ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΒΕΛΤΙΣΤΕΣ ΣΤΑΘΕΡΕΣ ΣΕ HARDY ΚΑΙ HARDY-SOBOLEV ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ

ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ ΔΗΜΗΤΡΙΟΥ

Επιβλέπων καθηγητής:

ΑΧΙΛΛΕΑΣ ΤΕΡΤΙΚΑΣ

ΗΡΑΚΛΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ **2021**

Στην οικογένεια,
και στους φίλους μου

<u>ΕΙΣΑΓΩΓΗ</u>

*Καθόλη τη διάρκεια της εργασίας, ο συμβολισμός Ω θα δηλώνει φραγμένο τόπο, υποσύνολο του $\mathbb{R}^n,\ n \geq 3$ ο οποίος να περιέχει την αρχή των αξόνων. Επίσης, ορίζουμε $D := \sup_{x\in\Omega}|x|$, $X(a,s) := \dfrac{1}{a - ln(s)},\ a > 0,\ s \in (0,1]$ και $\tilde{X}(s) = -\dfrac{1}{ln(s)},\ s \in (0,1)$.

Βάση της παρούσας εργασίας αποτελούν οι ανισότητες Hardy και Sobolev οι οποίες αναφέρουν ότι, για διάσταση $n \geq 3$, ισχύει

$$\text{(Hardy)} \quad \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2\ dx \geq \left(\frac{n-2}{2}\right)^2 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u^2}{|x|^2}\ dx,\ \forall u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$$

$$\text{(Sobolev)} \quad \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2\ dx \geq S_n \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{2n}{n-2}}\ dx\right)^{\frac{n-2}{n}},\ \forall u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Μάλιστα, και οι δύο ανισότητες αληθεύουν και για χωρίο Ω. Είναι γνωστό επίσης ότι η σταθερά $\left(\frac{n-2}{2}\right)^2$ είναι βέλτιστη για την ανισότητα Hardy. Όσον αφορά την ανισότητα Sobolev, αποδεικνύεται ότι έχει ως ελαχιστοποιητή, στο χώρο $\mathscr{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n) := \overline{C_c^\infty(\mathbb{R}^n)}$ υπό τη νόρμα $\|u\|^2_{\mathscr{D}^{1,2}(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2\ dx$, τη συνάρτηση $U(x) = \left(1 + |x|^2\right)^{-\frac{n-2}{2}}$ (καθώς και μεταφορές και πολλαπλάσια της) και με βάση αυτή υπολογίζεται ότι η βέλτιστη σταθερά Sobolev,

$$S_n := \inf_{\substack{u\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)\\ u\neq 0}} \frac{\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2\ dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{2n}{n-2}}\ dx\right)^{\frac{n-2}{n}}},$$ ισούται με $S_n = \pi n(n-2)\left(\dfrac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(n)}\right)^{\frac{2}{n}}$.

Η ανισότητα Hardy καθώς και διάφορες βελτιωμένες εκδοχές της χρησιμοποιούνται στην μελέτη ποικίλων μαθηματικών και φυσικών προβλημάτων. Ενδεικτικά αναφέρουμε μερικά:

– ευστάθεια λύσεων ημιγραμμικών ελλειπτικών και παραβολικών εξισώσεων (βλ. [4])

– ανάλυση της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς της εξίσωσης θερμότητας με ιδιάζοντα δυναμικά (βλ. [9])

– ευστάθεια ιδιοτιμών σε ελλειπτικά προβληματα όπως τελεστές Schrödinger (βλ. [10])

Αναφορικά με τη βέλτιστη σταθερά της ανίσωσης Hardy, $\left(\frac{n-2}{2}\right)^2$, είναι γνωστό ότι παραμένει η ίδια ακόμα και αν αντικαταστήσουμε τον χώρο $\mathbb{R}^n$ με χώρο Ω. Σ'αυτήν την περίπτωση, είναι αποδεδειγμένο ότι η βέλτιστη σταθερά αυτή δεν επιτυγχάνεται στον χώρο $H_0^1(\Omega)$. Λόγω του γεγονότος αυτού, κάποιος θα περίμενε ότι η ανισότητα Hardy επιδέχεται βελτίωση προσθέτοντας στο δεξί μέλος μη αρνητικούς "correction terms". Πράγματι, έχουν αποδειχθεί αρκετές βελτιωμένες εκδοχές της ανίσωσης Hardy οι περισσότερες εκ των οποίων πυροδοτήθηκαν από την ακόλουθη βελτίωση των H. Brezis - J.L.Vazquez

$$\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx \geq \left(\frac{n-2}{2}\right)^2 \int_\Omega \frac{u^2}{|x|^2}\, dx + \lambda_\Omega \int_\Omega u^2\, dx, \ \forall\, u \in H_0^1(\Omega) \quad (\diamond)$$

όπου $\lambda_\Omega = z_0^2\left(\frac{a_n}{|\Omega|}\right)^{\frac{2}{n}}$ με $a_n,\ |\Omega|$ να συμβολίζουν τους όγκους της μοναδιαίας μπάλας και του Ω αντίστοιχα, και $z_0 = 2.4048...$ να είναι η πρώτη ρίζα της συνάρτησης Bessel $J_0(z)$.

Μάλιστα, η σταθερά λ_Ω είναι βέλτιστη όταν το Ω είναι μπάλα.

Ένα βασικό ερώτημα που απασχόλεισαι τους συγγραφείς σ'αυτο το σημείο είναι αν η βέλτιστη σταθερά της ($\diamond$) υλοποιείται στον $H_0^1(\Omega)$. Δίνουμε απάντηση σ'αυτό το ερώτημα αναφέροντας μία ειδική περίπτωση της γενικότερης δουλειάς των Α. Τερτίκα - Σ. Φίλιππα. Συγκεκριμένα δείχνουμε ότι:

- Η βέλτιστη σταθερά C της ανίσωσης

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \geq \left(\frac{n-2}{2}\right)^2 \int_\Omega \frac{u^2}{|x|^2} \, dx + C \int_\Omega u^2 \, dx, \ \forall \, u \in H_0^1(\Omega)$$

  δεν υλοποιείται στον $H_0^1(\Omega)$.

Το επόμενο ζήτημα που απασχόλεισαι τους Brezis-Vazquez είναι αν η μη υλοποίηση της βέλτιστης σταθεράς έχει ως συνέπεια την περαιτέρω βελτίωση της ($\diamond$). Η απάντηση δόθηκε από τους Α. Τερτίκα-Σ. Φίλιππα (βλ. [7], Corollary 1.2) οι οποίοι κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι η ($\diamond$) δε μπορεί να βελτιωθεί περαιτέρω προσθέτοντας στο δεξί μέλος μη αρνητικούς όρους.

Ένα εύλογο ερώτημα τώρα είναι, υπάρχουν συναρτήσεις V (αναφερόμαστε σ'αυτές και ως δυναμικά) ώστε να ισχύει η βελτιωμένη ανίσωση Hardy

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \geq \left(\tfrac{n-2}{2}\right)^2 \int_\Omega \frac{u^2}{|x|^2} \, dx + C \int_\Omega V u^2 \, dx, \ \forall \, u \in H_0^1(\Omega) \quad (*)$$

και ταυτόχρονα η βέλτιστη σταθερά να μην υλοποιείται ενώ η ανίσωση να επιδέχεται περεταίρω βελτίωση; Η απάντηση δόθηκε από τους Α. Τερτίκα-Σ. Φίλιππα (βλ. [7], Theorem C/D) οι οποίοι όχι μόνο απέδειξαν ότι πράγματι υπάρχουν αλλά έδειξαν ότι η ανίσωση Hardy επιδέχεται "series expansion"!

Σ'αυτό το σημείο, αναφέρουμε το επόμενο αποτέλεσμα που θα παρουσιάσουμε και σχετίζεται με μία ειδική περίπτωση της απάντησης των συγγραφέων και δηλώνει ότι:

- Ισχύει η βελτιωμένη ανίσωση Hardy

$$\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx \geq \left(\tfrac{n-2}{2}\right)^2 \int_\Omega \frac{u^2}{|x|^2}\,dx + \frac{1}{4}\int_\Omega X^2\left(1, \frac{|x|}{D}\right)\frac{u^2}{|x|^2}\,dx,\ \forall\ u \in H_0^1(\Omega)$$

όπου το $\dfrac{1}{4}$ είναι η βέλτιστη σταθερά.

Η δουλειά των Brezis-Vazquez δεν περιορίστηκε μόνο στην βελτιωμένη ανίσωση Hardy ($\diamond$). Η ($\diamond$) ήταν το έναυσμα για μία ακόμη βελτίωση της ανίσωσης Hardy με όρο Sobolev στο δεξί μέλος. Συγκεκριμένα, οι συγγραφείς απέδειξαν ότι

$$\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx \geq \left(\frac{n-2}{2}\right)^2 \int_\Omega \frac{u^2}{|x|^2}\,dx + a(n,p)\|u\|^2_{L^p(\Omega)},\ \forall\ u \in H_0^1(\Omega)$$

όπου $a(n,p) > 0$ σταθερά, $1 < p < \dfrac{2n}{n-2}$.

Ορμώμενοι από το αποτέλεσμα αυτό, οι Α. Τερτίκας-Σ. Φίλιππας (βλ. [7], Theorem A) απέδειξαν μία εναλλακτική εκδοχή της ανίσωσης αυτής τύπου Hardy-Sobolev. Συγκεκριμένα αποδείχθηκε ότι υπάρχει $C > 0$ σταθερά ώστε να ισχύει

$$\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx \geq \left(\frac{n-2}{2}\right)^2 \int_\Omega \frac{u^2}{|x|^2}\, dx + C\left(\int_\Omega \tilde{X}^{\frac{2(n-1)}{n-2}}\left(\frac{|x|}{D}\right)|u|^{\frac{2n}{n-2}}\, dx\right)^{\frac{n-2}{n}},\ \forall\ u \in H_0^1(\Omega)$$

Μάλιστα, η ανίσωση είναι βέλτιστη, από την άποψη ότι η $\tilde{X}^{\frac{2(n-1)}{n-2}}$ δε μπορεί να αντικατασταθεί από μικρότερη δύναμη της $\tilde{X}$. Άμεση συνέπεια του αποτελέσματος αυτού είναι η ισχύς της ανισότητας και για τη γενικότερη συνάρτηση $X(a,s)$.

Το φυσιολογικό ζήτημα που προκύπτει τώρα είναι ο προσδιορισμός της βέλτιστης σταθεράς της βελτιωμένης αυτής ανίσωσης τύπου Hardy-Sobolev. Η απάντηση στο πρόβλημα αυτό δόθηκε από τους Adimurthi-Α. Τερτίκα-Σ. Φίλιππα (βλ. [8]) και αποτελεί το επόμενο αποτέλεσμα που θα παρουσιάσουμε. Συγκεκριμένα αποδεικνύουμε ότι

- Η βέλτιστη σταθερά C της ανίσωσης

$$\int_{B_1} |\nabla u|^2\, dx \geq \left(\frac{n-2}{2}\right)^2 \int_{B_1} \frac{u^2}{|x|^2}\, dx + C\left(\int_{B_1} X^{\frac{2(n-1)}{n-2}}\left(a, \frac{|x|}{D}\right)|u|^{\frac{2n}{n-2}}\, dx\right)^{\frac{n-2}{n}} \qquad (\diamond\diamond)$$

  για $u \in C_c^\infty(B_1)$, είναι

$$C = C(n,a) = \begin{cases} (n-2)^{-\frac{2(n-1)}{n}} S_n & \text{αν } \frac{1}{n-2} \leq a \\ a^{\frac{2(n-1)}{n}} S_n & \text{αν } 0 < a < \frac{1}{n-2} \end{cases}.$$

Μάλιστα, οι συγγραφείς απέδειξαν το γενικότερο αποτέλεσμα ότι η βέλτιστη σταθέρα παραμένει η ίδια και για χωρίο Ω (βλ. [8], Theorem B).

Σημαντικό ρόλο στον υπολογισμό της βέλτιστης αυτής σταθεράς παίζει το γεγονός ότι η $(\diamond\diamond)$ μπορεί να γραφεί ισοδύναμα στη μορφή:

$$\int_\Omega |x|^{-(n-2)}|\nabla v|^2 \, dx \geq C\left(\int_\Omega |x|^{-n} X^{\frac{2(n-1)}{n-2}}\left(a, \frac{|x|}{D}\right)|v|^{\frac{2n}{n-2}} \, dx\right)^{\frac{n-2}{n}}$$

για $v \in C_c^\infty(B_1)$, με την ίδια βέλτιστη σταθερά. Έτσι, το βάρος υπολογισμού της βέλτιστης σταθεράς μεταφέρεται στη νέα ανίσωση το οποίο όπως θα δούμε είναι πολύ χρήσιμο.

Την απόδειξη της ισοδύναμης γραφής των δύο ανισοτήτων, θα την αντλήσουμε αποδεικνύοντας ένα γενικότερο αποτέλεσμα των Α. Τερτίκα-Σ. Φίλιππα. Συγκεκριμένα, θα εισάγουμε το χώρο

$$W_0^{1,2}(\Omega \; ; \; |x|^{-(n-2)}) := \overline{C_c^\infty(\Omega)}$$

$$\text{υπό τη νόρμα } \|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega \; ; \; |x|^{-(n-2)})} := \left(\int_\Omega |x|^{-(n-2)}\big(|\nabla u|^2 + u^2\big) \, dx\right)^{\frac{1}{2}} .$$

και θα αποδείξουμε ότι

- Αν $0 \leq V \in L^{\frac{n}{2}}_{loc}(\Omega - \{0\})$ και υποθέσουμε ότι $\exists \; c_1 > 0$ σταθέρα ώστε να ισχύει η $(*)$, τότε $\exists \; c_2 > 0$ σταθερά ώστε η $(*)$ να μπορεί να γραφτεί ισοδύναμα στην μορφή

$$\int_\Omega |x|^{-(n-2)}|\nabla v|^2 \, dx \geq c_2 \int_\Omega |x|^{-(n-2)} V v^2 \, dx, \; \forall \; v \in W_0^{1,2}(\Omega \; ; \; |x|^{-(n-2)}) \quad (**)$$

  και μάλιστα, οι βέλτιστες σταθερές των ανισοτήτων ταυτίζονται.

Η σπουδαιότητα αυτού του αποτελέσματος όμως δε σταματάει εδώ όπως θα δούμε. Οι συγγραφείς έδωσαν υποθέσεις για τη συνάρτηση V υπό τις οποίες υπάρχει ελαχιστοποιητής για την

$(**)$. Συγκεκριμένα, θα παρουσιάσουμε τα αποτέλεσματα τους αποδεικνύοντας ότι

- Αν η $V \geq 0$ ικανοποιεί τη συνθήκη

$$\int_\Omega X^{-(n-1)}\left(1, \frac{|x|}{D}\right) V^{\frac{n}{2}}(x)\ dx < +\infty$$

τότε $\exists\, c > 0$ ώστε να ισχύει η $(**)$ και η βέλτιστη σταθερά της υλοποιείται στον $W_0^{1,2}(\Omega\ ;\ |x|^{-(n-2)})$.

- Αν η $0 \leq V \in L^{\frac{n}{2}}_{loc}(\Omega - \{0\})$ και υποθέσουμε ότι $\exists\, B > 0$ ώστε

$$B = \inf_{\substack{u \in W_0^{1,2}(\Omega\ ;\ |x|^{-(n-2)}) \\ \int_\Omega |x|^{-(n-2)} V u^2\ dx > 0}} \frac{\displaystyle\int_\Omega |x|^{-(n-2)} |\nabla u|^2\ dx}{\displaystyle\int_\Omega |x|^{-(n-2)} V u^2\ dx}$$

  και ότι $B < C_0$ όπου

$$C_0 := \lim_{r \to 0^+} C_r \Big/ C_r := \inf_{\substack{u \in W_0^{1,2}(B_r\ ;\ |x|^{-(n-2)}) \\ \int_{B_r} |x|^{-(n-2)} V u^2\ dx > 0}} \frac{\displaystyle\int_{B_r} |x|^{-(n-2)} |\nabla u|^2\ dx}{\displaystyle\int_{B_r} |x|^{-(n-2)} V u^2\ dx},\ r > 0,$$

  τότε η βέλτιστη σταθερά της $(**)$ υλοποιείται και πάλι στον $W_0^{1,2}(\Omega\ ;\ |x|^{-(n-2)})$.

Μέσω των αποτελεσμάτων αυτών, απαντήθηκε το ερώτημα εύρεσης του κατάλληλου χώρου για να υλοποιείται η βέλτιστη σταθερά της $(*)$ και ταυτόχρονα δόθηκε καταλυτική απάντηση στο ζήτημα της περαιτέρω βελτίωσης της (βλ. [7], Theorem B).

§ 1 : Βασικοί ορισμοί – Ιδιότητες της σταθεράς Sobolev S_n

Σ'αυτήν την παράγραφο αναφέρουμε τους ορισμούς των βασικών χώρων που θα μας απασχολήσουν καθώς και διάφορες ιδιότητες της σταθεράς Sobolev S_n που θα μας χρειαστούν στη συνέχεια.

– Οι χώροι $L^p(\Omega)$ (βλ. [1])

Θεωρούμε $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Για $1 \leq p < \infty$ ορίζουμε

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \ / \int_\Omega |f|^p \ dx < +\infty\}$$

$$L^p_{loc}(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \ / \int_K |f|^p \ dx < +\infty \ , \ \forall K \subset\subset \Omega\}$$

ενώ για $p = \infty$ ορίζουμε

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \ / \exists \ M \geq 0 \text{ ώστε } |f| \leq M \text{ σχεδόν παντού στο } \Omega\}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

1) Αποδεικνύεται ότι οι χώροι $L^p(\Omega)$, $L^\infty(\Omega)$ είναι χώροι Banach με αντίστοιχες νόρμες
$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f|^p \ dx\right)^{\frac{1}{p}}$, $\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = inf\{M \geq 0 \ / \ |f| \leq M \text{ σχεδόν παντού στο } \Omega\}$.

2) Θεωρούμε ίσες τις συναρτήσεις που ταυτίζονται σχεδόν παντόυ στο Ω.

3) Για $p, q \in [1, +\infty]$ ώστε $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ ισχύει:

$$\|f+g\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)},\ \forall\ f, g \in L^p(\Omega) \quad \text{(Minkowski)}$$

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)},\ \forall\ f \in L^p(\Omega),\ g \in L^q(\Omega) \quad \text{(Hölder)}$$

− Οι χώροι Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ (βλ. [2])

Θεωρούμε $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό. Έστω $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$ πραγματικές συναρτήσεις και a ένας πολυδείκτης. Λέμε ότι η v είναι a-τάξης ασθενής μερική παράγωγος της u και γράφουμε $D^a u = v$ αν ισχύει

$$\int_\Omega u\ D^a \phi\ dx = (-1)^{|a|} \int_\Omega v\ \phi\ dx,\ \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Για $p \in [1, \infty]$ και $k \in \mathbb{N}_0$ ορίζουμε το χώρο Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ ως

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^1_{loc}(\Omega)\ / D^a u \in L^p(\Omega)\ (\text{ασθενώς}),\ \forall\ |a| \leq k\}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

1) Οι ασθενείς παράγωγοι αν υπάρχουν είναι σχεδόν παντού στο Ω μοναδικώς ορισμένες.

2) Αποδεικνύεται ότι για $p \in [1, \infty],\ k \in \mathbb{N}$ οι χώροι $W^{k,p}(\Omega)$ είναι χώροι Banach με νόρμα $\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|a| \leq k} \int_\Omega |D^a u|^p\ dx \right)^{\frac{1}{p}}$ για $p \in [1, \infty)$, $\sum_{|a| \leq k} \underset{x \in \Omega}{ess\ sup}\ |D^a u|$ για $p = \infty$.

3) Ορίζουμε $W_0^{k,p}(\Omega)$ την κλειστότητα του $C_c^\infty(\Omega)$ υπό την προαναφερθείσα νόρμα.

4) Συμβολίζουμε $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$ και $H_0^k(\Omega) = W_0^{k,2}(\Omega)$.

5) Αποδεικνύεται ότι οι χώροι $H^k(\Omega)$, $H_0^k(\Omega)$ είναι χώροι Hilbert με εσωτερικό γινόμενο $< u, v >_{H^k(\Omega)}= \sum_{|a|\leq k} \int_\Omega D^a u D^a v \; dx$.

6) Αν Ω φραγμένο και $\partial\Omega \in C^1$, $p \in [1, n)$, τότε $W^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^q(\Omega)$, $\forall \; q \in [1, \; \frac{2n}{n-2}$) (Rellich-Kondrachov).

– Decreasing Rearrangement (βλ. [3])

Για $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ορίζουμε

$$A^* := \{x \in \mathbb{R}^n \;/\; a_n|x|^n < |A|\}$$

όπου a_n ο όγκος της μοναδιαίας μπάλας στον $\mathbb{R}^n$.

Αν $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό,φραγμένο και $u : \Omega \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση, τότε η (unidimensional) decreasing rearrangement συνάρτηση ορίζεται ως

$$u^\# : [\; 0, |\Omega| \;] \to \mathbb{R}$$

$$u^\#(s) = inf\{t \in \mathbb{R} \;/\; |\{u > t\}| < s \;\}, \forall s \in (0, |\Omega|), \;\; u^\#(0) = ess.sup(u).$$

ενώ η spherically symmetric and decreasing rearrangement συνάρτηση ορίζεται ως

$$u^* : \Omega^* \to \mathbb{R} \text{ με } u^*(x) := u^{\#}(a_n|x|^n).$$

Ισχύουν τα εξής:

- Αν Ω είναι μπάλα με κέντρο την αρχή των αξόνων, τότε $\Omega^* = \Omega$.
- Η u^* είναι ακτινικά συμμετρική και φθίνουσα.
- $\|u\|_{L^p(\Omega)} = \|u^*\|_{L^p(\Omega^*)}, \ \forall\, p \in [1, +\infty)$
- Αν επιπλέον $u \in W^{1,p}(\Omega)$ με $p \in [1, +\infty)$, τότε $u^* \in W^{1,p}(\Omega^*)$ και

$$\|\nabla u^*\|_{L^p(\Omega^*)} \leq \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ</u>

Από τα παραπάνω προκύπτει για $R > 0$ ότι αν $u \in H_0^1(B_R)$, τότε $u^* \in H_0^1(B_R)$ και ισχύει

$$\frac{\displaystyle\int_{B_R} |\nabla u^*|^2 \, dx}{\left(\displaystyle\int_{B_R} |u^*|^{\frac{2n}{n-2}} \, dx\right)^{\frac{n-2}{n}}} \leq \frac{\displaystyle\int_{B_R} |\nabla u|^2 \, dx}{\left(\displaystyle\int_{B_R} |u|^{\frac{2n}{n-2}} \, dx\right)^{\frac{n-2}{n}}}.$$

Περνάμε τώρα σε ορισμένες χαρακτηριστικές ιδιότητες της σταθεράς Sobolev S_n.

Πρόταση 1

Για $n \geq 3$ και $\forall\ R > 0$, η βέλτιστη σταθερά Sobolev S_n ταυτίζεται με τη βέλτιστη σταθερά c της ανίσωσης

$$\int_{B_R} |\nabla u|^2\ dx \geq c\Big(\int_{B_R} |u|^{\frac{2n}{n-2}}\ dx\Big)^{\frac{n-2}{n}},\ \forall\ u \in C_c^\infty(B_R).$$

Δηλαδη

$$S_n \equiv \inf_{\substack{u\in C_c^\infty(B_R)\\ u\neq 0}} \frac{\displaystyle\int_{B_R} |\nabla u|^2\ dx}{\Big(\displaystyle\int_{B_R} |u|^{\frac{2n}{n-2}}\ dx\Big)^{\frac{n-2}{n}}}\ .$$

Απόδειξη:

Θέτουμε $I_R[u] = \dfrac{\displaystyle\int_{B_R} |\nabla u|^2\ dx}{\Big(\displaystyle\int_{B_R} |u|^{\frac{2n}{n-2}}\ dx\Big)^{\frac{n-2}{n}}}$, $I_\infty[u] = \dfrac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2\ dx}{\Big(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{2n}{n-2}}\ dx\Big)^{\frac{n-2}{n}}}$.

Δείχνουμε αρχικά ότι

$$\inf_{\substack{u\in C_c^\infty(B_R)\\ u\neq 0}} \{\ I_R[u]\ \} = \inf_{\substack{v\in C_c^\infty(B_{R'})\\ v\neq 0}} \{\ I_{R'}[v]\ \},\ \forall\ R' \neq R.$$

Πράγματι, θεωρούμε τυχαία $u \in C_c^\infty(B_R),\ u \neq 0$ και ορίζουμε $v(x) := u\big(\frac{R}{R'}x\big)$.

