Πανεπιστήμιο Κρήτης

Σχολή Θετικών Επιστημών

Τμήμα Μαθηματικών

Μεταπτυχιακή εργασία

Lie ομάδες, Lie άλγεβρες και το Άτομο του Υδρογόνου

Νίκος Κωνσταντίνου Ανδριανός

Επιβλέπων καθηγητής

Μιχάλης Κολουντζάκης

Ηράκλειο 2011

University of Crete

School of Science

Department of Mathematics

Master Thesis

Lie Groups, Lie Algebras and the Hydrogen Atom

Nikos Konstantinou Andrianos

Thesis advisor

Mihalis Kolountzakis

Iraklion 2011

Επιτροπή αξιολόγησης

- Μιχάλης Κολουντζάκης
- Κωνσταντίνος Αθανασόπουλος
- Αλεξόπουλος Γεώργιος

Περίληψη-Summary

Στην εργασία αυτή ασχολούμαστε με την δράση συμπαγών και συνεκτικών ομάδων Lie σε γραμμικούς χώρους πεπερασμένης διάστασης. Η δράση τους περιγράφεται και καθορίζεται πλήρως από την Lie άλγεβρα τους. Έτσι περνάμε στην μελέτη της δράσης των αλγεβρών Lie σε γραμμικούς χώρους πεπερασμένης διάστασης. Εφαρμόζουμε τα αποτελέσματα αυτά για την δράση της ειδικής ορθογώνιας ομάδας $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ στους ιδιόχωρους της Hamiltonian του ατόμου του υδρογόνου και κάνουμε προβλέψεις για τις ενεργειακές του καταστάσεις.

Λέξεις κλειδιά: Ομάδα Lie, άλγεβρα Lie, αναπαράσταση, δράση, αναλλοίωτος υπόχωρος, ανάγωγη αναπαράσταση, ειδική ορθογώνια ομάδα, ειδική μοναδιακή ομάδα, Hamiltonian.

In the present work we are studying the action of compact and connected Lie groups on linear spaces of finite dimension. Their action is determined and can be described from their Lie algebra. Consequently it's enough to study the action of Lie algebras on linear spaces of finite dimension. We apply our results to the case of the action of the special orthogonal group $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ on the eigenspaces of the hydrogen atom's Hamiltonian and we make predictions about its energy levels.

Key words: Lie group, Lie algebra, representation, action, invariant subspace, irreducible representation, special orthogonal group, special unitary group, Hamiltonian.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Η συμμετρία στην κβαντομηχανική, ομάδες Lie

1.1 Αρχές της κβαντομηχανικής

1.1.1. Κατάσταση συστήματος

Στην κλασική μηχανική, κατάσταση κίνησης ενός συστήματος ονομάζεται κάθε δυνατή κίνηση του συστήματος η οποία συμφωνεί με τους νόμους του Νεύτωνα. Ας υποθέσουμε ότι το σύστημα μας αποτελείται από ένα σωμάτιο το οποίο κινείται στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^3$. Τότε στην γλώσσα των μαθηματικών η κίνηση περιγράφεται από μία συνάρτηση $\mathrm{F}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$ με

$$\mathrm{F}(t)=\left(\mathbf{r}(t),\mathbf{p}(t)\right),$$

όπου $\mathbf{r},\mathbf{p}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ είναι οι παραμετρίσεις της θέσης και της ορμής του σωματίου αντιστοίχως. Κατάσταση του συστήματος την χρονική στιγμή t_0 ονομάζουμε την κατάστασή κίνησης την χρονική στιγμή t_0,

$$\mathrm{F}(t_0)=\left(\mathbf{r}(t_0),\mathbf{p}(t_0)\right).$$

Η κατάσταση του συστήματος την χρονική στιγμή t_0

$$\left(\mathbf{r}(t_0),\mathbf{p}(t_0)\right)=(\mathbf{r}_0,\mathbf{p}_0),$$

καθορίζει μονοσήμαντα την κατάσταση κίνησης του. Πράγματι αν $\mathbf{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ είναι η λεία συνάρτηση η οποία περιγράφει το πεδίο δυνάμεων, τότε από το θεώρημα Picard-Lindelof το διανυσματικό πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{pmatrix}\mathbf{r}'\\ \mathbf{p}'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\mathrm{m}}\mathbf{p}\\ \mathbf{F}(\mathbf{r})\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\mathbf{r}(t_0)\\ \mathbf{p}(t_0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{r}_0\\ \mathbf{p}_0\end{pmatrix},$$

όπου m είναι η μάζα του σωματίου, έχει τοπικά μοναδική λύση η οποία σε σχέση με τις αρχικές συνθήκες μπορεί να επεκταθεί στο $\mathbb{R}$.

Στην κβαντομηχανική η ακριβής γνώση της θέσης και της ορμής του σωματίου, όπως είναι το ηλεκτρόνιο στο άτομο του υδρογόνου, είναι αδύνατη. Η «εικόνα» της κίνησης είναι διαφορετική από αυτή που είχαμε στην κλασική μηχανική.

Η κατάσταση του παραπάνω απλού κβαντομηχανικού συστήματος, κάποια χρονική στιγμή t_0, μπορεί να περιγραφεί από ένα μη μηδενικό διάνυσμα ψ_0 του μιγαδικού γραμμικού χώρου Hilbert $\mathcal{H} = \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$. Δύο γραμμικώς εξαρτημένα διανύσματα αντιστοιχούν στην ίδια κατάσταση. Το διάνυσμα ψ_0 το ονομάζουμε κυματοσυνάρτηση του σωματίου.

Όπως γνωρίζουμε κάθε χώρος Hilbert έχει μία ορθοκανονική βάση. Αν λοιπόν θεωρήσουμε μία ορθοκανονική βάση $\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ του $\mathcal{H}$, τότε η κυματοσυνάρτηση ψ_0 μπορεί να γραφεί ως ένα άπειρο άθροισμα

$$\psi_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \langle e_n, \psi_0 \rangle e_n \,.$$

Έτσι η κατάσταση του συστήματος τώρα θα καθορίζεται από μία άπειρη ακολουθία μιγαδικών αριθμών

$$\left(\langle e_1, \psi_0 \rangle, \langle e_2, \psi_0 \rangle, ..., \langle e_n, \psi_0 \rangle, ... \right),$$

σε αντίθεση με την κλασική μηχανική όπου η ακολουθία αυτή ήταν πεπερασμένη.

1.1.3. Η φυσική σημασία της κυματοσυνάρτησης

Σύμφωνα με όσα προηγήθηκαν η κατάσταση ενός κβαντομηχανικού συστήματος κάποια χρονική στιγμή t_0 περιγράφεται από ένα μονοδιάστατο υπόχωρο του χώρου Hilbert $\mathcal{H}$ και συνεπώς η κυματοσυνάρτηση ψ_0 που την αντιπροσωπεύει, μπορεί πάντα να επιλέγεται έτσι ώστε

$$\|\psi_0\| = \int_{\mathbb{R}^3} |\psi_0|^2 = 1 \,.$$

Θεωρούμε κάθε πείραμα εντοπισμού του σωματίου στον χώρο Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^3$ ως ένα πείραμα τύχης. Τότε η θέση του σωματίου $\mathbf{r}(t_0)$ την χρονική στιγμή t_0 θα είναι μία τυχαία μεταβλητή. Το τετράγωνο της απόλυτης τιμής της κυματοσυνάρτησης $|\psi_0|^2 : \mathbb{R}^3 \to [0, +\infty)$ είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της θέσης $\mathbf{r}(t_0)$. Συνεπώς η πιθανότητα σε μία μέτρηση να εντοπίσουμε το σωμάτιο σε μία περιοχή $\mathrm{S} \subset \mathbb{R}^3$ του χώρου θα είναι

$$\mathcal{P}\left(\mathbf{r}(t_0) \in \mathrm{S}\right) = \int_{\mathrm{S}} |\psi_0|^2 \,.$$

Δεν μπορούμε λοιπόν να γνωρίζουμε ακριβώς την θέση του σωματίου αλλά μόνο την πιθανότητα να βρίσκεται σε μία περιοχή του χώρου.

1.1.3. Η ενέργεια του σωματίου

Ένα πείραμα μέτρησης της ενέργειας E του σωματίου θεωρείται ως ένα πείραμα τύχης και συνεπώς η ενέργεια είναι και αυτή μία τυχαία μεταβλητή. Στο φυσικό μέγεθος ενέργεια E αντιστοιχούμε έναν γραμμικό τελεστή $\mathbf{H}$, ο οποίος δρα στον (πυκνό) υπόχωρο

$$\mathcal{H}^{\infty} = \left\{ f \in \mathcal{H} \,\middle|\, f \text{ λεία και όλες οι μερικές παράγωγοι της } f \text{ κάθε τάξης} \in \mathcal{H} \right\}$$

του χώρου Hilbert $\mathcal{H}$. Αν $\mathrm{V}:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση του δυναμικού, τότε ο τελεστής $\mathbf{H}:\mathcal{H}^{\infty} \to \mathcal{H}^{\infty}$ ορίζεται ως

$$\mathbf{H} = -\frac{\hbar^2}{2\mathrm{m}}\nabla^2 + \mathrm{V} \ ,$$

όπου $\hbar$ είναι η σταθερά του Plank. Ο τελεστής $\mathbf{H}$ αναφέρεται ως τελεστής Schrodinger ή ακόμα και ως Hamiltonian του συστήματος.

Ορισμός 1.1.1. Ένας γραμμικός τελεστής $\mathbf{T}:\mathcal{U} \to \mathcal{U}$, ο οποίος είναι ορισμένος σε κάποιον πυκνό υπόχωρο $\mathcal{U} \subset \mathcal{H}$, λέγεται ερμιτιανός αν για κάθε $f, g \in \mathcal{U}$ ισχύει

$$\left\langle \mathbf{T}(f), g \right\rangle = \left\langle f, \mathbf{T}(g) \right\rangle$$

●

Πρόταση 1.1.1. Ο τελεστής Schrodinger $\mathbf{H}$ είναι ένας ερμιτιανός γραμμικός τελεστής.

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι ο γραμμικός διαφορικός τελεστής $\nabla^2:\mathcal{H}^{\infty} \to \mathcal{H}^{\infty}$ είναι ερμιτιανός. Αρχικά θα περιοριστούμε σε συναρτήσεις του $\mathcal{H}^{\infty}$ με συμπαγή φορέα. Έστω λοιπόν f, g συναρτήσεις του χώρου $\mathcal{H}^{\infty}$ οι οποίες έχουν συμπαγή φορέα. Τότε θα υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιος ώστε

$$\mathrm{supp}(f), \mathrm{supp}(g) \subset \mathrm{B}(\varepsilon)$$

όπου $\mathrm{B}(\varepsilon) = \mathrm{B}(0,\varepsilon)$ είναι η ανοιχτή μπάλα με κέντρο το μηδέν και ακτίνα ε. Από τους τύπους του Green έχουμε

$$\begin{aligned}
\left\langle f, \nabla^2 g \right\rangle &= \int_{\mathbb{R}^3} f\left(\nabla^2 \overline{g}\right) \\
&= \int_{\mathrm{B}(\varepsilon)} f\left(\nabla^2 \overline{g}\right) \\
&= \int_{\mathrm{B}(\varepsilon)} \left(\nabla^2 f\right)\overline{g} + \int_{\partial\mathrm{B}(\varepsilon)} \left(f\nabla\overline{g} - \overline{g}\nabla f\right)\cdot d\mathbf{s} \\
&= \left\langle \nabla^2 f, g \right\rangle + \int_{\partial\mathrm{B}(\varepsilon)} \left(f\nabla\overline{g}\right)\cdot d\mathbf{s} - \int_{\partial\mathrm{B}(\varepsilon)} \left(\overline{g}\nabla f\right)\cdot d\mathbf{s} \,.
\end{aligned}$$

Όμως επειδή για κάθε $x \in \partial\mathrm{B}(\varepsilon)$ $f(x) = g(x) = 0$, έπεται ότι

$$\int_{\partial\mathrm{B}(\varepsilon)} \left(\overline{g}\nabla f\right)\cdot d\mathbf{s} = \int_{\partial\mathrm{B}(\varepsilon)} \left(f\nabla\overline{g}\right)\cdot d\mathbf{s} = 0$$

και συνεπώς

$$\left\langle f, \nabla^2 g \right\rangle = \left\langle \nabla^2 f, g \right\rangle .$$

Τώρα θα δείξουμε ότι οι συναρτήσεις με συμπαγή φορέα είναι πυκνές στον $\mathcal{H}^{\infty}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει λεία bump function $a_n:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

(i). $\forall x \in \overline{\mathrm{B}}(n)\ \ a_n(x) = 1$

(ii). $\operatorname{supp}(a_n) = \overline{\mathrm{B}}(n + \frac{1}{2^n})$.

Έστω τώρα $h \in \mathcal{H}^{\infty}$. Τότε η ακολουθία συναρτήσεων $\{h_n = a_n h\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μία ακολουθία συναρτήσεων του $\mathcal{H}^{\infty}$ με φραγμένο φορέα, τέτοιες ώστε

$$h_n \xrightarrow{\|\ \|_{\mathcal{H}}} h.$$

Πράγματι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\|h_n - h\|_{\mathcal{H}} &= \int_{\mathbb{R}^3} |h_n - h|^2 \\
&= \int_{\mathrm{B}(n)} |h_n - h|^2 + \int_{\mathrm{B}(n+\frac{1}{2^n})\setminus \mathrm{B}(n)} |h_n - h|^2 + \int_{\mathrm{B}(n+\frac{1}{2^n})^{\mathrm{C}}} |h_n - h|^2 \\
&= 0 + \int_{\mathrm{B}(n+\frac{1}{2^n})\setminus \mathrm{B}(n)} |h_n - h|^2 + \int_{\mathrm{B}(n+\frac{1}{2^n})^{\mathrm{C}}} |h|^2 .
\end{aligned}$$

Όμως επειδή $m\left(\mathrm{B}(n + \frac{1}{2^n}) \setminus \mathrm{B}(n) \right) \to 0$ και επειδή η h είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη θα ισχύουν

$$\int_{\mathrm{B}(n+\frac{1}{2^n})^{\mathrm{C}}} |h|^2, \quad \int_{\mathrm{B}(n+\frac{1}{2^n})\setminus \mathrm{B}(n)} |h_n - h|^2 \to 0$$

και συνεπώς $\|h_n - h\|_{\mathcal{H}} \to 0$.

Έστω λοιπόν $\varphi, \psi \in \mathcal{H}^{\infty}$. Υπάρχουν ακολουθίες $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ όμοιες με αυτήν που περιγράψαμε παραπάνω, τέτοιες ώστε

$$\varphi_n \xrightarrow{\|\ \|_{\mathcal{H}}} \varphi \ , \ \psi_n \xrightarrow{\|\ \|_{\mathcal{H}}} \psi$$

και για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$$\left\langle \varphi_n, \nabla^2 \psi_n \right\rangle = \left\langle \nabla^2 \varphi_n, \psi_n \right\rangle .$$

Λαμβάνοντας το όριο προκύπτει ότι

$$\begin{gathered}
\lim_{n\to\infty} \left\langle \varphi_n, \nabla^2 \psi_n \right\rangle = \lim_{n\to\infty} \left\langle \nabla^2 \varphi_n, \psi_n \right\rangle \Rightarrow \\
\left\langle \lim_{n\to\infty} \varphi_n, \lim_{n\to\infty} \nabla^2 \psi_n \right\rangle = \left\langle \lim_{n\to\infty} \nabla^2 \varphi_n, \lim_{n\to\infty} \psi_n \right\rangle \Rightarrow \\
\left\langle \varphi, \nabla^2 \psi \right\rangle = \left\langle \nabla^2 \varphi, \psi \right\rangle
\end{gathered}$$

και ολοκληρώνεται η απόδειξη του ισχυρισμού. Συνεπάγεται λοιπόν τώρα ότι και ο $\mathbf{H}$ είναι ερμιτιανός ως γραμμικός συνδυασμός ερμιτιανών τελεστών□

Επειδή ο γραμμικός τελεστής $\mathbf{H}$ είναι ερμιτιανός, οι ιδιοτιμές του είναι πραγματικές και έχουν φυσικό νόημα: Τα μόνα δυνατά αποτελέσματα, σε μία μέτρηση της ενέργειας του σωματίου, είναι οι ιδιοτιμές του $\mathbf{H}$. Αν η κατάσταση του σωματίου κάποια χρονική στιγμή περιγράφεται από ένα ιδιοδιάνυσμα φ του τελεστή $\mathbf{H}$, τότε λέμε ότι το σωμάτιο βρίσκεται σε μία ιδιοκατάσταση της ενέργειας. Σε αυτή την περίπτωση το μόνο δυνατό αποτέλεσμα, σε μία μέτρηση της ενέργειας, είναι η ιδιοτιμή E στην οποία αντιστοιχεί το ιδιοδιάνυσμα φ.

1.1.4. Η ενέργεια του ηλεκτρονίου στο άτομο του υδρογόνου

Στην περίπτωση του ηλεκτρονίου στο άτομο του υδρογόνου, η συνάρτηση του δυναμικού V έχει τύπο

$$\mathrm{V}(x,y,z) = -\frac{e^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

και ορίζεται στο $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, δηλαδή παντού στο χώρο εκτός από την αρχή των αξόνων, όπου βρίσκεται το πρωτόνιο. Συνεπώς αν $f \in \mathcal{H}^\infty$ και $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, τότε

$$\mathbf{H}f(x,y,z) = -\frac{\hbar^2}{2\mathrm{m}}\nabla^2 f(x,y,z) - \frac{e^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} f(x,y,z).$$

Επειδή το ηλεκτρόνιο στο άτομο του υδρογόνου είναι δέσμιο, δηλαδή δεν μπορεί να διαφύγει, η ενέργεια του θα είναι αρνητική. Δηλαδή σε οποιαδήποτε μέτρηση της ενέργειας E του ηλεκτρονίου θα έχουμε $\mathrm{E} < 0$.

Δεν μπορούμε να μιλήσουμε για συμμετρία στην κβαντομηχανική αν πρώτα δεν πούμε τα ελάχιστα που απαιτούνται για τις ομάδες Lie και τις αναπαραστάσεις τους.

1.2. Ομάδες Lie

Ορισμός 1.2.1. Έστω G μία λεία πολλαπλότητα διάστασης $n \in \mathbb{N}$. Αν η G με μία πράξη $\cdot : G \times G \to G$ έχει την δομή ομάδας, έτσι ώστε οι απεικονίσεις, $\mu : G \times G \to G$ με

$$\mu(g,h) = g \cdot h$$

και $\iota : G \to G$ με

$$\iota(g) = g^{-1}$$

να είναι λείες, τότε το ζεύγος $(G,\cdot)$ ονομάζεται ομάδα Lie διάστασης n •

Μία ιδιότητα των συνεκτικών τοπολογικών ομάδων και κατά συνέπεια των ομάδων Lie είναι ότι παράγονται από μία περιοχή της μονάδας. Για την ακρίβεια έχουμε την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 1.2.1. Έστω G μία συνεκτική τοπολογική ομάδα και U μία περιοχή της μονάδας. Τότε η U παράγει την ομάδα G.

Απόδειξη. Έστω U ένα ανοιχτό υποσύνολο της G με $U \ni 1$. Τότε $H = \langle U \rangle$ είναι μία ανοιχτή τοπολογική υποομάδα της G. Πράγματι αν $h \in H$, τότε $h \cdot U \subset H$ είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο της G με $h \cdot U \ni h$ και συνεπώς το H είναι ανοιχτό στην G.

Θα δείξουμε ότι το H είναι και κλειστό στην G. Έστω $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία της H και $h \in G$ ώστε $h_n \to h$. Υπάρχει $W \subset U$ περιοχή του 1 τέτοια ώστε $\overline{W} \subset U$ και από την συνέχεια των πράξεων υπάρχει V περιοχή του 1 ώστε για κάθε $h, g \in V$

$$h^{-1} \cdot g \in W .$$

Τότε για την ακολουθία $\{h^{-1} \cdot h_n\}_{n=1}^{\infty}$ θα έχουμε $h^{-1} \cdot h_n \to 1$ και χωρίς βλάβη της γενικότητας για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$$h^{-1} \cdot h_n \in V .$$

Σταθεροποιούμε κάποιον $n_0 \in \mathbb{N}$. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$$(h^{-1} \cdot h_{n_0})^{-1} \cdot (h^{-1} \cdot h_n) \in W$$

και λαμβάνοντας το όριο της παραπάνω ακολουθίας

$$(h^{-1} \cdot h_{n_0})^{-1} \cdot (h^{-1} \cdot h) = h_{n_0}{}^{-1} \cdot h \in \overline{W} \subset U .$$

Συνεπάγεται λοιπόν ότι $h \in h_{n_0} \cdot U \subset H$, οπότε το H είναι και κλειστό. Επειδή όμως η G είναι συνεκτική τοπολογική ομάδα θα έχουμε $G = H$ □

Για τυχόν $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να ταυτίσουμε τον χώρο πινάκων $\mathbb{C}^{n \times n}$ με τον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^{2n^2}$ και τον χώρο πινάκων $\mathbb{R}^{n \times n}$ με τον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^{n^2}$. Έτσι θα αποκαλούμε τους χώρους πινάκων $\mathbb{C}^{n \times n}$, $\mathbb{R}^{n \times n}$ και αυτούς Ευκλείδειους χώρους.

Παράδειγμα 1.2.1. Θεωρούμε τον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{C}^{n \times n}$ και την απεικόνιση της ορίζουσας $\det : \mathbb{C}^{n \times n} \to \mathbb{C}$. Η απεικόνιση $\det$ είναι συνεχής και συνεπώς

$$M = \det^{-1}\left\{\mathbb{C} \setminus \{0\}\right\} = \left\{A \in \mathbb{C}^{n \times n} \,\middle|\, \det A \neq 0\right\}$$

είναι μια λεία ανοιχτή υποπολλαπλότητα του Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{C}^{n \times n}$ διάστασης $2n^2$. Η M είναι κλειστή ως προς την πράξη του πολλαπλασιασμού μεταξύ πινάκων και έχει την δομή ομάδας. Τέλος επειδή οι απεικονίσεις, $\mu : M \times M \to M$ με

$$\mu(A, B) = A \cdot B$$

και $\iota : M \to M$ με

$$\iota(A) = A^{-1}$$

έχουν συνιστώσες ρητές συναρτήσεις είναι λείες. Έτσι M είναι μία ομάδα Lie η οποία ονομάζεται μιγαδική γενική γραμμική ομάδα και συμβολίζεται με $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$. Ομοίως ορίζουμε και την γενική γραμμική ομάδα $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ η οποία έχει διάσταση n^2 ■

Όσον αφορά τις Lie ομάδες πινάκων που θα μας απασχολήσουν σε αυτό το κείμενο, είναι όλες κλειστές Lie υποομάδες της μιγαδικής γενικής γραμμικής ομάδας $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ και της γενικής γραμμικής ομάδας $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. Συγκεκριμένα είναι υποομάδες οι οποίες είναι και ομαλές υποπολλαπλότητες των $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$, $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. Πρότυπο ομαλής υποπολλαπλότητας του $\mathbb{R}^n$ διάστασης $k \le n$ είναι το υποσύνολο

$$\left\{(x^1, x^2, ..., x^n) \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, x^{k+1} = x^{k+2} = ... = x^n = 0\right\}$$

του $\mathbb{R}^n$, το οποίο είναι ομοιομορφικό με τον $\mathbb{R}^k$. Αν θεωρήσουμε μία λεία πολλαπλότητα M διάστασης n, τότε μία ομαλή υποπολλαπλότητα της M διάστασης k θα «φαίνεται» τοπικά ως μία ομαλή υποπολλαπλότητα του $\mathbb{R}^n$ διάστασης k.

Παράδειγμα 1.2.2. Η ομάδα των μοναδιακών πινάκων

$$\mathrm{U}(n) = \left\{A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) \,\middle|\, A \cdot A^* = I\right\} \le \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$$

είναι μία συμπαγής ομαλή υποπολλαπλότητα της μιγαδικής γενικής γραμμικής ομάδας $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ διάστασης n^2. Για να το δείξουμε αυτό θα θεωρήσουμε τον γραμμικό χώρο των ερμιτιανών πινάκων

$$\mathrm{S}(n,\mathbb{C}) = \left\{A \in \mathbb{C}^{n\times n} \,\middle|\, A = A^*\right\},$$

ο οποίος έχει διάσταση n^2 και την λεία απεικόνιση $\Phi : \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) \to \mathrm{S}(n,\mathbb{C})$ με

$$\Phi(A) = A^* \cdot A.$$

Επειδή η Φ είναι συνεχής και $\mathrm{U}(n) = \Phi^{-1}(I)$ συνεπάγεται ότι το $\mathrm{U}(n)$ είναι κλειστό. Ακόμη επειδή κάθε στήλη ενός στοιχείου $g \in \mathrm{U}(n)$ έχει μέτρο 1 θα έχουμε

$$\|g\| = \sqrt{n}$$

και συνεπώς το $\mathrm{U}(n)$ είναι φραγμένο.

Αρκεί τώρα να δείξουμε ότι το $\Phi^{-1}(I)$ είναι ένα ομαλό σύνολο στάθμης, δηλαδή για κάθε $A \in \mathrm{U}(n)$ το διαφορικό $\Phi_{*,A} : T_A\left(\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})\right) \to T_{\Phi(A)}\left(\mathrm{S}(n,\mathbb{C})\right)$ της Φ στο A είναι επί. Ο χώρος $T_A\left(\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})\right)$ έχει διάσταση $2n^2$ ταυτίζεται με τον χώρο πινάκων $\mathbb{C}^{n\times n}$ και ομοίως ο χώρος $T_{\Phi(A)}\left(\mathrm{S}(n,\mathbb{C})\right)$ ταυτίζεται με τον $\mathrm{S}(n,\mathbb{C})$. Επειδή η απεικόνιση της ορίζουσας είναι συνεχής, για κάθε $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε η λεία καμπύλη $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{C}^{n\times n}$ με

$$\gamma(t) = A + tB,$$

να παίρνει τιμές στην $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$. Επειδή λοιπόν $\gamma(0)=A$ και $\gamma'(0)=B$, συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned}\Phi_{*,A}(B) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\Phi\circ\gamma)\\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\Phi(A+tB)\\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(A+tB)^*(A+tB)\\ &= B^*A+A^*B.\end{aligned}$$

Έστω τώρα $C\in \mathrm{S}(n,\mathbb{C})$. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned}\Phi_{*,A}\left(\frac{1}{2}AC\right) &= \left(\frac{1}{2}AC\right)^* A + A^*\left(\frac{1}{2}AC\right)\\ &= \frac{1}{2}C^*A^*A+\frac{1}{2}A^*AC\\ &= \frac{1}{2}C+\frac{1}{2}C\\ &= C,\end{aligned}$$

δηλαδή το διαφορικό είναι επί. Έτσι από το θεώρημα ομαλού συνόλου στάθμης, η ομάδα $\mathrm{U}(n)$ των μοναδιακών πινάκων είναι μία ομαλή υποπολλαπλότητα της $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ διάστασης n^2. Συνοψίζοντας η μοναδιακή ομάδα $\mathrm{U}(n)$ είναι μία συμπαγής Lie υποομάδα της μιγαδικής γενικής γραμμικής ομάδας $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ διάστασης n^2 ∎

Παράδειγμα 1.2.3. Η ειδική μοναδιακή ομάδα

$$\mathrm{SU}(n)=\left\{A\in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})\,\middle|\,A\cdot A^*=I \text{ και } \det A=1\right\}\le \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$$

είναι μία ομαλή υποπολλαπλότητα της $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ διάστασης n^2-1. Πράγματι η απεικόνιση της ορίζουσας $\det:\mathrm{U}(n)\to \mathrm{S}^1$ είναι λεία και το $\mathrm{SU}(n)=\det^{-1}(1)$ είναι ένα ομαλό σύνολο στάθμης. Από το θεώρημα ομαλού συνόλου στάθμης η $\mathrm{SU}(n)$ θα είναι μία ομαλή υποπολλαπλότητα της $\mathrm{U}(n)$ διάστασης n^2-1. Τότε θα είναι και ομαλή υποπολλαπλότητα της $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ διάστασης n^2-1. Έτσι είναι μία κλειστή Lie υποομάδα της $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ διάστασης n^2-1. Μάλιστα για $n=2$ είναι απλό να επαληθεύσουμε ότι

$$\mathrm{SU}(2)=\left\{\begin{bmatrix} a & b\\ -\bar{b} & \bar{a}\end{bmatrix}\in \mathrm{GL}(2,\mathbb{C})\,\middle|\,|a|^2+|b|^2=1\right\}$$ ∎

Παράδειγμα 1.2.4. Η ομάδα των ορθογωνίων πινάκων

$$\mathrm{O}(n,\mathbb{R})=\left\{A\in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})\,\middle|\,A\cdot A^T=I\right\}\le \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$$

είναι μία συμπαγής ομαλή υποπολλαπλότητα της γενικής γραμμικής ομάδας $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ διάστασης $n(n-1)/2$. Τα επιχειρήματα που χρησιμοποιούμε για να το δείξουμε αυτό είναι όμοια με αυτά του παραδείγματος 1.2.2. Έτσι είναι μία συμπαγής Lie υποομάδα της $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ διάστασης $n(n-1)/2$ η οποία ονομάζεται ορθογώνια ομάδα∎

Παράδειγμα 1.2.5. Η ομάδα των ορθογωνίων πινάκων με ορίζουσα 1,

$$\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})=\left\{A\in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})\middle| A\cdot A^T=I \text{ και } \det A=1\right\}$$

είναι μία συμπαγής και συνεκτική ομαλή υποπολλαπλότητα της γενικής γραμμικής ομάδας $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ διάστασης ίσης με την διάσταση της $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$. Πράγματι αν $\det:\mathrm{O}(n,\mathbb{R})\to\{-1,1\}$ είναι η απεικόνιση της ορίζουσας, η οποία είναι συνεχής, τότε $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})=\det^{-1}(1)$. Αυτό σημαίνει ότι το $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ ανοιχτό και κλειστό υποσύνολο της $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$. Άρα $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ είναι μία συνεκτική ανοιχτή υποπολλαπλότητα της $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ με διάσταση $n(n-1)/2$. Τότε όμως θα είναι μία ομαλή υποπολλαπλότητα της $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$, άρα και της $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. Τέλος θα είναι συμπαγής γιατί είναι κλειστό υποσύνολο της $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$. Συνοψίζοντας η ειδική ορθογώνια ομάδα $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ είναι μία συμπαγής και συνεκτική Lie υποομάδα της $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ διάστασης $n(n-1)/2$.

Μας ενδιαφέρει η ειδική ορθογώνια ομάδα $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$, για την οποία με απλούς υπολογισμούς μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})_{\mathrm{x}}=\left\{\mathbf{X}_\theta=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&-\sin\theta\\0&\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}\middle|\theta\in\mathbb{R}\right\}$$

$$\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})_{\mathrm{y}}=\left\{\mathbf{Y}_\theta=\begin{bmatrix}\cos\theta&0&-\sin\theta\\0&1&0\\\sin\theta&0&\cos\theta\end{bmatrix}\middle|\theta\in\mathbb{R}\right\}$$

$$\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})_{\mathrm{z}}=\left\{\mathbf{Z}_\theta=\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta&0\\\sin\theta&\cos\theta&0\\0&0&1\end{bmatrix}\middle|\theta\in\mathbb{R}\right\}$$

είναι μεταθετικές υποομάδες της $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ ∎

Παράδειγμα 1.2.9. Έστω $\mathbf{Q}$ ένας γραμμικός χώρος επί του $\mathbb{R}$ με $\dim\mathbf{Q}=4$ και $\mathrm{B}=\{1,\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$ μία βάση του $\mathbf{Q}$. Ορίζουμε μία πράξη $\cdot:\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}\to\mathbf{Q}$ ως εξής: Έστω $\mathbf{a}=a_1 1+a_{\mathrm{i}}\mathbf{i}+a_{\mathrm{j}}\mathbf{j}+a_{\mathrm{k}}\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=b_1 1+b_{\mathrm{i}}\mathbf{i}+b_{\mathrm{j}}\mathbf{j}+b_{\mathrm{k}}\mathbf{k}\in\mathbf{Q}$. Τότε

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}&=(a_1b_1-a_{\mathrm{i}}b_{\mathrm{i}}-a_{\mathrm{j}}b_{\mathrm{j}}-a_{\mathrm{k}}b_{\mathrm{k}})1+(a_1b_{\mathrm{i}}+a_{\mathrm{i}}b_1+a_{\mathrm{j}}b_{\mathrm{k}}-a_{\mathrm{k}}b_{\mathrm{j}})\mathbf{i}\\&\quad+(a_1b_{\mathrm{j}}-a_{\mathrm{i}}b_{\mathrm{k}}+a_{\mathrm{j}}b_1+a_{\mathrm{k}}b_{\mathrm{i}})\mathbf{j}+(a_1b_{\mathrm{k}}+a_{\mathrm{i}}b_{\mathrm{j}}-a_{\mathrm{j}}b_{\mathrm{i}}+a_{\mathrm{k}}b_1)\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσουμε ότι για κάθε $\mathbf{a,b,c}\in\mathbf{Q}$ και για κάθε $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ ισχύουν οι ιδιότητες

(i). $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$

(ii). $\mathbf{a}\cdot(\lambda\mathbf{b}+\mu\mathbf{c})=\lambda(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})+\mu(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})$

(iii). $(\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=\lambda(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})+\mu(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$

και συνεπώς ο γραμμικός χώρος $\mathbf{Q}$ με την πράξη που ορίσαμε είναι μία γραμμική άλγεβρα επί του $\mathbb{R}$, η οποία ονομάζεται γραμμική άλγεβρα των quaternions επί του $\mathbb{R}$. Με απλές πράξεις μπορούμε να δούμε ότι τα διανύσματα της βάσης ικανοποιούν τις ακόλουθες χαρακτηριστικές κυκλικές σχέσεις

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}=\mathbf{k}\ ,\ \mathbf{j}\cdot\mathbf{i}=-\mathbf{k}$$
$$\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}=\mathbf{i}\ ,\ \mathbf{k}\cdot\mathbf{j}=-\mathbf{i}$$
$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{i}=\mathbf{j}\ ,\ \mathbf{i}\cdot\mathbf{k}=-\mathbf{j}$$

και την ισότητα $\mathbf{i}^2=\mathbf{j}^2=\mathbf{k}^2=-1$.

Τώρα επειδή για κάθε $\mathbf{a}\in\mathbf{Q}$

$$1\cdot\mathbf{a}=\mathbf{a}\cdot 1=\mathbf{a}$$

συμπεραίνουμε ότι η τριάδα $(\mathbf{Q},+,\cdot)$ είναι ένας δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο. Έστω τώρα $\mathbf{a}\in\mathbf{Q}$ με $\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$ και $\mathbf{a}=a_1 1+a_{\mathbf{i}}\mathbf{i}+a_{\mathbf{j}}\mathbf{j}+a_{\mathbf{k}}\mathbf{k}$. Τότε το διάνυσμα $\overline{\mathbf{a}}=a_1 1-a_{\mathbf{i}}\mathbf{i}-a_{\mathbf{j}}\mathbf{j}-a_{\mathbf{k}}\mathbf{k}$ ονομάζεται συζυγές του $\mathbf{a}$ και ισχύει

$$\mathbf{a}\cdot\overline{\mathbf{a}}=(a_1^2+a_{\mathbf{i}}^2+a_{\mathbf{j}}^2+a_{\mathbf{k}}^2)1.$$

Αν λοιπόν $|\mathbf{a}|=a_1^2+a_{\mathbf{i}}^2+a_{\mathbf{j}}^2+a_{\mathbf{k}}^2$ είναι το μέτρο του διανύσματος $\mathbf{a}$, τότε επειδή $\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$ θα έχουμε $|\mathbf{a}|\neq\mathbf{0}$ και

$$\mathbf{a}\cdot\left(\frac{\overline{\mathbf{a}}}{|\mathbf{a}|}\right)=1.$$

Δηλαδή κάθε μη μηδενικό στοιχείο του $\mathbf{Q}$ έχει αντίστροφο στοιχείο. Για λόγους απλότητας το διάνυσμα $a1\in\mathbf{Q}$ μπορούμε να το συμβολίζουμε απλά με a και στα επόμενα θα υιοθετήσουμε τον συμβολισμό αυτό.

Θεωρούμε τώρα το σύνολο

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{u}}=\left\{\mathbf{a}\in\mathbf{Q}\,\middle|\ |\mathbf{a}|=1\right\}\subset\mathbf{Q}$$

των quaternions τα οποία έχουν μέτρο μονάδα. Τότε είναι απλό να δούμε ότι οι απεικονίσεις, $\mu:\mathbf{Q}_{\mathbf{u}}\times\mathbf{Q}_{\mathbf{u}}\to\mathbf{Q}_{\mathbf{u}}$ με

$$\mu(\mathbf{a},\mathbf{b})=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$$

και $\iota:\mathbf{Q}_{\mathbf{u}}\to\mathbf{Q}_{\mathbf{u}}$ με

$$\iota(\mathbf{a})=\mathbf{a}^{-1}$$

είναι λείες. Έτσι $(\mathbf{Q}_{\mathbf{u}},\cdot)$ είναι μία Lie ομάδα διάστασης 3 η οποία ονομάζεται ομάδα των μοναδιαίων quaternions και συμβολίζεται απλά με $\mathbf{Q}_{\mathbf{u}}$ ■

1.3 Ομομορφισμοί ομάδων Lie

Ορισμός 1.3.1. Έστω G, H δύο ομάδες Lie και $F: H \to G$ ένας ομομορφισμός ομάδων. Αν η απεικόνιση F είναι λεία, τότε ονομάζεται ομομορφισμός ομάδων Lie. Αν επιπλέον η F είναι μία αμφιδιαφόριση, τότε ονομάζεται ισομορφισμός ομάδων Lie. Αν υπάρχει ένας τέτοιος ισομορφισμός, τότε οι Lie ομάδες G και H λέγονται ισόμορφες και γράφουμε $H \cong G$.

Δύο ομάδες Lie οι οποίες είναι ισόμορφες, είναι ουσιαστικά οι «ίδιες» και μπορούν να ταυτιστούν•

Παράδειγμα 1.3.1. Έστω V ένας γραμμικός χώρος επί του $\mathbb{C}$, πεπερασμένης διάστασης και $\hat{e} = (e_1, ..., e_n)$ μία διατεταγμένη βάση του V. Η απεικόνιση $\Phi : \mathcal{L}(V) \to \mathbb{C}^{n \times n}$ που απεικονίζει έναν γραμμικό τελεστή στον πίνακα του ως προς την βάση $\hat{e}$

$$\Phi(T) = (T : \hat{e}),$$

είναι ένας ισομορφισμός γραμμικών χώρων και συνεπώς μία αμφιδιαφόριση. Τότε όμως ο περιορισμός $\Phi \mid \mathrm{GL}(V) : \mathrm{GL}(V) \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ στην ομάδα $\mathrm{GL}(V)$ των ισομορφισμών του χώρου V, είναι ένας ισομορφισμός ομάδων Lie. Έχουμε λοιπόν

$$\mathrm{GL}(V) \cong \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$$

και συνεπώς η $\mathrm{GL}(V)$ είναι μία ομάδα Lie διάστασης $2n^2$, που μπορεί να ταυτιστεί με την μιγαδική γενική γραμμική ομάδα $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. Ομοίως αν ο V είναι ένας πραγματικός γραμμικός χώρος, τότε η ομάδα $\mathrm{GL}(V)$ είναι μία ομάδα Lie διάστασης n^2, ισόμορφή με την γενική γραμμική ομάδα $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ ■

Παράδειγμα 1.3.2. Έστω V μιγαδικός γραμμικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot , \cdot \rangle$ και $\hat{e} = (e_1, ..., e_n)$ μία διατεταγμένη ορθοκανονική βάση του V. Ένας γραμμικός τελεστής $T : V \to V$ λέγεται μοναδιακός αν διατηρεί το εσωτερικό γινόμενο. Δηλαδή αν για κάθε $x, y \in V$

$$\langle T(x), T(y) \rangle = \langle x, y \rangle .$$

Ο γραμμικός τελεστής T είναι μοναδιακός αν και μόνο αν ο πίνακας του ως προς μία ορθοκανονική βάση είναι μοναδιακός, δηλαδή αν και μόνο αν

$$\Phi(T) \in \mathrm{U}(n).$$

Συνεπάγεται λοιπόν ότι η ομάδα των μοναδιακών τελεστών $\Phi^{-1}\big(\mathrm{U}(n)\big) = \mathrm{U}(V)$ είναι μία ομαλή υποπολλαπλότητα της $\mathrm{GL}(V)$ διάστασης n^2 και ο περιορισμός $\Phi \mid \mathrm{U}(V) : \mathrm{U}(V) \to \mathrm{U}(n)$ είναι ένας ισομορφισμός ομάδων Lie. Έτσι η μοναδιακή ομάδα $\mathrm{U}(n)$ είναι ισόμορφη με την $\mathrm{U}(V)$.

