ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
≪Μαθηματικά και Εφαρμογές τους≫

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ZAKHAROV

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΒΑΡΣΟΣ
ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΓΕΩΡΓΙΟΣ ΖΟΥΡΑΡΗΣ

ΗΡΑΚΛΕΙΟ
ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2013

Στους πρώτους μου δασκάλους,
τους γονείς μου.

Η παρούσα μεταπτυχιακή εργασία εκπονήθηκε στα πλαίσια του Διατμηματικού Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών ≪Μαθηματικά και Εφαρμογές τους≫ των Τμημάτων Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Κρήτης για την απονομή Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην κατεύθυνση ≪Μαθηματική Προσομοίωση και Τεχνικές Υπολογισμών≫.

Την εξεταστική επιτροπή αποτέλεσαν οι ακόλουθοι καθηγητές του Τμήματος Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών:

Γεώργιος Ζουράρης, Αναπληρωτής Καθηγητής (επιβλέπων),
Μιχαήλ Πλεξουσάκης, Επίκουρος Καθηγητής,
Παναγιώτης Χατζηπαντελίδης, Επίκουρος Καθηγητής.

Ευχαριστίες

Πρώτα θα ήθελα να ευχαριστήσω το δάσκαλό μου, καθηγητή κ. Γ. Ζουράρη που μου έδωσε την δυνατότητα να εργαστώ και να εξασκήσω τις γνώσεις μου σε μια ενδιαφέρουσα εργασία. Με την υπομονετική του καθοδήγηση και τις εποικοδομητικές του προτάσεις με βοήθησε να κατανοήσω τις κεντρικές ιδέες πίσω από το πρόβλημα που πραγματεύεται η ανα χείρας μεταπτυχιακή εργασία. Επιπρόσθετα τον ευχαριστώ γιατί μελέτησε την εργασία και έκανε τις απαραίτητες διορθώσεις. Για οποιαδήποτε λάθη υπάρχουν στο κείμενο η ευθύνη είναι δική μου. Ευχαριστώ επίσης τους κ.κ. καθηγητές Μ. Πλεξουσάκη και Π. Χατζηπαντελίδη οι οποίοι μαζί με τον κ. Γ. Ζουράρη αποτέλεσαν την εξεταστική επιτροπή. Ακόμη θα ήθελα να ευχαριστήσω τα Τμήματα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Κρήτης για τις ευκολίες που μου παρείχε κατά την διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών. Τέλος ευχαριστώ την οικογένειά μου, τους συμφοιτητές μου και τους φίλους μου, οι οποίοι με στήριξαν σε αυτή μου την προσπάθεια.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εξισώσεις Zakharov

1.1 Διατύπωση προβλήματος

Έστω $L > 0$ και $T > 0$. Στην συνέχεια, θεωρούμε το παρακάτω πρόβλημα αρχικών τιμών για το σύστημα εξισώσεων Zakharov: ψάχνουμε συναρτήσεις $N = N(x,t) : \mathbb{R} \times [0,T] \to \mathbb{R}$ και $E = E(x,t) : \mathbb{R} \times [0,T] \to \mathbb{C}$, οι οποίες είναι $L-$περιοδικές ως προς x, λύνουν τις διαφορικές εξισώσεις

$$E_t = iE_{xx} - iNE \quad \text{στο } \mathbb{R} \times [0,T], \tag{1.1}$$

$$N_{tt} = N_{xx} + (|E^2|)_{xx} \quad \text{στο } \mathbb{R} \times [0,T] \tag{1.2}$$

και ικανοποιούν τις αρχικές συνθήκες

$$E(\cdot,0) = E_0, \quad N(\cdot,0) = N_0, \quad N_t(\cdot,0) = N_1, \tag{1.3}$$

όπου E_0, N_0, N_1 ομαλές $L-$περιοδικές συναρτήσεις.

Το (ZS) έχει σημαντικές εφαρμογές στην θεωρία πλάσματος (αλληλεπίδραση ανάμεσα σε κύματα Langmuir (βλ. [12]) και ακουστικά κύματα ιόντων), στην θεωρία μοριακών αλυσίδων (αλληλεπίδραση των ενδομοριακών δονήσεων που δημιουργούν σολιτόνια Davydov (βλ. [3]) με τις ακουστικές διαταραχές στην αλυσίδα), στην υδροδυναμική (βλ. [9]) κ.τ.λ.. Όπως είναι γνωστό το (ZS) είναι μη ολοκληρώσιμο, επομένως η υπολογιστική επίλυσή του είναι αρκετά σημαντική.

1.2 Νόμοι Διατήρησης

Ο Glassey (βλ. [7]) στην εργασία του υποθέτει ότι η μέση τιμή της αρχικής συνθήκης N_1 στην (1.3) είναι μηδέν δηλαδή

$$\int_0^L N_1(x)dx = 0. \tag{1.4}$$

Η παραπάνω υπόθεση δεν είναι απαραίτητη για την εξασφάλιση ύπαρξης και μοναδικότητας της λύσης του προβλήματος. Είναι γνωστό ότι αν η μέση τιμή των αρχικών συνθηκών N_0 και N_1 δεν είναι μηδέν, μπορούμε με έναν απλό μετασχηματισμό (βλ. [4]) να καταλήξουμε σε ένα σύστημα Zakharov στο οποίο οι αρχικές συνθήκες για την κυματική εξίσωση έχουν μέση τιμή μηδέν. Πιο συγκεκριμένα ορίζοντας

$$\widehat{N}(x,t) := N(x,t) - A - Bt \tag{1.5}$$

$$\widehat{E}(x,t) := e^{i(B\frac{t^2}{2}+At)}E(x,t) \tag{1.6}$$

με $A = \int_0^L N_0 dx$ και $B = \int_0^L N_1 dx$, παρατηρούμε ότι

$$\widehat{E}_t = i\widehat{E}_{xx} - i\widehat{N}\widehat{E} \quad \text{στο } \mathbb{R}\times[0,T], \tag{1.7}$$

$$\widehat{N}_{tt} = \widehat{N}_{xx} + (|\widehat{E}|^2)_{xx} \quad \text{στο } \mathbb{R}\times[0,T] \tag{1.8}$$

με

$$\widehat{E}(\cdot,0) = \widehat{E}_0, \quad \widehat{N}(\cdot,0) = \widehat{N}_0, \quad \widehat{N}_t(\cdot,0) = \widehat{N}_1 \tag{1.9}$$

όπου $\widehat{E}_0 = E_0, \widehat{N}_0 = N_0 - A$ και $\widehat{N}_1 = N_1 - B$. Στη συνέχεια θα αποδείξουμε κάποιους νόμους διατήρησης για τη λύση του προβλήματος $(1.7) - (1.9)$.

Πρόταση 1.1. Το σύστημα εξισώσεων Zakharov (ZS) (1.7), (1.8) διατηρεί ορισμένες ποσότητες. Την κυματική ενέργεια και την Χαμιλτονιανή, δηλαδή

$$\int_0^L |\widehat{E}(x,t)|^2 dx = \int_0^L |\widehat{E}(x,0)|^2 dx \quad \forall t\in[0,T].$$

και

$$\mathscr{H}(t) = \mathscr{H}(0) \quad \forall t \in [0,T]. \tag{1.10}$$

όπου για $t\in[0,T]$ ορίζουμε την $\widehat{u}$ τέτοια ώστε

$$\widehat{u}_{xx}(x,t) = \widehat{N}_t(x,t) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

και

$$\mathscr{H}(t) = \int_0^L \left(|\widehat{E}_x(x,t)|^2 + \tfrac{1}{2}(|\widehat{u}_x(x,t)|^2 + \widehat{N}^2(x,t)) + \widehat{N}(x,t)|\widehat{E}(x,t)|^2\right) dx.$$

Απόδειξη. Πολλαπλασιάζουμε την (1.7) με $\overline{\widehat{E}}$ και παίρνουμε

$$\widehat{E}_t\overline{\widehat{E}} = i\widehat{E}_{xx}\overline{\widehat{E}} - i\widehat{N}\widehat{E}\overline{\widehat{E}}.$$

Κατόπιν ολοκληρώνουμε στο $[0,L]$ και οδηγούμαστε στην

$$\int_0^L \widehat{E}_t\overline{\widehat{E}}dx = -i\int_0^L \left(|\widehat{E}_x|^2 + \widehat{N}|\widehat{E}|^2\right)dx.$$

Από ισότητα πραγματικών μερών έχουμε

$$\frac{d}{2dt}\int_0^L |\widehat{E}(x,t)|^2 dx = .0$$

Από την οποία συνεπάγεται η σχέση

$$\int_0^L |\widehat{E}(x,t)|^2 dx = \int_0^L |\widehat{E}(x,0)|^2 dx.$$

Πολλαπλασιάζουμε την (1.7) με $\overline{\widehat{E}_t}$ και ολοκληρώνουμε στο $[0,L]$

$$\int_0^L |\widehat{E}_t|^2 dx = i\int_0^L \left(\widehat{E}_{xx}\overline{\widehat{E}}_t - \widehat{N}\widehat{E}\overline{\widehat{E}}_t\right)dx.$$

Από ισότητα φανταστικών μερών παίρνουμε

$$\mathrm{Re}\left(\int_0^L \left(\widehat{E}_{xx}\overline{\widehat{E}}_t - \widehat{N}\widehat{E}\overline{\widehat{E}}_t\right) dx\right) = 0.$$

Όπου ολοκληρώνοντας κατά μέλη έχουμε

$$-\int_0^L \left(\mathrm{Re}[(\overline{\widehat{E}}_x)_t\widehat{E}_x] + \widehat{N}\mathrm{Re}[\widehat{E}\overline{\widehat{E}}_t]\right) dx = 0.$$

Επομένως

$$\int_0^L \left(\tfrac{1}{2}|\widehat{E}_x|_t^2 + \tfrac{1}{2}\widehat{N}|\widehat{E}|_t^2\right) dx = 0.$$

Από την οποία συνεπάγεται ότι

$$\frac{1}{2}\int_0^L \left(|\widehat{E}_x|_t^2 + (\widehat{N}|\widehat{E}|^2)_t - \widehat{N}_t|\widehat{E}|^2\right) dx = 0.$$

Για τον τελευταίο όρο του παραπάνω ολοκληρώματος έχουμε

$$\int_0^L \widehat{N}_t|\widehat{E}|^2 dx = \int_0^L \widehat{u}_{xx}|\widehat{E}|^2 dx = \int_0^L \widehat{u}|\widehat{E}|_{xx}^2 dx = \int_0^L \widehat{u}(\widehat{N}_{tt} - \widehat{N}_{xx})dx = -\int_0^L (\widehat{u}\widehat{u}_{xxt} + \widehat{u}_{xx}\widehat{N})$$

$$= -\int_0^L (\widehat{u}_x(\widehat{u}_x)_t + \widehat{N}\widehat{N}_t)dx = -\frac{d}{2dt}\int_0^L \left(\widehat{u}_x^2 + \widehat{N}^2\right) dx,$$

δηλαδή

$$\frac{d}{dt}\left\{\int_0^L \left(|\widehat{E}_x|^2 + \widehat{N}|\widehat{E}|^2 + \tfrac{1}{2}(\widehat{u}_x^2 + \widehat{N}^2)\right) dx\right\} = 0$$

η οποία μας δίνει την (1.10). □

Παρατήρηση. Στο σύστημα εξισώσεων Zakharov (1.7) – (1.8) η $\widehat{E}$ περιγράφει το ηλεκτρικό πεδίο και η $\widehat{N}$ την πυκνότητα των ιόντων. Για την καλύτερη ερμηνεία (βλ. [10], [12]) της φυσικής διαδικασίας που περιγράφει το σύστημα είναι αναγκαία η ύπαρξη μιας ποσότητας η οποία θα περιγράφει την ροή των ιόντων. Αυτή η ποσότητα συμβολίζεται με $-\widehat{u}_x$. Επίσης η $\widehat{u}$ είναι μια ομαλή $L-$περιοδική συνάρτηση. Ολοκληρώνουμε την (1.8) στο $[0, L]$ και παίρνουμε

$$\partial_t^2 \int_0^L \widehat{N}(x,t)dx = 0$$

το οποίο συνεπάγεται

$$\int_0^L \widehat{N}_t(x)dx = c, \quad t \in [0,T]$$

Άρα, για $t = 0$, έπεται:

$$c = \int_0^L \widehat{N}_1(x)dx = 0$$

Έτσι η συνάρτηση $N_t(\cdot, t)$ έχει μέση τιμή για ολά τα $t \in [0,T]$ κάτι που εξασφαλίζει ότι η συνάρτηση $\widehat{u}$ υπάρχει (βλ. Παράρτημα).

Κεφάλαιο 2

Η μέθοδος πεπερασμένων διαφορών του Glassey

2.1 Διατύπωση της μεθόδου πεπερασμένων διαφορών

Έστω $\mathcal{N}$, $J \in \mathbb{N}$. Στη συνέχεια θεωρούμε: (i) μία ομοιόμορφη διαμέριση του χρονικού διαστήματος $[0,T]$ με πλάτος $k = T/\mathcal{N}$ και κόμβους $t_n = nk$ για $n = 0,\dots,\mathcal{N}$ και (ii) μία ομοιόμορφη διαμέριση του χωρικού διαστήματος $[0,L]$ με πλάτος $h = L/J$ και κόμβους $x_j = jh$ για $j = 0,\dots,J$.

Ορίζουμε τους χώρους των $J-$περιοδικών ακολουθιών

$$\mathbb{R}^J_{per} = \{(v_j)_{j\in\mathbb{Z}} : v_j \in \mathbb{R} \text{ και } v_{j+J} = v_j, \quad \forall j \in \mathbb{Z}\}$$

και

$$\mathbb{C}^J_{per} = \{(v_j)_{j\in\mathbb{Z}} : v_j \in \mathbb{C} \text{ και } v_{j+J} = v_j, \quad \forall j \in \mathbb{Z}\}.$$

Εισάγουμε τους τελεστές διαφορών $\delta_h : \mathbb{C}^J_{per} \to \mathbb{C}^J_{per}$, $\Delta_h : \mathbb{C}^J_{per} \to \mathbb{C}^J_{per}$ ως εξής:

$$\left.\begin{aligned} \delta_h v_j &:= (\delta_h v)_j := \frac{v_{j+1} - v_j}{h} \\ \Delta_h v_j &:= (\Delta_h v)_j := \frac{v_{j+1} - 2v_j + v_{j-1}}{h^2} \end{aligned}\right\} , j = 1,\dots,J.$$

Επίσης ορίζουμε την διμελή πράξη $\otimes$ στον $\mathbb{C}^J_{per}$ ως εξής

$$(v \otimes w)_j = v_j \cdot w_j, \quad j = 1,\dots,J.$$

Έστω $M \in \mathbb{N}$ και $(v^n)_{n=0}^M \subset \mathbb{C}^J_{per}$. Τότε ορίζουμε $v^{n+\frac{1}{2}} := \frac{1}{2}(v^{n+1} + v^n)$ και $v^{n-\frac{1}{2}} := v^{(n-1)+\frac{1}{2}}$ για $n = 0,\dots,M$.

Η μέθοδος πεπερασμενων διαφορών του Glassey προτείνεται στο [7] και κατασκευάζει για $n = 0,\dots,\mathcal{N}$, $(E^n, N^n) \in \mathbb{C}^J_{per} \times \mathbb{R}^J_{per}$ μια προσέγγιση των $(E(\cdot,t_n), N(\cdot,t_n))$ ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα:

<u>1^0 Βήμα:</u> Ορίζουμε $E^0 \in \mathbb{C}^J_{per}$, $N^0 \in \mathbb{R}^J_{per}$ ως εξής:

$$E^0(x_j) = E_0(x_j), \quad N^0(x_j) = N_0(x_j), \quad j = 1,\dots,J. \tag{2.1}$$

2^0 Βήμα: Ορίζουμε $N^1 \in \mathbb{R}^J_{per}$ ως εξής:

$$N^1_j = N_0(x_j) + kN_1(x_j) + \frac{k^2}{2}\left[N_0''(x_j) + (|E_0|^2)''(x_j)\right], \quad j = 1, \dots, J. \tag{2.2}$$

3^0 Βήμα: Βρίσκουμε το $E^1 \in \mathbb{C}^J_{per}$ μέσω της σχέσης:

$$\frac{E^1 - E^0}{k} = \frac{i}{2}\Delta_h(E^0 + E^1) - i\frac{E^1 + E^0}{2} \otimes \frac{N^1 + N^0}{2}. \tag{2.3}$$

4^0 Βήμα: Για $n = 1, \dots, \mathscr{N} - 1$ βρίσκουμε τα $(E^{n+1}, N^{n+1}) \in \mathbb{C}^J_{per} \times \mathbb{R}^J_{per}$ μέσω του συστήματος:

$$\frac{E^{n+1} - E^n}{k} = \frac{i}{2}\Delta_h(E^n + E^{n+1}) - i\frac{E^{n+1} + E^n}{2} \otimes \frac{N^{n+1} + N^n}{2}, \tag{2.4}$$

$$\frac{N^{n+1} - 2N^n + N^{n-1}}{k^2} = \frac{1}{2}\Delta_h(N^{n+1} + N^{n-1}) + \Delta_h|E^n|^2. \tag{2.5}$$

2.2 Εσωτερικό γινόμενο - Νόρμες

Εισάγουμε στον $\mathbb{C}^J_{per}$ το διακριτό L^2 εσωτερικό γινόμενο $(\cdot,\cdot)_h$ ως

$$(v, w)_h := h\sum_{i=1}^{J} v_i\overline{w}_i, \quad \forall v, w \in \mathbb{C}^J_{per}$$

και συμβολίζουμε με $\|\cdot\|_h$ την παραγόμενη νόρμα

$$\|v\|_h = \sqrt{(v, v)_h}, \quad \forall v, w \in \mathbb{C}^J_{per}$$

Επίσης ορίζουμε

$$|v|_\infty := \max_{1\le j\le J} |v_j|, \quad \forall v \in \mathbb{C}^J_{per}$$

και για $1 \le p < +\infty$

$$\|v\|_{p,h} = \left(h\sum_{i=1}^{J} |v_i|^p\right)^{1/p}, \quad \forall v \in \mathbb{C}^J_{per}$$

Λήμμα 2.1. Για κάθε $v, w \in \mathbb{C}^J_{per}$ ισχύει ότι

$$(\Delta_h v, w)_h = -(\delta_h v, \delta_h w)_h \tag{2.6}$$

$$(\Delta_h v, w)_h = (v, \Delta_h w)_h \tag{2.7}$$

$$(\Delta_h v, v)_h = -\|\delta_h v\|_h^2. \tag{2.8}$$

Απόδειξη. Έστω $v, w \in \mathbb{C}^J_{per}$, έχουμε

$$\begin{aligned}
(\Delta_h v, w)_h &= h\sum_{i=1}^{J}\frac{v_{i+1}-2v_i+v_{i-1}}{h^2}\overline{w}_i = h\left(\sum_{i=1}^{J}\frac{v_{i+1}-v_i}{h^2}\overline{w}_i - \sum_{i=1}^{J}\frac{v_i-v_{i-1}}{h^2}\overline{w}_i\right)\\
&= h\left(\sum_{i=1}^{J}\frac{v_{i+1}-v_i}{h^2}\overline{w}_i - \sum_{i=0}^{J-1}\frac{v_{i+1}-v_i}{h^2}\overline{w}_{i+1}\right)\\
&= h\left(\sum_{i=1}^{J}\frac{v_{i+1}-v_i}{h^2}\overline{w}_i - \frac{v_1-v_0}{h^2}\overline{w}_1 - \sum_{i=1}^{J-1}\frac{v_{i+1}-v_i}{h^2}\overline{w}_{i+1}\right)\\
&= h\left(\sum_{i=1}^{J}\frac{v_{i+1}-v_i}{h^2}\overline{w}_i - \frac{v_{J+1}-v_J}{h^2}\overline{w}_{J+1} - \sum_{i=1}^{J-1}\frac{v_{i+1}-v_i}{h^2}\overline{w}_{i+1}\right)\\
&= h\left(\sum_{i=1}^{J}\frac{v_{i+1}-v_i}{h^2}\overline{w}_i - \sum_{i=1}^{J}\frac{v_{i+1}-v_i}{h^2}\overline{w}_{i+1}\right)
\end{aligned}$$

Επομένως

$$(\Delta_h v, w)_h = -h\sum_{i=1}^{J}\frac{v_{i+1}-v_i}{h}\overline{\frac{w_{i+1}-w_i}{h}} \tag{2.9}$$

Δηλαδή καταλήγουμε στην (2.6).

