ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΑΜΤΙΚΩΝ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Predictor-Corrector Methods

Συγγραφέας:
Τζεντίκου Εριόλα

Επιβλέπων Καθηγητής:
Χατζηπαντελίδης Παναγιώτης

Μάρτιος 2018

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Πολυβηματικές Μέθοδοι

1.1 Εισαγωγή

Οι πολυβηματικές μέθοδοι έχουν μακρόχρονη ιστορία. Η υλοποίηση τους είναι οικονομική, γι' αυτό εφαρμόστηκαν πρίν την εμφάνιση των υπολογιστών, με αρχή την εργασία των Bashforth και Adams το 1883. Η θεωρία τους αναπτύχθηκε περισσότερο την δεκαετία του 1950. Οι πολυβηματικές μέθοδοι μειονεκτούν σε σχέση με τις μεθόδους Runge-Kutta κυρίως όσον αφορά τις ιδιότητες ευστάθειας. Υπερτερούν όμως στο κόστος υλοποίησης τους.

Οι άμεσες και οι πεπλεγμένες μέθοδοι δημιουργούν μια νέα κατηγορία μεθόδων τις μεθόδους Πρόβλεψης-Διόρθωσης (Predictor-Corrector). Οι μέθοδοι αυτοί δημιουργούνται ανα ζεύγη. Στην συνέχεια θα δούμε την ευστάθεια και την απόλυτη ευστάθεια των μεθόδων αλλά και των ζευγών. Την τάξη ακρίβειας καθώς και την σύγκλιση. Θα μελετήσουμε τις περιοχές απόλυτης ευστάθειας και θα υπολογίσουμε τις τάξεις των μεθόδων μέσω της Matlab . Αποτελέσματα, πίνακες και διαγράμματα θα τα δούμε παρακάτω.

1.2 Πολυβηματικές Μέθοδοι

Σε αυτήν την παράγραφο θα εισαγάγουμε μια κατηγορία μεθόδων για την αριθμητική επίλυση προβλημάτων αρχικών τιμών. Θεωρούμε το *πρόβλημα αρχικών τιμών* με συνάρτηση $y = [a, b] \to \mathbb{R}^m$ τέτοια ώστε

$$\begin{cases} y' = f(t, y), & a \le t \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases} \tag{1.1}$$

με δεδομένο $y_0 \in \mathbb{R}^m$ και $f : [a,b] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Έστω $N \in \mathbb{N}$, θεωρούμε έναν ομοιόμορφο διαμερισμό του $[a,b]$ με βήμα h, όπου $h := \dfrac{b-a}{N}$ και $t^n := a + nh, n = 0, ..., N$.

Θα κατασκευάσουμε προσεγγίσεις y^n των τιμών $y(t^n)$, $n = 0, ..., N$, οι οποίες θα προκύπτουν από τον παρακάτω αναδρομικό τύπο.

Ορισμός 1.1 Για την αριθμιτική επίλυση του (1.1) ορίζω την παρακάτω *k-βηματική μέθοδο.*

$$\begin{cases} y_0, y_1, ..., y_{k-1}, \quad \text{δεδομένα} \\ \alpha_k y_{n+k} + \alpha_{k-1} y_{n+k-1} + ... + \alpha_0 y_n = h(\beta_k f_{n+k} + ... + \beta_0 f_n), n = 0, ..., N-k \end{cases} \tag{1.2}$$

όπου $\alpha_0, ..., \alpha_k, \beta_0, ..., \beta_k$ σταθερές.

Θα υποθέτουμε ότι $\alpha_k = 1$ και $|\alpha_0| + |\beta_0| > 0$, έτσι ώστε να έχουμε πράγματι μία *k - βηματική μέθοδο.* Αν $\beta_k = 0$ η μέθοδος θα λέγεται *άμεση* (explicit): ο προσδιορισμός του y_{n+k} γίνεται με απλή αντικατάσταση των γνωστών τιμών $y_{n+i}, i = 0, ..., k-1$. Αν $\beta_k \neq 0$ η μέθοδος θα λέγεται *πεπλεγμένη* (implicit): για τον προσδιορισμό του y_{n+k} απαιτείται η επίλυση ενός $m \times m$ μη-γραμμικού συστήματος της μορφής

$$y_{n+k} = h\beta_k f(t_{n+k}, y_{n+k}) + g_n$$

με g_n γνωστό.
π.χ. Άμεση Euler : $y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$, Πεπλεγμένη Euler $y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1})$.

Runge-Kutta Οι μέθοδοι Runge-Kutta εντάσονται στην κατηγορία των μονοβηματικών μεθόδων, δηλαδή των μεθόδων στις οποίες για τον υπολογισμό της προσέγγισης y_{n+1} χρησιμοποιούν μόνο την αμέσως προηγούμενη τιμή y_n. Θεωρούμε την (1.1), η μέθοδος Runge-Kutta παράγει τις προσεγγίσεις $y_0, ..., y_N$,που δίνονται μέσω των σχέσεων

$$\begin{cases} y^0 := y_0 \\ y^{n,i} := y^n + h\sum_{j=1}^{q} \alpha_i j f(t^{n,j}, y^{n,j}), \quad 1 \leq i \leq q, \\ y^{n+i} := y^n + h\sum_{i=1}^{q} \beta_j f(t^{n,i}, y^{n,i}) \end{cases} \tag{1.3}$$

για $n = 0, ..., N-1$. Οι σχέσεις περιγράφουν την γενική μέθοδο Runge-Kutta με q ενδιάμεσα στάδια.

Όσο αφορά το κόστος, οι πολυβηματικές μέθοδοι είναι πολύ λιγότερο δαπανηρές απο τις μεθόδους των Runge-Kutta. Στις άμεσες πολυβηματικές μεθόδους απαιτείται σε κάθε βήμα ένας υπολογισμός της f (οι υπόλοιποι υπολογισμοί έχουν γίνει ήδη σε προηγούμενα βήματα) ενώ στις πεπλεγμένες απαιτείται επιπρόσθετα η επίλυση ενός $m \times m$ μη-γραμμικού συστήματος (σε αντίθεση με τις Runge-Kutta, όπου το σύστημα είναι $qm \times qm$). Οι πεπλεγμένες μέθοδοι των Runge-Kutta παρουσιάζουν σαφή πλεονεκτήματα σε σχέση με τις πολυβηματικές μεθόδους, γιατί συνδυάζουν υψηλή ακρίβεια με καλές ιδιότητες ευστάθειας. Οι αρχικές τιμές $y_0, y_1, ..., y_{k-1}$ που απαιτούνται για την εκκίνηση μιας k - βηματικής μεθόδου υπολογίζονται συνήθως από την δεδομένη αρχική τιμή y_0 μέψω μεθόδων Runge-Kutta.

Υπάρχουν πολλοί τρόποι κατασκευής πολυβηματικών μεθόδων, π.χ. με την χρήση αριθμητικής ολοκλήρωσης, αναπτυγμάτων Taylor κ.α. Η χρήση πολυωνύμων παρεμβολής και αριθμητικής διαφόρισης οδηγεί σε μια ενδιαφέρουσα κατηγορία πολυβηματικών μεθόδων, τις μεθόδους *ανάδρομων διαφορών*. Συνήθως k - βηματικές μέθοδοι της μορφής

$$\begin{cases} y_0, y_1, ..., y_{k-1} \quad \text{δεδομένα} \\ y_{n+k} - y_{n+k-1} = h \sum_{j=0}^{k} \beta_j f_{n+j}, \quad n = 0, ..., N-k \end{cases} \tag{1.4}$$

λέγονται μέθοδοι Adams. Οι άμεσες μέθοδοι ($\beta_k = 0$) αυτής της κατηγορίας λέγονται μέθοδοι Adams-Bashforth ενώ οι πεπλεγμένες μέθοδοι ($\beta_k \neq 0$) λέγονται Adams-Moulton.

1.3 Adams Bashforth-Adams Multon

Οι Adams Basforth και Adams Multon μέθοδοι έχουν μεγάλη ιστορία, οι άμεσες Adams Basforth μέθοδοι πρωτοεμφανίστηκαν το 1883 σε μια αριθμητική έρευνα, ενώ οι πεπλεγμένες Adams Multon μέθοδοι πρωτοεμφανίστηκαν το 1926. Παραμένουν ως η πιο γνωστή οικογένεια γραμμικών πολυβηματικών μεθόδων και διαμορφώνουν σχεδόν όλων την βάση στους κώδικες των Predictor-Corrector, που θα αναφερθούμε στο επόμενο κεφάλαιο, για μη-άκαμπτα προβλήματα αρχικών τιμών.

Παράδειγμα 1.1 Έστω $f : [0, \infty] \to \mathbb{R}$ μια συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} y' = \lambda y + f'(t) - \lambda f(t),\ t \geq 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{1.5}$$

όπου $\lambda \in \mathbb{C}$ με $Re\lambda < 0$. Η ακριβής λύση είναι

$$y(t) = f(t) + e^{\lambda t}[y(0) - f(0)], t \geq 0 \tag{1.6}$$

Αν η f δεν μεταβάλλεται γρήγορα με το t, τότε στη (1.6) ο δεύτερος όρος του δεξιού μέλους τείνει πολύ γρήγορα στο μηδέν και ο σημαντικός όρος για την λύση είναι ο πρώτος. Το πρόβλημα (1.5) είναι ένα παράδειγμα προβλήματος αρχικών τιμών για μια άκαμπτη διαφορική εξίσωση. Το χαρακτηριστικό των άκαμπτων διαφορικών εξισώσεων ότι η γενικά ομαλή λύση τους μεταβάλλεται αργά με το t, όταν αυτό δεν είναι πολύ κοντά σε κάποια τιμή $t_\star$ (εδώ $t_\star = 0$) περιέχει όμως και μια συνιστώσα, η οποία μεταβάλλεται πολύ γρήγορα κοντά στο $t_\star$, η οποία για t όχι πολύ κοντά στο $t_\star$ δεν επηρεάζει σχεδόν καθόλου την λύση.

Ο λόγος της διασημότητας αυτών των μεθόδων είναι πρώτον, σε σύγκριση με πολλές άλλες οικογένειες γραμμικών πολυβηματικών μεθόδων, έχουν καλές περιοχές απόλυτης ευστάθειας. Δεύτερον έχουν σαφές πλεονέκτημα όταν το steplenght αλλάζει κατά την διάρκεια του υπολογισμού. Όταν το steplenght αλλάζει δημιουργείται πρόβλημα στις πίσω τιμές οι οποίες δεν είναι πλέον στις κατάλληλες τιμές του x. Μια λύση αυτού είναι να χρησιμοποιήσουμε παρεμβολή για να καθορίσουμε τις απαραίτητες πίσω τιμές και για τις γενικές γραμμικές πολυβηματικές μεθόδους σημαίνει την παρεμβολή των πίσω τιμών του y ακολουθούμενη από τους υπολογισμούς των συναρτήσεων για να πάρουμε τις πίσω τιμές της f. Για τις μεθόδους Adams δεν χρειάζεται να παρεμβάλλουμε τις πίσω τιμές του y αλλά η ευθύς παρεμβολλή των πίσω τιμών της f είναι αρκετή. Οι μέθοδοι αυτοί μπορούν να εκφραστούν με πεπλεγμένες διαφορές για να διευκολύνει στην υλοποίηση των προβλημάτων σε αυτόματο κώδικα. Οπότε μπορούμε να ξαναγράψουμε την (1.3) στην ισοδύναμη μορφή

$$y_{n+1} - y_n = h \sum_{j=0}^{k} \beta_j f_{n+j-k+1} \tag{1.7}$$

Μερικές κατηγορίες γραμμικών πολυβηματικών μεθόδων, συμπεραλαμβανομένων και των μεθόδων Adams, προέρχονται από διαδικασία πολυωνυμικής παρεμβολής. Αρχίζοντας απο την ταυτότητα

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} \mathrm{y'(x)}\,\mathrm{d}x \tag{1.8}$$

Αντικαθιστώ την $y'(x)$ με $f(x, y(x))$ και αναζητώ ένα πολυώνυμο παρεμβολής των δεδομένων σε k σημεία

$$(x_n, f_n),\ (x_{n-1}, f_{n-1}), ...,\ (x_{n-k+1}, f_{n-k+1})$$

.

Ορισμός 1.2 Ανάδρομες διαφορές

$$\nabla f_p = f_p - f_{p-1}$$

Δεύτερης τάξης είναι τό εξής

$$\nabla f_p = \nabla(f_p - f_{p-1}) = \nabla f_p - \nabla f_{p-1} = (f_p - f_{p-1}) - (f_{p-1} - f_{p-2}) = f_p - 2f_{p-1}) + f_{p-2}$$

Γενικά

$$\nabla^k f_p = \sum_{m=0}^{k} (-1)^m \binom{k}{m} f_{p-m}$$

όπου $\binom{k}{m}$ δυωνυμικές σταθερές.

Μια τέτοια παρεμβολή, σε όρους ανάδρομων διαφορών, δίνεται από

$$I^*_{k-1}(x) = I^*_{k-1}(x_n + rh) =: P^*_{k-1}(r) = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \binom{-r}{i} \nabla^i f_n \tag{1.9}$$

Προσεγγίζοντας το ολοκλήρωμα στην δεξιά πλευρά της (1.5) από την $I^*_{k-1}(x)$ και παίρνω

$$y_{n+1} - y_n = \int_0^1 \mathrm{P^*_{k-1}(r)h}\,\mathrm{d}r = h \sum_{i=0}^{k-1} \gamma^*_i \nabla^i f_n \tag{1.10}$$

όπου

$$\gamma^*_i = (-1)^i \int_0^1 \binom{\mathrm{-r}}{\mathrm{i}} \mathrm{d}r \tag{1.11}$$

Τα γ^*_i είναι ανεξάρτητα του k. Θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε τα $\gamma^*_i, i = 0, 1, 2, ...$ αλλά υπάρχει πιο εποικοδομιτικός τρόπος. Ψάχνουμε μια γεννήτρια συνάρτηση για το γ^*_i, μια συνάρτηση ψευδομεταβλητής t, όπου αναπτύσοντας σε όρους t θα έχει τα γ_i^* σαν σταθερές. Αναζητούμε συνάρτηση $G^*(t)$ τέτοια ώστε

$$G^*(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i^* t^i = \sum_{i=0}^{\infty} (-t)^i \int_0^1 \binom{-\mathrm{r}}{\mathrm{i}} \mathrm{d}r = \int_0^1 \left[\sum_{\mathrm{i}=0}^{\infty} (-\mathrm{t})^{\mathrm{i}} \binom{-\mathrm{r}}{\mathrm{i}} \right] \mathrm{d}r \tag{1.12}$$

Η δεξιά πλευρά είναι το ανάπτυγμα της συνάρτησης $(1-t)^{-r}$, και το ολοκλήρωμα ισούται με $-(1-t)^{-r}/ln(1-t)$

$$G^*(t) = \frac{1}{ln(1-t)} \left[\frac{-1}{1-t} + 1 \right] = \frac{-t}{(1-t)ln(1-t)} \tag{1.13}$$

ισοδύναμα

$$G^*(t) \left[\frac{-ln(1-t)}{t} \right] = \frac{1}{1-t} \tag{1.14}$$

Έχουμε

$$\frac{-ln(1-t)}{t} = 1 + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{3} + \frac{t^3}{4} + ...$$

και

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + ...$$

από την (1.11) έχω

$$(\gamma_0^* + \gamma_1^* t + \gamma_2^* t^2 + \gamma_3^* t^3 + ...)(1 + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{3} + \frac{t^3}{4} + ...) = 1 + t + t^2 + t^3 + ...$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των t^i παίρνω

$$\gamma_i^* + \frac{\gamma_{i-1}^*}{2} + \frac{\gamma_{i-2}^*}{3} + ... + \frac{\gamma_0^*}{i+1} = 1, \quad i = 0, 1, 2, ...$$

Οι πρώτες τιμές των γ_i^* είναι

$$\gamma_0^* = 1, \quad \gamma_1^* = \frac{1}{2}, \quad \gamma_2^* = \frac{5}{12}, \quad \gamma_3^* = \frac{3}{8}$$

Οπότε η οικογένεια Adams Basforth μπορούν να γραφτούν

$$y_{n+1} - y_n = h(f_n + \frac{1}{2}\nabla f_n + \frac{5}{12}\nabla^2 f_n + \frac{3}{8}\nabla^3 f_n + ...). \tag{1.15}$$

Περικόπτοντας την σειρά μετά από k όρους και αναπτύσσοντας τις πεπλεγμένες διαφορές παίρνω τα ακόλουθα.

$$\begin{aligned}
k=1: &\quad y_{n+1}-y_n = hf_n \\
k=2: &\quad y_{n+1}-y_n = \frac{h}{2}(3f_n - f_{n-1}) \\
k=3: &\quad y_{n+1}-y_n = \frac{h}{12}(23f_n - 16f_{n-1} + 5f_{n-2}) \\
k=4: &\quad y_{n+1}-y_n = \frac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3})
\end{aligned}$$

Με ανάλογο τρόπο οι πεπλεγμένες Adams Multon μέθοδοι μπορούν να εκφραστούν σε όρους πεπλεγμένων διαφορών της f. Αρχίζουμε από την ίδια ταυτότητα (1.5), αλλά αυτή την φορά, μετά την αντικατάσταση της y' από την f αναζητούμε ενα διάνυσμα πολυωνυμικής παρεμβολής των δεδομένων σε $k+1$ σημεία

$$(x_{n+1}, f_{n+1}),\ (x_n, f_n), ...,\ (x_{n+k-1}, f_{n+k-1})$$

Τώρα έχουμε $k+1$ δεδομένα στοιχεία αντί για k οπότε αντικαθιστώντας στην (1.6) έχω

$$I_k(x) = I_k(x_{n+1}+rh) =: P_k(r) = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{-r}{i}\nabla^i f_{n+1} \tag{1.16}$$

Παίρνουμε στην θέση των (1.7) και (1.8) τα

$$y_{n+1}-y_n = \int_{-1}^{0} \mathrm{P_k(r)h}\,\mathrm{d}r = h\sum_{i=0}^{k}\gamma_i\nabla^i f_{n+1}$$

