη διαδικασία εκτίμησης, καθώς και η συνάφειά τους με τα αρχικά αριθμητικά δεδομένα από τα οποία προήλθαν.

Κατά δεύτερο λόγο, είναι σημαντική η συνειδητοποίηση ότι η εκτίμηση δεν αφορά στο ακριβές αποτέλεσμα και δεν αποτελεί ένα ακριβή αριθμό με μονάδες σε όλες του τις τάξεις, αλλά αποτελεί μια προσέγγιση, καθώς προέρχεται από πράξη προσεγγίσεων. Είναι επομένως ουσιαστικής σημασίας η αναγνώριση ότι το αποτέλεσμα που περιμένουμε να βρούμε, αφότου έχουμε μετασχηματίσει τα αριθμητικά δεδομένα, είναι μια προσέγγιση του ακριβούς αποτελέσματος.

Εξάλλου, σημαντικό ρόλο έχουν οι πολλαπλές διαδικασίες, οι οποίες μπορεί να χρησιμοποιηθούν κατά την εφαρμογή κριτηρίων εκτίμησης που βασίζονται στους από μνήμης προσεγγιστικούς υπολογισμούς. Θα πρέπει να γίνει αποδοχή της πολλαπλότητας των μεθόδων που μπορούν να εφαρμοστούν προκειμένου να επιτευχθεί η εκτίμηση του αποτελέσματος μιας πράξης, γεγονός που μπορεί να συνδυαστεί με μια γενικότερη στάση στα Μαθηματικά, η οποία συνίσταται στη δυνατότητα επίλυσης μιας προβληματικής κατάστασης με περισσότερους από ένα τρόπους. Αυτή η στάση απουσιάζει από τη σημερινή σχολική πραγματικότητα, καθώς για την επίλυση μιας δραστηριότητας προτείνεται ένας και μόνο τρόπος, αποκλείοντας τη δυνατότητα εφαρμογής και διαφορετικών τρόπων, οι οποίοι ενδεχομένως θα αφορούσαν σε παλαιότερες γνώσεις των μαθητών, διαφορετικές από αυτές που διαπραγματεύονται στην παρούσα φάση. Οι μαθητές, μέσα από την αναγνώριση της ποικιλίας μεθόδων που έχουν στη διάθεσή τους και που μπορούν να χρησιμοποιήσουν, επιστρατεύουν κριτικές τους ικανότητες προκειμένου να επιλέξουν την προσφορότερη μέθοδο και την καταλληλότερη για την περίπτωση, συνυπολογίζοντας το επίπεδο ακρίβειας στο οποίο θέλουμε να φτάσουμε και το κόστος εφαρμογής.

Επίσης, η αποδοχή περισσότερων από μία τιμών ως αποτέλεσμα, αποτελεί κύριο εννοιολογικό χαρακτηριστικό της διαδικασίας εκτίμησης με βάση από μνήμης προσεγγιστικούς υπολογισμούς. Πρέπει να διασαφηνιστεί ότι μέσα από τη διαδικασία εκτίμησης παράγονται πολλαπλά αποτελέσματα, τα οποία είναι σε άμεση συνάφεια με τις διαδικασίες που χρησιμοποιούνται για να γίνει η εκτίμηση. Ιδιαίτερα σημαντικός παράγοντας που συνεισφέρει στην ικανότητα για εκτίμηση είναι η αντίληψη ότι το αποτέλεσμα της εκτίμησης εξαρτάται από την τροποποίηση των αριθμητικών δεδομένων.

Έτσι, αν για την εκτίμηση του αποτελέσματος του πολλαπλασιασμού 215·8424 προβούμε στη στρογγυλοποίηση και των δύο όρων στο πρώτο ψηφίο (200·8000) το αποτέλεσμα είναι 200000, ενώ αν στρογγυλοποιήσουμε τον πρώτο όρο στο δεύτερο ψηφίο και το δεύτερο στο πρώτο (210·8000) το αποτέλεσμα είναι 1680000, το οποίο είναι επίσης αποδεκτό. Οι μαθητές θα πρέπει να αποδεχθούν αυτή την πολλαπλότητα των αποτελεσμάτων και σε περίπτωση διαφωνίας με τη λύση των συμμαθητών τους να μπορούν να εξηγήσουν τη διαφορετικότητα.

Η αποδοχή περισσότερων από μία απαντήσεων ως προσεγγιστικά της πράξης συνδέεται με την ανοχή στο λάθος, χαρακτηριστικό των καλών εκτιμητών, σύμφωνα με τους Sowder & Wheeler (1989, p. 132) και Reys et al., (1982, p. 198). Αυτό δικαιολογείται καθώς αυτοί που ενδιαφέρονται κυρίως για την παραγωγή ακριβών απαντήσεων δε δίνουν ιδιαίτερη σημασία στην εκτίμηση, η οποία συνεπάγεται την αναγνώριση της χρησιμότητας των προσεγγιστικών απαντήσεων. Επίσης, η αντίληψη των αριθμών (number sense), η οποία συσχετίζεται με την ικανότητα για εκτίμηση (Sowder, 1992, p. 381-382) παρέχει τη δυνατότητα να εντοπίζεις τα λάθη και να τα διορθώνεις. Αντίθετα, άτομα που δεν έχουν αριθμητική αντίληψη καταβάλλονται από πανικό σε οποιαδήποτε παράκαμψη από την πεπατημένη και ελλοχεύει ο κίνδυνος του πλήρη αποπροσανατολισμού. Άτομα όμως με αριθμητική αντίληψη έχουν ένα γνωστικό χάρτη, ο οποίος τους παρέχει άνεση με οποιεσδήποτε λοξοδρομήσεις, καθώς έχουν τη δυνατότητα να διορθώνουν λάθη τα οποία ενδεχομένως να δημιουργήσουν σοβαρά προβλήματα (Dowker, 1992, p. 52). Η συνειδητοποίηση της σκοπιμότητας της εκτίμησης οδηγεί στην άνεση σε κάποιου είδους λάθη, καθώς η εκτίμηση αντιμετωπίζεται ως σημαντικό εργαλείο στη διαδικασία χρήσης των αριθμών (Reys et al., 1982, p.198). Στο σημείο αυτό παρατηρούμε μια τριπλή σύνδεση μεταξύ της αποδοχής περισσότερων από μία διαδικασιών, της αποδοχής περισσότερων από μία απαντήσεων και της ανοχής στο λάθος, που βέβαια δεν αντικρούει στη μαθηματική λογική, αλλά απλά εξυπηρετεί τις ανάγκες μιας γρήγορης εκτίμησης. Εξάλλου, θα πρέπει να σημειωθεί ότι τόσο η αποδοχή πολλαπλών διαδικασιών, όσο και η αποδοχή πολλαπλών αποτελεσμάτων είναι χαρακτηριστικά που ακολουθούν αργή ανάπτυξη, γεγονός που ίσως οφείλεται στην εμμονή, στο μάθημα των Μαθηματικών, να προβάλλεται ένας σωστός τρόπος λύσης και μία σωστή λύση (Sowder & Wheeler, 1989, σ. 140).

Σημαντικό ρόλο επίσης διαδραματίζει η προσέγγιση που επιτυγχάνεται μέσα από τις διάφορες διαδικασίες που εφαρμόζονται κατά την εκτίμηση του αποτελέσματος μιας πράξης. Αρχικά, πρέπει να σημειωθεί ότι η καλή προσέγγιση εξαρτάται από το συγκείμενο. Δηλαδή, στο πλαίσιο μιας προβληματικής κατάστασης, το προσεγγιστικό αποτέλεσμα μπορεί να είναι ικανοποιητικό ή αποδεκτό, ενώ στο πλαίσιο μιας άλλης προβληματικής κατάστασης με τα ίδια αριθμητικά δεδομένα, το ίδιο αποτέλεσμα μπορεί να μην είναι ικανοποιητικό, ή αποδεκτό. Έτσι, στην περίπτωση: "για την αγορά 32 μαρκαδόρων με 34 λεπτά ο ένας φτάνουν 10 ευρώ;" η προσέγγιση μέσα από τη στρογγυλοποίηση με βάση το συνήθη κανόνα και των δύο αριθμών στο πρώτο ψηφίο δεν μας ικανοποιεί, καθώς δεν παρέχει σίγουρη λύση (30·30=900 λεπτά ή 9 ευρώ, το οποίο είναι πολύ κοντά στο 10 και ενδέχεται να το υπερβαίνει, καθώς οι αριθμοί είναι μεγαλύτεροι από 30). Αντίθετα, μέσα από τη στρογγυλοποίηση του πρώτου αριθμού στο πρώτο ψηφίο και του δεύτερου στο δεύτερο (καθώς στο δεύτερο αριθμό το δεύτερο ψηφίο είναι μεγαλύτερο αναλογικά από το πρώτο σε σχέση με τον πρώτο αριθμό του οποίου το δεύτερο ψηφίο δεν είναι αναλογικά μεγαλύτερο από το δεύτερο) παράγει ένα αποτέλεσμα ικανοποιητικό (30·34=1020 λεπτά ή 10,2 ευρώ), δίνοντάς μας την απάντηση ότι τα 10 ευρώ δεν επαρκούν). Η προσέγγιση 30·30 θα μας έδινε ικανοποιητικό αποτέλεσμα στην περίπτωση που το ποσό που διαθέταμε ήταν 15 ή 20 ευρώ. Επομένως το συγκείμενο είναι αυτό που προσδιορίζει το είδος της προσέγγισης που πρέπει να γίνει και κατά συνέπεια, τη διαδικασία που πρέπει να χρησιμοποιηθεί. Συνεπώς πρέπει να συνειδητοποιηθεί ο εξέχων ρόλος του συγκείμενου, το οποίο ασφαλώς πάντα υπάρχει στο πλαίσιο της καθημερινής εξωσχολικής πραγματικότητας, και να αναγνωριστεί η συνάφειά του με την προσέγγιση που πρέπει να επιτευχθεί και τη διαδικασία που την καθορίζει.

Εξάλλου, σε ό,τι αφορά την προσέγγιση, είναι σπουδαία η αναγνώριση ότι αυτή εξαρτάται από τα αριθμητικά δεδομένα. Έτσι, όταν το δεύτερο ψηφίο είναι αναλογικά πολύ μεγαλύτερο σε σχέση με το πρώτο, δεν ενδείκνυται η στρογγυλοποίηση στο πρώτο ψηφίο. Για παράδειγμα, στην περίπτωση 1425·1477 το αποτέλεσμα με βάση τη στρογγυλοποίηση και των δύο παραγόντων στο πρώτο ψηφίο είναι 1000000 (1000·1000), ενώ το ακριβές αποτέλεσμα είναι 2104725, δηλαδή χάνουμε 52,5% από το ακριβές αποτέλεσμα. Κατά συνέπεια, για την επίτευξη μιας καλής προσέγγισης απαιτείται η εφαρμογή μιας διαφορετικής διαδικασίας εκτίμησης, η οποία να παράγει αποτέλεσμα με μικρότερη απώλεια. Στη συγκεκριμένη περίπτωση θα μπορούσε να εφαρμοστεί η στρογγυλοποίηση και των δύο παραγόντων στο δεύτερο ψηφίο (1400·1500=2100000), όπου η απώλεια είναι της τάξης του 2‰. Σε περίπτωση που το δεύτερο ψηφίο είναι μικρότερο από το πρώτο, ίσο, ή κατά λίγο μεγαλύτερο, τότε δεν είναι απαραίτητη η εφαρμογή της στρογγυλοποίησης στο δεύτερο ψηφίο του ενός, ή και των δύο όρων, σε συνδυασμό πάντα βέβαια με ό,τι ορίζει το συγκείμενο. Για παράδειγμα, στην περίπτωση εκτίμησης του γινομένου 8142·9247 η στρογγυλοποίηση στο δεύτερο ψηφίο δίνει μια προσέγγιση με ποσοστό απώλειας από το ακριβές αποτέλεσμα περίπου 4,5% (8000·9000=72000000 αφού το ακριβές αποτέλεσμα είναι 75289074).

Από τα παραπάνω συνάγεται το συμπέρασμα ότι έχει μεγάλη σημασία η συνειδητοποίηση πως η καλή και ικανοποιητική εκτίμηση, με βάση το αποδεκτό επίπεδο ακρίβειας, αποτελεί τη συνισταμένη δύο βασικών παραγόντων: του συγκείμενου και των αριθμητικών δεδομένων. Αυτή η διαπίστωση συντίθεται και συνεκτιμάται με τα προηγούμενα εννοιολογικά χαρακτηριστικά που προαναφέρθηκαν, την αποδοχή περισσότερων από μία διαδικασιών για να φτάσουμε σε μια προσέγγιση και την αποδοχή περισσότερων από μία τιμών ως προσέγγιση. Καθώς η καλή προσέγγιση στηρίζεται στη συνεκτίμηση συγκείμενου και αριθμητικών δεδομένων, αυτόματα δημιουργείται και η ανάγκη προσδιορισμού και της κατάλληλης μεθόδου που θα επιλεγεί για την παραγωγή ικανοποιητικού αποτελέσματος. Ταυτόχρονα συνειδητοποιείται ότι υπάρχει η δυνατότητα παραγωγής πολλαπλών αποτελεσμάτων, καθώς η κάθε μέθοδος παράγει διαφορετικό αποτέλεσμα, το οποίο αξιολογείται, όπως άλλωστε και η μέθοδος που ακολουθήθηκε, ανάλογα με το συγκείμενο και τα αριθμητικά δεδομένα. Επομένως, υπάρχει μια αλληλεξάρτηση και σύνθετη σχέση μεταξύ των χαρακτηριστικών που προσδιορίζουν τα κριτήρια που βασίζονται στους από μνήμης προσεγγιστικούς υπολογισμούς και πρέπει να θεωρούνται συνολικά και όχι μονομερώς.

7.2.2 Κριτήρια ελέγχου

Στη διαδικασία επιλογής και εφαρμογής κριτηρίων ελέγχου των αλγορίθμων των τεσσάρων αριθμητικών πράξεων υπεισέρχονται κάποιοι παράγοντες, οι οποίοι συνεισφέρουν σημαντικά.

Αρχικά, είναι ουσιαστική η συνειδητοποίηση από την πλευρά του μαθητή ότι ο έλεγχος γίνεται προκειμένου να επιβεβαιωθεί η ορθότητα του αποτελέσματος ενός υπολογισμού όταν γίνεται μετά την εκτέλεση της πράξης (πλήρεις δοκιμές, δοκιμές που βασίζονται στις ιδιότητες των ισοϋπόλοιπων αριθμών, πιθανοθεωρητικά κριτήρια, εναλλακτικοί τρόποι εκτέλεσης των πράξεων ή κριτήρια εκτίμησης που χρησιμοποιούνται ως κριτήρια ελέγχου), ή η ορθότητα της εξέλιξης του αλγορίθμου, όταν γίνεται κατά τη διάρκεια εκτέλεσής του (μερικά κριτήρια που απορρέουν από τις πλήρεις δοκιμές, έλεγχος ενός πολλαπλασιασμού στο πλαίσιο μιας διαίρεσης κ.ο.κ.).

Ένας δεύτερος παράγοντας που συμβάλλει στη διαδικασία ελέγχου είναι η συνειδητοποίηση της πολλαπλότητας των κριτηρίων ελέγχου που μπορεί να εφαρμοστούν προκειμένου να ελεγχθεί η ορθότητα του αποτελέσματος ενός αλγορίθμου και των επιμέρους βημάτων του. Εφόσον ο μαθητής αποκτήσει συνείδηση αυτής της πολλαπλότητας των κριτηρίων ελέγχου, μπορεί να κάνει επιλογές για την εκάστοτε περίπτωση αλγορίθμου που εκτελεί. Οι επιλογές όμως αυτές είναι συνάρτηση δύο άλλων παραγόντων οι οποίοι υπεισέρχονται σ’ αυτό το σημείο.

Κατά πρώτο λόγο, ο μαθητής πρέπει να έχει γνώση της αποτελεσματικότητας του κριτηρίου ως προς αυτό που εξετάζει (τη βεβαιότητα που παρέχει για την ορθότητα της πράξης).

Βέβαια, στη διαδικασία επιλογής εμπλέκεται και η γνώση του κόστους εφαρμογής του εκάστοτε κριτηρίου ελέγχου. Το κόστος εφαρμογής εξαρτάται τόσο από τη φύση του κριτηρίου, καθώς υπάρχουν κριτήρια με μεγάλο κόστος εφαρμογής (πλήρεις δοκιμές) και με μικρό κόστος εφαρμογής (ελλιπή κριτήρια, το κριτήριο του υπολοίπου της διαίρεσης), όσο και από τις ειδικές συνθήκες που προκύπτουν από τα αριθμητικά δεδομένα. Έτσι, για παράδειγμα, στην περίπτωση ενός πολλαπλασιασμού που ο ένας όρος είναι δύναμη του 10, π.χ. 12,32·0,001 είναι προτιμότερο να εφαρμοστεί νοερά η πλήρης δοκιμή (διαίρεση του γινομένου με το 0,001).

7.3 Διαδικασία εφαρμογής κριτηρίων εκτίμησης και ελέγχου[33]

7.3.1 Κριτήρια εκτίμησης

Απλά κριτήρια διάταξης

Η διαδικασία για την πραγματοποίηση μιας εκτίμησης με βάση τα απλά κριτήρια διάταξης περιλαμβάνει τα εξής βήματα:

- Παρατήρηση της πράξης
- Απομόνωση του πρώτου όρου
- Παρατήρηση του άλλου όρου
- Ανάκληση και εφαρμογή του κριτηρίου για τον πρώτο όρο σε σχέση με την πράξη και τον άλλο όρο

[33] Στη διαδικασία εκτίμησης και ελέγχου περιλαμβάνονται τα επιμέρους βήματα που ακολουθούνται προκειμένου να γίνει η εκτίμηση, ή ο έλεγχος ενός αλγορίθμου μιας αριθμητικής πράξης.

- Εφαρμογή του κριτηρίου για τον άλλο όρο σε σχέση με την πράξη και τον πρώτο όρο
- Απόφαση για τη σχέση διάταξης του αποτελέσματος με τον ένα ή και τους δύο όρους ή ακόμα με τη μονάδα (περίπτωση διαίρεσης)

Κατά την εφαρμογή άλλων κριτηρίων διάταξης, υπάρχει το ενδεχόμενο να περιληφθούν και άλλα επιμέρους βήματα. Έτσι, στην περίπτωση της αφαίρεσης, ελέγχουμε τη σχέση του αφαιρετέου με το μισό του μειωτέου (περίπου) και αποφασίζουμε αν η διαφορά είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη και από τον αφαιρετέο. Σ' αυτή την περίπτωση εμπλέκονται και άλλοι αριθμοί οι οποίοι συνδέονται με σχέση αναλογίας με έναν από τους όρους της πράξης, με αποτέλεσμα να καθίσταται η εφαρμογή τέτοιων κριτηρίων περισσότερο δύσκολη για τους μέτριους μαθητές.

Κριτήρια που βασίζονται στους από μνήμης προσεγγιστικούς υπολογισμούς

Η διαδικασία εκτίμησης του αποτελέσματος μιας πράξης μέσα από νοερούς προσεγγιστικούς υπολογισμούς περιλαμβάνει τρία επιμέρους βήματα:

1. το μετασχηματισμό των αριθμητικών δεδομένων σε προσεγγιστικές τιμές τους,
2. το νοερό υπολογισμό των προσεγγιστικών αυτών τιμών και
3. την απόφαση για το αποτέλεσμα της εκτίμησης με βάση τη σωστή τάξη μεγέθους και το επιθυμητό επίπεδο ακρίβειας που στηρίζεται στο εύρος των αποδεκτών απαντήσεων.

1.Ο μετασχηματισμός των αριθμητικών δεδομένων σε προσεγγιστικές τιμές περιλαμβάνει δύο επιμέρους διαδικασίες, i)*την αναδιατύπωση* και ii)*την μετατροπή*. Η μετατροπή είναι ένα βήμα το οποίο δεν είναι απαραίτητο να ακολουθηθεί κατ' ανάγκη και που περιέχει και προϋποθέτει τη διαδικασία της αναδιατύπωσης (βλ. παρακάτω).

Όμως, σίγουρα πρέπει να γίνει αναδιατύπωση, αλλαγή των αριθμητικών δεδομένων σε άλλα που έχουν πιο εύχρηστη μορφή.

i) Η *αναδιατύπωση* μπορεί να επιτευχθεί με διάφορες τεχνικές. Οι Reys et al. θεωρούν την αναδιατύπωση ως υψηλού επιπέδου γνωστική διαδικασία και την ορίζουν "ως τη διαδικασία μετατροπής των αριθμητικών δεδομένων για την παραγωγή μιας πιο εύχρηστης νοερής μορφής, η οποία αφήνει τη δομή του προβλήματος ανέπαφη" (Reys et al., 1982, σ. 187). Η Sowder & Wheeler θεωρούν ότι η αναδιατύπωση προϋποθέτει την αντικατάσταση των αρχικών αριθμών με νέους, πριν τον υπολογισμό (Sowder & Wheeler, 1989, σ. 135). Δηλαδή, καθώς τα υπάρχοντα αριθμητικά δεδομένα είναι δύσχρηστα και δεν προσφέρονται για νοερό υπολογισμό, αυτό που προέχει είναι η αλλαγή τους, ο μετασχηματισμός τους σε άλλα, τα οποία συντελούν στον ευχερή νοερό υπολογισμό τους. Τα νέα αριθμητικά δεδομένα τα οποία είναι προϊόν της αναδιατύπωσης αποτελούν μια προσέγγιση[34] των αρχικών.

---

[34] Η έννοια της προσέγγισης δεν ταυτίζεται με την έννοια της εκτίμησης. Ο Hall (1984, p. 517) υποστηρίζει ότι "ενώ η εκτίμηση είναι συνήθως μια νοερή δραστηριότητα, η προσέγγιση συνήθως απαιτεί κάποιου είδους εργαλείο". Δίνει το παράδειγμα ότι η εκτίμηση για τη δεκαδική μορφή του $\frac{4}{17}$ στο πλησιέστερο χιλιοστό είναι 0,238, αφού το $\frac{4}{17}$ είναι λίγο μικρότερο από το $\frac{1}{4}$. Αλλά η προσέγγιση του $\frac{4}{17}$ στο πλησιέστερο χιλιοστό απαιτεί αριθμομηχανή ή χαρτί και μολύβι για την εκτέλεση της διαίρεσης πρώτα. Ο Thomson (1979) αναφέρει ότι η εκτίμηση είναι ένα εκπαιδευμένο μάντεμα για το αποτέλεσμα ενός υπολογισμού, ενώ η προσέγγιση είναι η προσπάθεια να πλησιάσεις σε μια συγκεκριμένη τιμή και συχνά είναι πιθανό να φτάσεις όσο κοντά θέλεις χωρίς όμως ποτέ να αγγίξεις την ακριβή τιμή.

Η αναδιατύπωση περιλαμβάνει επιμέρους διαδικασίες, α)*τη στρογγυλοποίηση,* β)*την περικοπή* και γ)*την αντικατάσταση* (B. Reys et al., 1991, p. 354, Reys et al., 1982, p. 187-188, Sowder & Wheeler, 1989, p. 132). Αναλυτικότερα οι επιμέρους διαδικασίες της αναδιατύπωσης είναι οι εξής:

α) Στρογγυλοποίηση

Η στρογγυλοποίηση μπορεί να γίνει στο πλησιέστερο πολλαπλάσιο δυνάμεων του 10, με βάση το συνήθη κανόνα στρογγυλοποίησης και μπορεί να εφαρμοστεί στον ένα ή και στους δύο όρους (π.χ. $7421\cdot326 \approx 7000\cdot300$). Οι προσεγγιστικές τιμές που προκύπτουν είναι του τύπου $\nu \times 10^{\mu}$ όπου $\nu \in N^*$, $0<\nu<100$ και $\mu \in Z$. Εξάλλου, η στρογγυλοποίηση μπορεί να γίνει και στο πλησιέστερο πολλαπλάσιο του 5, καθώς ο νοερός υπολογισμός με πολλαπλάσια του 5 είναι αρκετά ευχερής (π.χ. $52\cdot46 \approx 50\cdot45=2250$). Ακόμη, είναι δυνατή η στρογγυλοποίηση, κυρίως στη διαίρεση, σε αριθμούς ώστε να υπολογίζεται εύκολα το αποτέλεσμα (π.χ. $71214:289 \approx 72000:300=240$ ή $241\cdot812 \approx 250\cdot800=200000$).

β) Περικοπή[35]

Κατά την περικοπή λαμβάνονται υπόψη μόνο τα πρώτα ψηφία (ένα ή δύο από αριστερά) και στη συνέχεια λαμβάνεται η απόφαση για τη σωστή τάξη μεγέθους. Δηλαδή κατά την εκτίμηση του αποτελέσματος του γινομένου $261\cdot354$ υπολογίζουμε $2\cdot3=6$ και αποφασίζουμε ότι πρόκειται για 6 δεκάδες χιλιάδων[36] (αφού $100\cdot100=10000$) δηλαδή 60000. Επίσης, στην περίπτωση του υπολογισμού του αθροίσματος 87419+92765+ 90045+81974+98102 προσθέτουμε τα πρώτα ψηφία των προσθετέων τα οποία δίνουν άθροισμα 44 ή 45. Έτσι το συνολικό άθροισμα είναι 450000 (Reys et al., σ. 187).

γ) Αντικατάσταση-Αλλαγή πεδίου έκφρασης και επεξεργασίας (βλ. σχετικά Duval, 1995, κεφ. 3, 5)

Η αντικατάσταση αφορά στη χρήση μιας ισοδύναμης ή σχεδόν ισοδύναμης μορφής (κλάσμα, δεκαδικός, ποσοστό) προκειμένου να φτάσουμε στο επιθυμητό αποτέλεσμα. Για παράδειγμα, για τον υπολογισμό του γινομένου $0{,}35\cdot106204$ αντικαθιστούμε το 0,34 με το $\frac{1}{3}$ (περίπου ισοδύναμα) και το 106204 με το 105000, οπότε υπολογίζουμε το $\frac{1}{3}$ του 105000 που είναι 35000. Επίσης για την εκτίμηση του γινομένου $1196\cdot0{,}23$ θεωρούμε ως την κατάλληλη προσέγγιση για το 0,23 το 0,25 το οποίο γράφουμε ως $\frac{1}{4}$. Έτσι, περνάμε από μια δεκαδική γραφή του δεύτερου όρου σε μια κλασματική και έχουμε: $1196\cdot0{,}23 \approx 1200\cdot\frac{1}{4}=300$. Άλλο παράδειγμα είναι το εξής: για την εκτίμηση του γινομένου $127\cdot66$ θεωρούμε ως κατάλληλη προσέγγιση του 127 το 125 και του 66 το 64, καθώς οι αριθμοί αυτοί μπορούν να γραφτούν σε μια εκθετική μορφή, αφού $125=5^3$ και $64=2^6$. Έτσι:

$$127\cdot66 \approx 125\cdot64=5^3\cdot2^6=5^3\cdot(2^3\cdot2^3)=(5^3\cdot2^3)\cdot2^3=(5\cdot2)^3\cdot2^3=10^3\cdot2^3=1000\cdot8=8000.$$

ii) *Η μετατροπή* ορίζεται από τους Reys et al., (1982, σ. 187) ως “η διαδικασία αλλαγής της μαθηματικής δομής του προβλήματος σε μια πιο εύχρηστη νοερή μορφή, η οποία στη συνέχεια χρησιμοποιείται προκειμένου να πραγματοποιηθεί ο υπολογισμός των αριθμητικών δεδομένων”. Αλλαγή της δομής του προβλήματος σημαίνει

[35] Η περικοπή είναι είδος στρογγυλοποίησης, το οποίο υιοθετούμε στην εν λόγω έρευνα ως “προς τα κάτω στρογγυλοποίηση” (βλ. σχετικά §5.3.2.2).

[36] Διαφορετικά μετράμε τις θέσεις που έχουμε περικόψει (4) οι οποίες αντιστοιχούν σε μηδενικά.

αντιμετώπισή, για παράδειγμα, ενός προσθετικού προβλήματος ως πολλαπλασιαστικό, ή αλλαγή της σειράς των πράξεων που ορίζει το πρόβλημα, ή ακόμα, η χρήση σημείων αναφοράς προκειμένου να είναι ευχερέστερος ο νοερός υπολογισμός (Reys et al., 1982, p. 188-189, B. Reys et al., 1991, p. 355). Αναλυτικότερα, οι επιμέρους διαδικασίες που περιλαμβάνονται στη μετατροπή είναι:

α) Αλλαγή της πράξης σε μια ισοδύναμη

Π.χ. στην πρόσθεση 87419+92765+90045+81974+98102 παρατηρούμε ότι όλοι οι αριθμοί είναι πολύ κοντά στο 90000. Κατά συνέπεια έχουμε 5 φορές το 90000. Άρα το αποτέλεσμα είναι 450000. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα η πρόσθεση αντιμετωπίζεται πλέον ως πολλαπλασιασμός. Διαπιστώνουμε ότι θα μπορούσε να γίνει χρήση και του μέσου όρου. Δηλαδή, παρατηρούμε ότι ο μέσος όρος των προσθετέων είναι περίπου 90000 και τον πολλαπλασιάζουμε με τον αριθμό των προσθετέων.

β)Αλλαγή της σειράς των πράξεων (χωρίς να παραβιάζεται η μαθηματική προτεραιότητα των πράξεων)

Π.χ. στην παράσταση $\frac{347 \cdot 6}{43}$ υπολογίζουμε πρώτα το πηλίκο 43:6 όπου $43 \approx 42$ και επομένως 42:6=7, άρα 6:42=$\frac{1}{7}$. Στη συνέχεια υπολογίζουμε το πηλίκο 347:7 όπου $347 \approx 350$ και επομένως 350:7=50.

γ) Χρήση σημείων αναφοράς

Π.χ. για τον υπολογισμό της διαίρεσης 21319908:26 σκεφτόμαστε ότι αν ο διαιρετέος ήταν 26000000 τότε το πηλίκο θα ήταν 1000000, επειδή όμως είναι περίπου κατά $\frac{1}{5}$ λιγότερο ($21319908 \approx \frac{4}{5}$ του 26000000 αφού 20000000=$\frac{4}{5}$ του 25000000). Άρα το πηλίκο είναι περίπου 800000. στο συγκεκριμένο παράδειγμα το σημείο αναφοράς είναι ο αριθμός 26000000 του οποίου το πηλίκο αν διαιρεθεί με το 26 υπολογίζεται εύκολα.

Βέβαια, η μετατροπή προϋποθέτει την αναδιατύπωση των αριθμητικών δεδομένων, αφού υλοποιηθεί η αλλαγή της δομής του προβλήματος. Στα παραδείγματα που παρατέθηκαν, παρατηρούμε ότι, αφού έγινε θεώρηση της νέας δομής του προβλήματος, αναδιατυπώθηκαν τα αριθμητικά δεδομένα στο πλαίσιο της νέας αυτής δομής, προκειμένου να είναι πραγματοποιήσιμος και ευχερής ο νοερός υπολογισμός τους.

Με βάση αυτή την προοπτική, συμπεραίνουμε ότι, ενώ η αναδιατύπωση μπορεί να λειτουργήσει αυτόνομα για την πραγματοποίηση μιας εκτίμησης, η μετατροπή στηρίζεται στην αναδιατύπωση και προϋποθέτει τη λειτουργία της. Η βασική τους διαφορά είναι ότι στην αναδιατύπωση δεν γίνεται αλλαγή της μαθηματικής δομής του προβλήματος, ενώ στη μετατροπή αλλάζει η δομή. Στην αναδιατύπωση, ο μαθητής εμμένει στα αριθμητικά δεδομένα τα οποία τα βλέπει μονομερώς, ενώ στη μετατροπή, έχει μια πανοραμική άποψη του προβλήματος. Για να γίνει κατανοητή η διαφορά τους παρατίθεται το εξής παράδειγμα (Reys et al., σ. 189):

Στην πρόσθεση 8946+7212+7814

μια δυνατή αναδιατύπωση είναι $\rightarrow$ 9000+7000+8000=24000

μια δυνατή μετατροπή είναι $\rightarrow$ 8000·3=24000

2. Το επόμενο βήμα που ακολουθεί την αναδιατύπωση των αριθμητικών δεδομένων και τη δημιουργία κατά προσέγγιση αριθμών είναι ο νοερός υπολογισμός των νέων αριθμητικών δεδομένων, ο οποίος καθίσταται πλέον ευχερής. Σ' αυτή τη φάση της εκτίμησης υπάρχει η δυνατότητα χρήσης ποικίλων τεχνικών που διευκολύνουν τον από μνήμης υπολογισμό και παράγουν το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Βέβαια, κατά τη διαδικασία αναδιατύπωσης των αριθμητικών δεδομένων λαμβάνεται συχνά υπόψη ο κατάλογος τεχνικών εύκολου νοερού υπολογισμού που υπάρχει στο γνωστικό δυναμικό του ατόμου, ώστε η προσέγγιση να γίνεται με τρόπο που ενεργοποιεί και καθιστά δυνατή την εφαρμογή αυτών των τεχνικών. Για παράδειγμα,κατά τον πολλαπλασιασμό 241·824 τα αριθμητικά δεδομένα μετασχηματίζονται σε: 250·800 οπότε μπορεί να εφαρμοστεί η τεχνική εύκολου νοερού υπολογισμού με 250[37]. Έτσι, στην περίπτωσή μας το γινόμενο είναι περίπου 200000.

Κατά τη φάση του νοερού υπολογισμού των προσεγγιστικών αριθμών στον πολλαπλασιασμό και στη διαίρεση αρχικά γίνεται υπολογισμός των μη μηδενικών ψηφίων και στη συνέχεια καθορίζεται η τάξη μεγέθους, αφού ληφθεί υπόψη ο αριθμός των μηδενικών που έχουν παραληφθεί (βλ. §5.3.2.1). Στην πρόσθεση και την αφαίρεση ακολουθείται η ίδια διαδικασία αν οι δύο όροι είναι της ίδιας τάξης. Σε περίπτωση που οι όροι είναι διαφορετικής τάξης, ακολουθείται η διαδικασία που περιγράφεται στην §5.3.2.1.

Η εύρεση της σωστής τάξης μεγέθους μπορεί να λειτουργήσει και ως διαδικασία ελέγχου, σε συνδυασμό με το συγκείμενο και τα αριθμητικά δεδομένα. Για παράδειγμα, αν κατά την εκτίμηση του γινομένου του πολλαπλασιασμού 287·8741 βρεθεί ως αποτέλεσμα ο αριθμός 2700 (αντί του σωστού 2700000) πραγματοποιείται ο έλεγχος σύμφωνα με τον οποίο υπάρχει η αναγνώριση της μη λογικότητάς του, καθώς είναι πολύ μικρό σε σχέση με τα αριθμητικά δεδομένα που είναι ακέραιοι.

3. Το τελευταίο βήμα στη διαδικασία εκτίμησης του αποτελέσματος μιας αριθμητικής πράξης είναι η απόφαση για την αποδοχή του αποτελέσματος ανάλογα με το επιθυμητό επίπεδο ακρίβειας και το εύρος των αποδεκτών απαντήσεων που εμείς έχουμε ορίσει εξ αρχής σε αντιστοιχία με το συγκείμενο (βλ. §7.2.1). Όταν δεν υπάρχει συγκείμενο, το εύρος των αποδεκτών απαντήσεων δεν μπορεί να καθοριστεί a priori. Κάποιοι κάνουν λόγο για $\pm 10\%$ (Levine, 1982, p. 351, Dowker, 1992, p. 46,). Θα μπορούσαμε να αποδεχτούμε και όλους τους αριθμούς που εμπίπτουν στη σωστή τάξη μεγέθους. Γενικά πάντως, δεν μπορεί να οριστεί με ακρίβεια το εύρος των αποδεκτών απαντήσεων. Στην περίπτωση που υπάρχει συγκείμενο λαμβάνουμε υπόψη μας τις ιδιαίτερες συνθήκες που ορίζονται απ' αυτό και προσδιορίζουμε το επιθυμητό επίπεδο ακρίβειας ανάλογα με το πόσο τις ικανοποιεί.

Στη διάρκεια του τελευταίου βήματος κατά τη διαδικασία εκτίμησης του αποτελέσματος μιας αριθμητικής πράξης, λαμβάνει χώρα η *αντιστάθμιση* μια συγκεκριμένη διαδικασία κατά την οποία γίνονται οι απαραίτητες τροποποιήσεις στο αποτέλεσμα ώστε να επιτευχθεί καλύτερη προσέγγιση, σε αντιστοιχία με τις τροποποιήσεις που υπέστησαν τα αρχικά αριθμητικά δεδομένα κατά τη φάση της αναδιατύπωσης καθώς και με τα ίδια τα αρχικά δεδομένα σε σχέση πάντα με την πράξη.

[37] Για να πολλαπλασιάσουμε αριθμό με το 25, 250, 2500…τον διαιρούμε διά 4 και το πηλίκο το πολλαπλασιάζουμε επί 10, 100, 1000…

Οι Reys et al. (1982, p. 189-190) ορίζουν την αντιστάθμιση ως “τις προσαρμογές που γίνονται και αντικατοπτρίζουν την αριθμητική μεταβολή που προήλθε ως αποτέλεσμα της μετατροπής ή της αναδιατύπωσης του προβλήματος. Αυτές οι προσαρμογές είναι συνάρτηση του χρόνου που έχουμε στη διάθεσή μας για να δώσουμε απάντηση, αλλά και επηρεάζονται επίσης από την ευχρηστία των αριθμητικών δεδομένων, το συγκείμενο και την ατομική ανοχή στο λάθος”.

Έτσι, για την εκτίμηση του αποτελέσματος του πολλαπλασιασμού 2415·3478 προβαίνουμε στη στρογγυλοποίηση των αριθμητικών δεδομένων με βάση το συνήθη κανόνα (αναδιατύπωση), οπότε έχουμε το νέο πολλαπλασιασμό 2000·3000. Στη συνέχεια, εκτελούμε νοερά τον πολλαπλασιασμό των νέων αριθμητικών δεδομένων (2000·3000=6000000). Όμως, καθώς αντιλαμβανόμαστε ότι κατά τη διαδικασία αναδιατύπωσης έχουμε περικόψει περίπου 400 από τον πρώτο παράγοντα και περίπου 500 από το δεύτερο, συνειδητοποιούμε ότι το κατά προσέγγιση αποτέλεσμα που βρήκαμε απέχει αρκετά από το ακριβές αποτέλεσμα και μάλιστα είναι αρκετά μικρότερο. Συγκεκριμένα, είναι μικρότερο κατά 400·3000+500·2000+400·500[38]. Ανάλογα λοιπόν με το διαθέσιμο χρόνο είτε υπολογίζουμε το αποτέλεσμα αυτής της παράστασης, είτε αντί για 400 βάζουμε 500 που είναι πολύ κοντά και υπολογίζουμε την παράσταση ως $5000 \cdot 500+500^2=2500000+250000=2750000$[39]. Άρα το αποτέλεσμα είναι μεγαλύτερο κατά 2750000 δηλαδή είναι πολύ κοντά στο 8750000[40]. Βέβαια αν ο χρόνος είναι ελάχιστος, μπορούμε να μην μπούμε καθόλου σ’ αυτή τη διαδικασία.

Ακόμη, πρέπει να ληφθεί υπόψη ο ρόλος του συγκείμενου. Έτσι, στην περίπτωση που το γινόμενο 2415·3478 αποτελεί το χρηματικό ποσό που θα εισπραχθεί από την πώληση 2415 τεμαχίων πλακάκια που το ένα κοστίζει 3478 και που θα δοθεί για την εξόφληση ενός δανείου 8000000, ασφαλώς μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε μια περισσότερο ακριβή προσέγγιση και εκτελούμε την αντιστάθμιση. Βέβαια, θα πρέπει να τονιστεί ότι στη συγκεκριμένη περίπτωση θα μπορούσε να αποφευχθεί η αντιστάθμιση με την εφαρμογή άλλης στρατηγικής εκτίμησης, όπως με τη στρογγυλοποίηση του πρώτου όρου στο 2500 και του δεύτερου στο δεύτερο ψηφίο, οπότε βρίσκουμε το $\frac{1}{4}$ του 3500 που είναι περίπου 850 και το πολλαπλασιάζουμε με 10000 και προκύπτει 8500000. Είναι βέβαια λιγότερο, αλλά σε καμία περίπτωση το ποσό που έχουμε βάλει παραπάνω δεν υπερβαίνει το 500000 (περίπου $50 \cdot 50+50 \cdot 5000<500000$, διψήφιος επί τετραψήφιο δεν μπορεί να κάνει πάνω από εξαψήφιο).

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η αντιστάθμιση μπορεί να λάβει χώρα και κατά τη διάρκεια των ενδιάμεσων σταδίων του νοερού υπολογισμού κατά τη διαδικασία εκτίμησης (Reys et al., σ. 189). Για παράδειγμα, για την εκτίμηση του αθροίσματος 73655+86421+91943+96509+93421+106409 στρογγυλοποιούμε όλους τους όρους στο 100000 εκτός από το 73655 το οποίο το στρογγυλοποιούμε στο 50000 για να επέλθει η εξισορρόπηση, καθώς αυξήσαμε τέσσερις όρους και μειώσαμε μόνο ένα. Έτσι, το αποτέλεσμα είναι 5·100000+70000=500000+70000=550000 (το ακριβές νούμερο είναι 548358). Κατ’ ανάλογο τρόπο προσπαθούμε να βρούμε το μέσο όρο κάποιων όρων. Για

[38] Θεωρούμε ότι το ακριβές αποτέλεσμα είναι πάρα πολύ κοντά στο 2400·3500= (2000+400)·(3000+500)=2000·3000+2000·500+3000·400+400·500

[39] Αν στη θέση του 400 μπει το 500 έχουμε: $2000 \cdot 500+3000 \cdot 500+500 \cdot 500=(2000+3000) \cdot 500+500^2 = 5000 \cdot 500+500^2=2500000+250000=2750000$.

[40] Το ακριβές αποτέλεσμα είναι 8399370.

παράδειγμα, για την εκτίμηση του αθροίσματος 35421+48217+54326+62347 υπολογίζουμε ότι ο μέσος όρος είναι περίπου 50000 (το 35421 και το 62347 έχουν μέσο όρο λίγο μικρότερο από 50000 και το 48217 και το 54326 έχουν μέσο όρο λίγο μεγαλύτερο από το 50000, άρα ο μέσος όρος των δύο μέσων αυτών όρων είναι περίπου 50000) και κατά συνέπεια το άθροισμα είναι περίπου 4·50000=200000.

7.3.2 Κριτήρια ελέγχου

Η διαδικασία επιλογής και εφαρμογής των κριτηρίων ελέγχου είναι συνάρτηση της αποτελεσματικότητας του κριτηρίου ως προς αυτό που εξετάζει, καθώς και του κόστους εφαρμογής του κριτηρίου. Έτσι, πριν την εφαρμογή του κριτηρίου, εφόσον υπάρχει συνείδηση των παραγόντων που προαναφέρθηκαν, γίνεται προσπάθεια για στάθμιση της αποτελεσματικότητας του κριτηρίου και του κόστους εφαρμογής. Αφού σταθμιστούν αυτοί οι παράγοντες, ανάλογα πάντα με την περίπτωση και το χρονικό περιθώριο που υπάρχει για την εφαρμογή του κριτηρίου, επιλέγεται το κατάλληλο κριτήριο.

Εφόσον επιλεγεί το κατάλληλο κριτήριο, το επόμενο βήμα είναι ο έλεγχος του αποτελέσματος που μας δίνει το κριτήριο ως προς αυτό που εξετάζει και η απόφαση αν αυτό που εξετάζει είναι σωστό ή όχι. Για παράδειγμα, αν εξετάζεται το αποτέλεσμα του αλγόριθμου ενός πολλαπλασιασμού με το κριτήριο του σταυρού, γίνεται έλεγχος αν τα δύο κάτω ψηφία του σταυρού είναι όμοια και παίρνεται η απόφαση αν το κριτήριο δείχνει ότι η πράξη είναι σωστή η πράξη.

Σ' αυτό το σημείο υπάρχουν δύο περιπτώσεις: το κριτήριο δείχνει ότι υπάρχει λάθος στην εκτέλεση του αλγορίθμου ή δείχνει ότι δεν υπάρχει λάθος. Αν το κριτήριο δείχνει ότι υπάρχει λάθος το επόμενο βήμα είναι η προσπάθεια για αυτοδιόρθωση και εντοπισμό του λάθους, η οποία επιτυγχάνεται μέσα από την επανεκτέλεση του αλγορίθμου ή μέσα από την επανεξέταση σημείων στα οποία κατά την εκτέλεση υπήρχε αμφιβολία για την ορθότητά τους. Για παράδειγμα, κατά την εκτέλεση μιας διαίρεσης στην οποία το πηλίκο έχει το πρώτο του δεκαδικό ψηφίο μηδέν ο μαθητής θυμάται ότι δεν ήταν σίγουρος για το αν θα έβαζε μηδέν ή όχι, οπότε επανεξετάζει το σημείο αυτό.

Βέβαια, θα πρέπει να σημειωθεί ότι πολλές φορές κατά την εφαρμογή των κριτηρίων ελέγχου γίνονται σφάλματα, ειδικά στις πλήρεις δοκιμές. Είναι λοιπόν σημαντικό κατά την εφαρμογή τέτοιων κριτηρίων, αφού επανεκτελεστεί ο αλγόριθμος και δεν εντοπιστεί σφάλμα να επανεξετάζεται και η εκτέλεση του ίδιου του κριτηρίου ή να επιλέγεται η εφαρμογή ενός νέου κριτηρίου.

Αν το κριτήριο ελέγχου που επιλέγεται δείχνει ότι δεν υπάρχει λάθος στην εκτέλεση του αλγορίθμου τότε σταματάμε ή γίνεται εφαρμογή νέου κριτηρίου, αν το πρώτο είναι ελλιπές. Για παράδειγμα, αν εφαρμοστεί ένα κριτήριο για την εύρεση της τάξης μεγέθους σε μια διαίρεση, το οποίο δείξει ότι το πηλίκο είναι της σωστής τάξης, τότε είναι λογικό να εφαρμοστεί και ένα δεύτερο κριτήριο (π.χ. του σταυρού) για να υπάρχει σαφέστερη ένδειξη για την ορθότητα της πράξης.

7.4 Ικανότητες και γνώσεις που συνεισφέρουν κατά την εφαρμογή κριτηρίων εκτίμησης και ελέγχου

Για την εφαρμογή κριτηρίων εκτίμησης και ελέγχου θεωρείται απαραίτητη προϋπόθεση οι μαθητές να μπορούν *να συγκρίνουν αριθμούς*. Συγκεκριμένα, σε ό,τι αφορά τα απλά κριτήρια διάταξης, για την πρόσθεση οι μαθητές πρέπει να είναι σε θέση να εντοπίζουν το μεγαλύτερο προσθετέο. Στην αφαίρεση θα πρέπει να μπορούν να συγκρίνουν τη διαφορά με το μειωτέο. Στον πολλαπλασιασμό θα πρέπει να μπορούν να συγκρίνουν τους όρους με τη μονάδα, αλλά και να αντιλαμβάνονται ποιοι αριθμοί θα μπορούσαν να είναι το γινόμενο, ανάλογα αν είναι μεγαλύτεροι ή μικρότεροι από τους όρους ή ανάμεσα σ' αυτούς, δηλαδή να εντοπίζουν το ανοιχτό ή κλειστό διάστημα αποδεκτών απαντήσεων. Το ίδιο ισχύει και για τη διαίρεση. Επίσης, αυτή η ικανότητα είναι απαραίτητη για την εφαρμογή του κριτηρίου του υπολοίπου της διαίρεσης.

Για την εφαρμογή κριτηρίων που βασίζονται στους νοερούς προσεγγιστικούς υπολογισμούς είναι απαραίτητη προϋπόθεση *η ικανότητα εύρεσης από μνήμης της προσέγγισης ενός αριθμού*, που δίνεται σε δεκαδική μορφή, στο επιθυμητό επίπεδο ακρίβειας (Κούρκουλος και Τζανάκης, 2000, σ. 268).

Επίσης η εκτίμηση των αποτελεσμάτων των πράξεων προϋποθέτει μια ευχέρεια για ακριβή νοερό υπολογισμό (Sowder, 1992, p. 380-381, A. Mcintosh, N. Nohda, B. Reys & R. Reys, 1995, p. 239). Συγκεκριμένα οι μαθητές θα πρέπει να είναι σε θέση *να εκτελούν από μνήμης πράξεις με δυνάμεις του 10 καθώς και με αριθμούς του τύπου* $\nu x10^{\mu}$ όπου ν μονοψήφιος ή διψήφιος ακέραιος - φυσικός -($\nu \in N^*$) και $\mu \in Z$ (Κούρκουλος και Τζανάκης, 2000, σ. 268, Reys et al., 1982, pp. 196-198 Sowder & Wheeler, 1989, p. 132). Με βάση αυτή την ικανότητα θα μπορούν να υπολογίζουν νοερά τα νέα αριθμητικά δεδομένα που έχουν προκύψει από την αναδιατύπωση των αρχικών, να εκτελούν δηλαδή τις πράξεις με τις προσεγγίσεις των αρχικών αριθμών. Έτσι, στην περίπτωση της εκτίμησης 814·7845, αφού βρεθεί η προσέγγιση των αριθμών 614 και 7845 που μπορεί να είναι αντίστοιχα 600 και 8000, θα πρέπει να υπολογιστεί με ακρίβεια το γινόμενο 600·8000. Ακόμη, η ικανότητα αυτή είναι απαραίτητη για την εφαρμογή πλήρων δοκιμών από μνήμης στην περίπτωση πολλαπλασιασμών ή διαιρέσεων με αυτούς τους αριθμούς.

Η ευχέρεια για νοερό υπολογισμό συνδέεται και με την *ικανότητα για χρήση ενός μεγάλου αριθμού ειδικών τεχνικών* οι οποίες συντελούν στη γρήγορη εκτέλεση της πράξης (βλ. §5.3.2.2). Η γνώση και ικανότητα για εφαρμογή τέτοιων ειδικών τεχνικών μπορεί να μεταφερθεί και στην περιοχή της εκτίμησης, καθώς είναι δυνατό να γίνει η προσέγγιση των αρχικών αριθμητικών δεδομένων σε τέτοιους αριθμούς ώστε να καθίσταται δυνατή η εφαρμογή τέτοιων τεχνικών.

Εξάλλου, για την εφαρμογή ορισμένων κριτηρίων διάταξης είναι απαραίτητο *να αντιλαμβάνονται σχέσεις αναλογίας*. Για παράδειγμα στην αφαίρεση 4,12-1,484 οι μαθητές πρέπει να αντιληφθούν ότι το αποτέλεσμα θα είναι όχι μόνο μικρότερο από το 4,12 αλλά και μεγαλύτερο από το 1,484 καθώς το 1,484 είναι μικρότερο από το μισό του 4,12 (ή ακόμα μεγαλύτερο από το μισό του 4,12 που είναι 2,06). Βέβαια, για την εφαρμογή τέτοιων κριτηρίων προϋποτίθεται και η ικανότητα να βρίσκουν από μνήμης την προσέγγιση ενός αριθμού, όπως στο παράδειγμα που αναφέρθηκε να ληφθεί υπόψη η προσέγγιση του 4,12 ως 4 του οποίου το μισό είναι 2 που είναι μεγαλύτερο από το 1,484 (του οποίου η προσέγγιση είναι 1,5).

Επιπρόσθετα, σημαντικό ρόλο στην ικανότητα για εκτίμηση και έλεγχο έχει και *η γνώση του αριθμητικού συστήματος και των ιδιοτήτων των πράξεων*. Ειδικότερα η προσεταιριστική ιδιότητα, η αντιμεταθετική και η επιμεριστική αποτελούν τις κύριες ιδιότητες η γνώση των οποίων και η ικανότητα για την εφαρμογή τους συντελεί σημαντικά στη γενικότερη ικανότητα για πραγματοποίηση εκτιμήσεων των αποτελεσμάτων των πράξεων (Sowder & Wheeler, 1989, p. 132, Reys et al., 1982, p. 198). Αρχικά, είναι σημαντική η δυνατότητα για διάσπαση των αριθμών και η θεώρησή τους ως άθροισμα, διαφορά, γινόμενο ή πηλίκο άλλων, κατάλληλα επιλεγμένων αριθμών οι οποίοι θα συνεισφέρουν στην ευχερέστερη εκτέλεση των πράξεων. Κάτι τέτοιο βέβαια προϋποθέτει μια βαθιά γνώση του δεκαδικού αριθμητικού συστήματος, καθώς και αντίληψη της έννοιας του αριθμού. Έτσι, για παράδειγμα, για την εκτίμηση του αποτελέσματος 76·89 θεωρούμε το 90 ως προσέγγιση του 89 και εργαζόμαστε ως εξής: $72\cdot 89 \approx 70\cdot 90 = 70\cdot(100-10) = 70\cdot 100+70\cdot 10 = 7000-700 = 6300$. Έτσι, γίνεται χρήση της επιμεριστικής ιδιότητας αφού προηγουμένως θεωρηθεί το 90 ως η διαφορά δύο αριθμών οι οποίοι αποτελούν δυνάμεις του 10 και κατά συνέπεια το γινόμενό τους υπολογίζεται εύκολα. Επίσης, η γνώση των ιδιοτήτων των πράξεων και της χρήσης τους και της προτεραιότητας των πράξεων είναι απαραίτητη για την εφαρμογή από μνήμης πλήρων δοκιμών.

Εξάλλου, στο πλαίσιο της χρήσης των ιδιοτήτων των πράξεων είναι βασικό να ακολουθείται *η σωστή σειρά των πράξεων* (Reys et al., 1982, p. 198). Για παράδειγμα, κατά την εφαρμογή της επιμεριστικής ιδιότητας είναι απαραίτητο να γίνονται πρώτα οι πολλαπλασιασμοί και οι διαιρέσεις και στη συνέχεια οι προσθέσεις και οι αφαιρέσεις.

Επίσης, σημαντικό ρόλο παίζει η επαρκής γνώση και η *ικανότητα εφαρμογής των ιδιοτήτων των δυνάμεων*. Για παράδειγμα, κατά την εκτίμηση του αποτελέσματος του γινομένου 127·34 εργαζόμαστε ως εξής: $127\cdot 34 \approx 125\cdot 32 = 5^3\cdot 2^5 = 5^3\cdot(2^3\cdot 2^2) = (5^3\cdot 2^3)\cdot 2^2 = (5\cdot 2)^3\cdot 2^2 = 10^3\cdot 2^2 = 1000\cdot 4 = 4000$.

Ακόμη, απαραίτητη προϋπόθεση για την ικανότητα εκτίμησης και ελέγχου είναι *η γνώση της θεσιακής αξίας των αριθμών* (Reys et. al, 1982, p. 196, Sowder & Wheeler, 1989, p. 132). Έτσι, στην εκτίμηση του γινομένου 4126·7865 υπολογίζουμε το γινόμενο των κατά προσέγγιση αριθμών 4000·8000. Για να υπολογίσουμε το γινόμενο, δεν λαμβάνουμε υπόψη τα μηδενικά, αλλά είναι απαραίτητο να ξέρουμε ότι το 4 από το 4000 όπως και το 8 από 8000 είναι ψηφία τέταρτης τάξης και το γινόμενο είναι 32 χιλιάδες επί χιλιάδες δηλαδή εκατομμύρια. Βέβαια, ο συνηθέστερος τρόπος είναι να μετρήσουμε τα μηδενικά και να τα τοποθετήσουμε στο τέλος. Όμως αυτή η πρακτική είναι τυφλή εφαρμογή κάποιου κανόνα, χωρίς να υποδηλώνει και κατανόησή του.

Σε ό,τι αφορά άλλες ικανότητες που είναι απαραίτητες για την εφαρμογή κριτηρίων ελέγχου, αναφέρουμε την *ικανότητα αλλαγής πεδίου έκφρασης και επεξεργασίας, ή πλαισίου* για την εφαρμογή κριτηρίων ελέγχου μέσα από την εκτέλεση της πράξης με μια ισοδύναμη πράξη. Έτσι, για παράδειγμα, για τον έλεγχο της πράξης 0,08·1,2 γράφουμε τους αριθμούς που είναι δοσμένοι σε δεκαδική γραφή σε κλασματική γραφή οπότε έχουμε: $\frac{8}{100}\cdot\frac{12}{10}=\frac{96}{1000}=0{,}096$.

Τέλος, ιδιαίτερα σημαντικός παράγοντας που συνεισφέρει στην ικανότητα για εκτίμηση και έλεγχο του αποτελέσματος των αλγορίθμων των τεσσάρων αριθμητικών πράξεων είναι η επαρκής *γνώση βασικών μαθηματικών εννοιών*. Συγκεκριμένα, είναι μεγάλης σημασίας η αντίληψη της ισοδυναμίας κάποιων πράξεων και η δυνατότητα μεταφοράς των αριθμητικών δεδομένων σ’ αυτές ώστε να είναι ευχερέστερος ο υπολογισμός (αλλαγή πεδίου έκφρασης και επεξεργασίας βλ. Duval, 1995, κεφ. 3, 5). Όμως, για να γίνει το πέρασμα σε άλλο πεδίο έκφρασης και επεξεργασίας πρέπει να υπάρχει η ουσιαστική κατανόηση βασικών μαθηματικών εννοιών όπως τα κλάσματα, οι δυνάμεις, καθώς και η δυνατότητα εκτέλεσης πράξεων σε αυτά τα πεδία. Για παράδειγμα, για τη μετάβαση από τη δεκαδική έκφραση των αριθμών στην κλασματική, κατά την εφαρμογή εναλλακτικού τρόπου εύρεσης του αποτελέσματος, είναι απαραίτητο οι μαθητές να έχουν κατανοήσει την έννοια του κλάσματος, την ισοδυναμία του με δεκαδικούς αριθμούς (ασφαλώς και την έννοια του δεκαδικού) και τη δυνατότητα εκτέλεσης πράξεων με κλάσματα.

Τέλος, γενικά για την εφαρμογή κριτηρίων εκτίμησης και ελέγχου είναι ιδιαίτερα σημαντική η *ικανότητα των μαθητών να μπορούν να κάνουν επιλογές* κριτηρίων που είναι κατάλληλα, *ανάλογα με την αποτελεσματικότητα* του κριτηρίου ως προς αυτό που εξετάζει (βλ. §6.1) *και το κόστος εφαρμογής* (βλ. §6.2). Για παράδειγμα, αν ένας μαθητής πρέπει να ελέγξει την ορθότητα του αποτελέσματος του πολλαπλασιασμού $1478 \cdot 254$ και ο χρόνος που έχει στη διάθεσή του είναι λίγος είναι προτιμότερο να επιλέξει τη δοκιμή του σταυρού με τα υπόλοιπα της διαίρεσης με το 9, ή, αν ο χρόνος είναι ακόμα λιγότερος να εφαρμόσει το κριτήριο του τελευταίου ψηφίου, γνωρίζοντας όμως ότι το κριτήριο του παρέχει απλά ένδειξη για την ορθότητα της πράξης, είναι αναγκαία συνθήκη, αλλά όχι ικανή (βλ. Κούρκουλος και Τζανάκης, 2000, σ. 274).

Οι ικανότητες που προαναφέρθηκαν αποτελούν σημαντικούς παράγοντες που συνεισφέρουν στην ικανότητα για εκτίμηση του αποτελέσματος των αλγορίθμων των τεσσάρων αριθμητικών πράξεων. Από αυτές, βασικές προαπαιτούμενες γνώσεις συνιστούν i)η ικανότητα για νοερό υπολογισμό με αριθμούς του τύπου $\nu x 10^{\mu}$ όπου ν μονοψήφιος ή διψήφιος ακέραιος και $\mu \in Z$ και ii)η ικανότητα να βρίσκουν από μνήμης την προσέγγιση ενός αριθμού στο επιθυμητό επίπεδο ακρίβειας. Οι υπόλοιπες ικανότητες παίζουν σημαντικό ρόλο και καθορίζουν ένα υψηλό επίπεδο ικανότητας για εκτίμηση και έλεγχο.

7.5 Συνέπειες από τη χρήση κριτηρίων εκτίμησης και ελέγχου

Τις συνέπειες που απορρέουν από τη γνώση και χρήση κριτηρίων εκτίμησης και ελέγχου τις ταξινομούμε σε δύο κατηγορίες ανάλογα με τη λειτουργία τους: *στα γνωστικά οφέλη* και *στα οφέλη ως προς τη γενικότερη μαθηματική αγωγή.*

Στα γνωστικά οφέλη εμπεριέχονται οι συνέπειες εκείνες που συνεισφέρουν στη μαθησιακή διαδικασία και αφορούν στον καθαρά γνωστικό τομέα. Στα οφέλη ως προς τη γενικότερη μαθηματική αγωγή συμπεριλαμβάνονται οι συνέπειες που αφορούν στη γενικότερη στάση του μαθητή απέναντι στα Μαθηματικά. Με την έννοια της στάσης εννοούμε “την εσωτερική μεταβλητή του προσώπου η οποία επηρεάζει τη συμπεριφορά του” (Τρούλης, 1995, σ. 19).

Ειδικότερα οι συνέπειες που εμπεριέχονται σε καθεμιά από τις κατηγορίες που αναφέρθηκαν είναι:

➢ Γνωστικό όφελος

Ως προς το γνωστικό όφελος αρχικά παρατηρείται βελτίωση[41] στην ικανότητα εφαρμογής του αλγορίθμου για τον οποίο εφαρμόζεται το κριτήριο (Κούρκουλος, 1998, σ. 85). Καθώς ο μαθητής μέσα από την εφαρμογή κριτηρίων έχει τη δυνατότητα να ελέγχει την ορθότητα του αποτελέσματος ή των επιμέρους βημάτων του αλγόριθμου, μπορεί στη συνέχεια να εντοπίζει τα λάθη του και να προβαίνει κατ' αυτό τον τρόπο σε διαδικασία αυτοδιόρθωσης που οδηγεί στην αυτοβελτίωσή του.

Επίσης, υπάρχει βελτίωση της κατανόησης επιμέρους στοιχείων του αλγορίθμου. Για παράδειγμα, σε έρευνα που πραγματοποιήθηκε στο Στρασβούργο (1985) και στο Ηράκλειο (1994) στην Στ΄ Δημοτικού, οι μαθητές, μέσα από την εφαρμογή του διπλού προγραμματισμού στην εκτέλεση πολλαπλασιασμών με θετικές και αρνητικές δυνάμεις του 10, παρουσίασαν βελτίωση σχετικά με τα στοιχεία του μνημονικού κανόνα εκτέλεσης της πράξης και συγκεκριμένα την αρχική θέση της υποδιαστολής, την κατεύθυνση μετακίνησης της υποδιαστολής, το πλήθος θέσεων μετακίνησης (Κούρκουλος, 1998, σσ. 83-85)[42].

Ακόμη, υπάρχει κατανόηση των επιμέρους στοιχείων του κριτηρίου που χρησιμοποιείται. Για παράδειγμα, ο διπλός προγραμματισμός στην εκτέλεση πολλαπλασιασμών με θετικές και αρνητικές δυνάμεις του 10 και η παρατηρούμενη βελτίωση στη μετατροπή δεκαδικών σε κλάσματα και στον πολλαπλασιασμό κλασμάτων (Κούρκουλος και Τζανάκης, 2000, σ. 277).

Εξάλλου, παρατηρείται βελτίωση της κατανόησης του προβλήματος που λύθηκε και της λύσης που προσφέρει ο αλγόριθμος. Για παράδειγμα, κατά την εφαρμογή της δοκιμής της ευκλείδειας διαίρεση παρατηρείται βελτίωση της κατανόησης της σχέσης που συνδέει το διαιρετέο και το διαιρέτη με το πηλίκο και το υπόλοιπο (Κούρκουλος και Τζανάκης, 2000, σ. 277).

Μια ακόμη συνέπεια που απορρέει από την παραγωγή και χρήση κριτηρίων εκτίμηση και ελέγχου είναι η εκμάθηση και βελτίωση της κατανόησης βασικών μαθηματικών εννοιών, που σχετίζονται με την εφαρμογή του κριτηρίου. Για παράδειγμα, κατά την εφαρμογή του διπλού προγραμματισμού στην εκτέλεση πολλαπλασιασμών με θετικές και αρνητικές δυνάμεις του 10 υπάρχει βελτίωση της κατανόησης της έννοιας του κλάσματος και της εκτέλεσης πολλαπλασιασμών με κλάσματα.

Ακόμη, κατά την εφαρμογή κριτηρίων εκτίμησης, ή ελέγχου, που εμπεριέχουν μετατροπή των αριθμητικών δεδομένων σε δυνάμεις για να είναι ευχερέστερος ο υπολογισμός, υπάρχει βελτίωση της κατανόησης των ιδιοτήτων των δυνάμεων.

Κατά την εκτίμηση του αποτελέσματος μέσα από την εφαρμογή κριτηρίων από μνήμης προσεγγιστικών υπολογισμών παρατηρείται βελτίωση της κατανόησης των ιδιοτήτων των πράξεων.

Εξάλλου, κατά την παραγωγή και χρήση κριτηρίων εκτίμησης και ελέγχου παρατηρούνται συνδέσεις του αλγορίθμου που εφαρμόζεται με άλλες γνώσεις του μαθητή οι οποίες υπάρχουν αλλά παραμένουν ασύνδετες με τα στοιχεία του αλγόριθμου που εξετάζεται, ή συνδέσεις που προϋπήρχαν, αλλά οι συνέπειές τους είχαν διερευνηθεί

---

[41] Σε μερικές περιπτώσεις η παραγωγή και χρήση κριτηρίου εκτίμησης και ελέγχου μπορεί να συνεισφέρει απλά στη συντήρηση της κατανόησης του αλγορίθμου και των επιμέρους στοιχείων του (Κούρκουλος και Τζανάκης, 2000, σ. 277).

[42] Παρόμοιες εξελίξεις υπάρχουν και κατά τη διάρκεια της πειραματικής διδασκαλίας (§9.2, Α΄ φάση, ε και στ)

μόνο εν μέρει (Κούρκουλος, 1998, σ. 86). Έτσι, με την εφαρμογή του διπλού προγραμματισμού οι μαθητές αντιλαμβάνονται ότι πολλαπλασιασμός επί 0,001 ισοδυναμεί με διαίρεση με το 1000. Δηλαδή, παρατηρούνται συνδέσεις μεταξύ των δεκαδικών και των κλασματικών αριθμών οι οποίες προϋπήρχαν αλλά ήταν ατελείς καθώς το διδακτικό εγχειρίδιο (της Ε΄ τάξης) παρουσιάζει το θέμα και το εγκαταλείπει πολύ γρήγορα. (βλ. σχετικά Κούρκουλος, 1998, σ. 87).

Επίσης υπάρχει κατανόηση της έννοιας του αριθμού (Sowder, 1992, p. 381). Η Sowder (1992, p. 381) αναφέρεται στην αντίληψη του αριθμού (number sense) ως ένα καλά οργανωμένο νοητικό δίκτυο το οποίο δίνει τη δυνατότητα να συσχετίζεις τον αριθμό και τις ιδιότητες των πράξεων και να λύνεις προβλήματα με ευέλικτο και δημιουργικό τρόπο. Η Resnick (1987, p. 3) έδωσε μερικά χαρακτηριστικά της αντίληψης του αριθμού. Συγκεκριμένα υποστήριξε ότι η αντίληψη του αριθμού:

- είναι μη αλγοριθμική και η πορεία δράσης δεν είναι πλήρως ορισμένη εξ αρχής
- τείνει να είναι σύνθετη, καθώς η συνολική πορεία δεν είναι ορατή από κάποιο απλό σημείο
- συχνά επιφέρει πολλαπλές λύσεις με πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα
- περιέχει λεπτές διαφορές στην κρίση και στην κατανόηση
- περιέχει την εφαρμογή πολλαπλών κριτηρίων τα οποία συχνά έρχονται σε σύγκρουση
- συχνά περιέχει αβεβαιότητα, καθώς δεν είναι τα πάντα γνωστά σε μια δραστηριότητα
- απαιτεί αυτορρύθμιση στη διαδικασία σκέψης
- υποκρύπτει εντυπωσιακό νόημα, βρίσκοντας τη δομή σε μια προφανή ακαταστασία
- απαιτεί μεγάλη προσπάθεια και νοερή εργασία

Παρατηρούμε ότι η διαδικασία εκτίμησης και ελέγχου ενσωματώνει τα παραπάνω στοιχεία της αντίληψης του αριθμού που προαναφέρθηκαν, τα οποία θεωρούνται ως προαπαιτούμενες ικανότητες, αλλά και ως συνέπειες μέσα από την εξάσκηση στην εφαρμογή κριτηρίων εκτίμησης και ελέγχου. Κατά συνέπεια, η απόκτηση αντίληψης της έννοιας του αριθμού είναι σημαντική ικανότητα για τη διαδικασία εκτίμησης και ελέγχου, αλλά μπορεί να θεωρηθεί και ως απόρροια αυτής μέσα τη συνεχή άσκηση. Υπάρχει δηλαδή μια αμφίδρομη σχέση, μια αλληλεπίδραση μεταξύ της αντίληψης της έννοιας του αριθμού και της ικανότητας για πραγματοποίηση εκτιμήσεων και ελέγχων.

➢ Οφέλη ως προς τη γενικότερη μαθηματική αγωγή

Αρχικά, μέσα από την εφαρμογή κριτηρίων εκτίμηση και ελέγχου, υπάρχει μακροπρόθεσμα η συνειδητοποίηση από την πλευρά των μαθητών ότι υπάρχουν πολλαπλοί τρόποι προσέγγισης μιας προβληματικής κατάστασης. Μέσα από την εμπειρία που αποκτούν κάνοντας εκτιμήσεις και ελέγχους, συνειδητοποιούν ότι δεν υπάρχει ένας μόνο ορθός τρόπος για να φτάσουμε στο ζητούμενο αποτέλεσμα. Εξάλλου, κατανοούν ότι καθεμιά από τις διαφορετικές μεθόδους με τις οποίες είναι δυνατό να οδηγηθούμε στη λύση του προβλήματος έχει κάποια ιδιαίτερα χαρακτηριστικά και μπορεί να οδηγήσει στην παραγωγή μιας λύσης που εξυπηρετεί τις ανάγκες των αριθμητικών δεδομένων ή του συγκείμενου. Για παράδειγμα, κατά την εκτίμηση του αποτελέσματος του πολλαπλασιασμού $1457 \cdot 1412$ υπάρχουν διαφορετικοί τρόποι για να φτάσουμε στη λύση που περιέχεται μέσα στο φάσμα των αποδεκτών απαντήσεων. Κατά όμοιο τρόπο οι μαθητές συναισθάνονται ότι και σε άλλες προβληματικές καταστάσεις που δεν εμπίπτουν στην περιοχή της εκτίμησης ισχύει ο ίδιος κανόνας της πολλαπλότητας, τόσο στην προσέγγιση της λύσης, όσο και στο πεδίο των αποδεκτών απαντήσεων.

Μέσα σ' αυτό το πεδίο της πολλαπλότητας των τρόπων επίλυσης έγκειται και η δυνατότητα των μαθητών να μεταβαίνουν σε διαφορετικά πεδία έκφρασης και επεξεργασίας και σε διαφορετικά πλαίσια (βλ. σχετικά Κούρκουλος και Τζανάκης, 2000, σ. 278). Κατ' αυτό τον τρόπο αποκτούν μια ελισσόμενη σκέψη η οποία προσδιορίζει και μια ωριμότητα ως προς τη μαθηματική αγωγή.

Εξάλλου, η εφαρμογή κριτηρίων εκτίμηση και ελέγχου συντελεί στην απόκτηση Μαθηματικής Παιδείας, η οποία αποτελεί το μέγιστο γενικό σκοπό της διδασκαλίας των Μαθηματικών στο Δημοτικό σχολείο (Τζανάκης, 1998, σ. 101). Σύμφωνα με τον Τζανάκη (1998, σ. 101) ένα από τα χαρακτηριστικά της παροχής της Μαθηματικής Παιδείας είναι "η ανάπτυξη της δυνατότητας εκτίμησης καταστάσεων σε τάξη μεγέθους π.χ. νοητή εκτέλεση πράξεων, προσεγγιστική εκτίμηση διαστάσεων, εμβαδών όγκων κ.λ.π." Η ικανότητα των μαθητών να κάνουν εκτιμήσεις και ελέγχους συμβάλλει στην απόκτηση του χαρακτηριστικού που προαναφέρθηκε και κατά συνέπεια συμβάλλει σημαντικά στην απόκτηση Μαθηματικής Παιδείας (βλ. σχετικά Κούρκουλος και Τζανάκης, 2000, σ. 265).

Εξάλλου, ένα άλλο στοιχείο της Μαθηματικής Παιδείας, σύμφωνα με τον Τζανάκη (1998, σσ. 101-102), είναι "η ανάπτυξη ενδιαφέροντος για την επίλυση προβλημάτων και απάντηση ερωτημάτων που έχουν το χαρακτήρα γρίφου π.χ. πώς θα φτιάξω ένα κανονικό εξάγωνο"

Αυτό το χαρακτηριστικό δεν σχετίζεται άμεσα με την ικανότητα εφαρμογής κριτηρίων εκτίμησης και ελέγχου, αποτελεί όμως έμμεση συνέπεια για κάποιους μαθητές. Έτσι είναι δυνατό οι μαθητές, έπειτα από εξάσκηση στα κριτήρια εκτίμησης και ελέγχου, να προσπαθούν να λύσουν προβλήματα που σχετίζονται με την εκτίμηση ή τον έλεγχο και έχουν το χαρακτήρα γρίφου. Για παράδειγμα, θα προσπαθήσουν να βρουν διαφορετικούς τρόπους να εκτιμήσουν το αποτέλεσμα της πράξης 22·894 λαμβάνοντας υπόψη τις τεχνικές εύκολου νοερού υπολογισμού.

Το συμπέρασμα που συνάγεται, λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω, είναι ότι η γενική ικανότητα των μαθητών να κάνουν εκτιμήσεις και ελέγχους, η οποία είναι συνάρτηση της επαρκούς εξάσκησης, βρίσκεται σε άμεση συνάφεια και συντελεί σημαντικά στην απόκτηση Μαθηματικής Παιδείας.

Επίσης, μια σημαντική συνέπεια που απορρέει από τη χρήση κριτηρίων εκτίμησης και ελέγχου είναι η αυτοεκτίμηση τόσο σχετικά με την ικανότητα εκτίμησης και ελέγχου, όσο και σχετικά με τη γενική μαθηματική ικανότητα (Sowder & Wheeler, 1989, p. 132). Όταν οι μαθητές εξασκούνται επαρκώς στα κριτήρια εκτίμησης και ελέγχου και αποκτούν ευχέρεια στη χρήση τους, είναι επόμενο να αποκτήσουν αυτοεμπιστοσύνη στην ικανότητα να κάνουν εκτιμήσεις και ελέγχους.

Η Levine (1982, p. 358) διαπίστωσε μια θετική συσχέτιση μεταξύ της μαθηματικής ικανότητας και της ικανότητας για εκτίμησης. Μαθητές, οι οποίοι έχουν χαμηλή επίδοση σε διαδικασίες που απαιτούν χαρτί και μολύβι, ενδεχομένως να έχουν καλή επίδοση σε διαδικασίες εκτίμησης, γεγονός που μπορεί να τους προσδώσει μεγαλύτερη εμπιστοσύνη στον εαυτό τους για την επιτυχία στα Μαθηματικά (Gliner, 1991, pp. 602-603). Σύμφωνα με τους Reys et al. (1982, σ. 199), οι οποίοι πήραν συνέντευξη από κάποιους καλούς στην εκτίμηση, οι καλοί εκτιμητές χαρακτηρίζονται από αυτοεκτίμηση, η οποία ποικίλει από πρόβλημα σε πρόβλημα. Κάποιοι εκτιμητές επέδειξαν ισχυρή αυτοπεποίθηση σε σχέση με τις τεχνικές που χρησιμοποιούσαν και τις απαντήσεις που έδιναν καθ' όλη τη συνέντευξη. Είχαν εμπιστοσύνη στην ικανότητά τους για εκτίμηση με επίδραση στη συνέπειά τους, την ταχύτητα και την επιλογή στρατηγικής.

Εξάλλου, η χρήση κριτηρίων εκτίμησης και ελέγχου συνεπάγεται την αναγνώριση της χρησιμότητας της εκτίμησης (Sowder, 1992, Sowder, Wheeler, 1989, Bestgen et al., 1980) και του ελέγχου (βλ. σχετικά §9.2.2). Οι μαθητές συνειδητοποιούν τα πολλαπλά οφέλη που προκύπτουν από τη χρήση τους, ανεξάρτητα από την επίδοση τους σε διαδικασίες εκτίμησης, αποκτώντας κατ' αυτό τον τρόπο μια θετική στάση απέναντι σ' αυτά.

Τέλος, μέσα από την παραγωγή κριτηρίων εκτίμησης και ελέγχου και την αναγνώριση της χρησιμότητάς τους, οι μαθητές γενικεύουν τη χρήση τους και κάνουν μεταφορά της στάσης σε άλλες μαθηματικές δραστηριότητες. Το αποτέλεσμα είναι ότι μειώνουν τα σφάλματά τους και κατανοούν καλύτερα άλλες μαθηματικές ενότητες.

Παρακάτω δίνονται συνοπτικά οι βασικές ικανότητες που συμβάλλουν σημαντικά στην πραγματοποίηση εκτιμήσεων και ελέγχων, καθώς και τα βασικά οφέλη που απορρέουν από τη χρήση κριτηρίων εκτίμησης και ελέγχου.

Ικανότητες και γνώσεις σημαντικές για την εφαρμογή κριτηρίων εκτίμησης και ελέγχου

- ικανότητα να συγκρίνουν αριθμούς
- ικανότητα εύρεσης από μνήμης της προσέγγισης ενός αριθμού, που δίνεται σε δεκαδική μορφή, στο επιθυμητό επίπεδο ακρίβειας
- ευχέρεια για ακριβή νοερό υπολογισμό (να υπολογίζουν με δυνάμεις του 10 και αριθμούς του τύπου $\nu x 10^{\mu}$ όπου ν μονοψήφιος ή διψήφιος ακέραιος, $\nu \in N^*$ και $\mu \in Z$)
- γνώση και ευχέρεια στη χρήση ειδικών τεχνικών εύκολου νοερού υπολογισμού
- ικανότητα να αντιλαμβάνονται σχέσεις αναλογίας
- γνώση του αριθμητικού συστήματος και των ιδιοτήτων των πράξεων
- ακολουθία της σωστής σειράς των πράξεων
- επαρκής γνώση και η ικανότητα εφαρμογής των ιδιοτήτων των δυνάμεων
- γνώση της θεσιακής αξίας των αριθμών
- γνώση βασικών μαθηματικών εννοιών (κλάσματα, δυνάμεις, καθώς και η δυνατότητα εκτέλεσης πράξεων σε αυτά τα πεδία)

Οφέλη που απορρέουν από τη χρήση κριτηρίων εκτίμησης και ελέγχου

➢ Γνωστικό όφελος

- βελτίωση στην ικανότητα εφαρμογής του αλγορίθμου για τον οποίο εφαρμόζεται το κριτήριο
- βελτίωση της κατανόησης επιμέρους στοιχείων του αλγορίθμου
- κατανόηση των επιμέρους στοιχείων του κριτηρίου που χρησιμοποιείται
- βελτίωση της κατανόησης του προβλήματος που λύθηκε και της λύσης που προσφέρει ο αλγόριθμος
- εκμάθηση και βελτίωση της κατανόησης βασικών μαθηματικών εννοιών, που σχετίζονται με την εφαρμογή του κριτηρίου
- βελτίωση της κατανόησης των ιδιοτήτων των δυνάμεων
- βελτίωση της κατανόησης των ιδιοτήτων των πράξεων
- παρατηρούνται συνδέσεις του αλγορίθμου που εφαρμόζεται με άλλες γνώσεις του μαθητή οι οποίες υπάρχουν αλλά παραμένουν ασύνδετες με τα στοιχεία του αλγόριθμου που εξετάζεται, ή συνδέσεις που προϋπήρχαν αλλά οι συνέπειές τους είχαν διερευνηθεί μόνο εν μέρει
- κατανόηση της έννοιας του αριθμού

➢ Οφέλη ως προς τη γενικότερη μαθηματική αγωγή

- συνειδητοποίηση από την πλευρά των μαθητών ότι υπάρχουν πολλαπλοί τρόποι προσέγγισης μιας προβληματικής κατάστασης
- δυνατότητα των μαθητών μετάβασης σε διαφορετικά πεδία έκφρασης και επεξεργασίας και σε διαφορετικά πλαίσια
- απόκτηση Μαθηματικής Παιδείας
- αυτοεκτίμηση τόσο σχετικά με την ικανότητα εκτίμησης και ελέγχου, όσο και σχετικά με τη γενική μαθηματική ικανότητα
- αναγνώριση της χρησιμότητας της εκτίμησης
- γενίκευση της χρήσης των κριτηρίων εκτίμησης και ελέγχου και μεταφορά της στάσης σε άλλες μαθηματικές δραστηριότητες

8. ΟΡΓΑΝΩΣΗ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

8.1 Μεθοδολογία της έρευνας

Προκειμένου να επιτευχθεί ο σκοπός της έρευνας καθώς και οι επιμέρους στόχοι που έχουν τεθεί, σε συνάρτηση με τις υποθέσεις που έχουν διατυπωθεί και με το διδακτικό πρόβλημα που έχει οριοθετηθεί, έγινε προσπάθεια να επιλεγεί η προσφορότερη ερευνητική μέθοδος. Η απλή παρατήρηση στις υπάρχουσες συνθήκες και η απλή θεωρητική ανάλυση δεν θα μπορούσε να συντελέσει στην επίτευξη των ερευνητικών στόχων που έχουν τεθεί, καθώς οι ικανότητες των μαθητών παραμένουν αναξιοποίητες. Ως εκ τούτου, επιλέχθηκε η πειραματική παρέμβαση και το ερωτηματολόγιο στα πλαίσια των οποίων γινόταν παρατήρηση της μαθητικής συμπεριφοράς, τόσο σε γνωστικό επίπεδο, όσο και σε επίπεδο στάσεων απέναντι στο θέμα που ερευνάται.

Στην περίπτωση του υπό εξέταση θέματος, ενδείκνυται η εφαρμογή της πειραματικής παρέμβασης, καθώς, αφενός μεν είναι απαραίτητη εφόσον θέλουμε να διερευνήσουμε τη συμπεριφορά και τις δυνατότητες των μαθητών της Στ΄ τάξης απέναντι στα κριτήρια εκτίμησης και ελέγχου, τα οποία σαφώς πρέπει να διδαχτούν, και αφετέρου να γίνει σύγκριση των μαθητών που έχουν διδαχθεί τέτοια κριτήρια με άλλους που δεν τα έχουν διδαχτεί. Το πειραματικό σχέδιο[43] που επιλέχθηκε στο πλαίσιο της πειραματικής παρέμβασης, προκειμένου να ελεγχθούν οι υποθέσεις της έρευνας, είναι το *ημιπειραματικό[44] σχέδιο με προέλεγχο και μετέλεγχο σε ισοδύναμες ομάδες* (βλ. σχετικά Βάμβουκας, 1998, σ. 184). Σύμφωνα με το σχέδιο αυτό επιλέγονται ομάδες ισοδύναμες, οι οποίες θα διαδραματίσουν την πειραματική ομάδα και την ομάδα ελέγχου. Η ισοδυναμία συνίσταται στην ομοιότητά τους – στο μέτρο του δυνατού – σε χαρακτηριστικά όπως η ηλικία, το είδος του σχολείου, η κοινωνική προέλευση, η περιοχή που βρίσκεται το σχολείο, οι εκπαιδευτικές συνθήκες του σχολείου που φοιτούν. Αρχικά γίνεται ένας προέλεγχος στην Π.Ο. και στην Ο.Ε[45] ο οποίος στοχεύει στη διαπίστωση της ισοδυναμίας ως προς τα χαρακτηριστικά που προαναφέρθηκαν. Στη συνέχεια, εισάγεται η επίδραση της πειραματικής μεταβλητής – της διδακτικής παρέμβασης στην περίπτωσή μας – στην Π.Ο. Μετά το τέλος του πειραματισμού ακολουθεί μετέλεγχος, μέτρηση της επίδοσης της Π.Ο. και της Ο.Ε. Η ισοδυναμία των ομάδων εξασφαλίζει μεγαλύτερη εγκυρότητα των αποτελεσμάτων, καθώς ελέγχονται παρασιτικές μεταβλητές που πιθανότατα να αλλοίωναν το πλαίσιο της έρευνας, δηλαδή διαφορές ουσιαστικές που θα μπορούσαν να ερμηνεύσουν τη διαφορά στην επίδοση.

Ακολουθώντας το σχέδιο που προαναφέρθηκε εισάγαμε κάποια άλλα στοιχεία, προκειμένου να ελέγξουμε και άλλους παράγοντες που μας ενδιαφέρουν. Έτσι, στην Π.Ο. εκτός από προέλεγχο και μετέλεγχο έγινε και μια ενδιάμεση μέτρηση, ώστε να διερευνηθεί η εξέλιξη που παρουσίασαν οι μαθητές μετά την εφαρμογή της διδακτικής παρέμβασης και πριν την ολοκλήρωσή της, καθώς θα ήταν ιδιαίτερα μακρύ το χρονικά

[43] Πειραματικό σχέδιο είναι το σύνολο των ενεργειών, στις οποίες προβαίνει ο ερευνητής σε μια δεδομένη πειραματική κατάσταση για τη συλλογή και την επεξεργασία των αναγκαίων για την επαλήθευση των ερευνητικών του υποθέσεων δεδομένων (Βάμβουκας, 1998, σ. 177).

[44] Το σχέδιο λέγεται ημιπειραματικό σε αντιδιαστολή με το πειραματικό σχέδιο έρευνας με προέλεγχο και μετέλεγχο και ομάδες ελέγχου, διότι η πειραματική ομάδα και η ομάδα ελέγχου δεν επιλέχθηκαν με τη μέθοδο της τυχαίας δειγματοληψίας (Βάμβουκας, 1998, σ. 187).

[45] Από τώρα και στο εξής θα συμβολίζουμε με Π.Ο. την πειραματική ομάδα και με Ο.Ε. την ομάδα ελέγχου.

διάστημα μεταξύ της πρώτης μέτρησης (Νοέμβριος 2001) και της επόμενης (τέλος Απριλίου 2002). Η δεύτερη μέτρηση στην Π.Ο. έγινε αμέσως μετά την ολοκλήρωση της τρίτης φάσης - διδασκαλία της τάξης μεγέθους –και πριν την τέταρτη φάση – διδασκαλία στρατηγικών εκτίμησης με στρογγυλοποίηση. Έτσι, ήταν δυνατός ο έλεγχος της επίδρασης που θα είχαν οι γνώσεις που διδάχτηκαν σε άλλες συγγενείς μαθηματικές περιοχές (βλ. περιγραφή του ερωτηματολογίου §8.4.2), καθώς και σε περιοχές που αποτελούν το κυρίως θέμα μας και που δεν έχουν ακόμη διδαχθεί (εκτίμηση με στρογγυλοποίηση, δοκιμές πράξεων). Εξάλλου, στην Π.Ο. έγινε και μια τελική μέτρηση, ένα μήνα μετά το τέλος της διδακτικής παρέμβασης, ώστε να ελεγχθεί το “ίζημα”, οι γνώσεις που απέμειναν αφότου είχε ολοκληρωθεί η διδακτική παρέμβαση και είχε παρέλθει η επίδραση της διδασκαλίας, καθώς και οι γνώσεις που αποσταθεροποιούνται αρκετό χρόνο μετά το πέρας της διδασκαλίας.