Τότε $v \in C_c^\infty(B_{R'})$ και

$$I_{R'}[v] = \frac{\displaystyle\int_{B_{R'}} |\nabla v(x)|^2 \, dx}{\left(\displaystyle\int_{B_{R'}} |v(x)|^{\frac{2n}{n-2}} \, dx \right)^{\frac{n-2}{n}}} = \frac{\displaystyle\int_{B_{R'}} |\nabla (u(\frac{R}{R'}x))|^2 \, dx}{\left(\displaystyle\int_{B_{R'}} |u(\frac{R}{R'}x)|^{\frac{2n}{n-2}} \, dx \right)^{\frac{n-2}{n}}} = \frac{\displaystyle\int_{B_{R'}} |\nabla u(\frac{R}{R'}x)|^2 (\frac{R}{R'})^2 \, dx}{\left(\displaystyle\int_{B_{R'}} |u(\frac{R}{R'}x)|^{\frac{2n}{n-2}} \, dx \right)^{\frac{n-2}{n}}}$$

$$= \frac{\displaystyle\int_{B_R} |\nabla u(y)|^2 (\frac{R}{R'})^2 (\frac{R}{R'})^{-n} \, dy}{\left(\displaystyle\int_{B_R} |u(y)|^{\frac{2n}{n-2}} (\frac{R}{R'})^{-n} \, dy \right)^{\frac{n-2}{n}}} = \frac{\displaystyle\int_{B_R} |\nabla u(y)|^2 \, dy}{\left(\displaystyle\int_{B_R} |u(y)|^{\frac{2n}{n-2}} \, dy \right)^{\frac{n-2}{n}}} = I_R[u].$$

Από αυτό συμπεραίνουμε ότι $\forall \ u \in C_c^\infty(B_R)$ ισχύει $I_R[u] \geq \underset{\substack{v \in C_c^\infty(B_{R'}) \\ v \neq 0}}{inf} \{ \ I_{R'}[v] \ \}$ και έτσι

$$\underset{\substack{u \in C_c^\infty(B_R) \\ u \neq 0}}{inf} \{ \ I_R[u] \ \} \geq \underset{\substack{v \in C_c^\infty(B_{R'}) \\ v \neq 0}}{inf} \{ \ I_{R'}[v] \ \}.$$

Με εντελώς ανάλογο τρόπο θεωρώντας τυχαία $v \in C_c^\infty(B_{R'})$ και ορίζοντας $u(x) := v(\dfrac{R'}{R}x)$ προκύπτει η ανάποδη ανισότητα και έτσι καταλήγουμε στο ζητούμενο.

Δείχνουμε τώρα ότι για το τυχαίο $R > 0$, ισχύει

$$S_n := \underset{\substack{u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \\ u \neq 0}}{inf} \{ \ I_\infty[u] \ \} = \underset{\substack{u \in C_c^\infty(B_R) \\ u \neq 0}}{inf} \{ \ I_R[u] \ \}.$$

Πράγματι, εφόσον $\{I_R[u] \ / \ u \in C_c^\infty(B_R), \ u \neq 0\} \subseteq \{I_\infty[u] \ / \ u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n), \ u \neq 0\}$ προκύπτει

$$S_n \leq \underset{\substack{u \in C_c^\infty(B_R) \\ u \neq 0}}{inf} \{ \ I_R[u] \ \}.$$

Από την άλλη, λόγω της ιδιότητας του infimum, $\exists \{u_k\} \subseteq C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ ώστε $I_\infty[u_k] \to S_n$.

Οπότε, $\forall\ k \in \mathbb{N},\ \exists\ R_k > 0$ ώστε $u_k \in C_c^\infty(B_{R_k})$ και $I_\infty[u_k] = I_{R_k}[u_k]$.

Για κάθε μία $u_k(x)$ ορίζουμε $v_k(x) := u_k(\frac{R_k}{R}x)$. Τότε $\forall\ k \in \mathbb{N}$, ισχύει $v_k \in C_c^\infty(B_R)$ και

$I_{R_k}[u_k] = I_R[v_k]$ άρα θα προκύψει $I_R[v_k] \to S_n$ επομένως $\underset{\substack{u \in C_c^\infty(B_R)\\ u \neq 0}}{inf} \{\ I_R[u]\ \} \leq S_n$. $\square$

Πρόταση 2

Για $n \geq 3$, η βέλτιστη σταθερά Sobolev S_n ταυτίζεται με τη βέλτιστη σταθερα της ανισότητας Sobolev όταν περιοριστούμε σε ακτινικά συμμετρικές συναρτήσεις.

Δηλαδή
$$S_n \equiv S_{n,radial} := \underset{\substack{u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)\\ 0 \neq u\ radial}}{inf} \frac{\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2\ dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{2n}{n-2}}\ dx\right)^{\frac{n-2}{n}}}\ .$$

Απόδειξη:

(Χρησιμοποιούμε τον ιδιο συμβολισμό $I_\infty[u] = \dfrac{\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2\ dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{2n}{n-2}}\ dx\right)^{\frac{n-2}{n}}}$ με την πρόταση 1)

Εφόσον $\left\{I_\infty[u]\ /\ u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n),\ u \neq 0\ ,\ u\ radial\right\} \subseteq \left\{I_\infty[u]\ /\ u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n),\ u \neq 0\right\}$

ισχύει
$$S_n \leq S_{n,radial}.$$

Θα αποδείξουμε τώρα την ανάποδη ανισότητα.

Λόγω της Πρότασης 1, μπορούμε να περιοριστούμε σε χωρίο B_R αντί του $\mathbb{R}^n$. Επιπλέον, επειδή οι συναρτήσεις $C_c^\infty(B_R)$ είναι πυκνές στον $H_0^1(B_R)$, τα $S_n, S_{n,radial}$ είναι τα ίδια με όποιο σύνολο συναρτήσεων από αυτά τα δύο και αν δουλεύουμε. Τέλος, γνωρίζουμε ότι για την τυχαία $u \in H_0^1(B_R)$, ισχύει $u^* \in H_0^1(B_R)$ και μάλιστα

$$\frac{\displaystyle\int_{B_R} |\nabla u^*|^2 \, dx}{\left(\displaystyle\int_{B_R} |u^*|^{\frac{2n}{n-2}} \, dx\right)^{\frac{n-2}{n}}} \leq \frac{\displaystyle\int_{B_R} |\nabla u|^2 \, dx}{\left(\displaystyle\int_{B_R} |u|^{\frac{2n}{n-2}} \, dx\right)^{\frac{n-2}{n}}}$$

Επομένως, για την τυχαία $u \in H_0^1(B_R)$ ισχύει

$$S_{n,radial} \leq \frac{\displaystyle\int_{B_R} |\nabla u|^2 \, dx}{\left(\displaystyle\int_{B_R} |u|^{\frac{2n}{n-2}} \, dx\right)^{\frac{n-2}{n}}}$$

απ'όπου καταλήγουμε στο ότι $S_{n,radial} \leq S_n$. $\square$

Η επόμενη πρόταση είναι αποτέλεσμα των Brezis - Nirenberg (βλ. [5]). Πρώτα όμως θεωρούμε

$$\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ με } \phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν, } |x| \geq 1 \\ 1 & \text{αν, } |x| \leq \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{και} \quad \phi \in (0,1) \text{ αν } \frac{1}{2} < |x| < 1$$

$$0 \neq x_0 \in B_1$$

$$\delta \in (0, |x_0|) \text{ ώστε } |x_0| + \delta < 1$$

και ορίζουμε για $\epsilon > 0$:

$$U_\epsilon(x) := (\epsilon + |x - x_0|^2)^{-\frac{n-2}{2}} \phi(\frac{x - x_0}{\delta}).$$

Πρόταση 3

Για $n \geq 3$, η βέλτιστη σταθερά Sobolev S_n ισούται με $\lim\limits_{\epsilon \to 0^+} \dfrac{\int_{B_1} |\nabla U_\epsilon|^2 \, dx}{\left(\int_{B_1} |U_\epsilon|^{\frac{2n}{n-2}} \, dx\right)^{\frac{n-2}{n}}}$.

Απόδειξη:

Έχουμε

$$\frac{\int_{B_1} |\nabla U_\epsilon|^2 \, dx}{\left(\int_{B_1} |U_\epsilon|^{\frac{2n}{n-2}} \, dx\right)^{\frac{n-2}{n}}} = \frac{\int_{B_1} |\nabla\big((\epsilon + |x - x_0|^2)^{-\frac{n-2}{2}} \phi(\frac{x - x_0}{\delta})\big)|^2 \, dx}{\left(\int_{B_1} |(\epsilon + |x - x_0|^2)^{-\frac{n-2}{2}} \phi(\frac{x - x_0}{\delta})|^{\frac{2n}{n-2}} \, dx\right)^{\frac{n-2}{n}}} =$$

$$= \frac{\int_{B_\delta(x_0)} |\nabla\big((\epsilon + |x - x_0|^2)^{-\frac{n-2}{2}} \phi(\frac{x - x_0}{\delta})\big)|^2 \, dx}{\left(\int_{B_\delta(x_0)} |(\epsilon + |x - x_0|^2)^{-\frac{n-2}{2}} \phi(\frac{x - x_0}{\delta})|^{\frac{2n}{n-2}} \, dx\right)^{\frac{n-2}{n}}} = \frac{\int_{B_\delta} |\nabla\big((\epsilon + |y|^2)^{-\frac{n-2}{2}} \phi(\frac{y}{\delta})\big)|^2 \, dy}{\left(\int_{B_\delta} |(\epsilon + |y|^2)^{-\frac{n-2}{2}} \phi(\frac{y}{\delta})|^{\frac{2n}{n-2}} \, dy\right)^{\frac{n-2}{n}}}$$

Ονομάζουμε $u_\epsilon(y) := (\epsilon + |y|^2)^{-\frac{n-2}{2}} \phi(\dfrac{y}{\delta})$ και τότε έχουμε

$$\frac{\displaystyle\int_{B_1} |\nabla U_\epsilon|^2 \, dx}{\left(\displaystyle\int_{B_1} |U_\epsilon|^{\frac{2n}{n-2}} \, dx\right)^{\frac{n-2}{n}}} = \frac{\displaystyle\int_{B_\delta} |\nabla u_\epsilon(y)|^2 \, dy}{\left(\displaystyle\int_{B_\delta} |u_\epsilon(y)|^{\frac{2n}{n-2}} \, dy\right)^{\frac{n-2}{n}}} \, .$$

Θα δείξουμε τώρα ότι

$$\int_{B_\delta} |\nabla u_\epsilon(y)|^2 \, dy = \frac{1}{\epsilon^{\frac{n-2}{2}}} \|\nabla U\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + O(1)$$

και στη συνέχεια ομοίως δείχνεται ότι

$$\left(\int_{B_\delta} |u_\epsilon|^{\frac{2n}{n-2}} \, dy\right)^{\frac{n-2}{n}} = \frac{1}{\epsilon^{\frac{n-2}{2}}} \|U\|^2_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\mathbb{R}^n)} + O(\epsilon)$$

όπου $U(x) = \big(1 + |x|^2\big)^{-\frac{n-2}{2}}$.

Έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned} |\nabla u_\epsilon(y)|^2 &= \frac{|\nabla\big(\ \phi\big(\frac{y}{\delta}\big)\ \big)|^2}{\big(\epsilon + |y|^2\big)^{n-2}} - \frac{(n-2)\nabla\big(\ \phi\big(\frac{y}{\delta}\big)^2\ \big)\cdot y}{\big(\epsilon + |y|^2\big)^{n-1}} + \frac{(n-2)^2 \phi\big(\frac{y}{\delta}\big)^2 |y|^2}{\big(\epsilon + |y|^2\big)^{n}} \\ &= \frac{\delta^{-2}|\nabla\phi\big(\frac{y}{\delta}\big)\ |^2}{\big(\epsilon + |y|^2\big)^{n-2}} - \frac{(n-2)\nabla\big(\ \phi\big(\frac{y}{\delta}\big)^2\ \big)\cdot y}{\big(\epsilon + |y|^2\big)^{n-1}} + \frac{(n-2)^2 \phi\big(\frac{y}{\delta}\big)^2 |y|^2}{\big(\epsilon + |y|^2\big)^{n}} \end{aligned}$$

και $\displaystyle\int_{B_\delta} |\nabla u_\epsilon(y)|^2 \, dy = \int_{B_{\frac{\delta}{2}}} |\nabla u_\epsilon(y)|^2 \, dy + \int_{B_\delta \,-\, B_{\frac{\delta}{2}}} |\nabla u_\epsilon(y)|^2 \, dy.$

Όμως

- $\displaystyle\int_{B_{\frac{\delta}{2}}} |\nabla u_\epsilon(y)|^2 \ dy = \int_{B_{\frac{\delta}{2}}} \frac{(n-2)^2|y|^2}{\big(\epsilon+|y|^2\big)^n} \ dy$
- $\displaystyle\int_{B_\delta \, - \, B_{\frac{\delta}{2}}} |\nabla u_\epsilon(y)|^2 \ dy =$

$$= \ \int_{B_\delta \, - \, B_{\frac{\delta}{2}}} \frac{\delta^{-2}|\nabla\phi\big(\frac{y}{\delta}\big) \ |^2}{\big(\epsilon+|y|^2\big)^{n-2}} - \frac{(n-2)\nabla\big(\ \phi\big(\frac{y}{\delta}\big)^2 \ \big)\cdot y}{\big(\epsilon+|y|^2\big)^{n-1}} + \frac{(n-2)^2(\phi\big(\frac{y}{\delta}\big)^2-1)|y|^2}{\big(\epsilon+|y|^2\big)^n} + \frac{(n-2)^2|y|^2}{\big(\epsilon+|y|^2\big)^n} \ dy \quad .$$

Τα τρία πρώτα ολοκληρώματα είναι $O(1)$ καθώς $\epsilon \to 0^+$. Πράγματι,

$$(1) \ \int_{B_\delta \, - \, B_{\frac{\delta}{2}}} \frac{\delta^{-2}|\nabla\phi\big(\frac{y}{\delta}\big) \ |^2}{\big(\epsilon+|y|^2\big)^{n-2}} \ dy \le \int_{B_\delta \, - \, B_{\frac{\delta}{2}}} \frac{\delta^{-2}|\nabla\phi\big(\frac{y}{\delta}\big)|^2}{|y|^{2(n-2)}} \le \ \frac{2^{2(n-2)}\|\nabla\phi\|^2_{L^\infty(B_1)}}{\delta^{n-2}} \ .$$

$$(2) \ |\int_{B_\delta \, - \, B_{\frac{\delta}{2}}} -\frac{(n-2)\nabla(\phi\big(\frac{y}{\delta}\big)^2)\cdot y}{\big(\epsilon+|y|^2\big)^{n-1}} \ dy\big| \le 2(n-2)\int_{B_\delta \, - \, B_{\frac{\delta}{2}}} \frac{\delta^{-1}|\nabla\phi\big(\frac{y}{\delta}\big)|}{|y|^{2n-3}} \ dy \le \frac{c(n)\|\nabla\phi\|_{L^\infty(B_1)}}{\delta^{n-2}}$$

όπου $c(n)$ σταθερά του n.

$$(3) \ |\int_{B_\delta \, - \, B_{\frac{\delta}{2}}} \frac{(n-2)^2(\phi\big(\frac{y}{\delta}\big)^2-1)|y|^2}{\big(\epsilon+|y|^2\big)^n} \ dy\big| \le \ \int_{B_\delta \, - \, B_{\frac{\delta}{2}}} \frac{(n-2)^2}{|y|^{2(n-1)}} \ dy \le \ \frac{(n-2)^2 2^{2(n-1)}}{\delta^{n-2}} \ .$$

Επομένως

$$\int_{B_\delta} |\nabla u_\epsilon(y)|^2 \ dy = \int_{B_\delta} \frac{(n-2)^2|y|^2}{\big(\epsilon+|y|^2\big)^n} dy + O(1) \text{ καθώς } \epsilon \to 0^+.$$

Επιπλέον, $\displaystyle\int_{B_\delta^c} \frac{(n-2)^2|y|^2}{\big(\epsilon+|y|^2\big)^n} dy = n(n-2)^2 a_n \int_\delta^{+\infty} \frac{t^{n+1}}{\big(\epsilon+t^2\big)^n} \ dy \le n(n-2)^2 a_n \int_\delta^{+\infty} \frac{t^{n+1}}{t^{2n}} \ dy =$

$= n(n-2)a_n\delta^{-(n-2)}$ που σημαίνει ότι $\displaystyle\int_{B_\delta^c} \frac{(n-2)^2|y|^2}{\big(\epsilon+|y|^2\big)^n}dy = O(1)$ καθώς $\epsilon \to 0^+$.

Έτσι καταλήγουμε στο ότι

$$\int_{B_\delta} |\nabla u_\epsilon(y)|^2\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(n-2)^2|y|^2}{\big(\epsilon+|y|^2\big)^n}dy + O(1) = \frac{1}{\epsilon^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{(n-2)^2|y|^2}{\big(1+|\frac{y}{\sqrt{\epsilon}}|^2\big)^n}dy + O(1) \overset{z=\frac{y}{\sqrt{\epsilon}}}{=\!=\!=}$$

$$= \frac{1}{\epsilon^{\frac{n-2}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{(n-2)^2|z|^2}{\big(1+|z|^2\big)^n}dz + O(1) \iff \int_{B_\delta} |\nabla u_\epsilon(y)|^2\, dy = \frac{1}{\epsilon^{\frac{n-2}{2}}}\|\nabla U\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + O(1).$$

Με ανάλογο τρόπο δείχνεται ότι

$$\int_{B_\delta} |u_\epsilon|^{\frac{2n}{n-2}}\, dy = \frac{1}{\epsilon^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\big(1+|z|^2\big)^n}\, dy + O(1) = \frac{1}{\epsilon^{\frac{n}{2}}}\|U\|^{\frac{2n}{n-2}}_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\mathbb{R}^n)} + O(1) \text{ οπότε}$$

$$\left(\int_{B_\delta} |u_\epsilon|^{\frac{2n}{n-2}}\, dy\right)^{\frac{n-2}{n}} = \left(\frac{1}{\epsilon^{\frac{n}{2}}}\|U\|^{\frac{2n}{n-2}}_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\mathbb{R}^n)} + O(1)\right)^{\frac{n-2}{n}} = \frac{1}{\epsilon^{\frac{n-2}{2}}}\|U\|^2_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\mathbb{R}^n)} + O(\epsilon).$$

Συνοψίζοντας έχουμε

$$\frac{\displaystyle\int_{B_1} |\nabla U_\epsilon|^2\, dx}{\left(\displaystyle\int_{B_1} |U_\epsilon|^{\frac{2n}{n-2}}\, dx\right)^{\frac{n-2}{n}}} = \frac{\frac{1}{\epsilon^{\frac{n-2}{2}}}\|\nabla U\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + O(1)}{\frac{1}{\epsilon^{\frac{n-2}{2}}}\|U\|^2_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\mathbb{R}^n)} + O(\epsilon)} \longrightarrow \frac{\|\nabla U\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}}{\|U\|^2_{L^{\frac{2n}{n-2}}(\mathbb{R}^n)}} = S_n \text{ καθώς } \epsilon \to 0^+. \ \square$$

Πρόταση 4 (Catrina - Wang)

Για $n \geq 3$ και $\forall\ c \geq 0$, η βέλτιστη σταθερά Sobolev S_n ταυτίζεται με τη βέλτιστη σταθερά C της ανίσωσης (Caffarelli-Kohn-Nirenberg)

$$\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{2c}|\nabla u|^2\ dx \geq C\left(\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{\frac{2cn}{n-2}}|u|^{\frac{2n}{n-2}}\ dx\right)^{\frac{n-2}{n}},\ \forall\ u \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n).$$

Δηλαδη

$$S_n \equiv \inf_{\substack{u\in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)\\ u\neq 0}} \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{2c}|\nabla u|^2\ dx}{\left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{\frac{2cn}{n-2}}|u|^{\frac{2n}{n-2}}\ dx\right)^{\frac{n-2}{n}}}\ .$$

Απόδειξη:

Για $a \in \left(-\infty, \dfrac{n-2}{2}\right),\ b \in [a, a+1],\ p = \dfrac{2n}{n-2+2(b-a)}$ ορίζουμε τα εξής:

- $$F_{a,b}[\ v(t,\theta)\ ] := \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}}(\ \int_{S^{n-1}} |\nabla_\theta v|^2 + v_t^2 + (\tfrac{n-2-2a}{2})^2 v^2\ dS_\theta\ )\ dt}{\left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}}(\ \int_{S^{n-1}} |v|^p\ dS_\theta\ )\ dt\right)^{\frac{2}{p}}} \quad (S^{n-1} = \partial B_1)$$
- $$E_{a,b}[\ u(x)\ ] := \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-2a}|\nabla u|^2\ dx}{\left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-bp}|u|^p\ dx\right)^{\frac{2}{p}}}.$$

Αποδεικνύεται για όλα τα a, b ορισμένα όπως παραπάνω ότι

$$\underset{\substack{u\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)\\ u\neq 0}}{inf} E_{a,b}[u] \;\equiv\; \underset{\substack{u\in C_c^\infty(\mathbb{R}\times S^{n-1})\\ u\neq 0}}{inf} F_{a,b}[u].$$

Θα δείξουμε τώρα ότι $\forall\ a \le 0$, ισχύει

$$\underset{\substack{u\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)\\ u\neq 0}}{inf} E_{a,a}[u] \equiv S_n.$$

Πράγματι, θεωρούμε $0 \neq y \in \mathbb{R}^n$, $\delta \in (0,|y|)$ και $U_\epsilon(x) = (\epsilon + |x-y|^2)^{-\frac{n-2}{2}}\phi\big(\dfrac{x-y}{\delta}\big)$

όπου $\epsilon > 0$ και $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ με

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν, } |x| \ge 1 \\ \\ 1 & \text{αν, } |x| \le \dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \text{και} \quad \phi \in (0,1) \text{ αν } \frac{1}{2} < |x| < 1.$$

Τότε, για $a \le 0$ έχουμε

$$\underset{\substack{u\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)\\ u\neq 0}}{inf} E_{a,a}[u] \le E_{a,a}[U_\epsilon] = \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-2a}|\nabla U_\epsilon|^2\ dx}{\left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-\frac{2na}{n-2}}|U_\epsilon|^{\frac{2n}{n-2}}\ dx\right)^{\frac{n-2}{n}}}$$

$$= \frac{\displaystyle\int_{B_\delta(y)} |x|^{-2a}|\nabla U_\epsilon|^2\ dx}{\left(\displaystyle\int_{B_\delta(y)} |x|^{-\frac{2na}{n-2}}|U_\epsilon|^{\frac{2n}{n-2}}\ dx\right)^{\frac{n-2}{n}}}$$

$$\leq \left(\frac{|y|+\delta}{|y|-\delta}\right)^{-2a} \frac{\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla U_\epsilon|^2 \ dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} |U_\epsilon|^{\frac{2n}{n-2}} \ dx\right)^{\frac{n-2}{n}}} .$$

Παίρνοντας όριο καθώς $\epsilon \to 0^+$ προκύπτει $\underset{\substack{u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \\ u \neq 0}}{inf} E_{a,a}[u] \leq \left(\frac{|y|+\delta}{|y|-\delta}\right)^{-2a} S_n$ (λόγω της Πρότασης 3) ενώ παίρνοντας τώρα όριο καθώς $\delta \to 0^+$ προκύπτει

$$\underset{\substack{u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \\ u \neq 0}}{inf} E_{a,b}[u] \leq S_n.$$

Επίσης, για $a \leq 0$ ισχύει $\left(\frac{n-2-2a}{2}\right)^2 \geq \left(\frac{n-2}{2}\right)^2$ άρα $\forall \ v \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times S^{n-1}) - \{0\}$ προκυπτει

$$\frac{\int_{\mathbb{R}}(\int_{S^{n-1}} |\nabla_\theta v|^2 + v_t^2 + (\frac{n-2-2a}{2})^2 v^2 \ dS_\theta \ ) \ dt}{\left(\int_{\mathbb{R}}(\int_{S^{n-1}} |v|^{\frac{2n}{n-2}} \ dS_\theta \ ) \ dt\right)^{\frac{n-2}{n}}} \geq \frac{\int_{\mathbb{R}}(\int_{S^{n-1}} |\nabla_\theta v|^2 + v_t^2 + (\frac{n-2}{2})^2 v^2 \ dS_\theta \ ) \ dt}{\left(\int_{\mathbb{R}}(\int_{S^{n-1}} |v|^{\frac{2n}{n-2}} \ dS_\theta \ ) \ dt\right)^{\frac{n-2}{n}}}$$

$\iff F_{a,a}[v] \geq F_{0,0}[v]$. Όμως

$$F_{0,0}[v] \geq \underset{\substack{v \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times S^{n-1}) \\ v \neq 0}}{inf} F_{0,0}[v] = \underset{\substack{u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \\ u \neq 0}}{inf} E_{0,0}[u] \equiv S_n.$$

Έτσι συμπεραίνουμε πως

$$\underset{\substack{u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \\ u \neq 0}}{inf} E_{a,b}[u] \ \equiv \underset{\substack{u \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times S^{n-1}) \\ u \neq 0}}{inf} F_{a,a}[u] \geq S_n$$

απ'όπου προκύπτει τελικά η επιθυμητή ισότητα.

Τέλος, ορίζοντας $c := -a \geq 0$ προκύπτει το αποτέλεσμα της εκφώνησης. $\square$

§ 2 : Βελτιωμένη Ανισότητα Hardy

Σ'αυτήν την παράγραφο δείχνουμε αρχικά ότι δεν υπάρχει $H_0^1(\Omega)$ ελαχιστοποιητής για την βέλτιστης σταθερά της ανίσωσης ($\diamond$) των Brezis-Vazquez και στη συνέχεια αποδεικνύουμε την βελτιωμένη εκδοχή της ανισότητας Hardy των A. Τερτίκα-Σ. Φίλιππα.