όπου

$$\gamma_i = (-1)^i\int_{-1}^{0}\binom{-\mathrm{r}}{\mathrm{i}}\,\mathrm{d}r$$

Η γεννήτρια συνάρτηση $G(t)$ για τα γ_i είναι

$$G(t) = \sum_{i=0}^{\infty}\gamma_i t^i = \sum_{i=0}^{\infty}(-t)^i\int_{-1}^{0}\binom{-\mathrm{r}}{\mathrm{i}}\,\mathrm{d}r = \int_{-1}^{0}\left[\sum_{\mathrm{i}=0}^{\infty}(-\mathrm{t})^{\mathrm{i}}\binom{-\mathrm{r}}{\mathrm{i}}\right]\,\mathrm{d}r$$

Το ολοκλήρωμα είναι ίδιο όπως στην περίπτωση των Adams Basforth μεθόδων με διαφορετικά όρια. Βρίσκουμε

$$G(t) = \frac{-t}{ln(1-t)} \tag{1.17}$$

οπότε

$$(\gamma_0 + \gamma_1 t + \gamma_2 t^2 + \gamma_3 t^3 + ...)(1 + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{3} + \frac{t^3}{4} + ...) = 1$$

και

$$\gamma_i + \frac{\gamma_{i-1}}{2} + \frac{\gamma_{i-2}}{3} + ... + \frac{\gamma_0}{i+1} = \begin{cases} 1 & \text{αν } i = 0 \\ 0 & \text{αν } i = 1, 2, ... \end{cases}$$

Οι πρώτες τιμές των γ_i είναι

$$\gamma_0 = 1, \quad \gamma_1 = -\frac{1}{2}, \quad \gamma_2 = -\frac{1}{12}, \quad \gamma_3 = -\frac{1}{24}, \quad \gamma_4 = -\frac{19}{720}$$

Οπότε η οικογένεια Adams Moulton μπορούν να γραφτούν

$$y_{n+1} - y_n = h(f_{n+1} - \frac{1}{2}\nabla f_{n+1} - \frac{1}{12}\nabla^2 f_{n+1} - \frac{1}{24}\nabla^3 f_{n+1} - \frac{19}{720}\nabla^4 f_{n+1} + ...). \tag{1.18}$$

Περικόπτοντας την σειρά μετά από $k+1$ όρους και αναπτύσσοντας τις πεπλεγμένες διαφορές παίρνω τα ακόλουθα.

$$\begin{aligned}
k = 1: &\quad y_{n+1} - y_n = \frac{h}{2}(f_{n+1} + f_n) \\
k = 2: &\quad y_{n+1} - y_n = \frac{h}{12}(5f_{n+1} + 8f_n - f_{n-1}) \\
k = 3: &\quad y_{n+1} - y_n = \frac{h}{24}(9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2}) \\
k = 4: &\quad y_{n+1} - y_n = \frac{h}{720}(251f_{n+1} + 646f_n - 264f_{n-1} + 106f_{n-2} - 19f_{n-3})
\end{aligned}$$

1.4 BDF

Όπως θα δούμε παρακάτω οι περιοχές απόλυτης ευστάθειας των Adams-Multon αποδείχθηκε ότι είναι ανεπραρκής για να αντιμετωπίσει το άκαμπτο πρόβλημα, όπου η ευστάθεια έχει πρωταρχική σημασία αντί της ακρίβειας. Μια κατηγορία έμμεσων γραμμικών k - βηματικών μεθόδων με περιοχές απόλυτης ευστάθειας αρκετά μεγάλες ώστε να περιγράφουν το άκαμπτο πρόβλημα είναι οι Backward Differentiation Formulae (BDF) .

Ορισμός 1.2 BDF

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j y_{n+j} = h\beta_k f_{n+k}. \tag{1.19}$$

Χωρίς να χρησιμοποιήσουμε την ταυτότητα (1.8) θα ξεκινήσουμε απο την $y'(x_{n+1}) = f(x_{n+1}, y(x_{n+1}))$ και αναζητούμε ένα πολυώνυμο παρεμβολής p με $y'(x_{n+1}) = p'(x_{n+1})$ των δεδομένων σε $k+1$ σημεία

$$(x_{n+1}, y_{n+1}),\ (x_n, y_n), ...,\ (x_{n+k-1}, y_{n+k-1})$$

παρεμβάλεται από το πολυώνυμο $I_k(x)$ τάξης k

$$I_k(x) = I_k(x_{n+1} + rh) =: P_k(r) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{-r}{i} \nabla^i y_{n+1}$$

Παραγωγίζοντας το παραπάνω έχουμε

$$I'_k(x_{n+1}) = \frac{1}{h} P'_k(r)|_{r=0} = \frac{1}{h} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \frac{d}{dr} \binom{-r}{i} |_{r=0} \nabla^i y_{n+1}$$

Παίρνουμε τους παρακάτω όρους

$$k = 1: \quad y_{n+1} - y_n = hf_{n+1}$$
$$k = 2: \quad y_{n+2} - \frac{4}{3} y_{n+1} + \frac{1}{3} y_n = \frac{2}{3} hf_{n+2}$$
$$k = 3: \quad y_{n+3} - \frac{18}{11} y_{n+2} + \frac{9}{11} y_{n+1} - \frac{2}{11} y_n = \frac{6}{11} hf_{n+3}$$
$$k = 4: \quad y_{n+4} - \frac{48}{25} y_{n+3} + \frac{36}{25} y_{n+2} - \frac{16}{25} y_{n+1} + \frac{3}{25} y_n = \frac{12}{25} hf_{n+4}$$
$$k = 5: \quad y_{n+5} - \frac{300}{137} y_{n+4} + \frac{300}{137} y_{n+3} - \frac{200}{137} y_{n+2} + \frac{75}{137} y_{n+1} - \frac{12}{137} y_n = \frac{60}{137} hf_{n+5}$$
$$k = 6: \quad y_{n+6} - \frac{360}{147} y_{n+5} + \frac{450}{147} y_{n+4} - \frac{400}{147} y_{n+3} + \frac{225}{147} y_{n+2} - \frac{72}{147} y_{n+1} + \frac{10}{147} y_n = \frac{60}{147} hf_{n+6}$$

1.5 Ευστάθεια Πολυβηματικών Μεθόδων

Η ευαισθησία της αριθμητικής λύσης μιας διαφορικής εξίσωσης σε μεταβολές της αρχικής τιμής είναι *ευστάθεια.*

Ορισμός 1.3 Θεωρούμε το Π.Α.Τ. (1.1) ορίζουμε ώς *ευστάθεια πολυβηματικών μεθόδων* μια k - βηματική μέθοδο η οποία περιγράφεται από τις σταθερές $\alpha_k, ..., \alpha_0, \beta_k, ...\beta_0$ λέγεται ευσταθής, αν υπάρχει μια σταθερά C, που εξαρτάται απο την f αλλά είναι ανεξάρτητη του N, τέτοια ώστε για ακολουθίες $(y^n), (z^n)$ τέτοιες ώστε

$$\begin{cases} y^0, ..., y^{k-1} \\ \alpha_k y^{n+k} + \alpha_{k-1} y^{n+k-1} + ... + \alpha_0 y^n = \\ h[\beta_k f(t^{n+k}, y^{n+k}) + ... + \beta_0 f(t^n, y^n)], \quad n = 0, ..., N-k \end{cases} \tag{1.20}$$

και

$$\begin{cases} z^0, ..., z^{k-1} \\ \alpha_k z^{n+k} + \alpha_{k-1} z^{n+k-1} + ... + \alpha_0 z^n = \\ h[\beta_k f(t^{n+k}, z^{n+k}) + ... + \beta_0 f(t^n, z^n)], \quad n = 0, ..., N-k \end{cases} \tag{1.21}$$

να ισχύει

$$\max_{0 \le n \le N} |y^n - z^n| \le \max_{0 \le j \le k-1} |y^j - z^j| \tag{1.22}$$

Θεώρημα 1.1 Συνθήκη των ριζών
Λέμε ότι η πολυβηματική μέθοδος (1.2) πληροί τη συνθήκη των ριζών, αν για το χαρακτηριστικό της πολυώνυμο ρ που ορίζεται ως

$$\rho(z) := \alpha_k z^k + ... + \alpha_0$$

ισχύουν

$$\rho(z) = 0 \implies |z| \le 1,$$

$$\rho(z) = \rho'(z) = 0 \implies |z| < 1,$$

δηλαδή όλες οι ρίζες του ρ έχουν απόλυτη τιμή όχι μεγαλύτερη της μονάδας, εκείνες δε που έχουν απόλυτη τιμή ένα είναι απλές.

Σκοπός μας είναι να αποδείξουμε ότι μια πολυβηματική μέθοδος είναι ακριβώς ευσταθής όταν πληροί τη συνθήκη των ριζών.

1.6 Τάξη ακρίβειας - Συνέπεια Πολυβηματικών Μεθόδων - Σύγκλιση

Ορισμός 1.4 Έστω $y : [a, b] \to \mathbb{R}$ ομαλή συνάρτηση. Αν p είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος για τον οποίο ισχύει

$$\exists C = C(y) \quad \forall t \in [a, b - kh] \quad |(L_h y)(t)| \leq Ch^{p+1}$$

όπου

$$(L_h y)(t) = \sum_{j=0}^{k} [\alpha_j y(t + jh) - h\beta_j y'(t + jh)]$$

λέμε ότι η *τάξη ακρίβειας* της πολυβηματικής μεθόδου είναι p.
Αν η τάξη ακρίβειας είναι τουλάχιστον ένα, λέγεται *συνεπής*.
Αναπτύσοντας κατά Taylor τις $y(t + jh)$ και $y'(t + jh)$ ως προς το σημείο t

$$(L_h y)(t) = C_0 y(t) + C_1 h y'(t) + C_2 h^2 y''(t) + ...$$

Η γενική πολυβηματική μέθοδος έχει τάξη ακρίβειας p αν

$$C_0 = C_1 = ... = C_p = 0 \quad \text{και} \quad C_{p+1} \neq 0$$

Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι συνεπής η μέθοδος είναι να ισχύουν οι σχέσεις

$$\begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1 + ... + \alpha_k = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + ... + k\alpha_k - (\beta_0 + ... + \beta_k) = 0 \end{cases} \tag{1.23}$$

με την μορφή χαρακτηριστικών πολυωνύμων έχουμε $\rho(1) = 0, \quad \rho'(1) = \sigma(1)$.

Ορισμός 1.5 Έστω y^n η προσέγγιση της $y(t^n)$, η οποία δίνεται απο την k - βηματική μέθοδο. Η μέθοδος αυτή είναι συγκλίνουσα αν για κάθε $t \in [a, b]$,

$$\lim y^n = y(t),$$

όταν $h \to 0, n \to \infty$, έτσι ώστε $a + nh \to t$ και αν αυτό ισχύει για κάθε πρόβλημα αρχικών τιμών της μορφής, όταν η f πληροί τις συνθήκες που αναφέρθηκαν εκεί.
Κάθε συγκλίνουσα πολυβηματική μέθοδος είναι ευσταθής.
Αν η μέθοδος είναι συγκλίνουσα τότε είναι συνεπής.

1.7 Απόλυτη ευστάθεια πολυβηματικών μεθόδων

Μια αριθμητική μέθοδος λέγεται *απόλυτα ευσταθής* όταν οι προσεγγίσεις $(y^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ παραμένουν φραγμένες καθώς το $n \to \infty$.
Εφαρμόζοντας μια $k-$βηματική μέθοδο, η οποία περιγράφεται από τις σταθερές $\alpha_k, ..., \alpha_0, \beta_k, ...\beta_0$ για την προσέγγιση της λύσης του προβλήματος

$$\begin{cases} y' = \lambda y, \quad t \in [0, \infty) \\ y(0) = 1 \end{cases} \tag{1.24}$$

με $Re\lambda \leq 0$ λαμβάνουμε προσεγγίσεις $(y^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ για τις οποίες ισχύει

$$\sum_{j=0}^{k}(\alpha_j - h\lambda\beta_j)y_{n+j} = 0, n \geq 0 \tag{1.25}$$

.

Για να παραμείνουν φραγμένες οι προσεγγίσεις $y^n, n \in \mathbb{N}$ αρκεί για δεδομένο h το πολυώνυμο π

$$\pi(\zeta, h\lambda) := \rho(\zeta) - h\lambda\sigma(\zeta)$$

να ικανοποιεί την συνθήκη των ριζών. Το πρόβλημα του προσδιορισμού της περιοχής απόλυτης ευστάθειας της k - μεθόδου ανάγεται στην μελέτη των ριζών του π ως συναρτήσεων της μιγαδικής παραμέτρου $h\lambda$ έτσι ώστε να ισχύει η συνθήκη των ριζών.
Έστω $t^n = nh, n = 0, 1, ...$ Η μέθοδος του Euler γι' αυτό το πρόβλημα παράγει την ακολουθία $(y^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, όπου

$$\begin{cases} y^{n+1} = y^n + h\lambda y^n, \quad t \in n \geq 0 \\ y^0 = 1 \end{cases} \tag{1.26}$$

δηλαδή την ακολουθία

$$y^n = (1 + h\lambda)^n, n = 0, 1, 2, ...$$

αυτές οι προσεγγίσεις παραμένουν φραγμένες αν.ν $|1 + h\lambda| \leq 1$.
Συμπεραίνουμε ότι η περιοχή απόλυτης ευστάθειας της μεθόδου στο μιγαδικό επίπεδο είναι το σύνολο

$$S = \{z \in \mathbb{C} : |1 + z| \leq 1\}$$

δηλαδή ο κλειστός δίσκος με κέντρο -1 και ακτίνα 1, ο οποίος περιέχεται ολόκληρος στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο.
Έστω $t^n = nh, n = 0, 1, ...$ Η μέθοδος της πεπλεγμένης Euler γι' αυτό το πρόβλημα παράγει την ακολουθία $(y^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, όπου

$$\begin{cases} y^{n+1} = y^n + h\lambda y^{n+1}, & t \in n \geq 0 \\ y^0 = 1 \end{cases} \tag{1.27}$$

δηλαδή την ακολουθία

$$y^n = \left(\frac{1}{1-h\lambda}\right)^n, n = 0, 1, 2, ...$$

Συμπεραίνουμε ότι η περιοχή απόλυτης ευστάθειας της μεθόδου στο μιγαδικό επίπεδο είναι το σύνολο

$$S = \{z \in \mathbb{C} : |1 - z| \geq 1\}$$

δηλαδή ακριβώς το εξωτερικό του ανοιχτού δίσκου με κέντρο 1 και ακτίνα 1. Παρατηρούμε ότι η περιοχή απόλυτης ευστάθειας περιέχει ολόκληρο το αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο. Γραφικά θα τα δούμε παρακάτω.

1.8 Περιοχές Απόλυτης ευστάθειας πολυβηματικών μεθόδων

Απόλυτη ευστάθεια των μεθόδων Adams Basforth, Adams Multon και BDF μεθόδων υπολογίζετε σύμφωνα με τον παρακάτω τύπο

$$\pi(r, \widehat{h}) = p(r) - \widehat{h}\sigma(r) \tag{1.28}$$

Συμπληρώνοντας την (1.28) για διαφορετικές μεθόδους και ύστερα απο πράξεις καταλήγουμε στα παρακάτω πολυώνυμα.
Για την AB1 παίρνουμε το παρακάτω πολυώνυμο

$$\pi_1(r, \widehat{h}) = r - 1 - \widehat{h}$$

Για την AB2 παίρνουμε το παρακάτω πολυώνυμο

$$\pi_2(r, \widehat{h}) = r^2 - r(1 + \frac{3}{2}\widehat{h}) + \frac{\widehat{h}}{2}$$

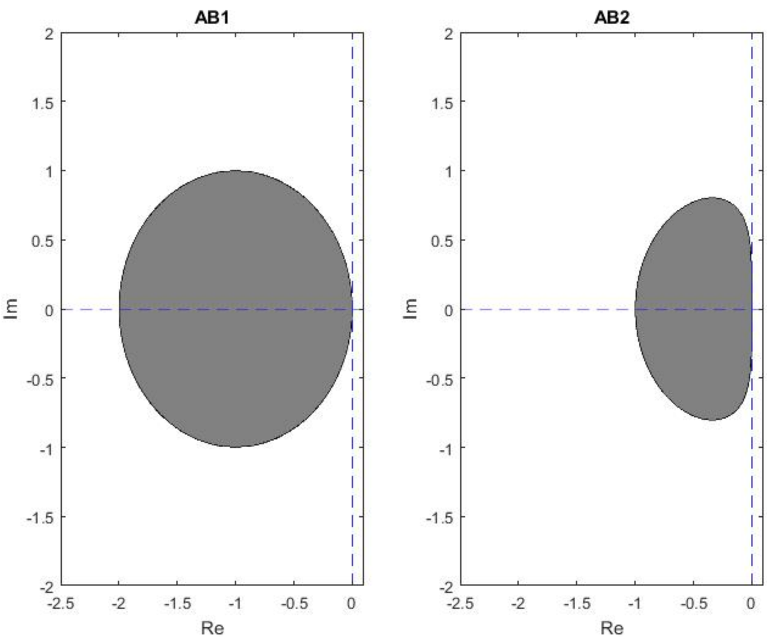
Για την AB3 παίρνουμε το παρακάτω πολυώνυμο

$$\pi_3(r, \widehat{h}) = r^3 - r^2(1 + \frac{23}{12}\widehat{h}) + \frac{4}{3}\widehat{h}r - \frac{5}{12}\widehat{h}$$

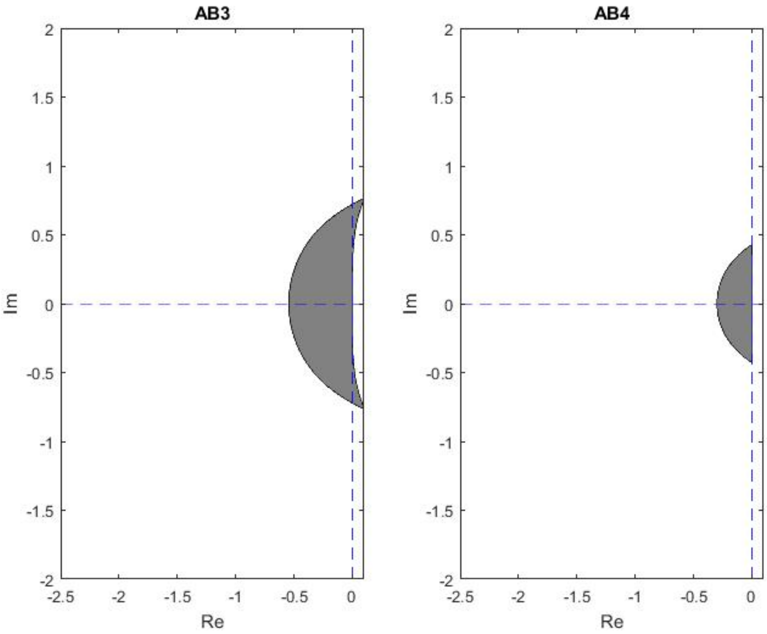
Για την AB4 παίρνουμε το παρακάτω πολυώνυμο

$$\pi_4(r, \widehat{h}) = r^4 - r^3(1 + \frac{55}{24}\widehat{h}) + \frac{59}{24}\widehat{h}r^2 - \frac{37}{24}\widehat{h}r + \frac{3}{8}\widehat{h}$$

Έχοντας το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\pi(r, \widehat{h})$ για την κάθε μέθοδο ξεχωριστά, παραμετρικοποιούμε το $\widehat{h}$ με $\alpha + \beta i$ και αντικαθιστούμε στο πολυώνυμο μας. Βρίσκουμε τις ρίζες του πολυωνύμου μέσω της ρουτίνας εύρεσης ριζών της matlab και εάν αυτές ικανοποιούν την συνθήκη των ριζών τις κρατάω και τις τυπώνω με σκούρο χρώμα. Κάνουμε την ίδια διαδικασία για όλες τις μεθόδους.



