ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
≪ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥΣ≫

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ KURAMOTO-SIVASHINSKY

ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΣ ΓΙΑΛΙΑΣ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΖΟΥΡΑΡΗΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ

ΗΡΑΚΛΕΙΟ

ΙΟΥΝΙΟΣ 2013

Ευχαριστίες

Αισθάνομαι την υποχρέωση να ευχαριστήσω όλους όσους βοήθησαν να ολοκληρωθεί αυτή η εργασία. Πρώτα και κύρια τον κ. Γεώργιο Ζουράρη, επιβλέποντα της εργασίας αυτής, ο οποίος με στήριξε σαν καθηγητής, αλλά πάνω από όλα σαν άνθρωπος και φίλος. Επίσης ευχαριστώ την κ. Σουζάνα Παπαδοπούλου που η πόρτα της ήταν πάντα ανοιχτή για να ακούσει τους προβληματισμούς μου και τους κ.κ. Γεώργιο Κοσιώρη και Μιχαήλ Πλεξουσάκη που μαζί με τον κ. Γεώργιο Ζουράρη αποτέλεσαν την επιτροπή που έκρινε την εργασία. Ακόμη θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου στην οικογένειά μου, Πέτρο, Αρσινόη και Μαρία. Είναι οι άνθρωποι που με διαμόρφωσαν, δίνοντάς μου αρχές και αξίες με τις οποίες πορεύτηκα ως τώρα στη ζωή. Τέλος, ένα θερμό ευχαριστώ στους φίλους μου Δημήτρη, Κωστή και Πάνο χωρίς τους οποίους δεν θα είχα φτάσει έως εδώ.

Περίληψη

Διατυπώνουμε μια μέθοδο πεπερασμένων διαφορών διαφορών τύπου Crank-Nicolson για την προσέγγιση της λύσης της χωρικά μονοδιάστατης εξίσωσης Kuramoto-Sivashinsky με περιοδικές συνοριακές συνθήκες. Συζητάμε γραμμικοποιήσεις του μη γραμμικού συστήματος αλγεβρικών εξισώσεων που προκύπτει και αποδεικνύουμε δεύτερης τάξης εκτιμήσεις του σφάλματος.

Abstract

We formulate a Crank-Nicolson type finite difference method to approximate the solution to the Kuramoto-Sivashinsky equation in one space dimension and with periodic boundary conditions. We discuss linearisations of the risen nonlinear system of algebraic equations and we provide second order error estimates.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Ένα πρόβλημα αρχικών τιμών για την εξίσωση Kuramoto-Sivashinsky

Για δοθέντα $T > 0$ και $\nu > 0$, θεωρούμε το ακόλουθο πρόβλημα περιοδικών αρχικών τιμών για την εξίσωση Kuramoto-Sivashinsky: αναζητάμε μια πραγματική συνάρτηση $u = u(x,t) : \mathbb{R} \times [0,T]$ η οποία είναι 1-περιοδική ως προς x, λύνει την εξίσωση

$$u_t + uu_x + u_{xx} + \nu\, u_{xxxx} = 0 \quad \text{στο} \quad \mathbb{R} \times [0,T] \tag{1.1}$$

και ικανοποιεί την αρχική συνθήκη

$$u(\cdot, 0) = u_0 \quad \text{στο} \quad \mathbb{R}, \tag{1.2}$$

όπου $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι μια γνωστή, $1-$περιοδική συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι το πρόβλημα (1.1) και (1.2) έχει μοναδική και αρκετά ομαλή λύση.

Η εξίσωση Kuramoto-Sivashinsky είναι μια μη γραμμική διαφορική εξίσωση που περιγράφει κύματα μεγάλου μήκους στο χώρο και στο χρόνο, τα οποία δεν είναι συμμετρικά. Ο όρος u_{xx} περιγράφει την αστάθεια της συμμετρίας των κυμάτων σε μεγάλες κλίμακες. Ο όρος u_{xxxx} εκφράζει την απόσβεση για μικρές κλίμακες, ενώ ο μη γραμμικός όρος $u\,u_x$ σταθεροποιεί τη μεταφορά της ενέργειας μεταξύ κυμάτων μεγάλου και μικρού μήκους.

Ορισμός. *Στο χώρο $C([0,1],\mathbb{R})$ ορίζουμε το L^2 εσωτερικό γινόμενο $(v,w) := \int_0^1 v(x)w(x)\,dx$ και συμβολίζουμε με $\|\cdot\|$ την νόρμα που παράγεται από το εσωτερικό γινόμενο $(\cdot,\cdot)$, δηλ. $\|v\| := \sqrt{(v,v)}$.*

Λήμμα 1. *Για κάθε $u \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ η οποία είναι 1-περιοδική, ισχύει ότι*

$$\|u'\| \leq \|u\|\,\|u''\|.$$

Απόδειξη. Πρώτα παρατηρούμε ότι

$$\|u'\|^2 = \int_0^1 u'(x)u'(x)dx = -\int_0^1 u(x)u''(x)dx.$$

Έπειτα χρησιμοποιώντας την ανίσωση Caychy-Scharwz έχουμε

$$\|u'\|^2 \leq \left(\int_0^1 |u(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 |u''(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = \|u\|\|u''\|.$$

□

Λήμμα 2. *Έστω $f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ μία συνάρτηση 2π-περιοδική με $\int_0^{2\pi} f(x)dx = 0$. Τότε:*

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \leq \int_0^{2\pi} |f'(x)|^2 dx.$$

Απόδειξη. Επειδή το σύνολο $(g_n)_{n=0}^{\infty}$ με

$$g_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} & n = 0 \\ \frac{\cos\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} & n \neq 0 \text{ και άρτιο} \\ \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} & n \neq 0 \text{ και περιττό} \end{cases}$$

είναι ένα πλήρες ορθοκανονικό σύστημα του $L^2(0,2\pi)$ και $f \in C([0,2\pi],\mathbb{R}) \subset L^2(0,2\pi)$, συμπεραίνουμε ότι

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, g_n \rangle \, g_n$$

όπου $< v, w >:= \int_0^{2\pi} v(x)w(x)\, dx$ για κάθε $v,\ w \in L^2(0,2\pi)$. Επομένως, η ισότητα Parseval μας δίνει

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} | \langle f, g_n \rangle |^2.$$

Επειδή $f' \in C([0,2\pi],\mathbb{R})$ έχουμε επιπλέον

$$f' = \sum_{n=1}^{\infty} \left\langle f', g_n \right\rangle \, g_n$$

και

$$\int_0^{2\pi} |f'(x)|^2 \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} | \left\langle f', g_n \right\rangle |^2.$$

Παρατηρούμε, ότι

$$\begin{aligned} \left\langle f', g_{2n} \right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f'(x)\cos(nx)dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) n \sin(nx) dx \\ &= n \left\langle f, g_{2n-1} \right\rangle \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \left\langle f', g_{2n-1} \right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f'(x)\sin(nx)dx \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) n \cos(nx) dx \\ &= -n \left\langle f, g_{2n} \right\rangle \end{aligned}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αυτό σημαίνει ότι

$$\left\{ \, | \left\langle f', g_{2\ell} \right\rangle |^2 + | \left\langle f', g_{2\ell-1} \right\rangle |^2 : \, \ell \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ \, \ell^2 | \left\langle f, g_{2\ell} \right\rangle |^2 + \ell^2 | \left\langle f, g_{2\ell-1} \right\rangle |^2 : \, \ell \in \mathbb{N} \right\},$$

που συνεπάγεται ότι:

$$\int_0^{2\pi} |f'(x)|^2\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(|\langle f, g_{2n}\rangle|^2 + |\langle f, g_{2n-1}\rangle|^2 \right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, g_n\rangle|^2 = \int_0^{2\pi} |f(x)|^2\,dx.$$

□

Λήμμα 3 (Ανίσωση Wirtinger)**.** *Έστω $u \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ για την οποία η u' είναι 1-περιοδική. Τότε ισχύει ότι:*

$$\|u'\|^2 \leq \tfrac{1}{4\pi^2}\,\|u''\|^2.$$

Απόδειξη. Έστω $f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ τέτοια ώστε $f(x) = u'(\frac{x}{2\pi})$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επειδή η f είναι 2π-περιοδική και $\int_0^{2\pi} f(x)dx = 0$, σύμφωνα με το Λήμμα 2 ισχύει ότι

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\,dx \leq \int_0^{2\pi} |f'(x)|^2\,dx.$$

Εισάγοντας την μεταβλητή $t = \frac{x}{2\pi}$, έχουμε :

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\,dx &= \int_0^{2\pi} \left|u'\left(\tfrac{x}{2\pi}\right)\right|^2\,dx \\ &= 2\pi \int_0^1 \left|u'(t)\right|^2\,dt\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} |f'(x)|^2\,dx &= \tfrac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi} \left|u''\left(\tfrac{x}{2\pi}\right)\right|^2\,dx \\ &= \tfrac{1}{2\pi}\int_0^1 |u''(t)|^2\,dt.\end{aligned}$$

Από τις παραπάνω σχέσεις συμπεραίνουμε εύκολα ότι:

$$\int_0^1 |u'(t)|^2\,dt \leq \tfrac{1}{4\pi^2}\int_0^1 |u''(t)|^2\,dx$$

που είναι η ζητούμενη σχέση. □

Πρόταση 1. *Έστω u η λύση του προβλήματος (1.1) και (1.2). Τότε έχουμε ότι*

$$\|u(\cdot,t)\|^2 \leq e^{\frac{t}{2\nu}}\|u_0\|^2 \quad \forall t \in [0,T]$$

και

$$\int_0^1 u(x,t)\,dx = \int_0^1 u_0(x)\,dx \quad \forall t \in [0,T].$$

Αν $\nu \geq \frac{1}{4\pi^2}$, τότε

$$\|u(\cdot,t)\| \leq \|u(\cdot,s)\|$$

για οποιαδήποτε $t, s \in [0,T]$ με $s \leq t$.

Απόδειξη. Πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση Kuramoto-Sivashinsky με u και ολοκληρώνουμε στο $[0,1]$ για να πάρουμε:

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt}\|u(\cdot,t)\|^2 &= -\tfrac{1}{3}\int_0^1 \big(u^3(x,t)\big)_x\;dx + \int_0^1 u_x(x,t)\,u_x(x,t)\;dx + \nu\int_0^1 u_{xxx}(x,t)\,u_x(x,t)\;dx\\ &= \|u_x(\cdot,t)\|^2 - \nu\,\|u_{xx}(\cdot,t)\|^2, \quad \forall\, t\in[0,T].\end{aligned}$$

Επειδή η u είναι 1-περιοδική, από το Λήμμα 1 έπεται ότι

$$\|u_x(\cdot,t)\| \le \|u(\cdot,t)\|\,\|u_{xx}(\cdot,t)\| \quad \forall\, t\in[0,T].$$

Τότε από την ανισότητα του αριθμητικού γεωμετρικού μέσου $ab \le \nu a^2 + \frac{b^2}{4\nu}$, έχουμε

$$\|u_x(\cdot,t)\|^2 \le \nu\,\|u_{xx}(\cdot,t)\|^2 + \tfrac{1}{4\nu}\,\|u(\cdot,t)\|^2 \quad \forall\, t\in[0,T].$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω σχέσεις παίρνουμε

$$\tfrac{d}{dt}\|u(\cdot,t)\|^2 \le \tfrac{1}{2\nu}\,\|u(\cdot,t)\|^2 \quad \forall\, t\in[0,T].$$

Επομένως

$$\tfrac{d}{dt}\left(e^{\frac{-t}{2\nu}}\|u(\cdot,t)\|^2\right) \le 0 \quad \forall\, t\in[0,T],$$

η οποία μας δίνει

$$\|u(\cdot,t)\|^2 \le e^{\frac{t}{2\nu}}\,\|u_0\|^2 \quad \forall\, t\in[0,T].$$

Ολοκληρώνοντας την εξίσωση Kuramoto-Sivashinsky στο διάστημα $(0,1)$ και λαμβάνοντας υπόψη την 1-περιοδικότητα έχουμε ότι $\frac{d}{dt}\int_0^1 u(x,t)\;dx = 0$ για κάθε $t\in[0,T]$, από την οποία έπεται ότι

$$\int_0^1 u(x,t)\;dx = \int_0^1 u_0(x)\;dx \quad \forall\, t\in[0,T].$$

Από το Λήμμα 3 έχουμε ότι

$$\|u_x(\cdot,t)\|^2 \le \tfrac{1}{4\pi^2}\,\|u_{xx}(\cdot,t)\|^2 \quad \forall\, t\in[0,T].$$

Έτσι, παίρνουμε

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt}\|u(\cdot,t)\|^2 &= \|u_x(\cdot,t)\|^2 - \nu\,\|u_{xx}(\cdot,t)\|^2\\ &\le \tfrac{1}{4\pi^2}\,\|u_{xx}(\cdot,t)\|^2 - \nu\,\|u_{xx}(\cdot,t)\|^2\\ &\le \left(\tfrac{1}{4\pi^2} - \nu\right)\,\|u_{xx}(\cdot,t)\|^2 \quad \forall\, t\in[0,T].\end{aligned}$$

Επομένως, όταν $\nu \ge \frac{1}{4\pi^2}$, τότε $\frac{d}{dt}\|u(\cdot,t)\|^2 \le 0$ για κάθε $t\in[0,T]$. Έτσι, η $\|u(\cdot,t)\|$ είναι φθίνουσα συνάρτηση του t, δηλ. $\|u(\cdot,t)\| \le \|u(\cdot,s)\|$ όταν $0\le s\le t\le T$. □

Κεφάλαιο 2

Μια μέθοδος πεπερασμένων διαφορών τύπου Crank-Nicolson

Σε αυτό το κεφάλαιο θα διατυπώσουμε και θα μελετήσουμε μια μεθόδο πεπερασμένων διαφορών για την εξίσωση Kuramoto-Sivashinsky, η οποία προτάθηκε από τον Γ. Ακρίβη στην εργασία [1].