Επίσης, το ερευνητικό σχέδιο περιέχει και στοιχεία ποιοτικής παρατήρησης, καθώς κρίθηκε σκόπιμο, μέσα στο πλαίσιο της πειραματικής διαδικασίας, να καταγραφούν οι συμπεριφορές των μαθητών, οι αντιδράσεις τους στη διδασκαλία κριτηρίων εκτίμησης και ελέγχου και επίσης η εξέλιξη που παρουσιάζουν υπό την επίδραση του διδακτικού σχήματος. Εξάλλου, σύμφωνα με το Βάμβουκα (1998, σ. 195) “ανάμεσα στην παρατήρηση και τον πειραματισμό, την πειραματική μέθοδο και τη μέθοδο της παρατήρησης, δεν υπάρχει στεγανός διαχωρισμός αλλά μια συνέχεια”. Σε άλλο σημείο αναφέρει (σ. 196) ότι η παρατήρηση συμπληρώνει τον πειραματισμό.

Κατά τη διάρκεια της διδακτικής πράξης έγινε παρατήρηση της συμπεριφοράς και της στάσης των μαθητών σε σχέση με ό,τι διδάχτηκαν, τόσο σε προφορικό επίπεδο (ερωτήσεις, απαντήσεις σε ερωτήματα του διδάσκοντα, ή των συμμαθητών τους, τρόποι επίλυσης δραστηριοτήτων, δηλώσεις σχετικές με το υπό εξέταση θέμα, εκδηλώσεις ευαρέσκειας ή δυσαρέσκειας). Βέβαια, θα πρέπει να τονιστεί ότι αναφερόμαστε στη “συστηματική παρατήρηση”, με την έννοια ότι δεν πρόκειται για τυχαίο κοίταγμα κάποιων δραστηριοτήτων αλλά 1) έχει σαφείς και προκαθορισμένους ερευνητικούς σκοπούς 2) ακολουθεί προγραμματισμένη και συστηματική διαδικασία 3) η παρατηρούμενη συμπεριφορά καταγράφεται με συστηματικό και οργανωμένο τρόπο (βλ. Δημητρόπουλος, 1994, σ. 132). Η ανάλυση των αποτελεσμάτων της παρατήρησης έγινε με ποιοτικό τρόπο, καθώς σκοπός ήταν η διερεύνηση και ερμηνεία ενός ευρέος φάσματος συμπεριφορών των μαθητών απέναντι στην επίδραση της διδακτικής παρέμβασης, χωρίς να είναι αναγκαία η ποσοτική προσέγγιση.

Προκειμένου λοιπόν να καταγραφούν οι συμπεριφορές και οι αντιδράσεις των μαθητών στην εφαρμογή του διδακτικού σχήματος χρησιμοποιήθηκε ο κατάλογος παρατήρησης (“ημερολόγιο”), ο οποίος συμπληρωνόταν τόσο κατά τη διάρκεια της εκάστοτε διδασκαλίας, όσο και μετά το πέρας αυτής. Συγκεκριμένα, κατά τη διάρκεια του διδακτικού χρόνου που αφιερωνόταν στη διδασκαλία κάθε ενότητας καταγράφονταν στοιχεία που αντλούνταν μέσα από τη διδακτική πράξη και που υποδήλωναν αξιοσημείωτες μαθητικές συμπεριφορές απέναντι στο διδασκόμενο θέμα. Οι συμπεριφορές αυτές συντίθενται από λεκτικές αντιδράσεις στην καινούρια γνώση, εκδηλώσεις ευαρέσκειας ή δυσαρέσκειας, από τις ιδέες που εξέφραζαν οι μαθητές προκειμένου να αντιμετωπίσουν τη νέα προβληματική κατάσταση, ερωτήσεις, απαντήσεις σε ερωτήματα του διδάσκοντα ή των συμμαθητών τους, από πλάνες στις οποίες υπέπεπταν και που οφείλονταν σε εσφαλμένες αναπαραστάσεις στο πλαίσιο παρουσίασης της νέας ύλης, από τη γνωστική σύγκρουση κατά τη διάρκεια θεραπείας της πλάνης. Εξάλλου μέσα από την επεξεργασία των φύλλων δραστηριοτήτων από την πλευρά του διδάσκοντα αντλούνταν στοιχεία που αντικατόπτριζαν είτε συστηματικά λάθη καθώς και την αιτία προέλευσής τους, είτε συγκεκριμένες στρατηγικές αντιμετώπισης κάποιου θέματος οι οποίες ενδεχομένως να μην είναι εσφαλμένες. Η ανάλυση σε καθημερινή βάση αυτών των στοιχείων μπορεί ενδεχομένως να οδηγήσει σε τροποποιήσεις της διδακτικής παρέμβασης που αφορούν σε αφιέρωση περισσότερου διδακτικού χρόνου και στην επιστράτευση μεθόδων για την αντιμετώπιση πλανών των μαθητών, καθώς και στην εκμετάλλευση ιδεών των μαθητών που κρίνονται χρήσιμες και σημαντικές στην εκάστοτε ενότητα.

Εκτός από το ημερολόγιο, για τη συγκέντρωση των απαραίτητων πληροφοριών χρησιμοποιήθηκε και το μαγνητόφωνο. Στο ημερολόγιο καταγράφονταν οι καθημερινές παρατηρήσεις του διδάσκοντα σε σχέση με τη συμπεριφορά των μαθητών, με τη συγκεκριμένη ημερομηνία και ενότητα που διδάσκονταν. Ως υποβοηθητικό μέσο χρησιμοποιήθηκε το μαγνητόφωνο, προκειμένου να δημιουργηθεί μια σαφέστερη εικόνα του πεδίου που διαδραματιζόταν στη σχολική τάξη, να καταγραφούν στοιχεία που ενδεχομένως δεν υπέπεσαν στην αντίληψη του διδάσκοντα και να αποφευχθούν παρερμηνείες που οφείλονται σε τυχόν εσφαλμένες αντιλήψεις του διδάσκοντα. Σκοπός της χρήσης του μαγνητοφώνου είναι η απόκτηση μιας πληρέστερης και πιο αντικειμενικής εικόνας του διδακτικού πεδίου. Εξάλλου, αξιοσημείωτο είναι ότι το μαγνητόφωνο αποτέλεσε μέσο ανατροφοδότησης του διδάσκοντα, καθώς παρακολουθούσε την εξέλιξη της πορείας της διδακτικής πράξης, στην οποία διαδραμάτιζε ενεργό ρόλο και ο ίδιος, ως εξωτερικός παρατηρητής, γεγονός που του προσέδιδε μια στάση αυτοκριτικής και αυτοβελτίωσης.

Οι πληροφορίες που συλλέγονταν με τα μέσα που προαναφέρθηκαν υπόκεινταν αρχικά σε αντιπαραβολή και σύγκριση για τον έλεγχο της ακρίβειάς τους και της αλληλοσυμπλήρωσής τους. Στη συνέχεια, αποτέλεσαν αντικείμενο ποιοτικής ανάλυσης με στόχο τη συνύφανση του πλέγματος της γενικότερης συμπεριφοράς των μαθητών, ειδικότερα σε σχέση με τα επιμέρους γνωστικά αντικείμενα που διαπραγματεύονταν και εν γένει σε σχέση με τα κριτήρια εκτίμησης και ελέγχου, ήτοι το θέμα που εξετάζουμε συνολικά.

Η μέτρηση της πειραματικής διαδικασίας έγινε με την επίδοση ερωτηματολογίου.

Συνοψίζοντας αναφέρουμε ότι η μεθοδολογία της έρευνας συνίσταται στη χρήση δύο διαφορετικών μεθόδων, που όμως είναι συνυφασμένες και στοχεύουν στην επίτευξη του ερευνητικού σκοπού: την πειραματική παρέμβαση και το ερωτηματολόγιο, στο πλαίσιο των οποίων καταγράφονται και ποιοτικές παρατηρήσεις. Οι μέθοδοι αυτές είναι αρμονικά διαπλεκόμενες και αλληλένδετες: κατά την πειραματική παρέμβαση γίνεται παρατήρηση της συμπεριφοράς των μαθητών, ενώ η ποσοτική μέτρηση της επίδοσης Π.Ο. και Ο.Ε. γίνεται με την επίδοση ερωτηματολογίου. Ταυτόχρονα, γίνεται σύζευξη ποιοτικής και ποσοτικής ανάλυσης, οι οποίες συγκλίνουν στην πληρέστερη και αντικειμενικότερη αντιμετώπιση του θέματος.

Η συνολική σχηματική παράσταση του ερευνητικού σχεδίου είναι η εξής:

ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΟ ΣΧΕΔΙΟ

ισοδύναμες

Π.Ο. — Ο.Ε.

έλεγχος ισοδυναμίας

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ — ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ

ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗ (+ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ)

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ

ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗ (+ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ)

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ (+2 θέματα)[46]

ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ

έλεγχος

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ (+2 θέματα) — ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ (+2 θέματα)

[46] Κατά την επίδοση αυτή του ερωτηματολογίου, όπως και κατά την επόμενη, δόθηκαν δύο επιπλέον θέματα.

8.2 Το δείγμα της έρευνας

Όπως αναλύθηκε στους σκοπούς (βλ. §3.3) η έρευνα αφορά στους μαθητές της Στ΄ τάξης του Δημοτικού σχολείου. Η επιλογή της Στ΄ τάξης δικαιολογείται, καθότι, ήδη στις προηγούμενες τάξεις έχει ολοκληρωθεί η διδασκαλία των βασικών αλγορίθμων των τεσσάρων αριθμητικών πράξεων, οπότε δεν βρίσκονται σε μια μεταβατική διαδικασία μάθησης. Οι μαθητές, σύμφωνα με το αναλυτικό πρόγραμμα, έχουν διδαχτεί τους βασικούς αλγορίθμους και την εφαρμογή τους σε βασικές προβληματικές καταστάσεις[47] (προβλήματα προσθετικού και πολλαπλασιαστικού τύπου). Το επιχείρημα αυτό προβάλλεται καθώς πολλά κριτήρια εκτίμησης και ελέγχου ενεργοποιούνται κατά την εφαρμογή των βασικών αλγορίθμων, ή μετά απ' αυτή, και κατά συνέπεια η ανεπαρκής γνώση των βασικών αλγορίθμων συνεπάγεται πολλαπλά σφάλματα και αδυναμία χρήσης πολλών κριτηρίων. Στην Στ΄ τάξη υπάρχουν -για την πλειοψηφία των μαθητών- παράγοντες που συνδέονται με τη διαδικασία μάθησης (των βασικών αλγορίθμων), όπως η έλλειψη άγχους, η παρέλευση αρκετού χρόνου ώστε να καταγραφούν οι γνώσεις στη μακρόχρονη μνήμη[48], η επαρκής εξάσκηση. Σύμφωνα με τη Μάνιου – Βακάλη (1995) για να εισέλθει η πληροφορία στη μακρόχρονη μνήμη και να διατηρηθεί χρειάζεται ενεργητική επανάληψη, εμβάθυνση και οργάνωση. Κατά συνέπεια, στις προηγούμενες τάξεις, για πολλούς μαθητές, η εξάσκηση δεν είναι επαρκής, δεν υπάρχει επαναλαμβανόμενη μάθηση και οι πληροφορίες, σε ό,τι αφορά τη γνώση και εκτέλεση αλγορίθμων, δεν έχουν πιθανότατα αποθηκευτεί στη μακρόχρονη μνήμη. Βέβαια, στους βασικούς αλγορίθμους που αναφέρθηκαν θα πρέπει να εξαιρεθεί η διαίρεση, στην οποία και οι μαθητές της Στ΄ τάξης παρουσιάζουν χαμηλά ποσοστά επίδοσης σύμφωνα με έρευνες διδακτικού περιεχομένου που έχουν πραγματοποιηθεί. Σύμφωνα με τον Μπασέτα (1995, σ. 73), μόνο το 12,5% των μαθητών κατέχει πλήρως την πράξη της διαίρεσης.

Για τις ανάγκες της έρευνας επιλέχθηκε δείγμα 136 ατόμων, μαθητών της Στ΄ τάξης Δημοτικού σχολείου. Συγκεκριμένα επιλέχθηκαν ολόκληρα τμήματα μαθητών Στ΄ τάξης από Δημοτικά σχολεία του Ηρακλείου. Πρόκειται για τα εξής τμήματα: Στ΄3 του 9ου Δημοτικού σχολείου Ηρακλείου (20 μαθητές), Στ΄1 του 9ου Δημοτικού σχολείου Ηρακλείου (14 μαθητές), Στ΄2 του 9ου Δημοτικού σχολείου Ηρακλείου (18 μαθητές), Στ΄1 του 19ου Δημοτικού σχολείου Ηρακλείου (20 μαθητές), Στ΄2 του19ου Δημοτικού σχολείου Ηρακλείου (19 μαθητές), Στ΄2 του 46ου Δημοτικού σχολείου Ηρακλείου (13 μαθητές), Στ΄1 του 18ου Δημοτικού σχολείου Ηρακλείου (15 μαθητές), Στ΄1 του 24ου Δημοτικού σχολείου Ηρακλείου (17 μαθητές).

Όλα τα σχολεία ανήκουν σε μέσες αστικές περιοχές του Ηρακλείου – μη προνομιούχες, μη προβληματικές - σκόπιμα επιλεγμένα, ώστε, με βάση την πρόβλεψή μας να αποτελέσουν ισοδύναμες ομάδες, καθώς δεν υπάρχουν σημαντικές διαφορές όσον αφορά στο κοινωνικο – οικονομικό και μορφωτικό επίπεδο των γονέων. Επίσης, όλα τα τμήματα ανήκουν σε σχολεία που λειτουργούν μόνο πρωί, ενώ το μαθητικό δυναμικό το

[47] Δεν έχουν διδαχθεί την εφαρμογή των αλγορίθμων σε κάποιους τύπους προβλημάτων, όπως για παράδειγμα, τα προβλήματα αναλόγων ποσών που αποτελούν πολλαπλασιαστικού τύπου προβλήματα σύμφωνα με το Vergnaud (1982).

[48] Μακρόχρονη μνήμη είναι ένα μνημονικό σύστημα που συγκρατεί αναμνήσεις για σχετικά μεγάλες χρονικές περιόδους. Έχει πολύ μεγάλη χωρητικότητα και τα στοιχεία αποθηκεύονται σε μια σχετικά οργανωμένη μορφή (Cassells, 1995, σ. 46).

τμημάτων κυμαίνεται από 15 έως 21 μαθητές. Έτσι, δεν υπάρχουν διαφορές όσον αφορά και στις εκπαιδευτικές συνθήκες των σχολείων όπου φοιτούν.

Το Στ΄3 του 9ου Δημοτικού σχολείου Ηρακλείου αποτελεί την πειραματική ομάδα, η οποία δέχθηκε τη διδακτική παρέμβαση, ενώ τα υπόλοιπα τμήματα συνιστούν την ομάδα ελέγχου.

Ενώ το σύνολο των μαθητών της ομάδας ελέγχου είναι περισσότερο από 116 υποκείμενα, δεν συμπεριλήφθηκαν αρκετοί μαθητές καθώς λόγω απουσίας τους, είτε συμπλήρωσαν μόνο το αρχικό ερωτηματολόγιο, είτε μόνο το τελικό. Κατά συνέπεια οι συγκρίσεις δεν ήταν δυνατές. Το τελικό σύνολο των μαθητών της ομάδας ελέγχου ήταν 116 υποκείμενα, τα οποία μαζί με τους 20 μαθητές της πειραματικής ομάδας αποτέλεσαν το δείγμα της έρευνας.

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι το δείγμα, ως προς τον τύπο της έρευνας, έχει στόχο να επιτρέψει να προσεγγιστούν τα διάφορα είδη συμπεριφορών και δυνατοτήτων που εμφανίζουν οι μαθητές στο υπό εξέταση θέμα και δεν είναι απαραίτητο να είναι ποσοτικά αντιπροσωπευτικό του πληθυσμού. Συνεπώς, κατά την εξαγωγή των συμπερασμάτων δεν μπορούμε να προβούμε σε ποσοτικές γενικεύσεις που αφορούν σε ολόκληρο τον πληθυσμό.

8.3 Το θεωρητικό πλαίσιο της διδασκαλίας

Η διδασκαλία κατά την οποία έγινε η εφαρμογή του διδακτικού σχήματος στην πειραματική ομάδα στηρίχτηκε σε τρεις βασικές θεωρίες απόκτησης γνώσης: *τον κονστρουκτιβισμό, τη θεωρία δράσης* και *την τεχνική της μεταγνώσης*. Οι τρεις προαναφερθείσες θεωρίες μάθησης λειτουργούν συλλογικά, ενώ η συνισταμένη τους συντελεί στην απόκτηση των βασικών γνωστικών δομών που συνιστούν το διδακτικό σχήμα. Παρακάτω περιγράφονται οι γενικές αρχές που διέπουν την κάθε θεωρία, καθώς και τα ιδιαίτερα στοιχεία τους, όπως προκύπτουν κατά την εφαρμογή τους στη συγκεκριμένη διδασκαλία.

❖ *Ο κονστρουκτιβισμός*

Ο σχεδιασμός της διδασκαλίας, αλλά και η ερμηνεία της συμπεριφοράς των μαθητών στηρίχθηκαν σε δύο θεωρητικές σχολές που αφορούν στη θεωρία απόκτηση γνώσης: στον *κονστρουκτιβισμό* (ή και ριζοσπαστικό κονστρουκτιβισμό-radical constructivism) και στη *θεωρία δράσης (activity action)*. Συγκεκριμένα, έγινε σύζευξη των δύο θεωριών προκειμένου να επιτευχθεί το καλύτερο δυνατό αποτέλεσμα προσαρμοσμένο στη συγκεκριμένη περίπτωση. Παρακάτω δίνονται τα βασικά σημεία της κάθε θεωρίας και ακολουθεί η επιλογή των σημείων εκείνων που εμφανίστηκαν στη συγκεκριμένη διδασκαλία.

Η κατασκευαστική επιστημολογία (κονστρουκτιβισμός ή εποικοδομισμός) αποτελεί μια νέα επιστημολογία και ταυτόχρονα ένα νέο παιδαγωγικό κίνημα που διαμορφώνεται τις τελευταίες δεκαετίες ενάντια στην παραδοσιακή επιστημολογία του εμπειρισμού, σύμφωνα με την οποία η αισθητηριακή εμπειρία αποτελεί την κύρια πηγή γνώσης για το άτομο. Η νέα αυτή επιστημολογία στηρίζεται στη βασική αρχή ότι οι μαθητές δεν είναι παθητικοί αποδέκτες των μαθηματικών νοημάτων που οι δάσκαλοι προσπαθούν να τους μεταδώσουν, αλλά κατασκευάζουν τα δικά τους νοήματα και ο τρόπος σκέψης τους είναι καθαρά ενεργητικός (Hiebert & Carpenter, 1992). Ο θεμελιωτής της κονστρουκτιβιστικής θεωρίας είναι ο Jean Piaget, ο οποίος εξηγεί την κατασκευή της γνώσης με τη δράση του ατόμου πάνω στο περιβάλλον και το μετασχηματισμό της πραγματικότητας: “η ανθρώπινη γνώση είναι ουσιαστικά ενεργητική. Το να γνωρίζεις σημαίνει να αφομοιώνεις την πραγματικότητα σε συστήματα μετασχηματισμών. Το να γνωρίζεις σημαίνει να μετασχηματίζεις την πραγματικότητα για να κατανοήσεις πώς δημιουργείται μια συγκεκριμένη κατάσταση. Από αυτή τη σκοπιά, βρίσκω τον εαυτό μου να είναι αντίθετος με την άποψη ότι η γνώση είναι ένα αντίγραφο, ένα παθητικό αντίγραφο, της πραγματικότητας… Με τον τρόπο τον οποίο σκέφτομαι, το να γνωρίζεις ένα αντικείμενο δε σημαίνει να το αντιγράφεις, σημαίνει να ενεργείς πάνω του. Αυτό σημαίνει να κατασκευάζεις συστήματα μετασχηματισμών, τα οποία μπορούν να γίνουν πάνω στο ή με το αντικείμενο” (Piaget, 1970, σ. 15).

Ο von Glasersfeld, ένας από τους πιο γνωστούς υποστηρικτές της κονστρουκτιβιστικής θεωρίας, θεωρεί ότι οι δύο παρακάτω αρχές αποτελούν τις βασικές υποθέσεις της Κατασκευαστικής Φιλοσοφίας για τη γνώση:

- Η γνώση δεν λαμβάνεται παθητικά μέσω των αισθήσεων ή της επικοινωνίας, αλλά οικοδομείται ενεργητικά από το σκεπτόμενο άτομο.
- α. Η λειτουργία της γνωστικής διαδικασίας είναι προσαρμοστική, με τη βιολογική σημασία του όρου, δηλαδή, τείνει να εξασφαλίσει την εναρμόνιση των γνωστικών δομών του ατόμου με τις εμπειρίες του ή της βιωσιμότητας αυτών ως μέσων επίλυσης προβλημάτων.

β. Η διαδικασία κατασκευής γνώσεων εξυπηρετεί την οργάνωση του κόσμου της προσωπικής εμπειρίας του ατόμου και δεν αποσκοπεί στην ανακάλυψη μιας αντικειμενικής πραγματικότητας. (von Glasersfeld, 1990, σσ. 22-23).

Η πρώτη από τις αρχές αυτές δίνει βαρύτητα στην υπευθυνότητα του ατόμου για την απόκτηση των γνώσεών του, καθώς οι γνώσεις δεν είναι δυνατό να μεταφερθούν απευθείας από το περιβάλλον μέσα στη σκέψη του ατόμου. Η δεύτερη αρχή τονίζει ότι οι γνώσεις που κατασκευάζονται δεν οδηγούν πάντοτε στη σίγουρη γνώση του κόσμου. Η διαδικασία που βοηθά το άτομο να γνωρίσει τον κόσμο είναι η προσαρμογή μέσα από τις διαδικασίες της αφομοίωσης και της συμμόρφωσης, οι οποίες σύμφωνα με τον Piaget (1937), εναρμονίζουν τις γνώσεις που κατασκευάζει το άτομο με τον κόσμο των βιωμάτων του. Ορίζεται έτσι μια διαλεκτική σχέση μεταξύ της εμπειρίας και της γνώσης, σύμφωνα με την οποία η γνώση κατασκευάζεται μέσα από τις εμπειρίες και η ερμηνεία των εμπειριών επηρεάζεται από τις προηγούμενες γνώσεις. Η σχέση μεταξύ γνώσης και εμπειρίας διαμορφώνεται με βάση τους σκοπούς του ατόμου, που είναι η εξήγηση, η πρόβλεψη και ο έλεγχος των εμπειριών (Μπούφη, 1996, σ. 472).

Έτσι, αναδύεται μια νέα θεώρηση της μάθησης και διδασκαλίας των Μαθηματικών σύμφωνα με την οποία, ο μαθητής έχει ενεργητικό ρόλο στην απόκτηση της νέας γνώσης, καθώς ο ίδιος την κατασκευάζει αναδιοργανώνοντας τις υπάρχουσες γνωστικές δομές και απομακρύνοντας τα εμπόδια που παρουσιάζονται κατά την πρόσκτηση της νέας γνώσης. Αυτό επιτυγχάνεται μέσα από καταστάσεις σύγκρουσης, σύγχυσης ή έκπληξης (Μπούφη, 1996, σ. 473). Σύμφωνα με τον ριζοσπαστικό κονστρουκτιβισμό, η μάθηση των Μαθηματικών αντιμετωπίζεται ως μια οργανωμένη προσπάθεια του ατόμου να επιλύσει αυτό που θεωρεί ως προβληματική κατάσταση στον κόσμο της άμεσης εμπειρίας του.

❖ *Η θεωρία δράσης*

Καθώς η θεωρία του κονστρουκτιβισμού δίνει ιδιαίτερη σημασία στο ρόλο του ατόμου και αντιμετωπίζει τη διαδικασία μάθησης ως μια ατομική διαδικασία, παραγκωνίζεται ο ρόλος του εκπαιδευτικού. Η αντίδραση ήταν η ανάπτυξη της κοινωνικο-πολιτισμικής θεωρίας του Vygotsky (1978), βασική ιδέα της οποίας είναι ότι "οι κοινωνικές σχέσεις ή οι σχέσεις ανάμεσα στους ανθρώπους …είναι η αιτία όλων των ανώτερων νοητικών λειτουργιών" (σ. 57). Η παιδαγωγική έκφανση της συγκεκριμένης θεωρίας είναι η θεωρία δράσης (activity theory), η οποία δίνει ιδιαίτερη έμφαση στην κοινωνική και πολιτισμική προέλευση της γνώσης και τονίζει το σημαντικό ρόλο του περιβάλλοντος στη διαδικασία απόκτησης γνώσης από το άτομο (Κολέζα, 2000, σ. 38). Η θεωρία δράσης του Vygotsky επικεντρώνεται στην εσωτερίκευση η οποία γίνεται κατανοητή ως ο μετασχηματισμός μιας διαψυχολογικής διαδικασίας (μεταξύ ατόμων) σε ενδοψυχολογική διαδικασία (μέσα στο ίδιο το άτομο) (Κολέζα, 2000, σ. 38). Στο πλαίσιο της μαθησιακής διαδικασίας επισημαίνεται ο εξέχων ρόλος του διδάσκοντα, ο οποίος συμβάλλει αποφασιστικά στην πρόσκτηση γνώσεων από τους μαθητές, παρέχοντάς τους τα κατάλληλα νοητικά εργαλεία για να στηρίξουν τη σκέψη τους.

Παρατηρούμε ότι ενώ στον ριζοσπαστικό κονστρουκτιβισμό υπεύθυνο για την απόκτηση γνώσεων είναι το ίδιο το άτομο, στη θεωρία δράσης του Vygotsky υπεύθυνο είναι το κοινωνικο-πολιτισμικό περιβάλλον. Στην πρώτη περίπτωση το άτομο είναι το υποκείμενο, ενώ στη δεύτερη είναι το αντικείμενο πολιτισμικών επιρροών, εσωτερικεύοντας τη μαθηματική γνώση που ενυπάρχει στο περιβάλλον.

Όμως παρόλο που οι δύο θεωρίες μάθησης φαίνονται εκ διαμέτρου αντίθετες, ωστόσο ο Cobb (1994) υποστηρίζει ότι οι δύο θέσεις είναι συμπληρωματικές, και επομένως θα χρειαστεί προσοχή ώστε να ληφθούν υπόψη και το ατομικό και το κοινωνικό στοιχείο στη διαδικασία κατασκευής της γνώσης. Κατά την άποψη της Κολέζα (2000, σ. 44), η συμπληρωματικότητα αυτή στηρίζεται στο ότι στη διαδικασία απόκτησης γνώσης πρέπει να υπάρχει και ένα ενεργητικό άτομο και ένα ενεργητικό περιβάλλον. Δηλαδή, στη διδακτική πράξη είναι δυνατό ο διδάσκων να ενθαρρύνει τους μαθητές να κατασκευάζουν μόνοι τους τη γνώση (κονστρουκτιβισμός) και παράλληλα να τους παρέχει δραστηριότητες και μαθηματικούς τρόπους έκφρασης προς μίμηση, ώστε να στηρίξουν τη σκέψη τους (θεωρία δράσης).

Σ' αυτήν ακριβώς τη σύζευξη και συμπληρωματικότητα του κονστρουκτιβισμού και της θεωρίας δράσης στηρίχθηκε η διδασκαλία με βάση την οποία προωθήθηκε και εφαρμόστηκε το διδακτικό σχήμα που περιγράφηκε παραπάνω.

❖ *Η τεχνική της μεταγνώσης*

Η μεταγνώση αναφέρεται στη συνειδητή γνώση του ατόμου σχετικά με τις γνωστικές του λειτουργίες και την πορεία που ακολουθεί η σκέψη του. Συγκεκριμένα αναφέρεται στη γνώση του ατόμου για τις γνώσεις ή τις πληροφορίες που κατέχει το ίδιο, στη γνώση της στρατηγικής που πρέπει να ακολουθήσει για να επιτύχει τους μαθησιακούς του στόχους και στο τι σκέφτεται ή αισθάνεται το άτομο την ώρα που ασχολείται με την επίλυση μιας προβληματικής κατάστασης (Πασχάλης, 2000, σ. 61). Σύμφωνα με το Flavell "η μεταγνώση αναφέρεται στη γνώση κάποιου για τις γνωστικές του λειτουργίες και τα προϊόντα τους ή οτιδήποτε σχετίζεται με αυτές…η μεταγνώση αναφέρεται, μεταξύ άλλων, στον ενεργητικό έλεγχο και στη συνακόλουθη ρύθμιση και οργάνωση αυτών των λειτουργιών σε σχέση με γνωστικά αντικείμενα πάνω στα οποία στηρίζονται, συνήθως προς όφελος κάποιου συγκεκριμένου, αντικειμενικού σκοπού (Flavell, 1976, σ. 232).

Οι βασικές δεξιότητες της μεταγνώσης, σύμφωνα με τον Brown (1978), περιλαμβάνουν την πρόγνωση των συνεπειών μιας πράξης ή γεγονότος, τον έλεγχο των αποτελεσμάτων των πράξεων (τα κατάφερα;), την τροποποίηση μιας δραστηριότητας που συντελείται (πώς τα πάω;), τον έλεγχο της πραγματικότητας (είναι αυτό λογικό;) και διάφορες άλλες συμπεριφορές οι οποίες συντονίζουν και ελέγχουν τις προσπάθειες για μάθηση και λύση προβληματικών καταστάσεων. Παράλληλα, επισημαίνει τα θεμελιώδη χαρακτηριστικά της μεταγνώσης, την *αυτοεξέταση* και την *αυτορρύθμιση* (Brown & Deloache, 1983, σσ. 194).

Ο ρόλος της μεταγνώσης είναι καθοριστικός στο πλαίσιο της μαθησιακής διαδικασίας και η ενσωμάτωση διδακτικών πρακτικών στην καθημερινή διδακτική πραγματικότητα επισημαίνεται από πολλούς ερευνητές. Η κατοχή μεταγνωστικών δεξιοτήτων συνεισφέρει στην αποτελεσματική μάθηση μέσα από την αυτενέργεια του μαθητή, συμβάλλει στην αυτομόρφωσή του και στην αυτοβελτίωσή του. Η προσέγγιση και επίλυση προβληματικών καταστάσεων γίνεται αποτελεσματικότερη μέσα από την κατοχή και εφαρμογή των μεταγνωστικών χαρακτηριστικών του μαθητή (Πασχάλης, 2000, Τριλιανός, 1992, Brown & Deloache, 1992, Stillman & Galbraith, 1998, Schoenfeld, 1985a, 1987, 1992, Lester, 1989).

Λαμβάνοντας υπόψη τα βασικά χαρακτηριστικά του κοστρουκτιβισμού, της θεωρίας δράσης και της τεχνικής της μεταγνώσης, δημιουργήθηκε το διδακτικό πλαίσιο στο οποίο στηρίχθηκε η διδακτική παρέμβαση που πραγματοποιήθηκε στην πειραματική ομάδα. Τα βασικά χαρακτηριστικά του πλαισίου αυτού είναι τα εξής[49]:

• Η διδασκαλία έχει ως κύριο στόχο να βοηθήσει τους μαθητές να κατασκευάσουν τα δικά τους μαθηματικά νοήματα των εννοιών με ενεργητικό τρόπο. Δηλαδή ο διδάσκων δεν μεταδίδει έτοιμες γνώσεις στους μαθητές, αλλά παρέχει τα απαραίτητα νοητικά εργαλεία πάνω στα οποία θα στηριχθεί η νέα γνώση την οποία όμως οι ίδιοι οι μαθητές θα κατασκευάσουν. Ο ρόλος του εκπαιδευτικού είναι καθοδηγητικός και συνεργατικός και στοχεύει στην αυτενέργεια των μαθητών. Ακόμη υπάρχει αλληλεπίδραση μεταξύ δασκάλου και μαθητών, καθώς ο πρώτος αποτελεί πηγή γνώσης για τους μαθητές, αλλά και οι μαθητές συμβάλλουν στην παραγωγή νέας γνώσης (π.χ. στρατηγικές που δεν είχε υπόψη του ο δάσκαλος) και συνεισφέρουν αποτελεσματικά στην οργάνωση της διδασκαλίας.

• Προέχει η ανάλυση του τρόπου σκέψης των μαθητών, η μεθόδευση της νοητικής τους συμπεριφοράς που τους οδηγεί σε συγκεκριμένες μαθηματικές πρακτικές, είτε σωστές, είτε εσφαλμένες. Δηλαδή, δεν εξετάζεται μόνο η εξωτερική αντιμετώπιση μαθηματικών θεμάτων από τους μαθητές, αλλά κυρίως ο τρόπος με τον οποίο σκέφτονται για να καταλήξουν σ' αυτή την αντιμετώπιση. Αυτό αποτελεί ένα βασικό σημείο, καθώς μπορεί να οδηγήσει το διδάσκοντα σε σημαντικά συμπεράσματα σε ό,τι αφορά τη μαθητική συμπεριφορά και σε ανάλογη τροποποίηση της διδακτικής πρακτικής που υιοθετείται προς όφελος του μαθητή. Η Μπούφη αναφέρει σχετικά: "η οργάνωση που έχει η σκέψη των μαθητών πρέπει να ενδιαφέρει το δάσκαλο περισσότερο από τις δεξιότητες που μπορεί να διαθέτουν. Κάτι τέτοιο βέβαια δεν είναι εύκολο να εφαρμοστεί στη διδακτική πράξη. Τα ίδια τα διδακτικά βιβλία Μαθηματικών στηρίζονται στην

[49] Τα συγκεκριμένα χαρακτηριστικά προέκυψαν από το συνδυασμό των χαρακτηριστικών που δίνουν η Μπούφη (1996), ο Χατζηγεωργίου (1998) και ο Brown (1978), από την τροποποίησή τους για τις ανάγκες της συγκεκριμένης διδασκαλίας στο πλαίσιο της παρούσας έρευνας, και τη συμπλήρωσή τους με δικά μας στοιχεία, αντλημένα όμως από τον κονστρουκτιβισμό, τη θεωρία δράσης και τη θεωρία της μεταγνώσης.

υπόθεση ότι υπάρχει πλήρης αντιστοιχία μεταξύ της εξωτερικής συμπεριφοράς των μαθητών και της οργάνωσης της σκέψης τους. Γι' αυτό και υποδεικνύουν στους μαθητές να χρησιμοποιούν στρατηγικές που αντιστοιχούν σε προοδευτικά ανώτερα επίπεδα κατανόησης, και δεν τους αφήνουν περιθώρια να εκφράσουν τις δικές τους στρατηγικές" (Μπούφη, 1996, σ. 484).

- Η συζήτηση κατά την οποία γίνεται διαπραγμάτευση μαθηματικών νοημάτων ευνοεί την εξωτερίκευση του τρόπου σκέψης των μαθητών, τη δημιουργία γνωστικής σύγκρουσης, την αναδιοργάνωση της σκέψης, την οικοδόμηση της νέας γνώσης, αλλά και την έκφραση ιδεών και πρακτικών για την αντιμετώπιση προβληματικών καταστάσεων. Μέσα από τη συζήτηση αυτή οι μαθητές έχουν την ευκαιρία να εκφράσουν τις αντιλήψεις τους για το εκάστοτε διαπραγματευόμενο θέμα και να ακούσουν την άποψη των συμμαθητών τους, να συμφωνήσουν ή να διαφωνήσουν με αυτή.
- Τα λάθη των μαθητών αποτελούν σημαντικό εργαλείο για την προσπάθεια οικοδόμησης της γνώσης, καθώς μέσα από την ανάλυσή τους δίνεται η δυνατότητα στο διδάσκοντα να κατανοήσει την οργάνωση της σκέψης του μαθητή και να παρέμβει ανάλογα. Η θεώρηση της πλάνης[50] ως αποτέλεσμα κάποιας διαδικασίας που πρέπει να αναθεωρηθεί, η ανάλυση και η θεραπεία της, συντελούν στην προαγωγή της γνώσης (Τρούλης, 1996, σ.16.)
- Η νέα γνώση προσεγγίζεται με ανοιχτότητα και προβληματισμό. Γίνεται σαφές στους μαθητές ότι υπάρχουν πολλαπλές διαδικασίες για την αντιμετώπιση προβληματικών καταστάσεων και κάποιες φορές (όπως στην περίπτωση της εκτίμησης) πολλαπλές λύσεις μπορούν να είναι ορθές. Επίσης, κάποιες φορές η ορθή λύση εξαρτάται από το συγκείμενο ή τα αριθμητικά δεδομένα (περιπτώσεις εκτίμησης).
- Λαμβάνονται υπόψη οι προηγούμενες γνώσεις των μαθητών, οι οποίες με κατάλληλο τρόπο ενεργοποιούνται με τη βοήθεια του διδάσκοντα, καθώς πάνω σε αυτές θα στηριχθούν οι νέες γνώσεις. Ο μαθητής θα πρέπει να κάνει τις απαραίτητες συνδέσεις, τόσο μεταξύ των στοιχείων της νέας γνώσης, όσο και μεταξύ αυτών και των στοιχείων προηγούμενων γνώσεων.
- Τα φύλλα δραστηριοτήτων που δίνονται στους μαθητές έχουν ως στόχο να δώσουν την ευκαιρία στους μαθητές να εφαρμόσουν τις νέες γνώσεις, αλλά και να τις οικοδομήσουν, να τις αναπτύξουν σε μεγαλύτερη έκταση.
- Ενθαρρύνονται οι μαθητές να κάνουν προβλέψεις (εκτιμήσεις) για το αποτέλεσμα μιας πράξης, για το κόστος εφαρμογής μιας προσπάθειας, για την αποτελεσματικότητα του κριτηρίου που εφαρμόζουν ως προς τη βεβαιότητα για την ορθότητα της πράξης ή ως προς την καταλληλότητά του για τη συγκεκριμένη προβληματική κατάσταση (εκτίμηση ανάλογα με το συγκείμενο ή τα αριθμητικά δεδομένα) και κάνουν τις κατάλληλες επιλογές.
- Ενθαρρύνονται οι μαθητές να προβαίνουν σε συστηματικό έλεγχο των μαθηματικών ενεργειών τους, εφαρμόζοντας κριτήρια ελέγχου σε όλο το εύρος των δραστηριοτήτων που εκπονούν, επιτυγχάνοντας κατ' αυτό τον τρόπο την άμεση ανατροφοδότησή τους, αυτοαξιολόγηση και αυτοβελτίωση.

[50] Η πλάνη διαφοροποιείται από το σφάλμα καθώς είναι προϊόν άγνοιας και επομένως ακούσια και δεν πρέπει να έχει κυρώσεις, ενώ το σφάλμα αποτελεί εκούσια εκτροπή από την αλήθεια και είναι γνώρισμα των ωρίμων (Τρούλης, 1992, σ. 187).

• Ενθαρρύνονται στον έλεγχο των δραστηριοτήτων που πραγματοποιούν κατά τη διάρκεια εκτέλεσής τους, συντονίζοντας κατ' αυτό τον τρόπο την προσπάθειά τους και προβαίνοντας στις απαραίτητες τροποποιήσεις εφόσον είναι απαραίτητο (π.χ. κατά την εκτέλεση μιας διαίρεσης κάνουν μερικούς ελέγχους).

• Ωθούνται στον έλεγχο της λογικότητας των αποτελεσμάτων των προβληματικών καταστάσεων με τις οποίες είναι αντιμέτωποι μέσα από αυτοερωτήσεις και αυτοαπαντήσεις (π.χ. ελέγχουν αν το αποτέλεσμα ενός πολλαπλασιασμού είναι λογικό ως προς την τάξη μεγέθους).

• Μαθαίνουν να εργάζονται μέσα σε συγκεκριμένο χρονικό πλαίσιο, οργανώνοντας κατάλληλα το διδακτικό χρόνο. Έτσι, έχουν επίγνωση του χρόνου που έχουν στη διάθεσή τους και συντονίζουν την προσπάθειά τους κάνοντας τις κατάλληλες επιλογές.

8.4. Όργανα της έρευνας

Τα όργανα που χρησιμοποιήθηκαν ως μεθοδολογικά εργαλεία προσανατολισμένα στην επίτευξη του κεντρικού ερευνητικού σκοπού και που συνιστούν βασικά πειστήρια τόσο για την εγκυρότητα των μεθόδων, όσο και για την εγκυρότητα της έρευνας στο σύνολό της, είναι το ερωτηματολόγιο και ένα οργανωμένο διδακτικό σχήμα.

8.4.1 Το διδακτικό σχήμα

Οι δραστηριότητες που απαρτίζουν το διδακτικό σχήμα που εφαρμόστηκε στην πειραματική ομάδα αναδύθηκαν έπειτα από τη θεωρητική θεμελίωση του εξεταζόμενου θέματος και βρίσκονται σε άμεση συνάφεια με τη συνολική του θεώρηση καθώς και με τα επιμέρους στοιχεία που το συναποτελούν. Συγκεκριμένα, δομείται σε κύριους άξονες που αποτελούν προϋποθέσεις για την ανάπτυξη της ικανότητας για εκτίμηση και έλεγχο των αλγορίθμων των τεσσάρων αριθμητικών πράξεων και καταλήγει στη διδασκαλία κριτηρίων εκτίμησης και ελέγχου. Η διδακτική παρέμβαση διήρκεσε τρεισήμισι μήνες περίπου-από 10 Ιανουαρίου 2002 έως 21 Απριλίου 2002-και οργανώθηκε σε πέντε κύριες φάσεις.

Παρακάτω δίνεται το διάγραμμα πάνω στο οποίο οργανώθηκε το διδακτικό σχήμα:

ΔΙΔΑΚΤΙΚΟ ΣΧΗΜΑ

α. Βασικές προαπαιτούμενες γνώσεις για την πραγματοποίηση εκτιμήσεων και ελέγχων

- *Υπολογισμός με δυνάμεις του 10 (Α΄ φάση)*
- *Ακριβείς νοεροί υπολογισμοί (Β΄ Φάση)*

β. Ειδικές τεχνικές για εύκολο νοερό υπολογισμό *(Β΄ Φάση)*

γ. Κριτήρια εκτίμησης των αλγορίθμων των τεσσάρων αριθμητικών πράξεων

- *Απλά κριτήρια διάταξης (Α΄ φάση)*
- *Εύρεση της τάξης μεγέθους (Γ΄ φάση)*
- *Εκτίμηση με στρογγυλοποίηση (Δ΄ φάση)*

δ. Κριτήρια ελέγχου των αλγορίθμων των τεσσάρων αριθμητικών πράξεων *(Ε΄ φάση)*

- *Πλήρεις δοκιμές και μερικά κριτήρια που απορρέουν απ' αυτές*
- *Κριτήρια ελέγχου που βασίζονται στις ιδιότητες των ισοϋπόλοιπων αριθμών*

ε. Επαναλήψεις

Τα βασικά στοιχεία που συμπεριλαμβάνονται στο παραπάνω διδακτικό σχήμα οργανώθηκαν, αναλύθηκαν σε επιμέρους σημεία και αποτέλεσαν αντικείμενο διδασκαλίας που πραγματοποιήθηκε σε πέντε κύριες φάσεις οι οποίες περιλαμβάνουν επιμέρους ενότητες και περιγράφονται παρακάτω αναλυτικά.

Οι δραστηριότητες που συμπεριλήφθησαν αφορούσαν σε πράξεις με απλά αριθμητικά δεδομένα, χωρίς την παρουσία συγκείμενου. Βέβαια, θα πρέπει να σημειωθεί ότι υπάρχουν κριτήρια εκτίμησης και ελέγχου που αφορούν σε προβλήματα με φυσικές ποσότητες, δηλαδή σε προβλήματα με συγκείμενο, όπου τα αριθμητικά δεδομένα αντιπροσωπεύουν φυσικές ποσότητες. Η επιπλέον δυσκολία που υπάρχει σε τέτοιου είδους προβλήματα είναι η εύρεση της αριθμητικής πράξης (ή των αριθμητικών πράξεων) που οδηγεί στη λύση του προβλήματος. Πρόκειται για τη σημασιολογική δομή του προβλήματος -αύξηση, σμίκρυνση, συνδυασμό, κ.λ.π.- (Λεμονίδης, 1999, σ. 122). και τις συντακτικές μεταβλητές -διαδοχή των πληροφοριών, τρόπος διατύπωσης των λέξεων που περιγράφουν τις αντίστοιχες πράξεις κ.λ.π.- (Λεμονίδης, 1999, σ. 122). Ωστόσο, διδακτικές έρευνες έχουν δείξει ότι οι μαθητές έχουν καλύτερη επίδοση σε προβλήματα εκτίμησης με φυσικές ποσότητες, τονίζοντας τη σημασία του συγκείμενου, παρά σε εκτίμηση πράξεων με απλά αριθμητικά δεδομένα[51] (Reys et al., 1980, Gliner, 1991, Reys et al., 1991).

Παρόλο που αυτά τα κριτήρια δεν αποτελούν το κύριο θέμα που εξετάζουμε, ωστόσο εμπεριέχονται σε κάποια σημεία (βλ. παρακάτω την περιγραφή του διδακτικού σχήματος) τέτοιου είδους δραστηριότητες – με μία αριθμητική πράξη – καθώς, αφενός θεωρείται ότι συμβάλλει στην βαθύτερη κατανόηση του θέματος και αφετέρου έχει

[51] Βέβαια θα πρέπει να σημειωθεί ότι παρόλο που το συγκείμενο με φυσικές ποσότητες δείχνει να βοηθάει, ωστόσο είναι πιθανόν να περιπλέξει την κατάσταση αν περιέχει λεκτικές οντότητες μη οικείες στους μαθητές (Sowder, 1992, p. 375). Ο Λεμονίδης θεωρεί ότι οι συντακτικές μεταβλητές (διαδοχή των πληροφοριών, τρόπος διατύπωσης των λέξεων που περιγράφουν τις αντίστοιχες πράξεις κ.λ.π.) επηρεάζουν τη λύση των προβλημάτων (Λεμονίδης, 1999, σ. 122).

ιδιαίτερη σημασία μέσα στο πλέγμα της μαθησιακής διαδικασίας, επειδή συνδέεται με το γενικότερο στόχο της μαθηματικής εκπαίδευσης για χρήση των Μαθηματικών στην καθημερινή ζωή (Gliner, 1991, p. 595).

Οι βασικές προαπαιτούμενες γνώσεις για την πραγματοποίηση εκτιμήσεων και ελέγχων, όπως άλλωστε διαπιστώνεται και στη θεωρητική εξέταση του θέματος (βλ. §7.4), είναι η ικανότητα υπολογισμού ακεραίων και δεκαδικών με θετικές και αρνητικές δυνάμεις του 10, καθώς και η ικανότητα εκτέλεσης ακριβών νοερών υπολογισμών ακεραίων και δεκαδικών που έχουν το ψηφίο της μεγαλύτερης τάξης ή τα ψηφία των δύο μεγαλύτερων τάξεων διαφορετικά από το μηδέν.

Στη συνέχεια προβλέπεται η διδασκαλία ειδικών τεχνικών για εύκολο και γρήγορο νοερό ακριβή υπολογισμό. Η ενότητα αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως προηγούμενη γνώση για τη διαδικασία της εκτίμησης, αφού για να είναι ευχερής ο νοερός κατά προσέγγιση υπολογισμός είναι δυνατό να γίνει προσέγγιση με αριθμούς με τους οποίους υπολογίζεται εύκολα το αποτέλεσμα με βάση τις τεχνικές αυτές. Η συγκεκριμένη ενότητα περιέχει αρκετά εύκολες τεχνικές που απευθύνονται στο σύνολο των μαθητών της πειραματικής ομάδας, αλλά και κάποιες τεχνικές που θεωρούνται δύσκολες και απευθύνονται μόνο σε ορισμένους μαθητές που έχουν τη δυνατότητα να τις κατανοήσουν και να τις εφαρμόσουν.

Κατόπιν, προβλέπεται με βάση το διδακτικό σχήμα, η διδασκαλία στρατηγικών για την πραγματοποίηση εκτιμήσεων του μεγέθους των αποτελεσμάτων των πράξεων. Έτσι, συμπεριλαμβάνεται η διδασκαλία της εύρεσης της τάξης μεγέθους του αποτελέσματος μιας αριθμητικής πράξης (βλ. §5.3.2.1) καθώς και η εκτίμηση του αποτελέσματος με στρογγυλοποίηση (βλ. §5.3.2.2). Θα πρέπει να σημειωθεί ότι ο βασικός κανόνας στρογγυλοποίησης στα πλησιέστερα πολλαπλάσια του 10 (ανάλογα σε ποιο ψηφίο θέλουμε να κάνουμε τη στρογγυλοποίηση) διδάχθηκε στο πλαίσιο της συνήθους διδασκαλίας που πραγματοποιήθηκε με βάση το διδακτικό εγχειρίδιο της Στ΄ Δημοτικού στο τέλος Νοεμβρίου 2001.

Μετά συμπεριλαμβάνονται οι δοκιμές των αριθμητικών πράξεων, οι οποίες αποτελούν κριτήρια ελέγχου. Η παρουσία τους μετά τις στρατηγικές εκτίμησης δικαιολογείται, καθώς κατά την εφαρμογή τους υπάρχει η δυνατότητα εκτίμησης ως κριτήριο ελέγχου, στην περίπτωση εφαρμογής ενός ελλιπούς κριτηρίου, π.χ. του "σταυρού" για τον πολλαπλασιασμό, προκειμένου να αποφύγουμε λάθη που έχουν σχέση με τη θέση της υποδιαστολής ή των αριθμό των μηδενικών.

Τέλος, ακολουθούν επαναλήψεις που αφορούν στο σύνολο της ύλης που διδάχτηκε στο πλαίσιο του διδακτικού σχήματος, όπου υπάρχει η δυνατότητα επανεξέτασης σημείων που τυχόν δεν κατανοήθηκαν επαρκώς.

Παρακάτω περιγράφονται αναλυτικά οι πέντε φάσεις της διδακτικής παρέμβασης:

ΟΙ ΦΑΣΕΙΣ ΤΗΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗΣ

(Αναλυτικό διάγραμμα)

- ***Α΄ φάση:* Υπολογισμός με δυνάμεις του 10 και με αριθμούς του τύπου $\nu x 10^{\mu}$ με $\nu \in N^*$, $0<\nu<100$ και $\mu \in Z$ *(10 Ιανουαρίου-31 Ιανουαρίου, 12 διδακτικές ώρες)***

Η πρώτη φάση – υπολογισμός με δυνάμεις του 10 – αποτελεί βασική προαπαιτούμενη γνώση για την κατανόηση και εκμάθηση κριτηρίων εκτίμησης και ελέγχου (βλ. §7.4). Πρόκειται για ακριβή, νοερό υπολογισμό στις πράξεις του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης. Κάποιες από τις συγκεκριμένες γνώσεις συμπεριλαμβάνονται στην ύλη της Γ΄ και Δ΄ Δημοτικού (πολλαπλασιασμός και διαίρεση ακεραίων με θετικές δυνάμεις του 10) καθώς και στην ύλη της Ε΄ Δημοτικού (πολλαπλασιασμός και διαίρεση δεκαδικών με θετικές δυνάμεις του 10). Ωστόσο αυτές παρουσιάζονται με αποσπασματικό τρόπο χωρίς να ενοποιούνται με τις υπόλοιπες ενότητες των Μαθηματικών και κατά συνέπεια αποτελούν μια σαθρή βάση για τη στήριξη των κριτηρίων εκτίμησης και ελέγχου.[52] Εξάλλου ο νοερός υπολογισμός με αρνητικές δυνάμεις του 10 παραγκωνίζεται εντελώς από τα διδακτικά εγχειρίδια.

Οι ενότητες που συμπεριλαμβάνονται στην πρώτη φάση αποτελούν μια αλυσίδα γνώσεων, στην οποία οι προηγούμενοι κρίκοι αποτελούν προαπαιτούμενα για κάθε επόμενο. Κάθε ενότητα ενδεχομένως περιέχει και κάποιες υποκατηγορίες, καθεμιά από τις οποίες απαιτεί διαφορετική αντιμετώπιση και επομένως έχει ιδιαίτερη σημασία να διαπιστωθεί η ικανότητα του μαθητή να διαχειρίζεται τις διαφορετικές αυτές περιπτώσεις.

Στη συνέχεια περιγράφονται οι επιμέρους ενότητες που συμπεριλαμβάνονται στη φάση αυτή, καθώς και υποκατηγορίες περιπτώσεων που ενδεχομένως υπάρχουν σε κάθε ενότητα.

α) Πολλαπλασιασμός ακεραίων με θετικές δυνάμεις του 10[53]

i) ο αριθμός δεν έχει μηδενικά ψηφία στο τέλος

ii) ο αριθμός έχει μηδενικά ψηφία στο τέλος

β) Πολλαπλασιασμός δεκαδικών με θετικές δυνάμεις του 10

i) ο αριθμός των δεκαδικών ψηφίων του αριθμού υπερβαίνει τον εκθέτη της δύναμης του 10 (π.χ. 45,347·100)

ii) ο αριθμός των δεκαδικών ψηφίων είναι ίδιος με τον εκθέτη της δύναμης του 10 (π.χ. 84,32·100)

iii) ο αριθμός των δεκαδικών ψηφίων είναι μικρότερος από τον εκθέτη της δύναμης του 10 (π.χ. 9,74·10000)

γ) Διαίρεση ακεραίων με θετικές δυνάμεις του 10

i)ο αριθμός των ψηφίων του αριθμού υπερβαίνει τον εκθέτη της δύναμης του10 (π.χ. 8954:100)

ii) ο αριθμός των ψηφίων του αριθμού είναι ίδιος με τον εκθέτη της δύναμης του 10 (π.χ. 6547:10000)

iii)ο αριθμός των ψηφίων του αριθμού είναι μικρότερος από τον εκθέτη της δύναμης του 10 (π.χ. 214:100000)

δ) Διαίρεση δεκαδικών με θετικές δυνάμεις του 10.

i)ο αριθμός των ακέραιων ψηφίων του αριθμού υπερβαίνει τον εκθέτη της δύναμης του10 (π.χ. 1542,35:100)

ii)ο αριθμός των ακέραιων ψηφίων είναι ίδιος με τον εκθέτη της δύναμης του 10 (π.χ. 452,154:1000)

iii)ο αριθμός δεν έχει ακέραιο μέρος (π.χ. 0,145:1000)

iv)ο αριθμός των ακέραιων ψηφίων είναι μικρότερος από τον εκθέτη της δύναμης του 10 (π.χ. 452,154:100000)

---

[52] Σχετική έρευνα που πραγματοποιήθηκε από τον Κούρκουλο 1997 έδειξε ότι οι μαθητές παρουσιάζουν αρκετά χαμηλά ποσοστά επίδοσης.

[53] Πολλαπλασιασμοί του τύπου μχκ, όπου $\mu \in \mathrm{N}$, $\kappa = 10^{\nu}$, $\nu \in \mathrm{N}$.

ε) Πολλαπλασιασμός ακεραίων και δεκαδικών με αρνητικές δυνάμεις του10[54].

i)ο αριθμός των ακέραιων ψηφίων του αριθμού υπερβαίνει τον εκθέτη της δύναμης του10 -χωρίς δεκαδικό μέρος αρχικά και με δεκαδικό στη συνέχεια (π.χ. 475·0,1 και 1547,32·0,01)

ii)ο αριθμός των ακέραιων ψηφίων είναι ίδιος με τον εκθέτη της δύναμης του 10 (π.χ. 147·0,001 και 524,32·0,001)

iii)ο αριθμός δεν έχει ακέραιο μέρος (π.χ. 0,145·0,0001)

iv)ο αριθμός των ακέραιων ψηφίων είναι μικρότερος από τον εκθέτη της δύναμης του 10 (π.χ. 84·0,001 και 41,26·0,0001)

Σ' αυτό το σημείο δεν προβλέπεται ξεχωριστή διδασκαλία για τους δεκαδικούς και τους ακεραίους, καθώς και στις δύο κατηγορίες αριθμών ο πολλαπλασιασμός με αρνητικές δυνάμεις του 10 απαιτεί μετακίνηση της υποδιαστολής.

στ) Διαίρεση ακεραίων και δεκαδικών με αρνητικές δυνάμεις του10.

i) ο αριθμός των δεκαδικών ψηφίων του αριθμού υπερβαίνει τον εκθέτη της δύναμης του 10 (π.χ. 452,154:0,01)

ii) ο αριθμός των δεκαδικών ψηφίων είναι ίδιος με τον εκθέτη της δύναμης του 10 (π.χ. 1487,34:0,01)

iii)ο αριθμός είναι ακέραιος (π.χ. 654:0,001)

iv) ο αριθμός των δεκαδικών ψηφίων είναι μικρότερος από τον εκθέτη της δύναμης του 10 (π.χ. 954,21:0,0001)

ζ) Πολλαπλασιασμός ακεραίων που έχουν το ψηφίο της μεγαλύτερης τάξης μη μηδενικό[55].

η) Πολλαπλασιασμός δεκαδικών που έχουν το ψηφίο της μεγαλύτερης τάξης μη μηδενικό[56] (περιλαμβάνονται και περιπτώσεις που ο ένας παράγοντας είναι ακέραιος).

θ) Διαίρεση ακεραίων από τους οποίους ο διαιρετέος έχει το ψηφίο της μεγαλύτερης τάξης ή τα ψηφία των δύο μεγαλύτερων τάξεων μη μηδενικά και ο διαιρέτης έχει το ψηφίο της μεγαλύτερης τάξης μη μηδενικό[57] (με πηλίκο ακέραιο)

i)τα μηδενικά του διαιρετέου είναι όσα τα μηδενικά του διαιρέτη (π.χ. 5600:800

ii)τα μηδενικά του διαιρετέου είναι περισσότερα απ' αυτά του διαιρέτη (π.χ. 36000:800)

iii)ο διαιρετέος έχει μόνο το ψηφίο της μεγαλύτερης τάξης του διαφορετικό από το μηδέν και το πρώτο ψηφίο του διαιρετέου είναι μικρότερο από το πρώτο ψηφίο του διαιρέτη (π.χ. 40000:500)

ι) Διαίρεση ακεραίων και δεκαδικών από τους οποίους ο διαιρετέος έχει το ψηφίο της μεγαλύτερης τάξης ή τα ψηφία των δύο μεγαλύτερων τάξεων μη μηδενικά και ο διαιρέτης έχει το ψηφίο της μεγαλύτερης τάξης μη μηδενικό[58], με πηλίκο ακέραιο

i)τα δεκαδικά ψηφία του διαιρετέου είναι περισσότερα απ' αυτά του διαιρέτη (π.χ. 0,0036:0,9)

---

[54] Πολλαπλασιασμοί του τύπου μxκ, όπου $\mu \in \mathbb{N}$, $\kappa=10^{\nu}$, $\nu \in \mathbb{Z}_{-}$

[55] Αριθμοί του τύπου $\nu x 10^{\mu}$ όπου $\nu \in \mathbb{N}^*$, $1<\nu<10$ και $\mu \in \mathbb{N}^*$, όπως π.χ. 300·40

[56] Αριθμοί του τύπου $\nu x 10^{\mu}$ όπου $\nu \in \mathbb{N}^*$, $1<\nu<10$ και $\mu \in \mathbb{Z}^*$, $\mu<0$, όπως π.χ. 0,03·0,8

[57] Ο διαιρετέος είναι του τύπου $\nu x 10^{\mu}$ όπου $\nu \in \mathbb{N}^*$, $1<\nu<100$ και $\mu \in \mathbb{N}^*$ και ο διαιρέτης είναι του τύπου $\nu x 10^{\mu}$ όπου $\nu \in \mathbb{N}^*$, $1<\nu<10$ και $\mu \in \mathbb{N}^*$, όπως π.χ. 3200:80

[58] Ο διαιρετέος είναι του τύπου $\nu x 10^{\mu}$ όπου $\nu \in \mathbb{N}^*$, $1<\nu<100$ και $\mu \in Z^*$ και ο διαιρέτης είναι του τύπου $\nu x 10^{\mu}$ όπου $\nu \in \mathbb{N}^*$, $1<\nu<10$ και $\mu \in Z^*$, όπως π.χ. 0,045:0,9

ii) τα δεκαδικά ψηφία του διαιρετέου είναι όσα τα δεκαδικά ψηφία του διαιρέτη (π.χ. 0,048:0,006)

iii) τα δεκαδικά ψηφία του διαιρετέου είναι λιγότερα απ' αυτά του διαιρέτη (π.χ. 3,2:0,008)

iv) ο διαιρέτης είναι μονοψήφιος ακέραιος (π.χ. 0,042:7)

v) ο διαιρέτης είναι ακέραιος με περισσότερα από ένα ψηφία -εκτός από το πρώτο, τα υπόλοιπα είναι μηδενικά (π.χ. 0,12:600)

vi) ο διαιρετέος είναι ακέραιος (π.χ. 280:0,004)

Υπάρχουν και κάποιες περιπτώσεις με τον ένα όρο ή και τους δύο να έχουν τα δύο πρώτα ψηφία τους διαφορετικά από το μηδέν και το αποτέλεσμα να υπολογίζεται εύκολα π.χ. 200·1500 ή 0,75:0,0025.

Οι τελευταίες δραστηριότητες, που προϋποθέτουν όλες τις προηγούμενες διδαχθείσες γνώσεις, αποτελούν τον κεντρικό στόχο της συγκεκριμένης ενότητας: την ικανότητα για νοερό υπολογισμό στρογγυλοποιημένων αριθμών και κατ' επέκταση την εκτίμηση του αποτελέσματος πολλαπλασιασμών και διαιρέσεων.

Σ' αυτή τη φάση συμπεριλαμβάνεται η διδασκαλία κριτηρίων εκτίμησης και ελέγχου για τις πράξεις που περιγράφηκαν παραπάνω. Συγκεκριμένα διδάσκονται κριτήρια διάταξης ως εκτίμηση και ως έλεγχος καθώς και οι νοερές επαληθεύσεις για έλεγχο της ορθότητας του αποτελέσματος (βλ. σχετικά σ.). Για παράδειγμα για την πράξη 0,18:0,003 οι μαθητές εκτιμούν ότι το αποτέλεσμα θα είναι μεγαλύτερο από το διαιρετέο, θα είναι μεγαλύτερο από τη μονάδα – αφού στην επαλήθευση που είναι πολλαπλασιασμός το 0,003 μεγαλώνει, το υπολογίζουν και βρίσκουν 60, ελέγχουν και διαπιστώνουν ότι όντως είναι μεγαλύτερο από το 0,18 και τέλος εκτελούν τη δοκιμή νοερά π.χ. πολλαπλασιάζοντας το 0,003 με το 60 και βρίσκουν 0,18. Βέβαια η εφαρμογή των δοκιμών προϋποθέτει ότι οι μαθητές έχουν διδαχθεί τη δοκιμή π.χ. για τη διαίρεση δεκαδικών έχουν διδαχθεί πολλαπλασιασμό δεκαδικών και ασφαλώς στηρίζεται στην κατανόηση του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης ως αντίστροφες πράξεις, ενώ χρήσιμη είναι και η κατανόηση της πλήρους δοκιμής η οποία ενισχύεται από διδακτικά σχόλια του διδάσκοντα[59]. Η ενότητα προσφέρεται για τη διδασκαλία τέτοιων κριτηρίων γιατί αφενός τόσο τα κριτήρια διάταξης όσο και οι δοκιμές είναι απλές και εύκολες να γίνουν νοερά και αφετέρου γίνεται καλύτερη εμπέδωση της συγκεκριμένης ύλης που διδάσκεται, καθώς γίνεται επαρκής εξάσκηση και επιτυγχάνεται ενοποίηση του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης και αντίληψη της αντίστροφης σχέσης τους.

- ***Β΄ φάση: Ακριβείς νοεροί υπολογισμοί (1 Φεβρουαρίου-28 Φεβρουαρίου, 18 διδακτικές ώρες)***

Η δεύτερη φάση περιλαμβάνει δραστηριότητες για ακριβείς υπολογισμούς των αποτελεσμάτων των τεσσάρων πράξεων με ακεραίους και δεκαδικούς, καθώς και κάποιες τεχνικές για εύκολο υπολογισμό. Ο στόχος της συγκεκριμένης ενότητας είναι η απόκτηση της ικανότητας για ακριβή υπολογισμό του αποτελέσματος της πράξης με όρους τους στρογγυλοποιημένους αριθμούς που έχουν προκύψει προκειμένου να γίνει η εκτίμηση του αποτελέσματος μιας πράξης.

[59] Οι δοκιμές των πράξεων περιλαμβάνονται στην πέμπτη φάση διδασκαλίας.

Οι τεχνικές που περιλαμβάνονται σ' αυτή την ενότητα στοχεύουν στο να κάνουν ακόμη απλούστερο τον υπολογισμό στα πλαίσια μιας εκτίμησης. Ο ακριβής υπολογισμός των αποτελεσμάτων των τεσσάρων αριθμητικών πράξεων στηρίζεται στη καλή γνώση και στη δυνατότητα εφαρμογής των ιδιοτήτων των πράξεων και όχι σε αλγοριθμικές διαδικασίες από μνήμης. Ειδικότερα εμπλέκεται η διδασκαλία της προσεταιριστικής ιδιότητας για την πρόσθεση και την αφαίρεση και τον πολλαπλασιασμό, της αντιμεταθετικής για την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό και της επιμεριστικής για τον πολλαπλασιασμό και διαίρεση.

Εξάλλου, βασικός άξονας για τη διδασκαλία και εξάσκηση των μαθητών πάνω στους ακριβείς υπολογισμούς που εμπεριέχονται στην παρούσα φάση είναι η εφαρμογή κριτηρίων διάταξης, ως κριτήρια εκτίμησης αρχικά και κατόπιν ως κριτήρια ελέγχου.

Οι ενότητες που συμπεριλαμβάνονται σ' αυτή τη φάση είναι οι εξής:

α) Πρόσθεση

i)Πρόσθεση ακεραίων και δεκαδικών ίδιας τάξης που έχουν μόνο το ψηφίο της μεγαλύτερης τάξης μη μηδενικό (τύπου Α[60])

ii)Πρόσθεση ακεραίων και δεκαδικών διαφορετικής τάξης με το μεγαλύτερο προσθετέο του τύπου Α (π.χ. 8000+451 και 0,04+0,0088)

iii)Πρόσθεση ακεραίων και δεκαδικών ίδιας τάξης, ο ένας προσθετέος είναι τύπου Α και ο άλλος προσθετέος έχει μόνο τα ψηφία των δύο μεγαλύτερων τάξεων μη μηδενικά (τύπου Β[61]) π.χ. 700+420 και 0,008+0,0032

iv)Πρόσθεση ακεραίων και δεκαδικών, ο ένας προσθετέος του τύπου Β (κατά μία τάξη μεγαλύτερος από τον άλλο) και ο άλλος προσθετέος του τύπου Α (π.χ. 8500+400 και 0,045+0,007)

v)Πρόσθεση ακεραίων και δεκαδικών ίδιας τάξης του τύπου Β (π.χ. 8900+3200 και 0,045+0,038)

vi)Πρόσθεση με περισσότερους από δύο προσθετέους

vii)Πρόσθεση αριθμού με το 0,9 , 9, 99, 999…

viii)Πρόσθεση αριθμού με το 90 , 990…

ix)Πρόσθεση αριθμού με το 101, 1001…

x)Πρόσθεση αριθμού με το 11, 111, 1111…

β) Αφαίρεση

i)Αφαίρεση ακεραίων και δεκαδικών του τύπου ίδιας τάξης τύπου Α (π.χ. 9000-5000 και 0,07-0,040

ii) Αφαίρεση ακεραίων και δεκαδικών διαφορετικής τάξης τύπου Α (π.χ. 9000-50 και 0,07-0,0004)

iii)Αφαίρεση ακεραίων και δεκαδικών, ο μειωτέος του τύπου Β (κατά μία τάξη μεγαλύτερος από τον αφαιρετέο) και ο αφαιρετέος του τύπου Α (π.χ. 6500-800 και 0,032-0,008

iv)Αφαίρεση ακεραίων και δεκαδικών ίδιας τάξης του τύπου Β (π.χ. 5600-2400 και 0,047-0,025)

iv)Αφαίρεση αριθμών όταν ο αφαιρετέος είναι 0,9 , 9, 99, 999…

v)Αφαίρεση αριθμών όταν ο αφαιρετέος είναι 90, 990…

[60] Στο εξής θα συμβολίζουμε με Α τους αριθμούς του τύπου $\nu x10^{\mu}$ όπου $\nu \in \mathbb{N}^*$, $1<\nu<10$ και $\mu \in \mathbb{Z}^*$

[61] Στο εξής θα συμβολίζουμε με Β τους αριθμούς του τύπου $\nu x10^{\mu}$ όπου $\nu \in \mathbb{N}^*$, $10<\nu<100$ και $\mu \in \mathbb{Z}^*$

vi)Αφαίρεση αριθμών όταν ο αφαιρετέος είναι 101, 1001…

vii)Αφαίρεση αριθμών όταν ο αφαιρετέος είναι 110, 1010…

viii)Αφαίρεση αριθμών όταν ο αφαιρετέος είναι 11, 111…

γ) Πολλαπλασιασμός

i)Πολλαπλασιασμός ακεραίων και δεκαδικών, ο ένας παράγοντας του τύπου Α και ο άλλος παράγοντας του τύπου Β (π.χ. 40·280 και 0,03·0,0078)

ii)Πολλαπλασιασμός ακεραίων και δεκαδικών του τύπου Β (π.χ. 520·470 και 0,014·0,41)

iii)Πολλαπλασιασμός αριθμού με 0,5 , 5, 50…

iv)Πολλαπλασιασμός αριθμού με 0,25 , 25, 250…

v)Πολλαπλασιασμός αριθμού με 1,5 , 15, 150…

vi)Πολλαπλασιασμός διψήφιου ακεραίου με 11

vii)Πολλαπλασιασμός αριθμού με 0,9 , 9, 99, 999…

viii)Πολλαπλασιασμός αριθμού με 90, 990…

ix)Πολλαπλασιασμός αριθμού με 101, 1001…

x)Πολλαπλασιασμός αριθμού με 110, 1010…

xi)Τετράγωνα διψήφιων ακεραίων που τελειώνουν σε 5

xii)Τετράγωνα των αριθμών 14, 15, 16

Ο πολλαπλασιασμός ακεραίων και δεκαδικών που έχουν μόνο το πρώτο ψηφίο τους διαφορετικό από το μηδέν, δηλαδή είναι του τύπου $\nu x10^{\mu}$ όπου $\nu \in \mathbb{N}^*$, $1<\nu<10$ και $\mu \in \mathbb{Z}^*$, δεν περιλαμβάνεται καθώς αποτελεί μέρος της πρώτης φάσης διδασκαλίας.

Εξάλλου, τα τετράγωνα των συγκεκριμένων διψήφιων αριθμών περιλαμβάνονται στο διδακτικό σχήμα και συνίσταται η αποστήθισή τους από τους μαθητές ώστε να έχουν περιθώρια ελιγμού σε περιπτώσεις εκτίμησης γινομένων όταν ο ένας όρος έχει το πρώτο ψηφίο του αναλογικά πολύ μικρότερο από το δεύτερο και συγκεκριμένα όταν το πρώτο ψηφίο είναι 1 και το δεύτερο 4, 5 ή 6 (περιπτώσεις κακών στρογγυλοποιήσεων, βλ. §5.3.2.2).

δ) Διαίρεση

i)Διαίρεση ακεραίων, ο διαιρετέος του τύπου Β και ο διαιρέτης του τύπου Α -με ακέραιο πηλίκο (π.χ. 9600:30)

ii)Διαίρεση δεκαδικών (τουλάχιστον ο ένας εκ των δύο όρων είναι δεκαδικός), ο διαιρετέος του τύπου Β και ο διαιρέτης του τύπου Α (0,048:0,3)

iii)Διαίρεση αριθμού με 0,5 , 5, 50, 500…

iv)Διαίρεση αριθμού με 0,25 , 25, 250…

Η διαίρεση ακεραίων και δεκαδικών που έχουν μόνο το πρώτο ψηφίο τους διαφορετικό από το μηδέν, δηλαδή είναι του τύπου $\nu x10^{\mu}$ όπου $\nu \in \mathbb{N}^*$, $1<\nu<10$ και $\mu \in \mathbb{Z}^*$, δεν περιλαμβάνεται σ' αυτή την ενότητα καθώς αποτελεί μέρος της πρώτης φάσης διδασκαλίας

Αντίθετα οι δραστηριότητες που συμπεριλήφθηκαν είναι σε άμεση συνάφεια με τις διαδικασίες εκτίμησης που διδάσκονται σε επόμενη φάση και που προϋποθέτουν στρογγυλοποίηση του διαιρετέου στο πρώτο ή στο δεύτερο ψηφίο και του διαιρέτη στο πρώτο ψηφίο

➢ ***Γ΄ φάση: εύρεση της τάξης μεγέθους (1 Μαρτίου έως 5 Μαρτίου, 5 διδακτικές ώρες)***

Η επόμενη φάση αφορά στην εύρεση της τάξη μεγέθους του αποτελέσματος μιας αριθμητικής πράξης, ικανότητα πολύ σημαντική και άμεσα συνδεδεμένη τόσο με τις διαδικασίες εκτίμησης όσο και με τις διαδικασίες ελέγχου (βλ. §5.3.2.1). Αποτελεί αναγκαία προϋπόθεση για το πέρασμα στις επόμενες φάσεις, ενώ ταυτόχρονα προϋποθέτει την κατανόηση των γνωστικών στοιχείων των προηγούμενων φάσεων. Η εύρεση της τάξης μεγέθους για κάθε πράξη διδάσκεται χωριστά, με υποκατηγορίες περιπτώσεων που αντιμετωπίζονται διαφορετικά. Εξάλλου, πρώτα εξετάζονται οι ακέραιοι και στη συνέχεια οι δεκαδικοί. Οι επιμέρους ενότητες που συνιστούν την Γ΄ φάση είναι οι εξής:

α) Πρόσθεση

i) οι δύο όροι έχουν ίδιο αριθμό ψηφίων

- η τάξη μεγέθους είναι ίδια με αυτή των προσθετέων
- η τάξη μεγέθους είναι κατά ένα μεγαλύτερη

ii) όταν έχουν διαφορετικό αριθμό ψηφίων

β) Αφαίρεση

i) οι δύο όροι έχουν ίδιο αριθμό ψηφίων

- η τάξη μεγέθους είναι ίδια με αυτή των προσθετέων
- η τάξη μεγέθους είναι κατά ένα μεγαλύτερη

ii) όταν έχουν διαφορετικό αριθμό ψηφίων

γ) Πολλαπλασιασμός

i) η τάξη μεγέθους συμπίπτει με το άθροισμα των τάξεων των δυο παραγόντων μειωμένο κατά ένα

ii) η τάξη μεγέθους συμπίπτει με το άθροισμα των τάξεων των δυο παραγόντων

δ) Διαίρεση

i) η τάξη μεγέθους είναι όση η διαφορά της τάξης του διαιρέτη από την τάξη του διαιρετέου αυξημένη κατά ένα

ii) η τάξη μεγέθους είναι όση η διαφορά της τάξης του διαιρέτη από την τάξη του διαιρετέου

Για τη βαθύτερη κατανόηση του θέματος δόθηκαν στους μαθητές και προβλήματα με αριθμητικά δεδομένα όπου απλά ζητούνταν η εύρεση της τάξης μεγέθους.

➢ ***Δ΄ φάση: εκτίμηση με στρογγυλοποίηση (6 Μαρτίου έως 6 Απριλίου, 15 διδακτικές ώρες)***

Η τέταρτη φάση είχε ως κέντρο αναφοράς την εκμάθηση διαδικασιών εκτίμησης. Ο υπολογισμός του αποτελέσματος της πράξης με τους στρογγυλοποιημένους αριθμούς είναι σε άμεση συνάφεια με τις προηγούμενες φάσεις οι οποίες αποτελούν έρεισμά του χωρίς να αντίκειται σε κάποιο σημείο σε αυτές.

α) Πρόσθεση

i)Στρογγυλοποίηση στο πρώτο ψηφίο και δύο προσθετέοι ii)Στρογγυλοποίηση στο πρώτο ψηφίο ο ένας προσθετέος και στο δεύτερο ο άλλος[62]

iii)Στρογγυλοποίηση στο δεύτερο ψηφίο και οι δύο προσθετέοι

β)Αφαίρεση

i)Στρογγυλοποίηση στο πρώτο ψηφίο και δύο όροι

ii)Στρογγυλοποίηση στο δεύτερο ψηφίο ο μειωτέος και στο πρώτο ο αφαιρετέος

iii)Στρογγυλοποίηση στο δεύτερο ψηφίο και οι δύο όροι

γ)Πολλαπλασιασμός

i)Στρογγυλοποίηση στο πρώτο ψηφίο και δύο παράγοντες

ii)Στρογγυλοποίηση στο πρώτο ψηφίο ο ένας παράγοντας και στο δεύτερο ο άλλος

iii)Στρογγυλοποίηση στο δεύτερο ψηφίο και οι δύο παράγοντες[63]

iv)Περιπτώσεις καλών και κακών στρογγυλοποιήσεων

δ) Διαίρεση

i)Στρογγυλοποίηση στο πρώτο ψηφίο και δύο όροι

ii)Στρογγυλοποίηση στο δεύτερο ψηφίο ο διαιρετέος και στο πρώτο ο διαιρέτης

iii)Στρογγυλοποίηση στο δεύτερο ψηφίο ο διαιρετέος και στο πρώτο ο διαιρέτης με τρόπο που να υπολογίζεται εύκολα το πηλίκο[64]

ε) Περιπτώσεις καλών και κακών στρογγυλοποιήσεων

Περιλαμβάνονται δραστηριότητες που αφορούν σε περιπτώσεις καλών και κακών στρογγυλοποιήσεων αρχικά για τον πολλαπλασιασμό και στη συνέχεια για τη διαίρεση μολονότι κάποια στοιχεία αυτής της περιοχής ενσωματώνονται στις γενικές διαδικασίες στρογγυλοποίησης που προαναφέρθηκαν προκειμένου να αιτιολογηθεί η στρογγυλοποίηση στο δεύτερο ψηφίο του ενός ή και των δυο όρων (βλ. §5.3.2.2).

Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι παρουσιάσαμε τη στρογγυλοποίηση στους μαθητές με βάση το συνήθη κανόνα, εκτός από την περίπτωση της διαίρεσης κατά την οποία ο διαιρετέος στρογγυλοποιείται στο δεύτερο ψηφίο με τρόπο που να υπολογίζεται εύκολα το πηλίκο.

Εξάλλου, μετά το πέρας των παραπάνω δραστηριοτήτων προβλέπεται η διδασκαλία εκτίμησης με στρογγυλοποίηση προς τα κάτω ή προς τα πάνω και των δύο όρων της πράξης ανάλογα με το συγκείμενο.

Τέλος, παρουσιάζονται κάποια προβλήματα που απαιτούν διαφορετικό είδος στρογγυλοποίησης (στο πρώτο ή στο δεύτερο ψηφίο ο ένας ή και οι δύο όροι) ανάλογα με το συγκείμενο ή ανάλογα με τα αριθμητικά δεδομένα (βλ. § 7.2.1).

---

[62] Στο δεύτερο ψηφίο στρογγυλοποιείται ο όρος που έχει το πρώτο του ψηφίο πολύ μικρότερο σε σχέση με το δεύτερο, ή το μεγαλύτερο όρο, αν οι δύο όροι της πράξης δε διαφοροποιούνται ως προς το κριτήριο αναλογίας πρώτου και δεύτερου ψηφίου ή είναι διαφορετικής τάξης (ισχύει και για τις άλλες πράξεις).

[63] Το σχήμα προέβλεπε στρογγυλοποίηση και των δύο όρων σ' αυτή την ενότητα για τις πράξεις της πρόσθεσης, της αφαίρεσης και του πολλαπλασιασμού, αλλά καθώς στον πολλαπλασιασμό είναι μια ιδιαίτερα κουραστική διαδικασία όταν γίνεται νοερά υπήρξε ελαστικότητα για τους μέτριους μαθητές οι οποίοι προέβαιναν σε τέτοια στρογγυλοποίηση όταν και οι δυο όροι είχαν το πρώτο τους ψηφίο πολύ μικρότερο σε σχέση με το δεύτερο και συγκεκριμένα όταν το πρώτο ψηφίο ήταν 1 και το δεύτερο 4, 5 ή 6.

[64] Για παράδειγμα στη διαίρεση 732567:297 ο διαιρετέος στρογγυλοποιείται και γίνεται 720000 και ο διαιρέτης 300 και έτσι το πηλίκο υπολογίζεται εύκολα αφού το 72 διαιρείται ακριβώς με το 3 (βλ. σχετικά σ.).

➢*Ε΄ φάση: Δοκιμές των τεσσάρων αριθμητικών πράξεων (8 Απριλίου έως 12 Απριλίου, 5 διδακτικές ώρες)*

Η τελευταία φάση περιλαμβάνει τη διδασκαλία των δοκιμών των τεσσάρων αριθμητικών πράξεων, οι οποίες αν και είναι σχετικά εύκολες ωστόσο τοποθετήθηκαν στο τέλος καθώς παρόλο που αποτελούν κριτήρια ελέγχου στο πλαίσιο τους υπάρχει η δυνατότητα να γίνει κάποια εκτίμηση[65]. Οι δοκιμές διδάσκονται ανά πράξη και γίνεται ο διαχωρισμός σε πλήρεις δοκιμές και μερικά κριτήρια ελέγχου που απορρέουν απ' αυτές και σε δοκιμές που βασίζονται στους ισοϋπόλοιπους αριθμούς. Οι επιμέρους ενότητες που περιλαμβάνονται σ' αυτή τη φάση είναι οι εξής:

α) Πρόσθεση
i)Πλήρεις δοκιμές
ii)Δοκιμές που βασίζονται στις ιδιότητες των ισοϋπόλοιπων αριθμών
β) Αφαίρεση
i)Πλήρεις δοκιμές
ii)Δοκιμές που βασίζονται στις ιδιότητες των ισοϋπόλοιπων αριθμών
γ) Πολλαπλασιασμός
i)Πλήρεις δοκιμές
ii)Δοκιμές που βασίζονται στις ιδιότητες των ισοϋπόλοιπων αριθμών
δ) Διαίρεση
i)Πλήρεις δοκιμές και το μερικό κριτήριο του υπολοίπου
ii)Δοκιμές που βασίζονται στις ιδιότητες των ισοϋπόλοιπων αριθμών

Στο τέλος της φάσης αυτής γίνεται κριτική επισκόπηση των διάφορων δοκιμών και συγκριτική ανάλυση ανάλογα με το κόστος εφαρμογής και τη βεβαιότητα που παρέχουν για την ορθότητα της πράξης.

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι μετά το πέρας κάθε μιας από τις πέντε φάσεις που περιγράφτηκαν παραπάνω το διδακτικό σχήμα προέβλεπε επαναλήψεις (5 διδακτικές ώρες) που αφορούσαν το σύνολο της συγκεκριμένης φάσης που αποπερατώνεται με την ελαστικότητα όμως να δίνεται ιδιαίτερη έμφαση σε σημεία που οι μαθητές θεωρούν δυσνόητα ή που δείχνουν να μην έχουν κατανοήσει επαρκώς. Εξάλλου κατά το τέλος και των πέντε φάσεων προβλέπονται επαναλήψεις που περιλαμβάνουν δραστηριότητες από το σύνολο του γνωστικού περιεχομένου του διδακτικού σχήματος.

Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι παρόλο που η οργάνωση και ο σχεδιασμός του διδακτικού σχήματος έγινε με λεπτομέρεια και ακρίβεια, ωστόσο χαρακτηρίζεται από ελαστικότητα στην εφαρμογή του, καθώς κατά τη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης ενδεχομένως να χρειαζόταν να γίνουν τροποποιήσεις ανάλογα με τις γνωστικές και ψυχολογικές ανάγκες των μαθητών, να δοθεί ιδιαίτερη έμφαση σε κάποια σημεία που ο διδάσκων θα επεσήμανε ή έπειτα από απαίτηση των ίδιων των μαθητών. Οι τροποποιήσεις πιθανότατα να προέκυπταν ύστερα από την επισήμανση στοιχείων που θα αναδεικνύονταν μέσα από την ίδια τη διδακτική παρέμβαση και που ίσως δεν είχαν προβλεφθεί στη θεωρητική ανάλυση του θέματος.

[65] Για παράδειγμα κατά τη διάρκεια της δοκιμής του πολλαπλασιασμού με διαίρεση (όταν βολεύει π.χ. όταν ο ένας όρος είναι 0,5 και διαιρούμε το γινόμενο με αυτό) γίνεται η εκτίμηση του αποτελέσματος ενός μερικού πολλαπλασιασμού για να γίνει έλεγχος αν το μερικό πηλίκο είναι σωστό.

Η εφαρμογή του διδακτικού σχήματος στηρίχτηκε στην επίδοση δραστηριοτήτων σε φωτοτυπημένη μορφή, τις οποίες οι μαθητές καλούνταν να επεξεργαστούν (βλ. §9.2.1).

8.4.2 Το ερωτηματολόγιο

1ο ερωτηματολόγιο

Το ερωτηματολόγιο που χρησιμοποιήθηκε για τον προέλεγχο (βλ. παράρτημα) σε πειραματική ομάδα και ομάδα ελέγχου, προκειμένου να διαπιστωθεί η ισοδυναμία τους, προέκυψε έπειτα από τροποποιήσεις και συμπληρώσεις, για τις ανάγκες της παρούσας έρευνας, ενός ερωτηματολόγιου κατασκευασμένου από τον Κούρκουλο (1998). Απαρτίζεται από 11 κεντρικά θέματα, καθένα από τα οποία συντίθεται από ερωτήματα που εξετάζουν την ίδια γνωστική περιοχή. Οι επόμενες μετρήσεις έγιναν με τη χρήση του ίδιου ερωτηματολογίου, ενώ στις δυο τελευταίες μετρήσεις (μετέλεγχος σε πειραματική ομάδα και ομάδα ελέγχου και τελικός έλεγχος σε πειραματική ομάδα) δόθηκε επιπλέον ένα φύλλο με 2 θέματα. Τα κεντρικά θέματα εξετάζουν γνώσεις που αφορούν τόσο στο υπό εξέταση θέμα, όσο και σε συγγενείς μαθηματικές περιοχές. Ο στόχος είναι να ανιχνευθεί η γνωστική κατάσταση του μαθητικού δυναμικού που εξετάζεται πάνω στα κριτήρια εκτίμησης και ελέγχου, ώστε να έχουμε μια εικόνα σχετικά με τον τρόπο που αντιμετωπίζεται το θέμα μέσα στην τρέχουσα σχολική-διδακτική πραγματικότητα. Επίσης, τα θέματα στοχεύουν στην ανίχνευση γνώσεων που αφορούν σε άλλες συγγενείς μαθηματικές περιοχές, ώστε μετά την ολοκλήρωση της διδακτικής παρέμβασης στην πειραματική ομάδα να ελεγχθεί ενδεχόμενη επίδραση σ’ αυτές. Όπως τονίζουν οι Κούρκουλος και Τζανάκης (2000, σ. 270) κριτήρια εκτίμησης και ελέγχου μπορούν να εφαρμοστούν στο σύνολο της μαθηματικής δραστηριότητας και κατά συνέπεια θα ήταν ενδιαφέρον να ερευνηθεί η διαμόρφωση κριτηρίων εκτίμησης και ελέγχου από τους μαθητές σε άλλες περιοχές, οι οποίες δεν περιλαμβάνονται μέσα στο διδακτικό σχήμα. Όμως, καθώς δεν μπορούμε με ασφάλεια να διαπιστώσουμε τη χρήση τέτοιων κριτηρίων, περιοριζόμαστε στις πιθανές βελτιώσεις που επιφέρει η διδακτική παρέμβαση σε άλλες συγγενείς μαθηματικές περιοχές. Ακόμη, ενδιαφέρει η καταγραφή των κριτηρίων που χρησιμοποιούν ανάλογα με τη δραστηριότητα. Για παράδειγμα, το είδος της δοκιμής που χρησιμοποιούν σε σχέση με τη βεβαιότητα που παρέχει για την ορθότητα της πράξης και το κόστος εφαρμογής. Αξίζει να σημειωθεί ότι δύο ή περισσότερα ερωτήματα ανήκουν στην ίδια μαθηματική ενότητα, ώστε να εντοπιστούν φαινόμενα αστάθειας στη συμπεριφορά του μαθητή και να προσδιοριστούν με μεγαλύτερη ασφάλεια και ακρίβεια οι τρόποι επίλυσης που υιοθετούν οι μαθητές. Το ερωτηματολόγιο για τον προέλεγχο αποτελείται από 5 φύλλα (τα 5 πρώτα φύλλα από 1Α και 1Β έως 5Α και 5Β), καθένα από τα οποία περιλαμβάνει ένα αριθμό ερωτημάτων. Επίσης, θα πρέπει να σημειωθεί ότι συντάχθηκαν δυο εκδοχές του ερωτηματολογίου οι οποίες επιδόθηκαν στα υποκείμενα της έρευνας που χωρίστηκαν σκόπιμα σε δυο ομάδες σε επίπεδο τάξης, ώστε να αποφευχθούν φαινόμενα αντιγραφής. Τα θέματα συνοδεύονται από γραπτές οδηγίες για τη συμπλήρωση, ενώ σε κάποια σημεία δίνονται και προφορικές οδηγίες, όταν πρόκειται για δραστηριότητες που πιθανόν να εκτελούν για πρώτη φορά οι μαθητές (π.χ. θέμα 10), καθώς οι μαθητές γενικά εμφανίζουν μια τάση να εκτελούν τη δραστηριότητα χωρίς να προβαίνουν στην ανάγνωση της εκφώνησης.

