

Τεχνική αναφορά

Τμηματοποίηση Καμπύλης σε Ισομήκη Τμήματα

Κώστας Παναγιωτάκης, Γιώργος Γεωργακόπουλος και Γιώργος Τζιρίτας
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών, Πανεπιστήμιο Κρήτης,
P.O. Box 2208, Heraklion, Greece
E-mail:{cpanag,ggeo,tziritas}@csd.uoc.gr

30 Ιουνίου 2005

Περίληψη

Η τμηματοποίηση καμπυλών θεωρείται ένα από τα πιο ενδιαφέροντα προβλήματα της υπολογιστικής γεωμετρίας. Ένας μεγάλος αριθμός εφαρμογών στηρίζονται σε τμηματοποίηση καμπυλών όπως η αναγνώριση, παρακολούθηση αντικειμένων και η περιγραφή περιεχομένου - συμπίεση σημάτων. Στη παρούσα εργασία εξετάζεται το πρόβλημα της τμηματοποίησης άκυκλης 2Δ συνεχούς καμπύλης σε ισομήκη ευθύγραμμα τμήματα, το οποίο προέκυψε από την αναγωγή αντίστοιχου προβλήματος ορισμένου στο επίπεδο των ψηφιακών εικόνων. Η επίλυση του προβλήματος αυτού δίνει άμεσα και ένα τρόπο προσέγγισης - μοντελοποίησης της καμπύλης με μικρό αριθμό παραμέτρων. Με τη μοντελοποίηση που προτείνεται, η καμπύλη περιγράφεται ισοδύναμα με μια σειρά από παραμέτρους, από τους οποίους με κάποιο αντίστροφο μετασχηματισμό, που ορίζεται στην εργασία, μπορούμε να ανακτήσουμε με υψηλή ακρίβεια την αρχική καμπύλη. Μάλιστα οι συντελεστές μπορούν να διαχωριστούν σε εκείνους που περιγράφουν την κατεύθυνση, το μέγεθος, τη θέση της καμπύλης και σε εκείνους που σχετίζονται αποκλειστικά με το σχήμα της. Επίσης, εξετάζεται και αποδεικνύεται το πρόβλημα της ύπαρξης μία τουλάχιστον τμηματοποίησης για κάθε αριθμό τμημάτων και σε οποιαδήποτε καμπύλη. Η μέθοδος της απόδειξης αντίστοιχει σε αλγόριθμο επίλυσης του προβλήματος που υπολογίζει τουλάχιστον μία λύση του προβλήματος. Επίσης, προτείνονται δύο αλγόριθμοι επίλυσης του προβλήματος, ένας προσεγγιστικός που υπολογίζει κατά προσέγγιση όλες τις λύσεις και ένας καθόδου κατά την κλίση (steepest descent) που συγχλίνει ακριβώς σε μία λύση (πλησιέστερη).

Curve Segmentation into Equal Segments

C. Panagiotakis, G. Georakopoulos and G. Tziritas

Tecnical Report

CSD-TR-2005-01

29 June 2005

Abstract

The curve segmentation is a challenging problem of computational geometry. A huge number of applications are based on signal segmentation like the problems of object recognition and tracking. In this work, we examine the general problem of a 2D continuous curve segmentation into equal segments. A solution on this problem gives an efficient curve representation with low number of coefficients. An inverse transform of the coefficients is defined, that reconstruct with high accuracy the curve. The curve descriptors can be categorized to them that describe the curve orientation, size, curve position and to them that describe just the curve shape. In this report, it is examined and proved the problem of existence at least one solution on the curve segmentation problem into any number of segments. A proof based method can be used to compute at least one solution of the problem. Finally, we propose two algorithms, an algorithm that computes approximately the total of the solutions and a steepest descent based method that converges to a solution.

Περιεχόμενα

| | |
|--|-----------|
| Περίληψη | i |
| Abstract | ii |
| 1 Εισαγωγή | 1 |
| 1.1 Γενική Εισαγωγή | 1 |
| 1.2 Οργάνωση Εργασίας | 2 |
| 2 Απόδειξη Έπαρξης Τμηματοποίησης | 3 |
| 2.1 Το αρχικό πρόβλημα και η αναγωγή του (Π_0) | 3 |
| 2.2 Το πρόβλημα τμηματοποίησης καμπύλης (Π_1) | 3 |
| 2.3 Εξέταση συνέχειας της $p(\Delta)$ (Π_2) | 4 |
| 2.3.1 Πρόταση Λ_1 | 6 |
| 2.3.2 Πρόταση Λ_2 | 8 |
| 2.4 Ευθεία Απόδειξη Έπαρξης Λύσης για Πολυγωνικές Καμπύλες - Ανάπτυξη Κατασκευαστικού Αλγορίθμου | 9 |
| 2.5 Ένας Ισοδύναμος Ορισμός και Απόδειξη Έπαρξης Λύσης | 18 |
| 2.5.1 Απόδειξη Έπαρξης Λύσης για $N = 3$ | 18 |
| 2.5.2 Απόδειξη Έπαρξης Λύσης για $N > 3$ | 20 |
| 2.5.3 Απόδειξη Έπαρξης Σημείου Συσσώρευσης | 23 |
| 3 Προσεγγιστικός Αλγόριθμος | 27 |
| 3.1 Προτεινόμενος Αλγόριθμος | 27 |
| 3.2 Πλοκή Αλγορίθμου | 30 |
| 3.3 Αποτελέσματα | 30 |
| 4 Αλγόριθμος Καθόδου κατά την Κλίση | 33 |
| 4.1 Προτεινόμενος Αλγόριθμος | 34 |
| 4.2 Προτεινόμενος Γενετικός Αλγόριθμος | 34 |
| 4.3 Αποτελέσματα | 35 |

| | |
|--|-----------|
| 5 Εφαρμογή Κατασκευαστικού Αλγορίθμου Απόδειξης | 37 |
| 5.1 Προσεγγιστικός Αλγόριθμος | 37 |
| 5.2 Ακριβής Αλγόριθμος | 41 |
| 6 Εφαρμογές - Συμπεράσματα | 42 |
| 6.1 Εφαρμογές | 42 |
| 6.2 Επίλογος | 43 |
| Βιβλιογραφία | 45 |

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Γενική Εισαγωγή

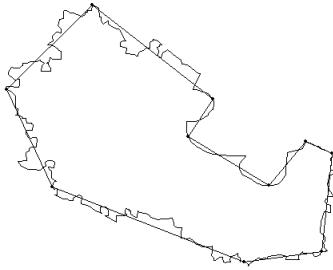
Η τμηματοποίηση καμπυλών σε ευθύγραμμα τμήματα ίσου μήκους είναι ένα σημαντικό θεωρητικό πρόβλημα που δεν έχει ακόμα διερευνηθεί και που μπορεί να δώσει σημαντικό αριθμό εφαρμογών. Αρχικά θα γίνει μια γενική εισαγωγή αναφέροντας αντίστοιχα προβλήματα τμηματοποίησης, αλλά και εφαρμογές αυτών.

Μεγάλος αριθμός μεθόδων έχουν αναπτυχθεί με στόχο την τμηματοποίηση καμπυλών με βάση το περιεχόμενο της. Χωρίζουν τη καμπύλη σε τμήματα, ώστε το καθένα από αυτά να έχει ομοιόμορφα χαρακτηριστικά. Παράδειγμα τέτοιας προσέγγισης είναι η πολυγωνική προσέγγιση [4], δηλαδή ο χωρισμός της καμπύλης σε τμήματα που το καθένα από αυτά να προσεγγίζεται από ένα ευθύγραμμο τμήμα (Σχήμα 1.1). Σε πολλές εφαρμογές στόχος δεν είναι η βέλτιστη λύση του προβλήματος, αλλά η εύρεση αλγορίθμων μικρής πλοκής που θα επιλύουν προσεγγιστικά το πρόβλημα [1]. Όπως αναφέρουν οι [5], [3] το πρόβλημα μπορεί να διατυπωθεί με 2 τρόπους.

- Το πρόβλημα ελάχιστου σφάλματος ($Min - \varepsilon$), όπου είναι γνωστός ο αριθμός των τμημάτων και ζητείται να ελαχιστοποιηθεί το σφάλμα προσέγγισης.
- Το πρόβλημα πλήθους ($Min - \#$), όπου δίδεται το σφάλμα προσέγγισης και ζητείται να βρεθεί ο ελάχιστος αριθμός των τμημάτων που θα δίνει σφάλμα το οποίο δε θα υπερβαίνει το δοθέν όριο.

Ο χωρισμός σήματος σε ομοιόμορφα τμήματα εφαρμόζεται κυρίως σε προβλήματα τμηματοποίησης και κατηγοριοποίησης. Η αυτόματη τμηματοποίηση - κατηγοριοποίηση ήχου [9] και εικόνας [6] ανάγονται στη κατάλληλη περιγραφή του σήματος σε χαρακτηριστικά στο χώρο των οπίων πραγματοποιείται η τμηματοποίηση και η κατηγοριοποίηση.

Επίσης σημαντικός αριθμός περιγραφέων σήματος έχει αναπτυχθεί. Οι μέθοδοι αυτοί συνήθως μετασχηματίζουν τη καμπύλη ή γενικότερα το σήμα στο χώρο του περιγραφέα. Ο χώρος αυτός συνήθως έχει ιδιότητες (παράδειγμα αναλλοίωτος στην περιστροφή της καμπύλης) οι οποίες χρησιμοποιούνται στις αντίστοιχες εφαρμογές. Σημαντική εφαρμογή είναι η χρήση των περιγραφέων για την αναγνώριση αντικειμένων [10], τα οποία μπορεί να είναι τρισδιάστατα [12] ή δισδιάστατα [13], [14], [7], [2]. Σε εφαρμογές αναγνώρισης χρη-



Σχήμα 1.1: Πολυγωνική προσέγγιση με 10 τμήματα.

σιμοποιούνται χυρίως περιγραφείς που είναι αναλλοίωτοι σε περιστροφή, μετατόπιση, κλιμάκωση και σύνεναροί στο ύδρυβο. Επίσης, σημαντική ιδιότητα των περιγραφέων θεωρείται η ανακατασκευή του αρχικού σήματος, δηλαδή η ύπαρξη αντίστροφου μετασχηματισμού που θα μετασχηματίζει τους συντελεστές του περιγραφέα στο χώρο του αρχικού σήματος, η ιδιότητα αυτή χρησιμοποιείται στη συμπίεση [11]. Συχνά χρησιμοποιούνται κατάλληλοι περιγραφείς και στην σύνθεση σήματος, όπως την σύνθεση κίνησης φιδιού [8]. Οι περιγραφείς αυτοί συνήθως έχουν την ιδιότητα της ύπαρξης αντίστροφου μετασχηματισμού για την ανακατασκευή του αρχικού σήματος.

1.2 Οργάνωση Εργασίας

Στην εργασία αυτή εξετάζεται το πρόβλημα της τμηματοποίησης καμπυλών σε ευθύγραμμα τμήματα ίσου μήκους. Στη συνέχεια θα δούμε συνοπτικά τι περιλαμβάνεται σε κάθε κεφάλαιο της εργασίας.

Στο κεφάλαιο 2 περιγράφεται το αρχικό πρόβλημα και παρουσιάζεται η απόδειξη ότι το αρχικό πρόβλημα έχει λύση σε κάθε συνεχή καμπύλη. Η απόδειξη γίνεται με συνεχή αναγωγή προβλημάτων και απόδειξη των αναγόμενων, ενώ βάση της απόδειξης είναι η επαγωγή. Επίσης παρουσιάζεται ένας ισοδύναμος ορισμός του προβλήματος όπως η απόδειξη της ύπαρξης λύσης σύμφωνα με τον ορισμό αυτόν. Στα κεφάλαια 3, 4 παρουσιάζονται δύο προτεινόμενοι αλγόριθμοι, με στόχους τον προσεγγιστικό υπολογισμό όλων των λύσεων και τον ακριβή υπολογισμό μιας λύσης, αντίστοιχα. Στο κεφάλαιο 5 παρουσιάζεται ο αλγόριθμος που προκύπτει από τη μέθοδο απόδειξης. Τέλος, στο κεφάλαιο 6 αναφέρονται τα συμπεράσματα της μεθόδου και πιθανές εφαρμογές της.

Κεφάλαιο 2

Απόδειξη Έγινας Τυμηματοποίησης

2.1 Το αρχικό πρόβλημα και η αναγωγή του (Π_0)

Ορισμός Προβλήματος Π_0

Στο επίπεδο μιας ψηφιακής εικόνας δίδεται μια συνεκτική αλυσίδα ίσων τετραγώνων (pixels) τα οποία δεν σχηματίζουν κύκλο. Έστω A το κέντρο του πρώτου και B το κέντρο του τελευταίου. Να βρεθούν $N + 1$ διαδοχικά σημεία των τετραγώνων που να ισαπέχουν μεταξύ τους, υπό τον περιορισμό το πρώτο να είναι το A και το τελευταίο το B .

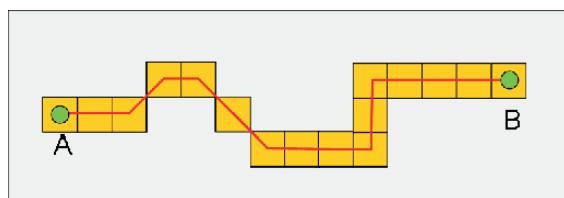
Λύση

Το πρόβλημα έχει συνήθως άπειρες λύσεις (σημεία κάποιων κύκλων) και ανάγεται άμεσα στο αντίστοιχο πρόβλημα (Π_1) που αφορά τη 2Δ καμπύλη χωρίς κύκλους που περνάει από τα τετράγωνα. Η αναγωγή του μπορεί να γίνει με την κατασκευή μιας τέτοιας καμπύλης και θα γίνει προσπάθεια να λυθεί το πρόβλημα πάνω στην καμπύλη. Η ένωση των κέντρων των τετραγώνων δίνει πάντα μια καμπύλη η οποία ενώνει τα A , B και δεν έχει κύκλους (Σχήμα 2.2).

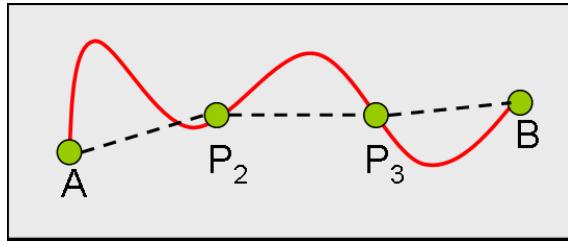
2.2 Το πρόβλημα τυμηματοποίησης καμπύλης (Π_1)

Ορισμός Προβλήματος Π_1

Δίδεται στο 2Δ επίπεδο, συνεχής καμπύλη C χωρίς κύκλους με αρχή το σημείο A και τέλος το σημείο B .



Σχήμα 2.1: Στο διπλανό σχήμα εμφανίζεται με κόκκινη γραμμή παράδειγμα μιας τέτοιας καμπύλης.



Σχήμα 2.2: Στο διπλανό σχήμα εμφανίζεται με κόκκινη γραμμή παράδειγμα μιας τέτοιας καμπύλης.

Να βρεθούν $N + 1$ διαδοχικά σημεία P_i ($i = 0, \dots, N$) επί της καμπύλης¹, υπό τον περιορισμό να ισαπέχουν μεταξύ τους ανά δύο ($|P_i - P_{i+1}| = |P_j - P_{j+1}|$ ($i, j = 0, \dots, N - 1$)). Το πρώτο από αυτά να είναι το A και το τελευταίο το B .

Λύση

Αρχικά θα εξετάσουμε αν το πρόβλημα έχει λύση για κάθε N . Η απόδειξη θα γίνει με τη μέθοδο της επαγωγής. Για $N = 1$ έχουμε ένα τμήμα που είναι ίσο με τον εαυτό του. Για $N = 2$ θα πρέπει να βρεθεί ένα σημείο της καμπύλης (P) τ.ώ. $|AP| = |PB|$. Η επίλυση του προβλήματος ανάγεται στην εύρεση ενός σημείου τομής της μεσοκαθέτου του ευθύγραμμου τμήματος AB και της καμπύλης C . Το σημείο (P) που ανήκει στη τομή αυτή θα έχει την ιδιότητα ότι ανήκει στην καμπύλη C και ταυτόχρονα θα ισαπέχει από τα άκρα A, B ως σημείο της μεσοκαθέτου του AB άρα είναι λύση του προβλήματος. Αυτό που απομένει είναι να δείξουμε πως η μεσοκαθέτος του AB με την καμπύλη θα έχει πάντα τομή.

Απόδειξη : Η μεσοκαθέτος χωρίζει σε 2 ημιεπίπεδα το συνολικό επίπεδο. Στο ένα από αυτά υπάρχει το A και στο άλλο το B . Επειδή η συνεχής καμπύλη C συνδέει τα A, B τότε αναγκαστικά θα τμήσει τη μεσοκαθέτο σε τουλάχιστον ένα σημείο.

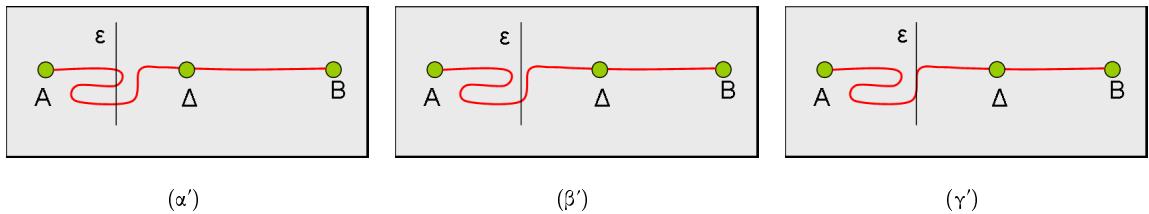
Έστω ότι η πρόταση ισχύει για $N = k$. Δηλαδή μπορούν να βρεθούν πάντοτε $k + 1$ σημεία επί της καμπύλης που να ισαπέχουν μεταξύ τους. Θα εξετάσουμε αν ισχύει η πρόταση για $N = k + 1$. Θεωρούμε τυχαίο σημείο Δ μετακινούμενο πάνω στην καμπύλη C . Για κάθε θέση του Δ από επαγωγική υπόθεση μπορούμε να χωρίσσουμε τη καμπύλη $A\Delta$ σε k ευθύγραμμα τμήματα, ίσου μήκους $p(\Delta)$. Αρκεί να δείξουμε ότι θα υπάρχει σίγουρα κάποια θέση του Δ τ.ώ. $p(\Delta) = |\Delta B|$. Έστω η συνάρτηση $f(\Delta) = p(\Delta) - |\Delta B|$. Η $f(\Delta)$ είναι συνεχής σαν διαφορά συνεχών^(*) συναρτήσεων, $f(A) = -|\Delta A| < 0$, $f(B) = p(B) > 0$. Από θεώρημα BOLZANO θα υπάρχει κάποιο Δ_0 τ.ώ. $f(\Delta_0) = 0$. Άρα βρήκαμε $k + 2$ σημεία επί της καμπύλης που να ισαπέχουν μεταξύ τους. (*) Το ερώτημα (Π_2) που μένει είναι αν η συνάρτηση $p(\Delta)$ είναι συνεχής καθώς αλλάζει το D . Στη περίπτωση που είναι συνεχής η πρόταση έχει αποδειχτεί. Το πρόβλημα αυτό (Π_2) θα εξεταστεί στο επόμενο τμήμα.

2.3 Εξέταση συνέχειας της $p(\Delta)$ (Π_2)

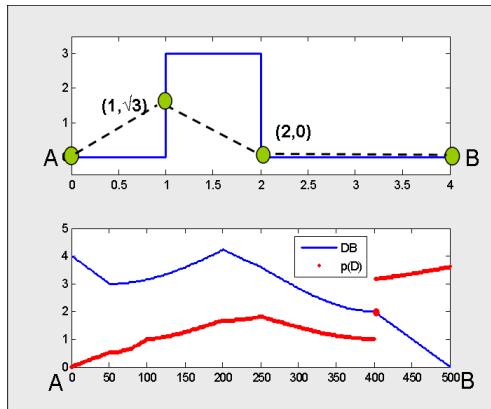
Ορισμός Προβλήματος Π_2

Έστω η διαμέριση συνεχούς καμπύλης χωρίς κύκλους με αρχή το A και τέλος το B σε N ευθύγραμμα τμή-

¹Το N αναφέρεται στον αριθμό των ίσων τμημάτων που χωρίζεται η καμπύλη από τα $N + 1$ διαδοχικά σημεία.



Σχήμα 2.3: (α') Στιγμιότυπο του προβλήματος για $N = 2$ όπου υπάρχουν 3 λύσεις. (β') Καθώς το σημείο Δ μετακινείται προς τα δεξιά παραμένει μία λύση. (γ') Εκφυλισμένη μορφή του προβλήματος όπου έχουμε στιγμιαία απειρες λύσεις και ύπαρξη ασυνέχειας στη $p(\Delta)$.



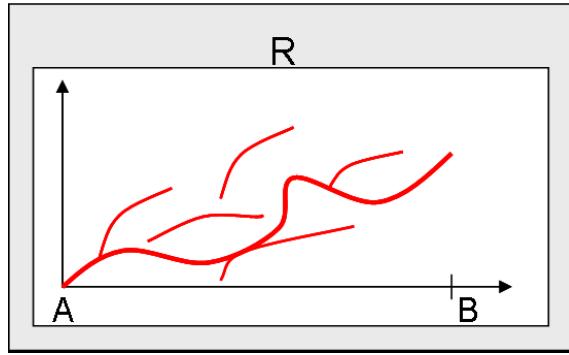
Σχήμα 2.4: Διαμέριση της καμπύλης σε 3 ισομήκη τμήματα. Τα ενδιάμεσα σημεία είναι $(1, \sqrt{3}), (2, 0)$. Η συνάρτηση $p(\Delta)$ στο σημείο 400 εμφανίζει ασυνέχεια. Στη θέση αυτή η $p(\Delta)$ μπορεί να πάρει όλες τις τιμές από το 1 έως το 4. Άρα μπορεί να χωριστεί με μοναδικό τρόπο σε 3 ισομήκη τμήματα.

ματα ίδιου μήκους $p(\Delta)$ τα οποία έχουν αρχή το A και τέλος κάποιο εσωτερικό σημείο της καμπύλης D . Η $p(\Delta)$ είναι συνεχής ως προς το Δ ;

Λύση

Παρατηρούμε από τα παραδείγματα (Σχήμα 2.3, 2.4) πως η $p(\Delta)$ μπορεί να παρουσιάσει ασυνέχειες σε κάποια μεμονωμένα σημεία. Στα σημεία αυτά η $p(\Delta)$ μπορεί να πάρει πολλές τιμές επειδή η τομή της μεσοκαθέτου ε και της καμπύλης είναι πάνω από ένα σημείο (το πρόβλημα της διαμέρισης έχει πολλές λύσεις). Η τιμή που μπορεί να πάρει η συνάρτηση $p(\Delta)$ στα σημεία ασυνέχειας Δ_i μπορεί να αποδεικτεί πως είναι όλο το διάστημα των τιμών, οποιαδήποτε τιμή μεταξύ των 2 οριακών τιμών της ασυνέχειας.

Σύμφωνα με τα προηγούμενα παραδείγματα και από την επαγγωγική υπόθεση για κάποιο τυχαίο Δ μπορούμε να πάρουμε παραπάνω από μία διαμερίσεις (ακόμα και απειρες τον αριθμό) που χωρίζουν την καμπύλη $A\Delta$ σε N ίσα τμήματα, οι διαμερίσεις μεταξύ τους ενδεχομένως να έχουν και διαφορετικό μήκος (Σχήμα 2.5). Για να έχει το πρόβλημα Π_1 λύση όταν πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει μια συνεχής καμπύλη $[K(t), \Delta(t)]$ στο σύνολο των καμπυλών R που σχηματίζονται η οποία να ορίζεται για όλα τα Δ από το A έως το B (πρόβλημα Π_3). Αν αποδεικτεί το παραπάνω, τότε με εφαρμογή του θεωρήματος BOLZANO, η καμπύλη $[\Delta B(t), \Delta(t)]$ με την $[K(t), \Delta(t)]$ θα έχουν 1 τουλάχιστον κοινό σημείο. Θεωρώ ότι το $t \in [0, 1]$ αφού η καμπύλη έχει



Σχήμα 2.5: Στο σύνολο των καμπυλών R , υπάρχει συνεχής καμπύλη (bold) που ενώνει τα άκρα A, B .

πεπερασμένο μήκος. Το παραπάνω ισχύει γιατί :

1. Τα σημεία $(0, A)$ και $(K(1), B)$ ($\mu K(1) > 0$) ανήκουν στην καμπύλη $[K(t), \Delta(t)]$.
2. Η $\Delta(t)$ είναι συνεχής, γνησίως αύξουσα στο $[0, 1]$ με $\Delta(0) = A, \Delta(1) = B$.
3. Τα σημεία $(|AB|, A)$ και $(0, B)$ ($\mu |AB| > 0$) ανήκουν στην συνεχή καμπύλη $[\Delta B(t), \Delta(t)]$.

