

Το Θεώρημα Απαρίθμησης του Ρόλγα και Εφαρμογές του

Παναγιώτα Χριστοπούλου

Επιβλέπουσα καθηγήτρια
Μαρία Λουκάκη

Μεταπτυχιακή Εργασία



Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Κρήτης
Ηράκλειο
Ιούλιος 2015

Η παρούσα μεταπτυχιακή εργασία κατατέθηκε στο τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Κρήτης τον Ιούλιο του 2015 στα πλαίσια του μεταπτυχιακού προγράμματος “Μαθηματικά και Εφαρμογές τους” στην κατεύθυνση “Μαθηματικά για την Εκπαίδευση”.

Την επιτροπή αξιολόγησης αποτέλεσαν οι:

Μαρία Λουκάκη, επιβλέπουσα,

Ιωάννης Αντωνιάδης,

Χρήστος Κουρουνιώτης.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τους καθηγητές μου, κ. Μαρία Λουκάκη, κ.Ιωάννη Αντωνιάδη και κ. Χρήστο Κουρουνιώτη για την συμμετοχή τους στην επιτροπή αξιολόγησης. Ιδιαίτερως ευχαριστώ την κ. Μαρία Λουκάκη για την πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγησης της κατά την διάρκεια συγγραφής αυτής της εργασίας.

Στη μητέρα μου Γεωργία και
στη μνήμη του πατέρα μου Ιωάννη.

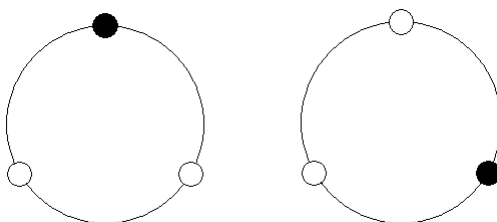
Περιεχόμενα

Εισαγωγή	1
1 Θεώρημα Burnside	4
1.1 Δράση Ομάδας σε Σύνολο	4
1.2 Ομάδες Ισοτροπίας	6
1.3 Τροχιές	7
1.4 Θεώρημα Burnside	10
1.5 Εφαρμογές	11
2 Το Θεώρημα Απαρίθμησης του Pólya	17
2.1 Cycle Index	17
2.2 Γνωστά Cycle Indices	18
2.3 Βάρος μιας συνάρτησης, βάρος ενός pattern	26
2.4 Κατάλογος στοιχείων (Inventory)	27
2.5 Η απλή μορφή του Θεωρήματος Απαρίθμησης του Pólya	29
2.6 Το Θεώρημα Απαρίθμησης του Pólya	31
3 Εφαρμογές του Θεωρήματος Απαρίθμησης του Pólya	34
3.1 Κύβοι	34
3.2 Γραφήματα	38
3.3 Διμερή Γραφήματα	45
3.4 Αλκοόλες	49
Βιβλιογραφία	51

Εισαγωγή

Για κάποια προβλήματα απαρίθμησης, η παρατήρηση και μόνο αρκεί, αλλά για τα πιο περίπλοκα απαιτείται μια πιο μελετημένη προσέγγιση. Συχνά συναντάμε δυσκολία όταν κατά την απαρίθμηση εμφανίζονται αντικείμενα τα οποία ουσιαστικά ταυτίζονται. Με άλλα λόγια, συχνά εμφανίζεται μια σχέση ισοδυναμίας ανάμεσα στα αντικείμενα που απαριθμούμε.

Ας θεωρήσουμε το πρόβλημα “πόσα διαφορετικά περιδέραια χωρίς πόρπη μπορούμε να έχουμε με 3 χάντρες χρώματος άσπρο και μαύρο”. Εύκολα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το πλήθος των περιδεραίων με 3 χάντρες χρώματος άσπρο και μαύρο είναι $2^3 = 8$. Ωστόσο, ανάμεσα σε αυτά τα 8 περιδέραια μετράμε και εκείνα που ουσιαστικά είναι ισοδύναμα. Για παράδειγμα, μετράμε τα περιδέραια που φαίνονται στο παρακάτω σχήμα ως διαφορετικά ενώ είναι ισοδύναμα αφού το δεύτερο προκύπτει με μια στροφή 120° \cup του πρώτου.



Το Θεώρημα του Burnside είναι εκείνο που θα μας δώσει την λύση σε προβλήματα απαρίθμησης μη ισοδύναμων αντικειμένων, σύμφωνα με το οποίο το ζητούμενο πλήθος δίνεται από τον τύπο

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X_g|$$

όπου G είναι η ομάδα που δρα στο X και X_g το σύνολο των στοιχείων του X που μένουν αναλλοίωτα από το $g \in G$.

Αν και το Θεώρημα έχει μείνει γνωστό ως Θεώρημα του Burnside, ο William Burnside δεν είναι ο εμπνευστής του. Αυτή η προσέγγιση προβλημάτων απαρίθμησης αποδείχθηκε από τον Georg Frobenius το 1887. Ωστόσο, το Θεώρημα δεν έγινε ευρέως γνωστό έως ότου ο W.Burnside το ανέφερε και το απέδειξε σε ένα βιβλίο του το 1897. Για αυτό τον λόγο έμεινε γνωστό ως Θεώρημα του Burnside. Αλλά, και προγενέστερα του G.Frobenius, ο εν λόγω τύπος ήταν γνωστός στον Cauchy το 1845.

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα η ομάδα που δρα στο σύνολο των 8 περιδεραίων είναι η S_3 (πρόκειται για την ομάδα που περιέχει τις συμμετρίες κανονικού τριγώνου). Εφαρμόζοντας, λοιπόν, το Θεώρημα του Burnside (όπως

θα δούμε αναλυτικότερα στο Κεφάλαιο 1) με $G = S_3$ και X το σύνολο των 8 περιδεραίων καταλήγουμε στη σχέση

$$\begin{aligned} \frac{1}{|S_3|} \sum_{g \in S_3} |X_g| &= \frac{1}{6}(8 + 2 + 2 + 4 + 4 + 4) \\ &= \frac{1}{6}(24) \\ &= 4 \end{aligned}$$

Και επομένως μπορούμε να πούμε ότι υπάρχουν 4 διαφορετικά περιδέραια.

Ωστόσο, κάποιες φορές θέλουμε να απλουστεύσουμε τους υπολογισμούς μας και να μάθουμε περισσότερες πληροφορίες για τα μη ισοδύναμα αντικείμενα που θέλουμε να απαριθμήσουμε. Όπως για παράδειγμα στο προηγούμενο πρόβλημα με το περιδέραιο, θα ήταν πολύ χρήσιμο αν παίρναμε πληροφορίες για το πως μοιάζουν αυτά τα 4 διαφορετικά περιδέραια. Για αυτό τον λόγο μπορούμε να θεωρήσουμε το σύνολο D να αποτελείται από τα αντικείμενα που θέλουμε να χρωματίσουμε, στην περίπτωση μας πρόκειται για το σύνολο των χαντρών, $D = \{1, 2, 3\}$. Επίσης, θεωρούμε το σύνολο R αποτελούμενο από τα διαθέσιμα χρώματα, δηλαδή $R = \{ \text{μαύρο, άσπρο} \}$. Μπορούμε να θεωρήσουμε ένα χρωματισμό των στοιχείων του D ως μια απεικόνιση $f: D \rightarrow R$. Στο Κεφάλαιο 2 θα εισάγουμε την έννοια του cycle index P_G μιας ομάδας G η οποία δρα στο $R^D = \{f \mid f: D \rightarrow R\}$ και του βάρους $w(r_i)$ των στοιχείων του R και θα οδηγηθούμε στο Θεώρημα Απαρίθμησης του Pólya (Pólya's Enumeration Theorem) σύμφωνα με το οποίο το πολυώνυμο

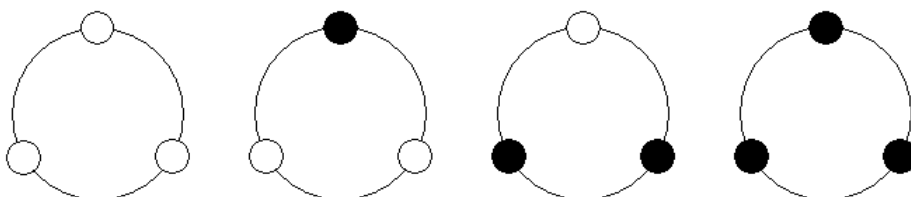
$$P_G\left(\sum_{r \in R} w(r), \sum_{r \in R} [w(r)]^2, \sum_{r \in R} [w(r)]^3, \dots\right)$$

μας δίνει τις πληροφορίες που θέλουμε. Δεν δίνει μόνο το πλήθος των μη ισοδύναμων αντικειμένων αλλά και πληροφορίες των βασικών χαρακτηριστικών τους.

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Απαρίθμησης του Pólya (όπως θα δούμε αναλυτικότερα στο Κεφάλαιο 2) στο εν λόγω πρόβλημα, έχοντας ορίσει $w(\text{μαύρο}) = M$ και $w(\text{άσπρο}) = A$ και αφού η S_3 δρα στο R^D καταλήγουμε στη σχέση

$$\begin{aligned} P_{S_3}(M + A, M^2 + A^2, M^3 + A^3) &= \frac{1}{6}((M + A)^3 + 3(M + A)(M^2 + A^2) \\ &\quad + 2(M^3 + A^3)) \\ &= A^3 + A^2M + AM^2 + M^3 \end{aligned}$$

απ'όπου προκύπτει ότι υπάρχει ένα περιδέραιο με 3 άσπρες χάντρες (A^3), ένα με 2 άσπρες και 1 μαύρη (A^2M), ένα με 1 άσπρη και 2 μαύρες (AM^2) και ένα με 3 μαύρες (M^3) όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Το Θεώρημα του Pólya αποτελεί μια ισχυρή γενίκευση του Θεωρήματος Burnside. Αν και το Θεώρημα ανακαλύφθηκε και δημοσιεύτηκε από τον John Howard Redfield το 1927, δεν αναγνωρίστηκε από την μαθηματική κοινότητα έως ότου αποδείχτηκε από τον George Pólya το 1937. Πρόκειται για ένα πολύ ισχυρό Θεώρημα το οποίο μπορεί να εφαρμοστεί σε ένα μεγάλο φάσμα προβλημάτων απαρίθμησης και να γενικευτεί και σε άλλους τομείς. Θα ασχοληθούμε με εφαρμογές του σε κύβους, γραφήματα καθώς και χημικές ενώσεις.

Κεφάλαιο 1

Θεώρημα Burnside

1.1 Δράση Ομάδας σε Σύνολο

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.1.1 (Δράση Ομάδας σε σύνολο X): Έστω (G, \cdot) ομάδα και $X \neq \emptyset$. Λέμε ότι η G δρα στο X όταν υπάρχει απεικόνιση

$$\begin{aligned} G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\longmapsto gx \in X \end{aligned}$$

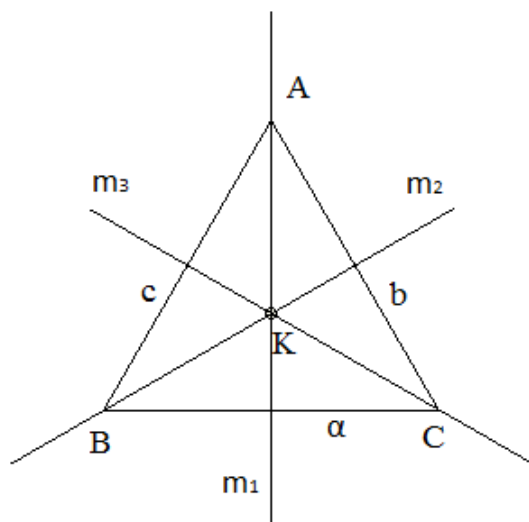
με τις εξής ιδιότητες:

1. $ex = x$ για κάθε $x \in X$
2. $(g_1 \cdot g_2)x = g_1(g_2x)$ για κάθε $x \in X$ και κάθε $g_1, g_2 \in G$

“Ισοδύναμα” λέμε ότι το X είναι ένα G -σύνολο.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.1.2: Σε κανονικό n -γωνο ορίζουμε D_n την ομάδα συμμετριών του. Είναι γνωστό ότι $D_n = \langle \sigma, \tau \mid \sigma^n = id = \tau^2, \tau\sigma = \sigma^{n-1}\tau \rangle$ όπου γεωμετρικά η σ αντιστοιχεί σε στροφή γωνίας $2\pi/n$ και η τ σε ανάκλαση.

Παράδειγμα 1.1.1: Έστω ισόπλευρο τρίγωνο ABC .



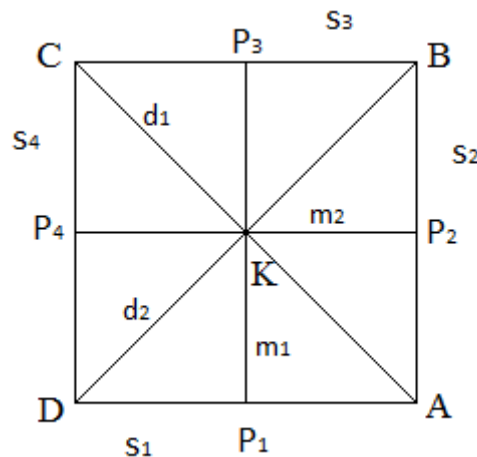
Θεωρώ το σύνολο $X = \{A, B, C, a, b, c, K, m_1, m_2, m_3\}$, όπου A, B, C είναι οι κορυφές, a, b, c οι πλευρές, K το κέντρο συμμετρίας και m_1, m_2, m_3 οι άξονες συμμετρίας του τριγώνου (όπως στο σχήμα). Αν D_3 η ομάδα συμμετριών του τριγώνου, τότε $D_3 = \langle \sigma, \tau \rangle$, όπου σ στροφή κέντρου K κατά γωνία $120^\circ \cup$ και τ συμμετρία ως προς τον άξονα m_1 . Οπότε,

$$D_3 = \{ \text{στροφή κατά γωνία } 120^\circ \cup (\sigma), \text{ συμμετρία ως προς τον άξονα } m_1(\tau) \\ \text{στροφή κατά γωνία } 240^\circ \cup (\sigma^2), \text{ συμμετρία ως προς τον άξονα } m_2(\sigma^2\tau) \\ \text{στροφή κατά γωνία } 360^\circ \cup (id), \text{ συμμετρία ως προς τον άξονα } m_3(\sigma\tau) \}$$

Στον παρακάτω πίνακα περιγράφεται πλήρως η δράση της D_3 στο X

$D_3 \backslash X$	A	B	C	a	b	c	K	m_1	m_2	m_3
id	A	B	C	a	b	c	K	m_1	m_2	m_3
σ	B	C	A	b	c	a	K	m_2	m_3	m_1
σ^2	C	A	B	c	a	b	K	m_3	m_1	m_2
τ	A	C	B	a	c	b	K	m_1	m_3	m_2
$\sigma\tau$	B	A	C	b	a	c	K	m_2	m_1	m_3
$\sigma^2\tau$	C	B	A	c	b	a	K	m_3	m_2	m_1

Παράδειγμα 1.1.2: Έστω τετράγωνο $ABCD$.



Θεωρώ το σύνολο $X = \{A, B, C, D, s_1, s_2, s_3, s_4, m_1, m_2, d_1, d_2, K, P_1, P_2, P_3, P_4\}$, όπου A, B, C, D είναι οι κορυφές, s_1, s_2, s_3, s_4 οι πλευρές, m_1, m_2 ο κάθετος και οριζόντιος άξονας, d_1, d_2 οι διαγώνιοι, K το κέντρο συμμετρίας και P_1, P_2, P_3, P_4 τα μέσα των πλευρών του τετραγώνου (όπως στο σχήμα). Αν D_4 η ομάδα συμμετριών του τετραγώνου τότε $D_4 = \langle \sigma, \tau \rangle$, όπου σ στροφή κέντρου K κατά γωνία $90^\circ \cup$ και τ συμμετρία ως προς τον άξονα m_1 . Δηλαδή,

$$D_4 = \{ \text{στροφή κατά γωνία } 90^\circ \cup (\sigma), \text{ συμμετρία ως προς τον άξονα } m_1(\tau) \\ \text{στροφή κατά γωνία } 180^\circ \cup (\sigma^2), \text{ συμμετρία ως προς τον άξονα } m_2(\sigma^2\tau) \\ \text{στροφή κατά γωνία } 270^\circ \cup (\sigma^3), \text{ συμμετρία ως προς τον άξονα } d_1(\sigma\tau) \\ \text{στροφή κατά γωνία } 360^\circ \cup (id), \text{ συμμετρία ως προς τον άξονα } d_2(\sigma^3\tau) \}$$

Στον παρακάτω πίνακα περιγράφεται πλήρως η δράση της D_4 στο X

$D_4 \backslash X$	A	B	C	D	s_1	s_2	s_3	s_4	m_1	m_2	d_1	d_2	K	P_1	P_2	P_3	P_4
id	A	B	C	D	s_1	s_2	s_3	s_4	m_1	m_2	d_1	d_2	K	P_1	P_2	P_3	P_4
σ	B	C	D	A	s_2	s_3	s_4	s_1	m_2	m_1	d_2	d_1	K	P_2	P_3	P_4	P_1
σ^2	C	D	A	B	s_3	s_4	s_1	s_2	m_1	m_2	d_1	d_2	K	P_3	P_4	P_1	P_2
σ^3	D	A	B	C	s_4	s_1	s_2	s_3	m_2	m_1	d_2	d_1	K	P_4	P_1	P_2	P_3
τ	B	A	D	C	s_1	s_4	s_3	s_2	m_1	m_2	d_2	d_1	K	P_1	P_4	P_3	P_2
$\sigma\tau$	C	B	A	D	s_2	s_1	s_4	s_3	m_2	m_1	d_1	d_2	K	P_2	P_1	P_4	P_3
$\sigma^2\tau$	D	C	B	A	s_3	s_2	s_1	s_4	m_1	m_2	d_2	d_1	K	P_3	P_2	P_1	P_4
$\sigma^3\tau$	A	D	C	B	s_4	s_3	s_2	s_1	m_2	m_1	d_1	d_2	K	P_4	P_3	P_2	P_1

1.2 Ομάδες Ισοτροπίας

Έστω X ένα G -σύνολο. Έστω $x \in X$ και $g \in G$. Θεωρούμε τα σύνολα:

$$X_g = \{x \in X : gx = x\} \text{ και } G_x = \{g \in G : gx = x\}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.2.1: Αν X είναι ένα G -σύνολο, τότε η G_x είναι υποομάδα της G για κάθε $x \in X$ και ονομάζεται ομάδα ισοτροπίας του x .

Απόδειξη. Έστω $x \in X$.

Προφανώς $e \in G_x$. Άρα $G_x \neq \emptyset$.

- Έστω $g_1, g_2 \in G_x$.
Τότε $g_1x = x$ και $g_2x = x$.
Άρα $(g_1 \cdot g_2)x = g_1(g_2x) = g_1x = x$.
Οπότε $g_1 \cdot g_2 \in G_x$.
Άρα το G_x είναι κλειστό ως προς την πράξη που επάγεται από την G .
- Έχουμε ήδη ελέγξει ότι $e \in G_x$.
- Αν $g \in G_x$ τότε $gx = x$.
Δρω και στα δύο μέλη με g^{-1} :

$$\begin{aligned} g^{-1}(gx) &= g^{-1}x \\ (g^{-1} \cdot g)x &= g^{-1}x \\ ex &= g^{-1}x \\ x &= g^{-1}x \end{aligned}$$

Άρα $g^{-1} \in G_x$.

