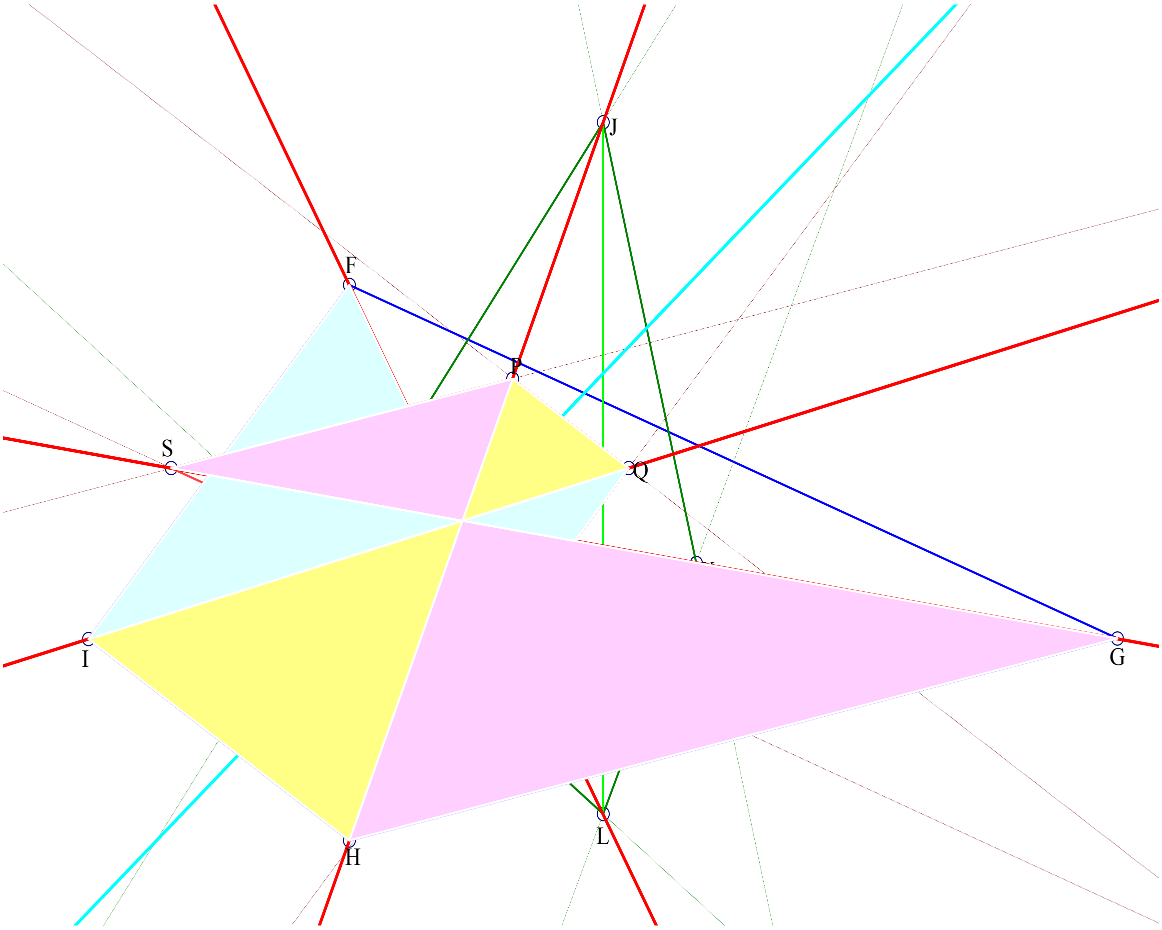
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πτυχιακή Εργασία
Μαρίας Γιαννακάκη

ΟΡΘΟΔΙΑΓΩΝΙΑ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ



ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ
2005 – 2006

Πτυχιακή Εργασία
Μαρίας Γιαννακάκη
Α. Μ. 2727

ΘΕΜΑ: **ΟΡΘΟΔΙΑΓΩΝΙΑ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ**

Επιβλέπων Καθηγητής: Πάρις Πάμφιλος

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Ορθοδιαγώνια κυρτά τετράπλευρα ονομάζονται όλα τα τετράπλευρα των οποίων οι διαγώνιοι τέμνονται κάθετα. Τα ορθοδιαγώνια τετράπλευρα εμφανίζουν πολλές ενδιαφέρουσες ιδιότητες, απ’ τις οποίες άλλες είναι προφανείς κι αποδεικνύονται εύκολα κι άλλες αρκετά περίπλοκες και με δυσκολότερες αποδείξεις.

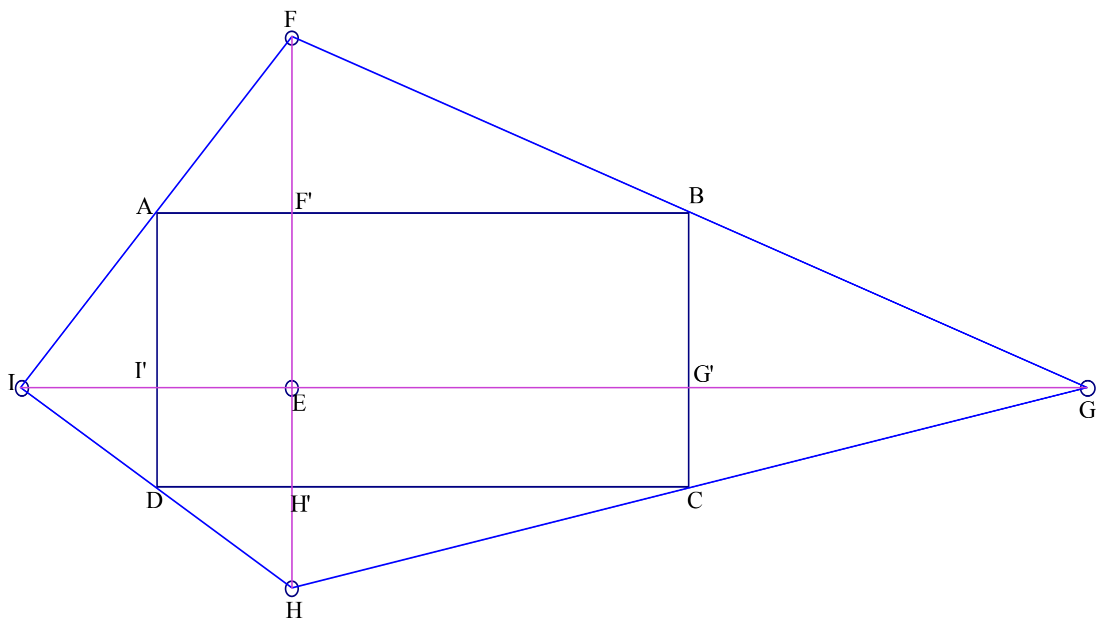
Σκοπός της εργασίας αυτής είναι η μελέτη ορισμένων χαρακτηριστικών των ορθοδιαγωνίων τετραπλεύρων, η απόδειξή τους, όπως επίσης και η διερεύνηση για την ύπαρξη περισσοτέρων ιδιοτήτων. Στην εργασία, λοιπόν, αυτή δεν αναφέρονται όλα τα χαρακτηριστικά και οι ιδιότητες των συγκεκριμένων γεωμετρικών σχημάτων, αλλά μονάχα ένα μέρος τους. Ωστόσο, η περιοχή αυτή της Ευκλείδειας Γεωμετρίας παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον και προσφέρεται για περαιτέρω έρευνα.

ΟΡΘΟΔΙΑΓΩΝΙΑ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ

Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο s = (ABCD) και τυχαίο σημείο E στο εσωτερικό του. Ύστερα από ανάκλαση του E ως προς τις πλευρές AB, BC, CD, DA του ορθογωνίου, προκύπτουν αντίστοιχα τα σημεία F, G, H, I. Σχηματίζεται έτσι το τετράπλευρο q = (FGHI).

- **<u>Πρόταση 1</u>:**

Οι διαγώνιοι του q = (FGHI) τέμνονται στο E, είναι ορθογώνιοι και διπλού μήκους, από αυτό των παραλλήλων πλευρών του s = (ABCD).



(Σχήμα 1)

Απόδειξη:

(Σύμφωνα με το σχήμα 1 της σελίδας 1.)

→ Το F προέκυψε από ανάκλαση του E ως προς την AB. Συνεπώς $FE \perp AB$.
Το H προέκυψε από ανάκλαση του E ως προς τη CD. Συνεπώς $EH \perp CD$.
Επιπλέον ισχύει ότι AB // CD, ως μη διαδοχικές πλευρές ορθογωνίου παραλληλογράμμου.
Άρα $FE, EH \perp AB, CD$, οπότε τα F, E, H είναι συνευθειακά.
Έχουμε λοιπόν ότι η διαγώνιος FH του q διέρχεται από το E. (1)

Το G προέκυψε από ανάκλαση του E ως προς τη CD. Συνεπώς $GE \perp BC$.
Το I προέκυψε από ανάκλαση του E ως προς τη DA. Συνεπώς $EI \perp DA$.
Επιπλέον ισχύει ότι BC // DA ως μη διαδοχικές πλευρές ορθογωνίου παραλληλογράμμου.
Άρα $GE, EI \perp BC, DA$, οπότε τα G, E, I είναι συνευθειακά.
Έχουμε λοιπόν ότι η διαγώνιος GI του q διέρχεται από το E. (2)

Από τα (1), (2) συμπεραίνουμε ότι οι διαγώνιοι του q τέμνονται στο E.

→ Γνωρίζουμε ότι $FH \perp AB$ και $AB \perp AD$. Άρα ισχύει ότι FH // AD. Επιπλέον $IG \perp AD$. Οπότε προκύπτει ότι $IG \perp FH$. Επομένως, οι διαγώνιοι του q είναι ορθογώνιοι.

→ Έστω F΄, H΄ τα σημεία τομής της FH με τις AB, CD αντίστοιχα και I΄, G΄ τα σημεία τομής της IG με τις AD, BC αντίστοιχα. Εφόσον τα F, G, H, I προκύπτουν από την ανάκλαση του E ως προς τις AB, BC, CD, DA αντίστοιχα, τότε ισχύει ότι:
EF΄ = F΄F
EG΄ = G΄G
EH΄ = H΄H
EI΄ = I΄I.
Επιπλέον F΄H΄ // AD και I΄G΄ // AB. Εφόσον το s είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, τότε AF΄ // DH΄ και AI΄ // BG΄. Αυτό σημαίνει ότι τα AF΄H΄D και AI΄G΄B είναι παραλληλόγραμμα και συνεπώς F΄H΄ = AD και I΄G΄ = AB.
Οπότε έχουμε ότι:
FH = FF΄ + F΄E + EH΄ + H΄H
= F΄E + F΄E + EH΄ + EH΄
= 2 F΄E + 2 EH΄
= 2 (F΄E + EH΄)
= 2 F΄H΄
= 2 AD,

IG = II΄ + I΄E + EG΄ + G΄G

= I΄E + I΄E + EG΄ + EG΄
= 2 I΄E + 2 EG΄
= 2 (I΄E + EG΄)
= 2 I΄G΄
= 2 AB.

Επομένως, οι διαγώνιοι του q έχουν διπλάσιο μήκος από τις παράλληλες πλευρές του s.

- **<u>Πρόταση 2</u>:**

Οι κορυφές του s = (ABCD) είναι τα μέσα των πλευρών του q = (FGHI).

Απόδειξη:
(Σύμφωνα με το σχήμα 1 της σελίδας 1.)

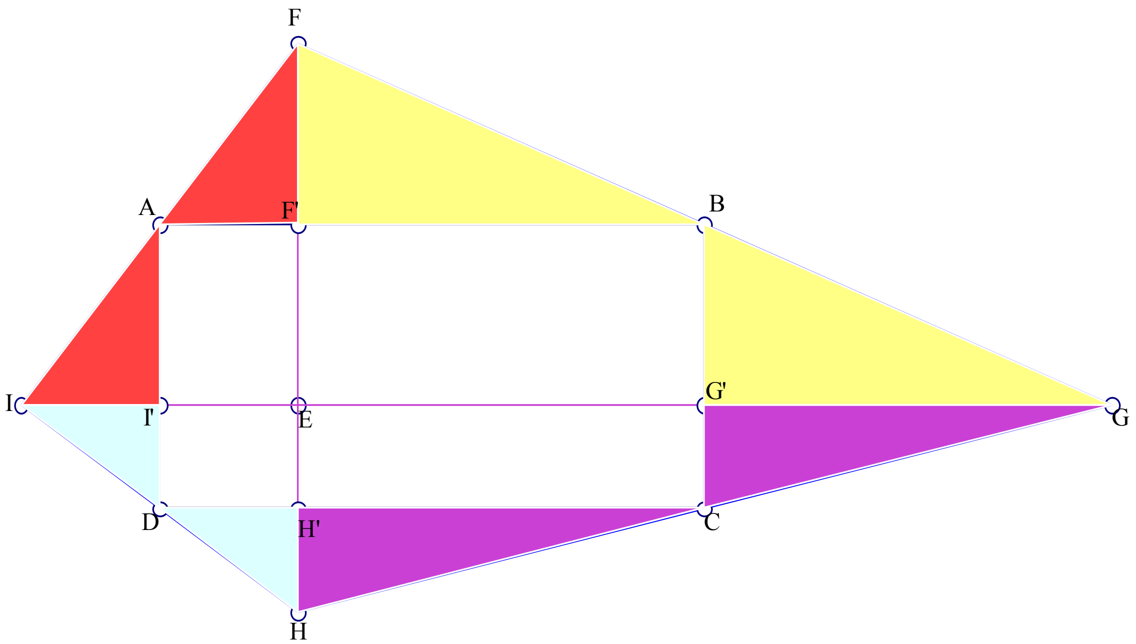
Στο τρίγωνο IFG ισχύει ότι AB // IG και AB = ½*IG. Άρα, τα A, B είναι τα μέσα των πλευρών IF, FG. Ομοίως, στο τρίγωνο GHI ισχύει ότι CD // IG και CD = ½*IG. Άρα, τα C, D είναι τα μέσα των πλευρών GH, HI. Συνεπώς, οι κορυφές του s = (ABCD) τα μέσα των πλευρών του q = (FGHI).

- **<u>Πρόταση 3</u>:**

Το εμβαδόν του q =(FGHI) είναι διπλάσιο του εμβαδού του s = (ABCD).

Απόδειξη:

Παρατηρούμε ότι τα παρακάτω ζεύγη τριγώνων έχουν όλες τις πλευρές τους παράλληλες:
α) FF΄B, BG΄G,
β) GG΄C, GH΄H,
γ) II΄D, DH΄H,
δ) II΄A, AF΄F
Συνεπώς είναι όμοια μεταξύ τους. Επιπλέον, ισχύει ότι:
FB = BG, GC = CH, HD = DI και IA = AF, που σημαίνει ότι τα τρίγωνα είναι ίσα. Επομένως, και τα εμβαδά τους θα είναι αντίστοιχα ίσα.



(Σχήμα 2)

Όπως φαίνεται στο σχήμα 2, ισχύει ότι:

$$\mathrm{E_q = E_s + E_{AFF'} + E_{FF'B} + E_{BG'G} + E_{GG'C} + E_{CH'H} + E_{HH'D} + E_{DI'I} + E_{II'A}} \Leftrightarrow$$

$$\mathrm{E_q = E_s + E_{AFF'} + E_{FF'B} + E_{FF'B} + E_{GG'C} + E_{GG'C} + E_{HH'D} + E_{HH'D} + E_{AFF'}} \Leftrightarrow$$

$$\mathrm{E_q = E_s + 2\cdot E_{AFF'} + 2\cdot E_{FF'B} + 2\cdot E_{GG'C} + 2\cdot E_{HH'D}} \Leftrightarrow$$

$$\mathrm{E_q = E_s + 2\cdot\frac{AF'\cdot F'F}{2} + 2\cdot\frac{FF'\cdot F'B}{2} + 2\cdot\frac{GG'\cdot G'C}{2} + 2\cdot\frac{HH'\cdot H'D}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\mathrm{E_q = E_s + AF'\cdot F'F + FF'\cdot F'B + GG'\cdot G'C + HH'\cdot H'D} \Leftrightarrow$$

$$E_q = E_s + AF'\cdot F'E + F'E\cdot F'B + G'E\cdot G'C + H'E\cdot H'D \Leftrightarrow$$

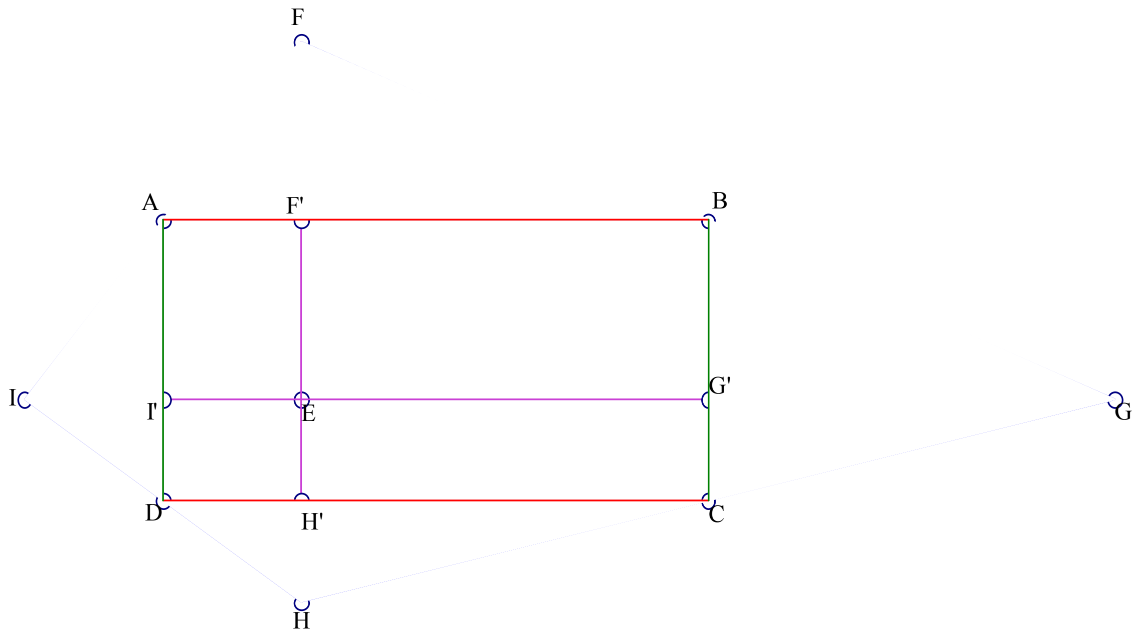
$$E_q = E_s + E_{AF'EI'} + E_{F'BG'E} + E_{EG'CH'} + E_{I'EH'D} \Leftrightarrow$$

$$E_q = E_s + E_s \Leftrightarrow$$

$$E_q = 2\cdot E_s$$

- **<u>Πρόταση 4</u>:**

Όλα τα τετράπλευρα με ορθογώνιες διαγώνιους κατασκευάζονται με τον εξής τρόπο: Σημείο στο εσωτερικό ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου ανακλάται στις πλευρές του. Τα τέσσερα σημεία που προκύπτουν είναι οι κορυφές ορθοδιαγώνιου τετραπλεύρου.



