ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΤΜΗΜΑ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΙΣΤΟΡΙΑ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΣΕΙΡΩΝ

ΣΤΕΛΛΑ ΚΟΥΤΡΑΚΗ

ΗΡΑΚΛΕΙΟ
ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2006

Η μεταπτυχιακή αυτή εργασία πραγματοποιήθηκε στο Μαθηματικό Τμήμα του Πανεπιστημίου Κρήτης στα πλαίσια του μεταπτυχιακού προγράμματος «Μαθηματικά για την Εκπαίδευση» και κατατέθηκε τον Νοέμβριο του 2006.
Επιβλέπων Καθηγητής ήταν ο κ. Μιχάλης Λάμπρου.
Την επιτροπή αξιολόγησης αποτέλεσαν οι κ.κ.
Μ. Λάμπρου, Θ. Μήτσης και Σ. Παπαδοπούλου.

Στην Εύη, στο Μίλτο, στη Γιολάντα,
στο Μανόλη.

Π Ε Ρ Ι Ε Χ Ο Μ Ε Ν Α

σελίδα

HISTORY AND EVALUATION METHODS OF SERIES

This master thesis consists of six chapters.

In the first chapter we refer briefly to the *history of series* through existing written documents. The research leads us to Egypt of about 1650 B.C., where the prime form of known series is the *arithmetic* and *geometric progression*. We, then, study related documents coming from Mesopotamia, China, India, Arabia and, finally, Ancient Greece and we conclude our historical research in Europe between the 12^{th} and 19^{th} century.

In the second chapter we describe two methods of evaluating the sum of an infinite series: the *telescopic method* and the *method of differences.*

In the next three chapters we deal with the *harmonic series*, the series $\zeta(2)$ and the finite sums $S_k(n)$.

Finally, the last chapter studies five *algorithms* for evaluating sums of the form $f(n)=\sum_{k=\alpha(n)}^{b(n)} F(n,k)$, with $F(n,k)$ a suitable summand of *proper hypergeometric form.*

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Στο πρώτο κεφάλαιο της εργασίας αυτής αναφερόμαστε, συνοπτικά, στην *ιστορία των σειρών*, από τότε που ενυπάρχουν γραπτά μνημεία.

Αναπότρεπτα, η έρευνα μας κατευθύνει στην Αίγυπτο, όπου τη 2^{η} π.Χ. χιλιετηρίδα, η πρωταρχική μορφή σειρών που συναντάμε είναι η *αριθμητική* και η *γεωμετρική πρόοδος*.

Στη συνέχεια, ερευνούμε τα ενυπάρχοντα, τα σχετικά με το θέμα μας, στη Μεσοποταμία, στην Κίνα, στην Ινδία, στην Αραβία και τέλος στην Αρχαία Ελλάδα.

Κατόπιν, ακολουθεί η έρευνα στην Ευρώπη από τον 12^{o} μέχρι και τον 19^{o} αιώνα.

Στο δεύτερο κεφάλαιο αναφερόμαστε σε δύο μεθόδους υπολογισμού σειρών, την *τηλεσκοπική* και τη *μέθοδο διαφορών,* ενώ στα επόμενα τρία κεφάλαια διαπραγματευόμαστε την *αρμονική σειρά*, τη σειρά $\zeta(2)$ και τα αθροίσματα $S_k(n)$.

Τέλος, κλείνουμε την εργασία αυτή με πέντε *αλγορίθμους* υπολογισμού αθροισμάτων της μορφής $f(n)=\sum_{k=\alpha(n)}^{b(n)} F(n,k)$, όπου $F(n,k)$ είναι προσθετέος *κατάλληλης υπεργεωμετρικής μορφής*.

Ευχαριστώ θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Μιχάλη Λάμπρου για τον χρόνο και το υλικό που έθεσε στη διάθεσή μου, όπως επίσης και τα άλλα δύο μέλη της Επιτροπής Αξιολόγησης: κ.κ. Σουζάννα Παπαδοπούλου, και Θεμιστοκλή Μήτση.

Εκφράζω και από τη θέση αυτή ένα μεγάλο ευχαριστώ στους καθηγητές μου: κ.κ. Ελένη Βασιλάκη, Μανόλη Κατσοπρινάκη, Χρήστο Κουρουνιώτη, Πάρη Πάμφιλο, Μιχάλη Παπαδημητράκη, Χρόνη Στράντζαλο και Θανάση Φειδά. Το μαθηματικό ταξίδι μαζί τους, ταξίδι πρώτης θέσης, υπήρξε έξοχο, συναρπαστικό και αλησμόνητο.

Επίσης, ένα θερμό ευχαριστώ στην άριστη «συμφοιτήτριά μου» Φωτεινή Τσιφουντίδου των 22 ετών που με μύησε στις νέες τεχνολογίες και ήταν παρούσα όποτε τη χρειάστηκα.

Ένα θερμό ευχαριστώ και στο Νίκο Σπανουδάκη που ποτέ δεν μου αρνήθηκε τη βοήθειά του.

Ακόμη, ένα θερμό ευχαριστώ στη Μαρία Σπυροπούλου και στον Μιχάλη Παπαδημητράκη, φίλους των δύσκολων ημερών.

Τέλος, ένα μεγάλο ευχαριστώ στην οικογένειά μου που όχι μόνο με «ανέχτηκε» όλο αυτό το χρονικό διάστημα, αλλά ο καθένας τους με βοήθησε με τον καλύτερο δυνατό τρόπο, υπερβαίνοντας εαυτόν.

Νοέμβριος 2006

Στέλλα Κουτράκη

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1.
ΣΥΝΤΟΜΗ ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΣΕΙΡΩΝ.

1.1. ΑΙΓΥΠΤΟΣ

Παραδείγματα άθροισης σειρών υπάρχουν στα αρχαιότερα σωζόμενα μαθηματικά κείμενα. Παραδείγματος χάριν στον πάπυρο **Rhind**[1] (~ 1650 π.Χ.) στο Πρόβλημα 40, όπως και στο Πρόβλημα 64, βλέπουμε ότι οι Αιγύπτιοι αντιλαμβάνονταν τι σήμαινε αριθμητική πρόοδος.

Το **Πρόβλημα 40**[2] αναφέρει
Μοιράστε 100 καρβέλια ψωμί σε 5 άνδρες, έτσι ώστε το άθροισμα των δύο μικρότερων μεριδίων να ισούται με το $\frac{1}{7}$ *του αθροίσματος των τριών μεγαλύτερων μεριδίων. Ποια είναι η διαφορά από μερίδιο σε μερίδιο;*

Στη λύση που ακολουθεί βλέπουμε ότι τα μερίδια αποτελούν αριθμητική πρόοδο. Ο Αιγύπτιος λύτης χρησιμοποιεί τη μέθοδο της ***λαθεμένης παραδοχής***[3]. Θεωρεί μια φθίνουσα αριθμητική πρόοδο με πέντε όρους, εκ των οποίων ο τελευταίος όρος είναι το 1. Ως άθροισμα παίρνει το 60 και όχι το 100, οπότε ο μεσαίος όρος θα είναι το άθροισμα δια του πλήθους, δηλαδή το 12. Συνεπώς, η ζητούμενη κοινή διαφορά θα ισούται με την ημιδιαφορά του τελευταίου από τον μεσαίο όρο, δηλαδή

$$\omega = \frac{12-1}{2} = 5\frac{1}{2}.$$

Τώρα, με δύο διαδοχικές προσθέσεις της κοινής διαφοράς στον μεσαίο όρο και με αφαίρεση της κοινής διαφοράς από τον μεσαίο όρο, βρίσκουμε όλους τους όρους, δηλαδή

$$23,\ 17\frac{1}{2},\ 12,\ 6\frac{1}{2},\ 1.$$

Παρατηρούμε ότι το άθροισμα των δύο τελευταίων όρων ισούται με το $\frac{1}{7}$ του αθροίσματος των τριών πρώτων, δηλαδή

$$1+6\frac{1}{2} = \frac{1}{7}\left(12+17\frac{1}{2}+23\right).$$

Καθώς όμως το άθροισμα των πέντε όρων είναι το 60, πρέπει να προσδιορίσουμε τη σχέση του 60 με το 100. Έχουμε,

$$100 = 60+40 = 60+\frac{2}{3}60 = 60\left(1+\frac{2}{3}\right).$$

---

[1] Gay Robins & Charles Shute, *The Rhind Mathematical Papyrus, an ancient Egyptian text*, British Museum Press, Hong Kong, 1998, σελ. 9, 42-43.
[2] Arnold Buffum Chace, *The Rhind Mathematical Papyrus*, The National Council of Teachers of Mathematics, USA 1979, σελ. 45,104. (Ανατύπωση των εκδόσεων του 1927 και 1929 από τη Mathematical Association of America, Oberlin Ohio.)
[3] L. Bunt - P. Jones - J. Bedient, *Οι Ιστορικές Ρίζες των Στοιχειωδών Μαθηματικών*, Εκδόσεις Γ. Α. Πνευματικού, Αθήνα 1981, σελ.38.

Δηλαδή, έχουμε πολλαπλασιάσει το 60 επί $1\frac{2}{3}$. Συνεπώς, η κοινή διαφορά πρέπει να πολλαπλασιαστεί επί $1\frac{2}{3}$, οπότε η ζητούμενη κοινή διαφορά θα ισούται με $5\frac{1}{2}\cdot 1\frac{2}{3} = 9\frac{1}{6}$ κι έτσι τα ζητούμενα μερίδια θα είναι

$$38\frac{1}{3},\quad 29\frac{1}{6},\quad 20,\quad 10\frac{5}{6},\quad 1\frac{2}{3}.$$

Αν και φαίνεται πολύπλοκη η λύση, εντούτοις είναι πλήρως εναρμονισμένη με τις μεθόδους των Αιγυπτίων.

Πρόβλημα 64[4]

(Παράδειγμα ορισμού αριθμητικής προόδου. Παράδειγμα διηρημένης διαφοράς.)

Υποθέστε ότι 10 άνδρες μοιράζονται 10 εκάτ[5] *κριθάρι έτσι ώστε τα μερίδιά τους να έχουν μεταξύ τους κοινή διαφορά το* $\frac{1}{8}$ *εκάτ. Να βρεθεί το κάθε μερίδιο.*

Ο λύτης συμπεραίνει ότι ο μέσος όρος των μεριδίων είναι 1 εκάτ και ότι το πλήθος των διαφορών θα είναι 10 – 1 = 9, δηλαδή ο αριθμός των ανδρών μείον ένας. Κατόπιν, παίρνει το μισό της κοινής διαφοράς, οπότε φθάνει στο $\frac{1}{16}$ εκάτ. Το αποτέλεσμα αυτό πολλαπλασιάζει επί 9, το οποίο του δίνει $\frac{1}{2}\frac{1}{16}$ εκάτ. Σ' αυτό προσθέτει τον μέσο όρο των μεριδίων, δηλαδή το 1, οπότε παίρνει το μεγαλύτερο μερίδιο όλων. Απ' αυτό, αφαιρεί κάθε φορά το $\frac{1}{8}$ εκάτ για να πάει στο αμέσως επόμενο μερίδιο, μέχρι και το μερίδιο του τελευταίου άνδρα. Οπότε

$\alpha_{10}=1\frac{1}{2}\frac{1}{16}$, $\alpha_9=1\frac{1}{4}\frac{1}{8}\frac{1}{16}$, $\alpha_8=1\frac{1}{4}\frac{1}{16}$, $\alpha_7=1\frac{1}{8}\frac{1}{16}$, $\alpha_6=1\frac{1}{16}$, $\alpha_5=\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{8}\frac{1}{16}$,
$\alpha_4=\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{16}$, $\alpha_3=\frac{1}{2}\frac{1}{8}\frac{1}{16}$, $\alpha_2=\frac{1}{2}\frac{1}{16}$, $\alpha_1=\frac{1}{4}\frac{1}{8}\frac{1}{16}$.

Αν τα προσθέσουμε όλα, θα πάρουμε 10 εκάτ.

Η αντίληψή όμως των Αιγυπτίων δεν περιοριζόταν μόνο στην αριθμητική πρόοδο. Είχαν γνώση και για τη γεωμετρική.

Το **Πρόβλημα 79**[6] φαίνεται να λέει (ο πάπυρος εκεί είναι φθαρμένος.)

Βρείτε το άθροισμα πέντε όρων, όπου ο πρώτος όρος είναι το 7 και ο κάθε επόμενος όρος πολλαπλασιάζεται επί 7.

---

[4] Arnold Buffum Chace, ένθ. ανωτ., σελ. 30, 102.

[5] Μονάδα χωρητικότητας, Arnold Buffum Chace, ένθ. ανωτ., σελ. 31.

[6] Arnold Buffum Chace, ένθ. ανωτ., σελ. 30, 112.

Ζητάει δηλαδή το άθροισμα της γεωμετρικής προόδου $7+7^2+7^3+7^4+7^5$. Ο λύτης παραθέτει δύο λύσεις.

Στην πρώτη διαβάζουμε

1	2801
2	5602
4	11204
Σύνολο	19607

Δηλαδή, $2801 \times 7 = 19607$. Εδώ παρατηρούμε ότι $2801=1+7+7^2+7^3+7^4$, οπότε ασφαλώς ο λύτης ανάγει το πρόβλημα στον υπολογισμό

$$\begin{aligned} 7+7^2+7^3+7^4+7^5 &= 7\cdot(1+7+7^2+7^3+7^4) \\ &= 7\cdot 2801 \\ &= 19607 \end{aligned}$$

Δηλαδή, ο λύτης ουσιαστικά έβγαλε κοινό παράγοντα.

Στη δεύτερη λύση, μπροστά από κάθε διαδοχική δύναμη του 7, ο λύτης γράφει τις λέξεις σπίτια, γάτες, ποντίκια, στάχια, εκάτ, ως εξής

σπίτια	7
γάτες	49
ποντίκια	343
στάχια	2401 (λανθασμένα αναφέρει 2301)
εκάτ	16807
Σύνολο	19607

Ο A. Eisenlohr[7], ο πρώτος που μετέφρασε το περιεχόμενο του πάπυρου **Rhind,** από την ιερατική γραφή στα ιερογλυφικά το 1868, ερμηνεύει τις παραπάνω πέντε λέξεις μπροστά από τις δυνάμεις του 7, ως τα ονόματα που δίνουν οι Αιγύπτιοι στις δυνάμεις του 7. Το πιθανότερο όμως είναι ότι το Πρόβλημα 79 αναφέρεται σ' ένα γνωστό πρόβλημα της εποχής

Έχουμε 7 σπίτια. Σε κάθε σπίτι ζουν 7 γάτες. Κάθε γάτα τρώει 7 ποντίκια. Κάθε ποντίκι θα έτρωγε 7 στάχια που καθένα θα παρήγαγε 7 εκάτ δημητριακών. Ποιο είναι το άθροισμα όλων αυτών ;

Το 1202, στο *Liber abaci* (Βιβλίο του Άβακα) του Leonardo της Πίζας ή Fibonacci, εμφανίζεται ένα πρόβλημα[8] γεωμετρικής προόδου, του οποίου το ζητούμενο είναι πάλι το άθροισμα ανόμοιων μεταξύ τους όρων. Παρατηρείται, δηλαδή, μια διαιώνιση αυτής της εκφώνησης από την εποχή των Αιγυπτίων.

1.2. ΜΕΣΟΠΟΤΑΜΙΑ

Οι Βαβυλώνιοι είχαν εξοικείωση με τον υπολογισμό αθροισμάτων αριθμητικών προόδων[9]. Αυτό φαίνεται από την αντιμετώπιση συγκεκριμένων προβλημάτων

[7] Ein Mathematisches Handbuch der alten Aegypter, (Papyrus Rhind des British Museum) Leipzig, 1877.

[8] C. Boyer - U. Merzbach, *A History of Mathematics*, Second Edition, John Wiley & Sons, Inc., USA, 1989, σελ. 286.

[9] B.L. Van der Waerden, *Η Αφύπνιση της Επιστήμης*, Π.Ε.Κ., Ηράκλειο 2000, σελ. 81.

πρακτικής φύσης, όπως π.χ. η διανομή χρημάτων στα παιδιά μιας οικογένειας, σύμφωνα με κάποιο κανόνα που είναι αριθμητική πρόοδος. Δεν περιορίζονται όμως στις αριθμητικές προόδους. Στην πήλινη πινακίδα Α.Ο. 6484[10], της οποίας το περιεχόμενο, όπως υποστηρίζει ο B.L. Van der Waerden, μοιάζει πολύ με τα παλαιο-βαβυλωνιακά κείμενα (~ 1700 π.Χ.), συναντάμε το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της γεωμετρικής προόδου $\alpha_n = 2^{n-1}$, $n \geq 1$, όπου γράφει

$$1+2+2^2+2^3+\ldots+2^9 = 2^9+(2^9-1) \tag{1}$$

Σε άλλο πρόβλημα, στην ίδια πινακίδα, συναντάμε το άθροισμα

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+10^2 = \left(1\cdot\frac{1}{3}+10\cdot\frac{2}{3}\right)\cdot(1+2+3+\cdots+10) = 385,$$

το οποίο είναι φυσικά ειδική περίπτωση του γενικού τύπου

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \left(1\cdot\frac{1}{3}+n\cdot\frac{2}{3}\right)\cdot(1+2+3+\cdots+n) \tag{2}$$

Ακόμη, απλούς αριθμούς που αποτελούν αριθμητική πρόοδο, βρίσκουμε και στις τρεις ζώνες στις οποίες διαιρούν τον ουρανό, προκειμένου να μελετήσουν τα ουράνια σώματα[11]. Αριθμητικές προόδους όμως, αύξουσες και φθίνουσες, συναντάμε και στις *εφημερίδες*[12] που έδιναν τις μελλοντικές θέσεις των πλανητών ή της σελήνης, όπως φαίνεται στο παρακάτω απόσπασμα που αφορά το 179^{ο} έτος της εποχής των Σελευκιδών (133 π.Χ.-132 π.Χ.).

	XII_2	28,55,57,58	22, 8,18,16	♈
2,59	I	28,37,57,58	20,46,16,14	♉
	II	28,19,57,58	19, 6,14,12	♊
	III	28,19,21,22	17,25,35,34	♋
	IV	28,37,21,22	16, 2,56,56	♌
	V	28,55,21,22	14,58,18,18	♍
	VI	29,13,21,22	14,11,39,40	♎
	VII	29,31,21,22	13,43, 1, 2	♏
	VIII	29,49,21,22	13,32,22,24	♐
	IX	29,56,36,38	13,28,59, 2	♑
	X	29,38,36,38	13, 7,35,40	♒
	XI	29,20,36,38	12,28,12,18	♓
	XII	29, 2,36,38	11,30,48,56	♈

Απόσπασμα (σελ.149, υποσ. 10)

Όπως φάνηκε από τα παραπάνω, τα Αιγυπτιακά και τα Βαβυλωνιακά κείμενα πραγματεύονται συγκεκριμένα θέματα χωρίς γενικεύσεις. Επίσης, στα κείμενα αυτά δεν βρίσκουμε την ερμηνεία **γιατί** ισχύουν οι διάφοροι τύποι που χρησιμοποιούνται. Εδώ πρέπει να παρατηρήσουμε ότι ο τύπος του οποίου είναι εφαρμογή η σχέση (1), είναι η Πρόταση 35 από το IX Βιβλίο των *Στοιχείων* του Ευκλείδη, έργο του 300 π.Χ. περίπου (βλέπε 1.6.3). Επίσης, η σχέση (2) είναι η Πρόταση 10 στο έργο του Αρχιμήδη *Περί Ελίκων* του 3^{ου} π.Χ. αιώνα, (βλέπε 1.6.4), η οποία είχε ήδη αποδειχθεί

[10] Φυλάσσεται στο Μουσείο του Λούβρου και άποδίδεται στην εποχή του Βασιλείου των Σελευκιδών, των διαδόχων του Μεγάλου Αλεξάνδρου, τους τελευταίους αιώνες π.Χ.
[11] O. Neugebauer, *Οι Θετικές Επιστήμες στην Αρχαιότητα*, Μ.Ι.Ε.Τ., Αθήνα 1986, σελ. 139.
[12] O. Neugebauer, ένθ. ανωτ., σελ. 144 - 150.

από τους Πυθαγόρειους τον $5^{ο}$ π.Χ. αιώνα (βλέπε 1.6.2). Άρα, μια πολύ πιθανή ερμηνεία θα μπορούσε να είναι ότι απλώς οι Βαβυλώνιοι έκαναν εφαρμογή των τύπων που είχαν αποδείξει πριν από αιώνες οι αρχαίοι Έλληνες και οι οποίοι είχαν φθάσει σ' αυτούς μέσα από μεταφράσεις.

1.3. ΚΙΝΑ

Το 213 π.Χ., με εντολή του Shih Hoang-ti[13] του «Πρώτου Αυτοκράτορα» (259 π.Χ.-210 π.Χ.) ιδρυτή της Δυναστείας των Ch'in, έχουμε την καύση όλων των βιβλίων, εκτός από αυτά που αφορούν στην ιατρική, γεωργία και στις προφητείες. Οι 460 επιστήμονες που διαμαρτυρήθηκαν ετάφησαν ζωντανοί.
Το 176 π.Χ., ο λόγιος Ch'ang Ts'ang (~250-152 π.Χ.) συγγράφει το *Chiu-chang Suan-shu (Η Αριθμητική σε Εννέα Ενότητες),* το σημαντικότερο, κατά τον Smith [14], και από τα πρώτα σωζόμενα, καθαρά μαθηματικό, κινέζικο κείμενο. Το βιβλίο αυτό, σύμφωνα με τον πρόλογο του βιβλίου των σχολίων του Liu Hui το 263 μ.Χ.[15], βασίστηκε σε αποσπάσματα ενός πολύ παλιότερου έργου με τον ίδιο τίτλο, που τοποθετείται χρονικά στην εποχή του Chóu-Kung[16], ο οποίος πέθανε το 1105 π.Χ. Επίσης αναφέρεται [17] ότι το βρίσκουμε ακόμη πιο πίσω, στη Δυναστεία του Huang-ti ή Κίτρινου Αυτοκράτορα του $27^{ου}$ αιώνα π.Χ.. Τελικά, για τον συγγραφέα και τον χρόνο της πρώτης έκδοσης δεν είμαστε βέβαιοι. Το πιο πιθανό είναι ότι το μεγαλύτερο μέρος του προϋπήρχε του 1000 π.Χ. Το βιβλίο ξαναγράφεται από τον Ching Ch'ou-ch'ang κατά την πρώτη περίοδο της Δυναστείας των Han, όταν στο θρόνο ανέβηκε το 202 π.Χ. ο αυτοκράτορας Kao-tsu. Σχόλια πάνω στο ίδιο βιβλίο ξαναγράφτηκαν από τον Li Ch'un-fêng τον $7^{ο}$ μ.Χ. αιώνα.
Στην $7^{η}$ ενότητα του βιβλίου αυτού περιλαμβάνονται προβλήματα, όπως το παρακάτω[18]

Έχουμε δύο άγρια νερόχορτα. Την πρώτη ημέρα, το ένα μεγαλώνει 3 πόδια και το άλλο 1 πόδι. Κάθε μέρα, η αύξηση του πρώτου είναι η μισή της προηγούμενης μέρας, ενώ η αύξηση του δευτέρου είναι διπλάσια της προηγούμενης. Σε πόσες ημέρες τα δύο φυτά θα βρίσκονται στο ίδιο ύψος;

Το πρόβλημα αυτό το αντιμετωπίζουν με τη μέθοδο του πλεονάσματος και της έλλειψης και το αποτέλεσμα που δίνουν είναι ότι σε $2\,\frac{6}{13}$ ημέρες το κοινό τους ύψος θα είναι 4 πόδια και $8\,\frac{6}{13}$ δέκατα. Πάντως, όπως αναφέρει ο Mikami, σχολιάζοντας το παραπάνω πρόβλημα, πουθενά σ' αυτό το έργο ή σε οποιοδήποτε άλλο παλιό κινέζικο κείμενο, δεν έχουν εντοπιστεί προσπάθειες πρόσθεσης αριθμητικών ή γεωμετρικών προόδων.

---

13 Y. Mikami, *The Development of Mathematics in China and Japan*, Chelsea Publishing Company, N.Y., 1974, σελ. 8-10.
14 D.E. Smith, *History of Mathematics*, Vol.. I, Dover Publications, Inc., New York, 1951, σελ. 138-139.
15 Y. Mikami, ένθ. ανωτ., σελ. 9.
16 D.E. Smith, ένθ. ανωτ., σελ. 31-33.
17 Y. Mikami, ένθ. ανωτ., σελ. 2-3.
18 Y. Mikami, ένθ. ανωτ., σελ. 18.

Στο ίδιο βιβλίο, στην 5η ενότητα[19], βρίσκουμε τον τύπο του όγκου κόλουρης πυραμίδας

$$\frac{1}{6}\left[(2\alpha+\alpha')b+(2\alpha'+\alpha)b'\right]h, \qquad (1)$$

όπου h ύψος, α, α΄ μήκη και b, b΄ πλάτη των παραλλήλων βάσεων.

Αυτόν τον τύπο χρησιμοποιεί ο Ch'ên Huo [20], ο οποίος έζησε κατά την περίοδο της Δυναστείας των Tang και Sung. (Γεννήθηκε το 1011 μ.Χ. και πέθανε το 1075 μ.Χ.). Όταν πρόκειται όμως για προβλήματα εύρεσης πλήθους βαρελιών σε στοίβες, προσθέτει στον τύπο (1) την ποσότητα $\frac{1}{6}(b'-b)h$, δηλαδή χρησιμοποιεί τον τύπο

$$\frac{1}{6}\left[(2\alpha+\alpha')b+(2\alpha'+\alpha)b'\right]h+\frac{1}{6}(b'-b)h. \qquad (2)$$

Οπότε στο πρόβλημα

Αν έχουμε μια στοίβα με 2^2 βαρέλια στην κορυφή και 12^2 στη βάση, σε 11 επίπεδα,

εφαρμόζοντας τον βελτιωμένο τύπο (2), με α = 2, b = 2, α΄= 12, b΄= 12 και h = 11, παίρνουμε το αποτέλεσμα 649 που είναι το γνωστό μας σήμερα άθροισμα: $2^2+3^2+...+12^2$. Ο Mikami πιθανολογεί[21] ότι αυτή ήταν η πρώτη προσπάθεια των Κινέζων να αθροίσουν μια πρόοδο.

Μαζί με άλλα παλιά έργα, σώθηκε η *Κλασική Αριθμητική του Chang Ch'iu-Chien*, σε μια έκδοση της κυβέρνησης της Δυναστείας των Sung το 1084 μ.Χ. Το αρχικό κείμενο του Chang Ch'iu-Chien, πιθανολογείται ότι γράφτηκε κατά το δεύτερο ήμισυ του 6ου μ.Χ. αιώνα. Στα παρακάτω παραδείγματα, βλέπουμε μια αντιμετώπιση των αριθμητικών προόδων από τον Chang, διαφορετική από αυτή που συνηθιζόταν μέχρι τότε[22].

Παράδειγμα 1
Μια γυναίκα υφαίνει 5 πόδια την πρώτη ημέρα και η δουλειά της μειώνεται ημέρα με την ημέρα, μέχρι που υφαίνει 1 πόδι την τελευταία ημέρα. Υποθέτοντας ότι υφαίνει επί 30 ημέρες, ζητείται το συνολικό ποσό σε πόδια του έργου που ύφανε[23].

Ο Chang το αντιμετωπίζει με τον παρακάτω κανόνα

Προσθέστε τα ποσά που υφάνθηκαν την πρώτη και την τελευταία ημέρα και πάρτε το μισό του αθροίσματος που προκύπτει. Κατόπιν, πολλαπλασιάστε το αποτέλεσμα επί τον αριθμό των ημερών που ύφαινε, οπότε παίρνετε την απάντηση.