Οπότε, η G_x είναι υποομάδα της G . □

Παράδειγμα 1.2.1: Υπολογισμός των G_x και X_g του παραδείγματος 1.1.1 όπου $G = D_3$:

$$\begin{aligned}
 G_A &= \{g \in D_3 : gA = A\} = \{id, \tau\} \\
 G_B &= \{g \in D_3 : gB = B\} = \{id, \sigma^2\tau\} \\
 G_C &= \{g \in D_3 : gC = C\} = \{id, \sigma\tau\} \\
 G_a &= \{g \in D_3 : ga = a\} = \{id, \tau\} \\
 G_b &= \{g \in D_3 : gb = b\} = \{id, \sigma^2\tau\} \\
 G_c &= \{g \in D_3 : gc = c\} = \{id, \sigma\tau\} \\
 G_K &= \{g \in D_3 : gK = K\} = D_3 \\
 G_{m_1} &= \{g \in D_3 : gm_1 = m_1\} = \{id, \tau\} \\
 G_{m_2} &= \{g \in D_3 : gm_2 = m_2\} = \{id, \sigma^2\tau\} \\
 G_{m_3} &= \{g \in D_3 : gm_3 = m_3\} = \{id, \sigma\tau\}
 \end{aligned}$$

Και

$$\begin{aligned}
 X_{id} &= \{x \in X : (id)x = x\} = X \\
 X_\sigma &= \{x \in X : (\sigma)x = x\} = \{K\} \\
 X_{\sigma^2} &= \{x \in X : (\sigma^2)x = x\} = \{K\} \\
 X_\tau &= \{x \in X : (\tau)x = x\} = \{A, a, K, m_1\} \\
 X_{\sigma\tau} &= \{x \in X : (\sigma\tau)x = x\} = \{C, c, K, m_3\} \\
 X_{\sigma^2\tau} &= \{x \in X : (\sigma^2\tau)x = x\} = \{B, b, K, m_2\}
 \end{aligned}$$

1.3 Τροχιές

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.3.1: Έστω X ένα G -σύνολο. Αν $x_1, x_2 \in X$ ορίζουμε $x_1 \sim x_2$ αν και μόνο αν υπάρχει $g \in G$ με $x_2 = gx_1$. Τότε $\eta \sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας στο X .

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι $\eta \sim$ είναι ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική.

- Για κάθε $x \in X$, έχουμε $ex = x$.
Άρα $x \sim x$ και $\eta \sim$ είναι ανακλαστική.
- Αν $x_1 \sim x_2$ αυτό σημαίνει ότι υπάρχει $g \in G$ τέτοιο ώστε $x_2 = gx_1$. Δρούμε με g^{-1} και στα δύο μέλη:

$$\begin{aligned}
 g^{-1}x_2 &= g^{-1}(gx_1) \\
 g^{-1}x_2 &= (g^{-1} \cdot g)x_1 \\
 g^{-1}x_2 &= ex_1 \\
 g^{-1}x_2 &= x_1
 \end{aligned}$$

Άρα $x_2 \sim x_1$ και $\eta \sim$ είναι συμμετρική.

- Αν $x_1 \sim x_2$ και $x_2 \sim x_3$ αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν $g_1, g_2 \in G$ τέτοια ώστε $x_2 = g_1x_1$ και $x_3 = g_2x_2$. Οπότε,

$$x_3 = g_2x_2 = g_2(g_1x_1) = (g_2 \cdot g_1)x_1$$

Άρα $x_1 \sim x_3$ και \sim είναι μεταβατική.

Συνεπώς, \sim είναι σχέση ισοδυναμίας στο X . □

Η κλάση ισοδυναμίας ενός $x \in X$ λέγεται τροχιά του x (υπό τη G) και συμβολίζεται $O(x)$ και άρα οι τροχιές ως κλάσεις ισοδυναμίας είτε ταυτίζονται είτε είναι ξένες. Δηλαδή, $O(x) = \{y \in X : x \sim y\} = \{y \in X \text{ για τα οποία υπάρχει } g \in G \text{ με } y = gx\}$. Επίσης, $X = \cup O(x)$ έχουμε, δηλαδή, διαμέριση του X σε ξένες τροχιές.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.3.1: Έστω X ένα G -σύνολο και $x \in X$. Τότε:

$$|O(x)| = [G : G_x]$$

Απόδειξη. Έστω $x \in X$. Αρκεί να φτιάξουμε μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία φ από το $O(x)$ στο σύνολο των αριστερών συμπλόκων της υποομάδας G_x στην G .

Το τυπικό στοιχείο της τροχιάς $O(x)$ είναι της μορφής gx με $g \in G$.

Ορίζουμε $gx \xrightarrow{\varphi} gG_x$

- Αρχικά δείχνουμε ότι η φ είναι καλά ορισμένη.
Δηλαδή, αν $g_1, g_2 \in G$ και $g_1x = g_2x$ τότε πρέπει να δείξουμε ότι $\varphi(g_1x) = \varphi(g_2x)$, δηλαδή, $g_1G_x = g_2G_x$.
Πράγματι,

$$\begin{aligned} g_1x = g_2x &\Rightarrow g_2^{-1}(g_1x) = g_2^{-1}(g_2x) \\ &\Rightarrow (g_2^{-1} \cdot g_1)x = (g_2^{-1} \cdot g_2)x \\ &\Rightarrow (g_2^{-1} \cdot g_1)x = ex \\ &\Rightarrow (g_2^{-1} \cdot g_1)x = x \end{aligned}$$

Άρα $g_2^{-1} \cdot g_1 \in G_x$. Οπότε $g_1G_x = g_2G_x$

- Για να δείξουμε ότι η φ είναι 1-1:
Υποθέτουμε ότι $\varphi(g_1x) = \varphi(g_2x)$.
Τότε $g_1G_x = g_2G_x$ άρα $g_2^{-1} \cdot g_1 \in G_x$ και $(g_2^{-1} \cdot g_1)x = x$.
Άρα,

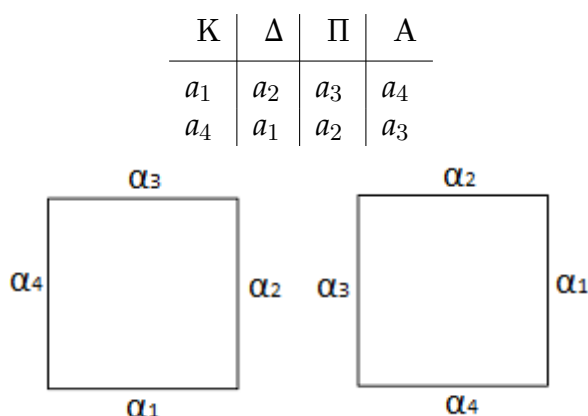
$$\begin{aligned} g_2x &= g_2(g_2^{-1} \cdot g_1)x \\ &= (g_2 \cdot g_2^{-1} \cdot g_1)x \\ &= (e \cdot g_1)x \\ &= g_1x \end{aligned}$$

Άρα η απεικόνιση φ είναι 1-1.

- Μένει μόνο να δείξουμε ότι η φ είναι επί.
Προφανώς είναι. Αν πάρουμε μια τυχαία αριστερή κλάση gG_x τότε $\varphi(gx) = gG_x$

□

Στο παράδειγμα 1.1.1 έχουμε την διαμέριση του X στις τροχιές: $O(A) = \{A, B, C\}$, $O(K) = \{K\}$, $O(m_1) = \{m_1, m_2, m_3\}$, $O(a) = \{a, b, c\}$ κτλ. Οι τροχιές αυτές εμφανίζονται φυσιολογικά σε διάφορα πρακτικά προβλήματα. Για παράδειγμα έστω ότι έχουμε ένα τετράγωνο και θέλουμε να χρωματίσουμε την κάθε του πλευρά με 6 διαθέσιμα χρώματα, τα εξής $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να χρωματίσουμε τις πλευρές του τετραγώνου έτσι ώστε κάθε πλευρά να έχει διαφορετικό χρώμα; Έχουμε κατ'αρχάς $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ δυνατές επιλογές. Όμως, δύο από τις 360 δυνατές επιλογές είναι:



Στην πραγματικότητα όμως αυτά τα δύο αντικείμενα είναι τα ίδια. Άρα τα διαφορετικά χρωματισμένα τετράγωνα, στην πραγματικότητα, είναι λιγότερα από 360. Έστω X το σύνολο των 360 δυνατών επιλογών που μετρήσαμε. Η D_4 δρα πάνω σ'αυτό το σύνολο.

Έστω $x = (a_1 a_2 a_3 a_4)$.

$$\begin{aligned}
 O(x) &= \{(a_1 a_2 a_3 a_4), (a_4 a_1 a_2 a_3), (a_3 a_4 a_1 a_2), (a_2 a_3 a_4 a_1), (a_3 a_2 a_1 a_4), (a_1 a_4 a_3 a_2)\} \\
 &= \text{χρωματισμοί του τετραγώνου που ανήκουν στην ίδια τροχιά και αντιστοιχούν} \\
 &\quad \text{σε ένα τρόπο χρωματισμού του τετραγώνου.}
 \end{aligned}$$

Άρα, το πλήθος των διαφορετικών τρόπων χρωματισμού του τετραγώνου ισούται με το πλήθος των διαφορετικών τροχιών. Οπότε, το πρόβλημα είναι στο να υπολογίσουμε το πλήθος των τροχιών όταν γνωρίζουμε το σύνολο X και την ομάδα G που δρα στο X .

1.4 Θεώρημα Burnside

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.4.1 (Θεώρημα του Burnside): Έστω G μια πεπερασμένη ομάδα και X ένα πεπερασμένο G -σύμπλο. Αν r είναι το πλήθος των τροχιών του X υπό την G , τότε

$$r \cdot |G| = \sum_{g \in G} |X_g|$$

Απόδειξη του Θεωρήματος του Burnside. Θεωρούμε το σύμπλο S του $G \times X$ που ορίζεται ως $S = \{(g, x) : gx = x\}$. Έστω N ο πληθάριθμος του. Θα υπολογίσουμε το N με δύο διαφορετικούς τρόπους. Αν σταθεροποιήσουμε το g , τότε το σύμπλο των ζευγαριών του S , που έχουν σαν πρώτη συντεταγμένη το συγκεκριμένο g είναι $\{(g, x) : x \in X_g\}$, του οποίου ο πληθάριθμος είναι $|X_g|$. Άρα, αν το κάνουμε αυτό για κάθε g , βρίσκουμε ότι:

$$N = \sum_{g \in G} |X_g| \quad (1.1)$$

Αν σταθεροποιήσουμε το x , τότε το σύμπλο των ζευγαριών του S , που έχουν σαν δεύτερη συντεταγμένη το συγκεκριμένο x είναι $\{(g, x) : g \in G_x\}$, του οποίου ο πληθάριθμος είναι $|G_x|$. Άρα, αν το κάνουμε αυτό για κάθε x , βρίσκουμε ότι:

$$N = \sum_{x \in X} |G_x| \quad (1.2)$$

Από την πρόταση 1.3.1 έχουμε ότι

$$|G_x| = \frac{|G|}{|O(x)|} \quad (1.3)$$

Άρα από τις σχέσεις 1.2 και 1.3 προκύπτει ότι

$$N = \sum_{x \in X} \frac{|G|}{|O(x)|} = |G| \sum_{x \in X} \frac{1}{|O(x)|} \quad (1.4)$$

Ο αριθμός $1/|O(x)|$ είναι ο ίδιος για κάθε x που ανήκει στην ίδια τροχιά. Για παράδειγμα, αν πάρουμε μια συγκεκριμένη τροχιά $O(x) = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$, τότε $|O(x_1)| = k, |O(x_2)| = k, \dots, |O(x_k)| = k$. Άρα, αν ξεχωρίσουμε από το X τα x_1, x_2, \dots, x_k τότε για το παρακάτω υποάθροισμα έχουμε:

$$\frac{1}{|O(x_1)|} + \frac{1}{|O(x_2)|} + \dots + \frac{1}{|O(x_k)|} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k} + \dots + \frac{1}{k} = k \cdot \frac{1}{k} = 1$$

Δηλαδή, το άθροισμα $\sum_{x \in X} (1/|O(x)|)$ “σπάει” σε μικρότερα υποαθροίσματα καθένα από τα οποία είναι ίσον με 1. Το πλήθος αυτών των υποαθροισμάτων είναι όσες και οι τροχιές, δηλαδή, r . Οπότε,

$$\sum_{x \in X} \frac{1}{|O(x)|} = 1 + 1 + \dots + 1 = r \cdot 1 = r$$

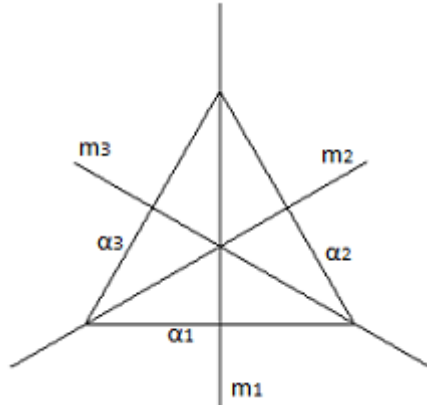
Συνεπώς, συνδυάζοντας τις σχέσεις 1.4 και 1.1 προκύπτει:

$$r \cdot |G| = \sum_{g \in G} |X_g|$$

□

1.5 Εφαρμογές

Εφαρμογή 1.5.1: Να προσδιοριστεί το πλήθος των ουσιαστικά διαφορετικών τρόπων με τους οποίους χρωματίζονται οι πλευρές ενός ισόπλευρου τριγώνου αν διατίθενται τέσσερα διαφορετικά χρώματα, δεχόμενοι ότι χρησιμοποιείται ένα χρώμα για κάθε πλευρά, και ότι το ίδιο χρώμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για διαφορετικές πλευρές.



Αφού το τρίγωνο έχει 3 πλευρές και διατίθενται 4 χρώματα (έστω τα: 1, 2, 3, 4), υπάρχουν συνολικά $4^3 = 64$ τρόποι χρωματισμού των πλευρών του τριγώνου. Έστω X το σύνολο των 64 χρωματισμένων τριγώνων. Η D_3 δρα στο σύνολο X . Υπολογίζουμε το πλήθος $|X_g|$ για κάθε $g \in D_3$:

- Για $g = id$.

$$X_{id} = X$$

Άρα $|X_{id}| = 64$.

- Για $g = \sigma$
Έστω $x \in X_\sigma$ και $x = (a_1 a_2 a_3)$.

$$\sigma x = x$$

$$\sigma(a_1 a_2 a_3) = (a_1 a_2 a_3)$$

$$(a_3 a_1 a_2) = (a_1 a_2 a_3)$$

$$a_1 = a_2 = a_3$$

$$X_\sigma = \{(a_1 a_1 a_1) : 1 \leq a_1 \leq 4\}$$

Άρα, $|X_\sigma| = 4$.

- Για $g = \sigma^2$
Έστω $x \in X_{\sigma^2}$ και $x = (a_1 a_2 a_3)$.

$$\sigma^2 x = x$$

$$\sigma^2(a_1 a_2 a_3) = (a_1 a_2 a_3)$$

$$(a_2 a_3 a_1) = (a_1 a_2 a_3)$$

$$a_1 = a_2 = a_3$$

$$X_{\sigma^2} = \{(a_1 a_1 a_1) : 1 \leq a_1 \leq 4\}$$

Άρα, $|X_{\sigma^2}| = 4$.

- Για $g = \tau$
Έστω $x \in X_\tau$ και $x = (a_1 a_2 a_3)$.

$$\begin{aligned}\tau x &= x \\ \tau(a_1 a_2 a_3) &= (a_1 a_2 a_3) \\ (a_1 a_3 a_2) &= (a_1 a_2 a_3) \\ a_2 &= a_3\end{aligned}$$

$$X_\tau = \{(a_1 a_2 a_2) : 1 \leq a_1, a_2 \leq 4\}$$

Άρα, $|X_\tau| = 4^2 = 16$.

- Για $g = \sigma\tau$
Έστω $x \in X_{\sigma\tau}$ και $x = (a_1 a_2 a_3)$.

$$\begin{aligned}\sigma\tau x &= x \\ \sigma\tau(a_1 a_2 a_3) &= (a_1 a_2 a_3) \\ (a_2 a_1 a_3) &= (a_1 a_2 a_3) \\ a_1 &= a_2\end{aligned}$$

$$X_{\sigma\tau} = \{(a_1 a_1 a_3) : 1 \leq a_1, a_3 \leq 4\}$$

Άρα, $|X_{\sigma\tau}| = 4^2 = 16$.

- Για $g = \sigma^2\tau$
Έστω $x \in X_{\sigma^2\tau}$ και $x = (a_1 a_2 a_3)$.

$$\begin{aligned}\sigma^2\tau x &= x \\ \sigma^2\tau(a_1 a_2 a_3) &= (a_1 a_2 a_3) \\ (a_3 a_2 a_1) &= (a_1 a_2 a_3) \\ a_1 &= a_3\end{aligned}$$

$$X_{\sigma^2\tau} = \{(a_1 a_2 a_1) : 1 \leq a_1, a_2 \leq 4\}$$

Άρα, $|X_{\sigma^2\tau}| = 4^2 = 16$.

Οπότε

$$\sum_{g \in D_3} |X_g| = 64 + 4 + 4 + 16 + 16 + 16 = 120$$

Και, άρα, σύμφωνα με το Θεώρημα του Burnside (Θεώρημα 1.4.1):

$$\begin{aligned}r \cdot |D_3| &= \sum_{g \in D_3} |X_g| \\ r \cdot 6 &= 120 \\ r &= 20\end{aligned}$$

Συνεπώς, υπάρχουν 20 διαφορετικά χρωματισμένα τρίγωνα.

Εφαρμογή 1.5.2: Όμοια με την Εφαρμογή 1.5.1, με την υπόθεση ότι διαφορετικό χρώμα πρέπει να χρησιμοποιείται σε κάθε πλευρά

Υπάρχουν συνολικά $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ τρόποι χρωματισμού των πλευρών του τριγώνου. Έστω X το σύνολο των 24 χρωματισμένων τριγώνων. Η D_3 δρα στο σύνολο X . Αφού όλες οι πλευρές πρέπει να είναι διαφορετικού χρώματος έχουμε ότι $|X_{id}| = 24$ ενώ $|X_g| = 0$ όταν $g \neq id$ ($g \in D_3$). Οπότε,

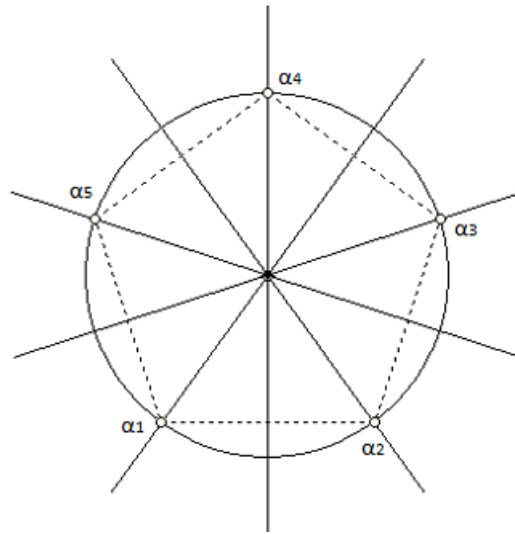
$$\sum_{g \in D_3} |X_g| = 24$$

Και, άρα, σύμφωνα με το Θεώρημα του Burnside (Θεώρημα 1.4.1):

$$\begin{aligned} r \cdot |D_3| &= \sum_{g \in D_3} |X_g| \\ r \cdot 6 &= 24 \\ r &= 4 \end{aligned}$$

Συνεπώς, υπάρχουν 4 διαφορετικά χρωματισμένα τρίγωνα.

Εφαρμογή 1.5.3: Πόσα κυκλικά περιδέραια μπορούν να κατασκευαστούν με 5 χάντρες διαφορετικού χρώματος (τα περιδέραια χωρίς πόρπη);

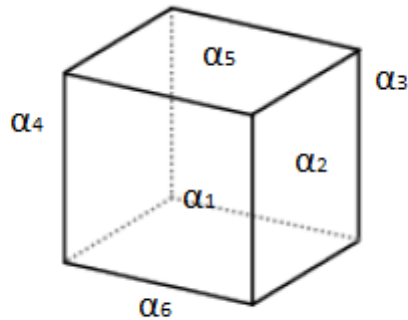


Υπάρχουν $5! = 120$ τρόποι τοποθέτησης των 5 χαντρών. Έστω X το σύνολο των 120 περιδεραίων. Η D_5 δρα στο σύνολο X . Η D_5 έχει την id , τις στροφές $\sigma, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^4$ όπου σ η στροφή με κέντρο το κέντρο ενός κανονικού 5-γώνου και γωνία στροφής 72° και 5 κατοπτρισμοί ως προς τους 5 άξονες συμμετρίας του κανονικού 5-γώνου. Το περιδέραιο μπορεί και να περιστραφεί και να αναποδογυριστεί. Σ' αυτήν την περίπτωση δρα ολόκληρη η διεδρική ομάδα D_5 στο σύνολο X των 120 δυνατοτήτων. Και άρα σύμφωνα με το Θεώρημα του Burnside (Θεώρημα 1.4.1):

$$\begin{aligned} r \cdot |D_5| &= \sum_{g \in D_5} |X_g| \\ r \cdot 10 &= 120 \\ r &= 12 \end{aligned}$$

Συνεπώς, υπάρχουν 12 διαφορετικά περιδέραια.

