

Αριθμητική Επίλυση Γραμμικών Αλγεβρικών
Συστημάτων με Επαναληπτικές Μεθόδους

Μαρία Χ. Αλανέλλη

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΤΜΗΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Μάιος 2007

της
Μαρίας Αλανέλλη
Μαθηματικού

Η παρούσα Διδακτορική Διατριβή έχει κατατεθεί
στην Ειδική Διατμηματική Επιτροπή των Τμημάτων Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Κρήτης.

Επιβλέπων Διδακτορικής Διατριβής:
Καθηγητής Απόστολος Χατζηδήμος

Η Διδακτορική Διατριβή χρηματοδοτήθηκε κατά ένα μέρος από το πρόγραμμα Ηράκλειτος: Υποτροφίες έρευνας με προτεραιότητα στη Βασική Έρευνα 2002-2005.



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ ΕΠΕΑΕΚ
ΕΥΡΩΠΑΪΚΗ ΕΝΔΕΣΗ
ΣΥΓΧΡΗΜΑΤΟΔΟΤΗΣΗ
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΤΑΜΕΙΟ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΚΗΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ



ΠΑΙΔΕΙΑ ΜΠΡΟΣΤΑ
2^ο Επιχειρησιακό πρόγραμμα
Εκπαίδευσης και Αρχικής
Επαγγελματικής Κατάρτισης

Περιεχόμενα

Περιεχόμενα	vii
Αντί Προλόγου	ix
Κεφάλαιο 1. Εισαγωγή	1
Κεφάλαιο 2. Ο Αλγόριθμος \mathbb{H} και οι Προτεινόμενες Παραλλαγές του	13
2.1 Ο Αλγόριθμος \mathbb{H}	13
2.2 Αλγόριθμος τύπου Gauss-Seidel για αραιούς πίνακες	16
2.3 Κριτήριο Μερικής Οδήγησης Gauss-Seidel	17
2.4 Οι Τρεις Επαναληπτικοί Αλγόριθμοι	24
2.5 Ανάπτυξη Αλγοριθμικού Υλικού	29
2.6 Σχόλια	34
2.7 Αριθμητικά Αποτελέσματα	36
Κεφάλαιο 3. Επαναληπτικό Κριτήριο για Μη-Αναγωγίμους Πίνακες	43
3.1 Εισαγωγή	43
3.2 Προκαταρκτικά, οι Τρεις Αλγόριθμοι και Σχόλια	44
3.3 Προκαταρκτικά και Θεωρητικό Υπόβαθρο	53
3.4 Ο Νέος Αλγόριθμος	64
3.5 Μια Συνάρτηση Matlab, Παραδείγματα και Σχόλια	74
Κεφάλαιο 4. Επαναληπτικό Κριτήριο για Αναγωγίμους και Μη Πίνακες	83
4.1 Θεωρητικά στοιχεία	84
4.2 Η Εφαρμογή του Αλγορίθμου AH σε μια Απλή Αναγωγή Περίπτωση	87
4.3 Η Γενική Αναγωγή Περίπτωση	96

4.4 Ο Αλγόριθμος	114
4.5 Μια Συνάρτηση Matlab, Παραδείγματα και Σχόλια	117
Βιβλιογραφία	129

Αντί Προλόγου

Η εκπόνηση της παρούσας διατριβής θα ήταν αδύνατη χωρίς τη συμπαράσταση ορισμένων ανθρώπων τους οποίους και θα ήθελα να ευχαριστήσω.

Αρχικά θα ήθελα να εκφράσω τη βαθιά και ειλικρινή μου ευγνωμοσύνη στον επιβλέποντά μου Καθηγητή Απόστολο Χατζηδήμο για την κατανόηση, τη διαρκή παρότρυνση και προσωπική του επίβλεψη καθ' όλη τη διάρκεια της διατριβής και όχι μόνο. Θα ήθελα ακόμα να τον ευχαριστήσω για την ακούραστη βοήθεια του, τις συμβουλές και τα εποικοδομητικά του σχόλια που αποτέλεσαν τον οδηγό για την ολοκλήρωση της εργασίας αυτής.

Ιδιαίτερα ευχαριστώ τα μέλη της τριμελούς συμβουλευτικής επιτροπής τους Αναπληρωτές Καθηγητές Εμμανουήλ Βάβαλη και Δημήτριο Νούτσο για την ευγενική συμπαράστασή και καθοδήγησή τους αλλά και για τις πολύτιμες προτάσεις για την ουσιαστική βελτίωση του περιεχομένου της διατριβής. Επιπλέον, θερμές ευχαριστίες οφείλω προς τους Καθηγητές Βασίλειο Δουγαλή, Χαράλαμπο Μακρινιάκη, Θεόδωρο Παπαθεοδώρου και Ιωάννη Σαριδιάκη και τον Επίκουρο Καθηγητή Γεώργιο Ζουράρη που δέχθηκαν με προθυμία να συμμετάσχουν στην επταμελή εξεταστική επιτροπή του διδακτορικού μου.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου για την ηθική και υλική τους συμπαράσταση όλα αυτά τα χρόνια, καθώς και το σύντροφό μου Μάνο για τη συνεχή ενθάρρυνση και υποστήριξή του.

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Θεωρούμε ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων της μορφής

$$Ax = b, \tag{1.1}$$

όπου ο πίνακας A είναι ένας $n \times n$ μη-ιδιόμορφος, μιγαδικός γενικά πίνακας ($A \in \mathbb{C}^{n,n}$, $\det(A) \neq 0$) και $x, b \in \mathbb{C}^n$. Ένα τέτοιο σύστημα, προερχόμενο κυρίως από πρακτικές εφαρμογές, έχει συνήθως πίνακα συντελεστών A όπου η διάστασή του n είναι μεγάλη και είναι “αραιός”. Στην περίπτωση αυτή ένας από τους στόχους κατά την επίλυση του (1.1) είναι η εκμετάλλευση της αραιότητας του πίνακα ώστε να μειωθεί αφενός το πλήθος των πληροφοριών κατά την αποθήκευση και κατά τη διάρκεια των υπολογισμών αλλά και ο απαιτούμενος αριθμός πράξεων για την εύρεση του αποτελέσματος. Τέτοιου είδους συστήματα εμφανίζονται σε πολλές εφαρμογές κατά την αριθμητική επίλυση ελλειπτικών ή/και παραβολικών εξισώσεων κατά τη διακριτοποίηση με πεπερασμένες διαφορές, πεπερασμένα στοιχεία, πεπερασμένους όγκους, συμπτωτικές μεθόδους (collocation). Τα προβλήματα αυτά εμφανίζονται σε περιοχές της Επιστήμης, της Τεχνολογίας, των Οικονομικών Επιστημών, της Ιατρικής, κ.λπ. Όπως, π.χ., στη διάδοση θερμότητας, στη διάχυση νετρονίων στους πυρηνικούς αντιδραστήρες, στη ρευστοδυναμική, στην ελαστικότητα, στις στατικές κατασκευές, στην

πρόγνωση του καιρού (βλέπε Young [45]) κι ακόμη σε άλλα προβλήματα όπως τα ηλεκτρικά κυκλώματα, η τομογραφία, κ.λπ. (βλέπε Axelsson [4]). Βέβαια, ο πίνακας A μπορεί να έχει επιπλέον σημαντικές ιδιότητες εκμετάλλευση των οποίων μπορεί να γίνει κατά την επίλυση του συστήματος. Στην παρούσα διατριβή θα μας απασχολήσουν κυρίως πίνακες A που θα είναι M -πίνακες ή H -πίνακες. Στο σημείο αυτό υπενθυμίζεται ότι:

Ορισμός 1.1. Ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ λέγεται **(μη-ιδιόμορφος) M -πίνακας** όταν μπορεί να γραφεί στη μορφή $A = sI - B$, όπου $s > 0$, $B \geq 0$ με $s > \rho(B)$, ή, ισοδύναμα, αν $a_{ij} \leq 0$, $i \neq j = 1(1)n$, $\det(A) \neq 0$ και $A^{-1} \geq 0$.

Σημειώσεις: 1) Στον παραπάνω ορισμό το $\rho(\cdot)$ συμβολίζει τη φασματική ακτίνα ενός τετραγωνικού πίνακα και γράφοντας $A > 0$ (≥ 0) εννοούμε ότι όλα τα στοιχεία του A είναι θετικά (μη-αρνητικά). 2) Ο παραπάνω ορισμός εισήχθη πρώτη φορά από τον Ostrowski το 1937 [34]. 3) Ένα πλήθος πενήντα(!) ισοδύναμων προτάσεων που μπορούν να αποτελέσουν εναλλακτικούς ορισμούς ενός μη-ιδιόμορφου M -πίνακα μπορεί να βρεθεί στο βιβλίο των Berman και Plemmons [5]. 4) Πίνακες της μορφής (1.1) πολύ συχνά εμφανίζονται σε συστήματα γραμμικών -όπως προαναφέρθηκε- αλλά και μη-γραμμικών εξισώσεων ή σε προβλήματα ιδιοτιμών μιας μεγάλης ποικιλίας περιοχών που περιλαμβάνουν μεθόδους πεπερασμένων διαφορών για μερικές διαφορικές εξισώσεις, μοντέλα εισόδου-εξόδου παραγωγής και ανάπτυξης στα οικονομικά, στις Μαρκοβιανές διαδικασίες, στις πιθανότητες και τη στατιστική.

Ορισμός 1.2. Ένας $n \times n$ πίνακας A λέγεται **H-πίνακας** όταν ο πίνακας σύγκρισης

$$\mathcal{M}(A) = (m)_{ij} = \begin{cases} |a_{ii}|, & \text{αν } i = j = 1(1)n, \\ -|a_{ij}|, & \text{αν } i \neq j = 1(1)n, \end{cases} \quad (1.2)$$

είναι M -πίνακας.

Ισοδύναμα, αν υπάρχει ένας διαγώνιος πίνακας $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$, με θετικά διαγώνια στοιχεία, τέτοιος ώστε ο πίνακας AD να είναι **αυστηρά διαγώνια υπέρτερος κατά γραμμές** (sdd), δηλαδή αν και μόνο αν,

$$|a_{ii}|d_i > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|d_j, \quad i = 1(1)n. \quad (1.3)$$

Σημειώσεις: 1) Η οικογένεια των H -πινάκων γενικεύει την ευρύτητα μελετημένη οικογένεια, όπως άλλωστε φαίνεται και από τις παραπάνω σημειώσεις, των μη-ιδιόμορφων M -πινάκων αλλά και την οικογένεια των αυστηρά διαγώνια υπέρτερων πινάκων. 2) Αν υπάρχει πίνακας D τέτοιος ώστε να ικανοποιείται ο ορισμός για δοθέντα πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n,n}$, τότε είναι προφανές ότι υπάρχουν άπειροι πίνακες που ικανοποιούν τον ορισμό και το σύνολό τους συμβολίζεται συνήθως με \mathfrak{D}_A .

Οι πίνακες αυτοί παίζουν ιδιαίτερα σημαντικό ρόλο στα προβλήματα γραμμικής συμπληρωματικότητας, ευρύτερα γνωστά ως Linear Complementarity Problems (LCP). Θεωρούμε το σύστημα:

$$r = Ax - b,$$

$$r \geq 0, \quad x \geq 0 \quad \text{και} \quad x^T r = 0.$$

Για το σύστημα αυτό ζητείται το διάνυσμα x που ικανοποιεί τις παραπάνω σχέσεις, για δοσμένο $b \in \mathbb{R}^n$ και $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Ιδιαίτερα, αποδεικνύεται ότι για $b \leq 0$, το παραπάνω σύστημα έχει μία και μόνο λύση αν και μόνο αν ο A είναι θετικά ορισμένος (υπό την έννοια ότι $y^T A y > 0, \forall y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$). Οι πραγματικοί H -πίνακες με θετικά διαγώνια στοιχεία αποτελούν μια υποκατηγορία των θετικά ορισμένων πινάκων. Το πρόβλημα αυτό έχει εφαρμογές στην εύρεση ενός Nash σημείου ισορροπίας ενός παιγνίου δύο παικτών (bimatrix game) (Lemke [26], Cottle και Dantzig [7]), σε αρκετά προβλήματα ελεύθερων ή/και κινούμενων συνόρων της μηχανικής ρευστών (Cryer [8]) στα προβλήματα (γραμμικού και) κυρτού τετραγωνικού προγραμματισμού (Mangasarian [31], Murty [32]) και σε προβλήματα εκτίμησης επιλογών στην Οικονομία (Pantazopoulos [36], Koulisianis και Papatheodorou [25]). Προβλήματα όπως το παραπάνω έχουν επιλυθεί με τη χρήση επαναληπτικών μεθόδων από τους Cryer [8], Mangasarian [30], Ahn [1] και Pang [35].

Η επίλυση συστημάτων όπως το (1.1), γίνεται συχνά με τη χρήση επαναληπτικών μεθόδων προσέγγισης της λύσης τους. Οι μέθοδοι αυτές είναι συνήθως ιδανικές για μεγάλα και αραιά συστήματα και προτιμώνται στις περισσότερες περιπτώσεις αντί των άμεσων μεθόδων, όπως η απαλοιφή Gauss. Μια τυπική επαναληπτική μέθοδος περιλαμβάνει την επιλογή μιας τυχαίας αρχικής προσέγγισης $x^{(0)}$ της λύσης x του (1.1) και τον καθορισμό μιας ακολουθίας $x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, \dots$, με βάση κάποιο συγκεκριμένο αλγόριθμο, ο οποίος, αν η μέθοδος επιλεγεί κατάλληλα, θα συγκλίνει στην ακριβή λύση του (1.1).

Ειδικότερα, ας θεωρήσουμε τη λεγόμενη **διάσπαση** του πίνακα A σε

$$A = M - N,$$

με M ένα μη-ιδιόμορφο πίνακα. Τότε, το αρχικό σύστημα (1.1) γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$Mx = Nx + b \Leftrightarrow x = M^{-1}Nx + M^{-1}b$$

από όπου προκύπτει το ακόλουθο επαναληπτικό σχήμα

$$x^{(k+1)} = M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b, \quad k = 0, 1, \dots,$$

ή ισοδύναμα

$$x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + c, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (1.4)$$

όπου $T = M^{-1}N$ είναι ο επαναληπτικός πίνακας του σχήματος, $c = M^{-1}b$ και $x^{(0)}$ τυχαία αρχική προσέγγιση της λύσης x . Πολλές φορές θεωρούμε ότι ο πίνακας A γράφεται ως

$$A = D - L - U,$$

όπου D διαγώνιος πίνακας με διαγώνια στοιχεία τα αντίστοιχα στοιχεία του πίνακα A , και L και U είναι αντίστοιχα αυστηρά κάτω και άνω τριγωνικοί πίνακες. Προφανώς ο παραπάνω τρόπος γραφής του A είναι μοναδικός. Επιλέγοντας επομένως για πίνακα M τους πίνακες D , $\frac{1}{\omega}(D - \omega L)$, με $\omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, έχουμε αντίστοιχα τους επαναληπτικούς πίνακες $J_A = D^{-1}(L + U)$, της μεθόδου Jacobi και $\mathcal{L}_\omega = (D - \omega L)^{-1}((1 - \omega)D + \omega U)$ της μεθόδου Διαδοχικής Υπερχαλάρωσης (SOR), από όπου για $\omega = 1$ προκύπτει ο επαναληπτικός πίνακας της μεθόδου

Gauss-Seidel $\mathcal{L}_1 = (D - L)^{-1}U$. Οι παραπάνω μέθοδοι είναι γνωστές ως **κλα-σικές** επαναληπτικές μέθοδοι. Για τη σύγκλιση των επαναληπτικών μεθόδων αποδεικνύεται το εξής:

Λήμμα 1.1. Έστω $A = M - N \in \mathbb{C}^{n,n}$ με A και M μη-ιδιόμορφους. Τότε, για $T = M^{-1}N$ και $c = M^{-1}b$, η επαναληπτική μέθοδος (1.4) συγκλίνει στη λύση $x = A^{-1}b$ του αρχικού γραμμικού συστήματος (1.1) για κάθε $x^{(0)}$, αν και μόνο αν, $\rho(T) < 1$.

Ισχύει ότι (Varga [41]):

Θεώρημα 1.2. Για οποιοδήποτε πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

1. Ο πίνακας σύγκρισης $\mathcal{M}(A)$ είναι ένας μη-ιδιόμορφος M -πίνακας.
2. Για κάθε $B \in \Omega(A) = \{B \in \mathbb{C}^{n,n} : \mathcal{M}(B) = \mathcal{M}(A)\}$

$$\rho(J_B) \leq \rho(|J_B|) = \rho(J_{\mathcal{M}(A)}) < 1,$$

όπου $|J_B|$ συμβολίζει τον πίνακα που έχει στοιχεία τα μέτρα των αντίστοιχων στοιχείων του J_B *. Δηλαδή, η μέθοδος Jacobi συγκλίνει για κάθε $B \in \Omega(A)$.

3. Για κάθε $B \in \Omega(A)$ και $0 < \omega < \frac{2}{1+\rho(|J_B|)}$

$$\rho(\mathcal{L}_\omega(B)) \leq \omega\rho(|J_B|) + |1 - \omega| < 1.$$

*Για ένα δοσμένο πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ ορίζουμε τον πίνακα $|A| = (|a_{ij}|) \in \mathbb{R}^{n,n}$.

Δηλαδή, η μέθοδος *SOR* συγκλίνει για κάθε $B \in \Omega(A)$ και $0 < \omega < \frac{2}{1+\rho(|J_B|)}$.

Εκτός από τις παραπάνω μεθόδους όμως συγκλίνει και η επαναληπτική μέθοδος *AOR* (ή Επιταχυμένη Μέθοδος Υπερχαλάρωσης), η οποία αποτελεί μια διπαραμετρική γενίκευση της *Jacobi* και της *SOR* και από την οποία οι κλασικές επαναληπτικές μέθοδοι προκύπτουν σαν ειδικές περιπτώσεις. Συγκεκριμένα, για τη σύγκλιση της μεθόδου, που εισήχθη από τον Hadjidimos [15], έχει αποδειχθεί το παρακάτω αποτέλεσμα (**Basic Equivalence Theorem**, Hadjidimos [16] †):

Θεώρημα 1.3. Για οποιοδήποτε πίνακα $T \in \mathbb{C}^{n,n}$ οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

1. Ο πίνακας σύγκρισης $\mathcal{M}(T')$ του $T' = I - T$ είναι ένας μη-ιδιόμορφος M -πίνακας.
2. Για κάθε $B \in \Omega(T)$, $B' = I - B$

$$\rho(J_{B'}) \leq \rho(|J_{B'}|) = \rho(J_{\mathcal{M}(T')}) < 1.$$

3. Για κάθε $B \in \Omega(T)$ και $0 < \omega < \frac{2}{1+\rho(J_{B'})}$

$$\rho(\mathcal{L}_{\omega, B'}) \leq \omega \rho(|J_{B'}|) + |1 - \omega| < 1.$$

† Για τις παρεκβαλλόμενες μεθόδους των κλασικών μεθόδων, βλέπε Hadjidimos και Yeyios [18].

4. Για κάθε $B \in \Omega(T)$ και $0 < r < \frac{2}{1+\rho(|J_{B'}|)}$

$$\rho(\mathcal{L}_{r,r,B'}) = \rho(\mathcal{L}_{r,B'}) \leq r\rho(|J_{B'}|) + |1 - r| < 1.$$

5. Για κάθε $B \in \Omega(T)$ και $0 < r < \frac{2}{1+\rho(|J_{B'}|)}$, $0 < \omega < \frac{2r}{1+\rho(|\mathcal{L}_{r,r,B'}|)}$

$$\rho(\mathcal{L}_{r,\omega,B'}) \leq \frac{\omega}{r}\rho(|\mathcal{L}_{r,r,B'}|) + |1 - \frac{\omega}{r}| < 1,$$

όπου ο

$$\mathcal{L}_{r,\omega,B'} = (D - rL)^{-1}[(1 - \omega)D + (\omega - r)L + \omega U]$$

είναι ο επαναληπτικός πίνακας της μεθόδου AOR που συνδέεται με τον B' .

Σημείωση: Ο πίνακας T του παραπάνω θεωρήματος είναι ο επαναληπτικός πίνακας του σχήματος (1.4) παρατήρηση που κάνει το αποτέλεσμα αυτό γενικότερο του αντίστοιχου της εργασίας [41].

Η χρήση τέτοιων επαναληπτικών μεθόδων, ιδέα που χρονολογείται τουλάχιστον από τα μέσα του 19ου αιώνα, έχει το πλεονέκτημα ότι ο πίνακας A δε διαφοροποιείται κατά τη διάρκεια των επαναλήψεων. Έτσι, το πρόβλημα της συσσώρευσης των σφαλμάτων στρογγύλευσης είναι λιγότερο σοβαρό για τις μεθόδους αυτές από ό,τι είναι για τις άμεσες μεθόδους, όπου ο πίνακας μεταβάλλεται κατά τη διαδικασία της επίλυσης του γραμμικού συστήματος.

Όπως φάνηκε και από τα παραπάνω η γνώση ότι ένας πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ είναι H -πίνακας εξασφαλίζει ότι επαναληπτικές μέθοδοι, όπως οι προαναφερθείσες,

έχουν ελκυστικές ιδιότητες σύγκλισης. Για το λόγο αυτό προτάθηκαν κατά καιρούς διάφορα κριτήρια, άμεσα και επαναληπτικά για την αναγνώριση της ιδιότητας του H -πίνακα σε ένα δοθέντα πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n,n}$. Στην πλειοψηφία τους τα κριτήρια αυτά είναι επαναληπτικά (βλέπε, π.χ., τις εργασίες [19] των Harada, Usui και Niki, [29] των Li, Li, Harada, Niki και Tsatsomeros, [24] των Kohno, Niki, Sawami και Gao, [27] του Li, [33] των Ojiro, Niki και Usui, [17] του Hadjidimos και [9] των Cvetković και Kostić) γιατί τα άμεσα (βλέπε, π.χ., [13] των Gao και Wang, [22] Huang, [14] των Gao και Wang, [12] των Gan και Huang) έχουν υψηλές υπολογιστικές πολυπλοκότητες. Στο σημείο αυτό θα πρέπει να αναφερθεί ότι το μόνο κριτήριο που εκμεταλλεύεται την αραιότητα του A , συνηθισμένη περίπτωση στις περισσότερες εφαρμογές, είναι αυτό που προτείνεται στο [17], όπου αναπτύχθηκε μια επέκταση της τεχνικής συμπαγούς κατατομής (profile) της εργασίας [23] των Kincaid, Reppas, Young και Grimes.

Στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάζουμε αρχικά το επαναληπτικό κριτήριο που περιλαμβάνεται στην εργασία [29], το οποίο, ως το πιο ολοκληρωμένο και μαθηματικά τεκμηριωμένο σε σχέση με τα άλλα κατά καιρούς προταθέντα, αποτέλεσε το έναυσμα για περαιτέρω μελέτη και έρευνα για την εύρεση ενός επαναληπτικού κριτηρίου που θα καλύπτει όσο το δυνατό πιο γενικές περιπτώσεις αναγνώρισης H -πινάκων. Επιπλέον, παρουσιάζεται και το επαναληπτικό κριτήριο το οποίο λαμβάνει υπόψη τη δομή του αρχικού πίνακα της εργασίας [17] καθώς και τα βασικά συμπεράσματά της. Στη συνέχεια δίνεται το κριτήριο της εργασίας [29]

ως τύπου *Jacobi Επανάληψη*[‡] (σε αντίθεση με αυτό της [17] το οποίο καθορίζεται ως τύπου *Gauss-Seidel Επανάληψη (Χωρίς Οδήγηση)*[§]). Ακολούθως, με βάση τα δυο προηγούμενα κριτήρια δίνεται ένα νέο επαναληπτικό κριτήριο τύπου *Gauss-Seidel με Μερική Οδήγηση*[¶] για H - και μη- H -πίνακες, το οποίο αποδεικνύεται ότι συγκλίνει τουλάχιστον τόσο γρήγορα όσο και το επαναληπτικό κριτήριο *Gauss-Seidel (Χωρίς Οδήγηση)* της εργασίας [17].

Στην αρχή του Κεφάλαιο 3 παρατίθενται οι τρεις αλγόριθμοι των εργασιών [29], [27] και [33], που συμβολίζονται με \mathbb{H} , \mathbb{L} και \mathbb{B} ^{||}, αντίστοιχα, από όπου με τη βοήθεια ορισμένων παραδειγμάτων, καθίσταται φανερό ότι υπάρχουν περιπτώσεις όπου οι αλγόριθμοι \mathbb{L} και \mathbb{B} δεν μπορεί να τερματίζονται σε πεπερασμένο αριθμό επαναλήψεων, όπως αυτό είχε ισχυριστεί από τους συγγραφείς των αντίστοιχων εργασιών. Εν συνεχεία, και με βάση τη θεωρία που αναπτύσσεται στο Κεφάλαιο 3 δίνεται ένα νέο, τύπου *Jacobi*, επαναληπτικό κριτήριο για την αναγνώριση H -πινάκων (Αλγόριθμος $\mathbb{A}\mathbb{H}$), από τα αρχικά των λέξεων *Algorithm* και *H-matrix*, σε ψευδοκώδικα και αποδεικνύεται σύγκλιση του σε ένα πεπερασμένο αριθμό βημάτων για **μη-αναγώγιμους** πίνακες, εκτός από μια πολύ ειδική περίπτωση. Υπενθυμίζεται ότι:

Ορισμός 1.3. Ένας πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ λέγεται **αναγώγιμος** αν υπάρχει ένας

[‡]έννοια της οποίας η σημασία θα δοθεί στη συνέχεια

[§]έννοια της οποίας η σημασία θα δοθεί στη συνέχεια

[¶]έννοια της οποίας η σημασία θα δοθεί στη συνέχεια

^{||}Θα πρέπει να σημειωθεί ότι οι συμβολισμοί \mathbb{H} και \mathbb{B} δόθηκαν από τους συγγραφείς των αντίστοιχων εργασιών ενώ ο συμβολισμός \mathbb{L} από εμάς.

πίνακας μετάθεσης $P \in \mathbb{R}^{n,n}$ τέτοιος ώστε

$$PAP^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{bmatrix},$$

όπου $A_{11} \in \mathbb{C}^{r,r}$, $1 \leq r \leq n-1$, και $O \in \mathbb{C}^{n-r,r}$ είναι ο μηδενικός πίνακας. Αν ένας τέτοιος μεταθετικός πίνακας **δεν** υπάρχει ο A λέγεται **μη-αναγώγιμος**.

Στο Κεφάλαιο 4 παρουσιάζεται ένας νέος Αλγόριθμος που αποτελεί επέκταση του Αλγορίθμου ΑΗ του Κεφαλαίου 3 (και που περιέχεται στην εργασία [2] των Α. και Hadjidimos) ώστε να καλύψει επιπλέον την αναγώγιμη περίπτωση. Για το σκοπό αυτό, εξετάζεται πλήρως η εφαρμογή του Αλγορίθμου ΑΗ στη 2×2 block αναγώγιμη περίπτωση και ακολούθως με τη βοήθεια της συνδυαστικής θεωρίας πινάκων μελετάται η γενική $p \times p$ block αναγώγιμη περίπτωση με εφαρμογή του Αλγορίθμου ΑΗ. Από την παραπάνω ανάλυση προκύπτει το νέο τύπου Jacobi επαναληπτικό κριτήριο για την αναγνώριση H -πινάκων σε ψευδοκώδικα (Αλγόριθμος ΑΗ2), ο οποίος σε αντίθεση με τον Αλγόριθμο ΑΗ εγγυάται την αναγνώριση των H - και μη- H -πινάκων καθώς και τη σύγκλιση του σε πεπερασμένο αριθμό επαναλήψεων για όλους τους αναγώγιμους (και μη-αναγώγιμους) πίνακες. Σημειώνεται τέλος ότι όλοι οι παραπάνω εισαχθέντες αλγόριθμοι υλοποιούνται μέσω αντίστοιχων Matlab συναρτήσεων και εφαρμόζονται σε μία πληθώρα αριθμητικών παραδειγμάτων ώστε να καταστεί φανερή η ευρύτητα των περιπτώσεων πινάκων που καλύπτουν.

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι αν και οι Αλγόριθμοι ΑΗ και ΑΗ2 παρουσιάζονται ως τύπου Jacobi, είναι απλό να δοθούν είτε ως τύπου Gauss-Seidel (Χωρίς Οδήγηση) είτε, ακόμη, ως Gauss-Seidel με Μερική Οδήγηση. Επιπλέον

σημειώνεται ότι στα Κεφάλαια 3 και 4 δε μας απασχολεί η αραιότητα των πινάκων η οποία εύκολα μπορεί να υλοποιηθεί με βάση τη θεωρία του Κεφαλαίου 2 και να εξεταστεί στην πράξη για το ποια από όλα τα έξι δυνατά Επαναληπτικά Κριτήρια του Αλγορίθμου AII2 είναι δυνατόν να συνιστάται στις εφαρμογές.

Κεφάλαιο 2

Ο Αλγόριθμος III και οι Προτεινόμενες Παραλλαγές του

2.1 Ο Αλγόριθμος III

Πριν προχωρήσουμε στα επαναληπτικά κριτήρια που πρόκειται να προτείνουμε και τα οποία εκμεταλλεύονται την αραιότητα του δοσμένου πίνακα, παραθέτουμε το επαναληπτικό κριτήριο της εργασίας [29] (Αλγόριθμος III) καθώς και τα βασικά αποτελέσματα της εργασίας αυτής.

Έχοντας υπόψη τον Ορισμό 1.2, βασικός στόχος της εργασίας [29] ήταν να προταθεί αλγόριθμος ο οποίος θα αναγνώριζε τον H -χαρακτήρα ενός πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ εφόσον ο πίνακας A ήταν H -πίνακας. Όπως είναι ήδη γνωστό, το να είναι ένας πίνακας A H -πίνακας είναι ισοδύναμο με την ύπαρξη ενός θετικού διαγώνιου πίνακα D (από τους άπειρους σε πλήθος $D \in \mathfrak{D}_A$ του Ορισμού 1.2) τέτοιος ώστε ο AD να είναι κατά γραμμές αυστηρά διαγώνια υπέρτερος και αντίστροφα.

Ακολουθώντας τον αλγόριθμο III στην περίπτωση που αυτός τερματίζεται, ο πίνακας D μπορεί να κατασκευαστεί από ένα πεπερασμένο γινόμενο από θετικούς διαγώνιους πίνακες

$$D^{(k)}, k = 0, 1, 2, \dots, D^{(0)} = I. \quad (2.1)$$

Για λόγους συμβολισμού θέτουμε επιπλέον

$$A^{(k)} = A^{(k-1)}D^{(k-1)}, k = 1, 2, \dots, A^{(0)} = A. \quad (2.2)$$

Για την καλύτερη κατανόηση του κριτηρίου είναι αναγκαία η εισαγωγή επιπλέον ορισμών και συμβολισμών. Ειδικότερα:

Έστω $\mathbb{N} := \{1, 2, \dots, n\}$ και

$$s_i^{(k)} = \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}^{(k)}|, i = 1(1)n, k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

Έστω επίσης

$$\mathbb{N}_1^{(k)} \equiv \mathbb{N}_1(A^{(k)}) = \left\{ i \in \mathbb{N} : |a_{ii}^{(k)}| > s_i^{(k)} \right\}, \quad (2.4)$$

και $n_1^{(k)} := n_1(A^{(k)})$ να συμβολίζει το πλήθος των στοιχείων του.

Αλγόριθμος Η.

ΕΙΣΟΔΟΣ: Ένας πίνακας $A := [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ και οποιοδήποτε $\varepsilon > 0$.

ΕΞΟΔΟΣ: $D = D^{(0)}D^{(1)} \dots D^{(k)} \in \mathfrak{D}_A$ αν ο A είναι H -πίνακας.

1. Αν $a_{ii} = 0$ για κάποιο $i \in \mathbb{N}$ ή $\mathbb{N}_1(A) = \emptyset$, “ο A δεν είναι H -πίνακας” ,

ΤΕΛΟΣ· Αλλιώς

2. Θέσε $A^{(0)} = A, D^{(0)} = I, k = 1$

3. Υπολόγισε $A^{(k)} = A^{(k-1)}D^{(k-1)} = [a_{ij}^{(k)}]$

4. Υπολόγισε $s_i^{(k)} = \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}^{(k)}|, i = 1(1)n$, Ενημέρωσε $\mathbb{N}_1^{(k)}$ και $n_1^{(k)}$

5. Αν $n_1^{(k)} = n$, “ο A είναι H -πίνακας”, ΤΕΛΟΣ· Αλλιώς

6. Θέσε $d = [d_i]$, όπου

$$d_i = \begin{cases} \frac{s_i^{(k)} + \varepsilon}{|a_{ii}^{(k)}| + \varepsilon}, & \text{αν } i \in \mathbb{N}_1^{(k)} \\ 1, & \text{αν } i \notin \mathbb{N}_1^{(k)} \end{cases}$$

7. Θέσε $D^{(k)} = \text{diag}(d)$, $k = k + 1$. Πήγαινε στο Βήμα 3.

Η θεωρητική βάση για την εφαρμοσιμότητα του Αλγορίθμου \mathbb{H} ως κριτηρίου για τους H -πίνακες εξασφαλίζεται από το θεώρημα και τα λήμματα που ακολουθούν (βλέπε αναλυτικά [29]).

Θεώρημα 2.1. Ο πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ είναι ένας H -πίνακας αν και μόνο αν ο Αλγορίθμος \mathbb{H} τερματίζεται μετά από ένα πεπερασμένο αριθμό επαναλήψεων δημιουργώντας έναν αυστηρά διαγώνια υπέρτερο πίνακα.

Λήμμα 2.2. Ο Αλγορίθμος \mathbb{H} είτε τερματίζεται είτε παράγει μια άπειρη ακολουθία από διακριτούς πίνακες $\{A^{(k)} = (a_{ij}^{(k)})\}$, τέτοιοι ώστε το $\lim_{k \rightarrow \infty} |a_{ij}^{(k)}|$, να υπάρχει για όλα τα $i, j \in \mathbb{N}$.

Λήμμα 2.3. Αν ο Αλγορίθμος \mathbb{H} παράγει την άπειρη ακολουθία των πινάκων $\{A^{(k)} = (a_{ij}^{(k)})\}$, τότε για κάθε $i \in \mathbb{N}_1^{(k)}$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [|a_{ii}^{(k)}| - s_i(A^{(k)})] = 0.$$

Σημειώσεις: 1) Ο Αλγόριθμος \mathbb{H} μπορεί να χαρακτηριστεί ως τύπου Jacobi κι αυτό γιατί τα στοιχεία της k επανάληψης είναι συναρτήσεις των στοιχείων της προηγούμενης επανάληψης $k - 1$ και μόνο. 2) Ο Αλγόριθμος \mathbb{H} δε λαμβάνει ιδιαίτερη πρόνοια για την περίπτωση όπου ο πίνακας A είναι αραιός.

2.2 Αλγόριθμος τύπου Gauss-Seidel για αραιούς πίνακες

Η μεγάλη πλειοψηφία των επαναληπτικών κριτηρίων υποθέτει, χωρίς να διευκρινίζει ευθέως, ότι ο αρχικός πίνακας που θεωρούν είναι πυκνός. Όμως, στις περισσότερες εφαρμογές οι πίνακες που απαντώνται είναι μεγάλοι και αραιοί, γεγονός που πρέπει να ληφθεί υπόψη ώστε να αποφευχθούν η αποθήκευση και οι υπολογισμοί με μηδενικά στοιχεία του πίνακα. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί με ικανοποιητικό τρόπο αν υιοθετηθεί η τεχνική συμπαγούς κατατομής (profile), που έχει εισαχθεί στην εργασία [23]. Στην εργασία [17] εισήχθησαν, με βάση την [29], τα δύο στοιχεία που αναφέρθηκαν στις Σημειώσεις της προηγούμενης παραγράφου. Δηλαδή, αφενός δόθηκε μία παραλλαγή του Αλγορίθμου III ώστε αυτός να χρησιμοποιεί στην k επανάληψη όλα τα διαθέσιμα στοιχεία της προηγούμενης $k - 1$ επανάληψης καθώς και της τρέχουσας (k) (Αλγόριθμος τύπου Gauss-Seidel) και αφετέρου να επεκτείνει την τεχνική της συμπαγούς κατατομής ώστε να είναι κατάλληλος για αραιούς πίνακες. Επιπλέον, αποδείχθηκε ότι στην περίπτωση των H -πινάκων ο Αλγόριθμος της εργασίας [17] είναι τουλάχιστον τόσο ταχύς όσο και ο Αλγόριθμος III.

Σε ένα κριτήριο επαναληπτικής μεθόδου όπως αυτά της εργασίας [29] ή της [17] ισχύει η ακόλουθη πρόταση.

Θεώρημα 2.4. *Θεωρούμε τον πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n,n}$. Ο αλγόριθμος της εργασίας [29] (και της [17]), εκτός από τις περιπτώσεις $a_{ii} = 0$ για κάποια $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ή $N_1(A) = \emptyset$, τερματίζεται μετά από έναν πεπερασμένο αριθμό επαναλήψεων αν και μόνο αν ο A είναι ένας H -πίνακας παράγοντας ένα θετικό διαγώνιο πίνακα $D \in \mathfrak{D}_A$.*

2.3 Κριτήριο Μερικής Οδήγησης Gauss-Seidel

Η ανάλυση του παρόντος κεφαλαίου βασίζεται κυρίως πάνω στα αποτελέσματα των εργασιών [29] και [17], όπως τονίστηκε· η ανάλυση και τα σχόλια πάνω στους Αλγορίθμους των εργασιών [24] και [33] και στον αλγόριθμο της εργασίας [27] θα ακολουθήσουν.

