Στοχαστικές Διαδικασίες και εφαρμογές στο μοντέλο Black and Scholes

Μαρία Οικονόμου

9 Νοεμβρίου 2020

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγή σε βασικά εργαλεία πιθανοτήτων

1.1 Εισαγωγή

Σκοπός του πρώτου κεφαλαίου είναι η παρουσίαση βασικών εννοιών από τη θεωρία πιθανοτήτων. Ο λόγος της δημιουργίας του κεφαλαίου αυτού είναι ότι αποτελούν τα απαραίτητα συστατικά για τα επόμενα κεφάλαια που ακολουθούν, όπως οι διαδικασίες martingale, η κίνηση Brown, η γεωμετρική κίνηση Brown και το μοντέλο Black and Scholes.
Επομένως το συγκεκριμένο κεφάλαιο είναι απολύτως απαραίτητο ως προς την προετοιμασία του αναγνώστη έτσι ώστε να είναι έτοιμος να ανταποκριθεί στην μετέπειτα ροή της εργασίας.

Ορισμός 1.1 *(4) Έστω Ω ένα σύνολο διάφορο του κενού. Μια κλάση $\mathcal{F}$ υποσυνόλων του Ω ονομάζεται σ-άλγεβρα (υποσυνόλων του Ω) όταν ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:*

- $\Omega \in \mathcal{F}$
- *Αν* $A \in \mathcal{F}$, *τότε* $A^c \in \mathcal{F}$
- *Αν* $\{A_n\}_{n=1,2,\ldots} \subset \mathcal{F}$, *τότε* $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$

Δηλαδή σ-άλγεβρα είναι μια άλγεβρα συνόλων (σύνολο από σύνολα στο οποίο μπορούμε να κάνουμε πράξεις μεταξύ των συνόλων) που είναι κλειστή ως προς τη συμπλήρωση και τις αριθμήσιμες ενώσεις των μελών της.
Η έννοια της σ-άλγεβρας αποτελεί το μαθηματικό εργαλείο μέσα από το οποίο δίνεται ο ορισμός της έννοιας του συμβάντος.

Ορισμός 1.2 *(1) Οι σ-άλγεβρες $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, ..., \mathcal{F}_n$ θα λέγονται ανεξάρτητες αν για οποιαδήποτε επιλογή γεγονότων $A_1 \in \mathcal{F}_1, A_2 \in \mathcal{F}_2, ..., A_n \in \mathcal{F}_n$ ισχύει ότι $A_1, A_2, ..., A_n$ είναι ανεξάρτητα.*

Πρόταση: Οι οικογένειες ενδεχομένων $\left\{\mathcal{F}_n\right\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ έχουν τις παρακάτω ιδιότητες:

- Για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$, έχουμε $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$.
- $\Omega \in \mathcal{F}_n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$.
- Αν $A \in \mathcal{F}_n$, τότε $A^c \in \mathcal{F}_n$.
- Αν $A, B \in \mathcal{F}_n$, τότε $A \cap B \in \mathcal{F}_n$.
- Αν $A, B \in \mathcal{F}_n$, τότε $A \cup B \in \mathcal{F}_n$.

1.2 Μετρήσιμος Χώρος

Ορισμός 1.3 *(5) Έστω Ω είναι ένα σύνολο και $\mathcal{F}$ είναι σ-άλγεβρα, τότε η δυάδα $(\Omega, \mathcal{F})$ ονομάζεται μετρήσιμος χώρος και τα σύνολα που ανήκουν στην $\mathcal{F}$ ονομάζονται μετρήσιμα σύνολα.*

1.3 Χώρος Πιθανότητας

Στη θεωρία πιθανοτήτων ασχολούμαστε με τυχαία πειράματα. Το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης ονομάζεται δειγματικός χώρος. Τα ενδεχόμενα ενός πειράματος τύχης είναι υποσύνολα του δειγματικού χώρου και έχει τις ίδιες ιδιότητες με τη σ-άλγεβρα.

Ορισμός 1.4 *(1) Εστω ένας χώρος πιθανότητας Ω και $\mathcal{F}$ μία σ-άλγεβρα. Ένα μέτρο πιθανότητας ονομάζεται μία συνάρτηση $\mathcal{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$, η οπία ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:*

1. *Για οποιοδήποτε ενδεχόμενο $A \in \mathcal{F}$, έχουμε ότι $\mathcal{P}(A) \geq 0$*
2. *$\mathcal{P}(\Omega) = 1$*
3. *Αν δύο ενδεχόμενα $A, B \in \mathcal{F}$ είναι ξένα (δηλαδή $A \cap B = \emptyset$), τότε*

$$\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B)$$

Γενικότερα αν $A_1, A_2, ...$ είναι μία οποιαδήποτε ακολουθία ξένων ενδεχομένων, τότε:

$$\mathcal{P}(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = \mathcal{P}(A_1) + \mathcal{P}(A_2) + ... + \mathcal{P}(A_n)$$

Μας πληροφορεί πόσο εύκολο ή δύσκολο είναι να συμβεί ένα γεγονός.Αν $P(\Omega) \neq 1$, η απεικόνηση P ονομαζεται απλά μέτρο.

Παράδειγμα: Δείκτρια Συνάρτηση(4)
Θεωρούμε ένα γεγονός A στο χώρο πιθανότητας και $P(A)$ πιθανότητα του A, δηλαδή το σύνολο όλων των υποσυνόλων του A.
Δείκτρια συνάρτηση ονομάζουμε τη συνάρτηση όπου ισχύει:

$$\mathbb{1}_{A(x)} = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

1.4 σ-άλγεβρα Borel

Ορισμός 1.5 *(1) Έστω Ω ένας χώρος πιθανότητας, τότε η σ-άλγεβρα που παράγεται από τα ανοιχτά σύνολα, ονομάζεται σ-άλγεβρα Borel και συμβολίζεται με $\mathcal{B}(\Omega)$.*
Με λίγα λόγια είναι η μικρότερη σ-άλγεβρα που παράγεται από τα ανοιχτά σύνολα του Ω.
Ως Ω θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε οποιοδήποτε σύνολο, πχ. ο $\mathbb{R}$.

Πρόταση: Κάθε υποδιάστημα του $\mathbb{R}$ είναι σύνολο Borel.

Απόδειξη:

Τα διάφορα πιθανά υποδιαστήματα του $\mathbb{R}$ είναι τα εξής:

$$\underbrace{(-\infty,\alpha],[\alpha,\infty)}_{\text{κλειστά}},\underbrace{(-\infty,\alpha),(\alpha,\infty),(\alpha,\beta)}_{\text{ανοιχτά}},\underbrace{[\alpha,\beta]}_{\text{κλειστό}},(\alpha,\beta],[\alpha,\beta)$$

Το ότι η $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ περιέχει όλα τα ανοιχτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$, , δεν σημαίνει ότι περιέχει μονο ανοιχτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$, αλλά περιέχει και όλα τα κλειστά υποσύνολα (εφόσον είναι συμπλήρωμα των ανοιχτών).
Για το $(\alpha,\beta]$ μπορούμε να γράψουμε:

$$(\alpha,\beta]=\mathbb{R}\backslash((-\infty,\alpha]\cup(\beta,\infty))$$

,όπου $(-\infty,\alpha]\cup(\beta,\infty)\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ με $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ σ-άλγεβρα.
Επομένως:

$$\mathbb{R}\backslash((-\infty,\alpha]\cup(\beta,\infty))\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$$

.′ Το ίδιο συμβαίνει και για το σύνολο $[\alpha,\beta)$.
Δηλαδή:

$$[\alpha,\beta)=\mathbb{R}\backslash((-\infty,\alpha)\cup[\beta,\infty))$$

,όπου $(-\infty,\alpha)\cup[\beta,\infty)\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ με $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ σ-άλγεβρα.
Επομένως:

$$\mathbb{R}\backslash((-\infty,\alpha)\cup[\beta,\infty))\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$$

Επειδή η $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ είναι σ-άλγεβρα και περιέχει όλα τα υποδιαστήματα, έπεται ότι όλα τα σύνολα που φτιάχνουμε με τομές , ενώσεις και συμπληρώματα των υποδιαστημάτων, θα είναι επίσης στοιχεία της $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Ορισμός 1.6 *Ας θεωρήσουμε ένα σύνολο Ω, μία σ-άλγεβρα $\mathcal{F}$ επάνω σε αυτό και ένα μέτρο πιθανότητας P. Η τριάδα $(\Omega,\mathcal{F},P)$ ονομάζεται χώρος πιθανότητας. Τα υποσύνολα του Ω που ανήκουν στη σ-άλγεβρα $\mathcal{F}$, αποκαλούνται $\mathcal{F}$-μετρήσιμα.*

1.5 Τυχαίες Μεταβλητές

Κατά τη μελέτη ενός τυχαίου πειράματος αυτό που μας ενδιαφέρει δεν είναι το ακριβές αποτέλεσμα του πειράματος, αλλά κάποια συνάρτηση του αποτελέσματος. Για να γίνει αυτό πιο αντιληπτό, θα παρουσιάσουμε ένα παράδειγμα παρακάτω.
Θεωρούμε ένα τίμιο νόμισμα και ως εύστοχη ρίψη να ¨έρθει' κορώνα. Εμείς θέλουμε να μελετήσουμε το πλήθος X των εύστοχων ριψών. Έπειτα από n ρίψεις έχει γίνει καταμέτρηση των εύστοχων και των άστοχων ριψών. Ο δειγματικός χώρος του πειράματος αποτελείται από $(x_1, ..., x_n)$, όπου $x_i = 1$ ή $x_i = 0$ αν η ρίψη είναι εύστοχη ή άστοχη αντίστοιχα.
Εκείνο όμως που μας ενδιαφέρει να γνωρίζουμε δεν είναι ποιες ακριβώς ρίψεις είναι εύστοχες και ποιες όχι, δηλαδή το ακριβές αποτέλεσμα του τυχαίου αυτού πειράματος, αλλά πόσες ρίψεις είναι εύστοχες από τις n. Ένα πιθανό ενδεχόμενο μπορεί να είναι το (1,1,0,0,0,0,0,1). Δηλαδή στις 8 ρίψεις είχαμε 3 επιτυχείς ρίψεις. Το κάθε ενδεχόμενο ω αντιστοιχεί σε μία συνάρτηση $X(\omega)$ η οποία εκφράζει το πλήθος των εύστοχων ριψών που θα μετρήσουμε αν πραγματοποιηθεί το συγκεκριμένο στοιχειώδες ενδεχόμενο.
Τέλος οι μεταβλητές στις οποίες θα αναφερόμαστε από αυτό το σημείο και ύστερα είναι μεταβλητές των οποίων η τιμή καθορίζεται από το αποτέλεσμα κάποιου πειράματος τύχης. Αυτός είναι και ο λόγος για τον οποίο καλούνται τυχαίες.

Ορισμός 1.7 *(1) Θεωρούμε ένα χώρο πιθανότητας* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.
Τυχαία μεταβλητή στο χώρο αυτό λέμε μία συνάρτηση

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

τέτοια ώστε για κάθε $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$*, όπου* A *υποδιάστημα του* $\mathbb{R}$

$$X^{-1}(A) \in \mathcal{F}$$

Επεξήγηση του ορισμού:
Ασχολούμαστε με πιθανότητες της μορφής $P(X^{-1}([a, b]))$, επομένως πρέπει το $X^{-1}([a, b])$ να ανήκει στο πεδίο ορισμού της P, το οποίο είναι το $\mathcal{F}$. Άρα χρειαζόμαστε την $X^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ που είναι ισοδύναμο με το ότι $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
Επίσης θέλουμε να μπορούμε να ορίσουμε τη μέση τιμή $E[X]$ και γι' αυτό χρειαζόμαστε πιθανότητες της μορφής

$$P(X^{-1}([a, b])) = P(X \in [a, b]) = P(\omega \in \Omega : X(\omega) \in [a, b])$$

Ορισμός 1.8 *(2) Θεωρούμε ένα χώρο πιθανότητας* Ω*, μία σ-άλγεβρα* $\mathcal{F}$ *στο χώρο αυτό ,* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *μία τυχαία μεταβλητή και ένα σύνολο* $E \subset \mathbb{R}$.
Η απεικόνηση:

$$E \to P_X(E) := P(X^{-1}(E)) \ , \ \forall E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

ορίζει μέτρο πιθανότητας επάνω στη σ-άλγεβρα $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Ορισμός 1.9 *(4) Θεωρούμε δύο σύνολα $A, B \subset \mathbb{R}$ τέτοια ώστε τα ενδεχόμενα $\{X \in A\}$και $\{Y \in B\}$να αποτελούν σ-άλγεβρες με X, Y δύο τυχαίες μεταβλητές. Οι δύο αυτές τυχαίες μεταβλητές ονομάζονται ανεξάρτητες αν:*

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)$$

Δηλαδή είναι ανεξάρτητα αν τα ενδεχόμενα $\{X \in A\}$και $\{Y \in B\}$που παράγονται από τις τυχαίες μεταβλητές είναι ανεξάρτητα για οποιαδήποτε υποσύνολα πραγματικών αριθμών A, B.

1.5.1 Μέση Τιμή Τυχαίας μεταβλητής

Ορισμός 1.10 *(2) Θεωρούμε μία διακριτή τυχαία μεταβλητή $X = \sum_{i=1}^{N} x_i 1_A$. Ορίζουμε ως μέση τιμή της τυχαίας αυτής μεταβλητής:*

$$E[X] = \sum_{i=1}^{N} x_i P(A_i) = \sum_{i=1}^{N} x_i P_X(x_i)$$

Αν η X δεν είναι απλή τυχαία μεταβλητή, τότε μπορεί να προσεγγιστεί απο μια ακολουθία $\{X_n\}$απο απλές τυχαιες μεταβλητές και $E[X] := \lim_{n \to +\infty} E[X_n]$.

Θα μπορούσαμε να γράψουμε ότι η μέση τιμή της συνεχούς τυχαίας μεταβλητής X ορίζεται από τον τύπο:

$$E[X] = \int_{\mathbb{R}} x f(X) dx$$

,όπου $f(x)$ είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π. σε συντομογραφία) της X.
Σε αυτή την περίπτωση το άθροισμα πάνω σε όλες τις πιθανές τιμές της X έχει αντικατασταθεί με ολοκλήρωμα.
Από τον ορισμό της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας γίνεται φανερό ότι η πιθανότητα το αποτέλεσμα του τυχαίου πειράματος να είναι στο διάστημα $[a, b]$ δίνεται από τη σχέση:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f(x) dx$$

, δηλαδή από το εμβαδόν κάτω από την f στο διάστημα $[a, b]$.
Προφανώς, η πυκνότητα f θα είναι μια μη αρνητική συνάρτηση και θα ικανοποιεί την

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$$

αφού η ολική πιθανότητα θα πρέπει να είναι πάντα μονάδα.

Ορισμός 1.11 *(1) Οι διακριτές τυχαίες μεταβλητές* $X_1, ..., X_n$ *ονομάζονται ανεξάρτητες αν*

$$P_X(X_1 = x_{1,i_1}, X_2 = x_{2,i_2}, ..., X_n = x_{n,i_n}) =$$

$$= P_{X_1}(X_1 = x_{1,i_1})P_{X_2}(X_2 = x_{2,i_2})...P_{X_n}(X_n = x_{n,i_n}).$$

Οι συνεχείς τυχαίες μεταβλητές $X_i, i = 1, ..., n$ *ονομάζονται ανεξάρτητες αν για κάθε* $E_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $i = 1, ..., n$

$$P_X(X_1 \in E_1, X_2 \in E_2, ..., X_n \in E_n) = P_{X_1}(X_1 \in E_1)P_{X_2}(X_2 \in E_2)...P_{X_n}(X_n \in E_n)$$

.

Ιδιότητες Μέσης Τιμής:(27) Έστω X_1, X_2 τυχαίες μεταβλητές.

1. Η τυχαία μεταβλητή $X_1 + X_2$ έχει πεπερασμένη μέση τιμή

$$E[X_1 + X_2] = E[X_1] + E[X_2]$$

2. Η Μέση Τιμή έχει τις ιδιότητες της γραμμικότητας, δηλαδή

$$E[\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2] = \lambda_1 E[X_1] + \lambda_2 E[X_2] \ , \ \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

και

$$X \geq 0 \Rightarrow E[X] \geq 0$$

3. Αν $\alpha =$σταθερά, τότε η αX έχει πεπερασμένη μέση τιμή και

$$E(\alpha X) = \alpha E(X).$$

4. Υποθέστε ότι $P(X_1 \geq X_2) = 1$.
Τότε,

$$E(X_1) \geq E(X_2)$$

Επιπλέον,

$$E(X_1) = E(X_2)$$

, αν και μόνο αν

$$P(X_1 = X_2) = 1$$

5. $|E[X_1]| \leq E[X_1]$

Παράδειγμα 1:(27)
Υποθέτουμε ότι η συνεχής τυχαία μεταβλητή X έχει ομοιόμορφη πυκνότητα στο διάστημα (a, b), δηλαδή $f(x) = c$ (c σταθερά) για κάθε $x \in (a, b)$ και $f(x) = 0$ για $x \leq a$ και $x \geq b$.
Τότε,

$$E(X) = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \left[\frac{x^2}{2} \right]_a^b = \frac{1}{b-a} \frac{b^2 - a^2}{2} = \frac{b+a}{2}.$$

Παράδειγμα 2:(27)
Η πυκνότητα μιας τυχαίας μεταβλητής X είναι

$$f(x) = \begin{cases} x/2, & 0 < x < 2 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Θέλουμε να υπολογίσουμε τη μέση τιμή της X.
Έχουμε

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_0^2 x \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{4}{3}.$$

Ορισμός 1.12 *(2) Υποθέτουμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, ..., X_n$ είναι ανεξάρτητες, τότε :*

$$E[X_1 X_2 ... X_n] = E[X_1] E[X_2] ... E[X_n]$$

Απόδειξη:

$$E[X_1 X_2 ... X_n] = \int_{\mathbb{R}^n} x_1 x_2 ... x_n f_X(x_1, x_2, ..., x_n) dx_1 dx_2 ... dx_n =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} x_1 x_2 ... x_n f_1(x_1) f_2(x_2) ... f_n(x_n) dx_1 dx_2 ... dx_n =$$

Χρησιμοποιούμε το θεώρημα Fubini-Tonelli για να γράψουμε το ολοκλήρωμα πάνω στο $\mathbb{R}^n$ σαν n επαναλαμβανόμενα ολοκληρώματα πάνω στο $\mathbb{R}$.
Το Θεώρημα Fubini είναι ένα από τα κεντρικά θεωρήματα του λογισμού ολοκληρωμάτων πολλών μεταβλητών. Μας επιτρέπει να υπολογίζουμε πολλαπλά ολοκληρώματα ανάγωντάς τα σε απλά.

$$= (\int_{\mathbb{R}} x_1 f_1(x_1) dx_1)\ (\int_{\mathbb{R}} x_2 f_1(x_2) dx_2) ... (\int_{\mathbb{R}} x_n f_1(x_n) dx_n) =$$

$$= E[X_1] E[X_2] ... E[X_n].$$

Ορισμός 1.13 *(1) Αν έχουμε μία τυχαία μεταβλητή X και μία κυρτή συνάρτηση*
$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, τότε θα ισχύει:

$$g(E[X]) \leq E[g(X)]$$

Απόδειξη:
Έστω η εφαπτομένη της g στο σημείο $E[X]$:

$$\alpha X + \beta$$

Τότε για κάθε x

$$g(X) \geq \alpha X + \beta$$

Επίσης, αφού $E[x]$ είναι σημείο επαφής, τότε:

$$g(E[X]) = \alpha E[X] + \beta$$

Άρα

$$g(X) \geq \alpha X + \beta \Rightarrow E[g(X)] \geq E[\alpha X + \beta]$$

Όμως

$$E[\alpha X + \beta] = \alpha E[X] + \beta = g(E[X])$$

Επομένως συμπεραίνουμε ότι:

$$E[g(X)] \geq g(E[X])$$

1.6 Δεσμευμένη Μέση Τιμή

Μία σημαντική και πολύ χρήσιμη έκφραση της μέσης τιμής αποτελεί η δεσμευμένη μέση τιμή. Η δεσμευμένη μέση τιμή ανάγει τον υπολογισμό της μέσης τιμής μίας τυχαίας μεταβλητής σε μία διαδικασία υπολογισμού μέσης τιμής, κατά την οποία έχουμε στη διάθεσή μας δύο τυχαίες μεταβλητές, από τις οποίες η μία μόνο είναι γνωστή.

Ορισμός 1.14 *(4) Θεωρούμε ένα δειγματικό χώρο Ω και ένα γεγονός $Y \subset \Omega$, τέτοιο ώστε $X : \Omega \to \mathbb{R}$ είναι μά τυχαία μεταβλητή.*
Ορίζουμε ως δεσμευμένη μέση τιμή της X ως προς το γεγονός Y την ποσότητα:

$$E[X|Y] := \frac{1}{P(Y)} E[X]$$

Ιδιότητες Δεσμευμένης Μέσης Τιμής:

- Αν $A \subset \Omega$ ένα γεγονός τέτοιο ώστε $P(A) > 0$ μπορούμε να ορίσουμε τη δεσμευμένη πιθανότητα οποιουδήποτε γεγονός $B \subset A$ ως

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P_A(B)$$

- Η ποσότητα $E[X|A]$ και η P_A σχετίζονται μεταξύ τους.

Θεώρημα 1.1 *(5) Έστω X, Y διακριτές τυχαίες μεταβλητές. Τότε η μέση τιμή της X, δεδομένου ότι $Y = y$ μπορεί να γραφτεί ως:*

$$E[X|Y = y] = \sum_x X f_{X|Y}(x|y)$$

Θεώρημα 1.2 *(5) Έστω X, Y συνεχείς τυχαίες μεταβλητές. Τότε η μέση τιμή της X, δεδομένου ότι $Y = y$ μπορεί να γραφτεί ως:*

$$E[X|Y = y] = \int_{-\infty}^{\infty} X f_{X|Y}(x|y) dx$$

Θεώρημα 1.3 *(5) Έστω X, Y συνεχείς ή διακριτές τυχαίες μεταβλητές, τότε:*

$$E[E[X|Y]] = E[X]$$

Απόδειξη:
Για συνεχείς τυχαίες μεταβλητές ισχύει ότι:

$$E[E[X|Y]] = \int_{-\infty}^{\infty} E[X|Y = y] f_Y(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|y) f_Y(y) dx dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x f_x(x) dx = E[X]$$

1.6.1 Αθροιστική συνάρτηση κατανομής Συνεχούς Τυχαίας Μεταβλητής

Ορισμός 1.15 *(1) Έστω X τυχαία μεταβλητή.*
Ορίζουμε ως αθροιστική συνάρτηση κατανομής, τη συνάρτηση $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ορίζεται ως:

$$F_X(a) = P(X \leq a) = \int_{-\infty}^{x} f(t) dt$$

Εκφράζει δηλαδή την πιθανότητα η τυχαία μεταβλητή X να λάβει οποιαδήποτε τιμή μικρότερη ή ίση του a.

Ιδιότητες Συνάρτησης Κατανομής:

- Είναι συνεχής.
- Είνα μη φθίνουσα συνάρτηση. Δηλαδή αν $a < b \Rightarrow F_X(a) \leq F(b)$.
- Η μέγιστη τιμή της είναι 1 και η ελάχιστη 0.
Δηλαδή $\lim_{a \to +\infty} F_X(a) = 1$ και $\lim_{a \to -\infty} F_X(a) = 0$

1.7 Στοχαστικές Διαδικασίες

Κάθε μεταβλητή της οποίας η τιμή μεταβάλλεται με το πέρασμα του χρόνου με αβέβαιο τρόπο, λέγεται ότι ακολουθεί μία στοχαστική διαδικασία. Έχουμε δύο κατηγορίες στοχαστικών διαδικασιών, τις διαδικασίες διακριτού και συνεχούς χρόνου, όπως και διακριτής και συνεχούς μεταβλητής.
Στοχαστική διαδικασία διακριτού χρόνου είναι εκείνη στην οποία η τυχαία μεταβλητή μπορεί πάρει κάποια τιμή μόνο σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές, ενώ στη στοχαστική διαδικασία συνεχούς χρόνου η τυχαία μεταβλητή μπορεί να πάρει κάποια τιμή οποιαδήποτε χρονική στιγμή.
Σε μία στοχαστική διαδικασία συνεχούς τυχαίας μεταβλητής, η τυχαία μεταβλητή μπορεί να λάβει οποιαδήποτε τιμή μέσα σε ένα συγκεκριμένο πεδίο ορισμού, ενώ στη διαδικασία διακριτής τυχαίας μεταβλητής, η τυχαία μεταβλητή μπορεί να λάβει μόνο συγκεκριμένες διακεκριμένες τιμές.
Στη συγκεκριμένη εργασία θα ασχοληθούμε μόνο με στοχαστικές διαδικασίες συνεχούς χρόνου, συνεχούς τυχαίας μεταβλητής.