Συνεχίζουμε από την (2.9) και έχουμε

$$\begin{aligned}
(\Delta_h v, w)_h &= -(\delta_h v, \delta_h w)_h\\
&= -\overline{(\delta_h w, \delta_h v)_h}\\
&= \overline{(\Delta_h w, v)_h}\\
&= (v, \Delta_h w)_h
\end{aligned}$$

Η (2.8) προκύπτει από την (2.6) όταν $w = v$. □

Πρόταση 2.2. Για κάθε $v \in \mathbb{C}^J_{per}$ ισχύει ότι:

$$|v|^2_\infty \le c\|v\|_h(\|v\|_h + \|\delta_h v\|_h) \tag{2.10}$$

όπου $c = \max\{2, \frac{1}{L}\}$.

Απόδειξη. Έστω $v \in \mathbb{C}^J_{per}$ με $v \neq 0$. Τότε υπάρχει $j_\star \in \{1, \dots, J\}$ τέτοιο ώστε $|v|_\infty = |v_{j_\star}|$. Επίσης υποθέτουμε ότι υπάρχει $k \in \{1, \dots, J\}$ τέτοιο ώστε $|v_k| \le |v_j|$, $\forall j \in 1, \dots, J$. Επίσης

$$|v_k|^2 = \tfrac{hJ}{L}|v_k|^2 \le \tfrac{h}{L}\sum_{j=1}^{J}|v_j|^2 = \tfrac{1}{L}\|v\|^2_h$$

Στη συνέχεια διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις: $k \le j_\star$ και $k > j_\star$.

<u>Περίπτωση 1</u>$(k \le j_\star)$. Έχουμε

$$|v|^2_\infty = |v_k|^2 + \sum_{j=k}^{j_\star-1}(|v_{j+1}|^2 - |v_j|^2) \tag{2.11}$$

Για το άθροισμα στην σχέση (2.11) έχουμε

$$\begin{aligned}
\sum_{j=k}^{j_\star-1}(|v_{j+1}|^2-|v_j|^2) &\leq \textstyle\sum_{j=1}^{J}|v_{j+1}-v_j|(|v_{j+1}|+|v_j|) \\
&\leq \left(h\sum_{j=1}^{J}\left|\frac{v_{j+1}-v_j}{h}\right||v_{j+1}|\right)+\left(h\sum_{j=1}^{J}\left|\frac{v_{j+1}-v_j}{h}\right||v_j|\right) \\
&\leq \left(h\sum_{j=1}^{J}\left|\frac{v_{j+1}-v_j}{h}\right|^2\right)^{1/2}\left(h\sum_{j=1}^{J}|v_{j+1}|^2\right)^{1/2}+\left(h\sum_{j=1}^{J}\left|\frac{v_{j+1}-v_j}{h}\right|^2\right)^{1/2}\left(h\sum_{j=1}^{J}|v_j|^2\right)^{1/2} \\
&= 2\|\delta_h v\|_h\|v\|_h
\end{aligned}$$

Δηλαδή

$$|v|_\infty \leq \tfrac{1}{L}\|v\|_h^2+2\|\delta_h v\|_h\|v\|_h$$

Περίπτωση $2(k > j_\star)$. Έχουμε

$$|v|_\infty^2=|v_k|^2-\sum_{j=j_\star}^{k-1}(|v_{j+1}|^2-|v_j|^2)=|v_k|^2+\sum_{j=j_\star}^{k-1}(|v_j|^2-|v_{j+1}|^2)$$

Εκτελώντας τα ίδια βήματα όπως στην προηγούμενη περίπτωση διαπιστώνουμε ότι

$$|v|_\infty \leq \tfrac{1}{L}\|v\|_h^2+2\|\delta_h v\|_h\|v\|_h$$

Συνεπώς

$$|v|_\infty \leq c\|v\|_h(\|v\|_h+\|\delta_h v\|_h)$$

όπου $c=\max\{2,\frac{1}{L}\}$.

□

Πρόταση 2.3. Για κάθε $v\in\mathbb{C}^J_{per}$ με $v_0=0$ ισχύει ότι:

$$|v|_\infty \leq c\|\delta_h v\|_h \tag{2.12}$$

όπου $c=\sqrt{L}$.

Απόδειξη. Έστω $v\in\mathbb{C}^J_{per}$ με $v_0=0$. Τότε υπάρχει ένα $j_\star\in\{1,\dots,J\}$ τέτοιο ώστε $|v|_\infty=|v_{j_\star}|$. Εφόσον $v_{j_\star}=\sum\limits_{i=0}^{j_\star-1}(v_{i+1}-v_i)$, εφαρμόζουμε την ανισότητα Cauchy-Schwarz και παίρνουμε

$$\begin{aligned}
|v_{j_\star}|^2=\left|\sum_{i=0}^{j_\star-1}(v_{i+1}-v_i)\right|^2 &\leq J\sum_{i=0}^{j_\star-1}|v_{i+1}-v_i|^2 \\
&\leq J\sum_{i=0}^{J-1}|v_{i+1}-v_i|^2\leq Jh^2\sum_{i=1}^{J}\left|\tfrac{v_{i+1}-v_i}{h}\right|^2 \\
&\leq Lh\sum_{i=1}^{J}\left|\tfrac{v_{i+1}-v_i}{h}\right|^2\leq L\|\delta_h v\|_h^2
\end{aligned}$$

Συνεπώς $|v_{j_\star}|\leq\sqrt{L}\|\delta_h v\|_h$. □

2.3 Μοναδικότητα

Λήμμα 2.4. Η μέθοδος πεπερασμένων διαφορών είναι καλά ορισμένη.

Απόδειξη. Για $n = 2, \ldots, \mathcal{N}$, το N^n προσδιορίζεται ως λύση ενος $J \times J$ γραμμικού συστήματος εξισώσεων με πίνακα $A = (\alpha_{i,j})_{i,j=1}^J$

$$A = \begin{pmatrix} 1+\frac{k^2}{h^2} & -\frac{k^2}{2h^2} & & & -\frac{k^2}{2h^2} \\ -\frac{k^2}{2h^2} & 1+\frac{k^2}{h^2} & -\frac{k^2}{2h^2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -\frac{k^2}{2h^2} & 1+\frac{k^2}{h^2} & -\frac{k^2}{2h^2} \\ -\frac{k^2}{2h^2} & & & -\frac{k^2}{2h^2} & 1+\frac{k^2}{h^2} \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι για τα στοιχεία του πίνακα A ισχύει

$$|\alpha_{11}| = \left|1+\frac{k^2}{h^2}\right| > \left|\frac{k^2}{2h^2}\right| + \left|\frac{k^2}{2h^2}\right| = |\alpha_{1,2}| + |\alpha_{1,J}|$$

$$|\alpha_{jj}| = \left|1+\frac{k^2}{h^2}\right| > \left|\frac{k^2}{2h^2}\right| + \left|\frac{k^2}{2h^2}\right| = |\alpha_{j,j+1}| + |\alpha_{j,j-1}|, \quad j = 2, \ldots, J-1$$

$$|\alpha_{JJ}| = \left|1+\frac{k^2}{h^2}\right| > \left|\frac{k^2}{2h^2}\right| + \left|\frac{k^2}{2h^2}\right| = |\alpha_{J,1}| + |\alpha_{J,J-1}|$$

Άρα έχει αυστηρά κυριαρχική διαγώνιο, δηλαδή είναι αντιστρέψιμος.

Επίσης το E^n προσδιορίζεται ως λύση ενός $J \times J$ γραμμικού συστήματος με πίνακα $\Gamma = (\gamma_{i,j})_{i,j=1}^J$ για τον οποίο ισχύει $\Gamma = I + iB$, όπου ο πίνακας $B = (\beta_{i,j})_{i,j=1}^J$ είναι ο

$$B = \begin{pmatrix} \frac{k}{h^2}+\frac{k}{2}N^{n+\frac{1}{2}} & -\frac{k}{2h^2} & & & -\frac{k}{2h^2} \\ -\frac{k}{2h^2} & \frac{k}{h^2}+\frac{k}{2}N^{n+\frac{1}{2}} & -\frac{k}{2h^2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -\frac{k}{2h^2} & \frac{k}{h^2}+\frac{k}{2}N^{n+\frac{1}{2}} & -\frac{k}{2h^2} \\ -\frac{k}{2h^2} & & & -\frac{k}{2h^2} & \frac{k}{h^2}+\frac{k}{2}N^{n+\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι ο B είναι συμμετρικός επομένως έχει μόνο πραγματικές ιδιοτιμές. Άρα ο Γ έχει μη μηδενικές ιδιοτιμές. Συνεπώς αντιστρέφεται. □

2.4 Διακριτοί Νόμοι Διατήρησης

Λήμμα 2.5. Έστω $f \in \mathbb{R}^J_{per}$. Υπάρχει μοναδικό $v \in \mathbb{R}^J_{per}$ τ.ω.

$$\Delta_h v = f$$

με $v_0 = 0$.

Απόδειξη. Από το [13] προκύπει ότι υπάρχουν μοναδικά $(v_j)_{j=0}^{J}$ τ.ω.

$$\frac{v_{j+1} - 2v_j + v_{j-1}}{h^2} = f_j, \quad j = 1, \dots, J-1$$

με $v_0 = v_J = 0$. Στη συνέχεια επεκτείνουμε τα $(v_j)_{j=0}^{J}$ ως στοιχεία $v \in \mathbb{R}^J_{per}$. $\square$

Θεώρημα 2.6. *Έστω $(E^n)_{n=0}^{\mathscr{N}}$, $(N^n)_{n=0}^{\mathscr{N}}$ είναι οι προσεγγίσεις διαφορών που ορίζονται από το 2.1. Τότε το διακριτό σχήμα διατηρεί δύο ποσότητες:*

$$\|E^n\|_h^2 = \|E^0\|_h^2 \quad n = 0, \dots, \mathscr{N}. \tag{2.13}$$

Για $n = 0, \dots, \mathscr{N} - 1$ έστω $u^n \in \mathbb{R}^J_{per}$ τ.ω. $\Delta_h u^n := \frac{N^{n+1} - N^n}{k}$. Τότε

$$\mathscr{E}_d^n = \mathscr{E}_d^1, \quad n = 1, \dots, \mathscr{N} \tag{2.14}$$

όπου

$$\mathscr{E}_d^n \equiv \|\delta_h E^n\|_h^2 + \tfrac{1}{2}\|\delta_h u^{n-1}\|_h^2 + \tfrac{1}{4}\{\|N^n\|_h^2 + \|N^{n-1}\|_h^2\} + \tfrac{1}{2}(N^n + N^{n-1}, |E^n|^2)_h.$$

Απόδειξη. Παίρνοντας το εσωτερικό γινόμενο της (2.4) με $E^{n+\frac{1}{2}}$ οδηγούμαστε στην σχέση

$$\left(\tfrac{E^{n+1} - E^n}{k}, E^{n+\frac{1}{2}}\right)_h = i\left(\Delta_h E^{n+\frac{1}{2}}, E^{n+\frac{1}{2}}\right)_h - i\left(N^{n+\frac{1}{2}} \otimes E^{n+\frac{1}{2}}, E^{n+\frac{1}{2}}\right)_h, \quad n = 0, \dots, \mathscr{N} - 1 \tag{2.15}$$

Η ισότητα πραγματικών μερών στην σχέση (2.15) δίνει

$$\mathrm{Re}\left(\tfrac{E^{n+1} - E^n}{k}, E^{n+\frac{1}{2}}\right)_h = -\mathrm{Im}\left(\Delta_h E^{n+\frac{1}{2}}, E^{n+\frac{1}{2}}\right)_h + \mathrm{Im}\left(N^{n+\frac{1}{2}} \otimes E^{n+\frac{1}{2}}, E^{n+\frac{1}{2}}\right)_h$$

για $n = 0, \dots, \mathscr{N} - 1$. Στο δεξιό μέλος της παραπάνω παράστασης παρατηρούμε ότι

$$\left(N^{n+\frac{1}{2}} \otimes E^{n+\frac{1}{2}}, E^{n+\frac{1}{2}}\right)_h = h\sum_{j=1}^{J} N_j^{n+\frac{1}{2}} \left|E_j^{n+\frac{1}{2}}\right|^2 \in \mathbb{R}$$

και

$$\left(\Delta_h E^{n+\frac{1}{2}}, E^{n+\frac{1}{2}}\right)_h = -\|\delta_h E^{n+\frac{1}{2}}\|_h^2 \in \mathbb{R}$$

Άρα καταλήγουμε στην σχέση

$$\|E^{n+1}\|_h^2 = \|E^n\|_h^2, \quad \text{για } n = 0, \dots, \mathscr{N}$$

Επομένως

$$\|E^n\|_h^2 = \|E^0\|_h^2, \quad \text{για } n = 0, \dots, \mathscr{N}$$

Στην συνέχεια παίρνοντας το εσωτερικό γινόμενο της (2.4) με το $(E^{n+1} - E^n)$ οδηγούμαστε στην σχέση

$$\tfrac{1}{k}\|E^{n+1} - E^n\|_h^2 - i(\Delta_h E^{n+\frac{1}{2}}, E^{n+1} - E^n)_h = -i(N^{n+\frac{1}{2}} \otimes E^{n+\frac{1}{2}}, E^{n+1} - E^n)_h$$

Στην παράσταση λόγω ισότητας των φανταστικών μερών παίρνουμε

$$\mathrm{Re}(\Delta_h E^{n+\frac{1}{2}}, E^{n+1} - E^n)_h = \mathrm{Re}(N^{n+\frac{1}{2}} \otimes E^{n+\frac{1}{2}}, E^{n+1} - E^n)_h \tag{2.16}$$

Πρώτα παρατηρούμε ό,τι

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(\Delta_h E^{n+\frac{1}{2}}, E^{n+1}-E^n)_h &= -\tfrac{1}{2}\mathrm{Re}(\delta_h E^{n-1}+\delta_h E^n, \delta_h E^{n+1}-\delta_h E^n)_h \\ &= -\tfrac{1}{2}(\|\delta_h E^{n+1}\|_h^2 - \|\delta_h E^n\|_h^2)\end{aligned} \tag{2.17}$$

Επιπλέον έχουμε

$$\mathrm{Re}\left(N^{n+\frac{1}{2}} \otimes E^{n+\frac{1}{2}}, E^{n+1}-E^n\right)_h = \tfrac{1}{2}\left(N^{n+\frac{1}{2}}, |E^{n+1}|^2 - |E^n|^2\right)_h \tag{2.18}$$

Επομένως η (2.16) μέσω των (2.17) και (2.18) γίνεται

$$-\|\delta_h E^{n+1}\|_h^2 + \|\delta_h E^n\|_h^2 = \left(N^{n+\frac{1}{2}}, |E^{n+1}|^2 - |E^n|^2\right)_h \tag{2.19}$$

Συνεχίζουμε με το εσωτερικό γινόμενο της (2.5) με την $u^{n-\frac{1}{2}}$

$$\left(\tfrac{N^{n+1}-2N^n+N^{n-1}}{k^2}, u^{n-\frac{1}{2}}\right)_h - \tfrac{1}{2}\left(\Delta_h N^{n+1} + \Delta_h N^{n-1}, u^{n-\frac{1}{2}}\right)_h = \left(\Delta_h |E^n|^2, u^{n-\frac{1}{2}}\right)_h \tag{2.20}$$

Θέτουμε

$$\begin{aligned} II_1 &= \tfrac{1}{k^2}\left(N^{n+1} - 2N^n + N^{n-1}, u^{n-\frac{1}{2}}\right)_h \\ II_2 &= \left(\Delta_h N^{n+1} + \Delta_h N^{n-1}, u^{n-\frac{1}{2}}\right)_h \\ II_3 &= \left(\Delta_h |E^n|^2, u^{n-\frac{1}{2}}\right)_h \end{aligned}$$

Επομένως η παράσταση (2.20) λαμβάνει την μορφή

$$II_1 - \tfrac{1}{2} II_2 = II_3 \tag{2.21}$$

Όπου

$$\begin{aligned} II_1 &= \tfrac{1}{k}\left(\tfrac{N^{n+1}-N^n}{k} - \tfrac{N^n - N^{n-1}}{k}, u^{n-\frac{1}{2}}\right)_h = \tfrac{1}{k}\left(\Delta_h u^n - \Delta_h u^{n-1}, u^{n-\frac{1}{2}}\right)_h \\ &= \tfrac{1}{k}\left(\Delta_h(u^n - u^{n-1}), u^{n-\frac{1}{2}}\right)_h = -\tfrac{1}{2k}\left(\delta_h(u^n - u^{n-1}), \delta_h(u^n + u^{n-1})\right)_h \\ &= -\tfrac{1}{2k}(\|\delta_h u^n\|_h^2 - \|\delta_h u^{n-1}\|_h^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} II_2 &= \left(\Delta_h(N^{n+1} + N^{n-1}), u^{n-\frac{1}{2}}\right)_h = \tfrac{1}{2}(N^{n+1} + N^{n-1}, \Delta_h(u^n + u^{n-1}))_h \\ &= \tfrac{1}{2}\left(N^{n+1} + N^{n-1}, \tfrac{N^{n+1}-N^n}{k} + \tfrac{N^n - N^{n-1}}{k}\right)_h = \tfrac{1}{2k}\left(N^{n+1} + N^{n-1}, N^{n+1} - N^{n-1}\right)_h \\ &= \tfrac{1}{2k}\left(\|N^{n+1}\|_h^2 - \|N^{n-1}\|_h^2\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} II_3 &= \left(\Delta_h |E^n|^2, u^{n-\frac{1}{2}}\right)_h = \tfrac{1}{2}\left(|E^n|^2, \Delta_h(u^n + u^{n-1})\right)_h = \tfrac{1}{2}\left(|E^n|^2, \tfrac{N^{n+1}-N^n}{k} + \tfrac{N^n - N^{n-1}}{k}\right)_h \\ &= \tfrac{1}{2k}\left(|E^n|^2, N^{n+1} - N^{n-1}\right)_h \end{aligned}$$

Άρα η (2.21) θα πάρει την μορφή

$$-\tfrac{1}{2k}\left(\|\delta_h u^n\|_h^2 - \|\delta_h u^{n-1}\|_h^2\right) - \tfrac{1}{4k}\left(\|N^{n+1}\|_h^2 - \|N^{n-1}\|_h^2\right) = \tfrac{1}{2k}\left(|E^n|^2, N^{n+1} - N^{n-1}\right)_h$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{aligned}-\tfrac{1}{2}\|\delta_h u^n\|_h^2 - \tfrac{1}{4}\|N^n\|_h^2 - \tfrac{1}{4}\|N^{n+1}\|_h^2 = -\tfrac{1}{2}\|\delta_h u^{n-1}\|_h^2 - \tfrac{1}{4}\|N^{n-1}\|_h^2 - \tfrac{1}{4}\|N^n\|_h^2 \\ +\tfrac{1}{2}\left(|E^n|^2, N^{n+1} - N^{n-1}\right)_h\end{aligned} \tag{2.22}$$

Προσθέτουμε τις (2.19) και (2.22) κατα μέλη και έχουμε

$$\begin{aligned}\|\delta_h E^{n+1}\|_h^2 + \tfrac{1}{2}\|\delta_h u^n\|_h^2 + \tfrac{1}{4}\{\|N^n\|_h^2 + \|N^{n+1}\|_h^2\} + \tfrac{1}{2}\left(N^{n+1} + N^n, |E^{n+1}|^2\right)_h = \\ \|\delta_h E^n\|_h^2 + \tfrac{1}{2}\|\delta_h u^{n-1}\|_h^2 + \tfrac{1}{4}\{\|N^{n-1}\|_h^2 + \|N^n\|_h^2\} + \frac{1}{2}\left(N^n + N^{n-1}, |E^n|^2\right)_h\end{aligned}$$

Συνεπώς συμπαιρένουμε ότι $\mathscr{E}_d^{n+1} = \mathscr{E}_d^n$, όπου $n = 1, \ldots, \mathscr{N}$, από όπου καταλήγουμε στην (2.14).