Στη συνέχεια, θα περιγράψουμε τα κεντρικά θέματα που βρίσκονται σε κάθε φύλλο, τα υποερωτήματά τους, καθώς και τη σκοπιμότητα που εξυπηρετούν μέσα στο όλο μεθοδολογικό πλέγμα.

1ο φύλλο (1ο, 2ο και 3ο θέμα διάρκεια: 22 λεπτά)

1ο θέμα

Τα δυο πρώτα αποτελούν προβλήματα-καταστάσεις που σύμφωνα με το Vergnaud (1990) εντάσσονται σ' ένα γενικό εννοιολογικό πεδίο, που το ονομάζει *εννοιολογικό πεδίο των προσθετικών δομών*[66]. Συγκεκριμένα, εντάσσονται σε μια ειδικότερη κατηγορία, στη σύνθεση δυο μετασχηματισμών, με βάση την ταξινόμηση[67] του Vergnaud (1982) των προβλημάτων προσθετικού τύπου. Σύμφωνα με την κατηγορία αυτή δυο μετασχηματισμοί μιας αρχικής κατάστασης σε μια τελική συντίθεται για να δώσουν ένα μετασχηματισμό. Οι υποκατηγορίες που προκύπτουν είναι α)η εύρεση της σύνθεσης όταν είναι γνωστοί οι δυο μετασχηματισμοί β)η εύρεση του ενός από τους δυο μετασχηματισμούς όταν είναι γνωστός ο άλλος και γ) η σύνθεση.

Στο 1ο πρόβλημα είναι γνωστός ο δεύτερος μετασχηματισμός, (στη δεύτερη παρτίδα κέρδισε 9 μπίλιες[68]), είναι γνωστή η σύνθεση, (τελικά βρέθηκε να χάνει 4 μπίλιες) και ζητείται ο πρώτος μετασχηματισμός (τι έκανε στην πρώτη παρτίδα, κέρδισε ή έχασε και πόσες;).

$$\boxed{} \xrightarrow{\;;\;} \boxed{} \xrightarrow{+9} \boxed{-4}$$

Εξάλλου, γίνεται διευκρίνιση για το ότι ζητείται, τόσο το αν κέρδισε στην πρώτη παρτίδα, όσο και το πόσες κέρδισε ή έχασε. Ενώ το πρόβλημα αρχικά φαίνεται απλό,

---

[66] Σύμφωνα με το Λεμονίδη (1999, σ. 124) "το εννοιολογικό πεδίο των προσθετικών δομών είναι το σύνολο των καταστάσεων των οποίων ο χειρισμός συνεπάγεται μια ή περισσότερες προσθέσεις ή αφαιρέσεις και το σύνολο των εννοιών και θεωρημάτων που επιτρέπουν να αναλυθούν αυτές οι καταστάσεις μαθηματικά".

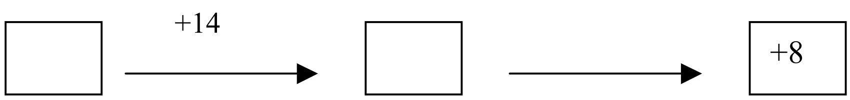
[67] Ο Vergnaud (1982) έχοντας ως κριτήριο το "σχεσιακό λογισμό", ο οποίος αναφέρεται στις λειτουργίες της σκέψης που είναι απαραίτητες για να ερμηνεύσουν τις σχέσεις που συνδέουν τα στοιχεία του προβλήματος, προχώρησε στην ταξινόμηση των προβλημάτων προσθετικού τύπου σε έξι μεγάλες κατηγορίες προσθετικών σχέσεων: α) σύνθεση δύο μέτρων, β) μετασχηματισμός ενός μέτρου σε άλλο, γ) στατική σχέση μεταξύ δύο μέτρων, δ)σύνθεση δύο μετασχηματισμών, ε) μετασχηματισμός μεταξύ δύο στατικών σχέσεων, στ) σύνθεση δύο στατικών σχέσεων (βλ. σχετικά Λεμονίδης 1999, σσ.124-132). Οι βασικοί τύποι εννοιών από τις οποίες προκύπτουν οι κατηγορίες είναι τα μέτρα, οι μετασχηματισμοί και οι στατικές σχέσεις. Παραδείγματα που αντιστοιχούν στις παραπάνω κατηγορίες είναι:
α) Ο Γιάννης έχει 6 γυάλινες μπίλιες και 8 πλαστικές. Έχει συνολικά 14 μπίλιες.
β) Ο Γιάννης είχε 11 μπίλιες. Παίζει με το φίλο του και χάνει 4. τώρα έχει 7 μπίλιες.
γ) Ο Γιάννης έχει 8 μπίλιες. Ο Γιώργος έχει 5 λιγότερες. Άρα ο Γιώργος έχει 3 μπίλιες.
δ) Ο Γιώργος έπαιξε δύο παιχνίδια με μπίλιες. Στο πρώτο κέρδισε 6 μπίλιες και στο δεύτερο έχασε 9 μπίλιες. Συνολικά έχασε 3 μπίλιες.
ε) Ο Γιάννης χρωστάει 6 μπίλιες στο Γιώργο. Του επιστρέφει τις 4. Τώρα του χρωστάει μόνο 2.
στ)Ο Γιάννης χρωστάει 6 μπίλιες στο Γιώργο, αλλά ο Γιώργος του χρωστάει 4. ο Γιάννης χρωστάει τελικά 2 μπίλιες στο Γιώργο.

[68] Αναφέρονται τα ερωτήματα και ερωτήματα του Α ερωτηματολογίου, καθώς του Β είναι ισοδύναμα και μ' αυτή την έννοια είναι περιττή η περιγραφή τους.

καθώς απαιτεί μόνο μια πράξη, ωστόσο περιέχει κάποιο βαθμό δυσκολίας για τους μαθητές, αλλά και για τους ενήλικες. Η δυσκολία του συνίσταται στο ότι είναι γνωστή η τελική κατάσταση, κάτι που συνήθως είναι το ζητούμενο σε προβλήματα που διδάσκονται. Επίσης, η δήλωση ότι στο τέλος ο Γιώργος βρέθηκε να χάνει οδηγεί τους μαθητές στην ασυνείδητη επιλογή της αφαίρεσης ως πράξης που παράγει το ζητούμενο αποτέλεσμα, καθώς δεν γνωρίζουν ότι πρέπει να επιλεγεί μια πράξη αντίστροφη απ' αυτή που υποδηλώνει η σύνθεση (Λεμονίδης, 1999, σ.130). Δηλαδή, ενώ στη συγκεκριμένη περίπτωση, η σύνθεση (πόσες κέρδισε ή έχασε συνολικά;) απαιτεί αφαίρεση, αφού συντίθεται δυο μετασχηματισμοί με αντίθετα πρόσημα (πρώτα κέρδισε μετά έχασε), η εύρεση του πρώτου μετασχηματισμού απαιτεί πρόσθεση. Η ενδεχόμενη αδυναμία των μαθητών να απαντήσουν σε τέτοιου είδους προβλήματα υποδηλώνει έλλειψη κατανόησης που οφείλεται στη μη ολοκλήρωση της διαμόρφωσης των προσθετικών δομών και στη μη εξοικείωσή τους με τις διάφορες κατηγορίες προσθετικού τύπου προβλημάτων (βλ. Vergnaud, 1998). Σύμφωνα με προηγούμενες έρευνες, οι μαθητές παρουσιάζουν σημαντικές δυσκολίες στην επίλυση τέτοιων προβλημάτων (Λεμονίδης, 1999, σ. 142).

2ο θέμα

Στο 2ο πρόβλημα δίνεται ο πρώτος μετασχηματισμός (στην πρώτη παρτίδα κέρδισε 14 μπίλιες), δίνεται η σύνθεση (τελικά βρέθηκε να κερδίζει 8 μπίλιες) και ζητείται ο δεύτερος μετασχηματισμός (τι έκανε στη δεύτερη παρτίδα).



Εξάλλου, γίνεται πάλι η διευκρίνιση για το ότι ζητείται, τόσο το αν κέρδισε στην πρώτη παρτίδα, όσο και το πόσες κέρδισε ή έχασε.

Δεδομένου του βαθμού δυσκολίας που παρουσιάζουν, τα προβλήματα αυτού του τύπου περιέχονται στο ερωτηματολόγιο, προκειμένου να ελεγχθεί ενδεχόμενη επίδραση της διδακτικής παρέμβασης στην κατανόηση και δυνατότητα επίλυσής τους, καθώς και να διαφανεί πιθανή συσχέτιση της περιοχής που εξετάζουμε με τη διαμόρφωση των προσθετικών δομών. Επίσης, σε αυτού του τύπου τα προβλήματα ενδείκνυται η εφαρμογή ενός συστήματος ελέγχου της απάντησης μέσα από μια επαναδιατύπωσή του με τη χρήση όμως της απάντησης ως δεδομένο του προβλήματος. Κάτι τέτοιο βέβαια δεν μπορεί να φανεί ξεκάθαρα.

3ο θέμα

Στο 3ο θέμα εξετάζονται γνώσεις που αφορούν στη σωστή εκτέλεση των αλγορίθμων του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης. Μέσα από την εκτέλεση των πράξεων είναι δυνατό, εκτός από τα ενδεχόμενα σφάλματα στα οποία ίσως υποπέσουν οι μαθητές, να ερευνηθεί η εφαρμογή κριτηρίων ελέγχου (δοκιμές), κριτηρίων διάταξης (που λειτουργούν και ως κριτήρια ελέγχου όπως ήδη έχει αναφερθεί), η ικανότητα να βρίσκουν τη σωστή τάξη μεγέθους ή ακόμα να κάνουν εκτιμήσεις με στρογγυλοποίηση για τον ευκολότερο υπολογισμό του αποτελέσματος.

α) 11,42·3,7

Τα δυο πρώτα ερωτήματα είναι πολλαπλασιασμός δεκαδικών. Στο πρώτο ζητείται η εκτέλεση πολλαπλασιασμού με τους δυο παράγοντες να είναι μεγαλύτεροι από τη μονάδα.

β) 27,8·0,03

Στο δεύτερο ζητείται η εκτέλεση πολλαπλασιασμού με τον ένα παράγοντα να είναι μεγαλύτερο από τη μονάδα και τον άλλο μικρότερο από τη μονάδα.

Πέρα από το ότι διερευνάται ο τρόπος εκτέλεσης του αλγόριθμου και ενδεχόμενα σφάλματα κατά την εφαρμογή του, οι παράγοντες είναι κατάλληλα επιλεγμένοι ώστε να φανεί αν οι μαθητές εφαρμόζουν απλά κριτήρια διάταξης, στην πρώτη περίπτωση δηλαδή να βρεθεί αποτέλεσμα μεγαλύτερο και από τους δυο παράγοντες και στη δεύτερη περίπτωση να βρεθεί αποτέλεσμα που να είναι μικρότερο από τον πρώτο παράγοντα (αφού ο δεύτερος είναι μικρότερος από τη μονάδα) και μεγαλύτερο από το δεύτερο (αφού ο πρώτος είναι μεγαλύτερος από τη μονάδα).

γ) 1287:75

Τα τρία επόμενα ερωτήματα περιλαμβάνουν αντίστοιχα τρεις διαιρέσεις και ζητείται η εκτέλεσή τους. Γίνεται διευκρίνιση ότι αν οι διαιρέσεις είναι ατελείς, να βρεθούν μόνο δυο δεκαδικά ψηφία, προκειμένου οι μαθητές να ολοκληρώσουν την εκτέλεση των πράξεων μέσα στο χρονικό πλαίσιο που έχει προκαθοριστεί. Εξάλλου, μέσα από τα βήματα που ακολουθούν οι μαθητές μέχρι την εύρεση των δυο πρώτων δεκαδικών ψηφίων σε περίπτωση ατελούς διαίρεσης διαφαίνεται ο τρόπος σκέψης των μαθητών. Οι διαιρέσεις περιλαμβάνουν ακέραιους όρους, τετραψήφιο διαιρετέο και διψήφιο διαιρέτη, με δεκαδικό όμως πηλίκο.

Η πρώτη διαίρεση δεν έχει κάποιο βαθμό δυσκολίας και έτσι μπορεί να ανιχνεύσει στοιχειώδεις γνώσεις των μαθητών στη διαίρεση.

δ) 7454:29

Η δεύτερη διαίρεση χαρακτηρίζεται από κάποιο βαθμό δυσκολίας καθώς το πρώτο δεκαδικό ψηφίο του πηλίκου είναι μηδέν. Έτσι, ουσιαστικά ελέγχει ιδιαίτερες γνώσεις των μαθητών στη διαίρεση, διότι για να συνεχίσουν τη διαίρεση και να βρουν δεκαδικά ψηφία τοποθετούν ένα μηδενικό στο υπόλοιπο, το οποίο έτσι δεκαπλασιάζεται αλλά όμως και πάλι είναι μικρότερο από το διαιρέτη, πράγμα που σημαίνει ότι ο μαθητής πρέπει να τοποθετήσει ένα μηδενικό στο πηλίκο (χωράει μηδέν φορές), να τοποθετήσει και δεύτερο μηδενικό στο υπόλοιπο και να συνεχίσει τη διαίρεση.

ε) 1082:19

Η τρίτη διαίρεση διαφοροποιείται από τις δυο προηγούμενες. Ο διαιρέτης είναι πολύ κοντά στο 20 (19 στο 1Α και 18 στο 1Β). Για να υπολογίσει ο μαθητής πόσες φορές χωράει ο διαιρέτης στο πρώτο τριψήφιο τμήμα του διαιρετέου αρχικά, στον αριθμό που σχηματίζεται από το πρώτο μερικό υπόλοιπο και το τελευταίο ψηφίο του διαιρετέου και τέλος στους αριθμούς που σχηματίζονται από τα επόμενα μερικά υπόλοιπα πολλαπλασιασμένα με το 10, ενδείκνυται να στρογγυλοποιήσει το διαιρέτη στο 20 και να εκτιμήσει πόσες φορές χωράει στον εκάστοτε διαιρέτη. Αυτό μπορεί να γίνει εύκολα και μέσα στο χρονικό πλαίσιο των 22 λεπτών που έχει οριστεί για το πρώτο φύλλο. Διαφορετικά ο χρόνος που θα αναλωνόταν θα ήταν πολύ μεγάλος, αν ο μαθητής υπολόγιζε πόσες φορές χωράει το πρώτο ψηφίο του διαιρέτη στον αριθμό που σχηματίζεται από τα δυο πρώτα ψηφία του διαιρετέου κ.ο.κ. και αναιρούσε κάθε φορά τον αριθμό που έβρισκε, αφού το γινόμενό του με το διαιρέτη θα υπερέβαινε το κομμάτι του διαιρετέου που εξετάζεται. Μ' αυτή την έννοια η διαίρεση αυτή είναι πολύ κοντά στην περιοχή που εξετάζουμε και μπορεί να προσδιορίσει αξιοσημείωτη επίδραση της διδασκαλίας.

2ο φύλλο (4ο θέμα, διάρκεια 18 λεπτά)

4ο θέμα

Το τέταρτο κεντρικό θέμα περιλαμβάνει δεκαέξι ερωτήματα που εξετάζουν γνώσεις των μαθητών σχετικές με την ικανότητα για νοερό υπολογισμό ακέραιων και δεκαδικών με θετικές και αρνητικές δυνάμεις του δέκα ή με αριθμούς του τύπου $\nu x 10^{\mu}$ όπου $\nu \in \mathrm{N}$, $1<\nu<100$ και $\mu \in \mathrm{Z}$.

α) 3,85·10000

Το πρώτο ερώτημα είναι πολλαπλασιασμός δεκαδικού, μεγαλύτερου της μονάδας με θετική δύναμη του δέκα, όπου ο μαθητής καλείται ουσιαστικά να μετακινήσει την υποδιαστολή προς τα δεξιά και να συμπληρώσει με τον απαραίτητο αριθμό μηδενικών.

β) 0,0467·1000

Ο δεύτερος πολλαπλασιασμός είναι ενός δεκαδικού μικρότερου της μονάδας με θετική δύναμη του δέκα, όπου απλά μετακινείται η υποδιαστολή προς τα δεξιά, χωρίς να χρειάζεται η συμπλήρωση με μηδενικά.

γ) 4623·0,01

Στη συνέχεια έχουμε ένα πολλαπλασιασμό ακέραιου με αρνητική δύναμη του δέκα, όπου η υποδιαστολή μετακινείται προς τα αριστερά, χωρίς να χρειάζεται η συμπλήρωση με μηδενικά.

δ) 25,4·0,0001

Ακολουθεί ένας πολλαπλασιασμός δεκαδικού, μεγαλύτερου της μονάδας με αρνητική δύναμη του δέκα, όπου η υποδιαστολή πρέπει να μετακινηθεί προς τα αριστερά, αλλά καθώς οι θέσεις δεν επαρκούν πρέπει να συμπληρωθούν μηδενικά.

ε) 1596:1000 και στ) 5,37:100

Τα επόμενα δύο ερωτήματα περιλαμβάνουν διαιρέσεις δεκαδικών με θετικές δυνάμεις του δέκα, όπου πάλι δεν επαρκούν οι θέσεις κατά τη μετακίνηση της υποδιαστολής προς τα αριστερά και είναι απαραίτητη η συμπλήρωση μηδενικών.

ζ) 67:0,01 και η) 3,57:0,001

Στη συνέχεια υπάρχουν δύο διαιρέσεις ακέραιου και δεκαδικού με αρνητικές δυνάμεις του δέκα, όπου οι μαθητές πρέπει να προσθέσουν μηδενικά στο τέλος για συμπλήρωμα.

θ) 600·700 και ι) 90·80000

Ακολουθούν δυο πολλαπλασιασμοί ακέραιων του τύπου $\nu x 10^{\mu}$ όπου $\nu \in \mathrm{N}^{*}$, $\nu<10$ και $\mu \in \mathrm{N}$.

ια) 0,02·0,004 και ιβ) 0,06·0,07

Κατόπιν υπάρχουν δυο πολλαπλασιασμοί όπου οι παράγοντες είναι του τύπου $\nu x 10^{\mu}$ με $\nu \in \mathrm{N}$, $\nu<10$ και $\mu \in \mathrm{Z}$ και $\mu<0$, δηλαδή και οι δυο παράγοντες είναι μικρότεροι της μονάδας.

ιγ) 4900:70 και ιδ) 320000:800

Στη συνέχεια υπάρχουν δυο διαιρέσεις ακέραιων με ακεραίους, όπου ο διαιρετέος είναι του τύπου $\nu x 10^{\mu}$ όπου $\nu \in \mathrm{N}$, $10<\nu<100$ και $\mu \in \mathrm{N}$ και ο διαιρέτης είναι του τύπου $\nu x 10^{\mu}$ όπου $\nu \in \mathrm{N}$, $\nu<10$ και $\mu \in \mathrm{N}$.

ιε) 2,4:0,03 και ιστ) 0,021:7

Τέλος, υπάρχουν δυο διαιρέσεις δεκαδικού μεγαλύτερου της μονάδας με δεκαδικό μικρότερο της μονάδας και δεκαδικού μικρότερου της μονάδας με ακέραιο, όπου ο διαιρετέος είναι του τύπου $ν x 10^{μ}$ όπου $ν \in \mathrm{N}$, $10<ν<100$, $μ \in \mathrm{Z}$ και $μ<0$ και ο διαιρέτης είναι του τύπου $ν x 10^{μ}$ όπου $ν \in \mathrm{N}$, $ν<10$ και $μ \in \mathrm{Z}$ και $μ<0$ στην πρώτη περίπτωση και ακέραιος μονοψήφιος στη δεύτερη περίπτωση.

Η περιοχή του νοερού υπολογισμού με θετικές και αρνητικές δυνάμεις του δέκα είναι, όπως άλλωστε διαφαίνεται και στο θεωρητικό πλαίσιο της έρευνας (βλ. §7.4), παράγοντας που συνεισφέρει σημαντικά στην ικανότητα για εκτίμηση και έλεγχο των αλγορίθμων των τεσσάρων αριθμητικών πράξεων. Έτσι, η παρουσία τέτοιου είδους δραστηριοτήτων θεωρείται απαραίτητη στο ερωτηματολόγιο προκειμένου να ελεγχθεί και να μετρηθεί η πιθανή συσχέτιση της περιοχής αυτής με την περιοχή που εξετάζουμε. Εξάλλου, σε τέτοιου είδους ερωτήματα είναι εύκολο να διαφανεί η εφαρμογή ή μη απλών κριτηρίων διάταξης, τα οποία, όπως προηγουμένως έχει αναλυθεί (βλ. κεφ.7), αποτελούν κριτήρια εκτίμησης, αλλά μπορούν να λειτουργήσουν και ως κριτήρια ελέγχου. Αξίζει να σημειωθεί ότι από κάθε υποενότητα της συγκεκριμένης περιοχής (νοερός υπολογισμός με δυνάμεις του δέκα και με αριθμούς του τύπου $ν x 10^{μ}$ όπου $ν \in \mathrm{N}$, $ν<100$ και $μ \in \mathrm{Z}$) επιλέχθηκε ζεύγος ασκήσεων, ώστε να αποφευχθεί το ενδεχόμενο της τυχαίας επιλογής.

3ο φύλλο (5ο, 6ο και 7ο θέμα, διάρκεια: 14 λεπτά)

Στο επόμενο φύλλο υπάρχουν θέματα που αφορούν γενικά σε γνώσεις πάνω στα κλάσματα, μια ενότητα των Μαθηματικών όπου οι μαθητές παρουσιάζουν σημαντικό έλλειμμα παιδείας και σοβαρές δυσκολίες στην αντιμετώπιση θεμάτων που σχετίζονται με αυτά (Δαφέρμος, 1998). Επίσης, είναι μια περιοχή όπου μπορούν να διαμορφωθούν κριτήρια εκτίμησης και ελέγχου. Με βάση αυτό το δεδομένο, θα ήταν σημαντικό να ελεγχθεί η σχέση ή η επίδραση που ενδεχομένως έχει η γνώση και κατανόηση των κριτηρίων εκτίμησης και ελέγχου.

5ο θέμα

Στο πέμπτο θέμα ζητείται η γραφή δυο δεκαδικών αριθμών με τη μορφή κλάσματος, ενώ δίνεται και παράδειγμα ($0{,}4=\frac{4}{10}$).

α) 0,064

Ο πρώτος δεκαδικός αριθμός είναι μικρότερος από τη μονάδα και κατά συνέπεια είναι σχετικά εύκολη η μετατροπή του αφού εμπίπτει στην ίδια περίπτωση με το παράδειγμα.

β) 2,36

Ο δεύτερος όμως δεκαδικός αριθμός έχει και ακέραιο μέρος, γεγονός που καθιστά δυσκολότερη τη μετατροπή του σε κλάσμα, καθώς οι μαθητές πρέπει να ανακαλέσουν τις προηγούμενες συναφείς γνώσεις και να επιδείξουν επαρκή κατοχή του συγκεκριμένου αντικειμένου.

Σ’ αυτό το θέμα είναι δυνατή η εφαρμογή κριτηρίων εκτίμησης και ελέγχου, όπως το ότι στην πρώτη περίπτωση ο αριθμητής πρέπει να είναι μικρότερος από τον παρονομαστή, ενώ στη δεύτερη πρέπει να συμβαίνει το αντίθετο.

6ο θέμα

Στο επόμενο θέμα ζητείται η αντίθετη μετατροπή, δηλαδή η μετατροπή κλασμάτων σε δεκαδικούς αριθμούς. Τα δυο πρώτα κλάσματα προς μετατροπή είναι δεκαδικά κλάσματα και κατά συνέπεια με βάση το προηγούμενο θέμα καθίσταται σχετικά εύκολη η μετατροπή τους.

α) $\frac{9}{10000}$ και β) $\frac{453}{10}$

Το πρώτο κλάσμα είναι μικρότερο της μονάδας και έτσι με βάση το παράδειγμα του προηγούμενου θέματος είναι απλή η μετατροπή του, ενώ το δεύτερο κλάσμα είναι μεγαλύτερο από τη μονάδα και συνδέεται περισσότερο με το δεύτερο ερώτημα του προηγούμενου θέματος (2,36).

γ) $\frac{6}{8}$ και δ) $\frac{9}{15}$

Τα επόμενα δύο κλάσματα δεν είναι δεκαδικά και για τη μετατροπή τους απαιτείται διαίρεση του αριθμητή με τον παρονομαστή ή μετατροπή τους σε δεκαδικά κλάσματα. Η εφαρμογή κριτηρίων, όπως οι δεκαδικοί να είναι μεγαλύτεροι ή μικρότεροι από τη μονάδα, μπορεί εύκολα να φανεί. Η τοποθέτηση του πρώτου και του δεύτερου θέματος στοχεύει στον έλεγχο της ικανότητας των μαθητών να αλλάζουν πεδίο έκφρασης και επεξεργασίας, καθώς μια τέτοια ικανότητα διευκολύνει τόσο τις διαδικασίες εκτίμησης, όσο και τις διαδικασίες ελέγχου (βλ. §6.5β). Εξάλλου, θα ήταν σημαντικό να ελέγξουμε πιθανή επίδραση της διδακτικής παρέμβασης στην επίδοση των μαθητών στη συγκεκριμένη περιοχή.

7ο θέμα

Το επόμενο θέμα εξετάζει γνώσεις των μαθητών σχετικές με τις πράξεις των κλασμάτων. Συγκεκριμένα ζητείται η εκτέλεση μιας πρόσθεσης, ενός πολλαπλασιασμού και μιας διαίρεσης. Η αφαίρεση δεν τοποθετήθηκε καθώς η αντιμετώπισή της είναι ανάλογη με αυτή της πρόσθεσης και κατά συνέπεια δε θα είχε ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Σ' αυτές τις πράξεις μπορεί να φανεί η εφαρμογή κριτηρίων διάταξης.

α) $\frac{13}{18}+\frac{14}{24}$

Η πρώτη πράξη είναι πρόσθεση μεταξύ ετερώνυμων κλασμάτων. Για την επίλυσή της προϋποτίθεται η γνώση της μετατροπής σε ομώνυμα κλάσματα, καθώς και ανάκληση της γνώσης του Ε.Κ.Π.[69] Σ' αυτή την πράξη μπορούν να εφαρμοστούν κριτήρια, όπως το ότι το αποτέλεσμα θα είναι μεγαλύτερο από τη μονάδα, αφού και τα δύο κλάσματα είναι λίγο μεγαλύτερα από το μισό.

β) $\frac{4}{15}\cdot\frac{7}{8}$

Η επόμενη πράξη είναι ένας πολλαπλασιασμός μεταξύ δυο ανάγωγων κλασμάτων, μικρότερων της μονάδας. Εδώ μπορεί να εφαρμοστεί το κριτήριο ότι αφού και τα δυο κλάσματα είναι μικρότερα της μονάδας, το αποτέλεσμα θα είναι κι αυτό μικρότερο της μονάδας (κριτήριο διάταξης).

[69] Βέβαια οι μαθητές για τη μετατροπή σε ομώνυμα μπορούν να μην προχωρήσουν στην εύρεση του Ε.Κ.Π. αλλά να βρουν ένα κοινό πολλαπλάσιο που συνήθως είναι το γινόμενο των παρονομαστών. Μ΄ αυτή την έννοια, η γνώση και εύρεση του Ε.Κ.Π. δεν είναι απαραίτητη προϋπόθεση για τη μετατροπή σε ομώνυμα και την επίλυση της πράξης.

γ) $\frac{8}{10}:\frac{7}{12}$

Τέλος, ζητείται η εκτέλεση μιας διαίρεσης δυο κλασμάτων, μικρότερων της μονάδας. Εδώ έχουμε διαίρεση με αριθμό μικρότερο της μονάδας και κατά συνέπεια το αποτέλεσμα θα είναι μεγαλύτερο από το διαιρετέο, δηλαδή πολύ κοντά στη μονάδα ή μεγαλύτερο απ' αυτή. Προηγούμενες έρευνες έχουν επισημάνει το διδακτικό κενό που παρατηρείται στην περιοχή των κλασμάτων και ειδικότερα στις πράξεις των κλασμάτων, όπου παρατηρούνται συστηματικά λάθη (Δαφέρμος, 1998, Behr, et al., 1983, Carpenter et al., 1980, Silver, 1983). Θα ήταν ενδιαφέρον να καταγραφούν τα λάθη των μαθητών και στη συνέχεια να ελεγχθεί πιθανή επίδραση του διδακτικού σχήματος που εφαρμόστηκε στην πειραματική ομάδα και η διαφορά με τις υπόλοιπες ομάδες.

4ο φύλλο (8ο και 9ο θέμα, διάρκεια 14 λεπτά)

8ο θέμα

Στο όγδοο θέμα ζητείται η εκτέλεση τριών αφαιρέσεων δεκαδικών αριθμών από δεκαδικούς ή ακεραίους. Η πράξεις με δεκαδικούς αριθμούς υποκρύπτουν αρκετές δυσκολίες για τους μαθητές του Δημοτικού σχολείου, όπως προκύπτει από προηγούμενες έρευνες (Μ. Καλδρυμίδου κ.ά., 2000). Έτσι, θα ήταν σημαντικό να διαφανεί η σχέση της περιοχής που εξετάζουμε με την ενότητα που αφορά στις πράξεις με δεκαδικούς αριθμούς. Ακόμη θα ήταν ενδιαφέρον να ελεγχθεί η εφαρμογή κριτηρίων ελέγχου (δοκιμές, κριτήρια διάταξης, τάξη μεγέθους). Η πρόσθεση ως πράξη δεν συμπεριλήφθηκε καθώς ο αλγόριθμός της μοιάζει κατά πολύ με τον αλγόριθμο της αφαίρεσης και μάλιστα είναι σχετικά ευκολότερος και κατά συνέπεια δεν είναι απαραίτητη η εξέτασή της. Η διαίρεση θα ήταν ενδιαφέρον να συμπεριληφθεί, ωστόσο θα επιβάρυνε χρονικά το ερωτηματολόγιο. Εξάλλου, στο τρίτο θέμα (1ο φύλλο) συμπεριλαμβάνονται διαιρέσεις, όπου ζητείται η εύρεση μέχρι και δύο δεκαδικών ψηφίων.

α) 826-9,64

Στην πρώτη αφαίρεση ο μειωτέος είναι τριψήφιος ακέραιος και ο αφαιρετέος δεκαδικός αριθμός με δυο δεκαδικά ψηφία και ακέραιο μέρος που περιέχει μόνο μονάδες. Η δυσκολία της συγκεκριμένης άσκησης έγκειται στο γεγονός ότι ο μειωτέος δεν έχει δεκαδικό μέρος και κατά συνέπεια δεν είναι προφανής η στοίχιση της υποδιαστολής, ενώ απαιτείται και η συμπλήρωση του μειωτέου με μηδενικά[70], ώστε μειωτέος και αφαιρετέος να έχουν τον ίδιο αριθμό δεκαδικών ψηφίων. Εξάλλου, τόσο ο μειωτέος, όσο και ο αφαιρετέος, έχουν τρία ψηφία, πράγμα που οδηγεί το μαθητή που δεν έχει επαρκή γνώση του αλγόριθμου της αφαίρεσης δεκαδικών αριθμών και που δεν έχει κατανοήσει το δεκαδικό σύστημα αρίθμησης και την αξία της θέσης, να οδηγηθεί στο σφάλμα να στοιχίσει πλήρως μειωτέο και αφαιρετέο, χωρίς να λάβει υπόψη του την υποδιαστολή (ή και να αντιστρέψει τη θέση μειωτέου-αφαιρετέου για να είναι έτσι μεγαλύτερος ο μειωτέος, αφού η υποδιαστολή δεν έχει αξία, και να είναι δυνατή η αφαίρεση).

β) 35,5-8,745

Στη δεύτερη αφαίρεση και οι δυο όροι έχουν δεκαδικό μέρος αλλά με διαφορετικό αριθμό ψηφίων με αποτέλεσμα να χρειάζεται και πάλι η συμπλήρωση του μειωτέου με δύο επιπλέον μηδενικά στο τέλος, ώστε να μειωθεί ο κίνδυνος να κάνουν λάθη.

[70] Ο μαθητής μπορεί να θεωρήσει νοερά ότι υπάρχουν τα μηδενικά και να εκτελέσει την αφαίρεση, χωρίς να είναι απαραίτητη η συμπλήρωσή τους.

γ) 82,46-7,57

Η τελευταία αφαίρεση είναι θα λέγαμε η ευκολότερη από τις δυο προηγούμενες, καθώς μειωτέος και αφαιρετέος έχουν τον ίδιο αριθμό δεκαδικών ψηφίων και κατά συνέπεια δεν απαιτείται η συμπλήρωση του μειωτέου στο τέλος με μηδενικά.

9ο θέμα

Το ένατο θέμα είναι ένα πρόβλημα αναλόγων ποσών, χωρίς βοηθητική πράξη. Σε έρευνα που πραγματοποιήθηκε από τους Μ. Καλδρυμίδου κ.ά (1998, σ. 19) σε μαθητές Στ΄ Δημοτικού, μόνο το 37,8% καταφέρνει να λύσει προβλήματα που περιέχουν σχέσεις αναλογίας (ποσά ανάλογα, ποσά αντιστρόφως ανάλογα και ποσά που συνδέονται μεταξύ τους με άλλες σχέσεις). Το πρόβλημα ξεκινά με τον ορισμό του πλαισίου της προβληματικής κατάστασης (σ' ένα εργοστάσιο μια μηχανή φτιάχνει σοκολάτα). Στη συνέχεια δίνεται το δεδομένο ότι η μηχανή σε 52 λεπτά φτιάχνει 325 κιλά σοκολάτα. Τέλος, ακολουθεί το ερώτημα (πόσο χρόνο χρειάζεται για να φτιάξει 260 κιλά σοκολάτα). Το πρόβλημα ανήκει σε μια από τις τέσσερις κατηγορίες στις οποίες ο Vergnaud (1990) χωρίζει τα προβλήματα πολλαπλασιασμού και διαίρεσης, στον *ισομορφισμό των μέτρων*. Μάλιστα, τη συγκεκριμένη κατηγορία την υποδιαιρεί σε τέσσερις επιμέρους κλάσεις, στον πολλαπλασιασμό, στη διαίρεση μερισμού, στη διαίρεση μέτρησης και στην αναλογία. Το συγκεκριμένο πρόβλημα ανήκει στην τελευταία κλάση, σύμφωνα με την οποία δίνονται τρεις ποσότητες και ζητείται μια τέταρτη ποσότητα, καμία από τις οποίες όμως δεν είναι η μονάδα (βλ. σχετικά Λεμονίδης, 1999, σσ. 171-172). Το πρόβλημα μπορεί να επιλυθεί με πολλούς τρόπους (αναγωγή στη μονάδα των λεπτών, αναγωγή στη μονάδα των κιλών σοκολάτας, εύρεση λόγου κιλών σοκολάτας, κατασκευή πίνακα αναλογίας). Ωστόσο, οι μαθητές την περίοδο που γίνεται ο προέλεγχος δεν έχουν ακόμα διδαχθεί τις αναλογίες. Κατά συνέπεια, δεν αναμένεται η λύση του προβλήματος παρά μόνο με αναγωγή στη μονάδα, κατά την οποία μπορούν να εφαρμόσουν πρώτα τη διαίρεση για την εύρεση του ενός, και μετά τον πολλαπλασιασμό για την εύρεση των πολλών ή αντίστροφα. Δηλαδή, με μια σύνθεση των προηγούμενων βημάτων για να περάσουμε απευθείας από τα 325 στα 260 κιλά σοκολάτα πολλαπλασιάζουμε με τον κλασματικό τελεστή $\frac{260}{325}$ ο οποίος αναπαριστά ταυτόχρονα τη διαδοχική εφαρμογή δύο βαθμωτών[71] τελεστών: μιας διαίρεσης με το 325 και ενός πολλαπλασιασμού με το 260. Αφού όμως στους πολλαπλασιαστικούς τελεστές ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα είναι δυνατή η εφαρμογή πρώτα της διαίρεσης και μετά του πολλαπλασιασμού ή αντίστροφα. Η δυσκολία, κατά την επίλυση του προβλήματος μέσα από το συνήθη τρόπο αναγωγής της μονάδας των κιλών σοκολάτας, είναι η διαίρεση ενός μικρότερου αριθμού (52) με ένα μεγαλύτερο (325), κάτι στο οποίο δεν έχουν εξασκηθεί επαρκώς οι μαθητές, αφού συνήθως στις διαιρέσεις ο διαιρετέος είναι μεγαλύτερος. Ένα άλλο σημείο το οποίο θα πρέπει να επισημανθεί είναι το ότι όλα τα αριθμητικά δεδομένα του προβλήματος είναι κατάλληλα επιλεγμένα ώστε να αποτελούν

[71] Στο πρόβλημα "πόσες μαστίχες περιέχονται σε 3 πακέτα, αν το κάθε πακέτο περιέχει 5 μαστίχες" το 5 αντιπροσωπεύει τις μαστίχες, αναπαριστά το πέρασμα από μια κατηγορία μέτρων σε μια άλλη και λέγεται συναρτησιακός τελεστής ενώ το 3 είναι τελεστής χωρίς εσωτερική διάσταση και λέγεται βαθμωτός ή εσωτερικός τελεστής. Το 3 είναι τελεστής χωρίς διάσταση

δυνάμεις του 2 και του 5[72], καθώς έτσι, αν οι μαθητές επιλέξουν να κάνουν πρώτα διαίρεση, αυτή να είναι τέλεια και το τελικό αποτέλεσμα που θα βρουν μετά την εκτέλεση και του πολλαπλασιασμού να είναι κοινό με το αποτέλεσμα που προκύπτει με τους άλλους τρόπους επίλυσης. Εξάλλου, το τελικό αποτέλεσμα είναι τερματιζόμενος δεκαδικός αριθμός με ένα δεκαδικό ψηφίο, προκειμένου να μετριαστεί ο βαθμός δυσκολίας του προβλήματος και να μην μπουν οι μαθητές στη διαδικασία εύρεσης πολλών δεκαδικών ψηφίων, κάτι που θα ήταν χρονοβόρο και μη συνδεόμενο με τη σκοπιμότητα του συγκεκριμένου προβλήματος. Εκτός από τον τρόπο επίλυσης του προβλήματος και την καταγραφή και ανάλυση των ενδεχόμενων σφαλμάτων, ενδιαφέρει η εφαρμογή κριτηρίων εκτίμησης και ελέγχου των αναλόγων ποσών, όπως το ότι αναμένεται το αποτέλεσμα να είναι μικρότερο από το 52, αφού το 260 είναι μικρότερο από 325 και περισσότερο από το μισό του ή διαφορετικά όχι υπερβολικά μικρό.

5ο φύλλο (10ο και 11ο θέμα, διάρκεια 22 λεπτά)

10ο θέμα

Το πέμπτο φύλλο περιλαμβάνει δυο θέματα που αφορούν άμεσα την περιοχή που εξετάζουμε. Συγκεκριμένα, το πρώτο θέμα εξετάζει γνώσεις σχετικές με την ικανότητα των μαθητών να βρίσκουν το αποτέλεσμα μιας πράξης σε τάξη μεγέθους (βλ. §5.3.2.1) σε δυνάμεις του 10. Περιλαμβάνει τρεις πολλαπλασιασμούς ακεραίων, διψήφιου με διψήφιο (57·83), τετραψήφιου με τετραψήφιο (3745·5321) και τριψήφιου με τριψήφιο (289·574) και τέσσερις διαιρέσεις ακεραίων και δεκαδικών, πενταψήφιου ακέραιου με τριψήφιο ακέραιο (17531:423), τετραψήφιου ακέραιου με διψήφιο ακέραιο (6143:28), δεκαδικού με μονοψήφιο ακέραιο τμήμα με τριψήφιο ακέραιο (4,37:235) και δεκαδικού μικρότερου από τη μονάδα με δεκαδικό με διψήφιο ακέραιο τμήμα (0,035:48,32). Επιλέχτηκαν μόνο πολλαπλασιασμοί και διαιρέσεις, καθώς, όπως προκύπτει από προγενέστερες έρευνες, θεωρούνται ως οι δυσκολότερες πράξεις για τους μαθητές και κατά συνέπεια παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον η διερεύνηση της επίδοσης του δείγματός μας σ' αυτές. Το θέμα είναι πολλαπλής επιλογής, καθώς το ζητούμενο είναι η εύρεση της τάξης μεγέθους του αποτελέσματος και όχι ένας συγκεκριμένος αριθμός. Εξάλλου, προκειμένου να ενημερωθούν οι μαθητές για τον τρόπο συμπλήρωσης του θέματος, εκτός από τις οδηγίες που υπάρχουν στην εκφώνηση της δραστηριότητας, υπάρχει και παράδειγμα (ενώ οι ίδιες οδηγίες δίνονται και προφορικά κατά την επίδοση του ερωτηματολογίου). Ο λόγος που δίνεται έμφαση στις οδηγίες σ' αυτό το θέμα, είναι ότι συνήθως οι μαθητές εκτελούν μια δραστηριότητα χωρίς να διαβάζουν την εκφώνηση και ελλοχεύει ο κίνδυνος να αποπροσανατολιστούν κατά την εκτέλεση καθώς είναι πολύ πιθανό να μην έχουν έρθει σε επαφή με παρόμοιες δραστηριότητες στο παρελθόν. Όπως έχει ήδη διαφανεί μέσα από την ανάλυση του θεωρητικού πλαισίου της έρευνας, η ικανότητα εύρεσης του αποτελέσματος μιας πράξης σε επίπεδο τάξης μεγέθους αποτελεί σημαντικό κριτήριο εκτίμησης αλλά και ελέγχου στη συνέχεια και είναι απαραίτητη προϋπόθεση για την εκτέλεση από μνήμης προσεγγιστικών υπολογισμών με μεγαλύτερη ακρίβεια. Επίσης, μέσα από το θέμα αυτό είναι δυνατή η διερεύνηση της εφαρμογής ή μη

[72] Οποιοδήποτε ανάγωγο κλάσμα της μορφής $\frac{k}{2^n \cdot 5^m}$ (k, n, m φυσικοί αριθμοί) είναι ένας τερματιζόμενος δεκαδικός αριθμός και αντίστροφα (Κούρκουλος, 1999, σ.163).

των απλών κριτηρίων διάταξης, τα οποία λειτουργούν όχι μόνο ως κριτήρια εκτίμησης αλλά και ως κριτήρια ελέγχου. Επομένως, συνάγεται το συμπέρασμα ότι το συγκεκριμένο θέμα είναι ζωτικής σημασίας για την καταγραφή της μαθητικής συμπεριφοράς. Βέβαια, θα πρέπει να τονιστεί ότι λόγω της σημαντικότητας της συγκεκριμένης ενότητας, η εύρεση της τάξης μεγέθους του αποτελέσματος των τεσσάρων αριθμητικών πράξεων συμπεριλαμβάνεται στο διδακτικό σχήμα που εφαρμόστηκε στην πειραματική ομάδα.

11ο θέμα

Στο τελευταίο θέμα ζητείται ο προσεγγιστικός υπολογισμός των αποτελεσμάτων 7 πράξεων. Το παράδειγμα που δίνεται στους μαθητές δείχνει ότι ζητούμενο είναι η προσέγγιση του αποτελέσματος με μεγαλύτερη όμως ακρίβεια από την τάξη μεγέθους. Μάλιστα, το παράδειγμα έχει υπολογιστεί με στρογγυλοποίηση των όρων με βάση το συνήθη κανόνα στρογγυλοποίησης ($23 \cdot 11 \approx 200$). Επίσης, είναι προφανές ότι δεν ζητείται το ακριβές αποτέλεσμα όπως υποδηλώνεται τόσο από τη λέξη περίπου, όσο και από το παράδειγμα, ενώ σε καμία περίπτωση δεν είναι επιτρεπτή η γραπτή εκτέλεση των πράξεων με αλγοριθμικό τρόπο. Το θέμα επιδέχεται ανοιχτού τύπου απάντηση, καθώς δεν ζητείται ένα συγκεκριμένο νούμερο αλλά μια προσέγγιση που μπορεί να εμπεριέχεται σ' ένα ευρύ φάσμα απαντήσεων. Αν το θέμα είχε τεθεί υπό μορφή ερώτησης κλειστού τύπου δεν θα μπορούσαν να καταγραφούν ενδιαφέρουσες απαντήσεις των μαθητών. Περιλαμβάνονται τρεις πολλαπλασιασμοί ακεραίων, διψήφιου με διψήφιο ($62 \cdot 73$), τετραψήφιου με τριψήφιο ($4832 \cdot 876$) και τετραψήφιου με τετραψήφιο ($2181 \cdot 1485$) και τέσσερις διαιρέσεις ακέραιων και δεκαδικών, πενταψήφιου ακέραιου με τριψήφιο ακέραιο (67952:317), πενταψήφιου ακέραιου με διψήφιο ακέραιο (26472:43), δεκαδικού μεγαλύτερου από τη μονάδα με μονοψήφιο ακέραιο τμήμα με τριψήφιο ακέραιο (3,4:512) και δεκαδικού μικρότερου από τη μονάδα με δεκαδικό με διψήφιο ακέραιο τμήμα (0,26:17,12). Μέσα απ' αυτό το θέμα, εκτός από τη διερεύνηση της ικανότητας των μαθητών να πραγματοποιούν εκτιμήσεις και προσεγγίσεις του αποτελέσματος, έχουμε ενδείξεις από τις απαντήσεις των μαθητών για την ποικιλία στρατηγικών που επιστρατεύονται και χρησιμοποιούν για να φτάσουν στο ζητούμενο αποτέλεσμα ανάλογα με τα αριθμητικά δεδομένα και το είδος της πράξης. Επίσης, μπορεί να διαφανεί η μη εφαρμογή κριτηρίων διάταξης, ενώ για την εφαρμογή τους έχουμε απλά ενδείξεις[73].

2ο ερωτηματολόγιο

Το ερωτηματολόγιο που δόθηκε στο μετέλεγχο (17-26 Μαΐου) σε όλες τις ομάδες καθώς και αυτό που δόθηκε στην πειραματική ομάδα για τον τελικό έλεγχο (28-29 Μαΐου) περιελάμβανε, εκτός από τα πρώτα πέντε φύλλα που περιγράφηκαν παραπάνω, ένα ακόμα φύλλο, με δύο θέματα που αφορούν σε περιοχές στις οποίες ενδεχομένως να υπήρχε επίδραση της διδασκαλίας, υπόθεση που αναδύθηκε μέσα στο πλαίσιο της διδακτικής παρέμβασης και της παράλληλης διδασκαλίας της συνήθους ύλης της Στ΄ Δημοτικού, που προβλέπεται από το αναλυτικό πρόγραμμα και το διδακτικό εγχειρίδιο, στην πειραματική ομάδα[74].

[73] Δεν μπορούμε να είμαστε βέβαιοι ότι, σε περίπτωση εύρεσης μιας (καλής) προσέγγισης, οι μαθητές έχουν εφαρμόσει πράγματι τα κριτήρια διάταξης.

[74] Θα πρέπει να σημειωθεί ότι τόσο η διδακτική-πειραματική παρέμβαση, όσο και η διδασκαλία των Μαθηματικών γενικότερα, στην πειραματική ομάδα, γινόταν από το συντάκτη της εργασίας,

6ο φύλλο (12ο, 13ο θέμα, διάρκεια 14 λεπτά)

12ο θέμα

Το δωδέκατο θέμα αφορά στην εύρεση από μνήμης του ποσοστού ενός αριθμού (το 10% του 350, το 20% του 900 και το 25% του 8000). Η εύρεση του αποτελέσματος μπορεί να γίνει εύκολα από μνήμης. Το συγκεκριμένο θέμα επιλέχθηκε προκειμένου να ελεγχθεί η έμμεση επίδραση του διδακτικού σχήματος στην ικανότητα να διαχειρίζονται τα ποσοστά (τα οποία δεν ήταν αντικείμενο της πειραματικής διδασκαλίας), ως κλάσματα ή ως δεκαδικούς - αλλαγή πεδίου έκφρασης και επεξεργασίας (βλ. Duval, 1995, κεφ. 3, 5) – και να εφαρμόζουν κριτήρια που ενδεχομένως έχουν διαμορφώσει μόνοι τους πάνω στα ποσοστά, όπως ότι όλα τα ποσοστά στη συγκεκριμένη δραστηριότητα είναι μικρότερα από τον αριθμό του οποίου το ποσοστό ψάχνουμε και τέλος να βρίσκουν από μνήμης το αποτέλεσμα. Στην πειραματική ομάδα αυτή η ικανότητα είχε φανεί κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας των ποσοστών ως αντικείμενο ύλης της Στ΄ δημοτικού και προέκυψε η επιθυμία να ελεγχθεί αν ήταν αποτέλεσμα της διδακτικής-πειραματικής παρέμβασης ή απλά οφείλεται στη ευκολία κατανόησης της συγκεκριμένης ενότητας. Πρόκειται δηλαδή για ένα γενικό ή για ένα τοπικό φαινόμενο;

13ο θέμα

Το 13ο θέμα του έκτου φύλλου αποτελεί μια προβληματική κατάσταση που συνιστά σύνθεση προβλημάτων προσθετικού και πολλαπλασιαστικού τύπου. Όσον αφορά στην πολλαπλασιαστική δομή του, ανήκει στην κατηγορία *ισομορφισμού των μέτρων* και στην κλάση της *αναλογίας.* Ουσιαστικά, η κατάσταση είναι όμοια με αυτή του 9ου θέματος (4ο φύλλο), με τη διαφορά ότι προϋποθέτει μια βοηθητική πράξη στην αρχή. Αυτό μπορεί να γίνει σαφές στους μαθητές, καθώς οι ποσότητες που δίνονται είναι τρεις αλλά αφορούν τρία διαφορετικά μεγέθη: ποτό, κακάο, γάλα με ζητούμενο την ποσότητα κακάου. Το σχήμα που δίνεται στο πρόβλημα είναι το εξής:

15 κιλά ποτού → 3 κιλά κακάο

572 κιλά γάλα → x κιλά κακάο

Με βάση αυτό το σχήμα μπορεί εύκολα να προκύψει η βοηθητική πράξη, δεδομένου ότι η δεύτερη γραμμή δεν μπορεί να αλλάξει, αναγκαστικά θα πρέπει να γίνει αλλαγή στην πρώτη γραμμή, σε αντιστοιχία με τη δεύτερη. Έτσι, προκύπτει ότι η αλλαγή αφορά στην πρώτη ποσότητα, το ποτό, το οποίο θα πρέπει να γίνει γάλα. Κατά συνέπεια ο μαθητής οδηγείται στην αφαίρεση, λύνοντας έτσι αρχικά ένα υποπρόβλημα προσθετικού τύπου που ανήκει στην κατηγορία της *σύνθεσης δύο μέτρων* όπου είναι γνωστή η σύνθεση (ποτό) και ζητείται το ένα υποσύνολο (γάλα). Το συμπέρασμα που συνάγεται σύμφωνα με όλα τα προαναφερόμενα στοιχεία είναι ότι πρόκειται για ένα σύνθετο πρόβλημα και η επίλυσή του προϋποθέτει επαρκή γνώση των προβλημάτων προσθετικού και πολλαπλασιαστικού τύπου. Συμπεριλήφθηκε στο ερωτηματολόγιο,

---

γεγονός που ασφαλώς συνέβαλλε σημαντικά στη βαθύτερη επεξεργασία σε πειραματικό και θεωρητικό επίπεδο, αφού εξασφάλιζε από τη μια ευνοϊκότερες προϋποθέσεις για τη διαχείριση του χρόνου (διάθεση περισσότερου ή λιγότερου χρόνου ανάλογα με τις ανάγκες της τάξης, ρύθμιση ώστε να γίνει αναπλήρωση διδακτικού χρόνου σε περίπτωση απώλειάς του λόγω αργιών, σχολικών εορτών, απεργιών ή εκδρομών) και από την άλλη τη δυνατότητα παρατήρησης της γενικότερης συμπεριφοράς των μαθητών στα Μαθηματικά.

προκειμένου να ελεγχθεί ενδεχόμενη επιρροή της διδακτικής παρέμβασης σε τέτοιου είδους σύνθετα προβλήματα, αφού όπως προκύπτει τόσο από το θεωρητικό μέρος όσο και από τη διδακτική πράξη, οι μαθητές που είναι ευέλικτοι στη χρήση κριτηρίων εκτίμησης και ελέγχου αποκτούν μια γενικότερη ευχέρεια στη μαθηματική τους σκέψη (βλ. §7.5).

Τα παραπάνω θέματα συναρθρώνουν τη δομή του ερωτηματολογίου και συντείνουν, σε συνάφεια με τα υπόλοιπα ερευνητικά όργανα, στην επίτευξη του κεντρικού σκοπού και των επιμέρους στόχων της έρευνας. Επιπρόσθετα, συνιστούν το βασικό εργαλείο για την καταγραφή συμπεριφορών πάνω στο εξεταζόμενο θέμα και σε παραπλήσιες περιοχές, ενώ αποτελούν όργανα μέτρησης της επίδοσης των μαθητών που θα αποτελέσουν την κύρια πηγή άντλησης των δεδομένων για τη στατιστική επεξεργασία και την ποσοτική ανάλυση.

8.5. Οι υποθέσεις της έρευνας

Σύμφωνα με το διδακτικό πρόβλημα (§3.1), το σκοπό και τους ειδικότερους στόχους της έρευνας (§3.3), οι υποθέσεις της έρευνας διατυπώνονται ως εξής:

1.Οι μαθητές που είναι δέκτες μιας οργανωμένης διδακτικής παρέμβασης, σχετική με τα κριτήρια εκτίμησης και ελέγχου, έχουν καλύτερη επίδοση, σε σχέση με μαθητές που είναι δέκτες της παραδοσιακής διδασκαλίας:

α) στην εκτέλεση από μνήμης υπολογισμών (ακριβών και προσεγγιστικών)

β) στην εκτέλεση των αλγορίθμων των τεσσάρων αριθμητικών πράξεων, τόσο με φυσικούς, όσο και με δεκαδικούς αριθμούς

γ) στη μετατροπή δεκαδικών σε κλάσματα και αντίστροφα

δ) στην εκτέλεση πράξεων μεταξύ κλασμάτων

ε) στην επίλυση προβλημάτων προσθετικών και πολλαπλασιαστικών δομών.

2.Οι μαθητές που είναι δέκτες μιας οργανωμένης διδακτικής παρέμβασης, σχετική με τα κριτήρια εκτίμησης και ελέγχου, παρουσιάζουν σημαντική βελτίωση μετά το πέρας της διδακτικής παρέμβασης εν συγκρίσει με την αρχική τους κατάσταση (πριν την έναρξη της διδακτικής παρέμβασης):

α) στην εκτέλεση από μνήμης υπολογισμών (ακριβών και προσεγγιστικών)

β) στην εκτέλεση των αλγορίθμων των τεσσάρων αριθμητικών πράξεων, τόσο με φυσικούς, όσο και με δεκαδικούς αριθμούς

γ) στη μετατροπή δεκαδικών σε κλάσματα και αντίστροφα

δ) στην εκτέλεση πράξεων μεταξύ κλασμάτων

ε) στην επίλυση προβλημάτων προσθετικών και πολλαπλασιαστικών δομών.

3. Οι μαθητές που είναι δέκτες μιας οργανωμένης διδακτικής παρέμβασης, σχετική με τα κριτήρια εκτίμησης και ελέγχου, διατηρούν τις γνώσεις που αποκόμισαν, ακόμη και μετά την παρέλευση αρκετού χρονικού διαστήματος μετά το πέρας της διδακτικής παρέμβασης:

α) στην εκτέλεση από μνήμης υπολογισμών (ακριβών και προσεγγιστικών)

β) στην εκτέλεση των αλγορίθμων των τεσσάρων αριθμητικών πράξεων, τόσο με φυσικούς, όσο και με δεκαδικούς αριθμούς

γ) στη μετατροπή δεκαδικών σε κλάσματα και αντίστροφα

δ) στην εκτέλεση πράξεων μεταξύ κλασμάτων
ε) στην επίλυση προβλημάτων προσθετικών και πολλαπλασιαστικών δομών.

9. ΠΡΑΓΜΑΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

9.1 Επίδοση του ερωτηματολογίου

Το ερωτηματολόγιο που περιγράφεται αναλυτικά στην §8.4.2, χορηγήθηκε στην πειραματική ομάδα τον Νοέμβριο 2001 (τα πέντε πρώτα φύλλα), το Μάρτιο 2002 (τα πέντε πρώτα φύλλα), τον Απρίλιο 2002 (τα έξι φύλλα) και το Μάιο 2002 (τα έξι φύλλα). Στην ομάδα ελέγχου δόθηκε το ερωτηματολόγιο τον Νοέμβριο 2001 (τα πέντε πρώτα φύλλα) και το Μάιο 2002 (τα έξι φύλλα).

- Στην πειραματική ομάδα και ομάδα ελέγχου για προέλεγχο (1-7 Νοεμβρίου 2001)

Την περίοδο από 1-7 Νοεμβρίου 2001 δόθηκαν τα πέντε πρώτα φύλλα, ενώ το χρονικό διάστημα στο οποίο κλήθηκαν οι μαθητές να το συμπληρώσουν ήταν δύο διδακτικές ώρες με την εκμετάλλευση 15 λεπτών από μια τρίτη διδακτική ώρα. Οι διδακτικές ώρες που επιλέχθηκαν ήταν η δεύτερη (9.00-9.45) και η τρίτη (10.5-10.50), καθώς είναι πρώτες ώρες και οι μαθητές είναι αρκετά ξεκούραστοι για να προβούν στη συμπλήρωσή του, χωρίς την κόπωση που επέρχεται κατά την επίδραση της καθημερινής διδασκαλίας και που γίνεται αισθητή κατά τις τελευταίες διδακτικές ώρες. Επίσης, χρησιμοποιήθηκαν 15 λεπτά από την πρώτη διδακτική ώρα για την άνετη ολοκλήρωση της διαδικασίας. Εξάλλου, επιλέχθηκε η δεύτερη και η τρίτη διδακτική ώρα και όχι οι δύο πρώτες καθώς μεταξύ δεύτερης και τρίτης μεσολαβεί διάλειμμα εικοσάλεπτο, κατά τη διάρκεια του οποίοι οι μαθητές έχουν την ευκαιρία να ξεκουραστούν και να συνεχίσουν μετά.

Κατά τη διάρκεια συμπλήρωσης του ερωτηματολογίου ο εκπαιδευτικός της τάξης απουσίαζε, ώστε να μην αποτελεί αγχωτικό παράγοντα για τους μαθητές. Την πρώτη ώρα επίδοσης του ερωτηματολογίου οι μαθητές κλήθηκαν να συμπληρώσουν τα τρία πρώτα φύλλα (διάρκειας 54 λεπτών) και τη δεύτερη ώρα δύο επόμενα φύλλα διάρκειας 36 λεπτών. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι οι χρόνοι προκαθορίστηκαν με βάση τα χρονικά περιθώρια του ερωτηματολογίου που είχε κατασκευαστεί από τον Κούρκουλο (1998) και που ήταν σταθμισμένο, πάνω στο οποίο έγιναν τροποποιήσεις και συμπληρώσεις με αποτέλεσμα να προκύψει το παρόν. Βέβαια, το ερωτηματολόγιο δόθηκε αρχικά σε δύο τμήματα, ώστε να διαπιστωθεί αν τα χρονικά περιθώρια ήταν επαρκή, κάνοντας έτσι μια στάθμιση. Το κάθε φύλλο δίνονταν ξεχωριστά, ώστε οι μαθητές να μη βλέπουν συσσωρευμένο όγκο εργασίας που θα τους αποθάρρυνε ενδεχομένως.

Πριν την έναρξη της διαδικασίας συμπλήρωσης ενημερώθηκαν οι μαθητές για τη σκοπιμότητα του ερωτηματολογίου. Ειδικότερα, τέθηκε σ’ αυτούς ο σκοπός σύμφωνα με τον οποίο θέλουμε να προσδιορίσουμε τις δυσκολίες των μαθητών σε ορισμένες μαθηματικές περιοχές, με στόχο την αναδιάρθρωση της διδασκαλίας τους, ώστε να είναι ευκολότερη η μάθησή τους και μεγαλύτερη η επίδοσή σε αυτές. Οι μαθητές παροτρύνθηκαν να καταβάλουν κάθε δυνατή προσπάθεια προκειμένου να συμβάλλουν στην επίτευξη του ερευνητικού σκοπού, τόσο προς δικό τους όφελος, όσο και προς όφελος του μεταγενέστερου μαθητικού δυναμικού. Εξάλλου, ειπώθηκε στους μαθητές ότι το ερωτηματολόγιο δε θα βαθμολογηθεί, δεν θα ληφθεί υπόψη για τη γενικότερη αξιολόγησή τους, αλλά θα ειδωθεί από το δάσκαλό τους. Μάλιστα, οι μαθητές ήταν ιδιαίτερα αγχωμένοι και ρωτούσαν αν “μετρήσει στον έλεγχο”, ερώτηση η οποία επαναλήφθηκε μετά την επίδοση του ερωτηματολογίου, καθώς οι μαθητές έκριναν ότι ήταν ιδιαίτερα δύσκολο και η επίδοσή τους ήταν χαμηλή. Έτσι, αποφεύχθηκαν φαινόμενα τυχαίας ή μη συμπλήρωσης του ερωτηματολογίου, χωρίς την ύπαρξη κινήτρου και εξασφαλίστηκε η καθοριστική συμμετοχή όλων των υποκειμένων ενώ σημαντικό ρόλο έπαιξε ότι το ερωτηματολόγιο ήταν επώνυμο, καθώς οι μαθητές ήθελαν να προβάλουν μια καλή εικόνα της ατομικής τους επίδοσης.

Κατόπιν, δόθηκαν οι γενικές οδηγίες συμπλήρωσης του ερωτηματολογίου που αφορούσαν στο χρονικό περιθώριο, στο χώρο εγγραφής των προσωπικών στοιχείων, στην έμφαση για εκτέλεση οποιασδήποτε πράξης (αν ζητούνταν) ή οποιουδήποτε στοιχείου ήθελαν, στο χαρτί που τους είχε δοθεί, στην έμφαση για νοερό υπολογισμό και μη εκτέλεση των πράξεων όπου έπρεπε, και τέλος στην εύρεση μόνο δύο δεκαδικών ψηφίων στις διαιρέσεις. Ακόμη, συμβουλεύτηκαν οι μαθητές να εκμεταλλευτούν όλο το χρόνο που είχαν στη διάθεσή τους, ενώ αυτοί που τελείωναν σχετικά νωρίς παροτρύνονταν να επανεξετάσουν την κόλλα τους. Αν οι μαθητές είχαν οποιεσδήποτε απορίες σχετικά με συγκεκριμένες ασκήσεις ή προβλήματα, απλά επαναλαμβάναμε την εκφώνηση, χωρίς περαιτέρω εξηγήσεις. Περισσότερες διευκρινίσεις δόθηκαν για τη συμπλήρωση του πέμπτου φύλλου το οποίο στην πρώτη δραστηριότητα απαιτούσε την τοποθέτηση σταυρού στο κατάλληλο τετράγωνο, ανάλογα με τη θέση του αποτελέσματος της πράξης ανάμεσα σε συγκεκριμένες δυνάμεις του 10, ενώ στη δεύτερη δραστηριότητα απαιτούσε τη συμπλήρωση με συγκεκριμένο αριθμό που δεν ήταν κατ’ ανάγκη δύναμη του 10.

Στο πρώτο φύλλο προβλήθηκαν αντιδράσεις από κάποιους μαθητές σχετικά με τα προβλήματα του Vergnaud και δήλωναν την αδυναμία τους να προβούν στην επίλυσή τους, καθώς δεν μπορούσαν να κατανοήσουν τη σημασιολογική δομή τους. Κάποιοι επαναλάμβαναν τα δεδομένα του προβλήματος στην προσπάθειά τους μάλλον να το ακούσουν, αλλά και να δουν τη δικιά μας αντίδραση. Παρατηρώντας τη συμπεριφορά τους, είδαμε ότι αναλώθηκε αρκετός χρόνος στην προσπάθεια επίλυσης των προβλημάτων, περισσότερος από τις υπόλοιπες δραστηριότητες του πρώτου φύλλου, ενώ μετά τη λήξη του συνολικού χρόνου αναγνώριζαν ότι δεν το είχαν λύσει ή το έλυσαν λάθος. Στις υπόλοιπες δραστηριότητες του πρώτου φύλλου δεν έκαναν πολλές ερωτήσεις. Εντύπωση προκάλεσαν ερωτήσεις του τύπου “στον πολλαπλασιασμό να βρούμε δύο ψηφία μετά την υποδιαστολή;” ή “γίνεται στον πολλαπλασιασμό να μην είναι ο μεγαλύτερος από πάνω;”, γεγονός που υποδηλώνει την έλλειψη παιδείας στο συγκεκριμένο θέμα.

Στο δεύτερο φύλλο δεν υπήρχαν ερωτήσεις, αλλά εντοπίστηκαν κάποιοι μαθητές οι οποίοι προσπάθησαν να εκτελέσουν τις πράξεις κάθετα. Γενικά πάντως φάνηκε να τελειώνουν γρήγορα και να είναι επαρκής ο χρόνος.

Στο τρίτο φύλλο πάλι ο χρόνος ήταν επαρκής ενώ στο τέταρτο ακούστηκαν ερωτήσεις του τύπου “γίνεται πράξη δεκαδικού με κανονικό[75]”, που και πάλι υποδηλώνει την ύπαρξη σοβαρών κενών στο συγκεκριμένο θέμα.

Στο πέμπτο φύλλο ακούστηκαν οι περισσότερες διαμαρτυρίες, καθώς οι μαθητές δεν είχαν διδαχθεί τη συγκεκριμένη ενότητα και κατά συνέπεια δεν ήξεραν να συμπληρώσουν το ερωτηματολόγιο. Αρκετοί ήταν αυτοί που στο δεύτερο θέμα του πέμπτου φύλλου ρωτούσαν τι σημαίνει περίπου, παρόλο που τους εξηγήσαμε, ενώ υπήρχε και παράδειγμα. Μετά το πέρας της διαδικασίας συμπλήρωσης οι μαθητές ήταν

[75] Με την έκφραση “κανονικός αριθμός” ο μαθητής εννοεί ακέραιο.

σε θέση να αναγνωρίσουν τη χαμηλή επίδοση που παρουσίασαν, την οποία δικαιολόγησαν λέγοντας ότι δεν είχαν διδαχθεί παρόμοια θέματα, ενώ κλάσματα και δεκαδικούς τα είχαν ξεχάσει, καθώς έχουν καιρό να ασχοληθούν με αυτά. Η μαρτυρία αυτή των μαθητών αποτελεί πειστήριο για την παράβλεψη της διδασκαλίας του θέματος της εκτίμησης και τη μη ενασχόληση του εκπαιδευτικού με κλάσματα και δεκαδικούς, καθώς δεν αποτελούν μέρος της ύλης της Στ΄ Δημοτικού.

❖ Στην πειραματική ομάδα για έλεγχο της εξέλιξης το Μάρτιο 2002

Στις Μαρτίου 2002 δόθηκαν στους μαθητές της πειραματικής ομάδας τα πέντε πρώτα φύλλα του ερωτηματολογίου, προκειμένου να διαφανεί η εξέλιξη και βελτίωση που ενδεχομένως παρουσιάσουν υπό την επίδραση της διδακτικής παρέμβασης, καθώς το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί μεταξύ της πρώτης μέτρησης (αρχές Νοεμβρίου 2001) και της επόμενης (τέλος Απριλίου 2002) είναι αρκετά μεγάλο. Επίσης, αυτή η ενδιάμεση μέτρηση θα μπορούσε να αποτελέσει ένα δείκτη για την πορεία της διδακτικής παρέμβασης, ανάλογα με την επίδοση των μαθητών και ενδεχομένως θα μπορούσε να οδηγήσει στην αναπροσαρμογή του διδακτικού σχήματος και στην επανεξέταση κάποιων σημείων που πιθανόν δεν είχαν κατανοηθεί από την πλειοψηφία των μαθητών. Τη χρονική στιγμή που δόθηκε το ερωτηματολόγιο η εξέλιξη της διδακτικής παρέμβασης ήταν η εξής: σύμφωνα με το διδακτικό σχήμα (βλ. §8.4.1) είχε ολοκληρωθεί η διδασκαλία των τριών πρώτων φάσεων και οι μαθητές ήταν έτοιμοι να εισαχθούν στην τέταρτη φάση. Δηλαδή, δεν είχαν διδαχθεί οι τεχνικές εκτίμησης με στρογγυλοποίηση και οι δοκιμές των πράξεων. Έτσι, θα ήταν ενδιαφέρον να ελεγχθεί αφενός η επίδοση σε θέματα που είχαν διδαχθεί (πράξεις με δυνάμεις του 10, τάξη μεγέθους) και αφετέρου σε άλλα θέματα που δεν είχαν ακόμα διδαχθεί (τεχνικές εκτίμησης με στρογγυλοποίηση, δοκιμές πράξεων ή και άλλες μαθηματικές περιοχές).

Κατά τη διάρκεια επίδοσης του ερωτηματολογίου, οι μαθητές έδειχναν εξοικειωμένοι με τις δραστηριότητες. Στα προβλήματα του Vergnaud και πάλι κάποιοι προέβαλαν αντιδράσεις γιατί δεν μπορούσαν να τα λύσουν και δήλωναν ότι είναι πολύ δύσκολα. Στους πολλαπλασιασμούς και τις διαιρέσεις κάποιοι ρώτησαν αν θα έπρεπε να κάνουν δοκιμές, γεγονός που σημαίνει ότι είχαν επηρεαστεί θετικά από τις διάφορες δραστηριότητες που γίνονταν σε καθημερινή βάση και στις οποίες εφαρμοζόταν η δοκιμή προκειμένου να ελεγχθεί η ορθότητά τους. Ακόμη, στις πράξεις με δυνάμεις του 10 εφαρμοζόταν συχνά η δοκιμή, η οποία ήταν ιδιαίτερα εύκολη και με μικρό κόστος.

Το δεύτερο φύλλο το τελείωσαν πολύ γρήγορα, καθότι γνώριζαν επαρκώς και ήταν εξασκημένοι σ’ αυτό το είδος δραστηριοτήτων.

Στο τρίτο φύλλο επίσης χρειάστηκαν λιγότερο χρόνο και ήταν περισσότερο άνετοι, καθώς τα δύο πρώτα θέματα ήταν σε άμεση συνάφεια με τη γνώση εκτέλεσης πράξεων με δυνάμεις του 10, ενώ στα κλάσματα επίσης δε δυσκολεύτηκαν ιδιαίτερα, αφού καθ’ όλη τη διάρκεια της παρέμβασης και ειδικά στη διδασκαλία των πράξεων με δυνάμεις του 10 γινόταν αλλαγή πεδίου έκφρασης και επεξεργασίας και μεταφορά στο πεδίο των κλασμάτων. Επίσης, ήταν σε θέση να γνωρίζουν βασικά θέματα, όπως το πότε ένα κλάσμα είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο από τη μονάδα, ότι κλάσμα σημαίνει και διαίρεση ή τα κριτήρια διάταξης σύμφωνα με το αν τα κλάσματα είναι μεγαλύτερα ή μικρότερα της μονάδας.

Στο τέταρτο φύλλο, στις αφαιρέσεις, υπό την επίδραση της διδασκαλίας των ακριβών υπολογισμών, δεν εξέφρασαν απορίες του τύπου “ποιος αριθμός πρέπει να μπει από πάνω” ή “πού πρέπει να μπει η υποδιαστολή”. Εξάλλου, στο πρόβλημα ανάλογων ποσών δεν είχαν απορίες, καθώς στο πλαίσιο της καθημερινής διδασκαλίας με βάση το αναλυτικό πρόγραμμα, είχε διδαχθεί η διδασκαλία προβλημάτων ανάλογων ποσών και μάλιστα πρόσφατα. Στο πέμπτο φύλλο, στο θέμα που εξετάζεται η γνώση της εύρεσης της τάξης μεγέθους, οι μαθητές έδειχναν άνετοι αφού μόλις είχε ολοκληρωθεί η διδασκαλία του σχετικού θέματος (Γ΄ φάση).

Όμως, στην τελευταία δραστηριότητα που απαιτούσε την εφαρμογή τεχνικών στρογγυλοποίησης, προκειμένου να γίνει η εκτίμηση των αποτελεσμάτων των πράξεων, οι μαθητές δήλωσαν ότι "αυτό δεν το έχουμε κάνει". Κάποιοι μαθητές προέβησαν στη στρογγυλοποίηση των δύο αριθμών στο πρώτο ψηφίο και εκτέλεσαν τις πράξεις με βάση όσα διδάχτηκαν στη φάση διδασκαλίας των ακριβών υπολογισμών, ενώ οι υπόλοιποι απλά βρήκαν την τάξη μεγέθους.

Γενικά μετά την ολοκλήρωση της διαδικασίας συμπλήρωσης του ερωτηματολογίου οι μαθητές έδειχναν ικανοποιημένοι, με εξαίρεση τα προβλήματα του Vergnaud τα οποία συνειδητοποιούσαν ότι δεν είχαν λύσει σωστά.

❖ Στην πειραματική ομάδα και στην ομάδα ελέγχου τον Απρίλιο – Μάιο 2002

Την περίοδο Απριλίου – Μαΐου 2002 δόθηκε, στην πειραματική ομάδα, όσο και στην ομάδα ελέγχου, το ερωτηματολόγιο αποτελούμενο και από τα 7 φύλλα. Στόχος ήταν να φανεί, από τη μια η πιθανή βελτίωση της πειραματικής ομάδας σε σχέση με την επίδοσή τους τις προηγούμενες φορές και η σχέση της επίδοσης της ομάδας ελέγχου με την επίδοσή της το Νοέμβριο του 2001 στο ίδιο ερωτηματολόγιο, και από την άλλη η διαφορά στην επίδοση μεταξύ πειραματικής ομάδας και ομάδας ελέγχου.

Η επίδοση του ερωτηματολογίου, όπως είχε διαμορφωθεί με την πρόσθεση δύο ακόμα θεμάτων, έγινε σε δύο μέρες ώστε να μην είναι ιδιαίτερα κουραστικό για τους μαθητές. Έτσι, τα πέντε πρώτα φύλλα δόθηκαν με τον ίδιο τρόπο όπως το Νοέμβριο του 2001, ενώ το επόμενο δόθηκε την επόμενη μέρα, στην αρχή μιας διδακτικής ώρας (μέχρι και τέταρτης γιατί κατά τις δύο τελευταίες οι μαθητές ενδέχεται να είναι ιδιαίτερα κουρασμένοι).

• Στην πειραματική ομάδα στις 23 και 24 Απριλίου 2002

Κατά την επίδοση του ερωτηματολόγίου στην πειραματική ομάδα οι μαθητές ήταν αρκετά εξοικειωμένοι και ολοκλήρωναν τη συμπλήρωση του εκάστοτε φύλλου αρκετά σύντομα. Και πάλι οι αντιδράσεις αφορούσαν στα προβλήματα του Vergnaud. Στα επόμενα δεν είχαν απορίες, ούτε έκαναν σχόλια. Στο έκτο φύλλο τονίστηκε ότι το πρώτο θέμα έπρεπε να λυθεί νοερά ενώ στο επόμενο θέμα μπορούσαν να εκτελέσουν πράξεις γραπτά. Κάποιοι μαθητές ρώτησαν αν θα έπρεπε να κάνουν δοκιμές στο τρίτο και στο τέταρτο θέμα, γεγονός που δείχνει ότι δεν έχουν σταθεροποιήσει την επέκταση της εφαρμογής δοκιμών σε άλλες μαθηματικές δραστηριότητες.

• Στην ομάδα ελέγχου το Μάιο 2002

Πριν την επίδοση του ερωτηματολογίου στην ομάδα ελέγχου οι μαθητές εξέφρασαν δυσαρέσκεια, καθώς, όπως είπαν είναι ιδιαίτερα δύσκολο και περιλαμβάνει ύλη που δεν έχουν διδαχθεί. Βέβαια, έπειτα από τα επιχειρήματα που προβλήθηκαν σ' αυτούς και που αποτελούν επανάληψη αυτών που ειπώθηκαν κατά την πρώτη επίδοση το Νοέμβριο του 2001, οι μαθητές συμπλήρωσαν το ερωτηματολόγιο. Επίσης, στην απορία των μαθητών γιατί πρέπει να συμπληρώσουν το ίδιο ακριβώς ερωτηματολόγιο για δεύτερη φορά, δόθηκε η απάντηση ότι θέλαμε να ελέγξουμε τη βελτίωσή που τυχόν θα παρουσίαζαν, γεγονός που τους παρότρυνε να ασχοληθούν και να επιδείξουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον στη συμπλήρωσή του.

Στα προβλήματα του Vergnaud μερικοί μαθητές πάλι δήλωναν τη δυσκολία για την επίλυσή τους, ενώ κάποιοι ήταν περήφανοι που μπορούσαν – κατά τη γνώμη τους – να το λύσουν. Ακόμη, ζητούσαν περισσότερο χρόνο στις διαιρέσεις, δηλαδή στο πρώτο φύλλο.

Αρκετοί μαθητές στο δεύτερο φύλλο δήλωναν ότι ήταν ύλη άγνωστη σε αυτούς και ζητούσαν να εκτελέσουν τις πράξεις γραπτά.

Στο τρίτο φύλλο εκφράστηκαν σχόλια όπως: "έχουμε ένα χρόνο να κάνουμε κλάσματα, πώς θέλετε να τα θυμόμαστε;" γεγονός που υποδηλώνει την παράβλεψη της περιοχής των κλασμάτων και την απουσία της από την, καθημερινή διδασκαλία στην Στ΄ τάξη. Επίσης, στη διαίρεση κλασμάτων ειπώθηκε το σχόλιο από κάποιο μαθητή ότι η διαίρεση είναι ατελής, καθώς προφανώς διαιρούσε αριθμητή με αριθμητή, γεγονός που φανερώνει την ύπαρξη διδακτικού κενού στην περιοχή των κλασμάτων.

Στο τέταρτο φύλλο ήταν περισσότερο άνετοι, καθώς το πρόβλημα των ανάλογων ποσών αποτελούσε μέρος της ύλης που είχαν πρόσφατα διδαχτεί και κατά συνέπεια ήταν γνώριμο σ' αυτούς. Μολαταύτα, κάποιος μαθητής ρώτησε αν μπορούμε να βρούμε και δεκαδικό στο πρόβλημα, γεγονός που σημαίνει ότι έχει συνδυάσει τη σωστή λύση προβλημάτων με την ακέραια λύση (πιθανοθεωρητικό κριτήριο βλ. §6.2).

Έντονες αντιδράσεις προβλήθηκαν κατά την επίδοση του πέμπτου φύλλου, όπου εκφράστηκαν σχόλια όπως: "πάλι προπό θα παίξουμε", καθώς γνώριζαν την ανεπάρκειά τους στη συμπλήρωση του πρώτου θέματος και ο μόνος παράγοντας που θα μπορούσε να συνεισφέρει ήταν η τύχη. Στο τελευταίο θέμα του πέμπτου φύλλου κάποιοι μαθητές ζητούσαν επίμονα να βρουν το ακριβές αποτέλεσμα, γιατί όπως έλεγαν ήταν πιο εύκολο γι' αυτούς.

Στο έκτο φύλλο, κάποιοι αντέδρασαν έντονα στο πρώτο θέμα, καθώς έλεγαν ότι δεν έχουν μάθει να βρίσκουν ποσοστό με το μυαλό. Κάποιοι άλλοι ρωτούσαν τι σημαίνει π.χ. το 10% του 350, που σημαίνει ότι δεν είχαν κατανοήσει επαρκώς την έννοια του ποσοστού. Στο δεύτερο θέμα, το πρόβλημα με ανάλογα ποσά, που απαιτούσε βοηθητική πράξη, έδειχναν ότι δεν κατανοούσαν και ρωτούσαν γιατί υπήρχαν πολλοί αριθμοί στο πρόβλημα, καθώς είχαν συνηθίσει οι αριθμοί να είναι τρεις και να αναζητείται ένας τέταρτος.

Μετά τη διαδικασία συμπλήρωσης του ερωτηματολογίου οι μαθητές αναγνώριζαν ότι η επίδοσή τους ήταν χαμηλή σε κάποια θέματα. Μολαταύτα, ζήτησαν να δουν διορθωμένα τα γραπτά τους για να δουν την επίδοσή τους. Μάλιστα ζήτησαν να αφιερωθεί μια διδακτική ώρα για την επίλυση στον πίνακα των ασκήσεων, ώστε να δουν πώς τελικά λύνονται, γεγονός που δείχνει το έντονο ενδιαφέρον των μαθητών στο συγκεκριμένο θέμα, σε αντιδιαστολή με την αδιαφορία που επιδεικνύεται κατά τη διάρκεια της διδακτικής πράξης και που σίγουρα δεν αποτελεί μοναδική ευθύνη των εκπαιδευτικών.

❖ Στην πειραματική ομάδα στις 25 και 26 Μαΐου 2002

Στις 25 και 26 Μαΐου δόθηκε στην πειραματική ομάδα το ερωτηματολόγιο, αποτελούμενο και από τα έξι φύλλα, προκειμένου να ελεγχθεί η επίδοση των μαθητών μετά την παρέλευση ενός περίπου μήνα χωρίς την επίδραση της διδακτικής παρέμβασης. Προτιμήθηκε ο Μάιος από τον Ιούνιο καθώς κατά τον τελευταίο μήνα του διδακτικού έτους οι μαθητές αισθάνονται ότι έρχεται το τέλος της σχολικής χρονιάς και δεν δείχνουν ίσως το απαραίτητο ενδιαφέρον και την απαραίτητη επιμέλεια ενώ ταυτόχρονα γίνονται και οι πρόβες για διάφορες σχολικές εκδηλώσεις. Οι περισσότεροι μαθητές με χαρά δέχτηκαν να συμπληρώσουν για τέταρτη φορά το ερωτηματολόγιο, καθώς γνώριζαν το περιεχόμενό του και τη λύση των περισσότερων δραστηριοτήτων. Οι αντιδράσεις ήταν ελάχιστες και αφορούσαν στο ότι ήταν ανιαρό να συμπληρώνουν πάλι το ίδιο ερωτηματολόγιο, στη θέση του οποίου θα προτιμούσαν ένα άλλο. Η επίδοση έγινε με τον ίδιο ακριβώς τρόπο όπως την επίδοση της περιόδου Απριλίου-Μαΐου 2002.

Κατά τη διάρκεια συμπλήρωσης οι μαθητές δεν είχαν απορίες, ήταν αρκετά ευέλικτοι, είχαν επίγνωση του χρόνου που είχαν στη διάθεσή τους και η διαδικασία ολοκληρώθηκε άψογα. Σε όλα τα φύλλα τελείωναν γρηγορότερα εκτός από το πρώτο που μερικοί εξάντλησαν το χρονικό περιθώριο, προφανώς λόγω της προσπάθειάς τους να επιλύσουν τα δύο πρώτα προβλήματα. Στο πρώτο φύλλο εκφράστηκε το εξής σχόλιο από ένα μαθητή: "τι καλά που υπάρχουν και οι επαληθεύσεις για να μας δείχνουν αν είναι λάθος μια πράξη". Αφότου ολοκληρώθηκε η διαδικασία, οι μαθητές ζήτησαν να δουν τη λύση των προβλημάτων του Vergnaud.

9.2 Πραγματοποίηση της διδακτικής παρέμβασης

9.2.1 Περιγραφή της διδακτικής παρέμβασης

Καθεμιά από τις ενότητες που περιελάμβανε το διδακτικό σχήμα (βλ. §8.4.1) ολοκληρωνόταν σε μια διδακτική ώρα. Στο πλαίσιο διδασκαλίας κάθε ενότητας δίνονταν 4 φύλλα δραστηριοτήτων[76] που αφορούσαν στη συγκεκριμένη ενότητα. Το κάθε φύλλο περιελάμβανε δραστηριότητες, ταξινομημένες στις διάφορες υποκατηγορίες της κάθε ενότητας, όπως περιγράφονται στην §8.4.1.

Αρχικά δινόταν το πρώτο φύλλο δραστηριοτήτων, με βάση το οποίο στοχεύαμε στο να διαπιστωθεί η γνωστική κατάσταση των μαθητών στη συγκεκριμένη ενότητα και να αναδυθούν οι ιδέες που θα ανέπτυσσαν οι μαθητές, προκειμένου να αντιμετωπίσουν μια άγνωστη προβληματική κατάσταση. Όταν η εξεταζόμενη ενότητα ήταν εντελώς άγνωστη στους μαθητές (π.χ. κριτήρια που βασίζονται στις ιδιότητες των ισοϋπόλοιπων αριθμών για την πρόσθεση, αφαίρεση και διαίρεση), δινόταν το πρώτο φύλλο, το οποίο όμως επεξεργαζόμαστε ομαδικά, με ταυτόχρονη ομαδική συζήτηση. Έτσι, οι μαθητές διαπίστωναν μόνοι τους τις υποκατηγορίες που τυχόν εμπεριείχε η ενότητα και έθεταν ερωτήματα.

Στη συνέχεια ακολουθούσε συζήτηση μέσα στην τάξη, όπου οι μαθητές καλούνταν να εκθέσουν τις ιδέες τους για την εκτέλεση των δραστηριοτήτων. Κατόπιν οι μαθητές παροτρύνονταν να εκτελέσουν με άλλο τρόπο την πράξη, προκειμένου να φτάσουν στην κατανόηση του αλγόριθμου που εξετάζουμε. Έπειτα, καλούνταν να διατυπώσουν τον κανόνα για την εκτέλεση του αλγορίθμου. Όπου ήταν δυνατό και με βάση τις ιδέες των μαθητών, διατυπωνόταν και δεύτερος κανόνας, ο οποίος ίσως διευκόλυνε κάποιους μαθητές. Τέλος, εξέθεταν τυχόν απορίες που είχαν, οι οποίες επιδιώκαμε να λυθούν από τους υπόλοιπους μαθητές, ή, όταν αυτό δεν ήταν εφικτό από εμάς.

Μετά τη συζήτηση, δινόταν στους μαθητές το δεύτερο φύλλο δραστηριοτήτων, κατά τη διάρκεια εκτέλεσης του οποίου προσπαθούσαμε να ελέγξουμε τον τρόπο επίλυσης, περιφερόμενοι στην τάξη και βοηθούσαμε εξατομικευμένα μαθητές που μας

[76] Στο παράρτημα υπάρχει ενδεικτικά ένα φύλλο δραστηριοτήτων από κάθε ενότητα. Εξάλλου, επισυνάπτεται και το φύλλο με τους κανόνες και παραδείγματα ορισμένων ενοτήτων, το οποίο δινόταν στους μαθητές για μελέτη στο σπίτι.

καλούσαν ή που εμείς κρίναμε ότι χρειάζονταν βοήθεια. Έπειτα από σύντομη επισκόπηση του δεύτερου φύλλου για να διαπιστωθούν τυχόν πλάνες στις οποίες είχαν υποπέσει, δινόταν και το τρίτο φύλλο. Τέλος, στο σπίτι δινόταν για επεξεργασία το τέταρτο φύλλο δραστηριοτήτων.