Θεώρημα 1

Η βέλτιστη σταθερά C της ανίσωσης

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \geq \left(\frac{n-2}{2}\right)^2 \int_\Omega \frac{u^2}{|x|^2} \, dx + C \int_\Omega u^2 \, dx \ , \ \forall \ u \in H_0^1(\Omega)$$

δεν υλοποιείται στον $H_0^1(\Omega)$.

Απόδειξη:

Η βέλτιστη σταθερά της ανίσωσης ισούται με

$$C := \inf_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ u \neq 0}} \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx - \left(\tfrac{n-2}{2}\right)^2 \int_\Omega \frac{u^2}{|x|^2} \, dx}{\displaystyle\int_\Omega u^2 \, dx}.$$

(προφανώς $0 < \lambda_\Omega \leq C$)

Υποθέτουμε ότι $\exists \ u \in H_0^1(\Omega) - \{0\}$ ώστε $C = \dfrac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx - \left(\tfrac{n-2}{2}\right)^2 \int_\Omega \frac{u^2}{|x|^2} \, dx}{\displaystyle\int_\Omega u^2 \, dx}$.

Μάλιστα, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $u \geq 0$ (αφού και η $|u|$ θα ικανοποιεί τις ίδιες υποθέσεις).

Τότε, αποδεικνύνεται πώς η u είναι ασθενής λύση του προβλήματος

$$\Delta u + \left(\frac{n-2}{2}\right)^2 \frac{u}{|x|^2} + C\ u = 0,\ \text{στο } \Omega,\ u > 0 \text{ στο } \Omega - \{0\},\ u = 0 \text{ στο } \partial\Omega$$

ενώ από elliptic regularity προκύπτει ότι $u \in C^\infty(\Omega - \{0\})$.

Υποθέτουμε δίχως βλάβη της γενικότητας ότι η $\overline{B_1} \subseteq \Omega$ ειδάλλως επιλέγουμε μπάλα με μικρότερη ακτίνα ώστε να ισχύει.

Για $r \in (0,1]$ ορίζουμε

$$v(r) := \frac{1}{na_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r} u(x)\ dS_x = \frac{1}{na_n} \int_{\partial B_1} u(ry)\ dS_y$$

όπου a_n ο όγκος της μοναδιαίας μπάλας στον $\mathbb{R}^n$.

Ισχύουν $v \in C^\infty(\ (0,1]\ ),\ v > 0$ καθώς επίσης

$$v^{'}(r) = \frac{1}{na_n} \int_{\partial B_1} \nabla u(ry) \cdot y\ dS_y = \frac{1}{na_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r} \nabla u(x) \cdot \frac{x}{r}\ dS_x = \frac{1}{na_n r^{n-1}} \int_{B_r} \Delta u\ dx$$

$$v^{''}(r) = -\frac{n-1}{na_n r^n} \int_{B_r} \Delta u\ dx + \frac{1}{na_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r} \Delta u\ dS_x.$$

Επομένως υπολογίζεται ότι

$$v^{''}(r) + \frac{n-1}{r}\ v^{'}(r) = \frac{1}{na_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r} \Delta u\ dS_x.$$

Λαμβάνοντας υπόψιν το πρόβλημα που ικανοποιεί η u παίρνουμε

$$\frac{1}{na_n r^{n-1}}\int_{\partial B_r}\Delta u\ dS_x=\frac{1}{na_n r^{n-1}}\Bigg(-\frac{\left(\frac{n-2}{2}\right)^2}{r^2}\int_{\partial B_r}u\ dS_x-C\int_{\partial B_r}u\ dS_x\Bigg)\iff$$

$$\iff\ \frac{1}{na_n r^{n-1}}\int_{\partial B_r}\Delta u\ dS_x=-\frac{\left(\frac{n-2}{2}\right)^2}{r^2}v(r)-Cv(r)$$

οπότε καταλήγουμε στη διαφορική εξίσωση

$$v^{''}(r)+\frac{n-1}{r}v^{'}(r)+\frac{\left(\frac{n-2}{2}\right)^2}{r^2}v(r)=-Cv(r),\ r\in(0,1].$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$w(r):=r^{\frac{n-2}{2}}v(r),\ r\in(0,1].$$

Ισχύουν $w\in C^{\infty}((0,1])$ και $w>0$. Επίσης

$$\begin{aligned}\big(rw^{'}(r)\big)^{'}&=\left(\tfrac{n-2}{2}\right)^2 r^{\frac{n-4}{2}}v(r)+(n-1)r^{\frac{n-2}{2}}v^{'}(r)+r^{\frac{n}{2}}v^{''}(r)\\&=r^{\frac{n}{2}}\Bigg(v^{''}(r)+\frac{n-1}{r}v^{'}(r)+\frac{\left(\frac{n-2}{2}\right)^2}{r^2}v(r)\Bigg)=-Cr^{\frac{n}{2}}v(r)=-Cr^{\frac{n}{2}}r^{-\frac{n-2}{2}}w(r)\end{aligned}$$

άρα

$$\big(rw^{'}(r)\big)^{'}=-Crw(r)\ ,\ \forall\ r\in(0,1].$$

Ολοκληρώνουμε τη σχέση από r μέχρι 1 και παίρνουμε

$$\int_r^1\big(tw^{'}(t)\big)^{'}\ dt=-C\int_r^1 tw(t)\ dt\iff w^{'}(r)=\frac{1}{r}\Bigg(w^{'}(1)+C\int_r^1 tw(t)\ dt\Bigg).$$

Ολοκληρώνουμε ξανά από r μέχρι 1 και παίρνουμε

$$w(r) = w(1) - \int_r^1 \frac{1}{t}\left(w^{'}(1) + C\int_t^{\,1} sw(s)\ ds\right)\ dt,\ \forall\ r \in (0,1].$$

Παρατηρούμε ότι το όριο $\lim\limits_{t\to 0^+}\displaystyle\int_t^1 sw(s)\ ds$ υπάρχει.

Πράγματι, αφού $sw(s) > 0$ για $s \in [t,1]$, ισχύει $\lim\limits_{t\to 0^+}\displaystyle\int_t^1 sw(s)\ ds\ \geq 0$.

Από την άλλη, δε γίνεται $\lim\limits_{t\to 0^+}\displaystyle\int_t^1 sw(s)\ ds = +\infty$ διότι τότε

$\lim\limits_{r\to 0^+}\displaystyle\int_r^1 \frac{1}{t}\left(w^{'}(1) + C\int_t^1 sw(s)\ ds\right)\ dt = +\infty \implies \lim\limits_{r\to 0^+} w(r) = -\infty$ που είναι αδύνατον

αφού $w(r) > 0,\ \forall\ r \in (0,1]$.

Αποδεικνύουμε τώρα τον εξής ισχυρισμό:

$$(*)\ \forall\ M > 0,\ \forall\ \delta \in (0,1],\ \exists\ r_0 \in (0,\delta] \text{ ώστε } w(r_0) \leq M.$$

Πράγματι, έστω ότι δεν ισχύει. Τότε $\exists\ M > 0,\ \exists\ \delta \in (0,1]$ ώστε $w(r) > M,\ \forall\ r \in (0,\delta]$.

Εφόσον $u \in H_0^1(\Omega)$, θα ισχύει $u \in H^1(B_\delta) \implies u \in L^{\frac{2n}{n-2}}(B_\delta)$ οπότε

$$M < w(r) = r^{\frac{n-2}{2}}\frac{1}{na_n r^{n-1}}\int_{\partial B_r} u\ dS = \frac{r^{-\frac{n}{2}}}{na_n}\int_{\partial B_r} u\ dS \leq$$

$$\leq \frac{r^{-\frac{n}{2}}}{na_n}\left(\int_{\partial B_r} 1\ dS\right)^{\frac{n+2}{2n}}\left(\int_{\partial B_r} |u|^{\frac{2n}{n-2}}\ dS\right)^{\frac{n-2}{2n}} = \frac{r^{-\frac{n}{2}}}{na_n}\left(na_n r^{n-1}\right)^{\frac{n+2}{2n}}\left(\int_{\partial B_r} |u|^{\frac{2n}{n-2}}\ dS\right)^{\frac{n-2}{2n}} =$$

$$= c(n) r^{\frac{n-2}{2n}} \left(\int_{\partial B_r} |u|^{\frac{2n}{n-2}} \, dS \right)^{\frac{n-2}{2n}}, \; c(n) := (n a_n)^{\frac{-n+2}{2n}}$$

Ολοκληρώνουμε την ανίσωση από 0 μέχρι $t \in (0, \delta]$ και προκύπτει

$$\int_0^t M \, dr < c(n) \int_0^t r^{\frac{n-2}{2n}} \left(\int_{\partial B_r} |u|^{\frac{2n}{n-2}} \, dS \right)^{\frac{n-2}{2n}} dr$$

$$\iff Mt < c(n) \left(\int_0^t \left(r^{\frac{n-2}{2n}}\right)^{\frac{2n}{n+2}} dr \right)^{\frac{n+2}{2n}} \left(\int_0^t \left(\int_{\partial B_r} |u|^{\frac{2n}{n-2}} \, dS \right) dr \right)^{\frac{n-2}{2n}}$$

$$\iff Mt < c(n) \left(\frac{n+2}{2n}\right)^{\frac{n+2}{2n}} t \, \|u\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}(B_t)}$$

$$\iff \tilde{c}(n) < \|u\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}(B_t)}, \; \forall \, t \in (0, \delta] \text{ όπου } \tilde{c}(n) > 0 \text{ σταθερά.}$$

Αυτό είναι άτοπο αφού για κατάλληλα μικρή ακτίνα t παίρνουμε $\|u\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}(B_t)} < \tilde{c}(n)$.

Άμεση συνέπεια του ισχύρισμού είναι ότι $\lim\limits_{r \to 0^+} w(r) \neq +\infty$.

Επομένως, από τον τύπο για το $w(r)$, συμπεραίνουμε πως κατ'ανάγκην

$$w'(1) = -\lim_{t \to 0^+} \int_t^1 s w(s) \, ds = -\int_0^1 s w(s) \, ds$$

ειδάλλως, $\lim\limits_{r \to 0^+} w(r) = \pm\infty$ $\Big($ανάλογα με το πρόσημο του $w'(1) + \int_0^1 s w(s) \, ds$ $\Big)$ που είναι αδύνατον.

Έτσι καταλήγουμε στο ότι $w(r) = w(1) + C \int_r^1 \frac{1}{t} \left(\int_0^t s w(s) \, ds \right) dt \; , \; \forall \, r \in (0, 1]$.

Τότε όμως $w(r) > \dfrac{w(1)}{2}, \; \forall \, r \in (0, 1]$ το οποίο είναι ΆΤΟΠΟ λόγω του ισχυρισμού $(*)$. $\square$

Περνάμε τώρα στην απόδειξη της βελτιωμένης ανισότητας Hardy των Α. Τερτίκα-Σ. Φίλιππα.

Θεώρημα 2

Για κάθε $u \in H_0^1(\Omega)$ ισχύει η ανισότητα

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \geq \left(\frac{n-2}{2}\right)^2 \int_\Omega \frac{u^2}{|x|^2} \, dx + \frac{1}{4} \int_\Omega X^2\Big(1, \frac{|x|}{D}\Big) \frac{u^2}{|x|^2} \, dx$$

και η σταθερά $\frac{1}{4}$ είναι βέλτιστη, δηλαδή

$$\frac{1}{4} = \inf_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ u \neq 0}} \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx - \left(\frac{n-2}{2}\right)^2 \int_\Omega \frac{u^2}{|x|^2} \, dx}{\displaystyle\int_\Omega X^2\Big(1, \frac{|x|}{D}\Big) \frac{u^2}{|x|^2} \, dx} \, .$$

Απόδειξη:

*Για απλοποίηση του συμβολισμού, θα γράφουμε $X(s)$ δηλώνοντας την $X(1, s)$.

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $u \in C_0^\infty(\Omega - \{0\})$ και $\phi \in C^\infty(\mathbb{R} - \{0\})$ με $\phi > 0$.

Δείχνουμε αρχικά ότι

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \geq -\int_\Omega \frac{\Delta\big(\phi(|x|)\big)}{\phi(|x|)} u^2 \, dx.$$

Κάνουμε την αλλαγή συνάρτησης $u(x) = \phi(|x|) \, v(x)$ όπου $v \in C_0^\infty(\Omega - \{0\})$ και έχουμε

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \; dx = \int_\Omega \phi^2 |\nabla v|^2 \; dx + \int_\Omega \phi' \phi \; \frac{x}{|x|} \cdot \nabla(v^2) \; dx + \int_\Omega (\phi')^2 v^2 \; dx.$$

Όμως

$$\int_\Omega \phi' \phi \; \frac{x}{|x|} \cdot \nabla(v^2) \; dx = \int_\Omega \phi \nabla \phi \cdot \nabla v^2 \; dx = -\int_\Omega v^2 \nabla \cdot \big(\phi \nabla \phi\big) \; dx = -\int_\Omega v^2 \big((\phi')^2 + \phi \Delta \phi\big) \; dx.$$

Οπότε, συνδυάζοντας τις δύο σχέσεις προκύπτει

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \; dx = \int_\Omega \phi^2 |\nabla v|^2 \; dx - \int_\Omega v^2 \phi \Delta \phi \; dx = \int_\Omega \phi^2 |\nabla v|^2 \; dx - \int_\Omega \frac{u^2}{\phi} \Delta \phi \; dx \geq \; -\int_\Omega \frac{\Delta \phi}{\phi} u^2 \; dx \; .$$

Θέτουμε $c = \dfrac{n-2}{2}$ και ψάχνουμε για κατάλληλη επιλογή ϕ έτσι ώστε

$$-\frac{\Delta \phi}{\phi} = \frac{1}{|x|^2} \left(c^2 + \frac{X^2(\frac{|x|}{D})}{4} \right). \; (1)$$

Αν $\phi(|x|) = f(r)$, τότε $-\Delta \phi = -f''(r) - (n-1) \dfrac{f'(r)}{r}$ οπότε η (1) γίνεται

$$-r^2 f''(r) - (n-1) r f'(r) = \left(c^2 + \frac{X^2(\frac{r}{D})}{4} \right) f(r). \; (2)$$

Ψάχνουμε λύση στη μορφή $f(r) = r^a X^b$ για κατάλληλα $a, b \in \mathbb{R}$.

Τότε, $f'(r) = \left(\dfrac{a + bX}{r} \right) f(r)$ και $f''(r) = \left(\dfrac{-a - bX + bX^2 + (a+bX)^2}{r^2} \right) f(r)$.

Αντικαθιστώντας στην (2) προκύπτει

$$a(2-n) - a^2 + \big(b(-n+2) - 2ab\big) X + (-b - b^2) X^2 = c^2 + \frac{X^2}{4} \quad (3)$$

απ'όπου παίρνουμε το σύστημα εξισώσεων

$$a(2-n)-a^2=c^2 \Big/ \; b(2-n)-2ab=0 \Big/ \; -b-b^2=\frac{1}{4}$$

Η λύση του είναι μοναδική και είναι η $a=-c=-\left(\dfrac{n-2}{2}\right),\ b=-\dfrac{1}{2}.$

Επομένως, η ζητούμενη ϕ είναι $\phi(|x|)=|x|^{-\left(\frac{n-2}{2}\right)}X^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{|x|}{D}\right)$ και τότε προκύπτει

$$\int_\Omega |\nabla u|^2\;dx \geq \int_\Omega \frac{u^2}{|x|^2}\left(\left(\tfrac{n-2}{2}\right)^2+\tfrac{1}{4}X^2\left(\tfrac{|x|}{D}\right)\right)\;dx,\ \forall u\in C_0^\infty(\Omega-\{0\}).\ (4)$$

Δείχνουμε τώρα ότι η (4) ισχύει τελικά $\forall u\in C_c^\infty(\Omega)$.

Έστω $\epsilon>0$ κατάλληλα μικρο ώστε $\overline{B_{2\epsilon}}\subseteq\Omega$. Ορίζουμε $u_\epsilon(x):=u(x)\phi\left(\dfrac{|x|}{\epsilon}\right)$ όπου

$u\in C_c^\infty(\Omega)$ και $\phi\in C^\infty(\ [0,+\infty)\ )$ με

$$\phi(t)=\begin{cases}0 & \text{αν},\ t\in[0,1]\\ \\ 1 & \text{αν},\ t\geq 2\end{cases}\quad \text{και}\ \ \phi\in(0,1)\ \text{αν}\ t\in(1,2).$$

Τότε $u_\epsilon\in C_0^\infty(\Omega-\{0\})$ οπότε $\displaystyle\int_\Omega |\nabla u_\epsilon|^2\;dx\geq\int_\Omega\frac{u_\epsilon^2}{|x|^2}\left(\left(\tfrac{n-2}{2}\right)^2+\tfrac{1}{4}X^2\left(\tfrac{|x|}{D}\right)\right)\;dx.$

Ισχύουν:

- $\displaystyle\int_\Omega |\nabla u_\epsilon|^2\;dx=\int_{\Omega\,-\,\overline{B_{2\epsilon}}}|\nabla u|^2\;dx+\int_{\overline{B_{2\epsilon}}\,-\,\overline{B_\epsilon}}\left|\phi\left(\frac{|x|}{\epsilon}\right)\ \nabla u+u\ \phi'\left(\frac{|x|}{\epsilon}\right)\frac{x}{\epsilon|x|}\right|^2\;dx$ και

$$\int_{\Omega - \overline{B_{2\epsilon}}} |\nabla u|^2 \; dx \to \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \text{ καθώς } \epsilon \to 0^+,$$

$$\int_{\overline{B_{2\epsilon}} - \overline{B_\epsilon}} |\phi(\frac{|x|}{\epsilon}) \; \nabla u + u \; \phi^{'}(\frac{|x|}{\epsilon}) \frac{x}{\epsilon |x|}|^2 \; dx \leq 2 \int_{\overline{B_{2\epsilon}} - \overline{B_\epsilon}} |\nabla u|^2 + u^2 \; \left(\phi^{'}(\frac{|x|}{\epsilon})\right)^2 \frac{1}{\epsilon^2} \; dx \leq$$

$$\leq 2 \Bigg(\|\nabla u\|^2_{L^\infty(\Omega)} + \|u\|^2_{L^\infty(\Omega)} \|\phi^{'}\|^2_{L^\infty(\ [1,2])} \Bigg) a_n \Bigg((2\epsilon)^{n-2} - \epsilon^{n-2} \Bigg) \to 0 \text{ καθώς } \epsilon \to 0^+.$$

- $\displaystyle\int_{\Omega} \frac{u_\epsilon^2}{|x|^2} \Bigg(\big(\tfrac{n-2}{2}\big)^2 + \tfrac{1}{4} X^2 \big(\tfrac{|x|}{D}\big) \Bigg) \; dx = \int_{\Omega - \overline{B_{2\epsilon}}} \frac{u^2}{|x|^2} (...) \; dx + \int_{\overline{B_{2\epsilon}} - \overline{B_\epsilon}} \frac{u_\epsilon^2}{|x|^2} (...) \; dx$

  και $\displaystyle\int_{\Omega - \overline{B_{2\epsilon}}} \frac{u^2}{|x|^2} \Bigg(\big(\tfrac{n-2}{2}\big)^2 + \tfrac{1}{4} X^2 \big(\tfrac{|x|}{D}\big) \Bigg) \; dx \to \int_{\Omega} \frac{u^2}{|x|^2} \Bigg(\big(\tfrac{n-2}{2}\big)^2 + \tfrac{1}{4} X^2 \big(\tfrac{|x|}{D}\big) \Bigg) \; dx$ αφού

  $$\int_{\overline{B_{2\epsilon}}} \frac{u^2}{|x|^2} \Bigg(\big(\tfrac{n-2}{2}\big)^2 + \tfrac{1}{4} X^2 \big(\tfrac{|x|}{D}\big) \Bigg) \; dx \leq \int_{\overline{B_{2\epsilon}}} \frac{u^2}{|x|^2} \Bigg(\big(\tfrac{n-2}{2}\big)^2 + \tfrac{1}{4} \Bigg) \; dx \leq$$

  $$\leq \|u\|_{L^\infty(\Omega)} c(n) \int_{B_{2\epsilon}} \frac{1}{|x|^2} \; dx = \|u\|_{L^\infty(\Omega)} \tilde{c}(n) \epsilon^{n-2} \to 0 \text{ καθώς } \epsilon \to 0^+.$$

  Επίσης $\displaystyle\int_{\overline{B_{2\epsilon}} - \overline{B_\epsilon}} \frac{u_\epsilon^2}{|x|^2} \Bigg(\big(\tfrac{n-2}{2}\big)^2 + \tfrac{1}{4} X^2 \big(\tfrac{|x|}{D}\big) \Bigg) \; dx \leq \int_{\overline{B_{2\epsilon}} - \overline{B_\epsilon}} \frac{u_\epsilon^2}{|x|^2} \Bigg(\big(\tfrac{n-2}{2}\big)^2 + \tfrac{1}{4} \Bigg) \; dx \leq$

  $$\leq \|u\|_{L^\infty(\Omega)} \; c(n) \int_{\overline{B_{2\epsilon}} - \overline{B_\epsilon}} \frac{1}{|x|^2} \; dx = \|u\|_{L^\infty(\Omega)} \tilde{c}(n) \Bigg((2\epsilon)^{n-2} - \epsilon^{n-2} \Bigg) \to 0 \text{ καθώς } \epsilon \to 0^+.$$

Επομένως, παίρνοντας όριο καθώς $\epsilon \to 0^+$ στην ανίσωση που ικανοποιεί η u_ϵ, προκύπτει

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \; dx \geq \int_{\Omega} \frac{u^2}{|x|^2} \Bigg(\big(\tfrac{n-2}{2}\big)^2 + \tfrac{1}{4} X^2 \big(\tfrac{|x|}{D}\big) \Bigg) \; dx, \; \forall u \in C_c^\infty(\Omega).$$

Εφόσον οι συναρτήσεις στο $C_c^\infty(\Omega)$ είναι πυκνές στο $H_0^1(\Omega)$ συμπεραίνουμε ότι η ανίσωση ισχύει τελικά $\forall u \in H_0^1(\Omega)$.

Αποδεικνύουμε τώρα το δεύτερο κομμάτι του θεωρήματος.

Θέτουμε
$$\lambda = \inf_{\substack{u\in H_0^1(\Omega)\\ u\neq 0}} \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx - \left(\tfrac{n-2}{2}\right)^2 \int_\Omega \frac{u^2}{|x|^2}\,dx}{\displaystyle\int_\Omega X^2\left(\frac{|x|}{D}\right)\frac{u^2}{|x|^2}\,dx}\ .$$

Από την αποδεδειγμένη σχέση στο πρώτο κομμάτι γνωρίζουμε ότι $\forall u \in H_0^1(\Omega)$ με $u \neq 0$,

ισχύει $\dfrac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx - \left(\tfrac{n-2}{2}\right)^2 \int_\Omega \frac{u^2}{|x|^2}\,dx}{\displaystyle\int_\Omega X^2\left(\frac{|x|}{D}\right)\frac{u^2}{|x|^2}\,dx} \geq \dfrac{1}{4} \implies \lambda \geq \dfrac{1}{4}.$

Δείχνουμε τώρα την ανάποδη σχέση.

θεωρούμε $\delta > 0$ κατάλληλα μικρό ώστε $\overline{B_{2\delta}} \subseteq \Omega$, $\psi \in C^\infty(\ [0,+\infty)\ )$ με

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν, } t \in [0,1] \\ \\ 0 & \text{αν, } t \geq 2 \end{cases} \quad \text{και} \ \ \psi \in (0,1) \text{ αν } t \in (1,2)$$

και ορίζουμε

$$u_{\epsilon,a}(x) := |x|^{\epsilon-(\frac{n-2}{2})} X^{a-\frac{1}{2}}\left(\frac{|x|}{D}\right)\psi\left(\frac{|x|}{\delta}\right)$$

όπου $\epsilon, a > 0$ κατάλληλα μικρά.

Ισχύει

$$u_{\epsilon,a} \in H_0^1(\Omega) - \{0\},\ \forall \epsilon, a > 0.$$

Πράγματι:

- $\displaystyle\int_\Omega u_{\epsilon,a}^2\ dx = \int_{\overline{B_{2\delta}} - \overline{B_\delta}} u_{\epsilon,a}^2\ dx\ + \int_{\overline{B_\delta}} u_{\epsilon,a}^2\ dx$ και

  $$\int_{\overline{B_{2\delta}} - \overline{B_\delta}} u_{\epsilon,a}^2\ dx \leq \int_{\overline{B_{2\delta}} - \overline{B_\delta}} |x|^{2\epsilon-n+2} X^{2a-1}\big(\tfrac{|x|}{D}\big)\ dx = c_1 \int_\delta^{2\delta} \frac{t^{2\epsilon+1}}{\big(1 - ln\big(\frac{t}{D}\big)\big)^{2a-1}}\ dt \leq$$

  $\leq c_2$ όπου $c_1, c_2 > 0$ σταθερές.