Με παρόμοια επιχειρήματα εξηγούμε ότι $\mathrm{SU}(V)$ είναι μία ομαλή υποπολλαπλότητα της $\mathrm{GL}(V)$ και κατά συνέπεια Lie υποομάδα της $\mathrm{GL}(V)$, ισόμορφη με την ειδική μοναδιακή ομάδα $\mathrm{SU}(n)$ ■

Παράδειγμα 1.3.3. Έστω V ένας πραγματικός γραμμικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot\,,\,\cdot \rangle$ και $\hat{e}=(e_1,\ldots,e_n)$ μία διατεταγμένη ορθοκανονική βάση του V. Ένας γραμμικός τελεστής $T:V\to V$ λέγεται ισομετρία αν για κάθε $x,y\in V$

$$\langle T(x),T(y)\rangle=\langle x,y\rangle$$

ή ισοδύναμα αν για κάθε $x\in V$

$$\|T(x)\|=\|x\|.$$

Ο γραμμικός τελεστής T είναι μία ισομετρία αν και μόνο αν ο πίνακας του ως προς μία ορθοκανονική βάση είναι ορθογώνιος, δηλαδή αν και μόνο αν

$$\Phi(T)\in \mathrm{O}(n,\mathbb{R}).$$

Για τον λόγο αυτό οι ισομετρίες λέγονται και ορθογώνιοι μετασχηματισμοί. Συνεπάγεται λοιπόν ότι η ομάδα των ισομετριών $\mathrm{O}(V)=\Phi^{-1}\left(\mathrm{O}(n,\mathbb{R})\right)$ του χώρου V είναι ομαλή υποπολλαπλότητα της $\mathrm{GL}(V)$, διάστασης $n(n-1)/2$ και ο περιορισμός $\Phi\,|\,\mathrm{O}(V):\mathrm{O}(V)\to \mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ είναι ένας ισομορφισμός ομάδων Lie. Συνεπώς

$$\mathrm{O}(V)\cong \mathrm{O}(n,\mathbb{R}).$$

Ομοίως $\mathrm{SO}(V)$ είναι μία ομαλή υποπολλαπλότητα της $\mathrm{GL}(V)$ διάστασης $n(n-1)/2$ η οποία είναι ισόμορφη με την ειδική ορθογώνια ομάδα, $\mathrm{SO}(V)\cong \mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$.

Αν ταυτίσουμε την ομάδα $\mathrm{O}(\mathbb{R}^n)$ των ορθογώνιων μετασχηματισμών του Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^n$ με την ορθογώνια ομάδα $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$, τότε η ειδική ορθογώνια ομάδα $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ περιέχει τους ορθογώνιους μετασχηματισμούς με ορίζουσα 1. Αν ένας ορθογώνιος μετασχηματισμός $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ είναι στοιχείο της $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$, τότε διατηρεί τον προσανατολισμό του $\mathbb{R}^n$. Συνεπώς μία δεξιόστροφη βάση του $\mathbb{R}^n$ θα απεικονίζεται μέσω της T σε μία δεξιόστροφη βάση. Ισοδύναμα η ομάδα $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ περιέχει τις στροφές της $\mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ ■

Παράδειγμα 1.3.2. Η απεικόνιση $\Psi:\mathbf{Q_u}\to \mathrm{SU}(2)$ με

$$\Psi(u+x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})=\begin{bmatrix} u+ix & y+iz \\ -y+iz & u-ix \end{bmatrix}$$

είναι ένας ισομορφισμός ομάδων Lie. Πράγματι με απλούς υπολογισμούς μπορούμε να δείξουμε ότι για κάθε $\mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathbf{Q_u}$

$$\Psi(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})=\Psi(\mathbf{a})\cdot\Psi(\mathbf{b})$$

και συνεπώς Ψ είναι ένας ομομορφισμός ομάδων. Επίσης δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι

$$\mathrm{Ker}\Psi = \{1\}$$

και συνεπώς η Ψ είναι ένας μονομορφισμός ομάδων. Η Ψ όμως είναι και ένας επιμορφισμός, γιατί αν

$$g = \begin{bmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{bmatrix}$$

είναι ένα τυχόν στοιχείο της $\mathrm{SU}(2)$, τότε

$$\Psi\left(\mathrm{Re}(a) + \mathrm{Im}(a)\mathbf{i} + \mathrm{Re}(b)\mathbf{j} + \mathrm{Im}(b)\mathbf{k}\right) = g .$$

Η Ψ λοιπόν είναι ένας ισομορφισμός ομάδων και μάλιστα η $\Psi^{-1} : \mathrm{SU}(2) \to \mathbf{Q_u}$ δίνεται από τον τύπο

$$\Psi^{-1}\begin{bmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{bmatrix} = \mathrm{Re}(a) + \mathrm{Im}(a)\mathbf{i} + \mathrm{Re}(b)\mathbf{j} + \mathrm{Im}(b)\mathbf{k} .$$

Για να δείξουμε ότι είναι ένας ισομορφισμός ομάδων Lie θα πρέπει να δείξουμε ότι είναι και μία αμφιδιαφόριση, κάτι που δεν είναι δύσκολο■

1.4 Αναπαραστάσεις ομάδων και ομάδων Lie

Ορισμός 1.4.1. Έστω G μία ομάδα (Lie), V ένας μιγαδικός γραμμικός χώρος (πεπερασμένης διάστασης) και $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ ένας ομομορφισμός ομάδων (Lie). Τότε η τριάδα (G, V, ρ) ονομάζεται αναπαράσταση της ομάδας (Lie) G στον χώρο V.

Αν ο V είναι ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο $\langle \, , \, \rangle$ και $\rho(G) \subset \mathrm{U}(V)$, τότε η αναπαράσταση (G, V, ρ) ονομάζεται μοναδιακή•

Παρατήρηση 1.4.1. Ορίζουμε την αναπαράσταση μίας Lie ομάδας μόνο σε χώρους πεπερασμένης διάστασης, σε αντίθεση με την αναπαράσταση μίας ομάδας που την ορίζουμε σε οποιονδήποτε γραμμικό χώρο. Επίσης ο χώρος μπορεί να είναι και πραγματικός χωρίς να αλλάζει κάτι στον ορισμό.

Ορισμός 1.4.2. Έστω G μία ομάδα (Lie), V ένας μιγαδικός γραμμικός χώρος (πεπερασμένης διάστασης) και $\delta : G \times V \to V$ μία (λεία) απεικόνιση η οποία ικανοποιεί τις ιδιότητες

(i). για κάθε $x \in V$ $\delta(e, x) = x$

(ii). για κάθε $g, h \in G$ και για κάθε $x \in V$ $\delta(g, \delta(h, x)) = \delta(gh, x)$

(iii). για κάθε $x, y \in V$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ $\delta(g, \lambda x + \mu y) = \lambda\delta(g, x) + \mu\delta(g, y)$.

Τότε η δ ονομάζεται δράση της ομάδας (Lie) G στον χώρο V και γράφουμε $\delta(g, x) = g \cdot x$ •

Παρατήρηση 1.4.2. Ομοίως ορίζουμε την δράση μίας Lie ομάδας μόνο σε χώρους πεπερασμένης διάστασης σε αντίθεση με την δράση μιας ομάδας που την ορίζουμε σε οποιονδήποτε γραμμικό χώρο. Μάλιστα ο χώρος μπορεί να είναι πραγματικός χωρίς να αλλάζει κάτι στον παραπάνω ορισμό.

Πρόταση 1.4.3. Έστω G μία ομάδα Lie και V ένας μιγαδικός γραμμικός χώρος πεπερασμένης διάστασης. Τότε (G,V,ρ) είναι μία αναπαράσταση της ομάδας Lie G στον χώρο V αν και μόνο αν $\delta : G\times V \to V$ με

$$\delta(g,x) = \rho(g)(x)\,,$$

είναι μία δράση της ομάδας Lie G στον V.

Απόδειξη. Έστω (G,V,ρ) αναπαράσταση της ομάδας Lie G στον χώρο V και η απεικόνιση $\delta : G\times V \to V$ με

$$\delta(g,x) = \rho(g)(x)\,.$$

Είναι απλό να δούμε ότι η δ ικανοποιεί τις ιδιότητες του ορισμού 1.4.2 και συνεπώς μένει να δείξουμε ότι είναι λεία. Έστω $\hat{e} = (e_1,...,e_n)$ είναι μία διατεταγμένη βάση του V. Αν ταυτίσουμε την $\mathrm{GL}(V)$ με την μιγαδική γενική γραμμική ομάδα $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$,τότε για κάθε $i,j \in \{1,...,n\}$ η συνάρτηση $\rho(g)_{ij} : G \to \mathbb{C}$ είναι λεία. Έτσι αν $x = (x^1,...,x^n)$, θα έχουμε

$$\delta(g,x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x^j \rho(g)_{ij} e_i$$

και συνεπώς η δ είναι λεία.

Έστω $\delta : G\times V \to V$ δράση της ομάδας Lie G στον χώρο V και $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ η απεικόνιση τέτοια ώστε

$$\rho(g)(x) = \delta(g,x)\,.$$

Είναι απλό να δούμε ότι η ρ είναι ένας ομομορφισμός ομάδων. Μένει να δείξουμε ότι η ρ είναι λεία. Πράγματι για κάθε $i,j \in \{1,...,n\}$ η συνάρτηση $\rho(g)_{ij}$ είναι λεία γιατί

$$\begin{aligned}\rho(g)_{ij} &= \pi^i(\delta(g,e_j))\\ &= \pi^i \circ \delta(g,e_j),\end{aligned}$$

όπου $\pi^i : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ είναι η συνάρτηση της i προβολής, η οποία είναι λεία□

Παρατήρηση 1.4.3. Υπάρχει λοιπόν μία αντιστοιχία ανάμεσα στις αναπαραστάσεις και τις δράσεις μίας ομάδας (Lie) σε έναν γραμμικό χώρο (πεπερασμένης διάστασης). Έτσι όταν αναφερόμαστε στην αναπαράσταση μίας ομάδας θα μιλάμε και για την αντίστοιχη δράση της όποτε το κρίνουμε βολικό.

Παράδειγμα 1.4.1. Η γενική γραμμική ομάδα $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ δρα με «φυσιολογικό» τρόπο στον χώρο $\mathbb{R}^n$ ως εξής

$$g\cdot(x_1,\dots,x_n)=(g\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix})^T.$$

Είναι απλό να δούμε ότι η απεικόνιση αυτή είναι λεία και συνεπώς η $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ δρα στον $\mathbb{R}^n$ ως μία ομάδα Lie. Η δράση της $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ αντιστοιχεί στην αναπαράσταση $\rho:\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})\to\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ με

$$\rho(g)(x)=g\cdot x.$$

Μάλιστα κάτω από την ταύτιση της $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ με την $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ θα έχουμε $\rho=1_{\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})}$. Ομοίως και για την δράση της μιγαδικής γραμμικής ομάδας $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ στον $\mathbb{C}^n$ ■

Παράδειγμα 1.4.2. Ο περιορισμός στο $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})\times\mathbb{R}^n$ της «φυσιολογικής» δράσης της γενικής γραμμικής ομάδας $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ στον $\mathbb{R}^n$, μας δίνει την δράση της ειδικής ορθογώνιας ομάδας $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ στον $\mathbb{R}^n$. Επειδή ο περιορισμός αυτός είναι μία λεία απεικόνιση, η $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ δρα στον $\mathbb{R}^n$ ως μία ομάδα Lie.

Όταν ένα στοιχείο της $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ δρα πάνω σε ένα διάνυσμα του $\mathbb{R}^n$, τότε το αποτέλεσμα είναι η στροφή γύρω από κάποιο άξονα. Για κάθε $g\in\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}^n$

$$\|g\cdot x\|=\|x\|.$$

Για να γίνουμε πιο συγκεκριμένοι, η δράση της υποομάδας $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})_{\mathrm{z}}$ στον $\mathbb{R}^3$ έχει ως αποτέλεσμα την στροφή των διανυσμάτων γύρω από τον άξονα Oz. Ομοίως η δράση της υποομάδας $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})_{\mathrm{x}}$, έχει ως αποτέλεσμα την στροφή των διανυσμάτων του $\mathbb{R}^3$ γύρω από τον άξονα Ox και της $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})_{\mathrm{y}}$ την στροφή γύρω από τον Oy ■

Παράδειγμα 1.4.3. Αν περιορίσουμε την παραπάνω δράση της $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ στο $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})\times\mathrm{S}^{n-1}$, τότε προκύπτει η δράση της $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ στην μοναδιαία σφαίρα S^{n-1}. Ο περιορισμός αυτός είναι μία λεία απεικόνιση και συνεπώς η ειδική ορθογώνια ομάδα $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ δρα στην S^{n-1} ως μία ομάδα Lie■

Παράδειγμα 1.4.4. Αν περιορίσουμε στο $\mathrm{U}(n)\times\mathbb{C}^n$ την «φυσιολογική» δράση της $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ στον $\mathbb{C}^n$, τότε προκύπτει η δράση της μοναδιακής ομάδας $\mathrm{U}(n)$ στον $\mathbb{C}^n$. Ο περιορισμός αυτός είναι λεία απεικόνιση και συνεπώς η $\mathrm{U}(n)$ δρα στον $\mathbb{C}^n$ ως μία ομάδα Lie. Μάλιστα για κάθε $x,y\in\mathbb{C}^n$ και $g\in\mathrm{U}(n)$ θα έχουμε

$$\langle g\cdot x,g\cdot y\rangle=\langle x,y\rangle.$$

Ομοίως η δράση της ειδικής μοναδιακής ομάδας $\mathrm{SU}(n)$ στον $\mathbb{C}^n$ προκύπτει από τον περιορισμό στο $\mathrm{SU}(n)\times\mathbb{C}^n$ της δράσης της $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ στον $\mathbb{C}^n$ ■

Παράδειγμα 1.4.5. Η δράση της ειδικής ορθογώνιας ομάδας $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ στον $\mathbb{R}^n$ επάγει μία αναπαράσταση $\rho:\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})\to\mathrm{GL}(\mathcal{H}_n)$ στον χώρο Hilbert $\mathcal{H}_n=\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$ ως εξής:

$$\rho(g)f(x)=f(g^{-1}\cdot x).$$

Η ρ είναι καλώς ορισμένη. Πράγματι επειδή το μέτρο Lebesgue είναι αναλλοίωτο στις στροφές, η συνάρτηση $g\cdot f$ είναι μετρήσιμη και

$$\int_{\mathbb{R}^n}|g\cdot f|^2=\int_{\mathbb{R}^n}|f|^2.$$

Η ρ είναι ένας ομομορφισμός ομάδων, γιατί για κάθε $g,h\in\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}\rho(gh)f(x)&=f((gh)^{-1}\cdot x)\\&=f((h^{-1}g^{-1})\cdot x)\\&=f(h^{-1}\cdot(g^{-1}\cdot x))\\&=\rho(g)f(h^{-1}\cdot x)\\&=\rho(gh)f(x).\end{aligned}$$

Συνεπάγεται λοιπόν ότι για κάθε $g\in\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ η $\rho(g)$ είναι μία ισομετρία στον $\mathcal{H}_n$ και η αναπαράσταση ρ είναι μοναδιακή. Το τελευταίο μπορούμε να το δούμε ως εξής

$$\begin{aligned}\langle\rho(g)\varphi,\rho(g)\psi\rangle&=\int_{\mathbb{R}^n}(g\cdot\varphi)\overline{(g\cdot\psi)}\\&=\int_{\mathbb{R}^n}g\cdot(\varphi\overline{\psi})\\&=\int_{\mathbb{R}^n}\varphi\overline{\psi}\\&=\langle\varphi,\psi\rangle.\end{aligned}$$

Επειδή ο χώρος $\mathcal{H}_n$ δεν είναι πεπερασμένης διάστασης, η $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ δεν δρα στον $\mathcal{H}_n$ ως μία ομάδα Lie. Αυτός είναι γενικά ο τρόπος που η $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ δρα σε χώρους συναρτήσεων οι οποίες είναι ορισμένες στον $\mathbb{R}^n$. Το αποτέλεσμα της δράσης είναι η στροφή της συνάρτησης γύρω από κάποιον άξονα. Αν θεωρήσουμε μία κανονική βάση $\hat{e}=(e_1,\ldots,e_n)$ του $\mathbb{R}^n$ και συμβολίσουμε με $[x]_{\hat{e}}\in\mathbb{R}^{n\times1}$ την αναπαράσταση του διανύσματος $x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ στην βάση $\hat{e}$, τότε

$$[x]_{g\cdot\hat{e}}=g^{-1}[x]_{\hat{e}},$$

όπου $g\cdot\hat{e}=(g\cdot e_1,\dots,g\cdot e_n)$ μία επίσης ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$. Από την ισότητα αυτή διαπιστώνουμε ότι η δράση της $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ στον $\mathcal{H}_n$ είναι ισοδύναμη με την αντίστροφη δράση της πάνω στο σύστημα συντεταγμένων■

Παράδειγμα 1.4.6. Η δράση της ειδικής ορθογώνιας ομάδας $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ στην μοναδιαία σφαίρα S^{n-1} επάγει μία αναπαράσταση $\rho:\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})\to\mathrm{GL}(\mathcal{S}_n)$, στον χώρο Hilbert $\mathcal{S}_n=\mathbf{L}^2(\mathrm{S}^{n-1},\mathbb{C})$ ως εξής:

$$\rho(g)f(x)=f(g^{-1}\cdot x).$$

Ομοίως όπως και προηγουμένως μπορούμε να δείξουμε ότι η ρ είναι καλώς ορισμένη και μάλιστα είναι μοναδιακή. Η δράση της $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ στρέφει της συναρτήσεις του $\mathcal{S}_n$ γύρω από κάποιο άξονα. Τέλος επειδή ο χώρος $\mathcal{S}_n$ δεν είναι πεπερασμένης διάστασης, η $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ δεν δρα στον $\mathcal{S}_n$ ως μία ομάδα Lie■

Ορισμός 1.4.12. Έστω G μία ομάδα (Lie) και (G,V,ρ), (G,W,σ) αναπαραστάσεις της ομάδας (Lie) G στους μιγαδικούς γραμμικούς χώρους (πεπερασμένης διάστασης) V, W. Είναι απλό να δούμε ότι η απεικόνιση $\rho\oplus\sigma:G\to\mathrm{GL}(V\oplus W)$ με

$$(\rho\oplus\sigma)(g)(x+y)=\rho(g)x+\sigma(g)y\text{ , όπου }x\in V\text{ και }y\in W$$

είναι ένας ομομορφισμός ομάδων (Lie) και συνεπώς $(G,V\oplus W,\rho\oplus\sigma)$ είναι μία αναπαράσταση της ομάδας (Lie) G στον χώρο ευθύ άθροισμα $V\oplus W$. Ακόμη η $\rho\otimes\sigma:G\to\mathrm{GL}(V\otimes W)$ με

$$(\rho\otimes\sigma)(g)x\otimes y=\rho(g)x\otimes\sigma(g)y\text{ , όπου }x\in V\text{ και }y\in W$$

είναι ένας ομομορφισμός ομάδων (Lie) και συνεπώς $(G,V\otimes W,\rho\otimes\sigma)$ είναι μία αναπαράσταση της ομάδας (Lie) G στον χώρο τανυστικό γινόμενο $V\otimes W$ •

Ακόμη αν θεωρήσουμε δύο αναπαραστάσεις (G,V,ρ), (H,W,σ) των ομάδων (Lie) G, H στους χώρους (πεπερασμένης διάστασης) V, W, τότε μπορούμε να γενικεύσουμε τον τελευταίο ορισμό σε μία αναπαράσταση $\rho\otimes\sigma:G\times H\to\mathrm{GL}(V\otimes W)$ της Lie ομάδας γινόμενο $G\times H$ στον χώρο $V\otimes W$ ως εξής

$$(\rho\otimes\sigma)(g,h)x\otimes y=\rho(g)x\otimes\sigma(h)y.$$

Είναι απλό να δούμε ότι η απεικόνιση αυτή είναι ένας ομομορφισμός ομάδων (Lie) και συνεπώς $(G\times H,V\otimes W,\rho\otimes\sigma)$ είναι μία αναπαράσταση της ομάδας (Lie) $G\times H$ στον χώρο $V\otimes W$.

Παράδειγμα 1.4.12. Η μιγαδική γενική γραμμική ομάδα $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ δρα στον χώρο $\mathbb{C}^n\otimes\mathbb{C}^n$ ως εξής

$$g\cdot(z\otimes w)=g\cdot z\otimes g\cdot w.$$

Μάλιστα ο γραμμικός τελεστής μετάθεσης $\mathrm{P}:\mathbb{C}^n\otimes\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n\otimes\mathbb{C}^n$, για τον οποίο έχουμε

$$\mathrm{P}(z \otimes w) = w \otimes z,$$

είναι ένας ισομορφισμός και μετατίθεται με την δράση της $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ στον $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$. Πράγματι

$$\begin{aligned} g \cdot \mathrm{P}(z \otimes w) &= g \cdot (w \otimes z) \\ &= g \cdot w \otimes g \cdot z \\ &= \mathrm{P}(g \cdot z \otimes g \cdot w) \\ &= \mathrm{P}(g \cdot (z \otimes w)), \end{aligned}$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη του ισχυρισμού■

Πρόταση 1.4.13. Αν V ,W είναι χώροι με εσωτερικό γινόμενο και οι αναπαραστάσεις (G,V,ρ), (G,W,σ) είναι μοναδιακές, τότε και η αναπαράσταση $(G,V \otimes W, \rho \otimes \sigma)$ είναι μοναδιακή.

Απόδειξη. Ο χώρος τανυστικό γινόμενο $V \otimes W$ είναι «φυσικά» εφοδιασμένος με ένα εσωτερικό γινόμενο $\langle \ , \ \rangle_{V \otimes W}$ ως εξής,

$$\langle x \otimes y, u \otimes w \rangle_{V \otimes W} = \langle x, u \rangle_V \langle y, w \rangle_W .$$

Αν τώρα οι αναπαραστάσεις (G,V,ρ) και (G,W,σ) είναι μοναδιακές, από τον ορισμό που προηγήθηκε θα έχουμε

$$\begin{aligned} \langle g \cdot x \otimes y, g \cdot u \otimes w \rangle_{V \otimes W} &= \langle g \cdot x \otimes g \cdot y, g \cdot u \otimes g \cdot w \rangle_{V \otimes W} \\ &= \langle g \cdot x, g \cdot u \rangle_V \langle g \cdot y, g \cdot w \rangle_W \\ &= \langle x, u \rangle_V \langle y, w \rangle_W \\ &= \langle x \otimes y, u \otimes w \rangle_{V \otimes W} \end{aligned}$$

και ολοκληρώνεται η απόδειξη της πρότασης□

Παρατήρηση 1.4.13. Επίσης με όμοιο τρόπο δείχνουμε ότι αν (G,V,ρ), (H,W,σ) είναι μοναδιακές αναπαραστάσεις των ομάδων G, H στους χώρους V, W, τότε και η αναπαράσταση $(G \times H, V \otimes W, \rho \otimes \sigma)$ είναι μοναδιακή.

Παρακάτω ορίζουμε τους αναλλοίωτους υπόχωρους και τις ανάγωγες αναπαραστάσεις. Οι ανάγωγες αναπαραστάσεις έχουν την έννοια αναπαραστάσεων που δεν μπορούν να απλοποιηθούν και όπως θα δούμε μπορούμε να «χτίσουμε» τον χώρο μίας αναπαράστασης από ανάγωγους αναλλοίωτους υπόχωρους.

Ορισμός 1.4.3. Έστω G μία ομάδα (Lie), V ένας μιγαδικός γραμμικός χώρος (πεπερασμένης διάστασης) και (G,V,ρ) μία αναπαράσταση της G στον V. Ένας γραμμικός υπόχωρος $W \leq V$ ονομάζεται αναλλοίωτος υπόχωρος της αναπαράστασης (G,V,ρ), αν για κάθε $g \in G$

$$\rho(g)(W) \subset W .$$

Αν W είναι ένας αναλλοίωτος υπόχωρος της αναπαράστασης (G,V,ρ), τότε $\rho_W : G \to \mathrm{GL}(W)$ με

$$\rho_W(g) = \rho(g)|W$$

είναι ένας ομομορφισμός ομάδων (Lie) και η αναπαράσταση (G,W,ρ_W) της ομάδας (Lie) G στον χώρο W, λέγεται υποαναπαράσταση της (G,V,ρ) στον W.

Αν η αναπαράσταση (G,V,ρ) είναι μη τετριμμένη και οι μόνοι αναλλοίωτοι υπόχωροι της είναι οι V και $\{0\}$, τότε η (G,V,ρ) ονομάζεται ανάγωγη αναπαράσταση•

Παράδειγμα 1.4.7. Η αναπαράσταση της ειδικής ορθογώνιας ομάδας $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ στον $\mathbb{R}^n$ που περιγράψαμε στο παράδειγμα 1.4.2 είναι ανάγωγη. Πράγματι για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}^n$ με $\| x_0 \| = 1$ η εικόνα της απεικόνισης $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ με

$$\varphi(x) = g \cdot x_0,$$

είναι η μοναδιαία σφαίρα S^{n-1}. Έτσι αν V είναι μη τετριμμένος αναλλοίωτος υπόχωρος, τότε θα πρέπει $V \supset \mathrm{S}^{n-1} \supset \{\text{κανονική βάση του } \mathbb{R}^n\}$ και συνεπώς $V = \mathbb{R}^n$ ■

Παράδειγμα 1.4.8. Ο υπόχωρος

$$\mathcal{H}_n^\infty = \left\{ f \in \mathcal{H}_n \,\middle|\, f \text{ λεία και όλες οι μερικές παράγωγοι της } f \text{ κάθε τάξης} \in \mathcal{H}_n \right\}$$

του χώρου Hilbert $\mathcal{H}_n = \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ είναι ένας αναλλοίωτος υπόχωρος της αναπαράστασης $(\mathrm{SO}(n,\mathbb{R}), \mathcal{H}_n, \rho)$ που περιγράψαμε στο παράδειγμα 1.4.5. Αν στρίψουμε μία συνάρτηση του $\mathcal{H}_n^\infty$ γύρω από κάποιον άξονα θα «πέσουμε» πάλι στον $\mathcal{H}_n^\infty$. Η υποαναπαράσταση που προκύπτει θα είναι στο εξής η αναπαράσταση της $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ στον $\mathcal{H}_n^\infty$ ■

Πρόταση 1.4.9. Έστω G μία ομάδα, V ένας μιγαδικός γραμμικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο $\langle\ ,\ \rangle$ και (G,V,ρ) μία μοναδιακή αναπαράσταση της G στον V. Αν $W \le V$ είναι ένας αναλλοίωτος υπόχωρος της (G,V,ρ), τότε και ο $W^\perp$ είναι αναλλοίωτος υπόχωρος της (G,V,ρ).

Απόδειξη. Έστω $g \in G$ και $x \in W^\perp$. Θα δείξουμε ότι για κάθε $y \in W$

$$\langle \rho(g)(x), y \rangle = 0.$$

Πράγματι επειδή η ρ είναι μοναδιακή θα έχουμε

$$\begin{aligned} \langle \rho(g)(x), y \rangle &= \langle \rho(g^{-1})\rho(g)(x), \rho(g^{-1})(y) \rangle \\ &= \langle \rho(e)(x), \rho(g^{-1})(y) \rangle \\ &= \langle x, \rho(g^{-1})(y) \rangle. \end{aligned}$$

Όμως επειδή W είναι ένας αναλλοίωτος υπόχωρος θα έχουμε $\rho(g^{-1})(y) \in W$ και συνεπώς

$$\langle \rho(g)(x), y \rangle = \langle x, \rho(g^{-1})(y) \rangle = 0.$$

Συνεπάγεται λοιπόν ότι για κάθε $g \in G$ $\rho(g)(W^{\perp}) \subset W^{\perp}$ ολοκληρώνοντας της απόδειξη της πρότασης□

Ορισμός 1.4.4. Έστω G μία ομάδα και (G,V,ρ), (G,W,σ) αναπαραστάσεις της G στους μιγαδικούς γραμμικούς χώρους V, W αντιστοίχως. Μία γραμμική απεικόνιση $T: V \to W$ λέγεται ομομορφισμός των αναπαραστάσεων (G,V,ρ) και (G,W,σ), αν για κάθε $g \in G$ ισχύει

$$T \circ \rho(g) = \sigma(g) \circ T .$$

Αν επιπλέον η T είναι ισομορφισμός γραμμικών χώρων, τότε ονομάζεται ισομορφισμός των αναπαραστάσεων (G,V,ρ), (G,W,σ). Σε αυτή την περίπτωση οι αναπαραστάσεις λέγονται ισόμορφες και γράφουμε $\rho \cong \sigma$.

Αν $S: V \to V$ είναι ένας γραμμικός τελεστής τέτοιος ώστε για κάθε $g \in G$ να ισχύει

$$S \circ \rho(g) = \rho(g) \circ S ,$$

τότε λέμε ότι ο S μετατίθεται με την αναπαράσταση (G,V,ρ) ή με την αντίστοιχη δράση•

Πρόταση 1.4.10. Ο γραμμικός διαφορικός τελεστής $\nabla^2 : \mathcal{H}^\infty \to \mathcal{H}^\infty$ μετατίθεται με την δράση της ειδικής ορθογώνιας ομάδας $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ στον $\mathcal{H}^\infty$.

Απόδειξη. Έστω $\sigma : \mathrm{SO}(3,\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(\mathcal{H}^\infty)$ η αναπαράσταση της $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ στον χώρο $\mathcal{H}^\infty$ και $g \in \mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$. Αν $\rho : \mathrm{SO}(3,\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(\mathbb{R}^3)$ είναι η αναπαράσταση της $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ στον $\mathbb{R}^3$ και $f \in \mathcal{H}^\infty$, τότε

$$\sigma(g)(f) = f \circ \rho(g) .$$

Θέτουμε $\rho(g) = (\rho(g)_{x_1}, \rho(g)_{x_2}, \rho(g)_{x_3})$ και εφαρμόζοντας δύο φορές τον κανόνα της αλυσίδας προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
\nabla^2\left(f \circ \rho(g)\right) = {} & \left((\partial_{x_1}\rho(g)_{x_1})^2 + (\partial_{x_2}\rho(g)_{x_1})^2 + (\partial_{x_3}\rho(g)_{x_1})^2\right)(\partial_{x_1}^2 f) \circ \rho(g) \\
& + \left((\partial_{x_1}\rho(g)_{x_2})^2 + (\partial_{x_2}\rho(g)_{x_2})^2 + (\partial_{x_3}\rho(g)_{x_2})^2\right)(\partial_{x_2}^2 f) \circ \rho(g) \\
& + \left((\partial_{x_1}\rho(g)_{x_3})^2 + (\partial_{x_2}\rho(g)_{x_3})^2 + (\partial_{x_3}\rho(g)_{x_3})^2\right)(\partial_{x_3}^2 f) \circ \rho(g) \\
& + 2\left((\partial_{x_1}\rho(g)_{x_1})(\partial_{x_1}\rho(g)_{x_2}) + (\partial_{x_2}\rho(g)_{x_1})(\partial_{x_2}\rho(g)_{x_2}) + (\partial_{x_3}\rho(g)_{x_1})(\partial_{x_3}\rho(g)_{x_2})\right)(\partial_{x_1}\partial_{x_2} f) \circ \rho(g) \\
& + 2\left((\partial_{x_1}\rho(g)_{x_2})(\partial_{x_1}\rho(g)_{x_3}) + (\partial_{x_2}\rho(g)_{x_2})(\partial_{x_2}\rho(g)_{x_3}) + (\partial_{x_3}\rho(g)_{x_2})(\partial_{x_3}\rho(g)_{x_3})\right)(\partial_{x_2}\partial_{x_3} f) \circ \rho(g) \\
& + 2\left((\partial_{x_1}\rho(g)_{x_3})(\partial_{x_1}\rho(g)_{x_1}) + (\partial_{x_2}\rho(g)_{x_3})(\partial_{x_2}\rho(g)_{x_1}) + (\partial_{x_3}\rho(g)_{x_3})(\partial_{x_3}\rho(g)_{x_1})\right)(\partial_{x_3}\partial_{x_1} f) \circ \rho(g).
\end{aligned}$$

Έστω $\hat{e}$ η κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$ και $(\rho(g) : \hat{e}) = [a_{ij}]$ ο πίνακας της $\rho(g)$ ως προς την βάση $\hat{e}$. Τότε για κάθε $i, j \in \{1,2,3\}$

$$a_{ij} = \partial_{x_j}\rho(g)_{x_i}$$

και συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned}\nabla^2\left(f\circ\rho(g)\right) &= (a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2)(\partial_{x_1}^2 f)\circ\rho(g)\\ &+(a_{21}^2+a_{22}^2+a_{23}^2)(\partial_{x_2}^2 f)\circ\rho(g)\\ &+(a_{31}^2+a_{32}^2+a_{33}^2)(\partial_{x_3}^2 f)\circ\rho(g)\\ &+2(a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22}+a_{13}a_{23})(\partial_{x_1}\partial_{x_2} f)\circ\rho(g)\\ &+2(a_{21}a_{31}+a_{22}a_{32}+a_{23}a_{33})(\partial_{x_2}\partial_{x_3} f)\circ\rho(g)\\ &+2(a_{31}a_{11}+a_{32}a_{12}+a_{33}a_{13})(\partial_{x_3}\partial_{x_1} f)\circ\rho(g).\end{aligned}$$

Όμως επειδή ο πίνακας $(\rho(g):\hat{e})$ είναι ορθογώνιος, θα έχουμε

$$\begin{bmatrix} a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2 & a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22}+a_{13}a_{23} & a_{11}a_{31}+a_{12}a_{32}+a_{13}a_{33}\\ a_{21}a_{11}+a_{22}a_{12}+a_{23}a_{13} & a_{21}^2+a_{22}^2+a_{23}^2 & a_{21}a_{31}+a_{22}a_{32}+a_{23}a_{33}\\ a_{31}a_{11}+a_{32}a_{12}+a_{33}a_{13} & a_{31}a_{21}+a_{32}a_{22}+a_{33}a_{23} & a_{31}^2+a_{32}^2+a_{33}^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

και συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned}\left(\nabla^2\circ\sigma(g)\right)(f) &= \nabla^2\left(f\circ\rho(g)\right)\\ &=(\partial_{x_1}^2 f)\circ\rho(g)+(\partial_{x_2}^2 f)\circ\rho(g)+(\partial_{x_3}^2 f)\circ\rho(g)\\ &=(\nabla^2 f)\circ\rho(g)\\ &=\left(\sigma(g)\circ\nabla^2\right)(f).\end{aligned}$$

Η f είναι τυχούσα συνάρτηση και συνεπώς για κάθε $g\in\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$,

$$\nabla^2\circ\sigma(g)=\sigma(g)\circ\nabla^2 \square$$

Παρατήρηση 1.4.10. Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να γενικεύσουμε την παραπάνω πρόταση για την δράση της $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ στον χώρο $\mathcal{H}_n^\infty$. Ο διαφορικός τελεστής $\nabla^2:\mathcal{H}_n^\infty\to\mathcal{H}_n^\infty$ με

$$\nabla^2=\partial_{x_1}^2+\partial_{x_2}^2+\ldots+\partial_{x_n}^2,$$

μετατίθεται με την δράση της $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ στον $\mathcal{H}_n^\infty$.

Πρόταση 1.4.11. Έστω G μία ομάδα και (G,V,ρ) μία αναπαράσταση της G σε έναν μιγαδικό γραμμικό χώρο V. Αν $T:V\to V$ είναι ένας γραμμικός τελεστής ο οποίος μετατίθεται με την δράση της G στον V, τότε κάθε ιδιόχωρος του T είναι ένας αναλλοίωτος υπόχωρος της αναπαράστασης (G,V,ρ).

Απόδειξη. Έστω $V(\lambda)$ ένας ιδιόχωρος του T ο οποίος αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda\in\mathbb{C}$. Τότε για κάθε $g\in G$ και $x\in V(\lambda)$ έχουμε

$$\begin{aligned}T(g\cdot x) &= g\cdot T(x)\\ &= g\cdot(\lambda x)\\ &=\lambda(g\cdot x)\end{aligned}$$

και συνεπώς $g\cdot x\in V(\lambda)$. Έτσι για κάθε $g\in G$ έχουμε $\rho(g)(V(\lambda))\subset V(\lambda)$, ολοκληρώνοντας την απόδειξη της πρότασης$\square$

Το λήμμα του Schur. Έστω (G,V,ρ), (G,W,σ) ανάγωγες αναπαραστάσεις της ομάδας G στους μιγαδικούς γραμμικούς χώρους V, W. Αν ο χώρος V είναι πεπερασμένης διάστασης και $T:V\to V$ είναι ένας γραμμικός τελεστής ο οποίος μετατίθεται με την (G,V,ρ), τότε υπάρχει $\lambda\in\mathbb{C}$ ώστε

$$T=\lambda 1_V .$$

Ακόμη αν $(G,V,\rho)\not\cong(G,W,\sigma)$ και $S:V\to W$ είναι ένας ομομορφισμός αναπαραστάσεων, τότε $S=0$.

Απόδειξη. Ο T θα έχει μία τουλάχιστον ιδιοτιμή $\lambda\in\mathbb{C}$ και ο ιδιόχωρος $V(\lambda)$ που αντιστοιχεί σε αυτή την ιδιοτιμή θα είναι, σύμφωνα με την πρόταση 1.4.11, ένας αναλλοίωτος υπόχωρος της (G,V,ρ). Τότε όμως θα πρέπει $V=V(\lambda)$ και συνεπώς

$$T=\lambda 1_V .$$

Για το δεύτερο μέρος παρατηρήσουμε ότι, εφόσον ο S είναι ομομορφισμός αναπαραστάσεων, ο πυρήνας του $\ker(S)\subset V$ και η εικόνα του $\operatorname{Im}(S)\subset W$ είναι αναλλοίωτοι υπόχωροι των (G,V,ρ) και (G,W,σ) αντιστοίχως. Αλλά επειδή είναι ανάγωγες θα πρέπει

$$\ker(S)=V \text{ ή } \{0\}$$

και

$$\operatorname{Im}(S)=W \text{ ή } \{0\}.$$

Δηλαδή ο S είναι ισομορφισμός ή $S=0$. Επειδή οι αναπαραστάσεις δεν είναι ισόμορφες θα έχουμε $S=0$, ολοκληρώνοντας την απόδειξη του ισχυρισμού□

Πόρισμα 1.4.11. Αν (G,V,ρ) είναι ανάγωγη αναπαράσταση μίας μεταθετικής ομάδας G, τότε ο χώρος V είναι μονοδιάστατος.

Απόδειξη. Επειδή η ομάδα είναι μεταθετική, για κάθε $g\in G$ ο γραμμικός τελεστής $\rho(g)$ μετατίθεται με την (G,V,ρ). Τότε όμως από το λήμμα του Schur θα έχουμε

$$\rho(g)=\lambda(g)1_V$$

και συνεπώς για κάθε $x\in V$

$$\rho(g)x=\lambda(g)x .$$

Θα έχουμε λοιπόν $\dim V=1$ □

Ορισμός 1.4.14. Έστω G μία ομάδα και (G,V,ρ) αναπαράσταση της G στον μιγαδικό γραμμικό χώρο V. Αν υπάρχουν ανάγωγες αναπαραστάσεις $\{(G,V_i,\rho_i)\}_{i\in I}$ της G τέτοιες ώστε

$$(G,V,\rho)\cong(G,\bigoplus_{i\in I}V_i,\bigoplus_{i\in I}\rho_i),$$

τότε λέμε ότι η (G,V,ρ) αναλύεται σε ευθύ άθροισμα ανάγωγων αναπαραστάσεων•

Η ακόλουθη πρόταση μας λέει ότι κάθε μοναδιακή αναπαράσταση μίας ομάδας Lie σε έναν γραμμικό χώρο πεπερασμένης διάστασης αναλύεται σε ευθύ άθροισμα ανάγωγων αναπαραστάσεων.