Εξάλλου, δινόταν ένα φύλλο, όπου αρχικά με παραδείγματα προέκυπτε ο χρησιμοποιούμενος αλγόριθμος και ακολουθούσε η λεκτική διατύπωση –κανόνας- για την εφαρμογή του. Οι μαθητές καλούνταν να το μελετήσουν στο σπίτι και το τοποθετούσαν σε ειδικό φάκελο, προκειμένου να το χρησιμοποιούν στις επαναλήψεις τους. Κάποιες φορές, επειδή μέσα από την ομαδική συζήτηση και την εξατομικευμένη διδασκαλία προέκυπταν ιδιαίτερες τεχνικές που διευκόλυναν περισσότερο κάποιους μαθητές, παροτρύνονταν να επιλέξουν αυτές που τους εξυπηρετούσαν καλύτερα.

Μετά το πέρας της διδασκαλίας κάθε ενότητας, γινόταν λεπτομερής ανάλυση των φύλλων που είχαν συμπληρώσει οι μαθητές. Την επόμενη μέρα γινόταν ολιγόλεπτη συμπληρωματική διδασκαλία, αν αυτό ήταν απαραίτητο ή εξατομικευμένη σε κάποιους μαθητές που δεν είχαν καταφέρει να προσπελάσουν τις δυσκολίες τους. Εν ανάγκη, δινόταν και πέμπτο φύλλο δραστηριοτήτων.

Παρακάτω γίνεται περιγραφή της διδακτικής παρέμβασης, όπου καταγράφονται οι παρατηρήσεις μας σχετικά με τις συναισθηματικές αντιδράσεις των μαθητών (εκδηλώσεις ευαρέσκειας, ενθουσιασμού ή δυσαρέσκειας), την περιγραφή των ιδεών των μαθητών (σωστών ή εσφαλμένων), τη συμπεριφορά τους πάνω στο γνωστικό τομέα (ερωτήσεις, απαντήσεις σε ερωτήματα του διδάσκοντα, ή των συμμαθητών τους, τρόποι επίλυσης δραστηριοτήτων, δηλώσεις σχετικές με το υπό εξέταση θέμα) την επίδοσή τους και τέλος την αυτοαντίληψή τους.

Α΄ φάση: Υπολογισμός με δυνάμεις του 10 και με αριθμούς του τύπου $\nu \text{x} 10^{\mu}$ με $\nu \in \mathbf{N}^*$, $0<\nu<100$ και $\mu \in \mathbf{Z}$

α) Πολλαπλασιασμός ακεραίων με θετικές δυνάμεις του 10

i) ο αριθμός δεν έχει μηδενικά ψηφία στο τέλος

ii) ο αριθμός έχει μηδενικά ψηφία στο τέλος

Κατά την επίδοση του πρώτου φύλλου δραστηριοτήτων, οι μαθητές εμφανίστηκαν να μπορούν να αντιμετωπίσουν τις δραστηριότητες και των δύο υποκατηγοριών, ενώ εξέφρασαν την άποψη ότι πρόκειται για ιδιαίτερα εύκολες ασκήσεις. Αφού συμπλήρωσαν το πρώτο φύλλο με επιτυχία, έγινε συζήτηση μέσα στην τάξη για τον κανόνα που εφάρμοσαν. Στη συνέχεια προσπαθήσαμε να διαπιστώσουμε από πού προέρχεται ο κανόνας, εκτελώντας κάθετα την πράξη. Ο κανόνας επαναδιατυπώθηκε και δόθηκαν, στη συνέχεια, το δεύτερο και τρίτο φύλλο δραστηριοτήτων. Το τέταρτο φύλλο δόθηκε για επεξεργασία στο σπίτι, μαζί με τον κανόνα και την εξήγηση για την προέλευσή του.

Μέσα από τη συζήτηση οι μαθητές παροτρύνθηκαν να εφαρμόσουν τα απλά κριτήρια διάταξης. Ρωτήθηκαν αν το γινόμενο θα είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο από τους παράγοντες και απάντησαν με ευκολία. Μάλιστα, ρωτήθηκαν για τη σχέση του γινομένου και με τους δύο παράγοντες, ώστε να αρχίσει να φαίνεται ότι το κριτήριο μπορεί να εφαρμοστεί και για τους δύο παράγοντες (βλ. σχετικά §5.3.1).

β) Πολλαπλασιασμός δεκαδικών με θετικές δυνάμεις του 10

i) ο αριθμός των δεκαδικών ψηφίων του αριθμού υπερβαίνει τον εκθέτη της δύναμης του 10 (π.χ. 45,347·100)

ii) ο αριθμός των δεκαδικών ψηφίων είναι ίδιος με τον εκθέτη της δύναμης του 10 (π.χ. 84,32·100)

iii) ο αριθμός των δεκαδικών ψηφίων είναι μικρότερος από τον εκθέτη της δύναμης του 10 (π.χ. 9,74·10000)

Στο πρώτο φύλλο δραστηριοτήτων, αρκετοί μαθητές συμπλήρωναν μηδενικά στο τέλος (π.χ. 4,83·100=4,8300), επηρεασμένοι προφανώς από την προηγούμενη ενότητα. Η Αγάπη εφάρμοζε λάθος τον κανόνα, προσμετρώντας και το ψηφίο των μονάδων για τη μετακίνηση της υποδιαστολής προς τα δεξιά: 6,000232·10000= 6000,232 (μετρούσε το και το 6). Στην τρίτη υποκατηγορία (όπου τα δεκαδικά ψηφία δεν επαρκούσαν για τη μετακίνηση της υποδιαστολής), αρκετοί μαθητές άφηναν ακέραιο τον αριθμό, επηρεασμένοι από τη δεύτερη υποκατηγορία (όπου το γινόμενο ήταν ακέραιος).

Μετά το τέλος συμπλήρωσης του πρώτου φύλλου, ακολούθησε συζήτηση, όπου οι μαθητές αρχικά κλήθηκαν να διαβάσουν τους δεκαδικούς αριθμούς. Είναι αξιοσημείωτο ότι μόνο ένας μαθητής (ο Γιώργος) διάβασε τον αριθμό 6,000235 ενθυμούμενος ότι τα 235 είναι εκατομμυριοστά.

Η Αλεξάνδρα είπε τον κανόνα, χωρίς όμως να αναφέρει τι γίνεται όταν δεν επαρκούν τα δεκαδικά ψηφία για τη μετακίνηση της υποδιαστολής. Μετά την παρότρυνση τη δική μας, ολοκλήρωσε τον κανόνα, τον οποίο επανέλαβαν και άλλοι μαθητές. Πέντε μαθητές (Σούλα, Τάνια, Γιωργία, Γιάννης Μ., Μαρία) μπερδεύτηκαν με τον κανόνα αυτό.

Ο κανόνας, κατά τον οποίο έγραφαν τον πολλαπλασιαστέο χωρίς υποδιαστολή, συμπλήρωναν στο τέλος του τόσα μηδενικά, όσα είχε ο πολλαπλασιαστής και τέλος χώριζαν από το τέλος και προς τα αριστερά τόσα δεκαδικά ψηφία, όσα τα δεκαδικά ψηφία του πολλαπλασιαστέου, τους διευκόλυνε αρκετά, καθώς ενοποιείται με τον αλγόριθμο που εφαρμόζουν για την εκτέλεση ενός οποιουδήποτε πολλαπλασιασμού π.χ. 3,24·10000 $\rightarrow$ 324 $\rightarrow$ 3240000 $\rightarrow$ 32400,00 (βλ. και Κούρκουλος, 1998, σ. 91). Αυτή η τεχνική χρησιμοποιήθηκε από πολλούς μαθητές, ήδη από το πρώτο φύλλο.

Ρωτήθηκαν για τη σχέση του γινομένου με τους παράγοντες και διαπίστωσαν τη διπλή λειτουργία του κριτηρίου. Για να κατανοήσουν τη διπλή λειτουργία του κριτηρίου, όταν ο άλλος παράγοντας είναι μικρότερος της μονάδας, προχωρήσαμε σε αλλαγή πεδίου έκφρασης και επεξεργασίας, γράφοντας τους αριθμούς σε κλασματική μορφή.

γ) Διαίρεση ακεραίων με θετικές δυνάμεις του 10

i)ο αριθμός των ψηφίων του αριθμού υπερβαίνει τον εκθέτη της δύναμης του10 (π.χ. 8954:100)

ii) ο αριθμός των ψηφίων του αριθμού είναι ίδιος με τον εκθέτη της δύναμης του 10 (π.χ. 6547:10000)

iii)ο αριθμός των ψηφίων του αριθμού είναι μικρότερος από τον εκθέτη της δύναμης του 10 (π.χ. 214:100000)

Στο πρώτο φύλλο δραστηριοτήτων, οι περισσότεροι μαθητές κατάφεραν να εκτελέσουν μόνο τις δραστηριότητες με διαίρεση ακεραίου και πηλίκο ακέραιο (ι).

Κάποιοι μαθητές εκτέλεσαν με επιτυχία όλες τις πράξεις (Μιχάλης, Γιώργος, Αλεξάνδρα).

Μετά τη συζήτηση που ακολούθησε, και την κάθετη εκτέλεση κάποιων πράξεων οι μαθητές προχώρησαν στη διατύπωση του κανόνα, καλύπτοντας όλες τις υποκατηγορίες. Στην τρίτη υποκατηγορία, όπου το πηλίκο είναι δεκαδικός, δυσκολεύτηκαν αρκετοί μαθητές. Ο κανόνας "όσα τα μηδενικά του 10,100…, τόσα και τα δεκαδικά ψηφία του αποτελέσματος" τους διευκόλυνε. Στην τρίτη υποκατηγορία κάποιοι μαθητές έκαναν διαγραφή μηδενικών και μετά προχωρούσαν στην εκτέλεση του κανόνα (π.χ. 530:10000=53:1000).

Το κριτήριο διάταξης ήταν γνωστό σ' αυτή την ενότητα, όπως και στην επόμενη.

δ) Διαίρεση δεκαδικών με θετικές δυνάμεις του 10

i)ο αριθμός των ακέραιων ψηφίων του αριθμού υπερβαίνει τον εκθέτη της δύναμης του10 (π.χ. 1542,35:100)

ii)ο αριθμός των ακέραιων ψηφίων είναι ίδιος με τον εκθέτη της δύναμης του 10 (π.χ. 452,154:1000)

iii)ο αριθμός δεν έχει ακέραιο μέρος (π.χ. 0,145:1000)

iv)ο αριθμός των ακέραιων ψηφίων είναι μικρότερος από τον εκθέτη της δύναμης του 10 (π.χ. 452,154:100000)

Στο πρώτο φύλλο οι περισσότεροι μαθητές μετακινούσαν την υποδιαστολή αντίθετα (πολλαπλασιάζοντας). Κάποιοι προέβαλλαν έντονη αντίδραση -"εγώ δεν τα ξέρω"(Αγάπη, Γιάννης Μ., Γεωργία). Ζητούσαν έντονα τη βοήθειά μας. Στην τέταρτη υποκατηγορία, όπου τα ακέραια ψηφία δεν επαρκούσαν για τη μετακίνηση της υποδιαστολής, κάποιοι (Γιάννης, Σούλα, Τάνια, Ελεάννα) προσμετρούσαν και το πρώτο μηδενικό, ακέραιο ψηφίο του πηλίκου για τη μετακίνηση της υποδιαστολής, βρίσκοντας έτσι το πηλίκο κατά μία τάξη μεγαλύτερο π.χ. 2,36:1000=0,0236, όπου μετρούσαν το 2, το 0 και το 0, βρίσκοντας τις τρεις θέσεις μετακίνησης προς τα αριστερά. Στους μαθητές τονίστηκε ότι η υποδιαστολή μπαίνει αριστερά, αφού έχουμε μετρήσει τις θέσεις και έχουμε συμπληρώσει με μηδενικά:

5,24 : 100 = 0,524 **Λάθος**

5,24 : 100 = 0,0524 **Σωστό**

Η Αλεξάνδρα είπε τον κανόνα. Ο Δευκαλίων είπε το δικό του τρόπο εκτέλεσης: "αθροίζοντας το σύνολο των δεκαδικών ψηφίων και των μηδενικών βρίσουμε πόσα δεκαδικά ψηφία έχει το πηλίκο π.χ. 2,34:1000 θα έχει πέντε δεκαδικά ψηφία, άρα είναι 0,00234".

Μετά τη συζήτηση οι μαθητές εξέφρασαν μεγάλο ενθουσιασμό, καθώς μπορούσαν πλέον να αντιμετωπίσουν τέτοιες δραστηριότητες.

ε) Πολλαπλασιασμός ακεραίων και δεκαδικών με αρνητικές δυνάμεις του 10

i)ο αριθμός των ακέραιων ψηφίων του αριθμού υπερβαίνει τον εκθέτη της δύναμης του10 -χωρίς δεκαδικό μέρος αρχικά και με δεκαδικό στη συνέχεια (π.χ. 475·0,1 και 1547,32·0,01)

ii)ο αριθμός των ακέραιων ψηφίων είναι ίδιος με τον εκθέτη της δύναμης του 10 (π.χ. 147·0,001 και 524,32·0,001)

iii)ο αριθμός δεν έχει ακέραιο μέρος (π.χ. 0,145·0,0001) iv)ο αριθμός των ακέραιων ψηφίων είναι μικρότερος από τον εκθέτη της δύναμης του 10 (π.χ. 84·0,001 και 41,26·0,0001)

Ο Γιώργος και ο Μιχάλης κατάλαβαν πώς θα αντιμετωπίσουν τις συγκεκριμένες δραστηριότητες, έχοντας κατά νου τον κάθετο πολλαπλασιασμό. Οι περισσότεροι μαθητές μεγάλωναν τον πολλαπλασιαστέο, καθώς όπως έλεγαν, έχουμε πολλαπλασιασμό. Η Τάνια πότε μεγάλωνε, πότε μίκραινε τον πολλαπλασιαστέο. Οι υπόλοιποι μετακινούσαν σωστά την υποδιαστολή, αλλά δεν κατάφερναν να φτάσουν στη σωστή τάξη μεγέθους του γινομένου. Η Γεωργία έγραφε τον πολλαπλασιαστέο χωρίς υποδιαστολή και στη συνέχει χώριζε από το τέλος τόσα δεκαδικά ψηφία, όσα τα δεκαδικά ψηφία της αρνητικής δύναμης του 10, ενώ ο Γιάννης μετρούσε μηδενικά δεκαδικά ψηφία της δύναμης του 10, τα οποία αντιστοιχούσαν σε θέσεις μετακίνησης της υποδιαστολής προς τα αριστερά, χάνοντας έτσι πάντα μια τάξη μεγέθους (π.χ. 35447·0,0001=35,447). Η Σούλα μετακινούσε την υποδιαστολή σε όλες τις περιπτώσεις μια θέση προς τα αριστερά.

Ο κανόνας που τελικά διατυπώθηκε από τους μαθητές μετά την κάθετη εκτέλεση της πράξης, διευκόλυνε τους μαθητές. Σ' αυτό το σημείο έγινε αλλαγή πεδίου έκφρασης και επεξεργασίας και περάσαμε σε μια κλασματική γραφή των αριθμών, προκειμένου να κατανοήσουν οι μαθητές το συγκεκριμένο αλγόριθμο και να διαπιστώσουν ότι πολλαπλασιασμός με 0,1 0,01… ισοδυναμεί με διαίρεση με 10, 100….

$(2{,}75 \bullet 0{,}1 = 2{,}75 \bullet \frac{1}{10} = \frac{2{,}75}{10} = 2{,}75 : 10 = 0{,}275)$.

στ) Διαίρεση ακεραίων και δεκαδικών με αρνητικές δυνάμεις του 10

i) ο αριθμός των δεκαδικών ψηφίων του αριθμού υπερβαίνει τον εκθέτη της δύναμης του 10 (π.χ. 452,154:0,01)

ii) ο αριθμός των δεκαδικών ψηφίων είναι ίδιος με τον εκθέτη της δύναμης του 10 (π.χ. 1487,34:0,01)

iii)ο αριθμός είναι ακέραιος (π.χ. 654:0,001)

iv) ο αριθμός των δεκαδικών ψηφίων είναι μικρότερος από τον εκθέτη της δύναμης του 10 (π.χ. 954,21:0,0001)

Στο πρώτο φύλλο δραστηριοτήτων εκδηλώθηκαν αρκετές αντιδράσεις από μαθητές, οι οποίοι έλεγαν ότι δε γινόταν να εκτελέσουν από μνήμης τέτοιες διαιρέσεις. Όλοι οι μαθητές ζήτησαν βοήθεια από το πρώτο φύλλο. Η Ροσάννα και ο Γιώργος κατάλαβαν ότι ο αριθμός μεγαλώνει, έχοντας κατά νου ότι όταν πολλαπλασιάζουμε με 0,1 0,01… ο αριθμός μικραίνει (προηγούμενη ενότητα) και γνωρίζοντας ότι ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση είναι πράξεις αντίστροφες, αλλά ζήτησαν επιβεβαίωση. Ο Μιχάλης εκτέλεσε τις δραστηριότητες σωστά, κατανοώντας ότι ο αριθμός μεγαλώνει. Η Μαρία μετακινούσε την υποδιαστολή προς τα αριστερά, μετρώντας από την αρχή του αριθμού και όχι από την υποδιαστολή π.χ. 2,45:0,01=24,5 (ξεκινούσε από το 2). Η Γιωργία και η Αγάπη ακολουθούσαν την ίδια τακτική, αλλά μόνο όταν ο πολλαπλασιαστέος ήταν ακέραιος. Η Τάνια μετακινούσε αντίθετα την υποδιαστολή. Ο Γιάννης έβαζε ένα μηδενικό στους ακεραίους (π.χ. 65:0,01=650). Η Σούλα μετρούσε από την αρχή του αριθμού για να χωρίσει δεκαδικά ψηφία π.χ. 45,32:0,001=453,2 (μετρούσε από το 4 προς τα δεξιά 3 θέσεις. Πολλοί μαθητές δυσκολεύτηκαν στο 9:0,1 και έβρισκαν ως αποτέλεσμα 9.

Στη συζήτηση που ακολούθησε, η Ροσάννα δικαιολόγησε την άποψή της ότι το πηλίκο είναι μεγαλύτερο από τον ένα παράγοντα (όχι αυτόν που είναι δύναμη του 10), λέγοντας ότι το 0,1 είναι το $\frac{1}{10}$, άρα, αντιστρέφουμε το κλάσμα και πολλαπλασιάζουμε. Έχοντας υπόψη τη διδασκαλία που είχε προηγηθεί με τον πολλαπλασιασμό με αρνητικές δυνάμεις του 10, οι μαθητές μπόρεσαν και πέρασαν σε κλασματική γραφή των αριθμών, κατανοώντας έτσι ότι διαίρεση με 0,1 0,01… ισοδυναμεί με πολλαπλασιασμό με 10, 100…($8{,}25 : 0{,}1 = 8{,}25 : \frac{1}{10} = 8{,}25 \cdot \frac{10}{1} = 8{,}25 \cdot 10 = 82{,}5$). Επίσης, η διαίρεση εκτελέστηκε και κάθετα, με πρωτοβουλία των μαθητών.

Με βάση αυτή την αντιστοιχία, ο κανόνας διατυπώθηκε εύκολα από τους μαθητές.

ζ) Πολλαπλασιασμός ακεραίων που έχουν μόνο το ψηφίο της μεγαλύτερης τάξης μη μηδενικό[77]

Σ’ αυτή την ενότητα οι μαθητές δεν παρουσίασαν δυσκολία στην εκτέλεση, ήδη από το πρώτο φύλλο, καθώς είχαν υπόψη τους τον κάθετο πολλαπλασιασμό. Κάποιοι (Ελεάννα, Σούλα, Βάσια, Γιάννης Μ., Μαρία, Γεωργία) δεν ήταν εντελώς βέβαιοι για τον τρόπο εκτέλεσης που ακολούθησαν και ζήτησαν επιβεβαίωση. Ο κανόνας διατυπώθηκε με ευκολία.

η) Πολλαπλασιασμός δεκαδικών που έχουν μόνο το ψηφίο της μεγαλύτερης τάξης μη μηδενικό[78]

Σ’ αυτή την ενότητα ήξεραν έξι μαθητές (Γιώργος, Μιχάλης, Αλεξάνδρα, Κώστας, Δευκαλίων, Δέσποινα), από τους οποίους οι τρεις (Κώστας, Δευκαλίων, Δέσποινα) δεν ήταν απόλυτα βέβαιοι. Ο Γιάννης, αφού πολλαπλασίαζε τα μη μηδενικά ψηφία, μετρούσε τα μηδενικά ψηφία και τα αντιστοίχιζε σε μηδενικά δεκαδικά ψηφία στο αποτέλεσμα (π.χ. $0{,}2 \cdot 0{,}06 = 0{,}0012$). Τρεις μαθητές (Αγάπη, Γεωργία, Ελεάννα) εξέφρασαν άρνηση στην εκτέλεση του πρώτου φύλλου, καθώς δεν γνώριζαν πώς να επιλύσουν τις δραστηριότητες. Η Σούλα και ο Γιάννης Μ. δεν τοποθετούσαν μηδενικά δεκαδικά ψηφία (π.χ. $0{,}02 \cdot 0{,}004 = 0{,}8$). Ο Γιώργος Γ. ρώτησε προς τα πού έπρεπε να μετακινήσει την υποδιαστολή αυτή τη φορά, επηρεασμένος από τις προηγούμενες δραστηριότητες. Στη συζήτηση ο Δευκαλίων διατύπωσε τον κανόνα. Στα επόμενα φύλλα οι μαθητές δεν έκαναν λάθη και εξέφρασαν ενθουσιασμό, καθώς αισθάνθηκαν ότι κατέκτησαν πολύ εύκολα μια νέα γνώση. Η Τάνια δυσκολεύτηκε σε πολλαπλασιασμούς, όπου ο ένας παράγοντας είχε μόνο τα ψηφία των δύο μεγαλύτερων τάξεων διαφορετικά από το μηδέν (π.χ. $0{,}03 \cdot 0{,}25$).

Το κριτήριο διάταξης διατυπώθηκε και διαπιστώθηκε η δυνατότητα εφαρμογής του και για τους δύο παράγοντες.

---

[77] Αριθμοί του τύπου $\nu x 10^{\mu}$ όπου $\nu \in \mathbb{N}^*$, $1<\nu<10$ και $\mu \in \mathbb{N}^*$, όπως π.χ. $300 \cdot 40$

[78] Αριθμοί του τύπου $\nu x 10^{\mu}$ όπου $\nu \in \mathbb{N}^*$, $1<\nu<10$ και $\mu \in \mathbb{Z}^*$, $\mu<0$, όπως π.χ. $0{,}03 \cdot 0{,}8$

θ) Διαίρεση ακεραίων από τους οποίους ο διαιρετέος έχει μόνο το ψηφίο της μεγαλύτερης τάξης ή τα ψηφία των δύο μεγαλύτερων τάξεων μη μηδενικά και ο διαιρέτης έχει μόνο το ψηφίο της μεγαλύτερης τάξης μη μηδενικό[79] (με πηλίκο ακέραιο)

i)τα μηδενικά του διαιρετέου είναι όσα τα μηδενικά του διαιρέτη (π.χ. 5600:800

ii)τα μηδενικά του διαιρετέου είναι περισσότερα απ' αυτά του διαιρέτη (π.χ. 36000:800)

iii)ο διαιρετέος έχει μόνο το ψηφίο της μεγαλύτερης τάξης του διαφορετικό από το μηδέν και το πρώτο ψηφίο του διαιρετέου είναι μικρότερο από το πρώτο ψηφίο του διαιρέτη (π.χ. 40000:500)

Υπήρξαν έντονες αντιδράσεις από αρκετούς μαθητές, καθώς δεν γνώριζαν τον τρόπο εκτέλεσης αυτών των διαιρέσεων από μνήμης. Στο πρώτο φύλλο τα κατάφεραν ο Γιώργος, ο Μιχάλης, ο Δευκαλίων και η Νάσια. Η Αλεξάνδρα, η Ροσάννα και η Δέσποινα έκαναν τη διαίρεση των μη μηδενικών ψηφίων και στο τέλος συμπλήρωναν με το σύνολο των μηδενικών διαιρετέου-διαιρέτη, όπως και στον πολλαπλασιασμό (π.χ. 36000:9000=4000000). Η Βάσια, η Σούλα και ο Κώστας έβαζαν τα μηδενικά του μεγαλύτερου όρου (π.χ. 7200000:9000=800000). Ο Γιάννης έκανε τη διαίρεση όπως με τις θετικές δυνάμεις του 10, θεωρώντας ότι το πρώτο ψηφίο του διαιρέτη είναι 1 (π.χ. 3600:600=36 όπως 3600:100). Τους προτρέψαμε να δουλέψουν με δοκιμή (πολλαπλασιασμό). Κάποιοι βρήκαν άκρη. Αρκετοί δυσκολεύονταν ακόμη, παρόλο που το είχαν κατανοήσει. Στη συζήτηση οι μαθητές σκέφτηκαν να εκτελέσουν τη διαίρεση κάθετα, οπότε ανακάλεσαν στη μνήμη τους τη διαγραφή μηδενικών. Ο κανόνας διατυπώθηκε από την Ελεάννα.

Όλοι, εκτός από το Γιώργο, το Μιχάλη και τη Νάσια, είχαν δυσκολία στο 20000:500 (iii), γιατί έβαζαν ένα παραπάνω μηδενικό, συνυπολογίζοντας και το μηδέν του 20. Στο 30000:150 η Κορίνα, η Βάσια και η Τάνια βρήκαν 5000, γιατί υπολόγιζαν το πηλίκο του 15 διά 3. Στα επόμενα φύλλα είχαν επιτυχία.

ι) Διαίρεση ακεραίων και δεκαδικών, από τους οποίους ο διαιρετέος έχει μόνο το ψηφίο της μεγαλύτερης τάξης ή τα ψηφία των δύο μεγαλύτερων τάξεων μη μηδενικά και ο διαιρέτης έχει μόνο το ψηφίο της μεγαλύτερης τάξης μη μηδενικό[80]

i)τα δεκαδικά ψηφία του διαιρετέου είναι περισσότερα απ' αυτά του διαιρέτη (π.χ. 0,0036:0,9)

ii) τα δεκαδικά ψηφία του διαιρετέου είναι όσα τα δεκαδικά ψηφία του διαιρέτη (π.χ. 0,048:0,006)

iii) τα δεκαδικά ψηφία του διαιρετέου είναι λιγότερα απ' αυτά του διαιρέτη (π.χ. 3,2:0,008)

iv) ο διαιρέτης είναι μονοψήφιος ακέραιος (π.χ. 0,042:7)

v) ο διαιρέτης είναι ακέραιος με περισσότερα από ένα ψηφία -εκτός από το πρώτο, τα υπόλοιπα είναι μηδενικά (π.χ. 0,12:600)

vi) ο διαιρετέος είναι ακέραιος (π.χ. 280:0,004)

---

[79] Ο διαιρετέος είναι του τύπου $\nu x 10^{\mu}$ όπου $\nu \in N^{*}$, $1<\nu<100$ και $\mu \in N^{*}$ και ο διαιρέτης είναι του τύπου $\nu x 10^{\mu}$ όπου $\nu \in N^{*}$, $1<\nu<10$ και $\mu \in N^{*}$, όπως π.χ. 3200:80

[80] Ο διαιρετέος είναι του τύπου $\nu x 10^{\mu}$ όπου $\nu \in N^{*}$, $1<\nu<100$ και $\mu \in Z^{*}$ και ο διαιρέτης είναι του τύπου $\nu x 10^{\mu}$ όπου $\nu \in N^{*}$, $1<\nu<10$ και $\mu \in Z^{*}$, όπως π.χ. 0,045:0,9

Οι μαθητές στο πρώτο φύλλο εμφανίστηκαν μη ικανοί στην εκτέλεση αυτών των δραστηριοτήτων, δηλώνοντας άγνοια. Ακολούθησε συζήτηση, στην οποία οι μαθητές εξέφρασαν τις ιδέες τους για τις τρεις πρώτες υποκατηγορίες (και οι δύο όροι είναι δεκαδικοί):

- Να χωρίσουμε στο πηλίκο τόσα δεκαδικά ψηφία, όσα τα δεκαδικά ψηφία του διαιρέτη (Ροσάννα, Κώστας, Βάσια, Τάνια, Κώστας).
- Να χωρίσουμε στο πηλίκο τόσα δεκαδικά ψηφία, όσα τα δεκαδικά ψηφία του διαιρετέου (Δευκαλίων).
- Να χωρίσουμε στο πηλίκο τόσα δεκαδικά ψηφία, όσο το σύνολο των δεκαδικών ψηφίων διαιρετέου-διαιρέτη (Γιώργος, Αλεξάνδρα, Μιχάλης)

Τους προτρέψαμε να κάνουν δοκιμή. Τότε βρήκε το σωστό πρώτος ο Γιώργος. Ιδέα του ήταν να πολλαπλασιάζουμε το διαιρέτη με κατάλληλη δύναμη του 10 για να γίνει ακέραιος, με την ίδια δύναμη και το διαιρετέο και μετά να διαιρούμε το μη μηδενικό μέρος του διαιρετέου με το διαιρέτη, χωρίζοντας στο πηλίκο τόσα δεκαδικά ψηφία όσα αυτά του διαιρετέου, αν αυτός γινόταν δεκαδικός, ή συμπληρώνοντας τόσα μηδενικά όσα αυτά του διαιρετέου, αν αυτός γινόταν ακέραιος. Αντέδρασαν οι υπόλοιποι μαθητές, λέγοντας ότι αυτή η διαδικασία είναι πολύ χρονοβόρα. Τους εξηγήσαμε τον τρόπο της διαγραφής δεκαδικών ψηφίων[81] μέσα από την κλασματική γραφή των αριθμών:

π.χ. 3,2:0,08= $\frac{32}{10}:\frac{8}{100}=\frac{32:8}{10:100}=\frac{4}{0,1}$=4:0,1=40, όπου το 10:100, και αφού διαγράψουμε τόσα μηδενικά από το διαιρέτη, όσα και από το διαιρετέο, αντιστοιχεί στη διαφορά του συνόλου των δεκαδικών ψηφίων των δύο όρων. Έδειξαν ικανοποιημένοι από τον τρόπο αυτό.

Ο Γιάννης δεν είχε κατανοήσει πλήρως την τεχνική και διαιρούσε σαν να ήταν ο διαιρέτης αρνητική δύναμη του 10 (π.χ. 0,024:0,03=2,4). Στην τρίτη υποκατηγορία, όπου τα δεκαδικά ψηφία του διαιρέτη ήταν περισσότερα από τα δεκαδικά ψηφία του διαιρετέου, δεν έβαζε μηδενικά στο τέλος του πηλίκου (π.χ. 2,7:0,09=3). Η Γιωργία, η Βάσια, η Σούλα και ο Γιάννης Μ. στην τρίτη υποκατηγορία διέγραφαν και το ακέραιο μέρος του διαιρετέου (π.χ. 2,7:0,09=3).

Στην τέταρτη υποκατηγορία, όπου ο διαιρέτης είναι μονοψήφιος ακέραιος, τους προτρέψαμε να εκτελούν νοερά τη δοκιμή με πολλαπλασιασμό. Έτσι, κατέληξαν στο ότι διαιρούμε το μη μηδενικό μέρος του διαιρετέου με το διαιρέτη και χωρίζουμε από το τέλος του πηλίκου τόσα δεκαδικά ψηφία, όσα έχει ο διαιρετέος. Ο Φραγκίσκος, η Βάσια και η Σούλα, επηρεασμένοι από την τεχνική για τη διαίρεση με δεκαδικό διαιρέτη (τρεις πρώτες υποκατηγορίες), έκαναν διαγραφή δεκαδικών ψηφίων (βλ. υποσημείωση 81) και έσβηναν ως δεκαδικό ψηφίο και το διαιρέτη, αν αυτός ήταν μονοψήφιος ακέραιος (π.χ. 0,063:7=0,09).

---

[81] Για να διαιρέσουμε δεκαδικό ο οποίος έχει μόνο ένα ή δύο συνεχόμενα ψηφία διαφορετικά από το μηδέν και όλα τα υπόλοιπα ψηφία του μηδέν, με άλλο δεκαδικό ο οποίος έχει μόνο ένα ψηφίο διαφορετικό από το μηδέν, διαιρούμε τους δυο αριθμούς σαν να είναι ακέραιοι και στο πηλίκο:

- αν ο διαιρετέος είναι μεγαλύτερος από το διαιρέτη συμπληρώνουμε τόσα μηδενικά, όση η διαφορά του συνόλου των δεκαδικών ψηφίων των δύο αριθμών
- αν ο διαιρετέος είναι μικρότερος από το διαιρέτη, τοποθετούμε την υποδιαστολή μετρώντας προς τα αριστερά τόσα δεκαδικά ψηφία, όση η διαφορά του συνόλου των δεκαδικών ψηφίων των δυο αριθμών.

Αν ο διαιρέτης είναι ακέραιος με περισσότερα από ένα ψηφία κατάλαβαν ότι το πηλίκο θα είναι μικρότερο από την προηγούμενη περίπτωση, όπου ο διαιρέτης είναι μονοψήφιος και μάλιστα αν ο διαιρέτης έχει ένα μηδενικό στο τέλος θα είναι 10 φορές μικρότερο το πηλίκο, αν έχει δύο, 100 φορές μικρότερο κ.ο.κ. Έτσι, αντιστοίχησαν τα μηδενικά του διαιρέτη σε δεκαδικά ψηφία και κατέληξαν στον κανόνα να διαιρούν το μη μηδενικό τμήμα του διαιρετέου με το πρώτο ψηφίο του διαιρέτη και στο πηλίκο να χωρίζουν από το τέλος τόσα δεκαδικά ψηφία, όσα και το σύνολο των δεκαδικών ψηφίων του διαιρετέου και των μηδενικών του διαιρέτη (π.χ. 0,045:90→45:9=5 στο οποίο χωρίζουμε 4 δεκαδικά ψηφία-3 από το διαιρετέο και 1 από το μηδενικό του διαιρέτη).

Όταν ο διαιρετέος είναι ακέραιος, τους προτρέψαμε να θυμηθούν τη διαίρεση με αρνητικές δυνάμεις του 10, όπου ο αριθμός μεγάλωνε και έγινε αντιστοιχία:900:0,003=900:(3·0,001)=(900:3):0,001=300·0,001 Έγινε αλλαγή πεδίου έκφρασης και επεξεργασίας και μετάβαση σε κλασματική γραφή των αριθμών (π.χ. $900{:}0{,}003=900{:}\frac{3}{1000}=900\cdot\frac{1000}{3}=\frac{900}{3}\cdot 1000=300\cdot 1000=300000$. Έτσι, κατέληξαν ότι σ' αυτή την περίπτωση, διαιρούμε το διαιρετέο με το μη μηδενικό μέρος του διαιρέτη και στη συνέχεια συμπληρώνουμε στο τέλος του πηλίκου τόσα μηδενικά, όσα και τα δεκαδικά ψηφία του διαιρέτη (π.χ. 900:0,003→ 900:3=300→συμπληρώνουμε με τρία μηδενικά, όσα και τα δεκαδικά ψηφία του 0,003 και προκύπτει 300000).

Διατυπώθηκαν τα κριτήρια διάταξης για τη συγκεκριμένη ενότητα και εξηγήθηκαν μέσα από την αλλαγή πεδίου έκφρασης και επεξεργασίας και την κλασματική γραφή των αριθμών.

Β΄ φάση: Ακριβείς νοεροί υπολογισμοί[82]

α)Πρόσθεση ακεραίων και δεκαδικών ίδιας τάξης που έχουν μόνο το ψηφίο της μεγαλύτερης τάξης μη μηδενικό (τύπου Α[83])

β)Πρόσθεση ακεραίων και δεκαδικών διαφορετικής τάξης με το μεγαλύτερο προσθετέο του τύπου Α (π.χ. 8000+451 και 0,04+0,0088)

Δεν αντιμετώπισαν ιδιαίτερη δυσκολία στην πρώτη ενότητα και μάλιστα εξέφρασαν την άποψη ότι είναι εύκολες δραστηριότητες. Επίσης, δεν δυσκολεύτηκαν στην πρόσθεση ακέραιου με δεκαδικό. Τέσσερις μαθητές είχαν δυσκολία στη δεύτερη ενότητα (β), στην πρόσθεση δεκαδικών αριθμών, όπου βοηθήθηκαν με τη συμπλήρωση μηδενικών στο τέλος του προσθετέου με τα λιγότερα δεκαδικά ψηφία, ώστε και οι δύο προσθετέοι να έχουν ίδιο αριθμό δεκαδικών ψηφίων.

γ)Πρόσθεση ακεραίων και δεκαδικών, ο ένας προσθετέος του τύπου Β (κατά μία τάξη μεγαλύτερος από τον άλλο) και ο άλλος προσθετέος του τύπου Α (π.χ. 8500+400 και 0,045+0,007)

[82] Σε όλες τις δραστηριότητες οι μαθητές παροτρύνονταν να χρησιμοποιούν τα απλά κριτήρια διάταξης.

[83] Στο εξής θα συμβολίζουμε με Α τους αριθμούς του τύπου $\nu \times 10^{\mu}$ όπου $\nu \in \mathbb{N}^*$, $1<\nu<10$ και $\mu \in \mathbb{Z}^*$

δ)Πρόσθεση ακεραίων και δεκαδικών ίδιας τάξης, ο ένας προσθετέος είναι τύπου Α και ο άλλος προσθετέος έχει μόνο τα ψηφία των δύο μεγαλύτερων τάξεων μη μηδενικά (τύπου Β[84]) π.χ. 700+420 και 0,008+0,0032

Ήδη από το πρώτο φύλλο οι μαθητές δεν αντιμετώπισαν δυσκολία σε καμία ενότητα. Στη συζήτηση διαπιστώθηκε ότι τρεις μαθητές (Γιάννης Μ, Γιώργος Γ., Σούλα.) εφάρμοζαν αλγοριθμική διαδικασία, ξεκινώντας από τα δεξιά προς τα αριστερά. Στους δεκαδικούς αριθμούς, στη δεύτερη ενότητα, σκέφτηκαν να συμπληρώνουν με μηδενικά τον προσθετέο που είχε τα λιγότερα δεκαδικά ψηφία. Έκαναν και κάθετα την πρόσθεση για να διαπιστώσουν την αντιστοιχία.

ε)Πρόσθεση ακεραίων και δεκαδικών ίδιας τάξης του τύπου Β (π.χ. 8900+3200 και 0,045+0,038)

Τρεις μαθητές (Γιάννης, Γιώργος Γ., Σούλα) εφάρμοζαν αλγοριθμική διαδικασία, όπως και στην προηγούμενη ενότητα (βλ. παραπάνω). Στη συζήτηση ο Μιχάλης είπε ότι για τον υπολογισμό του 84+15 σκεφτόμαστε: 84+15=(84+10)+5 ενώ η Αλεξάνδρα είπε: 84+15= (80+10)+(4+5). Η Μαρία δεν μπορούσε να υπολογίσει νοερά το 0,43+0,63 ενώ μπορούσε να υπολογίσει 43+63. Την οδηγήσαμε σε αλλαγή πεδίου έκφρασης και επεξεργασίας και στην κλασματική γραφή των προσθετέων.

στ)Πρόσθεση με περισσότερους από δύο προσθετέους

Ο Γιώργος είπε ότι πρέπει να σχηματίσουμε κατάλληλα ζευγαράκια. Σε παραδείγματα που έγιναν στον πίνακα, οι περισσότερες μαθητές συμμετείχαν. Ακόμα και στους δεκαδικούς δε δυσκολεύτηκαν. Στα φύλλα δραστηριοτήτων φάνηκε ότι κάποιοι διέγραφαν τα ζευγαράκια των οποίων υπολόγιζαν το άθροισμα, για να διευκολύνονται.

ζ)Πρόσθεση αριθμού με το 0,9 , 9, 99, 999…
η)Πρόσθεση αριθμού με το 90 , 990…
θ)Πρόσθεση αριθμού με το 101, 1001…
ι)Πρόσθεση αριθμού με το 11, 111, 1111…

Για τον υπολογισμό του γινομένου ακεραίου επί 999, ο Γιάννης Μ. είπε: “στρογγυλοποιούμε στο 1000 και αφαιρούμε 1”. Η Αλεξάνδρα είπε τον κανόνα πολλαπλασιασμού επί 100. Άλλοι μαθητές είπαν με το 9999 κ.ο.κ. Με το 11, 111… έγινε αμέσως αντιληπτή η τεχνική.

ια)Αφαίρεση ακεραίων και δεκαδικών ίδιας τάξης τύπου Α (π.χ. 9000-5000 και 0,07-0,040
ιβ) Αφαίρεση ακεραίων και δεκαδικών διαφορετικής τάξης τύπου Α (π.χ. 9000-50 και 0,07-0,0004)

[84] Στο εξής θα συμβολίζουμε με Β τους αριθμούς του τύπου $\nu x 10^{\mu}$ όπου $\nu \in \mathbb{N}^*$, $10<\nu<100$ και $\mu \in \mathbb{Z}^*$

ιγ)Αφαίρεση ακεραίων και δεκαδικών, ο μειωτέος του τύπου Β (κατά μία τάξη μεγαλύτερος από τον αφαιρετέο) και ο αφαιρετέος του τύπου Α (π.χ. 6500-800 και 0,032-0,008)

Στην ενότητα (ια) και (ιγ) δεν υπήρξε δυσκολία. Αρκετοί μαθητές όμως δυσκολεύτηκαν στην ενότητα (ιβ). Μετακινήθηκαν στην κάθετη αφαίρεση και έλυσαν τις απορίες τους, οι οποίες είχαν να κάνουν με την τοποθέτηση της υποδιαστολής. Επίσης, έγινε και κλασματική γραφή των αριθμών π.χ. 0,9-0,007=$\frac{900}{1000}-\frac{7}{1000}$, οπότε έπρεπε να κάνουν αφαίρεση ακεραίων (900-7). Η Αγάπη δυσκολεύτηκε στο 9000-50 δίνοντας την απάντηση 4000. Της θέσαμε την αφαίρεση 9000-5000 κατανοώντας την προηγούμενη πλάνη της. Οι υπόλοιποι μαθητές δεν είχαν κανένα πρόβλημα και εμφάνισαν μεγάλη εξοικείωση στις συγκεκριμένες ενότητες.

ιδ)Αφαίρεση ακεραίων και δεκαδικών ίδιας τάξης του τύπου Β (π.χ. 5600-2400 και 0,047-0,025)

Θεώρησαν τη συγκεκριμένη ενότητα, τόσο εύκολη όσο τις προηγούμενες. Τέσσερις μαθητές (Σούλα, Βάσια, Γιάννης Μ., Τάνια) εκτελούν την αφαίρεση αλγοριθμικά, ξεκινώντας από δεξιά. Η αποτροπή μας τους μπέρδεψε αρχικά. Οι ίδιοι μαθητές, με τη χρήση της επιμεριστικής ιδιότητας, καθυστερούσαν σε σχέση με τους υπόλοιπους. Ο Μιχάλης διατύπωσε τον κανόνα.

ιε)Αφαίρεση αριθμών όταν ο αφαιρετέος είναι 0,9 , 9, 99, 999…
ιστ)Αφαίρεση αριθμών όταν ο αφαιρετέος είναι 90, 990…
ιζ)Αφαίρεση αριθμών όταν ο αφαιρετέος είναι 101, 1001…
ιη)Αφαίρεση αριθμών όταν ο αφαιρετέος είναι 110, 1010…
ιθ)Αφαίρεση αριθμών όταν ο αφαιρετέος είναι 11, 111…

Η Βάσια διατύπωσε τον κανόνα για την ενότητα (ιδ). Άλλοι μαθητές διατύπωσαν κανόνες για τις υπόλοιπες εξεταζόμενες ενότητες. Ο Γιάννης Μ. μπέρδεψε την αφαίρεση με 99 με την αφαίρεση με 101 και αφαιρούσε 1 αντί να το προσθέσει. Πάντως οι μαθητές έδειξαν μεγάλη αυτοπεποίθηση και είχαν πολύ καλή επίδοση.

κ)Πολλαπλασιασμός ακεραίων και δεκαδικών, ο ένας παράγοντας του τύπου Α και ο άλλος παράγοντας του τύπου Β (π.χ. 40·280 και 0,03·0,0078)

Δεν αντιμετώπισαν δυσκολία στην εκτέλεση των δραστηριοτήτων. Η Σούλα διατύπωσε τον κανόνα, παρόλο που η ίδια επιχειρούσε να εφαρμόσει την αλγοριθμική μέθοδο, ξεκινώντας από δεξιά, καθώς ένιωθε μεγαλύτερη ασφάλεια.

κα)Πολλαπλασιασμός ακεραίων και δεκαδικών του τύπου Β (π.χ. 520·470 και 0,014·0,41)

Για τον πολλαπλασιασμό 22·32 οι μαθητές εξέφρασαν τις ακόλουθες ιδέες:

• 22·32 → 2·32=64, βάζοντας ένα μηδενικό στο τέλος γίνεται 640 (αφού είναι 20·32) και 2·32=64 σύνολο 704 (Γιώργος).

• 2·2 κ.ο.κ. δηλαδή εφαρμόζουμε οριζόντια τον κάθετο πολλαπλασιασμό (Δευκαλίων).

Έπειτα από συζήτηση, όπου διαπιστώθηκε η δυσκολία της από μνήμης εφαρμογής του αλγορίθμου του πολλαπλασιασμού (ιδέα του Δευκαλίωνα), λόγω υπερφόρτωσης της μνήμης με κρατούμενα, καταλήξαμε στη διάσπαση των παραγόντων και την εφαρμογή της επιμεριστικής ιδιότητας. Οι μαθητές θεώρησαν ιδιαίτερα δύσκολη και χρονοβόρα αυτή την ενότητα, καθώς έπρεπε να συγκρατούν πολλά μερικά γινόμενα. Αρκετοί μαθητές έκαναν κάποια σφάλματα. Τρεις μαθητές δεν χρησιμοποιούσαν σωστά την επιμεριστική ιδιότητα π.χ. για το 22·32 έλεγαν 2·32+2. Ωστόσο, κανένας μαθητής δεν έκανε λάθος στην τάξη μεγέθους του γινομένου.

κβ)Πολλαπλασιασμός αριθμού με 0,5 , 5, 50…
κγ)Πολλαπλασιασμός αριθμού με 0,25 , 25, 250…
κδ)Πολλαπλασιασμός αριθμού με 1,5 , 15, 150…
κε)Πολλαπλασιασμός διψήφιου ακεραίου με 11

Για το 0,5·8 η Βάσια είπε ότι λέμε: 5·8=40 και χωρίζοντας ένα δεκαδικό ψηφίο γίνεται 4. Η Νάσια είπε ότι είναι το μισό του 8, δηλαδή 4 και συμφώνησαν άλλοι τρεις μαθητές. Το δικαιολογήσαμε γράφοντας το 0,5 ως κλάσμα $\frac{1}{2}$. Ο Γιώργος είπε τον κανόνα πολλαπλασιασμού επί 5, ο Δευκαλίων επί 50.

Ο Δευκαλίων διατύπωσε τον κανόνα ως εξής: “βρίσκουμε το μισό του αριθμού (ακέραιου) και συμπληρώνουμε με τόσα μηδενικά, όσα έχει το 5, 50, 500… αλλά βάζουμε ένα παραπάνω. Δηλαδή 24·500 κάνει το μισό του 24 δηλαδή 12 και συμπληρώνουμε με δύο μηδενικά που έχει το 500 συν ένα δηλαδή το γινόμενο είναι 12000. Αν είναι δεκαδικός ο άλλος παράγοντας χωρίζουμε στο τέλος του γινομένου τόσα δεκαδικά ψηφία, όσα έχει αυτός ο παράγοντας π.χ. 12,4·50=620,0”

Η Ροσάννα είπε ότι “βρίσκουμε το μισό (για ακεραίους) και συμπληρώνουμε με τόσα μηδενικά, όσα ψηφία έχει το 5, 50, 500… Για τους δεκαδικούς ακολουθούμε την ίδια διαδικασία, αλλά χωρίζουμε από το τέλος του γινομένου τόσα δεκαδικά ψηφία, όσα έχει ο πολλαπλασιαστέος”.

Οι υπόλοιποι μαθητές διατύπωσαν τον κανόνα για τον πολλαπλασιασμό επί 0,25 25 κ.λ.π. Σκέφτηκαν ότι βρίσκουμε το $\frac{1}{4}$ και συμπληρώνουμε με τόσα μηδενικά, όσα τα ψηφία του 25, 250… Αν είναι δεκαδικός ο άλλος παράγοντας χωρίζουμε στο τέλος του γινομένου τόσα δεκαδικά ψηφία, όσα έχει αυτός ο παράγοντας.

Με ανάλογο τρόπο διατυπώθηκαν οι κανόνες για τον πολλαπλασιασμό επί 1,5, 15…

Με το 11 ο Γιώργος εφάρμοσε την επιμεριστική ιδιότητα. Τους εξηγήσαμε και την άλλη τεχνική[85] εκτελώντας κάθετα την πράξη. Έδειξαν ότι το κατανόησαν και επανέλαβαν τη λεκτική διατύπωση για την τεχνική.

[85] Για να πολλαπλασιάσουμε ένα διψήφιο αριθμό με το 11 βάζουμε στη θέση των εκατοντάδων το ψηφίο των δεκάδων του αριθμού, στη θέση των δεκάδων το άθροισμα των ψηφίων των δεκάδων και μονάδων του αριθμού και στη θέση των μονάδων το ψηφίο των μονάδων του αριθμού. Αν το

Η Αλεξάνδρα και η Ροσάννα, στον πολλαπλασιασμό επί 0,25 αφού έβρισκαν το $\frac{1}{4}$ του αριθμού, πολλαπλασίαζαν επί 100, όσα τα μη μηδενικά ψηφία του 0,25. Οι υπόλοιποι μαθητές έκαναν λίγα σφάλματα, απροσεξίας περισσότερο, και τελείωσαν αρκετά γρήγορα.

κστ)Πολλαπλασιασμός αριθμού με 0,9 , 9, 99, 999…
κζ)Πολλαπλασιασμός αριθμού με 90, 990…
κη)Πολλαπλασιασμός αριθμού με 101, 1001…
κθ)Πολλαπλασιασμός αριθμού με 110, 1010…

Η Αλεξάνδρα για τον πολλαπλασιασμό επί 9, 99…είπε ότι πολλαπλασιάζουμε επί 10, 100… και αφαιρούμε στη συνέχεια 1, συγχέοντας τον πολλαπλασιασμό με την πρόσθεση. Οι περισσότεροι μαθητές μπορούσαν να εφαρμόσουν την επιμεριστική στις συγκεκριμένες δραστηριότητες.

Η Αγάπη δεν καταλάβαινε την τεχνική πολλαπλασιασμού επί 0,9 και της το εξήγησε ο Μιχάλης. Ο Γιώργος στο 9·35 έλεγε: 350-9. Η Βάσια και η Ελεάννα έκαναν πολλά λάθη, πετυχαίνοντας όμως πάντα την τάξη μεγέθους. Οι υπόλοιποι μαθητές έκαναν λίγα σφάλματα.

λ)Τετράγωνα διψήφιων ακεραίων που τελειώνουν σε 5
λα)Τετράγωνα των αριθμών 14, 15, 16

Υπολόγισαν το 35^2 με βάση τον πολλαπλασιασμό διψήφιου επί διψήφιο. Στη συνέχεια, έγινε παρουσίαση της τεχνικής υπολογισμού τετραγώνων διψήφιων που τελειώνουν σε 5 και εξηγήθηκε γεωμετρικά (βλ. 5.3.2.2α). Στην περίπτωση που έχουμε αριθμούς που έχουν μηδενικά στο τέλος (π.χ. 350^2), η Κορίνα είπε ότι “συμπληρώνουμε το τετράγωνο του αριθμού που σχηματίζει το μη μηδενικό μέρος, με το διπλάσιο αριθμό μηδενικών”. Στην περίπτωση που ο αριθμός του οποίου το τετράγωνο θέλουμε να υπολογίσουμε είναι δεκαδικός (π.χ. $7{,}5^2$), υπολογίζουμε το τετράγωνό του σαν να είναι ακέραιος και στο τέλος του χωρίζουμε διπλάσιο αριθμό δεκαδικών ψηφίων (Ροσάννα). Εξήγησαν τις απόψεις τους γράφοντας το τετράγωνο ως γινόμενο δύο όμοιων παραγόντων.

Τα τετράγωνα των αριθμών 14 και 16 υπολογίστηκαν με βάση τον πολλαπλασιασμό διψήφιου επί διψήφιο. Τους προτρέψαμε να αποστηθίσουν τα τετράγωνα αυτά, εισάγοντάς τους στις περιπτώσεις καλών και κακών στρογγυλοποιήσεων (βλ. παρακάτω).

Σε γενικές γραμμές δεν έκαναν σφάλματα.

άθροισμα των ψηφίων των δεκάδων και μονάδων του αριθμού υπερβαίνει τη δεκάδα, βάζουμε στη θέση των δεκάδων το ψηφίο των μονάδων του αθροίσματος μονάδων-δεκάδων του αριθμού και στη θέση των εκατοντάδων το ψηφίο των δεκάδων του αριθμού αυξημένο κατά μια μονάδα (κρατούμενο από το άθροισμα μονάδων-δεκάδων.

	Ε	Δ	Μ	
Π.χ. 32•11=				
	3	3+2	2	= 352
48•11	4	4+8	8	= 528

λβ)Διαίρεση ακεραίων, ο διαιρετέος του τύπου Β και ο διαιρέτης του τύπου Α -με ακέραιο πηλίκο (π.χ. 9600:30)

Ο Μιχάλης είπε να υπολογίσουμε το πηλίκο 96:3 με βάση την κάθετη διαίρεση (το 3 στο 9 χωράει 3 κ.ο.κ.). Ο Γιώργος εφάρμοσε την επιμεριστική.

Σχετικά με τα μηδενικά που μπορεί να έχουν οι όροι στο τέλος, η Αλεξάνδρα είπε ότι κάνουμε διαγραφή ίσου αριθμού μηδενικών από το τέλος και των δύο όρων, αφού, όπως είπε, αν διαιρέσουμε και τους δύο όρους με 10, 100… το πηλίκο δεν αλλάζει.

Κάποιοι δυσκολεύτηκαν σε περιπτώσεις 64:4, όπου το 64 έπρεπε να ιδωθεί ως άθροισμα κατάλληλων αριθμών. Η Βάσια σε κάποιες περιπτώσεις έκανε πολλαπλασιασμό αντί για διαίρεση, επηρεασμένη από τις προηγούμενες ενότητες.

λγ)Διαίρεση δεκαδικών (τουλάχιστον ο ένας εκ των δύο όρων είναι δεκαδικός), ο διαιρετέος του τύπου Β και ο διαιρέτης του τύπου Α (0,048:0,3)

Ο Δευκαλίων, στη διαίρεση 0,64:0,04 είπε ότι “πολλαπλασιάζουμε το διαιρέτη και το διαιρετέο επί 100 για να γίνουν ακέραιοι και τους διαιρούμε” (μας ενδιαφέρει να είναι ο διαιρέτης ακέραιος όπως είπε). Η Δέσποινα είπε ότι κάνουμε διαγραφή δεκαδικών ψηφίων, όπως στην ενότητα (ι) της Α΄ φάσης (βλ. Α΄ φάση, ενότητα ι υποσημείωση 81).

Η Αλεξάνδρα στην περίπτωση 9200:0,4 βρήκε 0,023 συνυπολογίζοντας τα μηδενικά του διαιρετέου και τα δεκαδικά ψηφία του διαιρέτη, τα οποία αντιστοίχισε σε δεκαδικά ψηφία στο πηλίκο. Παραλλαγές αυτού του τύπου έκαναν και άλλοι μαθητές στο δεύτερο φύλλο. Στο τρίτο φύλλο είχαν μεγαλύτερη επιτυχία, που μάλιστα τους οδήγησε στο να ζητήσουν και νέο φύλλο δραστηριοτήτων για να συμπληρώσουν.

λδ)Διαίρεση αριθμού με 0,5 , 5, 50, 500…
λε)Διαίρεση αριθμού με 0,25 , 25, 250…

Η Αλεξάνδρα, για τη διαίρεση με 0,5 είπε ότι “διαιρούμε διά δύο, όπως ακριβώς κάνουμε και στον πολλαπλασιασμό, αφού το 0,5 είναι το $\frac{1}{2}$”.

Ο Κώστας, για τη διαίρεση με 0,5 είπε ότι “διπλασιάζουμε γιατί το 0,5 είναι το μισό και η μονάδα έχει δύο μισά”.

Η τεχνική ερμηνεύτηκε, μέσα από την κλασματική γραφή των αριθμών.

Ο Μιχάλης είπε την τεχνική διαίρεσης με το 0,25 και το ερμήνευσε θεωρώντας ότι το 0,25 είναι το $\frac{1}{4}$ της ακέραιας μονάδας. Άλλοι μαθητές διατύπωσαν τον κανόνα για τις υπόλοιπες διαιρέσεις με 25, 250…

Ο Γιώργος Γ. και η Σούλα έκαναν αρκετά λάθη στην τάξη μεγέθους, δείχνοντας ότι δεν εφαρμόζουν απλά κριτήρια διάταξης. Μεγαλύτερη δυσκολία υπήρξε στις διαιρέσεις με 0,25 25… όπου εκδήλωσαν και κάποια δυσφορία. Προφανώς υπήρξε σύγχυση με την αντίστοιχη τεχνική για τον πολλαπλασιασμό.

Γ΄ Φάση: εύρεση της τάξης μεγέθους

Στους μαθητές ορίστηκε ότι η τάξη μεγέθους είναι αυτή του πρώτου μη μηδενικού ψηφίου π.χ. το 417 είναι της τάξεως εκατοντάδων. Εξηγήθηκε σ' αυτούς ότι πολλές φορές θέλουμε να γνωρίζουμε ανάμεσα σε ποιους αριθμούς βρίσκεται το αποτέλεσμα μιας πράξης, ώστε αυτό που θα βρούμε εκτελώντας την πράξη να ξέρουμε ότι δεν είναι σίγουρα λάθος. Μέσα από προβληματικές καταστάσεις[86] διαπίστωσαν ότι πολλές φορές αυτό που θέλουμε να βρούμε είναι όχι το ακριβές αποτέλεσμα, αλλά μια προσέγγιση.

Τα φύλλα δραστηριοτήτων περιείχαν πράξεις και με σύμβολα ανισότητας ζητούνταν να βρουν ανάμεσα σε ποιες δυνάμεις του 10 βρίσκεται το αποτέλεσμα (βλ. παράρτημα).

α)Πρόσθεση
i) οι δύο όροι έχουν ίδιο αριθμό ψηφίων
- η τάξη μεγέθους είναι ίδια με αυτή των προσθετέων
- η τάξη μεγέθους είναι κατά ένα μεγαλύτερη

ii) όταν έχουν διαφορετικό αριθμό ψηφίων

Παρουσιάστηκε στους μαθητές μια πρόσθεση και τους ζητήθηκε να βρουν ανάμεσα σε ποιες δυνάμεις του 10 βρίσκεται το αποτέλεσμα.

Οι μαθητές έδειξαν ότι έβλεπαν πρώτη φορά την ενότητα αυτή.

Η Μαρία πρότεινε να κάνουμε στρογγυλοποίηση των προσθετέων και στη συνέχεια να διαπιστώσουμε ανάμεσα σε ποιους αριθμούς βρίσκεται το άθροισμα.

Τους κατευθύναμε, ρωτώντας τους τι σχέση θα έχει το άθροισμα με καθένα από τους προσθετέους. Η Δέσποινα απάντησε ότι θα είναι μεγαλύτερο από το μεγαλύτερο προσθετέο και βρήκε πόσα το λιγότερο ψηφία θα έχει (σε περίπτωση που οι όροι είναι ακέραιοι). Ρωτήθηκαν τι γίνεται αν οι προσθετέοι έχουν ίδιο αριθμό ψηφίων και ο Μιχάλης είπε ότι "όταν έχουμε αριθμούς με ίδιο αριθμό ψηφίων και το άθροισμα των πρώτων τους ψηφίων υπερβαίνει τη δεκάδα, τότε το άθροισμα έχει ένα παραπάνω ψηφίο τα ψηφία που έχει καθένας από τους δύο προσθετέους". Δεν εξηγήθηκαν στους μαθητές όλες οι περιπτώσεις για την εύρεση της τάξης μεγέθους (βλ. §5.3.2.1), καθώς είναι ιδιαίτερα πολύπλοκες κάποιες απ' αυτές και έχουν μεγάλο κόστος εφαρμογής. Όμως υπήρχαν τέτοιες περιπτώσεις στα φύλλα δραστηριοτήτων, τις οποίες περιμέναμε οι μαθητές να προσεγγίσουν στρογγυλοποιώντας τους όρους στο κατάλληλο ψηφίο (π.χ. 99756+845).

Οι απορίες τους επικεντρώθηκαν στους δεκαδικούς αριθμούς. Ο Μιχάλης εξήγησε στους υπόλοιπους τη διαδικασία που ακολουθούμε.

Η δυσκολία των μαθητών εντοπίστηκε στις περιπτώσεις που οι δύο προσθετέοι είναι διαφορετικής τάξης και το πρώτο ψηφίο του μεγαλύτερου προσθετέου είναι 9. Τελικά οι μαθητές κατανόησαν τη νέα ύλη και επίλυσαν τις δραστηριότητες σε σύντομο σχετικά χρονικό διάστημα.

[86] Όπως για παράδειγμα, όταν είμαστε στο σούπερ μάρκετ και θέλουμε να δούμε αν μας φτάνουν τα χρήματα να αγοράσουμε κάποια πράγματα, δεν επιδιώκουμε να υπολογίσουμε το ακριβές ποσό, αλλά μια προσέγγιση που θα δώσει απάντηση στο ερώτημά μας.

β)Αφαίρεση

i) οι δύο όροι έχουν ίδιο αριθμό ψηφίων

- η τάξη μεγέθους είναι ίδια με αυτή των προσθετέων
- η τάξη μεγέθους είναι κατά ένα μεγαλύτερη

ii) όταν έχουν διαφορετικό αριθμό ψηφίων

Η Τάνια είπε ότι "το αποτέλεσμα θα είναι πάντα μικρότερο από το μειωτέο". Η Αλεξάνδρα είπε ότι "σύμφωνα με τη λογική θα βρίσκουμε ανάμεσα σε ποιους αριθμούς είναι το αποτέλεσμα", εννοώντας προφανώς ότι πρέπει να λαμβάνουμε υπόψη μας την τάξη μεγέθους των όρων της πράξης. Ο Μιχάλης πρότεινε να κάνουμε στρογγυλοποίηση.

Τους εξηγήσαμε με γενικό τρόπο ότι η διαφορά συνήθως θα συμπίπτει με την τάξη μεγέθους του μειωτέου, εκτός αν μειωτέος και αφαιρετέος είναι ίδιας τάξης οπότε η διαφορά μπορεί να είναι μικρότερης τάξης. Τους προτείναμε να κάνουν στρογγυλοποίηση προς τα κάτω και να αφαιρούν τα πρώτα ψηφία, οπότε θα καταλαβαίνουν (Β΄ φάση, ενότητα ιβ). Στην αφαίρεση 12428-9245 η Ροσάννα είπε ότι "κανονικά το αποτέλεσμα θα έπρεπε να είναι ανάμεσα στο 10000 και στο 100000, όπως και ο μειωτέος, αλλά είναι ανάμεσα στο 1000 και στο 10000, αφού 12000-9000=3000". Στους δεκαδικούς κάποιοι προτίμησαν να συμπληρώνουν με μηδενικά, για να έχουν οι αριθμοί ίδιο αριθμό δεκαδικών ψηφίων, οπότε πλέον τους αντιμετώπιζαν σαν ακεραίους. Γενικά φάνηκε ότι τα περισσότερα σφάλματα τα έκαναν στους δεκαδικούς αριθμούς. Ωστόσο, έδειξαν ότι κατανόησαν την ενότητα και στο τρίτο φύλλο είχαν καλή επίδοση.

γ)Πολλαπλασιασμός

i) η τάξη μεγέθους συμπίπτει με το άθροισμα των τάξεων των δυο παραγόντων μειωμένο κατά ένα

ii) η τάξη μεγέθους συμπίπτει με το άθροισμα των τάξεων των δυο παραγόντων

Για τον πολλαπλασιασμό ακεραίων, ο Γιώργος είπε ότι "μετράμε όλα τα ψηφία των δύο παραγόντων, εκτός των πρώτων, και τα αντιστοιχούμε σε μηδενικά". Ο Δευκαλίων συμπλήρωσε ότι "αν το γινόμενο των πρώτων ψηφίων υπερβαίνει τη δεκάδα, βάζουμε άλλο ένα μηδενικό".

Στη συνέχεια, τους εξηγήσαμε ότι κάνουμε προς τα κάτω στρογγυλοποίηση.

Στους δεκαδικούς που είναι μικρότεροι της μονάδας, η Ροσάννα είπε ότι "κρατάμε μόνο το πρώτο, μη μηδενικό ψηφίο από κάθε όρο και στο γινόμενο των ψηφίων αυτών χωρίζουμε τόσα δεκαδικά ψηφία, όσα το σύνολο των μηδενικών ψηφίων των δύο παραγόντων (χωρίς να υπολογίζουμε τα ψηφία που έχουμε κόψει)". Όταν το γινόμενο των πρώτων μη μηδενικών ψηφίων των δύο παραγόντων υπερβαίνει τη δεκάδα, βάζουμε ένα λιγότερο δεκαδικό ψηφίο στο αποτέλεσμα.

Η Αγάπη και η Αλεξάνδρα δεν καταλάβαιναν γιατί κόβουμε τα υπόλοιπα δεκαδικά από τους δύο παράγοντες. Ο Κώστας τους εξήγησε ότι "με τη στρογγυλοποίηση προς τα κάτω γίνονται μηδέν και δεν έχουν αξία".

Για τον πολλαπλασιασμό δεκαδικών με ακέραιο μέρος, ο Μιχάλης είπε ότι "δε λαμβάνουμε υπόψη μας τα δεκαδικά ψηφία και τους αντιμετωπίζουμε ως ακεραίους".

Ο Γιώργος ρώτησε τι γίνεται όταν έχουμε δεκαδικό επί ακέραιο. Τον προτρέψαμε να εκτελέσει κάθετα ένα τέτοιου τύπου πολλαπλασιασμό, οπότε θυμήθηκε ότι βάζουμε πρώτα τα μηδενικά και μετά χωρίζουμε τα δεκαδικά ψηφία. Μόνος του ανακοίνωσε το συμπέρασμα ότι "αφαιρούμε το σύνολο των δεκαδικών ψηφίων από το σύνολο των μηδενικών (ή αντίστροφα) και όση είναι η διαφορά, αν είναι υπέρ των μηδενικών, συμπληρώνουμε με μηδενικά το γινόμενο, ή αν είναι υπέρ των δεκαδικών ψηφίων, χωρίζουμε τόσα δεκαδικά ψηφία από το τέλος του γινομένου". Υπήρξε δυσκολία στην κατανόηση αυτής της περίπτωσης από τέσσερις μαθητές (Νάσια, Αλεξάνδρα, Ροσάννα, Κορίνα).

Η Αλεξάνδρα, όταν στους δεκαδικούς αριθμούς το γινόμενο των πρώτων, μη μηδενικών ψηφίων υπερέβαινε τη δεκάδα, συμπλήρωνε με ένα ακόμα δεκαδικό ψηφίο (π.χ. το 0,856·0,0039 είναι ανάμεσα σε 0,00001 και 0,0001). Η Δέσποινα στους δεκαδικούς ξέχασε τι γίνεται όταν το γινόμενο των πρώτων, μη μηδενικών ψηφίων υπερβαίνει τη δεκάδα. Η εξατομικευμένη διδασκαλία σε κάποιους μαθητές, συνέβαλε στην προσπέλαση των δυσκολιών κατανόησης και εκτέλεσης των δραστηριοτήτων.

δ)Διαίρεση

i) η τάξη μεγέθους είναι όση η διαφορά της τάξης του διαιρέτη από την τάξη του διαιρετέου αυξημένη κατά ένα

ii) η τάξη μεγέθους είναι όση η διαφορά της τάξης του διαιρέτη από την τάξη του διαιρετέου

Ο Γιώργος είπε για το 5478:29 ότι το 9 το κάνουμε μηδέν και το 478 το κάνουμε 000 δηλαδή έχουμε τη διαίρεση 5000:30.

Ο Δευκαλίων είπε ότι διαγράφουμε δύο ψηφία και από τους δύο όρους και ότι περισσέψει γίνεται μηδενικά. Αν δεν χωράει το πρώτο ψηφίο του διαιρέτη στο πρώτο ψηφίο του διαιρετέου, σβήνουμε ένα μηδενικό.

Στη διαίρεση δεκαδικών με ακέραιο μέρος, ο Γιώργος πρότεινε να σβήσουμε το δεκαδικό μέρος και να ενεργήσουμε με ίδιο τρόπο, όπως τους ακεραίους.

Στη διαίρεση δεκαδικού με ακέραιο μέρος με δεκαδικό χωρίς ακέραιο μέρος (6,49:0,27) υπήρξε μεγάλη δυσκολία. Η Νάσια είπε ότι πολλαπλασιάζουμε επί 100 και τους δύο όρους και τους διαιρούμε στη συνέχεια σαν να είναι ακέραιοι.

Στους δεκαδικούς χωρίς ακέραιο μέρος, η Ροσάννα είπε ότι πολλαπλασιάζουμε με δύναμη του 10 για να γίνει ακέραιος ο διαιρέτης.

Τους υπενθυμίσαμε τη διαγραφή των δεκαδικών ψηφίων, σύμφωνα με όσα διδάχτηκαν στην Α΄ φάση (βλ. Α΄ φάση, ενότητα ι, υποσημείωση 81).

Αρκετοί μαθητές δυσκολεύτηκαν στην εκτέλεση των δραστηριοτήτων. Με παροχή εξατομικευμένης διδασκαλίας κατάφεραν να ξεπεράσουν τις όποιες δυσκολίες τους.

Δ΄ Φάση: Εκτίμηση με στρογγυλοποίηση

α)Πρόσθεση

i)Στρογγυλοποίηση στο πρώτο ψηφίο και δύο προσθετέοι

Η στρογγυλοποίηση, όπως ήδη έχει αναφερθεί, αποτελεί ενότητα του σχολικού εγχειριδίου, η οποία διδάχτηκε[87] στα μέσα Νοεμβρίου 2001 (μετά την επίδοση του πρώτου ερωτηματολογίου). Έτσι, οι μαθητές γνώριζαν τον κανόνα της στρογγυλοποίησης.

[87] Η ενότητα διδάχτηκε, παρόλο που το Υ.Π.Ε.Π.Θ., με ειδικό έντυπο οδηγιών, καλεί τους εκπαιδευτικούς της Στ΄ τάξης να μη διδάξουν τη συγκεκριμένη ενότητα (βλ. σχετικά §3.1).

Αρχικά, δόθηκαν αθροίσματα στους μαθητές για να τα υπολογίσουν κατά προσέγγιση (περίπου πόσο κάνουν), οι οποίοι ανακάλεσαν τον κανόνα της στρογγυλοποίησης. Θυμήθηκαν ότι στρογγυλοποίηση μπορούμε να κάνουμε σε διάφορα ψηφία. Παράλληλα όμως ανακάλεσαν και την τεχνική της προς τα κάτω στρογγυλοποίησης, που είχαν διδαχθεί στο πλαίσιο της Γ΄ φάσης. Οι μαθητές ρωτήθηκαν για το ποια από τις δύο τεχνικές στρογγυλοποίησης μας δίνει αποτέλεσμα που είναι πιο κοντά στο ακριβές νούμερο. Απάντησε ο Μιχάλης, ο οποίος το δικαιολόγησε λέγοντας ότι στην προς τα κάτω στρογγυλοποίηση κόβουμε περισσότερο π.χ. 5800+7900.

Η Μαρία, στο άθροισμα 89·52 είπε πώς θα στρογγυλοποιηθούν οι όροι στο πρώτο ψηφίο, με βάση το συνήθη κανόνα.

Ο Γιάννης Μ. ρώτησε τι γίνεται στους δεκαδικούς αριθμούς και η Αγάπη του έλυσε την απορία λέγοντας ότι στρογγυλοποιούμε στο πρώτο μη μηδενικό ψηφίο.

Ο Γιώργος ρώτησε αν το 0,88 γίνεται 1 ή 0,9. Την ίδια απορία είχε και ο Μιχάλης. Τελικά κατάλαβαν ότι και τα δύο είναι σωστά και συνειδητοποίησαν ότι μπορούν να χρησιμοποιούν τη μία ή την άλλη προσέγγιση με τρόπο που τους διευκολύνει στον υπολογισμό του αθροίσματος.

Ο Γιάννης επέμενε να υπολογίζει το άθροισμα με ακρίβεια, χωρίς να στρογγυλοποιεί, γεγονός που τον έκανε να καθυστερεί.

Αρκετοί μαθητές στρογγυλοποιούσαν συχνά προς τα κάτω, επηρεασμένοι από αυτή την τεχνική στρογγυλοποίησης.

Στην πρόσθεση δεκαδικού με ακέραιο μέρος με δεκαδικό χωρίς ακέραιο μέρος, όπως 25,75+0,49 στρογγυλοποιούσαν το όρο με το ακέραιο μέρος στο δεύτερο, ακέραιο ψηφίο.

Στην πρόσθεση δεκαδικών χωρίς ακέραιο μέρος δε συνειδητοποιούσαν κάποιες φορές ότι αλλάζει η τάξη μεγέθους π.χ. στο 0,05+0,09 έβρισκαν 0,014.

ii)Στρογγυλοποίηση στο πρώτο ψηφίο ο ένας προσθετέος και στο δεύτερο ο άλλος

Δεν υπήρξε δυσκολία στην κατανόηση. Ο Γιώργος κατάλαβε ότι γίνεται για να φτάσουμε πιο κοντά στο αποτέλεσμα. Ρώτησαν ποιο προσθετέο θα στρογγυλοποιούμε στο δεύτερο ψηφίο. Έπειτα από καθοδηγητικές ερωτήσεις συμπέραναν ότι στο δεύτερο ψηφίο θα στρογγυλοποιείται ο μεγαλύτερος προσθετέος[88]. Στα φύλλα δραστηριοτήτων εντοπίστηκαν περιπτώσεις που η στρογγυλοποίηση γινόταν στο πρώτο ψηφίο, γεγονός που αποδίδεται στη σύγχυση από την προηγούμενη ενότητα.

iii)Στρογγυλοποίηση στο δεύτερο ψηφίο και οι δύο προσθετέοι

Δεν αντιμετώπισαν ιδιαίτερη δυσκολία. Κατανόησαν τη χρησιμότητα αυτού του είδους της στρογγυλοποίησης.

Έπειτα από τη διδασκαλία των τριών αυτών ειδών στρογγυλοποίησης, έγινε συζήτηση που αφορούσε στο πότε χρησιμοποιούνται. Οι μαθητές κατανόησαν ότι η χρήση τους έχει να κάνει με το πόσο κοντά στο ζητούμενο αποτέλεσμα θέλουμε να φτάσουμε και τι χρόνο έχουμε στη διάθεσή μας.

[88] Σ’ αυτό το σημείο δεν είχε ειπωθεί ακόμα τίποτα για καλές και κακές περιπτώσεις στρογγυλοποιήσεων (βλ. §5.3.2.2), καθώς το διδακτικό σχήμα προέβλεπε αναφορά μόνο για τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση.

β)Αφαίρεση

i)Στρογγυλοποίηση στο πρώτο ψηφίο και δύο όροι

Η ενότητα προσεγγίστηκε με αρκετή ευκολία, καθώς είναι συγγενική με την αντίστοιχη ενότητα για την πρόσθεση. Κάποιοι μαθητές έκαναν λίγα, σποραδικά σφάλματα.

ii)Στρογγυλοποίηση στο δεύτερο ψηφίο ο μειωτέος και στο πρώτο ο αφαιρετέος

Οι μαθητές κατάλαβαν ότι στο δεύτερο ψηφίο θα στρογγυλοποιείται ο μειωτέος, αφού είναι ο μεγαλύτερος όρος και συνεπώς από αυτόν κόβουμε περισσότερο αν τον στρογγυλοποιήσουμε στο πρώτο ψηφίο. Ο Γιάννης έκανε 7 λάθη, τα οποία αφορούσαν στην εύρεση της τάξης μεγέθους.

iii)Στρογγυλοποίηση στο δεύτερο ψηφίο και οι δύο όροι

Υπήρξε δυσκολία σε σχέση με το νοερό υπολογισμό των στρογγυλοποιημένων αριθμών, όπως και στην ενότητα (ιγ) της Β΄ φάσης. Τους παροτρύναμε να χρησιμοποιούν το πρώτο και δεύτερο είδος στρογγυλοποίησης (i και ii), αν δεν μπορούν με ευκολία να υπολογίζουν νοερά τη διαφορά αριθμών που έχουν τα δύο πρώτα ψηφία τους μόνο διαφορετικά από το μηδέν.

γ)Πολλαπλασιασμός

i)Στρογγυλοποίηση στο πρώτο ψηφίο και οι δύο παράγοντες

Δυσκολεύτηκαν στον πολλαπλασιασμό δεκαδικού επί ακέραιο. Ο Μιχάλης θυμήθηκε ότι πρώτα βάζουμε τα μηδενικά του ακέραιου στο γινόμενο και μετά χωρίζουμε από το τέλος τόσα δεκαδικά ψηφία, όσα έχει ο δεκαδικός.

Αρκετοί στρογγυλοποίησαν το 0,973 και βρήκαν 0,1 καθώς πίστευαν ότι έπρεπε να βρουν πάλι δεκαδικό.

ii)Στρογγυλοποίηση στο πρώτο ψηφίο ο ένας παράγοντας και στο δεύτερο ο άλλος

Ο Γιώργος είπε ότι αυτού του είδους η στρογγυλοποίηση γίνεται για να πλησιάσουμε πιο κοντά στο ακριβές αποτέλεσμα, εξηγώντας ότι από το μεγαλύτερο κόβουμε περισσότερο αν τον στρογγυλοποιήσουμε στο πρώτο ψηφίο. Η Ροσάννα έθεσε την περίπτωση 4008·347 όπου ο μεγαλύτερος όρος είναι το 4008 από το οποίο κόβουμε μόνο 8 με τη στρογγυλοποίηση στο πρώτο ψηφίο, ενώ από το μικρότερο κόβουμε 47. Ο Μιχάλης τοποθετήθηκε, λέγοντας ότι θα στρογγυλοποιούμε στο δεύτερο ψηφίο τον όρο από τον οποίο κόβουμε ή βάζουμε το μεγαλύτερο μέρος. Βέβαια αυτό δεν ήταν δυνατό να γίνει αντιληπτό από όλους τους μαθητές. Έτσι, σ’ αυτούς που δεν ήταν σε θέση να καταλάβουν αυτή την τεχνική, προτάθηκε να στρογγυλοποιούν στο δεύτερο ψηφίο το μεγαλύτερο όρο.

iii)Στρογγυλοποίηση στο δεύτερο ψηφίο και οι δύο παράγοντες

Δυσκολεύτηκαν στην εκτέλεση των πολλαπλασιασμών, έπειτα από τη στρογγυλοποίηση των δύο όρων στο δεύτερο ψηφίο, όπως άλλωστε και στην ενότητα (κ) της Β΄ φάσης. Μολαταύτα, δεν είχαν πρόβλημα στην εύρεση της σωστής τάξης μεγέθους του γινομένου ή στην εύρεση των προσεγγίσεων των δύο παραγόντων.

iv)Καλές και κακές περιπτώσεις στρογγυλοποιήσεων

Στους πολλαπλασιασμούς 1442·1425 και 9132·8247 έγιναν διάφορες προσεγγίσεις των αριθμητικών δεδομένων και υπολογίσαμε το γινόμενο, το οποίο συγκρίναμε κάθε φορά με το ακριβές αποτέλεσμα. Διαπιστώσαμε ότι το πρόβλημα με τη στρογγυλοποίηση στο πρώτο ψηφίο υπάρχει στον πρώτο πολλαπλασιασμό.

Η Ροσάννα είπε ότι όταν ο ένας παράγοντας μεγαλώνει και ο άλλος μικραίνει δεν έχουμε πρόβλημα γιατί "όσα χάνει ο ένας τα παίρνει ο άλλος".

Η Μαρία είπε ότι "το 4 του 1442 είναι πιο μεγάλο από το 1 του 9132", θέλοντας να τονίσει ότι από τον ένα κόβουμε 400 και από τον άλλο 100.

Η Νάσια είπε ότι το 9132 και το 8247 είναι μεγάλοι αριθμοί.

Ο Μιχάλης είπε ότι "το 1 είναι πολύ μικρό δίπλα στο 4 ενώ το 9 είναι πολύ μεγάλο δίπλα στο 1". Μετά από ερώτησή μας απάντησαν ότι από το 1442 κόβουμε το $\frac{1}{3}$, ενώ από το 9132 κόβουμε μόνο 132, δηλαδή περίπου 1%. Από τη σύγκριση των διάφορων προσεγγίσεων που έγιναν καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι αν ο ένας ή και οι δύο όροι έχουν το δεύτερο ψηφίο τους πολύ μεγαλύτερο σε σχέση με το πρώτο π.χ. το πρώτο είναι 1 και το δεύτερο 4, 5, 6, 7, η στρογγυλοποίηση του προβληματικού όρου είναι προτιμότερο να γίνεται στο δεύτερο ψηφίο ή, αν αυτό εξυπηρετεί, να στρογγυλοποιείται ο ένας όρος προς τα πάνω και ο άλλος προς τα κάτω.

Ο Γιάννης Μ. ρώτησε αν ακολουθούμε την ίδια τακτική και στους δεκαδικούς αριθμούς και έδωσε μόνος του την απάντηση έπειτα από καθοδηγητικές ερωτήσεις.

Κάποιοι μαθητές έκαναν σφάλματα που αφορούσαν κυρίως το νοερό υπολογισμό των αριθμητικών δεδομένων. Ωστόσο, έδειξαν μεγάλη ευχέρεια στο είδος της προσέγγισης των παραγόντων που ακολουθούσαν, ανάλογα με τα όσα είχαν ειπωθεί μέσα στην τάξη.

Εξάλλου, παρατηρήθηκε σε μαθητές που είχαν κάποια δυσκολία στο νοερό πολλαπλασιασμό διψήφιου επί διψήφιο, να στρογγυλοποιούν τον ένα όρο στο πρώτο ψηφίο και τον άλλο στο δεύτερο, όταν και οι δύο όροι έπρεπε να στρογγυλοποιηθούν στο δεύτερο ψηφίο.

δ)Διαίρεση

i)Στρογγυλοποίηση στο πρώτο ψηφίο και δύο όροι

Ο Γιάννης είπε ότι στους ακεραίους κάνουμε διαγραφή μηδενικών και μετά τη στρογγυλοποίηση.

Ο Γιώργος Γ. έκανε νοερά τη διαίρεση και μετά στρογγυλοποίησε το αποτέλεσμα.

Σε περιπτώσεις που οι διαιρέσεις, μετά τη στρογγυλοποίηση των όρων, δίνουν πηλίκο με πολλά μη μηδενικά ψηφία, τους προτρέψαμε να βρίσκουν δύο μη μηδενικά ψηφία.

Παρατηρήσαμε ότι ο Γιώργος και ο Μιχάλης στρογγυλοποιούσαν το διαιρετέο στο δεύτερο ψηφίο, με τρόπο όμως που να υπολογίζεται εύκολα το πηλίκο.

ii)Στρογγυλοποίηση στο δεύτερο ψηφίο ο διαιρετέος και στο πρώτο ο διαιρέτης

Οι μαθητές δεν αντιμετώπισαν ιδιαίτερη δυσκολία, παρόλο που κάποιοι μαθητές έκαναν σφάλματα, άλλοτε σχετικά με την τάξη μεγέθους και άλλοτε σχετικά με το νοερό υπολογισμό των νέων αριθμητικών δεδομένων.

iii)Στρογγυλοποίηση στο δεύτερο ψηφίο ο διαιρετέος και στο πρώτο ο διαιρέτης με τρόπο που να υπολογίζεται εύκολα το πηλίκο

Οι μαθητές κατανόησαν τη χρησιμότητα αυτής της τεχνικής. Σε ορισμένες περιπτώσεις κάποιοι μαθητές δεν μπορούσαν να βρουν μια προσέγγιση του διαιρετέου, ώστε να υπολογίζεται εύκολα το πηλίκο, κυρίως όταν το πρώτο διψήφιο τμήμα αυτής της προσέγγισης ήταν μεγαλύτερο από το δεκαπλάσιο του πρώτου ψηφίου της προσέγγισης του διαιρέτη (π.χ. 84:3). Δεν μπορούσαν να κάνουν σωστή χρήση της επιμεριστικής ιδιότητας.

iv)Καλές και κακές περιπτώσεις στρογγυλοποιήσεων

Η διδακτική προσέγγιση που ακολουθήθηκε είναι όμοια με αυτή του πολλαπλασιασμού (ενότητα γ).

Η Νάσια είπε ότι “στη διαίρεση 1443:16 το 1 είναι πολύ μικρό σε σχέση με το 4”.

Ο Γιώργος συμπλήρωσε ότι “κόβουμε πολύ από το 1443, αν το στρογγυλοποιήσουμε στο πρώτο ψηφίο”.

Ο Μιχάλης είπε ότι “και οι δύο όροι πρέπει να στρογγυλοποιηθούν προς την ίδια κατεύθυνση”.

Η Αγάπη με ρώτησε τι γίνεται στην περίπτωση 150000:160, αφού αυτή γνωρίζει την προπαίδεια μέχρι το 10. Ο Γιώργος την βοήθησε λέγοντάς της ότι “το 16 στο 160 χωράει 10, άρα στο 150 χωράει περίπου 9”.

Δεν υπήρξε δυσκολία στο είδος της στρογγυλοποίησης που έπρεπε να ακολουθηθεί κατά περίπτωση. Διαπιστώθηκε ότι οι μαθητές είχαν μεγάλη ευχέρεια στη στρογγυλοποίηση σε οποιοδήποτε ψηφίο. Εξάλλου, δε ρώτησαν τι γίνεται στους δεκαδικούς αριθμούς, γεγονός που δείχνει ότι είχαν πλέον αποκτήσει τριβή με αυτούς.

Ε΄ φάση:Δοκιμές των τεσσάρων αριθμητικών πράξεων

Μέσα από ομαδική συζήτηση, οι μαθητές αντιλήφθηκαν τη χρησιμότητα των δοκιμών των αριθμητικών πράξεων. Μίλησαν για προσωπικές τους εμπειρίες κατά τις οποίες είχαν υποπέσει σε μικρό αριθμητικό λάθος και βρήκαν εσφαλμένο αποτέλεσμα, ενώ γνώριζαν να εκτελούν την πράξη.

α)Πρόσθεση
i)Πλήρεις δοκιμές
ii)Δοκιμές που βασίζονται στις ιδιότητες των ισοϋπόλοιπων αριθμών

Οι μαθητές γνώριζαν τις πλήρεις δοκιμές της πρόσθεσης και απλά τις ανακάλεσαν. Παρουσιάστηκε ο “σταυρός”, ο οποίος, όπως τους εξηγήθηκε, είναι ανάλογος με το σταυρό στον πολλαπλασιασμό. Ο Δευκαλίων διατύπωσε την τεχνική εκτέλεσής του.

Στην ερώτηση ποια δοκιμή θα επέλεγαν να εκτελέσουν απάντησαν ομόφωνα το σταυρό, καθώς είναι πιο εύκολος και γρήγορος στην εφαρμογή του. Στη συνέχεια παρουσιάστηκαν περιπτώσεις που η δοκιμή με σταυρό δείχνει ότι δεν υπάρχει λάθος, ενώ υπάρχει. Έτσι, αντιλήφθηκαν ότι δεν μας παρέχει απόλυτη βεβαιότητα για την ορθότητα της πράξης. Εξάλλου, όσον αφορά στο κόστος εφαρμογής, διαπίστωσαν ότι είναι το ίδιο περίπου σε όλες τις περιπτώσεις. Ωστόσο, η προτίμησή τους στο σταυρό οφείλεται στο ότι είναι πρωτότυπη δοκιμή και διαφορετική από το να εκτελείς πάλι γνωστό αλγόριθμο.