2.3.1 Πρόταση Λ_1

Θα ξεκινήσουμε με μήκος της διαμέρισης των ισομηκών ευθυγράμμων τμημάτων $s = 0$ και αυξάνουμε τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων με συνεχή τρόπο, τα σημεία $\Delta(s)$, άκρα των διαμερίσεων, θα κινηθούν επί της καμπύλης με συνεχή τρόπο κατά τη μεταβολή του s ξεκινώντας από το A και θα καταλήξουν στο B , αφού περάσουν από όλα τα σημεία της καμπύλης². Αν ισχύει κάτι τέτοιο τότε αποδεικνύεται η ύπαρξη συνεχούς καμπύλης $[K(t), \Delta(t)]$ και το συνολικό πρόβλημα αποδεικνύεται.

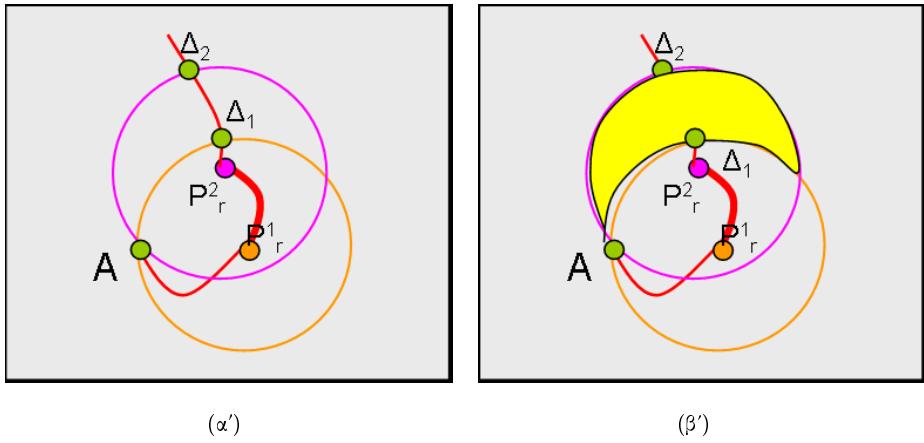
Απόδειξη

Αρχικά $s = 0$, και το s αυξάνεται με συνεχές τρόπο. Έστω για $s = r$, η πρώτη στιγμή που η διαμέριση αποκτά 2 λύσεις³, με άκρα Δ_1, Δ_2 (Σχήμα 2.3). Όσο το $s < r$ όλα τα σημεία της διαμέρισης μεταβάλλονται με συνεχές τρόπο όπως και το άκρο το οποίο έχει καλύψει το τμήμα της καμπύλης από το A έως και το Δ_1 . Το γεγονός αυτό μπορεί να αποδεικτεί επαγωγικά μιας με την σειρά τους, το πρώτο σημείο της διαμέρισης P_s θα μετακινηθεί στη καμπύλη με συνεχές τρόπο⁴, από την κίνηση του οποίου το δεύτερο σημείο της διαμέρισης P_{2s} θα μετακινηθεί στην καμπύλη με συνεχή τρόπο κ.τ.λ.. Μάλιστα αν $s_1 < s_2$ με $s_2 < r$ τότε όλα τα σημεία

² Αρχικά θα υπάρχει μία λύση, για μικρό s , καθώς αυξάνει το s πιθανώς να δημιουργηθούν περισσότερες και κάποιες από αυτές σταματήσουν να ισχύουν. Από επαγωγική υπόθεση ισχύει ότι για κάθε σημείο D επί της καμπύλης υπάρχει μια τουλάχιστον ισομήκης διαμέριση σε k τμήματα, επομένως αυτό που μένει να αποδεικτεί είναι ότι αν δημιουργηθεί μια νέα διαμέριση για κάποιο s (δηλαδή για το ίδιο s έχουμε λ.χ. 2 διαμερίσεις), η νέα διαμέριση θα μπορεί να προκύψει από μια συνεχή μεταβολή της προηγούμενης (αυξάνοντας το s της άλλης λύσης).

³ Στη γενική περίπτωση η διαμέριση μπορεί να αποκτήσει στιγμιαία, από εκεί που είχε μία, άπειρες λύσεις. Για λόγους απλότητας για εξετάσουμε την περίπτωση 2 λύσεων στην οποία ανάγεται και η περίπτωση των περισσότερων λύσεων.

⁴ Ο κύκλος ακτίνας s και κέντρου A μεγαλώνει με συνεχές τρόπο και επειδή η καμπύλη C είναι συνεχής η τομή μοναδική τομή του με την καμπύλη P_s θα κινείται με συνεχή τρόπο πάνω στην καμπύλη.



Σχήμα 2.6: (α') Κατά την κίνηση του M από το P_r^1 στο P_r^2 το Δ θα καλύψει το τμήμα της καμπύλης μεταξύ του Δ_1 , Δ_2 . (β') Στο κίτρινο τμήμα θα βρεθούν τα Δ κατά την κίνηση του M .

της διαμέρισης $C(t_{is_1})$ με μήκος τμήματος s_1 όπως και το άκρο της διαμέρισης τα συναντάμε πιο νωρίς καθώς κινούμαστε από το A στο B από τα αντίστοιχα σημεία της διαμέρισης με μήκος τμήματος s_2 τα $C(t_{is_2})$, δηλαδή ισχύει $t_{is_1} < t_{is_2}$. Αν συνέβαινε με κάποιο σημείο το αντίθετο θα έπρεπε να είχαμε 2 τομές στην καμπύλη με κάποιον από τους κύκλους γεγονός που δεν ισχύει από υπόθεση. Επομένως το $\Delta(s)$, $s < r$ έχει διατρέξει όλο το τμήμα της καμπύλης μέχρι το σημείο Δ_1 .

Τη στιγμή που $s = r$, έχουμε 2 διαμερίσεις ως λύσεις και ύπαρξη ασυνέχειας όπως θα διούμε. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, όπως θα φανεί και στην απόδειξη, θα υποθέσουμε πως οι δύο λύσεις εμφανίζονται από το πρώτο διάστημα της διαμέρισης και ότι η διαμέριση θα έχει 2 τμήματα, η απόδειξη στη γενική περίπτωση μπορεί να γίνει με επέκταση της μεθοδολογίας. Έστω $C(t_1^1) = P_r^1$, $C(t_1^2) = P_r^2$ (Σχήμα 2.6(α')) τα 2 σημεία της καμπύλης που ισταπέχουν από το A απόσταση r . Μάλιστα η καμπύλη στο P_r^2 πρέπει να εφαπτεται του κύκλου κέντρου A και ακτίνας r . Ισχύει $r = |AP_r^1| = |AP_r^2|$. Από τη μέθοδο που αναπτύξαμε θα καταλήξουμε στα άκρα $C(t_k^1) = \Delta_1$ και $C(t_k^2) = \Delta_2$. Αν καταλήξουμε σε περισσότερα σημεία Δ_2 από 2 τότε επιλέγουμε ως Δ_2 εκείνο που συναντάμε πρώτο. Αφού το P_r^2 είναι η πρώτη φορά που έχουμε 2 λύσεις καθώς το s αυξανόταν $s < r$ και λόγω συνέχειας το $\Delta(t)$, $t < t_r^1$ θα έχει περάσει από όλα τα σημεία της καμπύλης έως το $C(t_k^1) = \Delta_1$. Όσον αφορά το Δ_2 , καθώς το s αυξάνεται και παίρνει τιμές μεγαλύτερες του r , το Δ_2 θα κινείται με συνεχή τρόπο προς το B εκτός και εμφανιστεί κάτι αντίστοιχο με το φαινόμενο των 2 λύσεων το οποίο και θα εξετάσουμε. Όπως είδαμε ξαφνικά εμφανίζονται 2 λύσεις και ύπαρξη ασυνέχειας! Αφού η καμπύλη $\Delta(t)$ δεν έχει περάσει ακόμα από το τμήμα της καμπύλης μεταξύ των Δ_1 και Δ_2 . Το ερώτημα είναι αν υπάρχει εγγύηση ότι θα περάσει η $\Delta(t)$ από το τμήμα αυτό, ώστε η δεύτερη λύση να προκύψει ως συνέχεια της πρώτης. Αν δοθεί μια τέτοια εγγύηση τότε κάθε φορά που εμφανίζεται ασυνέχεια στο άκρο (2 λύσεις), καθώς αυξάνει το s , θα μπορούμε να εγγυηθούμε πως υπάρχει ισομήκης διαμέριση που έχει άκρο ανάμεσα Δ_1 και Δ_2 (2 λύσεις) και μήκος τμήματος με τιμές του s που βρίσκονται κοντά στο r και αλλάζουν με συνεχή τρόπο.

2.3.2 Πρόταση Λ_2

Να αποδειχθεί ότι αν θεωρήσω ενδιάμεσο σημείο M που κινείται μεταξύ των P_r^1, P_r^2 και θεωρήσω τη διαμέριση που περιέχει ως πρώτο τμήμα το $AM(t)$ και έχει μήκος τμήματος AM , το $\Delta(t)$ άκρο της διαμέρισης θα περάσει από όλα τα σημεία της καμπύλης μεταξύ του Δ_1 και Δ_2 .

Απόδειξη

Από το Σχήμα 2.4 το $\Delta(t)$ θα περάσει τουλάχιστον από όλα τα σημεία της καμπύλης που βρίσκονται στην διαφορά των κύκλων Φ_1 κέντρου P_r^1 και ακτίνας r και Φ_2 κέντρου P_r^2 και ακτίνας r . Αυτό συμβαίνει γιατί όλοι οι κύκλοι που δημιουργούνται κατά την κίνηση του M έχουν ακτίνα $AM > r$ (αλλιώς η υπόθεση μας πως το P_r^2 είναι πρώτο σημείο όπου έχουμε 2 λύσεις δεν ισχύει). Επειδή οι κύκλοι αυτοί έχουν ακτίνα μεγαλύτερη από r , ο γεωμετρικός τόπος των σημείων τους είναι υπερσύνολο του γ.τ. U που προκύπτει από την περιστροφή του Φ_1 γύρω από το A μέχρι να ταυτιστεί με τον Φ_2 . Υποσύνολο του U είναι η διαφορά των 2 κύκλων. Στη συνέχεια θα εξετάσουμε αν το τμήμα της καμπύλης μεταξύ των Δ_1, Δ_2 θα βρίσκεται πάντα στο τμήμα της διαφοράς των δύο κύκλων, αν ισχύει κάτι τέτοιο η πρόταση έχει αποδειχτεί.

Το τμήμα της καμπύλης C που ενώνει τα Δ_1, Δ_2 θα βρίσκεται αναγκαστικά εντός του κύκλου Φ_2 , επειδή το Δ_2 από υπόθεση έχει παρθεί να είναι το πρώτο που έχει τομή τον κύκλο Φ_2 . Επιπλέον θα πρέπει να δείξουμε ότι η καμπύλη αυτή βρίσκεται εκτός του κύκλου Φ_1 . Το γεγονός αυτό ισχύει γιατί έχουμε υποθέσει ότι η διαμέριση μέχρι και το Δ_1 ακτίνας $s < r$ έχει μοναδική λύση για κάθε s . Αν υπήρχε κάποιο τμήμα της καμπύλης ανάμεσα στο Δ_1, Δ_2 που θα βρισκόταν εντός του Φ_1 , θα υπήρχαν 2 άλλα σημεία της καμπύλης $\hat{\Delta}, \tilde{\Delta}$ ανάμεσα στα Δ_1, Δ_2 που θα έτεμναν τον Φ_1 και θα ήταν λύση στη διαμέριση (άτοπο από υπόθεση). Θα μπορούσε να υπάρχει κάποιο τέτοιο σημείο, αλλά στο οποίο η καμπύλη θα ήταν εφαπτόμενη με τον κύκλο Φ_1 , αλλά το σημαντικό είναι ότι κανένα σημείο μεταξύ των Δ_1, Δ_2 δεν θα είναι εσωτερικό του κύκλου Φ_1 . Στο παράδειγμα που είδαμε είχαμε διαμερίσεις 2 τμημάτων. Η απόδειξη επαγωγικά μπορεί να επεκταθεί και σε N τμήματα, αφού η κάλυψη της καμπύλης του τμήματος που βρίσκεται ανάμεσα στα $C(t_N^1), C(t_N^2)$ μπορεί να αποδειχτεί από όμοια με την παραπάνω απόδειξη, όπου τα προηγούμενα σημεία $C(t_{N-1}^1), C(t_{N-1}^2)$ των $C(t_N^1), C(t_N^2)$ θα παίζουν το ρόλο των P_r^1, P_r^2 αντίστοιχα. Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε μια γενική απόδειξη της ύπαρξης λύσης βασιζόμενοι στις ιδέεις που έχουμε ήδη αναπτύξει.

| Σύμβολα | Ορισμοί |
|-------------------------|--|
| $C(t), A, B$ | Δοσμένη συνεχής, πολυγωνική καμπύλη, $t \in [0, 1]$. Δύο άκρα της καμπύλης, $A = C(0)$, $B = C(1)$ |
| U_K | $\{1, 2, \dots, K\}$ |
| N | Αριθμός ίσων τμημάτων που χωρίζεται η καμπύλη $C(t)$ |
| $g_N(s)$ | Συνεχής συνάρτηση διαδρομής επί της $C(t)$, $s \in [0, S_N]$, $g_N(s) \in [0, 1]$, $g_N(0) = 0$, $g_N(S_N) = 1$ |
| $r_N(s)$ | Συνεχής συνάρτηση μήκους τμήματος, $s \in [0, S_N]$ |
| | Η καμπύλη $C(t)$, $t \in [0, Y_N(s)]$ χωρίζεται σε N ίσα τμήματα μήκους $r_N(s)$ |
| | $r_N(s) \in [0, R_{max}]$, $R_{max} \leq \frac{\int_0^1 \dot{C}(u) _2 du}{N}$, $r_N(0) = 0$ |
| $t_i(r, N)$ | $t_0(r, N) := 0$, $0 \leq t_i(r, N) \leq t_{i+1}(r, N) \leq 1$, $ C(t_i(r, N)) - C(t_{i+1}(r, N)) = r$, $i \in U_N$ |
| $G(u, N)$ | $G(u, N) = \{t_i(r, N), i \in \{0, 1, \dots, N\} \wedge t_N(r, N) = u\}$ |
| | Διαμέριση σε N ίσα τμήματα της καμπύλης $C(t)$, $t \in [0, u]$ |
| $d(u, v)$ | Ευχείδεια απόσταση μεταξύ των $C(u), C(v)$, $d(u, v) = C(u) - C(v) _2$ |
| $O(u, r)$ | Κύκλος κέντρου $C(u)$ και ακτίνας r |
| $f = E(f_1, f_2)$ | Η ένωση των $f_1(s), s \in [a_1, b_1]$, $f_2(s), s \in [a_2, b_2]$, έχει πεδίο ορισμού $[a_1, b_1 + b_2 - a_2]$ και τύπο $f(s) = f_1(s)$, $s \in [a_1, b_1]$, $f(s) = f_2(s - b_1 + a_2)$, $s \in (b_1, b_1 + b_2 - a_2]$ |
| $[s : a \rightarrow b]$ | Η συνεχής μεταβλητή s αρχικά είναι ίση με a και στη συνέχεια αυξάνεται (αν $(b > a)$) ή μειώνεται (αν $(a > b)$) μέχρι να γίνει ίση με b |

Πίνακας 2.1: Πίνακας συμβόλων της γενικής απόδειξης.

2.4 Ευθεία Απόδειξη Ύπαρξης Λύσης για Πολυγωνικές Καμπύλες - Ανάπτυξη Κατασκευαστικού Αλγορίθμου

Στο τμήμα αυτό θα παρουσιαστεί η ολοκληρωμένη απόδειξη της ύπαρξης λύσης για κάθε N η οποία στηρίζεται στις ιδέες που έχουν αναπτυχθεί προηγουμένως. Η απόδειξη θα γίνει για μια οποιαδήποτε, άκυκλη⁵ και συνεχή πολυγωνική καμπύλη $C(t)$, $t \in [0, 1]$. Στους πίνακες 2.1, 2.2 και 2.4 δίδονται όλοι οι ορισμοί συμβόλων που θα χρησιμοποιηθούν. Παράλληλα με την απόδειξη αναπτύσσεται και ένας κατασκευαστικός αλγόριθμος υπολογισμού των λύσεων.

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 1, η απόδειξη της ύπαρξης λύσης για κάθε N ισοδυναμεί με την απόδειξη ότι για κάθε N υπάρχει συνεχής συνάρτηση διαδρομής $g_N(s)$, $s \in [0, S_N]$ με $g_N(0) = 0$ και $g_N(S_N) = 1$ και συνεχής συνάρτηση μήκους $r_N(s)$.

Λήμμα 1 *Αν υπάρχει συνεχής συνάρτηση διαδρομής $g_N(s)$, $s \in [0, S_N]$, και συνεχής συνάρτηση μήκους τμήματος $r_N(s)$, τότε για κάθε σημείο $v \in (0, 1]$ υπάρχει τουλάχιστον μία ισομήκης διαμέριση $G(v, N + 1)$.*

Απόδειξη: *Καταρχήν αφού $g_N(s)$ συνεχής στο $[0, S_N]$ με $g_N(0) = 0$ και $g_N(S_N) = 1$ από θεώρημα Bolzano για κάθε σημείο $v \in (0, 1]$ θα υπάρχει κάποιο $s_1 \in [0, S_N]$ τ.ώ. $g_N(s_1) = v$.*

⁵Στη περίπτωση που η καμπύλη τέμνει τον εαυτό της, θα μπορούσε να οριστεί άκυκλη καμπύλη η οποία θα αγνοεί τον κύκλο που δημιουργείται λόγω της τομής. Βέβαια δε μπορεί να εφαρμοστεί σε κλειστές καμπύλες. Η απόδειξη μπορεί να εφαρμοστεί άμεσα και σε άκυκλες, αλγεβρικές καμπύλες που δεν περιέχουν κυκλικά τόξα.

| Σύμβολα | Ορισμοί |
|----------------------|--|
| $\bar{O}^f(u, r, v)$ | Ο κύκλος $O(u, r)$ τέμνει την $C(t)$, στο σημείο $C(v)$ με $v > u$ $\exists \varepsilon > 0$ τ.ώ. $\forall t \in [v - \varepsilon, v] \Rightarrow C(t) \in$ στον κυκλικό δίσκο του $O(u, r)$ \wedge $\forall t \in (v, v + \varepsilon] \Rightarrow C(t) \notin$ στον κυκλικό δίσκο του $O(u, r)$ |
| $\bar{O}^b(u, r, v)$ | Ο κύκλος $O(u, r)$ τέμνει την $C(t)$, στο σημείο $C(v)$ με $v > u$ $\exists \varepsilon > 0$ τ.ώ. $\forall t \in [v - \varepsilon, v) \Rightarrow C(t) \notin$ στον κυκλικό δίσκο του $O(u, r)$ \wedge $\forall t \in [v, v + \varepsilon] \Rightarrow C(t) \in$ στον κυκλικό δίσκο του $O(u, r)$ |
| $\hat{O}^f(u, r, v)$ | Ο κύκλος $O(u, r)$ εφάπτεται εσωτερικά με την $C(t)$, στο σημείο $C(v)$ με $v > u$ $\exists \varepsilon > 0$ τ.ώ. $\forall t \in [v - \varepsilon, v + \varepsilon] \Rightarrow C(t) \in$ στον κυκλικό δίσκο του $O(u, r)$ |
| $\hat{O}^b(u, r, v)$ | Ο κύκλος $O(u, r)$ εφάπτεται εξωτερικά με την $C(t)$, στο σημείο $C(v)$ με $v > u$ $\exists \varepsilon > 0$ τ.ώ. $\forall t \in [v - \varepsilon, v) \cup (v, v + \varepsilon] \Rightarrow C(t) \notin$ στον κυκλικό δίσκο του $O(u, r)$ |

Πίνακας 2.2: Πίνακας συμβόλων της γενικής απόδειξης για τις διαφορετικές περιπτώσεις των τομών κύκλων με την καμπύλη.

Θεωρώ τη συνάρτηση $\Psi(s) = d(g_N(s), v)$, $s \in [0, s_1]$ η οποία είναι συνεχής στο $[0, s_1]$ ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων. Ισχύει $\Psi(0) = d(0, v) > 0$, $\Psi(s_1) = d(g_N(s_1), v) = d(v, v) = 0$ με $0 < v \leq 1$. Για την $r_N(s)$, $s \in [0, s_1]$ ισχύει $r_N(0) = 0$ και $r_N(s_1) > 0$.

Με εφαρμογή του θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $[0, s_1]$ ισχύει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $s_0 \in (0, s_1)$ τ.ώ. $\Psi(s_0) = r_N(s_0) \Rightarrow \exists$ τουλάχιστον ένα $u_0 = g_N(s_0)$ τ.ώ. η καμπύλη $C(t)$ να χωρίζεται από το $[0, u_0]$ σε N ισομήκη τμήματα $(G(u_0, N))$ μήκους $r_N(s_0)$, επομένως επειδή $r_N(s_0) = d(u_0, v)$, $u_0 < v$ υπάρχει μία τουλάχιστον ισομήκης διαμέριση $G(v, N+1) = G_1(u_0, N) \bigcup \{v\}$.

Η απόδειξη, ότι για κάθε N υπάρχει συνεχής συνάρτηση διαδρομής $g_N(s)$, $s \in [0, S_N]$ και συνεχής συνάρτηση μήκους τμήματος $r_N(s)$, γίνεται επαγωγικά ως προς των αριθμό των ίσων τμημάτων N . Επιπλέον θα δείξουμε στο Λήμμα 3 πως οι $g_N(s)$, $r_N(s)$ είναι και τμηματικά μονότονες.

Για $N = 1$ υπάρχει συνεχής συνάρτηση διαδρομής, $g_1(s) = s$, $s \in [0, 1]$, $S_1 = 1$ και συνεχής συνάρτηση μήκους τμήματος $r_1(s) = d(0, s)$, $s \in [0, 1]$.

Επαγωγική υπόθεση: Υπάρχει συνεχής συνάρτηση διαδρομής $g_N(s)$, $s \in [0, S_N]$ και συνεχής συνάρτηση μήκους τμήματος $r_N(s)$.

Στηριζόμενοι στην επαγωγική υπόθεση θα δείξουμε ότι για $N+1$, υπάρχει συνεχής συνάρτηση διαδρομής $g_{N+1}(s)$, $s \in [0, S_{N+1}]$ και συνεχής συνάρτηση μήκους $r_{N+1}(s)$. Η απόδειξη θα γίνει με την κατασκευή των συναρτήσεων $g_{N+1}(s)$, $r_{N+1}(s)$ από τις $g_N(s)$, $r_N(s)$. Ο αλγόριθμος κατασκευής αποτελείται από καταστάσεις οι οποίες καθορίζουν το πως διατρέχουμε την συνάρτηση διαδρομής $g_N(s)$ (με το s να αυξάνει ή να μειώνεται), για κάθε s υπολογίζουμε τις τομές του κύκλου $O(g_N(s), r_N(s))$ με την καμπύλη και επιλέγουμε τη κατάλληλη ($v(s) = v^p(s, s_0, v_0)$) για την ενημέρωση της $g_{N+1}(\dot{s}) = v(s)$, $r_{N+1}(\dot{s}) = r_N(s)$ ώστε να διατηρηθεί η συνέχεια και να έχουμε κάλυψη, ο ορισμός της $v^p(s, s_0, v_0)$ θα γίνει παρακάτω. Οι μεταβάσεις από κατάσταση σε κατάσταση γίνονται όταν βρισκόμαστε σε σημεία στροφής που ορίζονται παρακάτω, ενώ

| Σύμβολα | Ορισμοί |
|---|--|
| Εμπρός Σημείο Εξόδου ($\epsilon.\sigma.\epsilon(v, s)$) | Το σημείο $C(v)$ αν και μόνο αν $\bar{O}^f(g_N(s), r_N(s), v)$ |
| Πίσω Σημείο Εξόδου ($\pi.\sigma.\epsilon(v, s)$) | Το σημείο $C(v)$ αν και μόνο αν $\bar{O}^b(g_N(s), r_N(s), v)$ |
| Εμπρός Σημείο Στροφής ($\epsilon.\sigma.\sigma(v, s)$) | Το σημείο $C(v)$ αν και μόνο αν $\hat{O}^f(g_N(s), r_N(s), v)$ |
| Πίσω Σημείο Στροφής ($\pi.\sigma.\sigma(v, s)$) | Το σημείο $C(v)$ αν και μόνο αν $\hat{O}^b(g_N(s), r_N(s), v)$ |

Πίνακας 2.3: Σημεία τομής των κύκλων $O(g_N(s), r_N(s))$ με την καμπύλη.

ο αλγόριθμος τερματίζεται όταν το επιλεγμένο σημείο τομής γίνεται το B . Οι ορισμοί των διαφορετικών περιπτώσεων τομής των κύκλων με την καμπύλη (Σχήμα 2.7(γ')) βρίσκονται στον Πίνακα 2.4. Με βάση τους ορισμούς αυτούς το άκρο B μπορεί να θεωρηθεί σημείο στροφής.