$\square$

Λήμμα 2.7. Υπάρχει σταθερά c, η οποία εξαρτάται μόνο από τα δεδομένα, τέτοια ώστε η λύση του διακριτού σχήματος (2.1),(2.4), (2.5) να ικανοποιεί την

$$\|E^{n+1}\|_h^2 + \|\delta_h E^{n+1}\|_h^2 + \|\delta_h u^n\|_h^2 + \|N^n\|_h^2 + \|N^{n+1}\|_h^2 \le c \tag{2.23}$$

,δηλαδή $\max\limits_{0\le n\le \mathscr{N}-1} \|E^n\|_\infty \le c$.

Απόδειξη. Έστω ότι $\mathscr{S} = \frac{1}{2}(N^{n+1} + N^n, |E^{n+1}|^2)_h$.

$$\begin{aligned}|\mathscr{S}| &= |\tfrac{1}{2}(N^{n+1} + N^n, |E^{n+1}|^2)_h| \\ &= |\tfrac{1}{2}(N^{n+1}, |E^{n+1}|^2)_h + \tfrac{1}{2}(N^n, |E^{n+1}|^2)_h| \\ &\le \tfrac{1}{2}\|N^{n+1}\|_h\|E^{n+1}\|_{4,h}^2 + \tfrac{1}{2}\|N^{n+1}\|_h\|E^{n+1}\|_{4,h}^2\end{aligned}$$

Με χρήση της ανισότητας Cauchy με παράμετρο $\epsilon > 0$ έχουμε

$$|\mathscr{S}| \le \tfrac{\epsilon}{4}(\|N^{n+1}\|_h^2 + \|N^n\|_h^2) + \tfrac{1}{2\epsilon}\|E^{n+1}\|_{4,h}^4$$

Με χρήση της (2.10) ο τελευταίος όρος της ανισότητας γίνεται

$$\begin{aligned}\|E^{n+1}\|_{4,h}^4 \le c\|E^{n+1}\|_h^2|E^{n+1}|_\infty^2 &\le c\|E^{n+1}\|_h^3(\|E^{n+1}\|_h + \|\delta_h E^{n+1}\|_h) \\ &\le c\|E^0\|_h^4 + c\|E^0\|_h^3\|\delta_h E^{n+1}\|_h\end{aligned}$$

Η ποσότητα $\|E^0\|_h$ εξαρτάται μόνο από τα αρχικά δεδομένα. Άρα $\|E^0\|_h \le c_B$, όπου c_B σταθερά που εξαρτάται μόνο από τα αρχικά δεδομένα. Συνεπώς

$$\begin{aligned}\|E^{n+1}\|_{4,h}^4 &\le cc_B^3\|\delta_h E^{n+1}\|_h + c_\Gamma \\ &\le \delta\|\delta_h E^{n+1}\|_h^2 + \tfrac{1}{\delta}c^2 c_B^6 + c_\Gamma, \quad \delta > 0\end{aligned}$$

,όπου $c_\Gamma = c(c_B)^4$.

Επίσης η ποσότητα $\mathscr{E}_d^{n+1}$ θα γίνει

$$\begin{aligned}\|\delta_h E^{n+1}\|_h^2 + \tfrac{1}{2}\|\delta_h u^n\|_h^2 + \tfrac{1}{4}\{\|N^{n+1}\|_h^2 + \|N^n\|_h^2\} &= \mathscr{E}_d^{n+1} - \mathscr{S} \\ &\le \mathscr{E}_d^1 + \tfrac{\epsilon}{4}(\|N^{n+1}\|_h^2 + \|N^n\|_h^2) + \tfrac{1}{2\epsilon}(\delta\|\delta_h E^{n+1}\|_h^2 + \tfrac{1}{\delta}c^2 c_B^6 + c_\Gamma)\end{aligned}$$

Διαλέγουμε $\epsilon = \frac{1}{2}$ και $\delta = \frac{1}{2}$ και έχουμε

$$\frac{1}{2}\|\delta_h E^{n+1}\|_h^2 + \frac{1}{2}\|\delta_h u^n\|_h^2 + \frac{1}{8}\{\|N^{n+1}\|_h^2 + \|N^n\|_h^2\} \leq \mathscr{E}_d^1 + \frac{1}{2\epsilon}(\delta + \frac{1}{\delta}c^2 c_B^6 + c_\Gamma)$$

Συνεπώς

$$\|\delta_h E^{n+1}\|_h^2 + \|\delta_h u^n\|_h^2 + \|N^{n+1}\|_h^2 + \|N^n\|_h^2 \leq 8(\mathscr{E}_d^1 + \frac{1}{2\epsilon}(\delta + \frac{1}{\delta}c^2 c_B^6 + c_\Gamma))$$

Προσθέτουμε στην παραπάνω ανισότητα την ποσότητα $\|E^{n+1}\|_h^2$ και καταλήγουμε στην

$$\|E^{n+1}\|_h^2 + \|\delta_h E^{n+1}\|_h^2 + \|\delta_h u^n\|_h^2 + \|N^{n+1}\|_h^2 + \|N^n\|_h^2 \leq c_\diamond$$

όπου $c_\diamond = c_B^2 + 8(\mathscr{E}_d^1 + \frac{1}{2\epsilon}(\delta + \frac{1}{\delta}c^2 c_B^6 + c_\Gamma))$.

Για το $\mathscr{E}_d^1$ έχουμε

$$\mathscr{E}_d^1 = \|\delta_h E^1\|_h^2 + \frac{1}{2}\|\delta_h u^0\|_h^2 + \frac{1}{4}\{\|N^1\|_h^2 + \|N^0\|_h^2\} + \frac{1}{2}(N^1 + N^0, |E^1|^2)_h$$

με

$$\begin{aligned}(N^1 + N^0, |E^1|^2)_h &\leq c_1(\|N^1 + N^0\|^2 + \|E^1\|_{4,h}^2)\\ &\leq c_1(\|N^1 + N^0\|^2 + c_2\|E^0\|_h^4 + c\|E^0\|_h^3\|\delta_h E^1\|_h)\\ &\leq c_3(\|N^1 + N^0\|^2 + \|E^0\|_h^2)\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\|\delta_h E^1\|_h^2 &= -(\Delta_h E^1, E^1)_h\\ &= 2i(\tfrac{E^1 - E^0}{k}, E^1)_h + (\Delta_h E^0, E^1)_h - \tfrac{1}{2}((N^1 + N^0)\otimes(E^1 + E^0), E^1)_h\end{aligned}$$

Από ισότητα πραγματικών μερών παίρνουμε

$$\|\delta_h E^1\|_h^2 = \frac{2}{k}\mathrm{Im}(E^0, E^1)_h - \mathrm{Re}(\delta_h E^0, \delta_h E^1)_h - \frac{1}{2}\mathrm{Re}(((N^1 + N^0)\otimes(E^1 + E^0), E^1)_h) \tag{2.24}$$

όπου με χρήση της ανισότητας Cauchy και της (2.13) έχουμε

$$\begin{aligned}|\mathrm{Re}(\delta_h E^0, \delta_h E^1)_h| &\leq |(\delta_h E^0, \delta_h E^1)_h| \leq \tfrac{1}{2}\|\delta_h E^0\|_h^2 + \tfrac{1}{2}\|\delta_h E^1\|_h^2\\ |\mathrm{Im}(E^0, E^1)_h| &\leq |(E^0, E^1)_h| \leq \|E^0\|_h\|E^1\|_h = \|E^0\|_h^2\\ |\mathrm{Re}(((N^1 + N^0)\otimes(E^1 + E^0), E^1)_h)| &\leq (N^1 + N^0, |E^1|^2)_h) + (N^1 + N^0, E^0\otimes E^1)_h)\\ &\leq c(\|N^1 + N^0\|_h^2 + \|E^0\|_h^2 + \|E^0\|_h^4)\end{aligned}$$

Επομένως η (2.24) θα γίνει

$$\|\delta_h E^1\|_h^2 \leq \|\delta_h E^0\|_h^2 + 2c(\|N^1 + N^0\|_h^2 + \|E^0\|_h^2 + \|E^0\|_h^4)$$

Τέλος

$$\|\delta_h u^0\|_h^2 = -(\Delta_h u^0, u^0)_h = -\left(\frac{N^1 - N^0}{k}, u^0\right)_h \leq \frac{c}{k}\|N^1 - N^0\|_h |u^0|_\infty$$

Με χρήση της Πρότασης 2.3 και της ανισότητας Cauchy με παράμετρο $\epsilon > 0$, τέτοια ώστε $\epsilon < \frac{k}{cL^2}$ παίρνουμε

$$\|\delta_h u^0\|_h^2 \leq \frac{c}{4k\epsilon}\|N^1 - N^0\|_h^2 + \frac{c\epsilon}{k}\|\delta_h u^0\|_h^2$$

ή ισοδύναμα

$$\|\delta_h u^0\|_h^2 \leq c_\epsilon\|N^1 - N^0\|_h^2$$

Επίσης η (2.2) δίνει το N^1 συναρτήσει του N^0. Συνεπώς το $\mathscr{E}_d^1$ εξαρτάται από τα αρχικά δεδομένα. Άρα καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η σταθερά $c_\diamond$ εξαρτάται από τα αρχικά δεδομένα. □

2.5 Συνέπεια

Για $n = 0, \dots, \mathscr{N}$, $j \in \mathbb{Z}$ ορίζουμε

$$\widetilde{E}_j^n := E(x_j, t^n), \quad \widetilde{N}_j^n := N(x_j, t^n),$$

τα σφάλματα

$$e_j^n = \widetilde{E}_j^n - E_j^n, \tag{2.25}$$

$$\eta_j^n = \widetilde{N}_j^n - N_j^n. \tag{2.26}$$

Λήμμα 2.8. Έστω $\{\tau^\ell\}_{\ell=0}^{\mathscr{N}-1} \in \mathbb{C}_{per}^J$ και $\{\sigma^\ell\}_{\ell=1}^{\mathscr{N}-1} \in \mathbb{C}_{per}^J$ που ορίζονται από τις

$$\begin{aligned} \tau^\ell &= \tfrac{\widetilde{E}^{\ell+1}-\widetilde{E}^\ell}{k} - \tfrac{i}{2}\Delta_h(\widetilde{E}^{\ell+1} + \widetilde{E}^\ell) + i\widetilde{N}^{\ell+\frac{1}{2}} \otimes \widetilde{E}^{\ell+\frac{1}{2}} \\ \sigma^\ell &= \tfrac{\widetilde{N}^{\ell+1}-2\widetilde{N}^\ell+\widetilde{N}^{\ell-1}}{k^2} - \tfrac{1}{2}\Delta_h(\widetilde{N}^{\ell+1} + \widetilde{N}^{\ell-1}) - \Delta_h|\widetilde{E}^\ell|^2 \end{aligned} \tag{2.27}$$

Αν $E \in C^5(\Omega;\mathbb{C})$ και $N \in C^4(\Omega;\mathbb{R})$, όπου $\Omega = [0, L] \times [0, T]$, τότε υπάρχουν θετικές παραγματικές σταθερές c_1, c_2, c_3 ανεξάρτητες των k, h, E και N, τέτοιες ώστε

$$\begin{aligned} |\tau^\ell|_\infty &\le c_1 \mathscr{B}_I(E, N)(k^2 + h^2) \\ |\sigma^\ell|_\infty &\le c_2 \mathscr{B}_{II}(E, N)(k^2 + h^2) \\ |\tau^{\ell+1} - \tau^\ell|_\infty &\le c_3 \mathscr{B}_{III}(E, N)k(k^2 + h^2) \end{aligned} \tag{2.28}$$

όπου

$$\mathscr{B}_I(E, N) = \max_\Omega|\partial_t^3 E| + \max_\Omega|\partial_x^4 E| + \max_\Omega|\partial_x^2\partial_t^2 E| + \max_\Omega|N|\max_\Omega|\partial_t^2 E| + \max_\Omega|\partial_t^2 N|\max_\Omega|E|$$

$$\mathscr{B}_{II}(E, N) = \max_\Omega|\partial_t^4 N| + \max_\Omega|\partial_x^4 N| + \max_\Omega|\partial_x^2\partial_t^2 N| + \max_\Omega|\partial_x^4|E|^2|$$

$$\begin{aligned} \mathscr{B}_{III}(E, N) = {}& \max_\Omega|\partial_t^4 E| + \max_\Omega|\partial_t\partial_x^4 E| + \max_\Omega|\partial_x^2\partial_t^3 E| + \max_\Omega|\partial_t N|\max_\Omega|\partial_t^2 E| \\ & + \max_\Omega|\partial_t^2 N|\max_\Omega|\partial_t E| + \max_\Omega|N|\max_\Omega|\partial_t^3 E| + \max_\Omega|\partial_t^3 N|\max_\Omega|E| \end{aligned}$$

Απόδειξη. Η εξίσωση (1.1) του (ZS) στο σημείο $(x_j, t^{\ell+\frac{1}{2}})$ δίνει

$$\partial_t E(x_j, t^{\ell+\frac{1}{2}}) = i\partial_x^2 E(x_j, t^{\ell+\frac{1}{2}}) - iN(x_j, t^{\ell+\frac{1}{2}})E(x_j, t^{\ell+\frac{1}{2}}) \tag{2.29}$$

Με χρήση του αναπτύγματος Taylor για τους όρους του τ_j^ℓ για $j = 1, \dots, J$ έχουμε

$$\tfrac{\widetilde{E}_j^{\ell+1}-\widetilde{E}_j^\ell}{k} = \partial_t E(x_j, t^{\ell+\frac{1}{2}}) + \tfrac{k^2}{24}\partial_t^3 E(x_j, \xi_{1,j}^\ell) \tag{2.30}$$

$$\tfrac{1}{2}(\partial_{xx}E(x_j, t^{\ell+1}) + \partial_{xx}E(x_j, t^\ell)) = \partial_{xx}E(x_j, t^{\ell+\frac{1}{2}}) + \tfrac{k^2}{8}\partial_x^2\partial_t^2 E(x_j, \xi_{2,j}^\ell) \tag{2.31}$$

$$\widetilde{N}^{\ell+\frac{1}{2}} = N(x_j, t^{\ell+\frac{1}{2}}) + \tfrac{k^2}{8}\partial_t^2 N(x_j, \xi_{3,j}^\ell) \tag{2.32}$$

$$\widetilde{E}^{\ell+\frac{1}{2}} = E(x_j, t^{\ell+\frac{1}{2}}) + \tfrac{k^2}{8}\partial_t^2 E(x_j, \xi_{4,j}^\ell) \tag{2.33}$$

όπου $\xi_{1,j}^\ell$, $\xi_{2,j}^\ell$, $\xi_{3,j}^\ell$, $\xi_{4,j}^\ell \in [t^\ell, t^{\ell+1}]$.

Συνεχίζουμε στην (2.31)

$$\tfrac{1}{2}(\partial_{xx}E(x_j,t^{\ell+1})+\partial_{xx}E(x_j,t^{\ell}))=\tfrac{1}{2}\Delta_h(\widetilde{E}^{\ell+1}+\widetilde{E}^{\ell})-\tfrac{h^2}{24}(\partial_x^4E(\zeta_1,t^{\ell+1})+\partial_x^4E(\zeta_2,t^{\ell})) \tag{2.34}$$

όπου ζ_1, $\zeta_2\in[x_{j-1},x_{j+1}]$.

Αντικαθιστούμε τις σχέσεις (2.30), (2.32), (2.33), (2.34) στον τύπο του τ^ℓ και με την χρήση του (2.29) παίρνουμε

$$\begin{aligned}\tau_j^\ell =&\tfrac{k^2}{24}\partial_t^3E(x_j,\xi_{1,j}^\ell)+\tfrac{k^2}{8}\partial_x^2\partial_t^2E(x_j,\xi_{2,j}^\ell)-i\tfrac{h^2}{6}\partial_x^4E(\zeta_3,t^{\ell+\frac12})\\ &+\tfrac{ik^2}{8}\left(N(x_j,t^{\ell+\frac12})\partial_t^2E(x_j,\xi_{4,j}^\ell)+E(x_j,t^{\ell+\frac12})\partial_t^2N(x_j,\xi_{3,j}^\ell)\right)\\ &+i\tfrac{k^4}{64}\partial_t^2N(x_j,\xi_{3,j}^\ell)\partial_t^2E(x_j,\xi_{4,j}^\ell)\end{aligned} \tag{2.35}$$

Επομένως

$$|\tau^\ell|_\infty\le c_1\mathscr{B}_I(E,N)(k^2+h^2)$$

Από τον τύπο (2.35) βρίσκουμε την ποσότητα $\tau^{\ell+1}-\tau^\ell$

$$\begin{aligned}\tau^{\ell+1}-\tau^\ell =&\tfrac{k^2}{24}\left(\partial_t^3E(x_j,\xi_{1,j}^{\ell+1}\right)-\partial_t^3E(x_j,\xi_{1,j}^\ell))+\tfrac{k^2}{8}\left(\partial_x^2\partial_t^2E(x_j,\xi_{2,j}^{\ell+1}-\partial_x^2(\partial_t^2E(x_j,\xi_{2,j}^\ell)\right)\\ &-i\tfrac{h^2}{6}\left(\partial_x^4E(\zeta_3,t^{(\ell+1)+\frac12})-\partial_x^4E(\zeta_3,t^{\ell+\frac12})\right)+\tfrac{ik^2}{8}\Big[N(x_j,t^{(\ell+1)+\frac12})\partial_t^2E(x_j,\xi_{4,j}^{\ell+1})\\ &-N(x_j,t^{\ell+\frac12})\partial_t^2E(x_j,\xi_{4,j}^\ell)+E(x_j,t^{(\ell+1)+\frac12})\partial_t^2N(x_j,\xi_{3,j}^{\ell+1})\\ &-E(x_j,t^{\ell+\frac12})\partial_t^2N(x_j,\xi_{3,j}^\ell)\Big]+i\tfrac{k^4}{64}\Big(\partial_t^2N(x_j,\xi_{3,j}^{\ell+1})\partial_t^2E(x_j,\xi_{4,j}^{\ell+1})\\ &-\partial_t^2N(x_j,\xi_{3,j}^\ell)\partial_t^2E(x_j,\xi_{4,j}^\ell)\Big)\end{aligned}$$

όπου με απλή εφαρμογή του θεωρήματος μέσης τιμής παίρνουμε

$$\begin{aligned}\tau^{\ell+1}-\tau^\ell =&k\Big\{\tfrac{k^2}{12}\partial_t^4E(x_j,\tilde{\xi}_{1,j}^\ell)+\tfrac{k^2}{4}\partial_x^2\partial_t^3E(x_j,\tilde{\xi}_{2,j}^\ell)-i\tfrac{h^2}{3}\partial_t\partial_x^4E(\zeta_3,\tilde{\xi}_{5,j})\\ &+\tfrac{ik^2}{8}\Big(\partial_tN(x_j,\tilde{\xi}_{6,j})\partial_t^2E(x_j,\xi_{4,j}^\ell)+N(x_j,t^{\ell+\frac12})\partial_t^3E(x_j,\tilde{\xi}_{4,j}^\ell)\\ &+\partial_tE(x_j,\tilde{\xi}_{7,j})\partial_t^2N(x_j,\xi_{3,j}^\ell)+\partial_tE(x_j,t^{\ell+\frac12})\partial_t^2N(x_j,\tilde{\xi}_{3,j}^\ell)\Big)\\ &+i\tfrac{k^4}{64}\Big(\partial_t^3N(x_j,\tilde{\xi}_{3,j}^\ell)\partial_t^2E(x_j,\xi_{4,j}^\ell)+\partial_t^2N(x_j,\xi_{3,j}^\ell)\partial_t^3E(x_j,\tilde{\xi}_{4,j}^\ell)\Big)\Big\}\end{aligned}$$

όπου $\tilde{\xi}_{1,j}^\ell$, $\tilde{\xi}_{2,j}^\ell$, $\tilde{\xi}_{4,j}^\ell$, $\tilde{\xi}_{4,j}^\ell$, $\tilde{\xi}_{5,j}$, $\tilde{\xi}_{6,j}$, $\tilde{\xi}_{6,j}\in[t^{\ell+1},t^\ell]$.