2.1 Διατύπωση της μεθόδου πεπερασμένων διαφορών

Έστω $J, N \in \mathbb{N}$, $h := \frac{1}{J}$, $x_i := ih$ για κάθε $i \in \mathbb{Z}$, $k := \frac{T}{N}$, $t^n = n\,k$ για $n = 0, \dots, N$, και

$$\mathbb{R}^J_{per} := \{v = (v_i)_{i\in\mathbb{Z}} : v_i \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad v_{i+J} = v_i \quad \forall i \in \mathbb{Z}\}.$$

Πρώτα ορίζουμε

$$U_i^0 = u_0(x_i), \quad \forall i \in \mathbb{Z},$$

και έπειτα, για $n = 0, \dots, N-1$, αναζητάμε $U^{n+1} \in \mathbb{R}^J_{per}$ τέτοιο ώστε:

$$\partial U_i^n + \frac{1}{6h}\left(U_{i+1}^{n+\frac{1}{2}} + U_i^{n+\frac{1}{2}} + U_{i-1}^{n+\frac{1}{2}}\right)\left(U_{i+1}^{n+\frac{1}{2}} - U_{i-1}^{n+\frac{1}{2}}\right) + \Delta_h U_i^{n+\frac{1}{2}} + \nu\,\Delta_h^2 U_i^{n+\frac{1}{2}} = 0 \qquad (2.1)$$

για κάθε $i \in \mathbb{Z}$, όπου $\Delta_h : \mathbb{R}^J_{per} \to \mathbb{R}^J_{per}$ με

$$\Delta_h V_i := \tfrac{1}{h^2}(V_{i-1} - 2V_i + V_{i+1}), \quad \forall\, i \in \mathbb{Z}, \quad \forall\, V \in \mathbb{R}^J_{per},$$

$$\Delta_h^2 V_i := \Delta_h(\Delta_h V)_i, \quad \forall i \in \mathbb{Z}, \quad \forall\, V \in \mathbb{R}^J_{per},$$

και $\partial V^n := \frac{1}{k}(V^{n+1} - V^n)$, $V^{n+\frac{1}{2}} := \frac{1}{2}(V^{n+1} + V^n)$ για $n = 0, \dots, N-1$, και για οποιαδήποτε $(V^n)_{n=0}^N \subset \mathbb{R}^J_{per}$.

2.2 Νόρμες και χρήσιμα αποτελέσματα

Ορίζουμε στον $\mathbb{R}^J_{per}$ το διακριτό L^2 εσωτερικό γινόμενο $(\cdot,\cdot)_h$ ως εξής $(v,w)_h := h\sum_{i=1}^J v_i w_i$ για κάθε $v, w \in \mathbb{R}^J_{per}$ και τη παραγόμενη διακριτή L^2 νόρμα $\|\cdot\|_h$, δηλ. $\|v\|_h := \sqrt{(v,v)_h}$ για κάθε $v \in \mathbb{R}^J_{per}$. Επίσης, ορίζουμε τις ημινόρμες $|\cdot|_{1,h}$ και $|\cdot|_{2,h}$, ως εξής:

$$|v|_{1,h} := \left(h\sum_{i=1}^J \left|\tfrac{v_{i+1}-v_i}{h}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{και} \quad |v|_{2,h} := \|\Delta_h v\|_h \quad \forall v \in \mathbb{R}^J_{per},$$

που είναι διακριτά ανάλογα των ημινόρμων H^1 και H^2, αντίστοιχα. Τέλος, ορίζουμε τη διακριτή νόρμα μεγίστου $|\cdot|_\infty$ ως εξής:

$$|v|_\infty := \max_{1\leq i\leq J} |v_i| \quad \forall v \in \mathbb{R}^J_{per}$$

και τις απεικονίσεις φ, $\psi : \mathbb{R}^J_{per} \times \mathbb{R}^J_{per} \to \mathbb{R}^J_{per}$ ως εξής:

$$\begin{aligned}
(\varphi(v,w))_i &:= (v_{i+1} + v_i + v_{i-1})\,(w_{i+1} - w_{i-1})\\
(\psi(v,w))_i &:= -(2v_{i-1} + v_i)\,w_{i-1} + (v_{i+1} - v_{i-1})\,w_i + (2v_{i+1} + v_i)\,w_{i+1}
\end{aligned}$$

για κάθε $i \in \mathbb{Z}$ και $v, w \in \mathbb{R}^J_{per}$.

Λήμμα 4. *Για κάθε $u, w \in \mathbb{R}^J_{per}$ ισχύει ότι $\psi(u,w) = \psi(w,u)$.*

Απόδειξη. Έστω $u, w \in \mathbb{R}^J_{per}$. Τότε, για κάθε $i \in \mathbb{Z}$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\psi(u,w)_i &= -(2u_{i-1} + u_i)w_{i-1} + (u_{i+1} - u_{i-1})w_i + (2u_{i+1} + u_i)w_{i+1}\\
&= -2u_{i-1}w_{i-1} - u_iw_{i-1} + u_{i+1}w_i - u_{i-1}w_i + 2u_{i+1}w_{i+1} + u_iw_{i+1}\\
&= -2w_{i-1}u_{i-1} - w_iu_{i-1} + w_{i+1}u_i - w_{i-1}u_i + 2u_{i+1}w_{i+1} + w_iu_{i+1}\\
&=(-2w_{i-1} - w_i)u_{i-1} + (w_{i+1} - w_{i-1})u_i + (2w_{i+1} + w_i)u_{i+1}\\
&=\psi(w,u)_i.
\end{aligned}$$

□

Λήμμα 5. *Για κάθε $u, w, r \in \mathbb{R}^J_{per}$ ισχύει ότι:*

$$(\varphi(u,w),w)_h = -h\sum_{i=1}^{J}(u_{i+1} - u_{i-2})w_iw_{i-1} \tag{2.2}$$

$$(\varphi(u,u),w)_h = -h\sum_{i=1}^{J}(u_i^2 + u_iu_{i+1} + u_{i+1}^2)(w_{i+1} - w_i) \tag{2.3}$$

$$(\varphi(u,u),u)_h = 0 \tag{2.4}$$

$$(\psi(u,w),r)_h = -h\sum_{i=1}^{J}[u_i(w_{i+1} + 2w_i) + u_{i+1}(2w_{i+1} + w_i)](r_{i+1} - r_i) \tag{2.5}$$

$$\varphi(u,u) - \varphi(w,w) = \psi(w,u-w) + \varphi(u-w,u-w). \tag{2.6}$$

Απόδειξη. Έστω $u, w, r \in \mathbb{R}^J_{per}$. Τότε έχουμε:

$$\begin{aligned}
(\varphi(u,w),w)_h &= h\sum_{i=1}^{J}(u_{i+1} + u_i + u_{i-1})(w_{i+1} - w_{i-1})w_i\\
&= h\sum_{i=1}^{J}(u_{i+1} + u_i + u_{i-1})w_{i+1}w_i - h\sum_{i=1}^{J}(u_{i+1} + u_i + u_{i-1})w_{i-1}w_i\\
&= h\sum_{i=2}^{J+1}(u_{i-2} + u_{i-1} + u_i)w_iw_{i-1} - h\sum_{i=1}^{J}(u_{i+1} + u_i + u_{i-1})w_iw_{i-1}\\
&= h\sum_{i=1}^{J}(u_{i-2} + u_{i-1} + u_i)w_iw_{i-1} - h\sum_{i=1}^{J}(u_{i+1} + u_i + u_{i-1})w_iw_{i-1}\\
&= -h\sum_{i=1}^{J}(u_{i+1} - u_{i-2})w_iw_{i-1}.
\end{aligned}$$

Έτσι αποδείξαμε την (2.2). Στην συνέχεια αποδεικνύουμε τις (2.3) και (2.4) ως εξής:

$$
\begin{aligned}
(\varphi(u,u),w)_h =& h\sum_{i=1}^{J}(u_{i+1}^2 - u_{i+1}u_{i-1} + u_iu_{i+1} - u_iu_{i-1} + u_{i-1}u_{i+1} - u_{i-1}^2)\,w_i \\
=& h\sum_{i=1}^{J}(u_{i+1}^2 + u_iu_{i+1} + u_i^2 - u_i^2 - u_{i-1}u_i - u_{i-1}^2)\,w_i \\
=& h\sum_{i=1}^{J}(u_{i+1}^2 + u_iu_{i+1} + u_i^2)\,w_i - h\sum_{i=0}^{J-1}(u_{i+1}^2 + u_iu_{i+1} + u_i^2)\,w_{i+1} \\
=& -h\sum_{i=1}^{J}(u_i^2 + u_iu_{i+1} + u_{i+1}^2)\,(w_{i+1} - w_i)
\end{aligned}
$$

και

$$
\begin{aligned}
(\varphi(u,u),u)_h =& h\sum_{i=1}^{J}(u_{i+1}^2u_i + u_i^2u_{i+1} - u_i^2u_{i-1} - u_{i-1}^2u_i) \\
=& h\sum_{i=1}^{J}(u_{i+1}^2u_i + u_i^2u_{i+1}) - h\sum_{i=1}^{J}(u_i^2u_{i-1} + u_{i-1}^2u_i) \\
=& h\sum_{i=2}^{J+1}(u_i^2u_{i-1} + u_{i-1}^2u_i) - h\sum_{i=1}^{J}(u_i^2u_{i-1} + u_{i-1}^2u_i) \\
=& h\sum_{i=1}^{J}(u_i^2u_{i-1} + u_{i-1}^2u_i) - h\sum_{i=1}^{J}(u_i^2u_{i-1} + u_{i-1}^2u_i) \\
=& 0.
\end{aligned}
$$

Για να αποδείξουμε την (2.5), πρώτα, παρατηρούμε ότι:

$$
\begin{aligned}
(\psi(u,w),r)_h =& h\sum_{i=1}^{J}(-2u_{i-1}w_{i-1} - u_iw_{i-1} - u_{i-1}w_i - 2u_iw_i)r_i \\
&+ h\sum_{i=1}^{J}(2u_iw_i + u_{i+1}w_i + 2u_{i+1}w_{i+1} + u_iw_{i+1})r_i \\
=& h\sum_{i=0}^{J-1}(-2u_iw_i - u_{i+1}w_i - u_iw_{i+1} - 2u_{i+1}w_{i+1})r_{i+1} \\
&+ h\sum_{i=1}^{J}(2u_iw_i + u_{i+1}w_i + 2u_{i+1}w_{i+1} + u_iw_{i+1})r_i,
\end{aligned}
$$

από την οποία συμπεραίνουμε εύκολα ότι:

$$
\begin{aligned}
(\psi(u,w),r)_h =& h\sum_{i=1}^{J}(r_i - r_{i+1})(2u_iw_i + u_{i+1}w_i + u_iw_{i+1} + 2u_{i+1}w_{i+1}) \\
=& -h\sum_{i=1}^{J}[u_i(w_{i+1} + 2w_i) + u_{i+1}(2w_{i+1} + w_i)](r_{i+1} - r_i).
\end{aligned}
$$

Έστω $i \in \mathbb{Z}$, $u, w \in \mathbb{R}^J_{per}$ και $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με $g(x) = (x_1 + x_2 + x_3)(x_3 - x_1)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^3$. Επειδή οι μερικές παράγωγοι τρίτης τάξης της g είναι μηδενικές, η εφαρμογή του τύπου του Taylor μας δίνει:

$$g(u_{i-1}, u_i, u_{i+1}) = g(w_{i-1}, w_i, w_{i+1}) + z^T \nabla g(w_{i-1}, w_i, w_{i+1}) + \tfrac{1}{2}\, z^T\, Hg(w_{i-1}, w_i, w_{i+1})\, z$$

όπου $z \in \mathbb{R}^3$ με $z_\ell = u_{i+\ell-2} - w_{i+\ell-2}$ για $\ell = 1, 2, 3$. Λαμβάνοντας υπόψιν ότι

$$\nabla g(x) = (-2x_1 - x_2, x_3 - x_1, x_2 + 2x_3)^T \quad \forall x \in \mathbb{R}^3$$

και

$$Hg(x) = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \forall x \in \mathbb{R}^3,$$

έχουμε

$$\begin{aligned} z^T \nabla g(w_{i-1}, w_i, w_{i+1}) &= z_{i-1}(-2w_{i-1} - w_i) + z_i(w_{i+1} - w_{i-1}) + z_{i+1}(w_i + 2w_{i+1}) \\ &= (\psi(w, u - w))_i \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2} z^T Hg(w_{i-1}, w_i, w_{i+1}) z &= -z_1^2 - z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3^2 \\ &= (z_2 + z_3) z_3 - (z_1 + z_2) z_1 \\ &= (z_2 + z_3 + z_1) z_3 - (z_1 + z_2 + z_3) z_1 \\ &= (z_1 + z_2 + z_3)(z_3 - z_1) \\ &= (\varphi(u - w, u - w))_i. \end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω σχέσεις και παρατηρώντας ότι $(\varphi(u, u))_i = g(u_{i-1}, u_i, u_{i+1})$ καταλήγουμε στην (2.6). ☐

Λήμμα 6. *Για κάθε $u \in \mathbb{R}^J_{per}$ ισχύει ότι:*

$$-(\Delta_h u, u)_h = |u|^2_{1,h} \tag{2.7}$$

$$(\Delta_h^2 u, u)_h = |u|^2_{2,h} \tag{2.8}$$

$$|u|^2_{1,h} \le \|u\|_h\, |u|_{2,h} \tag{2.9}$$

$$|u|^2_{1,h} \le \nu\, |u|^2_{2,h} + \tfrac{1}{4\nu}\, \|u\|^2_h \tag{2.10}$$

$$|u|_{1,h} \le \sigma(h) |u|_{2,h} \tag{2.11}$$

όπου $\sigma(h) = \frac{h}{2\sin(\pi h)}$.