1.7.1 Εισαγωγικό παράδειγμα:

(1) Κάνουμε ένα πείραμα τύχης στο οποίο ρίχνουμε ένα ζάρι και κρατάμε το αποτέλεσμα του πειράματος.
Όπως γνωρίζουμε, το αποτέλεσμα του συγκεκριμένου πειράματος τύχης μπορεί να αναπαρασταθεί από μια διακριτή τυχαία μεταβλητή X, η οποία παίρνει τιμές από το 1 μέχρι το 6 με πιθανότητα $1/6$. Το αποτέλεσμα του πειράματος θα είναι ένας αριθμός από το 1 μέχρι το 6.
Ας υποθέσουμε τώρα πως κάνουμε ένα διαφορετικό πείραμα τύχης στο οποίο ρίχνουμε αρχικά ένα ζάρι, κρατάμε το αποτέλεσμα, στη συνέχεια ρίχνουμε ένα νόμισμα και κρατάμε το αποτέλεσμα για αρκετές φορές. Σε αυτή την περίπτωση, το πείραμά μας δεν μπορεί να περιγραφεί από μια τυχαία μεταβλητή όπως το προηγούμενο, διότι εδώ έχουμε μία εξάρτηση από το χρόνο. Η εξάρτηση από το χρόνο προκύπτει απ΄ το ότι δεν μπορούμε να πάρουμε αποτέλεσμα έναν αριθμό στην περίπτωση που ρίχνουμε το κέρμα.
Ως συνέπεια, για να περιγράψουμε το φαινόμενο αυτό, θέλουμε μια διαφορετική

τυχαία μεταβλητή για κάθε χρονική στιγμή.
Δηλαδή θεωρούμε μία τυχαία μεταβλητη X που περιγράφει το προηγούμενο πείραμα και ισχύει για τις χρονικές στιγμές 0, 2, 4, 6, ... και μία μεταβλητή Y, η οποία παίρνει τις τιμές 1 (αν ¨έρθει' κεφάλι) και 2 (αν ¨έρθει' γράμματα) κάθε μια με πιθανότητα 1/2 και ισχύει για τις χρονικές στιγμές 1, 3, 5, ...
Εκτελούμε το παραπάνω πείραμα από τη στιγμή 0 μέχρι N - 1.
Τα αποτελέσματα του πειράματος είναι τα εξής:

$$\mathrm{A} = \{a_0, a_1, a_2, ..., a_{N-1}\ \}$$

Αν θεωρήσουμε μία συγκεκριμένη ακολουθία A_0 ={4, 2, 6, 1, 1, 2, 5, 1, ... , 1 }, τότε ορίζουμε την πιθανότητα

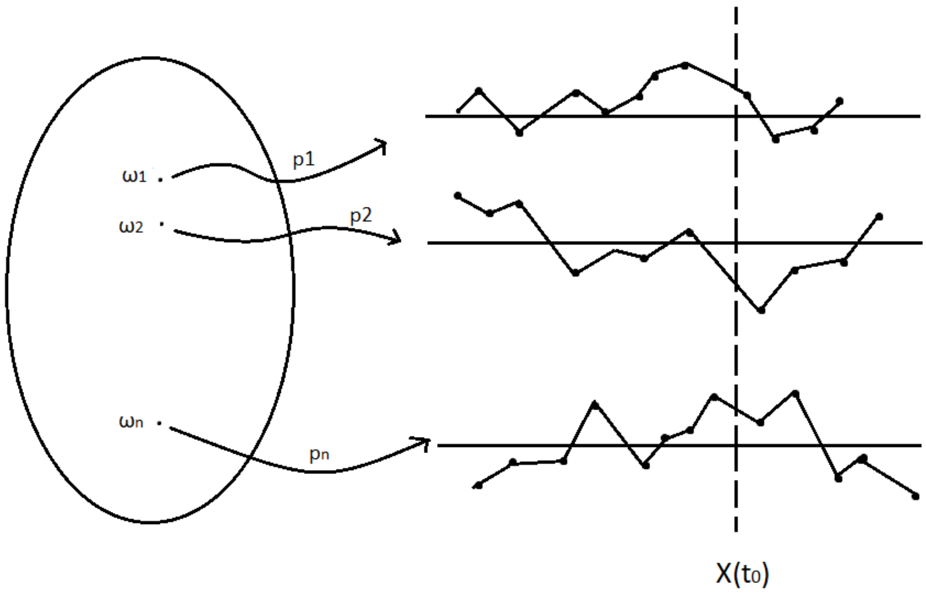
$$P\left(A = A_0\right) = \left(\frac{1}{6}\right)^{N_1} \left(\frac{1}{2}\right)^{N_2}$$

,όπου N_1, N_2 το πλήθος των πειραμάτων με το ζάρι και το νόμισμα αντίστοιχα και $N = N_1 + N_2$.

Με βάση όσα αναφέραμε στο παραπάνω παράδειγμα, προκύπτουν οι ακόλουθοι δυο ισοδύναμοι ορισμοί για την έννοια της στοχαστικής διαδικασίας:

- Ως στοχαστική διαδικασία $X(t)$ ορίζουμε μία συνάρτηση ως προς το χρόνο, όπου η τιμή της συνάρτησης αυτής σε κάθε χρονική στιγμή είναι μία τυχαία μεταβλητή.

- Θεωρούμε ένα σύνολο Ω που αποτελείται από τα $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$, τα οποία είναι τα αποτελέσματα από ένα τυχαίο πείραμα.
Μια στοχαστική διαδικασία είναι μια αντιστοίχιση από ένα ω_i του Ω στις πιθανότητες $p_1, ...p_n$. . Επίσης, σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή t_0 η τιμή της στοχαστικής διαδικασίας είναι μια τυχαία μεταβλητή $X(t_0)$.(βλ.σχήμα 1)



Σχήμα 1

Ορισμός 1.16 *(1) Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ χώρος πιθανότητας και $X : \Omega \to \mathbb{R}$ μία τυχαία μεταβλητή.*
Μία στοχαστική διαδικασία είναι μία συλλογή τυχαίων μεταβλητών $X_t, t \in T$ ορισμένων στο χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$,της οποίας η ποσότητα αποτελεί την τιμή της διαδικασίας τη χρονική στιγμή t όταν από το δειγματικό χώρο Ω έχει επιλεγεί με τυχαίο τρόπο ένα $\omega \in \Omega$.
Το σύνολο T αναφέρεται στο σύνολο πραγματικών αριθμών, αφού ασχολούμαστε με διαδικασίες συνεχούς χρόνου, διαφορετικά θα αφορούσε το σύνολο των ακεραίων (στην περίπτωση δηλαδή διακριτού χρόνου).

1.8 Κανονική Κατανομή

Η κανονική κατανομή θεωρείται η σπουδαιότερη κατανομή Θεωρίας Πιθανοτήτων, καθώς πολλές τυχαίες μεταβλητές περιγράφονται ικανοποιητικά από την κανονική κατανομή ή περιγράφονται από κατανομές που μπορούν να προσεγγισθούν από την κανονική κατανομή. Το «μυστικό» που εξηγεί το μεγάλο εύρος εφαρμογών της κανονικής κατανομής, οφείλεται στο Κεντρικό Οριακό Θεώρημα, τις βάσεις του οποίου έθεσαν δύο μεγάλοι Μαθηματικοί. Ο Abraham De Moivre το 1733 και, έναν αιώνα περίπου αργότερα, το 1812, ο Laplace.

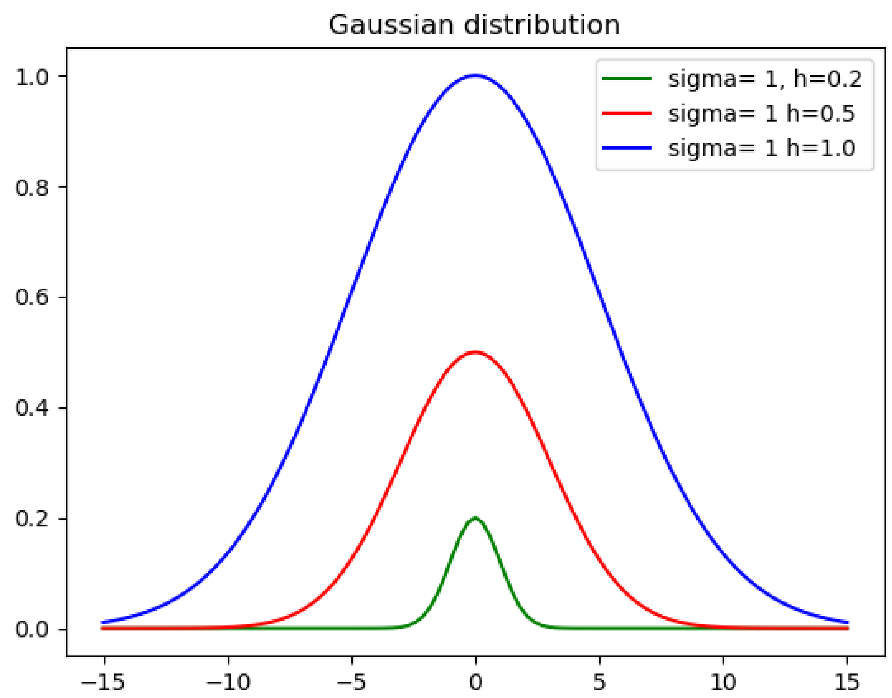
Ορισμός 1.17 *(29) Θεωρούμε μία τυχαία μεταβλητή x που παίρνει τιμές στο $\mathbb{R}$, με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

, με μέση τιμή μ και διακύμανση σ^2.
Όταν λέμε ότι μία τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί κανονική κατανομή, το συμβολίζουμε ως:

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

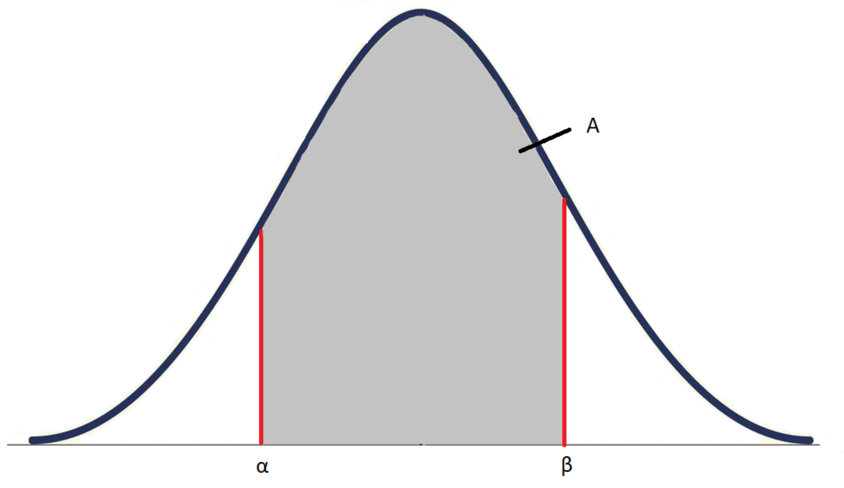
Η γραφική παράσταση της κανονικής κατανομής απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα :



Σχήμα 2: Κανονική κατανομή για $\sigma = 1$ και $h = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} = 0.2, 0.5, 1.0$.

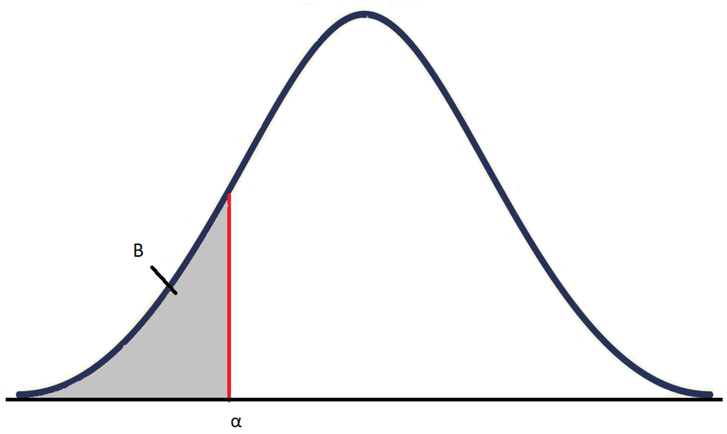
Ιδιότητες Κανονικής Καμπύλης:

- Η κανονική καμπύλη είναι συμμετρική και οι «ουρές» της πλησιάζουν τον οριζόντιο άξονα ασυμπτωτικά.
- Η κορυφή ταυτίζεται με τη μέση τιμή και τη διάμεσο.
- Η περιοχή που παρουσιάζει τη μεγαλύτερη πυκνότητα, βρίσκεται και αυτή στο μέσο της κατανομής. Δηλαδή, όταν οι τιμές μιας μεταβλητής είναι κανονικά κατανεμημένες, τότε γύρω από τη μέση τιμή τους υπάρχουν σχετικά πολλές τιμές ενώ μακριά από τη μέση τιμή βρίσκονται σχετικά λίγες τιμές.
- Όσο μικρότερη είναι η τυπική απόκλιση, τόσο ψηλότερη και τόσο πιο στενή είναι η καμπύλη.
- Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη της συνάρτησης πυκνότητας και τον άξονα των τιμών μιας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής Χ είναι, όπως γνωρίζουμε ίσο με 1 και εκφράζει την πιθανότητα η Χ να πάρει κάποια τιμή μεταξύ $-\infty$ και ∞.
- Το εμβαδόν του σκιαγραφημένου χωρίου Α εκφράζει την πιθανότητα η Χ να πάρει κάποια τιμή μεταξύ των τιμών α και β, δηλαδή, $A = P(\alpha \leq X \leq \beta)$.



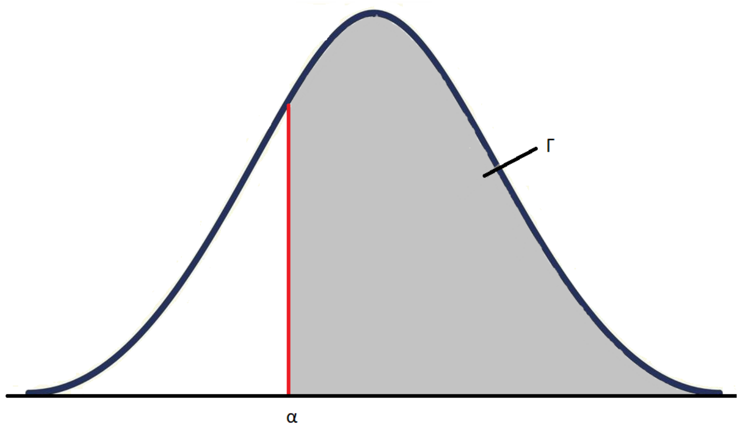
Σχήμα 3

- Το εμβαδόν του σκιαγραφημένου χωρίου Β εκφράζει την πιθανότητα η Χ να πάρει κάποια τιμή μικρότερη ή ίση του α, δηλαδή, $B = P(X \leq \alpha)$.



Σχήμα 4

- Το εμβαδόν του σκιαγραφημένου χωρίου Γ εκφράζει την πιθανότητα η Χ να πάρει κάποια τιμή μεγαλύτερη ή ίση του α, δηλαδή, Γ$= P(X \geq \alpha)$.



Σχήμα 5

Παράδειγμα 1:(28)
Έστω η συνάρτηση $f(x) = ce^{-x^2/2}$, $-\infty < x < \infty$. Θέλουμε να υπολογίσουμε το c ώστε η f να είναι πυκνότητα.
Για να κάνουμε την f πυκνότητα πρέπει να βρούμε το c έτσι ώστε

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

Έτσι,

$$c\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}dx = 1$$

Το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}dx$$

υπολογίζεται ως εξής:
Θέτω

$$\frac{1}{c} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}dx$$

,οπότε

$$\frac{1}{c^2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2}dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)/2}dxdy.$$

Πηγαίνοντας σε πολικές συντεταγμένες, έχουμε

$$\frac{1}{c^2} = \int_{0}^{\infty}\int_{0}^{2\pi} e^{-r^2/2}rdrd\theta = 2\pi\int_{0}^{\infty} e^{-r^2/2}rdr = -2\pi\left[e^{-r^2/2}\right]_0^{\infty} = 2\pi.$$

Άρα, $c = 1/\sqrt{2\pi}$, και $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$.

Η f λέγεται τυπική κανονική πυκνότητα. Προφανώς είναι συμμετρική, αφού $f(x) = f(-x)$ για κάθε x.

1.8.1 Κεντρικό Οριακό Θεώρημα

Σύμφωνα με το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα, το άθροισμα και επομένως η μέση τιμή, μεγάλου αριθμού ανεξάρτητων παρατηρήσεων, ακολουθεί κατά προσέγγιση κανονική κατανομή, ανεξαρτήτως από το ποια κατανομή ακολουθούν οι παρατηρήσεις. Για παράδειγμα, ο χρόνος αναμονής σε μια ουρά, είναι αποτέλεσμα πολλών παραγόντων, όπως, η ημέρα της εβδομάδας, η ώρα της ημέρας, η αποτελεσματικότητα του υπαλλήλου, το είδος της συναλλαγής που διεκπεραιώνεται κλπ. Τέτοια χαρακτηριστικά (μεταβλητές), εμφανίζονται σε πολλά φαινόμενα και πειράματα. Το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα λεει ότι αυτά ακριβώς τα χαρακτηριστικά περιγράφονται ικανοποιητικά από την κανονική κατανομή. Επιπλέον, το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα συνδέει την κανονική κατανομή με οποιαδήποτε άλλη κατανομή (αφού δεν προϋποθέτει να ακολουθούν οι παρατηρήσεις την κανονική κατανομή). Αυτός είναι και ο λόγος που η κανονική κατανομή βρίσκει εφαρμογή σε μεγάλο πλήθος φαινομένων και πειραμάτων.

Ορισμός 1.18 *(2) Αν $X_1, ..., X_n$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την ίδια κατανομή και $E[X_i] = \mu$ και $Var[X_i] = \sigma^2$ για κάθε $i = 1, ..., n$, τότε για μεγάλα ν έχουμε ότι:*

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

Ισοδύναμα:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2)$$

Έτσι, αν από έναν πληθυσμό (δηλαδή, από την κατανομή των τιμών μιας τ.μ.) που έχει μέση τιμή μ και διακύμανση σ^2 , επιλέξουμε τυχαία δείγματα μεγέθους n και υπολογίσουμε τους μέσους τους, το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα μας διαβεβαιώνει ότι για μεγάλα n, η κατανομή αυτών των μέσων είναι κατά προσέγγιση κανονική με μέση τιμή επίσης μ και διακύμανση $\frac{\sigma^2}{n}$.

1.9 Λογαριθμοκανονική Κατανομή

Η κατανομή αυτή εμφανίζεται πολύ συχνά στην στοχαστική χρηματοοικονομική ανάλυση.

Ορισμός 1.19 *(30) Θεωρούμε τυχαία μεταβλητή X που ακολουθεί κανονική κατανομή, δηλαδή $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.*
Η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής

$$Y = e^X$$

καλείται λογαριθμοκανονική κατανομή με

$$lnY \sim N(\mu, \sigma^2)$$

και συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(t) = \frac{1}{t\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(lnt-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

1.10 Παραδείγματα

Παράδειγμα 1:
Έστω μια τυχαία μεταβλητή X. Θα λέμε ότι ακολουθεί την κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$ με $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$ αν είναι απόλυτα συνεχής τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα

$$f_X(x) = \frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}$$

Δείξε ότι η f_X είναι πυκνότητα.
Απόδειξη:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(e^X \leq y) = P(X \leq lny) =$$
$$= \int_0^{lny} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx =$$
$$= \int_0^{lny} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \frac{1}{2}$$

Μπορούμε να παραγωγίσουμε την $F_Y(y)$, αφού είναι παραγωγίσιμη και προκύπτει ότι:

$$F'_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y^2 y^{lny}}}$$

που είναι η πυκνότητα της Y.
Παράδειγμα 2:
Έστω Y μία διακριτή τυχαία μεταβλητή. Για κάθε $B \in \sigma(Y)$, δείξτε ότι:

$$E[\mathbb{1}_B E[X|Y]] = E[\mathbb{1}_B X]$$

Απόδειξη:
Για $X \in B$:

$$E[\mathbb{1}_B E[X|Y]] = E[E[\mathbb{1}_B X|Y]]$$

Από το θεώρημα (1.3), μπορούμε να γράψουμε ότι:

$$E[E[\mathbb{1}_B X|Y]] = \sum_x E[\mathbb{1} X|Y] f_Y(y) =$$

$$= \sum_x \sum_x \mathbb{1}_B f_{X|Y}(x|y) f_Y(y) = \sum_x \mathbb{1} x f_x = E[\mathbb{1}_B X]$$

Άρα:

$$E[\mathbb{1}_B E[X|Y]] = E[\mathbb{1}_B X]$$

2 Martingales

2.1 Martingales διακριτού χρόνου

Ορισμός 2.1 *(4) Μία* ***διήθηση*** *(filtration) είναι μία οικογένεια από σ-άλγεβρες $\mathcal{F}_t$ τέτοια ώστε:*

$$s \leq t \Rightarrow \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$$

Η σ-άλγεβρα $\mathcal{F}_t$ μπορεί να θεωρηθεί ως την πληροφορία η οποία είναι διαθέσιμη μέχρι τη χρονική στιγμή t. Μία διήθηση μπορεί να θεωρηθεί σαν μία αυξανόμενη δομή πληροφορίας καθώς περνά ο χρόνος.
Η φυσική διήθηση είναι η διήθηση η οποία παράγεται από μία στοχαστική διαδικασία X_t.

Αν για παράδειγμα πάρουμε μία ακολουθία από σ-άλγεβρες τις χρονικές στιγμές $t = 0, 1, ..., n$ στο $\mathcal{F}$ με $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, ..., \mathcal{F}_n\}$, τότε η $\mathcal{F}$ ονομάζεται φιλτράρισμα αν η σ-άλγεβρα $\mathcal{F}_n$ τη χρονική στιγμή n είναι υποσύνολο της σ-άλγεβρας $\mathcal{F}_{n+1}$, δηλαδή $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_{n+1}$ για κάθε n.
Πρόκειται επομένως για μια οικογένεια πληροφορίας $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, ..., \mathcal{F}_n\}$, όπου το μέγεθος της πληροφορίας μεγαλώνει όσο το n μεγαλώνει. Παραδείγματος χάρη το $\mathcal{F}_1$ μπορεί να είναι το σύνολο της πληροφορίας που περιέχεται στην τυχαία μεταβλητή X_1 , το $\mathcal{F}_2$ να είναι το σύνολο της πληροφορίας που περιέχεται στις τυχαίες μεταβλητές X_1 και X_2 και ούτω καθεξής.

Ορισμός 2.2 *(1) Μία οικογένεια τυχαίων μεταβλητών X_t ονομάζεται* ***προσαρμοσμένη*** *στη διήθηση $\mathcal{F}_t$ αν η X_t είναι $\mathcal{F}_t$ μετρήσιμη για κάθε t.*
Δηλαδή η πληροφορία που έχουμε για την X_t μέχρι τη χρονική στιγμή t περιέχεται στη σ-άλγεβρα $\mathcal{F}_t$.

Τώρα έχοντας ορίσει τα παραπάνω, μπορούμε να ορίσουμε την ειδική κατηγορία τυχαίων μεταβλητών, των martingale, καθώς και των supermartingale και submartingale.

Ορισμός 2.3 *(1) Έστω (Ω,$\mathcal{F}$,P) ένας χώρος πιθανοτήτων, $\mathcal{F}_t$ μία διήθηση, όπου περιλαμβάνει μία ακολουθία σ-αλγεβρών*

$$\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset ... \subset \mathcal{F}_n \subset ...$$

και X_t μία οικογένεια πραγματικών,ολοκληρώσιμων τυχαίων μεταβλητών που είναι προσαρμοσμένη στη διήθηση $\mathcal{F}_t$.

1. *Η οικογένεια X_t είναι μία **martingale** αν:*

$$E[X_t/\mathcal{F}_s] = X_s, s \leq t$$

2. *Η οικογένεια X_t είναι μία **supermartingale** αν:*

$$E[X_t/\mathcal{F}_s] \leq X_s, s \leq t$$

3. *Η οικογένεια X_t είναι μία **submartingale** αν:*

$$E[X_t/\mathcal{F}_s] \geq X_s, s \leq t$$

Με λίγα λόγια για μία martingale η καλύτερη πρόβλεψη για την τιμή X_t,γνωρίζοντας την πληροφορία που εμπεριέχεται στην $\mathcal{F}_s$, είναι η τιμή X_s. Πιο συγκεκριμένα, μία διαδικασία martingale είναι μία ακολουθία τυχαίων μεταβλητών, δηλαδή μία στοχαστική διαδικασία, για την οποία αν για κάποια συγκεκριμένη χρονική στιγμή της διαδικασίας (παρόν) γνωρίζουμε την τιμή της και, θελήσουμε να υπολογίσουμε ποια θα είναι η αναμενόμενη τιμή της διαδικασίας σε κάποια επόμενη χρονική στιγμή, τότε θα καταλήξουμε στο ότι εκείνη θα είναι ίση με την παρατηρούμενη τιμή της διαδικασίας στο παρόν, ακόμα και αν είναι γνωστές όλες οι προηγούμενες τιμές της διαδικασίας.
Αν η X_t τώρα είναι supermartingale, τότε η καλύτερη πρόβλεψη για την τιμή X_t γνωρίζοντας την πληροφορία που εμπεριέχεται στην $\mathcal{F}_s$, θα είναι μικρότερη από την τιμή X_s.
Αν η X_t τώρα είναι submartingale, τότε η καλύτερη πρόβλεψη για την τιμή X_t γνωρίζοντας την πληροφορία που εμπεριέχεται στην $\mathcal{F}_s$, θα είναι μεγαλύτερη από την τιμή X_s.