Σχήμα 1.1: Περιοχές απόλυτης ευστάθειας Adams Bashforth για k = 1,2



Σχήμα 1.2: Περιοχές απόλυτης ευστάθειας Adams Bashforth για k = 3,4

Για την AM1 παίρνουμε το παρακάτω πολυώνυμο

$$\pi_1(r,\widehat{h}) = r(1-\widehat{h}) - 1$$

Για την AM2 παίρνουμε το παρακάτω πολυώνυμο

$$\pi_2(r,\widehat{h}) = r(1-\frac{\widehat{h}}{2}) - \frac{\widehat{h}}{2} - 1$$

Για την AM3 παίρνουμε το παρακάτω πολυώνυμο

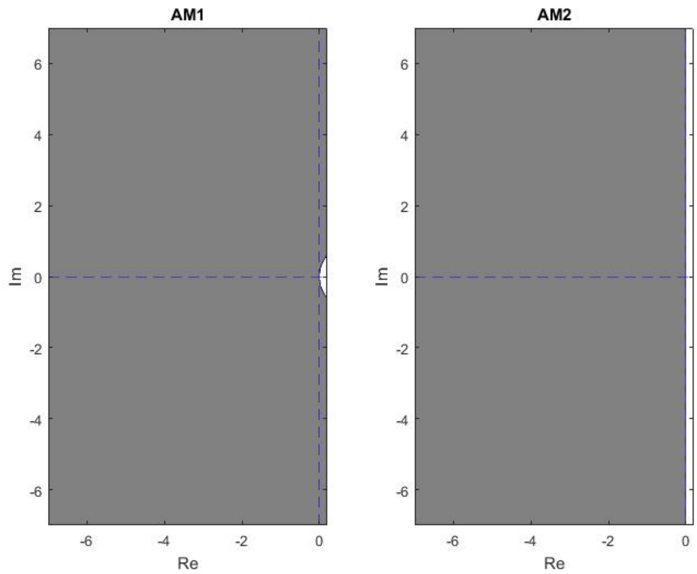
$$\pi_3(r,\widehat{h}) = r^2(1-\frac{5}{12}\widehat{h}) - r(1+\frac{2}{3}\widehat{h}) + \frac{\widehat{h}}{12}$$

Για την AM4 παίρνουμε το παρακάτω πολυώνυμο

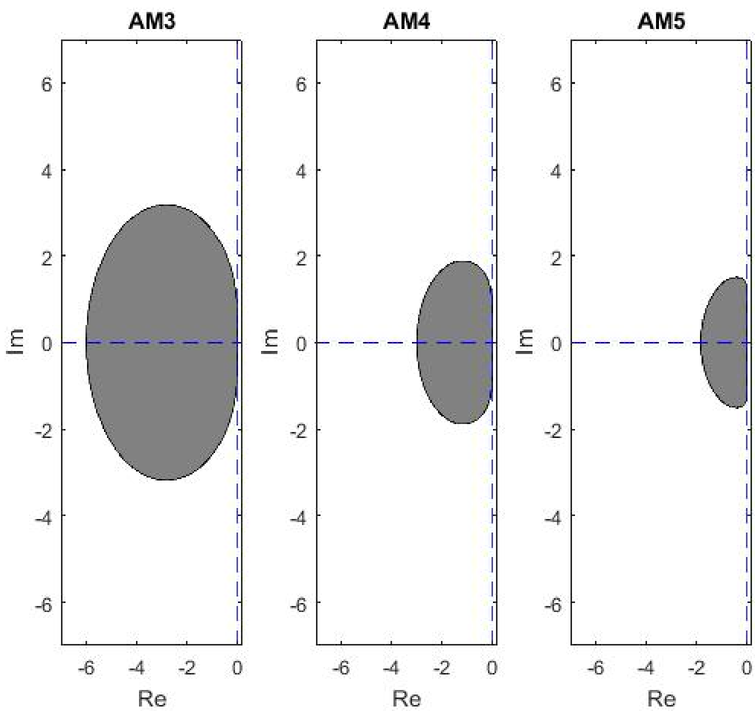
$$\pi_4(r,\widehat{h}) = r^3(1-\frac{3}{8}\widehat{h}) - r^2(1-\frac{19}{24}\widehat{h}) + \frac{5}{24}\widehat{h}r - \frac{\widehat{h}}{24}$$

Για την AM5 παίρνουμε το παρακάτω πολυώνυμο

$$\pi_5(r,\widehat{h}) = r^4(1-\frac{251}{720}\widehat{h}) - r^3(1+\frac{646}{720}\widehat{h}) + \frac{264}{720}\widehat{h}r^2 - \frac{106}{720}\widehat{h}r + \frac{19}{720}\widehat{h}$$



Σχήμα 1.3: Περιοχές απόλυτης ευστάθειας Adams Multon για k = 1,2



Σχήμα 1.4: Περιοχές απόλυτης ευστάθειας Adams Multon για k = 3,4,5

Για την BDF1 παίρνουμε το παρακάτω πολυώνυμο

$$\pi_1(r,\widehat{h}) = r(1-\widehat{h}) - 1$$

Για την BDF2 παίρνουμε το παρακάτω πολυώνυμο

$$\pi_2(r,\widehat{h}) = r^2(1-\frac{2}{3}\widehat{h}) - \frac{4}{3}r + \frac{1}{3}$$

Για την BDF3 παίρνουμε το παρακάτω πολυώνυμο

$$\pi_3(r,\widehat{h}) = r^3(1-\frac{6}{11}\widehat{h}) - \frac{18}{11}r^2 + \frac{9}{11}r - \frac{2}{11}$$

Για την BDF4 παίρνουμε το παρακάτω πολυώνυμο

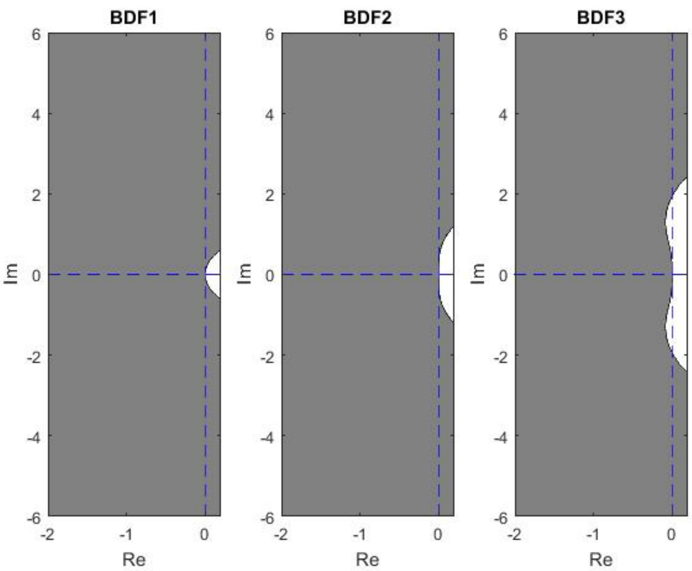
$$\pi_4(r,\widehat{h}) = r^4(1-\frac{12}{25}\widehat{h}) - \frac{48}{25}r^3 + \frac{36}{25}r^2 - \frac{16}{25}r + \frac{3}{25}$$

Για την BDF5 παίρνουμε το παρακάτω πολυώνυμο

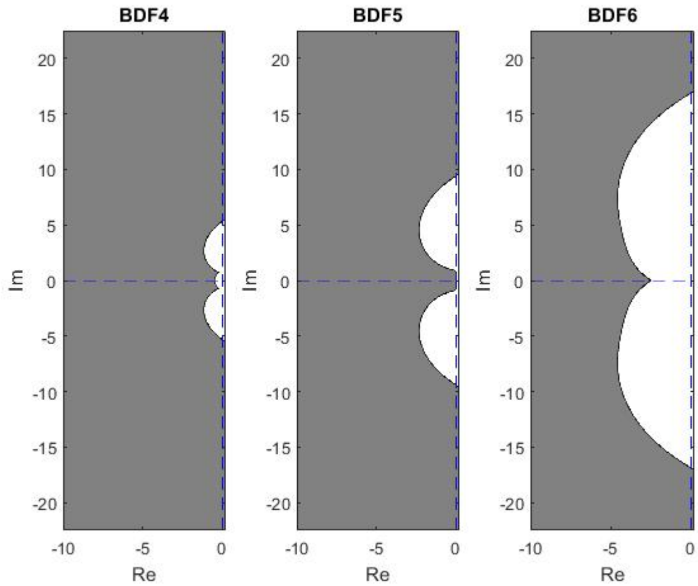
$$\pi_5(r,\widehat{h}) = r^5(1-\frac{60}{137}\widehat{h}) - \frac{300}{137}r^4 + \frac{300}{137}r^3 - \frac{200}{137}r^2 + \frac{75}{137}r - \frac{12}{137}$$

Για την BDF6 παίρνουμε το παρακάτω πολυώνυμο

$$\pi_6(r,\widehat{h}) = r^6(1-\frac{60}{147}\widehat{h}) - \frac{360}{147}r^5 + \frac{450}{147}r^4 - \frac{400}{147}r^3 + \frac{225}{147}r^2 - \frac{72}{147}r + \frac{10}{147}$$



Σχήμα 1.5: Περιοχές απόλυτης ευστάθειας BDF για k = 1,2,3



Σχήμα 1.6: Περιοχές απόλυτης ευστάθειας BDF για k = 3,4,5

Κεφάλαιο 2

Predictor-Corrector

2.1 Πρόβλεψη-Διόρθωση

Έστω οτι θέλουμε να λύσουμε το Π.Α.Τ. (1.1) με μία πεπλεγμένη γραμμική πολυβηματική μέθοδο. Τότε για κάθε βήμα χρειάζεται να λύσουμε ένα μη-γραμμικό σύστημα της μορφής (2.1) για να βρούμε το y_{n+k}

$$y_{n+k} + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j y_{n+j} = h\beta_k f(x_{n+k}, y_{n+k}) + h\sum_{j=0}^{k-1} \beta_j f_{n+j} \tag{2.1}$$

Ορίζω την k - βηματική μέθοδο P-C ώς το ζεύγος

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{k} \alpha_j^* y_{n+j} = h\sum_{j=0}^{k-1} \beta_j^* f_{n+j} \\ \sum_{j=0}^{k} \alpha_j y_{n+j} = h\sum_{j=0}^{k} \beta_j f_{n+j} \end{cases} \tag{2.2}$$

Το $y_{n+k}^{[0]}$ μπορούμε να το μαντέψουμε με μια άμεση πολυβηματική μέθοδο που την ονομάζουμε πρόβλεψη. Το αμέσως επόμενο βήμα είναι η επίλυση μιας πολυβηματικής μεθόδου η οποία είναι πεπλεγμένη. Αυτά τα δύο ονομάζονται μέθοδοι πρόβλεψης διόρθωσης. Το stepnumber της μεθόδου της πρόβλεψης είναι μεγαλύτερο από τη μέθοδο της διόρθωσης. Το stepnumber του ζεύγους θα είναι της μεθόδου της πρόβλεψης π.χ.

$$y_{n+2} - y_{n+1} = \frac{h}{2}(3f_{n+1} - f_n), \quad y_{n+2} - y_{n+1} = \frac{h}{2}(f_{n+2} - f_{n+1}) \tag{2.3}$$

ζεύγος με stepnumber 2. Το τοπικό σφάλμα και την ευστάθεια την παίρβουμε απο την μέθοδο της διόρθωσης. Ορίζω με P τη μέθοδο της πρόβλεψης και με C τη μέθοδο τησ διόρθωσης και E τον υπολογισμό της f.

Ορισμός 2.1 $PECE - P(EC)^2E$

$$\begin{cases} P: \quad y_{n+k}^{[0]} + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j^* y_{n+j} = h \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j^* f_{n+j} \\ E: \quad f_{n+k}^{[0]} = f(x_{n+k}, y_{n+k}^{[0]})) \\ C: \quad y_{n+k} + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j y_{n+j} = h\beta_k f_{n+k}^{[0]} + h \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j f_{n+j} \\ E: \quad f_{n+k} = f(x_{n+k}, y_{n+k}). \end{cases} \tag{2.4}$$

$$\begin{cases} P: \quad y_{n+k}^{[0]} + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j^* y_{n+j} = h \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j^* f_{n+j} \\ E: \quad f_{n+k}^{[\nu]} = f(x_{n+k}, y_{n+k}^{[\nu]})), \quad \nu = 0, 1. \\ C1: \quad y_{n+k}^{[1]} + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j y_{n+j} = h\beta_k f_{n+k}^{[0]} + h \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j f_{n+j} \\ C2: \quad y_{n+k} + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j y_{n+j} = h\beta_k f_{n+k}^{[1]} + h \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j f_{n+j} \\ E: \quad f_{n+k} = f(x_{n+k}, y_{n+k}). \end{cases} \tag{2.5}$$

Ο γενικός τύπος $P(EC)^\mu E$ όπου μ θετικός ακαίρεος και $t = 0$.

Ορισμός 2.2

$$\begin{cases} P: \quad y_{n+k}^{[0]} + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j^* y_{n+j}^{[\mu]} = h \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j^* f_{n+j}^{[\mu]} \\ \begin{cases} (EC)^\mu: \quad f_{n+k}^{[\nu]} = f(x_{n+k}, y_{n+k}^{[\nu]})) \\ y_{n+k}^{[\nu+1]} + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j y_{n+j}^{[\mu]} = h\beta_k f_{n+k}^{[\nu]} + h \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j f_{n+j}^{[\mu]} \end{cases} \\ E: \quad f_{n+k}^{[\mu]} = f(x_{n+k}, y_{n+k}^{[\mu]}). \end{cases} \tag{2.6}$$

για $\nu = 0, 1, ..., \mu - 1$.
Εναλλακτικά ορίζω το ζεύγος ώς

$$\varrho^*(E)y_n = h\sigma^*(E)f_n, \quad \varrho(E)y_n = h\sigma(E)f_n \tag{2.7}$$

όπου ϱ^*, ϱ και σ έχουν k τάξη και σ^* έχει $k-1$ τότε ο παραπάνω ορισμός γίνεται

$$\begin{cases} P: \quad E^k y_n^{[0]} + [\varrho^*(E) - E^k]y_n^{[\mu]} = h\sigma^*(E)f_n^{[\mu]} \\ \begin{cases} (EC)^\mu: \quad E^k f_n^{[\nu]} = f(x_{n+k}, E^k y_n^{[\nu]})) \\ E^k y_n^{[\nu+1]} + [\varrho(E) - E^k]y_n^{[\mu]} = h\beta_k E^k f_n^{[\nu]} + h[\sigma(E) - \beta_k E^k]f_n^{[\mu]} \end{cases} \\ E^{(1-t)}: \quad E^k f_n^{[\mu]} = f(x_{n+k}, E^k y_n^{[\mu]}). \end{cases} \tag{2.8}$$

για $\nu = 0, 1, ..., \mu - 1$

2.2 Τάξη ακρίβειας Πρόβλεψη-Διόρθωση

Ορισμός 2.3 Ο γραμμικός τελεστής διαφορών L που σχετίζεται με γραμμική πολυβηματική μέθοδο ορίζεται ως

$$L[z(x); h] := \sum_{j=0}^{k} [\alpha_j z(x + jh) - h\beta_j z'(x + jh)]$$

όπου $z(x) \in C^1[a, b]$ αυθαίρετη συνάρτηση.
Διαλέγω το $z(x)$ να είναι διαφορίσιμη όσες φορές χρειαζόμαστε και παίρνω

$$L[z(x); h] = C_0 z(x) + C_1 h z^{(1)}(x) + ... + C_q h^q z^{(q)}(x) + ...$$

όπου C_q σταθερές.

Ορισμός 2.4 Η πολυβηματική γραμμική μέθοδος και ο διαφορίσιμος τελεστής $\mathscr{L}$ είναι τάξης p άν $C_0 = C_1 = ... = C_p = 0, C_{p+1} \neq 0$. Η γραμμική πολυβηματική μέθοδος τάξης p έχει σταθερά σφάλματος C_{p+1}

Ορισμός 2.5

$$\begin{cases} |(L_h^* y)| \leq C^*_{p^*+1} h^{p^*+1} \\ |(L_h y)| \leq C_{p+1} h^{p+1} \end{cases} \tag{2.9}$$

όπου p^* τάξη ακρίβειας της μεθόδου της πρόβλεψης p τάξη ακρίβειας της μεθόδου της διόρθωσης και $C^*_{p^*+1}, C_{p+1}$ σταθερές ανίστοιχα.
Όταν $p^* \geq p$ η μέθοδος PC έχει την ίδια τάξη και το ίδο σφάλμα με την μέθοδο την διόρθωσης.