Στη συνέχεια θα ακολουθήσει περιγραφή του αλγορίθμου κατασκευής και τέλος θα υπάρξουν οι αποδείξεις για συνέχεια και ορθότητα του αλγορίθμου.

Καταστάσεις Υπολογισμού Κατασκευαστικού Αλγορίθμου

Στη συνέχεια ακολουθεί η περιγραφή των καταστάσεων υπολογισμού. Υπάρχουν 2 καταστάσεις: η $D_f(p, s_0, v_0)$ όπου το s αυξάνεται, και η $D_b(p, s_0, v_0)$ όπου το s μειώνεται. Η τελική κατάσταση συμβολίζεται με D_E .

$$D_f(p, s_0, v_0) : \quad (\text{Κίνηση Εμπρός}) \quad [s : s_0 \rightarrow S_N] \quad g^t(s) = v(s) = v^p(s, s_0, v_0), \quad r^t(s) = r_N(s).$$

Αν $(v(s) = 1)$, γίνεται μετάβαση στη τελική κατάσταση D_E .

Αν $(\epsilon.\sigma.\sigma(v(s), s))$, γίνεται μετάβαση στη κατάσταση $D_b(+, s, v(s))$.

Αν $(\pi.\sigma.\sigma(v(s), s))$, γίνεται μετάβαση στη κατάσταση $D_b(-, s, v(s))$.

$$D_b(p, s_0, v_0) : \quad (\text{Κίνηση Πίσω}) \quad [s : s_0 \rightarrow 0] \quad g^t(s_0 - s) = v(s) = v^p(s, s_0, v_0), \quad r^t(s_0 - s) = r_N(s). \quad ^{a'}$$

Αν $(v(s) = 1)$, γίνεται μετάβαση στη τελική κατάσταση D_E .

Αν $(\pi.\sigma.\sigma(v(s), s))$, γίνεται μετάβαση στη κατάσταση $D_f(+, s, v(s))$.

Αν $(\epsilon.\sigma.\sigma(v(s), s))$, γίνεται μετάβαση στη κατάσταση $D_f(-, s, v(s))$.

D_E : (Τελική Κατάσταση) Ο υπολογισμός των g_{N+1}, r_{N+1} έχει ολοκληρωθεί. Έξοδος.

Σε κάθε μετάβαση από κατάσταση σε κατάσταση γίνονται διαδοχικά οι παρακάτω πράξεις.

- $g_{N+1} = E(g_{N+1}, g^t), \quad r_{N+1} = E(r_{N+1}, r^t)$

- $S_{N+1} = S_{N+1} + |s - s_0|$

- $g^t(s) = \{\}, \quad r^t(s) = \{\}$

^{a'}Ο λόγος που χρησιμοποιούμε το $g^t(s_0 - s)$ αντί για το $g^t(s)$ είναι για να υπάρχει συνέχεια στις μεταβάσεις στη συνάρτηση $g_{N+1} = E(g_{N+1}, g_t)$.

Στο σημείο αυτό ορίζεται η συνάρτηση $v^p(s, s_1, v_1)$ της οποίας τη συνέχεια θα αποδείξουμε ώστε να εξασφαλιστεί συνέχεια και κάλυψη στις διαδρομές. Επιστρέφει τιμές στο διάστημα $[0, 1]$ με $v^p(s, s_1, v_1) > g_N(s)$. Το c, s_1, v_1 είναι σταθερές για κάθε συνάρτηση $v^p(s, s_1, v_1)$ και ορίζουν μονοσήμαντα ποια λύση ακολουθούμε $(d(v^p(s, s_1, v_1), g_N(s)) = r_N(s))$, το s είναι συνεχής μεταβλητή. Η κίνηση του s καθορίζεται από την κατάσταση που βρισκόμαστε οπότε είτε θα μειώνεται είτε θα αυξάνεται μέχρι κάποιο επόμενο σημείο στροφής για $s = s_2$ ($\epsilon.σ.σ(v^p(s_2, s_1, v_1), s_2)$ ή $π.σ.σ(v^p(s_2, s_0, v_1), s_2)$) με $s_2 \neq s_1$ και το $[s : s_1 \rightarrow s_2]$. Η $v^p(s, s_1, v_1)$ θέλουμε να είναι συνεχής καθώς το $[s : s_1 \rightarrow s_2]$. Ορίζουμε ως αρχική τιμή της $v^p(s_1, s_1, v_1) = v_1$. Έστω πως στην προηγούμενη κατάσταση το $[s : s_0 \rightarrow s_1]$ οπότε ακολουθούσαμε τη λύση $v^{\dot{p}}(s, s_0, v_0)$. Όπως θα δούμε παρακάτω σε κάθε σημείο στροφής αντιστοιχούν 2 λύσεις οι οποίες συναντιόνται σε αυτό. Στην περίπτωση μας ισχύει πως $v^{\dot{p}}(s_1, s_0, v_0) = v^p(s_1, s_1, v_1) = v_1$. Για τις δύο λύσεις αυτές ισχύει όπως θα δείξουμε παρακάτω ότι, για κάθε s που ανήκει στο κοινό πεδίο ορισμού τους εκτός του s_1 η μία είναι μεγαλύτερη από την άλλη. Έτσι αν $v^p(s_1, s_1, v_1) > v^{\dot{p}}(s_1, s_0, v_0)$ τότε $p = +$, αλλιώς $p = -$, η τιμή για το \dot{p} καθορίστηκε με αντίστοιχο τρόπο στο σημείο στροφής $σ.σ(v_0, s_0)$. Ο διαχωρισμός αυτός γίνεται για να μπορούμε να ξεχωρίσουμε τις λύσεις που καταλήγουν στο ίδιο σημείο στροφής και στην επόμενη κατάσταση να ακολουθήσουμε την επόμενη λύση. Στην περίπτωση που βρισκόμαστε σε σημείο εξόδου ο υπολογισμός της $v^p(s_1, s_1, v_1)$ μπορεί να γίνει επιλέγοντας ως τιμή εκείνη που επαληθεύει τη εξίσωση $d(v^p(s, s_1, v_1), g_N(s)) = r_N(s) \wedge v^p(s, s_1, v_1) > g_N(s)$ και διατηρεί τη συνέχεια που παρακάτω θα δείξουμε ισχύει στα σημεία εξόδου.

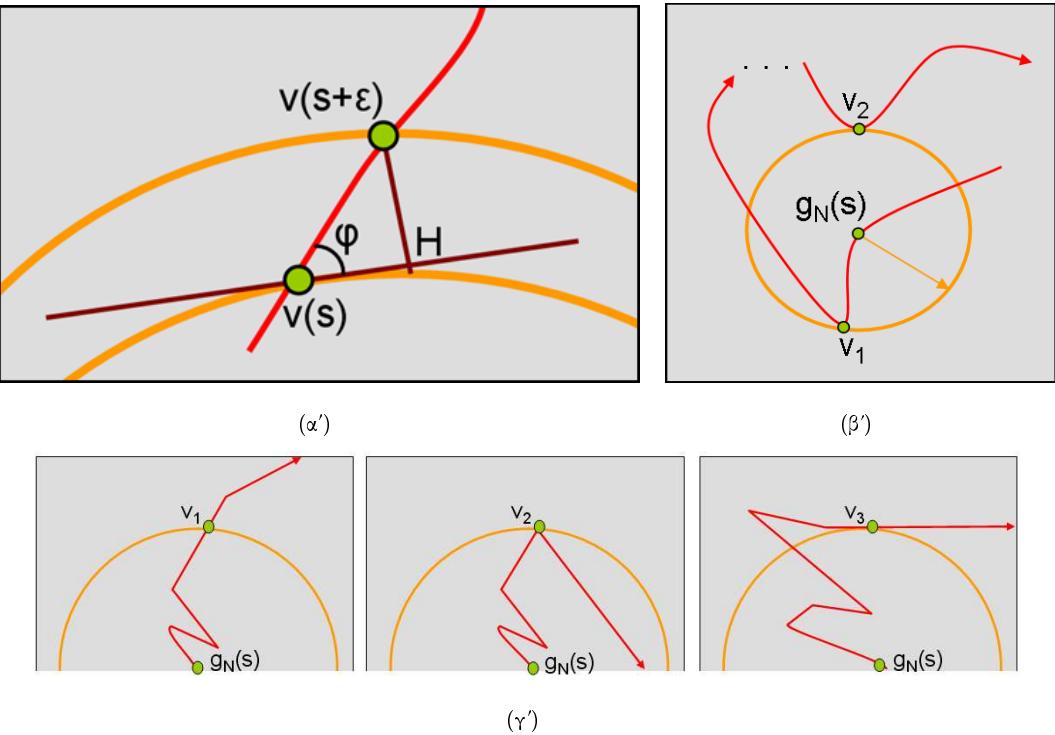
Θέτουμε αρχική κατάσταση να είναι η $D_f(+, 0, 0)$ με $g_{N+1}(s) = 0, r_{N+1}(s) = 0, s \in [0, 0], S_{N+1} = 0$. Αυτό γίνεται διότι αρχικά ακολουθούμε τη διαδρομή επί της καμπύλης $g_N(s), s \in [0, S_N]$ από $s = 0$, έως και το $s = S_N(s)$ και υπολογίζουμε το πρώτο σημείο τομής $v(s) = v^+(s, 0, 0) > g_N(s)$ επί της καμπύλης τ.ώ. $d(g_N(s), v(s)) = r_N(s)$. Θέτω $g_{N+1}(s) = v(s)$ και $r_{N+1}(s) = r_N(s)$. Για $s = 0$ έχουμε $r_{N+1}(0) = 0, g_{N+1}(0) = 0$. Αρχικά (s κοντά στο 0) θα υπάρχει εμπρός σημείο εξόδου. Το παραπάνω ισχύει γιατί, το τμήμα της πολυγωνικής καμπύλης που αντιστοιχεί σε μικρά s είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα, μέρος του πρώτου ευθύγραμμου τμήματος της καμπύλης, στο οποίο ισχύει το παραπάνω. Επομένως η αρχική κατάσταση που έχουμε επιλέξει είναι σωστή.

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι εφόσον δεν συναντήσουμε κάποιο σημείο στροφής, η κίνηση του $v^p(s, s_0, v_0)$ είναι συνεχής ως προς το s . Για απλούστευση, συχνά στη περίπτωση που εξετάζουμε το σημείο $v(s) = v^p(s, s_0, v_0)$ από τη θέση s θα παραλείπουμε να αναφερόμαστε στο s και θα μιλάμε για παράδειγμα για σημείο στροφής $v(s)$, ενώ το πλήρες θα ήταν σημείο στροφής $(v(s), s)$.

Λήμμα 2 *H συνάρτηση $v(s) = v^p(s, s_0, v_0)$ είναι συνεχής ως προς το s στη γειτονιά του s αρκεί το $v(s)$ να είναι σημείο εξόδου.*

Απόδειξη: Στη περίπτωση που το $v(s)$ είναι ‘εμπρός σημείο εξόδου’ είτε ‘πίσω σημείο εξόδου’ η απόδειξη είναι ακριβώς όμοια. Έστω ότι έχουμε ‘εμπρός σημείο εξόδου’. Λόγω της συνέχειας των $g_N(s), r_N(s)$ υπάρχει σταθερά $c > 0$ και για κάθε $ε > 0$ μικρό ο $O(g_N(s + ε), r_N(s + ε))$ θα βρίσκεται ανάμεσα στους διακτυλίους $O(g_N(s), r_N(s) - cε)$ και $O(g_N(s), r_N(s) + cε)$.

To $v(s)$ είναι ‘εμπρός σημείο εξόδου’, τότε η καμπύλη τοπικά (στο διάστημα $[v(s), v(s) + ε]$) είναι ευθύ-



Σχήμα 2.7: (α') Η απόσταση $|C(v(s+\varepsilon)) - C(v(s))|$ προκύπτει από το ορθογώνιο τρίγωνο με κορυφές $C(v(s+\varepsilon))$, $C(v(s))$, H με $|HC(v(s+\varepsilon))| < c\varepsilon$. (β') Παράδειγμα σημείων στροφής, $\epsilon.\sigma.\sigma(v_1, s)$, $\pi.\sigma.\sigma(v_2, s)$. (γ') Περιπτώσεις τομών αύκλου με πολυγωνική καμπύλη, $\epsilon.\sigma.\epsilon(v_1, s)$ ή $\pi.\sigma.\epsilon(v_1, s)$, $\epsilon.\sigma.\sigma(v_2, s)$, $\pi.\sigma.\sigma(v_3, s)$. Στις πολυγωνικές καμπύλες, υποψήφια εμπρός σημεία στροφής είναι μόνο οι κορυφές της γραμμής, ενώ πίσω σημεία στροφής μπορεί να είναι οποιοδήποτε σημείο της γραμμής.

γραμμο τμήμα με διεύθυνση τη διεύθυνση της $\dot{C}(v(s))$ που μάλιστα δεν ταυτίζεται με την διεύθυνση της εφαπτομένης του $O(g_N(s), r_N(s))$ στο $v(s)$ ⁶. Εστω φημαία της διαφοράς των δύο διευθυνήσεων, ισχύει ότι $\phi \neq 0$ (το ‘εμπρός σημείο εξόδου’ δεν εφαπτεται στον κύκλο). Για να δείξουμε τη συνέχεια αρκεί να αποδεικτεί πως $\dot{v}(s+\varepsilon)$ θα είναι οσοδήποτε κοντά στο $v(s)$ καθώς $\varepsilon \rightarrow 0$. Πράγματι, $|C(v(s+\varepsilon)) - C(v(s))| < \frac{c\varepsilon}{|\sin \phi|}$ (Σχήμα 2.7(a')).

Και στις δύο παραπάνω περιπτώσεις μπορεί να οριστεί κατάλληλα η συνάρτηση διαδρομής $v^p(s, s_0, v_0)$ ώστε να διατηρηθεί η συνέχεια.

Αν δεν συναντήσουμε κάποιο σημείο στροφής (Σχήμα 2.7(β')) τότε θα δείξουμε πως θα φτάσουμε για κάποιο $s < S_N$ στο B ($v^+(s, 0, 0) = 1$). Το παραπάνω ισχύει γιατί :

1. Από Λήμμα 2 ($v^p(s, s_0, v_0)$) συνεχής ως προς s .
2. $v^+(0, 0, 0) = 0$
3. $v^+(s, 0, 0) > g_N(s)$, $s > 0$, $g_N(s)$ συνεχής

⁶Η μόνη περίπτωση να συμβαίνει κάτι τέτοιο είναι στην περίπτωση που το $v(s)$ είναι και σημείο κορυφής (η καμπύλη δεν παραγωγίζεται στο $v(s)$, τότε τη συνέχεια μπορούμε να την πετύχουμε γιατί έχουμε συνέχεια στο $[v(s)-\varepsilon, v(s)] \cup (v(s), v(s)+\varepsilon]$ άρα οριακά έχουμε και στο $v(s)$).

4. $g_N(S_N) = 1$

Λήμμα 3 Η συναρτήσεις $r_N(s)$, $g_N(s)$ είναι για κάθε N τμηματικά μονότονες.

Απόδειξη:

Για $N = 1$, έχουμε $r_1(s) = d(0, s)$, $g_1(s) = s$ που είναι τμηματικά μονότονες ως τμηματικά αλγεβρικές συναρτήσεις, άρα και τμηματικά παραγωγίσιμες και υπάρχει συνεχής συνάρτηση διαδρομής, $s \in [0, 1]$, $S_1 = 1$. Έστω πως το λήμμα ισχύει για N , θα δείξουμε πως ισχύει για $N + 1$.

Η $r_{N+1}(s)$ φαίνεται από τις σχέσεις του κατασκευαστικού αλγορίθμου πως κληρονομεί άμεσα την ιδιότητα αυτή από την $r_N(s)$, αφού προκύπτει από την ένωση των $r^t(s)$. Οι $r^t(s)$ εξ' ορισμού τους είναι τμηματικά μονότονες, $r^t(s) = r_N(s)$ (επαγωγική υπόθεση).

Όσον αφορά την $g_{N+1}(s)$, αρκεί να δείξουμε πως η $g^t(s)$ είναι τμηματικά μονότονη. Τότε και η ένωση αυτών, $g_{N+1}(s)$ είναι τμηματικά μονότονη. Θεωρούμε την παρακάτω συνάρτηση $d_c(s, w)$. Μέρος των w που ικανοποιούν την $d_c(s, w) = 0$ αποτελούν τις τιμές της $g^t(s)$.

$$d_c(s, w) = d(g_N(s), c(w)) - r_N(s), \quad w \geq g_N(s) \quad (2.4.1)$$

Η συνεχής μεταβλητή $w \in [0, 1]$. Η συνάρτηση απόστασης $d_c(s, w)$, είναι θετική όταν το σημείο $c(w)$, βρίσκεται εκτός του κύκλου $O(g_N(s), r_N(s))$, 0 όταν $w \in O(g_N(s), r_N(s))$ και αρνητική στην περίπτωση που βρίσκεται εντός του κύκλου. Η απόλυτη τιμή της $d_c(s, w)$ ισούται με την ευκλειδίδια απόσταση του $c(w)$ από τον κύκλο $O(g_N(s), r_N(s))$. Από επαγωγική υπόθεση, η συνάρτηση $d_c(s, w)$ είναι τμηματικά αλγεβρική συνάρτηση ως προς s, w .

Η τομή της $d_c(s, w)$ με το οριζόντιο επίπεδο (μηδενική στάθμη της $d_c(s, w)$), δίνει καμπύλη⁷ $c_k(e) = [S_k(e), W_k(e)]$ τμηματικά μονότονες αφού η $d_c(s, w)$ είναι τμηματικά αλγεβρική. Η δεύτερη συνιστώσα $(W_k(e))$ για κάθε καμπύλη ξεχωριστά, θα αποτελεί τμηματικά αλγεβρική συνάρτηση, άρα και τμηματικά μονότονη. Μέρος των συναρτήσεων αυτών ορίζουν τη συνάρτηση $g^t(s)$, επομένως και η $g^t(s)$ είναι τμηματικά μονότονη συνάρτηση.

Λήμμα 4 Στην περίπτωση που βρισκόμαστε στη κατάσταση $D_f(p, s_0, v_0)$ και φτάσουμε σε εμπρός σημείο στροφής ($\epsilon.\sigma.\sigma(v_1, s_1)$) θα δείξουμε πως για κάθε $\varepsilon > 0$ μικρό υπάρχει επόμενη λύση $v^+(s_1 - \varepsilon, s_1, v_1)$ η οποία αποτελεί συνέχεια της $v^p(s, s_0, v_0)$, δηλαδή ισχύει για σταθερά $c > 0$ ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ μικρό $|v^+(s_1 - \varepsilon, s_1, v_1) - v^p(s_1 - \varepsilon, s_0, v_0)| < c\varepsilon$. Ενώ ισχύει $v^+(s_1, s_1, v_1) = v^p(s_1, s_0, v_0) = v_1$. Σε κάθε σημείο στροφής 2 λύσεις συναντίονται.

Απόδειξη: Στο σημείο στροφής η καμπύλη 'εφάπτεται' για πρώτη φορά (στη κατάσταση που βρισκόμαστε) στον κύκλο $O(g_N(s_1), r_N(s_1))$, επομένως τα σημεία στη γειτονιά του $v^p(s_1, s_0, v_0)$ είναι εσωτερικά του σημεία. Επειδή βρισκόμασταν στη κατάσταση $D_f(p, s_0, v_0)$ ισχύει πως για κάθε $\varepsilon > 0$ μικρό το σημείο $v^p(s_1 - \varepsilon, s_0, v_0)$ είναι εμπρός σημείο εξόδου, επομένως υπάρχει σταθερά $c_1 > 0$ ώστε το σημείο $v^p(s_1 - \varepsilon, s_0, v_0) + c_1\varepsilon$ να είναι εκτός του κύκλου $O(g_N(s_1 - \varepsilon), r_N(s_1 - \varepsilon))$ όμως είναι εντός του $O(g_N(s_1), r_N(s_1))$. Για να ισχύει αυτό και επειδή η καμπύλη δεν περιέχει κυκλικά τόξα θα πρέπει να υπάρχει τμήμα της καμπύλης κοντά και μετά

⁷Ειδική περίπτωση που η τομή δώσει κάποιο χωρίο, δε μπορεί να υπάρξει διότι ισχύει πως για κάθε $\varepsilon \neq 0$ $|d_c(s, w + \varepsilon) - d_c(s, w)| > 0$.

από το $v^p(s_1, s_0, v_0)$ που θα είναι εντός του $O(g_N(s_1 - \varepsilon), r_N(s_1 - \varepsilon))$. Επειδή έχουμε τμήμα της καμπύλης $\Delta(s_1 - \varepsilon)$ εκτός του $O(g_N(s_1 - \varepsilon), r_N(s_1 - \varepsilon))$ λόγω του εμπρός σημείο εισόδου $v^p(s_1 - \varepsilon, s_0, v_0)$ και αποδειξαμε πως επόμενο τμήμα της καμπύλης βρίσκεται εντός του $O(g_N(s_1 - \varepsilon), r_N(s_1 - \varepsilon))$ θα υπάρχει αναγκαστικά πίσω σημείο εισόδου $v^+(s_1 - \varepsilon, s_0, v_0)$. Μάλιστα καθώς το $\varepsilon \rightarrow 0$ το $\Delta(s_1 - \varepsilon) \rightarrow \{\}$, μιας και για κάθε ε ουσιαστικά δύο μόνο σημεία το πολύ που βρίσκονται εκτός κύκλου $O(g_N(s_1 - \varepsilon), r_N(s_1 - \varepsilon))$ μπαίνουν μέσα, το $v^p(s_1 - \varepsilon, s_0, v_0)$ και το $v^+(s_1 - \varepsilon, s_1, v_1)$. Από Λήμμα 2 η κίνηση κάθε σημείου ε -όδου είναι συνεχής, και το $v^+(s_1 - \varepsilon, s_1, v_1)$ είναι σημείο ε -όδου, και για $\varepsilon \rightarrow 0$ το σημείο $v^+(s_1 - \varepsilon, s_1, v_1) \rightarrow (v^-(s_1 - \varepsilon, s_1, v_1)) = v^p(s_1 - \varepsilon, s_0, v_0)$.

Στη περίπτωση που εμφανιστεί $\pi.\sigma.\sigma(v(s), s)$ με αντίστοιχο τρόπο μπορεί να αποδεικτεί πως υπάρχει για κάθε $\varepsilon > 0$ μικρό μία λύση η οποία αποτελεί συνέχεια της άλλης.

Το φαινόμενο αυτό της συνέχειας της επόμενης - προηγούμενης λύσης εμφανίζεται με αντίστοιχο τρόπο $(v^+(s_1 - \varepsilon, s_1, v_1), v^-(s_1 - \varepsilon, s_1, v_1))$ στη περίπτωση που βρισκόμαστε στη κατάσταση $D_b(p, s_0, s_1)$ και συναντήσουμε $\pi.\sigma.\sigma(v_1, s_1)$ ή $\epsilon.\sigma.\sigma(v_1, s_1)$. Η απόδειξη είναι ακριβώς αντίστοιχη.

Επομένως σε κάθε σημείο στροφής $\sigma.\sigma(v_1, s_1)$ αντίστοιχον δύο λύσεις μία που καταλήγει σε αυτό και η άλλη που ξεκινάει από αυτό και θα καταλήξει σε κάποιο άλλο σημείο στροφής καθώς το s θα κινηθεί στην επόμενη κατάσταση.

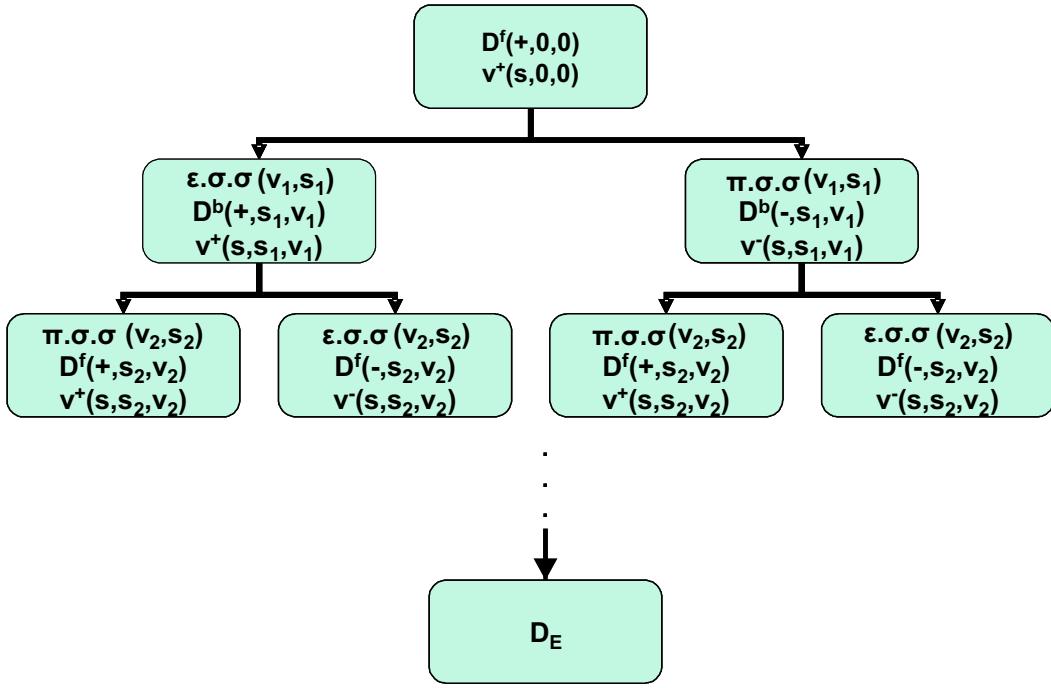
Απόδειξη Τερματισμού - Κάλυψης Αλγορίθμου Κατασκευής

Συμπερασματικά, όταν συναντήσουμε κάποιο σημείο στροφής έχουμε συνέχεια στις μεταβάσεις από την κατάσταση $D_f(p, s_0, v_0)$ στη $D_b(\dot{p}, s_1, v_1)$ και αντίστροφα. Στη συνέχεια θα πρέπει να αποδείξουμε την κάλυψη της καμπύλης, ότι δηλαδή κάποια στιγμή $v(s) = 1$ και πως είναι αδύνατο να βρεθούμε σε κάποιο ατέρμονα βρόχο (*infinite loop*).