Συνεπώς

$$|\tau^{\ell+1}-\tau^\ell|_\infty\le c_3\mathscr{B}_{III}(E,N)k(k^2+h^2)$$

Η εξίσωση (1.2) του (ZS) στο σημείο (x_j,t^ℓ)

$$\partial_t^2N(x_j,t^\ell)=\partial_x^2N(x_j,t^\ell)+\left(\partial_x^2|E|^2\right)(x_j,t^\ell) \tag{2.36}$$

Με χρήση του αναπτύγματος Taylor για τους όρους του σ_j^ℓ για $j=1,\dots,J$ έχουμε

$$\partial_t^2N(x_j,t^\ell)=\tfrac{N(x_j,t^{\ell+1})-2N(x_j,t^\ell)+N(x_j,t^{\ell-1})}{k^2}+\tfrac{k^2}{24}\partial_t^4N(x_j,\psi_1) \tag{2.37}$$

$$\partial_x^2N(x_j,t^\ell)=\tfrac12(\partial_x^2N(x_j,t^{\ell+1})+\partial_x^2N(x_j,t^{\ell-1}))-\tfrac{k^2}{8}\partial_x^2\partial_t^2N(x_j,\psi_2) \tag{2.38}$$

$$\left(\partial_x^2|E|^2\right)(x_j,t^\ell)=\tfrac{|E(x_{j+1},t^\ell)|^2-2|E(x_j,t^\ell)|^2+|E(x_{j-1},t^\ell)|^2}{k^2}+\tfrac{k^2}{24}\partial_x^4|E(\zeta_4,t^\ell)|^2 \tag{2.39}$$

όπου ψ_1, $\psi_2 \in [t^\ell, t^{\ell+1}]$ και $\zeta_4 \in [x_{j-1}, x_{j+1}]$.

Για την (2.38) έχουμε

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}(\partial_x^2 N(x_j,t^{\ell+1}) + \partial_x^2 N(x_j,t^{\ell-1})) &= \tfrac{1}{2}\Delta_h(N(x_j,t^{\ell+1}) + N(x_j,t^{\ell-1})) \\ &\quad - \tfrac{h^2}{24}(\partial_x^4 N(\zeta_5,t^{\ell+1}) + \partial_x^4 N(\zeta_6,t^{\ell-1})) \quad (2.40)\end{aligned}$$

όπου ζ_5, $\zeta_6 \in [x_{j-1}, x_{j+1}]$.

Συνδυάζοντας τις (2.36) (2.37), (2.39), (2.40) το σφάλμα συνέπειας σ_j^ℓ θα γίνει

$$\sigma_j^\ell = \tfrac{k^2}{24}\partial_t^4 N(x_j,\psi_1) + \tfrac{h^2}{24}(\partial_x^4 N(\zeta_5,t^{\ell+1}) + \partial_x^6 N(\zeta_6,t^\ell)) + \tfrac{k^2}{8}\partial_x^2\partial_t^2 N(x_j,\psi_2) - \tfrac{k^2}{12}\partial_t^4|E(\zeta_4,t^\ell)|^2$$

Συνεπώς

$$|\sigma^\ell|_\infty \le c_3\mathscr{B}_{II}(E,N)(k^2+h^2)$$

□

2.6 Σύγκλιση

Θεώρημα 2.9. *Έστω $T>0$. Υποθέτουμε ότι το αντίστοιχο πρόβλημα αρχικών τιμών έχει μοναδική λύση και ότι ικανοποιούνται τα δεδομένα* (1.3). *Έστω ότι τα E^n, N^n υπολογίζονται από τις σχέσεις* (2.1), (2.4), (2.5) *για $n = 1,\ldots,\mathscr{N}$. Ορίζουμε*

$$\mathcal{E}^n = \frac{1}{2}\left[\|e^{n+1}\|_h^2 + \|\delta_h e^{n+1}\|_h^2 + \|\delta_h U^n\|_h^2 + \frac{1}{2}(\|\eta^{n+1}\|_h^2 + \|\eta^n\|_h^2)\right] \quad (2.41)$$

Υπάρχει μια σταθερά c_T η οποία εξαρτάται μόνο από τα δεδομένα και το T τέτοια ώστε

$$\mathcal{E}^n \le c_T\left[\mathcal{E}^0 + (k^2+h^2)\right], \quad \text{για } n = 1,\ldots,\mathscr{N}-1.$$

Επιπρόσθετα, $\mathcal{E}^0 = c(k^2+h^2)$

$$\mathcal{E}^n \le c_T(k^2+h^2).$$

Αφαιρώντας την (2.4) από την σχέση της τ^n και χρησιμοποιώντας τους ορισμούς των σφαλμάτων συνέπειας για τα e^n και η^n καταλήγουμε στην

$$\tfrac{e^{n+1}-e^n}{k} - i\Delta_h e^{n+\frac12} = \tau^n - i\widetilde{N}^{n+\frac12}\otimes\widetilde{E}^{n+\frac12} + iN^{n+\frac12}\otimes E^{n+\frac12} \quad (2.42)$$

Επίσης

$$\begin{aligned}\widetilde{N}^{n+\frac12}\otimes\widetilde{E}^{n+\frac12} - N^{n+\frac12}\otimes E^{n+\frac12} &= (\eta^{n+\frac12} + N^{n+\frac12})\otimes(e^{n+\frac12} + E^{n+\frac12}) - N^{n+\frac12}\otimes E^{n+\frac12} \\ &= \eta^{n+\frac12}\otimes(e^{n+\frac12} + E^{n+\frac12}) + e^{n+\frac12}\otimes\widetilde{N}^{n+\frac12} \\ &= \eta^{n+\frac12}\otimes\widetilde{E}^{n+\frac12} + e^{n+\frac12}\otimes N^{n+\frac12}\end{aligned}$$

Άρα η (2.42) θα λάβει την μορφή

$$\tfrac{e^{n+1}-e^n}{k} - i\Delta_h e^{n+\frac12} = \tau^n - \tfrac{i}{2}\eta^{n+\frac12}\otimes(\widetilde{E}^{n+1} + \widetilde{E}^n) - ie^{n+\frac12}\otimes N^{n+\frac12} \quad (2.43)$$

Εκτελώντας την ίδια διαδικασία για τις (2.5) και σ^n καταλήγουμε στην

$$\tfrac{\eta^{n+1}-2\eta^n+\eta^{n-1}}{k^2} - \tfrac12\Delta_h\eta^{n+1} - \tfrac12\Delta_h\eta^{n-1} = \sigma^n + \Delta_h(|\widetilde{E}^n|^2 - |E^n|^2) \quad (2.44)$$

Λήμμα 2.10. (L^2 εκτίμηση για το e). Υπάρχουν σταθερές c, c_T τέτοιες ώστε να ισχύει

$$\|e^{n+1}\|_h^2 \leq \tfrac{1+ck}{1-ck}\|e^n\|_h^2 + \tfrac{c_T k}{1-ck}(k^2+h^2)^2 + \tfrac{ck}{1-c_1 k}(\|\eta^{n+1}\|_h^2 + \|\eta^n\|_h^2) \tag{2.45}$$

Απόδειξη. Παίρνουμε το εσωτερικό γινόμενο της (2.43) με $e^{n+\frac{1}{2}}$

$$\left(\frac{e^{n+1}-e^n}{k}, e^{n+\frac{1}{2}}\right)_h - i\left(\Delta_h e^{n+\frac{1}{2}},\ e^{n+\frac{1}{2}}\right)_h = \left(\tau^n, e^{n+\frac{1}{2}}\right)_h$$
$$- \tfrac{i}{2}\left(\eta^{n+\frac{1}{2}}(\widetilde{E}^{n+1}+\widetilde{E}^n), e^{n+\frac{1}{2}}\right)_h - i\left(e^{n+\frac{1}{2}}N^{n+\frac{1}{2}}, e^{n+\frac{1}{2}}\right)_h$$

Παρατηρούμε ότι

$$\left(e^{n+\frac{1}{2}}N^{n+\frac{1}{2}}, e^{n+\frac{1}{2}}\right)_h = \tfrac{1}{2}N^{n+\frac{1}{2}}\|e^{n+1}+e^n\|_h^2$$

και

$$\left(e^{n+1}-e^n, e^{n+\frac{1}{2}}\right)_h = \tfrac{1}{2}(\|e^{n+1}\|_h^2 - \|e^n\|_h^2)$$

Από ισότητα πραγματικών μερών έχουμε

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\left(\tfrac{1}{2k}(\|e^{n+1}\|_h^2 - \|e^n\|_h^2)\right) - \mathrm{Im}(\Delta_h e^{n+\frac{1}{2}}, e^{n+\frac{1}{2}})_h = \mathrm{Re}(\tau^n, e^{n+\frac{1}{2}})_h - \\ \mathrm{Im}\left(\tfrac{1}{2}\left(\eta^{n+\frac{1}{2}}\otimes(\tilde{E}^{n+1}+\tilde{E}^n), e^{n+\frac{1}{2}}\right)_h\right)\end{aligned} \tag{2.46}$$

Θέτουμε

$$\begin{aligned}
I &= \mathrm{Re}\left(\tfrac{1}{k}(\|e^{n+1}\|_h^2 - \|e^n\|_h^2)\right) = \tfrac{1}{k}(\|e^{n+1}\|_h^2 - \|e^n\|_h^2)\\
II &= -\mathrm{Im}(\Delta_h e^{n+\frac{1}{2}}, e^{n+\frac{1}{2}})_h = \mathrm{Im}(\delta_h e^{n+\frac{1}{2}}, \delta_h e^{n+\frac{1}{2}})_h = \mathrm{Im}\left(\|\delta_h e^{n+\frac{1}{2}}\|_h^2\right) = 0\\
III &= \mathrm{Re}(\tau^n, e^{n+\frac{1}{2}})_h = \tfrac{1}{2}\mathrm{Re}(\tau^n, e^{n+1}+e^n)_h\\
IV &= \mathrm{Im}\left(\tfrac{1}{2}(\eta^{n+\frac{1}{2}}\otimes(\tilde{E}^{n+1}+\tilde{E}^n), e^{n+\frac{1}{2}})_h\right)
\end{aligned}$$

Η (2.46) θα πάρει την μορφή

$$\tfrac{1}{2}I = -III - IV \tag{2.47}$$

Επίσης

$$\begin{aligned}
|III| &= \tfrac{1}{2}|\mathrm{Re}(\tau^n, e^{n+1}+e^n)_h| \leq \tfrac{1}{2}|(\tau^n, e^{n+1}+e^n)_h| \leq \tfrac{1}{2}\left(|(\tau^n, e^{n+1})_h| + |(\tau^n, e^n)_h|\right)\\
&\leq \tfrac{1}{2}\left((|\tau^n|, |e^{n+1}|)_h + (|\tau^n|, |e^n|)_h\right) \leq \tfrac{1}{2}\left(\|\tau^n\|_h\|e^{n+1}\|_h + \|\tau^n\|_h\|e^n\|_h\right)
\end{aligned}$$

Όπου με χρήση της ανισότητας Cauchy οδηγούμαστε στην $|III| \leq c(\|e^{n+1}\|_h^2 + \|e^n\|_h^2) + c_T\|\tau^n\|_h^2$. Χρησιμοποιούμε το αποτέλεσμα του Λήμματος 2.8 και παίρνουμε

$$\|\tau^n\|_h^2 = \sum_j h(k^2+h^2)^2 = Jh(k^2+h^2)^2 = L(k^2+h^2)^2, \text{ καθώς } Jh = L.$$

Συνεπώς

$$|III| \leq c(\|e^{n+1}\|_h^2 + \|e^n\|_h^2) + c_T L(k^2+h^2)^2$$

Για τον τελευταίο όρο της παράστασης (2.47) έχουμε

$$\begin{aligned}
|IV| &= \left|\mathrm{Im}\left(\tfrac{1}{2}(\eta^{n+\frac{1}{2}} \otimes (\widetilde{E}^{n+1} + \widetilde{E}^{n}), e^{n+\frac{1}{2}})_h\right)\right| \\
&\leq \tfrac{1}{8}|((\eta^{n+1} + \eta^{n}) \otimes (\widetilde{E}^{n+1} + \widetilde{E}^{n}), e^{n+1} + e^{n})_h| \\
&\leq \tfrac{1}{4} \sup_{n \leq \mathscr{N}} |\widetilde{E}^{n}||(\eta^{n+1} + \eta^{n}, e^{n+1} + e^{n})_h| \\
&\leq \tfrac{1}{4} \max_{n \leq \mathscr{N}} |\widetilde{E}^{n}||(\eta^{n+1}, e^{n+1})_h + (\eta^{n}, e^{n+1})_h + (\eta^{n}, e^{n+1})_h + (\eta^{n}, e^{n})_h| \\
&\leq c_1 \left(\|\eta^{n+1}\|_h \|e^{n+1}\|_h + \|\eta^{n+1}\|_h \|e^{n}\|_h + \|\eta^{n}\|_h \|e^{n+1}\|_h + \|\eta^{n}\|_h \|e^{n}\|_h\right) \\
&\leq c_1 \left(\|\eta^{n+1}\|_h^2 + \|\eta^{n}\|_h^2 + \|e^{n+1}\|_h^2 + \|e^{n}\|_h^2\right)
\end{aligned}$$

,όπου $c_1 = \frac{c}{4} \max_{n \leq \mathscr{N}} |\widetilde{E}^{n}|$, με $j = 1, \ldots, J$. Άρα η (2.47) θα γίνει

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2k}(\|e^{n+1}\|_h^2 - \|e^{n}\|_h^2) \leq c(\|e^{n+1}\|_h^2 + \|e^{n}\|_h^2) &+ c_T L(k^2 + h^2)^2 \\
&+ c_1(\|\eta^{n+1}\|_h^2 + \|\eta^{n}\|_h^2 + \|e^{n+1}\|_h^2 + \|e^{n}\|_h^2)
\end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζουμε την παράσταση με $2k$ και παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\|e^{n+1}\|_h^2 - \|e^{n}\|_h^2 \leq ck(\|e^{n+1}\|_h^2 + \|e^{n}\|_h^2) &+ c_T kL(k^2 + h^2)^2 \\
&+ c_1 k(\|\eta^{n+1}\|_h^2 + \|\eta^{n}\|_h^2 + \|e^{n+1}\|_h^2 + \|e^{n}\|_h^2)
\end{aligned}$$

Επίσης θέτουμε $\mathbf{c} = c_1 + c$ και καταλήγουμε στην

$$(1 - \mathbf{c}k)\|e^{n+1}\|_h^2 \leq (1 + \mathbf{c}k)\|e^{n}\|_h^2 + Lc_T k(k^2 + h^2)^2 + c_1 k(\|\eta^{n+1}\|_h^2 + \|\eta^{n}\|_h^2)$$

Δηλαδή

$$\|e^{n+1}\|_h^2 \leq \tfrac{1+ck}{1-ck}\|e^{n}\|_h^2 + \tfrac{c_T k}{1-ck}(k^2 + h^2)^2 + \tfrac{ck}{1-c_1 k}(\|\eta^{n+1}\|_h^2 + \|\eta^{n}\|_h^2).$$

□

Λήμμα 2.11. Υπάρχει σταθερά c που να εξαρτάται μόνο από τα δεδομένα τέτοια ώστε

$$|u^n|_\infty \leq c.$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε την συνοριακή συνθήκη $u_0 = 0$.

Υπάρχει $j_* \in \{0, \ldots, J\}$ τέτοιο ώστε $|u^n|_\infty = |u^n_{j_*}|$. Επίσης $u^n_{j_*} = \displaystyle\sum_{j=0}^{j_*-1}(u^n_{j+1} - u^n_j)$.

Συνεπώς

$$|u^n|_\infty = \left|\sum_{j=0}^{j_*-1}(u^n_{j+1} - u^n_j)\right| = \left|h\sum_{j=0}^{j_*-1}\frac{(u^n_{j+1} - u^n_j)}{h}\right| = \left|h\sum_{j=0}^{j_*-1}\delta_h u^n_j\right| \leq h\sum_{j=0}^{J-1}|\delta_h u^n_j|$$

.

Εφαρμόζοντας την ανισότητα $Cauchy - Schwarz$ παίρνουμε

$$|u^n|_\infty \leq h(\sum_{j=0}^{J-1} 1^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (\sum_{j=0}^{J-1}|\delta_h u^n_j|^2)^{\frac{1}{2}} = (J)^{\frac{1}{2}} h^{\frac{1}{2}} (\sum_{j=0}^{J-1}|\delta_h u^n_j|^2 h)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{L}\|\delta_h u^n\|_h^2$$

Από το Λήμμα 2.7 γνωρίζουμε ότι η $\|\delta_h u\|_h^2$ φράσσεται από μια σταθερά η οποία εξαρτάται μόνο από τα δεδομένα. Συνεπώς

$$|u^n|_\infty \leq c$$

□

Λήμμα 2.12. Θεωρούμε την U^n τέτοια ώστε $\Delta_h U^n = \frac{\eta_i^{n+1}-\eta_i^n}{k}$ με $i = 1, \ldots, J-1$ και $U_0 = U_J = 0$. Υπάρχει μια σταθερά c τέτοια ώστε

$$|U^n|_\infty \leq c(\mathcal{E}^n)^{\frac{1}{2}}$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε την συνοριακή συνθήκη $U_0 = 0$.

Υπάρχει $j_* \in \{0, \ldots, J\}$ τέτοιο ώστε $|U^n|_\infty = |U^n_{j_*}|$. Επίσης $U^n_{j_*} = \sum_{j=0}^{j_*-1}(U^n_{j+1} - U^n_j)$.

