ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΥ Κ. ΧΑΡΙΤΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ

1. ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ ΜΕ ΙΣΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΚΙΟΓΡΑΜΜΕΣ
2. ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ ΜΕ ΙΣΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΓΕΩΔΑΙΣΙΑΚΕΣ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΗΡΑΚΛΕΙΟ 1989

ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΥ Κ. ΧΑΡΙΤΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ

1. ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ ΜΕ ΙΣΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΚΙΟΓΡΑΜΜΕΣ
2. ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ ΜΕ ΙΣΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΓΕΩΔΑΙΣΙΑΚΕΣ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΗΡΑΚΛΕΙΟ 1989

Στους

Γονείς μου

ΕΙΣΗΓΗΤΗΣ

ΕΠΙΚΟΥΡΟΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΠΑΡΙΣ ΠΑΜΦΙΛΟΣ

Θάθελα να ευχαριστήσω εδώ τον εισηγητή αυτής της εργασίας καθηγητή κ. Π. Πάμφιλο. Ο κ. Πάμφιλος μου επρότεινε τα θέματα αυτής της εργασίας και με τις ιδέες του με κατηύθυνε με υπομονή στην επιλυσή τους. Η βοηθειά του ήταν πέρα για πέρα ουσιαστική· είτε με τις διορθώσεις του είτε με τις συμβουλές του είτε με την διακριτική του επέμβαση σε θέματα μαθηματικά και μή με βοηθούσε να ισορροπώ και να φτάσω στο τέλος αυτης της εργασίας.

Θάθελα επίσης να ευχαριστήσω τον καθηγητή κ. Ν. Πετρίδη καθώς και την καθηγήτρια κα. Γ. Τριανταφύλλου διότι δέχτηκαν με τον κ. Πάμφιλο να αποτελέσουν την τριμελή συμβουλευτική επιτροπή. Ιδιαίτερα ο κ. Πετρίδης μου επέστησε την προσοχή σ'ενα λάθος στην απόδειξη του θεωρήματος Β βοηθώντας έτσι να γίνει η απόδειξη πιο συμπαγής και κομψή.

Ξεχωριστά ευχαριστώ τον καθηγητή κ. Σ. Πνευματικό καθώς και τον καθηγητή κ. Ν. Τζανάκη διότι δέχτηκαν πρόθυμα να συμμετάσχουν στην πενταμελή επιτροπή.

Θάθελα ακόμη να ευχαριστήσω τον καθηγητή κ. Δ. Κουτουρφιώτη διότι διάβασε και αφιέρωσε χρόνο σ'αυτήν την εργασία. Παρότι για λόγους τυπικούς δεν συμμετέχει στην πενταμελή επιτροπή, οι παρατηρήσεις του, οι διορθώσεις του και εν γένει το ενδιαφέρον του ήταν καθοριστικά για την βελτίωση της εργασίας αυτής. Παρομοίως θάθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή κ. Θ. Χασάνη του οποίου οι παρατηρήσεις και διορθώσεις ήταν εξ'ίσου σημαντικές.

Θάθελα επίσης να ευχαριστήσω τον καθηγητή κ. Β. Νεστορίδη διότι δείχνοντας μου εμπιστοσύνη καποια καθοριστική στιγμή με παρακίνησε να συνεχίσω τις μεταπτυχιακές μου σπουδές στο Πανεπιστήμιο Κρήτης.

Τέλος θάθελα να ευχαριστήσω όλους τους συναδέλφους μεταπτυχιακούς φοιτητές του Μαθηματικού Τμήματος. Η φιλία τους κατα την διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών ήταν για μένα πολύτιμη.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Έστω Μ μία συμπαγής επιφάνεια. Θεωρούμε επί της Μ μία οικογένεια καμπυλών οι οποίες χαρακτηρίζονται από κάποια κοινή ιδιότητα και θα αποδείξουμε ότι η Μ είναι μία σφαίρα.

Συγκεκριμένα τα κύρια αποτελέσματα αυτής της εργασίας είναι τα εξής:

Α. Έστω Μ μία συμπαγής επιφάνεια εμβαπτισμένη είτε στον 3–διάστατο ευκλείδειο χωρο $\mathbb{E}^3$ είτε στον 3–διάστατο υπερβολικό χώρο $\mathbb{H}^3$. Υποθέτουμε ότι η Μ είναι γνήσια κυρτή μέσα στον $\mathbb{E}^3$ ή $\mathbb{H}^3$ αντίστοιχα και ότι για κάθε δύο σκιογραμμές της Μ υπάρχει μία ισομετρία του περιβάλλοντος χώρου η οποία τοποθετεί την μία σκιογραμμή επί της άλλης. Τότε η Μ είναι μία σφαίρα.

Β. Εάν η Μ είναι μία συμπαγής επιφάνεια μέσα στον ευκλείδειο χώρο $\mathbb{E}^3$ και κάθε δύο γεωδαισιακές της Μ είναι τοποθετήσιμες η μία επί της άλλης με μία στερεά κίνηση, τότε η Μ είναι μία σφαίρα.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Θεωρούμε μία συμπαγή επιφάνεια M, χωρίς σύνορο ($\partial M=\emptyset$) εμβαπτισμένη είτε στον ευκλείδειο χώρο $\mathbb{E}^3$ είτε στον υπερβολικό χώρο $\mathbb{H}^3$. Συμβολίζουμε με A τον τελεστή σχήματος της M που επάγεται είτε από την ευκλείδεια συνοχή $\overline{D}$ του $\mathbb{E}^3$ είτε από την υπερβολική συνοχή $\overline{\nabla}$ του $\mathbb{H}^3$ αντίστοιχα. Η M λέγεται εξ΄ ορισμού γνήσια κυρτή αν $<Av_p,v_p> \neq 0$ για κάθε εφαπτόμενο διάνυσμα v_p της M, όπου με $<,>$ συμβολίζουμε το ευκλείδειο ή το υπερβολικό εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{E}^3$ ή $\mathbb{H}^3$ αντίστοιχα.

Θεωρούμε τώρα κάποιο μοναδιαίο κάθετο δ.π. n επί της M και θα ορίσουμε τις σκιογραμμές επί της M:

i) Υποθέτουμε καταρχάς ότι η M είναι μέσα στον ευκλείδειο χώρο $\mathbb{E}^3$. Τότε για κάθε διάνυσμα e της σφαίρας S^2 το σύνολο $\Sigma e = \{p\in M: <n_p, e>=0\}$ καλείται σκιογραμμή της M η οποία αντιστοιχεί στην διεύθυνση φωτισμού $e\in S^2$ και αποδεικνύεται ότι η Σe είναι μία απλή κλειστή και ομαλή καμπύλη επί της M.

ii) Υποθέτουμε στην συνέχεια ότι η M είναι μέσα στον υπερβολικό χώρο $\mathbb{H}^3$. Συμβολίζουμε με $\partial\mathbb{H}^3$ το σύνορο του $\mathbb{H}^3$ και έστω $e\in\partial\mathbb{H}^3$. Θεωρούμε όλες τις γεωδαισιακές του $\mathbb{H}^3$ που ξεκινάνε από το $e\in\partial\mathbb{H}^3$ και συμβολίζουμε με E το μοναδιαίο εφαπτόμενο δ.π. κατά μήκος αυτών. Το σύνολο $\Sigma e = \{p\in M: <n_p, E_p>=0\}$ καλείται σκιογραμμή της M η οποία αντιστοιχεί στο $e\in\partial\mathbb{H}^3$. Αποδεικνύεται ξανά ότι η Σe είναι μία απλή κλειστή και ομαλή καμπύλη επί της M.

Το πρώτο λοιπόν θεώρημα το οποίον θα αποδείξουμε σ΄ αυτή την εργασία διατυπώνεται ακριβώς ως εξής:

Θεώρημα A. Υποθέτουμε ότι η M είναι μία συμπαγής και γνήσια κυρτή επιφάνεια μέσα στον $\mathbb{E}^3$ ή $\mathbb{H}^3$ αντίστοιχα και ότι για κάθε δύο σκιογραμμές της M υπάρχει μία ισομετρία του περιβάλλοντος χώρου η οποία τοποθετεί την μία σκιογραμμή επί της άλλης. Τότε η M είναι μία σφαίρα.

Στο ίδιο επίσης πνεύμα θα αποδείξουμε ακόμη το εξής θεώρημα:

Θεώρημα Β. Υποθετουμε ότι η Μ είναι μία συμπαγής επιφάνεια μέσα στον ευκλείδειο χώρο $\mathbb{E}^3$ και ότι κάθε δύο γεωδαισιακές της Μ είναι τοποθετήσιμες η μία επί της άλλης με μία στερεά κίνηση. Τότε η Μ είναι μία σφαίρα.

Το είδος των προβλημάτων τα οποία πραγματευόμαστε σ' αυτή την διατριβή ετέθησαν τις πρώτες δεκαετίες του αιώνα μας, κυρίως από Γερμανούς μαθηματικούς (Minkowski, Blaschke, Süss) και αποτέλεσαν αντικείμενο ζωηρού ενδιαφέροντος στην Γερμανία και Ιαπωνία. Την εποχή εκείνη άρχιζε η ραγδαία εξέλιξη της λεγόμενης ολικής γεωμετρίας και τα προβλήματα ήταν από τα πρώτα παραδείγματα ερωτημάτων που έθεσε ο νέος κλάδος με έντονο καθαρά γεωμετρικό χαρακτήρα. Η μέθοδος λύσης που εφαρμόζεται εδώ, είναι μία αναγωγή στο τοπολογικό θεώρημα του Poincaré και Hopf που αφορά την κατασκευή ενός συνεχούς εφαπτόμενου δ.π. επί της επιφάνειας Μ. Σημειώνουμε ότι η παραπάνω κατασκευή του δ.π. επί της Μ είναι ουσιαστικά διαφορετική ανάμεσα στην ευκλείδεια περίπτωση και την υπερβολική περίπτωση του θεωρήματος Α και τούτο διότι η έννοια της σκιογραμμής εξαρτάται άμεσα από την γεωμετρία του περιβάλλοντος την Μ χώρου. Επίσης ουσιαστικά διαφορετική είναι η απόδειξη του θεωρήματος Β. Εδώ, επειδή η έννοια της γεωδαισιακής της επιφάνειας Μ εξαρτάται μόνο από την εσωτερική γεωμετρία της Μ θα μπορούσαμε να επαναλάβουμε την απόδειξη του θεωρήματος Β και όταν η Μ είναι εμφαπτισμένη στους χώρους σταθερής καμπυλότητος $\mathbb{H}^3$ και S^3 όπου S^3 η 3–διάστατη σφαίρα.

Από δω και περα η εργασία αποτελείται από 2 κεφάλαια. Το πρώτο κεφάλαιο, όπου αποδεικνύεται το θεώρημα Α, αποτελείται από 2 μέρη και σε κάθε μέρος μελετάται αντίστοιχα η ευκλείδεια και η υπερβολική περίπτωση. Στο δεύτερο κεφάλαιο αποδεικνύεται το θεώρημα Β.

Επειδή κάθε κεφάλαιο έχει δική του εισαγωγή δεν θα επεκταθούμε σε περισσότερες λεπτομέρειες εδώ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 1ον

ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ ΜΕ ΙΣΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΚΙΟΓΡΑΜΜΕΣ

Εισαγωγή

Σκοπός μας είναι να αποδείξουμε εδώ το θεώρημα Α το οποίον διατυπώνεται ισοδύναμα ως εξής:

ΘΕΩΡΗΜΑ Α. Έστω Μ μία C^{∞}- διαφορίσιμη, συμπαγής και γνήσια κυρτή επιφάνεια, εμβαπτισμένη είτε στον ευκλείδειο χώρο $\mathbb{E}^3$, είτε στον υπερβολικό χώρο $\mathbb{H}^3$. Υποθέτουμε ότι κάθε σκιογραμμή της Μ είναι ισομετρική, μέσω μιας ισομετρίας του περιβάλλοντος χώρου, προς μία σταθερή καμπύλη Σ_o. Τότε η Σ_o είναι ένας κύκλος και η Μ μία σφαίρα.

Η ιδέα για την απόδειξη του θεωρήματος ξεκινάει από την παρατήρηση ότι σε κάθε σημείο e της σφαίρας S^2 αντιστοιχεί μία διαφορετική σκιογραμμή Σe επί της Μ. Έτσι κατασκευάζουμε μία απεικόνιση Ζ, η οποία απεικονίζει το σημείο e της S^2 σ' ένα εφαπτόμενο διάνυσμα Ze της Σe, σ' ένα συγκεκριμένο ειδικό σημείο αυτής. Τέτοια σημεία υπαρχουν αν η Σ_o≡Σe δεν είναι κύκλος. Υπάρχουν ορισμένες δυσκολίες που συνδέονται με την συνεχή εκλογή του Ze και τις οποίες ξεπερνάμε αποδεικνύοντας ότι οι διάφορες τιμές της απεικόνισης Ζ συνθέτουν ένα χώρο κάλυψης της S^2. Στην συνέχεια κατασκευάζουμε από την απεικόνιση Ζ ένα δ.π. ξ επί της σφαίρας S^2, το οποίον είναι παντού διάφορον του μηδενός. Όμως τέτοια δ.π. δεν υπαρχουν επί της S^2. Επομένως η Σ_o είναι ένας κύκλος και εύκολα συναγάγουμε ότι η Μ είναι μία σφαίρα.

Πλην όμως, υπαρχουν σημαντικές διαφορές στην απόδειξη του θεωρήματος μεταξύ της ευκλείδειας και της υπερβολικής περίπτωσης ακριβώς επειδή οι σκιογραμμές της Μ εξαρτώνται από την γεωμετρία του περιβάλλοντος χώρου. Το τεχνικό μέρος της απόδειξης στην ευκλείδεια περίπτωση βασίζεται στην κατασκευή ενός συστήματος συντεταγμένων επί της M, παρόμοιου προς το γεωγραφικό σύστημα συντεταγμένων επί της σφαίρας S^2 Αντίθετα ένα ανάλογο σύστημα συντεταγμένων δεν μπορούμε να κατασκευάσουμε στην υπερβολική περίπτωση. Κατά συνέπεια δίνουμε στην συνέχεια την απόδειξη του θεωρήματος ξεχωριστά, κατ΄ αρχάς στην ευκλείδεια και κατόπιν στην υπερβολική περίπτωση.

ΜΕΡΟΣ Ι

Η ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ

1. Σκιογραμμές επί της επιφάνειας M

Θα δώσουμε σ' αυτή την παράγραφο τους βασικούς ορισμούς και ιδιότητες που αφορούν τις γνήσια κυρτές επιφάνειες στον ευκλείδειο χώρο $\mathbb{E}^3$, καθώς και τις σκιογραμμές πάνω σ' αυτές.

Συμβολίζουμε με < , > την συνήθη μετρική και με $\bar{D}$ την συνήθη συνοχή στον ευκλείδειο χώρο $\mathbb{E}^3$. Αν n είναι το μοναδιαίο, εσωτερικό, κάθετο δ.π. επί M, τότε συμβολίζουμε με A τον τελεστή σχήματος της M ως προς το n. Ακριβέστερα ορίζουμε

$$Av_p = -\bar{D}_{v_p}n,\ v_p \in T_pM$$

Συμβολίζουμε επίσης με D την επαγόμενη συνοχή πάνω στην M, η οποία ορίζεται από την εξίσωση του Gauss, ανασυνθέτοντας το διάνυσμα $(\bar{D}_XY)_p$ στην εφαπτόμενη συνιστώσα του και στην κάθετη συνιστώσα του πάνω στην M.

Συγκεκριμένα έχουμε:

$$(\bar{D}_XY)_p = T(\bar{D}_XY)_p + \perp(\bar{D}_XY)_p = = (D_XY)_p + \langle AX_p, Y_p \rangle n_p)$$

όπου X, Y δ.π. εφαπτόμενα της M.

Η επιφάνεια M λέγεται εξ' ορισμού γνήσια κυρτή, αν $\langle Av_p, v_p \rangle \neq 0$ για κάθε $v_p \in T_pM$, $p \in M$. Στην προκειμένη περίπτωση επειδή ο τελεστής σχήματος A έχει ορισθεί ως προς το εσωτερικό, κάθετο διάνυσμα n της M, θά-ναι:

$$\langle Av_p, v_p \rangle > 0 \text{ για κάθε } v_p \in T_pM,\ p \in M$$

Επειδή τώρα η M είναι γνήσια κυρτή επιφάνεια στον $\mathbb{E}^3$, το θεώρημα του Hadamard ([S_{III}]) μας εξασφαλίζει ότι:

i) Η M είναι κυρτή, το οποίον σημαίνει ότι κάθε εφαπτόμενο επίπεδο T_pM αφήνει την M προς την μία πλευρά του.

ii) Η απεικόνιση $M \to S^2$: $p \to n_p$ είναι μία αμφιδιαφόριση.

Έστω τώρα C μία ομαλή, επίπεδη καμπύλη η οποία είναι απλή και κλειστή. Υπενθυμίζουμε ότι η C λέγεται κυρτή, εάν βρίσκεται εξ΄ ολοκλήρου στην μία πλευρά του κλειστού ημιεπιπέδου που ορίζεται από κάθε εφαπτόμενη ευθεία της.

Στην συνέχεια όταν θα αναφερόμαστε σε κυρτές καμπύλες θα υποθέτουμε ότι είναι επίσης απλές και κλειστές.

Για κυρτές καμπύλες έχουμε το εξής θεώρημα ([S_{II} σ.-27]): Η καμπύλη C είναι κυρτή εάν και μόνον εάν η καμπυλότητα k της C ικανοποιεί παντού $k \geq 0$ ή $k \leq 0$, ανάλογα με το αν τα κάθετα διανύσματα στην C κατευθύνονται προς το εσωτερικό ή το εξωτερικό της C αντίστοιχα. Εξ΄ άλλου μία βασική ιδιότητα των κυρτών καμπυλών ([S_{II} σ.-29]), την οποία θα χρησιμοποιήσουμε παρακάτω είναι η εξής: Αν e είναι ένα διάνυσμα στο επίπεδο μιας κυρτής καμπύλης C, τότε υπάρχουν ακριβώς 2 σημεία p_1, p_2 στην C, ώστε τα εφαπτόμενα διανύσματα T_1, T_2 της C σ΄ αυτά τα σημεία να ικανοποιούν $T_1 \| T_2 \| e$.

Τέλος έστω C μία ομαλή, επίπεδη καμπύλη, η οποία είναι επίσης κλειστή και απλή. Η C λέγεται εξ΄ ορισμού γνήσια κυρτή, αν η καμπυλότητα k της C δεν μηδενίζεται σε κανένα σημείο της καμπύλης. Προφανώς, από το παραπάνω θεώρημα, κάθε γνήσια κυρτή καμπύλη είναι κυρτή.

Εάν θεωρήσουμε τώρα την τομή $C = M \cap \Pi \neq \emptyset$ της επιφάνειας M με ένα μη εφαπτόμενο επίπεδο Π αυτής, τότε η C είναι μία γνήσια κυρτή καμπύλη. Πράγματι, είναι άμεσο από την κυρτότητα της M, ότι το Π τέμνει εγκάρσια την M. Εάν λοιπόν T είναι το μοναδιαίο, εφαπτόμενο δ.π. κατά μήκος της C, τότε έχουμε:

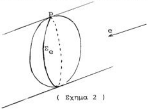
$$<\overline{D}_T T,\, n> \,=\, <AT,\, T> \,>0 \;\Rightarrow\; \overline{D}_T T \neq 0 \text{ κατά μήκος της } C$$

που αποδεικνύει τον ισχυρισμό μας.

Θα ορίσουμε στην συνέχεια τις σκιογραμμές πάνω στην επιφάνεια M:

Κάθε διάνυσμα e της σφαίρας S^2 ορίζει μία διεύθυνση φωτισμού μέσα στον $\mathbb{E}^3$, στην οποία αντιστοιχεί μία σκιογραμμή Σe επί της M. Συγκεκριμένα έχουμε τον εξής ορισμό:

Ορισμός. Το σύνολο $\Sigma e = \{p \in M: \langle n_p, e\rangle = 0\}$ καλείται σκιογραμμή της M η οποία αντιστοιχεί στην διεύθυνση φωτισμού e της S^2.



(Σχημα 2)

Σκοπός μας είναι να αποδείξουμε ότι το σύνολο Σe αποτελεί μια απλή, κλειστή και ομαλή καμπύλη επί της M.

Λήμμα 1. Η Σe αποτελεί μία συμπαγή υπολ/τα διάστασης 1 της M.

Απόδειξη.

Θεωρούμε την συνάρτηση $h: M \to \mathbb{R}$ με $h(p) = \langle n_p, e\rangle$.

Αν v_p ανήκει στον εφαπτομενο χώρο T_pM της M, τότε έχουμε

$$h_{*p}(v_p) = v_p(h) = v_p(\langle n, e\rangle) = \langle \overline{D}_{v_p} n, e\rangle = -\langle Av_p, e\rangle$$

Τώρα επειδή η M είναι γνήσια κυρτη, θάναι:

$$h_{*p}(e) = -\langle Ae, e\rangle \neq 0,$$

άρα η h έχει παντού τάξη 1 πάνω στην M. Από το θεώρημα των πεπλεγμένων συναρτήσεων παίρνουμε λοιπόν ότι το σύνολο $h^{-1}(0)$ αποτελεί μία υπολ/τα διάστασης 1 της M. Προφανώς δε η $\Sigma e = h^{-1}(0)$ είναι συμπαγής ο.ε.δ.

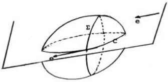
Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε στη συνέχεια ότι η Σε αποτελείται από μία μόνο συνιστώσα.

Αν Σ είναι μία συνιστώσα της Σε και Τ το εφαπτόμενο δ.π. κατά μήκος της Σ έχουμε ότι:

$$<n_p, e> = 0 \;\forall\; p\in\Sigma \Rightarrow$$
$$\Rightarrow T\,(<n, e>) = 0 \Rightarrow <AT, e> = 0$$

Με άλλα λόγια τα διανύσματα Τ, e είναι συζυγή κατά μήκος της Σ.
Έχουμε λοιπόν:

Λήμμα 2: Έστω Π ένα επίπεδο παράλληλο στο διάνυσμα e, το οποίον τέμνει εγκάρσια την Μ. Αν η καμπύλη C=M∩Π τέμνει την συνιστώσα Σ, τότε την τέμνει εγκάρσια σε δύο ακριβώς σημεία.



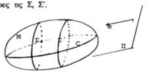
(Σχημα 3)

Απόδειξη.

Έστω p∈ Σ∩C και έστω Τ το εφαπτόμενο διάνυσμα της Σ στο σημείο p. Τότε το εφαπτόμενο διάνυσμα στην C στο σημείο p είναι συγγραμικό με το e. Αν τώρα T || e, από τη σχέση <AT,e> = 0 έπεται ότι <Ae,e> = 0, το οποίον αντιφάσκει στην γνήσια κυρτότητα της Μ. Άρα τα διανύσματα Τ, e δεν είναι συγγραμμικά, δηλαδή οι καμπύλες C, Σ τέμνονται εγκάρσια.