2.3 Απόλυτη ευστάθεια Πρόβλεψη-Διόρθωση

Σκοπός είναι να βρούμε το πολυώνυμο ευστάθειας για $P(EC)^\mu E$ χρησιμοποιώντας τους παραπάνω ορισμούς παίρνουμε

$$E^k y_n^{[0]} + [\varrho^*(E) - E^k] y_n^{[\mu]} = \widehat{h}\sigma^*(E) y_n^{[\mu]} \tag{2.10}$$

$$E^k y_n^{[\nu+1]} + [\varrho(E) - E^k] y_n^{[\mu]} = \widehat{h}\beta_k E^k y_n^{[\nu]} + \widehat{h}[\sigma(E) - \beta_k E^k] y_n^{[\mu]}, \nu = 0, 1, ..., \mu - 1 \tag{2.11}$$

όπου $\widehat{h}$ είναι το $h\lambda$

$$H := \widehat{h}\beta_k \tag{2.12}$$

αφαιρώντας διαδοχικά στην (2.10) έχουμε

$$E^k (y_n^{[\nu+1]} - y_n^{\nu}) = HE^k (y_n^{\nu} - y_n^{[\nu-1]}), \nu = 1, ..., \mu - 1$$

συνεπάγεται

$$y_n^{[\nu+1]} - (1 + H) y_n^{[\nu]} + H y_n^{[\nu-1]} = 0$$

Μετά πό πράξεις έχω για $t = 0$ έχω το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ευστάθειας

$$\pi_{P(EC)^\mu E}(r, \widehat{h}) = \rho(r) - \widehat{h}\sigma(r) + M_\mu(H)[\rho^*(r) - \widehat{h}\sigma^*(r)] \tag{2.13}$$

Μελετώντας τις πολυβηματικές μεθόδους ανά ζεύγη, χρησιμοποιώντας τις Adams Basforth ως Πρόβλεψη και τις Adams Multon ως Διόρθωση και τις

Adams Basforth και τις BDF αντίστοιχα βρίσκουμε την περιοχή απόλυτης ευστάθειας. Κατα ζεύγη και ξεχωριστά. Ορίζω τις μεθόδους ξεχωριστά

Adams Basforth

$$AB1: \quad y_{n+1} - y_n = hf_n \tag{2.14}$$

$$AB2: \quad y_{n+2} - y_{n+1} = h(\frac{3}{2}f_{n+1} - \frac{1}{2}f_n) \tag{2.15}$$

$$AB3: \quad y_{n+3} - y_{n+2} = h(\frac{23}{12}f_{n+2} - \frac{4}{3}f_{n+1} + \frac{5}{12}f_n) \tag{2.16}$$

$$AB4: \quad y_{n+4} - y_{n+3} = h(\frac{55}{24}f_{n+3} - \frac{59}{24}f_{n+2} + \frac{37}{24}f_{n+1} - \frac{3}{8}f_n) \tag{2.17}$$

Adams Multon

$$AM0: \quad y_n - y_{n-1} = hf_n \tag{2.18}$$

$$AM1: \quad y_{n+1} - y_n = h(\frac{1}{2}f_{n+1} + \frac{1}{2}f_n) \tag{2.19}$$

$$AM2: \quad y_{n+2} - y_{n+1} = h(\frac{5}{12}f_{n+2} + \frac{2}{3}f_{n+1} - \frac{1}{12}f_n) \tag{2.20}$$

$$AM3: \quad y_{n+3} - y_{n+2} = h(\frac{3}{8}f_{n+3} + \frac{19}{24}f_{n+2} - \frac{5}{24}f_{n+1} + \frac{1}{24}f_n) \tag{2.21}$$

BDF

$$BDF1: \quad y_{n+1} - y_n = hf_{n+1} \tag{2.22}$$

$$BDF2: \quad y_{n+2} - \frac{4}{3}y_{n+1} + \frac{1}{3}y_n = \frac{2}{3}hf_{n+2} \tag{2.23}$$

$$BDF3: \quad y_{n+3} - \frac{18}{11}y_{n+2} + \frac{9}{11}y_{n+1} - \frac{2}{11}y_n = \frac{6}{11}hf_{n+3} \tag{2.24}$$

$$BDF4: \quad y_{n+4} - \frac{48}{25}y_{n+3} + \frac{36}{25}y_{n+2} - \frac{16}{25}y_{n+1} + \frac{3}{25}y_n = \frac{12}{25}hf_{n+4} \tag{2.25}$$

$$BDF5: \quad y_{n+5} - \frac{300}{137}y_{n+4} + \frac{300}{137}y_{n+3} - \frac{200}{137}y_{n+2} + \frac{75}{137}y_{n+1} - \frac{12}{137}y_n \tag{2.26}$$

$$= \frac{60}{137}hf_{n+5} \tag{2.27}$$

$$BDF6: \quad y_{n+6} - \frac{360}{147}y_{n+5} + \frac{450}{147}y_{n+4} - \frac{400}{147}y_{n+3} + \frac{225}{147}y_{n+2} \tag{2.28}$$

$$- \frac{72}{147}y_{n+1} + \frac{10}{147}y_n = \frac{60}{147}hf_{n+6} \tag{2.29}$$

2.4 Περιοχές Απόλυτης ευστάθειας πολυβηματικών μεθόδων - Predictor-Corrector

Απόλυτη ευστάθεια των μεθόδων PC, με Predictor τις μεθόδους Adams Basforth και Corrector τις Adams Multon, υπολογίζεται σύμφωνα με τον παρακάτω τύπο

$$\pi_{P(EC)^{\mu}E}(r,\widehat{h}) = p(r) - \widehat{h}\sigma(r) + M_{\mu}(H)[p^{\star}(r) - \widehat{h}\sigma^{\star}(r)] \tag{2.30}$$

όπου

$$M_{\mu}(H) = \frac{H^{\mu}(1-H)}{1-H^{\mu}}$$

Για την PC1 του ζεύγους AB1-AM1 παίρνω τα παρακάτω πολυώνυμα

$\mu = 0$

$$\pi_{PE}(r,\widehat{h}) = r - 1 - \widehat{h}$$

$\mu = 1$

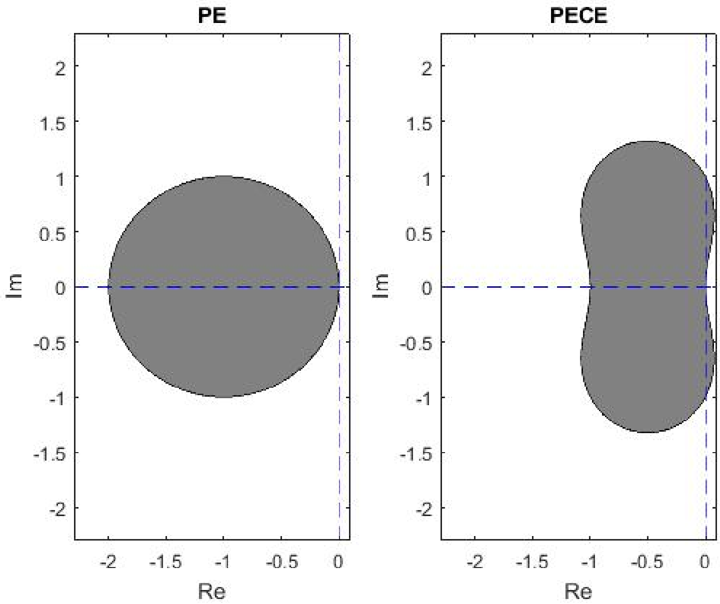
$$\pi_{PECE}(r,\widehat{h}) = -\widehat{h}^2 - \widehat{h} + r - 1$$

$\mu = 2$

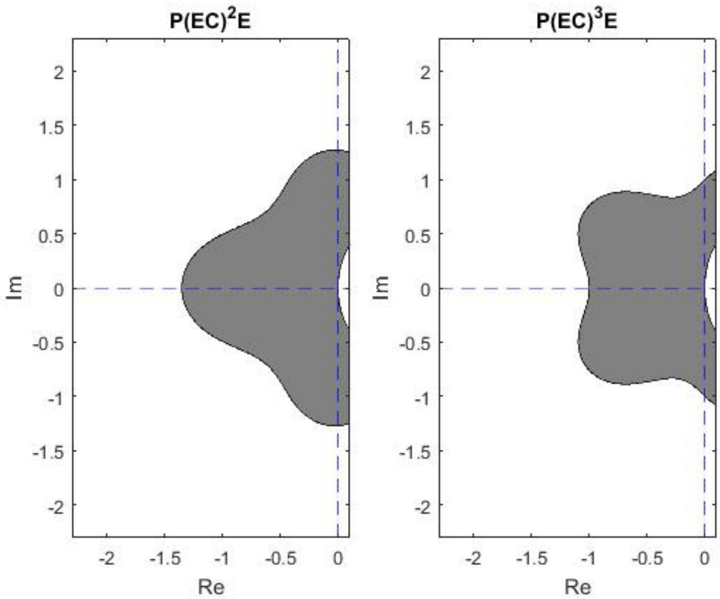
$$\pi_{P(EC)^2E}(r,\widehat{h}) = r(1 - \widehat{h} + \frac{\widehat{h}^2}{1+\widehat{h}}) - \frac{\widehat{h}^3}{1+\widehat{h}} - \frac{\widehat{h}^2}{1+\widehat{h}} - 1$$

$\mu = 3$

$$\pi_{P(EC)^3E}(r,\widehat{h}) = r(1 - \widehat{h} + \frac{\widehat{h}^3}{1+\widehat{h}+\widehat{h}^2}) - \frac{h^3}{1+\widehat{h}+\widehat{h}^2} - \frac{h^4}{1+\widehat{h}+\widehat{h}^2} - 1$$



Σχήμα 2.1: Περιοχές απόλυτης ευστάθειας PC AB-AM για k = 1



Σχήμα 2.2: Περιοχές απόλυτης ευστάθειας PC AB-AM για k = 1

Για την PC2 του ζεύγους AB2-AM2 παίρνουμε τα παρακάτω πολυώνυμα

$\mu = 0$

$$\pi_{PE}(r,\widehat{h}) = r^2 - (1+\frac{3}{2}\widehat{h})r + \frac{\widehat{h}}{2}$$

$\mu = 1$

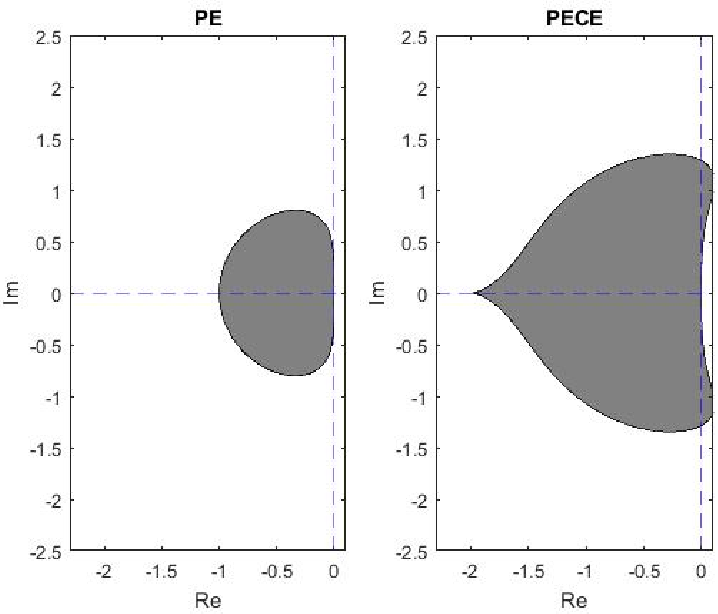
$$\pi_{PECE}(r,\widehat{h}) = r^2 - (1+\widehat{h}+\frac{3}{4}\widehat{h}^2)r + \frac{\widehat{h}^2}{4}$$

$\mu = 2$

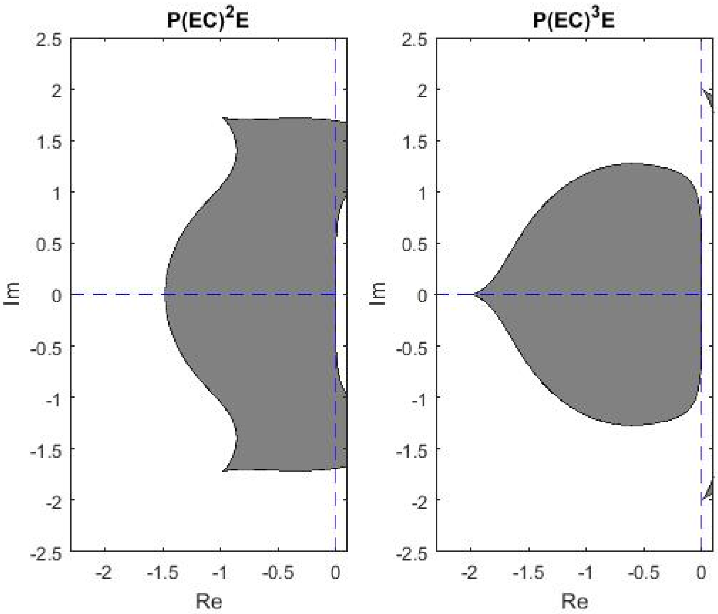
$$\pi_{P(EC)^2E}(r,\widehat{h}) = r^2(1+\frac{\widehat{h}^2}{4+2\widehat{h}} - \frac{\widehat{h}}{2}) - r(1+\frac{\widehat{h}}{2}+\frac{\widehat{h}^2}{4+2\widehat{h}}+\frac{3\widehat{h}^3}{8+4\widehat{h}}) + \frac{\widehat{h}^3}{8+4\widehat{h}}$$

$\mu = 3$

$$\pi_{P(EC)^3E}(r,\widehat{h}) = r^2(1-\frac{\widehat{h}}{2}+\frac{\widehat{h}^3}{8+4\widehat{h}+2\widehat{h}^2}) - r(1+\frac{\widehat{h}}{2}+\frac{\widehat{h}^3}{8+4\widehat{h}+2\widehat{h}^2}+ \frac{3\widehat{h}^4}{16+8\widehat{h}+4\widehat{h}^2}) + \frac{\widehat{h}^4}{16+8\widehat{h}+4\widehat{h}^2}$$



Σχήμα 2.3: Περιοχές απόλυτης ευστάθειας PC AB-AM για k = 2



Σχήμα 2.4: Περιοχές απόλυτης ευστάθειας PC AB-AM για k = 2

Για την PC3 του ζεύγους AB3-AM3 παίρνουμε τα παρακάτω πολυώνυμα
$\mu = 0$

$$\pi_{PE}(r,\widehat{h}) = r^3 - (1+\frac{11}{4}\widehat{h})r^2 + \frac{4}{3}\widehat{h}r - \frac{5}{12}\widehat{h}$$

$\mu = 1$

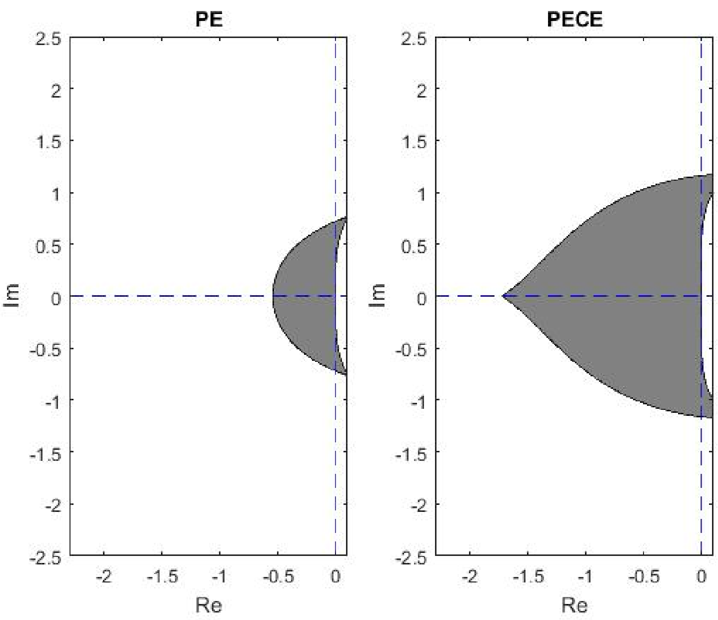
$$\pi_{PECE}(r,\widehat{h}) = r^3 - (1+\frac{13}{12}\widehat{h} + \frac{115}{144}\widehat{h}^2)r^2 + r(\frac{\widehat{h}}{12} + \frac{5}{9}\widehat{h}^2) - \frac{25}{144}\widehat{h}^2$$

$\mu = 2$

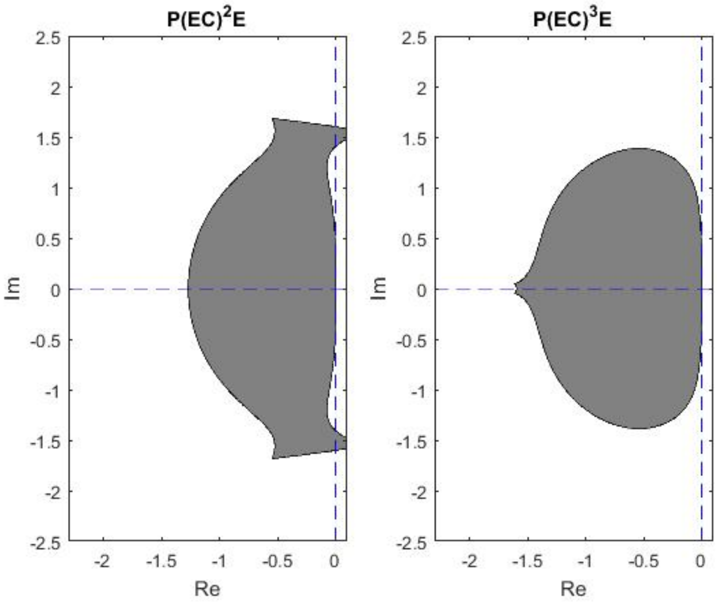
$$\pi_{P(EC)^2E}(r,\widehat{h}) = r^3(1-\frac{5}{12}\widehat{h} + \frac{25}{144+60\widehat{h}}) - r^2(1+\frac{2}{3}\widehat{h} + \frac{25}{144+60\widehat{h}}\widehat{h}^2 + \frac{575}{1728+720\widehat{h}}\widehat{h}^3) + r(\frac{\widehat{h}}{12} + \frac{25}{108+45\widehat{h}}\widehat{h}^3) - \frac{125}{1728+720\widehat{h}}\widehat{h}^3$$