Παράδειγμα 1: Απλός τυχαίος περίπατος(3)
Συμβολίζουμε με S_0 την τιμή της μετοχής την $t = 0$.
Θεωρούμε ¨επιτυχία¨, όταν η τιμή της μετοχής ανεβαίνει και ¨αποτυχία' όταν η τιμή της μετοχής πέφτει.
Ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή X_1 ως:

$$X_1 = \begin{cases} 1, & \epsilon\pi\iota\tau\upsilon\chi\iota\alpha \\ 0, & \alpha\pi o\tau\upsilon\chi\iota\alpha \end{cases}$$

Η πιθανότητα να ανέβει η μετοχή είναι p και η πιθανότητα να πέσει η μετοχή είναι $q = 1 - p$.
Δηλαδή

$$P\{X_1 = 1\} = p$$

και

$$P\{X_1 = -1\} = 1 - p = q$$

Γενικά με S_k συμβολίζουμε την τιμή της μετοχής τη χρονική στιγμή $k = 0, 1, 2, ...$ και αν τη χρονική στιγμή 1 έρθει επιτυχία, τότε $S_1 = \alpha S_0$ με πιθανότητα p, αλλιώς $S_1 = \beta S_0$ με πιθανότητα $1 - p$.
Οι τυχαίες μεταβητές $X_1, ..., X_n$ είναι ανεξάρτητες.

$$X_2 = \begin{cases} 1, & \epsilon\pi\iota\tau\upsilon\chi\iota\alpha \\ 0, & \alpha\pi o\tau\upsilon\chi\iota\alpha \end{cases}$$

Επίσης

$$P\{X_2 = 1\} = p$$

και

$$P\{X_1 = -1\} = 1 - p = q$$

Παρατηρούμε ότι $S_n = X_1 + ... + X_n$ μετά από n βήματα έχει μέση τιμή $E(|S_n|) \leq n$ και $E(S_{n+1}|X_1 + X_2 + ... + X_n) = S_n + (p - q)$.
Ορίζουμε ως τυχαία μεταβλητή Y_n, που ικανοποιεί τις ιδιότητες της τυχαίας μεταβλητής τέτοια ώστε $Y_n - S_n - n(p - q)$.
Η Y_n είναι martingale αφού ικανοποιούνται τα παρακάτω:

1. $E[Y_n] = E[S_n - n(p - q)] \leq E[S_n] + E[n(p - q)] < \infty$
2. $E[Y_{n+1}|X_1 + X_2 + ... + X_n] = E(S_{n+1} - (n + 1)(p - q)|X_1 + ... + X_n) =$
   $= E[S_{n+1}|X_1 + ... + X_n) - (n + 1)E(p - q|X_1 + ... + X_n) =$
   $= S_n + (p - q) - (n + 1)(p - q) = S_n - n(p - q) = Y_n$

Παράδειγμα 2:(2)
Υποθέτουμε ότι $S_n^0, S_n^1, ..., S_n^d$είναι προσαρμοσμένες και θετικές τυχαίες μεταβλητές, οι οποίες αντιπροσωπεύουν τις τιμές των $(d + 1)$ περιουσιακών στοιχείων στο χρόνο n.
Θέλουμε να δείξουμε ότι η $\{\tilde{S}_n^1\}$είναι martingale, όπου $\tilde{S}_n$ οι προεξοφλημένες τιμές των περιουσιακών στοιχείων. Προεξόφληση είναι η διαδικασία κατά την οποία χρησιμοποιώντας μελλοντικές αξίες, υπολογίζεται η Καθαρή Παρούσα Αξία επενδύσεων και χρεογράφων.
Υποθέτουμε ότι $S_n^0 = (1 + r)^n$,όπου $r > 0$ είναι το επιτόκιο, οπότε το 0 αντιπροσωπεύει το μη επικίνδυνο περιουσιακό στοιχείο.
Ορίζουμε $S_n = (S_n^0, S_n^1, ..., S_n^d)$ το διάνυσμα των τιμών στο χρόνο n, όπου $1 \leq n \leq N$.
Ένα χαρτοφυλάκιο είναι μία οικογένεια προβλέψιμων ακολουθιών $\left\{\phi_n^i, n \geq 1\right\}$, ι = 0,...,δ τέτοιο ώστε ϕ_n^i αντιπροσωπεύει τον αριθμό των περιουσιακών στοιχείων i τη στιγμή n.

Ορίζουμε $\phi_n = (\phi_n^0, \phi_n^1, ..., \phi_n^d)$.
Η τιμή του χαρτοφυλακίου την στιγμή όπου $n \geq 1$ είναι ίση με:

$$V_n = \phi_n^0 S_n^0 + \phi_n^1 S_n^1 + ... + \phi_n^d S_n^d = \phi_n \cdot S_n$$

Το χαρτοφυλάκιο είναι αυτοχρηματοδοτούμενο για όλα τα n, όπου $1 \leq n \leq N$ και

$$V_n = V_0 + \sum_{j=1}^{n} \phi_j \cdot \Delta S_j$$

όπου το V_0 δηλώνει το αρχικό κεφάλαιο του χαρτοφυλακίου.Αυτό είναι ισοδύναμο με:

$$\phi_n \cdot S_n = \phi_{n+1} \cdot S_n$$

για κάθε $0 \leq n \leq N-1$.
Ένα αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο χαρακτηρίζεται από το V_0 και το ποσό των μετοχών $(\phi_n^1, ..., \phi_n^d)$.
Ορίζουμε την προεξοφλημένη τιμή ως:

$$\tilde{S}_n = (1+r)^{-n} S_n = (1, (1+r)^{-n} S_n^1, ..., (1+r)^{-n} S_n^d).$$

τότε η προεξοφλημένη τιμή του χαρτοφυλακίου είναι:

$$\tilde{V}_n = (1+r)^{-n} V_n = \phi_n \cdot \tilde{S}_n$$

και η συνθήκη της αυτοχρηματοδότησης μπορεί να γραφεί ως:

$$\phi_n \cdot \tilde{S}_n = \phi_{n+1} \cdot \tilde{S}_n$$

για $n \geq 0 : \tilde{V}_{n+1} - \tilde{V}_n = \phi_{n+1} \cdot (\tilde{S}_{n+1} - \tilde{S}_n)$ και αθροίζοντας ως το ν προκύπτει:

$$\tilde{V}_n = V_0 + \sum_{j=1}^{n} \phi_j \cdot \Delta \tilde{S}_j$$

Στη μία διάσταση $\tilde{V}_n = (\phi^1 \cdot \tilde{S}^1)$ είναι ένας μετασχηματισμός martingale της αλληλουχίας $\{\tilde{S}_n^1\}$από την προβλέψιμη ακολουθία $\{\phi_n^1\}$.
Ως συνέπεια αν $\{\tilde{S}_n^1\}$είναι martingale και η $\{\phi_n^1\}$είναι φραγμένη, τότε και $\{\tilde{V}_n\}$είναι επίσης martingale.

Θεώρημα 2.1 *(2) Έστω μία διαδικασία martingale $\{X_t\}_{t \geq 0}$ προσαρμοσμένη στη διήθηση $\mathcal{F}_t$ και $Y_j = X_j - X_{j-1}$, τότε:*

- $E[Y_j] = 0, j \geq 1$ *και* $E[X_n] = E[X_0]$
- $E[Y_j | \mathcal{F}_0, ..., \mathcal{F}_{j-1}] = 0$ *για κάθε* $j \geq 1$

Αν η X_t είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη, τότε:

- $E[Y_iY_j] = 0$ *για* $i \neq j$ *και* $E[X_0Y_j] = 0$ *για* $i \geq 1$
- $Var(X_n) = Var(X_0) + \sum_1^n Var(Y_i)$

Απόδειξη:

$$E[Y_j|\mathcal{F}_0, ..., \mathcal{F}_{j-1}] = E[X_j - X_{j-1}|\mathcal{F}_0, ..., \mathcal{F}_{j-1}] =$$
$$= E[X_j|\mathcal{F}_0, ..., \mathcal{F}_{j-1}] - X_{j-1} = 0$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι:

$$E[Y_j] = 0, j \geq 1$$

και

$$E[X_n] = E[X_0].$$

Για να αποδείξουμε τώρα ότι $E[Y_iY_j] = 0$ για $i \neq j$ και $E[X_0Y_j] = 0$ για $i \geq 1$, υποθέτουμε ότι $i < j$ και προκύπτει ότι:

$$E[Y_iY_j|\mathcal{F}_0, ..., \mathcal{F}_{j-1}] = Y_iE[Y_j|\mathcal{F}_0, ..., \mathcal{F}_{j-1}] = 0$$

Άρα

$$E[Y_iY_j] = 0$$

Για $i \geq 1$ μπορούμε επίσης να γράψουμε ότι:

$$E[X_0Y_j] = 0$$

Λήμμα 2.1 *Υποθέτουμε ότι* X_t *είναι μία martingale και* $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *μία κυρτή συνάρτηση. Τότε αν* $E[|\Phi(X(t))|] < \infty$ *για κάθε* $t \geq 0$,

η $\Phi(X(t))$ *είναι submartingale.*

Θεώρημα 2.2 *(2) Αν* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *είναι submartingale, τότε:*

$$P(\max_{1\leq k\leq n} X_k \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda}E[X_n^+]$$

για κάθε $n = 1, 2, ...$ *και* $\lambda > 0$.

Θεώρημα 2.3 *(2) Αν* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *είναι martingale και* $1 < p < \infty$, *τότε*

$$E[\max_{1\leq k\leq n} |X_k|^p] \leq (\frac{p}{p-1})^p E[|X_n|^p]$$

για κάθε $n = 1, 2, ...$

Σχόλιο
Η στοχαστική διαδικασία X_t μπορεί να είναι martingale ως προς κάποιο μέτρο πιθανότητας P, ενώ να μην είναι martingale ως προς κάποιο άλλο μέτρο πιθανότητας Χ. Ως συνέπεια μπορούμε να μετατρέψουμε μία στοχαστική διαδικασία X_t σε μία martingale προσαρτώντας σε αυτή το κατάλληλο μέτρο πιθανότητας (κρατώντας δηλαδή τις τροχιές της διαδικασίας ώς έχουν αλλά προσαρτώντας στις τροχιές αυτές κάποια πιθανότητα να εμφανιστούν).
Όμως δεν είναι πάντοτε δυνατό για οποιαδήποτε στοχαστική διαδικασία να κατασκευάσουμε μέτρο πιθανότητας τέτοιο ώστε κάτω από το μέτρο αυτό η στοχαστική διαδικασία να είναι martingale.

Θεώρημα 2.4 *(1) Έστω X_t μία L^1 (sub)martingale. Αν $E[|X_t|] < \infty$, τότε το όριο $\lim_{t\to\infty} X_t$ υπάρχει σχεδόν παντού.*

Απόδειξη:
Σε διακριτό χρόνο:
Έστω $N_a^b = \lim_{t\to\infty} N_a^b(t)$.
Σύμφωνα με το θεώρημα μονότονης σύγκλισης:

$$\int N_a^b dt \leq \int \lim_{t\to\infty} N_a^b(t)dt = \lim_{t\to\infty} \int N_a^b(t)dt$$

προκύπτει ότι:

$$E[N_a^b] \leq c(b-a)^{-1}$$

Άρα

$$N_a^b < \infty$$

Θεωρούμε ένωση διαστημάτων $[a, b]$ που προσεγγίζουν το διάστημα $[a, b]$ με a, b ρητοί αριθμοί. Παίρνοντας την ένωση αυτή βλέπουμε ότι δεν είναι δυνατό η ακολουθία X_t να έχει $lim\ supX_t > lim\ infX_t$. Άρα η X_t συκλίνει σχεδόν παντού σε κάποιο όριο X.
Από το λήμμα του Fatou έχουμε ότι :

$$E[\lim_{t\to\infty} |X_t|] \leq \sup_t |X_t|$$

Η X_t είναι L^1 (sub)martingale, άρα:

$$\sup_t |X_t| < \infty$$

Αν τώρα θεωρήσουμε όπου X_t,$-X_t$, τότε το θεώρημα θα ισχύει και για supermartingale.

Θεώρημα 2.5 *(1)*
Σύγκλιση ομοιόμορφα ολοκληρώσιμων Martingale

1. *Αν X_t ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη supermartingale, τότε υπάρχει τυχαία μεταβλητή X τέτοια ώστε $\lim_{t \to \infty} x_t = X$ και η σύγκλισή της ανήκει στον L^1.*

2. *Αν η X_t είναι martingale, τότε μπορούμε να γράψουμε ότι $X_t = E[X|\mathcal{F}_t]$, όπου $X = \lim_{t \to \infty} X_t$ στον L^1 και η σ-άλγεβρα που παράγεται από την X_t, δηλαδή $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, s \leq t)$.*

2.2 Χρόνοι διακοπής

(4) Θεωρούμε μία μη φθίνουσα ακολουθία σ-αλγεβρών

$$\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset ... \subset \mathcal{F}_n \subset ...$$

σε ένα χώρο πιθανοτήτων $(\omega, \mathcal{F}, P)$.
Για κάθε n: $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}$.
Μία τυχαία μεταβλητή $T : \Omega \to \{0, 1, 2, ...\} \cup \{\infty\}$ καλείται χρόνος διακοπής ως προς τη διήθηση $\{\mathcal{F}_n\}_{n \geq 0}$ αν το ενδεχόμενο $\{T \leq n\}$ ανήκει στην $\mathcal{F}_n$ για κάθε $n = 0, 1, 2, ...$
Με βάση τις διαθέσιμες πληροφορίες που έχουμε ως το χρόνο n, μπορεί να καθοριστεί το $\{T \leq n\}$.
Πρακτικά, αν μας δώσει κάποιος την πληροφορία του $\mathcal{F}_n$, δηλαδή τί τιμές πήρανε οι τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, ..., X_n$, μπορούμε να αποφανθούμε αν ισχύει $T \leq n$.

Ιδιότητες:

1. Αν S και T χρόνοι διακοπής, τότε $S \vee T$ και $S \wedge T$ είναι χρόνοι διακοπής. Επίσης:
$$\{S \wedge T \leq t\} = \{S \leq t\} \cup \{T \leq t\}$$
$$\{S \vee T \leq t\} = \{S \leq t\} \cap \{T \leq t\}$$

2. Έστω T χρόνος διακοπής. Μπορούμε να ορίσουμε μία σ- άλγεβρα
$$\mathcal{F}_T = \{A : A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t \geq 0$$
$\mathcal{F}_T$ είναι μία σ-άλγεβρα αφού:

- $\emptyset \in \mathcal{F}_T$
- $A^c \cap \{T \leq t\} = (A \cup \{T > t\})^c = ((A \cap \{T \leq t\}) \cup \{T > t\})^c$

3. Αν S και T είναι χρόνοι διακοπής τέτοιοι ώστε $S \leq T$, τότε $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$. Ουσιαστικά αν $A \in \mathcal{F}_S$, τότε για κάθε $t \geq 0$:

$$A \cap \{T \leq t\} = \{A \cap \{S \leq t\}\} \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

4. Ας ορίσουμε $\{X_t\}$ ως μία στοχαστική διαδικασία και T ως χρόνο διακοπής τέτοιο ώστε $T < \infty$.
Αν η παράμετρος είναι συνεχής, τότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι τροχιές της διαδικασίας $\{X_t\}$ είναι συνεχείς και η τυχαία μεταβλητή $X_t(\omega)$ είναι $\mathcal{F}_T$ μετρήσιμη.
Τώρα για διακριτό χρόνο έχουμε ότι:

$$\{X_T \in B\} \cap \{T = n\} = \{X_n \in B\} \cap \{T = n\} \in \mathcal{F}_n$$

Παράδειγμα 1:(3)
Έστω $T : \Omega \to \mathbb{N}_0$ τέτοιο ώστε $T(\omega) = N$ είναι χρόνος διακοπής.
Παρατηρούμε ότι

$$\{T = n\} \begin{cases} \Omega, & n = N \\ \emptyset, & n \neq N \end{cases}$$

είναι χρόνος διακοπής, αφού

$$\Omega \in \mathcal{F}_n$$

και

$$\emptyset = \Omega^c \in \mathcal{F}_n$$

Παράδειγμα 2:(3)
Αν $A \subset X$, τότε ο χρόνος πρώτης άφιξης στο A, δηλαδή
$T_A = inf\{k \geq 0 : X_k \in A\}$ είναι χρόνος διακοπής.
Απόδειξη:

$$\{T_A = 0\} = \{X_0 \in A\} \in \mathcal{F}_0$$

$$\{T_A = 1\} = \{X_0 \in A^c\} \cap \{X_1 \in A\} \in \mathcal{F}_1$$

$$\{T_A = n\} = \{X_0 \in A^c\} \cap \{X_1 \in A^c\} \cap ... \cap \{X_{n-1} \in A^c\} \cap \{X_n \in A\}$$

Λόγω της κλειστότητας της $\mathcal{F}_n$ ως προς τις τομές, προκύπτει ότι:

$$\{T_A = n\} \in \mathcal{F}_n$$

Για $k = 0, 1, ..., n-1$ έχουμε ότι:

$$\{X_k \in A^c\} \in \mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_n$$

Παράδειγμα 3:(3)
Έστω $\{\mathcal{S}_n\}_{n\geq 0}$ ο απλός τυχαίος περίπατος στο $\mathbb{Z}$ και $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 0}$ η διήθηση τέτοια ώστε

$$\mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\}$$

$$\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, X_2, ..., X_n), \forall n \leq 1$$

Η τυχαία μεταβλητή

$$T := inf\{k \geq 0 : S_k = 3\}$$

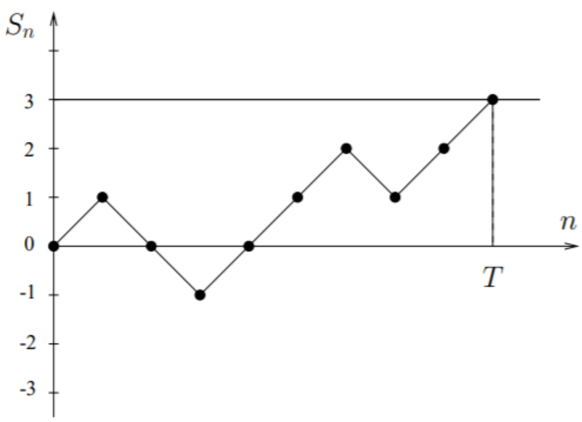
παίρνει τιμές στο $\mathbb{N}\cup\{\infty\}$. Είναι ο πρώτος χρόνος που ο απλός τυχαίος περίπατος ¨χτυπάει' το 3.
Για $n \in \mathbb{N}$:

$$\{T \leq n\} = \cup_{j=0}^{n}\{S_j = 3\}$$

και

$$\{S_j = 3\} \in \mathcal{F}_j \subset \mathcal{F}_n$$

για κάθε $j \leq n$, αφού η S_j είναι $\mathcal{F}_j$ μετρήσιμη.
Άρα ο T είναι όντως χρόνος διακοπής.
Γενικά οι χρόνοι πρώτης εισόδου σε ένα σύνολο για την $\{\mathcal{S}_n\}_{n\geq 0}$ είναι χρόνοι διακοπής ως προς τη διήθηση $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 0}$.



Σχήμα 6: Χρόνος διακοπής,όταν T=9

Λήμμα 2.2 *Η τυχαία μεταβλητή $T : \Omega \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ είναι χρόνος διακοπής αν και μόνο αν $\forall n \in \mathbb{N}_0$, το ενδεχόμενο $\{T \leq n\}$ ανήκει στην $\mathcal{F}_n$.*

Απόδειξη:
(Ευθί)
Έστω T χρόνος διακοπής, δηλαδή
$\forall n \in \mathbb{N}_0$: $\{T \leq n\} = \cup_{k=0}^{n}\{T = k\}$.
Όμως $\{T = k\} \in \mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_n$ για $k = 0, ..., n$.
Αφού $\mathcal{F}_n$ κλειστή ως προς τις πεπερασμένες ενώσεις, έχουμε ότι:

$$\{T \leq n\} = \cup_{k=0}^{n}\{T = k\} \in \mathcal{F}_n$$

(Αντίστροφο)
Έχουμε ότι $\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ και θέλουμε να δείξουμε ότι T χρόνος διακοπής, δηλαδή $\{T = n\} \in \mathcal{F}_n$.

$$\{T = n\} = \underbrace{\{T \leq n\}}_{\in \mathcal{F}_n} \cap \underbrace{\{T \leq n-1\}^c}_{\in \mathcal{F}_n}$$

Πόρισμα:
Αν οι T, S είναι χρόνοι διακοπής, τότε

$$(T \wedge S)(\omega) = min\{T(\omega), S(\omega)\}$$

$$(S \vee T)(\omega) = max\{T(\omega), S(\omega)\}$$

είναι χρόνοι διακοπής.
Απόδειξη:
Χρησιμοποιούμε το λήμμα 2.2 και προκύπτει ότι:

$$\{T \wedge S \leq n\} = \{T \leq n\} \cup \{S \leq n\}$$

και

$$\{T \vee S \leq n\} = \{T \leq n\} \cap \{S \leq n\}$$

,όπου $\{T \leq n\}$, $\{S \leq n\}$ χρόνοι διακοπής.

2.3 Martingales στην οικονομική

2.3.1 Αξία των χρεογράφων ως Martingales

(1) Στην χρηματοοικονομική επιστήμη συχνά θεωρείται ότι η αξία των χρεογράφων έχουν την ιδιότητα Matringale.Θα παρουσιάσουμε τα επιχειρήματα του Samuelson ως απόδειξη ότι οι τιμές των χρεογράφων έχουν την ιδιότητα Matringale.
Ένας επενδυτής που έχει στη διάθεσή του την κατάλληλη πληροφόρηση (διήθηση), μπορεί να προχωρήσει σε μία ρεαλιστική εκτίμηση της τιμής του χρεογράφου,πχ. μιας μετοχής.

Η τιμή μιας μετοχής τη στιγμή t θα είναι ίση με την αναμενόμενη μελλοντική της τιμή + τα προεξοφλημένα μερίσματα της στιγμής t.
Δηλαδή

$$S_t = \frac{1}{1+r} E[S_{t+1} + d_{t+1} | \mathcal{F}_t]$$

,όπου

- S_t : η τιμή της μετοχής στο χρόνο t
- S_{t+1} : η τιμή της μετοχής στο χρόνο $t+1$
- r : προεξοφλητικό επιτόκιο
- d_{t+1} : μερίσματα που αποδίδει η μετοχή τη στιγμή $t+1$.