Είναι τώρα προφανές, από το θεώρημα του Jordan, ότι η C τέμνει την Σ και σ' ενα δεύτερο σημείο q. Επειδή τέλος η καμπύλη C είναι γνήσια κυρτή δεν μπορεί να τέμνει την Σ σε περισσότερα από 2 σημεία, διότι τότε θα υπάρχουν περισσότερα από 2 σημεία επί της C, στα οποία τα εφαπτόμενα διανύσματα της C θάναι παράλληλα στο e.

Έστω τώρα ότι υπάρχουν δύο συνιστώσες Σ, Σ΄ της σκιογραμμής Σe: Θεωρούμε ένα τυχόν σημείο p∈Σ και μία ευθεία ε που διέρχεται από το p, παράλληλη στο διάνυσμα e. Θεωρούμε επίσης ένα επίπεδο Π που περιέχει την ευθεία ε και αρχίζουμε να το στρέφουμε γύρω από αυτή. Προφανώς σε κάποια θέση το Π τέμνει εγκάρσια την Μ και η καμπύλη C=Μ∩Π τέμνει αμφότερες τις Σ, Σ΄.



(Σχημα 3΄)

Όμως τότε η C θάχει 4 διαφορετικά σημεία (τα σημεία τομής με τις Σ, Σ΄) στα οποία τα εφαπτόμενα διανύσματά της θάναι παράλληλα στο διάνυσμα e, το οποίον είναι αδύνατον. Άρα η Σe είναι συνεκτική. ο.ε.δ.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω παίρνουμε την εξής πρόταση:

<u>Πρόταση</u>

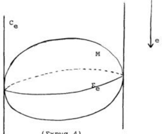
i) Κάθε σκιογραμμή Σe της Μ είναι μία ομαλή, απλή και κλειστή καμπύλη.

ii) Αν Τ είναι το εφαπτόμενο δ.π. κατά μήκος της Σe έχουμε ότι <AT, e>=0. ο.ε.δ.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η σκιογραμμή Σe είναι η καμπύλη της Μ, κατά μήκος της οποίας εφάπτονται η επιφάνεια Μ και περιβάλλων κύλινδρος Ce με γενέτειρες παράλληλες προς την διεύθυνση e.

Διαισθητικά βλέπουμε την Σe σαν την γραμμή που διαχωρίζει το φωτι–

σμένο από το σκιασμένο τμήμα της M, αν την φωτίσουμε κατά την διεύθυνση e της S^2.



(Σχημα 4)

Αναφέρουμε επίσης την εξής ιδιότητα των σκιογραμμών:
Αν e_1, e_2 είναι δύο διαφορετικά διανύσματα της S^2, τότε οι σκιογραμμές Σe_1, Σe_2 της M που αντιστοιχούν σ' αυτά τέμνονται εγκάρσια και $\Sigma e_1 \cap \Sigma e_2 = \{p, q\}$. Πράγματι αν $e = e_1 \wedge e_2$ το εξωτερικό γινόμενο των e_1, e_2, τότε λόγω της γνήσιας κυρτότητος της M (Θεώρημα Hadamard), υπάρχουν ακριβώς 2 σημεία p, q στην M, ε.ω.

$$n_p \parallel n_q \parallel e$$

Είναι λοιπόν άμεσο ότι τα σημείο p, q και μόνον αυτά ανήκουν στη τομή $\Sigma e_1 \cap \Sigma e_2$.

Σημειώνουμε τέλος ότι, από εδώ και στο εξής, η σκιογραμμή Σe θα θεωρείται προσανατολισμένη έτσι ώστε:

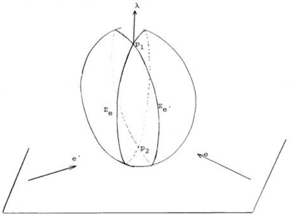
$$\langle T, Je \rangle > 0$$

όπου εν γένει αν $v_p \in T_pM$, με Jv_p συμβολίζουμε το διάνυσμα που παίρνουμε αν στρέψουμε το v_p στον T_pM έτσι ώστε $|v_p, Jv_p, n_p| = 1$

2. λ–πολικό σύστημα συντεταμένων

Θα κατασκευάσουμε εδώ ένα σύστημα συντεταγμένων πάνω στην επι- φάνεια M, παρόμοιο προς το γεωγραφικό σύστημα συντεταγμένων της σφαίρας S^2, και του οποίου οι μεσημβρινοί θάναι σκιογραμμές.

Η ορθογωνιότητα των γεωγραφικών συντεταγμένων της σφαίρας S^2 αντικαθίσταται εδώ με την συζυγία των διευθύνσεων των συντεταγμένων. Η ιδέα για την κατασκευή ενός τέτοιου συστήματος συντεταγμένων είναι να φωτίσουμε την M από όλες τις διευθύνσεις τις ορθογώνιες προς ένα σταθερό διάνυσμα λ της S^2. Παίρνουμε έτσι μία οικογένεια σκιογραμμών, οι οποίες καλύπτουν την M και διέρχονται όλες από δύο σημεία p_1, p_2 τα οποία ονομάζονται πόλοι του συστήματος.



(Σχημα 5)

Ακριβέστερα, θεωρούμε ένα διάνυσμα λ της S^2 και ορίζουμε τα εξής δ.π. επί της M:

$$\hat{X} = n\wedge\lambda \quad X = \frac{\hat{X}}{|\hat{X}|}, \quad Y = \frac{JAX}{|AX|}$$

Τα δ.π. X, Y ορίζονται για κάθε σημείο $p \in M-\{p_1, p_2\}$, με p_1, p_2 τα σημεία όπου $n_{p_1} \parallel n_{p_2} \parallel \lambda$.
Τα σημεία p_1, p_2 είναι καλά ορισμένα από το θεώρημα του Hadamard
Παρατηρούμε τέλος ότι

$$X = -JAY/|AY|$$

Πράγματι, κατ΄ αρχάς έχουμε ότι $\langle X, AY\rangle = 0$. Άρα $X = \pm JAY/|AY|$.
Στην συνέχεια για Y_p κύριο διάνυσμα του T_pM επαληθεύουμε ότι $X_p = -JAY_p/|AY_p|$, και τέλος λόγω συνέχειας συναγόγουμε $X = -JAY/|AY|$.
Αποδεικνύουμε τώρα την εξής πρόταση:

__Πρόταση.__ Το δ.π. X είναι παράλληλο στον $\mathbb{E}^3$ κατά την διεύθυνση του Y.

__Απόδειξη.__
Επειδή $\langle AX, Y\rangle = 0 \Rightarrow AY = \mu\cdot n + \nu\cdot\lambda$
όπου μ, ν είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις ορισμένες στην $M-\{p_1, p_2\}$
Τώρα παραγωγίζοντας στον $\mathbb{E}^3$ το δ.π. X κατά μήκος του Y παίρνουμε:

$$\overline{D}_Y\hat{X} = \overline{D}_Y(n\wedge\lambda) = \overline{D}_Y n\wedge\lambda = -AY\wedge\lambda = -\mu n\wedge\lambda = -\mu\hat{X}$$

Άρα

$$\overline{D}_Y X = \overline{D}_Y(\hat{X}/|\hat{X}|) = Y(1/|\hat{X}|)\cdot\hat{X} + (1/|\hat{X}|)\cdot\overline{D}_Y\hat{X} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad D_Y X = (Y(1/|\hat{X}|)\cdot|\hat{X}| - \mu)\cdot X \tag{1}$$

Όμως επειδή $|X| = 1$, έπεται ότι

$$\langle \overline{D}_Y X, X\rangle = 0 \tag{2}$$

Από (1) , (2) $\Rightarrow$ $\overline{D}_Y X = 0$.
Συνάγουμε λοιπόν αμέσως ότι οι ολοκληρωτικές καμπύλες του Y είναι σκιογραμμές. Επίσης οι ολοκληρωτικες καμπύλες του X είναι επίπεδες, κλειστές, γνήσια κυρτές καμπύλες, των οποίων τα επίπεδα είναι κάθετα στο

διάνυσμα λ της S^2.

Τώρα γύρω από κάθε $p \in M - \{p_1, p_2\}$ υπάρχει ένα σύστημα συντεταγμένων $\Phi_\lambda(u, v)$ με $\Phi_\lambda(0, 0) = p$ και έτσι ώστε

$$X = \varphi \cdot \frac{\partial}{\partial u} \qquad , \qquad Y = \theta \cdot \frac{\partial}{\partial v}$$

όπου φ, θ είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις παντού διάφορες του μηδενός και ορισμένες σε μία ανοικτή περιοχή του p.

Ένα τέτοιο σύστημα συντεταγμένων το ονομάζουμε λ-πολικό σύστημα συντεταγμένων γύρω από το σημείο $p \in M - \{p_1, p_2\}$.

3. Η καμπυλότητα μιας σκιογραμμής ως καμπύλης του χώρου $\mathbb{E}^3$

Έστω v_p μοναδιαίο διάνυσμα του T_pM. Υπάρχει μία μοναδική σκιογραμμή Σe της M η οποία διέρχεται από το p και έχει το v_p εφαπτόμενο διάνυσμα στο σημείο p αυτής. Η Σe ορίζεται σαν την σκιογραμμή της M που διέρχεται από το (p, v_p). Η Σe αντιστοιχεί στην διεύθυνση φωτισμού $e = -JAY_p / |Av_p|$.

Σκοπός μας είναι να αποδείξουμε ότι η καμπυλότητα της σκιογραμμής Σe στο σημείο p, ως καμπύλης του χώρου $\mathbb{E}^3$, εκφράζεται συναρτήσει του v_p με την βοήθεια του τελεστή σχήματος A της M καθώς και του τανυστή DA. Συγκεκριμένα έχουμε την εξής πρόταση:

Πρόταση. Έστω $S^1(M) = \{v_p \in T_pM : |v_p| = 1\}$ η μοναδιαία εφαπτομένη δέσμη της M. Υπάρχει τότε μία διαφορίσιμη συνάρτηση

$$\mathbf{r} : S^1(M) \to \mathbb{R}$$

ε.ω. η τιμή $\mathbf{r}(v_p)$ είναι η καμπυλότητα της Σe στο σημείο p, όπου Σe η σκιογραμμή της M που διέρχεται από το (p, v_p).

Απόδειξη.

Συμβολίζουμε με (T, N, B) το τρίεδρο Frenet της καμπύλης Σe μέσα στον $\mathbb{E}^3$. Αν k είναι η καμπυλότητα της Σe στο σημείο p, τότε έχουμε:

$$k^2 = \langle \bar{D}_T T , \bar{D}_T T \rangle = \langle \bar{D}_T T, n \rangle^2 + \langle \bar{D}_T T, JT \rangle^2$$

$$\Rightarrow \quad k^2 = \langle AT, T \rangle^2 + \langle \bar{D}_T T, JT \rangle^2$$

εξ άλλου

$\langle \bar{D}_T T , JT \rangle = -\langle \bar{D}_T T, Ae/|Ae| \rangle$ (επειδή $T = JAe/|Ae|$)

$= -(1/|Ae|) \langle \bar{D}_T T, Ae \rangle \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \langle \bar{D}_T T, JT \rangle = (1/|Ae| \langle T , \bar{D}_T Ae \rangle$ (επειδή $\langle T, Ae \rangle = 0$)

$= (1/|Ae|) \langle T, D_T Ae \rangle = (1/|Ae|) \langle T, DA(T, e) \rangle$

όπου $DA(T, e) := (D_T A)(e) = D_T Ae - A(D_T e) = D_T Ae$ (επειδή $D_T e=0$)

Επομένως

$k^2 = \langle AT , T \rangle^2 + (1/|Ae|)^2 \langle T, DA(T, e) \rangle^2$ όπου $e = -JAT/|AT|$

το οποίον αποδεικνύει τον ισχυρισμό μας.

4. Η καμπυλότητα της Σ_o.

Σ' αυτή την παράγραφο θα αποδείξουμε ότι η καμπυλότητα της Σ_o είναι σταθερή.

Θεωρούμε ένα διάνυσμα λ της S^2 και τα δ.π. X, Y τα οποία ορίζονται πάνω στην $M-\{p_1, p_2\}$ με την βοήθεια του λ, ακριβώς όπως τα περιγράψαμε στην παράγραφο 2. Υπενθυμίζουμε ότι p_1 , p_2 είναι τα σημεία της M, όπου $n_{p_1} \parallel n_{p_2} \parallel \lambda$.

Δεδομένου τώρα του λ και των δ.π. X, Y, ορίζεται μία διαφορίσιμη συνάρτηση

$$h : M-\{p_1, p_2\} \to R,$$

με $h(p) = \mathbf{r}\,(\Upsilon_p)$.

Με άλλα λόγια , η τιμή $h(p)$ μετράει στο σημείο p την καμπυλότητα της σκιογραμμής που εφάπτεται στο διάνυσμα Y_p σ΄ αυτό το σημείο.

Έστω τώρα $\alpha(s)$ μία παραμέτριση με μήκος τόξου της Σ_o και $k(s)$ η συνάρτηση καμπυλότητας αυτής. Υποθέτουμε ότι η $k(s)$ δεν είναι σταθερή συνάρτηση. Επομένως, από το θεώρημα του Sard ([H]), υπάρχει μία μή κρίσιμη τιμή k_o της $k(s)$ και ένα σημείο $p_o \in M-\{p_1, p_2\}$ τέτοιο ώστε $h(p) = k_o$.

Θεωρούμε τώρα γύρω από το σημείο p_o ένα λ–πολικό σύστημα συντεταγμένων $\Phi_\lambda(u, v)$ με $\Phi_\lambda(0, 0) = p_o$ και ορίζουμε με

$$x(u, v) = h \circ \Phi_\lambda(u, v) \qquad x(0, 0) = k_o$$

Η καμπύλη $\Phi(0, v)$ αποτελεί εκ κατασκευής τμήμα μιάς σκιογραμμής Σ της M, η οποία μέσω μιάς ισομετρίας j του $\mathbb{E}^3$ είναι τοποθετήσιμη επί της Σ_o. Επειδή τώρα

$$\left|\frac{\partial}{\partial v}(\Phi_\lambda (0, v))\right| = \left|\frac{1}{\theta}\, Y(\Phi_\lambda(0, v)\right| \neq 0$$

έπεται ότι η απεικόνιση $v \to j\,(\Phi_\lambda\ (0, v)$ αποτελεί μία αναπαραμέτριση (ενός τμήματος) της Σ_o έτσι ώστε $\dfrac{ds}{dv} \neq 0$. Επομένως

$$j\,(\Phi_\lambda\ (0, v) = \alpha(s(v)) \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad x(0, v) = k(s(v))$$

Άρα

$$\frac{\partial}{\partial v}\bigg|_{(0,0)} x(u, v) = \frac{d}{dv}\bigg|_{0} x(0, v) = \frac{dk(s)}{ds}\bigg|_{s(0)} \cdot \frac{ds}{dv}\bigg|_{0} \neq 0$$

(ο όρος $\dfrac{dk(s)}{ds}\bigg|_{s(0)}$ είναι διάφορος του μηδενός διότι η $k(s(0)) = k_o$ αποτελεί μία μή κρίσιμη τιμή της $k(s)$).

Επομένως από το θεώρημα των πεπλεγμένων συναρτήσεων υπάρχει περιοχή U του 0 μέσα στο $\mathbb{R}$ και μία διαφορίσιμη συνάρτηση $v = y(u)$ ορισμένη στο U, με $y(0) = 0$ και ε.ω.

$$x(u, y(u)) = k_o \text{ για κάθε } u \in U.$$

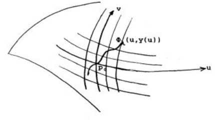
Από την άλλη μεριά η Φ_λ (u, y(u)) u ∈ U ορίζει μία διαφορίσιμη καμπύλη πάνω στο M. Θεωρώντας λοιπόν τους περιορισμούς των δ.π. X, Y πάνω στην $\Phi_\lambda(u, y(u))$ παίρνουμε τις εξής δύο καμπύλες του $S^1(M)$:

$$\beta_\lambda(u) = Y(\Phi_\lambda(u, y(u)) \quad , \delta_\lambda(u) = X(\Phi_\lambda(u, y(u))$$

Παρατηρούμε τώρα ότι

$$\mathbf{r}(\beta_\lambda(u) = \mathbf{r}(Y(\Phi_\lambda(u, y(u))) = x(u, y(u)) = k_o$$

δηλαδή η **r** παραμένει σταθερή πάνω στην καμπύλη $\beta_\lambda(u)$.



(σχήμα 6)

Εξ' άλλου, επειδή το δ.π. X είναι σταθερό κατά μήκος των v–καμπυλών, έχουμε:

$$\delta_\lambda(u) = X(\Phi_\lambda(u, y(u)) = X(\Phi_\lambda(u,0)) = \varphi(u,0)\cdot\frac{\partial}{\partial u}(u,0)$$

Άρα

$$\frac{d}{du}(\delta_\lambda(u) = (\bar{D}_{\frac{\partial}{\partial u}}\varphi\cdot\frac{\partial}{\partial u})_{(u,0)} = \frac{\partial}{\partial u}\Big|_{(u,0)}(\varphi)\frac{\partial}{\partial u}\Big|_{(u,0)} +$$

$$+\ \varphi(u,0)\ (\bar{D}_{\frac{\partial}{\partial u}}\frac{\partial}{\partial u})_{(u,0)}$$

Όμως επειδή κάθε u–καμπύλη είναι γνήσια κυρτή τα διανύσματα $\frac{\partial}{\partial u}\Big|_{(u,0)}$,

$(\tilde{D}_{\frac{\partial}{\partial u}} \frac{\partial}{\partial u})_{(u,0)}$ δεν είναι ποτέ συγγραμμικά και άρα $\delta'_{\lambda}(u) \neq 0$, που αποδεικνύει ότι η καμπύλη $\delta_{\lambda}(u)$ είναι ομαλή.

Μεταφέροντας τώρα τα διανύσματα $\delta_{\lambda}(u) = X(\phi_{\lambda}(u,0))$, $u \in U$, παράλληλα στον $\mathbb{E}^3$ έτσι ώστε να εφαρμόζονται στο ίδιο σημείο, παίρνουμε μία καμπύλη επί της σφαίρας S^2, η οποία αποτελεί τμήμα ενός μεγίστου κύκλου, το επίπεδο του οποίου είναι κάθετο στο διάνυσμα λ.

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε τις καμπύλες $\beta_{\lambda}(u)$, $\delta_{\lambda}(u)$ για να αποδείξουμε την κύρια πρόταση αυτής της παραγράφου που μας βεβαιώνει ότι η καμπυλότητα $k(s)$ της Σ_o είναι σταθερή. Προηγουμένως όμως έχουμε ανάγκη το εξής λήμμα:

Λήμμα:

Εάν k_o είναι μη-κρίσιμη τιμή της $k(s)$, τότε το σύνολο $\mathbf{r}^{-1}(k_o)$ είναι μία συμπαγής επιφάνεια μέσα στην $S^1(M)$.

Απόδειξη:

Έστω $v_p \in \mathbf{r}^{-1}(k_o)$. Θεωρούμε την μοναδική σκιογραμμή Σe της M, που εφάπτεται στο v_p στο σημείο p. Έστω $\gamma(\sigma)$ μία παραμέτριση με μήκος τόξου της Σe ε.ω. $\gamma(0) = \gamma'(0) = v_p$.

Τότε έχουμε:

$$\mathbf{r}_{*,\, v_p} (\gamma'(0),\ \gamma''(0)) = \left.\frac{d}{d\sigma}\right|_{\sigma=0} \mathbf{r}(\gamma(\sigma),\ \gamma'(\sigma)) = \left.\frac{d}{d\sigma}\right|_{\sigma=0} k(s(\sigma)) =$$

$$= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s(0)} k(s) \left.\frac{ds}{d\sigma}\right|_{0} = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s(0)} k(s)$$

διότι $s(\sigma) = \sigma + a$, $a \in R$.

Επίσης $\left.\frac{d}{ds}\right|_{s(0)} k(s) \neq 0$, διότι η τιμή $k(s(0)) = k_o$ αποτελεί μία μη κρίσιμη τιμή της $k(s)$. Άρα η συνάρτηση $\mathbf{r}$ έχει παντού τάξη 1 πάνω στο $\mathbf{r}^{-1}(k_o)$ και εφαρμόζοντας ξανά το θεώρημα των πεπλεγμένων συναρτήσεων αποδεικνύεται ο ισχυρισμός μας. ο.ε.δ.

Είμαστε τώρα σε θέση να αποδείξουμε την εξής βασική πρόταση.

<u>Πρόταση:</u>

Η συνάρτηση καμπυλότητος k(s) της καμπύλης Σ_o είναι σταθερή.

<u>Απόδειξη:</u>

Υποθέτουμε δηλαδή ότι η k(s) δεν είναι σταθερή και θα καταλήξουμε εις άτοπον.

Πράγματι, εάν η k(s) δεν είναι σταθερή συνάρτηση, τότε υπάρχει μία μη-κρίσιμη τιμή k_o αυτής. Σύμφωνα με το προηγούμενο λήμμα το σύνολο της $\mathbf{r}^{-1}(k_o)$ αποτελεί μία συμπαγή επιφάνεια μέσα στην $S^1(M)$ και έστω S μία συνεκτική συνιστώσα αυτής.

Θεωρούμε στην συνέχεια την απεικόνιση

$$F: S^1(M) \to S^2 \text{ με } F(\nu_p) = -\, JA\nu_p / |A\nu_p|$$

και έστω f ο περιορισμός της F πάνω στην συνιστώσα S.
Τώρα έχουμε ανάγκη το εξής λήμμα:

<u>Λήμμα:</u>

Η απεικόνιση $f: S \to S^2$ είναι μεγίστης τάξης.

<u>Απόδειξη του λήμματος:</u>

Θα χρησιμοποιήσουμε εδώ τις καμπύλες $\beta_\lambda(u)$ της S και $\delta_\lambda(u)$ της S^2. Ξεκινάμε με ένα τυχόν $\nu_p \in S$ και ένα μοναδιαίο διάνυσμα λ της μορφής:

$$\lambda = \mu_1 \cdot \varepsilon_p + \mu_2 \cdot n_p$$

όπου $\varepsilon_p = +\, A\nu_p / |A\nu_p|$, $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$, και $n_p \wedge \lambda \neq 0$.

Θεωρούμε τώρα τα δ.π. X, Y που ορίζονται με την βοήθεια του διανύσματος λ και το αντίστοιχο λ-πολικό σύστημα συντεταγμένων $\Phi_\lambda(u,v)$ γύρω από το p.