Εφεξής θα χρησιμοποιούμε τον όρο *Jacobi Επανάληψη (Κριτήριο)* για να εκφράζουμε ότι όλα τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα $D^{(k)}$ ορίζονται από τα στοιχεία του $A^{(k-1)}$ **μόνον**. Αν ο $D^{(k)}$ ορίζεται από τα στοιχεία και του $A^{(k-1)}$ και του $A^{(k)}$, τα οποία έχουν βρεθεί κατά την τρέχουσα ($k^{\text{οστη}}$) επανάληψη, τότε θα χρησιμοποιούμε την έκφραση *Gauss-Seidel Επανάληψη (Κριτήριο)*. Ο όρος Gauss-Sedel με *Μερική Οδήγηση* θα χρησιμοποιείται όταν στην αρχή κάθε $k^{\text{οστη}}$ επανάληψης οι πρώτες $n_1^{(k-1)}$ γραμμές και στήλες του $A^{(k-1)}$ καταλαμβάνονται από στοιχεία για τα οποία η αυστηρή ανισότητα στη (2.4) ισχύει. Υπ' αυτήν την έννοια, το κριτήριο στην εργασία [29] είναι δυνατό να εκφραστεί ως *Jacobi Επανάληψη*, εν αντιθέσει με αυτό στη [17] το οποίο καθορίζεται ως *Gauss-Seidel Επανάληψη (Χωρίς Οδήγηση)*, αντίστοιχα.

Υπάρχει ακόμα μια διαφορά ανάμεσα στους δυο αλγορίθμους στις εργασίες [29] και [17]. Ο πρώτος σχεδιάστηκε για πυκνούς πίνακες χωρίς καμία πρόβλεψη όσον αφορά την αραιότητα ενώ ο δεύτερος σχεδιάστηκε ακριβώς για αραιούς πίνακες, αποφεύγοντας έτσι πράξεις με μηδενικά στοιχεία. Είναι επίσης χαρακτηριστικό ότι είναι κατάλληλος και για πυκνούς πίνακες. Ένας από τους βασικούς στόχους αυτού το κεφαλαίου είναι και η ανάπτυξη Επεκτεταμένων Συμπαγών Μετωπικών (*Extended Compact Profile*) Επαναληπτικών Κριτηρίων

για H -πίνακες, και για μια κατηγορία μη- H -πινάκων, και για τα τρία προαναφερθέντα επαναληπτικά κριτήρια.

Για τον Αλγόριθμο III της εργασίας [29] θεωρούμε

$$s_i^{(k)} = s_i(A^{(k)}) = \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}^{(k)}|, \quad i = 1(1)n, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

και όλα τα $r_i(A^{(k)})$ πηλίκα ορίζονται από τις εκφράσεις

$$r_i(A^{(k)}) = \frac{s_i(A^{(k-1)}) + \varepsilon}{|a_{ii}^{(k-1)}| + \varepsilon} (< 1), \quad i \in N_1^{(k-1)}, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

όπου ε είναι μια “μικρή” θετική σταθερά. Στη συνέχεια, κάθε πηλίκο $r_i(A^{(k)})$, $i \in N_1^{(k-1)}$, πολλαπλασιάζει τα στοιχεία της αντίστοιχης $i^{\text{οστης}}$ στήλης του $A^{(k-1)}$ για να σχηματιστεί ο $A^{(k)}$. Συγκεκριμένα,

$$a_{ji}^{(k)} = r_i(A^{(k)})a_{ji}^{(k-1)}, \quad i \in N_1^{(k-1)}, \quad j = 1(1)n.$$

Επομένως, ο πίνακας $D^{(k)}$ της (2.1) είναι ο μοναδιαίος πίνακας με τη διαφορά ότι οι $i^{\text{οστες}}$ μονάδες, με $i \in N_1^{(k-1)}$, αντικαθίστανται από τα στοιχεία

$$d_{ii}^{(k)} = r_i(A^{(k)}), \quad i \in N_1^{(k-1)}.$$

Από την άλλη μεριά ο Αλγόριθμος της εργασίας [17] συνεχίζεται κάπως διαφορετικά. Για να αντιστοιχεί ο συμβολισμός μας με αυτόν στην [29], πρέπει να αλλάξουμε ελάχιστα αυτόν της [17]. Κάθε επανάληψη $k = 1, 2, 3, \dots$, λέγεται εξωτερική επανάληψη και η αντιμετώπιση κάθε γραμμής (και της αντίστοιχης στήλης) του $A^{(k-1)}$, για $i = 1(1)n$, θεωρείται ως μια εσωτερική επανάληψη. Μετά από την ολοκλήρωση της $i^{\text{οστης}}$ εσωτερικής επανάληψης της $k^{\text{οστης}}$ εξωτερικής, όλες οι προηγούμενες ποσότητες χαρακτηρίζονται από το ζεύγος (k, i) .

Οπότε, για κάθε $k = 1, 2, 3, \dots$, ο θετικός διαγώνιος πίνακας $D^{(k,i)}$ και ο πίνακας $A^{(k,i)}$ ορίζονται ως εξής:

$$D^{(k,i)} = D^{(k,i-1)} D_i^{(k,i)}, \quad i = 1(1)n, \quad D^{(k,0)} = I, \quad D^{(k,n)} = D^{(k)}$$

όπου $D_i^{(k,i)}$ είναι ο μοναδιαίος πίνακας εκτός από την ισοστή θέση $i \in N_1^{(k,i-1)}$, που δίνεται από το λόγο

$$d_{ii}^{(k,i)} = r(A^{(k,i)}) = \frac{s_i(A^{(k,i-1)}) + \varepsilon}{|a_{ii}^{(k,i-1)}| + \varepsilon}, \quad \text{αν } i \in N_1^{(k,i-1)}.$$

Είναι λοιπόν φανερό ότι οι πίνακες $A^{(k,i)}$ μπορούν να οριστούν με αρκετούς τρόπους. Για παράδειγμα,

$$A^{(k,i)} = A^{(k-1)} D^{(k,i)} = A^{(k-1)} D^{(k,i-1)} D_i^{(k,i)} = A^{(k,i-1)} D_i^{(k,i)}, \dots$$

και

$$A^{(k,0)} = A^{(k-1)}, \quad A^{(0)} = A, \quad A^{(k,n)} = A^{(k)}.$$

Ο Αλγόριθμος στην εργασία [17] συγκλίνει τουλάχιστον τόσο γρήγορα όσο και ο Αλγόριθμος \mathbb{H} στην [29]. Η απόδειξη, η οποία δε δίνεται πλήρως στη [17], ακολουθεί στο επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 2.5. *Κάτω από τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος 2.4 και τους συμβολισμούς που θεωρήσαμε, ο Αλγόριθμος της εργασίας [17] συγκλίνει τουλάχιστον τόσο γρήγορα όσο και ο Αλγόριθμος \mathbb{H} , που παρουσιάστηκε στην [29]. Επιπλέον, ο Αλγόριθμος της [17] τερματίζεται σε πεπερασμένο αριθμό επαναλήψεων αν και μόνον αν ο πίνακας A είναι ένας H -πίνακας, οπότε παράγει ένα θετικό διαγώνιο πίνακα $D \in \mathfrak{D}_A$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι για κάποιο k , ο $A^{(k)}$ του Αλγόριθμου III στην [29] είναι ταυτοτικά ο ίδιος με τον $A^{(k)} = A^{(k,n)}$ της εργασίας [17], εφεξής $A_J^{(k)}$ και $A_{GS}^{(k)}$, αντίστοιχα, έτσι ώστε

$$a_{ij,J}^{(k)} = a_{ij,GS}^{(k)}, \quad i, j = 1(1)n,$$

το οποίο ισχύει τουλάχιστον για $k = 0$, και όλες οι ποσότητες που σχετίζονται με τους πίνακες αυτούς θα είναι ταυτοτικά οι ίδιες. Έστω ότι $i_1, i_2 \in N_{1,J}^{(k)} \left(\equiv N_{1,GS}^{(k)} \right)$ είναι τα μικρότερα διαδοχικά i , με $1 \leq i_1 < i_2 \leq n$, για τα οποία $a_{i_2 i_1, J}^{(k)} \left(= a_{i_2 i_1, GS}^{(k)} \right) \neq 0$. (Παρατήρηση: Η περίπτωση $n_{1,J}^{(k)} = 1$ θα εξεταστεί αφού ολοκληρωθεί η περίπτωση $n_{1,J}^{(k)} \geq 2$.) Τότε, στο τέλος της $(k+1)$ οστής *Jacobi Επανάληψης* τα στοιχεία της $i_1^{οστής}$ και $i_2^{οστής}$ στήλης του $A_J^{(k+1)}$ θα είναι $a_{ji,J}^{(k+1)} = a_{ji,J}^{(k)} r_i(A_J^{(k+1)})$, $r_i(A_J^{(k+1)}) = \frac{s_i(A_J^{(k)}) + \varepsilon}{|a_{ii,J}^{(k)}| + \varepsilon} (< 1)$, $j = 1(1)n$, $i = i_1, i_2$.

Για την *Gauss-Seidel Επανάληψη* μετά την $i_1^{οστή}$ εσωτερική επανάληψη τα στοιχεία της $i_1^{οστής}$ στήλης είναι ακριβώς τα ίδια με τα αντίστοιχα της *Jacobi Επανάληψης* προηγουμένως, δηλαδή

$$a_{ji_1,GS}^{(k+1,i_1)} = a_{ji_1,GS}^{(k+1,i_1-1)} r_{i_1}(A_{GS}^{(k+1,i_1)}), \quad j = 1(1)n,$$

όπου

$$a_{ji_1,GS}^{(k+1,i_1)} = a_{ji_1,J}^{(k+1)}, \quad r_{i_1}(A_{GS}^{(k+1,i_1)}) = r_{i_1}(A_J^{(k+1)}).$$

Αντίθετα, τα στοιχεία της $i_2^{οστής}$ στήλης αλλάζουν διότι το στοιχείο στην (i_2, i_1) θέση του $A_{GS}^{(k+1,i_1)}$ έχει αλλάξει. Το γεγονός αυτό ορίζει τις ποσότητες s_{i_2} και r_{i_2} ως

$$s_{i_2}(A_{GS}^{(k+1,i_2-1)}) = s_{i_2}(A_{GS}^{(k+1,i_1)}) = s_{i_2}(A_{GS}^{(k+1,i_1-1)}) - |a_{i_2 i_1, GS}^{(k+1,i_1-1)}| + |a_{i_2 i_1, GS}^{(k+1,i_1)}|,$$

$$r_{i_2}(A_{GS}^{(k+1,i_2)}) = \frac{s_{i_2}(A_{GS}^{(k+1,i_2-1)}) + \varepsilon}{|a_{i_2 i_2, GS}^{(k+1,i_2-1)}| + \varepsilon}.$$

Άρα $|a_{i_2 i_1, GS}^{(k+1, i_1)}| < |a_{i_2 i_1, GS}^{(k+1, i_1-1)}|$ και

$$s_{i_2}(A_J^{(k+1)}) = s_{i_2}(A_{GS}^{(k+1, i_1)}) = s_{i_2}(A_{GS}^{(k+1, i_2-1)}) < s_{i_2}(A_J^{(k)})$$

από όπου προκύπτει ότι $r_{i_2}(A_{GS}^{(k+1, i_2)}) < r_{i_2}(A_J^{(k+1)})$. Επομένως οι απόλυτες τιμές όλων των μη μηδενικών στοιχείων της $i_2^{\text{οστης}}$ στήλης του $A_{GS}^{(k+1, i_2)}$ θα είναι αυστηρά μικρότερες από τις απόλυτες τιμές των αντίστοιχων στοιχείων του $A_J^{(k+1)}$. (Παρατήρηση: Στην περίπτωση της *Gauss-Seidel Επανάληψης*, συνεχίζοντας από την $i_1^{\text{οστη}}$ εσωτερική επανάληψη στην $i_2^{\text{οστη}}$, αν συναντάμε ένα δείκτη $i' \in (i_1, i_2)$ τέτοιον ώστε $n_{1, GS}^{(k+1, i')} = n_{1, GS}^{(k+1, i_1)} + 1$, τότε ο i' παίζει το ρόλο του i_2 κ.λπ.) Επομένως,

$$N_{1, J}^{(k+1)} \subseteq N_{1, GS}^{(k+1)} \quad \text{και} \quad n_{1, J}^{(k+1)} \leq n_{1, GS}^{(k+1)}.$$

Αν $n_{1, J}^{(k)} = 1$ και i_1 είναι ο δείκτης της γραμμής για τον οποίο η αυστηρή ανισότητα στη (2.4) ισχύει, τότε μετά την εκτέλεση της $i_1^{\text{οστης}}$ εσωτερικής επανάληψης της $(k+1)^{\text{οστης}}$ εξωτερικής της *Gauss-Seidel Επανάληψης* η κατάσταση θα είναι η ίδια όπως πριν. Οπότε προκύπτουν δυο περιπτώσεις: α) Καμιά από τις επακόλουθες γραμμές δεν ικανοποιεί την ανισότητα στη (2.4). Προφανώς στην περίπτωση αυτή, στο τέλος της $(k+1)^{\text{οστης}}$ εξωτερικής επανάληψης θα ισχύουν $A_{GS}^{(k+1)} = A_J^{(k+1)}$, και $N_{1, J}^{(k+1)} \equiv N_{1, GS}^{(k+1)}$. β) Τουλάχιστον μια επακόλουθη γραμμή ικανοποιεί τη (2.4). Τότε, συμβολίζουμε με i_2 το μικρότερο δείκτη αυτής της γραμμής. Όπως είναι φανερό βρισκόμαστε ξανά στη περίπτωση, όπως αυτή που εξετάσαμε στην αρχή της απόδειξης. \square

Το Κριτήριο *Μερικής Οδήγησης Gauss-Seidel* ακολουθεί το πνεύμα του προηγούμενου κριτηρίου της *Gauss-Seidel*, στο οποίο ενσωματώνεται η ιδέα της

μερικής οδήγησης της κλασικής απαλοιφής του Gauss. Συγκεκριμένα, θεωρούμε ότι όλες οι $n_1(A)$ γραμμές που ικανοποιούν την ανισότητα στη (2.4), και αντιστοιχούν στους δείκτες

$$1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{n_1,PPGS} \leq n$$

και οι αντίστοιχες στήλες τους, αντιμετωπίζονται με σκοπό να καταλάβουν τις πρώτες $n_{1,PPGS}^{(1,0)} \equiv n_{1,PPGS}$ θέσεις. Στον προηγούμενο συμβολισμό χρησιμοποιούμε το επιπρόσθετο σύμβολο PP καταδεικνύοντας με το τρόπο αυτό τη *Μερική Οδήγηση (Partial Pivoting)*.

Οι διάφορες εναλλαγές που χρειάζεται να γίνουν, καταγράφονται όπως και στην περίπτωση της Μερικής Οδήγησης στη κλασική Απαλοιφή του Gauss, σε ένα n -διάστατο διάνυσμα, που καλούμε **index**. Αυτό υλοποιείται ως εξής: Στην αρχή ο **index**(A) περιέχει στις n θέσεις του τους αριθμούς από 1 έως n σε αύξουσα σειρά. Στη συνέχεια και πριν εκτελεστεί η πρώτη εξωτερική επανάληψη, οι αριθμοί $i_1, i_2, \dots, i_{n_1,PPGS}^{(1,0)}$ αντιμετωπίζονται με τους αριθμούς $1(1)n_{1,PPGS}^{(1,0)}$, αντίστοιχα, έτσι ώστε οι πρώτοι να καταλαμβάνουν τις $n_{1,PPGS}^{(1,0)}$ πρώτες θέσεις του διανύσματος αυτού. Η πρώτη εσωτερική επανάληψη επεξεργάζεται την i_1 γραμμή (και στήλη) του πίνακα, η οποία βρίσκεται τώρα στη πρώτη θέση του **index** $_{PPGS}^{(1,0)}$. Ας υποθέσουμε ότι κατά την ολοκλήρωση της πρώτης εσωτερικής επανάληψης βρίσκεται ένας δείκτης j ($\notin N_{1,PPGS}^{(1,0)}$) να ικανοποιεί την $|a_{jj,PPGS}^{(1,i_1)}| > \sum_{l=1, l \neq j}^n |a_{lj,PPGS}^{(1,i_1)}|$. Ο δείκτης αυτός j αντιμετωπίζεται με τον αντίστοιχο στην $n_{1,PPGS}^{(1,0)} + 1$ θέση του διανύσματος **index** $_{PPGS}^{(1,0)}$ το οποίο μετονομάζεται σε **index** $_{PPGS}^{(1,1)}$. Το πλήθος $n_{1,PPGS}^{(1,0)}$ αυξάνεται κατά ένα, ο αριθμός

j ενσωματώνεται στο σύνολο $N_{1,PPGS}^{(1,0)}$, και οι δυο ποσότητες μετονομάζονται κατάλληλα. (Παρατήρηση: Αν βρούμε περισσότερους του ενός δείκτες, έστω r , που ικανοποιούν τη (2.4) τότε αυτοί οι r δείκτες αντιμετωπίζονται κατάλληλα, έτσι ώστε να καταλάβουν τις επόμενες r θέσεις στο $\mathbf{index}_{PPGS}^{(1,1)}$ διάνυσμα.) Προφανώς, αν $j > i_1$ η μέθοδος δε διαφέρει ουσιαστικά από την *Gauss-Seidel Επανάληψη*, διότι και οι δυο επεξεργάζονται τη γραμμή (και στήλη) j κατά τη διάρκεια της πρώτης εξωτερικής επανάληψης. Παρόλα αυτά, αν $j < i_1$ η *Gauss-Seidel Επανάληψη* της εργασίας [17] επεξεργάζεται τη γραμμή (και στήλη) j στη δεύτερη εξωτερική επανάληψη ενώ η *Gauss-Seidel Επανάληψη με Μερική Οδήγηση πράγματι* επεξεργάζεται τη γραμμή αυτή στην πρώτη εξωτερική επανάληψη. Το γεγονός αυτό έχει το προφανές πλεονέκτημα της αύξησης της ταχύτητας σύγκλισης ανά επανάληψη επειδή μετά την ολοκλήρωση των πρώτων εσωτερικών επαναλήψεων και στις δυο μεθόδους έχουμε

$$N_{1,GS}^{(1,i_1)} \subseteq N_{1,PPGS}^{(1,1)} \quad \text{και} \quad n_{1,GS}^{(1,i_1)} \leq n_{1,PPGS}^{(1,1)}.$$

Στη συνέχεια, μια παρόμοια εργασία πραγματοποιείται με τη δεύτερη εσωτερική επανάληψη με το δείκτη i_2 έως ότου πραγματοποιηθεί και η τελευταία εσωτερική επανάληψη που αντιστοιχεί στον τελευταίο νέο δείκτη που έχει αποθηκευτεί στο, πιθανόν νέο, $\mathbf{index}_{PPGS}^{(1,n_1)}$ διάνυσμα. Ακολουθώντας τη μέθοδο της *Μερικής Οδήγησης* έχουμε μετά το τέλος της πρώτης εξωτερικής επανάληψης ότι

$$N_{1,GS}^{(1,n)} \subseteq N_{1,PPGS}^{(1,n)} \quad \text{και} \quad n_{1,GS}^{(1,n)} \leq n_{1,PPGS}^{(1,n)}.$$

Επαγωγικά, οι παραπάνω σχέσεις ισχύουν αν ο άνω δείκτης 1 αντικατασταθεί από οποιοδήποτε $k \geq 1$. Επομένως μόλις αποδείξαμε το ακόλουθο Θεώρημα:

Θεώρημα 2.6. Κάτω από τις υποθέσεις του Θεωρήματος 2.5 και σύμφωνα με τους συμβολισμούς που εισήχθησαν ισχύει ότι το Κριτήριο Μερικής Οδήγησης *Gauss-Seidel* συγκλίνει τουλάχιστον τόσο γρήγορα όσο και το αντίστοιχο της *Gauss-Seidel*. Επιπλέον ο αντίστοιχος Αλγόριθμος τερματίζεται σε πεπερασμένο αριθμό επαναλήψεων αν και μόνο αν ο A είναι ένας H -πίνακας, και παράγει ένα θετικό πίνακα $D \in \mathfrak{D}_A$.

Στις δυο επόμενες παραγράφους θα ασχοληθούμε με τον τρόπο προσδιορισμού ενός H -πίνακα. Ο προσδιορισμός ενός μη- H -πίνακα θα δοθεί αμέσως μετά.

2.4 Οι Τρεις Επαναληπτικοί Αλγόριθμοι

Στην προηγούμενη παράγραφο, και συγκεκριμένα στα Θεωρήματα 2.5 και 2.6, δείξαμε ότι ο Αλγόριθμος της *Gauss-Seidel* συγκλίνει γρηγορότερα ανά επανάληψη από τον αντίστοιχο της *Jacobi* και ο Αλγόριθμος της *Gauss-Seidel* με Μερική Οδήγηση γρηγορότερα από αυτόν της *Gauss-Seidel*. Στο υπόλοιπο της παραγράφου θα περιγράψουμε τα τρία μέρη των Αλγορίθμων *Jacobi*, *Gauss-Seidel* και Μερική Οδήγηση *Gauss-Seidel*, όπου τα δυο πρώτα μέρη είναι κοινά και για τους τρεις. Για το λόγο αυτό οι κύριες διαφορές τους διακρίνονται στο τρίτο μέρος. Προς το παρόν θα επικεντρωθούμε στο ερώτημα πότε ένας δοσμένος πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ είναι ένας H -πίνακας. Σε γενικές γραμμές, θα ακολουθήσουμε την κύρια ιδέα πίσω από τον Αλγόριθμο III της εργασίας [29], όπου σημειώνεται ότι οι Αλγόριθμοι στις εργασίες [24], [27] και [33] είναι σχεδόν στην ίδια λογική. Θα πρέπει επίσης να σημειωθεί ότι εγκαταλείπουμε, προς το

παρόν, την ιδέα της εκμετάλλευσης οποιασδήποτε αραιότητας. Το θέμα αυτό θα επεξεργαστούμε στην επόμενη παράγραφο όπου και θα αναπτυχθεί περαιτέρω η κύρια ιδέα της [17].

ΜΕΡΟΣ Ι

Για $i = 1(1)n$ κάνε

Αν $a_{ii} = 0$ τότε “ο A ΔΕΝ είναι H -πίνακας”: ΤΕΛΟΣ.

τέλοςΑν

τέλοςΓια

Πήγαινε ΜΕΡΟΣ ΙΙ

ΜΕΡΟΣ ΙΙ

$n_1 = 0$

Για $i = 1(1)n$ κάνε

Υπολόγισε $s_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$

Αν $|a_{ii}| > s_i$ τότε $n_1 = n_1 + 1$

τέλοςΑν

τέλοςΓια

Αν $n_1 = n$ τότε “ο A ΕΙΝΑΙ H -πίνακας”: ΤΕΛΟΣ.

τέλοςΑν

Αν $n_1 = 0$ τότε “ο A ΔΕΝ είναι H -πίνακας”: ΤΕΛΟΣ.

τέλοςΑν

Πήγαινε ΜΕΡΟΣ ΙΙΙ

ΜΕΡΟΣ ΙΙΙ (του Jacobi Επαναληπτικού Κριτηρίου)

Θέσε $diag_i = 1, i = 1(1)n$

$N_1 = \emptyset$

Για $i = 1(1)n$ κάνε

Αν $|a_{ii}| > s_i$ τότε $N_1 = N_1 \cup \{i\}$

τέλοςΑν

τέλοςΓια

Για $k = 1(1)maxiter$ κάνε

Για $i = 1(1)n$ κάνε

**Αν $i \in N_1$ τότε Υπολόγισε $d_i = \frac{s_i + \varepsilon}{|a_{ii}| + \varepsilon} \cdot diag_i = diag_i d_i \cdot |a_{ji}| = |a_{ji}| d_i,$
 $j = 1(1)n$**

τέλοςΑν

τέλοςΓια

Ενημέρωσε $s_i, i = 1(1)n$

Για $i = 1(1)n$ κάνε

Αν $i \notin N_1$ τότε

Αν $|a_{ii}| > s_i$ τότε $n_1 = n_1 + 1 \cdot N_1 = N_1 \cup \{i\}$

Αν $n_1 = n$ τότε “ο A ΕΙΝΑΙ H -πίνακας”: ΤΕΛΟΣ.

τέλοςΑν

τέλοςΑν

τέλοςΑν

τέλοςΓια

τέλοςΓια

“Αναποτελεσματικός: μείωσε ε ή αύξησε *maxiter*”: **ΤΕΛΟΣ**.

ΜΕΡΟΣ ΙΙΙ (του Κριτηρίου Gauss – Seidel Επανάληψης)

Θέσε $diag_i = 1, i = 1(1)n$

$N_1 = \emptyset$

Για $i = 1(1)n$ **κάνε**

Αν $|a_{ii}| > s_i$ **τότε** $N_1 = N_1 \cup \{i\}$

τέλοςΑν

τέλοςΓια

Για $k = 1(1)maxiter$ **κάνε**

Για $i = 1(1)n$ **κάνε**

Αν $i \in N_1$ **τότε** Υπολόγισε $d_i = \frac{s_i + \varepsilon}{|a_{ii}| + \varepsilon} \cdot diag_i = diag_i d_i; |a_{ji}| = |a_{ji}| d_i,$
 $j = 1(1)n$

Για $j = 1(1)n$ (και $j \neq i$) **κάνε**

Ενημέρωσε $s_j = \sum_{l \neq j} |a_{jl}|$

Αν $j \notin N_1$ **τότε**

Αν $|a_{jj}| > s_j$ **τότε** $n_1 = n_1 + 1 \cdot N_1 = N_1 \cup \{j\}$

Αν $n_1 = n$ **τότε** “ο A ΕΙΝΑΙ H -πίνακας”: **ΤΕΛΟΣ**.

τέλοςΑν

τέλοςΑν

τέλοςΑν

τέλοςΓια

τέλοςΑν

τέλοςΓια

τέλοςΓια

“Αναποτελεσματικός: μείωσε ε ή αύξησε *maxiter*”: **ΤΕΛΟΣ**.

ΜΕΡΟΣ ΙΙΙ (της *Gauss – Seidel* Επανάληψης με Μερική Οδήγηση)

Θέσε $diag_i = 1, i = 1(1)n$

Θέσε $index_i = i, i = 1(1)n$

Θέσε $l = 0$

Για $i = 1(1)n$ κάνε

Αν $|a_{ii}| > s_i$ τότε $l = l + 1$. Άλλαξε τα περιεχόμενα $index_i$ και $index_l$

τέλοςΑν

τέλοςΓια

Για $k = 1(1)maxiter$ κάνε

$i = 1$

Εφόσον $i \leq n_1$ κάνε

$j = index_i$. Υπολόγισε $d_j \frac{s_j + \varepsilon}{|a_{jj}| + \varepsilon} \cdot diag_j = diag_j d_j$

$|a_{mj}| = |a_{mj}| d_j, m = 1(1)n$

$l = n_1 + 1$

Για $m = l(1)n$ κάνε

Θέσε $p = index_m$. Ενημέρωσε s_p

Αν $|a_{pp}| > s_p$ τότε $n_1 = n_1 + 1 \cdot N_1 = N_1 \cup \{p\}$.

Άλλαξε τα περιεχόμενα $index_{n_1}$ και $index_m$

Αν $n_1 = n$ τότε “ο A ΕΙΝΑΙ H -πίνακας”: **ΤΕΛΟΣ**.

τέλοςΑν

τέλοςΑν

τέλοςΓια

$i = i + 1$

τέλοςΕφόσον

τέλοςΓια

“Αναποτελεσματικός: μείωσε ε ή αύξησε *maxiter* ”: **ΤΕΛΟΣ**.

Στην επόμενη παράγραφο παρουσιάζουμε τις βασικές ιδέες για την ανάπτυξη της Επεκτεταμένης Συμπαγούς Μετωπικής (*Extended Compact Profile*) Επαναληπτικής Μεθόδου (Κριτηρίου) (και ειδικότερα) για το *Gauss-Seidel* Επαναληπτικό Κριτήριο (Αλγόριθμος) για H -πίνακες το οποίο και θα αποτελέσει μια περαιτέρω επέκταση του κριτηρίου της εργασίας [17]. Θα γίνει επίσης φανερό ότι το κριτήριο αυτό είναι κατάλληλο για μεγάλους και αραιούς πίνακες και δεν έχει τα μειονεκτήματα άλλων γνωστών μέχρι σήμερα αντίστοιχων μεθόδων.

2.5 Ανάπτυξη Αλγοριθμικού Υλικού

Όπως αναφέραμε και προηγουμένως η ανάλυση μας επεκτείνει τη μέθοδο της εργασίας [17] η οποία με τη σειρά της αποτελεί γενίκευση της αντίστοιχης στην εργασία [23]. Για την καλύτερη κατανόηση του περιεχομένου της παραγράφου και των στοιχείων που εισάγονται, αυτά παρατίθενται μαζί με ένα επεξηγηματικό παράδειγμα. Γι' αυτό θεωρούμε έναν πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ με $n = 5$ με μη-δομημένη μη-μηδενική διάταξη των στοιχείων του. Συμβολικά αυτός παρι-

σπάνεται παρακάτω στη μορφή που ακολουθεί όπου τα μη-μηδενικά του στοιχεία σημειώνονται με \times .

	1	2	3	4	5
1	\times				\times
2	\times	\times	\times	\times	
3		\times	\times		
4			\times	\times	\times
5	\times	\times	\times		\times

Καταρχάς, ακολουθώντας την [23] δημιουργούμε τρία διανύσματα ανάλογα με αυτά της εργασίας αυτής. Οι βασικές διαφορές είναι ότι θεωρούμε το μέτρο των μη-μηδενικών στοιχείων αντί των ίδιων των στοιχείων και επίσης ότι τα εξετάζουμε κατά στήλες αντί κατά γραμμές.

Έστω, λοιπόν, $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ ένας δοσμένος πίνακας που είναι αραιός και έχει, εν γένει, μια μη-δομημένη διάταξη των μηδενικών στοιχείων του. Ακολουθώντας, κυρίως την εργασία [17], θεωρούμε, πέρα των τριών της εργασίας [23], επτά συνολικά διανύσματα. Συγκεκριμένα:

ι) Ένα διάνυσμα, το οποίο συμβολίζουμε με \mathbf{ac} , με στοιχεία τις απόλυτες τιμές των μη μηδενικών στοιχείων του δοσμένου πίνακα, $|a_{ij}| \neq 0$, $i, j = 1(1)n$, ως προς στήλη με φυσική ταξινόμηση από την πάνω αριστερή ως τη κάτω δεξιά γωνία. Έστω ότι nc είναι το πλήθος τους, το οποίο δίνει επίσης και το μέγεθος του διανύσματος \mathbf{ac} . Άρα στην περίπτωση του παραπάνω πίνακα $nc = 15$ και το διάνυσμα \mathbf{ac} θα είναι το εξής:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
\mathbf{ac}	$ a_{11} $	$ a_{21} $	$ a_{51} $	$ a_{22} $	$ a_{32} $	$ a_{52} $	$ a_{23} $	$ a_{33} $	$ a_{43} $	$ a_{53} $	$ a_{24} $	$ a_{44} $	$ a_{15} $	$ a_{45} $	$ a_{55} $

ii) Ένα διάνυσμα \mathbf{iar} μεγέθους nc , του οποίου κάθε στοιχείο είναι τέτοιο ώστε ο \mathbf{iar}_i , $i = 1(1)n$, υποδηλώνει τη στήλη όπου βρίσκεται το \mathbf{ac}_i . Έτσι, είτε από τον πίνακα A ή το διάνυσμα \mathbf{ac} , το διάνυσμα \mathbf{iar} θα είναι το ακόλουθο:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
\mathbf{iar}	1	2	5	2	3	5	2	3	4	5	2	4	1	4	5

iii) Ένα διάνυσμα \mathbf{ic} μεγέθους $n + 1$ του οποίου κάθε στοιχείο καθορίζει τη θέση στο διάνυσμα \mathbf{ac} που καταλαμβάνεται από το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο της αντίστοιχης στήλης, με $\mathbf{ic}_1 = 1$ και $\mathbf{ic}_{n+1} = nc + 1$. Προφανώς, οι διαφορές $\mathbf{ac}_{i+1} - \mathbf{ac}_i$, $i = 1(1)n$, δίνουν το πλήθος των μη μηδενικών στοιχείων στην $i^{\text{οστη}}$ στήλη του A .

Στην περίπτωση μας λοιπόν έχουμε:

	1	2	3	4	5	6
\mathbf{ic}	1	4	7	11	13	16

Από το \mathbf{ic} παραπάνω, $\mathbf{ic}(3) = 7$ υποδηλώνει ότι το πρώτο μη-μηδενικό στοιχείο της 3ης στήλης του A μπορεί να βρεθεί στο $\mathbf{ac}(7)$ και, επιπρόσθετα, επειδή $\mathbf{iar}(7) = 2$ υποδηλώνει ότι το στοιχείο αυτό ανήκει στη 2η γραμμή του A . Έτσι το στοιχείο $|a_{23}|$ είναι όντως το στοιχείο $\mathbf{ac}(7)$. Επιπλέον, από το \mathbf{ic} έχουμε ότι για $i = 3$, $\mathbf{ic}(4) - \mathbf{ic}(3) = 11 - 7 = 4$, δηλ. τα μη-μηδενικά στοιχεία της 3ης στήλης του A είναι τέσσερα. Τα μέτρα τους μπορούν να βρεθούν στα $\mathbf{ac}(7)$, $\mathbf{ac}(8)$, $\mathbf{ac}(9)$ και $\mathbf{ac}(10)$, αντίστοιχα, και τα στοιχεία αυτά ανήκουν στις γραμμές $\mathbf{iar}(7) = 2$, $\mathbf{iar}(8) = 3$, $\mathbf{iar}(9) = 4$ και $\mathbf{iar}(10) = 5$ του A . Αυτά είναι πράγματι τα στοιχεία $|a_{23}|$, $|a_{33}|$, $|a_{43}|$ και $|a_{53}|$.

iv) Ένα διάνυσμα **idiagc** μεγέθους n . Η συνιστώσα **idiagc** _{i} , $i = 1(1)n$, ορίζει τη θέση που έχει το στοιχείο $|a_{ii}|$ ανάμεσα στις συνιστώσες **ic** _{i} (1) **ic** _{$i+1$} - 1, του **ac** ή διαφορετικά τη θέση που έχει το $|a_{ii}|$ στο τμήμα του **ac** που περιέχει τα μη-μηδενικά στοιχεία της αντίστοιχης στήλης. Συγκεκριμένα:

	1	2	3	4	5
idiagc	1	1	2	2	3

Έτσι, **idiagc**(4) = 2, υποδηλώνει ότι το 2ο στοιχείο μεταξύ των συνιστωσών **ic**(4) = 11 και **ic**(5) - 1 = 13 - 1 = 12 του **ac** είναι το ζητούμενο διαγώνιο στοιχείο. Έτσι, το 2ο στοιχείο 12 υπονοεί ότι το διαγώνιο στοιχείο $|a_{44}|$ είναι η 12η συνιστώσα του **ac**.

v) Ένα διάνυσμα **sumr** μεγέθους n , αρχικά μηδενικό, τέτοιο ώστε **sumr** _{i} , $i = 1(1)n$, να περιέχει το τρέχον $\sum_{j=1, j \neq i, |a_{ij}| \neq 0}^n |a_{ij}|$. Στην περίπτωση μας το διάνυσμα **sumr** έχει $n = 5$ συνιστώσες και είναι αρχικά το διάνυσμα:

	1	2	3	4	5
sumr	0	0	0	0	0

vi) Ένα διάνυσμα **boole**, με n συνιστώσες, καθεμιά οι οποίες λαμβάνουν τιμές 1 ή 0. Εισάγεται στο **ΜΕΡΟΣ II** ή στην αρχή του **ΜΕΡΟΥΣ III**. Αρχικά, οι συνιστώσες τίθενται ίσες με τις τιμές 1 ή 0 ανάλογα με το αν η αντίστοιχη γραμμή είναι αυστηρά διαγώνια υπέρτερη ή όχι. Κατά τη διάρκεια της εκτέλεσης του **ΜΕΡΟΥΣ III** του Αλγορίθμου, **boole** _{i} = 1 αν και μόνον αν $|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i, |a_{ij}| \neq 0}^n |a_{ij}|$. Αν ο A είναι ένας H -πίνακας όλα τα στοιχεία του έχουν τελικά την τιμή 1.

Στην περίπτωση μας το **boole** έχει $n = 5$ συνιστώσες. Αν, για παράδειγμα, αυστηρά διαγώνια υπέρτερες γραμμές είναι η πρώτη, τρίτη και πέμπτη γραμμή, τότε το **boole** θα έχει τη μορφή:

	1	2	3	4	5
boole	1	0	1	0	1

vii) Ένα διάνυσμα **diag** με n στοιχεία. Αρχικά, όλα αυτά είναι ίσα με 1. Το διάνυσμα αυτό ενημερώνεται μετά από κάθε επανάληψη και αν ο A είναι ένας H -πίνακας και ο Αλγόριθμος τερματίζεται επιτυχώς, περιέχει τα στοιχεία του θετικού διαγώνιου πίνακα $D \in \mathfrak{D}_A$ έτσι ώστε ο AD είναι κατά γραμμές αυστηρά διαγώνια υπέρτερος.