β)Αφαίρεση
i)Πλήρεις δοκιμές
ii)Δοκιμές που βασίζονται στις ιδιότητες των ισοϋπόλοιπων αριθμών

Ανακάλεσαν τις πλήρεις δοκιμές τις αφαίρεσης. Στο σταυρό είπαν ότι θα κάνουμε ό,τι και στην πρόσθεση, αλλά θα αφαιρέσουμε τους αριθμούς που τοποθετήσαμε στις δύο επάνω γωνίες. Τους δώσαμε μια αφαίρεση για να εφαρμόσουν αυτή την τεχνική, όπου προέκυπταν αρνητικοί αριθμοί. Έτσι άρχισαν να αναζητούν νέα τεχνική. Ο Δευκαλίων πρότεινε να εφαρμόσουμε το σταυρό της πρόσθεσης, αλλά να ξεκινήσουμε από το τέλος.

Η συζήτηση συνεχίστηκε πάνω στην προτίμησή τους σε κάποια δοκιμή. Με βάση τα συμπεράσματα της προηγούμενης ενότητας, κατέληξαν στη δοκιμή με πρόσθεση, καθώς είναι ευκολότερη από την αφαίρεση (Βάσια), ενώ ο σταυρός μπορεί τυχαία να δείξει ότι η πράξη είναι σωστή (Δευκαλίων). Η Αλεξάνδρα μίλησε για το ρόλο των μηδενικών στο σταυρό και ο Μιχάλης για την υποδιαστολή.

γ)Πολλαπλασιασμός
i)Πλήρεις δοκιμές
ii)Δοκιμές που βασίζονται στις ιδιότητες των ισοϋπόλοιπων αριθμών

Η διδακτική προσέγγιση είναι ανάλογη με τις δύο προηγούμενες ενότητες. Η συζήτηση εστιάστηκε στο κόστος εφαρμογής. Η Αλεξάνδρα επισήμανε τα τρία προβλήματα του σταυρού (βλ. προηγούμενη ενότητα). Ωστόσο, η Σούλα τόνισε ότι ο σταυρός είναι πολύ εύκολος και γίνεται αρκετά σύντομα. Ο Μιχάλης πρότεινε να εκτελούμε το σταυρό, αλλά να κάνουμε και στρογγυλοποίηση στο πρώτο ψηφίο για να βρίσκουμε πόσο περίπου είναι το αποτέλεσμα γιατί έτσι:1)δεν χάνουμε μηδενικά και 2)δεν βάζουμε λάθος την υποδιαστολή.

Στα φύλλα δραστηριοτήτων προχωρούσαν με αργό ρυθμό και έκαναν λάθη. Μας ζητούσαν να εντοπίσουμε το λάθος, αλλά τους προτρέπαμε να το εντοπίσουν μόνοι τους και να κάνουν αυτοδιόρθωση.

δ)Διαίρεση
i)Πλήρεις δοκιμές
ii)Δοκιμές που βασίζονται στις ιδιότητες των ισοϋπόλοιπων αριθμών
iii)Κριτήριο του "τελευταίου ψηφίου"

Στη διαίρεση, αρχικά ανακλήθηκε η ευκλείδεια ταυτότητα. Ο Γιάννης Μ. ανέφερε ότι το υπόλοιπο θα πρέπει να είναι πάντα μικρότερο από το διαιρέτη. Στη διαίρεση 1524:35 όπου το πηλίκο είναι 43,54 και το υπόλοιπο 0,1 η Αλεξάνδρα βρήκε ότι το υπόλοιπο είναι 0,1 και όχι 1. Παρουσιάστηκε σ' αυτούς η στοίχιση, ώστε να βρίσουν εύκολα το πηλίκο (βλ. §5.1δ).

Για το σταυρό ο Δευκαλίων είπε ότι ακολουθούμε την ίδια τακτική, όπως και στις υπόλοιπες πράξεις, μη λαμβάνοντας έτσι υπόψη του το υπόλοιπο. Ο Γιώργος βρήκε το σωστό, αφού τους θυμίσαμε τι γίνεται στην αφαίρεση και ότι ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση είναι επίσης αντίστροφες πράξεις.

Διαπιστώθηκαν σφάλματα στην εκτέλεση των διαιρέσεων από κάποιους μαθητές. Πολλά λάθη είχε η Βάσια, η Τάνια και η Σούλα. Ο Φραγκίσκος σταματούσε στο ακέραιο μέρος του πηλίκου.

Στον πίνακα έγινε παρουσίαση του κριτηρίου του τελευταίου ψηφίου, μέσα από την εκτέλεση της ευκλείδειας δοκιμής. Μέσα από καθοδηγητικές ερωτήσεις, διαπίστωσαν τη λειτουργία του κριτηρίου και διατύπωσαν τον τρόπο χρήσης του, κάνοντας εφαρμογές.

Επαναλήψεις στο σύνολο των δραστηριοτήτων

Α΄ φάση

Στην επανάληψη που έγινε και αφορούσε την Α΄ φάση, λάθη έκαναν λίγοι μαθητές, τα οποία εντοπίστηκαν σε συγκεκριμένες υποπεριπτώσεις για κάθε μαθητή. Έτσι, για παράδειγμα, η Αλεξάνδρα έκανε 2 λάθη στον πολλαπλασιασμό δεκαδικών, όπου έβρισκε ακέραιο, βάζοντας στο τέλος τα μηδενικά: $0{,}8\cdot 0{,}005=4000$.

Επίσης δόθηκαν προβληματικές καταστάσεις στους μαθητές που αφορούσαν στη συγκεκριμένη περιοχή, αφενός να διαπιστωθεί ο βαθμός κατανόησης και αφετέρου να επιτευχθεί ακόμη μεγαλύτερη κατανόηση. Τα προβλήματα ήταν του τύπου: ένα φορτηγό ήταν φορτωμένο με 100 σακιά σιτάρι του ίδιου βάρους τα οποία ζύγιζαν συνολικά 7542,5 κιλά. Πόσο ζύγιζε το ένα σακί;

Β΄ φάση

Για τη Β΄ φάση, οι επαναλήψεις αφορούσαν κυρίως στις τεχνικές εύκολου υπολογισμού και όχι στους υπόλοιπους ακριβείς υπολογισμούς, αφού θα ακολουθούσε επανάληψη με εκτίμηση, όπου θα ελέγχονταν ο ακριβής νοερός υπολογισμός. Οι μεγαλύτερες δυσκολίες εντοπίστηκαν σε πολλαπλασιασμούς με 99, 999,… Στις υπόλοιπες τεχνικές έδειχναν να έχουν μεγάλη ευχέρεια, με εξαίρεση τις διαιρέσεις με 25, 250…, όπου παρουσίασαν σύγχυση, έχοντας υπόψη τους πολλαπλασιασμούς με αυτούς τους αριθμούς, και τα τετράγωνα διψήφιων αριθμών που τελειώνουν σε 5, όπου δυσκολεύτηκαν στην ανάκληση των επιμέρους βημάτων για τον υπολογισμό τους.

Εξάλλου, παρουσιάστηκαν στον πίνακα διάφορες πράξεις, οι οποίες θα μπορούσαν να επιλυθούν με το συνδυασμό των διάφορων τεχνικών που διδάχτηκαν οι μαθητές.

Κλήθηκαν να προτείνουν τρόπους υπολογισμού και να συζητήσουν μεταξύ τους. Έτσι, για παράδειγμα, δόθηκε το γινόμενο 22·27. Η Ροσάννα πρότεινε: (11·27)·2 και η Αλεξάνδρα συμφώνησε λέγοντας ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την τεχνική υπολογισμού με το 11. Ο Δευκαλίων πρότεινε: [(10·27)+27]·2. Για τον υπολογισμό του πηλίκου 240:48 η Νάσια είπε ότι το πηλίκο είναι 5 αφού 5·8=4**0** που τελειώνει σε μηδέν και πρέπει να είναι μονοψήφιο. Ο Δευκαλίων συμφώνησε, αφού έκανε τη δοκιμή νοερά.

Γ΄ φάση

Στις επαναλήψεις που αφορούσαν στην Γ΄ φάση, 11 μαθητές εφάρμοζαν τεχνικές στρογγυλοποίησης, προκειμένου να βρουν την τάξη μεγέθους. Έτσι, ενοποίησαν δραστηριότητες σχετικές με την εύρεση τάξης μεγέθους και άλλες σχετικές με την εύρεση προσεγγίσεων μεγαλύτερης ακρίβειας, εφαρμόζοντας ένα κανόνα.

Δ΄ φάση

Στην Δ΄ φάση οι μαθητές επέδειξαν μεγάλη ευχέρεια στην αναδιατύπωση των όρων της πράξης και μάλιστα εφαρμόζοντας τον κατάλληλο τύπο στρογγυλοποίησης ανάλογα με τα αριθμητικά δεδομένα. Τα σφάλματα που έκαναν ορισμένοι, αφορούσαν στο νοερό υπολογισμό των αναδιατυπωμένων αριθμητικών δεδομένων.

Παρατηρήθηκε ότι στη διαίρεση ακεραίων, όταν ο διαιρετέος είναι μεγαλύτερος από το διαιρέτη, κάποιοι μαθητές έβρισκαν συχνά ως πηλίκο δεκαδικό, μικρότερο της μονάδας π.χ. 18129:321≈0,006 εφαρμόζοντας τον εξής εσφαλμένο κανόνα: διέγραφαν όσα ψηφία είχε ο διαιρέτης από το τέλος του διαιρετέου και όσα έμεναν γίνονταν μηδενικά δεκαδικά ψηφία σε ένα δεκαδικό μικρότερο της μονάδας.

Επίσης δόθηκαν προβληματικές καταστάσεις του τύπου: σε μια αποθήκη τροφίμων υπάρχουν 7230 κουτιά γάλα. Αν θέλουμε να τα συσκευάσουμε σε χαρτοκιβώτια που το καθένα χωρεί 48 κουτιά, πόσα περίπου τέτοια χαρτοκιβώτια θα χρειαστούμε; Στόχος ήταν να κατανοήσουν οι μαθητές ακόμη περισσότερο τη λειτουργία των τεχνικών στρογγυλοποίησης.

Ε΄ φάση

Για την Ε΄ φάση δόθηκαν διάφορες αριθμητικές πράξεις και τους ζητήθηκε να εκτελέσουν δοκιμές. Οι μαθητές εφάρμοσαν τόσο το κριτήριο του σταυρού, όσο και πλήρεις δοκιμές. Συζητήσαμε ακόμη και για το κριτήριο του τελευταίου ψηφίου.

9.2.2 Συμπεράσματα από την παρατήρηση της συμπεριφοράς των μαθητών

Συναισθηματικές αντιδράσεις

Σε ό,τι αφορά το σύνολο των μαθητών, παρατηρούμε ότι αυτοί εξοικειώνονται σταδιακά και μπορούν να ανταποκριθούν με μεγαλύτερη άνεση στις απαιτήσεις της διδακτικής παρέμβασης, καθώς αυτή εξελίσσεται. Συμμετείχαν ενεργά σε όλη τη διάρκεια, με διαστήματα μεγάλου ενθουσιασμού για την εκτέλεση των δραστηριοτήτων και τη γενικότερη συμμετοχή τους. Βέβαια, υπήρξαν και διαστήματα στα οποία εκδήλωσαν αρκετοί τη δυσαρέσκεια τους. Ωστόσο, δεν μπορούμε αυτές τις εκδηλώσεις ενθουσιασμού ή δυσαρέσκειας να τις αντιμετωπίσουμε αποσπασματικά, αποκομμένες από το ψυχολογικό κλίμα της εκάστοτε σχολικής μέρας. Μολαταύτα, διαπιστώνουμε ότι ενθουσιασμό επεδείκνυαν όταν η ενότητα ήταν εύκολη στην κατανόηση, παρόλο που μπορεί να ήταν εντελώς άγνωστη σε αυτούς, και δυσαρέσκεια όταν η ενότητα προς επεξεργασία περιείχε δυσκολίες στην κατανόηση.

Βέβαια θα πρέπει να σημειωθεί ότι κάποιοι μαθητές αντιδρούσαν συχνότερα από τους άλλους (Αγάπη, Γεωργία, Ελεάννα), καθώς ένιωθαν ανασφάλεια, αντιμέτωποι με την καινούρια γνώση. Οι περισσότεροι όμως μαθητές ήταν ενεργητικοί στην απόκτηση της καινούριας γνώσης, ενώ κάποιοι ήταν ιδιαίτερα ενθουσιώδεις (Γιώργος Χ., Αλεξάνδρα, Μιχάλης, Ροσάννα, Δευκαλίων, Νάσια).

Επίδοση και αυτοαντίληψη

Σε ότι αφορά τη δεκτικότητα στη μάθηση και την επίδοση, διακρίθηκαν οι Γιώργος Χ., Αλεξάνδρα, Μιχάλης, Ροσάννα, Δευκαλίων, Νάσια, Κώστας, Δέσποινα, οι οποίοι κατέκτησαν σχεδόν το 100% της καινούριας γνώσης. Συμμετείχαν ενεργά στην ομαδική συζήτηση στο πλαίσιο της καθημερινής ενότητας και χαρακτηρίζονται από διαίσθηση και ευστοχία στην αντιμετώπιση νέων δραστηριοτήτων, ενώ παράλληλα διακατέχονταν από αυτοεμπιστοσύνη σε ό,τι αφορά αυτό που διδάσκονταν.

Καλή επίδοση είχαν και οι Αγάπη και Κορίνα, οι οποίες όμως δεν έδειχναν αυτοπεποίθηση για τις γνώσεις που κατέχουν.

Μεγάλη πρόοδο παρουσίασαν κάποιοι μαθητές, όπως οι Σούλα, Βάσια, Γιάννης Μ., Γιάννης Κ. Οι συγκεκριμένοι μαθητές αρχικά ήταν πολύ συγκρατημένοι και έδειχναν έλλειψη αυτοεμπιστοσύνης. Στο τέλος της Α΄ φάσης, με βάση τα φύλλα δραστηριοτήτων, που λειτουργούσαν και ανατροφοδοτικά, διαπίστωσαν τη βελτίωσή τους και άρχισαν να συμμετέχουν περισσότερο ενεργά στις ομαδικές συζητήσεις.

Βελτιωμένοι εμφανίστηκαν επίσης και οι Γεωργία, Γιώργος Γ., Ελεάννα, Φραγκίσκος, Μαρία, Τάνια, αλλά δεν κατάφεραν να προσπελάσουν όλες τους τις δυσκολίες. Οι συγκεκριμένοι μαθητές παρουσίαζαν μια αστάθεια κατά τη διάρκεια της παρέμβασης η οποία ήταν εντονότερη σε ορισμένες ενότητες (π.χ. στην ενότητα ε) της Α΄ φάσης η Τάνια πότε μεγάλωνε, πότε μίκραινε τον αριθμό).

Πολύ μεγάλη προσπάθεια κατέβαλαν οι Σούλα, Βάσια και Τάνια.

Παρατηρήσεις σχετικά με το γνωστικό περιεχόμενο της παρέμβασης

Οι μαθητές έδειξαν μεγαλύτερη άνεση στους φυσικούς αριθμούς, παρά στους δεκαδικούς, κατά τη διάρκεια όλων των φάσεων Εξάλλου η εκτίμηση όταν τα αριθμητικά δεδομένα είναι δεκαδικοί αριθμοί αποδείχθηκε δυσκολότερη από τους ακεραίους (όπως και στους Bestgen et al. 1980, Rubenstein, 1985). Ωστόσο, ήδη από το τέλος της Α΄ φάσης η δυσκολία των δεκαδικών αριθμών φαινόταν να μειώνεται σιγά-σιγά, γεγονός που οφείλεται κατά ένα μεγάλο μέρος στην αλλαγή πεδίου έκφρασης και επεξεργασίας. Στο τέλος της Δ΄ φάσης οι μαθητές αντιμετώπιζαν με μεγάλη ευχέρεια αριθμητικά δεδομένα με δεκαδικούς αριθμούς.

Επίσης, είχαν καλύτερη επίδοση στις προσθέσεις, αφαιρέσεις και πολλαπλασιασμούς, απ' ότι στις διαιρέσεις, γεγονός που συνδυάζεται με τα ευρήματα των Bestgen et al. (1982), Levine (1982), Hanson & Hogan (2000).

Εξάλλου, καλύτερη επίδοση είχαν στην εκτίμηση με στρογγυλοποίηση και στην εύρεση πρώτου ή δεύτερου σημαντικού ψηφίου, απ' ότι στην εύρεση της τάξης μεγέθους όπως τη διδάχτηκαν κατά τη διάρκεια της Γ΄ φάσης. Αυτό όμως μπορεί να οφείλεται και στο ότι οι διδακτικές ώρες που αναλώθηκαν στην Γ΄ φάση (5 ώρες) ήταν πολύ λιγότερες σε σχέση με αυτές της Δ΄ φάσης (15 ώρες). Ακόμη, έδειξαν μεγαλύτερη άνεση στην εκτίμηση με προσεγγιστικούς υπολογισμούς (Δ΄ φάση), παρά στους ακριβείς υπολογισμούς (Β΄ φάση), γεγονός που αντιδιαστέλλεται με τα αποτελέσματα της έρευνας των Hanson & Hogan (2000).

Μεταφορά της θετικής στάσης για εφαρμογή κριτηρίων εκτίμησης και ελέγχου σε άλλες δραστηριότητες

Σε ό,τι αφορά τις δοκιμές, οι μαθητές σταδιακά εκδήλωναν την επιθυμία τους να εκτελούν δοκιμές και αναγνώριζαν τη χρησιμότητά τους. Η στάση αυτή γρήγορα μεταφέρθηκε και στο πλαίσιο του σχολικού εγχειριδίου και της καθημερινής διδασκαλίας. Επίσης, οι μαθητές έκαναν επιλογές ανάλογα με το κόστος εφαρμογής και τη βεβαιότητα που παρέχουν οι δοκιμές για την ορθότητα της πράξης

Εκτός του ότι η πλειοψηφία των μαθητών εκτελούσαν δοκιμές σε αριθμητικές πράξεις που εκτελούσαν στο πλαίσιο της επίλυσης προβλημάτων, ακόμα και χωρίς να τους ζητηθεί, εφάρμοζαν κριτήρια εκτίμησης και ελέγχου και σε προβλήματα αναλόγων ποσών, τα οποία διδάχτηκαν και ενθαρρύνθηκαν να τα χρησιμοποιούν.

10. ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

10.1 Σύγκριση της πειραματικής ομάδας πριν την υλοποίηση της διδακτικής παρέμβασης και μετά

Προκειμένου να διαπιστώσουμε τη βελτίωση των μαθητών της Π.Ο. μετά την πραγματοποίηση της διδακτικής παρέμβασης, προβήκαμε σε σύγκριση του ερωτηματολογίου της πρώτης επίδοσης (Νοέμβριος 2001) και της τέταρτης επίδοσης (τέλος Μαΐου 2002, ένα μήνα μετά την ολοκλήρωση της διδακτικής παρέμβασης). Επιλέχθηκε η τέταρτη επίδοση προκειμένου να γίνει η σύγκριση, ώστε να έχει παρέλθει η άμεση επίδραση της διδακτικής παρέμβασης.

Η σύγκριση των δύο ερωτηματολογίων έγινε ανά ερώτημα. Βέβαια, στη συγκεκριμένη περίπτωση μάς ενδιαφέρει ο αριθμός των μαθητών που άλλαξαν συμπεριφορά, δηλαδή αυτοί που κατά την πρώτη επίδοση απέτυχαν και κατά την τέταρτη πέτυχαν ή αντίστροφα. Για τον έλεγχο της διαφοράς μεταξύ πρώτης και τέταρτης επίδοσης επιλέξαμε το binomial test, το οποίο ελέγχει ακριβώς τη μεταβολή επιτυχίας-αποτυχίας σε επαναληπτικές μετρήσεις, χωρίς να υπολογίζει τον αριθμό των μαθητών που παρέμειναν σταθεροί και στις δύο μετρήσεις και αποδίδει την ακριβή πιθανότητα της διωνυμικής κατανομής (επιτυχία-αποτυχία). Στην ουσία, αυτό που θέλαμε να ελέγξουμε είναι η στατιστική διαφορά του αριθμού των μαθητών που πέτυχαν κατά την τέταρτη επίδοση ενώ είχαν αποτύχει κατά την πρώτη (βελτιώθηκαν δηλαδή), σε σχέση με τον αριθμό τον μαθητών που ενώ είχαν επιτύχει κατά την πρώτη επίδοση απέτυχαν κατά τη δεύτερη, διαπιστώνοντας έτσι την επίδραση της διδακτικής παρέμβασης.

Για να είναι ευκρινέστερη η εικόνα που αφορά στη βελτίωση της Π.Ο., εξετάσαμε τα θέματα του ερωτηματολογίου ομαδοποιημένα σε 5 περιοχές, σύμφωνα με τις υποθέσεις της έρευνας (βλ. §8.5)[89].

Ομαδοποίηση θεμάτων

1. το τέταρτο, δέκατο και ενδέκατο θέμα ως *πράξεις από μνήμης*

2. το τρίτο και όγδοο θέμα ως *γραπτή εκτέλεση πράξεων ακεραίων και δεκαδικών*

3. το πέμπτο και έκτο θέμα ως *μετατροπή δεκαδικών αριθμών σε κλάσματα και αντίστροφα*

4. το έβδομο θέμα ως *εκτέλεση πράξεων μεταξύ κλασμάτων*

5. τα δύο πρώτα θέματα καθώς και το ένατο θέμα ως *προβλήματα*

[89] Η ομαδοποίηση δεν αφορά στο 12ο και στο 13ο θέμα, καθώς αυτά δόθηκαν στην πειραματική ομάδα κατά την τρίτη και τέταρτη μέτρηση και κατά συνέπεια δεν μπορεί να γίνει σύγκριση μεταξύ πρώτης και τέταρτης μέτρησης. Η σύγκριση που γίνεται με βάση αυτά τα θέματα είναι μεταξύ της πειραματικής ομάδας και της ομάδας ελέγχου, σύμφωνα με την επίδοσή τους κατά την τέταρτη μέτρηση (βλ. §10.4.2).

Επεξήγηση συμβόλων που εμφανίζονται στους πίνακες
1=αποτυχία
2=επιτυχία
p=επίπεδο σημαντικότητας
Π.Ο. = πειραματική ομάδα
Ο.Ε. = ομάδα ελέγχου
Παρατήρηση: το κελί που δείχνει την τιμή για το binomial test ή το binomial test είναι χρωματισμένο με γκρι, όταν η βελτίωση της πειραματικής ομάδας είναι στατιστικά σημαντική, σε επίπεδο σημαντικότητας 0,05 (για μονόπλευρο έλεγχο).

1. Πράξεις από μνήμης (4ο, 10ο και 11ο θέμα)

α. Πολλαπλασιασμοί και διαιρέσεις με δυνάμεις του 10 και με αριθμούς του τύπου $\nu x 10^{\mu}$, όπου $\nu \in N^*$, $1<\nu<100$ και $\mu \in Z$ (Ακριβείς νοεροί υπολογισμοί, 4ο θέμα)

p για το binomial test=0,008		3,85·10000		Σύνολο
		4η επίδοση		
		1	2	
1η επίδοση	1	1 5%	7 35%	8 40%
	2	0 0%	12 60%	12 60%
Σύνολο		1 5%	19 95%	20 100%

Στον πρώτο πολλαπλασιασμό δεκαδικού με θετική δύναμη του 10, παρατηρούμε ότι το 35% των μαθητών εμφανίζεται βελτιωμένο, ενώ κανένας μαθητής δεν οπισθοδρομεί σε ό,τι αφορά τη συγκεκριμένη γνώση. Η συνολική επιτυχία της Π.Ο. ανέρχεται στο 95%, ενώ κατά την πρώτη μέτρηση έφτανε στο 60%. Η βελτίωση της Π.Ο. είναι σημαντική σύμφωνα με το binomial test σε επίπεδο σημαντικότητας 0,05.

p για το binomial test=0,5		0,0467·1000		Σύνολο
		4η επίδοση		
		1	2	
1η επίδοση	1	1 5%	2 10%	3 15%
	2	3 15%	14 70%	17 85%
Σύνολο		4 20%	16 80%	20 100%

Στο δεύτερο πολλαπλασιασμό δεκαδικού με θετική δύναμη του 10, βελτίωση παρουσιάζει το 10% των μαθητών, ενώ το 15% των μαθητών αποτυγχάνει έχοντας επιτύχει κατά την πρώτη μέτρηση. Η συνολική επιτυχία της Π.Ο. είναι 80%, μειωμένη κατά 5% σε σχέση με την πρώτη μέτρηση.

Μια σημαντική παρατήρηση είναι ότι, από τους 3 μαθητές (15%) που απαντούν λάθος στο δεύτερο πολλαπλασιασμό με θετική δύναμη του 10 ενώ έχουν απαντήσει σωστά κατά την πρώτη μέτρηση, οι 2 (10%) έχουν απαντήσει λάθος στον πρώτο πολλαπλασιασμό με θετική δύναμη του 10 κατά την πρώτη μέτρηση. Αυτό σημαίνει ότι πρόκειται για ένα φαινόμενο αστάθειας, δηλαδή η επιτυχία τους στο δεύτερο πολλαπλασιασμό κατά την πρώτη επίδοση αποτελεί προφανώς ένα τυχαίο γεγονός.

Μια άλλη εξήγηση είναι πως κάποιοι μαθητές γνώριζαν πολύ καλά να πολλαπλασιάζουν με θετικές δυνάμεις του 10, μόνο όταν δεν ήταν απαραίτητη η συμπλήρωση μηδενικών στο τέλος και επαρκούσαν τα δεκαδικά ψηφία για τη μετακίνηση της υποδιαστολής. Η επέκταση του κανόνα ήρθε να αποσταθεροποιήσει την παλιά γνώση για κάποιους μαθητές, οι οποίοι όμως βελτιώνονται στον πρώτο πολλαπλασιασμό όπου δεν επαρκούν τα δεκαδικά ψηφία για την μετακίνηση της υποδιαστολής.

Προκειμένου να διαπιστώσουμε τη βελτίωση των μαθητών που απαντούν σωστά και στους δύο συναφείς πολλαπλασιασμούς έχουμε:

p για το binomial test=0,11		Απάντηση και στα δύο ερωτήματα (3,85·10000 και 0,0467·1000)		Σύνολο
		4η επίδοση		
		1	2	
1η επίδοση	1	3 15%	5 25%	8 40%
	2	1 5%	11 55%	12 60%
Σύνολο		4 20%	16 80%	20 100%

Παρόλο που η διαφορά μεταξύ των δύο επιδόσεων, ως προς την επιτυχία και στους δύο πολλαπλασιασμούς δεν είναι στατιστικά σημαντική, σύμφωνα με το binomial test, παρατηρούμε ότι υπάρχουν 5 μαθητές οι οποίοι βελτιώνονται και απαντούν σωστά και στους δύο πολλαπλασιασμούς, ενώ μόνο 1 μαθητής δεν καταφέρνει να απαντήσει και στα δύο ερωτήματα ενώ το είχε επιτύχει κατά την πρώτη μέτρηση. Εξάλλου, ενώ αρχικά το ποσοστό επιτυχίας και στους δύο πολλαπλασιασμούς ήταν 60%, κατά την τέταρτη μέτρηση ανεβαίνει στο 80%.

p για το binomial test=0,008		4623·0,01		Σύνολο
		4η επίδοση		
		1	2	
1η επίδοση	1	4 20%	7 35%	11 55%
	2	0 0%	9 45%	9 45%
Σύνολο		4 20%	16 80%	20 100%

Στον πρώτο πολλαπλασιασμό με αρνητικές δυνάμεις του 10, το 35% των μαθητών βελτιώνεται, χωρίς να υπάρχει μαθητής που αποσταθεροποιεί τη γνώση που κατείχε ήδη από την πρώτη μέτρηση. Η Π.Ο. έχει συνολική επιτυχία 80%, ανεβάζοντας το ποσοστό της κατά 35 ποσοστιαίες μονάδες. Η βελτίωσή της είναι στατιστικά σημαντική σε επίπεδο σημαντικότητας 0,05.

p για το binomial test=0,063		25,4·0,0001 4η επίδοση		Σύνολο
		1	2	
1η επίδοση	1	6 30%	6 30%	12 60%
	2	1 5%	7 35%	8 40%
Σύνολο		7 35%	13 65%	20 100%

Στο δεύτερο πολλαπλασιασμό με αρνητικές δυνάμεις του 10, βελτίωση εμφανίζει το 30% των μαθητών, ενώ υπάρχει και 5% που δεν επιτυγχάνει ενώ είχε επιτύχει την πρώτη φορά. Το ποσοστό επιτυχίας της Π.Ο. ανέρχεται στο 65%, βελτιωμένο κατά 25 ποσοστιαίες μονάδες. Βέβαια, το binomial test δείχνει ότι η βελτίωση της Π.Ο. δεν είναι στατιστικά σημαντική.

Διαπιστώνουμε ότι στο συγκεκριμένο πολλαπλασιασμό το ποσοστό επιτυχίας είναι χαμηλότερο σε σχέση με τους προηγούμενους πολλαπλασιασμούς, γεγονός που οφείλεται στην ανάγκη συμπλήρωσης μηδενικών από αριστερά, καθώς δεν επαρκούν τα δεκαδικά ψηφία για τη μετακίνηση της υποδιαστολής. Μολαταύτα, παρατηρούμε ότι, σχεδόν όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις, βελτίωση εμφανίζει το 30%, ένα σημαντικό ποσοστό.

Προκειμένου να διαπιστώσουμε αν η βελτίωση των μαθητών συνολικά στους πολλαπλασιασμούς με αρνητικές δυνάμεις του 10 είναι στατιστικά σημαντική, συγκρίναμε το ποσοστό των μαθητών που απαντούν σωστά και στα δύο συναφή ερωτήματα κατά την πρώτη μέτρηση και κατά την τέταρτη.

p για το binomial test=0,035		Απάντηση και στα δύο ερωτήματα (4623·0,01 και 25,4·0,0001) 4η επίδοση		Σύνολο
		1	2	
1η επίδοση	1	7 35%	7 35%	14 70%
	2	1 5%	5 25%	6 30%
Σύνολο		8 40%	12 60%	20 100%

Έτσι, το 30% των μαθητών απαντά σωστά και στα δύο συναφή ερωτήματα κατά την πρώτη μέτρηση, ενώ κατά τη δεύτερη μέτρηση το ποσοστό αυτό ανεβαίνει στο 60%.

Η διαφορά μεταξύ των δύο επιδόσεων ως προς την επιτυχία και στους δύο πολλαπλασιασμούς είναι στατιστικά σημαντική, σύμφωνα με το binomial test:

Επίσης, είναι σημαντικό ότι η πλειοψηφία των μαθητών έχει κατανοήσει ότι πολλαπλασιασμός με 0,1 0,01… ισοδυναμεί με διαίρεση με 10, 100…

Γενικά πάντως, τα ποσοστά επιτυχίας που εμφανίζει η Π.Ο. στους πολλαπλασιασμούς με θετικές και αρνητικές δυνάμεις του 10 είναι σχετικά υψηλά και συνδυάζονται με τα αντίστοιχα ποσοστά στους πολλαπλασιασμούς δεκαδικών (βλ. παραπάνω) και τους πολλαπλασιασμούς ακεραίων (βλ. παρακάτω).

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="3">p για το binomial test=0,011</td><td colspan="2">1596,76:10000</td><td rowspan="3">Σύνολο</td></tr>
<tr><td colspan="2">4η επίδοση</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1η επίδοση</td><td>1</td><td>2
10%</td><td>9
45%</td><td>11
55%</td></tr>
<tr><td>2</td><td>1
5%</td><td>8
40%</td><td>9
45%</td></tr>
<tr><td colspan="2">Σύνολο</td><td>3
15%</td><td>17
85%</td><td>20
100%</td></tr>
</table>

Στην πρώτη διαίρεση δεκαδικού με θετική δύναμη του 10, παρατηρούμε ότι βελτίωση παρουσιάζει το 45% των μαθητών, ενώ υπάρχει και 5% που δε συγκρατεί τη γνώση που είχε πρώτα. Το ποσοστό επιτυχίας της Π.Ο. είναι 85%, ενώ αρχικά ήταν 45%, με στατιστικά σημαντική βελτίωση σε επίπεδο σημαντικότητας 0,05.

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="3">p για το binomial test=0,001</td><td colspan="2">5,37:100</td><td rowspan="3">Σύνολο</td></tr>
<tr><td colspan="2">4η επίδοση</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1η επίδοση</td><td>1</td><td>4
20%</td><td>11
55%</td><td>15
75%</td></tr>
<tr><td>2</td><td>0
0%</td><td>5
25%</td><td>5
25%</td></tr>
<tr><td colspan="2">Σύνολο</td><td>4
20%</td><td>16
80%</td><td>20
100%</td></tr>
</table>

Στη δεύτερη διαίρεση με αρνητική δύναμη του 10, βελτίωση παρουσιάζει το 55% των μαθητών, χωρίς να υπάρχει μαθητής που εμφανίζει απώλεια της προηγούμενης γνώσης. Το ποσοστό επιτυχίας της Π.Ο. είναι 80%, ενώ κατά την πρώτη μέτρηση ήταν 25%, με τη βελτίωσή της να είναι στατιστικά σημαντική σε επίπεδο σημαντικότητας 0,05.

Διαπιστώνουμε ότι και στις δύο διαιρέσεις τα ποσοστά επιτυχίας είναι περίπου ίδια με τους πολλαπλασιασμούς με θετικές δυνάμεις του 10, καθώς και με τον πρώτο πολλαπλασιασμό με αρνητική δύναμη του 10. Επίσης, φαίνεται ότι οι μαθητές έχουν κατανοήσει την ισοδυναμία της διαίρεσης με θετικές δυνάμεις του 10 και του πολλαπλασιασμού με αρνητικές δυνάμεις του 10.

Συγκρίνοντας το ποσοστό των μαθητών που απαντούν σωστά και στις δύο διαιρέσεις κατά την πρώτη και κατά την τέταρτη επίδοση έχουμε:

p για το binomial test=0,001		Απάντηση και στα δύο ερωτήματα (1596,76:10000 και 5,37:100)		Σύνολο
		4η επίδοση		
		1	2	
1η επίδοση	1	5 25%	10 50%	15 75%
	2	0 0%	5 25%	5 25%
Σύνολο		5 25%	15 75%	20 100%

Έτσι, το 25% των μαθητών απαντά σωστά και στα δύο συναφή ερωτήματα κατά την πρώτη μέτρηση, ενώ κατά τη δεύτερη μέτρηση το ποσοστό αυτό ανεβαίνει στο 75%.

Η διαφορά μεταξύ των δύο επιδόσεων ως προς την επιτυχία και στους δύο πολλαπλασιασμούς είναι στατιστικά σημαντική σύμφωνα με το binomial test.

p για το binomial test=0,011		67:0,01		Σύνολο
		4η επίδοση		
		1	2	
1η επίδοση	1	5 25%	11 55%	16 80%
	2	2 10%	2 10%	4 20%
Σύνολο		7 35%	13 65%	20 100%

Στην πρώτη διαίρεση με αρνητικές δυνάμεις του 10, βελτίωση παρουσιάζει το 55% των μαθητών, ενώ αποσταθεροποιεί τη γνώση του το 10%. Το ποσοστό επιτυχίας της Π.Ο. είναι 65%, ενώ κατά την πρώτη μέτρηση ήταν 20%. Η βελτίωση είναι στατιστικά σημαντική σε επίπεδο σημαντικότητας 0,05.

p για το binomial test=0,002		3,57:0,001		Σύνολο
		4η επίδοση		
		1	2	
1η επίδοση	1	4 20%	9 45%	13 65%
	2	0 0%	7 35%	7 35%
Σύνολο		4 20%	13 80%	20 100%

Στη δεύτερη διαίρεση με αρνητικές δυνάμεις του 10 βελτιώνεται το 45% των μαθητών, ενώ κανείς εκ των επιτυχόντων την πρώτη φορά δεν αποτυγχάνει. Η Π.Ο. επιτυγχάνει με ποσοστό 80%, βελτιωμένη σημαντικά σε σχέση με την πρώτη μέτρηση που είχε 35%.

Παρατηρούμε μια απόκλιση από το ποσοστό της προηγούμενης διαίρεσης κατά 25 ποσοστιαίες μονάδες, που οφείλεται στην απουσία υποδιαστολής στο διαιρετέο του προηγούμενου ερωτήματος. Η υποδιαστολή -όπως προέκυψε και από τη διδακτική παρέμβαση- λειτουργεί ως σημείο αναφοράς και η απουσία της στη συγκεκριμένη περίπτωση προκαλεί σύγχυση σε ένα ποσοστό μαθητών, που είτε δεν απαντούν (5%), είτε αφήνουν τον ίδιο αριθμό (15%). Μια καλύτερη προσέγγιση στο πλαίσιο της διδακτικής παρέμβασης θα βοηθούσε τους μαθητές αυτούς να ξεπεράσουν τις όποιες δυσκολίες τους.

Γενικά όμως, στις διαιρέσεις με αρνητικές δυνάμεις του 10, η μεγάλη πλειοψηφία των μαθητών δείχνει να έχει αντιληφθεί και κατανοήσει την ισοδυναμία τους με πολλαπλασιασμό με θετικές δυνάμεις του 10.

Συγκρίνοντας το ποσοστό των μαθητών που απάντησαν επιτυχώς και στις δύο διαιρέσεις κατά τις δύο επιδόσεις έχουμε:

<table>
<tr><td rowspan="3" colspan="2">p για το binomial test=0,011</td><td colspan="2">Απάντηση και στα δύο ερωτήματα (67:0,01 και 3,57:0,001)</td><td rowspan="3">Σύνολο</td></tr>
<tr><td colspan="2">4η επίδοση</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1η επίδοση</td><td>1</td><td>5
25%</td><td>11
55%</td><td>16
80%</td></tr>
<tr><td>2</td><td>2
10%</td><td>2
10%</td><td>4
20%</td></tr>
<tr><td colspan="2">Σύνολο</td><td>7
35%</td><td>13
65%</td><td>20
100%</td></tr>
</table>

Έτσι, το 20% των μαθητών απαντά σωστά και στα δύο συναφή ερωτήματα κατά την πρώτη μέτρηση, ενώ κατά τη δεύτερη μέτρηση το ποσοστό αυτό ανεβαίνει στο 65%.

Η βελτίωση της Π.Ο., σε ό,τι αφορά την επιτυχία της και στις δύο διαιρέσεις κατά τις δύο επιδόσεις, είναι στατιστικά σημαντική.

<table>
<tr><td rowspan="3" colspan="2">p για το binomial test=0,188</td><td colspan="2">600·700</td><td rowspan="3">Σύνολο</td></tr>
<tr><td colspan="2">4η επίδοση</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1η επίδοση</td><td>1</td><td>1
5%</td><td>4
20%</td><td>5
25%</td></tr>
<tr><td>2</td><td>1
5%</td><td>14
70%</td><td>15
75%</td></tr>
<tr><td colspan="2">Σύνολο</td><td>2
10%</td><td>18
90%</td><td>20
100%</td></tr>
</table>

Στον πρώτο πολλαπλασιασμό ακεραίων του τύπου $ν x 10^{μ}$ με ν και μ φυσικούς και ν<10, βελτίωση εμφανίζει το 20%, ενώ το 5% αποτυγχάνει, έχοντας επιτύχει κατά την πρώτη μέτρηση. Το ποσοστό επιτυχίας της Π.Ο. είναι 90%, ενώ κατά την πρώτη μέτρηση ήταν 75%.

Παρόλο που η αύξηση του ποσοστού της Π.Ο. δεν είναι στατιστικά σημαντική, ωστόσο παρατηρούμε ότι αυξάνει το ποσοστό επιτυχίας κατά 15 ποσοστιαίες μονάδες, ενώ βελτίωση εμφανίζει και το 20% των μαθητών.

p για το binomial test=0,344		90·80000 4η επίδοση 1	90·80000 4η επίδοση 2	Σύνολο
1η επίδοση	1	1 5%	4 20%	5 25%
	2	2 10%	13 65%	15 75%
Σύνολο		3 15%	17 85%	20 100%

Στο δεύτερο πολλαπλασιασμό ακεραίων, βελτίωση εμφανίζει το 20% των μαθητών, όπως και στο προηγούμενο ερώτημα, ενώ υπάρχει και 10% των μαθητών οι οποίοι παρόλο που είχαν επιτύχει την πρώτη φορά, τώρα αποτυγχάνουν.

Η επιτυχία της Π.Ο. αγγίζει το 85%, περίπου όσο και στο προηγούμενο ερώτημα.

Παρατηρούμε ότι και στους δύο πολλαπλασιασμούς υπάρχουν μαθητές που δεν επιτυγχάνουν, ενώ είχαν επιτύχει στην πρώτη μέτρηση. Ωστόσο, στον πρώτο πολλαπλασιασμό το 5% και στο δεύτερο το 10% απέχουν ±1 τάξη από τη σωστή τάξη μεγέθους, που σημαίνει ότι οι μαθητές αυτοί έχουν κάνει λάθος στη μέτρηση των μηδενικών και ότι γνωρίζουν τον αλγόριθμο.

Εξάλλου, συγκρίναμε το ποσοστό των μαθητών που απαντούν σωστά και στους δύο συναφείς πολλαπλασιασμούς κατά την πρώτη και κατά την τέταρτη επίδοση, ώστε να διαπιστώσουμε το σταθερό πληθυσμό που βελτιώνεται:

p για το binomial test=0,227		Απάντηση και στα δύο ερωτήματα (600·700 και 90·80000) 4η επίδοση 1	Απάντηση και στα δύο ερωτήματα (600·700 και 90·80000) 4η επίδοση 2	Σύνολο
1η επίδοση	1	2 10%	5 25%	7 35%
	2	2 10%	11 55%	13 65%
Σύνολο		4 20%	16 80%	20 100%

Έτσι, παρατηρούμε ότι ενώ αρχικά είχαν απαντήσει σωστά και στους δύο πολλαπλασιασμούς το 65%, στην τέταρτη επίδοση επιτυγχάνει και στα δύο ερωτήματα το 80%.

Ακόμη, θα πρέπει να σημειωθεί ότι, παρόλο που τα δύο αυτά ερωτήματα είναι αρκετά εύκολα, όπως διαφαίνεται από τα υψηλά ποσοστά των μαθητών ήδη από την πρώτη μέτρηση, υπάρχει ένα 10-15% των μαθητών που δεν απαντά με επιτυχία. Αυτό οφείλεται στο ότι η διδακτική παρέμβαση ήταν με τέτοιο τρόπο σχεδιασμένη που δεν προέβλεπε την προσπέλαση των δυσκολιών των πολύ αδύνατων μαθητών.

Η βελτίωση της Π.Ο. και στους δύο πολλαπλασιασμούς μαζί δεν είναι στατιστικά σημαντική, όμως βελτιώνονται 5 μαθητές ως προς την επιτυχία και στα δύο ερωτήματα:

Και στους δύο πολλαπλασιασμούς, τα ποσοστά της Π.Ο. είναι σχετικά υψηλά, παρόλο που η βελτίωση δεν είναι στατιστικά σημαντική, και έρχονται σε συνάφεια με τα υψηλά ποσοστά που εμφανίζει στους πολλαπλασιασμούς δεκαδικών.

p για το binomial test=0,011		0,02·0,004		Σύνολο
		4η επίδοση		
		1	2	
1η επίδοση	1	5 25%	9 45%	14 70%
	2	1 5%	5 25%	6 30%
Σύνολο		6 30%	14 70%	20 100%

Στον πρώτο πολλαπλασιασμό δεκαδικών μικρότερων της μονάδας με ένα μόνο ψηφίο διαφορετικό από το μηδέν, βελτιώνεται το 45% και αποσταθεροποιεί τη γνώση του το 5%.

Η Π.Ο. έχει επιτυχία 70%, ενώ κατά την πρώτη επίδοση είχε 30%, εμφανίζοντας έτσι στατιστικά σημαντική βελτίωση σε επίπεδο σημαντικότητας 0,05.

p για το binomial test=0,063		0,06·0,07		Σύνολο
		4η επίδοση		
		1	2	
1η επίδοση	1	6 30%	6 30%	12 60%
	2	1 5%	7 35%	8 40%
Σύνολο		7 35%	13 65%	20 100%

Στο δεύτερο πολλαπλασιασμό του ίδιου τύπου με τον προηγούμενο, βελτιώνεται το 30%, ενώ και πάλι 5% αποτυγχάνει ενώ είχε επιτύχει κατά την πρώτη μέτρηση.

Η επιτυχία της φτάνει στο 65%, περίπου στο ίδιο επίπεδο με τον προηγούμενο πολλαπλασιασμό, ενώ κατά την πρώτη μέτρηση είχε επιτύχει το 40%. Η βελτίωση δεν είναι στατιστικά σημαντική.

Τα ποσοστά της Π.Ο. είναι χαμηλότερα σε σχέση με τους προηγούμενους πολλαπλασιασμούς, ωστόσο θα πρέπει να ληφθεί υπόψη ότι το 10% στον πρώτο πολλαπλασιασμό και το 15% στο δεύτερο απέχουν ±1 τάξη από τη σωστή τάξη, μεγέθους, γεγονός που υποδηλώνει ότι γνωρίζουν τον αλγόριθμο και απλά έχουν κάνει λάθος στη μέτρηση των δεκαδικών ψηφίων.

Εξάλλου, συγκρίνοντας το ποσοστό των μαθητών που απαντούν σωστά και στους δύο πολλαπλασιασμούς δεκαδικών, διαπιστώνουμε ότι διπλασιάζεται το ποσοστό κατά την τέταρτη επίδοση (από 30% γίνεται 60%).

p για το binomial test=0,035		Απάντηση και στα δύο ερωτήματα (0,02·0,004 και 0,06·0,07)		Σύνολο
		4η επίδοση		
		1	2	
1η επίδοση	1	7 35%	7 35%	14 70%
	2	1 5%	5 25%	6 30%
Σύνολο		8 40%	12 60%	20 100%

Η Π.Ο. βελτιώνεται ως προς την επιτυχία της και στους δύο πολλαπλασιασμούς με στατιστικά σημαντική διαφορά.

p για το binomial test=0,001		4900:70		Σύνολο
		4η επίδοση		
		1	2	
1η επίδοση	1	3 15%	11 55%	14 70%
	2	0 0%	6 30%	6 30%
Σύνολο		3 15%	17 85%	20 100%

Στην πρώτη διαίρεση ακεραίων, το 55% βελτιώνεται, ενώ δεν παρουσιάζεται κάμψη του ποσοστού αυτών που είχαν επιτύχει από την πρώτη φορά. Η βελτίωση είναι στατιστικά σημαντική σε επίπεδο σημαντικότητας 0,001.

Η Π.Ο. επιτυγχάνει σε ποσοστό 85%, έναντι του 30% που είχε αρχικά.

p για το binomial test=0,001		320000:800		Σύνολο
		4η επίδοση		
		1	2	
1η επίδοση	1	2 10%	12 60%	14 70%
	2	0 0%	6 30%	6 30%
Σύνολο		2 10%	18 90%	20 100%

Στη δεύτερη διαίρεση ακεραίων, το ποσοστό των βελτιωμένων μαθητών φτάνει το 60%, με τη βελτίωση να είναι στατιστικά σημαντική σε επίπεδο σημαντικότητας 0,001.

Η συνολική επιτυχία της Π.Ο. αγγίζει το 90%, ενώ κατά την πρώτη επίδοση ήταν 30%.

Και στις δύο διαιρέσεις ακεραίων, η βελτίωση είναι περίπου ίδια, όπως και το ποσοστό της συνολικής επιτυχίας, το οποίο είναι περίπου όμοιο με τους πολλαπλασιασμούς.

Με βάση τη σύγκριση του ποσοστού των μαθητών που απαντούν σωστά και στις δύο διαιρέσεις κατά την πρώτη και κατά την τέταρτη μέτρηση έχουμε:

p για το binomial test=0,001		Απάντηση και στα δύο ερωτήματα (4900:70 και 320000:800)		Σύνολο
		4η επίδοση		
		1	2	
1η επίδοση	1	4 20%	13 65%	17 85%
	2	0 0%	3 15%	3 15%
Σύνολο		4 20%	16 80%	20 100%

Έτσι, διαπιστώνουμε μια ιδιαίτερα μεγάλη αύξηση του ποσοστού των μαθητών που απαντούν σωστά και στα δύο ερωτήματα.

Η Π.Ο. βελτιώνεται ως προς την επιτυχία της και στις δύο διαιρέσεις με στατιστικά σημαντική διαφορά.

p για το binomial test=0,001		2,4:0,03		Σύνολο
		4η επίδοση		
		1	2	
1η επίδοση	1	4 20%	12 60%	16 80%
	2	0 0%	4 20%	4 20%
Σύνολο		4 20%	16 80%	20 100%

Στην πρώτη διαίρεση δεκαδικών, βελτιωμένο εμφανίζεται και πάλι το 60%, ενώ η βελτίωση είναι στατιστικά σημαντική σε επίπεδο σημαντικότητας 0,001.

Η Π.Ο. επιτυγχάνει σε ποσοστό 80% (με το 10% να απέχει +1 τάξη), περίπου όμοια με τις προηγούμενες πράξεις, ενώ κατά την πρώτη μέτρηση είχε επιτύχει μόλις το 20%.

p για το binomial test=0,001		0,021:7		Σύνολο
		4η επίδοση		
		1	2	
1η επίδοση	1	6 30%	12 60%	18 90%
	2	0 0%	2 10%	2 10%
Σύνολο		6 30%	14 70%	20 100%

Στη διαίρεση δεκαδικού με ακέραιο, κατ' αντιστοιχία με τα προηγούμενα βελτιώνεται το 60% και η βελτίωση είναι σημαντική σε επίπεδο σημαντικότητας 0,001.

Το ποσοστό επιτυχίας φτάνει το 70%, ενώ αρχικά ήταν 10%. Το ποσοστό μπορεί να είναι μικρότερο σε σχέση με τις προηγούμενες πράξεις, ωστόσο είναι σημαντικό ότι το 20% απέχει ±1 τάξη από τη σωστή τάξη μεγέθους.

Η σύγκριση του ποσοστού των μαθητών που απαντούν σωστά και στις δύο διαιρέσεις δεκαδικών πιστοποιεί τη μεγάλη βελτίωση της Π.Ο.:

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="3">p για το binomial test=0,001</td><td colspan="2">Απάντηση και στα δύο ερωτήματα (2,4:0,03 και 0,021:7)</td><td rowspan="3">Σύνολο</td></tr>
<tr><td colspan="2">4η επίδοση</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1η επίδοση</td><td>1</td><td>8
40%</td><td>11
55%</td><td>19
95%</td></tr>
<tr><td>2</td><td>0
0%</td><td>1
5%</td><td>1
5%</td></tr>
<tr><td colspan="2">Σύνολο</td><td>8
40%</td><td>12
60%</td><td>20
100%</td></tr>
</table>

Έτσι, διαπιστώνουμε ότι αυξάνεται το ποσοστό των μαθητών που απαντούν σωστά και στα δύο ερωτήματα.

Η Π.Ο. βελτιώνεται ως προς την επιτυχία της και στις δύο διαιρέσεις με στατιστικά σημαντική διαφορά.

Συνολικά στην περιοχή των ακριβών νοερών υπολογισμών, παρατηρούμε ότι η βελτίωση της Π.Ο. είναι εμφανής σε όλα τα ερωτήματα. Μάλιστα, στις περισσότερες περιπτώσεις είναι στατιστικά σημαντική, εκτός από τους πολλαπλασιασμούς ακεραίων, τον ένα πολλαπλασιασμό δεκαδικού με θετική δύναμη του 10, τον ένα πολλαπλασιασμό δεκαδικού με αρνητική δύναμη του 10 και τον ένα πολλαπλασιασμό δεκαδικών, όπου το ποσοστό ήταν ήδη υψηλό από την πρώτη μέτρηση.

Επίσης, στο σύνολο των ερωτημάτων του τέταρτου θέματος, παρατηρούμε ότι κατά την πρώτη μέτρηση κανένας μαθητής δεν καταφέρνει να απαντήσει σωστά τουλάχιστον σε 14 από τα 16 ερωτήματα (ο μέγιστος αριθμός σωστά απαντηθέντων ερωτημάτων είναι 13, από 1 μαθητή), ενώ κατά την τέταρτη μέτρηση 11 μαθητές (55%) το επιτυγχάνουν. Μάλιστα, το 40% των μαθητών καταφέρνουν να απαντήσουν σε όλα τα ερωτήματα.

<table>
<tr><td rowspan="2">4ο θέμα</td><td colspan="10">Μαθητές που απαντούν σωστά τουλάχιστον σε… ερωτήματα από τα 16</td></tr>
<tr><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td><td>16</td></tr>
<tr><td>1η επίδοση</td><td>10
50%</td><td>7
35%</td><td>7
35%</td><td>7
35%</td><td>6
30%</td><td>5
20%</td><td>1
5%</td><td>0
0%</td><td>0
0%</td><td>0
0%</td></tr>
<tr><td>4η επίδοση</td><td>19
95%</td><td>17
85%</td><td>16
80%</td><td>16
80%</td><td>14
70%</td><td>13
65%</td><td>12
60%</td><td>11
55%</td><td>10
50%</td><td>8
40%</td></tr>
</table>

Ασφαλώς, η βελτίωση της Π.Ο., ως προς την επιτυχία σε τουλάχιστον 14 ερωτήματα, είναι στατιστικά σημαντική.

p για το binomial test=0,001		Απάντηση τουλάχιστον σε 14 ερωτήματα από τα 16		Σύνολο
		4η επίδοση		
		1	2	
1η επίδοση	1	9 45%	11 55%	20 100%
	2	0 0%	0 0%	0 0%
Σύνολο		9 45%	11 55%	20 100%

Αυτό σημαίνει ότι, ενώ αρχικά υπάρχουν πολύ εύκολες και πολύ δύσκολες ερωτήσεις για τους μαθητές, όπως φαίνεται και από τα ποσοστά της πρώτης μέτρησης που είναι άλλοτε υψηλά και άλλοτε πολύ χαμηλά, τελικά υπάρχει ένας μαθητικός πληθυσμός που δεν θεωρεί ότι υπάρχουν δύσκολες και εύκολες ερωτήσεις και καταφέρνει να απαντά με επιτυχία σχεδόν σε όλες.

β. Εύρεση της τάξης μεγέθους και προσεγγίσεων μεγαλύτερης ακρίβειας (10ο και 11ο θέμα)

10ο θέμα

p για το binomial test=0,033		57·83		Σύνολο
		4η επίδοση		
		1	2	
1η επίδοση	1	2 10%	9 45%	11 55%
	2	2 10%	7 35%	9 45%
Σύνολο		4 20%	12 80%	20 100%

Στον πρώτο πολλαπλασιασμό, όπου ζητείται η τάξη μεγέθους του γινομένου, βελτίωση παρουσιάζει το 45% των μαθητών, ενώ το 10% αποτυγχάνει παρόλο που είχε επιτύχει την πρώτη φορά. Η βελτίωση είναι στατιστικά σημαντική σε επίπεδο σημαντικότητας 0,05. Εξάλλου, θα πρέπει να σημειωθεί ότι όλοι οι μαθητές που απέτυχαν, απέχουν -1 τάξη από τη σωστή τάξη μεγέθους. Ενδεχομένως, αυτοί οι μαθητές κατά την τέταρτη μέτρηση προσπάθησαν να εφαρμόσουν τον κανόνα της εύρεσης της τάξη μεγέθους, σύμφωνα με τον οποίο αυτή ισούται με το σύνολο των ψηφίων των δύο παραγόντων ή είναι κατά ένα μικρότερη. Στην περίπτωσή μας, όπου η τάξη μεγέθους είναι όσο το σύνολο των ψηφίων των δύο παραγόντων, οι συγκεκριμένοι μαθητές βρήκαν ότι είναι κατά ένα μικρότερη. Επίσης, υπάρχει περίπτωση κάποιοι μαθητές να έκαναν προς τα κάτω στρογγυλοποίηση των αριθμητικών δεδομένων (50·80), οπότε έπρεπε να συμπληρώσουν το γινόμενο 5·8=40 με 2 μηδενικά. Ίσως να μη συνυπολόγισαν και το μηδενικό του 40, με συνέπεια να βρουν 400 αντί για 4000, απέχοντας -1 τάξη από τη σωστή τάξη μεγέθους.

Το ποσοστό επιτυχίας της Π.Ο. είναι 80%, ενώ κατά την πρώτη μέτρηση ήταν 45%.

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="3">p για το binomial test=0,035</td><td colspan="2">3745·5321</td><td rowspan="3">Σύνολο</td></tr>
<tr><td colspan="2">4η επίδοση</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1η επίδοση</td><td>1</td><td>5
25%</td><td>7
35%</td><td>12
60%</td></tr>
<tr><td>2</td><td>1
5%</td><td>7
35%</td><td>8
40%</td></tr>
<tr><td colspan="2">Σύνολο</td><td>6
30%</td><td>14
70%</td><td>20
100%</td></tr>
</table>

Στο δεύτερο πολλαπλασιασμό, όπου οι παράγοντες είναι τετραψήφιοι, βελτιώνεται το 35%, ενώ το 5% αποτυγχάνει παρόλο που είχε επιτύχει αρχικά. Η βελτίωση είναι στατιστικά σημαντική σε επίπεδο σημαντικότητας 0,05.

Η Π.Ο. επιτυγχάνει με ποσοστό 70%, ενώ αρχικά είχε 40%.

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="3">p για το binomial test=0,001</td><td colspan="2">289·574</td><td rowspan="3">Σύνολο</td></tr>
<tr><td colspan="2">4η επίδοση</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1η επίδοση</td><td>1</td><td>7
35%</td><td>12
60%</td><td>19
95%</td></tr>
<tr><td>2</td><td>0
0%</td><td>1
5%</td><td>1
5%</td></tr>
<tr><td colspan="2">Σύνολο</td><td>7
35%</td><td>13
65%</td><td>20
100%</td></tr>
</table>

Στον τρίτο πολλαπλασιασμό, όπου και πάλι οι παράγοντες είναι πολυψήφιοι, βελτίωση εμφανίζει το 60%, χωρίς να υπάρχει απώλεια του ποσοστού των επιτυχόντων κατά την πρώτη μέτρηση. Παρατηρούμε ότι η βελτίωση είναι πολύ μεγαλύτερη σε σχέση με τα προηγούμενα ερωτήματα του δέκατου θέματος. Όμως, αυτή οφείλεται στη μεγάλη αποτυχία (βλ. §10.3) κατά την πρώτη μέτρηση που έφτανε στο 95%. Έτσι, ήταν επόμενο η βελτίωση να είναι μεγαλύτερη σε σχέση με τους προηγούμενους πολλαπλασιασμούς. Η Π.Ο. βελτιώνεται με στατιστική σημαντικότητα σε επίπεδο 0,001.

Η επιτυχία της Π.Ο. είναι 65%., περίπου όπως και στο προηγούμενο ερώτημα όπου οι παράγοντες είναι επίσης πολυψήφιοι. Στο πρώτο ερώτημα το ποσοστό επιτυχίας είναι κατά 10-15 ποσοστιαίες μονάδες μεγαλύτερο, καθότι οι παράγοντες είναι διψήφιοι και για τους μαθητές είναι εύκολο να υπολογίσουν το ακριβές αποτέλεσμα από μνήμης, έχοντας διδαχτεί τέτοιου τύπου νοερό πολλαπλασιασμό (Β΄ φάση). Είναι σημαντικό να αναφερθεί ότι και στους τρεις πολλαπλασιασμούς η τάξη μεγέθους είναι όσο το σύνολο των ψηφίων των δύο παραγόντων.

Επίσης, στο ερώτημα αυτό η προς τα κάτω στρογγυλοποίηση των αριθμητικών δεδομένων (αφού αναζητούν την τάξη μεγέθους) δίνει 200·500, οπότε οι μαθητές υπολογίζουν το γινόμενο των πρώτων ψηφίων που είναι 10 και συμπληρώνουν με τέσσερα μηδενικά. Όμως είναι πολύ πιθανό να παραλείψουν το μηδενικό του 10 βρίσκοντας την τάξη μεγέθους κατά ένα μικρότερη. Πράγματι το 20% των μαθητών απέχει -1 τάξη από τη σωστή τάξη μεγέθους, ενώ στον προηγούμενο πολλαπλασιασμό το 10% απέχει -1 τάξη από τη σωστή τάξη μεγέθους.

p για το binomial test=0,227		17531:423		Σύνολο
		4η επίδοση		
		1	2	
1η επίδοση	1	9 45%	5 25%	14 70%
	2	2 10%	4 20%	6 30%
Σύνολο		11 55%	9 45%	20 100%

Στην πρώτη διαίρεση, βελτιώνεται το 25%, ενώ το 10% των μαθητών αποτυγχάνουν παρόλο που είχαν επιτύχει αρχικά. Η βελτίωση δεν είναι στατιστικά σημαντική.

Το ποσοστό επιτυχίας της Π.Ο. αυξάνεται κατά 15 ποσοστιαίες μονάδες και φτάνει στο 45%.

p για το binomial test=0,035		6143:28		Σύνολο
		4η επίδοση		
		1	2	
1η επίδοση	1	7 35%	7 35%	14 70%
	2	1 5%	5 25%	6 30%
Σύνολο		8 40%	12 60%	12 60%

Στην επόμενη διαίρεση, βελτίωση εμφανίζει το 35%, ενώ αποτυγχάνει το 5% μολονότι είχαν επιτύχει αρχικά. Η βελτίωση είναι στατιστικά σημαντική σε επίπεδο σημαντικότητας 0,05.

Η Π.Ο. διπλασιάζει το ποσοστό επιτυχίας, φτάνοντας στο 60%. Παρατηρούμε ότι το ποσοστό επιτυχίας είναι μεγαλύτερο στη συγκεκριμένη διαίρεση σε σχέση με την προηγούμενη, γεγονός που οφείλεται στο ότι στην προηγούμενη περίπτωση η αναδιατύπωση των αριθμητικών δεδομένων με στρογγυλοποίηση στο πρώτο ψηφίο δίνει 20000:400 όπου οι μαθητές θα πρέπει να υπολογίσουν το πηλίκο 20:4 και να συμπληρώσουν στη συνέχεια τρία μηδενικά. Κάποιοι μαθητές όμως τοποθετούν τέσσερα μηδενικά, συνυπολογίζοντας και το μηδενικό του 20. Αντίθετα στη διαίρεση 6143:28 δεν υφίσταται τέτοιο θέμα.

Επίσης, διαπιστώνουμε ότι στις διαιρέσεις τα ποσοστά επιτυχίας είναι χαμηλότερα εν συγκρίσει με τους πολλαπλασιασμούς.

Συγκρίνοντας το ποσοστό των μαθητών που απαντούν σωστά και στις δύο διαιρέσεις κατά την πρώτη μέτρηση και κατά την τέταρτη έχουμε:

p για το binomial test=0,344		Απάντηση και στις δύο διαιρέσεις (17531:423 και 6143:28)		Σύνολο
		4η επίδοση		
		1	2	
1η επίδοση	1	11 55%	4 20%	15 75%
	2	2 10%	3 15%	5 25%
Σύνολο		13 65%	7 35%	20 100%

Έτσι, παρατηρούμε ότι ενώ αρχικά το 25% των μαθητών απάντησαν και στις δύο διαιρέσεις, κατά την τέταρτη μέτρηση ανάλογη επίδοση έχει το 35%. Η βελτίωση των μαθητών σε ό,τι αφορά την επιτυχία και στις δύο διαιρέσεις δεν είναι στατιστικά σημαντική.

p για το binomial test=0,004		4,37:235		Σύνολο
		4η επίδοση		
		1	2	
1η επίδοση	1	10 50%	8 40%	18 90%
	2	0 0%	2 10%	2 10%
Σύνολο		10 50%	10 50%	20 100%

Στη διαίρεση δεκαδικού με ακέραιο, βελτίωση εμφανίζει το 40%. Η βελτίωση αυτή είναι στατιστικά σημαντική σε επίπεδο σημαντικότητας 0,05.

Το ποσοστό επιτυχίας της Π.Ο. ανεβαίνει στο 50% από 10% που ήταν αρχικά και κυμαίνεται περίπου στο ίδιο επίπεδο με τις προηγούμενες διαιρέσεις.

p για το binomial test=0,5		0,035:48,32		Σύνολο
		4η επίδοση		
		1	2	
1η επίδοση	1	6 30%	5 25%	11 55%
	2	4 20%	5 25%	9 45%
Σύνολο		10 50%	10 50%	20 100%

Στη διαίρεση δεκαδικού μικρότερου της μονάδας με δεκαδικό μεγαλύτερο της μονάδας, βελτιώνεται το 25%, ενώ αποτυγχάνει το 20% που όμως είχε επιτύχει κατά την πρώτη μέτρηση. Η βελτίωση ασφαλώς δεν είναι στατιστικά σημαντική.

Η Π.Ο. επιτυγχάνει με ποσοστό 50%, έναντι του 45% που είχε αρχικά. Το σχετικό υψηλό ποσοστό επιτυχίας που παρουσίασε η Π.Ο. κατά την πρώτη επίδοση, όπως εξηγήθηκε στην §10.1, οφείλεται πιθανότατα στην εφαρμογή κάποιου εσφαλμένου κανόνα, καθώς δε συνάδει με τη γενικότερη εικόνα της Π.Ο. στις διαιρέσεις. Στην τέταρτη μέτρηση φαίνεται πως ο κανόνας αυτός αποσταθεροποιήθηκε με την επίδραση της διδακτικής παρέμβασης, με αποτέλεσμα να βελτιώνεται ένα ποσοστό μαθητών, αλλά να χειροτερεύει ένα άλλο.

Το ποσοστό επιτυχίας της Π.Ο. είναι 50%, όσο και στην προηγούμενη διαίρεση. Η αύξηση είναι 5 ποσοστιαίες μονάδες σε σχέση με την πρώτη μέτρηση.

Συγκρίναμε το ποσοστό των μαθητών που απάντησαν και στις δύο διαιρέσεις δεκαδικών του δέκατου θέματος, κατά την πρώτη και κατά την τέταρτη επίδοση, ώστε να διαπιστώσουμε πιθανά φαινόμενα αστάθειας:

p για το binomial test=0,008		Απάντηση και στις δύο διαιρέσεις (4,37:235 και 0,035:48,32)		Σύνολο
		4η επίδοση		
		1	2	
1η επίδοση	1	12 60%	7 35%	19 95%
	2	0 0%	1 5%	1 5%
Σύνολο		12 60%	8 40%	20 100%

Έτσι, διαπιστώνουμε ότι κατά την πρώτη επίδοση μόνο το 5% (1 μαθητής απαντά σωστά και στα δύο ερωτήματα, ενώ οι υπόλοιποι μαθητές απαντούν μόνο στη μία ή στην άλλη ή σε καμία από τις δύο. Κατά συνέπεια εμφανίζονται ασταθείς στη γνώση που κατέχουν. Αντίθετα, στην τέταρτη επίδοση υπάρχει ένα σταθερό ποσοστό 40% το οποίο απαντά και στα δύο ερωτήματα, γεγονός που σημαίνει ότι γνωρίζει πολύ καλά να βρίσκει την τάξη μεγέθους σε διαιρέσεις δεκαδικών.

Η βελτίωση της Π.Ο. όσον αφορά στη σωστή απάντηση και στις δύο διαιρέσεις είναι στατιστικά σημαντική, σύμφωνα με το binomial test.

11ο θέμα

p για το binomial test=0,002		62·73		Σύνολο
		4η επίδοση		
		1	2	
1η επίδοση	1	0 0%	9 45%	9 45%
	2	0 0%	11 55%	11 55%
Σύνολο		0 0%	20 100%	20 100%

Στον πρώτο πολλαπλασιασμό του ενδέκατου θέματος, όπου ζητείται η εύρεση του γινομένου κατά προσέγγιση, βελτίωση εμφανίζει το 45% των μαθητών, με το ποσοστό των επιτυχόντων κατά την πρώτη μέτρηση να παραμένει αναλλοίωτο.

Είναι ιδιαίτερα σημαντικό ότι η επιτυχία της Π.Ο. φτάνει το 100%, ενώ αρχικά ήταν 55%.

Παρόλο που ο πολλαπλασιασμός αυτός είναι ισοδύναμος με τον πρώτο πολλαπλασιασμό του δέκατου θέματος, παρατηρούμε μια απόκλιση 20% στο ποσοστό επιτυχίας. Η διαφορά αυτή οφείλεται στο ότι κάποιοι μαθητές επιχειρούν να εφαρμόσουν στην εύρεση της τάξης μεγέθους τον κανόνα που διδάχτηκαν και αποτυγχάνουν, ενώ τα καταφέρνουν πολύ καλύτερα όταν προβαίνουν στην αναδιατύπωση των αριθμητικών δεδομένων και στη συνέχεια στο νοερό υπολογισμό τους.

Επίσης, αν η εκτίμηση της τάξης μεγέθους γίνει με προς τα κάτω στρογγυλοποίηση (50·80), τότε θα πρέπει να υπολογιστεί το γινόμενο 5·8 που δίνει 40 και να συμπληρωθούν 2 μηδενικά. Κάποιοι μαθητές όμως ξεχνούν το μηδέν από το 40 και συμπληρώνουν το 4 με 2 μηδενικά, απέχοντας έτσι -1 τάξη μεγέθους από τη σωστή. Πράγματι, το 20% των μαθητών απέχουν -1 τάξη από τη σωστή τάξη μεγέθους και μαζί με το 80% των μαθητών που επιτυγχάνουν δίνουν ποσοστό όμοιο με αυτό του πρώτου ερωτήματος του ενδέκατου θέματος.

Συγκρίνοντας το ποσοστό των μαθητών που απαντούν σωστά και στους δύο πολλαπλασιασμούς διψήφιων του δέκατου και του ενδέκατου θέματος (57·83 και 62·73) έχουμε:

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="3">p για το binomial test=0,001</td><td colspan="2">Απάντηση και στους δύο πολλαπλασιασμούς (57·83 και 62·73)
4η επίδοση</td><td rowspan="3">Σύνολο</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1η επίδοση</td><td>1</td><td>4
20%</td><td>11
55%</td><td>15
75%</td></tr>
<tr><td>2</td><td>0
0%</td><td>5
25%</td><td>5
25%</td></tr>
<tr><td colspan="2">Σύνολο</td><td>4
20%</td><td>16
80%</td><td>20
100%</td></tr>
</table>

Έτσι, διαπιστώνουμε ότι κατά την πρώτη επίδοση μόνο το 25% απαντά σωστά και στα δύο ερωτήματα, ενώ οι υπόλοιποι μαθητές απαντούν μόνο στη μία ή στην άλλη ή σε καμία από τις δύο. Κατά συνέπεια εμφανίζονται ασταθείς στη γνώση που κατέχουν. Αντίθετα, στην τέταρτη επίδοση υπάρχει ένα σταθερό ποσοστό 80% το οποίο απαντά και στα δύο ερωτήματα, γεγονός που σημαίνει ότι γνωρίζει πολύ καλά να βρίσκει την τάξη μεγέθους σε πολλαπλασιασμούς διψήφιων.

Η βελτίωση της Π.Ο., όσον αφορά στη σωστή απάντηση και στους δύο πολλαπλασιασμούς, είναι στατιστικά σημαντική, σύμφωνα με το binomial test.

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="3">p για το binomial test=0,001</td><td colspan="2">4832·876</td><td rowspan="3">Σύνολο</td></tr>
<tr><td colspan="2">4η επίδοση</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1η επίδοση</td><td>1</td><td>1
5%</td><td>16
80%</td><td>17
85%</td></tr>
<tr><td>2</td><td>0
0%</td><td>3
15%</td><td>3
15%</td></tr>
<tr><td colspan="2">Σύνολο</td><td>1
5%</td><td>19
95%</td><td>20
100%</td></tr>
</table>

Στο δεύτερο πολλαπλασιασμό, όπου οι παράγοντες είναι πολυψήφιοι, βελτιώνεται το 80% των μαθητών. Ασφαλώς η βελτίωση είναι στατιστικά σημαντική σε επίπεδο σημαντικότητας 0,001.

Η συνολική επιτυχία της Π.Ο. φτάνει το 95%, κατ' αντιστοιχία με το προηγούμενο ερώτημα, ενώ κατά την πρώτη μέτρηση ήταν 15%.

Το ποσοστό επιτυχίας σ' αυτό τον πολλαπλασιασμό είναι χαμηλότερο σε σχέση με τον αντίστοιχο πολλαπλασιασμό του δέκατου θέματος (3745·5321 με 70%). Ωστόσο, η στρογγυλοποίηση στο πρώτο ψηφίο με βάση το συνήθη κανόνα δίνει 4000·5000, όπου το γινόμενο 4·5=20 θα πρέπει να συμπληρωθεί με 6 μηδενικά. Κάποιοι μαθητές συμπληρώνουν με 6 μηδενικά συμπεριλαμβάνοντας όμως και το μηδέν από το 20 (αυτή η παρατήρηση έγινε και στο πλαίσιο της διδακτικής παρέμβασης). Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να απέχουν -1 τάξη από τη σωστή τάξη μεγέθους. Πράγματι, το ποσοστό αυτών που απέχουν -1 τάξη είναι 10%, που μαζί με αυτούς που απάντησαν σωστά δίνει 80%.

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="3">p για το binomial test=0,001</td><td colspan="2">2181·1485</td><td rowspan="3">Σύνολο</td></tr>
<tr><td colspan="2">4η επίδοση</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1η επίδοση</td><td>1</td><td>1
5%</td><td>16
80%</td><td>17
85%</td></tr>
<tr><td>2</td><td>0
0%</td><td>3
15%</td><td>3
15%</td></tr>
<tr><td colspan="2">Σύνολο</td><td>1
5%</td><td>19
95%</td><td>20
100%</td></tr>
</table>

Αντίστοιχα, στον επόμενο πολλαπλασιασμό, βελτιώνεται το 80%, βελτίωση που είναι σημαντική σε επίπεδο σημαντικότητας 0,001.

Και πάλι η συνολική επιτυχία της Π.Ο. σ' αυτό το ερώτημα είναι 95%.

Το ποσοστό επιτυχίας σ' αυτό τον πολλαπλασιασμό είναι χαμηλότερο σε σχέση με τον αντίστοιχο πολλαπλασιασμό του δέκατου θέματος (289·574 με 70%). Ωστόσο, η προς τα κάτω στρογγυλοποίηση στο πρώτο ψηφίο δίνει 200·500, όπου το γινόμενο 2·5=10 θα πρέπει να συμπληρωθεί με 4 μηδενικά. Κάποιοι μαθητές συμπληρώνουν με 4 μηδενικά συμπεριλαμβάνοντας όμως και το μηδέν από το 10 (αυτή η παρατήρηση έγινε και στο πλαίσιο της διδακτικής παρέμβασης. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να απέχουν -1 τάξη από τη σωστή τάξη μεγέθους. Πράγματι, το ποσοστό αυτών που απέχουν -1 τάξη είναι 20%, που μαζί με αυτούς που απάντησαν σωστά δίνει 85%.

Έτσι, παρατηρούμε μια ομοιομορφία σε ό,τι αφορά τα ποσοστά επιτυχίας στους πολλαπλασιασμούς που μάλιστα είναι υψηλά και φτάνουν μέχρι και το 100%. Βέβαια, τα ποσοστά αυτά είναι υψηλότερα σε σχέση με τα αντίστοιχα ποσοστά των πολλαπλασιασμών του δέκατου θέματος. Αυτό οφείλεται στην προσπάθεια κάποιων μαθητών να εφαρμόσουν στο δέκατο θέμα τον κανόνα εύρεσης της τάξης μεγέθους (βλ. §9.2.1), τον οποίο όμως φαίνεται ότι δεν θυμούνται και τόσο καλά, με αποτέλεσμα να κάνουν λάθη. Στο ενδέκατο θέμα πραγματοποιούν εκτίμηση του αποτελέσματος με στρογγυλοποίηση των αριθμητικών δεδομένων, όπου φαίνεται ότι έχουν πολύ καλή επίδοση.

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="3">p για το binomial test=0,172</td><td colspan="2">67952:317</td><td rowspan="3">Σύνολο</td></tr>
<tr><td colspan="2">4η επίδοση</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1η επίδοση</td><td>1</td><td>3
15%</td><td>7
35%</td><td>10
50%</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3
15%</td><td>7
35%</td><td>10
50%</td></tr>
<tr><td colspan="2">Σύνολο</td><td>6
30%</td><td>14
70%</td><td>20
100%</td></tr>
</table>

Στην πρώτη διαίρεση ακεραίων, βελτιώνεται το 35%, ενώ κάμψη παρουσιάζει το 15% των μαθητών, με αποτέλεσμα να μην είναι στατιστικά σημαντική η βελτίωση. Ενδεχομένως, αυτό το 15% να αποτυγχάνει, επειδή αναδιατυπώνει τα αριθμητικά δεδομένα με βάση το συνήθη κανόνα στρογγυλοποίησης, οπότε προκύπτει η διαίρεση 70000:300 της οποίας το πηλίκο δεν είναι ιδιαίτερα εύκολο να υπολογιστεί, ενώ κατά την πρώτη μέτρηση προέβαινε στην προς τα κάτω στρογγυλοποίηση των αριθμητικών δεδομένων, με αποτέλεσμα να υπολογίζεται εύκολα το πηλίκο και να πετυχαίνουν τη σωστή τάξη μεγέθους.

Η Π.Ο. επιτυγχάνει σε ποσοστό 70%, ενώ αρχικά είχε 50%.

Το ποσοστό επιτυχίας είναι και πάλι υψηλότερο σε σχέση με την αντίστοιχη διαίρεση του δέκατου θέματος (6143:28 με 60%), γεγονός που έχει ήδη ερμηνευθεί.

Συγκρίνοντας το ποσοστό των μαθητών που απαντούν στη διαίρεση 6143:28 του δέκατου θέματος και στην ισοδύναμή της 67952:317 του ενδέκατου θέματος έχουμε:

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="3">p για το binomial test=0,004</td><td colspan="2">Απάντηση και στις δύο διαιρέσεις (6143:28 και 67952:317)</td><td rowspan="3">Σύνολο</td></tr>
<tr><td colspan="2">4η επίδοση</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1η επίδοση</td><td>1</td><td>9
45%</td><td>8
40%</td><td>17
85%</td></tr>
<tr><td>2</td><td>0
0%</td><td>3
15%</td><td>3
15%</td></tr>
<tr><td colspan="2">Σύνολο</td><td>9
45%</td><td>11
55%</td><td>20
100%</td></tr>
</table>

Έτσι, παρατηρούμε ότι αρχικά μόνο το 15% των μαθητών ήταν σταθερό και στις δύο συναφείς διαιρέσεις, ενώ κατά την τέταρτη επίδοση ο σταθερός πληθυσμός είναι 55%. Αυτό σημαίνει ότι κατά την πρώτη μέτρηση υπάρχουν πολλές περιπτώσεις αστάθειας.

Παρατηρούμε ότι η βελτίωση της Π.Ο., σε σχέση με τη σωστή απάντηση και στις δύο διαιρέσεις, είναι στατιστικά σημαντική.

p για το binomial test=0,172		26472:43		Σύνολο
		4η επίδοση		
		1	2	
1η επίδοση	1	8 40%	7 35%	15 75%
	2	3 15%	2 10%	5 25%
Σύνολο		11 55%	9 45%	20 100%

Στη δεύτερη διαίρεση, βελτιώνεται και πάλι το 35%, ενώ το 15% αποτυγχάνει μολονότι είχε επιτύχει κατά την πρώτη επίδοση. Η βελτίωση δεν είναι στατιστικά σημαντική.

Το ποσοστό επιτυχίας της Π.Ο. είναι 45%, αυξημένο κατά 20 ποσοστιαίες μονάδες από την αρχική μέτρηση. Το ποσοστό αυτό είναι χαμηλότερο από το αντίστοιχο ποσοστό της προηγούμενης διαίρεσης, γεγονός που οφείλεται στο ότι το πρώτο ψηφίο του διαιρέτη είναι μεγαλύτερο από το πρώτο ψηφίο του διαιρετέου. Επίσης, η αναδιατύπωση των αριθμητικών δεδομένων οδηγεί στη διαίρεση 30000:40 στην οποία οι μαθητές, αφού διαγράψουν ένα μηδενικό από το διαιρέτη και από το διαιρετέο, θα πρέπει να υπολογίσουν το πηλίκο 30:4 (που δεν υπολογίζεται ιδιαίτερα εύκολα συν τοις άλλοις) και να συμπληρώσουν με δύο μηδενικά. Κάποιοι όμως μαθητές συμπληρώνουν με τρία μηδενικά, συνυπολογίζοντας και το μηδενικό από το 30. αυτό δεν ισχύει στη διαίρεση 67952:317 όπου το ποσοστό επιτυχίας είναι μεγαλύτερο. Πράγματι το 20% των μαθητών απέχουν +1 τάξη από τη σωστή τάξη μεγέθους. Παρατηρούμε μια αντιστοιχία με την απόκλιση των ποσοστών επιτυχίας του τέταρτου και πέμπτου ερωτήματος του δέκατου θέματος. Ωστόσο, οι μεταβολές (ποσοστό αυτών που βελτιώνονται και αυτών που αποτυγχάνουν ενώ είχαν επιτύχει κατά την πρώτη επίδοση) είναι ίδιες και στις δύο διαιρέσεις.

Εξάλλου, ενώ και πάλι θα περιμέναμε το ποσοστό επιτυχίας να είναι λίγο μεγαλύτερο από το ποσοστό επιτυχίας του αντίστοιχου ερωτήματος του δέκατου θέματος (17531:423) για το λόγο που έχουμε ήδη αναφέρει, τα ποσοστά είναι ακριβώς όμοια, γεγονός που οφείλεται σε αυτή ακριβώς την ιδιομορφία των αριθμητικών δεδομένων. Την ίδια ιδιομορφία έχουν βέβαια και τα αριθμητικά δεδομένα της διαίρεσης 17531:423. Όμως το ποσοστό των μαθητών που απέχουν +1 τάξη από τη σωστή τάξη μεγέθους είναι 0%. Αυτό σημαίνει ότι στη συγκεκριμένη περίπτωση προσπαθούν να εφαρμόσουν τον κανόνα εύρεσης της τάξης μεγέθους με βάση τη διαφορά των ψηφίων διαιρετέου-διαιρέτη και δεν συγχέονται από τη φύση των αριθμητικών δεδομένων.

Εξάλλου, συγκρίνοντας το ποσοστό των μαθητών που απάντησαν σωστά στις δύο συναφείς διαιρέσεις του δέκατου και ενδέκατου θέματος κατά την πρώτη και κατά την τέταρτη μέτρηση, διαπιστώνουμε μεγάλη βελτίωση του σταθερού πληθυσμού:

p για το binomial test=0,035		Απάντηση και στις δύο διαιρέσεις (17531:423 και 26472:43) 4η επίδοση		Σύνολο
		1	2	
1η επίδοση	1	11 55%	7 35%	18 90%
	2	1 5%	1 10%	2 10%
Σύνολο		12 60%	8 40%	20 100%

Έτσι, διαπιστώνουμε σημαντική αύξηση του πληθυσμού που απαντά σωστά και στις δύο συναφείς διαιρέσεις και μείωση των φαινομένων αστάθειας.

Η βελτίωση της Π.Ο. σχετικά με τη σωστή απάντηση και στις δύο διαιρέσεις είναι στατιστικά σημαντική.

Επίσης, συγκρίνοντας το ποσοστό των μαθητών που απαντούν σωστά και στις δύο διαιρέσεις ακεραίων του ενδέκατου θέματος έχουμε:

p για το binomial test=0,254		Απάντηση και στις δύο διαιρέσεις (67952:317 και 26472:43) 4η επίδοση		Σύνολο
		1	2	
1η επίδοση	1	9 45%	6 30%	15 75%
	2	3 15%	2 10%	5 25%
Σύνολο		12 60%	8 40%	20 100%

Παρατηρούμε ότι αυξάνεται το ποσοστό των μαθητών που απαντούν σωστά και στις δύο διαιρέσεις. Ωστόσο, η βελτίωση σε ό,τι αφορά την επιτυχία και στις δύο διαιρέσεις ακεραίων δεν είναι στατιστικά σημαντική.

p για το binomial test=0,001		3,4:512 4η επίδοση		Σύνολο
		1	2	
1η επίδοση	1	5 25%	13 65%	18 90%
	2	1 5%	1 5%	2 10%
Σύνολο		6 30%	14 70%	20 100%

Στη διαίρεση δεκαδικού με ακέραιο, βελτίωση παρουσιάζει το 65%, ενώ το 5% αποτυγχάνει έχοντας όμως επιτύχει αρχικά. Η βελτίωση είναι σημαντική σε επίπεδο σημαντικότητας 0,05.

Το ποσοστό επιτυχίας της Π.Ο. φτάνει στο 70%, όσο και στη διαίρεση 67952:317. Παρόλο που και σ’ αυτή την περίπτωση το πρώτο ψηφίο του διαιρέτη είναι μεγαλύτερο από το πρώτο ψηφίο του διαιρετέου, το ποσοστό επιτυχίας δεν μειώνεται όπως το προηγούμενο ερώτημα. Αυτό ίσως οφείλεται στην εφαρμογή ιδιαίτερης τεχνικής για ευχερή νοερό υπολογισμό μετά την αναδιατύπωση των αριθμητικών δεδομένων [3:500=(2·3):1000=0,006].

Και πάλι το ποσοστό επιτυχίας είναι υψηλότερο σε σχέση με το ποσοστό της αντίστοιχης διαίρεσης του δέκατου θέματος (4,37:235 με 50%).

Προκειμένου να διαπιστώσουμε τη βελτίωση του ποσοστού των μαθητών που απαντούν σωστά στις διαιρέσεις 4,37:235 του δέκατου θέματος και 3,4:512 του ενδέκατου θέματος, συγκρίναμε το αυτό το ποσοστό κατά την πρώτη και κατά την τέταρτη επίδοση:

p για το binomial test=0,002		Απάντηση και στις δύο διαιρέσεις (4,37:235 και 3,4:512)		Σύνολο
		4η επίδοση		
		1	2	
1η επίδοση	1	11 55%	9 45%	20 100%
	2	0 0%	0 0%	0 0%
Σύνολο		11 55%	9 45%	20 100%

Έτσι, ενώ κατά την πρώτη επίδοση κανείς μαθητής δεν απαντά και στα δύο ερωτήματα, κατά την τέταρτη επίδοση το 45% το επιτυγχάνει, εκδηλώνοντας την κατοχή της συγκεκριμένης γνώσης.

Όπως είναι φανερό, η βελτίωση της Π.Ο. είναι στατιστικά σημαντική.

p για το binomial test=0,172		0,26:17,12		Σύνολο
		4η επίδοση		
		1	2	
1η επίδοση	1	7 35%	7 35%	14 70%
	2	3 15%	3 15%	6 30%
Σύνολο		10 50%	10 50%	20 100%

Στη διαίρεση δεκαδικού μικρότερου της μονάδας διά δεκαδικό μεγαλύτερο της μονάδας, βελτιώνεται το 35%, ενώ αποτυγχάνει το 15% οι οποίοι είχαν επιτύχει αρχικά. Οι μεταβολές αυτές είναι όμοιες με τις αντίστοιχες των δύο πρώτων διαιρέσεων. Η βελτίωση της Π.Ο. δεν είναι στατιστικά σημαντική.