Τότε στο σημείο p έχουμε:

$$X = n_p \wedge \lambda \,/\, |n_p \wedge \lambda| = J\varepsilon_p = -JA\nu_p / |A\nu_p|,$$

και επομένως σύμφωνα με την παρατήρηση στο τέλος της σελίδας 13

$$Y_p = \nu_p$$

Με την βοήθεια λοιπόν του $\Phi_\lambda(u,v)$ ορίζονται οι καμπύλες $\theta_\lambda(u)$, $\delta_\lambda(u)$, και έχουμε ότι:

Η $\theta_\lambda(u)$ αποτελεί μία καμπύλη επί της συνιστώσας S η οποία διέρχεται, για u=0, από το v_p, και απεικονίζεται μέσω της f επί της ομαλής καμπύλης $\delta_\lambda(u)$ της S^2. Επιπλέον η $\delta_\lambda(u)$ αποτελεί τμήμα ενός μεγίστου κύκλου του S^2 του οποίου το επίπεδο είναι κάθετο στο λ.

Διαλέγοντας λοιπόν δύο μη συγγραμμικά διανύσματα λ με $n_p \wedge \lambda \neq 0$, παίρνουμε δύο διαφορετικές καμπύλες πάνω στην S που διέρχονται από το v_p, και οι οποίες απεικονίζονται μέσω της f σε δύο διαφορετικούς μέγιστους κύκλους του S^2 που διέρχονται από το $h(v_p)$, και έχουν μη-μηδενικά εφαπτόμενα διανύσματα σ΄ αυτό. Έτσι αποδεικνύεται ότι η f έχει μέγιστη τάξη στο v_p και τελειώνει η απόδειξη του λήμματος.

Από το παραπάνω λήμμα έχουμε λοιπόν ότι η f είναι τοπικά, γύρω από κάθε $v_p \in S$, μία αφιδιαφόριση και άρα μία ανοικτή απεικόνιση. Από την άλλη μεριά η f είναι και κλειστή απεικόνιση διότι η συνιστώσα S είναι συμπαγής. Άρα η εικόνα f(S) είναι ανοικτό και κλειστό υποσύνολο της σφαίρας S^2 και άρα $f(S) = S^2$. Παίρνουμε δηλαδή τελικά ότι η

$$f : S \to S^2$$

είναι μία κάλυψη της S^2.

Όμως επειδή η S^2 είναι απλά συνεκτικός χώρος δεν έχει μη-τετριμένο χώρο κάλυψης, άρα η f είναι μία αμφιδιαφόριση.

Επομένως η αντίστροφη αμφιδιαφόριση $f^{-1} : S^2 \to S$ αντιστοιχεί σε κάθε e της S^2 ένα μοναδικό εφαπτόμενο διάνυσμα $Ze = f^{-1}(e)$ επί της σκιογραφής Σe της M, τ.ω. $r(Ze) = k_o$.

Όμως, όπως ήδη έχουμε αποδείξει, το διάνυσμα Ze δεν είναι συγγραμμικό με το διάνυσμα e. Άρα το Ze προβάλλεται σ΄ ένα μη-μηδενικό διάνυσμα ξe, επί ενός επιπέδου καθέτου στο e. Ορίζουμε λοιπόν με παράλληλη μεταφορά στον $\mathbb{E}^3$, ένα διαφορίσιμο δ.π. ξ, παντού μη-μηδενικό, πάνω στην S^2. Αυτό όμως είναι αδύνατον από το θεώρημα του Hopf ([M]).

Με την υπόθεση λοιπόν ότι η συνάρτηση k(s) δεν είναι σταθερή καταλήγουμε εις άτοπον. Άρα k(s) είναι σταθερή συνάρτηση και αποδεικνύεται η πρότασή μας.

5. Η στρέψη της Σ_o

Σκοπός μας είναι να αποδείξουμε, κατ΄ αναλογία προς την προηγούμενη παράγραφο, ότι η στρέψη της καμπύλης Σ_o είναι σταθερή.

Έστω $v_p \in S^1(M)$ και θεωρούμε ξανά την μοναδική σκιογραμμή Σε της M που διέρχεται από το (p, v_p). Η Σε αντιστοιχεί στην διεύθυνση φωτισμού $e = -JAv_p / |Av_p|$.

Θεωρούμε ξανά την Σε ως καμπύλη του $\mathbb{E}^3$ και θα αποδείξουμε ανάλογα προς την παράγραφο 3, ότι η στρέψη τ της Σε στο σημείο p, εκφράζεται συναρτήσει του v_p με την βοήθεια του τελεστή σχήματος A της M, καθώς και των τανυστών DA, D^2A. Συγκεκριμένα θα αποδείξουμε:

__Πρόταση:__

Υπάρχει μία C^∞- διαφορίσιμη συνάρτηση $\tau: S^1(M) \to R$, τ.ω. η τιμή $\tau(v_p)$ είναι η στρέψη της σκιογραμμής Σε στο σημείο p, όπου Σε η μοναδική σκιογραμμή της M που διέρχεται από το (p, v_p).

__Απόδειξη:__

Συμβολίζουμε ξανά με (T, N, B) το τρίεδρο του Frenet της Σε μέσα στον $\mathbb{E}^3$. Αν τ είναι η στρέψη της Σε στο σημείο p, τότε έχουμε:

$$\tau = \langle \bar{D}_T N, B \rangle = \langle \bar{D}_T N, T \wedge N \rangle =$$

$$= \langle \bar{D}_T N, T \wedge \frac{\bar{D}_T T}{k} \rangle$$

Επειδή όμως η καμπυλότητα k της Σε είναι σταθερή, παίρνουμε

$$\tau = \left(\frac{1}{k}\right)^2 \langle \bar{D}_T (\bar{D}_T T), T \wedge \bar{D}_T T \rangle \qquad (1)$$

Επομένως πρέπει να εκφράσουμε τους όρους $(\bar{D}_T T)_p$, $(\bar{D}_T(\bar{D}_T T))_p$ συναρτήσει του T_p.

i) Για τον όρο $\bar{D}_T$ T έχουμε:

$\bar{D}_T T = \bar{D}_T (JAe/ |Ae|) = T (1/ |Ae|) JAe + (1/ |Ae|) \bar{D}_T JAe =$

$= T(<Ae, Ae>^{-1/2}) JAe + (1/ |Ae|) \bar{D}_T JAe =$

$= -<Ae, Ae>^{-3/2} <\bar{D}_T Ae, Ae> JAe + (1/ |Ae|) \bar{D}_T JAe =$

$= -(1/ |Ae|)^3 <D_T Ae, Ae> JAe + (1/ |Ae|) \{D_T JAe + <\bar{D}_T JAe, n>n\} \Rightarrow$

$\Rightarrow D_T T = -(1/ |Ae|)^3 <DA(T,e), Ae>JAe +$

$+(1/ |Ae|) JDA(T,e) +(1/ |Ae|) <JAe, AT> n$

και άρα ο όρος $(D_T T)_p$ εκφράζεται συναρτήσει του T_p με την βοήθεια των τελεστών A, DA. Δηλαδή έχουμε:

$$(\bar{D}_T T)_p = f_1(T_p) \qquad (2)$$

ii) Για τον όρο $\bar{D}_T (\bar{D}_T T)$ έχουμε:

$\bar{D}_T (\bar{D}_T T) = \bar{D}_T (-1/ |Ae|)^3 <DA(T,e), Ae>JAe +$

$+(1/ |Ae|) JDA(T,e) +(1/ |Ae|) <JAe, AT> n =$

$= \bar{D}_T(-<Ae, Ae>^{-1/2}<DA(T,e), Ae>JAe + <Ae, Ae>^{-1/2}JDA(T,e) +$

$+ <Ae, Ae>^{-1/2} <JAe, AT>n) =$

$= 3<Ae, Ae>^{-5/2}<\bar{D}_T Ae, Ae> DA(T,e), Ae>JAe -$

$$- \langle Ae, Ae\rangle^{-3/2}\langle \bar{D}_T(DA(T,e)), Ae\rangle JAe - \langle Ae, Ae\rangle^{-3/2}\langle DA(T,e), \bar{D}_T Ae\rangle JAe -$$

$$- \langle Ae, Ae\rangle^{-3/2}\langle DA(T,e), Ae\rangle \bar{D}_T JAe - \langle Ae, Ae\rangle^{-3/2}\langle \bar{D}_T Ae, Ae\rangle JDA(T,e) +$$

$$+ \langle Ae, Ae\rangle^{-1/2}\langle \bar{D}_T(JDA(T,e)) - \langle Ae, Ae\rangle^{-3/2}\langle \bar{D}_T Ae, Ae\rangle JAe, AT\rangle n +$$

$$+ \langle Ae, Ae\rangle^{-1/2}\langle \bar{D}_T JAe, AT\rangle n + \langle Ae, Ae\rangle^{-1/2}\langle JAe, \bar{D}_T AT\rangle n +$$

$$+\langle Ae, Ae\rangle^{-1/2}\langle JAe, AT\rangle \bar{D}_T n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{D}_T(\bar{D}_T T) = 3(1/\ |Ae|)^5\ \langle DA(T,e), Ae\rangle^2\ JAe - \langle D_T(DA(T,e)), Ae\rangle JAe -$$

$$- 3(1/\ |Ae|)^3\ \langle DA(T,e), DA(T,e)\rangle JAe -$$

$$- (1/\ |Ae|)^3\ \langle DA(T,e), Ae\rangle\ \{JDA(T,e) + \langle JAe, AT\rangle n\} -$$

$$- (1/\ |Ae|)^3\ \langle DA(T,e), Ae\rangle\ JDA(T,e) +$$

$$+ (1/\ |Ae|)\ \{JD_T(DA(T,e)) + \langle JDA(T,e), AT\rangle n\} -$$

$$- (1/\ |Ae|)^3\ \langle DA(T,e), Ae\rangle\ \langle JAe, AT\rangle n +$$

$$+ (1/\ |Ae|)\ \langle JDA(T,e), AT\rangle n + (1/\ |Ae|)\langle JAe, DA(T,T)\rangle n\} -$$

$$- (1/\ |Ae|)\ \langle JAe, AT\rangle AT$$

Τώρα ισχύει η εξής ταυτότητα:

$$D_T(DA(T,e)) = D^2A(T,\ T,\ e) + DA(D_T T,e) + DA(T,\ D_T e)$$

όπου $D^2A(T,T,e) := (D_T(DA)\ (T,e)$ και ο όρος $DA(T,\ D_T e)$ είναι μηδέν, γιατί

το e είναι παράλληλο κατά μήκος της Σe. Ακόμη ο όρος $D_T T$ είναι η εφαπτομένη στην M συνιστώσα του $\bar{D}_T T$.
Δηλαδή:

$$D_T T = T(\bar{D}_T T) = -(1/|Ae|)^3 < DA(T,e), Ae > JAe + (1/|Ae|) JDA(T,e)$$

Αντικαθιστώντας λοιπόν στην παραπάνω έκφραση του $\bar{D}_T(\bar{D}_T T)$ τον όρο $D_T(DA(T,e))$ με το άθροισμα $D^2A(T,T,e) + DA(D_T T,e)$, παίρνουμε με την βοήθεια του A, DA, D^2A μία έκφραση του $\bar{D}_T(\bar{D}_T T)_p$ που εξαρτάται μόνο από το διάνυσμα T_p.
Επομένως έχουμε:

$$(\bar{D}_T(\bar{D}_T T)_p = f_2(T_p) \qquad (3)$$

Τελικά από τις (1), (2), (3) παίρνουμε ότι η στρέψη τ της σκιογραμμής Σe, στο σημείο p, δίδεται από τον τύπο:

$$\tau = (1/k)^2 < f_2(T) \; , \; T \wedge f_1(T) > \qquad (2)$$

όπου k η καμπυλότητα της Σe στο p, και άρα η απόδειξη της πρότασής μας είναι πλήρης. ο.ε.δ.

Έστω τώρα τ(s) η συνάρτηση στρέψης της καμπύλης Σ_o, και θα αποδείξουμε ότι η τ(s) είναι επίσης σταθερή συνάρτηση. Τούτο το επιτυγχάνουμε ακριβώς με την ίδια μέθοδο που αποδείξαμε ότι η συνάρτηση καμπυλότητας k(s) της Σ_o είναι σταθερή. Αρκεί να χρησιμοποιήσουμε μόνο στην θέση της **r** την συνάρτηση $\tau: S^1(M) \to IR$.

6. Απόδειξη του θεωρήματος

Σύμφωνα με τα ανωτέρω, η καμπύλη Σ_o έχει σταθερή καμπυλότητα και στρέψη. Άρα είναι μία έλιξ και επειδή είναι κλειστή συμπίπτει με κύκλο. Χρησιμοποιώντας λοιπόν την ακόλουθη πρόταση η απόδειξη του θεωρήματος είναι πλήρης.

Πρόταση:

Αν όλες οι σκιογραμμές της M είναι κύκλοι ίσης ακτίνος, τότε η M είναι μία σφαίρα.

Απόδειξη:

Θα αποδείξουμε ότι όλα τα σημεία της M είναι ομφαλικά. Έστω p τυχόν σημείο της M και T_1, T_2 δύο κύρια διανύσματα στον T_pM, τα οποία είναι κάθετα μεταξύ τους, θα δείξουμε ότι για την κάθετη καμπυλότητα $\mathbf{r}$ ισχύει $\mathbf{r}(T_1) = \mathbf{r}(T_2)$. Έστω Σe_1, Σe_2 ότι οι σκιογραμμές της M που διέρχονται από το p και εφάπτονται αντίστοιχα στα διανύσματα T_1, T_2, όπου τα διανύσματα $e_i = - JAT_i / |AT_i|$ $i = 1, 2$ της S^2 ορίζουν τις διευθύνσεις φωτισμού στον IE^3 στις οποίες αντιστοιχούν οι Σe_1, Σe_2. Έχουμε ότι:

$$0 = \langle AT_1, e_i \rangle = \langle k_i T_i, e_i \rangle \Rightarrow T_i \perp e_i \quad i=1, 2.$$

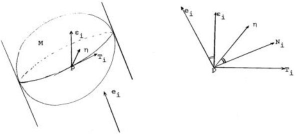
όπου k_1, k_2 οι κύριες καμπυλότητες στο p.

Αν Πe_i είναι το επίπεδο της σκιογραμμής Σe_i $i=1, 2$ συμβολίζουμε με ε_i το διάνυσμα του IE^3 το κάθετο στο Πe_i έτσι ώστε $\langle e_i, \varepsilon_i \rangle \geq 0$ $i=1, 2$. Συμβολίζουμε επίσης με N_i το διάνυσμα επιτάχυνσης της Σe_i στο σημείο p, $i=1, 2$.

Εάν λοιπόν $\measuredangle (e_i, \varepsilon_i)$ είναι η οξεία γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα e_i, ε_i, τότε έχουμε:

$$\measuredangle (e_i, \varepsilon_i) = \measuredangle (n, N_i) \qquad i=1, 2 \tag{1}$$

διότι $e_i \perp n$, $\varepsilon_i \perp N_i$ και τα διανύσματα e_i, ε_i, n, N_i, βρίσκονται στο επίπεδο το κάθετο στο T_i, $i = 1, 2$.



σχήμα 7

Εξ' άλλου:

$$\left.\begin{array}{lll} \sphericalangle(e_1, \varepsilon_1) & = & \sphericalangle(T_2, \varepsilon_1) \\ \sphericalangle(e_2, \varepsilon_2) & = & \sphericalangle(T_1, \varepsilon_2) \end{array}\right\} \qquad (2)$$

διότι τα διανύσματα ε_1, T_2 είναι συγγραμικά όπως εξ' άλλου και τα διανύσματα ε_2, T_1.

Τώρα τα επίπεδα Πe_1, Πe_2 τέμνονται κατά μήκος μιας ευθείας L και θεωρούμε το επίπεδο Π που διχοτομεί την δίεδρη γωνία των Πe_1, Πe_2. Έστω σ_1 η συμμετρία στον χώρο $\mathbb{E}^3$ ως προς το επίπεδο Π και σ_2 η συμμετρία στον χώρο $\mathbb{E}^3$ ως προς την ευθεία L. Οι συμμετρίες σ_1, σ_2 αφήνουν το σημείο p αμετάβλητο. Επιπλέον, επειδή οι κύκλοι Σe_1, Σe_2

έχουν ίση ακτίνα, έχουμε ότι:

ή $\quad \sigma_1(\Sigma e_1) = \Sigma e_2 \quad$ και $\quad \sigma_1(\Sigma e_2) = \Sigma e_1$

ή $\quad \sigma_2 \circ \sigma_1(\Sigma e_1) = \Sigma e_2 \quad$ και $\quad \sigma_2 \circ \sigma_1(\Sigma e_2) = \Sigma e_1$ αν $\sigma_1(\Sigma e_1) \neq \Sigma e_2$

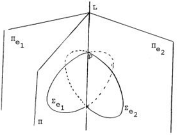
Άρα σε κάθε περίπτωση παίρνουμε ότι

$$\sphericalangle (T_1, \varepsilon_1) \;, = \quad \sphericalangle (T_1, \varepsilon_2)$$

απ' όπου έπεται λόγω των σχέσεων (1), (2) ότι

$$\sphericalangle (n, N_1) \;, = \quad \sphericalangle (n, N_2)$$

Άρα από το θ. του Meusnier οι κύριες καμπυλότητες στο p είναι ίσες και το p είναι ομφαλικό σημείο.



σχήμα 8

ο.ε.δ.

ΜΕΡΟΣ II

ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σκοπός μας είναι να αποδείξουμε εδώ την υπερβολική περίπτωση του θεωρήματος Α, η οποία διατυπώνεται ως εξής:

Θεώρημα Α.

Έστω Μ μία C^∞–διαφορίσιμη, συμπαγής και γνήσια κυρτή επιφάνεια, εμβαπτισμένη στον υπερβολικό χώρο $\mathbb{H}^3$. Υποθέτουμε ότι κάθε σκιογραμμή της Μ είναι ισομετρική με μία ισομετρία του $\mathbb{H}^3$, προς μία σταθερή καμπύλη Σ_o. Τότε η Σ_o είναι ένας γεωδαισιακός κύκλος και η Μ μία γεωδαισιακή σφαίρα.

Η ιδέα της απόδειξης του θεωρήματος είναι σε γενικές γραμμές η ίδια με την ιδέα της απόδειξης στην ευκλείδεια περίπτωση. Όμως η τεχνική της απόδειξης είναι διαφορετική. Για παράδειγμα, δεν μπορούμε εδώ να κατασκευάσουμε ένα σύστημα συντεταγμένων επί της Μ, ανάλογο προς το λ–πολικό σύστημα συντεταγμένων της ευκλείδειας περίπτωσης.

Στις παραγράφους 1, 2, 3 θα δώσουμε τους βασικούς ορισμούς και ιδιότητες που αφορούν τον υπερβολικό χώρο $\mathbb{H}^3$, τις γνήσια κυρτές επιφάνειες και τις σκιογραμμές πάνω σ΄ αυτές. Στην παράγραφο 4 θα εισαγάγουμε μία απεικόνιση F η οποία συνδέει τα διανύσματα της μοναδιαίας εφαπτομένης δέσμης $S^1(M)$ με τις σκιογραμμές της Μ. Στην παράγραφο 5, κατ΄ αναλογία προς την ευκλείδεια περίπτωση, θεωρούμε τις σκιογραμμές της Μ ως καμπύλες του χώρου $\mathbb{H}^3$ και θα αποδείξουμε ότι η καμπυλότητα και η στρέψη μιας σκιογραμμής σ΄ ένα τυχόν σημείο p αυτής, εκφράζεται συναρτήσει του εφαπτομένου διανύσματος της σκιογραμμής σ' αυτό το σημείο. Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι η καμπυλότης και η στρέψη της Σ_o είναι σταθερή. Στην παράγραφο 6 θα μελετήσουμε τις καμπύλες σταθερής καμπυλότητος και στρέψης στην $\mathbb{H}^3$, και τέλος στην παράγραφο 7 συνδιάζοντας τα παραπάνω θα αποδείξουμε το θεώρημα μας.

1. Γνήσια κυρτές επιφάνειες στον $\mathbb{H}^3$

Ο κύριος σκοπός αυτής της παραγράφου είναι να δώσουμε τους βασικού ορισμούς που αφορούν τον υπερβολικό χώρο $\mathbb{H}^3$ καθώς και τις γνήσια κυρτές επιφάνειες σ' αυτόν. Μία σχετικά λεπτομερή περιγραφή των υπερβολικών μοντέλων μπορεί κανείς να βρεί στο ([S_{IV}], Κεφ. 7, §A) καθώς και στο [B].

Ο υπερβολικός χώρος $\mathbb{H}^3$ ορίζεται σαν το άνω ημίχωρο $\{(x,y,z)\in\mathbb{E}^3: z>0\}$ εφοδιασμένο με την μετρική $ds^2 = \dfrac{dx^2+dy^2+ds^2}{z^2}$. Οι γεωδαισιακές του $\mathbb{H}^3$ είναι οι κατακόρυφες ευθείες και οι κύκλοι οι ορθογώνιοι προς το επίπεδο $\Pi_o = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: z=0\}$.

Οι ολικά γεωδαισιακές επιφάνειες του $\mathbb{H}^3$ είναι τα κατακόρυφα επίπεδα και οι σφαίρες του $\mathbb{H}^3$ που τέμνουν ορθογώνια το Π_o. Τώρα το σύνολο Isom ($\mathbb{H}^3$), αποτελείται από συμμετρίες ως προς κατακόρυφα επίπεδα, από αντιστροφές ως προς σφαίρες ορθογώνιες στο Π_o, καθώς και από την σύνθεση αυτών.

Μία γεωδαισιακή σφαίρα του $\mathbb{H}^3$ ορίζεται σαν το σύνολο των σημείων $\{p\in\mathbb{H}^3: d(p,o) = \text{σταθερή, } o \text{ σημείον του } \mathbb{H}^3\}$ όπου d η απόσταση που επάγεται από την υπερβολική μετρική. Ανάλογα ορίζεται ο γεωδαισιακός κύκλος στον $\mathbb{H}^2$. Αποδεικνύεται ([S_{IV}], σ. 17) ότι κάθε γεωδαισιακή σφαίρα του $\mathbb{H}^3$ είναι μία συνηθισμένη σφαίρα που περιέχεται στον $\mathbb{H}^3$ και αντίστροφα.

Έστω τώρα η ένα μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο της M και $< >$ η υπερβολική μετρική του $\mathbb{H}^3$, (σημ: όταν μιλάμε για μοναδιαία διανύσματα θα εννοούμε πάντοτε ως προς την υπερβολική μετρική, εκτός αν αναφέρεται το αντίθετο). Έστω επίσης $\bar{\nabla}$ η Levi Civila συνοχή της πολλαπλότητας Riemann ($\mathbb{H}^3$, < , >) και έστω ∇ η επαγόμενη συνοχή επί της M. Συμβολίζουμε με A τον υπερβολικό τελεστή σχήματος της M ως προς το n. Συγκεκριμένα ορίζουμε:

$$A: T_pM \rightarrow T_pM \quad \text{με } Av_p := -\bar{\nabla}_{v_p} n.$$

Η επιφάνεια M του $\mathbb{H}^3$, λέγεται εξ' ορισμού γνήσια κυρτή, αν $\langle Av_p, v_p\rangle \neq 0$ για κάθε $v_p \in T_pM$, $p \in M$ ([D, W]). Η έννοια της κυρτότητας επίσης γενικεύεται ευθέως στην υπερβολική περίπτωση, εάν αντικαταστήσουμε το εφαπτόμενο επίπεδο T_pM με την ολικά γεωδαισιακή επιφάνεια $S_p = \exp(T_p M)$. Έτσι η M καλείται κυρτή στον $\mathbb{H}^3$, αν για $\forall p \in M$ έχουμε $S_p \cap M = \{p\}$, δηλαδή η S_p αφήνει την M προς την μία πλευρά της ([S_{TV}], σ. 123).