Η προεξοφλημένη τιμή ενός χαρτοφυλακίου την $t=0$ είναι ίση με:

$$V_t = \frac{1}{1+r} S_t \cdot n_t$$

όπου n_t ο αριθμός των χρεογράφων.
Έστω ότι ο κάτοχος του χαρτοφυλακίου επανατοποθετεί το κέρδος που λαμβάνει από τις μετοχές σε νέες μετοχές.
Άρα η αξία του χαρτοφυλακίου τη στιγμή $t+1$, θα είναι:

$$S_{t+1} n_{t+1} = (S_{t+1} + d_{t+1}) n_t$$

Θέλουμε τώρα να υπολογίσουμε τη μέση τιμή της προεξοφλημένης τιμής του χαρτοφυλακίου δεδομένου της διήθησης $\mathcal{F}_t$ τη στιγμή t.
Δηλαδή:

$$E[V_{t+1} | \mathcal{F}_t] = E[\frac{1}{(1+r)^{t+1}} S_{t+1} n_{t+1} | \mathcal{F}_t] =$$

$$= E[\frac{1}{(1+r)^{t+1}} (S_{t+1} + d_{t+1}) n_t | \mathcal{F}_t] =$$

$$= \frac{1}{(1+r)^t} n_t \frac{1}{(1+r)} E[S_{t+1} + d_{t+1} | \mathcal{F}_t] =$$

$$\frac{1}{(1+r)^t} S_t n_t = V_t$$

Συνεπώς η αξία του χαρτοφυλακίου είναι μία Matringale.
Μπορεί οι τιμές των χρεογράφων αυτές καθεαυτές να μην είναι matringale αλλά η ποσότητα V_t που είναι άμεσα συνδεδεμένη με αυτές, είναι martingale.
Στη συνέχεια ο Samuelson χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των Matringale απέδειξε ότι η τιμή της μετοχής τη χρονική στιγμή t είναι ίση με το άθροισμα της

μέσης τιμής (αναμενόμενης τιμής) της σημερινής αξίας των μελλοντικών μερισμάτων.
Δηλαδή:

$$S_t = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^j} E[d_{t+i}|\mathcal{F}_t]$$

2.3.2 Martingales στην αποτίμηση χρεογράφων σε διακριτό χρόνο

(1) Θεωρούμε μία στοχαστική διαδικασία $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ που περιγράφει την τιμή ενός χρεογράφου τις χρονικές στιγμές i και ένα χρεόγραφο που δεν περιέχει κίνδυνο, το οποίο θα το ονομάσουμε ομόλογο. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι τα ομόλογα παίζουν το ρόλο μιας τραπεζικής κατάθεσης.Αν θεωρήσουμε ότι υπάρχει κάποιο επιτόκιο r ανά περίοδο, τότε η αξία του χρήματος αυξάνει κατά παράγοντα $1 + r$. Άρα η αξία ενός ομολόγου την t θα είναι ίση με:

$$X_{0,t} = (1+r)^t X_{0,0}$$

,όπου $X_{0,0}$, η αξία του ομολόγου την $t = 0$.
Θεωρούμε $\tilde{X}_{n,t}$ το ποσό που αν αν τοποθετηθεί σε μία ασφαλή επένδυση σήμερα την $t = 0$, θα αποδώσει το ποσό $X_{n,t}$ την χρονική στιγμή t, δηλαδή είναι η αξία του χρεογράφου $X_{n,t}$ την $t = 0$ και την ονομάζουμε προεξοφλημένη τιμή.
Το μόνο που μας μένει είναι να συνθέσουμε ένα χαρτοφυλάκιο, δηλαδή μία συλλογή από μετοχές και ομόλογα.
Η αξία του χαρτοφυλακίου τη χρονική στιγμή i, θα είναι:

$$V_i = \sum_{n=0}^{N} \alpha_{n,i} X_{n,i}$$

,όπου $\alpha_{n,i}$ με $n = 0, 1, ..., N$ είναι η ποσότητα κομματιών από το κάθε χρεώγραφο.Σημειώνουμε ότι γνωρίζουμε μόνο τις τιμές για τη χρονική στιγμή $i - 1$. Άρα οι τιμές που παίρνουν οι μεταβλητές $\alpha_{n,i}$ περιέχονται στη σ-άλγεβρα $\mathcal{F}_{i-1}$, η οποία είναι η πληροφορία που μπορεί να ληφθεί παρατηρώντας τις στοχαστικές διαδικασίες $X_{n,i}$ τη χρονική στιγμή $t = i - 1$. Η μεταβολή της τιμής του χρεογράφου από τη χρονική στιγμή $t = i - 1$ στη χρονική στιγμή $t = i$ μπορεί να γραφεί ως:

$$\Delta X_i^n = X_{n,i} - X_{n,i-1}$$

Το κέρδος τώρα του επενδυτού εξαιτίας της κίνησης της τιμής του συγκεκριμένου χρεογράφου μπορεί να γραφεί ως:

$$G_i^n = \alpha_{n,i} \Delta X_i^n$$

και το συνολικό κέρδος από όλα τα χρεόγραφα την χρονική στιγμή $t = i$ ως:

$$G_i = \sum_{n=0}^{N} G_i^n = \sum_{n=0}^{N} \alpha_{n,i} \Delta X_i^n$$

Λαμβάνοντας όλα τα παραπάνω υπόψιν, η αξία του χαρτοφυλακίου τη χρονική στιγμή t θα είναι:

$$V_t = V_0 + \sum_{i=0}^{t} G_i \tag{1}$$

Τέτοιου είδους χαρτοφυλάκια είναι ο μετασχηματισμός martingale των $X_{n,i}$ και ονομάζονται αυτοχρηματοδοτούμενα. Τέτοιου είδους χαρτοφυλάκια θα συναντήσουμε στο κεφάλαιο Black and Scholes.
Η αξία του χαρτοφυλακίου μπορεί να εκφραστεί επίσης από τον τύπο:

$$V_i = \sum_{n=0}^{N} \alpha_{n,i} X_{n,i} \tag{2}$$

Από τις εξισώσεις (1) και (2) μπορουμε να γράψουμε ότι:

$$\sum_{n=0}^{N} \Delta_{\alpha_{n,i}} X_{n,i-1} = 0, \forall i$$

Η παραπάνω σχέση λέει ότι η αθροιστική επίδραση των μεταβολών την χρονική στιγμή i των ποσών του κάθε χρεογράφου που έχει στην κατοχή του ένας επενδυτής πρέπει να εξισορροπείται. Αυτό γίνεται πιο καθαρό όταν $N = 1$ δηλαδή υπάρχει μόνο μία μετοχή και μία ομολογία. Στην περίπτωση αυτή είναι φανερό από την παραπάνω σχέση ότι οι αλλαγές στο ποσό των μετοχών που έχει στην κατοχή του ο επενδυτής πρέπει να πληρώνονται από τα κέρδη που λαμβάνονται από την αλλαγή της τιμής της ομολογίας και αντίστροφα.

Ορισμός 2.4 *Ένα χαρτοφυλάκιο α είναι ένα arbitrage , αν είναι αυτοχρηματοδοτούμενο και αν ισχύει $V_0(\alpha) = 0$ και $V_t(\alpha) \geq 0$ για κάθε τ και $E[V_t(\alpha)] > 0$.*

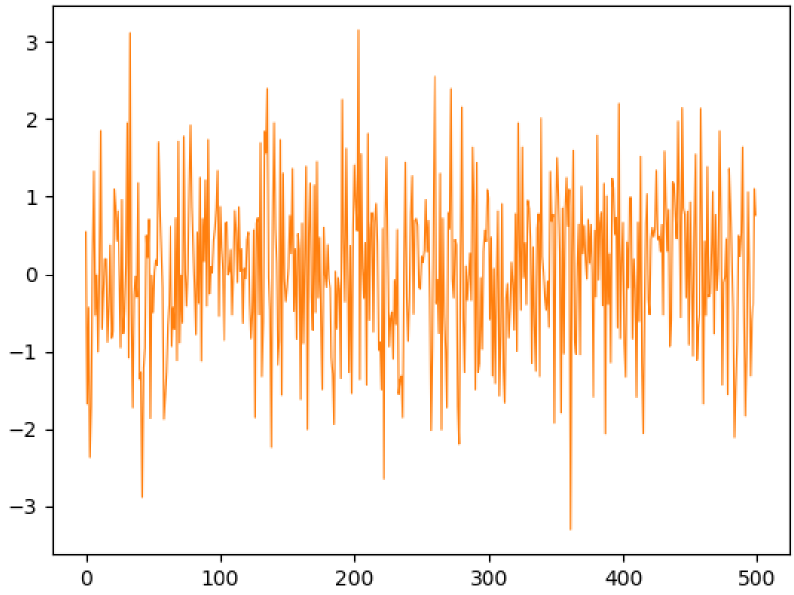
3 Κίνηση Brown

3.1 Ορισμοί και Παρατηρήσεις

Τόσο στη φυσική όσο και στη χημεία, κίνηση Brown καλείται η τυχαία κίνηση στερεών σωματιδίων μέσα σε ένα υγρό ή αέριο.
Με τη βοήθεια ενός μικροσκοπίου παρατηρούμε ότι τα στερεά σωματίδια που περιέχονται σε ένα υγρό ή αέριο, εκτελούν τυχαίες κινήσεις.Το 1905 ο Άλμπερτ Αϊνστάιν ασχολήθηκε με την κίνηση Μπράουν, υποστηρίζοντας από στατιστικής πλευράς τα πειρμαματικά ότι η κίνηση αυτή οφείλεται σε συγκρούσεις των κόκκων με τα μόρια του νερού.

Ορισμός 3.1 *(4) Έστω ένας χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ και έστω μία στοχαστική διαδικασία B_t, $t > 0$ με πραγματικές τιμές.*
Η κίνηση Brown είναι μία στοχαστική διαδικασία B_t, η οποία παίρνει τιμές στον $\mathbb{R}$ και έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

- *Η $B(t)$ έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις.*
  Δηλαδή αν $t_0 < t_1 < ... < t_n$ τότε οι τυχαίες μεταβλητές $B_{t_0}, B_{t_1} - B_{t_0}, ..., B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ είναι ανεξάρτητες.
- *Η $B(t)$ έχει κανονικές προσαυξήσεις.*
  Δηλαδή αν $s, t \geq 0$,τότε:
  $P(B_{s+t} - B_s \in A) = \int\limits_A (\frac{1}{2\pi t})^{1/2} \cdot \exp(\frac{-x^2}{2t})$ *, όπου A κάποιο σύνολο Borel, δηλαδή οι μεταβολές της κίνησης Brown είναι κατανεμημένες με την κανονική κατανομή.*
- *Οι τροχιές της κίνησης Brown είναι συνεχείς με πιθανότητα 1,δηλαδή η $t \to B_t$ είναι συνεχής συνάρτηση.*



Σχήμα 7: Τροχιά Κίνησης Brown

Οι τρείς αυτές ιδιότητες ορίζουν μία και μοναδική στοχαστική διαδικασία.Από τις ιδιότητες της κίνησης Brown προκύπτουν οι ιδιότητες του μέτρου μ που αυτή επάγει (μέτρο Wiener)

$$\mu_{t_1,\dots,t_n}(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n) = \int_{A_1} dx_1 \int_{A_2} dx_2 \dots \int_{A_n} dx_n \Pi_{i=1}^{n} p(t_i - t_{i-1}, x_{i-1}, x_i)$$

,όπου $x_0 = x, t_1 = 0$ και

$$p(t,x,y) = \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{1}{2}}} exp(-\frac{|y-x|^2}{2t})$$

Η παραπάνω ποσότητα εκφράζει την πιθανότητα να βρίσκεται η στοχαστική διαδικασία τις χρονικές στιγμές t_i στα υποσύνολα $A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, όπου $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ σύνολο Borel.

Αν τώρα σκεφτούμε τα υποσύνολα A_i σαν διαστήματα του $\mathbb{R}$, τότε η παραπάνω ποσότητα είναι ουσιαστικά η πιθανότητα να βρίσκεται η κίνηση Brown τις χρονικές στιγμές t_i,σε συγκεκριμένα διαστήματα του $\mathbb{R}$.

Η ποσότητα

$$\mu_{t_1,\dots,t_n}(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n) = P(B_{t_1} \in A_1, B_{t_2} \in A_2, \dots, B_{t_n} \in A_n)$$

μας βοηθά να κατασκευάσουμε το μέτρο μ και ονομάζεται πεπερασμένης διάστασης κατανομή.

Παράδειγμα 1 :(1)
Έστω μία συνάρτηση $f(x)$ που ορίζεται στο $\mathbb{R}$.
Αν B_t είναι μία μονοδιάστατη κίνηση Brown τέτοια ώστε $B_0 = 0$, δηλαδή η κίνηση Brown να ξεκινά από το 0, τότε:

$$E[f(B_t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) exp\Big(-\frac{y^2}{2t}\Big) dx$$

Αν όμως $B_0 = x$, τότε:

$$E_X[f(B_t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) exp\Big(-\frac{(y-x)^2}{2t}\Big) dx$$

Παράδειγμα 2 :(1)
Έστω μία τυχαία μεταβλητή X τέτοια ώστε $X = B_t - B_s$.
Από τη δεύτερη ιδιότητα του ορισμού, δηλαδή ότι η B_t έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις, παρατηρούμε ότι:

$$P(B_t - B_s \leq \alpha) = \int_{-\infty}^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} exp\Big(-\frac{x^2}{2(t-s)}\Big) dx$$

Άρα η πυκνότητα πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X, είναι η συνάρτηση $p(t-s, x, 0) = p(t-s, 0, x)$.
Επίσης:

$$E[f(B_t - B_s)] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} exp\Big(-\frac{x^2}{2(t-s)}\Big) dx$$

$$E[(B_t - B_s)] = 0$$

και

$$E[(B_t - B_s)^2] = t - s$$

Αν τώρα ορίσουμε τη σ-άλγεβρα που παράγεται από την κίνηση Brown
$\mathcal{F}_s = \sigma(B_u, u \leq s)$, τότε η μεταβολή $B_t - B_s$ είναι ανεξάρτητη από τη σ-άλγεβρα $\mathcal{F}_s$.
Δηλαδή

$$E[(B_t - B_s)|\mathcal{F}_s] = E[(B_t - B_s)] = 0$$

και

$$E[(B_t - B_s)^2|\mathcal{F}_s] = E[(B_t - B_s)^2] = t - s$$

Είδαμε δηλαδή ότι η μεταβολή $B_t - B_s$ είναι ανεξάρτητη από τη $\mathcal{F}_s$, κάτι που δεν ισχύει για τη B_t.
Δηλαδή

$$E[B_t|\mathcal{F}_s] = E[B_t - B_s + B_s|\mathcal{F}_s] = E[(B_t - B_s)|\mathcal{F}_s] + E[B_s|\mathcal{F}_s] = B_s$$

Σχόλια:(4)

- Η κίνηση Brown είναι μία διαδικασία Gauss. Η κατανομή πιθανότητας ενός τυχαίου διανύσματος $(B_{t_1}, B_{t_2}, ...B_{t_n})$ για κάθε $0 < t_1 < ... < t_n$ είναι κανονική επειδή αυτό το διάνυσμα είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός του διανύσματος $(B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, ..., B_{t_n} - B_{t_{n-1}})$ που έχει κανονική κατανομή.

- $$E(B_t) = 0$$
  $$E(B_sB_t) = E(B_s(B_t - B_s + B_s)) =$$
  $$= E(B_s(B_t - B_s)) + E(B_s^2) = s = min(s,t)$$

  Μία Γκαουσιανή διαδικασία με μέση τιμή μηδέν και συνδιακύμανση $\Gamma_X(s,t) = min(s,t)$ ικανοποιεί τις ιδιότητες 1,2 της κίνησης Brown και επίσης τη συνθήκη $B_0 = 0$.

- Η κατανομή του B_t εξαρτάται από το αρχικό σημείο στο οποίο ξεκινάμε τη διαδικασία, δηλαδή το B_0. Το αρχικό σημείο όμως της κίνησης Brown δεν καθορίζεται από τον ορισμό.
  Έτσι όταν $B_0 = x$, τότε η διαδικασία ξεκινά από το σημείο x. Το διάστημα του χρόνου που ορίζεται η κίνηση Brown είναι $[0, T]$ για κάποιο $T > 0$, το οποίο μπορεί να είναι άπειρο.

- Η κίνηση Brown που έχει ως σημείο εκκίνησης το μηδέν, δηλαδή $B_0 = 0$, αναφέρεται ως τυπική κίνηση Brown.

- Έστω τώρα ότι $B_0 = 0$ και κάποια χρονική στιγμή t γνωρίζουμε την τιμή της διαδικασίας, δηλαδή $B_t = x_0$.Λόγω της πρώτης ιδιότητας της κίνησης Brown, ότι δηλαδή η B_t έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις, προκύπτει ότι οποιαδήποτε γνώση και αν έχουμε για τις τιμές της κίνησης σε χρονικές στιγμές πριν τη χρονική στιγμή t δεν έχει καμία σημασία για την τιμή της κίνησης σε κάποια επόμενη στιγμή. Με λίγα λόγια ικανοποιεί τη μαρκοβιανή ιδιότητα.

- Έστω ότι τη χρονική στιγμή t_1 η B_{t_1} ισούται με $\alpha \in \mathbb{R}$, δεδομένου ότι την $t_0 = 0$, $B_{t_0=0} = 0$

Παράδειγμα:Μοντέλο για τιμές μετοχών(1)
Η τιμή μιας μετοχής S_t στο χρόνο t δίνεται από τον τύπο:

$$S_t = S_0 exp((r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t)$$

,όπου $r, \sigma \in \mathbb{R}$, S_0 η αρχική τιμή της μετοχής και B_t μία μονοδιάστατη κίνηση Brown.
Θα εξετάσουμε ποιά είναι η μέση τιμή της μετοχής τη χρονική στιγμή t και αν η S_t είναι martingale ως προς τη διήθηση $\mathcal{F}_t$.
Έστω μέτρο μ κάτω από το οποίο η στοχαστική διαδικασία B_t είναι κίνηση Brown.

$$E[S_t] = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} S_0 e^{((r-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma x)} e^{(-\frac{x^2}{2t})} dx =$$

$$= \frac{S_0}{\sqrt{2\pi t}} e^{((r-\frac{\sigma^2}{2})t)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(-\frac{x^2}{2t}+\sigma x)} dx =$$

$$= S_0 e^{rt}$$

Για να είναι μία διαδικασία martingale, ϑα πρέπει $E[S_t] = E[S_0]$.
Από την τελευταία σχέση παρατηρούμε ότι $e^{rt} \neq 1$, οπότε η S_t δεν είναι martingale.
Αυτό το αποτέλεσμα βέβαια ισχύει με βάση το μέτρο κάτω από το οποίο η στοχαστική διαδικασία B_t είναι μία κίνηση Brown. Μπορούμε όμως να βρούμε κάποιο άλλο μέτρο στο οποίο η S_t να είναι martingale.

Θεώρημα 3.1 *(2) Έστω $\{X_t\}_{t \geq 0}$ μία στοχαστική διαδικασία και $\mathcal{F}_t$ η διήθηση που παράγεται από αυτή.*

Η X_t αποτελεί κίνηση Brown αν και μόνο αν:

1. $$X_0 = 0$$

2. Οι τροχιές της X_t είναι συνεχείς συναρτήσεις του χρόνου.

3. Η X_t είναι martingale ως προς τη διήθηση $\mathcal{F}_t$.

4. Η ${X_t}^2 - t$ είναι martingale ως προς τη διήθηση $\mathcal{F}_t$.

Το θεώρημα αυτό χαρακτηρίζει την κίνηση Brown ουσιαστικά από τη μέση τιμή της και τη διακύμανση και την ανεξαρτησία των μεταβολών της.
Το σημαντικό στο θεώρημα αυτό είναι ότι αν μια διαδικασία είναι κίνηση Brown ή όχι, εξάρτάται από τη διήθηση, καθώς και από το μέτρο πιθανότητας κάτω από το οποίο τη βλέπουμε. Επίσης είναι ιδιαίτερα χρήσιμο και βρίσκει διάφορες εφαρμογές στη χρηματοοικονομική.

Λήμμα 3.1 *(1) Έστω $W(t)$ διαδικασία Wiener μίας διάστασης.*
Τότε για κάθε $t \geq 0, s \geq 0$:

$$E[W(t)W(s)] = t \wedge s = min\{s, t\}$$

Απόδειξη:

Υποθέτουμε ότι $t \geq s \geq 0$.

$$E[W(t)W(s)] = E[(W(s) + W(t) - W(s))W(s)] =$$

$$= E[W^2(s)] + E[(W(t) - W(s))W(s)] =$$
$$= s + E[W(t) - W(s)]E[W(s)]$$

Αφού $W(t) - W(s)$ είναι ανεξάρτητο του $W(s)$:

$$E[W(t) - W(s)] = 0$$

και $W(s) \sim N(0, s)$:
$$E[W(s)] = 0$$

τότε:
$$E[W(t)W(s)] = s = t \wedge s$$

Θεώρημα 3.2 *(2) Έστω $W(t)$ διαδικασία Wiener μίας διάστασης.*
Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n$ και $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, έχουμε ότι:

$$E[f(W(t_1), ..., W(t_n))] =$$

$$= t \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, ..., x_n) g(x_1, t_1|0) g(x_2, t_2 - t_1|x_1) \dots$$
$$\dots g(x_n, t_n - t_{n-1}|x_{n-1}) dx_n ... dx_1$$

Θεώρημα 3.3 *(12) Ας ορίσουμε μία συνεχής και φραγμένη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.*
Τότε η λύση του προβλήματος διάχυσης

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{3}$$

με αρχική συνθήκη:

$$u_0(x) = f(x) \tag{4}$$

δίνεται από τον τύπο:

$$u_t(x) = E[f(B_t^x)] = \int_{y=-\infty}^{\infty} p_t(x,y)f(y)dy$$

,όπου B_t^x είναι μία κίνηση Brown που ξεκινά από το x.
Η εξίσωση μερική διαφορική εξίσωση (3) έχει μόνο μία λύση που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες (4).

3.2 Martingales συνεχούς χρόνου και κίνηση Brown

Ορίζουμε $\{B_t\}_{t\geq 0}$ ως κίνηση Brown, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ χώρο πιθανότητας και μία οικογένεια σ-αλγεβρών $\mathcal{F}_t$ από τυχαίες μεταβλητές $\{B_s\}_{s\leq t}$

Θεώρημα 3.4 *(14) Η $\mathcal{B}_t$ θα είναι διαδικασία Martingale ως προς τη διήθηση $\mathcal{F}_t$.*

Απόδειξη:

Αρχικά θα αποδείξουμε ότι $E[|B_t|] < \infty$.

$$E[|B_t|] = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} |x| e^{\frac{-|x|^2}{2t}} dx$$

Αφού είναι άρτια συνάρτηση, μπορούμε να γράψουμε:

$$E[|B_t|] = 2\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_0^{+\infty} x e^{\frac{-x^2}{2t}} dx = \frac{2t}{\sqrt{2\pi t}} \int_0^{+\infty} (-e^{\frac{-x^2}{2t}})' dx =$$

$$= \sqrt{\frac{2t}{\pi}}(0+1) = \sqrt{\frac{2t}{\pi}} < \infty$$

Αυτό που μένει να αποδείξουμε είναι ότι

$$E[B_t|\mathcal{F}_s] = B_s$$

.

$$E[B_t|\mathcal{F}_s] = E[B_t + B_s - B_s|\mathcal{F}_s] = E[B_t - B_s|\mathcal{F}_s] + E[B_s|\mathcal{F}_s]$$

λόγω της ανεξαρτησίας των προσαυξήσεων της κίνησης Brown και ότι η κίνηση Brown είναι προσαρμοσμένη στη διήθηση $\mathcal{F}_s$ προκύπτει ότι:

$$E[B_t - B_s|\mathcal{F}_s] + E[B_s|\mathcal{F}_s] = E[B_t - B_s] + B_s = 0 + B_s = B_s$$

Άρα η B_t είναι διαδικασία Martingale.

Θεώρημα 3.5 *(4) Αν B_t είναι κίνηση Brown και $\mathcal{F}_t$ διήθηση με $t \in [0,T]$, τότε η διαδικασία $(B_t)^2 - t$ είναι μία διαδικασία Martingale ως προς τη διήθηση $\mathcal{F}_t$.*

Απόδειξη:
Αρχικά υπολογίζουμε τη μέση τιμή της B_t^2.

$$E[B_t^2] = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{\frac{-|x|^2}{2t}} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(-te^{\frac{-x^2}{2t}})' dx = t$$

Άρα

$$E[(B_t - B_s)^2] = t - s$$

$$\begin{gathered} E[B_t^2|\mathcal{F}_s] = E[(B_t - B_s + B_s)^2|\mathcal{F}_s] = \\ = E[(B_t - B_s)^2|\mathcal{F}_s] + 2E[(B_t - B_s)B_s|\mathcal{F}_s] + E[B_s^2|\mathcal{F}_s] = \\ = E[B_t - B_s]^2 + 2B_sE[(B_t - B_s)|\mathcal{F}_s] + B_s^2 = \\ t - s + B_s^2 \end{gathered}$$

Άρα

$$E[B_t^2 - t|\mathcal{F}_s] = B_s^2 - s$$

Συνεπώς η $B_t^2 - t$ είναι μία Martingale.

3.3 Χαρακτηριστική Συνάρτηση Κίνησης Brown

Σύμφωνα με τις ιδιότητες της κίνησης Brown μπορούμε να υπολογίσουμε την χαρακτηριστική συνάρτηση της καθώς και την χαρακτηριστική συνάρτηση των μεταβολών της.
Για την χαρακτηριστική συνάρτηση των μεταβολών της κίνησης Brown:

$$\phi_{B_t-B_s}(\lambda) = E[e^{(i\lambda(B_t-B_s))}] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} exp(-\frac{x^2}{2(t-s)}) exp(i\lambda x) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} exp(-\frac{(x-i\lambda(t-s))^2}{2(t-s)} - \frac{\lambda^2(t-s)}{2}) =$$

$$= \phi_{B_t-B_s}(\lambda) = exp(-\frac{\lambda^2(t-s)}{2})$$

Παίρνοντας τις ανώτερες παραγώγους της $\phi_{B_t-B_s}(\lambda)$ ως προς το λ και θέτοντας $\lambda = 0$ μπορούμε να υπολογίσουμε όλες τις πολυωνυμικές ροπές των μεταβολών της κίνησης Brown.
Στην τελευταία σχέση αν θέσουμε $s = 0$, τότε θα έχουμε:

$$\phi_{B_t}(\lambda) = exp(-\frac{\lambda^2}{2})$$

που είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση κίνησης Brown.

3.4 Ιδιότητα Markov και κίνηση Brown

Σε αυτή την παράγραφο θα ασχοληθούμε με την ιδιότητα Markov και την ισχυρή ιδιότητα Markov, μία πολύ σημαντική ιδιότητα της κίνησης Brown. Η χρήση της ιδιότητας Markov διευκολύνει στον υπολογισμό της υπο-συνθήκης μέσων τιμών ορισμένων συναρτήσεων της κίνησης Brown ως προς συγκεκριμένες σ-άλγεβρες.