[19] Y. Mikami, ένθ. ανωτ., σελ. 15.
[20] Y. Mikami, ένθ. ανωτ., σελ. 61.
[21] Y. Mikami, ένθ. ανωτ., σελ. 62.
[22] Y. Mikami, ένθ. ανωτ., σελ. 39.
[23] Y. Mikami, ένθ. ανωτ., σελ. 41.

Το παραπάνω, είναι ακριβώς ο γνωστός μας τύπος του αθροίσματος των n πρώτων όρων αριθμητικής προόδου

$$S_n = \frac{\alpha_1 + \alpha_n}{2} \cdot n, \quad \text{με} \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}. \tag{3}$$

Παράδειγμα 2

Μιας υφάντριας το υφαντό αυξάνει ημέρα με την ημέρα. Την πρώτη ημέρα υφαίνει 5 πόδια. Σε ένα μήνα έχει υφάνει 30 πόδια και 9 p'ι. Ζητείται το ποσό της καθημερινής αύξησης της ύφανσης[24].

Ο κανόνας που ακολουθεί ο Chang, με σημερινή ορολογία, μας δίνει τον γνωστό μας τύπο της διαφοράς αριθμητικής προόδου

$$\omega = \frac{\frac{2S_n}{n} - 2\alpha_1}{n-1}, \tag{4}$$

ο οποίος είναι ισοδύναμος με τον (3).

Ο Chang ασχολείται και με προβλήματα που σήμερα θα μπορούσαμε να τα εντάξουμε σε προβλήματα γεωμετρικών προόδων.

Ένα άλογο που τρέχει επί 7 ημέρες, διανύει 700 μίλια. Αν κάθε ημέρα μειώνει στο μισό την ταχύτητά του, πόση απόσταση διανύει κάθε ημέρα[25]*;*

Ο τύπος που εφαρμόζει για να βρει την απόσταση, είναι

$$\frac{700\omega_n}{1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6},$$

όπου ω_n είναι ο συντελεστής της κάθε ημέρας, με $\omega_1 = 64$, $\omega_2 = 32$ κ.λπ. Δηλαδή τύπο, ή κάτι σχετικό, που να μας δίνει άθροισμα όρων γεωμετρικής προόδου δεν συναντάμε, καθώς, όπως συμπεραίνει ο Mikami, οι Κινέζοι την εποχή εκείνη δεν είχαν αυτή τη γνώση.

Το 1247 μ.Χ. ο Ch'in Chiu–shao έγραψε το *Su–shu Chin–chang*, *(Οι εννέα ενότητες των Μαθηματικών)*. Στις εννέα αυτές ενότητες περιλαμβάνονται 81 προβλήματα κατανεμημένα σε 18 βιβλία ή κεφάλαια.

Στο βιβλίο 14 υπάρχει ένα πρόβλημα[26] αριθμητικής προόδου.

Υπάρχει ένας σωρός από δοκάρια κέδρου συσσωρεμένα σε τριγωνική μορφή. Το πλήθος των δοκαριών και ο αριθμός των σειρών δεν είναι γνωστά. Είναι μόνο γνωστό ότι όταν αφαιρέσουμε τα δοκάρια μέχρι και τη μεσαία σειρά, η επόμενη σειρά περιέχει 9 δοκάρια. Ζητείται ο αρχικός αριθμός των δοκαριών και ο αριθμός αυτών που απέμειναν.

---

[24] Y. Mikami, ένθ. ανωτ., σελ. 41.
[25] Y. Mikami, ένθ. ανωτ., σελ. 42.
[26] Y. Mikami, ένθ. ανωτ., σελ. 72.

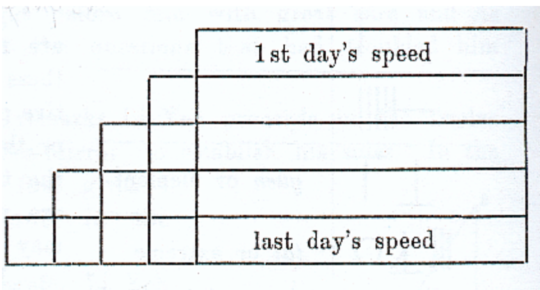
Ο Ch'in, για να βρει το άθροισμα στο συγκεκριμένο πρόβλημα, χρησιμοποιεί, σε σύγχρονη ορολογία, τον τύπο $\frac{2\alpha_\mu \cdot (2\mu-1)}{2}$, όπου μ είναι το πλήθος των σειρών και α_μ είναι το πλήθος των δοκαριών στη μεσαία σειρά.

Στα βιβλία 15 και 16[27] βρίσκουμε κι άλλα προβλήματα που αναφέρονται σε αριθμητικές προόδους. Μας δίδεται ότι το άθροισμα των n πρώτων φυσικών αριθμών είναι $\frac{n(n+1)}{2}$, όπως επίσης ότι το άθροισμα των φυσικών από τον k μέχρι και τον n είναι $\frac{n(n+1)}{2} - \frac{(k-1)k}{2}$. Εδώ βρίσκουμε ακόμη και τον τύπο

$$\alpha + (\alpha + b) + (\alpha + 2b) + ... + (\alpha + (n-1)b) = \frac{b}{2}n^2 + \left(\alpha - \frac{b}{2}\right)n,$$

δηλαδή, τον γνωστό σε μας τύπο του αθροίσματος των n πρώτων όρων αριθμητικής προόδου.

Το 1261 μ.Χ. ο Yang Hui [28] (1238-1298) στο έργο του *Hsiang-chich Chin-chang Suan-fa*, *(Η Ανάλυση των Αριθμητικών Νόμων σε Εννέα Ενότητες)* – ένα έργο όπου εξηγεί μερικά τμήματα από το αρχικό *Η Αριθμητική σε Εννέα Ενότητες*[29] - περιγράφει πρόσθεση όρων αριθμητικής προόδου.
Για να απαντήσει στο πρόβλημα που του ζητά να υπολογίσει μια απόσταση που διάνυσε ένα άλογο σε 15 ημέρες, όταν την α΄ ημέρα καλύπτει 193 κινέζικα μίλια και κάθε ημέρα αυξάνει την απόσταση που καλύπτει κατά 15 μίλια, πολλαπλασιάζει το σύνολο των ημερών με το ημιάθροισμα των αποστάσεων της πρώτης και της τελευταίας ημέρας. Την απόσταση της τελευταίας ημέρας τη βρίσκει με τον γνωστό σε μας τύπο $\alpha_{15} = \alpha_1 + 14\omega$. Για να το κάνει πιο κατανοητό, παραθέτει το παρακάτω διάγραμμα. Σκοπός του είναι στο υπάρχον σχήμα να προσθέσει το ίδιο, έτσι ώστε, στο α_1 να προστεθεί το α_n, στο α_2 το α_{n-1} κ.λπ., οπότε το εμβαδόν του ορθογωνίου που θα προκύψει θα είναι το διπλάσιο του ζητούμενου εμβαδού.



Διάγραμμα σελ. 85, Mikami.

Ακόμη, ο Yang Hui στο έργο του αυτό, μας δίνει το σημερινό Τρίγωνο του Pascal μέχρι την 6η σειρά και μας πληροφορεί ότι η γνώση του αυτή προέρχεται από τον Jia

[27] Y. Mikami, ένθ. ανωτ., σελ. 72.
[28] Y. Mikami, ένθ. ανωτ., σελ. 84.
[29] D.E. Smith, ένθ. ανωτ., σελ. 271.

Xian ή Chia Hsien (~ 1010 μ.Χ. έως ~ 1070 μ.Χ.), ο οποίος γνώριζε τους συντελεστές του διωνυμικού αναπτύγματος έως και για $n = 6$ και πώς αυτοί προέκυπταν στο τρίγωνο που ονομάστηκε αργότερα ***Τρίγωνο του Pascal***.

Στο *Suan-fa T'ung-pien Pen-mo (Το άλφα και το ωμέγα των παραλλαγών σε πολλαπλασιασμό και διαίρεση)*, του ίδιου συγγραφέα του 1274 μ.Χ.[30], βρίσκουμε τους τύπους των αθροισμάτων που αποκαλεί *τριγωνικά* και *τετράγωνα*, αντίστοιχα,

$$1+(1+2)+(1+2+3)+...+(1+2+3+...+n)=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

και

$$1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{1}{3}n\left(n+\frac{1}{2}\right)(n+1),$$

χωρίς περεταίρω εξηγήσεις.

Η αναφορά μας στη Χρυσή Εποχή των κινέζικων μαθηματικών θα κλείσει με το *Szu-yuen Yü-chien* (*Πολύτιμο Καθρέπτη των Τεσσάρων Στοιχείων),* σπουδαίο έργο του Chu Shih- chieh, του 1303 μ.Χ.[31]. Δύο από τα αθροίσματα που συναντάμε είναι τα παρακάτω

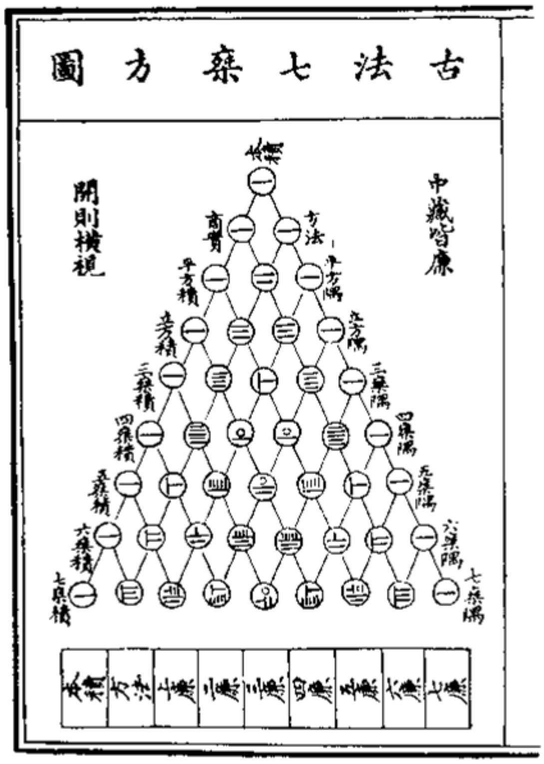
$$1^2+2^2+3^2+...+n^2=n(n+1)\frac{(2n+1)}{3!},$$

$$1+8+30+80+...+n^2(n+1)\frac{(n+2)}{3!}=n(n+1)(n+2)(n+3)\frac{(4n+1)}{5!}.$$

Ο Chu Shih-chieh χρησιμοποίησε τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών προκειμένου να αντιμετωπίσει τα προβλήματα των αθροισμάτων. Από τον 7ο αιώνα όμως έχουμε την εμφάνιση κάποιων στοιχείων της μεθόδου αυτής[32].

Στο εξώφυλλο του παραπάνω βιβλίου, που παραθέτουμε παρακάτω, βλέπουμε το εσφαλμένα επονομαζόμενο Τρίγωνο του Pascal με τίτλο *Η Παλαιά Μέθοδος του Πίνακα των Επτά Πολλαπλασιαζομένων Τετραγώνων,* μέχρι την 8η δύναμη[33].

30 http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Yang_Hui.html
31 Y. Mikami, ένθ. ανωτ., σελ. 89.
32 C. Boyer - U. Merzbach, ένθ. ανωτ., σελ. 231.
33 C. Boyer - U. Merzbach, ένθ. ανωτ., σελ. 232.



Τρίγωνο του Pascal (C. Boyer - U. Merzbach, σελ. 232).

1.4. ΙΝΔΙΑ

Ένας από τους γνωστότερους Ινδούς μαθηματικούς είναι ο **Aryabhata**[34]**,** ο οποίος έζησε στα τέλη του $5^{ου}$ και στις αρχές του $6^{ου}$ μ.Χ. αιώνα, ενώ από δικό του κείμενο φαίνεται ότι γεννήθηκε το 475 ή 476 μ.Χ. και έζησε στην Kusumapura, που σήμερα ονομάζεται Patua. Το έργο του *Aryabhatiyam*, για αιώνες αδύνατο να βρεθεί, έφθασε στη Δύση το 1874, χάρη στον Ολλανδό H.Kern ο οποίος το βρήκε στην Καλκούτα σε δύο αντίγραφα του 1820 και του 1863. Στο κείμενο αυτό, εκτός των άλλων, περιλαμβάνονται κανόνες σχετικοί με τις αριθμητικές προόδους. Αφορούν στο άθροισμα των όρων αριθμητικής προόδου και στον αριθμό των όρων ακολουθίας με δεδομένο τον πρώτο όρο, τη διαφορά και το άθροισμα των όρων της. Οι κανόνες, γνωστοί από παλιά, το πιθανότερο προέρχονται από το έργο του Διόφαντου *Περί πολυγώνων αριθμών.* Ο δεύτερος κανόνας είναι ο παρακάτω[35]

Πολλαπλασίασε το άθροισμα της προόδου επί το οκταπλάσιο της κοινής διαφοράς, πρόσθεσε το τετράγωνο της διαφοράς του διπλάσιου του πρώτου όρου και της κοινής διαφοράς, πάρε την τετραγωνική ρίζα αυτού, αφαίρεσε το διπλάσιο του πρώτου όρου, διαίρεσε με την κοινή διαφορά, πρόσθεσε 1, διαίρεσε δια 2. Το αποτέλεσμα θα είναι ο αριθμός των όρων.

Ο κανόνας αυτός δεν συνοδεύεται από απόδειξη ή έστω από κάποια εξήγηση, πράγμα που ισχύει και αλλού στο συγκεκριμένο έργο. Ο Boyer πιστεύει ότι κατέληξε εκεί λύνοντας μια εξίσωση β΄ βαθμού.

[34] G. Loria, *Ιστορία των Μαθηματικών,* τόμος Α΄, Ε.Μ.Ε., 1971, σελ. 234.
[35] C. Boyer - U. Merzbach, ένθ. ανωτ., σελ. 237.

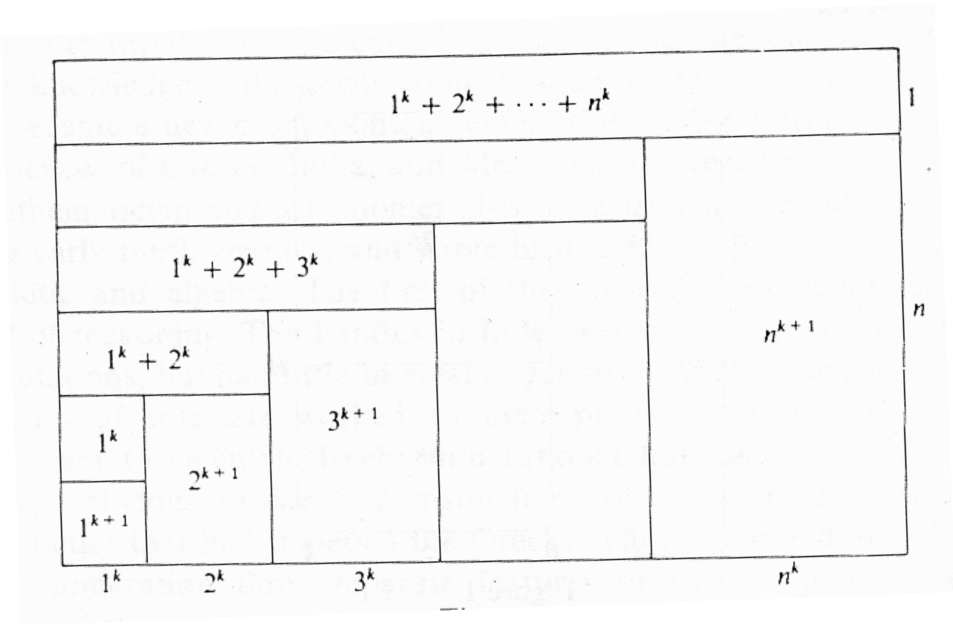
Ακολουθούν πολύπλοκα προβλήματα ανατοκισμού, δηλαδή προβλήματα γεωμετρικών προόδων.
Εκτός του Aryabhata, άλλοι γνωστοί Ινδοί μαθηματικοί ήταν ο **Brahmagupta** που γεννήθηκε το 598 μ.Χ. και ο **Bhascara** (1114 - ~1185 μ.Χ.) κορυφαίος μαθηματικός του 12^{ου} αιώνα. Εκτός του ότι γνώριζαν σχετικά με αριθμητικές και γεωμετρικές προόδους, μπορούσαν ακόμη να υπολογίσουν το άθροισμα των τετραγώνων και των κύβων διαδοχικών ακεραίων πεπερασμένου πλήθους.

1.5. ΑΡΑΒΕΣ

Σπουδαίος Άραβας που ασχολήθηκε με μεγάλη επιτυχία με τις εφαρμογές των μαθηματικών στη φυσική, ήταν ο **Al Hasan ibn Al Hasan ibn Al Haitam Abu Ali**[36], γνωστός ως **Alhazen**, ο οποίος γεννήθηκε το 965 μ.Χ. στη Βασόρα και πέθανε στο Κάιρο το 1039 μ.Χ. Ο Alhazen λειτούργησε στο πνεύμα του Αρχιμήδη (~278-212 π.Χ.), (βλ. 1.6.4). Σ' ένα σημαντικό έργο του, σχετικό με τη γεωμετρική οπτική, προκειμένου να αποδείξει ότι ο όγκος του στερεού που προκύπτει από την περιστροφή παραβολικού τμήματος γύρω από τη βάση του, ισούται με τα $\frac{8}{15}$ του όγκου του περιγεγραμμένου κυλίνδρου, του χρειάστηκε ο υπολογισμός του αθροίσματος

$$S_k = 1^k + 2^k + 3^k + ... + n^k,$$

για $k = 3,4$. Ο Alhazen κατάφερε να υπολογίσει το παραπάνω άθροισμα, όχι μόνο για $k = 1,2,3$ που είχε ήδη υπολογισθεί, αλλά και για $k = 4$. Ο υπολογισμός του στηρίχθηκε στο παρακάτω γεωμετρικό σχήμα στη γενικευμένη του μορφή.



ΣΧΗΜΑ[37]

Από το παραπάνω σχήμα προκύπτει ο αναγωγικός τύπος

---

36 G. Loria, ένθ. ανωτ., τόμος Α΄, σελ. 272.
37 C.H. Edwards, Jr., *The Historical Development of the Calculus,* Springer-Verlag, New York, Second Printing, 1982, σελ. 84.

$$(n+1)\sum_{i=1}^{n} i^k = \sum_{i=1}^{n} i^{k+1} + \sum_{m=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} i^k\right), \text{ με } k \in \mathbb{N}.$$

Το μειονέκτημα αυτής της μεθόδου είναι ότι για μεγάλα k δεν είναι αλγοριθμική. Κάθε φορά πρέπει να βρεθεί το προηγούμενο άθροισμα για να υπολογισθεί το επόμενο.

Την ίδια εποχή με τον Alhazen, έζησε και ο **Muhammed ibn Ahmed Abu'l Riban Al Biruni**[38], γνωστός ως **Al Biruni**, ο οποίος γεννήθηκε το 973 μ.Χ. στο Khowarezm και πέθανε στο Αφγανιστάν το 1048 μ.Χ. Το περιεχόμενο του έργου του έχει ποικιλία. Περιλαμβάνει φιλοσοφικά και ιστορικά κείμενα και ταξιδιωτικές περιγραφές. Σε κάποια τέτοια ταξιδιωτική περιγραφή βρίσκουμε τον υπολογισμό του αθροίσματος των 64 πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο το 1 και λόγο το 2. Αυτό μας παραπέμπει στο γνωστό πρόβλημα του πόσοι κόκκοι σιτάρι χωρούν στα τετραγωνάκια μιας σκακιέρας, ξεκινώντας με 1 κόκκο στο πρώτο τετραγωνάκι και κάθε φορά βάζοντας στο επόμενο τετραγωνάκι το διπλάσιο του προηγούμενου.
Ικανότατος μαθηματικός ήταν και ο **Muhammed ibn Al Hasan abu Bokr Al Karchi**[39]**,** γνωστός ως **Alkarchi.** Ασχολήθηκε και αυτός, όπως και ο **Alhazen** με το παραπάνω άθροισμα S_k για $k=1,2,3,4$ και μάλιστα η μέθοδος που χρησιμοποίησε για $k=4$, αν πράγματι είναι δική του, τον κατατάσσει μεταξύ των σημαντικών μαθητών των διαπρεπέστερων Ελλήνων μαθηματικών[40]. Πέθανε το 1029 μ.Χ.

Κλείνουμε τους Άραβες με τον **Ali ibn Muhammed ibn Muhammed ibn Ali al Basti al Qalasadi**[41] ο οποίος γεννήθηκε το 1423 και πέθανε το 1494 ή 1495. Έγραψε ένα βιβλίο αριθμητικής το οποίο περιλαμβανόταν σε ένα μεγαλύτερο έργο του με τίτλο *Ανύψωση της εσθήτος της επιστήμης του λογισμού.* Στον επίλογο του βιβλίου αυτού υπάρχουν εφαρμογές διάφορων τύπων όπως του παραπάνω αθροίσματος S_k για $k=1,2,3$, όπως επίσης το άθροισμα μόνο αρτίων ή μόνο περιττών.

1.6. ΑΡΧΑΙΑ ΕΛΛΑΔΑ

1.6.1. Στο έργο *Περί μεσοτήτων* του **Ερατοσθένη του Κυρηναίου** (γεννήθηκε το 275 ή 276 π.Χ.), το οποίο του αποδίδει ο Πάππος, βρίσκουμε την παρακάτω δική του πρόταση, όπως αναφέρει ο Loria,[42] αναφερόμενη σε γεωμετρική πρόοδο.

Αν α, β, γ είναι τρεις αριθμοί που αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου, τότε και οι αριθμοί α, $\alpha+\beta$, $\alpha+2\beta+\gamma$ αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου.

Παραθέτουμε το πρωτότυπο κείμενο, όπου ορίζει επίσης τον μέσο αριθμητικό, τον μέσο γεωμετρικό και τον μέσο αρμονικό.

[38] G. Loria, ένθ. ανωτ., τόμος Α΄, σελ. 273.
[39] G. Loria, ένθ. ανωτ., τόμος Α΄, σελ. 277.
[40] G. Loria, ένθ. ανωτ., τόμος Α΄, σελ. 278.
[41] G. Loria, ένθ. ανωτ., τόμος Α΄, σελ. 286.
[42] G. Loria, ένθ. ανωτ., τόμος Α΄, σελ. 96.

ια. Τὸ δὲ δεύτερον τῶν προβλημάτων ἦν τόδε.

Ἐν ἡμικυκλίῳ τὰς τρεῖς μεσότητας λαβεῖν ἄλλος τις ἔφασκεν, καὶ ἡμικύκλιον τὸ ΑΒΓ ἐκθέμενος, οὗ κέντρον τὸ Ε, καὶ τυχὸν σημεῖον ἐπὶ τῆς ΑΓ λαβὼν τὸ Δ, καὶ ἀπ᾽ αὐτοῦ πρὸς ὀρθὰς ἀγαγὼν τῇ ΕΓ τὴν ΔΒ, καὶ ἐπιζεύξας τὴν ΕΒ, καὶ αὐτῇ κάθετον ἀγαγὼν ἀπὸ τοῦ Δ τὴν ΔΖ, τὰς τρεῖς μεσότητας ἔλεγεν ἁπλῶς ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ ἐκτεθεῖσθαι, τὴν μὲν ΕΓ μέσην ἀριθμητικήν, τὴν δὲ ΔΒ μέσην γεωμετρικήν, τὴν δὲ ΒΖ ἁρμονικήν.

Ὅτι μὲν οὖν ἡ ΒΔ μέση ἐστὶ τῶν ΑΔ ΔΓ ἐν τῇ γεωμετρικῇ ἀναλογίᾳ, ἡ δὲ ΕΓ τῶν ΑΔ ΔΓ ἐν τῇ ἀριθμητικῇ μεσότητι, φανερόν. ἔστι γὰρ ὡς μὲν ἡ ΑΔ πρὸς ΔΒ, ἡ ΔΒ πρὸς ΔΓ, ὡς δὲ ἡ ΑΔ πρὸς ἑαυτήν, οὕτως ἡ τῶν ΑΔ ΑΕ ὑπεροχή, τουτέστιν ἡ τῶν ΑΔ ΕΓ, πρὸς τὴν τῶν ΕΓ ΓΔ. πῶς δὲ καὶ ἡ ΖΒ μέση ἐστὶν τῆς ἁρμονικῆς μεσότητος, ἢ ποίων εὐθειῶν, οὐκ εἶπεν, μόνον δὲ ὅτι τρίτη ἀνάλογόν ἐστιν τῶν ΕΒ ΒΔ, ἀγνοῶν ὅτι ἀπὸ τῶν ΕΒ ΒΔ ΒΖ ἐν τῇ γεωμετρικῇ ἀναλογίᾳ οὐσῶν πλάσσεται ἡ ἁρμονικὴ μεσότης. δειχθήσεται γὰρ ὑφ᾽ ἡμῶν ὕστερον ὅτι δύο αἱ ΕΒ καὶ τρεῖς αἱ ΔΒ καὶ μία ἡ ΒΖ ὡς μία συντεθεῖσαι ποιοῦσι τὴν μείζονα ἄκραν τῆς ἁρμονικῆς μεσότητος, δύο δὲ αἱ ΒΔ καὶ μία ἡ ΒΖ τὴν μέσην, μία δὲ ἡ ΒΔ καὶ μία ἡ ΒΖ τὴν ἐλαχίστην.

Πρότερον δὲ διαληπτέον περὶ τῶν τριῶν μεσοτήτων [καὶ μετὰ ταῦτα περὶ τῶν ἐν ἡμικυκλίῳ], εἶτα περὶ τῶν ἀντικειμένων αὐταῖς ἄλλων τριῶν κατὰ τοὺς παλαιούς, καὶ ὕστερον περὶ τῶν παρὰ τοῖς νεωτέροις τεσσάρων ἀκολούθως ταῖς γνώμαις αὐτῶν, καὶ ὡς δυνατόν ἐστιν ἑκάστην τῶν δέκα μεσοτήτων διὰ τῆς γεωμετρικῆς ἀναλογίας εὑρίσκειν, ἵνα καὶ τὸν προκείμενον ἔλεγχον διὰ πλειόνων συστησώμεθα.

Περὶ τῶν τριῶν μεσοτήτων.

ιβ. Διαφέρει τοίνυν μεσότης ἀναλογίας τῷδε ὅτι εἰ μὲν τί ἐστιν ἀναλογία, τοῦτο καὶ μεσότης, οὐ μὴν καὶ ἀνάπαλιν. μεσότητες γάρ εἰσι τρεῖς, ὧν ἡ μὲν ἀριθμητική, ἡ δὲ γεωμετρική, ἡ δὲ ἁρμονική.

Ἀριθμητικὴ μὲν οὖν λέγεται μεσότης, ὅταν τριῶν ὄντων ὅρων ὁ μέσος τῷ ἴσῳ ἑνὸς μὲν τῶν ἄκρων ὑπερέχῃ, ὑπερέχηται δὲ ὑπὸ τοῦ λοιποῦ (ὡς ἔχει ὁ ϛ πρὸς τὸν θ καὶ τὸν γ ἀριθμόν), ἢ ὅταν ᾖ ὡς ὁ πρῶτος ὅρος πρὸς αὑτὸν, ἡ πρώτη ὑπεροχὴ πρὸς τὴν δευτέραν. [πρῶτα δὲ ἀκούειν δεῖ τὰ ὑπερέχοντα.]

Γεωμετρικὴ δὲ λέγεται μεσότης, τουτέστιν ἀναλογία κυρίως, ὅταν ᾖ ὡς ὁ μέσος ὅρος πρὸς ἕνα τῶν ἄκρων, οὕτως ὁ λοιπὸς πρὸς τὸν μέσον (ὡς ἔχει ὁ ϛ ἀριθμὸς πρός τε τὸν ιβ καὶ τὸν γ), καὶ ἄλλως• ὅταν ᾖ ὡς ὁ πρῶτος ὅρος πρὸς τὸν δεύτερον, ἡ πρώτη ὑπεροχὴ πρὸς τὴν δευτέραν.