Από ένα γενικότερο θεώρημα των Do-Carmo, Warner ([D, W]) έπεται ότι αν μία επιφάνεια στον $\mathbb{H}^3$, είναι συμπαγής και γνησια κυρτή, τότε αυτή είναι κυρτή και αφμιδιαφορίσιμη με την σφαίρα S^2.

Στην συνέχεια υποθέτουμε ότι ο τελεστής σχήματος A της γνήσια κυρτής επιφάνειας M, ορίζεται ως προς το εσωτερικό, μοναδιαίο, κάθετο διανυσματικό πεδίο n της M και άρα $\langle Av_p, v_p\rangle > 0$ $\forall$ $v_p \in T_pM$, $p \in M$.

Έστω τώρα C μία απλή, κλειστή και ομαλή καμπύλη επί μιας ολικά γεωδαισιακής επιφάνειας S του $\mathbb{H}^3$. Έστω επίσης T το εφαπτόμενο δ.π. κατά μήκος της C. Η C λέγεται εξ' ορισμού γνήσια κυρτή αν $\bar{\nabla}_T T \neq 0$. Εξ' άλλου, κατ' αναλογία προς τις επιφάνειες, η C λέγεται κυρτή, αν για κάθε εφαπτόμενο διάνυσμα v_p της C, η γαιωδαισιακή γ της S που εφάπτεται στο v_p στο σημείο p, ικανοποιεί $\gamma \cap C = \{p\}$. Ξανά από το θεώρημα Do-Carmo, Warner, συμπεραίνουμε ότι αν μια απλή και κλειστή καμπύλη είναι γνήσια κυρτή τότε αυτή είναι επίσης κυρτή.

Θα αποδείξουμε τώρα το εξής λήμμα το οποίο θα χρησιμοποιήσουμε στην συνέχεια.

<u>Λήμμα</u>

Έστω S μία ολικά γεωδαισιακή επιφάνεια η οποία τέμνει την M. Τότε είτε $S \cap M = \{p\}$ για κάποιο $p \in M$ είτε $S \cap M = C$ όπου C μία γνήσια κυρτή καμπύλη της M.

Απόδειξη:

Αν η S εφάπτεται στην Μ σ΄ ένα σημείο p αυτής, θάναι $S \cap M = \{p\}$ λόγω της κυρτότητας της Μ. Αν η S δεν εφάπτεται στην Μ τότε αναγκαστικά τέμνει την Μ εγκάρσια. Έστω λοιπόν $C = M \cap S$ και η C είναι μία ομαλή, απλή και κλειστή καμπύλη. Αν τώρα Τ είναι το μοναδιαίο, εφαπτόμενο δ.π. κατά μήκος της C έχουμε:

$$<\bar{\nabla}_T T, n> = + <AT, T> \neq 0$$

λόγω της γνήσιας κυρτότητας της Μ. Άρα η C είναι εξ΄ ορισμού γνήσια κυρτή ο.ε.δ.

Παρατηρούμε τέλος ότι αντί για τον υπερβολικό χώρο $\mathbb{H}^3$, μπορούμε ισοδύναμα να θεωρήσουμε την Μ μέσα στον μοναδιαίο ανοικτό δίσκο $\mathbb{D}^3$ του $\mathbb{R}^3$, εφοδιασμένο με την υπερβολική μετρική $ds^2 = \frac{dx^2+dy^2+dz^2}{(1-1/4r^2)^2}$, $r^2 = x^2+y^2+z^2$. Στο υπερβολικό μοντέλο $(\mathbb{D}^3, ds)$ οι γεωδαισιακές είναι οι κύκλοι οι ορθογώνιοι στο σύνορο $\partial\mathbb{D}^3 = S^2$ του $\mathbb{D}^3$ καθώς και οι ευθείες που διέρχονται από το κέντρο του $\mathbb{D}^3$. Αντίστοιχα οι ολικά γεωδαισιακές επιφάνειες του $(\mathbb{D}^3, ds)$ είναι οι σφαίρες οι ορθογώνιες στο $\partial\mathbb{D}^3$ καθώς και τα επίπεδα που διέρχονται απο το κέντρο του $\mathbb{D}^3$. Το υπερβολικό μοντέλο $(\mathbb{D}^3, ds)$ παρουσιάζει μεγαλύτερη συμμετρία από τον $\mathbb{H}^3$ και στην συνέχεια θα χρειασθή να κάνουμε μερικές αναφορές σ΄ αυτό.

2. Η υπερβολική συνοχή $\bar{\nabla}$ του $\mathbb{H}^3$.

Συμβολίζουμε με $\bar{D}$ την συνήθη συνοχή και με $<,>_0$ την συνήθη μετρική του ευκλείδειου χώρου $\mathbb{E}^3$. Σκοπός μας είναι να βρούμε πως σχετίζονται οι συνοχές $\bar{D}$ και $\bar{\nabla}$, γεγονός που θα μας επιτρέψει στην συνέχεια να κάνουμε διάφορους υπολογισμούς.

Θα χρειασθούμε το εξής βασικό λήμμα της Riemannian γεωμετρίας:

Λήμμα:

Έστω (P, < , >') μία Riemannian πολ/τα και έστω ∇' η Riemannian συνοχή που αντιστοιχεί σ' αυτή. Αν X, Y, Z είναι μετατιθέμενα δ.π. της P δηλ. [X, Y] = [X, Z] = [Y, Z] = 0, όπου [,] η αγκύλη Lie, τότε

$$<\nabla'_X Y, Z>' = \frac{1}{2}\{X<Y, Z>' + Y<X, Z>' - Z<X, Y>'\}$$

Απόδειξη:

Έχουμε ότι $X<Y, Z>' = <\nabla'_X Y, Z>' + <Y, \nabla'_X Z>'$

$Y<X, Z>' = <\nabla'_Y X, Z>' + <X, \nabla'_Y Z>'$

$Z<X, Y>' = <\nabla'_Z X, Y>' + <X, \nabla'_Z Y>'$

Αφαιρώντας την τρίτη από αυτές τις εξισώσεις από το άθροισμα των δύο πρωτων και χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις $\nabla'_X Y - \nabla'_Y X = [X, Y]$, $\nabla'_X Z - \nabla'_Z X = [X, Z]$, $\nabla'_Y Z - \nabla'_Z Y = [Y, Z]$, παίρνουμε ότι:

$$2<\nabla'_X Y, Z>' = X<Y,Z>' + Y<X,Z>' - Z<X,Y> + <[X, Y],Z>' - <[X, Z],Y>' - <[Y, Z],X>'$$

Επειδή όμως τα X, Y, Z είναι μετατιθέμενα δ.π. παίρνουμε τελικά ότι:

$$<\nabla'_X Y, Z>' = \frac{1}{2}\{X<Y, Z>' + Y<X, Z>' - Z<X, Y>'\}$$ ο.ε.δ.

Εύκολα λοιπόν συμπεραίνουμε το εξής:

Πόρισμα:

Εάν X, Y, Z είναι μετατιθέμενα δ.π. του $\mathbb{H}^3$, τότε έχουμε:

(i) $<\bar{D}_X Y, Z>_o = \frac{1}{2}\{X<Y, Z>_o + Y<X, Z>_o - Z<X, Y>_o\}$

(ii) $f<\bar{\nabla}_X Y, Z>_o = \frac{1}{2}\{X(f<Y, Z>_o) + Y(f<X, Z>_o) - Z(f<X, Y>_o)\}$

όπου $f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{x_3^2}$, $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{H}^3$

(iii) $\bar{\nabla}_X Y = \bar{D}_X Y + f^{1/2}\ \{(<X, Y>_o e_3 - <X, e_3>_o Y - <Y, e_3>_o X\}$

όπου $e_3 = (0, 0, 1) = f(x_1, x_2, x_3) = \dfrac{1}{{x_3}^2}$ για $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{H}^3$

Απόδειξη:

(i) Θεωρούμε το σύνολο $\mathbb{H}^3$ σαν ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$, εφοδιασμένο με την ευκλείδεια μετρική $<\ ,\ >_o$ και την ευκλείδεια συνοχή $\bar{D}$.
Από το παραπάνω λοιπόν λήμμα θέτοντας $\nabla' = \bar{D}$ και $<\ ,\ >' = <\ ,\ >_o$, παίρνουμε:

$$<\bar{D}_X Y, Z>_o = \frac{1}{2}\ \{X<Y, Z>_o + Y<X, Z>_o - Z<X, Y>_o\}$$

ii) Εφαρμόζουμε ξανά το προηγούμενο λήμμα για τον υπερβολικό χώρο $(\mathbb{H}^3, <\ >)$ και για την υπερβολική συνοχή $\bar{\nabla}$. Επειδή δε $<,> = f<\ ,\ >_o$ με

$f(x_1, x_2, x_3) = \dfrac{1}{{x_3}^2}$ για $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{H}^3$ παίρνουμε την σχέση

$$f<\bar{\nabla}_Y X, Z>_o = \frac{1}{2}\ \{X(f<Y, Z>_o) + Y(f<X, Z>_o) - Z(f<X, Y>_o)\}$$

iii) Από την τελευταία σχέση έχουμε ότι:

$$f<\bar{\nabla}_X Y, Z>_o = \frac{1}{2}\ \{X(f)<Y, Z>_o + Y(f)<X, Z>_o - Z(f)<X, Y>_o +$$

$$+ fX(<Y, Z>_o) + fY(<X, Z>_o) - fZ(<X, Y>_o)\} \overset{(i)}{\Longrightarrow}$$

$$\Longrightarrow <\bar{\nabla}_X Y, Z>_o = <\bar{D}_X Y, Z>_o + \frac{1}{2f}\ \{<X, \mathrm{grad} f>_o <Y, Z>_o +$$

$$+ <Y, \mathrm{grad} f>_o <X, Z>_o - <Z, \mathrm{grad} f>_o <X, Y>_o\}$$ για κάθε δ.π. $Z \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \bar{\nabla}_X Y = \bar{D}_X Y + \frac{1}{2f}\ \{<X, \mathrm{grad} f>_o Y + <Y, \mathrm{grad} f>_o X - <X, Y>_o \mathrm{grad} f\} \quad (1)$$

Όμως $<X, \mathrm{grad}f>_o = <X, -\frac{2}{(x_3)^3} e_3>_o \Longrightarrow$

$$\frac{1}{2f} <X, \mathrm{grad}f>_o = - f^{1/2}<X, e_3>_o$$

Ομοίως

$$\frac{1}{2f} <Y, \mathrm{grad}f>_o = - f^{1/2}<Y, e_3>_o$$

$$\frac{1}{2f} <Z, \mathrm{grad}f>_o = - f^{1/2}<Z, e_3>_o$$

Επομένως η (1) γίνεται:

$$\bar{\nabla}_X Y = \bar{D}_X Y + f^{1/2}\{<X, Y>_o e_3 - <X, e_3>_o Y - <Y, e_3>_o X\} \text{ ο.ε.δ.}$$

Στην συνέχεια θα αποδείξουμε ότι η σχέση (iii) του πορίσματος ισχύει για τυχόντα δ.π. X, Y του $\mathbb{H}^3$. Πράγματι έστω $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ όπου $i = 1, 2, 3$ τα βασικά δ.π. του $\mathbb{H}^3$. Τότε τα X, Y εκφράζονται σαν γραμμικός συνδυασμός των ∂_i, γράφουμε συμβολικά $X=\mu^i\partial_i$, $Y=\nu^i\partial_j$ εννοώντας τα αθροίσματα για $i, j = 1, 2, 3$. Έχουμε λοιπόν:

$$\bar{\nabla}_X Y = \bar{\nabla}_{\mu^i\partial_i} \nu^j\partial_j = \mu^i[\partial_i(\nu^j)\partial_j + \nu^j\bar{\nabla}_{\partial_i}\partial_j] =$$

$$\mu^i\partial_i(\nu^j)\partial_j + \nu^j\bar{\nabla}_{\partial_i}\partial_j = \mu^i\partial_i(\nu^j)\partial_j +$$

$$+ \mu^i\nu^j [\bar{D}_{\partial_i}\partial_j + f^{1/2}\{<\partial_i, \partial_j>_o e_3 - <\partial_i, e_3>_o\partial_j - <\partial_j, e_3>_o\partial_i\}] =$$

$$= \bar{D}_X Y + f^{1/2} \{(<X, Y>_o e_3 - <X, e_3>_o Y - <Y, e_3>_o X\} \text{ ο.ε.δ.}$$

Τελικά λοιπόν θέτοντας $f(x_1, x_2, x_3) = \dfrac{2}{(x_3)^2}$ για $p = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{H}^3$, η σχέση της συνοχής $\bar{\nabla}$ και $\bar{D}$ στο σημείο $p = (x_1, x_2, x_3)$ παίρνει τη μορφή:

$$\boxed{(\bar{\nabla}_X Y)_p = (\bar{D}_X Y)_p + \frac{1}{x_3}\{(<X_p, Y_p>_o e_3 - <X_p, e_3>_o Y_p - <Y_p, e_3>_o X_p\}}$$

ή ισοδύναμα

$$\boxed{\begin{array}{l}(\bar{\nabla}_X Y)_p = (\bar{D}_X Y)_p + x_3\{(<X_p, Y_p> e_3 - <X_p, e_3> Y_p - <Y_p, e_3> X_p\} \\ \text{όπου } e_3 = (0,0,1) \text{ και } X, Y \text{ δ.π. του } \mathbb{H}^3\end{array}}$$

3. Σκιογραμμές επί της επιφάνειας M

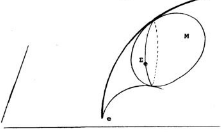
Συμβολίζουμε με $\partial\mathbb{H}^3$ το σύνορο του $\mathbb{H}^3$. Έχουμε ότι $\partial\mathbb{H}^3 = \partial\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$, όπου $\partial\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ είναι η συμπαγοποίηση με ένα σημείο του $\mathbb{R}^2$.

Έστω τώρα $e \in \partial\mathbb{H}^3, e \neq \infty$. Θεωρούμε όλες τις γεωδαισικές του $\mathbb{H}^3$ οι οποίες ξεκινάνε από το σημείο e και συμβολίζουμε με E το μοναδιαίο εφαπτόμενο δ.π. κατά μήκος αυτών των γεωδαισιακών. Δημιουργείται έτσι ένα δ.π. E του $\mathbb{H}^3$. Αν $e = \infty$, τότε το E είναι το κατακόρυφο δ.π. με τον προσανατολισμό του διανύσματος $(0, 0, -1)$.

Λέμε τώρα εξ' ορισμού, ότι το δ.π. E ορίζει μια παράλληλη δέσμη φωτός στον $\mathbb{H}^3$. Κάθε δε σημείο $e \in \partial\mathbb{H}^3$ το βλέπουμε σαν μία σημειακή πηγή φωτός η οποία ορίζει την φωτεινή δέσμη E.

Ορισμός:

Έστω E μία παράλληλη δέσμη φωτός στον $\mathbb{H}^3$, η οποία ορίζεται από την σημειακή πηγή φωτός $e \in \partial\mathbb{H}^3$. Τότε το σύνολο $\Sigma e = \{p \in M : <n_p, E_p> = 0\}$ είναι εξ' ορισμού η σκιογραμμή της M που αντιστοιχεί στο $e \in \partial\mathbb{H}^3$.



(Σχήμα 1)

Στην συνέχεια θα αποδείξουμε, κατ΄ αναλογία προς την ευκλείδεια περίπτωση την εξής πρόταση:

Πρόταση 1.

Η Σe, $e \in S$, αποτελεί μια απλή, κλειστή και ομαλή καμπύλη της Μ.

Απόδειξη:

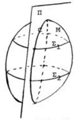
i) Θα δείξουμε ότι η Σe αποτελεί μία συμπαγή υπολ/τα διάστασης 1 της Μ.

Θεωρούμε την συνάρτηση $h: M \to IR$ με $h(p) = \langle n_p, E_p \rangle$, όπου Ε το δ.π. του IH^3 που ορίζεται από $e \in \partial IH^3$ σύμφωνα με τους παραπάνω ορισμούς. Έχουμε ότι:

$$h_{*,p}(E_p) = E_p(h) = \langle (\bar{\nabla}_E n)_p\, E_p \rangle + \langle (\bar{\nabla}_E E)_p\, n_p \rangle.$$

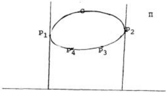
Όμως $\nabla_E E = 0$ διότι οι ολοκληρωτικές καμπύλες του Ε είναι γεωδαισιακές του IH^3 και $\langle (\bar{\nabla}_E n)_p\, E_p \rangle = - \langle AE_p, E_p \rangle \neq 0$, λόγω της γνήσιας κυρτότητας της Μ. Άρα $h_{*,p}(E_p) \neq 0$, το οποίον συνεπάγεται ότι η $h: M \to R$ έχει παντού τάξη 1. Άρα από το θεώρημα των πεπλεγμένων συναρτήσεων έπεται ότι το $h^{-1}(0) = \Sigma e$, αποτελεί μία υπολ/τα διάσταση 1 της M, η οποία προφανώς είναι συμπαγής.

ii) Τώρα θα αποδείξουμε ότι η υπολ/τα $h^{-1}(0)$ της M αποτελείται από μία μόνον συνιστώσα.



(Σχήμα 2)

Έστω ότι η $h^{-1}(0)$ περιέχει δύο συνιστώσες Σ_1, Σ_2. Μπορούμε να υποθέσουμε, χρησιμοποιώντας μία ισομετρία του $\mathbb{H}^3$ αν και αναγκαίον, ότι $e=\infty$. Τότε υπάρχει όπως στην ευκλείδεια περίπτωση, ένα κατακόρυφο επίπεδο Π το οποίον τέμνει εγκάρσια την M και η τομή $C=M\cap\Pi$ είναι μία γνήσια κυρτή καμπύλη η οποία τέμνει αμφότερες τις συνιστώσες Σ_1, Σ_2. Παρόμοια ξάν προς την ευκλείδεια περίπτωση βλέπουμε ότι υπάρχουν 4 τουλάχιστον σημεία p_1, p_2, p_3, p_4 στην τομή $C\cap(\Sigma_1\cup\Sigma_2)$. Αν λοιπόν περιοριστούμε στο επίπεδο Π και στην καμπύλη C, θα πρέπει η εφαπτομένη ευθεία l_i στο σημείο p_i της C, $i=1, 2, 3, 4$ να είναι κατακόρυφη και $l_i\cap C=\{p_i\}$. Όμως αυτό είναι αδύνατο, (βλ. σχήμα 3). Άρα η υπολ/τα $h^{-1}(0) = \Sigma e$ της M είναι συνεκτική.



(Σχήμα 3)

<u>**Παρατηρήσεις:**</u>

i) Έστω e σημείον του $\partial \mathbb{H}^3$, το οποίον ορίζει την παράλληλη δέσμη φωτός E στον $\mathbb{H}^3$ και την σκιογραμμή Σe της M. Τότε, αντίθετα προς την ευκλείδεια περίπτωση, το δ.π. E δεν είναι παράλληλο στον $\mathbb{H}^3$ κατά μήκος της Σe.

Πράγματι, υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητος ότι $E(p) = -x_3e_3$, $p=(x_1, x_2, x_3)$, και έχουμε ότι

$$\bar{\nabla}_T E = \bar{\nabla}_T(-x_3e_3) = -T(x_3)e_3 - x_3\bar{\nabla}_T e_3 =$$

$$= -T(x_3)e_3 - x_3\, \bar{D}_T e_3 - x_3^2\{<T,e_3>e_3 - <T,e_3>e_3 - <e_3,e_3>T\} =$$

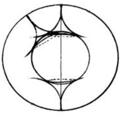
$$= -T(\dot{x}_3)e_3 + \qquad T\neq 0$$

επειδή τα διανύσματα e_3 και T δεν είναι συγγραμικά (βλέπε και σημείωση της σελίδος 38 παρακάτω).

ii) Θεωρώντας το υπερβολικό μοντέλο $(\mathbb{D}^3, ds)$, είναι εύκολο να επαληθεύσουμε το θεώρημά μας. Πράγματι, αν θεωρήσουμε μία γεωδαισιακή σφαίρα *S* μέσα στον $(\mathbb{D}^3, ds)$ ώστε το κέντρο της να συμπέσει με το κέντρο του δίσκου $\mathbb{D}^3$, τότε είναι άμεσο για λόγους συμμετρίας, ότι όλες οι σκιογραμ–

μές της S είναι ισομετρικοί κύκλοι.

Βλέπουμε ακόμη ότι οι σκιογραμμές της Μ δεν τέμνονται αναγκαστικά μεταξύ τους ανά δύο (βλ. Σχήμα 4).



(Σχήμα 4).

Από τις παραπάνω παρατηρήσεις βλέπουμε ότι οι ιδιότητες των σκιογραμμών της Μ διαφοροποιούνται αρκετά, οταν ο περιβάλλων χώρος είναι υπερβολικός και όχι ευκλείδειος.

4. Η απεικόνιση $F: S^1(M) \to \partial IH^3$

Θα ορίσουμε σ΄ αυτή την παραγραφο μία απεικόνιση F η οποία συνδέει τα διανύσματα της μοναδιαίας εφαπτομένης δέσμης $S^1(M)$ με τις σκιογραμμές της Μ και θα μελετήσουμε την τάξη της F.

Αποδεικνύουμε κατ΄ αρχάς την εξής πρόταση:

Πρόταση 2:

Εάν T είναι το εφαπτόμενο δ.π. κατά μήκος μιας σκιογραμμής Σe και E η παράλληλη δέσμη φωτός του IH^3 που ορίζεται από την σημειακή πηγή φωτός $e\in\partial IH^3$, τότε τα διανύσματα T_p, E_p, $p\in\Sigma e$ είναι συζυγή. Δηλαδή ισχύει:

$$\langle AT, E\rangle = 0 \text{ κατά μήκος της } \Sigma e$$

Απόδειξη:

(i) Κατ' αρχάς υποθέτουμε ότι $e=\infty\in\partial IH^3$, και άρα το E είναι το κατακόρυφο δ.π. με $E_p = -x_3 e_3$, $p=(x_1, x_2, x_3) \in IH^3$.