Αυτό που θα δείξουμε στο παρακάτω Λήμμα είναι πως οι νέες καταστάσεις θα μας οδηγήσουν σε κάλυψη νέων τμημάτων της καμπύλης στην περίπτωση μεταβάσεων από $D_f(p, s_0, v_0)$ σε $D_b(+, s_1, v_1)$, η απόδειξη για την αντίστροφη μετάβαση, από $(D_b(p, s_0, v_0)$ σε $D_f(+, s_1, v_1))$, είναι ακριβώς συμμετρική.

Λήμμα 5 Εστω $v^p(s, s_0, v_0)$ η λύση που ακολουθούσαμε στην κατάσταση $D_f(p, s_0, v_0)$ και συναντάμε εμπρός σημείο στροφής $(\epsilon.\sigma.\sigma(v_1, s_1))$ οπότε μεταβαίνουμε στην κατάσταση $D_b(+, s_1, v_1)$. Τη νέα λύση $v^+(s, s_1, v_1)$ θα ακολουθήσουμε μέχρι να συναντήσουμε κάποιο σημείο στροφής $\sigma.\sigma(v_2, s_2)$. Θα δείξουμε ότι για κάθε $s \in [max(s_0, s_2), s_1]$, $v^+(s, s_1, v_1) > v^p(s, s_0, v_0)$ και $v^+(s_2, s_1, v_1) \neq v^p(s_0, s_0, v_0)$ επομένως στη νέα διαδρομή υπάρχει πρόοδος.

Απόδειξη: Ισχύει από παραπάνω Λήμμα πως για $\varepsilon > 0$ μικρό $v^+(s_1 - \varepsilon, s_1, v_1) > v^p(s_1 - \varepsilon, s_0, v_0)$. Αν για κάποιο $s < s_1$ έχαμε $v^+(s, s_1, v_1) < v^p(s, s_0, v_0)$ τότε θα έπρεπε από BOLZANO να υπήρχε \dot{s} με $s < \dot{s} < s_1$ τ.ώ. $v^+(\dot{s}, s_1, v_1) = v^p(\dot{s}, s_0, v_0)$ το οποίο σημαίνει πως όταν $s = \dot{s}$ συναντήσαμε σημείο στροφής, άτοπον γιατί το πρώτο σημείο στροφής που συναντήσαμε όταν βρισκόμασταν στην κατάσταση $D_f(p, s_0, v_0)$ είναι στη θέση $s = s_1$ επομένως για κάθε s in $[max(s_0, s_2), s_1)$ ισχύει $v^+(s, s_1, v_1) > v^p(s, s_0, v_0)$, επομένως έχουμε πρόοδο. Επίσης, το σημείο στροφής $\sigma.\sigma(v_2, s_2)$ όπου συναντάμε την επόμενη λύση αποκλείεται να είναι $\epsilon.\sigma.\sigma(v_0, s_0)$ γιατί εκεί είναι η πρώτη φορά που συναντήθηκαν οι $v^p(s, s_0, v_0)$ με την προηγούμενη από αυτήν και σε κάθε $\sigma.\sigma$ συναντιόνται μόνο δύο λύσεις.

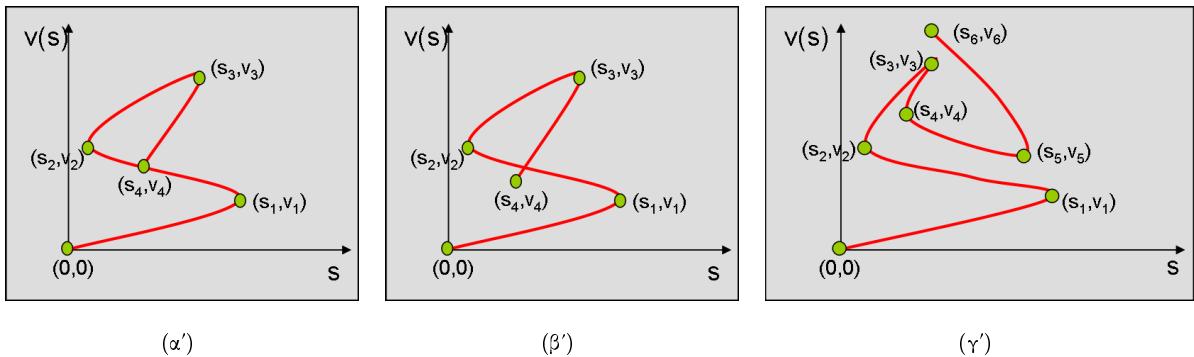


Σχήμα 2.8: Ο γράφος δυνατών μεταβάσεων από την αρχική κατάσταση $D_f(+, 0, 0)$. Η διαδρομή υπολογισμού που θα ακολουθήσουμε είναι: ένας κλάδος του παραπάνω δυαδικού δέντρου που θα καταλήξει στην D_E .

Στο προηγούμενο Λήμμα αποδείξαμε πως με τις συγχεκριμένες μεταβάσεις οι επόμενες λύσεις που θα ακολουθήσουμε θα μας οδηγήσουν σε νέο τμήμα της καμπύλης. Όμως στις μεταβάσεις τύπου $D_f(p, s_0, v_0)$ σε $D_b(-, s_1, v_1)$ είτε από $D_b(p, s_0, v_0)$ σε $D_f(-, s_1, v_1)$ δεν έχουμε όφελος αφού επιλέγουμε τη λύση $v^-(s, s_1, v_1) < v^p(s, s_0, v_0)$ (που βρίσκεται πριν) με κίνδυνο να οδηγήθούμε στην αρχή της καμπύλης ή ακόμα και σε ατέρμονα βρόχο. Αυτό που πρέπει να δείξουμε είναι πως παρόλο που υποχωρούμε θα ολοκληρώσουμε την υποχώρηση πριν φτάσουμε στο $s = 0$ και είναι βέβαιο πως θα επιστρέψουμε σε μεταβάσεις του προηγούμενου τύπου. Επίσης, κάθε φορά που γίνεται μετάβαση σε μια νέα κατάσταση η διαδρομή που θα ακολουθήσουμε $(s, v^p(s, s_k, v_k))$ θα είναι διαφορετική από κάθε προηγούμενη $(s, v^p(s, s_m, v_m), m < k)$ γεγονός που θα μας απαγορεύσει να οδηγήθούμε σε ατέρμονα βρόχο (Σχήμα 2.9(α')). Το παραπάνω αποδεικνύεται από το επόμενο Λήμμα.

Λήμμα 6 Έστω ότι ακολουθούμε την ακολουθία καταστάσεων $D_f(+, 0, 0)$, $D^{\pi(1)}(p_1, s_1, v_1)$, $D_{\pi(2)}(p_2, s_2, v_2)$, \dots , $D^{\pi(k)}(p_k, s_k, v_k)$, $\pi(i) \in \{f, b\}$, $p(i) \in \{+, -\}$, $i \in U_k$. Όλες οι διαδρομές είναι διαφορετικές μεταξύ τους ανά δύο και δεν έχουν κάποιο άλλο κοινό σημείο πέραν των σημείων στροφής.

Απόδειξη: Καταρχήν τα σημεία στροφής είναι διαφορετικά για κάθε ζεύγος λύσεων (σημείο που συναντιόνται δύο διαδρομές λύσεων), άρα κάθε λύση μας οδηγεί σε ένα νέο σημείο στροφής. Αυτό που θα πρέπει να δείξουμε είναι πως το σημείο στροφής που θα μας οδηγήσει κάποια λύση $v^{\pi(k)}(s, s_k, v_k)$, δεν μπορεί να είναι σημείο μιας προηγούμενης διαδρομής $v^{\pi(m)}(s, s_m, v_m)$ (Σ χήμα 2.9(a')) και επαγωγικά θα ισχύει για όλες τις περιπτώσεις (για επόμενες διαδρομές του $v^{\pi(j)}(s, s_j, v_j)$ $j > k$). Πράγματι, αυτό δεν ισχύει γιατί αν ίσχυε κάτι τέτοιο όταν βρισκόμασταν στο σημείο $v^{\pi(m)}(s_k, s_m, v_m)$ και ακολουθούσαμε την διαδρομή $v^{\pi(m)}(s, s_m, v_m)$



Σχήμα 2.9: Με πράσινους κύκλους εμφανίζονται τα σημεία στροφής. (α') , (β') Παράδειγμα εικονικής περίπτωσης ατέρμων βρόχου. (γ') Οι διαδρομές τέμνονται μόνο σε σημεία στροφής.

Θα συναντούσαμε σημείο στροφής, γεγονός άτοπον αφού το πρώτο σημείο στροφής που συναντήσαμε ήταν το v_{m+1} .

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε πως κάθε ζευγάρι διαδρομών $v^{\pi(k)}(s, s_k, v_k)$, $v^{\pi(m)}(s, s_m, v_m)$ δεν έχουν κάποιο άλλο κοινό σημείο αν αγνοήσουμε τα σημεία στροφής (Σχήμα 2.9(γ')). Έστω το (\tilde{v}, \tilde{s}) , $\tilde{v} \in [0, 1]$, $\tilde{s} \in [s : s_k \rightarrow s_{k+1}] \cap [s : s_m \rightarrow s_{m+1}]$, το κοινό σημείο μεταξύ των διαδρομών $v^{\pi(k)}(s, s_k, v_k)$, $v^{\pi(m)}(s_k, s_m, v_m)$ τότε ισχύει $\tilde{v} = v^{\pi(k)}(\tilde{s}, s_k, v_k) = v^{\pi(m)}(\tilde{s}, s_m, v_m)$. Αυτό σημαίνει πως όταν βρισκόμασταν στη διαδρομή $v^{\pi(m)}(s, s_m, v_m)$ στη θέση $s = \tilde{s}$ (σημείο εξόδου) θα υπήρχαν δύο διαδρομές που θα μπορούσαμε να ακολουθήσουμε (Σχήμα 2.9(β'))), άτοπον γιατί τότε σημαίνει πως βρισκόμαστε σε σημείο στροφής ενώ έχουμε υποθέσει πως βρισκόμαστε σε σημείο εξόδου.

Η απόδειξη κάλυψης της καμπύλης εξετάζεται παρακάτω. Αν φτάσω κάποια στιγμή στο B ($v^+(s, s_k, s_k) = 1$) τότε η καμπύλη θα έχει καλυφθεί από την $g_{N+1}(\dot{s})$.

1. Από Λήμματα 2, 4 $g_{N+1}(\dot{s})$ συνεχής ως προς \dot{s} .
2. $g_{N+1}(0) = 0$
3. $g_{N+1}(S_{N+1}) = 1$

Επομένως, λόγω συνέχειας για κάθε $v \in [0, 1]$ $\exists \dot{s}_v \in [0, S_{N+1}]$ τ.ώ. $g_{N+1}(\dot{s}_v) = v$.

Ο αριθμός των μεταβάσεων εξαρτώνται από το πλήθος των σημείων στροφής που υπάρχουν⁸, μάλιστα στη χειρότερη περίπτωση είναι ίσος με τα σημεία στροφής που υπάρχουν συνολικά. Ουσιαστικά για κάθε λύση αντιστοιχεί ένα σημείο στροφής για τη δημιουργία της και ένα άλλο σημείο στροφής όπου έχουμε την ‘καταστροφή’ της και τη μετάβαση σε επόμενη λύση. Επειδή η καμπύλη είναι πολυγωνική για κάθε s οι τομές των κύκλων $O(g_N(s), r_N(s))$ είναι πεπερασμένες σε αριθμό, κάθε διαδρομή τομής $v^{\pi(m)}(s, s_m, v_m)$ από αυτές που ακολουθούμε ορίζεται σε κάποιο διάστημα $([s_m, s_{m+1}])$ θα οδηγεί και σε ένα σημείο στροφής s_{m+1} (ειδική περίπτωση τομής). Επομένως σε κάθε περίπτωση ο αλγόριθμος μπορεί να εκτελεστεί βηματικά και

⁸Στις πολυγωνικές καμπύλες εμπρός σημεία στροφής μπορεί να είναι μόνο κορυφές, επομένως υπάρχει ένα άνω φράγμα, για το πλήθος των σημείων στροφής, ίσο με το διπλάσιο του αριθμού των κορυφών της καμπύλης (για κάθε εμπρός σημείο στροφής αντιστοιχεί και ένα πίσω).

επειδή δεν θα περάσει από το ίδιο σημείο για δεύτερη φορά $(v(s), s)$ στη χειρότερη περίπτωση όταν καλύψει όλα τα δυνατά ζεύγη $(v(s), s)$ θα τερματιστεί.

2.5 Ένας Ισοδύναμος Ορισμός και Απόδειξη Υπαρξης Λύσης

Στο τμήμα αυτό θα μελετήσουμε την επιφάνεια $d(x, y) = |C(x) - C(y)|$, $x, y \in [0, 1]$ που δίνει μια διαφορετική οπτική γωνία του προβλήματος. Με τη χρήση της $d(u, v)$ θα αποδείξουμε με τρόπο αντίστοιχο με τον παραπάνω την ύπαρξη λύσης του προβλήματος. Θα υποθέσουμε πως η δοσμένη καμπύλη $C(t)$ είναι τυμηματικά παραγωγίσιμη, τυμηματικά μονότονη⁹, άκυκλη και συνεχής. Η $d(x, y)$ χαρακτηρίζεται από τις παρακάτω ιδιότητες που χαρακτηρίζουν μια μετρική:

1. $d(x, x) = 0$
2. $d(x, y) = d(y, x)$ (συμμετρική)
3. $|d(x, w) - d(w, y)| \leq d(x, y) \leq d(x, w) + d(w, y)$ (τριγωνική ανισότητα)
4. Η $d(x, y)$ κληρονομεί πιθανές ιδιότητες συνέχειας και παραγωγισμότητας από τη καμπύλη $C(t)$.
5. Η $d(x, y)$ θα μπορούσε να προκύψει και από καμπύλη ορισμένη σε οποιαδήποτε διάσταση, η απόδειξη που ακολουθεί είναι γενική και η μέθοδος υπολογισμού μπορεί να εφαρμοστεί και σε τέτοιες καμπύλες.

Μια λύση $\{0, t_1, \dots, t_{N-1}, 1\}$ ¹⁰ της καμπύλης $C(t)$, αντιστοιχεί στην επιφάνεια $d(x, y)$ ως μια σειρά από σημεία, $(0, t_1), (t_1, t_2), (t_2, t_3), \dots, (t_{N-1}, 1)$, τα οποία βρίσκονται ανά δύο, εκατέρωθεν της διαγωνίου $x = y$ και ισχύει πως το μήκος της λύσης δίδεται από την παρακάτω σχέση.

$$r = d(0, t_1) = d(t_1, t_2) = d(t_2, t_3) = \dots = d(t_{N-1}, 1) \quad (2.5.2)$$

Επομένως ένας ισοδύναμος ορισμός του προβλήματος είναι τα βρεθιούν τα $\{t_1, \dots, t_{N-1}\}$ τ.ώ. να ισχύει η σχέση (2.5.2). Στη συνέχεια θα αποδείξουμε πως για κάθε N το πρόβλημα (με τον ισοδύναμο ορισμό του) έχει λύση.

2.5.1 Απόδειξη Υπαρξης Λύσης για $N = 3$

Καταρχήν θα δείξουμε πως το πρόβλημα έχει λύση για $N = 3$ τμήματα και στη συνέχεια θα εφαρμόσουμε επαγωγικά τη μέθοδο απόδειξης και για μεγαλύτερα N . Έστω $f_2(x, y)$ συνεχής, τυμηματικά παραγωγίσιμη και τυμηματικά μονότονη συνάρτηση που δίδεται από την παρακάτω σχέση.

$$f_2(x, y) = d(x, y) - d(x, 0), \quad x \in [0, 1], y \geq x \quad (2.5.3)$$

⁹Οπως θα φανεί και στην απόδειξη, τυμηματικά μονότονη θα θέλαμε να είναι και κάθε συνάρτηση της μορφής $f(x, y) = d(x, y) - d(x, Y(x))$ ή $f(x, y) = d(x, y) - d(X(y), y)$ όπου η $X(y), Y(x)$ συναρτήσεις τυμηματικά μονότονες ίδιας τάξης με την $d(x, y)$. Επίσης, οι $X(y), Y(x)$ προκύπτουν αναδρομικά από την μηδενική ισοστάθμη συναρτήσεων της μορφής που έχει $f(x, y)$. Το παραπάνω ισχύει στις τυμηματικά αλγεβρικές καμπύλες (είναι τυμηματικά μονότονες), οπότε και όλες οι σχέσεις θα δίνουν τυμηματικά αλγεβρικές παραστάσεις.

¹⁰Σε κάθε περίπτωση που χρησιμοποιούμε τα $\{0, t_1, \dots, t_{N-1}, 1\}$ ως λύση εννοείται πως ισχύει $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{N-1} \leq 1$.

Οι καμπύλες μηδενικής στάθμης της $f_2(x, y)$ θα είναι συνεχείς, τμηματικά παραγωγίσιμες και τμηματικά μονότονες. Το σύνολο των ισομηρών διαμερίσεων για $N = 2$ τμήματα¹¹ ($G(y, 2)$) δίδονται από τα σημεία (x, y) των καμπύλων αυτών, διότι $\text{ισχύει } d(x, 0) = d(x, y)$ και $y \geq x$. Στο παρακάτω Λήμμα θα δείξουμε πως η μηδενική ισοστάθμη της $f_2(x, y)$ δεν περιέχει κάποιο χωρίο, επομένως μπορούμε να αναφερόμαστε πάντοτε σε καμπύλες.

Λήμμα 7 *Είναι αδύνατον τμήμα της μηδενικής στάθμης της $f_2(x, y)$ να είναι κάποιο χωρίο.*

Απόδειξη: Το παραπάνω θα αποδεικτεί με εις άτοπον απαγωγή. Αν υπήρχε τέτοια περίπτωση, θα έπρεπε να ισχύει το εξής:

- Έστω εσωτερικό σημείο του χωρίου (x_0, y_0) , τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ τ.ώ. για κάθε $x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ και $y \in [y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$ να ισχύει $d(x, 0) = d(x, y)$. Κάτι τέτοιο σημαίνει πως $|C(y_0) - C(x_0)| = |C(y) - C(x_0)|$ για κάθε $y \in [y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$. Άρα για κάθε $y \in [y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$, τα σημεία $C(y)$, ανήκουν σε κυκλικό τόξο κέντρου $C(x_0)$.
- Επίσης ισχύει $|C(y_0) - C(x_0 + \frac{\varepsilon}{2})| = |C(y) - C(x_0 + \frac{\varepsilon}{2})|$ για κάθε $y \in [y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$. Άρα για κάθε $y \in [y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$, τα σημεία $C(y)$, ανήκουν σε κυκλικό τόξο κέντρου $C(x_0 + \frac{\varepsilon}{2})$.

Για να ισχύει κάτι τέτοιο πρέπει να ισχύει $C(x_0 + \frac{\varepsilon}{2}) = C(x_0)$, άτοπον αφού η καμπύλη $C(t)$ από υπόθεση δεν περιέχει κύκλους.

Βέβαια, ακόμα και στην περίπτωση που υπήρχε τέτοιο χωρίο στο οποίο η $h_2(s)$ δεν μπορεί να οριστεί, στην περίπτωση αυτή μπορεί να βρεθεί καμπύλη εντός του χωρίου που αν συνδεθεί με την εξωτερική καμπύλη η τελική καμπύλη που θα προκύψει θα ικανοποιεί τις συνθήκες τμηματικής παραγωγισμότητας και συνέχειας.

Έστω $h_2(s) = [a_2(s), b_2(s)]$, $s \in [0, 1]$ η καμπύλη μηδενικής στάθμης της $f_2(x, y)$, που έχει αφετηρία το $[0, 0]$ ($h_2(0) = [0, 0]$), επειδή τα σημεία της βρίσκονται στο πεδίο ορισμού της f_2 ισχύει $a_2(s) \leq b_2(s)$. Καταρχήν, υπάρχει τέτοια καμπύλη αφού $f_2(0, 0) = 0$. Με το παρακάτω Λήμμα θα δείξουμε πως η $h_2(s)$ θα τερματίσει στην $y = 1$, δηλαδή $b_2(1) = 1$.

Λήμμα 8 *H καμπύλη $h_2(s)$ θα τερματιστεί στην $y = 1$, δηλαδή $b_2(1) = 1$.*

Απόδειξη:

- Κοντά στο $(0, 0)$ η $C(t)$ έχει μοναδική λύση¹², επομένως η $g_2(s)$ είναι αδύνατο να είναι κλειστή στο 0 (αν ήταν κλειστή, θα σήμαινε πως κοντά στο 0 θα είχαμε 2 λύσεις).
- Επίσης, επειδή ισχύει $f_2(x, x) = d(x, x) - d(x, 0) = -d(x, 0) < 0$, $x > 0$ και η $f_2(0, y) = d(0, y) - d(0, 0) = d(0, y) > 0$, $y > 0$, η $h_2(s)$ δε θα έχει κανένα κοινό σημείο εκτός του $(0, 0)$ με την διαγώνιο $x = y$ και την $x = 0$. Με βάση το παραπάνω προκύπτει ότι κοντά στο $(0, 0)$, η $f_2(x, y)$ θα αλλάζει πρόσημο, εκατέρωθεν της $h_2(s)$.

¹¹Στην ειδική περίπτωση $N = 1$, η καμπύλη διαδρομής επί της $d(x, y)$, $h_1(s) = [a_1(s) = s, 0]$ δίνει τα σημεία που ‘χωρίζουν’ την $C(t)$ σε ένα τμήμα.

¹²Το παραπάνω ισχύει, γιατί κοντά στο 0, αφού η καμπύλη είναι τμηματικά μονότονη και παραγωγίσιμη, μπορεί να προσεγγιστεί με ευθύγραμμο τμήμα στο οποίο ισχύει το παραπάνω.

θα δείξουμε με τη μέθοδο της εις άτοπον απαγωγής πως η $h_2(s)$ είναι αδύνατο να σταματήσει κάπου εντός του $(0, 1)^2$. Έστω πως τερματίζει στο σημείο $(x_0, y_0) \in (0, 1)^2$, τότε υπάρχει $E > 0$ μικρό τ.ώ. για κάθε $\varepsilon < E > 0$ οι κύκλοι $O((x_0, y_0), \varepsilon) \in [0, 1]^2$ έχουν ακριβώς ένα σημείο τομής με την καμπύλη $h_2(s)$. Θεωρώ την συνάρτηση $f_o(w) = f_2(x_0 + \varepsilon \cos(w), y_0 + \varepsilon \sin(w))$, $w \in [0, 2\pi]$, περιορισμό της f_2 πάνω στον κύκλο $O((x_0, y_0), \varepsilon)$. Υπάρχουν σημεία του κύκλου $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ με $x_1 = x_0 + \varepsilon \cos(w_1), y_1 = y_0 + \varepsilon \sin(w_1), x_2 = x_0 + \varepsilon \cos(w_2), y_2 = y_0 + \varepsilon \sin(w_2)$ με $f_o(w_1) = f_2(x_1, y_1) \geq 0$ και $f_o(w_2) = f_2(x_2, y_2) < 0$ λόγω του ότι το σημείο $f_2(x_0, y_0) = 0$, $f_2(x, y)$ συνεχής. Επειδή η $f_o(w)$ είναι συνεχής, από θεώρημα BOLZANO, θα υπάρχουν πάνω στον κύκλο τουλάχιστον δύο σημεία $(x_3, y_3), (x_4, y_4)$ τ.ώ. να ισχύει $f_2(x_3, y_3) = 0, f_2(x_4, y_4) = 0$ (Σχήμα 2.10(a')), τα σημεία αυτά όμως εξ' ορισμού τους θα πρέπει να ανήκουν στην $h_2(s)$ (αφού θα βρίσκονται οσοδήποτε κοντά στο (x_0, y_0)). Αυτό όμως είναι άτοπον, γιατί έχουμε υποθέσει πως ο κύκλος έχει ένα σημείο τομής με την καμπύλη $h_2(s)$, ενώ αποδείξαμε πως θα έπρεπε να έχει τουλάχιστον δύο.