Ἁρμονικὴ δέ ἐστι μεσότης, ὅταν ὁ μέσος ὅρος τῷ αὐτῷ μέρει ὑπερέχῃ μὲν ἑνὸς τῶν ἄκρων, ὑπερέχηται δὲ ὑπὸ τοῦ λοιποῦ (ὡς ἔχει ὁ γ ἀριθμὸς πρός τε τὸν β καὶ τὸν ϛ), ἢ ὅταν ᾖ ὡς ὁ πρῶτος ὅρος πρὸς τὸν τρίτον, ἡ πρώτη ὑπεροχὴ πρὸς τὴν δευτέραν.

Τούτων ὑποκειμένων εὑρήσομεν ὁμοῦ τὰς τρεῖς μεσότητας ἐν ἐλαχίσταις εὐθείαις πέντε τὸν ἀριθμὸν προγραφέντων τῶνδε.

Ἔστω δὴ πρῶτον δοθεισῶν τῶν ΑΒ ΒΓ μέσην εὑρεῖν κατὰ τὴν γεωμετρικὴν ἀναλογίαν.

Ἤχθω πρὸς ὀρθὰς ἡ ΓΔ, καὶ δίχα τετμήσθω ἡ ΑΒ τῷ Ε, καὶ περὶ κέντρον τὸ Ε διὰ τοῦ Β περιφέρεια γραφεῖσα τεμνέτω τὴν πρὸς ὀρθὰς κατὰ τὸ Δ, καὶ τῇ τὰ Β Δ
ἐπιζευγνυούσῃ ἴσῃ ἀφῃρήσθω ἡ ΒΖ, καὶ γίνεται ἡ ζητουμένη μέση ἡ ΒΖ. ἐπιζευχθεῖσα γὰρ ἡ ΔΑ ὀρθὴν περιέχει γωνίαν μετὰ τῆς ΒΔ διὰ τὸ ἴσην εἶναι ἑκατέραν τῶν ΒΕ ΕΑ τῇ ἐπιζευγνυούσῃ τὰ Δ Ε. ἔστιν δὲ καὶ ἡ πρὸς τῷ Γ ὀρθή. καὶ ἰσογώνιον ἄρα τὸ ΑΒΔ τρίγωνον τῷ ΒΓΔ, καὶ διὰ τοῦτο αἱ περὶ τὴν κοινὴν αὐτῶν γωνίαν τὴν πρὸς τῷ Β πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν• ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς ΔΒ, ἡ ΒΔ πρὸς ΒΓ, καὶ μέση τῶν ΑΒ ΒΓ ἡ ΒΔ ἴση τῇ ΒΖ.

1.6.2. ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟΙ

Ο Πυθαγόρας που γεννήθηκε το 586 π.Χ. στη Σάμο, φθάνει στον Κρότωνα περίπου το 540 π.Χ. και ιδρύει το τάγμα των Πυθαγορείων. Οι Πυθαγόρειοι ενδιαφέρθηκαν, εκτός των άλλων, για τους **τρίγωνους αριθμούς**, τους αριθμούς δηλαδή που σήμερα δίνονται από τον τύπο

$$1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}=N.$$

Επίσης, για τους **τετράγωνους αριθμούς**, τους αριθμούς δηλαδή που σήμερα δίνονται από τον τύπο

$$1+3+5+...+(2n-1)=n^2=N.$$

Ακόμη, για τους **επιμήκεις αριθμούς**[43]**,** αριθμούς της μορφής

$$2+4+6+...+2n=n(n+1)=N,$$

δηλαδή το διπλάσιο κάποιου τρίγωνου αριθμού.
Οι **πεντάγωνοι αριθμοί,** αριθμοί της μορφής

$$1+4+7+...+(3n-2)=\frac{n(3n-1)}{2}=N,$$

όπως και οι **εξάγωνοι αριθμοί,** αριθμοί της μορφής

$$1+5+9+...+(4n-3)=2n^2-n=N,$$

είναι παραδείγματα των **πολύγωνων αριθμών** που γενικεύονται στο έργο του Υψικλή και παριστάνονται με τον ίδιο τρόπο. Επέκταση της διαδικασίας αυτής στις τρεις διαστάσεις μας δίνει τους **πολύεδρους αριθμούς.**

Ένα σοβαρό σφάλμα σε σχέση με τους **πολύγωνους αριθμούς,** συναντάμε στον *Αρκεριανό Κώδικα,* (Codice Arceriano), όπου, προκειμένου να υπολογισθεί το εμβαδόν ενός κανονικού πολυγώνου δοσμένης πλευράς, γίνεται συσχέτιση των πολύγωνων αριθμών, οι οποίοι, όπως είπαμε, ήταν ήδη γνωστοί από την εποχή του Υψικλή. Εδώ πρέπει να πούμε ότι το περιεχόμενο του εν λόγω Κώδικα τοποθετείται χρονικά στο 450 μ.Χ. Εκτός όμως από το παραπάνω σφάλμα, σχετικά με το

[43] C. Boyer - U. Merzbach, ένθ. ανωτ , σελ. 62-63.

αντικείμενό μας, μας ενημερώνει για το άθροισμα των n πρώτων φυσικών αριθμών, για το άθροισμα των τετραγώνων των n πρώτων φυσικών αριθμών, όπως και για το άθροισμα των κύβων των n πρώτων φυσικών αριθμών.

Ακόμη, σχετικά με τους Πυθαγόρειους, θα αναφερθούμε στο Κεφάλαιο 3.

1.6.3. ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

Η ακμή του Ευκλείδη τοποθετείται γύρω στο 300 π.Χ. στη Αλεξάνδρεια, οπότε έχουμε και τη συγγραφή των ***Στοιχείων*** του. Στο έργο αυτό συγκεντρώνει θεωρήματα που ήταν γνωστά μέχρι τότε, όπως του Ευδόξου, του Θεαίτητου και των Πυθαγορείων, τα οποία αποδεικνύει με αυστηρούς συλλογισμούς, όπου αυτοί δεν υπήρχαν. Τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη αποτελούνται από 13 Βιβλία. Τα βιβλία VII, VIII και IX αναφέρονται σε Θεωρία Αριθμών.
Ειδικά, στο Βιβλίο VIII οι αριθμοί στους οποίους κυρίως αναφέρεται βρίσκονται σε «συνεχή αναλογία», δηλαδή σε γεωμετρική πρόοδο. (Προτάσεις 1,2,3,6,7,13). Οι Προτάσεις 8, 9 και 10 αναφέρονται στην παρεμβολή του γεωμετρικού μέσου μεταξύ αριθμών.
Επίσης, στο Βιβλίο IX η Πρόταση 11 και το Πόρισμα που ακολουθεί, καθώς και οι Προτάσεις 12 και 13 αναφέρονται σε όρους γεωμετρικής προόδου. Πολύ σημαντικές όμως είναι οι δύο τελευταίες Προτάσεις του Βιβλίου, δηλαδή η 35 και η 36.

Στην **Πρόταση 35** ο Ευκλείδης μας δίνει τον τύπο του αθροίσματος των n πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου, με σημερινή ορολογία, με τον εξής τρόπο

Αν $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,...,\alpha_n,\alpha_{n+1}$ οι $n+1$ όροι μιας γεωμετρικής προόδου, τότε θα ισχύει η σχέση

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1}=\frac{\alpha_3}{\alpha_2}=...=\frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}}=\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n},$$

απ' όπου, μέσω του Ορισμού 15 του Βιβλίου V, το οποίο αναφέρεται στη θεωρία των αναλογιών του Ευδόξου, ο οποίος ορισμός μετασχηματίζει τον λόγο $\frac{\alpha}{\beta}$ σε $\frac{\alpha-\beta}{\beta}$, θα έχουμε

$$\frac{\alpha_2-\alpha_1}{\alpha_1}=\frac{\alpha_3-\alpha_2}{\alpha_2}=...=\frac{\alpha_n-\alpha_{n-1}}{\alpha_{n-1}}=\frac{\alpha_{n+1}-\alpha_n}{\alpha_n}.$$

Τέλος, εφαρμόζοντας την Πρόταση 12 του Βιβλίου VII, η οποία μας λέει ότι αν

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1}=\frac{\alpha_2}{\beta_2}=\frac{\alpha_3}{\beta_3}=...,$$

τότε καθένας από τους λόγους αυτούς θα ισούται με τον λόγο

$$\frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+...}{\beta_1+\beta_2+\beta_3+...},$$

παίρνουμε

$$\frac{\alpha_2-\alpha_1}{\alpha_1}=\frac{\alpha_{n+1}-\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_{n-1}+\alpha_n}.$$

Στην **Πρόταση 36** ο Ευκλείδης αναφέρεται στο κριτήριο για τους τέλειους αριθμούς. Έστω η ακολουθία $1, 2, 2^2, ..., 2^n$. Αν το άθροισμα οποιουδήποτε πλήθους όρων της είναι πρώτος αριθμός, τότε το γινόμενο του αθροίσματος αυτού με τον τελευταίο του όρο είναι τέλειος αριθμός. Δηλαδή, αν $n+1$ είναι το πλήθος των όρων της, τότε ο αριθμός $\left(1+2+2^2+...+2^n\right)\cdot 2^n$ είναι τέλειος, ισούται δηλαδή με το άθροισμα όλων των διαιρετών του (εκτός του εαυτού του).

1.6.4. ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ[44]

Γεννήθηκε γύρω στο 278 π.Χ.. Σπούδασε στην Αλεξάνδρεια με καθηγητές του τους μαθητές του Ευκλείδη. Το μεγαλύτερο μέρος της ζωής του το έζησε στις Συρακούσες, όπου το 212 π.Χ. τον σκότωσε ένας Ρωμαίος στρατιώτης, παρά τη διαταγή που είχε να μην πειράξει κανείς τον Έλληνα Γεωμέτρη. Σπουδαίος επιστήμονας, θεωρείται ότι είναι ο μεγαλύτερος της εποχής του.

Σχέση του έργου του Αρχιμήδη με Αθροίσματα - Σειρές.

Α) $1^2+2^2+3^2+...+n^2$ (1)
Το παραπάνω άθροισμα αντιμετωπίζεται για πρώτη φορά από τον Αρχιμήδη στο έργο του *Περί Ελίκων*. Στην Πρόταση 10, διαβάζουμε:

ι.
Εἴ κα γραμμαὶ ἑξῆς τεθέωντι ὁποσαιοῦν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερέχουσαι, ᾖ δὲ ἁ ὑπεροχὰ ἴσα τᾷ ἐλαχίστᾳ, καὶ ἄλλαι γραμμαὶ τεθέωντι τῷ μὲν πλήθει ἴσαι ταύταις, τῷ δὲ μεγέθει ἑκάστα τᾷ μεγίστᾳ, τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τᾶν ἰσᾶν τᾷ μεγίστᾳ ποτιλαμβάνοντα τό τε ἀπὸ τᾶς μεγίστας τετράγωνον καὶ τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς ἐλαχίστας καὶ τᾶς ἴσας πάσαις ταῖς τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχούσαις τριπλάσια ἐσσοῦνται τῶν τετραγώνων πάντων τῶν ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσᾶν.

Ελεύθερη μετάφραση
Έστω οσουδήποτε πλήθους ευθύγραμμα τμήματα τα οποία διαφέρουν το ίδιο μεταξύ τους και έστω ότι η διαφορά τους αυτή ισούται με το μικρότερο ευθύγραμμο τμήμα. Αν πάρουμε ίσου πλήθους ευθύγραμμα τμήματα, στο μέγεθος όμως κάθε ένα ευθύγραμμο τμήμα να είναι ίσο με το μέγιστο, τότε το άθροισμα των τετραγώνων με πλευρές τις ίσες με τη μέγιστη πλευρά, συν το τετράγωνο με τη μέγιστη πλευρά, συν το ορθογώνιο με πλευρές το μικρότερο ευθύγραμμο τμήμα και το άθροισμα όλων των ευθυγράμμων τμημάτων που διαφέρουν το ίδιο μεταξύ τους, ισούται με το τριπλάσιο του αθροίσματος των τετραγώνων με πλευρές τα παραπάνω ευθύγραμμα τμήματα. Δηλαδή, με σημερινή ορολογία,

$$n(n\alpha)^2+(n\alpha)^2+\alpha(\alpha+2\alpha+3\alpha+...+n\alpha)=3\left(\alpha^2+(2\alpha)^2+(3\alpha)^2+...+(n\alpha)^2\right),$$

η οποία καταλήγει στην ισότητα $1^2+2^2+3^2+...+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

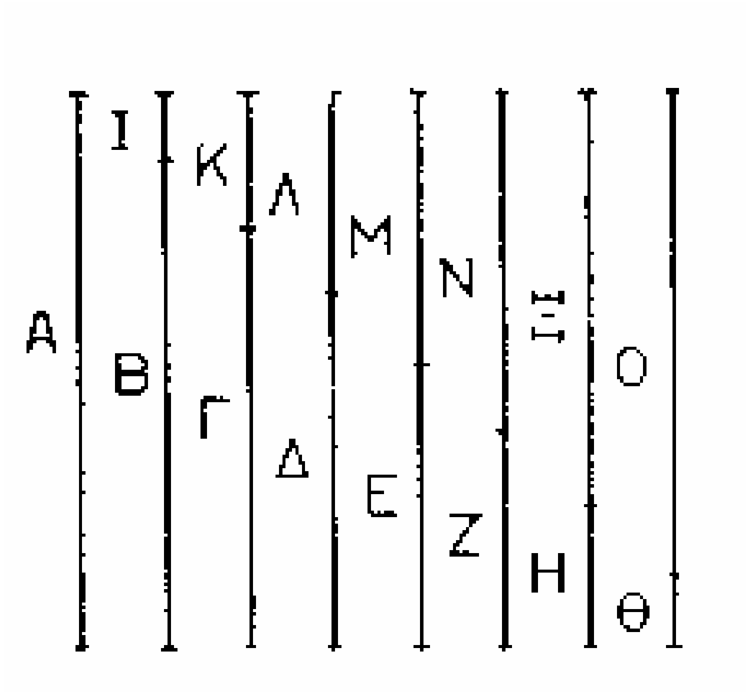
[44] C. Boyer - U. Merzbach, ένθ. ανωτ., σελ. 137.

Απόδειξη

Ἔστων γραμμαὶ ὁποσαιοῦν ἐφεξῆς κείμεναι τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερέχουσαι αἱ Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ, ἁ δὲ Θ ἴσα ἔστω τᾷ ὑπεροχᾷ, ποτικείσθω δὲ ποτὶ τὰν Β ἴσα τᾷ Θ ἁ Ι, ποτὶ δὲ τὰν Γ ἁ Κ ἴσα τᾷ Η, ποτὶ δὲ τὰν Δ ἁ Λ ἴσα τᾷ Ζ, ποτὶ δὲ τὰν Ε ἁ Μ ἴσα τᾷ Ε, ποτὶ δὲ τὰν Ζ ἁ Ν ἴσα τᾷ Δ, ποτὶ δὲ τὰν Η ἁ Ξ ἴσα τᾷ Γ, ποτὶ δὲ τὰν Θ ἁ Ο ἴσα τᾷ Β · ἐσσοῦνται δὴ αἱ γενόμεναι ἴσαι ἀλλάλαις καὶ τᾷ μεγίστᾳ. Δεικτέον οὖν ὅτι τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ πασᾶν τᾶς τε Α καὶ τᾶν γενομενᾶν ποτιλαβόντα τό τε ἀπὸ τᾶς Α τεράγωνον καὶ τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς Θ καὶ τᾶς ἴσας πάσαις ταῖς Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ τριπλάσιά ἐντι τῶν τετραγώνων πάντων τῶν ἀπὸ τᾶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ.

Ἔστιν δὴ τὸ μὲν ἀπὸ τᾶς ΒΙ τετράγωνον ἴσον τοῖς ἀπὸ τᾶν Ι, Β τετραγώνοις καὶ δύο τοῖς ὑπὸ τᾶν Β, Ι περιεχομένοις, τὸ δὲ ἀπὸ τᾶς ΚΓ ἴσον τοῖς ἀπὸ τᾶν Κ, Γ
τετραγώνοις καὶ δύο τοῖς ὑπὸ τᾶν Κ, Γ περιεχομένοις · ὁμοίως δὲ καὶ τὰ ἀπὸ τᾶν ἀλλᾶν τᾶν ἰσᾶν τᾷ Α τετράγωνα ἴσα ἐντὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τμαμάτων τετραγώνοις καὶ δυσὶ τοῖς ὑπὸ τῶν τμαμάτων περιεχομένοις. Τὰ μὲν οὖν ἀπὸ τᾶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ καὶ τὰ ἀπὸ τᾶν Ι, Κ, Λ, Μ, Ν, Ξ, Ο ποτιλαβόντα τὸ ἀπὸ τᾶς Α τετράγωνον διπλάσιά ἐντι τῶν ἀπὸ τᾶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ τετραγώνων· λοιπὸν δὲ ἐπιδειξοῦμες ὅτι τὰ διπλάσια τῶν περιεχομένων ὑπὸ τῶν τμαμάτων τῶν ἐν ἑκάστᾳ γραμμᾷ τᾶν ἰσᾶν τᾷ Α ποτιλαβόντα τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς Θ καὶ τᾶς ἴσας πάσαις ταῖς Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ ἴσα ἐντὶ τοῖς ἀπὸ τᾶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ. Καὶ ἐπεὶ δύο μὲν τὰ ὑπὸ Β, Ι περιεχόμενα ἴσα δυσὶ τοῖς ὑπὸ τᾶν Β, Θ περιεχομένοις, δύο δὲ τὰ ὑπὸ τᾶν Κ, Γ ἴσα τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς Θ καὶ τᾶς τετραπλασίας τᾶς Γ διὰ τὸ τὰν Κ διπλασίονα εἶμεν τᾶς Θ, δύο δὲ τὰ ὑπὸ τᾶν Δ, Λ ἴσα τῷ ὑπὸ τᾶς Θ καὶ τᾶς ἑξαπλασίας τᾶς Δ διὰ τὸ τὰν Λ τριπλασίαν εἶμεν τᾶς Θ, ὁμοίως δὲ καὶ τὰ ἄλλα τὰ διπλάσια τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν τμαμάτων ἴσα ἐντὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς Θ καὶ τᾶς πολλαπλασίας ἀεὶ κατὰ τοὺς ἑξῆς ἀριθμοὺς ἀρτίους τᾶς ἑπομένας γραμμᾶς, τὰ οὖν σύμπαντα ποτιλαβόντα τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς Θ καὶ τᾶς ἴσας πάσαις ταῖς Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ ἐσσοῦνται ἴσα τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς Θ καὶ τᾶς ἴσας πάσαις τᾷ τε Α καὶ τᾷ τριπλασίᾳ τᾶς Β καὶ τᾷ πενταπλασίᾳ τᾶς Γ καὶ ἀεὶ τᾷ [περισσᾷ] κατὰ τοὺς ἑξῆς ἀριθμοὺς περισσοὺς πολλαπλασίᾳ τᾶς ἑπομένας γραμμᾶς. Ἐντὶ δὲ καὶ τὰ ἀπὸ τᾶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ τετράγωνα ἴσα τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν αὐτᾶν γραμμᾶν. Ἔστι γὰρ τὸ ἀπὸ τᾶς Α τετράγωνον ἴσον τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς Θ καὶ τᾶς ἴσας [πάσαις] τᾷ τε Α καὶ τᾷ ἴσᾳ ταῖς λοιπαῖς, ἃν ἑκάστα ἴσα τᾷ Α · ἰσάκις γὰρ μετρεῖ ἅ τε Θ τὰν Α καὶ ἁ Α τὰς ἴσας αὐτᾷ πάσας σὺν τᾷ Α · ὥστε ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ Α τετράγωνον τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς Θ καὶ τᾶς ἴσας τᾷ Α καὶ τᾷ διπλασίᾳ τᾶν Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ · αἱ γὰρ ἴσαι τᾷ Α πᾶσαι χωρὶς τᾶς Α διπλάσιαί ἐντι τᾶν Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ. Ὁμοίως δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τᾶς Β τετράγωνον ἴσον ἐντὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς Θ καὶ τᾶς ἴσας τᾷ τε Β καὶ τᾷ διπλασίᾳ τᾶν Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ, καὶ πάλιν τὸ ἀπὸ τᾶς Γ τετράγωνον ἴσον τῷ ὑπό τε τᾶς Θ καὶ τᾶς ἴσας τᾷ τε Γ καὶ τᾷ διπλασίᾳ τᾶν Δ, Ε, Ζ, Η, Θ, ὁμοίως δὲ καὶ τὰ ἀπὸ τᾶν ἀλλᾶν τετράγωνα ἴσα ἐντὶ τοῖς περιεχομένοις ὑπό τε τᾶς Θ

καὶ τᾶς ἴσας αὐτᾷ τε καὶ τᾷ διπλασίᾳ τᾶν λοιπᾶν. Δῆλον οὖν ὅτι τὰ ἀπὸ πασᾶν τετράγωνα ἴσα ἐντὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς Θ καὶ τᾶς ἴσας πάσαις τᾷ τε Α καὶ τᾷ τριπλασίᾳ τᾶς Β καὶ τᾷ πενταπλασίᾳ τᾶς Γ καὶ τᾷ κατὰ τοὺς ἑξῆς ἀριθμοὺς περισσοὺς πολλαπλασίᾳ τᾶς ἑπομένας.



Σχήμα[45]

Πρέπει να επισημάνουμε εδώ ότι ο Αρχιμήδης κάνει την απόδειξη για n = 8. Όμως γενικεύεται εύκολα, όπως θα δούμε παρακάτω.
Όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα, έχουμε θέσει την κοινή διαφορά $\omega = \Theta$, οπότε

$$\mathrm{H} = 2\Theta,\ \mathrm{Z} = 3\Theta,\ \mathrm{E} = 4\Theta,\ \Delta = 5\Theta,\ \Gamma = 6\Theta,\ \mathrm{B} = 7\Theta,\ \mathrm{A} = 8\Theta.$$

Επίσης, στις προεκτάσεις των Β, Γ, …, Θ, έχουμε πάρει

$$\mathrm{I} = \Theta,\ \mathrm{K} = \mathrm{H} = 2\Theta,\ \Lambda = \mathrm{Z} = 3\Theta,\ \mathrm{M} = \mathrm{E} = 4\Theta,\ \mathrm{N} = \Delta = 5\Theta,\ \Xi = \Gamma = 6\Theta,$$
$$\mathrm{O} = \mathrm{B} = 7\Theta.$$

Θέλουμε να αποδείξουμε ότι:

$$8\mathrm{A}^2 + \mathrm{A}^2 + \Theta\left(\mathrm{A} + \mathrm{B} + \Gamma + \Delta + \mathrm{E} + \mathrm{Z} + \mathrm{H} + \Theta\right) = 3\left(\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \Gamma^2 + \Delta^2 + \mathrm{E}^2 + \mathrm{Z}^2 + \mathrm{H}^2 + \Theta^2\right)$$

Πράγματι

$$\mathrm{A}^2 = \mathrm{A}^2$$
$$\mathrm{A}^2 = \left(\mathrm{B} + \mathrm{I}\right)^2 = \mathrm{B}^2 + \mathrm{I}^2 + 2\mathrm{BI}$$

45 *Αρχιμήδους Άπαντα,* Τόμος Β΄, Μετάφραση Ε. Σταμάτη, Έκδ. Τεχνικού Επιμελητηρίου της Ελλάδος, Αθήναι, 1973, σελ.27.

$$A^2=(\Gamma+K)^2=\Gamma^2+K^2+2\Gamma K$$
$$A^2=(\Delta+\Lambda)^2=\Delta^2+\Lambda^2+2\Delta\Lambda$$
$$A^2=(E+M)^2=E^2+M^2+2EM$$
$$A^2=(H+\Xi)^2=H^2+\Xi^2+2H\Xi$$
$$A^2=(Z+N)^2=Z^2+N^2+2ZN$$
$$A^2=(\Theta+O)^2=\Theta^2+O^2+2\Theta O$$
$$A^2=A^2$$
Προσθέτοντας κατά μέλη, παίρνουμε
$$8A^2+A^2=2\left(A^2+B^2+\Gamma^2+\Delta^2+E^2+Z^2+H^2+\Theta^2\right)+2\left(BI+\Gamma K+\Delta\Lambda+EM+ZN+H\Xi+\Theta O\right)$$
Άρα, μένει να αποδείξουμε
$$\Theta(A+B+\Gamma+\Delta+E+Z+H+\Theta)+2(BI+\Gamma K+\Delta\Lambda+EM+ZN+H\Xi+\Theta O)=$$
$$=A^2+B^2+\Gamma^2+\Delta^2+E^2+Z^2+H^2+\Theta^2.$$
Όμως, αριστερό μέλος =
$$=\Theta(A+B+\Gamma+\Delta+E+Z+H+\Theta)+2(B\cdot\Theta+\Gamma\cdot 2\Theta+\Delta\cdot 3\Theta+\ldots+\Theta\cdot 7\Theta)=$$
$$=\Theta(A+B+\Gamma+\Delta+E+Z+H+\Theta)+\Theta(2B+4\Gamma+6\Delta+\ldots+14\Theta)=$$
$$=\Theta(A+3B+5\Gamma+7\Delta+\ldots+15\Theta).$$
Θα δείξουμε ότι και το δεξιό μέλος ισούται με το ίδιο.

Πράγματι
$$A^2=A\cdot A=A\cdot 8\Theta=A\cdot\Theta+A\cdot\Theta+A\cdot\Theta+A\cdot\Theta+A\cdot\Theta+A\cdot\Theta+A\cdot\Theta+A\cdot\Theta=$$
$$=A\cdot\Theta+\Theta(A+A+A+A+A+A+A)=$$
$$=A\Theta+\Theta\left[(B+I)+(\Gamma+K)+(\Delta+\Lambda)+(E+M)+(Z+N)+(H+\Xi)+(\Theta+B)\right]=$$
$$=A\Theta+\Theta\left[(B+\Theta)+(\Gamma+H)+(\Delta+Z)+(E+E)+(Z+\Delta)+(H+\Gamma)+(\Theta+B)\right]=$$
$$=A\Theta+2\Theta(B+\Gamma+\Delta+E+Z+H+\Theta)$$

Όμοια
$$B^2=B\Theta+2\Theta(\Gamma+\Delta+E+Z+H+\Theta)$$
$$\Gamma^2=\Gamma\Theta+2\Theta(\Delta+E+Z+H+\Theta)$$
$$\Delta^2=\Delta\Theta+2\Theta(E+Z+H+\Theta)$$
$$E^2=E\Theta+2\Theta(Z+H+\Theta)$$
$$Z^2=Z\Theta+2\Theta(H+\Theta)$$
$$H^2=H\Theta+2\Theta\cdot\Theta$$
$$\Theta^2=\Theta\cdot\Theta$$
Προσθέτοντας κατά μέλη, παίρνουμε
$$A^2+B^2+\Gamma^2+\Delta^2+E^2+Z^2+H^2+\Theta^2=\Theta(A+3B+5\Gamma+7\Delta+\ldots+15\Theta)=$$
= όσο προηγουμένως.