(Σχήμα 3)

Απόδειξη:

Έστω ότι το ορθοδιαγώνιο τετράπλευρο q = (FGHI) (με E το σημείο τομής των διαγωνίων του) δεν κατασκευάζεται με τον τρόπο αυτό. Τότε τα μέσα των πλευρών του δεν σχηματίζουν ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Έστω A, B, C, D τα μέσα των πλευρών IF, FG, GH, HI αντίστοιχα. Σχηματίζουμε το τετράπλευρο s = (ABCD).

Στο τρίγωνο FGI παρατηρούμε ότι το ευθύγραμμο τμήμα AB ενώνει τα μέσα των πλευρών IF, FG. Γνωρίζουμε ότι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών ενός τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά του τριγώνου και ισούται με το μισό της. Άρα, ισχύει ότι AB // IG και $AB = \frac{IG}{2}$.

Ομοίως, στο τρίγωνο GHI παρατηρούμε ότι το ευθύγραμμο τμήμα CD ενώνει τα μέσα των πλευρών GH, HI. Άρα, ισχύει ότι CD // IG και $CD = \frac{IG}{2}$.

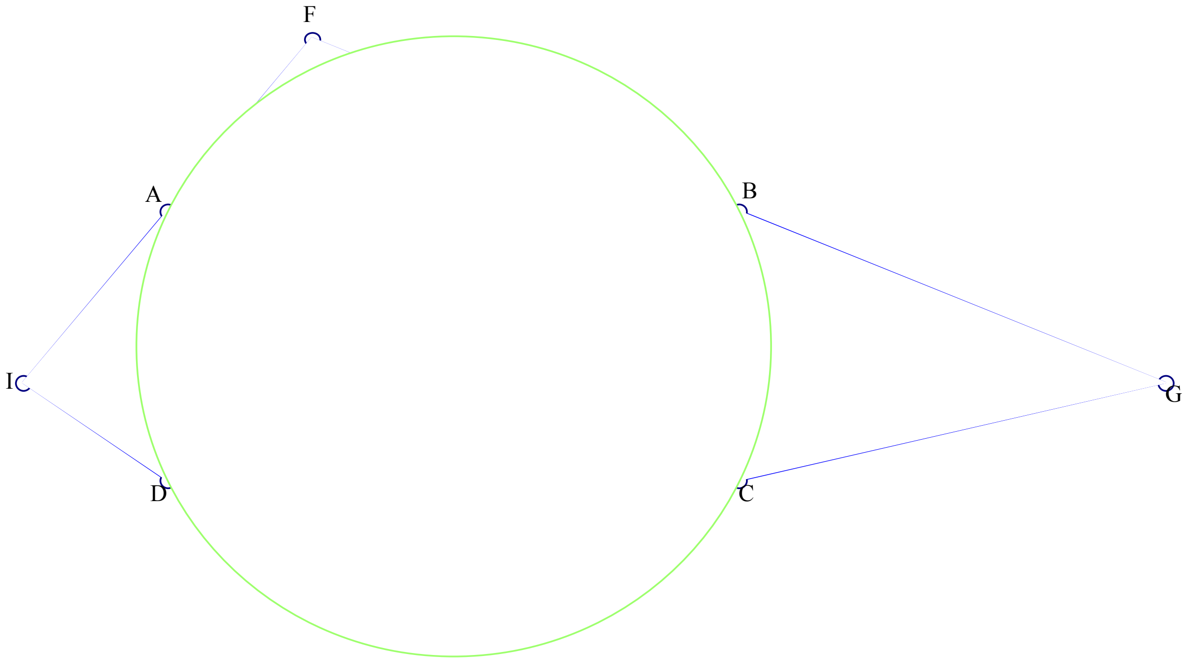
Προκύπτει λοιπόν ότι AB //= CD, που σημαίνει ότι το s είναι παραλληλόγραμμο. Συνεπώς, ισχύει ότι AD //=BC.

Στο τρίγωνο FGH παρατηρούμε ότι το ευθύγραμμο τμήμα BC ενώνει τα μέσα των πλευρών FG, GH αντίστοιχα. Οπότε BC // FH. Όμως $FH \perp IG$, ως διαγώνιοι του ορθοδιαγώνιου τετράπλευρου q. Προκύπτει λοιπόν ότι $BC \perp IG \Rightarrow BC \perp AB$. Επομένως, το τετράπλευρο s είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Άτοπο!

Επομένως, κάθε ορθοδιαγώνιο τετράπλευρο κατασκευάζεται με αυτόν τον τρόπο.

- **<u>Πρόταση 5</u>:**

Τα μέσα των πλευρών ορθοδιαγωνίου τετραπλεύρου περιέχονται σε κύκλο.



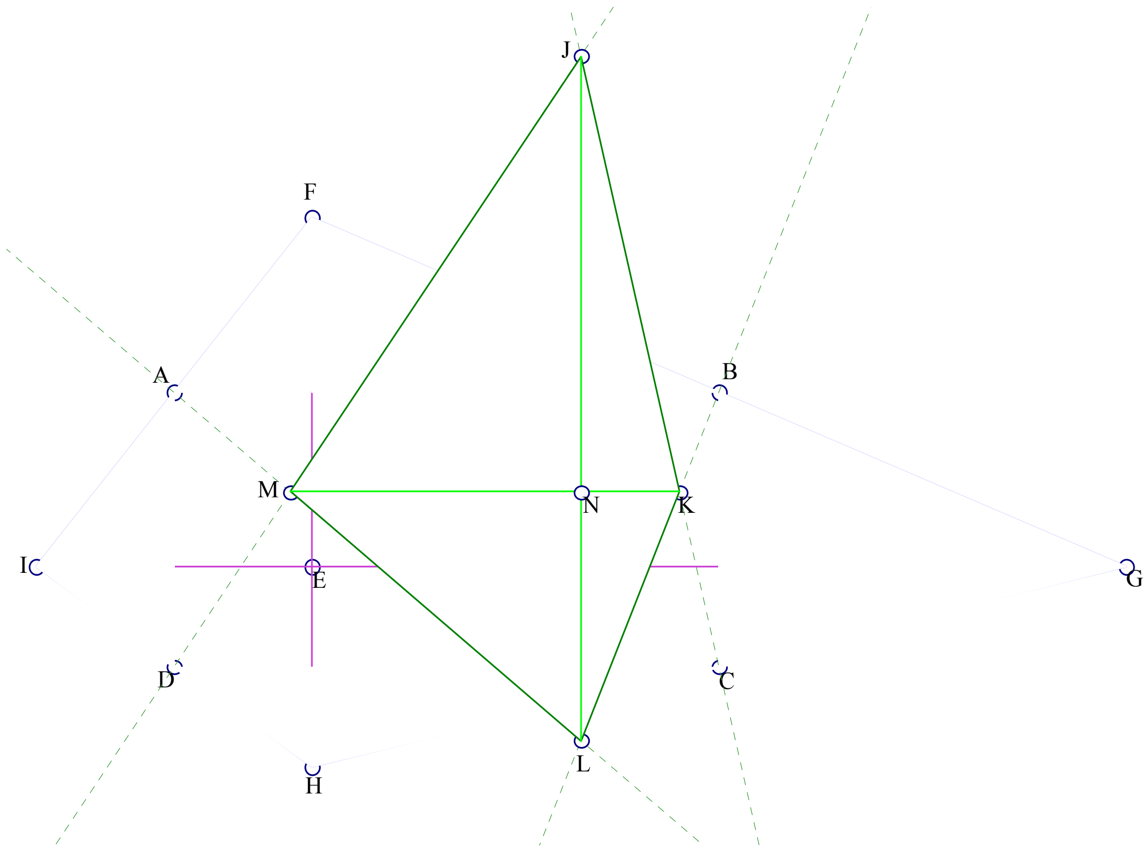
(Σχήμα 4)

Απόδειξη:

Γνωρίζουμε ότι τα μέσα των πλευρών ορθοδιαγωνίων τετραπλεύρων σχηματίζουν ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Οι απέναντι γωνίες ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι παραπληρωματικές. Συνεπώς, κάθε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο είναι εγγράψιμο σε κύκλο. Επομένως, τα μέσα των πλευρών ενός ορθοδιαγωνίου τετράπλευρου περιέχονται σε κύκλο.

- **<u>Πρόταση 6</u>:**

Οι μεσοκάθετοι των πλευρών του q = (FGHI) σχηματίζουν άλλο ορθοδιαγώνιο q΄ με διαγωνίους παράλληλες σε αυτές του q.



(Σχήμα 5)

Απόδειξη:

Μας δίνεται το τετράπλευρο q = (FGHI). Φέρνουμε τις μεσοκαθέτους των πλευρών του.

Έστω J το σημείο τομής των μεσοκαθέτων των GH, HI. Γνωρίζουμε ότι τα σημεία της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος ισαπέχουν από τα άκρα του. Συνεπώς JG = JH και JH = JI. Άρα JG = JI, που σημαίνει ότι το J είναι σημείο της μεσοκαθέτου της IG.

Έστω K το σημείο τομής των μεσοκαθέτων των FG, GH. Τότε KF = KG και KG = KH. Άρα KF = KH, που σημαίνει ότι το K είναι σημείο της μεσοκαθέτου της FH.

Έστω L το σημείο τομής των μεσοκαθέτων των FG, IF. Τότε LF = LG και LI = LF. Άρα LG = LI, που σημαίνει ότι το L είναι σημείο της μεσοκαθέτου της IG.

Έστω M το σημείο τομής των μεσοκαθέτων των HI, IF. Τότε MH = MI και MI = MF. Άρα MH = MF, που σημαίνει ότι το M είναι σημείο της μεσοκαθέτου της FH.

Τα J, K, L, M σχηματίζουν το τετράπλευρο q΄ = (JKLM), με διαγωνίους JL, KM. Εφόσον τα J, L είναι σημεία της μεσοκαθέτου της IG, τότε $JL \perp IG$ (και συγκεκριμένα η JL είναι η μεσοκάθετος της IG). Ομοίως, αφού τα K, M είναι σημεία της μεσοκαθέτου της FH, τότε $KM \perp FH$ (και συγκεκριμένα η KM είναι η μεσοκάθετος της FH). Άρα οι διαγώνιοι του q΄ είναι κάθετες σε αυτές του q (ή παράλληλες αν το δούμε διαφορετικά).

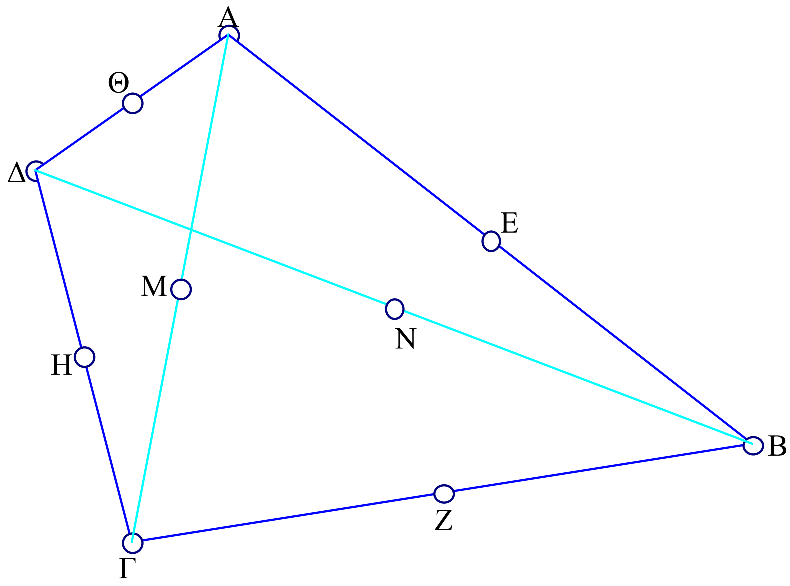
Επιπλέον $JL \perp IG$ και $IG \perp FH$, δηλαδή JL // FH. Επίσης $KM \perp FH$, άρα $JL \perp FH$. Συνεπώς το q΄ είναι ορθοδιαγώνιο τετράπλευρο.

- **<u>Πρόταση *</u>:**

Για οποιοδήποτε τετράπλευρο ισχύει ότι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των διαγωνίων του έχει το ίδιο μέσο με τα ευθύγραμμα τμήματα που ενώνουν τα μέσα δύο απέναντι πλευρών του.

***Απόδειξη*:**

Έστω τυχόν τετράπλευρο ΑΒΓΔ (Σχήμα 6). Φέρνουμε τις διαγώνιους του ΑΓ, ΒΔ και βρίσκουμε τα μέσα τους Μ, Ν αντίστοιχα. Έστω ακόμη Ε, Ζ, Η, Θ τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα.

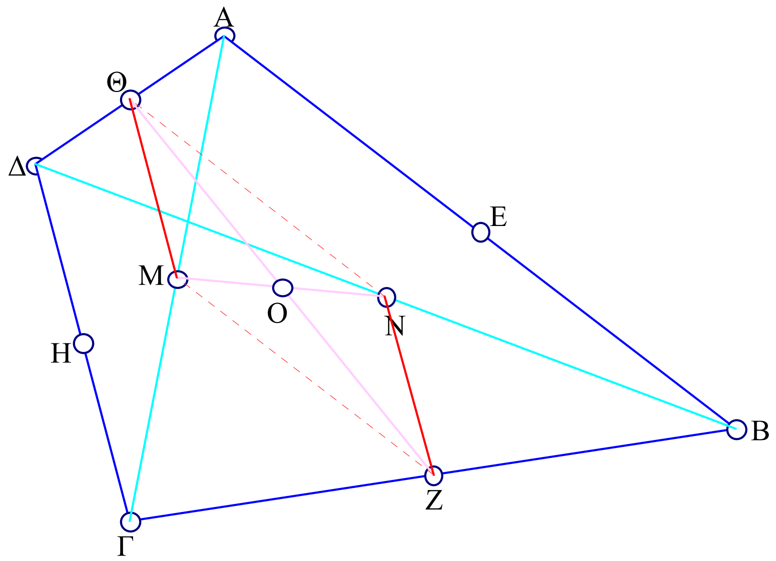


(Σχήμα 6)

→ Φέρνουμε τα ευθύγραμμα τμήματα ΜΝ και ΘΖ (Σχήμα 7). Ονομάζουμε Ο το σημείο τομής τους. Στη συνέχεια φέρνουμε τα ευθύγραμμα τμήματα ΘΜ, ΝΖ. Στο τρίγωνο ΑΓΔ παρατηρούμε ότι το ευθύγραμμο τμήμα ΘΜ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΔ, ΑΓ του τριγώνου. Συνεπώς, το ΘΜ είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά του τριγώνου και ίση με το μισό της, δηλαδή ΘΜ // ΓΔ και $\Theta M = \frac{\Gamma\Delta}{2}$.

Ακόμη, στο τρίγωνο ΒΓΔ παρατηρούμε ότι το ευθύγραμμο τμήμα ΝΖ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΒΔ, ΒΓ του τριγώνου. Συνεπώς, το ΝΖ είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά του τριγώνου και ίση με το μισό της, δηλαδή ΝΖ // ΓΔ και $NZ = \frac{\Gamma\Delta}{2}$.

Άρα, προκύπτει ότι ΘΜ // = ΝΖ. Αυτό σημαίνει ότι το ΘΜΖΝ είναι παραλληλόγραμμο, αφού έχει τις δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες. Τα ευθύγραμμα τμήματα ΜΝ, ΘΖ είναι οι διαγώνιοι του ΘΜΖΝ. Γνωρίζουμε ότι οι διαγώνιοι ενός παραλληλογράμμου διχοτομούνται. Συνεπώς, το Ο είναι το μέσο των ΜΝ, ΘΖ.

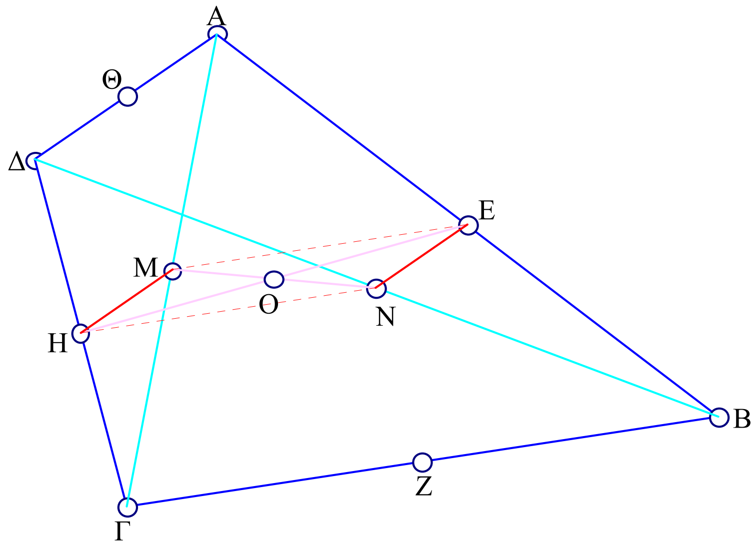


(Σχήμα 7)

→ Φέρνουμε τώρα τα ευθύγραμμα τμήματα ΜΝ, ΕΗ (Σχήμα 8) κι έπειτα τα ΜΗ, ΝΕ. Στο τρίγωνο ΑΓΔ παρατηρούμε ότι το ευθύγραμμο τμήμα ΜΗ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΓΑ, ΓΔ του τριγώνου. Συνεπώς, το ΜΗ είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά του τριγώνου και ίση με το μισό της, δηλαδή ΜΗ // ΔΑ και $\text{ΜΗ} = \frac{\text{ΔΑ}}{2}$.

Ακόμη, στο τρίγωνο ΑΒΔ παρατηρούμε ότι το ευθύγραμμο τμήμα ΝΕ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΒΔ, ΒΑ του τριγώνου. Συνεπώς, το ΝΕ είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά του τριγώνου και ίση με το μισό της, δηλαδή ΝΕ // ΔΑ και $\text{ΝΕ} = \frac{\text{ΔΑ}}{2}$.