Έχουμε ήδη δείξει (Λήμα 7) πως οι ισοσταθμικές δεν έχουν σημεία τομής με τη διαγώνιο ($x = y$) και την ευθεία ($x = 0$), άρα δεν τερματίζονται σε αυτές. Επομένως, για να δείξουμε πως η $h_2(s)$ θα τερματίστεί στην $y = 1$, αρκεί να δείξουμε πως είναι αδύνατον, η $h_2(s)$ να εγκλωβιστεί σε κάποιο εσωτερικό κύκλο. Καταρχήν, είναι αδύνατη η ύπαρξη κύκλου στην $h_2(s)$ σύμφωνα με το Λήμα 6. Επειδή, υπάρχει μια ισοδυναμία στην κατασκευή των συναρτήσεων διαδρομής επί της καμπύλης και της καμπύλης διαδρομής επί της επιφάνειας, ένας κύκλος επί της καμπύλης διαδρομής επί της επιφάνειας θα σήμαινε αντίστοιχο σημείο πάνω στη συνάρτηση διαδρομής όπου δύο διαδρομές θα έχουν κοινό σημείο, γεγονός αδύνατο να συμβεί από το Λήμα 6. Άλλα ακόμα και κάτι τέτοιο να συνέβαινε όπως φαίνεται και από το Σχήμα 2.10(β') οδηγούμαστε σε άτοπον, με τρόπο απόδειξης αντίστοιχο με εκείνου που χρησιμοποιήσαμε παραπάνω (Σχήμα 2.10(a')).

Στη συνέχεια θα δείξουμε πως υπάρχουν τα $\{t_1, t_2\}$ με $t_2 > t_1$ τ.ώ. να ισχύει η σχέση (2.5.3), επομένως το πρόβλημα έχει λύση για $N = 3$. Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση :

$$q(s) = d(a_2(s), b_2(s)) - d(1, b_2(s)), \quad s \in [0, 1] \quad (2.5.4)$$

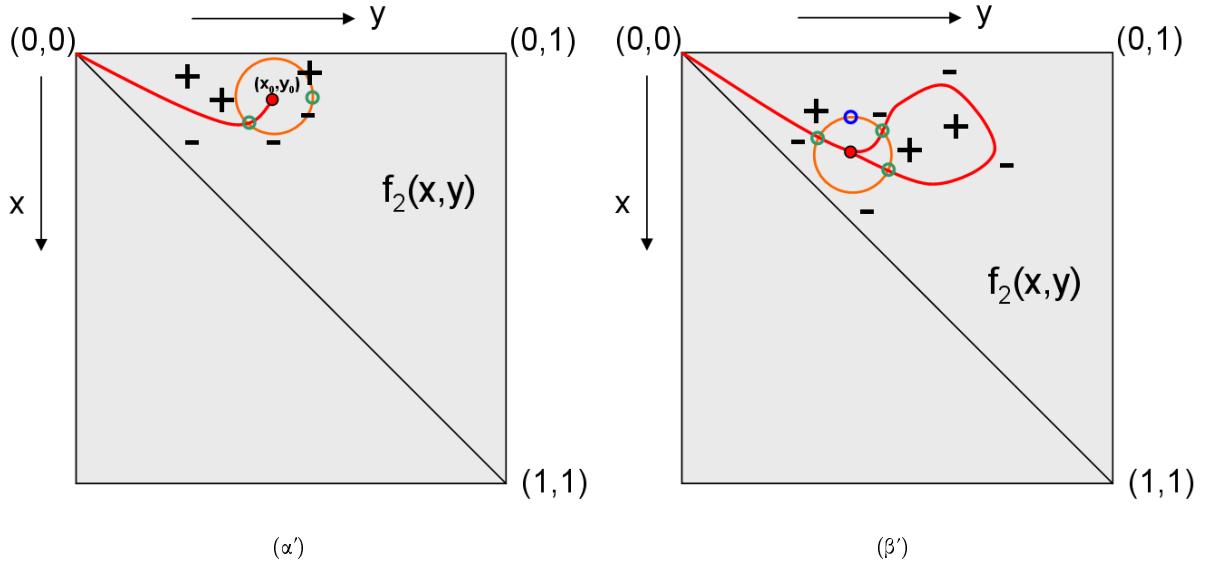
Ισχύει πως

- $q(0) = d(0, 0) - d(1, 0) = -d(1, 0) < 0$ και
- $q(1) = d(a_2(1), 1) - d(1, 1) = d(a_2(1), 1) > 0$

Με εφαρμογή του θεωρήματος BOLZANO, υπάρχει ένα τουλάχιστον $s_2 \in (0, 1)$ τ.ώ. $q(s_2) = 0$. Άρα, $d(a_2(s_2), b_2(s_2)) = d(1, b_2(s_2))$. Θέτω $t_2 = b_2(s_2)$ και $t_1 = a_2(s_2)$, ισχύει πως $t_2 \geq t_1$, $d(t_1, t_2) = d(t_2, 1)$. Το σημείο (t_1, t_2) επειδή είναι σημείο μηδενικής ισοστάθμης της f_2 ισχύει πως $d(t_1, t_2) = d(0, t_1)$. Επομένως βρέθηκαν τα $\{t_1, t_2\}$ με $t_2 \geq t_1$ τ.ώ. να ισχύει η σχέση (2.5.3) και το πρόβλημα έχει αποδειχτεί πλήρως για $N = 3$.

2.5.2 Απόδειξη Υπαρξής Λύσης για $N > 3$

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι πρόβλημα έχει λύση για περιπτώσεις $N > 3$, οι οποίες αντιμετωπίζονται με γενίκευση της παραπάνω μεθοδολογίας, και η απόδειξη μπορεί να γίνει επαγωγικά. Δηλαδή, διαθέτοντας τις



Σχήμα 2.10: (α'),(β') Τα πρόσημα των τιμών της $f_2(x, y)$ δεδομένης της $h_2(s)$ (κόκκινης γραμμής). (α') Είναι αδύνατο η $g_2(s)$ να σταματούσε στο $(x_0, y_0) \in (0, 1)^2$, διότι πρέπει να έχει τουλάχιστον δύο κοινά σημεία (πράσινοι κύκλοι) με τον κύκλο $O((x_0, y_0), \varepsilon)$, ενώ αν σταματούσε θα είχε μόνο ένα. (β') Είναι αδύνατο η $g_2(s)$ να εγκλωβίστει σε κάποιο κύκλο, διότι πρέπει να έχει τουλάχιστον τέσσερα κοινά σημεία με τον κύκλο $O((x_0, y_0), \varepsilon)$, ενώ αν εγκλωβίστει θα είχε μόνο τρία.

$h_k(s)$, $k \in U_N$, θα υπολογίσουμε την $h_{N+1}(s)$ και στη συνέχεια θα δείξουμε πως υπάρχουν $\{t_1, \dots, t_N, t_{N+1}\}$ τ.ώ. να ισχύει η σχέση (2.5.3). Αν η $f_N(x, y)$ είχε οριστεί με περιορισμό $y \geq x$ (περίπτωση που το N είναι περιττός στην απόδειξη μας), τότε η $f_{N+1}(x, y)$ θα οριστεί υπό τον περιορισμό $x \geq y$. Αλλιώς, αν η $f_N(x, y)$ είχε οριστεί με περιορισμό $y \leq x$ (περίπτωση που το N είναι άρτιος στην απόδειξη μας), τότε η $f_{N+1}(x, y)$ θα οριστεί υπό τον περιορισμό $x \leq y$. Παρακάτω θα θεωρήσουμε πως η $f_N(x, y)$ είχε οριστεί με περιορισμό $y \geq x$, οπότε η $f_{N+1}(x, y)$ θα οριστεί υπό τον περιορισμό $x \geq y$. Η απόδειξη στην αντίθετη περίπτωση είναι ακριβώς ίδια. Στην $h_N(s) = [a_N(s), b_N(s)]$ ισχύει,

$$a_N(s) < b_N(s), s \in (0, 1] \quad (2.5.5)$$

Έστω $\{s_0 = 0, s_1, \dots, s_{M-1}, s_M = 1\}$, $s_i > s_{i-1}$, $\forall i \in \{0, 1, \dots, M\}$ κατάλληλη διαμέριση της $h_N(s)$, τ.ώ. για κάθε $k \in U_M$ για τον περιορισμό της $\bar{h}_k^{p_k}(s) = [\hat{a}_k(s), \hat{b}_k(s)] = h_N(s)$, $s \in [s_{k-1}, s_k]$, να ισχύει

- είτε η $x = \hat{a}_k(s)$ να είναι γνησίως μονότονη ($p_k = +$)
- είτε η $y = \hat{b}_k(s)$ να είναι γνησίως μονότονη ($p_k = -$).

Θα ισχύει πάντοτε τουλάχιστον μία από τις δύο συναρτήσεις να είναι γνησίως μονότονη αφού η $h_N(s)$ είναι τυγματικά μονότονη. Επομένως, με την παραπάνω αλλαγή μεταβλητής και νέα παραμετρικοποίηση θα έχουμε,

- αν $p_k = +$, $\hat{h}_k^+(x) = [x, Y_k(x)]$, $[x : \hat{a}_k(s_{k-1}) \rightarrow \hat{a}_k(s_k)]$
- ενώ αν $p_k = -$, $\hat{h}_k^-(y) = [X_k(y), y]$, $[y : \hat{b}_k(s_{k-1}) \rightarrow \hat{b}_k(s_k)]$.

Η ένωση των $\hat{h}_k^{p_k}(x)$ θα δώσει την $h_N(s)$. Επειδή $x \geq y$, επιλέγουμε κατάλληλα την αρχική διαιμέριση ώστε να έχουμε $\forall k \in U_M$, $p_k = -$. Η μόνη περίπτωση, που δεν μπορεί να γίνει αυτό, είναι η περίπτωση κυκλικού τόξου, όπου για κάποιο $s \in [s_{k-1}, s_k]$ ισχύει $\hat{b}_k(s) = Y_k$ (σταθερή συνάρτηση). Στην περίπτωση αυτή, μόνο η $\hat{a}_k(s)$ θα είναι γνησίως μονότονη. Τελικά, γίνεται η διαιμέριση της καμπύλης σε M συναρτήσεις οι οποίες στα άκρα τους ανά δύο έχουν κοινά σημεία. Το παραπάνω μπορεί να γίνει γιατί η $h_N(s)$ είναι τυμηματικά μονότονη¹³.

Για κάθε $k \in U_M$ υπολογίζουμε, την $f_{N+1}(x, y)$ από την παρακάτω σχέση.

$$f_{N+1}(x, y) = \begin{cases} d(x, y) - d(X_k(y), y) & , p_k = -, [y : \hat{b}_k(s_{k-1}) \rightarrow \hat{b}_k(s_k)], x \geq y, X_k(y) \leq y \\ d(x, Y_k) - d(\dot{x}, Y_k) & , p_k = +, [\dot{x} : \hat{a}_k(s_{k-1}) \rightarrow \hat{a}_k(s_k)], y = Y_k, x \geq Y_k, \dot{x} \leq Y_k \end{cases} \quad (2.5.6)$$

Η συνάρτηση, $f_{N+1}(x, y)$ είναι συνεχής, τυμηματικά μονότονη, τυμηματικά παραγωγίσιμη επειδή στα όρια τους οι καμπύλες $\hat{h}_k^{p_k}(x)$ έχουν ανά δύο κοινά σημεία. Επομένως, οι καμπύλες μηδενικής στάθμης της $f_{N+1}(x, y)$ θα είναι συνεχείς και τυμηματικά μονότονες, τυμηματικά παραγωγίσιμες. Το σύνολο των ισομηκών διαιμερίσεων για $N+1$ τυμήματα ($G(x, N+1)$) δίδονται από τα σημεία (x, y) των καμπυλών αυτών, διότι ισχύει είτε,

- $d(X_k(y), y) = d(x, y)$ και $x \geq y$, και επαγωγικά τα σημεία $(X_k(y), y)$ ανήκουν στην καμπύλη μηδενικής στάθμης της $f_N(x, y)$ άρα ισχύει $G(y, N)$.
- Άν $d(x, Y_k) = d(\dot{x}, Y_k)$ και $x \geq Y_k$ (ειδική περίπτωση κυκλικού τόξου), και επαγωγικά τα σημεία (\dot{x}, Y_k) ανήκουν στην καμπύλη μηδενικής στάθμης της $f_N(x, y)$ άρα ισχύει $G(Y_k, N)$.

Με όμοιο τρόπο με το Λήμμα 7 μπορεί να αποδεικτεί πως η μηδενική ισοστάθμη της $f_{N+1}(x, y)$ δεν περιέχει κάποιο χωρίο, επομένως μπορούμε να αναφερόμαστε πάντοτε σε καμπύλες.

Έστω $h_{N+1}(s) = [a_{N+1}(s), b_{N+1}(s)]$, $s \in [0, 1]$ η καμπύλη μηδενικής στάθμης της $f_N(x, y)$, που έχει αφετηρία το $[0, 0]$ ($h_{N+1}(0) = [0, 0]$), επειδή τα σημεία της βρίσκονται στο πεδίο ορισμού της f_{N+1} ισχύει $a_{N+1}(s) \geq b_{N+1}(s)$. Καταρχήν, υπάρχει τέτοια καμπύλη αφού $f_{N+1}(0, 0) = 0$. Με το παρακάτω Λήμμα θα δείξουμε πως η $h_N(s)$ θα τερματίσει στην $x = 1$, δηλαδή $a_{N+1}(1) = 1$.

Λήμμα 9 Η καμπύλη $h_{N+1}(s)$ θα τερματιστεί στην $x = 1$, δηλαδή $a_{N+1}(1) = 1$.

Απόδειξη:

- Κοντα στο $(0, 0)$ η $C(t)$ έχει μοναδική λύση, επομένως η $h_{N+1}(s)$ είναι αδύνατο να είναι κλειστή στο 0 (αν ήταν κλειστή, θα σήμαινε πως κοντά στο 0 θα είχαμε 2 λύσεις).
- Επίσης, επειδή $f_{N+1}(x, x) = d(x, x) - d(X_k(x), x) = -d(X_k(x), x) < 0, x > 0$ (η μόνη περίπτωση να έχαμε 0 είναι να ισχύει $X_k(x) = x$, άτοπον γιατί στην $h_N(s)$ από επαγωγική υπόθεση δεν ανήκουν σημεία της διαγωνίου $x = y$) και η $f_{N+1}(x, 0) = d(x, 0) - d(0, 0) = d(x, 0) > 0, x > 0$ η $h_{N+1}(s)$ δε θα έχει κανένα κοινό σημείο εκτός του $(0, 0)$ με την διαγώνιο $x = y$ και την $x = 0$. Με βάση το παραπάνω προκύπτει ότι κοντά στο $(0, 0)$ η $f_{N+1}(x, y)$ θα αλλάξει πρόσημο εκατέρωθεν της $h_{N+1}(s)$.

¹³ Αν η $h_N(s)$ είναι μόνο τυμηματικά παραγωγίσιμη (όχι τυμηματικά μονότονη) τότε το $M \rightarrow \infty$.

- Στην ειδική περίπτωση κυκλικού τόξου έχουμε, $f_{N+1}(x, x) = d(x, x) - d(\dot{x}, Y_k) = -d(\dot{x}, Y_k) < 0, \dot{x} > 0$ (η μόνη περίπτωση να είχαμε 0 είναι να ισχύει $\dot{x} = Y_k$, άτοπον γιατί στην $h_N(s)$ από επαγωγική υπόθεση δεν ανήκουν σημεία της διαγωνίου $x = y$) και η $f_{N+1}(x, 0) = d(x, 0) - d(\dot{x}, 0) = d(x, 0) - d(0, 0) = d(x, 0) > 0, x > 0$ (από Σχέση 2.5.5 και επειδή $Y_k = 0$ έχουμε $\dot{x} = 0$) η $h_{N+1}(s)$ δε θα έχει κανένα κοινό σημείο εκτός του $(0, 0)$ με την διαγώνιο $x = y$ και την $x = 0$. Με βάση το παραπάνω προκύπτει ότι κοντά στο $(0, 0)$ η $f_{N+1}(x, y)$ θα αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν της $h_{N+1}(s)$.

Η απόδειξη ότι είναι αδύνατο να σταματήσει κάπου εντός του $(0, 1)^2$ είναι ακριβώς όμοια με εκείνη του αντίστοιχου Λήμματος 9 για $N = 3$.

Τέλος, θα δείξουμε πως υπάρχουν τα $\{t_1, t_2, \dots, t_N, t_{N+1}\}$ με $t_k > t_{k-1}$ τ.ώ. να ισχύει η σχέση (2.5.3), επομένως το πρόβλημα έχει λύση για $N + 2$ τμήματα. Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση :

$$q(s) = d(a_{N+1}(s), b_{N+1}(s)) - d(a_{N+1}(s), 1), \quad s \in [0, 1] \quad (2.5.7)$$

Ισχύει πως :

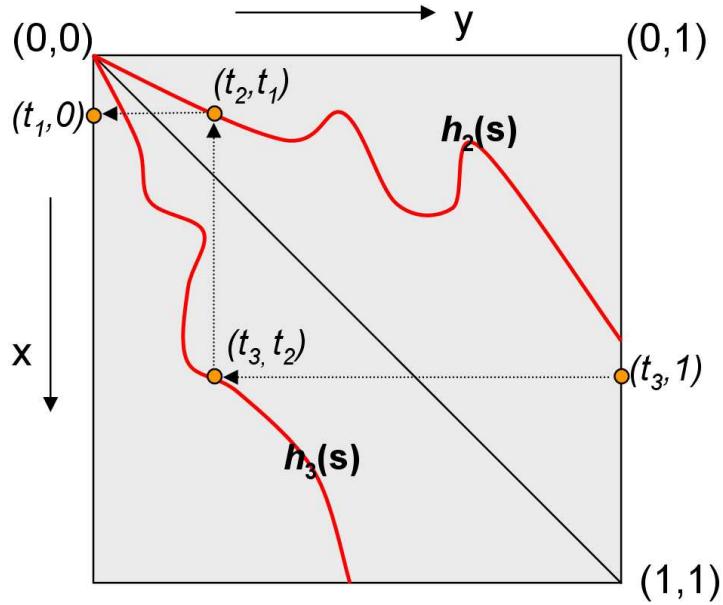
- $q(0) = d(0, 0) - d(0, 1) = -d(0, 1) < 0$ και
- $q(1) = d(1, b_{N+1}(1)) - d(1, 1) = d(1, b_{N+1}(1)) > 0$

Με εφαρμογή του θεωρήματος *BOLZANO*, υπάρχει ένα τουλάχιστον $s_{N+1} \in (0, 1)$ τ.ώ. $q(s_{N+1}) = 0$. Άρα, $d(a_{N+1}(s_{N+1}), b_{N+1}(s_{N+1})) = d(a_{N+1}(s_{N+1}), 1)$. Θέτω $t_{N+1} = a_{N+1}(s_{N+1})$ και $t_N = b_{N+1}(s_{N+1})$, ισχύει πως $t_{N+1} \geq t_N$, $d(t_{N+1}, t_N) = d(t_{N+1}, 1)$. Επειδή το σημείο (t_{N+1}, t_N) είναι σημείο μηδενικής ισοστάθμης της f_{N+1} ισχύει πως υπάρχει κάποιο $k \in U_M$ με $t_{N-1} = X_k(t_N) \leq t_N$ με $d(t_{N+1}, t_N) = d(t_{N-1}, t_N)$. Το παραπάνω μπορεί να εφαρμοστεί αναδρομικά στις προηγούμενες επιφάνειες $f_{N-i}(x, y), i \in \{0, 1, 2, \dots, N-2\}$ στις οποίες θα ισχύει $(d(t_{N-i}, t_{N-i-1}) = d(t_{N-i-2}, t_{N-i-1}))$ και έτσι να βρεθούν τα $\{t_1, t_2, \dots, t_N, t_{N+1}\}$ τ.ώ. να ισχύει η σχέση (2.5.2) (Σχήμα 2.11). Επομένως το πρόβλημα έχει αποδειχτεί για κάθε N .

Στο Σχήμα 2.12 εικονίζονται οι γραφικές παραστάσεις των επιφανειών, $d(x, y)$, για διάφορες καμπύλες και οι διαδρομές $h_N(s)$, που προκύπτουν από την εφαρμογή της μεθόδου απόδειξης, που περιγράψαμε στο τμήμα αυτό.

2.5.3 Απόδειξη Έπαρξης Σημείου Συσσώρευσης

Στη συνέχεια, θα αποδειχτεί πως αν δύο καμπύλες βρίσκονται οσοδήποτε κοντά μεταξύ τους, τότε κάθε λύση του προβλήματος που υπολογίζει ο κατασκευαστικός αλγόριθμος (και για κάθε N) θα πλησιάζει με την αντίστοιχη της, επίσης, οσοδήποτε κοντά. Το παραπάνω γεγονός μπορεί να εφαρμοστεί σε κάποια καμπύλη που υέλουμε να την προσεγγίσουμε για παράδειγμα με πολυγωνικές, στις οποίες μπορούμε γρήγορα να υπολογίσουμε τις λύσεις, επομένως καθώς η πολυγωνική προσέγγιση πλησιάζει την καμπύλη τότε και η λύση στην πολυγωνική θα συγκλίνει στην πραγματική λύση για την αρχική καμπύλη.



Σχήμα 2.11: Παράδειγμα τμηματοποίησης καμπύλης σε 4 τμήματα με χρήση της $d(x, y)$, όπου φαίνεται ο αναδρομικός υπολογισμός των $\{t_1, t_2, t_3\}$ και οι ισοσταθμικές καμπύλες $h_2(s), h_3(s)$.

Καταρχήν, οι λύσεις που προκύπτουν με τον κατασκευαστικό αλγόριθμο (τμήμα 2.4), προκύπτουν με ακριβώς αντίστοιχο τρόπο (είναι ισοδύναμες) με την χρήση της επιφάνειας $d(x, y)$ και τη μέθοδο που είδαμε παραπάνω. Η συνάρτηση διαδρομής $g_N(s)$ και η καμπύλης διαδρομής $h_N(s) = [a_N(s), b_N(s)]$ σχετίζονται άμεσα μεταξύ τους, μάλιστα η $g_N(\frac{s}{S_N})^{14}$ είναι ίση με τη συνάρτηση $a_N(s)$, αν το N είναι ζυγός και με τη συνάρτηση $b_N(s)$ αν το N είναι μονός. Το παραπάνω ισχύει για $N = 1, 2$ και επαγωγικά ισχύει για κάθε N , αφού στην τα σημεία της $g_{N+1}(s)$ προκύπτουν με όμοιο τρόπο (απέχουν από την προηγούμενη λύση όσο η προηγούμενη από την αμέσως προηγούμενη) με εκείνα της $\max(a_N(s), b_N(s))$ και προφανώς ισχύει $h_N(0) = [0, 0], g_N(0) = 0$. Από τα παραπάνω προκύπτει άμεσα πως η συνάρτηση ακτίνας $r_N(\frac{s}{S_N})$ είναι ίση με τη συνάρτηση $d(a_N(s), b_N(s))$. Επομένως, αν αποδείξουμε την παραπάνω πρόταση, χρησιμοποιώντας ως μέθοδο υπολογισμού οποιαδήποτε από τις δύο, αυτόματα θα ισχύει για τις λύσεις που υπολογίζονται με την άλλη μέθοδο. Η πρόταση θα αποδεικτεί στο παρακάτω λήμμα με τη χρήση της επιφάνειας $d(x, y)$.