Με σύγχρονα σύμβολα, είναι αριθμητική πρόοδος με $\omega = \alpha_1$ και $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_8$ οι όροι της**.** Την παίρνουμε αύξουσα, δηλαδή

$$\alpha_1 = \Theta,\ \alpha_2 = \mathrm{H} = 2\Theta,\ \ldots,\ \alpha_8 = \mathrm{A} = 8\Theta.$$

Ισχυρισμός

$$8\alpha_8^2 + \alpha_8^2 + \alpha_1(\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_8) = 3(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + ... + \alpha_8^2).$$

Εύκολα γενικεύεται σε

$$n\alpha_n^2 + \alpha_n^2 + \alpha_1(\alpha_1 + ... + \alpha_n) = 3\left(\sum \alpha_n^2\right).$$

(Βλ.και Συμπλήρωμα Κεφ.5)

Πράγματι

$$\alpha_n^2 = \alpha_n^2$$

$$\alpha_n^2 = (\alpha_{n-1} + \alpha_1)^2 = \alpha_{n-1}^2 + \alpha_1^2 + 2\alpha_{n-1}\alpha_1$$

$$\alpha_n^2 = (\alpha_{n-2} + \alpha_2)^2 = \alpha_{n-2}^2 + \alpha_2^2 + 2\alpha_{n-2}\alpha_2$$

$$\vdots$$

$$\alpha_n^2 = (\alpha_1 + \alpha_{n-1})^2 = \alpha_1^2 + \alpha_{n-1}^2 + 2\alpha_1\alpha_{n-1}$$

$$\alpha_n^2 = \alpha_n^2$$

Προσθέτουμε κατά μέλη και έχουμε

$$8\alpha_n^2 + \alpha_n^2 = 2(\alpha_1^2 + ... + \alpha_n^2) + 2(\alpha_{n-1}\alpha_1 + \alpha_{n-2}\alpha_2 + ... + \alpha_2\alpha_{n-2} + \alpha_1\alpha_{n-1})$$

Μένει λοιπόν να αποδείξουμε ότι

$$\begin{aligned}\alpha_1(\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n) + 2(\alpha_{n-1}\alpha_1 + \alpha_{n-2}\alpha_2 + ... + \alpha_2\alpha_{n-2} + \alpha_1\alpha_{n-1}) &= \\ = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + ... + \alpha_n^2 \end{aligned} \qquad (*)$$

Όμως, αριστερό μέλος

$$= \alpha_1(\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n) + 2(\alpha_{n-1}\alpha_1 + \alpha_{n-2}\cdot 2\alpha_1 + \alpha_{n-3}\cdot 3\alpha_1 + ... + \alpha_1\cdot(n-1)\alpha_1) =$$

$$= \alpha_1(\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n) + \alpha_1(2\alpha_{n-1} + 4\alpha_{n-2} + 6\alpha_{n-3} + ... + 2(n-1)\alpha_1) =$$

$$= \alpha_1(\alpha_n + 3\alpha_{n-1} + 5\alpha_{n-2} + ... + (2n-3)\alpha_2 + (2n-1)\alpha_1) \qquad (**)$$

Θα δείξουμε ότι και το δεξιό μέλος της $(*)$ δίνει επίσης τη $(**)$.

Πράγματι

$$\alpha_n^2 = \alpha_n \cdot \alpha_n = \alpha_n \cdot n\alpha_1 = \underbrace{\alpha_n\alpha_1 + ... + \alpha_n\alpha_1}_{n} = \alpha_n \cdot \alpha_1 + \alpha_1\left(\underbrace{\alpha_n + ... + \alpha_n}_{n-1}\right) =$$

$$= \alpha_n\alpha_1 + \alpha_1[(\alpha_{n-1} + \alpha_1) + (\alpha_{n-2} + \alpha_2) + (\alpha_{n-3} + \alpha_3) + ... + (\alpha_1 + \alpha_{n-1})] =$$

$$= \alpha_n\alpha_1 + 2\alpha_1(\alpha_{n-1} + \alpha_{n-2} + \alpha_{n=3} + ... + \alpha_1)$$

Όμοια

$$\alpha_{n-1}^2 = \alpha_{n-1}\alpha_1 + 2\alpha_1\left(\alpha_{n-2} + \alpha_{n-3} + ... + \alpha_1\right)$$
$$\alpha_{n-2}^2 = \alpha_{n-2}\alpha_1 + 2\alpha_1\left(\alpha_{n-3} + \alpha_{n-4} ... + \alpha_1\right)$$
$$\vdots$$
$$\alpha_3^2 = \alpha_3\alpha_1 + 2\alpha_1\left(\alpha_2 + \alpha_1\right)$$
$$\alpha_2^2 = \alpha_2\alpha_1 + 2\alpha_1 \cdot \alpha_1$$
$$\alpha_1^2 = \alpha_1\alpha_1$$

Προσθέτουμε κατά μέλη και έχουμε

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + ... + \alpha_{n-2}^2 + \alpha_{n-1}^2 + \alpha_n^2 = \alpha_n\alpha_1 + 3\alpha_{n-1}\alpha_1 + 5\alpha_{n-2}\alpha_1 ... + \left(2n-1\right)\alpha_1\alpha_1 =$$
$$= \alpha_1\left(\alpha_n + 3\alpha_{n-1} + 5\alpha_{n-2} ... + \left(2n-1\right)\alpha_1\right) =$$
$=$ το ίδιο με το προηγούμενο.

Από την παραπάνω Πρόταση, το Πόρισμα που προκύπτει είναι μια διπλή ανισότητα.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Ἐκ τούτου οὖν φανερὸν ὅτι τὰ τετράγωνα πάντα τὰ ἀπὸ τᾶν ἰσᾶν τᾷ μεγίστᾳ τῶν μὲν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσᾶν ἐλάσσονά ἐστιν
ἢ τριπλάσια, ἐπειδὴ ποτιλαβόντα τινὰ τριπλάσιά ἐντι, τῶν δὲ λοιπῶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας τετραγώνου μείζονα ἢ τριπλάσια, ἐπειδὴ τὰ ποτιλαφθέντα ἐλάσσονά ἐντι ἢ τριπλάσια τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας τετραγώνου. Καὶ τοίνυν, εἴ κα ὁμοῖα εἴδεα ἀναγραφέωντι ἀπὸ πασᾶν, ἀπὸ τὲ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσᾶν καὶ ἀπὸ τᾶν ἰσᾶν τᾷ μεγίστᾳ, τὰ εἴδεα τὰ ἀπὸ τᾶν ἰσᾶν τᾷ μεγίστᾳ τῶν μὲν ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσᾶν εἰδέων ἐλάσσονα ἐσσοῦνται ἢ τριπλάσια, τῶν δὲ λοιπῶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας εἴδεος μείζονα ἢ τριπλάσια · τὸν γὰρ αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον τὰ ὁμοῖα εἴδεα τοῖς τετραγώνοις.

Δηλαδή, με σημερινή ορολογία

$$3\Big(\alpha^2 + \left(2\alpha\right)^2 + \left(3\alpha\right)^2 + ... + \left(n\alpha\right)^2\Big) > n\left(n\alpha\right)^2 > 3\Big(\alpha^2 + \left(2\alpha\right)^2 + ... + \left(\left(n-1\right)\alpha\right)^2\Big).$$

Ο Αρχιμήδης συνεχίζει στην **Πρόταση 11**

ια.

Εἴ κα γραμμαὶ ἑξῆς τεθέωντι ὁποσαιοῦν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερέχουσαι, καὶ ἄλλαι γραμμαὶ τεθέωντι τῷ μὲν πλήθει μιᾷ ἐλάσσονες τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσᾶν, τῷ δὲ μεγέθει ἑκάστα ἴσα τᾷ μεγίστᾳ, τὰ τετράγωνα πάντα τὰ ἀπὸ τᾶν ἰσᾶν τᾷ μεγίστᾳ ποτὶ μὲν τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσᾶν χωρὶς τᾶς ἐλαχίστας ἐλάσσονα λόγον ἔχοντι ἢ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς μεγίστας ποτὶ τὸ ἴσον ἀμφοτέροις τῷ τε περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς μεγίστας καὶ τᾶς ἐλαχίστας καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τᾶς ὑπεροχᾶς τετραγώνου, ᾇ ὑπερέχει ἁ μεγίστα τᾶς ἐλαχίστας, ποτὶ δὲ τὰ τετράγωνα τὰ *ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερχουσᾶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας τετραγώνου μείζονα τοῦ αὐτοῦ λόγου.*

Απόδειξη

Ἔστωσαν γὰρ γραμμαὶ ὁποσαιοῦν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερέχουσαι ἑξῆς κείμεναι, ἁ μὲν ΑΒ τᾶς ΓΔ, ἁ δὲ ΓΔ τᾶς ΕΖ, ἁ δὲ ΕΖ τᾶς ΗΘ, ἁ δὲ ΗΘ τᾶς ΙΚ, ἁ δὲ ΙΚ τᾶς ΛΜ, ἁ δὲ ΛΜ τᾶς ΝΞ, ποτικείσθω δὲ ποτὶ μὲν τὰν ΓΔ ἴσα μιᾷ ὑπεροχᾷ ἁ ΓΟ, ποτὶ δὲ τὰν ΕΖ ἴσα δυσὶν ὑπεροχαῖς ἁ ΕΠ, ποτὶ δὲ τὰν ΗΘ ἴσα τρισὶν ὑπεροχαῖς ἁ ΗΡ, καὶ ποτὶ τὰς ἄλλας τὸν αὐτὸν τρόπον · ἐσσοῦνται δὴ αἱ γενόμεναι ἀλλάλαις ἴσαι καὶ ἑκάστα τᾷ μεγίστᾳ. Δεικτέον οὖν ὅτι τὰ ἀπὸ πασᾶν τᾶν γενομενᾶν τετράγωνα ποτὶ μὲν πάντα τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ πασᾶν τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσᾶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς ΝΞ τετραγώνου ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΒ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἴσον ἀμφοτέροις τῷ τε περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶν ΑΒ, ΝΞ καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τᾶς ΝΥ τετραγώνου, ποτὶ δὲ τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τᾶν αὐτᾶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς ΑΒ τετραγώνου μείζονα λόγον ἔχει τοῦ αὐτοῦ λόγου.

Ἀπολελάφθω ἀφ϶ ἑκάστας τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσᾶν ἴσα τᾷ ὑπεροχᾷ· ὃν δὴ λόγον ἔχει τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΒ ποτὶ συναμφότερα τό τε ὑπὸ τᾶν ΑΒ, ΦΒ περιεχόμενον καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ΑΦ τετραγώνου, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον τό τε ἀπὸ τᾶς ΟΔ τετράγωνον ποτί τε τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ΟΔ, ΔΧ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ΧΟ τετραγώνου καὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ΠΖ ποτὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τᾶν ΠΖ, ΨΖ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ΨΠ τετραγώνου καὶ τὰ ἀπὸ τᾶν ἀλλᾶν τετράγωνα ποτὶ τὰ ὁμοίως λαμβανόμενα χωρία · καὶ τὰ πάντα δὴ τὰ ἀπὸ πασᾶν τᾶν ΟΔ, ΠΖ, ΡΘ, ΣΚ, ΤΜ, ΥΞ ποτί τε πάντα τὰ περιεχόμενα ὑπό τε τᾶς ΝΞ καὶ τᾶς ἴσας πάσαις ταῖς εἰρημέναις γραμμαῖς καὶ τὰ τριταμόρια τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τᾶν ΟΧ, ΠΨ, ΡΩ, Σϡ, Τϙ, ΥΝ τὸν αὐτὸν ἑξοῦντι λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς ΑΒ τετράγωνον ποτὶ τὰ συναμφότερα τό τε ὑπὸ τᾶν ΑΒ, ΦΒ περιεχόμενον καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ ΦΑ τετραγώνου. Εἰ οὖν κα δειχθῇ τό τε περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς ΝΞ καὶ τᾶς ἴσας πάσαις ταῖς ΟΔ, ΠΖ, ΡΘ, ΣΚ, ΤΜ, ΥΞ καὶ τὰ τρίτα μέρεα τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τᾶν ΟΧ, ΠΨ, ΡΩ, Σϡ, Τϙ, ΥΝ τῶν μὲν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τᾶν ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ΙΚ, ΛΜ ἐλάττονα, τῶν δὲ τετραγώνων τῶν ἀπὸ τᾶν ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ΙΚ, ΛΜ, ΝΞ μείζονα, δεδειγμένον ἐσσεῖται τὸ προτεθέν.

Ἐντὶ δὴ τὸ μὲν περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς ΝΞ καὶ τᾶς ἴσας πάσαις ταῖς ΟΔ, ΠΖ, ΡΘ, ΣΚ, ΤΜ, ΥΞ καὶ τὰ τρίτα μέρεα τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τᾶν ΟΧ, ΠΨ, ΡΩ, Σϡ, Τϙ, ΥΝ ἴσα τοῖς τετραγώνοις τοῖς ἀπὸ ΧΔ, ΨΖ, ΩΘ, ϡΚ, ϙΜ, ΝΞ καὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς ΝΞ καὶ τᾶς ἴσας πάσαις ταῖς ΟΧ, ΠΨ, ΡΩ, Σϡ, Τϙ, ΥΝ καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τᾶν ΟΧ, ΠΨ, ΡΩ, Σϡ, Τϙ, ΥΝ, τὰ δὲ ἀπὸ τᾶν ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ΙΚ, ΛΜ τετράγωνα ἴσα τοῖς ἀπὸ τᾶν ΒΦ, ΧΔ, ΨΖ, ΩΘ, ϡΚ, ϙΜ τετραγώνοις καὶ τοῖς ἀπὸ τᾶν ΑΦ, ΓΧ, ΕΨ, ΗΩ, Ιϡ, Λϙ καὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τᾶς ΒΦ καὶ τᾶς διπλασίας τᾶν ΑΦ, ΓΧ, ΕΨ, ΗΩ, Ιϡ, Λϙ. Κοινὰ μὲν οὖν ἐντι ἑκατέρων τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τᾶν ἰσᾶν τᾷ ΝΞ, τὸ δὲ περιεχόμενον ὑπό τε τᾶς ΝΞ καὶ τᾶς *ἴσας ταῖς ΟΧ, ΠΨ, ΩΡ, ϠΣ, ϘΤ, ΥΝ ἔλασσόν ἐστι τοῦ περιεχομένου ὑπό τε τᾶς ΒΦ καὶ τᾶς διπλασίας τᾶν ΑΦ, ΓΧ, ΕΨ, ΗΩ, ΙϠ, ΛϘ διὰ τὸ τὰς νῦν εἰρημένας γραμμὰς ταῖς μὲν ΓΟ, ΕΠ, ΡΗ, ΙΣ, ΛΤ, ΥΝ ἴσας εἶμεν, τᾶν δὲ λοιπᾶν μείζονας, καὶ τὰ τετράγωνα δὲ τὰ ἀπὸ τᾶν ΑΦ, ΓΧ, ΕΨ, ΗΩ, ΙϠ, ΛϘ μείζονά ἐντι τοῦ τρίτου μέρεος τῶν ἀπὸ τᾶν ΟΧ, ΠΨ, ΡΩ, ΣϠ, ΤϘ, ΥΝ · δέδεικται γὰρ τοῦτο ἐν τοῖς ἐπάνω· ἐλάττονα ἄρα ἐντὶ τὰ ῥηθέντα χωρία τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τᾶν ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ΙΚ, ΛΜ.*

Λοιπὸν δὲ δειξοῦμες ὅτι μείζονά ἐντι τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τᾶν ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ΙΚ, ΛΜ, ΝΞ. Πάλιν δὴ τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τᾶν ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ΙΚ, ΛΜ, ΝΞ ἴσα ἐντὶ τοῖς τε ἀπὸ τᾶν ΧΓ, ΕΨ, ΗΩ, ΙϠ, ΛϘ καὶ τοῖς ἀπὸ τᾶν ΧΔ, ΨΖ, ΩΘ, ϠΚ, ϘΜ, ΝΞ καὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς ΝΞ καὶ τᾶς διπλασίας πασᾶν τᾶν ΓΧ, ΕΨ, ΗΩ, ΙϠ, ΛϘ. Καί ἐστι κοινὰ μὲν τὰ ἀπὸ τᾶν ΧΔ, ΨΖ, ΩΘ, ϠΚ, ΜϘ, ΝΞ, μεῖζον δὲ τὸ ὑπό τε τᾶς ΝΞ καὶ τᾶς ἴσας πάσαις ταῖς ΟΧ, ΠΨ, ΡΩ, ΣϠ, ΤϘ, ΥΝ τοῦ ὑπὸ τᾶς ΝΞ καὶ τᾶς διπλασίας πασᾶν τᾶν ΓΧ, ΕΨ, ΗΩ, ΙϠ, ΛϘ, ἐντὶ δὲ καὶ τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τᾶν ΧΟ, ΨΠ, ΩΡ, ϠΣ, ϘΤ, ΥΝ τῶν ἀπὸ τᾶν ΓΧ, ΕΨ, ΗΩ, ΙϠ, ΛϘ μείζονα ἢ τριπλάσια· δέδεικται γὰρ καὶ τοῦτο · μείζονα ἄρα ἐντὶ τὰ ῥηθέντα χωρία τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τᾶν ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ΙΚ, ΛΜ, ΝΞ.

Η **Πρόταση 11**, με σημερινή ορολογία, αναφέρει

$$\frac{(n-1)(n\alpha)^2}{\alpha^2+(2\alpha)^2+(3\alpha)^2+\ldots+((n-1)\alpha)^2}>\frac{(n\alpha)^2}{n\alpha\cdot\alpha+\frac{1}{3}(n\alpha-\alpha)^2}>\frac{(n-1)(n\alpha)^2}{(2\alpha)^2+(3\alpha)^2+\ldots+(n\alpha)^2}$$

Στην Πρόταση 25, προκειμένου να υπολογίσει εμβαδά που περιλαμβάνονται σε έλικα, χρησιμοποιεί το Πόρισμα της Πρότασης 11.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Καὶ τοίνυν εἴ κα ὁμοῖα ἀναγραφέωντι ἀπὸ πασᾶν, ἀπό τε τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσᾶν καὶ ἀπὸ τᾶν ἰσᾶν τᾳ μεγίστᾳ, εἴδεα, πάντα τὰ ἀπὸ τᾶν ἰσᾶν τᾳ μεγίστᾳ ποτὶ τὰ ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσᾶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς ἐλαχίστας εἴδεος ἐλάσσονα λόγον ἑξοῦντι ἢ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς μεγίστας ποτὶ τὸ ἴσον ἀμφοτέροις τῷ τε περιεχομένῳ ὑπό τε τᾶς μεγίστας καὶ τᾶς ἐλαχίστας καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τᾶς ὑπεροχᾶς, ᾇ ὑπερέχει ἁ μεγίστα τᾶς ἐλαχίστας, ποτὶ δὲ τὰ ἀπὸ τᾶν αὐτᾶν εἴδεα χωρὶς τοῦ ἀπὸ τᾶς μεγίστας μείζονα τοῦ αὐτοῦ λόγου · τὸν αὐτὸν γὰρ ἑξοῦντι λόγον τὰ ὁμοῖα εἴδεα τοῖς τετραγώνοις.

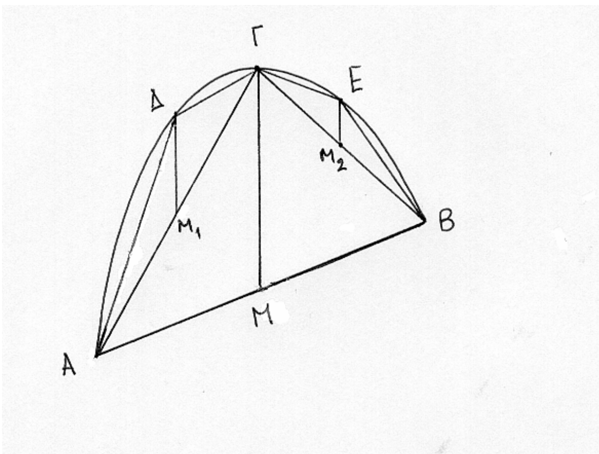
Η εφαρμογή γίνεται, όχι σε ευθύγραμμα τμήματα που διαφέρουν το ίδιο μεταξύ τους, αλλά σε κυκλικούς τομείς με σταθερή διαφορά εμβαδού, οπότε η διπλή ανισότητα γίνεται

$$\frac{(n-1)\left(\alpha+(n-1)\beta\right)^2}{\alpha^2+(\alpha+\beta)^2+(\alpha+2\beta)^2+\ldots+\left(\alpha+(n-1)\beta\right)^2}>\frac{\left(\alpha+(n-1)\beta\right)^2}{\left(\alpha+(n-1)\beta\right)\cdot\alpha+\frac{1}{3}\left((n-1)\beta\right)^2}>$$

$$>\frac{(n-1)\left(\alpha+(n-1)\beta\right)^2}{(\alpha+\beta)^2+(\alpha+2\beta)^2+\ldots+\left(\alpha+(n-1)\beta\right)^2}.$$

Β) Ο Αρχιμήδης έκανε τετραγωνισμό τμήματος παραβολής και είναι ο πρώτος τετραγωνισμός κωνικής τομής που έγινε. Αρχικά, υπολόγισε το εμβαδόν με τη μηχανική και κατόπιν το απέδειξε με τη γεωμετρία.
Στο έργο του, *Εμβαδόν Παραβολικού χωρίου,* που ανήκει στην *Έφοδο* (Μέθοδος), μας δίνει μια, όχι αυστηρή, μηχανική απόδειξη για το ότι το εμβαδόν ενός παραβολικού χωρίου ισούται με τα $\frac{4}{3}$ του εμβαδού του τριγώνου με βάση την ίδια και κοινό ύψος. Στο έργο του όμως *Τετραγωνισμός Παραβολής,* επανέρχεται και δίνει δύο αυστηρές αποδείξεις. Η μία, η μηχανική, η οποία ως προς τον αρχικό συλλογισμό δεν διαφέρει από εκείνον της *Μεθόδου,* γίνεται αυστηρή με τη χρήση της «μεθόδου της εξάντλησης». Η δεύτερη είναι γεωμετρική.
Με σημερινή ορολογία, ο υπολογισμός του ζητούμενου εμβαδού E_Π (τμήματος παραβολής) έγινε ως εξής

Έστω Μ το μέσο της χορδής ΑΒ μιας παραβολής. Από το Μ φέρουμε παράλληλη προς τον άξονα της παραβολής και έστω Γ η τομή της με την παραβολή. Ονομάζουμε Τ το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. Κατόπιν, παίρνουμε τα μέσα M_1 και M_2 των χορδών ΑΓ και ΓΒ, αντίστοιχα, και από τα μέσα αυτά φέρουμε παράλληλες προς τον άξονα της παραβολής. Οι παράλληλες θα τμήσουν την παραβολή στα Δ και Ε, αντίστοιχα. Έτσι, σχηματίζονται τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΓΕΒ.



Εάν x, y είναι, αντίστοιχα, τα εμβαδά τους, ο Αρχιμήδης απέδειξε ότι $x+y=\frac{1}{4}T$.
Όμοια, συνεχίζει διχοτομώντας τις χορδές ΑΔ, ΔΓ, ΓΕ και ΕΒ. Τις νέες χορδές που

προκύπτουν τις διχοτομεί πάλι και έτσι συνεχίζει επ' άπειρον. Τελικά προκύπτει, γραμμένο με σημερινή ορολογία, ότι

$$E_\Pi = T + \frac{T}{4} + \frac{T}{4^2} + \ldots + \frac{T}{4^n} + \ldots = \frac{4}{3}T.$$

Βέβαια, την εποχή εκείνη δεν υπήρχε η έννοια του απείρου αθροίσματος. Ο Αρχιμήδης, χρησιμοποιώντας την εις άτοπο απαγωγή και το αξίωμα *Ευδόξου-Αρχιμήδη*, απέδειξε ότι το ζητούμενο Ε δεν μπορεί να είναι ούτε μικρότερο ούτε μεγαλύτερο από $\frac{4}{3}T$.

Σημαντικό είναι ότι παρατήρησε ότι $\frac{1}{4^n} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4^n} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4^{n-1}}$, χωρίς να το δείξει επαγωγικά, οπότε συμπεραίνει ότι

$$\underbrace{T + \frac{T}{4} + \frac{T}{4^2} + \ldots + \frac{T}{4^n}}_{\Sigma_n} + \frac{1}{3}\cdot\frac{T}{4^n} = \Sigma_{n-1} + \frac{1}{3}\cdot\frac{T}{4^{n-1}},$$

άρα

$$\Sigma_n + \frac{1}{3}\cdot\frac{T}{4^n} = \Sigma_{n-1} + \frac{1}{3}\cdot\frac{T}{4^{n-1}} = \ldots = \Sigma_0 + \frac{1}{3}\cdot\frac{T}{4^0} = \Sigma_0 + \frac{T}{3} = \frac{4T}{3}.$$

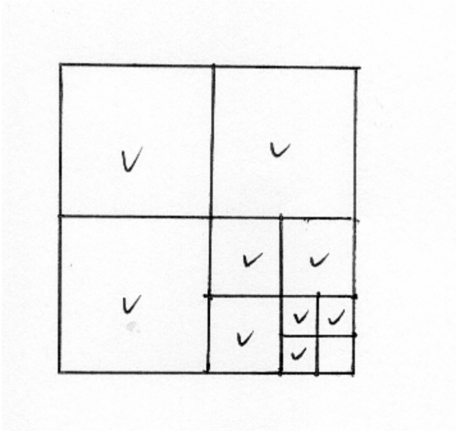
Άρα $\Sigma_n = \frac{4T}{3} - \frac{1}{3}\cdot\frac{T}{4^n}$. Την πρόταση αυτή, ο Αρχιμήδης, δεν την έδειξε επαγωγικά, αλλά την προχώρησε μέχρι το 5^o βήμα.

Εδώ μπορούμε να συμπληρώσουμε ότι η πρόταση αυτή του Αρχιμήδη βασίζεται στον εξής συλλογισμό:

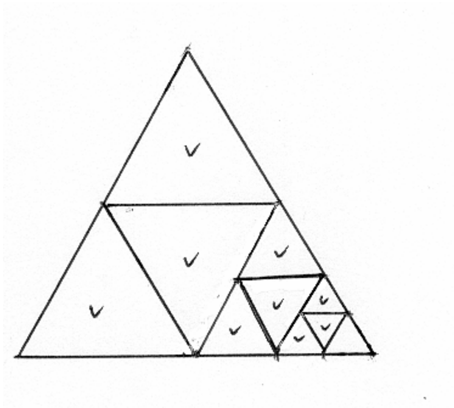
Αν θέλουμε να μοιράσουμε μια τετράγωνη τούρτα σε 3 άτομα, τη χωρίζουμε σε 4 κομμάτια (βλ. Σχήμα 1). Δίνουμε στον καθένα από ένα κομμάτι, δηλαδή το $\frac{1}{4}$ αυτής, και αυτό που περισσεύει το χωρίζουμε πάλι στα 4. Δίνουμε πάλι στον καθένα το $\frac{1}{4}$ του κομματιού που περίσσεψε, δηλαδή το $\frac{1}{4^2}$ της τούρτας, και το υπόλοιπο $\frac{1}{4^2}$ το χωρίζουμε πάλι στα 4, κ.ο.κ. Βλέπουμε δηλαδή, τελικά, ότι όλη η τούρτα εξαντλήθηκε και ο καθένας έχει πάρει το $\frac{1}{3}$ αυτής. Έτσι, έχουμε την ισότητα

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \ldots + \frac{1}{4^n} + \ldots = \frac{1}{3}. \quad (1)$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε αν, αντί για τετράγωνο που είχαμε προηγουμένως, το σχήμα τώρα είναι ένα ισόπλευρο τρίγωνο (βλ. Σχήμα 2). Παίρνοντας τα μέσα των πλευρών του και ενώνοντάς τα ανά δύο, έχουμε τέσσερα ίσα τρίγωνα που το καθένα έχει εμβαδόν ίσο με το $\frac{1}{4}$ του αρχικού. Οπότε, συνεχίζοντας όπως και στην προηγούμενη περίπτωση του τετραγώνου (τούρτα), καταλήγουμε στη σχέση (1).
Τα παραπάνω φαίνονται με ευκρίνεια στα παρακάτω σχήματα.