	1	2	3	4	5
diag	1	1	1	1	1

Επιπρόσθετα, θεωρούμε ακόμα ένα διάνυσμα.

viii) Στην περίπτωση του *Gauss-Seidel με Μερική Οδήγηση Επαναληπτικού Κριτηρίου*, θεωρούμε ένα διάνυσμα **index** μεγέθους n στην αρχή του **ΜΕΡΟΥΣ ΙΙΙ**. Αρχικά περιέχει στις n θέσεις τους αριθμούς από 1 έως n με αύξουσα σειρά. Στη συνέχεια, οι n_1 πρώτες θέσεις του τίθενται ίσες με τους δείκτες αυστηρά διαγώνια υπέρτερων γραμμών, πραγματοποιώντας κατάλληλες αντιμεταθέσεις σ' αυτό χρησιμοποιώντας τα περιεχόμενα του διανύσματος **boole**. Τότε, για κάθε εσωτερική επανάληψη μιας εξωτερικής επανάληψης για την οποία μια “νέα” γραμμή (γραμμές) βρίσκεται να έχει την αυστηρά διαγώνια υπέρτερη ιδιότητα ο δείκτης γραμμής της αντιμετατίθεται με αυτήν στην τρέχουσα $(n_1 + 1)^{οστη}$ θέση, το n_1 αυξάνεται κατά 1 και η αντίστοιχη θέση στο

διάνυσμα **boole** τίθεται ίση με 1. Αν ο A είναι ένας H -πίνακας τότε εξερχόμενοι από το ΜΕΡΟΣ ΙΙΙ, $n_1 = n$, το **boole** έχει όλα τα στοιχεία του ίσα με 1 και το **index** περιέχει όλους τους δείκτες γραμμών από το 1 έως n με τη διάταξη που βρέθηκαν να ικανοποιούν την αυστηρά διαγώνια υπέρτερη ιδιότητα.

2.6 Σχόλια

Στη συνέχεια παραθέτουμε ορισμένα σχόλια πάνω στους τρεις Αλγορίθμους.

i) Κάθε ένας από τους τρεις Αλγορίθμους, όπως έγινε σαφές, τερματίζεται σε πεπερασμένο αριθμό επαναλήψεων αν και μόνον αν ο πίνακας A , είναι ένας H -πίνακας.

ii) Και οι τρεις Αλγόριθμοι μπορούν να τροποποιηθούν ελάχιστα έτσι ώστε να μπορούν να αναγνωρίζουν συγκεκριμένες κλάσεις μη- H -πινάκων $A \in \mathbb{C}^{n,n}$. Τέτοιοι είναι οι πίνακες για τους οποίους υπάρχει θετικός διαγώνιος πίνακας $D \in \mathbb{R}^{n,n}$ έτσι ώστε ο AD να είναι “(κατά γραμμές) αυστηρά διαγώνια μη-υπέρτερος” δηλαδή

$$|a_{ii}|d_{ii} < \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|d_{jj}, \quad i = 1(1)n. \quad (2.1)$$

Πρέπει να παρατηρήσουμε εδώ ότι για τέτοιους πίνακες, και μετά από ελάχιστη τροποποίηση στους Αλγορίθμους, τα Θεωρήματα 2.4, 2.5 και 2.6 ισχύουν αλλάζοντας την έκφραση “ H -πίνακας” με την “μη- H -πίνακας”, ο οποίος είναι (κατά γραμμή) αυστηρά διαγώνια μη-υπέρτερος. Η θεωρητική απόδειξη στην περίπτωση του Jacobi Επαναληπτικού Κριτηρίου σχεδόν αντιγράφει την απόδει-

ξη του Θεωρήματος 2.1 της εργασίας [29] βασισμένη στα Λήμματα 2.2 και 2.3 της ίδιας εργασίας και συνεπώς παραλείπεται. Τότε, για την Gauss-Seidel ή για την Gauss-Seidel με Μερική Οδήγηση Επαναληπτική Μέθοδο οι αποδείξεις ακολουθούν ανάλογη λογική με αυτή των Θεωρημάτων 2.5 και 2.6.

iii) Οι αλλαγές που πρέπει να γίνουν στους Αλγορίθμους είναι οι ακόλουθες:

ΜΕΡΟΣ I: Καμία.

ΜΕΡΟΣ II και ΜΕΡΟΣ III:

α) Αλλάζουμε όλες τις ανισότητες $|a_{ii}| > s_i$ με $|a_{ii}| < s_i$.

β) Αντιμεταθέτουμε τις εκφράσεις “ο A ΕΙΝΑΙ ένας H -πίνακας” και “ο A ΔΕΝ είναι ένας H -πίνακας”, οπουδήποτε εμφανίζονται.

iv) Μια κλάση πινάκων A που ικανοποιούν τη συνθήκη (2.1) είναι οι μη-ιδιόμορφοι μη-αναγωγίμοι των οποίων ο πίνακας σύγκρισης $M(A)$ (βλέπε Ορισμό 1.2) έχει μη συγκλίνοντα *Jacobi* επαναληπτικό πίνακα. (Παρατήρηση: Για την απόδειξη, στην περίπτωση όπου $\varepsilon = 0$, παραπέμπουμε τον αναγνώστη στην εργασία [2].)

v) Παρατηρούμε ότι η κλάση των “κατά γραμμή αυστηρά διαγώνια μη-υπέρτερων” πινάκων δεν εξαντλείται από την κλάση στο (iv) παραπάνω. Στην ίδια οικογένεια ανήκουν και κάποιοι αναγωγίμοι πίνακες τους οποίους θα μελετήσουμε στο Κεφάλαιο 4.

vi) Αν καταλήξουμε σε “Μη ολοκλήρωση”, όταν εφαρμόσουμε κάποιον από τους τρεις Αλγορίθμους, τότε πριν το “μείωσε ε ή αύξησε *maxiter*” θα

ήταν χρήσιμο να εφαρμόσουμε τη “μη- H -πίνακας” εκδοχή του αντίστοιχου Αλγορίθμου.

vii) Τελικά, θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι και για τους τρεις Αλγορίθμους δημιουργήκε ένας αριθμός συναρτήσεων της MATLAB 6.5 βασισμένες στα ΜΕΡΗ I, II και III αυτών και για τις δυο μορφές “ H -πινάκων” και “μη- H -πινάκων”, σύμφωνα με τη θεωρία των Παραγράφων 2.4, 2.5 και της παρούσας.

2.7 Αριθμητικά Αποτελέσματα

Στη παράγραφο αυτή παρουσιάζουμε κάποια παραδείγματα και σχόλια πάνω σ’ αυτά. Όλα τα αποτελέσματα έχουν εκτελεστεί με $\varepsilon = 10^{-6}$.

Παράδειγμα 1: Είναι ένα απλό παράδειγμα σαν κι αυτό στην εργασία [17] το οποίο παρουσιάζεται επίσης σαν Παράδειγμα 6 στη [2]. Εδώ ενδιαφερόμαστε για την εφαρμογή δυο τιμών του a_{12} παρακάτω και για τις δυο μορφές των τριών Αλγορίθμων. Δεν ελέγχουμε μόνο την ορθότητα αλλά και των αριθμό των επαναλήψεων που χρειάζονται για να πετύχουμε σωστή απάντηση καθώς επίσης και τους CPU χρόνους που απαιτούνται.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & -1 & 0 & -0.6 & 0 \\ 0 & -0.1 & 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0 & 1 & -0.5 \\ -0.2 & 0.1 & 0.3 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Στην εργασία [17], για $a_{12} = 1.146391$ το αποτέλεσμα ήταν ότι “ο A ΕΙΝΑΙ H -πίνακας” ενώ για $a_{12} = 1.146392$ το αποτέλεσμα ήταν “Αναποτε-

λεσματικός”. Στη [2], όπου μια MATLAB συνάρτηση γράφτηκε με βάση μια διαφορετική λογική και θεωρία, οι αντίστοιχες (και σωστές) απαντήσεις, που βρέθηκαν ήταν ότι “ο A ΕΙΝΑΙ H -πίνακας” και “ο A ΔΕΝ είναι H -πίνακας”, αντιστοίχως. Αυτό επιβεβαιώνεται στην περίπτωση που οι τρεις Αλγόριθμοι εφαρμοστούν όπως φαίνεται στον πίνακα 2.1. Σημειώνεται ότι η τιμή $maxiter = 500$ ήταν αυτή που χρησιμοποιήθηκε στην περίπτωσή μας.

Κριτήριο		Πίνακας A_1			
		$a_{12} = 1.146391$		$a_{12} = 1.146392$	
		H	όχι- H	H	όχι- H
J	k	31	$maxiter$	$maxiter$	877
	CPU	0.010			0.040
	Αποτέλεσμα	H -πίνακας	Αναποτελεσματικός	Αναποτελεσματικός	μη- H -πίνακας
GS	k	18	$maxiter$	$maxiter$	473
	CPU	0			0.020
	Αποτέλεσμα	H -πίνακας	Αναποτελεσματικός	Αναποτελεσματικός	μη- H -πίνακας
$PPGS$	k	13	$maxiter$	$maxiter$	473
	CPU	0			0.070
	Αποτέλεσμα	H -πίνακας	Αναποτελεσματικός	Αναποτελεσματικός	μη- H -πίνακας
$PPGS1$	k	13	$maxiter$	$maxiter$	473
	CPU	0.010			0.010
	Αποτέλεσμα	H -πίνακας	Αναποτελεσματικός	Αναποτελεσματικός	μη- H -πίνακας

Πίνακας 2.1: Πίνακας A_1 , CPU=CPU time

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε τρία παραδείγματα για τα οποία η κλάση των H -πινάκων διακρίνεται ξεκάθαρα από την αντίστοιχη των μη- H -πινάκων. Άρα, μπορούμε να ελέγξουμε και να επαληθεύσουμε τους Αλγόριθμους μας και τις αντίστοιχες συναρτήσεις της *MATLAB*. Βασίζονται στις αλλαγές του στοιχείου $a_{n,n-1}$ του πίνακα $A = \text{tridiag}(-1, 2, -1) \in \mathbb{R}^{n,n}$, $n = 5 \times l$, $l = 1(1)4$. Όπως είναι γνωστό, ο A είναι ένας (μη αναγώγιμος) μη ιδιόμορφος M -πίνακας άρα όλες οι κύριες υποορίζουσές του είναι θετικές. Επιπλέον μπορεί να αποδειχθεί, χρησιμοποιώντας επαγωγή, ότι $\det(A) = n + 1$. Θέτοντας

$a_{n,n-1} = -x_n$ βρίσκουμε την τιμή του x_n για την οποία ο A γίνεται ιδιόμορφος. Αναπτύσσοντας την $\det(A(x_n))$ ως προς την τελευταία γραμμή, βρίσκουμε ότι $x_n = 2 + \frac{2}{n-1}$ και $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$. Για τις προηγούμενες n τιμές έχουμε $x_5 = \frac{5}{2} = 2.5$, $x_{10} = \frac{20}{9} = 2.22222222\dots$, $x_{15} = \frac{30}{14} = 2.14285714\dots$ και $x_{20} = \frac{40}{19} = 2.10526315\dots$. Επομένως ο $A(x_n)$ διαχωρίζει τους M - ($0 \geq a_{n,n-1} > -x_n$) από τους μη- M -πίνακες ($a_{n,n-1} < -x_n$). (Παρατήρηση: Θυμίζουμε ότι οι M -πίνακες αποτελούν μια υποκλάση των H -πινάκων.) Σε κάθε παράδειγμα για $a_{n,n-1}$ παίρνουμε τις δυο συνεχόμενες τιμές (με προσέγγιση ενός δεκαδικού ψηφίου) μεταξύ των οποίων βρίσκεται το $-x_n$. Στους επόμενους τρεις πίνακες παρουσιάζονται τα αποτελέσματα μόνο για $n = 20$, παρά το γεγονός ότι τα αντίστοιχα προγράμματα εκτελέστηκαν για όλες τις προαναφερθείσες συγκεκριμένες τιμές του n .

Παράδειγμα 2: $A_2 = A(x_{20}) \in \mathbb{R}^{20,20}$.

Κριτήριο		Πίνακας A_2			
		$a_{20,19} = -2.1$		$a_{20,19} = -2.2$	
		H	μη- H	H	μη- H
J	k	301	<i>maxiter</i>	<i>maxiter</i>	697
	CPU	0.030			0.130
	Αποτέλεσμα	H -πίνακας	Αναποτελεσματικός	Αναποτελεσματικός	μη- H -πίνακας
GS	k	142	<i>maxiter</i>	<i>maxiter</i>	358
	CPU	0			0.010
	Αποτέλεσμα	H -πίνακας	Αναποτελεσματικός	Αναποτελεσματικός	μη- H -πίνακας
$PPGS$	k	142	<i>maxiter</i>	<i>maxiter</i>	358
	CPU	0.010			0.020
	Αποτέλεσμα	H -πίνακας	Αναποτελεσματικός	Αναποτελεσματικός	μη- H -πίνακας
$PPGS1$	k	142	<i>maxiter</i>	<i>maxiter</i>	358
	CPU	0.010			0.050
	Αποτέλεσμα	H -πίνακας	Αναποτελεσματικός	Αναποτελεσματικός	μη- H -πίνακας

Πίνακας 2.2: Πίνακας A_2

Παράδειγμα 3: $A_3 = A(x_{20}) \cdot B$, όπου $A(x_{20}), B \in \mathbb{R}^{20,20}$ και B είναι

έναν διαγώνιο πίνακα με $b_{ii} > 0$, $i = 1(1)20$. Τα στοιχεία b_{ii} είναι ομοιόμορφα κατανομημένα στο $(0, 1)$ και δημιουργούνται χρησιμοποιώντας τις *rand* και (*'seed', n*) *MATLAB* συναρτήσεις. Το γινόμενο πινάκων $A(x_{20})B$ έχει τον ίδιο H -πίνακα χαρακτηρισμό όπως ο $A(x_{20})$. Αυτό ισχύει διότι αν ο $A(x_{20})$ είναι ένας H -πίνακας οπότε όλες οι κύριες υποορίζουσες του πίνακα σύγκρισης του $A(x_{20})$ είναι θετικές. Επομένως, κάθε κύρια υποορίζουσα του πίνακα σύγκρισης του A_3 θα είναι εκείνη της κύριας υποορίζουσας του πίνακα σύγκρισης του $\mathcal{M}(A(x_{20}))$ πολλαπλασιασμένη επί τα αντίστοιχα θετικά διαγώνια στοιχεία του B , που δίνει αποτέλεσμα θετικό.

Κριτήριο		Πίνακας A_3			
		$a_{20,19} = -2.1$		$a_{20,19} = -2.2$	
		H	μη- H	H	μη- H
J	k	419	<i>maxiter</i>	<i>maxiter</i>	370
	<i>CPU</i>	0.030			0.050
	Αποτέλεσμα	H -πίνακας	Αναποτελεσματικός	Αναποτελεσματικός	μη- H -πίνακας
GS	k	212	<i>maxiter</i>	<i>maxiter</i>	191
	<i>CPU</i>	0.010			0.010
	Αποτέλεσμα	H -πίνακας	Αναποτελεσματικός	Αναποτελεσματικός	μη- H -πίνακας
$PPGS$	k	210	<i>maxiter</i>	<i>maxiter</i>	187
	<i>CPU</i>	0.020			0.010
	Αποτέλεσμα	H -πίνακας	Αναποτελεσματικός	Αναποτελεσματικός	μη- H -πίνακας
$PPGS1$	k	210	<i>maxiter</i>	<i>maxiter</i>	187
	<i>CPU</i>	0.010			0.010
	Αποτέλεσμα	H -πίνακας	Αναποτελεσματικός	Αναποτελεσματικός	μη- H -πίνακας

Πίνακας 2.3: Πίνακας A_3

Παράδειγμα 4: $A_4 = PA(x_{20})P^T$, όπου $P \in \mathbb{R}^{20,20}$ είναι ένας πίνακας μετάθεσης που δημιουργήθηκε από της συνάρτηση της *MATLAB randperm*.

Πριν ολοκληρώσουμε την παρούσα παράγραφο, και το παρόν κεφάλαιο, δίνουμε μια σειρά από παρατηρήσεις που προκύπτουν από τη μελέτη των προηγούμενων πινάκων.

Κριτήριο		Πίνακας A_4			
		$a_{20,19} = -2.1$		$a_{20,19} = -2.2$	
		H	$\mu\eta-H$	H	$\mu\eta-H$
J	k	301	<i>maxiter</i>	<i>maxiter</i>	697
	<i>CPU</i>	0.060			0.060
	Αποτέλεσμα	H -πίνακας	Αναποτελεσματικός	Αναποτελεσματικός	$\mu\eta-H$ -πίνακας
GS	k	152	<i>maxiter</i>	<i>maxiter</i>	347
	<i>CPU</i>	0.010			0.020
	Αποτέλεσμα	H -πίνακας	Αναποτελεσματικός	Αναποτελεσματικός	$\mu\eta-H$ -πίνακας
$PPGS$	k	142	<i>maxiter</i>	<i>maxiter</i>	347
	<i>CPU</i>	0.010			0.020
	Αποτέλεσμα	H -πίνακας	Αναποτελεσματικός	Αναποτελεσματικός	$\mu\eta-H$ -πίνακας
$PPGS1$	k	142	<i>maxiter</i>	<i>maxiter</i>	347
	<i>CPU</i>	0.010			0.020
	Αποτέλεσμα	H -πίνακας	Αναποτελεσματικός	Αναποτελεσματικός	$\mu\eta-H$ -πίνακας

Πίνακας 2.4: Πίνακας A_4

i) Σχεδιάστηκαν δυο διαφορετικά *Gauss – Seidel* με Μερική Οδήγηση Επαναληπτικά Κριτήρια τα οποία διαφέρουν σε κάποιες λεπτομέρειες οι οποίες δεν επηρεάζουν το συνολικό αριθμό των επαναλήψεων. Κατά μέσο όρο φαίνεται ότι το δεύτερο ($PPGS1$) συμπεριφέρεται καλύτερα από το πρώτο.

ii) Όπως ήταν αναμενόμενο ο αριθμός των επαναλήψεων που απαιτούνται για να επιτύχουμε σύγκλιση μειώνεται καθώς μεταβαίνουμε από το *Jacobi* στο *Gauss – Seidel* με Μερική Οδήγηση Κριτήριο.

iii) Οι *CPU* χρόνοι στους παραπάνω πίνακες είναι οι μέσοι όροι από πέντε διαφορετικούς που προέκυψαν από πέντε εκτελέσεις. Αντιπροσωπεύουν εκείνους που χρειάζονται για το **ΜΕΡΟΣ ΙΙΙ** για κάθε μια από τις οκτώ συναρτήσεις που εκτελούνται. Υπενθυμίζουμε ότι καθώς προχωράμε από τη μια εκτέλεση στην επόμενη οι πίνακες B και P που χρησιμοποιήθηκαν στα Παραδείγματα 3 και 4, αντίστοιχα, δεν είναι ίδιοι λόγω της τυχαίας επιλογής τους. Παρατηρώντας τους χρόνους *CPU* φαίνεται ότι το Κριτήριο *Jacobi* που παρουσιάζεται στην εργασία [29] είναι αρκετά ανταγωνιστικό ακόμα και με την

PPGS1.

iv) Από τις δυο τιμές του a_{12} που χρησιμοποιήσαμε στα Παραδείγματα 2-4, ένα για τον H -πίνακα και ένα για τον μη- H -πίνακα, υπάρχει μερικές φορές μια αρκετή μεγάλη διαφορά στον αριθμό των επαναλήψεων που απαιτούνται για να καταλήξουμε σε αποτέλεσμα. Αυτό μπορεί να εξηγηθεί από τη μη μηδενική δομή του πίνακα καθώς επίσης και από το πηλίκο r που χρησιμοποιήσαμε στην αρχή του αλγορίθμου. Ειδικότερα, στο Παράδειγμα 1: α) Για $a_{12} = 1.146391$ (H -πίνακας) το πρώτο πηλίκο, που προκύπτει από τη τρίτη γραμμή, είναι $\frac{0.6+\varepsilon}{1+\varepsilon} \approx 0.6$, αρκετά μακριά (μικρότερο) από το 1, κάνοντας τα στοιχεία στην ίδια στήλη αρκετά μικρότερα κατά έναν παράγοντα περίπου 0.6. β) Για $a_{12} = 1.146392$ (μη- H -πίνακας) το αντίστοιχο πηλίκο, που προέρχεται από τη πρώτη γραμμή, είναι $r = \frac{1.146392+\varepsilon}{1+\varepsilon} \approx 1.1464$ το οποίο είναι αρκετά πιο κοντά στο 1, μετατρέποντας τα στοιχεία της πρώτης στήλης μεγαλύτερα κατά έναν παράγοντα 1.1464. Η κατάσταση αντιστρέφεται στο Παράδειγμα 3 παρόλο που τα πάντα εδώ εξαρτώνται από τον τυχαία κατασκευασμένο πίνακα B .

v) Ένα δείγμα προγράμματος MATLAB με όλες τις χρησιμοποιηθείσες συναρτήσεις βρίσκεται στη σελίδα:

<http://www.math.uoc/~hadjidim/programs/alahad06>

Κεφάλαιο 3

Επαναληπτικό Κριτήριο για Μη-Αναγώγιμους Πίνακες

3.1 Εισαγωγή

Αν και ένας H -πίνακας μπορεί να οριστεί μέσω του ορισμού του M -πίνακα, όπως δόθηκε στο Κεφάλαιο 1 της Εισαγωγής, σε ό,τι ακολουθεί και στους αλγόριθμους που θα παρουσιαστούν θα χρησιμοποιηθεί περισσότερο ο ορισμός που αναφέρεται σ' αυτόν του *αυστηρά διαγώνια υπέρτερου (κατά γραμμές) πίνακα*, όπου ο τελευταίος ορισμός αναφέρθηκε επίσης στην Εισαγωγή αλλά έμμεσα.

Ο ορισμός του *αυστηρά διαγώνια υπέρτερου (κατά γραμμές) πίνακα* δίνεται στη συνέχεια:

Ορισμός 3.1. Ένας πίνακας $X \in \mathbb{C}^{n,n}$ λέγεται ότι είναι *αυστηρά διαγώνια υπέρτερος κατά γραμμές*, αν και μόνο αν,

$$|x_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |x_{ij}|, \quad i = 1(1)n. \quad (3.1)$$

Στο παρόν κεφάλαιο το ενδιαφέρον μας επικεντρώνεται στους τρεις αλγόριθμους των εργασιών [29], [27] και [33] που συμβολίζονται με \mathbb{H} , \mathbb{L} και \mathbb{B} , αντίστοιχα. (Σημείωση: Ο Αλγόριθμος \mathbb{H} παρουσιάζεται εκ νέου γιατί έχουν

γίνει κάποιες τροποποιήσεις στους συμβολισμούς έτσι ώστε και οι τρεις Αλγόριθμοι να μπορούν να παρουσιαστούν με έναν ενιαίο τρόπο.) Στη δεύτερη παράγραφο δίνονται κάποιοι εισαγωγικοί συμβολισμοί, παρουσιάζονται οι τρεις αλγόριθμοι και, με τη βοήθεια ορισμένων παραδειγμάτων, καθίσταται φανερό ότι υπάρχουν περιπτώσεις, όπου οι Αλγόριθμοι \mathbb{L} και \mathbb{B} **δεν** μπορεί να τερματίζονται πάντοτε σε πεπερασμένο αριθμό επαναλήψεων όπως αυτό είχε ισχυριστεί. Στην τρίτη παράγραφο παρατίθενται θεωρητικά αποτελέσματα ορισμένα από τα οποία αποδεικνύονται. Στην τέταρτη παράγραφο, δίνεται σύντομα ένα νέο, τύπου Jacobi, επαναληπτικό κριτήριο για πίνακες (Αλγόριθμος $\mathbb{A}\mathbb{H}$) σε ψευδοκώδικα, με τη χρήση της θεωρίας της Παραγράφου 3. Αποδεικνύεται (κυρίως) για **μη-αναγώγιμους** πίνακες, εκτός από μια πολύ ειδική περίπτωση, η σύγκλιση του σε ένα πεπερασμένο αριθμό επαναλήψεων. Τέλος, στην Παράγραφο 5, ο νέος Αλγόριθμος $\mathbb{A}\mathbb{H}$ υλοποιείται σε μια Matlab συνάρτηση, η οποία εφαρμόζεται σε μια σειρά αριθμητικών παραδειγμάτων, και συνοψίζουμε με κάποιες παρατηρήσεις.

3.2 Προκαταρκτικά, οι Τρεις Αλγόριθμοι και Σχόλια

Στην παρούσα παράγραφο παρουσιάζονται κάποιοι εισαγωγικοί συμβολισμοί, ο πλήρως μαθηματικά τεκμηριωμένος Αλγόριθμος \mathbb{H} , της εργασίας [29], ο μαθηματικά δοσμένος Αλγόριθμος \mathbb{L} , της εργασίας [27], και επιπλέον ο Αλγόριθμος \mathbb{B} , της εργασίας [33], καθώς επίσης δίνονται και κάποια σχόλια που αφορούν ιδιαίτερα στη σύγκλιση των δύο τελευταίων. Κάθε ένας από τους Αλγόριθμους έχει ελαφρά τροποποιηθεί, όσον αφορά τους συμβολισμούς, ώστε οι

ομοιότητες και οι διαφορές τους να είναι εύκολα αναγνωρίσιμες.

Για τους Αλγόριθμους αυτούς είναι χρήσιμοι οι παρακάτω ορισμοί των ακόλουθων πινάκων, κάποιιοι από τους οποίους έχουν ήδη εισαχθεί. Αρχικά, ορίζεται η ακολουθία των θετικά διαγωνίων πινάκων

$$D^{(k)}, k = 0, 1, 2, \dots, D^{(0)} = I, \quad (3.2)$$

και επιπλέον των πινάκων

$$A^{(k)} = A^{(k-1)}D^{(k-1)}, k = 1, 2, 3, \dots, A^{(0)} = A, \quad (3.3)$$

για τους Αλγόριθμους Η και L. Για τον Αλγόριθμο Β

$$\begin{aligned} A^{(k)} &= (D^{(k-1)})^{-1} A^{(k-1)} D^{(k-1)}, k = 1, 2, 3, \dots, A^{(0)} = (\text{diag}(A))^{-1} A, \\ E^{(k-1)} &= \left| (\text{diag}(A^{(k-1)} D^{(k-1)}))^{-1} \right|, k = 1, 2, 3, \dots, E^{(0)} = |(\text{diag}(A))^{-1}|. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Από τους ορισμούς στις (3.2) και (3.4), καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι για τον Αλγόριθμο Β ισχύει

$$|a_{ii}^{(k)}| = 1, i = 1(1)n, k = 1, 2, 3, \dots \quad (3.5)$$

Έστω $\mathbb{N} := \{1, 2, \dots, n\}$ και

$$s_i^{(k)} = \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}^{(k)}|, i = 1(1)n, k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.6)$$

Έστω επίσης

$$\mathbb{N}_1^{(k)} \equiv \mathbb{N}_1(A^{(k)}) = \left\{ i \in \mathbb{N} : |a_{ii}^{(k)}| > s_i^{(k)} \right\},$$

και $n_1^{(k)} := n_1(A^{(k)})$ να συμβολίζει το πλήθος των στοιχείων του $\mathbb{N}_1^{(k)}$.

Ακολούθως, παρουσιάζονται οι τρεις Αλγόριθμοι.

Αλγόριθμος III.

ΕΙΣΟΔΟΣ: Ένας πίνακας $A := [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ και οποιοδήποτε $\varepsilon > 0$.

ΕΞΟΔΟΣ: $D = D^{(0)}D^{(1)} \dots D^{(k)} \in \mathfrak{D}_A$ αν ο A είναι H -πίνακας.

1. Αν $a_{ii} = 0$ για κάποιο $i \in \mathbb{N}$ ή $\mathbb{N}_1(A) = \emptyset$, “ο A δεν είναι H -πίνακας”, ΣΤΟΠ; Αλλιώς
2. Θέσε $A^{(0)} = A$, $D^{(0)} = I$, $k = 1$
3. Υπολόγισε $A^{(k)} = A^{(k-1)}D^{(k-1)} = [a_{ij}^{(k)}]$
4. Υπολόγισε $s_i^{(k)} = \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}^{(k)}|$, $i = 1(1)n$, Ενημέρωσε $\mathbb{N}_1^{(k)}$ και $n_1^{(k)}$
5. Αν $n_1^{(k)} = n$, “ο A είναι H -πίνακας”, ΣΤΟΠ; Αλλιώς
6. Θέσε $d = [d_i]$, όπου

$$d_i = \begin{cases} \frac{s_i^{(k)} + \varepsilon}{|a_{ii}^{(k)}| + \varepsilon}, & \text{αν } i \in \mathbb{N}_1^{(k)} \\ 1, & \text{αν } i \notin \mathbb{N}_1^{(k)} \end{cases}$$

7. Θέσε $D^{(k)} = \text{diag}(d)$, $k = k + 1$; Πήγαινε στο Βήμα 3.

Αλγόριθμος IV.

ΕΙΣΟΔΟΣ: Ένας πίνακας $A := [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ και οποιοδήποτε $\varepsilon > 0$.

ΕΞΟΔΟΣ: $D = D^{(0)}D^{(1)} \dots D^{(k)} \in \mathfrak{D}_A$ ή $\notin \mathfrak{D}_A$ αν ο A είναι ή δεν είναι H -πίνακας, αντίστοιχα.

1. Αν $a_{ii} = 0$ για κάποιο $i \in \mathbb{N}$, “ο A **δεν** είναι H -πίνακας”, ΣΤΟΠ; Αλλιώς
2. Θέσε $A^{(0)} = A$, $D^{(0)} = I$, $k = 1$
3. Υπολόγισε $A^{(k)} = A^{(k-1)}D^{(k-1)} = [a_{ij}^{(k)}]$
4. Υπολόγισε $s_i^{(k)} = \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}^{(k)}|$, $i = 1(1)n$, Θέσε $n_1^{(k)} = 0$
5. Αν $|a_{ii}^{(k)}| > s_i^{(k)}$, $n_1^{(k)} = n_1^{(k)} + 1$, $i = 1(1)n$
6. Αν $n_1^{(k)} = n$, “ο A **είναι** H -πίνακας”, ΣΤΟΠ; Αλλιώς
7. Αν $n_1^{(k)} = 0$, “ο A **δεν** είναι H -πίνακας”, ΣΤΟΠ; Αλλιώς
8. Θέσε $d = [d_i]$, όπου

$$d_i = \frac{s_i^{(k)} + \varepsilon}{|a_{ii}^{(k)}| + \varepsilon}, \quad i = 1(1)n$$

9. Θέσε $D^{(k)} = \text{diag}(d)$, $k = k + 1$; Πήγαμε στο Βήμα 3.

Αλγόριθμος \mathbb{B} .

ΕΙΣΟΔΟΣ: Ένας πίνακας $A := [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$.

ΕΞΟΔΟΣ: $D = D^{(0)}D^{(1)} \dots D^{(k)} \in \mathfrak{D}_{D^{-1}A} \equiv \mathfrak{D}_A$ ή $\notin \mathfrak{D}_A$ αν ο A **είναι** ή **δεν** είναι H -πίνακας, αντίστοιχα

1. Αν $a_{ii} = 0$ για κάποιο $i \in \mathbb{N}$ ή $\mathbb{N}_1(A) = \emptyset$, “ο A **δεν** είναι H -πίνακας”, ΣΤΟΠ; Αλλιώς
2. Υπολόγισε $s_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|$, $i = 1(1)n$
3. Αν $s_i = 0$, $i = 1(1)n$, “ο A **είναι** H -πίνακας”, ΣΤΟΠ; Αλλιώς
4. Θέσε $A^{(0)} = (\text{diag}(A))^{-1}A$, $D^{(0)} = I$, $k = 1$

5. Υπολόγισε $A^{(k)} = (D^{(k-1)})^{-1} A^{(k-1)} D^{(k-1)} = [a_{ij}^{(k)}]$
6. Υπολόγισε $s_i^{(k)} = \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}^{(k)}|$, $i = 1(1)n$
7. Αν $s_i^{(k)} \leq 1$, $i = 1(1)n$, και $s_i^{(k)} < 1$ για ένα τουλάχιστον $i \in \mathbb{N}$, “ο A είναι H -πίνακας”, ΣΤΟΠ; Αλλιώς
8. Αν $s_i^{(k)} \geq 1$, $i = 1(1)n$, “ο A δεν είναι H -πίνακας”, ΣΤΟΠ; Αλλιώς
9. Προσδιόρισε m τέτοιο ώστε $s_m^{(k)} = \min_{i=1(1)n} s_i^{(k)}$ για $s_i^{(k)} \neq 0$
10. Θέσε $d = [d_i]$, όπου

$$d_i = \begin{cases} s_m^{(k)}, & \text{αν } i = m \\ 1, & \text{αν } i \neq m \end{cases}$$

11. Θέσε $D^{(k)} = \text{diag}(d)$, $k = k + 1$; Πήγαινε στο Βήμα 5.

Συνεχίζουμε με κάποιες παρατηρήσεις πάνω στους τρεις Αλγορίθμους.

Σύμφωνα με τη θεωρία που αναπτύχθηκε στις εργασίες [29] (Θεώρημα 2.1) και [27] (Θεωρήματα 1, 2, 3 και 4) αν ο πίνακας A είναι H -πίνακας τόσο ο Αλγόριθμος \mathbb{H} όσο και ο \mathbb{L} τερματίζονται σε ένα πεπερασμένο αριθμό επαναλήψεων. Εξάλλου, αν ο Αλγόριθμος \mathbb{H} τερματίζεται, ο πίνακας A είναι H -πίνακας, ενώ αν ο Αλγόριθμος \mathbb{L} τερματίζεται τότε ο A μπορεί να είναι ή να μην είναι H -πίνακας πράγμα που εξαρτάται από το αποτέλεσμα της εξόδου του αλγορίθμου.

Όσον αφορά τον Αλγόριθμο \mathbb{L} , μπορεί να παρατηρήσει κανείς ότι στην περίπτωση ενός μη- H -πίνακα, ο τερματισμός του αλγορίθμου **δεν** μπορεί να εγγυηθεί πάντα. Όταν ο A είναι **αναγώγιμος** μπορεί να υπάρξουν προβλήματα

όπως δείχνει το ακόλουθο παράδειγμα. Έστω

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -0.5 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

ο οποίος **δεν** είναι H -πίνακας. Αν εφαρμοστεί ο Αλγόριθμος \mathbb{L} στον A , ο οποίος έχει αρχικά $n_1(A) = 2$, βρίσκουμε ότι ο Αλγόριθμος **δεν** μπορεί να τερματιστεί. Ανεξάρτητα από την τιμή του $\varepsilon > 0$, ισχύει πάντα ότι $n_1(A^{(k)}) = 2$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Αυτό ισχύει γιατί, για τον $A^{(k)}$ και οποιοδήποτε k , η αυστηρά διαγώνια κυριαρχία ισχύει για τις δύο τελευταίες γραμμές και η μη-αυστηρά διαγώνια κυριαρχία ισχύει για τις δύο πρώτες.

Ο μη τερματισμός του Αλγορίθμου \mathbb{L} και στην περίπτωση των μη-αναγώγιμων πινάκων δεν είναι δυνατόν να εγγυάται πάντοτε όπως τα δύο παρακάτω παραδείγματα υποδεικνύουν. Έστω ότι δίνονται οι παρακάτω πίνακες A_1 και A_2 :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.5 \\ -0.5 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.5 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.8)$$

όπου ο A_1 είναι H -πίνακας ενώ ο A_2 δεν είναι. Επειδή η απόδειξη του Θεωρήματος 2 στην εργασία [27] πραγματοποιείται με $\varepsilon = 0$, εφαρμόζουμε τον Αλγόριθμο \mathbb{L} σε καθένα από τους παραπάνω πίνακες με αυτήν την τιμή του ε . Η σύγκλιση και στις δυο περιπτώσεις αποτυγχάνει κι αυτό επειδή $n_1(A_1^{(k)}) = 2$ και $n_1(A_2^{(k)}) = 1$ για κάθε $k \geq 1$. Ειδικότερα,

$$A_1^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & -1 \\ -0.25 & 0.5 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_2^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \end{bmatrix}, \quad (3.9)$$

$$A_1^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.5 \\ -0.5 & 0.25 & 0 \\ 0 & -0.5 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad (3.10)$$

$$A_1^{(4)} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & -0.25 \\ -0.25 & 0.5 & 0 \\ 0 & -1 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad A_2^{(4)} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \end{bmatrix}, \quad (3.11)$$

και η **τρικυκλική** δομή (pattern) είναι προφανές ότι επαναλαμβάνεται επ' άπειρον. Αυτό απλά σημαίνει ότι η υπόθεση

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\lim_{k \rightarrow \infty} D^{(k)} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} D^{(k)} \right),$$

δηλαδή το να θεωρηθεί το ε ίσο με μηδέν, **δεν** μπορεί να ευσταθεί, αφού μια τέτοια ισότητα ισχύει υπό συγκεκριμένες προϋποθέσεις κι επομένως αν αυτές όντως ισχύουν θα έπρεπε να αποδειχθούν.