Το ποσοστό επιτυχίας ανελίσσεται στο 50% από 30% που ήταν αρχικά. Το ποσοστό επιτυχίας της Π.Ο. είναι ίσο με αυτό του αντίστοιχου ερωτήματος του δέκατου θέματος (0,035:48,32). Εξάλλου το 20% των μαθητών απέχουν ±1 τάξη, καθώς η στρογγυλοποίηση του διαιρετέου στο πρώτο ψηφίο δίνει 0,3 το οποίο αν διαιρεθεί με την προσέγγιση του διαιρέτη στο πρώτο ψηφίο (20) μπορεί να προκαλέσει σύγχυση σε κάποιους μαθητές που διαιρώντας το 30 διά 2 βρίσκουν 15 χωρίς να υπολογίζουν ότι το μηδενικό του 30 γίνεται και αυτό δεκαδικό ψηφίο, δηλαδή ότι το αποτέλεσμα έχει συνολικά 3 δεκαδικά ψηφία (2 από το 0,30 που είναι διαιρετέος και 1 από το 20 που είναι διαιρέτης), δηλαδή είναι 0,015. Έτσι, κάποιοι μαθητές βρίσκουν 0,15 και κάποιοι άλλοι υπολογίζουν ότι το πηλίκο έχει δύο δεκαδικά ψηφία από το 0,30 και δύο από το 20 δηλαδή 4 και βρίσκουν 0,0015. Στο αντίστοιχο ερώτημα του δέκατου θέματος το ποσοστό επιτυχίας είναι επίσης 50%. Αυτό οφείλεται στο ότι, στο πλαίσιο της Γ΄ φάσης, για την εύρεση της τάξης μεγέθους στη διαίρεση, στην περίπτωση που ο ένας από τους δύο όρους είναι δεκαδικός και μικρότερος από τη μονάδα, οι μαθητές δεν ακολουθούν τον κανόνα εύρεσης της τάξης μεγέθους για τους ακεραίους, αλλά στρογγυλοποιούν τα αριθμητικά δεδομένα στο πρώτο ψηφίο με βάση το συνήθη κανόνα και στη συνέχεια προχωρούν σταδιακά στην εύρεση της τάξης μεγέθους του πηλίκου ακολουθώντας τον κανόνα της διαίρεσης αριθμών του τύπου $νx10^{μ}$, όπου ν φυσικός και μ αρνητικός ακέραιος (βλ. §9.2.1 Α΄ φάση, ι), υποσημείωση 81). Δεν διδάχθηκε ο κανόνας εύρεσης της τάξης μεγέθους (βλ. §5.3.2.1), καθώς εμπλέκονται αρνητικοί αριθμοί, οι οποίοι δεν διδάσκονται στο Δημοτικό σχολείο. Έτσι, ο τρόπος εύρεσης της τάξης μεγέθους που διδάχθηκαν ενοποιείται με την εύρεση της προσέγγισης με στρογγυλοποίηση, με αποτέλεσμα οι μαθητές να εμφανίζουν ίδιο ποσοστό επιτυχίας και στα δύο συναφή ερωτήματα.

Προκειμένου να διαπιστώσουμε τη βελτίωση του ποσοστού των μαθητών που απαντούν σωστά στις διαιρέσεις 0,035:48,32 του δέκατου θέματος και 0,26:17,12 του ενδέκατου θέματος, συγκρίναμε το αυτό το ποσοστό κατά την πρώτη και κατά την τέταρτη επίδοση:

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="3">p για το binomial test=0,09</td><td colspan="2">Απάντηση και στις δύο διαιρέσεις (0.035:48,32 και 0,026:17,12)</td><td rowspan="3">Σύνολο</td></tr>
<tr><td colspan="2">4η επίδοση</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1η επίδοση</td><td>1</td><td>11
55%</td><td>7
35%</td><td>18
90%</td></tr>
<tr><td>2</td><td>2
10%</td><td>0
0%</td><td>2
10%</td></tr>
<tr><td colspan="2">Σύνολο</td><td>13
65%</td><td>7
35%</td><td>20
100%</td></tr>
</table>

Έτσι, κατά την τέταρτη επίδοση βελτιώνεται το ποσοστό των μαθητών που απαντούν σωστά και στα δύο συναφή ερωτήματα, δηλαδή αυτών που κατέχουν πολύ καλά τη συγκεκριμένη γνώση.

Παρόλο που η βελτίωση δεν είναι στατιστικά σημαντική, παρατηρούμε ότι υπάρχουν 7 μαθητές που βελτιώνονται και απαντούν σωστά και στις δύο διαιρέσεις.

Εξάλλου, συγκρίνοντας το ποσοστό των μαθητών που απαντούν σωστά στις δύο διαιρέσεις δεκαδικών του ενδέκατου θέματος, έχουμε:

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="3">p για το binomial test=0,016</td><td colspan="2">Απάντηση και στις δύο διαιρέσεις (3,4:512 και 0,026:17,12)
4η επίδοση</td><td rowspan="3">Σύνολο</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr></tr>
<tr><td rowspan="2">1η επίδοση</td><td>1</td><td>13
65%</td><td>6
30%</td><td>19
95%</td></tr>
<tr><td>2</td><td>0
0%</td><td>1
5%</td><td>1
5%</td></tr>
<tr><td colspan="2">Σύνολο</td><td>13
65%</td><td>7
35%</td><td>20
100%</td></tr>
</table>

Έτσι, παρατηρούμε ότι υπάρχει στατιστικά σημαντική βελτίωση του ποσοστού των μαθητών που απαντούν σωστά και στις δύο διαιρέσεις δεκαδικών.

Στο σύνολο των ερωτημάτων του δέκατου και ενδέκατου θέματος, παρατηρούμε ότι κατά την πρώτη μέτρηση κανένας μαθητής δεν καταφέρνει να απαντήσει σωστά τουλάχιστον σε 12 από τα 14 ερωτήματα (ο μέγιστος αριθμός σωστά απαντηθέντων ερωτημάτων είναι 9, από 1 μαθητή), ενώ κατά την τέταρτη μέτρηση 8 μαθητές (40%) το επιτυγχάνουν:

10ο και 11ο θέμα	Μαθητές που απαντούν σωστά τουλάχιστον σε … ερωτήματα από τα 14										
	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1η επίδοση	13 65%	7 35%	4 20%	1 5%	1 5%	1 5%	0 0%	0 0%	0 0%	0 0%	0 0%
4η επίδοση	19 95%	18 90%	17 85%	15 75%	13 65%	13 65%	10 50%	9 45%	8 40%	5 25%	3 15%

Μάλιστα, 3 μαθητές καταφέρνουν να απαντήσουν σωστά και στα 14 ερωτήματα.

Αυτό σημαίνει ότι, ενώ αρχικά υπάρχουν πολύ εύκολες και πολύ δύσκολες ερωτήσεις για τους μαθητές, όπως φαίνεται και από τα ποσοστά της πρώτης μέτρησης που είναι άλλοτε υψηλά και άλλοτε πολύ χαμηλά, τελικά υπάρχει ένας μαθητικός πληθυσμός που δεν θεωρεί ότι υπάρχουν δύσκολες και εύκολες ερωτήσεις και καταφέρνει να απαντά με επιτυχία σχεδόν σε όλες.

Η βελτίωση της Π.Ο. σχετικά με την απάντηση σε τουλάχιστον 12 ερωτήματα είναι στατιστικά σημαντική:

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">p για το binomial test=0,004</td><td colspan="2">Απάντηση σε τουλάχιστον 14 από τα 16 ερωτήματα
4η επίδοση</td><td rowspan="2">Σύνολο</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1η επίδοση</td><td>1</td><td>12
60%</td><td>8
40%</td><td>20
100%</td></tr>
<tr><td>2</td><td>0
0%</td><td>0
0%</td><td>0
0%</td></tr>
<tr><td colspan="2">Σύνολο</td><td>12
60%</td><td>8
40%</td><td>20
100%</td></tr>
</table>

Γενικότερα στην περιοχή της εύρεσης της τάξης μεγέθους καθώς και προσεγγίσεων μεγαλύτερης ακρίβειας, παρατηρούμε ότι μεγαλύτερα ποσοστά εμφανίζουν οι μαθητές στο ενδέκατο θέμα, το οποίο δεν είναι πολλαπλής επιλογής αλλά ανοιχτό. Η αιτία, όπως φάνηκε ήδη κατά η διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης, είναι ότι όταν ζητείται από τους μαθητές να βρουν την τάξη μεγέθους προσπαθούν να εφαρμόσουν τον κανόνα εύρεσης της τάξης μεγέθους τον οποίο διδάχτηκαν (βλ. §5.3.2.1), ενώ μπορούν με μεγαλύτερη ευχέρεια να βρουν την τάξη μεγέθους αφού αναδιατυπώσουν τα αριθμητικά δεδομένα με διάφορους κανόνες στρογγυλοποίησης. Σ' αυτό το σημείο θα μπορούσε να δοθεί μεγαλύτερη έμφαση στον κανόνα εύρεσης της τάξης μεγέθους ώστε να εξασκηθούν περισσότερο οι μαθητές ή να ενθαρρυνθούν οι μαθητές να επιλέγουν όποιο τρόπο θέλουν ανάλογα με τις δυνατότητές τους.

Επίσης, διαπιστώνουμε μια αναλογία των ποσοστών του δέκατου θέματος με τα ποσοστά των αντίστοιχων ερωτημάτων του ενδέκατου θέματος. Δηλαδή στο δέκατο θέμα το μεγαλύτερο ποσοστό αντιστοιχεί στον πολλαπλασιασμό διψήφιου επί διψήφιο και ακολουθούν τα ποσοστά των πολλαπλασιασμών πολυψήφιων, όπως και στο ενδέκατο θέμα. Έπεται η διαίρεση 6143:28 όπου το πρώτο ψηφίο του διαιρέτη είναι μικρότερο από το πρώτο ψηφίο του διαιρετέου, όπως άλλωστε και η διαίρεση 67952:317 στο ενδέκατο θέμα. Στη συνέχεια ακολουθούν οι διαιρέσεις δεκαδικών. Βέβαια, στο ενδέκατο θέμα στη διαίρεση 3,4:512 το ποσοστό είναι όπως τη διαίρεση 67952:317, γεγονός όμως που ερμηνεύσαμε με βάση τη φύση των αριθμητικών δεδομένων (βλ. παραπάνω). Τέλος, έχουμε τη διαίρεση 17531:423 η οποία αντιστοιχεί στη διαίρεση 26472:43 του ενδέκατου θέματος, όπου το ποσοστό είναι χαμηλότερο σε σχέση με τα υπόλοιπα ερωτήματα.

Επίσης, διαπιστώνουμε ότι η Π.Ο. εμφανίζει τα μεγαλύτερα ποσοστά επιτυχίας στους πολλαπλασιασμούς σε αντιδιαστολή με τις διαιρέσεις, κατ' αναλογία με τα υπόλοιπα θέματα του ερωτηματολογίου (3ο και 4ο θέμα).

Ακόμη, διαπιστώνουμε ότι τα ποσοστά επιτυχίας στις διαιρέσεις δεκαδικών δεν αποκλίνουν από τα αντίστοιχα ποσοστά στις διαιρέσεις ακεραίων. Οι μαθητές, για την εύρεση της τάξης μεγέθους ή προσεγγίσεων μεγαλύτερης ακρίβειας, επηρεάζονται περισσότερο από τη φύση των ψηφίων του διαιρέτη και του διαιρετέου και όχι από το αν είναι δεκαδικοί ή ακέραιοι, σε αντιδιαστολή με τα ευρήματα των Bestgen et al. (1982), Levine (1982), Hanson & Hogan (2000) (βλ. §4.2.1).

Εξάλλου, παρατηρούμε ότι τα ποσοστά επιτυχίας σ' αυτή την περιοχή είναι σε γενικές γραμμές χαμηλότερα σε σχέση με άλλα ερωτήματα του ερωτηματολογίου. Αυτό οφείλεται στο ότι οι υπόλοιπες περιοχές αποτέλεσαν αντικείμενο επεξεργασίας στο πλαίσιο της διδακτικής παρέμβασης κατά τη διάρκεια των πρώτων φάσεων, ενώ κάποιες απ' αυτές ξαναχρησιμοποιήθηκαν και στις τελευταίες φάσεις (π.χ. οι υπολογισμοί με δυνάμεις του 10 και με αριθμούς του τύπου $\nu x 10^{\mu}$, όπου $\nu \in N$ και $\mu \in Z$, αποτέλεσαν προαπαιτούμενες γνώσεις για την εκτίμηση με στρογγυλοποίηση). Αντίθετα, η εύρεση της τάξης μεγέθους καθώς και προσεγγίσεων μεγαλύτερης ακρίβειας επεξεργάστηκαν μόνο κατά την Γ΄ και Δ΄ φάση.

2. Γραπτή εκτέλεση πράξεων

α. Πολλαπλασιασμοί και διαιρέσεις (3ο θέμα)

p για το binomial test=0,035		11,42·3,7		Σύνολο
		4η επίδοση		
		1	2	
1η επίδοση	1	4 20%	7 35%	11 55%
	2	1 5%	8 40%	9 45%
Σύνολο		5 25%	15 75%	20 100%

Στον πρώτο πολλαπλασιασμό δεκαδικών αριθμών, παρατηρούμε ότι 35% των μαθητών βελτιώνεται, ενώ μόνο 5% αποτυγχάνει έχοντας επιτύχει κατά την πρώτη μέτρηση. Η βελτίωση είναι στατιστικά σημαντική σε επίπεδο σημαντικότητας 0,05.

p για το binomial test=0,002		27,2·0,03		Σύνολο
		4η επίδοση		
		1	2	
1η επίδοση	1	2 10%	9 45%	11 55%
	2	0 0%	9 45%	9 45%
Σύνολο		2 10%	18 90%	20 100%

Στο δεύτερο πολλαπλασιασμό, το 45% των μαθητών βελτιώνονται, ενώ κανείς μαθητής δεν αποτυγχάνει κατά την τέταρτη μέτρηση έχοντας όμως επιτύχει κατά την πρώτη. Το επίπεδο σημαντικότητας για το binomial test είναι 0,002 που σημαίνει ότι η βελτίωση των μαθητών της Π.Ο. είναι στατιστικά σημαντική.

Παρατηρούμε ότι και στους δύο πολλαπλασιασμούς, η Π.Ο. βελτιώνεται σημαντικά, αυξάνοντας το ποσοστό επιτυχίας κατά 30 ποσοστιαίες μονάδες στην πρώτη περίπτωση (φτάνοντας στο 75%) και κατά 45 ποσοστιαίες μονάδες στη δεύτερη περίπτωση (φτάνοντας στο 90%). Μάλιστα, είναι σημαντικό ότι μόνο 1 μαθητής (5%) αποτυγχάνει στον πρώτο πολλαπλασιασμό, ενώ είχε επιτύχει αρχικά.

Επίσης, διαπιστώνουμε ότι η βελτίωση είναι μεγαλύτερη στο δεύτερο πολλαπλασιασμό, γεγονός που οφείλεται στο ότι ο πολλαπλασιαστής έχει μόνο ένα ψηφίο του διαφορετικό από το μηδέν και οι μαθητές είχαν εξασκηθεί, ιδιαίτερα κατά την πρώτη και δεύτερη φάση της διδακτικής παρέμβασης, ώστε να εκτελούν και από μνήμης τέτοιους πολλαπλασιασμούς.

p για το binomial test=0,008		1287:75		Σύνολο
		4η επίδοση		
		1	2	
1η επίδοση	1	6 30%	7 35%	11 65%
	2	0 0%	7 35%	9 35%
Σύνολο		6 30%	14 70%	20 100%

Στην πρώτη διαίρεση, βελτίωση παρουσιάζει το 35% των μαθητών, ενώ κανείς εκ των επιτυχόντων κατά την πρώτη μέτρηση δεν αποτυγχάνει. Η βελτίωση της Π.Ο., η οποία διπλασιάζει το ποσοστό επιτυχίας φτάνοντας στο 70%, είναι στατιστικά σημαντική, όπως φαίνεται από το επίπεδο σημαντικότητας του binomial test.

p για το binomial test=0,017		7454:29		Σύνολο
		4η επίδοση		
		1	2	
1η επίδοση	1	10 50%	6 30%	16 80%
	2	0 0%	4 20%	4 20%
Σύνολο		10 50%	10 50%	20 100%

Στη δεύτερη διαίρεση, το 30% των μαθητών βελτιώνεται, ενώ δεν υπάρχει μαθητής να έχει επιτύχει κατά την πρώτη μέτρηση και να αποτυγχάνει κατά την τέταρτη. Η επιτυχία της Π.Ο. φτάνει στο 50%, ενώ κατά την πρώτη μέτρηση είχε 20%. Η βελτίωση που εμφανίζει η Π.Ο. είναι στατιστικά σημαντική σε επίπεδο σημαντικότητας 0,05. Το ποσοστό επιτυχίας είναι χαμηλότερο σε σχέση με την προηγούμενη διαίρεση, γεγονός που οφείλεται στο ότι το πρώτο δεκαδικό ψηφίο της διαίρεσης είναι 0 (βλ. §3.1).

p για το binomial test=0,004		1082:19		Σύνολο
		4η επίδοση		
		1	2	
1η επίδοση	1	9 45%	8 40%	17 85%
	2	0 0%	3 15%	3 15%
Σύνολο		9 45%	11 55%	20 100%

Στην τρίτη διαίρεση το 40% των μαθητών βελτιώνονται, ενώ και πάλι κανένας εκ των επιτυχόντων κατά την πρώτη μέτρηση δεν αποτυγχάνει. Η Π.Ο. αυξάνει το ποσοστό της σε 55% από 15% που είχε αρχικά, έχοντας έτσι μια σημαντική βελτίωση σε επίπεδο σημαντικότητας 0,05.

Παρατηρούμε ότι το ποσοστό της Π.Ο. είναι χαμηλότερο στη δεύτερη και τρίτη διαίρεση σε σχέση με την πρώτη, γεγονός που οφείλεται στις δυσκολίες που εμπεριέχουν οι δύο τελευταίες διαιρέσεις (βλ. §3.2). Τη μεγαλύτερη βελτίωση εμφανίζει στην τρίτη διαίρεση, γεγονός που θα πρέπει να συνδυαστεί και με τα κριτήρια εκτίμησης τα οποία διδάχτηκαν οι μαθητές, ώστε να προβούν στην εύρεση των μερικών πηλίκων, έπειτα από την αναδιατύπωση των αριθμητικών δεδομένων με στρογγυλοποίηση.

Γενικά, στην περιοχή των πολλαπλασιασμών και των διαιρέσεων παρατηρούμε ότι βελτιώνεται 30-45% των μαθητών σε κάθε ερώτημα, ενώ μόνο 5% (1 μαθητής) δεν επιτυγχάνει σε μία πράξη, ενώ είχε επιτύχει κατά την πρώτη μέτρηση. Δηλαδή υπάρχει αυστηρά ιεραρχική σχέση μεταξύ πρώτης και τέταρτης επίδοσης στη συγκεκριμένη περιοχή. Η βελτίωση που παρατηρείται είναι αμιγής και αφορά σε ένα αξιόλογο ποσοστό του μαθητικού πληθυσμού της Π.Ο.

Έτσι, είναι προφανής η επίδραση της διδακτικής παρέμβασης στην εκτέλεση πολλαπλασιασμών και διαιρέσεων. Τα ποσοστά επιτυχίας της Π.Ο. είναι σχετικά υψηλά στους πολλαπλασιασμούς και λίγο χαμηλότερα στις διαιρέσεις. Η βελτίωση της Π.Ο. οφείλεται κατά κύριο λόγο στη διδασκαλία κριτηρίων ελέγχου κατά την Ε΄ φάση της διδακτικής παρέμβασης. Σ' αυτή τη φάση δίνονταν κάποιες πράξεις στους μαθητές και ζητούνταν απ' αυτούς να εκτιμήσουν αρχικά το αποτέλεσμα, να εκτελέσουν στη συνέχεια την πράξη, να εφαρμόσουν κριτήρια ελέγχου και τέλος να συγκρίνουν το αποτέλεσμα με την αρχική τους εκτίμηση. Έτσι, συνδυάζονταν τα κριτήρια εκτίμησης με τα κριτήρια ελέγχου. Η εφαρμογή κριτηρίων εκτίμησης στις συγκεκριμένες πράξεις δεν μπορεί να διαπιστωθεί. Όμως, σε ό,τι αφορά την εφαρμογή κριτηρίων ελέγχου από τους μαθητές, έχουμε:

Πολλαπλασιασμοί και διαιρέσεις		
Εκτέλεση δοκιμών	1η επίδοση	4η επίδοση
11,42·3,7	0 0%	16 80%
27,8·0,03	0 0%	16 80%
1287:75	0 0%	15 75%
7454:29	0 0%	13 65%
1082:19	0 0%	13 65%

Πράγματι, το 80% των μαθητών εκτελούν δοκιμή για τον έλεγχο της ορθότητας του αποτελέσματος στους πολλαπλασιασμούς, το 75% στην πρώτη διαίρεση και το 65% στη δεύτερη και τρίτη διαίρεση.

Εξάλλου, διαπιστώνουμε ότι υπάρχει μια μεγάλη βελτίωση των μαθητών που καταφέρνουν να εκτελέσουν σωστά τουλάχιστον τις 4 από τις 5 πράξεις. Μάλιστα, το 45% καταφέρνει με επιτυχία να εκτελέσει και τις 5 πράξεις:

	Μαθητές που πέτυχαν τουλάχιστον σε … πράξεις από τις 5	
	4	5
1η επίδοση	4 20%	1 5%
4η επίδοση	11 55%	9 45%

Η βελτίωση της Π.Ο. σε ό,τι αφορά την εκτέλεση τουλάχιστον 4 πράξεων είναι στατιστικά σημαντική:

p για το binomial test=0,008		Εκτέλεση τουλάχιστον 4 πράξεων από τις 5		Σύνολο
		4η επίδοση		
		1	2	
1η επίδοση	1	9 45%	7 35%	16 80%
	2	0 0%	4 20%	4 20%
Σύνολο		9 45%	11 55%	20 100%

Αυτό σημαίνει ότι η πλειοψηφία των μαθητών της Π.Ο. καταφέρνει επιτυχώς να εκτελεί πολλαπλασιασμούς και διαιρέσεις.

β. Αφαιρέσεις δεκαδικών (8ο θέμα)

p για το binomial test=0,004		826-9,64		Σύνολο
		4η επίδοση		
		1	2	
1η επίδοση	1	5 25%	8 40%	13 65%
	2	0 0%	7 35%	7 35%
Σύνολο		5 25%	15 75%	20 100%

Στην πρώτη αφαίρεση δεκαδικών αριθμών, βελτίωση παρουσιάζει το 40% των μαθητών, βελτίωση που είναι στατιστικά σημαντική σε επίπεδο σημαντικότητας 0,05.

Το ποσοστό επιτυχίας της Π.Ο. είναι 75%, ενώ κατά την πρώτη μέτρηση ήταν 35%.

p για το binomial test=0,008		35,5-8,745		Σύνολο
		4η επίδοση		
		1	2	
1η επίδοση	1	6 30%	7 35%	13 65%
	2	0 0%	7 35%	7 35%
Σύνολο		6 30%	14 70%	20 100%

Στη δεύτερη διαίρεση, βελτιώνεται το 35% των μαθητών, ενώ κανείς εκ των επιτυχόντων κατά την πρώτη επίδοση δεν αποτυγχάνει. Η βελτίωση της Π.Ο. είναι στατιστικά σημαντική σε επίπεδο σημαντικότητας 0,05.

Η επιτυχία της Π.Ο. αγγίζει το 70%, διπλασιάζοντας έτσι το ποσοστό που είχε αρχικά.

p για το binomial test=0,188		82,46-7,57		Σύνολο
		4η επίδοση		
		1	2	
1η επίδοση	1	2 10%	1 5%	3 15%
	2	4 20%	13 65%	17 85%
Σύνολο		6 30%	14 70%	20 100%

Στην τρίτη αφαίρεση, βελτιώνεται μόνο το 5%, ενώ κάμψη εμφανίζει το 20% των μαθητών, χωρίς ωστόσο η επιδείνωση να είναι στατιστικά σημαντική.

Το ποσοστό επιτυχίας της Π.Ο. ολισθαίνει στο 70% από 85% που ήταν αρχικά. Ωστόσο, αξίζει να σημειωθεί ότι το 15% των μαθητών έχουν κάνει λάθος σε μία μονοψήφια πράξη, που σημαίνει ότι γνωρίζουν τον αλγόριθμο. Το γεγονός ότι οι μαθητές αντιλαμβάνονται την ευκολία αυτής της πράξης σε σχέση με τις δύο προηγούμενες καθώς δεν υπάρχει πρόβλημα στοίχισης ως προς την υποδιαστολή αφού μειωτέος και αφαιρετέος έχουν ίδιο αριθμό δεκαδικών ψηφίων, τους οδηγεί σε βιαστική εκτέλεσή της. Μάλιστα, είναι ενδεικτικό ότι αυτοί οι μαθητές δεν εκτελούν δοκιμή για τον έλεγχο της ορθότητας του αποτελέσματος. Εξάλλου, από αυτούς τους μαθητές οι 3 (15%) είχαν αποτύχει στις άλλες δύο αφαιρέσεις κατά την πρώτη μέτρηση, παρουσιάζοντας επομένως φαινόμενο αστάθειας, ενώ ο 1 (5%) απλά έχει κάνει λάθος σε μονοψήφια πράξη και κατά συνέπεια η αποτυχία του οφείλεται σε βιαστική εκτέλεση.

Ακόμη, είναι αξιοσημείωτο ότι ενώ κατά την πρώτη μέτρηση είχε επιτύχει το 30% των μαθητών και στις 3 αφαιρέσεις, κατά την τέταρτη μέτρηση επιτυγχάνει και στις 3 το 60% των μαθητών της Π.Ο.:

	Μαθητές που πέτυχαν τουλάχιστον σε…αφαιρέσεις από τις 3	
	2	3
1η επίδοση	8 40%	6 30%
4η επίδοση	14 70%	12 60%

p για το binomial test=0,035		Σωστή εκτέλεση και των 3 αφαιρέσεων		Σύνολο
		4η επίδοση		
		1	2	
1η επίδοση	1	7 35%	7 35%	14 70%
	2	1 5%	5 25%	6 30%
Σύνολο		8 40%	12 60%	20 100%

Διαπιστώνουμε ότι η βελτίωση της Π.Ο. σε ό,τι αφορά την εκτέλεση και των 3 αφαιρέσεων είναι στατιστικά σημαντική.

Στις δύο πρώτες αφαιρέσεις, η βελτίωση της Π.Ο. είναι πολύ μεγάλη και σημαντική. Οι μαθητές, με την επίδραση της διδακτικής παρέμβασης, έχουν κατανοήσει τους δεκαδικούς αριθμούς και τη σχέση τους με τους ακεραίους και έχουν προσπελάσει δυσκολίες που έχουν σχέση με τη θεσιακή αξία των ψηφίων (κατανόηση του δεκαδικού αριθμητικού μας συστήματος), την υποδιαστολή και τη στοίχιση ως προς αυτή. Αυτό φαίνεται ειδικά στην πρώτη αφαίρεση, όπου ο μειωτέος είναι ακέραιος και δεν υπάρχει υποδιαστολή, αλλά και στη δεύτερη αφαίρεση, όπου οι μαθητές δείχνουν να έχουν κατανοήσει ότι ο μειωτέος έχει στο δεκαδικό του μέρος μόνο δέκατα, ενώ ο αφαιρετέος έχει δέκατα, εκατοστά, χιλιοστά.

Επίσης, είναι σημαντικό ότι και στις τρεις αφαιρέσεις το 35% των μαθητών εκτελούν δοκιμή για τον έλεγχο της ορθότητας του αποτελέσματος, ενώ δεν μπορεί να φανεί ο αριθμός των μαθητών που εκτελούν δοκιμή νοερά, προσθέτοντας απευθείας τα ψηφία της διαφοράς με τα ψηφία του αφαιρετέου για να βρεθεί ο μειωτέος.

3. Μετατροπή δεκαδικών αριθμών σε κλάσματα και κλασμάτων σε δεκαδικούς αριθμούς (5ο και 6ο θέμα)

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="3">p για το binomial test=0,006</td><td colspan="2">0,064</td><td rowspan="3">Σύνολο</td></tr>
<tr><td colspan="2">4η επίδοση</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1η επίδοση</td><td>1</td><td>7
35%</td><td>10
50%</td><td>17
85%</td></tr>
<tr><td>2</td><td>1
5%</td><td>2
10%</td><td>3
15%</td></tr>
<tr><td colspan="2">Σύνολο</td><td>8
40%</td><td>12
60%</td><td>20
100%</td></tr>
</table>

Στην πρώτη μετατροπή δεκαδικού σε κλάσμα, βελτίωση εμφανίζει το 50% των μαθητών, ενώ το 5% παρουσιάζει απώλεια της προηγούμενης γνώσης, αποτυγχάνοντας σε αυτή τη μέτρηση. Η βελτίωση της Π.Ο. είναι στατιστικά σημαντική σε επίπεδο σημαντικότητας 0,05.

Η επιτυχία της Π.Ο. ανέρχεται στο 60%, σε σχέση με το 15% που είχε αρχικά. Ωστόσο το 40% των μαθητών δεν καταφέρνει να προσπελάσει τις δυσκολίες του πάνω στη συγκεκριμένη μετατροπή. Είναι αξιοσημείωτο ότι το 30% μετατρέπει το δεκαδικό σε ένα κλάσμα του οποίου ο παρονομαστής είναι 100 αντί για 1000 που είναι το σωστό. Ενδεχομένως αυτοί οι μαθητές εφαρμόζουν κάποιο εσφαλμένο κανόνα σύμφωνα με τον οποίο “ο παρονομαστής είναι δύναμη του 10 και έχει τόσα μηδενικά όσα και τα μη μηδενικά ψηφία του δεκαδικού αριθμού”.

p για το binomial test=0,002		2,36		Σύνολο
		4η επίδοση		
		1	2	
1η επίδοση	1	3 15%	12 60%	15 75%
	2	1 5%	4 20%	5 25%
Σύνολο		4 20%	16 80%	20 100%

Στη δεύτερη μετατροπή δεκαδικού σε κλάσμα, βελτιώνεται το 60% των μαθητών, ενώ και πάλι 5% αποτυγχάνει παρόλο που είχε επιτύχει κατά την πρώτη επίδοση του ερωτηματολογίου. Η βελτίωση είναι σημαντική σε επίπεδο σημαντικότητας 0,001.

Το ποσοστό επιτυχίας της Π.Ο. είναι 80%, σε αντιδιαστολή με το αρχικό ποσοστό που ήταν μόνο 25%.

Θα περίμενε κανείς οι μαθητές να έχουν μεγαλύτερες δυσκολίες σ' αυτή τη μετατροπή σε σχέση με την προηγούμενη, καθώς υπάρχει και ακέραιο μέρος. Μολαταύτα, η επιτυχία σ' αυτή τη μετατροπή είναι 80% ενώ στην προηγούμενη είναι 60%. Η απόκλιση αυτή ίσως οφείλεται στην εφαρμογή κάποιου εσφαλμένου κανόνα στην προηγούμενη μετατροπή, όπως ήδη αναφέρθηκε.

Επίσης, θα πρέπει να σημειωθεί ότι οι μετατροπές αυτές δε συμπεριλαμβάνονταν αυτούσιες στη διδακτική παρέμβαση. Χρησιμοποιήθηκαν ωστόσο στο πλαίσιο του διπλού προγραμματισμού, για τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση με αρνητικές δυνάμεις του 10, που χρησιμοποιήθηκε τόσο ως κριτήριο ελέγχου, όσο και για την κατανόηση των πράξεων με αρνητικές δυνάμεις του 10, με αποτέλεσμα να υπάρχει αυτή η επίδραση στην επίδοση των μαθητών.

p για το binomial test=0,008		9/10000		Σύνολο
		4η επίδοση		
		1	2	
1η επίδοση	1	5 25%	7 35%	15 60%
	2	0 0%	8 40%	8 40%
Σύνολο		5 25%	15 75%	20 100%

Στην πρώτη μετατροπή κλάσματος σε δεκαδικό αριθμό, το 35% των μαθητών βελτιώνεται, ενώ δεν υπάρχει μαθητής που να εμφανίζει χειρότερη επίδοση σε σχέση με την αρχική. Έτσι, η βελτίωση της Π.Ο. είναι στατιστικά σημαντική σε επίπεδο σημαντικότητας 0,05.

Η συνολική επιτυχία της Π.Ο. είναι 75%, ενώ αρχικά ήταν 40%. Αξίζει να σημειωθεί ότι το 15% των μαθητών απέχουν -1 τάξη από τη σωστή τάξη μεγέθους, που σημαίνει ότι γνωρίζουν τον αλγόριθμο, αλλά έχουν κάνει λάθος στη μέτρηση των μηδενικών.

p για το binomial test=0,011		453/10		Σύνολο
		4η επίδοση		
		1	2	
1η επίδοση	1	7 35%	9 45%	16 80%
	2	1 5%	3 15%	4 20%
Σύνολο		8 40%	12 60%	20 100%

Στην επόμενη μετατροπή, βελτίωση παρουσιάζει το 45%, ενώ το 5% αποσταθεροποιεί τη γνώση του. Η Π.Ο. βελτιώνεται σε επίπεδο σημαντικότητας 0,05.

Η Π.Ο. επιτυγχάνει με ποσοστό 60%, τετραπλασιάζοντας το ποσοστό που είχε αρχικά. Η διαφορά του ποσοστού σε αυτή τη μετατροπή σε σχέση με την προηγούμενη οφείλεται στο ότι το κλάσμα είναι μεγαλύτερο της μονάδας και ο αριθμητής έχει περισσότερα από ένα ψηφία. Αυτό προφανώς δυσχεραίνει την εφαρμογή του αλγόριθμου που γνωρίζουν, με αποτέλεσμα το 10% να απέχει -1 τάξη από τη σωστή τάξη μεγέθους του παρονομαστή και το 30% να έχουν κάνει άλλο λάθος στην τάξη μεγέθους του παρονομαστή. Ωστόσο, η βελτίωση είναι μεγαλύτερη στη δεύτερη μετατροπή.

p για το binomial test=0,008		6/8		Σύνολο
		4η επίδοση		
		1	2	
1η επίδοση	1	12 60%	7 35%	19 95%
	2	0 0%	1 5%	1 5%
Σύνολο		12 60%	8 40%	20 100%

Στην επόμενη μετατροπή, όπου το κλάσμα δεν είναι δεκαδικό, βελτιώνεται το 35% των μαθητών, ενώ δεν υπάρχει απώλεια του ποσοστού των επιτυχόντων κατά την πρώτη μέτρηση.

Το ποσοστό επιτυχίας της Π.Ο. είναι 40%, ενώ κατά την πρώτη επίδοση ήταν μόνο 5%. Η βελτίωση σύμφωνα με το binomial test είναι σημαντική σε επίπεδο σημαντικότητας 0,05.

p για το binomial test=0,004		9/15		Σύνολο
		4η επίδοση		
		1	2	
1η επίδοση	1	11 55%	8 40%	19 95%
	2	0 0%	1 5%	1 5%
Σύνολο		11 55%	9 45%	20 100%

Στη δεύτερη μετατροπή μη δεκαδικού κλάσματος σε δεκαδικό αριθμό, βελτιώνεται το 40% των μαθητών, βελτίωση που είναι στατιστικά σημαντική σε επίπεδο σημαντικότητας 0,05.

Η επιτυχία της Π.Ο. φτάνει στο 45%, σε σχέση με το 5% που είχε αρχικά.

Διαπιστώνουμε ότι και στις δύο μετατροπές το ποσοστό επιτυχίας είναι περίπου ίδιο, αλλά είναι χαμηλότερο σε σχέση με το αντίστοιχο ποσοστό στις παραπάνω μετατροπές. Ο λόγος της κάμψης αυτής είναι ότι οι μαθητές προσπαθούν να εφαρμόσουν τον αλγόριθμο που εφαρμόζουν και στα δεκαδικά κλάσματα. Πράγματι το 50% και στις δύο περιπτώσεις εφαρμόζουν εσφαλμένες ιδέες, όπως τοποθέτηση του αριθμητή ως ακέραιο μέρος και του παρονομαστή ως δεκαδικό ή κάποια παραλλαγή.

Ωστόσο, είναι μεγάλη η βελτίωση και στις δύο περιπτώσεις, παρόλο που η μετατροπή μη δεκαδικών κλασμάτων σε δεκαδικούς αριθμούς δεν εμπλέκονταν στη διδακτική παρέμβαση. Η βελτίωση της Π.Ο. υποδηλώνει ότι οι μαθητές έχουν κατανοήσει την ισοδυναμία του κλάσματος με διαίρεση. Αυτή είναι απόρροια της διδακτικής παρέμβασης, της εκμάθησης, εφαρμογής και χρήσης κριτηρίων εκτίμησης και ελέγχου.

Παρατηρούμε ότι η αλλαγή πεδίου έκφρασης και επεξεργασίας, που έγινε κατά τη διάρκεια της Α΄ φάσης, οδήγησε σε βελτίωση των μαθητών γενικότερα στην περιοχή των μετατροπών κλασμάτων σε δεκαδικούς και αντίστροφα. Έτσι, αρκετοί είχαν κατανοήσει την ισοδυναμία του κλάσματος με τη διαίρεση. Όμως υπάρχουν μαθητές, οι οποίοι προσπαθούν να ενοποιήσουν τα δεκαδικά κλάσματα με τα μη δεκαδικά και εφαρμόζουν τον ίδιο αλγόριθμο, ο οποίος βέβαια δεν λειτουργεί στην περίπτωση των μη δεκαδικών κλασμάτων. Οι μαθητές οδηγούνται σε γενίκευση, σε κατ' αναλογία μεταφορά, διαδικασία που ενισχύεται γενικότερα από τα σχολικά Μαθηματικά (Καλδρυμίδου, 2000, σ. 252).

Γενικά στην περιοχή των μετατροπών δεκαδικών αριθμών σε κλάσματα και αντίστροφα, παρατηρούμε μια μεγάλη βελτίωση της Π.Ο., στατιστικά σημαντική σε όλες της περιπτώσεις. Βέβαια τα ποσοστά επιτυχίας δεν είναι τόσο υψηλά όσο σε άλλες περιπτώσεις, αλλά οι μετατροπές δεν αποτελούσαν μέρος του διδακτικού σχήματος. Χρησιμοποιήθηκαν μόνο κατά το διπλό προγραμματισμό (βλ. παραπάνω) ως κριτήριο ελέγχου αλλά και για την κατανόηση του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης με αρνητικές δυνάμεις του 10.

Συγκρίνοντας το ποσοστό των μαθητών που εκτελούν τουλάχιστον τις 5 από τις 6 μετατροπές κατά την πρώτη και κατά την τέταρτη επίδοση, διαπιστώνουμε τη μεγάλη βελτίωση της Π.Ο. Ενώ αρχικά μόνο 1 μαθητής κατάφερε να κάνει τις 5 μετατροπές, κατά την τέταρτη μέτρηση το επιτυγχάνουν 9 μαθητές. Μάλιστα, 7 μαθητές καταφέρνουν να κάνουν σωστά και τις 5 μετατροπές.

	Μαθητές που πέτυχαν τουλάχιστον σε … μετατροπές από τις 6		
	4	5	6
1η επίδοση	1 5%	1 5%	1 5%
4η επίδοση	11 55%	9 45%	7 35%

p για το binomial test=0,004		Απάντηση τουλάχιστον σε 5 ερωτήματα από τα 6 – 4η επίδοση: 1	2	Σύνολο
1η επίδοση	1	11 55%	8 40%	19 95%
	2	0 0%	1 5%	1 5%
Σύνολο		11 55%	9 45%	20 100%

Η βελτίωση της Π.Ο. όσον αφορά στην εκτέλεση τουλάχιστον 5 μετατροπών είναι στατιστικά σημαντική, σύμφωνα με το binomial test.

4. Εκτέλεση πράξεων μεταξύ κλασμάτων (7ο θέμα)

p για το binomial test=0,188		13/18+14/24 – 4η επίδοση: 1	2	Σύνολο
1η επίδοση	1	9 45%	4 20%	13 65%
	2	1 5%	6 30%	7 35%
Σύνολο		10 50%	10 50%	20 100%

Στην πρόσθεση κλασμάτων, βελτίωση εμφανίζει το 20% των μαθητών, που όμως δεν είναι στατιστικά σημαντική. Το 5% των μαθητών αποτυγχάνει, ενώ είχε επιτύχει κατά την πρώτη μέτρηση.

Το ποσοστό επιτυχίας της Π.Ο. ανέρχεται στο 50%, βελτιωμένο κατά 15 ποσοστιαίες μονάδες, ενώ το 10% ακολουθεί σωστή διαδικασία αλλά εκτελεί λάθος τις πράξεις. Κατ' αντιστοιχία με την προηγούμενη περιοχή που εξετάσαμε, μπορούμε να πούμε ότι η βελτίωση της Π.Ο. οφείλεται στην αλλαγή πεδίου έκφρασης και επεξεργασίας κατά τη διάρκεια διδασκαλίας των πολλαπλασιασμών και διαιρέσεων από μνήμης. Μολαταύτα, το 50% των μαθητών αδυνατούν να εκτελέσουν με επιτυχία μια πρόσθεση κλασμάτων.

p για το binomial test=0,002		4/15·7/8 – 4η επίδοση: 1	2	Σύνολο
1η επίδοση	1	0 0%	8 40%	8 40%
	2	1 5%	11 55%	12 60%
Σύνολο		1 5%	19 95%	20 100%

Στον πολλαπλασιασμό κλασμάτων, βελτιώνεται το 40%, ενώ το 5% των μαθητών αποτυγχάνει, έχοντας όμως επιτύχει κατά την πρώτη επίδοση. Η βελτίωση της Π.Ο. είναι στατιστικά σημαντική σε επίπεδο σημαντικότητας 0,05.

Η επιτυχία της Π.Ο. αγγίζει το 95% έναντι του 60% που είχε αρχικά.

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="3">p για το binomial test=0,004</td><td colspan="2">8/10:7/12</td><td rowspan="3">Σύνολο</td></tr>
<tr><td colspan="2">4η επίδοση</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1η επίδοση</td><td>1</td><td>3
15%</td><td>8
40%</td><td>11
55%</td></tr>
<tr><td>2</td><td>0
0%</td><td>9
45%</td><td>9
45%</td></tr>
<tr><td colspan="2">Σύνολο</td><td>3
15%</td><td>17
85%</td><td>20
100%</td></tr>
</table>

Στη διαίρεση, βελτίωση εμφανίζει το 40% των μαθητών της Π.Ο. ενώ δεν υπάρχουν μαθητές που να αποτυγχάνουν ενώ είχαν επιτύχει κατά την πρώτη μέτρηση. Η βελτίωση της Π.Ο. είναι σημαντική σε επίπεδο σημαντικότητας 0,05.

Η Π.Ο. επιτυγχάνει σε ποσοστό 85%, αυξάνοντας σημαντικά το ποσοστό που είχε αρχικά.

Διαπιστώνουμε ότι το μεγαλύτερο ποσοστό επιτυχίας και τη μεγαλύτερη βελτίωση εμφανίζει η Π.Ο. στον πολλαπλασιασμό και στη διαίρεση, γεγονός που δικαιολογείται, καθώς η αλλαγή πεδίου έκφρασης και επεξεργασίας κατά τη διδακτική παρέμβαση αφορούσε πολλαπλασιασμούς και διαιρέσεις. Οι μαθητές, εκτός του ότι εξασκήθηκαν στους πολλαπλασιασμούς και στις διαιρέσεις, κατανόησαν τη σχέση των κλασματικών αριθμών με τους δεκαδικούς, στην εκτέλεση πράξεων μεταξύ των οποίων είχαν εξασκηθεί επαρκώς και μπορούσαν να εφαρμόζουν κριτήρια εκτίμησης και ελέγχου.

Στην πρόσθεση κλασμάτων η βελτίωση είναι μικρότερη, ωστόσο είναι σημαντική, γιατί αποτελεί έμμεση επίδραση, καθώς δεν συμπεριλαμβανόταν στο διδακτικό σχήμα, αλλά προέκυψε από την τριβή των μαθητών με τους κλασματικούς αριθμούς και την σύνδεσή τους με τους δεκαδικούς.

Από τη σύγκριση των ποσοστών των μαθητών που εκτέλεσαν σωστά και τις 3 πράξεις κλασμάτων κατά την πρώτη και κατά την τέταρτη επίδοση διαπιστώνουμε τη μεγάλη βελτίωση της Π.Ο. Το 50% επιλύει και τις 3 πράξεις, ενώ αρχικά μόνο το 25% είχε ανάλογη επίδοση.

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td colspan="2">Μαθητές που πέτυχαν τουλάχιστον σε…πράξεις κλασμάτων από τις 3</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>1η επίδοση</td><td>8
40%</td><td>5
25%</td></tr>
<tr><td>4η επίδοση</td><td>16
80%</td><td>10
50%</td></tr>
</table>

Η βελτίωση της Π.Ο. δεν είναι στατιστικά σημαντική, όσον αφορά στην εκτέλεση και των 3 πράξεων στις δύο επιδόσεις. Ωστόσο, παρατηρούμε ότι βελτιώνονται 5 μαθητές, ενώ κανένας μαθητής απ’ αυτούς που είχαν επιτύχει κατά την πρώτη μέτρηση, δεν αποτυγχάνει.

p για το binomial test=0,031		Σωστή εκτέλεση και των 3 πράξεων		Σύνολο
		4η επίδοση		
		1	2	
1η επίδοση	1	10 50%	5 25%	15 75%
	2	0 0%	5 25%	5 25%
Σύνολο		10 50%	10 50%	20 100%

4. Προβλήματα (1ο , 2ο και 9ο θέμα)

p για το binomial test=0,5		1ο πρόβλημα Vergnaud		Σύνολο
		4η επίδοση		
		1	2	
1η επίδοση	1	16 80%	1 5%	17 85%
	2	2 10%	1 5%	3 15%
Σύνολο		18 90%	2 10%	20 100%

Στο πρώτο πρόβλημα του Vergnaud, το 5% των μαθητών της Π.Ο. επιτυγχάνουν ενώ είχαν αποτύχει κατά την πρώτη επίδοση, ενώ το 10% αποτυγχάνουν ενώ είχαν επιτύχει αρχικά. Όπως είναι φανερό, σ' αυτό το θέμα περισσότεροι ήταν οι μαθητές που χειροτέρεψαν από αυτούς που βελτιώθηκαν. Κατά συνέπεια, μπορούμε να πούμε ότι η διδακτική παρέμβαση δεν είχε θετική επίδραση στο πρόβλημα αυτό των προσθετικών δομών. Αυτό προκύπτει και από το επίπεδο σημαντικότητας του binomial που είναι 0,5.

p για το binomial test=0,253		2ο πρόβλημα Vergnaud		Σύνολο
		4η επίδοση		
		1	2	
1η επίδοση	1	5 25%	6 30%	11 55%
	2	3 15%	6 30%	9 45%
Σύνολο		8 40%	12 60%	20 100%

Στο δεύτερο πρόβλημα του Vergnaud, το 30% των μαθητών της Π.Ο. επιτυγχάνουν ενώ είχαν αποτύχει αρχικά, ενώ το 15% των μαθητών αποτυγχάνουν, έχοντας επιτύχει αρχικά. Η Π.Ο. έχει καλύτερη επίδοση στο συγκεκριμένο πρόβλημα, γεγονός που οφείλεται στη λεκτική διατύπωση του προβλήματος. Οι μαθητές στο δεύτερο πρόβλημα επιλέγουν τη σωστή πράξη, επηρεασμένοι ίσως από το ότι τελικά κερδίζει 8 μπίλιες, που είναι <u>λιγότερες</u> απ' αυτές που κέρδισε στη δεύτερη παρτίδα (14). Έτσι, στο πρώτο πρόβλημα, όπου και πάλι η τελική κατάσταση είναι ότι χάνει 4 μπίλιες, που είναι πάλι λιγότερες απ’ αυτές που κέρδισε στη δεύτερη παρτίδα (9), οι μαθητές επιλέγουν την αφαίρεση, αντί για την πρόσθεση.

Παρόλο που είναι μεγαλύτερο το ποσοστό αυτών που έχουν βελτιωθεί, ωστόσο το binomial test έχει επίπεδο σημαντικότητας 0,253 που σημαίνει ότι δεν υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά μεταξύ των δύο επιδόσεων ως προς τη βελτίωση της Π.Ο.

Προκειμένου να διαπιστώσουμε τον αριθμό των μαθητών που έχουν κατανοήσει πολύ καλά την περιοχή των προσθετικών δομών, συγκρίναμε το ποσοστό των μαθητών που απαντούν σωστά και στα δύο προβλήματα προσθετικών δομών, κατά την πρώτη και κατά την τέταρτη επίδοση:

1η επίδοση

p για το Fisher Exact test=0,074		2ο πρόβλημα Vergnaud		Σύνολο
		1	2	
1ο πρόβλημα Vergnaud	1	11 55%	6 30%	17 85%
	2	0 0%	**3** **15%**	3 15%
Σύνολο		11 55%	9 45%	20 100%

4η επίδοση

p για το Fisher Exact test=0,495		2ο πρόβλημα Vergnaud		Σύνολο
		1	2	
1ο πρόβλημα Vergnaud	1	8 40%	10 50%	18 90%
	2	0 0%	**2** **10%**	2 10%
Σύνολο		8 40%	12 60%	20 100%

Έτσι, παρατηρούμε ότι κατά την πρώτη επίδοση το 15% των μαθητών απαντά σωστά και στα δύο προβλήματα προσθετικών δομών, ενώ κατά την τέταρτη επίδοση απαντά σωστά και στα δύο προβλήματα το 10% των μαθητών. Συνεπώς, συμπεραίνουμε ότι συνολικά στα προβλήματα των προσθετικών δομών η επίδραση της διδακτικής παρέμβασης δεν είναι σημαντική.

Η διδακτική παρέμβαση, όπως ήταν σχεδιασμένη, δεν συμπεριλάμβανε τέτοιου είδους προβλήματα, ούτε προέβλεπε την άρση των δυσκολιών που αυτά εμπεριέχουν. Η χαμηλή επίδοση και των δύο ομάδων (βλ. §10.1 και 6.2) αντικατοπτρίζει τις σοβαρές δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές της Στ΄ Δημοτικού στην επίλυση προβλημάτων προσθετικών δομών, οι οποίες οφείλονται σε έλλειμμα διδακτικής οργάνωσης σε ό,τι αφορά το συγκεκριμένο θέμα. Τόσο οι συντάκτες των αναλυτικών προγραμμάτων, όσο και οι διδάσκοντες θα πρέπει να λάβουν υπόψη τους παράγοντες που επηρεάζουν τη δυσκολία των προσθετικών προβλημάτων, την ταξινόμηση των προβλημάτων αυτών και τις διαδικασίες που χρησιμοποιούν οι μαθητές για τη λύση τους (Λεμονίδης, 1999, σ. 160).

Ωστόσο, παρατηρούμε μια βελτίωση στο δεύτερο πρόβλημα προσθετικών δομών, η οποία φανερώνει μια μεταβολή στη συγκεκριμένη περιοχή. Αυτό γίνεται πιο σαφές, με τη διαπίστωση ότι οι μαθητές της Π.Ο. στην τέταρτη επίδοση αντιλαμβάνονται ότι η πράξη που πρέπει να εκτελέσουν και στα δύο προβλήματα είναι πρόσθεση ή αφαίρεση, ενώ αρχικά αρκετοί μαθητές κατέφευγαν στην επιλογή άλλων πράξεων:

Μαθητές που εκτελούν άλλες πράξεις (εκτός πρόσθεση και αφαίρεση)	1ο πρόβλημα Vergnaud.	2ο πρόβλημα Vergnaud.
1η επίδοση	5 25%	6 30%
4η επίδοση	0 0%	0 0%

Ελέγχοντας τη βελτίωση της Π.Ο. σε ό,τι αφορά την εκτέλεση μόνο πρόσθεσης ή αφαίρεσης έχουμε:

p για το binomial test=0,031		1ο πρόβλημα Vergnaud Εκτέλεση πρόσθεσης ή αφαίρεσης 4η επίδοση		Σύνολο
		1	2	
1η επίδοση	1	0 0%	5 25%	5 25%
	2	0 0%	15 75%	15 75%
Σύνολο		0 0%	20 100%	20 100%

p για το binomial test=0,016		2ο πρόβλημα Vergnaud Εκτέλεση πρόσθεσης ή αφαίρεσης 4η επίδοση		Σύνολο
		1	2	
1η επίδοση	1	0 0%	6 30%	6 30%
	2	0 0%	14 70%	14 70%
Σύνολο		0 0%	20 100%	20 100%

Παρατηρούμε ότι η βελτίωση της Π.Ο. είναι στατιστικά σημαντική και στα δύο προβλήματα προσθετικών δομών.

Όμως, η μεταβολή δεν είναι πολύ ισχυρή, ώστε να υπάρχει συνολική επίδραση στην περιοχή των προσθετικών δομών, όπου είναι γνωστή η σύνθεση και ο ένας μετασχηματισμός και ζητείται ο άλλος μετασχηματισμός.

p για το binomial test=0,001		πρόβλημα αναλόγων ποσών 4η επίδοση		Σύνολο
		1	2	
1η επίδοση	1	7 35%	13 65%	20 100%
	2	0 0%	0%	0 0%
Σύνολο		7 35%	13 65%	20 100%

Στο πρόβλημα αναλόγων ποσών (σωστή μέθοδος επίλυσης και σωστή εκτέλεση πράξεων), παρατηρούμε ότι το 65% των μαθητών βελτιώνεται, ενώ κατά την πρώτη επίδοση όλοι οι μαθητές είχαν αποτύχει. Η βελτίωση είναι πολύ μεγάλη και είναι προφανής η επίδραση της διδακτικής παρέμβασης, σε συνδυασμό και με τη συμπεριφορά της Ο.Ε., η οποία βελτιώνεται -ιδιαίτερα στη μέθοδο επίλυσης- ως αποτέλεσμα της καθημερινής διδασκαλίας, αλλά η Π.Ο. υπερέχει με στατιστικά σημαντική διαφορά (βλ. §10.2).

Επίσης, έγινε σύγκριση στην Π.Ο. μεταξύ τρίτης και τέταρτης επίδοσης, ώστε να διαπιστωθεί αν υπάρχει περαιτέρω βελτίωση μετά το πέρας της διδακτικής παρέμβασης. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι κατά την τρίτη μέτρηση είχε ολοκληρωθεί η διδασκαλία των αναλόγων ποσών.

p για το binomial test=0,25		πρόβλημα αναλόγων ποσών 4η επίδοση		Σύνολο
		1	2	
3η επίδοση	1	7 35%	2 10%	9 45%
	2	0 0%	11 55%	11 55%
Σύνολο		7 35%	13 65%	20 100%

Έτσι, μεταξύ τρίτης και τέταρτης επίδοσης, διαπιστώνουμε ότι βελτιώνεται το 10% των μαθητών της Π.Ο., ενώ κανείς μαθητής δεν αποτυγχάνει απ' αυτούς που είχαν επιτύχει κατά την τρίτη μέτρηση. Δηλαδή, η βελτίωση των μαθητών της Π.Ο. είναι μεγάλη, παρατηρείται ήδη από τη δεύτερη επίδοση (βλ. §10.4) και συνεχίζει να υπάρχει ακόμα και στην τέταρτη επίδοση, όπου μάλιστα γίνεται μεγαλύτερη.

Σε προβλήματα αναλόγων ποσών, τα οποία διδάχτηκαν σύμφωνα με το αναλυτικό πρόγραμμα το διάστημα Φεβρουάριο-Απρίλιο, οι μαθητές της Π.Ο. είχαν εξασκηθεί, στο πλαίσιο της καθημερινής διδασκαλίας που βασίζεται στο αναλυτικό πρόγραμμα, σε κριτήρια εκτίμησης και ελέγχου. Συγκεκριμένα, προέβλεπαν αν το αποτέλεσμα είναι μεγαλύτερο ή μικρότερο από τα αριθμητικά δεδομένα του προβλήματος (κριτήριο των συναυξανόμενων ποσών) και αφότου έλυναν το πρόβλημα, προέβαιναν στον έλεγχο του αποτελέσματος με βάση τα αρχικά κριτήρια εκτίμησης. Επίσης, όσοι μαθητές είχαν την ικανότητα, εκτιμούσαν το αποτέλεσμα στηριζόμενοι στον πρώτο λόγο και στη σχέση αριθμητή και παρονομαστή (όχι απλή σχέση διάταξης). Ασφαλώς, η εξάσκηση των μαθητών στην εφαρμογή τέτοιου είδους κριτηρίων προέκυψε ως επέκταση της γνώσης που αποκόμιζαν στο πλαίσιο της διδακτικής παρέμβασης, όπου διδάσκονταν κριτήρια εκτίμησης και ελέγχου των αλγορίθμων των τεσσάρων αριθμητικών πράξεων.

Έτσι, εικάζει κανείς μια αλλαγή στη στάση του εκπαιδευτικού που διδάσκει κριτήρια εκτίμησης και ελέγχου και μια επιθυμία να επεκτείνει τη διδασκαλία και σε άλλες μαθηματικές περιοχές.

Από την άλλη, οι ίδιοι οι μαθητές γίνονται πιο δεκτικοί στην επέκταση της γνώσης και μπορούν με μεγαλύτερη ευκολία να αφομοιώσουν άλλα κριτήρια που αφορούν σε άλλες περιοχές.

Εξάλλου, είναι σημαντικό ότι το 100% των μαθητών εφαρμόζουν σωστά τη μέθοδο επίλυσης του προβλήματος (αλλά το 65% εκτελεί σωστά και τις δύο πράξεις). Αυτό σημαίνει ότι όλοι οι μαθητές έχουν αποκτήσει την ικανότητα να διαχειρίζονται με επιτυχία τα αριθμητικά δεδομένα του προβλήματος και κατανοούν τη σχέση που τα συνδέει, έχοντας ξεχωρίσει ποια είναι τα ποσά και ποιες τιμές αντιστοιχούν σε αυτά.

Ακόμη το 65% των μαθητών εκτελούν σωστά τις πράξεις του προβλήματος, γεγονός που θα πρέπει να συνδυαστεί και με τη γενικότερη επιτυχία τους σε πολλαπλασιασμούς και διαιρέσεις.

Επίσης είναι σημαντικό ότι το 85% των μαθητών διατηρούν τη διάταξη των συναυξανόμενων ποσών, ενώ το 75% βρίσκουν αποτέλεσμα που βρίσκεται στο διάστημα $(\frac{52}{2}, 52)$.

πρόβλημα αναλόγων ποσών	1η επίδοση	4η επίδοση	p για το binomial test
Μέθοδος επίλυσης	0 0%	20 100%	0,001
Εκτέλεση πράξεων	3 15%	13 65%	0,001
Εφαρμογή του κριτηρίου των συναυξανόμενων ποσών	6 30%	17 85%	0,002

Γενικά στην περιοχή των προβλημάτων, διαπιστώνουμε ότι μεγάλη βελτίωση εμφανίζουν οι μαθητές στο πρόβλημα αναλόγων ποσών, όπου φαίνεται να είναι ισχυρή η επίδραση της διδακτικής παρέμβασης. Αντίθετα, στα προβλήματα του Vergnaud φαίνεται να υπάρχει μικρή επίδραση που αφορά κυρίως στην επιλογή πρόσθεσης ή αφαίρεσης αντί άλλων πράξεων. Οι μαθητές εξακολουθούν να εμφανίζουν χαμηλά ποσοστά, γεγονός που πιστοποιεί ότι η δυσκολία των συγκεκριμένων προβλημάτων θα πρέπει να αρθεί με άλλου είδους οργανωμένη διδασκαλία.

Στο σύνολο του ερωτηματολογίου, η βελτίωση της Π.Ο. είναι στατιστικά σημαντική στα περισσότερα ερωτήματα, με εξαίρεση αυτά όπου το ποσοστό ήταν ήδη σχετικά υψηλό από την πρώτη κιόλας μέτρηση. Έτσι, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι επαληθεύεται η δεύτερη υπόθεσή μας, κατά την οποία η Π.Ο. βελτιώνεται σημαντικά σε ορισμένες μαθηματικές περιοχές, υπό την επίδραση της διδακτικής παρέμβασης (βλ. §8.5). Εξαίρεση αποτελούν τα προβλήματα προσθετικών δομών, όπου δεν φαίνεται να υπάρχει συνολική επίδραση, αλλά μια μεταβολή που αφορά κυρίως στην επιλογή ως κατάλληλης πράξης μόνο πρόσθεσης ή αφαίρεσης.

Συνολικά λοιπόν μπορούμε να συμπεράνουμε τη μεγάλη επίδραση της διδακτικής παρέμβασης στη βελτίωση της Π.Ο., στις περιοχές που εξετάσαμε.

Παρακάτω παρατίθεται ένας συγκεντρωτικός πίνακας όπου φαίνεται με γκρι χρώμα η στατιστικά σημαντική βελτίωση της Π.Ο. στα διάφορα ερωτήματα του ερωτηματολογίου:

Περιοχή θεμάτων (βλ. σ.161)	Θέμα	Ερώτημα	Ποσοστό επιτ. κατά την 1η μέτρηση	Ποσοστό επιτ. κατά την 4η μέτρηση	p για το binomial test
1η	**Ακριβείς νοεροί υπολογισμοί** 4ο θέμα	3.85·10000	60%	95%	0.008
		0.0467·1000	85%	80%	0.5
		4623·0.01	45%	80%	0.008
		25.4·0.0001	40%	65%	0.063
		1596.76:10000	45%	85%	0.011
		5.37:100	25%	80%	0.001
		67:0.01	20%	65%	0.011
		3.57:0.001	35%	80%	0.002
		600·700	75%	90%	0.188
		90·80000	75%	85%	0.344
		0.02·0.004	30%	70%	0.011
		0.06·0.07	40%	65%	0.063
		4900:70	30%	85%	0.001
		320000:800	30%	90%	0.001
		2.4:0.03	20%	80%	0.001
		0.021:7	10%	70%	0.001
	Εύρεση της τάξης μεγέθους 10ο θέμα	57·83	45%	80%	0,033
		3745·5321	40%	70%	0,035
		289·574	5%	65%	0,001
		17531:423	30%	45%	0,227
		6143:28	30%	60%	0,035
		4,37:235	10%	50%	0,004
		0,035:48,32	45%	50%	0,5
	Εύρεση της τάξης μεγέθους και προσεγγίσεων μεγαλύτερης ακρίβειας 11ο θέμα	62·73	55%	100%	0,002
		4832·876	15%	95%	0,001
		2181·1485	15%	95%	0,001
		67952:317	50%	70%	0,172
		26472:43	25%	45%	0,172
		3,4:512	10%	70%	0,001
		0,26:17,12	30%	50%	0,172
2η	**Πολλαπλασιασμοί και διαιρέσεις** 3ο θέμα	11.42·3.7	45%	75%	0.035
		27,8·0,03	45%	90%	0,002
		1287:75	35%	70%	0,008
		7454:29	20%	50%	0,017
		1082:19	15%	55%	0,004
	Αφαιρέσεις δεκαδικών 8ο θέμα	826-9,64	35%	75%	0,004
		35,5-8,745	35%	70%	0,008
		82,46-7,57	85%	70%	0,188
3η	**Μετατροπή δεκαδικών σε κλάσματα και αντίστροφα** 5ο και 6ο θέμα	0.064	15%	60%	0.006
		2,36	25%	80%	0,002
		9/1000	40%	75%	0,008
		453/10	20%	60%	0,011
		6/8	5%	40%	0,008
		9/15	5%	45%	0,004
4η	**Πράξεις μεταξύ κλασμάτων** 7ο θέμα	13/18+14/24	35%	50%	0.188
		4/15·7/8	60%	95%	0,002
		8/10:7/12	40%	85%	0,004
5η	**Προβλήματα** 1ο , 2ο και 9ο θέμα	1ο Vergnaud	15%	10%	0.5
		2ο Vergnaud	45%	60%	0,253
		αναλόγων ποσών	0%	65%	0,001

10.2 Εξέλιξη της πειραματικής ομάδας κατά τη διάρκεια των τεσσάρων μετρήσεων

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, έχουν πραγματοποιηθεί τέσσερις επιδόσεις του ερωτηματολογίου, προκειμένου να διαφανεί η εξέλιξη της Π.Ο. κατά η διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης, αμέσως μετά το τέλος της και ένα μήνα μετά την αποπεράτωσή της, αφότου είχε παρέλθει η άμεση επίδρασή της.

Θα εξετάσουμε πάλι την επίδοση της Π.Ο. κατά τη διάρκεια των τεσσάρων επιδόσεων και θα εντοπίσουμε σε πιο χρονικό σημείο εμφανίζει τη μεγαλύτερη βελτίωση, στις διάφορες περιοχές που έχουν αναφερθεί.

1. Πράξεις από μνήμης (4ο, 10ο και 11ο θέμα)

α. Πολλαπλασιασμοί και διαιρέσεις με δυνάμεις του 10 και με αριθμούς του τύπου $\nu x10^{\mu}$, όπου $\nu\in N^*$, $1<\nu<100$ και $\mu\in Z$ (Ακριβείς νοεροί υπολογισμοί, 4ο θέμα)

Επίδοση ερωτηματολογίου	3,85·10000	
	1	2
1η επίδοση	8 40%	12 60%
2η επίδοση	2 10%	18 90%
3η επίδοση	1 5%	**19** **95%**
4η επίδοση	1 5%	**19** **95%**

Στον πρώτο πολλαπλασιασμό με θετική δύναμη του 10, το υψηλότερο ποσοστό επιτυχίας επιδεικνύει η Π.Ο. κατά την τρίτη και τέταρτη επίδοση.

Επίδοση ερωτηματολογίου	0,0467·1000	
	1	2
1η επίδοση	3 15%	17 85%
2η επίδοση	1 10%	**19** **95%**
3η επίδοση	3 15%	17 85%
4η επίδοση	4 20%	16 80%

Στο δεύτερο πολλαπλασιασμό, το μεγαλύτερο ποσοστό εμφανίζεται κατά τη δεύτερη επίδοση, ενώ το μικρότερο κατά την τελευταία.

Επίδοση ερωτηματολογίου	4623·0,01	
	1	2
1η επίδοση	11 55%	9 45%
2η επίδοση	3 15%	17 85%
3η επίδοση	1 5%	**19** **95%**
4η επίδοση	4 20%	16 80%

Στον πρώτο πολλαπλασιασμό με αρνητική δύναμη του 10, η μεγαλύτερη σχετική συχνότητα εμφανίζεται στην τρίτη μέτρηση.

Επίδοση ερωτηματολογίου	25,4·0,0001	
	1	2
1η επίδοση	12 60%	8 40%
2η επίδοση	5 25%	15 75%
3η επίδοση	4 20%	**16** **80%**
4η επίδοση	7 35%	13 65%

Σον επόμενο πολλαπλασιασμό με αρνητική δύναμη του 10, κατ' αντιστοιχία με το προηγούμενο ερώτημα, το υψηλότερο ποσοστό παρουσιάζεται στην τρίτη επίδοση.

Επίδοση ερωτηματολογίου	1596,76:10000	
	1	2
1η επίδοση	11 55%	9 45%
2η επίδοση	3 15%	**17** **85%**
3η επίδοση	4 20%	16 80%
4η επίδοση	3 15%	**17** **85%**

Στην πρώτη διαίρεση με θετική δύναμη του 10, τη μεγαλύτερη συχνότητα έχει η Π.Ο. στη δεύτερη και τέταρτη μέτρηση.

Επίδοση ερωτηματολογίου	5,37:100	
	1	2
1η επίδοση	15 75%	5 25%
2η επίδοση	4 20%	16 80%
3η επίδοση	2 10%	**18** **90%**
4η επίδοση	4 20%	16 80%

Στην επόμενη διαίρεση του ίδιου τύπου, το υψηλότερο ποσοστό επιτυχίας παρατηρείται στην τρίτη επίδοση.

Επίδοση ερωτηματολογίου	67:0,01	
	1	2
1η επίδοση	16 80%	4 20%
2η επίδοση	5 25%	**15** **75%**
3η επίδοση	6 30%	12 60%
4η επίδοση	7 35%	13 65%

Στην πρώτη διαίρεση με αρνητική δύναμη του 10, το μεγαλύτερο ποσοστό παρατηρείται κατά τη δεύτερη μέτρηση.

Επίδοση ερωτηματολογίου	3,57:0,001	
	1	2
1η επίδοση	13 65%	7 35%
2η επίδοση	4 20%	**16** **80%**
3η επίδοση	5 25%	15 75%
4η επίδοση	4 20%	**16** **80%**

Στην επόμενη διαίρεση με αρνητική δύναμη του 10, το μεγαλύτερο ποσοστό επιτυχίας εντοπίζεται στη δεύτερη και τρίτη μέτρηση.

Επίδοση ερωτηματολογίου	600·700	
	1	2
1η επίδοση	5 25%	15 75%
2η επίδοση	2 10%	18 90%
3η επίδοση	0 0%	**20 100%**
4η επίδοση	2 10%	18 90%

Στον πρώτο πολλαπλασιασμό ακεραίων στην τρίτη μέτρηση, η επιτυχία είναι 100%.

Επίδοση ερωτηματολογίου	90·80000	
	1	2
1η επίδοση	5 25%	15 75%
2η επίδοση	1 5%	19 95%
3η επίδοση	0 0%	**20 100%**
4η επίδοση	3 15%	17 85%

Το ίδιο ισχύει και για τον επόμενο πολλαπλασιασμό ακεραίων.

Επίδοση ερωτηματολογίου	0,02·0,004	
	1	2
1η επίδοση	14 70%	6 30%
2η επίδοση	7 35%	13 65%
3η επίδοση	8 40%	12 60%
4η επίδοση	6 30%	**14 70%**

Στον πρώτο πολλαπλασιασμό δεκαδικών, παρατηρούμε τη μεγαλύτερη συχνότητα στην τελευταία μέτρηση.

Επίδοση ερωτηματολογίου	0,06·0,07	
	1	2
1η επίδοση	12 60%	8 40%
2η επίδοση	6 30%	**14** **70%**
3η επίδοση	6 30%	**14** **70%**
4η επίδοση	7 35%	13 65%

Στον επόμενο πολλαπλασιασμό δεκαδικών, η μεγαλύτερη συχνότητα παρατηρείται στη δεύτερη και τρίτη μέτρηση.

Επίδοση ερωτηματολογίου	4900:70	
	1	2
1η επίδοση	14 70%	6 30%
2η επίδοση	3 15%	17 85%
3η επίδοση	2 10%	**18** **90%**
4η επίδοση	3 15%	17 85%

Στην πρώτη διαίρεση ακεραίων, το υψηλότερο ποσοστό εμφανίζεται στην τρίτη μέτρηση.

Επίδοση ερωτηματολογίου	320000:800	
	1	2
1η επίδοση	14 70%	6 30%
2η επίδοση	3 15%	17 85%
3η επίδοση	2 10%	**18** **90%**
4η επίδοση	2 10%	**18** **90%**

Στην επόμενη διαίρεση, η Π.Ο. παρουσιάζει την υψηλότερη συχνότητα στην τρίτη και τέταρτη μέτρηση.

Επίδοση ερωτηματολογίου	2,4:0,03	
	1	2
1η επίδοση	16 80%	4 20%
2η επίδοση	7 35%	13 65%
3η επίδοση	7 35%	13 65%
4η επίδοση	4 20%	**16** **80%**

Στη διαίρεση δεκαδικού με ακέραιο, η υψηλότερη συχνότητα παρατηρείται στην τελευταία επίδοση.

Επίδοση ερωτηματολογίου	0,021:7	
	1	2
1η επίδοση	18 90%	2 10%
2η επίδοση	4 20%	**16** **80%**
3η επίδοση	6 30%	14 70%
4η επίδοση	6 30%	14 70%

Στην τελευταία διαίρεση, η υψηλότερη συχνότητα εμφανίζεται στη δεύτερη επίδοση.

Γενικότερα στην περιοχή των ακριβών νοερών υπολογισμών, διαπιστώνουμε μια μεγάλη βελτίωση μεταξύ δεύτερης και τρίτης επίδοσης. Αυτό είναι λογικό, καθώς στη δεύτερη μέτρηση είχε ολοκληρωθεί η διδασκαλία πράξεων από μνήμης. Τα υψηλότερα ποσοστά κυμαίνονται μεταξύ δεύτερης, τρίτης και τέταρτης επίδοσης, χωρίς ωστόσο τα ποσοστά των τριών τελευταίων επιδόσεων να παρουσιάζουν μεγάλες αποκλίσεις. Οι διαφορές είναι μεταξύ 5 και 10%. Αυτό υποδηλώνει μια σταθερότητα στη συγκεκριμένη γνώση. Εξάλλου, δεν θα πρέπει να αγνοήσουμε και το γεγονός ότι οι υπολογισμοί από μνήμης αυτού του τύπου χρησιμοποιήθηκαν ως προαπαιτούμενες γνώσεις για τις επόμενες φάσεις, με αποτέλεσμα οι μαθητές να τις ανακαλούν συχνά.

β. Εύρεση της τάξης μεγέθους και προσεγγίσεων μεγαλύτερης ακρίβειας (10ο και 11ο θέμα)

10ο θέμα

Επίδοση ερωτηματολογίου	57·83	
	1	2
1η επίδοση	11 55%	9 45%
2η επίδοση	3 15%	**17** **85%**
3η επίδοση	3 15%	**17** **85%**
4η επίδοση	4 20%	16 80%

Στον πρώτο πολλαπλασιασμό, το μεγαλύτερο ποσοστό εντοπίζεται στη δεύτερη και τρίτη μέτρηση.

Επίδοση ερωτηματολογίου	3745·5321	
	1	2
1η επίδοση	12 60%	8 40%
2η επίδοση	6 30%	14 70%
3η επίδοση	5 15%	**15** **75%**
4η επίδοση	6 30%	14 70%

Στο δεύτερο πολλαπλασιασμό, η Π.Ο. επιτυγχάνει με μεγαλύτερο ποσοστό στην τρίτη επίδοση του ερωτηματολογίου.

Επίδοση ερωτηματολογίου	289·574	
	1	2
1η επίδοση	19 5%	1 5%
2η επίδοση	6 30%	14 70%
3η επίδοση	3 15%	**17** **85%**
4η επίδοση	7 35%	13 65%

Το ίδιο ισχύει και στον επόμενο πολλαπλασιασμό, όπου διαπιστώνουμε μια πτώση 20 ποσοστιαίων μονάδων στην τέταρτη επίδοση.

Και στους τρεις πολλαπλασιασμούς, παρατηρούμε ότι το υψηλότερο ποσοστό εντοπίζεται στην τρίτη επίδοση, αμέσως μετά την ολοκλήρωση της διδακτικής παρέμβασης. Στη δεύτερη επίδοση οι μαθητές είχαν διδαχτεί την εύρεση της τάξης μεγέθους (Γ΄ φάση) αλλά στην τρίτη επίδοση είχαν διδαχτεί και την εύρεση προσεγγίσεων μεγαλύτερης ακρίβειας, με συνέπεια οι μαθητές να έχουν διπλή επιλογή ως προς τον τρόπο εύρεσης της τάξης μεγέθους.

Επίσης και στους τρεις πολλαπλασιασμούς το ποσοστό πέφτει στην τέταρτη επίδοση, στους δύο πρώτους 5% και στον τρίτο 20%. Η μεγάλη πτώση στον τρίτο πολλαπλασιασμό ερμηνεύεται με βάση τη φύση των αριθμητικών δεδομένων: η προς τα κάτω στρογγυλοποίηση (αφού απλά ψάχνουν την τάξη μεγέθους) δίνει 200·500, οπότε οι μαθητές υπολογίζουν το γινόμενο των πρώτων ψηφίων που είναι 10 και συμπληρώνουν με τέσσερα μηδενικά. Όμως είναι πολύ πιθανό να παραλείψουν το μηδενικό του 10 βρίσκοντας την τάξη μεγέθους κατά ένα μικρότερη.

Επίδοση ερωτηματολογίου	17531:423	
	1	2
1η επίδοση	14 70%	6 30%
2η επίδοση	9 45%	11 55%
3η επίδοση	7 35%	**13** **65%**
4η επίδοση	11 55%	9 45%

Στην πρώτη διαίρεση ακεραίων η υψηλότερη συχνότητα παρατηρείται, κατ' αναλογία με τα προηγούμενα, στην τρίτη επίδοση, ενώ και πάλι στην τελευταία μέτρηση έχουμε μια πτώση 20 ποσοστιαίων μονάδων.

Επίδοση ερωτηματολογίου	6143:28	
	1	2
1η επίδοση	14 70%	6 30%
2η επίδοση	7 35%	13 65%
3η επίδοση	6 30%	**14** **70%**
4η επίδοση	8 40%	12 60%

Το ίδιο ισχύει και στην επόμενη διαίρεση. Στην τέταρτη επίδοση υπάρχει μείωση του ποσοστού κατά 10 ποσοστιαίες μονάδες.

Το γεγονός ότι η μείωση είναι μικρότερη στη δεύτερη περίπτωση οφείλεται στο ότι το πρώτο ψηφίο του διαιρέτη είναι μικρότερο από το πρώτο ψηφίο του διαιρετέου (βλ. §5.3.2.1), με συνέπεια να μπορούν οι μαθητές να συγκρατήσουν ευκολότερα τον κανόνα που αφορά σε μια εύκολη διαίρεση.

Επίδοση ερωτηματολογίου	4,37:235	
	1	2
1η επίδοση	18 90%	2 10%
2η επίδοση	3 15%	**17** **85%**
3η επίδοση	6 30%	14 70%
4η επίδοση	10 50%	10 50%

Στην επόμενη διαίρεση, δεκαδικού με ακέραιο, το μεγαλύτερο ποσοστό επιτυχίας παρατηρείται κατά τη δεύτερη επίδοση, ενώ στην τέταρτη επίδοση έχουμε μια πτώση 20%. Ενδεχομένως, καθώς η δεύτερη επίδοση του ερωτηματολογίου πραγματοποιήθηκε αμέσως μετά τη διδασκαλία της εύρεσης της τάξης μεγέθους, οι μαθητές να μπορούσαν με μεγαλύτερη ευχέρεια να εφαρμόσουν τον κανόνα, παρότι να αναδιατυπώσουν τα αριθμητικά δεδομένα και να βρουν στη συνέχεια την τάξη μεγέθους (αν παραβλέψουμε τα δεκαδικά ψηφία του διαιρετέου έχουμε 1-3= -2 δηλαδή είναι της τάξης των εκατοστών - βλ. §5.3.2.1).

Επίδοση ερωτηματολογίου	0,035:48,32	
	1	2
1η επίδοση	11 55%	9 45%
2η επίδοση	11 55%	9 45%
3η επίδοση	10 50%	**10** **50%**
4η επίδοση	10 50%	**10** **50%**

Στην επόμενη διαίρεση, η υψηλότερη συχνότητα παρατηρείται στην τρίτη και τέταρτη επίδοση. Διαπιστώνουμε ότι είναι η μοναδική πράξη όπου το ποσοστό επιτυχίας δεν ξεπερνά σε καμία μέτρηση το 50%. Ωστόσο αυτό το 50% διατηρείται σταθερό στις δύο τελευταίες μετρήσεις.

Γενικότερα στα ερωτήματα του δέκατου θέματος, διαπιστώνουμε ότι τα μεγαλύτερα ποσοστά εμφανίζονται στην τρίτη μέτρηση, μόλις δηλαδή είχε ολοκληρωθεί η διδακτική παρέμβαση. Αυτό είναι λογικό, καθότι σ' αυτό το χρονικό σημείο οι μαθητές γνώριζαν δύο τρόπους για την εύρεση της τάξης μεγέθους και είχαν δυνατότητα επιλογής. Ωστόσο η διπλή επιλογή λειτούργησε αρνητικά στην περίπτωση της διαίρεσης 4,37:235 καθώς κάποιοι μαθητές είχαν ξεχάσει τον κανόνα της εύρεση της τάξης μεγέθους που είχαν διδαχτεί αρχικά και ο οποίος μάλλον τους βοηθούσε σ' αυτή την περίπτωση.

Επίσης, παρατηρούμε μια σχετικά μεγάλη πτώση στην τελευταία μέτρηση, μεγαλύτερη σε σχέση με τα υπόλοιπα θέματα του ερωτηματολογίου. Αυτή η πτώση οφείλεται στο ότι κατά τη δεύτερη μέτρηση μόλις είχε ολοκληρωθεί η διδασκαλία του πρώτου κανόνα εύρεσης της τάξης μεγέθους και κατά την τρίτη μέτρηση μόλις πριν λίγες μέρες είχε ολοκληρωθεί η εύρεση προσεγγίσεων μεγαλύτερης ακρίβειας. Κατά συνέπεια σ' αυτά τα χρονικά σημεία οι μαθητές είχαν πρόσφατες στη μνήμη τους τις γνώσεις που αφορούσαν στη συγκεκριμένη περιοχή. Οι υπόλοιπες περιοχές αποτελούσαν αντικείμενο επεξεργασίας σχεδόν καθ' όλη τη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης, καθώς κάποιες απ' αυτές ήταν προαπαιτούμενες γνώσεις και κατά συνέπεια οι μαθητές τις ανακαλούσαν διαρκώς. Μάλιστα η πτώση είναι μεγαλύτερη στα ερωτήματα που ενέχουν τη μεγαλύτερη δυσκολία, όπως έχει ήδη αναφερθεί.

11ο θέμα

Επίδοση ερωτηματολογίου	62·73	
	1	2
1η επίδοση	9 45%	11 55%
2η επίδοση	3 15%	17 85%
3η επίδοση	1 5%	19 95%
4η επίδοση	0 0%	**20** **100%**

Στον πρώτο πολλαπλασιασμό, το υψηλότερο ποσοστό παρατηρείται στην τελευταία μέτρηση.

Επίδοση ερωτηματολογίου	4832·876	
	1	2
1η επίδοση	17 85%	3 15%
2η επίδοση	4 20%	16 80%
3η επίδοση	1 5%	**19** **95%**
4η επίδοση	1 5%	**19** **95%**

Στο δεύτερο πολλαπλασιασμό, το μεγαλύτερο ποσοστό επιτυχίας εμφανίζεται στις δύο τελευταίες μετρήσεις.

Επίδοση ερωτηματολογίου	2181·1485	
	1	2
1η επίδοση	17 85%	3 15%
2η επίδοση	5 25%	15 75%
3η επίδοση	1 5%	**19** **95%**
4η επίδοση	1 5%	**19** **95%**

Το ίδιο ισχύει και για τον επόμενο πολλαπλασιασμό.

Επίδοση ερωτηματολογίου	67952:317	
	1	2
1η επίδοση	10 50%	10 50%
2η επίδοση	9 45%	11 55%
3η επίδοση	1 5%	**19** **95%**
4η επίδοση	6 30%	14 70%

Στην πρώτη διαίρεση ακεραίων, τη μεγαλύτερη συχνότητα εμφανίζει η Π.Ο. στην τρίτη επίδοση. Αξιοσημείωτο είναι ότι στην τέταρτη επίδοση το ποσοστό επιτυχίας πέφτει κατά 25 ποσοστιαίες μονάδες, φαινόμενο ανάλογο με αυτό που συμβαίνει στις διαιρέσεις του δέκατου θέματος.

Επίδοση ερωτηματολογίου	26472:43	
	1	2
1η επίδοση	15 75%	5 25%
2η επίδοση	13 65%	7 35%
3η επίδοση	2 10%	**18** **90%**
4η επίδοση	11 55%	9 45%

Στην επόμενη διαίρεση, το μεγαλύτερο ποσοστό επιτυχίας παρουσιάζεται στην τρίτη επίδοση, ενώ στην τέταρτη επίδοση το ποσοστό υποδιπλασιάζεται.

Και στις δύο διαιρέσεις ακολουθείται ανάλογη κάμψη με αυτή που συμβαίνει στις ισοδύναμές τους διαιρέσεις στο δέκατο θέμα (μεγαλύτερη κάμψη παρουσιάζει η διαίρεση 17531:423 όπου το πρώτο ψηφίο του διαιρέτη είναι μεγαλύτερο από το πρώτο ψηφίο του διαιρετέου). Ενώ στους πολλαπλασιασμούς το ποσοστό διατηρείται περίπου σταθερό και σε μια περίπτωση ενισχύεται, στις διαιρέσεις το ποσοστό επιτυχίας πέφτει μετά την παρέλευση ενός μήνα από την περάτωση της διδακτικής παρέμβασης.

Επίδοση ερωτηματολογίου	3,4:512	
	1	2
1η επίδοση	18 90%	2 10%
2η επίδοση	6 30%	**14** **70%**
3η επίδοση	6 30%	**14** **70%**
4η επίδοση	6 30%	**14** **70%**

Στην επόμενη διαίρεση, το ποσοστό επιτυχίας παραμένει σταθερό κατά τη δεύτερη, τρίτη και τέταρτη μέτρηση. Βέβαια, ως ένα βαθμό μπορεί να ευθύνεται και η φύση των αριθμητικών δεδομένων καθώς η αναδιατύπωσή τους ευνοεί τον ευχερή νοερό υπολογισμό τους (3:500=3·2:1000=0,006).

Επίδοση ερωτηματολογίου	0,26:17,12	
	1	2
1η επίδοση	14 70%	6 30%
2η επίδοση	7 35%	**13** **65%**
3η επίδοση	6 30%	14 70%
4η επίδοση	10 50%	10 50%

Στην τελευταία διαίρεση, κατ' αντιστοιχία με τις πρώτες δύο διαιρέσεις, η μεγαλύτερη συχνότητα παρατηρείται στην τρίτη μέτρηση, ενώ κατά την τέταρτη μέτρηση το ποσοστό επιτυχίας μειώνεται κατά 20%.

Σε όλα τα ερωτήματα του δέκατου και ενδέκατου θέματος παρατηρούμε την Π.Ο. να βρίσκεται στο ζενίθ της επιτυχίας κατά την τρίτη επίδοση, αφότου δηλαδή είχε ολοκληρωθεί η διδακτική παρέμβαση, ενώ στην τέταρτη επίδοση παρουσιάζει μια κάμψη που είναι μεγαλύτερη στις διαιρέσεις. Η κάμψη αυτή οφείλεται στο ότι έχει πάψει να υφίσταται η άμεση επίδραση της διδακτικής παρέμβασης και οι μαθητές για ένα μήνα δεν διδάσκονται ούτε επαναλαμβάνονται σ' αυτούς θέματα που σχετίζονται με το περιεχόμενο του διδακτικού σχήματος. Ενδεχομένως η συχνή επανάληψη αυτών των θεμάτων να διατηρούσε αναλλοίωτο το ποσοστό επιτυχίας.

2. Γραπτή εκτέλεση πράξεων (3ο και 8ο θέμα)

α. Πολλαπλασιασμοί και διαιρέσεις (3ο θέμα)

Επίδοση ερωτηματολογίου	11,42·3,7	
	1	2
1η επίδοση	11 55%	9 45%
2η επίδοση	5 25%	**15** **75%**
3η επίδοση	6 30%	14 70%
4η επίδοση	5 25%	**15** **75%**

Στον πρώτο πολλαπλασιασμό δεκαδικών, το υψηλότερο ποσοστό το επιτυγχάνει η Π.Ο. κατά τη δεύτερη και τρίτη μέτρηση, ενώ το μικρότερο κατά την πρώτη.

Επίδοση ερωτηματολογίου	27,8·0,03	
	1	2
1η επίδοση	11 55%	9 45%
2η επίδοση	6 30%	14 70%
3η επίδοση	5 25%	15 75%
4η επίδοση	2 10%	**18** **90%**

Στο δεύτερο πολλαπλασιασμό, το υψηλότερο ποσοστό εμφανίζεται στην τελευταία μέτρηση ενώ το μικρότερο στην πρώτη.

Και στους δύο πολλαπλασιασμούς, η βελτίωση εμφανίζεται ήδη μετά την ολοκλήρωση της Α΄ φάσης της διδακτικής παρέμβασης, τους πολλαπλασιασμούς και διαιρέσεις με δυνάμεις του 10 ή με αριθμούς που έχουν το ψηφίο της μεγαλύτερης τάξης τους διαφορετικό από το μηδέν. Όμως το μεγαλύτερο ποσοστό εμφανίζεται κατά την τέταρτη μέτρηση.

Επίδοση ερωτηματολογίου	1287:75	
	1	2
1η επίδοση	13 65%	7 35%
2η επίδοση	9 45%	11 55%
3η επίδοση	4 20%	**16** **80%**
4η επίδοση	6 30%	14 70%

Στην πρώτη διαίρεση, το υψηλότερο ποσοστό επιτυχίας παρουσιάζεται στην τρίτη επίδοση, ενώ στην τέταρτη πέφτει κατά 10 ποσοστιαίες μονάδες.