Σχήμα 1



Σχήμα 2

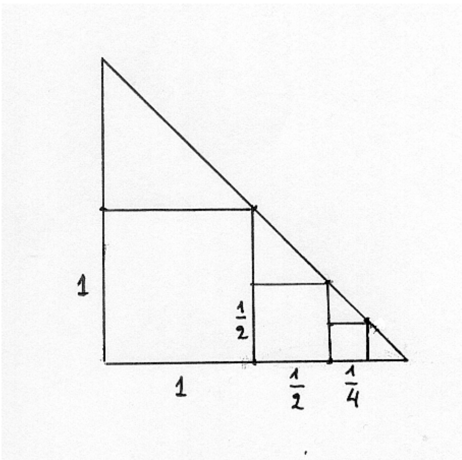
Ακόμη, στο παρακάτω σχήμα παρατηρούμε ότι το άθροισμα των εμβαδών των τετραγώνων που σχηματίζονται κάθε φορά με μια κορυφή στο μέσον της υποτείνουσας ισοσκελούς ορθογωνίου τριγώνου, ξεκινώντας με κάθετο πλευρά τριγώνου μήκους 2 και πλευρά τετραγώνου μήκους 1, θα δίνεται από τον τύπο

$$S = 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+... = 1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+...\right) = 1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+...\right)+\frac{1}{2} =$$

$$= 2-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+...\right) = 2-\frac{1}{2}S,$$

καθώς το άθροισμα των εμβαδών των τετραγώνων, εκτός από το πρώτο, ισούται με το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου πλευράς 1, αν του αφαιρέσουμε το άθροισμα των ορθογωνίων τριγώνων που προκύπτουν κάθε φορά, αφού αφαιρέσουμε το αντίστοιχο τετράγωνο.

Άρα $S = \frac{4}{3}$.



Η παραπάνω σχέση μας δίνει ακόμη

$$S' = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+... = \left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+...\right)+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}+... = \frac{4}{3}+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...\right) =$$

$$= \frac{4}{3}+\frac{1}{2}S',$$

άρα $S' = 2$.

Η προηγούμενη διαδικασία μπορεί να εφαρμοστεί, όχι μόνο στο $\frac{1}{2}$ καθέτου πλευράς ισοσκελούς ορθογωνίου τριγώνου, αλλά σε οποιοδήποτε σταθερό λόγο κι αν χωρίσουμε την κάθετο πλευρά του. Μπορεί δηλαδή να εφαρμοστεί σε όποια άλλη γεωμετρική πρόοδο με λόγο μικρότερο του 1.

1.6.5. ΥΨΙΚΛΗΣ[46]– Αριθμητική Πρόοδος

Πριν από τον Ίππαρχο και τον Πτολεμαίο, οι οποίοι υπολόγισαν σωστά τους χρόνους ανατολής των ζωδίων, με το θέμα είχε ασχοληθεί ο Υψικλής. Ο Υψικλής, ο οποίος έζησε το δεύτερο μισό του 2^{ου} π.Χ. αιώνα (γεννήθηκε γύρω στο 190 π.Χ. στην Αλεξάνδρεια της Αιγύπτου και πέθανε γύρω στο 120 π.Χ.) μας είναι γνωστός ως ο συγγραφέας του XIV Βιβλίου των *Στοιχείων* του Ευκλείδη. Στο έργο του *Αναφορικός (De ascensionibus),* το οποίο είναι μια αστρονομική πραγματεία που σώζεται μέχρι σήμερα, αν και είναι το παλαιότερο ελληνικό βιβλίο, διαιρεί για πρώτη φορά, τον ζωδιακό κύκλο σε 360 *τοπικές μοίρες*. Για την αντιμετώπιση της μελέτης του αυτής, χρησιμοποιεί τις παρακάτω τρεις Προτάσεις, σχετικές με *αριθμητικές προόδους*, τις οποίες και αποδεικνύει.

Πρόταση 1

Ἐὰν ὦσιν ὁσοιδηποτοῦν ὅροι ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ, ἑξῆς ἀλλήλων κείμενοι, ἄρτιοι τὸ πλῆθος, <ἀρχόμενοι ἀπὸ μεγίστου>, ἡ ὑπεροχή, ᾗ ὑπερέχει ὁ συγκείμενος ἐκ τοῦ ἡμίσους τοῦ πλήθους [ἀρχομένων ἀπὸ μεγίστου] τῶν λοιπῶν, τῆς ἐν τοῖς πᾶσιν ὑπεροχῆς πολλαπλασίων ἐστὶ κατὰ τὸν τετράγωνον τὸν ἀπὸ τοῦ ἡμίσους τοῦ πλήθους τῶν ἐκκειμένων ὅρων. ἔστωσαν ὁσοιδηποτοῦν ὅροι οἱ αβ βγ γδ δε εζ ζη, ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ, ἑξῆς ἀλλήλων κείμενοι, ἄρτιοι τὸ πλῆθος, ἀρχόμενοι ἀπὸ μεγίστου τοῦ αβ, ἥμισυς δὲ τοῦ πλήθους ἔστω ὁ αδ· λέγω ὅτι ἡ ὑπεροχὴ ᾗ ὑπερέχει ὁ συγκείμενος ἐκ τοῦ ἡμίσους τοῦ πλήθους τῶν λοιπῶν, τουτέστιν ἡ ὑπεροχὴ ᾗ ὑπερέχει ὁ αδ τοῦ δη, τῆς ἐν τοῖς πᾶσιν ὑπεροχῆς πολλαπλασίων ἐστὶ κατὰ τὸν τετράγωνον τὸν ἀπὸ τοῦ ἡμίσους τοῦ πλήθους.

Ελεύθερη μετάφραση με σημερινή ορολογία

Αν $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{2n}$ φθίνουσα αριθμητική πρόοδος διαφοράς ω, τότε
$\left(\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n\right) - \left(\alpha_{n+1} + ... + \alpha_{2n}\right) = n^2\omega$.

[46] B.L. Van der Waerden, ένθ. ανωτ, σελ. 306-307.

Απόδειξη

ἐπεὶ γὰρ ἡ τῶν αβ βγ ὑπεροχὴ ἴση ἐστὶ τῇ τῶν δε εζ ὑπεροχῇ, ἐναλλὰξ ἄρα ἡ τῶν αβ δε ὑπεροχὴ ἴση ἐστὶ τῇ τῶν βγ εζ ὑπεροχῇ · πάλιν, ἐπεὶ ἡ τῶν βγ γδ ὑπεροχὴ ἴση ἐστὶ τῇ τῶν εζ ζη ὑπεροχῇ, ἐναλλὰξ ἡ τῶν βγ εζ ὑπεροχὴ ἴση ἐστὶ τῇ τῶν γδ ζη ὑπεροχῇ. ὥστε ἡ τῶν αβ δε ὑπεροχὴ καὶ ἡ τῶν βγ εζ ὑπεροχὴ καὶ ἡ τῶν γδ ζη ὑπεροχή, τουτέστιν ἡ τῶν αδ δη ὑπεροχή, τῆς τῶν αβ δε ὑπεροχῆς πολλαπλασίων ἐστὶ κατὰ τὸ πλῆθος τῶν αβ βγ γδ. ἔστι δὲ καὶ ἡ τῶν αβ δε ὑπεροχὴ τῆς τῶν αβ βγ ὑπεροχῆς πολλαπλασίων κατὰ τὸ πλῆθος τῶν αβ βγ γδ· ὥστε ἡ τῶν αδ δη ὑπεροχὴ τῆς τῶν αβ βγ ὑπεροχῆς πολλαπλασίων ἐστὶ κατὰ τὸν τετράγωνον τὸν ἀπὸ τοῦ πλήθους τῶν αβ βγ γδ, τουτέστι κατὰ τὸν τετράγωνον τὸν ἀπὸ τοῦ ἡμίσους τοῦ πλήθους τῶν ἐκκειμένων ὅρων.

Απόδειξη (με σημερινή ορολογία)

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1-\alpha_2=\alpha_{n+1}-\alpha_{n+2} \\ \alpha_2-\alpha_3=\alpha_{n+2}-\alpha_{n+3} \\ \alpha_3-\alpha_4=\alpha_{n+3}-\alpha_{n+4} \\ \vdots \\ \alpha_{n-1}-\alpha_n=\alpha_{2n-1}-\alpha_{2n} \end{array}\right\} \quad \text{άρα} \quad \left\{\begin{array}{l} \alpha_1-\alpha_{n+1}=\alpha_2-\alpha_{n+2} \\ \alpha_2-\alpha_{n+2}=\alpha_3-\alpha_{n+3} \\ \alpha_3-\alpha_{n+3}=\alpha_4-\alpha_{n+4} \\ \vdots \\ \alpha_{n-1}-\alpha_{2n-1}=\alpha_n-\alpha_{2n} \end{array}\right. \quad (\Sigma)$$

και άρα όλα ίσα μεταξύ τους.

Κατόπιν, προσθέτει κατά μέλη τις σχέσεις (Σ) και επιπλέον προσθέτει αριστερά και δεξιά τον όρο $\alpha_n-\alpha_{2n}$, οπότε παίρνει

$$\left(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n\right)-\left(\alpha_{n+1}+\ldots+\alpha_{2n}\right)=n\cdot(\text{τον πρώτο όρο})=n\left(\alpha_1-\alpha_{n+1}\right).$$

Όμως,

$$\alpha_1-\alpha_{n+1}=n\left(\alpha_1-\alpha_2\right)$$

Άρα

$$\left(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n\right)-\left(\alpha_{n+1}+\ldots+\alpha_{2n}\right)=n^2\omega.$$

Όμοια αντιμετωπίζει και τις υπόλοιπες προτάσεις, δηλαδή

Πρόταση 2

Ἐὰν ὦσιν ὁσοιδηποτοῦν ὅροι ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ, ἑξῆς ἀλλήλων κείμενοι, περισσοὶ τὸ πλῆθος, ἀρχόμενοι ἀπὸ μεγίστου, ὁ ἐκ πάντων συγκείμενος τοῦ μέσου πολλαπλασίων ἐστὶ κατὰ τὸ πλῆθος τῶν ἐκκειμένων ὅρων. ἔστωσαν ὁσοιδηποτοῦν ὅροι οἱ αβ βγ γδ δε εζ ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ, ἑξῆς ἀλλήλων κείμενοι, ἀρχόμενοι ἀπὸ μεγίστου τοῦ αβ, τὸ δὲ πλῆθος αὐτῶν περισσὸν ἔστω· λέγω ὅτι ὁ ἐκ πάντων συγκείμενος ὁ αζ τοῦ μέσου τοῦ γδ πολλαπλασίων ἐστὶ κατὰ τὸ πλῆθος αὐτῶν.

Ελεύθερη μετάφραση (με σημερινή ορολογία)
Αν $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, \alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}, ..., \alpha_{2n+1}$ φθίνουσα αριθμητική πρόοδος διαφοράς ω, όπου α_{n+1} ο μεσαίος όρος, τότε

$$\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_{2n+1} = (2n+1)\alpha_{n+1}.$$

Απόδειξη
ἐπεὶ γὰρ οἱ αβ βγ γδ δε εζ ἐν ἴσῃ εἰσὶν ὑπεροχῇ, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν αβ βγ γδ τῷ πλήθει τῶν γδ δε εζ, ἔσται ἄρα δι϶ ἴσου ἡ τῶν αβ γδ ὑπεροχὴ ἴση τῇ τῶν γδ εζ ὑπεροχῇ· συναμφότερος ἄρα ὁ αβ εζ τοῦ γδ ἐστὶ διπλασίων, ὥστε συναμφότερος ὁ αβ εζ τοῦ γδ πολλαπλασίων ἐστὶ κατὰ τὸ πλῆθος τῶν αβ εζ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ συναμφότερος ὁ βγ δε τοῦ γδ πολλαπλάσιός ἐστι κατὰ τὸ πλῆθος τῶν βγ δε, καὶ ἔστιν ὁ γδ ἴσος ἑαυτῷ · ὥστε ὁ αζ τοῦ γδ πολλαπλάσιός ἐστι
κατὰ τὸ πλῆθος τῶν αβ βγ γδ δε εζ.

Απόδειξη (με σημερινή ορολογία)
$\alpha_1 - \alpha_{n+1} = \alpha_{n+1} - \alpha_{2n+1}$ άρα $\alpha_1 + \alpha_{2n+1} = 2\alpha_{n+1}$

Όμοια
$$\begin{aligned} \alpha_2 + \alpha_{2n} &= 2\alpha_{n+1} \\ &\vdots \\ \alpha_n + \alpha_{n+2} &= 2\alpha_{n+1} \\ \alpha_{n+1} &= \alpha_{n+1} \end{aligned}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη, παίρνουμε
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + ... + \alpha_{2n} + \alpha_{2n+1} = (2n+1)\alpha_{n+1}.$$

Πρόταση 3
Ἐὰν ὦσιν ὁσοιδηποτοῦν ὅροι ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ, ἑξῆς ἀλλήλων κείμενοι, ἄρτιοι τὸ πλῆθος, <ἀρχόμενοι ἀπὸ μεγίστου>, ὁ ἐκ πάντων συγκείμενος δύο τῶν κατὰ συζυγίαν πολλαπλάσιός ἐστι κατὰ τὸν ἥμισυν τοῦ πλήθους τῶν ἐκκειμένων ὅρων.
συζυγεῖς δὲ ἀλλήλων ὅρους καλῶ δύο τοὺς ἄκρους καὶ πάλιν τοὺς τούτων
ἐχομένους δύο καὶ ἀεὶ δύο τοὺς ἑξῆς μέχρι τῶν μεσαιτάτων.
ἔστωσαν ὁσοιδηποτοῦν ὅροι οἱ αβ βγ γδ δε εζ ζη ἐν ἴσῃ ὑπεροχῇ, ἑξῆς ἀλλήλων κείμενοι, ἀρχόμενοι ἀπὸ μεγίστου τοῦ αβ, τὸ δὲ πλῆθος αὐτῶν ἄρτιον ἔστω· λέγω ὅτι ὁ ἐκ πάντων συγκείμενος ὁ αη δύο τῶν κατὰ συζυγίαν πολλαπλάσιός ἐστι κατὰ τὸν ἥμισυν τοῦ πλήθους τῶν ἐκκειμένων ὅρων.

Ελεύθερη μετάφραση (με σημερινή ορολογία)
Αν $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{2n}$ φθίνουσα αριθμητική πρόοδος διαφοράς ω, τότε

$$\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n+\alpha_{n+1}+...+\alpha_{2n}=\left(\alpha_1+\alpha_{2n}\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot 2n=\left(\alpha_2+\alpha_{2n-1}\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot 2n=$$

$$=\left(\alpha_3+\alpha_{2n-2}\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot 2n=...\ ,$$

όπου τους όρους α_k και α_{2n-k+1} τους ονομάζει *συζυγείς*.

Απόδειξη

ἐπεὶ γὰρ ἡ τῶν αβ βγ ὑπεροχὴ ἴση ἐστὶ τῇ τῶν εζ ζη ὑπεροχῇ, συναμφότερος ἄρα ὁ αβ ζη ἴσος ἐστὶ συναμφοτέρῳ τῷ βγ εζ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ συναμφότερος ὁ βγ εζ ἴσος ἐστὶ συναμφοτέρῳ τῷ γδ δε. ἔνεισιν ἄρα τῷ αη τοσοῦτοι συναμφότεροι οἱ αβζη βγεζ γδδε, ὅσον ἐστὶ τὸ πλῆθος τῶν αβ βγ γδ, τουτέστιν ὅσον ἐστὶ τὸ ἥμισυ τοῦ πλήθους τῶν ἐκκειμένων ὅρων· ὥστε ὁ αη δύο τῶν κατὰ συζυγίαν πολλαπλάσιός ἐστι κατὰ τὸν ἥμισυν τοῦ πλήθους τῶν ἐκκειμένων ὅρων.

Απόδειξη (με σημερινή ορολογία)

$$\begin{aligned}\alpha_1+\alpha_{2n}&=\alpha_2+\alpha_{2n-1}\\ \alpha_2+\alpha_{2n-1}&=\alpha_3+\alpha_{2n-2}\\ &\vdots\\ \alpha_{n-1}+\alpha_{n+2}&=\alpha_n+\alpha_{n+1}\\ \alpha_n+\alpha_{n+1}&=\alpha_n+\alpha_{n+1}\end{aligned}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη, παίρνουμε

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+...+\alpha_{2n}=n\left(\alpha_1+\alpha_{2n}\right).$$

1.6.6. ΝΙΚΟΜΑΧΟΣ ΓΕΡΑΣΗΝΟΣ

(Έζησε στα τέλη του 1ου αιώνα και στις αρχές του 2ου αιώνα μ.Χ.)

Στην *Αριθμητική Εισαγωγή* του, το «Θεώρημα του Νικομάχου», μας πληροφορεί ότι αν πάρουμε $n+1$ περιττούς αριθμούς καθ' ομάδες, θα έχουμε

$$\left(n^2+n+1\right)+\left(n^2+n+3\right)+...+\left(n^2+3n+1\right)=\left(n+1\right)^3,$$

από όπου προκύπτει το πόρισμα

$$1^3+2^3+3^3+...+n^3=\left[\frac{n\left(n+1\right)}{2}\right]^2,$$

το οποίο, αν και δεν υπάρχει στην *Αριθμητική Εισαγωγή* του, εντούτοις, όπως υποστηρίζει ο Loria,[47] οι Έλληνες το γνώριζαν και είναι αυτοί που το δίδαξαν στους Ρωμαίους, που με τη σειρά τους το έκαναν γνωστό στη Δύση.

[47] G. Loria, ένθ. ανωτ., τόμος Α΄, σελ. 148.

Παραθέτουμε το συγκεκριμένο απόσπασμα στο πρωτότυπο

καὶ ὃ ποιότητι ταυτόν, ποσότητι ἕτερον, καὶ τοὐναντίον ὃ ποσότητι ταυτόν, ποιότητι ἕτερον. καὶ πάλιν, ὅτι ἀναγκαίως κατὰ πάσας τὰς σχέσεις ἡ αὐτὴ διαφορὰ τῶν δύο ὅρων μονάδι ἐξηλλαγμένως μέρος λεχθήσεται, τοῦ μὲν ἥμισυ, τοῦ δὲ τρίτον ὑπάρχουσα, ἢ τοῦ μὲν τρίτον, τοῦ δὲ τέταρτον, ἢ ἄλλως τοῦ μὲν τέταρτον, τοῦ δὲ πέμπτον, καὶ ἐφε–ξῆς οὕτως. ὃ δὲ μάλιστα βεβαιώσει, ταυτότητος αἰτιώτατον εἶναι τὸ περισσόν, οὐδέποτε δὲ τὸ ἄρ–τιον, ἐκεῖνο παραδεικτέον ἐν πάσῃ ἀπὸ μονάδος ἀνα–λόγῳ ἐκθέσει, οἷον διπλασίῳ μὲν

α, β, δ, η, ιϛ, λβ, ξδ, ρκη, σνϛ,

τριπλασίῳ δὲ

α, γ, θ, κζ, πα, σμγ, ψκθ, βρπζ

καὶ μέχρι οὗ βούλει, πάντας εὑρήσεις ἐξ ἀνάγκης τοὺς ἐν περισσαῖς χώραις τετραγώνους, ἄλλους δὲ οὐκέτι οὐδεμιᾷ μηχανῇ, οὐδένα δὲ ἐν ἀρτίᾳ τετράγωνον,

ἀλλὰ καὶ οἱ ἰσάκις ἶσοι ἰσάκις ἅπαντες, τουτέστι κύβοι τριχῇ διαστατοὶ ὄντεςκαὶ ταυτότητος ἐπὶ πλεῖον δοκοῦντες μετέχειν ἔργον εἰσὶ περισσῶν, ἀλλ϶ οὐκ ἀρτίων, ὁ α καὶ η καὶ κζ καὶ ξδ καὶ ρκε καὶ σιϛ καὶ οἱ ἀνάλογον προχωροῦντες καὶ ἁπλῇ γε καὶ ἀποικίλῳ ἐφόδῳ• ἐκτεθέντων γὰρ τῶν ἀπὸ μονάδος ἐπ϶ ἄπειρον συνεχῶν περισσῶν ἐπισκόπει οὕτως, ὁ πρῶτος τὸν δυνάμει κύβον ποιεῖ, οἱ δὲ δύο μετ϶ ἐκεῖνον συντεθέντες τὸν δεύτερον, οἱ δὲ ἐπὶ τούτοις τρεῖς τὸν τρίτον, οἱ δὲ συνεχεῖς τούτοις τέσσαρες τὸν τέταρτον, οἱ δὲ ἐφεξῆς τούτοις πέντε τὸν πέμ–πτον καὶ οἱ ἑξῆς □ξ τὸν ἕκτον καὶ τοῦτο μέχρις αἰεὶ.

1.7. ΕΥΡΩΠΗ

1.7.1. 12ος - 17ος Αιώνας

Leonardo Pisano ή **Leonardo της Πίζας** ή **Fibonacci**, (~1170-1250).
Το 1202 εκδόθηκε το σημαντικότατο έργο του *Liber abaci*, (*Βιβλίο του Άβακα ή Εγχειρίδιο της Αριθμητικής*)[48]. Το κεφάλαιο XII του βιβλίου αναφέρεται γενικά στις αριθμητικές προόδους, δίνοντας λύσεις σε προβλήματα της μορφής[49]

Από δύο οδοιπόρους, ο πρώτος διατρέχει 20 μίλια την ημέρα, ο δεύτερος διατρέχει 1 μίλι την πρώτη ημέρα, 2 μίλια τη δεύτερη, 3 μίλια την τρίτη κ.λπ.. Σε πόσες ημέρες οι δύο οδοιπόροι θα έχουν διατρέξει την ίδια απόσταση;

Ο Fibonacci δίνει την απάντηση 39.

[48] G. Loria, ένθ. ανωτ., τόμος Α΄, σελ. 290.
[49] G. Loria, ένθ. ανωτ., τόμος Α΄, σελ. 296.

Παρακάτω, σε πρόβλημα ανάλυσης αριθμού σε μέρη που αποτελούν γεωμετρική πρόοδο, ενώ η απάντηση είναι αόριστη, βρίσκει μια μόνο λύση.
Επίσης, όπως είχαμε δει στο κεφάλαιο το σχετικό με την Αίγυπτο, στο *Liber abaci* υπάρχει το παρακάτω πρόβλημα[50] γεωμετρικής προόδου, όπως αυτό του Αχμή.

Επτά γυναίκες πήγαν στη Ρώμη· κάθε γυναίκα είχε επτά μουλάρια· κάθε μουλάρι κουβαλούσε επτά σακιά· κάθε σακί περιείχε επτά καρβέλια και για κάθε καρβέλι υπήρχαν επτά μαχαίρια· κάθε μαχαίρι είχε επτά θήκες.

Σ' ένα υπόμνημά του ο Fibonacci με τίτλο Liber Quadratorum[51], θέλοντας να κάνει τέλεια τετράγωνα τις συζυγείς παραστάσεις $x^2 \pm 5$, ξεκινά από τον τύπο

$$1+3+5+...+(2n-1)=n^2,$$

βρίσκει μια λύση, αλλά παραμένει στο θέμα ασχολούμενος με τις πυθαγόρειες τριάδες, δηλαδή με την εύρεση ζευγών τετραγώνων που να έχουν άθροισμα πάλι τετράγωνο.
Θεωρεί τις επόμενες ακολουθίες διαδοχικών περιττών αριθμών

$$r+1,\ r+3,...,\ r+s-1$$

και

$$r-1,\ r-3,...,\ r-s+1,$$

οπότε παρατηρεί ότι το άθροισμα των αντιστοίχων όρων κάθε φορά θα ισούται με $2r$, ξέρει ότι οι όροι σε κάθε ακολουθία είναι $\frac{s}{2}$ κι έτσι βρίσκει το άθροισμα των όρων και των δύο ακολουθιών ότι είναι rs.

Ακόμη, σε θέματα που αφορούν στους τετράγωνους αριθμούς, του χρειάζεται το άθροισμα

$$1^2+2^2+3^2+...+n^2.$$

Προκειμένου να το υπολογίσει, κάνει χρήση της ταυτότητας

$$(k+1)(k+2)(2k+3)=k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2.$$

Θέτοντας $k=0,1,2,3,...,n-1$ και προσθέτοντας κατά μέλη τις ισότητες που προκύπτουν με τις αντικαταστάσεις αυτές, έχει το αποτέλεσμα

$$n(n+1)(2n+1)=6\left(1^2+2^2+3^2+...+n^2\right).$$

Από το αποτέλεσμα αυτό που είναι γνωστό από την εποχή του Αρχιμήδη, ο Leonardo παίρνει το αποτέλεσμα του αθροίσματος των τετραγώνων των n πρώτων αρτίων αριθμών, όπως και του αθροίσματος των τετραγώνων των n πρώτων περιττών αριθμών.

Ο **John Holywood**[52], γνωστός ως **Giovanni Sacrobosco** ή **Sacrobusto**, από το Halifax, γεννήθηκε περίπου το 1200. Σπούδασε στην Οξφόρδη, δίδαξε στο πανεπιστήμιο του Παρισιού, όπου και πέθανε το 1244 ή 1256. Στο έργο του με τίτλο *Tractatus de Arte Numerandi, (Μαθήματα περί της τέχνης των αριθμών),* βρίσκουμε

---

[50] C. Boyer - U. Merzbach, ένθ. ανωτ., σελ. 286.
[51] G. Loria, ένθ. ανωτ., τόμος Α΄, σελ. 307-309.
[52] G. Loria, ένθ. ανωτ., τόμος Α΄, σελ. 320.

τον υπολογισμό του S_1. Το συγκεκριμένο βιβλίο είχε μεγάλη επιτυχία την εποχή αυτή καθώς έκανε αναρίθμητες εκδόσεις και υπάρχει στις σπουδαιότερες γερμανικές βιβλιοθήκες.

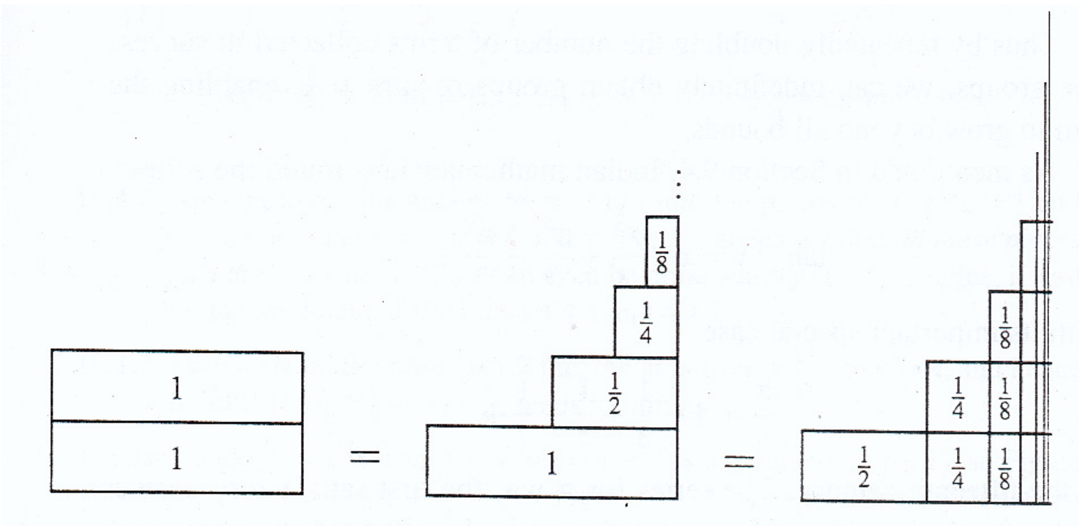
Ο **Richard Suiseth**[53] ή **Swineshead**, γνωστός και ως **Calculator**, ασχολούνταν με τη Λογική. Γύρω στο 1350 υπολόγισε τη σειρά

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\ldots+\frac{n}{2^n}+\ldots=2\,.$$

Ο Calculator, καθώς δεν γνώριζε τίποτα από γραφικές παραστάσεις, παρουσίασε μια απόδειξη με πάρα πολλά λόγια.