Εφαρμογή 1.5.4: Να προσδιοριστεί το πλήθος των ουσιαστικά διαφορετικών τρόπων με τους οποίους χρωματίζονται οι έδρες ενός κύβου αν διατίθενται δύο διαφορετικά χρώματα, δεχόμενοι ότι χρησιμοποιείται ένα χρώμα για κάθε έδρα, και ότι το ίδιο χρώμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε διαφορετικές έδρες.



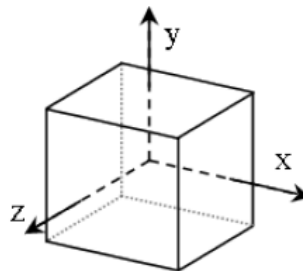
Αφού ο κύβος έχει 6 έδρες και διατίθενται 2 χρώματα (έστω τα: 1, 2), υπάρχουν συνολικά $2^6 = 64$ τρόποι χρωματισμού του κύβου. Έστω X το σύνολο των 64 χρωματισμένων κύβων και έστω G η ομάδα που δρα στο X . Υπολογίζουμε το $|X_g|$ για κάθε $g \in G$. Η G περιέχει 24 περιστροφές του κύβου οι οποίες μπορούν να χωριστούν σε πέντε κατηγορίες:

- Περιέχει την ταυτοτική περιστροφή id .
Για $g = id$.

$$X_{id} = X$$

Άρα, $|X_{id}| = 2^6 = 64$.

- Περιέχει 6 περιστροφές εκ των οποίων 3 είναι των 90° και 3 των -90° ως προς τους άξονες x, y, z .



Αν για παράδειγμα γράψουμε $g \in G$ την περιστροφή 90° ως προς τον άξονα x , τότε, αν $x = (a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6)$, έχουμε $x \in X_g$ αν και μόνο αν

$$\begin{aligned} gx &= x \\ g(a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6) &= (a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6) \\ (a_5 a_2 a_6 a_4 a_3 a_1) &= (a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6) \\ a_1 = a_3 &= a_5 = a_6 \end{aligned}$$

Επομένως $X_g = \{(a_1 a_2 a_1 a_4 a_1 a_1) : 1 \leq a_1, a_2, a_4 \leq 2\}$ και συνεπώς $|X_g| = 2^3 = 8$.

Εργαζόμαστε ανάλογα και για τις υπόλοιπες περιστροφές..

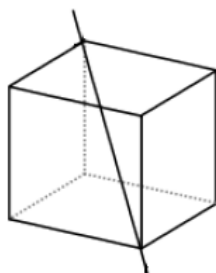
- Περιέχει 3 περιστροφές των 180° ως προς τους άξονες x, y, z .
Αν για παράδειγμα γράψουμε $g \in G$ την περιστροφή 180° ως προς τον άξονα x , τότε, αν $x = (a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6)$, έχουμε $x \in X_g$ αν και μόνο αν

$$\begin{aligned} gx &= x \\ g(a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6) &= (a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6) \\ (a_3 a_2 a_1 a_4 a_6 a_5) &= (a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6) \\ a_1 &= a_3 \quad \text{και} \quad a_5 = a_6 \end{aligned}$$

Επομένως $X_g = \{(a_1 a_2 a_1 a_4 a_5 a_5) : 1 \leq a_1, a_2, a_4, a_5 \leq 2\}$ και συνεπώς $|X_g| = 2^4 = 16$.

Εργαζόμαστε ανάλογα και για τις υπόλοιπες περιστροφές.

- Περιέχει 8 περιστροφές ως προς τους άξονες που ενώνουν απέναντι κορυφές.
Αν για παράδειγμα γράψουμε $g \in G$ την περιστροφή ως προς τον άξονα που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα,

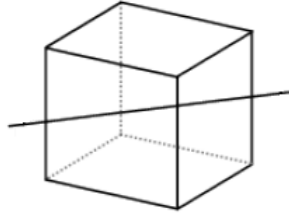


τότε, αν $x = (a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6)$, έχουμε $x \in X_g$ αν και μόνο αν

$$\begin{aligned} gx &= x \\ g(a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6) &= (a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6) \\ (a_6 a_1 a_5 a_3 a_4 a_2) &= (a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6) \\ a_1 &= a_2 = a_6 \quad \text{και} \quad a_3 = a_4 = a_5 \end{aligned}$$

Επομένως $X_g = \{(a_1 a_1 a_3 a_3 a_3 a_1) : 1 \leq a_1, a_3 \leq 2\}$ και συνεπώς $|X_g| = 2^2 = 4$.
Εργαζόμαστε ανάλογα και για τις υπόλοιπες περιστροφές.

- Περιέχει 6 περιστροφές ως προς τους άξονες που ενώνουν τα μέσα απέναντι ακμών.
Αν για παράδειγμα γράψουμε $g \in G$ την περιστροφή ως προς τον άξονα που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα,



τότε, αν $x = (a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6)$, έχουμε $x \in X_g$ αν και μόνο αν

$$\begin{aligned} gx &= x \\ g(a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6) &= (a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6) \\ (a_4 a_3 a_2 a_1 a_6 a_5) &= (a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6) \\ a_1 = a_4, \quad a_2 = a_3 &\quad \text{και} \quad a_5 = a_6 \end{aligned}$$

Επομένως $X_g = \{(a_1 a_2 a_2 a_1 a_5 a_5) : 1 \leq a_1, a_2, a_5 \leq 2\}$ και συνεπώς $|X_g| = 2^3 = 8$.

Εργαζόμαστε ανάλογα και για τις υπόλοιπες περιστροφές.

Οπότε

$$\sum_{g \in G} |X_g| = 64 + 6 \cdot 8 + 3 \cdot 16 + 8 \cdot 4 + 6 \cdot 8 = 240$$

Και, άρα, σύμφωνα με το Θεώρημα του Burnside (Θεώρημα 1.4.1):

$$\begin{aligned} r \cdot |G| &= \sum_{g \in G} |X_g| \\ r \cdot 24 &= 240 \\ r &= 10 \end{aligned}$$

Συνεπώς, υπάρχουν 10 διαφορετικά χρωματισμένοι κύβοι.

Κεφάλαιο 2

Το Θεώρημα Απαρίθμησης του Pólya

Στα διάφορα προβλήματα απαρίθμησης, συχνά συναντάμε 3 ειδών δυσκολίες. Η πιο τεχνικής φύσης από αυτές είναι η εύρεση ενός γενικού τύπου του οποίου η εφαρμογή, μας δίνει το ζητούμενο πλήθος. Την δυσκολία αυτή ξεπερνάμε με τις παράγουσες συναρτήσεις (generating functions), οι οποίες αφού τις οργανώσουμε κατάλληλα αποτελούν ένα εργαλείο που βοηθά σημαντικά στην εξαγωγή του αποτελέσματος. Στο κεφάλαιο αυτό θα ορίσουμε το Cycle Index, που θα αποτελέσει την παράγουσα συνάρτηση που αναζητάμε.

Επίσης, συναντάμε δυσκολίες όταν κατά την απαρίθμηση εμφανίζονται ισοδύναμα αντικείμενα, ή με άλλα λόγια όταν εμφανίζονται ισοδύναμες σχέσεις ανάμεσα στα αντικείμενα που απαριθμούμε και οπότε τελικά μας ενδιαφέρει το πλήθος των ισοδύναμων κλάσεων (τροχιές).

Τέλος, ο τρίτος τύπος δυσκολίας εντοπίζεται όταν απαριθμούμε αντικείμενα που δεν έχουν το ίδιο βάρος. Για παράδειγμα, όταν λέμε ότι μια αλγεβρική εξίσωση βαθμού n έχει ακριβώς n ρίζες τότε έχουμε θεωρήσει το βάρος κάθε ρίζας ίσο με την πολλαπλότητα της.

Αυτές οι πτυχές της απαρίθμησης (παράγουσες συναρτήσεις, ισοδυναμίες, βάρος) συνδυάζονται και απαρτίζουν το Θεώρημα Απαρίθμησης του Pólya το οποίο κατέχει βασική θέση στην ανάλυση συνδυαστικών μεθόδων.

2.1 Cycle Index

Έστω $S \subseteq S_n$. Αν η $\sigma \in S$, ως γινόμενο ξένων κύκλων, έχει b_1 κύκλους μήκους 1, b_2 κύκλους μήκους 2 κτλ τότε λέμε ότι η σ είναι τύπου $\{b_1, b_2, \dots\}$. Για παράδειγμα, η $\sigma = (125)(34)(6)(7)$ στην S_7 είναι τύπου $\{2, 1, 1, 0, 0, 0, 0\}$. Επίσης, αφού $S \subseteq S_n$, ισχύει $b_1 + 2b_2 + 3b_3 + \dots = n$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.1.1 (Cycle Index): Έστω G ομάδα μεταθέσεων της οποίας τα στοιχεία είναι οι μεταθέσεις του συνόλου S με πράξη την σύνθεση μεταθέσεων. Αν $|S| = m$ τότε $G \subseteq S_m$ και ορίζουμε πολυώνυμο με m μεταβλητές x_1, x_2, \dots, x_m και με μη αρνητικούς συντελεστές ως εξής: Για κάθε $g \in G$ σχηματίζουμε το γινόμενο $x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_m^{b_m}$ αν το g είναι τύπου $\{b_1, b_2, \dots, b_m\}$. Παίρνοντας το άθροισμα αυτών των όρων και διαιρώντας το με το πλήθος των στοιχείων της

G έχουμε το πολυώνυμο

$$P_G(x_1, x_2, \dots, x_m) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_m^{b_m}$$

το οποίο ονομάζουμε cycle index της G .

Όταν το πλήθος των μεταβλητών είναι ξεκάθαρο, συμβολίζουμε το cycle index της ομάδας G με P_G αντί του $P_G(x_1, x_2, \dots, x_m)$.

Παράδειγμα 2.1.1: Αν $G = S_3$:

$$S_3 = \{(1)(2)(3), (1)(23), (2)(13), (3)(12), (123), (132)\}$$

Και το cycle index της S_3 είναι $P_{S_3}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{3!}(x_1^3 + 3x_1x_2 + 2x_3)$.

2.2 Γνωστά Cycle Indices

Έστω G πεπερασμένη ομάδα, και $|G| = n$. Αν a σταθερό στοιχείο της G , τότε η αντιστοιχία $g \rightarrow ag$ είναι μετάθεση της G . Συμβολίζουμε αυτή τη μετάθεση s_a . Σύμφωνα με το Θεώρημα Cayley, αν $S = \{s_a \mid a \in G\}$ τότε $S \subseteq S_n$ και $S \cong G$. Στα Θεωρήματα που ακολουθούν γίνεται χρήση του Θεωρήματος Cayley που μας εξασφαλίζει ότι κάθε ομάδα G είναι ισόμορφη με υποομάδα της $S_{|G|}$ μέσω του ομομορφισμού

$$\begin{aligned} \varphi: G &\rightarrow S_{|G|} \\ a &\mapsto s_a \end{aligned}$$

όπου $s_a(i) = j$ αν και μόνο αν $a \cdot si = sj$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.2.1: Έστω E_n η τετριμμένη υποομάδα της S_n , δηλαδή $E_n = \{id\} \subseteq S_n$. Το cycle index της E_n δίνεται από τον τύπο:

$$P_{E_n} = x_1^n$$

Απόδειξη. Κάθε ομάδα E_n περιέχει μόνο μια μετάθεση. Η μετάθεση αυτή είναι γινόμενο n κύκλων μήκους 1 και άρα το cycle index της E_n δίνεται από τον τύπο:

$$P_{E_n} = x_1^n$$

□

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.2.2: Το cycle index της S_n δίνεται από τον τύπο:

$$P_{S_n} = \sum_{\{b_1, b_2, \dots, b_n\}} \frac{1}{\prod_{t=1}^n t^{b_t} b_t!} \cdot x_1^{b_1} \cdot x_2^{b_2} \dots x_n^{b_n}$$

όπου $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ είναι ο τύπος κάθε στοιχείου της S_n .

Απόδειξη. Έστω $\sigma \in S_n$ τύπου $\{b_1, \dots, b_n\}$.

$$\begin{aligned} P_{S_n} &= \frac{1}{|S_n|} \sum_{\sigma \in S_n} x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_n^{b_n} \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{\{b_1, \dots, b_n\}} \left(\text{πλήθος } \sigma \in S_n \text{ τύπου } \{b_1, \dots, b_n\} \right) \cdot x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_n^{b_n} \end{aligned}$$

Όμως, γνωρίζουμε ήδη ότι ο τύπος $\{b_1, \dots, b_n\}$ μιας μετάθεσης σ καθορίζει την κλάση συζυγίας της σ , άρα

$$P_{S_n} = \frac{1}{n!} \sum_{\{b_1, \dots, b_n\}} |Y| \cdot x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_n^{b_n}$$

όπου Y είναι το πλήθος των στοιχείων της S_n τύπου $\{b_1, \dots, b_n\}$.

Μένει, τώρα, να υπολογίσουμε το $|Y|$.

Όλες οι μεταθέσεις τύπου $\{b_1, \dots, b_n\}$ είναι της μορφής:

$$\underbrace{(\bullet)(\bullet) \dots (\bullet)}_{b_1} \underbrace{(\bullet\bullet)(\bullet\bullet) \dots (\bullet\bullet)}_{b_2} \dots \underbrace{(\bullet \dots \bullet)}_{b_k} \dots \underbrace{(\bullet \dots \bullet)}_{b_k} \dots \underbrace{(\bullet \dots \bullet)}_{b_n}$$

Οι $n \bullet$ μπορούν να αντικατασταθούν από αριθμούς από το 1 ως το n με $n!$ τρόπους. Όμως έτσι έχουμε επιπλέον μετρήσεις. Πρώτον, μετράμε την $(12)(34)$ ως διαφορετική από την $(34)(12)$ ενώ στην πραγματικότητα ταυτίζονται. Κάθε ομάδα κύκλων μήκους t δίνει $b_t!$ επιπλέον μετρήσεις. Για να το διορθώσουμε αυτό πρέπει να διαιρέσουμε με το $b_1! b_2! \dots$. Δεύτερον, ένας κύκλος μήκους t έχει μετρηθεί t φορές επιπλέον. Για παράδειγμα, μετράμε τον κύκλο $(123 \dots t)$ ως διαφορετικό από τους $(23 \dots t1)$, $(34 \dots t12) \dots$, ενώ στην πραγματικότητα ταυτίζονται. Για να το διορθώσουμε αυτό πρέπει για κάθε κύκλο μήκους t να διαιρέσουμε με t . Άρα διαιρούμε με $\underbrace{t \cdot t \dots t}_{b_t \text{ φορές}} = t^{b_t}$.

Άρα, συνολικά έχω:

$$|Y| = \frac{n!}{\prod_{t=1}^n t^{b_t} \cdot b_t!}$$

Και καταλήγουμε

$$P_{S_n} = \sum_{\{b_1, b_2, \dots, b_n\}} \frac{1}{\prod_{t=1}^n t^{b_t} \cdot b_t!} \cdot x_1^{b_1} \cdot x_2^{b_2} \dots x_n^{b_n}$$

□

Παράδειγμα 2.2.1: Ποιό είναι το cycle index της S_4 ;

Η S_4 έχει 5 τύπους μεταθέσεων, τους εξής: $\{4, 0, 0, 0\}$, $\{2, 1, 0, 0\}$, $\{0, 2, 0, 0\}$, $\{1, 0, 1, 0\}$ και $\{0, 0, 0, 1\}$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.2.2 το cycle index της S_4 δίνεται από τον τύπο:

$$P_{S_4} = \sum_{\{b_1, b_2, b_3, b_4\}} \frac{1}{\prod_{t=1}^4 t^{b_t} b_t!} \cdot x_1^{b_1} \cdot x_2^{b_2} \cdot x_3^{b_3} \cdot x_4^{b_4}$$

Ο τύπος $\{4, 0, 0, 0\}$ δίνει τον όρο:

$$\frac{1}{1^4 \cdot 4!} \cdot x_1^4 = \frac{1}{24} \cdot x_1^4$$

Ο τύπος $\{2, 1, 0, 0\}$ δίνει τον όρο:

$$\frac{1}{1^2 \cdot 2! \cdot 2^1} \cdot x_1^2 \cdot x_2^1 - \frac{1}{4} \cdot x_1^2 \cdot x_2$$

Ο τύπος $\{0, 2, 0, 0\}$ δίνει τον όρο:

$$\frac{1}{2^2 \cdot 2!} \cdot x_2^2 = \frac{1}{8} \cdot x_2^2$$

Ο τύπος $\{1, 0, 1, 0\}$ δίνει τον όρο:

$$\frac{1}{1^1 \cdot 1! \cdot 3^1 \cdot 1!} \cdot x_1^1 \cdot x_3^1 = \frac{1}{3} \cdot x_1 \cdot x_3$$

Ο τύπος $\{0, 0, 0, 1\}$ δίνει τον όρο:

$$\frac{1}{4^1 \cdot 1!} \cdot x_4^1 = \frac{1}{4} \cdot x_4$$

Αθροίζοντας τους παραπάνω όρους προκύπτει το cycle index της S_4 :

$$P_{S_4}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{24}(x_1^4 + 6x_1^2x_2 + 3x_2^2 + 8x_1x_3 + 6x_4)$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.2.3: Το cycle index της A_n δίνεται από τον τύπο:

$$P_{A_n} = \sum_{\{b_1, b_2, \dots, b_n\}} \frac{1 + (-1)^{\sum_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} b_{2i}}}{\prod_{t=1}^n t^{b_t} \cdot b_t!} \cdot x_1^{b_1} \cdot x_2^{b_2} \cdots x_n^{b_n}$$

Απόδειξη. Η A_n περιέχει τις άρτιες μεταθέσεις της S_n . Μια μετάθεση σ της S_n τύπου $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ ανήκει στην A_n αν και μόνο αν $b_2 + b_4 + b_6 + \dots = \text{άρτιος}$.

$$\begin{aligned} P_{A_n} &= \frac{2}{n!} \sum_{\substack{\{b_1, b_2, \dots, b_n\} \\ \sum_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} b_{2i} = \text{άρτιος}}} \frac{n!}{\prod_{t=1}^n t^{b_t} \cdot b_t!} \cdot x_1^{b_1} \cdot x_2^{b_2} \cdots x_n^{b_n} \\ &= \frac{2}{n!} \sum_{\{b_1, b_2, \dots, b_n\}} \frac{1 + (-1)^{\sum_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} b_{2i}}}{2} \cdot \frac{n!}{\prod_{t=1}^n t^{b_t} \cdot b_t!} \cdot x_1^{b_1} \cdot x_2^{b_2} \cdots x_n^{b_n} \\ &= \sum_{\{b_1, b_2, \dots, b_n\}} \frac{1 + (-1)^{\sum_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} b_{2i}}}{\prod_{t=1}^n t^{b_t} \cdot b_t!} \cdot x_1^{b_1} \cdot x_2^{b_2} \cdots x_n^{b_n} \end{aligned}$$

□

Παράδειγμα 2.2.2: Ποιο είναι το cycle index της A_3 ;

Η A_3 περιέχει τις άρτιες μεταθέσεις της S_3 . Η S_3 έχει 3 τύπους μεταθέσεων, τους εξής: $\{3, 0, 0\}$, $\{1, 1, 0\}$ και $\{0, 0, 1\}$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.2.3 το cycle index της A_3 δίνεται από τον τύπο:

$$P_{A_3} = \sum_{\{b_1, b_2, b_3\}} \frac{1 + (-1)^{b_2}}{\prod_{t=1}^3 t^{b_t} \cdot b_t!} \cdot x_1^{b_1} \cdot x_2^{b_2} \cdot x_3^{b_3}$$

Ο τύπος $\{3, 0, 0\}$ δίνει τον όρο:

$$\frac{1 + (-1)^0}{1^3 \cdot 3!} \cdot x_1^3 = \frac{2}{3!} \cdot x_1^3 = \frac{1}{3} \cdot x_1^3$$