Ερμηνεία της ιδιότητας Markov

Αν πάρουμε κάποιο $s \geq 0$, τότε $B_{t+s} - B_s$ είναι μία κίνηση Brown η οποία είναι ανεξάρτητη από το τι συνέβη πριν την χρονική στιγμή s. Άρα μπορούμε να πούμε ότι η κίνηση Brown έχει την ιδιότητα Markov. Δηλαδή η κίνηση Brown ξεχνάει το παρελθόν της πλήρως και ότι συμβαίνει από το την χρονική στιγμή s και πέρα εξαρτάται μόνο από το B_s.
Η $B_{t+s} - B_s$ είναι και αυτή μία κίνηση Brown, που ξεκινά στο 0 και ¨τρέχει' για χρόνο t.
Επίσης:

$$E[B_{t+s} - B_s] = 0$$

και

$$Var[B_{t+s} - B_s] = (t+s) - s = t$$

3.5 Η ισχυρή ιδιότητα Markov

Η ισχυρή ιδιότητα Markov δηλώνει ότι η ιδιότητα Markov ισχύει για μια συγκεκριμένη κατηγορία χρόνων διακοπής.

Θεώρημα 3.6 *Έστω B_t μία κίνηση Brown, $\mathcal{F}_t$ μία σ-άλγεβρα τέτοια ώστε:*

$$\mathcal{F}_t = \big\{A \in \mathcal{F}_\infty : A \cap \big\{T \leq t\big\} \in \mathcal{F}_t, \forall t > 0\big\}$$

και T χρόνος διακοπής.
Τότε ισχύει ότι $B_{t+T} - B_T$ είναι μία κίνηση Brown ανεξάρτητη της σ-άλγεβρας $\mathcal{F}_t$.

Το συγκεκριμένο θεώρημα αποτελεί τη βάση της ισχυρής ιδιότητας Markov, καθώς και μας εξασφαλίζει ότι η ανεξατησία των μεταβολών της κίνησης Brown ισχύει μόνο για χρόνους στάσης.

3.6 Παραδείγματα

3.6.1 Υπό συνθήκη μέση τιμή των τιμών μιας μετοχής

Θεωρούμε ότι η τιμη μιας μετοχής S_t δίνεται από τον τύπο:

$$S_t = S_0 exp\Big((r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t\Big)$$

,όπου $r > 0, \sigma > 0$ και B_t μονοδιάστατη κίνηση Brown.
Θέλουμε να δείξουμε ότι:

$$E[S_{t+r}|\mathcal{F}_t] = S(t)exp(r\tau)$$

Απόδειξη:
Αρχικά υπολογίζουμε τον όρο S_{t+r}.

$$S_{t+r} = S_t exp\Big((r - \frac{\sigma^2}{2})\tau + \sigma(B_{t+r} - B_t)\Big)$$

Άρα

$$E[S_{t+r}|\mathcal{F}_t] = S_t exp\Big((r - \frac{\sigma^2}{2})\Big)E[exp(\sigma(B_{t+r} - B_t))|\mathcal{F}_t] \tag{5}$$

Από τις ιδιότητες της κίνησης Brown, όπως είδαμε και σε άλλο παράδειγμα παραπάνω, η μεταβολή $B_{t+r} - B_t$ είναι ανεξάρτητη από την $\mathcal{F}_t$.
Επομένως:

$$E[exp(\sigma(B_{t+r} - B_t))|\mathcal{F}_t] = E[exp(\sigma(B_{t+r} - B_t)] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} exp(\sigma x) exp\Big(- \frac{x^2}{2r}\Big) dx = e^{\frac{\sigma^2 \tau}{2}}$$

Άρα

$$E[exp(\sigma(B_{t+r} - B_t))|\mathcal{F}_t] = e^{\frac{\sigma^2 \tau}{2}} \tag{6}$$

Αντικαθιστώ την (6), στην (5) και προκύπτει ότι:

$$E[S_{t+r}|\mathcal{F}_t] = S(t) exp(r\tau)$$

3.6.2 Ιδιότητα Markov και υπό συνθήκη μέση τιμή

Σε αυτό το παράδειγμα θέλουμε να δείξουμε ότι

$$E[S_{t+r}|\mathcal{F}_t] = S(t) exp(r\tau)$$

χρησιμοποιώντας την ιδιότητα Markov και τον τελεστή μετατόπισης.
Αρχικά θα ορίσουμε τον τελεστή μετατόπισης.
Ο τελεστής μετατόπισης μας μετατοπίζει επάνω σε μία συγκεκριμένη τροχιά της στοχαστικής διαδικασίας (στην συγκεκριμένη περίπτωση της κίνησης Brown) κατά μία χρονική μετατόπιση s. Ένας τρόπος να το γράψουμε αυτό συμβολικά είναι θεωρήσουμε την τυχαία μεταβλητή B_t ως τυχαία συνάρτηση $B(\omega(t))$, όπου $\omega(t)$ είναι το αποτέλεσμα του τυχαίου πειράματος την χρονική στιγμή t από το οποίο και εξαρτάται η τιμή της τυχαίας μεταβλητής B_t.
Ορίζουμε τον τελεστή θ_s στο ω ως:

$$(\theta_s \omega)(t) = \omega(t + s)$$

Αν πάρουμε τη δράση του τελεστή μετατόπισης πάνω σε μία τροχιά της κίνησης Brown, θα έχουμε ότι:

$$B_t \circ \theta_s = B((\theta_s \omega)(t)) = B_{t+s}$$

Γενικά για οποιαδήποτε απεικόνιση $Y = Y(\omega(t + s), t)$, όπου η εξάρτηση από το $\omega(t)$ υποδηλώνει την εξάρτηση της Y από την θέση της κίνησης Brown την χρονική στιγμή t, τότε:

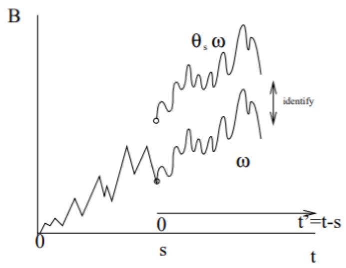
$$Y \circ \theta_s = Y((\theta_s \omega)(t), t) = Y(\omega(t + s), t)$$

και

$$E_X[Y \circ \theta_s|\mathcal{F}_s] = E_{B_s}[Y] \tag{7}$$

Σε περίπτωση τώρα που $Y = f(B_t)$, τότε:

$$Y \circ \theta_s = f(B_{s+t})$$



Σχήμα 8: Η επίδραση του τελεστή μετατόπισης θ_s σε μία τροχιά της κίνησης Brown

Επανερχόμαστε τώρα στο ζήτημα της άσκησης.
Αρχικά παρατηρούμε ότι:

$$S_{t+s} = exp((r - \frac{\sigma^2}{2})(t+s))exp(\sigma B_{t+s})$$

Θέτουμε $\alpha = r - \frac{\sigma^2}{2}$ που είναι ανεξάρτητη από την κίνηση Brown μέχρι τη στιγμή ς και προκύπτει:

$$S_{t+s} = exp(\alpha(t+s))exp(\sigma B_{t+s})$$

Επίσης:

$$E[S_{s+t}|\mathcal{F}_s] = exp(\alpha(t+s))E[exp(\sigma B_{t+s})|\mathcal{F}_s]$$

Ορίζουμε $Y = exp(\sigma B_t)$.
Τότε από την εξίσωση (7) προκύπτει ότι:

$$E[exp(\sigma B_{t+s}|\mathcal{F}_s] = E[Y \circ \theta_s|\mathcal{F}_s] = E_{B_s}[Y]$$

Η ποσότητα $E_{B_s}[Y]$ μας δείχνει ότι η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής Y επάνω στο μέτρο που ορίζει μία κίνηση Brown, ξεκινά στο σημείο $y = B_s$.
Άρα:

$$\begin{aligned} E_{B_s}[Y] = E_{B_s}[exp(\sigma B_t)] &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} exp(\sigma x) exp\Big(-\frac{(x-y)^2}{2t}\Big)dx \\ &= exp(\frac{\sigma^2 t}{2})exp(\sigma y) = exp\Big(\frac{\sigma^2 t}{2}\Big)exp(\sigma B_s) \end{aligned}$$

Συνοψίζοντας τα παραπάνω προκύπτει ότι:

$$E[S_{s+t}|\mathcal{F}_s] = exp(\alpha s)exp(rt)exp(\sigma B_s) = exp(rt)S_s$$

4 Στοχαστικός λογισμός κατά Itô

Στην ενότητα αυτή κύριος σκοπός μας είναι η παρουσίαση και απόδειξη ενός πολύ βασικού λήμματος που ονομάζεται λήμμα του Itô. Στο λήμμα αυτό ανήκει στον τομέα της στοχαστικής ανάλυσης κατά Itô, του κλάδου των μαθηματικών που αφορά τη στοχαστική ανάλυση. Ο τομέας αυτός της στοχαστικής ανάλυσης πήρε το όνομά του προς τιμή του Ιάπωνα μαθηματικού Kiyoshi Itô. Στο στοχαστικό ολοκλήρωμα του Itô, οι σημαντικές ιδιότητές του καθώς και το θεώρημα του Itô γνωστό και ως λήμμα του Itô, άνοιξε νέους δρόμους στην καλύτερη μαθηματικά κατανόηση των τυχαίων γεγονότων, επεκτείνοντας τους τρόπους υπολογισμού και επεξεργασίας των στοχαστικών διαδικασιών, όπως για αράδειγμα της κίνησης Βροων.
Επίσης ο στοχαστικός λογισμός κατά Itô χρησιμοποιήθηκε σε πολλές εφαρμογές στον τομέα της χρηματοοικονομικής επιστήμης και συγκεκριμένα σε προβλήματα όπως η τιμολόγηση χρηματοοικονομικών περιουσιακών στοιχείων (όπως παράγωγα συμβόλαια).

4.1 Ορισμός Ολοκληρώματος Itô

(1) Έστω μία συνάρτηση $f : (0, \infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$ που εξαρτάται από κάποια κίνηση Brown.
Ορίζουμε:

$$\int_a^b f(t, \omega) dB_t(\omega)$$

ως το ολοκλήρωμα της συνάρτησης f επάνω στις μεταβολές τις κίνησης Brown.

4.2 Το ολοκλήρωμα Itô ως στοχαστική διαδικασία

Από τον ορισμό του ολοκληρώματος Itô στην προηγούμενη παράγραφο παρατηρούμε ότι τα a, b είναι δεδομένα. Θεωρούμε το κάτω όριο ολοκλήρωσης να είναι σταθερό και ίσο με μηδέν, ενώ το πάνω όρο ολοκλήρωσης να μεταβάλλεται και να είναι ίσο με t.
Έτσι θεωρούμε το στοχαστικό ολοκλήρωμα:

$$\int_0^t f(t, \omega) dB_t(\omega) \tag{8}$$

, όπου $0 \leq t \leq T$

Ορισμός 4.1 *(1) Μία στοχαστική διαδικασία f, λέμε ότι ανήκει στο χώρο $M^2([a,b])$ αν είαι προσαρμοσμένη στη διήθηση $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, s \leq t)$ και ικανοποιεί τη συνθήκη*

$$||f||_{M^2([a,b])} = E\Big[\int_a^b |f|^2 dt\Big] < \infty$$

Ορισμός 4.2 *(1) Για κάθε $f \in M^2([a,b])$, υπάρχει μία ακολουθία διαδικασιών f_n τέτοια ώστε:*

$$\lim_{n\to\infty} ||f(t) - f_n(t)||_{M^2([a,b])} = \lim_{n\to\infty} E\Big[\int_a^b |f(t) - f_n(t)|^2 dt\Big] = 0$$

Ορισμός 4.3 *(1) Για κάθε τιμή του t, το ολοκλήρωμα*

$$\int_0^t f(t,\omega) dB_t(\omega) \tag{9}$$

ορίζεται όπως και παραπάνω αρκεί η στοχαστική διαδικασία f να ανήκει στο χώρο $M^2([a,b])$.
Για κάθε τιμή που μπορεί να λάβει το t, παίρνουμε μία τυχαία μεταβλητή η οποία είναι ίση με το ολοκλήρωμα

$$\int_0^t f(t,\omega) dB_t(\omega) \tag{10}$$

Συνεπώς δημιουργήσαμε μία στοχαστική διαδικασία:

$$I_t = \int_0^t f(t,\omega) dB_t(\omega) \tag{11}$$

που ονομάζεται αόριστο ολοκλήρωμα Itô.

Ιδιότητες ολοκληρώματος Itô

- Το ολοκλήρωμα Itô είναι ένας γραμμικός τελεστής δηλαδή για κάθε $a, b \in \mathbb{K}$:
$$I(aV + bU) = aI(V) + bI(U)$$
- Το ολοκλήρωμα Itô είναι προσαρμοσμένο στη δηιήθηση $\mathcal{F}_{i,j}$
- Το ολοκλήρωμα Itô είναι συνεχής τελεστής.
- $E[I(f)] = 0$
- $E[\int_0^\infty |f(t)|^2 dt] = E[|I(f)|^2]$

- Το ολοκλήρωμα $\{I_t(f)\}_{t<T}$ είναι Martingale στον L^2.

Παράδειγμα:(2)
Έστω μία συνάρτηση $f \in M^2([a,b])$ για $0 \leq t \leq T$.
Τότε η στοχαστική διαδικασία

$$I_t = \int_0^t f(t,\omega) dB_t(\omega) \tag{12}$$

είναι διαδικασία Martingale.

Απόδειξη:
Αρκεί να δείξουμε ότι για $0 \leq t \leq T$

$$E[I_t|\mathcal{F}_s] = I_s$$

Μία στοχαστική διαδικασία I_t μπορεί να γραφεί σαν:

$$I_t = I_s + \int_s^t f(t') dB_{t'}(\omega) \tag{13}$$

Θα υπολογίζουμε τη μέση τιμη του ολοκληρώματος $\int_s^t f(t')dB_{t'}(\omega)$ ως προς τη διήθηση $\mathcal{F}_s$, λαμβάνοντας υπόψιν ότι το ολοκλήρωμα είναι ανεξάρτητο της διήθησης $\mathcal{F}_s$.

$$E\left[\int_s^t f(t')dB_{t'}|\mathcal{F}_s\right] = E\left[\int_s^t f(t')dB_{t'}\right] = 0 \tag{14}$$

Σύμφωνα με τις εξισώσεις (13) και (14) προκύπτει ότι:

$$E[I_t|\mathcal{F}_s] = E[I_s|\mathcal{F}_s] + E\left[\int_s^t f(t')dB_{t'}|\mathcal{F}_s\right] = I_s$$

Άρα για $0 \leq t \leq T$

$$E[I_t|\mathcal{F}_s] = I_s$$

Και συνεπώς η στοχαστική διαδικασία I_t είναι μία διαδικασία Martingale.

4.3 Λήμμα Itô

Το λήμμα του Itô αποτελεί μία ταυτότητα η οποία χρησιμοποιείται στο στοχαστικό λογισμό κατά Itô, για την εύρεση της παραγώγου μίας συνάρτησης στοχαστικής διαδικασίας που εξαρτάται από το χρόνο. Στην ουσία αποτελεί το ανάλογο του τρόπου υπολογισμού μίας παραγώγου μέσω του κανόνα της αλυσίδας, χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα της σειράς Taylor μέχρι την παράγωγο δευτέρου βαθμού. Το λήμμα αυτό χρησιμοποιείται για τη δημιουργία της εξίσωσης Black-Scholes για την εύρεση της τιμής ενός δικαιώματος αλλά και στα χρηματοοικονομικά μαθηματικά γενικότερα.
Όπως το ολοκλήρωμα Riemann παίρνει μια συνάρτηση και δίνει έναν αριθμο στον $\mathbb{R}$ έτσι και το ολοκλήρωμα Itô παίρνει μια στο χαστική συνάρτηση και δίνει μια τυχαία μεταβλητή.
Πριν αναφέρουμε το λήμμα Itô, θα εισάγουμε μια νέα κατηγορία στοχαστικών διαδικασιών κάνοντας χρήση του στοχαστικού ολοκληρώματος του Itô.

Ορισμός 4.4 *(16) Μία διαδικασία Itô είναι μία στοχαστική διαδικασία X_t της μορφής*

$$X_t = X_0 + \int_0^t \alpha_s ds + \int_0^t \beta_s dB_s \tag{15}$$

,όπου ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες

$$\int_0^t \alpha_s ds < \infty \ , \ \int_0^t \beta_s^2 ds < \infty$$

Η εξίσωση (15) μπορεί να γραφτεί ως:

$$dX_t = \alpha_t dt + \beta_t dB_t \tag{16}$$

Θεώρημα 4.1 *(3)Λήμμα Itô 1*
Έστω μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη με συνεχή δεύτερη παράγωγο.
Τότε για κάθε $t > 0$ ισχύει:

$$f(B_t) = f(B_0) + \int_0^t f'(B_s)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s)dB_s \tag{17}$$

Θεώρημα 4.2 *(8)Λήμμα Itô 2*
Εστω μία στοχαστική διαδικασία Z_t που ορίζεται ως $Z_t = f(X_t, t)$, μία X_t για την οποία ισχύει

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t \tag{18}$$

και μία συνάρτηση $f \in C^{1,2}$.
Τότε η Z_t θα έχει στοχαστική διαφορική εξίσωση που θα δίνεται από τον τύπο:

$$dZ_t = df = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}dX + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(dX)^2 \tag{19}$$

και

$$\begin{aligned} &dt \cdot dt = 0 \\ &dt \cdot dB_t = 0 \\ &dB_t \cdot dB_t = dt \end{aligned} \tag{20}$$

Απόδειξη:
Για να αποδείξουμε το Λήμμα Itô χρησιμοποιούμε το ανάπτυγμα Taylor δευτέρας τάξης.

$$df = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}dX + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(dX)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(dt)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}(dtdX)$$

Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση (18) με dt, έχουμε ότι

$$dtdX_t = \mu X_t (dt)^2 + \sigma X_t dtdB_t$$

Υψώνοντας τη σχέση (18) στο τετράγωνο, προκύπτει ότι:

$$(dX_t)^2 = \mu^2 X_t^2 (dt)^2 + \sigma^2 X_t^2 (dB_t)^2 + 1\mu\sigma X_t^2 dtdB_t$$

Καθώς $dt \to 0$

$$\begin{aligned} &dt \cdot dt = 0 \\ &dt \cdot dB_t = 0 \\ &dB_t \cdot dB_t = dt \end{aligned} \tag{21}$$

Άρα

$$(dX_t)^2 = \sigma^2 X_t^2 dt$$

Συνεπώς

$$df = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}dX + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(dX)^2 \tag{22}$$

4.4 Γεωμετρική Κίνηση Brown

(9) Η Γεωμετρική κίνηση Brown είναι μία στοχαστική διαδικασία συνεχούς χρόνου, η οποία χρησιμοποιείται από τους οικονομολόγους ως απλό μοντέλο για τις τιμές μετοχών επειδή είναι παντού θετικές (με πιθανότητα 1) σε αντίθεση με την απλή κίνηση Brown. Επίσης η γεωμετρική κίνηση Brown παίζει σημαντικό ρόλο στο μοντέλο Black and Scholes το οποίο θα παρουσιάσουμε στο επόμενο κεφάλαιο.
Αρχικά καλό θα ήταν να παρουσιάσουμε κάποια από τα μειονεκτήματα της κίνησης Brown όσον αφορά την αγορά των μετοχών.
Κάποια από τα προβλήματα που αντιμετωπίζει η κίνηση Brown είναι τα εξής:

- Η κίνηση Brown μπορεί να πάρει και θετικές τιμές και αρνητικές ,κάτι που στις τιμές μετοχών δεν μπορεί να συμβεί, αφού η τιμή μιας μετοχής δεν μπορεί να παρουσιάζει αρνητικές τιμές.

- Η μέση τιμή και η διασπορά είναι ανεξάρτητες της τιμής της μετοχής. Πρακτικά όμως, αν η τιμή μιας μετοχής διπλασιαστεί θα περιμέναμε η μέση απόδοση και η τυπική απόκλιση απόδοσης να διπλασιαστεί και αυτή.

Τα προβλήματα αυτά μπορούν να ξεπεραστούν μέσω της γεωμετρικής κίνησης Brown.
Οι αλλαγές στις τιμές των μετοχών σε καθημερινή βάση εισάγει, ως ένα από τα πλέον βασικά χαρακτηριστικά τους, τη μεταβλητότητα, με αποτέλεσμα τη δυσκολία ης πρόβλεψής τους. Έτσι, αν κάποιος αγοράσει μια μετοχή, δεν θα λάβει εγγυημένη απόδοση. Αυτό, καθιστά την επένδυση σε μετοχές ως μία δραστηριότητα υψηλού κινδύνου.
Για μικρά χρονικά διαστήματα η τιμή του υποκείμενου τίτλου σε συνεχή χρόνο περιγράφεται από τη στοχαστική διαφορική εξίσωση:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t \tag{23}$$

,όπου B_t κίνηση Brown.
Η τελευταία στοχαστική διαφορική εξίσωση καλείται γεωμετρική κίνηση Brown και δηλώνει ότι η ποσοστιαία αλλαγή στη τιμή της μετοχής ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2.
Θέλουμε να δείξουμε ότι η λύση της εξίσωσης (23) δίνεται από τον τύπο:

$$S_t = S_0 exp\Big((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t\Big)$$

Για την απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε το λήμμα Itô στη συνάρτηση $Z_t = f(t, X_t) = lnS_t$.
Άρα

$$dZ_t = df = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}dX + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(dx)^2$$

Παρατηρούμε ότι:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0 \ , \ \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{S_t} \ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{1}{S_t^2}$$

Επιπλέον

$$\Big[dS_t\Big]^2 = dS_t \cdot dS_t = (\mu S_t dt + \sigma S_t dB_t) \cdot (\mu S_t dt + \sigma S_t dB_t) =$$
$$= (\mu S_t dt + \sigma S_t dB_t)^2$$

Γνωρίζουμε ότι:

$$dt \cdot dt = 0 \ , \ dt \cdot dB_t = 0$$

Επομένως έχουμε ότι:

$$(\mu S_t dt + \sigma S_t dB_t)^2 = \sigma^2 S_t^2 dt$$

Συνεπώς:

$$dZ_t = d(lnS_t) = \frac{1}{S_t} dS_t - \frac{1}{2S_t^2}[dS_t]^2 =$$
$$= \frac{1}{S_t}(\mu S_t dt + \sigma S_t dB_t) - \frac{1}{2}\sigma^2 dt = (\mu dt + \sigma dB_t) - \frac{1}{2}\sigma^2 dt$$

Άρα

$$dZ_t = (\mu dt + \sigma dB_t) - \frac{1}{2}\sigma^2 dt \tag{24}$$

και

$$Z_0 = lnS_0$$

Ολοκληρώνουμε τη διαφορική εξίσωση (24) και προκύπτει ότι:

$$\int_0^T dZ_t = \int_0^T \mu dt + \int_0^T \sigma dB_t - \int_0^T \frac{1}{2}\sigma^2 dt$$
$$\Rightarrow Z_T - Z_0 = \mu T + \sigma B_T - \frac{1}{2}\sigma^2 T$$
$$\Rightarrow Z_T = Z_0 + \Big(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\Big)T + \sigma B_T$$

Αντικαθιστούμε $Z_T = lnS_T$ και προκύπτει ότι:

$$lnS_T = lnS_0 + \Big(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\Big)T + \sigma B_T \Rightarrow lnS_T - lnS_0 = \Big(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\Big)T + \sigma B_T$$
$$\Rightarrow ln\frac{S_T}{S_0} = \Big(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\Big)T + \sigma B_T \Rightarrow S_T = S_0 exp\Big((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma B_T\Big)$$

Κάνουμε μία αλλαγή μεταβλητής, όπου T, βάζουμε t και προκύπτει ότι:

$$S_t = S_0 exp\Big((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t\Big)$$

που είναι η λύση της εξίσωσής μας και S_t είναι η **Γεωμετρική Κίνηση Brown**.

4.4.1 Μέση τιμή Γεωμετρικής Κίνησης Brown

(15) Για τον υπολογισμό της μέσης τιμής της Γεωμετρικής Κίνησης Brown χρησιμοποιώντας της κανονική κατανομή.

$$Y \sim N(0, \sigma^2 t)$$

$$E[exp(Yu)] = exp(\sigma^2 t \frac{u^2}{2})$$

και

$$\sigma B_t \sim N(0, \sigma^2 t)$$

Θα δείξουμε ότι:

$$E[S_0 exp\Big((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t\Big)] = S_0 exp(\mu t)$$

$$\begin{aligned}
E[S_0 exp\Big((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t\Big)] &= S_0 exp((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t) E[exp(\sigma B_t)] \\
&= S_0 exp((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t) E[exp(\sigma B_t u)]|_{u=1} \\
&= S_0 exp((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t) exp(\sigma^2 t \frac{u^2}{2})|_{u=1} \\
&= S_0 exp((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \frac{1}{2}\sigma^2 t) \\
&= S_0 exp(\mu t)
\end{aligned}$$

4.5 Εφαρμογές του Λήμματος Itô

Εφαρμογή 1:(19)
Χρησιμοποιώντας τη φόρμουλα Itô να δείξεις ότι $M_t - B_t^3 - 3\int_0^t B_s ds$ είναι Martingale.