NICOLE ORESME[54]

Γάλλος μελετητής, γεννήθηκε πιθανόν το 1323 στο Παρίσι έγινε επίσκοπος στο Lisieux και πέθανε το 1382. Με την παρακάτω γραφική παράσταση[55] απέδειξε την πρόταση του Calculator.



Στο βιβλίο *NICOLE ORESME and the Medieval Geometry of Qualities and Motions*, The University of Wisconsin Press, 1968, όπου περιλαμβάνεται το έργο του Oresme, *Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum,* σχολιασμένο από τον Marshall Clagett, στη σελίδα 131 βρίσκουμε διατυπωμένη την πρόταση

$$1+\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{1}{4}\cdot 3+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\cdot n+\ldots=4 \quad (1)$$

και στη σελίδα 132 βρίσκουμε την πρόταση

$$2+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots\right)=1+\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{1}{4}\cdot 3+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\cdot n+\ldots,$$

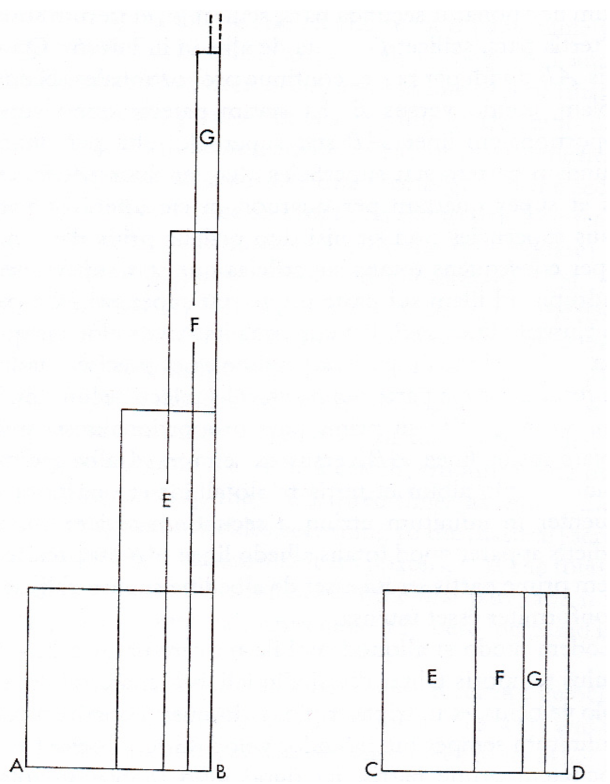
[53] C. Boyer - U. Merzbach, ένθ. ανωτ., σελ. 287-298.
[54] C. Boyer - U. Merzbach, ένθ. ανωτ., σελ. 298.
[55] J. Stillwell, *Mathematics and its History,* Second Edition, Springer, 2002, σελ. 171.

οπότε μας πληροφορεί ότι η απόδειξη της πρότασης

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots=2$$

βρίσκεται στο έργο του Oresme, *Questiones Super Geometriam Euclidis (Questions on the Geometry of Euclid).* Στο βιβλίο με τον ομώνυμο τίτλο, βρίσκουμε μια παράφραση του έργου του Oresme, με επιμέλεια του H.L.L. Busard, (Leiden E.J. Brill, 1961), όπου στην Ερώτηση 4, σελ. 80-82 δίνεται γραφικά η απόδειξη της παραπάνω πρότασης την οποία παραθέτουμε παρακάτω. Η Ερώτηση 4 είναι η εξής

Μπορούν δύο ευθείες γραμμές που προεκτείνονται απεριόριστα να πλησιάζουν η μία την άλλη χωρίς να συναντηθούν;
(Η απάντηση είναι ότι δεν μπορούν).



Ο Oresme δεν περιορίστηκε μόνο στη σειρά (1). Μεταξύ των σειρών που υπολόγισε ήταν και η παρακάτω

$$\frac{1\cdot 3}{4}+\frac{2\cdot 3}{16}+\frac{3\cdot 3}{64}+\ldots+\frac{n\cdot 3}{4^{n}}+\ldots=\frac{4}{3}.$$

Ασχολήθηκε ακόμη με την αρμονική σειρά, όπως θα δούμε στο τρίτο κεφάλαιο.

Το 1483 εμφανίζεται στην πόλη Bamberg της Βαυαρίας, η ***Αριθμητική***[56] του Bamberg, που είναι το πρώτο βιβλίο που σώζεται, σχετικό με την *τέχνη του αριθμητικού λογισμού,* και είναι προϊόν της τυπογραφίας. Δεν αναφέρει συγγραφέα, περιέχει 77 σελίδες και έχει σκοπό να εξασκήσει αυτούς που ασχολούνται με το

[56] G. Loria, ένθ. ανωτ., τόμος Α΄, σελ. 352.

εμπόριο στους απαραίτητους υπολογισμούς. Περιέχει είκοσι ένα κεφάλαια. Στο Κεφάλαιο V συναντάμε τους παρακάτω τύπους σχετικούς με αριθμητικές και γεωμετρικές προόδους

$$1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2},$$

$$1+q+q^2+...+q^{n-2}+q^{n-1}=\frac{q^{n-1}-1}{q-1}+q^{n-1}.$$

Το 1484 έχουμε ένα έργο σχεδόν εφάμιλλο του Liber abaci, το έργο του **Nicola Chuquet**[57]. Είναι μάλλον Ιταλός που γεννήθηκε στο Παρίσι[58], σπούδασε ιατρική, εργάστηκε στη Λυών και πέθανε το 1500. Τίτλος του *Le triparty en la science des numbers*, (*Τρία μέρη για την επιστήμη των αριθμών).* Είναι γραμμένο στα γαλλικά, και η έκδοσή του έγινε στη Λυών. Στο πρώτο μέρος του συναντάμε το κεφάλαιο *Περί Προόδων.*

Το 1489 εμφανίζεται το πρώτο επώνυμο βιβλίο, σχετικό σε περιεχόμενο με την *Αριθμητική* του Bamberg, με τίτλο *Behend und hübsch rechnung auf allen Kauffmannschafften,* (*Ταχύς και κομψός λογισμός για όλες τις εμπορικές πράξεις).* Συγγραφεύς του είναι ο Γερμανός καθηγητής **Johannes Widmann**[59] από τη Λειψία που γεννήθηκε το 1460. Το βιβλίο αποτελείται από τρία μέρη. Στο πρώτο μέρος συναντάμε τον λογισμό των αριθμητικών και γεωμετρικών προόδων.

Ο **Luca Pacioli**[60] γεννήθηκε γύρω στο 1445 στο Borgo S.Sepolcro (Umbria) και πέθανε το 1514. Ονομάζεται και **Lucas de Burgo**. Είναι διάσημος εξ αιτίας της σημαντικότατης μαθηματικής του εγκυκλοπαίδειας με τίτλο *Summa de Arithmetica, Geometrica, Proportioni et Proportionalità*, γνωστής ως *Summa,* δηλαδή *Ουσιώδες Σύνολο.* Η εγκυκλοπαίδεια αυτή είναι η πρώτη που τυπώνεται. Η πρώτη της έκδοση πραγματοποιείται το 1494 στη Βενετία. Αποτελείται από δύο μέρη. Το πρώτο ασχολείται με την τέχνη και την επιστήμη του λογισμού και το δεύτερο με τη γεωμετρία. Στο πρώτο μέρος, εκτός των άλλων, συναντάμε κανόνες για τον υπολογισμό αθροίσματος όρων αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου. Εφαρμογή γίνεται και εδώ στη σκακιέρα με τα 64 τετραγωνάκια. Έχουμε επίσης τον υπολογισμό του S_n για $n=1,2,3$.

Ο **Girolamo Cardano**[61] γεννήθηκε στην Pavia στις 24.9.1501 και πέθανε στη Ρώμη στις 21.9.1576. Σπούδασε ιατρική. Ανάμεσα στα έργα του είναι και το *Practica arithmetica*, (*Εφαρμογές της αριθμητικής),* του 1539. Περιλαμβάνει, εκτός από τη θεωρία των συνηθισμένων προόδων, και ακολουθίες αριθμών με άπειρους όρους κάτω από τον τίτλο *Progressio.*

---

[57] G. Loria, ένθ. ανωτ., τόμος Α΄, σελ. 354.
[58] C. Boyer - U. Merzbach, ένθ. ανωτ., σελ. 310.
[59] G. Loria, ένθ. ανωτ., τόμος Α΄, σελ. 358.
[60] G. Loria, ένθ. ανωτ., τόμος Α΄, σελ. 360.
[61] C. Boyer - U. Merzbach, ένθ. ανωτ., σελ. 317.

Ο **Φραγκίσκος Μαυρόλυκος**[62], αν και γεννήθηκε στη Μεσσήνη της Σικελίας, στις 16.9.1494, κατάγεται από οικογένεια της Κωνσταντινούπολης. Εκτός από μαθηματικός ήταν ακόμη αστρονόμος, ποιητής και ιστορικός. Οπαδός του Θέωνος του Σμυρναίου και του Νικόμαχου του Γερασηνού, ασχολήθηκε με τα αθροίσματα S_n για $n = 1, 2, 3, \ldots$, με τα οποία είχαν ασχοληθεί και αυτοί, χωρίς όμως να προσθέσει κάτι σημαντικό, εκτός από μερικές καινούργιες ιδιότητες.

Ο **Willebrod Snellius**[63], γεννήθηκε στο Leiden το 1581, όπου και πέθανε στις 30.10.1626. Ανάμεσα στα έργα του είναι το *Doctrinae triangulorum canonicae Libri quatuor,* (*Κανών τριγωνομετρίας, Βιβλία IV),* που εκδόθηκε μετά τον θάνατό του από τον μαθητή του Martino Hortensius. Προκειμένου να υπολογίσει χορδές και εφαπτόμενες, κάνει χρήση των παρακάτω νέων τύπων

Αν $(n+1)\alpha = 90^\circ$, τότε $1 + 2\sin\alpha + 2\sin 2\alpha + \ldots + 2\sin n\alpha = \tan\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$ και

αν $n\alpha = 90^\circ$, τότε $2\sin\frac{\alpha}{2} + 2\sin\frac{3\alpha}{2} + \ldots + 2\frac{\sin(2n-1)\alpha}{2} = \sin\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$.

Ο **François Viète**[64] γεννήθηκε το 1540 στο Fontenay-le-Comte, πρωτεύουσα του Poitou. Σπούδασε νομικά και μια από τις ασχολίες του ήταν η αποκρυπτογράφηση των τηλεγραφημάτων της Ισπανικής κυβέρνησης προς τους υπαλλήλους της στις Κάτω Χώρες, μέσω της Γαλλίας, προς χάριν του Ερρίκου του IV. Πέθανε στο Παρίσι το 1603. Μελετώντας ο Viète τις κυκλικές συναρτήσεις, οδηγήθηκε στον τετραγωνισμό του κύκλου. Όπως ο Αρχιμήδης, κατάφερε να πάρει το $\pi = 3{,}1415926536$, φθάνοντας μέχρι το πολύγωνο των 393216 ($= 2^{17}3 = 2^{16}6$) πλευρών.
Σ' ένα κείμενο του **Αντιφώντα**, αγνώστου τίτλου, του οποίου σώζονται αποσπάσματα (τα παραθέτουμε παρακάτω), διαβάζουμε ότι, διχοτομώντας τις πλευρές ενός εγγεγραμμένου σε κύκλο τετραγώνου, παίρνουμε ένα οκτάγωνο και ότι τη διαδικασία αυτή μπορούμε να τη συνεχίσουμε επ' άπειρον. Αξιοποιώντας ο Viète (1593) την πληροφορία αυτή, συνέκρινε τα εμβαδά πολυγώνων με πλευρές $n, 2n, 2n^2$. Ξεκίνησε με $n = 4$ και, κάνοντας χρήση των τύπων της διχοτόμησης, κατέληξε στη σχέση[65]

$$\frac{2}{\pi} = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{16}\ldots, \quad (1)$$

δηλαδή

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\ldots . \quad (2)$$

62 G. Loria, ένθ. ανωτ., τόμος Β΄, σελ. 96, 99.
63 G. Loria, ένθ. ανωτ., τόμος Β΄, σελ. 132.
64 G. Loria, ένθ. ανωτ., τόμος Β΄, σελ. 82, 83, 137.
65 J. Stillwell, ένθ. ανωτ., σελ. 153.

Πράγματι[66], αν σε κύκλο εγγράψουμε ένα τετράγωνο, κατόπιν εφαρμόσουμε τον αναδρομικό τύπο $\alpha_{2n} = \alpha_n \sec\frac{\pi}{n}$, όπου α_n είναι το εμβαδόν του εγγεγραμμένου κανονικού πολυγώνου με n πλευρές και μετά πάρουμε το n να τείνει στο $+\infty$, θα έχουμε τη σχέση (2). Το ίδιο αποτέλεσμα παίρνουμε με τον αναδρομικό τύπο $\lambda_{2n} = \frac{1}{2}\lambda_n \sec\frac{\pi}{2n}$, όπου λ_n είναι η πλευρά του εγγεγραμμένου κανονικού πολυγώνου με n πλευρές.

Να συμπληρώσουμε εδώ ότι από τον τύπο

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2},$$

προκύπτει

$$\frac{\sin x}{2^n \sin\frac{x}{2^n}} = \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}...\cos\frac{x}{2^n},$$

δηλαδή
$$\frac{\sin x}{x} = \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}... \quad (3)$$

Αν θέσουμε στην (3) όπου x το $\frac{\pi}{2}$, παίρνουμε την (1).

Επίσης, από τον τύπο της τετραγωνίζουσας[67] του Ιππία $r = \frac{2\rho\theta}{\pi\sin\theta}$ σε πολικές συντεταγμένες, όπου ρ η πλευρά του τετραγώνου και r το ακτινικό διάνυσμα της τετραγωνίζουσας, ξεκινώντας με $\theta = \frac{\pi}{2}$, παίρνουμε $\rho = \pi$, οπότε $r\sin\theta = 2\theta$. Κατόπιν, με διαδοχικές διχοτομήσεις της γωνίας θ, παίρνουμε $\frac{r_n}{r_{n-1}} = \cos\frac{\pi}{2^n}$, συνεπώς

$$\underbrace{\lim}_{n\to+\infty} r_n = \frac{2}{\pi}.$$

Η σχέση (2) σημαίνει ότι το παραπάνω απειρογινόμενο συγκλίνει. Η αναλυτική αυτή έκφραση για το π δίδεται για πρώτη φορά, είναι θεωρητικά ακριβής και είναι πολύ σημαντική γιατί θέτει σε νέες βάσεις το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου.

Μέχρι τότε ήταν γνωστός ο τύπος $\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$. Ο Viete[68] το 1591 δίνει τους τύπους

$$\sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi$$

και
$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\sin^2\varphi\cos\varphi .$$

Επίσης[69], κάνοντας χρήση (1617) της ταυτότητας

$$\left(\alpha^2 + b^2\right)\left(c^2 + d^2\right) = \left(\alpha d + bc\right)^2 + \left(bd - \alpha c\right)^2 = \left(\alpha d - bc\right)^2 + \left(bd + \alpha c\right)^2 \quad (4)$$

και με κατάλληλο χειρισμό των ορθογωνίων τριγώνων, παίρνει, με σημερινή ορολογία, το συνημίτονο και το ημίτονο για τα πολλαπλάσια μιας γωνίας

66 C. Boyer - U. Merzbach, ένθ. ανωτ., σελ. 358.
67 L.N.H. Bunt – P.S. Jones – J.D. Bedient, ένθ. ανωτ., σελ. 127.
68 D.E. Smith, ένθ. ανωτ., Vol. I, σελ. 629.
69 C. Boyer - U. Merzbach, ένθ. ανωτ., σελ 346.

$$\cos nx = \cos^n x - \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cos^{n-2} x \sin^2 x + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cos^{n-4} x \sin^4 x - \dots ,$$

$$\sin nx = n\cos^{n-1} x \sin x - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cos^{n-3} x \sin^3 x + \dots . \quad (5)$$

Παρατηρούμε εδώ ότι τα πρόσημα εναλλάσσονται και ότι οι συντελεστές στους δύο τύπους είναι, εναλλάξ, οι αριθμοί στην αντίστοιχη γραμμή του αριθμητικού τριγώνου (Βλ. Pascal).

Η σχέση (4) ήταν γνωστή στον **Διόφαντο** (250 μ.Χ.), προφανώς όχι στη γενική περίπτωση. Τη βρίσκουμε στα ***Αριθμητικά** του* στο Πρόβλημα 19, Βιβλίο ΙΙΙ, για $\alpha = 3$, $b = 2$, $c = 2$, $d = 1$. Η γενική περίπτωση γίνεται αντιληπτή από τον σχολιαστή του Διόφαντου **Alhazen,** (βλ. 1.5) περίπου το 950 και η απόδειξή της εμφανίζεται στο ***Βιβλίο των Τετραγώνων***[70] του **Fibonacci** το 1225. Ο Διόφαντος, καθώς αναφέρεται στο *τετράγωνο της υποτείνουσας* για το άθροισμα $\alpha^2 + b^2$, δηλαδή του ζεύγους (α, b), μας λέει ότι αν έχουμε δύο ορθογώνια τρίγωνα με καθέτους (α, b) και (c, d), τότε το γινόμενο των υποτεινουσών τους θα μας δίνει μας την υποτείνουσα ενός τρίτου τριγώνου με πλευρές $(\alpha c - bd, bc + \alpha d)$. Αν στη θέση του (α, b) θέσουμε $\alpha + ib$, τότε παίρνουμε τη γνωστή σε μας σχέση του πολλαπλασιασμού δύο μιγαδικών αριθμών.

Ο Viete[71] παρατήρησε ότι οι δυνάμεις των $\sin\theta$ και $\cos\theta$ που εμφανίζονται στην (5) είναι αυτές που εμφανίζονται στο ανάπτυγμα $(\cos x + \sin x)^n$. Μόνο στα πρόσημα είχε διαφορά η οποία βεβαίως δικαιολογείται από τον συντελεστή i του $\sin\theta$, δηλαδή από τον τύπο του De Moivre

$$(\cos x + i\sin x)^n = \cos nx + i\sin nx .$$

ΑΡΙΣΤΟΤ. Πηψσ. Α 2. 185α 14 ἅμα δ϶ οὐδὲ λύειν ἅπαντα προσήκει, ἀλλ϶ ἢ ὅσα ἐκ τῶν ἀρχῶν τις ἐπιδεικνὺς ψεύδεται, ὅσα δὲ μή, οὔ• οἷον τὸν τετραγωνισμὸν τὸν μὲν διὰ τῶν τμημάτων γεωμετρικοῦ διαλῦσαι, τὸν δ϶ Ἀντιφῶντος οὐ γεωμετρικοῦ.

ΣΙΜΠΛ. Πηψσ. 54, 12 τὸν γὰρ τετραγωνισμὸν τοῦ κύκλου πολλῶν ζητούντων (τοῦτο δὲ ἦν τὸ κύκλωι ἴσον τετράγωνον θέσθαι) καὶ Ἀ. ἐνόμισεν εὑρίσκειν καὶ Ἱπποκράτης ὁ Χῖος
[χ. 42, 3] ψευσθέντες. ἀλλὰ τὸ μὲν Ἀντιφῶντος ψεῦδος διὰ τὸ μὴ ἀπὸ γεωμετρικῶν ἀρχῶν ὡρμῆσθαι, ὡς μαθησόμεθα, οὐκ ἔστι γεωμετρικοῦ λύειν ... ὁ δὲ Ἀ. γράψας κύκλον ἐνέγραψέ τι χωρίον εἰς αὐτὸν πολύγωνον τῶν ἐγγράφεσθαι δυναμένων. ἔστω δὲ εἰ τύχοι τετράγωνον τὸ ἐγγεγραμμένον. ἔπειτα ἑκάστην τῶν τοῦ τετραγώνου πλευρῶν δίχα τέμνων ἀπὸ τῆς τομῆς ἐπὶ τὰς περιφερείας πρὸς ὀρθὰς ἦγε γραμμάς, αἳ δηλονότι δίχα ἔτεμνον

[70] J. Stillwell, ένθ. ανωτ., σελ 383.
[71] J. Stillwell, ένθ. ανωτ., σελ 95.

ἑκάστη τὸ καθ϶ αὑτὴν τμῆμα τοῦ κύκλου. ἔπειτα ἀπὸ τῆς τομῆς ἐπεζεύγνυεν ἐπὶ τὰ πέρατα τῶν γραμμῶν τοῦ τετραγώνου εὐθείας, ὡς γίνεσθαι τέτταρα τρίγωνα τὰ ἀπὸ τῶν εὐθειῶν, τὸ δὲ ὅλον σχῆμα τὸ ἐγγεγραμμένον ὀκτάγωνον. καὶ οὕτως πάλιν κατὰ τὴν αὐτὴν μέθοδον, ἑκάστην τῶν τοῦ ὀκταγώνου πλευρῶν δίχα τέμνων ἀπὸ τῆς τομῆς ἐπὶ τὴν περιφέρειαν πρὸς ὀρθὰς ἄγων καὶ ἐπιζευγνὺς ἀπὸ τῶν σημείων, καθ϶ ἃ αἱ πρὸς ὀρθὰς ἀχθεῖσαι ἐφήπτοντο τῶν περιφερειῶν, εὐθείας ἐπὶ τὰ πέρατα τῶν διῃρημένων εὐθειῶν, ἑκκαιδεκάγωνον ἐποίει τὸ ἐγγραφόμενον. καὶ κατὰ τὸν αὐτὸν πάλιν λόγον τέμνων τὰς πλευρὰς τοῦ ἑκκαιδεκαγώνου τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ ἐπιζευγνὺς εὐθείας καὶ διπλασιάζων τὸ ἐγγραφόμενον πολύγωνον καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιῶν ᾤιετό ποτε δαπανωμένου τοῦἐπιπέδου ἐγγραφήσεσθαί τι πολύγωνον τούτωι τῶι τρόπωι ἐν τῶι κύκλωι, οὗ αἱ πλευραὶ διὰ σμικρότητα ἐφαρμόσουσι τῆι τοῦ κύκλου περιφερείαι. παντὶ δὲ πολυγώνωι ἴσον τετράγωνον δυνάμενοι θέσθαι, ὡς ἐν τοῖς Στοιχείοις [Ευχλ. II 14] παρελάβομεν, διὰ τὸ ἴσον ὑποκεῖσθαι τὸ πολύγωνον τῶι κύκλωι ἐφαρμόζον αὐτῶι, ἐσόμεθα καὶ κύκλωι ἴσον τιθέντες τετράγωνον.

ΤΗΕΜΙΣΤ. Πηψσ. 4, 2 πρὸς ᾿Αντιφῶντα δὲ οὐκέτ϶ ἂν ἔχοι λέγειν ὁ γεωμέτρης, ὃς ἐγγράφων τρίγωνον ἰσόπλευρον εἰς τὸν κύκλον καὶ ἐφ϶ ἑκάστης τῶν πλευρῶν ἕτερον ἰσοσκελὲς συνιστὰς πρὸς τῆι περιφερείαι τοῦ κύκλου καὶ τοῦτο ἐφεξῆς ποιῶν ᾤιετό ποτε ἐφαρμόσειν τοῦ τελευταίου τριγώνου τὴν πλευρὰν εὐθεῖαν οὖσαν τῆι περιφερείαι. τοῦτο δὲ ἦν <τοῦ> τὴν ἐπ϶ ἄπειρον τομὴν ἀναιροῦντος, ἣν ὑπόθεσιν ὁ γεωμέτρης λαμβάνει.

BONAVENTURA CAVALIERI[72]

Γεννήθηκε στο Μιλάνο μάλλον το 1598 και ήταν μαθητής του Γαλιλαίου. Πέθανε στις 30.11.1647 στη Μπολόνια. Τα έργα του είναι πολλά, αλλά η φήμη του οφείλεται κατά κύριο λόγο στο έργο του ***Γεωμετρία των αδιαιρέτων*** *(Geometria degli indivisibili),* του 1635, στην πραγματικότητα όμως γραμμένο ήδη από το 1626, όπως φαίνεται στην αλληλογραφία του με τον Γαλιλαίο. Συμπλήρωμα του έργου του αυτού είναι οι *Γεωμετρικές Εφαρμογές (Exercitationes geometricae),* έργο που κυκλοφόρησε το 1647. Το τελευταίο του αυτό έργο αποτελείται από έξι ενότητες. Στην ενότητα IV πέτυχε τον τετραγωνισμό όλων των παραβολών και έφθασε, κάνοντας χρήση μαθηματικής επαγωγής, στον σημερινό τύπο

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1^k+2^k+3^k+\ldots+n^k}{n^{k+1}}=\frac{1}{k+1}.$$

Αναγνώρισε ότι τον κυβισμό παραβολικής ατράκτου θα πρέπει να μας τον δίνει το $\int_0^\alpha x^4dx$. Ήταν όμως ήδη γνωστό ότι

$$\int_0^\alpha xdx=\frac{\alpha^2}{2}\quad \text{και}\quad \int_0^\alpha x^2dx=\frac{\alpha^3}{3},$$

οπότε κατέληξε στο συμπέρασμα ότι

$$\int_0^\alpha x^4dx=\frac{\alpha^5}{5}.$$

72 G. Loria, ένθ. ανωτ., τόμος Β΄, σελ. 182, 190.

Κατ’ αναλογία, συμπεραίνει ότι θα πρέπει και

$$\int_0^{\alpha} x^3 dx = \frac{\alpha^4}{4},$$

χωρίς όμως να κάνει την απόδειξη.
Η ανακάλυψη αυτή, αν και δημοσιεύθηκε, όπως είπαμε, το 1647, έγινε το 1640. Την απόδειξή της έκανε ο Jean Beaugrand τη χρονιά του θανάτου του λίγο πριν το 1641, όπως μας πληροφορεί ο ίδιος ο Cavalieri.

WILLIAM OUGHTRED[73]
Άγγλος, γεννήθηκε στο Eton, έδρα του γνωστού Κολλεγίου το 1574 και πέθανε το 1660. Για να δηλώσει ότι μια σειρά είναι γεωμετρική πρόοδος, καθιέρωσε τον συμβολισμό $\because\!\!\!-\!\!\!\therefore$.

PIERRE FERMAT[74]
Γεννήθηκε τον Αύγουστο του 1601 στο Beaumont-en-Lomagne. Εισήλθε στο δικαστικό σώμα από όπου και προσέφερε πολλές υπηρεσίες στο κράτος, οπότε και τιμήθηκε μεταξύ 1631 και 1638. Πέθανε στις 12.1.1665 στο Chartres.
Στο έργο του με τίτλο *De aequationum localium transmutatione et emendatione, (Περί μετασχηματισμού και απλοποίησης των εξισώσεων των καμπύλων),* σημειώνει ότι και οι γεωμετρικές πρόοδοι μπορούν να μας λύσουν πολλά προβλήματα, πράγμα που ο Αρχιμήδης δεν το ενστερνίζεται καθώς χρησιμοποιεί σχεδόν αποκλειστικά αριθμητικές προόδους. Για να τεκμηριώσει την πρότασή του αυτή, κάνει χρήση του παρακάτω λήμματος.

Λήμμα
Έστω S το άθροισμα απείρων όρων φθίνουσας γεωμετρικής προόδου. Αν α_1 ο πρώτος όρος της και $\lambda = \frac{u}{v} < 1$, τότε έχουμε

$$\frac{\alpha_1}{S - \alpha_1} = \frac{v - u}{u} \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad S = \frac{\alpha_1}{1 - \lambda}.$$

Ακόμη, βλ. Κεφάλαιο 5, Παρατήρηση 2.

[73] G. Loria, ένθ. ανωτ., τόμος Β΄, σελ. 217.
[74] G. Loria, ένθ. ανωτ., τόμος Β΄, σελ. 253, 276-277.

JOHANNES FAULHABER[75]

Γεννήθηκε στην Ulm στις 5.5.1580 και πέθανε εκεί το 1635. Ήταν ο πρώτος που έδωσε στις αριθμητικές προόδους τη θέση που τους ανήκε.