Άρα, προκύπτει ότι ΜΗ // = ΔΑ. Αυτό σημαίνει ότι το ΜΕΝΗ είναι παραλληλόγραμμο, αφού έχει τις δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες. Τα ευθύγραμμα τμήματα ΜΝ, ΕΗ είναι οι διαγώνιοι του ΜΕΝΗ. Γνωρίζουμε ότι οι διαγώνιοι ενός παραλληλογράμμου διχοτομούνται. Συνεπώς, το μέσο Ο του ΜΝ είναι και μέσο του ΕΗ.



(Σχήμα 8)

Επομένως, το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των διαγωνίων ενός οποιουδήποτε τετραπλεύρου έχει το ίδιο μέσο με τα ευθύγραμμα τμήματα που ενώνουν τα μέσα δύο απέναντι πλευρών του.

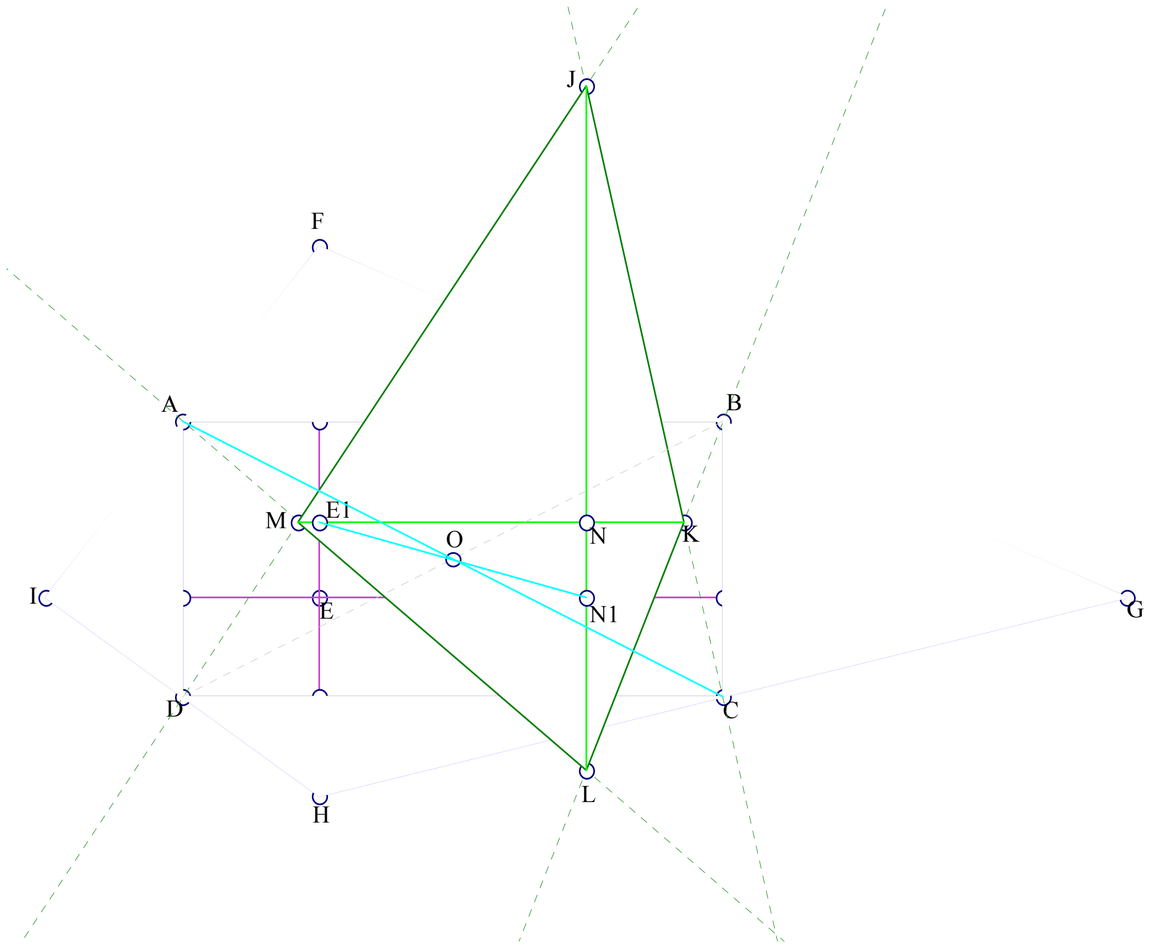
- **<u>Πρόταση 7</u>:**

Τα σημεία τομής των διαγωνίων των q = (FGHI) και q΄ = (JKLM) είναι συμμετρικά ως προς το κέντρο O του s = (ABCD).

***Απόδειξη*:**

→ Έχουμε E το σημείο τομής των διαγωνίων του q. Ονομάζουμε N το σημείο τομής των διαγωνίων του q΄. Ονομάζουμε O το κέντρο του s (δηλαδή το σημείο τομής των διαγωνίων του).

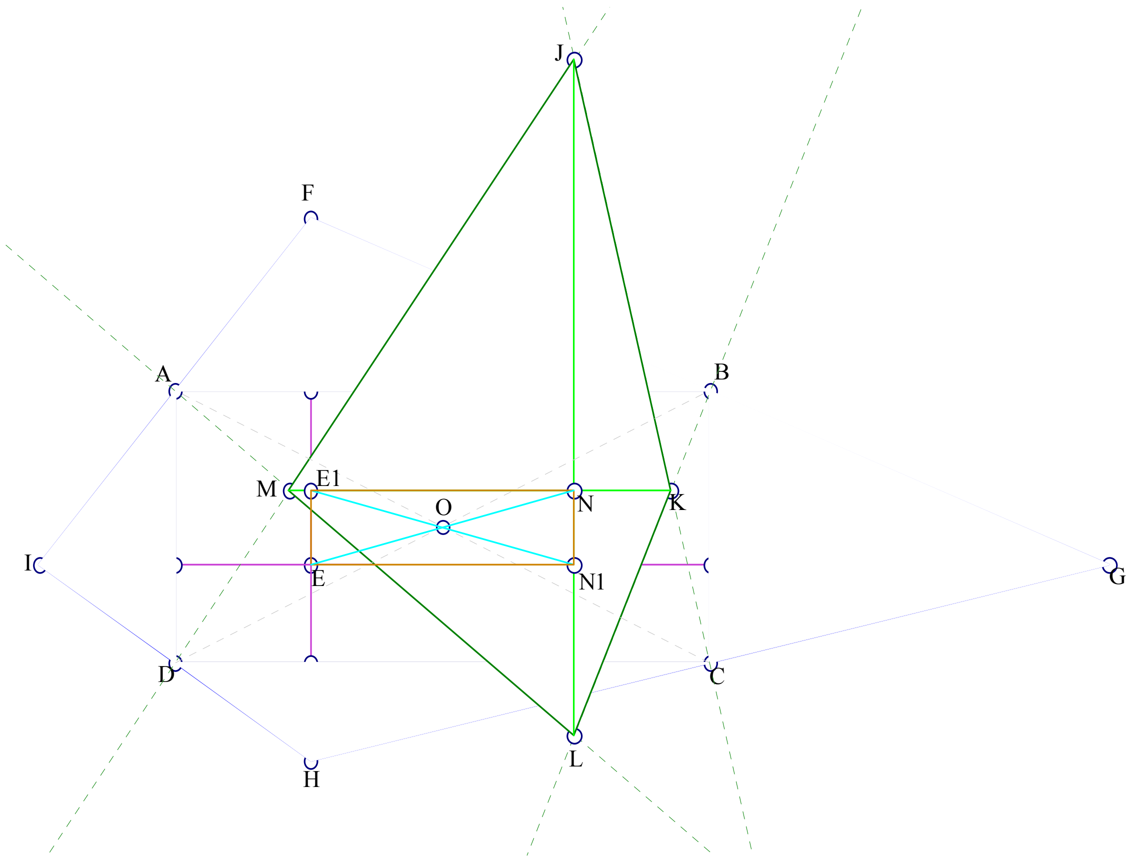
Στην απόδειξη της πρότασης 6, δείξαμε ότι η JL είναι η μεσοκάθετος της IG και η KM η μεσοκάθετος της FH. Ονομάζουμε N1 το σημείο τομής των JL, IG (δηλαδή το μέσο της IG) και E1 το σημείο τομής των KM, FH (δηλαδή το μέσο της FH).



(Σχήμα 9)

(Σύμφωνα με το σχήμα 9 της σελίδας 13.)

→ Φέρνουμε το ευθύγραμμο τμήμα E1N1, που ενώνει τα μέσα των διαγωνίων του q. Επίσης, φέρνουμε και το ευθύγραμμο τμήμα AC, που ενώνει τα μέσα των απέναντι πλευρών IF, GH του q. Σύμφωνα με την πρόταση *, τα ευθύγραμμα τμήματα E1N1 και AC έχουν κοινό μέσο. Το AC, εφόσον είναι διαγώνιος του s, έχει μέσο το σημείο O. Άρα, το O είναι το μέσο του E1N1.

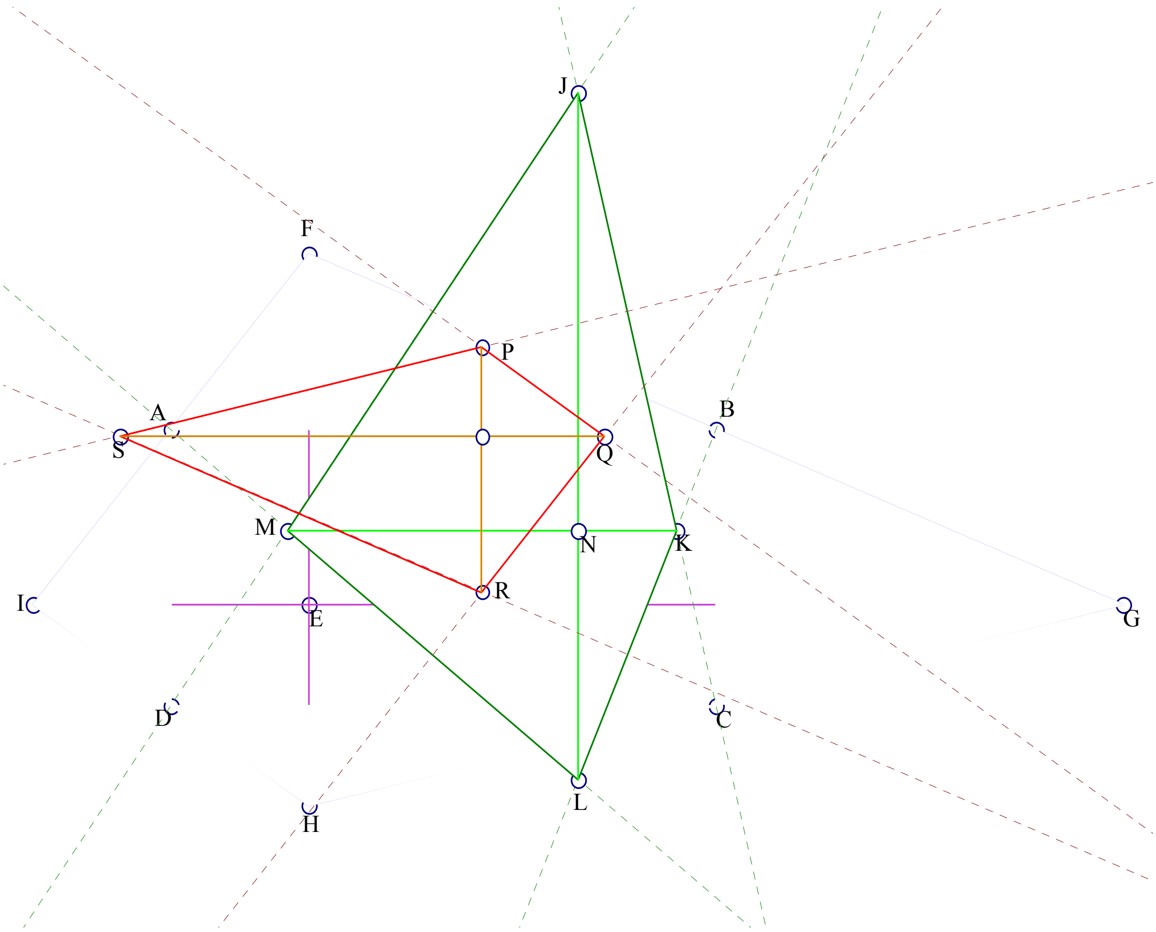


(Σχήμα 10)

→ Από την πρόταση 6 προκύπτει ότι το τετράπλευρο E1NN1E είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Αυτό σημαίνει ότι οι διαγώνιοί του διχοτομούνται. Αφού λοιπόν το O είναι το μέσο της E1N1, τότε είναι και μέσο της EN. Άρα, τα E, N είναι συμμετρικά ως προς το O. (Σχήμα 10)

- **<u>Πρόταση 8</u>:**

Επαναλαμβάνοντας την κατασκευή που περιγράφεται στην πρόταση 6 για το q΄ = (JKLM), σχηματίζεται το ορθοδιαγώνιο τετράπλευρο q΄΄ = (PQRS).



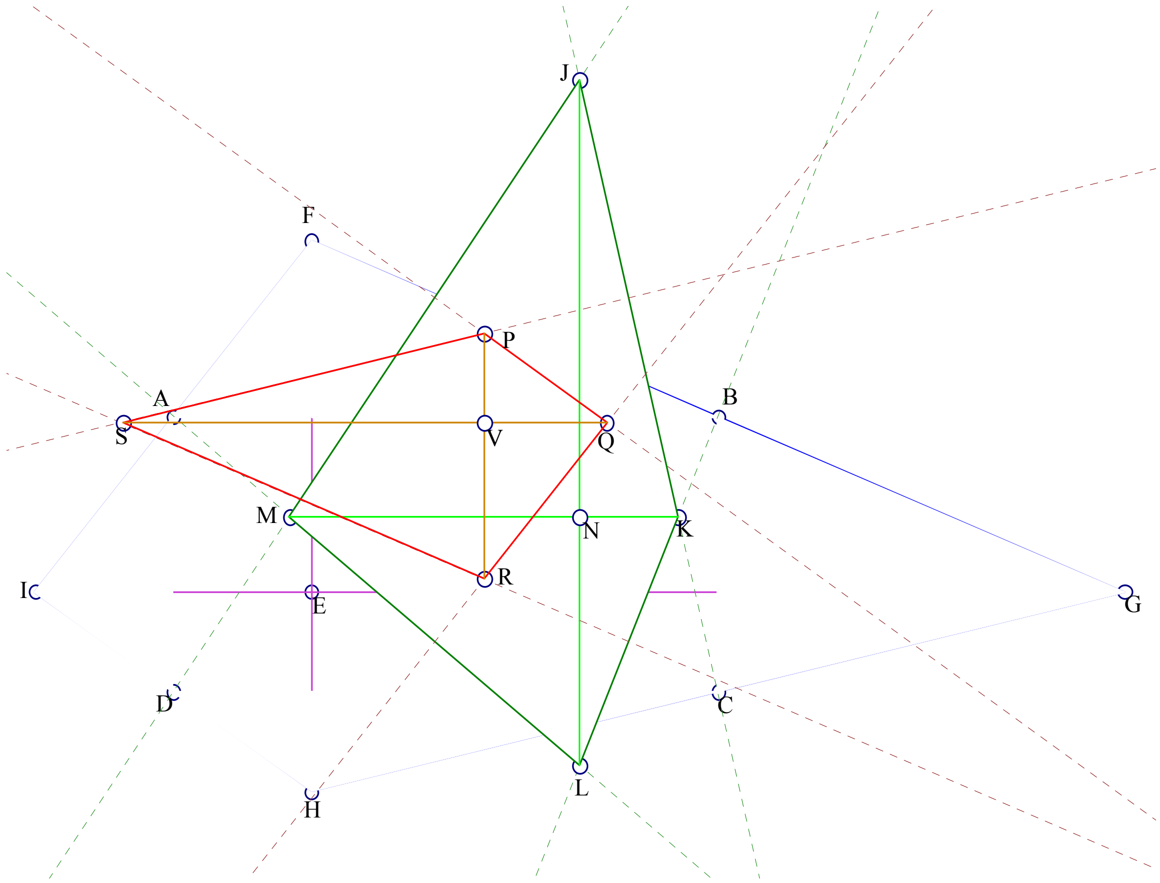
(Σχήμα 11)

***Απόδειξη*:**

Σύμφωνα με την πρόταση 6, οι μεσοκάθετοι των πλευρών ενός ορθοδιαγώνιου τετραπλεύρου σχηματίζουν ένα άλλο ορθοδιαγώνιο τετράπλευρο, με διαγώνιους παράλληλες σε αυτές του αρχικού. Φέρνοντας λοιπόν τις μεσοκαθέτους των πλευρών του q΄ (Σχήμα 11), σχηματίζεται το ορθοδιαγώνιο τετράπλευρο q΄΄= PQRS, του οποίου οι διαγώνιοι είναι παράλληλοι σε αυτές του q΄.

- **<u>Πρόταση 9</u>:**

Το q΄΄ = (PQRS) είναι όμοιο του q = (FGHI).



(Σχήμα 12)

Απόδειξη:

Φέρνουμε τις διαγωνίους PR, QS του q΄΄ κι ονομάζουμε V το σημείο τομής τους. Σχηματίζονται έτσι τα ορθογώνια τρίγωνα PQV, QRV, RSV, SPV.

Γνωρίζουμε ότι $PQ \perp JM$ και $JM \perp HI$. Άρα, προκύπτει ότι PQ // HI. Παρατηρούμε ότι τα τρίγωνα PQV και HIE έχουν όλες τους τις πλευρές παράλληλες κι άρα είναι όμοια.

Γνωρίζουμε ότι $QR \perp LM$ και $LM \perp IF$. Άρα, προκύπτει ότι QR // IF. Παρατηρούμε ότι τα τρίγωνα QRV και IFE έχουν όλες τους τις πλευρές παράλληλες κι άρα είναι όμοια.

Γνωρίζουμε ότι $RS \perp KL$ και $KL \perp FG$. Άρα, προκύπτει ότι RS // FG. Παρατηρούμε ότι τα τρίγωνα RSV και FGE έχουν όλες τους τις πλευρές παράλληλες κι άρα είναι όμοια.

Γνωρίζουμε ότι $SP \perp JK$ και $JK \perp GH$. Άρα, προκύπτει ότι SP // GH. Παρατηρούμε ότι τα τρίγωνα SPV και GHE έχουν όλες τους τις πλευρές παράλληλες κι άρα είναι όμοια.

Τα τρίγωνα PQV και QRV σχηματίζουν το τρίγωνο PQR. Ομοίως, τα τρίγωνα HIE και IFE σχηματίζουν το τρίγωνο HIF. Προφανώς τα PQR, HIF είναι όμοια κι έχουν τις πλευρές τους παράλληλες.