Απόδειξη. Έστω $u, w \in \mathbb{R}^J_{per}$. Τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} (\Delta_h w, u)_h &= h \sum_{i=1}^{J} \left(\frac{w_{i-1} - w_i}{h^2} \right) u_i - h \sum_{i=1}^{J} \left(\frac{w_i - w_{i+1}}{h^2} \right) u_i \\ &= h \sum_{i=0}^{J-1} \left(\frac{w_i - w_{i+1}}{h^2} \right) u_{i+1} - h \sum_{i=1}^{J} \left(\frac{w_i - w_{i+1}}{h^2} \right) u_i \\ &= h \sum_{i=1}^{J} \left(\frac{w_i - w_{i+1}}{h^2} \right) u_{i+1} - h \sum_{i=1}^{J} \left(\frac{w_i - w_{i+1}}{h^2} \right) u_i \\ &= -h \sum_{i=1}^{J} \left(\frac{w_i - w_{i+1}}{h} \right) \left(\frac{u_i - u_{i+1}}{h} \right). \end{aligned} \tag{2.12}$$

Από την (2.12) συμπεραίνουμε ότι:

$$(\Delta_h w, u)_h = (w, \Delta_h u)_h. \tag{2.13}$$

Θέτοντας $w = u$ στην (2.12) έχουμε ότι

$$-(\Delta_h u, u)_h = |u|_{1,h}^2$$

και θέτοντας $w = \Delta_h u$ στην (2.13) παίρνουμε

$$(\Delta_h^2 u, u)_h = (\Delta_h u, \Delta_h u)_h = |u|_{2,h}^2.$$

Από την (2.7) χρησιμοποιώντας την ανίσωση Cauchy -Schwarz έχουμε:

$$|u|_{1,h}^2 = -(\Delta_h u, u)_h \leq \|u\|_h \|\Delta_h u\|_h = \|u\|_h |u|_{2,h}.$$

Η (2.10) προκύπτει χρησιμοποιώντας την ανίσωση του αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου στην (2.9) ως εξής:

$$\begin{aligned} |u|_{1,h}^2 &\leq \sqrt{2\nu}\, |u|_{2,h} \tfrac{1}{\sqrt{2\nu}} \|u\|_h \\ &\leq \tfrac{1}{2} \left(2\nu\, |u|_{2,h}^2 + \tfrac{1}{2\nu} \|u\|_h^2 \right) \\ &\leq \nu\, |u|_{2,h}^2 + \tfrac{1}{4\nu} \|u\|_h^2. \end{aligned}$$

Έστω

$$R_{per,0}^J := \left\{ u \in \mathbb{R}_{per}^J : u_1 + u_2 + \cdots + u_J = 0 \right\}$$

και $(u^\ell)_{\ell=1}^{J-1} \in \mathbb{R}_{per,0}^J$ οριζόμενα ως εξής:

$$\begin{aligned} u_i^\ell &= \sqrt{2} \sin(2\ell\pi x_i), \quad \forall i \in \mathbb{Z}, \quad \ell = 1, \ldots, \left[\tfrac{J-1}{2}\right], \\ u_\ell^{\left[\frac{J-1}{2}\right]+\ell} &= \sqrt{2} \cos(2\ell\pi x_i), \quad \forall i \in \mathbb{Z}, \quad \ell = 1, \ldots, \left[\tfrac{J}{2}\right]. \end{aligned}$$

Τα $(u^\ell)_{\ell=1}^{J-1}$ είναι στοιχεία του $\mathbb{R}_{per,0}^J$ καθώς

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{J} [\cos(2\ell\pi x_n) + i\, \sin(2\ell\pi x_n)] = \sum_{n=1}^{J} e^{i2\ell\pi hn} &= \frac{e^{i\,2\ell\pi h(J+1)} - 1}{e^{i\,2\ell\pi h} - 1} - 1 \\ &= \frac{e^{i\,2\ell\pi h} e^{i\,2\ell\pi} - 1}{e^{i\,2\ell\pi h} - 1} - 1 \\ &= \frac{e^{i\,2\ell\pi h} - 1}{e^{i\,2\ell\pi h} - 1} - 1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Στις περιπτώσεις που θα εξετάσουμε παρακάτω θα χρησιμοποιήσουμε τους τύπους:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{J} \cos(ix) &= -\frac{1}{2} + \frac{\sin\left[(J + \frac{1}{2})x\right]}{2\sin(\frac{x}{2})}, \qquad \forall x \notin \{2\ell\pi : \ell \in \mathbb{Z}\}, \\ \sum_{i=1}^{J} \sin(ix) &= \frac{\cos(\frac{x}{2}) - \cos[(J + \frac{1}{2})x]}{2\sin(\frac{x}{2})}, \quad \forall x \notin \{2\ell\pi : \ell \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

Περίπτωση 1: Για $p = 1, \ldots, [\frac{J-1}{2}]$, έχουμε:

$$\begin{aligned}
(u^p, u^p)_h &= h \sum_{i=1}^{J} 2\sin^2(2i\pi ph) \\
&= h \sum_{i=1}^{J} 2\left[\frac{1-\cos(4i\pi ph)}{2}\right] \\
&= h\left[J + \frac{1}{2} - \frac{\sin\left[(J+\frac{1}{2})4\pi ph\right]}{2\sin(2\pi ph)}\right] \\
&= h\left[J + \frac{1}{2} - \frac{\sin(4\pi p + 2\pi ph)}{2\sin(2\pi ph)}\right] \\
&= h\left[J + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right] = h\,J = 1.
\end{aligned}$$

Όταν $p = [\frac{J-1}{2}] + \ell$ για κάποιο $\ell \in \{1, \ldots, [\frac{J}{2}]\}$ τότε:

$$\begin{aligned}
(u^p, u^p)_h &= h \sum_{i=1}^{J} 2\cos^2(2i\pi \ell h) \\
&= h \sum_{i=1}^{J} 2\left[\frac{1+\cos(4i\pi \ell h)}{2}\right] \\
&= h\left[J - \frac{1}{2} + \frac{\sin\left[(J+\frac{1}{2})4\pi \ell h\right]}{2\sin(2\pi \ell h)}\right] \\
&= h\left[J - \frac{1}{2} + \frac{\sin(4\pi \ell + 2\pi \ell h)}{2\sin(2\pi \ell h)}\right] \\
&= h\left[J - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right] = hJ = 1.
\end{aligned}$$

Περίπτωση 2: Έστω $p \neq q$. Όταν $p, q \in \{1, \ldots, [\frac{J-1}{2}]\}$, τότε έχουμε:

$$\begin{aligned}
(u^p, u^q)_h &= h \sum_{i=1}^{J} 2\sin(2i\pi ph)\,\sin(2i\pi qh) \\
&= h \sum_{i=1}^{J} \left(\cos\left[2i\pi h(p-q)\right] - \cos\left[2i\pi h(p+q)\right]\right) \\
&= h \sum_{i=1}^{J} \cos\left[2i\pi h(p-q)\right] - h\sum_{i=1}^{J} \cos\left[2i\pi h(p+q)\right] \\
&= h\left[-\frac{1}{2} + \frac{\sin\left[(J+\frac{1}{2})2\pi h(p-q)\right]}{2\sin\left[\pi h(p-q)\right]} + \frac{1}{2} - \frac{\sin\left[(J+\frac{1}{2})2\pi h(p+q)\right]}{2\sin\left[\pi h(p+q)\right]}\right] \\
&= h\left[\frac{\sin\left[2\pi(p-q) + \pi h(p-q)\right]}{2\sin(\pi h(p-q))} - \frac{\sin(\left[2\pi(p+q) + \pi h(p+q)\right]}{2\sin(\pi h(p+q))}\right] \\
&= h\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\right) = 0.
\end{aligned}$$

Όταν $p = [\frac{J-1}{2}] + \ell$ και $q = [\frac{J-1}{2}] + \mu$ για κάποια $\ell, \mu \in \{1, \ldots, [\frac{J}{2}]\}$ με $\mu \neq \ell$ τότε έχουμε:

$$\begin{aligned}
(u^p, u^q)_h &= h \sum_{i=1}^{J} 2\cos(2i\pi\ell h)\, \cos(2i\pi\mu h) \\
&= h \sum_{i=1}^{J} \cos[2i\pi(\ell-\mu)] + h \sum_{i=1}^{J} \cos[2i\pi(\ell+\mu)] \\
&= h \left[-\frac{1}{2} + \frac{\sin\left[(J+\frac{1}{2})2\pi h(\ell-\mu)\right]}{2\sin\left[\pi h(\ell-\mu)\right]} - \frac{1}{2} + \frac{\sin\left[(J+\frac{1}{2})2\pi h(\ell+\mu)\right]}{2\sin\left[\pi h(\ell+\mu)\right]} \right] \\
&= h \left[-1 + \frac{\sin\left[2\pi(\ell-\mu) + \pi h(\ell-\mu)\right]}{2\sin(\pi h(\ell-\mu))} + \frac{\sin([2\pi(\ell+\mu) + \pi h(\ell+\mu)]}{2\sin(\pi h(\ell+\mu))} \right] \\
&= h \left[-1 + \frac{\sin\left[\pi h(\ell-\mu)\right]}{2\sin(\pi h(\ell-\mu))} + \frac{\sin\left[2\pi h(\ell+\mu)\right]}{2\sin(\pi h(\ell+\mu))} \right] = h\left(-1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\right) = 0.
\end{aligned}$$

Όταν $p \in \{1, \ldots, [\frac{J-1}{2}]\}$ και $q = [\frac{J-1}{2}] + \ell$ για κάποιο $\ell \in \{1, \ldots, [\frac{J}{2}]\}$, τότε:

$$\begin{aligned}
(u^p, u^q)_h &= h \sum_{i=1}^{J} 2\sin(2i\pi p h)\, \cos(2i\pi\ell h) \\
&= h \sum_{i=1}^{J} \left(\sin\left[i2\pi(p-\ell)h\right] + \sin\left[(p+\ell)2i\pi h\right] \right) \\
&= h \left[\frac{\cos(\pi(p-\ell)h) - \cos((J+\frac{1}{2})2\pi(p-\ell)h)}{2\sin(\pi(p-\ell)h)} + \frac{\cos(\pi(p+\ell)h) - \cos((J+\frac{1}{2})2\pi(p+\ell)h)}{2\sin(\pi(p+\ell))} \right] \\
&= h \left[\frac{\cos(\pi(p-\ell)h) - \cos(2\pi(p-\ell) + \pi(p-\ell)h)}{2\sin(\pi(p-\ell)h)} + \frac{\cos(\pi(p+\ell)h) - \cos(2\pi(p+\ell) + \pi(p+\ell)h)}{2\sin(\pi(p+\ell))} \right] \\
&= h \left[\frac{\cos(\pi(p-\ell)h) - \cos(\pi(p-\ell)h)}{2\sin(\pi(p-\ell)h)} + \frac{\cos(\pi(p+\ell)h) - \cos(\pi(p+\ell)h)}{2\sin(\pi(p+\ell))} \right] = 0.
\end{aligned}$$

Άρα τα διανύσματα $(u^\ell)_{\ell=1}^{J-1}$ είναι ορθοκανονικά. Επομένως, είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και αποτελούν μία βάση του $\mathbb{R}^J_{per,0}$ επειδή

$$\dim\left(\mathbb{R}^J_{per,0}\right) = J - 1.$$

Όταν $\ell \in \{1, \ldots, [\frac{J}{2}]\}$ και $j \in \mathbb{Z}$, τότε:

$$\begin{aligned}
(\Delta_h u^\ell)_j &= \tfrac{\sqrt{2}}{h^2}\,\left[\sin(2\ell\pi x_{j+1}) - 2\sin(2\ell\pi x_j) + \sin(2\ell\pi x_{j-1})\right] \\
&= \tfrac{\sqrt{2}}{h^2}\,\left[\sin(2\ell\pi x_j + 2\ell\pi h) + \sin(2\ell\pi x_j - 2\ell\pi h) - 2\sin(2\ell\pi x_j)\right] \\
&= \tfrac{\sqrt{2}}{h^2}\,\left[2\cos(2\ell\pi h)\sin(2\ell\pi x_j) - 2\sin(2\ell\pi x_j)\right] \\
&= -\,\tfrac{2}{h^2}\,\left[1 - \cos(2\ell\pi h)\right]\, u_j^\ell \\
&= -\,\tfrac{4\sin^2(\ell\pi h)}{h^2}\, u_j^\ell.
\end{aligned}$$