BLAISE PASCAL[76]

Γεννήθηκε στο Clermont στις 19.6.1623 και πέθανε στις 10.8.1660. Μπορεί να χαρακτηρισθεί ως μαθηματικό θαύμα[77]. Δεν ασχολήθηκε μόνο με τα μαθηματικά, αλλά και με τη φυσική. Στο υπόμνημά του *Potestatum numericarum summa,* (*Άθροισμα αριθμητικών δυνάμεων),* ασχολείται με το άθροισμα των n-οστών δυνάμεων των πρώτων k διαδοχικών φυσικών αριθμών. Καθώς ξέρει το αποτέλεσμα για τις διακεκριμένες τιμές του k, για τις διάφορες τιμές του n, και λαμβάνοντας υπόψη τη θεωρία των αδιαιρέτων, συμπεραίνει ότι μπορεί να υπολογίσει το εμβαδόν μεταξύ καμπύλων. Συνεπώς, να τετραγωνίσει κάθε καμπύλη. Οπότε, η επέκταση αυτή, με σημερινή ορολογία, μας δίνει

$$\int_0^{\alpha} x^n dx = \frac{\alpha^{n+1}}{n+1}.$$

Αν και γνωρίζουμε ότι τα παραπάνω είχαν ήδη διατυπωθεί από τον Cavalieri, εντούτοις δεν υπάρχουν τα δεδομένα για να αποφανθούμε κατά πόσο ο Pascal τα γνώριζε. Το πιθανότερο είναι ότι συνέδεσε το πρόβλημα αυτό με το αριθμητικό τρίγωνο, (βλ. Σχήμα 17.9), το οποίο θα δούμε αναλυτικότερα στην παράγραφο για τον Leibniz. Ακόμη, είναι ο πρώτος που χρησιμοποιεί τη μαθηματική επαγωγή ως μέθοδο απόδειξης. Το 1654 ο Pascal παρουσίασε την πλήρη εξήγηση της μεθόδου αυτής. Ο όρος ***μαθηματική επαγωγή***, από ό,τι φαίνεται, εμφανίστηκε πολύ αργότερα σ' ένα άρθρο του De Morgan για την *Επαγωγή (Μαθηματικά)* στην Penny Cyclopedia του έτους 1838.

Αριθμητικό τρίγωνο

1	1	1	1	1	1	1	...
1	2	3	4	5	6	...	
1	3	6	10	15	...		
1	4	10	20	...			
1	5	15	...				
1	6	...					
1	...						

Σχήμα 17.9, C. Boyer - U. Merzbach, σελ. 404.

[75] G. Loria, ένθ. ανωτ., τόμος Β΄, σελ., 225.
[76] G. Loria, ένθ. ανωτ., τόμος Β΄, σελ. 287, 295-296.
[77] C. Boyer - U. Merzbach, ένθ. ανωτ., σελ. 401.

ANDRÉ TACQUET[78]

Γεννήθηκε στην Αμβέρσα στις 23.6.1612, όπου και πέθανε στις 22.12.1660. Στις 31.10.1629 εντάχθηκε στο Τάγμα των Ιησουϊτών. Στο έργο του *Arithmetica theoria et praxis accurate demonstrate,* (*Θεωρία και πράξη της αριθμητικής με αυστηρές αποδείξεις),* του 1656, βρίσκουμε, για πρώτη φορά, τυπωμένο τον τύπο του αθροίσματος απείρων όρων γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο το α_1 και λόγο λ, για $\lambda < 1$, δηλαδή τον γνωστό μας τύπο $S = \dfrac{\alpha_1}{1-\lambda}$. Στο αποτέλεσμα αυτό κατέληξε παίρνοντας τον τύπο του αθροίσματος των n πρώτων όρων μιας γεωμετρικής προόδου και κατόπιν με διάβαση στο όριο του τύπου αυτού.

Παρατηρούμε ότι, στο συγκεκριμένο πρόβλημα, στο ίδιο αποτέλεσμα είχε καταλήξει και ο Fermat. Να σημειώσουμε εδώ ότι και ο Άγγλος **John Wallis** (1616-1703) στο έργο του Arithmetica infinitorum, το ίδιο έτος, δημοσιεύει το ίδιο αποτέλεσμα.

PIETRO MENGOLI[79]

Ιταλός, μαθητής του Cavalieri, γεννήθηκε το 1625 και πέθανε το 1686. Συνεχίζει τη δουλειά του δασκάλου του στα αδιαίρετα και στο εμβαδόν που περικλείεται από υπερβολές με μια νέα τεχνική που δεν είναι άλλη από τη χρήση απειροσειρών. Κυριότερο έργο του είναι το *Novae quadraturae arithmeticae,* (*Νέοι αριθμητικοί τετραγωνισμοί).*

Ένα από τα θέματα του έργου αυτού είναι οι σειρές με γενικό όρο που τείνει στο μηδέν. Παρατηρεί ότι αυτού του είδους οι σειρές δεν συγκλίνουν όλες και ως απόδειξη της πρότασης αυτής αναφέρει την αρμονική σειρά η οποία αποκλίνει (βλ. Κεφ.3). Ακόμη, παρατηρεί ότι το ίδιο ισχύει για τη σειρά που προκύπτει παραλείποντας ένα πεπερασμένο πλήθος από τους πρώτους όρους της αρμονικής, όπως και για τη σειρά με γενικό όρο της μορφής $\dfrac{1}{\alpha + n\omega}$, όπου ω η διαφορά με $\omega > 1$.

Η απόδειξη που παραθέτει είναι η εξής

Αφού $\dfrac{\dfrac{1}{\alpha+n\omega}}{\dfrac{1}{\alpha+n}} = \dfrac{\alpha+n}{\alpha+n\omega} = \dfrac{\dfrac{\alpha}{n}+1}{\dfrac{\alpha}{n}+\omega} > \dfrac{1}{\omega}$, καθώς $\dfrac{\alpha}{n} > 0$, τότε $\dfrac{1}{\alpha+n\omega} > \dfrac{1}{\omega}\dfrac{1}{\alpha+n}$.

Αλλά, ο όρος $\dfrac{1}{\alpha+n}$, όπως είπαμε παραπάνω, προέρχεται από την αρμονική αν παραλείψουμε από την αρχή συγκεκριμένο αριθμό όρων, οπότε, αφού αποκλίνει η $\dfrac{1}{\alpha+n}$, κατά μείζονα λόγο θα αποκλίνει και η $\dfrac{1}{\alpha+n\omega}$. Την αρμονική απέδειξε ότι αποκλίνει ομαδοποιώντας τους όρους της.

Υπολογίζει το άθροισμα των αντιστρόφων των τριγωνικών αριθμών ότι ισούται με τη μονάδα. Δηλαδή, με σημερινή ορολογία,

[78] G. Loria, ένθ. ανωτ., τόμος Β΄, σελ. 309-310.
[79] G. Loria, ένθ. ανωτ., τόμος Β΄, σελ. 321-323.

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=1.$$

Δεν καταφέρνει να αθροίσει τη $\zeta(2)$, αλλά πετυχαίνει να υπολογίσει τις σειρές με γενικό όρο

$$\frac{1}{n^2+mn}.$$

Για τη θεωρία των λογαρίθμων του χρειάζονται οι ακολουθίες

$$1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n-1},\quad \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2n-1},\quad \frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{3n-1},\ ...\ (1)$$

και

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n},\quad \frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2n},\quad \frac{1}{4}+\frac{1}{5}+...+\frac{1}{3n},\ ...\ .\qquad (2)$$

Ονομάζει τα στοιχεία της ακολουθίας (1) **υπερλογαρίθμους** του n και τα στοιχεία της ακολουθίας (2) **υπολογαρίθμους** του n. Κατόπιν, ονομάζει **λογάριθμο** την ποσότητα εκείνη που είναι μεγαλύτερη από όλα τα στοιχεία της (2), δηλαδή είναι μεγαλύτερη όλων των υπολογαρίθμων του n και μικρότερη από όλα τα στοιχεία της (1), δηλαδή είναι μικρότερη όλων των υπερλογαρίθμων του n. Στη συνέχεια, οδηγείται στην ιδιότητα των λογαρίθμων

$$\ln m-\ln n=\ln\frac{m}{n}.$$

Εδώ πρέπει να πούμε ότι είναι ο πρώτος που μας δίνει τη σχέση

$$\ln\frac{m}{n}=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{\lambda=1}^{\lambda=m}\frac{1}{km+\lambda}-\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n}\frac{1}{kn+\lambda}\right),\ (3)$$

δηλαδή το ανάπτυγμα σε σειρά του $\ln\frac{m}{n}$. Παρατηρούμε ότι αν στη σχέση (3) θέσουμε $m=2$ και $n=1$, θα έχουμε

$$\ln 2=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{\lambda=1}^{\lambda=2}\frac{1}{2k+\lambda}-\frac{1}{k+1}\right)=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}-\frac{1}{k+1}\right)=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}\right),$$

δηλαδή

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{(-1)^{n+1}}{n}+...\ .\quad (4)$$

Η συνεχής ενασχόληση του Mengoli με τα απειροαθροίσματα και τα απειρογινόμενα είχαν ως συνέπεια τη μεγάλη συμβολή του στην εξέλιξη των μαθηματικών[80].

NICOLAUS Ή NICOLO MERCATOR[81] (1620-1687)

Το πραγματικό του επίθετο ήταν Kaufmann[82]. Γεννήθηκε στο Holstein της Δανίας. Στο έργο του *Logarithmotechnia* του 1668, συνεχίζει την εργασία του Gregory de St. Vincent (1584-1667) κατά την οποία ο τετραγωνισμός της παραβολής εξαρτάται από

[80] C. Boyer - U. Merzbach, ένθ. ανωτ., σελ. 413.
[81] G. Loria, ένθ. ανωτ., τόμος Β΄, σελ. 326-327.
[82] C. Boyer, U. Merzbach, ένθ. ανωτ., σελ. 429-430.

τους λογαρίθμους. Επίσης, είναι ήδη γνωστό από τον Cavalieri και τον Pascal ότι ο τετραγωνισμός των παραβολών δίδεται από τη σχέση

$$\int_0^{\alpha} x^n dx = \frac{\alpha^{n+1}}{n+1}, \text{ άρα και } \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}.$$

Ο Mercator γράφει την ισοσκελή υπερβολή στη μορφή $y = \frac{1}{x+1}$. Το άθροισμα των απείρων όρων γεωμετρικής προόδου ήταν ήδη γνωστό, οπότε έχει την ισότητα

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots .$$

Ολοκληρώνοντας την παραπάνω ισότητα από 0 έως x, καταλήγει στη σχέση

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots,$$

γνωστή ως ***Σειρά Mercator***. Θέτοντας $x = 1$ στη σειρά αυτή, παίρνουμε

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \dots,$$

δηλαδή ο τύπος (4) της προηγούμενης παραγράφου.

JAMES GREGORY[83]

Σκωτσέζος, γεννήθηκε το 1638 στα περίχωρα του Aberdeen και πέθανε το 1675. Συνεργάστηκε στην Ιταλία[84] με τον Angeli (1623-1697) και τον Mercator. Καρπός αυτής της συνεργασίας είναι η ευχέρεια με την οποία χειρίζεται τις απειροσειρές, καθώς και η αντίληψη της δύναμης του αναπτύγματος συναρτήσεων σε σειρές. Στον Gregory οφείλουμε την επινόηση του όρου **σύγκλιση** και τη διερεύνηση των **συνθηκών σύγκλισης.** Είναι από τους πρώτους που κάνουν τον διαχωρισμό των σειρών σε **συγκλίνουσες** και **αποκλίνουσες**. Για το εμβαδόν που περικλείεται από την καμπύλη $y = \frac{1}{1+x^2}$ από $x = 0$ έως $x = x$, δίνει το αποτέλεσμα $\arctan x$. Ακόμη,

$$y = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots .$$

Οπότε, ολοκληρώνοντας και εφαρμόζοντας τον τύπο του Cavalieri, καταλήγει

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots,$$

δηλαδή στη γνωστή *Σειρά του Gregory.*

Επίσης, σ' αυτόν οφείλουμε τα αναπτύγματα σε σειρά της $\tan x$ και της $\operatorname{arcsec} x$ (1667).

JOHN WALLIS[85]

Εξέχων Άγγλος μαθηματικός σύγχρονος του Newton, γεννήθηκε στο Kent στις 23.11.1616 και πέθανε στις 28.10.1703. Στο έργο του *Mathesis universalis sive*

[83] G. Loria, ένθ. ανωτ., τόμος Β΄, σελ. 327-329.
[84] C. Boyer - U. Merzbach, ένθ. ανωτ., σελ. 428-429.
[85] G. Loria, ένθ. ανωτ., τόμος Β΄, σελ. 270, 359.

arithmeticum opus integrum του 1657, κύριο μέλημά του είναι να δείξει ότι ο εργαζόμενος με αριθμούς πρέπει να ακολουθεί τους ίδιους λογιστικούς κανόνες με τον εργαζόμενο με γράμματα. Προκειμένου να συγκρίνει δύο αριθμούς, κάνει χρήση αριθμητικών και γεωμετρικών προόδων. Ασχολείται με τη γνωστή εφαρμογή της γεωμετρικής προόδου στη σκακιέρα και παραθέτει ένα αραβικό κείμενο που αναφέρεται στην ιστορία που έχει το σκάκι.

ISAAC NEWTON[86]

Ο δημιουργός των *Principia* (1687), γεννήθηκε στις 25.12.1642 στο Woolsthorpe της κομητείας του Lincoln και πέθανε στις 20.3.1727 στο Kensington. Οι μελέτες του πάνω στο έργο του Wallis από το 1663, είχαν ως αποτέλεσμα ένα χειρόγραφό του του 1665 όπου, μαζί με το διωνυμικό θεώρημα για τυχαίο εκθέτη, υπάρχουν πολλά αναπτύγματα σε σειρές.

Στο έργο του με τίτλο *Analysis per acquationes numero terminorum infinitas, (Ανάλυση σε εξισώσεις απειροπληθών όρων)* του 1712, ξεκινά με μια πρόταση που αναφέρει ότι το εμβαδόν καμπύλης με εξίσωση $y = \alpha x^{\frac{m}{n}}$ (1), θα δίνεται από τον τύπο

$$E = \frac{n}{m+n}\alpha x^{\frac{m+n}{n}}. \quad (2)$$

Την απόδειξη της πρότασης αυτής παραθέτει στο τέλος του έργου αυτού. Το λάθος όμως που έκανε ήταν ότι θεώρησε ότι ο τύπος (2) ισχύει και στην περίπτωση κατά την οποία $m+n=0$. Στην περίπτωση αυτή η καμπύλη θα έχει εξίσωση $y=\alpha x^{-1}$ και για $\alpha, n > 0$ ο τύπος (2) του εμβαδού θα μας οδηγούσε στο ότι $\int \frac{dx}{x} = +\infty$, πράγμα άτοπο.

Εάν, η εξίσωση της καμπύλης, της οποίας θέλει να βρει το εμβαδόν, είναι άθροισμα όρων της μορφής (1), τότε το ζητούμενο, απλά, θα αποτελείται από ισάριθμους προσθετέους της μορφής (2). Επιπλέον, εάν η καμπύλη αποτελείται από κλάσματα ή δυνάμεις με όρους οι οποίοι είναι πολυώνυμα, τότε, γενικεύοντας την αλγεβρική διαίρεση και τη μέθοδο εύρεσης της τετραγωνικής ρίζας, αναπτύσσει σε σειρές τους αντίστοιχους όρους. Έτσι, αναπτύσσοντας σε σειρά τις παραστάσεις $\sqrt{\alpha^2 \pm x^2}$, κατάφερε να τετραγωνίσει τον κύκλο για το + και την υπερβολή για το - .

Ακόμη, ασχολείται με την ευθειοποίηση της περιφέρειας. Σήμερα, αν θεωρήσουμε την εξίσωση $x^2 - x + y^2 = 0$, δηλαδή $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$, τότε, το μήκος τόξου θα δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{dx}{2\sqrt{x-x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{x-x^2}}{x-x^2}dx.$$

Αναπτύσσοντας σε σειρά την παράσταση $\frac{\sqrt{x-x^2}}{x-x^2}$, θα πάρουμε το ζητούμενο.

---

[86] G. Loria, ένθ. ανωτ., τόμος Β΄, σελ. 367-382.

Για την υπερβολή με τύπο $y(1+x)=1$, ο Newton είχε την ίδια ιδέα, οπότε βρίσκει τον τύπο

$$y=\ln(1+x)=f(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots,$$

δηλαδή ξαναβρίσκει τον τύπο του Mercator. Η αντίστροφη συνάρτηση της f θα μας δώσει

$$1+x=1+y+\frac{y^2}{2!}+\frac{y^3}{3!}+\frac{y^4}{4!}+\ldots,$$

η οποία είναι η **εκθετική σειρά** και η οποία εμφανίζεται για πρώτη φορά.

Σε άλλο του βιβλίο ο Newton με τίτλο *Methodus fluxionum et serierum infinitarum, (Μέθοδος των ροών και των απείρων σειρών),* που γράφτηκε το 1671 αλλά δυστυχώς παρέμεινε ανέκδοτο μέχρι το 1736, παρουσιάζει συμπεράσματα από το προηγούμενό του βιβλίο, αλλά και καινούργια. Ξεκινά θέλοντας να αναπτύξει σε σειρά το πηλίκο $y=\frac{\alpha^2}{\beta+x}$, οπότε χρησιμοποιεί τον κανόνα μετατροπής του πηλίκου δύο αριθμών σε δεκαδικά κλάσματα. Επίσης, για να αναπτύξει σε σειρά τη συνάρτηση με τιμή $y=\sqrt{\alpha^2+x^2}$, χρησιμοποιεί σχετική μέθοδο με αυτή για τον υπολογισμό της τετραγωνικής ρίζας αριθμού.

Σχετικά με την αλληλογραφία του Newton, δύο επιστολές προς τον Leibniz, μέσω του Oldenburg, είναι πολύ σημαντικές.

Στην πρώτη επιστολή του με ημερομηνία 13.6.1676, η οποία αναφέρεται στις σειρές, μεταξύ των άλλων, αναφέρεται στον υπολογισμό της ρίζας μιας δευτεροβαθμίου εξίσωσης. Θεωρεί την εξίσωση

$$x^2-2x-5=0. \quad (E)$$

Αρχίζει παίρνοντας μια προσεγγιστική τιμή της ρίζας, π.χ. το 2, οπότε αντικαθιστά στην (Ε) όπου x το $y+2$. Στο αποτέλεσμα διαγράφει τις δυνάμεις του y τις μεγαλύτερες του 1 (στην περίπτωσή μας τον παράγοντα y^2), οπότε βρίσκει μια τιμή πιο κοντά στην ακριβή λύση και συνεχίζει με τον ίδιο τρόπο. Έτσι, βρίσκει την προσεγγιστική τιμή $x=2,09455184$.

Συνεχίζει με την περίπτωση της εξίσωσης πεπλεγμένης μορφής

$$y^3+\alpha xy+\alpha^2 y-x^3-2\alpha^3=0.$$

Δίνει στο y τιμή μέσω μιας σειράς

$$y=\alpha-\frac{x}{4}+\frac{x^2}{64\alpha}+\frac{131x^3}{512\alpha^2}+\frac{509x^4}{16384\alpha^3}+\ldots,$$

η οποία γράφεται

$$y=\alpha-\frac{x}{2^2}+\frac{x^2}{2^6\alpha}+\frac{(2^7-1)x^3}{2^9\alpha^2}+\frac{(2^9-3)x^4}{2^{14}\alpha^3}+\ldots.$$

Κατόπιν[87], εφαρμόζοντας τη μέθοδο που μας είναι ήδη γνωστή από τον Mercator και τον Gregory, βρίσκει ότι

$$\arcsin x=x+\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}+\frac{5x^7}{112}+\ldots. \quad (1)$$

[87] C. Boyer - U. Merzbach, ένθ. ανωτ., σελ. 449.

Τότε, για $y=\arcsin x$ (2), με αντιστροφή, παίρνει $x=\sin y$, οπότε θέτοντας

$$x=\alpha_1 y+\alpha_2 y^2+\alpha_3 y^3+\ldots+\alpha_n y^n+\ldots,$$

στην (1), η (2) θα δώσει μια ταυτοτική σχέση ως προς y. Συνεπώ, εξισώνοντας τους συντελεστές των όρων ίσου βαθμού, προσδιορίζονται τα $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \ldots,\alpha_n,\ \ldots$. Έτσι, καταλήγει στη σειρά για το ημίτονο

$$\sin y=y-\frac{y^3}{3!}+\frac{y^5}{5!}-\frac{y^7}{7!}+\ldots\ . \quad (3)$$

Από την ταυτότητα $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, προκύπτει η σειρά για το συνημίτονο

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots\ . \quad (4)$$

Το πηλίκο των (3) και (4) δίνει τη σειρά της εφαπτομένης

$$\tan y=y+\frac{y^3}{3}+\frac{2y^5}{15}+\frac{17y^7}{315}+\frac{62y^9}{2835}+\ldots\ . \quad (5)$$

Τέλος, οι αντίστροφοι των (3), (4) και (5), δίνουν, αντίστοιχα, τη σειρά για τη συντέμνουσα, τέμνουσα και τη συνεφαπτομένη. Δηλαδή

$$\operatorname{cosec} y=\frac{1}{y}+\frac{y}{6}+\frac{7y^3}{360}+\frac{31y^5}{15120}+\frac{127y^7}{604800}+\ldots,$$

$$\sec y=1+\frac{y^2}{2}+\frac{5y^4}{24}+\frac{61y^6}{720}+\frac{277y^8}{8064}+\ldots,$$

$$\cot y=\frac{1}{y}-\frac{y}{3}-\frac{y^3}{45}-\frac{2y^5}{945}-\frac{y^7}{4725}-\ldots\ .$$

Ακόμη, δίνει το ανάπτυγμα σε σειρά ελλειπτικού τόξου, δηλαδή του $\int\frac{\sqrt{1+\alpha x^2}}{\sqrt{1+\beta x^2}}dx$, όπως επίσης ελλειπτικού εμβαδού και ελλειπτικού όγκου.

Στη δεύτερη επιστολή του με ημερομηνία 24.8.1676 αναφέρεται στις ροές. Εκεί παρατηρεί στον Leibniz ότι οι μέθοδοι που ο ίδιος έχει αναπτύξει του δίνουν τη δυνατότητα να προσεγγίζει το π με μεγαλύτερη ταχύτητα σύγκλισης από ό,τι η σειρά του Leibniz

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots\ ,$$

με την οποία θα ασχοληθούμε παρακάτω.

Τα αναπτύγματα σε σειρές δίνουν στον Newton τα εργαλεία για να διατυπώσει τα δύο θεμελιώδη προβλήματα του απειροστικού λογισμού που το ένα είναι αντίστροφο του άλλου. Δηλαδή την εύρεση των *ροών* (fluxion), σήμερα εννοούμε *παραγώγων,* και των *ρευσών* (fluent), σήμερα εννοούμε *παραγουσών.* Δίδει κανόνες για τις λύσεις τους χωρίς όμως να ασχοληθεί με το πότε δεν έχουμε λύση. Έτσι, όταν έχει τη σχέση $\frac{dy}{dx}=f(x)$, αναπτύσσει σε σειρά την f και έτσι βρίσκει το y. Αν όμως το δεύτερο μέλος είναι $f(x,y)$, τότε δεν έχει σαφή απάντηση.

Στα τελευταία χρόνια της ζωής του ο Newton καταδίκαζε κάθε προσπάθεια διαχωρισμού του απειροστικού λογισμού από την ανάλυσή του σε απειροσειρές[88].

---

[88] C. Boyer - U. Merzbach, ένθ. ανωτ., σελ. 443.

GOTTFRIED WILHELM VON LEIBNIZ[89]

Γεννήθηκε στη Λειψία την 1.7.1646 και πέθανε το 1716. Σπούδασε θεολογία, νομικά, φιλοσοφία και μαθηματικά, με αποτέλεσμα να θεωρείται ο τελευταίος σοφός με τόση ευρύτητα γνώσεων. Σχετικά με τα μαθηματικά, μελέτησε τα έργα όλων των μεγάλων που έζησαν πριν από αυτόν. Ήταν δηλαδή ενήμερος της γνώσης που υπήρχε μέχρι τότε. Οι μελέτες του αυτές είχαν ως συνέπεια να καλλιεργηθεί το πνεύμα του, να οξυνθεί η κρίση του και να γεννήσει πρωτότυπες ιδέες. Έτσι, από το 1673 βρήκε καινούργιες μεθόδους για να χαράξει εφαπτόμενες και μπόρεσε να αποδείξει τη σχέση μεταξύ του αντιστρόφου προβλήματος των εφαπτομένων και του τετραγωνισμού μιας καμπύλης.

Δουλεύοντας ανεξάρτητα από τον Newton, έφθασε στα ίδια αποτελέσματα με αυτόν μέσα από διαφορετικούς δρόμους. Ο Leibniz πρέπει να είχε πλήρη επίγνωση της μεγαλοφυΐας του αλλά και της σπουδαιότητας των επιτευγμάτων του για τους μεταγενέστερους. Η ανακάλυψη του διάσημου σήμερα τύπου

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+...$$

δίνει μια καινούργια λύση στο πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου.

Τα έτη 1702, 1703 σε άρθρα που δημοσιεύει στα A.E.(Acta Ereditorum), ασχολείται με ολοκλήρωση με τη χρήση σειρών. Εξ αιτίας της περίεργης ακολουθίας

$$1-1+1-1+1-1+...$$

μελέτησε κάποιες σειρές των οποίων είχε αποδείξει τη χρήση στην ολοκλήρωση των διαφορικών εξισώσεων.

Ο **Christian Huygens** (1629-1695) του είχε ζητήσει να βρει το άθροισμα των αντίστροφων των τρίγωνων αριθμών, δηλαδή των αριθμών με γενικό τύπο $\frac{2}{n(n+1)}$.

(Όπως είδαμε το είχε βρει και ο Pietro Mengoli.). Ο Leibniz γράφει[90]

$$\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right),$$

συνεπώς το άθροισμα των n πρώτων όρων θα ισούται με $2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$. Αυτό σημαίνει ότι το άθροισμα της απειροσειράς θα ισούται με 2. Ο Leibniz θεώρησε τότε ότι το άθροισμα σχεδόν κάθε απειροσειράς θα μπορούσε να υπολογισθεί.

Στο αρμονικό τρίγωνο εμφανίστηκε πάλι το άθροισμα των σειρών. Οι ομοιότητες του αρμονικού τριγώνου με το αριθμητικό τρίγωνο του Pascal ενθουσίασαν τον Leibniz.

---

[89] G. Loria, ένθ. ανωτ., τόμος Β΄, σελ. 392-408.

[90] C. Boyer - U. Merzbach, ένθ. ανωτ., σελ. 446-447.