Πρόταση 1.4.15. Έστω G μία ομάδα Lie, V ένας μιγαδικός γραμμικός χώρος πεπερασμένης διάστασης με εσωτερικό γινόμενο $\langle \, , \, \rangle$ και (G,V,ρ) μία μοναδιακή αναπαράσταση της G στον V. Τότε η (G,V,ρ) αναλύεται σε ευθύ άθροισμα ανάγωγων αναπαραστάσεων.

Απόδειξη. Θα δείξουμε την πρόταση με επαγωγή ως προς την διάσταση $n \in \mathbb{N}$ του χώρου V. Αν $n=1$, τότε η αναπαράσταση (G,V,ρ) είναι ανάγωγη και έχουμε τελειώσει. Έστω ότι η πρόταση είναι αληθής για κάθε $n \le k \in \mathbb{N}$ και $\dim V = k+1$. Αν η (G,V,ρ) είναι ανάγωγη, τότε έχουμε τελειώσει. Αν δεν είναι ανάγωγη θα υπάρχει αναλλοίωτος υπόχωρος W της (G,V,ρ) με $1 \le \dim W < k+1$. Σύμφωνα όμως με την πρόταση 1.4.9, ο $W^{\perp}$ είναι επίσης αναλλοίωτος υπόχωρος της (G,V,ρ) και μάλιστα $V = W \oplus W^{\perp}$. Τότε όμως θα πρέπει $1 \le \dim W^{\perp} < k+1$ και ακόμη

$$(G,V,\rho) \cong (G, W \oplus W^{\perp}, \rho_W \oplus \rho_{W^{\perp}}).$$

Τώρα από την υπόθεση της επαγωγής υπάρχουν ανάγωγες αναπαραστάσεις $\left\{(G,V_i,\rho_i)\right\}_{i=1}^{\mu}$ και $\left\{(G,W_j,\sigma_j)\right\}_{j=1}^{\nu}$ τέτοιες ώστε

$$(G,W,\rho_W) \cong (G, \bigoplus_{i=1}^{\mu} V_i, \bigoplus_{i=1}^{\mu} \rho_i)$$

και

$$(G,W^{\perp},\rho_{W^{\perp}}) \cong (G, \bigoplus_{j=1}^{\nu} W_j, \bigoplus_{j=1}^{\nu} \sigma_j).$$

Τότε όμως θα έχουμε

$$(G,V,\rho) \cong \left(G, \left(\bigoplus_{i=1}^{\mu} V_i \right) \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^{\nu} W_j \right), \left(\bigoplus_{i=1}^{\mu} \rho_i \right) \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^{\nu} \sigma_j \right) \right),$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη της πρότασης□

Λήμμα 1.4.15. Αν (G,V,ρ), (G,W,σ) είναι ισόμορφες αναπαραστάσεις της ομάδας G στους μιγαδικούς γραμμικούς χώρους V, W και $T: V \to V$ είναι ένας γραμμικός τελεστής ο οποίος μετατίθεται με την (G,V,ρ), τότε υπάρχει ένας ισομορφισμός $S: V \to W$ τέτοιος ώστε ο $S \circ T \circ S^{-1}: W \to W$ να μετατίθεται με την (G,W,σ).

Απόδειξη. Εφόσον $(G,V,\rho) \cong (G,W,\sigma)$ υπάρχει ένας ισομορφισμός αναπαραστάσεων $S: V \to W$ και θέτουμε $A = S \circ T \circ S^{-1}$. Τότε για κάθε $g \in G$ θα έχουμε

$$\begin{aligned}\sigma(g)\circ A &= \sigma(g)\circ(S\circ T\circ S^{-1})\\ &= (\sigma(g)\circ S)\circ T\circ S^{-1}\\ &= S\circ(\rho(g)\circ T)\circ S^{-1}\\ &= S\circ T\circ(\rho(g)\circ S^{-1})\\ &= (S\circ T\circ S^{-1})\circ\sigma(g)\\ &= A\circ\sigma(g),\end{aligned}$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη του λήμματος□

Ας υποθέσουμε τώρα ότι (G,V,ρ) είναι μία τυχούσα αναπαράσταση της ομάδας G στον μιγαδικό χώρο πεπερασμένης διάστασης V, η οποία αναλύεται σε ευθύ άθροισμα ανάγωγων αναπαραστάσεων

$$(G,V,\rho)\cong(G,\bigoplus_{i=1}^{n}V_i,\bigoplus_{i=1}^{n}\rho_i),$$

ώστε

$$i\neq j \;\Rightarrow\; (G,V_i,\rho_i)\ncong(G,V_j,\rho_j)$$

και $T:V\to V$ ένας γραμμικός τελεστής ο οποίος μετατίθεται με την (G,V,ρ). Τότε υπάρχει ένας ισομορφισμός $S:V\to\bigoplus_{i=1}^{n}V_i$ και μιγαδικοί αριθμοί $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ ώστε

$$S\circ T\circ S^{-1}=\bigoplus_{i=1}^{n}\lambda_i 1_{V_i}.$$

Πράγματι σύμφωνα με το λήμμα 1.4.15 υπάρχει ισομορφισμός $S:V\to\bigoplus_{i=1}^{n}V_i$ ώστε ο τελεστής $A=S\circ T\circ S^{-1}:\bigoplus_{i=1}^{n}V_i\to\bigoplus_{i=1}^{n}V_i$ να μετατίθεται με την $(G,\bigoplus_{i=1}^{n}V_i,\bigoplus_{i=1}^{n}\rho_i)$. Για κάθε $i,j\in\{1,2,...,n\}$ θέτουμε $A_{ij}=\Pi_j\circ(A|_{V_i}):V_i\to V_j$, όπου $\Pi_j:\bigoplus_{i=1}^{n}V_i\to V_j$ είναι η συνάρτηση προβολής στον υπόχωρο V_j. Τότε $A=\bigoplus_{i=1}^{n}\bigoplus_{j=1}^{n}A_{ij}$ και για κάθε $g\in G$

$$\begin{aligned}\rho_j(g)\circ A_{ij} &= \rho_j(g)\circ\Pi_j\circ(A|_{V_i})\\ &= \Pi_j\circ\rho(g)\circ(A|_{V_i})\\ &= \Pi_j\circ(A|_{V_i})\circ\rho_i(g)\\ &= A_{ij}\circ\rho_i(g),\end{aligned}$$

δηλαδή ο A_{ij} είναι ένας ομομορφισμός των αναπαραστάσεων (G,V_i,ρ_i) και (G,V_j,ρ_j). Όμως επειδή $\{(G,V_i,\rho_i)\}_{i=1}^{n}$ είναι ανάγωγες και μη ισόμορφες ανά δύο αναπαραστάσεις, από το λήμμα του Schur θα υπάρχουν $\lambda_1,...,\lambda_n\in\mathbb{C}$ ώστε για κάθε $i\in\{1,2,...,n\}$

$$A_{ii}=\lambda_i 1_{V_i}$$

και ακόμη για κάθε $i, j \in \{1,2,...,n\}$ με $i \neq j$ θα έχουμε $A_{ij} = 0$. Συνεπάγεται λοιπόν ότι

$$A = \bigoplus_{i=1}^{n} A_{ii} = \bigoplus_{i=1}^{n} \lambda_i 1_{V_i}.$$

Αν μέσω του ισομορφισμού S ταυτίσουμε τους χώρους V και $\bigoplus_{i=1}^{n} V_i$ ώστε για κάθε $i \in \{1,2,...,n\}$ να έχουμε $V_i \subset V$, τότε μπορούμε απλούστερα να γράψουμε

$$T = \bigoplus_{i=1}^{n} \lambda_i 1_{V_i}$$

και για τα επόμενα θα υιοθετήσουμε την σύμβαση αυτή.

Οι αριθμοί λ_i είναι ιδιοτιμές του T, όχι απαραίτητα διάφορες μεταξύ τους, έτσι για κάθε $i \in \{1,2,...,n\}$ θα έχουμε $V_i \subset V(\lambda_i)$, όπου $V(\lambda_i)$ είναι ο ιδιόχωρος της ιδιοτιμής λ_i. Συγκεκριμένα αν $V(\lambda)$ είναι ένας ιδιόχωρος του T ο οποίος αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda \in \mathbb{C}$, τότε μπορούμε να τον «χτίσουμε» με ανάγωγες αναπαραστάσεις. Θα υπάρχουν δηλαδή $i_1,...,i_{k(\lambda)} \in \{1,2,...,n\}$ ώστε

$$V(\lambda) = \bigoplus_{m=1}^{k(\lambda)} V_{i_m}.$$

Έτσι η αναπαράσταση (G,V,ρ) μπορεί να μας βοηθήσει να διαγωνοποιήσουμε τον τελεστή T. Αν η ομάδα G είναι αρκετά «μεγάλη», τότε οι ιδιόχωροι του T θα συμπέσουν με τους ανάγωγους αναλλοίωτους υπόχωρους της (G,V,ρ).

Ας θεωρήσουμε τώρα ότι V είναι ένας οποιοσδήποτε γραμμικός χώρος ώστε η αναπαράσταση (G,V,ρ) να αναλύεται σε ευθύ άθροισμα ανάγωγων αναπαραστάσεων

$$(G,V,\rho) \cong (G, \bigoplus_{i\in I} V_i, \bigoplus_{i\in I} \rho_i),$$

όπου $\{V_i\}_{i\in I}$ είναι χώροι πεπερασμένης διάστασης και οι αναπαραστάσεις $\{(G,V_i,\rho_i)\}_{i\in I}$ είναι μη ισόμορφες ανά δύο. Τότε ομοίως θα δούμε ότι ένας γραμμικός τελεστής $T: V \to V$ ο οποίος μετατίθεται με την (G,V,ρ) είναι διαγωνίσιμος και για κάθε $i \in I$ υπάρχει $\lambda_i \in \mathbb{C}$ ώστε

$$T = \bigoplus_{i\in I} \lambda_i 1_{V_i}.$$

Οι μιγαδικοί αριθμοί λ_i είναι ιδιοτιμές του T, όχι απαραίτητα διακεκριμένες. Αν $V(\lambda)$ είναι ένας ιδιόχωρος του T ο οποίος αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ, τότε υπάρχει ένα σύνολο δεικτών $I(\lambda) \subset I$ τέτοιο ώστε

$$V(\lambda) = \bigoplus_{i\in I(\lambda)} V_i.$$

1.5 Η ομάδα συμμετρίας κβαντομηχανικού συστήματος

Ας θεωρήσουμε το απλό κβαντομηχανικό σύστημα ενός σωματίου, το οποίο κινείται στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^3$ και η κατάσταση του οποίου, κάποια χρονική στιγμή, περιγράφεται από ένα διάνυσμα ψ του χώρου Hilbert $\mathcal{H}$. Αν δράσουμε με κάποιο στοιχείο $g \in \mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ στο σύστημα συντεταγμένων $\{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$ θα προκύψει ένα νέο σύστημα συντεταγμένων,

$$\{\mathbf{i}',\mathbf{j}',\mathbf{k}'\} = g \cdot \{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$$

«στραμμένο» ως προς το αρχικό γύρω από κάποιον άξονα. Στο νέο σύστημα συντεταγμένων η κατάσταση του σωματίου θα περιγράφεται από το διάνυσμα $\psi' = g \cdot \psi$ και η νέα Hamiltonian θα είναι

$$\mathbf{H}' = \rho(g) \circ \mathbf{H} \circ \rho(g^{-1}),$$

όπου $\rho : \mathrm{SO}(3,\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(\mathcal{H}^\infty)$ είναι η αναπαράσταση της ομάδας $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ στον $\mathcal{H}^\infty$ όπως την έχουμε περιγράψει στο παράδειγμα 1.4.5. Αν για κάποια υποομάδα G της $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ έχουμε $\mathbf{H}' = \mathbf{H}$, τότε η υποομάδα G λέγεται ομάδα συμμετρίας του συστήματος και έχουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1.5.1. Μία υποομάδα G της $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ λέγεται ομάδα συμμετρίας του συστήματος αν αφήνει την Hamiltonian του συστήματος αναλλοίωτη. Δηλαδή αν για κάθε $g \in G$

$$\mathbf{H} \circ \rho(g) = \rho(g) \circ \mathbf{H} \bullet$$

Πρόταση 1.5.1. Αν G είναι μία ομάδα συμμετρίας και $(G,\mathcal{H}^\infty,\rho)$ η αναπαράστασή της στον χώρο $\mathcal{H}^\infty$, τότε κάθε ιδιόχωρος της Hamiltonian είναι αναλλοίωτος υπόχωρος της $(G,\mathcal{H}^\infty,\rho)$.

Απόδειξη. Σύμφωνα με τον ορισμό της ομάδας συμμετρίας, η Hamiltonian $\mathbf{H}$ μετατίθεται με την αναπαράσταση $(G,\mathcal{H}^\infty,\rho)$,

$$\mathbf{H} \circ \rho(g) = \rho(g) \circ \mathbf{H}$$

και από την πρόταση 1.4.11 έχουμε τον ζητούμενο ισχυρισμό□

Αν G είναι μία ομάδα συμμετρίας έτσι ώστε η αναπαράσταση $(G,\mathcal{H}^\infty,\rho)$ να αναλύεται σε ευθύ άθροισμα ανάγωγων αναπαραστάσεων

$$(G,\mathcal{H}^\infty,\rho) \cong (G, \bigoplus_{i\in I} V_i, \bigoplus_{i\in I} \rho_i),$$

όπου $\{V_i\}_{i\in I}$ είναι μιγαδικοί γραμμικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης και οι αναπαραστάσεις $\{(G,V_i,\rho_i)\}_{i\in I}$ είναι μη ισόμορφες ανά δύο, τότε η Hamiltonian $\mathbf{H}$ είναι διαγωνίσιμη και για κάθε $i \in I$ υπάρχει $\lambda_i \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\mathbf{H} = \bigoplus_{i \in I} \lambda_i 1_{V_i}.$$

Η γνώση λοιπόν της συμμετρίας του συστήματος μπορεί να μας βοηθήσει στην διαγωνοποίηση της Hamiltonian. Όμως η καθαρά «γεωμετρική» συμμετρία που περιγράψαμε παραπάνω ίσως να μην είναι αρκετή ώστε οι ανάγωγοι αναλλοίωτοι υπόχωροι V_i να συμπίπτουν με τους ιδιόχωρους της Hamiltonian. Για το λόγο αυτό θα πρέπει να γενικεύσουμε την έννοια της συμμετρίας στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1.5.2. Μία ομάδα H λέγεται ομάδα συμμετρίας του συστήματος αν υπάρχει αναπαράσταση $(H, \mathcal{H}^\infty, \rho)$ της H στον $\mathcal{H}^\infty$ η οποία μετατίθεται με την Hamiltonian $\mathbf{H}$.

1.6 Η ομάδα συμμετρίας στο άτομο του υδρογόνου

Ας θεωρήσουμε τώρα το ηλεκτρόνιο στο άτομο του υδρογόνου. Η Hamiltonian αυτού του συστήματος μετατίθεται με την δράση της ειδικής ορθογώνιας ομάδας $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ στον $\mathcal{H}^\infty$ και συνεπώς η $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ είναι ομάδα συμμετρίας του συστήματος. Πράγματι σύμφωνα με την πρόταση 1.4.8 για κάθε $g \in \mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ έχουμε

$$\rho(g) \circ \nabla^2 = \nabla^2 \circ \rho(g).$$

Ακόμη επειδή το δυναμικό $\mathrm{V} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ στο άτομο του ηλεκτρονίου είναι κεντρικό, θα έχουμε

$$\rho(g)\mathrm{V} = \mathrm{V}$$

από όπου προκύπτει ότι

$$\rho(g) \circ \mathrm{V} = \mathrm{V} \circ \rho(g).$$

Συνεπάγεται λοιπόν ότι

$$\begin{aligned} \rho(g) \circ \mathbf{H} &= \rho(g) \circ (\nabla^2 + \mathrm{V}) \\ &= \rho(g) \circ \nabla^2 + \rho(g) \circ \mathrm{V} \\ &= \nabla^2 \circ \rho(g) + \mathrm{V} \circ \rho(g) \\ &= (\nabla^2 + \mathrm{V}) \circ \rho(g) \\ &= \mathbf{H} \circ \rho(g). \end{aligned}$$

Για να είμαστε ακριβείς, η ορθογώνια ομάδα $\mathrm{O}(3,\mathbb{R})$ είναι επίσης μία ομάδα συμμετρίας, η οποία περιέχει την $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$. Τα να λάβουμε όμως υπόψη και τις ανακλάσεις δεν μας βοηθάει ουσιαστικά στην διαγωνοποίηση της Hamiltonian. Για να το δούμε αυτό θα θεωρήσουμε την επέκταση $\tilde{\rho} : \mathrm{O}(3,\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(\mathcal{H}^\infty)$ της αναπαράστασης $\rho : \mathrm{SO}(3,\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(\mathcal{H}^\infty)$.

Πρόταση 1.5.1. Οι ανάγωγοι αναλλοίωτοι υπόχωροι της αναπαράστασης $\tilde{\rho}$ είναι της μορφής

$$V + (-I) \cdot V,$$

όπου V είναι ένας ανάγωγος αναλλοίωτος υπόχωρος της ρ.

Απόδειξη. Έστω $\tilde{V}$ ένας ανάγωγος αναλλοίωτος υπόχωρος της αναπαράστασης $\tilde{\rho}$. Επειδή η $\tilde{\rho}$ είναι επέκταση της ρ, ο $\tilde{V}$ θα περιέχει κάποιον ανάγωγο αναλλοίωτο υπόχωρο V της ρ. Παρατηρούμε ότι κάθε στοιχείο $g \in \mathrm{O}(3,\mathbb{R}) \setminus \mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ γράφεται

$$g = (-I)\cdot(-g) = (-g)\cdot(-I),$$

όπου το στοιχείο $-I \in \mathrm{O}(3,\mathbb{R}) \setminus \mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ αναπαριστά την ανάκλαση ως προς την αρχή και $-g \in \mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$. Τότε όμως

$$\begin{aligned} g\cdot V &= (-I)\big((-g)\cdot V\big) \\ &\subset (-I)\cdot V \end{aligned}$$

και συνεπώς $V + (-I)\cdot V \subset \tilde{V}$ είναι ένας αναλλοίωτος υπόχωρος της $\tilde{\rho}$. Επειδή όμως ο $\tilde{V}$ είναι ανάγωγος και $V + (-I)\cdot V \neq \{0\}$, θα πρέπει $\tilde{V} = V + (-I)\cdot V$ ολοκληρώνοντας την απόδειξη της πρότασης□

Με μία πρώτη ματιά φαίνεται ότι οι αναλλοίωτοι υπόχωροι «μεγαλώνουν» κάτω από την «μεγαλύτερη» ομάδα συμμετρίας $\mathrm{O}(3,\mathbb{R})$. Στην πραγματικότητα όμως κάτι τέτοιο δεν συμβαίνει γιατί οι ανάγωγοι αναλλοίωτοι υπόχωροι της ρ χωρίζονται σε δύο μεγάλες κλάσεις: Σε αυτούς που περιέχουν άρτιες συναρτήσεις και σε αυτούς που περιέχουν περιττές. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα, σε κάθε περίπτωση να έχουμε

$$V = V + (-I)\cdot V.$$

Για να το δούμε αυτό θα θεωρήσουμε τον τελεστή ομοτιμίας $P : \mathcal{H}^\infty \to \mathcal{H}^\infty$ ο οποίος ορίζεται ως

$$P(f) = (-I)\cdot f.$$

Ο P είναι διαγωνίσιμος με ιδιοτιμές $\{-1,+1\}$. Ο ιδιόχωρος $V(-1)$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή -1 είναι ο χώρος των περιττών συναρτήσεων του $\mathcal{H}^\infty$ και ο ιδιόχωρος $V(+1)$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $+1$ είναι ο χώρος των άρτιων συναρτήσεων του $\mathcal{H}^\infty$. Επειδή κάθε συνάρτηση μπορεί να γραφεί ως άθροισμα μίας άρτιας και μίας περιττής θα έχουμε

$$\mathcal{H}^\infty = V(-1) \oplus V(+1).$$

Το σημαντικό όμως είναι ότι ο P μετατίθεται με την αναπαράσταση ρ. Πράγματι για κάθε $h \in \mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ και $f \in \mathcal{H}^\infty$ έχουμε

$$\begin{aligned} h\cdot P(f) &= h\cdot\big((-I)\cdot f\big) \\ &= \big(h(-I)\big)\cdot f \\ &= \big((-I)h\big)\cdot f \\ &= (-I)\big(h\cdot f\big) \\ &= P(h\cdot f). \end{aligned}$$

Συνεπώς κάθε ανάγωγος αναλλοίωτος υπόχωρος της ρ θα περιέχεται σε έναν από τους ιδιόχωρους του P, δηλαδή θα περιέχει άρτιες ή περιττές συναρτήσεις. Κλείνουμε το κεφάλαιο αυτό με την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 1.5.1. Αν $E < 0$ είναι μία ιδιοτιμή της Hamiltonian $\mathbf{H}$, τότε η διάσταση του ιδιόχωρου $V(E)$ στον οποίο αντιστοιχεί η ιδιοτιμή E είναι πεπερασμένη.

Απόδειξη. Δες [1] σελ. 264-266.

Έτσι σε κάθε ιδιόχωρο $\mathcal{H}^{\infty}(E)$ της Hamiltonian που αντιστοιχεί σε αρνητική ιδιοτιμή E έχουμε μία μοναδιακή αναπαράσταση της ομάδας Lie $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$, η οποία αναλύεται σε ευθύ άθροισμα ανάγωγων αναπαραστάσεων. Εδώ όμως σταματάμε για να παρουσιάσουμε την Lie άλγεβρα της $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ και να δούμε πως μπορεί αυτή να μας βοηθήσει στην μελέτη της παραπάνω αναπαράστασης. Στόχος μας είναι να βρούμε τις ιδιοτιμές και την διάσταση των ιδιόχωρων της Hamiltonian.

Κεφάλαιο 2

Αναπαραστάσεις Lie αλγεβρών και οι ανάγωγες αναπαραστάσεις της Lie άλγεβρας $\mathfrak{so}(4,\mathbb{R})$

2.1 Γενικά περί Lie αλγεβρών

Ορισμός 2.1.1. Έστω $\mathfrak{g}$ ένας γραμμικός χώρος επί του $\mathbb{R}$ και $[\cdot\,,\cdot]:\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ μία πράξη η οποία για κάθε $A,B,C\in\mathfrak{g}$ και για κάθε $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες

(i). $[A,B]=-[B,A]$

(ii). $[\lambda A+\mu B,C]=\lambda[A,C]+\mu[B,C]$, $[A,\lambda B+\mu C]=\lambda[A,B]+\mu[A,C]$

(iii). $[A,[B,C]]+[B,[C,A]]+[C,[A,B]]=0$.

Τότε η πράξη $[\cdot\,,\cdot]$ ονομάζεται αγκύλη Lie στον χώρο $\mathfrak{g}$ και το ζεύγος $(\mathfrak{g},[\cdot\,,\cdot])$ λέγεται άλγεβρα Lie επί του $\mathbb{R}$ ή πραγματική Lie άλγεβρα.

Αν $V\leq\mathfrak{g}$ ένας γραμμικός υπόχωρος κλειστός ως προς την αγκύλη Lie, τότε η πραγματική Lie άλγεβρα $(V,[\cdot\,,\cdot]_V=[\cdot\,,\cdot]|_{V\times V})$ ονομάζεται Lie υποάλγεβρα της $(\mathfrak{g},[\cdot\,,\cdot])$ και γράφουμε $(V,[\cdot\,,\cdot]_V)\leq(\mathfrak{g},[\cdot\,,\cdot])$ ή απλά $V\leq\mathfrak{g}$ •

Παράδειγμα 2.1.2. Έστω V ένας γραμμικός χώρος επί του $\mathbb{C}$ και ο γραμμικός χώρος $\mathcal{L}(V)$ επί του $\mathbb{R}$. Στον χώρο $\mathcal{L}(V)$ ορίζουμε μία αγκύλη Lie $[\cdot\,,\cdot]$ ως εξής

$$[f,g]=fg-gf\,.$$

Έτσι $(\mathcal{L}(V),[\cdot\,,\cdot])$ είναι μία Lie άλγεβρα επί του $\mathbb{R}$ την οποία συμβολίζουμε με $\mathfrak{gl}(V)$ ■

Παράδειγμα 2.1.3. Έστω $\mathbf{Q}$ η γραμμική άλγεβρα των quaternions επί του $\mathbb{R}$ και $\{1,\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$ η βάση του χώρου $\mathbf{Q}$. Στον υπόχωρο $\mathfrak{g}_{\mathbf{Q}}=\langle\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\rangle$ ορίζουμε μια αγκύλη Lie $[\cdot\,,\cdot]:\mathfrak{g}_{\mathbf{Q}}\times\mathfrak{g}_{\mathbf{Q}}\to\mathfrak{g}_{\mathbf{Q}}$ ως εξής

$$[a,b]=\Pi(a\cdot b)\,,$$

όπου $\Pi : \mathbf{Q} \to \mathfrak{g}_{\mathbf{Q}}$ είναι η ορθογώνια προβολή του $\mathbf{Q}$ επί του $\mathfrak{g}_{\mathbf{Q}}$. Δεν είναι δύσκολο να επαληθεύσουμε ότι η απεικόνιση αυτή ικανοποιεί τις ιδιότητες μίας αγκύλης Lie και συνεπώς το ζεύγος $\left(\mathfrak{g}_{\mathbf{Q}}, [\cdot\,,\,\cdot]\right)$ είναι μία Lie άλγεβρα επί του $\mathbb{R}$, την οποία συμβολίζουμε απλά με $\mathfrak{g}_{\mathbf{Q}}$.

Με κάποιους στοιχειώδεις υπολογισμούς βρίσκουμε ότι οι αγκύλες Lie των διανυσμάτων της βάσης $\{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$ του χώρου $\mathfrak{g}_{\mathbf{Q}}$ ικανοποιούν τις ακόλουθες «κυκλικές» σχέσεις

$$[\mathbf{i},\mathbf{j}] = \mathbf{k}\ ,\ [\mathbf{j},\mathbf{k}] = \mathbf{i}\ ,\ [\mathbf{k},\mathbf{i}] = \mathbf{j}.$$

Πράγματι αν $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k},\ \mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k} \in \mathfrak{g}_{\mathbf{Q}}$ θα έχουμε

$$[\mathbf{a},\mathbf{b}] = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}$$

και θέτοντας $\mathbf{a} = \mathbf{i}, \mathbf{b} = \mathbf{j}$ παίρνουμε την ισότητα $[\mathbf{i},\mathbf{j}] = \mathbf{k}$. Ομοίως για και τις άλλες δύο■

Παράδειγμα 2.1.4. Θεωρούμε τον γραμμικό χώρο πινάκων $\mathbb{C}^{n\times n}$ επί του $\mathbb{R}$, για κάποιον $n \in \mathbb{N}$ και την πράξη $[\cdot\,,\,\cdot] : \mathbb{C}^{n\times n} \times \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{n\times n}$ με

$$[A,B] = AB - BA.$$

Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι η πράξη $[\cdot\,,\,\cdot]$ είναι μία αγκύλη Lie στον $\mathbb{C}^{n\times n}$ οπότε το ζεύγος $\left(\mathbb{C}^{n\times n}, [\cdot\,,\,\cdot]\right)$ είναι μία Lie άλγεβρα επί του $\mathbb{R}$. Η Lie άλγεβρα $\left(\mathbb{C}^{n\times n}, [\cdot\,,\,\cdot]\right)$ συμβολίζεται με $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$.

Με όμοιο τρόπο μπορούμε να ορίσουμε την Lie άλγεβρα $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ επί του $\mathbb{R}$ η διάσταση της οποίας είναι $\dim \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) = n^2$, μικρότερη δηλαδή από την διάσταση της $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ που είναι $\dim \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) = 2n^2$. Θα πρέπει μάλιστα να προσέξουμε ότι $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ είναι ένας γραμμικός χώρος επί του $\mathbb{R}$ και όχι επί του $\mathbb{C}$■

Παράδειγμα 2.1.5. Θεωρούμε τώρα την Lie άλγεβρα $\mathfrak{gl}(2,\mathbb{C})$ και τον γραμμικό υπόχωρο $V = \left\{A \in \mathbb{C}^{2\times 2} \,\middle|\, A + A^* = 0 \text{ και } TrA = 0\right\} \leq \mathfrak{gl}(2,\mathbb{C})$. Δεν είναι δύσκολο να δείξουμε ότι $\forall A, B \in V$ $[A,B] \in V$ και συνεπώς ο περιορισμός $[\cdot\,,\,\cdot]|_{V\times V} = [\cdot\,,\,\cdot]_V$ είναι μία αγκύλη Lie στον χώρο V. Πράγματι αν $A, B \in V$, τότε

$$\begin{aligned}
[A,B]^* + [A,B] &= (AB - BA)^* + (AB - BA) \\
&= (AB)^* - (BA)^* + AB - BA \\
&= B^*A^* - A^*B^* + AB - BA \\
&= -BA^* + AB^* + AB - BA \\
&= -B(A^* + A) + A(B^* + B) \\
&= -B0 + A0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

και ακόμη

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr}\left([A,B]\right) &= \operatorname{Tr}(AB-BA)\\ &= \operatorname{Tr}(AB)-\operatorname{Tr}(BA)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Την Lie υποάλγεβρα $\left(V,[\cdot\,,\,\cdot]_V\right)$ της $\mathfrak{gl}(2,\mathbb{C})$ την συμβολίζουμε με $\mathfrak{su}(2)$. Επίσης είναι απλό να επαληθεύσουμε ότι

$$\mathfrak{su}(2)=\left\{\begin{bmatrix} ia & b+ic\\ -b+ic & -ia\end{bmatrix}\in\mathbb{C}^{2\times 2}\,\middle|\,a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$$

και συμπεραίνουμε ότι $\dim\mathfrak{su}(2)=3$. Ακόμη το σύνολο

$$\left\{\begin{bmatrix} i & 0\\ 0 & -i\end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & i\\ i & 0\end{bmatrix}\right\}$$

είναι η κανονική βάση της $\mathfrak{su}(2)$ ■

Παράδειγμα 2.1.6. Έστω η Lie άλγεβρα $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$ και ο γραμμικός υπόχωρος $W=\left\{A\in g\ell(3,\mathbb{R})\,\middle|\,A+A^T=0\right\}\leq\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$. Μπορούμε με απλές πράξεις να δείξουμε ότι $\forall A,B\in W\;\;[A,B]\in W$ και κατά συνέπεια ο περιορισμός $[\cdot\,,\,\cdot]|_{W\times W}=[\cdot\,,\,\cdot]_W$ είναι μία αγκύλη Lie στον χώρο W. Την Lie άλγεβρα $\left(W,[\cdot\,,\,\cdot]_W\right)$ την συμβολίζουμε με $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$. Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι,

$$\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})=\left\{\begin{bmatrix} 0 & -c & -b\\ c & 0 & -a\\ b & a & 0\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times 3}\,\middle|\,a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$$

και τώρα γίνεται προφανές ότι $\dim\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})=3$. Μία βάση λοιπόν της $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$ είναι το σύνολο

$$\left\{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\right\}.$$

Ομοίως ορίζουμε και την Lie άλγεβρα $\mathfrak{so}(4,\mathbb{R})$ ως την Lie υποάλγεβρα

$$\left\{A\in\mathfrak{gl}(4,\mathbb{R})\,\middle|\,A+A^T=0\right\}$$

της $\mathfrak{gl}(4,\mathbb{R})$ και βρίσκουμε ότι

$$\mathfrak{so}(4,\mathbb{R})=\left\{\begin{bmatrix} 0 & -f & -e & -d\\ f & 0 & -c & -b\\ e & c & 0 & -a\\ d & b & a & 0\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{4\times 4}\,\middle|\,a,b,c,d,e,f\in\mathbb{R}\right\}.$$

Η διάσταση λοιπόν της $\mathfrak{so}(4,\mathbb{R})$ είναι $\dim \mathfrak{so}(4,\mathbb{R}) = 6$ ■

Ορισμός 2.1.7. Έστω $\left(\mathfrak{g},[\cdot\,,\cdot]_{\mathfrak{g}}\right)$, $\left(\mathfrak{h},[\cdot\,,\cdot]_{\mathfrak{h}}\right)$ Lie άλγεβρες επί του $\mathbb{R}$, $\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{h}$ ο γραμμικός χώρος ευθύ άθροισμα και η απεικόνιση $[\cdot\,,\cdot]:(\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{h})\times(\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{h})\to\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{h}$ την οποία ορίζουμε ως εξής

$$\left[A+B,C+D\right]=\left[A,C\right]_{\mathfrak{g}}+\left[B,D\right]_{\mathfrak{h}}.$$

Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι η απεικόνιση $[\cdot\,,\cdot]$ είναι μία αγκύλη Lie στον χώρο $\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{h}$ και $\left(\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{h},[\cdot\,,\cdot]\right)$ είναι μία Lie άλγεβρα επί του $\mathbb{R}$. Η Lie άλγεβρα $\left(\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{h},[\cdot\,,\cdot]\right)$ ονομάζεται Lie άλγεβρα ευθύ άθροισμα των $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ και συμβολίζεται απλά με $\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{h}$ •

2.2 Η Lie άλγεβρα μίας ομάδας Lie

Ας θεωρήσουμε μία ομάδα Lie G διάστασης $n\in\mathbb{N}$. Έστω $g\in G$ ένα τυχόν σημείο και e το μοναδιαίο στοιχείο της ομάδας. Δεν είναι δύσκολο να δείξουμε ότι η απεικόνιση $\ell_g:G\to G$ με

$$\ell_g(x)=g\cdot x$$

είναι μία αμφιδιαφόριση με $(\ell_g)^{-1}=\ell_{g^{-1}}$. Πράγματι η απεικόνιση $\iota_g:G\to G\times G$ με $\iota_g(h)=(g,h)$ είναι λεία και $\ell_g=\mu\circ\iota_g$, όπου $\mu:G\times G\to G$ είναι η απεικόνιση της πράξης της ομάδας. Τότε το διαφορικό της στο σημείο e

$$(\ell_g)_{*,e}:T_e(G)\to T_g(G)$$

είναι ένας ισομορφισμός γραμμικών χώρων. Περιγράφοντας λοιπόν τον εφαπτόμενο χώρο $T_e(G)$ της G στην μονάδα e έχουμε περιγράψει τον εφαπτόμενο χώρο της στο τυχόν σημείο g,

$$T_g(G)=(\ell_g)_{*,e}\left(T_e(G)\right).$$

Σε αυτό το κείμενο ασχολούμαστε με Lie ομάδες πινάκων και αυτή την περίπτωση το διαφορικό $(\ell_g)_{*,I}$ παίρνει την απλή μορφή πολλαπλασιασμού από αριστερά, όπως περιγράφουμε στο ακόλουθο παράδειγμα.

Παράδειγμα 2.2.1. Ας θεωρήσουμε την γενική γραμμική ομάδα $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ και ένα στοιχείο $g\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. Τότε για κάθε $A\in T_I\left(\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})\right)\cong\mathbb{R}^{n\times n}$ θα έχουμε

$$(\ell_g)_{*,I}(A)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(g\cdot A)_{ij}\,\frac{\partial}{\partial x^{ij}}\Big|_g\,.$$

Πράγματι αν $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, τότε υπάρχει λεία καμπύλη $c:\mathbb{R}\to \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ με αρχή το σημείο I και $c'(0)=A$. Μπορούμε λοιπόν να υπολογίσουμε

$$\begin{aligned}(\ell_g)_{*,I}(A) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\ell_g\circ c)(t)\\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\big(\ell_g(c(t))\big)\\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} g\cdot c(t)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\big(g\cdot c'(0)\big)_{ij}\frac{\partial}{\partial x^{ij}}\Big|_g\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(g\cdot A)_{ij}\frac{\partial}{\partial x^{ij}}\Big|_g\end{aligned}$$

και συνεπώς το διαφορικό $(\ell_g)_{*,I}$ είναι ουσιαστικά ένας πολλαπλασιασμός από αριστερά. Ομοίως και για την μιγαδική γενική γραμμική ομάδα $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ ■

Ο $T_e(G)$ ως γραμμικός χώρος είναι εφοδιασμένος με μία αγκύλη Lie $[\cdot\,,\cdot]$, την οποία σκοπεύουμε να ορίσουμε παρακάτω. Πρώτα όμως θα μιλήσουμε για λεία διανυσματικά πεδία σε λεία τοπολογική πολλαπλότητα.

Ορισμός 2.2.2. Έστω M μία λεία πολλαπλότητα διάστασης $n\in\mathbb{N}$. Ένα διανυσματικό πεδίο X στην M λέγεται λείο, αν για κάθε χάρτη $\big(U,\varphi=(x^1,x^2,...,x^n)\big)$ στην M και για κάθε $i\in\{1,2,...,n\}$, η συνάρτηση $a_i:U\to\mathbb{R}$ η οποία ορίζεται από την σχέση

$$X_p=\sum_{i=1}^{n}a_i(p)\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p \quad , \quad p\in U$$

είναι λεία•

Ας θεωρήσουμε μία λεία τοπολογική πολλαπλότητα M διάστασης $n\in\mathbb{N}$ και X ένα διανυσματικό πεδίο στην M. Το διανυσματικό πεδίο X μπορούμε να το «δούμε» ως έναν γραμμικό τελεστή $X:C^\infty(M,\mathbb{R})\to\mathbb{R}^M$, όπου $\mathbb{R}^M$ είναι το σύνολο των πραγματικών συναρτήσεων ορισμένων στην M, που δρα στην γραμμική άλγεβρα των λείων συναρτήσεων $C^\infty(M,\mathbb{R})$ ως εξής: Αν $X_p\in T_p(M)$ είναι η τιμή του X στο σημείο p και $f\in C^\infty(M,\mathbb{R})$, τότε

$$X(f)(p)=X_p(f).$$

Οδηγούμαστε λοιπόν στον ακόλουθο χαρακτηρισμό των λείων διανυσματικών πεδίων.

Πρόταση 2.2.4. Έστω M μία λεία πολλαπλότητα διάστασης $n\in\mathbb{N}$ και X ένα διανυσματικό πεδίο στην M. Τότε το διανυσματικό πεδίο X είναι λείο αν και μόνο αν για κάθε λεία συνάρτηση $f\in C^\infty(M,\mathbb{R})$ η συνάρτηση $X(f):M\to\mathbb{R}$ είναι λεία.

Απόδειξη. Έστω X ένα διανυσματικό πεδίο στην M και $\left(U, \varphi = (x^1, x^2, ..., x^n)\right)$ ένας χάρτης της M. Τότε για κάθε $p \in M$ το σύνολο

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial x^2}\Big|_p, ..., \frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_p \right\}$$

είναι μία βάση του $T_p(M)$ και υπάρχουν $a_1(p), a_2(p), ..., a_n(p) \in \mathbb{R}$ ώστε

$$X_p = \sum_{i=1}^{n} a_i(p) \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p ,$$

όπου X_p είναι η τιμή του διανυσματικού πεδίου X στο p. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $a_1, a_2, ..., a_n : U \to \mathbb{R}$, οι οποίες ορίζονται από την παραπάνω σχέση.

Έστω λοιπόν ότι το διανυσματικό πεδίο X είναι λείο. Τότε από τον ορισμό 2.2.2 για κάθε $i \in \{1, 2, ..., n\}$ η συνάρτηση $a_i : U \to \mathbb{R}$ είναι λεία και συνεπώς η συνάρτηση $X(f)|_U$ με

$$X(f)(p) = X_p(f) = \sum_{i=1}^{n} a_i(p) \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$$

είναι λεία. Επειδή (U, φ) είναι τυχόν χάρτης συμπεραίνουμε ότι η $X(f)$ είναι λεία συνάρτηση, δηλαδή $X(f) \in C^\infty(M, \mathbb{R})$.