Όταν $p=[\frac{J-1}{2}]+\ell$ για κάποιο $\ell\in\{1,\dots,[\frac{J}{2}]\}$ και $j\in\mathbb{Z}$, τότε:

$$\begin{aligned}(\Delta_h u^p)_j =&\tfrac{\sqrt{2}}{h^2}\,\big[\cos(2\ell\pi x_{j+1})-2\cos(2\ell\pi x_j)+\cos(2\ell\pi x_{j-1})\big]\\ =&\tfrac{\sqrt{2}}{h^2}\,\big[\cos(2\ell\pi x_j+2\ell\pi h)+\cos(2\ell\pi x_j-2\ell\pi h)-2\cos(2\ell\pi x_j)\big]\\ =&\tfrac{\sqrt{2}}{h^2}\,\big[2\cos(2\ell\pi h)\cos(2\ell\pi x_j)-2\cos(2\ell\pi x_j)\big]\\ =&-\tfrac{2}{h^2}\,\big[1-\cos(2\ell\pi h)\big]\,u_j^p\\ =&-\tfrac{4\sin^2(\ell\pi h)}{h^2}\,u_j^p.\end{aligned}$$

Έτσι, έχουμε ότι:

$$\Delta_h u^p=\lambda_p u^p,\quad p=1,\dots,J-1,$$

όπου

$$\lambda_p:=\begin{cases}-\frac{4}{h^2}\sin^2(p\pi h), & p=1,\dots,[\frac{J-1}{2}],\\ -\frac{4}{h^2}\sin^2\big(\big(p-[\frac{J-1}{2}]\big)\,\pi h\big), & p=[\frac{J-1}{2}]+1,\dots,[\frac{J}{2}].\end{cases}$$

Έστω $v\in\mathbb{R}^J_{per}$ και $\omega\in\mathbb{R}^J_{per,0}$ με $\omega_j=\frac{v_{j+1}-v_j}{h}$ για κάθε $j\in\mathbb{Z}$. Τότε, υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $(b_\ell)_{\ell=1}^{J-1}$ τέτοιοι ώστε $\omega=\sum_{\ell=1}^{J-1}b_\ell\,u^\ell$. Έτσι έχουμε τα ακόλουθα:

$$\begin{aligned}|\omega|_{1,h}^2=-(\Delta_h\omega,\omega)_h=&-\sum_{\ell=1}^{J-1}\sum_{\kappa=1}^{J-1}b_\ell\,b_\kappa\,(\Delta_h u^\ell,u^\kappa)_h\\ =&-\sum_{\ell=1}^{J-1}\sum_{\kappa=1}^{J-1}b_\ell\,b_\kappa\,\lambda_\ell\,(u^\ell,u^\kappa)_h\\ =&\sum_{\ell=1}^{J-1}(b_\ell)^2|\lambda_\ell|\\ \geq&|\lambda_1|\,\sum_{\ell=1}^{J-1}(b_\ell)^2\\ \geq&|\lambda_1|\,\|\omega\|_h^2\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}|\omega|_{1,h}^2=h\sum_{j=1}^{J}\left(\frac{\omega_{j+1}-\omega_j}{h}\right)^2=&h\sum_{j=1}^{J}\left(\frac{v_{j+2}-2v_{j+1}+v_j}{h}\right)^2\\ =&h\sum_{j=2}^{J+1}\left(\frac{v_{j+1}-2v_j+v_{j-1}}{h}\right)^2\\ =&\|\Delta_h v\|_h^2\\ =&|v|_{2,h}^2.\end{aligned}$$

Οι παραπάνω σχέσεις μας δίνουν την σχέση $|v|_{2,h}\geq\sqrt{|\lambda_1|}\,|v|_{1,h}$ που είναι η ζητούμενη. □

Λήμμα 7. *Για κάθε $w\in\mathbb{R}^J_{per}$ ισχύει ότι*

$$h\sum_{i=0}^{J}\Delta_h w_i=0.$$

Απόδειξη. Προκύπτει από την (2.12) για $u \in \mathbb{R}^J_{per}$ με $u_i = 1$ για κάθε $i \in \mathbb{Z}$. □

Λήμμα 8. *Για κάθε $u \in \mathbb{R}^J_{per}$ έχουμε ότι*

$$h \sum_{i=1}^{J} \varphi(u,u)_i = 0.$$

Απόδειξη. Προκύπτει από την (2.3) για $w \in \mathbb{R}^J_{per}$ με $w_i = 1, \forall i \in \mathbb{Z}$. □

Λήμμα 9. *Για κάθε $u, U \in \mathbb{R}^J_{per}$ ισχύει ότι:*

$$\varphi(U,U) - \varphi(u,u) = \varphi(u-U, u-U) - \varphi(u-U, u) - \varphi(u, u-U).$$

Απόδειξη. Έστω $u, U \in \mathbb{R}^J_{per}$ και $e = u - U$. Τότε, για κάθε $i \in \mathbb{Z}$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\varphi(U,U)_i - \varphi(u,u)_i =&(U_{i-1} + U_i + U_{i+1})(U_{i+1} - U_{i-1}) - (u_{i+1} + u_i + u_{i-1})(u_{i+1} - u_{i-1}) \\
=&(U_{i-1} + U_i + U_{i+1})(U_{i+1} - U_{i-1}) - (u_{i-1} + u_i + u_{i+1})(U_{i+1} - U_{i-1}) \\
&+ (u_{i-1} + u_i + u_{i+1})(U_{i+1} - U_{i-1}) - (U_{i-1} + U_i + U_{i+1})(u_{i+1} - u_{i-1}) \\
&+ (U_{i-1} + U_i + U_{i+1})(u_{i+1} - u_{i-1}) - (u_{i-1} + u_i + u_{i+1})(u_{i+1} - u_{i-1}) \\
&+ (u_{i-1} + u_i + u_{i+1})(u_{i+1} - u_{i-1}) - (u_{i-1} + u_i + u_{i+1})(u_{i+1} - u_{i-1}) \\
=&- (e_{i-1} + e_i + e_{i+1})(U_{i+1} - U_{i-1}) - (u_{i+1} + u_i + u_{i-1})(e_{i+1} - e_{i-1}) \\
&- (e_{i-1} + e_i + e_{i+1})(u_{i+1} - u_{i-1}) + (e_{i-1} + e_i + e_{i+1})(u_{i+1} - u_{i-1}) \\
=&(e_{i-1} + e_i + e_{i-1})(e_{i+1} - e_{i-1}) - (e_{i-1} + e_i + e_{i-1})(u_{i+1} - u_{i-1}) \\
&- (u_{i-1} + u_i + u_{i-1})(e_{i+1} - e_{i-1}).
\end{aligned}$$

Έτσι

$$\varphi(U,U) - \varphi(u,u) = \varphi(e,e) - \varphi(e,u) - \varphi(u,e)$$

που είναι το ζητούμενο. □

2.3 Συνέπεια

Στο σχήμα (2.1) οδηγούμαστε προσσεγίζοντας τις παραγώγους στην διαφορική εξίσωση Kuramoto-Sivasinsky στο σημείο $(x_i, t^{n+\frac{1}{2}})$ με πεπερασμένες διαφορές βασισμένες στον τύπο του Taylor. Κατά τα γνωστά (βλ., π.χ., [2]) έχουμε τις προσεγγίσεις:

$$\begin{aligned}
u_{xx}(x_i, t^{n+\frac{1}{2}}) &= \Delta_h u_i^{n+\frac{1}{2}} + O(k^2 + h^2), \\
u_{xxxx}(x_i, t^{n+\frac{1}{2}}) &= \Delta_h^2 u_i^{n+\frac{1}{2}} + O(k^2 + h^2), \\
u_t(x_i, t^{n+\frac{1}{2}}) &= \tfrac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} + O(k^2), \\
u_x(x_i, t^{n+\frac{1}{2}}) &= \tfrac{u_{i+1}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i-1}^{n+\frac{1}{2}}}{2h} + O(k^2 + h^2), \\
u(x_i, t^{n+\frac{1}{2}}) &= \tfrac{u_{i-1}^{n+\frac{1}{2}} + u_i^{n+\frac{1}{2}} + u_{i+1}^{n+\frac{1}{2}}}{3} + O(k^2 + h^2).
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Ορίζοντας, για $n = 1, \ldots, N-1$ και $i \in \mathbb{Z}$,

$$r_i^n := \partial u_i^n + \frac{1}{6h}(u_{i+1}^{n+\frac{1}{2}} + u_i^{n+\frac{1}{2}} + u_{i-1}^{n+\frac{1}{2}})(u_{i+1}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i-1}^{n+\frac{1}{2}}) + \Delta_h u_i^{n+\frac{1}{2}} + \nu \Delta_h^2 u_i^{n+\frac{1}{2}},$$

από τις εκτιμήσεις (2.14) συμπεραίνουμε ότι:

$$\max_{0 \le n \le N-1} \sup_{i \in \mathbb{Z}} |r_i^n| \le C^* \,(k^2 + h^2),$$

όπου η σταθερά C^* είναι ανεξάρτητη των k και h, εξαρτάται όμως από την ακριβή λύση του προβλήματος και από μερικές παραγώγους της.

2.4 Ιδιότητες των προσεγγίσεων της μεθόδου Crank-Nicolson

Πρόταση 2. *Έστω $(U^n)_{n=0}^N$ οι προσεγγίσεις της μεθόδου Crank-Nicolson. Όταν $k < 8\nu$, τότε ισχύει ότι:*

$$\|U^n\|_h \le e^{\frac{2t^n}{8\nu - k}} \|U^0\|_h, \quad n = 0, \ldots, N.$$

Όταν $\nu \ge \sigma^2(h)$, με $\sigma(h) = \frac{h}{2\sin(\pi h)}$, τότε:

$$\|U^{n+1}\|_h \le \|U^n\|_h, \quad n = 0, \ldots, N-1.$$

Απόδειξη. Παίρνοντας το εσωτερικό γινόμενο της σχέσης (2.1) με $U^{n+\frac{1}{2}}$ έχουμε:

$$\begin{aligned}(\partial U^n, U^{n+\frac{1}{2}})_h = &-\tfrac{1}{6h}\left(\varphi(U^{n+\frac{1}{2}}, U^{n+\frac{1}{2}}), U^{n+\frac{1}{2}}\right)_h - \left(\Delta_h U^{n+\frac{1}{2}}, U^{n+\frac{1}{2}}\right)_h \\ &- \nu\left(\Delta_h^2 U^{n+\frac{1}{2}}, U^{n+\frac{1}{2}}\right)_h, \quad n = 0, \ldots, N-1.\end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας τις (2.8), (2.4) και (2.7) προκύπτει ότι:

$$\|U^{n+1}\|_h^2 - \|U^n\|_h^2 = 2\,k\left(|U^{n+\frac{1}{2}}|_{1,h}^2 - \nu\,|U^{n+\frac{1}{2}}|_{2,h}^2\right), \quad n = 0, \ldots, N-1. \tag{2.15}$$

Από την ιδιότητα (2.10) έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}\|U^{n+1}\|_h^2 - \|U^n\|_h^2 &\le 2\,k\left(\nu\,|U^{n+\frac{1}{2}}|_{2,h}^2 + \tfrac{1}{4\nu}\,\|U^{n+\frac{1}{2}}\|_h^2 - \nu\,|U^{n+\frac{1}{2}}|_{2,h}^2\right) \\ &\le \tfrac{k}{2\nu}\,\|U^{n+\frac{1}{2}}\|_h^2 \\ &\le \tfrac{k}{8\nu}\,\|U^{n+1} + U^n\|_h^2 \\ &\le \tfrac{k}{8\nu}\,\left(\|U^{n+1}\|_h + \|U^n\|_h\right)^2, \quad n = 0, \ldots, N-1.\end{aligned}$$

Έτσι

$$\|U^{n+1}\|_h - \|U^n\|_h \le \tfrac{k}{8\nu}\,\left(\|U^{n+1}\|_h + \|U^n\|_h\right), \quad n = 0, \ldots, N-1.$$

Υποθέτοντας ότι $k < 8\nu$, καταλήγουμε, εύκολα, στη σχέση:

$$\|U^{n+1}\|_h \le \tfrac{8\nu + k}{8\nu - k}\,\|U^n\|_h, \quad n = 0, \ldots, N-1,$$

από την οποία συμπεραίνουμε ότι

$$\|U^n\|_h \le \left(\tfrac{8\nu + k}{8\nu - k}\right)^n \|U^0\|_h, \quad n = 0, \ldots, N.$$

Επειδή $e^x \ge 1 + x$ για κάθε $x > 0$, και $\frac{8\nu + k}{8\nu - k} = 1 + \frac{2k}{8\nu - k}$, από την παραπάνω σχέση έπεται ότι:

$$\begin{aligned}\|U^n\|_h &\le \left(1 + \tfrac{2k}{8\nu - k}\right)^n \|U^0\|_h \\ &\le e^{\frac{2t^n}{8\nu - k}}\,\|U^0\|_h, \quad n = 0, \ldots, N.\end{aligned}$$