$\mu = 3$

$$\pi_{P(EC)^3E}(r,\widehat{h}) = r^3(1-\frac{5}{12}\widehat{h}+\frac{125}{1728+720\widehat{h}+25\widehat{h}^2}\widehat{h}^3) - r^2(1+\frac{2}{3}\widehat{h}+ \frac{125\widehat{h}^3}{1728+720\widehat{h}+25\widehat{h}^2}+\frac{2875\widehat{h}^4}{20736+8640\widehat{h}+300\widehat{h}^2}) + r(\frac{\widehat{h}}{12}+ \frac{400\widehat{h}^4}{5184+2160\widehat{h}+75\widehat{h}^2}) - \frac{625\widehat{h}^4}{20736+8640\widehat{h}+300\widehat{h}^2}$$



Σχήμα 2.5: Περιοχές απόλυτης ευστάθειας PC AB-AM για k = 3



Σχήμα 2.6: Περιοχές απόλυτης ευστάθειας PC AB-AM για k = 3

Για την PC4 του ζεύγους AB4-AM4 παίρνουμε τα παρακάτω πολυώνυμα
$\mu = 0$

$$\pi_{PE}(r,\widehat{h}) = r^4 - r^3(1+\frac{55}{24}\widehat{h}) + \frac{59}{24}\widehat{h}r^2 - \frac{37}{24}\widehat{h}r - \frac{3}{8}\widehat{h}$$

$\mu = 1$

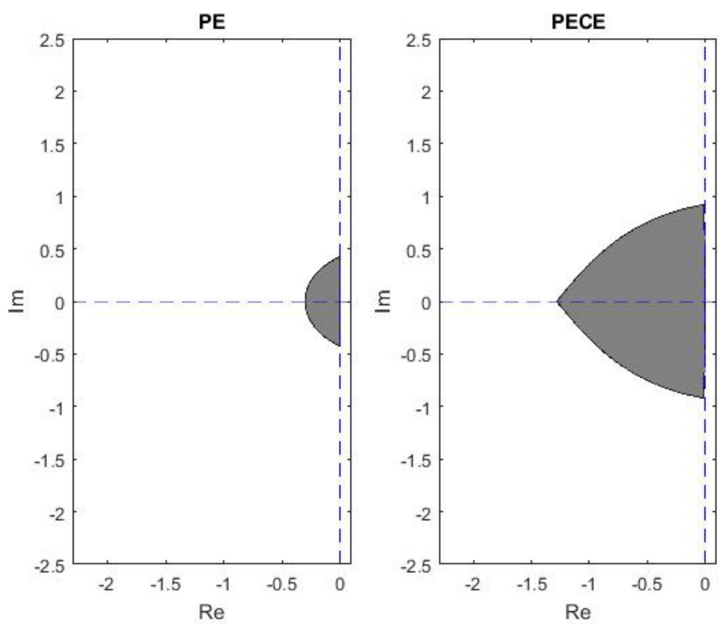
$$\pi_{PECE}(r,\widehat{h}) = r^4 - r^3(1+\frac{7}{6}\widehat{h}+\frac{55}{64}\widehat{h}^2) + r^2(\frac{5\widehat{h}}{24}+\frac{59}{64}\widehat{h}^2) - r(\frac{\widehat{h}}{24}+\frac{37}{64}\widehat{h}^2) + \frac{9}{64}\widehat{h}^2$$

$\mu = 2$

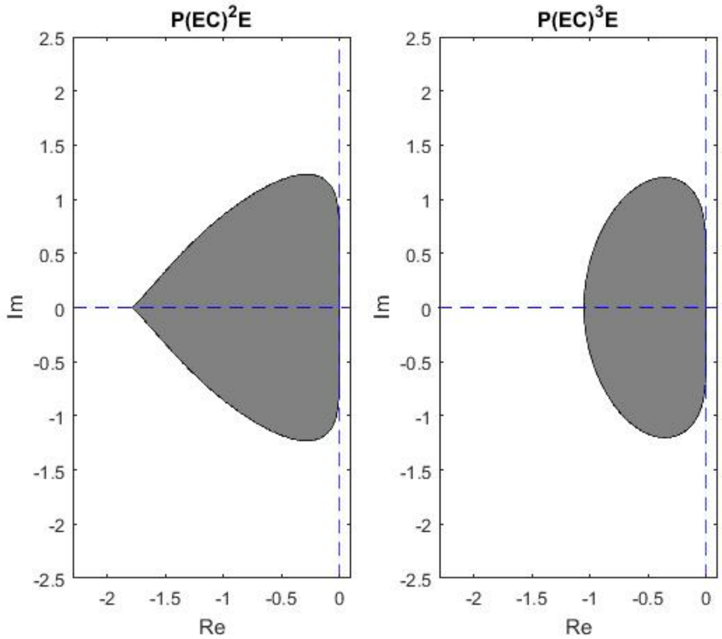
$$\begin{aligned}\pi_{P(EC)^2E}(r,\widehat{h}) =& r^4(1-\frac{3}{8}\widehat{h}+\frac{9\widehat{h}^2}{64+24\widehat{h}}) - r^3(1+\frac{19}{24}\widehat{h}+\frac{9}{64+24\widehat{h}}\widehat{h}^2+\frac{495}{1536+576\widehat{h}}\widehat{h}^3)+\\ & r^2(\frac{5\widehat{h}}{24}+\frac{531}{1536+576\widehat{h}}\widehat{h}^3) - r(\frac{\widehat{h}}{24}+\frac{333}{1536+576\widehat{h}}\widehat{h}^3) + \frac{27\widehat{h}^3}{512+192\widehat{h}}\end{aligned}$$

$\mu = 3$

$$\begin{aligned}\pi_{P(EC)^3E}(r,\widehat{h}) = r^4(1 - \frac{3}{8}\widehat{h} + \frac{27}{512+192\widehat{h}+72\widehat{h}^2}\widehat{h}^3) - \\ r^3(1 + \frac{19}{24}\widehat{h} + \frac{27\widehat{h}^3}{512+192\widehat{h}+72\widehat{h}^2} + \frac{1485\widehat{h}^4}{12288+4608\widehat{h}+1728\widehat{h}^2}) + \\ r^2(\frac{5\widehat{h}}{24} + \frac{1593\widehat{h}^4}{12288+4608\widehat{h}+1728\widehat{h}^2}) - \\ r(\frac{\widehat{h}}{24} + \frac{999\widehat{h}^4}{12288+4608\widehat{h}+1728\widehat{h}^2}) + \frac{81\widehat{h}^4}{4096+1536\widehat{h}+576\widehat{h}^2}\end{aligned}$$



Σχήμα 2.7: Περιοχές απόλυτης ευστάθειας PC AB-AM για k = 4



Σχήμα 2.8: Περιοχές απόλυτης ευστάθειας PC AB-AM για k = 4

Για την PC1 του ζεύγους AB1-BDF1 παίρνουμε τα παρακάτω πολυώνυμα
$\mu = 0$

$$\pi_{PE}(r, \widehat{h}) = r - 1 - \widehat{h}$$

$\mu = 1$

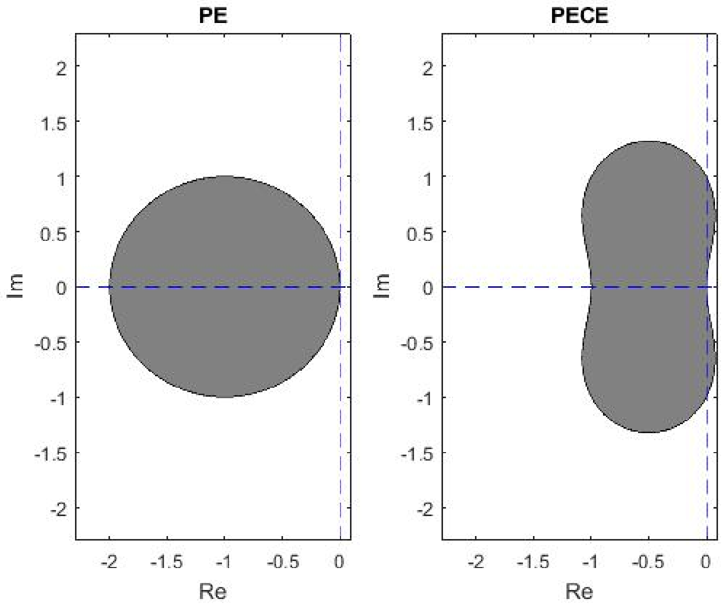
$$\pi_{PECE}(r, \widehat{h}) = -\widehat{h}^2 - \widehat{h} + r - 1$$

$\mu = 2$

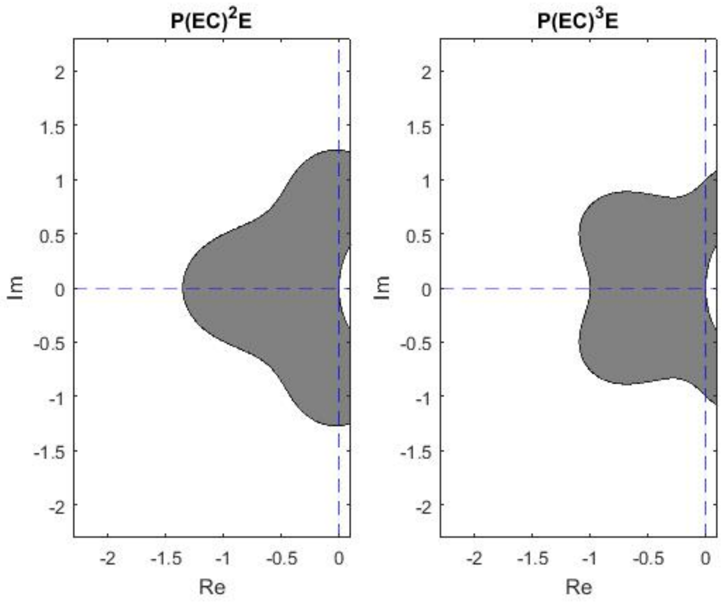
$$\pi_{P(EC)^2E}(r, \widehat{h}) = r(1 - \widehat{h} + \frac{\widehat{h}^2}{1 + \widehat{h}}) - \frac{\widehat{h}^3}{1 + \widehat{h}} - \frac{\widehat{h}^2}{1 + \widehat{h}} - 1$$

$\mu = 3$

$$\pi_{P(EC)^3E}(r, \widehat{h}) = r(1 - \widehat{h} + \frac{\widehat{h}^3}{1 + \widehat{h} + \widehat{h}^2}) - \frac{\widehat{h}^3}{1 + \widehat{h} + \widehat{h}^2} - \frac{\widehat{h}^4}{1 + \widehat{h} + \widehat{h}^2} - 1$$



Σχήμα 2.9: Περιοχές απόλυτης ευστάθειας PC AB-BDF για k = 1



Σχήμα 2.10: Περιοχές απόλυτης ευστάθειας PC AB-BDF για k = 1

Για την PC2 του ζεύγους AB2-BDF2 παίρνουμε τα παρακάτω πολυώνυμα

$\mu = 0$

$$\pi_{PE}(r,\widehat{h}) = r^2 - r(1+\frac{3}{2}\widehat{h}) + \frac{\widehat{h}}{2}$$

$\mu = 1$

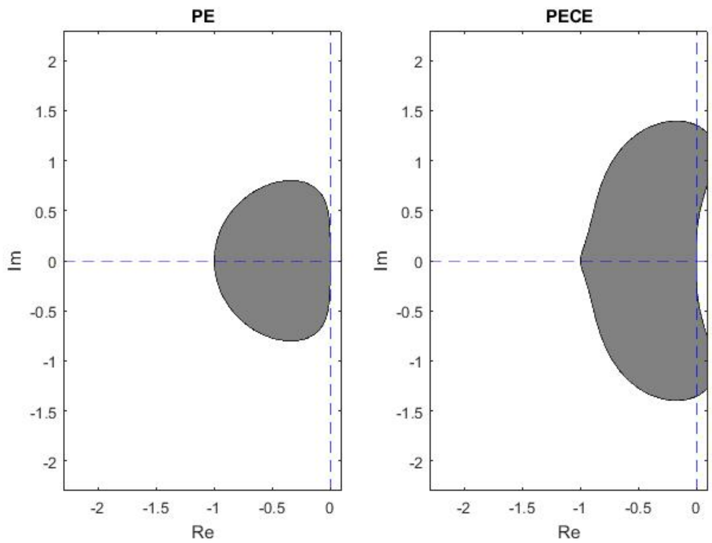
$$\pi_{PECE}(r,\widehat{h}) = r^2 - r(\frac{4}{3}+\frac{2}{3}\widehat{h}+\widehat{h}^2) + \frac{\widehat{h}^2}{3} + \frac{1}{3}$$

$\mu = 2$

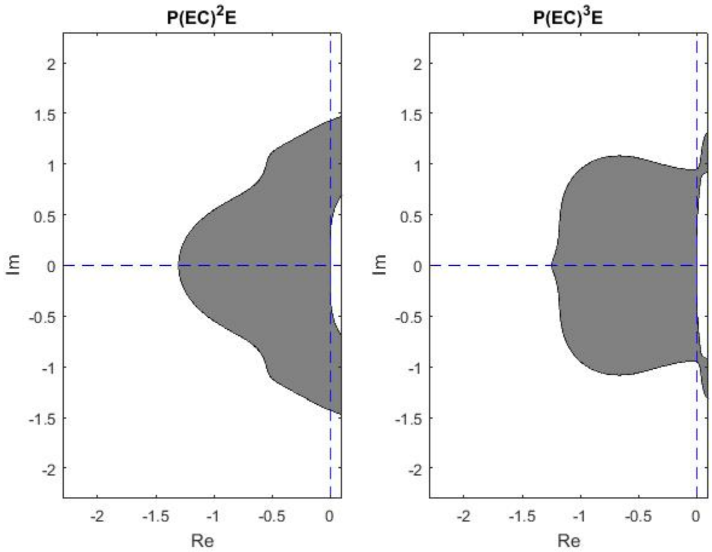
$$\pi_{P(EC)^2E}(r,\widehat{h}) = r^2(1-\frac{2}{3}\widehat{h}+\frac{4\widehat{h}^2}{9+6\widehat{h}}) - r(\frac{4}{3}+\frac{4\widehat{h}^2}{9+6\widehat{h}}+\frac{6\widehat{h}^3}{9+6\widehat{h}}) + \frac{2\widehat{h}^3}{9+6\widehat{h}} + \frac{1}{3}$$

$\mu = 3$

$$\pi_{P(EC)^3E}(r,\widehat{h}) = r^2(1-\frac{2}{3}\widehat{h}+\frac{8\widehat{h}^3}{27+18\widehat{h}+12\widehat{h}^2}) - r(\frac{4}{3}+\frac{8\widehat{h}^3}{27+18\widehat{h}+12\widehat{h}^2}+ \frac{24\widehat{h}^4}{54+36\widehat{h}+24\widehat{h}^2}) + \frac{8\widehat{h}^4}{54+36\widehat{h}+24\widehat{h}^2} + \frac{1}{3}$$



Σχήμα 2.11: Περιοχές απόλυτης ευστάθειας PC AB-BDF για k = 2



Σχήμα 2.12: Περιοχές απόλυτης ευστάθειας PC AB-BDF για k = 2

Για την PC3 του ζεύγους AB3-BDF3 παίρνουμε τα παρακάτω πολυώνυμα
$\mu = 0$

$$\pi_{PE}(r,\widehat{h}) = r^3 - r^2(1+\frac{23}{12}\widehat{h}) + \frac{4}{3}\widehat{h}r - \frac{5\widehat{h}}{12}$$

$\mu = 1$

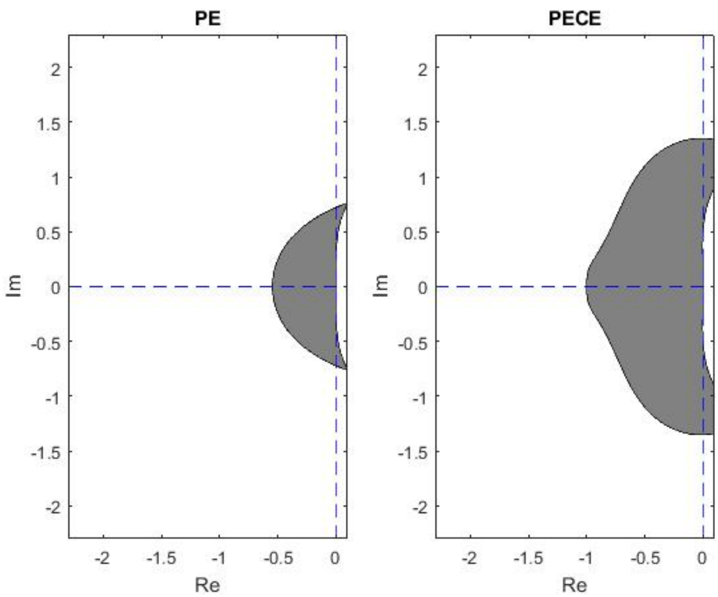
$$\pi_{PECE}(r,\widehat{h}) = r^3 - r^2(\frac{18}{11} + \frac{6}{11}\widehat{h} + \frac{23}{22}\widehat{h}^2) + r(\frac{9}{11}\frac{8\widehat{h}^2}{11}) - \frac{5\widehat{h}^2}{22} - \frac{2}{11}$$