Υπάρχει δε ένα ακόμα ουσιώδες σημείο στην απόδειξη του ίδιου θεωρήματος. Αποδεικνύεται ότι οποιοδήποτε δύο διαδοχικοί Jacobi πίνακες $B^{(k)}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, που συνδέονται με τον **πίνακα σύγκρισης** των $A^{(k)}$ (βλέπε Ορισμό 1.2) ικανοποιούν τη σχέση

$$B^{(k+1)} = (D^{(k)})^{-1} B^{(k)} D^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.12)$$

Κατά τη διάρκεια κάθε επανάληψης μια μεταθετική ομοιότητα στον $D^{(k)}$ (που πρέπει να εφαρμοστεί επίσης και στους πίνακες $A^{(k)}$ και $B^{(k)}$), θέτει τα $d_i^{(k)}$ σε μια μη-φθίνουσα διάταξη. Τότε, αποδεικνύεται ότι για οποιαδήποτε $b_{ij}^{(k)}$ ($i < j$) ισχύει, $b_{ij}^{(k)} \leq b_{ij}^{(k+1)}$ ενώ για οποιαδήποτε $b_{ij}^{(k)}$ ($i > j$), $b_{ij}^{(k)} \geq b_{ij}^{(k+1)}$. Παρόλα αυτά, στην επόμενη επανάληψη τα $d_i^{(k+1)}$, μπορεί να βρίσκονται σε μια διαφορετική

διάταξη ώστε τα $b_{ij}^{(k+1)}$ ($i < j$) μπορεί να βρεθούν σε μια θέση (l, m) , $l > m$, και, άρα, είναι δυνατόν η διάταξή τους να μην είναι πλέον μη-φθίνουσα. Επομένως η ακολουθία των $b_{ij}^{(k)}$ **δεν** είναι μονότονη, η σύγκλιση **δεν** εξασφαλίζεται και η απόδειξη των αντίστοιχων προτάσεων στην εργασία [27] δεν είναι πλήρης. Για παράδειγμα, για τον A_1 στην (3.8) είναι

$$B^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ και } D^{(1)} = \text{diag}(0.5, 0.5, 2).$$

Επειδή τα στοιχεία του $D^{(1)}$ είναι ήδη σε μη-φθίνουσα σειρά, ο πίνακας μετάθεσης είναι ο $P^{(1)} = I_3$ και η (3.12) δίνει

$$B^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix} \text{ και } D^{(2)} = \text{diag}(2, 0.5, 0.5).$$

Αυτή τη φορά $P^{(2)} = [e^2 e^3 e^1]$, με e^i , $i = 1, 2, 3$, τις στήλες του μοναδιαίου πίνακα. Μεταθέτοντας και χρησιμοποιώντας τους ίδιους δείκτες έχουμε ότι $B^{(2)} \equiv B^{(1)}$, κι αυτό το πρότυπο (pattern) επαναλαμβάνεται επ' άπειρον. Η ακολουθία των διαφορών

$$\max_{i=1,2,3} d_i^{(k)} - \min_{i=1,2,3} d_i^{(k)} = 2 - 0.5 = 1.5, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

δεν τείνει στο μηδέν καθώς $k \rightarrow \infty$. Παρατηρούμε επίσης ότι το στοιχείο $b_{13}^{(1)} = 0.5$, γίνεται $b_{13}^{(2)} = 2$ αλλά μετά από τη μετάθεση γίνεται πάλι 0.5.

Άρα, ακόμα και στην περίπτωση των μη-αναγωγίμων πινάκων, για να ισχύει ο Αλγόριθμος \mathbb{L} , θα πρέπει να δοθεί μια απόδειξη του Θεωρήματος 2 της εργασίας [27] στην οποία η ποσότητα $\varepsilon > 0$ θα πρέπει να χρησιμοποιείται καθ' όλη τη διάρκεια της απόδειξης.

Θεωρώντας τώρα τον Αλγόριθμο \mathbb{B} της εργασίας [33], μετά το συμπέρασμα που ακολουθεί τον περιορισμό στο Βήμα 7, που ισχύει αν και μόνο αν ο A είναι μη-αναγώγιμος, μπορούν να εξαχθούν παρόμοια συμπεράσματα με αυτά της περίπτωσης του Αλγορίθμου \mathbb{L} . Για ναδειχθεί του λόγου το αληθές αρκεί να εξετάσουμε τους δύο πίνακες που ακολουθούν, όπου ο πρώτος είναι αναγώγιμος και ο δεύτερος μη-αναγώγιμος.

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

Για τους δύο πίνακες $s_3^{(1)} = s_4^{(1)} = \min_{i=1(1)4} s_i^{(1)} = \frac{3}{4}$, ας πάρουμε $m = 3$. Μετά από την πρώτη επανάληψη έχουμε

$$A_3^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{4} & 2 \end{bmatrix}, \quad A_4^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -\frac{3}{4} & 0 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{3}{8} & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

Για τη δεύτερη επανάληψη $s_m^{(2)} = s_4^{(2)} = \frac{5}{8}$ και άρα

$$A_3^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{5}{12} \\ -\frac{2}{5} & 0 & -\frac{3}{5} & 1 \end{bmatrix}, \quad A_4^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -\frac{3}{4} & 0 \\ -2 & 1 & 0 & -\frac{5}{8} \\ 0 & -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{5}{12} \\ -\frac{2}{5} & 0 & -\frac{3}{5} & 1 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

και τότε η ακολουθία των s_m είναι $s_3^{(3)} = \frac{3}{4}$, $s_4^{(4)} = \frac{17}{20}$, $s_3^{(5)} = \frac{33}{36}$ και ούτω καθεξής. Είναι προφανές, σε όποιο από τα δύο παραδείγματα κι αν αναφερθούμε, ότι ο αλγόριθμος **δεν** τερματίζεται.

Βασιζόμενοι σε όλες τις προηγούμενες περιπτώσεις και αντι-παραδείγματα καθίσταται κατανοητό ότι θα πρέπει να γίνεται διάκριση μεταξύ αναγώγιμων και μη-αναγώγιμων πινάκων. Παρόλα αυτά, επειδή στην περίπτωση ενός μεγάλου πίνακα με μη-δομημένη αραιότητα ο έλεγχος της μη-αναγωγιμότητας μπορεί να είναι απαγορευτικής υπολογιστικής πολυπλοκότητας, αφήνουμε αυτό το θέμα προς το παρόν.

3.3 Προκαταρκτικά και Θεωρητικό Υπόβαθρο

Για την ανάλυση που θα ακολουθήσει, θα ανακαλέσουμε κάποιους ορισμούς και θα παραθέσουμε μια σειρά από χρήσιμες προτάσεις οι περισσότερες από τις οποίες μπορούν να βρεθούν στα βιβλία αναφοράς των Berman και Plemmons [5] και Horn και Johnson [21].

Με βάση τους ορισμούς για τους M - και H -πίνακες, που δίνονται στους Ορισμούς 1.1 και 1.2, αντίστοιχα, διατυπώνονται οι προτάσεις που ακολουθούν.

Σημείωση: Εφεξής στο παρόν κείμενο ένας M -πίνακας θα θεωρείται ότι είναι μη-ιδιόμορφος.

Λήμμα 3.1. *Αν $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ είναι M -πίνακας, το ίδιο θα ισχύει και για τον πίνακα PAP^T , όπου P είναι ένας πίνακας μετάθεσης.*

Λήμμα 3.2. *Ένας πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ είναι H -πίνακας αν και μόνο αν ο Jacobi επαναληπτικός πίνακας, που συνδέεται με τον πίνακα σύγκρισής του, είναι συγκλίνων.*

Σημείωση: Το Λήμμα 3.2 μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως εναλλακτικός και ισοδύναμος ορισμός του Ορισμού 1.2 για τον H -πίνακα.

Λήμμα 3.3. Έστω ότι $A \in \mathbb{C}^{n,n}$, με $a_{ii} \neq 0$, $i = 1(1)n$, και $B = EA$, όπου $E = \text{diag}(e_1, e_2, \dots, e_n) \in \mathbb{C}^{n,n}$, $e_i \in \mathbb{C}$ είναι οποιοσδήποτε μη-ιδιόμορφος διαγώνιος πίνακας. Έστω J_A και J_B οι Jacobi επαναληπτικοί πίνακες που συνδέονται με τους A και B , αντίστοιχα. Τότε οι J_A και J_B είναι ταυτόσημοι.

Απόδειξη. Ισχύει $b_{ij} = e_i a_{ij}$, $i, j = 1(1)n$. Επομένως έχουμε $J_B \equiv J_{EA} := I - (\text{diag}(EA))^{-1} EA = I - \text{diag}(A)^{-1} E^{-1} EA = I - \text{diag}(A)^{-1} A = J_A$. \square

Βασιζόμενοι στα τελευταία δύο λήμματα, ο στόχος μας θα είναι να προσεγγίσουμε τη φασματική ακτίνα του Jacobi επαναληπτικού πίνακα $B = J_{\mathcal{M}(A)}$ που συνδέεται με τον πίνακα σύγκρισης ενός δοσμένου πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n,n}$. Στην πραγματικότητα μπορούμε να αποδείξουμε ότι αν ο A είναι μη-αναγωγίμος και $\rho(B) < 1$ (ο A είναι H -πίνακας) ή $\rho(B) > 1$ (ο A δεν είναι H -πίνακας), υπάρχει ένας αλγόριθμος που τερματίζεται σε πεπερασμένο αριθμό επαναλήψεων. Επίσης, ο ίδιος αλγόριθμος τερματίζεται σε πεπερασμένο αριθμό επαναλήψεων στην περίπτωση όπου ο A είναι μη-αναγωγίμος H -πίνακας. Υπάρχει μια (οριακή) περίπτωση όπου ο A δεν είναι H -πίνακας και ο αλγόριθμος μπορεί να **μην** τερματίζεται σε πεπερασμένο αριθμό επαναλήψεων. Σ' αυτήν θα αναφερθούμε όταν προκύψει στα επόμενα.

Όλοι οι επαναληπτικοί αλγόριθμοι που έχουν προταθεί κατά καιρούς για την αναγνώριση των H -πινάκων, συμπεριλαμβανομένων και των Αλγορίθμων

\mathbb{H} , \mathbb{L} και \mathbb{B} , αν εξεταστούν σε βάθος, πράγμα που δεν είναι προφανές, θα διαπιστώσει κανείς ότι βασίζονται σε παραλλαγές της **Μεθόδου των Δυνάμεων**. Έτσι και ο αλγόριθμος που θα προταθεί από μας θα βασιστεί σε μια διαφοροποίηση της **Μεθόδου των Δυνάμεων** (βλέπε, π.χ., Wilkinson [44] και, πιο ειδικά, Fadeev και Fadeeva [11], Horn και Johnson [20] και Demmel [10]), την οποία έχουν έμμεσα ως αφετηρία όλα τα επαναληπτικά κριτήρια για H -πίνακες. Η *Μέθοδος των Δυνάμεων*, με μια πολύ συνοπτική παρουσίαση της απόδειξής της στη γενική περίπτωση, δίνεται αμέσως μετά, μέρος της οποίας χρησιμοποιείται στη συνέχεια.

Θεώρημα 3.4. (*Μέθοδος των Δυνάμεων*) Έστω $A \in \mathbb{C}^{n,n}$, με τις ιδιοτιμές του λ_i , $i = 1(1)n$, να ικανοποιούν τις σχέσεις

$$|\lambda_1| > |\lambda_j|, \quad j = 2(1)n.$$

Ορίζουμε

$$x^{(k)} = Ax^{(k-1)}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad \text{για κάθε } x^{(0)} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}. \quad (3.16)$$

Υποθέτουμε ότι το $x^{(0)}$ έχει μια μη-μηδενική συνιστώσα κατά μήκος του ιδιοδιανύσματος που αντιστοιχεί στη λ_1 . Τότε

$$\lambda_1 = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(Ax^{(k)})_i}{x_i^{(k)}} \quad \text{για } x_i^{(k)} \neq 0, \quad i = 1(1)n. \quad (3.17)$$

Απόδειξη. Έστω ότι $A = SJS^{-1}$ είναι η **Jordan κανονική μορφή** του A , όπου S είναι ο πίνακας των γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων s_i , $i = 1(1)n$, του A

και $J = \text{diag}(J_1, J_2, \dots, J_p)$ με

$$J_m = \begin{bmatrix} \lambda_m & 1 & & & \\ & \lambda_m & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_m & 1 \\ & & & & \lambda_m \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n_m, n_m}, \quad m = 2(1)p, \quad \sum_{m=2(1)p} n_m = n - 1, \quad (3.18)$$

και

$$S = [s_1 \ s_2 \ \dots \ s_n] = \begin{bmatrix} s_{11} & \dots & \dots & \dots & s_{1n} \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ s_{i1} & \dots & s_{ii} & \dots & s_{in} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ s_{n1} & \dots & \dots & \dots & s_{nn} \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

Χρησιμοποιώντας την *Jordan κανονική μορφή* μπορούμε να πάρουμε

$$x^{(k)} = A^k x^{(0)} = S J^k S^{-1} x^{(0)}$$

και θέτοντας $x^{(0)} = S y = S [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n]^T$ έχουμε ότι

$$x^{(k)} = S \text{diag}(J_1^k, J_2^k, \dots, J_p^k) y$$

ή, υποθέτοντας ότι $p = 2$ για την απλοποίηση της ανάλυσης, για $k > n - 2$, θα ισχύει ότι

$$x^{(k)} = \lambda_1^k y_1 s_1 + [s_2 \ s_3 \ \dots \ s_n] \begin{bmatrix} \lambda_2^k y_2 + \binom{k}{1} \lambda_2^{k-1} y_3 + \dots + \binom{k}{n-2} \lambda_2^{k-(n-2)} y_n \\ \lambda_2^k y_3 + \dots + \binom{k}{n-3} \lambda_2^{k-(n-3)} y_n \\ \vdots \\ \lambda_2^k y_n \end{bmatrix}.$$

Επομένως η i -οστή συνιστώσα του διανύσματος $x^{(k)}$ θα είναι

$$\begin{aligned} x_i^{(k)} = & \lambda_1^k y_1 s_{i1} + \lambda_2^k (y_2 s_{i2} + y_3 s_{i3} + \dots + y_n s_{in}) \\ & + \binom{k}{1} \lambda_2^{k-1} (y_3 s_{i2} + y_4 s_{i3} + \dots + y_n s_{i, n-1}) \\ & + \dots + \binom{k}{n-2} \lambda_2^{k-(n-2)} y_n s_{i2}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Θέτουμε $z_1 = y_1 s_{i1}$, και $z_j = \sum_{m=j(1)n} y_m s_{i,m-j+2}$, $j = 2(1)n$, σχηματίζουμε το πηλίκο των i -οστών συνιστωσών των δύο διαδοχικών διανυσμάτων $x^{(k+1)}$ και $x^{(k)}$, από την (3.20), οπότε έχουμε

$$\frac{x_i^{(k+1)}}{x_i^{(k)}} = \frac{z_1 \lambda_1^{k+1} + z_2 \lambda_2^{k+1} + z_3 \binom{k+1}{1} \lambda_2^k + \cdots + z_n \binom{k+1}{n-2} \lambda_2^{k+1-(n-2)}}{z_1 \lambda_1^k + z_2 \lambda_2^k + z_3 \binom{k}{1} \lambda_2^{k-1} + \cdots + z_n \binom{k}{n-2} \lambda_2^{k-(n-2)}}. \quad (3.21)$$

Η παραπάνω σχέση γράφεται ισοδύναμα ως εξής

$$\frac{(Ax^{(k)})_i}{x_i^{(k)}} = \lambda_1 \cdot \frac{z_1 + z_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{k+1} + \frac{z_3}{\lambda_1} \binom{k+1}{1} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k + \cdots + \frac{z_n}{\lambda_1^{n-2}} \binom{k+1}{n-2} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{k+1-(n-2)}}{z_1 + z_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k + \frac{z_3}{\lambda_1} \binom{k}{1} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{k-1} + \cdots + \frac{z_n}{\lambda_1^{n-2}} \binom{k}{n-2} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{k-(n-2)}}. \quad (3.22)$$

Κάθε ένας από τους όρους των αθροισμάτων του αριθμητή και του παρονομαστή του κλάσματος του δεξιού μέλους, εκτός από τους δύο πρώτους, μπορούν να αναπτυχθούν σε ένα άθροισμα του οποίου οι όροι έχουν μέτρα της μορφής $ck^l a^k$, με c να είναι μια θετική σταθερά, $l = 1(1)n - 1$ και $a = \left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right| < 1$. Επειδή οι συναρτήσεις x^l και a^x , $x \in [1, +\infty)$, είναι άπειρες φορές συνεχώς παραγωγίσιμες, με εφαρμογή του κανόνα του de l' Hospital l φορές έχουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^l}{a^{-x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^l)^{(l)}}{\lim_{x \rightarrow +\infty} (a^{-x})^{(l)}} = \frac{l!}{\log^l \left(\frac{1}{a}\right)} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0.$$

Λόγω αυτής της παρατήρησης, η (3.22) δίνει αμέσως

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{(Ax^{(k)})_i}{x_i^{(k)}} = \lambda_1, \quad \text{για } x_i^{(k)} \neq 0, \quad i = 1(1)n. \quad (3.23)$$

Σημειώνουμε ότι αν αντί του ενός Jordan block J_2 είχαμε $p-1$ blocks J_m , $m = 2(1)p$, τα βασικά βήματα της απόδειξης θα παρέμεναν τα ίδια εκτός από το ότι αντί να έχουμε ένα άθροισμα των $n-1$ όρων που σχετίζονται με την ιδιοτιμή

λ_2 θα είχαμε $p - 1$ αθροίσματα καθένα με n_m όρους που θα σχετίζονταν με την ιδιοτιμή λ_m , $m = 2(1)p$. □

Επειδή στη συνέχεια θα πραγματευτούμε ακολουθίες πραγματικών αριθμών, υπενθυμίζουμε μερικές βασικές έννοιες που θα χρησιμεύσουν στην ανάλυση που θα ακολουθήσει.

Λήμμα 3.5. Έστω α_p , $p = 1, 2, 3, \dots$, μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Λέμε ότι ο πραγματικός αριθμός α είναι το όριο της ακολουθίας αυτής και γράφουμε ότι

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \alpha_p = \alpha$$

αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένας φυσικός αριθμός $p_0 := p_0(\varepsilon)$, που εξαρτάται από το ε , τέτοιος ώστε για κάθε $p \geq p_0$ έχουμε ότι $|\alpha_p - \alpha| < \varepsilon$.

Παρατήρηση 3.3.1. Διαισθητικά, αυτό σημαίνει ότι τελικά όλα τα στοιχεία της ακολουθίας, εκτός από ένα πεπερασμένο πλήθος από αυτά, ανήκουν σε οποιαδήποτε περιοχή του ορίου· ή για κάθε περιοχή του ορίου υπάρχει ένας πεπερασμένος αριθμός στοιχείων της ακολουθίας που βρίσκεται έξω από αυτή. Το δεύτερο μέρος της παρούσας παρατήρησης θα χρησιμοποιηθεί επανειλημμένα στη συνέχεια.

Λήμμα 3.6. Έστω $\alpha_p^{(i)}$, $p = 1, 2, 3, \dots$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$, οι συγκλίνουσες ακολουθίες οι οποίες έχουν το ίδιο όριο. Δηλαδή, $\lim_{p \rightarrow \infty} \alpha_p^{(i)} = \alpha$. Θεωρούμε την ακολουθία

$$\beta_p = \alpha_p^{(i_p)}, \quad p = 1, 2, 3, \dots, \quad i_p \in \{1, 2, \dots, n\},$$

που σχηματίζεται θεωρώντας σαν β_p οποιοδήποτε από τα p -οστά στοιχεία των n προαναφερθεισών ακολουθιών. Τότε,

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \beta_p = \alpha.$$

Απόδειξη. Βασιζόμενοι στο Λήμμα 3.5, οι σχέσεις $\lim_{p \rightarrow \infty} \alpha_p^{(i)} = \alpha$, $i = 1, 2, \dots, n$, είναι ισοδύναμες με την πρόταση: “Για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει ένας φυσικός αριθμός $p_0^{(i)}$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$, που θα εξαρτάται από το ε , τέτοιος ώστε για κάθε $p \geq p_0^{(i)}$ έχουμε ότι $|\alpha_p^{(i)} - \alpha| < \varepsilon$ ”. Επιλέγοντας $p_0 = \max_{i=1(1)n} p_0^{(i)}$, έχουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$, για όλα τα $p \geq p_0$, $|\alpha_p^{(i_p)} - \alpha| < \varepsilon$ ή, ισοδύναμα, $|\beta_p - \alpha| < \varepsilon$ ή $\lim_{p \rightarrow \infty} \beta_p = \alpha$. \square

Πόρισμα 3.7. Θεωρούμε τις n ακολουθίες του Λήμματος 3.6. Τότε για τις δύο ακολουθίες

$$\gamma_p = \min\{\alpha_p^{(1)}, \alpha_p^{(2)}, \dots, \alpha_p^{(n)}\} \text{ και } \delta_p = \max\{\alpha_p^{(1)}, \alpha_p^{(2)}, \dots, \alpha_p^{(n)}\},$$

ισχύει ότι

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \gamma_p = \lim_{p \rightarrow \infty} \delta_p = \alpha. \quad (3.24)$$

Επειδή, στο παρόν κεφάλαιο, θα αναφερόμαστε σε μη-αρνητικούς μη-αναγώγιμους πίνακες, παραθέτουμε μια σειρά προτάσεων που θα χρησιμοποιηθούν αργότερα και μπορούν να βρεθούν στα βιβλία αναφοράς των Berman και Plemmons [5] ή/και Varga [42].

Θεώρημα 3.8. [42] Έστω $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $A \geq 0$, ένας μη-αναγώγιμος πίνακας. Τότε, η φασματική του ακτίνα $\rho(A)$ είναι μια απλή (θετική) ιδιοτιμή του A και ένα θετικό ιδιοδιάνυσμα σχετίζεται με αυτή.

Σημείωση: Η ίση με τη φασματική ακτίνα θετική ιδιοτιμή του πίνακα A του θεωρήματος είναι γνωστή ως η **Perron ρίζα** του A , το δε αντίστοιχο θετικό ιδιοδιάνυσμα ως το **Perron διάνυσμα** του A .

Ορισμός 3.4. [42] Έστω $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $A \geq 0$, ένας μη-αναγωγίμος πίνακας και k ο αριθμός των ιδιοτιμών του A μέτρου ίσου με τη φασματική ακτίνα $\rho(A)$. Αν $k = 1$, τότε λέμε ότι ο A είναι **πρωταρχικός (primitive) πίνακας**. Αν $k > 1$, τότε λέμε ότι ο A είναι **κυκλικός δείκτη k** .

Λήμμα 3.9. [5] Αν $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $A \geq 0$, ένας μη-αναγωγίμος πίνακας με θετικό ίχνος (trace), $\sum_{i=1}^n a_{ii} > 0$, τότε ο A είναι πρωταρχικός.

Θεώρημα 3.10. [5] Αν $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $A \geq 0$, είναι μη-αναγωγίμος πίνακας, τότε ο πίνακας $B = \varepsilon I + A$, $\varepsilon > 0$, είναι πρωταρχικός πίνακας.

Απόδειξη. Επειδή ο A είναι μη-αναγωγίμος, το ίδιο θα είναι και ο B . Βασιζόμενοι στο Λήμμα 3.9, χρειάζεται να αποδείξουμε ότι $\text{trace}(B) > 0$. Αλλά επειδή $\varepsilon > 0$ και $\sum_{i=1}^n a_{ii} \geq 0$ έχουμε:

$$\text{trace}(B) = \sum_{i=1}^n b_{ii} = \sum_{i=1}^n (\varepsilon + a_{ii}) = n\varepsilon + \sum_{i=1}^n a_{ii} > 0.$$

□

Θεώρημα 3.11. [42] Για κάθε δοσμένο μη-αναγωγίμο πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $A \geq 0$, έστω P^* είναι το **υπερογδομηόριο** των διανυσμάτων $x > 0$ (n -διάστατος πραγματικός θετικός κώνος του \mathbb{R}^n). Τότε, για κάθε $x \in P^*$, ισχύει ότι

$$\min_{i=1(1)n} \left\{ \frac{\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j}{x_i} \right\} < \rho(A) < \max_{i=1(1)n} \left\{ \frac{\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j}{x_i} \right\},$$

ή

$$\frac{\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j}{x_i} = \rho(A), \quad i = 1(1)n.$$

Παρατήρηση 3.4.1. Ένα συγκεκριμένο διάνυσμα $x \in P^*$ στο θεώρημα μπορεί να θεωρηθεί ότι αντιπροσωπεύει όλα τα θετικά πολλαπλάσιά του ($cx, c \in \mathbb{R}_+$). Προφανώς, το θεώρημα ισχύει και τα τρία κλάσματα σ' αυτό παραμένουν τα ίδια.

Ορισμός 3.5. Δεδομένου ενός πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n,n}$, το $z \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ είναι το αριστερό ιδιοδιάνυσμα του A αν

$$z^H A = \lambda z^H \iff A^H z = \bar{\lambda} z, \quad (3.25)$$

όπου $\lambda \in \mathbb{C}$, $\bar{\cdot}$ συμβολίζει το μιγαδικό συζυγή του βαθμωτού \odot και \odot^H το μιγαδικό συζυγή ανάστροφο του διανύσματος (ή του πίνακα) \odot .

Λήμμα 3.12. [20] Έστω x και z είναι ένα δεξιό και ένα αριστερό ιδιοδιάνυσμα του $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ που συνδέονται με διαφορετικές ιδιοτιμές λ και μ , αντίστοιχα. Τότε, $z^H x = 0$.

Θεώρημα 3.13. Για οποιοδήποτε δεδομένο μη-αναγώγιμο και πρωταρχικό πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $A \geq 0$, έστω ότι $A = SJS^{-1}$ είναι η Jordan κανονική μορφή του, με $J = \text{diag}(J_1, J_2, \dots, J_p)$ και με $S = [s_1 \ s_2 \ s_3 \ \dots \ s_n]$ να είναι ο πίνακας των γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων του A , όπως στο Θεώρημα 3.4 (βλέπε (3.18)-(3.19)). Τότε, κάθε $x \in P^*$, αναλυμένο κατά μήκος των ιδιοδιανυσμάτων s_i , $i = 1(1)n$, έχει μια θετική συνιστώσα κατά μήκος του Perron διανύσματος s_1 .

Απόδειξη. Ο δοσμένος πίνακας A , ως μη-αρνητικός, μη-αναγώγιμος και πρωταρχικός, έχει μια μοναδική θετική ιδιοτιμή λ_1 (*Perron ρίζα*) ίση με τη φασματική του ακτίνα και ένα θετικό ιδιοδιάνυσμα s_1 (*Perron διάνυσμα*) που συνδέεται με αυτή. Έστω ότι ο μοναδικός γραμμικός συνδυασμός του x σε σχέση με τα γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα s_i είναι $x = \sum_{i=1}^n y_i s_i$. Σημειώνοντας ότι οι πίνακες A^T και A έχουν ταυτόσημα φάσματα ιδιοτιμών, και ότι ο A^T είναι επίσης μη-αρνητικός, μη-αναγώγιμος και πρωταρχικός, έχουμε ότι η *Perron* ρίζα του είναι η λ_1 και έστω $z (> 0)$ το *Perron* διάνυσμά του. Συνεπώς, $z^T x > 0$ και άρα

$$0 < z^T x = \sum_{i=1}^n y_i z^T s_i. \quad (3.26)$$

Σημειώνουμε ότι, έχοντας υπόψη μας τη σχέση (3.25), το z είναι το αριστερό ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στη λ_1 . Θεωρούμε ένα οποιοδήποτε από τα Jordan blocks $J_m \in \mathbb{C}^{n_m, n_m}$, $m = 2(1)p$, του J και, για ευκολία, έστω $m = 2$. Από τη Jordan κανονική μορφή του A , έχουμε $AS = SJ$ και άρα

$$As_1 = \lambda_1 s_1, As_2 = \lambda_2 s_2, \text{ και } As_i = s_{i-1} + \lambda_2 s_i, i = 3(1)n_2 + 1. \quad (3.27)$$

Με χρήση του z , έχουμε από την (3.27) μέσω του Λήμματος 3.13 ότι $z^T s_2 = 0$. Από το τρίτο σύνολο σχέσεων της (3.27) έχουμε ότι για $i = 3$, $z^T As_3 = z^T s_2 + \lambda_2 z^T s_3$, από όπου παίρνουμε $z^T As_3 - \lambda_2 z^T s_3 = 0$. Ανακαλώντας ότι το z είναι ένα αριστερό ιδιοδιάνυσμα του A με αντίστοιχη ιδιοτιμή λ_1 , η τελευταία ισότητα γίνεται $(\lambda_1 - \lambda_2)z^T s_3 = 0$ και επειδή $|\lambda_2| < \lambda_1$, παίρνουμε $z^T s_3 = 0$. Επαγωγικά, βρίσκουμε ότι $z^T s_i = 0$, $i = 3(1)n_2 + 1$. Προφανώς, αυτό που μόλις αποδείξαμε για το Jordan block J_2 και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματά του εφαρμόζεται και

σε κάθε block J_m , $m = 2(1)p$, συνεπώς,

$$z^T s_i = 0, \quad i = 2(1)n. \quad (3.28)$$

Έχοντας υπόψη μας τη σχέση (3.28), η (3.26) γίνεται $z^T x = y_1 z^T s_1 > 0$. Επειδή z , x και s_1 είναι θετικά διανύσματα η τελευταία ανισότητα συνεπάγεται ότι το x έχει μια μη-μηδενική (θετική) συνιστώσα y_1 κατά μήκος του s_1 , και το θεώρημα έχει αποδειχθεί. \square

Στην επόμενη παράγραφο, χρησιμοποιώντας κάποιες ιδέες από τους Αλγορίθμους \mathbb{H} , \mathbb{L} , και \mathbb{B} , καθώς επίσης και κάποιες νέες, τον Ορισμό 1.2, ή έναν από τους ισοδύναμους του, π.χ. Λήμμα 3.2, εκμεταλλευόμαστε βασικά τα Θεωρήματα 3.4, 3.11 και 3.13 και προτείνουμε ένα νέο Αλγόριθμο (Αλγόριθμος \mathbb{AH}) ο οποίος, στην περίπτωση ενός μη-αναγωγίμου $A \in \mathbb{C}^{n,n}$, τερματίζεται σε ένα πεπερασμένο αριθμό επαναλήψεων.

Για να δύναται ο Αλγόριθμός μας να αναγνωρίζει αν ένας μη-αναγωγίμος πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n,n}$, με $a_{ii} \neq 0 \quad i = 1(1)n$, είναι H -πίνακας ή όχι εφαρμόζουμε τη Μέθοδο των Δυνάμεων 3.4 στο μη-αναγωγίμο και πρωταρχικό πίνακα $|A^{(0)}|$, όπου $A^{(0)} = (\text{diag}(A))^{-1} A$, με $x^{(0)} = e \in P^*$ και e το διάνυσμα με όλες τις συνιστώσες του ίσες με 1. Θεωρώντας $|A^{(k)}| = I + B^{(k)}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, και σημειώνοντας ότι ο πίνακας $B^{(0)}$ είναι ο Jacobi πίνακας που συνδέεται με τον πίνακα σύγκρισης του A , $J_{\mathcal{M}(A)}$, σταματάμε τις επαναλήψεις μόλις ένα από τα παρακάτω τρία κριτήρια ικανοποιηθεί: όλες οι συνιστώσες του διανύσματος $(I - B^{(k)})e$ είναι θετικές, ή όλες αρνητικές ή όλες μηδενικές. Είναι φανερό ότι

ο όμοιος προς τον $A^{(0)}$ πίνακας $A^{(k)}$, θα δίνεται από την έκφραση

$$A^{(k)} = \left(\text{diag}(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, \dots, x_n^{(k-1)}) \right)^{-1} A^{(k-1)} \text{diag}(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, \dots, x_n^{(k-1)}),$$

όπου $x^{(0)} = e$. Τότε, σύμφωνα με το Θεώρημα 3.11, το διάστημα

$$\left[\min_{i=1(1)n} s_i^{(k)}, \max_{i=1(1)n} s_i^{(k)} \right], \quad s_i^{(k)} = \sum_{j=1(1)n} |b_{ij}^{(k)}|, \quad i = 1(1)n,$$

είναι ένα διάστημα εντός του οποίου κείται η *Perron* ρίζα $\rho(B^{(0)}) = \rho(|A^{(0)}|) - 1$ του $J_{\mathcal{M}(A)}$ και επίσης το διάνυσμα $\text{diag}(x^{(0)})\text{diag}(x^{(1)}) \cdots \text{diag}(x^{(k)})e$ αποτελεί μια προσέγγιση του *Perron* διανύσματος του $|A^{(0)}|$, που είναι το ίδιο με αυτό του $B^{(0)}$. Καθίσταται έτσι προφανές ότι **δεν** είναι απαραίτητο να εκτελεστούν όλες οι επαναλήψεις της Μεθόδου των Δυνάμεων (3.16) αφού αρκεί να εκτελέσουμε τις επαναλήψεις μέχρις ότου ένα από τα προαναφερθέντα τρία κριτήρια ικανοποιηθεί. Επομένως ο Αλγόριθμός μας θα συγκλίνει σε κάποια νωρίτερη φάση από αυτήν της Μεθόδου των Δυνάμεων.

3.4 Ο Νέος Αλγόριθμος

Στον Αλγόριθμό μας ακολουθούμε τον Αλγόριθμο \mathbb{L} , **χωρίς** την παρουσία του ε και υιοθετούμε μια πιο γενική κανονικοποίηση από αυτήν του Αλγορίθμου \mathbb{B} ώστε σε κάθε στάδιο ο πίνακας $A^{(k)}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, να έχει διαγώνια στοιχεία μέτρου μονάδας ($|a_{ii}^{(k)}| = 1$, $i = 1(1)n$, $k = 0, 1, 2, \dots$). Οι αποδείξεις του βασικού ισχυρισμού μας θα δοθούν αναλυτικά μετά την παρουσίαση του νέου Αλγορίθμου:

Αλγόριθμος $\mathbb{A}\mathbb{H}$

ΕΙΣΟΔΟΣ: Ένας μη-αναγώγιμος πίνακας $A := [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$.

1. Αν $a_{ii} = 0$ για κάποιο $i \in \mathbb{N}$, “ο A **δεν** είναι H -πίνακας”, ΣΤΟΠ; Αλλιώς
2. Θέσε $A^{(0)} = (\text{diag}(A))^{-1} A$, $D^{(0)} = I$, $k = 1$
3. Υπολόγισε $A^{(k)} = (D^{(k-1)})^{-1} A^{(k-1)} D^{(k-1)} = [a_{ij}^{(k)}]$
4. Υπολόγισε $s_i^{(k)} = \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}^{(k)}|$, $i = 1(1)n$, $s^{(k)} = \min_{i=1(1)n} s_i^{(k)}$, $S^{(k)} = \max_{i=1(1)n} s_i^{(k)}$
5. Αν $s^{(k)} > 1$, “ο A **δεν** είναι H -πίνακας”, ΣΤΟΠ; Αλλιώς
6. Αν $S^{(k)} < 1$, “ο A **είναι** H -πίνακας”, ΣΤΟΠ; Αλλιώς
7. Αν $S^{(k)} = s^{(k)}$, “ο $\mathcal{M}(A)$ είναι **ιδιόμορφος**”, ΣΤΟΠ; Αλλιώς
8. Θέσε $d = [d_i]$, όπου

$$d_i = \frac{1 + s_i^{(k)}}{1 + S^{(k)}}, \quad i = 1(1)n$$

9. Θέσε $D^{(k)} = \text{diag}(d)$, $k = k + 1$; Πήγαμε στο Βήμα 3.

Θεώρημα 3.14. Με τις μέχρι τώρα υποθέσεις για τον πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ και τους συμβολισμούς που εισήχθησαν στον Αλγόριθμο $\mathbb{A}\mathbb{H}$, αυτός συγκλίνει σε πεπερασμένο αριθμό επαναλήψεων (εκτός, ίσως, όταν $\det(\mathcal{M}(A)) = 0$).