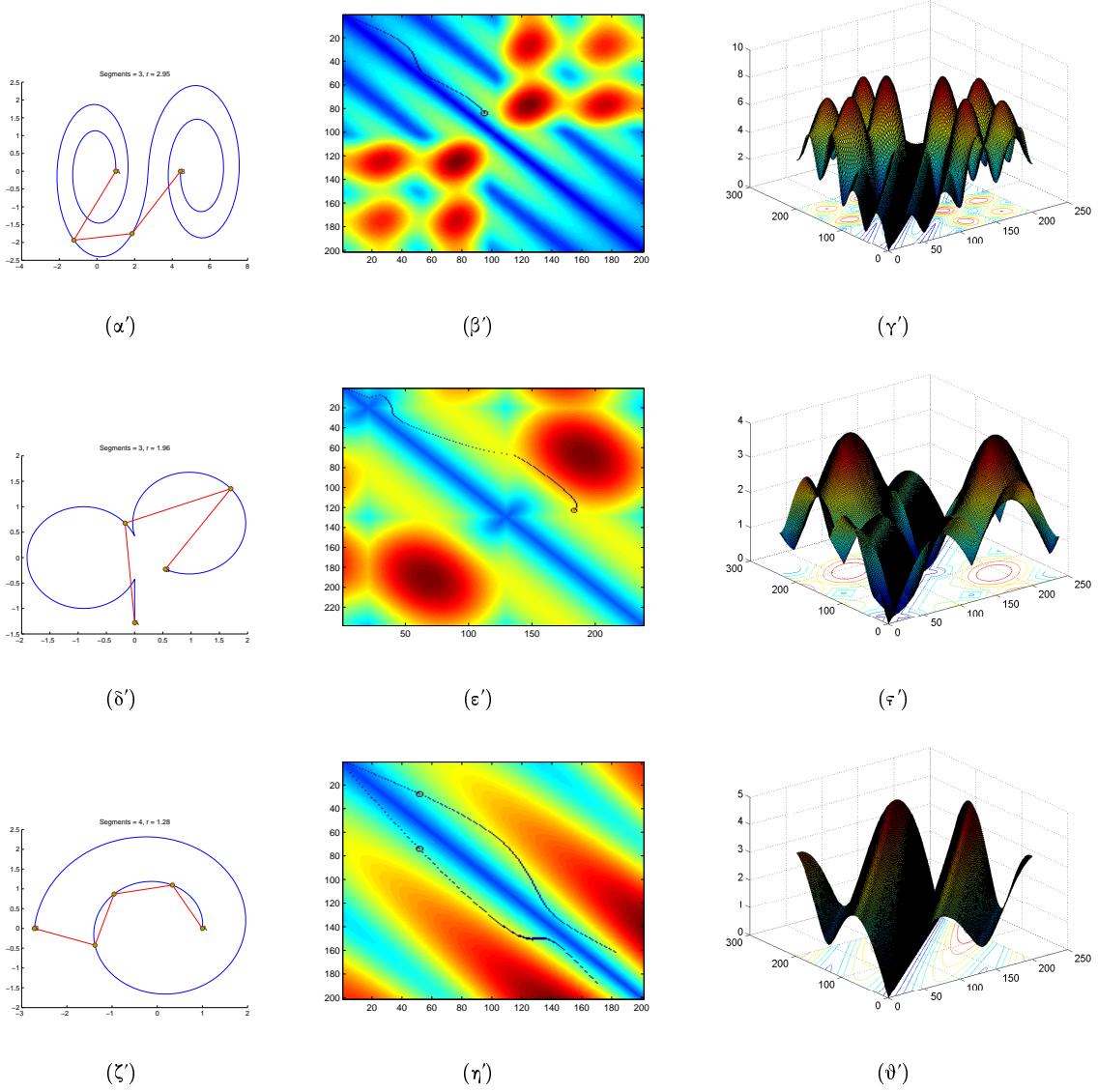
Λήμμα 10 Εστω $C(t), \hat{C}(t)$ κατάλληλες καμπύλες που έχει λύση το πρόβλημα, στις οποίες ισχύει, για $\varepsilon > 0$ μικρό, $\forall t \in [0, 1]$, $|\hat{C}(t) - C(t)| < \varepsilon$. Τότε για σταθερά c ισχύει πως $|G(1, N) - \hat{G}(1, N)| < c\varepsilon$ με τις $G(1, N), \hat{G}(1, N)$ να είναι αντίστοιχες λύσεις των $C(t), \hat{C}(t)$.

Απόδειξη:

Καταρχήν, όσον αφορά τους συμβολισμούς, επειδή υπάρχουν δύο καμπύλες, τα σύμβολα για την $C(t)$ παραμένουν αυτά που έχουμε ήδη ορίσει στο προηγούμενο τμήμα, ενώ για την $\hat{C}(t)$ είναι τα ίδια με την προσθήκη του συμβόλου¹⁴. Αν δείξουμε $\forall N$ πως

$$|h_N(s) - \hat{h}_N(s)| < c_1\varepsilon \quad (2.5.8)$$

¹⁴Η κανονικοποίηση με το S_N γίνεται επειδή στην $h_N(s)$ το $[s : 0 \rightarrow 1]$ ενώ στην $g_N(s)$ το $[s : 0 \rightarrow S_N]$.



Σχήμα 2.12: Οι επιφάνειες $d(x, y)$ (γ'), (ς'), (ϑ') για διάφορες καμπύλες (α'), (δ'), (ζ') και οι διαδρομές $h_N(s)$ (β'), (ϵ'), (η') που προκύπτουν από την εφαρμογή της μεθόδου απόδειξης, αντίστοιχα. Οι λύσεις έχουν σημειωθεί με κόκκινους κύκλους. Στις επιφάνειες, το μπλε χρώμα αντιστοιχεί σε μικρές αποστάσεις (κοντά στο 0) και το καφέ στις μεγαλύτερες.

τότε ισχύει $|q_N(s) - \hat{q}_N(s)| = |d(a_N(s), b_{N+1}(s)) - d(a_N(s), 1) - d(\hat{a}_N(s), \hat{b}_N(s)) + d(\hat{a}_N(s), 1)| < c_2\varepsilon$, áρα

$$|q_N(s) - \hat{q}_N(s)| < c_2\varepsilon \quad (2.5.9)$$

Θα υπάρχουν ρίζες στη συνάρτηση $q_N(s)$ εκατέρωθεν στις οποίες θα αλλάζει πρόσημο (θα υπάρχουν πάντοτε τέτοιες, από χρήση θεωρήματος BOLZANO στην αρχική απόδειξη, $q_N(0) \cdot q_N(1) < 0$), έστω s_N μια τέτοια. Ισχύει $q_N(s_N) = 0$ και (χωρίς βλάβη της γενικότητας) για κάθε $E > 0$ μικρό επειδή $q_N(s)$ τμηματικά παραγωγίσιμη, μονότονη και συνεχής,

$$q_N(s_N - E) < c_3E \quad q_N(s_N + E) > c_3E^{15} \quad (2.5.10)$$

Θα δείξουμε πως η \hat{q}_N θα εμφανίσει ρίζα οσοδήποτε κοντά στην s_N . Για κάθε $E = \frac{c_2}{c_3}\varepsilon$, ισχύει λόγω των σχέσεων (2.5.9), (2.5.10) πως η $\hat{q}_N(s_N + E) \cdot \hat{q}_N(s_N - E) < 0$, áρα από θεώρημα BOLZANO η αντίστοιχη ρίζα \hat{s}_N της $\hat{q}_N(s)$ θα βρίσκεται στο διάστημα $(s_N - \frac{c_2}{c_3}\varepsilon, s_N + \frac{c_2}{c_3}\varepsilon)$. Επομένως, οσοδήποτε κοντά στην s_N καθώς το $\varepsilon \rightarrow 0$. Αναδρομικά, ισχύει το ίδιο και για τις υπόλοιπες σημεία της λύσης, αρκεί να δείξουμε πως ισχύει η σχέση (2.5.8) για κάθε N .

Η απόδειξη θα γίνει επαγγειακά ως προς N . Θα εξετάσουμε την περίπτωση για $N = 2$. Καταρχήν ισχύει $\forall(x, y) \in [0, 1] |d(x, y) - \hat{d}(x, y)| < 2\varepsilon \Rightarrow |f_2(x, y) - \hat{f}_2(x, y)| < 4\varepsilon$. Επειδή, οι $f_2(x, y)$, $\hat{f}_2(x, y)$ βρίσκονται οσοδήποτε κοντά και στις μηδενικές στάθμες των $h_2(s)$, $\hat{h}_2(s)$ οι επιφάνειες αλλάζουν εκατέρωθεν τους πρόσημους, με απόδειξη όμοια με την παραπάνω μπορούμε να δείξουμε πως $|h_2(s) - \hat{h}_2(s)| < c_4\varepsilon$.

Θα θεωρήσουμε δεδομένο πως ισχύει για N , και θα δείξουμε πως $|h_{N+1}(s) - \hat{h}_{N+1}(s)| < c_7\varepsilon$. Έχουμε υποθέσει ότι ισχύει,

$$|f_N(x, y) - \hat{f}_N(x, y)| < c_5\varepsilon \quad |h_N(s) - \hat{h}_N(s)| < c_6\varepsilon \quad (2.5.11)$$

Καταρχήν έχουμε $|f_{N+1}(x, y) - \hat{f}_{N+1}(x, y)| = |d(x, y) - d(x, X_k(x)) - \hat{d}(x, y) - \hat{d}(x, \hat{X}_k(x))| < c_8\varepsilon$, οι $d(x, y), \hat{d}(x, y)$ και οι $X_k(x)$, $\hat{X}_k(x)$ είναι επίσης οσοδήποτε κοντά από επαγγειακή υπόθεση. Η $h_{N+1}(s)$ προκύπτει από τη μηδενική στάθμη της $f_N(x, y)$ που περνάει από το $[0, 0]$, και εκατέρωθεν της $h_{N+1}(s)$ η $f_{N+1}(x, y)$ θα αλλάζει πρόσημο. Επειδή η $\hat{f}_{N+1}(x, y)$ θα βρίσκεται οσοδήποτε κοντά στην $f_{N+1}(x, y)$ και επειδή εκατέρωθεν της $h_{N+1}(s)$, η $f_{N+1}(x, y)$ θα αλλάζει πρόσημο, η μηδενική στάθμη της $\hat{f}_{N+1}(x, y)$ θα βρίσκεται οσοδήποτε κοντά στην $h_{N+1}(s)$. Επομένως αποδείχθηκε.

¹⁵Για να ισχύει η σχέση αυτή θα πρέπει η $q_N(s)$ να μην μηδενίζεται σε κάποιο διάστημα. Στην ειδική περίπτωση που η $q_N(s)$ μηδενίζεται σε κάποιο διάστημα, σε περιπτώσεις που έχουμε άπειρες λύσεις (Σχήμα 3.2), επειδή η $q_N(s)$ θα αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του διαστήματος μηδενισμού, η $\hat{q}_N(s)$ θα μηδενιστεί σε τιμή

- είτε μέσα στο παραπάνω διάστημα (οπότε $s_N = \hat{s}_N$),
- είτε σε θέση οσοδήποτε κοντά στο διάστημα αυτό, οπότε υπάρχει κατάλληλο s_N (ένα από τα δύο άκρα του διαστήματος) που θα είναι οσοδήποτε κοντά στο \hat{s}_N .

Κεφάλαιο 3

Προσεγγιστικός Αλγόριθμος

Στο τμήμα αυτό θα περιγραφεί ο προτεινόμενος προσεγγιστικός αλγόριθμος που υπολογίζει προσεγγιστικά όλες τις λύσεις του προβλήματος δοσμένης της καμπύλης και του N . Οι λύσεις που υπολογίζονται ανήκουν σε μια δειγματοληφία της καμπύλης, και αποτελούν τα σημεία εκείνα που ελαχιστοποιούν τη διασπορά του μήκους των κατά προσέγγιση ίσων τμημάτων. Τα εκτιμώμενα ευθύγραμμα τμήματα πιθανόν να μην είναι ίσα μεταξύ τους, διότι η επιλογή των σημείων γίνεται από το πεπερασμένο σύνολο μιας δειγματοληφίας της καμπύλης, όμως θα είναι βέλτιστα ως λύσεις από τις διαμερίσεις που υπάρχουν μέσα στο σύνολο αυτό.

Το πλεονέκτημα της μεθόδου είναι ότι υπολογίζει όλες τις δυνατές λύσεις σχετικά σύντομα. Ως μειονέκτημα, μπορεί να θεωρηθεί το γεγονός, ότι κάποια από τις λύσεις που υπολογίζονται μπορεί στην πραγματικότητα να μην υπάρχει, αλλά να εμφανίζεται ως κάποιο τοπικό ελάχιστο στο οποίο τα υπολογιζόμενα τμήματα να έχουν σχεδόν το ίδιο μήκος. Βέβαια οι περιπτώσεις αυτές στην πράξη μπορούν να θεωρηθούν σπάνιες. Ένα κριτήριο που επιβεβαιώνει πως ‘πολύ κοντά’ στη προσεγγιστική λύση βρίσκεται η πραγματική είναι να εκτελεστεί ο αλγόριθμος καθόδου κατά την κλίση, που παρουσιάζεται στο κεφάλαιο 4, με αρχικοποίηση την προσεγγιστική λύση και εκείνος να συγκλίνει στη πραγματική. Επίσης εξετάζεται η συμπεριφορά του αλγορίθμου καθώς το N αυξάνει, ως προς τον αριθμό των πραγματικών λύσεων του προβλήματος αλλά και τον αριθμό των δειγμάτων της καμπύλης K . Το σφάλμα της προσέγγισης εξαρτάται από τον βαθμό δειγματοληφίας, και το N . Μάλιστα το σχετικό σφάλμα της εκίμησης του μήκους τμήματος στην περίπτωση που η δειγματοληφία είναι ομοιόμορφη πάνω στην καμπύλη είναι ανάλογο του λόγου $\frac{N}{K}$.

3.1 Προτεινόμενος Αλγόριθμος

Στη συνέχεια θα περιγραφεί ο προσεγγιστικός αλγόριθμος. Έστω $C(t_k), k \in \{1, 2, \dots, K\}$ μια δειγματοληφία της καμπύλης $C(t)$. Έστω $S_j = \{t_i^j, i \in \{0, \dots, N\}, t_0^j = 0, t_N^j = 1\}$ μια διαμέριση (υποφήφια λύση) της σε N τμήματα. Τα N μήκη της διαμέρισης S_j δίδονται από τη σχέση $L(i)^j = |C(t_{i+1}^j) - C(t_i^j)|_2, i \in \{0, \dots, N-1\}$. Θεωρούμε ως σφάλμα E_j της διαμέρισης S_j τη διασπορά του μήκους των τμημάτων της. Αν η διασπορά είναι μηδέν, που είναι και η ελάχιστη τιμή της, τα μήκη θα γίνουν ακριβώς ίδια οπότε η διαμέριση αντιστοιχεί σε μία ακριβή λύση, ενώ καθώς αυξάνει η διασπορά θα αυξάνει και η απόσταση των μηκών από

την μέση τους τιμή και θα απομακρυνόμαστε από την πραγματική λύση. Σκοπός είναι να υπολογιστούν όλες οι λύσεις S_j που ικανοποιούν τις δύο παρακάτω συνθήκες

1. Να έχουν μικρό σφάλμα ($E_j < Threshold$).
2. Αν μεταβληθεί λίγο οποιοδήποτε σημείο της διαμέρισης $t_i^j = t_i^j + \varepsilon, |\varepsilon| < Threshold$ τότε η διαμέριση που αντιστοιχεί να έχει μεγαλύτερο ή ίσο σφάλμα από το E_j , δηλαδή η S_j να βρίσκεται σε τοπικό ελάχιστο.

Παρατηρούμε πως στο πρόβλημα θα μπορούσε να εφαρμοστεί κάποιος εξαντλητικός αλγόριθμος ο οποίος θα εξέταζε όλες τις δυνατές διαμερίσεις S_j και θα επέλεγε τελικά εκείνες που ικανοποιούν τις παραπάνω συνθήκες. Η πλοκή όπως και η μνήμη που απαιτείται για την εκτέλεση ενός τέτοιου αλγορίθμου θα ήταν $O(K^{N-1})$, γεγονός που κάνει αδύνατη την εφαρμογή ακόμα για $N = 4$. Σκοπός είναι να βρεθεί αλγόριθμος μικρότερης πλοκής που θα είναι υπολογιστικά εφικτός.

Ο προτεινόμενος αλγόριθμος αρχικά υπολογίζει όλες τις κατά προσέγγιση ισομήκης διαμερίσεις σε $N - 1$ τιμήματα και στην συνέχεια απορρίπτει όσες η απόσταση του άκρου τους από το B απέχει παραπάνω από κατώφλι από το μέσο μήκος των ευθυγράμμων τμημάτων τους. Για το μήκος τμήματος r_j των προσεγγιστικών λύσεων ισχύει $r_j \in [\frac{|A-B|_2}{N}, \frac{\int_0^1 |\dot{C}(u)|_2 du}{N}]$, κατώφλια που μπορούν να υπολογιστούν σε $O(K)$ και με την εφαρμογή χρήση τους να μειωθεί ο αριθμός πιθανών λύσεων. Ο αλγόριθμος αρχικά υπολογίζει τις αποστάσεις από A κάθε σημείου της καμπύλης, και στην συνέχεια υπολογίζει σταδιακά τα σημεία των διαμερίσεων ξεκινώντας από το δεύτερο μέχρι και το $N-1$. Τέλος από τις εκτιμώμενες διαμερίσεις επιλέγονται εκείνες που το $N - 1$ σημείο τους απέχει από το B όσο και το μέσο μήκος τμήματός τους, είναι θέσεις τοπικών ελάχιστων για την συνάρτηση E και η διασπορά των μηκών τους είναι μικρότερη από ένα κατώφλι. Παρακάτω περιγράφεται ο αλγόριθμος. Οι τελικές λύσεις βρίσκονται στο σύνολο \hat{S} . Ο πίνακας R περιέχει τα μήκη των τμημάτων, ενώ ο $W(k, i)$ περιέχει τον αριθμό των πιθανών λύσεων μέχρι και το i σημείο της διαμέρισης που έχουν μήκος πρώτου τμήματος $R(k)$.

Προσεγγιστικός Αλγόριθμος

$$R_{max} = \frac{curvelength}{N}$$

$$R_{min} = \frac{|A-B|_2}{N}$$

for k=1:K

$$R(k) = |A - C(t_k)|_2$$

$$S_k = \{t_k\}$$

$$W(k, 1) = 1$$

end

for k=1:K

$$\text{if } R(k) \in [R_{min}, R_{max}]$$

for i=2:N-1

$$W(k, i) = 0$$

for h=1:W(k,i-1)

$$U = \{u : (||C(u) - S_h(i-1)||_2 - R(k)) < Threshold\}$$

for each $u \in U$

$$W(k, i) = W(k, i) + 1$$

$$\hat{S}_{W(k,i)} = S_h \cup \{u\}$$

end

end

$$S = \hat{S}$$

end

end

end

$$\hat{S} = \{\}$$

for k=1:K

for h=1:W(k,N-1)

if $(||B - S_h(N-1)||_2 - R(k)) < Threshold$ and $(E_h < Threshold)$ and $(E_h \text{ is local minimum}^a)$

$$\hat{S} = \hat{S} \cup S_h$$

end

end

end

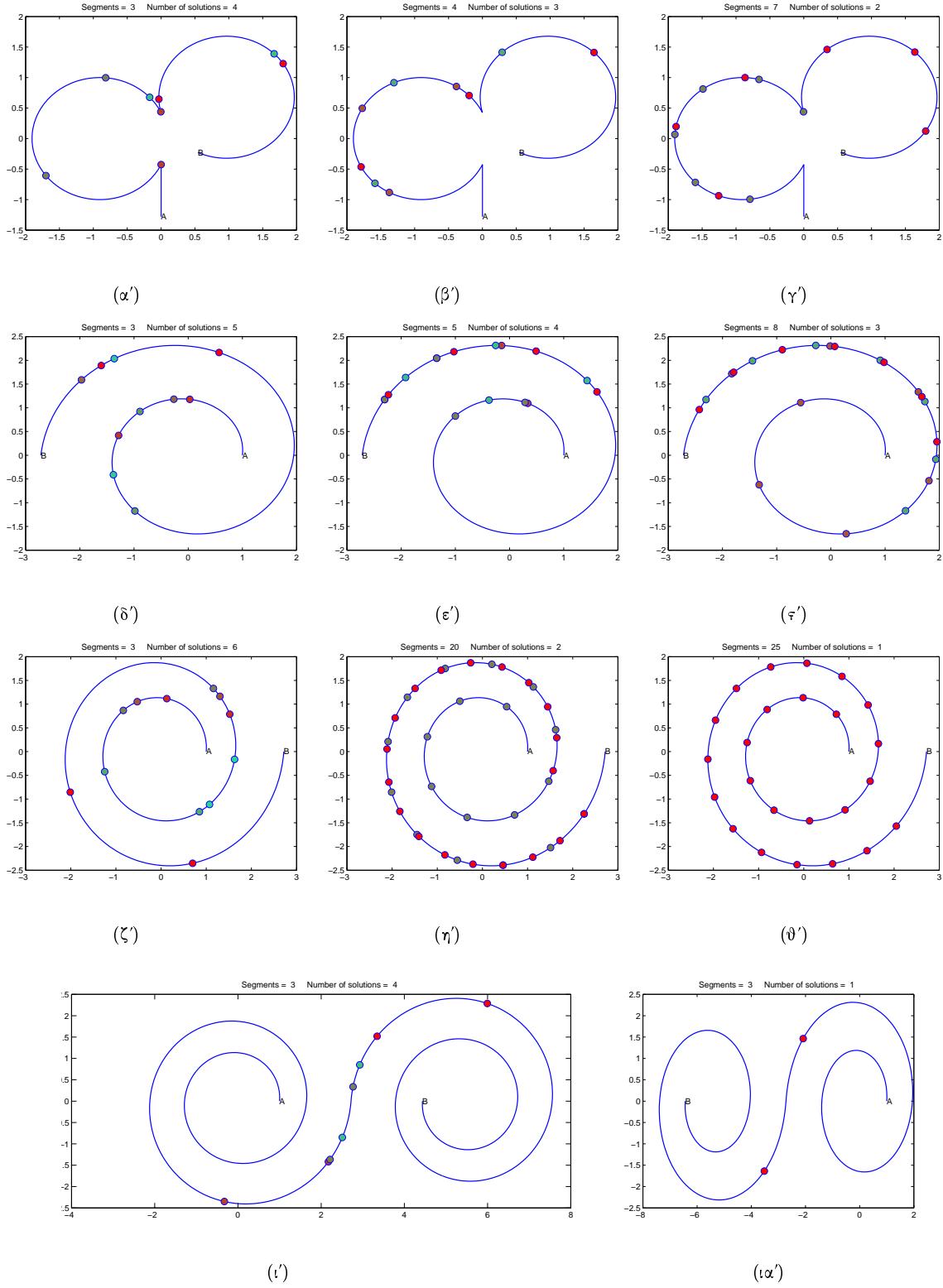
^aΗ συνθήκη αυτή υλοποιείται ως εξής, θα πρέπει το E_h να είναι μικρότερο ή ίσο από κάθε E_k με το S_k που βρίσκεται στην γειτονιά του S_h , δηλαδή τα S_k θα πρέπει να ικανοποιούν την συνθήκη $|S_h - S_k| < Threshold$.

3.2 Πλοκή Αλγορίθμου

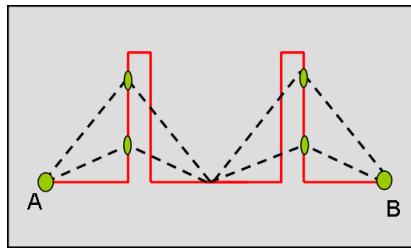
Η ταχύτητα εκτέλεσης του παραπάνω αλγορίθμου εξαρτάται από την Καμπύλη, τον αριθμό τμημάτων N και το πλήθος των δειγμάτων της K . Έστω $W = E_k(W(k, N - 1))$. Η πλοκή της αρχικοποίησης είναι $O(K)$, του μεσαίου βήματος είναι $O(KNW^2)$ και της εύρεσης των λύσεων είναι $O(KW)$. Η συνολική πλοκή είναι $O(K) + O(KNW^2) + O(KW) = O(KNW^2)$. Η μνήμη που απαιτείται είναι $O(KNW)$. Το $W < K$ πάντοτε αλλά αυξάνει καθώς αυξάνει το N και μάλιστα συνήθως με εκθετικό τρόπο $W \sim \frac{K2^N}{N}$. Επομένως, επειδή συνήθως το K είναι μεγάλο $K > 500$ και για μεγάλα N ($N > 30$), ο αλγόριθμος αρχίζει να απαιτεί μεγάλο ποσό μνήμης αλλά και χρόνου εκτέλεσης ενώ για μικρότερα N ο αλγόριθμος εκτελείται πάντοτε. Βέβαια για μεγάλα N το πρόβλημα έχει μία λύση που μπορεί να υπολογιστεί γρήγορα από τον αλγόριθμο καθόδου κατά την κλίση που περιγράφεται στο Κεφάλαιο 4. Η υλοποίηση του αλγορίθμου έγινε σε Matlab.

3.3 Αποτελέσματα

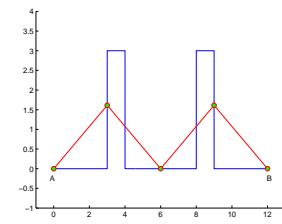
Στο τμήμα αυτό παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της προσεγγιστικής μεθόδου εύρεσης λύσεων για διάφορες καμπύλες και για διαφορετικά N (Σχήμα 3.1). Παρατηρούμε πως για μικρά N ο αριθμός των λύσεων είναι σχετικά μεγάλος, μετά από κάποιο N και μετά αρχίζει να μειώνεται και τελικά για μεγάλα N είναι πάντοτε ένα. Ο αριθμός των λύσεων και η συμπεριφορά τους καθώς αυξάνεται το N εξαρτώνται αποκλειστικά από την καμπύλη. Ειδική περίπτωση καμπύλης είναι η ευθεία γραμμή όπου υπάρχει μία και μοναδική λύση για κάθε N . Υπάρχουν και περιπτώσεις καμπυλών που για κάποια N εμφανίζονται άπειρες λύσεις, για παράδειγμα για $N = 2$, όταν η τομή της μεσοκαθέτου των A, B και της καμπύλης $C(t)$ είναι κάποιο ευθύγραμμο τμήμα. Στο Σχήμα 3.2 εμφανίζεται παράδειγμα καμπύλης που για $N = 4$ υπάρχουν άπειρες ισομήκεις διαμερίσεις.