Απόδειξη:
Ορίζουμε συνάρτηση

$$f(x) = x^3 \in C^2(\mathbb{R})$$

Τότε

$$f'(x) = 2x^2$$
$$f"(x) = 6x$$

εφαρμόζοντας το Λήμμα Itô προκύπτει ότι:

$$f(B_t) = f(B_0) + \int_0^t f'(B_s)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f"(B_s)ds$$

$$B_t^3 = 3\int_0^t B_s^2 dB_s + 3\int_0^t B_s ds$$

Τότε

$$M_t = B_t^3 - 3\int_0^t B_s ds = 3\int_0^t B_s^2 dB_s$$

Για να δείξουμε ότι είναι Martingale αρκεί να δείξουμε ότι

$$E\Big(\int_0^t (B_s^2)^2 ds\Big) = E\Big(\int_0^t B_s^4 ds\Big) = \int_0^t 3s^2 ds < \infty$$

Εφαρμογή 2:(19)
Ορίζουμε $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ χώρο πιθανότητας , $(\mathcal{F}_t)_{t\geq t}$ διήθηση και $B = (B_t)_{t\geq 0}$ κίνηση Brown.
Θέλουμε να δείξουμε ότι η διαδικασία Y που ορίζεται ως

$$Y_t = t^2 B_t^3 \ , \ t \geq 0$$

ικανοποιεί τη στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$dY_t = \Big(2\frac{Y_t}{t} + 3(t^4 Y_t)^{1/3}\Big) + 3(tY_t)^{2/3} dB_t \ , \ Y_0 = 0 \tag{25}$$

Απόδειξη:
Έστω η συνάρτηση $f(t,x) = t^2 x^3$.
Από τη φόρμουλα του Itô προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} dY_t &= \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} dX + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(dX)^2 \\ &= 2tB_t^3 dt + 3t^2 B_t^2 dB_t + \frac{1}{2} 6t^2 B_t dt \\ &= (2tB_t^3 + 3t^2 B_t) dt + 3t^2 B_t^2 dB_t \end{aligned} \tag{26}$$

Εξισώνουμε τους συντελεστές των εξισώσεων (25), (26)

$$2tB_t^3 = 2\frac{Y_t}{t}$$

$$3t^2 B_t = 3(t^4 Y_t)^{\frac{1}{3}}$$

$$3t^2 B_t^2 = 3(tY_t)^{\frac{2}{3}}$$

και προκύπτει ότι η

$$Y_t = t^2 B_t^3 \ , \ t \geq 0$$

ικανοποιεί τη στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$dY_t = \Big(2\frac{Y_t}{t} + 3(t^4 Y_t)^{1/3}\Big) + 3(tY_t)^{2/3} dB_t$$

.

5 Το μοντέλο Black and Scholes

5.1 Εισαγωγή σε χρηματοοικονομικές έννοιες

(18) Σε αυτό το κεφάλαιο θα δώσουμε κάποιους ορισμούς που είναι απαραίτητα για την πλήρη κατανόηση του κυρίως θέματός μας που θα παρουσιάσουμε στο επόμενο κεφάλαιο.

Δικαίωμα Προαίρεσης:
Δικαίωμα προαίρεσης ορίζεται ως μία συμφωνία η οποία δίνει στον αγοραστή το δικαίωμα αλλά όχι την υποχρέωση να αγοράσει ή να πουλήσει κάποιο υποκείμενο αγαθό σε μία καθορισμένη τιμή, σε μία συγκεκριμένη μελλοντική ημερομηνία ή κατά τη διάρκεια μίας χρονικής περιόδου.

Τιμή εξάσκησης:
Σο δικαίωμα που παραχωρείται από τον πωλητή ενός δικαιώματος να αγοράσει ή να πουλήσει ο αγοραστής του ένα προϊόν (το υποκείμενο προϊόν) σε μία προκαθορισμένη τιμή ονομάζεται τιμή εξασκήσεως. Συνήθως συμβολίζεται με K.

Χρόνος Εξάσκησης:
Χρόνος εξάσκησης είναι ο προκαθορισμένος χρόνος εξάσκησης του δικαιώματος από τον αγοραστή του.
Ο χρόνος εξάσκησης καθορίζεται ανάλογα με τι είδος δικαίωμα έχει ο κάτοχός του.

- Το Ευρωπαϊκό δικαίωμα δίνει τη δυνατότητα στον κάτοχο του δικαιώματος να πραγματοποιήσει τη συναλλαγή μόνο τη χρονική στιγμή λήξης του δικαιώματος.
- Το Αμερικάνικο δικαίωμα το οποίο δίνει τη δυνατότητα στον κάτοχο του δικαιώματος να πραγματοποιήσει τη συναλλαγή οποιαδήποτε χρονική στιγμή μέσα στα όρια ενός καθορισμένου χρονικού διαστήματος, μέχρι και τη λήξη του.

Συνήθως ο χρόνος εξάσκησης συμβολίζεται με T.
Στο επόμενο κεφάλαιο θα ασχοληθούμε μόνο με Ευρωπαϊκό δικαίωμα.

Είδη Δικαιωμάτων:
Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως ο χρονικός περιορισμός άσκησης ή μη του δικαιώματος όπως αυτός περιέχεται στον ορισμό, αποτελεί ένα σημαντικό χαρακτηριστικό στοιχείο διαχωρισμού του δικαιώματος προαίρεσης σε δύο κατηγορίες. Επιπλέον ανάλογα με το αν ο επενδυτής προβαίνει σε κίνηση αγοράς ή πώλησης ενός δικαιώματος διακρίνουμε τις εξής δύο κατηγορίες με τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:

- Ευρωπαϊκό δικαίωμα Αγοράς
- Ευρωπαϊκό δικαίωμα Πώλησης
- Αμερικανικό δικαίωμα Αγοράς
- Αμερικανικό δικαίωμα Πώλησης

Εμείς θα ασχοληθούμε με το Ευρωπαϊκό δικαίωμα Αγοράς.
Ένα Ευρωπαϊκό διακίωμα αγοράς δίνει στον αγοραστή το δικαίωμα αλλά όχι την υποχρέωση να αγοράσει μία ποσότητα ενός περιουσιακού στοιχείου ή υποκείμενου τίτλου σε μία προσυμφωνημένη τιμή, την τιμή εξάσκησης K και, σε μία προσυμφωνημένη χρονική στιγμή, στη χρονική στιγμή της λήξης του δικαιώματος.

Αν η τιμή του υποκείμενου τίτλου τη χρονική στιγμή , έστω S_T αυτή, είναι μεγαλύτερη της τιμής εξάσκησης K τότε ο αγοραστής θα εξασκήσει το δικαίωμα, δηλαδή θα αγοράσει στην τιμή εξάσκησης , θα πουλήσει αμέσως στη τιμή και θα εισπράξει το ποσό $(S_T - K)$.
Αν η τιμή του υποκείμενου τίτλου τη χρονική στιγμή T, S_T δηλαδή, είναι μικρότερη ή ίση της τιμής εξάσκησης K, τότε ο αγοραστής φυσικά και δεν θα εξασκήσει το δικαίωμα, αφού δεν θα έχει κανένα κέρδος.

Αγορά Δικαιώματος Αγοράς:
Στην περίπτωση που ο επενδυτής μας προβλέπει ανοδική τάση στην τιμή της μετοχής XYZ τους επόμενους μήνες και, δεν επιθυμεί να ρισκάρει την αγορά μετοχών, τότε έχει τη δυνατότητα να αγοράσει ένα δικαίωμα αγοράς επί της μετοχής αυτής. Ο επενδυτής αυτός αγοράζει στις 5 Σεπτεμβρίου ένα δικαίωμα αγοράς (call option) λήξης Νοεμβρίου επί της μετοχής XYZ, με τιμή άσκησης (strike price) $K = 40$ ευρώ καταβάλλοντας αντίτιμο C. Είμαστε σε θέση τώρα να διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Στην περίπτωση που η χρηματιστηριακή τιμή της μετοχής XYZ την ημερομηνία της λήξης του δικαιώματος ανέβει στα 60 ευρώ, δηλαδή σε τιμή μεγαλύτερη της τιμής εξάσκησης, τότε ο αγοραστής του δικαιώματος αγοράς προφανώς και θα εξασκήσει το δικαίωμα του αγοράζοντας στη συμφωνημένη τιμή των 40 ευρώ. Τότε, ο αγοραστής θα έχει κέρδος ίσο με (60-40) ευρώ ανά μετοχή, μείον το ασφάλιστρο C με το οποίο αγόρασε το δικαίωμα από τον πωλητή, διότι θεωρητικά μπορεί να πουλήσει αμέσως τις μετοχές XYZ που αγόρασε με 40 ευρώ στην τιμή των 60 ευρώ.
- Αντίθετα, αν η χρηματιστηριακή τιμή της μετοχής XYZ την ημερομηνία της λήξης του δικαιώματος είναι 30ευρώ, δηλαδή σε τιμή μικρότερη της

τιμής εξάσκησης, τότε ο αγοραστής του δικαιώματος αγοράς προφανώς και δεν θα εξασκήσει το δικαίωμα, αφού έχει τη δυνατότητα να αγοράσει φθηνότερα από την αγορά, δηλαδή στην τιμή των 30 ευρώ. Σε αυτή την περίπτωση ο αγοραστής όχι μόνο δεν θα έχει κάποιο κέρδος αλλά αντίθετα θα έχει ζημία ίση με το ασφάλιστρο που πλήρωσε για την απόκτηση του δικαιώματος.

Γενικά αν συμβολίσουμε με S_T την αξία της μετοχής XYZ στο χρόνο εξάσκησης T, τότε το κέρδος από τη χρήση του δικαιώματος αγοράς για τον αγοραστή θα είναι:

$$(S_T - K)_+ = max\Big\{S_T - K\Big\} = \begin{cases} S_T - K, & S_T > K \\ 0, & S_T \leq K \end{cases}$$

ενώ αν ληφθεί υπόψη και το ασφάλιστρο C, θα είναι $(S_T - K)_+ - C$.

Πώληση Δικαιώματος Αγοράς:
Θεωρούμε τώρα την περίπτωση στην οποία ο επενδυτής μας είναι κάτοχος ενός αριθμού μετοχών της εταιρίας XYZ και, ότι επιπλέον εκτιμά καθοδική τάση στην τιμή της συγκεκριμένης μετοχής μέσα στους επόμενους μήνες. Προκειμένου να προστατεύσει ή και να αυξήσει την απόδοση του χαρτοφυλακίου του τη συγκεκριμένη περίοδο, αποφασίζει να πωλήσει ένα δικαίωμα αγοράς λήξης Νοεμβρίου επί της μετοχής XYZ με τιμή άσκησης $K = 40$ ευρώ. Από την κίνηση αυτή θα εισπράξει ασφάλιστρο C.
Είμαστε σε θέση τώρα να διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Στην περίπτωση που η χρηματιστηριακή τιμή της μετοχής XYZ την ημερομηνία της λήξης του δικαιώματος είναι μικρότερη των 40 ευρώ, τότε ο αγοραστής του δικαιώματος δεν θα εξασκήσει το δικαίωμά του όπως είναι λογικό και, έτσι ο πωλητής (επενδυτής μας) θα έχει κερδίσει το ασφάλιστρο C.

- Στην περίπτωση που η τιμή της μετοχής XYZ αυξηθεί πάνω από 40 ευρώ, (για παράδειγμα 60 ευρώ), τότε ο αγοραστής του δικαιώματος θα αποφασίσει να εξασκήσει το δικαίωμά του και ο πωλητής (επενδυτής μας) θα υποχρεωθεί να πουλήσει στην τιμή των 40 ευρώ. Έτσι, θα χάσει (60-40) ευρώ, αφού θα μπορούσε να είχε πουλήσει τις μετοχές που έχει στην κατοχή του σε τιμές αγοράς που είναι διαμορφωμένη στην τιμή των 60 αντί των 40 που υποχρεώνεται τώρα.

Γενικά αν συμβολίσουμε με S_T την χρηματιστηριακή τιμή της μετοχής XYZ στο χρόνο εξάσκησης T, τότε το κέρδος από τη χρήση του δικαιώματος αγοράς για τον πωλητή θα είναι:

$$-(S_T - K)_+ = -max\Big\{S_T - K\Big\} = \begin{cases} K - S_T, & S_T > K \\ 0, & S_T \leq K \end{cases}$$

ενώ αν υπολογίσουμε και το ασφάλιστρο μαζί, θα είναι $C - (S_T - K)_+$.

Μεταβλητότητα:
Πρόκειται για μία παράμετρο που αντανακλά την ταχύτητα με την οποία μεταβάλλεται η τιμή του υποκείμενου τίτλου το οποίο αναφέρεται στο δικαίωμα. Αποτελεί μία στατιστική συνάρτηση και διαδραματίζει πολύ σημαντικό ρόλο για τον υπολογισμό της τιμής του δικαιώματος.
Γενικά η τιμή ενός δικαιώματος θα είναι υψηλότερη όσο μεγαλύτερη είναι η διακύμανση των τιμών του υποκείμενου τίτλου. Για το λόγο αυτό, είναι συχνό η διαπραγμάτευση και η σύναψη της συμφωνίας ενός δικαιώματος να πραγματοποιείται σε όρους διακυμαντότητας.

Πλέον είματε έτοιμοι να παρουσιάσουμε το επόμενο και σημαντικότερο κεφάλαιο της εργασίας, που είναι η ανάπτυξη του μοντέλου των Black and Scholes.

5.2 Η εξίσωση Black and Scholes

(16)

5.3 Εισαγωγή

Σε αυτή την ενότητα θα ασχοληθούμε με τη μελέτη του μαθηματικού μοντέλου που εφηύβραν οι Fisher Black, Myron Scholes και Robert Merton για την τιμολόγηση κυρίως, δικαιωμάτων προαίρεσης Ευρωπαϊκού τύπου. Το μοντέλο ύσταται κάτω από συγκεκριμένες υποθέσεις. Οπότε αφού πρώτα ορίσουμε τις υποθέσεις του μοντέλου, στη συνέχεια θα δείξουμε βήμα-βήμα πως από μία απλή αγορά μπορούμε να κατασκευάσουμε την εξίσωση Black and Scholes. Στη συνέχεια θα λύσουμε την εξίσωση και θα βρούμε τον τελικό τύπο που χρησιμοποιείται για την τιμολόγηση των Ευρωπαϊκών δικαιωμάτων.

5.4 Σκοπός του μοντέλου

Η βασική οικονομική γνώση πίσω από την εξίσωση είναι ότι μπορεί κανείς να αντισταθμίσει τέλεια την επιλογή αγοράζοντας και πωλώντας το υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο με τον σωστό τρόπο και κατά συνέπεια ¨εξαλείφοντας τον κίνδυνο¨. Ο σκοπός αυτής της εργασίας είναι να εξηγήσει το μαθηματικό υπόβαθρο της εξίσωσης Black-Scholes, τις υποκείμενες υποθέσεις και τις επιπτώσεις.

5.5 Υποθέσεις του μοντέλου

Το μοντέλο Black-Scholes υποθέτει ότι η αγορά αποτελείται από τουλάχιστον ένα ¨επικίνδυνο' περιουσιακό στοιχείο(risky asset), το οποίο συνήθως ονομάζεται μετοχικό κεφάλαιο, και ένα μη ¨επικίδυνο' περιουσιακό στοιχείο(riskless asset), συνήθως αποκαλούμενο τραπεζικός λογαριασμός.
Το μοντέλο αφορά κυρίως δικαιώματα Ευρωπαϊκού τύπου.
Οι υποθέσεις σχετικά με τα περιουσιακά στοιχεία είναι οι εξής:

- Τα επιτόκια είναι σταθερά και γνωστά στο χρόνο.
- Η μετοχή που ενέχεται στο δικαίωμα δεν αποδίδει μερίσματα μέχρι τη λήξη του δικαιώματος.
- Η τιμή της μετοχής ακολουθεί έναν τυχαίο περίπατο σε συνεχή χρόνο με σ ποσοστό διακύμανσης ανάλογο με το τετράγωνο της τιμής της μετοχής. Έτσι, η κατανομή των πιθανών τιμών των μετοχών στο τέλος οποιουδήποτε πεπερασμένου διαστήματος είναι φυσιολογική και ο ρυθμός διακύμανσης της απόδοσης του αποθέματος είναι σταθερός.

- Η μεταβλητότητα ,σ, δηλαδή το μέτρο που δείχνει κατά πόσο η τιμή της μετοχής θα κινηθεί είτε ανοδικά είτε καθοδικά, παραμένει σταθερή καθ' όλη τη διάρκεια ζωής του δικαιώματος και θεωρείται γνωστή από τους επενδυτές.

- Η τιμή του μετοχικού κεφαλαίου ακολουθεί τη γεωμετρική κίνηση Brown.

Οι υποθέσεις σχετικά με την αγορά είναι οι εξής:

- Δεν υπάρχει ευκαιρία arbitrage,δηλαδή, δεν υπάρχει τρόπος να υπάρξει κέρδος χωρίς κίνδυνο.

- Η αγορά είναι αποτελεσματική. Δηλαδή οποιαδήποτε χρονική στιγμή μπορεί να γίνει οποιαδήποτε πράξη αγοράς ή πώλησης και με οποιαδήποτε ποσότητα του εκάστοτε υποκείμενου τίτλου.

- Στο μοντέλο αυτό υποθέτουμε πως δεν υπάρχουν κόστη συναλλαγής κατά την αγορά ή πώληση του περιουσιακού στοιχείου ή του δικαιώματος. Επίσης δεν υπάρχουν όρια ως προς τις διαπραγματεύσεις και δεν υφίσταται καμία μορφή φορολογίας.

5.6 Μία απλή αγορά

Έστω μία χρηματοοικονομική αγορά εξεταζόμενη στο χρονικό διάστημα $[0, T]$ για κάποιο δεδομένο T.
Συμβολίζουμε με Ω, το σύνολο των δυνατών καταστάσεων της αγοράς στο χρονικό διάστημα $[0, T]$ και με $\mathcal{F}$ το χώρο ενδεχομένων του.
Η κίνηση Brown $B_t, t \in [0, T]$ ορίζεται στο χώρο $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Θεωρώ μία αγορά,η οποία περιλαμβάνει:

1. ***Έναν τραπεζικό λογαριασμό(riskless asset)***,στον οποίο γίνεται αρχική κατάθεση χρημάτων β_0.
   Για τον τραπεζικό λογαριασμό πραγματοποιείται συνεχής ανατοκισμός.
   Η αξία του λογαριασμού εκφράζεται ως:

$$d\beta_t = r\beta_t dt \Rightarrow \frac{d\beta_t}{\beta_t} = rdt \Rightarrow \beta_t = \beta_0 e^{rt}, t > 0, r > 0$$

2. ***Μία μετοχή(risky asset)***, η οποία στο χρόνο t έχει αξία S_t και περιγράφεται από τη στοχαστική διαφορική εξίσωση:

$$dS_t = S_t \mu dt + S_t \sigma dB_t$$

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dB_t \tag{27}$$

Η σχετική αλλαγή της τιμής S_t σε ένα μικρό χρονικό διάστημα $[t, t+dt]$ οφείλεται στη μέση ποσοστιαία μεταβολή της τιμής της μετοχής (μdt) και στην τυχαία μεταβολή (σdB_t) ,την οποία δε γνωρίζουμε μέχρι την στιγμή t.

Για να βρούμε τη λύση της (27) , εφαρμόζω Itô στη συνάρτηση:

$$Y_t = \log S_t = f(t, X_t)$$

$$dY_t = df = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(dx)^2$$

Γνωρίζουμε ότι:

$$\frac{\theta f}{\theta t} = 0 \quad , \ \frac{\theta f}{\theta x} = \frac{1}{S_t} \quad , \ \frac{\theta^2 f}{\theta x^2} = \frac{-1}{S_t^2}$$

Επίσης

$$[dS_t]^2 = dS_t dS_t = (\mu S_t dt + \sigma S_t dB_t)(\mu S_t dt + \sigma S_t dB_t)$$

$$= (\mu S_t dt + \sigma S_t dB_t)^2 = \mu^2 S_t^2 (dt)^2 + 2\mu\sigma S_t^2 dt dB_t + \sigma^2 S_t^2 (dB_t)^2 = \sigma^2 S_t^2 dt$$

,αφού

$$dt \cdot dt = 0$$

και

$$dt dW_t = 0$$

Άρα

$$\begin{aligned} d[\log S_t] = dY_t &= \frac{1}{S_t}dS_t - \frac{1}{2}\frac{1}{S_t^2}[dS_t]^2 \\ &= \frac{1}{S_t}dS_t - \frac{1}{2}\frac{1}{S_t^2}\sigma^2 S_t^2 dt \\ &= \frac{1}{S_t}(\mu S_t dt + \sigma S_t dB_t) - \frac{1}{2}\sigma^2 dt \end{aligned}$$

Άρα

$$dY_t = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma dB_t$$

Ολοκληρώνω κκαι προκύπτει:

$$\int_0^t dY_t = \int_0^t (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)dT + \int_0^t \sigma dB_t$$

$$Y_t - Y_0 = \mu t + \sigma B_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t$$

$$Y_t = Y_0 + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t$$

$$\ln S_t = \ln S_0 + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t$$

$$\ln S_t - \ln S_0 = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t$$

$$\ln \frac{S_t}{S_0} = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t \tag{28}$$

$$S_t = S_0 \cdot exp[(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t], \forall t > 0$$

Από τη (28) συμπεραίνουμε ότι:

$$\ln \frac{S_t}{S_0} \sim N[(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t, \sigma^2 t]$$

$$\ln S_t - \ln S_0 \sim N[(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t, \sigma^2 t]$$

$$\ln S_t \sim N[\ln S_0 + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t, \sigma^2 t]$$

Δηλαδή η τιμή της μετοχής ακολουθεί τη γεωμετρική κίνηση Brown.
Ο όρος dB_t μπορεί να πάρει και αρνητικές τιμές, όμως μία μετοχή το πολύ να μηδενισθεί. Ποτέ δεν θα πάρει αρνητική τιμή.
Επομένως $S_t > 0$ για όλα τα t και $S_0 > 0$.

3. ***Ένα δικαίωμα αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου με υποκείμενο τίτλο μία μετοχή*** .

Ένα δικαίωμα αγοράς ευρωπαϊκού τύπου έχει συνάρτηση αποπληρωμής πάντα στο τέλος της καθορισμένης χρονικής περιόδου,ίση με:

$$max(S_t - K, 0) = f(x) = \begin{cases} S_t - K, & S_t > K \\ 0, & S_t \leq K \end{cases}$$

,όπου S_t : η τιμή της μετοχής
και K : η τιμή εξάσκησης
Καθώς ο χρόνος που απομένει μέχρι τη λήξη του δικαιώματος μειώνεται, αυτό έχει σαν αποτέλεσμα τη μείωση της αξίας της μετοχής και ως συνέπεια τη μεταβολή της τιμής της μετοχής.
Γράφουμε την τιμή του δικαιώματος ως:

$$V_t = V(S_t, t)$$

5.7 Παραγωγή της εξίσωσης

Έστω ένα αναπαράγον χαρτοφυλάκιο που η σύνθεσή του είναι (a_t, b_t)

- a_t : μετοχές
- b_t : ομόλογα

Για κάθε χρονική στιγμή $t \in [0, T]$ η τιμή του χαρτοφυλακίου είναι ίση με την τιμή του δικαιώματος εκείνη τη στιγμή.
Συμβολίζω $V(S_t, t)$την τιμή του δικαιώματος και r την τιμή του επιτοκίου.

$$V(S_t, t) = a_t S_t + b_t \beta_t$$

$$\Rightarrow b_t = \frac{V(S_t, t) - a_t S_t}{\beta_t} \tag{29}$$

Γνωρίζουμε ότι η λύση μιας στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης επιτυγχάνεται με εφαρμογή του λήμματος Itô και είναι της μορφής:

$$df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (dx)^2$$

Εφαρμόζω λήμμα Itô για την τιμή του δικαιώματος.

$$\begin{aligned} dV(S_t, t) &= \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial x} dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} (dS_t)^2 = \\ &= \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial x} (\mu S_t dt + \sigma S_t dB_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \sigma^2 S_t^2 dt \\ &= (\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S_t \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}) dt + \sigma S_t \frac{\partial V}{\partial x} dB_t \end{aligned}$$

Επίσης:

$$dV(S_t, t) = \alpha_t dS_t + b_t d\beta_t = (a_t \mu S_t + r b_t \beta_t) dt + a_t \sigma S_t dB_t$$

,όπου

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t$$

και

$$d\beta_t = r\beta_t dt$$

που ισχύει αν:

$$\alpha_t \sigma S_t = \sigma S_t \frac{\partial V}{\partial x} \Rightarrow a_t = \frac{\partial V}{\partial x} \tag{30}$$

$$a_t \mu S_t + r b_t \beta_t = \frac{\partial V}{\partial t} + \mu S_t \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$$

Αντικαθιστώ τις (29) , (30) και προκύπτει:

$$\frac{\partial V}{\partial x}\mu S_t + r\beta_t(\frac{V(S_t,t) - S_t\frac{\partial V}{\partial x}}{\beta_t}) = \frac{\partial V}{\partial t} + \mu S_t \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + rS_t \frac{\partial V}{\partial x} - rV = 0 \tag{31}$$

Η συνάρτηση $V(S,t)$ μοντελοποιεί την αξία ενός δικαιώματος προαίρεσης, στη συγκεκριμένη περίπτωση δικαιώματος αγοράς. Η μεταβλητή S_t αναπαριστά την τιμή του υποκείμενου τίτλου,πχ.μετοχής και η μεταβλητή t, το χρόνο.
Η λύση $V(S,t)$ εξαρτάται από τον τρέχοντα χρόνο, την τρέχουσα τιμή της μετοχής και τη συνοριακή συνθήκη που καθορίζεται από τον τύπο του δικαιώματος προαίρεσης και υπολογίζεται παρακάτω.
Στην περίπτωση ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος, στα οποία η εξάσκηση του συμβολαίου επιτρέπεται μόνο στη λήξη του, η εξίσωση έχει αναλυτική λύση. Θα δούμε αναλυτικά παρακάτω τη λύση ενός δικαιώματος αγοράς.
Η διαφορική εξίσωση που προκύπτει δεν εμπεριέχει καμία μεταβλητή, η οποία να επηρεάζεται από τις προτιμήσεις των επενδυτών ως προς τον κίνδυνο. Έτσι όταν οι επενδυτές είναι ουδέτεροι ως προς τον κίνδυνο, περιμένουμε την απόδοση όλων των χρεογράφων να είναι ίση με το επιτόκιο δίχως κίνδυνο ,r, ενώ η παρούσα αξία οποιασδήποτε ταμειακής ροής μπορεί να προσδιοριστεί προεξοφλώντας την αναμενόμενη αξία της μέσω του επιτοκίου δίχως κίνδυνο. Η τεχνική αυτή στον τομέα της χρηματοοικονομικής είναι γνωστή ως ουδέτερη ως προς τον κίνδυνο αποτίμηση.
Οι αρχικές συνθήκες είναι:

1. $$V(S,t) \sim S$$

   όταν $S \to \infty$ που είναι λογικό, αφού για πολύ μεγάλες τιμές χρεογράφων, η τιμή δικαιώματος είναι περίπου S. Δηλαδή όσο η τιμή μιας μετοχής ανεβαίνει, τόσο πιο πολύτιμο θα είναι δικαίωμα αγοράς σε μία συγκεκριμένη συνοριακή τιμή.