  Επίσης, $\displaystyle\int_{\overline{B_\delta}} u_{\epsilon,a}^2\ dx = \int_{\overline{B_\delta}} |x|^{2\epsilon-n+2} X^{2a-1}\big(\tfrac{|x|}{D}\big)\ dx = c_1 \int_0^\delta \frac{t^{2\epsilon+1}}{\big(1 - ln\big(\frac{t}{D}\big)\big)^{2a-1}}\ dt.$

  Όμως $\displaystyle\frac{t^{2\epsilon+1}}{\big(1 - ln\big(\frac{t}{D}\big)\big)^{2a-1}} \to 0$ καθώς $t \to 0^+$ απ'όπου μπορούμε να συμπεράνουμε ότι

  $\displaystyle\int_0^\delta \frac{t^{2\epsilon+1}}{\big(1 - ln\big(\frac{t}{D}\big)\big)^{2a-1}}\ dt < +\infty.$ Επομένως $\displaystyle\int_\Omega u_{\epsilon,a}^2\ dx < +\infty.$

- Για $x \neq 0$ έχουμε $\nabla u_{\epsilon,a}(x) = \nabla\bigg(|x|^{\epsilon-(\frac{n-2}{2})} X^{a-\frac{1}{2}}\big(\frac{|x|}{D}\big)\psi(\frac{|x|}{\delta})\bigg) =$

  $$= \big(\epsilon - (\tfrac{n-2}{2})\big)|x|^{\epsilon-1-\frac{n}{2}} X^{a-\frac{1}{2}}\psi(\tfrac{|x|}{\delta})x + |x|^{\epsilon-(\frac{n-2}{2})}\bigg(\big(a - \tfrac{1}{2}\big)X^{a+\frac{1}{2}}\psi(\tfrac{|x|}{\delta})\frac{x}{|x|^2} + X^{a-\frac{1}{2}}\psi'(\tfrac{|x|}{\delta})\frac{x}{\delta|x|}\bigg).$$

  Έχουμε $\displaystyle\int_\Omega |\nabla u_{\epsilon,a}|^2\ dx = \int_{\overline{B_{2\delta}} - \overline{B_\delta}} |\nabla u_{\epsilon,a}|^2\ dx + \int_{\overline{B_\delta}} |\nabla u_{\epsilon,a}|^2\ dx$ και

  $$\int_{\overline{B_{2\delta}} - \overline{B_\delta}} |\nabla u_{\epsilon,a}|^2\ dx \leq c_3 \int_{\overline{B_{2\delta}} - \overline{B_\delta}} |x|^{2\epsilon-n} X^{2a-1}\big(\tfrac{|x|}{D}\big)\ dx +$$

$$+c_4\int_{\overline{B_{2\delta}}-\overline{B_\delta}}|x|^{2\epsilon-n}X^{2a+1}\left(\tfrac{|x|}{D}\right)\,dx+c_4\|\psi'\|^2_{L^\infty([1,2])}\int_{\overline{B_{2\delta}}-\overline{B_\delta}}|x|^{2\epsilon-n+2}X^{2a-1}\left(\tfrac{|x|}{D}\right)\,dx$$

$\leq c_5$ όπου $c_3,c_4,c_5>0$ σταθερές.

Επίσης, $\displaystyle\int_{\overline{B_\delta}}|\nabla u_{\epsilon,a}|^2\,dx\leq 2c_3\int_{\overline{B_\delta}}|x|^{2\epsilon-n}X^{2a-1}\,dx+\ 2c_4\int_{\overline{B_\delta}}|x|^{2\epsilon-n}X^{2a+1}\,dx$

$$=c_6\int_0^\delta t^{2\epsilon-1}X^{2a-1}\left(\tfrac{t}{D}\right)\,dt+c_7\int_0^\delta t^{2\epsilon-1}X^{2a+1}\left(\tfrac{t}{D}\right)\,dt \qquad (c_6,c_7>0 \text{ σταθερές})$$

$$=\frac{c_6}{2\epsilon}\int_0^\delta(t^{2\epsilon})'X^{2a-1}\left(\tfrac{t}{D}\right)\,dt+\frac{c_7}{2\epsilon}\int_0^\delta(t^{2\epsilon})'X^{2a+1}\left(\tfrac{t}{D}\right)\,dt$$

$$=\frac{c_6}{2\epsilon}\left(\delta^{2\epsilon}X^{2a-1}\left(\tfrac{\delta}{D}\right)+\tfrac{1-2a}{D}\int_0^\delta t^{2\epsilon}X^{2a}\left(\tfrac{t}{D}\right)\,dt\right)+\frac{c_7}{2\epsilon}\left(\delta^{2\epsilon}X^{2a+1}\left(\tfrac{\delta}{D}\right)-\tfrac{2a+1}{D}\int_0^\delta t^{2\epsilon}X^{2a+2}\left(\tfrac{t}{D}\right)\,dt\right)<+\infty$$

αφού $\displaystyle\lim_{t\to0^+}\left(t^{2\epsilon}X^{2a-1}\right)=\lim_{t\to0^+}\left(t^{2\epsilon}X^{2a}\right)=\lim_{t\to0^+}\left(t^{2\epsilon}X^{2a+1}\right)=\lim_{t\to0^+}\left(t^{2\epsilon}X^{2a+2}\right)=0$

Επομένως $\displaystyle\int_\Omega|\nabla u_{\epsilon,a}|^2\,dx<+\infty.$

Για τη συνάρτηση $u(x)=\phi(|x|)v(x)$ όπου $\phi\in C^\infty(\mathbb{R}-\{0\}),\ \phi>0\ ,\ v\in C_0^\infty(\Omega-\{0\})$

έχουμε δείξει ότι $\displaystyle\int_\Omega|\nabla u|^2\,dx=\int_\Omega\phi^2|\nabla v|^2\,dx-\int_\Omega\frac{\Delta\phi}{\phi}u^2\,dx$ και αν συγκεκριμένα

$\phi(|x|)=|x|^{-(\frac{n-2}{2})}X^{-\frac12}\left(\frac{|x|}{D}\right)$, τότε $\displaystyle-\int_\Omega\frac{\Delta\phi}{\phi}u^2\,dx=\int_\Omega\frac{u^2}{|x|^2}\left(\left(\tfrac{n-2}{2}\right)^2+\tfrac14X^2\left(\tfrac{|x|}{D}\right)\right)\,dx.$

Συνδυάζοντας αυτές τις δύο σχέσεις παίρνουμε

$$\frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2\ dx - \left(\frac{n-2}{2}\right)^2 \int_\Omega \frac{u^2}{|x|^2}\ dx}{\displaystyle\int_\Omega \frac{u^2}{|x|^2} X^2\big(\frac{|x|}{D}\big)\ dx} = \frac{\displaystyle\int_\Omega \phi^2 |\nabla v|^2\ dx}{\displaystyle\int_\Omega \frac{\phi^2 v^2}{|x|^2} X^2\big(\frac{|x|}{D}\big)\ dx} + \frac{1}{4},\ \forall\ v \in C_0^\infty(\Omega - \{0\}).$$

Διαλέγοντας λοιπόν ως $v(x)$ τη $v_{\epsilon,a}(x) = |x|^\epsilon X^a\big(\frac{|x|}{D}\big)\psi(|x|)$ θα προκύψει

$$\frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u_{\epsilon,a}|^2\ dx - \left(\frac{n-2}{2}\right)^2 \int_\Omega \frac{u_{\epsilon,a}^2}{|x|^2}\ dx}{\displaystyle\int_\Omega \frac{u_{\epsilon,a}^2}{|x|^2} X^2\big(\frac{|x|}{D}\big)\ dx} = \frac{\displaystyle\int_\Omega \phi^2 |\nabla v_{\epsilon,a}|^2\ dx}{\displaystyle\int_\Omega \frac{\phi^2 v_{\epsilon,a}^2}{|x|^2} X^2\big(\frac{|x|}{D}\big)\ dx} + \frac{1}{4}. \quad (5)$$

Θα δείξουμε ότι $\dfrac{\displaystyle\int_\Omega \phi^2 |\nabla v_{\epsilon,a}|^2\ dx}{\displaystyle\int_\Omega \frac{\phi^2 v_{\epsilon,a}^2}{|x|^2} X^2\big(\frac{|x|}{D}\big)\ dx} \to 0$ καθώς τα $\epsilon, a \to 0^+$ (με συγκεκριμένη σειρά).

Έχουμε:

- $$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{\phi^2 v_{\epsilon,a}^2}{|x|^2} X^2\big(\frac{|x|}{D}\big)\ dx &= \int_{B_\delta} \frac{\phi^2 v_{\epsilon,a}^2}{|x|^2} X^2\big(\frac{|x|}{D}\big)\ dx + O(1)\\ &= \int_{B_\delta} |x|^{2\epsilon-n} X^{2a+1}\big(\frac{|x|}{D}\big)\ dx + O(1)\\ &= n a_n \int_0^\delta t^{2\epsilon-1} X^{2a+1}\big(\frac{t}{D}\big)\ dt + O(1)\end{aligned}$$

  όπου το $O(1)$ είναι είτε καθώς $\epsilon \to 0^+$ είτε $a \to 0^+$.

- $$\begin{aligned}\int_\Omega \phi^2 |\nabla v_{\epsilon,a}|^2\ dx &= \int_{B_\delta} \phi^2 |\nabla v_{\epsilon,a}|^2\ dx + O(1)\\ &= \int_{B_\delta} \big(\epsilon + aX\big)^2 X^{2a-1} |x|^{2\epsilon-n}\ dx + O(1)\end{aligned}$$

$$= na_n \int_0^{\delta} \big(\epsilon + aX\big)^2 t^{2\epsilon-1} X^{2a-1}\ dt + O(1)$$

όπου το $O(1)$ είναι είτε καθώς $\epsilon \to 0^+$ είτε $a \to 0^+$.

Επομένως,

$$\frac{\displaystyle\int_{\Omega} \phi^2 |\nabla v_{\epsilon,a}|^2\ dx}{\displaystyle\int_{\Omega} \frac{\phi^2 v_{\epsilon,a}^2}{|x|^2} X^2\big(\frac{|x|}{D}\big)\ dx} = \frac{na_n \displaystyle\int_0^{\delta} \big(\epsilon + aX\big)^2 t^{2\epsilon-1} X^{2a-1}\ dt + O(1)}{na_n \displaystyle\int_0^{\delta} t^{2\epsilon-1} X^{2a+1}\ dt + O(1)}\ .$$

Παίρνοντας όριο καθώς $\epsilon \to 0^+$ προκύπτει με χρήση του Θ. Κυριαρχημένης Σύγκλισης ότι

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\left(\frac{\displaystyle\int_{\Omega} \phi^2 |\nabla v_{\epsilon,a}|^2\ dx}{\displaystyle\int_{\Omega} \frac{\phi^2 v_{\epsilon,a}^2}{|x|^2} X^2\big(\frac{|x|}{D}\big)\ dx}\right) = \frac{na_n\ a^2 \displaystyle\int_0^{\delta} t^{-1} X^{2a+1}\ dt + O(1)}{na_n \displaystyle\int_0^{\delta} t^{-1} X^{2a+1}\ dt + O(1)}$$

$$= \frac{\frac{na_n}{2}\ a\ X^{2a}(\frac{\delta}{D}) + O(1)}{\frac{na_n}{2}\frac{1}{a} X^{2a}(\frac{\delta}{D}) + O(1)}$$

$$= \frac{\frac{na_n}{2}\ a^2\ X^{2a}(\frac{\delta}{D}) + a\ O(1)}{\frac{na_n}{2} X^{2a}(\frac{\delta}{D}) + a\ O(1)}.$$

Επομένως,

$$\lim_{a\to 0^+}\left(\lim_{\epsilon\to 0^+}\left(\frac{\displaystyle\int_{\Omega} \phi^2 |\nabla v_{\epsilon,a}|^2\ dx}{\displaystyle\int_{\Omega} \frac{\phi^2 v_{\epsilon,a}^2}{|x|^2} X^2\big(\frac{|x|}{D}\big)\ dx}\right)\right) = 0.$$

Έχοντας δείξει αυτό, παίρνουμε όρια καθώς $\epsilon, a \to 0^+$ στην (5) και προκύπτει

$$\lim_{a\to 0^+}\Bigg(\lim_{\epsilon\to 0^+}\Bigg(\frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u_{\epsilon,a}|^2\ dx-\left(\frac{n-2}{2}\right)^2\int_\Omega \frac{u_{\epsilon,a}^2}{|x|^2}\ dx}{\displaystyle\int_\Omega \frac{u_{\epsilon,a}^2}{|x|^2}X^2\big(\frac{|x|}{D}\big)\ dx}\Bigg)\Bigg)=\frac{1}{4}.$$

Επομένως $\lambda \leq \dfrac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u_{\epsilon,a}|^2\ dx-\left(\frac{n-2}{2}\right)^2\int_\Omega \frac{u_{\epsilon,a}^2}{|x|^2}\ dx}{\displaystyle\int_\Omega \frac{u_{\epsilon,a}^2}{|x|^2}X^2\big(\frac{|x|}{D}\big)\ dx} \implies \lambda \leq \dfrac{1}{4}$ και έτσι προκύπτει $\lambda = \dfrac{1}{4}$. $\square$

§ 3 : Βέλτιστη σταθερά σε ανισότητα τύπου Hardy-Sobolev

Σ'αυτήν την παράγραφο παρουσιάζουμε την δουλειά των Adimurthi-A. Τερτίκα-Σ. Φίλιππα αποδεικνύοντας την ύπαρξη και κάνοντας τον ακριβή υπολογισμό της βέλτιστης σταθεράς $C = C(n,a)$ της ανίσωσης τύπου Hardy-Sobolev:

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \geq \left(\tfrac{n-2}{2}\right)^2 \int_\Omega \frac{u^2}{|x|^2} \, dx + C\left(\int_\Omega X^{\frac{2(n-1)}{n-2}}\left(a, \frac{|x|}{D}\right)|u|^{\frac{2n}{n-2}} \, dx\right)^{\frac{n-2}{n}} \, , \ \forall \ u \in C_c^\infty(\Omega).$$

Προτού περάσουμε στο θεώρημα, χρειαζόμαστε μερικούς ορισμούς και βοηθητικές προτάσεις.

– Ο χώρος $W_0^{1,2}(\Omega \ ; \ |x|^{-(n-2)})$ (βλ. [7])

Ορίζουμε το χώρο

$$W_0^{1,2}(\Omega \ ; \ |x|^{-(n-2)}) := \overline{C_c^\infty(\Omega)}$$

$$\text{υπό τη νόρμα } \|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega \ ; \ |x|^{-(n-2)})} = \left(\int_\Omega |x|^{-(n-2)}\big(|\nabla u|^2 + u^2\big) \, dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Αποδεικνύεται ότι ο $W_0^{1,2}(\Omega \ ; \ |x|^{-(n-2)})$ είναι χώρος Hilbert με εσωτερικό γινόμενο $\langle u,v\rangle = \int_\Omega |x|^{-(n-2)}\big(\nabla u \cdot \nabla v + uv\big) \, dx.$

Πρόταση 5

Ο χώρος $W_0^{1,2}(\Omega\ ;\ |x|^{-(n-2)})$ έχει τις εξής ιδιότητες:

1. Αν $u \in H_0^1(\Omega)$, τότε $|x|^{\frac{n-2}{2}}\ u \in W_0^{1,2}(\Omega\ ;\ |x|^{-(n-2)})$.

2. Αν $v \in W_0^{1,2}(\Omega\ ;\ |x|^{-(n-2)})$, τότε $|x|^{-a}\ v \in H_0^1(\Omega),\ \forall\ a < \dfrac{n-2}{2}$.

3. Η νόρμα $\|u\| = \left(\int_\Omega |x|^{-(n-2)}|\nabla u|^2\ dx\right)^{\frac{1}{2}}$ είναι ισοδύναμη νόρμα για το χώρο $W_0^{1,2}(\Omega\ ;\ |x|^{-(n-2)})$.

Απόδειξη:

1) $\displaystyle\int_\Omega |x|^{-(n-2)}|\nabla\big(|x|^{\frac{n-2}{2}}u(x)\big)|^2\ dx = \int_\Omega |x|^{-(n-2)}\Big|(\tfrac{n-2}{2})|x|^{\frac{n-6}{2}}ux + |x|^{\frac{n-2}{2}}\nabla u\Big|^2\ dx \leq$

$\displaystyle\leq 2\int_\Omega (\tfrac{n-2}{2})^2\frac{u^2}{|x|^2} + |\nabla u|^2\ dx \overset{\text{Hardy}}{\leq} C\|u\|_{H_0^1(\Omega)} < +\infty$ όπου $C > 0$ σταθερά.

Επίσης, $\displaystyle\int_\Omega |x|^{-(n-2)}\big(|x|^{\frac{n-2}{2}}u(x)\big)^2\ dx = \int_\Omega u^2\ dx \leq \|u\|_{H_0^1(\Omega)} < +\infty$.

2) Η περίπτωση $a = 0$ είναι άμεση αφού

$$\left(\int_\Omega |x|^{-(n-2)}\big(v^2 + |\nabla v|^2\big)\ dx\right)^{\frac{1}{2}} \geq D^{-\frac{n-2}{2}}\ \left(\int_\Omega v^2 + |\nabla v|^2\ dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\iff \quad \|v\|_{W_0^{1,2}(\Omega\ ;\ |x|^{-(n-2)})} \geq D^{-\frac{n-2}{2}} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Προτού εξετάσουμε τις άλλες περιπτώσεις, υπολόγιζουμε ότι

$$\int_\Omega |\nabla\big(|x|^{-a}v\big)|^2 \ dx \leq \ 2\int_\Omega |x|^{-2a}\big(a^2\frac{v^2}{|x|^2} + |\nabla v|^2\big) \ dx \quad (1).$$

Για $a<0$, προκύπτει με χρήση της ανίσωσης Hardy ότι

$$\int_\Omega |\nabla\big(|x|^{-a}v\big)|^2 \ dx \leq c(n,a,\Omega)\int_\Omega |\nabla v|^2 \ dx$$

(αφού $|x|^{-2a} \leq D^{-2a}$) και τότε συμπεραίνουμε πως

$$\| \ |x|^{-a}v\|_{H_0^1(\Omega)} \leq c^{'}(n,a,\Omega) \ \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$$

όπου $c(n,a,\Omega)$, $c^{'}(n,a,\Omega) > 0$ σταθερές. Επομένως ισχύει το ζητούμενο.

Για την τελευταία περίπτωση $0 < a < \dfrac{n-2}{2}$, θεωρούμε αρχικά ότι $v \in C_c^\infty(\Omega)$.

Ισχύει $|x|^{-a} \in H^1(\Omega)$ άρα $|x|^{-a}v \in H_0^1(\Omega)$.

Η ανισότητα Hardy όταν εφαρμοστεί στην $|x|^{-a} \ v$ μας δίνει

$$\begin{aligned}\big(\tfrac{n-2}{2}\big)^2 \int_\Omega |x|^{-2a-2}v^2 \ dx &\leq \int_\Omega |\nabla(|x|^{-a}v)|^2 \ dx \\ &= \int_\Omega a^2|x|^{-2a-2}v^2 + |x|^{-2a}|\nabla v|^2 - a|x|^{-2a-2}x\cdot\nabla(v^2) \ dx\end{aligned}$$

$$= \int_\Omega -\big[a^2 - a(n-2)\big]|x|^{-2a-2}v^2 + |x|^{-2a}|\nabla v|^2 \; dx$$

και έτσι

$$\left(\tfrac{n-2}{2} - a\right)^2 \int_\Omega |x|^{-2a}\frac{v^2}{|x|^2} \; dx \le \int_\Omega |x|^{-2a}|\nabla v|^2 \; dx \quad (2).$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει

$$\int_\Omega |\nabla\big(|x|^{-a}v\big)|^2 \; dx \le \left[\frac{2a^2}{\left(\frac{n-2}{2} - a\right)^2} + 2\right] \int_\Omega |x|^{-2a}|\nabla v|^2 \; dx.$$

Επομένως, $\| \; |x|^{-a}v \; \|^2_{H^1_0(\Omega)} \overset{\text{Poincare}}{\le}$

$$\le c_1(n,\Omega) \int_\Omega |\nabla\big(|x|^{-a}v\big)|^2 \; dx \; \le c_2(n,a,\Omega) \int_\Omega |x|^{-2a}|\nabla v|^2 \; dx =$$

$$= c_2(n,a,\Omega) \int_\Omega |x|^{n-2-2a}|x|^{-(n-2)}|\nabla v|^2 \; dx \; \le c_3(n,a,\Omega) \int_\Omega |x|^{-(n-2)}|\nabla v|^2 \; dx$$

και έτσι

$$\| \; |x|^{-a}v \; \|_{H^1_0(\Omega)} \le \; c_4(n,a,\Omega) \; \|v\|_{W^{1,2}_0(\Omega \; ; \; |x|^{-(n-2)})}$$

όπου $c_1(n,\Omega), \; c_2(n,a,\Omega), \; c_3(n,a,\Omega), \; c_4(n,a,\Omega) > 0$ σταθερές.

Θεωρούμε τώρα τυχαία $v \in W^{1,2}_0(\Omega \; ; \; |x|^{-(n-2)})$ (άρα και $v \in H^1_0(\Omega)$).

Τότε, $\exists \; \{v_k\} \subseteq C^\infty_c(\Omega)$ ώστε $v_k \to v$ στον $W^{1,2}_0(\Omega \; ; \; |x|^{-(n-2)})$ καθώς $k \to +\infty$

(η σύγκλιση ισχύει και στον $H_0^1(\Omega)$).

Αυτό σημαίνει ότι η $\{v_k\}$ είναι ακολουθία Cauchy στον $W_0^{1,2}(\Omega\ ;\ |x|^{-(n-2)})$ άρα

$\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall\ k, m \geq k_0$ να ισχύει

$$\|v_k - v_m\|_{W_0^{1,2}(\Omega\ ;\ |x|^{-(n-2)})} < \epsilon.$$

Οπότε, $\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall\ k, m \geq k_0$ να ισχύει

$$\|\ |x|^{-a}(v_k - v_m)\ \|_{H_0^1(\Omega)} < \epsilon.$$

Αυτό σημαίνει ότι η ακολουθία $\{\ |x|^{-a}v_k\ \}$ είναι Cauchy στον $H_0^1(\Omega)$ ο οποίος είναι χώρος Hilbert και έτσι, $\exists\ \tilde{v} \in H_0^1(\Omega)$ ώστε $|x|^{-a}v_k \to \tilde{v}$ στον $H_0^1(\Omega)$.

Όμως, αξιοποιώντας την ανίσωση Hardy παίρνουμε

$$\|v_k - |x|^a\tilde{v}\|_{H_0^1(\Omega)}\ =\ \|\ |x|^a\big(|x|^{-a}v_k - \tilde{v}\big)\|_{H_0^1(\Omega)} \leq c_5(n, a, \Omega)\ \|\ |x|^{-a}v_k - \tilde{v}\|_{H_0^1(\Omega)}$$

όπου $c_5(n, a, \Omega) > 0$ σταθερά. Οπότε

$$v_k \to |x|^a\tilde{v} \text{ στον } H_0^1(\Omega).$$

Λόγω της μοναδικότητας του ορίου συμπεραίνουμε ότι σχεδόν παντού στο Ω:

$$v = |x|^a\tilde{v} \iff |x|^{-a}v = \tilde{v} \in H_0^1(\Omega).$$

3) Για $v \in W_0^{1,2}(\Omega\ ;\ |x|^{-(n-2)})$ και $\forall a < \dfrac{n-2}{2}$ δείξαμε τη σχέση

$$\left(\tfrac{n-2}{2}-a\right)^2\int_\Omega |x|^{-2a-2}v^2\,dx \leq \int_\Omega |x|^{-2a}|\nabla v|^2\,dx.$$

Διαλέγοντας $a=\dfrac{n-2}{2}-1$ προκύπτει $\displaystyle\int_\Omega |x|^{-(n-2)}v^2\,dx \leq \int_\Omega |x|^{-(n-2)}|\nabla v|^2\,dx$ οπότε

συμπεραίνουμε ότι $\|v\|_{W_0^{1,2}(\Omega\ ;\ |x|^{-(n-2)})} \leq \sqrt{2}\left(\displaystyle\int_\Omega |x|^{-(n-2)}|\nabla v|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}.$

Προφανώς ισχύει και η σχέση $\left(\displaystyle\int_\Omega |x|^{-(n-2)}|\nabla v|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\displaystyle\int_\Omega |x|^{-(n-2)}\big(|\nabla v|^2+v^2\big)\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$

άρα οι δύο νόρμες είναι ισοδύναμες. □

Πρόταση 6

Έστω $0\leq V\in L^{\frac{n}{2}}_{loc}(\Omega-\{0\})$ για την οποία υποθέτουμε ότι $\exists\ c_1>0$ σταθέρα ώστε να ισχύει

$$\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx \geq \left(\tfrac{n-2}{2}\right)^2\int_\Omega \frac{u^2}{|x|^2}\,dx + c_1\int_\Omega Vu^2\,dx\ ,\ \forall\ u\in H_0^1(\Omega)\quad (*).$$

Τότε $\exists\ c_2>0$ σταθερά ώστε η $(*)$ μπορεί να γραφτεί ισοδύναμα στην μορφή

$$\int_\Omega |x|^{-(n-2)}|\nabla v|^2\,dx \geq c_2\int_\Omega |x|^{-(n-2)}Vv^2\,dx,\ \forall\ v\in W_0^{1,2}(\Omega\ ;\ |x|^{-(n-2)})\quad (**),$$

και μάλιστα με την ίδια βέλτιστη σταθερά.