Έστω τώρα ότι για κάθε $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ η συνάρτηση $X(f) : M \to \mathbb{R}$ είναι λεία. Για κάθε $j \in \{1, 2, ..., n\}$ υπάρχει λεία επέκταση $\tilde{x}^j : M \to \mathbb{R}$ της $x^j : U \to \mathbb{R}$. Τότε $X(\tilde{x}^j)$ είναι λεία συνάρτηση και για κάθε $p \in U$

$$X(\tilde{x}^j)(p) = X_p(\tilde{x}^j) = \sum_{i=1}^{n} a_i(p) \frac{\partial x^j}{\partial x^i}\Big|_p = a_j(p).$$

Συνεπάγεται λοιπόν ότι για κάθε $j \in \{1, 2, ..., n\}$ η $a_j : U \to \mathbb{R}$ είναι λεία συνάρτηση και επειδή (U, φ) είναι τυχόν χάρτης η απόδειξη της πρότασης έχει ολοκληρωθεί□

Συμβολίζουμε με $\mathfrak{X}(M)$ τον πραγματικό γραμμικό χώρο των λείων διανυσματικών πεδίων στην M και με $\mathfrak{P}(M)$ τον γραμμικό χώρο των παραγωγίσεων στην γραμμική άλγεβρα $C^\infty(M, \mathbb{R})$. Οι δύο αυτοί χώροι είναι ισόμορφοι και μπορούν να ταυτιστούν. Πράγματι ένα λείο διανυσματικό πεδίο X στην M μπορούμε να το «δούμε» και ως μία παραγώγιση $X : C^\infty(M, \mathbb{R}) \to C^\infty(M, \mathbb{R})$. Αν $f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, τότε για κάθε $p \in M$

$$\begin{aligned} X(f \cdot g)(p) &= X_p(f \cdot g) \\ &= f(p) \cdot X_p(g) + g(p) \cdot X_p(f) \\ &= f(p) \cdot X(g)(p) + g(p) \cdot X(f)(p) \\ &= \left(f \cdot X(g) + g \cdot X(f)\right)(p) \end{aligned}$$

και συνεπώς $X(f\cdot g)=f\cdot X(g)+g\cdot X(f)$. Αλλά και αντιστρόφως μία παραγώγιση P στην $C^\infty(M,\mathbb{R})$ είναι ένα λείο διανυσματικό πεδίο στην M. Αν $C_p^\infty(M,\mathbb{R})$ είναι η γραμμική άλγεβρα των συναρτήσεων που είναι λείες στο σημείο $p\in M$ και $f,g\in C_p^\infty(M,\mathbb{R})$, τότε

$$P_p(f\cdot g)=P(f\cdot g)(p)=P(f)(p)\cdot g(p)+f(p)\cdot P(g)(p)$$

και συνεπώς P_p είναι μία παραγώγιση στην $C_p^\infty(M,\mathbb{R})$, άρα ένα εφαπτόμενο διάνυσμα στο σημείο p.

Λήμμα 2.2.5. Αν X,Y λεία διανυσματικά πεδία στην M τέτοια ώστε για κάθε $f\in C^\infty(M,\mathbb{R})$ να έχουμε $X(f)=Y(f)$, τότε $X=Y$.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι για κάθε λεία συνάρτηση $f:M\to\mathbb{R}$ έχουμε $X(f)=Y(f)$ και $\left(U,\varphi=(x^1,x^2,...,x^n)\right)$ είναι ένας χάρτης στην M. Για κάθε $p\in U$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p,\frac{\partial}{\partial x^2}\Big|_p,...,\frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_p\right\}$$

είναι μία βάση του $T_p(M)$ και για κάθε $i\in\{1,2,...,n\}$ υπάρχουν λείες συναρτήσεις $a_i,b_i:U\to\mathbb{R}$ τέτοιες ώστε για κάθε $p\in U$

$$X_p=\sum_{i=1}^n a_i(p)\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p\ ,\ Y_p=\sum_{j=1}^n b_j(p)\frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p\ .$$

Για κάθε $k\in\{1,2,...,n\}$ υπάρχει λεία επέκταση $\tilde{x}^k:G\to\mathbb{R}$ της $x^k:U\to\mathbb{R}$ και για τυχόν $p\in U$ θα έχουμε

$$X_p(\tilde{x}^k)=Y_p(\tilde{x}^k).$$

Όμως

$$X_p(\tilde{x}^k)=\sum_{i=1}^n a_i(p)\frac{\partial\tilde{x}^k}{\partial x^i}\Big|_p=a_k(p)\ ,\ Y_p(\tilde{x}^k)=\sum_{j=1}^n b_j(p)\frac{\partial\tilde{x}^k}{\partial x^j}\Big|_p=b_k(p)$$

και συνεπώς $a_k(p)=b_k(p)$. Δηλαδή για κάθε $k\in\{1,2,...,n\}$ ισχύει $a_k=b_k$ και επειδή ο χάρτης (U,φ) είναι τυχόν θα έχουμε $X=Y$ □

Ο χώρος $\mathfrak{X}(M)$ των λείων διανυσματικών πεδίων στην M είναι εφοδιασμένος με μία αγκύλη Lie $[\cdot,\cdot]:\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{X}(M)$. Παρακάτω την ορίζουμε και «μετατρέπουμε» έτσι τον χώρο $\mathfrak{X}(M)$ σε μία πραγματική Lie άλγεβρα.

Έστω X,Y λεία διανυσματικά πεδία στην M, τα οποία τα «βλέπουμε» ως παραγωγίσεις στην γραμμική άλγεβρα $C^\infty(M,\mathbb{R})$. Τότε $XY-YX$ είναι επίσης μία παραγώγιση στην $C^\infty(M,\mathbb{R})$. Πράγματι αν $f,g\in C^\infty(M,\mathbb{R})$, τότε

$$
\begin{aligned}
(XY - YX)(f \cdot g) &= XY(f \cdot g) - YX(f \cdot g) \\
&= X\big(Y(f \cdot g)\big) - Y\big(X(f \cdot g)\big) \\
&= X\big(f \cdot Y(g) + g \cdot Y(f)\big) - Y\big(f \cdot X(g) + g \cdot X(f)\big) \\
&= X(f) \cdot Y(g) + f \cdot XY(g) + X(g) \cdot Y(f) + g \cdot XY(f) \\
&\quad - Y(f) \cdot X(g) - f \cdot YX(g) - Y(g) \cdot X(f) - g \cdot YX(f) \\
&= f \cdot XY(g) f \cdot YX(g) + g \cdot XY(f) - f \cdot YX(g) \\
&= f \cdot (XY - YX)(g) + g \cdot (XY - YX)(f).
\end{aligned}
$$

Έστω τώρα $h \in C_p^\infty(M, \mathbb{R})$. Ορίζουμε την τιμή $\left[X, Y\right]_p$ του διανυσματικού πεδίου $\left[X, Y\right]$ στο σημείο $p \in U$ ως εξής

$$
\begin{aligned}
\left[X, Y\right]_p (h) &= (XY - YX)(h)(p) \\
&= (X_p Y - Y_p X)(h).
\end{aligned}
$$

Θα πρέπει να δείξουμε ότι $\left[X, Y\right]_p$ είναι πράγματι ένα διάνυσμα του εφαπτόμενου χώρου $T_p(M)$. Επειδή $XY - YX$ είναι μία παραγώγιση στη γραμμική άλγεβρα $C^\infty(M, \mathbb{R})$ συνεπάγεται ότι $\left[X, Y\right]_p$ είναι μία κατά σημείο παραγώγιση στην γραμμική άλγεβρα των σπερμάτων $C_p^\infty(M, \mathbb{R})$. Πράγματι

$$
\begin{aligned}
\left[X, Y\right]_p (f \cdot g) &= \big((XY - YX)(f \cdot g)\big)(p) \\
&= \big(f \cdot (XY - YX)(g) + g \cdot (XY - YX)(f)\big)(p) \\
&= f(p) \cdot \big((XY)(g) - (YX)(g)\big)(p) + g(p) \cdot \big((XY)(g) - (YX)(g)\big)(p) \\
&= f(p) \cdot \left[X, Y\right]_p (g) + g(p) \cdot \left[X, Y\right]_p (f)
\end{aligned}
$$

και συνεπώς είναι διάνυσμα του εφαπτόμενου χώρου $T_p(M)$.

Μένει να δείξουμε ότι το διανυσματικό πεδίο $\left[X, Y\right]$ είναι λείο. Σύμφωνα με την πρόταση 2.2.4 αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ η συνάρτηση $\left[X, Y\right](f)$ είναι λεία. Πράγματι

$$
\begin{aligned}
\left[X, Y\right](f) &= (XY)(f) - (YX)(f) \\
&= X\big(Y(f)\big) - Y\big(X(f)\big),
\end{aligned}
$$

που είναι λεία συνάρτηση γιατί $X(f)$ και $Y(f)$ είναι λείες.

Έτσι $\left[X, Y\right] \in \mathfrak{X}(M)$ και είναι απλό να δούμε ότι η πράξη $[\cdot\,,\,\cdot]: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ ικανοποιεί τις ιδιότητες μίας αγκύλης Lie. Στην συνέχεια ορίζουμε τα συσχετιζόμενα διανυσματικά πεδία μέσω μίας λείας απεικόνισης και δείχνουμε πόσο «φυσιολογικά» έρχεται να «κολλήσει» αυτός ο ορισμός με την αγκύλη Lie στην $\mathfrak{X}(M)$.

Ορισμός 2.2.3. Έστω M , N λείες τοπολογικές πολλαπλότητες και $F : M \to N$ μία λεία απεικόνιση. Αν X είναι ένα διανυσματικό πεδίο στην M και Y είναι ένα διανυσματικό πεδίο στην N ώστε για κάθε $p \in M$

$$F_{*,p}(X_p) = Y_{F(p)},$$

τότε τα διανυσματικά πεδία X και Y λέγονται F συσχετιζόμενα•

Πρόταση 2.2.5. Αν $F : M \to N$ είναι μία αμφιδιαφόριση και $X \in \mathfrak{X}(M)$, τότε υπάρχει μοναδικό λείο διανυσματικό πεδίο $Y \in \mathfrak{X}(N)$ το οποίο είναι F συσχετιζόμενο με το X .

Απόδειξη. Ορίζουμε το διανυσματικό πεδίο Y στην N ως εξής,

$$Y_p = F_{*,F^{-1}(p)} X_{F^{-1}(p)}$$

και είναι το μοναδικό F συσχετιζόμενο διανυσματικό πεδίο με το X . Μένει να δείξουμε ότι το Y είναι λείο. Θεωρούμε έναν χάρτη $\left(U, \varphi = (y^1,...,y^n)\right)$ στην N . Τότε Υπάρχει χάρτης $\left(V, \psi = (x^1,...,x^n)\right)$ στην M τέτοιος ώστε $V = F^{-1}(U)$. Επίσης για κάθε $i \in \{1,2,...,n\}$ υπάρχει λεία συνάρτηση $X^i : V \to \mathbb{R}$, ώστε στο V η τοπική έκφραση του διανυσματικού πεδίου X είναι

$$X = \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Τότε για κάθε $q \in U$ θα έχουμε

$$\begin{aligned}
Y_q &= F_{*,F^{-1}(q)}\left(\sum_{i=1}^{n} X^i\left(F^{-1}(q)\right)\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{F^{-1}(q)}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} X^i\left(F^{-1}(q)\right) F_{*,F^{-1}(q)}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{F^{-1}(q)}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} X^i\left(F^{-1}(q)\right)\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial F^j}{\partial x^i}\left(F^{-1}(q)\right)\frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_q \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} X^i\left(F^{-1}(q)\right)\frac{\partial F^j}{\partial x^i}\left(F^{-1}(q)\right)\frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_q
\end{aligned}$$

και η τοπική έκφραση του Y στο U θα είναι

$$Y = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} X^i \circ F^{-1}\,\frac{\partial F^j}{\partial x^i}\circ F^{-1}\right)\frac{\partial}{\partial y^j}.$$

Επειδή η συναρτήσεις $X^i \circ F^{-1}\dfrac{\partial F^j}{\partial x^i}\circ F^{-1}$ είναι λείες και ο χάρτης (U,φ) τυχόν, συμπεραίνουμε ότι το Y είναι λείο□

Παρατήρηση 2.2.3. Αν η $F : M \to N$ είναι μία αμφιδιαφόριση και $X \in \mathfrak{X}(M)$ ένα λείο διανυσματικό πεδίο στην M , τότε μπορούμε να ορίσουμε το pushforward $F_* X \in \mathfrak{X}(N)$ του X , από τον τύπο

$$\left(F_* X\right)_{F(p)} = F_{*,p} X_p .$$

Πρόταση 2.2.6. Έστω M, N λείες τοπολογικές πολλαπλότητες, $F: M \to N$ μία λεία απεικόνιση και τα διανυσματικά πεδία $X \in \mathfrak{X}(M)$, $Y \in \mathfrak{X}(N)$. Τα X, Y είναι F συσχετιζόμενα αν και μόνο αν για κάθε $f \in C^\infty(N, \mathbb{R})$

$$X(f \circ F) = (Yf) \circ F .$$

Απόδειξη. Έστω ότι τα X και Y είναι F συσχετιζόμενα. Τότε για κάθε $f \in C^\infty(N, \mathbb{R})$ και για κάθε $p \in M$

$$Y_{F(p)} f = F_{*,p}(X_p) f .$$

Όμως από τον ορισμό του διαφορικού,

$$Y(f)(F(p)) = X_p(f \circ F)$$

ή ισοδύναμα

$$Y(f) \circ F(p) = X(f \circ F)(p) .$$

Έχουμε δηλαδή $Y(f) \circ F = X(f \circ F)$. Επειδή οι ισότητες είναι ισοδύναμες έπεται αμέσως και το αντίστροφο κομμάτι της πρότασης□

Πρόταση 2.2.7. Έστω M, N λείες τοπολογικές πολλαπλότητες, $F: M \to N$ μία λεία απεικόνιση και τα λεία διανυσματικά πεδία $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ τα οποία είναι F συσχετιζόμενα με τα $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathfrak{X}(N)$ αντιστοίχως. Τότε η αγκύλη Lie $[X, Y] \in \mathfrak{X}(M)$ είναι F συσχετιζόμενη με την $[\tilde{X}, \tilde{Y}] \in \mathfrak{X}(N)$.

Απόδειξη. Έστω $f \in C^\infty(N, \mathbb{R})$. Τότε θα έχουμε

$$\begin{aligned} [X, Y] f \circ F &= XY(f \circ F) - YX(f \circ F) \\ &= X(\tilde{Y}f \circ F) - Y(\tilde{X}f \circ F) \\ &= (\tilde{X}\tilde{Y}f) \circ F - (\tilde{Y}\tilde{X}f) \circ F \\ &= (\tilde{X}\tilde{Y}f - \tilde{Y}\tilde{X}f) \circ F \\ &= \left(\left[\tilde{X}, \tilde{Y}\right] f\right) \circ F \end{aligned}$$

και από την πρόταση 2.2.6 τα διανυσματικά πεδία $[X, Y]$ και $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$ είναι F συσχετιζόμενα□

Πόρισμα 2.2.8. Αν $F: M \to N$ είναι μία αμφιδιαφόριση και $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, τότε

$$F_*[X, Y] = [F_* X, F_* Y].$$

Απόδειξη. Σύμφωνα με την πρόταση που προηγήθηκε τα διανυσματικά πεδία $[X, Y] \in \mathfrak{X}(M)$ και $[F_* X, F_* Y] \in \mathfrak{X}(N)$ είναι F συσχετιζόμενα. Όμως από την πρόταση 2.2.5 το μοναδικό F συσχετιζόμενο διανυσματικό πεδίο με το $[X, Y]$ είναι το $F_*[X, Y]$ και τελειώσαμε□

Ορισμός 2.2.6. Ένα διανυσματικό πεδίο X στην ομάδα Lie G λέγεται αριστερά αναλλοίωτο αν για κάθε $g \in G$

$$(\ell_g)_* X = X \, .$$

Δηλαδή αν για κάθε $g \in G$ το X είναι ℓ_g συσχετιζόμενο με τον εαυτό του ή ισοδύναμα αν για κάθε $g, h \in G$

$$X_{g \cdot h} = (\ell_g)_{*,h}(X_h) \bullet$$

Πρόταση 2.2.9. Κάθε αριστερά αναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο X στην G είναι λείο.

Απόδειξη. Έστω $f : G \to \mathbb{R}$ μία λεία συνάρτηση. Σύμφωνα με την πρόταση 2.2.4 αρκεί να δείξουμε ότι $X(f)$ είναι επίσης λεία συνάρτηση. Υπάρχει λεία καμπύλη $c : \mathbb{R} \to G$ τέτοια ώστε

$$c(0) = e \ , \ c'(0) = X_e$$

και για κάθε $g \in G$ έχουμε

$$\begin{aligned} X(f)(g) &= X_g f \\ &= \left((\ell_g)_{*,e} X_e\right) f \\ &= X_e(f \circ \ell_g) \\ &= c'(0)(f \circ \ell_g) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (f \circ \ell_g \circ c). \end{aligned}$$

Η συνάρτηση $\varphi : G \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $\varphi(t, g) = f \circ \ell_g \circ c(t)$ είναι λεία. Πράγματι αν θεωρήσουμε την απεικόνιση της πράξης της ομάδας $\mu : G \times G \to G$, η οποία είναι λεία εξορισμού και την $1_G \times c$ η οποία είναι επίσης λεία, τότε

$$\varphi = f \circ \mu \circ (1_G \times c) \, .$$

Έστω (U, ψ) είναι ένας χάρτης της G τέτοιος ώστε $U \ni g$. Τότε η μερική παράγωγος $\frac{\partial \varphi}{\partial t} : U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι λεία και συνεπώς η $\frac{\partial \varphi}{\partial t}\Big|_{t=0} : U \to \mathbb{R}$ είναι λεία στο g. Όμως για κάθε $h \in U$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}\Big|_{t=0}(h) = X(f)(h)$$

και η απόδειξη ολοκληρώνεται εδώ□

Πρόταση 2.2.10. Έστω $L(G)$ ο πραγματικός γραμμικός χώρος των αριστερά αναλλοίωτων διανυσματικών πεδίων. Τότε υπάρχει ένας ισομορφισμός $S : T_e(G) \to L(G)$.

Απόδειξη. Θεωρούμε την γραμμική απεικόνιση $S : T_e(G) \to L(G)$ την οποία ορίζουμε ως εξής: Αν $X_e \in T_e(G)$, τότε η τιμή του διανυσματικού πεδίου $S(X_e) = X$ στο σημείο h είναι

$$X_h = (\ell_h)_{*,e}(X_e) \, .$$

Θα δείξουμε ότι η S είναι καλώς ορισμένη, δηλαδή ότι το διανυσματικό πεδίο $S(X_e)$ είναι αριστερά αναλλοίωτο. Πράγματι από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε

$$\begin{aligned}\left((\ell_g)_* X\right)_{g\cdot h} &= (\ell_g)_{*,h}(X_h)\\ &= (\ell_g)_{*,h}(\ell_h)_{*,e}(X_e)\\ &= (\ell_g \circ \ell_h)_{*,e}(X_e)\\ &= (\ell_{g\cdot h})_{*,e}(X_e)\\ &= X_{g\cdot h},\end{aligned}$$

δηλαδή το X είναι ένα αριστερά αναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο.

Η S είναι ένας μονομορφισμός γραμμικών χώρων. Πράγματι επειδή το διαφορικό $(\ell_g)_{*,e}$ είναι ένας ισομορφισμός θα έχουμε

$$S(X_e)_g = (\ell_g)_{*,e}(X_e) = 0 \;\Leftrightarrow\; X_e = 0$$

και συνεπώς $\ker(S) = \{0\}$.

Η S είναι ένας επιμορφισμός γραμμικών χώρων. Πράγματι αν Y είναι αριστερά αναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο και $Y_e \in T_e(G)$ είναι η τιμή του στην μονάδα e, τότε από την σχέση

$$Y_{g\cdot h} = (\ell_g)_{*,h}(Y_h)$$

για $h = e$ θα έχουμε

$$Y_g = (\ell_g)_{*,e}(Y_e)$$

και συνεπώς $S(Y_e) = Y$ □

Το διανυσματικό πεδίο $S(X_e)$ λέγεται αριστερά αναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο που παράγεται από το εφαπτόμενο διάνυσμα $X_e \in T_e(G)$. Λέμε ακόμη ότι το εφαπτόμενο διάνυσμα $X_e \in T_e(G)$ παράγει το αριστερά αναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο $S(X_e)$. Πολλές φορές αντί του $S(X_e)$ χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\tilde{X}_e$. Στο επόμενο παράδειγμα παρουσιάζουμε τα αριστερά αναλλοίωτα διανυσματικά πεδία της γενικής γραμμικής ομάδας.

Παράδειγμα 2.2.8. Θεωρούμε την γενική γραμμική ομάδα $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ και A ένα διάνυσμα του εφαπτόμενου χώρου $T_I\left(\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})\right)$. Αν X είναι το αριστερά αναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο το οποίο παράγεται από διάνυσμα A, τότε σύμφωνα με τον ορισμό 2.2.6 και το παράδειγμα 2.2.1, για κάθε $g \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ θα έχουμε

$$\begin{aligned}X_g &= (\ell_g)_{*,e}(A)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(g\cdot A)_{ij}\,\frac{\partial}{\partial x^{ij}}\Big|_g .\end{aligned}$$

Η τιμή λοιπόν του X στο g προκύπτει με έναν απλό πολλαπλασιασμό από αριστερά $g \cdot A$. Σε όμοιο συμπέρασμα καταλήγουμε και για την μιγαδική γενική γραμμική ομάδα $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ ■

Παρακάτω θα δείξουμε ότι ο γραμμικός υπόχωρος $L(G) \leq \mathfrak{X}(G)$ είναι κλειστός ως προς την αγκύλη Lie που ορίσαμε και συνεπώς είναι μία Lie υποάλγεβρα της $\mathfrak{X}(G)$.

Λήμμα 2.2.9. Έστω G μία ομάδα Lie. Ένα διανυσματικό πεδίο X στην G είναι αριστερά αναλλοίωτο αν και μόνο αν για κάθε $f \in C^{\infty}(G,\mathbb{R})$ και για κάθε $g \in G$ ισχύει

$$X(f \circ \ell_g) = X(f) \circ \ell_g .$$

Απόδειξη. Είναι άμεση συνέπεια του ορισμού του αριστερά αναλλοίωτου διανυσματικού πεδίου και της πρότασης 2.2.6□

Πρόταση 2.2.11. Έστω X ,Y αριστερά αναλλοίωτα διανυσματικά πεδία στην Lie ομάδα G. Τότε και το διανυσματικό πεδίο $\left[X,Y\right]$ είναι αριστερά αναλλοίωτο.

Απόδειξη. Σύμφωνα με το λήμμα 2.2.9 αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $f \in C^{\infty}(G,\mathbb{R})$ και για κάθε $g \in G$ ισχύει η ισότητα

$$\left[X,Y\right](f \circ \ell_g) = \left[X,Y\right](f) \circ \ell_g .$$

Έστω λοιπόν $f \in C^{\infty}(G,\mathbb{R})$ και $g \in G$. Τότε

$$\begin{aligned}
\left[X,Y\right](f \circ \ell_g) &= (XY - YX)(f \circ \ell_g) \\
&= XY(f \circ \ell_g) - YX(f \circ \ell_g) \\
&= X\left(Y(f \circ \ell_g)\right) - Y\left(X(f \circ \ell_g)\right) \\
&= X\left(Y(f) \circ \ell_g\right) - Y\left(X(f) \circ \ell_g\right) \\
&= XY(f) \circ \ell_g - YX(f) \circ \ell_g \\
&= \left[X,Y\right](f) \circ \ell_g
\end{aligned}$$

και ολοκληρώνεται η απόδειξη της πρότασης□

Τώρα είμαστε έτοιμοι να ορίσουμε μια αγκύλη Lie στον εφαπτόμενο χώρο $T_e(G)$ της G. Για να το πετύχουμε αυτό θα χρησιμοποιήσουμε τον ισομορφισμό S τον οποίο παρουσιάσαμε στην πρόταση 2.2.10 και θα «μεταφέρουμε» την αγκύλη Lie από την Lie άλγεβρα των αριστερά αναλλοίωτων διανυσματικών πεδίων $L(G)$ στον $T_e(G)$.

Ορισμός 2.2.11. Έστω $A,B \in T_e(G)$ διανύσματα του εφαπτόμενου χώρου και $\tilde{A},\tilde{B} \in L(G)$ τα διανυσματικά πεδία που παράγουν. Τότε ορίζουμε την αγκύλη Lie $[\cdot\,,\,\cdot]\colon T_e(G)\times T_e(G) \to T_e(G)$ στον εφαπτόμενο χώρο $T_e(G)$ της ομάδας Lie G ως εξής

$$\left[A,B\right] = \left[\tilde{A},\tilde{B}\right]_e .$$

Η Lie άλγεβρα $\left(T_e(G),[\cdot\,,\,\cdot]\right)$ ονομάζεται Lie άλγεβρα της ομάδας Lie G και συμβολίζεται με $\mathfrak{g}$ •

Πρόταση 2.2.12. Έστω G, H δύο ομάδες Lie και $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ οι Lie άλγεβρες τους αντιστοίχως. Τότε η Lie άλγεβρα της ομάδας Lie γινόμενο $G\times H$ είναι η Lie άλγεβρα ευθύ άθροισμα $\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{h}$.

Απόδειξη. Ο εφαπτόμενος χώρος $T_e(G\times H)$ της ομάδας Lie $G\times H$ είναι ο χώρος ευθύ άθροισμα $T_e(G)\oplus T_e(H)$, οπότε προκύπτει ο ζητούμενος ισχυρισμός□

Στο τέλος αυτής της ενότητας παρουσιάζουμε την εκθετική απεικόνιση σε μία ομάδα Lie, με την βοήθεια της οποίας θα ορίσουμε παρακάτω την «φυσιολογική» δράση της Lie άλγεβρας μίας ομάδας Lie σε χώρους συναρτήσεων. Ξεκινάμε με την ακόλουθη γενική πρόταση.

Πρόταση 2.2.13. Έστω M μία λεία τοπολογική πολλαπλότητα διάστασης n, $X\in\mathfrak{X}(M)$ ένα λείο διανυσματικό πεδίο στην M και $p\in M$. Τότε σε μία περιοχή $U\ni p$, υπάρχει μοναδική ολοκληρωτική καμπύλη γ του X, με αρχή το σημείο p.

Απόδειξη. Έστω $\left(U,\varphi=(x^1,...,x^n)\right)$ ένας χάρτης στην M με $U\ni p$. Η τοπική έκφραση του X στο U θα είναι της μορφής

$$X=\sum_{i=1}^{n}X^i\frac{\partial}{\partial x^i},$$

όπου $X^i:U\to\mathbb{R}$, $i\in\{1,...,n\}$ είναι λείες συναρτήσεις. Θέτουμε $f=(X^1\circ\varphi^{-1},...,X^n\circ\varphi^{-1})$, που είναι μία λεία συνάρτηση από το $\varphi(U)$ στο $\mathbb{R}^n$. Υπάρχει $\varepsilon>0$ ώστε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y'=f(y)\ \ ,\ \ y(0)=\left(p^1=x^1(p),...,p^n=x^n(p)\right),$$

έχει μοναδική λεία λύση $y:(-\varepsilon,\varepsilon)\to\varphi(U)$. Τότε y είναι η αναπαράσταση, μέσω του χάρτη (U,φ), της ολοκληρωτικής καμπύλης $\gamma=\varphi^{-1}\circ y:(-\varepsilon,\varepsilon)\to U$ του διανυσματικού πεδίου X, στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^n$. Πράγματι είναι μία ολοκληρωτική καμπύλη γιατί

$$\begin{aligned}\gamma'(t)&=\sum_{i=1}^{n}(\gamma^i)'(t)\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\gamma(t)}\\&=\sum_{i=1}^{n}(x^i\circ\gamma)'(t)\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\gamma(t)}\\&=\sum_{i=1}^{n}(X^i\circ\gamma)(t)\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\gamma(t)}\\&=X_{\gamma(t)}\end{aligned}$$

και είναι μοναδική ολοκληρωτική καμπύλη του X με αρχή το σημείο p, στο U □

Λήμμα 2.2.13. Έστω G μία ομάδα Lie, $X\in L(G)$ ένα αριστερά αναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο και $\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to G$ μία ολοκληρωτική καμπύλη του X με αρχή το g. Τότε για κάθε $h\in G$ η $h\cdot\gamma=\ell_h\circ\gamma$ είναι μία ολοκληρωτική καμπύλη του X με αρχή το $h\cdot g$.

Απόδειξη. Η καμπύλη $h\cdot\gamma$ είναι λεία ως σύνθεση λείων απεικονίσεων με $(h\cdot\gamma)(0)=h\cdot g$ και

$$\begin{aligned}(h\cdot\gamma)'(t) &= (\ell_h\circ\gamma)_{*,t}\left(\frac{d}{dt}\Big|_t\right)\\ &= (\ell_h)_{*,\gamma(t)}\big(\gamma'(t)\big)\\ &= (\ell_h)_{*,\gamma(t)}\big(X_{\gamma(t)}\big)\\ &= X_{h\cdot\gamma(t)},\end{aligned}$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη του λήμματος□

Πρόταση 2.2.14. Έστω G μία ομάδα Lie διάστασης n, $\mathfrak{g}$ η Lie άλγεβρα της και $A\in\mathfrak{g}$. Τότε υπάρχει ένας μοναδικός ομομορφισμός ομάδων Lie $\gamma_A:\mathbb{R}\to G$ τέτοιος ώστε

$$\gamma_A'(0)=A.$$

Ο ομομορφισμός γ_A ονομάζεται μονοπαραμετρική υποομάδα του στοιχείου $A\in\mathfrak{g}$.

Απόδειξη. Έστω $X\in L(G)$ το αριστερά αναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο που παράγεται από το διάνυσμα $A\in\mathfrak{g}$. Σύμφωνα με την πρόταση 2.2.13, σε μία περιοχή $U\ni e$, υπάρχει μοναδική ολοκληρωτική καμπύλη $\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to U$ του διανυσματικού πεδίου X με αρχή την μονάδα e. Θα επεκτείνουμε την καμπύλη αυτή σε μία λεία καμπύλη $\tilde{\gamma}:\mathbb{R}\to G$. Για αυτό αρκεί να δείξουμε ότι για κατάλληλα $t,s\in(-\varepsilon,\varepsilon)$ ισχύει

$$\gamma(s+t)=\gamma(s)\cdot\gamma(t).$$

Πράγματι από το λήμμα 4.2.12, για κατάλληλο $\delta>0$, οι λείες καμπύλες $\gamma_1,\gamma_2:(-\delta,\delta)\to U$ με

$$\gamma_1(t)=\gamma(s+t)\quad\text{και}\quad\gamma_2(t)=\gamma(s)\cdot\gamma(t)$$

είναι ολοκληρωτικές καμπύλες του X με αρχή το $\gamma(s)$ και συνεπώς από την μοναδικότητα θα έχουμε $\gamma_1(t)=\gamma_2(t)$. Η ολοκληρωτική καμπύλη $\tilde{\gamma}$ του αριστερά αναλλοίωτου διανυσματικού πεδίου X, που παράγεται από το διάνυσμα $A\in\mathfrak{g}$, είναι ο ζητούμενος ομομορφισμός□

Ορισμός 2.2.14. Έστω G μία Lie ομάδα, $\mathfrak{g}$ η Lie άλγεβρά της. Ορίζουμε την εκθετική απεικόνιση $\exp:\mathfrak{g}\to G$ της G ως εξής

$$\exp(A)=\gamma_A(1),$$

όπου γ_A είναι η μονοπαραμετρική υποομάδα του $A\in\mathfrak{g}$ •

Από την μοναδικότητα της μονοπαραμετρικής υποομάδας, μπορούμε να δείξουμε ότι για κάθε $\lambda,t\in\mathbb{R}$ και για κάθε $A\in\mathfrak{g}$ ισχύει

$$\gamma_A(\lambda t)=\gamma_{\lambda A}(t).$$

Συνεπάγεται λοιπόν ότι $\gamma_A(t)=\gamma_{tA}(1)$, δηλαδή η γ_A εξαρτάται από το γινόμενο tA και μάλιστα

$$\gamma_A(t)=\gamma_{tA}(1)=\exp(tA).$$

Πρόταση 2.2.15. Η εκθετική απεικόνιση $\exp : \mathfrak{g} \to G$ είναι μία τοπική αμφιδιαφόριση από μία περιοχή $V \ni 0$ της Lie άλγεβρας $\mathfrak{g}$ σε μία περιοχή $U \ni 1$ της ομάδας Lie G.

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι το διαφορικό $(\exp)_{*,0} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ της εκθετικής απεικόνισης $\exp$ στο 0 είναι ένας μονομορφισμός. Τότε ο ζητούμενος ισχυρισμός έπεται αμέσως από το θεώρημα της αντίστροφης απεικόνισης. Έστω $A \in \mathfrak{g}$. Θεωρούμε την λεία καμπύλη $c : \mathbb{R} \to \mathfrak{g}$ με

$$c(t) = tA,$$

για την οποία έχουμε $c(0) = 0$ και $c'(0) = A$. Τότε

$$\begin{aligned}(\exp)_{*,0}(A) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\exp \circ c)\\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\exp(tA)\\ &= A\end{aligned}$$

και συνεπώς $(\exp)_{*,0} = 1_{\mathfrak{g}}$, ολοκληρώνοντας την απόδειξη της πρότασης□

Παράδειγμα 2.2.15. Ας θεωρήσουμε την γενική γραμμική ομάδα $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ και την Lie άλγεβρά της $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. Τότε η μονοπαραμετρική υποομάδα $\gamma_A : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, του διανύσματος $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, θα έχει την ακόλουθη μορφή

$$\gamma_A(t) = I + \frac{1}{1!}tA + \frac{1}{2!}(tA)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}(tA)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(tA)^n .$$

Πράγματι η γ_A είναι ένας ομομορφισμός ομάδων, γιατί για κάθε $s, t \in \mathbb{R}$ η συνέλιξη

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} s^n A^n \right) * \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n A^n \right)$$

των σειρών $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} s^n A^n$ και $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k A^k$, είναι

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} s^n A^n * \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n A^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} s^k A^k \frac{1}{(n-k)!} t^{n-k} A^{n-k}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!} \frac{n!}{k!(n-k)!} t^{n-k} s^k A^n\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^{n-k} s^k A^n\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (s+t)^n A^n\\ &= \gamma_A(s+t).\end{aligned}$$

Όμως από το θεώρημα Cauchy-Mertens για την συνέλιξη σειρών,

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} s^n A^n \right) * \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n A^n \right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} s^n A^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n A^n \right)$$

και συνεπάγεται η ισότητα $\gamma_A(s+t)=\gamma_A(s)\cdot\gamma_A(t)$. Ακόμη είναι απλό να δούμε ότι $\gamma_A(0)=I$ και

$$\gamma_A'(t)=A\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(tA)^n ,$$

οπότε $\gamma_A'(0)=A$. Έτσι από την μοναδικότητα συμπεραίνουμε ότι γ_A είναι η μονοπαραμετρική υποομάδα του A και η εκθετική απεικόνιση $\exp:\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})\to \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, δίνεται από τον τύπο

$$\exp A=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{n!}=e^A \blacksquare$$

Πρόταση 2.2.16. Έστω G, H ομάδες Lie και η ομάδα Lie γινόμενο $G\times H$. Τότε για την εκθετική απεικόνιση $\exp_{G\times H}:\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{h}\to G\times H$ θα έχουμε

$$\exp_{G\times H}(A+B)=\left(\exp_G(A),\exp_H(B)\right).$$

Απόδειξη. Είναι συνέπεια του ορισμού της εκθετικής απεικόνισης□

2.3. Ομομορφισμοί Lie αλγεβρών

Ορισμός 2.3.1. Έστω $(\mathfrak{g},[\cdot\,,\cdot]_{\mathfrak{g}})$, $(\mathfrak{h},[\cdot\,,\cdot]_{\mathfrak{h}})$ δύο πραγματικές Lie άλγεβρες. Μία γραμμική απεικόνιση $T:\mathfrak{g}\to\mathfrak{h}$ τέτοια ώστε για κάθε $A,B\in\mathfrak{g}$ να ισχύει

$$T\left(\left[A,B\right]_{\mathfrak{g}}\right)=\left[T(A),T(B)\right]_{\mathfrak{h}},$$

ονομάζεται ομομορφισμός Lie αλγεβρών.

Αν επιπλέον η T είναι ισομορφισμός γραμμικών χώρων, τότε ονομάζεται ισομορφισμός Lie αλγεβρών. Αν υπάρχει ένας τέτοιος ισομορφισμός $T:\mathfrak{g}\to\mathfrak{h}$ τότε οι Lie άλγεβρες $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ λέγονται ισόμορφες και συμβολικά γράφουμε $\mathfrak{g}\cong\mathfrak{h}$. Δύο Lie άλγεβρες οι οποίες είναι ισόμορφες μπορούν ουσιαστικά να ταυτιστούν•

Πρόταση 2.3.2. Έστω $(\mathfrak{g},[\cdot\,,\cdot]_{\mathfrak{g}})$, $(\mathfrak{h},[\cdot\,,\cdot]_{\mathfrak{h}})$ πραγματικές Lie άλγεβρες πεπερασμένης διάστασης, $\{A_1,A_2,...,A_n\}$ μία βάση της $\mathfrak{g}$ και $T:\mathfrak{g}\to\mathfrak{h}$ μία γραμμική απεικόνιση. Η T είναι ένας ομομορφισμός Lie αλγεβρών αν και μόνο αν για κάθε $i,j\in\{1,2,...,n\}$ υπάρχουν $a_{ij1},a_{ij2},...,a_{ijn}\in\mathbb{R}$ ώστε

$$\left[T(A_i),T(A_j)\right]_{\mathfrak{h}}=\sum_{k=1}^{n}a_{ijk}T(A_k).$$

Απόδειξη. Έστω $B,C\in\mathfrak{g}$. Τότε υπάρχουν $x_1,x_2,...,x_n,y_1,y_2,...,y_n\in\mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε

$$B=\sum_{i=1}^{n} x_i A_i$$

$$C=\sum_{j=1}^{n} y_j A_j$$

και συνεπάγεται ότι

$$\left[B,C\right]_{\mathfrak{g}}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j [A_i, A_j]_{\mathfrak{g}} .$$

Σύμφωνα με τον ορισμό 2.3.1 η T είναι ένας ομομορφισμός Lie αλγεβρών αν και μόνο αν για κάθε $i, j \in \{1,2,...,n\}$ έχουμε

$$T\left[A_i, A_j\right]_{\mathfrak{g}}=\left[T(A_i),T(A_j)\right]_{\mathfrak{h}} .$$

Όμως για κάθε $i, j \in \{1,2,...,n\}$ υπάρχουν $a_{ij1}, a_{ij2},..., a_{ijn} \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\left[A_i, A_j\right]_{\mathfrak{g}}=\sum_{k=1}^{n} a_{ijk} A_k$$

οπότε η παραπάνω σχέση είναι ισοδύναμη με την

$$\left[T(A_i),T(A_j)\right]_{\mathfrak{h}}=\sum_{k=1}^{n} a_{ijk} T(A_k) \square$$

Πρόταση 2.3.3. Έστω G μία Lie ομάδα και $S:T_e(G)\to L(G)$ ο ισομορφισμός γραμμικών χώρων που παρουσιάσαμε στην πρόταση 2.2.10. Τότε ο S είναι και ισομορφισμός Lie αλγεβρών.

Απόδειξη. Είναι άμεση συνέπεια του ορισμού της αγκύλης Lie στον $T_e(G)$ □

Πρόταση 2.3.4. Η Lie άλγεβρα της γενικής γραμμικής ομάδας $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ είναι ισόμορφη με την Lie άλγεβρα $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$.