2.
$$V(0,t) = 0$$
,δηλαδή κάθε φορά που η τιμή της μετοχής είναι 0, η τιμή του δικαιώματος με τιμή εξάσκησης K, είναι επίσης 0. Ουσιαστικά ότι συμβόλαιο αγοράς αι να έχουμε είναι άχρηστο, εφόσον μπορούμε να πάρουμε δωρεάν όσες μετοχές θέλουμε, γι αυτό το λόγο κι όλας η αξία ενός συμβολαίου αγοράς σε αυτή την περίπτωση είναι επίσης μηδέν οποιαδήποτε χρονική στιγμή. και

3.
$$V(S,0) = max(S-K,0)$$
Η εξίσωση (31) είναι γνωστή ως μερική διαφορική εξίσωση των Black and Scholes.

Η τιμή V που θέλουμε να υπολογίσουμε είναι η τιμή του δικαιώματος αγοράς. Από την εξίσωση (31) παρατηρούμε ότι:

1. Οι όροι
$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \frac{\partial V}{\partial x}$$
είναι πολλαπλασιαμένοι με την ανεξάρτητη μεταβλητή S,οπότε η εξίσωση δεν είναι εξίσωση σταθερών συντελεστών.

2. Τα δεδομένα του προβλήματος δίδονται στον τελικό χρόνο T αντί την $t = 0$, σύμφωνα με την παραβολική παραβολική μορφή της εξίσωσης.

Συνοψίζοντας, η εξίσωση Black and Scholes :

- ακολουθεί τη γεωμετρική κίνηση Brown
- στηρίζεται στην υπόθεση της μη ύπαρξης κέρδους χωρίς κίνδυνο

5.8 Υπολογισμός Τιμής Ευρωπαϊκού Δικαιώματος Μέσω της Μ.Δ.Ε. Των Black and Scholes

(22)
Επιλύουμε την εξίσωση Black and Scholes για την αξία ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος με συγκεκριμένες αλλαγές μεταβλητών έτσι ώστε να ανάγουμε την εξίσωση Black and Scholes στην εξίσωση θερμότητας.
Η εξίσωση θερμότητας έχει μία συγκεκριμένη formula για τη λύση της που προσαρμόζεται ανάλογα με τις αρχικές συνθήκες που έχουμε και είναι στενά συνδεδεμένη με τη διαδρομή ενός τυχαίου περιπατητή (random walker).

Ακολουθούμε αυτή τη διαδικασία γιατί σκοπός μας είναι να λύσουμε πολύ πιο εύκολα την εξίσωση των Black and Scholes.
Παρατηρούμε ότι η δεύτερη παράγωγος της εξίσωσής μας έχει αντίθετο πρόσιμο από αυτό της θερμότητας, άρα από αυτό συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση έχει παραβολική μορφή προς τα πίσω και θα εκφραζεται από αδιάστατες ποσότητες.
Με τη σωστή αλλαγή μεταβλητών η εξίσωση Black and Scholes θα γίνει γραμμικη παραβολική εξίσωση.
Έστω:

$$K : \text{τιμή εξάσκησης} , \sigma : \text{μεταβλητότητα} , r : \text{επιτόκιο άνευ κινδύνου}$$

Θέτουμε:

$$t = T - \frac{\tau}{\frac{1}{2}\sigma^2} \tag{32}$$

$$S = Ke^x \tag{33}$$

$$V(S,t) = Ku(x,\tau) \tag{34}$$

Για την παραπάνω αλλαγή μεταβλητών, η επιλογή του t(χρόνου) έγινε έτσι ώστε το πρόβλημα από παραβολικό ¨προς τα πίσω' να γίνει παραβολικό ¨προς τα μπρος' και η επιλογή του S είναι γνωστή από την επίλυση εξισώσεων Euler.
Επιπλέον, οι μεταβλητές έχουν κλιμακωθεί προσεκτικά ώστε η μετασχηματισμένη εξίσωση να εκφράζεται σε αδιάστατες ποσότητες.

$$\tau = \frac{\sigma^2}{2}(T-t)$$

$$x = \log(\frac{S}{K})$$

Οι πρώτες παράγωγοι γράφονται ως:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = K\frac{\partial u}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{dt} = K\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\sigma^2}{2}$$

και

$$\frac{\partial V}{\partial S} = K\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dS} = K\frac{\partial u}{\partial x}\frac{1}{S}$$

Η δεύτερη παράγωγος γράφεται ως:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = \frac{\partial}{\partial S}(\frac{\partial V}{\partial S}) = \frac{\partial}{\partial S}(K\frac{\partial u}{\partial x}\frac{1}{S}) = K\frac{\partial u}{\partial x}(\frac{-1}{S^2}) + \frac{K}{S}\frac{\partial}{\partial S}(\frac{\partial u}{\partial x})$$

$$= \frac{-K}{S^2}\frac{\partial u}{\partial x} + K\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial x})\frac{dx}{dS}\frac{1}{S}$$

$$= \frac{-K}{S^2}\frac{\partial u}{\partial x} + K\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{1}{S^2}$$

Η Μ.Δ.Ε. έχει άπειρες λύσεις ανάλογα με τις οριακές συνθήκες που θα τεθούν. Στην περίπτωση του δικαιώματος αγοράς, έχουμε:

$$V(S,T) = max(S-K,0) = max(Ke^x - K, 0)$$

όμως

$$V(S,T) = Ku(x,0)$$

Άρα

$$u(x,0) = max(e^x - 1, 0)$$

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση (31) και προκύπτει:

$$K\frac{\partial u}{\partial \tau}(\frac{-\sigma^2}{2}) + \frac{\sigma^2}{2}S^2(K\frac{\partial u}{\partial x}(\frac{-1}{S^2}) + K\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{1}{S^2}) + rS(K\frac{\partial u}{\partial x}\frac{1}{S}) - rKu = 0$$

$$\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{-\sigma^2}{2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + r\frac{\partial u}{\partial x} - ru \Rightarrow$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = -\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2r}{\sigma^2}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2r}{\sigma^2}u$$

Θέτω

$$K = \frac{2r}{\sigma^2}$$

και προκύπτει:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (K-1)\frac{\partial u}{\partial x} - Ku \tag{35}$$

Υπάρχει μόνο μία αδιάστατη παράμετρος K για τον υπολογισμό του επιτοκίου (χωρίς κίνδυνο) ως πολλαπλασιασμό του σ^2 ως προς το χρόνο λήξης, ενώ πριν είχαμε τις παραμέτρους K, T, σ^2, r.

Η εξίσωση έχει σταθερούς συντελεστές και ορίζεται στο διάστημα $-\infty < x < \infty$ και $0 < S < \infty$, που προκύπτει από την αλλαγή μεταβλητών

$S = Ke^x$.

Μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση απλοποιώντας περαιτέρω την εξίσωση, αλλάζοντας την κλίμακα εξαρτώμενης μεταβλητής.

$$u = e^{\alpha x + \beta \tau} v(x, \tau) \tag{36}$$

Θα καθορίσουμε αργότερα τις μεταβλητές α,β.

$$u_\tau = \beta e^{\alpha x + \beta \tau} v + e^{\alpha x + \beta \tau} v_\tau$$

$$u_x = \alpha e^{\alpha x + \beta \tau} v + e^{\alpha x + \beta \tau} v_x$$

$$u_{xx} = \alpha^2 e^{\alpha x + \beta \tau} v + 2\alpha e^{\alpha x + \beta \tau} v_x + e^{\alpha x + \beta \tau} v_{xx}$$

Αντικαθιστούμε στην (35) και προκύπτει:

$$\beta e^{\alpha x + \beta \tau} v + e^{\alpha x + \beta \tau} v_\tau = \alpha^2 e^{\alpha x + \beta \tau} v + 2\alpha e^{\alpha x + \beta \tau} v_x + e^{\alpha x + \beta \tau} v_{xx} +$$

$$+ e^{\alpha x + \beta \tau} (\alpha v + v_x - k e^{\alpha x + \beta \tau} v)$$

$$\beta v + v_t = \alpha^2 v + 2a v_x + v_{xx} + (k-1)(\alpha v + v_x) - kv$$

$$v_t = v_{xx} + (2\alpha + k - 1) v_x + (\alpha^2 + (k-1)\alpha - k - \beta) v$$

Επιλέγουμε:

$$\alpha = -\frac{-k-1}{2} \tag{37}$$

τέτοιο ώστε ο συντελεστης v_x να είναι 0
και

$$\beta = \alpha^2 + (k-1)\alpha - k \Rightarrow$$

$$\beta = -\frac{(k+1)^2}{4} \tag{38}$$

τέτοιο ώστε ο συντελεστής v να είναι μηδέν.
Άρα

$$v_\tau = v_{xx}$$

Το μόνο που μένει είναι να μετατρέψουμε την αρχική συνθήκη.

$$v(x, 0) = exp(-(-\frac{k-1}{2} x - (-\frac{(k+1)^2}{4}) \cdot 0)) u(x, 0) =$$

$$= exp(\frac{k-1}{2} x) \cdot max(e^x - 1, 0) =$$

$$= max(exp(\frac{k+1}{2}x) - exp(\frac{k-1}{2}x), 0)$$

όπου

$$k = \frac{2r}{\sigma^2}$$

Παρατηρούμε ότι η εξίσωση αυτή είναι αυστηρά θετική, όταν το x είναι αυστηρά θετικό , αλλιώς είναι ίσο με μηδέν.

Δηλαδή

$$v_0(x) = \begin{cases} > 0, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

Συνεπώς η σχέση (36) θα γίνει:

$$u = exp(-\frac{k-1}{2}x + -\frac{(k+1)^2}{4}\tau) \cdot v(x,\tau) \tag{39}$$

και η σχέση (34):

$$V(S,t) = K \cdot u(x,\tau) = K \cdot exp(-\frac{k-1}{2}x + -\frac{(k+1)^2}{4}\tau) \cdot v(x,\tau) \tag{40}$$

Η εξίσωση Black and Scholes με τις παραπάνω αλλαγές μεταβλητών, ανάγεται στο εξής πρόβλημα διάχυσης:

$$\begin{cases} v_\tau = v_{xx} \\ \\ v(x,0) = max(e^{\frac{k+1}{2}x} - e^{\frac{k-1}{2}x}, 0) \end{cases} \tag{41}$$

Η διαδικασία της κίνησης είναι στοχαστική και η συνάρτηση $v(x,\tau)$ ερμηνεύεται ως η πυκνότητα πιθανότητας να παρατηρηθεί η τιμή στη θέση x αν τη χρονική στιγμή $t = 0$ η τιμή βρίσκεται στη θέση x_0.
Για να λυθεί η εξίσωση διάχυσης, θα χρησιμοποιήσουμε τους μετασχηματισμούς Fourier.
Έστω $\mathcal{F} = \widetilde{v}$ ο μετασχηματισμός Fourier για μια συνάρτηση f ως προς x.
Ο μετασχηματισμός Fourier για την εξίσωση διάχυσης, δίνεται από τον τύπο:

$$\frac{\partial \widetilde{v}}{\partial \tau} = -k^2 \widetilde{v}$$

και η λύση της είναι η :

$$\widetilde{v}(k,\tau) = \widetilde{v}(k,0) \cdot e^{-k^2\tau}$$

,όπου $\widetilde{v}(k,0)$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier της αρχικής συνθήκης της συνάρτησης v.

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier, με σκοπό να βρούμε τη λύση της $\widetilde{v}(x,\tau)$.
Ορίζουμε τους παρακάτω μετασχηματισμούς Fourier:

$$\mathcal{F}(v_1) = \widetilde{v_1} = e^{-k^2\tau}$$

$$\mathcal{F}(v_2) = \widetilde{v_2} = \widetilde{v}(k,0)$$

$$\widetilde{v}(k,\tau) = \widetilde{v_1}(k,\tau) \cdot \widetilde{v_2}(k,\tau)$$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα συνέλιξης και τους αντίστροφους μετασχηματισμούς Fourier στην τελευταία σχέση και προκύπτει:

$$v(x,\tau) = (v_1 * v_2)(x,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} v_1(x-\xi,\tau)v_2(\xi,\tau)\, d\xi$$

Επίσης από τις:

$$\mathcal{F}^{-1}(\widetilde{v_1}) = v_1 = \frac{1}{\sqrt{2\tau}} e^{\frac{-x^2}{4\tau}}$$

$$\mathcal{F}^{-1}(\widetilde{v_2}) = v_2 = v(x,0)$$

προκύπτει ότι η γενική λύση της εξίσωσης διάχυσης είναι:

$$v(x,\tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} exp[-\frac{(x-\xi)^2}{4\tau}] v(\xi,0)\, d\xi$$

Εξετάζουμε τώρα αν όντως ικανοποιεί την (41).

$$\frac{\partial v}{\partial \tau}(x,\tau) = -\frac{1}{2\tau} v(x,\tau) + \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} exp[-\frac{(x-\xi)^2}{4\tau}] v(\xi,0) \frac{(x-\xi)^2}{4\tau^2}\, d\xi$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,\tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} exp[-\frac{(x-\xi)^2}{4\tau}] v(\xi,0) \frac{-(x-\xi)}{2\tau}\, d\xi$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,\tau) = -\frac{1}{2\tau} u(x,\tau) + \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} exp[-\frac{(x-\xi)^2}{4\tau}] v(\xi,0) \frac{(x-\xi)^2}{4\tau^2}\, d\xi$$

ικανοποιούν την (41):

$$\lim_{\tau\to 0} v(x,\tau) = \lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} exp[-\frac{(x-\xi)^2}{4\tau}] v(\xi,0)\, d\xi = v(x,0)$$

Εφόσον τώρα γνωρίζουμε τη γενική λύση της εξίσωσης θερμότητας(αφού τη βρήκαμε και την επαληθεύσαμε),την εφαρμόζουμε στο πρόβλημα (41) και προκύπτει ότι:

$$v(x,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} v_0(S) exp[-\frac{(x-S)^2}{4\tau}]\, dS$$

Κάνω αλλαγή μεταβλητής:

$$z = \frac{(S-x)}{\sqrt{2\tau}}$$

$$dz = \frac{-1}{\sqrt{2\tau}}dx$$

Άρα:

$$v(x,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} v_0(z\sqrt{2\tau}+x)e^{-\frac{z^2}{2}}\ dz \tag{42}$$

Μπορούμε να αλοκληρώσουμε μόνο για $v_0 > 0$, δηλαδή όταν

$$z > \frac{-x}{\sqrt{2\tau}}$$

Τότε:

$$v_0 = exp[\frac{k+1}{2}(x+z\sqrt{2\tau})] - exp[\frac{k-1}{2}(x+z\sqrt{2\tau})]$$

Αντικαθιστώ στην (42) και προκύπτει ότι:

$$v(x,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} exp[\frac{k+1}{2}(x+z\sqrt{2\tau})]e^{-\frac{z^2}{2}}\ dz -$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} exp[\frac{k-1}{2}(x+z\sqrt{2\tau})]e^{-\frac{z^2}{2}}\ dz$$

Ορίζω :

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} exp[\frac{k+1}{2}(x+z\sqrt{2\tau})]e^{-\frac{z^2}{2}}\ dz$$

και

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} exp[\frac{k-1}{2}(x+z\sqrt{2\tau})]e^{-\frac{z^2}{2}}\ dz$$

Πρέπει να υπολογίσουμε τα ολοκληρώματα I_1, I_2, για να βρούμε τη v και στη συνέχεια τη u και έπειτα τη ζητούμενη V.
Αρχικά θα απλοποιήσουμε το εκθετικό.

$$\frac{k+1}{2}(x+z\sqrt{2\tau}) - \frac{z^2}{2} = (\frac{-1}{2})(z^2 - \sqrt{2\tau}(k+1)z) + \frac{k+1}{2}x =$$

Προσθαφαιρώ τον όρο $\frac{\tau(k+1)^2}{4}$

$$= (\frac{-1}{2})(z^2 - \sqrt{2\tau}(k+1)z + \frac{\tau(k+1)^2}{2}) + (\frac{k+1}{2})x + \frac{\tau(k+1)^2}{4} =$$

$$= (\frac{-1}{2})(z - \sqrt{\frac{z}{2}}(k+1))^2 + (\frac{k+1}{2})x + \frac{\tau(k+1)^2}{4}$$

Επομένως:

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} exp[\frac{k+1}{2}(x + z\sqrt{2\tau})]e^{-\frac{z^2}{2}}\ dz =$$

$$= \frac{exp[\frac{k+1}{2}x + \tau\frac{(k+1)^2}{4}]}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} exp[\frac{-1}{2}(z - \sqrt{\frac{\tau}{2}}(k+1))^2]\ dz$$

Κάνω αλλαγή μεταβλητής:

$$y = z - \sqrt{\frac{\tau}{2}}(k+1)$$

$$dy = dz$$

Το μόνο που μένει είναι να αλλάξω τα άκρα του ολοκληρώματος.

$$I_1 = \frac{exp[\frac{k+1}{2}x + \tau\frac{(k+1)^2}{4}]}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}-\sqrt{\frac{\tau}{2}}(k+1)}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\ dz$$

Το ολοκλήρωμα μπορεί να αναπαρασταθεί μέσω της συνάρτησης αθροιστικής κατανομής μιας κανονικής τυχαίας μεταβλητής που τη συμβολίζουμε με $\Phi \sim N(0,1)$ τέτοιο ώστε:

$$\Phi(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d} e^{-\frac{y^2}{2}}\ dy$$

Επομένως το I_1 μπορεί να γραφεί ως:

$$I_1 = exp[\frac{k+1}{2}x + \tau\frac{(k+1)^2}{4}]\Phi(d_1)$$

όπου

$$d_1 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \sqrt{\frac{\tau}{2}}(k+1)$$

Χρησιμοποιώντας τη συμμετρία του ολοκληρώματος για να υπολογίσουμε το I_2 που είναι ίδιο με το I_1 μόνο που αντί για $k+1$, έχουμε $k-1$.
Η λύση του προβλήματος της μετασχηματισμένης εξίσωσης, είναι:

$$v(x,t) = I_1 - I_2 = exp[\frac{k+1}{2}x + \tau\frac{(k+1)^2}{4}]\Phi(d_1) - exp[\frac{k-1}{2}x + \tau\frac{(k-1)^2}{4}]\Phi(d_2)$$

με

$$d_1 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \sqrt{\frac{\tau}{2}}(k+1), d_2 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \sqrt{\frac{\tau}{2}}(k-1)$$

Επομένως η σχέση (39) γίνεται ως εξής:

$$u(x,\tau) = exp[-\frac{(k-1)x}{2} - \frac{(k+1)^2\tau}{4}] \cdot v(x,\tau)$$

$$(33) \Rightarrow x = \log(\frac{S}{K}),\ (32) \Rightarrow \tau = \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)$$

$$(34) \Rightarrow V(S,t) = Ku(x,\tau) =$$

$$= S\Phi(\frac{\log(\frac{S}{K}) + (r+\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(\frac{\log(\frac{S}{K}) + (r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}})$$

Θέτω

$$\widetilde{d_1} = \frac{\log(\frac{S}{K}) + (r+\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

και

$$\widetilde{d_2} = \frac{\log(\frac{S}{K}) + (r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

Επίσης γράφουμε $V_c(S,t)$ γιατί αναφερόμαστε σε call option.

Ο τελικός τύπος που αντιπροσωπεύει την αξία ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς (European call option) τη χρονική στιγμή T με τιμή εξάσκησης K είναι ο εξής:

$$\boxed{V_c(S,t) = S_t\Phi(\widetilde{d_1}) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(\widetilde{d_2})}$$

Σύμφωνα με αυτό τον τύπο, η αξία ενός δικαιώματος αγοράς είναι συνάρτηση της τρέχουσας τιμής της μετοχής, της τιμής εξάσκησης του δικαιώματος, του επιτοκίου χωρίς κίνδυνο, του χρόνου μέχρι τη λήξη του δικαιώματος συν τους όρους $\Phi(\widetilde{d_1}), \Phi(\widetilde{d_2})$.

5.9 Συμπεράσματα

Οι Black and Scholes καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι υπάρχει μόνο μία εξίσωση που να ικανοποιεί τη μερική διαφορική εξίσωση (31) με οριακή συνθήκη ενός δικαιώματος αγορά Ευρωπαϊκού τύπου. Το μοντέλο της θεωρίας των Black and Scholes στηρίζεται σε εξιδανικευμένες υποθέσεις, κάτι το οποίο μπορεί να οδηγήσει σε σημαντικές διαφορές μεταξύ των πραγματικών τιμών των παραγώγων της αγοράς και των τιμών που υπολογίζονται στο μοντέλο αυτό. Αρκετές μελέτες που έχουν πραγματοποιηθεί για την καταλληλότητα του μοντέλου σε πραγματικά δεδομένα αγοράς, όπως η μελέτη του Rubinstein (1994) και Dumas (1998), επιβεβαιώνουν την παραπάνω άποψη.

Πιο συγκεκριμένα:

- Στην πραγματικότητα δεν υπάρχει η έννοια του επιτοκίου μηδενικού κινδύνου, που χρησιμοποιείται σαν υπόθεση του μοντέλου. Επομένως η υπόθεση ότι τα επιτόκια είναι γνωστά και σταθερά, είναι μη ρεαλιστική.

- Στο μοντέλο αυτό, οι μετοχές δεν αποδίδουν μερίσματα μέχρι τη λήξη του δικαιώματος, κάτι που δεν ισχύει πάντα στην πραγματικότητα. Στις περισσότερες περιπτώσεις οι εταιρίες αποδίδουν μερίδια των μετοχών πριν τη λήξη του δικαιώματος. Σε περίπτωση που η αρχική αυτή υπόθεση χαλαρώσει, το μοντέλο μπορεί να τροποποιηθεί ώστε να λαμβάνει υπόψη πιθανά μερίσματα.

- Για μεγάλα χρονικά διαστήματα η μεταβλητότητα δεν μπορεί να θεωρηθεί σχετικά σταθερή,όπως για μικρά χρονικά διαστήματα.

- Η εμπειρία των χρηματιστηριακών αγορών δείχνει ότι η υπόθεση της αποτελεσματικής αγοράς δεν ισχύει στη συντριπτική πλειοψηφία των περιπτώσεων.

- Κατά την αγοροπωλσία μετοχών υπάρχουν κόστη συναλλαγών, κάατι που αποφεύγεται στην υπόθεση του μοντέλου για να εξαλείψουμε την πολυπλοκότητα.

- Στην υπόθεση του μοντέλου χρησιμοποιούμε ότι οι τιμές των μετοχών ακολουθούν έναν τυχαίο περίπατο. Αυτό σημαίνει ότι οποιαδήποτε χρονική στιγμή οι τιμές μπορούν να κινηθούν ανοδικά ή καθοδικά με την ίδια πιθανότητα. Αυτό βέβαια δεν μπορεί να ισχύει, καθώς η τιμή μιας μετοχής εξαρτάται από πολλούς παράγοντες που δεν γίνεται να έχουν την ίδια πιθανότητα ως προς το πώς θα επηρεάσουν την κίνηση της μετοχής.

- Τέλος, ένα πιθανό πρόβλημα του συγκεκριμένου μοντέλου είναι η εξαιρετική πολυπλοκότητά του, που μπορεί να οδηγήσει σε δυσκολίες τόσο σε επίπεδο κατανόησης λόγω του βαθύ μαθηματικού υπόβαθρου που απαιτεί το μοντέλο και σαν συνέπεια μπορεί να έχει τη μη σωστή εφαρμογή του.