Απόδειξη:

Θέτουμε

$$I_1[u] := \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 \ dx - \left(\tfrac{n-2}{2}\right)^2 \int_\Omega \frac{u^2}{|x|^2} \ dx}{\displaystyle\int_\Omega V u^2 \ dx}, \ I_2[v] := \frac{\displaystyle\int_\Omega |x|^{-(n-2)} |\nabla v|^2 \ dx}{\displaystyle\int_\Omega |x|^{-(n-2)} V v^2 \ dx}$$

$$A_1 := \inf_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ \int_\Omega V u^2 \ dx > 0}} I_1[u], \ A_2 := \inf_{\substack{v \in W_0^{1,2}(\Omega \ ; \ |x|^{-(n-2)}) \\ \int_\Omega |x|^{-(n-2)} V v^2 \ dx > 0}} I_2[v].$$

και στοχεύουμε να αποδείξουμε ότι αν $A_1 > 0$, τότε $A_2 > 0$ και είναι μεταξύ τους ίσα.

Δείχνουμε πρώτα ότι για την τυχαία $u \in H_0^1(\Omega), \ \exists \ v \in W_0^{1,2}(\Omega \ ; \ |x|^{-(n-2)})$ ώστε να ισχύει

$$I_1[u] = I_2[v].$$

Πράγματι, έστω $u \in H_0^1(\Omega)$. Ορίζουμε $v(x) := |x|^{\frac{n-2}{2}} u(x)$ η οποία γνωρίζουμε από την Πρόταση 5 ότι ανήκει στον $W_0^{1,2}(\Omega \ ; \ |x|^{-(n-2)})$ και κατ'επέκτασην και στον $H_0^1(\Omega)$.

Μπορούμε να γράψουμε $u = |x|^{-\frac{n-2}{2}} v$ και τότε παίρνουμε

- $\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 \ dx - \left(\tfrac{n-2}{2}\right)^2 \int_\Omega \frac{u^2}{|x|^2} \ dx =$

$$= \int_\Omega |\nabla\big(|x|^{-\frac{n-2}{2}} v\big)|^2 \ dx - \left(\tfrac{n-2}{2}\right)^2 \int_\Omega \frac{\big(|x|^{-\frac{n-2}{2}} v\big)^2}{|x|^2} \ dx$$

$$= \int_\Omega \Bigg(\left(\tfrac{n-2}{2}\right)^2 |x|^{-n} v^2 - 2\left(\tfrac{n-2}{2}\right) |x|^{-n} v x \cdot \nabla v + |x|^{-(n-2)} |\nabla v|^2 \Bigg) - \left(\tfrac{n-2}{2}\right)^2 |x|^{-n} v^2 \ dx$$

$$= \int_\Omega -2\left(\tfrac{n-2}{2}\right) |x|^{-n} v x \cdot \nabla v + |x|^{-(n-2)} |\nabla v|^2 \ dx$$

$$= \int_\Omega -\left(\tfrac{n-2}{2}\right)|x|^{-n} x \cdot \nabla(v^2) + |x|^{-(n-2)}|\nabla v|^2 \; dx.$$

Όμως, από το Θ. Απόκλισης προκύπτει

$$\int_\Omega -\left(\tfrac{n-2}{2}\right)|x|^{-n} x \cdot \nabla(v^2) \; dx = \left(\tfrac{n-2}{2}\right) \int_\Omega v^2 \nabla \cdot \big(|x|^{-n} x\big) \; dx =$$

$$= \left(\tfrac{n-2}{2}\right) \int_\Omega v^2 \big(-n|x|^{-n} + n|x|^{-n}\big) \; dx = 0.$$

Επομένως, $\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 \; dx - \left(\tfrac{n-2}{2}\right)^2 \int_\Omega \frac{u^2}{|x|^2} \; dx = \int_\Omega |x|^{-(n-2)} |\nabla v|^2 \; dx.$

- $\displaystyle\int_\Omega V u^2 \; dx = \int_\Omega V \big(|x|^{-\frac{n-2}{2}} v\big)^2 \; dx = \int_\Omega |x|^{-(n-2)} V v^2 \; dx.$

Επομένως συμπεραίνουμε ότι για την τυχαία $u \in H_0^1(\Omega)$, $\exists \; v \in W_0^{1,2}(\Omega \; ; \; |x|^{-(n-2)})$ ώστε

$$\frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 \; dx - \left(\tfrac{n-2}{2}\right)^2 \int_\Omega \frac{u^2}{|x|^2} \; dx}{\displaystyle\int_\Omega V u^2 \; dx} = \frac{\displaystyle\int_\Omega |x|^{-(n-2)} |\nabla v|^2 \; dx}{\displaystyle\int_\Omega |x|^{-(n-2)} V v^2 \; dx}$$

δηλαδή $I_1[u] = I_2[v] \geq A_2$ απ'όπου καταλήγουμε πως $A_1 \geq A_2$.

Αποδεικνύουμε τώρα την ανάποδη ανισότητα.

Επειδή οι συναρτήσεις $C_c^\infty(\Omega)$ είναι πυκνές στον $W_0^{1,2}(\Omega \; ; \; |x|^{-(n-2)})$, το A_2 είναι το ίδιο με όποιο σύνολο συναρτήσεων από αυτά τα δύο και αν δουλεύουμε. Έχοντας αυτό κατά νου, από την ιδιότητα του infimum γνωρίζουμε ότι για το τυχαίο $\epsilon > 0$, $\exists \; v \in C_c^\infty(\Omega)$ ώστε

$$I_2[v]=\frac{\displaystyle\int_\Omega |x|^{-(n-2)}|\nabla v|^2\ dx}{\displaystyle\int_\Omega |x|^{-(n-2)}Vv^2\ dx}<A_2+\frac{\epsilon}{2}.$$

Θεωρούμε $a\in(0,\frac{n-2}{2})$ και ορίζουμε τη $u_a(x):=|x|^{-a}v(x)$ για την οποία γνωρίζουμε πάλι από την Πρόταση 5 ότι ανήκει στον $H_0^1(\Omega)$. Έχουμε

$$A_1\le\frac{\displaystyle\int_\Omega|\nabla u_a|^2\ dx-\left(\tfrac{n-2}{2}\right)^2\int_\Omega\frac{u_a^2}{|x|^2}\ dx}{\displaystyle\int_\Omega Vu_a^2\ dx}=\frac{\displaystyle\int_\Omega|x|^{-2a}|\nabla v|^2\ dx-(\tfrac{n-2}{2}-a)^2\int_\Omega|x|^{-2a-2}v^2\ dx}{\displaystyle\int_\Omega|x|^{-2a}Vv^2\ dx}$$

$$\le\frac{\displaystyle\int_\Omega|x|^{-2a}|\nabla v|^2\ dx}{\displaystyle\int_\Omega|x|^{-2a}Vv^2\ dx},\ \forall\ a\in(0,\tfrac{n-2}{2}).$$

Αξιοποιώντας τα θεωρήματα της μονότονης και κυριαρχημένης σύγκλισης προκύπτει ότι $\exists\ a_0\in(0,\frac{n-2}{2})$ ώστε $A_1\le I_1[u_{a_0}]\le I_2[v]+\dfrac{\epsilon}{2}<A_2+\epsilon\implies A_1<A_2+\epsilon,\ \forall\epsilon>0\implies A_1\le A_2.$ $\square$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Οι Α. Τερτίκας- Σ. Φίλιππας (βλ. [7], Theorem A) απέδειξαν ότι $\exists\ C>0$ σταθερά ώστε $\forall\ u\in H_0^1(\Omega)$

$$\int_\Omega|\nabla u|^2\ dx\ge\left(\frac{n-2}{2}\right)^2\int_\Omega\frac{u^2}{|x|^2}\ dx+C\left(\int_\Omega X^{\frac{2(n-1)}{n-2}}\left(a,\frac{|x|}{D}\right)|u|^{\frac{2n}{n-2}}\ dx\right)^{\frac{n-2}{n}}.$$

Με ακριβώς ίδια μεθοδολογία με την απόδειξη της προηγούμενης πρότασης, δείχνεται ότι

$\exists\ C^{'} > 0$ ώστε $\forall\ v \in W_0^{1,2}(\Omega\ ;\ |x|^{-(n-2)})$

$$\int_\Omega |x|^{-(n-2)}|\nabla v|^2\ dx \geq C\ '\bigg(\int_\Omega |x|^{-n} X^{\frac{2(n-1)}{n-2}}\Big(a, \frac{|x|}{D}\Big)|u|^{\frac{2n}{n-2}}\ dx\bigg)^{\frac{n-2}{n}}$$

και οι βέλτιστες σταθερές των δύο ανισοτήτων ταυτίζονται.

Είμαστε σε θέση τώρα να παρουσιάσουμε το επόμενο βασικό αποτέλεσμα που βασίζεται στη δουλειά των Adimurthi , Α. Τερτίκα και Σ. Φίλιππα.

Θεώρημα 3

Η βέλτιστη σταθερά της ανίσωσης

$$\int_{B_1} |\nabla u|^2\ dx \geq \Big(\frac{n-2}{2}\Big)^2 \int_{B_1} \frac{u^2}{|x|^2}\ dx + C\bigg(\int_{B_1} X^{\frac{2(n-1)}{n-2}}\Big(a, \frac{|x|}{D}\Big)|u|^{\frac{2n}{n-2}}\ dx\bigg)^{\frac{n-2}{n}}$$

για $u \in C_c^\infty(B_1)$, είναι

$$C = C(n,a) = \begin{cases} (n-2)^{-\frac{2(n-1)}{n}} S_n & \text{αν } \frac{1}{n-2} \leq a \\ a^{\frac{2(n-1)}{n}} S_n & \text{αν } 0 < a < \frac{1}{n-2} \end{cases}.$$

<u>Απόδειξη:</u>

Η βέλτιστη σταθερά $C = C(n,a)$ της ανίσωσης ισούται με

$$C(n,a) := \inf_{\substack{u\in C_c^\infty(B_1)\\ u\neq 0}} \frac{\displaystyle\int_{B_1} |\nabla u|^2\, dx - \left(\tfrac{n-2}{2}\right)^2 \int_{B_1} \frac{u^2}{|x|^2}\, dx}{\left(\displaystyle\int_{B_1} X^{\frac{2(n-1)}{n-2}}(a,|x|)\, |u|^{\frac{2n}{n-2}}\, dx\right)^{\frac{n-2}{n}}}\ .$$

Από την παρατήρηση της πρότασης 6 γνωρίζουμε ότι

$$C(n,a) \equiv \inf_{\substack{v\in C_c^\infty(B_1)\\ v\neq 0}} \frac{\displaystyle\int_{B_1} |x|^{-(n-2)}|\nabla v|^2\, dx}{\left(\displaystyle\int_{B_1} |x|^{-n} X^{\frac{2(n-1)}{n-2}}(a,|x|)\, |v|^{\frac{2n}{n-2}}\, dx\right)^{\frac{n-2}{n}}}\ .$$

Δείχνουμε πρώτα ότι

$$C(n,a) = (n-2)^{-\frac{2(n-1)}{n}} S_n,\ \forall\ a \geq \frac{1}{n-2}.$$

Θεωρούμε τυχαία $v \in C_c^\infty(B_1)$ και εισάγουμε σφαιρικές συντεταγμένες γράφοντας

$$v(x) = \tilde{v}(r,\theta) \text{ όπου } r = |x|,\ \theta = \frac{x}{|x|}.$$

Ερευνούμε αρχικά ποιά είναι η κατάλληλη αλλαγή συνάρτησης

$$\tilde{v}(r,\theta) = y(\tau,\theta),\ \tau = f(r)$$

ώστε να έρθουν σε πιο χρήσιμη μορφή τα ολοκληρώματα του αριθμητή και του παρανομαστή στο τελευταίο συναρτησοειδές.

Στις n-διάστατες σφαιρικές συντεταγμένες, το gradient μια συνάρτησης $v : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι

$$\nabla v = \big(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial r} \ , \ \frac{1}{r}\nabla_\theta \tilde{v}\big) \ , \text{ οπότε } |\nabla v|^2 = \big(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial r}\big)^2 + \frac{|\nabla_\theta \tilde{v}|^2}{r^2}.$$

Επομένως

$$\int_{B_1} |x|^{-(n-2)} |\nabla v|^2 \ dx = \int_0^1 \Big(\int_{S^{n-1}} r\big(\tilde{v}_r^2 + \frac{|\nabla_\theta \tilde{v}|^2}{r^2}\big) \ dS_\theta \Big) \ dr.$$

Εξετάζουμε τι γίνεται στην περίπτωση που η $\tilde{v}$ δεν εξαρτάται από το θ (v radial) καθώς θα μας χρειαστεί στη συνέχεια. Σ'αυτήν την περίπτωση έχουμε

$$\int_0^1 \Big(\int_{S^{n-1}} r\big(\tilde{v}_r^2 + \frac{|\nabla_\theta \tilde{v}|^2}{r^2}\big) \ dS_\theta \Big) \ dr = \int_0^1 \Big(\int_{S^{n-1}} r\tilde{v}_r^2 \ dS_\theta \Big) \ dr = |S^{n-1}| \int_0^1 r\big(\frac{d\tilde{v}}{dr}\big)^2 \ dr.$$

Κάνοντας την αλλαγή

$$\tilde{v}(r) = y(\tau), \ \tau = f(r), \ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ (\text{κατάλληλη})$$

παίρνουμε

$$\begin{aligned} |S^{n-1}| \int_0^1 r\big(\frac{d\tilde{v}}{dr}\big)^2 \ dr &= |S^{n-1}| \int_{f(0)}^{f(1)} f^{-1}(\tau) \frac{1}{f'(f^{-1}(\tau))} \left(\frac{dy}{d\tau} f'(f^{-1}(\tau))\right)^2 \ d\tau \\ &= |S^{n-1}| \int_{f(0)}^{f(1)} f^{-1}(\tau) f'(f^{-1}(\tau)) \big(\frac{dy}{d\tau}\big)^2 \ d\tau. \end{aligned}$$

Θέλουμε να καταλήξουμε σε ολοκλήρωμα της μορφής

$$C(n)\int_{f(1)}^{f(0)}\big(\frac{dy}{d\tau}\big)^2\ d\tau \qquad (\ C(n)>0 \text{ σταθερά })$$

γι'αυτό πρέπει

$$f^{-1}(\tau)f^{'}(f^{-1}(\tau))=-1 \iff \frac{1}{f^{'}(f^{-1}(\tau))}\frac{1}{f^{-1}(\tau)}=-1 \iff (f^{-1}(\tau))^{'}\frac{1}{f^{-1}(\tau)}=-1 \iff$$

$$\iff \big(ln(f^{-1}(\tau))\big)^{'}=(-\tau)^{'} \iff ln(f^{-1}(\tau))=c-\tau$$

άρα, μία επιλογή για την f^{-1} είναι

$$f^{-1}(\tau)=e^{a-\tau} \iff f(\tau)=a-ln(\tau) \qquad (\ a\geq\frac{1}{n-2}\ ).$$

Επομένως, η ζητούμενη αλλαγή συνάρτησης είναι

$$v(x)=y(\tau,\theta) \text{ όπου } \tau=a-ln|x|$$

και τότε

$$|\nabla v|^2=e^{2(\tau-a)}\big(y_\tau^2+|\nabla_\theta y|^2\big)$$

οπότε

- $\displaystyle\int_{B_1}|x|^{-(n-2)}|\nabla v|^2\ dx=\int_0^1\Big(\int_{S^{n-1}}r\Big(\big(\tfrac{\partial\tilde{v}}{\partial r}\big)^2+\tfrac{1}{r^2}|\nabla_\theta\tilde{v}|^2\Big)\ dS_\theta\ \Big)dr$

$$=\int_a^{+\infty}\Big(\int_{S^{n-1}}y_\tau^2+|\nabla_\theta y|^2\ dS_\theta\ \Big)d\tau.$$

- $$\int_{B_1} |x|^{-n} X^{\frac{2(n-1)}{n-2}}(a,|x|)|v|^{\frac{2n}{n-2}}\ dx = \int_0^1 \Big(\int_{S^{n-1}} r(a-lnr)^{\frac{2(n-1)}{n-2}} |\tilde{v}|^{\frac{2n}{n-2}}\ dS_\theta\Big)\ dr$$
$$= \int_a^{+\infty} (\int_{S^{n-1}} \tau^{-\frac{2(n-1)}{n-2}} |y|^{\frac{2n}{n-2}}\ dS_\theta) d\tau.$$

άρα

$$\frac{\displaystyle\int_{B_1} |x|^{-(n-2)} |\nabla v|^2\ dx}{\left(\displaystyle\int_{B_1} |x|^{-n} X^{\frac{2(n-1)}{n-2}}(a,|x|)\ |v|^{\frac{2n}{n-2}}\ dx\right)^{\frac{n-2}{n}}} = \frac{\displaystyle\int_a^{+\infty} (\int_{S^{n-1}} y_\tau^2 + |\nabla_\theta y|^2\ dS_\theta\ ) d\tau}{\left(\displaystyle\int_a^{+\infty} (\int_{S^{n-1}} \tau^{-\frac{2(n-1)}{n-2}} |y|^{\frac{2n}{n-2}}\ dS_\theta) d\tau\right)^{\frac{n-2}{n}}}.$$

Τέλος, αν $v \in C_c^\infty(B_1)$, τότε $y \in C^\infty([a,+\infty) \times S^{n-1})$ με $y(a,\theta) = 0$.

Επομένως αποδεικνύεται ότι

$$C(n,a) \equiv \inf_{\substack{y \in C^\infty([a,+\infty)\times S^{n-1}) \\ y(a,\theta)=0}} \frac{\displaystyle\int_a^{+\infty} (\int_{S^{n-1}} y_\tau^2 + |\nabla_\theta y|^2\ dS\ ) d\tau}{\left(\displaystyle\int_a^{+\infty} (\int_{S^{n-1}} \tau^{-\frac{2(n-1)}{n-2}} |y|^{\frac{2n}{n-2}}\ dS\ ) d\tau\right)^{\frac{n-2}{n}}}$$

Παρατηρούμε για μελλοντική χρήση ότι η συνάρτηση v είναι ακτινική στο $x \iff$ η συνάρτηση y είναι συνάρτηση μόνο της μεταβλητής τ. Σ'αυτήν την περίπτωση παίρνουμε

$$C_{radial}(n,a) \equiv \inf_{\substack{y \in C^\infty(\ [a,+\infty)\ ) \\ y(a)=0}} \frac{|S^{n-1}|^{\frac{2}{n}} \displaystyle\int_a^{+\infty} (\frac{dy}{d\tau})^2\ d\tau}{\left(\displaystyle\int_a^{+\infty} \tau^{-\frac{2(n-1)}{n-2}} |y|^{\frac{2n}{n-2}}\ d\tau\right)^{\frac{n-2}{n}}}$$

Από τις Προτάσεις 1,2 γνωρίζουμε ότι $\forall R \in (0,\infty]$, ισχύει $S_n \equiv \inf_{u \in C_0^\infty(B_R)} \dfrac{\displaystyle\int_{B_R} |\nabla u|^2 \, dx}{\left(\displaystyle\int_{B_R} |u|^{\frac{2n}{n-2}} \, dx\right)^{\frac{n-2}{n}}}$

καθώς επίσης $S_n \equiv S_{n,radial}$.

Θα μετατρέψουμε τα ολοκληρώματα του τελευταίου συναρτησοειδούς σε χρήσιμη μορφή ώστε να συσχετίσουμε τις εκφράσεις για τις $C(n,a)$, $C_{radial}(n,a)$ με νέες εκφράσεις για τις S_n , $S_{n,radial}$ που θα αποδείξουμε.

Με μελέτη όπως πριν συμπεραίνουμε ότι η κατάλληλη αλλαγή είναι

$$u(x) = z(t,\theta) \text{ όπου } t = |x|^{-(n-2)}$$

και τότε

$$|\nabla u|^2 = (n-2)^2 \, t^{\frac{2(n-1)}{n-2}} \, z_t^2 + t^{\frac{2}{n-2}} \, |\nabla_\theta z|^2.$$

Οπότε

- $$\int_{B_R} |\nabla u|^2 \, dx = \int_0^R \Big(\int_{S^{n-1}} r^{n-1} \big((\frac{\partial \tilde{u}}{\partial r})^2 + \frac{1}{r^2} |\nabla_\theta \tilde{u}|^2 \big) dS_\theta \Big) dr$$
$$= \int_{R^{-(n-2)}}^{+\infty} \Big(\int_{S^{n-1}} \tfrac{t^{-\frac{2(n-1)}{n-2}}}{n-2} \big((n-2)^2 \, t^{\frac{2(n-1)}{n-2}} \, z_t^2 + t^{\frac{2}{n-2}} \, |\nabla_\theta z|^2 \big) dS_\theta \Big) dt$$
$$= (n-2) \int_{R^{-(n-2)}}^{+\infty} \Big(\int_{S^{n-1}} z_t^2 + \tfrac{1}{(n-2)^2} \tfrac{1}{t^2} |\nabla_\theta z|^2 dS_\theta \Big) dt$$
- $$\int_{B_R} |u|^{\frac{2n}{n-2}} dx = \int_0^R \Big(\int_{S^{n-1}} r^{n-1} |\tilde{u}|^{\frac{2n}{n-2}} dS_\theta \Big) dr = \tfrac{1}{n-2} \int_{R^{-(n-2)}}^{+\infty} \Big(\int_{S^{n-1}} t^{-\frac{2(n-1)}{n-2}} |z|^{\frac{2n}{n-2}} dS_\theta \Big) dt$$

άρα

$$\frac{\displaystyle\int_{B_R} |\nabla u|^2 \; dx}{\left(\displaystyle\int_{B_R} |u|^{\frac{2n}{n-2}} \; dx\right)^{\frac{n-2}{n}}} = (n-2)^{\frac{2(n-1)}{n}} \; \frac{\displaystyle\int_{R^{-(n-2)}}^{+\infty} (\int_{S^{n-1}} z_t^2 + \frac{1}{(n-2)^2}\frac{1}{t^2}|\nabla_\theta z|^2 dS_\theta \;)dt}{\left(\displaystyle\int_{R^{-(n-2)}}^{+\infty} (\int_{S^{n-1}} t^{-\frac{2(n-1)}{n-2}} |z|^{\frac{2n}{n-2}} dS_\theta \;)dt\right)^{\frac{n-2}{n}}} \; .$$

Τέλος, αν $u \in C_c^\infty(B_R)$, τότε $z \in C^\infty([R^{-(n-2)}, +\infty) \times S^{n-1})$ με $z(R^{-(n-2)}, \theta) = 0$.

Επομένως αποδεικνύεται ότι $\forall \; R \in (0, +\infty]$ ισχύει

$$S_n \equiv \inf_{\substack{z \in C^\infty([R^{-(n-2)}, +\infty) \times S^{n-1}) \\ z(R^{-(n-2)}, \theta) = 0}} (n-2)^{\frac{2(n-1)}{n}} \frac{\displaystyle\int_{R^{-(n-2)}}^{+\infty} (\int_{S^{n-1}} z_t^2 + \frac{1}{(n-2)^2}\frac{1}{t^2}|\nabla_\theta z|^2 dS \;)dt}{\left(\displaystyle\int_{R^{-(n-2)}}^{+\infty} (\int_{S^{n-1}} t^{-\frac{2(n-1)}{n-2}} |z|^{\frac{2n}{n-2}} dS \;)dt\right)^{\frac{n-2}{n}}} \iff$$

$$\iff (n-2)^{-\frac{2(n-1)}{n}} S_n \equiv \inf_{\substack{z \in C^\infty([R^{-(n-2)}, +\infty) \times S^{n-1}) \\ z(R^{-(n-2)}, \theta) = 0}} \frac{\displaystyle\int_{R^{-(n-2)}}^{+\infty} (\int_{S^{n-1}} z_t^2 + \frac{1}{(n-2)^2}\frac{1}{t^2}|\nabla_\theta z|^2 dS \;)dt}{\left(\displaystyle\int_{R^{-(n-2)}}^{+\infty} (\int_{S^{n-1}} t^{-\frac{2(n-1)}{n-2}} |z|^{\frac{2n}{n-2}} dS \;)dt\right)^{\frac{n-2}{n}}}$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση u είναι ακτινική στο $x \iff$ η συνάρτηση z είναι συνάρτηση μόνο της μεταβλητής t. Σ'αυτήν την περίπτωση παίρνουμε (εφόσον $S_n = S_{n,radial}$)

$$(n-2)^{-\frac{2(n-1)}{n}} S_n \equiv \inf_{\substack{z \in C^\infty(\;[R^{-(n-2)}, +\infty)\;) \\ z(R^{-(n-2)}) = 0}} \frac{|S^{n-1}|^{\frac{2}{n}} \displaystyle\int_{R^{-(n-2)}}^{+\infty} (\frac{dz}{dt})^2 \; dt}{\left(\displaystyle\int_{R^{-(n-2)}}^{+\infty} t^{-\frac{2(n-1)}{n-2}} |z|^{\frac{2n}{n-2}} \; dt\right)^{\frac{n-2}{n}}} \; .$$

Αυτή η σχέση ισχύει $\forall \; R \in (0, +\infty]$ οπότε μπορούμε να κάνουμε τη συγκεκριμένη επιλογή

$R = a^{-\frac{1}{n-2}} \iff R^{-(n-2)} = a$ και τότε προκύπτει

$$(n-2)^{-\frac{2(n-1)}{n}} S_n \equiv \inf_{\substack{z\in C^\infty(\ [a,+\infty)\ ) \\ z(a)=0}} \frac{|S^{n-1}|^{\frac{2}{n}} \int_a^{+\infty} (\frac{dz}{dt})^2 \ dt}{\left(\int_a^{+\infty} t^{-\frac{2(n-1)}{n-2}} |z|^{\frac{2n}{n-2}} \ dt \right)^{\frac{n-2}{n}}} \ .$$

Συγκεντρώνουμε λοιπόν τα αποτελέσματα μας μέχρι στιγμής και έχουμε

$$C(n,a) \leq C_{radial}(n,a) = \inf_{\substack{y\in C^\infty(\ [a,+\infty)\ ) \\ y(a)=0}} \frac{|S^{n-1}|^{\frac{2}{n}} \int_a^{+\infty} (\frac{dy}{d\tau})^2 \ d\tau}{\left(\int_a^{+\infty} \tau^{-\frac{2(n-1)}{n-2}} |y|^{\frac{2n}{n-2}} \ d\tau \right)^{\frac{n-2}{n}}} = (n-2)^{-\frac{2(n-1)}{n}} S_n.$$

Δείχνουμε τώρα την ανάποδη ανισότητα.