Απόδειξη. Έστω $\mathfrak{h}$ η Lie άλγεβρα της $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, $A\in\mathfrak{h}$ και ο χάρτης

$$\left(\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})\ ,\ 1_{\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})}=\begin{bmatrix} x^{11} & x^{12} & \cdots & x^{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ x^{n1} & x^{n2} & \cdots & x^{nn}\end{bmatrix}\right).$$

Τότε το σύνολο των παραγωγίσεων

$$\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial x^{ij}}\right|_I \ \middle|\ i, j \in \{1,2,...,n\} \right\}$$

είναι μία βάση της $\mathfrak{h}$ και συνεπώς για κάθε $i, j \in \{1,2,...,n\}$ υπάρχουν $a_{ij}\in\mathbb{R}$ ώστε

$$A=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x^{ij}}\Big|_I .$$

Η απεικόνιση $T:\mathfrak{h}\to\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ με

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,\frac{\partial}{\partial x^{ij}}\Big|_{I} \mapsto [a_{ij}]$$

είναι ένας ισομορφισμός γραμμικών χώρων. Θα δείξουμε ότι είναι και ένας ομομορφισμός Lie αλγεβρών. Έστω λοιπόν A, B δύο διανύσματα της $\mathfrak{h}$ και $\tilde{A}, \tilde{B} \in L(G)$ τα αντίστοιχα διανυσματικά πεδία. Τότε από το παράδειγμα 4.2.8 έχουμε

$$\tilde{A}_g = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{r=1}^{n} g_{ir} A_{rj}\,\frac{\partial}{\partial x^{ij}}\Big|_{g}$$

$$\tilde{B}_g = \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} g_{pk} B_{kq}\,\frac{\partial}{\partial x^{pq}}\Big|_{g}.$$

Όμως με την βοήθεια της (i, j) συνάρτησης προβολής $x^{ij} : \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ και παραλείποντας για λόγους απλότητας τα σύμβολα της άθροισης, έχουμε

$$\tilde{A}_g = x^{ir}(g) A_{rj}\,\frac{\partial}{\partial x^{ij}}\Big|_{g}$$

$$\tilde{B}_g = x^{pk}(g) B_{kq}\,\frac{\partial}{\partial x^{pq}}\Big|_{g}.$$

Υπολογίζουμε τώρα την αγκύλη Lie των διανυσματικών πεδίων $\tilde{A}, \tilde{B}$

$$\begin{aligned}
\left[\tilde{A}, \tilde{B}\right] &= \left[x^{ir} A_{rj}\,\frac{\partial}{\partial x^{ij}},\, x^{pk} B_{kq}\,\frac{\partial}{\partial x^{pq}} \right] \\
&= x^{ir} A_{rj}\,\frac{\partial}{\partial x^{ij}}\left(x^{pk} B_{kq}\,\frac{\partial}{\partial x^{pq}} \right) - x^{pk} B_{kq}\,\frac{\partial}{\partial x^{pq}}\left(x^{ir} A_{rj}\,\frac{\partial}{\partial x^{ij}} \right) \\
&= x^{ir} A_{rj} B_{kq}\,\frac{\partial}{\partial x^{ij}}\left(x^{pk}\,\frac{\partial}{\partial x^{pq}} \right) - x^{pk} B_{kq} A_{rj}\,\frac{\partial}{\partial x^{pq}}\left(x^{ir}\,\frac{\partial}{\partial x^{ij}} \right) \\
&= x^{ir} A_{rj} B_{kq}\,\frac{\partial x^{pk}}{\partial x^{ij}}\frac{\partial}{\partial x^{pq}} + x^{ir} A_{rj} B_{kq} x^{pk}\,\frac{\partial}{\partial x^{ij}}\frac{\partial}{\partial x^{pq}} - x^{pk} B_{kq} A_{rj}\,\frac{\partial x^{ir}}{\partial x^{pq}}\frac{\partial}{\partial x^{ij}} - x^{pk} B_{kq} A_{rj} x^{ir}\,\frac{\partial}{\partial x^{pq}}\frac{\partial}{\partial x^{ij}} \\
&= x^{ir} A_{rj} B_{kq}\,\frac{\partial x^{pk}}{\partial x^{ij}}\frac{\partial}{\partial x^{pq}} - x^{pk} B_{kq} A_{rj}\,\frac{\partial x^{ir}}{\partial x^{pq}}\frac{\partial}{\partial x^{ij}} \\
&= x^{ir} A_{rj} B_{jq}\,\frac{\partial}{\partial x^{iq}} - x^{pk} B_{kq} A_{qj}\,\frac{\partial}{\partial x^{pj}} \\
&= (x^{ir} A_{rj} B_{jq} - x^{ir} B_{rk} A_{kq})\frac{\partial}{\partial x^{iq}}
\end{aligned}$$

και επειδή στο I

$$x^{ir}(I) = \begin{cases} 1, & i = r \\ 0, & i \neq r \end{cases}$$

συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned}
\left[\tilde{A}, \tilde{B}\right]_I &= (A_{ij} B_{jq} - B_{ik} A_{kq})\frac{\partial}{\partial x^{iq}}\Big|_{I} \\
&= \big((AB)_{iq} - (BA)_{iq}\big)\frac{\partial}{\partial x^{iq}}\Big|_{I}.
\end{aligned}$$

Αυτή η ισότητα ολοκληρώνει την απόδειξη της πρότασης, αφού γίνεται τώρα προφανές ότι ο ισομορφισμός T είναι και ομομορφισμός Lie αλγεβρών□

Μπορούμε λοιπόν να ταυτίσουμε την Lie άλγεβρα της $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ με την Lie άλγεβρα $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ και στο εξής δεν θα τις διακρίνουμε μεταξύ τους. Ομοίως επειδή η Lie άλγεβρα της Lie ομάδας $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ είναι ισόμορφη με την Lie άλγεβρα $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$, θα τις θεωρούμε ταυτόσημες. Στην συνέχεια θα δούμε πως μπορούμε να ταυτίσουμε την Lie άλγεβρα μίας Lie υποομάδας των $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ και $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ με μία Lie υποάλγεβρα των $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$, $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$.

Ορισμός 2.3.5. Έστω H, G δύο ομάδες Lie και $F: H \to G$ ένας ομομορφισμός ομάδων Lie. Ορίζουμε την απεικόνιση $F_*: L(H) \to L(G)$ ως εξής: Επειδή $F(e)=e'$, όπου e και e' είναι τα μοναδιαία στοιχεία στις ομάδες H και G αντιστοίχως, το διαφορικό της F στην μονάδα θα είναι μία απεικόνιση $F_{*,e}: \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$. Αν λοιπόν $A \in \mathfrak{g}$ και $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ είναι τα αριστερά αναλλοίωτα διανυσματικά πεδία στην H και στην G αντιστοίχως που παράγονται από τα διανύσματα A, $B = F_{*,e}(A)$, τότε

$$F_*\left(\tilde{A}\right) = \tilde{B}.$$

Αν $\tilde{A}$ είναι ένα αριστερά αναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο στην H ,τότε το $F_*\tilde{A}$ λέγεται push-forward του $\tilde{A}$ μέσω του ομομορφισμού F •

Πρόταση 2.3.6. Έστω $F: H \to G$ ένας ομομορφισμός ομάδων Lie και $\tilde{A} \in L(H)$. Τότε το $\tilde{A}$ είναι F συσχετιζόμενο με το $F_*\tilde{A} \in L(G)$.

Απόδειξη. Έστω $\tilde{B} = F_*\tilde{A}$. Θα δείξουμε ότι για κάθε $h \in H$

$$\tilde{B}_{F(h)} = F_{*,h}\tilde{A}_h.$$

Πράγματι από τον ορισμό του αριστερά αναλλοίωτου διανυσματικού πεδίου και τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε

$$\begin{aligned} F_{*,h}\tilde{A}_h &= F_{*,h}\left((\ell_h)_{*,e}A\right) \\ &= \left(F_{*,h}\circ(\ell_h)_{*,e}\right)A \\ &= (F\circ\ell_h)_{*,e}A \end{aligned}$$

Όμως επειδή $F\circ\ell_h = \ell_{F(h)}\circ F$ συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned} F_{*,h}\tilde{A}_h &= (\ell_{F(h)}\circ F)_{*,e}A \\ &= (\ell_{F(h)})_{*,e'}\left(F_{*,e}(A)\right) \\ &= (\ell_{F(h)})_{*,e'}B \\ &= \tilde{B}_{F(h)} \end{aligned}$$

και ολοκληρώνεται η απόδειξη της πρότασης□

Τώρα μπορούμε να διατυπώσουμε και να αποδείξουμε την βασική πρόταση αυτής της ενότητας. Ότι δηλαδή σε έναν ομομορφισμό ομάδων Lie το διαφορικό στην μονάδα είναι ένας ομομορφισμός αλγεβρών Lie.

Πρόταση 2.3.7. Έστω $F: H \to G$ ένας ομομορφισμός ομάδων Lie. Τότε το διαφορικό στην μονάδα $F_{*,e}: \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ είναι ένας ομομορφισμός αλγεβρών Lie.

Απόδειξη. Έστω A, B διανύσματα της $\mathfrak{h}$. Θα δείξουμε ότι

$$F_{*,e}\left[A,B\right] = \left[F_{*,e}A, F_{*,e}B\right].$$

Σύμφωνα με την πρόταση που προηγήθηκε το $\tilde{A}$ είναι F συσχετιζόμενο με το $\widetilde{F_{*,e}A}$ και το $\tilde{B}$ είναι F συσχετιζόμενο με το $\widetilde{F_{*,e}B}$. Τότε όμως από την πρόταση 2.2.7 οι αγκύλες Lie $\left[\tilde{A}, \tilde{B}\right]$ και $\left[\widetilde{F_{*,e}A}, \widetilde{F_{*,e}B}\right]$ είναι F συσχετιζόμενες. Συνεπάγεται λοιπόν ότι

$$\begin{aligned} F_{*,e}\left[\tilde{A}, \tilde{B}\right]_e &= \left[\widetilde{F_{*,e}A}, \widetilde{F_{*,e}B}\right]_{F(e)} \\ &= \left[\widetilde{F_{*,e}A}, \widetilde{F_{*,e}B}\right]_{e'}. \end{aligned}$$

Όμως από τον ορισμό της αγκύλης Lie

$$\left[\tilde{A}, \tilde{B}\right]_e = \left[A,B\right] \ , \ \left[\widetilde{F_{*,e}A}, \widetilde{F_{*,e}B}\right]_{e'} = \left[F_{*,e}A, F_{*,e}B\right]$$

και έπεται η ζητούμενη ισότητα□

Πόρισμα 2.3.7. Έστω H μία Lie υποομάδα της G, τότε όπως έχουμε δει η απεικόνιση εγκλεισμού $\iota: H \to G$ είναι λεία και το διαφορικό της $\iota_{*,e}: \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ είναι ένας μονομορφισμός γραμμικών χώρων. Μπορούμε λοιπόν να υιοθετήσουμε την σύμβαση

$$\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}.$$

Όμως τότε, σύμφωνα με την πρόταση που προηγήθηκε, η αγκύλη Lie στην $\mathfrak{h}$ θα είναι η αγκύλη Lie της $\mathfrak{g}$ περιορισμένη στην $\mathfrak{h}$. Μάλιστα η $\mathfrak{h}$ θα είναι μία Lie υποάλγεβρα της $\mathfrak{g}$. Επίσης κάτω από την σύμβαση αυτή η εκθετική απεικόνιση $\exp_H: \mathfrak{h} \to H$ στην Lie ομάδα H είναι ο περιορισμός της εκθετικής απεικόνισης $\exp_G: \mathfrak{g} \to G$ στην $\mathfrak{h}$,

$$\exp_H = \exp_G \big| H .$$

Πρόταση 2.3.8. Η Lie άλγεβρα της ειδικής μοναδιακής ομάδας $\mathrm{SU}(2)$ είναι η $\mathfrak{su}(2)$.

Απόδειξη. Έστω $\mathfrak{h}$ η Lie άλγεβρα της ειδικής μοναδιακής ομάδας $\mathrm{SU}(2)$ και $\mathfrak{gl}(2,\mathbb{C})$ η Lie άλγεβρα της μιγαδικής γενικής γραμμικής ομάδας $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$. Η $\mathrm{SU}(2)$ είναι μία Lie υποομάδα της $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ και θα έχουμε

$$\mathfrak{h} \subset \mathfrak{gl}(2,\mathbb{C}).$$

Έστω $X \in \mathfrak{h}$. Υπάρχει λεία καμπύλη $\varphi : \mathbb{R} \to \mathrm{SU}(2)$ τέτοια ώστε $\varphi(0) = I$ και $\varphi'(0) = X$. Η καμπύλη φ ικανοποιεί την ισότητα

$$\varphi \cdot \varphi^* = I$$

και αν $\det : \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ η απεικόνιση της ορίζουσας, τότε

$$\det \circ \varphi = 1.$$

Από την πρώτη ισότητα παίρνουμε

$$\varphi' \cdot \varphi^* + \varphi \cdot \left(\varphi'\right)^* = 0$$

οπότε

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi'(0) \cdot \varphi(0)^* + \varphi(0) \cdot \left(\varphi'(0)\right)^* \\ &= X \cdot I + I \cdot X^* \\ &= X + X^*. \end{aligned}$$

Από την δεύτερη έχουμε

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\det \circ \varphi\right)'(0) \\ &= \left(\det \circ \varphi\right)_{*,0}\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_0\right) \\ &= \left(\det\right)_{*,I}\left(\varphi_{*,0}\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_0\right)\right) \\ &= \left(\det\right)_{*,I}\left(\varphi'(0)\right) \\ &= \left(\det\right)_{*,I}\left(X\right) \\ &= TrX. \end{aligned}$$

Για την τελευταία ισότητα δες [3] σελ. 157. Συνοψίζοντας $\mathfrak{h} \leq \mathfrak{su}(2)$. Όμως

$$\dim \mathfrak{h} = 3 = \dim \mathfrak{su}(2)$$

και έπεται η ισότητα $\mathfrak{h} = \mathfrak{su}(2)$ □

Πρόταση 2.3.9. Η Lie άλγεβρα της ειδικής ορθογώνιας ομάδας $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$ είναι η $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$.

Απόδειξη. Έστω $\mathfrak{h}$ η Lie άλγεβρα της ειδικής ορθογώνιας ομάδας $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$ και $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ η Lie άλγεβρα της γενικής γραμμικής ομάδας $\mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$. Η $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$ είναι μία Lie υποομάδα της $\mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$ και θα έχουμε

$$\mathfrak{h} \subset \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R}).$$

Έστω $X \in \mathfrak{h}$. Υπάρχει λεία καμπύλη $\varphi : \mathbb{R} \to \mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$ τέτοια ώστε $\varphi(0) = I$ και $\varphi'(0) = X$. Όμως $\varphi \cdot \varphi^T = I$ και συνεπάγεται ότι

$$\varphi' \cdot \varphi^T + \varphi \cdot (\varphi')^T = 0.$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi'(0)\cdot\varphi(0)^T + \varphi(0)\cdot\varphi'(0)^T \\ &= X\cdot I^T + I\cdot X^T \\ &= X + X^T \end{aligned},$$

οπότε $X \in \mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$. Έτσι έχουμε δείξει ότι $\mathfrak{h} \le \mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$. Όμως

$$\dim \mathfrak{h} = 3 = \dim \mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$$

και αναγκαστικά θα έχουμε $\mathfrak{h} = \mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$ □

Πρόταση 2.3.10. Οι Lie άλγεβρες $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$, $\mathfrak{su}(2)$ και $\mathfrak{g}_{\mathbf{Q}}$ είναι ισόμορφες.

Απόδειξη. Θεωρούμε την γραμμική απεικόνιση $T_1 : \mathfrak{g}_{\mathbf{Q}} \to \mathfrak{su}(2)$ την οποία ορίζουμε ως εξής

$$T_1(\mathbf{i}) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix},\ T_1(\mathbf{j}) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},\ T_1(\mathbf{k}) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}.$$

Επειδή $\{T_1(\mathbf{i}), T_1(\mathbf{j}), T_1(\mathbf{k})\}$ είναι μία βάση της $\mathfrak{su}(2)$, η T_1 είναι ένας ισομορφισμός γραμμικών χώρων. Θα δείξουμε ότι είναι και ένας ομομορφισμός Lie αλγεβρών. Για αυτό αρκεί να δείξουμε ότι τα διανύσματα της βάσης $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\left[T_1(\mathbf{i}), T_1(\mathbf{j})\right] = T_1[\mathbf{i}, \mathbf{j}]$$

$$\left[T_1(\mathbf{j}), T_1(\mathbf{k})\right] = T_1[\mathbf{j}, \mathbf{k}]$$

$$\left[T_1(\mathbf{k}), T_1(\mathbf{i})\right] = T_1[\mathbf{k}, \mathbf{i}].$$

Πράγματι για την πρώτη ισότητα θα έχουμε

$$\begin{aligned} \left[T_1(\mathbf{i}), T_1(\mathbf{j})\right] &= T_1(\mathbf{i})T_1(\mathbf{j}) - T_1(\mathbf{j})T_1(\mathbf{i}) \\ &= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} \\ &= T_1(\mathbf{k}) \\ &= T_1[\mathbf{i}, \mathbf{j}]. \end{aligned}$$

Ομοίως αποδεικνύουμε και τις άλλες δύο. Έτσι έχουμε δείξει ότι

$$\mathfrak{su}(2) \cong \mathfrak{g}_{\mathbf{Q}}.$$

Τώρα θεωρούμε την γραμμική απεικόνιση $T_2 : \mathfrak{g}_{\mathbf{Q}} \to \mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$ την οποία ορίζουμε ως εξής

$$T_2(\mathbf{i}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ T_2(\mathbf{j}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ T_2(\mathbf{k}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Πάλι επειδή $\{T_2(\mathbf{i}), T_2(\mathbf{j}), T_2(\mathbf{k})\}$ είναι μια βάση της $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$, η T_2 θα είναι ένας ισομορφισμός γραμμικών χώρων. Για να ολοκληρώσουμε θα δείξουμε ότι είναι και ομομορφισμός Lie αλγεβρών. Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned}
\left[T_2(\mathbf{i}), T_2(\mathbf{j})\right] &= T_2(\mathbf{i})T_2(\mathbf{j}) - T_2(\mathbf{j})T_2(\mathbf{i}) \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= T_2(\mathbf{k}) \\
&= T_2[\mathbf{i}, \mathbf{j}].
\end{aligned}$$

Ομοίως δείχνουμε τις ισότητες

$$\left[T_2(\mathbf{j}), T_2(\mathbf{k})\right] = T_2[\mathbf{j}, \mathbf{k}]$$

$$\left[T_2(\mathbf{k}), T_2(\mathbf{i})\right] = T_2[\mathbf{k}, \mathbf{i}]\,.$$

Οπότε θα έχουμε $\mathfrak{g}_{\mathbf{Q}} \cong \mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$ και ολοκληρώνεται η απόδειξη της πρότασης□

Πρόταση 2.3.11. Η Lie άλγεβρα καρτεσιανό γινόμενο $\mathfrak{su}(2)\times\mathfrak{su}(2)$ και η Lie άλγεβρα $\mathfrak{so}(4,\mathbb{R})$ είναι ισόμορφες.

Απόδειξη. Θεωρούμε την Lie άλγεβρα καρτεσιανό γινόμενο $\mathfrak{g}_{\mathbf{Q}}\times\mathfrak{g}_{\mathbf{Q}}$ και ορίζουμε την γραμμική απεικόνιση $S:\mathfrak{g}_{\mathbf{Q}}\times\mathfrak{g}_{\mathbf{Q}} \to \mathfrak{so}(4,\mathbb{R})$ ως εξής

$$S(\mathbf{i},0) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, S(\mathbf{j},0) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, S(\mathbf{k},0) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S(0,\mathbf{i}) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, S(0,\mathbf{j}) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, S(0,\mathbf{k}) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Τότε δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι $\{S(0,\mathbf{i}), S(0,\mathbf{j}), S(0,\mathbf{k}), S(\mathbf{i},0), S(\mathbf{j},0), S(\mathbf{k},0)\}$ είναι μια βάση της $\mathfrak{so}(4,\mathbb{R})$ και η S είναι ένας ισομορφισμός γραμμικών χώρων.

Θα δείξουμε ότι είναι και ένας ομομορφισμός Lie αλγεβρών. Σύμφωνα με την πρόταση 4.3.1 αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $i, j \in \{1,2,...,6\}$ υπάρχουν $a_{ij1}, a_{ij2},..., a_{ij6} \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\left[S(\mathbf{e}_i),S(\mathbf{e}_j)\right]=\sum_{k=1}^{6}a_{ijk}S(\mathbf{e}_k)\,,$$

όπου $\mathbf{e}_1=(0,\mathbf{i}),\mathbf{e}_2=(0,\mathbf{j}),...,\mathbf{e}_6=(\mathbf{k},0)$. Για την αγκύλη $\left[S(\mathbf{i},0),S(\mathbf{j},0)\right]$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\left[S(\mathbf{i},0),S(\mathbf{j},0)\right]&=S(\mathbf{i},0)S(\mathbf{j},0)-S(\mathbf{j},0)S(\mathbf{i},0)\\
&=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\-1&0&0&0\end{bmatrix}-\frac{1}{4}\begin{bmatrix}0&0&0&-1\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}\\
&=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\-1&0&0&0\end{bmatrix}\\
&=S(\mathbf{k},0).
\end{aligned}$$

Οι υπολογισμοί για τις υπόλοιπες αγκύλες είναι όμοιοι και συμπεραίνουμε ότι η S είναι ένας ισομορφισμός Lie αλγεβρών. Επίσης η απεικόνιση $T_1\times T_1:\mathfrak{g}_{\mathbf{Q}}\times\mathfrak{g}_{\mathbf{Q}}\to\mathfrak{su}(2)\times\mathfrak{su}(2)$ είναι ένας ισομορφισμός Lie αλγεβρών και κατά συνέπεια η $S\circ\left(T_1\times T_1\right)^{-1}:\mathfrak{su}(2)\times\mathfrak{su}(2)\to\mathfrak{so}(4,\mathbb{R})$ είναι ένας ισομορφισμός Lie αλγεβρών□

2.4 Αναπαραστάσεις Lie αλγεβρών

Ορισμός 2.4.1. Έστω $\mathfrak{g}$ μία Lie άλγεβρα επί του $\mathbb{R}$, V ένας γραμμικός χώρος επί του $\mathbb{C}$ και η Lie άλγεβρα $\mathfrak{gl}(V)$ επί του $\mathbb{R}$. Αν $\rho:\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(V)$ είναι ένας ομομορφισμός Lie αλγεβρών, τότε η τριάδα $(\mathfrak{g},V,\rho)$ ονομάζεται αναπαράσταση της Lie άλγεβρας $\mathfrak{g}$ στον χώρο V.

Αν ο V είναι ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο $\langle\ ,\ \rangle$ και $\rho(\mathfrak{g})\subset\mathfrak{u}(V)$, τότε η αναπαράσταση $(\mathfrak{g},V,\rho)$ ονομάζεται αντιερμιτιανή•

Ορισμός 2.4.2. Έστω $\mathfrak{g}$ μία Lie άλγεβρα επί του $\mathbb{R}$ και V ένας γραμμικός χώρος επί του $\mathbb{R}$. Μία απεικόνιση $D:\mathfrak{g}\times V\to V$ η οποία ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες

(i). για κάθε $A,B\in\mathfrak{g}$ και για κάθε $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ $D(\lambda A+\mu B,x)=\lambda D(A,x)+\mu D(B,x)$

(ii). για κάθε $A,B\in\mathfrak{g}$ $D\left(\left[A,B\right],x\right)=D(A,D(B,x))-D(B,D(A,x))$

ονομάζεται δράση της Lie άλγεβρας $\mathfrak{g}$ στον χώρο V και γράφουμε $D(A,x)=A\cdot x$•

Παρατήρηση 2.4.3. Υπάρχει μία αντιστοιχία ανάμεσα στις αναπαραστάσεις και τις δράσεις μίας Lie άλγεβρας σε έναν γραμμικό χώρο. Αν μας δώσουν μία αναπαράσταση $(\mathfrak{g},V,\rho)$ της Lie άλγεβρας $\mathfrak{g}$ στον χώρο V, τότε επάγεται μία δράση $D:\mathfrak{g}\times V\to V$ της $\mathfrak{g}$ στον V,

$$A \cdot x = \rho(A)(x).$$

Αντιστρόφως αν μας δώσουν μία δράση $D : \mathfrak{g} \times V \to V$ της $\mathfrak{g}$ στον χώρο V τότε επάγεται μια αναπαράσταση $(\mathfrak{g}, V, \rho)$ ως εξής

$$\rho(A)(x) = A \cdot x.$$

Συνεπώς όταν μιλάμε για την αναπαράσταση μίας Lie άλγεβρας θα αναφερόμαστε και στην αντίστοιχη δράση της, όποτε το κρίνουμε πιο βολικό και αντιστρόφως.

Η αναπαράσταση της Lie άλγεβρας μιας ομάδας Lie. Ας υποθέσουμε ότι (G, V, ρ) είναι η αναπαράσταση μίας ομάδας Lie G στον μιγαδικό γραμμικό χώρο πεπερασμένης διάστασης V. Τότε σύμφωνα με την πρόταση 2.3.7, το διαφορικό $\rho_* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ της ρ στην μονάδα είναι ένας ομομορφισμός αλγεβρών Lie και επάγεται έτσι μία αναπαράσταση $(\mathfrak{g}, V, \rho_*)$ της Lie άλγεβρας $\mathfrak{g}$ στον χώρο V. Μάλιστα σε κάθε $A \in \mathfrak{g}$ θα έχουμε

$$\rho_*(A) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \rho(\exp tA).$$

Στα επόμενα θα δούμε ότι αν ομάδα Lie G είναι συνεκτική, τότε η μελέτη της αναπαράστασης (G, V, ρ) είναι ουσιαστικά ισοδύναμη με την μελέτη της αναπαράστασης $(\mathfrak{g}, V, \rho_*)$. Αυτό βασίζεται εν μέρη στην πρόταση 1.2.1, σύμφωνα με την οποία μία περιοχή $U \ni 1$ παράγει όλη την ομάδα G. Αν λάβουμε υπόψη και την εκθετική απεικόνιση $\exp : \mathfrak{g} \to G$, η οποία σύμφωνα με την πρόταση 2.2.15 είναι μία τοπική αμφιδιαφόριση, τότε καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η G παράγεται από στοιχεία της μορφής

$$\exp(tA_1), \ldots, \exp(tA_n) \ , \ 0 \le |t| < \varepsilon$$

όπου $\{A_1, \ldots, A_n\}$ είναι μία βάση της $\mathfrak{g}$. Επίσης η καμπύλη $\rho(\exp tA) : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}(V)$ είναι η μονοπαραμετρική υποομάδα του διανύσματος $\rho_*(A) \in \mathfrak{gl}(V)$ και σύμφωνα με την πρόταση 2.2.14 θα έχει την μορφή

$$\rho(\exp tA) = \exp\big(t\rho_*(A)\big).$$

Όμως σύμφωνα με το παράδειγμα 2.2.15 οι μονοπαραμετρικές υποομάδες της $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ μπορούν να εκφραστούν σε μία δυναμοσειρά

$$\exp\big(t\rho_*(A)\big) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \big(\rho_*(A)\big)^k.$$

Η δράση λοιπόν των στοιχείων της μορφής $\exp(tA_1), \ldots, \exp(tA_n)$ στον χώρο V μπορεί να γραφεί ως

$$\exp(tA_i) \cdot x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \big(A_i \cdot x\big)^k$$

και συνεπώς η δράση της G στον V μπορεί να περιγραφεί πλήρως από την δράση της $\mathfrak{g}$ ♦

Ορισμός 2.4.3. Έστω $\mathfrak{g}$ μία άλγεβρα Lie και $(\mathfrak{g}, V, \rho)$, $(\mathfrak{g}, W, \sigma)$ αναπαραστάσεις της $\mathfrak{g}$ στους μιγαδικούς γραμμικούς χώρους V, W. Μπορούμε να ορίσουμε νέες αναπαραστάσεις της $\mathfrak{g}$ στους χώρους $V \oplus W$ και $V \otimes W$.

Είναι απλό να δούμε ότι η απεικόνιση $\rho \oplus \sigma : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V \oplus W)$ με

$$(\rho \oplus \sigma)(A)(x + y) = \rho(A)x + \sigma(A)y,$$

είναι ένας ομομορφισμός αλγεβρών Lie και συνεπώς $(\mathfrak{g}, V \oplus W, \rho \oplus \sigma)$ είναι μία αναπαράσταση της άλγεβρας Lie $\mathfrak{g}$ στον χώρο ευθύ άθροισμα $V \oplus W$.

Ακόμη η απεικόνιση $\rho \otimes \sigma : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V \otimes W)$ με

$$(\rho \otimes \sigma)(A)x \otimes y = \rho(A)x \otimes y + x \otimes \sigma(A)y,$$

είναι ένας ομομορφισμός αλγεβρών Lie και συνεπώς $(\mathfrak{g}, V \otimes W, \rho \otimes \sigma)$ είναι μία αναπαράσταση της άλγεβρας Lie $\mathfrak{g}$ στον χώρο τανυστικό γινόμενο $V \otimes W$ •

Για να δικαιολογήσουμε τον παραπάνω ορισμό θα θεωρήσουμε τις αναπαραστάσεις (G, V, ρ), (G, W, σ) της ομάδας Lie G στους χώρους πεπερασμένης διάστασης V, W και την αναπαράσταση τανυστικό γινόμενο $(G, V \otimes W, \rho \otimes \sigma)$. Επάγεται λοιπόν μία αναπαράσταση $\left(\mathfrak{g}, V \otimes W, (\rho \otimes \sigma)_*\right)$ της Lie άλγεβρας $\mathfrak{g}$ στον χώρο $V \otimes W$ με

$$(\rho \otimes \sigma)_*(A) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\rho \otimes \sigma)(\exp(tA)).$$

Σύμφωνα με τον ορισμό 1.4.12 θα έχουμε

$$\begin{aligned}(\rho \otimes \sigma)_*(A) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \rho(\exp(tA) \otimes \sigma(\exp(tA)) \\ &= \left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \rho(\exp(tA)\right) \otimes \sigma(\exp(tA))\Big|_{t=0} + \rho(\exp(tA))\Big|_{t=0} \otimes \left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \sigma(\exp(tA)\right) \\ &= \rho_*(A) \otimes 1_W + 1_V \otimes \sigma_*(A),\end{aligned}$$

που συμφωνεί με τον ορισμό 2.4.3.

Ακόμη αν θεωρήσουμε δύο αναπαραστάσεις $(\mathfrak{g}, V, \rho)$, $(\mathfrak{h}, W, \sigma)$ των αλγεβρών Lie $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ στους χώρους V και W, τότε μπορούμε να γενικεύσουμε τον παραπάνω ορισμό σε μία αναπαράσταση $\rho \otimes \sigma : \mathfrak{g} \times \mathfrak{h} \to \mathfrak{gl}(V \otimes W)$ της Lie άλγεβρας γινόμενο $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$ στον χώρο $V \otimes W$ ως εξής

$$(\rho \otimes \sigma)(A, B)x \otimes y = \rho(A)x \otimes y + x \otimes \sigma(B)y.$$

Η απεικόνιση αυτή είναι ένας ομομορφισμός αλγεβρών Lie και $(\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}, V \otimes W, \rho \otimes \sigma)$ είναι μία αναπαράσταση της Lie άλγεβρας $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$ στον χώρο $V \otimes W$.

Παράδειγμα 2.4.4. Η Lie άλγεβρα πινάκων $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ δρα στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^n$ ως εξής: Αν $A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ και $\mathbf{r} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, τότε

$$A \cdot \mathbf{r} = (A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix})^T .$$

Ομοίως και κάθε Lie υποάλγεβρα της $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ ∎

Παράδειγμα 2.4.5. Η δράση της Lie άλγεβρας $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$ στον $\mathbb{R}^3$ μπορεί να γραφεί στην μορφή εξωτερικού γινομένου διανυσμάτων

$$A \cdot \mathbf{r} = (a_{\mathbf{i}}, a_{\mathbf{j}}, a_{\mathbf{k}}) \times \mathbf{r} ,$$

όπου $(a_{\mathbf{i}}, a_{\mathbf{j}}, a_{\mathbf{k}})$ είναι οι συντεταγμένες του διανύσματος A ως προς την κανονική βάση της $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$

$$\left\{ A_{\mathbf{i}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, A_{\mathbf{j}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\},$$

που παρουσιάσαμε στο παράδειγμα 2.1.6. Μάλιστα έχουμε δείξει στο παράδειγμα 2.3.10 ότι ο $\mathbb{R}^3$ μαζί με το εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων $\times$ είναι μία Lie άλγεβρα ισόμορφη με την $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$ ∎

Παράδειγμα 2.4.6. Θεωρούμε τώρα την μονοπαραμετρική υποομάδα $\gamma_{A_{\mathbf{k}}} : \mathbb{R} \to \mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ του διανύσματος $A_{\mathbf{k}}$. Τότε για κάθε $\kappa \in \mathbb{N}$

$$A_{\mathbf{k}}^{2\kappa} = (-1)^{\kappa} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

και ακόμη

$$A_{\mathbf{k}}^{2\kappa-1} = (-1)^{\kappa} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Συνεπάγεται λοιπόν ότι για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \exp(\theta A_{\mathbf{k}}) &= \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left(\frac{\theta^{2\kappa-1}}{(2\kappa-1)!} (-1)^{\kappa} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) + \sum_{\kappa=0}^{\infty} \left(\frac{\theta^{2\kappa}}{(2\kappa)!} (-1)^{\kappa} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \mathbf{Z}_\theta
\end{aligned}
$$

και συνεπώς $\gamma_{A_{\mathrm{k}}}(\mathbb{R}) = \{\mathbf{Z}_\theta \,|\, \theta \in \mathbb{R}\}$. Η δράση λοιπόν της υποομάδας $\gamma_{A_{\mathrm{k}}}(\mathbb{R})$ στον $\mathbb{R}^3$ έχει ως αποτέλεσμα την στροφή των διανυσμάτων του γύρω από τον άξονα Oz. Ομοίως βρίσκουμε ότι η υποομάδα $\gamma_{A_{\mathrm{j}}}(\mathbb{R})$ αναπαριστά τις στροφές γύρω από τον άξονα Oy και η υποομάδα $\gamma_{A_{\mathrm{i}}}(\mathbb{R})$ τις στροφές γύρω από τον άξονα $\gamma_{A_{\mathrm{i}}}(\mathbb{R})$ ■

Παρατήρηση 2.4.7. Έστω λοιπόν $\mathbf{r} = (x, y, z)$ ένα διάνυσμα του $\mathbb{R}^3$. Τότε σύμφωνα με την παραπάνω πρόταση θα έχουμε

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Z}_\theta \cdot \mathbf{r} &= e^{\theta A_{\mathrm{k}}} \cdot \mathbf{r} \\
&= \left(\sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{1}{\kappa!} \theta^\kappa A_{\mathrm{k}}^\kappa \right) \cdot \mathbf{r} \\
&= \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{1}{\kappa!} \left((\theta A_{\mathrm{k}})^\kappa \cdot \mathbf{r} \right).
\end{aligned}
$$

Από την ισότητα αυτή συμπεραίνουμε ότι το διάνυσμα A_{k} δρα άπειρες φορές στο $\mathbf{r}$ πετυχαίνοντας μία πεπερασμένη στροφή του γύρω από τον άξονα Oz. Για τον λόγο αυτό οι φυσικοί αποκαλούν το A_{k} απειροστό γεννήτορα της δράσης της υποομάδας $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})_{\mathrm{z}}$ στα διανύσματα του $\mathbb{R}^3$.

Παράδειγμα 2.4.8. Όπως είδαμε στο τέλος του πρώτου κεφαλαίου, σε κάθε ιδιόχωρο $\mathcal{H}^\infty(E)$ της Hamiltonian $\mathbf{H}$ του ατόμου του υδρογόνου που αντιστοιχεί στην αρνητική ιδιοτιμή E, έχουμε και μία αναπαράσταση ρ της $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$. Επάγεται λοιπόν η αναπαράσταση ρ_* της Lie άλγεβρας $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$ στον χώρο συναρτήσεων $\mathcal{H}^\infty(E)$ ως εξής

$$
\rho_*(A) f(x, y, z) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f\left(\exp(tA) \cdot (x, y, z)\right).
$$

Έτσι σε κάθε ιδιόχωρο $\mathcal{H}^\infty(E)$ έχουμε και μία αναπαράσταση της $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$ η οποία δίνεται από τον παραπάνω τύπο.

Η Lie άλγεβρα $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$ δρα στις συναρτήσεις του $\mathcal{H}^\infty(E)$ ως ένας διαφορικός τελεστής παραγωγίζοντας τις σε κάθε $x \in \mathbb{R}^3$ κατά την διεύθυνση του διανύσματος $A \cdot x$. Ας θεωρήσουμε όμως την βάση

$$
\left\{ A_{\mathrm{i}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, A_{\mathrm{j}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_{\mathrm{k}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}
$$

της $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$. Τότε από τον κανόνα της αλυσίδας θα έχουμε

$$\begin{aligned}\rho_*(A)f(x,y,z) &= \vec{\nabla}f(x,y,z)\cdot\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\left(\exp(tA)^{-1}\cdot(x,y,z)\right)\\ &= \vec{\nabla}f(x,y,z)\cdot(-A\cdot(x,y,z))\\ &= -\vec{\nabla}f(x,y,z)\cdot(A\cdot(x,y,z)).\end{aligned}$$

Τώρα επειδή

$$\begin{aligned}A_{\mathbf{i}}\cdot(x,y,z) &= (0,-z,y)\\ A_{\mathbf{j}}\cdot(x,y,z) &= (z,0,-x)\\ A_{\mathbf{k}}\cdot(x,y,z) &= (-y,x,0),\end{aligned}$$

βρίσκουμε ότι οι διαφορικοί τελεστές $\rho_*(A_{\mathbf{i}})$, $\rho_*(A_{\mathbf{j}})$ και $\rho_*(A_{\mathbf{k}})$ είναι οι

$$\begin{aligned}\rho_*(A_{\mathbf{i}}) &= z\partial_y - y\partial_z\\ \rho_*(A_{\mathbf{j}}) &= x\partial_z - z\partial_x\\ \rho_*(A_{\mathbf{k}}) &= y\partial_x - x\partial_y\end{aligned}$$

και συνεπώς θα υπάρχουν $a_{\mathbf{i}}, a_{\mathbf{j}}, a_{\mathbf{k}} \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε

$$\rho_*(A) = a_{\mathbf{i}}\rho_*(A_{\mathbf{i}}) + a_{\mathbf{j}}\rho_*(A_{\mathbf{j}}) + a_{\mathbf{k}}\rho_*(A_{\mathbf{k}}) \blacksquare$$

Παρατήρηση 2.4.9. Η αναπαράσταση ρ_* της Lie άλγεβρας $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$ στον $\mathcal{H}^\infty(E)$ σχετίζεται με την στροφορμή. Συγκεκριμένα οι συνιστώσες της στροφορμής $\mathbf{L}_{\mathbf{i}}$, $\mathbf{L}_{\mathbf{j}}$, $\mathbf{L}_{\mathbf{k}}$ είναι διαφορικοί τελεστές οι οποίοι δρουν στον $\mathcal{H}^\infty(E)$ τέτοιοι ώστε

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_{\mathbf{i}} &= \rho_*(A_{\mathbf{i}})\\ \mathbf{L}_{\mathbf{j}} &= \rho_*(A_{\mathbf{j}})\\ \mathbf{L}_{\mathbf{k}} &= \rho_*(A_{\mathbf{k}}).\end{aligned}$$

Ακόμη το μέτρο της στροφορμής $\mathbf{L}^2$ είναι ένας διαφορικός τελεστής που δρα στον $\mathcal{H}^\infty(E)$,

$$\mathbf{L}^2 = \mathbf{L}_{\mathbf{i}}^2 + \mathbf{L}_{\mathbf{j}}^2 + \mathbf{L}_{\mathbf{k}}^2$$

και συνεπώς $\mathbf{L}^2 = \rho_*(A_{\mathbf{i}})^2 + \rho_*(A_{\mathbf{j}})^2 + \rho_*(A_{\mathbf{k}})^2$. Αργότερα θα δούμε ότι $\mathbf{L}^2$ είναι ο τελεστής Casimir της αναπαράστασης $\left(\mathfrak{so}(3,\mathbb{R}), \mathcal{H}^\infty(E), \rho_*\right)$. Στο εξής θα συμβολίζουμε την ρ_* με $\mathbf{L}$.