Άρα

$$|U^n|_\infty = \left|\sum_{j=0}^{j_*-1}(U^n_{j+1} - U^n_j)\right| = \left|h\sum_{j=0}^{j_*-1}\frac{(U^n_{j+1} - U^n_j)}{h}\right| = \left|h\sum_{j=0}^{j_*-1}\delta_h U^n_j\right| \leq h\sum_{j=0}^{J-1}\left|\delta_h U^n_j\right|$$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε

$$|U^n|_\infty \leq h(\sum_{j=0}^{J-1}1^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (\sum_{j=0}^{J-1}|\delta_h U^n_j|^2)^{\frac{1}{2}} = (J)^{\frac{1}{2}}(h)^{\frac{1}{2}}(\sum_{j=0}^{J-1}|\delta_h U^n_j|^2 h)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{L}\|\delta_h U^n\|_h$$

Από το Θεώρημα 2.9 έχουμε ότι

$$\mathcal{E}^n = \tfrac{1}{2}\left[\|e^{n+1}\|_h^2 + \|\delta_h e^{n+1}\|_h^2 + \|\delta_h U^n\|_h^2 + \tfrac{1}{2}(\|\eta^{n+1}\|_h^2 + \|\eta^n\|_h^2)\right]$$

Συνεπώς

$$\|\delta_h U^n\|_h^2 \leq 2\mathcal{E}^n$$

Καταλήγουμε δηλαδή στην σχέση

$$|U^n|_\infty \leq c(\mathcal{E}^n)^{\frac{1}{2}}, \text{ όπου } c = \sqrt{2L}$$

□

Λήμμα 2.13. Για $1 \leq n \leq \mathscr{N} - 1$ ορίζουμε τις παραστάσεις

$$\begin{aligned} II^n &= \mathrm{Re}((\widetilde{E}^{n+1} + \widetilde{E}^n) \otimes \eta^{n+\frac{1}{2}}, \overline{e}^{n+1})_h \\ III^n &= (N^{n+\frac{1}{2}}, |e^{n+1}|^2)_h \end{aligned}$$

Τότε ισχύει

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\|\delta_h e^n\|_h^2 + II^{n-1} + III^{n-1} = \tfrac{1}{2}\|\delta_h e^{n+1}\|_h^2 + II^n + III^n \\ - \mathrm{Re}(\tau^n, e^{n+1} - e^n)_h + c\left[k(\mathcal{E}^n + \mathcal{E}^{n+1})\right] \end{aligned} \tag{2.48}$$

Απόδειξη. Παίρνουμε το εσωτερικό γινόμενο της (2.43) με την $(e^{n+1} - e^n)$ και έχουμε

$$\begin{aligned} \left(\tfrac{e^{n+1}-e^n}{k}, e^{n+1} - e^n\right)_h - i(\Delta_h e^{n+\frac{1}{2}}, e^{n+1} - e^n)_h = -i(\tau^n, e^{n+1} - e^n)_h \\ - \tfrac{i}{2}(\eta^{n+\frac{1}{2}} \otimes (\widetilde{E}^{n+1} + \widetilde{E}^n), e^{n+1} - e^n)_h - i(e^{n+\frac{1}{2}}N^{n+\frac{1}{2}}, e^{n+1} - e^n)_h \end{aligned}$$

δηλαδή

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{k}\|e^{n+1}-e^n\|_h - i(\Delta_h e^{n+\frac{1}{2}}, e^{n+1}-e^n)_h &= -i(\tau^n, e^{n+1}-e^n)_h \\ &- \tfrac{i}{2}(\eta^{n+\frac{1}{2}} \otimes (\widetilde{E}^{n+1}+\widetilde{E}^n), e^{n+1}-e^n)_h - i(e^{n+\frac{1}{2}}N^{n+\frac{1}{2}}, e^{n+1}-e^n)_h\end{aligned}$$

Λόγω ισότητας φανταστικών μερών έχουμε

$$\begin{aligned}2\mathrm{Re}(\Delta_h e^{n+\frac{1}{2}}, e^{n+1}-e^n)_h &= 2\mathrm{Re}(\tau^n, e^{n+1}-e^n)_h \\ &+ \mathrm{Re}(\eta^{n+\frac{1}{2}} \otimes (\widetilde{E}^{n+1}+\widetilde{E}^n), e^{n+1}-e^n)_h + 2\mathrm{Re}(e^{n+\frac{1}{2}} \otimes N^{n+\frac{1}{2}}, e^{n+1}-e^n)_h \end{aligned} \tag{2.49}$$

Θέτουμε

$$\begin{aligned} I_o &= 2\mathrm{Re}(\Delta_h e^{n+\frac{1}{2}}, e^{n+1}-e^n)_h \\ I &= 2\mathrm{Re}(\tau^n, e^{n+1}-e^n)_h \\ II &= \mathrm{Re}(\eta^{n+\frac{1}{2}} \otimes (\widetilde{E}^{n+1}+\widetilde{E}^n), e^{n+1}-e^n)_h \\ III &= 2\mathrm{Re}(e^{n+\frac{1}{2}} \otimes N^{n+\frac{1}{2}}, e^{n+1}-e^n)_h \end{aligned}$$

Άρα η (2.49) θα πάρει την μορφή

$$I_o = I + II + III \tag{2.50}$$

Για το I_o έχουμε

$$\begin{aligned} I_o &= 2\mathrm{Re}(\Delta_h e^{n+\frac{1}{2}}, e^{n+1}-e^n)_h \\ &= -\mathrm{Re}(\delta_h(e^{n+1}+e^n), \delta_h(e^{n+1}-e^n))_h \\ &= -(\|\delta_h e^{n+1}\|_h^2 - \|\delta_h e^n\|_h^2) \end{aligned}$$

Στη συνέχεια θέτουμε $w^n = \widetilde{E}^n + \widetilde{E}^{n+1}$. Επομένως $w^n - w^{n-1} = \widetilde{E}^{n+1} - \widetilde{E}^{n-1}$. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Taylor για την $\widetilde{E}^{n+1}$ καταλήγουμε στην σχέση, $w^n - w^{n-1} = ck$. Άρα ο όρος II της (2.50) θα γίνει

$$\begin{aligned} II &= \mathrm{Re}(\eta^{n+\frac{1}{2}} \otimes w^n, e^{n+1}-e^n)_h = \tfrac{1}{2}\mathrm{Re}((\eta^{n+1}+\eta^n) \otimes w^n, e^{n+1}-e^n)_h \\ &= \tfrac{1}{2}\mathrm{Re}\{(\eta^{n+1} \otimes w^n, e^{n+1})_h + (\eta^n \otimes w^n, e^{n+1})_h - (\eta^{n+1} \otimes w^n, e^n)_h - (\eta^n \otimes w^n, e^n)_h\} \\ &= \tfrac{1}{2}\mathrm{Re}\{((\eta^{n+1}+\eta^n) \otimes w^n, e^{n+1})_h - (\eta^n \otimes w^{n-1}, e^n)_h - (\eta^n \otimes (w^n - w^{n-1}), e^n)_h \\ &\qquad - (w^n \otimes \eta^{n+1}, e^n)_h + (\eta^{n-1} \otimes w^{n-1}, e^n)_h - (\eta^{n-1} \otimes w^{n-1}, e^n)_h\} \\ &= \tfrac{1}{2}\mathrm{Re}((\eta^{n+1}+\eta^n) \otimes w^n, e^{n+1})_h - \tfrac{1}{2}\mathrm{Re}((\eta^n+\eta^{n-1}) \otimes w^{n-1}, e^n)_h \\ &\qquad -\tfrac{1}{2}\mathrm{Re}\{(w^n \otimes \eta^{n+1} - w^{n-1} \otimes \eta^{n-1}, e^n)_h + ((w^n - w^{n-1}) \otimes \eta^n, e^n)_h\} \\ &= II^n - II^{n-1} - \tfrac{1}{2}Re(w^n \otimes \eta^{n+1} - w^{n-1} \otimes \eta^{n-1}, e^n)_h - \tfrac{ck}{2}(\eta^n, e^n)_h \end{aligned}$$

Με την βοήθεια των ανισοτήτων Cauchy-Schwarz, Cauchy με παράμετρο και του Θεωρήματος 2.9 καταλήγουμε στην

$$(\eta^n, e^n)_h \leq |(\eta^n, e^n)_h| \leq \|\eta^n\|_h \|e^n\|_h \leq c(\|\eta^n\|_h^2 + \|e^n\|_h^2) = c\mathcal{E}^{n-1}$$

Άρα $ck(\eta^n, e^n)_h = ck\mathcal{E}^{n-1}$. Επίσης

$$\begin{aligned}(w^n \otimes \eta^{n+1} - w^{n-1} \otimes \eta^{n-1}, e^n)_h &= ((w^n - w^{n-1}) \otimes \eta^{n+1} + w^{n-1} \otimes (\eta^{n+1} - \eta^{n-1}), e^n)_h \\ &= ((w^n - w^{n-1}) \otimes \eta^{n+1}, e^n)_h + (w^{n-1} \otimes (\eta^{n+1} - \eta^{n-1}), e^n)_h\end{aligned}$$

με

$$((w^n - w^{n-1}) \otimes \eta^{n+1}, e^n)_h = (ck\eta^{n+1}, e^n)_h \leq ck\|\eta^{n+1}\|_h\|e^n\|_h$$

Από Θεώρημα 2.9 καταλήγουμε στην σχέση $\|\eta^{n+1}\|_h\|e^n\|_h = c(\mathcal{E}^{n-1})^{1/2}(\mathcal{E}^n)^{1/2}$. Συνεχίζουμε τον υπολογισμό του II

$$\begin{aligned}II_A = (w^{n-1} \otimes (\eta^{n+1} - \eta^{n-1}), e^n)_h &= h\left(w^{n-1} \otimes \tfrac{\eta^{n+1}-\eta^{n-1}}{h}, e^n\right)_h \\ &= h(w^{n-1} \otimes (\Delta_h U^n + \Delta_h U^{n-1}), e^n)_h = h(\Delta_h(U^n + U^{n-1}), w^{n-1} \otimes e^n)_h \\ &= -h(\delta_h(U^n + U^{n-1}), \delta_h(w^{n-1} \otimes e^n))_h\end{aligned}$$

Δηλαδή

$$|II_A| \leq h\left(\|\delta_h U^n\|_h + \|\delta_h U^{n-1}\|_h\right)\|\delta_h(w^{n-1} \otimes e^n)\|_h \tag{2.51}$$

όπου

$$\begin{aligned}\|\delta_h(w^{n-1} \otimes e^n)\|_h &= \|(\delta_h e^n) \otimes (\widetilde{E}^n + \widetilde{E}^{n-1}) + e^n \otimes (\delta_h \widetilde{E}^n + \delta_h \widetilde{E}^{n-1})\|_h \\ &\leq \|(\delta_h e^n) \otimes \widetilde{E}^{n-1}\|_h + \|e^n \otimes \delta_h \widetilde{E}^{n-1}\|_h \\ &\leq |\widetilde{E}^{n-1}|_\infty \|\delta_h e^n\|_h + |\delta_h \widetilde{E}^{n-1}|_\infty \|e^n\|_h \\ &\leq c(\|\delta_h e^n\|_h + \|e^n\|_h)\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του Θεωρήματος 2.9 και την ανισότητα Cauchy έχουμε για την (2.51)

$$|II_A| = c\mathcal{E}^n + \mathcal{E}^{n-1}$$

Για τον τελευταίο όρο του (2.50) έχουμε

$$\begin{aligned}III = \mathrm{Re}(e^{n+\frac{1}{2}} N^{n+\frac{1}{2}}, e^{n+1} - e^n)_h &= \tfrac{1}{2}(N^{n+\frac{1}{2}}, |e^{n+1}|^2)_h - \tfrac{1}{4}(N^{n+1} + N^n + N^{n-1} - N^{n-1}, |e^n|^2)_h \\ = \tfrac{1}{2}III^n - \tfrac{1}{2}III^{n-1} - \tfrac{1}{4}(N^{n+1} - N^{n-1}, |e^n|^2)_h\end{aligned}$$

Για τον τελευταίο όρο της προηγούμενης παράστασης έχουμε

$$\begin{aligned}(N^{n+1} - N^{n-1}, |e^n|^2)_h &= k\left(\tfrac{N^{n+1}-N^n}{k} + \tfrac{N^n - N^{n-1}}{k}, |e^n|^2\right)_h \\ &= k(\Delta_h u^n + \Delta_h u^{n-1}, |e^n|^2)_h = -h(\delta_h u^n + \delta_h u^{n-1}, \delta_h|e^n|^2)_h \\ &= -k[(\delta_h u^n, \delta_h|e^n|^2)_h + (\delta_h u^{n-1}, \delta_h|e^n|^2)_h] \\ &= -k[\|\delta_h u^n\|_h\|\delta_h|e^n|^2\|_h + \|\delta_h u^{n-1}\|_h\|\delta_h|e^n|^2\|_h] \\ &= -k[\|\delta_h u^n\|_h + \|\delta_h u^{n-1}\|_h]\|\delta_h|e^n|^2\|_h \\ &= c[h|e^n|_\infty\|\delta_h e^n\|_h(\|\delta_h u^n\|_h + \|\delta_h u^{n-1}\|_h)]\end{aligned}$$

Από Λήμμα 2.7 γνωρίζουμε ότι η ποσότητα $\|\delta_h u^n\|_h + \|\delta_h u^{n-1}\|_h$ φράσσεται από μία σταθερά, η οποία εξαρτάται μόνο από τα αρχικά δεδομένα. Επίσης από την Πρόταση 2.2 : $|e^n|_\infty \leq c\|e^n\|_h^{1/2}(\|e^n\|_h + \|\delta_h e^n\|_h)^{1/2}$ και με χρήση της ανισότητας Cauchy και του Θεώρηματος 2.9 έχουμε

$$III = III^n - III^{n-1} + ck\mathcal{E}^{n-1}$$

Συνεπώς η (2.50) γίνεται

$$\tfrac{1}{2}\|\delta_h e^n\|_h^2 + II^{n-1} + III^{n-1} = \tfrac{1}{2}\|\delta_h e^{n+1}\|_h^2 + II^n + III^n - \mathrm{Re}(\tau^n, e^{n+1} - e^n)_h + O\left[k(\mathcal{E}^n + \mathcal{E}^{n+1})\right]$$

□

Λήμμα 2.14. Ισχύει ότι

$$\tfrac{1}{2}\|\delta_h U^n\|_h^2 + \tfrac{1}{4}\left(\|\eta^{n+1}\|_h^2 + \|\eta^n\|_h^2\right) = \tfrac{1}{2}\|\delta_h U^{n-1}\|_h^2 + \tfrac{1}{4}\left(\|\eta^n\|_h^2 + \|\eta^{n-1}\|_h^2\right) + ck((k^2+h^2)^2 + \mathcal{E}^n + \mathcal{E}^{n-1}) \tag{2.52}$$

για $n = 1, \ldots, \mathscr{N} - 1$.

Απόδειξη. Από το Λήμμα 2.5 γνωρίζουμε ότι, $\Delta_h U^n = \dfrac{\eta^{n+1} - \eta^n}{k}$.

Παίρνουμε την σχέση

$$\tfrac{\eta^{n+1} - 2\eta^n + \eta^{n-1}}{k^2} - \tfrac{1}{2}(\Delta_h \eta^{n+1} + \Delta_h \eta^{n-1}) = \sigma^n + \Delta_h(|\tilde{E}^n|^2 - |E^n|^2)$$

Για το εσωτερικό γινόμενο της με το $U^{n-\frac{1}{2}}$ έχουμε

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{k^2}(\eta^{n+1} - 2\eta^n + \eta^{n-1}, U^{n+\frac{1}{2}})_h - \tfrac{1}{2}(\Delta_h \eta^{n+1}, U^{n+\frac{1}{2}})_h - \tfrac{1}{2}(\Delta_h \eta^{n-1}, U^{n-\frac{1}{2}})_h = \\ (\sigma^n, U^{n-\frac{1}{2}})_h + (\Delta_h |\tilde{E}^n|^2, U^{n-\frac{1}{2}})_h - (\Delta_h |E^n|^2, U^{n-\frac{1}{2}})_h\end{aligned} \tag{2.53}$$

Θέτουμε

$$\begin{aligned} I_1 &= \tfrac{1}{k^2}(\eta^{n+1} - 2\eta^n + \eta^{n-1}, U^{n-\frac{1}{2}})_h \\ I_2 &= \tfrac{1}{2}(\Delta_h \eta^{n+1}, U^{n+\frac{1}{2}})_h + \frac{1}{2}(\Delta_h \eta^{n-1}, U^{n-\frac{1}{2}})_h \\ I_3 &= (\sigma^n, U^{n-\frac{1}{2}})_h \\ I_4 &= (\Delta_h |\tilde{E}^n|^2, U^{n-\frac{1}{2}})_h - (\Delta_h |E^n|^2, U^{n-\frac{1}{2}})_h \end{aligned}$$

Επομένως η σχέση (2.53) παίρνει την μορφή

$$I_1 - I_2 = I_3 + I_4 \tag{2.54}$$

όπου

$$\begin{aligned} I_1 &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{\frac{\eta^{n+1} - \eta^n}{k} - \frac{\eta^n - \eta^{n-1}}{k}}{k}, U^{n-1} + U^n\right)_h = \tfrac{1}{2k}(\Delta_h U^n - \Delta_h U^{n-1}, U^n + U^{n-1}) \\ &= -\tfrac{1}{2k}(\delta_h U^n - \delta_h U^{n-1}, \delta_h U^n + \delta_h U^{n-1}) = -\tfrac{1}{2k}(\|\delta_h U^n\|_h^2 - \|\delta_h U^{n-1}\|_h^2) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} I_2 &= \tfrac{1}{2}(\Delta_h \eta^{n+1}, U^{n-\frac{1}{2}})_h + \tfrac{1}{2}(\Delta_h \eta^{n-1}, U^{n-\frac{1}{2}})_h \\ &= \tfrac{1}{4}[(\Delta_h \eta^{n+1}, U^n + U^{n-1})_h + (\Delta_h \eta^{n-1}, U^n + U^{n-1})_h] \\ &= \tfrac{1}{4}[(\eta^{n+1} + \eta^{n-1}, \Delta_h(U^n + U^{n-1}))_h] \\ &= \tfrac{1}{4}\left(\eta^{n+1} + \eta^{n-1}, \tfrac{\eta^{n+1} + \eta^n}{k} - \tfrac{\eta^n + \eta^{n-1}}{k}\right)_h \\ &= \tfrac{1}{4k}\left(\eta^{n+1} + \eta^{n-1}, \eta^{n+1} - \eta^{n-1}\right)_h = \tfrac{1}{4k}(\|\eta^{n+1}\|_h^2 - \|\eta^{n-1}\|_h^2) \\ &= \tfrac{1}{4k}(\|\eta^{n+1}\|_h^2 + \|\eta^n\|_h^2) - \tfrac{1}{4k}(\|\eta^n\|_h^2 + \|\eta^{n-1}\|_h^2) \end{aligned}$$

Το I_3, χρησιμοποιώντας την ανισότητα Cauchy-Schwarz, γίνεται

$$I_3 \leq \|\sigma^n\|_h \|U^n + U^{n-1}\|_h \leq \|\sigma^n\|_h^2 + \|U^n + U^{n-1}\|_h^2$$

Από το Λήμμα 2.8 γνωρίζουμε ότι

$$\|\sigma^n\|_h = c_\sigma(k^2 + h^2)$$

Επίσης

$$\begin{aligned}\|U^n + U^{n-1}\|_h &= \left(\|U^n + U^{n-1}\|_h^2\right)^{1/2} \leq (\|U^n\|_h^2 + 2\|U^n\|_h \|U^{n-1}\|_h + \|U^{n-1}\|_h^2)^{1/2} \\ &\leq cL(|U^n|_\infty^2 + 2|U^n|_\infty |U^{n-1}|_\infty + |U^{n-1}|_\infty^2)^{1/2}\end{aligned}$$

Εφαρμόζουμε την ανισότητα Cauchy και παίρνουμε

$$\|U^n + U^{n-1}\|_h \leq c_{I_3}(|U^n|_\infty^2 + |U^{n-1}|_\infty^2)^{1/2}$$

Συνεπώς από το Λήμμα 2.11 καταλήγουμε στο

$$\|U^n + U^{n-1}\|_h = c(\mathcal{E}^n + \mathcal{E}^{n-1})^{1/2}$$

Επομένως

$$I_3 = c[(k^2 + h^2)^2 + (\mathcal{E}^n + \mathcal{E}^{n-1})]$$

Επίσης

$$\begin{aligned}I_4 &= -\tfrac{1}{2}(\delta_h(U^n + U^{n-1}), \delta_h(|\widetilde{E}^n|^2 - |E^n|^2)_h) \\ &= -\tfrac{1}{2}\mathrm{Re}(\delta_h(U^n + U^{n-1}), \delta_h((\widetilde{E}^n - E^n) \otimes (\overline{\widetilde{E}^n + E^n}))_h) \\ &= -\tfrac{1}{2}\mathrm{Re}(\delta_h(U^n + U^{n-1}), \delta_h(e^n \otimes (\overline{e^n + 2E^n}))_h)\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\delta_h(\alpha \otimes \beta)_j = (\delta_h \alpha_j)\beta_{j+1} + \alpha_j \delta_h \beta_j$$