Τότε κατά μήκος της Σ_∞ έχουμε:

$$\langle n, E\rangle = 0 \Rightarrow T\langle n, E\rangle = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \langle \bar{\nabla}_T n, E\rangle + \langle n, \bar{\nabla}_T E\rangle = 0 \quad (*)$$

Εξ' άλλου στο σημείο $p=(x_1, x_2, x_3) \in IH^3$ έχουμε:

$$\bar{\nabla}_T E = \bar{D}_T E + x_3\{\langle T, E\rangle e_3 - \langle T, e_3\rangle E - \langle E, e_3\rangle T\}$$

$$\bar{D}_T E = \bar{D}_T(-x_3\, e_3) - T\ (x_3)\ e_3 - x_3 \bar{D}_T e_3 = -T(x_3)\ e_3$$

Επομένως κατά μήκος της σκιογραμμής Σ_∞, παίρνουμε

$$\langle n, \bar{\nabla}_T E\rangle = \langle n, -T(x_3)\ e_3 + x_3\langle T, E\rangle e_3 - x_3\ \langle T, e_3\rangle E - x_3\langle E, e_3\rangle T\rangle = 0$$

διότι $\langle n, T\rangle = 0$ και $\langle n, E\rangle = 0$ κατά μήκος της Σ_∞.

Τέλος από τη σχέση (*) παίρνουμε

$$\langle \bar{\nabla}_T n, E\rangle = -\langle n, \bar{\nabla}_T E\rangle = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \langle AT, E\rangle = 0 \text{ κατά μήκος της } \Sigma_\infty$$

ii) Το E είναι το δ.π. μίας αυθαίρετης δέσμης φωτός που ξεκινάει από το $e \in \partial \mathbb{H}^3$. Σ' αυτή την περίπτωση θεωρούμε μία ισομετρία h του $\mathbb{H}^3$ με $h(e)=\infty$ όπου $e \in \partial \mathbb{H}^3$, η σημειακή πηγή φωτός που ορίζει το δ.π. E. Τότε έχουμε κατά μήκος της Σe:

$$\langle AT, E \rangle = -\langle \bar{\nabla}_T n, E \rangle = -\langle \bar{\nabla}_{h_* T} h_* n, h_* E \rangle = 0$$

από το (i), και έτσι αποδεικνύεται πλήρως η πρότασή μας.

<u>Σημείωση:</u>

Επειδή $\langle AT, E \rangle = 0$ κατά μήκος της σκιογραμμής Σe έπεται ότι $T \neq \pm E$. Πράγματι, αν $T = \pm E$ τότε θάχουμε $\langle AE, E \rangle = 0$ το οποίο αντιφάσκει την γνησια κυρτότητα της M. Από εδώ και στο εξής λοιπόν θα θεωρούμε κάθε σκιογραμμή Σe προσανατολισμένη έτσι ώστε $\langle JE, T \rangle > 0$. Μ' αυτόν τον προσανατολισμό της Σe παίρνουμε ότι:

$$E = -JAT / |AT|$$

Πράγματι από την σχέση $\langle AT, E \rangle = 0 \Rightarrow E = \pm JAT / |AT|$. Κατόπιν για T_p κύριο διάνυσμα του T_pM επαληθεύουμε ότι $E_p = -JAT_p / |AT_p|$, και άρα λόγω συνέχειας συναγάγουμε ότι $E = -JAT / |AT|$.

<u>Πόρισμα:</u>

Έστω v_p ένα μοναδιαίο διάνυσμα του T_pM. Τότε υπάρχει μία μοναδική σκιογραμμή Σe της M που διέρχεται απο το p και έχει το v_p σαν εφαπτόμενο διάνυσμα στο σημείο p αυτής. Η Σe αναφέρεται σαν η μοναδική σκιογραμμή της M που διέρχεται δια του (p, v_p).

<u>Απόδειξη:</u>

Θεωρούμε το διάνυσμα $E_p = -JAT_p / |AT_p|$ του T_pM. Ο τελεστής σχήματος $A: T_pM \to T_pM$ είναι ένας γραμμικός ισομορφισμός, λόγω της γνήσιας κυρτότητας της M και άρα $E_p \neq 0$.

Έστω $\gamma(s)$ η γεωδαισιακή του IH^3 με $\gamma(0)=p$, $\gamma'(0)=E_p$. Αν η $\gamma(s)$ ξεκινάει από το σημείο $e \in \partial IH^3$ τότε προφανώς η σκιογραμμή Σe είναι η μοναδική σκιογραμμή της M. ο.ε.δ.

Ορίζουμε τώρα την απεικόνιση F: $S^1(M) \rightarrow \partial IH^3$ ως εξής:

. Κατ' αρχάς στο διάνυσμα v_p της $S^1(M)$ αντιστοιχούμε το διάνυσμα $E_p = -JAv_p / \mid Av_p \mid$, της $S^1(M)$. Επειδή ο τελεστής σχήματος A: $T_pM \rightarrow T_pM$ είναι ένας γραμμικός ισομορφισμός, η $G: S^1(M) \rightarrow S^1(M): v_p \rightarrow -JAv_p / \mid Av_p \mid$ είναι μία αμφιδιαφόριση.

Στην συνέχεια θεωρούμε την γεωδαισιακή $\gamma(s)$ του IH^3 με $\gamma(0)=p$, $\gamma'(0)=E_p$. Αν η $\gamma(s)$ ξεκινάει από το σημείο $e \in \partial IH^3$, ορίζουμε την

$$g: S^1(M) \rightarrow \partial IH^3 \text{ με } g(E_p) = e$$

Η απεικόνιση λοιπόν F: $S^1(M) \rightarrow \partial IH^3$ ορίζεται σαν την σύνθεση $g \circ G$ (βλ. Σχήμα 5).

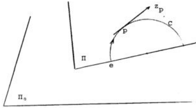
Τώρα η απεικόνιση g είναι διαφορίσιμη. Πράγματι, ο ορισμός της g επεκτείνεται για κάθε v_p στην εφαπτομένη δέσμη TIH^3 του IH^3. Ορίζεται έτσι μία απεικόνιση $\bar{g}$: $TIH^3 \rightarrow \partial IH^3$.

Επειδή δε $TIH^3 \approx IR^6$ μπορούμε να θεωρήσουμε την $\bar{g}$ ορισμένη επί του IR^6 επιπλέον η $\bar{g}$ περιγράφεται ως εξής:

Έστω $z_p = (y_1, y_2, y_3)$ ένα μη κατακόρυφο διάνυσμα εφηρμοσμένο στο σημείο $p = (x_1, x_2, x_3)$ του IH^3 και Π το κατακόρυφο επίπεδο που περιέχει το z_p. Κατασκευάζουμε ένα κύκλο C έτσι ώστε, ο C να περιέχεται στο επίπεδο Π, να τέμνει κάθετα το $\Pi_o = \{(x, y, z) \in IR^3: z=0\}$ και να εφάπτεται στο

z_p στο σημείο p. Διαλέγουμε τότε ανάλογα με τον προσανατολισμό του Z_p ένα σημείο e στο οποίο ο C τέμνει το Π_o (βλ. σχήμα 5). Προφανώς έχουμε $\bar{g}(z_p)$ = e. Έτσι με απλή αναλυτική γεωμετρία, μπορούμε να υπολογίσουμε ακριβώς την τιμή $\bar{g}(z_p)$ συναρτήσει των συντεταγμένων (x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) όταν το z_p δεν είναι κατακόρυφο διάνυσμα, με άλλα λόγια όταν η $\bar{g}$ ορίζεται επί του IR^6 – (IR^3x{0} x{0} xIR), και να δούμε ότι η $\bar{g}/IR^6$ – (IR^3x{0} x{0} xIR) είναι διαφορίσιμη.

Τώρα για τυχόν $z_p \in S^1(M)$ μπορούμε, χρησιμοποιώντας αν είναι αναγκαίον μία ισομετρία του IH^3, να υποθέσουμε ότι το z_p δεν είναι κατακόρυφο διάνυσμα. Άρα η g σε μία περιοχή του z_p είναι ο περιορισμός της $\bar{g}/IR^6$ – (IR^3x{0} x{0} xIR) και άρα η g είναι διαφορίσιμη σε μία περιοχή του z_p. Μ' αυτή την έννοια αποδεικνύεται ότι η g είναι διαφορίσιμη γύρω από κάθε $z_p \in S^1(M)$ και μ' αυτή την έννοια επίσης λέμε ότι η απεικόνιση g: $S^1(M) \to \partial IH^3$ είναι διαφορίσιμη.



(Σχήμα 5)

<u>Παρατήρηση:</u>

Εάν η έννοια της διαφορισιμότητας της g (λόγω της ύπαρξης του $\infty \in \partial IH^3$) δημιουργεί προβλήματα στον αναγνώστη τότε μπορεί να διατυπώσει όλους τους παραπάνω ορισμούς στον υπερβολικό μοντέλο (ID^3, ds).

Θα αποδείξουμε τώρα την εξής βασική πρόταση:

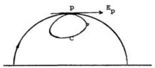
Πρόταση 3:

Η απεικόνιση $F: S^1(M) \to \partial IH^3$ έχει παντού τάξη 2 πάνω στην $S^1(M)$.

Απόδειξη:

Επειδή $F = g \circ G$ και η G είναι μία αμφιδιαφόριση, αρκεί να δείξουμε ότι η g έχει τάξη 2 πάνω στην $S^1(M)$.

Έστω E_p στοιχείον της $S^1(M)$. Χρησιμοποιώντας, εν ανάγκη, μία ισομετρία του IH^3, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το T_pM είναι ένα οριζόντιο επίπεδο. Έστω Π το κατακόρυφο επίπεδο που διέρχεται από το p και περιέχει το διάνυσμα E_p. Τότε $C = M \cap \Pi$ είναι μία γνήσια κυρτή καμπύλη της M, όπως έχουμε αποδείξει στο λήμμα της σελίδος 6.



(Σχήμα 6)

Ισχυρισμός 1:

Μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητος, ότι η C είναι γνήσια κυρτή καμπύλη με την ευκλείδεια έννοια σε μία περιοχή του σημείου p.

Απόδειξη του ισχυρισμού 1.

Έστω $S_p = \exp(T_pM)$, το οποίο αποτελεί ένα ημισφαίριο ορθογώνιο στο Π_∞. Συμβολίζουμε με T το μοναδιαίο, εφαπτόμενο δ.π. κατά μήκος της C και με την h την αντιστροφή του IH^3 ως προς το ημισφαίριο S_p.

Τότε έχουμε:

$$(\bar{\nabla}_T T)_p = (\bar{D}_T T)_p + x_3 e_3, \text{ όπου } \ p = (x_1, x_2, x_3)$$

Επίσης

$$(h_*(\bar{\nabla}_T T))_p = -(\bar{\nabla}_T T)_p = (\bar{\nabla}_{h_*T} h_*T)_p = (\bar{D}_{h_*T} h_*T)_p + x_3 e_3$$

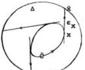
Άρα

$$(\bar{D}_T T)_p \neq 0 \text{ ή } (\bar{D}_{h_*T} h_*T)_p \neq 0.$$

Αν λοιπόν $(\bar{D}_T T)_p \neq 0$ συναγάγουμε ότι η C είναι γνήσια κυρτή με την ευκλείδεια έννοια σε μία περιοχή του p. Αντίθετα, αν $(\bar{D}_T T)_p = 0$ και $(\bar{D}_{h_*T} h_*T)_p \neq 0$ τότε η καμπύλη h(C) είναι γνήσια κυρτή με την ευκλείδεια έννοια σε μία περιοχή του p και χρησιμοποιόντας την h(C) στην θέση της C αποδεικνύεται ο ισχυρισμός μας.

Έστω τώρα c(t), $t \in [-l, l]$ μία παραμέτριση με μήκος τόξου της C, ώστε $c(0)=p$. Θεωρούμε επί της $S^1(M)$ την καμπύλη $\mathbf{c}(t) = (c(t), c'(t))$, $\mathbf{c}(0) = E_p$, και θα αποδείξουμε ότι η g περιορισμένη επί της $\mathbf{c}(t)$ είναι μεγίστης τάξης.

Πράγματι, ταυτίζουμε με μία ισομετρία το επίπεδο Π μέσα στον IH^3 με το υπερβολικό μοντέλο του Klein Δ ([Be] σ. 127). Τότε η C απεικονίζεται σε μία καμπύλη $\bar{C}$ του Δ. Επειδή τώρα οι γεωδαισιακές του Δ είναι ευθείες και η $\bar{C}$ γνήσια κυρτή, έπεται ότι η $\bar{C}$ είναι κυρτή με την ευκλείδεια έννοια (σχήμα 7).



(Σχήμα 7)

Θεωρούμε λοιπόν την εφαπτομενική δείκτρια.

$$\varphi : \bar{C} \to \partial\Delta = S^1, \quad \varphi(x) = \bar{x} \text{ με } \bar{x} = \varepsilon_x \cap \partial\Delta$$

όπου ε_x η εφαπτομένη ευθεία στο σημείο x της $\bar{C}$ (σχήμα 7).
Επειδή η $\bar{C}$ είναι κυρτή με την ευκλείδεια έννοια, συνεπάγεται ότι η διαφορίσιμη απεικόνιση φ είναι ένας τοπολογικός ομοιομορφισμός.

<u>Ισχυρισμός 2.</u>

Η φ είναι μία αμφιδιαφόριση, απ' όπου παίρνουμε αμέσως ότι η g περιορισμένη στην c(t) είναι μεγίστης τάξης.

<u>Απόδειξη του ισχυρισμού 2</u>

Έστω x τυχόν σημείον της $\bar{C}$ και $\bar{c}(t)$ μία παραμέτριση με μήκος τόξου της $\bar{C}$ έτσι ώστε $\bar{c}(0) = x$.

Για να δείξουμε ότι η φ είναι μία αμφιδιαφόριση αρκεί να δείξουμε ότι

$$[-l, l] \to S^1(M) : t \to \bar{T}(t) = \frac{d}{dt}\bar{c}(t)$$

ικανοποιεί

$$\frac{d}{dt}\bar{T}(t) \neq 0 \quad \forall \ t \in [-l, l]$$

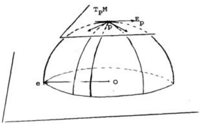
το οποίον ισχύει διότι η καμπύλη $\bar{C}$ είναι γνήσια κυρτή με την ευκλείδια έννοια. (βλ. Θεώρημα των Do-Carmo, Warner, σελ.123, μέρος (1), του $[S_{IV}]$).

Τώρα για να τελειώσουμε την απόδειξη της πρότασής μας, αρκεί να βρούμε μία άλλη καμπύλη της $S^1(M)$, η οποία διέρχεται από το E_p και απεικονίζεται μέσω της g σε μία ομαλή καμπύλη του Π_o, εγκάρσια στην $g(c(t))$.

Μία τέτοια καμπύλη είναι για παράδειγμα η

$$\beta(t) = \cos t \; E_p + \sin t \; JE_p, \; t \in [0, 2\pi]$$

η οποία απεικονίζεται μέσω της g σ' ένα κύκλο του Π_o.
Συγκεκριμένα $g(\beta(t)) = \cos t \; v + \sin t \; Jv$ με $v = Oe$ όπου O το κέντρο του ημισφαίριου S_p και $e = g(E_p)$ (βλ. σχήμα 8).



(Σχήμα 8)

Θεωρούμε λοιπόν την εφαπτομενική δείκτρια

$$\varphi : \bar{C} \to \partial\Delta = S^1, \quad \varphi(x) = \tilde{x} \text{ με } \tilde{x} = \varepsilon_x \cap \partial\Delta$$

όπου ε_x η εφαπτομένη ευθεία στο σημείο x της $\bar{C}$ (σχήμα 7).
Επειδή η $\bar{C}$ είναι κυρτή με την ευκλείδεια έννοια, συνεπάγεται ότι η διαφορίσιμη απεικόνιση φ είναι ένας τοπολογικός ομοιομορφισμός.

Ισχυρισμός 2.
Η φ είναι μία αμφιδιαφόριση, απ΄ όπου παίρνουμε αμέσως ότι η g περιορισμένη στην c(t) είναι μεγίστης τάξης.

Απόδειξη του ισχυρισμού 2
Έστω x τυχόν σημείον της $\bar{C}$ και $\bar{c}(t)$ μία παραμέτριση με μήκος τόξου της $\bar{C}$ έτσι ώστε $\bar{c}(0) = x$.
Για να δείξουμε ότι η φ είναι μία αμφιδιαφόριση αρκεί να δείξουμε ότι

$$[-1, 1] \to S^1(M) : t \to \bar{T}(t) = \frac{d}{dt}\bar{c}(t)$$

ικανοποιεί

$$\frac{d}{dt}\bar{T}(t) \neq 0 \ \forall \ t \in [-1, 1]$$

το οποίον ισχύει διότι η καμπύλη $\bar{C}$ είναι γνήσια κυρτή με την ευκλείδια έννοια. (βλ. Θεώρημα των Do-Carmo, Warner, σελ.123, μέρος (1), του $[S_{IV}]$).

5. Η καμπυλότητα και η στρέψη της Σ_e.

Έστω $v_p \in S^1(M)$ και $e = F(v_p)$ σημείον του συνόρου ∂IH^3. Συμβολίζουμε με Ε την παράλληλη δέσμη φωτός στον IH^3, η οποία ορίζεται από την σημειακή πηγή φωτός $e \in \partial IH^3$ και με Σe την σκιογραμμή της Μ η οποία εφάπτεται στο v_p στο σημείο p. Θα δείξουμε, ανάλογα προς την ευκλείδεια περίπτωση, ότι αν θεωρήσουμε την Σe ως καμπύλη του χώρου IH^3, τότε η καμπυλότητα και η στρέψη της Σe στο p, εκφράζεται συναρτήσει του v_p, με την βοήθεια των τανυστών A, ∇A, $\nabla^2 A$.

Μπορούμε να υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι το δ.π. Ε είναι κατακόρυφο, δηλαδή:

$$E_p = -x_3 e_3 \quad \text{όπου } p = (x_1, x_2, x_3)$$

Εάν συμβολίσουμε με (T, N, B) το τρίεδρο Frenet της Σe στον IH^3 και με k την καμπυλότητα της Σe, τότε στο σημείο p, έχουμε ότι:

$$k^2 = \langle \bar{\nabla}_T T, \bar{\nabla}_T T \rangle = \langle \bar{\nabla}_T T, n \rangle^2 + \langle \bar{\nabla}_T T, JT \rangle^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k^2 = \langle AT, T \rangle^2 + \langle \bar{\nabla}_T T, JT \rangle^2$$

$$\langle \bar{\nabla}_T T, JT \rangle = -\langle \bar{\nabla}_T T, AE/|AE| \rangle \quad \text{επειδή } T = JAE/|AE|$$

$$\left(\text{επειδή } \langle T, AE \rangle = 0 \Rightarrow \langle \bar{\nabla}_T T, AE \rangle = -\langle T, \bar{\nabla}_T AE \rangle\right)$$

$$\Rightarrow \langle \bar{\nabla}_T T, JT \rangle = (1/|AE|)\, \langle T, \nabla_T AE \rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \langle \bar{\nabla}_T T, JT \rangle = (1/|AE|)\, \langle T, \nabla A(T, E) + A(\nabla_T E) \rangle \tag{2}$$

Εξ΄ άλλου

$$\left.\begin{aligned} \bar{\nabla}_T E &= \bar{D}_T E + x_3 \{\langle T, E \rangle e_3 - \langle T, e_3 \rangle E - \langle E, e_3 \rangle T\} \\ \bar{D}_T E &= \bar{D}_T(-x_3 e_3) = -x_3 \langle T, e_3 \rangle e_3 - \langle T, e_3 \rangle E \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{\nabla}_T E = x_3 \{<T, E> e_3 - x_3 <E, e_3> T + (1-x_3) <T, e_3> E$$

Άρα ο όρος $\bar{\nabla}_T E$ δεν έχει κάθετη συνιστώσα στο σημείο p της σκιογραμμής. Δηλαδή $\nabla_T E = T(\bar{\nabla}_T E) = \bar{\nabla}_T E$

Επομένως:

$$\nabla_T E = x_3 \{<T, E> e_3 - x_3 <E, e_3> T + (1-x_3) <T, e_3> E \xrightarrow{E = -x_3 e_3}$$

$$\Rightarrow \nabla_T E = T - \frac{1}{x_3} <T, E> E \qquad (3)$$

Τώρα από τις σχέσεις (2) και (3) παίρνουμε ότι

$$\left.\begin{aligned} &<\bar{\nabla}_T T, JT> = (1/|AE|) <T, \nabla A(T, E) + \frac{1}{x_3} AT - \frac{1}{x_3} <T, E> AE> \\ &\text{όπου } E = -JAT/\ |AT| \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Τέλος από τις σχέσεις (1) και (4) συναγάγουμε την εξής πρόταση:

Πρόταση:

Υπάρχει μία C^∞- διαφορίσιμη συνάρτηση

$$\mathbf{r}: S^1(M) \to R$$

έτσι ώστε η τιμή $\mathbf{r}(v_p)$ είναι η καμπυλότης της σκιογραμμής Σε στο σημείο p αυτής, όπου Σε η μοναδική σκιογραμμή της M που διέρχεται δια του (p, v_p). ο.ε.δ.

Έστω τώρα $\alpha(s)$ μία παραμέτριση με μήκος τόξου της Σ_o και $k(s)$, $\tau(s)$ οι συναρτήσεις καμπυλότητος και στρέψης αντίστοιχα αυτής.

Θα αποδείξουμε την εξής βασική πρόταση:

Πρόταση:

Η συνάρτηση $k(s)$ είναι σταθερή.

Απόδειξη

Υποθέτουμε ότι η $k(s)$ δεν είναι σταθερή. Διαλέγουμε μία μη–κρίσιμη τιμή k_o της $k(s)$ και θεωρούμε το σύνολο $\mathbf{r}^{-1}(k_o)$ το οποίον κατά τα γνωστά αποτελεί μία συμπαγή επιφάνεια μέσα στην $S^1(M)$. Συμβολίζουμε με S_o μία συνεκτική συνιστώσα του $\mathbf{r}^{-1}(k_o)$ και θα αποδείξουμε ότι η απεικόνιση F περιορισμένη στην S_o έχει παντού τάξη 2 και επομένως είναι ένας ομοιομορφισμός επί του συνόρου $\partial \mathbb{H}^3$. Πράγματι, έστω $v_p \in S_o$, μπορούμε να υποθέσουμε, χρησιμοποιόντας αν είναι αναγκαίον μία ισομετρία του $\mathbb{H}^3$, ότι $F(v_p) \neq \infty \partial \mathbb{H}^3$. Έστω Σ η σκιογραμμή της M που διέρχεται από το (p, v_p) και έστω $\beta(\sigma)$ μία παραμέτριση με μήκος τόξου της Σ ε.ω. $\beta(0) = p$, $\beta'(0) = v_p$.

Επειδή η Σ είναι τοποθετήσιμη επί της S_o με μία ισομετρία του $\mathbb{H}^3$, έχουμε ότι:

$$\mathbf{r}(\beta(\sigma), \beta'(\sigma) = k(s(\sigma))$$

όπου η $s(\sigma)$ ορίζει μία αναπαραμέτρηση με μήκος τόξου της Σ_o και άρα $\frac{ds}{d\sigma} = 1$.