Διαλέγουμε πάλι $R = a^{-\frac{1}{n-2}}$ $\left(\iff a = R^{-(n-2)} \right)$ όπου $a \geq \dfrac{1}{n-2}$ και τότε, $\forall\ t \geq a$ ισχύει $\dfrac{1}{(n-2)^2}\dfrac{1}{t^2} \leq 1$. Οπότε,

$$(n-2)^{-\frac{2(n-1)}{n}} S_n \equiv \inf_{\substack{z\in C^\infty([R^{-(n-2)},+\infty)\times S^{n-1}) \\ z(R^{-(n-2)},\theta)=0}} \frac{\int_{R^{-(n-2)}}^{+\infty} (\int_{S^{n-1}} z_t^2 + \frac{1}{(n-2)^2}\frac{1}{t^2}|\nabla_\theta z|^2 \ dS_\theta\ )dt}{\left(\int_{R^{-(n-2)}}^{+\infty} (\int_{S^{n-1}} t^{-\frac{2(n-1)}{n-2}} |z|^{\frac{2n}{n-2}} \ dS_\theta\ )dt \right)^{\frac{n-2}{n}}}$$

$$= \inf_{\substack{z\in C^\infty([a,+\infty)\times S^{n-1}) \\ z(a,\theta)=0}} \frac{\int_a^{+\infty} (\int_{S^{n-1}} z_t^2 + \frac{1}{(n-2)^2}\frac{1}{t^2}|\nabla_\theta z|^2 \ dS_\theta\ )dt}{\left(\int_a^{+\infty} (\int_{S^{n-1}} t^{-\frac{2(n-1)}{n-2}} |z|^{\frac{2n}{n-2}} \ dS_\theta\ )dt \right)^{\frac{n-2}{n}}}$$

$$
\leq \inf_{\substack{z\in C^\infty([a,+\infty)\times S^{n-1}) \\ z(a,\theta)=0}} \frac{\displaystyle\int_a^{+\infty}(\int_{S^{n-1}} z_t^2+|\nabla_\theta z|^2\ dS_\theta\ )dt}{\left(\displaystyle\int_a^{+\infty}(\int_{S^{n-1}} t^{-\frac{2(n-1)}{n-2}}|z|^{\frac{2n}{n-2}}\ dS_\theta\ )dt\right)^{\frac{n-2}{n}}}
$$

$$
\equiv C(n,a).
$$

Επομένως

$$
C(n,a)=(n-2)^{-\frac{2(n-1)}{n}}S_n\ ,\ \forall\ a\geq \tfrac{1}{n-2}.
$$

Θα δείξουμε τώρα ότι

$$
C(n,a)\leq a^{\frac{2(n-1)}{n}}S_n,\ \forall a>0.
$$

Έστω $0\neq x_0\in B_1$ και $\delta\in(0,|x_0|)$ ώστε $|x_0|+\delta<1$. Έστω επίσης $\phi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ με

$$
\phi(x)=\begin{cases} 0 & \text{αν},\ |x|\geq 1 \\ 1 & \text{αν},\ |x|\leq \dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \text{και}\quad \phi\in(0,1)\ \text{αν}\ \frac{1}{2}<|x|<1
$$

και η ακολουθία συναρτήσεων $U_\epsilon(x)=(\epsilon+|x-x_0|^2)^{-\frac{n-2}{2}}\ \phi(\dfrac{|x-x_0|}{\delta})$ όπου $\epsilon>0$.

Ισχύει $U_\epsilon \in C_c^\infty(B_\delta(x_0)) \subseteq C_c^\infty(B_1)$ και $S_n = \lim_{\epsilon\to 0} \dfrac{\int_{B_1} |\nabla U_\epsilon|^2 \, dx}{\left(\int_{B_1} |U_\epsilon|^{\frac{2n}{n-2}} \, dx\right)^{\frac{n-2}{n}}}$ (Πρόταση 3).

Επομένως

$$C(n,a) \leq \frac{\int_{B_1} |x|^{-(n-2)} |\nabla U_\epsilon|^2 \, dx}{\left(\int_{B_1} |x|^{-n} X^{\frac{2(n-1)}{n-2}}(a,|x|) |U_\epsilon|^{\frac{2n}{n-2}} \, dx\right)^{\frac{n-2}{n}}}$$

$$= \frac{\int_{B_\delta(x_0)} |x|^{-(n-2)} |\nabla U_\epsilon|^2 \, dx}{\left(\int_{B_\delta(x_0)} |x|^{-n} X^{\frac{2(n-1)}{n-2}}(a,|x|) |U_\epsilon|^{\frac{2n}{n-2}} \, dx\right)^{\frac{n-2}{n}}}$$

$$< \left(\frac{|x_0|+\delta}{|x_0|-\delta}\right)^{n-2} \frac{1}{X^{\frac{2(n-1)}{n}}(a,|x_0|-\delta)} \frac{\int_{B_\delta(x_0)} |\nabla U_\epsilon|^2 \, dx}{\left(\int_{B_\delta(x_0)} |U_\epsilon|^{\frac{2n}{n-2}} \, dx\right)^{\frac{n-2}{n}}}.$$

(χρησιμοποιήθηκε ότι η $X(a,s)$ είναι γν. αύξουσα συνάρτηση του s)

Παίρνοντας πρώτα όριο καθώς $\epsilon \to 0^+$, προκύπτει

$$C(n,a) \leq \left(\frac{|x_0|+\delta}{|x_0|-\delta}\right)^{n-2} \frac{S_n}{X^{\frac{2(n-1)}{n}}(a,|x_0|-\delta)}$$

και παίρνοντας στη συνέχεια όριο καθώς $\delta \to 0^+$ προκύπτει

$$C(n,a) \leq X^{-\frac{2(n-1)}{n}}(a,|x_0|) \, S_n, \quad \forall x_0 \in B_1.$$

Λόγω της τυχαιότητας του $x_0 \in B_1$ συμπεραίνουμε πως

$$C(n,a) \ \leq \ \inf_{x\in B_1}\{X^{-\frac{2(n-1)}{n}}(a,|x|)S_n\} \ = \ X^{-\frac{2(n-1)}{n}}(a,1)S_n \ = \ a^{\frac{2(n-1)}{n}}S_n, \ \forall \ a>0.$$

Θα δείξουμε τώρα ότι

$$C(n,a) \geq a^{\frac{2(n-1)}{n}} \ S_n, \ \forall \ a \in \big(0 \ , \ \frac{1}{n-2}\big).$$

Από την Πρόταση 4 γνωρίζουμε ότι $\forall \ c \geq 0$ ισχύει $S_n \equiv \inf\limits_{\substack{u\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)\\ u\neq 0}} \dfrac{\int_{\mathbb{R}^n}|x|^{2c}|\nabla u|^2 \ dx}{\Big(\int_{\mathbb{R}^n}|x|^{\frac{2cn}{n-2}}|u|^{\frac{2n}{n-2}} \ dx\Big)^{\frac{n-2}{n}}}$.

Κάνουμε την αλλαγή συνάρτησης

$$u(x) = z(t,\theta), \ t = |x|^{-(n-2)-2c}$$

και τότε προκύπτει

$$|\nabla u|^2 = (n-2+2c)^2 \ t^{\frac{2(n-1+2c)}{n-2+2c}} \ z_t^2 + t^{\frac{2}{n-2+2c}} \ |\nabla_\theta z|^2.$$

οπότε

- $\int_{\mathbb{R}^n}|x|^{2c}|\nabla u|^2 \ dx =$

$$= \int_0^{+\infty}\Big(\int_{S^{n-1}}\frac{t^{-\frac{2(n-1+2c)}{n-2+2c}}}{(n-2+2c)} \ \big((n-2+2c)^2 \ t^{\frac{2(n-1+2c)}{n-2+2c}} \ z_t^2 + t^{\frac{2}{n-2+2c}} \ |\nabla_\theta z|^2\big) \ dS_\theta \ \Big)dt$$

$$=(n-2+2c)\int_0^{+\infty}\Big(\int_{S^{n-1}}\big(z_t^2 + \tfrac{1}{(n-2+2c)^2t^2} \ |\nabla_\theta z|^2\big) \ dS_\theta \ \Big)dt$$

- $\left(\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{\frac{2cn}{n-2}} |u|^{\frac{2n}{n-2}} \; dx\right)^{\frac{n-2}{n}} = (n-2+2c)^{-\frac{n-2}{n}} \left(\int_0^{+\infty} (\int_{S^{n-1}} t^{-\frac{2(n-1)}{n-2}} |z|^{\frac{2n}{n-2}} \; dS_\theta \;)dt\right)^{\frac{n-2}{n}}$

άρα

$$\frac{\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{2c} |\nabla u|^2 \; dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{\frac{2cn}{n-2}} |u|^{\frac{2n}{n-2}} \; dx\right)^{\frac{n-2}{n}}} = \; (n-2+2c)^{-\frac{2(n-1)}{n}} \frac{\int_0^{+\infty} (\int_{S^{n-1}} \left(z_t^2 + \frac{1}{(n-2+2c)^2 t^2} \; |\nabla_\theta z|^2\right) \; dS_\theta \;)dt}{\left(\int_0^{+\infty} (\int_{S^{n-1}} t^{-\frac{2(n-1)}{n-2}} |z|^{\frac{2n}{n-2}} \; dS_\theta \;)dt\right)^{\frac{n-2}{n}}}$$

Τέλος, αν $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, τότε $z \in C_c^\infty([0,+\infty) \times S^{n-1})$.

Επομένως, αποδεικνύεται ότι

$$S_n \equiv \inf_{z \in C_c^\infty([0,+\infty) \times S^{n-1})} (n-2+2c)^{-\frac{2(n-1)}{n}} \frac{\int_0^{+\infty} (\int_{S^{n-1}} \left(z_t^2 + \frac{1}{(n-2+2c)^2 t^2} \; |\nabla_\theta z|^2\right) \; dS_\theta \;)dt}{\left(\int_0^{+\infty} (\int_{S^{n-1}} t^{-\frac{2(n-1)}{n-2}} |z|^{\frac{2n}{n-2}} \; dS_\theta \;)dr\right)^{\frac{n-2}{n}}} \iff$$

$$\iff (n-2+2c)^{-\frac{2(n-1)}{n}} S_n \equiv \inf_{z \in C_c^\infty([0,+\infty) \times S^{n-1})} \frac{\int_0^{+\infty} (\int_{S^{n-1}} \left(z_t^2 + \frac{1}{(n-2+2c)^2 t^2} \; |\nabla_\theta z|^2\right) \; dS_\theta \;)dt}{\left(\int_0^{+\infty} (\int_{S^{n-1}} t^{-\frac{2(n-1)}{n-2}} |z|^{\frac{2n}{n-2}} \; dS_\theta \;)dr\right)^{\frac{n-2}{n}}}$$

Εφόσον $\forall \; R' > 0$ ισχύει $C_c^\infty([0,+\infty) \times S^{n-1}) \subseteq C_c^\infty([R',+\infty) \times S^{n-1})$, προκύπτει

$$\inf_{z\in C_c^\infty(\ [0,+\infty)\ )\times S^{n-1})} \frac{\displaystyle\int_0^{+\infty}(\int_{S^{n-1}}\big(z_t^2+\tfrac{1}{(n-2+2c)^2t^2}\ |\nabla_\theta z|^2\big)\ dS_\theta\ )dt}{\left(\displaystyle\int_0^{+\infty}(\int_{S^{n-1}}t^{-\frac{2(n-1)}{n-2}}|z|^{\frac{2n}{n-2}}\ dS_\theta\ )dr\right)^{\frac{n-2}{n}}}$$

$$\leq \inf_{\substack{z\in C_c^\infty(\ [R',+\infty)\ )\times S^{n-1})\\ z(R',\theta)=0}} \frac{\displaystyle\int_{R'}^{+\infty}(\int_{S^{n-1}}\big(z_t^2+\tfrac{1}{(n-2+2c)^2t^2}\ |\nabla_\theta z|^2\big)\ dS_\theta\ )dt}{\left(\displaystyle\int_{R'}^{+\infty}(\int_{S^{n-1}}t^{-\frac{2(n-1)}{n-2}}|z|^{\frac{2n}{n-2}}\ dS_\theta\ )dr\right)^{\frac{n-2}{n}}}$$

.

Επομένως καταλήγουμε στο ότι

$$(n-2+2c)^{-\frac{2(n-1)}{n}}S_n \leq \inf_{\substack{z\in C_c^\infty(\ [R',+\infty)\ )\times S^{n-1})\\ z(R',\theta)=0}} \frac{\displaystyle\int_{R'}^{+\infty}(\int_{S^{n-1}}\big(z_t^2+\tfrac{1}{(n-2+2c)^2t^2}\ |\nabla_\theta z|^2\big)\ dS_\theta\ )dt}{\left(\displaystyle\int_{R'}^{+\infty}(\int_{S^{n-1}}t^{-\frac{2(n-1)}{n-2}}|z|^{\frac{2n}{n-2}}\ dS_\theta\ )dr\right)^{\frac{n-2}{n}}}\ .$$

Αυτή η ανίσωση ισχύει $\forall\ R^{'}>0,\ \forall\ c\geq 0.$

Οπότε, για το τυχαίο $0<a<\frac{1}{n-2}$ μπορούμε να διαλέξουμε

$$c=\frac{\frac{1}{a}-(n-2)}{2},\ R^{'}=a.$$

Τότε προκύπτει

$$(n-2+2c)^{-\frac{2(n-1)}{n}}=a^{\frac{2(n-1)}{n}},\ \frac{1}{(n-2+2c)^2t^2}\leq 1\ ,\ \forall\ t\geq a.$$

Επομένως γι'αυτές τις επιλογές των $c,\ R^{'}$ παίρνουμε

$$a^{\frac{2(n-1)}{n}} S_n \ \leq \ \inf_{\substack{z \in C_c^\infty(\ [a,+\infty) \ ) \times S^{n-1}) \\ z(a,\theta)=0}} \frac{\displaystyle\int_a^{+\infty} (\int_{S^{n-1}} \big(z_t^2 + |\nabla_\theta z|^2 \big) \ dS_\theta \ ) dt}{\left(\displaystyle\int_a^{+\infty} (\int_{S^{n-1}} t^{-\frac{2(n-1)}{n-2}} |z|^{\frac{2n}{n-2}} \ dS_\theta \ ) dr \right)^{\frac{n-2}{n}}} \ \equiv \ C(n,a)$$

Επομένως

$$C(n,a) = a^{\frac{2(n-1)}{n}} S_n \ , \ \forall \ a \in \big(0 \ , \ \tfrac{1}{n-2}\big). \ \square$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Με ελαφρώς τροποποιημένη διαδικασία αποδεικνύεται το γενικότερο αποτέλεσμα ότι η βέλτιστη σταθερά της ανίσωσης παραμένει η ίδια και για φραγμένο τόπο $0 \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.

§ 3 : Ύπαρξη ή μη ελαχιστοποιητών

Σ'αυτήν την παράγραφο εξετάζουμε την ύπαρξη ή μη ελαχιστοποιητών για τις ανισότητες

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \geq \left(\tfrac{n-2}{2}\right)^2 \int_\Omega \frac{u^2}{|x|^2} \, dx + c_1 \int_\Omega V u^2 \, dx \ , \ \forall \ u \in H_0^1(\Omega)$$

$$\int_\Omega |x|^{-(n-2)} |\nabla v|^2 \, dx \geq c_2 \int_\Omega |x|^{-(n-2)} V v^2 \, dx \ , \ \forall \ v \in W_0^{1,2}(\Omega \ ; \ |x|^{-(n-2)})$$

υπό συγκεκριμένες συνθήκες για τις συναρήσεις V.

Προτού περάσουμε στα θεωρήματα όμως, θα χρειαστούμε μερικές βοηθητικές προτάσεις.

Πρόταση 7

Έστω $\{u_k\} \subseteq W_0^{1,2}(\Omega \ ; \ |x|^{-(n-2)})$ και $u \in W_0^{1,2}(\Omega \ ; \ |x|^{-(n-2)})$ ώστε $u_k \rightharpoonup u$ στον $W_0^{1,2}(\Omega \ ; \ |x|^{-(n-2)})$. Τότε ισχύουν

1) $u_k \to u$ στον $L^2(\Omega)$, 2) $u_k \to u$ στον $L^2(\Omega \ ; \ |x|^{-(n-2)})$.

Απόδειξη:

1) Δείχνουμε πρώτα ότι

$$u_k \rightharpoonup u \text{ στον } W_0^{1,2}(\Omega \ ; \ |x|^{-(n-2)}) \implies u_k \rightharpoonup u \text{ στον } L^2(\Omega).$$

Πράγματι, θεωρούμε τυχαία $\phi \in L^2(\Omega)$ και το συναρτησοειδές

$$f_\phi(u) = \int_\Omega u\phi \; dx \;, \; u \in W_0^{1,2}(\Omega \; ; \; |x|^{-(n-2)}).$$

Ισχύει $|f_\phi(u)| \leq \displaystyle\int_\Omega |u||\phi| \; dx \leq \|\phi\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq c \; \|\phi\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega \; ; \; |x|^{-(n-2)})}$

άρα το συναρτησοειδές είναι φραγμένο και εφόσον είναι και γραμμικό, συμπεραίνουμε ότι

$$f_\phi \in W_0^{1,2}(\Omega \; ; \; |x|^{-(n-2)})^*.$$

Επομένως, $\displaystyle\int_\Omega u_k\phi \; dx = f_\phi(u_k) \to f_\phi(u) = \int_\Omega u\phi \; dx.$

Δείχνουμε στη συνέχεια ότι

$$\exists \; \{u_{j_k}\} \subseteq \{u_k\} \text{ ώστε } u_{j_k} \to u \text{ στον } L^2(\Omega).$$

Εφόσον $u_k \rightharpoonup u$ στον $W_0^{1,2}(\Omega \; ; \; |x|^{-(n-2)})$ που είναι χώρος Hilbert, $\exists \; c_1 > 0$ σταθερά ώστε

$\displaystyle\int_\Omega |x|^{-(n-2)}|\nabla u_k|^2 \; dx = \|u_k\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega \; ; \; |x|^{-(n-2)})} \leq c_1.$

Λόγω της ισοδυναμίας των νορμών του $W_0^{1,2}(\Omega \; ; \; |x|^{-(n-2)})$, $\exists \; c_2 > 0$ σταθερά ώστε

$\displaystyle\int_\Omega |x|^{-(n-2)}\big(|\nabla u_k|^2 + u_k^2\big) \; dx \leq c_2 \; \|u\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega \; ; \; |x|^{-(n-2)})} \leq c_2 \; c_1.$

Επομένως $D^{-(n-2)} \displaystyle\int_\Omega |\nabla u_k|^2 + u_k^2 \; dx \leq \int_\Omega |x|^{-(n-2)}\big(|\nabla u_k|^2 + u_k^2\big) \; dx \leq c_1 \; c_2$ και έτσι

$\|u_k\|_{H_0^1(\Omega)} = \left(\displaystyle\int_\Omega |\nabla u_k|^2 + u_k^2 \; dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \big(D^{n-2} \; c_1 \; c_2\big)^{\frac{1}{2}}.$

Από το Θ.Rellich-Kondrachov συμπεραίνουμε ότι $\exists \; \{u_{j_k}\} \subseteq \{u_k\}$ και $w \in L^2(\Omega)$ ώστε

$u_{j_k} \to w$ στον $L^2(\Omega)$. Η ισχυρή αυτή σύγκλιση στην w, είναι και ασθενής, δηλαδή $u_{j_k} \rightharpoonup w$ στον $L^2(\Omega)$.

Επίσης, αφού $u_k \rightharpoonup u$ στον $L^2(\Omega)$, θα ισχύει και $u_{j_k} \rightharpoonup u$ στον $L^2(\Omega)$. Λόγω λοιπόν της μοναδικότητας του ασθενούς ορίου συμπεραίνουμε $u = w$ σχεδόν παντού στο Ω, άρα $u_{j_k} \to u$ στον $L^2(\Omega)$.

Για να δείξουμε το τελικό ζητούμενο ότι $u_k \to u$ στον $L^2(\Omega)$, αξιοποιούμε την πρόταση που λέει ότι, σε κάθε τοπολογικό χώρο, αν για μία ακολουθία x_n ισχύει πως κάθε υπακολουθία της έχει δική της υπακολουθία που να συγκλίνουν όλες στο ίδιο x, τότε $x_n \to x$.

Έχουμε λοιπόν ότι $u_k \rightharpoonup u$ στον $W_0^{1,2}(\Omega\ ;\ |x|^{-(n-2)})$ άρα για την τυχαία $\{u_{j_k}\} \subseteq \{u_k\}$ ισχύει $u_{j_k} \rightharpoonup u$ στον $W_0^{1,2}(\Omega\ ;\ |x|^{-(n-2)})$ απ'όπου θα προκύψει $\{u_{j_{n_k}}\} \subseteq \{u_{j_k}\}$ ώστε $u_{j_{n_k}} \to u$ στον $L^2(\Omega)$ και έτσι προκύπτει το ζητούμενο.

2) Αρχικά αποδεικνύουμε τον εξής ισχυρισμό:

$$\text{Αν } c_r := \inf_{\substack{u\in C_c^\infty(B_r)\\ u\neq 0}} \frac{\displaystyle\int_{B_r} |x|^{-(n-2)}|\nabla u|^2\ dx}{\displaystyle\int_{B_r} |x|^{-(n-2)}u^2\ dx},\ r>0,\ \text{ τότε } c_r = r^{-2}\ c_1.$$

Πράγματι, έστω τυχαία $u \in C_c^\infty(B_r) - \{0\}$. Τότε, για την $v(x) := u(rx)$ ισχύει $v \in C_c^\infty(B_1)$.

Επίσης,

$$\frac{\displaystyle\int_{B_1} |x|^{-(n-2)}|\nabla v|^2 \, dx}{\displaystyle\int_{B_1} |x|^{-(n-2)} v^2 \, dx} = \frac{\displaystyle\int_{B_1} |x|^{-(n-2)}|\nabla\big(u(rx)\big)|^2 \, dx}{\displaystyle\int_{B_1} |x|^{-(n-2)}\big(u(rx)\big)^2 \, dx} = \frac{\displaystyle\int_{B_1} |x|^{-(n-2)} r^2 |\nabla u(rx)|^2 \, dx}{\displaystyle\int_{B_1} |x|^{-(n-2)}\big(u(rx)\big)^2 \, dx}$$

$$= \frac{\displaystyle\int_{B_r} |y|^{-(n-2)} r^{n-2} r^2 |\nabla u|^2 \, r^{-n} dy}{\displaystyle\int_{B_r} |y|^{-(n-2)} r^{n-2} u^2 \, r^{-n} dy} = r^2 \, \frac{\displaystyle\int_{B_r} |y|^{-(n-2)}|\nabla u|^2 \, dy}{\displaystyle\int_{B_r} |y|^{-(n-2)} u^2 \, dy}$$

απ'όπου συμπεραίνουμε ότι $c_1 \leq r^2 c_r$.

Με ανάλογη διαδικασία ξεκινώντας από τυχαία $u \in C_c^\infty(B_1) - \{0\}$ και ορίζοντας την $v(x) := u\big(\frac{x}{r} \big) \in C_c^\infty(B_r)$ δείχνεται η ανάποδη ανισότητα.

Παρατηρούμε ότι $c_r > 0, \ \forall r > 0$.