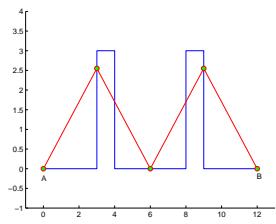
Σχήμα 3.1: Στα σχήματα εικονίζονται αποτελέσματα της προσεγγιστικής μεθόδου εύρεσης όλων των λύσεων. Τα σημεία με το ίδιο χρώμα στα σχήματα αντιστοιχούν σε σημεία της ίδιας διαμέρισης. Ο αριθμός των τυημάτων (N) αλλά και των λύσεων εμφανίζονται ως τίτλοι πάνω από κάθε σχήμα.



(α')



(β')



(γ')

Σχήμα 3.2: Καμπύλη που εμφανίζει άπειρες λύσεις για $N = 4$. Στα Σχήματα (β'), (γ') εικονίζονται 2 από αυτές.

Κεφάλαιο 4

Αλγόριθμος Καθόδου κατά την Κλίση

Στο τμήμα αυτό θα περιγραφεί ο προτεινόμενος αλγόριθμος βασισμένος στη μέθοδο καθόδου κατά την κλίση (steepest descent) που συγχλίνει σε μια λύση δοσμένης της καμπύλης, του N και μιας αρχικής τμηματοποίησης. Επειδή ο χώρος του προβλήματος ακόμα και κοντά σε λύσεις εμφανίζει συχνά ασυνέχειες, πολλές φορές είναι αδύνατο να υπάρχει σύγκλιση ακόμα και με οποιαδήποτε αρχικοποίηση οσοδήποτε κοντά στη λύση¹. Επίσης εξετάζεται η περίπτωση που η αρχική εκτίμηση που δίδεται στον αλγόριθμο να είναι πολύ μακριά από την πραγματική λύση. Η περίπτωση αυτή παρουσιάζει ιδιαίτερο θεωρητικό ενδιαφέρον αφού θα πρέπει η μέθοδος να διανύσει σημαντικό μέρος χώρου που περιέχει πιθανώς ασυνέχειες και τοπικά ελάχιστα για να καταλήξει στην πραγματική λύση. Στην περίπτωση αυτή προτείνεται μια έκδοση της μεθόδου που συνδυάζει τεχνικές γενετικών αλγορίθμων και τελικά συγχλίνει στη λύση. Μάλιστα επειδή ο προσεγγιστικός αλγόριθμος για μεγάλο N (όπου πιθανόν να υπάρχει και μόνο μία λύση) καθυστερεί αρκετά να υπολογίσει την προσεγγιστική λύση, ο προτεινόμενος γενετικός αλγόριθμος να συγχλίνει ταχύτατα στην πραγματική λύση.

Το σημαντικό πλεονέκτημα της μεθόδου είναι ότι συγχλίνει με υψηλή ακρίβεια και σχετικά σύντομα σε μια πραγματική λύση. Μάλιστα όλα τα υπολογιζόμενα ευθύγραμμα τμήματα θα έχουν ακριβώς το ίδιο μήκος εκτός από το τελευταίο που θα έχει κατά ένα ελάχιστο ποσοστό², διαφορετικό. Η ταχύτητα εκτέλεσης του αλγορίθμου είναι ουσιαστικά ανεξάρτητη του μήκους της καμπύλης και του αριθμού των λύσεων³, εκείνο που την καθορίζει είναι πόσο κοντά βρίσκεται η αρχικοποίηση στη λύση κι αν το εμφανίζονται ασυνέχειες και τοπικά ελάχιστα καθώς κινούμαστε στο χώρο λύσεων του προβλήματος. Ως μειονέκτημα μπορεί να θεωρηθεί το γεγονός ότι υπάρχουν λύσεις που ο αλγόριθμος δεν μπορεί να υπολογίσει όσο κοντά κι να βρίσκεται η αρχικοποίηση. Το γεγονός αυτό οφείλεται στο διότι οι λύσεις αυτές εμφανίζονται με ασυνεχή τρόπο (Σχήμα

¹Η λύση με το μικρότερο μήκος τμήματος στο Σχήμα 3.1(α') είναι αδύνατο να υπολογιστεί με κάποιον αλγόριθμο τύπου καθόδου κατά την κλίση διότι αν μεταβάλουμε λίγο το μήκος τμήματος της λύσης (είτε το μεγαλώσουμε είτε το μειώσουμε) δεν υπάρχει κάποια διαμέριση που να βρίσκεται κοντά στη λύση αυτή.

²Το ποσοστό αυτό συγχλίνει στο 0

³Η πλοκή είναι ανάλογη του μήκους της καμπύλης και του N , όμως μπορεί να αυξηθεί κατά πολύ στην περίπτωση ασυνεχειών

;);.

4.1 Προτεινόμενος Αλγόριθμος

Στη συνέχεια θα περιγραφεί η απλούστερη έκδοση του αλγόριθμου καθόδου κατά την κλίση που απαιτεί η αρχικοποίηση να βρίσκεται σχετικά κοντά στην τελική λύση. Η αρχικοποίηση μπορεί να είναι μία λύση του προσεγγιστικού αλγόριθμου που περιγράφτηκε παραπάνω. Οι παράμετροι της αρχικοποίησης είναι το αρχικό μήκος r_0 των τμημάτων, τα σημεία των τμημάτων $u_k, k \in \{0, 1, \dots, N\}$, $u_0 = 0, u_N = 1$, η μέγιστη απόσταση της πραγματικής λύσης από τα σημεία των τμημάτων δ και το σφάλμα σύγκλισης T που είναι η απόσταση του τελευταίου σημείου της διαμέρισης από το B . Επίσης δίδεται ο ρυθμός προσαρμογής (learning rate) $0 < \lambda < 1$. Ο αλγόριθμος καθόδου κατά την κλίση θα περιοριστεί στην περιοχή κοντά στην αρχική προσέγγιση, με μέγιστη απόσταση ανά σημείο μικρότερη από το δ . Επομένως θα βρίσκεται στην περιοχή των διαμερίσεων $S_j = \{t_i^j, i \in \{0, \dots, N\}, t_0^j = 0, |C(t_i^j) - C(u_i)|_2 < \delta\}$. Η συνθήκη ώστε να εκτελεστεί με επιτυχία ο αλγόριθμος είναι στην περιοχή των διαμερίσεων S_j να μην υπάρχουν ‘ψεύτικες’ λύσεις, δηλαδή τοπικά ελάχιστα. Παρακάτω περιγράφεται ο αλγόριθμος. Η τελική διαμέριση δίδεται από τα σημεία P_i .

Αλγόριθμος Καθόδου κατά την Κλίση

```

 $s = r_0$ 
 $t_0 = 0$ 
 $P_0 = A$ 
Repeat
    for i=1:N
         $P_i = C(t_i) : (t_i > t_{i-1}) \wedge (|P_{i-1}P_i| = s) \wedge (|P_i - C(u_i)| < \delta)$  a'
    end
     $s = \begin{cases} s + \lambda \frac{|B-P_N|}{N}, & P_N \text{ βρίσκεται εντός της αρχικής καμπύλης } C(t) \\ s - \lambda \frac{|B-P_N|}{N}, & P_N \text{ βρίσκεται εκτός της αρχικής καμπύλης } C(t) \end{cases}$ 
Until  $|P_N - B| < T$ 

```

^{a'}Εάν δεν υπάρχει λύση, υπολογίζεται το P_i χρησιμοποιώντας την τεχνική mirroring προεκτείνοντας την καμπύλη, στην περίπτωση αυτή το P_i όπως και τα επόμενα από αυτό θα βρίσκονται εκτός αρχικής καμπύλης.

Η ταχύτητα εκτέλεσης του παραπάνω αλγόριθμου εξαρτάται από την καμπύλη, τον αριθμό τμημάτων N , το πόσο κοντά βρισκόμαστε στην τελική λύση και από το λ που καθορίζει την ταχύτητα σύγκλισης της μεθόδου. Για να εξασφαλιστεί ομαλή αλλά και ταυτόχρονα γρήγορη σύγκλιση προτιμάται το λ να ξεκινήσει μεγάλο $\lambda \approx 0.5$ και σταδιακά να μειώνεται μετά από λίγες επαναλήψεις να σταθεροποιηθεί σε $\lambda \approx 0.05$.

4.2 Προτεινόμενος Γενετικός Αλγόριθμος

Στο τμήμα αυτό εξετάζουμε μια επέκταση του αλγόριθμου καθόδου κατά την κλίση που δε χρειάζεται αρχικοποίηση. Το πρόβλημα έχει θεωρητικό ενδιαφέρον αφού θα πρέπει ο αλγόριθμος να περάσει από πιθανά τοπικά ελάχιστα και τελικά να καταλήξει σε κάποιο συνολικό. Αρχικά ξεκινούν δύο αλγόριθμοι καθόδου

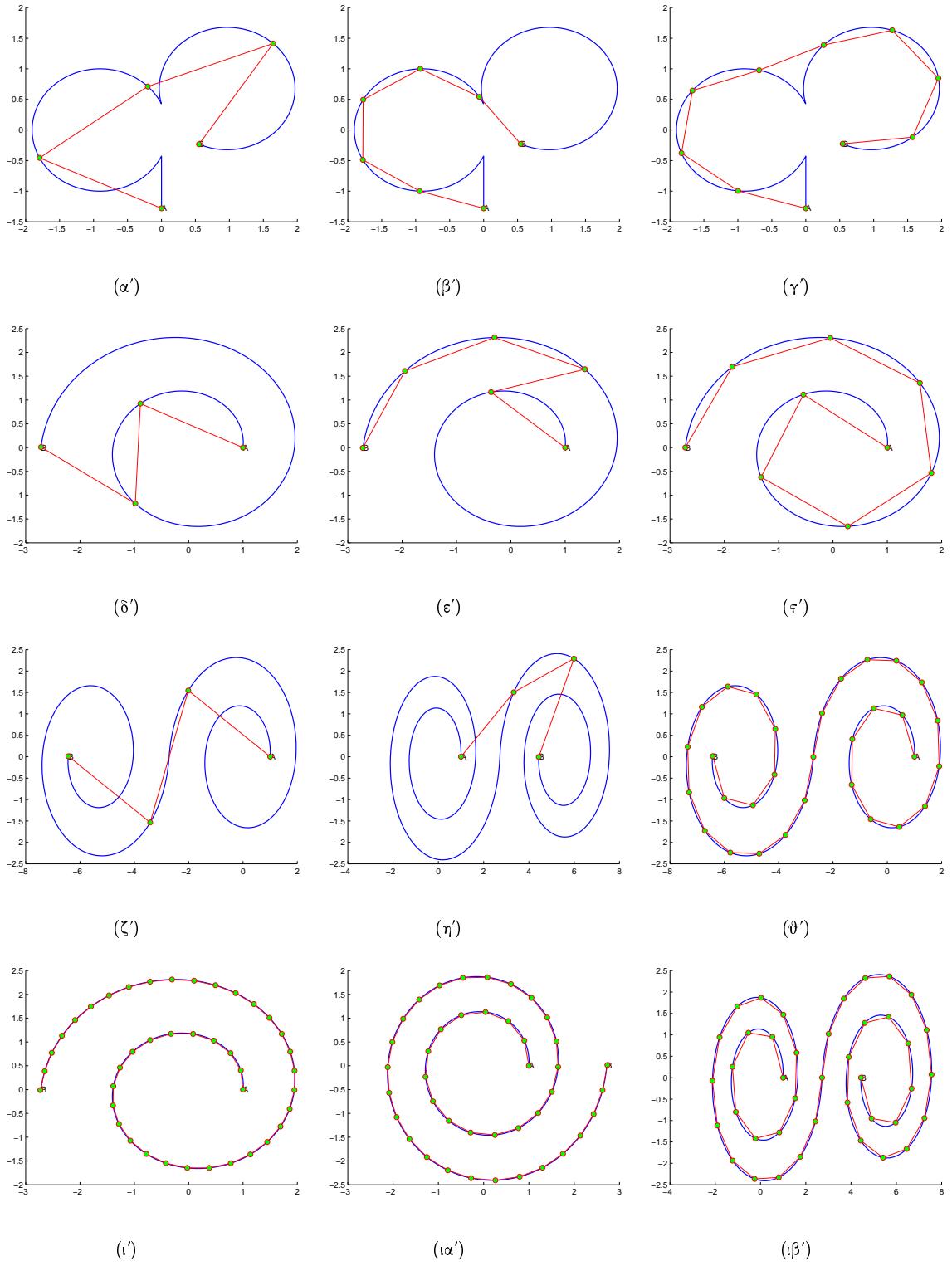
κατά την κλίση με μήκη τμήματος r_0, r_1 την ελάχιστη και τη μέγιστη δυνατή τιμή του μήκους τμήματος. Στη συνέχεια εκτελείται το επαναληπτικό μέρος της μεθόδου. Υπολογίζονται όλες οι δυνατές διαμερίσεις για τα αντίστοιχα μήκη τμήματος r που υπάρχουν, αν κάποια διαμέριση αποκλίνει μετά από πολλές επαναλήψεις διαγράφεται και αντικαθίσταται από μια νέα με τυχαίο μήκος τμήματος r . Επίσης νέες διαμερίσεις με τυχαίο μήκος τμήματος r δημιουργούνται ανά κάποιο αριθμό επαναλήψεων. Τα μήκη τμήματος r κάθε διαμέρισης ανανεώνονται κατάλληλα με αντίστοιχο τρόπο όπως στην απλή έκδοση του αλγορίθμου καθόδου κατά την κλίση. Ο αλγόριθμος τερματίζει όταν το άκρο κάποιας από τις διαμερίσεις βρίσκεται αρκετά κοντά στο B^4 .

Η ταχύτητα εκτέλεσης του παραπάνω αλγορίθμου εξαρτάται κυρίως από την καμπύλη και τον αριθμό τμημάτων N . Σε περιπτώσεις που στην καμπύλη υπάρχουν πολλά τοπικά ελάχιστα ο αλγόριθμος αργεί πολύ να συγκλίνει, ενώ στις περιπτώσεις που υπάρχει μία λύση (λ.χ. για μεγάλο αριθμό τμημάτων) ο αλγόριθμος συγκλίνει πάντα. Θεωρητικά, λόγω της χρήσης γενετικού αλγορίθμου, μετά από κάποιο αριθμό επαναλήψεων θα υπάρχει πάντοτε σύγκλιση, όμως συχνά ο αριθμός αυτός γίνεται πολύ μεγάλος, και στην πράξη δεν υφίσταται σύγκλιση. Αυτό συνήθως συμβαίνει στις περιπτώσεις που ο αριθμός των διαμερίσεων που εξετάζονται αυξάνεται πολύ. Μια παραλλαγή του αλγορίθμου που διορθώνει το παραπάνω πρόβλημα, επιταχύνοντας τη σύγκλιση, είναι να μην αφήνει να αυξάνονται απεριόριστα οι διαμερίσεις που εξετάζονται αλλά να υπάρχει ένα άνω όριο είτε το κριτήριο διαγραφής αλλά και εισαγωγής μιας διαμέρισης να γίνει αυστηρότερο.

4.3 Αποτελέσματα

Στο τμήμα αυτό παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του αλγορίθμου καθόδου κατά την κλίση, ο οποίος συγκλίνει ακριβώς σε μία λύση. (Σχήμα 4.1). Τα υπολογιζόμενα ευθύγραμμα τμήματα έχουν ακριβώς το ίδιο μήκος και μόνο το άκρο της διαμέρισης απέχει από το B ένα ελάχιστο μήκος που τείνει στο μηδέν καθώς αυξάνεται ο αριθμός των επαναλήψεων της μεθόδου.

⁴Σε απόσταση μικρότερη από T (σφάλμα σύγκλισης της μεθόδου)



Σχήμα 4.1: Στα Σχήματα εικονίζονται αποτελέσματα της μεθόδου καθόδου κατά την κλίση σε διάφορες καμπύλες και για διαφορετικό αριθμό τμημάτων.

Κεφάλαιο 5

Εφαρμογή Κατασκευαστικού Αλγορίθμου Απόδειξης

Στο τμήμα αυτό θα περιγραφούν δύο αλγόριθμοι, ένας προσεγγιστικός και ένας ακριβής, που βασίζονται στη μέθοδο της απόδειξης (Τμήμα 2.5). Το πλεονέκτημα που έχουν οι μέθοδοι αυτοί είναι πως υπολογίζουν λύσεις μόνο εφόσον υπάρχουν, σε αντίθεση με τον προσεγγιστικό αλγόριθμο (Τμήμα 3) στον οποίο δεν υπάρχει η παραπάνω εγγύηση. Ενώ ως μειονέκτημα μπορεί να θεωρηθεί το γεγονός πως υπάρχει πιθανότητα να μην υπολογιστεί κάποια λύση, δηλαδή να δώσει λιγότερες από τις πραγματικές. Βέβαια υπάρχει εγγύηση (όπως φάνηκε και στην απόδειξη) πως θα υπολογίζεται πάντοτε τουλάχιστον μία λύση.

Ο προσεγγιστικός αλγόριθμος υπολογίζει με υψηλή ακριβεία τη λύση και στη συνέχεια μπορεί να ακολουθήσει κάποιος αλγόριθμος τύπου καθόδου κατά την κλίση για την ακριβή εύρεση των λύσεων. Ο ακριβής αλγόριθμος υπολογίζει την ακριβή λύση και έχει εξεταστεί στην περίπτωση πολυγωνικών καμπύλων. Για τη μέθοδο αυτή, υπάρχει εγγύηση, πως θα τερματιστεί σε πεπερασμένο αριθμό βηματών (σε αντίθεση με τη μέθοδο καθόδου κατά την κλίση που συνεχώς προσεγγίζει τις λύσεις).

5.1 Προσεγγιστικός Αλγόριθμος

Ο προσεγγιστικός αλγόριθμος εφαρμόζει τη μέθοδο απόδειξης του τμήματος 2.5 με την προσέγγιση πως η συνάρτηση $d(x, y)$, είναι τμηματικά γραμμική και συνεχής, υπάρχουν σταθερές w_{ij}, v_{ij}, c_{ij} και τα τμήματα $D_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \subset [0, 1]^2$, με $x_1 = y_1 = 0 \leq x_2 = y_2 \leq \dots \leq x_{M-1} = y_{M-1} \leq x_M = y_M = 1$.

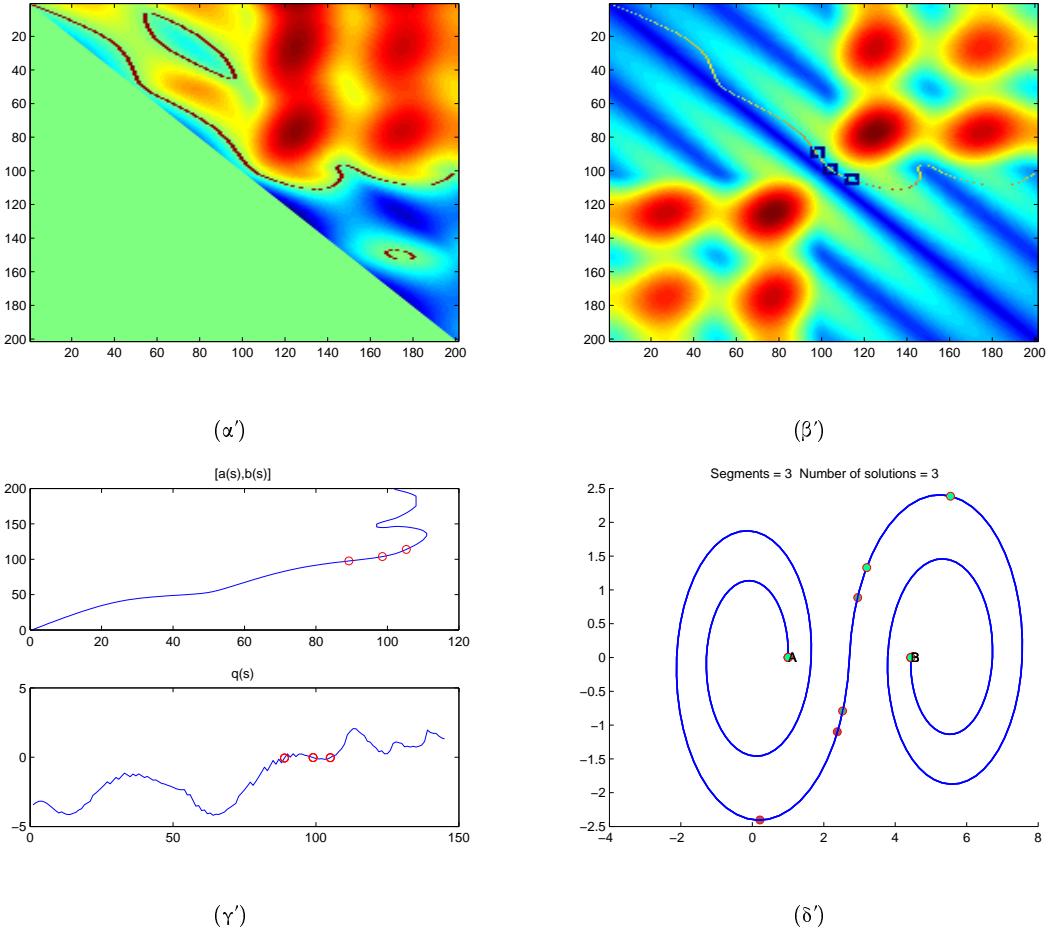
$$\hat{d}(x, y) = w_{ij} \cdot x + v_{ij} \cdot y + c_{ij}, \quad (x, y) \in D_{ij} \quad (5.1.1)$$

Αν ίσχυε κάτι τέτοιο τότε και η $f_N(x, y)$ θα ήταν τμηματικά γραμμική, στα ίδια τμήματα D_{ij} . Επομένως και η μηδενική ισοστάθμη της $f_N(x, y)$, θα έδινε πολυγωνική καμπύλη, και τέλος η $q_N(s)$ θα ήταν τμηματικά γραμμική συνάρτηση. Για τον προσδιορισμό των λύσεων αρκεί να βρεθούν οι ρίζες της $q_N(s)$. Λόγω του ότι τα τμήματα παραμένουν, αλλά και όλες οι εκφράσεις είναι γραμμικές, η υλοποίηση της όπως θα δούμε παρακάτω είναι αρκετά απλή και η εκτέλεση της αρκετά γρήγορη.

Για την υλοποίηση της παραπάνω μεθόδου θεωρούμε δειγματολειψία $C(t_k)$. Στη συνέχεια μπορεί να εφαρμοστεί η μέθοδος του τμήματος 2.5 και όπου χρειάζεται να γίνεται γραμμική παρεμβολή αφού όλες οι εκφράσεις έχουν θεωρηθεί γραμμικές. Επειδή η γραμμική προσέγγιση $\hat{d}(x, y)$ της $d(x, y)$ από τα M σημεία της $C(t)$ μπορεί να πλησιάσει οσοδήποτε κοντά την $d(x, y)$, θα ισχύει και για τις ισοσταθμικές το ίδιο, όπως και για τις τελικές λύσεις. Οι ισοσταθμικές υπολογίζονται από την αλλαγή προσήμου της $f_N(x_k, y_k)$, λ.χ. ισχύει $f_N(x_k, y_k) \cdot f_N(x_k, y_{k+1}) < 0$, άρα το μέγιστο σφάλμα της διαφοράς της θέσης της πραγματικής ισοσταθμικής από την υπολογιζόμενη είναι $|y_k - y_{k+1}|$, όπως και το σφάλμα των τελικών λύσεων. Στη πράξη η παραπάνω προσέγγιση δίνει σφάλμα της μέσης απόστασης των υπολογιζόμενων τμημάτων από την ακριβή λύση περίπου 50 φορές μικρότερες από το $\max_k(C(t_k) - C(t_{k+1}))$ για τις καμπύλες που έχουμε δοκιμάσει (Σχήμα 4.1) με $M = 200$.

Στη συνέχεια θα περιγραφεί αναλυτικά ο προσεγγιστικός αλγόριθμος.

- Αρχικά γίνεται δειγματολειψία της καμπύλης σε M σημεία, $C(t_k), k \in U_M$ με $t_1 = 0 \geq t_2 \geq \dots \geq t_{M-1} \geq t_M = 1$.
- Στη συνέχεια υπολογίζεται η $d(t_i, t_j)$, $f_2(t_i, t_j) = d(t_i, t_j) - d(t_i, 0)$, $i, j \in U_M$, $j \geq i$.
- Ο υπολογισμός της μηδενικής ισοστάθμης της $f_2(i, j)$ που περνάει από το $f_2(1, 1)$ γίνεται προοδευτικά. Από υπόθεση γνωρίζουμε πως η $(a_2(s), b_2(s))$ θα είναι τμηματικά γραμμική, επομένως αρκεί μια δειγματολειψία πάνω στις κορυφές ($a_2(s) \in \{t_1, t_2, \dots, t_M\}$). Ο υπολογισμός της $(a_2(k), b_2(k))$ πραγματοποιείται με έναν αλγόριθμο διάσχισης συνόρου. Αρχικά, υπολογίζεται ο πίνακας $V(t_i, t_j)$ που είναι ίσος με 1 στις περιοχές που βρίσκονται οι καμπύλες μηδενικής ισοστάθμης και 0 αλλού. Δηλαδή, αν ισχύει $f_2(t_i, t_j) \cdot f_2(t_i, t_{j+1}) < 0$ ή $f_2(t_i, t_j) = 0$ τότε $V(t_i, t_j) = 1$ και $V(t_i, t_{j+1}) = 1$. Παράδειγμα του πίνακα V εικονίζεται στο Σχήμα 5.1(a'). Στη συνέχεια υπολογίζεται η ζητούμενη μηδενική ισοστάθμη $(a_2(k), b_2(k))$ από τον παρακάτω αλγόριθμο διάσχισης συνόρου.