Ορισμός 2.4.10. Έστω $\mathfrak{g}$ μία Lie άλγεβρα επί του $\mathbb{R}$, V, W μιγαδικοί γραμμικοί χώροι και $(\mathfrak{g}, V, \rho)$, $(\mathfrak{g}, W, \sigma)$ αναπαραστάσεις της $\mathfrak{g}$ στους χώρους V, W. Μία γραμμική απεικόνιση $T: V \to W$ λέγεται ομομορφισμός αναπαραστάσεων Lie αλγεβρών, αν για κάθε $A \in \mathfrak{g}$ ισχύει

$$T \circ \rho(A) = \sigma(A) \circ T.$$

Αν επιπλέον η T είναι ισομορφισμός γραμμικών χώρων, τότε λέγεται ισομορφισμός αναπαραστάσεων Lie αλγεβρών. Αν υπάρχει ένας τέτοιος ισομορφισμός, τότε οι αναπαραστάσεις $(\mathfrak{g}, V, \rho)$, $(\mathfrak{g}, W, \sigma)$ λέγονται ισόμορφες και γράφουμε $(\mathfrak{g}, V_1, \rho_1) \cong (\mathfrak{g}, V_2, \rho_2)$ •

Αν $(\mathfrak{g}, V, \rho)$ είναι μία αναπαράσταση της $\mathfrak{g}$ στον χώρο V και $T : V \to V$ είναι ένας ομομορφισμός αναπαραστάσεων, τότε σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, για κάθε $A \in \mathfrak{g}$ θα έχουμε

$$T \circ \rho(A) = \rho(A) \circ T .$$

Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι ο γραμμικός τελεστής T μετατίθεται με την αναπαράσταση $(\mathfrak{g}, V, \rho)$.

Πρόταση 2.4.11. Έστω (G, V, ρ) αναπαράσταση της συνεκτικής ομάδας Lie G στον χώρο πεπερασμένης διάστασης V και $(\mathfrak{g}, V, \rho_*)$ η αναπαράσταση της Lie άλγεβρας της $\mathfrak{g}$. Τότε ένας γραμμικός τελεστής $T : V \to V$ μετατίθεται με την ρ αν και μόνο αν μετατίθεται με την ρ_*.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι $T : V \to V$ είναι ένας γραμμικός τελεστής ο οποίος μετατίθεται με την αναπαράσταση (G, V, ρ) και $A \in \mathfrak{g}$. Τότε

$$\begin{aligned} T \circ \rho_*(A) &= T \circ \left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \rho(\exp(tA)) \right) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \big(T \circ \rho(\exp(tA)) \big) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \big(\rho(\exp(tA) \circ T \big) \\ &= \left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \rho(\exp(tA) \right) \circ T \\ &= \rho_*(A) \circ T. \end{aligned}$$

Ο T λοιπόν θα μετατίθεται με την ρ_*.

Έστω τώρα ότι ο T μετατίθεται με την αναπαράσταση $(\mathfrak{g}, V, \rho_*)$ της Lie άλγεβρας $\mathfrak{g}$ και $\gamma_A : \mathbb{R} \to G$ η μονοπαραμετρική υποομάδα τυχόντος διανύσματος $A \in \mathfrak{g}$. Δηλαδή

$$\gamma_A(t) = \exp(tA) .$$

Τότε $\rho \circ \gamma_A : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}(V)$ είναι η μονοπαραμετρική υποομάδα του διανύσματος $\rho_*(A) \in \mathfrak{gl}(V)$ και θα έχει την μορφή

$$\begin{aligned} \rho \circ \gamma_A(t) &= \exp\big(t \rho_*(A) \big) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \big(\rho_*(A) \big)^n. \end{aligned}$$

Συνεπάγεται λοιπόν ότι

$$
\begin{aligned}
T \circ \left(\rho \circ \gamma_A(t)\right) &= T \circ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\left(\rho_*(A)\right)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\left(T \circ \rho_*(A)\right)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\left(\rho_*(A) \circ T\right)^n \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\left(\rho_*(A)\right)^n\right) \circ T \\
&= \left(\rho \circ \gamma_A(t)\right) \circ T.
\end{aligned}
$$

Όμως η ομάδα G είναι συνεκτική και αν $\{A_1,...,A_n\}$ είναι μία βάση της $\mathfrak{g}$, τότε η G παράγεται από στοιχεία της μορφής

$$\exp(tA_1),...,\exp(tA_n)\ ,\ 0 \leq |t| < \varepsilon\ .$$

Έπεται λοιπόν ότι για κάθε $g \in G$ θα έχουμε $T \circ \rho(g) = \rho(g) \circ T$ □

Παράδειγμα 2.4.12. Ας θεωρήσουμε την δράση της $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$ σε κάποιον ιδιόχωρο $\mathcal{H}^{\infty}(E)$ της Hamiltonian, που περιγράψαμε στο παράδειγμα 4.4.8. Τότε σύμφωνα με την παραπάνω πρόταση, η δράση αυτή της $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$ μετατίθεται με την Hamiltonian $\mathbf{H}$. Δηλαδή για κάθε $A \in \mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$

$$\mathbf{H} \circ \rho_*(A) = \rho_*(A) \circ \mathbf{H}\ ■$$

Ορισμός 2.4.13. Έστω $\mathfrak{g}$ μία Lie άλγεβρα επί του $\mathbb{R}$, V ένας γραμμικός χώρος επί του $\mathbb{C}$ και $(\mathfrak{g},V,\rho)$ μία αναπαράσταση της $\mathfrak{g}$ στον χώρο V. Ένας υπόχωρος $W \leq V$ λέγεται αναλλοίωτος υπόχωρος της αναπαράστασης $(\mathfrak{g},V,\rho)$, αν για κάθε $A \in \mathfrak{g}$ έχουμε

$$\rho(A)(W) \leq W\ .$$

Αν W είναι ένας αναλλοίωτος υπόχωρος της $(\mathfrak{g},V,\rho)$ τότε η γραμμική απεικόνιση $\rho_W : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(W)$ με

$$\rho_W(A) = \rho(A)\big|W$$

είναι ένας ομομορφισμός Lie αλγεβρών και η αναπαράσταση $(\mathfrak{g},W,\rho_W)$ ονομάζεται υποαναπαράσταση της $(\mathfrak{g},V,\rho)$.

Αν οι μοναδικοί αναλλοίωτοι υπόχωροι της αναπαράστασης $(\mathfrak{g},V,\rho)$ είναι ο $\{0\}$ και ο V, τότε αυτή ονομάζεται ανάγωγη•

Πρόταση 2.4.14. Έστω (G,V,ρ) αναπαράσταση της συνεκτικής ομάδας Lie G στον χώρο πεπερασμένης διάστασης V και $(\mathfrak{g},V,\rho_*)$ η αναπαράσταση της Lie άλγεβρας της $\mathfrak{g}$. Ένας υπόχωρος $W \subset V$ είναι αναλλοίωτος υπόχωρος της αναπαράστασης (G, V, ρ) αν και μόνο αν είναι αναλλοίωτος υπόχωρος της αναπαράστασης $(\mathfrak{g}, V, \rho_*)$.

Απόδειξη. Έστω $W \subset V$ αναλλοίωτος υπόχωρος της (G, V, ρ), $A \in \mathfrak{g}$ και $x \in W$. Τότε

$$\begin{aligned}\rho_*(A)x &= \left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \rho\big(\exp(tA)\big)\right)x \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\Big(\rho\big(\exp(tA)\big)x\Big) \in W\end{aligned}$$

γιατί ο W είναι πεπερασμένης διάστασης και συνεπώς κλειστός υπόχωρος του V. Έτσι ο W είναι αναλλοίωτος υπόχωρος και της ρ_*.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι $W \subset V$ είναι αναλλοίωτος υπόχωρος της $(\mathfrak{g}, V, \rho_*)$ και $\gamma_A : \mathbb{R} \to G$ είναι η μονοπαραμετρική υποομάδα του τυχόντος διανύσματος $A \in \mathfrak{g}$. Τότε ομοίως όπως στην απόδειξη της πρότασης 2.4.11 $\rho \circ \gamma_A : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}(V)$ είναι η μονοπαραμετρική υποομάδα του διανύσματος $\rho_*(A) \in \mathfrak{gl}(V)$ και

$$\rho \circ \gamma_A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\big(\rho_*(A)\big)^n.$$

Συνεπάγεται λοιπόν ότι για κάθε $x \in W$

$$\rho \circ \gamma_A(t)x = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{t^n}{n!}\big(\rho_*(A)\big)^n x\right) \in W,$$

γιατί ο W είναι κλειστός. Όμως η ομάδα G είναι συνεκτική και αν $\{A_1, ..., A_n\}$ είναι μία βάση της $\mathfrak{g}$, τότε παράγεται από στοιχεία της μορφής

$$\exp(tA_1), ..., \exp(tA_n),\ 0 \leq |t| < \varepsilon.$$

Έπεται λοιπόν ότι για κάθε $g \in G$ θα έχουμε $\rho(g)x \in W$ □

Πρόταση 2.4.15. Έστω $\mathfrak{g}$ μία Lie άλγεβρα, V ένας μιγαδικός γραμμικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο $\langle\ ,\ \rangle$ και $(\mathfrak{g}, V, \rho)$ μία αντιερμιτιανή αναπαράσταση της $\mathfrak{g}$ στον V. Αν $W \subset V$ είναι ένας αναλλοίωτος υπόχωρος της $(\mathfrak{g}, V, \rho)$, τότε και ο $W^{\perp}$ είναι αναλλοίωτος υπόχωρος της $(\mathfrak{g}, V, \rho)$.

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι όμοια με την απόδειξη της πρότασης 1.4.9□

Ορισμός 2.4.16. Έστω $\mathfrak{g}$ μία άλγεβρα Lie και $(\mathfrak{g}, V, \rho)$ αναπαράσταση της $\mathfrak{g}$ στον μιγαδικό γραμμικό χώρο V. Αν υπάρχουν ανάγωγες αναπαραστάσεις $\{(\mathfrak{g}, V_i, \rho_i)\}_{i\in I}$ της $\mathfrak{g}$ τέτοιες ώστε

$$(\mathfrak{g}, V, \rho) \cong (\mathfrak{g}, \bigoplus_{i\in I} V_i, \bigoplus_{i\in I} \rho_i),$$

τότε λέμε ότι η $(\mathfrak{g}, V, \rho)$ αναλύεται σε ευθύ άθροισμα ανάγωγων αναπαραστάσεων•

Παρατήρηση 2.4.16. Ας θεωρήσουμε πάλι μία αναπαράσταση (G,V,ρ) της συνεκτικής ομάδας Lie G στον χώρο πεπερασμένης διάστασης V και την αναπαράσταση $(\mathfrak{g},V,\rho_*)$ της Lie άλγεβρας της $\mathfrak{g}$. Σύμφωνα με την πρόταση 2.4.13 η (G,V,ρ) αναλύεται σε ένα ευθύ άθροισμά ανάγωγων αναπαραστάσεων

$$(G,V,\rho)\cong(G,\bigoplus_{i\in I}V_i,\bigoplus_{i\in I}\rho_i)$$

αν και μόνο αν η $(\mathfrak{g},V,\rho_*)$ αναλύεται στο ευθύ άθροισμα ανάγωγων αναπαραστάσεων

$$(\mathfrak{g},V,\rho_*)\cong\left(\mathfrak{g},\bigoplus_{i\in I}V_i,\bigoplus_{i\in I}(\rho_*)_i\right).$$

Παράδειγμα 2.4.16. Ας θεωρήσουμε πάλι την αναπαράσταση της $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ σε κάποιον ιδιόχωρο $\mathcal{H}^\infty(E)$ της Hamiltonian που αντιστοιχεί στην αρνητική ιδιοτιμή E. Η αναπαράσταση αυτή είναι μοναδιακή και αναλύεται σε ευθύ άθροισμα ανάγωγων αναπαραστάσεων. Συνεπώς και η αναπαράσταση της $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$ στον $\mathcal{H}^\infty(E)$ θα αναλύεται σε ευθύ άθροισμα ανάγωγων αναπαραστάσεων με τον ίδιο ακριβώς τρόπο■

Πρόταση 2.4.17. Έστω $\mathfrak{g}$ μία άλγεβρα Lie, V ένας μιγαδικός γραμμικός χώρος πεπερασμένης διάστασης με εσωτερικό γινόμενο $\langle\ ,\ \rangle$ και $(\mathfrak{g},V,\rho)$ μία αντιερμιτιανή αναπαράσταση της $\mathfrak{g}$ στον V. Τότε η $(\mathfrak{g},V,\rho)$ αναλύεται σε ευθύ άθροισμα ανάγωγων αναπαραστάσεων.

Απόδειξη. Ομοίως όπως αποδείξαμε την πρόταση 1.4.15□

Πρόταση 2.4.18. Έστω $\mathfrak{g}$ μία Lie άλγεβρα επί του $\mathbb{R}$, V_1,V_2 γραμμικοί χώροι επί του $\mathbb{C}$ και $(\mathfrak{g},V_1,\rho_1)$, $(\mathfrak{g},V_2,\rho_2)$ αναπαραστάσεις της $\mathfrak{g}$ στους χώρους V_1,V_2. Αν $T:V_1\to V_2$ είναι ένας ομομορφισμός αναπαραστάσεων Lie αλγεβρών, τότε $\ker(T)$ είναι αναλλοίωτος υπόχωρος της $(\mathfrak{g},V_1,\rho_1)$ και $\mathrm{Im}(T)$ είναι αναλλοίωτος υπόχωρος της $(\mathfrak{g},V_2,\rho_2)$.

Απόδειξη. Έστω $x\in\ker(T)$ και $A\in\mathfrak{g}$. Τότε

$$\begin{aligned}T\left(\rho_1(A)(x)\right)&=T\circ\rho_1(A)(x)\\&=\rho_2(A)\circ T(x)\\&=\rho_2(A)(0)\\&=0\end{aligned}$$

και συνεπώς $\rho_1(A)(x)\in\ker(T)$. Δηλαδή $\ker(T)$ είναι ένας αναλλοίωτος υπόχωρος της αναπαράστασης $(\mathfrak{g},V_1,\rho_1)$.

Έστω τώρα $y=T(x)\in\mathrm{Im}(T)$ και $A\in\mathfrak{g}$. Τότε

$$
\begin{aligned}
\rho_2(A)(y) &= \rho_2(A)\big(T(x)\big) \\
&= \rho_2(A)\circ T(x) \\
&= T\circ \rho_1(A)(x) \\
&= T\big(\rho_1(A)(x)\big),
\end{aligned}
$$

οπότε $\rho_2(A)(y)\in \mathrm{Im}(T)$. Δηλαδή $\mathrm{Im}(T)$ είναι ένας αναλλοίωτος υπόχωρος της αναπαράστασης $(\mathfrak{g},V_2,\rho_2)$ □

Πρόταση 2.4.19. Έστω $\mathfrak{g}$ μία Lie άλγεβρα επί του $\mathbb{R}$, V ένας γραμμικός χώρος επί του $\mathbb{C}$ και $(\mathfrak{g},V,\rho)$ μία αναπαράσταση της $\mathfrak{g}$ στον χώρο V. Αν $T:V\to V$ είναι ένας ομομορφισμός αναπαραστάσεων, δηλαδή για κάθε $A\in\mathfrak{g}$

$$
T\circ\rho(A)=\rho(A)\circ T\ ,
$$

τότε κάθε ιδιόχωρος της T είναι ένας αναλλοίωτος υπόχωρος της αναπαράστασης $(\mathfrak{g},V,\rho)$.

Απόδειξη. Έστω $V(\lambda)$ ένας ιδιόχωρος της T ο οποίος αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda\in\mathbb{C}$, $x\in V(\lambda)$ και $A\in\mathfrak{g}$. Τότε

$$
\begin{aligned}
T\big(\rho(A)(x)\big) &= T\circ\rho(A)(x) \\
&= \rho(A)\circ T(x) \\
&= \rho(A)\big(T(x)\big) \\
&= \rho(A)(\lambda x) \\
&= \lambda\rho(A)(x)
\end{aligned}
$$

και συνεπώς $\rho(A)(x)\in V(\lambda)$. Δηλαδή ο $V(\lambda)$ είναι ένας αναλλοίωτος υπόχωρος της αναπαράστασης $(\mathfrak{g},V,\rho)$ □

Το λήμμα του Schur. Έστω $(\mathfrak{g},V,\rho)$, $(\mathfrak{g},W,\sigma)$ ανάγωγες αναπαραστάσεις της άλγεβρας Lie $\mathfrak{g}$ στους χώρους πεπερασμένης διάστασης V, W. Αν $T:V\to V$ είναι γραμμικός τελεστής ο οποίος μετατίθεται με την $(\mathfrak{g},V,\rho)$, τότε υπάρχει $\lambda\in\mathbb{C}$ τέτοιος ώστε

$$
T=\lambda 1_V\ .
$$

Ακόμη αν οι αναπαραστάσεις $(\mathfrak{g},V,\rho)$, $(\mathfrak{g},W,\sigma)$ είναι μη ισόμορφες και $S:V\to W$ είναι ένας ομομορφισμός αναπαραστάσεων, τότε $S=0$.

Απόδειξη. Είναι όμοια με την απόδειξη του λήμματος του Schur που αφορά αναπαραστάσεις ομάδων Lie□

2.5. Οι ανάγωγες αναπαραστάσεις της Lie άλγεβρας $\mathfrak{su}(2)$

Έστω η Lie άλγεβρα $\mathfrak{su}(2)$. Θα κατασκευάσουμε μία αναπαράσταση της $\mathfrak{su}(2)$ στον μιγαδικό γραμμικό χώρο πολυωνυμικών συναρτήσεων

$$\mathrm{P} = \left\{ p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C} \middle| p \text{ πολυωνυμική συνάρτηση} \right\}.$$

Για αυτό αρκεί να κατασκευάσουμε έναν ομομορφισμό Lie αλγεβρών $U : \mathfrak{su}(2) \to \mathfrak{gl}(\mathrm{P})$. Στην πρόταση 2.3.10 παρουσιάσαμε τον ισομορφισμό Lie αλγεβρών $T_1 : \mathfrak{g}_{\mathbf{Q}} \to \mathfrak{su}(2)$ και είδαμε ότι $\{T_1(\mathbf{i}), T_1(\mathbf{j}), T_1(\mathbf{k})\}$ είναι μία βάση της $\mathfrak{su}(2)$. Για λόγους απλότητας θα θεωρήσουμε την $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ ως βάση της $\mathfrak{su}(2)$ κάτω από τον ισομορφισμό T_1. Θεωρούμε τους λοιπόν τους γραμμικούς διαφορικούς τελεστές $U_{\mathbf{i}}, U_{\mathbf{j}}, U_{\mathbf{k}} : \mathrm{P} \to \mathrm{P}$ με

$$\begin{aligned} U_{\mathbf{i}} &= \frac{i}{2}(x\partial_y - y\partial_y) \\ U_{\mathbf{j}} &= \frac{1}{2}(x\partial_y - y\partial_x) \\ U_{\mathbf{k}} &= \frac{i}{2}(x\partial_y + y\partial_x) \end{aligned}$$

και ορίζουμε την U ως εξής

$$\begin{aligned} U(\mathbf{i}) &= U_{\mathbf{i}} \\ U(\mathbf{j}) &= U_{\mathbf{j}} \\ U(\mathbf{k}) &= U_{\mathbf{k}}. \end{aligned}$$

Θα πρέπει τώρα να δείξουμε ότι η U είναι ένας ομομορφισμός Lie αλγεβρών. Πράγματι δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσουμε ότι ισχύουν

$$\begin{aligned} [U(\mathbf{i}), U(\mathbf{j})] &= U(\mathbf{k}) \\ [U(\mathbf{j}), U(\mathbf{k})] &= U(\mathbf{i}) \\ [U(\mathbf{k}), U(\mathbf{i})] &= U(\mathbf{j}). \end{aligned}$$

Ενδεικτικά για την πρώτη ισότητα έχουμε

$$\begin{aligned} [U(\mathbf{i}), U(\mathbf{j})] &= \frac{i}{4}(x\partial_x - y\partial_y)(x\partial_y - y\partial_x) - \frac{i}{4}(x\partial_y - y\partial_x)(x\partial_x - y\partial_y) \\ &= \frac{i}{4}(x\partial_x x\partial_y - x\partial_x y\partial_x - y\partial_y x\partial_y + y\partial_y y\partial_x) - \frac{i}{4}(x\partial_y x\partial_x - x\partial_y y\partial_y - y\partial_x x\partial_x + y\partial_x y\partial_y) \\ &= \frac{i}{4}(x\partial_y + y\partial_x + x\partial_y + y\partial_x) \\ &= \frac{i}{2}(x\partial_y + y\partial_x) \\ &= U(\mathbf{k}). \end{aligned}$$

Έχουμε λοιπόν μία αναπαράσταση $(\mathfrak{su}(2), \mathrm{P}, U)$ της Lie άλγεβρας $\mathfrak{su}(2)$ στον χώρο των πολυωνυμικών συναρτήσεων P.

Πρόταση 2.5.1. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ο υπόχωρος

$$\mathrm{P}^n = \left\{ p \in \mathrm{P} \middle| p \text{ ομογενής πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού } n \right\}$$

του P είναι ένας αναλλοίωτος υπόχωρος της αναπαράστασης $\left(\mathfrak{su}(2),\mathrm{P},U\right)$ και μάλιστα η υποαναπαράσταση $\left(\mathfrak{su}(2),\mathrm{P}^n,U_n\right)$ είναι ανάγωγη.

Απόδειξη. Έστω $n\in\mathbb{N}$. Θα δείξουμε πρώτα ότι ο υπόχωρος P^n είναι ένας αναλλοίωτος υπόχωρος της αναπαράστασης $\left(\mathfrak{su}(2),\mathrm{P},U\right)$. Πράγματι $B=\left\{x^n, yx^{n-1},..., y^{n-1}x, y^n\right\}$ είναι μία βάση του και για κάθε $x^\kappa y^{n-\kappa}\in B$ έχουμε

$$\begin{aligned}
U_{\mathbf{i}}(x^\kappa y^{n-\kappa}) &= \frac{i}{2}(2\kappa-n)x^\kappa y^{n-\kappa}\\
U_{\mathbf{j}}(x^\kappa y^{n-\kappa}) &= \frac{1}{2}\left((n-\kappa)x^{\kappa+1}y^{n-\kappa-1}-\kappa x^{\kappa-1}y^{n-\kappa+1}\right)\\
U_{\mathbf{k}}(x^\kappa y^{n-\kappa}) &= \frac{i}{2}\left((n-\kappa)x^{\kappa+1}y^{n-\kappa-1}+\kappa x^{\kappa-1}y^{n-\kappa+1}\right).
\end{aligned}$$

Έτσι για κάθε $p\in\mathrm{P}^n$ και για κάθε $A\in\mathfrak{su}(2)$ θα έχουμε $U(A)(p)\in\mathrm{P}^n$.

Τώρα θα δείξουμε ότι η υποαναπαράσταση $\left(\mathfrak{su}(2),\mathrm{P}^n,U_n\right)$ είναι ανάγωγη και για αυτό θα αναπτύξουμε μία τεχνική την οποία αργότερα θα γενικεύσουμε. Αρχικά παρατηρούμε ότι κάθε διάνυσμα $x^\kappa y^{n-\kappa}\in B$ είναι ιδιοδιάνυσμα του γραμμικού τελεστή $U_{\mathbf{i}}$ με ιδιοτιμή $\frac{i}{2}(2\kappa-n)$ και συνεπώς τα ιδιοδιανύσματα του $U_{\mathbf{i}}|_{\mathrm{P}^n}$ παράγουν τον χώρο P^n.

Ορίζουμε δύο γραμμικούς τελεστές $\mathbf{X},\mathbf{Y}\in\mathfrak{gl}(\mathrm{P})$. Τον γραμμικό τελεστή ανόδου $\mathbf{X}:\mathrm{P}\to\mathrm{P}$ με

$$\mathbf{X}=U_{\mathbf{j}}-iU_{\mathbf{k}}=x\partial_y$$

και τον γραμμικό τελεστή καθόδου $Y:\mathrm{P}\to\mathrm{P}$ με

$$\mathbf{Y}=U_{\mathbf{j}}+iU_{\mathbf{k}}=-y\partial_x.$$

Αυτοί οι τελεστές δεν ανήκουν στην εικόνα $U\left(\mathfrak{su}(2)\right)$, οι ιδιότητες τους όμως είναι χαρακτηριστικές:

(i). Αν $V\le\mathrm{P}$ είναι ένας αναλλοίωτος υπόχωρος της αναπαράστασης $\left(\mathfrak{su}(2),\mathrm{P},U\right)$ τότε $\mathbf{X}(V),\mathbf{Y}(V)\le V$. Δηλαδή οι $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ διατηρούν τους αναλλοίωτος υπόχωρους.

(ii). Έστω $x^\kappa y^{n-\kappa}$ ένα διάνυσμα της βάσης B. Αν $\kappa<n$, τότε

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}(x^\kappa y^{n-\kappa}) &= x\partial_y(x^\kappa y^{n-\kappa})\\
&=(n-\kappa)x^{\kappa+1}y^{n-\kappa-1}
\end{aligned}$$

και αν $\kappa=n$ τότε

$$\mathbf{X}(x^n)=0.$$

Ακόμη αν $\kappa>0$, τότε

$$\mathbf{Y}(x^{\kappa} y^{n-\kappa}) = -y\partial_x (x^{\kappa} y^{n-\kappa})$$
$$= -\kappa x^{\kappa-1} y^{n-\kappa+1}$$

και αν $\kappa = 0$, τότε

$$\mathbf{Y}(y^n) = 0.$$

(iii). Έστω $\lambda_\kappa \in \mathbb{C}$ η ιδιοτιμή που αντιστοιχεί στο ιδιοδιάνυσμα $x^\kappa y^{n-\kappa} \in B$ του $U_{\mathbf{i}}$. Τότε

$$U_{\mathbf{i}}\mathbf{X}(x^\kappa y^{n-\kappa}) = (\lambda_\kappa + i)\mathbf{X}(x^\kappa y^{n-\kappa})$$

και

$$U_{\mathbf{i}}\mathbf{Y}(x^\kappa y^{n-\kappa}) = (\lambda_\kappa - i)\mathbf{Y}(x^\kappa y^{n-\kappa}).$$

Υποθέτουμε τώρα ότι $V \leq \mathrm{P}^n$ είναι ένας αναλλοίωτος υπόχωρος της αναπαράστασης $\left(\mathfrak{su}(2), \mathrm{P}^n, U_n\right)$, $u = \sum_{\kappa=0}^{n} a_\kappa x^\kappa y^{n-\kappa} \neq 0$ ένα διάνυσμα του V και $\kappa_0 = \min\left\{\kappa \in \{0,1,...,n\} \middle| a_\kappa \neq 0\right\}$. Τότε σύμφωνα με την ιδιότητα (i) το διάνυσμα

$$\mathbf{X}^{n-\kappa_0}(u) = x^{n-\kappa_0}\partial_y^{n-\kappa_0}(u)$$
$$= a_{\kappa_0}(n-\kappa_0)!\,x^n$$

θα πρέπει να ανήκει στον V. Συνεπάγεται λοιπόν ότι $x^n \in V$. Για τον ίδιο λόγο για κάθε $m \in \{1,2,...,n\}$

$$\mathbf{Y}^m(x^n) \in V.$$

Όμως

$$\mathbf{Y}^m(x^n) = (-1)^m \frac{(n-m)!}{m!} y^m x^{n-m}$$

και συνεπώς $y^m x^{n-m} \in V$. Έχουμε λοιπόν ότι $B \subset V$, άρα $V = \mathrm{P}^n$ και εδώ ολοκληρώνεται η απόδειξη της πρότασης□

Θα δείξουμε ότι οι μόνες ανάγωγες αναπαραστάσεις της Lie άλγεβρας $\mathfrak{su}(2)$ σε χώρους πεπερασμένης διάστασης είναι αυτές που μόλις περιγράψαμε. Για να το πετύχουμε αυτό θα γενικεύσουμε την τεχνική που μόλις αναπτύξαμε.

Ορισμός 2.5.2. Έστω V ένας γραμμικός χώρος επί του $\mathbb{C}$ και $(\mathfrak{su}(2), V, \rho)$ μία αναπαράσταση της Lie άλγεβρας $\mathfrak{su}(2)$ στον χώρο V. Ο γραμμικός τελεστής $\mathbf{X}_\rho : V \to V$ με

$$\mathbf{X}_\rho = \rho(\mathbf{j}) - i\rho(\mathbf{k})$$

ονομάζεται τελεστής ανόδου και ο γραμμικός τελεστής $\mathbf{Y}_\rho : V \to V$ με

$$\mathbf{Y}_\rho = \rho(\mathbf{j}) + i\rho(\mathbf{k})$$

ονομάζεται τελεστής καθόδου της αναπαράστασης $(\mathfrak{su}(2), V, \rho)$ •

Λήμμα 2.5.3. Έστω V ένας γραμμικός χώρος επί του $\mathbb{C}$ και $(\mathfrak{su}(2),V,\rho)$ μία αναπαράσταση της Lie άλγεβρας $\mathfrak{su}(2)$ στον χώρο V. Τότε

$$\left[\mathbf{X}_\rho,\mathbf{Y}_\rho\right]=2i\rho(\mathbf{i}).$$

Απόδειξη. Από τον ορισμό 2.5.2 έχουμε

$$\begin{aligned}\left[\mathbf{X}_\rho,\mathbf{Y}_\rho\right]&=\mathbf{X}_\rho\mathbf{Y}_\rho-\mathbf{Y}_\rho\mathbf{X}_\rho\\&=\big(\rho(\mathbf{j})-i\rho(\mathbf{k})\big)\big(\rho(\mathbf{j})+i\rho(\mathbf{k})\big)-\big(\rho(\mathbf{j})+i\rho(\mathbf{k})\big)\big(\rho(\mathbf{j})-i\rho(\mathbf{k})\big)\\&=\rho(\mathbf{j})^2+i\rho(\mathbf{j})\rho(\mathbf{k})-i\rho(\mathbf{k})\rho(\mathbf{j})+\rho(\mathbf{k})^2-\rho(\mathbf{j})^2+i\rho(\mathbf{j})\rho(\mathbf{k})-i\rho(\mathbf{k})\rho(\mathbf{j})-\rho(\mathbf{k})^2\\&=2i\rho(\mathbf{j})\rho(\mathbf{k})-2i\rho(\mathbf{k})\rho(\mathbf{j})\\&=2i\left[\rho(\mathbf{j}),\rho(\mathbf{k})\right]\\&=2i\rho(\mathbf{i})\end{aligned}$$

και ολοκληρώνεται η απόδειξη του λήμματος□

Πρόταση 2.5.4. Έστω V ένας γραμμικός χώρος επί του $\mathbb{C}$, $(\mathfrak{su}(2),V,\rho)$ μία αναπαράσταση της Lie άλγεβρας $\mathfrak{su}(2)$ στον χώρο V και u είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του $\rho(\mathbf{i})$ με ιδιοτιμή $\lambda\in\mathbb{C}$. Τότε

$$\rho(\mathbf{i})\mathbf{X}_\rho(u)=(\lambda+i)\mathbf{X}_\rho(u)$$

και ακόμη

$$\rho(\mathbf{i})\mathbf{Y}_\rho(u)=(\lambda-i)\mathbf{Y}_\rho(u).$$

Απόδειξη. Ενδεικτικά για την πρώτη ισότητα έχουμε

$$\begin{aligned}\rho(\mathbf{i})\mathbf{X}_\rho(u)&=\rho(\mathbf{i})\big(\rho(\mathbf{j})-i\rho(\mathbf{k})\big)(u)\\&=\big(\rho(\mathbf{i})\rho(\mathbf{j})-i\rho(\mathbf{i})\rho(\mathbf{k})\big)(u)\\&=\big(\rho(\mathbf{i})\rho(\mathbf{j})-\rho(\mathbf{j})\rho(\mathbf{i})+\rho(\mathbf{j})\rho(\mathbf{i})+i\rho(\mathbf{k})\rho(\mathbf{i})-i\rho(\mathbf{k})\rho(\mathbf{i})-i\rho(\mathbf{i})\rho(\mathbf{k})\big)(u)\\&=\big(\left[\rho(\mathbf{i}),\rho(\mathbf{j})\right]-i\left[\rho(\mathbf{i}),\rho(\mathbf{k})\right]+\rho(\mathbf{j})\rho(\mathbf{i})-i\rho(\mathbf{k})\rho(\mathbf{i})\big)(u)\\&=\big(\rho(\mathbf{k})+i\rho(\mathbf{j})+\rho(\mathbf{j})\rho(\mathbf{i})-i\rho(\mathbf{k})\rho(\mathbf{i})\big)(u)\\&=\big(\rho(\mathbf{k})+i\rho(\mathbf{j})+\lambda\rho(\mathbf{j})-i\lambda\rho(\mathbf{k})\big)(u)\\&=(\lambda+i)\big(\rho(\mathbf{j})-i\rho(\mathbf{k})\big)(u)\\&=(\lambda+i)\mathbf{X}_\rho(u)\end{aligned}$$

και ομοίως για την δεύτερη□

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι αν u είναι ιδιοδιάνυσμα του γραμμικού τελεστή $\rho(\mathbf{i})$ με ιδιοτιμή $\lambda\in\mathbb{C}$, τότε $\mathbf{X}_\rho(u)$ είναι επίσης ιδιοδιάνυσμα του $\rho(\mathbf{i})$ με ιδιοτιμή $\lambda+i$ ή $\mathbf{X}_\rho(u)=0$. Εδώ λοιπόν δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 2.5.5. Έστω V ένας γραμμικός χώρος επί του $\mathbb{C}$ πεπερασμένης διάστασης και $(\mathfrak{su}(2),V,\rho)$ μία αναπαράσταση της Lie άλγεβρας $\mathfrak{su}(2)$ στον χώρο V. Αν $u_0\in V$ είναι ιδιοδιάνυσμα του $\rho(\mathbf{i})$ τέτοιο ώστε $\mathbf{X}_\rho(u_0)=0$, τότε το u_0 ονομάζεται διάνυσμα μεγίστου βάρους της αναπαράστασης $(\mathfrak{su}(2),V,\rho)$

Αν πάλι $v_0 \in V$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του $\rho(\mathbf{i})$ τέτοιο ώστε $\mathbf{Y}_\rho(v_0)=0$, τότε το v_0 ονομάζεται διάνυσμα ελαχίστου βάρους της αναπαράστασης $(\mathfrak{su}(2),V,\rho)$ •

Αν θεωρήσουμε την αναπαράσταση $(\mathfrak{su}(2),\mathrm{P},U)$ της $\mathfrak{su}(2)$ στον χώρο P τότε το διάνυσμα x^n είναι ένα διάνυσμα μεγίστου βάρους και το y^n είναι ένα διάνυσμα ελαχίστου βάρους της $(\mathfrak{su}(2),\mathrm{P},U)$.

Λήμμα 2.5.6. Έστω V ένας γραμμικός χώρος επί του $\mathbb{C}$ πεπερασμένης διάστασης και $(\mathfrak{su}(2),V,\rho)$ μία αναπαράσταση της Lie άλγεβρας $\mathfrak{su}(2)$ στον χώρο V. Τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον διάνυσμα μεγίστου βάρους $u_0 \in V$ της αναπαράστασης $(\mathfrak{su}(2),V,\rho)$.

Απόδειξη. Έστω $u \in V$ ένα ιδιοδιάνυσμα του γραμμικού τελεστή $\rho(\mathbf{i})$ με ιδιοτιμή $\lambda \in \mathbb{C}$. Σύμφωνα με την πρόταση 2.5.4 για κάθε $\kappa \in \mathbb{N}\bigcup\{0\}$ θα έχουμε

$$\rho(\mathbf{i})\mathbf{X}_\rho^\kappa(u)=(\lambda+i\kappa)\mathbf{X}_\rho^\kappa(u)$$

και συνεπώς $\mathbf{X}_\rho^\kappa(u)$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του $\rho(\mathbf{i})$ με ιδιοτιμή $\lambda+i\kappa$ ή $\mathbf{X}_\rho^\kappa(u)=0$. Θεωρούμε το σύνολο $\mathrm{A}=\left\{\kappa \in \mathbb{N}\bigcup\{0\} \,\middle|\, \mathbf{X}_\rho^\kappa(u)\neq 0\right\}\subset \mathbb{N}$ το οποίο είναι μη κενό γιατί $0\in \mathrm{A}$ και πεπερασμένο γιατί τα ιδιοδιανύσματα του $\rho(\mathbf{i})$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και ο χώρος V είναι πεπερασμένης διάστασης . Θέτουμε $\kappa_0=\max \mathrm{A}$. Τότε

$$\mathbf{X}_\rho^{\kappa_0}(u)\neq 0$$

και

$$\mathbf{X}_\rho^{\kappa_0+1}(u)=0\,.$$

Δηλαδή το διάνυσμα $u_0=\mathbf{X}_\rho^{\kappa_0}(u)$ είναι ένα διάνυσμα μεγίστου βάρους της αναπαράστασης $(\mathfrak{su}(2),V,\rho)$ □

Με όμοιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι υπάρχει και ένα τουλάχιστον διάνυσμα ελαχίστου βάρους της αναπαράστασης $(\mathfrak{su}(2),V,\rho)$. Στην πρόταση που ακολουθεί συνοψίζουμε την τεχνική των τελεστών ανόδου και καθόδου. Είναι ουσιαστικά μια γενίκευση των όσων είπαμε στην αρχή της παραγράφου.

Πρόταση 2.5.7. Έστω V ένας γραμμικός χώρος επί του $\mathbb{C}$ πεπερασμένης διάστασης, $(\mathfrak{su}(2),V,\rho)$ μία αναπαράσταση της Lie άλγεβρας $\mathfrak{su}(2)$ στον χώρο V και u_0 ένα διάνυσμα μεγίστου βάρους της αναπαράστασης $(\mathfrak{su}(2),V,\rho)$. Τότε υπάρχει μοναδικός $n\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}$ τέτοιος ώστε

$$\mathbf{Y}_\rho^n(u_0) \neq 0$$

και

$$\mathbf{Y}_\rho^{n+1}(u_0) = 0 .$$

Μάλιστα το υποσύνολο

$$\left\{u_0, \mathbf{Y}_\rho(u_0), ..., \mathbf{Y}_\rho^n(u_0)\right\}$$

του V είναι γραμμικώς ανεξάρτητο, ο υπόχωρος $W = \left\langle u_0, \mathbf{Y}_\rho(u_0), ..., \mathbf{Y}_\rho^n(u_0)\right\rangle$ του V είναι ένας αναλλοίωτος υπόχωρος της αναπαράστασης $(\mathfrak{su}(2), V, \rho)$ και για κάθε $\kappa \in \{0,1,...,n\}$ ισχύει

$$\rho(\mathbf{i})\mathbf{Y}_\rho^\kappa(u_0) = \frac{i}{2}(n-2\kappa)\mathbf{Y}_\rho^\kappa(u_0) .$$

Τέλος η υποαναπαράσταση $(\mathfrak{su}(2), W, \rho_W)$ της $(\mathfrak{su}(2), V, \rho)$ είναι ανάγωγη.

Απόδειξη. Θεωρούμε το μη κενό σύνολο $\mathrm{B} = \left\{\mu \in \mathbb{N}\bigcup\{0\} \,\middle|\, \mathbf{Y}_\rho^\mu(u_0) \neq 0\right\} \subset \mathbb{N}\bigcup\{0\}$. Επειδή ο χώρος V είναι πεπερασμένης διάστασης το σύνολο B είναι φραγμένο και συνεπώς θα έχει μέγιστο στοιχείο. Θέτουμε λοιπόν $n = \max \mathrm{B}$. Τότε

$$\mathbf{Y}_\rho^n(u_0) \neq 0$$

και

$$\mathbf{Y}_\rho^{n+1}(u_0) = 0 .$$

Από τον ορισμό του ο $n \in \mathbb{N}\bigcup\{0\}$ είναι ο μοναδικός με την ιδιότητα αυτή, γιατί δεν είναι δυνατόν το B να έχει δύο διαφορετικά μέγιστα στοιχεία.