Θα αποδείξουμε τώρα ότι $\forall \, \epsilon > 0, \ \exists \, c = c(\epsilon, n) > 0$ ώστε $\forall \, u \in W_0^{1,2}(\Omega \, ; \, |x|^{-(n-2)})$ να ισχύει

$$\int_\Omega |x|^{-(n-2)} u^2 \, dx \leq \epsilon \int_\Omega |x|^{-(n-2)} |\nabla u|^2 \, dx + c(\epsilon, n) \int_\Omega u^2 \, dx.$$

Υποθέτουμε δίχως βλάβη της γενικότητας ότι $\overline{B_1} \subseteq \Omega$ αλλιώς επιλέγουμε μικρότερη ακτίνα.

Έστω $u \in C_c^\infty(\Omega)$ και $\phi \in C_c^\infty(B_1)$ ώστε $\phi \equiv 1$ στην $\overline{B_{\frac{1}{2}}}$ και $0 \leq \phi < 1$ στην $B_1 - \overline{B_{\frac{1}{2}}}$.

Για $r \in (0, 1]$, ορίζουμε τη συνάρτηση $\phi_r(x) := \phi(\frac{x}{r})$ για την οποία ισχύει $\phi_r \in C_c^\infty(B_r)$ και $\phi_r \equiv 1$ στην $\overline{B_{\frac{r}{2}}}$, $0 \leq \phi_r < 1$ στην $B_r - \overline{B_{\frac{r}{2}}}$.

Έχουμε, $\phi_r u \in C_c^\infty(B_r)$ οπότε

$$\int_\Omega |x|^{-(n-2)} u^2 \, dx = \int_\Omega |x|^{-(n-2)} \big(u\phi_r + (1-\phi_r)u\big)^2 \, dx$$

$$\leq 2\int_\Omega |x|^{-(n-2)} \phi_r^2 u^2 \, dx + 2\int_\Omega |x|^{-(n-2)} (1-\phi_r)^2 u^2 \, dx$$

$$= 2\int_{B_r} |x|^{-(n-2)} \phi_r^2 u^2 \, dx + 2\int_{\Omega - \overline{B_{\frac{r}{2}}}} |x|^{-(n-2)} (1-\phi_r)^2 u^2 \, dx$$

$$\leq \frac{2}{c_r}\int_{B_r} |x|^{-(n-2)} |\nabla(\phi_r u)|^2 \, dx + \frac{2^{n-1}}{r^{n-2}}\int_{\Omega - \overline{B_{\frac{r}{2}}}} u^2 \, dx$$

$$\leq \frac{2r^2}{c_1}\int_{B_r} |x|^{-(n-2)} |\nabla(\phi_r u)|^2 \, dx + \frac{2^{n-1}}{r^{n-2}}\int_{\Omega} u^2 \, dx$$

$$\leq \frac{4r^2}{c_1}\int_{B_r} |x|^{-(n-2)} \big(|\nabla\phi_r|^2 u^2 + \phi_r^2 |\nabla u|^2\big) \, dx + \frac{2^{n-1}}{r^{n-2}}\int_{\Omega} u^2 \, dx$$

$$= \frac{4r^2}{c_1}\left(\int_{B_r - \overline{B_{\frac{r}{2}}}} |x|^{-(n-2)} |\nabla\phi_r|^2 u^2 \, dx + \int_{B_r} |x|^{-(n-2)} \phi_r^2 |\nabla u|^2 \, dx\right) + \frac{2^{n-1}}{r^{n-2}}\int_{\Omega} u^2 \, dx$$

$$= \frac{4r^2}{c_1}\left(\int_{B_r - \overline{B_{\frac{r}{2}}}} |x|^{-(n-2)} \frac{\left|\nabla\phi(\frac{x}{r})\right|^2}{r^2} u^2 \, dx + \int_{B_r} |x|^{-(n-2)} \phi_r^2 |\nabla u|^2 \, dx\right) + \frac{2^{n-1}}{r^{n-2}}\int_{\Omega} u^2 \, dx$$

$$\leq \frac{4r^2}{c_1}\int_{\Omega} |x|^{-(n-2)} |\nabla u|^2 \, dx + \left(\frac{2^n}{c_1 r^{n-2}}\|\nabla\phi\|^2_{L^\infty(B_1 - \overline{B_{\frac{1}{2}}})} + \frac{2^{n-1}}{r^{n-2}}\right)\int_{\Omega} u^2 \, dx.$$

Για το τυχαίο $\epsilon > 0$ θέλουμε $\dfrac{4r^2}{c_1} \leq \epsilon$ άρα μπορούμε να διαλέξουμε $r = \dfrac{\sqrt{c_1\epsilon}}{2}$ και τότε προκύπτει

$$\int_\Omega |x|^{-(n-2)} u^2 \, dx \leq \epsilon\int_\Omega |x|^{-(n-2)} |\nabla u|^2 \, dx + c(\epsilon, n)\int_\Omega u^2 \, dx, \ \forall u \in C_c^\infty(\Omega)$$

όπου $c(\epsilon,n)=\epsilon^{-\frac{n-2}{2}}\big(4c_1^{-\frac{n}{2}}\|\nabla\phi\|^2_{L^\infty(B_1-\overline{B_{\frac{1}{2}}})}+2c_1^{-\frac{n-2}{2}}\big)$.

Εφόσον οι συναρτήσεις στο $C_c^\infty(\Omega)$ είναι πυκνές στον $W_0^{1,2}(\Omega\ ;\ |x|^{-(n-2)})$, η ανίσωση ισχύει τελικά $\forall u\in W_0^{1,2}(\Omega\ ;\ |x|^{-(n-2)})$.

Δείχνουμε τώρα το κυρίως ζητούμενο. Έστω $\epsilon>0$.

Εξηγήσαμε ότι $\exists\ c_1>0$ ώστε $\displaystyle\int_\Omega |x|^{-(n-2)}|\nabla u_k|^2\ dx\leq c_1$ οπότε

$$\int_\Omega |x|^{-(n-2)}|\nabla(u_k-u)|^2\ dx\ \leq\ C \qquad (C>0 \text{ σταθερά}).$$

Επίσης , (από το 1) $\exists\ k_0\in\mathbb{N}$ ώστε $\forall\ k\geq k_0$ να ισχύει

$$\int_\Omega (u_k-u)^2\ dx<\frac{\epsilon}{2\ c(\frac{\epsilon}{2C},n)}.$$

Επομένως, $\forall\ k\geq k_0$ ισχύει

$$\int_\Omega |x|^{-(n-2)}(u_k-u)^2\ dx\leq\frac{\epsilon}{2C}\int_\Omega |x|^{-(n-2)}|\nabla(u_k-u)|^2\ dx+c(\tfrac{\epsilon}{2C},n)\int_\Omega (u_k-u)^2\ dx$$

$<\dfrac{\epsilon}{2}+\dfrac{\epsilon}{2}=\epsilon$ το οποίο εξ ορισμού σημαίνει $u_k\to u$ στον $L^2(\Omega\ ;\ |x|^{-(n-2)})$. $\square$

Πρόταση 8

Έστω $\{u_k\} \subseteq W_0^{1,2}(\Omega\ ;\ |x|^{-(n-2)})$ και $u \in W_0^{1,2}(\Omega\ ;\ |x|^{-(n-2)})$ ώστε $u_k \rightharpoonup u$ στον $W_0^{1,2}(\Omega\ ;\ |x|^{-(n-2)})$. Έστω επίσης $V \geq 0$ ώστε

$$\int_\Omega X^{-(n-1)}\left(1, \frac{|x|}{D}\right) V^{\frac{n}{2}}(x)\ dx < +\infty$$

Τότε ισχύουν

1) $\lim\limits_{k\to+\infty} \int_\Omega |x|^{-(n-2)} V (u_k - u)^2\ dx = 0$

2) $\lim\limits_{k\to+\infty} \int_\Omega |x|^{-(n-2)} V u_k^2\ dx = \int_\Omega |x|^{-(n-2)} V u^2\ dx.$

Απόδειξη:

1) Δείχνουμε αρχικά ότι $\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ c = c(\epsilon) > 0$ ώστε $\forall u \in W_0^{1,2}(\Omega\ ;\ |x|^{-(n-2)})$ να ισχύει

$$\int_\Omega |x|^{-(n-2)} V u^2\ dx \leq \epsilon \int_\Omega |x|^{-(n-2)} |\nabla u|^2\ dx + c(\epsilon) \int_\Omega |x|^{-(n-2)} u^2\ dx.$$

Πράγματι, από το Θεώρημα 2 γνωρίζουμε ότι $\exists\ C > 0$ ώστε $\forall\ u \in W_0^{1,2}(\Omega\ ;\ |x|^{-(n-2)})$

να ισχύει

$$\left(\int_\Omega |x|^{-n} X^{\frac{2(n-1)}{n-2}}\left(1, \tfrac{|x|}{D}\right) |u|^{\frac{2n}{n-2}}\ dx\right)^{\frac{n-2}{n}} \leq C \int_\Omega |x|^{-(n-2)} |\nabla u|^2\ dx.$$

Επίσης, $X^{-(n-1)} V^{\frac{n}{2}} \geq 0$ και $\int_\Omega X^{-(n-1)} V^{\frac{n}{2}}\ dx < +\infty$, οπότε

$\forall x \in \overline{\Omega},\ \exists\ r_x > 0$ ώστε

$$\left(\int_{B_{r_x}(x) \cap \Omega} X^{-(n-1)} \left(1, \frac{|y|}{D}\right) V^{\frac{n}{2}}\ dy \right)^{\frac{2}{n}} \le \frac{\epsilon}{2C}.$$

Επομένως $\forall x \in \overline{\Omega},\ \exists\ r_x > 0$ ώστε $\forall f \in C_c^\infty(B_{r_x}(x) \cap \Omega))$ να ισχύει

$$\int_{B_{r_x}(x) \cap \Omega} |y|^{-(n-2)} V f^2 dy \overset{\text{Hölder}}{\le}$$

$$\le \left(\int_{B_{r_x}(x) \cap \Omega} X^{-(n-1)} (1, \tfrac{|y|}{D}) V^{\frac{n}{2}}\ dy \right)^{\frac{2}{n}} \left(\int_{B_{r_x}(x) \cap \Omega} |x|^{-n} X^{\frac{2(n-1)}{n-2}} (1, \tfrac{|y|}{D}) |f|^{\frac{2n}{n-2}}\ dy \right)^{\frac{n-2}{n}} \le$$

$$\le \left(\int_{B_{r_x}(x) \cap \Omega} X^{-(n-1)} (1, \tfrac{|y|}{D}) V^{\frac{n}{2}}\ dy \right)^{\frac{2}{n}} \left(\int_{\Omega} |x|^{-n} X^{\frac{2(n-1)}{n-2}} (1, \tfrac{|y|}{D}) |f|^{\frac{2n}{n-2}}\ dy \right)^{\frac{n-2}{n}} \le$$

$$\le \frac{\epsilon}{2C}\ C \int_\Omega |y|^{-(n-2)} |\nabla f|^2\ dy = \frac{\epsilon}{2} \int_\Omega |y|^{-(n-2)} |\nabla f|^2\ dy.$$

Επιπλέον, $\overline{\Omega} \subseteq \bigcup_{x \in \overline{\Omega}} B_{r_x}(x)$ και το $\overline{\Omega}$ είναι συμπαγές, άρα $\exists\ x_1\ ,\ ...\ ,\ x_k \in \overline{\Omega}$ και αντίστοιχα $r_1\ ,\ ...\ ,\ r_k$ έτσι ώστε $\overline{\Omega} \subseteq \bigcup_{l=1}^k B_{r_l}(x_l)$.

Γνωρίζουμε ότι $\forall\ l \in \{1, ..., k\},\ \exists\ \phi_l \in C_c^\infty(B_{r_l}(x_l))$ ώστε $\sum_{l=1}^k \phi_l^2(x) = 1,\ \forall x \in \Omega$ (partition of unity).

Θεωρούμε τώρα τυχαία $u \in C_c^\infty(\Omega)$. Τότε, $supp(\phi_l u) \subseteq B_{r_l}(x_l) \cap \Omega,\ \forall\ l \in \{1, ..., k\}$ οπότε

$$\int_\Omega |y|^{-(n-2)} V u^2\ dy = \int_\Omega |y|^{-(n-2)} V u^2 \textstyle\sum_{l=1}^k \phi_l^2(y)\ dy$$

$$= \sum_{l=1}^{k} \int_{B_{r_l}(x_l)\,\cap\,\Omega} |y|^{-(n-2)} V(\phi_l(y)u)^2 \; dy$$

$$\leq \sum_{l=1}^{k} \; \frac{\epsilon}{2} \int_{\Omega} |y|^{-(n-2)} |\nabla(\phi_l(y)u)|^2 \; dy$$

$$\leq \; \sum_{l=1}^{k} \; \epsilon \int_{\Omega} |y|^{-(n-2)} \Big(|\nabla \phi_l|^2 \; u^2 + \phi_l^2 \; |\nabla u|^2 \Big) \; dy$$

$$= \epsilon \Bigg(\int_{\Omega} |y|^{-(n-2)} \; \sum_{l=1}^{k} \; |\nabla \phi_l|^2 u^2 \; dy + \int_{\Omega} |y|^{-(n-2)} |\nabla u|^2 \; dy \Bigg)$$

$$\leq \epsilon \int_{\Omega} |y|^{-(n-2)} |\nabla u|^2 \; dy + \epsilon \; M \int_{\Omega} |y|^{-(n-2)} u^2 \; dy \; ,$$

όπου $M := \max\limits_{y\in\Omega} \Big(\sum_{l=1}^{k} |\nabla \phi_l|^2 \Big)$.

Εφόσον οι συναρτήσεις στο $C_c^{\infty}(\Omega)$ είναι πυκνές στο $W_0^{1,2}(\Omega \; ; \; |x|^{-(n-2)})$, η παραπάνω ανίσωση ισχύει $\forall u \in W_0^{1,2}(\Omega \; ; \; |x|^{-(n-2)})$.

Δείχνουμε τώρα το κυρίως ζητούμενο. Έστω $\epsilon > 0$.

Λόγω της ασθενής σύγκλισης της $\{u_k\}$ γνωρίζουμε ότι $\exists \; c_1 > 0$ ώστε $\int_{\Omega} |x|^{-(n-2)} |\nabla u_k|^2 \, dx \leq c_1$ οπότε

$$\int_{\Omega} |x|^{-(n-2)} |\nabla(u_k - u)|^2 \; dx \; \leq \; C \text{ όπου } C > 0 \text{ σταθερά.}$$

Επίσης, (από την Πρόταση 7) $\exists \; k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall \; k \geq k_0$ να ισχύει

$$\int_{\Omega} |x|^{-(n-2)} (u_k - u)^2 \; dx < \frac{\epsilon}{2 \; c(\frac{\epsilon}{2C})}.$$

Επομένως, $\forall\ k \geq k_0$ ισχύει

$$\int_\Omega |x|^{-(n-2)} V(u_k-u)^2\,dx \leq \frac{\epsilon}{2C}\int_\Omega |x|^{-(n-2)}|\nabla(u_k-u)|^2\,dx + c(\tfrac{\epsilon}{2C})\int_\Omega |x|^{-(n-2)}(u_k-u)^2\,dx$$

$< \dfrac{\epsilon}{2}+\dfrac{\epsilon}{2} = \epsilon$, το οποίο εξ ορισμού σημαίνει $\lim\limits_{k\to+\infty}\displaystyle\int_\Omega |x|^{-(n-2)}V(u_k-u)^2\,dx = 0$.

2) Ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$\text{i)}\ \int_\Omega |x|^{-(n-2)}V(u_k-u)^2\,dx = \int_\Omega |x|^{-(n-2)}Vu_k^2\,dx - 2\int_\Omega |x|^{-(n-2)}Vu_k u\,dx + \int_\Omega |x|^{-(n-2)}Vu^2\,dx$$

$$\text{ii)}\ \int_\Omega |x|^{-(n-2)}Vu_k u\,dx = \int_\Omega |x|^{-(n-2)}V(u_k-u)u\,dx + \int_\Omega |x|^{-(n-2)}Vu^2\,dx$$

$$\text{iii)}\ \left|\int_\Omega |x|^{-(n-2)}V(u_k-u)u\,dx\right| \leq \frac{\epsilon}{2}\int_\Omega |x|^{-(n-2)}Vu^2\,dx + \frac{1}{2\epsilon}\int_\Omega |x|^{-(n-2)}V(u_k-u)^2\,dx$$

Από την iii) συμπεραίνουμε πως $\lim\limits_{k\to+\infty}\displaystyle\int_\Omega |x|^{-(n-2)}V(u_k-u)u\,dx = 0$.

Από την ii) συμπεραίνουμε πως $\lim\limits_{k\to+\infty}\displaystyle\int_\Omega |x|^{-(n-2)}Vu_k u\,dx = \int_\Omega |x|^{-(n-2)}Vu^2\,dx$.

Από την i) καταλήγουμε στο ότι $\lim\limits_{k\to+\infty}\displaystyle\int_\Omega |x|^{-(n-2)}Vu_k^2\,dx = \int_\Omega |x|^{-(n-2)}Vu^2\,dx$. $\square$

Είμαστε σε θέση τώρα να περάσουμε στο επόμενο βασικό αποτέλεσμα.

Θεώρημα 4

Έστω $V \geq 0$ ώστε

$$\int_{\Omega} X^{-(n-1)}\left(1, \frac{|x|}{D}\right) V^{\frac{n}{2}}(x)\ dx < +\infty.$$

Τότε, η βέλτιστη σταθερά C_{Ω} της ανίσωσης

$$\int_{\Omega} |x|^{-(n-2)}|\nabla u|^2\ dx \geq C_{\Omega} \int_{\Omega} |x|^{-(n-2)} V u^2\ dx\ ,\ \forall\ u \in W_0^{1,2}(\Omega\ ;\ |x|^{-(n-2)})$$

επιτυγχάνεται στον $W_0^{1,2}(\Omega; |x|^{-(n-2)})$.

Επιπλέον, κάθε φραγμένη στον $W_0^{1,2}(\Omega; |x|^{-(n-2)})$ ελαχιστοποιούσα ακολουθία του C_{Ω}, έχει υπακολουθία που συγκλίνει ισχυρά στον $W_0^{1,2}(\Omega; |x|^{-(n-2)})$.

Απόδειξη:

Η βέλτιστη σταθερά της ανίσωσης ισούται με

$$C_{\Omega} := \inf_{\substack{u \in W_0^{1,2}(\Omega\ ;\ |x|^{-(n-2)}) \\ \int_{\Omega} |x|^{-(n-2)} V u^2\ dx > 0}} \frac{\displaystyle\int_{\Omega} |x|^{-(n-2)}|\nabla u|^2\ dx}{\displaystyle\int_{\Omega} |x|^{-(n-2)} V u^2\ dx}\ .$$

Ισχύει ότι $\exists\ \{u_k\} \subseteq W_0^{1,2}(\Omega; |x|^{-(n-2)})$ τ.ω. $\dfrac{\int_{\Omega} |x|^{-(n-2)}|\nabla u_k|^2\ dx}{\int_{\Omega} |x|^{-(n-2)} V u_k^2\ dx} \to C_{\Omega}$ καθώς $k \to +\infty$.

Κάνουμε κανονικοποίηση των δεδομένων θέτοντας

$$z_k := \frac{u_k}{(\int_\Omega |x|^{-(n-2)} V u_k^2 \, dx)^{\frac{1}{2}}}$$

και τότε προκύπτει

$$\int_\Omega |x|^{-(n-2)} V z_k^2 \, dx = 1 \;\Big/\; \int_\Omega |x|^{-(n-2)} |\nabla z_k|^2 \, dx \to C_\Omega \text{ καθώς } k \to +\infty.$$

Αυτό σημαίνει ότι η ακολουθία $\displaystyle\int_\Omega |x|^{-(n-2)} |\nabla z_k|^2 \, dx$ είναι φραγμένη στον $W_0^{1,2}(\Omega \; ; \; |x|^{-(n-2)})$ και αφού είναι χώρος Hilbert, $\exists \; \{z_{j_k}\} \subseteq \{z_k\}$ και $z_0 \in W_0^{1,2}(\Omega; |x|^{-(n-2)})$ ώστε $z_{j_k} \rightharpoonup z_0$ στον $W_0^{1,2}(\Omega; |x|^{-(n-2)})$ καθώς $k \to +\infty$.

Από την Πρόταση 8 γνωρίζουμε πως αυτό συνεπάγει

$$\int_\Omega |x|^{-(n-2)} V z_0^2 \, dx = \lim_{k \to +\infty} \int_\Omega |x|^{-(n-2)} V z_{j_k}^2 \, dx = 1.$$

Επιπλέον , αν ονομάσουμε $v_{j_k} := z_{j_k} - z_0$, τότε ισχύει η σχέση

$$\int_\Omega |x|^{-(n-2)} |\nabla z_{j_k}|^2 \, dx = \int_\Omega |x|^{-(n-2)} |\nabla v_{j_k}|^2 \, dx + \int_\Omega |x|^{-(n-2)} |\nabla z_0|^2 \, dx + 2 \int_\Omega |x|^{-(n-2)} \nabla v_{j_k} \cdot \nabla z_0 \, dx \; .$$

Όμως

$$\int_\Omega |x|^{-(n-2)} |\nabla z_{j_k}|^2 \, dx = C_\Omega + o(1) \;\Big/\; \int_\Omega |x|^{-(n-2)} \nabla v_{j_k} \cdot \nabla z_0 \, dx = o(1)$$

(η τελευταία ισότητα λόγω της ασθενής σύγκλισης $v_{j_k} \rightharpoonup 0$ στον $W_0^{1,2}(\Omega \; ; \; |x|^{-(n-2)})$.

Οπότε,

$$C_\Omega + o(1) = \int_\Omega |x|^{-(n-2)} |\nabla v_{j_k}|^2 \, dx + \int_\Omega |x|^{-(n-2)} |\nabla z_0|^2 \, dx$$

απ'όπου συμπεραίνουμε

$$C_\Omega \geq \int_\Omega |x|^{-(n-2)} |\nabla z_0|^2 \, dx.$$

Επομένως,

$$\frac{\int_\Omega |x|^{-(n-2)} |\nabla z_0|^2 \, dx}{\int_\Omega |x|^{-(n-2)} V z_0^2 \, dx} \leq C_\Omega.$$

Η ανάποδη ανισότητα ισχύει άμεσα από την ιδιότητα του infimum και έτσι καταλήγουμε στο ότι $C_\Omega = \dfrac{\int_\Omega |x|^{-(n-2)} |\nabla z_0|^2 \, dx}{\int_\Omega |x|^{-(n-2)} V z_0^2 \, dx}$ δηλαδή υπάρχει ελαχιστοποιητής.

Επιπροσθέτως, εφόσον δείξαμε ότι $\int_\Omega |x|^{-(n-2)} |\nabla v_{j_k}|^2 \, dx + \int_\Omega |x|^{-(n-2)} |\nabla z_0|^2 \, dx = C_\Omega + o(1)$ και $\int_\Omega |x|^{-(n-2)} |\nabla z_0|^2 \, dx = C_\Omega$, καταλήγουμε στο ότι $\int_\Omega |x|^{-(n-2)} |\nabla v_{j_k}|^2 \, dx = o(1)$ το οποίο σημαίνει ότι $z_{j_k} \to z_0$ στον $W_0^{1,2}(\Omega; |x|^{-(n-2)})$. $\square$

Θα δείξουμε στη συνέχεια ότι το ίδιο αποτέλεσμα ισχύει και με διαφορετικές υποθέσεις για την V τις οποίες θα αναφέρουμε. Πρώτα όμως αποδεικνύουμε μια βοηθητική πρόταση.

Πρόταση 9

Έστω $\{u_k\} \subseteq W_0^{1,2}(\Omega\ ;\ |x|^{-(n-2)})$ και $u \in W_0^{1,2}(\Omega\ ;\ |x|^{-(n-2)})$ ώστε $u_k \rightharpoonup u$ στον $W_0^{1,2}(\Omega\ ;\ |x|^{-(n-2)})$.

Έστω επίσης $0 \le V \in L^{\frac{n}{2}}_{loc}(\Omega - \{0\})$. Τότε $\forall \rho > 0$ ώστε $\overline{B_\rho} \subseteq \Omega$, ισχύει

$$\lim_{k \to +\infty} \int_{\Omega\, -\, \overline{B_\rho}} |x|^{-(n-2)} V (u_k - u)^2\ dx = 0.$$

Απόδειξη:

Δείχνουμε πρώτα ότι για $\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ c = c(\epsilon, \rho) > 0$ ώστε $\forall\ u \in W_0^{1,2}(\Omega\ ;\ |x|^{-(n-2)})$

να ισχύει

$$\int_{\Omega\, -\, \overline{B_\rho}} |x|^{-(n-2)} V u^2\ dy < \epsilon \int_\Omega |\nabla u|^2\ dy + c(\epsilon, \rho) \int_\Omega u^2\ dy.$$

Πράγματι, έστω $\epsilon > 0$ και τυχαία $u \in C_c^\infty(\Omega)$.