Επομένως

$$\begin{aligned}\|\delta_h(e^n \otimes (\overline{e^n + 2E^n}))\|_h &\leq \|\delta_h(e^n \otimes \overline{e}^n)\|_h + \|\delta_h(e^n \otimes 2\overline{E}^n)\|_h \\ &\leq 2|\overline{e}^n|_\infty \|\delta_h e^n\|_h + 2|\overline{E}^n|_\infty \|\delta_h e^n\|_h + 2\|e^n\|_h \|\delta_h \overline{E}^n\|_h \\ &\leq c(\|\delta_h e^n\|_h + \|e^n\|_h)\end{aligned}$$

Άρα

$$|I_4| \leq \tfrac{c}{2}\|\delta_h(U^n + U^{n-1})\|_h(\|\delta_h e^n\|_h + \|e^n\|_h)$$

με

$$\|\delta_h U^n\|_h^2 + \|\delta_h U^{n-1}\|_h^2 \leq \mathcal{E}^n + \mathcal{E}^{n-1}$$

και

$$\|\delta_h e^n\|_h^2 + \|e^n\|_h^2 \leq \mathcal{E}^n + \mathcal{E}^{n-1}$$

Άρα με χρήση της ανισότητας Cauchy παίρνουμε

$$I_4 = c(\mathcal{E}^n + \mathcal{E}^{n-1})$$

Η (2.55) ϑα γραφεί

$$-\tfrac{1}{2k}(\|\delta_h U^n\|_h^2 - \|\delta_h U^{n-1}\|_h^2) - \tfrac{1}{4k}\{(\|\eta^{n+1}\|_h^2 + \|\eta^n\|_h^2) - (\|\eta^n\|_h^2 + 1\|\eta^{n-1}\|_h^2)\} = c[(k^2+h^2)^2 + (\mathcal{E}^n + \mathcal{E}^{n-1})]$$

Πολλαπλασιάζουμε την παράσταση με k και καταλήγουμε στην σχέση

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\|\delta_h U^n\|_h^2 + \tfrac{1}{4}(\|\eta^{n+1}\|_h^2 + \|\eta^n\|_h^2) = \tfrac{1}{2}\|\delta_h U^{n-1}\|_h^2 + \tfrac{1}{4}(\|\eta^n\|_h^2 + \|\eta^{n-1}\|_h^2)\\ + ck((k^2+h^2)^2 + \mathcal{E}^n + \mathcal{E}^{n-1})\end{aligned}$$

□

Απόδειξη. Θεωρήματος 2.9
Ορίζουμε

$$H^n = \tfrac{1}{2}\left[\|\delta_h e^{n+1}\|_h^2 + \|\delta_h U^n\|_h^2 + \tfrac{1}{2}(\|\eta^{n+1}\|_h^2 + \|\eta^n\|_h^2)\right]$$

Επίσης

$$\mathcal{E}^n = \tfrac{1}{2}\left[\|e^{n+1}\|_h^2 + \|\delta_h e^{n+1}\|_h^2 + \|\delta_h U^n\|_h^2 + \tfrac{1}{2}(\|\eta^{n+1}\|_h^2 + \|\eta^n\|_h^2)\right] = \tfrac{1}{2}\|e^{n+1}\|_h^2 + H^n$$

Επιλέγουμε μεγάλη σταθερα $\gamma > 0$ και ϑέτουμε

$$\hat{\mathcal{E}}^n = \gamma\|e^{n+1}\|_h^2 + H^n + \mathrm{Re}((\widetilde{E}^{n+1} + \widetilde{E}^n)\otimes\eta^{n+\frac{1}{2}}, e^{n+1})_h + \tfrac{1}{2}(N^{n+\frac{1}{2}}, |e^{n+1}|^2)_h \tag{2.55}$$

Όπου έχουμε

$$\begin{aligned}|\mathrm{Re}((\widetilde{E}^{n+1} + \widetilde{E}^n)\otimes\eta^{n+\frac{1}{2}}, e^{n+1})_h| &= |\mathrm{Re}(\widetilde{E}^n + \widetilde{E}^{n+1})\otimes\eta^{n+\frac{1}{2}}, \overline{e}^{n+1})_h|\\ &\le |(\widetilde{E}^n + \widetilde{E}^{n+1}, \eta^{n+\frac{1}{2}}\otimes\overline{e}^{n+1})_h|\\ &\le \tfrac{1}{2}|((|\widetilde{E}^n|_\infty + |\widetilde{E}^{n+1}|_\infty)\otimes(\eta^{n+1}+\eta^n), \overline{e}^{n+1})_h|\\ &\le \tfrac{1}{2}(|\widetilde{E}^n|_\infty + |\widetilde{E}^{n+1}|_\infty)(|\eta^{n+1}+\eta^n|, |\overline{e}^{n+1}|)_h\\ &\le \tfrac{c}{2}\left(|\widetilde{E}^n|_\infty + |\widetilde{E}^{n+1}|_\infty\right)\|\eta^{n+1}+\eta^n\|_h\|e^{n+1}\|_h\\ &\le \tfrac{1}{16}\left(\|\eta^{n+1}\|_h^2 + \|\eta^n\|_h^2\right) + c\|e^{n+1}\|_h^2\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}|(N^{n+\frac{1}{2}}, |e^{n+1}|^2)_h|^n &\le c|e^{n+1}|_\infty^2\|N^{n+1}+N^n\|_h\\ &\le c(\|N^{n+1}\|_h + \|N^n\|_h)\|e^{n+1}\|_h(\|e^{n+1}\|_h + \|\delta_h e^{n+1}\|_h)\\ &\le c(\|N^{n+1}\|_h + \|N^n\|_h)(\|e^{n+1}\|_h^2 + \|e^{n+1}\|_h\|\delta_h e^{n+1}\|_h)\end{aligned}$$

Γνωρίζουμε από το Λήμμα 2.7 ότι $\|N^{n+1}\|_h + \|N^n\|_h \le c_\diamond$ και με χρήση της ανισότητας Cauchy παίρνουμε

$$|(N^{n+\frac{1}{2}}, |e^{n+1}|^2)_h| \le \tfrac{1}{8}\|\delta_h e^{n+1}\|_h^2 + c\|e^{n+1}\|_h^2$$

Επομένως

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}((\widetilde{E}^{n+1} + \widetilde{E}^n)\otimes\eta^{n+\frac{1}{2}}, e^{n+1})_h + (N^{n+\frac{1}{2}}, |e^{n+1}|^2)_h &\le \tfrac{1}{8}\|\delta_h e^{n+1}\|_h^2 + \tfrac{1}{16}\left(\|\eta^{n+1}\|_h^2 + \|\eta^n\|_h^2\right) + c\|e^{n+1}\|_h^2\\ &\le \tfrac{1}{4}H^n + c\|e^{n+1}\|_h^2\end{aligned}$$

Δηλαδή

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{E}}^n &= \gamma\|e^{n+1}\|_h^2 + H^n + \mathrm{Re}((\widetilde{E}^{n+1} + \widetilde{E}^n) \otimes \eta^{n+\frac{1}{2}}, e^{n+1})_h + (N^{n+\frac{1}{2}}, |e^{n+1}|^2)_h) \\ &\geq \gamma\|e^{n+1}\|_h^2 + H^n - (|\mathrm{Re}((\widetilde{E}^{n+1} + \widetilde{E}^n) \otimes \eta^{n+\frac{1}{2}}, e^{n+1})_h| + |(N^{n+\frac{1}{2}}, |e^{n+1}|^2)_h|) \\ &\geq \gamma\|e^{n+1}\|_h^2 + H^n - \tfrac{1}{4}H^n - c\|e^{n+1}\|_h^2\end{aligned}$$

Από όπου συνεπάγεται ότι

$$\hat{\mathcal{E}}^n \geq \tfrac{c}{2}\|e^{n+1}\|_h^2 + \tfrac{3}{4}H^n$$

Συνεπώς το $\hat{\mathcal{E}}^n$ είναι αυστήρα θετικό για επαρκώς μεγάλο γ, το οποίο εξαρτάται μόνο από τα αρχικά δεδομένα. Επίσης η σταθερά c είναι θετική και εξαρτάται μόνο από τα αρχικά δεδομένα και το γ.

Γνωρίζουμε ότι

$$\mathcal{E}^n = \tfrac{1}{2}\|e^{n+1}\|_h^2 + H^n \leq \gamma\|e^{n+1}\|_h^2 + H^n = \hat{\mathcal{E}}^n - (II^n + III^n)$$

Δηλαδή

$$\mathcal{E}^n \leq \hat{\mathcal{E}}^n + \tfrac{1}{4}H^n + c\|e^{n+1}\|_h^2$$

Συνεχίζοντας έχουμε

$$\mathcal{E}^n - \tfrac{1}{4}H^n \leq \hat{\mathcal{E}}^n + c\|e^{n+1}\|_h^2$$

Επομένως

$$\tfrac{3}{4}\mathcal{E}^n \leq \hat{\mathcal{E}}^n + c\|e^{n+1}\|_h^2$$

Άρα

$$\tfrac{3}{4}\mathcal{E}^n \leq \mathcal{E}^n + c\|e^{n+1}\|_h^2 \leq c_\gamma\hat{\mathcal{E}}^n$$

Επομένως οι ποσότητες $\hat{\mathcal{E}}^n$ και $\mathcal{E}^n$ είναι ισοδύναμες. Στη συνέχεια προσθέτουμε τις (2.48), (2.52) και παίρνουμε

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{2}\left[\|\delta_h e^{n+1}\|_h^2 + \|\delta_h U^n\|_h^2 + \tfrac{1}{2}(\|\eta^{n+1}\|_h^2 + \|\eta^n\|_h^2)\right] + II^n + III^n = \tfrac{1}{2}[\|\delta_h e^n\|_h^2 + \|\delta_h U^{n-1}\|_h^2 \\ &\quad + \tfrac{1}{2}(\|\eta^n\|_h^2 + \|\eta^{n-1}\|_h^2)] + II^{n-1} + III^{n-1} - \mathrm{Re}(\tau^n, e^{n+1} - e^n)_h + ck\left[\mathcal{E}^n + \mathcal{E}^{n-1} + (k^2+h^2)^2\right]\end{aligned}$$

Από τον ορισμό του H^n έχουμε

$$H^n + II^n + III^n = H^{n-1} + II^{n-1} + III^{n-1} - \mathrm{Re}(\tau^n, e^{n+1} - e^n)_h + ck\left[\mathcal{E}^n + \mathcal{E}^{n-1} + (k^2+h^2)^2\right]$$

Η (2.45) θα πάρει την μορφή

$$\gamma\|e^{n+1}\|_h^2 \leq (1 + \tfrac{2ck}{1-ck})\gamma\|e^n\|_h^2 + \tfrac{c_T\gamma k}{1-ck}(k^2+h^2)^2 + \tfrac{c_1\gamma k}{1-ck}(\|\eta^{n+1}\|_h^2 + \|\eta^n\|_h^2) \tag{2.56}$$

Επομένως

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{E}}^n &= \gamma\|e^{n+1}\|_h^2 + H^n + II^n + III^n \\ &\leq (1 + \tfrac{2ck}{1-ck})\gamma\|e^n\|_h^2 + \tfrac{c_T\gamma k}{1-ck}(k^2+h^2)^2 + \tfrac{c_1\gamma k}{1-ck}(\|\eta^{n+1}\|_h^2 + \|\eta^n\|_h^2) + H^{n-1} + II^{n-1} + III^{n-1} \\ &\qquad - \mathrm{Re}(\tau^n, e^{n+1} - e^n)_h + ck\left[\mathcal{E}^n + \mathcal{E}^{n-1} + (k^2+h^2)^2\right] \\ &\leq \hat{\mathcal{E}}^{n-1} + \tfrac{2c\gamma k}{1-ck}\|e^n\|_h^2 + \tfrac{c_T\gamma k}{1-ck}(k^2+h^2)^2 + \tfrac{c_1\gamma k}{1-ck}(\|\eta^{n+1}\|_h^2 + \|\eta^n\|_h^2) \\ &\qquad - \mathrm{Re}(\tau^n, e^{n+1} - e^n)_h + ck\left[\mathcal{E}^n + \mathcal{E}^{n-1} + (k^2+h^2)^2\right] \\ &\leq \hat{\mathcal{E}}^{n-1} + kc_\alpha\hat{\mathcal{E}}^{n-1} - \mathrm{Re}(\tau^n, e^{n+1} - e^n)_h + ck\left[\mathcal{E}^n + \mathcal{E}^{n-1} + (k^2+h^2)^2\right]\end{aligned}$$

Δηλαδή
$$(1-\alpha\gamma k)\hat{\mathcal{E}}^n \leq (1+\alpha\gamma k)\hat{\mathcal{E}}^{n-1} - \mathrm{Re}(\tau^n, e^{n+1}-e^n)_h + c_\gamma k(k^2+h^2)^2$$

Εν συνεχεία
$$\hat{\mathcal{E}}^n \leq (\tfrac{1+\alpha\gamma k}{1-\alpha\gamma k})\hat{\mathcal{E}}^{n-1} - \tfrac{1}{1-\alpha\gamma k}\mathrm{Re}(\tau^n, e^{n+1}-e^n)_h + \tfrac{c_\gamma}{1-\alpha\gamma k}k(k^2+h^2)^2$$

ή ισοδύναμα
$$\hat{\mathcal{E}}^n \leq (1+C_{1,\star}k)\hat{\mathcal{E}}^{n-1} - c_\beta \mathrm{Re}(\tau^n, e^{n+1}-e^n)_h + c_\delta k(k^2+h^2)^2 \tag{2.57}$$

, όπου για $\alpha k\gamma < 1$, $C_{1,\star} = \frac{2\alpha\gamma k}{1-\alpha\gamma k}$, $c_\beta = \frac{1}{1-\alpha\gamma k}$ και $c_\delta = \frac{c_\gamma}{1-\alpha\gamma k}$. Από επαγωγή οδηγούμαστε στην

$$\hat{\mathcal{E}}^n \leq (1+C_{1,\star}k)^n\hat{\mathcal{E}}^0 - c_\beta \sum_{\ell=0}^{n-1}(1+C_{1,\star}k)^{n-1-\ell}\mathrm{Re}(\tau^\ell, e^{\ell+1}-e^\ell)_h + c_\delta k\sum_{\ell=0}^{n-1}(1+C_{1,\star}k)^{n-1-\ell}(k^2+h^2)^2 \tag{2.58}$$

και εν συνεχεία καταλήγουμε στην σχέση

$$\hat{\mathcal{E}}^n \leq e^{C_{1,\star}T}\hat{\mathcal{E}}^0 + c_\beta \max_{0\leq n\leq \mathcal{N}-1}|\Lambda^n| + c_\delta k(k^2+h^2)^2\sum_{\ell=1}^{\mathcal{N}} e^{C_{1,\star}t_{n-1-\ell}} \tag{2.59}$$

όπου
$$\begin{aligned}
\Lambda^m =& -\sum_{\ell=0}^{m-1} e^{C_{1,\star}t_{m-1-\ell}}\mathrm{Re}(\tau^\ell, e^{\ell+1}-e^\ell)_h = -e^{C_{1,\star}t_0}\mathrm{Re}(\tau^{m-1}, e^m)_h + e^{C_{1,\star}t_{m-1}}\mathrm{Re}(\tau^0, e^0)_h \\
& -\sum_{\ell=0}^{m-2} e^{C_{1,\star}t_{m-1-\ell}}\mathrm{Re}(\tau^\ell, e^{\ell+1})_h + \sum_{\ell=1}^{m-1} e^{C_{1,\star}t_{m-1-\ell}}\mathrm{Re}(\tau^\ell, e^\ell)_h \\
& = -e^{C_{1,\star}t_0}\mathrm{Re}(\tau^{m-1}, e^m)_h - \sum_{\ell=1}^{m-1} e^{C_{1,\star}t_{m-\ell}}\mathrm{Re}(\tau^{\ell-1}, e^\ell)_h - e^{C_{1,\star}t_{m-1-\ell}}\mathrm{Re}(\tau^\ell, e^\ell)_h
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι
$$\begin{aligned}
&\left|-\sum_{\ell=1}^{m-1} e^{C_{1,\star}t_{m-\ell}}\mathrm{Re}(\tau^{\ell-1}, e^\ell)_h - e^{C_{1,\star}t_{m-1-\ell}}\mathrm{Re}(\tau^\ell, e^\ell)_h\right| \\
&\leq \left|\sum_{\ell=1}^{m-1}\left\{e^{C_{1,\star}t_{m-\ell}}\mathrm{Re}(\tau^\ell, e^\ell)_h - e^{C_{1,\star}t_{m-\ell}}\mathrm{Re}(\tau^{\ell-1}, e^\ell)_h - e^{C_{1,\star}t_{m-\ell}}\mathrm{Re}(\tau^\ell, e^\ell)_h + e^{C_{1,\star}t_{m-1-\ell}}\mathrm{Re}(\tau^\ell, e^\ell)_h\right\}\right| \\
&\leq \left|\sum_{\ell=1}^{m-1}\left\{e^{C_{1,\star}t_{m-\ell}}\mathrm{Re}(\tau^\ell-\tau^{\ell-1}, e^\ell)_h - e^{C_{1,\star}t_{m-1-\ell}}(e^{C_{1,\star}t_1}-1)\mathrm{Re}(\tau^\ell, e^\ell)_h\right\}\right| \\
&\leq e^{C_{1,\star}T}\left\{\left|\sum_{\ell=1}^{\mathcal{N}-1}\mathrm{Re}(\tau^\ell-\tau^{\ell-1}, e^\ell)_h\right| + \left|C_{1,\star}k\sum_{\ell=1}^{\mathcal{N}-1}\mathrm{Re}(\tau^\ell, e^\ell)_h\right|\right\} \\
&\leq e^{C_{1,\star}T}\max_{0\leq\ell\leq\mathcal{N}}\|e^\ell\|_h\left(\sum_{\ell=1}^{\mathcal{N}-1}\|\tau^\ell-\tau^{\ell-1}\|_h + C_{1,\star}k\sum_{l=1}^{\mathcal{N}-1}\|\tau^\ell\|_h\right)
\end{aligned}$$

Επομένως

$$\max_{0\leq n\leq\mathcal{N}}|\Lambda^n| \leq e^{C_{1,\star}T}\max_{0\leq\ell\leq\mathcal{N}}\|e^\ell\|_h\left(\max_{0\leq\ell\leq\mathcal{N}-1}\|\tau^\ell\|_h + \sum_{\ell=1}^{\mathcal{N}-1}\|\tau^\ell-\tau^{\ell-1}\|_h + C_{1,\star}k\sum_{\ell=1}^{\mathcal{N}-1}\|\tau^\ell\|_h\right)$$

Συνεπώς

$$\hat{\mathcal{E}}^n \leq e^{C_{1,\star}T}\Big\{\hat{\mathcal{E}}^0 + \max_{0\leq \ell\leq \mathcal{N}} \|e^\ell\|_h\Big(\max_{0\leq \ell\leq \mathcal{N}-1} \|\tau^\ell\|_h + \sum_{l=1}^{\mathcal{N}-1} \|\tau^\ell - \tau^{\ell-1}\|_h$$
$$+ C_{1,\star}k\sum_{\ell=1}^{\mathcal{N}-1} \|\tau^\ell\|_h\Big) + c_\delta T(k^2+h^2)^2\Big\} \quad (2.60)$$

Με χρήση του Λήμματος 2.8 για τους υπόλοιπους όρους της (2.60) έχουμε

$$\max_{0\leq n\leq \mathcal{N}-1} \|\tau_j^\ell\|_h \leq \sqrt{L} \max_{0\leq n\leq \mathcal{N}-1} |\tau^n|_\infty = c\sqrt{L}(k^2+h^2) \quad (2.61)$$

$$C_{1,\star}k\sum_{\ell=0}^{\mathcal{N}-1} \|\tau^\ell\|_h \leq C_{1,\star}T(k^2+h^2) \quad (2.62)$$

$$\sum_{\ell=1}^{\mathcal{N}-1} \|\tau^\ell - \tau^{\ell-1}\|_h \leq C_{2,\star}\sum_{\ell=1}^{\mathcal{N}-1} k(k^2+h^2) \leq C_{2,\star}T(k^2+h^2) \quad (2.63)$$

όπου $C_{3,\star} = c\sqrt{L} + (C_{1,\star}+C_{2,\star})T$.