Ο τύπος $\{1, 1, 0\}$ δίνει τον όρο:

$$\frac{1 + (-1)^1}{1^1 \cdot 1! \cdot 2^1 \cdot 1!} \cdot x_1^1 \cdot x_2^1 = 0$$

Ο τύπος $\{0, 0, 1\}$ δίνει τον όρο:

$$\frac{1 + (-1)^0}{3^1 \cdot 1!} \cdot x_3^1 = \frac{2}{3} \cdot x_3$$

Αθροίζοντας τους παραπάνω όρους προκύπτει το cycle index της A_3 :

$$P_{A_3}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{3}(x_1^3 + 2x_3)$$

Παράδειγμα 2.2.3: Ποιο είναι το cycle index της A_4 ;

Η A_4 περιέχει τις άρτιες μεταθέσεις της S_4 . Η S_4 έχει 5 τύπους μεταθέσεων, τους εξής: $\{4, 0, 0, 0\}$, $\{2, 1, 0, 0\}$, $\{0, 2, 0, 0\}$, $\{1, 0, 1, 0\}$ και $\{0, 0, 0, 1\}$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.2.3 το cycle index της A_4 δίνεται από τον τύπο:

$$P_{A_4} = \sum_{\{b_1, b_2, b_3, b_4\}} \frac{1 + (-1)^{b_2+b_4}}{\prod_{t=1}^4 t^{b_t} \cdot b_t!} \cdot x_1^{b_1} \cdot x_2^{b_2} \cdot x_3^{b_3} \cdot x_4^{b_4}$$

Ο τύπος $\{4, 0, 0, 0\}$ δίνει τον όρο:

$$\frac{1 + (-1)^0}{4^4 \cdot 4!} \cdot x_1^4 = \frac{1}{24} \cdot x_1^4$$

Ο τύπος $\{2, 1, 0, 0\}$ δίνει τον όρο:

$$\frac{1 + (-1)^1}{1^2 \cdot 2! \cdot 2^1 \cdot 1!} \cdot x_1^2 \cdot x_2^1 = 0$$

Ο τύπος $\{0, 2, 0, 0\}$ δίνει τον όρο:

$$\frac{1 + (-1)^2}{2^2 \cdot 2!} \cdot x_2^2 = \frac{1}{4} \cdot x_2^2$$

Ο τύπος $\{1, 0, 1, 0\}$ δίνει τον όρο:

$$\frac{1 + (-1)^0}{1^1 \cdot 1! \cdot 3^1 \cdot 1!} \cdot x_1^1 \cdot x_3^1 = \frac{1}{3} \cdot x_1 \cdot x_3$$

Ο τύπος $\{0, 0, 0, 1\}$ δίνει τον όρο:

$$\frac{1 + (-1)^1}{4^1 \cdot 1!} \cdot x_4^1 = 0$$

Αθροίζοντας τους παραπάνω όρους προκύπτει το cycle index της A_4 :

$$P_{A_4}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{24}(x_1^4 + 6x_2^2 + 8x_1x_3)$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.2.4: Το cycle index της κυκλικής ομάδας C_n τάξης n δίνεται από τον τύπο:

$$P_{C_n} = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \varphi(d) x_d^{n/d}$$

όπου φ η συνάρτηση Euler.

Απόδειξη. Αν $a \in C_n$, συμβολίζουμε $\text{ord}(a)$ την τάξη του a , δηλαδή τον ελάχιστο θετικό ακέραιο k που ικανοποιεί την σχέση $a^k = \text{id}$. Η μετάθεση s_a χωρίζει την C_n σε κύκλους μήκους $\text{ord}(a)$: Αν s οποιοδήποτε στοιχείο της C_n , τότε ανήκει στον κύκλο:

$$s \rightarrow as \rightarrow a^2s \rightarrow \dots \rightarrow a^{\text{ord}(a)}s = s$$

Άρα το $\text{ord}(a)$ διαιρεί το n , και οπότε υπάρχουν $n/\text{ord}(a)$ κύκλοι μήκους $\text{ord}(a)$. Άρα το cycle index της C_n είναι:

$$P_{C_n} = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \nu(d) x_d^{n/d}$$

όπου το d διατρέχει όλους τους διαρέτες του n , και $\nu(d)$ αντιπροσωπεύει το πλήθος των στοιχείων $a \in C_n$ με $\text{ord}(a) = d$.

Όμως, για τις κυκλικές ομάδες ξέρουμε ότι για κάθε διαιρέτη d του n το πλήθος των στοιχείων $x \in C_n$ που έχουν τάξη d είναι $\varphi(d)$, όπου φ η συνάρτηση Euler. Οπότε:

$$P_{C_n} = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \varphi(d) x_d^{n/d}$$

□

Παράδειγμα 2.2.4: Ποιό είναι το cycle index της C_4 ;

Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.2.4 το cycle index της C_4 δίνεται από τον τύπο:

$$P_{C_4} = \frac{1}{4} \sum_{d|4} \varphi(d) x_d^{4/d}$$

Άρα

$$\begin{aligned} P_{C_4}(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \frac{1}{4} (\varphi(1) \cdot x_1^4 + \varphi(2) \cdot x_2^2 + \varphi(4) \cdot x_4^1) \\ &= \frac{1}{4} (x_1^4 + x_2^2 + 2x_4) \end{aligned}$$

Παράδειγμα 2.2.5: Ποιό είναι το cycle index της C_5 ;

Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.2.4 το cycle index της C_5 δίνεται από τον τύπο:

$$P_{C_5} = \frac{1}{5} \sum_{d|5} \varphi(d) x_d^{5/d}$$

Άρα

$$\begin{aligned} P_{C_5}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &= \frac{1}{5} (\varphi(1) \cdot x_1^5 + \varphi(5) \cdot x_5^1) \\ &= \frac{1}{5} (x_1^5 + 4x_5) \end{aligned}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.2.5: Το cycle index της D_n δίνεται από τον τύπο:

$$P_{D_n} = \frac{1}{2}P_{C_n} + \begin{cases} \frac{1}{2}x_1x_2^{(n-1)/2}, & \text{αν } n \text{ περιττός} \\ \frac{1}{4}(x_2^{n/2} + x_1^2x_2^{(n-2)/2}), & \text{αν } n \text{ άρτιος} \end{cases}$$

Απόδειξη. Αρχικά, υπενθυμίζουμε ότι η D_n είναι η διεδρική ομάδα τάξης $2n$ με

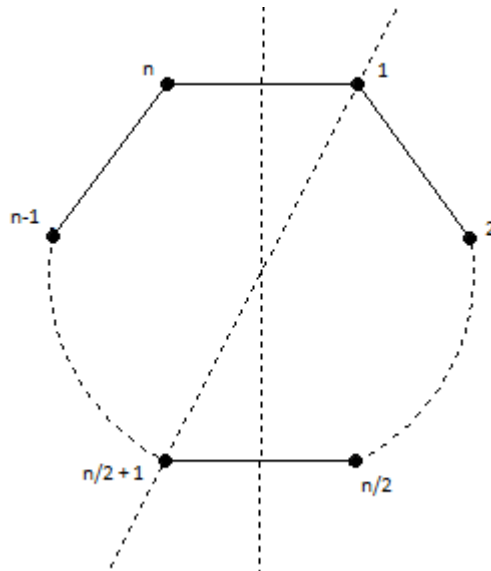
$$D_n = \langle \sigma, \tau \mid \sigma^n = id = \tau^2 \text{ και } \tau\sigma = \sigma^{n-1}\tau \rangle.$$

Επομένως, τα στοιχεία της D_n είναι τα $\{\sigma, \sigma^2, \dots, \sigma^{n-1}, \sigma^n = id, \tau, \tau\sigma, \tau\sigma^2, \dots, \tau\sigma^{n-1}\}$.

Όπου, τα στοιχεία $\sigma, \sigma^2, \dots, \sigma^{n-1}, \sigma^n = id$ αποτελούν κυκλική ομάδα τάξης n και αντιστοιχούν σε στροφές και τα στοιχεία $\tau, \tau\sigma, \tau\sigma^2, \dots, \tau\sigma^{n-1}$ αντιστοιχούν στις ανακλάσεις του κανονικού n -γώνου. Άρα,

$$\begin{aligned} P_{D_n} &= \frac{1}{2n} \sum_{g \in D_n} x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_n^{b_n} \\ &= \frac{1}{2n} \left[\sum_{g \in C_n} x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_n^{b_n} + \sum_{\substack{g \in D_n \\ g \text{ ανάκλαση}}} x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_n^{b_n} \right] \\ &= \frac{1}{2}P_{C_n} + \frac{1}{2n} \sum_{\substack{g \in D_n \\ g \text{ ανάκλαση}}} x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_n^{b_n} \end{aligned}$$

Όταν n είναι άρτιος και $n \geq 4$:



Σε αυτή την περίπτωση, προφανώς, υπάρχουν $\frac{n}{2}$ ανακλάσεις ως προς τις μεσοκαθέτους των πλευρών, οι οποίες αντιστοιχούν σε μεταθέσεις της μορφής

$$\underbrace{(\bullet\bullet)(\bullet\bullet)\dots(\bullet\bullet)}$$

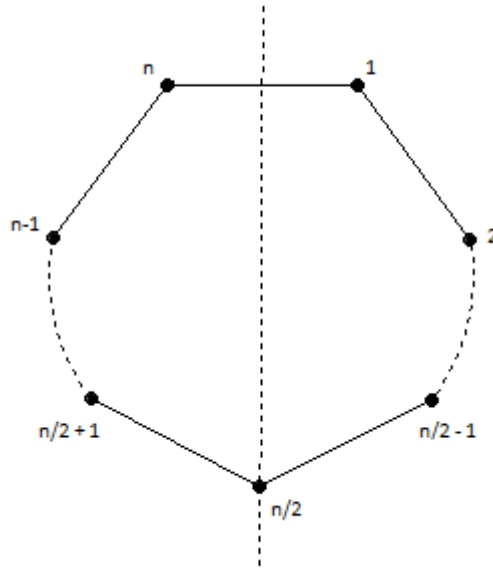
$\frac{n}{2}$ κύκλοι

και $\frac{n}{2}$ ανακλάσεις ως προς τους άξονες που διέρχονται από απέναντι γωνίες

που αντιστοιχούν σε μεταθέσεις της μορφής $(\bullet)(\bullet)\underbrace{(\bullet\bullet)(\bullet\bullet)\cdots(\bullet\bullet)}_{\frac{n-2}{2} \text{ κύκλοι}}$. Άρα

$$\begin{aligned} P_{D_n} &= \frac{1}{2}P_{C_n} + \frac{1}{2n}\left[\frac{n}{2}x_2^{n/2} + \frac{n}{2}x_1^2x_2^{(n-2)/2}\right] \\ &= \frac{1}{2}P_{C_n} + \frac{1}{4}\left[x_2^{n/2} + x_1^2x_2^{(n-2)/2}\right] \end{aligned}$$

Όταν το n είναι περιττός:



Σε αυτή την περίπτωση, υπάρχουν n ανακλάσεις ως προς τους άξονες που διέρχονται από μια κορυφή και από το μέσον της απέναντι πλευράς, οι οποίες αντιστοιχούν σε μεταθέσεις της μορφής $(\bullet)\underbrace{(\bullet\bullet)(\bullet\bullet)\cdots(\bullet\bullet)}_{\frac{n-1}{2} \text{ κύκλοι}}$. Άρα

$$\begin{aligned} P_{D_n} &= \frac{1}{2}P_{C_n} + \frac{1}{2n}nx_1x_2^{(n-1)/2} \\ &= \frac{1}{2}P_{C_n} + \frac{1}{2}x_1x_2^{(n-1)/2} \end{aligned}$$

Οπότε

$$P_{D_n} = \frac{1}{2}P_{C_n} + \begin{cases} \frac{1}{2}x_1x_2^{(n-1)/2}, & \text{αν } n \text{ περιττός} \\ \frac{1}{4}(x_2^{n/2} + x_1^2x_2^{(n-2)/2}), & \text{αν } n \text{ άρτιος} \end{cases}$$

□

Παράδειγμα 2.2.6: Ποιό είναι το cycle index της D_4 ;

Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.2.5 το cycle index της D_4 δίνεται από τον τύπο:

$$P_{D_4} = \frac{1}{2}P_{C_4} + \frac{1}{4}(x_2^{4/2} + x_1^2x_2^{(4-2)/2})$$

Όπως είδαμε στο παράδειγμα 2.2.4 το cycle index της C_4 είναι:

$$P_{C_4}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{4}(x_1^4 + x_2^2 + 2x_4)$$

Άρα

$$\begin{aligned} P_{D_4}(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}(x_1^4 + x_2^2 + 2x_4) + \frac{1}{4} \cdot (x_2^2 + x_1^2 x_2^1) \\ &= \frac{1}{8}(x_1^4 + 3x_2^2 + 2x_1^2 x_2 + 2x_4) \end{aligned}$$

Παράδειγμα 2.2.7: Ποιό είναι το cycle index της D_5 ;

Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.2.5 το cycle index της D_5 δίνεται από τον τύπο:

$$P_{D_5} = \frac{1}{2}P_{C_5} + \frac{1}{2}x_1x_2^{(5-1)/2}$$

Όπως είδαμε στο παράδειγμα 2.2.5 το cycle index της C_5 είναι:

$$P_{C_5}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \frac{1}{5}(x_1^5 + 4x_5)$$

Άρα

$$\begin{aligned} P_{D_5}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5}(x_1^5 + 4x_5) + \frac{1}{2}x_1x_2^2 \\ &= \frac{1}{10}(x_1^5 + 5x_1x_2^2 + 4x_5) \end{aligned}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.2.6: Το cycle index ενός γινομένου $G \times H$ δίνεται από τον τύπο:

$$P_{G \times H} = P_G \cdot P_H$$

Απόδειξη. Έστω G ομάδα μεταθέσεων συνόλου S , και έστω H ομάδα μεταθέσεων συνόλου T . Υποθέτουμε ότι τα σύνολα S και T δεν έχουν κανένα στοιχείο κοινό, και έστω U η ένωση τους. Για κάθε επιλογή των $g \in G$ και $h \in H$ αντιστοιχεί μια μετάθεση του U , την οποία συμβολίζουμε $g \times h$ και ορίζεται ως εξής:

$$g \times h(u) = \begin{cases} g(u), & \text{αν } u \in S \\ h(u), & \text{αν } u \in T \end{cases}$$

Εύκολα βλέπουμε ότι αυτές οι μεταθέσεις δημιουργούν ομάδα της οποίας η τάξη είναι το γινόμενο των τάξεων της G και της H . Ονομάζεται ευθύ γινόμενο των G, H , και συμβολίζεται $G \times H$.

Αν $g \in G$ και $h \in H$, και αν η g είναι τύπου $\{b_1, b_2, \dots\}$ και η h είναι τύπου $\{c_1, c_2, \dots\}$, τότε η $g \times h$ είναι τύπου $\{b_1 + c_1, b_2 + c_2, \dots\}$, αφού κάθε κύκλος της U ανήκει είτε στο S είτε στο T . Ως εκ τούτου, ο όρος του cycle index του $G \times H$ που αντιστοιχεί στο στοιχείο $g \times h$ είναι ίσος με το γινόμενο του όρου του P_G που αντιστοιχεί στο g και του όρου του P_H που αντιστοιχεί στο h . Εφαρμόζοντας αυτό για όλους τους όρους του P_G και όλους τους όρους του P_H , προκύπτει ότι:

$$P_{G \times H} = P_G \cdot P_H$$

□

2.3 Βάρος μιας συνάρτησης, βάρος ενός pattern

Έστω D και R πεπερασμένα σύνολα. Θεωρούμε συναρτήσεις $f: D \rightarrow R$ και θεωρούμε R^D το σύνολο αυτών των συναρτήσεων.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.3.1: Έστω G ομάδα μεταθέσεων του D . Αυτή η ομάδα ορίζει μια σχέση ισοδυναμίας στο R^D : Δύο συναρτήσεις f_1, f_2 που ανήκουν και οι δύο στο R^D ονομάζονται ισοδύναμες (συμβ. $f_1 \sim f_2$) αν υπάρχει ένα στοιχείο $g \in G$ τέτοιο ώστε

$$f_1(gd) = f_2(d) \text{ για κάθε } d \in D.$$

Αυτές οι κλάσεις ισοδυναμίας ονομάζονται patterns.

Παράδειγμα 2.3.1: Έστω $D = \{1, 2, 3\}$, $R = \{x, y\}$ και G η ομάδα συμμετρίας του D (πρόκειται για την ομάδα που αποτελείται από τις 6 μεταθέσεις του D). Υπάρχουν 8 συναρτήσεις $f: D \rightarrow R$, αλλά μόνο 4 patterns τα οποία μπορούν να συμβολιστούν x^3, x^2y, xy^2, y^3 αντίστοιχα. Για παράδειγμα, x^2y αντιπροσωπεύει τις συναρτήσεις τέτοιες ώστε 2 από τις τιμές $f(1), f(2), f(3)$ είναι ίσες με x ενώ η τρίτη τιμή είναι y . Το pattern x^3 αποτελείται από μια συνάρτηση, εκείνη που όλες οι τιμές είναι ίσες με x .

Αφού G η συμμετρική ομάδα του D , όταν λέμε ότι δύο συναρτήσεις f_1, f_2 είναι ισοδύναμες είναι το ίδιο με το να πούμε ότι τα γινόμενα $f_1(1)f_1(2)f_1(3)$ και $f_2(1)f_2(2)f_2(3)$ είναι ίσα. Επομένως, τα patterns χαρακτηρίζονται από τις πιθανές τιμές του γινομένου, δηλαδή, τα μονώνυμα x^3, x^2y, xy^2, y^3 .

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.3.2: Η G ορίζει επίσης δράση στο R^D ως εξής: $f \in R^D$ τότε $gf(d) := f(g^{-1}d)$, $\forall d \in D$. Πρόκειται για δράση αφού:

1. Αν $e \in G$ το ουδέτερο στοιχείο της G τότε: $ef(d) = f(ed) = f(d)$, $\forall d \in D$.
2. Έστω $g_1, g_2 \in G$ τότε: $(g_1 \cdot g_2)f(d) = f((g_1 \cdot g_2)^{-1}d) = f((g_2^{-1} \cdot g_1^{-1})d) = f(g_2^{-1}(g_1^{-1}d)) = g_2f(g_1^{-1}d) = g_1(g_2f)(d)$, $\forall d \in D$.

Με αυτόν τον τρόπο η ομάδα G διαμερίζει το σύνολο R^D σε τροχιές. Οι τροχιές αυτές είναι ακριβώς τα patterns που ορίσαμε.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.3.3: Έστω D και R πεπερασμένα σύνολα και G ομάδα μεταθέσεων του D . Ορίζουμε βάρος για κάθε στοιχείο $r \in R$, το $w(r)$. Αυτό το βάρος μπορεί να είναι ένας αριθμός ή μια μεταβλητή ή, γενικότερα, ένα στοιχείο ενός αντιμεταθετικού δακτυλίου που περιέχει ρητούς αριθμούς. Ορίζουμε το βάρος $W(f)$ μιας συνάρτησης $f \in R^D$ να είναι το γινόμενο

$$W(f) = \prod_{d \in D} w[f(d)]$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.3.1: Αν $f_1 \sim f_2$ με $f_1, f_2 \in R^D$, το οποίο συμβαίνει όταν ανήκουν στο ίδιο pattern, τότε έχουν το ίδιο βάρος: $W(f_1) = W(f_2)$.

Απόδειξη. Αφού $f_1 \sim f_2$, υπάρχει $g \in G$ τέτοιο ώστε $f_1(gd) = f_2(d)$ για όλα τα $d \in D$. Άρα

$$W(f_1) = \prod_{d \in D} w[f_1(d)] = \prod_{d \in D} w[f_1(gd)] = \prod_{d \in D} w[f_2(d)] = W(f_2)$$

Η δεύτερη ισότητα προκύπτει από το γεγονός ότι καθώς το d διατρέχει όλο το D , το gd καλύπτει επίσης όλο το D και άρα το πρώτο και το δεύτερο γινόμενο έχουν τους ίδιους όρους σε διαφορετική σειρά. \square

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.3.4: Αφού όλες οι συναρτήσεις που ανήκουν στο ίδιο pattern έχουν το ίδιο βάρος, ορίζουμε το βάρος ενός pattern να είναι αυτή η κοινή τιμή βαρών των συναρτήσεων.