Σχήμα 5.1: Ενδιάμεσα και τελικά αποτελέσματα προσεγγιστικού αλγορίθμου για $N = 3$. (α') Στην $f_2(x, y)$ προβάλλονται με μπλε χρώμα τα σημεία του πίνακα V που έχουν τιμή 1 στην περιοχή των οποίων βρίσκονται στα σημεία των καμπυλών μηδενικής ισοστάθμης της $f_2(x, y)$. (β') Αποτέλεσμα του αλγορίθμου Υπολογισμός Μηδενικής Ισοστάθμης προβαλλόμενο στην $d(x, y)$, με μπλε τετράγωνα εμφανίζονται οι τελικές λύσεις. (β') Η καμπύλη $[a_2(s), b_2(s)]$ και η $q(s)$, με κόκκινους κύκλους έχουν σημειωθεί οι τρεις λύσεις πάνω σε αυτές. (δ') Προβολή των τριών λύσεων πάνω καμπύλη.

Τυπολογισμός Μηδενικής Ισοστάθμης

```

 $a(1) = 0, b(1) = 0, w = 0, k = 0$ 
 $V(t_1, t_1) = 2$   $^{\alpha'}$ 
Repeat
     $w = w + 1$ 
    for  $i_1 = -1:1$ 
        for  $i_2 = -w:w$ 
             $x = a(k) + i_1$ 
             $y = round(b(k)) + i_2$ 
            if  $V(t_x, t_y) = 1 \wedge V(t_x, t_{y+1}) = 1$ 
                 $V(t_x, t_y) = 2$ 
                 $V(t_x, t_{y+1}) = 2$ 
                 $w = 0$ 
                 $a(k + 1) = t_x,$ 
                 $b(k + 1) = t_y - \frac{f_2(t_x, t_y)}{f_2(t_x, t_{y+1}) - f_2(t_x, t_y)} \beta'$ 
                 $k = k + 1$ 
            end
        end
    Until  $b(k) >= 1$ 

```

$^{\alpha}$ Με τιμή 2 στον $V(t_i, t_j)$ σημειώνονται τα σημεία που έχουν επισκευτεί.

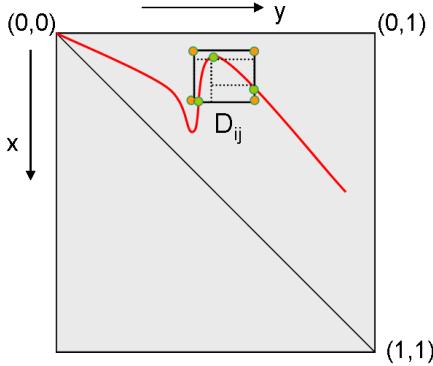
$^{\beta}$ Ο υπολογισμός του $b(k + 1)$ προκύπτει με την παραδοχή πως η $f_2(t_x, t)$, $t \in [t_y, t_{y+1}]$ είναι γραμμική και και ζητάμε $b(k + 1)$ τ.ώ. $f_2(t_x, b(k + 1)) = 0$

- Δεδομένης της $(a_2(s), b_2(s))$ μπορούμε να υπολογίσουμε με χρήση γραμμικής παρεμβολής την $q(s) = d(a_2(s), b_2(s)) - d(1, b_2(s))$ η οποία είναι τυμηματικά γραμμική. Οι ρίζες της (ρ) υπολογίζονται βρίσκοντας τις διαδοχικές θέσεις που αλλάζει πρόσημο $(q(s) \cdot q(s + 1) < 0)$ και εφαρμόζοντας τη παρακάτω σχέση.

$$\rho = s - \frac{q(s)}{q(s + 1) - q(s)} \quad (5.1.2)$$

- Ο παραπάνω αλγόριθμος μπορεί να επεκταθεί εύκολα και στις περιπτώσεις $N > 3$ και να υπολογιστούν διαδοχικά οι $f_3(x, y), \dots, f_N(x, y)$. Ο αλγόριθμος για την εύρεση της μηδενικής ισοστάθμης δεδομένης για κάθε N είναι ακριβώς αυτός που περιγράφαμε παραπάνω (Τυπολογισμός Μηδενικής Ισοστάθμης). Στο Σχήμα 5.1 εικονίζονται ενδιάμεσα του αλγορίθμου αποτελέσματα για $N = 3$ τμήματα.

Η ακρίβεια υπολογισμού των λύσεων εξαρτάται από το M , μεγαλύτερα M δίνουν καλύτερες προσεγγίσεις που συγχλίνουν στην πραγματική λύση. Το μειονέκτημα είναι πως η μνήμη που απαιτείται είναι $O(M^2)$ ενώ το κόστος υπολογισμού των λύσεων είναι $O(NM^2)$.



Σχήμα 5.2: Ο διαχωρισμός της καμπύλης μηδενικής ισοστάθμης σε τμηματικά μονότονες καμπύλες της μορφής $(x, Y(x))$.

5.2 Ακριβής Αλγόριθμος

Στη συνέχεια θα περιγραφεί ένας ακριβής αλγόριθμος που στηρίζεται στη μέθοδο απόδειξης του τμήματος 2.5. Ο αλγόριθμος έχει υλοποιηθεί για πολυγωνικές καμπύλες, ενώ θα μπορούσε με αντίστοιχο τρόπο να υλοποιηθεί για αλγεβρικές και γενικά για καμπύλες με γνωστό τύπο¹. Ουσιαστικά περιέχει τα ίδια βήματα με τον προσεγγιστικό με τη διαφορά πως δεν κάνει κάποια υπόθεση για την $d(x, y)$ αλλά όπου χρειαστεί την υπολογίζει αναλυτικά από την εξίσωση της καμπύλης και λύνει τις εξισώσεις που προκύπτουν.

Με την υπόθεση ότι η καμπύλη είναι πολυγωνική, οι εξισώσεις που προκύπτουν είναι δευτεροβάθμιες, οπότε λύνονται ακριβώς σε $O(1)$. Πιο αναλυτικά, η $d(x, y) = |c(x) - c(y)|$ θα είναι της μορφής $|A + Bx + Cy|$, τα A, B, C είναι γνωστές σταθερές που προκύπτουν από την εξίσωση της καμπύλης. Το τετράγωνο της $d(x, y)$ είναι τμηματικά αλγεβρική συνάρτηση δευτέρου βαθμού². Ίδιας μορφής θα είναι και η $f_2(x, y)$, ορισμένη στα ίδια τμήματα με την $d(x, y)$. Για να υπολογιστεί η μηδενική ισοστάθμη της $f_2(x, y)$ αρκεί ο αλγόριθμος που αναπτύξαμε παραπάνω (Τυπολογισμός Μηδενικής Ισοστάθμης), με αλλαγή της σχέσης υπολογισμού του $b(k+1)$ το οποίο πλεόν θα προκύψει από τη ρίζα γνωστού πολυωνύμου της μορφής $|A+Ba(s+1)+Cb(s+1)| = |D|$, μάλιστα, στην περίπτωση δύο ριζών, η μία πιθανόν θα απορρίπτεται από τους περιορισμούς για το $b(s+1)$. Τέλος ο υπολογισμός του $q(s)$ είναι επίσης εφικτός όπως και ο υπολογισμός των ριζών του, προκύπτουν αντίστοιχα δευτεροβάθμιες εξισώσεις.

Για $N > 3$ το πρόβλημα γίνεται πιο πολύπλοκο επειδή τα τμήματα (D_{ij} για $N = 3$) στα οποία ορίζονται οι ισοσταθμικές θα πρέπει να επαναπολογίζεται. Το γεγονός αυτό οφείλεται στο ότι δε διατηρείται η τμηματική μονοτονία εντός του κάθε τμήματος, επειδή έχουμε δευτεροβάθμιες εκφράσεις, αλλά υπάρχει περίπτωση διαμερισμού του κάθε τμήματος το πολύ σε δύο (Σχήμα 5.2). Επομένως γίνεται διαχωρισμός της μηδενικής ισοστάθμης της $f_N(x, y)$ σε τμηματικά μονότονα τμήματα, και στη συνέχεια υπολογίζεται η $f_{N+1}(x, y) = d(x, y) - d(x, Y(x))$ στα τμήματα αυτά. Τα υπόλοιπα βήματα είναι ακριβώς όμοια με τα βήματα του προσεγγιστικού αλγορίθμου.

¹Η καμπύλη μηδενικής ισοστάθμης που περνάει από το $(0, 0)$ θα πρέπει να δίδεται από κλειστό τύπο.

²Στη πράξη μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα χρησιμοποιώντας την $d^2(x, y)$, ώστε να έχουμε πάντοτε αλγεβρικές εκφράσεις, και οι λύσεις που θα υπολογιστούν θα ικανοποιούν και την $d(x, y)$.

Κεφάλαιο 6

Εφαρμογές - Συμπεράσματα

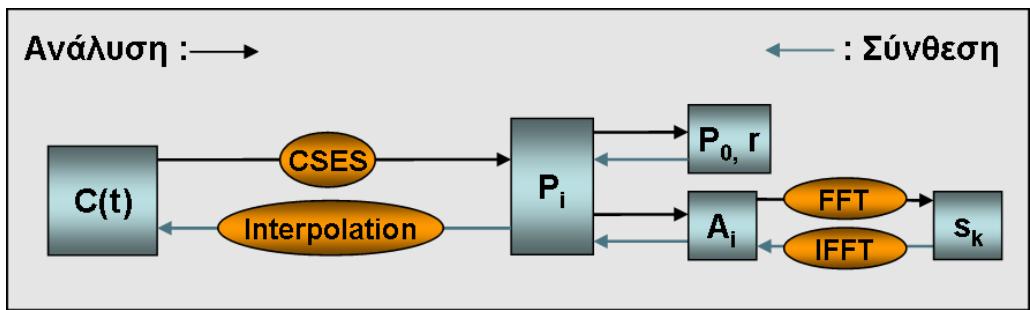
6.1 Εφαρμογές

Στο τμήμα αυτό θα αναφέρουμε τις εφαρμογές που έχει το πρόβλημα. Καταρχήν το πρόβλημα προέκυψε από μια γραφική εφαρμογή, την 3Δ αναπαράσταση του φιδιού. Σε ένα τμήμα, από τη μέθοδο που προτάθηκε στο [8], υπήρξε ανάγκη για την τμηματοποίηση 2Δ καμπύλης σε ίσα τμήματα. Σκοπός ήταν να υπολογιστεί συγκεκριμένος αριθμός σημείων του σκελετού του φιδιού που να ισαπέχουν μεταξύ τους.

Άμεση εφαρμογή της επίλυσης του προβλήματος είναι η μοντελοποίηση καμπύλης. Ο υπολογισμός $N - 1$ σημείων που ισαπέχουν μεταξύ τους πάνω στην καμπύλη, και η γραμμική είτε κυβική τους παρεμβολή, δίνει μια προσέγγιση της καμπύλης η οποία τείνει προς την καμπύλη καθώς αυξάνει το N . Έστω $P_i, i \in \{0, 1, \dots, N\}$, $P_0 = A, P_N = B$ τα υπολογιζόμενα σημεία από τον προτεινόμενο αλγόριθμο (Curve Segmentation into Equal Segments (CSES)). Τα σημεία $(2 \cdot (N + 1)$ στο πλήθος αριθμοί) αυτά μπορούν να αντικατασταθούν από το σήμα της γωνίας $A_i, i \in \{1, \dots, N\}$ μεταξύ δύο διαδοχικών σημείων, την θέση ενός μόνο σημείου P_0 , και την απόσταση $r = |P_{i+1} - P_i|_2$ μεταξύ δύο διαδοχικών. Έτσι το πλήθος των αριθμών που απαιτούνται για την περιγραφή μειώνεται σε $N + 2$ δηλαδή σχεδόν στο μισό. Μάλιστα αν εφαρμοστεί μετασχηματισμός Fourier στο σήμα της γωνίας, στη περίπτωση που η αρχική καμπύλη είναι παραγωγίσιμη, τότε η ενέργεια του σήματος συγκεντρώνεται στους πρώτους συντελεστές¹. Επομένως απαιτείται μικρός αριθμός συντελεστών σε σχέση με το N για την περιγραφή του σήματος. Ο αριθμός που εξαρτάται μόνο από την αρχική καμπύλη γίνεται μικρότερος όσο πιο ομαλή είναι η καμπύλη $C(t)$. Οι συντελεστές Fourier μεταφέρουν πληροφορία ισοδύναμη με το σήμα της γωνίας μιας και με τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier μπορεί να ανακατασκευαστεί το σήμα της γωνίας.

Ο προτεινόμενος μετασχηματισμός είναι αντιστρέψιμος, επομένως από τους περιγραφείς μπορούμε να υπολογίσουμε ξανά την καμπύλη. Στο Σχήμα 6.1 εμφανίζεται το διάγραμμα του ευθύ και αντίστροφου μετασχηματισμού όπως και οι υπολογιζόμενοι περιγραφείς. Οι προτεινόμενοι περιγραφείς διαχωρίζονται σε

¹Για να συμβεί υψηλή συγκέντρωση της ενέργειας στους πρώτους συντελεστές, πέρα της ομαλής καμπύλης απαιτείται και περιοδικότητα, η οποία μπορεί να επιτευχθεί ως εξής. Πριν την εφαρμογή του μετασχηματισμού Fourier προστίθενται επιπλέον δείγματα στο σήμα της γωνίας ώστε το σήμα να γίνει περιοδικό. Ο υπολογισμός τους μπορεί να γίνει με παρεμβολή του τέλους και της αρχής του σήματος. Τα δείγματα αυτά θα αφαιρεθούν κατά την ανακατασκευή.



Σχήμα 6.1: Το διάγραμμα ευθύ και αντίστροφου μετασχηματισμού από την αρχική καμπύλη, στους περιγραφείς της.

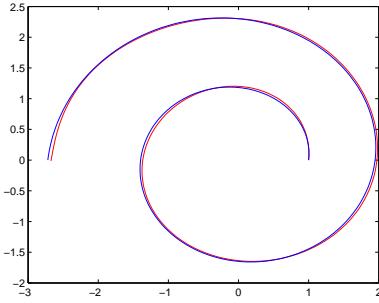
εκείνους που περιγράφουν το σχήμα της καμπύλης, την κατεύθυνση της, την χλιμάκωση της και τη θέση της στο επίπεδο. Οι συντελεστές Fourier ($s_k, k > 1$) περιγράφουν το σχήμα της καμπύλης και παραμένουν αναλλοίωτοι σε περιστροφή, μεταφορά και χλιμάκωση της καμπύλης. Ο s_1 (πρώτος συντελεστής Fourier) περιέχει την πληροφορία της κατεύθυνσης της καμπύλης. Ο συντελεστής r περιέχει την πληροφορία για το μήκος της καμπύλης² (την χλιμάκωση της) και ο P_0 για τη θέση της καμπύλης.

Η περιγραφή αυτή επειδή περιέχει μικρό αριθμό συντελεστών μπορεί να δώσει πολύ υψηλό βαθμό συμπίεσης για ομαλές καμπύλες. Στο Σχήμα 6.2 εμφανίζονται αποτελέσματα ανακατασκευής ομαλών καμπυλών με χρήση μικρού αριθμού συντελεστών Fourier. Στο Σχήμα 6.3 εμφανίζονται αποτελέσματα ανακατασκευής καμπύλης που περιέχει γωνίες, οπότε απαιτείται μεγάλος αριθμός συντελεστών για την ανακατασκευή της.

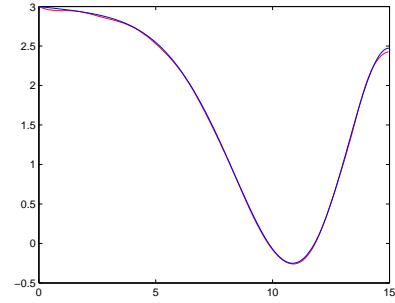
6.2 Επίλογος

Στην εργασία αυτή εξετάστηκε το πρόβλημα της τμηματοποίησης 2Δ συνεχούς καμπύλης σε ισομήκη ευθύγραμμα τμήματα. Αρχικά μελετήθηκε το πρόβλημα και αποδείχτηκε πως έχει τουλάχιστον μία λύση για κάθε αριθμό τμημάτων και σε οποιαδήποτε καμπύλη. Ο αλγόριθμος που βασίζεται στη μέθοδο της απόδειξης υπολογίζει τουλάχιστον μία λύση του προβλήματος και μπορεί να υλοποιηθεί σε προσεγγιστική και σε ακριβή μορφή. Επιπλέον, προτάθηκαν και μελετήθηκαν δύο μέθοδοι επίλυσης του προβλήματος, με στόχους τον προσεγγιστικό υπολογισμό όλων των λύσεων και τον ακριβή υπολογισμό μιας λύσης, αντίστοιχα. Εξετάστηκε η συμπεριφορά των δύο προτεινόμενων μεθόδων σε διάφορες καμπύλες και για διαφορετικό αριθμό τμημάτων. Ο προσεγγιστικός αλγόριθμος εκτελείται σε σύντομο χρονικό διάστημα για μικρό αριθμό τμημάτων και είναι ανεξάρτητος του πλήθους των λύσεων και της μορφής της καμπύλης σε αντίθεση με τον αλγόριθμο καθόδου κατά την χλίση που ο χρόνος εκτέλεσής του επηρεάζεται από τη μορφή (δυσκολία) του προβλήματος για το δεδομένο N αλλά και την αρχικοποίηση. Οι δύο αλγόριθμοι εμφανίζουν μια συμπληρωματική συμπεριφορά, με τον προσεγγιστικό να είναι συνήθως υπολογιστικά εφικτός για μικρά N ενώ ο γενετικός αλγόριθμος τύπου καθόδου κατά την χλίση να είναι σίγουρα εφικτός για μεγάλα N , όπου και το πρόβλημα εμφανίζει μία λύση. Ο αλγόριθμος καθόδου κατά την χλίση μπορεί να εκτελεστεί με αρχικοποίηση τα αποτελέσματα

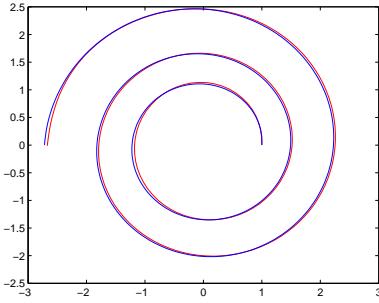
²Για μεγάλο N ισχύει ότι το μήκος της καμπύλης προσεγγίζεται από Nr που είναι πάντα μικρότερο από το συνολικό μήκος της καμπύλης.



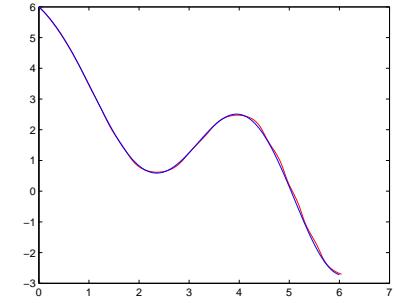
(α')



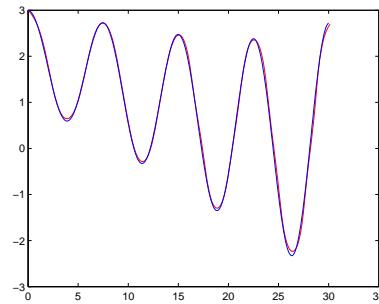
(β')



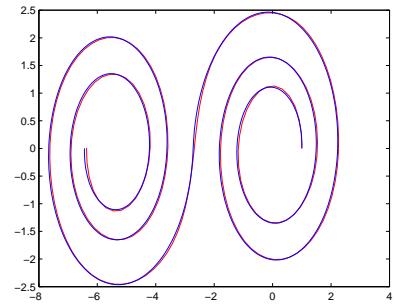
(γ')



(δ')

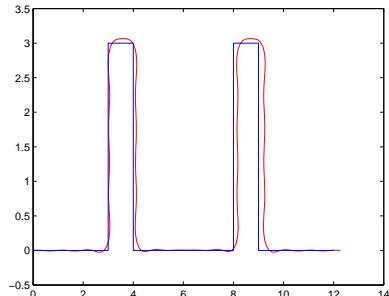


(ε')

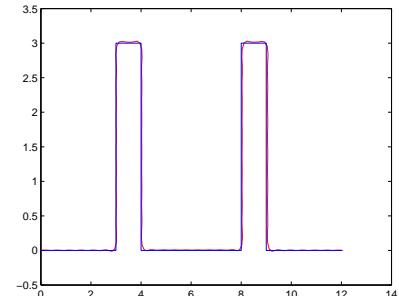


(τ')

Σχήμα 6.2: Στα σχήματα εικονίζονται οι αρχικές και πύλες (με μπλε χρώμα) και η ανακατασκευή τους (με κόκκινο χρώμα). Η αρχική τμηματοποίηση έγινε σε 200 ίσα τμήματα ενώ χρησιμοποιήθηκαν στο (α') 7, στο (β') 7, στο (γ') 8, στο (δ') 10, στο (ε') 14 και στο (τ') 16 συντελεστές Fourier.



(α')



(β')

Σχήμα 6.3: Στα σχήματα εικονίζονται οι αρχικές καμπύλες (με μπλε χρώμα) και η ανακατασκευή τους (με κόκκινο χρώμα). Η αρχική τμηματοποίηση έγινε σε 200 ίσα τμήματα ενώ (α') 25 και στο (β') 50 συντελεστές Fourier.

του προσεγγιστικού αλγορίθμου. Επομένως, με τους προτεινόμενους αλγορίθμους επιλύεται το πρόβλημα για κάθε N .

Μεγάλος αριθμός προβλημάτων και εφαρμογών φαίνεται πως ανάγεται στο υπό μελέτη πρόβλημα, όπως είναι η συμπίεση και μοντελοποίηση σήματος. Ως μελλοντική εργασία, θα είχε ενδιαφέρον να εντοπιστούν τέτοιες εφαρμογές αλλά και να αναπτυχθούν νέες μέθοδοι που θα επιλύουν το πρόβλημα.

Βιβλιογραφία

- [1] P. Agarwal, S. Har-Peled, N. Mustafa, and Y. Wang. Near-linear time approximation algorithms for curve simplification in two and three dimensions. In *Proc. of the 10th European Symposium on Algorithms (ESA '02)*, 2002.
- [2] A. D. Bimbo and P. Pala. Retrieval by elastic matching of user sketches. *IEEE Trans. On Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 19(2):121–132, 1997.
- [3] H. Imai and M. Iri. Polygonal approximations of a curve (formulations and algorithms). *Computational Morphology*, pages 71–86, 1988.
- [4] A. Kolesnikov. *Efficient Algorithms for Vectorization and Polygonal approximation*. PhD thesis, University of Joensuu, Finland, 2003.
- [5] Y. Kurozumi and W.A. Davis. Polygonal approximation by the minimax method. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, pages 248–264, 1982.
- [6] S. Liapis, E. Sifakis, and G. Tziritas. Colour and texture segmentation using wavelet frame analysis, deterministic relaxation and fast marching algorithms. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 15(1):1–26, March 2004.
- [7] F. Mokhtarian, S. Abbasi, and J. Kittler. Robust and efficient shape indexing through curvature scale space. In *Proc. British Machine Vision Conference*, pages 53–62, 1996.
- [8] C. Panagiotakis and G. Tziritas. Construction of animal models and motion synthesis in 3D virtual environments using image sequences. In *Proc. of the second International Symposium on 3DPVT (3DPVT 2004)*, 2004.
- [9] C. Panagiotakis and G. Tziritas. A speech/music discriminator based on rms and zero-crossings. *IEEE Transactions on Multimedia*, 7(1), 2005.
- [10] E. G. M. Petrakis, A. Diplaros, and E. Millos. Matching and retrieval of distorted and occluded shapes using dynamic programming. *IEEE Trans. On Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 24(11):1501–1516, 2004.
- [11] D. Santa-Cruz and T. Ebrahimi. Jpeg 2000 still image coding versus other standards. In *Proc. of the X European Signal Processing Conference*, 2000.
- [12] T. Zaharia, F. Preteux, and M. Preda. The 3d shape spectrum descriptor. In *ISO/IEC MPEG/M5242, Melbourne, Australia*, 1999.
- [13] D. Zhang and G. Lu. Content-based shape retrieval using different shape descriptors: A comparative study. In *In Proc. of IEEE Conference on Multimedia and Expo (ICME'01)*, pages 317–320, 2001.
- [14] D. Zhang and G. Lu. Shape retrieval using fourier descriptors. In *In Proc. of Int. Conference on Multimedia and Distance Education*, pages 1–9, 2001.