Συνδυάζοντας την (2.15) και (2.11) έχουμε:

$$\begin{aligned}\|U^{n+1}\|_h^2 - \|U^n\|_h^2 &\le 2\,k\,\left(\sigma^2(h)\,|U^{n+\frac{1}{2}}|_{2,h}^2 - \nu\,|U^{n+\frac{1}{2}}|_{2,h}^2\right)\\ &\le (\sigma^2(h)-\nu)\,|U^{n+\frac{1}{2}}|_{2,h}^2, \quad n=0,\ldots,N-1,\end{aligned}$$

η οποία, υποθέτοντας ότι $\nu \ge \sigma^2(h)$, δίνει

$$\|U^{n+1}\|_h \le \|U^n\|_h, \quad n=0,\ldots,N.$$

□

Πρόταση 3. *Αν $(U^n)_{n=0}^N$ είναι οι προσεγγίσεις της μεθόδου Crank-Nicolson, τότε:*

$$h\sum_{i=1}^J U_i^n = h\sum_{i=1}^J U_i^0, \quad n=0,\ldots,N. \tag{2.16}$$

Απόδειξη. Αθροίζοντας τη σχέση (2.1) ως πρός i από 1 έως J έχουμε:

$$h\sum_{i=1}^J\left[\partial U_i^n + \tfrac{1}{6h}\varphi(U^{n+\frac{1}{2}},U^{n+\frac{1}{2}})_i + \Delta_h U_i^{n+\frac{1}{2}} + \nu\Delta_h^2 U_i^{n+\frac{1}{2}}\right] = 0, \quad n=0,\ldots,N-1.$$

Από το Λήμμα 7 και το Λήμμα 8 συμπεραίνουμε ότι:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^J \Delta_h U_i^{n+\frac{1}{2}} &= 0,\\ \sum_{i=1}^J \Delta_h^2 U_i^{n+\frac{1}{2}} = \sum_{i=1}^J \Delta_h(\Delta_h U^{n+\frac{1}{2}})_i &= 0,\\ \sum_{i=1}^J \varphi(U^{n+\frac{1}{2}},U^{n+\frac{1}{2}})_i &= 0\end{aligned}$$

για $n=0,\ldots,N$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω καταλήγουμε στην αναδρομική σχέση:

$$h\sum_{i=1}^J U_i^{n+1} = h\sum_{i=1}^J U_i^n, \quad n=0,\ldots,N,$$

η οποία, με επαγωγή, μας δίνει την (2.16). □

2.5 Ύπαρξη των προσεγγίσεων της μεθόδου Crank-Nicolson

Θεώρημα 1 (Θεώρημα σταθερού σημείου του Brouwer). *Έστω $K \subset \mathbb{R}^n$ το οποίο είναι μη κενό, κυρτό, κλειστό και φραγμένο, και $f: K \to K$ μια συνεχής συνάρτηση. Τότε η f έχει στο K τουλάχιστον ένα σταθερό σημείο, δηλαδή υπάρχει $x^* \in K$ τέτοιο ώστε $f(x^*) = x^*$.*

Λήμμα 10. *Έστω $(H,(\cdot,\cdot)_H)$ είναι ένας χώρος πεπερασμένης διάστασης με εσωτερικό γινόμενο και $\|\cdot\|_H$ είναι η επαγώμενη νόρμα. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $g: H \to H$ είναι συνεχής και υπάρχει a >0 τέτοιο ώστε $(g(x),x)_H > 0$ για κάθε $x \in H$ με $\|x\|_H = a$. Τότε υπάρχει $z \in H$ τέτοιο ώστε $g(z) = 0$.*

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε τη μεθόδο απαγωγής σε άτοπο. Υποθέτουμε ότι $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in H$ και ορίζουμε $B = \{x \in H : \|x\|_H \leq a\}$. Τότε η συνάρτηση $f : H \to H$ με

$$f(x) = \frac{-a}{\|g(x)\|_H}\, g(x) \quad \forall\, x \in H,$$

είναι καλά ορισμένη και συνεχής. Επιπλέον, ισχύει ότι $f : B \to B$ διότι $\|f(x)\|_H = a$ για κάθε $x \in B$. Έτσι, σύμφωνα με το Θεώρημα σταθερού σημείου του Brouwer, η f έχει ένα σταθερό σημείο $x^* \in B$. Επειδή έχουμε:

$$x^* = f(x^*) = -\frac{a}{\|g(x^*)\|_H}\, g(x^*),$$

συμπεραίνουμε ότι $\|x^*\|_H = \|f(x^*)\|_H = a$ και

$$\begin{aligned}(g(x^*), x^*)_H &= -\frac{\|g(x^*)\|_H}{a}\, \|x^*\|_H^2 \\ &= -a\|g(x^*)\|_H < 0\end{aligned}$$

που έρχεται σε αντίθεση με τις υποθέσεις μας για τη συνάρτηση g. Καταλήξαμε σε άτοπο επειδή υποθέσαμε ότι η g δεν έχει ρίζα στο H, άρα η g έχει ρίζα στο H. $\square$

Παρατηρώντας ότι $U^{n+1} = 2U^{n+\frac{1}{2}} - U^n$, το μη γραμμικό σύστημα εξισώσεων (2.1) γράφεται ισοδύναμα ως εξής:

$$2U^{n+\frac{1}{2}} - 2U^n + \tfrac{k}{6h}\,\varphi(U^{n+\frac{1}{2}}, U^{n+\frac{1}{2}}) + k\,\Delta_h U^{n+\frac{1}{2}} + k\,\Delta_h^2 U^{n+\frac{1}{2}} = 0, \quad n = 0, \ldots, N-1. \quad (2.17)$$

Για κάθε $w \in \mathbb{R}^J_{per}$ ορίζουμε μια απεικόνιση $g(\cdot, w) : \mathbb{R}^J_{per} \to \mathbb{R}^J_{per}$ ως εξής:

$$g(v, w) = 2v - 2w + \tfrac{k}{6h}\,\varphi(v, v) + k\,\Delta_h v + k\,\Delta_h^2 v = 0, \quad \forall v \in \mathbb{R}^J_{per}.$$

Έτσι το μη γραμμικό σύστημα (2.17) παίρνει την ισοδύναμη μορφή

$$g(U^{n+\frac{1}{2}}, U^n) = 0, \quad n = 0, \ldots, N-1. \quad (2.18)$$

Στην πρόταση που ακολουθεί εξασφαλίζουμε ότι το μη γραμμικό σύστημα (2.18) έχει τουλάχιστον μία λύση όταν $k < 8\nu$.

Πρόταση 4. *Έστω $k < 8\nu$. Τότε, για κάθε $w \in \mathbb{R}^J_{per}$, υπάρχει $v^* \in \mathbb{R}^J_{per}$ τέτοιο ώστε $g(v^*, w) = 0$.*

Απόδειξη. Έστω $w \in \mathbb{R}^J_{per}$. Τότε έχουμε:

$$(g(v, w), v)_h = 2\|v\|_h^2 - 2(v, w)_h - k\,\left(|v|_{1,h}^2 - \nu|v|_{2,h}^2\right), \quad \forall v \in \mathbb{R}^J_{per}.$$

Χρησιμοποιώντας την (2.10) και την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε:

$$\begin{aligned}(g(v, w), v)_h &\geq 2\|v\|_h^2 - 2\|v\|_h\,\|w\|_h - k\,\left(\tfrac{1}{4\nu}\,\|v\|_h^2 + \nu\,|v|_{2,h}^2 - \nu\,|v|_{2,h}^2\right) \\ &\geq 2\,\|v\|_h\,\left[\left(1 - \tfrac{k}{8\nu}\right)\|v\|_h - \|w\|_h\right], \quad \forall v \in \mathbb{R}^J_{per}.\end{aligned}$$

Επειδή $k < 8\nu$, ορίζουμε $a = \frac{1}{1-\frac{k}{8\nu}}\,\|w\|_h + 1 > 0$. Έτσι, για κάθε $v \in \mathbb{R}^J_{per}$ με $\|v\|_h = a$, έχουμε

$$\begin{aligned}(g(v, w), v)_h &\geq 2\,\|v\|_h\,\left(1 - \tfrac{k}{8\nu}\right) \\ &\geq 2\,\left(1 - \tfrac{k}{8\nu} + \|w\|_h\right) > 0.\end{aligned}$$

Με βάση τα παραπάνω, το Λήμμα 10 εξασφαλίζει ότι υπάρχει $v^* \in \mathbb{R}^J_{per}$ τέτοιο ώστε $g(v^*, w) = 0$. $\square$

2.6 Σύγκλιση

Θεώρημα 2. *Έστω η λύση u του προβλήματος (1.1)–(1.2) και $(U^n)_{n=0}^N$ οι προσεγγίσεις της μεθόδου Crank-Nicolson. Τότε, για k αρκετά μικρό, έχουμε:*

$$\max_{0\le n\le N}\|u^n-U^n\|_h\le C\,\left(k^2+h^2\right).$$

Απόδειξη. Έστω $(r^n)_{n=0}^{N-1}\in\mathbb{R}^J_{per}$ τα σφάλματα συνέπειας της μεθόδου (2.1), δηλ.

$$\partial u^n+\tfrac{1}{6h}\,\varphi(u^{n+\frac12},u^{n+\frac12})+\Delta_h u^{n+\frac12}+\nu\,\Delta_h^2u^{n+\frac12}=r^n,\quad n=0,\dots,N-1,\tag{2.19}$$

για τα οποία ισχύει ότι

$$\max_{0\le n\le N-1}|r^n|_\infty\le C^*\,\left(k^2+h^2\right).$$

Έστω $e^n:=u^n-U^n$ για $n=0,\dots,N$. Τότε αφαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (2.1) και (2.19) έχουμε:

$$\partial e^n+\Delta_h e^{n+\frac12}+\nu\,\Delta_h^2e^{n+\frac12}=\tfrac{1}{6h}\,\Big[\varphi(U^{n+\frac12},U^{n+\frac12})-\varphi(u^{n+\frac12},u^{n+\frac12})\Big]+r^n\tag{2.20}$$

για $n=0,\dots,N-1$. Εφαρμόζοντας το Λήμμα 9 στην (2.20) παίρνουμε:

$$\begin{aligned}\partial e^n+\Delta_h e^{n+\frac12}+\nu\Delta_h^2e^{n+\frac12}=&-\tfrac{1}{6h}\,\Big[\varphi(e^{n+\frac12},e^{n+\frac12})-\varphi(e^{n+\frac12},u^{n+\frac12})-\varphi(u^{n+\frac12},e^{n+\frac12})\Big]\\&+r^n,\quad n=0,\dots,N-1.\end{aligned}\tag{2.21}$$

Τώρα παίρνουμε το εσωτερικό γινόμενο της (2.21) με το $e^{n+\frac12}$ και χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες (2.4), (2.7) και (2.8) για να έχουμε:

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2k}\,\left(\|e^{n+1}\|_h^2-\|e^n\|_h^2\right)-|e^{n+\frac12}|_{1,h}^2+\nu\,|e^{n+\frac12}|_{2,h}^2=&\left(\varphi(e^{n+\frac12},u^{n+\frac12}),e^{n+\frac12}\right)_h\\&-\left(\varphi(u^{n+\frac12},e^{n+\frac12}),e^{n+\frac12}\right)_h\\&+(r^n,e^{n+\frac12})_h,\quad n=0,\dots,N-1.\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της φ, έχουμε τα ακόλουθα:

$$\begin{aligned}\left(\varphi(u^{n+\frac12},e^{n+\frac12}),e^{n+\frac12}\right)_h&=h\sum_{i=1}^J\left(e_{i-1}^{n+\frac12}+e_i^{n+\frac12}+e_{i+1}^{n+\frac12}\right)\left(u_{i+1}^{n+\frac12}-u_{i-1}^{n+\frac12}\right)e_i^{n+\frac12}\\&\le 2\,h\max_{\mathbb{R}\times[0,T]}|u_x|\left(\|e^{n+\frac12}\|_h^2+h\sum_{i=1}^J\left|e_{i-1}^{n+\frac12}\,e_i^{n+\frac12}\right|+h\sum_{i=1}^J\left|e_{i+1}^{n+\frac12}\,e_i^{n+\frac12}\right|\right)\\&\le 6\,h\max_{\mathbb{R}\times[0,T]}|u_x|\,\|e^{n+\frac12}\|_h^2,\quad n=0,\dots,N-1.\end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας την (2.2) έπεται ότι:

$$\begin{aligned}-\left(\varphi(u^{n+\frac12},e^{n+\frac12}),e^{n+\frac12}\right)_h&=-\,h\sum_{i=1}^J e_i^{n+\frac12}e_{i-1}^{n+\frac12}\left(u_{i+1}^{n+\frac12}-u_{i-2}^{n+\frac12}\right)\\&\le 3\,h\max_{\mathbb{R}\times[0,T]}|u_x|\,\|e^{n+\frac12}\|_h^2,\quad n=0,\dots,N-1.\end{aligned}$$