Παράδειγμα 2.3.2: Στο παράδειγμα 2.3.1, το R έχει δύο στοιχεία, x και y . Αν θεωρήσουμε αυτά τα δύο στοιχεία ως μεταβλητές, μπορούμε να ορίσουμε το στοιχείο x να έχει βάρος x και το στοιχείο y να έχει βάρος y . Έτσι, τα σύμβολα x^3, x^2y, xy^2, y^3 γίνονται βάρη των patterns. Σε αυτή την περίπτωση, το βάρος χαρακτηρίζει το pattern: Διαφορετικά patterns έχουν διαφορετικά βάρη.

2.4 Κατάλογος στοιχείων (Inventory)

Όπως και στην προηγούμενη ενότητα, έχουμε τα σύνολα D και R , και κάθε $r \in R$ και $f \in R^D$ έχουν βάρη $w(r)$ και $W(f)$ αντίστοιχα.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.4.1: Αν $K \subseteq R^D$ ορίζουμε κατάλογο στοιχείων του K και συμβολίζουμε $inv(K)$ να είναι το άθροισμα:

$$inv(K) = \sum_{f \in K} W(f)$$

Και άρα $inv(R)$ είναι το άθροισμα:

$$inv(R) = \sum_{r \in R} w(r)$$

Παράδειγμα 2.4.1: Ο κατάλογος στοιχείων μας δίνει μια γενική περιγραφή του περιεχομένου του R . Έστω R το σύνολο που αποτελείται από 3 κουτιά με σαπούνια (συμβ. s_1, s_2, s_3), 2 πακέτα με τσάι (συμβ. t_1, t_2) και 4 μπουκάλια με κρασί (συμβ. w_1, w_2, w_3, w_4). Αν θεωρήσουμε ότι το s_1 έχει βάρος s'_1 , το s_2 έχει βάρος s'_2 κτλ, τότε

$$inv(R) = s'_1 + s'_2 + s'_3 + t'_1 + t'_2 + w'_1 + w'_2 + w'_3 + w'_4$$

και η τιμή αυτού του αθροίσματος δίνει την πλήρη πληροφορία για το R . Αν μας ενδιαφέρει μόνο η ποσότητα του κάθε αντικειμένου, μπορούμε να θεωρήσουμε s το βάρος των s_1, s_2, s_3 , t το βάρος των t_1, t_2 και w το βάρος των w_1, w_2, w_3, w_4 . Τότε

$$inv(R) = 3s + 2t + 4w$$

Αν πάλι μας ενδιαφέρει το πόσο κοστίζουν και το κάθε κουτί με σαπούνια κοστίζει 3€, το κάθε πακέτο με τσάι 1€ και το κάθε μπουκάλι με κρασί 2€ τότε

$$inv(R) = 3 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 = 19$$

Σε αυτή την περίπτωση ο κατάλογος στοιχείων μας δίνει την πληροφορία ότι η συνολική αξία των στοιχείων του R είναι 19€.

Τέλος, αν ορίσουμε το βάρος του κάθε αντικειμένου να είναι 1 τότε

$$inv(R) = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 9$$

ο κατάλογος στοιχείων μας δίνει το πλήθος των αντικειμένων.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.4.1: Το $\text{inv}(R^D)$ είναι μια δύναμη του $\text{inv}(R)$ όπου ο εκθέτης είναι το πλήθος των στοιχείων του D :

$$\text{inv}(R^D) = \sum_f W(f) = \left[\sum_{r \in R} w(r) \right]^{|D|} \quad (2.1)$$

Απόδειξη. Η $|D|$ -οστή δύναμη μπορεί να γραφεί ως γινόμενο D παραγόντων. Αν από κάθε παράγοντα επιλέξουμε έναν όρο, και αν πάρουμε το γινόμενο αυτών των όρων, τότε παίρνουμε έναν όρο από την πλήρη ανάπτυξη το γινομένου, η οποία αποτελείται από $|R|^{|D|}$ όρους σύμφωνα με το πλήθος των επιλογών που μπορεί να γίνουν. Παίρνουμε, έτσι, μια 1 – 1 αντιστοιχία ανάμεσα στους παράγοντες της 2.1 και των στοιχείων του D . Βάσει αυτής της αντιστοιχίας, μπορούμε να πούμε ότι η επιλογή ενός όρου από κάθε παράγοντα μπορεί να περιγραφεί από μια $f: D \rightarrow R$. Σε αυτή την f αντιστοιχεί ο όρος

$$\prod_{d \in D} w[f(d)]$$

από την πλήρη ανάπτυξη. Αφού αυτός ο όρος είναι ακριβώς το $W(f)$, παρατηρούμε ότι η πλήρη ανάπτυξη του γινομένου ισούται με το άθροισμα όλων των $W(f)$, το οποίο είναι το $\text{inv}(R^D)$. \square

Αν $D = \dot{\cup} D_i$ με $|D| = |D_1| + |D_2| + \dots + |D_k|$ θεωρούμε $S \subseteq R^D$ να είναι το σύνολο των συναρτήσεων $f: D \rightarrow R$ με την ιδιότητα $f(x) = f(y)$ όταν x, y ανήκουν στο ίδιο D_i . Αυτές οι f μπορούν να θεωρηθούν ως σύνθεση συναρτήσεων, $f = \varphi \circ \psi$, όπου φ και ψ ορίζονται ως εξής: ψ να είναι η συνάρτηση που αντιστοιχεί το $d \in D_i$ στο i και φ η συνάρτηση που αντιστοιχεί το σύνολο $\{1, 2, \dots, k\}$ στο R .

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.4.2: Έστω $D = \dot{\cup} D_i$ διαμέριση του D και $S \subseteq R^D$ σταθερό στην συγκεκριμένη διαμέριση όπως παραπάνω. Τότε το $\text{inv}(S)$ είναι

$$\text{inv}(S) = \prod_{i=1}^k \sum_{r \in R} [w(r)]^{|D_i|}$$

Απόδειξη. Αρχικά παρατηρούμε ότι για $d \in D_i$ έχουμε $f(d) = \varphi \circ \psi(d) = \varphi(i)$ και $\prod_{d \in D_i} w[f(d)] = w[\varphi(i)]^{|D_i|}$. Άρα

$$\begin{aligned} \text{inv}(S) &= \sum_{f \in S} W(f) = \sum_{f \in S} \prod_{d \in D} w[f(d)] \\ &= \sum_{\varphi} \prod_{i=1}^k w[\varphi(i)]^{|D_i|} \\ &= \prod_{i=1}^k \sum_{r \in R} [w(r)]^{|D_i|} \end{aligned}$$

\square

2.5 Η απλή μορφή του Θεωρήματος Απαρίθμησης του Pólya

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.5.1: Έστω S μη κενό σύνολο στοιχείων και G ομάδα συμμετριών του S που δρα για να προκύψει ισοδύναμη σχέση στο σύνολο χρωματισμών, με m χρώματα, του S . Τότε το πλήθος των μη ισοδύναμων χρωματισμών του S , με m χρώματα, δίνεται από το $P_G(m, m, \dots, m)$.

Απόδειξη. Υπενθυμίζουμε ότι σύμφωνα με το Θεώρημα του Burnside (Θεώρημα 1.4.1) αν r το πλήθος των τροχιών τότε:

$$r = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X_g|$$

όπου G μια πεπερασμένη ομάδα, X ένα πεπερασμένο G -σύνολο και $X_g = \{x \in X : gx = x\}$.

Έστω $g \in G$ τύπου (b_1, b_2, \dots, b_n) όπου $\sum_{i=1}^n ib_i = n$. Ένας χρωματισμός μένει αναλλοίωτος από το g αν και μόνον αν για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$ το i και το $g(i)$ έχουν το ίδιο χρώμα. Δηλαδή, στην ανάλυση σε γινόμενο ξένων κύκλων του g , θα πρέπει τα στοιχεία που ανήκουν στον ίδιο κύκλο να έχουν το ίδιο χρώμα. Έχουμε m επιλογές χρωμάτων, άρα

$$\underbrace{m \cdot m \cdot m \cdots m}_{\text{πλήθος ξένων κύκλων}} = m^{\text{πλήθος ξένων κύκλων}} = m^{\sum_{i=1}^n b_i}$$

Οπότε,

$$r = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} m^{\sum_{i=1}^n b_i}$$

Άρα

$$P_G(m, m, \dots, m) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} m^{b_1} m^{b_2} \cdots m^{b_n} = r$$

□

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.5.2 (Pólya's Enumeration Theorem (simple version)): Έστω S σύνολο στοιχείων και G ομάδα μεταθέσεων του S που δρα για να προκύψει ισοδύναμη σχέση στους χρωματισμούς του S . Ο κατάλογος των μη ισοδύναμων χρωματισμών του S με χρώματα c_1, c_2, \dots, c_m δίνεται από τον τύπο

$$inv(S) = P_G \left(\sum_{j=1}^m c_j, \sum_{j=1}^m c_j^2, \sum_{j=1}^m c_j^3, \dots, \sum_{j=1}^m c_j^k \right)$$

όπου το k αντιστοιχεί στο μεγαλύτερο μήκος κύκλου.

Απόδειξη. Έστω $g \in G$ τύπου (b_1, b_2, \dots, b_n) όπου $\sum_{i=1}^n ib_i = n$. Μετράμε χρωματισμούς που μένουν αναλλοίωτοι από το g . Στην ανάλυση σε γινόμενο ξένων κύκλων της g , τα στοιχεία που ανήκουν στον ίδιο κύκλο έχουν το ίδιο χρώμα,

ένα από τα c_i . Άρα κάθε κύκλος μήκους s έχει $c_1^s + c_2^s + \dots + c_m^s$ δυνατούς χρωματισμούς που μένουν αναλλοίωτοι από το g . Άρα συνολικά

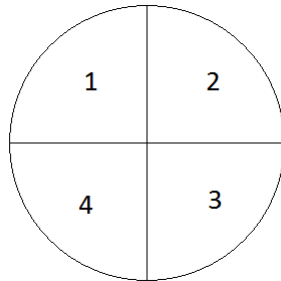
$$\begin{aligned} & \text{πλήθος χρωματισμών που μένουν αναλλοίωτοι απο το } g = |X_g| = \\ & (c_1^1 + c_2^1 + \dots + c_m^1)^{b_1} \cdot (c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_m^2)^{b_2} \dots (c_1^n + c_2^n + \dots + c_m^n)^{b_n} \end{aligned}$$

Άρα, από το Θεώρημα του Burnside (Θεώρημα 1.4.1), αν $g \in G$ τύπου $\{b_1, \dots, b_n\}$ έχουμε

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X_g| \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (c_1^1 + c_2^1 + \dots + c_m^1)^{b_1} \cdot (c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_m^2)^{b_2} \dots (c_1^n + c_2^n + \dots + c_m^n)^{b_n} \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_n^{b_n} \\ &= P_G(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

όπου $x_i = \sum_{j=1}^m c_j^i$. □

Παράδειγμα 2.5.1: Έστω δίσκος χωρισμένος σε τεταρτημόρια τα οποία θέλουμε να χρωματίσουμε. Τα διαθέσιμα χρώματα είναι το άσπρο, το κόκκινο και το μαύρο. Πόσοι διαφορετικοί χρωματισμένοι δίσκοι υπάρχουν;



Θεωρούμε A =άσπρο, K =κόκκινο, M =μαύρο και $S = \{1, 2, 3, 4\}$.

Αν επιτρέπουμε μόνο τις στροφές γύρω από το κέντρο του δίσκου, τότε η ομάδα που δρα στο S είναι η C_4 . Σύμφωνα με το παράδειγμα 2.2.4, το cycle index της C_4 είναι:

$$P_{C_4}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{4}(x_1^4 + x_2^2 + 2x_4)$$

Άρα εφαρμόζοντας το Θεώρημα 2.5.2 για $G = C_4$ έχουμε:

$$\begin{aligned} & P_{C_4}(A + K + M, A^2 + K^2 + M^2, A^3 + K^3 + M^3, A^4 + K^4 + M^4) \\ &= \frac{1}{4} \left[(A + K + M)^4 + (A^2 + K^2 + M^2)^2 + 2(A^4 + K^4 + M^4) \right] \\ &= A^4 + K^4 + M^4 + A^3M + A^3K + M^3A + M^3K + K^3M + K^3A \\ & \quad + 2(A^2M^2 + A^2K^2 + M^2K^2) + 3(AM^2K + AK^2M + KA^2M) \end{aligned}$$

Άρα συνολικά υπάρχουν 24 διαφορετικοί χρωματισμένοι δίσκοι και ξέρουμε και ακριβώς ποιοι είναι αυτοί.

Αν επιτρέπουμε εκτός από τις στροφές αλλά και τις ανακλάσεις του δίσκου, τότε η ομάδα που δρα στο S είναι η D_4 . Σύμφωνα με το παράδειγμα 2.2.6, το cycle index της D_4 είναι:

$$P_{D_4}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{8}(x_1^4 + 3x_2^2 + 2x_1^2x_2 + 2x_4)$$

Άρα εφαρμόζοντας το Θεώρημα 2.5.2 για $G = D_4$ έχουμε:

$$\begin{aligned} & P_{D_4}(A + K + M, A^2 + K^2 + M^2, A^3 + K^3 + M^3, A^4 + K^4 + M^4) \\ &= \frac{1}{8} \left[(A + K + M)^4 + 3(A^2 + K^2 + M^2)^2 + 2(A + K + M)^2(A^2 + K^2 + M^2) \right. \\ & \quad \left. + 2(A^4 + K^4 + M^4) \right] \\ &= A^4 + K^4 + M^4 + 2(A^2M^2 + A^2K^2 + M^2K^2) + A^3M + AM^3 \\ & \quad + A^3K + AK^3 + KM^3 + K^3M + A^2KM + AMK^2 + AKM^2 \end{aligned}$$

Άρα συνολικά υπάρχουν 18 διαφορετικοί χρωματισμένοι δίσκοι και ξέρουμε και ακριβώς ποιοι είναι αυτοί. Για παράδειγμα υπάρχει 1 δίσκος με όλα τα τεταρτημόρια άσπρα (A^4), 2 με 2 άσπρα τεταρτημόρια και 2 μαύρα ($2A^2M^2$), 1 με 1 κόκκινο τεταρτημόριο και 3 μαύρα (KM^3) κ.ο.κ.

2.6 Το Θεώρημα Απαρίθμησης του Ρόλγια

Έστω D και R πεπερασμένα σύνολα και G ομάδα μεταθέσεων στοιχείων του D . Έστω R^D το σύνολο όλων των συναρτήσεων $f: D \rightarrow R$. Τα στοιχεία του R έχουν βάρη $w(r)$ και οι συναρτήσεις $f \in R^D$ και τα patterns F έχουν βάρη $W(f)$ και $W(F)$ αντίστοιχα όπως είδαμε στην ενότητα 2.3. Τώρα μπορούμε να δείξουμε την γενική μορφή του Θεωρήματος Απαρίθμησης του Ρόλγια αφού δούμε πρώτα μια άλλη μορφή του Θεωρήματος του Burnside που περιλαμβάνει βάρη.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.6.1 (Weighted Burnside's Lemma): Έστω D και R πεπερασμένα σύνολα και G ομάδα μεταθέσεων στοιχείων του D . Στα στοιχεία $r \in R$ αντιστοιχούμε βάρη $w(r)$. Τότε ο κατάλογος των διαφορετικών patterns της δράσης της G στο σύνολο R^D ισούται με:

$$\begin{aligned} \text{κατάλογος των patterns} &= \sum_F W(F) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{\substack{f \in R^D \\ gf=f}} W(f) \end{aligned}$$

όπου $W(f)$ και $W(F)$ είναι το βάρος των συναρτήσεων f και των patterns F αντίστοιχα.

Απόδειξη. Αφού η G δρα στο R^D , για κάθε $\varphi \in R^D$ έχουμε $|G_\varphi| \cdot |O(\varphi)| = |G|$ και αφού το F είναι ένα pattern κάτω από την δράση της G , για κάθε $f \in F$, έχουμε $|G_f| \cdot |F| = |G|$. Επίσης, εξ'ορισμού, $W(F) = W(f)$ για κάθε $f \in F$. Οπότε:

$$\begin{aligned} W(F) &= W(f) = \frac{1}{|F|} \sum_{f \in F} W(f) = \sum_{f \in F} \frac{1}{|F|} W(f) \\ &= \sum_{f \in F} \frac{|G_f|}{|G|} W(f) = \frac{1}{|G|} \sum_{f \in F} |G_f| \cdot W(f) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Θεωρούμε το σύνολο $F_g = \{f \in R^D : gf = f\}$. Τότε:

$$\sum_{f \in R^D} \sum_{g \in G_f} W(f) = \sum_{g \in G} \sum_{f \in F_g} W(f) \quad (2.3)$$

Άρα το ζητούμενο ισούται με

$$\begin{aligned} \sum_F W(F) &\stackrel{2.2}{=} \sum_F \frac{1}{|G|} \sum_{f \in F} |G_f| \cdot W(f) = \frac{1}{|G|} \sum_F \sum_{f \in F} |G_f| \cdot W(f) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{f \in R^D} |G_f| \cdot W(f) = \frac{1}{|G|} \sum_{f \in R^D} \sum_{g \in G_f} W(f) \\ &\stackrel{2.3}{=} \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{f \in F_g} W(f) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{\substack{f \in R^D \\ gf=f}} W(f) \end{aligned}$$

□

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.6.2 (Pólya's Enumeration Theorem): Με τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος 2.6.1 έχουμε

$$\text{κατάλογος των patterns} = \sum_F W(F) = P_G \left(\sum_{r \in R} w(r), \sum_{r \in R} [w(r)]^2, \sum_{r \in R} [w(r)]^3, \dots \right)$$

όπου P_G το cycle index της G .

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε ένα $g \in G$. Η G είναι ομάδα μεταθέσεων του D άρα το g σπάει το D σε κύκλους D_1, \dots, D_t όπου $D = \dot{\cup} D_i$ και κάθε D_i είναι g -αναλλοίωτο (δηλαδή, $gd \in D_i, \forall d \in D_i$). Προφανώς, η ανάλυση του g σε ξένους κύκλους ακολουθεί αυτή του D , δηλαδή, $g = g_1 \cdots g_t$ όπου το μήκος του κύκλου g_i ισούται με $|D_i|$. Επιπλέον, αν g είναι τύπου $\{b_1, \dots, b_n\}$ τότε b_1 σύνολα από τα D_1, \dots, D_t έχουν πληθάρημο 1, b_2 έχουν πληθάρημο 2 κ.ο.κ. Αφού κάθε D_i είναι g -αναλλοίωτο, αν $f \in F_g$ τότε

$$f(d) = f(gd) = f(ggd) = \dots$$

Επομένως, αν $f \in F_g$ τότε η f είναι σταθερή σε κάθε D_i .