Απόδειξη. Αν οποιοδήποτε από τα διαγώνια στοιχεία a_{ii} του πίνακα A είναι μη-δέν τότε ο αλγόριθμος τερματίζεται στο Βήμα 1. Υποθέτοντας ότι $a_{ii} \neq 0$, $i = 1(1)n$, έχουμε από το Λήμμα 3.3, ότι οι $A^{(0)}$ και A έχουν τους ίδιους Jacobi επαναληπτικούς πίνακες που συνδέονται με αυτούς. Επομένως, οι $A^{(0)}$ και A είτε θα είναι και οι δύο H -πίνακες ή και οι δύο δεν θα είναι. Στο k -οστό επαναληπτικό βήμα σχηματίζουμε τον πίνακα $|A^{(k)}|$, με $|a_{ii}^{(k)}| = 1$, $i = 1(1)n$, και εμμέσως

τον πίνακα σύγκρισης $\mathcal{M}(A^{(k)})$, και παρατηρούμε ότι ο Jacobi επαναληπτικός πίνακας $B^{(k)}$, που συνδέεται με τον $\mathcal{M}(A^{(k)})$, θα είναι

$$J_{\mathcal{M}(A^{(k)})} = B^{(k)} = I - \mathcal{M}(A^{(k)}) = \begin{bmatrix} 0 & |a_{12}^{(k)}| & \cdots & |a_{1n}^{(k)}| \\ |a_{21}^{(k)}| & 0 & \cdots & |a_{2n}^{(k)}| \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ |a_{n1}^{(k)}| & |a_{n2}^{(k)}| & \cdots & 0 \end{bmatrix} = [b_{ij}^{(k)}]. \quad (3.1)$$

Αθροίζοντας τα στοιχεία του γραμμή προς γραμμή παρατηρούμε ότι κάθε άθροισμα γραμμής συμπίπτει με

$$s_i^{(k)} = \sum_{j=1}^n b_{ij}^{(k)} = \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}^{(k)}|, \quad i = 1(1)n,$$

δηλαδή, τα αθροίσματα των εκτός διαγωνίου στοιχείων του $-\mathcal{M}(A^{(k)})$. Σημειώνουμε ότι $B^{(k)} = (D^{(k-1)})^{-1} B^{(k-1)} D^{(k-1)}$, άρα οι $B^{(k)}$ και $B^{(k-1)}$ είναι όμοιοι πίνακες και, επαγωγικά, όμοιοι θα είναι και οι $B^{(k)}$ και $B^{(0)}$. Αυτό συνεπάγεται ότι

$$\sigma(B^{(k)}) = \sigma(B^{(k-1)}) = \dots = \sigma(B^{(1)}) = \sigma(B^{(0)}),$$

άρα

$$\rho(B^{(k)}) = \rho(B^{(k-1)}) = \dots = \rho(B^{(1)}) = \rho(B^{(0)}).$$

Επειδή ο A είναι μη-αναγώγιμος, το ίδιο θα είναι και οι $A^{(k)}$, $|A^{(k)}|$, $\mathcal{M}(A^{(k)})$ και $B^{(k)}$, για κάθε $k = 0, 1, 2, \dots$. Για να προσεγγίσουμε τη $\rho(B^{(0)})$ χρησιμοποιώντας τη Μέθοδο των Δυνάμεων χρειαζόμαστε ο αρχικός πίνακας να είναι πρωταρχικός. Για να εξασφαλίσουμε την πρωταρχικότητα, αντί να εφαρμόσουμε τη Μέθοδο των Δυνάμεων στο $B^{(0)}$ την εφαρμόζουμε στον πρωταρχικό πίνακα $|A^{(0)}| = I + B^{(0)} = 2I - \mathcal{M}(A^{(0)})$ (Θεώρημα 3.10). Με την επιλογή του

$x^{(0)} = [1 \ 1 \ \dots \ 1]^T \in \mathbb{R}^n$, που ανήκει στον P^* , ορίζουμε

$$x^{(k)} = |A^{(0)}|x^{(k-1)} = \dots = |A^{(0)}|^k x^{(0)}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Επειδή $x^{(0)} \in P^*$ και $|A^{(0)}| \geq 0$ και μη-αναγωγίμος, το $x^{(1)} \in P^*$, και με επαγωγή $x^{(k)} \in P^*$ για κάθε θετικό ακέραιο k . Σχηματίζοντας τα πηλίκα $\frac{x_i^{(k)}}{x_i^{(k-1)}}$, $i = 1(1)n$, όπου $x_i^{(k-1)} \neq 0$, $i = 1(1)n$, $\forall k = 1, 2, \dots$, επειδή $x^{(k-1)} \in P^*$, έχουμε από τον ορισμό των $D^{(k)}$ στον Αλγόριθμο ΑΗ και από τη σχέση (3.1) ότι

$$\frac{x_i^{(k)}}{x_i^{(k-1)}} = \frac{(|A^{(k-1)}|x^{(k-1)})_i}{x_i^{(k-1)}} = \frac{\sum_{j=1}^n |a_{ij}^{(k-1)}|(1 + s_j^{(k-1)})}{1 + s_i^{(k-1)}} = 1 + s_i^{(k)}, \quad i = 1(1)n, \quad (3.2)$$

με $s_i^{(0)} = 0$, $i = 1(1)n$. Σημειώνεται ότι η απαίτηση να έχει το διάνυσμα $x^{(0)} (> 0)$ μια μη-μηδενική συνιστώσα κατά μήκος του τρέχοντος Perron διανύσματος ικανοποιείται με βάση το Θεώρημα 3.13, κι αυτό επειδή ο $|A^{(0)}|$ είναι μη-αρνητικός, μη-αναγωγίμος και πρωταρχικός. Λόγω αυτών των ιδιοτήτων, όλες οι υποθέσεις του Θεωρήματος 3.4 της Μεθόδου των Δυνάμεων ικανοποιούνται και θα έχουμε $\lim_{k \rightarrow \infty} s_i^{(k)} = \rho(B^{(0)})$, $i = 1(1)n$. Επομένως, από το Θεώρημα 3.11, την Παρατήρηση 3.4.1 και το Πρόρισμα 3.7 έχουμε ότι

$$1 + s^{(1)} \leq 1 + s^{(2)} \leq \dots \leq 1 + \rho(B^{(0)}) \leq \dots \leq 1 + S^{(2)} \leq 1 + S^{(1)}, \quad (3.3)$$

όπου $s^{(k)} = \min_{i=1(1)n} s_i^{(k)}$, $S^{(k)} = \max_{i=1(1)n} s_i^{(k)}$, και ακόμη ότι

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s^{(k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} S^{(k)} = \rho(B^{(0)}).$$

Από την Παρατήρηση 3.3.1, αυτό σημαίνει ότι όλα τα στοιχεία και των δύο ακολουθιών $s^{(k)}$ και $S^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots$, εκτός από ένα πεπερασμένο πλήθος αυτών, θα ανήκουν στο διάστημα $(\rho(B^{(0)}) - \varepsilon, \rho(B^{(0)}) + \varepsilon)$, για κάθε $\varepsilon > 0$. Αυτό

με τη σειρά του, εξασφαλίζει τον τερματισμό του αλγορίθμου σε πεπερασμένο αριθμό επαναλήψεων.

Για την απόδειξη του ισχυρισμού μας πρέπει να διακρίνουμε τις εξής τρεις περιπτώσεις:

1) Αν $\rho(B^{(0)}) < 1$, τότε θέτοντας $\varepsilon = 1 - \rho(B^{(0)})$, όλα τα στοιχεία του $S^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots$, εκτός από ένα πεπερασμένο πλήθος αυτών, ανήκουν στο $(2\rho(B^{(0)}) - 1, 1)$. Συνεπώς, θα υπάρχει ένας φυσικός k_S τέτοιος ώστε για όλα τα $k \geq k_S$ να είναι $S^{(k)} < 1$. Στην περίπτωση αυτή, από το Λήμμα 3.2, ο A είναι H -πίνακας.

2) Αν $\rho(B^{(0)}) > 1$, τότε θέτοντας $\varepsilon = \rho(B^{(0)}) - 1$, όλα τα στοιχεία του $s^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots$, εκτός από ένα πεπερασμένο αριθμό από αυτά, θα ανήκουν στο $(1, 2\rho(B^{(0)}) - 1)$. Άρα, θα υπάρχει ένας φυσικός k_s τέτοιος ώστε για όλα τα $k \geq k_s$, $s^{(k)} > 1$. Στην περίπτωση αυτή, από το Λήμμα 3.2, ο A δεν θα είναι H -πίνακας.

3) Στην περίπτωση όπου $\rho(B^{(0)}) = 1$, ο αλγόριθμος, θεωρητικά μπορεί να τερματίζεται ή όχι σε πεπερασμένο αριθμό επαναλήψεων. \square

Το αντίστροφο του Θεωρήματος 3.14 είναι εύκολο να αποδειχθεί. Ειδικότερα έχουμε:

Θεώρημα 3.15. Έστω $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ είναι οποιοσδήποτε μη-αναγώγιμος πίνακας. Αν ο Αλγόριθμος ΛH τερματίζεται σε πεπερασμένο αριθμό επαναλήψεων, τότε το αποτέλεσμα του είναι σωστό.

Απόδειξη. Έστω ότι ο αλγόριθμος τερματίζεται σε πεπερασμένο αριθμό επαναλήψεων. Τότε, πρέπει να διακρίνουμε περιπτώσεις βασιζόμενοι αφενός στο

αποτέλεσμα του Αλγορίθμου και αφετέρου στο βήμα του Αλγορίθμου από το οποίο εξήλθε τερματίζοντας.

1) Ας υποθέσουμε ότι το αποτέλεσμα είναι “ο A είναι H -πίνακας”. Η μόνη πιθανή έξοδος είναι από το Βήμα 6. Σε μια τέτοια περίπτωση, $S^{(k)} < 1$. Από το Θεώρημα 3.11, ισχύουν:

$$s^{(k)} \leq \rho(B^{(0)}) \leq S^{(k)} < 1 \implies \rho(B^{(0)}) < 1.$$

Άρα από το Λήμμα 3.2, ο $A^{(k)}$ είναι H -πίνακας και το ίδιο είναι ο $A^{(0)}$. Από το Λήμμα 3.3, οι A και $A^{(0)} = (\text{diag}(A))^{-1}A$ έχουν ταυτόσημους Jacobi επαναληπτικούς πίνακες και επομένως, από το Λήμμα 3.2, ο A είναι H -πίνακας.

2) Ας υποθέσουμε ότι το αποτέλεσμα είναι “ο A δεν είναι H -πίνακας”. Πιθανές έξοδοι είναι από τα Βήματα 1 και 5.

α) Αν η έξοδος είναι από το Βήμα 1, τότε $a_{ii} = 0$, για κάποιο $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Τότε, για τη συγκεκριμένη i -οστή γραμμή δεν υπάρχει θετικός διαγώνιος πίνακας D τέτοιος ώστε $|a_{ii}|d_i > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|d_j$. Άρα, από τον Ορισμό 1.3, “ο A δεν είναι H -πίνακας”.

β) Αν η έξοδος είναι από το Βήμα 5, τότε με ανάλογο επιχειρήμα όπως στο (1) προηγουμένως ισχύει ότι $\rho(B^{(0)}) > 1$, συνεπώς “ο A δεν είναι H -πίνακας”.

3) Αν η έξοδος είναι από το Βήμα 7 τότε επειδή ο αλγόριθμος έχει ήδη περάσει από τα Βήματα 5 και 6 έχουμε ότι $s^{(k)} \leq 1$ και $S^{(k)} \geq 1$, αντίστοιχα. Έτσι, $S^{(k)} = s^{(k)}$, και άρα από το Θεώρημα 3.11, $\rho(B^{(k)}) = 1$ και σαν συνέπεια της ομοιότητας πινάκων έχουμε από τα Λήμματα 3.1 και 3.2 ότι $\rho(B^{(0)}) = 1$. Με τη βοήθεια του Λήμματος 3.3 έπεται ότι “ο A δεν είναι H -πίνακας”. Αν η προαναφερθείσα ισότητα στο Βήμα 7 έχει παραχθεί υπολογιστικά τότε $\rho(B^{(0)})$

μπορεί να είναι πολύ κοντά στη μονάδα και άρα **κανένα** συμπέρασμα σχετικά με τον H - ή μη- H - χαρακτήρα του A δεν μπορεί να εξαχθεί. \square

Παρατήρηση 3.4.1. Πρακτικά, κάθε επανάληψη του Αλγορίθμου $\mathbb{A}\mathbb{H}$, εκτός από τα εισαχθέντα στην αρχή, τις αντικαταστάσεις και τις συγκρίσεις που γίνονται, αποτελείται ουσιαστικά από τρία βασικά βήματα:

1. Υπολόγισε $I + B^{(k)} = \left(\text{diag}(x_1^{(k-1)}, \dots, x_n^{(k-1)}) \right)^{-1} (I + B^{(k-1)}) \text{diag}(x_1^{(k-1)}, \dots, x_n^{(k-1)})$.
2. Υπολόγισε $s_i^{(k)} = \frac{(B^{(k)}x^{(k-1)})_i}{x_i^{(k-1)}}$, $i = 1(1)n$.
3. Υπολόγισε $x_i^{(k)} = \frac{1+s_i^{(k)}}{1+S^{(k)}}$, $i = 1(1)n$.

Για να ολοκληρωθεί αυτή η παράγραφος παρουσιάζουμε ένα θεώρημα βασισμένο πάνω στις υποθέσεις και το συμβολισμό των Θεωρημάτων 3.14 και 3.15 που εξασφαλίζει ότι μετά από το πολύ ένα συγκεκριμένο αριθμό επαναλήψεων l θα έχουμε $[s^{(k+l)}, S^{(k+l)}] \subset [s^{(k)}, S^{(k)}]$ ενώ μετά το πολύ ένα άλλο ορισμένο αριθμό επαναλήψεων m ($\geq l$) θα είναι $s^{(k)} < s^{(k+m)} \leq \rho(B^{(0)}) \leq S^{(k+m)} < S^{(k)}$. Το θεώρημα αυτό βασίζεται στο ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 3.16. Υπό τις υποθέσεις και τους συμβολισμούς του Θεωρήματος 3.14, ισχύει ότι

$$s^{(k)} \leq s_i^{(k+1)} = \frac{\sum_{j=1}^n b_{ij}^{(k)} (1 + s_j^{(k)})}{1 + s_i^{(k)}} \leq S^{(k)}, \quad i = 1(1)n. \quad (3.4)$$

Επιπλέον, σε κάθε επανάληψη υπάρχουν δύο τουλάχιστον γραμμές όπου για τις γραμμές αυτές οι ανισότητες των σχέσεων (3.4) γίνονται αυστηρές. Επομένως,

είναι εξασφαλισμένο ότι ο συνολικός αριθμός των γραμμών με μέγιστο άθροισμα γραμμών, $S^{(k)}$, όπως και αυτός των γραμμών με ελάχιστο άθροισμα, $s^{(k)}$, μειώνεται τουλάχιστον κατά ένα μετά από κάθε επανάληψη.

Απόδειξη. Το πρώτο μέρος του λήμματος είναι άμεση συνέπεια των σχέσεων (3.2) και (3.3), όπου τουλάχιστον μία από τις δύο ανισότητες είναι αυστηρή γιατί σε αντίθετη περίπτωση ο αλγόριθμος θα τερματιζόταν. Για το δεύτερο σκέλος του θεωρήματος, ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν $n_1^{(k)} < n$ γραμμές του $B^{(k)}$ που έχουν το μέγιστο άθροισμα γραμμής $1+S^{(k)}$, $n_3^{(k)} (\leq n-n_1^{(k)})$ γραμμές που έχουν το ελάχιστο άθροισμα γραμμής $1+s^{(k)}$ και ότι για τις υπόλοιπες $n_2^{(k)} (= n - n_1^{(k)} - n_3^{(k)} \geq 0)$ γραμμές, οι παραπάνω ανισότητες στις (3.4) είναι αυστηρές. Ας υποθέσουμε, επιπλέον, ότι με ένα μεταθετικό μετασχηματισμό ομοιότητας με μεταθετικό πίνακα $P^{(k)}$, μεταφέρουμε τις προαναφερθείσες $n_1^{(k)}$ γραμμές στις $n_1^{(k)}$ πρώτες, τις $n_2^{(k)}$ να τις ακολουθούν και τις $n_3^{(k)}$ γραμμές στις τελευταίες $n_3^{(k)}$, διατηρώντας το σύμβολο $B^{(k)}$ για τον πίνακα $P^{(k)}B^{(k)}(P^{(k)})^T$. Άρα, θα ισχύουν οι ακόλουθες τρεις σειρές σχέσεων:

$$\begin{aligned} S^{(k)} &= \max_{i=1(1)n_1^{(k)}} s_i^{(k)}, \\ s^{(k)} &< s_i^{(k)} < S^{(k)}, \quad i = n_1^{(k)} + 1(1)n_1^{(k)} + n_2^{(k)}, \\ s^{(k)} &= \min_{i=n_1^{(k)}+n_2^{(k)}+1(1)n} s_i^{(k)}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

και, σε αντιστοιχία με τις σχέσεις (3.5), ο πίνακάς μας θα έχει τη διαχωρισμένη μορφή

$$B^{(k)} = \left[\begin{array}{c|c|c} B_{11}^{(k)} & B_{12}^{(k)} & B_{13}^{(k)} \\ \hline B_{21}^{(k)} & B_{22}^{(k)} & B_{23}^{(k)} \\ \hline B_{31}^{(k)} & B_{32}^{(k)} & B_{33}^{(k)} \end{array} \right]. \quad (3.6)$$

Ανακαλούμε ότι $s^{(k)} < S^{(k)}$ και σημειώνουμε ότι λόγω της μη-αναγωγιμότητας του A , και επομένως και αυτής του $B^{(k)}$, ο υποπίνακας $\left[B_{12}^{(k)} \mid B_{13}^{(k)} \right]$ θα έχει τουλάχιστον ένα μη-μηδενικό στοιχείο $b_{ij}^{(k)}$, αλλιώς ο $B^{(k)}$ θα ήταν αναγωγίμος. Το ίδιο είναι αληθές και για τον υποπίνακα $\left[B_{31}^{(k)} \mid B_{32}^{(k)} \right]$, και επίσης για τουλάχιστον έναν από τους υποπίνακες $B_{21}^{(k)}$ και $B_{23}^{(k)}$. Όπως έχουμε ήδη διαπιστώσει $B^{(k+1)} = (D^{(k)})^{-1}B^{(k)}D^{(k)}$, κι έτσι $I+B^{(k+1)} = I+(D^{(k)})^{-1}B^{(k)}D^{(k)}$. Συνεπώς, αθροίζοντας όλα τα στοιχεία σε κάθε γραμμή του $I+B^{(k+1)}$, μπορεί να βρεθεί ότι για τουλάχιστον μια γραμμή $i \in \{1, 2, \dots, n_1^{(k)}\}$ ισχύει

$$1 + s^{(k)} < 1 + s_i^{(k+1)} = 1 + \sum_{j=1}^n b_{ij}^{(k+1)} < 1 + S^{(k)}. \quad (3.7)$$

Για την απόδειξη, υποθέτουμε ότι $b_{i_1 j_1}^{(k)} \neq 0$, για κάποιο $i_1 \in \{1, \dots, n_1^{(k)}\}$ και $j_1 \in \{n_1^{(k)} + 1, \dots, n\}$ τότε μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η δεύτερη ανισότητα των σχέσεων (3.7) αποδεικνύεται ως εξής:

$$\begin{aligned} s_{i_1}^{(k+1)} &= \frac{\sum_{j=1, j \neq i_1}^n b_{i_1 j}^{(k)}(1 + s_j^{(k)})}{1 + s_{i_1}^{(k)}} < S^{(k)} \iff \sum_{j=1, j \neq i_1}^n b_{i_1 j}^{(k)}(1 + s_j^{(k)}) < (1 + s_{i_1}^{(k)})S^{(k)} \\ &\iff \sum_{j=1, j \neq i_1}^n b_{i_1 j}^{(k)} + \sum_{j=1, j \neq i_1}^n b_{i_1 j}^{(k)}s_j^{(k)} < S^{(k)} + s_{i_1}^{(k)}S^{(k)} \iff \\ s_{i_1} + \sum_{j=1, j \neq i_1}^n b_{i_1 j}^{(k)}s_j^{(k)} &< S^{(k)} + s_{i_1}^{(k)}S^{(k)} \iff \sum_{j=1, j \neq i_1}^n b_{i_1 j}^{(k)}s_j^{(k)} < s_{i_1}^{(k)}S^{(k)} \quad (s_{i_1}^{(k)} = S^{(k)}) \\ &\iff \sum_{j=1, j \neq i_1}^n b_{i_1 j}^{(k)}s_j^{(k)} < \sum_{j=1, j \neq i_1}^n b_{i_1 j}^{(k)}S^{(k)}. \end{aligned}$$

Αλλά επειδή $b_{i_1 j_1}^{(k)} \neq 0$, $s_{j_1}^{(k)} < s_{i_1}^{(k)} = S^{(k)}$, λόγω του ότι $s_{i_1}^{(k)}$ είναι ένα από τα μέγιστα αθροίσματα γραμμών του πίνακα $B^{(k)}$ ενώ $s_{j_1}^{(k)}$ δεν είναι. Άρα η τελευταία αυστηρή ανισότητα στις ισοδυναμίες είναι αληθής, συνεπώς θα είναι και η αρχική.

Με ανάλογο τρόπο μπορεί να αποδειχθεί ότι οι γραμμές με το ελάχιστο άθροισμα γραμμών στις τελευταίες $n_3^{(k)}$ γραμμές ελαττώνονται τουλάχιστον κατά μία γραμμή. Τέλος, με παρόμοιο τρόπο, μπορεί να αποδειχθεί ότι οποιοδήποτε από τα νέα αθροίσματα γραμμών του πίνακα $B^{(k+1)}$, $i = n_1^{(k)} + 1(1)n_1^{(k)} + n_2^{(k)}$, δεν μπορεί να γίνει ούτε τόσο μεγάλο όσο το $S^{(k)}$ ούτε τόσο μικρό όσο το $s^{(k)}$, πράγμα που ολοκληρώνει την απόδειξη. \square

Θεώρημα 3.17. Υπό τις υποθέσεις και τους συμβολισμούς του Θεωρήματος 3.14 και του Λήμματος 3.16 υπάρχουν δύο αριθμοί $l \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ και m ($l \leq m \leq n-1$) τέτοιοι ώστε για οποιαδήποτε επανάληψη k θα ισχύει

$$[s^{(k+l)}, S^{(k+l)}] \subset [s^{(k)}, S^{(k)}] \quad (3.8)$$

και

$$s^{(k)} < s^{(k+m)} \leq \rho(B^{(0)}) \leq S^{(k+m)} < S^{(k)}. \quad (3.9)$$

Απόδειξη. Για να ισχύει ο εγκλεισμός (3.8) πρέπει είτε $s^{(k)} < s^{(k+l)}$, για το ελάχιστο άθροισμα γραμμών, ή $S^{(k+l)} < S^{(k)}$, για το μέγιστο άθροισμα γραμμών. Χρησιμοποιώντας το συμβολισμό του Λήμματος 3.16, είναι φανερό ότι η “χειρότερη” περίπτωση που μπορεί να έχουμε είναι όταν $n_2^{(k)} = 0$. Τότε: 1) Για n άρτιο $n_1^{(k)} = n_3^{(k)} = \frac{n}{2}$, και 2) Για n περιττό είτε $n_1^{(k)} = \frac{n-1}{2}$ και $n_3^{(k)} = \frac{n+1}{2}$ ή $n_1^{(k)} = \frac{n+1}{2}$ και $n_3^{(k)} = \frac{n-1}{2}$. Το Λήμμα 3.16 συνεπάγεται ότι για οποιαδήποτε περίπτωση n , άρτιου ή περιττού, ο μέγιστος αριθμός επαναλήψεων που απαιτούνται για να έχουμε μία από τις δύο ανισότητες αυστηρές είναι $l = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Τέλος, η “χειρότερη” περίπτωση για να ικανοποιείται το σύνολο των αυστηρών ανισοτήτων στις σχέσεις (3.9) είναι να έχουμε πάλι $n_2^{(k)} = 0$ και είτε $n_1^{(k)} = n-1$ ή

$n_3^{(k)} = n - 1$. Άρα, συνδυάζοντας αυτό με το αποτέλεσμα του Λήμματος 3.16 έχουμε ότι οι ανισότητες (3.9) ικανοποιούνται ταυτόχρονα μετά από το πολύ $m = n - 1$ επαναλήψεις. \square

3.5 Μια Συνάρτηση Matlab, Παραδείγματα και Σχόλια

Αρχίζουμε την παράγραφο αυτή παραθέτοντας μια Matlab συνάρτηση που υλοποιεί τον AHH Αλγόριθμό μας. Η Matlab συνάρτηση αυτή έχει ως οδηγό αυτήν του Αλγορίθμου H της εργασίας [29].

```
function [s_min, s_max, k, dd]=ahalgo(n, a, maxiter)
% INPUT: n = dimension of a square (complex) matrix,
%        a = an n-by-n (complex) matrix,
%        maxiter = maximum number of iterations allowed
% OUTPUT: dd = diagonal matrix D (if "A IS an H-matrix" or if
%           "A is NOT an H-matrix"),
%           = [] (if "A is NOT an H-matrix" ;
%                it has at least one zero diagonal element
%                or if "M(A) IS SINGULAR"),
%           s_min = smallest row sum of moduli of the Jacobi
%           matrix of M(A(k)),
%           s_max = largest row sum of moduli of the Jacobi
%           matrix of M(A(k)),
%           k = number of iterations performed
```

```

finish=0; k=1; dd=eye(n);
if (1-all(diag(a)))
    'A is NOT an H-matrix; It has at least one zero diagonal element'
    finish=1; s_min=0; s_max=Inf; k=k-1; dd=[];
end
if (finish == 0)
    a=abs(a);
    a=inv(diag(diag(a)))*a;
    for i=1:n
        a(i,i)=1;
    end
end
while (finish == 0 & k < maxiter+1)
    for i=1:n
        s(i)=sum(a(i,1:n))-1;
    end
    s_min=min(s); s_max=max(s);
    if s_min > 1
        's_min > 1, A is NOT an H-matrix'
        finish=1;
        break
    elseif s_max < 1
        's_max < 1, A IS an H-matrix'
    end
end

```

```

        finish=1;
        break
elseif (s_min==s_max)
    's_min=s_max, M(A) (to the Matlab precision) IS SINGULAR'
    finish=1;
    break
else
    for i=1:n
        d(i)=(1+s(i))/(1+s_max);
    end
end
k=k+1; diagonal=diag(d);
dd=dd*diagonal; d_1=inv(diagonal); a=d_1*a*diagonal;
for i=1:n
    a(i,i)=1;
end
end
if (k==maxiter+1 & finish==0)
    k=k-1; dd=[];
    'Inconclusive; increase maxiter'
end
% end of the function ahalgo

```

Στη συνέχεια δίνουμε ένα πλήθος αριθμητικών παραδειγμάτων που δοκι-

μάστηκαν με τη Matlab συνάρτηση `ahalgo`. Σ' όλα τα παραδείγματα ο θεωρούμενος πίνακας είναι μη-αναγώγιμος.

Αρχικά θεωρούμε τους μη-αναγώγιμους πίνακες που έπαιξαν το ρόλο των αντιπαραδειγμάτων στην Παράγραφο 3.2 για τα οποία ο Αλγόριθμος \mathbb{L} , με $\varepsilon = 0$, ανακυκλώνεται επ' άπειρον με αποτέλεσμα να μη συγκλίνει.

Παράδειγμα 1. Ο A_1 στην (3.8):

ΕΞΟΔΟΣ: “ο A είναι H -πίνακας”, $\max_{i=1(1)3} s_i^{(4)} = 0.87500000000000 < 1$,
 $D = \text{diag}(0.500000000000000, 0.312500000000000, 0.875000000000000)$.

Παράδειγμα 2. Ο A_2 στην (3.8):

ΕΞΟΔΟΣ: “ο A ΔΕΝ είναι H -πίνακας”, $\min_{i=1(1)3} s_i^{(4)} = 1.14285714285714 > 1$,
 $D = \text{diag}(0.333333333333333, 0.533333333333333, 0.933333333333333)$.

Το επόμενο είναι το αντιπαραδειγμα στην (3.13), όπου ο Αλγόριθμος \mathbb{B} αποτυγχάνει να συγκλίνει σε πεπερασμένο αριθμό επαναλήψεων.

Παράδειγμα 3. Ο A_4 στην (3.13):

ΕΞΟΔΟΣ: “ο A ΔΕΝ είναι H -πίνακας”, $\min_{i=1(1)4} s_i^{(2)} = 1.07142857142857 > 1$,
 $D = \text{diag}(1.000000000000000, 1.000000000000000, 0.437500000000000, 0.437500000000000)$.

Τα δύο επόμενα παραδείγματα έχουν παρθεί από την εργασία [27], και επιβεβαιώνουν το εκεί αποτέλεσμα αν και όχι στον ίδιο αριθμό επαναλήψεων.

Παράδειγμα 4. Ο A στο Παράδειγμα 1 της [27]:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -0.2 & -0.1 & -0.2 & -0.1 \\ -0.4 & 1 & -0.2 & -0.1 & -0.1 \\ -0.9 & -0.2 & 1 & -0.1 & -0.1 \\ -0.3 & -0.7 & -0.3 & 1 & -0.1 \\ -1 & -0.3 & -0.2 & -0.4 & 1 \end{bmatrix}.$$

ΕΞΟΔΟΣ: “ο A είναι H -πίνακας”, $\max_{i=1(1)5} s_i^{(6)} = 0.99892870378759 < 1$,
 $D = \text{diag}(0.41775867101876, 0.48021361502992, 0.65599854320113, 0.76476559904905, 1)$.

Παράδειγμα 5. Ο A στο Παράδειγμα 2 της [27]:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -0.8 & -0.1 \\ -0.5 & 1 & c \\ -0.8 & -0.6 & 1 \end{bmatrix}.$$

Για $c = -0.3951$:

ΕΞΟΔΟΣ: “ο A ΕΙΝΑΙ H -πίνακας”, $\max_{i=1(1)3} s_i^{(8)} = 0.99999417061559 < 1$,
 $D = \text{diag}(0.69344055479302, 0.74176649875408, 0.99985294182613)$.

Για $c = -0.3952$:

ΕΞΟΔΟΣ: “ο A ΔΕΝ είναι H -πίνακας”, $\min_{i=1(1)3} s_i^{(9)} = 1.00001588177980 > 1$,
 $D = \text{diag}(0.69343749916264, 0.74183369108397, 0.99983433483175)$.

Σημείωση: Με την ακρίβεια των τεσσάρων δεκαδικών ψηφίων που θεωρούμε το c , είναι προφανές ότι για όλα τα $|c| \leq 0.3951$ “ο A ΕΙΝΑΙ H -πίνακας” ενώ για $|c| \geq 0.3952$ “ο A ΔΕΝ είναι H -πίνακας”.

Το παρακάτω παράδειγμα επιβεβαιώνει το συμπέρασμα από την τύπου Gauss-Seidel διαφοροποίηση του Αλγορίθμου \mathbb{H} της εργασίας [29] που δίνεται με μια επεκτεταμένη συμπαγούς μετωπικού τύπου τεχνική στην εργασία [17]. Επιπλέον, η περίπτωση της αναποτελεσματικότητας έχει αρθεί.

Παραδείγματα 6. Ο A του Παραδείγματος της εργασίας [17]:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & -1 & 0 & -0.6 & 0 \\ 0 & -0.1 & 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0 & 1 & -0.5 \\ -0.2 & 0.1 & 0.3 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Για $a_{12} = 1.146391$:

ΕΞΟΔΟΣ: “ο A ΕΙΝΑΙ H -πίνακας”, $\max_{i=1(1)5} s_i^{(32)} = 0.99999993216569 < 1$,

$D = \text{diag}(1, 0.87230267174610, 0.27158312363400, 0.62050421587928, 0.36870533832715)$.

Για $a_{12} = 1.146392$:

ΕΞΟΔΟΣ: “ο A ΔΕΝ είναι H -πίνακας”, $\min_{i=1(1)5} s_i^{(37)} = 1.00000002036218 > 1$,

$D = \text{diag}(1, 0.87230203336695, 0.27158269490209, 0.62050348290098, 0.36870499419081)$.

Σημείωση: Μια παρόμοια σημείωση με εκείνη των Παραδειγμάτων 5 μπορεί να διευκρινήσει ότι η ακρίβεια των έξι δεκαδικών ψηφίων για το στοιχείο a_{12} , δίνει για όλα τα $|a_{12}| \leq 1.146391$ ότι “ο A ΕΙΝΑΙ H -πίνακας ” ενώ για $|a_{12}| \geq 1.146392$ ότι “ο A ΔΕΝ είναι H -πίνακας”.

Στα δύο παραδείγματα μη-αναγωγίμων πινάκων που δίνονται στη συνέχεια, ένας εκ των οποίων είναι μιγαδικός, οι πίνακες είναι ιδιόμορφοι. Ακόμα και στο πρώτο παράδειγμα αυτό εμμέσως διακρίνεται παρά το γεγονός ότι στην έξοδο έχουμε ότι “ο A ΕΙΝΑΙ H -πίνακας”.

Παράδειγμα 7. Ο A είναι ο πίνακας:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -0.5 \\ -1 & 2 & -1 \\ -0.5 & -1 & \frac{7}{6} \end{bmatrix}.$$

ΕΞΟΔΟΣ: “ο A ΕΙΝΑΙ H -πίνακας”,

$$\min_{i=1(1)3} s_i^{(33)} = \max_{i=1(1)3} s_i^{(33)} = 1.000000000000000,$$

$$D = \text{diag}(0.666666666666667, 0.833333333333333, 1.000000000000000).$$

Παράδειγμα 8. Ο A είναι ο πίνακας:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1+i\sqrt{3}}{4} & 2\sqrt{2}(1+i) \\ \frac{\sqrt{2}(1-i)}{8} & 2(1-i\sqrt{3}) \end{bmatrix}.$$

ΕΞΟΔΟΣ: “ο $\mathcal{M}(A)$ (με την ακρίβεια της Matlab) ΕΙΝΑΙ ΙΔΙΟΜΟΡΦΟΣ”,

$$\min_{i=1(1)2} s_i^{(3)} = \max_{i=1(1)2} s_i^{(3)} = 1,$$

$$D = \text{diag}(1.000000000000000, 0.125000000000000).$$

Το τελευταίο παράδειγμα είναι το Παράδειγμα 6 με $a_{12} = 1.146391$, όπου ετέθη $a_{33} = 0$, για να ελέγξουμε κατά πόσο η Matlab συνάρτησή μας μπορεί να διακρίνει την ύπαρξη του(ων) μηδενικού(ών) στη διαγώνιο του πίνακα εισόδου.

Παράδειγμα 9. Ο A_4 της (3.13) με $a_{33} = 0$:

ΕΞΟΔΟΣ: “ο A ΔΕΝ είναι H -πίνακας. Έχει τουλάχιστον ένα μηδενικό διαγώνιο στοιχείο”,

$$\min_{i=1(1)4} s_i^{(0)} = 0, \max_{i=1(1)4} s_i^{(0)} = \infty, D = \square.$$

Τρία σχόλια για να κλείσουμε την παρούσα παράγραφο και το παρόν κεφάλαιο είναι τα εξής:

1) Ο Αλγόριθμός μας (ΑΗΙ), καθώς και η υλοποίησή του στη Matlab συνάρτηση `ahalgo`, με μικρή διαφοροποίηση, εργάζεται αποτελεσματικά και στην περίπτωση όπου θέλουμε να βρούμε μια καλή προσέγγιση της φασματικής ακτίνας ενός μη-αναγώγιμου πίνακα με μη-αρνητικά ή με μη-θετικά εκτός διαγωνίου

στοιχεία, με τα ίδια διαγώνια στοιχεία, με την προϋπόθεση ότι έχει τεθεί ένα κριτήριο σύγκλισης, π.χ., $S^{(k)} - s^{(k)} < \eta$, όπου το η είναι η ακρίβεια που επιζητείται.

2) Ο Αλγόριθμός μας (και η Matlab συνάρτηση), εργάζεται εξίσου αποτελεσματικά και στην περίπτωση ενός πίνακα A που ΕΙΝΑΙ H -πίνακας ανεξάρτητα από το αν ο A είναι μη-αναγωγίμος ή αναγωγίμος.

3) Επέκταση του νέου Αλγορίθμου ΔH , που αναπτύχθηκε στο παρόν κεφάλαιο, ώστε να καλύπτεται πλήρως και η αναγωγίμη περίπτωση δίνεται στο κεφάλαιο που ακολουθεί.

Κεφάλαιο 4

Επαναληπτικό Κριτήριο για Αναγώγιμους και Μη Πίνακες

Ο νέος Αλγόριθμος, που τελικά παρουσιάζεται στο παρόν κεφάλαιο αποτελεί επέκταση του Αλγορίθμου $\mathbb{A}\mathbb{H}$ της εργασίας [2] ώστε να καλύψει επιπλέον την αναγώγιμη περίπτωση. Στην επόμενη παράγραφο εξετάζεται πλήρως η εφαρμογή του Αλγορίθμου $\mathbb{A}\mathbb{H}$ στη 2×2 block αναγώγιμη περίπτωση. Ακολουθώντας με τη βοήθεια της συνδυαστικής θεωρίας πινάκων μελετάμε τη γενική $p \times p$ block αναγώγιμη περίπτωση με εφαρμογή του Αλγορίθμου $\mathbb{A}\mathbb{H}$. Από την ανάλυση του Κεφαλαίου 3 καθώς και αυτής του παρόντος προκύπτει το νέο τύπου Jacobi επαναληπτικό κριτήριο για την αναγνώριση H -πινάκων. Ο νέος αλγόριθμος δίνεται σε μορφή ψευδοκώδικα (Αλγόριθμος $\mathbb{A}\mathbb{H}2$). Σε αντίθεση με τον Αλγόριθμο $\mathbb{A}\mathbb{H}$ ο νέος Αλγόριθμος εγγυάται τη σύγκλιση σε πεπερασμένο αριθμό επαναλήψεων την αναγνώριση του H -χαρακτήρα για όλους τους μη-αναγώγιμους καθώς επίσης και τους αναγώγιμους πίνακες. Η υλοποίηση του Αλγορίθμου $\mathbb{A}\mathbb{H}2$ πραγματοποιείται μέσω μιας Matlab συνάρτησης (`ah2algo`). Εφαρμόζεται σε ποικιλία αριθμητικών παραδειγμάτων καλύπτοντας διάφορες περιπτώσεις πινάκων όσον αφορά τη γενικότητα αλλά και την ευρύτητα.

4.1 Θεωρητικά στοιχεία

Καταρχάς, ανακαλούμε κάποια επιπλέον θεωρητικά στοιχεία (ορισμούς και προτάσεις) από τα βιβλία αναφοράς [5], [21], [42] και [45].

Λήμμα 4.1. [42] *Αν ο $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ είναι ένας μη-αναγώγιμος M -πίνακας, τότε ο αντίστροφός του υπάρχει και είναι ένας αυστηρά θετικός πίνακας, δηλαδή $A^{-1} > 0$.*

Λήμμα 4.2. [5] *Οποιοσδήποτε υποπίνακας ενός M -πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ είναι επίσης M -πίνακας.*

Λήμμα 4.3. [5] *Όλοι οι κύριοι υποπίνακες ενός M -πίνακα έχουν οριζουσες θετικές και αντίστροφα.*

Άμεση συνέπεια του προηγούμενου λήμματος και του ορισμού του M -πίνακα (1.1) είναι και το επόμενο:

Λήμμα 4.4. *Ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ με $a_{ii} > 0$, $i = 1(1)n$, και $a_{ij} \leq 0$, $i \neq j = 1(1)n$, είναι M -πίνακας αν και μόνο αν όλοι οι κύριοι υποπίνακες της άνω αριστερής γωνίας του έχουν θετικές οριζουσες.*

Από τους ορισμούς των M - και H -πινάκων, (βλέπε (1.1) και (1.2)) καθώς και από τις προτάσεις του προηγούμενου κεφαλαίου και το Λήμμα 4.2 προκύπτει αμέσως το παρακάτω.