Συνδυάζοντας τις (2.61) $-$ (2.63) και την (2.60) παίρνουμε

$$\max_{0\leq \ell\leq \mathcal{N}} \|e^\ell\|_h^2 \leq \max_{0\leq \ell\leq \mathcal{N}} \hat{\mathcal{E}}^n \leq e^{C_{1,\star}T}\left\{\hat{\mathcal{E}}^0 + C_{3,\star}\max_{0\leq \ell\leq \mathcal{N}} \|e^\ell\|_h(k^2+h^2) + c_{\delta,\star}T(k^2+h^2)^2\right\}$$

Επομένως

$$\max_{0\leq \ell\leq \mathcal{N}} \|e^\ell\|_h^2 \leq \tfrac{1}{2}\max_{0\leq \ell\leq \mathcal{N}} \|e^\ell\|_h^2 + e^{C_{1,\star}T}\left\{\hat{\mathcal{E}}^0 + C_{4,\star}(k^2+h^2)^2\right\}$$

με $C_{4,\star} = e^{C_{1,\star}T}(C_{3,\star}^2 + c_{\delta,\star}T)$.

Άρα

$$\max_{0\leq \ell\leq \mathcal{N}} \|e^\ell\|_h^2 \leq 2e^{C_{1,\star}T}\left\{\hat{\mathcal{E}}^0 + C_{4,\star}(k^2+h^2)^2\right\} \quad (2.64)$$

Συνεχίζουμε με τον υπολογισμό του $\hat{\mathcal{E}}^0$

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{E}}^0 &= \gamma\|e^1\|_h^2 + H^0 + \mathrm{Re}((\widetilde{E}^1+\widetilde{E}^0)\otimes\eta^{\frac{1}{2}}, e^1)_h + \tfrac{1}{2}(N^{\frac{1}{2}}, |e^1|^2)_h \\ &\leq \gamma\|e^1\|_h^2 + H^0 + \tfrac{1}{16}\left(\|\eta^1\|_h^2 + \|\eta^0\|_h^2\right) + c'\|e^1\|_h^2 + \tfrac{1}{8}\|\delta_h e^1\|_h^2 \\ &\leq c''_\gamma H^0\end{aligned}$$

Επίσης

$$H^0 = \tfrac{1}{2}[\|\delta_h e^1\|_h^2 + \|\delta_h U^0\|_h^2 + \tfrac{1}{2}(\|\eta^1\|_h^2 + \|\eta^0\|_h^2)]$$

όπου $\eta^0 = 0$ και $\eta^1 = ck^2$.

$$(\Delta_h U^n, U^n)_h = \left(\frac{\eta^{n+1}-\eta^n}{k}, U^n\right)_h$$

Από όπου παίρνουμε

$$\|\delta_h U^n\|_h^2 = -h\sum_j \left(\frac{\eta_j^{n+1}-\eta_j^n}{k}\right)U_j^n$$

Για $n = 0$

$$\|\delta_h U^0\|_h^2 = -h\sum_j U_j^0 \left(\frac{\eta_j^1-\eta_j^0}{k}\right) \leq \left|h\sum_j U_j^0 \frac{\eta_j^1}{k}\right| \leq \frac{1}{k}|U^0|_\infty \|\eta^1\|_h \leq |U^0|_\infty^2 + ck^2$$

Χρησιμοποιώντας τώρα την Πρόταση 2.3 παίρνουμε

$$\|\delta_h U^0\|_h^2 = ck^2$$

Επίσης $\|\eta^1\|_h^2 + \|\eta^0\|_h^2 = ck^4$. Τέλος

$$\|\delta_h e^1\|_h^2 = h\sum_{j=0}^{J} \left|\frac{e_{j+1}^1 - e_j^1}{h}\right|^2 \leq 4h^{-1}\|e^1\|_h^2 = ck(k^2+h^2)$$

Επομένως $H^0 = O(k^2+h^2)$, το οποίο συνεπάγεται $\hat{\mathcal{E}}^0 = O(k^2+h^2)$. Επιστρέφουμε στην (2.64) όπου έχουμε

$$\max_{0\leq \ell \leq \mathcal{N}} \|e^\ell\|_h \leq 2ce^{C_{1,\star}T}(k^2+h^2)$$

Εν συνεχεία η (2.60) θα γίνει

$$\hat{\mathcal{E}}^n \leq e^{C_{1,\star}T}\left(\hat{\mathcal{E}}^0 + \max_{0\leq \ell\leq \mathcal{N}} \|e^\ell\|_h^2 + C_\star(k^2+h^2)^2\right)$$

Άρα

$$\hat{\mathcal{E}}^n \leq 2ce^{2C_{1,\star}T}\left(\hat{\mathcal{E}}^0 + (k^2+h^2)\right)$$

Εφόσον οι νόρμες $\mathcal{E}^n$ και $\hat{\mathcal{E}}^n$ είναι ισοδύναμες θα ισχύει

$$\mathcal{E}^n \leq c_T\left[\mathcal{E}^0 + (k^2+h^2)\right]$$

Ομοίως για τις $\mathcal{E}^0$ και $\hat{\mathcal{E}}^0$

$$\mathcal{E}^0 = c(k^2+h^2)$$

$\square$

Κεφάλαιο 3

Αριθμητικά Αποτελέσματα

3.1 Γραμμικά Συστήματα

Από την σχέση
$$\tfrac{E^{n+1}-E^{n}}{k} - \tfrac{i}{2}\Delta_h E^{n+\frac{1}{2}} = -iE^{n+\frac{1}{2}} \otimes N^{n+\frac{1}{2}} \tag{3.1}$$
προσδιορίζουμε το E^{n+1} ως την λύση του $J \times J$ γραμμικού συστήματος με πίνακα

$$\mathbf{A_E} = \begin{bmatrix} d_E & e_E & & & c_E \\ c_E & d_E & e_E & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & c_E & d_E & e_E \\ e_E & & & c_E & d_E \end{bmatrix}$$

όπου $c_E = -i\frac{k}{2h^2}$, $d_E = 1 + i\{\frac{k}{h^2} + \frac{k}{4}(N_j^{n+1} + N_j^n)\}$ και $e_E = -i\frac{k}{2h^2}$.

Επίσης έχουμε

$$\mathbf{E}^{n+1} = \begin{bmatrix} E_1^{n+1} \\ \vdots \\ E_j^{n+1} \\ \vdots \\ E_J^{n+1} \end{bmatrix} \text{ και } \mathbf{y_{E^n}} = \begin{bmatrix} y_{E_1^n} \\ \vdots \\ y_{E_j^n} \\ \vdots \\ y_{E_J^n} \end{bmatrix}, \text{ με } j = 1, \ldots, J-1$$

Άρα οδηγούμαστε στην επίλυση ενός $J \times J$ συστήματος, πιο συγκεκριμένα του

$$\mathbf{A_E} \cdot \mathbf{E}^{n+1} = \mathbf{y}_{E^n} \tag{3.2}$$

Από την σχέση

$$\tfrac{N^{n+1}-2N^{n}+N^{n-1}}{k^2} - \tfrac{1}{2}\Delta_h N^{n+\frac{1}{2}} = \Delta_h |E^n|^2$$

ή

$$\tfrac{N_j^{n+1}-2N_j^{n}+N_j^{n-1}}{k^2} - \tfrac{1}{2}\Delta_h N_j^{n+1} - \frac{1}{2}\Delta_h N_j^{n-1} = \Delta_h |E_j^n|^2 \tag{3.3}$$

προσδιορίζουμε το N^{n+1} ως την λύση του $J \times J$ γραμμικού συστήματος με πίνακα

$$\mathbf{A_N} = \begin{bmatrix} d_N & e_N & & & c_N \\ c_N & d_N & e_N & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & c_N & d_N & e_N \\ e_N & & & c_N & d_N \end{bmatrix}$$

όπου $c_N = -\frac{k^2}{2h^2}$, $d_N = 1 + \frac{k^2}{h^2}$ και $e_N = -\frac{k^2}{2h^2}$.

Επίσης έχουμε

$$\mathbf{N}^{n+1} = \begin{bmatrix} N_1^{n+1} \\ \vdots \\ N_j^{n+1} \\ \vdots \\ N_J^{n+1} \end{bmatrix} \text{ και } \mathbf{y_{N^n}} = \begin{bmatrix} y_{N_1^n} \\ \vdots \\ y_{N_j^n} \\ \vdots \\ y_{N_J^n} \end{bmatrix}, \text{ με } j = 1, \ldots, J-1$$

Καταλήγουμε στην επίλυση ενός $J \times J$ συστήματος, πιο συγκεκριμένα του

$$\mathbf{A_N} \cdot \mathbf{N}^{n+1} = \mathbf{y}_{N^n} \tag{3.4}$$

3.2 Επίλυση Γραμμικών Συστημάτων

Παρατηρούμε ότι οι πίνακες A_E, A_N των γραμμικών συστημάτων ,(3.2) και (3.4) αντίστοιχα, έχουν την ίδια μορφή, δηλαδή έχουν μη μηδενικά στοιχεία στην κύρια διαγώνιο, στην υπερδιαγώνιο, στην υποδιαγώνιο και στις θέσεις a_{1J}, a_{J1}, λόγω περιοδικότητας των συναρτήσεων. Συνεπώς μπορούμε να λύσουμε τα δύο γραμμικά συστήματα με την ίδια μέθοδο.

Μέθοδος επίλυσης: Έστω $B \in \mathbb{C}^{J,J}$ είναι ένας συμμετρικός πίνακας τέτοιος ώστε $\beta_{ij} = 0$ για $1 < i - j < J$. Για να λύσουμε το γραμμικό πρόβλημα $AU^{n+1} = y$ γράφουμε τον A ως άθροισμα $A = B + C$ όπου ο B είναι τριδιαγώνιος, όπως τον ορίσαμε πιο πάνω και ο C έχει μόνο δύο μη μηδενικά στοιχεία, στις θέσεις $(1, J)$ και $(J, 1)$. Τότε έχουμε:

$$AU = y \Leftrightarrow BU^{n+1} + CU^{n+1} = y \Leftrightarrow U^{n+1} + B^{-1}CU^{n+1} = B^{-1}y \Leftrightarrow$$

$$U^{n+1} + B^{-1} \begin{bmatrix} b_{1J}U_J^{n+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_{J1}U_1^{n+1} \end{bmatrix} = B^{-1}y$$

όπου b^1, b^J, η πρώτη και η τελευταία στήλη του B^{-1}, αντίστοιχα. Προκύπτει δηλαδή η επίλυση του γραμμικού προβλήματος αντίστοιχα

$$B\tilde{U} = y$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω καταλήγουμε στο γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} U_1 + \alpha_{1,J+1}U_{J+1}b_1^1 + \alpha_{J+1,1}U_1b_1^J = \tilde{U}_1 \\ U_i + \alpha_{1,J+1}U_{J+1}b_i^1 + \alpha_{J+1,1}U_1b_i^J = \tilde{U}_i & , i = 2, \cdots, J \\ U_{J+1} + \alpha_{1,J+1}U_{J+1}b_{J+1}^1 + \alpha_{J+1,1}U_1b_{J+1}^J = \tilde{U}_{J+1} \end{cases}$$

Ο υπολογισμός των $\tilde{U}$, b^1, b^J απαιτεί την επίλυση τριών γραμμικών συστημάτων με τον ίδιο τριδιαγώνιο πίνακα B.

3.3 Υπολογιστικά Αποτελέσματα

Χρησιμοποιούμε το σχήμα πεπερασμένων διαφορών όπως κατασκευάστηκε στην παράγραφο 3.1 με σκοπό τον υπολογισμό του ρυθμού σύγκλισης των υπολογιστικών λύσεων σε τεχνητά προβλήματα. Καταλήγουμε εξάγωντας συμπεράσματα τόσο για το ομογενές όσο και για το μη ομογενές πρόβλημα.

3.3.1 Μη Ομογενές Πρόβλημα

Θεωρούμε την μη ομογενή διατύπωση του προβλήματος (1.1)-(1.2) με f και g τέτοιες ώστε οι συναρτήσεις $E(x,t) = e^{it}\sin(x)$ και $N(x,t) = e^{-t}\sin(x)$ να είναι ακριβείς λύσεις του συστήματος Zakharov για $(x,t) \in [0,2\pi]\times[0,1]$. Τότε $E_0(x) = \sin(x)$, $N_0(x) = \sin(x)$ και $N_1(x) = -\sin(x)$ για $x \in [0,2\pi]$. Για τα αριθμητικά αποτελέσματα επιλέγουμε $N = J+1 = \nu = 10, 20, 40, 80, 160, 320, 640, 1280$ και υπολογίζουμε το διακριτό L^∞ σφάλμα $\mathcal{E}_\infty := \max_{0\le n\le\nu}\max\{|E^n - E(\cdot,t^n)|_\infty, |N^n - N(\cdot,t^n)|_\infty\}$

ν	$\mathcal{E}_\infty(\nu)$	*Rate*
10	$0.722797E-01$	-
20	$0.217729E-01$	1.73106
40	$0.590991E-02$	1.88133
80	$0.153538E-02$	1.94454
160	$0.391033E-03$	1.97323
320	$0.986530E-04$	1.98686
640	$0.247748E-04$	1.99349
1280	$0.620767E-05$	1.99675

Πίνακας 1. Ρυθμός σύγκλισης L^∞ νόρμας.

Ο ρυθμός σύγκλισης μεταξύ δύο διαδοχικών τιμών των κόμβων ν_1 και ν_2 με αντίστοιχα αφάλματα $\mathcal{E}_\infty(\nu_1)$ και $\mathcal{E}_\infty(\nu_2)$ υπολογίζεται από τον τύπο

$$\log\left(\frac{\mathcal{E}_\infty(\nu_1)}{\mathcal{E}_\infty(\nu_2)}\right)/\log\left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\right) \tag{3.5}$$

Τα αριθμητικά αποτελέσματα του Πίνακα 1 επιβεβαιώνουν ότι το σχήμα μας έχει τάξη σύγλισης 2.

Θεωρούμε ως νόρμα ενέργειας $\mathcal{E}^n$ των σφαλμάτων e^n και η^n την τετραγωνική ρίζα της ποσότητας (2.41). Εκτελώντας τον αλόγριθμο για το παρόν πρόβλημα και με τον ίδιο πλήθος κόμβων καταλήγουμε στα αποτελέσματα,

ν	$\mathcal{E}^n(\nu)$	*Rate*
10	$0.103767E+00$	-
20	$0.293452E-01$	1.8222
40	$0.783631E-02$	1.9049
80	$0.202780E-02$	1.9503
160	$0.518257E-03$	1.9682
320	$0.132008E-03$	1.9731
640	$0.338014E-04$	1.9655
1280	$0.878845E-05$	1.9434

Πίνακας 2. Ρυθμός σύγκλισης για την νόρμα ενέργειας.

Τα αριθμητικά αποτελέσματα επιβεβαιώνουν τα θεωρητικά αποτελέσματα του Θεωρήματος 2.9, ότι η νόρμα της ενέργειας έχει τάξη σύγκλισης 2. Για την εύρεση της τάξης σύγκλισης της νόρμας χρησιμοποιήθηκε ο τύπος (3.5) για την $\mathcal{E}^n$.

3.3.2 Ομογενές πρόβλημα

Αναζητούμε λύσεις του ομογενούς συστήματος Zakharov (βλ. [6]) που να έχουν την μορφή

$$E(x,t) = F(x-vt)e^{i\phi(x-ut)} \tag{3.6}$$

$$N(x,t) = G(x-vt) \tag{3.7}$$

,όπου v, ϕ, u είναι πραγματικές σταθερές με $|v| < 1$ και F, G είναι $L-$περιοδικές συναρτήσεις με

$$G(x-vt) = \frac{|F(x-vt)|^2}{v^2-1} + c_0, \quad F(x-vt) = dn\left(\frac{x-vt}{\sqrt{2(1-v^2)}}, k\right) \tag{3.8}$$

, $dn(u,k)$ δηλώνει μια Ιακωβιανή ελλειπτική συνάρτηση (βλ. [6], [8]) και $k^2 + k'^2 = 1$. Προσδιορίζουμε τις πραγματικές σταθερές v, ϕ, u με βάσει τους τύπους

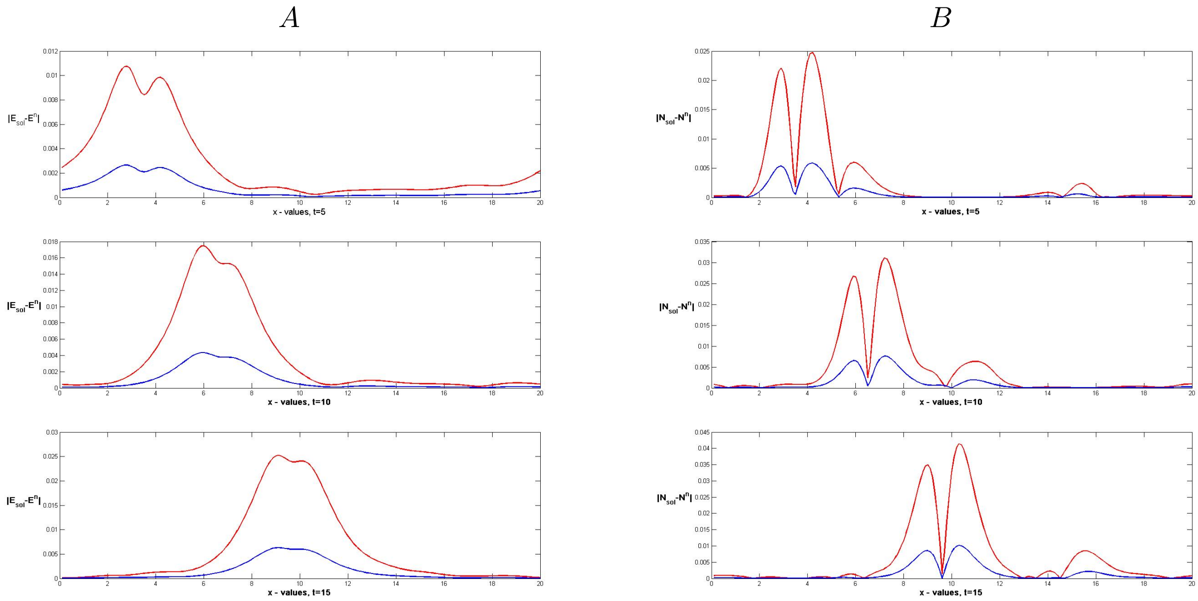
$$\phi = \frac{v}{2},\; u = \frac{v}{2} + \frac{2c_0}{v} - \frac{1+k'^2}{v(1-v^2)},\; v = \frac{4\pi}{L}$$

Solitary Wave

Εισάγουμε στο σύστημα (1.1) – (1.3) τις λύσεις (3.6), (3.7) και (3.8) με τις εξής παραμέτρους: $L = 20$, $c_0 = 0.181786$ και $k'^2 = 4.5147 \cdot 10^{-4}$ και εκτελούμε τον αλγόριθμο μας για $h = k = 0.1$ και $h = k = 0.05$ αντίστοιχα. Στα παρακάτω γραφήματα παρουσιάζουμε την απόλυτη διαφορά των σφαλμάτων $|E_{sol} - E^n|$, $|N_{sol} - N^n|$, όπου E_{sol}, N_{sol} είναι οι ακριβείς λύσεις του συστήματος και E^n, N^n οι προσεγγιστικές λύσεις της μεθόδου.

n	L_2-norm	Hamiltonian
10	$0.155431E-14$	$0.150477E-10$
20	$0.888178E-15$	$0.507927E-12$
40	$0.266454E-14$	$0.324463E-12$
80	$0.310862E-14$	$0.536238E-12$
160	$0.310862E-14$	$0.982991E-12$
320	$0.754952E-14$	$0.126782E-11$
640	$0.266454E-14$	$0.224321E-12$

Πίνακας 3. Διατήρηση αναλοίωτων ποσοτήτων για την περίπτωση του Σολιτονίου.