Αντίστροφα, αν f σταθερή σε κάθε D_i τότε $gf = f$ αφού $f(d) = f(gd), \forall d \in D_i, \forall i$. Επομένως, F_g είναι το σύνολο των συναρτήσεων $f: D \rightarrow R$ που είναι σταθερές

στην διαμέριση D_1, \dots, D_t του D (δηλαδή, που ικανοποιούν $f(x) = f(y)$ όταν $x, y \in D_i$). Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.4.2:

$$\text{inv}(F_g) = \sum_{f \in F_g} W(f) = \prod_{i=1}^t \sum_{r \in R} [w(r)]^{|D_i|}$$

Αλλά, b_1 σύνολα από τα D_i έχουν $|D_i| = 1$, b_2 σύνολα από τα D_i έχουν $|D_i| = 2, \dots, b_n$ σύνολα από τα D_i έχουν $|D_i| = n$. Συνεπώς,

$$\sum_{f \in F_g} W(f) = \prod_{i=1}^n \left(\sum_{r \in R} [w(r)]^i \right)^{b_i}$$

Αν θέσουμε $x_i = \sum_{r \in R} [w(r)]^i$ τότε

$$\sum_{f \in F_g} W(f) = x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_n^{b_n}, \text{ για κάθε } g \in G \text{ τύπου } \{b_1, \dots, b_n\}$$

Επομένως, αν g είναι τύπου $\{b_1, \dots, b_n\}$, έχουμε

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{f \in F_g} W(f) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_n^{b_n} = P_G(x_1, \dots, x_n)$$

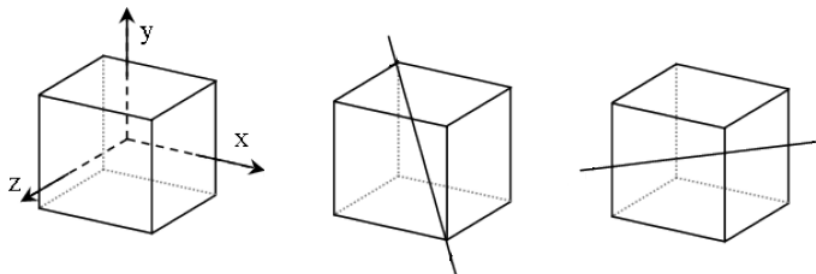
Αλλά σύμφωνα με το Θεώρημα 2.6.1, το αριστερό μέλος ισούται με το $\sum_F W(F)$ και αυτό αποδεικνύει το Θεώρημα. \square

Κεφάλαιο 3

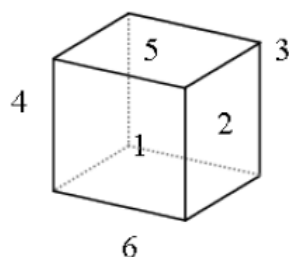
Εφαρμογές του Θεωρήματος Απαρίθμησης του Pólya

3.1 Κύβοι

Ένας κύβος περιέχει 6 έδρες, 8 κορυφές και 12 ακμές. Υπάρχουν 3 τύποι περιστροφών του κύβου και στο σύνολο τους οι περιστροφές είναι 24. Μπορούμε να θεωρήσουμε τις περιστροφές του κύβου είτε ως προς τους άξονες x, y, z , είτε ως προς τους άξονες που ενώνουν απέναντι κορυφές είτε ως προς τους άξονες που ενώνουν τα μέσα απέναντι ακμών όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Αρχικά θεωρούμε τις έδρες του κύβου όπως στο επόμενο σχήμα. Τότε οι 24 περιστροφές του κύβου δρουν στις έδρες όπως περιγράφεται παρακάτω.



Ως προς τους άξονες x, y, z :

$$\begin{array}{lll} (1536)(2)(4) & (1635)(2)(4) & (13)(2)(4)(56) \\ (1234)(5)(6) & (1432)(5)(6) & (13)(24)(5)(6) \\ (1)(2546)(3) & (1)(2645)(3) & (1)(24)(3)(56) \end{array}$$

Ως προς τους άξονες που ενώνουν απέναντι κορυφές:

$$\begin{array}{cccc} (145)(263) & (154)(236) & (152)(364) & (125)(346) \\ (146)(253) & (164)(235) & (126)(345) & (162)(354) \end{array}$$

Ως προς τους άξονες που ενώνουν τα μέσα απέναντι ακμών:

$$\begin{array}{ccc} (14)(23)(56) & (12)(34)(56) & (13)(25)(46) \\ (13)(26)(45) & (16)(24)(35) & (15)(24)(36) \end{array}$$

Η ταυτοτική:

$$(1)(2)(3)(4)(5)(6)$$

Θα συμβολίζουμε αυτήν την ομάδα περιστροφών G_F . Το cycle index της G_F είναι:

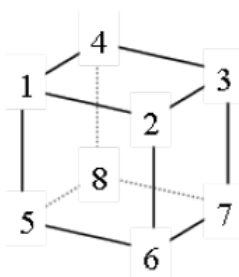
$$P_{G_F}(x_1, x_2, \dots, x_6) = \frac{1}{24}(x_1^6 + 3x_1^2x_2^2 + 6x_1^2x_4 + 6x_2^3 + 8x_3^2)$$

Παράδειγμα 3.1.1: Θέλουμε να χρωματίσουμε τις έδρες του κύβου με άσπρο και μαύρο. Πόσοι είναι οι διαφορετικά χρωματισμένοι κύβοι; Θεωρούμε $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ και $R = \{\text{άσπρο, μαύρο}\}$. Η ομάδα που δρα στο R^D είναι η G_F . Θεωρούμε $w(\text{άσπρο}) = W$ και $w(\text{μαύρο}) = B$. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Απαρίθμησης του Ρόlya (Θεώρημα 2.6.2) προκύπτει:

$$\begin{aligned} & P_{G_F}(W + B, W^2 + B^2, W^3 + B^3, W^4 + B^4, W^5 + B^5, W^6 + B^6) \\ &= \frac{1}{24}[(W + B)^6 + 3(W + B)^2(W^2 + B^2)^2 + 6(W + B)^2(W^4 + B^4) \\ &\quad + 6(W^2 + B^2)^3 + 8(W^3 + B^3)] \\ &= B^6 + B^5W + 2B^4W^2 + 2B^3W^3 + 2B^2W^4 + BW^5 + W^6 \end{aligned}$$

Άρα υπάρχουν 10 διαφορετικά χρωματισμένοι κύβοι και ξέρουμε ακριβώς ποιοι είναι αυτοί. Για παράδειγμα υπάρχει ένας κύβος με όλες τις έδρες μαύρες (B^6), ένας με 5 μαύρες και 1 άσπρη (B^5W), δύο με 4 μαύρες και 2 άσπρες ($2B^4W^2$) κ.ο.κ.

Τώρα θεωρούμε τις κορυφές του κύβου όπως στο επόμενο σχήμα. Τότε οι 24 περιστροφές του κύβου μετακινούν τις κορυφές όπως δείχνουμε παρακάτω.



Ως προς τους άξονες x, y, z :

$$\begin{array}{ccc} (1485)(2376) & (1584)(2673) & (18)(27)(36)(45) \\ (1234)(5678) & (1432)(5876) & (13)(24)(57)(68) \\ (1562)(3487) & (1265)(3784) & (16)(25)(38)(47) \end{array}$$

Ως προς τους άξονες που ενώνουν απέναντι κορυφές:

$$\begin{array}{ll} (1)(254)(368)(7) & (1)(245)(386)(7) \\ (163)(2)(457)(8) & (136)(2)(475)(8) \\ (168)(274)(3)(5) & (186)(247)(3)(5) \\ (183)(257)(4)(6) & (138)(275)(4)(6) \end{array}$$

Ως προς τους άξονες που ενώνουν τα μέσα απέναντι ακμών:

$$\begin{array}{ll} (15)(28)(37)(46) & (17)(26)(35)(48) \\ (17)(23)(46)(58) & (14)(28)(35)(67) \\ (17)(28)(34)(56) & (12)(35)(46)(78) \end{array}$$

Η ταυτοτική:

$$(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)$$

Θα συμβολίζουμε αυτήν την ομάδα περιστροφών G_V . Το cycle index της G_V είναι:

$$P_{G_V}(x_1, x_2, \dots, x_8) = \frac{1}{24}(x_1^8 + 8x_1^2x_3^2 + 9x_2^4 + 6x_4^2)$$

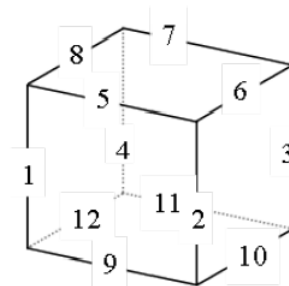
Παράδειγμα 3.1.2: Θέλουμε να χρωματίσουμε τις κορυφές του κύβου με άσπρο και μαύρο. Πόσοι είναι οι διαφορετικά χρωματισμένοι κύβοι;

Θεωρούμε $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ και $R = \{\text{άσπρο, μαύρο}\}$. Η ομάδα που δρα στο R^D είναι η G_V . Θεωρούμε $w(\text{άσπρο}) = W$ και $w(\text{μαύρο}) = B$. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Απαρίθμησης του Pólya (Θεώρημα 2.6.2) προκύπτει:

$$\begin{aligned} & P_{G_V}(W + B, W^2 + B^2, W^3 + B^3, W^4 + B^4, W^5 + B^5, W^6 + B^6, W^7 + B^7, W^8 + B^8) \\ &= \frac{1}{24}[(W + B)^8 + 8(W + B)^2(W^3 + B^3)^2 + 9(W^2 + B^2)^4 + 6(W^4 + B^4)^2] \\ &= B^8 + B^7W + 3B^6W^2 + 3B^5W^3 + 7B^4W^4 + 3B^3W^5 + 3B^2W^6 + BW^7 + W^8 \end{aligned}$$

Άρα υπάρχουν 23 διαφορετικά χρωματισμένοι κύβοι και ξέρουμε ακριβώς ποιοι είναι αυτοί.

Τέλος, θεωρούμε τις ακμές του κύβου όπως στο επόμενο σχήμα. Τότε οι 24 περιστροφές του κύβου μετακινούν τις ακμές του κύβου ως εξής:



Ως προς τους άξονες x, y, z :

$$\begin{array}{lll} (184\ 12)(263\ 10)(57\ 11\ 9) & (14)(23)(5\ 11)(6\ 10)(79)(8\ 12) & (1\ 12\ 48)(2\ 10\ 36)(59\ 11\ 7) \\ (1234)(5678)(3\ 10\ 11\ 12) & (13)(24)(57)(68)(9\ 11)(10\ 12) & (1432)(5876)(9\ 12\ 11\ 10) \\ (1925)(374\ 11)(68\ 12\ 10) & (1526)(3\ 11\ 47)(6\ 10\ 12\ 8) & (12)(34)(59)(6\ 12)(7\ 11)(8\ 10) \end{array}$$

Ως προς τους άξονες που ενώνουν απέναντι κορυφές:

$$\begin{array}{ll} (185)(2\ 12\ 7)(3\ 10\ 11)(469) & (158)(27\ 12)(3\ 11\ 10)(496) \\ (17\ 10)(256)(398)(4\ 11\ 12) & (1\ 10\ 7)(265)(389)(4\ 12\ 11) \\ (1\ 12\ 9)(28\ 11)(369)(4\ 10\ 5) & (19\ 12)(2\ 11\ 8)(376)(45\ 10) \\ (16\ 11)(2\ 10\ 9)(3\ 12\ 5)(487) & (1\ 11\ 6)(29\ 10)(35\ 12)(478) \end{array}$$

Ως προς τους άξονες που ενώνουν τα μέσα απέναντι ακμών:

$$\begin{array}{l} (1)(24)(3)(5\ 12)(6\ 11)(7\ 10)(89) \\ (13)(2)(4)(5\ 10)(69)(7\ 12)(8\ 11) \\ (1\ 11)(27)(35)(49)(6)(8\ 10)(12) \\ (17)(2\ 11)(39)(45)(6\ 12)(8)(10) \\ (1\ 10)(2\ 12)(38)(46)(5\ 11)(7)(9) \\ (16)(28)(3\ 12)(4\ 10)(5)(79)(11) \end{array}$$

Η ταυτοτική:

$$(1)(2)(3)(4)(5)(6)$$

Θα συμβολίζουμε αυτήν την ομάδα περιστροφών G_S . Το cycle index της G_S είναι:

$$P_{G_S}(x_1, x_2, \dots, x_{12}) = \frac{1}{24}(x_1^{12} + 6x_1^2x_2^5 + 3x_2^6 + 8x_3^4 + 6x_4^3)$$

Παράδειγμα 3.1.3: Θέλουμε να χρωματίσουμε τις κορυφές του κύβου με άσπρο και μαύρο. Πόσοι είναι οι διαφορετικά χρωματισμένοι κύβοι;

Θεωρούμε $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ και $R = \{\text{άσπρο}, \text{μαύρο}\}$. Η ομάδα που δρα στο R^D είναι η G_S . Θεωρούμε $w(\text{άσπρο}) = W$ και $w(\text{μαύρο}) = B$. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Απαρίθμησης του Pólya (Θεώρημα 2.6.2) προκύπτει:

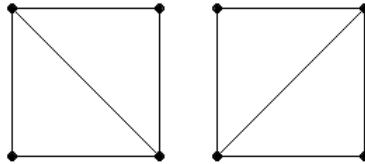
$$\begin{aligned} & P_{G_S}(W + B, W^2 + B^2, \dots, W^{12} + B^{12}) \\ &= \frac{1}{24}[(W + B)^{12} + 6(W + B)^2(W^2 + B^2)^5 + 3(W^2 + B^2)^6 + 8(W^3 + B^3)^4 \\ &\quad + 6(W^4 + B^4)^3] \\ &= B^{12} + B^2 11W + 5B^{10}W^2 + 13B^9W^3 + 27B^8W^4 + 38B^7W^5 + 48B^6W^6 \\ &\quad + 38B^5W^7 + 27B^4W^8 + 13B^3W^9 + 5B^2W^{10} + BW^{11} + W^{12} \end{aligned}$$

Άρα υπάρχουν 218 διαφορετικά χρωματισμένοι κύβοι και ξέρουμε ακριβώς ποιοι είναι αυτοί.

3.2 Γραφήματα

Σε αυτήν την ενότητα χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Απαρίθμησης του Ρόλγα θα υπολογίσουμε το πλήθος των μη ισόμορφων γραφημάτων με p κορυφές και q ακμές. Αν $G(V, E)$ γράφημα, συμβολίζουμε με V το σύνολο των κορυφών του και με E το σύνολο των ακμών με άκρα από το V . Εύκολα βλέπουμε ότι αν το $G(V, E)$ έχει p κορυφές, δηλαδή $|V| = p$, τότε υπάρχουν $\binom{p}{2}$ πιθανές ακμές και άρα $|E| \subseteq \binom{p}{2}$. Επίσης, το πλήθος των γραφημάτων με p κορυφές είναι το πολύ $2^{\binom{p}{2}}$ καθώς για κάθε πιθανή ακμή έχουμε δύο ενδεχόμενα: είτε να υπάρχει στο γράφημα μας είτε όχι. Τέλος, το πλήθος των γραφημάτων με p κορυφές και q ακμές είναι $\binom{\binom{p}{2}}{q}$.

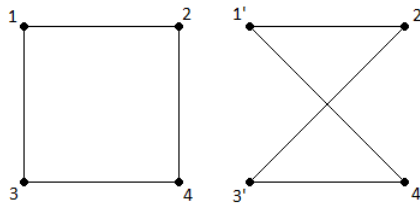
Μέχρι στιγμής έχουμε μετρήσει όλα τα γραφήματα αποτελούμενα από p κορυφές και q ακμές. Πολλά από αυτά όμως τα γραφήματα είναι ισόμορφα μεταξύ τους, όπως τα δύο παρακάτω με 4 κορυφές και 5 ακμές αφού το δεύτερο προκύπτει με στροφή 90° του πρώτου:



ΟΡΙΣΜΟΣ 3.2.1: Δύο γραφήματα, $G(V, E)$ και $G(V', E')$, είναι ισόμορφα αν και μόνο αν υπάρχει $F: V \rightarrow V'$ τέτοια ώστε

$$E \ni ij \rightarrow F(i)F(j) \in E' \quad \forall i, j \in V$$

Όπως, για παράδειγμα, τα δύο παρακάτω γραφήματα με 4 κορυφές και 4 ακμές:



αφού αν $G(V, E)$ με $V = \{1, 2, 3, 4\}$ και $E = \{12, 24, 34, 13\}$ για το πρώτο γράφημα και $G(V', E')$ με $V' = \{1', 2', 3', 4'\}$ και $E' = \{1'2', 2'3', 3'4', 1'4'\}$ για το δεύτερο γράφημα, έχουμε:

$$F: V \rightarrow V'$$

με

$$\begin{aligned} 1 &\rightarrow 1' \\ 2 &\rightarrow 2' \\ 3 &\rightarrow 4' \\ 4 &\rightarrow 3' \end{aligned}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.2.2: Δύο απεικονίσεις f_1, f_2 αντιστοιχούν στο ίδιο γράφημα αν και μόνον αν υπάρχει μετάθεση $\sigma \in S_p$ τέτοια ώστε

$$f_1(ij) = f_2(\sigma(i)\sigma(j)) \quad (3.1)$$

Αυτό που μας ενδιαφέρει και θα μελετήσουμε παρακάτω είναι το πλήθος των μη ισόμορφων γραφημάτων.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.2.3: Έστω $g_{p,q}$ το πλήθος των μη ισόμορφων γραφημάτων με p κορυφές και q ακμές. Για να υπολογίσουμε το πλήθος των μη ισόμορφων γραφημάτων με p κορυφές, χρειάζεται να υπολογίσουμε το πολυώνυμο:

$$g_p(x) = \sum_{q=0}^m g_{p,q} x^q$$

όπου $m = \binom{p}{2}$.

Έστω $V = \{1, \dots, p\}$ να είναι το σύνολο των p κορυφών. Η S_p είναι η ομάδα μεταθέσεων που δρα στο V . Θεωρούμε $D = V^{(2)} = \{ij \mid i, j \in V\}$ με $|D| = |V^{(2)}| = \binom{p}{2}$ και $R = \{0, 1\}$. Θεωρούμε την απεικόνιση $f \in R^D$ όπου οι κορυφές $i, j \in V$ ενώνονται αν και μόνον αν $f(ij) = 1$. Ορίζουμε βάρη στα στοιχεία του R τα $w(0) = 1$ και $w(1) = x$. Άρα

$$\sum_{r \in R} w(r) = 1 + x$$

Και συνεπώς

$$W(f) = \prod_{d \in D} w[f(d)] = x^q$$

Αν $\sigma \in S_p$ τότε αυτή ορίζει μετάθεση σ' του συνόλου $V^{(2)}$ ως εξής

$$\sigma'(ij) = \sigma(i)\sigma(j) \quad (3.2)$$

Ορίζουμε $S_p^{(2)} = \{\sigma' : \sigma \in S_p\}$ την ομάδα που προκύπτει. Παρατηρούμε ότι η $S_p^{(2)}$ δρα στο $D (= V^{(2)})$ μέσω της 3.2 άρα η $S_p^{(2)}$ δρα στο R^D όπου $\sigma' f(ij) = f(\sigma(i)\sigma(j))$. Συνεπώς τα patterns της δράσης της $S_p^{(2)}$ στο R^D είναι οι συναρτήσεις f_1, f_2 που ικανοποιούν την σχέση 3.1. Άρα τα patterns της δράσης της $S_p^{(2)}$ στο R^D είναι ακριβώς τα διαφορετικά γραφήματα με p κορυφές. Άρα στο Θεώρημα Απαρίθμησης του Pólya (Θεώρημα 2.6.2) έχουμε:

$$\sum_F W(F) = P_{S_p^{(2)}} \left(\sum_{r \in R} w(r), \sum_{r \in R} [w(r)]^2, \sum_{r \in R} [w(r)]^3, \dots \right)$$

όπου F είναι τα patterns της δράσης της $S_p^{(2)}$ στο R^D . Άρα

$$\sum_F W(F) = \sum_{q=0}^m g_{p,q} x^q, \quad \text{όπου } m = \binom{p}{2}$$

$$x^q = W(f) = W(F)$$

και

$$\sum_{r \in R} [w(r)]^k = 1 + x^k$$

Έτσι προκύπτει το επόμενο Θεώρημα.

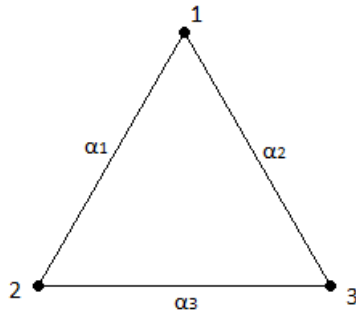
ΘΕΩΡΗΜΑ 3.2.1 (Pólya's Enumeration Theorem για τα γραφήματα): Το πλήθος των μη ισόμορφων γραφημάτων με p κορυφές δίνεται από τον τύπο

$$\sum_{q=0}^m g_{p,q} x^q = P_{S_p^{(2)}}(1+x, 1+x^2, 1+x^3, \dots, 1+x^m)$$

όπου $m = \binom{p}{2}$ και $g_{p,q}$ το πλήθος των μη ισόμορφων γραφημάτων με p κορυφές και q πλευρές.

Μένει να υπολογίσουμε το cycle index της $S_p^{(2)}$, το οποίο κάνουμε στο επόμενο Θεώρημα. Ένα εύκολο αρχικό παράδειγμα είναι της $S_3^{(2)}$ επειδή $S_3^{(2)} \cong S_3$ όπως φαίνεται παρακάτω:

Η S_3 μεταθέτει τις κορυφές $\{1, 2, 3\}$ και άρα $S_3 = \{id, (12), (13), (23), (123), (132)\} = \langle (12), (123) \rangle$. Επίσης, $|S_3| = |S_3^{(2)}| = 3! = 6$. Θεωρούμε τις ακμές $a_1 = 12, a_2 = 13$ και $a_3 = 23$.