Επομένως:

$$\frac{d}{d\sigma}\Big|_0 \mathbf{r}(\beta(\sigma), \beta'(\sigma) = \frac{dk}{d\sigma}(s(0)) \frac{ds}{d\sigma}\Big|_{\sigma=0} = \frac{dk}{d\sigma} (s(0) \neq 0$$

επειδή $k(s(0)) = k_o$ είναι μία μη–κρίσιμη τιμή της $\kappa(s)$.

Από την άλλη μεριά έχουμε ότι

$$\frac{d}{d\sigma}\Big|_0 \mathbf{r}(\beta(\sigma), \beta'(\sigma) = \mathbf{r}_{*(\beta(0),\, \beta'(0))} (\beta'(0), \beta''(0)) \neq 0$$

απ' όπου παίρνουμε ότι το διάνυσμα $(\beta'(0), \beta''(0))$ είναι εγκάρσιο στο εφαπτόμενο επίπεδο $T_{(\beta(0),\, \beta'(0))} S_o$.

Τώρα το $(\beta'(0), \beta''(0))$ εφάπτεται στην καμπύλη $(\beta'(\sigma), \beta''(\sigma))$ της $S^1(M)$, η οποία απεικονίζεται μέσω της F σ' ένα σταθερό σημείο του $\partial \mathbb{H}^3$. Επομέ–

νως το $(\beta'(0), \beta''(0))$ ορίζει την τετριμμένη διεύθυνση της $F: S^1(M) \to \partial \mathbb{H}^3$. Δηλαδή $F_{*(\beta(0),\, \beta'(0))}(\beta'(0), \beta''(0)) = 0$.

Έπεται λοιπόν ότι η F έχει τάξη 2 πάνω στην συνιστώσα S_o. Επομένως κατά τα γνωστά η $F: S_o \to \partial \mathbb{H}^3$ αποτελεί μία κάλυψη του $\partial \mathbb{H}^3$. Όμως, επειδή το σύνορο $\partial \mathbb{H}^3$ είναι απλά συνεκτικός χώρος η $F: S_o \to \partial \mathbb{H}^3$ είναι τελικά ένας ομοιομορφισμός.

Τώρα είμαστε σε θέση να κατασκευάσουμε ένα συνεχές δ.π. ξ, παντού διάφορο του μηδενός εφαπτόμενο στο σύνορο $\partial \mathbb{H}^3$. Έτσι θα καταλήξουμε εις άτοπον ([M]) και άρα συναγάγουμε ότι η συνάρτηση k(s) είναι σταθερή. Η κατασκευή του ξ γίνεται πιο φυσική εάν χρησιμοποιήσουμε το υπερβολικό μοντέλο $(\mathbb{D}^3, ds)$.

Πράγματι, σε κάθε $e \in \partial \mathbb{D}^3$ αντιστοιχούμε κατ΄ αρχάς το διάνυσμα $F^{-1}(e) = v_p$ της S_o και έστω E η παράλληλη δέσμη φωτός που ορίζεται από την σημειακή πηγή $e \in \partial \mathbb{D}^3$. Μπορούμε, χρησιμοποιώντας εν ανάγκη μία ισομετρία $(\mathbb{D}^3, ds)$, να υποθέσουμε ότι το κέντρο O του δίσκου $\mathbb{D}^3$ βρίσκεται στο εσωτερικό της επιφάνειας M.

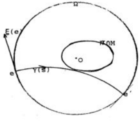
Θεωρούμε τη γεωδαισιακή γ(s) του $\mathbb{D}^3$ ε.ω.

$$\gamma(0) = p, \quad \gamma'(0) = E_p = -JAv_p / |Av_p|.$$

Η γ(s) ξεκινάει προφανώς από το σημείο $e \in \partial \mathbb{D}^3$.
Έστω τώρα *Π* το επίπεδο που διέρχεται από το O και περιέχει το διάνυσμα E_p. Προφανώς το *Π* τέμνει το σύνορο $\partial \mathbb{D}^3$ σ΄ ένα κύκλο Ω. Επειδή δε το *Π* είναι μία ολικά γεωδαισιακή υπολ/τα του $(\mathbb{D}^3, ds)$, έπεται ότι η γ(s) ανήκει στο *Π* και άρα το σημείο $e \in \Omega$.

Θεωρούμε τώρα το εφαπτόμενο διάνυσμα ξ(e) στον κύκλο Ω στο σημείο e αυτού, ε.ω.: το ξ(e) να έχει τον προσανατολισμό του τόξου ee΄, όπου ee΄ το μέγιστον τόξον του Ω με $\{e, e'\} = \gamma \cap \Omega$ (βλ. σχήμα 9).

Παίρνουμε έτσι ένα συνεχές (λόγω της γεωμετρικής κατασκευής) δ.π., παντού διάφορον του μηδενός πάνω στο σύνορο $\partial \mathbb{D}^3 = S^2$ και ολοκληρώνεται έτσι η απόδειξή μας.



(Σχήμα 9)

Στην συνέχεια θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση στρέψης τ(s) της α(s) είναι επίσης σταθερή. Συμβολίζουμε με τ την στρέψη της σκιογραμμής Σe και θα αποδείξουμε ότι στο σημείο p της Σe αυτή εκφράζεται συναρτήσει του v_p, με την βοήθεια των τανυστών A, ∇A, $\nabla^2 A$. Πράγματι στο σημείο p έχουμε:

$$\tau = <\bar{\nabla}_T N,\ B> = \frac{1}{\kappa^2} <\bar{\nabla}_T(\bar{\nabla}_T T),\ T \wedge \bar{\nabla}_T T> \qquad (5)$$

(επειδή η καμπυλότης k της Σe είναι σταθερή)

Στην συνέχεια θα εκφράσουμε τους όρους $(\bar{\nabla}_T T)_p$, $(\bar{\nabla}_T(\bar{\nabla}_T T))_p$ συναρτήσει του T_p με την βοήθεια των A, ∇A, $\nabla^2 A$.

i) Για τον όρο $\bar{\nabla}_T T$ έχουμε:

$$\bar{\nabla}_T T = \bar{\nabla}_T(JAE/\ |AE|) = T(<AE,\ AE>^{-1/2})\ JAE + (1/\ |AE|)\bar{\nabla}_T JAE =$$

$$= -<AE,\ AE>^{-3/2}<\bar{\nabla}_T AE,\ AE>JAE + (1/\ |AE|)\bar{\nabla}_T JAE =$$

$$= -(1/\ |AE|)^3<\nabla_T AE,\ AE>JAE + (1/\ |AE|)\ (\nabla_T JAE + <\bar{\nabla}_T JAE,\ n>n) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{\nabla}_T T = -(1/\ |AE|)^3<\nabla A(T,\ E) + A(\nabla_T E),\ \ AE > JAE +$$

$$+ (1/\ |AE|)^3\{J\nabla A(T,\ E) + JA(\nabla_T E)\}\ -(1/\ |AE|)<JAE,\ AT>n \qquad (6)$$

Αντικαθιστώντας στην τελευταία έκφραση του $\bar{\nabla}_T T$ τον όρο $\nabla_T E$ από την σχέση (3) και θέτοντας $E = -JAT/\ |AT|$ συμπεραίνουμε τελικά ότι ο όρος $(\bar{\nabla}_T T)_p$ εκφράζεται συναρτήσει του T_p, με την βοήθεια των A, ∇A. Δηλαδή έχουμε:

$$(\bar{\nabla}_T T)_p = f_1(T_p) \qquad (7)$$

Τώρα για τον όρο $\bar{\nabla}_T(\bar{\nabla}_T T)$ έχουμε:

$$\bar{\nabla}_T(\bar{\nabla}_T T) = \bar{\nabla}_T(-<AE,\ AE>^{-3/2}<\nabla A(T,\ E),\ AE>JAE\ -$$

$$-<AE,AE>^{-3/2}<A(\nabla_T E),AE>JAE + <AE,AE>^{-1/2}J\nabla A(T,E) + <AE,AE>^{-1/2}JA(\nabla_T E)\ -$$

$$-<AE,\ AE>^{-1/2}<JAE,\ AT>n) =$$

$$= 3<AE,\ AE>^{-5/2}<\bar{\nabla}_T AE,\ AE>\ <\nabla A(T,\ E),\ AE>JAE\ -$$

$$-\ <AE,\ AE>^{-3/2}<\bar{\nabla}_T(\nabla A(T,E)),\ AE>JAE\ -<AE,\ AE>^{-3/2}<\nabla A(T,\ E),\bar{\nabla}_T AE>JAE\ -$$

$$-<AE,\ AE>^{-3/2}<\nabla A(T,E,)\ AE>\bar{\nabla}_T JAE + 3<AE,\ AE>^{-5/2}<\bar{\nabla}_T AE,\ AE><A(\nabla_T E),AE>JAE\ -$$

$$- \langle AE, AE\rangle^{-3/2} \langle \bar{\nabla}_T (A(\nabla_T E)), AE\rangle JAE - \langle AE, AE\rangle^{-3/2} \langle A(\nabla_T E), \bar{\nabla}_T AE\rangle JAE -$$

$$- \langle AE, AE\rangle^{-3/2} \langle (A(\nabla_T E), AE\rangle \bar{\nabla}_T JAE - \langle AE, AE\rangle^{-3/2} \langle \bar{\nabla}_T AE, AE\rangle J\nabla A(T, E) +$$

$$+ \langle AE, AE\rangle^{-1/2} \langle \bar{\nabla}_T (J\nabla A(T,E) - \langle AE, AE\rangle^{-3/2} \langle \bar{\nabla}_T AE, AE\rangle JA(\nabla_T E) +$$

$$+ \langle AE, AE\rangle^{-1/2} \bar{\nabla}_T JA(\nabla_T E) + \langle AE, AE\rangle^{-3/2} \langle \bar{\nabla}_T AE, AE\rangle \langle JAE, AT\rangle n -$$

$$- \langle AE, AE\rangle^{-1/2} \langle \bar{\nabla}_T JAE, AT\rangle n - \langle AE, AE\rangle^{-1/2} \langle JAE, \bar{\nabla}_T AT\rangle n -$$

$$- \langle AE, AE\rangle^{-1/2} \langle JAE, AT\rangle \bar{\nabla}_T n$$

Επομένως

$$\nabla_T(\nabla_T T) = 3(1/\ |AE|)^5 \langle \nabla_T AE, AE\rangle \langle \nabla A(T, E), AE\rangle JAE -$$

$$- (1/\ |AE|)^3 \langle \nabla_T(\nabla A(T,E)), AE\rangle JAE - (1/\ |AE|)^3 \langle \nabla A(T,E), \nabla_T AE\rangle JAE -$$

$$- (1/\ |AE|)^3 \langle \nabla A(T,E), AE\rangle \nabla_T JAE + (1/\ |AE|)^3 \langle \nabla A(T,E), AE\rangle \langle JAE, AT\rangle n +$$

$$+ 3(1/\ |AE|)^5 \langle \nabla_T AE, AE\rangle \langle A(\nabla_T E), AE\rangle JAE - (1/\ |AE|)^3 \langle \nabla_T(\nabla_T E)), AE\rangle JAE -$$

$$- (1/\ |AE|)^3 \langle A(\nabla_T E), \nabla_T AE\rangle JAE - (1/\ |AE|)^3 \langle A(\nabla_T E), AE\rangle \nabla_T JAE +$$

$$+ (1/\ |AE|)^3 \langle A(\nabla_T E, AE\rangle \langle JAE, AT\rangle n - (1/\ |AE|)^3 \langle \nabla_T AE, AE\rangle J\nabla A\ (T,E) +$$

$$+ (1/\ |AE|)\ \nabla_T\ (J\nabla A\ (T,E)) - (1/\ |AE|) \langle J\nabla A\ (T,E), AT\rangle n -$$

$$+ (1/\ |AE|)^3 \langle \nabla_T E, AE\rangle \langle JA(\nabla_T E)\rangle + (1/\ |AE|)\ \nabla_T JA + (\nabla_T E) -$$

$$- (1/\ |AE|) \langle JA(\nabla_T E), AT\rangle n + (1/\ |AE|)^3 \langle \nabla_T AE, AE\rangle \langle JAE, AT\rangle n -$$

$$- (1/\ |AE|) \langle \nabla_T JAE, AT\rangle n - (1/\ |AE|) \langle JAE, \nabla_T AT), AT\rangle n -$$

$$- (1/\ |AE|) \langle JAE, AT\rangle\ AT$$

Χρησιμοποιόντας στην συνέχεια και την ταυτότητα

$$\nabla_T(\nabla A(T, E)) = \nabla^3 A(T, T, E) + \nabla A(\nabla_T T, E) + \nabla A(T, \nabla_T E)$$

παίρνουμε ότι:

$$\bar{\nabla}_T(\bar{\nabla}_T T) = 3(1/|AE|)^5 < \nabla A(T, E) + A(\nabla_T E), AE > < \nabla A(T, E), AE > JAE -$$

$$- (1/|AE|)^3 < \nabla^2 A(T, T, E) + \nabla A(\nabla_T T, E) + \nabla A(T, \nabla_T E), AE > JAE -$$

$$- (1/|AE|)^3 < \nabla A(T, E), \nabla A(T, E) + A(\nabla_T E) > JAE -$$

$$- (1/|AE|)^3 < \nabla A(T, E), AE\{J\nabla A(T, E) + JA(\nabla_T E)\} +$$

$$+ (1/|AE|)^3 < \nabla A(T, E), AE > < JAE, AT > n -$$

$$- 3(1/|AE|)^5 < \nabla A(T, E) + A(\nabla_T E), AE > < A(\nabla_T E), AE > JAE -$$

$$- (1/|AE|)^3 < \nabla A(T, \nabla_T E) + A(\nabla_T(\nabla_T E)), AE > JAE -$$

$$- (1/|AE|)^3 < A(, \nabla_T E), \nabla A(T, E) + A(\nabla_T E) > JAE -$$

$$- (1/|AE|)^3 < A(\nabla_T E), AE\{J\nabla A(T, E) + JA(\nabla_T E)\} +$$

$$+ (1/|AE|)^3 < A(\nabla_T E), AE > < JAE, AT > n -$$

$$- (1/|AE|)^3 < \nabla A(T,E) + A(\nabla_T E), AE > J\nabla A(T,E) +$$

$$+ (1/|AE|) \{J\nabla^2 A(T, T, E) + J\nabla A(\nabla_T T, E) + J\nabla A(T, \nabla_T, E)\} -$$

$$- (1/|AE|) <J\nabla A(T,E),\ AT>n - (1/|AE|)^3 <\nabla A(T, E) + A(\nabla_T E),\ AE>JA(\nabla_T E) +$$

$$+ (1/|AE|) \{J\nabla A(T, \nabla_T E) + JA(\nabla_T(\nabla_T E))\} - (1/|AE|)<JA(\nabla_T E),\ AT>n +$$

$$+ (1/|AE|)^3 <\nabla A(T,E) + A(,\nabla_T E),\ AE> <JAE,\ AT>n -$$

$$- (1/|AE|) <\nabla A(T\ ,\ E)+A(,\nabla_T E),\ AT>n -$$

$$- (1/|AE|) <JAE,\ \nabla A(T,\ T)+A(,\nabla_T T)>n - (1/|AE|)<JAE,\ AT>AT$$

Επίσης έχουμε

$$\nabla_T T = T(\bar{\nabla}_T T) \quad \xRightarrow{(6)}$$

$$\nabla_T T = - (1/|AE|)^3 <\nabla A(T, E) + A(\nabla_T E)>JAE + (1/|AE|) \{J\nabla A(T,E) + JA(\nabla_T E)\}$$

Άρα ο όρος $(\nabla_T T)_p$ εκφράζεται συναρτήσει του T_p, δηλαδή:

$$(\nabla_T T)_p = f_2(T_p) \qquad (8)$$

Εξ' άλλου από την (3) παίρνουμε

$$\nabla_T(\nabla_T E) = \nabla_T(x_3<T,E>e_3 - <E,\ e_3>T + (1-x_3)<T,\ e_3>E) =$$

$$= T(x_3)<T,\ E>e_3+x_3<\nabla_T T,\ E>e_3 + x_3<T,\nabla_T E>e_3 + x_3<T,E>\nabla_T e_3 -$$

$$- <\nabla_T E,\ e_3>T-<E,\ \nabla_T E,e_3>T-<E,\ e_3>\nabla_T T + T(1-x_3)<T,\ e_3>E +$$

$$+ (1-x_3)<\nabla_T T,\ e_3>E + (1-x_3)<T,\ \nabla_T e_3>E + (1-x_3)<T,\ e_3>\nabla_T E \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \nabla_T(\nabla_T E) = \langle T,E\rangle^2 E - \langle \nabla_T T,\ E\rangle E - \langle T, \nabla_T E\rangle E + x_3\langle T,E\rangle \nabla_T e_3 +$$

$$+ \frac{1}{x_3}\langle \nabla_T T,\ E\rangle T - \langle E,\ \nabla_T x_3\rangle T + \frac{1}{x_3}\ \nabla_T T - \langle T,\ E\rangle E -$$

$$- (1/x_3 - 1)\langle \nabla_T T,\ E\rangle E + (1-x_3)\langle T,\ \nabla_T e_3\rangle E - (1/x_3 - 1)\langle T,\ E\rangle \nabla_T E$$

Επίσης έχουμε:

$$\nabla_T e_3 = T(\bar{\nabla}_T e_3) = T(\bar{D}_T e_3 + x_3\{\langle T,\ e_3\rangle e_3 - \langle T,\ e_3\rangle e_3 - \langle e_3,\ e_3\rangle T\})$$

$$\Rightarrow \nabla_T e_3 = \frac{1}{x_3}\ T \qquad (9)$$

Αντικαθιστώντας λοιπόν στην παραπάνω έκφραση του $\nabla_T(\nabla_T E)$ τους όρους $\nabla_T E$, $\nabla_T T$, $\nabla_T e_3$ από τις σχέσεις (3), (8), (9) αντίστοιχα παίρνουμε ότι ο όρος $\nabla_T(\nabla_T E))_p$ εκφράζεται συναρτήσει του T_p, δηλαδή

$$(\nabla_T(\nabla_T E))_p = f_3(T_p) \qquad (10)$$

Εάν τώρα ξαναέρθουμε στην τελευταία έκφραση του $\bar{\nabla}_T(\bar{\nabla}_T E)$ της σελίδος 53, και αντικαταστήσουμε τού όρους $\nabla_T E$, $\nabla_T T$, $\nabla_T(\nabla_T E)$ από τις σχέσεις (3), (8), (10), αντίστοιχα, θέσουμε δε $E^{\cdot} = -JAT/\ |AT|$, βλέπουμε ότι ο όρος $\nabla_T(\nabla_T T))_p$ εκφράζεται συναρτήσει του T_p, με την βοήθεια των A, ∇A, $\nabla^2 A$.

Δηλαδή:

$$(\bar{\nabla}_T(\bar{\nabla}_T T))_p = f_4(T_p)$$

Άρα από την (5) παίρνουμε ότι η στρέψη τ της Σε στο p ισούται με

$$\tau = \frac{1}{k^2}\langle\ f_4(T_p),\ T_p \wedge f_4(T_p)\rangle$$

Αποδείξαμε λοιπόν την εξής πρόταση:

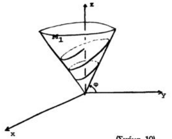
Πρόταση:

Υπάρχει μία C^∞– διαφορίσιμη συνάρτηση $\tilde{\tau}: S^1(M) \to \mathbb{R}$ ε.ω. η τιμή $\tilde{\tau}(v_p)$ είναι η στρέψη της σκιογραμμής Σe στο σημείο p αυτής, όπου Σe η μοναδική σκιογραμμή της M η οποία διέρχεται από το (p, v_p). ο.ε.δ.

Τώρα χρησιμοποιώντας την συνάρτηση $\tilde{\tau}$ (στην θέση της συνάρτησης τ αποδεικνύουμε εντελώς παρόμοια προς την πρόταση της σελ. 46 ότι η συνάρτηση στρέψης $\tau(s)$ της Σ_o είναι σταθερή.

6. Καμπύλες σταθερής καμπυλότητος και στρέψης στον $\mathbb{H}^3$ (Υπερβολικοί έλικες)

Έστω M_1 το σύνολο των σημείων του $\mathbb{H}^3$, που απέχουν σταθερή απόσταση από τον z–άξονα. Το M_1 είναι ένας ορθός κυκλικός κώνος και αποτελεί μία πλήρη επιφάνεια μέσα στον $\mathbb{H}^3$ ([Siv] σ. 171).



(Σχήμα 10)

Υποθέτουμε ότι οι γενέτειρες του κώνου σχηματίζουν γωνίαν φ με τον y-άξονα. Τότε ισχύει η ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση:

Οι διευθύνσεις της γενέτειρας του κώνου M_1 και του παράλληλου κύκλου προς το (x, y)-επίπεδο είναι κύριες διευθύνσεις. Ακόμη η κύρια καμπυλότητα κατά την διεύθυνση των γενέτειρων του κώνου είναι $k_1 = \cos\varphi$, η δε κύρια καμπυλότητα κατά την διεύθυνση των εφαπτομένων των κύκλων, των παραλλήλων στο (x,y) επίπεδο, είναι $k_2 = 1/\cos\varphi$.