Επίδοση ερωτηματολογίου	7454:29	
	1	2
1η επίδοση	16 80%	4 20%
2η επίδοση	9 45%	**11** **55%**
3η επίδοση	10 50%	10 50%
4η επίδοση	10 50%	10 50%

Στην επόμενη διαίρεση, έχουμε τη μεγαλύτερη επιτυχία στη δεύτερη επίδοση, ενώ στις επόμενες δύο μετρήσεις μειώνεται κατά 5 ποσοστιαίες μονάδες.

Επίδοση ερωτηματολογίου	1082:19	
	1	2
1η επίδοση	17 85%	3 15%
2η επίδοση	14 70%	6 30%
3η επίδοση	11 55%	9 45%
4η επίδοση	9 45%	**11** **55%**

Στην τελευταία διαίρεση, σε μεγαλύτερο ποσοστό επιτυγχάνει η Π.Ο. κατά την τελευταία μέτρηση. Εξάλλου, παρατηρούμε μια μεγάλη αύξηση στην τρίτη επίδοση. Αυτό συμβαίνει επειδή σ' αυτό το χρονικό σημείο οι μαθητές διδάχτηκαν εκτίμησης με στρογγυλοποίηση, με αποτέλεσμα να μπορέσουν να εκτιμήσουν πόσο περίπου είναι το πηλίκο και να εκτελέσουν συντομότερα τη διαίρεση (βλ. σχετικά §3.1, 3ο θέμα, ε).

Γενικότερα στις διαιρέσεις και στους πολλαπλασιασμούς, παρατηρείται μια ανοδική πορεία με τα υψηλότερα ποσοστά να εμφανίζονται στην τρίτη και τέταρτη επίδοση και με τη μεγαλύτερη βελτίωση να υφίσταται μεταξύ πρώτης και δεύτερης επίδοσης, με εξαίρεση την τρίτη διαίρεση, όπου παρατηρείται εξίσου μεγάλη βελτίωση μεταξύ δεύτερης και τρίτης επίδοσης.

β. Αφαιρέσεις δεκαδικών αριθμών

Επίδοση ερωτηματολογίου	826-9,64	
	1	2
1η επίδοση	13 65%	7 35%
2η επίδοση	6 30%	14 70%
3η επίδοση	6 30%	14 70%
4η επίδοση	5 25%	**15** **75%**

Στην πρώτη αφαίρεση, παρατηρούμε το μεγαλύτερο ποσοστό επιτυχίας στην τελευταία μέτρηση.

Επίδοση ερωτηματολογίου	35,5-8,745	
	1	2
1η επίδοση	13 65%	7 35%
2η επίδοση	5 25%	**15** **75%**
3η επίδοση	5 25%	**15** **75%**
4η επίδοση	6 30%	14 70%

Στη δεύτερη αφαίρεση, το μεγαλύτερο ποσοστό εντοπίζεται στη δεύτερη και τρίτη μέτρηση.

Επίδοση ερωτηματολογίου	82,46-7,57	
	1	2
1η επίδοση	3 15%	17 85%
2η επίδοση	0 0%	**20** **100%**
3η επίδοση	6 30%	14 70%
4η επίδοση	6 30%	14 70%

Στην τελευταία αφαίρεση, η Π.Ο. εμφανίζει την υψηλότερη συχνότητα στη δεύτερη μέτρηση που μάλιστα φτάνει το 100%. Εδώ παρατηρούμε μεγάλες αποκλίσεις μεταξύ των ποσοστών στις διάφορες μετρήσεις, που ωστόσο δεν προέρχονται από λάθη σε ό,τι αφορά την εκτέλεση του αλγόριθμου, αλλά από λάθη σε μονοψήφιες πράξεις (βλ. σχετικά §10.3).

Γενικότερα στις αφαιρέσεις δεκαδικών, η μεγαλύτερη βελτίωση παρατηρείται στη δεύτερη επίδοση, καθώς είχε ήδη ολοκληρωθεί η διδασκαλία των ακριβών νοερών υπολογισμών (Β΄ φάση).

3. Μετατροπή δεκαδικών αριθμών σε κλάσματα και κλασμάτων σε δεκαδικούς αριθμούς (5ο και 6ο θέμα)

Επίδοση ερωτηματολογίου	Μετατροπή του 0,064	
	1	2
1η επίδοση	17 85%	3 15%
2η επίδοση	7 35%	**13** **65%**
3η επίδοση	7 35%	**13** **65%**
4η επίδοση	8 40%	12 60%

Στην πρώτη μετατροπή δεκαδικού αριθμού σε κλάσμα, η μεγαλύτερη επιτυχία της Π.Ο. εντοπίζεται στη δεύτερη και τρίτη επίδοση.

Επίδοση ερωτηματολογίου	Μετατροπή του 2,36	
	1	2
1η επίδοση	15 75%	5 25%
2η επίδοση	7 35%	13 65%
3η επίδοση	2 10%	**18** **90%**
4η επίδοση	4 20%	16 80%

Στη δεύτερη μετατροπή του ίδιου τύπου, το μεγαλύτερο ποσοστό επιτυχίας παρατηρείται στην τρίτη επίδοση. Εξάλλου, παρατηρούμε μια μεγάλη βελτίωση μεταξύ δεύτερης και τρίτης επίδοσης, κάτι που δε συμβαίνει στην προηγούμενη μετατροπή. Ίσως στη μετατροπή του 0,064 σε δεκαδικό κλάσμα οι μαθητές εφαρμόζουν κάποιο εσφαλμένο κανόνα σύμφωνα με τον οποίο ο παρονομαστής έχει τόσα δεκαδικά ψηφία όσα και τα μη μηδενικά ψηφία του δεκαδικού αριθμού. Ενδεχομένως, η εφαρμογή ενός τέτοιου κανόνα παραγκωνίζει την περαιτέρω βελτίωση των μαθητών στο προηγούμενο ερώτημα.

Επίδοση ερωτηματολογίου	Μετατροπή του 9/10000	
	1	2
1η επίδοση	12 60%	8 40%
2η επίδοση	1 5%	**19** **95%**
3η επίδοση	6 30%	14 70%
4η επίδοση	5 25%	15 75%

Στην πρώτη μετατροπή δεκαδικού κλάσματος σε δεκαδικό αριθμό, η Π.Ο. εμφανίζει τη μεγαλύτερη συχνότητα στη δεύτερη επίδοση του ερωτηματολογίου.

Επίδοση ερωτηματολογίου	Μετατροπή του 453/10	
	1	2
1η επίδοση	16 80%	4 20%
2η επίδοση	7 35%	**13** **65%**
3η επίδοση	8 40%	12 60%
4η επίδοση	8 40%	12 60%

Το ίδιο ισχύει και για την επόμενη μετατροπή του ίδιου τύπου.

Σε όλες αυτές περιπτώσεις, το υψηλότερο ποσοστό παρουσιάζεται στη δεύτερη επίδοση, μετά την ολοκλήρωση και της Γ΄ φάσης και στην τρίτη επίδοση, μετά την ολοκλήρωση της διδακτικής παρέμβασης. Σ' αυτά το χρονικά σημεία το διάστημα που είχε παρέλθει από την ολοκλήρωση της Α΄ φάσης ήταν σχετικά σύντομο. Αυτό έχει σημασία, καθώς κατά τη διάρκεια της Α΄ φάσης οι μαθητές διδάχτηκαν την αλλαγή πεδίου έκφρασης και επεξεργασίας και κατά συνέπεια ήταν επόμενο να έχουν τη μεγαλύτερη επιτυχία σε μετατροπές αυτού του τύπου.

Επίδοση ερωτηματολογίου	Μετατροπή του 6/8	
	1	2
1η επίδοση	19 95%	1 5%
2η επίδοση	11 55%	**9** **45%**
3η επίδοση	12 60%	8 40%
4η επίδοση	12 60%	8 40%

Στην πρώτη μετατροπή μη δεκαδικού κλάσματος σε δεκαδικό αριθμό, το υψηλότερο ποσοστό παρατηρείται στη δεύτερη επίδοση.

Επίδοση ερωτηματολογίου	Μετατροπή του 9/15	
	1	2
1η επίδοση	19 95%	1 5%
2η επίδοση	9 45%	**11** **55%**
3η επίδοση	12 40%	8 40%
4η επίδοση	11 55%	9 45%

Το ίδιο ισχύει και για την επόμενη μετατροπή του ίδιου τύπου. Πρόκειται για σχετικά δύσκολες μετατροπές, και είναι φυσικό η μεγαλύτερη συχνότητα να παρατηρείται αμέσως μετά τη διδασκαλία της αλλαγής πεδίου έκφρασης και επεξεργασίας.

Γενικότερα πάντως, δεν παρατηρούνται μεγάλες αποκλίσεις μεταξύ των διαφορετικών επιδόσεων, πράγμα που σημαίνει ότι ένα πολύ μικρό ποσοστό (5-10%) δε διατηρεί σταθερή τη γνώση του, ενώ η μεγάλη πλειοψηφία των μαθητών εμφανίζει σταθερότητα σε ό,τι αφορά τις γνώσεις στην περιοχή αυτή.

4. Πράξεις κλασμάτων (7ο θέμα)

Επίδοση ερωτηματολογίου	13/18+14/24	
	1	2
1η επίδοση	13 65%	7 35%
2η επίδοση	5 25%	**15** **75%**
3η επίδοση	6 30%	14 70%
4η επίδοση	10 50%	10 50%

Στην πρόσθεση κλασμάτων, το μεγαλύτερο ποσοστό επιτυχίας παρατηρείται στη δεύτερη επίδοση, ενώ από εκεί και μετά διαπιστώνουμε μια φθίνουσα πορεία της Π.Ο. Δηλαδή, μετά τη διδασκαλία της αλλαγής πεδίου έκφρασης και επεξεργασίας οι μαθητές παρουσιάζουν σημαντική βελτίωση, η οποία όμως μετά την παρέλευση ενός μήνα από τη διδακτική παρέμβασης φθίνει. Αυτό είναι λογικό με την έννοια ότι η αλλαγή πεδίου έκφρασης και επεξεργασίας αφορούσε σε πολλαπλασιασμούς και διαιρέσεις και η επίδραση που είχε στην πρόσθεση ήταν έμμεση κατά κάποιο τρόπο. Πάντως το ποσοστό επιτυχίας δείχνει να σταθεροποιείται στο 50%, ενώ στις παρακάτω πράξεις είναι αρκετά υψηλότερο.

Επίδοση ερωτηματολογίου	4/15·7/8	
	1	2
1η επίδοση	8 40%	12 60%
2η επίδοση	3 15%	17 85%
3η επίδοση	0 0%	**20** **100%**
4η επίδοση	1 5%	19 95%

Στον πολλαπλασιασμό κλασμάτων, το μεγαλύτερο ποσοστό επιτυχίας εμφανίζει η Π.Ο. στην τρίτη επίδοση, που μάλιστα φτάνει το 100%.

Επίδοση ερωτηματολογίου	8/10:7/12	
	1	2
1η επίδοση	12 60%	8 40%
2η επίδοση	6 30%	14 70%
3η επίδοση	6 30%	14 70%
4η επίδοση	3 15%	**17** **85%**

Στη διαίρεση κλασμάτων, η μεγαλύτερη συχνότητα εμφανίζεται στην τελευταία μέτρηση και μάλιστα είναι κατά 15 ποσοστιαίες μονάδες υψηλότερη από τη δεύτερη και τρίτη μέτρηση.

Στον πολλαπλασιασμό και στη διαίρεση, είναι εμφανής η επίδραση της διδακτικής παρέμβασης. Ωστόσο, παρατηρούμε ότι η διαφορά μεταξύ των ποσοστών των δύο πράξεων μικραίνει στην τελευταία μέτρηση, όπου πλέον οι μαθητές αρχίζουν και σταθεροποιούν τη συμπεριφορά τους και αρχίζουν να αντιμετωπίζουν τις δύο πράξεις κάτω από ενιαία λογική.

Σε όλες τις πράξεις κλασμάτων που συμπεριλαμβάνονται στο ερωτηματολόγιο, η μεγαλύτερη βελτίωση, όπως είναι φυσικό, παρατηρείται στη δεύτερη επίδοση, οπότε άρχισε να υφίσταται η επίδραση της διδακτικής παρέμβασης.

5. Προβλήματα (1ο , 2ο και 9ο θέμα)

Επίδοση ερωτηματολογίου	1ο πρόβλημα Vergnaud	
	1	2
1η επίδοση	17 85%	3 15%
2η επίδοση	16 80%	**4** **20%**
3η επίδοση	16 80%	**4** **20%**
4η επίδοση	18 90%	2 10%

Στο πρώτο πρόβλημα προσθετικών δομών, παρατηρούμε ότι το μεγαλύτερο ποσοστό εμφανίζει η Π.Ο. στη δεύτερη και τρίτη επίδοση (20%), ενώ το μικρότερο ποσοστό κατά την τέταρτη επίδοση (10%).

Επίδοση ερωτηματολογίου	2ο πρόβλημα Vergnaud	
	1	2
1η επίδοση	11 55%	9 45%
2η επίδοση	12 60%	8 40%
3η επίδοση	14 70%	6 30%
4η επίδοση	8 40%	**12** **60%**

Στο δεύτερο πρόβλημα προσθετικών δομών, το μεγαλύτερο ποσοστό επιτυχίας παρουσιάζει η Π.Ο. κατά την τέταρτη μέτρηση, ενώ το μικρότερο κατά την τρίτη μέτρηση.

Κρίνοντας γενικότερα τη διακύμανση της επιτυχίας της Π.Ο. κατά τις διάφορες επιδόσεις του ερωτηματολογίου μπορούμε να διαπιστώσουμε μια αστάθεια στο ποσοστό επιτυχίας, γεγονός που υποδηλώνει ότι δεν υπάρχει ουσιαστική επίδραση της διδακτικής παρέμβασης σε προβλήματα σύνθεσης δύο μετασχηματισμών, όπου είναι γνωστή η σύνθεση και ζητείται ο ένας μετασχηματισμός.

Επίδοση ερωτηματολογίου	πρόβλημα αναλόγων ποσών	
	1	2
1η επίδοση	20 100%	0 0%
2η επίδοση	9 45%	11 55%
3η επίδοση	9 45%	11 55%
4η επίδοση	7 35%	**13** **65%**

Στο πρόβλημα αναλόγων ποσών παρατηρούμε ότι το μεγαλύτερο ποσοστό επιτυχίας της Π.Ο. εμφανίζεται στην τέταρτη επίδοση, ενώ κατά την πρώτη επίδοση κανείς μαθητής δεν κατάφερε να προβεί στην επίλυσή του. Μάλιστα, είναι αξιοσημείωτο ότι ήδη πριν την πραγματοποίηση της τρίτης επίδοσης είχε ολοκληρωθεί η διδασκαλία των αναλόγων ποσών και κατά συνέπεια κατά την τέταρτη μέτρηση είχε παρέλθει αρκετό χρονικό διάστημα, που σημαίνει ότι η γνώση αυτή όχι μόνο παρέμεινε σταθερή, αλλά ενδυναμώθηκε.

Εξετάζοντας συνολικά το ερωτηματολόγιο διαπιστώνουμε ότι η βελτίωση άρχισε ήδη να υφίσταται κατά τη δεύτερη επίδοση, μετά δηλαδή την ολοκλήρωση της Γ΄ φάσης. Στις επόμενες μετρήσεις το ποσοστό παρουσιάζει μικρές αυξομειώσεις. Ιδιαίτερα σημαντικό είναι ότι στην τελευταία μέτρηση το ποσοστό επιτυχίας διατηρείται περίπου σταθερό στα περισσότερα ερωτήματα (οι αυξομειώσεις είναι πολύ μικρές). Εξάλλου, η διαφορά μεταξύ τρίτης και τέταρτης επίδοσης για την Π.Ο., δεν είναι στατιστικά σημαντική, σύμφωνα με το binomial test -για μονόπλευρο έλεγχο (βλ. πίνακα σ. 225). Αυτό σημαίνει ότι και μετά την παρέλευση της άμεσης επίδρασης της διδακτικής παρέμβασης οι μαθητές διατηρούν ως ένα βαθμό σταθερή τη γνώση που αποκόμισαν, γεγονός που επαληθεύει την τρίτη υπόθεση (βλ. §8.5). Εξαίρεση αποτελούν οι διαιρέσεις του δέκατου και ενδέκατου θέματος, όπου το ποσοστό επιτυχίας μειώνεται κατά την τέταρτη επίδοση σε σχέση με την τρίτη, χωρίς ωστόσο η διαφορά να είναι στατιστικά σημαντική, παρά μόνο σε μία διαίρεση. Οι μαθητές, όπως φαίνεται, έχουν δυσκολία στην εκτίμηση του αποτελέσματος των διαιρέσεων. Ίσως η συχνή επανάληψή τους, όπως συνέβη με άλλες περιοχές του ερωτηματολογίου να μπορούσε να συμβάλει στη συγκράτηση της συγκεκριμένης γνώσης.

Παρακάτω παρατίθεται συγκεντρωτικός πίνακας, όπου εμφανίζεται το ποσοστό επιτυχίας της Π.Ο. στα διάφορα ερωτήματα του ερωτηματολογίου, κατά τη διάρκεια των τεσσάρων μετρήσεων. Με κίτρινο είναι χρωματισμένο το κελί που δείχνει το μεγαλύτερο ποσοστό της Π.Ο. ανά ερώτημα, κατά τη διάρκεια των τεσσάρων μετρήσεων, με κόκκινο η στατιστικά σημαντική μείωση της επιτυχίας κατά την τέταρτη επίδοση σε σχέση με την τρίτη και με γκρι η στατιστικά σημαντική βελτίωση κατά την τέταρτη επίδοση σε σχέση με την τρίτη, ανά ερώτημα:

Περιοχή θεμάτων (βλ. σ.161)	Θέμα	Ερώτημα	Ποσοστό επιτυχίας 1η επίδοση	2η επίδοση	3η επίδοση	4η επίδοση	p για το binomial test (3η-4η επίδοση)
1η	**Ακριβείς νοεροί υπολογισμοί** 4ο θέμα	3,85·10000	60%	90%	95%	95%	1
		0,0467·1000	85%	95%	85%	80%	0,5
		4623·0,01	45%	85%	95%	80%	0,125
		25,4·0,0001	40%	75%	80%	65%	0,125
		1596,76·10000	45%	85%	80%	85%	0,5
		5,37·100	25%	80%	90%	80%	0,313
		67·0,01	20%	75%	60%	65%	0,5
		3,57·0,001	35%	80%	75%	80%	0,5
		600·700	75%	90%	100%	90%	0,25
		90·80000	75%	95%	100%	85%	0,125
		0,02·0,004	30%	65%	60%	70%	0,313
		0,06·0,07	40%	40%	70%	65%	0,5
		4900·70	30%	85%	90%	85%	0,5
		320000·800	30%	85%	90%	90%	0,75
		2,4·0,03	20%	65%	65%	80%	0,188
		0,021·7	10%	80%	70%	70%	0,75
	Εύρεση της τάξης μεγέθους 10ο θέμα	57·83	45%	85%	85%	80%	0,5
		3745·5321	40%	70%	75%	70%	0,5
		289·574	5%	70%	85%	65%	0,11
		17531:423	30%	55%	65%	45%	0,145
		6143:28	30%	65%	70%	60%	0,313
		4,37:235	10%	85%	70%	50%	0,063
		0,035:48,32	45%	45%	50%	50%	0,69
	Εύρεση της τάξης μεγέθους και προσεγγίσεων μεγαλύτερης ακρίβειας 11ο θέμα	62·73	55%	85%	95%	100%	0,5
		4832·876	15%	80%	95%	95%	0,75
		2181·1485	15%	75%	95%	95%	0,75
		67952:317	50%	55%	95%	70%	0,063
		26472:43	25%	35%	90%	45%	0,002
		3,4:512	10%	70%	70%	70%	0,69
		0,26:17,12	30%	65%	70%	50%	0,11
2η	**Πολλαπλασιασμοί και διαιρέσεις** 3ο θέμα	11,42·3,7	45%	75%	70%	75%	0,5
		27,8·0,03	45%	70%	75%	90%	0,125
		1287:75	35%	55%	80%	70%	0,34
		7454:29	20%	55%	50%	50%	0,69
		1082:19	15%	30%	45%	55%	0,313
	Αφαιρέσεις δεκαδικών 8ο θέμα	826-9,64	35%	70%	70%	75%	0,5
		35,5-8,745	35%	75%	75%	70%	0,5
		82,46-7,57	85%	100%	70%	70%	0,69
3η	**Μετατροπή δεκαδικών σε κλάσματα και αντίστροφα** 5ο και 6ο θέμα	0,064	15%	65%	65%	60%	0,5
		2,36	25%	65%	90%	80%	0,313
		9/1000	40%	95%	70%	75%	0,5
		453/10	20%	65%	60%	60%	0,64
		6/8	5%	45%	40%	40%	0,75
		9/15	5%	55%	40%	45%	0,5
4η	**Πράξεις μεταξύ κλασμάτων** 7ο θέμα	13/18+14/24	35%	75%	70%	50%	0,063
		4/15·7/8	60%	85%	100%	95%	0,5
		8/10:7/12	40%	70%	70%	85%	0,188
5η	**Προβλήματα** 1ο , 2ο και 9ο θέμα	1ο Vergnaud	15%	20%	20%	10%	0,25
		2ο Vergnaud	45%	40%	30%	60%	0,035
		αναλόγων ποσών	0%	55%	55%	65%	0,25

10.3 Σύγκριση πειραματικής ομάδας και ομάδας ελέγχου πριν την υλοποίηση της διδακτικής παρέμβασης

Η πρώτη σύγκριση μεταξύ πειραματικής ομάδας και ομάδας ελέγχου έγινε με βάση την πρώτη επίδοση του ερωτηματολογίου (το Νοέμβριο του 2001), με σκοπό τον έλεγχο της ισοδυναμίας των δύο ομάδων.

Για τον έλεγχο της ισοδυναμίας, επιλέχτηκε αρχικά το κριτήριο x^2 (για δίπλευρο έλεγχο) για να διαπιστωθεί αν οι τυχόν διαφορές μεταξύ των δύο ομάδων είναι στατιστικά σημαντικές. Στις περιπτώσεις που δεν ήταν δυνατή η εφαρμογή του x^2 επιλέχτηκε το Fisher Exact test[90] (για δίπλευρο έλεγχο).

Παρόλο όμως που στις διάφορες ερωτήσεις φάνηκε ότι δεν υπήρχαν στατιστικά σημαντικές διαφορές, ωστόσο τα ποσοστά μεταξύ των δύο ομάδων δεν είναι περίπου ίδια σε όλες τις περιπτώσεις. Για το λόγο αυτό τα ερωτήματα–μεταβλητές ομαδοποιήθηκαν με βάση το αντικείμενο που εξετάζουν σε 5 περιοχές (βλ. §10.1, σ. 161) και με βάση τον αριθμό των ορθών απαντήσεων των υποκειμένων σε κάθε περιοχή έγινε εφαρμογή του t-test (για δίπλευρο έλεγχο) για να ελεγχθεί αν οι μέσοι όροι[91] των δύο ομάδων διαφέρουν σημαντικά σε καθεμιά περιοχή ξεχωριστά. Ο έλεγχος της κανονικότητας της κατανομής των δύο ομάδων, προκειμένου να εφαρμοστεί το παραμετρικό τεστ (t-test) έγινε με βάση το μη παραμετρικό τεστ Kolmogorov-Smirnov[92]. Για τον έλεγχο της διαφοράς των μέσων όρων των δύο ομάδων, στις περιπτώσεις που η κατανομή δεν είναι κανονική, επιλέχτηκε το μη παραμετρικό τεστ Mann-Whitney.

Εξάλλου, μετρήσαμε τον αριθμό των ερωτημάτων ανά περιοχή, αλλά και σε ολόκληρο το ερωτηματολόγιο, στα οποία υπερτερεί η μια ή η άλλη ομάδα, ώστε να διαπιστωθεί αν υπάρχει ισορροπία

Παρακάτω παρατίθεται ένας συγκεντρωτικός πίνακας όπου φαίνεται με γκρι χρώμα η στατιστικά σημαντική διαφορά υπέρ της Π.Ο., με γαλάζιο η στατιστικά σημαντική υπεροχή της Ο.Ε., ενώ με κίτρινο η υπεροχή της μιας ή της άλλης ομάδας χωρίς απαραίτητα η διαφορά να είναι στατιστικά σημαντική, στα διάφορα ερωτήματα του ερωτηματολογίου[93].

---

[90] Όταν εμφανίζεται μόνο το p (=επίπεδο σημαντικότητας) έχει εφαρμοστεί το Fisher Exact test, καθώς οι προϋποθέσεις για την εφαρμογή του x^2 δεν πληρούνται, δηλαδή υπάρχει ποσοστό κελιών μεγαλύτερο του 20% (έστω 1 κελί στην περίπτωση του πίνακα 2x2) ή/και η μικρότερη αναμενόμενη συχνότητα είναι μικρότερη από 1).

[91] Ο μέσος όρος για κάθε ομάδα (Π.Ο. και Ο.Ε.) υπολογίστηκε με βάση τον αριθμό των επιτυχιών κάθε υποκειμένου στην εξεταζόμενη περιοχή.

[92] Ο έλεγχος της κανονικότητας της κατανομής έγινε μόνο για την Π.Ο., καθώς ο αριθμός των υποκειμένων που την αποτελούν είναι μικρότερος από 30.

[93] Το σύμβολο * υποδηλώνει ότι το επίπεδο σημαντικότητας p αφορά στην τιμή U που προκύπτει από την εφαρμογή του Mann-Whitney test.

Περιοχή θεμάτων (βλ. σ.161)	Θέμα	Τιμή t (ή U) για το t-test (ή Mann-Whitney) /p	Ερώτημα	Ποσοστό επιτυχίας		x^2/p
				Π.Ο.	Ο.Ε.	
1η	Ακριβείς νοεροί υπολογισμοί 4ο θέμα	1,246/ 0,215	3,85·10000	60%	54,3%	0,223/0,663
			0,0467·1000	85%	55,2%	6,301/0,012
			4623·0,01	45%	56%	0,837/0,36
			25,4·0,0001	40%	29,3%	0,913/0,339
			1596,76:10000	45%	31,9%	0,309/0,253
			5,37:100	25%	23,3%	1
			67:0,01	20%	14,7%	0,513
			3,57:0,001	35%	14,7%	0,05
			600·700	75%	66,4%	0,579/0,447
			90·80000	75%	68,1%	0,38/0,538
			0,02·0,004	30%	32,8%	0,059/0,808
			0,06·0,07	40%	31%	0,627/0,429
			4900:70	30%	50%	2,739/0,098
			320000:800	30%	37,9%	0,462/0,497
			2,4:0,03	20%	18,1%	0,763
			0,021:7	10%	12,1%	1
	Εύρεση της τάξης μεγέθους 10ο θέμα		57·83	45%	64,7%	2,791/0,095
			3745·5321	40%	13,8%	0,009
			289·574	5%	17,2%	0,311
			17531:423	30%	12,1%	0,079
			6143:28	30%	16,4%	0,207
			4,37:235	20%	12,9%	1
			0,035:48,32	45%	19%	0,018
	Εύρεση της τάξης μεγέθους και προσεγγίσεων μεγαλύτερης ακρίβειας (11ο θέμα)		62·73	55%	50%	0,171/0,68
			4832·876	15%	23,3%	0,564
			2181·1485	15%	28,4%	1,585/0,208
			67952:317	50%	18,1%	0,004
			26472:43	25%	19%	0,548
			3,4:512	10%	10,3%	1
			0,26:17,12	30%	9,5%	0,021
2η	Πολλαπλασιασμοί και διαιρέσεις (3ο θέμα)	-0,266/ 0,79	11,42·3.7	45%	55,2%	0,71/0,399
			27,8·0,03	45%	58,6%	1,288/0,256
			1287:75	35%	25%	0,876/0,349
			7454:29	20%	20,7%	1
			1082:19	15%	15,5%	1
	Αφαιρέσεις (8ο θέμα)		826-9,64	35%	40,5%	0,217/0,641
			35,5-8,745	35%	48,3%	1,209/0,271
			82,46-7,57	85%	67,2%	2,555/0,11
3η	Μετατροπές δεκαδικών σε κλάσματα και αντίστροφα 5ο και 6ο θέμα	0,149*	0,064	15%	40,5%	4,778/0,029
			2,36	25%	35,3%	0,816/0,336
			9/1000	40%	50%	0,683/0,409
			453/10	20%	27,6%	0,504/0,478
			6/8	5%	9,5%	1
			9/15	5%	12,9%	0,466
4η	Εκτέλεση πράξεων μεταξύ κλασμάτων 7ο θέμα	1,431/ 0,155	13/18+14/24	35%	21,6%	0,252
			4/15·7/8	60%	49,1%	0,805/0,37
			8/10:7/12	40%	27,6%	1,651/0,277
5η	Προβλήματα 1ο, 2ο και 9ο θέμα	0,283*	1ο πρόβλημα Vergnaud	15%	6%	0,165
			2ο πρόβλημα Vergnaud	45%	28,4%	2,183/0,139
			Πρόβλημα αναλόγων ποσών	0%	6%	0,553

1. Πράξεις από μνήμης (4ο, 10ο και 11ο θέμα)

Συνολικά στο τέταρτο, δέκατο και ενδέκατο θέμα παρατηρούμε ότι η Π.Ο. υπερτερεί σε 20 ερωτήματα, ενώ η Ο.Ε. υπερτερεί σε 10 ερωτήματα.

Σε 6 ερωτήματα η Π.Ο. υπερέχει με στατιστικά σημαντική διαφορά. Έτσι, η Π.Ο. δείχνει να είναι συστηματικά λίγο καλύτερη από την Ο.Ε. στην περιοχή των πράξεων από μνήμης.

Ωστόσο, η εφαρμογή του t-test δείχνει ότι η διαφορά των δύο ομάδων δεν είναι στατιστικά σημαντική.

Στο τέταρτο ερώτημα παρατηρούμε ότι οι δύο ομάδες εμφανίζουν υψηλότερα ποσοστά στους πολλαπλασιασμούς ακεραίων, ακολουθούν οι πολλαπλασιασμοί με θετικές δυνάμεις του 10 και έπονται οι διαιρέσεις ακεραίων. Ιδιαίτερα χαμηλά ποσοστά εμφανίζουν στις διαιρέσεις με αρνητές δυνάμεις του 10, και με αριθμούς του τύπου $\nu x10^{\mu}$ όπου $\nu \in N$ και $\mu \in Z^{-}$.

Στο δέκατο και ενδέκατο θέμα, παρατηρούμε ότι η Π.Ο. εμφανίζει μεγαλύτερα ποσοστά επιτυχίας στο δέκατο θέμα, όπου της ζητείται να βρει την τάξη μεγέθους και της δίνονται επιλογές, παρά στο ενδέκατο θέμα, όπου της ζητείται να βρει προσέγγιση με ανοιχτού τύπου ερώτηση. Αντίθετα, η Ο.Ε. εμφανίζει υψηλότερα ποσοστά επιτυχίας σε ανοιχτού τύπου ερωτήσεις.

Επίσης, οι δύο ομάδες έχουν καλύτερη επίδοση όταν τα αριθμητικά δεδομένα είναι τέτοια που επιτρέπουν τον ακριβή νοερό υπολογισμό (1ο ερώτημα δέκατου και ενδέκατου θέματος).

Ακόμη, φαίνεται πως η Ο.Ε. έχει καλύτερη επίδοση στους πολλαπλασιασμούς από την Π.Ο., ενώ η Π.Ο. υπερέχει στις διαιρέσεις ακεραίων. Στην πρώτη διαίρεση δεκαδικών οι δύο ομάδες εμφανίζονται ισοδύναμες, με αρκετά χαμηλά ποσοστά, ενώ στη δεύτερη διαίρεση δεκαδικών υπερέχει η Π.Ο.

Εν γένει στο δέκατο και ενδέκατο θέμα, οι μαθητές εμφανίζουν ιδιαίτερα χαμηλά ποσοστά, πιστοποιώντας την έλλειψη οργανωμένης δουλειάς, σε ό,τι αφορά την εκτίμηση αποτελεσμάτων.

2. Γραπτή εκτέλεση πράξεων (3ο και 8ο θέμα)

Παρατηρούμε ότι και στις οχτώ πράξεις, η διαφορά μεταξύ των ποσοστών επιτυχίας και αποτυχίας των δύο ομάδων δεν είναι στατιστικά σημαντική. Επίσης, παρατηρούμε ότι στην εκτέλεση πολλαπλασιασμών υπερτερεί η ομάδα ελέγχου, ενώ στην πρώτη διαίρεση υπερτερεί η πειραματική ομάδα. Στις δύο τελευταίες διαιρέσεις υπάρχει ένα ελαφρύ προβάδισμα της ομάδας ελέγχου. Στις δύο πρώτες αφαιρέσεις υπερτερεί η Ο.Ε. ενώ στην τελευταία αφαίρεση υπερτερεί η Π.Ο.

Συνολικά, σε 6 πράξεις υπερέχει η Ο.Ε., σε 2 η Π.Ο. Έτσι, η Ο.Ε. φαίνεται να είναι λίγο καλύτερη στην περιοχή αυτή. Ωστόσο, σε κανένα ερώτημα η διαφορά δεν είναι στατιστικά σημαντική.

Εξάλλου, η εφαρμογή του t-test δείχνει ότι οι δύο ομάδες δεν διαφέρουν με στατιστικά σημαντική διαφορά.

Παρατηρούμε ότι οι δύο ομάδες εμφανίζουν πολύ χαμηλά ποσοστά στις διαιρέσεις, με τη μεγάλη πλειοψηφία αδυνατεί να εκτελέσει διαφορετικών τύπων διαιρέσεις.

Επίσης, αρκετοί μαθητές δυσκολεύονται να εκτελέσουν αφαιρέσεις, όπου οι όροι έχουν διαφορετικό αριθμό δεκαδικών ψηφίων, εκδηλώνοντας την ελλιπή κατανόηση του δεκαδικού αριθμητικού συστήματος.

3. Μετατροπή δεκαδικών αριθμών σε κλάσματα και κλασμάτων σε δεκαδικούς αριθμούς (5ο και 6ο θέμα)

Στην περιοχή των μετατροπών δεκαδικών αριθμών σε κλάσματα και αντίστροφα, υπερέχει η Ο.Ε. στο σύνολο των ερωτήσεων, ενώ σε ένα ερώτημα η διαφορά είναι στατιστικά σημαντική.

Ωστόσο, η εφαρμογή του Mann-Whitney test στην περιοχή της μετατροπής δεκαδικών σε κλασμάτων και αντίστροφα, δείχνει ότι δεν υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά μεταξύ των δύο ομάδων.

Έτσι, στην περιοχή αυτή η Ο.Ε. εμφανίζεται να είναι λίγο καλύτερη από την Π.Ο., χωρίς όμως οι δύο ομάδες να διαφέρουν με στατιστικά σημαντική διαφορά.

Παρατηρούμε ότι η Π.Ο. έχει ιδιαίτερα χαμηλή επίδοση στην περιοχή αυτή, ενώ πολύ χαμηλά είναι τα ποσοστά των δύο ομάδων στις μετατροπές μη δεκαδικών κλασμάτων σε δεκαδικούς αριθμούς, φανερώνοντας την ελλιπή κατανόηση της ισοδυναμίας των κλασμάτων με δεκαδικούς αριθμούς.

4. Εκτέλεση πράξεων μεταξύ κλασμάτων (7ο θέμα)

Διαπιστώνουμε ότι στην περιοχή της εκτέλεσης πράξεων μεταξύ κλασμάτων υπερέχει η Π.Ο., χωρίς όμως η διαφορά να είναι στατιστικά σημαντική.

Το t-test στην εκτέλεση πράξεων μεταξύ κλασμάτων δείχνει επίσης ότι δεν υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά.

Η Π.Ο. εμφανίζεται να είναι λίγο καλύτερη από την Ο.Ε., χωρίς όμως η διαφορά να είναι στατιστικά σημαντική.

Τόσο η Π.Ο., όσο και η Ο.Ε. εμφανίζουν χαμηλή επίδοση στη συγκεκριμένη περιοχή, γεγονός που υποδηλώνει την ανεπάρκεια της καθημερινής διδασκαλίας να καταστήσει τους μαθητές ικανούς στην επίλυση πράξεων μεταξύ κλασμάτων.

5. Προβλήματα (1ο, 2ο και 9ο θέμα)

Παρατηρούμε ότι και στα τρία προβλήματα, η διαφορά μεταξύ των ποσοστών επιτυχίας και αποτυχίας των δύο ομάδων δεν είναι στατιστικά σημαντική. Επίσης παρατηρούμε ότι στα προβλήματα προσθετικών δομών υπερτερεί η πειραματική ομάδα, ενώ στο πρόβλημα πολλαπλασιαστικών δομών υπερέχει η ομάδα ελέγχου.

Σε κανένα πρόβλημα, ωστόσο, η διαφορά δεν είναι στατιστικά σημαντική.

Η εφαρμογή του Mann-Whitney test δείχνει ότι οι δύο ομάδες δεν διαφέρουν με στατιστικά σημαντική διαφορά ως προς το μέσο όρο των σωστά απαντηθέντων προβλημάτων.

Έτσι, με βάση τα παραπάνω, μπορούμε να ισχυριστούμε ότι στην περιοχή των προβλημάτων οι δύο ομάδες είναι ισοδύναμες.

Ιδιαίτερα χαμηλή είναι η επίδοση των μαθητών των δύο ομάδων στα προβλήματα προσθετικών δομών, όπου είναι γνωστή η σύνθεση και ο ένας μετασχηματισμός και ζητείται ο άλλος μετασχηματισμός. Οι μαθητές δείχνουν να μην κατανοούν τη σημασιολογική δομή αυτών των προβλημάτων και κατά συνέπεια δεν μπορούν να προβούν στη σωστή επίλυσή τους.

Αλλά και στο πρόβλημα των αναλόγων ποσών τα ποσοστά επιτυχίας είναι πολύ χαμηλά, γεγονός που υποδηλώνει ανεπάρκεια και στις πολλαπλασιαστικές δομές.

Στο σύνολο του ερωτηματολογίου η Π.Ο. υπερτερεί σε 27 ερωτήματα, ενώ η Ο.Ε. σε 23.

Σύμφωνα με την εφαρμογή του x^2 διαπιστώνουμε ότι η διαφορά των δύο ομάδων δεν είναι στατιστικά σημαντική (το x^2=0,32 είναι μικρότερο από την κρίσιμη τιμή 3,84 για 1 βαθμό ελευθερίας):

x^2=0,32	Π.Ο.	Ο.Ε.
Παρατηρούμενη τιμή	27	23
Αναμενόμενη τιμή	25	25

Ακόμη, διαπιστώνουμε ότι από τα 27 ερωτήματα στα οποία υπερέχει η Π.Ο., στα 6 η διαφορά είναι στατιστικά σημαντική, ενώ από τα 23 ερωτήματα που υπερέχει η Ο.Ε., στο 1 η διαφορά είναι στατιστικά σημαντική.

Εξάλλου, η εφαρμογή του t-test, στο σύνολο του ερωτηματολογίου, δείχνει ότι οι μέσοι όροι των δύο ομάδων δε διαφέρουν σημαντικά.

Ομάδα	Μ.Ο.	t	p
Π.Ο.	16,9	0,587	0,558
Ο.Ε.	15,56		

i) υπάρχει ισότητα διασπορών σύμφωνα με το Levene's test

ii) για δίπλευρο έλεγχο

Οι δύο ομάδες εμφανίζονται να έχουν διαφορετικά προφίλ, ως προς την επίδοσή τους στις διάφορες περιοχές: η Ο.Ε. είναι συστηματικά λίγο καλύτερη στη γραπτή εκτέλεση πράξεων και στις μετατροπές δεκαδικών αριθμών σε κλάσματα και αντίστροφα, ενώ η Π.Ο. είναι συστηματικά λίγο καλύτερη στις πράξεις από μνήμης και στην εκτέλεση πράξεων μεταξύ κλασμάτων. Κατ' αυτή την έννοια υπάρχει μια ισορροπία ως προς την επίδοση των δύο ομάδων.

10.4 Σύγκριση πειραματικής ομάδας και ομάδας ελέγχου μετά την υλοποίηση της διδακτικής παρέμβασης

10.4.1 Σύγκριση πειραματικής ομάδας και ομάδας ελέγχου με βάση την επίδοσή τους στα 5 πρώτα φύλλα του ερωτηματολογίου

Η δεύτερη σύγκριση μεταξύ πειραματικής ομάδας και ομάδας ελέγχου έγινε με βάση τη δεύτερη επίδοση του ερωτηματολόγίου στην ομάδα ελέγχου και την τέταρτη επίδοση του ερωτηματολογίου στην πειραματική ομάδα. Η τέταρτη επίδοση στην πειραματική ομάδα πραγματοποιήθηκε ένα μήνα μετά το πέρας της διδακτικής παρέμβασης. Η σύγκριση έγινε με βάση την επίδοση αυτή, ώστε να έχει παρέλθει η άμεση επίδραση της διδακτικής παρέμβασης.

Παρακάτω παρατίθεται πίνακας, όπου εμφανίζονται τα ποσοστά επιτυχίας των δύο ομάδων κατά την πρώτη και κατά την τέταρτη μέτρηση, το επίπεδο σημαντικότητας p για το binomial test (για μονόπλευρο έλεγχο) και για τις δύο ομάδες, προκειμένου να φανεί αν έχουν βελτιωθεί στατιστικά σημαντικά, καθώς και το επίπεδο σημαντικότητας p για το x^2 ή το Fisher Exact test (για δίπλευρο έλεγχο) ώστε να φανεί αν η υπεροχή της Π.Ο. είναι στατιστικά σημαντική κατά την τελευταία μέτρηση. Με γκρι χρωματίζεται το κελί όταν η βελτίωση κάθε ομάδας ή η διαφορά μεταξύ τους είναι στατιστικά σημαντική, με κόκκινο όταν η επίδοση κάθε ομάδας είναι χειρότερη από την αρχική με στατιστικά σημαντική διαφορά, ενώ με κίτρινο όταν υπερέχει η μια ή άλλη ομάδα, χωρίς απαραίτητα να είναι στατιστικά σημαντική η διαφορά.

Περιοχή θεμάτων (βλ. σ. 161)	Θέμα	ερώτημα	Ποσοστό επιτυχίας: 1η επίδοση Π.Ο.	Ποσοστό επιτυχίας: 1η επίδοση Ο.Ε.	Ποσοστό επιτυχίας: 4η επίδοση Π.Ο.	Ποσοστό επιτυχίας: 4η επίδοση Ο.Ε.	p για το binomial test Π.Ο.	p για το binomial test Ο.Ε.	p για το x^2 (ή για το Fisher) 4η επίδοση
1η	**Ακριβείς νοεροί υπολογισμοί** 4ο θέμα	3,85·10000	60%	54,3%	95%	69%	0,008	0,003	0,016
		0,0467·1000	85%	55,2%	80%	65,5%	0,5	0,048	0,201
		4623·0,01	45%	56%	80%	60,3%	0,008	0,267	0,092
		25,4·0,0001	40%	29,3%	65%	28,4%	0,063	0,5	0,001
		1596,76:10000	45%	31,9%	85%	44,8%	0,011	0,016	0,001
		5,37:100	25%	23,3%	80%	37,9%	0,001	0,003	0,001
		67:0,01	20%	14,7%	65%	16,4%	0,011	0,423	0,001
		3,57:0,001	35%	14,7%	80%	16,4%	0,002	0,416	0,001
		600·700	75%	66,4%	90%	77,6%	0,188	0,015	0,248
		90·80000	75%	68,1%	85%	71,6%	0,344	0,03	0,208
		0,02·0,004	30%	32,8%	70%	33,6%	0,011	0,5	0,002
		0,06·0,07	40%	31%	65%	41,4%	0,063	0,044	0,002
		4900:70	30%	50%	85%	50,9%	0,001	0,5	0,005
		320000:800	30%	37,9%	90%	42,2%	0,001	0,229	0,001
		2,4:0,03	20%	18,1%	80%	23,3%	0,001	0,164	0,001
		0,021:7	10%	12,1%	70%	19%	0,001	0,067	0,001
	Εύρεση της τάξης μεγέθους 10ο θέμα	57·83	45%	64,7%	80%	50%	0,033	0,01	0,013
		3745·5321	40%	13,8%	70%	12,9%	0,035	0,5	0,001
		289·574	5%	17,2%	65%	19%	0,001	0,436	0,001
		17531:423	30%	12,1%	45%	7,8%	0,227	0,161	0,001
		6143:28	30%	16,4%	60%	19%	0,035	0,364	0,001
		4,37:235	20%	12,9%	50%	12,1%	0,004	0,5	0,001
		0,035:48,32	45%	19%	50%	33,6%	0,5	0,151	0,029
	Εύρεση της τάξης μεγέθους και προσεγγίσεων μεγαλύτερης ακρίβειας 11ο θέμα	62·73	55%	50%	100%	48,3%	0,002	0,442	0,001
		4832·876	15%	23,3%	95%	21,6%	0,001	0,432	0,001
		2181·1485	15%	28,4%	95%	19%	0,001	0,054	0,001
		67952:317	50%	18,1%	70%	24,1%	0,172	0,18	0,001
		26472:43	25%	19%	45%	19,8%	0,172	0,5	0,022
		3,4:512	10%	10,3%	70%	13,8%	0,001	0,279	0,001
		0,26:17,12	30%	9,5%	50%	7,8%	0,172	0,408	0,001
2η	**Πολλαπλα-σιασμοί και διαιρέσεις** 3ο θέμα	11,42·3.7	45%	55,2%	75%	49,1%	0,035	0,175	0,032
		27,8·0,03	45%	58,6%	90%	52,6%	0,002	0,156	0,002
		1287:75	35%	25%	70%	30,2%	0,008	0,196	0,001
		7454:29	20%	20,7%	50%	17,2%	0,017	0,241	0,003
		1082:19	15%	15,5%	55%	19%	0,004	0,262	0,001
	Αφαιρέσεις 8ο θέμα	826-9,64	35%	40,5%	75%	41,4%	0,188	0,5	0,005
		35,5-8,745	35%	48,3%	70%	48,3%	0,002	0,5	0,073
		82,46-7,57	85%	67,2%	70%	64,7%	0,004	0,378	0,643
3η	**Μετατροπές δεκαδικών σε κλάσματα και αντίστροφα** 5ο και 6ο θέμα	0,064	15%	40,5%	60%	49,1%	0,006	0,06	0,37
		2,36	25%	35,3%	80%	50%	0,002	0,003	0,019
		9/1000	40%	50%	75%	64,7%	0,008	0,006	0,366
		453/10	20%	27,6%	60%	41,4%	0,011	0,005	0,121
		6/8	5%	9,5%	40%	18,1%	0,008	0,016	0,038
		9/15	5%	12,9%	45%	14,7%	0,004	0,201	0,004
4η	**Πράξεις κλασμάτων** 7ο θέμα	13/18+14/24	35%	21,6%	50%	17,2%	0,188	0,203	0,003
		4/15·7/8	60%	49,1%	95%	33,6%	0,002	0,003	0,001
		8/10:7/12	40%	27,6%	80%	20,7%	0,004	0,093	0,001
5η	**Προβλήματα** 1ο, 2ο και 9ο θέμα	1ο Vergnaud	15%	6%	10%	8,6%	0,5	0,254	0,69
		2ο Vergnaud	45%	28,4%	60%	32,8%	0,253	0,25	0,02
		αναλόγων ποσών	0%	6%	65%	7,8%	0,001	0,363	0,001

1. Πράξεις από μνήμης (4ο, 10ο και 11ο θέμα)

4ο ερώτημα

Λαμβάνοντας υπόψη το σύνολο των ερωτημάτων για τις πράξεις από μνήμης, διαπιστώνουμε ότι η Π.Ο. υπερέχει με στατιστικά σημαντική διαφορά σε όλα σχεδόν τα ερωτήματα της εξεταζόμενης περιοχής. Εξαίρεση αποτελούν οι ακριβείς πολλαπλασιασμοί ακεραίων (600·700 και 90·80000), όπου οι μαθητές των δύο ομάδων είχαν υψηλά ποσοστά ήδη από την πρώτη μέτρηση, καθώς και οι πολλαπλασιασμοί 0,0467·1000 και 4623·0,01 όπου και η Ο.Ε. έχει σχετικά υψηλά ποσοστά.

Η Π.Ο. παρουσιάζει σημαντική αύξηση του ποσοστού επιτυχίας στην πλειοψηφία των ερωτήσεων. Μικρότερη αύξηση παρατηρείται στις ερωτήσεις, στις οποίες ήδη από την πρώτη μέτρηση είχε υψηλά ποσοστά.

Η Ο.Ε. παρουσιάζει μικρή βελτίωση μέχρι και 10% στην πλειοψηφία των ερωτήσεων. Μάλιστα, σε 4 περιπτώσεις η βελτίωσή της είναι στατιστικά σημαντική. Όμως, γενικά τα ποσοστά επιτυχίας της Ο.Ε. είναι χαμηλά και κάτω του 50% στις περισσότερες ερωτήσεις. Μάλιστα, στις διαιρέσεις με αρνητικές δυνάμεις του 10 καθώς και στις διαιρέσεις δεκαδικών τα ποσοστά επιτυχίας είναι 15-25%, γεγονός ιδιαίτερα ανησυχητικό. Εξαίρεση αποτελούν οι πολλαπλασιασμοί με θετικές δυνάμεις του 10 καθώς και οι πολλαπλασιασμοί ακεραίων όπου οι μαθητές δείχνουν να τα καταφέρνουν σχετικά καλά (65-80%).

Επίσης, στο σύνολο των ερωτημάτων του τέταρτου θέματος, παρατηρούμε ότι από την Π.Ο. το 55% των μαθητών καταφέρνουν να απαντήσουν σωστά στα 14 από τα 16 ερωτήματα του τέταρτου θέματος, ενώ από την Ο.Ε. μόνο το 5,2% έχει παρόμοια επίδοση (p για το Fisher Exact test=0,001).

1η επίδοση	Μαθητές που απάντησαν σωστά τουλάχιστον σε … ερωτήματα από τα 16			
	13	14	15	16
Π.Ο.	1 5%	0 0%	0 0%	0 0%
Ο.Ε.	8 6,9%	4 3,5%	1 0,9%	0 0%

4η επίδοση	Μαθητές που απάντησαν σωστά τουλάχιστον σε … ερωτήματα από τα 16			
	13	14	15	16
Π.Ο.	12 60%	11 55%	10 50%	8 40%
Ο.Ε.	12 10%	6 5,2%	5 4,3%	2 1,7%

Εξάλλου, παρατηρούμε ότι το 40% των μαθητών της Π.Ο. καταφέρνει να απαντήσει σωστά και στα 16 ερωτήματα, πράγμα που σημαίνει ότι κατέχει πολύ καλά τη συγκεκριμένη περιοχή και δεν κάνει σφάλματα. Αντίθετα από την Ο.Ε. μόνο το 1,7% των μαθητών καταφέρνουν να έχουν παρόμοια επίδοση.

Αυτό σημαίνει ότι για την Ο.Ε. υπάρχουν πολύ εύκολες και πολύ δύσκολες ερωτήσεις, όπως φαίνεται και από τα ποσοστά που είναι άλλοτε υψηλά και άλλοτε πολύ χαμηλά, ενώ για την Π.Ο. υπάρχει ένας μαθητικός πληθυσμός που δεν θεωρεί ότι υπάρχουν δύσκολες και εύκολες ερωτήσεις και καταφέρνει να απαντά με επιτυχία σχεδόν σε όλες.

Συνεπώς, στο σύνολο των ερωτημάτων του τέταρτου θέματος υπερέχει η Π.Ο. και μάλιστα στη μεγάλη πλειοψηφία των ερωτημάτων η διαφορά είναι στατιστικά σημαντική. Ασφαλώς, η βελτίωση της Π.Ο. οφείλεται στην Α΄ φάση της διδακτικής παρέμβασης, η οποία αναλώθηκε ακριβώς σε πολλαπλασιασμούς και διαιρέσεις με δυνάμεις του 10 και με αριθμούς του τύπου $\nu x10^{\mu}$, όπου $\nu \in N^*$, $1<\nu<100$ και $\mu \in Z$.

10ο και 11ο θέμα

Στο δέκατο και ενδέκατο θέμα (εύρεση της τάξης μεγέθους και προσεγγίσεων μεγαλύτερης ακρίβειας) η Π.Ο. υπερέχει με στατιστικά σημαντική διαφορά σε όλα τα ερωτήματα, γεγονός που επικυρώνει τη σημαντική επίδραση της διδακτικής παρέμβασης στην εξεταζόμενη περιοχή.

Εξάλλου, το 40% των μαθητών της Π.Ο. καταφέρνει να απαντήσει σωστά τουλάχιστον σε 12 από τα 14 ερωτήματα, ενώ από την Ο.Ε. κανένας μαθητής δεν το επιτυγχάνει:

1η επίδοση	Μαθητές που απάντησαν σωστά τουλάχιστον σε … ερωτήματα από τα 14		
	12	13	14
Π.Ο.	0 0%	0 0%	0 0%
Ο.Ε.	0 0%	0 0%	0 0%

4η επίδοση	Μαθητές που απάντησαν σωστά τουλάχιστον σε … ερωτήματα από τα 14		
	12	13	14
Π.Ο.	8 40%	5 25%	3 15%
Ο.Ε.	0 0%	0 0%	0 0%

Παρατηρούμε ότι ενώ αρχικά κανένας μαθητής δεν καταφέρνει να απαντήσει με επιτυχία τουλάχιστον σε 12 ερωτήματα, τελικά το 40% των μαθητών της Π.Ο. το καταφέρνει και μάλιστα υπάρχει και ένα 15% που απαντά σε όλα τα ερωτήματα. Αντίθετα, κανείς μαθητής από την Ο.Ε. δεν καταφέρνει να έχει παρόμοια επίδοση.

Αυτό σημαίνει ότι για την Ο.Ε. υπάρχουν πολύ εύκολες και πολύ δύσκολες ερωτήσεις για τους μαθητές, όπως φαίνεται και από τα ποσοστά που είναι άλλοτε υψηλά και άλλοτε πολύ χαμηλά, ενώ για την Π.Ο. υπάρχει ένας μαθητικός πληθυσμός που δεν θεωρεί ότι υπάρχουν δύσκολες και εύκολες ερωτήσεις και καταφέρνει να απαντά με επιτυχία σχεδόν σε όλες.

Ενώ η Π.Ο. παρουσιάζει στατιστικά σημαντική βελτίωση σε όλα σχεδόν τα ερωτήματα, η Ο.Ε. εμφανίζει μικρές αυξομειώσεις στο ποσοστό επιτυχίας, ενώ σε μία περίπτωση η επίδοσή της είναι στατιστικά σημαντικά μικρότερη σε σχέση με την αρχική. Η βελτίωση της Π.Ο. οφείλεται στην Γ΄ και Δ΄ φάση της διδακτικής παρέμβασης (εύρεση της τάξης μεγέθους και εκτίμηση με στρογγυλοποίηση).

2. Εκτέλεση πράξεων (3ο και 8ο θέμα)

3ο θέμα

Με βάση την επίδοση των μαθητών στην εξεταζόμενη περιοχή, διαπιστώνουμε ότι στους πολλαπλασιασμούς η Ο.Ε. μειώνει τα ποσοστά επιτυχίας, ενώ στις διαιρέσεις βελτιώνεται στην πρώτη και στην τρίτη και παρουσιάζει κάμψη στη δεύτερη διαίρεση. Αυτό σημαίνει ότι η καθημερινή διδασκαλία δεν καταφέρνει να συνδράμει στην άρση των δυσκολιών των μαθητών σε ό,τι αφορά την εκτέλεση πολλαπλασιασμών και διαιρέσεων. Οι αλγόριθμοι στην Στ΄ Δημοτικού δεν εμπίπτουν στο πλαίσιο του καθημερινού μαθήματος, δεν υποστηρίζονται κατάλληλα με αποτέλεσμα οι μαθητές να τελειώνουν το Δημοτικό και οι μισοί να μην μπορούν να εκτελέσουν πολλαπλασιασμούς με δεκαδικούς ενώ το 70-80% δεν μπορεί να εκτελέσει σωστά διαιρέσεις.

Η Π.Ο. έπειτα από τη διδακτική παρέμβαση καταφέρνει σε ποσοστό 75-90% να εκτελεί πολλαπλασιασμούς και σε ποσοστό 50-70% να εκτελεί διαιρέσεις. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η μεγάλη βελτίωση της Π.Ο. σε αυτή την περιοχή οφείλεται ιδιαίτερα στην εφαρμογή κριτηρίων εκτίμησης και ελέγχου (δοκιμές), που μπορούν σημαντικά να αμβλύνουν τα σφάλματα στα οποία τυχόν έχουν υποπέσει οι μαθητές από απροσεξία κυρίως. Κατά την Ε΄ φάση της διδακτικής παρέμβασης, οι μαθητές διδάχτηκαν κριτήρια ελέγχου (βλ. §8.4.1). Πριν από την εκτέλεση πράξεων ζητούνταν από τους μαθητές να εκτιμήσουν το αποτέλεσμα, στη συνέχεια εκτελούσαν την πράξη, κατόπιν εφάρμοζαν κριτήρια ελέγχου και τέλος διαπίστωναν την ορθότητα του αποτελέσματος σε σχέση τόσο με τα κριτήρια εκτίμησης, όσο και με τα κριτήρια ελέγχου που είχαν εφαρμόσει (τα κριτήρια εκτίμησης λειτουργούσαν και ως κριτήρια ελέγχου). Έτσι, συνδυάζονταν η εφαρμογή κριτηρίων εκτίμησης με την εφαρμογή κριτηρίων ελέγχου.

Η εφαρμογή των κριτηρίων εκτίμησης στα συγκεκριμένα ερωτήματα του ερωτηματολογίου δεν μπορεί να διαπιστωθεί. Όμως, σε ό,τι αφορά την εφαρμογή κριτηρίων ελέγχου, το 80% των μαθητών της Π.Ο. εκτελούν δοκιμές στους πολλαπλασιασμούς, το 70% στην πρώτη διαίρεση, το 50% στη δεύτερη διαίρεση και το 55% την τρίτη -ενώ κι ένα 10% εκτελεί τη δοκιμή λάθος στην τρίτη διαίρεση (βλ. §10.3). Αντίθετα κ α ν έ ν α ς μαθητής της Ο.Ε. δεν εκτελεί δοκιμή.

1η επίδοση	Μαθητές που πέτυχαν τουλάχιστον σε … πράξεις από τις 5	
	4	5
Π.Ο.	4 20%	1 5%
Ο.Ε.	20 17,2%	7 6%

4η επίδοση	Μαθητές που πέτυχαν τουλάχιστον σε … πράξεις από τις 5	
	4	5
Π.Ο.	11 55%	9 45%
Ο.Ε.	18 15,5%	6 5,2%

Παρατηρούμε ότι το 45% των μαθητών της Π.Ο. εκτελεί σωστά και τις 5 πράξεις, ενώ το 55% εκτελεί σωστά τουλάχιστον τις 4 από τις 5 πράξεις. Από την Ο.Ε. μόνο το 5,2% καταφέρνει να εκτελέσει σωστά και τις 5 πράξεις, ενώ τουλάχιστον τις 4 από τις 5 εκτελεί το 15,5%. (p για το Fisher Exact test για την επιτυχία σε τουλάχιστον 4 από τις 5 πράξεις=0,001).

Συνολικά στην περιοχή των πολλαπλασιασμών και των διαιρέσεων διαπιστώνουμε ότι σε όλες τις πράξεις η διαφορά μεταξύ Π.Ο. και Ο.Ε. κατά την τέταρτη επίδοση είναι στατιστικά σημαντική. Επίσης, η βελτίωση της Π.Ο. είναι στατιστικά σημαντική σε όλες τις πράξεις, ενώ η Ο.Ε. δεν βελτιώνεται.

8ο θέμα

Τα ποσοστά επιτυχίας των δύο ομάδων στις αφαιρέσεις δεκαδικών αντανακλούν την επίδραση της διδακτικής παρέμβασης στην Π.Ο.

Και στις τρεις αφαιρέσεις είναι εμφανής η υπεροχή της Π.Ο., ενώ στην πρώτη αφαίρεση οι δύο ομάδες διαφέρουν σημαντικά. Είναι αξιοπρόσεχτο ότι η πλειοψηφία των μαθητών της Ο.Ε. δεν είναι σε θέση να αντιμετωπίσουν δυσκολίες που έχουν σχέση με τη στοίχιση ως προς την υποδιαστολή, γεγονός που σημαίνει την έλλειψη κατανόησης του δεκαδικού αριθμητικού συστήματος.

Συγκρίνοντας το ποσοστό των μαθητών των δύο ομάδων που απαντούν και στις τρεις αφαιρέσεις διαπιστώνουμε υπεροχή της Π.Ο. (x^2=8,189 p=0,004):

1η επίδοση	Μαθητές που πέτυχαν τουλάχιστον σε…αφαιρέσεις από τις 3	
	2	3
Π.Ο.	8 40%	6 30%
Ο.Ε.	58 50%	39 33,6%

4η επίδοση	Μαθητές που πέτυχαν τουλάχιστον σε…αφαιρέσεις από τις 3	
	2	3
Π.Ο.	14 70%	12 60%
Ο.Ε.	59 50,9%	32 27,6%

Μάλιστα, ενώ η Π.Ο. βελτιώνεται ως προς την επιτυχία της και στις 3 αφαιρέσεις, η Ο.Ε. μειώνει το ποσοστό επιτυχίας.

Η Π.Ο. παρουσιάζει στατιστικά σημαντική βελτίωση στις δύο αφαιρέσεις, ενώ η Ο.Ε. δεν βελτιώνεται. Επίσης, εμφανίζει συνεκτική συμπεριφορά σε ό,τι αφορά την εκτέλεση αφαιρέσεων, γεγονός που υποδηλώνει ότι η πλειοψηφία των μαθητών μπορούν να αντιμετωπίζουν διαφορετικές περιπτώσεις αφαιρέσεων.

Η βελτίωση της Π.Ο. οφείλεται στη Β΄ φάση της διδακτικής παρέμβασης (ακριβείς νοεροί υπολογισμοί), αλλά και στην Ε΄ φάση, όπου οι μαθητές καλούνταν να εκτελέσουν κάθετα πράξεις και να εφαρμόσουν στη συνέχεια κριτήρια ελέγχου.

Το 35% των μαθητών της Π.Ο. εφαρμόζουν κριτήρια ελέγχου για την ορθότητα της αφαίρεσης και κατά συνέπεια μπορούν να προβούν στην αυτοδιόρθωσή τους σε περίπτωση λάθους. Υπάρχουν, βέβαια, και μαθητές οι οποίοι εκτελούν τη δοκιμή νοερά προσθέτοντας τα ψηφία της διαφοράς με τα αντίστοιχα ψηφία του αφαιρετέου για να βρουν το μειωτέο, χωρίς όμως να μπορεί αυτός ο τρόπος επαλήθευσης να διαφανεί στις απαντήσεις των μαθητών.

Εξάλλου, γενικά παρατηρείται μια βελτίωση σε ό,τι αφορά τους δεκαδικούς αριθμούς και τις πράξεις μεταξύ δεκαδικών. Αυτό προέκυψε ήδη από τη διδασκαλία και ήταν αναμενόμενο, καθώς σε όλες τις φάσεις του διδακτικού σχήματος συμπεριλαμβανόταν η διαχείριση δεκαδικών αριθμών.

3. Μετατροπή δεκαδικών αριθμών σε κλάσματα και κλασμάτων σε δεκαδικούς αριθμούς (5ο και 6ο θέμα)

Στην περιοχή των μετατροπών δεκαδικών αριθμών σε κλάσματα και αντίστροφα, η Π.Ο. υπερέχει σε όλα τα ερωτήματα της Ο.Ε., ενώ σε τρία ερωτήματα η διαφορά είναι στατιστικά σημαντική. Η Π.Ο. εμφανίζει στατιστικά σημαντική βελτίωση σε όλα τα ερωτήματα, ενώ βελτιώνεται και η Ο.Ε. Ωστόσο, η βελτίωση της Π.Ο. είναι πολύ μεγαλύτερη. Η Π.Ο. καταφέρνει να ανατρέψει την προηγούμενη υπεροχή της Ο.Ε. στην περιοχή αυτή.

Η βελτίωση της Π.Ο. οφείλεται στη χρήση αλλαγής πεδίου έκφρασης και επεξεργασίας και τη μετάβαση σε μια κλασματική γραφή των δεκαδικών αριθμών κατά την Α΄ φάση της διδακτικής παρέμβασης (βλ. §9.2.1, ι και στ), όπου οι μαθητές είχαν την ευκαιρία να κατανοήσουν την ισοδυναμία των δεκαδικών αριθμών με κλάσματα.

Η σύγκριση του ποσοστού των μαθητών που εκτελούν σωστά τουλάχιστον τις 5 από τις 6 μετατροπές υποδηλώνει την υπεροχή της Π.Ο. (p=0,007).

1η επίδοση	Μαθητές που πέτυχαν τουλάχιστον σε … μετατροπές από τις 6		
	4	5	6
Π.Ο.	1 5%	1 5%	1 5%
Ο.Ε.	24 20,7%	19 16,4%	16 13,8%

4η επίδοση	Μαθητές που πέτυχαν τουλάχιστον σε … μετατροπές από τις 6		
	4	5	6
Π.Ο.	11 55%	9 45%	7 35%
Ο.Ε.	38 32,8%	29 25%	19 16,4%

Έτσι, ενώ αρχικά υπερείχε η Ο.Ε., στην τέταρτη επίδοση υπερέχει η Π.Ο. και μάλιστα το 35% των μαθητών καταφέρνουν να κάνουν και τις 6 μετατροπές.

4. Εκτέλεση πράξεων μεταξύ κλασμάτων (7ο θέμα)

Στην περιοχή αυτή η Π.Ο. υπερέχει με στατιστικά σημαντική διαφορά της Ο.Ε. σε όλες τις πράξεις. Η Π.Ο. βελτιώνεται και στις τρεις πράξεις, ενώ στον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση η βελτίωση είναι στατιστικά σημαντική. Αντίθετα, η Ο.Ε. μειώνει τα ποσοστά επιτυχίας και στις τρεις πράξεις, ενώ στον πολλαπλασιασμό η πτώση του ποσοστού είναι στατιστικά σημαντική, γεγονός που υποδηλώνει την έλλειψη ενασχόλησης με τους κλασματικούς αριθμούς κατά τη διάρκεια της Στ΄ τάξης.

Η βελτίωση της Π.Ο. οφείλεται και πάλι στη χρήση της αλλαγής πεδίου έκφρασης και επεξεργασίας και στη μετάβαση σε κλασματική γραφή των αριθμών κατά την Α΄ φάση. Μάλιστα, επειδή η αλλαγή πεδίου έκφρασης και επεξεργασίας αφορούσε στον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση (βλ. §9.2.1, ι και στ), η βελτίωση είναι μικρότερη στην πρόσθεση.

Παρατηρούμε ότι η Π.Ο. βελτιώνεται σε σχέση με την πρώτη μέτρηση και μάλιστα το 80% των μαθητών καταφέρνει να εκτελέσει σωστά τουλάχιστον τις 2 από τις 3 πράξεις. Αντίθετα, η Ο.Ε. μειώνει το ποσοστό επιτυχίας, γεγονός που πιστοποιεί την έλλειψη ενασχόλησης με τα κλάσματα στη διάρκεια της Στ΄ τάξης.

Ως προς την επιτυχία των μαθητών των δύο ομάδων και στις 3 πράξεις έχουμε τη στατιστικά σημαντική υπεροχή της Π.Ο. (p για το Fisher Exact test=0,001):

1η επίδοση	Μαθητές που πέτυχαν τουλάχιστον σε…πράξεις κλασμάτων από τις 3	
	2	3
Π.Ο.	8 40%	5 25%
Ο.Ε.	31 26,7%	15 12,9%

4η επίδοση	Μαθητές που πέτυχαν τουλάχιστον σε…πράξεις κλασμάτων από τις 3	
	2	3
Π.Ο.	16 80%	10 50%
Ο.Ε.	14 12,1%	5 4,3%

5. Προβλήματα (1ο, 2ο και 9ο θέμα)

Στα δύο προβλήματα προσθετικών δομών διαπιστώνουμε ότι η Π.Ο. βελτιώνεται στο δεύτερο πρόβλημα και υπερέχει με στατιστικά σημαντική διαφορά υπέρ της Ο.Ε., ενώ στο πρώτο πρόβλημα η Π.Ο. μειώνει το ποσοστό επιτυχίας. Ωστόσο, συνολικά και στα δύο προβλήματα του Vergnaud, δεν μπορούμε να ισχυριστούμε ότι υπάρχει επίδραση της διδακτικής παρέμβασης. Βέβαια, βελτίωση δεν εμφανίζει ούτε η Ο.Ε.

Ωστόσο, στα προβλήματα προσθετικών δομών διαπιστώνουμε ότι υπάρχει μια μεταβολή στην Π.Ο. στη συγκεκριμένη περιοχή, που αφορά στην επιλογή της πράξης: ενώ αρχικά αρκετοί μαθητές κατέφευγαν στην επιλογή άλλων πράξεων εκτός πρόσθεσης και αφαίρεσης, στην τέταρτη επίδοση δεν υπάρχει κανένας μαθητής που να εκτελεί άλλη ή περισσότερες από μία πράξεις. Όλοι πλέον αντιλαμβάνονται ότι η λύση απαιτεί πρόσθεση ή αφαίρεση.

Εκτέλεση μόνο πρόσθεσης ή αφαίρεσης	1ο πρόβλημα Vergnaud		2ο πρόβλημα Vergnaud	
	Π.Ο.	Ο.Ε.	Π.Ο.	Ο.Ε.
1η επίδοση	15 75%	76 65,5%	14 70%	78 67,2%
	x^2=0,693 p=0,405		x^2=0,059 p=0,808	
4η επίδοση	20 100%	84 72,4%	20 100%	80 69%
	p=0,004		x^2=8,441 p=0,004	

Η διαφορά των δύο ομάδων κατά την τέταρτη μέτρηση, ως προς την εκτέλεση μόνο πρόσθεσης ή αφαίρεσης, είναι στατιστικά σημαντική.

Αυτή ακριβώς η μεταβολή είναι που δημιουργεί τη στατιστικά σημαντική διαφορά των δύο ομάδων στο δεύτερο πρόβλημα, καθώς οι μαθητές της Π.Ο. επιλέγουν την αφαίρεση που είναι και η σωστή πράξη. Η επιλογή της αφαίρεσης ερμηνεύεται στην §10.1.

Όμως, συνολικά και στα δύο προβλήματα, διαπιστώνουμε ότι τα ποσοστά των δύο ομάδων είναι χαμηλά, επικυρώνοντας τις σοβαρές ελλείψεις κατανόησης που εμφανίζουν οι μαθητές στα προβλήματα προσθετικών δομών.

Στο πρόβλημα των αναλόγων ποσών παρατηρούμε ότι η Π.Ο. υπερέχει με στατιστικά σημαντική διαφορά της Ο.Ε. Ενώ η βελτίωση της Π.Ο. είναι στατιστικά σημαντική, η Ο.Ε. αυξάνει ελαφρώς το ποσοστό επιτυχίας. Δύο είναι οι κύριες αιτίες που συνέβαλαν σημαντικά στη βελτίωση της Π.Ο.: 1)στο πλαίσιο της καθημερινής διδασκαλίας οι μαθητές διδάσκονταν κριτήρια που αφορούσαν στα ανάλογα ποσά και καλούνταν να τα χρησιμοποιήσουν και 2)οι μαθητές της Π.Ο. έχουν βελτιωθεί στην εκτέλεση πράξεων.

Στο σύνολο του ερωτηματολογίου παρατηρούμε ότι η Π.Ο. υπερέχει εμφανώς στη μεγάλη πλειοψηφία των ερωτήσεων, υποδηλώνοντας την επίδραση της διδακτικής παρέμβασης. Σε πολλές περιπτώσεις η Π.Ο. κάλυψε την υπεροχή της Ο.Ε. κατά την πρώτη μέτρηση και έφτασε σε σημαντική υπεροχή έναντί της. Έτσι, επαληθεύεται η πρώτη υπόθεσή μας, σύμφωνα με την οποία η Π.Ο. υπερέχει της Ο.Ε. σε διάφορες μαθηματικές περιοχές, υπό την επίδραση της διδακτικής παρέμβασης (βλ. §8.5). Εξαίρεση αποτελούν τα προβλήματα προσθετικών δομών, όπου δε φαίνεται μια συνολική υπεροχή της Π.Ο., αλλά παρατηρείται μια μεταβολή, που αφορά κυρίως στην επιλογή ως κατάλληλης πράξης μόνο της πρόσθεσης ή της αφαίρεσης.

Έτσι, μπορούμε να συμπεράνουμε τη σημαντική επίδραση της διδακτικής παρέμβασης στη συμπεριφορά των μαθητών της Π.Ο. και στη συνακόλουθη βελτίωσή τους στις περιοχές που εξετάσαμε.

10.4.2 Σύγκριση πειραματικής ομάδας και ομάδας ελέγχου με βάση την επίδοσή τους στο 6ο φύλλο του ερωτηματολογίου

Όπως έχει ήδη αναφερθεί (§9.1), το 6ο φύλλο του ερωτηματολογίου (12ο και 13ο θέμα) δόθηκε στην Π.Ο. τον Απρίλιο του 2002 και το Μάιο του 2002 και στην Ο.Ε. τον Απρίλιο του 2002. Παρακάτω παρατίθεται ένας συγκεντρωτικός πίνακας και για τα δύο νέα θέματα, όπου είναι εμφανής η υπεροχή της Π.Ο. σε όλα τα ερωτήματα:

<table>
<tr><th rowspan="2">θέμα</th><th rowspan="2">ερώτημα</th><th colspan="2">Ποσοστό επιτυχίας</th><th rowspan="2">x^2/p</th></tr>
<tr><th>Π.Ο.</th><th>Ο.Ε.</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Υπολογισμός ποσοστών
12ο θέμα</td><td>το 10% του 350</td><td>100%</td><td>56%</td><td>x^2=14,069
p=0,001</td></tr>
<tr><td>το 20% του 900</td><td>75%</td><td>36,2%</td><td>x^2=10,545
p=0,002</td></tr>
<tr><td>το 25% του 8000</td><td>65%</td><td>23,3%</td><td>x^2=14,304
p=0,001</td></tr>
<tr><td>Προβλήματα
13ο θέμα</td><td>2ο πρόβλημα αναλόγων ποσών</td><td>55%</td><td>15,5%</td><td>p=0,001</td></tr>
</table>

Και στα δύο θέματα του ερωτηματολογίου που δόθηκαν κατά τη δεύτερη μέτρηση στην Ο.Ε. και κατά την τέταρτη μέτρηση στην Π.Ο., διαπιστώνουμε την υπεροχή της Π.Ο. με στατιστικά σημαντική διαφορά.

1. Εύρεση ποσοστών (12ο θέμα)

Ο νοερός υπολογισμός των ποσοστών ευνοεί την Π.Ο., η οποία έχει διδαχτεί από μνήμης υπολογισμούς και τεχνικές εύκολου νοερού υπολογισμού κατά τη διάρκεια της Α΄ και Β΄ φάσης. Επίσης, η καλή επίδοση της Π.Ο. στη συγκεκριμένη περιοχή οφείλεται στην αλλαγή πεδίου έκφρασης και επεξεργασίας και στη μετάβαση από τα ποσοστά στα κλάσματα και στους δεκαδικούς αριθμούς. Οι μαθητές της Π.Ο. δείχνουν να έχουν κατανοήσει αυτή την ισοδυναμία, με την επίδραση της διδακτικής παρέμβασης, κυρίως στην Α΄ φάση, όπου χρησιμοποιήθηκε η αλλαγή πεδίου έκφρασης και επεξεργασίας.

Εξάλλου, η καλή επίδοση της Π.Ο. σ’ αυτή την περιοχή θα πρέπει να συνδυαστεί με τα υψηλά ποσοστά που παρουσιάζει στα προβλήματα αναλόγων ποσών.

2. 2ο πρόβλημα αναλόγων ποσών (13ο θέμα)

Σε σχέση και με το προηγούμενο πρόβλημα αναλόγων ποσών διαπιστώνουμε ότι η Π.Ο. υπερέχει με στατιστικά σημαντική διαφορά της Ο.Ε. Η Π.Ο., υπό την επίδραση της διδακτικής παρέμβασης, κατακτά τις γνώσεις που της παρέχει η καθημερινή διδασκαλία και μπορεί να αντεπεξέλθει σε διαφορετικούς τύπους προβλημάτων αναλόγων ποσών, έχοντας και το σημαντικό πλεονέκτημα της ικανότητας για εκτέλεση πράξεων. Σπουδαίο ρόλο διαδραμάτισε και η διδασκαλία κριτηρίων αναλόγων ποσών, που προέκυψε ως επέκταση της γνώσης που αποκόμισαν στο πλαίσιο της διδακτικής παρέμβασης (βλ. 1ο πρόβλημα αναλόγων ποσών, §10.1).

11. ΓΕΝΙΚΟΣ ΣΧΟΛΙΑΣΜΟΣ ΤΩΝ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

11.1 Συνθετική παρουσίαση των αποτελεσμάτων

1. Στην περιοχή των πράξεων από μνήμης (4ο θέμα), η βελτίωση της Π.Ο. είναι πολύ μεγάλη στα περισσότερα ερωτήματα και διαφέρει από την Ο.Ε. με στατιστική σημαντικότητα.

Ερώτημα	Ποσοστό επιτυχίας				x^2/p 4η επίδοση	p για το binomial test (για την Π.Ο.)
	Π.Ο.		Ο.Ε.			
	1η επίδοση	4η επίδοση	1η επίδοση	4η επίδοση		
3,85·10000	12 60%	19 95%	63 54,3%	80 69%	5,838/0,016	0,016
0,0467·1000	17 85%	16 80%	64 55,2%	76 65,5%	1,635/0,201	1
4623·0,01	9 45%	16 80%	65 56%	70 60,3%	2,835/0,092	0,016
25,4·0,0001	8 40%	13 65%	34 29,3%	33 28,4%	10,182/0,001	0,031
1596,76:10000	9 45%	17 85%	37 31,9%	52 44,8%	11,014/0,001	0,011
5,37:100	5 25%	16 80%	27 23,3%	44 37,9%	12,246/0,001	0,001
67:0,01	4 20%	13 65%	17 14,7%	19 16,4%	0,001	0,011
3,57:0,001	7 35%	16 80%	17 14,7%	19 16,4%	36,127/0,001	0,002
600·700	15 75%	18 90%	77 66,4%	90 77,6%	0,248	0,375
90·80000	15 75%	17 85%	79 68,1%	83 71,6%	1,585/0,208	0,687
0,02·0,004	6 30%	14 70%	38 32,8%	39 33,6%	9,493/0,002	0,011
0,06·0,07	8 40%	13 65%	36 31%	48 41,4%	9,943/0,002	0,063
4900:70	6 30%	17 85%	58 50%	59 50,9%	8,064/0,005	0,001
320000:800	6 30%	18 90%	44 37,9%	49 42,2%	15,567/0,001	0,001
2,4:0,03	4 20%	16 80%	21 18,1%	27 23,3%	25,387/0,001	0,001
0,021:7	2 10%	14 70%	14 12,1%	22 19%	22,827/0,001	0,001

Παρατηρούμε ότι η Π.Ο. βελτιώνεται σε όλα τα ερωτήματα, εκτός από εκείνα όπου είχε μεγάλο ποσοστό και στην πρώτη μέτρηση. Έτσι, στους πολλαπλασιασμούς με αριθμούς του τύπου $\nu x 10^{\mu}$, όπου ν, $\mu \in N^*$ και $\nu<10$, (600·700 και 80·90000), οι μαθητές είχαν 75% επιτυχία αρχικά. Πρόκειται για ερωτήσεις, οι οποίες θεωρήθηκαν εύκολες κατά την πρώτη επίδοση, με αποτέλεσμα να έχουν και οι δύο ομάδες υψηλά ποσοστά. Βέβαια, υπάρχει βελτίωση 10-15% και στους δύο πολλαπλασιασμούς, αλλά η βελτίωση δεν είναι στατιστικά σημαντική, όπως και η διαφορά της Π.Ο. από την Ο.Ε.

Το ίδιο ισχύει και για τον πολλαπλασιασμό 0,0467·1000, όπου η Π.Ο. μειώνει το ποσοστό της σε σχέση με την πρώτη μέτρηση κατά 5%. Η Π.Ο. είχε σχετικά υψηλό ποσοστό επιτυχίας κατά την πρώτη μέτρηση, γεγονός που οφείλεται στο ότι δεν είναι απαραίτητη η συμπλήρωση με μηδενικά, μετά τη μετακίνηση της υποδιαστολής προς τα δεξιά. Φαίνεται πως αρχικά κάποιοι γνώριζαν πολύ καλά τον κανόνα για το συγκεκριμένο πολλαπλασιασμό, αλλά με την επίδραση της διδακτικής παρέμβασης και την εκμάθηση κι άλλων κανόνων που αφορούν σε άλλες περιπτώσεις, ο παλιός κανόνας αποσταθεροποιήθηκε. Αυτό είναι λογικό, καθώς, όπως έχει ήδη αναφερθεί η διδακτική παρέμβαση δεν ήταν σχεδιασμένη για τους πολύ αδύνατους μαθητές. Όμως, η Π.Ο. βελτιώνεται συνολικά στην περιοχή των πολλαπλασιασμών με θετικές δυνάμεις του 10, καθώς αρχικά το 60% καταφέρνει να απαντήσει και στους δύο πολλαπλασιασμούς, ενώ κατά την τέταρτη μέτρηση το 80% το επιτυγχάνει.

Η βελτίωση της Π.Ο. στη συγκεκριμένη περιοχή γίνεται σαφέστερη με τον παρακάτω πίνακα, όπου φαίνεται ότι αρχικά κανένας μαθητής δεν καταφέρνει να απαντήσει σε τουλάχιστον 14 από τα 16 ερωτήματα, ενώ κατά την τέταρτη μέτρηση 11 μαθητές το επιτυγχάνουν (p για το binomial test=0,001) και μάλιστα 8 μαθητές απαντούν επιτυχώς σε <u>όλα</u> τα ερωτήματα. Αντίθετα η Ο.Ε. έχει πολύ χαμηλή επίδοση και μόνο το 5,7% καταφέρνει να απαντήσει επιτυχώς σε τουλάχιστον 14 ερωτήματα από τα 16 (p για to Fisher Exact test=0,001).

1η επίδοση	Μαθητές που απάντησαν σωστά τουλάχιστον σε … ερωτήματα από τα 16			
	13	14	15	16
Π.Ο.	1 5%	0 0%	0 0%	0 0%
Ο.Ε.	8 6,9%	4 3,5%	1 0,9%	0 0%

4η επίδοση	Μαθητές που απάντησαν σωστά τουλάχιστον σε … ερωτήματα από τα 16			
	13	14	15	16
Π.Ο.	12 60%	11 55%	10 50%	8 40%
Ο.Ε.	12 10%	6 5,2%	5 4,3%	2 1,7%

Επίσης, διαπιστώνουμε ότι η Π.Ο. εμφανίζει μεγαλύτερα ποσοστά στη συγκεκριμένη περιοχή σε σχέση με τα υπόλοιπα θέματα του ερωτηματολογίου. Αυτό οφείλεται στο ότι η περιοχή αυτή αποτελούσε προαπαιτούμενη γνώση για τη διδασκαλία
κριτηρίων εκτίμησης και ελέγχου (Α΄ φάση) και κατά συνέπεια χρησιμοποιήθηκε σε όλες τις φάσεις διδασκαλίας, με αποτέλεσμα οι μαθητές να έχουν την ευκαιρία να εξασκηθούν πάρα πολύ καλά.

2. Στην περιοχή της εύρεση της τάξης μεγέθους καθώς και προσεγγίσεων μεγαλύτερης ακρίβειας διαπιστώνουμε τη στατιστικά σημαντική υπεροχή της απέναντι της Ο.Ε. σε όλα τα ερωτήματα. Η Π.Ο. βελτιώνεται και μάλιστα η βελτίωσή της είναι στατιστικά σημαντική στα περισσότερα ερωτήματα.

Η Ο.Ε. εμφανίζει ιδιαίτερα χαμηλά ποσοστά επιτυχίας στην περιοχή αυτή, αποκαλύπτοντας το διδακτικό κενό που παρατηρείται στην καθημερινή διδασκαλία, σχετικά με την εκτίμηση αποτελεσμάτων αριθμητικών πράξεων.

Ερώτημα	Ποσοστό επιτυχίας				x^2/p 4η επίδοση	p για το binomial test (για την Π.Ο.)
	Π.Ο.		Ο.Ε.			
	1η επίδοση	4η επίδοση	1η επίδοση	4η επίδοση		
57·83	9 45%	16 80%	75 64,7%	58 50%	6,189/0,013	0,027
3745·5321	8 40%	14 70%	16 13,8%	15 12,9%	0,001	0,008
289·574	1 5%	13 65%	20 17,2%	22 19%	18,915/0,001	0,001
17531:423	6 30%	9 45%	14 12,1%	9 7,8%	0,001	0,453
6143:28	6 30%	12 60%	19 16,4%	22 19%	19,915/0,001	0,035
4,37:235	2 10%	10 50%	15 12,9%	14 12,1%	0,001	0,004
0,035:48,32	9 45%	10 50%	22 19%	39 33,6%	4,718/0,029	0,5
62·73	11 55%	20 100%	58 50%	50 48,3%	18,512/0,001	0,002
4832·876	3 15%	19 95%	27 23,3%	25 21,6%	42,048/0,001	0,001
2181·1485	9 15%	19 95%	33 28,4%	22 19%	46,832/0,001	0,001
67952:317	10 50%	14 70%	21 18,1%	28 24,1%	16,816/0,001	0,172
26472:43	5 25%	9 45%	22 19%	23 19,8%	0,022	0,172
3,4:512	2 10%	14 70%	12 10,3%	16 13,8%	0,001	0,001
0,26:17,12	6 30%	10 50%	11 9,5%	9 7,8%	0,001	0,172

Είναι αξιοσημείωτο ότι το 40% των μαθητών της Π.Ο. καταφέρνει να απαντήσει σωστά τουλάχιστον σε 12 από τα 14 ερωτήματα, ενώ από την Ο.Ε. κανένας μαθητής δεν το επιτυγχάνει (p για το Fisher Exact test=0,001):

1η επίδοση	Μαθητές που απάντησαν σωστά τουλάχιστον σε … ερωτήματα από τα 14		
	12	13	14
Π.Ο.	0 0%	0 0%	0 0%
Ο.Ε.	0 0%	0 0%	0 0%

4η επίδοση	Μαθητές που απάντησαν σωστά τουλάχιστον σε … ερωτήματα από τα 14		
	12	13	14
Π.Ο.	8 40%	5 25%	3 15%
Ο.Ε.	0 0%	0 0%	0 0%

Παρατηρούμε ότι ενώ αρχικά κανένας μαθητής δεν καταφέρνει να απαντήσει με επιτυχία τουλάχιστον σε 12 ερωτήματα, τελικά το 40% των μαθητών της Π.Ο. το καταφέρνει (p για το binomial test=0,001) και μάλιστα υπάρχει και ένα 15% που απαντά σε όλα τα ερωτήματα. Αντίθετα, κανείς μαθητής από την Ο.Ε. δεν καταφέρνει να έχει παρόμοια επίδοση.