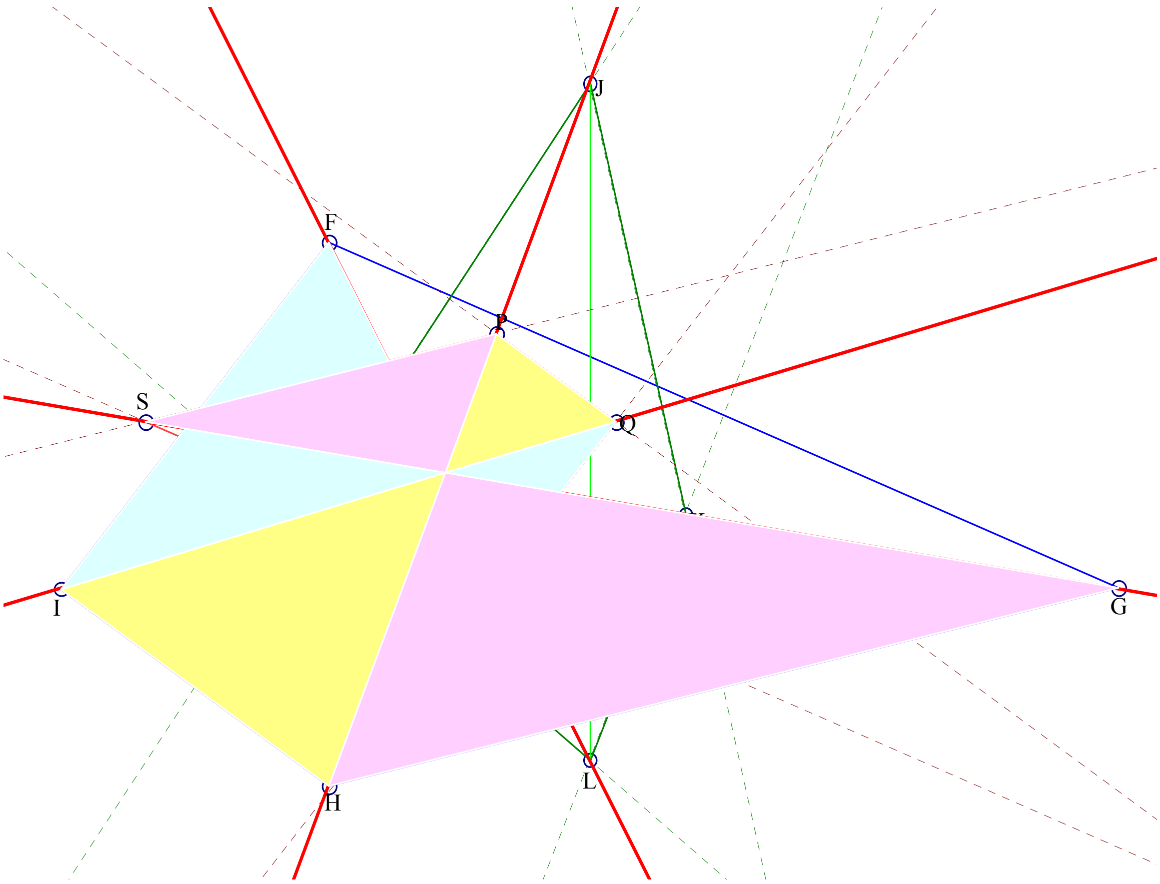
Τα τρίγωνα RSV και SPV σχηματίζουν το τρίγωνο RSP. Ομοίως, τα τρίγωνα FGE και GHE σχηματίζουν το τρίγωνο FGH. Προφανώς τα RSP, FGH είναι όμοια κι έχουν τις πλευρές τους παράλληλες.

Τα τρίγωνα PQR, RSP σχηματίζουν το q΄΄= PQRS. Ομοίως, τα τρίγωνα σχηματίζουν το q = FGHI. Άρα τα δύο τετράπλευρα είναι μεταξύ τους όμοια κι έχουν τις πλευρές τους παράλληλες.

- **<u>Πρόταση 10</u>:**

Τα q΄ = (JKLM) και q΄΄ = (PQRS) είναι προοπτικά του q = (FGHI) ως προς σημείο U, περιεχόμενο στην ευθεία EV, όπου το V είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του q΄΄. Οι κορυφές των q΄ και q΄΄ περιέχονται σε ευθείες δια του U. Το q΄΄ είναι αντιομοιοθετικό του q.

***Απόδειξη*:**



(Σχήμα 13)

(Σύμφωνα με το σχήμα 13 της σελίδας 18.)

→ Φέρνω τις ευθείες HP, IQ, οι οποίες δεν είναι παράλληλες. Έστω U το σημείο τομής τους. Τα τρίγωνα HIU, PQU που σχηματίζονται είναι όμοια, διότι έχουν όλες τους τις πλευρές παράλληλες. Έστω m ο λόγος ομοιότητάς τους. Τότε, εφόσον $\frac{HI}{PQ} = m$, συμπεραίνουμε ότι ο λόγος ομοιότητας των q, q´´ είναι m.

Φέρνω τα ευθύγραμμα τμήματα FU, UR.

Παρατηρούμε ότι: 1) $F\hat{I}U = U\hat{Q}R$, ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ευθειών FI, QR.

2) $\frac{FI}{QR} = m$, λόγω ομοιότητας των q, q´´.

3) $\frac{IU}{UQ} = m$, λόγω ομοιότητας των HIU, PQU.

Άρα τα τρίγωνα FIU, QRU είναι όμοια. Συνεπώς $F\hat{U}I = Q\hat{U}R$, που σημαίνει ότι είναι κατακορυφήν. Άρα, τα FU, UR ανήκουν στην ίδια ευθεία. Οπότε και η ευθεία FR διέρχεται από το U.

Φέρνω τα ευθύγραμμα τμήματα SU, UG.

Παρατηρούμε ότι: 1) $S\hat{P}U = G\hat{H}U$, ως εντός εναλλάξ γωνίες των παραλλήλων ευθειών SP, GH.

2) $\frac{GH}{SP} = m$, λόγω ομοιότητας των q, q΄΄.

3) $\frac{HU}{UP} = m$, λόγω ομοιότητας των HIU, PQU.

Άρα τα τρίγωνα GHU, SPU είναι όμοια. Συνεπώς $G\hat{U}H = S\hat{U}P$, που σημαίνει ότι είναι κατακορυφήν. Άρα, τα SU, UG ανήκουν στην ίδια ευθεία. Οπότε και η ευθεία GS διέρχεται από το U.

Επομένως, τα q, q΄΄ είναι προοπτικά ως προς το U.

(Σύμφωνα με το σχήμα 14 της σελίδας 20.)

→ Έστω V το σημείο τομής των διαγωνίων του q΄΄. Φέρνω τα ευθύγραμμα τμήματα EU, UV.

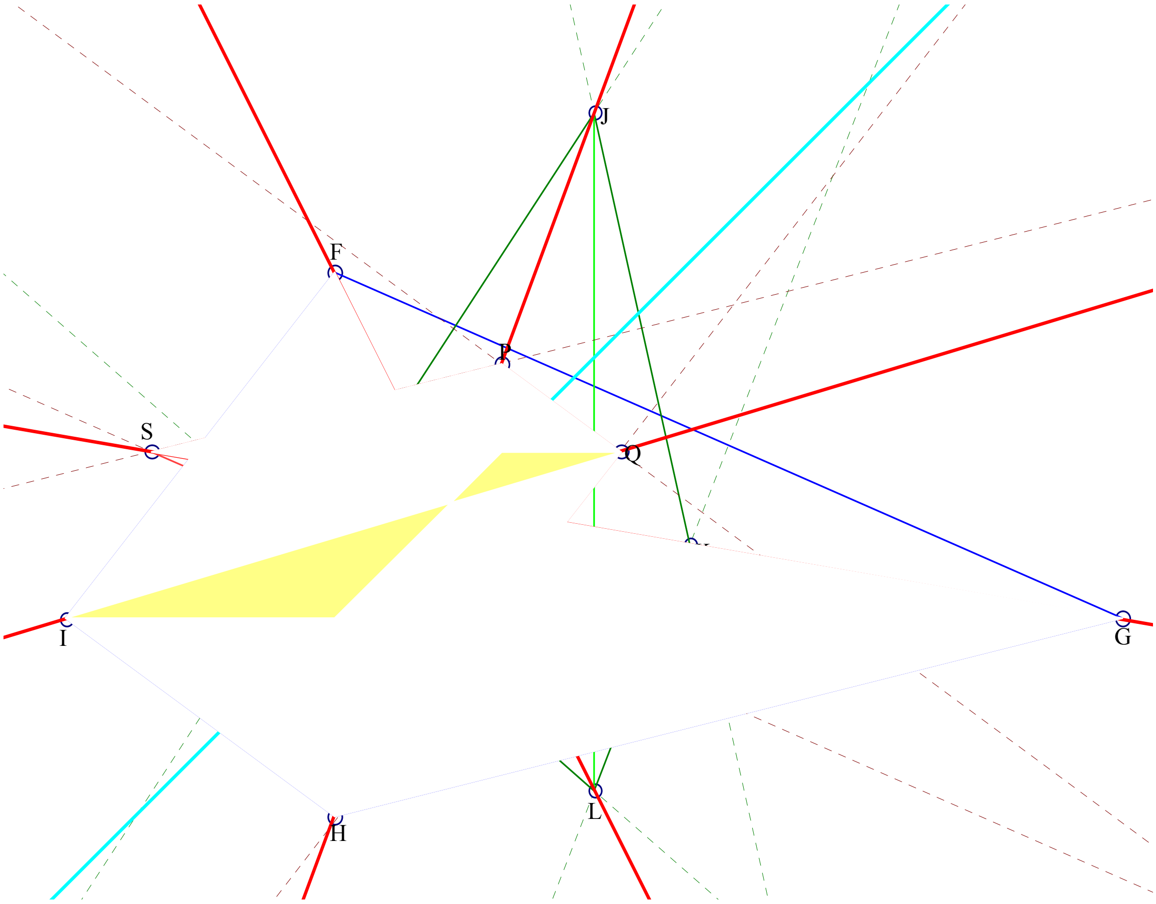
Παρατηρούμε ότι: 1) $E\hat{I}U = V\hat{Q}U$, ως εντός εναλλάξ γωνίες των παραλλήλων ευθειών EI, VQ.

2) $\frac{EI}{QV} = m$, λόγω ομοιότητας των PQV, HIE (απόδειξη πρότασης 9, σελίδα 17).

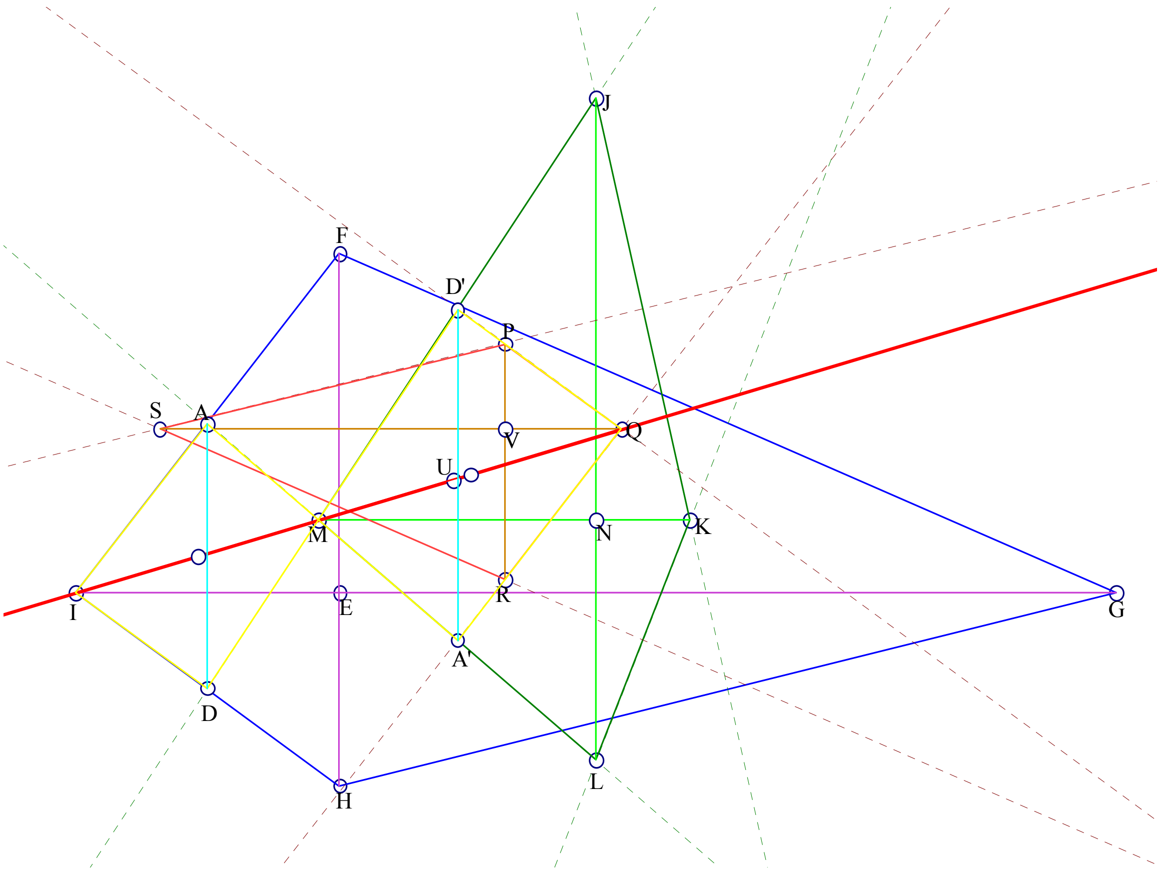
3) $\frac{IU}{UQ} = m$, λόγω ομοιότητας των HIU, PQU.

Άρα τα τρίγωνα IEU, QVU είναι όμοια. Συνεπώς $V\hat{U}Q = E\hat{U}I$, που σημαίνει ότι είναι κατακορυφήν. Άρα, τα EU, UV ανήκουν στην ίδια ευθεία. Οπότε η ευθεία EV διέρχεται από το U.

Επομένως, το U είναι σημείο της ευθείας EV.



(Σχήμα 14)



(Σχήμα 15)

(Σύμφωνα με το σχήμα 15 της σελίδας 21.)

→ Υπενθυμίζουμε ότι A, D είναι τα μέσα των IF, HI αντίστοιχα. Ονομάζουμε A΄, D΄ τα μέσα των LM, MJ αντίστοιχα. Φέρνουμε τα AD, A΄D΄. Γνωρίζουμε ότι $AD \perp IG$ (από την απόδειξη της πρότασης 1). Ακόμη, το A΄D΄ ενώνει τα μέσα των πλευρών LM, MJ του τριγώνου LMJ. Αυτό σημαίνει ότι A΄D΄ // LJ. Όμως $LJ \perp IG$ και συνεπώς $A'D' \perp IG$.
Άρα, προκύπτει ότι AD // A΄D΄.

Παρατηρούμε ότι AD // A΄D΄, AM // A΄M΄ (διότι τα A, M, A΄ είναι συνευθειακά) και DM // D΄M΄ (διότι τα A, D, A΄ είναι συνευθειακά).

Προφανώς λοιπόν τα τρίγωνα ADM, Α΄D΄M είναι όμοια, μιας κι έχουν όλες τις αντίστοιχες πλευρές τους παράλληλες. (1)

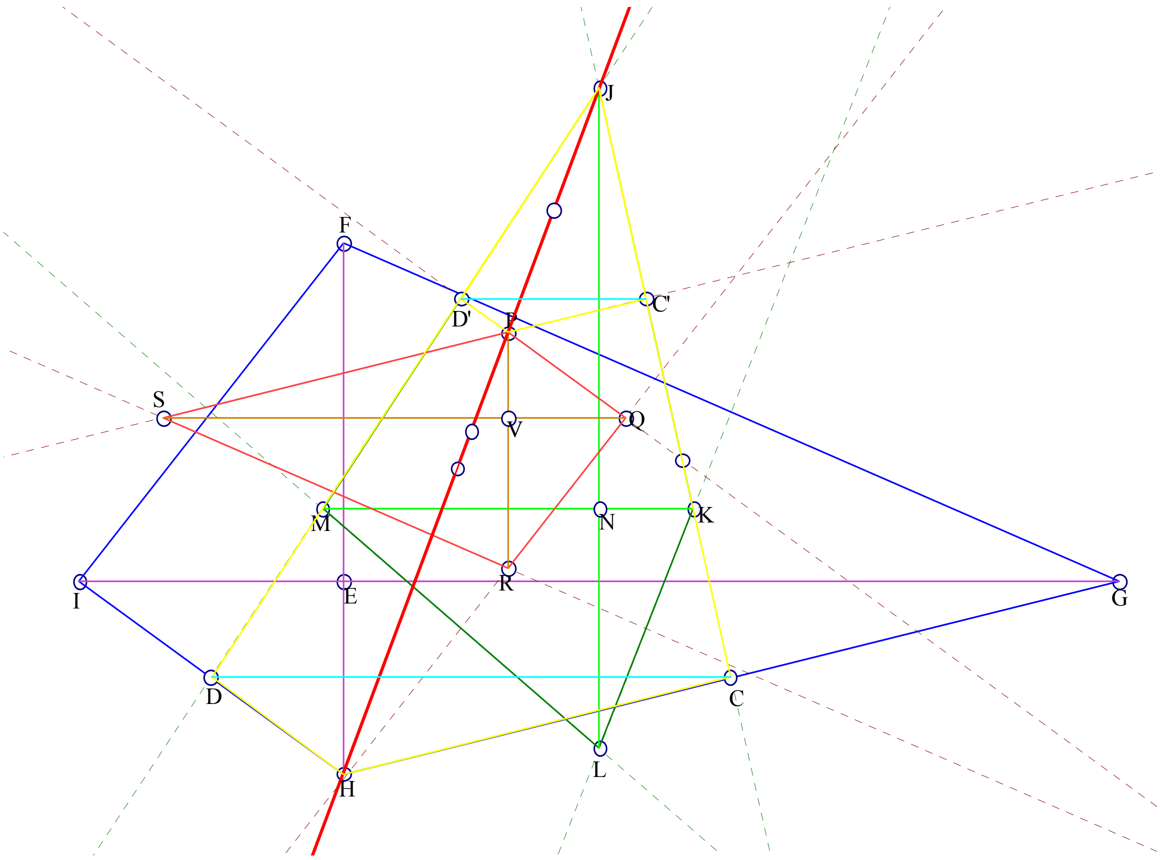
Επιπλέον AI // A΄Q (διότι είναι και τα δύο κάθετα στην AA΄) και DI // D΄Q (διότι είναι και τα δύο κάθετα στην DD΄). Προφανώς λοιπόν τα τρίγωνα ADI, A΄D΄Q είναι όμοια, εφόσον έχουν όλες τις αντίστοιχες πλευρές τους παράλληλες. (2)

Από τα (1), (2) συμπεραίνουμε ότι τα τετράπλευρα IAMD, MD΄QA΄ είναι όμοια κι έχουν τις αντίστοιχες πλευρές τους παράλληλες. Συνεπώς, θα έχουν και τις αντίστοιχες διαγώνιούς τους παράλληλες, δηλαδή IM // MQ. Εφόσον μάλιστα τα IM, MQ έχουν κοινό σημείο το M, συμπεραίνουμε ότι τα I, M, Q είναι συνευθειακά.