Η $S_3^{(2)}$ μεταθέτει τις ακμές a_1, a_2, a_3 και είναι τάξεως 6. Επομένως $S_3^{(2)} \cong S_3$. Μπορούμε να δούμε αναλυτικά τον ισομορφισμό αφού αν $S_3^{(2)} = \{id, (a_2 a_3), (a_1 a_3), (a_1 a_2), (a_1 a_3 a_2), (a_1 a_2 a_3)\} = \langle (a_2 a_3), (a_1 a_3 a_2) \rangle$ έχουμε,

- Για $\sigma = (12)$

$$\sigma'(a_1) = \sigma(1)\sigma(2) = 21 = 12 = a_1$$

$$\sigma'(a_2) = \sigma(1)\sigma(3) = 23 = a_3$$

$$\sigma'(a_3) = \sigma(2)\sigma(3) = 13 = a_2$$

Άρα

$$(12) \rightarrow (a_2 a_3)$$

- Για $\sigma = (123)$

$$\begin{aligned}\sigma'(a_1) &= \sigma(1)\sigma(2) = 23 = a_3 \\ \sigma'(a_2) &= \sigma(1)\sigma(3) = 21 = 12 = a_1 \\ \sigma'(a_3) &= \sigma(2)\sigma(3) = 31 = 13 = a_2\end{aligned}$$

Άρα

$$(123) \rightarrow (a_1 a_3 a_2)$$

Παράδειγμα 3.2.1: Ποιο είναι το πλήθος των μη ισόμορφων γραφημάτων με 3 κορυφές;

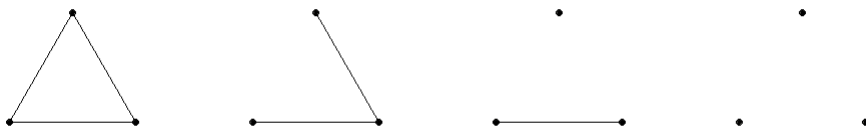
Θεωρούμε $V = \{1, 2, 3\}$ και $R = \{0, 1\}$. Η S_3 είναι η ομάδα μεταθέσεων που δρα στο V . Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.2.2 το cycle index της S_3 είναι

$$P_{S_3}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{3!}(x_1^3 + 3x_1x_2 + 2x_3)$$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Απαρίθμησης του Pólya (Θεώρημα 2.6.2) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}\sum_F W(F) &= P_{S_3}\left(\sum_{r \in R} w(r), \sum_{r \in R} [w(r)]^2, \sum_{r \in R} [w(r)]^3\right) \\ &= P_{S_3}(1+x, 1+x^2, 1+x^3) \\ &= \frac{1}{3!}[(1+x)^3 + 3(1+x)(1+x^2) + 2(1+x^3)] \\ &= x^3 + x^2 + x + 1\end{aligned}$$

Δηλαδή, υπάρχει μόνο ένα γράφημα για κάθε πλήθος ακμών.



Επιστρέφοντας στην γενική περίπτωση έχουμε το επόμενο Θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.2.2: Το cycle index της $S_p^{(2)}$ είναι

$$P_{S_p^{(2)}}(x_1, \dots, x_m) = \sum_{\{b_1, b_2, \dots, b_p\}} \frac{1}{\prod_{t=1}^n t^{b_t} b_t!} \cdot \prod_{t=1}^{\lfloor p/2 \rfloor} (x_t x_{2t}^{t-1})^{b_{2t}} x_t^{t \binom{b_t}{2}} \cdot \prod_{t=0}^{\lfloor (p-1)/2 \rfloor} x_{2t+1}^{t b_{2t+1}} \cdot \prod_{1 \leq r < s \leq p-1} x_{[r,s]}^{b_r b_s(r,s)}$$

όπου $(r, s) = \text{M.K.}\Delta.(r, s)$, $[r, s] = \text{E.K.}\Pi.(r, s)$ και $m = \binom{p}{2}$.

Απόδειξη. Υπενθυμίζουμε ότι σύμφωνα με τον ορισμό 2.1.1 το cycle index της $S_p^{(2)}$ είναι:

$$P_{S_p^{(2)}}(x_1, \dots, x_m) = \frac{1}{|S_p^{(2)}|} \sum_{\sigma' \in S_p^{(2)}} x_1^{b'_1} \cdots x_m^{b'_m}$$

όπου η μετάθεση $\sigma' \in S_p^{(2)}$ είναι τύπου $\{b'_1, \dots, b'_m\}$.

Αρχικά έχουμε ότι $|S_p^{(2)}| = |S_p| = p!$. Έστω $\sigma \in S_p$ τύπου $\{b_1, \dots, b_m\}$, φάχνουμε να βρούμε τον τύπο της $\sigma' \in S_p^{(2)}$.

Θεωρούμε τον κύκλο $(123\dots k)$ της σ μήκους k . Για κάθε $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$ κοιτάμε τον κύκλο που παράγει το (ij) μέσω της σ' . Σύμφωνα με την 3.2:

$$(ij) \xrightarrow{\sigma'} (i+1 \ j+1) \xrightarrow{\sigma'} (i+2 \ j+2) \xrightarrow{\sigma'} \dots$$

Αν k είναι περιττός τότε κάθε (ij) δίνει κύκλο μήκους k . Έχουμε $\binom{k}{2}$ αντιμεταθέσεις από τα k στοιχεία και αυτές οι αντιμεταθέσεις φτιάχνουν κύκλους μήκους k . Άρα το πλήθος αυτών των k κύκλων είναι:

$$\frac{\binom{k}{2}}{k} = \frac{k-1}{2}$$

Άρα, σε αυτήν την περίπτωση, αν η σ έχει b_k κύκλους μήκους k αυτοί συνεισφέρουν $b_k \cdot \frac{k-1}{2}$ κύκλους μήκους k στην σ' .

Αν k είναι άρτιος τότε κάθε (ij) δίνει κύκλο μήκους k εκτός από το $(i \ i+k/2)$, για $i = 1, 2, \dots, k/2$, που δίνει κύκλο μήκους $k/2$. Έχουμε, δηλαδή, $\binom{k}{2} - \frac{k}{2}$ αντιμεταθέσεις που φτιάχνουν κύκλους μήκους k και $k/2$ αντιμεταθέσεις που φτιάχνουν τον ίδιο κύκλο μήκους $k/2$. Το πλήθος των κύκλων μήκους k είναι

$$\frac{\binom{k}{2} - \frac{k}{2}}{k} = \frac{\frac{k}{2}(k-2)}{k} = \frac{k-2}{2}$$

Άρα, σε αυτήν την περίπτωση, αν η σ έχει b_k κύκλους μήκους k τότε αυτοί συνεισφέρουν $b_k \cdot \frac{k-2}{2}$ κύκλους μήκους k και b_k κύκλους μήκους $k/2$ στην σ' .

Θεωρούμε τους κύκλους $(12\dots r)$ και $(t+1 \ t+2 \ \dots \ t+s)$, με $t < r$, της σ μήκους r και s αντίστοιχα με $r \neq s$. Κάθε (ij) με $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ και $j \in \{t+1, t+2, \dots, t+s\}$ φτιάχνει κύκλο μήκους Ε.Κ.Π. (r, s) . Συνολικά έχουμε $r \cdot s$ τέτοιες αντιμεταθέσεις. Το πλήθος αυτών των κύκλων είναι:

$$\frac{r \cdot s}{\text{Ε.Κ.Π.}(r, s)} = \text{Μ.Κ.Δ.}(r, s)$$

Άρα, σε αυτήν την περίπτωση, αν η σ έχει b_r κύκλους μήκους r και b_s κύκλους μήκους s τότε έχουμε συνεισφορά $b_r \cdot b_s \cdot \text{Μ.Κ.Δ.}(r, s)$ κύκλων μήκους Ε.Κ.Π. (r, s) στην σ' .

Αν $r = s$ τότε κάθε (ij) με $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ και $j \in \{t+1, t+2, \dots, t+s\}$ φτιάχνει κύκλο μήκους Ε.Κ.Π. $(r, r) = r$. Συνολικά έχουμε $r \cdot r$ τέτοιες αντιμεταθέσεις. Το πλήθος αυτών των κύκλων είναι:

$$\frac{r \cdot r}{\text{Ε.Κ.Π.}(r, r)} = \text{Μ.Κ.Δ.}(r, r) = r$$

Άρα, σε αυτήν την περίπτωση, αν η σ έχει b_r κύκλους μήκους r τότε έχουμε συνεισφορά $r \cdot \binom{b_r}{2}$ κύκλων μήκους r στην σ' .

Συνδυάζοντας τις παραπάνω περιπτώσεις αποδεικνύεται το Θεώρημα. \square

Παράδειγμα 3.2.2: Σε αυτό το σημείο θα υπολογίσουμε την $\sigma' \in S_4^{(2)}$ που παράγεται από κάθε $\sigma \in \{(12)(34), (123)(4)\} \subseteq S_4$.

Θεωρούμε τις ακμές $a_1 = 12, a_2 = 13, a_3 = 14, a_4 = 23, a_5 = 24$ και $a_6 = 34$.

- Για $\sigma = (12)(34)$

$$\sigma'(a_1) = \sigma(1)\sigma(2) = 21 = 12 = a_1$$

$$\sigma'(a_2) = \sigma(1)\sigma(3) = 24 = a_5$$

$$\sigma'(a_3) = \sigma(1)\sigma(4) = 23 = a_4$$

$$\sigma'(a_4) = \sigma(2)\sigma(3) = 14 = a_3$$

$$\sigma'(a_5) = \sigma(2)\sigma(4) = 13 = a_2$$

$$\sigma'(a_6) = \sigma(3)\sigma(4) = 43 = 34 = a_6$$

Άρα

$$(12)(34) \rightarrow (a_1)(a_2a_5)(a_3a_4)(a_6)$$

- Για $\sigma = (123)(4)$

$$\sigma'(a_1) = \sigma(1)\sigma(2) = 23 = a_4$$

$$\sigma'(a_2) = \sigma(1)\sigma(3) = 21 = 12 = a_1$$

$$\sigma'(a_3) = \sigma(1)\sigma(4) = 24 = a_5$$

$$\sigma'(a_4) = \sigma(2)\sigma(3) = 31 = 13 = a_2$$

$$\sigma'(a_5) = \sigma(2)\sigma(4) = 34 = a_6$$

$$\sigma'(a_6) = \sigma(3)\sigma(4) = 14 = a_3$$

Άρα

$$(123)(4) \rightarrow (a_1a_4a_2)(a_3a_5a_6)$$

Όμως, μπορούμε να υπολογίσουμε τον τύπο των $\sigma' \in S_4^{(2)}$ χωρίς να βρούμε την μετάθεση. Αυτό γίνεται αν εφαρμόσουμε τον τρόπο που χρησιμοποιήσαμε στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.2 αφού

- Για $\sigma = (12)(34)$ τύπου $\{0, 2, 0, 0\}$ έχουμε:

Αν οι κορυφές των ακμών ανήκουν στον ίδιο κύκλο της σ τότε:

Οι $b_2 = 2$ κύκλοι μήκους 2 συνεισφέρουν $b_2 \cdot \frac{2-2}{2} = 0$ κύκλους μήκους 2 και $b_2 = 2$ κύκλους μήκους 1 στην σ' .

Αν οι κορυφές των ακμών ανήκουν σε διαφορετικό κύκλο της σ τότε:

Οι $b_2 = 2$ κύκλοι μήκους 2 συνεισφέρουν $2 \cdot \binom{b_2}{2} = 2$ κύκλους μήκους 2 στην σ' .

Άρα, η σ' που παράγεται από την $\sigma = (12)(34)$ είναι τύπου $\{2, 2, 0, 0, 0, 0\}$.

- Για $\sigma = (123)(4)$ τύπου $\{1, 0, 1, 0\}$ έχουμε:

Αν οι κορυφές των ακμών ανήκουν στον ίδιο κύκλο της σ τότε:

Ο $b_1 = 1$ κύκλος μήκους 1 συνεισφέρει $b_1 \cdot \frac{1-1}{2} = 0$ κύκλους μήκους 1 στην σ' .

Ο $b_3 = 1$ κύκλος μήκους 3 συνεισφέρει $b_3 \cdot \frac{3-1}{2} = 1$ κύκλο μήκους 3 στην σ' .

Αν οι κορυφές των ακμών ανήκουν σε διαφορετικό κύκλο της σ τότε:

Οι $b_1 = 2$ κύκλοι μήκους 1 και ο $b_3 = 1$ κύκλος μήκους 3 συνεισφέρουν $b_1 \cdot b_3 \cdot (1, 3) = 1$ κύκλο μήκους $[1, 3] = 3$ στην σ' .

Άρα, η σ' που παράγεται από την $\sigma = (123)(4)$ είναι τύπου $\{0, 0, 2, 0, 0, 0\}$.

Εφαρμογή 3.2.1: Ποιό είναι το πλήθος των μη ισόμορφων γραφημάτων με 4 κορυφές;

Θεωρούμε τα σύνολα $V = \{1, 2, 3, 4\}$, $D = V^{(2)}$ και $R = \{0, 1\}$. Η $S_4^{(2)}$ δρα στο R^D .

Αρχικά θα υπολογίσουμε το cycle index της $S_4^{(2)}$ χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 3.2.2. Η S_4 έχει 5 τύπους μεταθέσεων, τους εξής: $\{4, 0, 0, 0\}$, $\{2, 1, 0, 0\}$, $\{1, 0, 1, 0\}$, $\{0, 2, 0, 0\}$ και $\{0, 0, 0, 1\}$.

Το Θεώρημα 3.2.2 μας λέει ότι το cycle index της $S_4^{(2)}$ δίνεται από τον τύπο:

$$P_{S_4^{(2)}}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \sum_{\{b_1, b_2, b_3, b_4\}} \frac{1}{\prod_{t=1}^4 t^{b_t} b_t!} \cdot \prod_{t=1}^2 (x_t x_{2t-1})^{b_{2t}} x_t^{\binom{b_t}{2}} \cdot \prod_{t=0}^1 x_{2t+1}^{t b_{2t+1}} \cdot \prod_{1 \leq r < s \leq 3} x_{[r,s]}^{b_r b_s \binom{r,s}{2}}$$

Ο τύπος $\{4, 0, 0, 0\}$ δίνει τον όρο:

$$\frac{1}{1^{b_1} \cdot b_1!} \cdot x_1^{1 \cdot \binom{b_1}{2}} = \frac{1}{4!} \cdot x_1^{\binom{4}{2}} = \frac{1}{24} \cdot x_1^6$$

Ο τύπος $\{2, 1, 0, 0\}$ δίνει τον όρο:

$$\frac{1}{1^{b_1} \cdot b_1! \cdot 2^{b_2} \cdot b_2!} \cdot x_1^{b_2} \cdot x_1^{1 \cdot \binom{b_1}{2}} \cdot x_2^{1 \cdot b_1 \cdot b_2} = \frac{1}{2! \cdot 2} \cdot x_1 \cdot x_1^{\binom{2}{2}} \cdot x_2 = \frac{1}{4} \cdot x_1^2 \cdot x_2^2$$

Ο τύπος $\{1, 0, 1, 0\}$ δίνει τον όρο:

$$\frac{1}{1^{b_1} \cdot b_1! \cdot 3^{b_3} \cdot b_3!} \cdot x_3^{1 \cdot b_3} \cdot x_3^{1 \cdot b_1 \cdot b_3} = \frac{1}{3} \cdot x_3 \cdot x_3 = \frac{1}{3} \cdot x_3^2$$

Ο τύπος $\{0, 2, 0, 0\}$ δίνει τον όρο:

$$\frac{1}{2^{b_2} \cdot b_2!} \cdot (x_1 \cdot x_2^0)^{b_2} \cdot x_2^{2 \cdot \binom{b_2}{2}} = \frac{1}{2^2 \cdot 2!} \cdot x_1^2 \cdot x_2^{2 \cdot \binom{2}{2}} = \frac{1}{8} \cdot x_1^2 \cdot x_2^2$$

Ο τύπος $\{0, 0, 0, 1\}$ δίνει τον όρο:

$$\frac{1}{4^{b_4} \cdot b_4!} \cdot (x_2 \cdot x_4^1)^{b_4} = \frac{1}{4} \cdot (x_2 \cdot x_4)$$

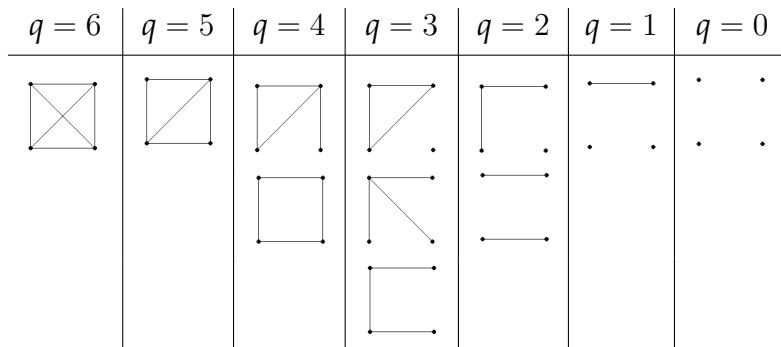
Αθροίζοντας τους παραπάνω όρους προκύπτει το cycle index της $S_4^{(2)}$:

$$P_{S_4^{(2)}}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \frac{1}{24} (x_1^6 + 9x_1^2 x_2^2 + 8x_3^2 + 6x_2 x_4)$$

Οπότε, σύμφωνα με το Θεώρημα 3.2.1 το πλήθος των μη ισόμορφων γραφημάτων με 4 κορυφές δίνεται από το παρακάτω πολυώνυμο:

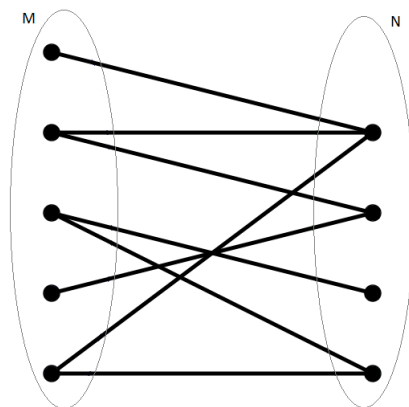
$$\begin{aligned}
 \sum_{q=0}^6 g_{4,q}x^q &= P_{S_4^{(2)}}(1+x, 1+x^2, 1+x^3, 1+x^4, 1+x^5, 1+x^6) \\
 &= \frac{1}{24}[(1+x)^6 + 9(1+x^2)(1+x^2)^2 + 8(1+x^3)^2 + 6(1+x^2)(1+x^4)] \\
 &= \frac{1}{24}[24x^3 + 24x^5 + 48x^4 + 72x^3 + 48x^2 + 24x + 24] \\
 &= x^6 + x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 1
 \end{aligned}$$

σύμφωνα με το οποίο υπάρχουν: 1 γράφημα με 6 ακμές, 1 γράφημα με 5 ακμές, 2 γραφήματα με 4 ακμές, 3 γραφήματα με 3 ακμές, 2 γραφήματα με 2 ακμές, 1 γράφημα με 1 ακμή και 1 γράφημα με 0 ακμές. Παρακάτω βλέπουμε όλα τα μη ισοδύναμα γραφήματα με 4 κορυφές.



3.3 Διμερή Γραφήματα

Ένα διμερές γράφημα $K_{m,n}$ είναι ένα γράφημα του οποίου οι κορυφές έχουν μοιραστεί σε δύο ξένα υποσύνολα M, N έτσι ώστε να μην υπάρχει ακμή με κορυφές από το ίδιο υποσύνολο. Στην ενότητα αυτή θα ασχοληθούμε με την περίπτωση των διμερών γραφημάτων με $m \neq n$. Για να υπολογίσουμε το πλήθος των μη ισόμορφων διμερών γραφημάτων, πρέπει αρχικά να ορίσουμε το γινόμενο ομάδων μεταθέσεων.