Ισχύει ότι $\forall\ x \in \overline{\Omega - \overline{B_\rho}} = \overline{\Omega} - B_\rho,\ \exists\ r_x > 0$ ώστε

$$\left(\int_{B_{r_x}(x)\, \cap\, (\Omega\, -\, \overline{B_\rho})} |V|^{\frac{n}{2}}\ dy \right)^{\frac{2}{n}} < \frac{\epsilon\ S_n}{2}.$$

Οπότε, $\forall\ x \in \overline{\Omega} - B_\rho,\ \exists\ r_x > 0$ ώστε $\forall f \in C_c^\infty(B_{r_x}(x) \cap \Omega)$ να ισχύει

$$\int_{B_{r_x}(x)\, \cap\, (\Omega\, -\, \overline{B_\rho})} V f^2\ dy \le \left(\int_{B_{r_x}(x)\, \cap\, (\Omega\, -\, \overline{B_\rho})} |V|^{\frac{n}{2}}\ dy \right)^{\frac{2}{n}} \left(\int_{B_{r_x}(x)\, \cap\, (\Omega\, -\, \overline{B_\rho})} |f|^{\frac{2n}{n-2}}\ dy \right)^{\frac{n-2}{n}}$$

$$\overset{\text{Sobolev}}{\leq} \frac{\epsilon\ S_n}{2}\frac{1}{S_n}\int_{B_{r_x}(x)\,\cap\,(\Omega\,-\,\overline{B_\rho})} |\nabla f|^2\ dy = \frac{\epsilon}{2}\int_{B_{r_x}(x)\,\cap\,(\Omega\,-\,\overline{B_\rho})} |\nabla f|^2\ dy.$$

Επιπλέον, $\overline{\Omega}-B_\rho \subseteq \bigcup_{x\in\overline{\Omega}-B_\rho} B_{r_x}(x)$ και το $\overline{\Omega}-B_\rho$ είναι συμπαγές, άρα $\exists\ x_1\ ,\ ...\ ,\ x_k \in \overline{\Omega}-B_\rho$ και αντίστοιχα $r_1\ ,\ ...\ ,\ r_k$ έτσι ώστε $\overline{\Omega}-B_\rho \subseteq \bigcup_{l=1}^k B_{r_l}(x_l)$.

Γνωρίζουμε ότι $\forall\ l \in \{1,...,k\},\ \exists\ \phi_l \in C_c^\infty(B_{r_l}(x_l))$ ώστε $\sum_{l=1}^k \phi_l^2(x) = 1,\ \forall x \in \Omega - \overline{B_\rho}$.

Όποτε, $\forall\ l \in \{1,...,k\}$ ισχύει $supp(\phi_l\ u) \subseteq B_{r_l}(x_l) \cap \Omega$ και έτσι,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega\,-\,\overline{B_\rho}} V(\phi_l(y)u)^2\ dy &= \int_{B_{r_l}(x_l)\,\cap\,(\Omega\,-\,\overline{B_\rho})} V(\phi_l(y)u)^2\ dy \\
&\leq \frac{\epsilon}{2}\int_{B_{r_l}(x_l)\,\cap\,(\Omega\,-\,\overline{B_\rho})} |\nabla(\phi_l(y)u)|^2\ dy \\
&\leq \epsilon\int_{B_{r_l}(x_l)\,\cap\,(\Omega\,-\,\overline{B_\rho})} \Big(|\nabla\phi_l|^2\ u^2 + \phi_l^2\ |\nabla u|^2\Big)\ dy \\
&\leq \epsilon\bigg(\int_{\Omega\,-\,\overline{B_\rho}} |\nabla\phi_l|^2 u^2\ dy + \int_{\Omega\,-\,\overline{B_\rho}}\ \phi_l^2|\nabla u|^2\ dy\bigg).
\end{aligned}$$

Έχοντας αυτά υπόψιν,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega\,-\,\overline{B_\rho}} Vu^2\ dy &= \int_{\Omega\,-\,\overline{B_\rho}} Vu^2 \textstyle\sum_{l=1}^k \phi_l^2(y)\ dy \\
&= \textstyle\sum_{l=1}^k \displaystyle\int_{\Omega\,-\,\overline{B_\rho}} V(\phi_l(y)u)^2\ dy \\
&\leq \textstyle\sum_{l=1}^k \epsilon\displaystyle\bigg(\int_{\Omega\,-\,\overline{B_\rho}} |\nabla\phi_l|^2 u^2\ dy + \int_{\Omega\,-\,\overline{B_\rho}} \phi_l^2|\nabla u|^2\ dy\bigg)
\end{aligned}$$

$$\leq \epsilon \int_\Omega |\nabla u|^2 \; dy + \epsilon \; M \int_\Omega u^2 \; dy \qquad \text{όπου } M = \underset{y \in \overline{\Omega} - B_\rho}{max} \Big(\textstyle\sum_{l=1}^k |\nabla \phi_l|^2 \Big).$$

Εφόσον οι συναρτήσεις στο $C_c^\infty(\Omega)$ είναι πυκνές στο $W_0^{1,2}(\Omega \; ; \; |x|^{-(n-2)})$, η παραπάνω ανίσωση ισχύει $\forall u \in W_0^{1,2}(\Omega \; ; \; |x|^{-(n-2)})$. Επομένως, για το τυχαίο $\epsilon > 0$ ισχύει

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega \, - \, \overline{B_\rho}} |x|^{-(n-2)} V u^2 \; dx &< \rho^{-(n-2)} \int_{\Omega \, - \, \overline{B_\rho}} V u^2 \; dx \\
&\leq \rho^{-(n-2)} \Big(\epsilon \rho^{n-2} \int_\Omega |\nabla u|^2 \; dx + \epsilon \rho^{n-2} M \int_\Omega u^2 \; dx \Big) \\
&= \epsilon \int_\Omega |\nabla u|^2 \; dx + \epsilon M \int_\Omega u^2 \; dx.
\end{aligned}$$

Δείχνουμε τώρα το κυρίως ζητούμενο.

Λόγω της ασθενής σύγκλισης της $\{u_k\}$ γνωρίζουμε ότι $\exists \; c_1 > 0$ ώστε $\int_\Omega |x|^{-(n-2)} |\nabla u_k|^2 \, dx \leq c_1$ άρα $\exists \; c_2 > 0$ ώστε $\int_\Omega |\nabla u_k|^2 \; dx \leq c_2$ οπότε

$$\int_\Omega |\nabla (u_k - u)|^2 \; dx \; \leq \; C \text{ όπου } C > 0 \text{ σταθερά.}$$

Επίσης, (από την Πρόταση 7) $\exists \; k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall \; k \geq k_0$ να ισχύει

$$\int_\Omega (u_k - u)^2 \; dx < \frac{\epsilon}{2 \; c(\frac{\epsilon}{2C})}.$$

Επομένως, $\forall \; k \geq k_0$ ισχύει

$$\int_{\Omega - \overline{B_\rho}} |x|^{-(n-2)} V (u_k - u)^2 \, dx \leq \frac{\epsilon}{2C} \int_\Omega |\nabla (u_k - u)|^2 \, dx + c(\tfrac{\epsilon}{2C}) \int_\Omega (u_k - u)^2 \, dx < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

το οποίο εξ ορισμού σημαίνει $\lim\limits_{k \to +\infty} \int_{\Omega - \overline{B_\rho}} |x|^{-(n-2)} V (u_k - u)^2 \, dx = 0$. $\square$

Προτού περάσουμε στο τελευταίο αποτέλεσμα που θα παρουσιάσουμε, ορίζουμε τα εξής:

$$C_0 := \lim_{r \to 0^+} C_r \text{ όπου } C_r := \inf_{\substack{u \in W_0^{1,2}(B_r \ ; \ |x|^{-(n-2)}) \\ \int_{B_r} |x|^{-(n-2)} V u^2 \, dx > 0}} \frac{\int_{B_r} |x|^{-(n-2)} |\nabla u|^2 \, dx}{\int_{B_r} |x|^{-(n-2)} V u^2 \, dx} \ , \ r > 0.$$

Θεώρημα 5

Έστω $0 \leq V \in L^{\frac{n}{2}}_{loc}(\Omega - \{0\})$. Υποθέτουμε ότι η βέλτιστη σταθερά B της ανίσωσης

$$\int_\Omega |x|^{-(n-2)} |\nabla u|^2 \, dx \geq B \int_\Omega |x|^{-(n-2)} V u^2 \, dx \ , \ \forall \ u \in W_0^{1,2}(\Omega \ ; \ |x|^{-(n-2)})$$

υπάρχει, είναι θετική και επιπλέον $B < C_0$.

Τότε, η βέλτιστη σταθερά B υλοποιείται και πάλι στον $W_0^{1,2}(\Omega \ ; \ |x|^{-(n-2)})$.

Επιπλέον, κάθε φραγμένη στον $W_0^{1,2}(\Omega \ ; \ |x|^{-(n-2)})$ ελαχιστοποιούσα ακολουθία του B, έχει υπακολουθία που συγκλίνει ισχυρά στον $W_0^{1,2}(\Omega \ ; \ |x|^{-(n-2)})$.

Απόδειξη:

Η βέλτιστη σταθερά της ανίσωσης ισούται με

$$B := \inf_{\substack{u\in W_0^{1,2}(\Omega\ ;\ |x|^{-(n-2)})\\ \int_\Omega |x|^{-(n-2)}Vu^2\ dx>0}} \frac{\displaystyle\int_\Omega |x|^{-(n-2)}|\nabla u|^2\ dx}{\displaystyle\int_\Omega |x|^{-(n-2)}Vu^2\ dx}\ .$$

Ισχύει ότι $\exists\ \{u_k\} \subseteq W_0^{1,2}(\Omega\ ;\ |x|^{-(n-2)})$ ώστε $\dfrac{\int_\Omega |x|^{-(n-2)}|\nabla u_k|^2\ dx}{\int_\Omega |x|^{-(n-2)}Vu_k^2\ dx} \to B$ καθώς $k \to +\infty$.

Κάνουμε κανονικοποίηση των δεδομένων θέτοντας

$$z_k := \frac{u_k}{(\int_\Omega |x|^{-(n-2)}Vu_k^2\ dx)^{\frac{1}{2}}}$$

και τότε προκύπτει

$$\int_\Omega |x|^{-(n-2)}Vz_k^2\ dx = 1\ \Big/\ \int_\Omega |x|^{-(n-2)}|\nabla z_k|^2\ dx \to B \text{ καθώς } k \to +\infty.$$

Αυτό σημαίνει ότι η ακολουθία $\displaystyle\int_\Omega |x|^{-(n-2)}|\nabla z_k|^2\, dx$ είναι φραγμένη και αφού ο $W_0^{1,2}(\Omega; |x|^{-(n-2)})$ είναι χώρος Hilbert, $\exists\ \{z_{j_k}\} \subseteq \{z_k\}$ και $z_0 \in W_0^{1,2}(\Omega; |x|^{-(n-2)})$ ώστε $z_{j_k} \rightharpoonup z_0$ στον $W_0^{1,2}(\Omega; |x|^{-(n-2)})$ καθώς $k \to +\infty$.

Ονομάζουμε $v_{j_k} := z_{j_k} - z_0$ και τότε έχουμε,

$$1 = \int_\Omega |x|^{-(n-2)}Vz_{j_k}^2\, dx = \int_\Omega |x|^{-(n-2)}Vv_{j_k}^2\ dx + \int_\Omega |x|^{-(n-2)}Vz_0^2\, dx + 2\int_\Omega |x|^{-(n-2)}Vv_{j_k}z_0\, dx.$$

Όμως, υπό τις συνθήκες της εκφώνησης για τη συνάρτηση V, προκύπτει ότι οι νόρμες

$$\|u\| = \left(\int_\Omega |x|^{-(n-2)} |\nabla u|^2 \, dx + \int_\Omega |x|^{-(n-2)} V u^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega \ ; \ |x|^{-(n-2)})} = \left(\int_\Omega |x|^{-(n-2)} |\nabla u|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

είναι ισοδύναμες. Άμεση συνέπεια αυτού είναι

$$\int_\Omega |x|^{-(n-2)} V v_{j_k} z_0 \, dx = o(1) \text{ καθώς } k \to +\infty$$

αφού $v_{j_k} \rightharpoonup 0$ στον $W_0^{1,2}(\Omega; |x|^{-(n-2)})$.

Οπότε παίρνουμε

- $1 = \int_\Omega |x|^{-(n-2)} V v_{j_k}^2 \, dx + \int_\Omega |x|^{-(n-2)} V z_0^2 \, dx + o(1) \quad (1).$

Επίσης, αφού $\int_\Omega |x|^{-(n-2)} |\nabla z_{j_k}|^2 \, dx \to B$, ισχύει $\int_\Omega |x|^{-(n-2)} |\nabla z_{j_k}|^2 \, dx = B + o(1)$ και

$$\int_\Omega |x|^{-(n-2)} |\nabla z_{j_k}|^2 \, dx = \int_\Omega |x|^{-(n-2)} |\nabla v_{j_k}|^2 \, dx + \int_\Omega |x|^{-(n-2)} |\nabla z_0|^2 \, dx + 2 \int_\Omega |x|^{-(n-2)} \nabla v_{j_k} \cdot \nabla z_0 \, dx.$$

Όμως $\int_\Omega |x|^{-(n-2)} \nabla v_{j_k} \cdot \nabla z_0 \, dx = o(1)$ λόγω πάλι της $v_{j_k} \rightharpoonup v$ στον $W_0^{1,2}(\Omega; |x|^{-(n-2)})$.

Οπότε παίρνουμε

- $B = \int_\Omega |x|^{-(n-2)} |\nabla v_{j_k}|^2 \, dx + \int_\Omega |x|^{-(n-2)} |\nabla z_0|^2 \, dx + o(1) \quad (2)$

$$\text{και άρα} \bullet\ B \geq \int_\Omega |x|^{-(n-2)} |\nabla z_0|^2 \, dx \quad (3).$$

Επίσης, $B \int_\Omega |x|^{-(n-2)} V z_0^2 \, dx \leq \int_\Omega |x|^{-(n-2)} |\nabla z_0|^2 \, dx$ και αξιοποιώντας την (2) παίρνουμε

$$\bullet\ B \geq \int_\Omega |x|^{-(n-2)} |\nabla v_{j_k}|^2 \, dx + B \int_\Omega |x|^{-(n-2)} V z_0^2 \, dx + o(1) \quad (4).$$

Ισχύει $B < C_0 = \lim_{r \to 0^+} C_r$ και η συνάρτηση $r \longmapsto C_r$ είναι συνεχής και αυξάνει καθώς $r \to 0^+$

οπότε $\exists\ \rho > 0$ κατάλληλα μικρό ώστε $B < C_\rho$.

Έστω $\phi \in C_c^\infty(B_\rho)$ συνάρτηση τ.ω. $\phi \equiv 1$ στο $\overline{B_{\frac{\rho}{2}}}$, $0 < \phi < 1$ στο $B_\rho - \overline{B_{\frac{\rho}{2}}}$.

Γράφουμε $v_{j_k} = v_{j_k}\phi + \ + v_{j_k}(1-\phi)$ και τότε

$$\int_\Omega |x|^{-(n-2)} |\nabla v_{j_k}|^2 \, dx =$$

$$= \int_\Omega |x|^{-(n-2)} |\nabla \big(v_{j_k}\phi\big)|^2 \, dx + \int_\Omega |x|^{-(n-2)} |\nabla \big(v_{j_k}(1-\phi)\big)|^2 \, dx +$$

$$+ 2 \int_\Omega |x|^{-(n-2)} \phi(1-\phi) |\nabla v_{j_k}|^2 \, dx + 2 \int_\Omega |x|^{-(n-2)} \Big(v_{j_k}(1-2\phi) \nabla v_{j_k} \cdot \nabla \phi - v_{j_k}^2 |\nabla \phi|^2 \Big) \, dx.$$

Όμως

$$\int_\Omega |x|^{-(n-2)} \Big(v_{j_k}(1-2\phi) \nabla v_{j_k} \cdot \nabla \phi - v_{j_k}^2 |\nabla \phi|^2 \Big) \, dx = o(1)$$

αφού

1. $\int_\Omega |x|^{-(n-2)} v_{j_k}^2 |\nabla \phi|^2 \, dx = \int_{B_\rho - \overline{B_{\frac{\rho}{2}}}} |x|^{-(n-2)} v_{j_k}^2 |\nabla \phi|^2 \, dx$

$$\leq \|\nabla\phi\|^2_{L^\infty(B_\rho - \overline{B_{\frac{\rho}{2}}})} \int_{B_\rho - \overline{B_{\frac{\rho}{2}}}} |x|^{-(n-2)} v_{j_k}^2 \ dx$$

$$\leq \ \|\nabla\phi\|^2_{L^\infty(B_\rho - \overline{B_{\frac{\rho}{2}}})} \int_\Omega |x|^{-(n-2)} v_{j_k}^2 \ dx \to 0$$

εφόσον $v_{j_k} \to 0$ στον $L^2(\Omega \ ; \ |x|^{-(n-2)})$.

2. $\displaystyle \left| \int_\Omega |x|^{-(n-2)} v_{j_k}(1-2\phi)\nabla v_{j_k} \cdot \nabla\phi \ dx \right| \leq \int_\Omega |x|^{-(n-2)} |v_{j_k}||1-2\phi||\nabla v_{j_k}||\nabla\phi| \ dx$

$$\leq \|\nabla\phi\|_{L^\infty(B_\rho - \overline{B_{\frac{\rho}{2}}})} \left(\frac{\epsilon}{2} \int_\Omega |x|^{-(n-2)} |\nabla v_{j_k}|^2 \ dx + \frac{1}{2\epsilon} \int_\Omega |x|^{-(n-2)} v_{j_k}^2 \ dx \right)$$

$$\leq \|\nabla\phi\|_{L^\infty(B_\rho - \overline{B_{\frac{\rho}{2}}})} \left(\epsilon \int_\Omega |x|^{-(n-2)} \big(|\nabla z_{j_k}|^2 + |\nabla z_0|^2 \big) \ dx + \frac{1}{2\epsilon} \int_\Omega |x|^{-(n-2)} v_{j_k}^2 \ dx \right)$$

για το τυχαίο $\epsilon > 0$.

Από αυτό, αξιοποιώντας ότι $\int_\Omega |x|^{-(n-2)} |\nabla z_{j_k}|^2 \ dx \ \to \ B, \ \int_\Omega |x|^{-(n-2)} v_{j_k}^2 \ dx \ \to \ 0,$ μπορούμε να συμπεράνουμε μέσω του ορισμού της σύγκλισης ότι

$$\lim_{k\to+\infty} \left| \int_\Omega |x|^{-(n-2)} v_{j_k}(1-2\phi)\nabla v_{j_k} \cdot \nabla\phi \ dx \right| = 0.$$

Επομένως καταλήγουμε στο ότι

$$\int_\Omega |x|^{-(n-2)} |\nabla v_{j_k}|^2 \ dx = \int_\Omega |x|^{-(n-2)} |\nabla(\phi v_{j_k})|^2 \ dx + \int_\Omega |x|^{-(n-2)} |\nabla\big((1-\phi)v_{j_k}\big)|^2 \ dx +$$

$$+ \, 2 \int_\Omega |x|^{-(n-2)} \phi(1-\phi) |\nabla v_{j_k}|^2 \ dx + o(1)$$

και άρα

$$\bullet \int_\Omega |x|^{-(n-2)}|\nabla v_{j_k}|^2\, dx \geq \int_\Omega |x|^{-(n-2)}|\nabla(\phi v_{j_k})|^2\, dx + o(1) \quad (5).$$

Επιπλέον, αφού $\phi v_{j_k} \in W_0^{1,2}(B_\rho\, ; |x|^{-(n-2)})$, ισχύει

$$\int_\Omega |x|^{-(n-2)}|\nabla(\phi v_{j_k})|^2\, dx \geq C_\rho \int_\Omega |x|^{-(n-2)} V(\phi v_{j_k})^2\, dx$$

και έτσι συνδυάζοντας την με την (5) παίρνουμε

$$\bullet \int_\Omega |x|^{-(n-2)}|\nabla v_{j_k}|^2\, dx \geq C_\rho \int_\Omega |x|^{-(n-2)} V(\phi v_{j_k})^2\, dx + o(1) \quad (6).$$

Επίσης $\int_\Omega |x|^{-(n-2)} V v_{j_k}^2\, dx = \int_\Omega |x|^{-(n-2)} V\Big((\phi v_{j_k})^2 + 2\phi(1-\phi)v_{j_k}^2 + \big((1-\phi)v_{j_k}\big)^2\Big)\, dx.$

Όμως $\int_\Omega |x|^{-(n-2)} V\Big(2\phi(1-\phi)v_{j_k}^2 + \big((1-\phi)v_{j_k}\big)^2\Big)\, dx =$

$$= \int_{\Omega - \overline{B_{\frac{\rho}{2}}}} |x|^{-(n-2)} V\Big(2\phi(1-\phi)v_{j_k}^2 + \big((1-\phi)v_{j_k}\big)^2\Big)\, dx \leq 2\int_{\Omega - \overline{B_{\frac{\rho}{2}}}} |x|^{-(n-2)} V v_{j_k}^2\, dx \to 0$$

καθώς $k \to +\infty$ άρα προκύπτει

$$\int_\Omega |x|^{-(n-2)} V v_{j_k}^2\, dx = \int_\Omega |x|^{-(n-2)} V\big(\phi v_{j_k}^2\big)\, dx + o(1)$$

και έτσι η (6) γίνεται

$$\bullet \int_\Omega |x|^{-(n-2)}|\nabla v_{j_k}|^2\, dx \geq C_\rho \int_\Omega |x|^{-(n-2)} V v_{j_k}^2\, dx + o(1) \quad (7).$$

Λόγω της (1) όμως

$$\bullet \int_\Omega |x|^{-(n-2)}|\nabla v_{j_k}|^2\,dx \geq C_\rho\Big(1-\int_\Omega |x|^{-(n-2)}Vz_0^2\,dx\Big)+o(1)\quad (8).$$

ενώ λόγω της (4)

$$\bullet\ \big(B-C_\rho\big)\Big(1-\int_\Omega |x|^{-(n-2)}Vz_0^2\,dx\Big)\geq 0\quad (9).$$

Εξαιτίας της υπόθεσης $B<C_\rho$ συμπεραίνουμε από την (9) ότι $\displaystyle\int_\Omega |x|^{-(n-2)}Vz_0^2\,dx\geq 1.$

Από αυτό και την (3) καταλήγουμε στο ότι $0<\dfrac{\displaystyle\int_\Omega |x|^{-(n-2)}|\nabla z_0|^2\,dx}{\displaystyle\int_\Omega |x|^{-(n-2)}Vz_0^2\,dx}\leq B$ και αφού η ανάποδη ανισότητα ισχύει προφανώς, συμπεραίνουμε πως $\dfrac{\displaystyle\int_\Omega |x|^{-(n-2)}|\nabla z_0|^2\,dx}{\displaystyle\int_\Omega |x|^{-(n-2)}Vz_0^2\,dx}=B$ δηλαδή υπάρχει ελαχιστοποιητής.

Επιπροσθέτως, λόγω της (1), $\displaystyle\int_\Omega |x|^{-(n-2)}Vz_0^2\,dx\leq 1$ άρα εν τέλει $\displaystyle\int_\Omega |x|^{-(n-2)}Vz_0^2\,dx=1$

οπότε από την (4) προκύπτει $\displaystyle\int_\Omega |x|^{-(n-2)}|\nabla v_{j_k}|^2\,dx\leq o(1)$ επομένως

$\displaystyle\lim_{k\to+\infty}\int_\Omega |x|^{-(n-2)}|\nabla v_{j_k}|^2\,dx=0$ το οποίο σημαίνει ότι $z_{j_k}\to z_0$ στον $W_0^{1,2}(\Omega;|x|^{-(n-2)})$. $\Box$

Βιβλιογραφία

[1] Rudin, W. (1987). *Real and complex analysis.* New York: McGraw-Hill.

[2] Evans, L. C. (1998). *Partial differential equations.* Providence, R.I: American Mathematical Society.

[3] Kesavan, S. (2006). *Symmetrization and Its Applications.* Series in Analysis, 3. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ.

[4] H. Brezis, J. L. Vazquez (1997). *Blow-up solutions of some nonlinear elliptic problems.* Revista Mat. Univ. Complutense Madrid 10, 443–469

[5] H. Brezis, L. Nirenberg (1983). *Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Equations Involving Critical Sobolev Exponents.* Comm. Pure Appl. Math. 36, 437–477

[6] F. Catrina, Z.–Q. Wang (2001). *On the Caffarelli-Kohn-Nirenberg Inequalities: Sharp Constants, Existence (and Nonexistence), and Symmetry of Extremal Functions.* Comm. Pure Appl. Math. LIV 229–258.

[7] Filippas S., Tertikas A. (2002). *Optimizing Improved Hardy Inequalities.* Journal of Functional Analysis, 192, 1, 186-233.

[8] Adimurthi, S. Filippas, A. Tertikas (2009). *On the best constant of Hardy–Sobolev inequalities*. Nonlinear Analysis TMA, 70, 2826–2833

[9] J. L. Vazquez, ZuaZua E. (2000). *The Hardy inequality and the asymptotic behaviour of the heat equation with an inverse-square potential*. Journal of Functional Analysis, 173, 103-153.

[10] Adimurthi, Esteban MJ (2005). *An improved Hardy–Sobolev inequality in Wl,p and its application to Schrödinger operators*. NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl 12:243–263.