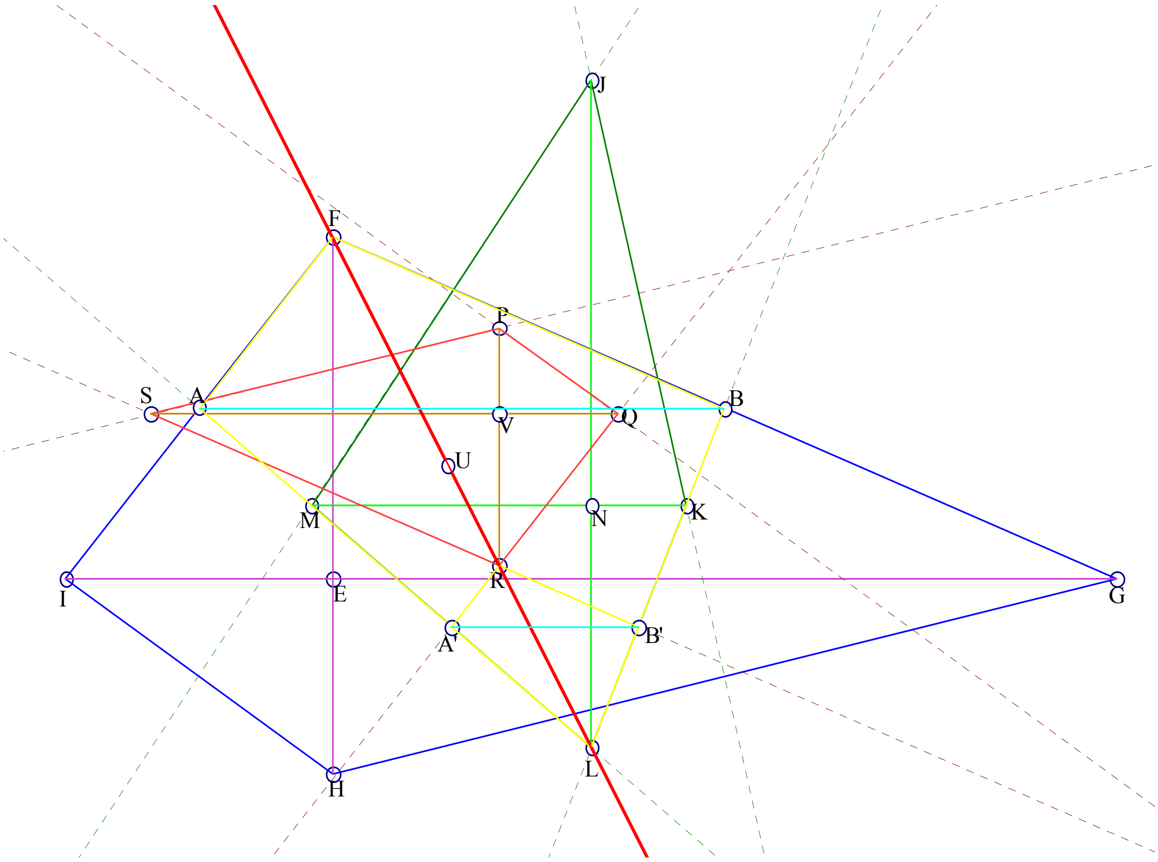
Γνωρίζουμε ότι η ευθεία IQ διέρχεται από το U. Επομένως η ευθεία που ενώνει τα M, Q διέρχεται από το U. (A)

Με ανάλογο τρόπο δείχνουμε ότι :

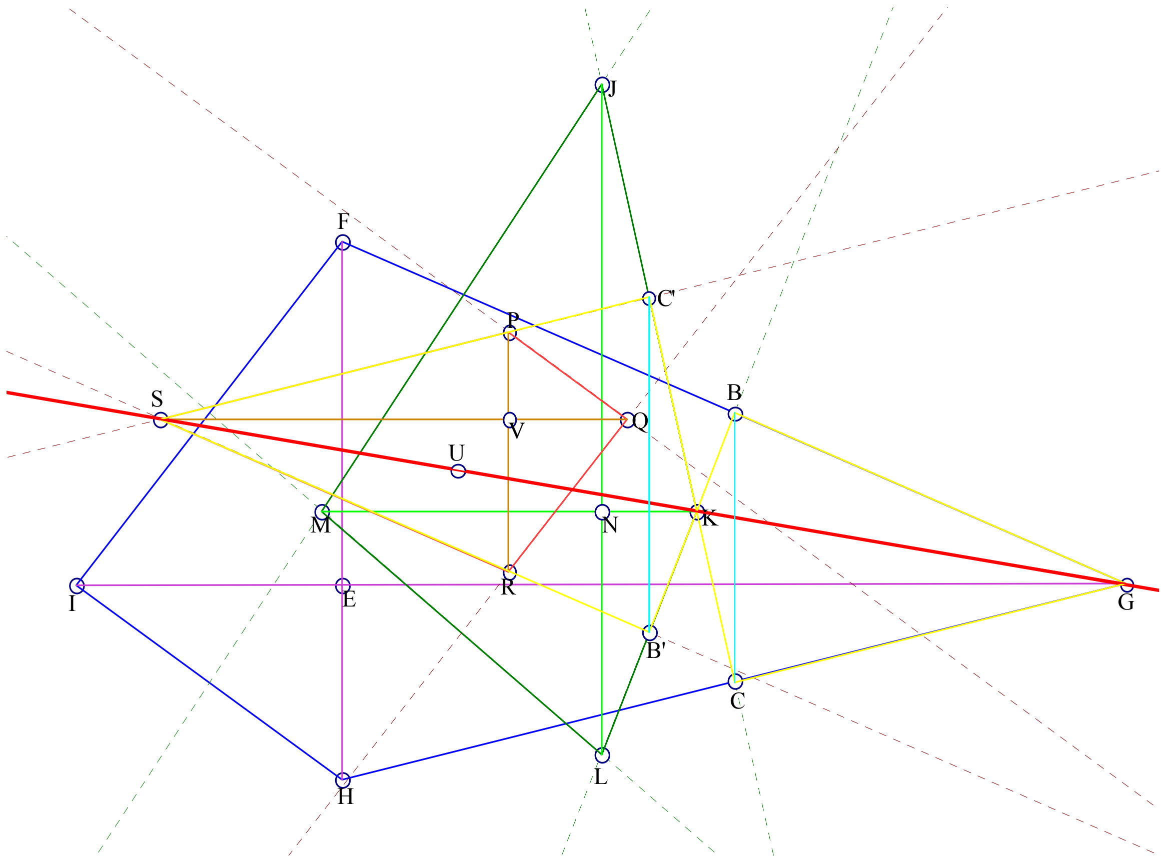
- η ευθεία που ενώνει τα P, J διέρχεται από το U (Σχήμα 16) (B)
- η ευθεία που ενώνει τα R, L διέρχεται από το U (Σχήμα 17) (Γ)
- η ευθεία που ενώνει τα K, S διέρχεται από το U (Σχήμα 18) (Δ).



(Σχήμα 16)



(Σχήμα 17)

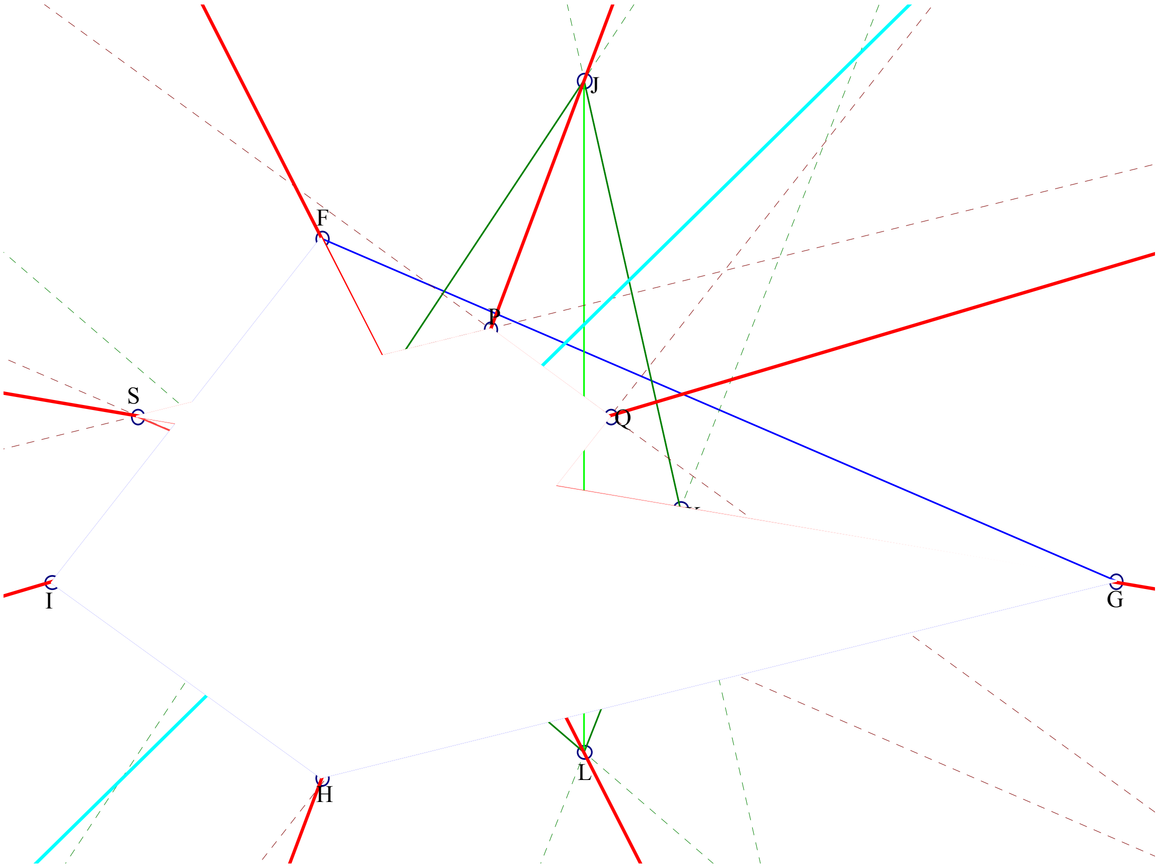


(Σχήμα 18)

Από τα (Α), (Β), (Γ), (Δ) προκύπτει ότι οι κορυφές των q΄, q΄΄ περιέχονται σε ευθείες δια του U.

→ (Σχήμα 19) Έχουμε αποδείξει ότι τα q, q΄΄ είναι όμοια (παραπάνω πήραμε ως λόγο ομοιότητάς τους m). Ακόμη, δείξαμε ότι τα q, q΄΄ είναι προοπτικά ως προς το U. Επιπλέον τα σημεία F-R, G-S, H-P, I-Q αντίστοιχα βρίσκονται εκατέρωθεν του U.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το U είναι κέντρο ομοιοθεσίας και m λόγος ομοιοθεσίας, τ.ώ. το q΄΄ να είναι αντιομοιοθετικό του q.

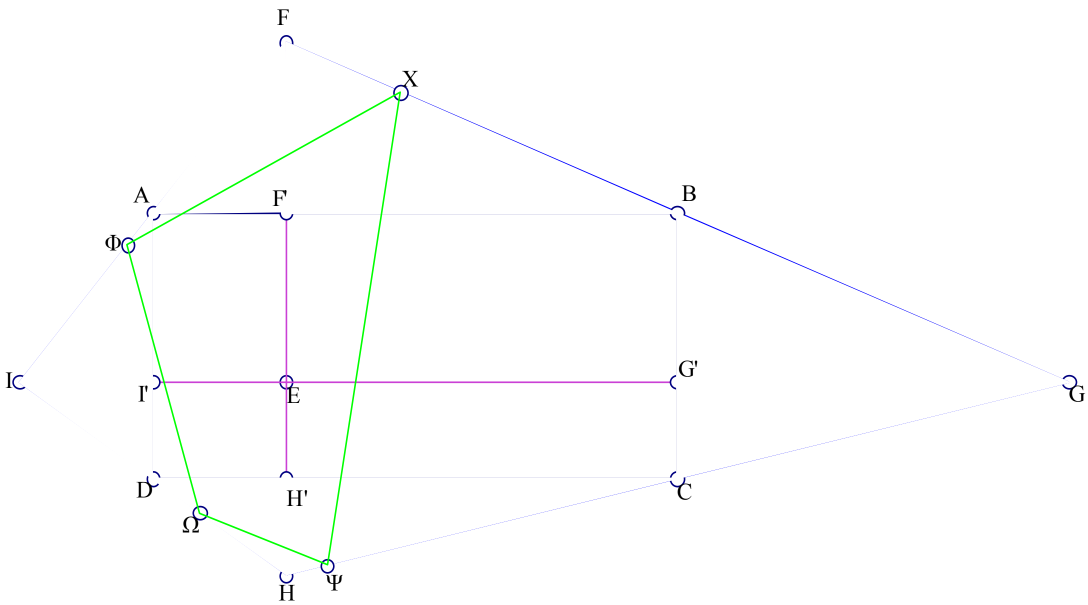


(Σχήμα 19)

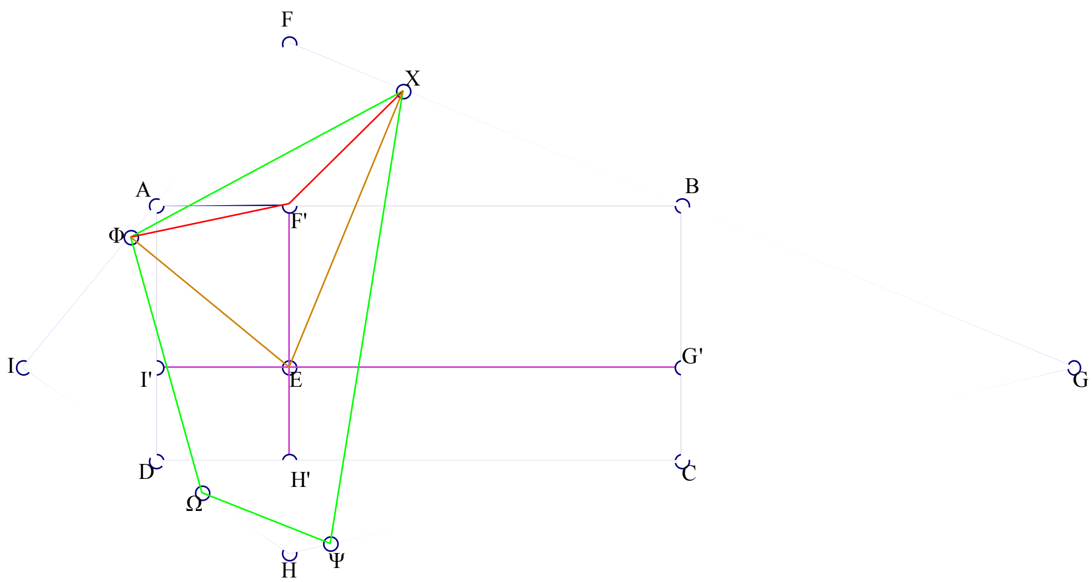
➢ <u>**Πρόταση 11**</u>**:**
Οι προβολές του Ε στις πλευρές του q = (FGHI) σχηματίζουν τετράπλευρο r, τέτοιο ώστε οι μεσοκάθετοι των πλευρών του διέρχονται από τα σημεία τομής των διαγωνίων του q με τις πλευρές του ορθογωνίου παραλληλογράμμου s = (ABCD).

***Απόδειξη*:**
Έστω Φ, Χ, Ψ, Ω οι προβολές του Ε στις πλευρές IF, FG, GH, HI αντίστοιχα (Σχήμα 20). Σχηματίζουμε το τετράπλευρο r = (ΦΧΨΩ).

Υπενθυμίζουμε ότι F΄, H΄ είναι τα σημεία τομής της FH με τις AB, CD αντίστοιχα και I΄, G΄ τα σημεία τομής της IG με τις AD, BC αντίστοιχα (Σχήμα 1 της σελίδας 1).