$\mu = 2$

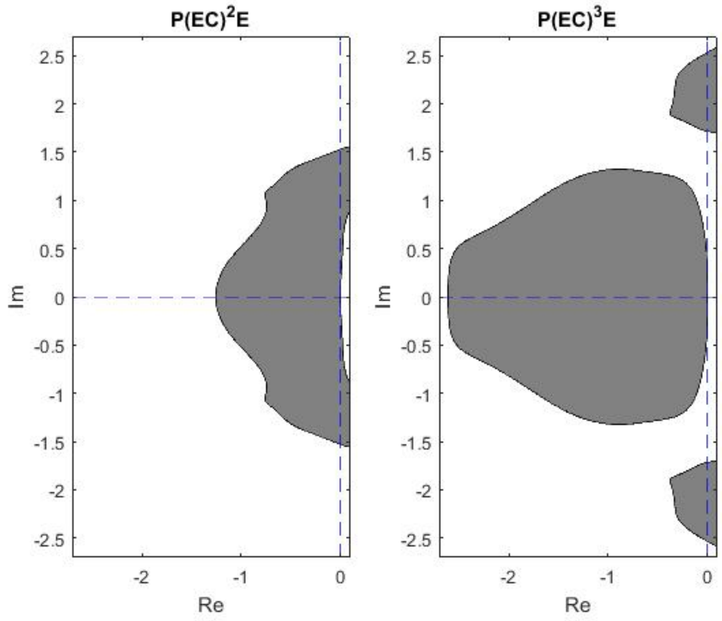
$$\begin{aligned}\pi_{P(EC)^2E}(r,\widehat{h}) =& r^3(1-\frac{6}{11}\widehat{h} + \frac{26\widehat{h}^2}{11(11+6\widehat{h})}) - r^2(\frac{18}{11} + \frac{36\widehat{h}^2}{11(11+6\widehat{h})} + \\ & \frac{69\widehat{h}^3}{11(11+6\widehat{h})}) + r(\frac{48\widehat{h}^3}{11(11+6\widehat{h})} + \frac{9}{11}) - \frac{15\widehat{h}^3}{11(11+6\widehat{h})} - \frac{2}{11}\end{aligned}$$

$\mu = 3$

$$\begin{aligned}\pi_{P(EC)^3E}(r,\widehat{h}) =& r^3(1-\frac{6}{11}\widehat{h}+\frac{63\widehat{h}^3}{11(121+66\widehat{h}+36\widehat{h}^2)})-r^2(\frac{18}{11}+\\ &\frac{63\widehat{h}^3}{11(121+66\widehat{h}+36\widehat{h}^2)}+\frac{1449\widehat{h}^4}{15972+8712\widehat{h}+4752\widehat{h}^2})+\\ &r(\frac{252\widehat{h}^4}{3993+2178\widehat{h}+1188\widehat{h}^2}+\frac{9}{11})-\frac{2}{11}-\\ &\frac{315\widehat{h}^4}{14641+7986\widehat{h}+4356\widehat{h}^2}\end{aligned}$$



Σχήμα 2.13: Περιοχές απόλυτης ευστάθειας PC AB-BDF για k = 3



Σχήμα 2.14: Περιοχές απόλυτης ευστάθειας PC AB-BDF για k = 3

Για την PC4 του ζεύγους AB4-BDF4 παίρνουμε τα παρακάτω πολυώνυμα
$\mu = 0$

$$\pi_{PE}(r, \widehat{h}) = r^3 - r^2(1 + \frac{23}{12}\widehat{h}) + \frac{4}{3}\widehat{h}r - \frac{5\widehat{h}}{12}$$

$\mu = 1$

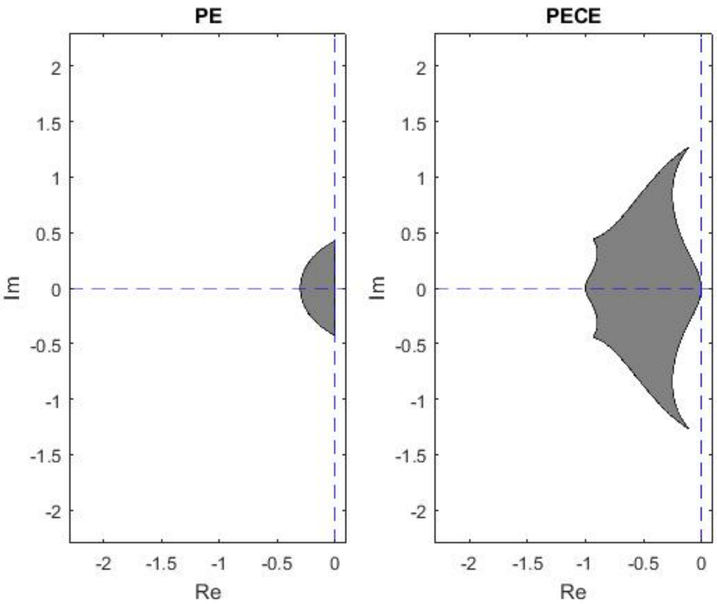
$$\pi_{PECE}(r, \widehat{h}) = r^3 - r^2(\frac{18}{11} + \frac{6}{11}\widehat{h} + \frac{23}{22}\widehat{h}^2) + r(\frac{9}{11}\frac{8\widehat{h}^2}{11}) - \frac{5\widehat{h}^2}{22} - \frac{2}{11}$$

$\mu = 2$

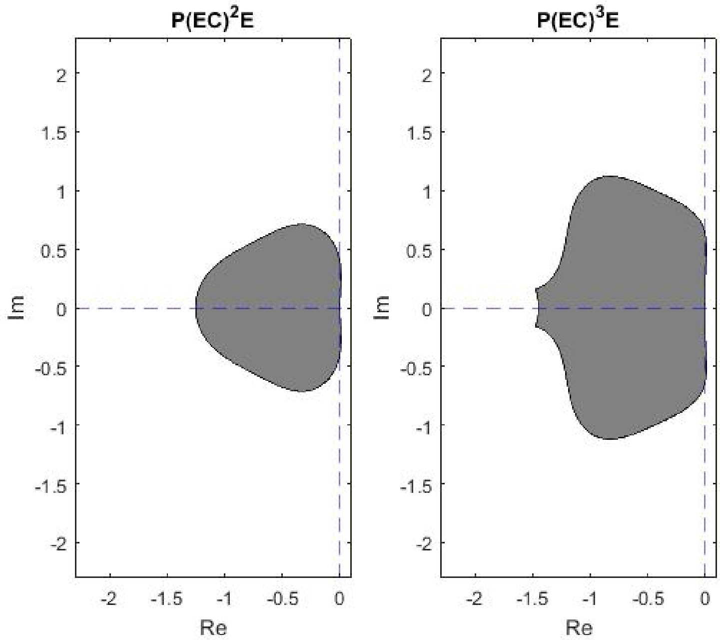
$$\pi_{P(EC)^2E}(r, \widehat{h}) = r^3(1 - \frac{6}{11}\widehat{h} + \frac{26\widehat{h}^2}{11(11 + 6\widehat{h})}) - r^2(\frac{18}{11} + \frac{36\widehat{h}^2}{11(11 + 6\widehat{h})} + \frac{69\widehat{h}^3}{11(11 + 6\widehat{h})}) + r(\frac{48\widehat{h}^3}{11(11 + 6\widehat{h})} + \frac{9}{11}) - \frac{15\widehat{h}^3}{11(11 + 6\widehat{h})} - \frac{2}{11}$$

$\mu = 3$

$$\begin{aligned}\pi_{P(EC)^3E}(r,\widehat{h}) =& r^3(1-\frac{6}{11}\widehat{h}+\frac{63\widehat{h}^3}{11(121+66\widehat{h}+36\widehat{h}^2)})-r^2(\frac{18}{11}+\\ &\frac{63\widehat{h}^3}{11(121+66\widehat{h}+36\widehat{h}^2)}+\frac{1449\widehat{h}^4}{15972+8712\widehat{h}+4752\widehat{h}^2})+\\ &r(\frac{252\widehat{h}^4}{3993+2178\widehat{h}+1188\widehat{h}^2}+\frac{9}{11})-\frac{2}{11}-\\ &\frac{315\widehat{h}^4}{14641+7986\widehat{h}+4356\widehat{h}^2}\end{aligned}$$



Σχήμα 2.15: Περιοχές απόλυτης ευστάθειας PC AB-BDF για k = 4



Σχήμα 2.16: Περιοχές απόλυτης ευστάθειας PC AB-BDF για k = 4

Κεφάλαιο 3

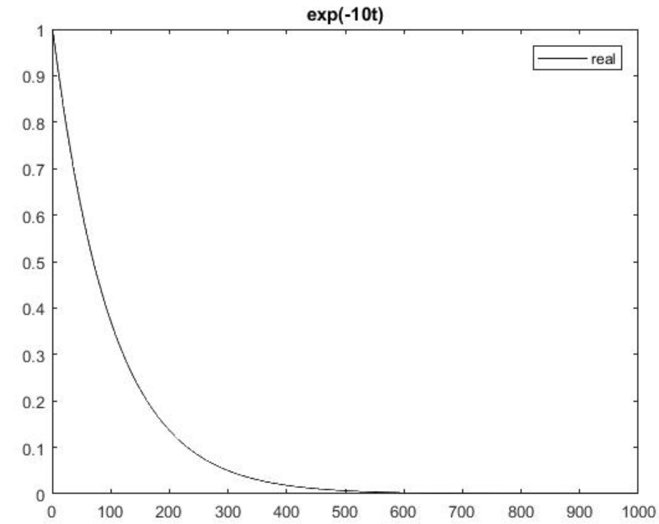
Αποτελέσματα

3.1 Numerics

Έχω το Π.Α.Τ.

$$\begin{cases} y' = -10y \\ y(0) = 1 \end{cases} \tag{3.1}$$

με $T = [0,1]$ ακριβή λύση $y(t) = e^{-10t}$. Χρησιμοποιώντας την Adams Basforth, Adams Multon, BDF, P-C για k = 1,2,3,4 παίρνουμε για διαφορετικά N το σφάλμα και την τάξη της μεθόδου αντίστοιχα στους παρακάτω πίνακες.



Σχήμα 3.1: Ακριβής λύση $y(t) = e^{-10t}$

Adams Basforth				
	$k = 1$		$k = 2$	
N	ϵ	p	ϵ	p
100	$1.88 \cdot 10^{-5}$	-	$2.01 \cdot 10^{-6}$	-
200	$1.03 \cdot 10^{-5}$	0.8644	$4.86 \cdot 10^{-7}$	2.0507
300	$7.11 \cdot 10^{-6}$	0.9235	$2.14 \cdot 10^{-7}$	2.0251
400	$5.41 \cdot 10^{-6}$	0.9463	$1.19 \cdot 10^{-7}$	2.0167
500	$4.37 \cdot 10^{-6}$	0.9585	$7.64 \cdot 10^{-8}$	2.0125

(3.2)

Adams Basforth				
	$k = 3$		$k = 4$	
N	ϵ	p	ϵ	p
100	$1.85 \cdot 10^{-7}$	-	$1.79 \cdot 10^{-8}$	-
200	$2.22 \cdot 10^{-8}$	3.0621	$1.05 \cdot 10^{-9}$	4.0917
300	$6.49 \cdot 10^{-9}$	3.0357	$2.03 \cdot 10^{-10}$	4.0520
400	$2.71 \cdot 10^{-9}$	3.0252	$6.38 \cdot 10^{-11}$	4.0366
500	$1.38 \cdot 10^{-9}$	3.0195	$2.59 \cdot 10^{-11}$	4.0283

(3.3)

Adams Multon				
	$k = 1$		$k = 2$	
N	ϵ	p	ϵ	p
100	$2.71 \cdot 10^{-5}$	-	$3.77 \cdot 10^{-7}$	-
200	$1.24 \cdot 10^{-5}$	1.1281	$9.45 \cdot 10^{-8}$	1.9971
300	$8.04 \cdot 10^{-6}$	1.0741	$4.20 \cdot 10^{-8}$	1.9990
400	$5.93 \cdot 10^{-6}$	1.0524	$2.36 \cdot 10^{-8}$	1.9995
500	$4.70 \cdot 10^{-6}$	1.0407	$1.51 \cdot 10^{-8}$	1.9997

(3.4)

Adams Multon				
	$k=3$		$k=4$	
N	ϵ	p	ϵ	p
100	$1.94 \cdot 10^{-}8$	-	$1.26 \cdot 10^{-}9$	-
200	$2.39 \cdot 10^{-}9$	3.0197	$7.68 \cdot 10^{-}11$	4.0383
300	$7.06 \cdot 10^{-}10$	3.0111	$1.50 \cdot 10^{-}11$	4.0217
400	$2.97 \cdot 10^{-}10$	3.0077	$4.74 \cdot 10^{-}12$	4.0153
500	$1.52 \cdot 10^{-}10$	3.0060	$1.93 \cdot 10^{-}12$	4.0118

(3.5)

BDF				
	$k=1$		$k=2$	
N	ϵ	p	ϵ	p
100	$2.71 \cdot 10^{-}5$	-	$1.59 \cdot 10^{-}6$	-
200	$1.24 \cdot 10^{-}5$	1.1281	$3.89 \cdot 10^{-}7$	2.0353
300	$8.04 \cdot 10^{-}6$	1.0741	$1.71 \cdot 10^{-}7$	2.0221
400	$5.93 \cdot 10^{-}6$	1.0524	$9.59 \cdot 10^{-}8$	2.0161
500	$4.70 \cdot 10^{-}6$	1.0407	$6.12 \cdot 10^{-}8$	2.0127

(3.6)

BDF				
	$k=3$		$k=4$	
N	ϵ	p	ϵ	p
100	$1.24 \cdot 10^{-}7$	-	$1.03 \cdot 10^{-}8$	-
200	$1.48 \cdot 10^{-}8$	3.0700	$6.05 \cdot 10^{-}10$	4.0950
300	$4.33 \cdot 10^{-}9$	3.0394	$1.17 \cdot 10^{-}10$	4.0538
400	$1.81 \cdot 10^{-}9$	3.0277	$3.66 \cdot 10^{-}11$	4.0378
500	$9.25 \cdot 10^{-}10$	3.0213	$1.49 \cdot 10^{-}11$	4.0292

(3.7)

$Predictor - Corrector \;\; AB - AM$				
	$k=1$		$k=2$	
N	ϵ	p	ϵ	p
100	$3.47 \cdot 10^{-5}$	-	$4.97 \cdot 10^{-7}$	-
200	$1.38 \cdot 10^{-5}$	1.3245	$1.08 \cdot 10^{-7}$	2.1912
300	$8.63 \cdot 10^{-6}$	1.1720	$4.62 \cdot 10^{-8}$	2.1133
400	$6.26 \cdot 10^{-6}$	1.1180	$2.53 \cdot 10^{-8}$	2.0810
500	$4.90 \cdot 10^{-6}$	1.0900	$1.60 \cdot 10^{-8}$	2.0632

(3.8)

$Predictor - Corrector \;\; AB - AM$				
	$k=3$		$k=4$	
N	ϵ	p	ϵ	p
100	$2.81 \cdot 10^{-8}$	-	$1.99 \cdot 10^{-9}$	-
200	$2.90 \cdot 10^{-9}$	3.2755	$9.79 \cdot 10^{-11}$	4.3477
300	$8.05 \cdot 10^{-10}$	3.1652	$1.77 \cdot 10^{-11}$	4.2121
400	$3.28 \cdot 10^{-10}$	3.1189	$5.37 \cdot 10^{-12}$	4.1538
500	$1.64 \cdot 10^{-10}$	3.0930	$2.14 \cdot 10^{-12}$	4.1209

(3.9)

$Predictor - Corrector \;\; AB - BDF$				
	$k=1$		$k=2$	
N	ϵ	p	ϵ	p
100	$3.47 \cdot 10^{-5}$	-	$2.00 \cdot 10^{-6}$	-
200	$1.38 \cdot 10^{-5}$	1.3245	$4.36 \cdot 10^{-7}$	2.2026
300	$8.63 \cdot 10^{-6}$	1.1720	$1.84 \cdot 10^{-7}$	2.1165
400	$6.26 \cdot 10^{-6}$	1.1180	$1.01 \cdot 10^{-7}$	2.0822
500	$4.90 \cdot 10^{-6}$	1.0900	$6.40 \cdot 10^{-8}$	2.0637

(3.10)

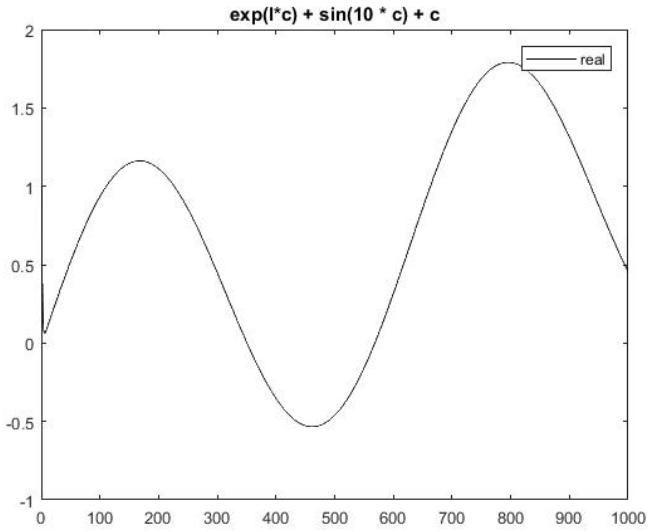
$Predictor - Corrector\ \ AB - BDF$				
	$k = 3$		$k = 4$	
N	ϵ	p	ϵ	p
100	$1.61 \cdot 10^{-}7$	-	$1.36 \cdot 10^{-}8$	-
200	$1.68 \cdot 10^{-}8$	3.2563	$6.95 \cdot 10^{-}10$	4.2964
300	$4.71 \cdot 10^{-}9$	3.1438	$1.28 \cdot 10^{-}10$	4.1674
400	$1.93 \cdot 10^{-}9$	3.1008	$3.92 \cdot 10^{-}11$	4.1177
500	$9.73 \cdot 10^{-}10$	3.0778	$1.57 \cdot 10^{-}11$	4.0909

(3.11)

Έχω το Π.Α.Τ.

$$\begin{cases} y' = \lambda(y(t) - g(t)) + g'(t) \\ y(0) = 1 \end{cases} \tag{3.12}$$

με $T = [0, 1]$ και ακριβή λύση $y(t) = e^{\lambda t} + g(t), g(t) = sin(10t) + t$. Χρησιμοποιώντας την Adams Basforth, Adams Multon, BDF, P-C για k = 1,2,3,4 παίρνουμε για διαφορετικά N το σφάλμα και την τάξη της μεθόδου αντίστοιχα στους παρακάτω πίνακες. Τα αποτελέσματα είναι για διαφορετικές τιμές του λ.