Απόδειξη

i) Υπολογισμός της k_1:

Έστω $\beta(t) = (t\cos\varphi,\ 0,\ t\sin\varphi)$ μία παραμέτριση της γενέτειρας του κώνου που βρίσκεται στο (y, Z) επίπεδο. Συμβολίζουμε με $T_o(t)$, $T(t)$ τα μοναδιαία εφαπτόμενα δ.π. κατά μήκος της $\beta(t)$, ως προς την ευκλείδεια και την υπερβολικά μετρική αντίστοιχα, και με $\nu_o(t)$, ν (t) τα μοναδιαία κάθετα δ.π. στην M_1 κατά μήκος της $\beta(t)$, επίσης ως προς την ευκλείδεια και υπερβολική μετρική. Τότε έχουμε:

$T_o(t) = (\cos\varphi,\ 0,\ \sin\varphi)$, $\quad T = x_3 T_o$ στο σημείο $p = (x_1, x_2, x_3)$

$\nu_o(t) = (\sin\varphi,\ 0,\ \cos\varphi)$, $\quad \nu = x_3\, \nu_o$, στο σημείο $p = (x_1, x_2, x_3)$

Αν $<\ ,\ >_o$ συμβολίζει την συνήθη ευκλείδεια μετρική, τότε στο σημείο $p=(x_1, x_2, x_3)$, έχουμε:

$$\bar{\nabla}_T \nu = \bar{D}_{x_3 T_o}(x_3 \nu_o) - x_3\{<T_o, e_3>_o \nu_o + <\nu_o, e_3>_o T_o\} =$$

$$= x_3 T_o(x_3)\nu_o - x_3(\sin\varphi\, \nu_o + \cos\varphi\, T_o) =$$

$$= x_3 \sin\varphi\, \nu_o - x_3 \sin\varphi\, \nu_o - x_3 \cos\varphi\, T_o =$$

$$= -\cos\varphi\, T \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_1 = \cos\varphi \quad \text{(ανεξάρτητα του σημείου } p \in M_1)$$

ii) Υπολογισμός της k_2:

Έστω $\delta(t)=(\cos t, \sin t, x_3)$ μία παραμέτριση του οριζόντιου κύκλου επί της M_1, που διέρχεται από το σημείο $p=(x_1, x_2, x_3)$. Τότε αν συμβολίσουμε ξανά με T_o, T τα μοναδιαία εφαπτόμενα δ.π. κατά μήκος της $\delta(t)$, ως προς την ευκλείδεια και την υπερβολικά μετρική αντίστοιχα, έχουμε ότι:

$T_o(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$,
$v_o(t) = (-\cos t \cdot \sin\varphi, -\sin t \cdot \cos\varphi, \cos\varphi)$,

Άρα στο σημείο $p=(x_1, x_2, x_3)$, έχουμε:

$$\bar{\nabla}_T v = \bar{D}_T v - x_3\{<T_o, e_3>_o v_o + <v_o, e_3>_o T_o\} =$$

$$= x_3^2 \bar{D}_{T_o} v_o - \cos\varphi T$$

Παρατηρούμε τώρα ότι $\bar{D}_{T_o} v_o = -\lambda T_o$, όπου λ είναι η ευκλείδεια κύρια καμπυλότητα κατά την διεύθυνση του T_o. Εάν λοιπόν θεωρήσουμε τον ορθό κώνο M_1 σαν μία επιφάνεια μέσα στον ευκλείδειο χώρο και το παραμετρίσμουμε με την παραμέτρηση

$$x(t, x_3) = (x_3 \cos t/\tan\varphi, x_3 \sin t/\tan\varphi, x_3)$$

τότε από τους γνωστούς τύπους παίρνουμε ότι $\lambda=\sin^2\varphi/\cos\varphi$, δηλαδή

$$\bar{D}_{T_o} v_o = -\sin^2\varphi/\cos\varphi T_o$$

Άρα

$$\bar{\nabla}_T v = -(\sin^2\varphi/\cos\varphi)T - \cos\varphi T = -(1/\cos\varphi)T \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_2 = 1/\cos\varphi \quad \text{(ανεξάρτητα του σημείου p) ο.ε.δ.}$$

Από την παραπάνω πρόταση ότι η εξωτερική καμπυλότητα της M_1 είναι ίση με 1. Πράγματι έχουμε $K_{\varepsilon\xi} = K_1 K_2 = \cos\varphi \cdot \dfrac{1}{\cos\varphi} = 1$. Τώρα χρησιμοποιώντας την εξίσωση του Gauss $= K_{\varepsilon\sigma} = K_{\varepsilon\xi} + K_o$ [S_{IV} σ. 128], για $K_{\varepsilon\xi} = 1$, $K_o = -1$, συμπεραίνουμε ότι η εσωτερική καμπυλότητα Κεσ της M_1 είναι σταθερή ίση με 0. Έχουμε την εξής πρόταση:

Πρόταση:
Μία καμπύλη σταθερής καμπυλότητος $k\neq 0$ και σταθεράς στρέψης $\tau\neq 0$ στον $\mathbb{H}^3$, είναι μία έλικα επί της M_1, η οποία ορίζεται ως μία καμπύλη επί του κώνου M_1, η οποία σχηματίζει σταθερή γωνία με τις γενετειρές του. Αυτές οι καμπύλες θα αναφέρονται στην συνέχεια ως υπερβολικοί έλικες.

Απόδειξη:
Επειδή η εσωτερική καμπυλότητα της M_1 είναι μηδέν, αυτή είναι ισομετρική, μέσω μιας ισομετρίας h με ένα ορθό κυκλικό κύλινδρο $\widehat{M}_1$ του $\mathbb{H}^3$, ([W] σ. 77). Έστω λοιπόν $h = \widehat{M}_1 \rightarrow M_1$ η παραπάνω ισομετρία και ισχυρίζόμαστε ότι η h στέλνει τις κύριες διευθύνσεις της $\widehat{M}_1$ στις κύριες διευθύνσεις της M_1. Πράγματι, θεωρούμε τον κύκλο R επί της M_1 ο οποίος είναι παράλληλος στο (x, y) – επίπεδο. Ο R αποτελεί μία γεωδαισιακή της M_1. Πράγματι ο R βρίσκεται πάνω σε μία γεωδαισιακή υπολ/τα του $\mathbb{H}^3$, η οποία είναι μία σφαίρα με κέντρο την κορυφή του κώνου M_1 και η οποία τέμνει κάθετα την M_1.

Επομένως αν T είναι το μοναδιαίο εφαπτόμενο διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της R, το διάνυσμα $\overline{\nabla}_T T$ είναι κάθετο στην M_1 και άρα $\nabla_T T=0$. Η εικόνα του R λοιπόν μέσω της h^{-1} είναι μία γεωδαισιακή $\widehat{R}$ επί της $\widehat{M}_1$. Όμως οι μόνες κλειστές γεωδαισιακές του $\widehat{M}_1$ είναι οι κύκλοι των οποίων τα επίπεδα είναι κάθετα στις γενέτειρες του. Εύκολα συμπεραίνουμε κατά συνέπεια ότι η h^{-1} απεικονίζει και τις γενέτειρας της M_1 στις γενέτειρες της $\widehat{M}_1$ και αποδεικνύεται ο ισχυρισμός μας.

Θεωρούμε πάνω στην $\hat{M}_1$ μία έλικα $\hat{C}$ η οποία σχηματίζει σταθερή γωνία θ με τις γενέτειρες της $\hat{M}_1$. Ως γνωστόν η καμπύλη $\hat{C}$ έχει σταθερή $\hat{k}$=σταθερή, $\hat{\tau}$=σταθερή, όπου $\hat{k}$, $\hat{\tau}$ είναι η καμπυλότης και η στρέψη της $\hat{C}$ μέσω στον IH^3.

Έστω τώρα $C=h(\hat{C})$ πάνω στην M_1. Η καμπύλη $\hat{C}$ είναι μία γεωδαισιακή της M_1, άρα η C είναι μία γεωδαισιακή της M_1. Επομένως $k=|k_n|$, $\tau=\tau_g$, όπου k, τ είναι η καμπυλότης και η στρέψη της C μέσα στον IH^3, και k_n, τ_g η κάθετη καμπυλότης και η γεωδαισιακή στρέψη αντίστοιχα της C.

Τώρα ως γνωστόν

$$k_n = k_1\cos^2\theta + k_1\sin^2\theta, \qquad \tau_g = (k_2-k_1)\,\sin\theta\cos\theta$$

όπου $k_1=\cos\varphi$, $k_2=1/\cos\varphi$.

Επομένως συμπεραίνουμε ότι η καμπύλη C του IH^3 όλη σταθερή καμπυλότητα και στρέψη, και αυτές όλες τις μη-μηδενικές πραγματικές τιμές για φ, θ $\in(0, \pi/2)$. Τώρα το θεμελιώδες θεώρημα για καμπύλες σε χώρους σταθερής καμπυλότητος ([S_{IV} σ. 35]), μας εξασφαλίζει ότι αν c_1, c_2: $(-\infty, \infty)\to IH^3$ είναι δύο καμπύλες παραμετρισμένες με μήκος τόξου, των οποίων οι συναρτήσεις καμπυλότητος και στρέψης k_1, τ_1 και k_2, τ_2, αντίστοιχα είναι παντού διάφορες του μηδενός και $k_1(s) = k_2$, $\tau_1(s) = \tau_2$ $\forall\ s\in(-\infty, \infty)$, τότε οι c_1, c_2 ταυτίζονται με μία ισομετρία του IH^3. Από εδώ προκύπτει λοιπόν ότι όλες οι καμπύλες του IH^3 σταθερής, μη-μηδενικής καμπυλότητας και στρέψης είναι υπερβολικές έλικες. ο.ε.δ.

<u>Πόρισμα:</u>
Η καμπύλη Σ_o είναι ένας γεωδαισιακός κύκλος.

<u>Απόδειξη:</u>
Από την παραπάνω πρόταση συναγάγουμε ότι η συνάρτηση στρέψη τ(s) της

Σ_o είναι σταθερή ίση με μηδέν, επειδή ακριβώς η Σ_o είναι μία κλειστή καμπύλη. Τώρα επειδή $k(s)$ = σταθερή, $\tau(s) = 0$, έπεται ότι η Σ_o είναι ένας γαιωδαισιακός κύκλος πάνω σε μία ολικά γεωδαισιακή επιφάνεια του $\mathbb{H}^3$. Τούτο προκύπτει άμεσα από το γεγονός ότι οι γεωδαισιακοί κύκλοι του $\mathbb{H}^3$ είναι συνήθεις κύκλοι περιεχόμενοι στον $\mathbb{H}^3$ σε συνδυασμό με το θεμελιώδες θεώρημα για καμπύλες σε χώρους σταθερής καμπυλότητας ([S_{IV} σ. 35]). ο.ε.δ.

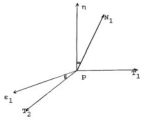
7. Απόδειξη του Θεωρήματος

Έχοντας σαν δεδομένο ότι όλες οι σκιογραμμές ειναι ισομετρικές προς τον γεωδαισιακό κύκλο Σ_o, θα δείξουμε ότι όλα τα σημεία της M είναι ομφαλικά.

Έστω λοιπόν p ένα τυχόν σημείο της M και θα αποδείξουμε ότι το p είναι ένα ομφαλικό σημείο. Έστω T_1, T_2 είναι οι κύριες διευθύνσεις του T_pM και Σ_1, Σ_2 οι σκιογραμμές της M που διέρχονται από το p και εφάπτονται στα διανύσματα T_1, T_2.

Κάθε Σ_i $i = 1, 2$ περιέχεται σε μία μοναδική, ολικά γεωδαισιακή επιφάνεια $\boldsymbol{S}_i$ $i=1, 2$ η οποία είναι ένα επίπεδο ή μία σφαίρα ορθογώνια στο Π_o. Μπορούμε να υποθέσουμε, μέσω μιας αντιστροφής του $\mathbb{H}^3$, ότι κάθε $\boldsymbol{S}_i$ είναι ένα επίπεδο και κατά συνέπεια η τομή τους είναι μία ευθεία L κάθετη στο Π_o. (Πράγματι, αν κάποια $\boldsymbol{S}_i$ δεν είναι επίπεδο, τότε $\boldsymbol{S}_1 \cap \boldsymbol{S}_2$ είναι ένα ημικύκλιο ορθογώνιο στο Π_o. Αρκεί λοιπόν να κάνουμε μία αντιστροφή στον $\mathbb{H}^3$, που στέλνει αυτό το ημικύκλιο σε μία κατακόρυφη ευθεία). Οι σκιογραμμές Σ_1, Σ_2 τέμνονται κατά συνέπεια σε δύο σημεία της ευθείας L.

Συμβολίζουμε τώρα με ε_i το διάνυσμα το κάθετο στο επίπεδο $\boldsymbol{S}_i$ στην θέση p, $i=1, 2$, έτσι ώστε $\langle\varepsilon_1, T_2\rangle \geq 0$, $\langle\varepsilon_2, T_1\rangle \geq 0$, και με $N_i = \nabla_{T_i}T_i / |\nabla_{T_i}T_i|$ το διάνυσμα επιτάχυνσης της Σ_i $i=1, 2$ στο σημείο p.



Τα διανύσματα n, N_1, ε_1, T_2 ανήκουν όλα στο επίπεδο το κάθετο στο T_1 και έχουμε ότι $\varepsilon_1 \perp N_1$, $n \perp T_2$. Άρα

$$\sphericalangle (n, N_1) = \sphericalangle (\varepsilon_1, T_2) \qquad (1)$$

Ομοίως

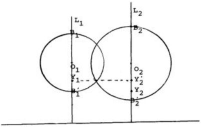
$$\sphericalangle (n, N_2) = \sphericalangle (\varepsilon_2, T_1) \qquad (2)$$

Στην συνέχεια και ανάλογα προς την ευκλείδεια περίπτωση, θεωρούμε ένα επίπεδο Π που διχοτομεί την τρίεδρη γωνία των $\boldsymbol{S}_1$, $\boldsymbol{S}_2$.

Έστω λοιπόν σ_1 η συμμετρία στον H^3 ως προς το επίπεδο Π και σ_2 η συμμετρία στον H^3 ως προς την ευθεία L. Οι συμμετρίες σ_1, σ_2 αφήνουν το σημείο p αμετάβλητο.

<u>Ισχυρισμός:</u>
Οι κύκλοι Σ_1, Σ_2 είναι ίσοι και ως προς την ευκλείδεια μετρική.

<u>Απόδειξη του ισχυρισμού:</u>
Τα ευκλείδια κέντρα O_1, O_2 των Σ_1, Σ_2 βρίσκονται προφανώς στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο. Έστω L_1, L_2 οι κατακόρυφες ευθείες που διέρχονται από τα σημεία O_1, O_2 και τέμνουν τους Σ_1, Σ_2 στα σημεία B_1, B_1' και B_2, B_2' αντιστοιχα. Αρκεί να αποδείξουμε ότι τα κέντρα Y_1, Y_2 των γεωδαισιακών κύκλων Σ_1, Σ_2 βρίσκονται επίσης στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο. Προφανώς $Y_1 \in L_1$, $Y_2 \in L_2$.



Έστω τώρα ρ η απόσταση που επάγεται από την ευκλείδια μετρική $<\ ,\ >_o$ και d η απόσταση που επάγεται από την υπερβολική μετρική $<\ ,\ >$.

Αν $\rho(Y_2, O_2) > \rho(O_1, Y_1)$ θεωρούμε ένα σημείο $Y_2' \in L_2$ ώστε Y_1, Y_2' να βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο. Τότε

$$d(Y_2', B_2) < d(Y_2, B_2) = d(Y_1', B_1) \text{ άτοπον.}$$

Ομοίως, αν $\rho(Y_2, O_2) > \rho(O_1, Y_1)$ καταλήγουμε εις άτοπον.

Άρα $\rho(Y_1, O_1) > \rho\ (Y_2, O_2)$ που αποδεικνύει τον ισχυρισμό μας.

Επομένως συναγάγουμε αμέσως από τον παραπάνω ισχυρισμό ότι:

ή $\sigma_1(\Sigma_1) = \Sigma_2$ και $\sigma_1(\Sigma_2) = \Sigma_1$

ή $\sigma_2 \circ \sigma_1(\Sigma_1) = \Sigma_2$ και $\sigma_2 \circ \sigma_1(\Sigma_2) = \Sigma_1$ αν $\sigma_1(\Sigma_1) \neq \Sigma_2$.

Άρα σε κάθε περίπτωση παίρνουμε ότι

$$\sphericalangle (T_2, \varepsilon_1) = \sphericalangle (T_1, \varepsilon_2),$$

απ΄ όπου σε συνδυασμό με τις σχέσεις (1), (2) έπεται ότι

$$\sphericalangle (v, N_1) = \sphericalangle (n, N_2)$$

Επομένως οι κύριες καμπυλότητες στο p είναι ίσες και το p είναι ένα ομφαλικό σημείο.

Τέλος η ταξινόμηση των ομφαλικών επιφανειών του $\mathbb{H}_3$ ([S_{IV}] σ. 114) σε συνδυασμό με το ότι η M είναι συμπαγής, συνεπάγεται ότι η M είναι μία γεωδαισιακή σφαίρα. ο.ε.δ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ 2

ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ ΜΕ ΙΣΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΓΕΩΔΑΙΣΙΑΚΕΣ

0. Εισαγωγικά

ΘΕΩΡΗΜΑ Β.
Έστω Μ μία C^{∞} διαφορίσιμη επιφάνεια μέσα στον ευκλείδειο χώρο $\mathbb{E}^3$, η οποία είναι αμφιδιαφορίσιμη με την σφαίρα S^2. Υποθέτουμε ότι για κάθε δύο γεωδαισιακές της Μ υπάρχει μία ισομετρία του $\mathbb{E}^3$, η οποία τοποθετεί την μία γεωδαισιακή επί της άλλης. Τότε η επιφάνεια Μ είναι μία σφαίρα του $\mathbb{E}^3$.

Θα δώσουμε πρώτα μία περιγραφή της απόδειξης του θεωρήματος:

Κατ' αρχάς είναι άμεσο από τις υποθέσεις μας, ότι υπάρχει μία σταθερή καμπύλη Γ_o στον $\mathbb{E}^3$, έτσι ώστε κάθε γεωδαισιακή της Μ να είναι τοποθετήσιμη επί της Γ_o με μία στερεά κίνηση του $\mathbb{E}^3$.

Έστω $S^1(M)$ η μοναδιαία εφαπτομένη δέσμη της Μ. Έστω ακόμη $\alpha(s)$, $s\in(-\infty, \infty)$ μία παραμέτριση με μήκος τόξου της Γ_o και $k(s)$ η συνάρτηση καμπυλότητας αυτής. Υποθέτουμε στην συνέχεια ότι η συνάρτηση $k(s)$ δεν είναι σταθερή. Θεωρούμε τότε την συνάρτηση $\mathbf{r}$: $S^1(M)\to R$ έτσι ώστε: Αν $\gamma:(-\infty, \infty)\to M$ είναι η γεωδαισιακή της Μ με $\gamma(0)=p$, $\gamma'(0)=v_p$, η τιμή $\mathbf{r}(v_p)$ είναι η καμπυλότης της καμπύλης γ στη θέση $\sigma=0$. Αν τώρα k_o είναι μία μή κρίσιμη τιμή $k(s)$, τότε αποδεικνύουμε ότι το σύνολο $\mathbf{r}^{-1}(k_o)$ αποτελεί μία επιφάνεια μέσα στην $S^1(M)$.

Ακολούθως για κάποια κατάλληλη μη κρίσιμη τιμή k της συνάρτησης $k(s)$, επιλέγουμε μία συνεκτική συνιστώσα S της $\mathbf{r}^{-1}(k_o)$ ε.ω. η S να μην περιέχει κύρια διανύσματα.

Αν λοιπόν $\pi : S \to M$ είναι η προβολή με $\pi(v_p) = p$, αποδεικνύουμε ότι η π είναι μία κάλυψη της Μ. Τότε όμως μπορούμε να κατασκευασουμε πάνω στην Μ ένα διανυσματικό πεδίο παντού διαφορο του μηδενός. Όμως τέτοια διανυσματικά πεδία δεν υπάρχουν επί της M επειδή αυτή είναι αμφιδιαφορίσιμη με την σφαίρα S^2 ([M]). Καταλήγουμε λοιπόν εις άτοπον και συμπεραίνουμε ότι η k(s) είναι σταθερή συνάρτηση, απ' όπου έπεται εύκολα ότι η M είναι μία σφαίρα του $\mathbb{E}^3$.

<u>Παρατηρήσεις</u> : i) Η υπόθεση ότι η M είναι αμφιδιαφορίσιμη με την σφαίρα S^2 δεν είναι περιοριστική στο θεώρημα. Τούτο διότι αν $\pi_1 M \neq 0$, τότε υπάρχουν κλειστές γεωδαισιακές στην M, οι οποίες δεν εχουν το ίδιο μήκος ([B], [B, F, S]). Αντιθέτως υπάρχουν επιφάνειες του τύπου της σφαίρας μέσα στον E^3, οι οποίες έχουν όλες τις γεωδαισιακές τους κλειστές, απλές και ισομήκεις. Αυτές τις επιφάνειες τις κατασκεύασε αρχικά ο Zoll χρησιμοποιώντας μία ιδέα του Darboux και ονομάζονται επιφάνειες του Zoll ([B]).
ii) Στην πραγματικότητα μπορούμε να υποθέσουμε στο θεώρημα μας ότι η καμπύλη Γ_o είναι κλειστή, διότι ένα θεώρημα του Lusternik μας εξασφαλίζει την ύπαρξη κλειστών γεωδαισιακών επί της M ([L]). Όμως το θεώρημα αυτό είναι αρκετά τεχνικό ενώ η απόδειξη μας είναι ανεξάρτητη από τον τύπο της καμπύλης Γ_o.

Θα δώσουμε στην συνέχεια αναλυτικά την απόδειξη του θεωρήματος.

Έστω $S^1(M) = \{v_p \in TM : |v_p| = 1\}$ η μοναδιαία εφαπτόμενη δέσμη της M. Η $S^1(M)$ είναι μια κλειστή πολ/τα διάστασης 3. Συμβολίζουμε με $\tilde{D}$ την συνήθη συνοχή του E^3 και με D την επαγόμενη συνοχή πάνω στην επιφάνεια M. Αν n είναι το μοναδιαίο, εξωτερικό, κάθετο διάνυσμα στην M, συμβολίζουμε με A τον τελεστή σχήματος της M ως προς το n.

Έστω τώρα $v_p \in S^1(M)$. Υπάρχει μία μοναδική γεωδαισιακή $\gamma:(-\infty, \infty) \rightarrow M$

με $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v_p$. Συμβολίζουμε με $\kappa(v_p)$, $\tau(v_p)$ την καμπυλότητα και την στρέψη αντίστοιχα της $\gamma(\sigma)$ στην θέση $\sigma = 0$. Τότε έχουμε την ακόλουθη πρόταση :

Πρόταση 1: Ισχύει ότι $\kappa(v_p) = \langle Av_p , v_p \rangle$, $\tau(v_p) = \langle Av_p , Jv_p \rangle$, όπου $\langle \, , \, \rangle$ η συνήθης Ευκλείδια μετρική και Jv_p το διάνυσμα το οποίον λαμβάνουμε αν στρέψουμε το v_p στον T_pM κατά $\pi/2$, ώστε $|v_p, Jv_p , n_p| = 1$.

Απόδειξη.

Έστω T το εφαπτόμενο διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της γ. Επειδή η γ είναι γεωδαισιακή της M θάναι : $D_TT = 0$.
Συμβολίζουμε με (T, N, B) το τρίεδρο Frenet της καμπύλης γ σε μέσα στον Ευκλείδιο χώρο $\mathbb{E}^3$. Τότε έχουμε :

$$\bar{D}_TT = D_T T + \langle \bar{D}_TT, n \rangle n = - \langle \bar{D}_TT, n \rangle n = \langle AT, T \rangle n$$

Εξ' άλλου από τις εξισώσεις Frenet της γ έχουμε

$$\bar{D}_TT = kN$$

Συνδυασμός αυτών των σχέσεων δίνει ότι

$$kN = \langle AT, T \rangle n$$

απ' όπου παίρνουμε, εξισώνοντας τα αριθμητικά και διανυσματικά μεγέθη, ότι

$$k = |\langle AT, T \rangle| \text{ και } N = \pm n \text{ κατά μήκος της } \gamma$$

Τώρα όσον αφορά την στρέψη τ της γ, πάλι από τις εξισώσεις Frenet παίρνουμε :

$$\bar{D}_TB = -\tau N \;\Rightarrow\; \bar{D}_T(T \wedge N) = -\tau N \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \bar{D}_TT \wedge N + T \wedge \bar{D}_TN = -\tau N \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow T \wedge \bar{D}_Tn = -\tau n \;\Rightarrow\; T \wedge AT = \tau n \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \tau = \langle T \wedge AT, n \rangle \;\Rightarrow\; \tau = \langle n \wedge T, AT \rangle \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \tau = \langle AT , JT \rangle.$$

Υπενθυμίζουμε τώρα ότι ένα εφαπτόμενο διάνυσμα v_p του T_pM λέγεται κύριο διάνυσμα ή διάνυσμα κύριας διεύθυνσης, αν είναι ένα ιδιοδιάνυσμα της γραμμικής απεικόνισης $A : T_pM \to T_pM$. Άμεσα λοιπόν παίρνουμε το εξής πόρισμα:

Πόρισμα : Έστω $v_p \in S^1(M)$. Το v_p είναι διάνυσμα κύριας διεύθυνσης αν και μόνο αν $\tau(v_p) = 0$.