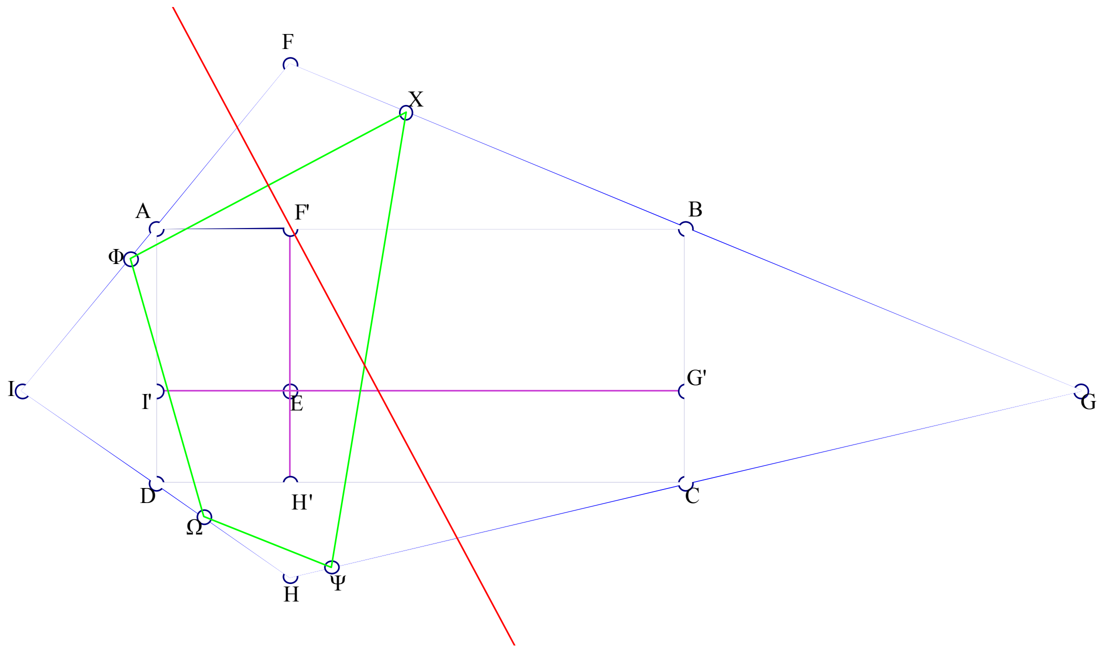
(Σχήμα 20)



(Σχήμα 21)

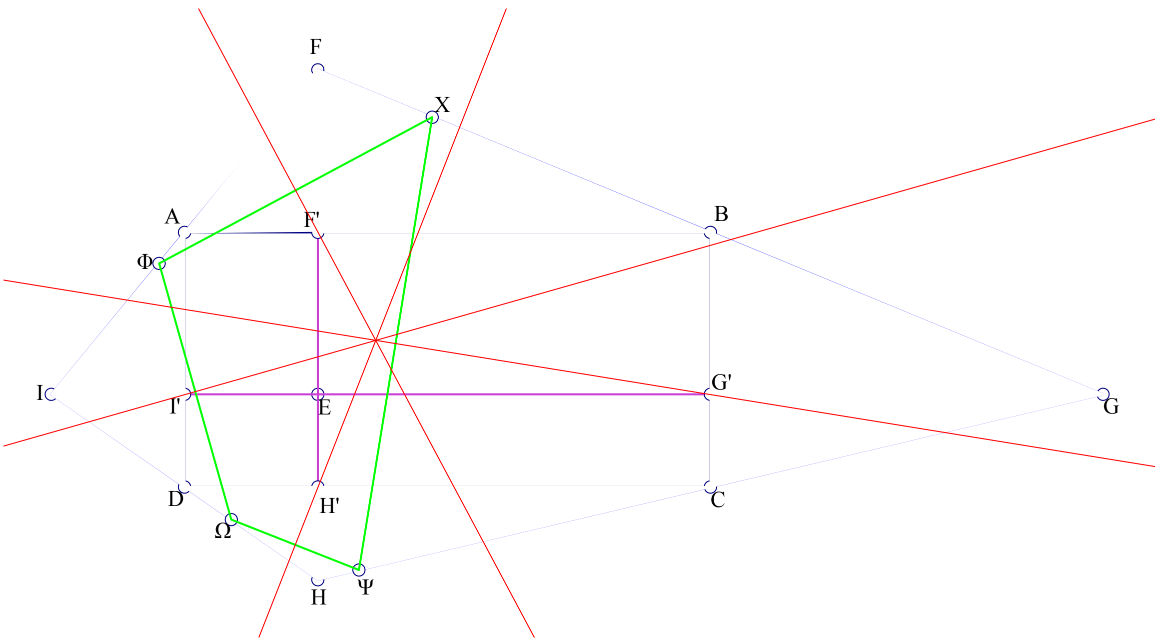
(Σύμφωνα με το σχήμα 21.)

→ Φέρνουμε τα ευθύγραμμα τμήματα ΕΦ, ΕΧ. Εφόσον τα Φ, Χ είναι οι προβολές του E στις πλευρές IF, FG αντίστοιχα, τότε $Ε\Phi \perp IF$ και $EX \perp FG$. Σχηματίζονται δηλαδή τα ορθογώνια τρίγωνα ΕΦF, ΕΧF, που έχουν κοινή υποτείνουσα την EF. Γνωρίζουμε ότι το σημείο F΄ είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος EF (απόδειξη πρότασης 1, σελίδα 2). Φέρνουμε τις διαμέσους ΦF΄, ΧF΄. Γνωρίζουμε ότι η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που άγεται από την κορυφή της ορθής γωνίας ισούται με το μισό της υποτείνουσας. Συνεπώς, προκύπτει ότι $\Phi F' = \frac{EF}{2}$ και $XF' = \frac{EF}{2}$, δηλαδή ΦF΄ = ΧF΄. Αυτό σημαίνει ότι το σημείο F΄ ισαπέχει από τα άκρα του ευθύγραμμου τμήματος ΦΧ. Άρα το F΄ είναι σημείο της μεσοκαθέτου του ΦΧ. Με άλλα λόγια, η μεσοκάθετος του ΦΧ διέρχεται από το F΄ (Σχήμα 22 της σελίδας 30).



(Σχήμα 22)

Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύεται ότι οι μεσοκάθετοι των πλευρών ΧΨ, ΨΩ, ΩΦ διέρχονται αντίστοιχα από τα σημεία G΄, H΄, I΄.



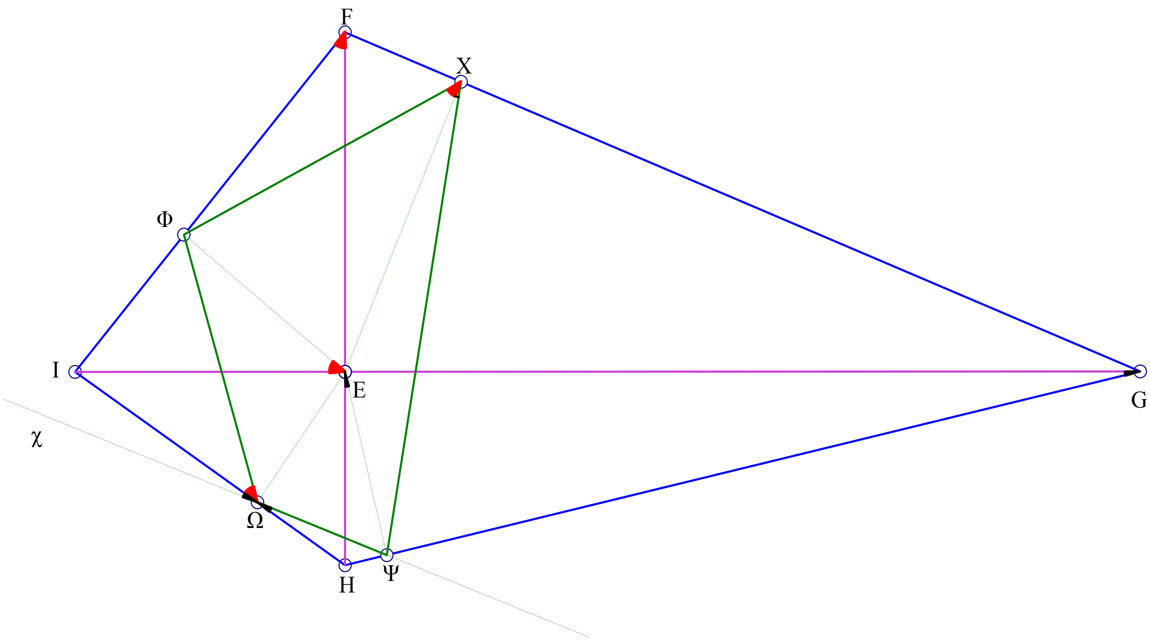
(Σχήμα 23)

Επομένως, οι μεσοκάθετοι των πλευρών του r = (ΦΧΨΩ) διέρχονται από τα σημεία τομής των διαγωνίων του q με τις πλευρές του ορθογωνίου παραλληλογράμμου s = (ABCD).

➢ <u>**Πρόταση 12**</u>**:**

Οι προβολές του E στις πλευρές του q = (FGHI) περιέχονται σε κύκλο.

Απόδειξη:



(Σχήμα 24)

(Σύμφωνα με το σχήμα 24.)

→ Έστω Φ, X, Ψ, Ω οι προβολές του E στις πλευρές IF, FG, GH, HI αντίστοιχα. Για να δείξουμε ότι το τετράπλευρο r = (ΦΧΨΩ) είναι εγγράψιμο, αρκεί να δείξουμε ότι μια γωνία του ισούται με την εξωτερική της απέναντι γωνίας.

Αρχικά, φέρνουμε το φορέα της πλευράς ΨΩ (ευθεία χ).

Παρατηρούμε ότι το τετράπλευρο ΙΦΕΩ είναι εγγράψιμο, διότι $I\hat{\Phi}E = I\hat{\Omega}E$, ως ορθές. Τότε $I\hat{\Omega}\Phi = I\hat{E}\Phi$, διότι βαίνουν στο ίδιο τόξο, το ΙΦ.(1)

Παρατηρούμε ότι τα τρίγωνα ΙΦΕ, IFE έχουν:

1) $I\hat{\Phi}E = I\hat{E}F$, ως ορθές,

2) $\Phi\hat{I}E$ κοινή γωνία.

Προφανώς λοιπόν ισχύει ότι $I\hat{E}\Phi = I\hat{F}E$. (2)

Παρατηρούμε ότι το τετράπλευρο ΦFXE είναι εγγράψιμο, διότι $F\hat{\Phi}E = F\hat{X}E$, ως ορθές. Τότε $\Phi\hat{F}E = \Phi\hat{X}E$, διότι βαίνουν στο ίδιο τόξο, το ΦΕ.(3)

Από τις (1), (2), (3) συμπεραίνουμε ότι $I\hat{\Omega}\Phi = \Phi\hat{X}E$. (*)

Παρατηρούμε ότι $\chi\hat{\Omega}I = H\hat{\Omega}\Psi$, ως κατακορυφήν. (4)

Ακόμη, το τετράπλευρο ΗΨΕΩ είναι εγγράψιμο, διότι $E\hat{\Psi}H = E\hat{\Omega}H$, ως ορθές. Τότε $H\hat{\Omega}\Psi = H\hat{E}\Psi$, διότι βαίνουν στο ίδιο τόξο, το ΗΨ. (5)

Παρατηρούμε ότι τα τρίγωνα ΗΨΕ, HEG έχουν:

1) $H\hat{\Psi}E = H\hat{E}G$, ως ορθές,

2) $E\hat{H}\Psi$ κοινή γωνία.

Προφανώς λοιπόν ισχύει ότι $H\hat{E}\Psi = H\hat{G}E$. (6)

Παρατηρούμε ότι το τετράπλευρο EXGΨ είναι εγγράψιμο, διότι $E\hat{X}G = E\hat{\Psi}G$, ως ορθές. Τότε $\Psi\hat{G}E = \Psi\hat{X}E$, διότι βαίνουν στο ίδιο τόξο, το ΕΨ. (7)

Από τις (4), (5), (6), (7) συμπεραίνουμε ότι $\chi\hat{\Omega}I = \Psi\hat{X}E$. (**)

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (*), (**), προκύπτει ότι $\chi\hat{\Omega}\Phi = \Phi\hat{X}\Psi$, δηλαδή η γωνία $\Phi\hat{X}\Psi$ ισούται με την εξωτερική της $\Phi\hat{\Omega}\Psi$. Άρα το ΦΧΨΩ είναι εγγράψιμο. Διαφορετικά, θα μπορούσαμε να πούμε ότι οι προβολές του Ε στις πλευρές του q περιέχονται σε κύκλο.

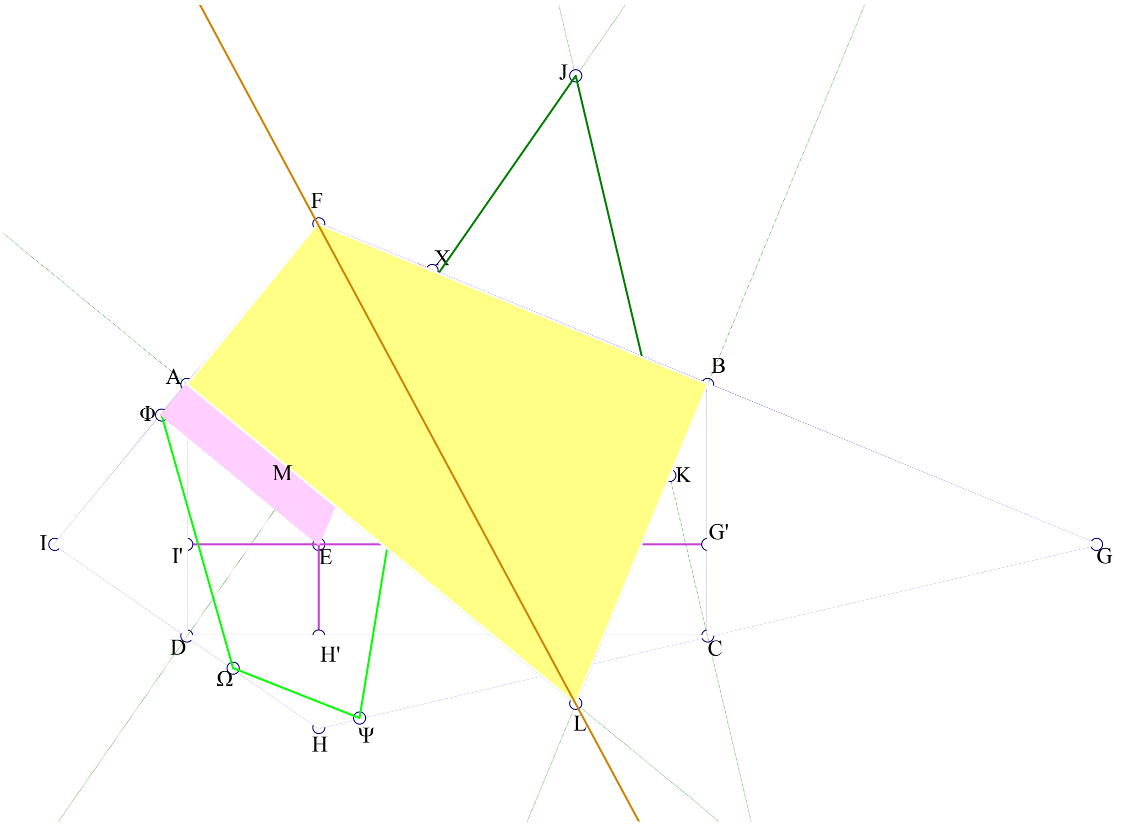
- **<u>Πρόταση 13</u>:**

Ο περιγεγραμμένος κύκλος του ΦΧΨΩ έχει κέντρο το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος EU.

<u>Σημείωση</u>: Το ΦΧΨΩ είναι το τετράπλευρο που προκύπτει από την προβολή του Ε στις πλευρές του q (πρόταση 12) και το σημείο U είναι το σημείο που αναφέρεται στην πρόταση 10.

***Απόδειξη*:**

Έχουμε q΄ = (JKLM) το τετράπλευρο που σχηματίζεται από τις μεσοκαθέτους των πλευρών του q = (FGHI). Φέρνουμε τα ευθύγραμμα τμήματα ΕΦ, ΕΧ (Φ, Χ είναι οι προβολές του Ε στις πλευρές IF, FG αντίστοιχα). Σχηματίζονται τα τετράπλευρα ΕΦFX και LAFB. Φέρνουμε επίσης την ευθεία που διέρχεται από τις κορυφές F, L.



(Σχήμα 25)

(Σύμφωνα με το σχήμα 25 της σελίδας 33.)

→ Παρατηρούμε ότι $E\hat{\Phi}F = E\hat{X}F$ ως ορθές. Συνεπώς, το ΕΦFX είναι εγγράψιμο, διότι έχει τις απέναντι γωνίες του παραπληρωματικές. Ομοίως, $L\hat{A}F = L\hat{B}F$ ως ορθές, που σημαίνει ότι το LAFB είναι εγγράψιμο.

Παρατηρούμε ότι τα ορθογώνια τρίγωνα EXF, BFF΄ έχουν κοινή γωνία την $E\hat{F}X$. Υποχρεωτικά, λοιπόν, θα έχουν και τις $F\hat{E}X$, $F'\hat{B}F$ ίσες μεταξύ τους. Άρα, τα δυο τρίγωνα είναι όμοια. Επιπλέον $F'\hat{B}F = A\hat{L}F$, διότι βαίνουν στο ίδιο τόξο. Αυτό σημαίνει ότι τα ορθογώνια τρίγωνα LAF, BFF΄ είναι όμοια μεταξύ τους. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι τα LAF, EXF είναι όμοια. (1)

Γνωρίζουμε ότι $A\hat{L}B = \Phi\hat{E}X$, αφού έχουν τις πλευρές τους παράλληλες κι ακόμη ότι $F\hat{E}X = A\hat{L}F$. Συνεπώς, προκύπτει ότι $\Phi\hat{E}F = B\hat{L}F$. Αυτό σημαίνει ότι τα ορθογώνια τρίγωνα LBF, ΕΦF είναι όμοια μεταξύ τους. (2)

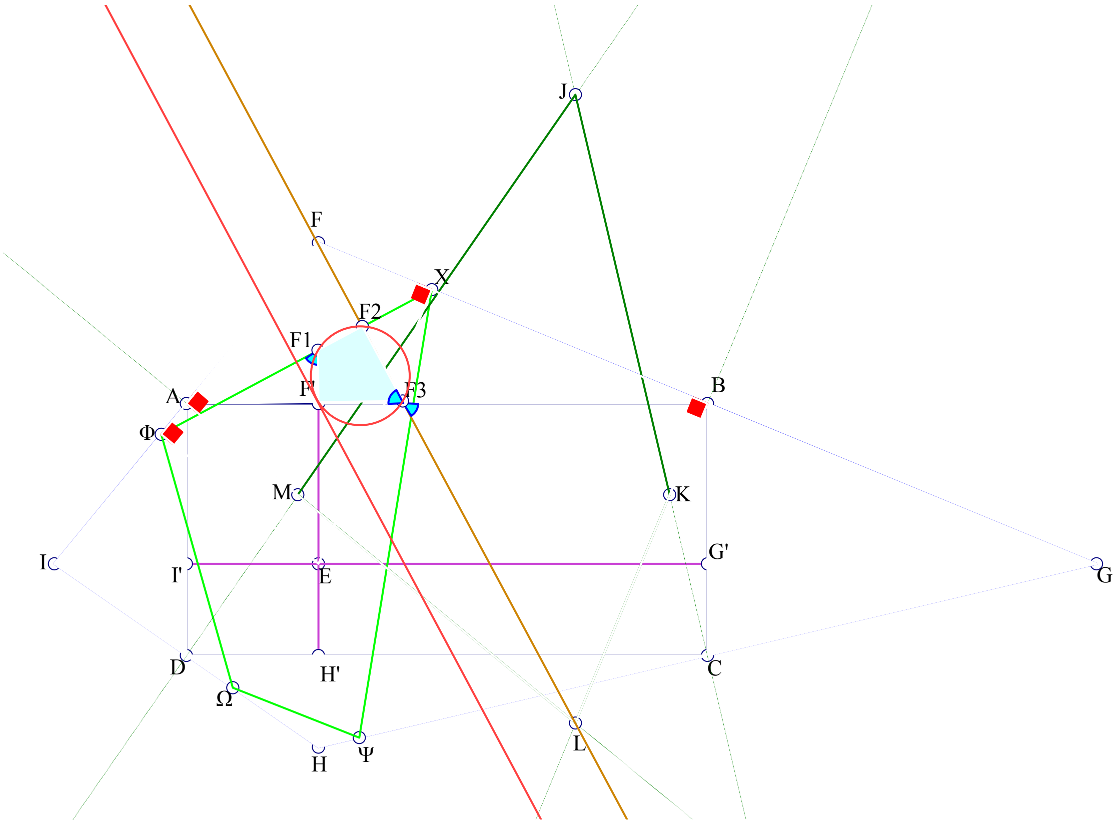
Τα τρίγωνα LAF, LBF σχηματίζουν το τετράπλευρο LAFB και τα τρίγωνα ΕΧF, ΕΦF σχηματίζουν το τετράπλευρο ΕΦFΧ. Οπότε από τα (1), (2) συμπεραίνουμε ότι τα δυο τετράπλευρα είναι όμοια.