Λήμμα 4.5. *Ένας κύριος υποπίνακας ενός H -πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ είναι επίσης H -πίνακας· επιπλέον, ο πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ δεν είναι H -πίνακας αν και μόνο αν οποιοσδήποτε από τους κύριους υποπίνακες του δεν είναι H -πίνακας.*

Θεώρημα 4.6. Έστω $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ ένας μη-ιδιόμορφος αναγώγιμος πίνακας και έστω

$$B := PAP^T = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & \cdots & B_{1,p-1} & B_{1p} \\ & B_{22} & \cdots & \cdots & B_{2,p-1} & B_{2p} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & & B_{p-1,p-1} & B_{p-1,p} \\ & & & & & B_{pp} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

η κανονική μορφή του Frobenius (**Frobenius normal form**) του A , όπου $P \in \mathbb{R}^{n,n}$ είναι κατάλληλος πίνακας μετάθεσης. Τότε, ο A είναι H -πίνακας αν και μόνο αν όλα τα διαγώνια blocks $B_{ii} \in \mathbb{C}^{n_i, n_i}$, $i = 1(1)p$, $\sum_{i=1}^p n_i = n$, της κανονικής μορφής του Frobenius (4.1) είναι H -πίνακες.

Απόδειξη. Από τον ορισμό του H -πίνακα (1.2) και το Λήμμα 3.1 έπεται ότι ο A είναι H -πίνακας αν και μόνο αν είναι και ο $B := PAP^T$. Τα διαγώνια blocks του πίνακα B , B_{ii} , $i = 1(1)p$, είναι μη-αναγώγιμοι πίνακες. Επειδή ο A είναι μη-ιδιόμορφος το ίδιο θα είναι και ο B . Επιπλέον, η μη-αναγωγιμότητα των B_{ii} συνεπάγεται ότι ένα πιθανό 1×1 διαγώνιο block στην κανονική μορφή B θα είναι μη-μηδενικό.

Έστω ότι οι B_{ii} , $i = 1(1)p$, είναι H -πίνακες. Τότε $\mathcal{M}(B_{ii})$, $i = 1(1)p$, θα είναι μη-ιδιόμορφοι M -πίνακες. Θεωρούμε τον πίνακα σύγκρισης του B που θα είναι

της μορφής

$$\mathcal{M}(B) = \begin{bmatrix} \mathcal{M}(B_{11}) & -|B_{12}| & \cdots & \cdots & -|B_{1,p-1}| & -|B_{1p}| \\ & \mathcal{M}(B_{22}) & \cdots & \cdots & -|B_{2,p-1}| & -|B_{2p}| \\ & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & & \mathcal{M}(B_{p-1,p-1}) & -|B_{p-1,p}| \\ & & & & & \mathcal{M}(B_{pp}) \end{bmatrix}. \quad (4.2)$$

Βασιζόμενοι στο Λήμμα 4.4 θα αποδείξουμε ότι ο οποιοσδήποτε κύριος υποπίνακας του $\mathcal{M}(B)$ στην (4.2) είναι M -πίνακας. Γι' αυτό, θεωρούμε έναν τυχαίο κύριο υποπίνακα της άνω αριστερής γωνίας του B , τάξης έστω

$$\left(\sum_{j=1}^{i-1} n_j + i' \right) \times \left(\sum_{j=1}^{i-1} n_j + i' \right), \quad i' = 1(1)n_i, \quad i = 1(1)p,$$

για τον οποίο θα αποδείξουμε ότι η ορίζουσά του είναι θετική. Σχηματίζουμε την ορίζουσα του προαναφερθέντα υποπίνακα, που λόγω της μορφής του $\mathcal{M}(B)$ θα είναι

$$c = \det(\mathcal{M}(B_{00})) \det(\mathcal{M}(B_{11})) \cdots \det(\mathcal{M}(B_{i-1,i-1})) \det(\mathcal{M}(B_{i'i'})), \quad i = 1(1)p, \quad (4.3)$$

όπου $B_{00} := I$ και $\mathcal{M}(B_{i'i'})$, $i' = 1(1)n_i$, συμβολίζει τον $i' \times i'$ κύριο υποπίνακα του $\mathcal{M}(B_{ii})$. Στο γινόμενο (4.3) οι πρώτοι i παράγοντες είναι θετικοί (ορίζουσες M -πινάκων). Επίσης θετικός είναι ο τελευταίος παράγοντας επειδή είναι η ορίζουσα του κύριου υποπίνακα τάξης $i' \times i'$ ενός M -πίνακα, $\mathcal{M}(B_{ii})$, που είναι επίσης ένας M -πίνακας. Συνεπώς, $c > 0$.

Το αντίστροφο προκύπτει αμέσως απο το δεύτερο μέρος του Λήμματος 4.5. Συγκεκριμένα, αν ο A είναι ένας H -πίνακας, H -πίνακας θα είναι και ο B και

με βάση το Λήμμα 4.5, H -πίνακας θα είναι και ο οποιοσδήποτε B_{ii} , $i = 1(1)p$, και άρα η ισχύς του θεωρήματος έχει εξασφαλιστεί. \square

4.2 Η Εφαρμογή του Αλγορίθμου ΑΗ σε μια Απλή Αναγώγιμη Περίπτωση

Αρχίζουμε την ανάλυσή μας με δυο προτάσεις οι οποίες έχουν προκύψει έμμεσα από τα Θεωρήματα 3.14 και 3.15.

Για το σκοπό αυτό, θεωρούμε το μη-αναγώγιμο πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n,n}$, με $a_{ii} \neq 0$, $i = 1(1)n$, και θέτουμε, όπως στον Αλγόριθμο ΑΗ,

$$A^{(0)} = (\text{diag}(A))^{-1} A, \\ A^{(k)} = \left(\text{diag}(d_1^{(k-1)}, d_2^{(k-1)}, \dots, d_n^{(k-1)}) \right)^{-1} A^{(k-1)} \text{diag}(d_1^{(k-1)}, d_2^{(k-1)}, \dots, d_n^{(k-1)}), \quad (4.1)$$

με $k = 1, 2, 3, \dots$, και $d^{(0)} = e$, όπου $e \in \mathbb{R}^n$ είναι το διάνυσμα με όλες τις συνιστώσες του ίσες με 1, και

$$|A^{(k)}| = I + B^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.2)$$

Σημειώνουμε ότι ο πίνακας $B^{(0)}$ είναι ο Jacobi πίνακας που συνδέεται με τον πίνακα σύγκρισης του A , $J_{\mathcal{M}(A)}$. Αν στον Αλγόριθμο ΑΗ επιτρέψουμε $k \rightarrow \infty$, τότε στις αποδείξεις των Θεωρημάτων 3.14 και 3.15 αποδείχθηκε επίσης έμμεσα στην εργασία [2], μεταξύ των άλλων, ότι:

Πόρισμα 4.7. Υπό τις ως τώρα υποθέσεις και τους συμβολισμούς το Perron διάνυσμα d του $|A^{(0)}|$ (και $B^{(0)}$) δίνεται από τη σχέση

$$d = \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\prod_{i=1}^k D^{(i)} \right) \right) e. \quad (4.3)$$

Πόρισμα 4.8. Υπό τις ως τώρα υποθέσεις και τους συμβολισμούς ισχύουν ότι

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |A^{(k)}| e = \rho(|A^{(0)}|) e. \quad (4.4)$$

Επιπλέον,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{ij}^{(k)} = \frac{d_j}{d_i} a_{ij}^{(0)}. \quad (4.5)$$

Ο Αλγόριθμος ΑΗΙ σχεδιάστηκε να εργάζεται για μη-αναγώγιμους πίνακες. Παρόλα αυτά, παρατηρήθηκε ότι μπορεί να εφαρμοσθεί και σε συγκεκριμένες κλάσεις αναγώγιμων πινάκων. Αυτό αποτέλεσε ένα κίνητρο για μια πιο ενδελεχή εξέταση της επίδρασης της εφαρμογής του Αλγορίθμου ΑΗΙ στους αναγώγιμους πίνακες. Έτσι, οδηγηθήκαμε σε μια επέκτασή του, τον Αλγόριθμο ΑΗΙ2, ο οποίος, όπως θα αποδειχθεί, συγκλίνει σε πεπερασμένο αριθμό επαναλήψεων, σε όλες τις πιθανές περιπτώσεις μη-αναγώγιμων και αναγώγιμων πινάκων.

Για να μεταβούμε από τη μη-αναγώγιμη περίπτωση και τον Αλγόριθμο ΑΗΙ στην αναγώγιμη και τον Αλγόριθμο ΑΗΙ2 και, συγχρόνως να καταστήσουμε περισσότερο κατανοητή την ανάλυσή μας, εξετάζουμε αρχικά ποιο είναι το αποτέλεσμα της εφαρμογής του Αλγορίθμου ΑΗΙ σε ένα μη-αρνητικό 2×2 block αναγώγιμο πίνακα A , του οποίου τα διαγώνια blocks είναι μη-αναγώγιμοι πίνακες με μη-μηδενικά διαγώνια στοιχεία. Σε μια τέτοια περίπτωση μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα διαγώνια στοιχεία του A είναι ήδη κανονικοποιημένα ώστε $a_{ii} = 1, i = 1(1)n$. Ας θεωρήσουμε, λοιπόν, τον πίνακα A που έχει όλα τα προαναφερθέντα χαρακτηριστικά

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{bmatrix}, \quad (4.6)$$

όπου $A_{11} \in \mathbb{R}^{n_1, n_1}$, $1 \leq n_1 \leq n - 1$, $O \in \mathbb{R}^{n_2, n_1}$ είναι ο μηδενικός πίνακας, και $n_1 + n_2 = n$.

Υποθέτουμε ότι ένα ιδιοδιάνυσμα x του A διαχωρίζεται ανάλογα με το διαχωρισμό του A ώστε $x = [x_1^T \ x_2^T]^T$. Ομοίως, έστω $z = [z_1^T \ z_2^T]^T$ ένα αριστερό ιδιοδιάνυσμα του A . Τέλος, αν χρειαστεί, θα υποθέσουμε ότι οποιοσδήποτε από τους διαγώνιους πίνακες $D^{(k)}$ του Αλγορίθμου ΑΗΗ είναι της μορφής $D^{(k)} = \begin{bmatrix} D_{n_1}^{(k)} & O_{n_1, n_2} \\ O_{n_2, n_1} & D_{n_2}^{(k)} \end{bmatrix}$. Στη συνέχεια, αναλύουμε τέσσερις περιπτώσεις συνολικά, όπου χρησιμοποιούμε τον εναλλακτικό συμβολισμό O_{ij} για τον O_{n_i, n_j} .

Περίπτωση 1: $\rho(A) = \max\{\rho(A_{11}), \rho(A_{22})\}$, $A_{12} = O_{12}$.

Έστω x ένα ιδιοδιάνυσμα του A . Από την $Ax = \rho(A)x$, έχουμε αμέσως ότι $A_{11}x_1 = \rho(A)x_1$ και $A_{22}x_2 = \rho(A)x_2$. Επειδή $A_{11} \geq 0$ και $A_{22} \geq 0$, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $x_i > 0$, $i = 1, 2$, είναι το *Perron* διάνυσμα του A_{ii} που αντιστοιχεί στην *Perron* ρίζα του $\rho(A_{ii})$, $i = 1, 2$, αντίστοιχα. Επομένως, $[x_1^T \ 0_{n_2}^T]^T$, $[0_{n_1}^T \ x_2^T]^T$ είναι δύο γραμμικά ανεξάρτητα μη-αρνητικά (δεξιά) ιδιοδιανύσματα του A . Στην περίπτωση όπου $\rho(A) = \rho(A_{11}) = \rho(A_{22})$, έχουμε ότι $[x_1^T \ x_2^T]^T$ είναι ένα θετικό ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στη φασματική ακτίνα του $\rho(A)$. Τα αντίστοιχα αριστερά ιδιοδιανύσματα του A βρίσκονται να είναι τα $[z_1^T \ 0_{n_2}^T]^T$ και $[0_{n_1}^T \ z_2^T]^T$, όπου $z_i > 0$ είναι το *Perron* διάνυσμα του A_{ii}^T με *Perron* ρίζα $\rho(A_{ii})$, $i = 1, 2$, αντίστοιχα. Ομοίως, αν $\rho(A) = \rho(A_{11}) = \rho(A_{22})$, $[z_1^T \ z_2^T]^T$ είναι ένα αριστερό θετικό ιδιοδιάνυσμα του A .

Υποθέτουμε τώρα ότι ο Αλγόριθμος ΑΗΗ εφαρμόζεται στον A , όπου οι πίνακες $D^{(k)}$ και $A^{(k)}$ έχουν διαχωριστεί σύμφωνα με το διαχωρισμό του A . Είναι

προφανές ότι

$$A^{(k)} = \begin{bmatrix} \left(D_{n_1}^{(k-1)}\right)^{-1} A_{11}^{(k-1)} D_{n_1}^{(k-1)} & O_{12} \\ O_{21} & \left(D_{n_2}^{(k-1)}\right)^{-1} A_{22}^{(k-1)} D_{n_2}^{(k-1)} \end{bmatrix}. \quad (4.7)$$

Η συγκεκριμένη κατάσταση δείχνει σαν να εφαρμόζεται ο Αλγόριθμος $\mathbb{A}\mathbb{H}$ σε καθένα από τα (μη-αναγώγιμα) διαγώνια blocks του $A^{(k)}$ ξεχωριστά. Άρα, τα n_1 πρώτα αθροίσματα γραμμών του $A^{(k)}$, αυτά του $A_{11}^{(k)}$, θα τείνουν στο $1 + \rho(B_{11}^{(0)})$ καθώς $k \rightarrow \infty$, ενώ τα τελευταία n_2 αθροίσματα γραμμών θα τείνουν στο $1 + \rho(B_{22}^{(0)})$.

Σημείωση: Παρατηρούμε ότι, ανεξάρτητα από το ποιό από τα A_{11} και A_{22} αντιστοιχεί στη $\rho(A)$, έχουμε ότι για τα διαγώνια blocks του $A^{(0)}$ τα Πορίσματα 4.7 και 4.8 εφαρμόζονται. Συνεπώς,

$$d_{n_j} = \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\prod_{i=1}^k D_{n_j}^{(i)} \right) \right) e_{n_j} \quad \text{και} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} A_{jj}^{(k)} e_{n_j} = \rho(A_{jj}^{(0)}) e_{n_j}, \quad j = 1, 2, \quad (4.8)$$

όπου το d_{n_j} δεν είναι τίποτα άλλο από το *Perron* διάνυσμα x_j που αντιστοιχεί στους $A_{jj}^{(0)}$ και $B_{jj}^{(0)}$.

Περίπτωση 2: $\rho(A) = \rho(A_{22}) > \rho(A_{11})$, $A_{12} \neq O_{12}$.

Από την $Ax = \rho(A)x$, εργαζόμενοι όπως στην Περίπτωση 1 προηγουμένως, έχουμε ότι

$$A_{11}x_1 + A_{12}x_2 = \rho(A)x_1 \quad \text{και} \quad A_{22}x_2 = \rho(A)x_2. \quad (4.9)$$

Από τη δεύτερη εξίσωση παίρνουμε ότι $x_2 > 0$ είναι το *Perron* διάνυσμα που αντιστοιχεί στον A_{22} και τότε από την πρώτη εξίσωση έχουμε ότι $(\rho(A_{22})I_{n_1} -$

$A_{11})x_1 = A_{12}x_2$. Επειδή ο $\rho(A_{22})I_{n_1} - A_{11}$ είναι ένας μη-αναγωγίμος M -πίνακας, από το Λήμμα 4.1, ο αντίστροφός του θα είναι ένας θετικός πίνακας. Τότε, $x_1 = (\rho(A_{22})I_{n_1} - A_{11})^{-1} A_{12}x_2 > 0$. Επομένως, το $x = [x_1^T x_2^T]^T > 0$ είναι το “Perron διάνυσμα” του A που αντιστοιχεί στην “Perron ρίζα” $\rho(A)$. Επιπλέον, το μη-αρνητικό αριστερό ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στη $\rho(A)$ βρίσκεται εύκολα ότι είναι το $z = [0_{n_1}^T z_2^T]^T$, όπου το z_2 είναι το Perron διάνυσμα του A_{22}^T που αντιστοιχεί στην Perron ρίζα του, $\rho(A)$.

Εφαρμόζοντας τον Αλγόριθμο $\mathbb{A}\mathbb{H}$ στον συγκεκριμένο πίνακα A , και ακολουθώντας το διαχωρισμό του, έχουμε για τους πίνακες $A^{(k)}$ ότι

$$A^{(k)} = \begin{bmatrix} \left(D_{n_1}^{(k-1)}\right)^{-1} A_{11}^{(k-1)} D_{n_1}^{(k-1)} & \left(D_{n_1}^{(k-1)}\right)^{-1} A_{11}^{(k-1)} D_{n_2}^{(k-1)} \\ O_{21} & \left(D_{n_2}^{(k-1)}\right)^{-1} A_{22}^{(k-1)} D_{n_2}^{(k-1)} \end{bmatrix}. \quad (4.10)$$

Ανακαλώντας ότι υπάρχει ένα θετικό ιδιοδιάνυσμα x που αντιστοιχεί στη $\rho(A)$ και ότι το αντίστοιχο αριστερό ιδιοδιάνυσμα z είναι μη-αρνητικό, έπεται, από το Θεώρημα 3.13 ότι, ότι το διάνυσμα $d^{(0)} = e$, έχει πάντα μια θετική συνιστώσα κατά μήκος του ιδιοδιανύσματος x . Έτσι, το Θεώρημα της Μεθόδου των Δυνάμεων 3.4 εφαρμόζεται και δίνει ότι τα όλα τα αθροίσματα γραμμών του $A^{(k)}$ τείνουν στη $\rho(A)$ καθώς $k \rightarrow \infty$. Συνεπώς, οι σχέσεις (4.3)–(4.5) ισχύουν, όπου το d στην (4.3) είναι το Perron διάνυσμα x που αντιστοιχεί στους $A^{(0)}$ και $B^{(0)}$. Σημειώνοντας τους block διαχωρισμούς του A και του $A^{(k)}$ και διαχωρίζοντας το $d = [d_{n_1}^T d_{n_2}^T]^T$ ανάλογα καταλήγουμε σε παρόμοιες σχέσεις με αυτές στην (4.8)

$$d_{n_j} = \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\prod_{i=1}^k D_{n_j}^{(i)} \right) \right) e_{n_j}, \quad j = 1, 2 \quad \text{και} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} A_{22}^{(k)} e_{n_2} = \rho(A_{22}^{(0)}) e_{n_2}. \quad (4.11)$$

Παρατηρήστε τη διαφορά στις δεύτερες σχέσεις των (4.8) και (4.11).

Περίπτωση 3: $\rho(A) = \rho(A_{11}) > \rho(A_{22})$, $A_{12} \neq O_{12}$.

Από τη σχέση $Ax = \rho(A)x$ και εργαζόμενοι όπως στην Περίπτωση 2 παραπάνω παίρνουμε τις εξισώσεις (4.9). Από τη δεύτερη εξίσωση παίρνουμε ότι $x_2 = 0$ αφού ο $\rho(A)I_{n_2} - A_{22}$ είναι ένας μη-αναγωγίμος M -πίνακας και άρα αντιστρέψιμος. Τότε, από την πρώτη εξίσωση έχουμε ότι το Perron διάνυσμα που αντιστοιχεί στον A_{11} είναι το $x_1 > 0$. Έτσι, το μη-αρνητικό διάνυσμα $x = [x_1^T \ 0_{n_2}^T]^T$ είναι το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στη φασματική ακτίνα του A . Για να βρούμε το αριστερό ιδιοδιάνυσμα $z = [z_1^T \ z_2^T]^T$ που αντιστοιχεί στη $\rho(A)$ έχουμε ότι

$$A_{11}^T z_1 = \rho(A)z_1 \quad \text{και} \quad A_{12}^T z_1 + A_{22}^T z_2 = \rho(A)z_2.$$

Από την πρώτη εξίσωση έχουμε ότι $z_1 > 0$ ενώ από τη δεύτερη εξίσωση $z_2 = (\rho(A)I_{n_2} - A_{22}^T)^{-1} A_{12}^T z_1 > 0$ επειδή ο $\rho(A)I_{n_2} - A_{22}^T$ είναι ένας μη-αναγωγίμος M -πίνακας. Έτσι, το $z = [z_1^T \ z_2^T]^T$ είναι ένα θετικό αριστερό ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στη φασματική ακτίνα $\rho(A)$.

Εφαρμόζοντας τον Αλγόριθμο $\mathbb{A}\mathbb{H}$ στο συγκεκριμένο πίνακα A σημειώνουμε ότι υπάρχει ένα μη-αρνητικό ιδιοδιάνυσμα $x = [x_1^T \ 0_{n_2}^T]^T$ που συνδέεται με τη $\rho(A)$ και το αντίστοιχο αριστερό ιδιοδιάνυσμα z είναι θετικό. Αυτό συνεπάγεται, από το Θεώρημα 3.13, ότι το διάνυσμα $d^{(0)} = e$, έχει μια θετική συνιστώσα κατά μήκος του x . Αλλά επειδή μόνο οι πρώτες n_1 συνιστώσες του x είναι θετικές, οι άλλες είναι μηδέν, μόνο τα πρώτα n_1 αθροίσματα γραμμών του $A^{(k)}$ θα τείνουν στη $\rho(A)$ καθώς $k \rightarrow \infty$. Επειδή ο A , οι όμοιοί του πίνακες $A^{(k)}$ καθώς και ο όμοιός

του οριακός πίνακας $\lim_{k \rightarrow \infty} A^{(k)}$, είναι μη-αρνητικοί πίνακες, έπεται ότι καθένα από τα αθροίσματα γραμμών του $\lim_{k \rightarrow \infty} A_{11}^{(k)}$ θα είναι μικρότερο ή ίσο από $\rho(A)$. Ισχυριζόμαστε ότι όλα αυτά τα αθροίσματα γραμμών είναι ίσα με $\rho(A)$, έχοντας ως υποπαράγωγο ότι ισχύει ότι $\lim_{k \rightarrow \infty} A_{12}^{(k)} = O_{12}$. Για να το αποδείξουμε αυτό υποθέτουμε ότι μια τουλάχιστον γραμμή του $\lim_{k \rightarrow \infty} A_{11}^{(k)}$, ας πούμε η i -οστή του, έχει άθροισμα γραμμής αυστηρά μικρότερο της $\rho(A_{11})$. Λόγω του ότι ο A_{11} , είναι μη-αρνητικός και μη-αναγώγιμος, ιδιότητες που κληρονομούν όλοι οι όμοιοί του πίνακες $A_{11}^{(k)}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, και ο $\lim_{k \rightarrow \infty} A_{11}^{(k)}$, από τις σχέσεις Θεωρήματος 3.11, για $x = e$, έχουμε ότι $\rho\left(\lim_{k \rightarrow \infty} A_{11}^{(k)}\right) < \rho(A_{11}) = \rho(A)$. Αυτό συνιστά αντίφαση επειδή οι πίνακες $\lim_{k \rightarrow \infty} A_{11}^{(k)}$ και A_{11} ως όμοιοι πρέπει να έχουν την ίδια φασματική ακτίνα. Έτσι, βασιζόμενοι στα Πορίσματα (4.7) και (4.8), μπορούμε να έχουμε σχέσεις πανομοιότυπες με αυτές της Περίπτωσης 1 στην (4.8) αλλά όχι στην (4.3) ή (4.4). Αυτό, λόγω του ότι το $[d_{n_1}^T \ d_{n_2}^T]^T$ δεν είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του $A^{(0)}$. Τέλος, παρατηρείστε ότι το να έχουμε $\lim_{k \rightarrow \infty} A_{12}^{(k)} = O_{12}$ συνεπάγεται ότι το d_{n_2} θα τείνει στο μηδέν καθώς το $k \rightarrow \infty$, γεγονός που μπορεί να προκαλέσει υπολογιστικά προβλήματα.

Περίπτωση 4: $\rho(A) = \rho(A_{11}) = \rho(A_{22})$, $A_{12} \neq O_{12}$.

Πριν από οποιαδήποτε ανάλυση πρέπει να παρατηρηθεί ότι παρόλο που στις προηγούμενες τρεις περιπτώσεις που εξετάστηκαν είχαμε $\text{index}(\rho(A)I - A) = 1$, στην παρούσα περίπτωση έχουμε $\text{index}(\rho(A)I - A) = 2$, που μπορεί να περιπλέξει κάπως την ανάλυση. Έστω ότι $x = [x_1^T \ x_2^T]^T$ είναι το μη-αρνητικό ιδιοδιάνυσμα που συνδέεται με την ιδιοτιμή $\rho(A)$ του A . Οι εξισώσεις (4.9) θα ισχύουν ξανά. Από αυτές τις εξισώσεις είναι “φανερό” ότι ένα μη-αρνητικό ιδιοδιάνυσμα που

συνδέεται με την ιδιοτιμή $\rho(A)$ του A είναι το $x = [x_1^T 0_{n_2}^T]^T$, όπου το $x_1 > 0$ είναι το *Perron* διάνυσμα του A_{11} . Φυσικά, επειδή $\text{index}(\rho(A)I - A) = 2$, υπάρχει επίσης ένα γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα y που συνδέεται με την ιδιοτιμή $\rho(A)$ του A το οποίο είναι θετικό (βλέπε, π.χ., το Θεώρημα 3.1(1) της εργασίας του Rothblum [37]). Με τον ίδιο τρόπο μπορεί να βρεθεί ότι ένα αριστερό ιδιοδιάνυσμα του A είναι το $z = [0_{n_1}^T z_2^T]^T$, όπου $z_2 > 0$ είναι το *Perron* διάνυσμα του A_{22}^T . Ακολουθώντας την ίδια επιχειρηματολογία όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.13, θεωρούμε την *Jordan κανονική μορφή* του $A = SJS^{-1}$, όπου οι στήλες του S είναι τα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα s_i , $i = 1(1)n$, του A . Εκτός από μια πιθανή μετάθεση στις συνιστώσες των x και y με ένα πίνακα Q , τον ίδιο και για τα δύο διανύσματα, θα έχουμε $s_1 = Qx (\geq 0)$ και $s_2 = Qy (> 0)$. Έστω ότι t_1 είναι το αριστερό ιδιοδιάνυσμα του A που βρίσκεται από την ίδια μετάθεση στις συνιστώσες του z , δηλαδή $t_1 = Qz$. Επειδή $z^T x = 0$, αφού οι μηδενικές συνιστώσες οποιουδήποτε από τα δύο διανύσματα αντιστοιχούν στις θέσεις των θετικών συνιστωσών του άλλου, $t_1^T s_1 = 0$. Εξάλλου, $t_1^T s_2 > 0$, ενώ $t_1^T s_i = 0$, $i = 3(1)n$, σύμφωνα με το Θεώρημα 3.12 και την απόδειξη του Θεωρήματος 3.13. Έτσι, αν αναλύσουμε το πραγματικό θετικό διάνυσμα $d^{(0)} = e$ κατά μήκος των s_i , $i = 1(1)n$, θα έχουμε $d^{(0)} = \sum_{i=1}^n \eta_i s_i > 0$. Άρα,

$$0 < t_1^T d^{(0)} = \sum_{i=1}^n \eta_i t_1^T s_i = \eta_2 t_1^T s_2. \quad (4.12)$$

Οπότε $\eta_2 > 0$ και το $d^{(0)}$ έχει μια θετική συνιστώσα κατά μήκος του θετικού γενικευμένου ιδιοδιανύσματος s_2 . Από την *Jordan κανονική μορφή* του A έχουμε επίσης ότι

$$As_1 = \rho(A)s_1, \quad \text{και} \quad As_2 = s_1 + \rho(A)s_2.$$

Έτσι, εφαρμόζοντας τη Μέθοδο των Δυνάμεων στο $d^{(0)}$, παίρνοντας υπόψη μας και τις παραπάνω σχέσεις, θα έχουμε ότι

$$Ad^{(0)} = \eta_2 s_1 + \rho(A)(\eta_1 s_1 + \eta_2 s_2) + \sum_{i=3}^n \eta_i A s_i,$$

και επαγωγικά

$$A^k d^{(0)} = \rho^k(A) \left[k \frac{\eta_2 s_1}{\rho(A)} + (\eta_1 s_1 + \eta_2 s_2) + \frac{1}{\rho^k(A)} \sum_{i=3}^n \eta_i A^k s_i \right]. \quad (4.13)$$

Άρα παίρνοντας το λόγο των αντίστοιχων συνιστωσών των $A^{k+1}d^{(0)}$ και $A^k d^{(0)}$ θα έχουμε

$$\frac{(A^{k+1}d^{(0)})_j}{(A^k d^{(0)})_j} = \rho(A) \frac{\left[(k+1) \frac{\eta_2 s_1}{\rho(A)} + (\eta_1 s_1 + \eta_2 s_2) + \frac{1}{\rho^{k+1}(A)} \sum_{i=3}^n \eta_i A^{k+1} s_i \right]_j}{\left[k \frac{\eta_2 s_1}{\rho(A)} + (\eta_1 s_1 + \eta_2 s_2) + \frac{1}{\rho^k(A)} \sum_{i=3}^n \eta_i A^k s_i \right]_j}, \quad (4.14)$$

για $j = 1(1)n$. Για τις n_1 θετικές συνιστώσες του s_1 , που έστω ότι είναι στις θέσεις $j = i_l \in \{1, 2, \dots, n\}$, $l = 1(1)n_1$, διαιρούμε και τους δύο όρους του κλάσματος του δεξιού μέλους της (4.14) με k και παίρνουμε τα όρια καθώς $k \rightarrow \infty$. Τότε, είναι φανερό ότι, $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(A^{k+1}d^{(0)})_j}{(A^k d^{(0)})_j} = \rho(A)$, $j = i_l$, $l = 1(1)n_1$. (Σημείωση: Μπορεί κάποιος να αντιτείνει ότι το η_1 είναι αρνητικό ώστε τουλάχιστον μια από τις συνιστώσες του διανύσματος $k \frac{\eta_2 s_1}{\rho(A)} + (\eta_1 s_1 + \eta_2 s_2)$ στο $A^k d^{(0)}$, που αντιστοιχεί σε μια θετική συνιστώσα του s_1 , ας πούμε στην j -οστή του, κάνει αυτή τη συνιστώσα να μηδενιστεί. Σαν αποτέλεσμα αυτού, οι λόγοι που θα είχαμε θεωρήσει γι' αυτές τις συνιστώσες θα έτειναν σε μια μικρότερου μέτρου ιδιοτιμή. Παρόλα αυτά, για να συμβαίνει αυτό θα έπρεπε να έχουμε $\eta_1 = - \left[\frac{k\eta_2}{\rho(A)} + \frac{\eta_2 (s_2)_l}{(s_1)_l} \right]$. Αυτό είναι πιθανό αλλά μόνο για το πολύ n_1 τιμές του

j και για το πολύ n_1 επαναλήψεις αφού το δεξιό μέλος του σταθερού η_1 είναι μια συνάρτηση του μεταβαλλόμενου k . Έτσι, το όριο δε θα επηρεαστεί.) Για τις n_2 μηδενικές συνιστώσες του s_1 , οι εκφράσεις και των δύο όρων του κλάσματος στη σχέση (4.14) είναι αρκετά απλούστερες και το όριο των πηλίκων καθώς $k \rightarrow \infty$ είναι πάλι $\rho(A)$. Έχοντας υπόψη μας την παραπάνω ανάλυση και εφαρμόζοντας τον Αλγόριθμο $\mathbb{A}\mathbb{H}$ στον A όλα τα αθροίσματα γραμμών του $A^{(k)}$ τείνουν στη $\rho(A)$ καθώς $k \rightarrow \infty$. Όπως και στην προηγούμενη Περίπτωση 3 πρέπει να έχουμε ότι $\lim_{k \rightarrow \infty} A_{12}^{(k)} = O_{12}$. Σα συνέπεια αυτού, έχουμε ότι στο όριο η παρούσα περίπτωση είναι όμοια της Περίπτωσης 1, όπου είχαμε $\rho(A_{11}) = \rho(A_{22})$, με τη μόνη διαφορά ότι παρόλο που είναι $\lim_{k \rightarrow \infty} d_{n_2} = 0$ έχουμε ότι $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\left(D_{n_2}^{(k)} \right)^{-1} A_{22}^{(k)} D_{n_2}^{(k)} \right) e_{n_2} = \rho(A_{22}) e_{n_2}$.

Έχοντας εξαντλητικά μελετήσει τις τέσσερις πιθανές περιπτώσεις ενός μη-αρνητικού 2×2 block αναγώγιμου πίνακα, με μη-αναγώγιμα διαγώνια blocks και $a_{ii} = 1$, $i = 1(1)n$, μπορούμε να συνοψίσουμε κάποια από τα αποτελέσματά μας σε μια πιο γενική μιγαδική περίπτωση ως εξής:

Θεώρημα 4.9. Έστω $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ ένας 2×2 block αναγώγιμος πίνακας που είναι ήδη στη μορφή του (4.6), όπου A_{ii} , $i = 1, 2$, είναι μη-αναγώγιμοι και $a_{ii} = 1$, $i = 1(1)n$. Τότε, η εφαρμογή του Αλγορίθμου $\mathbb{A}\mathbb{H}$ στον A κάνει όλα τα αθροίσματα γραμμών του $|A^{(k)}|$, να τείνουν στη $\rho(|A|)$, στις Περιπτώσεις 1, (όταν $\rho(|A_{11}|) = \rho(|A_{22}|)$), 2 και 4. Στις Περιπτώσεις 1, όταν $\rho(|A_{11}|) \neq \rho(|A_{22}|)$, και 3, τα n_1 πρώτα αθροίσματα γραμμών τείνουν στη $\rho(|A_{11}|)$ ενώ τα τελευταία n_2 στη $\rho(|A_{22}|)$.

4.3 Η Γενική Αναγώγιμη Περίπτωση

Για να μεταβούμε από τους 2×2 block αναγώγιμους πίνακες, περίπτωση που μελετήθηκε εκτενέστατα στην προηγούμενη παράγραφο, στους γενικούς $p \times p$ block αναγώγιμους πρέπει να εισαχθεί επιπλέον θεωρητικό υπόβαθρο. Παρόλο που κάποια από τα στοιχεία που θα παρατεθούν ισχύουν για περισσότερο γενικούς $n \times n$ μιγαδικούς πίνακες, θα περιοριστούμε στους μη-αρνητικούς πίνακες. Πρέπει να τονιστεί ότι το μεγαλύτερο μέρος από το βασικό θεωρητικό υπόβαθρο, που ακολουθεί, έχει παρθεί από τις εργασίες των Rothblum [37], Schneider [38], Bru και Neumann [6] και επίσης από το βιβλίο αναφοράς των Berman και Plemmons [5].

Λήμμα 4.10. Έστω $A \geq 0$, $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ ένας αναγώγιμος πίνακας. Τότε υπάρχει ένας πίνακας μετάθεσης P τέτοιος ώστε ο A να μπορεί να αναχθεί σε μια block τριγωνική μορφή

$$PAP^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & \cdots & A_{1,p-1} & A_{1p} \\ & A_{22} & \cdots & \cdots & A_{2,p-1} & A_{2p} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & & A_{p-1,p-1} & A_{p-1,p} \\ & & & & & A_{pp} \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

όπου κάθε block $A_{ii} \in \mathbb{R}^{n_i, n_i}$, $i = 1(1)p$, $\sum_{i=1}^p n_i = n$, είναι μη-αναγώγιμος ή ένας 1×1 μηδενικός πίνακας. Όπως ήδη αναφέρθηκε, αυτή η μορφή είναι γνωστή ως **Frobenius κανονική μορφή**.

Σημείωση: Για να συμφωνούμε με το βασικό τμήμα του Αλγορίθμου ΑΗ θα υποτίθεται ότι στην (4.15) $a_{ii} \neq 0$, $i = 1(1)n$, και ότι τα a_{ii} είναι κανο-

νικοποιημένα ώστε $a_{ii} = 1, i = 1(1)n$.

Για την ανάλυση της $p \times p$ block αναγωγίμης περίπτωσης πρέπει να χρησιμοποιήσουμε κάποιες έννοιες και ορολογία από τη Συνδυαστική Θεωρία Πινάκων.

Ορισμός 4.4. Έστω $A \geq 0, A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Ορίζουμε ως **(κατευθυνόμενο) γράφημα** του $A, G(A)$, να είναι το γράφημα με κορυφές (κόμβους) $1(1)n$, όπου μια ακμή (τόξο) κατευθύνεται από τον i στον j αν και μόνο αν $a_{ij} \neq 0$.

Ορισμός 4.5. Έστω $A \geq 0, A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Για $i, j \in \{1, \dots, n\}$, λέμε ότι το i **έχει πρόσβαση στο j** αν στο $G(A)$ υπάρχει ένα μονοπάτι (path) από το i στο j και ότι τα i και j **επικοινωνούν** αν το i έχει πρόσβαση στο j και το j έχει πρόσβαση στο i . (Σημείωση: Η **επικοινωνία** είναι μια σχέση **ισοδυναμίας**.)

Ορισμός 4.6. Οι **κλάσεις** του $A \geq 0$ είναι οι κλάσεις ισοδυναμίας της σχέσης επικοινωνίας που επάγεται από το $G(A)$. Μια **κλάση** α έχει πρόσβαση σε μια κλάση β αν για $i \in \alpha$ και $j \in \beta$, το i έχει πρόσβαση στο j . Μια κλάση A είναι **αρχική** αν δεν έχει πρόσβαση σε αυτή καμιά άλλη κλάση και είναι **τελική** αν δεν έχει αυτή πρόσβαση σε καμιά άλλη κλάση. Μια κλάση είναι **βασική** αν $\rho(A[\alpha]) = \rho(A)$, όπου $A[\alpha]$ είναι ο υποπίνακας του A που βασίζεται στους δείκτες που ανήκουν στην κλάση του α , και **μη-βασική** αν $\rho(A[\alpha]) < \rho(A)$.