ΟΡΙΣΜΟΣ 3.3.1: Έχοντας δύο ξένα σύνολα N και M όπου $|N| = n$, $|M| = m$ και τις ομάδες μεταθέσεων G, H που δρουν στα σύνολα M, N αντίστοιχα, τότε το γινόμενο $G \times H$ δρα στο $N \times M$ ως εξής: Αν $\sigma \in G$ και $\tau \in H$, τότε

$$(\sigma, \tau)(ij) = \sigma(i)\tau(j)$$

όπου $i \in N$ και $j \in M$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.3.2: Έστω $g_{m,n,k}$ το πλήθος των μη ισόμορφων διμερών γραφημάτων $K_{m,n}$ με k ακμές. Για να υπολογίσουμε το πλήθος των μη ισόμορφων διμερών γραφημάτων $K_{m,n}$ χρειάζεται να υπολογίσουμε το πολυώνυμο:

$$g_{m,n}(x) = \sum_{k \geq 0} g_{m,n,k} x^k$$

Σε ένα διμερές γράφημα $K_{m,n}$, η S_m δρα στο σύνολο M των m κορυφών και η S_n στο σύνολο N των n κορυφών. Οπότε το γινόμενο $S_m \times S_n$, όπως έχει οριστεί παραπάνω, δρα στο $M \times N = \{ij \mid i \in M \text{ και } j \in N\}$. Θεωρούμε τα σύνολα $D = M \times N$ και $R = \{0, 1\}$ καθώς και την απεικόνιση $f \in R^D$ όπου οι κορυφές $i \in M$ και $j \in N$ ενώνονται αν και μόνον αν $f(ij) = 1$. Ορίζουμε βάρη στα στοιχεία του R τα $w(0) = 1$ και $w(1) = x$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.3.3: Δύο απεικονίσεις f_1, f_2 αντιστοιχούν στο ίδιο διμερές γράφημα αν και μόνον αν υπάρχουν μεταθέσεις $\sigma \in S_m$ και $\tau \in S_n$ τέτοιες ώστε

$$f_1(ij) = f_2(\sigma(i)\tau(j))$$

Σκεπτόμενοι όπως και στην προηγούμενη ενότητα των γραφημάτων, προκύπτει το επόμενο Θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.3.1 (Pólya's Enumeration Theorem για τα διμερή γραφήματα): Το πλήθος των μη ισόμορφων διμερών γραφημάτων $K_{m,n}$, όπου $m \neq n$, δίνεται από τον τύπο

$$\sum_{k=0}^{m \cdot n} g_{m,n,k} x^k = P_{S_m \times S_n}(1 + x, 1 + x^2, \dots, 1 + x^{mn})$$

όπου $g_{m,n,k}$ το πλήθος των μη ισόμορφων διμερών γραφημάτων $K_{m,n}$ με k ακμές.

Μένει να υπολογίσουμε το cycle index της $S_m \times S_n$ όταν $m \neq n$, το οποίο κάνουμε στο επόμενο Θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.3.2: Το cycle index της $S_m \times S_n$ όταν $m \neq n$ είναι

$$P_{S_m \times S_n}(x_1, \dots, x_{mn}) = \frac{1}{m!n!} \sum_{(\sigma, \tau)} \prod_{r,s=1}^{m,n} x_{[r,s]}^{b_r \widehat{b}_s(r,s)}$$

όπου $(\sigma, \tau) \in S_m \times S_n$ και η σ είναι τύπου $\{b_1, \dots, b_m\}$ και η τ τύπου $\{\widehat{b}_1, \dots, \widehat{b}_n\}$. Επίσης, υπενθυμίζουμε ότι $(r, s) = \text{M.K.}\Delta.(r, s)$ και $[r, s] = \text{E.K.}\Pi.(r, s)$.

Απόδειξη. Υπενθυμίζουμε ότι σύμφωνα με τον ορισμό 2.1.1 το cycle index της $S_m \times S_n$ είναι:

$$P_{S_m \times S_n}(x_1, \dots, x_{mn}) = \frac{1}{|S_m \times S_n|} \sum_{(\sigma, \tau)} x_1^{b'_1} \cdots x_{mn}^{b'_{mn}}$$

όπου η μετάθεση $(\sigma, \tau) \in S_m \times S_n$ είναι τύπου $\{b'_1, \dots, b'_{mn}\}$.

Αρχικά έχουμε ότι $|S_m \times S_n| = m!n!$. Έστω $\sigma \in S_m$ τύπου $\{b_1, \dots, b_m\}$ και $\tau \in S_n$ τύπου $\{\widehat{b}_1, \dots, \widehat{b}_n\}$, φάχνουμε να βρούμε τον τύπο της $(\sigma, \tau) \in S_m \times S_n$.

Θεωρούμε τους κύκλους $(12\dots r)$ και $(t+1 \ t+2 \ \dots \ t+s)$, με $t < r$, της σ μήκους r και της τ μήκους s αντίστοιχα. Κάθε (ij) με $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ και $j \in \{t+1, \dots, t+s\}$ φτιάχνει κύκλο μήκους Ε.Κ.Π. (r, s) . Συνολικά έχουμε $r \cdot s$ τέτοιες αντιμεταθέσεις. Το πλήθος αυτών των κύκλων είναι:

$$\frac{r \cdot s}{\text{Ε.Κ.Π.}(r, s)} = \text{Μ.Κ.Δ.}(r, s)$$

Άρα αν η σ έχει b_r κύκλους μήκους r και η τ έχει \widehat{b}_s κύκλους μήκους s τότε έχουμε συνεισφορά $b_r \cdot \widehat{b}_s \cdot \text{Μ.Κ.Δ.}(r, s)$ κύκλων μήκους Ε.Κ.Π. (r, s) στην $(\sigma, \tau) \in S_m \times S_n$. Και έτσι αποδεικνύεται το Θεώρημα. \square

Εφαρμογή 3.3.1: Ποιό είναι το πλήθος των μη ισόμορφων διμερών γραφημάτων $K_{2,3}$;

Θεωρούμε τα σύνολα $M = \{1, 2\}$ και $N = \{1, 2, 3\}$. Άρα $D = M \times N$ και $R = \{0, 1\}$. Η $S_2 \times S_3$ δρα στο R^D . Αρχικά θα υπολογίσουμε το cycle index της $S_2 \times S_3$ χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 3.3.2. Η S_2 έχει 2 τύπους μεταθέσεων, τους εξής: $\{2, 0\}$ και $\{0, 1\}$ και η S_3 έχει 3 τύπους μεταθέσεων: 1 μετάθεση τύπου $\{3, 0, 0\}$, 3 μεταθέσεις τύπου $\{1, 1, 0\}$ και 2 μεταθέσεις τύπου $\{0, 0, 1\}$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.3.2 το cycle index της $S_2 \times S_3$ δίνεται από τον τύπο:

$$P_{S_2 \times S_3}(x_1, \dots, x_6) = \frac{1}{12} \sum_{(\sigma, \tau)} \prod_{r,s=1}^{2,3} x_{[r,s]}^{b_r \widehat{b}_s(r,s)}$$

όπου $(\sigma, \tau) \in S_2 \times S_3$ και η σ είναι τύπου $\{b_1, b_2\}$ και η τ τύπου $\{\widehat{b}_1, \widehat{b}_2, \widehat{b}_3\}$.

Για σ τύπου $\{2, 0\}$ και τ τύπου $\{3, 0, 0\}$ παίρνουμε τον όρο:

$$x_{[1,1]}^{b_1 \widehat{b}_1(1,1)} = x_1^{2 \cdot 3 \cdot 1} = x_1^6$$

Για σ τύπου $\{2, 0\}$ και τ τύπου $\{1, 1, 0\}$ παίρνουμε τον όρο:

$$3x_{[1,1]}^{b_1 \widehat{b}_1(1,1)} x_{[1,2]}^{b_1 \widehat{b}_2(1,2)} = 3x_1^{2 \cdot 1 \cdot 1} \cdot x_2^{1 \cdot 2 \cdot 1} = 3x_1^2 x_2^2$$

Για σ τύπου $\{2, 0\}$ και τ τύπου $\{0, 0, 1\}$ παίρνουμε τον όρο:

$$2x_{[1,3]}^{b_1 \widehat{b}_3(1,3)} = 2x_3^{2 \cdot 1 \cdot 1} = 2x_3^2$$

Για σ τύπου $\{0, 1\}$ και τ τύπου $\{3, 0, 0\}$ παίρνουμε τον όρο:

$$x_{[2,1]}^{b_2 \widehat{b}_1(2,1)} = x_2^{1 \cdot 3 \cdot 1} = x_2^3$$

Για σ τύπου $\{0, 1\}$ και τ τύπου $\{1, 1, 0\}$ παίρνουμε τον όρο:

$$3x_{[2,1]}^{b_2\widehat{b_1}(2,1)}x_{[2,2]}^{b_2\widehat{b_2}(2,2)} = 3x_2^{1\cdot 1\cdot 1}x_2^{1\cdot 1\cdot 2} = 3x_2^3$$

Για σ τύπου $\{0, 1\}$ και τ τύπου $\{0, 0, 1\}$ παίρνουμε τον όρο:

$$2x_{[2,3]}^{b_2\widehat{b_3}(2,3)} = 2x_6^{1\cdot 1\cdot 1} = 2x_6$$

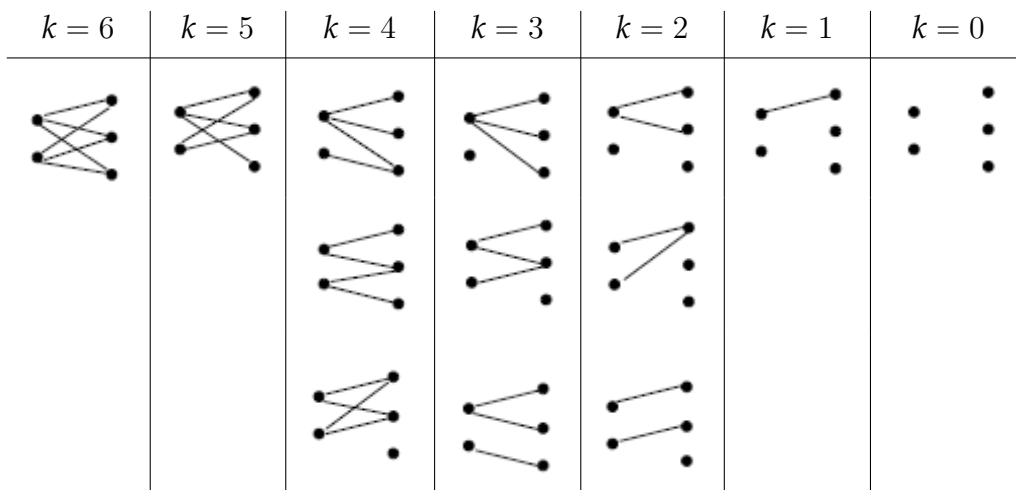
Αθροίζοντας τους παραπάνω όρους προκύπτει το cycle index της $S_2 \times S_3$:

$$P_{S_2 \times S_3}(x_1, \dots, x_6) = \frac{1}{12}(x_1^6 + 3x_1^2x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_2^3 + 2x_6)$$

Οπότε, σύμφωνα με το Θεώρημα 3.3.1, το πλήθος των μη ισόμορφων διμερών γραφημάτων $K_{2,3}$ δίνεται από το παρακάτω πολυώνυμο:

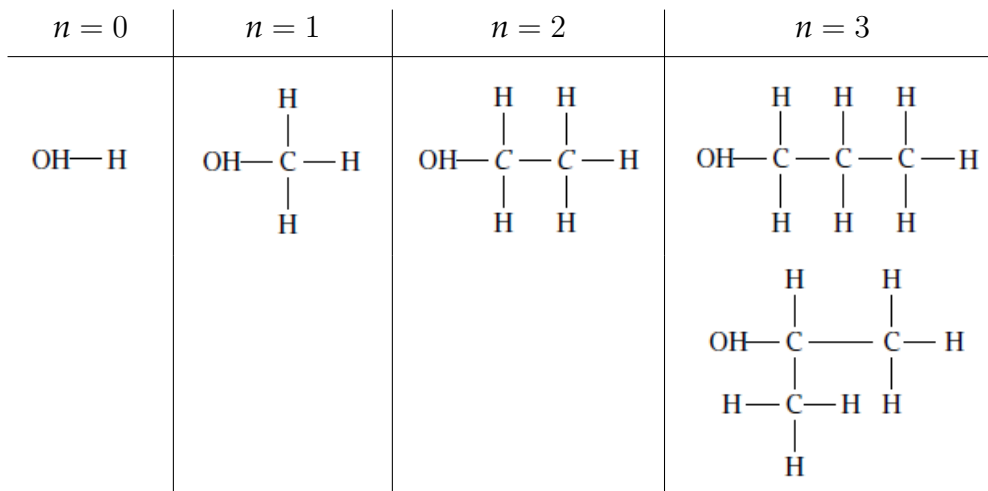
$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 0} g_{2,3,k}x^k &= P_{S_2 \times S_3}(1+x, \dots, 1+x^6) \\ &= \frac{1}{12}[(1+x)^6 + 3(1+x)^2(1+x^2)^2 + 2(1+x^3)^2 + 4(1+x^2)^3 \\ &\quad + 2(1+x^3)] \\ &= \frac{1}{12}[12x^6 + 12x^5 + 36x^4 + 36x^3 + 36x^2 + 12x + 12] \\ &= x^6 + x^5 + 3x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + 1 \end{aligned}$$

σύμφωνα με το οποίο υπάρχουν: 1 διμερές γράφημα με 6 ακμές, 1 με 5 ακμές, 3 με 4 ακμές, 3 με 3 ακμές, 3 με 2 ακμές, 1 με 1 ακμή και 1 με 0 ακμές. Παρακάτω βλέπουμε όλα τα μη ισοδύναμα διμερή γραφήματα $B_{2,3}$.



3.4 Αλκοόλες

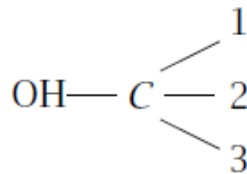
Η δυνατότητα εφαρμογής του Θεωρήματος Απαρίθμησης του Ρόλγα δεν περιορίζεται στις εφαρμογές που έχουμε δει μέχρι τώρα αλλά και στην απαρίθμηση χημικών ενώσεων. Στην ενότητα αυτή θα ασχοληθούμε με την απαρίθμηση αλκοολών. Μια αλκοόλη είναι οργανική ένωση που περιέχει ως κύρια χαρακτηριστική ομάδα ένα υδροξύλιο (-OH) που συνδέεται με μονό δεσμό με ένα άτομο άνθρακα (-C). Κάθε άτομο άνθρακα μπορεί να συνδεθεί με μονούς δεσμούς με 4 άλλα άτομα, είτε με άτομα άνθρακα είτε με άτομα υδρογόνου (-H) και κάθε άτομο υδρογόνου συνδέεται με μονό δεσμό με ένα άτομο άνθρακα. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Απαρίθμησης του Ρόλγα μπορούμε να υπολογίσουμε το πλήθος των αλκοολών με ακριβώς n άτομα άνθρακα. Στο παρακάτω σχήμα μπορούμε να δούμε πόσες αλκοόλες υπάρχουν για $n \leq 3$.



ΟΡΙΣΜΟΣ 3.4.1: Έστω a_n το πλήθος των αλκοολών με n άτομα άνθρακα. Για τον προσδιορισμό του a_n θεωρούμε το πολυώνυμο

$$A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$$

Έχουμε $a_0 = 1$, και για $n \geq 1$ θεωρούμε το άτομο άνθρακα που είναι συνδεδεμένο με το υδροξύλιο ως την ρίζα της αλκοόλης. Υπάρχουν 3 δεσμοί της ρίζας οι οποίοι μπορούν να μετατεθούν αυθαίρετα:



Οπότε η ομάδα που δρα στο σύνολο $D = \{1, 2, 3\}$ είναι η S_3 . Έστω R το σύνολο των αλκοολών και ορίζουμε το βάρος $w(A) = x^n$ αν η αλκοόλη A αποτελείται από n άτομα άνθρακα. Κάθε απεικόνιση $f: D \rightarrow R$ αντιστοιχεί σε μία αλκοόλη και οι διαφορετικές αλκοόλες είναι ακριβώς τα διαφορετικά patterns της δράσης της S_3 στο R^D .

Έχουμε ήδη δει ότι το cycle index της S_3 είναι

$$P_{S_3}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{6}(x_1^3 + 3x_1x_2 + 2x_3)$$

Επίσης έχουμε

$$\sum_{A \in R} [w(A)]^k = A(x^k)$$

Άρα εφαρμόζοντας το Θεώρημα Απαρίθμησης του Pólya (Θεώρημα 2.6.2) το πλήθος των διαφορετικών αλκοολών δίνεται από τον τύπο

$$\begin{aligned} P_{S_3} \left(\sum_{A \in R} w(A), \sum_{A \in R} [w(A)]^2, \sum_{A \in R} [w(A)]^3 \right) &= P_{S_3} \left(A(x), A(x^2), A(x^3) \right) \\ &= \frac{1}{6} \left(A(x)^3 + 3A(x)A(x^2) + 2A(x^3) \right) \end{aligned}$$

Και προσθέτοντας στον υπολογισμό και την ρίζα της ένωσης προκύπτει ότι

$$A(x) = 1 + \frac{x}{6} \left(A(x)^3 + 3A(x)A(x^2) + 2A(x^3) \right)$$

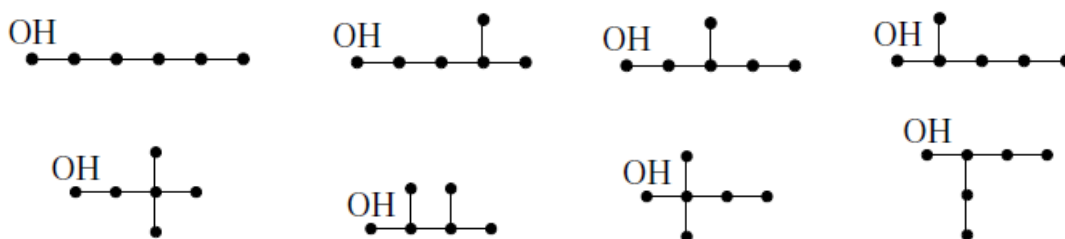
Συγκρίνοντας τους συντελεστές βρίσκουμε το πλήθος των αλκοολών με n άτομα άνθρακα, δηλαδή έτσι υπολογίζουμε το a_n . Από την σύγκριση των συντελεστών καταλήγουμε στην σχέση

$$a_n = \frac{1}{6} \left(\sum_{i+j+k=n-1} a_i a_j a_k + 3 \sum_{i+2j=n-1} a_i a_j + 2a_{\frac{n-1}{3}} \right)$$

για $n \geq 1$ και με $a_{\frac{n-1}{3}} = 0$ όταν $\frac{n-1}{3} \notin \mathbb{Z}$. Από την σχέση αυτή προκύπτει ο παρακάτω πίνακας με τις πρώτες τιμές του a_n .

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n	1	1	1	2	4	8	17	39	89

Παρακάτω βλέπουμε τις 8 αλκοόλες με τα 5 άτομα άνθρακα, όπου μόνο η ομάδα υδροξυλίου ($-OH$) και τα άτομα άνθρακα ($-C$) απεικονίζονται.



Περισσότερες εφαρμογές στην απαρίθμηση χημικών ενώσεων μπορούμε να βρούμε στο George Pólya και Ronald C. Read, *Combinatorial Enumeration of Groups, Graphs and Chemical Compounds*, Springer-Verlag, 1987. Επίσης το Θεώρημα Απαρίθμησης του Pólya, εφαρμόζεται στη Θεωρία Μουσικής, όπως μπορούμε να δούμε στο David L. Reiner, *Enumeration in Music Theory*, *The American Mathematical Monthly*, 1985, και στην απαρίθμηση δέντρων, όπως μπορούμε να δούμε στο Frank Harary και Edgar M. Palmer, *Graphical Enumeration*, Academic Press, 1973.

Βιβλιογραφία

- [1] John B. Fraleigh, Εισαγωγή στην Άλγεβρα, Π.Ε.Κ., 2010
- [2] Nicolaas Govert de Bruijn, ch. 5 Pólya's Theory of Counting, Applied Combinatorial Mathematics (editor Edwin F. Beckenbach), John Wiley & Sons, Inc, 1964
- [3] Alan Tucker, Applied Combinatorics, John Wiley & Sons, Inc, 3rd ed, 1995
- [4] Arbind K. Lal, Lecture Notes on Discrete Mathematics, 2012
- [5] Frank Harary και Edgar M. Palmer, Graphical Enumeration, Academic Press, 1973
- [6] Martin Aigner, A Course in Enumeration, Springer, 2007