Στην συνέχεια λοιπόν θα μιλάμε ελεύθερα για την καμπυλότητα και την στρέψη των στοιχείων της $S^1(M)$.

Θεωρούμε τώρα μία σταθερή καμπύλη Γ_o στον $\mathbb{E}^3$ έτσι ώστε κάθε γεωδαισιακή της M νάναι ισομετρική προς την Γ_o με μία ισομετρία του $\mathbb{E}^3$. Μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητος ότι η καμπύλη Γ_o δεν είναι επίπεδη. Πράγματι αν υποθέσουμε ότι η Γ_o είναι επίπεδη καμπύλη τότε θάναι N=n κατά μήκος της Γ_o όπου $N = \bar{D}_TT/|\bar{D}_TT|$ και T το μοναδιαίο εφαπτόμενο διανυσματικό πεδίο κατά μήκος της Γ_o. Εξ' άλλου έχουμε ότι:

$$\bar{D}_TN = -kT$$
$$\bar{D}_TN = \bar{D}_Tn = -AT$$

απ' όπου έπεται ότι AT= kT που σημαίνει ότι όλα τα σημεία της M είναι ομφαλικά και άρα η M είναι μία σφαίρα.

Έστω $\alpha(s)$, $s \in (-\infty, \infty)$, μία παραμέτρηση με μήκος τόξου της Γ_o και έστω $k(s)$, $\tau(s)$ οι συναρτήσεις καμπυλότητος και στρέψης αντίστοιχα της $\alpha(s)$.

Υποθέτουμε στη συνέχεια ότι η συνάρτηση $k(s)$ δεν είναι σταθερή και επομένως το θεώρημα του Sard η $k(s)$ έχει μη κρίσιμες τιμές. Συγκεκριμένα το θεώρημα του Sard ([H]) μας εξασφαλίζει ότι αν η $k(s)$ είναι μη σταθερή συνάρτηση τότε το σύνολο των μη κρίσιμων τιμών της $k(s)$ είναι πυκνό υποσύνολο του συνόλου των τιμών $k(s)$, $s \in (-\infty, \infty)$.

1. Ο χώρος κάλυψης S της επιφάνειας M

Σκοπός μας είναι να βρούμε μία επιφάνεια S μέσα στην $S^1(M)$ η οποία να μην περιέχει κύρια διανύσματα. Έτσι μπορούμε να αποδείξουμε στην συνέχεια ότι, αν $\pi : S \to M$ η προβολή με $\pi(v_p) = p$, τότε η S με την π αποτελεί ένα χώρο κάλυψης της M. Μ' αυτόν όμως τον τρόπο κατασκευάζουμε πάνω στην M ένα διανυσματικό πεδίο παντού διάφορο του μηδενός. Καταλήγουμε λοιπόν εις άτοπον, ακριβώς επειδή υποθέτουμε ότι η συνάρτηση καμπυλότητας $k(s)$ είναι μη - σταθερή.

Αποδεικνύουμε πρώτα την εξής πρόταση :

Πρόταση 2:
Έστω $\mathbf{r}: S^1(M) \to \mathbb{R}$ η διαφορίσιμη συνάρτηση με $\mathbf{r}(v_p) = |\langle Av_p, v_p \rangle|$, και έστω $k_o \neq 0$ μία μη κρίσιμη τιμή της $k(s)$. Τότε το σύνολο $\mathbf{r}^{-1}(k_o)$ αποτελεί μία συμπαγή επιφάνεια μέσα στην $S^1(M)$.

Απόδειξη:

Έστω $v_p \in \mathbf{r}^{-1}(k_o)$ και γ η γεωδαισιακή της M με $\gamma(0)=p$, $\gamma'(0)=v_p$.
Τότε

$$\mathbf{r}_{*,\,v_p}(\gamma'(0),\, \gamma''(0)) = \left.\frac{d}{d\sigma}\right|_{\sigma=0} \mathbf{r}(\gamma(\sigma),\, \gamma'(\sigma)) = \left.\frac{dk}{ds}\right|_{s(0)} \cdot \left.\frac{ds}{d\sigma}\right|_{0}$$

Όμως το τελευταίο γινόμενο είναι διάφορο του μηδενός: Ο όρος $\left.\frac{dk}{ds}\right|_{s(0)}$ είναι διάφορος του μηδενός διότι k_o είναι μία μη κρίσιμη τιμή της $k(s)$, ο δε ορος $\left.\frac{ds}{d\sigma}\right|_{0}$ είναι διάφορος του μηδενός διότι η συνάρτηση $\sigma(s)$ ορίζει μία αναπαραμέτριση με μήκος τόξου της Γ_o, άρα $\sigma(s)=s+\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, άρα $\left.\frac{ds}{d\sigma}\right|_{0}=1$.

Τελικά λοιπόν συνεπάγεται ότι η $\mathbf{r}$ έχει τάξη 1 παντού πάνω στο $\mathbf{r}^{-1}(k_o)$ και έτσι παίρνουμε ότι η $\mathbf{r}^{-1}(k_o)$ είναι μία επιφάνεια μέσα στην $S^1(M)$. Εξ' άλλου επειδή η $\mathbf{r}^{-1}(k_o)$ αποτελεί ένα κλειστό υποσύνολο της συμπαγούς $S^1(M)$, έπεται ότι είναι μία συμπαγής επιφάνεια.

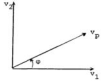
Τώρα ο χώρος κάλυψης S της επιφάνειας M θα επιλεγεί μεταξύ των συνιστωσών μιας επιφάνειας $\mathbf{r}^{-1}(k_o)$ για κάποια κατάλληλη μη-κρίσιμη τιμή k_o της $k(s)$. Συγκεκριμένα θα αποδείξουμε κατ' αρχάς ότι υπάρχει μία μη-κρίσιμη τιμής της k_o της $k(s)$ και μία συνιστώσα S αυτής, η οποία περιέχει ένα τουλάχιστον μη κύριο διάνυσμα v_o. Στην συνέχεια δε θα αποδείξουμε ότι αναγκαστικά κανένα διάνυσμα της S δεν είναι κύριο.

Επειδή η $k(s)$ δεν είναι σταθερή συνάρτηση, συνεπάγεται προφανώς ότι η M περιέχει μη ομφαλικά σημεία. Έστω λοιπόν p ένα μη-ομφαλικό σημείο της M και v_p ένα μοναδιαίο διάνυσμα της T_pM με $\tau(v_p)\neq 0$. Με άλλα λόγια το v_p δεν είναι κύριο διάνυσμα σύμφωνα με το πόρισμα της σελ. 67.

Διακρίνουμε στη συνέχεια τις εξής δύο περιπτώσεις:

i) $r(v_p) = k$ και το k αποτελεί μία μή–κρίσιμη τιμή της $k(s)$.
Τότε θέτωντας $k_o = k$ επιλέγουμε μεταξύ των συνιστωσών της επιφάνειας $r^{-1}(k_o)$ αυτή την οποία περιέχει το διάνυσμα v_p και την συμβολίζουμε με S.

ii) $r(v_p) = k$ και η k είναι μία κρίσιμη τιμή της $k(s)$.
Έστω τότε v_1, v_2 τα κύρια διανύσματα του T_pM, έτσι ώστε η βάση $(v_1\ ,\ v_2,\ n_p)$ του $\mathbb{E}^3$ να είναι θετικά προσανατολισμένη. Έστω επίσης k_1 , k_2 οι κύριες καμπυλότητες που αντιστοιχούν στα v_1 , v_2 .



Αν φ είναι η γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα v_1 , v_2 , τότε έχουμε ότι

$$v_p = \cos\varphi v_1 + \sin\varphi v_2 \quad \Rightarrow$$

$$r(v_p) = |\langle Av_p, v_p\rangle| = |\langle \cos\varphi Av_1 + \sin\varphi Av_2, \cos\varphi v_1 + \sin\varphi v_2\rangle| \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad r(v_p) = |k_1 \cos^2\varphi + k_2 \sin^2\varphi| \qquad \text{(τύπος του Euler)}$$

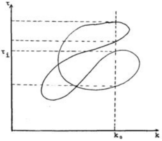
Θεωρούμε λοιπόν μία ανοικτή περιοχή V του v_p μέσα στον T_pM, αρκετά μικρή ώστε αν $v \in V$ νάναι $r(v) \neq 0$. Τώρα οι τιμές $r(v)$, $v \in V$ σχηματίζουν (από τον τύπο του Euler) ένα ανοικτό υποσύνολο U μέσα στο σύνολο των τιμών $k(s)$, $s \in (-\infty, \infty)$. Από το θεώρημα του Sard υπάρχει μέσα στο U μία μή-κρίσιμη τιμή k και άρα αν θεωρήσουμε την επιφάνεια $\mathbf{r}^{-1}(k_o)$ υπάρχει μία συνιστώσα S αυτής που περιέχει ένα μοναδιαίο διάνυσμα v με $\tau(v) \neq 0$.

Έτσι λοιπόν βρίσκουμε τελικά μία μή-κρίσιμη τιμή k_o της συνάρτησης k(s) και μία συνιστώσα S της $\mathbf{r}^{-1}(k_o)$ που περιέχει ένα μή-κύριο διάνυσμα v_o, δηλαδή $\tau(v_o) \neq 0$. Στη συνέχεια σταθεροποιούμε την τιμή k_o και την συνιστώσα S και έχουμε τώρα την εξής πρόταση:

<u>**Πρόταση 3**</u>. Κάνενα διάνυσμα v της επιφάνειας S, δεν είναι κύριο.

<u>**Απόδειξη.**</u>

Θεωρούμε στο $\mathbb{R}^2$ την καμπύλη $\beta(s) = (k(s), \tau(s), s \in (-\infty, \infty)$. Επειδή το σύνολο των σημείων $s \in (-\infty, \infty)$ που παίρνουν την μή-κρίσιμη τιμή k_o είναι διακριτό έπεται ότι υπάρχουν το πολύ αριθμήσιμα $s_i \in (-\infty, \infty)$, i=1, 2 με $k(s_i) = k_o$.



Θεωρούμε λοιπόν τις τιμές $\tau_i = \tau(s_i)$ και τα σημεία $x_i = \beta(s_i)$ $i = 1, 2$ του $\mathbb{R}^2$. Προφανώς το σύνολο $B = \{x_i, i = 1, 2 \ldots\}$ δεν είναι συνεκτικό κατά τόξα υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ και οι μόνες συνεκτικές κατά τόξα συνιστώσες του B είναι τα σημεία x_i.

Ορίζουμε τώρα την απεικόνιση:

$$F: S^1(M) \to \mathbb{R}^2 \text{ με}$$

$$F(v_p) - (|\langle Av_p, v_p\rangle|, \langle Av_p, Jv_p\rangle).$$

Η απεικόνιση F παίρνει προφανώς τιμές πάνω στην καμπύλη β και $F(S) = x_{i_o}$ για κάποιο σταθερό i_o ακριβώς επειδή το S είναι συνεκτικό κατά τόξα υποσύνολο του $S^1(M)$ και $r(v) = \langle Av, v\rangle = k_o$ για κάθε $v \in S$. Επομένως για κάθε $v \in S$ θα ισχύει $\tau(v) = \langle Av, Jv\rangle = \tau_{i_o}$ και επειδή υπάρχει $v_o \in S$ με $\tau(v_o) \neq 0$ θάναι $\tau(v_o) \neq 0$ για κάθε $v \in S$, δηλαδή όλα τα διανύσματα της S είναι μη κύρια σύμφωνα με το πόρισμα της σελίδος 67.

Παρατήρηση. Επειδή το k_o είναι μη–κρίσιμη τιμή της $k(s)$, συνεπάγεται ακριβώς ότι η κατακόρυφος στο σημείο $(0, k_o)$ του επιπέδου της καμπύλης β, τέμνει εγκάρσια την β σε αριθμήσιμα το πολύ σημεία (βλ. σχήμα).

Τέλος θα αποδείξουμε την εξής πρόταση:

Πρόταση 4. Η επιφάνεια S με την προβολή $\pi : S \to M$, όπου $\pi(v_p) = p$, αποτελεί ένα χώρο κάλυψης της M.

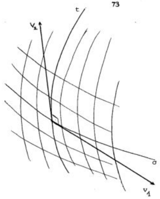
Απόδειξη.

Θα αποδείξουμε κατ΄ αρχάς ότι η $\pi : S \to M$ έχει τάξη 2 σε κάθε σημείο $v_p \in S$.

Έστω λοιπόν $v_p \in S$. Θεωρούμε τις γεωδαισιακές γ, δ της M ε.ω.

$$\gamma(0) = p \;,\; \gamma'(0) = v_1 \qquad \delta(0) = p \;,\; \delta'(0) = v_2$$

όπου v_1, v_2 είναι τα κύρια διανύσματα στο σημείο p της M.



(Σχήμα 1)

Θεωρούμε στην συνέχεια ένα σύστημα συντεταγμένων $x(\sigma, t)$ σε μία γειτονία $\mathbf{U}(\subset \mathbf{M})$ του $p = (x(0, 0))$, ε.ω. οι καμπύλες $x(\sigma, 0)$, $x(0, t)$ να αποτελούν γεωδαισιακά τόξα επί των $\gamma(\sigma)$, $\delta(t)$ αντίστοιχα.

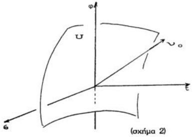
Συμβολίζουμε με $v(\sigma, t, \varphi)$ το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα της $\mathbf{M}$ στο σημείο $x(\sigma, t)$ το οποίον σχηματίζει γωνία φ (προσανατολισμένη αριστερόστροφα) με το διάνυσμα $\frac{\partial x}{\partial \sigma}$ (σ, t). Σημειώνουμε με $\mathbf{r}(\sigma, t, \varphi)$ την καμπυλότητα διανύσματος $v(\sigma, t, \varphi)$. Μπορούμε λοιπόν να παραμετρίσουμε την επιφάνεια $\mathbf{S}$ σε μία ανοικτή περιοχή $\mathbf{U}$ του v_p με τις παραμέτρους (σ, t, φ). Συγκεκριμένα το σημείο v_p αντιστοιχεί στο σημείο $(0, 0, \varphi_0)$ και η $\mathbf{U}$ ορίζεται σαν το σύνολο

$$\{ (\sigma, t, \varphi) : \mathbf{r}(\sigma, t, \varphi) = k_o \} \qquad (*)$$

Πράγματι , σύμφωνα με τα όσα είπαμε στην σελίδα 76 θάναι

$$\mathbf{r}(0,\ 0,\ \varphi) = \mathbf{r}(v_p) = |k_1 \cos^2\varphi + k_2 \sin^2\varphi|$$

όπου k_1, k_2 οι κύριες καμπυλότητες στο σημείο $x(0,\ 0) = p$ της M. Άρα $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}(0,\ 0,\ \varphi) = \pm 2\ (k_1 - k_2) \sin\varphi \cos\varphi \neq 0$, επειδή η επιφάνεια S δεν περιέχει κύρια διανύσματα και συνεπώς $\varphi \neq 0,\ \pi/2,\ \pi,\ 3\pi/2$. Έτσι αποδεικνύεται ότι η σχέση (*) ορίζει τοπικά γύρω από το v_p μία παραμέτρηση της επιφάνειας S.



(σχήμα 2)

Από την άλλη μεριά ισχυριζόμαστε ότι το εφαπτόμενο επίπεδο στην U στο σημείο $(0,\ 0,\varphi_o)$ (συμβ. $T_{(0,0,\varphi_o)}U$) δεν είναι παράλληλο στον φ–άξονα. Πράγματι, το κάθετο διάνυσμα στο $T_{(0,0,\varphi_o)}U$) είναι το

$$\mathbf{v}_o = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \sigma},\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t},\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \right)\Big|_{(0,\ 0,\varphi_o)} .$$

Άρα αρκεί να αποδειξουμε ότι $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}(0,\ 0,\varphi_o) \neq 0$, το οποίο ισχύει.

Αφού λοιπόν το εφαπτόμενο επίπεδο $T_{(0,0,\varphi_o)}U$) δεν είναι παράλληλο στον φ–άξονα, μπορούμε να επιλέξουμε δύο ομαλές καμπύλες $a_1(t)$, $a_2(t)$ στην V, με $a_1(0) = a_2(0) = (0,\ 0,\varphi_o)$ ε.ω.
αν $a_i = (a^1_i,\ a^2_i,\ a^3_i)$ $i = 1, 2$, τα διανύσματα

$$\left(\frac{d}{dt}\Big|_0 \alpha^1_1(t),\ \frac{d}{dt}\Big|_0 \alpha^2_1(t),\ 0\right),\ \left(\frac{d}{dt}\Big|_0 \alpha^1_2(t),\ \frac{d}{dt}\Big|_0 \alpha^2_2(t),\ 0\right)$$

να μην είναι συγγραμικά. Αλλά τότε είναι προφανές ότι η π προβάλλει τις καμπύλες α_1, α_2 σε δύο ομαλές καμπύλες επί της M, οι οποίες διέρχονται από το p και των οποίων τα εφαπτόμενα διανύσματα στο p είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Αποδεικνύεται έτσι ότι η π έχει παντού τάξη 2 πάνω στην S. Κατά συνέπεια η π είναι ανοικτή και επειδή το S είναι συμπαγές η π είναι επίσης κλειστή απεικόνιση. Άρα το π(S) είναι ανοικτό και κλειστό υποσύνολο της M και άρα ταυτίζεται με την M. Έπεται λοιπόν ότι πράγματι το ζεύγος (S, π) αποτελεί ένα χώρο κάλυψης της M.

<u>Πόρισμα.</u> Η συνάρτηση καμπυλότητας k(s) της Γ_o είναι σταθερή.

<u>Απόδειξη.</u>

Επειδή η M είναι απλά συνεκτική είναι αδύνατον να έχει μή-τετριμμένο χώρο κάλυψης. Άρα $\pi : S \to M$ είναι μία αμφιδιαφόριση.

Εάν τώρα αντιστοιχίσουμε σε κάθε σημείο p της M το διάνυσμα $\pi^{-1}(p)$ της S, παίρνουμε ένα διαφορίσιμο, παντού μή-μηδενικό, εφαπτόμενο, δ.π. επί της M. Όμως τέτοια δ.π. δεν υπάρχουν επί της M, επειδή αυτή είναι αμφιδιαφορίσιμη με την σφαίρα S ([M]). Καταλήγουμε λοιπόν εις άτοπον ακριβώς επειδή υποθέσαμε ότι η συνάρτηση k(s) δεν είναι σταθερή. Άρα η συνάρτηση καμπυλότητας k(s) της Γ_o είναι σταθερή συνάρτηση.

<u>2. Απόδειξη του θεωρήματος.</u>

Σύμφωνα με το προηγούμενο πόρισμα η συνάρτηση k(s) είναι σταθερή. Άρα όλα τα μοναδιαία εφαπτόμενα διανύσματα v της M έχουν ίση καμπυλότητα $r(v_p)$. Επομένως όλα τα σημεία της M είναι ομφαλικά και συνεπώς η M είναι μία σφαίρα του $\mathbb{E}^3$.

ABSTRACT

In this work a new characterization of a 2-dimensional sphere in terms of its shadow-lines or geodesics, is given, contained in what we hereafter call theorem A and B.

THEOREM A Let M be a compact and strictly convex surface embedded in the euclidean space E^3 or in the hyperbolic space H^3. We suppose that all shadow-lines of M are congruent. Then M is a euclidean 2-sphere or a hyperbolic 2-sphere respectively.

Roughly speaking, to each point e of the sphere S^2 corresponds a different shadow-line Σ_e of M. So the idea of the proof is to construct a mapping Z which maps the point e of S^2 to a tangent vector Z_e of Σ_e at a fixed special point of Σ_e if it is not a circle. There are certain difficulties related to the fact that Z is in general a multiple-valued function, depending on the possible symmetries of Σ_e. This problem is handled by showing that the possible values of Z form a covering space of S^2. In this way, an everywhere non-zero vector field ξ, tangent to S^2, can be constructed from Z. But it is well known that this is impossible ([M]). So we conclude that the shadow-lines of M are equal circles, which implies easily that M is a sphere.

THEOREM B Let M be a surface in the euclidean space E^3, which is diffeomorphic to the sphere S^2. We suppose that all geodesics of M are congruent. Then M is a euclidean 2-sphere.

In order to prove this theorem we consider a curve Γ_0 in E^3 such that each geodesic of M is congruent to Γ_0. Let k(s) be the curvature function of Γ_0. By supposing that k(s) is not constant, we find a surface S in the unit sphere bundle $S^1(M)$ of M such that the projection $\pi: S \longrightarrow M$ with $\pi(v_p)=p$ is a covering map of M. But in this case, an everywhere nonzero vector field, tangent to M, can be constructed which is impossible. So the function k(s) is constant and we get easily that M is a euclidean sphere.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[B] Besse, A. Manifolds all of whose Geodesics are Closed, Springer-Verlag, 1978

[Be] Beardon, A.F. The Geometry of Discrete Groups, Springer-Verlag

[D,W] Do Carmo, M. and Warner, F.W. Rigidity and Convexity of Hyrer-surfaces in Spheres, J. Differential Geometry 4(1970), 133-144.

[F,H,S] Freedman, M. , Hass, J. , Scott, P. Closed Geodesics on Surfaces . Preprint, Liverpool University, November 1981.

[H] Hirsch, M. W. Differential Topology, Springer-Verlag, 1976.

[K] Klingeberg, W. Lectures on Closed Geodesics, Springer-Verlag, 1978.

[L] Lusternik, L. The Topology of Function Spaces and the Calculus of Variations in the Large, Translations of Math. Monographs, Vol. 16, Providence, R.I. , 1966

[M] Milnor, J. Analytic Proofs oo the Hairy Ball Theorem, Am. Math. Monthly, 85, 1978.

[MIN] Minkowski, H. Ueber die Koerper Konstanter Breite, Gesammelte Abhandlungen Bd. II, 277-279.

[S_{III}], [S_{IV}] Spivak, M. A Comprehensive Introduction to Differential Geometry. Vol. III, IV, Publish of Perish Inc. , 1975.