Παρατήρηση 4.6.1. Τα blocks $A_{ii}, i = 1(1)p$, στη Frobenius κανονική μορφή (4.15) του A αντιστοιχούν στις κλάσεις του A . Από τη σχέση (4.15) είναι φανερό ότι κάθε $A \geq 0$ έχει τουλάχιστον μια βασική κλάση και μια τελική κλάση. Η κλάση που αντιστοιχεί στο $A_{ii}, i = 1(1)p$, είναι βασική αν και μόνο

αν $\rho(A_{ii}) = \rho(A)$ και τελική αν και μόνο αν $A_{ij} = 0, j > i$. Ειδικότερα, ο A είναι μη-αναγώγιμος αν και μόνο αν έχει μια μόνο (βασική και τελική) κλάση.

Θεώρημα 4.11. Έστω $A \geq 0, A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Τότε στη φασματική ακτίνα $\rho(A)$ αντιστοιχεί ένα θετικό ιδιοδιάνυσμα αν και μόνο αν οι τελικές κλάσεις του A είναι ακριβώς οι βασικές του. (Σημείωση: Όπως, για παράδειγμα, στην περίπτωση ενός μη-αναγώγιμου πίνακα ή ενός block διαγώνιου πίνακα $\rho(A_{ii}) = \rho(A), i = 1(1)p$ (όπως στην Περίπτωση 1 της Παραγράφου 4.2, όπου $\rho(A) = \rho(A_{11}) = \rho(A_{22})$).

Θεώρημα 4.12. Έστω $A \geq 0, A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Τότε στη φασματική ακτίνα $\rho(A)$ αντιστοιχεί ένα θετικό ιδιοδιάνυσμα και ένα θετικό ιδιοδιάνυσμα του A^T αν και μόνο αν όλες οι κλάσεις του A είναι βασικές και τελικές. (Σημείωση: Η ίδια Σημείωση με αυτήν του προηγούμενου θεωρήματος.)

Ορισμός 4.7. Έστω $A \geq 0, A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Ο βαθμός του A είναι $\nu(A) = \text{index}(\rho(A)I - A)$. Ο μηδενόχωρος $\mathcal{N}((\rho(A)I - A)^{\nu(A)})$ λέγεται **αλγεβρικός ιδιόχωρος** του A και τα στοιχεία του λέγονται **γενικευμένα ιδιοδιανύσματα**.

Ορισμός 4.8. Έστω $A \geq 0, A \in \mathbb{R}^{n,n}$ και $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ είναι κλάσεις του A . Η συλλογή $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}$ είναι μια **αλυσίδα** από το α_1 στο α_k , αν το α_i έχει πρόσβαση στο $\alpha_{i+1}, i = 1(1)k - 1$. Το **μήκος** μιας αλυσίδας είναι ο αριθμός των βασικών κλάσεων που αυτή περιέχει. Μια κλάση α έχει πρόσβαση σε μια κλάση β σε m **βήματα** αν m είναι το μήκος της μεγαλύτερης αλυσίδας από το α στο β . Το **ύψος** μιας κλάσης β είναι το μήκος της μακρύτερης αλυσίδας κλάσεων που τερματίζεται στη β .

Θεώρημα 4.13. Έστω $A \geq 0$, $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ με φασματική ακτίνα $\rho(A)$ και m βασικές κλάσεις $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$. Τότε, ο αλγεβρικός ιδιόχωρος του A περιέχει μη-αρνητικά διανύσματα $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(m)}$, τέτοια ώστε το υποδιάνυσμα $x_i^{(j)} > 0$ αν και μόνο αν το i έχει πρόσβαση στην α_j και μια τέτοια συλλογή είναι μια βάση του αλγεβρικού ιδιόχωρου του A . (Σημείωση: Είναι κατανοητό ότι $x_i^{(i)} > 0$.)

Παρατήρηση 4.8.1. Βασιζόμενοι στους Ορισμούς 4.7, 4.8 και το Θεώρημα 4.13 είναι φανερό ότι για ένα πίνακα $A \geq 0$, $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, τα μόνα “γνήσια” ιδιοδιανύσματά του, είναι τα μη-αρνητικά διανύσματα $x \in \mathbb{R}^{n,n}$ για τα οποία ισχύει $Ax = \rho(A)x$ και τα οποία αντιστοιχούν σε κλάσεις ύψους 1.

Το βασικό θεωρητικό υπόβαθρο που παρουσιάστηκε ως τώρα στην παρούσα παράγραφο καθώς και η επέκταση της ανάλυσης της εφαρμογής του Θεωρήματος της Μεθόδου των Δυνάμεων και του Αλγορίθμου $\mathbb{A}\mathbb{H}$ στους 2×2 block αναγωγίμους πίνακες της Παραγράφου 4.2 αρκούν για να αναπτυχθεί ο νέος μας Αλγόριθμος που θα καλύπτει τους $p \times p$ block αναγωγίμους πίνακες. Για το λόγο αυτό θα προβούμε σε ορισμένες παρατηρήσεις και από αυτές θα εξαγάγουμε συγκεκριμένα συμπεράσματα όταν το Θεώρημα της Μεθόδου των Δυνάμεων 3.4 ή/και ο Αλγόριθμος $\mathbb{A}\mathbb{H}$ εφαρμοστεί στον αναγωγίμο πίνακα $A \geq 0$, υπό την προϋπόθεση ότι ο A είναι ήδη στη Frobenius κανονική μορφή του (4.10), με $a_{ii} = 1$, $i = 1(1)n$.

α) Αν το γράφημα του A , $G(A)$, αποτελείται από την ένωση των ξένων μεταξύ τους υπογραφημάτων $g_i(A)$, $i = 1(1)k$, $1 < k \leq p$, τότε ο A μπορεί να γραφεί ως $A = \text{diag}(B_{11}, B_{22}, \dots, B_{kk})$, όπου καθένα B_{ii} , $i = 1(1)k$, είναι

αναγώγιμος πίνακας και ήδη στη Frobenius κανονική μορφή του. Έτσι, οι όροι αρχική, τελική, βασική, μη-βασική, κ.λπ. πρέπει να ξαναοριστούν για καθένα από τα κύρια blocks B_{ii} , $i = 1(1)k$. Συνεπώς, η εφαρμογή του Θεωρήματος της Μεθόδου των Δυνάμεων 3.4 ή/και του Αλγορίθμου $\mathbb{A}\mathbb{H}$ στον A είναι ισοδύναμη με την εφαρμογή τους σε καθένα B_{ii} ξεχωριστά. Είναι προφανές ότι αν $k = p$ ο A είναι ένας block διαγώνιος πίνακας με κάθε block να είναι μη-αναγώγιμος πίνακας.

Παράδειγμα 1: Θεωρούμε τον πίνακα

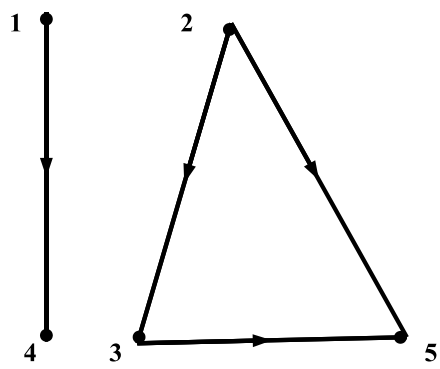
$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 & A_{14} & 0 \\ 0 & A_{22} & A_{23} & 0 & A_{25} \\ 0 & 0 & A_{33} & 0 & A_{35} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{55} \end{bmatrix}. \quad (4.16)$$

Όπως είναι φανερό το $G(A)$ (Σχ. 4.1) αποτελείται από δύο ξένα μεταξύ τους υπογράφηματα. Το ένα περιέχει τους κόμβους $\{1, 4\}$ και το άλλο τους κόμβους $\{2, 3, 5\}$. Έτσι, υπάρχει μια φανερή block μετάθεση ομοιότητας που θέτει τον A στη μορφή

$$A = \text{diag}(B_{11}, B_{22}), \quad \text{όπου } B_{11} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{14} \\ 0 & A_{44} \end{bmatrix}, \quad B_{22} = \begin{bmatrix} A_{22} & A_{23} & A_{25} \\ 0 & A_{33} & A_{35} \\ 0 & 0 & A_{55} \end{bmatrix}. \quad (4.17)$$

Τότε, η Μέθοδος των Δυνάμεων (και ο Αλγόριθμος $\mathbb{A}\mathbb{H}$) μπορεί να εφαρμοστεί στους B_{11} και B_{22} χωριστά.

β) Αν το γράφημα του A , $G(A)$, **δεν** αποτελείται από μια ένωση ξένων μεταξύ τους υπογραφημάτων, τότε, εφαρμόζουμε μια block μετάθεση ομοιότητας στον A , έστω QAQ^T , διατηρώντας τη Frobenius κανονική μορφή του, έτσι



Σχήμα 4.1: Block γράφημα του A της (4.16)

ώστε οι βασικές του κλάσεις να διατάσσονται σε αύξουσα σειρά των υψών τους σε μεγαλύτερα κύρια (principal) blocks ως τελικές κλάσεις. Αν οποιεσδήποτε δύο βασικές κλάσεις είναι του ίδιου ύψους μπορούν να διαταχθούν σε οποιαδήποτε σειρά. Αν υπάρχουν μη-βασικές κλάσεις που δεν έχουν πρόσβαση σε καμιά βασική κλάση τοποθετούνται σε ένα ξεχωριστό τελευταίο μεγαλύτερο κύριο (principal) block. Κατ' αυτόν τον τρόπο, σε κάθε μεγαλύτερο κύριο block με μια ή περισσότερες τελικές βασικές κλάσεις του ίδιου ύψους α_r , όλες οι μη-βασικές κλάσεις έχουν πρόσβαση τουλάχιστον σε μία από τις α_r . Αν υπάρχει ένα τελευταίο μεγαλύτερο κύριο block από μη-βασικές κλάσεις, έστω ότι συμβολίζεται με \tilde{A} , το γράφημά του $G(\tilde{A})$ θεωρείται και με βάση το κατά πόσο το $G(\tilde{A})$ αποτελείται από ζένα μεταξύ τους ή όχι υπογραφήματα ακολουθείται η διαδικασία στο (α) πριν ή η παρούσα στο (β). (Σημείωση: Η αναδιάταξη που προτείνεται είναι ελαφρά διαφορετική από ό,τι αυτές που θεωρούνται στις εργασίες [37], [38], [6] και το βιβλίο αναφοράς [5].)

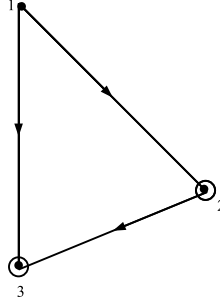
Μετά από κάποιες διευκρινίσεις, που αφορούν σε βασικά θέματα με την παρουσίαση απλών παραδειγμάτων, θα δοθεί ένα γενικότερο παράδειγμα, που θα καλύψει μια πολύ πιο γενική περίπτωση.

Παράδειγμα 2: Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ 0 & A_{22} & A_{23} \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix}, \quad (4.18)$$

όπου $\rho(A) = \rho(A[\alpha_2]) = \rho(A[\alpha_3]) > \rho(A[\alpha_1])$ και $A_{12}, A_{13}, A_{23} \neq O$.

Όπως φαίνεται, το γράφημα $G(A)$ (Σχ. 4.2) δεν αποτελείται από ένωση



Σχήμα 4.2: Block γράφημα του A στην (4.18) (οι κυκλωμένοι κόμβοι αντιπροσωπεύουν βασικές κλάσεις του A)

ξένων μεταξύ τους υπογραφημάτων και ο A είναι ήδη διατεταγμένος, όπως είναι επιθυμητό, με τον block παρακάτω διαχωρισμό

$$A = \left[\begin{array}{cc|c} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ 0 & A_{22} & A_{23} \\ \hline 0 & 0 & A_{33} \end{array} \right]. \quad (4.19)$$

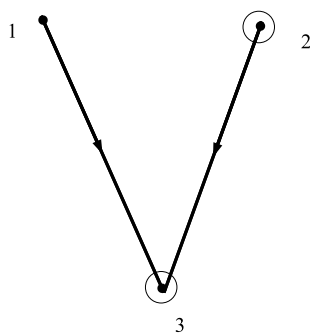
Στον πίνακα (4.19) υπάρχουν δύο μεγαλύτερα κύρια blocks με τελικές κλάσεις α_2 και α_3 με αντίστοιχα ύψη 1 και 2. Η μη-βασική κλάση α_1 ύψους 0 βρίσκεται στο ίδιο κύριο principal block με το A_{22} . Ακολουθώντας την ανάλυση της 2×2 block περίπτωσης, αφού $\text{index}(\rho(A)I - A) = 2$, εύκολα βρίσκεται ότι υπάρχει ένα μη-αρνητικό ιδιοδιάνυσμα της μορφής $x = [x_1^T x_2^T | 0_{n_3}^T]^T$, ένα θετικό γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα της μορφής $y = [y_1^T y_2^T | y_3^T]^T$, από το Θεώρημα 4.13, και ένα μη-αρνητικό αριστερό ιδιοδιάνυσμα της μορφής $z = [0_{n_1}^T 0_{n_2}^T | z_3^T]^T$ που συνδέεται με την ιδιοτιμή $\rho(A)$. Επειδή $z^T d^{(0)} > 0$, με $d^{(0)} = e$, $z^T x = 0$ και $z^T y > 0$, η εφαρμογή του Αλγορίθμου $\mathbb{A}\mathbb{H}$ στον A θα κάνει όλα τα αθροίσματα γραμμών

να τείνουν στη $\rho(A)$ καθώς $k \rightarrow \infty$. Η αυστηρή απόδειξη του ισχυρισμού μας δίνεται με τρόπο ανάλογο αυτού της Περίπτωσης 4 της Παραγράφου 4.2.

Παράδειγμα 3: Υποθέτουμε ότι στο *Παράδειγμα 2* έχουμε $A_{12} = O_{12}$ ώστε

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & O_{12} & A_{13} \\ 0 & A_{22} & A_{23} \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix}. \quad (4.20)$$

Είναι φανερό ότι το $G(A)$ (Σχ. 4.3) δεν αποτελείται από ένωση ξένων μεταξύ



Σχήμα 4.3: Block γράφημα του A του (4.20)

τους υπογραφημάτων. Ακόμη, η κλάση α_1 δεν έχει πρόσβαση στην α_2 , όμως και οι δύο έχουν πρόσβαση στην α_3 . Αυτό απαιτεί αναδιάταξη των block γραμμών (και στηλών) 1 και 2. Οπότε, με εναλλαγή των 1ων και 2ων block γραμμών και

στηλών έχουμε ένα νέο A , τον QAQ^T , της διαχωρισμένης μορφής

$$A = \left[\begin{array}{c|cc} A_{22} & O_{21} & A_{23} \\ \hline 0 & A_{11} & A_{13} \\ 0 & 0 & A_{33} \end{array} \right]. \quad (4.21)$$

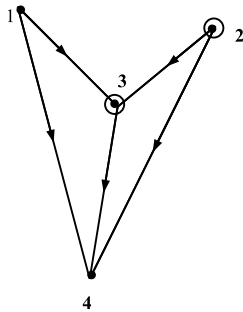
Στην προκείμενη περίπτωση ισχύει ότι $\text{index}(\rho(A)I - A) = 2$, και άρα υπάρχει ένα μη-αρνητικό ιδιοδιάνυσμα $x = [x_2^T | 0_{n_1}^T | 0_{n_3}^T]^T$, ένα θετικό γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα $y = [y_2^T | y_1^T | y_3^T]^T$ (βλέπε Θεώρημα 2.3.20 του [5]), και ένα μη-αρνητικό αριστερό ιδιοδιάνυσμα $z = [0_2^T | 0_{n_1}^T | z_3^T]^T$ που συνδέεται με την ιδιοτιμή $\rho(A)$. Ισχύει ότι $z^T d^{(0)} > 0$, με $d^{(0)} = e$, και επίσης $z^T x = 0$, $z^T y > 0$. Έτσι, από το Θεώρημα της Μεθόδου των Δυνάμεων 3.4, όλα τα αθροίσματα γραμμών από τις τρεις block γραμμές θα είναι ίσα με $\rho(A)$ στο όριο.

Παράδειγμα 4: Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \left[\begin{array}{cccc} A_{11} & O_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{array} \right], \quad (4.22)$$

όπου $\rho(A) = \rho(A[\alpha_2]) = \rho(A[\alpha_3]) > \rho(A[\alpha_1]), \rho(A[\alpha_4])$ και $A_{13}, A_{14}, A_{23}, A_{24}, A_{34} \neq O$. Παρατηρούμε αμέσως ότι οι α_2 και α_3 είναι οι βασικές κλάσεις, $\text{index}(\rho(A)I - A) = 2$ και ότι τα ύψη των κλάσεων $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ είναι, αντίστοιχα, 0, 1, 2, 2. Από το γράφημα $G(A)$ (Σχ. 4.4) φαίνεται ότι δεν υπάρχει πρόσβαση από οποιαδήποτε άλλη κλάση στην α_2 και έτσι αναδιατάσσοντας και διαχωρίζοντας τον A , όπως προτάθηκε και πριν, παίρνουμε το νέο πίνακα

$$A = \left[\begin{array}{c|cc|c} A_{22} & O_{21} & A_{23} & A_{24} \\ \hline 0 & A_{11} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & 0 & A_{33} & A_{34} \\ \hline 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{array} \right]. \quad (4.23)$$



Σχήμα 4.4: Block γράφημα του A στην (4.22)

Η διαφορά του συγκεκριμένου παραδείγματος από τα Παραδείγματα 2 και 3 είναι ότι το block μέσα στο μεγαλύτερο τρίτο κύριο (principal) block (A_{44}) δεν είναι βασικό. Επειδή η μη-βασική κλάση α_1 δεν έχει πρόσβαση στη βασική α_2 αλλά και οι δύο κλάσεις έχουν πρόσβαση στη βασική κλάση α_3 , υπάρχει ένα μη-αρνητικό ιδιοδιάνυσμα x που συνδέεται με την κλάση α_2 , που έχει το πρώτο του υποδιάνυσμα θετικό, και, από το Θεώρημα 4.13, υπάρχει ένα μη-αρνητικό γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα y που συνδέεται με την κλάση α_3 που έχει το πρώτο, δεύτερο και τρίτο υποδιανύσματά του θετικά. Επίσης, υπάρχει ένα μη-αρνητικό αριστερό ιδιοδιάνυσμα της μορφής $z = [0_{n_1}^T 0_{n_2}^T | z_3^T z_4^T]^T$. Αυτές οι παρατηρήσεις μας οδηγούν στο συμπέρασμα ότι μετά την εφαρμογή του Αλγορίθμου ΑΗ μόνο οι τρεις πρώτες block γραμμές θα έχουν αθροίσματα γραμμών ίσα με $\rho(A)$ στο όριο. Τα αθροίσματα γραμμών του τελευταίου μη-βασικού block θα ισούνται με $\rho(A_{44})$, στο όριο, επειδή στο A_{44} ο Αλγόριθμος ΑΗ εργάζεται ανεξάρτητα, όπως στην Περίπτωση 3 της Παραγράφου 4.2.

Από τη θεωρία που παρουσιάστηκε ως εδώ και τα Παραδείγματα 2, 3 και 4, μπορούμε να διατυπώσουμε, σε μια πιο γενική μορφή και χωρίς αυστηρή απόδειξη, την ακόλουθη πρόταση.

Θεώρημα 4.14. *Υπό τις υποθέσεις της πρώτης παραγράφου της Περίπτωσης (β) προηγουμένως, η εφαρμογή του Θεωρήματος της Μεθόδου των Δυνάμεων 3.4 ή/και του Αλγορίθμου $\mathbb{A}\mathbb{H}$ στη νέα μορφή του A κάνει όλα τα αθροίσματα γραμμών των μεγαλύτερων κύριων (principal) blocks, που αντιστοιχούν σε βασικές κλάσεις, να τείνουν στο $\rho(A)$ στο όριο. Έστω υπάρχει ένα τελευταίο μεγαλύτερο κύριο (principal) block μη-βασικών κλάσεων, που δεν έχουν πρόσβαση σε καμιά βασική κλάση και, έστω ότι αυτό συμβολίζεται με \tilde{A} , τότε βασιζόμενοι στο γράφημα $G(\tilde{A})$ η εφαρμογή του Αλγορίθμου $\mathbb{A}\mathbb{H}$ κάνει τα αθροίσματα γραμμών του \tilde{A} να τείνουν σε όρια που είναι αυστηρά μικρότερα από $\rho(A)$, σύμφωνα με τους προαναφερθέντες κανόνες που περιγράφηκαν.*

Έχοντας ξεκαθαρίσει προηγουμένως κάποια βασικά θέματα στις Περιπτώσεις (α)-(β), είμαστε έτοιμοι να παρουσιάσουμε και να πραγματευτούμε ένα πολύ γενικότερο παράδειγμα, όπου θα περιλαμβάνονται όλα τα παραπάνω σημεία που θίχτηκαν.

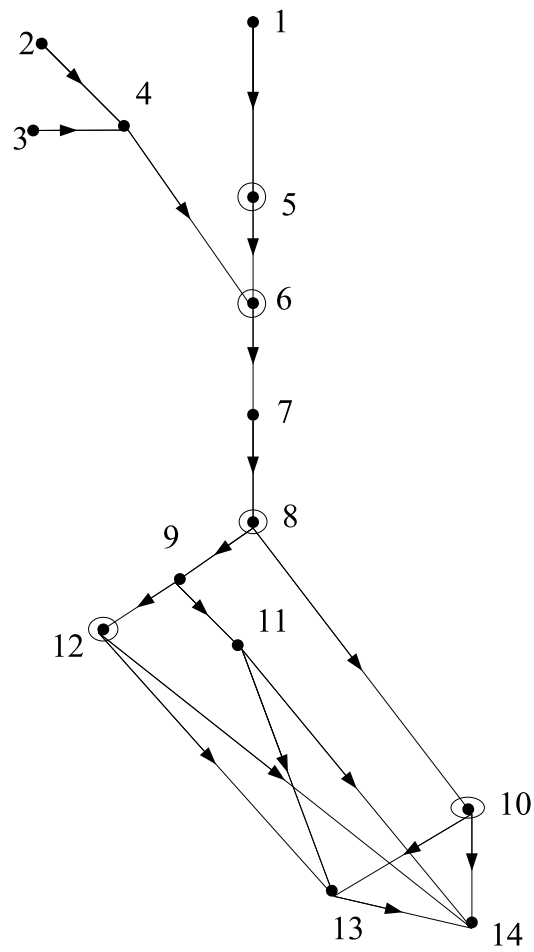
Παράδειγμα 5:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 & 0 & A_{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 & A_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} & A_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} & 0 & A_{46} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{55} & A_{56} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{66} & A_{67} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{77} & A_{78} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{88} & A_{89} & A_{8,10} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{99} & 0 & A_{9,11} & A_{9,12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{10,10} & 0 & 0 & A_{10,13} & A_{10,14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{11,11} & 0 & A_{11,13} & A_{11,14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{12,12} & A_{12,13} & A_{12,14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{13,13} & A_{13,14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{14,14} \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Υποθέτουμε ότι ο πίνακας A στην (4.24) είναι ήδη στην κανονικοποιημένη Frobenius κανονική μορφή (4.10). Το γράφημά του $G(A)$ (Σχ. 4.5), που δεν αποτελείται από ένωση ξένων μεταξύ τους υπογραφημάτων, περιέχει δεκατέσσερις κλάσεις $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{14})$ και υποθέσουμε ότι οι βασικές του είναι οι $\alpha_5, \alpha_6, \alpha_8, \alpha_{10}, \alpha_{12}$. Κάνοντας την υποδειχθείσα block μετάθεση ομοιότητας, έστω QAQ^T , έχουμε τον παρακάτω καινούριο block πίνακα τον οποίο, για απλοποίηση του συμβολισμού, αναφέρουμε ξανά ως A

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{55} & 0 & 0 & 0 & A_{56} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & A_{22} & 0 & A_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{33} & A_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{44} & A_{46} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{66} & A_{67} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{77} & A_{78} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{88} & A_{89} & A_{8,10} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{10,10} & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{10,13} & A_{10,14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{99} & A_{9,12} & A_{9,11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{12,12} & 0 & A_{12,13} & A_{12,14} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{11,11} & A_{11,13} & A_{11,14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{13,13} & A_{13,14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{14,14} \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

Όπως παρατηρούμε τώρα, έχουμε δημιουργήσει ένα νέο block διαχωρισμό στη νέα μορφή του A έτσι ώστε τα τέσσερα πρώτα μεγαλύτερα κύρια (principal) blocks να έχουν ως τελευταίο διαγώνιο block ένα βασικό, ενώ τα τρία διαγώνια blocks του πέμπτου μεγαλύτερου κύριου (principal) block του νέου A είναι μη-βασικά. Σημειώστε ότι τα ύψη των βασικών blocks στα μεγαλύτερα κύρια block του διαχωρισμού είναι 1, 2, 3, 4, 4, όπως ήταν και πριν, και $\text{index}(\rho(A)I - A) = 4$, με τις τελευταίες δυο βασικές κλάσεις α_{10} και α_{12} να ανήκουν στο τέταρτο μεγαλύτερο κύριο (principal) block. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 4.13, ο νέος



Σχήμα 4.5: Block γράφημα του A στην (4.24)

πίνακας A έχει ένα μη αρνητικό ιδιοδιάνυσμα και τρία μη αρνητικά γενικευμένα ιδιοδιανύσματα ως εξής:

$$\begin{aligned} x &= [x_1^T \ x_5^T \ 0_{n_2}^T \ 0_{n_3}^T \ 0_{n_4}^T \ 0_{n_6}^T \ 0_{n_7}^T \ 0_{n_8}^T \ 0_{n_{10}}^T \ 0_{n_9}^T \ 0_{n_{12}}^T \ 0_{n_{11}}^T \ 0_{n_{13}}^T \ 0_{n_{14}}^T]^T, \\ y &= [y_1^T \ y_5^T \ y_2^T \ y_3^T \ y_4^T \ y_6^T \ 0_{n_7}^T \ 0_{n_8}^T \ 0_{n_{10}}^T \ 0_{n_9}^T \ 0_{n_{12}}^T \ 0_{n_{11}}^T \ 0_{n_{13}}^T \ 0_{n_{14}}^T]^T, \\ u &= [u_1^T \ u_5^T \ u_2^T \ u_3^T \ u_4^T \ u_6^T \ u_7^T \ u_8^T \ 0_{n_{10}}^T \ 0_{n_9}^T \ 0_{n_{12}}^T \ 0_{n_{11}}^T \ 0_{n_{13}}^T \ 0_{n_{14}}^T]^T, \\ v &= [v_1^T \ v_5^T \ v_2^T \ v_3^T \ v_4^T \ v_6^T \ v_7^T \ v_8^T \ v_{10}^T \ v_9^T \ v_{12}^T \ 0_{n_{11}}^T \ 0_{n_{13}}^T \ 0_{n_{14}}^T]^T, \end{aligned} \quad (4.26)$$

όπου κάθε μη μηδενικό υποδιάνυσμα είναι θετικό. Για να βρούμε το αριστερό ιδιοδιάνυσμα (ιδιοδιανύσματα) του A πρέπει να βρούμε το ιδιοδιάνυσμα (ιδιοδιανύσματα) του A^T . Το γράφημα του A^T δεν είναι τίποτε άλλο από αυτό του Σχήματος 4.5, όπου όμως τα βέλη στις ακμές θα δείχνουν προς τις αντίθετες κατευθύνσεις. Αυτό σημαίνει ότι τα ύψη των διάφορων βασικών κλάσεων του A^T θα είναι τα συμπληρώματα αυτών του A ως προς το μεγαλύτερο προηγούμενο ύψος σ' αυτό αυξημένων κατά ένα, δηλαδή $\nu(A) + 1 = 4 + 1 = 5$. Οι μη βασικές κλάσεις που ανήκουν στο πέμπτο μεγαλύτερο κύριο (principal) block θα εξακολουθούν να έχουν ύψος 0. Άρα, η βασική κλάση ή κλάσεις του A^T , που έχουν ύψος 1 θα δίνουν, σύμφωνα με την Παρατήρηση 4.8.1, τα αριστερά ιδιοδιανύσματα του A , που αντιστοιχούν στη $\rho(A)$. Αυτά (τα ιδιοδιανύσματα) θα είναι εκείνα που θα σχετίζονται με τις βασικές κλάσεις α_{10} και α_{12} . Αυτά που σχετίζονται με τις βασικές κλάσεις $\alpha_5, \alpha_6, \alpha_8$ θα δώσουν γενικευμένα ιδιοδιανύσματα (βλέπε Θεώρημα 2.3.20 της [5]). Γράφοντας αναλυτικά τις 14 block εξισώσεις από τις σχέσεις $A^T v' = \rho(A) v'$ βρίσκουμε ότι τα προαναφερθέντα ιδιοδιανύσματα είναι

$$v' = [0_{n_1}^T \ 0_{n_5}^T \ 0_{n_2}^T \ 0_{n_3}^T \ 0_{n_4}^T \ 0_{n_6}^T \ 0_{n_7}^T \ 0_{n_8}^T \ v'_{10} \ v'_9 \ v'_{12} \ 0_{n_{11}}^T \ v'_{13} \ v'_{14}]^T, \quad (4.27)$$

όπου v'_{10} και v'_{12} είναι τα Perron διανύσματα των blocks $A_{10,10}^T$ και $A_{12,12}^T$, αντίστοιχα, και

$$\begin{aligned} v'_{13} &= (\rho(A)I_{n_{13}} - A_{13,13}^T)^{-1}(A_{10,13}^T v'_{10} + A_{12,13}^T v'_{12}) > 0, \\ v'_{14} &= (\rho(A)I_{n_{14}} - A_{14,14}^T)^{-1}(A_{10,14}^T v'_{10} + A_{12,14}^T v'_{12} + A_{13,14}^T v'_{13}) > 0. \end{aligned}$$

Από την (4.26) και την (4.27) προκύπτει ότι

$$v'^T x = 0, \ v'^T y = 0, \ v'^T u = 0, \ v'^T v > 0. \quad (4.28)$$

Ας υποθέσουμε ότι ο νέος πίνακας A υποβάλλεται σε έναν ακόμα μετασχηματισμό ομοιότητας, με πίνακα μετάθεσης \widehat{Q} , έτσι ώστε ο $\widehat{Q}A\widehat{Q}^T$, που συμβολίζεται

ξανά με A , να είναι στην Jordan κανονική μορφή και συγχρόνως να υποδηλώνεται ότι $v \in \mathcal{N}((\rho(A)I_l - A)^4)$, όπου $l = n - n_{11} - n_{13} - n_{14}$. Συγκεκριμένα, οι πρώτες l συνιστώσες του v , ας υποθέσουμε ότι συνιστούν το διάνυσμα $\tilde{v} \in \mathbb{R}^l$, θα είναι τέτοιες ώστε

$$\tilde{v} \in \mathcal{N}((\rho(A)I_l - A[\alpha_1, \alpha_5, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8, \alpha_{10}, \alpha_9, \alpha_{12}])^4).$$

Τότε θα είναι

$$A[x y u v s_5 \dots s_n] = [x y u v s_5 \dots s_n] \left[\begin{array}{cccc|c} \rho(A) & 1 & & & \\ & \rho(A) & 1 & & \\ & & \rho(A) & 1 & \\ \hline & & & \rho(A) & \\ \hline & & & & S' \end{array} \right], \quad (4.29)$$

από όπου θα έχουμε

$$Ax = \rho(A)x, \quad Ay = x + \rho(A)y, \quad Au = y + \rho(A)u, \quad Av = u + \rho(A)v. \quad (4.30)$$

Υπενθυμίζεται ότι τα διανύσματα x, y, u, v που χρησιμοποιούνται στην (4.29), όπως στην Περίπτωση (iv) της προηγούμενης παραγράφου, είναι αυτά στην (4.26) πολλαπλασιασμένα προηγουμένως επί \hat{Q} . Έστω ότι $d^{(0)} = e$, και υποθέτουμε ότι το $d^{(0)}$ γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός των γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων του S . Θα είναι $d^{(0)} = \eta_1 x + \eta_2 y + \eta_3 u + \eta_4 v + \sum_{i=5}^n \eta_i s_i$. Σχηματίζοντας τα γινόμενα παρατηρούμε ότι $v'^T d^{(0)} > 0$, οπότε χρησιμοποιώντας την (4.28) και το Θεώρημα 3.13 έχουμε $0 < v'^T d^{(0)} = \eta_4 v'^T v$. Από την οποία προκύπτει ότι $\eta_4 > 0$, και άρα το $d^{(0)}$ έχει θετική συνιστώσα κατά μήκος του γενικευμένου ιδιοδιανύσματος v . Χρησιμοποιώντας διαδοχικά τις σχέσεις (4.30) μπορούμε να δείξουμε με επαγωγή ότι

$$\begin{aligned} A^k x &= \rho^k(A)x, \\ A^k y &= \binom{k}{1} \rho^{k-1}(A)x + \rho^k(A)y, \\ A^k u &= \binom{k}{2} \rho^{k-2}(A)x + \binom{k}{1} \rho^{k-1}(A)y + \rho^k(A)u, \\ A^k v &= \binom{k}{3} \rho^{k-3}(A)x + \binom{k}{2} \rho^{k-2}(A)y + \binom{k}{1} \rho^{k-1}(A)u + \rho^k(A)v. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Άρα

$$\begin{aligned}
A^k d^{(0)} &= \rho^k(A) \left[\eta_1 + \binom{k}{1} \frac{\eta_2}{\rho(A)} + \binom{k}{2} \frac{\eta_3}{\rho^2(A)} + \binom{k}{3} \frac{\eta_4}{\rho^3(A)} \right] x \\
&+ \rho^k(A) \left[\eta_2 + \binom{k}{1} \frac{\eta_3}{\rho(A)} + \binom{k}{2} \frac{\eta_4}{\rho^2(A)} \right] y \\
&+ \rho^k(A) \left[\eta_3 + \binom{k}{1} \frac{\eta_4}{\rho(A)} \right] u + \rho^k(A) \eta_4 v + \rho^k(A) \sum_{i=5}^n A^k \frac{\eta_i}{\rho^k(A)} s_i.
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Σχηματίζοντας τα πηλίκα $\frac{(A^{k+1}d^{(0)})_j}{(A^{k+1}d^{(0)})_j}$ για όλα τα j τα οποία δεν αντιστοιχούν στις γραμμές του πέμπτου μεγαλύτερου κύριου (principal) block (11η, 13η και 14η block γραμμές), τότε, για το Θεώρημα της Μεθόδου των Δυνάμεων 3.4 ή/και του Αλγορίθμου $\mathbb{A}\mathbb{H}$, θα έχουμε μια κατάσταση ανάλογη με αυτήν της Περίπτωσης (iv) της Παραγράφου 4.2. Επομένως, $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(A^{k+1}d^{(0)})_j}{(A^{k+1}d^{(0)})_j} = \rho(A)$, εκτός από τις γραμμές που αντιστοιχούν στο πέμπτο μεγαλύτερο κύριο block. Για να δώσουμε μια τυπική απόδειξη της προηγούμενης σύγκλισης, η οποία μπορεί να γενικευθεί με έναν “προφανή” τρόπο και θα δοθεί αλλού, πρέπει να παρατηρήσουμε τα εξής. Στο πρώτο μεγαλύτερο κύριο principal block (για τις πρώτες $n_1 + n_5$ γραμμές), πρέπει να διαιρέσουμε και τους δυο όρους του κλάσματος με k^3 πριν περάσουμε στο όριο. Για το δεύτερο μεγαλύτερο κύριο block (δεύτερες $n_2 + n_3 + n_4 + n_6$ γραμμές) πρέπει να διαιρέσουμε με k^2 , στο τρίτο μεγαλύτερο κύριο block (τρίτες $n_7 + n_8$ γραμμές) με k , ενώ στο τέταρτο μεγαλύτερο κύριο blocks (τέταρτες $n_{10} + n_9 + n_{12}$ γραμμές) περνάμε στο όριο, καθώς $k \rightarrow \infty$ χωρίς να διαιρέσουμε πριν με δύναμη του k . Υπενθυμίζεται ότι οι προηγούμενες γραμμές βρίσκονται στην ουσία, στη θέση που της έχει φέρει ο μετασχηματισμός ομοιότητας με \tilde{Q} . Εξάλλου, έχουμε δει ότι ο Αλγόριθμος $\mathbb{A}\mathbb{H}$ εφαρμόζεται στο πέμπτο μεγαλύτερο κύριο block, ας υποθέσουμε ότι είναι το \tilde{A} , ανεξάρτητα από την εφαρμογή του στα προηγούμενα blocks. Αυτό σημαίνει ότι για να μπορέσουμε να προσδιορίσουμε τα όρια των αθροισμάτων των γραμμών του \tilde{A} θα πρέπει να θεωρήσουμε ότι ο Αλγόριθμος $\mathbb{A}\mathbb{H}$ εφαρμόζεται στο \tilde{A} . Άρα, θα πρέπει να θεωρήσουμε το $G(\tilde{A})$, το οποίο, στην παρούσα περίπτωση, δεν αποτελείται από ένωση ξένων μεταξύ τους υπογραφημάτων, και θα πρέπει να ορίσουμε τους όρους βασική, μη-βασική, αρχική, τελική κ.λπ. κλάση, για το \tilde{A} τοπικά. Αν π.χ. $\rho(A[\alpha_{13}]) > \rho(A[\alpha_{11}]), \rho(A[\alpha_{14}])$, τότε από το Θεώρημα 4.14 γνωρίζουμε ότι για $k \rightarrow \infty$ τα οριακά αθροίσματα γραμμών των πρώτων και των δεύτερων block γραμμών του \tilde{A} θα είναι ίσα με $\rho(A_{13,13})$, ενώ αυτά της τελευταίας block γραμμής θα είναι ίσα με $\rho(A_{14,14})$.