Σχήμα 3.2: Ακριβής λύση $y(t) = e^{\lambda t} + sin(10t) + t$

$Adams\ Basforth\ \ k = 1$								
$\lambda = -1000$			$\lambda = -10000$			$\lambda = -100000$		
N	ϵ	p	N	ϵ	p	N	ϵ	p
1000	$2.69 \cdot 10^{-5}$	-	6000	$4.53 \cdot 10^{-7}$	-	60000	$4.53 \cdot 10^{-9}$	-
2000	$1.34 \cdot 10^{-5}$	1.0038	7000	$3.88 \cdot 10^{-7}$	1.0007	70000	$3.89 \cdot 10^{-9}$	0.9909
3000	$8.94 \cdot 10^{-6}$	1.0021	8000	$3.39 \cdot 10^{-7}$	1.0006	80000	$3.39 \cdot 10^{-9}$	1.0201
4000	$6.70 \cdot 10^{-6}$	1.0015	9000	$3.01 \cdot 10^{-7}$	1.0006	90000	$3.01 \cdot 10^{-9}$	1.0173
5000	$5.36 \cdot 10^{-6}$	1.0011	10000	$2.71 \cdot 10^{-7}$	1.0005	100000	$2.70 \cdot 10^{-9}$	1.0165

(3.13)

Adams Basforth $k = 2$								
$\lambda = -1000$			$\lambda = -10000$			$\lambda = -100000$		
N	ϵ	p	N	ϵ	p	N	ϵ	p
1000	$8.33 \cdot 10^{-2}$	-	10000	$8.33 \cdot 10^{-2}$	-	100000	$8.33 \cdot 10^{-2}$	-
2000	$8.81 \cdot 10^{-8}$	19.85	11000	$2.89 \cdot 10^{-10}$	204.37	110000	$2.89 \cdot 10^{-13}$	276.84
3000	$3.91 \cdot 10^{-8}$	2.0015	12000	$2.43 \cdot 10^{-10}$	2.0003	120000	$2.44 \cdot 10^{-13}$	1.9147
4000	$2.20 \cdot 10^{-8}$	2.0011	13000	$2.07 \cdot 10^{-10}$	2.0003	130000	$2.07 \cdot 10^{-13}$	2.0873
5000	$1.40 \cdot 10^{-8}$	2.0009	14000	$1.78 \cdot 10^{-10}$	2.0001	140000	$1.78 \cdot 10^{-13}$	2.0109

(3.14)

Adams Basforth $k = 3$								
$\lambda = -1000$			$\lambda = -10000$			$\lambda = -100000$		
N	ϵ	p	N	ϵ	p	N	ϵ	p
2000	$2.49 \cdot 10^{-10}$	-	20000	$2.67 \cdot 10^{-14}$	-	200000	$1.22 \cdot 10^{-15}$	-
3000	$7.39 \cdot 10^{-11}$	2.9929	21000	$2.28 \cdot 10^{-14}$	3.1736	210000	$5.55 \cdot 10^{-17}$	-
4000	$3.12 \cdot 10^{-11}$	2.9951	22000	$1.77 \cdot 10^{-14}$	5.4321	220000	$4.44 \cdot 10^{-16}$	-
5000	$1.60 \cdot 10^{-11}$	2.9962	23000	$1.63 \cdot 10^{-14}$	1.9063	230000	$6.10 \cdot 10^{-16}$	-
6000	$9.27 \cdot 10^{-12}$	2.9966	24000	$1.45 \cdot 10^{-14}$	2.6181	240000	$1.66 \cdot 10^{-16}$	-

(3.15)

$Adams\ Basforth\ \ k=4$								
$\lambda=-1000$			$\lambda=-10000$			$\lambda=-100000$		
N	ϵ	p	N	ϵ	p	N	ϵ	p
4000	$1.15\cdot10^{-}13$	-	40000	$9.43\cdot10^{-}16$	-	400000	$7.77\cdot10^{-}16$	-
5000	$4.68\cdot10^{-}14$	4.0399	50000	$7.77\cdot10^{-}16$	-	500000	$4.99\cdot10^{-}16$	-
6000	$2.29\cdot10^{-}14$	3.9200	60000	$5.55\cdot10^{-}17$	-	600000	$5.55\cdot10^{-}17$	-
7000	$1.13\cdot10^{-}14$	4.5438	70000	$3.33\cdot10^{-}16$	-	700000	$3.88\cdot10^{-}16$	-
8000	$6.66\cdot10^{-}15$	4.0104	80000	$3.88\cdot10^{-}16$	-	800000	$3.33\cdot10^{-}16$	-

(3.16)

$Adams\ Multon\ \ k=1$								
$\lambda=-1000$			$\lambda=-10000$			$\lambda=-100000$		
N	ϵ	p	N	ϵ	p	N	ϵ	p
100	$2.53\cdot10^{-}4$	-	100	$2.57\cdot10^{-}5$	-	100	$2.57\cdot10^{-}6$	-
200	$1.30\cdot10^{-}4$	0.9592	200	$1.32\cdot10^{-}5$	0.9603	200	$1.32\cdot10^{-}6$	0.9604
300	$8.76\cdot10^{-}5$	0.9774	300	$8.89\cdot10^{-}6$	0.9780	300	$8.90\cdot10^{-}7$	0.9781
400	$6.60\cdot10^{-}5$	0.9842	400	$6.70\cdot10^{-}6$	0.9846	400	$6.71\cdot10^{-}7$	0.9847
500	$5.29\cdot10^{-}5$	0.9878	500	$5.37\cdot10^{-}6$	0.9882	500	$5.38\cdot10^{-}7$	0.9882

(3.17)

Adams Multon $k = 2$								
$\lambda = -1000$			$\lambda = -10000$			$\lambda = -100000$		
N	ϵ	p	N	ϵ	p	N	ϵ	p
200	$1.75 \cdot 10^{-}6$	-	200	$2.86 \cdot 10^{-}7$	-	1000	$6.99 \cdot 10^{-}10$	-
300	$7.81 \times 10^{-}7$	2.00034	300	$7.77 \cdot 10^{-}8$	3.21698	2000	$1.75 \cdot 10^{-}10$	-
400	$4.39 \cdot 10^{-}7$	2.00016	400	$4.37 \cdot 10^{-}8$	2.00016	3000	$7.80 \cdot 10^{-}11$	-
500	$2.81 \cdot 10^{-}7$	2.00010	500	$2.79 \cdot 10^{-}8$	2.00010	4000	$4.43 \cdot 10^{-}11$	-
600	$1.95 \cdot 10^{-}7$	2.00006	600	$1.94 \cdot 10^{-}8$	2.00008	5000	$2.85 \cdot 10^{-}11$	-

(3.18)

Adams Multon $k = 3$								
$\lambda = -1000$			$\lambda = -10000$			$\lambda = -100000$		
N	ϵ	p	N	ϵ	p	N	ϵ	p
500	$1.76 \cdot 10^{-}9$	-	3000	$8.36 \cdot 10^{-}13$	-	30000	$5.55 \cdot 10^{-}17$	-
1000	$2.21 \cdot 10^{-}10$	2.9915	4000	$3.53 \cdot 10^{-}13$	2.9969	40000	$4.44 \cdot 10^{-}16$	-
1500	$6.60 \cdot 10^{-}10$	2.9889	5000	$1.81 \cdot 10^{-}13$	2.9902	50000	$1.66 \cdot 10^{-}16$	-
2000	$2.74 \cdot 10^{-}11$	3.0563	6000	$1.04 \cdot 10^{-}13$	3.0175	60000	0	-
2500	$1.39 \cdot 10^{-}11$	3.0371	7000	$6.61 \cdot 10^{-}14$	2.9695	70000	$5.55 \cdot 10^{-}16$	-

(3.19)

Adams Multon $k = 4$								
$\lambda = -1000$			$\lambda = -10000$			$\lambda = -100000$		
N	ϵ	p	N	ϵ	p	N	ϵ	p
500	$3.60 \cdot 10^{-11}$	-	5000	$7.77 \cdot 10^{-16}$	-	50000	$2.77 \cdot 10^{-16}$	-
1000	$2.23 \cdot 10^{-12}$	4.0068	10000	$2.77 \cdot 10^{-16}$	-	100000	$1.11 \cdot 10^{-16}$	-
1500	$4.41 \cdot 10^{-13}$	4.0067	15000	$2.22 \cdot 10^{-16}$	-	150000	$5.55 \cdot 10^{-17}$	-
2000	$1.40 \cdot 10^{-13}$	3.9845	20000	$2.22 \cdot 10^{-16}$	-	200000	$1.66 \cdot 10^{-16}$	-
2500	$5.73 \cdot 10^{-14}$	4.0071	25000	$1.66 \cdot 10^{-16}$	-	250000	$3.33 \cdot 10^{-16}$	-

(3.20)

BDF $k = 1$								
$\lambda = -1000$			$\lambda = -10000$			$\lambda = -100000$		
N	ϵ	p	N	ϵ	p	N	ϵ	p
100	2.53×10^{-4}	-	100	2.57×10^{-5}	-	100	$2.57 \cdot 10^{-6}$	-
200	1.30×10^{-4}	0.9592	200	1.32×10^{-5}	0.9603	200	$1.32 \cdot 10^{-6}$	0.9604
300	8.76×10^{-5}	0.9774	300	8.89×10^{-6}	0.9780	300	$8.90 \cdot 10^{-7}$	0.9781
400	6.60×10^{-5}	0.9842	400	6.70×10^{-6}	0.9846	400	$6.71 \cdot 10^{-7}$	0.9847
500	5.29×10^{-5}	0.9878	500	5.37×10^{-6}	0.9882	500	$5.38 \cdot 10^{-7}$	0.9882

(3.21)

$BDF\ \ k=2$								
$\lambda=-1000$			$\lambda=-10000$			$\lambda=-100000$		
N	ϵ	p	N	ϵ	p	N	ϵ	p
100	$2.93\cdot10^{-}5$	-	100	$2.92\cdot10^{-}6$	-	100	$2.93\cdot10^{-}7$	-
200	$7.19\cdot10^{-}6$	2.0294	200	$7.15\cdot10^{-}7$	2.0301	200	$7.16\cdot10^{-}8$	2.0271
300	$3.17\cdot10^{-}6$	2.0179	300	$3.15\cdot10^{-}7$	2.0184	300	$3.16\cdot10^{-}8$	2.0189
400	$1.77\cdot10^{-}6$	2.0130	400	$1.76\cdot10^{-}7$	2.0133	400	$1.75\cdot10^{-}8$	2.0112
500	$1.13\cdot10^{-}6$	2.0101	500	$1.12\cdot10^{-}7$	2.0104	500	$1.11\cdot10^{-}8$	2.0098

(3.22)

$BDF\ \ k=3$								
$\lambda=-1000$			$\lambda=-10000$			$\lambda=-100000$		
N	ϵ	p	N	ϵ	p	N	ϵ	p
400	$1.99\cdot10^{-}8$	-	400	$2.02\cdot10^{-}9$	-	400	$2.13\cdot10^{-}10$	-
500	$1.03\cdot10^{-}8$	2.9548	500	$1.08\cdot10^{-}9$	2.9546	500	$1.12\cdot10^{-}10$	2.9557
600	$6.00\cdot10^{-}9$	2.9635	600	$6.26\cdot10^{-}10$	2.9698	600	$6.06\cdot10^{-}11$	2.9701
700	$3.79\cdot10^{-}9$	2.9694	700	$3.95\cdot10^{-}10$	2.9722	700	$3.88\cdot10^{-}11$	2.9756
800	$2.55\cdot10^{-}9$	2.9741	800	$2.65\cdot10^{-}10$	2.9787	800	$2.68\cdot10^{-}11$	2.9812

(3.23)

$BDF \;\; k=4$								
$\lambda=-1000$			$\lambda=-10000$			$\lambda=-100000$		
N	ϵ	p	N	ϵ	p	N	ϵ	p
400	$6.76\cdot10^{-}10$	-	400	$6.74\cdot10^{-}11$	-	400	$6.81\cdot10^{-}12$	-
500	$2.75\cdot10^{-}10$	4.0216	500	$2.73\cdot10^{-}11$	4.0196	500	$2.74\cdot10^{-}12$	4.0187
600	$1.32\cdot10^{-}10$	4.0179	600	$1.27\cdot10^{-}11$	4.0179	600	$1.29\cdot10^{-}12$	4.0179
700	$7.13\cdot10^{-}11$	4.0153	700	$7.08\cdot10^{-}12$	4.0131	700	$7.11\cdot10^{-}13$	4.0110
800	$4.17\cdot10^{-}11$	4.0133	800	$4.12\cdot10^{-}12$	4.0103	800	$4.15\cdot10^{-}13$	4.0098

(3.24)

$PC \;\; AB-AM \;\; k=1$								
$\lambda=-1000$			$\lambda=-10000$			$\lambda=-100000$		
N	ϵ	p	N	ϵ	p	N	ϵ	p
1000	$9.81\times10^{-}1$	-	10000	$9.98\times10^{-}1$	-	100000	$9.99\cdot10^{-}1$	-
2000	$3.97\times10^{-}5$	14.59	20000	$4.06\times10^{-}7$	21.22	200000	$4.06\cdot10^{-}9$	27.87
3000	$1.77\times10^{-}5$	1.98	30000	$1.80\times10^{-}7$	1.99	300000	$1.77\cdot10^{-}9$	2.0360
4000	$1.11\times10^{-}5$	1.62	40000	$1.13\times10^{-}7$	1.63	400000	$1.10\cdot10^{-}9$	1.67
5000	$8.01\times10^{-}6$	1.46	50000	$8.14\times10^{-}8$	1.47	500000	$9.11\cdot10^{-}10$	1.47

(3.25)

$PC \;\; AB - AM \;\; k = 2$								
$\lambda = -1000$			$\lambda = -10000$			$\lambda = -100000$		
N	ϵ	p	N	ϵ	p	N	ϵ	p
1000	$4.93 \times 10^{-}7$	-	10000	$4.89 \times 10^{-}10$	-	100000	$4.89 \cdot 10^{-}13$	-
2000	$5.28 \times 10^{-}8$	**3.22**	20000	$5.24 \times 10^{-}11$	**3.22**	200000	$5.20 \cdot 10^{-}14$	**3.23**
3000	$1.72 \times 10^{-}8$	**2.76**	30000	$1.71 \times 10^{-}11$	**2.76**	300000	$1.72 \cdot 10^{-}14$	**2.72**
4000	$8.17 \times 10^{-}9$	**2.58**	40000	$8.12 \times 10^{-}12$	**2.58**	400000	$7.66 \cdot 10^{-}15$	**2.82**
5000	$4.69 \times 10^{-}9$	**2.48**	50000	$4.66 \times 10^{-}12$	**2.48**	500000	$5.05 \cdot 10^{-}15$	**1.86**

(3.26)

$PC \;\; AB - AM \;\; k = 3$								
$\lambda = -1000$			$\lambda = -10000$			$\lambda = -100000$		
N	ϵ	p	N	ϵ	p	N	ϵ	p
1000	$1.79 \times 10^{-}9$	-	10000	$1.84 \times 10^{-}13$	-	100000	$1.66 \cdot 10^{-}16$	-
2000	$1.00 \times 10^{-}10$	**4.15**	11000	$1.19 \times 10^{-}13$	**4.57**	110000	$5.55 \cdot 10^{-}17$	**3.23**
3000	$2.15 \times 10^{-}11$	**3.80**	12000	$8.26 \times 10^{-}14$	**4.21**	120000	$2.22 \cdot 10^{-}16$	**2.72**
4000	$7.52 \times 10^{-}12$	**3.65**	13000	$5.84 \times 10^{-}14$	**4.32**	130000	$1.11 \cdot 10^{-}16$	**2.82**
5000	$3.40 \times 10^{-}12$	**3.55**	14000	$4.36 \times 10^{-}14$	**3.92**	140000	$3.88 \cdot 10^{-}16$	**1.86**

(3.27)

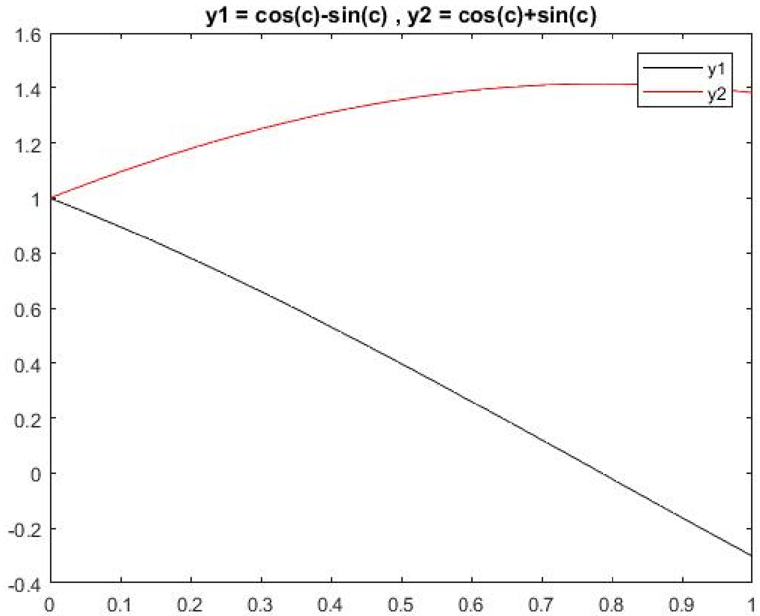
$PC \quad AB - AM \quad k = 4$								
$\lambda = -1000$			$\lambda = -10000$			$\lambda = -100000$		
N	ϵ	p	N	ϵ	p	N	ϵ	p
1000	$2.14 \times 10^{-}11$	-	10000	$7.77 \times 10^{-}16$	-	100000	$1.66 \cdot 10^{-}16$	-
2000	$5.98 \times 10^{-}13$	**5.16**	11000	$1.11 \times 10^{-}15$	**4.57**	110000	$5.55 \cdot 10^{-}17$	**3.23**
3000	$8.32 \times 10^{-}14$	**4.86**	12000	$3.33 \times 10^{-}16$	**4.21**	120000	$2.22 \cdot 10^{-}16$	**2.72**
4000	$2.19 \times 10^{-}14$	**4.62**	13000	$4.44 \times 10^{-}16$	**4.32**	130000	$1.11 \cdot 10^{-}16$	**2.82**
5000	$7.99 \times 10^{-}15$	**4.53**	14000	$4.99 \times 10^{-}16$	**3.92**	140000	$3.88 \cdot 10^{-}16$	**1.86**

(3.28)

Έχω το σύστημα.

$$\begin{cases} y_1'(t) = -y_2 \\ y_2'(t) = y_1 \end{cases} \tag{3.29}$$

με $T = [0, 1]$ και ακριβή λύση $y_1(t) = cos(t) - sin(t), y_2(t) = cos(t) + sin(t)$. Χρησιμοποιώντας την Adams Basforth, Adams Multon, BDF, P-C για k = 1,2,3,4 παίρνουμε για διαφορετικά N το σφάλμα και την τάξη της μεθόδου αντίστοιχα στους παρακάτω πίνακες.