(Σύμφωνα με το σχήμα 26 της σελίδας 35.)

→ Ονομάζουμε F1 το σημείο τομής των διαγωνίων του ΕΦFΧ, F2 το σημείο τομής των FL, ΦΧ και F3 το σημείο τομής των διαγωνίων του LAFB. Εφόσον τα LAFB, ΕΦFΧ είναι όμοια, οι διαγώνιοι τους σχηματίζουν αντίστοιχα ίσες γωνίες. Ισχύει λοιπόν ότι $E\hat{F}1\Phi = B\hat{F}3L$. Όμως $B\hat{F}3L = A\hat{F}3F$, ως κατακορυφήν.

Παρατηρούμε ότι η εξωτερική γωνία $E\hat{F}1\Phi$ του τετραπλεύρου F΄F1F2F3 ισούται με την απέναντι εσωτερική $A\hat{F}3F$. Αυτό σημαίνει ότι το F΄F1F2F3 είναι εγγράψιμο. Συνεπώς, έχει τις απέναντι γωνίες του παραπληρωματικές, οπότε $F1\hat{F'}F3 = F1\hat{F}2F3$.

Προκύπτει λοιπόν ότι $FL \perp \Phi X$ ή διαφορετικά ότι η FL είναι παράλληλη στη μεσοκάθετο της ΦΧ.



(Σχήμα 26)

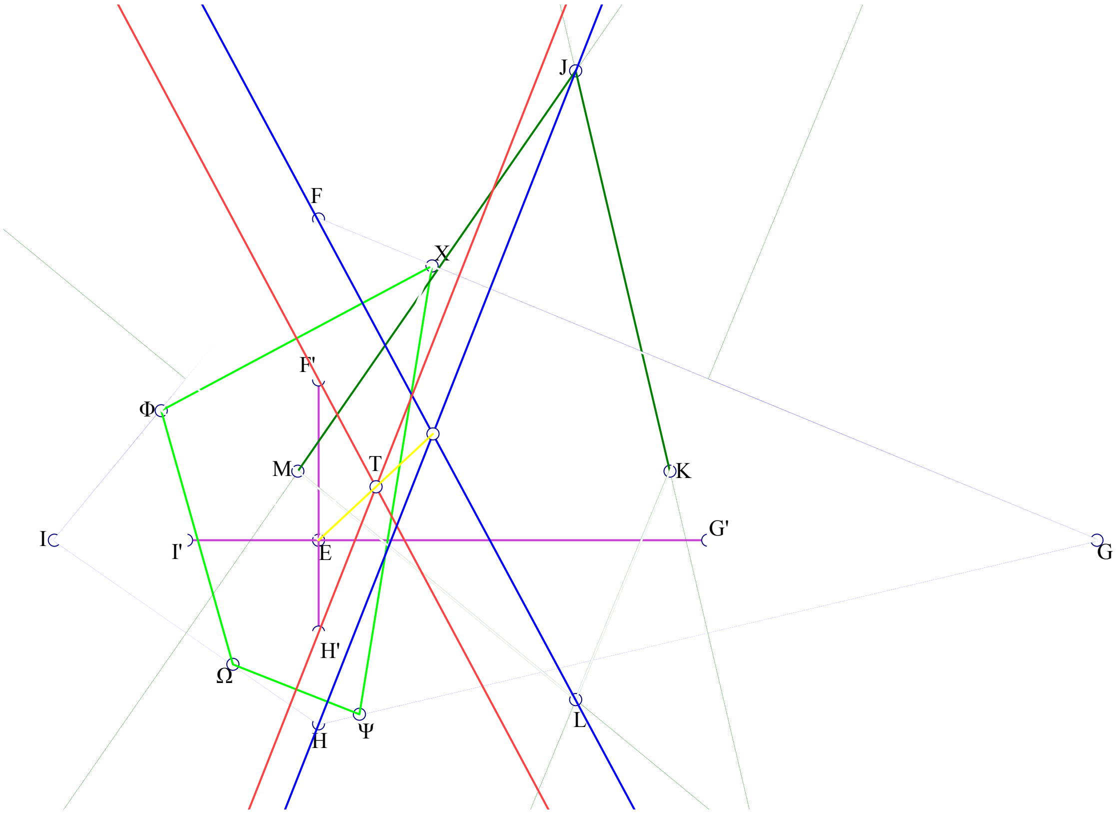
→ Με παρόμοιο τρόπο δείχνουμε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα H, G είναι παράλληλη προς τη μεσοκάθετο της ΨΩ.

(Σύμφωνα με το σχήμα 27.)

→ Φέρνουμε τις ευθείες FL, HG και τις μεσοκαθέτους των ΦΧ, ΨΩ. Έστω T το σημείο τομής των δύο μεσοκαθέτων, τότε το T είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου στο ΦΧΨΩ κύκλου. Φέρνουμε το ευθύγραμμο τμήμα ET. Στην προέκτασή του προς τη μεριά του T παίρνουμε συμείο U*, τέτοιο ώστε ET = TU*.

Παρατηρούμε ότι το ευθύγραμμο τμήμα F΄T ενώνει τα μέσα των πλευρών FE, EU* και είναι παράλληλο προς την ευθεία FL. Αυτό σημαίνει ότι το U* ανήκει στην ευθεία FL. Παρατηρούμε ακόμη ότι το ευθύγραμμο τμήμα H΄T ενώνει τα μέσα των πλευρών HE, EU* και είναι παράλληλο προς την ευθεία HG. Αυτό σημαίνει ότι το U* ανήκει στην ευθεία HG.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι το U* είναι το σημείο τομής των ευθειών FL, HG. Όμως γνωρίζουμε, σύμφωνα με την πρόταση 10, ότι οι ευθείες FL, HG τέμνονται στο U. Άρα, τα U*, U συμπίπτουν.



(Σχήμα 27)

Επομένως, το κέντρο T του περιγεγραμμένου στο ΦΧΨΩ κύκλου είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος EU.

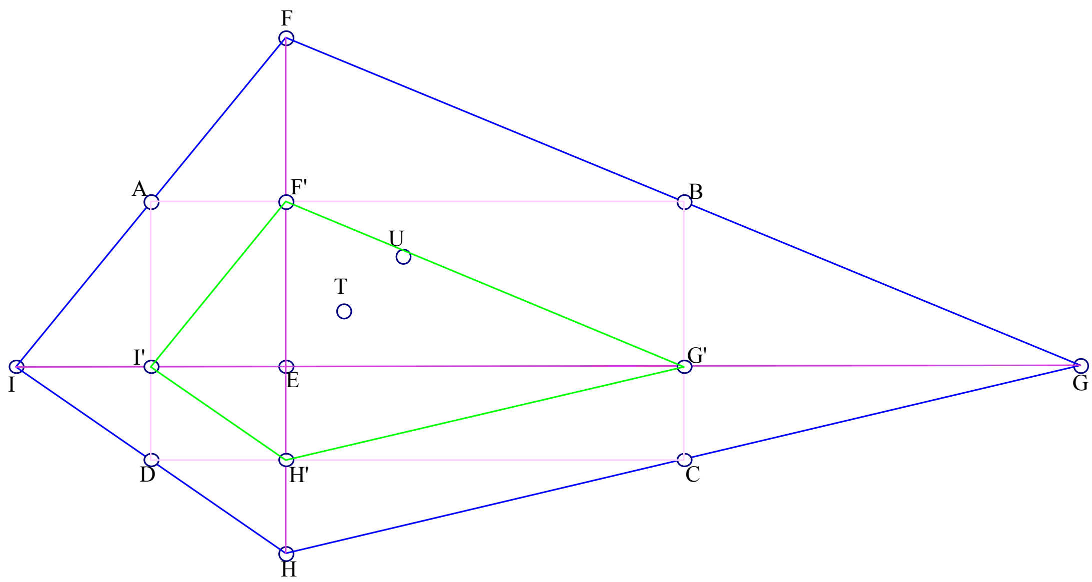
- **<u>Πρόταση 14</u>:**

Αν επαναλάβουμε τις κατασκευές των προτάσεων 6 και 8 για το ορθοδιαγώνιο τετράπλευρο F΄G΄H΄I΄, τότε το κέντρο ομοιοθεσίας των σχημάτων της νέας κατασκευής συμπίπτει με το κέντρο του περιγεγραμμένου στο ΦΧΨΩ κύκλου.

<u>Σημείωση</u>: Τα F΄, G΄, H΄, I΄ είναι τα σημεία τομής των FH, IG με τις πλευρές του ορθογωνίου s = (ABCD) (πρόταση 1) και το ΦΧΨΩ είναι το τετράπλευρο που προκύπτει από την προβολή του E στις πλευρές του q (πρόταση 12).

***Απόδειξη*:**

Σχηματίζουμε το ορθοδιαγώνιο τετράπλευρο F΄G΄H΄I΄, όπως φαίνεται στο σχήμα 28.



(Σχήμα 28)

Συγκρίνοντας τα ορθογώνια τρίγωνα FEG, F΄EG΄, παρατηρούμε ότι $F'E // = \frac{FE}{2}$ και $EG' // = \frac{EG}{2}$. Άρα, τα τρίγωνα FEG, F΄EG΄ είναι όμοια μεταξύ τους κι έχουν αντίστοιχες πλευρές τους παράλληλες.

Συγκρίνοντας τα ορθογώνια τρίγωνα HEG, H΄EG΄, παρατηρούμε ότι $EG' // = \frac{EG}{2}$ και $H'E // = \frac{HE}{2}$. Άρα, τα τρίγωνα HEG, H΄EG΄ είναι όμοια μεταξύ τους κι έχουν αντίστοιχες πλευρές τους παράλληλες.

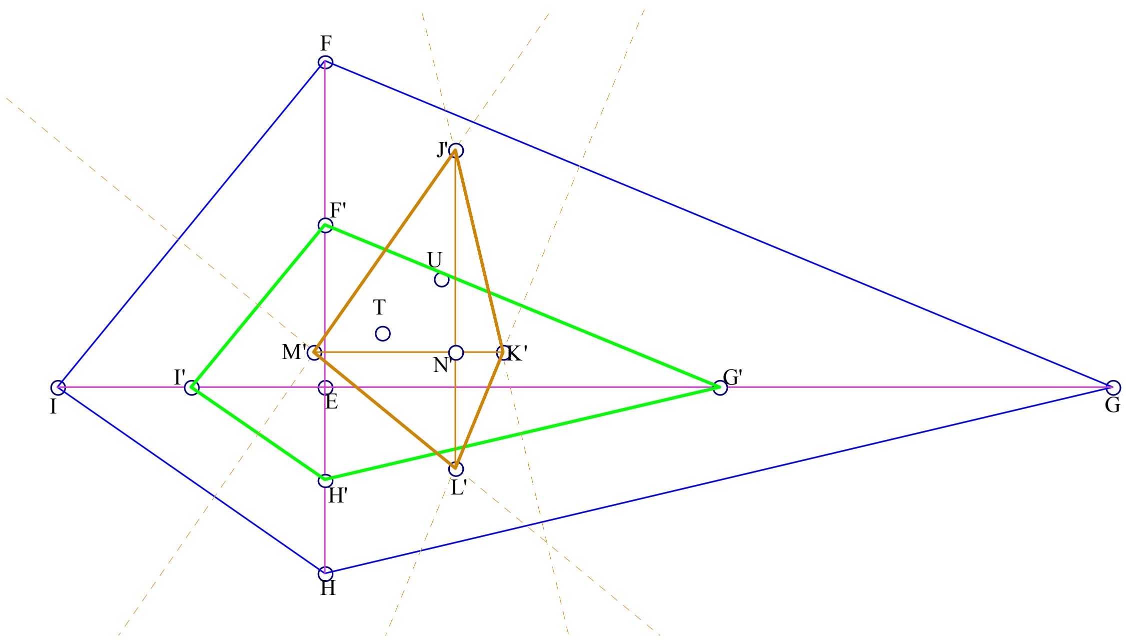
Συγκρίνοντας τα ορθογώνια τρίγωνα HEI, H΄EI΄, παρατηρούμε ότι $H'E // = \frac{HE}{2}$ και $EI' // = \frac{EI}{2}$. Άρα, τα τρίγωνα HEI, H΄EI΄ είναι όμοια μεταξύ τους κι έχουν αντίστοιχες πλευρές τους παράλληλες.

Συγκρίνοντας τα ορθογώνια τρίγωνα IEF, I΄EF΄, παρατηρούμε ότι $EI' // = \frac{EI}{2}$ και $F'E // = \frac{FE}{2}$. Άρα, τα τρίγωνα IEF, I΄EF΄ είναι όμοια μεταξύ τους κι έχουν αντίστοιχες πλευρές τους παράλληλες.

Τα τρίγωνα FEG, HEG σχηματίζουν το τρίγωνο FGH και τα τρίγωνα F΄EG΄, H΄EG΄ σχηματίζουν το τρίγωνο F΄G΄H΄. Προφανώς, λοιπόν, τα τρίγωνα FGH, F΄G΄H΄ είναι όμοια μεταξύ τους (με λόγο ομοιότητας του F΄G΄H΄ προς το FGH $\frac{1}{2}$).

Τα τρίγωνα HEI, IEF σχηματίζουν το τρίγωνο HIF και τα τρίγωνα H΄EI΄, I΄EF΄ σχηματίζουν το τρίγωνο H΄I΄F΄. Προφανώς, λοιπόν, τα τρίγωνα HIF, H΄I΄F΄ είναι όμοια μεταξύ τους (με λόγο ομοιότητας του H΄I΄F΄ προς το HIF $\frac{1}{2}$).

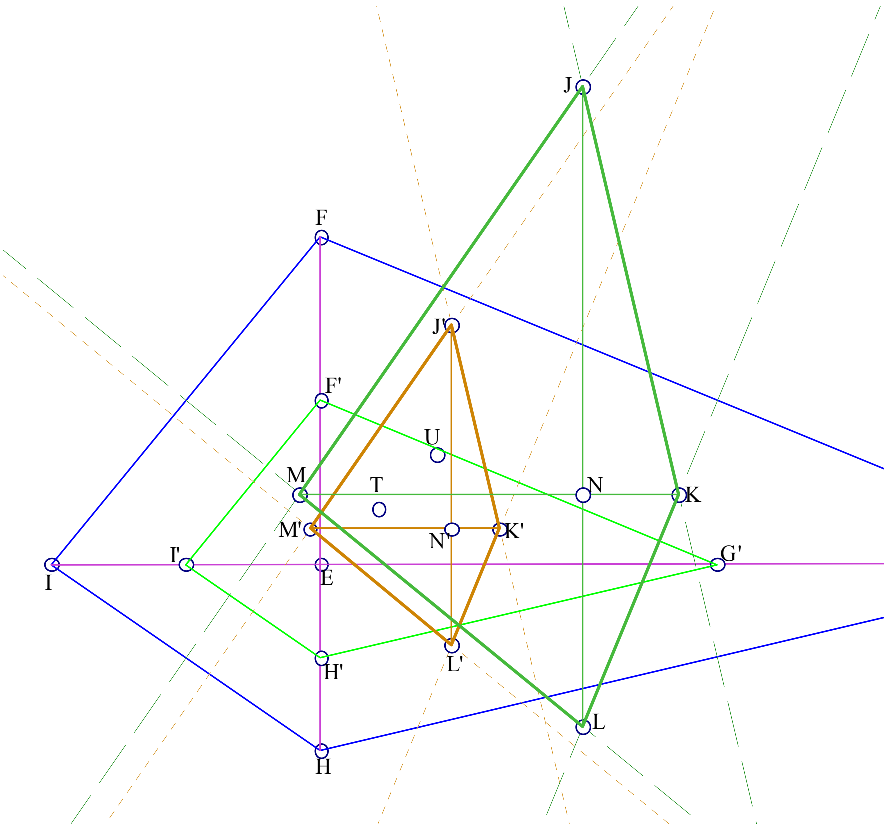
Τα τρίγωνα FGH, HIF σχηματίζουν το τετράπλευρο q = (FGHI) και τα τρίγωνα F΄G΄H΄, H΄I΄F΄ σχηματίζουν το τετράπλευρο F΄G΄H΄I΄. Προφανώς τα δύο τετράπλευρα είναι όμοια μεταξύ τους, με λόγο ομοιότητας του F΄G΄H΄I΄ προς το q $\frac{1}{2}$ κι έχουν τις αντίστοιχες πλευρές τους παράλληλες.



(Σχήμα 29)

(Σύμφωνα με το σχήμα 29.)

→ Φέρνουμε τις μεσοκαθέτους των πλευρών του F΄G΄H΄I΄ κι ονομάζουμε J΄ το σημείο τομής των μεσοκαθέτων των G΄H΄, H΄I΄, ονομάζουμε K΄ το σημείο τομής των μεσοκαθέτων των F΄G΄, G΄H΄, ονομάζουμε L΄ το σημείο τομής των μεσοκαθέτων των F΄G΄, I΄F΄ και τέλος ονομάζουμε M΄ το σημείο τομής των μεσοκαθέτων των H΄I΄, I΄F΄. Σχηματίζουμε το τετράπλευρο J΄K΄L΄M΄. Σύμφωνα με την πρόταση 6, οι μεσοκάθετοι ενός ορθοδιαγωνίου τετραπλεύρου σχηματίζουν άλλο ορθοδιαγώνιο τετράπλευρο με διαγωνίους παράλληλες σε αυτές του αρχικού. Συνεπώς το J΄K΄L΄M΄ είναι ορθοδιαγώνιο, με J΄L΄ // F΄H΄ και K΄M΄ // I΄G΄.



(Σχήμα 30)

(Σύμφωνα με το σχήμα 30.)