5.10 Μέθοδος Euler Maruyama

(13) Πολλές στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις, όπως και ντετερμινιστικές εξισώσεις, δεν έχουν αναλυτική λύση και γι' αυτό είναι απαραίτητη η επίλυσή τους έστω και με κάποιο σφάλμα. Στις ντετερμονιστικές εξισώσεις έχουμε πολλές μεθόδους επίλυσης, μία από αυτές είναι η μέθοδος Runge Kutta. Στις στοχαστικές όμως, πρέπει να προσθέσουμε ακόμα ένα βήμα, αυτό της προσομοίωσης πολλών τροχιών, από της στιγμή που θέλουμε να υπολογίσουμε μέσους όρους. Η προσομοίωση πολλών τροχιών μπορεί να γίνει εύκολα με μια μέθοδο Monte-Carlo.
Σκοπός μας σε αυτή την παράγραφο είναι να κατασκευάσουμε αλγορίθμους που να επιλύουν αριθμητικά τέτοιες στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις. Η αριθμητική μέθοδος που θα χρησιμοποιήσουμε είναι η μέθοδος Euler Maruyama.

5.10.1 Βήματα της μεθόδου Euler Maruyama.

Έστω ότι έχουμε μία διαφορική της μορφής:

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(s, X_t)dB_t$$

,όπου $t \in [0, T]$.
Χωρίζουμε το διάστημα $[0, T]$ σε N κομμάτια που το καθένα έχει μήκος $\Delta t = \frac{T}{N}$.
Η αρχική μας τιμή δίνεται από εμάς και είναι $X_{i=0} = X_0$ και οι υπόλοιπες ορίζονται με τον εξής αλγόριθμο:

$$X_{i+1} = X_i + b(T_i, X_i) * X_i * dt + \sigma(t_i, X_i) * X_i * dB_i$$

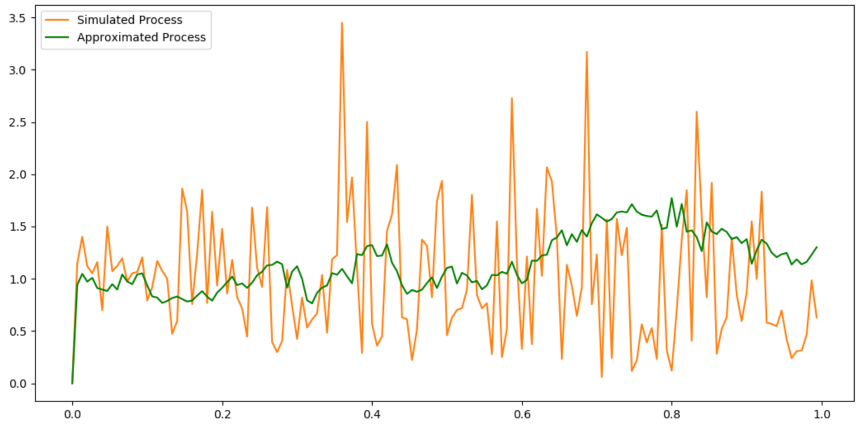
,όπου το διαφορικό της κίνησης Brown είναι μία τυχαία μεταβλητή που κατανέμεται κανονικά.

5.10.2 Αλγόριθμος Euler Maruyama.

Σε αυτή την παράγραφο θα παρουσιάσουμε τον αλγόριθμό Euler Maruyama για την επίλυση της εξίσωσης Black and Scholes σε γλώσσα Python.

```
# Import packages
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
# Number of simulations
num.sims = 1

# Number of points in partition
N = 150

# Initial value
X_0 = 1
Y_0 = X_0

# Starting time
t_0 = 0

# Ending time
T = 1

# SDE for GBM: dX_t = r_0 * X_t dt + σ_0 * X_t dB_t
r_0 = 0
σ_0 = 1

# Time increments
dt = float(T - t_0) / N

# Times
t = np.arange(t_0, T, dt)

# Brownian increments
dB = np.zeros(N)
dB[0] = 0
```

```
# Brownian samples
B = np.zeros(N)
B[0] = 0

# Simulated process
X = np.zeros(N)
X[0] = 1

# Approximated process
Y = np.zeros(N)
Y[0] = Y_0

# Sample means across all simulations
SX = np.zeros(N)
SY = np.zeros(N)

# Iterate
for n in range(num.sims):
        for i in range(1, t.size):
                # Generate dB_t
                dB[i] = np.random.normal(loc = 0.0, scale = np.sqrt(dt))
                # Generate B_t
                B[i] = np.random.normal(loc = 0.0, scale = np.sqrt(t[i]) )

                # Simulate (orange)
                X[i] = X_0 * np.exp( (r_0 - 0.5 * *sigma_0)*(i * dt) +
                (float(sigma_0) * B[i] ))
                SX[i] = SX[i] + X[i]/num.sims

                #Approximate (green)
                Y[i] = Y[i-1] + (r_0 * Y[i-1]) * dt + (σ_0 * Y[i-1]) * dB[i]
                SY[i] = SY[i] + Y[i]/num.sims

# Plot
plt.plot(t, SX)
plt.plot(t, SY)
plt.show()
```



Σχήμα 9: Γραφική παράσταση μεθόδου Euler Maruyama

5.11 Παράρτημα

Ορισμός: Μετασχηματισμός Fourier:(26)
Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Ως μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης u, ορίζεται η συνάρτηση:

$$\widetilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \ , \ \widetilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega s} \, dt$$

υπό την προϋπόθεση ότι υπάρχει στον $\mathbb{C}$ το ολοκλήρωμα.
Ο μετασχηματισμός Fourier συμβολίζεται επίσης ως $\mathcal{F}\Big\{f\Big\}$

Ορισμός: Αντίστροφος Μετασχηματισμός Fourier:(26)
Έστω $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.Ως αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης g, ορίζεται η συνάρτηση:

$$\widetilde{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \widetilde{g}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{i\omega t} \, dt$$

υπό την προϋπόθεση ότι υπάρχει στον $\mathbb{C}$ το ολοκλήρωμα.
Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier συμβολίζεται επίσης ως $\mathcal{F}^{-1}\Big\{g\Big\}$

Πρόταση:
Η υπόθεση ότι υπάρχει το ολοκλήρωμα:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \, dt$$

είναι ικανή (αλλά όχι αναγκαία) για την υπάρξη του μετασχηματισμού Fourier $\widetilde{f}$ της συνάρτησης f και του αντιστρόφου του $\widetilde{f}$.

Απόδειξη:

Ο ισχυρισμός συνάγεται από τη σχέση:

$$|f(t)e^{-i\omega t}| = |f(t)e^{i\omega t}| = |f(t)|$$

Ορισμός: Συνέλιξη Συναρτήσεων:(26)

Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ τοπικά ολοκληρώσιμες συναρτήσεις.

Τότε η συνάρτηση

$$f * g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, (f * g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\, dy =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)\, dy$$

ορίζεται ως συνέλιξη των συναρτήσεων f, g.

Θεώρημα: Συνέλιξης(26)

Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ τοπικά ολοκληρώσιμες συναρτήσεις και $\widetilde{f} = \mathcal{F}\Big\{f\Big\}$ και $\widetilde{g} = \mathcal{F}\Big\{g\Big\}$.

Τότε:

$$\mathcal{F}\Big\{(f * g)(t)\Big\} = \widetilde{f}(\omega)\widetilde{g}(\omega)$$

Απόδειξη:

$$\mathcal{F}\Big\{(f * g)(t)\Big\} = \int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(t) e^{-i\omega t}\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (\int_{-\infty}^{\infty} f(t-y)g(y)\, dy e^{-i\omega t})\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (\int_{-\infty}^{\infty} f(t-y)g(y)e^{-i\omega t}\, dt)\, dy =$$

Θέτω:

$$t - y = u \Rightarrow t = y + u$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (\int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(y)e^{-i\omega(u+y)}\, du)\, dy =$$

$$= (\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\omega u}\, du) \cdot (\int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{-i\omega y}\, dy) =$$

$$\widetilde{f}(\omega)\widetilde{g}(\omega)$$

Ορισμός:
Λέμε ότι ένα πρόβλημα είναι καλώς τεθειμένο αν η λύση υπάρχει είναι μοναδική και εξαρτάται συνεχώς από τα δεδομένα του προβλήματος.

Η Εξίσωση Θερμότητας(Καλώς τεθειμένο πρόβλημα):(25)

Εξετάζουμε τη λύση για τη διαφορική εξίσωση:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, -\infty < x < \infty, \tau > 0$$

με αρχικές συνθήκες:

$$u_0(x) = u(x, 0)$$

Η εξίσωση διάχυσης είναι στενά συνδεδεμένη με τη διαδρομή ενός τυχαίου περιπατητή (random walker).
Υποθέτουμε ότι η λύση και οι αρχικές συνθήκες ικανοποιούν τα εξής:

1. $$\lim_{|x|\to\infty} u_0(x)e^{-\alpha x^2} = 0, \forall \alpha > 0$$

2. $$\lim_{|x|\to\infty} u(x,\tau)e^{-\alpha x^2} = 0, \forall \alpha > 0$$

Κάτω από αυτές τις υποθέσεις η λύση υπάρχει,είναι μοναδική και αντιπροσωπεύεται από την:

$$u(x,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(s)e^{-\frac{(x-s)^2}{4\tau}}\, ds$$

Παρατήρηση:
Αυτή η λύση μπορεί να προκύψει με διάφορους τρόπους.
Το πιο εύκολο είναι να χρησιμοποιήσομε τους μετασχηματισμούς Fourier, όπως κάναμε παραπάνω.

5.12 Εφαρμογές

5.12.1 Πρώτη Εφαρμογή:

(17)
Σε αυτή την εφαρμογή υποθέτουμε ότι η τωρινή τιμή της μετοχής Microsoft είναι 100ευρώ,η διακύμανση της τιμής της μετοχής σε ετήσιο επίπεδο είναι ίση με 18.47%,ο ετήσιος ρυθμός ανατοκισμού είναι ίσος με 3%.
Θα υπολογίσουμε την τιμή ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς με τιμή εξάσκησης 90ευρώ ανά μετοχή σε 240μέρες.

Βήμα 1ο:Λύνουμε το πρόβλημα:

$S = 100$
$K = 90$
$\sigma = 0.1847$
$r = 0.03$
$t = 0$

$$\widetilde{d_1} = \frac{\log(\frac{S}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = \frac{log(\frac{100}{90}) + (0.03 + \frac{0.1847^2}{2})240}{0.1847\sqrt{240}} = 0.930$$

$$\widetilde{d_2} = \frac{\log(\frac{S}{K}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = \frac{log(\frac{100}{90}) + (0.03 - \frac{0.1847^2}{2})240}{0.1847\sqrt{240}} = 0.784$$

$$\Phi(\widetilde{d_1}) = \Phi[\frac{log(\frac{100}{90}) + (0.03 + \frac{0.1847^2}{2})240}{0.1847\sqrt{240}}] = \Phi(0.930) = 0.80665$$

και

$$\Phi(\widetilde{d_2}) = \Phi[\frac{log(\frac{100}{90}) + (0.03 - \frac{0.1847^2}{2})240}{0.1847\sqrt{240}}] = \Phi(0.784) = 0.75817$$

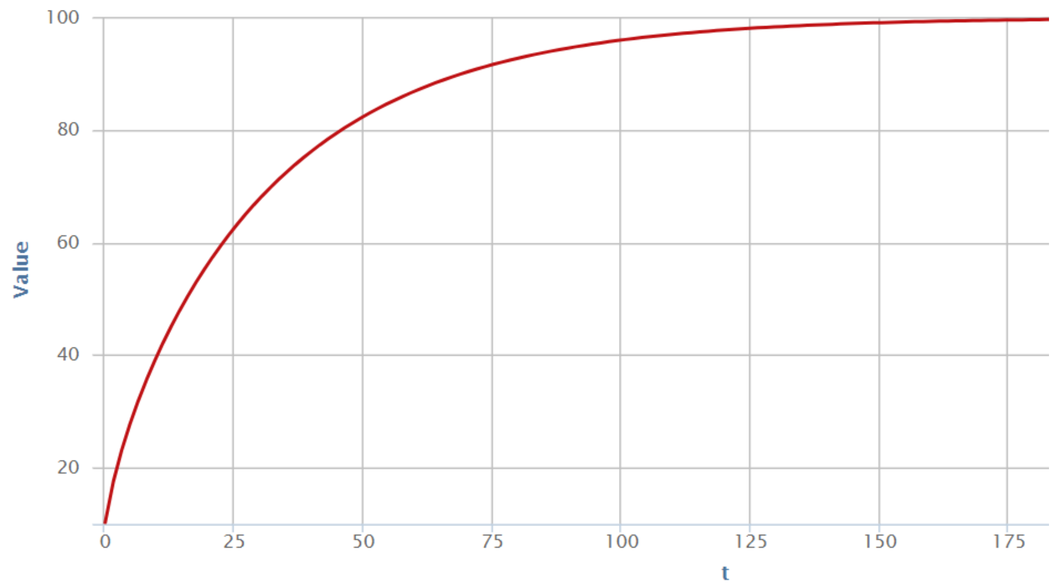
Η τιμή του δικαιώματος αγοράς κατά τη λήξη του δικαιώματος είναι:

$$V_c(S,t) = 100 \cdot \Phi(0.930) - 90 \cdot e^{(-0.03 \cdot 0.1847)} \cdot \Phi(0.784) = 13.24euro$$

Βήμα 2ο:Κάνουμε τη γραφική παράσταση

Για τη γραφική παράσταση του δικαιώματος αγοράς χρησιμοποιούμε ότι η τιμή της μετοχής κυμαίνεται από 0.01 μέχρι 100 και ο χρόνος από 0 μέχρι 240(δηλαδή ένα τρίμηνο),ενώ οι τιμές K, σ, r παραμένουν σταθερές.

Σχήμα 10: Τιμή Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς ως προς την τιμή της μετοχής



Σχήμα 11: Τιμή Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς ως προς το χρόνο

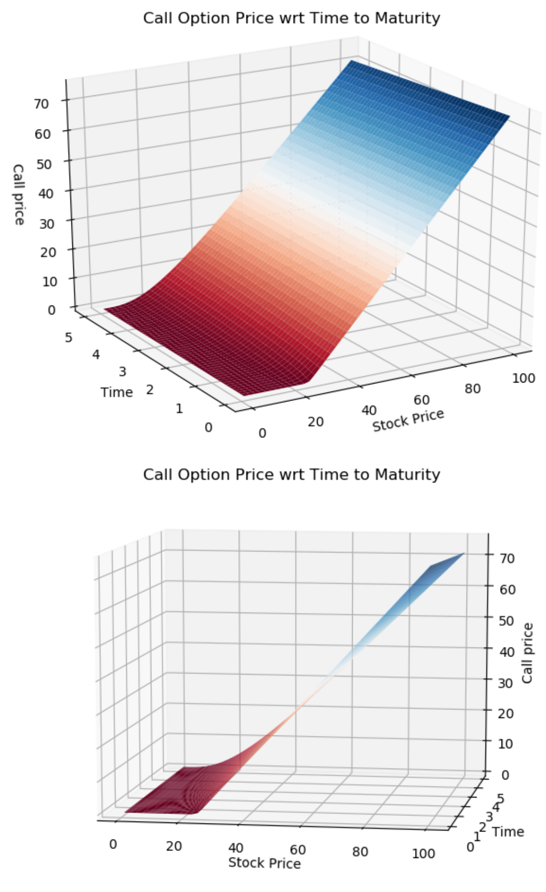
Βήμα 3ο:Ανάλυση δεδομένων

ΠΙΝΑΚΑΣ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ		
Χρόνος(t σε χρόνια)	Τιμή μετοχής(S)	Τιμή δικαιώματος αγοράς(V_C)
1	102.003	14.889
1.5	104.03	16.989
2	106.003	18.889
2.5	108.99	20.648
3	110	22.295
3.5	111.23	23.853
4	113.4	25.4
4.5	114.5	26.757
5	115	27.365

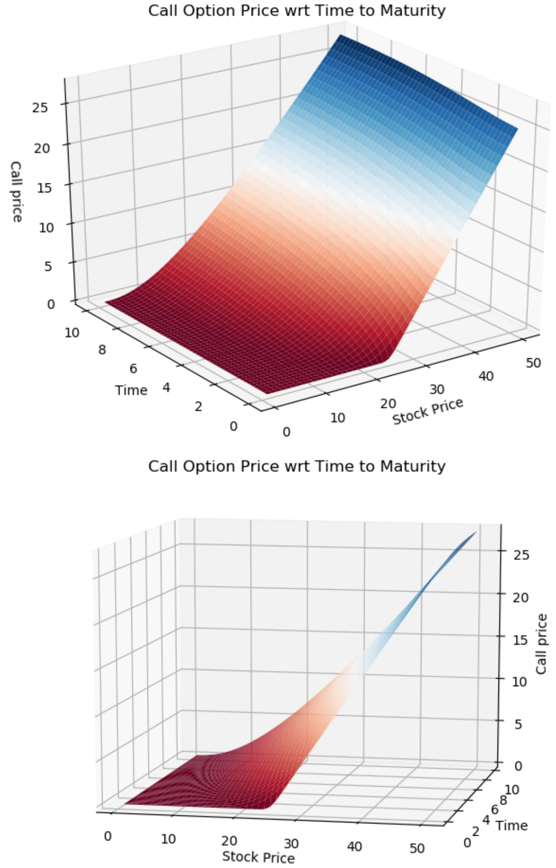
Βήμα 4ο:Παρατηρήσεις

Στο σχήμα 10 παρατηρούμε ότι όταν η τιμή της μετοχής κινείται από 0.1 μέχρι 75 ευρώ,το δικαίωμα αγοράς παραμένει σχετικά σταθερό και από 75 μέχρι και 350ευρώ έχουμε μία αισθητή αύξηση.
Γνωρίζουμε ότι η τιμή εξάσκησης της μετοχής είναι στα 90 ευρώ, άρα για να έχει κέρδος ο αγοραστής του δικαιώματος αγοράς, θα πρέπει η τιμή του υποκείμενου χρεογράφου, στην συγκεκριμένη περίπτωση η μετοχή, να ¨ανέβει' πάνω από την τιμή εξάσκησης πριν την ημερομηνία λήξης.
Κέρδος μπορεί να βγάλει είτε πουλώντας είτε εξασκώντας το δικαίωμα. Αν πάλι η τιμή της μετοχής ¨πέσει' κάτω από την τιμή εξάσκησης,τότε ο αγοραστής θα

έχει ζημιά,κάτι που δεν συμβαίνει στο συγκεκριμένο πρόβλημα. Στο σχήμα 11 παρατηρούμε ότι με την πάροδο του χρόνου η τιμή του δικαιώματος αγοράς αυξάνει. Αυτό συμβαίνει για δύο λόγους.Ο πρώτος είναι ότι η τιμή της μετοχής (όπως βλέπουμε στον πίνακα δεδομένων από πάνω) αυξάνεται με την πάροδο του χρόνου και ως συνέπεια θα αυξάνεται και η τιμή του δικαιώματος. Ο δεύτερος είναι ότι όσο μεγαλύτερος είναι ο χρόνος μέχρι τη λήξη του δικαιώματος, τόσο μεγαλύτερη είναι η προβλεπόμενη ¨μετακίνηση’ της τιμής του.
Όμως, από κάποια στιγμή και μετά,κυρίως από τις 140 μέρες μέχρι και τις 230, η αλλαγή της τιμής του δικαιώματος παραμένει σχετικά σταθερή, που είναι απολύτως φυσιολογικό, αφού και η τιμή της μετοχής είναι σχετικά σταθερή εκείνο το χρονικό διάστημα.



Σχήμα 12: Δικαίωμα Αγοράς για διαφορετικές τιμές του χρόνου και της μετοχής, με σταθερό σ.



Σχήμα 13: Δικαίωμα Αγοράς για διαφορετικές τιμές του χρόνου και της μετοχής, με μεταβλητό σ.

5.12.2 Δεύτερη Εφαρμογή

(10)
Έστω μετοχή $X(t)$ η οποία ακολουθεί κίνηση Brown με τιμή εξάσκησης 15\$. Ξεκινάμε τη χρονική στιγμή 0 και θέλουμε να δούμε την αξία ενός οπτιον αγοράς με ονομαστική αξία 12\$ και λήξη σε ένα έτος.

Σε αυτή την εφαρμογή θα δούμε την αναλυτική λύση του προβλήματος σε σύγκριση με την αριθμητική λύση που μας δίνει η μέθοδος Euler Maruyama.

Βήμα 1ο:Βρίσκουμε την αναλυτική λύση του προβλήματος:
Όπως αναφέραμε και στην προηγούμενη ενότητα, η εξίσωση των Black and Scholes έχει αναλυτική λύση.
Οπότε με απλή αντικατάσταση των $K = 15, S = 12, r = 0.05, t = 0, T = 1, \sigma =$

2, θα υπολογίσουμε τα $\widetilde{d_1}, \widetilde{d_2}, \Phi(\widetilde{d_1}), \Phi(\widetilde{d_2})$.

$$\widetilde{d_1} = \frac{\log(\frac{S}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = \frac{log(\frac{12}{15}) + (0.05+2)}{2} = 0.9615$$

$$\widetilde{d_2} = 0.86345$$

$$\Phi(\widetilde{d_1}) = \Phi[\frac{log(\frac{12}{15}) + (0.05+2)}{2}] = \Phi(0.9615) = 0.7151$$

$$\Phi(\widetilde{d_2}) = 0.333$$

Η τιμή του δικαιώματος αγοράς κατά τη λήξη του δικαιώματος είναι:

$$V_c(S,t) = 15 \cdot 0.7151 - 12 \cdot e^{0.05} \cdot 0.333 = 10.7265 - 4.2 = 6.52\$$$

Βήμα 2ο:Βρίσκουμε την αριθμητική λύση του προβλήματος:
Αφήνοντας τον αλγόριθμο που αναφέραμε στην προηγούμενη ενότητα να τρέξει το αποτέλεσμα (η αξία του συμβολαίου) προκύπτει περίπου 6.3\$.
Βήμα 3ο:Συμπέρασμα:
Παρατηρούμε ότι το αποτέλεσμα της αριθμητικής λύσης του δικαιώματος αγοράς είναι αρκετά ¨κοντά' στην αναλυτική λύση που υπολογίσαμε από πάνω με σφάλμα 0.22.

Αναφορές

[1] Α. Ν. Γιαννακόπουλος, *Εισαγωγή στη στοχαστική ανάλυση.*

[2] Α. Ν. Γιαννακόπουλος , *Στοχαστικές Διαδικασίες 2.*

[3] Δημήτρης Χελιώτης , *Εισαγωγή στο στοχαστικό λογισμό.*

[4] David Nualart , *Stochastic Process.*

[5] Θέμης Μήτσης , *Θεωρία Μέτρου.*

[6] Α. Ν. Γιαννακόπουλος , *Εισαγωγή στα στοχαστικά χρηματοοικονομικά.*

[7] Μπούτσικας Μιχαήλ , *Παράγωγα Χρηματοοικονομικά Προϊόντα.*

[8] Peter E. Kloeden , Eckhard Platen , *Itô Stochastic Calculus.*

[9] Λάλλας Κωνσταντίνος , *Η Γεωμετρική Κίνηση Brown και Εφαρμογές στην Αποτίμηση Χρηματοοικονομικών Παραγώγων.*

[10] Μαμαλούκας Πάτροκλος-Μιλτιάδης , *Διπλωματική Εργασία ,Λογισμός Itô και εφαρμογές στα χρηματοοικονομικά.*

[11] Jean-Francois Le Gall , *Brownian Motion, Martingales, and Stochastic Calculus.*

[12] Michael J. Kozdron , *Brownian Motion and the Heat Equation.*

[13] Matilde Lopes Rosa , *Numerical Methods for Stochastic Differential Equations with Applications to Finance.*

[14] R. Durrett , *Probability: theory and examples.*

[15] Steven R. Dunbar , *Properties of Geometric Brownian Motion.*

[16] YOUNGGEUN YOO , *Stochastic Calculus and Black Scholes Model.*

[17] Matthew J. Krznaric , *Comparison of Option Price from Black-Scholes Model to Actual Values.*

[18] A.S.Shinde , K.C.Tacale , *Study of Black Scholes and it's Applications.*

[19] Xiaoming Sing , *Itô's formula and examples.*

[20] Michael J. Kozdron , *Brownian Motion and Heat Eqution.*

[21] Olle Karlsson , *The Black-Scholes Equation and Formula.*

[22] Steven R. Dunbar , *Stochastic Processes and Advanced Mathematical Finance.*

[23] Tobias Galla , *Stochastic Processes, Itô Calculus and Black-Scholes formula.*

[24] Zachry Wang , *An Introduction to Stochastic Calculus and Black Scholes Model.*

[25] Matthew J. Hancock , *The 1D Heat equation.*

[26] Ivar Stakgold , *Green's Functions and Boundary Value Problems.*

[27] *http://gate.iesl.forth.gr/~kafesaki/Applied-Mathematics/probabilities/p3/node3.html*.

[28] *http://gate.iesl.forth.gr/~kafesaki/Applied-Mathematics/probabilities/p3/node2.html*

[29] *https://msyrpi.weebly.com/uploads/4/0/0/3/40039679/lessnormal_bastat_19.pdf*

[30] *http://www.unipi.gr/faculty/mbouts/prob_intro/prob_intro4.pdf*