Σχήμα 3.3: Ακριβής λύση $y_1(t) = cos(t) - sin(t), y_2(t) = cos(t) + sin(t)$

$Adams\ Basforth$				
	$k = 1$		$k = 2$	
N	ϵ	p	ϵ	p
100	$7.08 \cdot 10^{-}3$	-	$2.01 \cdot 10^{-}6$	-
200	$3.53 \cdot 10^{-}3$	1.0017	$4.86 \cdot 10^{-}7$	2.0507
300	$2.35 \cdot 10^{-}3$	1.0010	$2.14 \cdot 10^{-}7$	2.0251
400	$1.76 \cdot 10^{-}3$	1.0007	$1.19 \cdot 10^{-}7$	2.0167
500	$1.41 \cdot 10^{-}3$	1.0005	$7.64 \cdot 10^{-}8$	2.0125

(3.30)

Adams Basforth				
	$k = 3$		$k = 4$	
N	ϵ	p	ϵ	p
100	$1.85 \cdot 10^{-7}$	-	$1.79 \cdot 10^{-8}$	-
200	$2.22 \cdot 10^{-8}$	3.0621	$1.05 \cdot 10^{-9}$	4.0917
300	$6.49 \cdot 10^{-9}$	3.0357	$2.03 \cdot 10^{-10}$	4.0520
400	$2.71 \cdot 10^{-9}$	3.0252	$6.38 \cdot 10^{-11}$	4.0366
500	$1.38 \cdot 10^{-9}$	3.0195	$2.59 \cdot 10^{-11}$	4.0283

(3.31)

Adams Multon				
	$k = 1$		$k = 2$	
N	ϵ	p	ϵ	p
100	$2.71 \cdot 10^{-5}$	-	$3.77 \cdot 10^{-7}$	-
200	$1.24 \cdot 10^{-5}$	1.1281	$9.45 \cdot 10^{-8}$	1.9971
300	$8.04 \cdot 10^{-6}$	1.0741	$4.20 \cdot 10^{-8}$	1.9990
400	$5.93 \cdot 10^{-6}$	1.0524	$2.36 \cdot 10^{-8}$	1.9995
500	$4.70 \cdot 10^{-6}$	1.0407	$1.51 \cdot 10^{-8}$	1.9997

(3.32)

Adams Multon				
	$k = 3$		$k = 4$	
N	ϵ	p	ϵ	p
100	$1.94 \cdot 10^{-8}$	-	$1.26 \cdot 10^{-9}$	-
200	$2.39 \cdot 10^{-9}$	3.0197	$7.68 \cdot 10^{-11}$	4.0383
300	$7.06 \cdot 10^{-10}$	3.0111	$1.50 \cdot 10^{-11}$	4.0217
400	$2.97 \cdot 10^{-10}$	3.0077	$4.74 \cdot 10^{-12}$	4.0153
500	$1.52 \cdot 10^{-10}$	3.0060	$1.93 \cdot 10^{-12}$	4.0118

(3.33)

BDF				
	$k=1$		$k=2$	
N	ϵ	p	ϵ	p
100	$2.71 \cdot 10^{-}5$	-	$1.59 \cdot 10^{-}6$	-
200	$1.24 \cdot 10^{-}5$	1.1281	$3.89 \cdot 10^{-}7$	2.0353
300	$8.04 \cdot 10^{-}6$	1.0741	$1.71 \cdot 10^{-}7$	2.0221
400	$5.93 \cdot 10^{-}6$	1.0524	$9.59 \cdot 10^{-}8$	2.0161
500	$4.70 \cdot 10^{-}6$	1.0407	$6.12 \cdot 10^{-}8$	2.0127

(3.34)

BDF				
	$k=3$		$k=4$	
N	ϵ	p	ϵ	p
100	$1.24 \cdot 10^{-}7$	-	$1.03 \cdot 10^{-}8$	-
200	$1.48 \cdot 10^{-}8$	3.0700	$6.05 \cdot 10^{-}10$	4.0950
300	$4.33 \cdot 10^{-}9$	3.0394	$1.17 \cdot 10^{-}10$	4.0538
400	$1.81 \cdot 10^{-}9$	3.0277	$3.66 \cdot 10^{-}11$	4.0378
500	$9.25 \cdot 10^{-}10$	3.0213	$1.49 \cdot 10^{-}11$	4.0292

(3.35)

$Predictor - Corrector \;\; AB - AM$				
	$k=1$		$k=2$	
N	ϵ	p	ϵ	p
100	$3.47 \cdot 10^{-}5$	-	$4.97 \cdot 10^{-}7$	-
200	$1.38 \cdot 10^{-}5$	1.3245	$1.08 \cdot 10^{-}7$	2.1912
300	$8.63 \cdot 10^{-}6$	1.1720	$4.62 \cdot 10^{-}8$	2.1133
400	$6.26 \cdot 10^{-}6$	1.1180	$2.53 \cdot 10^{-}8$	2.0810
500	$4.90 \cdot 10^{-}6$	1.0900	$1.60 \cdot 10^{-}8$	2.0632

(3.36)

$Predictor - Corrector \;\; AB - AM$				
	$k = 3$		$k = 4$	
N	ϵ	p	ϵ	p
100	$2.81 \cdot 10^{-8}$	-	$1.99 \cdot 10^{-9}$	-
200	$2.90 \cdot 10^{-9}$	3.2755	$9.79 \cdot 10^{-11}$	4.3477
300	$8.05 \cdot 10^{-10}$	3.1652	$1.77 \cdot 10^{-11}$	4.2121
400	$3.28 \cdot 10^{-10}$	3.1189	$5.37 \cdot 10^{-12}$	4.1538
500	$1.64 \cdot 10^{-10}$	3.0930	$2.14 \cdot 10^{-12}$	4.1209

(3.37)

$Predictor - Corrector \;\; AB - BDF$				
	$k = 1$		$k = 2$	
N	ϵ	p	ϵ	p
100	$3.47 \cdot 10^{-5}$	-	$2.00 \cdot 10^{-6}$	-
200	$1.38 \cdot 10^{-5}$	1.3245	$4.36 \cdot 10^{-7}$	2.2026
300	$8.63 \cdot 10^{-6}$	1.1720	$1.84 \cdot 10^{-7}$	2.1165
400	$6.26 \cdot 10^{-6}$	1.1180	$1.01 \cdot 10^{-7}$	2.0822
500	$4.90 \cdot 10^{-6}$	1.0900	$6.40 \cdot 10^{-8}$	2.0637

(3.38)

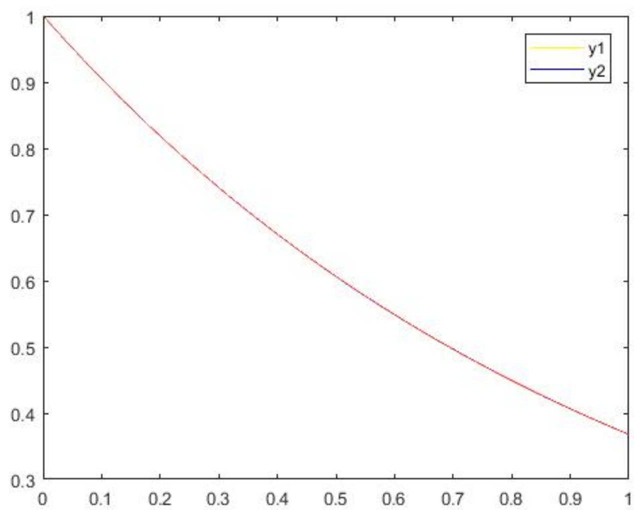
$Predictor - Corrector \;\; AB - BDF$				
	$k = 3$		$k = 4$	
N	ϵ	p	ϵ	p
100	$1.61 \cdot 10^{-7}$	-	$1.36 \cdot 10^{-8}$	-
200	$1.68 \cdot 10^{-8}$	3.2563	$6.95 \cdot 10^{-10}$	4.2964
300	$4.71 \cdot 10^{-9}$	3.1438	$1.28 \cdot 10^{-10}$	4.1674
400	$1.93 \cdot 10^{-9}$	3.1008	$3.92 \cdot 10^{-11}$	4.1177
500	$9.73 \cdot 10^{-10}$	3.0778	$1.57 \cdot 10^{-11}$	4.0909

(3.39)

Έχω το σύστημα.

$$\begin{cases} y_1'(t) = -\alpha y_1(t) - \beta y_2(t) + (\alpha + \beta - 1)e^{-t} \\ y_2'(t) = \beta y_1(t) - \alpha y_2(t) + (\alpha - \beta - 1)e^{-t} \end{cases} \tag{3.40}$$

με $T = [0, 1]$ και ακριβή λύση $y_1(t) = e^{-t}, y_2(t) = e^{-t}$. Χρησιμοποιώντας την Adams Basforth, Adams Multon, BDF, P-C για k = 1,2,3,4 παίρνουμε για διαφορετικά N το σφάλμα και την τάξη της μεθόδου αντίστοιχα στους παρακάτω πίνακες.



Σχήμα 3.4: Ακριβής λύση $y_1(t) = e^{-t}, y_2(t) = e^{-t}$

$Adams\ Basforth$				
	$k=1$		$k=2$	
N	ϵ	p	ϵ	p
100	$6.78 \cdot 10^{-}4$	-	$2.71 \cdot 10^{-}6$	-
200	$2.26 \cdot 10^{-}4$	1.58	$6.73 \cdot 10^{-}7$	2.0112
300	$1.34 \cdot 10^{-}4$	1.29	$2.99 \cdot 10^{-}7$	1.9981
400	$9.50 \cdot 10^{-}5$	1.19	$1.68 \cdot 10^{-}7$	1.9969
500	$7.36 \cdot 10^{-}5$	1.14	$1.08 \cdot 10^{-}7$	1.9969

(3.41)

$Adams\ Basforth$				
	$k=3$		$k=4$	
N	ϵ	p	ϵ	p
100	$2.63 \cdot 10^{-}8$	-	$5.32 \cdot 10^{-}9$	-
200	$3.08 \cdot 10^{-}9$	3.0950	$1.59 \cdot 10^{-}10$	4.0609
300	$9.03 \cdot 10^{-}10$	3.0260	$2.00 \cdot 10^{-}11$	4.1117
400	$3.80 \cdot 10^{-}10$	3.0094	$4.53 \cdot 10^{-}12$	4.1655
500	$1.94 \cdot 10^{-}10$	3.0034	$1.41 \cdot 10^{-}12$	4.2171

(3.42)

$Adams\ Multon$				
	$k=1$		$k=2$	
N	ϵ	p	ϵ	p
1000	$3.07 \cdot 10^{-}5$	-	$3.77 \cdot 10^{-}7$	-
2000	$1.58 \cdot 10^{-}5$	0.9596	$9.45 \cdot 10^{-}8$	1.9971
3000	$1.06 \cdot 10^{-}5$	0.9765	$4.20 \cdot 10^{-}8$	1.9990
4000	$8.01 \cdot 10^{-}6$	0.9833	$2.36 \cdot 10^{-}8$	1.9995
5000	$6.43 \cdot 10^{-}6$	0.9870	$1.51 \cdot 10^{-}8$	1.9997

(3.43)

Adams Multon				
	$k=3$		$k=4$	
N	ϵ	p	ϵ	p
100	$1.94 \cdot 10^{-8}$	-	$1.26 \cdot 10^{-9}$	-
200	$2.39 \cdot 10^{-9}$	3.0197	$7.68 \cdot 10^{-11}$	4.0383
300	$7.06 \cdot 10^{-10}$	3.0111	$1.50 \cdot 10^{-11}$	4.0217
400	$2.97 \cdot 10^{-10}$	3.0077	$4.74 \cdot 10^{-12}$	4.0153
500	$1.52 \cdot 10^{-10}$	3.0060	$1.93 \cdot 10^{-12}$	4.0118

(3.44)

BDF				
	$k=1$		$k=2$	
N	ϵ	p	ϵ	p
100	$2.71 \cdot 10^{-5}$	-	$1.59 \cdot 10^{-6}$	-
200	$1.24 \cdot 10^{-5}$	1.1281	$3.89 \cdot 10^{-7}$	2.0353
300	$8.04 \cdot 10^{-6}$	1.0741	$1.71 \cdot 10^{-7}$	2.0221
400	$5.93 \cdot 10^{-6}$	1.0524	$9.59 \cdot 10^{-8}$	2.0161
500	$4.70 \cdot 10^{-6}$	1.0407	$6.12 \cdot 10^{-8}$	2.0127

(3.45)

BDF				
	$k=3$		$k=4$	
N	ϵ	p	ϵ	p
100	$1.24 \cdot 10^{-7}$	-	$1.03 \cdot 10^{-8}$	-
200	$1.48 \cdot 10^{-8}$	3.0700	$6.05 \cdot 10^{-10}$	4.0950
300	$4.33 \cdot 10^{-9}$	3.0394	$1.17 \cdot 10^{-10}$	4.0538
400	$1.81 \cdot 10^{-9}$	3.0277	$3.66 \cdot 10^{-11}$	4.0378
500	$9.25 \cdot 10^{-10}$	3.0213	$1.49 \cdot 10^{-11}$	4.0292

(3.46)

$Predictor - Corrector \;\; AB - AM$				
	$k = 1$		$k = 2$	
N	ϵ	p	ϵ	p
100	$3.47 \cdot 10^{-5}$	-	$4.97 \cdot 10^{-7}$	-
200	$1.38 \cdot 10^{-5}$	1.3245	$1.08 \cdot 10^{-7}$	2.1912
300	$8.63 \cdot 10^{-6}$	1.1720	$4.62 \cdot 10^{-8}$	2.1133
400	$6.26 \cdot 10^{-6}$	1.1180	$2.53 \cdot 10^{-8}$	2.0810
500	$4.90 \cdot 10^{-6}$	1.0900	$1.60 \cdot 10^{-8}$	2.0632

(3.47)

$Predictor - Corrector \;\; AB - AM$				
	$k = 3$		$k = 4$	
N	ϵ	p	ϵ	p
100	$2.81 \cdot 10^{-8}$	-	$1.99 \cdot 10^{-9}$	-
200	$2.90 \cdot 10^{-9}$	3.2755	$9.79 \cdot 10^{-11}$	4.3477
300	$8.05 \cdot 10^{-10}$	3.1652	$1.77 \cdot 10^{-11}$	4.2121
400	$3.28 \cdot 10^{-10}$	3.1189	$5.37 \cdot 10^{-12}$	4.1538
500	$1.64 \cdot 10^{-10}$	3.0930	$2.14 \cdot 10^{-12}$	4.1209

(3.48)

$Predictor - Corrector \;\; AB - BDF$				
	$k = 1$		$k = 2$	
N	ϵ	p	ϵ	p
100	$3.47 \cdot 10^{-5}$	-	$2.00 \cdot 10^{-6}$	-
200	$1.38 \cdot 10^{-5}$	1.3245	$4.36 \cdot 10^{-7}$	2.2026
300	$8.63 \cdot 10^{-6}$	1.1720	$1.84 \cdot 10^{-7}$	2.1165
400	$6.26 \cdot 10^{-6}$	1.1180	$1.01 \cdot 10^{-7}$	2.0822
500	$4.90 \cdot 10^{-6}$	1.0900	$6.40 \cdot 10^{-8}$	2.0637

(3.49)

$Predictor - Corrector\ \ AB - BDF$				
	$k = 3$		$k = 4$	
N	ϵ	p	ϵ	p
100	$1.61 \cdot 10^{-7}$	-	$1.36 \cdot 10^{-8}$	-
200	$1.68 \cdot 10^{-8}$	3.2563	$6.95 \cdot 10^{-10}$	4.2964
300	$4.71 \cdot 10^{-9}$	3.1438	$1.28 \cdot 10^{-10}$	4.1674
400	$1.93 \cdot 10^{-9}$	3.1008	$3.92 \cdot 10^{-11}$	4.1177
500	$9.73 \cdot 10^{-10}$	3.0778	$1.57 \cdot 10^{-11}$	4.0909

(3.50)

3.2 Algorithms

Αλγόριθμος απόλυτης ευστάθειας για όλες τις μεθόδους και τα ζεύγη τους. Δεδομένο το N ο αριθμός των βημάτων, δημιουργώ πίνακα μιγαδικών αριθμών h. Ορίζω το πολυώνυμο απόλυτης ευστάθειας $f(r,h)$, βρίσκω τις απόλυτες τιμές των ριζών του πολυωνύμου και ελέγχω εάν είναι μικρότερη του 1, σύμφωνα με το κρητίριο των ριζών. Αν είναι αποθηκέυω την τιμή 1 αλλίως την 0. Τέλος εκτυπώνω τις τιμές σε διάγραμμα.

```
given N
for i = 1 : N
   for j = 1 : N
       h = complex(x(j),y(i))
       roots ( f(r,h) )
       K = abs(roots)
          if max(K) < 1
               z(i,j) = 1
          else
               z(i,j) = 0
          end
   end
end
contour(z)
```

Αλγόριθμος απόλυτης ευστάθειας για την μέθοδο AB1. Δεδομένα τα f, a, b, ya, N συνάρτηση, αρχή και τέλος διαστήματος, αρχική συνθήκη Π.Α.Τ., αριθμός των βημάτων αντίστοιχα. Υπολογίζω την μέθοδο για N βήματα.

```
given f,a,b,ya,N
h = (b - a) / N
y(1) = ya
t(1) = a

for i = 1 : N
    y(i+1) = h * f(t(i),y(i)) + y(i)
    t(i+1) = t(i) + h;
end
```

Βιβλιογραφία

[1] J.D.Lampert, *Numerical Methods for Ordinary Differential Systems*, JHON WILEY and SONS, New York, ,1994.

[2] Γεώργιος Δ. Ακρίβης - Βασίλειος Α. Δουγαλής, *Αριθμητικές μέθοδοι για συνήθεις διαφορικές εξισώσεις*, ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΕΣ ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΡΗΤΗΣ, Ηράκλειο, 2013.