→ Αποδείξαμε νωρίτερα ότι τα τετράπλευρα FGHI, F΄G΄H΄I΄ είναι όμοια κι έχουν τις αντίστοιχες πλευρές τους παράλληλες. Επομένως και οι μεσοκάθετοι των αντίστοιχων πλευρών τους θα είναι μεταξύ τους παράλληλες. Αυτό σημαίνει ότι τα τετράπλευρα JKLM, J΄K΄L΄M΄ έχουν τις αντίστοιχες πλευρές τους παράλληλες. Ακόμη, γνωρίζουμε ότι $J'L' \perp IG$ και ότι $JL \perp IG$. Προκύπτει λοιπόν ότι JL // J΄L΄.

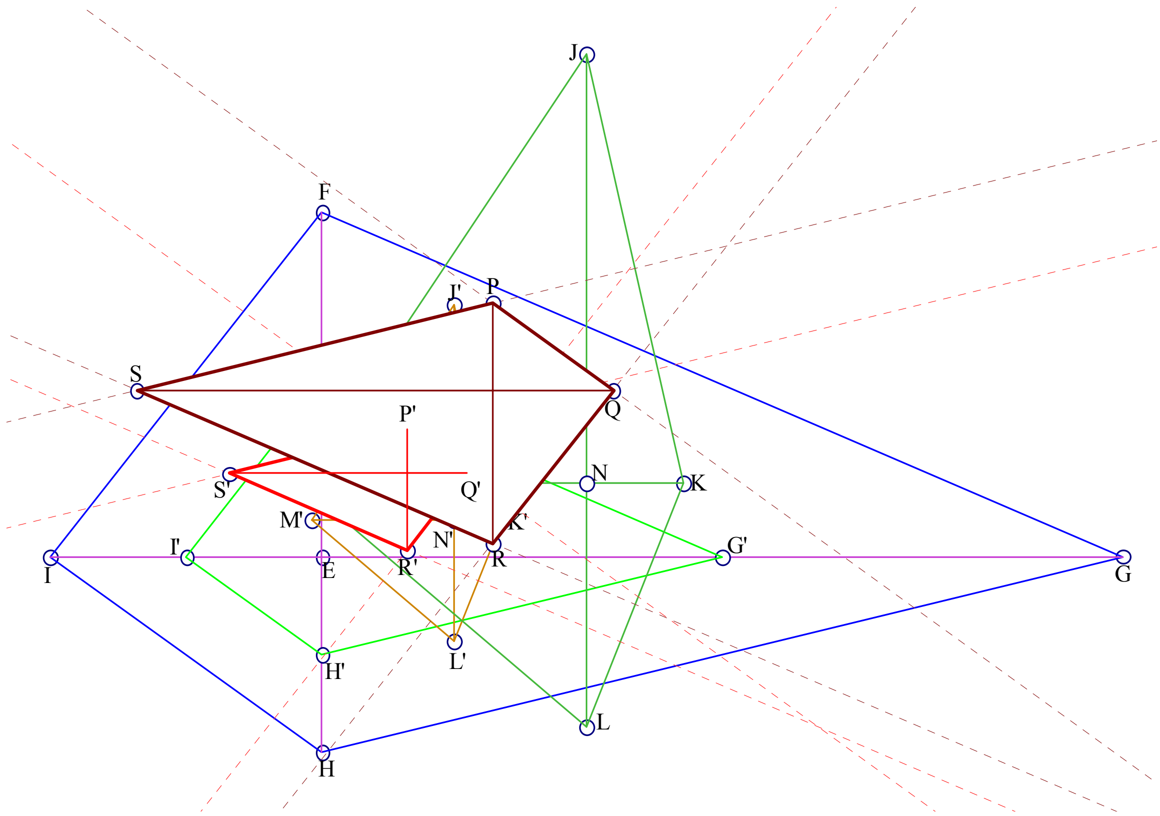
Παρατηρούμε ότι τα τρίγωνα JKL, J΄K΄L΄ είναι όμοια, διότι έχουν όλες τις αντίστοιχες πλευρές τους παράλληλες. Επίσης, τα τρίγωνα LMJ, L΄M΄J΄ είναι όμοια, διότι έχουν όλες τις αντίστοιχες πλευρές τους παράλληλες.

Τα τρίγωνα JKL, LMJ σχηματίζουν το τετράπλευρο JKLM. Ομοίως, τα τρίγωνα J΄K΄L΄, L΄M΄J΄ σχηματίζουν το τετράπλευρο J΄K΄L΄M΄. Άρα τα τετράπλευρα JKLM, J΄K΄L΄M΄ είναι όμοια.

Εφόσον τα τετράπλευρα FGHI, F΄G΄H΄I΄ είναι όμοια κι επίσης τα JKLM, J΄K΄L΄M΄ είναι όμοια κι έχουν τις διαγωνίους τους παράλληλες, θα ισχύει ότι: $\frac{I'G'}{K'M'} = \frac{IG}{KM} \Leftrightarrow \frac{I'G'}{IG} = \frac{K'M'}{KM} \Leftrightarrow \frac{K'M'}{KM} = \frac{1}{2}$. Αυτό σημαίνει ότι ο λόγος ομοιότητας του J΄K΄L΄M΄ προς το JKLM είναι $\frac{1}{2}$.

(Σύμφωνα με το σχήμα 31.)

→ Φέρνουμε τις μεσοκαθέτους των πλευρών των JKLM, J΄K΄L΄M΄. Οι μεσοκάθετοι των πλευρών του JKLM σχηματίζουν το ορθοδιαγώνιο τετράπλευρο q΄΄ = (PQRS), το οποίο είναι όμοιο με το q = (FGHI), σύμφωνα με την πρόταση 9.



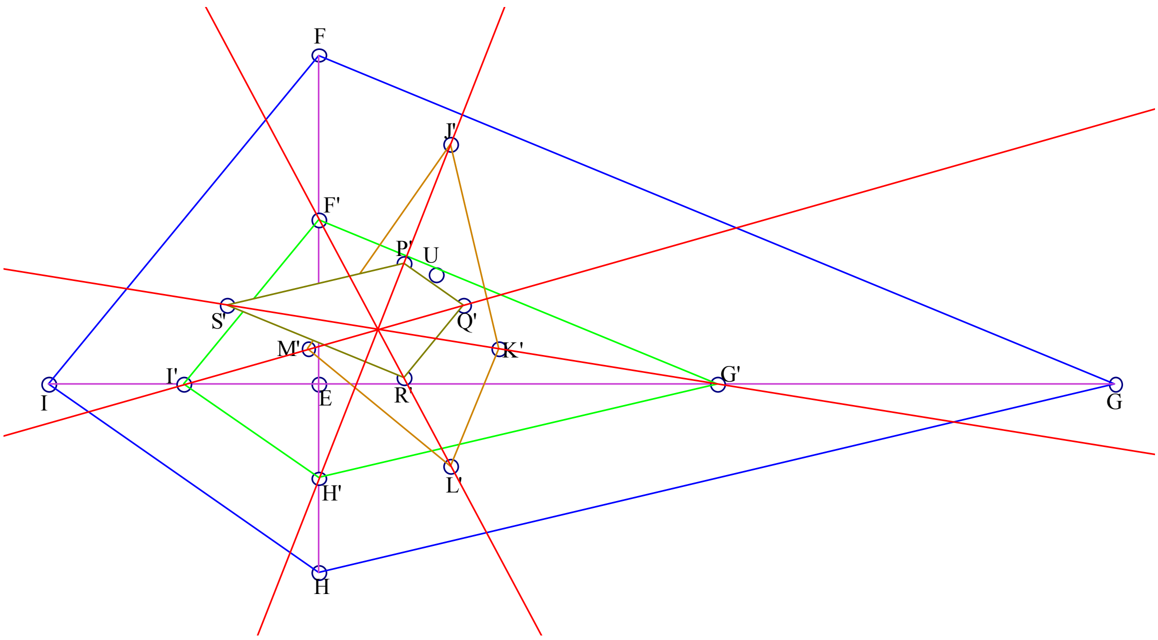
(Σχήμα 31)

Ονομάζουμε P΄ το σημείο τομής των μεσοκαθέτων των πλευρών J΄K΄, M΄J΄, ονομάζουμε Q΄ το σημείο τομής των μεσοκαθέτων των πλευρών M΄J΄, L΄M΄, ονομάζουμε R΄ το σημείο τομής των μεσοκαθέτων των πλευρών L΄M΄, K΄L΄ κι ονομάζουμε S΄ το σημείο τομής των μεσοκαθέτων των πλευρών K΄L΄, J΄K΄. Σχηματίζουμε το τετράπλευρο P΄Q΄R΄S΄. Σύμφωνα με τις προτάσεις 8 και 9 το P΄Q΄R΄S΄ είναι ορθοδιαγώνιο τετράπλευρο κι είναι όμοιο με το F΄G΄H΄I΄.

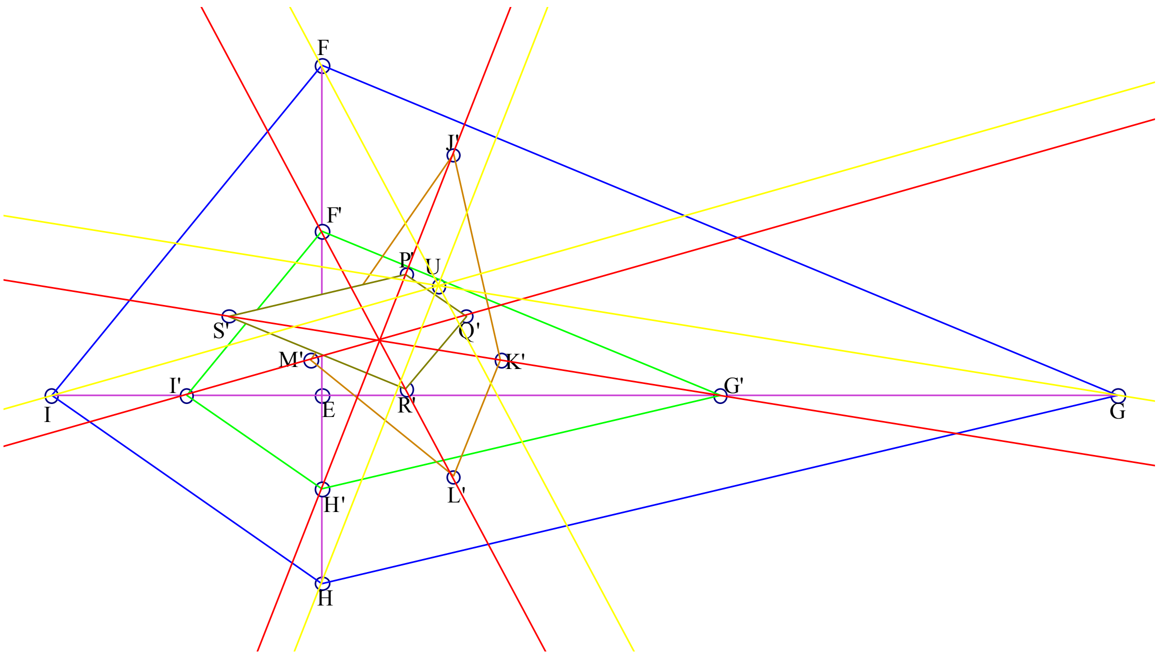
Γνωρίζουμε ότι τα τετράπλευρα FGHI, F΄G΄H΄I΄ είναι όμοια κι έχουν τις αντίστοιχες πλευρές τους παράλληλες. Συνεπώς και τα PQRS, P΄Q΄R΄S΄ θα είναι όμοια και θα έχουν τις αντίστοιχες πλευρές τους παράλληλες. Θα ισχύει ότι: $\frac{G'H'}{R'S'} = \frac{GH}{RS} \Leftrightarrow \frac{G'H'}{GH} = \frac{R'S'}{RS} \Leftrightarrow \frac{R'S'}{RS} = \frac{1}{2}$. Αυτό σημαίνει ότι ο λόγος ομοιότητας του P΄Q΄R΄S΄ προς το PQRS είναι $\frac{1}{2}$.

(Σύμφωνα με το σχήμα 32.)

→ Σύμφωνα με την πρόταση 10, τα τετράπλευρα J΄K΄L΄M΄, P΄Q΄R΄S΄ είναι προοπτικά του F΄G΄H΄I΄ ως προς κάποιο σημείο (έστω T1) και οι κορυφές τους περιέχονται σε ευθείες δια του σημείου αυτού.



(Σχήμα 32)



(Σχήμα 33)

(Σύμφωνα με το σχήμα 33.)

→ Προφανώς, λόγω της ομοιότητας των σχημάτων των δύο κατασκευών (κατασκευή των προτάσεων 6 και 8 για τα FGHI, F΄G΄H΄I΄), προκύπτει ότι οι ευθείες που διέρχονται δια του T1 είναι παράλληλες προς τις αντίστοιχες ευθείες που διέρχονται δια του U, όπως φαίνεται στο σχήμα 33. (Οι κίτρινες ευθείες του σχήματος 33 είναι οι ίδιες με τις κόκκινες ευθείες του σχήματος 19 της σελίδας 26.)

Ομοίως, η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία E, T1 θα είναι παράλληλη προς την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία E, U, δηλαδή ET1 // EU. Αφού μάλιστα οι ET1, EU έχουν κοινό σημείο το E, τα σημεία E, T1, U είναι συνευθειακά. Επιπλέον, αφού ο λόγος ομοιότητας των σχημάτων της αρχικής κατασκευής προς τα αντίστοιχα της νέας είναι $\frac{1}{2}$, τότε θα ισχύει ότι $\frac{ET1}{EU} = \frac{1}{2}$. Αυτό σημαίνει ότι το σημείο T1 είναι το μέσο του EU.

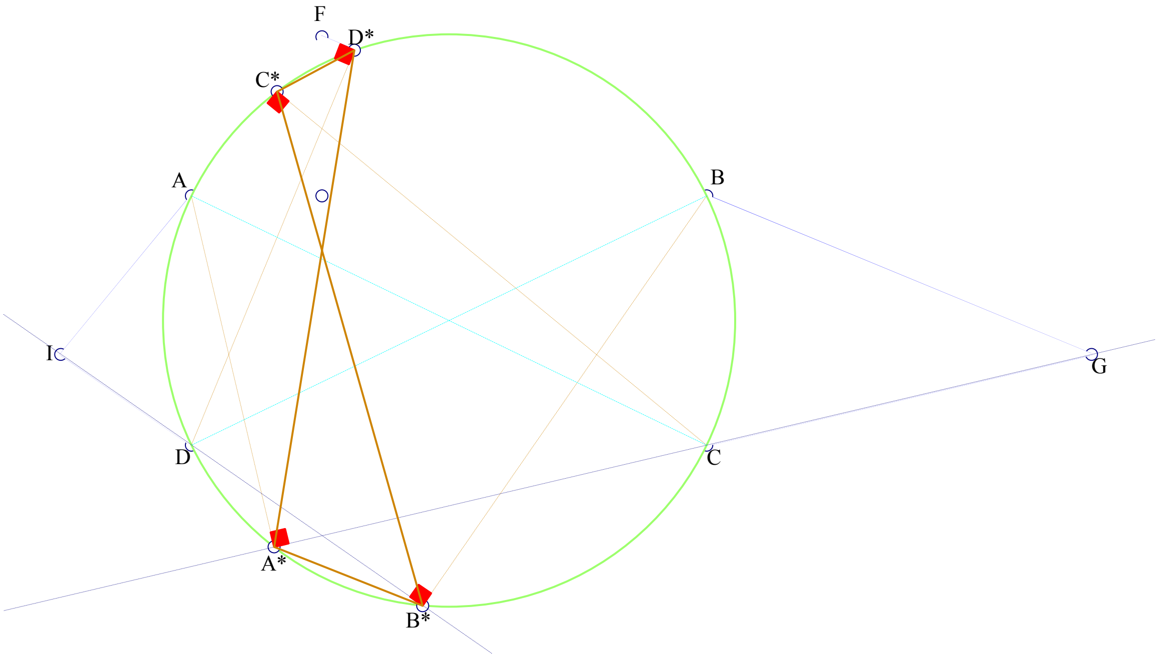
Σύμφωνα με την πρόταση 13, όμως, το κέντρο του περιγεγραμμένου στο ΦΧΨΩ κύκλου, το T, είναι το μέσο του EU. Άρα, τα T1, T συμπίπτουν.

Επομένως, το κέντρο ομοιοθεσίας των σχημάτων της νέας κατασκευής συμπίπτει με το κέντρο του περιγεγραμμένου στο ΦΧΨΩ κύκλου.

- **<u>Πρόταση 15</u>:**

Οι προβολές των A, B, C, D στους φορείς των πλευρών του q = (FGHI) σχηματίζουν τετράπλευρο εγγράψιμο στον περιγεγραμμένο κύκλο του s = (ABCD).

***Απόδειξη*:**



(Σχήμα 30)

Σύμφωνα με την πρόταση 4 το s = (ABCD) είναι εγγράψιμο. Έστω A*, B*, C*, D* οι προβολές των A, B, C, D στους φορείς των πλευρών του q = (FGHI) αντίστοιχα.

Στο τετράπλευρο ABCA* παρατηρούμε ότι $\hat{A}^* = \hat{B}$ ως ορθές, που σημαίνει ότι το ABCA* είναι εγγράψιμο, μιας κι έχει τις απέναντι γωνίες του παραπληρωματικές. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του ABCD κι ο περιγεγραμμένος κύκλος του ABCA* έχουν τρία κοινά σημεία, άρα συμπίπτουν.

Στο τετράπλευρο ADCC* παρατηρούμε ότι $\hat{C}^* = \hat{D}$ ως ορθές, που σημαίνει ότι το ADCC* είναι εγγράψιμο, μιας κι έχει τις απέναντι γωνίες του παραπληρωματικές. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του ABCD κι ο περιγεγραμμένος κύκλος του ADCC* έχουν τρία κοινά σημεία, άρα συμπίπτουν.

Στο τετράπλευρο ABB*D παρατηρούμε ότι $\hat{B}^* = \hat{A}$ ως ορθές, που σημαίνει ότι το ABB*D είναι εγγράψιμο, μιας κι έχει τις απέναντι γωνίες του παραπληρωματικές. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του ABCD κι ο περιγεγραμμένος κύκλος του ABB*D έχουν τρία κοινά σημεία, άρα συμπίπτουν.

Στο τετράπλευρο BCDD* παρατηρούμε ότι $\hat{D}^* = \hat{C}$ ως ορθές, που σημαίνει ότι το BCDD* είναι εγγράψιμο, μιας κι έχει τις απέναντι γωνίες του παραπληρωματικές. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του ABCD κι ο περιγεγραμμένος κύκλος του BCDD* έχουν τρία κοινά σημεία, άρα συμπίπτουν.

Συμπεραίνουμε λοιπόν από τα παραπάνω ότι τα A, B, C, D, A*, B*, C*, D* περιέχονται όλα στον ίδιο κύκλο.