Πριν ολοκληρώσουμε την παρούσα παράγραφο να παρατηρήσουμε ότι είναι δυνατόν να διατυπωθούν αυστηρά ανάλογες προτάσεις με τα Πορίσματα 4.7 και 4.8. Στην περίπτωση του Παραδείγματος 5, το ανάλογο π.χ. του Πορίσματος 4.7 θα είναι:

$$d = (\widehat{Q}Q)^T \widehat{d}, \quad \widehat{d} = [\widehat{d}_1^T \widehat{d}_2^T \widehat{d}_3^T]^T, \quad (4.33)$$

όπου

$$\begin{aligned} \widehat{d}_1 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\prod_{i=1}^k D_{n-n_{11}-n_{13}-n_{14}}^{(i)} \right) e_{n-n_{11}-n_{13}-n_{14}}, \\ \widehat{d}_2 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\prod_{i=1}^k D_{n_{11}+n_{13}}^{(i)} \right) e_{n_{11}+n_{13}}, \\ \widehat{d}_3 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\prod_{i=1}^k D_{n_{14}}^{(i)} \right) e_{n_{14}}, \end{aligned} \quad (4.34)$$

όπου \widehat{d}_1 είναι το Perron διάνυσμα του πίνακα $A[\alpha_1, \alpha_5, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8, \alpha_{10}, \alpha_9, \alpha_{12}]$, \widehat{d}_2 είναι το Perron διάνυσμα του $A[\alpha_{11}, \alpha_{13}]$ και \widehat{d}_3 είναι το Perron διάνυσμα του $A[\alpha_{14}]$, όπου A είναι ο αρχικός πίνακας στη Frobenius κανονική μορφή του, που δίνεται στην (4.24). Η ανάλογη πρόταση προς το Πρόρισμα 4.8 θα δίνει ότι

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} A^{(k)} e &= (\widehat{Q}Q)^T \text{diag}(\rho(A)I_{n-n_{11}-n_{13}-n_{14}}, \rho(A_{13,13})I_{n_{11}+n_{13}}, \rho(A_{14,14})I_{n_{14}}) (\widehat{Q}Q) e, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} a_{ij}^{(k)} &= \frac{d_i}{d_j} a_{ij}, \quad i, j = 1(1)n. \end{aligned} \quad (4.35)$$

4.4 Ο Αλγόριθμος

Έπειτα από τη Θεωρία που αναπτύξαμε και τα διάφορα παραδείγματα που παραθέσαμε στην προηγούμενη παράγραφο είμαστε σε θέση να περιγράψουμε το νέο Αλγόριθμο, τον οποίο ονομάζουμε $\mathbb{A}\mathbb{H}\mathbf{2}$, και να προβούμε σε κάποιες παρατηρήσεις που απορρέουν από τη μελέτη του.

α) Υποθέτουμε ότι ο πίνακας A είναι αναγωγίμος ή μη-αναγωγίμος, με τη Frobenius κανονική μορφή του (4.10) να είναι κανονικοποιημένη έτσι ώστε $a_{ii} = 1$, $i = 1(1)n$, και ότι όλες οι βασικές κλάσεις του είναι τελικές. Τότε η εφαρμογή του Αλγορίθμου $\mathbb{A}\mathbb{H}$, καθώς $k \rightarrow \infty$, θα δώσει στο όριο έναν όμοιο πίνακα του οποίου οι block γραμμές του θα έχουν αθροίσματα γραμμών ίσα με $\rho(A)$. Αυτό ουσιαστικά σημαίνει ότι ο νέος Αλγόριθμος, στην παρούσα περίπτωση, πρέπει να συμπίπτει με τον Αλγόριθμο $\mathbb{A}\mathbb{H}$.

β) Υποθέτουμε ότι ο A είναι αναγωγίμος, με τη Frobenius κανονική μορφή του (4.10) να είναι κανονικοποιημένη έτσι ώστε $a_{ii} = 1$, $i = 1(1)n$,

και ότι όλες οι βασικές κλάσεις του **δεν** είναι τελικές. Τότε, η εφαρμογή του Αλγορίθμου $\mathbb{A}\mathbb{H}$, καθώς $k \rightarrow \infty$, δίνει έναν οριακό πίνακα παρόμοιο με αυτόν στο Παράδειγμα 5 της προηγούμενης παραγράφου. Με άλλα λόγια κάποιες από τις block γραμμές του οριακού πίνακα θα έχουν αθροίσματα ίσα με $\rho(A)$ ενώ κάποιες άλλες θα έχουν αθροίσματα αυστηρά μικρότερα από $\rho(A)$. Άρα θα πρέπει να διακριθούν περιπτώσεις.

β1) Υποθέτουμε ότι η εφαρμογή του Αλγορίθμου $\mathbb{A}\mathbb{H}$ στον A , καθώς $k \rightarrow \infty$, δίνει ότι **όλες** οι οριακές block γραμμές έχουν αθροίσματα γραμμών μεγαλύτερα του 1 ή ότι **όλες** οι οριακές block γραμμές έχουν αθροίσματα γραμμών αυστηρά μικρότερα του 1. Τότε, ο Αλγόριθμος $\mathbb{A}\mathbb{H}$ θα κάνει τη σωστή αναγνώριση για τον A , δηλαδή ότι “ο A **δεν** είναι H -πίνακας” και “ο A **είναι** H -πίνακας”, αντίστοιχα.

β2) Υποθέτουμε ότι η εφαρμογή του Αλγορίθμου $\mathbb{A}\mathbb{H}$ στον A , καθώς $k \rightarrow \infty$, δίνει ότι κάποιες οριακές block γραμμές έχουν αθροίσματα γραμμών μεγαλύτερα του 1 και κάποιες άλλες έχουν αθροίσματα γραμμών αυστηρά μικρότερα του 1. Τότε, ο Αλγόριθμος $\mathbb{A}\mathbb{H}$ **δεν** μπορεί να επιλέξει προσδιορισμό για τον A , ο οποίος θα πρέπει να είναι “ο A **δεν** είναι H -πίνακας”. Αυτή αποτελεί τη **μόνη** περίπτωση στην οποία ο Αλγόριθμος $\mathbb{A}\mathbb{H}$ πρέπει να τροποποιηθεί με τέτοιο τρόπο ώστε να είναι λειτουργικός, δηλαδή να αναγνωρίζει το μη H -χαρακτήρα του πίνακα A .

Έχοντας κατά νου την ανάλυση της προηγούμενης παραγράφου και τις παραπάνω παρατηρήσεις παρουσιάζουμε στη συνέχεια το νέο Αλγόριθμο, ο οποίος σχεδιάζεται έτσι ώστε να καλύπτει όλες τις πιθανές περιπτώσεις. Για την παρουσίαση του νέου Αλγορίθμου θα χρειαστούμε επιπλέον τους παρακάτω ορισμούς.

Έστω $\mathbb{N} := \{1, 2, \dots, n\}$ και

$$\mathbb{N}_0^{(k)} \equiv \mathbb{N}_0(A^{(k)}) := \left\{ i \in \mathbb{N} : |a_{ii}^{(k)}| \leq s_i^{(k)} \right\}, \quad (4.36)$$

όπου το $s_i^{(k)}$ ορίζεται στο Βήμα 4 του Αλγορίθμου $\mathbb{A}\mathbb{H}$, και έστω ότι $n_0^{(k)} := n_0(A^{(k)})$ είναι το πλήθος των στοιχείων του $\mathbb{N}_0^{(k)}$.

Αλγόριθμος $\mathbb{A}\mathbb{H}2$.

ΕΙΣΟΔΟΣ: Ο πίνακας $A := [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ και ο μέγιστος αριθμός επιτρεπόμενων επαναλήψεων (“maxiter”)

ΕΞΟΔΟΣ: $D = D^{(0)}D^{(1)} \dots D^{(k)} \in \mathfrak{D}_{D^{-1}A} \equiv \mathfrak{D}_A$ ή $\notin \mathfrak{D}_A$ αν ο A είναι ή δεν είναι H -πίνακας, αντίστοιχα

1. Αν $a_{ii} = 0$ για κάποια $i \in \mathbb{N}$, “ο A δεν είναι H -πίνακας”, ΤΕΛΟΣ ; Αλλιώς
2. Θέσε $D = I$, $A^{(0)} = (\text{diag}(A))^{-1}A$, $D^{(0)} = I$, $k = 1$
3. Υπολόγισε $D = DD^{(k-1)}$, $A^{(k)} = (D^{(k-1)})^{-1}A^{(k-1)}D^{(k-1)} = [a_{ij}^{(k)}]$
4. Υπολόγισε $s_i^{(k)}$, $i = 1(1)n$, $s^{(k)} = \min_{i=1(1)n} s_i^{(k)}$, $S^{(k)} = \max_{i=1(1)n} s_i^{(k)}$
5. Αν $s^{(k)} > 1$, “ο A δεν είναι H -πίνακας”, ΤΕΛΟΣ; Αλλιώς
6. Αν $S^{(k)} < 1$, “ο A είναι H -πίνακας”, ΤΕΛΟΣ; Αλλιώς
7. Αν $S^{(k)} = s^{(k)}$, “ο $M(A)$ είναι ιδιόμορφος”, ΤΕΛΟΣ; Αλλιώς
8. Θέσε $d = [d_i]$, όπου

$$d_i = \frac{1 + s_i^{(k)}}{1 + S^{(k)}}, \quad i = 1(1)n$$

9. Θέσε $D^{(k)} = \text{diag}(d)$,

Αν $k < \text{maxiter}$, $k = k + 1$, Πήγαινε στο Βήμα 3; Αλλιώς

10. Βρες $N_0^{(iter)}$ και $n_0^{(iter)}$

11. Αν $n_0^{(iter)} = 1$, “Αναποτελεσματικός, αύξησε maxiter ”, ΤΕΛΟΣ; Αλλιώς

12. Υπολόγισε

$$s_{ij}^{(iter)} = \sum_{l=1, l \neq j}^{n_0^{(iter)}} |a_{ij,il}^{(iter)}|, \quad j = 1(1)n_0^{(iter)}, \quad i_j, i_l \in N_0^{(iter)}$$

13. Αν $s_{ij}^{(iter)} \geq 1$, $j = 1(1)n_0^{(iter)}$, $\forall i_j \in N_0^{(iter)}$, “ο A δεν είναι H -πίνακας”, ΤΕΛΟΣ; Αλλιώς

14. Ενημέρωσε $N_0^{(iter)}$ (διαγράφοντας $i_j \in N_0^{(iter)} : s_{ij} < 1$) και $n_0^{(iter)}$. Πήγαινε στο Βήμα 11.

Στη συνέχεια παραθέτουμε ορισμένες παρατηρήσεις στον προηγούμενο Αλγόριθμο:

α) Στις περιπτώσεις (α) και (β1) που περιγράψαμε πριν τον Αλγόριθμο ΑΙΗ2 η έξοδος από τον Αλγόριθμο στα Βήματα 5, 6 ή 7 είναι εξασφαλισμένη, δεδομένου ότι μέχρι τότε ο νέος Αλγόριθμος δεν είναι άλλος από τον Αλγόριθμο ΑΙΗ, υπό την προϋπόθεση φυσικά ότι το maxiter είναι αρκετά μεγάλο.

β) Στην περίπτωση της Παρατήρησης (β2) η εξάντληση του maxiter μπορεί να σημαίνει ένα από τα εξής δυο πράγματα. Είτε ότι ο Αλγόριθμος συγκλίνει

πολύ αργά, οπότε το maxiter θα πρέπει να αυξηθεί, ή ότι ο πίνακας A **δεν** είναι H -πίνακας. Για να διαπιστώσουμε αν ο A **δεν** είναι H -πίνακας ανατρέχουμε στο δεύτερο μέρος του Λήμματος 4.5. Θεωρούμε τον κύριο υποπίνακα του $A^{(iter)}$ ο οποίος αποτελείται από τις $n_0^{(iter)}$ γραμμές και τις αντίστοιχες στήλες του για τις οποίες τα αθροίσματα γραμμών είναι ≥ 1 . Αν όλες οι $n_0^{(iter)}$ γραμμές του κύριου υποπίνακα ικανοποιούν τις ίδιες ανισότητες, τότε αυτός ο υποπίνακας **δεν** είναι H -πίνακας. Επομένως, σύμφωνα με το Λήμμα 4.5, ο A **δεν** είναι H -πίνακας. Αν δεν ικανοποιούν όλες οι γραμμές του υπόψη υποπίνακα τις προηγούμενες ανισότητες τότε διαγράφουμε τις γραμμές (και στήλες) με αθροίσματα γραμμών < 1 . Στη συνέχεια ενημερώνουμε τις πληροφορίες μας θεωρώντας έναν αυστηρά μικρότερο κύριο υποπίνακα από τον προηγούμενο του οποίου οι γραμμές έχουν αθροίσματα ≥ 1 . Η διαδικασία αυτή μας οδηγεί είτε στο αποτέλεσμα ότι ο μικρότερος κύριος υποπίνακας **δεν** είναι H -πίνακας οπότε **ούτε** ο A είναι ή σε έναν 1×1 υποπίνακα. Στην τελευταία περίπτωση δεν μπορούμε να καταλήξουμε σε συμπέρασμα πράγμα που σημαίνει ότι το maxiter πρέπει να αυξηθεί.

Κλείνουμε την παράγραφο αυτή διατυπώνοντας δυο θεωρήματα οι αποδείξεις των οποίων μπορούν να προκύψουν από την έως τώρα ανάλυση και από τις αντίστοιχες αποδείξεις των θεωρημάτων της εργασίας [2], που έχουμε ήδη διατυπώσει στη Παράγραφο 4.2 ως Θεωρήματα 3.14 και 3.15.

Θεώρημα 4.15. *Εστω $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ ένας δοσμένος πίνακας. Τότε ο Αλγόριθμος, AH2 συγκλίνει πάντα (εκτός, ίσως, όταν $\det(\mathcal{M}(A)) = 0$).*

Θεώρημα 4.16. *Εστω $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ ένας δοσμένος πίνακας. Αν ο Αλγόριθμος AH2 συγκλίνει, τότε το αποτέλεσμα στην έξοδο του είναι σωστό.*

4.5 Μια Συνάρτηση Matlab, Παραδείγματα και Σχόλια

Ξεκινάμε τη παράγραφο αυτή δίνοντας μια Matlab συνάρτηση που υλοποιεί τον Αλγόριθμο AH2. Η Matlab συνάρτηση αποτελείται από δυο μέρη, με το πρώτο να μην είναι τίποτε άλλο από μια απλή τροποποίηση του κύριου μέρους του Αλγορίθμου AH της εργασίας [2] η οποία με τη σειρά της, είναι βασισμένη στον Αλγόριθμο H της [29].

```
function [s_min, s_max, k, dd]=ah2algo(n, a, maxiter)
```

```

% INPUT: n = dimension of a square (complex) matrix,
%         a = an n-by-n (complex) matrix,
%         maxiter = maximum number of iterations allowed
% OUTPUT: dd = diagonal matrix D (if 'A IS an H-matrix' or if 'A is NOT
%         an H-matrix'),
%         = [ ] (if 'A is NOT an H-matrix; it has at least one zero
%         diagonal element' or if 'M(A) IS SINGULAR'),
%         s_min = smallest row sum of moduli of the Jacobi matrix of
%         M(A(k)),
%         s_max = largest row sum of moduli of the Jacobi matrix of
%         M(A(k)),
%         k = number of iterations performed
finish=0; k=1; dd=eye(n);
if (1-all(diag(a)))
    'A is NOT an H-matrix; It has at least one zero diagonal element'
    finish=1; s_min=0; s_max=Inf; k=k-1; dd=[];
end
if (finish == 0)
    for i=1:n
        a(i,1:n)=abs(a(i,1:n));
    end
    a=inv(diag(diag(a)))*a;
    for i=1:n
        a(i,i)=1;
    end
end
while (finish == 0 & k < maxiter+1)
    for i=1:n
        s(i)=sum(a(i,1:n))-1;
    end
    s_min=min(s); s_max=max(s);
    if s_min > 1
        's_min > 1, A is NOT an H-matrix'
        finish=1;
        break
    elseif s_max < 1
        's_max < 1, A IS an H-matrix'
    end
end

```



```

        finish=1;
        break
elseif (s_min==s_max)
    's_min=s_max, M(A) (to the Matlab precision) IS SINGULAR'
    finish=1;
    break
else
    for i=1:n
        d(i)=(1+s(i))/(1+s_max);
    end
end
k=k+1; diagonal=diag(d);
dd=dd*diagonal; d_1=inv(diagonal); a=d_1*a*diagonal;
for i=1:n
    a(i,i)=1;
end
end
% end of first part
if (k==maxiter+1 & finish==0)
    n1=0;
    for i=1:n
        index(i) = 0;
        if s(i)>1
            n1 = n1 + 1; index(n1) = i ;
        end
    end
end
while (2 <= n1)
    boole=1;          i = 1;
    while (i <= n1)
        l = index(i);
        t=0;
        for m=1:n1
            p=index(m);
            if (p ~ = l)
                t=t+a(l,p);
            end
        end
    end
end
end

```

```

        if t < 1
            boole=0;
            if (i < n1)
                index(i)=index(n1);
            end
            index(n1)=0;
            n1=n1-1;
            if (n1==1)
                break;
            end
        else
            i=i+1;
        end
    end
    if (boole == 1)
        break;
    end
end
end
if (n1 == 1)
    finish=1;
end
k=k-1;
if (finish == 0)
    'A is NOT an H-matrix'
else
    dd=[];
    'Inconclusive; increase maxiter'
end
end
end %end of function ah2algo

```

Για να καλύψουμε όλες τις πιθανές περιπτώσεις που μελετήσαμε σε προηγούμενες παραγράφους, ειδικότερα στη Παράγραφο 4.4, του παρόντος κεφαλαίου, εξετάσαμε πολλά παραδείγματα μερικά από τα οποία παραθέτουμε στη συνέχεια.

Παράδειγμα 1. Ο πίνακας A του παραδείγματος της εργασίας [17]:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & -1 & 0 & -0.6 & 0 \\ 0 & -0.1 & 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0 & 1 & -0.5 \\ -0.2 & 0.1 & 0.3 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Για $a_{12} = 1.146392$, με εφαρμογή του Αλγορίθμου $\mathbb{A}\mathbb{H}$ (ή του Αλγορίθμου $\mathbb{A}\mathbb{H}\mathbf{2}$) έχουμε

$EΞΟΔΟΣ$: “ο A ΔΕΝ είναι H -πίνακας”, $s_{\min}^{(37)} = 1.00000002036218$.

Παράδειγμα 2. Για το μη-αναγωγίμο πίνακα :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.01 & 0.02 & 0.01 & 0.03 & 0.01 \\ 0.05 & 1 & 0.1 & 0.02 & 0.01 & 0.01 \\ 0.01 & 0.01 & 1 & 1.001 & 0.01 & 0.01 \\ 0.01 & 0.03 & 1.002 & 1 & 0.01 & 0.02 \\ 0.02 & 0.01 & 0.02 & 0.01 & 1 & 0.1 \\ 0.07 & 0.01 & 0.01 & 0.01 & 0.01 & 1 \end{bmatrix},$$

με εφαρμογή του Αλγορίθμου $\mathbb{A}\mathbb{H}$ έχουμε

$EΞΟΔΟΣ$: “ο A ΔΕΝ είναι H -πίνακας”, $s_{\min}^{(16)} = 1.0016$,

ενώ με εφαρμογή του Αλγορίθμου $\mathbb{A}\mathbb{H}\mathbf{2}$ έχουμε

$EΞΟΔΟΣ$: “ο A ΔΕΝ είναι H -πίνακας”,

σε μόλις 8 επαναλήψεις. Συγκεκριμένα έχουμε ότι ο $A^{(8)}[3, 4]$ δεν είναι H -πίνακας.

Παράδειγμα 3. Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε έναν αναγωγίμο 3×3 block πίνακα και αλλάζουμε κυρίως τα στοιχεία των διαγώνιων blocks έτσι ώστε να αλλάζουν οι βασικές κλάσεις του. Συγκεκριμένα:

i) Έστω ο παρακάτω πίνακας, που υποθέτουμε ότι έχει φτάσει στη Frobenius κανονική μορφή του με τη χρήση κατάλληλου πίνακα μετάθεσης, με όλες

τις βασικές κλάσεις του να είναι τελικές.

$$\left[\begin{array}{cc|ccc|cc} 1 & 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.1 & 0 & 0.3 \\ 0.2 & 1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 4.1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0.1 & 0.2 & 2.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 & 1 & 0.1 & 1.3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0.9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.75 & 1 \end{array} \right].$$

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η κλάση α_3 του A είναι βασική και τελική. Έχουμε ότι

ΕΞΟΔΟΣ: “ο A ΕΙΝΑΙ H -πίνακας”, $s_{\max}^{(6)} = 0.9767$,

αποτέλεσμα που μπορεί να επιτευχθεί και με τους δύο αλγορίθμους.

ii) Ο πίνακας που δίνεται στη συνέχεια έχει βασική κλάση την α_2 , που προφανώς δεν είναι και τελική.

$$\left[\begin{array}{cc|ccc|cc} 1 & 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.1 & 0 & 0.3 \\ 0.2 & 1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2.1 & 2.2 & 0.3 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.5 & 1 & 2.2 & 0.5 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 & 1 & 0.3 & 0.2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0.9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.75 & 1 \end{array} \right],$$

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι $\rho(A[2]) > 1$, $\rho(A[1]) < \rho(A[3]) < 1$ και επομένως ο Αλγόριθμος ΑΗ δε θα συγκλίνει. Πράγματι μετά ακόμα και από 1000 επαναλήψεις ο Αλγόριθμος δίνει

ΕΞΟΔΟΣ: “Αναποτελεσματικός, αύξησε το maxiter”,

με $s_{\min}^{(1000)} = 0.8216$ και $s_{\max}^{(1000)} = 1.1680$. Στην περίπτωση αυτή έχουμε με τον Αλγόριθμο ΑΗ2

ΕΞΟΔΟΣ: “ο A ΔΕΝ είναι H -πίνακας”

σε 12 επαναλήψεις. Συγκεκριμένα ο πίνακας $A^{(12)}[1, 2, 3, 4, 5]$ δεν είναι H -πίνακας.

iii) Στον παρακάτω πίνακα όλες οι βασικές κλάσεις του (πλήθους ≥ 2)

δεν είναι και τελικές.

$$\left[\begin{array}{cc|ccc|cc} 1 & 0.001 & 0.01 & 0.02 & 0.01 & 0 & 0.03 \\ 0.02 & 1 & 0.01 & 0.01 & 0.01 & 0.01 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0.1 & 0.03 & 0.01 \\ 0 & 0 & 20 & 1 & 0 & 0.05 & 0.01 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0.03 & 0.02 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right],$$

Μπορούμε να βρούμε ότι οι κλάσεις α_2, α_3 του A είναι βασικές αλλά όχι και οι δύο τελικές με

$$\rho(A[1]) < 1 < \rho(A[2]) = \rho(A[3]) = \rho(A).$$

Έχουμε ότι

ΕΞΟΔΟΣ: “ο A ΔΕΝ είναι H -πίνακας”, $s_{\min}^{(4)} > 1$,
με τον Αλγόριθμο $\mathbb{A}\mathbb{H}\mathbb{2}$ (ή τον Αλγόριθμο $\mathbb{A}\mathbb{H}$).

iv) Ο πίνακας που δίνεται στη συνέχεια έχει τις βασικές κλάσεις του α_2, α_3 (πλήθους ≥ 2) να μην είναι και οι δυο τελικές.

$$\left[\begin{array}{cc|ccc|cc} 1 & 0.001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.03 \\ 0.02 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0.01 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0.1 & 0.03 & 0.01 \\ 0 & 0 & 20 & 1 & 0 & 0.05 & 0.01 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0.03 & 0.02 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right],$$

Μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι

$$\rho(A[1]) < 1 \rho(A[2]) = \rho(A_{33}) = \rho(A)1$$

και $O_{12} = O$. Για τον πίνακα αυτόν έχουμε:

ΕΞΟΔΟΣ: “ο A ΔΕΝ είναι H -πίνακας”, $s_{\min}^{(6)} > 1$,
με τον Αλγόριθμο $\mathbb{A}\mathbb{H}$ και σε 2 επαναλήψεις με τον Αλγόριθμο $\mathbb{A}\mathbb{H}\mathbb{2}$. Συγκεκριμένα ο $A^{(2)}[4, 5, 6, 7]$ δεν είναι H -πίνακας.

Παράδειγμα 4. Έστω ο αναγώγιμος πίνακας

$$\left[\begin{array}{c|ccc|ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0.8 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0.1 & 0.02 & 0.01 & 0.01 & 0 & 0 & 0.2 & 0.3 \\ 0 & 0.1 & 1 & 0.1 & 0.2 & 0.03 & 0 & 0 & 0.3 & 0.2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0.01 & 1.02 & 0 & 0 & 0.1 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0.1 & 0 & 0 & 0.1 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0.01 & 0.1 & 1 & 0 & 0 & 0.8 & 0.4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.6 & 1 \end{array} \right],$$

με

$$\rho(A_{11}) = \rho(A_{44}) < \rho(A_{22}) = \rho(A_{33}) = \rho(A_{55}) = \rho(A).$$

Η εφαρμογή του Αλγορίθμου ΑΗΙ δίνει

ΕΞΟΔΟΣ: “Αναποτελεσματικός, αύξησε το maxiter”,

ενώ ο Αλγόριθμος ΑΗ2 σε δύο επαναλήψεις βρίσκει ότι “ο A ΔΕΝ είναι H -πίνακας”. Συγκεκριμένα ο $A^{(2)}[4, 5, 6, 9, 10]$ δεν είναι H -πίνακας.

Τέλος, δίνουμε ένα παράδειγμα όπου ο πίνακας A είναι αναγώγιμος μεγάλης διάστασης. Συγκεκριμένα:

Παράδειγμα 5. Ας υποθέσουμε ότι θεωρούμε τον πίνακα (4.24)

i) Με block υποπίνακες τους:

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0.25 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{22} = [1], \quad A_{33} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0.1 \\ 0.1 & 1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_{44} = \begin{bmatrix} 1 & 0.3 \\ 1.5 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{55} = \begin{bmatrix} 1 & 3.6 \\ 0.4 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{66} = \begin{bmatrix} 1 & 7.2 \\ 0.2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_{77} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{88} = \begin{bmatrix} 1 & 0.32 \\ 4.5 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{99} = \begin{bmatrix} 1 & 0.4 \\ 0.8 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_{10,10} = \begin{bmatrix} 1 & 2.25 \\ 0.64 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{11,11} = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 0.2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{12,12} = \begin{bmatrix} 1 & 72 \\ 0.02 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_{13,13} = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 \\ 6.05 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{14,14} = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 11.025 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{15} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.03 \\ 0.02 & 0.01 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
A_{24} &= \begin{bmatrix} 0.01 & 0.05 \end{bmatrix}, A_{34} = \begin{bmatrix} 0.002 & 0.01 \\ 0.003 & 0.004 \\ 0.05 & 0.06 \end{bmatrix}, A_{46} = \begin{bmatrix} 0.07 & 0.08 \\ 0.09 & 0.01 \end{bmatrix}, \\
A_{56} &= \begin{bmatrix} 0.1 & 0.12 \\ 0.12 & 0.1 \end{bmatrix}, A_{67} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 \end{bmatrix}, A_{78} = \begin{bmatrix} 0.15 & 0.25 \\ 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}, \\
A_{89} &= \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 \end{bmatrix}, A_{8,10} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 \\ 0.2 & 0.4 \end{bmatrix}, A_{9,11} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.1 \end{bmatrix}, \\
A_{9,12} &= \begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 \\ 0.2 & 0.2 \end{bmatrix}, A_{10,13} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 \end{bmatrix}, A_{10,14} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 \\ 0.4 & 0.5 \end{bmatrix}, \\
A_{11,13} &= \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.4 \end{bmatrix}, A_{11,14} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}, A_{12,13} = \begin{bmatrix} 0.15 & 0.25 \\ 0.25 & 0.35 \end{bmatrix}, \\
A_{12,14} &= \begin{bmatrix} 0.15 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}, A_{13,14} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

με

$$\rho(A) > \rho(A_{13,13}) > \rho(A_{14,14}) > 1,$$

και βασικές κλάσεις τις $\alpha_5, \alpha_6, \alpha_8, \alpha_{10}, \alpha_{12}$, δίνει

ΕΞΟΔΟΣ: “ο A ΔΕΝ είναι H -πίνακας”, $s_{\min}^{(10)} > 1$,

με τον Αλγόριθμο ΑΗ και “ο A ΔΕΝ είναι H -πίνακας” σε 1 επανάληψη με τον Αλγόριθμο ΑΗ2. Συγκεκριμένα ο $A^{(1)}$ [15, 16] δεν είναι H -πίνακας.

ii) Ομοίως, όπως παραπάνω με τον *(i)*, αλλά με

$$A_{13,13} = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 \\ 0.8 & 1 \end{bmatrix}, A_{14,14} = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 0.4 & 1 \end{bmatrix},$$

και με

$$\rho(A) > 1 > \rho(A_{13,13}) > \rho(A_{11,11}), \rho(A_{14,14})$$

δίνει

ΕΞΟΔΟΣ: “ο A ΔΕΝ είναι H -πίνακας”

σε 1 επανάληψη με τον Αλγόριθμο ΑΗ2. Συγκεκριμένα ο $A^{(1)}$ [15, 16] δεν είναι H -πίνακας.

iii) Ομοίως με *(i)*, αλλά με

$$A_{55} = \begin{bmatrix} 1 & 1.6 \\ 0.4 & 1 \end{bmatrix}, A_{66} = \begin{bmatrix} 1 & 3.2 \\ 0.2 & 1 \end{bmatrix}, A_{10,10} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.64 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_{13,13} = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 \\ 0.8 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{14,14} = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 0.4 & 1 \end{bmatrix},$$

και με

$$1 > \rho(A) > \rho(A_{13,13}) > \rho(A_{11,11}), \quad \rho(A_{14,14})$$

δίνει

ΕΞΟΔΟΣ: “ο A ΕΙΝΑΙ H -πίνακας”, $s_{\max}^{(49)} < 1$.

Βιβλιογραφία

- [1] B.H. Ahn. *Solution of Nonsymmetric Linear Complementarity Problems by Iterative Methods*. J. Optim. Theory Appl., 33 (1981), 175–185.
- [2] M. Alanelli and A Hadjidimos. *On Iterative Criteria for H –Matrices and Non– H –Matrices*. J. Appl. Math. Comput., 188 (2007), 19–30.
- [3] M. Alanelli and A Hadjidimos. *A New Iterative Criterion for H –Matrices*. SIAM J. Matrix Anal. Appl., 29 (2006), 160–176.
- [4] O. Axelsson. *Iterative Solution Methods*. Cambridge University Press, Cambridge, England, 1994.
- [5] A. Berman and R.J. Plemmons. *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences. Classics in Applied Mathematics*. SIAM, Philadelphia, 1994.
- [6] R. Bru and M. Neumann. *Nonnegative Jordan Basis*. Linear Multilinear Algebra, 23 (1988), 95–109.
- [7] R.W. Cottle and G.B. Dantzig, *Complementarity Pivot Theory of Mathematical Programming*. Linear Algebra Appl. 1 (1968), 103–125.

- [8] C.W. Cryer, *The Solution of a Quadratic Programming Problem Using Systematic Over-relaxation*. SIAM J. Control 9 (1971), 385–392.
- [9] Lj. Cvetković and V. Kostić. *New Criteria for Identifying H –Matrices*. J. Comp. Appl. Maths, 180 (2005), 265–278.
- [10] J.W. Demmel. *Applied Numerical Linear Algebra*. SIAM, Philadelphia, 1996.
- [11] D.K. Faddeev and V.N. Faddeeva. *Computational Methods of Linear Algebra*. W.H. Freeman, San Francisco, 1963.
- [12] T.-B. Gan and X.-H. Huang. *Simple Criteria for Nonsingular H –Matrices*. Linear Algebra Appl., 374 (2003), 317–326.
- [13] Y.-M. Gao and X.-H. Wang. *Criteria for Generalized Diagonally Dominant Matrices and M –Matrices*. Linear Algebra Appl. 169 (1992), 257–268.
- [14] Y.-M. Gao and X.-H. Wang. *Criteria for Generalized Diagonally Dominant Matrices and M –Matrices II*. Linear Algebra Appl., 248 (1996), 339–353.
- [15] A. Hadjidimos. *Accelerated Overrelaxation Method*. Math. Comp., 32 (1978), 149–157.
- [16] A. Hadjidimos. *Some Basic Results on M –Matrices in Connection with the Accelerated Overrelaxation (AOR) Method*. Computing, 24 (1980), 259–268.

- [17] A. Hadjidimos *An Extended Compact Profile Iterative Method Criterion for Sparse H -Matrices.* Linear Algebra Appl., 389 (2004), 329–345.
- [18] A. Hadjidimos and A. Yeyios. *On the Principle Of Extrapolation in Connection with the Accelerated Overrelaxation Method.* Linear Algebra Appl., 30 (1980), 115–128.
- [19] M. Harada, M. Usui and H. Niki. *An Extension of the Criteria for Generalized Diagonally Dominant Matrices.* Internat. J. Comput. Math., 60 (1996), 115–119.
- [20] R.A. Horn and C.R. Johnson. *Matrix Analysis.* Cambridge University Press, Cambridge, England, 1985.
- [21] R.A. Horn and C.R. Johnson. *Topics in Matrix Analysis.* Cambridge University Press, Cambridge, England, 1991.
- [22] T.-Z. Huang. *A Note on Generalized Diagonally Dominant Matrices.* Linear Algebra Appl., 225 (1995), 237–242.
- [23] D.R. Kincaid, J.R. Respass, D.M. Young and R.G. Grimes. *ITPACK 2C: A Fortran Package for Solving Large Sparse Linear Systems by Adaptive Accelerated Iterative Methods.* ACM Trans. on Math. Software, 8 (1982), 302–322.
- [24] T. Kohno, H. Niki, H. Sawami and Y.-M. Gao. *An Iterative Test for H -Matrix.* J. Comp. Appl. Maths, 115 (2000), 349–355.

- [25] M.D. Koulisianis and T.S. Papatheodorou, *Improving Projected Successive Overrelaxation Method for Linear Complementarity Problems*. Appl. Numer. Math. 45 (2003), 29–40.
- [26] C.E. Lemke, *Bimatrix Equilibrium Points and Mathematical Programming*. Management Sci. 11 (1965), 681–689.
- [27] L. Li. *On the Iterative Criterion for Generalized Diagonally Dominant Matrices*. SIAM J. Matrix Anal. Appl., 24 (2002), 17–24.
- [28] L. Li. Personal Communication (2006).
- [29] B. Li, L. Li, M. Harada, H. Niki and M.J. Tsatsomeros. *An Iterative Criterion for H–Matrices*. Linear Algebra Appl., 271 (1998), 179–190.
- [30] O.L. Mangasarian, *Solution of Symmetric Linear Complementarity Problems by Iterative Methods*. J. Opt. Theory Appl. 22 (1977), 465–485.
- [31] O.L. Mangasarian, *Nonlinear Programming*. McGraw Hill, New York, 1969. (Reprint: SIAM Classics in Applied Mathematics 10, Philadelphia, 1994).
- [32] K.G. Murty, *Linear Complementarity, Linear and Nolinear Programming*. Internet Edition 1997.

- [33] K. Ojiro, H. Niki and M. Usui. *A New Criterion for H -Matrices*. J. Comp. Appl. Maths, 150 (2003), 293–302.
- [34] A.M. Ostrowski. *Über die Determinanten mit Überwiegender Hauptdiagonale*. Comment. Math. Helv., 10 (1937), 69–96.
- [35] J.S. Pang, *Necessary and Sufficient Conditions for the Convergence of Iterative Methods for the Linear Complementarity Problem*. J. Opt. Theory Appl. 42 (1984), 1–17.
- [36] K. Pantazopoulos, *Numerical Methods and Software for the Pricing of American Financial Derivatives*. PhD Thesis, Department of Computer Sciences, Purdue University, West Lafayette, IN, 1998.
- [37] U.G. Rothblum. *Algebraic Eigenspaces of Nonnegative Matrices*. Linear Algebra Appl., 12 (1975), 281–292.
- [38] H. Schneider. *The Influence of the Marked Reduced Graph of a Nonnegative Matrix on the Jordan Form and Related Properties: A Survey*. Linear Algebra Appl., 84 (1986), 161–189.
- [39] H. Schneider. Personal Communication (2006).
- [40] M.J. Tsatsomeros. Personal Communication (2006).
- [41] R.S. Varga. *On Recurring Theorems on Diagonal Dominance*. Linear Algebra Appl., 13 (1976), 1–9.

- [42] R.S. Varga. *Matrix Iterative Analysis*. 2nd revised and expanded edition, Springer, Berlin, 2000.
- [43] R.S. Varga. Personal Communication (2006).
- [44] J.H. Wilkinson. *The Algebraic Eigenvalue Problem*. Clarendon Press, Oxford, 1965.
- [45] D.M. Young. *Iterative Solution of Large Linear Systems*. Academic Press, New York, 1971.

Η Διδακτορική Διατριβή δακτυλογραφήθηκε από την συγγραφέα χρησιμοποιώντας το σύστημα στοιχειοθεσίας L^AT_EX.[†]

[†]το L^AT_EX είναι ένα σύστημα στοιχειοθεσίας που δημιουργήθηκε από τον Leslie Lamport σαν μια ειδική έκδοση του προγράμματος T_EX του Donald Knuth.