Έστω λ_0 η ιδιοτιμή που αντιστοιχεί στο ιδιοδιάνυσμα u_0. Τότε για κάθε $\kappa \in \{0,1,2,...,n\}$ έχουμε $\mathbf{Y}_\rho^\kappa(u_0) \neq 0$ και έτσι $\mathbf{Y}_\rho^\kappa(u_0)$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του $\rho(\mathbf{i})$ με ιδιοτιμή $\lambda_0 - i\kappa$. Συνεπώς το σύνολο

$$S = \left\{u_0, \mathbf{Y}_\rho(u_0), ..., \mathbf{Y}_\rho^n(u_0)\right\}$$

είναι γραμμικώς ανεξάρτητο γιατί κάθε στοιχείο του είναι ιδιοδιάνυσμα του $\rho(\mathbf{i})$ με διαφορετική ιδιοτιμή.

Τώρα θα δείξουμε ότι ο υπόχωρος $W = \langle S \rangle$ του V είναι ένας αναλλοίωτος υπόχωρος της αναπαράστασης $(\mathfrak{su}(2), V, \rho)$. Για αυτό αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $\kappa \in \{0,1,...,n\}$

$$\rho(\mathbf{i})\mathbf{Y}_\rho^\kappa(u_0) \ , \ \rho(\mathbf{j})\mathbf{Y}_\rho^\kappa(u_0) \ , \ \rho(\mathbf{k})\mathbf{Y}_\rho^\kappa(u_0) \in W .$$

Όμως επειδή

$$\rho(\mathbf{j}) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{Y}_\rho + \mathbf{X}_\rho\right)$$

και

$$\rho(\mathbf{k}) = \frac{1}{2i}\left(\mathbf{Y}_\rho - \mathbf{X}_\rho\right),$$

αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $\kappa \in \{0,1,...,n\}$

$$\rho(\mathbf{i})\mathbf{Y}_\rho^\kappa(u_0)\ ,\ \mathbf{Y}_\rho\mathbf{Y}_\rho^\kappa(u_0)\ ,\ \mathbf{X}_\rho\mathbf{Y}_\rho^\kappa(u_0) \in W\ .$$

Έστω λοιπόν $\kappa \in \{0,1,...,n\}$. Τότε

$$\rho(\mathbf{i})\mathbf{Y}_\rho^\kappa(u_0) = (\lambda_0 - i\kappa)\mathbf{Y}_\rho^\kappa(u_0) \in W$$

και

$$\mathbf{Y}_\rho\mathbf{Y}_\rho^\kappa(u_0) = \mathbf{Y}_\rho^{\kappa+1}(u_0) \in W\ .$$

Τώρα παρατηρούμε ότι για $\kappa = 0$

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_\rho\mathbf{Y}_\rho^0(u_0) &= \mathbf{X}_\rho(u_0)\\ &= 0 \in W.\end{aligned}$$

Έστω $\kappa \geq 1$ και ότι $\mathbf{X}_\rho\mathbf{Y}_\rho^{\kappa-1}(u_0) \in W$. Τότε

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_\rho\mathbf{Y}_\rho^\kappa(u_0) &= \mathbf{X}_\rho\mathbf{Y}_\rho\mathbf{Y}_\rho^{\kappa-1}(u_0)\\ &= \left(\mathbf{X}_\rho\mathbf{Y}_\rho - \mathbf{Y}_\rho\mathbf{X}_\rho + \mathbf{Y}_\rho\mathbf{X}_\rho\right)\mathbf{Y}_\rho^{\kappa-1}(u_0)\\ &= \left(\left[\mathbf{X}_\rho, \mathbf{Y}_\rho\right] + \mathbf{Y}_\rho\mathbf{X}_\rho\right)\mathbf{Y}_\rho^{\kappa-1}(u_0)\\ &= 2i\rho(\mathbf{i})\mathbf{Y}_\rho^{\kappa-1}(u_0) + \mathbf{Y}_\rho\left(\mathbf{X}_\rho\mathbf{Y}_\rho^{\kappa-1}(u_0)\right) \in W,\end{aligned}$$

γιατί $\rho(\mathbf{i})\mathbf{Y}_\rho^{\kappa-1}(u_0) \in W$ και $\mathbf{Y}_\rho\left(\mathbf{X}_\rho\mathbf{Y}_\rho^{\kappa-1}(u_0)\right) \in W$ από την υπόθεση της επαγωγής. Έχουμε λοιπόν ότι για κάθε $\kappa \in \{0,1,...,n\}$ $\mathbf{X}_\rho\mathbf{Y}_\rho^\kappa(u_0) \in W$.

Τώρα θα δείξουμε ότι για κάθε $\kappa \in \{0,1,...,n\}$

$$\rho(\mathbf{i})\mathbf{Y}_\rho^\kappa(u_0) = \frac{i}{2}(n - 2\kappa)\mathbf{Y}_\rho^\kappa(u_0)\ .$$

Έστω λοιπόν $\hat{a}$ μία διατεταγμένη βάση του W και οι γραμμικοί τελεστές $\rho(\mathbf{i})|_W$, $\mathbf{X}_\rho|_W$, $\mathbf{Y}_\rho|_W$. Σύμφωνα με το λήμμα 4.5.1

$$\left[\mathbf{X}_\rho|_W, \mathbf{Y}_\rho|_W\right] = 2i\rho(\mathbf{i})|_W$$

και θα έχουμε

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(\rho(\mathbf{i})|_W : \hat{a}) &= \frac{1}{2i}\mathrm{Tr}\left(\left[\mathbf{X}_\rho|_W, \mathbf{Y}_\rho|_W\right] : \hat{a}\right)\\ &= \frac{1}{2i}\mathrm{Tr}\left(\mathbf{X}_\rho\mathbf{Y}_\rho|_W : \hat{a}\right) - \frac{1}{2i}\mathrm{Tr}\left(\mathbf{Y}_\rho\mathbf{X}_\rho|_W : \hat{a}\right)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Όμως ο γραμμικός τελεστής $\rho(\mathbf{i})|_W$ είναι διαγωνίσιμος με ιδιοδιανύσματα τα στοιχεία του S και ιδιοτιμές

$$\{\lambda_0, \lambda_0 - i, ..., \lambda_0 - in\}.$$

Από την τελευταία λοιπόν ισότητα θα έχουμε

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\left(\rho(\mathbf{i})|_W : \hat{a}\right) &= \sum_{\kappa=0}^{n} (\lambda_0 - i\kappa) \\ &= 0\end{aligned}$$

και βρίσκουμε ότι $\lambda_0 = \frac{in}{2}$. Συνεπώς η ιδιοτιμή που αντιστοιχεί στο ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{Y}_\rho^\kappa(u_0)$ του $\rho(\mathbf{i})$ θα είναι $\frac{i}{2}(n-2\kappa)$ και όλες οι ιδιοτιμές του $\rho(\mathbf{i})|_W$ θα είναι

$$\left\{-\frac{in}{2}, -\frac{in}{2}+i, ..., \frac{in}{2}-i, \frac{in}{2}\right\}.$$

Τέλος θα δείξουμε ότι η υποαναπαράσταση $(\mathfrak{su}(2), W, \rho_W)$ είναι ανάγωγη. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $U \leq W$ είναι ένας αναλλοίωτος υπόχωρος της αναπαράστασης $(\mathfrak{su}(2), W, \rho_W)$ διάφορος του $\{0\}$ και έστω u ένα μη μηδενικό διάνυσμα του U. Τότε υπάρχουν $c_0, c_1, ..., c_n \in \mathbb{C}$ τέτοιοι ώστε

$$u = \sum_{\kappa=0}^{n} c_\kappa \mathbf{Y}_\rho^\kappa(u_0)$$

και το σύνολο $\Gamma = \{\kappa \in \{0,1,...,n\} | c_\kappa \neq 0\}$ είναι μη κενό. Θέτουμε $\kappa_0 = \min \Gamma$ και θα έχουμε

$$\begin{aligned}\mathbf{Y}_\rho^{n-\kappa_0}(u) &= \mathbf{Y}_\rho^{n-\kappa_0}\left(c_{\kappa_0}\mathbf{Y}_\rho^{\kappa_0}(u_0) + c_{\kappa_0+1}\mathbf{Y}_\rho^{\kappa_0+1}(u_0) + ... + c_n\mathbf{Y}_\rho^n(u_0)\right) \\ &= c_{\kappa_0}\mathbf{Y}_\rho^n(u_0) + c_{\kappa_0+1}\mathbf{Y}_\rho^{n+1}(u_0) + ... + c_n\mathbf{Y}_\rho^{2n-\kappa_0}(u_0) \\ &= c_{\kappa_0}\mathbf{Y}_\rho^n(u_0).\end{aligned}$$

Όμως είναι απλό να δούμε ότι $\mathbf{Y}_\rho(U) \leq U$ και συνεπώς $\mathbf{Y}_\rho^{n-\kappa_0}(U) \leq U$. Θα έχουμε λοιπόν $\mathbf{Y}_\rho^{n-\kappa_0}(u) \in U$ και αυτό από την τελευταία ισότητα συνεπάγει ότι $\mathbf{Y}_\rho^n(u_0) \in U$.

Το διάνυσμα $v_0 = \mathbf{Y}_\rho^n(u_0)$ είναι ένα διάνυσμα ελαχίστου βάρους της αναπαράστασης $(\mathfrak{su}(2), U, \rho_U)$. Θα υπάρχει λοιπόν μοναδικός $m \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$ τέτοιος ώστε

$$\mathbf{X}_\rho^m(v_0) \neq 0$$

και

$$\mathbf{X}_\rho^{m+1}(v_0) = 0.$$

Ακόμη το υποσύνολο

$$\left\{ v_0, \mathbf{X}_\rho(v_0), ..., \mathbf{X}_\rho^m(v_0) \right\}$$

του U είναι γραμμικώς ανεξάρτητο και ο υπόχωρος

$$\tilde{U} = \left\langle v_0, \mathbf{X}_\rho(v_0), ..., \mathbf{X}_\rho^m(v_0) \right\rangle$$

είναι ένας αναλλοίωτος υπόχωρος της αναπαράστασης $(\mathfrak{su}(2), U, \rho_U)$. Τέλος οι ιδιοτιμές του $\rho(\mathbf{i}) | \tilde{U}$ θα είναι

$$\left\{ -\frac{im}{2}, -\frac{im}{2} + i, ..., \frac{im}{2} \right\}.$$

Τα επιχειρήματα που χρησιμοποιούμε για τα παραπάνω είναι όμοια με αυτά που χρησιμοποιήσαμε ως τώρα για τον αναλλοίωτο υπόχωρο W και δεν θα τα αναπαράγουμε.

Όμως επειδή η ιδιοτιμή που αντιστοιχεί στο v_0 είναι $-\dfrac{in}{2}$ θα πρέπει

$$-\frac{in}{2} \in \left\{ -\frac{im}{2}, -\frac{im}{2} + i, ..., \frac{im}{2} \right\},$$

κάτι που συμβαίνει μόνο αν $m \geq n$. Τότε θα ισχύει

$$\dim \tilde{U} \geq \dim W$$

αλλά επειδή

$$\tilde{U} \leq U \leq W,$$

θα έχουμε τελικά $\tilde{U} = U = W$ και ολοκληρώνεται η απόδειξη της πρότασης□

Τώρα είμαστε έτοιμοι για την κεντρική πρόταση αυτής της παραγράφου, δηλαδή της ταυτοποίησης των ανάγωγων αναπαραστάσεων της Lie άλγεβρας $\mathfrak{su}(2)$ σε χώρους πεπερασμένης διάστασης.

Πρόταση 2.5.8. Έστω V ένας χώρος πεπερασμένης διάστασης επί του $\mathbb{C}$ και $(\mathfrak{su}(2), V, \rho)$ μία ανάγωγη αναπαράσταση της Lie άλγεβρας $\mathfrak{su}(2)$ στον χώρο V. Τότε υπάρχει $n \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$ τέτοιος ώστε η αναπαράσταση $(\mathfrak{su}(2), V, \rho)$ να είναι ισόμορφη με την αναπαράσταση $\left(\mathfrak{su}(2), \mathrm{P}^n, U_n\right)$.

Απόδειξη. Έστω u_0 ένα διάνυσμα μεγίστου βάρους της αναπαράστασης $(\mathfrak{su}(2), V, \rho)$ και το μη κενό σύνολο $\mathrm{A} = \left\{ \mu \in \mathbb{N} \bigcup \{0\} \middle| \mathbf{Y}_\rho^\mu(u_0) \neq 0 \right\} \subset \mathbb{N} \bigcup \{0\}$. Επειδή ο χώρος V είναι πεπερασμένης διάστασης, το A είναι άνω φραγμένο και θέτουμε $n = \max \mathrm{A}$. Σύμφωνα με την πρόταση 2.5.3 το σύνολο

$$S = \left\{ u_0, \mathbf{Y}_\rho(u_0), ..., \mathbf{Y}_\rho^n(u_0) \right\}$$

είναι βάση ενός αναλλοίωτου υπόχωρου W της $(\mathfrak{su}(2),V,\rho)$. Όμως επειδή η αναπαράσταση $(\mathfrak{su}(2),V,\rho)$ είναι ανάγωγη θα έχουμε $V=W$ ή ισοδύναμα το S είναι μία βάση του V.

Θεωρούμε τώρα την γραμμική απεικόνιση $T:V\to \mathrm{P}^n$ την οποία ορίζουμε ως εξής: Για κάθε $\kappa\in\{0,1,...,n\}$

$$T\left(\mathbf{Y}_\rho^\kappa(u_0)\right)=\mathbf{Y}^\kappa(x^n),$$

όπου $\mathbf{Y}$ είναι ο τελεστής καθόδου της αναπαράστασης $\left(\mathfrak{su}(2),\mathrm{P}^n,U_n\right)$. Θα δείξουμε ότι η T είναι ένας ισομορφισμός των αναπαραστάσεων $(\mathfrak{su}(2),V,\rho)$ και $\left(\mathfrak{su}(2),\mathrm{P}^n,U_n\right)$.

Πρώτα παρατηρούμε ότι το σύνολο

$$\left\{T\left(\mathbf{Y}_\rho^\kappa(u_0)\right)\middle|\kappa\in\{0,1,...,n\}\right\}=\left\{-\frac{n!}{(n-\kappa)!}y^\kappa x^{n-\kappa}\middle|\kappa\in\{0,1,...,n\}\right\}$$

είναι μία βάση του P^n και συνεπώς η T είναι ένας ισομορφισμός γραμμικών χώρων.

Οπότε για να τελειώσουμε θα πρέπει να δείξουμε ότι είναι και ομομορφισμός αναπαραστάσεων. Επειδή

$$\rho(\mathbf{j})=\frac{1}{2}\left(\mathbf{Y}_\rho+\mathbf{X}_\rho\right)\ \text{και}\ \rho(\mathbf{k})=\frac{1}{2i}\left(\mathbf{Y}_\rho-\mathbf{X}_\rho\right),$$

αρκεί να δείξουμε τις ισότητες

$$\begin{aligned}T\circ\rho(\mathbf{i})&=U_n(\mathbf{i})\circ T\\ T\circ\mathbf{X}_\rho&=\mathbf{X}\circ T\\ T\circ\mathbf{Y}_\rho&=\mathbf{Y}\circ T.\end{aligned}$$

Έστω $\kappa\in\{0,1,...,n\}$. Τότε για την πρώτη από αυτές θα έχουμε

$$\begin{aligned}T\circ\rho(\mathbf{i})\left(\mathbf{Y}_\rho^\kappa(u_0)\right)&=T\left(\rho(\mathbf{i})\mathbf{Y}_\rho^\kappa(u_0)\right)\\ &=T\left(\frac{i}{2}(n-2\kappa)\mathbf{Y}_\rho^\kappa(u_0)\right)\\ &=\frac{i}{2}(n-2\kappa)T\left(\mathbf{Y}_\rho^\kappa(u_0)\right)\\ &=\frac{i}{2}(n-2\kappa)\mathbf{Y}^\kappa(x^n)\\ &=U_n(\mathbf{i})\left(\mathbf{Y}^\kappa(x^n)\right)\\ &=U_n(\mathbf{i})\left(T\mathbf{Y}_\rho^\kappa(u_0)\right)\\ &=U_n(\mathbf{i})\circ T\left(\mathbf{Y}_\rho^\kappa(u_0)\right),\end{aligned}$$

ενώ για την δεύτερη

$$
\begin{aligned}
T\circ \mathbf{Y}_\rho\left(\mathbf{Y}_\rho^\kappa(u_0)\right) &= T\left(\mathbf{Y}_\rho^{\kappa+1}(u_0)\right)\\
&= \mathbf{Y}^{\kappa+1}(x^n)\\
&= \mathbf{Y}\left(\mathbf{Y}^\kappa(x^n)\right)\\
&= \mathbf{Y}\left(T\mathbf{Y}_\rho^\kappa(u_0)\right)\\
&= \mathbf{Y}\circ T\left(\mathbf{Y}_\rho^\kappa(u_0)\right).
\end{aligned}
$$

Τέλος για την τρίτη ισότητα παρατηρούμε ότι για $\kappa=0$ είναι αληθής,

$$
\begin{aligned}
T\circ \mathbf{X}_\rho(u_0) &= T\left(\mathbf{X}_\rho(u_0)\right)\\
&= T(0)\\
&= 0\\
&= \mathbf{X}(x^n)\\
&= \mathbf{X}\left(T(u_0)\right)\\
&= \mathbf{X}\circ T(u_0).
\end{aligned}
$$

Έστω $\kappa\geq 1$ και ότι η πρόταση είναι αληθής για $\kappa-1$. Τότε

$$
\begin{aligned}
T\circ \mathbf{X}_\rho\left(\mathbf{Y}_\rho^\kappa(u_0)\right) &= T\left(\mathbf{X}_\rho\mathbf{Y}_\rho^\kappa(u_0)\right)\\
&= T\left(\mathbf{X}_\rho\mathbf{Y}_\rho\mathbf{Y}_\rho^{\kappa-1}(u_0)\right)\\
&= T\left((\mathbf{X}_\rho\mathbf{Y}_\rho-\mathbf{Y}_\rho\mathbf{X}_\rho+\mathbf{Y}_\rho\mathbf{X}_\rho)\mathbf{Y}_\rho^{\kappa-1}(u_0)\right)\\
&= T\circ\left(\left[\mathbf{X}_\rho,\mathbf{Y}_\rho\right]+\mathbf{Y}_\rho\mathbf{X}_\rho\right)\left(\mathbf{Y}_\rho^{\kappa-1}(u_0)\right)\\
&= 2iT\circ\rho(\mathbf{i})\left(\mathbf{Y}_\rho^{\kappa-1}(u_0)\right)+T\circ\mathbf{Y}_\rho\left(\mathbf{X}_\rho\mathbf{Y}_\rho^{\kappa-1}(u_0)\right)\\
&= 2iU_n(\mathbf{i})\circ T\left(\mathbf{Y}_\rho^{\kappa-1}(u_0)\right)+\mathbf{Y}\circ T\left(\mathbf{X}_\rho\mathbf{Y}_\rho^{\kappa-1}(u_0)\right)\\
&= \left[\mathbf{X},\mathbf{Y}\right]\circ T\left(\mathbf{Y}_\rho^{\kappa-1}(u_0)\right)+\mathbf{Y}\mathbf{X}\circ T\left(\mathbf{Y}_\rho^{\kappa-1}(u_0)\right)\\
&= \mathbf{X}\mathbf{Y}\circ T\left(\mathbf{Y}_\rho^{\kappa-1}(u_0)\right)\\
&= \mathbf{X}\circ T\left(\mathbf{Y}_\rho\mathbf{Y}_\rho^{\kappa-1}(u_0)\right)\\
&= \mathbf{X}\circ T\left(\mathbf{Y}_\rho^{\kappa}(u_0)\right)
\end{aligned}
$$

και συνεπώς η ισότητα είναι αληθής για κάθε $\kappa\in\{0,1,...,n\}$. Έτσι έχοντας δείξει ότι η T είναι και ομομορφισμός αναπαραστάσεων ολοκληρώνεται η απόδειξη της πρότασης□

Επειδή οι Lie άλγεβρες $\mathfrak{su}(2)$ και $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$ είναι ισόμορφες έχουμε ουσιαστικά καθορίσει τις ανάγωγες αναπαραστάσεις της $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$ σε χώρους πεπερασμένης διάστασης. Πράγματι δεν είναι δύσκολο να δείξουμε ότι αν $T:\mathfrak{su}(2)\to\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$ είναι ένας ισομορφισμός Lie αλγεβρών, τότε $(\mathfrak{su}(2),V,\rho)$ είναι ανάγωγη αναπαράσταση της $\mathfrak{su}(2)$ στον χώρο V αν και μόνο αν $\left(\mathfrak{so}(3,\mathbb{R}),V,\rho\circ T^{-1}\right)$ είναι ανάγωγη αναπαράσταση της $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$ στον ίδιο χώρο.

2.6. Οι ανάγωγες αναπαραστάσεις της Lie άλγεβρας $\mathfrak{so}(4,\mathbb{R})$

Σε αυτή την παράγραφο θα προσδιορίσουμε τις ανάγωγες αναπαραστάσεις της Lie άλγεβρας $\mathfrak{so}(4,\mathbb{R})$ σε χώρους πεπερασμένης διάστασης. Επειδή όπως δείξαμε στην πρόταση 2.3.11, η $\mathfrak{so}(4,\mathbb{R})$ είναι ισόμορφη με την Lie άλγεβρα καρτεσιανό γινόμενο $\mathfrak{su}(2)\times\mathfrak{su}(2)$, αρκεί να βρούμε ποιες είναι οι ανάγωγες αναπαραστάσεις της $\mathfrak{su}(2)\times\mathfrak{su}(2)$ σε χώρους πεπερασμένης διάστασης. Για να το πετύχουμε αυτό θα χρησιμοποιήσουμε τις ιδιότητες του τελεστή του Casimir τον οποίο ορίζουμε αμέσως.

Ορισμός 2.6.1. Έστω V ένας γραμμικός χώρος επί του $\mathbb{C}$ και $(\mathfrak{su}(2),V,\rho)$ μία αναπαράσταση της Lie άλγεβρας $\mathfrak{su}(2)$ στον χώρο V. Ο γραμμικός τελεστής $C:V\to V$ με

$$C=\rho(\mathbf{i})^2+\rho(\mathbf{j})^2+\rho(\mathbf{k})^2$$

ονομάζεται τελεστής Casimir της αναπαράστασης $(\mathfrak{su}(2),V,\rho)\bullet$

Μία από τις ιδιότητες του τελεστή Casimir είναι ότι μετατίθεται με την αναπαράσταση στην οποία τον έχουμε ορίσει.

Πρόταση 2.6.2. Έστω V ένας γραμμικός χώρος επί του $\mathbb{C}$ και $(\mathfrak{su}(2),V,\rho)$ μία αναπαράσταση της Lie άλγεβρας $\mathfrak{su}(2)$ στον χώρο V. Τότε ο τελεστής Casimir C της $(\mathfrak{su}(2),V,\rho)$ μετατίθεται με αυτήν, δηλαδή για κάθε $A\in\mathfrak{su}(2)$

$$\rho(A)\circ C=C\circ\rho(A).$$

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι ισχύουν οι ισότητες

$$\left[C,\rho(\mathbf{i})\right]=\left[C,\rho(\mathbf{j})\right]=\left[C,\rho(\mathbf{k})\right]=0.$$

Ενδεικτικά για την μία από τις τρεις θα έχουμε

$$\begin{aligned}
\left[C,\rho(\mathbf{i})\right]&=\left[\rho(\mathbf{i})^2+\rho(\mathbf{j})^2+\rho(\mathbf{k})^2,\rho(\mathbf{i})\right]\\
&=\rho(\mathbf{i})^3+\rho(\mathbf{j})^2\rho(\mathbf{i})+\rho(\mathbf{k})^2\rho(\mathbf{i})-\rho(\mathbf{i})^3-\rho(\mathbf{i})\rho(\mathbf{j})^2-\rho(\mathbf{i})\rho(\mathbf{k})^2\\
&=\rho(\mathbf{j})^2\rho(\mathbf{i})-\rho(\mathbf{i})\rho(\mathbf{j})^2+\rho(\mathbf{k})^2\rho(\mathbf{i})-\rho(\mathbf{i})\rho(\mathbf{k})^2\\
&=\rho(\mathbf{j})^2\rho(\mathbf{i})-\rho(\mathbf{j})\rho(\mathbf{i})\rho(\mathbf{j})+\rho(\mathbf{j})\rho(\mathbf{i})\rho(\mathbf{j})-\rho(\mathbf{i})\rho(\mathbf{j})^2\\
&\quad+\rho(\mathbf{k})^2\rho(\mathbf{i})-\rho(\mathbf{k})\rho(\mathbf{i})\rho(\mathbf{k})+\rho(\mathbf{k})\rho(\mathbf{i})\rho(\mathbf{k})-\rho(\mathbf{i})\rho(\mathbf{k})^2\\
&=\rho(\mathbf{j})\left[\rho(\mathbf{j}),\rho(\mathbf{i})\right]+\left[\rho(\mathbf{j}),\rho(\mathbf{i})\right]\rho(\mathbf{j})+\rho(\mathbf{k})\left[\rho(\mathbf{k}),\rho(\mathbf{i})\right]+\left[\rho(\mathbf{k}),\rho(\mathbf{i})\right]\rho(\mathbf{k})\\
&=\rho(\mathbf{j})\big(-\rho(\mathbf{k})\big)+\big(-\rho(\mathbf{k})\big)\rho(\mathbf{j})+\rho(\mathbf{k})\rho(\mathbf{j})+\rho(\mathbf{j})\rho(\mathbf{k})\\
&=0
\end{aligned}$$

και ομοίως δείχνουμε και τις άλλες δύο□

Μία συνέπεια της ιδιότητας αυτής του τελεστή Casimir είναι και η ακόλουθη πρόταση, την οποία θα επικαλεστούμε αργότερα.

Πρόταση 2.6.3. Έστω V ένας γραμμικός χώρος επί του $\mathbb{C}$ πεπερασμένης διάστασης και $(\mathfrak{su}(2), V, \rho)$ μία ανάγωγη αναπαράσταση της Lie άλγεβρας $\mathfrak{su}(2)$ στον χώρο V. Τότε ο τελεστής Casimir C της $(\mathfrak{su}(2), V, \rho)$ είναι

$$C = -\ell(\ell+1)1_V ,$$

όπου $\ell \in \frac{1}{2}\mathbb{N} \cup \{0\}$.

Απόδειξη. Έστω $\lambda \in \mathbb{C}$ μία ιδιοτιμή του τελεστή Casimir $C \in \mathfrak{gl}(V)$ και $V(\lambda)$ ο ιδιόχωρος του C που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ. Επειδή ο C μετατίθεται με την αναπαράσταση $(\mathfrak{su}(2), V, \rho)$, συνεπάγεται από την πρόταση 2.4.19 ότι ο ιδιόχωρος $V(\lambda)$ είναι ένας αναλλοίωτος υπόχωρος της $(\mathfrak{su}(2), V, \rho)$. Όμως επειδή η $(\mathfrak{su}(2), V, \rho)$ είναι μία ανάγωγη αναπαράσταση και

$$V(\lambda) \neq \{0\}$$

θα έχουμε αναγκαστικά $V(\lambda) = V$. Τότε όμως για κάθε $x \in V$ θα έχουμε

$$C(x) = \lambda x$$

και συνεπώς $C = \lambda 1_V$.

Σύμφωνα με την πρόταση 2.5.4 υπάρχει $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ τέτοιος ώστε η $(\mathfrak{su}(2), V, \rho)$ να είναι ισόμορφη με την αναπαράσταση $(\mathfrak{su}(2), \mathrm{P}^n, U_n)$ της $\mathfrak{su}(2)$ στον χώρο P^n. Έστω C_n ο τελεστής Casimir της $(\mathfrak{su}(2), \mathrm{P}^n, U_n)$. Τότε σύμφωνα με όσα προηγήθηκαν και επειδή η $(\mathfrak{su}(2), \mathrm{P}^n, U_n)$ είναι ανάγωγη θα υπάρχει $\lambda_n \in \mathbb{C}$ τέτοιος ώστε

$$C_n = \lambda_n 1_{\mathrm{P}^n} .$$

Δεν είναι τώρα δύσκολο να διαπιστώσουμε ότι

$$C_n(x^n) = -\frac{1}{4}(n^2 + 2n)x^n$$

και να συμπεράνουμε τελικά ότι

$$\begin{aligned} \lambda_n &= -\frac{1}{4}(n^2 + 2n) \\ &= -\ell(\ell+1) \end{aligned}$$

με $\ell = \frac{n}{2} \in \frac{1}{2}\mathbb{N} \cup \{0\}$.

Όμως επειδή οι αναπαραστάσεις $(\mathfrak{su}(2), V, \rho)$ και $(\mathfrak{su}(2), \mathrm{P}^n, U_n)$ είναι ισόμορφες, οι τελεστές Casimir C, C_n θα συνδέονται με μία σχέση ομοιότητας. Πράγματι αν $T : V \to \mathrm{P}^n$ είναι ένας ισομορφισμός αναπαραστάσεων, τότε

$$C = T^{-1} \circ C_n \circ T .$$

Τότε όμως θα έχουν και την ίδια ιδιοτιμή, δηλαδή $\lambda = \lambda_n = -\ell(\ell+1)$ και ολοκληρώνεται η απόδειξη της πρότασης□

Πρόταση 2.6.4. Έστω η Lie άλγεβρα $\mathfrak{su}(2)$, V ένας γραμμικός χώρος επί του $\mathbb{C}$ πεπερασμένης διάστασης και $(\mathfrak{su}(2),V,\rho)$ μία αναπαράσταση της Lie άλγεβρας $\mathfrak{su}(2)$ στον χώρο V. Αν ο τελεστής Casimir $C:V\to V$ της αναπαράστασης $(\mathfrak{su}(2),V,\rho)$ είναι

$$C = -\ell(\ell+1)1_V ,$$

όπου $\ell \in \frac{1}{2}\mathbb{N}\bigcup\{0\}$, τότε οι ιδιοτιμές του $\rho(\mathbf{i})$ είναι $\{-i\ell,-i\ell+i,...,i\ell\}$ και μόνο αυτές.

Απόδειξη. Έστω $u\in V$ ένα ιδιοδιάνυσμα του $\rho(\mathbf{i})$ με ιδιοτιμή $\lambda\in\mathbb{C}$. Θεωρούμε το μη κενό σύνολο $\mathrm{A}=\left\{\kappa\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}\,\middle|\,\mathbf{X}_\rho^\kappa(u)\neq 0\right\}$ το οποίο είναι φραγμένο, γιατί ο χώρος V είναι πεπερασμένης διάστασης και θέτουμε $\kappa_0=\max\mathrm{A}$. Αν $u_0=\mathbf{X}_\rho^{\kappa_0}(u)\in V$, τότε

$$\mathbf{X}_\rho(u_0)=0$$

και συνεπώς το διάνυσμα $u_0\in V$ είναι ένα διάνυσμα μεγίστου βάρους της αναπαράστασης $(\mathfrak{su}(2),V,\rho)$. Επίσης το μη κενό σύνολο $\mathrm{B}=\left\{\mu\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}\,\middle|\,\mathbf{Y}_\rho^\mu(u_0)\neq 0\right\}$ είναι άνω φραγμένο και θέτουμε $n=\max\mathrm{B}$. Έχουμε δείξει στην πρόταση 2.5.3 ότι

$$W=\left\langle u_0,\mathbf{Y}_\rho(u_0),...,\mathbf{Y}_\rho^n(u_0)\right\rangle\leq V$$

είναι ένας αναλλοίωτος υπόχωρος της αναπαράστασης $(\mathfrak{su}(2),V,\rho)$ και μάλιστα η υποαναπαράσταση $(\mathfrak{su}(2),W,\rho_W)$ είναι ανάγωγη. Αν λοιπόν C_W είναι ο τελεστής Casimir της $(\mathfrak{su}(2),W,\rho_W)$, τότε σύμφωνα με την πρόταση 2.6.2

$$C_W=-\ell_W(\ell_W+1)1_W ,$$

όπου $\ell_W=\frac{n}{2}$. Επειδή όμως $C_W=C\,|\,W$ θα έχουμε αναγκαστικά $\ell=\ell_W=\frac{n}{2}$.

Γνωρίζουμε ότι οι ιδιοτιμές του $\rho_W(\mathbf{i})=\rho(\mathbf{i})\,|\,W$ είναι

$$\{-i\ell,-i\ell+i,...,i\ell\}=\left\{-i\frac{n}{2},-i\frac{n}{2}+i,...,i\frac{n}{2}\right\}$$

και μάλιστα η ιδιοτιμή που αντιστοιχεί στο διάνυσμα u_0 είναι $\lambda_0=i\frac{n}{2}=i\ell$. Τότε όμως η ιδιοτιμή που αντιστοιχεί στο διάνυσμα u θα είναι $\lambda=\lambda_0-i\kappa_0=i\ell-i\kappa_0$. Οπότε αρκεί να δείξουμε ότι

$\kappa_0 \le n = 2\ell$, γιατί σε αυτή την περίπτωση η τυχούσα ιδιοτιμή $\lambda \in \mathbb{C}$ του $\rho(\mathbf{i})$ θα ανήκει στο σύνολο $\{-i\ell, -i\ell + i, ..., i\ell\}$.

Θα δείξουμε ότι $\forall m \in \{0,1,...,\kappa_0\}$ $\mathbf{X}_\rho^{\kappa_0 - m}(u) \in W$. Για κάθε $m \in \{0,1,...,\kappa_0\}$ θέτουμε

$$v_m = \mathbf{X}_\rho^{\kappa_0 - m}(u)$$

και

$$u_m = \mathbf{Y}_\rho^m(u_0).$$

Τότε αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $m \in \{0,1,...,\kappa_0\}$ υπάρχει ένας $c_m \in \mathbb{C}$ ώστε $u_m = c_m v_m$.

Πράγματι για $m = 0$ έχουμε $v_0 = \mathbf{X}_\rho^{\kappa_0}(u) = u_0$, οπότε $c_0 = 1$.

Υποθέτουμε για κάποιο $m \in \{0,1,...,\kappa_0\}$ με $m \ge 1$, ότι η πρόταση είναι αληθής για $m-1$.

Τότε θα έχουμε

$$\begin{aligned} u_m &= \mathbf{Y}_\rho(u_{m-1}) \\ &= c_{m-1}\mathbf{Y}_\rho(v_{m-1}) \\ &= c_{m-1}\mathbf{Y}_\rho\mathbf{X}_\rho^{\kappa_0-m+1}(u) \\ &= c_{m-1}\mathbf{Y}_\rho\mathbf{X}_\rho\mathbf{X}_\rho^{\kappa_0-m}(u) \\ &= c_{m-1}\mathbf{Y}_\rho\mathbf{X}_\rho(v_m). \end{aligned}$$

Όμως

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_\rho\mathbf{X}_\rho &= \big(\rho(\mathbf{j}) + i\rho(\mathbf{k})\big)\big(\rho(\mathbf{j}) - i\rho(\mathbf{k})\big) \\ &= \rho(\mathbf{j})^2 + \rho(\mathbf{k})^2 + i\rho(\mathbf{k})\rho(\mathbf{j}) - i\rho(\mathbf{j})\rho(\mathbf{k}) \\ &= C - \rho(\mathbf{i})^2 + i\big[\rho(\mathbf{k}), \rho(\mathbf{j})\big] \\ &= C - \rho(\mathbf{i})^2 + i\rho[\mathbf{k}, \mathbf{j}] \\ &= C - \rho(\mathbf{i})^2 - i\rho(\mathbf{i}) \end{aligned}$$

και συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned} u_m &= c_{m-1}\big(C - \rho(\mathbf{i})^2 - i\rho(\mathbf{i})\big)(v_m) \\ &= (c_{m-1}c)v_m \\ &= c_m v_m, \end{aligned}$$

όπου $c_m \in \mathbb{C}$. Εδώ λοιπόν ολοκληρώνεται η απόδειξη της πρότασης□

Η ακόλουθη πρόταση είναι η κεντρική πρόταση αυτής της παραγράφου. Προσδιορίζουμε τις ανάγωγες αναπαραστάσεις της Lie άλγεβρας $\mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{su}(2)$ σε χώρους πεπερασμένης διάστασης.

Πρόταση 2.6.6. Έστω η Lie άλγεβρα καρτεσιανό γινόμενο $\mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{su}(2)$, V ένας γραμμικός χώρος επί του $\mathbb{C}$ πεπερασμένης διάστασης και $(\mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{su}(2), V, \rho)$ μία ανάγωγη αναπαράσταση της Lie άλγεβρας $\mathfrak{su}(2)\times\mathfrak{su}(2)$ στον χώρο V. Τότε υπάρχουν γραμμικοί χώροι W_1, W_2 επί του $\mathbb{C}$ και ανάγωγες αναπαραστάσεις $(\mathfrak{su}(2), W_1, \sigma_1)$, $(\mathfrak{su}(2), W_2, \sigma_2)$ της Lie άλγεβρας $\mathfrak{su}(2)$ στους χώρους W_1, W_2 ώστε η αναπαράσταση $(\mathfrak{su}(2)\times\mathfrak{su}(2), V, \rho)$ να είναι ισόμορφη με την $(\mathfrak{su}(2)\times\mathfrak{su}(2), W_1\otimes W_2, \sigma_1\otimes\sigma_2)$.

Απόδειξη. θεωρούμε τις Lie άλγεβρες καρτεσιανό γινόμενο $\mathfrak{su}(2)\times\{0\}$, $\{0\}\times\mathfrak{su}(2)$ οι οποίες είναι ισόμορφες με την Lie άλγεβρα $\mathfrak{su}(2)$. Πράγματι η απεικονίσεις $T_1 : \mathfrak{su}(2)\times\{0\}\to\mathfrak{su}(2)$, $T_2 : \{0\}\times\mathfrak{su}(2)\to\mathfrak{su}(2)$ με

$$T_1(A,0)=A\ ,\ T_2(0,B)=B$$

είναι ισομορφισμοί Lie αλγεβρών.

Ορίζουμε τις αναπαραστάσεις Lie αλγεβρών $\left(\mathfrak{su}(2)\times\{0\}, V, \rho_1\right)$, $\left(\{0\}\times\mathfrak{su}(2), V, \rho_2\right)$ ως εξής,

$$\rho_1=\rho\,|_{\mathfrak{su}(2)\times\{0\}} : \mathfrak{su}(2)\times\{0\}\to\mathfrak{gl}(V),$$

$$\rho_2=\rho\,|_{\{0\}\times\mathfrak{su}(2)} : \{0\}\times\mathfrak{su}(2)\to\mathfrak{gl}(V)$$

και είναι απλό να δούμε γιατί οι απεικονίσεις ρ_1, ρ_2 είναι ομομορφισμοί Lie αλγεβρών. Ακόμη ορίζουμε τους τελεστές Casimir $C_1, C_2 : V\to V$ των αναπαραστάσεων αυτών με τον ακόλουθο «φυσιολογικό» τρόπο

$$C_1=\rho_1(\mathbf{i},0)^2+\rho_1(\mathbf{j},0)^2+\rho_1(\mathbf{k},0)^2,$$

$$C_2=\rho_2(0,\mathbf{i})^2+\rho_2(0,\mathbf{j})^2+\rho_2(0,\mathbf{k})^2,$$

σύμφωνα με την ταύτιση που αναφέραμε, δηλαδή $(A,0)\simeq A$ και $(0,B)\simeq B$.