Γενικότερα στην περιοχή της εύρεσης της τάξης μεγέθους καθώς και προσεγγίσεων μεγαλύτερης ακρίβειας, παρατηρούμε ότι μεγαλύτερα ποσοστά εμφανίζουν οι μαθητές στο ενδέκατο θέμα, το οποίο δεν είναι πολλαπλής επιλογής αλλά ανοιχτό. Η αιτία, όπως φάνηκε ήδη κατά η διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης, είναι ότι όταν ζητείται από τους μαθητές να βρουν την τάξη μεγέθους προσπαθούν να εφαρμόσουν τον κανόνα εύρεσης της τάξης μεγέθους τον οποίο διδάχτηκαν (βλ. §5.3.2.1), ενώ μπορούν με μεγαλύτερη ευχέρεια να βρουν την τάξη μεγέθους, αφού αναδιατυπώσουν τα αριθμητικά δεδομένα με διάφορες τεχνικές στρογγυλοποίησης. Εξαίρεση αποτελούν οι διαιρέσεις δεκαδικών στο δέκατο θέμα, όπου οι μαθητές στρογγυλοποιούν τα αριθμητικά δεδομένα στο πρώτο ψηφίο με βάση το συνήθη κανόνα και στη συνέχεια προχωρούν σταδιακά στην εύρεση της τάξης μεγέθους του πηλίκου ακολουθώντας τον κανόνα της διαίρεσης αριθμών του τύπου $\nu x10^{\mu}$, όπου ν φυσικός και μ αρνητικός ακέραιος (βλ. §9.2.1 Α΄ φάση, ι), υποσημείωση 81). Δεν διδάχθηκαν τον κανόνα εύρεσης της τάξης μεγέθους (βλ. §5.3.2.1), καθώς εμπλέκονται αρνητικοί αριθμοί, οι οποίοι δεν ανήκουν στην ύλη του Δημοτικού σχολείου. Έτσι, υπάρχει ενοποίηση του τρόπου εύρεσης της τάξης μεγέθους που διδάχθηκαν με την εύρεση της προσέγγισης με στρογγυλοποίηση, με συνέπεια να παρουσιάζουν οι μαθητές ίδιο ποσοστό επιτυχίας σε όλες τις διαιρέσεις δεκαδικών, με εξαίρεση τη διαίρεση 3,4:512, όπου το ποσοστό επιτυχίας είναι υψηλότερο λόγω της φύσης των αριθμητικών δεδομένων που ευνοούν την εφαρμογή τεχνικής για ευχερή νοερό υπολογισμό [3:500=(2·3):1000=0,006].

Σ’ αυτό το σημείο θα μπορούσε να δοθεί μεγαλύτερη έμφαση στον κανόνα εύρεσης της τάξης μεγέθους ώστε να εξασκηθούν περισσότερο οι μαθητές ή να ενθαρρυνθούν οι μαθητές να επιλέγουν όποιο τρόπο θέλουν ανάλογα με τις δυνατότητές τους.

Επίσης, διαπιστώνουμε μια αναλογία των ποσοστών του δέκατου θέματος με τα ποσοστά των αντίστοιχων ερωτημάτων του ενδέκατου θέματος. Δηλαδή, στο δέκατο θέμα το μεγαλύτερο ποσοστό αντιστοιχεί στον πολλαπλασιασμό διψήφιου επί διψήφιο και ακολουθούν τα ποσοστά των πολλαπλασιασμών πολυψήφιων, όπως και στο ενδέκατο θέμα. Έπεται η διαίρεση 6143:28 όπου το πρώτο ψηφίο του διαιρέτη είναι μικρότερο από το πρώτο ψηφίο του διαιρετέου, όπως άλλωστε και η διαίρεση 67952:317 στο ενδέκατο θέμα. Στη συνέχεια ακολουθούν οι διαιρέσεις δεκαδικών. Βέβαια, στο ενδέκατο θέμα στη διαίρεση 3,4:512 το ποσοστό είναι μεγαλύτερο, γεγονός όμως που ερμηνεύεται με βάση τη φύση των αριθμητικών δεδομένων, καθώς ευνοείται η εφαρμογή ιδιαίτερης τεχνικής για ευχερή νοερό υπολογισμό μετά την αναδιατύπωση των αριθμητικών δεδομένων. Τέλος, έχουμε τη διαίρεση 17531:423 η οποία αντιστοιχεί στη διαίρεση 26472:43 του ενδέκατου θέματος, στην οποία το πρώτο ψηφίο του διαιρετέου είναι μικρότερο από το πρώτο ψηφίο του διαιρέτη, όπου το ποσοστό είναι χαμηλότερο σε σχέση με τα υπόλοιπα ερωτήματα.

Επίσης, διαπιστώνουμε ότι η Π.Ο. εμφανίζει τα μεγαλύτερα ποσοστά επιτυχίας στους πολλαπλασιασμούς σε αντιδιαστολή με τις διαιρέσεις, κατ’ αναλογία με τα υπόλοιπα θέματα του ερωτηματολογίου (3ο και 4ο θέμα).

Ακόμη, διαπιστώνουμε ότι τα ποσοστά επιτυχίας στις διαιρέσεις δεκαδικών δεν αποκλίνουν από τα αντίστοιχα ποσοστά στις διαιρέσεις ακεραίων. Οι μαθητές, για την εύρεση της τάξης μεγέθους ή προσεγγίσεων μεγαλύτερης ακρίβειας, επηρεάζονται περισσότερο από τη φύση των ψηφίων του διαιρέτη και του διαιρετέου και όχι από το αν είναι δεκαδικοί ή ακέραιοι, σε αντιδιαστολή με τα ευρήματα των Bestgen et al. (1982), Levine (1982), Hanson & Hogan (2000) (βλ. §4.2.1).

Εξάλλου, παρατηρούμε ότι τα ποσοστά επιτυχίας σ' αυτή την περιοχή είναι σε γενικές γραμμές χαμηλότερα σε σχέση με άλλα ερωτήματα του ερωτηματολογίου. Αυτό οφείλεται στο ότι οι υπόλοιπες περιοχές αποτέλεσαν αντικείμενο επεξεργασίας στο πλαίσιο της διδακτικής παρέμβασης κατά τη διάρκεια των πρώτων φάσεων, ενώ κάποιες απ' αυτές ξαναχρησιμοποιήθηκαν και στις τελευταίες φάσεις (π.χ. οι υπολογισμοί με δυνάμεις του 10 και με αριθμούς του τύπου $\nu x10^{\mu}$, όπου $\nu \in N$ και $\mu \in Z$, αποτέλεσαν προαπαιτούμενες γνώσεις για την εκτίμηση με στρογγυλοποίηση). Αντίθετα, η επεξεργασία της εύρεση της τάξης μεγέθους καθώς και προσεγγίσεων μεγαλύτερης ακρίβειας έγινε μόνο κατά την Γ΄ και Δ΄ φάση.

3. Στην περιοχή των πολλαπλασιασμών και των διαιρέσεων διαπιστώνουμε τη στατιστικά σημαντική βελτίωση της Π.Ο. και τη στατιστικά σημαντική υπεροχή της υπέρ της Ο.Ε. στο σύνολο των ερωτημάτων.

Ερώτημα	Ποσοστό επιτυχίας				x^2/p 4η επίδοση	p για το binomial test (για την Π.Ο.)
	Π.Ο.		Ο.Ε.			
	1η επίδοση	4η επίδοση	1η επίδοση	4η επίδοση		
11,42·3.7	9 45%	15 75%	64 55,2%	57 49,1%	4,58/0,032	0,035
27,8·0,03	9 45%	18 90%	68 58,6	61 52,6%	9,808/0,002	0,002
1287:75	7 35%	14 70%	29 25%	35 30,2%	11,744/0,001	0,008
7454:29	4 20%	10 50%	24 20,7%	20 17,2%	0,003	0,017
1082:19	3 15%	11 55%	18 15,5%	22 19%	0,001	0,004

Η βελτίωση της Π.Ο. προκύπτει ως απόρροια της επίδρασης της διδακτικής παρέμβασης, καθώς κατά την Ε΄ φάση ζητούνταν από τους μαθητές να εκτελέσουν πράξεις. Αρχικά, γινόταν εκτίμηση του αποτελέσματος, στη συνέχεια εκτελούνταν η πράξη, κατόπιν εφαρμοζόταν το κριτήριο ελέγχου. Αν το κριτήριο έδειχνε ότι υπάρχει λάθος, επανεκτελούνταν ο αλγόριθμος. Τέλος, γινόταν σύγκριση του αποτελέσματος με την αρχική εκτίμηση. Έτσι, συνδυάζονταν τα κριτήρια εκτίμησης με τα κριτήρια ελέγχου.

Στα συγκεκριμένα ερωτήματα δεν μπορεί να διαπιστωθεί η εφαρμογή κριτηρίων εκτίμησης. Όμως, παρατηρούμε ότι οι μαθητές της Π.Ο. εφαρμόζουν κριτήρια ελέγχου στη μεγάλη πλειοψηφία τους, σε αντίθεση με την Ο.Ε. από την οποία κανένας μαθητής δεν εφαρμόζει κριτήρια ελέγχου.

Πολλαπλασιασμοί και διαιρέσεις		
Εκτέλεση δοκιμών	Π.Ο.	Ο.Ε.
11,42·3,7	16 80%	0 0%
27,8·0,03	16 80%	0 0%
1287:75	15 75%	0 0%
7454:29	13 65%	0 0%
1082:19	13 65%	0 0%

Η επίδοση της Ο.Ε. είναι ιδιαίτερα χαμηλή στους πολλαπλασιασμούς και τις διαιρέσεις, γεγονός που υποδηλώνει την ανεπάρκεια της καθημερινής διδασκαλίας να καλύψει τέτοιου είδους ελλείψεις των μαθητών, με συνέπεια να τελειώνουν το Δημοτικό και οι μισοί να μην μπορούν να εκτελέσουν σωστά πολλαπλασιασμούς, ενώ η μεγάλη πλειοψηφία δεν είναι σε θέση να εκτελεί διαιρέσεις.

Βέβαια, υπάρχει ένα ποσοστό μαθητών της Π.Ο. οι οποίοι τελικά δεν κατάφεραν να προσπελάσουν τις δυσκολίες τους αναφορικά στην εκτέλεση πολλαπλασιασμών και διαιρέσεων. Όμως, θα πρέπει να τονιστεί ότι η διδακτική παρέμβαση ήταν σχεδιασμένη με τέτοιο τρόπο ώστε να απευθύνεται στους μέσους και στους καλούς μαθητές, με αποτέλεσμα οι αδύνατοι να μην μπορούν να απαγκιστρωθούν από τις μαθησιακές δυσκολίες τους.

Επίσης, στην Π.Ο. παρατηρούμε ότι οι μαθητές έχουν καλύτερη επίδοση στους πολλαπλασιασμούς σε σχέση με τις διαιρέσεις, γεγονός που υποδηλώνει τη δυσκολία του αλγορίθμου της διαίρεσης. Ακόμη, υπάρχει απόκλιση των ποσοστών στους διαφορετικούς τύπους διαιρέσεων, με το ποσοστό επιτυχίας να μειώνεται στις περιπτώσεις που η διαίρεση έχει κάποιο βαθμό δυσκολίας.

4. Βελτίωση της Π.Ο. παρατηρείται επίσης και στις αφαιρέσεις δεκαδικών αριθμών, με εξαίρεση την τρίτη αφαίρεση, όπου το ποσοστό επιτυχίας ήταν αρκετά υψηλό από την πρώτη μέτρηση. Η τρίτη αφαίρεση θεωρήθηκε εύκολη κατά την πρώτη μέτρηση, καθώς μειωτέος και αφαιρετέος έχουν ίδιο αριθμό δεκαδικών ψηφίων. Η μείωση του ποσοστού της Π.Ο. σ’ αυτή την αφαίρεση οφείλεται στο ότι 3 μαθητές (15%) κάνουν λάθος σε μια μονοψήφια πράξη, γεγονός που σημαίνει ότι γνωρίζουν τον αλγόριθμο και η αποτυχία τους αποδίδεται σε βιαστική εκτέλεση.

Ερώτημα	Ποσοστό επιτυχίας				x^2/p 4η επίδοση	p για το binomial test (για την Π.Ο.)
	Π.Ο.		Ο.Ε.			
	1η επίδοση	4η επίδοση	1η επίδοση	4η επίδοση		
826-9,64	7 35%	15 75%	47 40,5%	48 41,4%	7,755/0,005	0,004
35,5-8,745	7 35%	14 70%	56 48,3%	56 48,3%	3,223/0,073	0,008
82,46-7,57	17 85%	14 70%	78 67,2%	75 64,7%	0,215/0,643	0,188

Η βελτίωση της Π.Ο. στις δύο πρώτες αφαιρέσεις είναι προφανής και υπερέχει της Ο.Ε. Κατά τη διάρκεια όλων των φάσεων υπήρξε ενασχόληση με τους δεκαδικούς αριθμούς, αλλά και με τις από μνήμης αφαιρέσεις. Οι μαθητές, με την επίδραση της διδακτικής παρέμβασης, έχουν κατανοήσει τους δεκαδικούς αριθμούς και τη σχέση τους με τους ακεραίους και έχουν προσπελάσει δυσκολίες που έχουν σχέση με τη θεσιακή αξία των ψηφίων (κατανόηση του δεκαδικού αριθμητικού μας συστήματος), την υποδιαστολή και τη στοίχιση ως προς αυτή. Αυτό φαίνεται ειδικά στην πρώτη αφαίρεση, όπου ο μειωτέος είναι ακέραιος και δεν υπάρχει υποδιαστολή, αλλά και στη δεύτερη αφαίρεση, όπου οι μαθητές δείχνουν να έχουν κατανοήσει ότι ο μειωτέος έχει στο δεκαδικό του μέρος μόνο δέκατα, ενώ ο αφαιρετέος έχει δέκατα, εκατοστά, χιλιοστά.

Επίσης, είναι σημαντικό ότι και στις τρεις αφαιρέσεις το 35% των μαθητών εκτελούν δοκιμή για τον έλεγχο της ορθότητας του αποτελέσματος, ενώ δεν μπορεί να φανεί ο αριθμός των μαθητών που εκτελούν δοκιμή νοερά, προσθέτοντας απευθείας τα ψηφία της διαφοράς με τα ψηφία του αφαιρετέου για να βρεθεί ο μειωτέος. Αντίθετα, <u>κανένας</u> μαθητής από την Ο.Ε. δεν εκτελεί δοκιμή.

Ακόμη, διαπιστώνουμε σημαντική βελτίωση του ποσοστού των μαθητών της Π.Ο., που απαντούν σωστά και στις 3 αφαιρέσεις. Η Π.Ο. διπλασιάζει το ποσοστό επιτυχίας φτάνοντας στο 60% (p για το binomial test=0,035), διαφέροντας σημαντικά από την Ο.Ε., η οποία παρουσιάζει μικρή κάμψη (x^2=8,189, p=0,004).

1η επίδοση	Μαθητές που πέτυχαν σε…αφαιρέσεις από τις 3	
	2	3
Π.Ο.	8 40%	6 30%
Ο.Ε.	58 50%	39 33,6%

4η επίδοση	Μαθητές που πέτυχαν σε…αφαιρέσεις από τις 3	
	2	3
Π.Ο.	14 70%	12 60%
Ο.Ε.	59 50,9%	32 27,6%

5. Στις μετατροπές δεκαδικών αριθμών σε κλάσματα και αντίστροφα, η Π.Ο. παρουσιάζει μια στατιστικά σημαντική βελτίωση σε όλα τα ερωτήματα. Μάλιστα, επιτυγχάνει να ανατρέψει την πρότερη υπεροχή της Ο.Ε. και να δημιουργήσει μια στατιστικά σημαντική διαφορά υπέρ της, σχεδόν σε όλα τα ερωτήματα.

Ερώτημα	Ποσοστό επιτυχίας				x^2/p 4η επίδοση	p για το binomial test (για την Π.Ο.)
	Π.Ο.		Ο.Ε.			
	1η επίδοση	4η επίδοση	1η επίδοση	4η επίδοση		
0,064	3 15%	12 60%	47 40,5%	57 49,1%	0,805/0,37	0,006
2,36	5 25%	16 80%	41 35,3%	58 50%	6,189/0,019	0,002
9/1000	8 40%	15 75%	58 50%	75 64,7%	0,816/0,366	0,008
453/10	4 20%	12 60%	32 27,6%	48 41,4%	2,399/0,121	0,011
6/8	1 5%	8 40%	11 9,5%	21 18,1%	0,038	0,008
9/15	1 5%	9 45%	15 12,9%	17 14,7%	0,004	0,004

Κατά την Α΄ φάση της διδακτικής παρέμβασης έγινε χρήση αλλαγής πεδίου έκφρασης και επεξεργασίας, περνώντας από τη δεκαδική γραφή των αριθμών στην κλασματική, προκειμένου να υπάρξει μεγαλύτερος βαθμός κατανόησης των αλγορίθμων (βλ. §.5.2.1). Επίσης, η χρήση της κλασματικής γραφής των αριθμών χρησιμοποιήθηκε και ως κριτήριο ελέγχου (βλ. §5.4). Αυτό είχε σαν αποτέλεσμα την εξοικείωση των μαθητών με τους κλασματικούς αριθμούς και την κατανόηση της ισοδυναμίας τους με τους δεκαδικούς. Τα ποσοστά επιτυχίας είναι χαμηλότερα σε σχέση με άλλες περιοχές, ωστόσο η διδακτική παρέμβαση δεν είχε ως αντικείμενο επεξεργασίας τις μετατροπές, αλλά η βελτίωση προέκυψε ως συνέπεια της αλλαγής πεδίου έκφρασης και επεξεργασίας.

Παρατηρούμε επίσης ότι οι μαθητές της Π.Ο. εμφανίζουν χαμηλότερα ποσοστά επιτυχίας στις μετατροπές μη δεκαδικών κλασμάτων σε δεκαδικούς αριθμούς. Αυτό οφείλεται στο ότι η αλλαγή πεδίου έκφρασης και επεξεργασίας αφορούσε σε δεκαδικά κλάσματα. Ιδιαίτερα χαμηλά είναι τα ποσοστά της Ο.Ε., γεγονός που υποδηλώνει την έλλειψη κατανόησης των κλασμάτων ως διαιρέσεις, καθώς και της κατανόησης της σύνδεσης των κλασμάτων με τους δεκαδικούς αριθμούς.

Η σύγκριση του ποσοστού των μαθητών που εκτελούν σωστά τουλάχιστον τις 5 από τις 6 μετατροπές υποδηλώνει την υπεροχή της Π.Ο. (p για το Fisher Exact test=0,007 και p για το binomial test=0,008)

1η επίδοση	Μαθητές που πέτυχαν τουλάχιστον σε … μετατροπές από τις 6		
	4	5	6
Π.Ο.	1 5%	1 5%	1 5%
Ο.Ε.	24 20,7%	19 16,4%	16 13,8%

4η επίδοση	Μαθητές που πέτυχαν τουλάχιστον σε … μετατροπές από τις 6		
	4	5	6
Π.Ο.	11 55%	9 45%	7 35%
Ο.Ε.	38 32,8%	29 25%	19 16,4%

Έτσι, ενώ αρχικά υπερείχε η Ο.Ε., στην τέταρτη επίδοση υπερέχει η Π.Ο. και μάλιστα το 35% των μαθητών καταφέρνουν να κάνουν και τις 6 μετατροπές.

6. Στην εκτέλεση πράξεων μεταξύ κλασμάτων η Π.Ο. βελτιώνεται σημαντικά και υπερέχει της Ο.Ε., η οποία εμφανίζει κάμψη του ποσοστού επιτυχίας. Η κάμψη αυτή αντικατοπτρίζει την έλλειψη ενασχόλησης με τους κλασματικούς αριθμούς κατά τη διάρκεια της Στ΄ τάξης, αφού δεν προβλέπεται ούτε από το αναλυτικό πρόγραμμα, ούτε από το διδακτικό εγχειρίδιο.

Ερώτημα	Ποσοστό επιτυχίας				x^2/p 4η επίδοση	p για το binomial test (για την Π.Ο.)
	Π.Ο.		Ο.Ε.			
	1η επίδοση	4η επίδοση	1η επίδοση	4η επίδοση		
13/18+14/24	7 35%	10 50%	25 21,6%	20 17,2%	0,003	0,188
4/15·7/8	12 60%	19 95%	57 49,1%	39 33,6%	26,275/0,001	0,002
8/10:7/12	8 40%	17 85%	32 27,6%	24 20,7%	33,503/0,001	0,004

Η Π.Ο. βελτιώνεται σε όλες τις πράξεις. Μεγαλύτερη είναι η βελτίωσή της στον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση, ως απόρροια της αλλαγής πεδίου έκφρασης και επεξεργασίας κατά την Α΄ φάση και τη μετάβαση στην κλασματική γραφή των αριθμών, που αφορούσε σε πολλαπλασιασμούς και διαιρέσεις (βλ. παραπάνω). Έτσι, στην πρόσθεση η βελτίωση είναι μικρότερη.

7. Στα προβλήματα προσθετικών δομών δεν παρατηρείται μια συνολική βελτίωση της Π.Ο., έπειτα από την επίδραση της διδακτικής παρέμβασης. Στο δεύτερο πρόβλημα, όπου είναι γνωστή η σύνθεση και ζητείται η δεύτερος μετασχηματισμός, η Π.Ο. βελτιώνεται και μάλιστα υπερέχει της Ο.Ε. με στατιστικά σημαντική διαφορά. Όμως στο πρώτο πρόβλημα δεν υπάρχει βελτίωση. Αυτό οφείλεται στο ότι στο πρώτο πρόβλημα η λύση απαιτεί πρόσθεση, μια πράξη αντίθετη απ’ αυτή που υποδηλώνει η σύνθεση, αλλά οι μαθητές επηρεάζονται από τα αριθμητικά δεδομένα, καθώς η τελική κατάσταση (σύνθεση) είναι ότι χάνει 4 μπίλιες, οι οποίες είναι λιγότερες απ’ αυτές που κέρδισε στη δεύτερη παρτίδα (9) και οδηγούνται στην επιλογή της αφαίρεσης. Στο δεύτερο πρόβλημα η τελική κατάσταση είναι ότι κερδίζει 8 μπίλιες, οι οποίες είναι λιγότερες απ’ αυτές που κέρδισε στην πρώτη παρτίδα (14) και εκτελούν αφαίρεση, η οποία είναι και η σωστή πράξη. Έτσι, εμφανίζουν μεγαλύτερα ποσοστά στο δεύτερο πρόβλημα.

Θέμα	Ποσοστό επιτυχίας				x^2/p 4η επίδοση	p για το binomial test (για την Π.Ο.)
	Π.Ο.		Ο.Ε.			
	1η επίδοση	4η επίδοση	1η επίδοση	4η επίδοση		
1ο πρόβλημα Vergnaud	3 15%	2 10%	7 6%	10 8,6%	0,69	0,5
2ο πρόβλημα Vergnaud	9 45%	12 60%	33 28,4%	38 32,8%	5,445/0,02	0,253

Παρόλο που φαίνεται ότι δεν υπάρχει συνολική επίδραση στα προβλήματα προσθετικών δομών και οι μαθητές δείχνουν ότι δεν έχουν αποκτήσει βαθιά και ουσιαστική κατανόηση, μπορούμε να διαπιστώσουμε μια μεταβολή στη συμπεριφορά της Π.Ο. στην περιοχή αυτή. Ενώ αρχικά αρκετοί μαθητές κατέφευγαν στην επιλογή άλλων πράξεων, εκτός πρόσθεσης και αφαίρεσης, κατά την τέταρτη μέτρηση όλοι επιλέγουν μόνο πρόσθεση ή αφαίρεση. Δηλαδή έχουν κατανοήσει ότι αυτού του τύπου τα προβλήματα απαιτούν πρόσθεση ή αφαίρεση, αλλά συγχέονται καθώς δε γνωρίζουν ποια να επιλέξουν.

Εκτέλεση μόνο πρόσθεσης ή αφαίρεσης	Ποσοστό επιτυχίας				x^2/p 4η επίδοση	p για το binomial test (για την Π.Ο.)
	Π.Ο.		Ο.Ε.			
	1η επίδοση	4η επίδοση	1η επίδοση	4η επίδοση		
1ο πρόβλημα Vergnaud	15 75%	20 100%	76 65,5%	84 72,4%	0,004	0,031
2ο πρόβλημα Vergnaud	14 70%	20 100%	78 67,2%	80 69%	x^2=8,441 p=0,004	0,016

Αυτή η μεταβολή είναι απόρροια της διδακτικής παρέμβασης, καθώς δεν παρατηρείται στη συμπεριφορά της Ο.Ε., της οποίας αρκετοί μαθητές και κατά την τέταρτη μέτρηση καταφεύγουν στην επιλογή άλλων πράξεων, εκτός πρόσθεσης και αφαίρεσης.

Για να υπάρξει ουσιαστική και συνολική βελτίωση στην περιοχή των προσθετικών δομών, απαιτείται διαφορετικού είδους προσέγγιση και διδακτική παρέμβαση που να στοχεύει στην άρση των δυσκολιών αυτών των προβλημάτων.

8. Στο πρόβλημα των αναλόγων ποσών διαπιστώνουμε τη στατιστικά σημαντική βελτίωση της Π.Ο. Τα προβλήματα αναλόγων ποσών ανήκουν στη διδακτέα ύλη της Στ΄ Δημοτικού, σύμφωνα με το αναλυτικό πρόγραμμα, για την περίοδο Φεβρουάριο-Απρίλιο. Αυτό έχει ως συνέπεια τη βελτίωση και της Ο.Ε., μόνο όμως ως προς την επιλογή της σωστής μεθόδου επίλυσης. Ωστόσο, η στατιστικά σημαντική υπεροχή της Π.Ο. έναντι της Ο.Ε. κατά την τέταρτη μέτρηση, τόσο συνολικά (μέθοδος και σωστή εκτέλεση πράξεων), όσο και ως προς τη μέθοδο μόνο, ενισχύει την επίδραση της διδακτικής παρέμβασης στη συγκεκριμένη περιοχή.

Θέμα	Ποσοστό επιτυχίας				x^2/p 4η επίδοση	p για το binomial test (για την Π.Ο.)
	Π.Ο.		Ο.Ε.			
	1η επίδοση	4η επίδοση	1η επίδοση	4η επίδοση		
Πρόβλημα αναλόγων ποσών	0 0%	13 65%	7 6%	9 7,8%	0,001	0,001
Μέθοδος επίλυσης	0 0%	20 100%	21 18,1%	41 35,3%	0,001	0,001
Εκτέλεση πράξεων	3 15%	13 65%	21 18,1%	20 17,2%	0,001	0,001

Κατά πρώτο λόγο οι μαθητές, υπό την επίδραση της διδακτικής παρέμβασης, βελτιώνονται στην εκτέλεση πολλαπλασιασμών και διαιρέσεων (βλ. 3ο συμπέρασμα) και έτσι μπορούν με επιτυχία να εκτελέσουν τις πράξεις που απαιτούνται στο συγκεκριμένο θέμα.

Επίσης, κατά τη διάρκεια της καθημερινής διδασκαλίας, διδάσκονταν κριτήρια εκτίμησης και ελέγχου των αναλόγων ποσών. Συγκεκριμένα, ζητούνταν από τους μαθητές να εφαρμόσουν το κριτήριο των συναυξανόμενων ποσών και αφού έλυαν το πρόβλημα, σύγκριναν το αποτέλεσμα με την αρχική τους εκτίμηση. Επίσης, συχνά και από όποιους μαθητές ήταν δυνατό σύμφωνα με τις ικανότητές τους, η εκτίμηση του αποτελέσματος γινόταν με βάση τον πρώτο λόγο και την αναλογική σχέση αριθμητή και παρονομαστή (όχι απλή σχέση διάταξης). Η εφαρμογή κριτηρίων εκτίμησης και ελέγχου στα ανάλογα ποσά ήρθε ως επέκταση της διδασκαλίας κριτηρίων εκτίμησης και ελέγχου, στο πλαίσιο της διδακτικής παρέμβασης.

Έτσι, εικάζει κανείς μια αλλαγή στη στάση του εκπαιδευτικού που διδάσκει κριτήρια εκτίμησης και ελέγχου και μια επιθυμία να επεκτείνει τη διδασκαλία και σε άλλες μαθηματικές περιοχές.

Από την άλλη, οι ίδιοι οι μαθητές γίνονται πιο δεκτικοί στην επέκταση της γνώσης και μπορούν με μεγαλύτερη ευκολία να αφομοιώσουν άλλα κριτήρια που αφορούν σε άλλες περιοχές.

Βέβαια, είναι απαραίτητη μια περαιτέρω ανάλυση για να φωτιστεί η συγκεκριμένη περιοχή, σε ό,τι αφορά τη στάση εκπαιδευτικού και μαθητών.

Η Π.Ο. εξάλλου, εμφανίζει σταθερότητα στην επίδοσή της στο πρόβλημα αναλόγων ποσών, όπως φαίνεται από την εξέλιξή της κατά τη διάρκεια της δεύτερης, τρίτης και τέταρτης επίδοσης (βλ. §10.2).

Η καλή επίδοση της Π.Ο. στην περιοχή των αναλόγων ποσών ενισχύεται και από το 2ο πρόβλημα αναλόγων ποσών που δόθηκε κατά την τέταρτη μέτρηση, όπου και πάλι η Π.Ο. υπερέχει με στατιστικά σημαντική διαφορά της Ο.Ε.:

θέμα	Ποσοστό επιτυχίας 4η επίδοση		x^2/p 4η επίδοση
	Π.Ο.	Ο.Ε.	
2ο πρόβλημα αναλόγων ποσών	11 55%	18 15,5%	0,001

Εξάλλου, στον υπολογισμό ποσοστών (12ο θέμα) η Π.Ο. υπερέχει με στατιστικά σημαντική διαφορά της Ο.Ε., γεγονός που ενισχύει την επίδραση της διδακτικής παρέμβασης στην περιοχή των αναλόγων ποσών και των πολλαπλασιαστικών δομών γενικότερα.

θέμα	Ποσοστό επιτυχίας 4η επίδοση		x^2/p 4η επίδοση
	Π.Ο.	Ο.Ε.	
το 10% του 350	20 100%	65 56%	x^2=14,069 p=0,001
το 20% του 900	15 75%	42 36,2%	x^2=10,545 p=0,002
το 25% του 8000	13 65%	27 23,3%	x^2=14,304 p=0,001

Επίσης, η καλή επίδοση της Ο.Ε. στην περιοχή αυτή οφείλεται στην ικανότητα για νοερούς υπολογισμούς που απέκτησε κατά την Α΄ και Β΄ φάση, καθώς και στην ικανότητα για αλλαγή πεδίου έκφρασης και επεξεργασίας και μετάβαση από τα ποσοστά σε κλάσματα και δεκαδικούς αριθμούς.

Τα παραπάνω συμπεράσματα επαληθεύουν τις υποθέσεις της έρευνας (§8.5), καθώς η Π.Ο. βελτιώνεται σημαντικά σε όλες τις περιοχές του ερωτηματολογίου *(2η υπόθεση)*, με εξαίρεση τα προβλήματα του Vergnaud, όπου όμως παρατηρείται μια μικρή μεταβολή, υπερέχει της Ο.Ε. με στατιστικά σημαντική διαφορά *(1η υπόθεση)* και διατηρεί σχεδόν σταθερό το ποσοστό επιτυχίας ένα μήνα μετά το πέρας της διδακτικής παρέμβασης *(3η υπόθεση)*.

11.2 Συζήτηση

Μέσα από την ανάλυση των αποτελεσμάτων της έρευνας, είναι ευδιάκριτη η σημαντική επίδραση της διδακτικής παρέμβασης, σε διάφορες γνωστικές περιοχές. Οι μαθητές βελτιώνονται σημαντικά στην εκτέλεση πράξεων από μνήμης, στη γραπτή εκτέλεση πράξεων, αλλά και σε άλλες γνωστικές περιοχές.

Ωστόσο, πέρα από την εμφανή επίδραση της διδακτικής παρέμβασης, υπάρχουν κάποια σημεία που δίνουν το ερέθισμα για περαιτέρω συζήτηση.

Αρχικά, θα μπορούσε να εικάσει κανείς μια αλλαγή στη νοοτροπία του εκπαιδευτικού που διδάσκει κριτήρια εκτίμησης και ελέγχου, καθώς επεκτείνει αυθόρμητα τη διδασκαλία και σε άλλες γνωστικές περιοχές και προσπαθεί να καλλιεργήσει στους μαθητές τη στάση να πραγματοποιούν εκτιμήσεις και ελέγχους. Έτσι, η επέκταση της διδασκαλίας γίνεται στις πολλαπλασιαστικές δομές, όπου διδάσκονται κάποια κριτήρια εκτίμησης και ελέγχου.

Οι μαθητές με τη σειρά τους τροποποιούν τη στάση τους και γίνονται πιο δεκτικοί στη διδασκαλία κριτηρίων εκτίμησης και ελέγχου που αφορούν σε άλλες μαθηματικές περιοχές. Είναι δυνατό μάλιστα να επιζητούν οι ίδιοι να γνωρίσουν κι άλλα κριτήρια.

Απόρροια αυτής της αλλαγής είναι, όπως φάνηκε από την ανάλυση των αποτελεσμάτων, η επιρροή στις πολλαπλασιαστικές δομές. Ο εκπαιδευτικός διδάσκει κριτήρια εκτίμησης και ελέγχου που αφορούν στα ανάλογα ποσά και οι μαθητές, έχοντας γίνει δεκτικοί σε μια τέτοια διδασκαλία, μπορούν ευκολότερα να αφομοιώσουν τη νέα γνώση.

Επίσης, όπως φάνηκε μέσα από την υλοποίηση της διδακτικής παρέμβασης, οι μαθητές μπορούν, με τη βοήθεια του εκπαιδευτικού, να κατασκευάσουν ένα δίκτυο κριτηρίων εκτίμησης και ελέγχου και να προβαίνουν στην επιλογή των κατάλληλων κριτηρίων ανάλογα με την εκάστοτε προβληματική κατάσταση. Οι μαθητές μπορούν να κάνουν επιλογές ανάλογα με το κόστος εφαρμογής και τη βεβαιότητα που παρέχουν οι δοκιμές για την ορθότητα της πράξης, αλλά και να εκτιμούν, κάνοντας την κατάλληλη αναδιατύπωση των αριθμητικών δεδομένων (βλ. σχετικά §9.2.2).

Αυτό έχει ως συνέπεια οι μαθητές να αποκτούν ελαστικότερο τρόπο σκέψης στην αριθμητική, καθώς αποδεσμεύονται από τον τυποποιημένο τρόπο της μοναδικής λύσης και απάντησης για την εκτίμηση (βλ. Sowder & Wheeler, 1989, p. 132), και του μοναδικού ορθού τρόπου ελέγχου.

Ωστόσο, το έλλειμμα σε ό,τι αφορά τη διδασκαλία κριτηρίων εκτίμησης και ελέγχου είναι μεγάλο, όπως διαφαίνεται από την επίδοση της Ο.Ε., αλλά και της Π.Ο. πριν την πραγματοποίηση της διδακτικής παρέμβασης.

Τα παραπάνω τονίζουν τη σημαντική επίδραση της διδακτικής παρέμβασης που πραγματοποιήθηκε στη βελτίωση των μαθητών της Π.Ο. στις περιοχές που αναφέρθηκαν και αναδεικνύουν τα πολλαπλά οφέλη που απορρέουν από τη χρήση κριτηρίων εκτίμησης και ελέγχου (βλ. §7.5). Μέσα απ’ αυτή τη διαπίστωση, προκύπτουν μια σειρά προτάσεων:

1. Ισχυρές ενδείξεις που προκύπτουν από την παρούσα έρευνα ενισχύουν τα ευρήματα άλλων ερευνών που συνιστούν να ενσωματωθεί η διδασκαλία κριτηρίων εκτίμησης και ελέγχου των αλγορίθμων των τεσσάρων αριθμητικών πράξεων στο πλαίσιο της καθημερινής διδασκαλίας. Προς αυτή την κατεύθυνση θα πρέπει να κινηθούν τόσο οι συντάκτες των αναλυτικών προγραμμάτων, όσο και οι εκπαιδευτικοί της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης.

2. Συνιστάται η ενσωμάτωση προπαρασκευαστικών δραστηριοτήτων για να μπορούν οι μαθητές να εφαρμόζουν κριτήρια εκτίμησης και ελέγχου και συγκεκριμένα, η

εκτέλεση από μνήμης πολλαπλασιασμών και διαιρέσεων με δυνάμεις του 10 καθώς και πράξεων με αριθμούς του τύπου $\nu x 10^{\mu}$ όπου $\nu \in N$, $1<\nu<100$ και $\mu \in Z$.

3. Όμως, για να ευαισθητοποιηθούν οι εκπαιδευτικοί και να συμπεριλάβουν τα κριτήρια εκτίμησης και ελέγχου στην καθημερινή διδασκαλία, θα πρέπει κατά πρώτο λόγο να τα γνωρίσουν και κατά δεύτερο λόγο να ενημερωθούν και να αντιληφθούν το σπουδαίο μαθησιακό όφελος που προκύπτει από τη χρήση τους.

4. Είναι σημαντικό οι εκπαιδευτικοί, όχι απλώς να διδάξουν τα κριτήρια εκτίμησης και ελέγχου, αλλά να βοηθήσουν τους μαθητές να κατασκευάσουν ένα δίκτυο κριτηρίων εκτίμησης και ελέγχου και να προβαίνουν στην επιλογή των κατάλληλων κριτηρίων ανάλογα με την εκάστοτε προβληματική κατάσταση.

5. Οι εκπαιδευτικοί θα πρέπει να εθίσουν τους μαθητές στη στάση ότι δεν υπάρχει μόνο μια ορθή λύση και πολλές φορές, ιδιαίτερα σε κριτήρια εκτίμησης, δεν υπάρχει μόνο μία ορθή απάντηση. Έτσι, οι μαθητές θα απαγκιστρωθούν από τα δεσμά του τυποποιημένου τρόπου λύσης και της μοναδικής απάντησης για την εκτίμηση (βλ. Sowder 1992), θα συνειδητοποιήσουν ότι δεν υπάρχει ένας μόνο ορθός τρόπος ελέγχου και θα αποκτήσουν ένα ελαστικότερο τρόπο σκέψης.

11.3 Ερωτήματα για μελλοντικές έρευνες

1. Όπως ήδη έχει αναφερθεί, η διδακτική παρέμβαση ήταν σχεδιασμένη για τις ανάγκες των μέσων και των καλών μαθητών και δεν απευθυνόταν στους αδύνατους μαθητές. Ένας τέτοιος σχεδιασμός είχε ως συνέπεια ένα ποσοστό μαθητών να μην καταφέρει να υπερπηδήσει τις μαθησιακές του δυσκολίες. Θα ήταν ιδιαίτερα ενδιαφέρον να σχεδιαστεί μια διδακτική παρέμβαση που να απευθύνεται στους αδύνατους μαθητές και να στοχεύει στη διδασκαλία κριτηρίων εκτίμησης και ελέγχου με τέτοιο τρόπο, ώστε να προσπελαστούν τα όποια μαθησιακά εμπόδια έχουν και αφορούν στην περιοχή αυτή.

2. Στα προβλήματα προσθετικών δομών, όπου είναι γνωστή η σύνθεση και ένας μετασχηματισμός και ζητείται ο άλλος μετασχηματισμός, διαπιστώσαμε ότι δεν υπήρχε συνολική βελτίωση, αλλά μια μικρή μεταβολή, που αφορούσε κυρίως στην επιλογή μόνο πρόσθεσης ή αφαίρεσης. Δεδομένου ότι οι μαθητές των δύο ομάδων εμφανίζουν ιδιαίτερα χαμηλά ποσοστά σ' αυτή την περιοχή, θα ήταν ενδιαφέρον να πραγματοποιηθεί διδακτική παρέμβαση που να χρησιμοποιεί τα εξειδικευμένα κριτήρια εκτίμησης και ελέγχου και να στοχεύει στην άρση των δυσκολιών των μαθητών σχετικά με τα προβλήματα προσθετικών δομών, λαμβάνοντας υπόψη όλους τους παράγοντες που επηρεάζουν την επίδοση των μαθητών στην περιοχή αυτή.

3. Θα ήταν ενδιαφέρον να πραγματοποιηθεί παρέμβαση με στόχο τη διδασκαλία κριτηρίων εκτίμησης και ελέγχου που αφορούν στις πράξεις μεταξύ κλασμάτων. Φάνηκε ότι οι μαθητές εμφανίζουν σοβαρές ελλείψεις στην περιοχή των κλασμάτων. Μια οργανωμένη διδασκαλία θα μπορούσε να συνεισφέρει στη γενικότερη βελτίωση των μαθητών και στην κατανόηση της ισοδυναμίας των κλασματικών αριθμών με τους δεκαδικούς.

4. Επίσης, θα ήταν σημαντικό να εφαρμοστεί ένα οργανωμένο διδακτικό σχήμα με θέμα τα κριτήρια εκτίμησης και ελέγχου σε προβλήματα πολλαπλασιαστικών δομών. Πιο συγκεκριμένα:

α. στα ποσοστά θα μπορούσε να συνεισφέρει στη βελτίωση των μαθητών στη συγκεκριμένη περιοχή, αλλά και στην κατανόηση της ισοδυναμίας τους με τους δεκαδικούς αριθμούς και με τα κλάσματα.

β. στα ανάλογα ποσά θα μπορούσε να συμβάλλει στη βελτίωση της κατανόησης προβλημάτων αναλόγων ποσών και κατ' επέκταση στην κατανόηση προβλημάτων πολλαπλασιαστικών δομών.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

1. Ερωτηματολόγιο[94]

1Α (22 λεπτά)

Σχολείο:
Τμήμα:
Όνομα:
Επίθετο:

1ο θέμα

Ο Γιώργος έπαιξε δύο παρτίδες μπίλιες. Στη δεύτερη παρτίδα κέρδισε 9 μπίλιες. Τελικά βρέθηκε να χάνει 4 μπίλιες. Τι έκανε στην πρώτη παρτίδα; Κέρδισε ή έχασε και πόσες;

Απάντηση:

Πρόχειρο:

2ο θέμα

Ο Γιάννης έπαιξε δύο παρτίδες μπίλιες. Στην πρώτη παρτίδα κέρδισε 14 μπίλιες. Τελικά βρέθηκε να κερδίζει 8 μπίλιες. Τι έκανε στη δεύτερη παρτίδα; Κέρδισε ή έχασε και πόσες;

Απάντηση:

Πρόχειρο:

3ο θέμα

Να εκτελεστούν οι παρακάτω πράξεις (στις διαιρέσεις να βρείτε δύο ψηφία μετά την υποδιαστολή):

11,42 • 3,7 =
27,8 • 0,03 =

1287 : 75 =
7454 : 29 =
1082 : 19 =

[94] Η αρίθμηση των θεμάτων γίνεται με στόχο την καλύτερη αναγνωσιμότητα της εργασίας, καθώς γίνονται συχνές αναφορές σε αυτά. Στους μαθητές δόθηκε το ερωτηματολόγιο χωρίς αρίθμηση.

2Α (18 λεπτά)

Σχολείο:
Τμήμα:
Όνομα:
Επίθετο:

4ο θέμα
Να γίνουν οι πράξεις από μνήμης (με το μυαλό):

3,85 • 10000 =

0,0467 •1000 =

4623 • 0,01 =

25,4 • 0,0001 =

1596,76 : 10000 =

5,37 : 100 =

67 : 0,01 =

3,57 : 0,001 =

600 • 700 =

90 • 80000 =

0,02 • 0,004 =

0,06 • 0,07 =

4900 : 70 =

320000 : 800 =

2,4 : 0,03 =

0,021 : 7 =

3A (14 λεπτά)

Σχολείο:
Τμήμα:
Όνομα:
Επίθετο:

5ο θέμα

Να γραφτούν οι δεκαδικοί με μορφή κλάσματος (π.χ. 0,4 = $\frac{4}{10}$):

0,064 =

2,36 =

6ο θέμα

Να γραφτούν τα κλάσματα με μορφή δεκαδικού :

$\frac{9}{10000} =$

$\frac{6}{8} =$

$\frac{453}{10} =$

$\frac{9}{15} =$

7ο θέμα

Να γίνουν οι πράξεις των κλασμάτων:

$\frac{13}{18} + \frac{14}{24} =$

$\frac{4}{15} \bullet \frac{7}{8} =$

$\frac{8}{10} : \frac{7}{12} =$

4Α (14 λεπτά)

Σχολείο:
Τμήμα:
Όνομα:
Επίθετο:

8ο θέμα
Να εκτελεστούν οι πράξεις:
826 - 9,64 =
35,5 – 8,745 =
82,46 – 7,57 =

9ο θέμα
Σ' ένα εργοστάσιο μια μηχανή φτιάχνει σοκολάτα. Η μηχανή σε 52 λεπτά φτιάχνει 325 κιλά σοκολάτα. Πόσο χρόνο χρειάζεται για να φτιάξει 260 κιλά σοκολάτα;

Πρόχειρο: Απάντηση: $\boxed{}$

Σχολείο:
Τμήμα: 5 Α (22 λεπτά)
Όνομα:
Επίθετο:

Να βρείτε με το μυαλό ανάμεσα σε ποιους αριθμούς βρίσκονται τα αποτελέσματα των παρακάτω πράξεων και να βάλετε σταυρό στο κατάλληλο τετραγωνάκι:

Π.χ. 13 • 11 10 < □ < 100< □ < 1.000 < □ < 10.000< □< 100.000 < □< □
1.000.000< < 10.000.000< < 100.000.000< < 1.000.000.000

---

57 • 83 10 < □ < 100< □ < 1.000 < □ < 10.000< □< 100.000 < □< □
1.000.000< < 10.000.000< < 100.000.000< < 1.000.000.000

3745 • 5321 10 < □ < 100< □ < 1.000 < □ < 10.000< □< 100.000 < □< □
1.000.000< < 10.000.000< < 100.000.000< < 1.000.000.000

---

289 • 574 10 < □ < 100< □ < 1.000 < □ < 10.000< □< 100.000 < □< □
1.000.000< < 10.000.000< < 100.000.000< < 1.000.000.000

17531 : 423 0,000001 < □ < 0,00001< □ < 0,0001 < □ < 0,001 < □ < 0,01< □ □
< 0,1< < 1 < < 10< < 100 < <1.000< < 10.000

6143 : 28 0,000001 < □ < 0,00001< □ < 0,0001 < □ < 0,001 < □ < 0,01< □ □
< 0,1< < 1 < < 10< < 100 < <1.000< < 10.000

4,37 : 235 0,000001 < □ < 0,00001< □ < 0,0001 < □ < 0,001 < □ < 0,01< □ □
< 0,1< < 1 < < 10< < 100 < <1.000< < 10.000

0,035 : 48,32 0,000001 < □ < 0,00001< □ < 0,0001 < □ < 0,001 < □ < 0,01< □ □
< 0,1< < 1 < < 10< < 100 < <1.000< < 10.000

11ο θέμα
Να υπολογίσετε με το μυαλό πόσο περίπου κάνουν τα αποτελέσματα των παρακάτω πράξεων (Παράδειγμα → 23 • 11 περίπου: 200):

62 • 73 περίπου:
4832 • 876 περίπου:
2181 • 1485 περίπου:
67952 : 317 περίπου:
26472 : 43 περίπου:
3,4 : 512 περίπου:
0,26 : 17,12 περίπου:

6A (14 λεπτά)

Σχολείο:
Τμήμα:
Όνομα:
Επίθετο:

12ο θέμα
Να υπολογίσετε από μνήμης (με το μυαλό):

το 10% του 350

το 20% του 900

το 25% του 8000

13ο θέμα
Ένα ποτό αποτελείται από γάλα και κακάο. Τα 15 κιλά ποτού περιέχουν 3 κιλά κακάο. Το εργοστάσιο διαθέτει 572 κιλά γάλα. Τι ποσότητα κακάο πρέπει να προσθέσει για να φτιάξει τον ίδιο τύπο ποτού;

Απάντηση:

Πρόχειρο:

2. Δραστηριότητες που δόθηκαν κατά τη διάρκεια της διδακτικής παρέμβασης και κανόνες που συνιστούν το θεωρητικό πλαίσιό τους[95]

Α΄ φάση
9ο Δημοτικό Σχολείο Ηρακλείου
Τμήμα: Στ3
Όνομα:
Επίθετο:

Πολλαπλασιασμός ακεραίων και δεκαδικών με 0,1 0,01 0,001…

Να κάνετε τις πράξεις από μνήμης (με το μυαλό):

548 • 0,1 =

8642 • 0,01 =

35447 • 0,0001 =

4537,14 • 0,001 =

5231,7 • 0,1 =

9,54 • 0,1 =

5020,37 • 0,0001 =

845,27 • 0,001 =

0,154 • 0,1=

0,0001 • 0,001 =

0,0074 • 0,00001 =

582,356 • 0,001 =

9,004004 • 0,0001 =

5378,25 • 0,000001 =

100,527 • 0,0001 =

[95] Έγινε επιλογή ορισμένων δραστηριοτήτων από κάθε φάση της διδακτικής παρέμβασης.

9ο Δημοτικό Σχολείο Ηρακλείου
Τμήμα: Στ3
Όνομα:
Επίθετο:

Πολλαπλασιασμός ακεραίων και δεκαδικών με 0,1 0,01 0,001…

$$\begin{array}{r} 2,75 \\ \times\ 0,1 \\ \hline 0,275 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2,75 \\ \times\ 0,01 \\ \hline 0,0275 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2,75 \\ \times\ 0,001 \\ \hline 0,00275 \end{array}$$

Επομένως:

$2,75 \bullet 0,1 = 0,275$
$2,75 \bullet 0,01 = 0,0275$
$2,75 \bullet 0,001 = 0,00275$
$2,75 \bullet 0,0001 = 0,000275$

Επίσης: $2,75 \bullet 0,1 = 2,75 \bullet \frac{1}{10} = \frac{2,75}{10} = 2,75 : 10 = 0,275$

$2,75 \bullet 0,01 = 2,75 \bullet \frac{1}{100} = \frac{2,75}{100} = 2,75 : 100 = 0,0275$

Συμπεραίνουμε ότι:

Για να πολλαπλασιάσουμε δεκαδικό αριθμό με 0,1 0,01 0,001…, γράφουμε το δεκαδικό όπως είναι και μεταφέρουμε την υποδιαστολή, αντίστοιχα, μία, δύο, τρεις… θέσεις (όσες τα δεκαδικά ψηφία του 0,1 0,01 0,001) προς τα αριστερά. Αν οι θέσεις είναι λιγότερες, συμπληρώνουμε με μηδενικά.

Β΄ φάση
9ο Δημοτικό Σχολείο Ηρακλείου
Τμήμα: Στ3
Όνομα:
Επίθετο:

- ***Τετράγωνα διψήφιων αριθμών που τελειώνουν σε 5***
- ***Τετράγωνα των αριθμών 14, 15, 16***

Να κάνετε τις πράξεις από μνήμης (με το μυαλό):

$15^2=$

$25^2 =$

$45^2 =$

$750^2 =$

$85000^2=$

$650^2=$

$2500^2=$

$95^2=$

$3500000^2=$

$550^2=$

$14^2=$

$16^2=$

$1400^{2=}$

$160^2=$

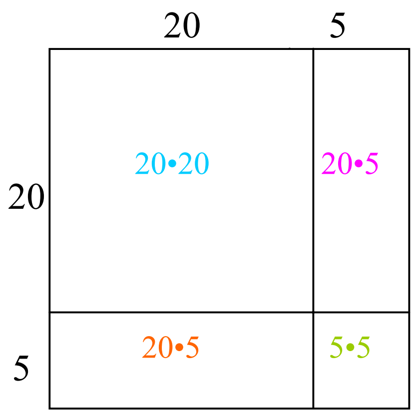
Τετράγωνα αριθμών

> *Για να υπολογίσουμε το τετράγωνο διψήφιου αριθμού που τελειώνει σε 5 (15, 25…) πολλαπλασιάζουμε το ψηφίο των δεκάδων του αριθμού επί το ψηφίο των δεκάδων αυξημένο κατά ένα και συμπληρώνουμε το γινόμενο με τον αριθμό 25.*

Π.χ. 25•25= 2•(2+1)= 2•3= **6**

25•25= **6**25

25•25=25•(20+5)=(25•20)+(25•5)=20•(20+5)+5(20+5)=
(20•20)+(20•5)+(20•5)+(5•5)=(20•20)+(2•20•5)+25=
20• (20+10)+25=20•30+25=600+25=625



20•20
20•5
20•5
\+ 5•5

20•20+2•(20•5)+ 5•5=
20•20+10•20+25=
20•(20+10)+25=20•30+25=
625

Επίσης: $14^2 = 196$
$15^2 = 225$
$16^2 = 256$

Β΄ φάση
9ο Δημοτικό Σχολείο Ηρακλείου
Τμήμα: Στ3
Όνομα:
Επίθετο:

- ***Διαίρεση αριθμού με 0,5 5, 50, 500…***
- ***Διαίρεση αριθμού με 0,25 25, 250…***

Να κάνετε τις πράξεις από μνήμης (με το μυαλό):

8:0,5=	
7:0,5=	
24:0,5=	
150:5=	
1800:5=	
74000:50=	
760000:500=	
18:0,25=	
840:0,25=	
7,5:25=	
54000:250=	

- ***Διαίρεση αριθμού με το 0,5 5, 50…***
- ***Διαίρεση αριθμού με το 0,25 25, 250…***
- ***Διαίρεση αριθμού με το 0,2***

- Για να διαιρέσουμε αριθμό με το 0,5 τον διπλασιάζουμε.

Π.χ. 42:0,5=84 $\qquad 42:0{,}5=42:\frac{5}{10}=42:\frac{1}{2}=42\bullet 2=84$

2,4:0,5=4,8

- Για να διαιρέσουμε αριθμό με 5, 50… τον διπλασιάζουμε και διαιρούμε με 10, 100…

  $24:5=24:\frac{10}{2}=24\bullet\frac{2}{10}=48:10=4{,}8$

  35:50=0,7

- Για να διαιρέσουμε αριθμό με 0,25 τον πολλαπλασιάζουμε επί 4

Π.χ. $12:0{,}25=12:\frac{1}{4}=12\bullet 4=36$

- Για να διαιρέσουμε αριθμό με 25, 250… τον τετραπλασιάζουμε και διαιρούμε με 100, 1000…

  $240:25=240:\frac{100}{4}=240\bullet\frac{4}{100}=960:100=9{,}6$

Γ΄ φάση
9ο Δημοτικό Σχολείο Ηρακλείου
Τμήμα: Στ3
Όνομα:
Επίθετο:

Να βρείτε ανάμεσα σε ποιους αριθμούς (10, 100, 1000...) είναι τα αποτελέσματα των πράξεων:

(π.χ.	10000	<	25674+32457	<	100000
		<	4568+235	<	
		<	653+28	<	
		<	745862 +2567	<	
		<	0,037+0,0012	<	
		<	0,75+0,004	<	
		<	0,00328+0,46	<	
		<	785+0,34	<	
		<	29+7,2	<	
		<	476+245	<	
		<	75684+47856	<	
		<	9876+7845	<	
		<	947+245	<	
		<	0,6587+0,874	<	
		<	0,547+0,7	<	
		<	94578+6897	<	
		<	0,00974+0,00082	<	

Τάξη μεγέθους

(αν το πρώτο ψηφίο είναι μονάδες, δεκάδες, εκατοντάδες…, δέκατα, εκατοστά, χιλιοστά…)

Πρόσθεση

> *Το άθροισμα δυο προσθετέων έχει την ίδια τάξη μεγέθους με αυτή του μεγαλύτερου από τους προσθετέους ή κατά ένα μεγαλύτερη. Κατά ένα μεγαλύτερη είναι η τάξη του αθροίσματος όταν οι δυο προσθετέοι έχουν την ίδια τάξη μεγέθους και το άθροισμα των δυο πρώτων ψηφίων τους υπερβαίνει τη δεκάδα.*

Παραδείγματα:

4598+924 *το άθροισμα είναι στην τάξη των **μονάδων χιλιάδων***
0,145+0,027 *το άθροισμα είναι στην τάξη των **δεκάτων***
784687+845789 *το άθροισμα είναι στην τάξη των **εκατομμυρίων** (αφού 7+8=15)*
0,00456+0,00879 *το άθροισμα είναι στην τάξη των **εκατοστών** (αφού 4+8=12)*

Όμως:

Αν οι δυο προσθετέοι είναι της ίδιας τάξης και το άθροισμα των πρώτων ψηφίων τους είναι 9 τότε υπάρχει περίπτωση το άθροισμα να είναι κατά μια μεγαλύτερη τάξη από μεγαλύτερο προσθετέο, γιατί μπορεί να μεταφέρεται κρατούμενο από προηγούμενα ψηφία.

Παράδειγμα:

4578+5697=10275 *το άθροισμα είναι στην τάξη των **δεκάδων χιλιάδων***

Αν οι δυο προσθετέοι είναι διαφορετικής τάξης, αλλά το πρώτο ή τα πρώτα ψηφία του μεγαλύτερου προσθετέου είναι 9 τότε υπάρχει περίπτωση το άθροισμα να είναι κατά μια μεγαλύτερη τάξη από μεγαλύτερο προσθετέο.

Παράδειγμα:

99725+832=100557 *το άθροισμα είναι στην τάξη των **εκατοντάδων χιλιάδων***

Δ΄ φάση
9ο Δημοτικό Σχολείο Ηρακλείου
Τμήμα: Στ3
Όνομα:
Επίθετο:

Να υπολογίσετε πόσο περίπου κάνει (Παράδειγμα → 32•49 περίπου 1500)[96]:

47 •78 =			
375 • 24 =			
2389 • 4547 =			
39 • 28354 =			
472 • 357 =			
864 • 54218=			
1428 •1546 =			
9184 • 524 =			
0,0452 • 0,47 =			
7,64 • 0,032 =			
18,672 • 0,853 =			
0,1485 • 0,143 =			
0,00918 • 0,076 =			
8,35 • 0,973 =			
0,014 • 0,2358 =			

[96] Υπάρχουν τρεις στήλες, στις οποίες ο μαθητής καλείται να υπολογίσει το γινόμενο στρογγυλοποιώντας τους παράγοντες με βάση το συνήθη κανόνα στο πρώτο ψηφίο (1η στήλη), τον ένα παράγοντα στο πρώτο ψηφίο και τον άλλο στο δεύτερο (2η στήλη) και τέλος και τους δύο παράγοντες στο δεύτερο ψηφίο (3η στήλη).

Στρογγυλοποίηση

Για να κάνουμε στρογγυλοποίηση ενός αριθμού σε κάποιο ψηφίο:

- Προσέχουμε το ψηφίο που είναι δεξιά από εκείνο που θέλουμε να γίνει η στρογγυλοποίηση:

Παραδείγματα:
Για να στρογγυλοποιήσουμε τον αριθμό 8214 στο πρώτο ψηφίο, το 8 (των μονάδων χιλιάδων) παρατηρούμε το ψηφίο που είναι αμέσως μετά το 8 δηλαδή το 2 το οποίο είναι μικρότερο από 5. Στη συνέχεια αντικαθιστούμε με μηδενικά τα επόμενα ψηφία του 8. Δηλαδή:
8214 → 8000

Για να στρογγυλοποιήσουμε τον αριθμό 6742 στο πρώτο ψηφίο, το 6 (των μονάδων χιλιάδων) παρατηρούμε το ψηφίο που είναι αμέσως μετά το 6 δηλαδή το 7 το οποίο είναι μεγαλύτερο από 5. Στη συνέχεια αντικαθιστούμε με μηδενικά τα επόμενα ψηφία του 6 και μεγαλώνουμε κατά μία μονάδα το 6. Δηλαδή:
6742 → 7000

Κι άλλα παραδείγματα:
(στρογγυλοποίηση στο πρώτο μη μηδενικό ψηφίο)
0,7146 → 0,8
0,0256 → 0,03
(στρογγυλοποίηση στο δεύτερο μη μηδενικό ψηφίο)
19645 → 20000 (το 19 μεγαλώνει κατά μία μονάδα και γίνεται 20)
0,02547 → 0,025

Ε΄ φάση
9ο Δημοτικό Σχολείο Ηρακλείου
Τμήμα: Στ΄3
Όνομα:
Επίθετο:

Διαίρεση – Επαληθεύσεις διαίρεσης

Παράδειγμα: 1524 | 35   43,54   35   1524 | 43,54

124 |
190 | 43,54
150 →
10

x 35
21770
+13062
1523,90
+ 0,10
1524,00 →

x 43,54
140
175
105
140
1523,90
+ 0,10
1524,00 →

152400 |
21780 | 4354
10 | 35

1524	35	4+3+5+4=16 1+7=7 →	7	8	←	3+5=8
124 →						
190	43,54	7•8=56 5+6=11 1+1=2 →	2			
150		2+1+0=3 →	**3**	**3**	←	1+5+2+4=12
10						1+2=3

Να κάνετε τις παρακάτω διαιρέσεις και τις επαληθεύσεις τους:
8205:63=

1873: 36=

17875: 583=

2300762 :1259=

72,37: 8,35=

475,46: 24,842=

0,0972 :0,36=

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ξένοι συγγραφείς

Almeida, D.: 2001, "Pupils' proof potential", *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, **32**, 53-60.

Bestgen, B.J.: Reys, R.E., Rybolt, J.F., Wyatt, J.W., 1980, "Skills of preservice elementary teachers", *Journal for Research in Mathematics Education,* **2**, 124-135.

Balacheff, N.: 1987, “Processus de preuve et situations de validation”, *Educational Studies in Mathematics*, **18**, 147-146.

Balacheff, N.: 1988a, “Aspects of proof in pupils’ practice of school mathematics”, in D. Pimm(ed.), *Mathematics, teachers and children*, Hodder and Stoughton, London, pp. 216-230.

Balacheff, N.: 1988b, *Thèse: Une étude des processus de preuve en mathématique chez les élèves de collège’*, Université Joseph Fourier, Grenoble.

Behr, M.J., Post, T.P., Lesh, R.A., Silver, E.A.: 1983, Rational number concepts, in R.A. lesh & M. Landau, (Eds), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*, New York: Academic Press.

Bell A., 1976: “A study of pupils proof explanation in mathematical situation”, *Educational Studies in Mathematics (E.S.M.)*, **7**, 23-40.

Bright, G.W.: 1976, “Estimating as part of learning to measure”, in D. Nelson & R. Reys (Eds.), *Measurement in school Mathematics: 1976 yearbook* (pp. 87-104), Reston, VA: NCTM.

Brown, A.: 1978, “Metacognitive development and reading”, in R.J. Spiro, B.Bruce and W.F. Brewer (Eds.), *Theoretical issues in reading comprehension*, Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Brown, A. & Deloache, J.: 1992, “Μεταγνωστικές δεξιότητες”, στον τόμ. *Σκέψη,* της Στ. Βοσνιάδου (επιμ.), μτφρ. Ελ. Χουρταμάνογλου, εκδ. Gutenberg, Αθήνα, σσ. 191-209.

Carpenter T.P., Corbitt M.K., Kepner H.S., Lindquist M.M., Reys R.E., Reys R.E.: 1980, “Results and Implications of the second NAEP mathematics assessment: Elementary school”, *The Arithmetic teacher*, **10-12**, 44-47.

Case, R. & Sowder, J.T.: 1990, “The development of Computational estimation: A neo Piagetian analysis”*, Cognition and Instruction,* **7**, 79-104.

Chabert J-L. (ed.): 1999, A History of Algorithms, Berlin: Springer, ch. 15.

Clements, D.H. & Battista, M.T.: 1992, “Geometry and Spatial Reasoning”, in *Handbook of research on mathematics teaching and learning,* D.A. Grouws, (ed.) Macmillan Publishing Company, New York, pp 371-389.

Cobb, P.: 1994, “Where is the Mind; Constructivist and Sociocultural Perspectives on Mathematical Development”, *Educational Researcher*, **23**, 13-21.

Cohen, L., Manion, L.: 1997, *Μεθοδολογία Εκπαιδευτικής Έρευνας* (μετ. Μητσοπούλου Χ. – Φιλοπούλου Μ.), Αθήνα, εκδ. Έκφραση, κεφ. 8.

Corle, C.G.: 1960, "A study of the quantitive values of fifth and sixth grade pupils", *Arithmetic teacher*, **7** (3), 333-340.

Corle, C.G.: 1963, "Estimates of quantity by elementary teachers and college juniors", *Arithmetic teacher*, **10** (2), 347-353.

DeCorte, E., Somes, R:, 1982, "Estimating the outcome of a task as a heuristic strategy in arithmetic problem solving: A teaching experiment with sixth-graders", *Human Learning*, **1**, 105-121.

D. E. Smith: (1958), *History of Mathematics*, Dover Publications, Inc, New York,

De Villiers: M.D., 1990, "The role and functions of proof in Mathematics", *Pythagoras*, **24**, 7-24.

De Villiers, M.D.: 1999, *Rethinking proof with the Geometer's Sketchpad*, Key Curriculum Press, Emeryville, CA.

Dowker, A.D.: 1992, "Computational estimation strategies of professional mathematicians", *Journal for Research in Mathematics Education,* **23**, 45-55.

Duek, N.: 1999, Argumentation and conceptualization in context: a case study on sunshadows in Primary school, *Educational studies in Mathematics*, **39**, 89-110.

Duval R.: 1995, *Semeosis et pensée humaine*, Berne: Ed. Péter Lang, ch. 3, 5.

Edwards, A.: 1984, Computational estimation for numeracy, *Educational Studies in Mathematics*, **15**, 59-73.

Faulk, C.J.: 1962, "How well do people estimate answers;", *Arithmetic Teacher*, **9**, 436-440.

Flavell, J.: 1976, "Metacognitive aspects of problem solving", in L. Resnic (Ed.), *The nature of intelligence* (pp. 231-236), Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
Fesharaki, M.: 1979, "A study of the effect of hand-calculators on achievement, estimation and retention of seventh and eighth graders on decimals and percent" (Doctoral Dissertation, University of Missuri-Columbia, 1978), *Dissertation Abstracts International*, 39, 6004A.

Forrester, M.: 1998, "Learning to Estimate in the Mathematics Classroom: A conversation-Analytic Approach", *Journal for research in Mathematics Education*, **29**, 334-356.

Gliner, G.: 1991, "Factors contributing to success in mathematical estimation in preservice teachers: types of problems and previous mathematical experience", *Educational Studies in Mathematics,* **22**, 595-606.

Garofalo, J. & Lester, F.: 1985, "Metacognition, cognitive monitoring, and mathematical performance", *Journal for research in Mathematics Education*, **16**, 163-176.

Glasersfeld von, E.: 1990, "An Exposition of Constructivism. Why Some Like it Radical", in R.B. Davis, C.A. Maher & N. Noddings (Eds.), *Constructivist Views on the Teaching and Learning of Mathematics*, Journal for research in Mathematics Education, Monograph No 4, pp. 19-29, VA, National Council of Teachers of Mathematics.

Hall, W.D.: 1977, "A study of the relationship between estimation and mathematical problem solving among fifth-grade students" (Doctoral dissertation, University of Illinois, 1976), *Dissertation Abstracts International*, 37, 6324A-6324B.

Hanna, G. & Jahnke, H.N.: 1996, "Proof and proving", in A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick and C. Laborde (eds.), *International Handbook of Mathematics Education*, Kluwer Academic Publishers, Dordecht, pp. 877-908.

Hanna, G.: 2000, Proof, explanation and exploration: an overview, *Educational Studies in Mathematics*, **44**, 5-23.

Hanson, S.A. & Hogan, T.P.: 2000, "Computational Estimation Skill of College Students", *Journal for Research in Mathematics Education,* **31**, 483-499.

Healy, L. & Hoyles, C.: 2000, A study of proof Conceptions in Algebra, *Journal for Research in Mathematics Education*, **31**, 396-428.

Heath, T.(ed.): 1956, *Euclid*: The Thirteen Books of the Elements, vol. I, New York, Dover.

Heath, T.: 1981, *A History of Greek Mathematics*, vol. I, New York, Dover.

Hiebert, J. & Carpenter, T.P.: 1992, "Learning with Understanding", in *Handbook of Research in Mathematics teaching and Learning*, D.A. Grouws, McMillan Publishing Company, New York, pp. 65-97.

Ibe, M.D.: 1973, "The effects of using estimation in learning a unit of sixth-grade mathematics", (Doctoral dissertation, University of Toronto, 1971), *Dissertation Abstracts International*, 33, 5036A.

Ifrah, G.: (χχ), *Παγκόσμια Ιστορία των Αριθμών*, μετ. Δ. Φοινικοπούλου-Κ. Παπαγεωργίου, εκδ. Σμυρνιωτάκη, Αθήνα, κεφ. 9.

Javeau G.: 1996, *Η Έρευνα με ερωτηματολόγιο*, μετ. Κ. Τζαννάνη–Τζώρτζη, Αθήνα, εκδ. Γ. Δόρδανος.

Mcintosh, A., Nohda, N., Reys, B., Reys, R.: 1995, “Mental computation performance in Australia, Japan and the United States”, *Educational Studies in Mathematics*, **29**, 237-258.

Miyazaki, M.: 2000, “Levels of Proof in Lower Secondary School Mathematics, as Steps from an Inductive Proof to an Algebraic Demonstration”, *Educational Studies in Mathematics*, **41**, pp. 47-69.

Levine, D.R.: 1982, “Strategy use and estimation ability of college students”, *Journal for Research in Mathematics Education,* **13**, 350-359.

Lester, F., Garofalo, J., Kroll, D.: 1989, “The role of metacognition in mathematical problem solving: A study of two grade seven classes”, *Final report to the National Science Foundation of NSF project* MDR 85-50346.

Liu G.L.: 1999, *Στοιχεία Διακριτών Μαθηματικών,* Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, κεφ. 8.

National Council of Supervisors of Mathematics: 1977, “Position paper on basic skills”, *Arithmetic Teacher*, **25** (1), 19-22.

National Council of teachers of Mathematics: 1980, “An agenda for action”, *Recommendation for school mathematics of the 1980s*, Reston, VA: Author.

Nelson, N.Z.: 1967, “The effect of the teaching of estimation on Arithmetic achievement in the fourth and sixth grades” (Doctoral dissertation, University of Pittsburgh, 1966), *Dissertation Abstracts International*, 27, 4172A.

Nunes, T., Schliemann, A.D., Carraber, D.W.: 1993, *Street mathematics and school mathematics*, Cambridge University Press.

O΄ Daffer, P.: 1979, “A case and techniques for estimation: Estimation experiences in elementary school mathematics-essential, not extra!”, *Arithmetic Teacher*, **26** (6), 46-51.

Overseas Education Cenre, http: www. oecth.com

Paul D.R.: 1971, *The ability to estimate in Mathematics*, Doctoral dissertation, Columbia University.

Penrose R.: 1994, *Ο νέος αυτοκράτορας (;)*, Αθήνα: Γκοβόστης, κεφ. 2.

Penrose R.: 1998, *Σκιές του νου*, Αθήνα: Γκοβόστης, παρ.1.5.

Piaget, J.: 1970, *Genetic Epistemology*, New York: Norton.

Piaget, J.: 1937, *The Construction of Reality in the Child*, London, Routledge & Kegan Paul.

Pluvinage F.: 1983, "Variations des questions, questionnaires á modalités", *Proc. of the 4th ICME*, Berkeley, pp. 465-477.

Regnier, J.C.: 1983, *Etude didactique des tests autocorrectifs en trigonométrie*, Thèse de Doctorat, Université L. Pasteur de Strasbourg.

Resnic L.B.: 1986, "The development of mathematical intuition", M. Pelmutter (ed.), *Perspectives on intellectual development: The Minnesota Symposia on Child Psychology*, vol 19, pp. 159-194.

Reys, R.E., Rybolt, J.F, Bestgen, B.J., Wyatt, J.W.: 1982, "Processes used by good computational estimators", *Journal for Research in Mathematics Education,* **13**, 183-201.

Reys, R.E., Trafton, P.R., Reys, B.B., Zawojeski, J.: 1984, *Developing computational estimation materials for the middle grades*, Final Report of NSF Grant No. NSF 81/13601.

Reys B.J., Reys R.E, Penafiel, A.F.: 1991, "Estimation Performance and strategy use of Mexican 5th and 8th grade student sample", *Educational Studies in Mathematics,* **22**, 353-375.

Rubenstein, R.N.: 1985, Computational estimation and related mathematical skills", *Journal for Research in Mathematics Education,* **16**, 106-119.

Sauble, I.: 1955, Development of ability to estimate and to compute mentally, *Arithmetic Teacher*, **2** (2), 33-39.

Schoen, H.L., Friesen, C.D., Jarrett, J.A., Urbatsch, T.D.: 1981, "Instruction in estimating solutions of whole number computations", *Journal for Research in Mathematics Education,* **12**, 165-178.

Schoenfeld, A.H.: 1985a, *Mathematical problem solving*, New York, N.Y.: Academic Press.

Schoenfeld, A.H.: 1985b, "Metacognitive and epistemological issues in mathematical understanding", in E.A. Silver (Ed.), *Teaching and learning* *mathematical problem solving: Multiple research perspectives* (pp. 361-380), Hillsdale, NG: Lawrence Erlbaum

Schoenfeld, A.H.: 1987, "What's all the fuss about metacognition?", in A. Schoenfeld, (Ed.), *Cognitive science and mathematics education* (pp. 189-215), Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum.

Schoenfeld, A.H.: 1992, "Learning to think Mathematically: problem solving, metacognition and sense making in Mathematics", in *Handbook of research on mathematics teaching and learning,* D.A. Grouws, (ed.) Macmillan Publishing Company, New York, pp 371-389.

Siegel, A.W., Goldsmith, L.T., Madson C.R.: 1982, "Skill in estimation problems of extend and numerosity", *Journal for research in Mathematics Education*, **13**, 211-232.

Silver E.A.: 1983, "Probing Young Adults" Thinking About Rational Numbers", *Focus on Learning Problems in Mathematics*, **5**, 105-117.

Sowder, J.T. & Wheeler, M.M.: 1987, "*The development of computational estimation and number sense: two exploratory studies"*, (Research report), San Diego State University Center for Research in Mathematics and science Education.

Sowder, J.T. & Wheeler, M.M.: 1989, "The development of concepts and strategies used in computational estimation", *Journal for Research in Mathematics Education,* **20**, 130-146.

Sowder, J.T. & Markovits, Z.: 1990, "Relative and absolute error in computational estimation", in G. Booker. P. Cobb & T.N. deMendicuti (Eds.), *Proceeding of the Fourteenth Psychology of Mathematics Education Conference* (pp. 321-328), Mexico.

Sowder J.T.: 1992, "Estimation and number sense", in *Handbook of research on mathematics teaching and learning,* D.A. Grouws, (ed.) Macmillan Publishing Company, New York, pp 371-389.

Stllman, G.A. & Galbraith, P.L.: 1998, "Applying Mathematics with real world connections: metacognitive characteristics of secondary students", *Educational Studies in Mathematics*, **36**, 157-195.

Swan, M. & Jones, O.E.: 1971, "Distance, weight, height, area and temperature percepts of university students", *Science education*, **55**, (3), 353-360.

Swan, M. & Jones, O.E.: 1980, "Comparison of students' percepts of distance, weight, height, area and temperature", *Science education*, **64**, (3), 297-307.

Thompson, A.G.: 1979, "Estimating and approximating", *School Science and Mathematics*, **79** (8), 575-580.

Threadgill-Sowder, J.T.: 1984, "Computational estimation procedures of school children", *Journal of Educational Research,* **77** (6), 332-336.

Vergnaud G.: 1982, "A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems", in Carpenter, T.P., Moser, J.M., Romberg, T.P. (Eds), *Addition and Subtraction. A cognitive perspective*, Hillsdale, Erlbaum.

Vergnaud G., Cortez A.: 1990, "From Arithmetic to Algebra: Negotiating a jump to learning process" *Proccedings of 14th I.C.P.M.E.*, Mexico, Vol 2, pp. 27-35.

Vergnaud G.: 1998, "De l'arithmétique a l'algèbre. Quelques difficultés au dibut de l' icole secondaire", *Πρακτικά 1ης Διημερίδας Διδακτικής Μαθηματικών*, Π.Τ.Δ.Ε. Παν/μιο Κρήτης, 213-223.

Vygotsky, L.S.: 1978, *Mind and society. The development of Higher Cognitive Processes*, Cambridge, MA, Harvard University Press.

Έλληνες συγγραφείς

Αγαλιώτης, Ι.: 2000, *Μαθησιακές Δυσκολίες στα Μαθηματικά*, Ελληνικά Γράμματα, Αθήνα, παρ. 9.3.3.6.

Αθανασάκης Α., Αλεξανδράκης Γ., Δήμου Γ.: 2000, *Τα μαθηματικά μου*, Γ΄ Δημοτικού, Α΄ και Β΄ μέρος, Ο.Ε.Δ.Β., Αθήνα.

Αλβανός Γ., Αποστολίκας Γ., Δήμου Γ., Ζέρβας Γ., Μάγκος Μ., Μπρούμας Κ., Σαλβαράς Γ.: 2000, *Τα μαθηματικά μου,* Στ΄ Δημοτικού, Α΄ και Β΄ μέρος, Ο.Ε.Δ.Β., Αθήνα.

Αλβανός Γ., Δήμου Γ., Ζέρβας Γ., Μπρούμας Κ.: 2000, *Τα μαθηματικά μου,* Ε΄ Δημοτικού, Α΄ και Β΄ μέρος, Ο.Ε.Δ.Β., Αθήνα.
Αποστολίκας Γ., Διονυσοπούλου Τρ., Σαλβαράς Γ.: 1999, *Τα μαθηματικά μου*, Α΄ Δημοτικού, Α΄ και Β΄ μέρος, Ο.Ε.Δ.Β., Αθήνα.

Αποστολίκας Γ., Διονυσοπούλου Τρ., Σαλβαράς Γ.: 1999, *Τα μαθηματικά μου*, Β΄ Δημοτικού, Α΄ και Β΄ μέρος, Ο.Ε.Δ.Β., Αθήνα.

Αποστολίκας Γ., Διονυσοπούλου Τρ., Σαλβαράς Γ.: 2000, *Τα μαθηματικά μου*, Δ΄ Δημοτικού, Α΄ και Β΄ μέρος, Ο.Ε.Δ.Β., Αθήνα.

Βάμβουκας Μ.: *1998, Εισαγωγή στην Ψυχοπαιδαγωγική Έρευνα και Μεθοδολογία*, Αθήνα, εκδ. Γρηγόρη.

Δαφέρμος Β.: 1998, "Οι απόψεις των μαθητών της Ε΄ και Στ΄ Δημοτικού για τα κλάσματα", *Πρακτικά 1ης Διημερίδας Διδακτικής Μαθηματικών*, Π.Τ.Δ.Ε. Παν/μιο Κρήτης, 57-67.

Δημητρόπουλος Ε.: 1994, Ε., *Εισαγωγή στη Μεθοδολογία της Επιστημονικής Έρευνας*, Αθήνα, εκδ. Έλλην.

Εξαρχάκος Θ.: 1991, *Εισαγωγή στα Μαθηματικά*, εκδ. Αθανασόπουλος-Παπαδάμης, Αθήνα, κεφ. 6, 8, 9, 10.

Καλδρυμίδου Μ.: "Γνωστικά και επιστημολογικά χαρακτηριστικά της διαδικασίας γενίκευσης στα σχολικά μαθηματικά", *Πρακτικά 2ης Διημερίδας Διδακτικής Μαθηματικών*, Π.Τ.Δ.Ε. Παν/μιο Κρήτης, 245-253.

Καλδρυμίδου Μ., Οικονόμου Α., Οικονόμου Π., Σακονίδης Χ., Τζεκάκη Μ.: 2000, "Αξιολόγηση των μαθηματικών γνώσεων των μαθητών της Στ΄ Δημοτικού και Γ΄ Γυμνασίου", *Πρακτικά 2ης Διημερίδας Διδακτικής Μαθηματικών*, Π.Τ.Δ.Ε. Παν/μιο Κρήτης, 15-39.

Κολέζα, Ε.: 2000, *Γνωσιολογική και Διδακτική Προσέγγιση των Στοιχειωδών Μαθηματικών Εννοιών*, εκδ. Leader Books Α.Ε., Αθήνα, κεφ.1.

Κούρκουλος Μ.: 1996, "Κατάστρωση εξισώσεων πρωτοβάθμιων προβλημάτων που αναφέρονται σε ποσότητες: Οι χώροι δυσκολιών που συναντούν οι μαθητές και τα σχήματα διδασκαλίας", *Ερευνητική Διάσταση της Διδακτικής των Μαθηματικών* Νο **1**, 36-70.

Κούρκουλος Μ.: 1997, "Αυτοδιόρθωση και χρήση του εκπαιδευτικού στην εκμάθηση των αλγορίθμων της Αριθμητικής και της Άλγεβρας", *Πρακτικά 1ης Παγκρήτιας Ημερίδας του Συλλόγου Καθηγητών Πληροφορικής,* 31-58.

Κούρκουλος Μ.: 1998, "Χαρακτηριστικά των κριτηρίων ελέγχου που χρησιμοποιούν οι μαθητές κατά την εφαρμογή των αλγορίθμων της αριθμητικής και της άλγεβρας", *Πρακτικά 1ης Διημερίδας Διδακτικής Μαθηματικών,* Π.Τ.Δ.Ε. Παν/μιο Κρήτης, 80-92.

Κούρκουλος Μ.: 1999α, *Στοιχεία Θεωρίας Αριθμών για την πρωτοβάθμια και τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση,* Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Κυριακίδη.

Κούρκουλος Μ.: 1999β, "Στοιχεία για τη συμπεριφορά των διδασκόντων και των μαθητών σχετικά με τους περιοδικούς δεκαδικούς", *Πρακτικά 16ου Πανελληνίου Συνεδρίου της Ε.Μ.Ε.,* 317-326.

Κούρκουλος Μ.: 2000, "Μπορούμε να μετρήσουμε τις γωνίες; Μια πειραματική Διδασκαλία με μαθητές Στ΄ Δημοτικού", Φ. Καλαβάσης, Μ. Μεϊμάρης (επ.) *Θέματα Διδακτικής Μαθηματικών*, τομ. IV, Αξιολόγηση και Διδασκαλία των Μαθηματικών, Gutenberg, Παν/μιο Αιγαίου, 133-159.

Κούρκουλος Μ., Τζανάκης Κ.: 2000, "Η εκτίμηση και ο έλεγχος ως θεμελιώδεις όψεις της σύλληψης και εκμάθησης μαθηματικών αλγορίθμων", *Πρακτικά 2ης Διημερίδας Διδακτικής Μαθηματικών,* Π.Τ.Δ.Ε. Παν/μιο Κρήτης, 264-284.

Kourkoulos M., Keyling M.-A.: 2001, "Self correction in algebraic algorithms with the use of educational software: an experimental work with 13-15 years old pupils", *Πρακτικά Πανελληνίου Συνεδρίου Πληροφορικής,* Π.Τ.Δ.Ε. Παν/μιο Κρήτης, 460-469.

Λεμονίδης Χ.: 1999, *Περίπατος στη Μάθηση της Στοιχειώδους Αριθμητικής*, Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Κυριακίδη, κεφ. 6, 7.

Μακράκης Β.: 1997, *Ανάλυση Δεδομένων στην Επιστημονική Έρευνα με τη χρήση του SPSS, από τη θεωρία στην πράξη*, εκδ. Gutenberg, Αθήνα.

Μανιού-Βακάλη Μ.: 1995, *Μάθηση, Μνήμη, Λήθη*, Εκδ. Γραφικές τέχνες Α.Ε., Θεσσαλονίκη, κεφ. 5.

Ματσαγγούρας, Η.: 2000, *Στρατηγικές Διδασκαλίας-Η κριτική σκέψη στη διδακτική πράξη*, τομ. Β΄, εκδ. Gutenberg, Αθήνα., κεφ. 1.

Μπασέτας Κ.: 1995, *Η ικανότητα των αποφοίτων του Δημοτικού σχολείου στην επίλυση πράξεων και προβλημάτων με ακεραίους*, Βιβλιογονία, Αθήνα.

Μπούφη, Α.: 1996, "Επιστημολογία και Διδακτική των Μαθηματικών", στο Η.Ματσαγγούρας (Επ.), *Η Εξέλιξη της Διδακτικής*, Gutenberg σσ. 469-489.

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο: 2002, *Διαθεματικό, Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών Μαθηματικών*, http: www. pi-schools. gr , σσ. 305-370.

Παπαναστασίου Κ.: 1990, *Μεθοδολογία Εκπαιδευτικής Έρευνας*, Παιδαγωγικό Ινστιτούτο Κύπρου, Λευκωσία.

Πασχάλης, Α.: 2000, "Οι μεταγνωστικές δεξιότητες στη διδακτική πράξη", Επιστήμες της Αγωγής, **1-3**, σσ. 61-75.

Ράπτης Α. και Ράπτη Α.: 2001, *Μάθηση και Διδασκαλία στην εποχή της Πληροφορίας*, τόμοι Α και Β, εκδ. Ράπτη Α., Αθήνα, κεφ. 2.

Τζανάκης Κ.: 1990, "Η μαθηματική παιδεία του δασκάλου και τα μη στοιχειώδη μαθηματικά: Η περίπτωση της δοκιμής του πολλαπλασιασμού", *Ευκλείδης Γ΄,* τ. **26**, 55-59.

Τζανάκης Κ.: 1998, "Η παιδευτική αξία της ευκλείδειας γεωμετρίας στο δημοτικό σχολείο", *Πρακτικά 1ης Διημερίδας Διδακτικής Μαθηματικών,* Π.Τ.Δ.Ε. Παν/μιο Κρήτης, 100-109.

Τζανάκης Κ., Κούρκουλος Μ.: 1999, "Η τεκμηρίωση στα Μαθηματικά: Επιστημολογικά ζητήματα και διδακτικές προεκτάσεις", Α. Κόλλιας, Α. Μαργετουσάκη, Π. Μιχαηλίδης (επ.), *Πρακτικά 4ου Πανελληνίου Συνεδρίου Διδακτικής των Μαθηματικών και Πληροφορικής στην Εκπαίδευση*, εκδ. Έλλην, Αθήνα, , σσ. 433-441.

C. Tzanakis, M. Kourkoulos: 2000α, "Justification in Mathematics and procedures on which it is based: A Historical approach for didactical purposes", W-S. Horng, F-L. Lin (eds), *Proceeding of the HPM 2000 Conference, History in Mathematics Education: Challenges for a new millennium*, Taipei: National Taiwan Normal University, vol. II, pp. 31-51.

Τζανάκης Κ., Κούρκουλος Μ.: 2000β, " Η παροχή μαθηματικής παιδείας και τα χαρακτηριστικά του μαθηματικού σκέπτεσθαι: Η περίπτωση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας", *Σύγχρονη Εκπαίδευση,* τ. **111**, 66-73 και τ. **112**, 61-74.

Τριλιανός Θ.: 1992, *Μεθοδολογία της διδασκαλίας*, τόμ. ΙΙ, εκδ. Αφοί Τολίδη, Αθήνα, κεφ. 7ο.

Τρούλης Γ.: 1992, *Τα Μαθηματικά στο δημοτικό σχολείο*, εκδ. Γρηγόρη, Αθήνα, κεφ. 9.

Τρούλης Γ.: 1992, "Το μηδέν ως αιτία πλάνης στα Μαθηματικά", *Ευκλείδης Γ΄,* **30-31**, 61-83.

Τρούλης Γ.: 1995, *Οι σχέσεις των φοιτητών των Παιδαγωγικών τμημάτων με τα μαθηματικά: Στάσεις και αναπαραστάσεις*, εκδ. Ελληνικά Γράμματα, Αθήνα, κεφ. 1.

Τρούλης Γ.: 1996, "Ανάλυση και θεραπεία της πλάνης στα Μαθηματικά", *Νέα Παιδεία*, **77**, 91-107.

Τρούλης Γ.: 2001, "Οι πλάνες των μαθητών στους δεκαδικούς αριθμούς", *Επιστήμες Αγωγής*, **2-3**, 101-111.

ΥΠ.Ε.Π.Θ.: 2001, *Συμπληρωματικές οδηγίες για τη διδασκαλία των Μαθηματικών στο Δημοτικό Σχολείο*, Ο.Ε.Δ.Β.

Φιλίππου, Γ.: 1991, "Οι μαθηματικές γνώσεις των αποφοίτων του Δημοτικού σχολείου και οι εκτιμήσεις των δασκάλων", *Σύγχρονη Εκπαίδευση*, **58**, 33-37.

Χατζηγεωργίου, Γ.: 1998, *Γνώθι το curriculum*, εκδ. Ατραπός, Αθήνα, κεφ. 13.