Από τις παραπάνω σχέσεις και την (2.10), καταλήγουμε στη σχέση:

$$\|e^{n+1}\|_h^2 - \|e^n\|_h^2 \leq \tfrac{k}{2}\left(\tfrac{1}{4\nu} + 9\,h \max_{\mathbb{R}\times[0,T]}|u_x|\right)(\|e^{n+1}\|_h + \|e^n\|_h)^2$$
$$+\,k\,\|r^n\|_h\,\big(\,\|e^{n+1}\|_h + \|e^n\|_h\,\big)\,,\quad n=0,\ldots,N-1,$$

από την οποία προκύπτει ότι:

$$\|e^{n+1}\|(1-c\,k) \leq \|e^n\|_h(1+c\,k) + k\,\|r^n\|_h,\quad n=0,\ldots,N-1,$$

με $c = \frac{1}{4\nu} + 9h\max_{\mathbb{R}\times[0,T]}|u_x|$. Υποθέτοντας ότι $k<\frac{1}{c}$, έχουμε :

$$\begin{aligned}\|e^{n+1}\|_h &\leq \left(1+\tfrac{2ck}{1-ck}\right)\|e^n\|_h + \tfrac{k}{1-ck}\,\|r^n\|_h\\ &\leq e^{\frac{2ck}{1-ck}}\,\|e^n\|_h + \tfrac{k}{1-ck}\,\|r^n\|_h,\quad n=0,\ldots,N-1.\end{aligned}$$

Επειδή $\|e^0\|_h = 0$, με μαθηματική επαγωγή καταλήγουμε στη σχέση:

$$\|e^m\|_h \leq \tfrac{k}{1-ck}\sum_{\ell=0}^{m-1} e^{\frac{2c\,(m-1-\ell)k}{1-c\,k}}\,\|r^\ell\|_h,\quad m=1,\ldots,N.$$

από την οποία έπεται ότι:

$$\max_{1\leq m\leq N}\|e^m\|_h \leq \tfrac{T}{1-ck}\,e^{\frac{2cT}{1-c\,k}}\max_{0\leq\ell\leq N-1}\|r^\ell\|_h$$

Υποθέτοντας ότι $\frac{1}{1-ck}<\varepsilon$ για κάποιο $\varepsilon>1$, έχουμε $k\leq\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon c}$ και

$$\max_{1\leq m\leq N}\|e^m\|_h \leq C^*\,T\,\varepsilon\,e^{2cT\varepsilon}\,(k^2+h^2).$$

□

2.7 Μοναδικότητα

Υποθέτουμε ότι $V^0 = U^0$ και $(V^\ell)_{\ell=1}^N \subset \mathbb{R}^J_{per}$ τέτοια ώστε:

$$\partial V^n + \tfrac{1}{6h}\,\varphi(V^{n+\frac12},V^{n+\frac12}) + \Delta_h V^{n+\frac12} + \nu\,\Delta_h^2 V^{n+\frac12} = 0,\quad n=0,\ldots,N-1.$$

Ορίζουμε $E^n := V^n - U^n$ για $n=0,\ldots,N$. Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα (2.6) παίρνουμε:

$$\partial E^n + \Delta_h E^{n+\frac12} + \nu\Delta_h^2 E^{n+\frac12} = -\tfrac{1}{6h}\left[\psi(U^{n+\frac12},E^{n+\frac12}) + \varphi(E^{n+\frac12},E^{n+\frac12})\right] \tag{2.22}$$

για $n=0,\ldots,N-1$. Παίρνοντας το εσωτερικό γινόμενο της (2.22) με το $E^{n+\frac12}$ και χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες (2.4) και (2.5) έχουμε:

$$\begin{aligned}\frac{\|E^{n+1}\|_h^2 - \|E^n\|_h^2}{2k} =& |E^{n+\frac12}|_{1,h}^2 - \nu\,|E^{n+\frac12}|_{2,h}^2\\ &- \tfrac16\sum_{i=1}^J\left[U_i^{n+\frac12}(E_{i+1}^{n+\frac12} + 2E_i^{n+\frac12}) + U_{i+1}^{n+\frac12}(2E_{i+1}^{n+\frac12} + E_i^{n+\frac12})\right](E_{i+1}^{n+\frac12} - E_i^{n+\frac12})\end{aligned}$$

για $n=0,\dots,N-1$. Για κάθε $v\in R^J_{per}$ ειναι προφανές ότι $|v|_\infty \le h^{-\frac{1}{2}}\|v\|_h$. Έτσι χρησιμοποιώντας την εκτίμηση του σφάλματος του Θεωρήματος 2 καταλήγουμε στην εκτίμηση:

$$\max_{0\le n\le N}|u^n-U^n|_\infty \le C(h^{\frac{3}{2}}+k^2h^{-\frac{1}{2}}).$$

Από την τριγωνική ανισότητα και την τελευταία σχέση παίρνουμε

$$\max_{0\le n\le N}|U^n|_\infty \le \max_{\mathbb{R}\times[0,T]}|u|+C(h^{\frac{3}{2}}+k^2h^{-\frac{1}{2}})$$

και έχουμε:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2k}(\|E^{n+1}\|_h^2-\|E^n\|_h^2)\le{}&|E^{n+\frac{1}{2}}|_{1,h}^2-\nu\,|E^{n+\frac{1}{2}}|_{2,h}^2\\&+C(1+k^2h^{-\frac{1}{2}})\sum_{i=1}^{J}(|E_i^{n+\frac{1}{2}}|+|E_{i+1}^{n+\frac{1}{2}}|)\,|E_{i+1}^{n+\frac{1}{2}}-E_i^{n+\frac{1}{2}}|\end{aligned}$$

για $n=0,\cdots,N-1$. Από την ανίσωση Cauchy-Schwarz και τους ορισμούς των νορμών $\|\cdot\|_h$ και $|\cdot|_{1,h}$ έχουμε:

$$\frac{1}{2k}(\|E^{n+1}\|_h^2-\|E^n\|_h^2)-|E^{n+\frac{1}{2}}|_{1,h}^2+\nu|E^{n+\frac{1}{2}}|_{2,h}^2\le C(1+k^2h^{-\frac{1}{2}})|E^{n+\frac{1}{2}}|_{1,h}\|E^{n+\frac{1}{2}}\|_h$$

για $n=0,\dots,N-1$. Εφαρμόζοντας την ανισότητα $xy\le\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}$ έχουμε ότι:

$$\frac{1}{2k}(\|E^{n+1}\|_h^2-\|E^n\|_h^2)\le 2|E^{n+\frac{1}{2}}|_{1,h}^2-\nu|E^{n+\frac{1}{2}}|_{2,h}^2+C(1+k^2h^{-\frac{1}{2}})^2\|E^{n+\frac{1}{2}}\|_h^2,\quad n=0,...,N-1.$$

Από την (2.9) έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2k}(\|E^{n+1}\|_h^2-\|E^n\|_h^2)&\le 2\,\|E^{n+\frac{1}{2}}\|_h|E^{n+\frac{1}{2}}|_{2,h}-\nu|E^{n+\frac{1}{2}}|_{2,h}^2+C(1+k^2h^{-\frac{1}{2}})^2\|E^{n+\frac{1}{2}}\|_h^2\\&\le\nu\,|E^{n+\frac{1}{2}}|_{2,h}^2+\tfrac{1}{\nu}\,\|E^{n+\frac{1}{2}}\|_h^2-\nu\,|E^{n+\frac{1}{2}}|_{2,h}^2+C\,(1+k^2h^{-\frac{1}{2}})^2\,\|E^{n+\frac{1}{2}}\|_h^2\\&\le\|E^{n+\frac{1}{2}}\|_h^2\,\Big[\tfrac{1}{\nu}+C\,(1+k^2h^{-\frac{1}{2}})^2\Big],\quad n=0,\dots,N-1.\end{aligned}$$

Από την οποία έπεται ότι:

$$\|E^{n+1}\|_h^2-\|E^n\|_h^2\le C\,k\,(1+k^2h^{-\frac{1}{2}})^2\,\|E^{n+\frac{1}{2}}\|_h^2,\quad n=0,\dots,N-1. \tag{2.23}$$

Η μοναδικότητα αποδεικνύεται με μαθηματική επαγωγή. Ήδη, $E^0=0$. Υποθέτουμε ότι $E^n=0$ για κάποιο $n\in\{0,\dots,N-1\}$, και θα δείξουμε ότι ισχύει $E^{n+1}=0$. Από την (2.23) και την υπόθεση επαγωγής, έχουμε ότι

$$\|E^{n+1}\|_h^2\le\tfrac{C}{4}k(1+k^2h^{-\frac{1}{2}})^2\|E^{n+1}\|_h^2$$

από την οποία συμπεραίνουμε ότι

$$\Big[1-\tfrac{\sqrt{C}}{2}\,\Big(k^{\frac{1}{2}}+k^{\frac{5}{2}}\,h^{-\frac{1}{2}}\Big)\Big]\,\|E^{n+1}\|_h\le 0. \tag{2.24}$$

Αν απαιτήσουμε να ισχύει

$$\sqrt{C}\,\Big(k^{\frac{1}{2}}+k^{\frac{5}{2}}\,h^{-\frac{1}{2}}\Big)<2 \tag{2.25}$$

τότε από την (2.24) έπεται ότι $\|E^{n+1}\|_h=0$ που ισοδυναμεί με $E^{n+1}=0$. Το τελικό συμπέρασμα είναι οτι η (2.25) είναι μια ικανή συνθήκη για τη μοναδικότητα των προσεγγίσεων πεπερασμένων διαφορών και μπορεί να εξασφαλιστεί όταν οι ποσότητες $\sqrt{k}$ και $k\,h^{-\frac{1}{5}}$ είναι αρκετά μικρές.

2.8 Γραμμικοποίηση με τη μέθοδο του Νεύτωνα

Πρώτα παρατηρούμε ότι μπορούμε να δούμε τις απεικονίσεις Δ_h και Δ_h^2 που ορίστηκαν στο Κεφάλαιο 2.1 ως απεικονίσεις από το $\mathbb{R}^J$ στο $\mathbb{R}^J$ ως εξής:

$$(\Delta_h(x))_i := \begin{cases} \frac{x_J - 2\,x_1 + x_2}{h^2}, & i = 1, \\ \frac{x_{i-1} - 2\,x_i + x_{i+1}}{h^2}, & i = 2, \dots, J-1, \\ \frac{x_{J-1} - 2\,x_J + x_1}{h^2}, & i = J, \end{cases} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^J$$

και

$$(\Delta_h^2(x))_i := \begin{cases} \frac{x_{J-1} - 4\,x_J + 6\,x_1 - 4\,x_2 + x_3}{h^4}, & i = 1, \\ \frac{x_J - 4\,x_1 + 6\,x_2 - 4\,x_3 + x_4}{h^4}, & i = 2, \\ \frac{x_{i-2} - 4\,x_{i-1} + 6\,x_i - 4\,x_{i+1} + x_{i+2}}{h^4}, & i = 3, \dots, J-2, \\ \frac{x_{J-3} - 4\,x_{J-2} + 6\,x_{J-1} - 4\,x_J + x_1}{h^4}, & i = J-1, \\ \frac{x_{J-2} - 4\,x_{J-1} + 6\,x_J - 4\,x_1 + x_2}{h^4}, & i = J, \end{cases} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^J.$$

Τότε, ορίζουμε τη γραμμική απεικόνιση $\Gamma(\cdot) : \mathbb{R}^J \to \mathbb{R}^J$ ως εξής:

$$\Gamma(x) := \Delta_h(x) + \nu\, \Delta_h^2(x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^J$$

και τη μη γραμμική απεικόνιση $\Phi(\cdot) : \mathbb{R}^J \to \mathbb{R}^J$ ως εξής:

$$(\Phi(x))_i := \begin{cases} \frac{(x_J + x_1 + x_2)\,(x_2 - x_J)}{6h}, & i = 1, \\ \frac{(x_{i-1} + x_i + x_{i+1})\,(x_{i+1} - x_{i-1})}{6h}, & i = 2, \dots, J-1, \\ \frac{(x_{J-1} + x_J + x_1)\,(x_1 - x_{J-1})}{6h}, & i = J, \end{cases} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^J.$$

Στη συνέχεια, για κάθε $y \in \mathbb{R}^J$, εισάγουμε την απεικόνιση $F_y(\cdot) : \mathbb{R}^J \to \mathbb{R}^J$ ως εξής:

$$F_y(x) := \tfrac{1}{k}(x - y) + \Gamma\left(\tfrac{1}{2}(x + y)\right) + \Phi\left(\tfrac{1}{2}(x + y)\right) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^J.$$

Έτσι, σύμφωνα με την (2.1), έχουμε να λύσουμε τα ακόλουθα μη γραμμικά συστήματα:

$$F_{U^n}(U^{n+1}) = 0, \quad n = 0, \dots, N-1.$$

Για την εφαρμογή της μεθόδου του Νεύτωνα χρειάζεται να υπολογίσουμε την Fréchet παράγωγο της F_{U^n}. Καταρχάς, επειδή η απεικόνιση Γ είναι γραμμική, έχουμε:

$$F'_{U^n}(x; z) = \tfrac{1}{k}\, z + \tfrac{1}{2}\, \Gamma(z) + \tfrac{1}{2}\, \Phi'\left(\tfrac{1}{2}(x + U^n); z\right) \quad \forall\, z \in \mathbb{R}^J.$$

Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι

$$\Phi'(v; z) = \frac{1}{6h} \begin{cases} -\,(2v_J + v_1)\, z_J + (v_2 - v_J)\, z_1 + (2v_2 + v_1)\, z_2, & i = 1, \\ (\psi(v, z))_i, & i = 2, \dots, J-1, \\ -\,(2v_{J-1} + v_J)\, z_{J-1} + (v_1 - v_{J-1})\, z_J + (2v_1 + v_J)\, z_1, & i = J, \end{cases}$$

για κάθε $v, z \in \mathbb{R}^J$. Έτσι καταλήγουμε στη σχέση

$$F'_{U^n}(x; z) = \tfrac{1}{k}\, z + \tfrac{1}{2}\, \Gamma(z) + \tfrac{1}{4}\, \Phi'\left(x + U^n; z\right) \quad \forall\, z \in \mathbb{R}^J.$$

Έστω $n \in \{0,\dots,N-1\}$. Εφαρμόζοντας τη μέθοδο του Νεύτωνα καταλήγουμε στον αλγόριθμο:

$$\begin{aligned}
&W^{\star,0} := U^n\\
&F'_{U^n}\Big(W^{\star,\ell}; W^{\star,\ell+1} - W^{\star,\ell}\Big) = -F_{U^n}(W^{\star,\ell}), \quad \forall\, \ell \in \mathbb{N}_0.
\end{aligned}$$

Η οποία γράφεται ισοδύναμα ως εξής:

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{k}\,(W^{\star,\ell+1} - U^n) + \tfrac{1}{2}\,\Delta_h(W^{\star,\ell+1} + U^n) + \tfrac{\nu}{2}\,\Delta_h^2(W^{\star,\ell+1} + U^n) \,&+ \tfrac{1}{24h}\,\psi(W^{\star,\ell} + U^n, W^{\star,\ell+1} - W^{\star,\ell})\\
&= -\tfrac{1}{24h}\,\varphi(W^{\star,\ell} + U^n, W^{\star,\ell} + U^n)
\end{aligned}$$

για κάθε $\ell \in \mathbb{N}_0$. Αν κάνουμε μόνο μία επανάληψη στη μέθοδο του Νεύτωνα και το αποτέλεσμα το θεωρήσουμε προσέγγιση της λύσης στο επόμενο χρονικό βήμα, τότε καταλήγουμε στο ακόλουθο γραμμικοποιημένο σχήμα:

$$\begin{aligned}
&W^0 = U^0\\
&\tfrac{1}{k}\,(W^{n+1} - W^n) + \Delta_h(W^{n+\frac{1}{2}}) + \nu\,\Delta_h^2(W^{n+\frac{1}{2}}) + \tfrac{1}{12h}\,\psi(W^n, W^{n+1} - W^n)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = -\tfrac{1}{6h}\,\varphi(W^n, W^n)
\end{aligned}$$

Για τον υπολογισμό της W^n της ακολουθίας του Νεύτωνα πρέπει να επιλύσουμε ένα $J \times J$ γραμμικό σύστημα όπου ο πίνακας αλλάζει σε κάθε χρονικό βήμα n. Για να το αποφύγουμε αυτό προτείνουμε μια επαναληπτική μέθοδο για τον υπολογισμό των προσεγγίσεων της μεθόδου του Νεύτωνα η οποία στηρίζεται στην αριθμητική επίλυση γραμμικών συστημάτων με τον ίδιο πίνακα.

Για $j_1, j_2, .., j_N$ ορίζουμε προσεγγίσεις $U^{n(j)} \in \mathbb{R}^J_{per}$, $j = 0,\dots,j_n$, $V^n = U^{n(j_n)}$, του u^n ως εξής: Έστω $V^0 := u^0$, $\widehat{V}^1 := \widehat{W}^1$, $U^{n(0)} := \widehat{V}^n$, και για $n = 0,\dots,N-1$

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{k}(U^{n+1(j+1)} - V^n) + \tfrac{1}{2}\,\Delta_h(U^{n+1(j+1)} + V^n) = &-\tfrac{\nu}{2}\,\Delta_h^2(U^{n+1(j+1)} + V^n)\\
&- \tfrac{1}{24h}\,\psi(V^n + \widehat{V}^{n+1}, U^{n+1(j)} - \widehat{V}^{n+1})\\
&- \tfrac{1}{24h}\,\varphi(V^n + \widehat{V}^{n+1}, V^n + \widehat{V}^{n+1})
\end{aligned}$$

για $j = 0,\dots,j_{n+1} - 1$, όπου:

$$\tfrac{1}{k}\,(W^1 - u^0) + \tfrac{1}{2}\,\Delta_h(W^1 + u^0) + \tfrac{\nu}{2}\,\Delta_h^2(W^1 + u^0) = -\tfrac{1}{6h}\,\varphi(u^0, u^0).$$

Σημειώνουμε ότι όταν $k < 8\nu$, τότε ο πίνακας του παραπάνω γραμμικού συστήματος είναι θετικά ορισμένος και οι αντίστοιχες προσεγγίσεις είναι καλά ορισμένες.

Συμβολισμός: Για $(v^\ell)_{\ell=0}^N \in \mathbb{R}^J_{per}$, θέτουμε: $\widehat{v}^0 := v^0$, $\widehat{v}^1 := v^1$ και

$$\widehat{v}^{\ell+1} := 2\,v^\ell - v^{\ell-1}, \quad \ell = 1,\dots,N-1.$$

2.9 Εκτίμηση του σφάλματος της μεθόδου του Νεύτωνα

Θα προχωρήσουμε τώρα στην εκτίμηση του σφάλματος $u^n - V^n$ της μεθόδου του Νεύτωνα χρησιμοποιώντας την μαθηματική επαγωγή.

Θεώρημα 3. *Έστω η λύση u του προβλήματος (1.1)-(1.2) είναι αρκετά ομαλή, και $(V^n)_{n=0}^N$ οι προσεγγίσεις της μεθόδου του Νεύτωνα. Τότε για k και h αρκετά μικρά, και $k = o(h^{\frac{1}{4}})$ ισχύει*

$$\max_{0 \le n \le N} \|u^n - V^n\|_h \le c\,(k^2 + h^2).$$

Απόδειξη. Θέτουμε $\widehat{e}^1 := u^1 - \widehat{V}^1$. Χρησιμοποιώντας την σχέση (2.6) θα πάρουμε από την (2.19) τα ακόλουθα:

$$\begin{aligned}
\partial\widehat{e}^0 + \Delta_h\widehat{e}^{\frac{1}{2}} + \nu\,\Delta_h\widehat{e}^{\frac{1}{2}} &= -\tfrac{1}{6h}\,\Big[\varphi(u^{\frac{1}{2}}, u^{\frac{1}{2}}) - \varphi(u^0, u^0)\Big] + r^0\\
&= -\tfrac{1}{6h}\,\Big[\varphi(\tfrac{u^1+u^0}{2}, \tfrac{u^1+u^0}{2}) - \varphi(\tfrac{2u^0}{2}, \tfrac{2u^0}{2})\Big] + r^0\\
&= -\tfrac{1}{24h}\,\big[\varphi(u^1+u^0, u^1+u^0) - \varphi(2u^0, 2u^0)\big] + r^0\\
&= -\tfrac{1}{24h}\,\big[\psi(2u^0, u^1-u^0) + \varphi(u^1-u^0, u^1-u^0)\big] + r^0.
\end{aligned}$$

Από την οποία προκύπτει η σχέση:

$$\widehat{e}^1 + \tfrac{k}{2}\Delta_h\widehat{e}^1 + \tfrac{k\nu}{2}\Delta_h^2\widehat{e}^1 = -\tfrac{k}{24h}\,\big[\psi(2u^0, u^1-u^0) + \varphi(u^1-u^0, u^1-u^0)\big] + k\,r^0. \tag{2.26}$$

Παίρνοντας το εσωτερικό γινόμενο της σχέσης (2.30) με $\widehat{e}^1$ και χρησιμοποιώντας τα (2.8),(2.9),(2.10),θεωρώντας ότι $\psi(u,w) = (u_i + 2u_{i+1})(w_{i+1} - w_{i-1}) + (2w_{i-1} + w_i)(u_{i+1} - u_{i-1})$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
\|\widehat{e}^1\|_h^2 + \tfrac{k}{2}|\widehat{e}^1|_{1,h}^2 + \frac{\nu k}{2}|\widehat{e}^1|_{2,h}^2 = &- \tfrac{1}{24h}[(\psi(2u^0, u^1-u^0), \widehat{e}^1)_h + (\varphi(u^1-u^0, u^1-u^0), \widehat{e}^1)_h + (kr^0, \widehat{e}^1)_h\\
= &- \tfrac{k}{24}[\sum_{i=0}^{J}(2u_i^0 + 2u_{i+1}^0)(u_{i+1}^1 - u_{i+1}^0 - u_{i-1}^1 + u_{i-1}^0)\widehat{e}^1\\
&+ (2u_{i-1}^1 - 2u_{i-1}^0 + u_i^1 - u_i^0)(2u_{i+1}^0 - 2u_{i-1}^0)\widehat{e}^1\\
&+ \sum_{i=0}^{J}(u_{i-1}^1 - u_{i-1}^0 + u_i^1 - u_i^0 + u_{i+1}^1 - u_{i+1}^0)(u_{i+1}^1 - u_{i+1}^0 - u_{i-1}^1 + u_{i-1}^0)\widehat{e}^1]\\
&+ (kr^0, \widehat{e}^1)_h.
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της ψ,έχουμε τα ακόλουθα:

$$\begin{aligned}
(\psi(2u^0, u^1-u^0), \widehat{e}^1)_h &= -h\sum_{i=0}^{J}(2u_{i-1}^1 - 2u_{i-1}^0 + u_i^1 - u_i^0)(2u_{i+1}^0 - 2u_{i-1}^0)\widehat{e}^1\\
&\leq -\max_{\mathbb{R}\times[0,T]}|u_t|\sum_{i=0}^{J}|2u_i^0 + 2u_{i+1}^0)|^2 h\sum_{i=0}^{J}|e_1|^2\\
&\leq -2kC_1\max_{\mathbb{R}\times[0,T]}|u_t|\|e_1\|_h^2\\
&\leq k^2 - 4C_1C_2\|e_1\|_h^2\\
&\leq k^2C\|e_1\|_h^2
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της φ,έχουμε τα ακόλουθα:

$$\begin{aligned}
(\varphi(u^1-u^0, u^1-u^0), \widehat{e}^1)_h &= -h\sum_{i=0}^{J}(u_{i-1}^1 - u_{i-1}^0 + u_i^1 - u_i^0 + u_{i+1}^1 - u_{i+1}^0)(u_{i+1}^1 - u_{i+1}^0 - u_{i-1}^1 + u_{i-1}^0)\widehat{e}^1\\
&\leq -2\max_{\mathbb{R}\times[0,T]}|u_t|\sum_{i=0}^{J}(u_i^0 + u_{i+1}^0)h\sum_{i=0}^{J}\left\{|\widehat{e}^1|^2\right\}^{\frac{1}{2}})\\
&\leq -2kC_1\max_{\mathbb{R}\times[0,T]}|u_t|\|\widehat{e}^1\|_h^2\\
&\leq k^2 - 4C_1C_2\|\widehat{e}^1\|_h^2\\
&\leq k^2C\|\widehat{e}^1\|_h^2
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Έτσι θα πάρουμε

$$\|\widehat{e}^1\|_h^2+\frac{k}{2}|\widehat{e}^1|_{1,h}^2-\frac{\nu k}{2}|\widehat{e}^1|_{2,h}^2\leq k^2C\|\widehat{e}^1\|_h+k\|r^0\|_h\|\widehat{e}^1\|_h$$

Από την παραπάνω σχέση και την (2.9), καταλήγουμε ότι:

$$\|\widehat{e}^1\|_h^2-k\frac{\|\widehat{e}^1\|_h^2}{8\nu}\leq Ck^2\|\widehat{e}^1\|_h+k\|r^0\|_h\|\widehat{e}^1\|_h$$

Από την οποία προκύπτει η σχέση:

$$\left(1-\tfrac{k}{8\nu}\right)\|\hat{e}^1\|_h^2\leq\, C\,k^2\,\|\hat{e}^1\|_h+k\,\|r^0\|_h\,\|\hat{e}^1\|_h$$

Οπότε για αρκετό μικρό k έχουμε:

$$\|\hat{e}^1\|_h^2\leq\, c\,(k^2+h^2)^2.$$

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε με μαθηματική επαγωγή ότι:

$$\|u^\ell-V^\ell\|_h^2\leq c_\ell(k^2+h^2)^2,\quad \ell=0,\ldots,N, \tag{2.29}$$

όπου $c_0=0$,$c_1=1$ και

$$c_\ell=2(\widehat{d}\,k)^{j\ell}(D+8c_\ell+2c_{\ell-2})+(1+dk)c_{\ell-1}+dkc_{\ell-2}+dk,\quad \ell=2,\ldots,N \tag{2.30}$$