Σχήμα 3.1: A: $|E_{sol} - E|$, B: $|N_{sol} - N|$ για τις χρονικές στιγμές $t = 0,25$, $t = 0,5$ και $t = 0,75$.

Collision of Two Solitary Waves

Χρησιμοποιούμε τις λύσεις (3.6), (3.7) και (3.8) για να δοκιμάζουμε την μέθοδο μας. Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται παράμετροι που μας βοηθούν στον υπολογισμό των λύσεων για τις διάφορες περιπτώσεις του παραδείγματος μας.

Σύνολο Παραμέτρων	L	k	v	u	c_0
A	160	1.0	0.628319	2.24323	0.0227232
B	160	0.5	0.628319	-0.27094	0.0227232
Γ	160	1.0	0.314519	-3.22992	0.0227232

Στην συνέχεια εξετάζουμε την περίπτωση της σύγκρουσης δύο Σολιτονίων χρησιμοποιώντας την μέθοδο Glassey. Τα αρχικά δεδομένα γράφονται στην μορφή

$$
\begin{aligned}
E(x,0) &= E(x_1,0) + E(x_2,0),\\
N(x,0) &= N(x_1,0) + N(x_2,0),\\
N_t(x,0) &= \frac{\partial N(x_1,0)}{\partial t} + \frac{\partial N(x_2,0)}{\partial t}
\end{aligned}
$$

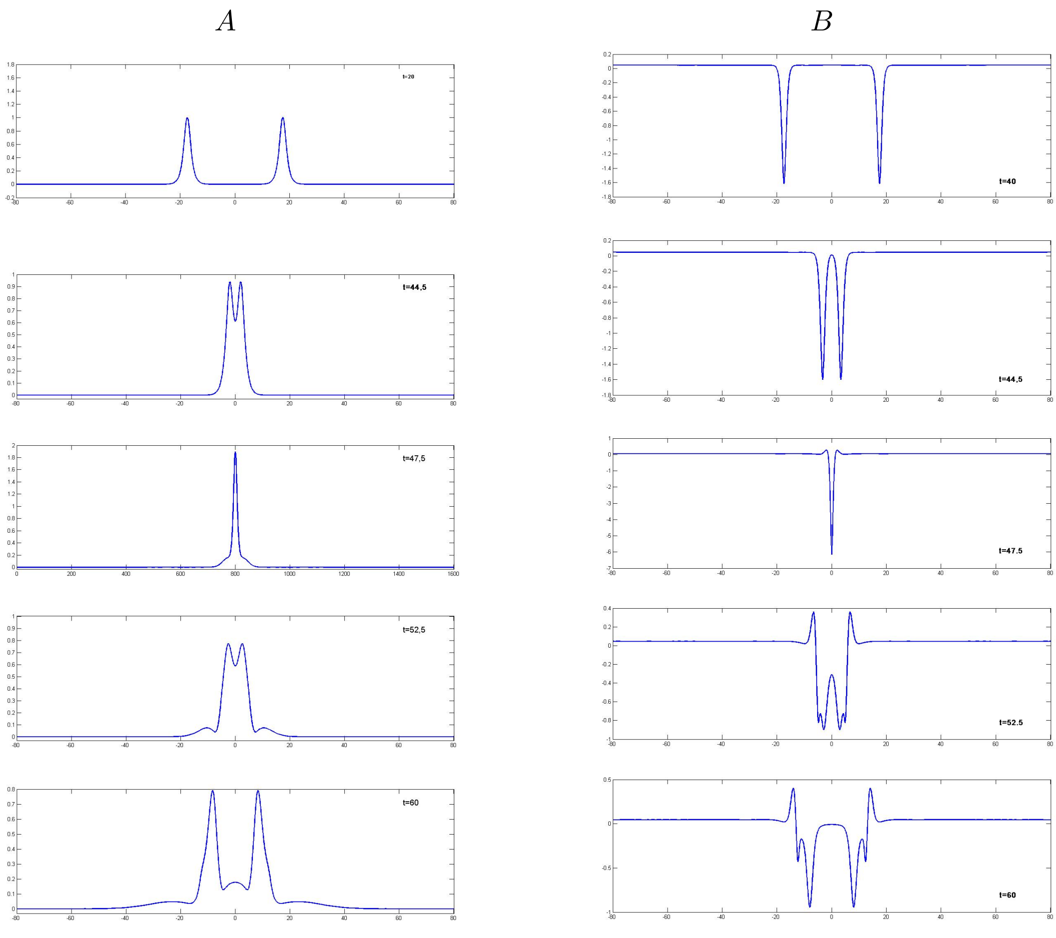
όπου τα $x_1 = x + 30$ και $x_2 = x - 30$ αντιστοιχούν στις αρχικές θέσεις των Σολιτονίων. Κατόπιν παρουσιάζουμε υπολογιστικά αποτλέσματα για τρείς περιπτώσεις:

Ι) Σολτόνια με ίδια ταχύτητα, αντίθετη κατεύθυνση και ίδιο Πλάτος Κύματος.

$$v_1 = -v_2 = v = 0.628319 \text{ (Σύνολο Παραμέτρων A)}$$

n	L_2-norm
160	$0.219720E-24$
320	$0.904729E-25$
640	$0.219720E-24$
1280	$0.109860E-24$

Πίνακας 4. Διατήρηση L_2 νόρμας.



Σχήμα 3.2: Α: Ηλεκτρικό πεδίο $|E(x,t)|$, Β: Απόκλιση πυκνότητας ιόντων $N(x,t)$.

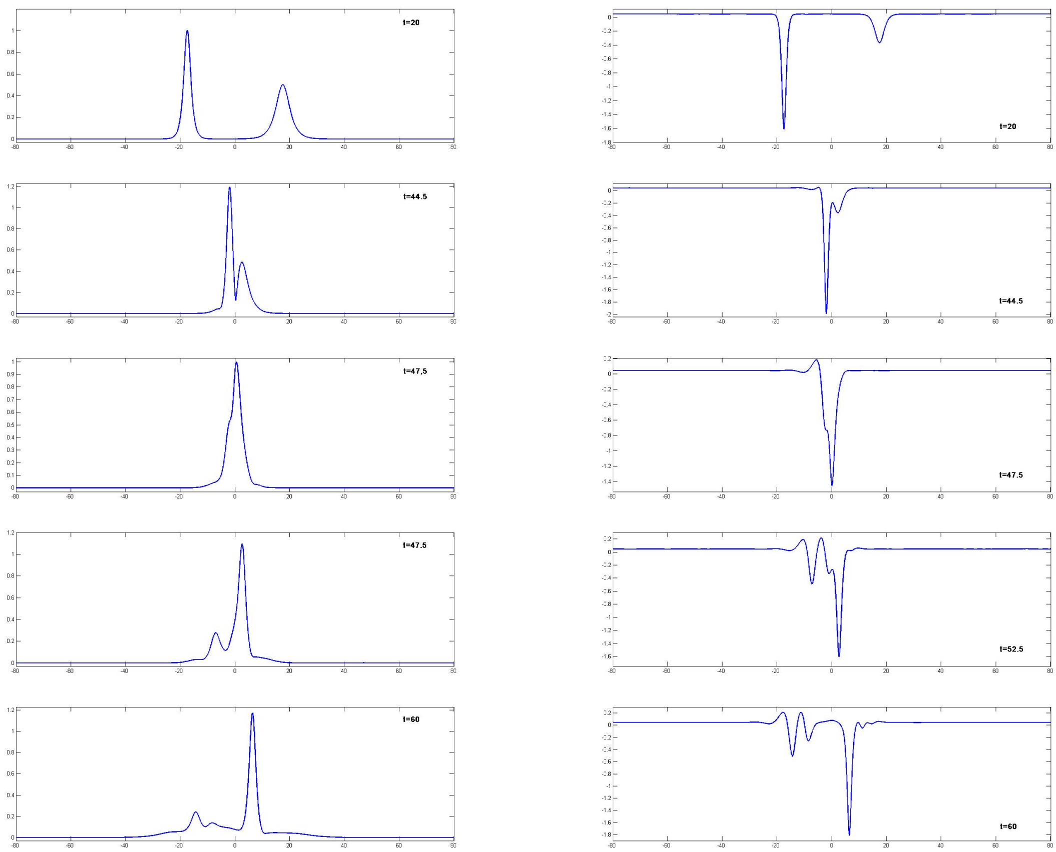
II)Σολτόνια με ίδια ταχύτητα, αντίθετη κατεύθυνση και διαφορετικό Πλάτος Κύματος.

$v_1 = -v_2 = v = 0.628319$ (Σύνολο Παραμέτρων Α και Β)

n	L_2-norm
160	$0.847033E-21$
320	$0.254110E-20$
640	$0.550571E-20$
1280	$0.423516E-20$

Πίνακας 5. Διατήρηση L_2 νόρμας.

A *B*



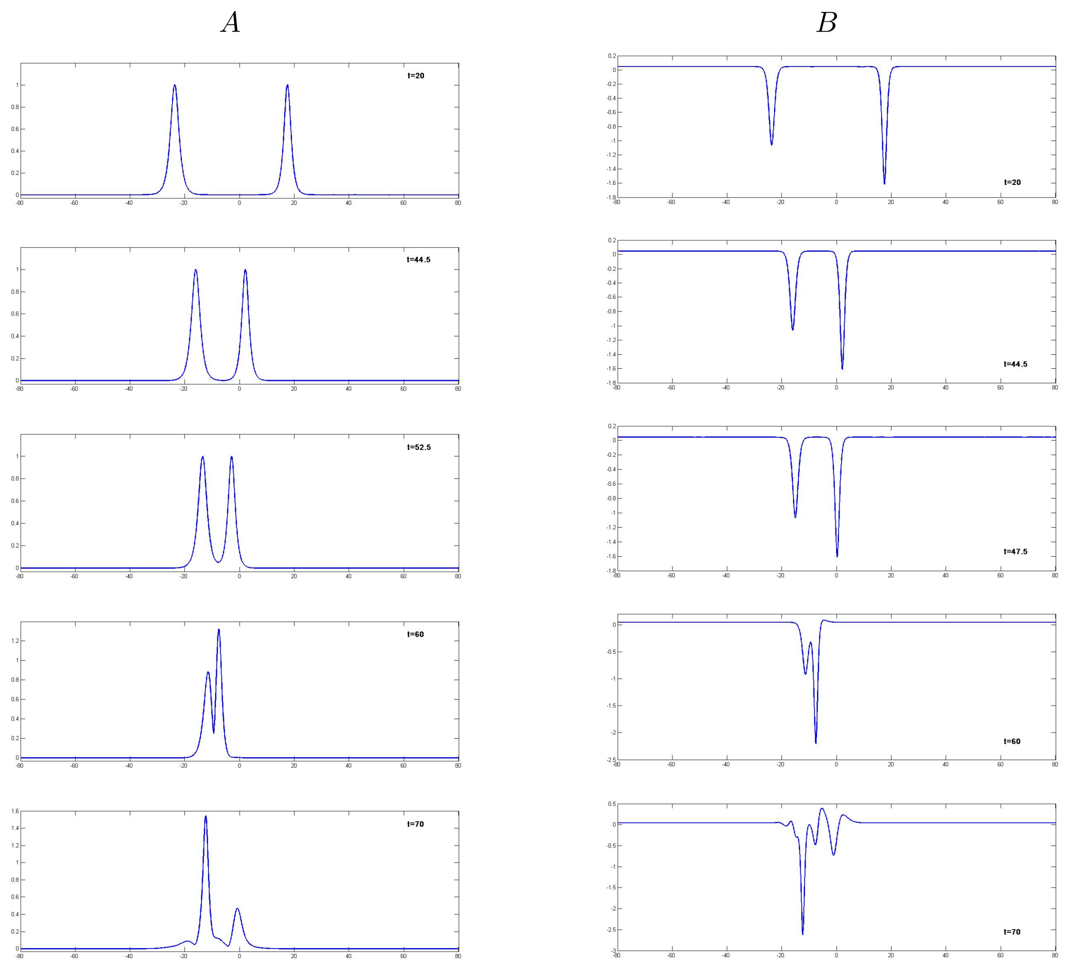
Σχήμα 3.3: Α: Ηλεκτρικό πεδίο $|E(x,t)|$, Β: Απόκλιση πυκνότητας ιόντων $N(x,t)$.

III)Σολτόνια με διαφορετική ταχύτητα, αντίθετη κατεύθυνση και ίδιο Πλάτος Κύματος.

$v_1 = 0.314519 \quad v_2 = -0.628319$ (Σύνολο Παραμέτρων Α και Γ)

n	L_2-norm
160	$0.330872E-23$
320	$0.248154E-23$
640	$0.537667E-23$
1280	$0.413590E-24$

Πίνακας 6. Διατήρηση L_2 νόρμας.



Σχήμα 3.4: Α: Ηλεκτρικό πεδίο $|E(x,t)|$, Β: Απόκλιση πυκνότητας ιόντων $N(x,t)$.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Περιοδικό πρόβλημα δυο σημείων - Συνάρτηση Green

Θα δείξουμε ότι το $L-$περιοδικό πρόβλημα δύο σημείων: με f $L-$περιοδική

$$u'' = f, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

έχει λύση όταν $\int_0^L f dx = 0$.

Αναζητούμε λύση της δ.ε. της μορφής: $u(x) = c_1 + c_2 x + \int\limits_0^x F(y)dy$, όπου c_1, c_2 σταθερές και $F(y) = \int\limits_0^y f(s)ds$.

$$\int\limits_0^x F(y)dy = \int\limits_0^x (y')F(y)dy = [yF(y)]_0^x - \int\limits_0^x yF'(y)dy = \int\limits_0^x (x-y)f(y)dy$$

Λόγω της $L-$περιοδικότητας της u έχουμε

$$u(0) = u(L)$$

Δηλαδή

$$c_1 = c_1 + Lc_2 + \int\limits_0^L (L-y)f(y)dy$$

Επομένως

$$c_2 = \frac{1}{L}\int\limits_0^L (L-y)f(y)dy$$

Τότε

$$u(x) = c_1 + \frac{x}{L}\int\limits_0^L (L-y)f(y)dy + \int\limits_0^x (x-y)f(y)dy = c_1 + \int_0^L \left[\frac{x}{L}(L-y) + (x-y)\chi_{(0,x)}\right] f(y)dy$$

Συνεπώς

$$G(x,y) = \begin{cases} x\left(1 - \frac{y}{L}\right) & ,0 \le x \le y \le L \\ \\ y\left(1 - \frac{x}{L}\right) & ,0 \le y \le x \le L \end{cases}$$

Γνωρίζουμε επίσης ότι $u'(x) = c + \int_0^x f(y)dy$. Καθώς $u'(0) = u'(L)$ θα πάρουμε

$$c + 0 = c + \int_0^L f(y)dy$$

Συνεπώς

$$\int_0^L f(y)dy = 0.$$

Ανάπτυγμα Taylor

Έστω $v \in C^4[\alpha,\beta]$, $x \in (\alpha,\beta)$ και $h > 0$: $x+h,\ x,\ x-h \in [\alpha,\beta]$. Αναπτύσσοντας κατά Taylor έχουμε

$$\begin{aligned} v(x+h) &= v(x) + hv'(x) + \frac{h^2}{2}v''(x) + \frac{h^3}{6}v'''(x) + \frac{h^4}{24}v^{(4)}(\theta_1) \\ v(x-h) &= v(x) - hv'(x) + \frac{h^2}{2}v''(x) - \frac{h^3}{6}v'''(x) + \frac{h^4}{24}v^{(4)}(\theta_2) \end{aligned} \tag{3.9}$$

,όπου $\theta_1, \theta_2 \in (x-h, x+h)$. Από τις παραπάνω σχέσεις έχουμε

$$v(x+h) - v(x) + v(x-h) = h^2 v'' + \frac{h^4}{12}v^{(4)}(\xi) \tag{3.10}$$

,με $\xi \in (\theta_1, \theta_2)$

Χρήσιμη Θεωρία - Συμβολισμοί

Έστω επίσης z ένας μιγαδικός αριθμός. Τότε $|z|$ και $\overline{z}$ είναι το μέτρο και ο συζυγής μιγαδικός του z.

Συμβολίζουμε με L^2 τον χώρο των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων περιοδικών συναρτήσεων

$$L^2 = L^2(\Omega) = \left\{ v : \Omega \to \mathbb{C} : \int_\alpha^\beta |v|^2 dx \right\}$$

Έστω $(\cdot,\cdot)$ το εσωτερικό γινόμενο στον L^2 το οποίο δίνεται από

$$(v,w) = \int\limits_\Omega v(x)\bar{w}(x)dx, \text{ με } v,w \in L^2(\Omega)$$

και $\|\cdot\|_h$ η αντίστοιχη νόρμα.

Πρόταση 3.1. (Ανισότητα Cauchy-Schwarz)

$$|x \cdot y| \le |x| \cdot |y|, \text{ όπου } x, y \in \mathbb{C}^n$$

Πρόταση 3.2. (Ανισότητα Cauchy)

$$\alpha \cdot \beta \le \tfrac{\alpha^2}{2} + \tfrac{\beta^2}{2}, \text{ όπου } \alpha, \beta \in \mathbb{C}^n$$

Πρόταση 3.3. (Ανισότητα Cauchy με παράμετρο ε)

$$\alpha \cdot \beta \le \varepsilon\alpha^2 + \tfrac{\beta^2}{4\varepsilon}, \text{ όπου } \alpha, \beta > 0 \text{ και } \varepsilon > 0$$

Πρόταση 3.4. (Ανισότητα Young) Έστω $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Τότε,

$$\alpha\beta \le \tfrac{\alpha^p}{p} + \tfrac{\beta^q}{q}, \text{ με } \alpha, \beta > 0.$$

Βιβλιογραφία

[1] H. Brezis, Συναρτησιακή Ανάλυση, Θεωρία και Εφαρμογές, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Ε.Μ.Π., Αθήνα 1997.

[2] Q. Chang, B. Guo and A. H. Jiang, Finite Difference Method for Generalized Zakharov Equations, Mathematics of Computation, V. 64, N. 210, 537-553 (1995).

[3] A. S. Davydov, Solitons in Molecular Systems, Physica Scripta, Vol. 20, 387-394, 1979.

[4] M. B. Erdogan and N. Tzirakis, Smoothing and global attractors for the Zacharov Systme on the torus, February 23, 2012.

[5] L. C. Evans, Partial Differential Equations, Graduate Studies in Mathematics, ISSN 1065-7339; Volume 19, American Mathematical Society.

[6] R. T. Glassey, Approximate Solutions to the Zakharov Equations via Finite Differences, J. Computational Physics **100**, 377-383 (1992).

[7] R. T. Glassey, Convergence of an Energy-Preserving Scheme for the Zakharov Equations in one space dimension, Mathematics of Computation, V.58, N.197, 83-102 (1992).

[8] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, Table of integrals, series, and products, Academic Press, New York (1980).

[9] L. Stenflo, Nonlinear equations for acoustic gravity waves, Phys. Sripta 33, 156-158, (1986).

[10] C. Sulem and P. L. Sulem, The nonlinear Schrödinger equation, Springer 1999.

[11] P. Xanthopoulos and G. E. Zouraris, A Linearly Implicit Finite Difference Method for a Klein-Gordon-Schrödinger System Modelling Electron-ION Plasma Waves, Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B, V.10, N.1, 239-263 (2008).

[12] V. E. Zakharov, Collapse of Langmuir waves, Soviet Phys. JETP 35(1972), 908-912.

[13] Γ. Δ. Ακρίβης και Β. Α. Δουγαλής, Αριθμητικές Μέθοδοι για Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο 2006.