Έχουμε δείξει ότι $\forall A\in\mathfrak{su}(2)$ $\left[C_1,\rho_1(A,0)\right]=\left[C_1,\rho(A,0)\right]=0$. Ακόμη $\forall B\in\mathfrak{su}(2)$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\left[C_1,\rho(0,B)\right]&=\left[\rho(\mathbf{i},0)^2+\rho(\mathbf{j},0)^2+\rho(\mathbf{k},0)^2,\rho(0,B)\right]\\
&=\left[\rho(\mathbf{i},0)^2,\rho(0,B)\right]+\left[\rho(\mathbf{j},0)^2,\rho(0,B)\right]+\left[\rho(\mathbf{k},0)^2,\rho(0,B)\right]\\
&=\rho(\mathbf{i},0)\left[\rho(\mathbf{j},0),\rho(0,B)\right]+\left[\rho(\mathbf{j},0),\rho(0,B)\right]\rho(\mathbf{i},0)+\rho(\mathbf{j},0)\left[\rho(\mathbf{j},0),\rho(0,B)\right]\\
&\quad+\left[\rho(\mathbf{j},0),\rho(0,B)\right]\rho(\mathbf{j},0)+\rho(\mathbf{k},0)\left[\rho(\mathbf{k},0),\rho(0,B)\right]+\left[\rho(\mathbf{k},0),\rho(0,B)\right]\rho(\mathbf{k},0)\\
&=0
\end{aligned}$$

γιατί $\forall(A,B)\in\mathfrak{su}(2)\times\mathfrak{su}(2)$

$$\left[(A,0),(0,B)\right]=\left(\left[A,0\right],\left[0,B\right]\right)=(0,0).$$

Τότε όμως για κάθε $\forall(A,B)\in\mathfrak{su}(2)\times\mathfrak{su}(2)$ θα έχουμε

$$\left[C_1,\rho(A,B)\right]=\left[C_1,\rho(A,0)\right]+\left[C_1,\rho(0,B)\right]=0$$

ή ισοδύναμα

$$C_1 \circ \rho(A,B) = \rho(A,B) \circ C_1 .$$

Ο τελεστής C_1 έχει μία τουλάχιστον ιδιοτιμή $\lambda_1 \in \mathbb{C}$ και ο ιδιόχωρος της ιδιοτιμής αυτής $V(\lambda_1)$ είναι ένας αναλλοίωτος υπόχωρος της αναπαράστασης $(\mathfrak{su}(2)\times\mathfrak{su}(2), V, \rho)$, γιατί μετατίθεται με αυτήν. Όμως επειδή αυτή είναι ανάγωγη θα έχουμε $V = V(\lambda_1)$ και συνεπώς $C_1 = \lambda_1 1_V$. Τότε όμως σύμφωνα με την πρόταση 2.6.2 θα υπάρχει $\ell_1 \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $C_1 = -\ell_1(\ell_1+1)1_V$. Ομοίως για τον τελεστή Casimir C_2 θα υπάρχει $\ell_2 \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$ ώστε $C_2 = -\ell_2(\ell_2+1)1_V$.

Θεωρούμε τον υπόχωρο

$$U = \left\{ x \in V \,\middle|\, \rho(\mathbf{i},0)x = i\ell_1 x \text{ και } \rho(0,\mathbf{i})x = i\ell_2 x \right\} = V(i\ell_1) \bigcap V(i\ell_2)$$

του V. Έχουμε δείξει στην πρόταση 2.6.3 ότι εφόσον $C_1 = -\ell_1(\ell_1+1)1_V$, το σύνολο των ιδιοτιμών του $\rho_1(\mathbf{i},0) = \rho(\mathbf{i},0) : V \to V$ είναι το

$$\left\{ -i\ell_1, -i\ell_1 + i, \ldots, i\ell_1 - i, i\ell_1 \right\}$$

και ομοίως εφόσον $C_2 = -\ell_2(\ell_2+1)1_V$, το σύνολο ιδιοτιμών του $\rho_2(0,\mathbf{i}) = \rho(0,\mathbf{i}) : V \to V$ είναι το

$$\left\{ -i\ell_2, -i\ell_2 + i, \ldots, i\ell_2 - i, i\ell_2 \right\}.$$

Τότε όμως ένα μη μηδενικό διάνυσμα $w \in U$ είναι ένα διάνυσμα μεγίστου βάρους και για τις δύο αναπαραστάσεις $\left(\mathfrak{su}(2)\times\{0\}, V, \rho_1\right), \left(\{0\}\times\mathfrak{su}(2), V, \rho_2\right)$. Θέλουμε να δείξουμε ότι υπάρχει ένα τέτοιο διάνυσμα, δηλαδή ότι $U \neq \{0\}$.

Έχουμε δείξει ότι $\forall B \in su(2)$ $\rho_1(\mathbf{i},0)\circ\rho_2(0,B) = \rho_2(0,B)\circ\rho_1(\mathbf{i},0)$, δηλαδή ο γραμμικός τελεστής $\rho_1(\mathbf{i},0)$ είναι ένας ομομορφισμός των αναπαραστάσεων $\left(\mathfrak{su}(2)\times\{0\}, V, \rho_1\right)$, $\left(\{0\}\times\mathfrak{su}(2), V, \rho_2\right)$ και συνεπώς $V(i\ell_1)$ είναι ένας αναλλοίωτος υπόχωρος της αναπαράστασης $\left(\{0\}\times\mathfrak{su}(2), V, \rho_2\right)$. Θεωρούμε λοιπόν την υποαναπαράσταση $\left(\{0\}\times\mathfrak{su}(2), V(i\ell_1), \rho_{V(i\ell_1)}\right)$ της $\left(\{0\}\times\mathfrak{su}(2), V, \rho_2\right)$. Τότε πάλι το σύνολο των ιδιοτιμών του $\rho_{V(i\ell_1)}(0,\mathbf{i}) = \rho_2(0,\mathbf{i})\big|V(i\ell_1)$ είναι το $\left\{ -i\ell_2, -i\ell_2 + i, \ldots, i\ell_2 - i, i\ell_2 \right\}$ και συνεπώς $V(i\ell_1)\bigcap V(i\ell_2) \neq \{0\}$.

Έστω λοιπόν ένα μη μηδενικό διάνυσμα $w \in V(i\ell_1)\bigcap V(i\ell_2)$ και $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2 : V \to V$ οι τελεστές καθόδου των αναπαραστάσεων $\left(\mathfrak{su}(2)\times\{0\}, V, \rho_1\right)$, $\left(\{0\}\times\mathfrak{su}(2), V, \rho_2\right)$ αντιστοίχως, δηλαδή

$$\mathbf{Y}_1 = \rho_1(\mathbf{j},0) + i\rho_1(\mathbf{k},0) \ ,$$

$$\mathbf{Y}_2 = \rho_2(0,\mathbf{j}) + i\rho_2(0,\mathbf{k}).$$

Θεωρούμε τον αριθμό $\kappa_1 = \max\left\{\kappa \in \mathbb{N}\cup\{0\} \middle| \mathbf{Y}_1^{\kappa}(w) \neq 0\right\}$. Τότε όπως έχουμε δείξει στην πρόταση 2.5.7 ο υπόχωρος

$$W_1 = \left\langle w, \mathbf{Y}_1(w), ..., \mathbf{Y}_1^{\kappa_1}(w) \right\rangle \leq V$$

είναι ένας αναλλοίωτος υπόχωρος της αναπαράστασης $\left(\mathfrak{su}(2)\times\{0\}, V, \rho_1\right)$ και μάλιστα η υποαναπαράσταση $\left(\mathfrak{su}(2)\times\{0\}, W_1, \rho_{W_1}\right)$ είναι ανάγωγη. Ακόμη επειδή ο τελεστής Casimir αυτής C_{W_1} είναι

$$C_{W_1} = -\ell_1(\ell_1+1)1_{W_1},$$

οι ιδιοτιμές του $\rho_{W_1}(\mathbf{i},0) = \rho_1(\mathbf{i},0)|W_1$ θα είναι το σύνολο $\{-i\ell_1, -i\ell_1+i, ..., i\ell_1-i, i\ell_1\}$. Θα πρέπει λοιπόν $\kappa_1 = 2\ell_1$. Ομοίως δείχνουμε ότι ο υπόχωρος

$$W_2 = \left\langle w, \mathbf{Y}_2(w), ..., \mathbf{Y}_2^{2\ell_2}(w) \right\rangle \leq V$$

είναι ένας αναλλοίωτος υπόχωρος της αναπαράστασης $\left(\{0\}\times\mathfrak{su}(2), V, \rho_2\right)$ και μάλιστα ότι η υποαναπαράσταση $\left(\{0\}\times\mathfrak{su}(2), W_2, \rho_{W_2}\right)$ είναι ανάγωγη. Θεωρώντας τους ομομορφισμούς Lie αλγεβρών $\sigma_1 : \mathfrak{su}(2) \to \mathfrak{gl}(W_1)$ και $\sigma_2 : \mathfrak{su}(2) \to \mathfrak{gl}(W_2)$ με

$$\sigma_1(A) = \rho_{W_1}(A,0)\ ,\ \sigma_2(B) = \rho_{W_2}(0,B)$$

είναι απλό να δούμε ότι οι αναπαραστάσεις $(\mathfrak{su}(2), W_1, \sigma_1)$ και $(\mathfrak{su}(2), W_2, \sigma_2)$ είναι ανάγωγες. Αυτές είναι οι ζητούμενες αναπαραστάσεις.

Με την βοήθεια αυτών των αναπαραστάσεων κατασκευάζουμε την ανάγωγη αναπαράσταση

$$\left(\mathfrak{su}(2)\times\mathfrak{su}(2), W_1\otimes W_2, \sigma_1\otimes\sigma_2\right),$$

η οποία είναι ισόμορφη με την $\left(\mathfrak{su}(2)\times\mathfrak{su}(2), V, \rho\right)$. Για να το δείξουμε αυτό θεωρούμε την γραμμική απεικόνιση $T : W_1\otimes W_2 \to V$ την οποία ορίζουμε ως εξής

$$\forall(\kappa_1,\kappa_2) \in \{0,1,...,2\ell_1\}\times\{0,1,...,2\ell_2\}\quad T\left((\mathbf{Y}_1^{\kappa_1}(w)\otimes\mathbf{Y}_2^{\kappa_2}(w)\right) = \mathbf{Y}_1^{\kappa_1}\mathbf{Y}_2^{\kappa_2}(w).$$

Θα δείξουμε ότι η T είναι ένας ομομορφισμός των αναπαραστάσεων. Έστω $(\kappa_1,\kappa_2) \in \{0,1,...,2\ell_1\}\times\{0,1,...,2\ell_2\}$ και $(A,B) \in \mathfrak{su}(2)\times\mathfrak{su}(2)$. Τότε επειδή

$$\left[\rho(0,B), \mathbf{Y}_1^{\kappa_1}\right] = \left[\rho(A,0), \mathbf{Y}_2^{\kappa_2}\right] = 0 \text{ και } \left[\mathbf{Y}_1^{\kappa_1}, \mathbf{Y}_2^{\kappa_2}\right] = 0$$

συνεπάγεται ότι

$$T\left(\rho(A,0)\mathbf{Y}_1^{\kappa_1}(w)\otimes\mathbf{Y}_2^{\kappa_2}(w)\right) = \rho(A,0)\mathbf{Y}_1^{\kappa_1}\mathbf{Y}_2^{\kappa_2}(w).$$

Πράγματι υπάρχουν $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{2\ell_1}\in\mathbb{C}$ τέτοιοι ώστε $\rho(A,0)\mathbf{Y}_1^{\kappa_1}(w)=\sum_{n=0}^{2\ell_1}a_n\mathbf{Y}_1^n(w)$ και έχουμε

$$\begin{aligned}
T\left(\rho(A,0)\mathbf{Y}_1^{\kappa_1}(w)\otimes\mathbf{Y}_2^{\kappa_2}(w)\right)&=T\left(\sum_{n=0}^{2\ell_1}a_n\mathbf{Y}_1^n(w)\otimes\mathbf{Y}_2^{\kappa_2}(w)\right)\\
&=\sum_{n=0}^{2\ell_1}a_n\mathbf{Y}_1^n\mathbf{Y}_2^{\kappa_2}(w)\\
&=\sum_{n=0}^{2\ell_1}a_n\mathbf{Y}_2^{\kappa_2}\mathbf{Y}_1^n(w)\\
&=\mathbf{Y}_2^{\kappa_2}\sum_{n=0}^{2\ell_1}a_n\mathbf{Y}_1^n(w)\\
&=\mathbf{Y}_2^{\kappa_2}\rho(A,0)\mathbf{Y}_1^{\kappa_1}(w)\\
&=\rho(A,0)\mathbf{Y}_2^{\kappa_2}\mathbf{Y}_1^{\kappa_1}(w)\\
&=\rho(A,0)\mathbf{Y}_1^{\kappa_1}\mathbf{Y}_2^{\kappa_2}(w).
\end{aligned}$$

Ομοίως δείχνουμε ότι $T\left(\mathbf{Y}_1^{\kappa_1}(w)\otimes\rho(0,B)\mathbf{Y}_2^{\kappa_2}(w)\right)=\mathbf{Y}_1^{\kappa_1}\rho(0,B)\mathbf{Y}_2^{\kappa_2}(w)$ και με αυτά έχουμε

$$\begin{aligned}
\rho(A,B)\circ T\left(\mathbf{Y}_1^{\kappa_1}(w)\otimes\mathbf{Y}_2^{\kappa_2}(w)\right)&=\rho(A,B)\mathbf{Y}_1^{\kappa_1}\mathbf{Y}_2^{\kappa_2}(w)\\
&=\rho(A,0)\mathbf{Y}_1^{\kappa_1}\mathbf{Y}_2^{\kappa_2}(w)+\rho(0,B)\mathbf{Y}_1^{\kappa_1}\mathbf{Y}_2^{\kappa_2}(w)\\
&=\rho(A,0)\mathbf{Y}_1^{\kappa_1}\mathbf{Y}_2^{\kappa_2}(w)+\mathbf{Y}_1^{\kappa_1}\rho(0,B)\mathbf{Y}_2^{\kappa_2}(w)\\
&=T\left(\sigma_1(A)\mathbf{Y}_1^{\kappa_1}(w)\otimes\mathbf{Y}_2^{\kappa_2}(w)+\mathbf{Y}_1^{\kappa_1}(w)\otimes\sigma_2(B)\mathbf{Y}_2^{\kappa_2}(w)\right)\\
&=T\left(\left(\sigma_1(A)\otimes 1_{W_2}+1_{W_1}\otimes\sigma_2(B)\right)\mathbf{Y}_1^{\kappa_1}(w)\otimes\mathbf{Y}_2^{\kappa_2}(w)\right)\\
&=\left(T\circ\left(\sigma_1(A)\otimes 1_{W_2}+1_{W_1}\otimes\sigma_2(B)\right)\right)\left(\mathbf{Y}_1^{\kappa_1}(w)\otimes\mathbf{Y}_2^{\kappa_2}(w)\right)\\
&=\left(T\circ(\sigma_1\otimes\sigma_2)(A,B)\right)\left(\mathbf{Y}_1^{\kappa_1}(w)\otimes\mathbf{Y}_2^{\kappa_2}(w)\right)
\end{aligned}$$

Θα δείξουμε ακόμη ότι η T είναι ένας ισομορφισμός γραμμικών χώρων. Για να δείξουμε ότι η T είναι ένας μονομορφισμός γραμμικών χώρων αρκεί να δείξουμε ότι το υποσύνολο $\left\{T\left(\mathbf{Y}_1^{\kappa_1}(w)\otimes\mathbf{Y}_2^{\kappa_2}(w)\right)\middle|(\kappa_1,\kappa_2)\in\{0,1,...,2\ell_1\}\times\{0,1,...,2\ell_2\}\right\}$ του V είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Πράγματι για κάθε $(\kappa_1,\kappa_2)\in\{0,1,...,2\ell_1\}\times\{0,1,...,2\ell_2\}$ έχουμε $\mathbf{Y}_1^{\kappa_1}\mathbf{Y}_2^{\kappa_2}(w)\neq 0$. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $c_{\kappa_1,\kappa_2}\in\mathbb{C}$ με $(\kappa_1,\kappa_2)\in\{0,1,...,2\ell_1\}\times\{0,1,...,2\ell_2\}$ ώστε

$$\sum_{\kappa_1=0}^{2\ell_1}\sum_{\kappa_2=0}^{2\ell_2}c_{\kappa_1,\kappa_2}\mathbf{Y}_1^{\kappa_1}\mathbf{Y}_2^{\kappa_2}(w)=0.$$

Επειδή $\forall(\kappa_1,\kappa_2)\in\{0,1,...,2\ell_1\}\times\{0,1,...,2\ell_2\}$ $\left[\mathbf{Y}_1^{\kappa_1},Y_2^{\kappa_2}\right]=0$ και $\left[\rho(\mathbf{i},0),\mathbf{Y}_2^{\kappa_2}\right]=0$ θα έχουμε

$$\begin{aligned}\rho(\mathbf{i},0)\mathbf{Y}_1^{\kappa_1}\mathbf{Y}_2^{\kappa_2}(w) &= \rho(\mathbf{i},0)\mathbf{Y}_2^{\kappa_2}\mathbf{Y}_1^{\kappa_1}(w)\\ &= \mathbf{Y}_2^{\kappa_2}\rho(\mathbf{i},0)\mathbf{Y}_1^{\kappa_1}(w)\\ &= \mathbf{Y}_2^{\kappa_2}i(\ell_1-\kappa_1)\mathbf{Y}_1^{\kappa_1}(w)\\ &= i(\ell_1-\kappa_1)\mathbf{Y}_2^{\kappa_2}\mathbf{Y}_1^{\kappa_1}(w)\\ &= i(\ell_1-\kappa_1)\mathbf{Y}_1^{\kappa_1}\mathbf{Y}_2^{\kappa_2}(w).\end{aligned}$$

Δηλαδή το διάνυσμα $\mathbf{Y}_1^{\kappa_1}\mathbf{Y}_2^{\kappa_2}(w)$ είναι ιδιοδιάνυσμα του $\rho(\mathbf{i},0)$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $i(\ell_1-\kappa_1)$. Έπεται λοιπόν ότι $\forall\kappa_1\in\{0,1,...,2\ell_1\}$ το διάνυσμα

$$\sum_{\kappa_2=0}^{2\ell_2} c_{\kappa_1,\kappa_2}\mathbf{Y}_1^{\kappa_1}\mathbf{Y}_2^{\kappa_2}(w)$$

είναι ιδιοδιάνυσμα του $\rho(\mathbf{i},0)$ με ιδιοτιμή $i(\ell_1-\kappa_1)$. Θα πρέπει λοιπόν $\forall\kappa_1\in\{0,1,...,2\ell_1\}$ να έχουμε $\sum_{\kappa_2=0}^{2\ell_2} c_{\kappa_1,\kappa_2}\mathbf{Y}_1^{\kappa_1}\mathbf{Y}_2^{\kappa_2}(w)=0$. Ακόμη $\forall\kappa_2\in\{0,1,...,2\ell_2\}$

$$\begin{aligned}\rho(0,\mathbf{i})\mathbf{Y}_1^{\kappa_1}\mathbf{Y}_2^{\kappa_2}(w) &= \mathbf{Y}_1^{\kappa_1}\rho(0,\mathbf{i})\mathbf{Y}_2^{\kappa_2}(w)\\ &= \mathbf{Y}_1^{\kappa_1}i(\ell_2-\kappa_2)\mathbf{Y}_2^{\kappa_2}(w)\\ &= i(\ell_2-\kappa_2)\mathbf{Y}_1^{\kappa_1}\mathbf{Y}_2^{\kappa_2}(w),\end{aligned}$$

δηλαδή το διάνυσμα $\mathbf{Y}_1^{\kappa_1}\mathbf{Y}_2^{\kappa_2}(w)$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του $\rho(0,\mathbf{i})$ με ιδιοτιμή $i(\ell_2-\kappa_2)$. Επειδή τα ιδιοδιανύσματα αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές θα είναι και γραμμικώς ανεξάρτητα και έτσι $\forall(\kappa_1,\kappa_2)\in\{0,1,...,2\ell_1\}\times\{0,1,...,2\ell_2\}$ $c_{\kappa_1,\kappa_2}=0$.

Τέλος θα δείξουμε ότι η T είναι και επιμορφισμός γραμμικών χώρων. Επειδή η T είναι ομομορφισμός αναπαραστάσεων ο υπόχωρος $T(W_1\otimes W_2)$ του V είναι αναλλοίωτος υπόχωρος της αναπαράστασης $(\mathfrak{su}(2)\times\mathfrak{su}(2),V,\rho)$ και δεν είναι ο τετριμμένος υπόχωρος. Θα έχουμε λοιπόν $T(W_1\otimes W_2)=V$ □

Κεφάλαιο 3

Οι ανάγωγες αναπαραστάσεις της Lie άλγεβρας $\mathfrak{so}(4,\mathbb{R})$ στο άτομο του υδρογόνου

3.1 Οι ανάγωγες αναπαραστάσεις της $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$ στο άτομο του υδρογόνου

Σύμφωνα με όσα είπαμε στην ενότητα 2.4, σε κάθε ιδιόχωρο $\mathcal{H}^\infty(E)$ της Hamiltonian $\mathbf{H}$ έχουμε μία αντιερμιτιανή αναπαράσταση $\left(\mathfrak{so}(3,\mathbb{R}),\mathcal{H}^\infty(E),\mathbf{L}\right)$ της Lie άλγεβρας $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$, η οποία αναλύεται σε ένα ευθύ άθροισμα ανάγωγων αναπαραστάσεων

$$\left(\mathfrak{so}(3,\mathbb{R}),\mathcal{H}^\infty(E),\mathbf{L}\right)\cong\left(\mathfrak{so}(3,\mathbb{R}),\overset{k}{\underset{i=1}{\oplus}}V_i,\overset{k}{\underset{i=1}{\oplus}}\mathbf{L}_i\right).$$

Στην ενότητα 2.5 είδαμε ότι οι μη τετριμμένες ανάγωγες αναπαραστάσεις της Lie άλγεβρας $\mathfrak{su}(2)$ σε χώρους πεπερασμένης διάστασης είναι οι αναπαραστάσεις

$$\left\{(\mathfrak{su}(2),\mathrm{P}^n,U_n)\,\middle|\,n\in\mathbb{N}\right\},$$

όπου P^n είναι ο μιγαδικός γραμμικός χώρος των ομογενών πολυωνύμων $p:\mathbb{R}^2\to\mathbb{C}$ βαθμού n. Όμως η $\mathfrak{su}(2)$ είναι, σύμφωνα με την πρόταση 2.3.10, ισόμορφη με την $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$. Αν λοιπόν $T:\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})\to\mathfrak{su}(2)$ είναι ένας ισομορφισμός Lie αλγεβρών, τότε οι ανάγωγες αναπαραστάσεις της $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$ σε χώρους πεπερασμένης διάστασης θα είναι

$$\left\{(\mathfrak{so}(3,\mathbb{R}),\mathrm{P}^n,U_n\circ T)\,\middle|\,n\in\mathbb{N}\right\}$$

και για κάθε $i\in\{1,...,k\}$ θα υπάρχει $n_i\in\mathbb{N}$ τέτοιος ώστε

$$(\mathfrak{so}(3,\mathbb{R}),V_i,\mathbf{L}_i)\cong(\mathfrak{so}(3,\mathbb{R}),\mathrm{P}^{n_i},U_{n_i}\circ T).$$

Αυτό όμως δεν μας δίνει ικανοποιητική πληροφορία για την διάσταση του $\mathcal{H}^\infty(E)$, δηλαδή την τάξη εκφυλισμού της ιδιοτιμής E. Για τον λόγο αυτό θα «μεγαλώσουμε» την Lie άλγεβρα $\mathfrak{su}(2)$ στην $\mathfrak{su}(2)\times\mathfrak{su}(2)$ η οποία είναι ισόμορφη, σύμφωνα με την πρόταση 2.3.11, με την $\mathfrak{so}(4,\mathbb{R})$.

3.2 Οι τελεστές Runge-Lenz

Οι τελεστές Runge-Lenz είναι διαφορικοί τελεστές που δρουν στον ιδιόχωρο $\mathcal{H}^{\infty}(E)$ της Hamiltonian που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή E και ορίζονται ως εξής

$$\mathbf{R_i} = \frac{i\hbar}{\sqrt{-8mE}}\left(\mathbf{L_k}\partial_y + \partial_y\mathbf{L_k} - \mathbf{L_j}\partial_z - \partial_z\mathbf{L_j} + \frac{2me^2x}{\hbar\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$$

$$\mathbf{R_j} = \frac{i\hbar}{\sqrt{-8mE}}\left(\mathbf{L_i}\partial_z + \partial_z\mathbf{L_i} - \mathbf{L_k}\partial_x - \partial_x\mathbf{L_k} + \frac{2me^2x}{\hbar\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$$

$$\mathbf{R_k} = \frac{i\hbar}{\sqrt{-8mE}}\left(\mathbf{L_j}\partial_x + \partial_x\mathbf{L_j} - \mathbf{L_i}\partial_y - \partial_y\mathbf{L_i} + \frac{2me^2x}{\hbar\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right).$$

Οι τελεστές Runge-Lenz θα μας βοηθήσουν να κατασκευάσουμε μία αναπαράσταση της Lie άλγεβρας $\mathfrak{su}(2)\times\mathfrak{su}(2)$ στον $\mathcal{H}^{\infty}(E)$. Αλλά πρώτα διατυπώνουμε την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 3.2.1. Οι τελεστές Runge-Lenz $\mathbf{R_i}, \mathbf{R_j}, \mathbf{R_k} : \mathcal{H}^{\infty}(E) \to \mathcal{H}^{\infty}(E)$ είναι ερμιτιανοί γραμμικοί τελεστές.

Απόδειξη. Επειδή η αναπαράσταση ρ της $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ στον $\mathcal{H}^{\infty}(E)$ είναι μοναδιακή, η αναπαράσταση $\rho_* = \mathbf{L}$ της $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$ στον $\mathcal{H}^{\infty}(E)$ θα είναι αντιερμιτιανή και συνεπώς οι τελεστές $\mathbf{L_i}$, $\mathbf{L_j}$, $\mathbf{L_k}$ είναι αντιερμιτιανοί. Τότε όμως οι τελεστές $i\mathbf{L_i}$, $i\mathbf{L_j}$, $i\mathbf{L_k}$ θα είναι ερμιτιανοί.

Ακόμη με όμοιο τρόπο όπως δείξαμε την πρόταση 1.1.1 μπορούμε να δείξουμε ότι και οι διαφορικοί τελεστές ∂_x, ∂_y, ∂_z που δρουν στον $\mathcal{H}^{\infty}(E)$ είναι ερμιτιανοί. Συνεπάγεται λοιπόν ότι

$$i\mathbf{L_k}\partial_y + \partial_y(i\mathbf{L_k}) - i\mathbf{L_j}\partial_z - \partial_z(i\mathbf{L_j}) + \frac{2me^2x}{\hbar\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$i\mathbf{L_i}\partial_z + \partial_z(i\mathbf{L_i}) - i\mathbf{L_k}\partial_x - \partial_x(i\mathbf{L_k}) + \frac{2me^2x}{\hbar\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$i\mathbf{L_j}\partial_x + \partial_x(i\mathbf{L_j}) - i\mathbf{L_i}\partial_y - \partial_y(i\mathbf{L_i}) + \frac{2me^2x}{\hbar\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

είναι ερμιτιανοί τελεστές, γιατί και ο πολλαπλασιαστικός τελεστής $\frac{2me^2x}{\hbar\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ είναι ερμιτιανός ολοκληρώνοντας την απόδειξη της πρότασης□

3.3. Η αναπαράσταση της Lie άλγεβρας $\mathfrak{so}(4,\mathbb{R})$ στους ιδιόχωρους της Hamiltonian

Θα κατασκευάσουμε την αναπαράσταση $\mathbf{A}$ της Lie άλγεβρας $\mathfrak{su}(2)\times\mathfrak{su}(2)$ στον $\mathcal{H}^{\infty}(E)$. Ξεκινάμε με την αναπαράσταση $\mathbf{B}$ της $\mathfrak{su}(2)$ στον $\mathcal{H}^{\infty}(E)$ την οποία ορίζουμε ως εξής

$$\mathbf{B}(\mathbf{i}) = \frac{1}{2}(\mathbf{L_i} + \mathbf{R_i})$$
$$\mathbf{B}(\mathbf{j}) = \frac{1}{2}(\mathbf{L_j} + \mathbf{R_j})$$
$$\mathbf{B}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2}(\mathbf{L_k} + \mathbf{R_k}).$$

Όπως μπορούμε να υπολογίσουμε οι παραπάνω τελεστές ικανοποιούν τις παρακάτω κυκλικές σχέσεις μετάθεσης,

$$\left[\mathbf{B}(\mathbf{i}),\mathbf{B}(\mathbf{j})\right] = \mathbf{B}(\mathbf{k})$$
$$\left[\mathbf{B}(\mathbf{j}),\mathbf{B}(\mathbf{k})\right] = \mathbf{B}(\mathbf{i})$$
$$\left[\mathbf{B}(\mathbf{k}),\mathbf{B}(\mathbf{i})\right] = \mathbf{B}(\mathbf{j})$$

και συνεπώς η $\mathbf{B}$ είναι πράγματι μία αναπαράσταση. Μετά από υπολογισμούς (δες [1] σελ. 271-277) βρίσκουμε ότι ο τελεστής Casimir της $\mathbf{B}$ είναι

$$\mathbf{B}^2 = \frac{1}{4}(\mathbf{L}^2 + \mathbf{R}^2) = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{me^4}{2E\hbar^2}\right)1_{\mathcal{H}^{\infty}(E)}.$$

Έχουμε φτάσει στην μέση της κατασκευής. Για να τελειώσουμε ορίζουμε την αναπαράσταση $\mathbf{D}$ της $\mathfrak{su}(2)$ στον $\mathcal{H}^{\infty}(E)$ ως εξής

$$\mathbf{D}(\mathbf{i}) = \frac{1}{2}(\mathbf{L_i} - \mathbf{R_i})$$
$$\mathbf{D}(\mathbf{j}) = \frac{1}{2}(\mathbf{L_j} - \mathbf{R_j})$$
$$\mathbf{D}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2}(\mathbf{L_k} - \mathbf{R_k}).$$

Ομοίως υπολογίζουμε και βρίσκουμε ότι οι παραπάνω τελεστές ικανοποιούν τις κυκλικές σχέσεις μετάθεσης

$$\left[\mathbf{D}(\mathbf{i}),\mathbf{D}(\mathbf{j})\right] = \mathbf{D}(\mathbf{k})$$
$$\left[\mathbf{D}(\mathbf{j}),\mathbf{D}(\mathbf{k})\right] = \mathbf{D}(\mathbf{i})$$
$$\left[\mathbf{D}(\mathbf{k}),\mathbf{D}(\mathbf{i})\right] = \mathbf{D}(\mathbf{j}),$$

οπότε πράγματι η $\mathbf{D}$ είναι μία αναπαράσταση της $\mathfrak{su}(2)$ στον $\mathcal{H}^{\infty}(E)$. Μάλιστα έχει τον ίδιο τελεστή Casimir με την $\mathbf{B}$ (δες [1] παρ. 8.6),

$$\mathbf{D}^2 = \frac{1}{4}(\mathbf{L}^2 + \mathbf{R}^2) = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{me^4}{2E\hbar^2}\right) 1_{\mathcal{H}^{\infty}(E)}.$$

Τέλος για κάθε $A \in \mathfrak{su}(2)$ οι τελεστές $\mathbf{B}(A)$ και $\mathbf{D}(A)$ μετατίθενται, δηλαδή

$$\left[\mathbf{B}(A), \mathbf{D}(A)\right] = 0$$

Όλους τους παραπάνω υπολογισμούς μπορεί να τους βρει κάποιος στο «Linearity, Symmetry, and Prediction in the Hydrogen Atom» της Singer. Γίνεται λοιπόν τώρα προφανές ότι η απεικόνιση $\mathbf{A} : \mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{su}(2) \to \mathfrak{gl}(\mathcal{H}^{\infty}(E))$ με

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{i}, \mathbf{0}) &= \mathbf{B}(\mathbf{i}) \\ \mathbf{A}(\mathbf{j}, \mathbf{0}) &= \mathbf{B}(\mathbf{j}) \\ \mathbf{A}(\mathbf{k}, \mathbf{0}) &= \mathbf{B}(\mathbf{k}) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{0}, \mathbf{i}) &= \mathbf{D}(\mathbf{i}) \\ \mathbf{A}(\mathbf{0}, \mathbf{j}) &= \mathbf{D}(\mathbf{j}) \\ \mathbf{A}(\mathbf{0}, \mathbf{k}) &= \mathbf{D}(\mathbf{k}), \end{aligned}$$

είναι μία αναπαράσταση της $\mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{su}(2)$ στον ιδιόχωρο $\mathcal{H}^{\infty}(E)$ της Hamiltonian που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή E.

Πρόταση 3.3.1. Η αναπαράσταση $(\mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{su}(2), \mathcal{H}^{\infty}(E), \mathbf{A})$ αναλύεται σε ευθύ άθροισμα ανάγωγων αναπαραστάσεων.

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι αν V είναι ένας αναλλοίωτος υπόχωρος της $\mathbf{A}$, τότε και ο $V^{\perp}$ είναι επίσης ένας αναλλοίωτος υπόχωρος της $\mathbf{A}$, γιατί η συνέχεια είναι όμοια με την απόδειξη της πρότασης 1.4.15. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι V είναι ένας αναλλοίωτος υπόχωρος της $\mathbf{A}$, $x \in V^{\perp}$ και $y \in V$. Τότε θα έχουμε

$$\begin{aligned} \left\langle \mathbf{A}(\mathbf{i}, \mathbf{0})x, y \right\rangle &= \left\langle \mathbf{B}(\mathbf{i})x, y \right\rangle \\ &= \frac{1}{2}\left\langle (\mathbf{L}_{\mathbf{i}} + \mathbf{R}_{\mathbf{i}})x, y \right\rangle \\ &= \frac{1}{2}\left\langle \mathbf{L}_{\mathbf{i}}x, y \right\rangle + \frac{1}{2}\left\langle \mathbf{R}_{\mathbf{i}}x, y \right\rangle \end{aligned}$$

και λαμβάνοντας υπόψη ότι ο $\mathbf{L}_{\mathbf{i}}$ είναι αντιερμιτιανός ενώ ο $\mathbf{R}_{\mathbf{i}}$ είναι ερμιτιανός τελεστής, θα έχουμε

$$\begin{aligned}\left\langle \mathbf{A}(\mathbf{i},\mathbf{0})x, y\right\rangle &= -\frac{1}{2}\left\langle x, \mathbf{L_i} y\right\rangle + \frac{1}{2}\left\langle x, \mathbf{R_i} y\right\rangle \\ &= -\left\langle x, \frac{1}{2}(\mathbf{L_i} - \mathbf{R_i}) y\right\rangle \\ &= -\left\langle x, \mathbf{A}(\mathbf{0},\mathbf{i}) y\right\rangle \\ &= 0.\end{aligned}$$

Συνεχίζοντας με όμοιο τρόπο δείχνουμε και τις ισότητες

$$\begin{aligned}\left\langle \mathbf{A}(\mathbf{j},\mathbf{0})x, y\right\rangle &= -\left\langle x, \mathbf{A}(\mathbf{0},\mathbf{j}) y\right\rangle = 0 \\ \left\langle \mathbf{A}(\mathbf{k},\mathbf{0})x, y\right\rangle &= -\left\langle x, \mathbf{A}(\mathbf{0},\mathbf{k}) y\right\rangle = 0.\end{aligned}$$

Τελικά για κάθε διάνυσμα βάσης $A \in \{(\mathbf{i},\mathbf{0}),(\mathbf{j},\mathbf{0}),(\mathbf{k},\mathbf{0}),(\mathbf{0},\mathbf{i}),(\mathbf{0},\mathbf{j}),(\mathbf{k},\mathbf{0})\}$ της $\mathfrak{su}(2)\times\mathfrak{su}(2)$ θα έχουμε

$$\left\langle \mathbf{A}(A)x, y\right\rangle = 0\,,$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη της πρότασης□

3.4. Τα αποτελέσματα

Σύμφωνα με την πρόταση 2.6.3 θα υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε ο τελεστής Casimir $\mathbf{B}^2$ της $(\mathfrak{su}(2), \mathcal{H}^\infty(E), \mathbf{B})$ να είναι

$$\mathbf{B}^2 = -\frac{1}{4}(n^2 + 2n)1_{\mathcal{H}^\infty(E)}$$

και συνεπώς θα έχουμε

$$-\frac{1}{4}(n^2 + 2n) = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{me^4}{2E\hbar^2}\right),$$

από όπου συνεπάγεται ότι

$$E = -\frac{-me^4}{2\hbar^2(n+1)^2}\,.$$

Δηλαδή με λίγα λόγια βρήκαμε τις ιδιοτιμές της Hamiltonian στο άτομο του υδρογόνου.

Σύμφωνα τώρα με την πρόταση 3.3.1 η αναπαράσταση $(\mathfrak{su}(2)\times\mathfrak{su}(2), \mathcal{H}^\infty(E), \mathbf{A})$ αναλύεται σε ευθύ άθροισμα ανάγωγων αναπαραστάσεων,

$$(\mathfrak{su}(2)\times\mathfrak{su}(2), \mathcal{H}^\infty(E), \mathbf{A}) \cong (\mathfrak{su}(2)\times\mathfrak{su}(2), \bigoplus_{j=1}^{\ell} V_j, \bigoplus_{j=1}^{\ell} \mathbf{A}_j)\,.$$

Σύμφωνα με την πρόταση 2.6.6, για κάθε $j \in \{1,...,\ell\}$ υπάρχουν ανάγωγες αναπαραστάσεις

$$(\mathfrak{su}(2), \mathrm{P}^{n_j}, U_{n_j})\ \ ,\ \ (\mathfrak{su}(2), \mathrm{P}^{m_j}, U_{m_j})$$

της $\mathfrak{su}(2)$ στους χώρους των ομογενών πολυωνύμων P^{n_j} και P^{m_j} τέτοιες ώστε

$$(\mathfrak{su}(2)\times\mathfrak{su}(2),V_j,\mathbf{A}_j)\cong(\mathfrak{su}(2)\times\mathfrak{su}(2),\mathrm{P}^{n_j}\otimes\mathrm{P}^{m_j},U_{n_j}\otimes U_{m_j}).$$

Όμως οι τελεστές Casimir των αναπαραστάσεων $(\mathfrak{su}(2),\mathrm{P}^{n_j},U_{n_j})$ και $(\mathfrak{su}(2),\mathrm{P}^{m_j},U_{m_j})$ έχουν την ίδια τιμή $(n^2+2n)/4$. Συνεπώς θα έχουμε αναγκαστικά $n_j=m_j=n$ και οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι ο $\mathcal{H}^\infty(E)$ «χτίζεται» από ανάγωγους αναλλοίωτους υπόχωρους της μορφής $\mathrm{P}^n\otimes\mathrm{P}^n$ η διάσταση των οποίων είναι $(n+1)^2$. Δεν γνωρίζουμε πόσοι τέτοιοι απαιτούνται για το «χτίσιμο» του $\mathcal{H}^\infty(E)$ και συμπεραίνουμε απλά ότι η διάσταση του $\mathcal{H}^\infty(E)$ είναι ένα ακέραιο πολλαπλάσιο του $(n+1)^2$.

Αναφορές

[1] Stephanie Frank Singer, Linearity, Symmetry and Prediction in the Hydrogen Atom, Springer, 2005.

[2] Alexander Kirillov Jr., Introduction to Lie Groups and Lie Algebras.

[3] Loring W. Tu, An introduction to Manifolds, Springer, 2008.

[4] John M. Lee, Introduction to Smooth Manifolds, University of Washington, 2000.

[5] Vladimir G. Ivancevic, Tijana T. Ivancevic, Lecture Notes in Lie Groups, 2011.

[6] Markos M. Alexandrino, Renato G. Bettiol, Introduction to Lie Groups, adjoint action and it's generalization, IME USP Brazil, 2009.

[7] Papadimitrakis M., Notes on Measure Theory, University of Crete, 2004.

[8] William M. Boothby, An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry, University of Washington, 1986.

[9] P. A. M. Dirac, The Principles of Quantum Mechanics, Cambridge University, 1958.

[10] Ταμβάκης Κυριάκος, Εισαγωγή στην Κβαντομηχανική, Leader Books, 2003.