Η σταθερά D είναι τέτοια ώστε $\|u^n-\widehat{u}^n\|_h\leq Dk^4$. Τα d και $\widehat{d}$ έχουν ως εξής: Έστω ότι $s\in\mathbb{R}^J_{per}$ είναι το σφάλμα συνέπειας της μεθόδου του Νεύτωνα. Τότε έχουμε:

$$\begin{aligned}
s^n=&\partial u^n+\Delta_h u^{n+\frac12}+\nu\Delta_h^2u^{n+\frac12}+\tfrac{1}{24h}\psi(u^n+\widehat{u}^{n+1},u^{n+1}-\widehat{u}^{n+1})+\tfrac{1}{24h}\varphi(u^n+\widehat{u}^{n+1},u^n+\widehat{u}^{n+1})\\
=&\partial u^n+\Delta_h u^{n+\frac12}+\nu\Delta_h^2u^{n+\frac12}+\tfrac{1}{24h}[\psi(u^{n+1}-\widehat{u}^{n+1},u^n+\widehat{u}^{n+1})+\varphi(u^n+\widehat{u}^{n+1},u^n+\widehat{u}^{n+1})]\\
=&\partial u^n+\Delta_h u^{n+\frac12}+\nu\Delta_h^2u^{n+\frac12}+\tfrac{1}{24h}[\varphi(u^{n+1}-u^n,u^{n+1}-u^n)-\varphi(u^{n+1}-\widehat{u}^{n+1},u^{n+1}-\widehat{u}^{n+1})]\\
=&\partial u^n+\Delta_h u^{n+\frac12}+\nu\Delta_h^2u^{n+\frac12}+\tfrac{1}{24h}\varphi(u^{n+1}-u^n,u^{n+1}-u^n)-\tfrac{1}{24h}\varphi(u^{n+1}-\widehat{u}^{n+1},u^{n+1}-\widehat{u}^{n+1})\\
=&r^n-\frac{1}{24h}\varphi(u^{n+1}-\widehat{u}^{n+1},u^{n+1}-\widehat{u}^{n+1}).
\end{aligned}$$

Άρα $s^n=r^n-\frac{1}{24h}\varphi(u^{n+1}-\widehat{u}^{n+1},u^{n+1}-\widehat{u}^{n+1})$, και επομένως

$$\max_{i,n}|s_i^n|^2\leq c(u)(k^2+\hbar^2)^2$$

Θέτουμε $M=\max_{x,t}|u(x,t)|+1$, $d_1=\frac{\nu+1}{\nu}$, $d_2=3M^2$, $d_3=d_1+30M^2+\frac{135}{16}$, $d_4=3\,M^2+\frac{15}{16}$ και $d_5=\frac12 c(u)$, όπου d και $\widehat{d}$ είναι τέτοια ώστε για μικρό k να ισχύει ότι

$$\frac{d_2\,k}{1-d_1\,k}\leq\widehat{d}\,k,\quad \frac{\delta_{3j}+d_j\,k}{(1-d_1k)\,(1-\widehat{d}\,k)}\leq\delta_{3j}+d\,k,\quad j=3,\ldots,5,$$

όπου δ είναι το σύμβολο του Kronecker. Φαίνεται εύκολα από τη σχέση (2.30) ότι

$$\max_{0\leq n\leq N}c_n\leq c^*$$

όπου η σταθερά c^* είναι ανεξάρτητη από τα k και h. Υποθέτουμε ότι τα k και h είναι αρκετά μικρά τέτοια ώστε

$$c^*h^{-1}(k^2+h^2)^2\leq 1.$$

Πρώτα παρατηρούμε ότι (2.29) ισχύει τετριμμένα για $\ell = 0$. Υποθέτουμε στη συνέχεια ότι ισχύει για $\ell = 0, \dots, n$. Θέτουμε $e^{n(j)} := u^n - U^{n(j)}$ για $j = 0, \dots, j_n$ και $e^n = u^n - V^n$ για $n = 0, \dots, N$. Τότε έχουμε:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{k}(e^{n+1(j+1)} - e^n) = &- \frac{1}{2}\Delta_h(e^{n+1(j+1)} - e^n) - \frac{\nu}{2}\Delta_h^2(e^{n+1(j+1)} - e^n) - \frac{1}{24h}[\psi(u^n + \widehat{u}^{n+1}, u^{n+1} - \widehat{u}^{n+1}) \\
&+ \phi(u^n + \widehat{u}^{n+1}, u^n + \widehat{u}^{n+1}) - \psi(V^n + \widehat{V}^{n+1}, U^{n+1(j)} - \widehat{V}^{n+1}) \\
&- \varphi(V^n + \widehat{V}^{n+1}, V^n + \widehat{V}^{n+1})] + s^n \\
=&\frac{1}{24h}[\psi(u^n + \widehat{u}^{n+1}, u^{n+1} - \widehat{u}^{n+1}) - \frac{1}{24h}[\psi(V^n + \widehat{V}^{n+1}, U^{n+1(j)} - \widehat{V}^{n+1}) + \psi(V^n + \widehat{V}^{n+1}, e^n + \\
&+ \varphi(e^n + \widehat{e}^{n+1}, e^n + \widehat{e}^{n+1})] + s^n \\
=&\frac{1}{24h}[\psi(u^n + \widehat{u}^{n+1}, u^{n+1} - \widehat{u}^{n+1}) - \psi(V^n + V^{n+1}, U^{n+1(j)} + V^n - V^n - \widehat{V}^{n+1}) \\
&+ \psi(V^n + \widehat{V}^{n+1}, e^n + \widehat{e}^{n+1}) + \varphi(e^n + \widehat{e}^{n+1}, e^n + \widehat{e}^{n+1})] + s^n \\
=&\frac{1}{24h}[\psi(u^n + \widehat{u}^{n+1}, u^{n+1} - \widehat{u}^{n+1}) - \psi(V^n + V^{n+1}, U^{n+1(j)} + V^n) \\
&+ \psi(V^n + \widehat{V}^{n+1}, V^n + \widehat{V}^{n+1}) + \psi(V^n + \widehat{V}^{n+1}, e^n + \widehat{e}^{n+1}) + \varphi(e^n + \widehat{e}^{n+1}, ^n + \widehat{e}^{n+1})] + s^n \\
=&\frac{1}{24h}[\psi(u^n + \widehat{u}^{n+1}, u^{n+1} - \widehat{u}^{n+1}) - \psi(V^n + V^{n+1}, U^{n+1(j)} + V^n) - \psi(u^n + \widehat{u}^{n+1}, u^n + \widehat{u}^{n+1}) \\
&+ \psi(V^n + \widehat{V}^{n+1}, V^n + \widehat{V}^{n+1}) + \psi(V^n + \widehat{V}^{n+1}, e^n + \widehat{e}^{n+1}) \\
&+ \varphi(e^n + \widehat{e}^{n+1}, e^n + \widehat{e}^{n+1})] + s^n \\
=&\frac{1}{24h}[\psi(u^n + \widehat{u}^{n+1}, u^{n+1} - \widehat{u}^{n+1}) + \psi(V^n + \widehat{V}^n, u^n + \widehat{u}^n) \\
&- \psi(V^n + \widehat{V}^n, u^n + \widehat{u}^n) - \psi(V^n + \widehat{V}^n, U^{n+1(j)} + \widehat{V}^n) \\
&- \psi(u^n + \widehat{u}^n, u^n + \widehat{u}^n) + \psi(V^n + \widehat{V}^n, V^n + \widehat{V}^n) + \psi(V^n + \widehat{V}^{n+1}, e^n + \widehat{e}^{n+1}) \\
&+ \varphi(e^n + \widehat{e}^{n+1}, e^n + \widehat{e}^{n+1})] + s^n \\
=&\frac{1}{24h}[\psi(V^n + \widehat{V}^{n+1}, e^{n+1(j)} + e^n) + \psi(e^n + \widehat{e}^{n+1}, u^{n+1} + u^n) - \psi(u^n + \widehat{u}^{n+1}, u^n + \widehat{u}^n) \\
&+ \psi(V^n + \widehat{V}^{n+1}, V^n + \widehat{V}^n) + \psi(V^n + \widehat{V}^{n+1}, e^n + \widehat{e}^n) + \varphi(e^n + \widehat{e}^{n+1}, e^n + \widehat{e}^n)] + s^n \\
=&\frac{1}{24h}[\psi(V^n + \widehat{V}^{n+1}, e^{n+1(j)} + e^n) + \psi(e^n + \widehat{e}^{n+1}, u^{n+1} + u^n) \\
&+ \psi(V^n + \widehat{V}^{n+1}, u^n + \widehat{u}^{n+1}) - \psi(u^n + \widehat{u}^{n+1}, u^n + \widehat{u}^{n+1}) \\
&+ \varphi(e^n + \widehat{e}^{n+1}, e^n + \widehat{e}^{n+1})] + s^n \\
=&\frac{1}{24h}[\psi(V^n + \widehat{V}^{n+1}, e^{n+1(j)} + e^n) + \psi(e^n + \widehat{e}^{n+1}, u^{n+1} + u^n) \\
&- \psi(e^n + \widehat{e}^{n+1}, u^n + \widehat{u}^{n+1}) + \varphi(e^n + \widehat{e}^{n+1}, e^n + \widehat{e}^{n+1})] + s^n \\
=&\frac{1}{24h}[\psi(V^n + \widehat{V}^{n+1}, e^{n+1(j)} + e^n) + \psi(e^n + \widehat{e}^{n+1}, u^{n+1} - \widehat{u}^{n+1}) \\
&+ \varphi(e^n + \widehat{e}^{n+1}, e^n + \widehat{e}^{n+1})] + s^n,
\end{aligned}
$$

και καταλήγουμε στη σχέση:

$$
\begin{aligned}
\tfrac{1}{k}(e^{n+1(j+1)} - e^n) = &- \tfrac{1}{2}\,\Delta_h(e^{n+1(j+1)} - e^n) - \tfrac{\nu}{2}\Delta_h^2(e^{n+1(j+1)} + e^n) \\
&- \tfrac{1}{24h}\,\psi(V^n + \widehat{V}^{n+1}, e^{n+1(j)} + e^n) \\
&- \tfrac{1}{24h}\,\psi(e^n + \widehat{e}^{n+1}, u^{n+1} - \widehat{u}^{n+1}) - \tfrac{1}{24h}\,\varphi(e^n + \widehat{e}^{n+1}, e^n + \widehat{e}^{n+1}) + s^n.
\end{aligned}
\tag{2.31}
$$

Παίρνοντας το εσωτερικό γινόμενο στην (2.31) με $e^{n+1(j+1)}+e^n$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{k}\,(\|e^{n+1(j)}\|_h^2-\|e^n\|_h^2)-\tfrac{1}{2}\,|e^{n+1(j+1)}+e^n|_{1,h}^2+\tfrac{\nu}{2}\,|e^{n+1(j+1)}+e^n|_{2,h}^2\\
&\leq \Big(M\,\|e^{n+1(j)}+e^n\|_h+M\,\|e^n+\widehat{e}^{n+1}\|_h+\tfrac{1}{8}\,h^{-\frac{1}{2}}\,\|e^n+\widehat{e}^{n+1}\|_h^2\Big)\,|e^{n+1(j+1)}+e^n|_{1,h}\\
&\qquad+\|s^n\|_h\,\|e^{n+1(j+1)}+e^n\|_h,
\end{aligned}$$

από την οποία, με τη χρήση της αριθμητικής γεωμετρικής ανισότητας, παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{k}\,(\|e^{n+1(j+1)}\|_h^2-\|e^n\|_h^2)\leq{}&|e^{n+1(j+1)}+e^n|_{1,h}^2-\tfrac{\nu}{2}\,|e^{n+1(j+1)}+e^n|_{2,h}^2\\
&+\tfrac{3}{2}\,M^2\,\Big(\|e^{n+1(j)}+e^n\|_h^2+\|e^n+\widehat{e}^{n+1}\|_h^2\Big)+\tfrac{3}{128}\,h^{-1}\,\|e^n+\widehat{e}^{n+1}\|_h^4\\
&+\tfrac{1}{2}\,\|s^n\|_h^2+\tfrac{1}{2}\,\|e^{n+1(j+1)}+e^n\|_h^2.
\end{aligned}$$

Έτσι, για $n\geq 1$, έχουμε:

$$\begin{aligned}
(1-d_1\,k)\,\|e^{n+1(j+1)}\|_h^2\leq{}& d_2\,k\,\|e^{n+1(j)}\|_h^2+(1+d_3\,k)\,\|e^n\|_h^2\\
&+d_4\,k\,\|e^{n-1}\|_h^2+d_5\,k\,(k^2+h^2)^2,
\end{aligned}$$

που κλείνει το επιχειρημα επαγωγής δηλ. η (2.29) ισχύει για $\ell=n+1$. Για $n=0$, από τις παραπάνω σχέσεις, έπεται

$$\|e^1\|_h^2\leq\, C\,k\,(\|\widehat{e}^1\|_h^2+\|s^0\|_h^2),$$

το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη καθώς εξασφαλίζει ότι ισχύει η (2.29) για $\ell=1$. $\square$

Βιβλιογραφία

[1] Georgios D. Akrivis, *Finite difference discretization of the Kuramoto-Sivashinsky equation*, Numer. Math., 63, 1-11 (1992).

[2] Γ.Ακρίβης και Β.Δουγαλής, ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΓΙΑ ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2006.

[3] Γ.Ακρίβης, ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΓΙΑ ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ, Ιωάννινα, 2005.

[4] G. Hämmerlin and K.-H. Hoffmann, Numerical Mathematics, Springer, 1991.