Αρμονικό τρίγωνο

$$\begin{array}{cccccccc} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{20} & \frac{1}{30} & \cdots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{12} & \frac{1}{30} & \frac{1}{60} & \cdots \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{20} & \frac{1}{60} & \cdots \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{30} & \cdots \\ \frac{1}{6} & \cdots \end{array}$$

Αριθμητικό τρίγωνο

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & \ldots \\ 1 & 4 & 10 & 20 & \ldots \\ 1 & 5 & 15 & \ldots \\ 1 & 6 & \ldots \\ 1 & \ldots \end{array}$$

Στο αριθμητικό τρίγωνο, κάθε στοιχείο του, εκτός από τα στοιχεία της α΄ στήλης, ισούται με τη διαφορά των δύο στοιχείων που βρίσκονται ακριβώς κάτω από αυτό και προς τα αριστερά, ενώ στο αρμονικό τρίγωνο κάθε στοιχείο του, εκτός από αυτά της α΄ γραμμής, ισούται με τη διαφορά των δύο στοιχείων του που βρίσκονται ακριβώς πάνω από αυτό και προς τα δεξιά.
Ακόμη, στο αριθμητικό τρίγωνο, κάθε στοιχείο του, εκτός από τα στοιχεία της α΄ γραμμής και της α΄ στήλης, ισούται με το άθροισμα όλων των στοιχείων της προηγούμενης γραμμής και προς τα αριστερά. Στο αρμονικό τώρα τρίγωνο, κάθε στοιχείο του ισούται με το άθροισμα όλων των στοιχείων της επόμενης γραμμής και προς τα δεξιά.
Βλέπουμε, δηλαδή, ότι στην τελευταία περίπτωση έχουμε άθροισμα απείρων όρων και ότι τα στοιχεία της πρώτης γραμμής αποτελούν την αρμονική σειρά Η αρμονική σειρά αποκλίνει, ενώ για όλες τις υπόλοιπες γραμμές η σειρά συγκλίνει. Οι αριθμοί (στοιχεία) της β΄ γραμμής ισούνται με το $\frac{1}{2}$ των αντιστρόφων των τρίγωνων αριθμών και ο Leibniz γνώριζε ότι αυτό ισούται με 1, όπως δείξαμε παραπάνω.
Επίσης, οι αριθμοί (στοιχεία) της γ΄ γραμμής ισούνται με το $\frac{1}{3}$ των αντιστρόφων των πυραμιδικών αριθμών, δηλαδή των αριθμών της μορφής $\frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}$. Το αρμονικό τρίγωνο μας δίνει το άθροισμα αυτό ίσο με $\frac{1}{2}$.
Οι αριθμοί (στοιχεία) της δ΄ γραμμής ισούνται με το $\frac{1}{4}$ των αντιστρόφων των πολυγωνικών αριθμών που αντιστοιχούν στο τετραδιάστατο ανάλογο του τετραέδρου. Το αρμονικό τρίγωνο μας δίνει το άθροισμα αυτό ίσο με $\frac{1}{3}$.
Με τον ίδιο τρόπο συνεχίζουμε και για τις υπόλοιπες γραμμές του αρμονικού τριγώνου.

Παρατήρησε ακόμη ότι οι αριθμοί στη n-οστή διαγώνιο του αρμονικού τριγώνου είναι οι αντίστροφοι των αριθμών στην αντίστοιχη n-οστή διαγώνιο του αριθμητικού τριγώνου διαιρεμένοι δια n.
Ο Leibniz, όπως και ο Newton, ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο, είχε υπολογίσει τη σειρά για το ημίτονο, το συνημίτονο, την εφαπτομένη, όπως και τα αναπτύγματα των αντιστρόφων τους. Επίσης, αντιστρέφοντας τη *σειρά Mercator*, όπως είδαμε προηγουμένως στον Newton, πήρε την εκθετική σειρά.

JOHN MACHIN[91]
Άγγλος, καθηγητής της αστρονομίας στο Greshan College του Λονδίνου, μέλος της Βασιλικής Ακαδημίας (F.R.S.) από 30.11.1710, μετέφρασε τα Principia στα αγγλικά. Κυρίως όμως είναι γνωστός για την ανακάλυψη μιας σειράς που υπολογίζει το π, εύχρηστης μέχρι σήμερα λόγω της μεγάλης της ταχύτητας σύγκλισης. Η σειρά αυτή είναι

$$\frac{\pi}{4} = 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3\cdot 5^3} + \frac{1}{5\cdot 5^5} - \ldots\right) - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3\cdot 239^3} + \frac{1}{5\cdot 239^5} - \ldots\right)$$

και η οποία μας δίνει την τιμή του π με ακρίβεια 100 δεκαδικών ψηφίων.
Πέθανε στις 9.6.1751.

1.7.2. ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΑ BERNOULLI

JACQUES I BERNOULLI[92]
Μέλος της μεγάλης οικογένειας των Bernoulli με γεννήτορα της οικογένειας τον Nicolaus Bernoulli (1623-1708). Γεννήθηκε στη Βασιλεία στις 27.12.1654 όπου και πέθανε το 1705. Ενώ προοριζόταν για εκκλησιαστική σταδιοδρομία, εντούτοις, μη μπορώντας να κατανικήσει την κλίση του προς τις επιστήμες, εκπαιδεύτηκε χωρίς καν τη βοήθεια δασκάλου. Οδηγοί του οι μεγάλοι της εποχής, Wallis, Barrow και Leibniz. Από πολύ νωρίς έδειξε το ενδιαφέρον του για τις απειροσειρές.
Ο Jacques Bernoulli[93] γνώριζε ότι η σειρά των αντιστρόφων των τέλειων τετραγώνων, δηλαδή η σειρά

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$$

συγκλίνει, καθώς οι όροι της είναι, ανά όρο , ίσοι ή μικρότεροι από τους όρους της σειράς

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n} + \ldots,$$

για την οποία ήταν γνωστό ότι συνέκλινε στο 2. Ο Jacques Bernoulli όμως δεν μπόρεσε να βρει το άθροισμά της.

91 G. Loria, ένθ. ανωτ., τόμος Β΄, σελ. 421.
92 G. Loria, ένθ. ανωτ., τόμος Β΄, σελ. 427.
93 C. Boyer - U. Merzbach, ένθ. ανωτ., σελ. 467.

Σχετικά με το ανάπτυγμα $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, ο Jacques Bernoulli το αντιμετώπισε ως το πρόβλημα του συνεχούς ανατοκισμού, δηλαδή το μετέθεσε στον προσδιορισμό του $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Η ύπαρξη του ορίου αυτού ήταν εξασφαλισμένη καθώς

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+...+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n} < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^{n-1}} < 3 .$$

Στο β΄ μέρος του έργου του *Ars conjectandi (Η Τέχνη της Υπόθεσης)*, του 1713, βρίσκουμε τους τύπους που δίνουν τα αθροίσματα των διαδοχικών δυνάμεων των n πρώτων φυσικών αριθμών. Ο τύπος[94]

$$\sum n^c = \frac{1}{c+1}n^{c+1}+\frac{1}{2}n^c+\frac{c}{2}An^{c-1}+\frac{c(c-1)(c-2)}{2\cdot 3\cdot 4}Bn^{c-3}+$$
$$+\frac{c(c-1)(c-2)(c-3)(c-4)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}Cn^{c-5}+...,$$

είναι πολύ σημαντικός γιατί εμφανίζονται για πρώτη φορά οι αριθμοί Bernoulli, για τους οποίους θα μιλήσουμε παρακάτω, οι οποίοι συμβολίζονται με τα A, B, C, … .

Στο παράρτημα του ίδιου έργου, υπάρχει μια μεγάλη αναφορά στις σειρές, όπου, εκτός από την αρμονική σειρά και τη γνωστή μας $\zeta(2)$, ο Bernoulli ασχολήθηκε και με τη σειρά $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+...$. Συγκρίνοντας τους όρους της με τους όρους της αρμονικής, συνεπέρανε ότι αυτή αποκλίνει. Τόνισε όμως το εξής παράδοξο

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+...}{\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{6}}+...} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+...}{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...\right)} = \frac{\sqrt{2}-1}{1} .$$

Δηλαδή, συγκρίνοντας το «άθροισμα» των περιττών όρων με το «άθροισμα» των αρτίων όρων, το πηλίκο τους είναι μικρότερο του 1, δηλαδή το «άθροισμα» των περιττών όρων είναι μικρότερο από το «άθροισμα» των αρτίων όρων, πράγμα αδύνατο αφού, η σύγκριση όρου προς όρο μας δίνει ότι ο αριθμητής είναι μεγαλύτερος από τον παρονομαστή.
Για την ενασχόλησή του Jacques Bernoulli με την αρμονική σειρά θα μιλήσουμε στο τρίτο κεφάλαιο.

JEAN I BERNOULLI[95] (27.7.1667-1748)

Αδελφός του Jacques, ούτε αυτός προοριζόταν από τον πατέρα τους για τα μαθηματικά. Επιθυμία του πατέρα ήταν να ασχοληθεί ο γιος του Jean με το εμπόριο ή την ιατρική. Παρόλα αυτά, το 1685 κατακτά τον τίτλο του *magister* στη φιλοσοφία. Υπό την καθοδήγηση του μεγάλου του αδελφού Jacques (ο Jean ήταν ο δέκατος γιος της οικογένειας Bernoulli), ασχολήθηκε με τα μαθηματικά.
Ως σχόλιο, γραμμένο σε άρθρο του Leibniz, βρίσκουμε μια γενική μέθοδο ολοκλήρωσης, καθώς ο Jean παρατήρησε ότι η μέθοδος ολοκλήρωσης με σειρές ήταν

[94] G. Loria, ενθ. ανωτ., τόμος Γ΄, σελ. 93.
[95] G. Loria, ενθ. ανωτ., τόμος Β΄, σελ. 436, 442

περιορισμένων δυνατοτήτων. Έτσι, θεωρεί τη συνάρτηση με τιμή $y=f(x)$ και γράφει την ταυτότητα

$$ydx = ydx + xdy - xdy - \frac{x^2d^2y}{2!dx} + \frac{x^2d^2y}{2!dx} + \frac{x^3d^3y}{3!dx^2} - \frac{x^3d^3y}{3!dx^2} + \ldots$$

δηλαδή $$ydx = (ydx + xdy) - \left(xdy + \frac{x^2d^2y}{2!dx}\right) + \left(\frac{x^2d^2y}{2!dx} + \frac{x^3d^3y}{3!dx^2}\right) - \ldots .$$

Ολοκληρώνοντας τη σχέση αυτή, παίρνει

$$\int ydx = \int (ydx + xdy) - \int\left(xdy + \frac{x^2d^2y}{2!dx}\right) + \int\left(\frac{x^2d^2y}{2!dx} + \frac{x^3d^3y}{3!dx^2}\right) - \ldots =$$

$$= yx - \frac{x^2dy}{2!dx} + \frac{x^3d^2y}{3!dx^2} - \ldots .$$

Το δεύτερο μέλος της παραπάνω ισότητας είναι η *σειρά Bernoulli,* η οποία ήταν μια από τις αιτίες των συγκρούσεων[96] μεταξύ Ευρωπαίων και Βρετανών μαθηματικών, (μαθηματικών της ηπείρου και μαθηματικών της νήσου) καθώς η σειρά αυτή δημοσιεύθηκε από τον Brook Taylor (1685-1731) στο *Methodus incrementorum* του 1715. Στην πραγματικότητα όμως η ανακάλυψη της παραπάνω σειράς οφείλεται στον Gregory.

Ο τετραγωνισμός με χρήση σειρών, ωθεί τον Jean να τις χρησιμοποιήσει για να υπολογίσει ρίζες αριθμών και ρίζες εξισώσεων.

Στον Jean Bernoulli αποδίδεται συχνά και ο εκθετικός λογισμός καθώς μελέτησε, όχι μόνο τις απλές καμπύλες $y=\alpha^x$, αλλά και τη γενική περίπτωση [97]

$$y = x^x .$$

Έτσι, για τον υπολογισμό του τμήματος της καμπύλης, μεταξύ 0 και 1, εργάστηκε ως εξής

$$y = e^{x\ln x} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}(\ln x)^n ,$$

κάνοντας χρήση του αναπτύγματος της εκθετικής σειράς. Κατόπιν, ολοκληρώνοντας κάθε όρο της ισότητας αυτής και με κατά παράγοντες ολοκλήρωση, καταλήγει να πάρει τα όρια στο 0 και στο 1, οπότε το ζητούμενο εμβαδόν θα έχει τη μορφή

$$E = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2} .$$

Ο Jean Bernoulli ασχολήθηκε και με σειρές με όρους κλάσματα, όπου οι αριθμητές αποτελούν αριθμητική πρόοδο και οι παρονομαστές γεωμετρική πρόοδο, δηλαδή σειρές της μορφής $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a+nb}{cd^n}$. Γράφοντας αναλυτικά τους όρους της σειράς και εφαρμόζοντας τον τύπο του αθροίσματος απείρων όρων, καταλήγει στη σχέση

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a+nb}{cd^n} = \frac{ad^2 - ad + bd}{cd^2 - 2cd + c}$$

χωρίς να θέσει τον περιορισμό $d>1$, θεωρώντας τον d θετικό.

Για την ενασχόλησή του με την αρμονική σειρά θα μιλήσουμε στο τρίτο κεφάλαιο.

---

[96] C. Boyer - U. Merzbach, ένθ. ανωτ., σελ. 472.

[97] G. Loria, ένθ. ανωτ., τόμος Γ΄, σελ. 6.

Σχετικά με τη $\zeta(2)$, για την οποία θα μιλήσουμε στο τέταρτο κεφάλαιο, αν και η απόδειξή της οφείλεται στον Euler, εντούτοις αντιμετωπίζεται με μία μέθοδο η οποία δίνει λύση στη γενική περίπτωση $\zeta(2n)$.

Ακόμη, ασχολήθηκε με τη σειρά $1^k + 2^k + ... + n^k$ για $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών.

Άλλα μέλη της οικογένειας Bernoulli[98]

Δεν ασχολήθηκαν μόνο οι δύο αδελφοί Bernoulli με τις Σειρές.

NICOLAUS I BERNOULLI

Γεννήθηκε στη Βασιλεία στις 10.10.1687 όπου και πέθανε στις 29.11.1759. Ανιψιός των αδελφών Jacques I και Jean I Bernoulli, γιος του αδελφού τους Nicolaus, ήταν αυτός που φρόντισε να εκδοθεί το έργο του θείου του Jacques I, *Ars conjectandi*. Υπήρξε ένας από τους πρώτους που αντελήφθησαν πλήρως τη θεωρία της σύγκλισης των σειρών.

DANIEL I BERNOULLI

Ο διασημότερος της νεότερης γενιάς των Bernoulli, γιος του Jean I, γεννήθηκε στο Groningen στις 29.1.1700 και πέθανε στις 17.3.1782 στη Βασιλεία. Ασχολήθηκε με τις αναδρομικές σειρές και την εφαρμογή τους στη λύση αλγεβρικών εξισώσεων.
Είχε την ιδέα ότι κάθε συνάρτηση f μπορεί να γραφεί ως μια τριγωνομετρική σειρά

$$f(x) = \frac{1}{2}\alpha_0 + \alpha_1 \cos x + \alpha_2 \cos 2x + ... + \alpha_n \cos nx + ... + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + ... + b_n \sin nx + ...$$

(βλ. Fourier).

1.7.3. ΑΓΓΛΙΑ

BROOK TAYLOR[99] (1685-1731)

Στο έργο του, του 1715, με τίτλο *Methodus incrementorum directa et inverse* (*Ευθεία και αντίστροφος μέθοδος των αυξήσεων*) βρίσκουμε τη σειρά που έχει τ' όνομά του

$$f(x+\alpha) = f(\alpha) + f'(\alpha)x + f''(\alpha)\frac{x^2}{2!} + f'''(\alpha)\frac{x^3}{3!} + ... + f^{(n)}(\alpha)\frac{x^n}{n!} + ... \ .$$

Για $\alpha = 0$, παίρνουμε τη γνωστή *σειρά MacLaurin,* την οποία είχε ήδη δημοσιεύσει ο Stirling στο έργο του *Methodus differentiallis.*
Εδώ να σημειώσουμε ότι και ο James Gregory και ο Jean Bernoulli γνώριζαν πολύ νωρίτερα τη σειρά Taylor, χωρίς όμως να το γνωρίζει ο Taylor.
Επίσης, από την ανακάλυψη του τύπου για την κατά παράγοντες ολοκλήρωση, οδηγήθηκε στον τύπο

$$\int f dg = fg - \frac{g^2}{2!}\frac{df}{dg} + \frac{g^3}{3!}\frac{d^2 f}{dg^2} - ... \ .$$

[98] G. Loria, ένθ. ανωτ,, Τόμος Γ΄, σελ. 13-18.
[99] G. Loria, ένθ. ανωτ,, Τόμος Γ΄, σελ. 44-47.

COLIN MACLAURIN[100]

Γεννήθηκε στο Kilmodan τον Φεβρουάριο του 1698 και πέθανε στις 14.6.1746 στο Εδιμβούργο. Συνεργάστηκε με τον Newton, και με το έργο του *Treatise of Fluxions,* (*Πραγματεία περί των ροών),* του 1742, κατάφερε να νομιμοποιήσει τις ιδέες του Newton. O Newton τον υποστήριζε καθ' όλη τη διάρκεια της ζωής του.

O MacLaurin παρατηρεί ότι η καμπύλη με εξίσωση

$$y=\frac{Ax^{m}+Bx^{m-1}+Cx^{m-2}+...}{ax^{n}+bx^{n-1}+cx^{n-2}+...}$$

για $n>m$ έχει ασύμπτωτο τον άξονα των x και ότι το εμβαδόν, μεταξύ της καμπύλης και των δύο αξόνων, είναι πεπερασμένο μόνο στην περίπτωση που $n>m+1$. Αυτές τις παρατηρήσεις χρησιμοποίησε για το άθροισμα κάποιων σειρών που είχε εξετάσει ο Jean Bernoulli.

Ακόμη, απέδειξε το Διωνυμικό Θεώρημα με παραγώγιση, ως εξής.

Έστω

$$(1+x)^{n}=1+Ax+Bx^{2}+Cx^{3}+Dx^{4}+... \quad (1)$$

Παραγωγίζοντας, παίρνουμε

$$n(1+x)^{n-1}=A+2Bx+3Cx^{2}+4Dx^{3}+... \quad (2)$$

Παραγωγίζοντας ξανά, έχουμε

$$n(n-1)(1+x)^{n-2}=2B+3\cdot 2\cdot 1\cdot Cx+4\cdot 3Dx^{2}+... \quad (3)$$

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, έχουμε

$$n(n-1)(n-2)(1+x)^{n-3}=3\cdot 2\cdot 1\cdot C+4\cdot 3\cdot 2\cdot 1Dx^{2}+... \quad (4)$$

……………………………………………………………..

Στις παραπάνω ταυτοτικές σχέσεις, ξεκινώντας από τη (2), αν θέσουμε $x=0$, παίρνουμε

$$A=n,\ B=\frac{n(n-1)}{1\cdot 2},\ C=\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3},... .$$

Με αντίστοιχη μέθοδο αποδεικνύεται το πολυωνυμικό θεώρημα που ο MacLaurin αποδίδει στον Moivre. Ακόμη, για τον προσδιορισμό των συντελεστών του τύπου οποιασδήποτε συνάρτησης της μορφής

$$f(x)=A+Bx+Cx^{2}+Dx^{3}+...,$$

εργάζεται ως εξής

$$\begin{aligned} f'(x)&= B+2\cdot 1\cdot Cx+3Dx^{2}+...,\\ f''(x)&= 2\cdot 1\cdot C+3\cdot 2Dx+...,\\ f'''(x)&= 3\cdot 2\cdot 1\cdot D+... ,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

O MacLaurin, όπως είδαμε στον Taylor, είναι γνωστός για τον τύπο

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+f''(0)\frac{x^{2}}{2!}+f'''(0)\frac{x^{3}}{3!}+...+f^{(n)}(0)\frac{x^{n}}{n!}+....$$

[100] G. Loria, ένθ. ανωτ,, Τόμος Γ΄, σελ. 28-29.

ABRAHAM DE MOIVRE[101] (1667-1754)

Γεννήθηκε ως Γάλλος ευγενής, αλλά μετά την ακύρωση του διατάγματος της Νάντης, κατέφυγε στην Αγγλία, όπου και γνωρίστηκε με τον Newton. Ο De Moivre, αν και έπρεπε να εργαστεί αρκετές ώρες για να ζήσει, εντούτοις κατάφερε να αφήσει ένα πολύ σημαντικό έργο πίσω του, αποτέλεσμα διαρκούς έρευνας.
Έργο του το *Miscellanea Analytica de Seriebus et Quadraturis* (*Αναλυτικά Ανάμικτα περί Σειρών και Τετραγωνισμών*), αποτελούμενο από οκτώ βιβλία, το οποίο εκδόθηκε από 160 συνδρομητές στο Λονδίνο το 1730.

Στο έργο του αυτό βρίσκουμε και την προσέγγιση $n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$, που είχε δημοσιευθεί την ίδια χρονιά ως τύπος (2) του Stirling (βλ. επόμενη παράγραφο), όπως και τον τύπο (1) του ίδιου, που ήταν όμως γνωστοί στον De Moivre πολύ νωρίτερα[102].
Το Κεφάλαιο II του Βιβλίου II, ασχολείται με τη θεωρία των ***αναδρομικών σειρών***, οι οποίες εμφανίζονται για πρώτη φορά ως αναλυτικές έννοιες. Μελετώντας ο De Moivre τις πιθανότητες, εμπνεύσθηκε και το όνομα, αλλά και τη θεωρία των αναδρομικών σειρών. Τους διαδοχικούς συντελεστές μιας αναδρομικής σχέσης, ονομάζει *κλίμακα.* (Αναδρομική σχέση: Κάθε όρος της μπορεί να εκφρασθεί ως γραμμικός συνδυασμός όλων των προηγουμένων της όρων). Τέτοιες σειρές είναι οι γεωμετρικές πρόοδοι, όπως επίσης οι σειρές που προκύπτουν από τα αθροίσματα αντιστοίχων όρων τέτοιων προόδων. Αντίστροφα, κάθε αναδρομική σειρά μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\frac{A}{x-\alpha}+\frac{B}{x-\beta}+\frac{\Gamma}{x-\gamma}+\ldots,$$ όπου Α, Β, Γ, …, α, β, γ,… σταθερές.

Έτσι, προκύπτει η σχέση που συνδέει τις αναδρομικές σειρές με την ανάλυση μιας ρητής συνάρτησης σε απλά κλάσματα.

Στο Βιβλίο IV αποδεικνύει ότι, δοθείσης της *κλίμακας* μιας αναδρομικής σειράς, μπορεί να υπολογίσει οποιονδήποτε όρο της σειράς, όπως επίσης και το άθροισμά της.

Το Βιβλίο VI ασχολείται με τις σειρές εκείνες των οποίων το άθροισμα σχετίζεται με τον τετραγωνισμό του κύκλου (τις ονομάζει κυκλικές), με τον τετραγωνισμό της υπερβολής (τις ονομάζει υπερβολικές) ή με τον τετραγωνισμό και των δύο (τις ονομάζει μικτές). Τις δυναμοσειρές τις ονομάζει *ορισμένες.* Οι τεχνικές που χρησιμοποιεί είναι η διαφόριση και η ολοκλήρωση και τα αποτελέσματα που προκύπτουν, ορισμένα είναι ήδη γνωστά, άλλα όμως είναι καινούργια.

Σ' ένα άρθρο του στο Philosophical Transactions του 1697-1698, ο De Moivre αναφέρεται στο *infinitonome "απειρονόμιο",* δηλαδή σ' ένα "άπειρο" πολυώνυμο ή απειροσειρά, στα πλαίσια μιας διαδικασίας εύρεσης μιας ρίζας μιας τέτοιας παράστασης.

Επίσης, στον De Moivre οφείλουμε τους τύπους[103]

$$1 = 2^{n-1}\sin\alpha\sin2\alpha\cdots\sin(2n-1)\alpha\ ,$$

[101] G. Loria, ένθ. ανωτ,, Τόμος Γ΄, σελ. 39-42.
[102] C. Boyer - U.Merzbach, ένθ. ανωτ., σελ. 474-475.
[103] G. Loria, ένθ. ανωτ,, Τόμος Γ΄, σελ. 98.

$$\cos^n \varphi = 2^{2n-1}\prod_{k=1}^{n}\left\{\sin^2(2k-1)\alpha - \sin^2\varphi\right\},$$

όπου $\alpha = \dfrac{\pi}{2n}$.

JAMES STIRLING[104]

Γεννήθηκε το 1692 στο Garden της Σκωτίας και πέθανε το 1770 στο Εδιμβούργο Το έργο του με τίτλο *Methodus differentiallis, sive Tractatus de Summatione et Interpolatione Serierum infinitarum,(Διαφορική μέθοδος, δηλαδή Πραγματεία περί αθροίσεως και παρεμβολής απείρων σειρών)* εκδόθηκε στο Λονδίνο το 1730 .

Στην *Εισαγωγή* του έργου αυτού, προκειμένου να μετατρέψει τις σειρές, χρησιμοποιεί τους τύπους

$$x(x+1)(x+2)...(x+n-1) = \sum_{k=0}^{k=n-1} C_n^k x^{n-k},$$

$$\frac{1}{x(x+1)(x+2)...(x+n-1)} = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \frac{T_n^k}{x^{n+k}},$$

όπου C_n^k, T_n^k αριθμοί, ονομαζόμενοι **αριθμοί του Srirling** πρώτου και δευτέρου είδους.

Εφαρμόζει ένα θεώρημα του Newton και καταλήγει, με σημερινή ορολογία, στο ολοκλήρωμα

$$\int_0^z x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx = \frac{z^p(1-z)^q}{p}F(p+q,1,p+1,z),$$

όπου F η υπεργεωμετρική συνάρτηση

$$F(a,b,c,z) = 1 + \frac{a\cdot b}{1!c}z + \frac{a(a+1)b(b+1)}{2!c(c+1)}z^2 + ... \ .$$

Επιπλέον, με κάποια άλλη μέθοδο καταφέρνει και υπολογίζει ένα αριθμό όρων από τη σειρά του Leibniz

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ... \ .$$

Οι 23 πρώτοι όροι της σειράς αυτής του δίνουν

$$\pi = 3{,}1415926536 \ .$$

Ασχολείται, ακόμη, με τις αναδρομικές σειρές, όπως επίσης και με την αποκλίνουσα σειρά

$$\frac{B_1}{1\cdot 2}\frac{1}{x} - \frac{B_3}{3\cdot 4}\frac{1}{x^3} + ...,$$

όπου B_i οι αριθμοί Bernoulli.

Ακόμη, μας δίνει δύο ισοδύναμους τύπους[105], γνωστούς ως "**τύπους του Srirling**"

$$\ln n! = \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n - n + \ln\sqrt{2\pi} + \frac{B_2}{1\cdot 2}\frac{1}{n} + \frac{B_4}{3\cdot 4}\frac{1}{n^2} + ... + \frac{B_{2k}}{(2k-1)\cdot 2k}\frac{1}{n^{2k-1}} -$$

$$-(2k)!\int_n^{+\infty}\frac{P_{2k+1}(x)}{x^{2k+1}}dx \qquad (1)$$

[104] G. Loria, ένθ. ανωτ,, Τόμος Γ΄, σελ. 36-39.

[105] K. Knopp, *Theory and Application of Infinite Series,* Dover Publications, 1951, σελ. 528-530.

και

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} e^{\frac{B_2}{1\cdot 2}\frac{1}{n}+\ldots+\frac{B_{2k}}{(2k-1)\cdot 2k}\cdot\frac{1}{n^{2k-1}}+\frac{A_n}{n^{2k}}}, \qquad (2)$$

όπου A_n, για κάθε σταθερό k, είναι μια φραγμένη ακολουθία και

$$P_{2k+1}(x) = (-1)^{\lambda-1}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2\sin 2n\pi x}{(2n\pi)^{2\lambda+1}}, \text{ με } \lambda = 1,2,3,\ldots .$$

Να σημειώσουμε εδώ ότι ο όρος $\ln\sqrt{2\pi}$ στον τύπο (1), αρχικά, ήταν μια σταθερά γ και αργότερα[106] ο Srirling προσδιόρισε την τιμή της.

Ακόμη, στο *Methodus differentiallis* βρίσκουμε τον τύπο

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + f'''(0)\frac{x^3}{3!} + \ldots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + \ldots,$$

για τον οποίο μιλήσαμε σχετικά στις παραγράφους για τον Taylor και τον MacLaurin.

1.7.4. ΙΤΑΛΙΑ

GUIDO GRANDI[107]

Μαθητής του Saccheri, γεννήθηκε στην Cremona στις 1.10.1671 και πέθανε στις 4.7.1742. Στο έργο του *Quadratura Circuli et Hyperbolae (Τετραγωνισμός κύκλου και Υπερβολής)* του 1703, στο πρώτο από τα δύο μέρη του, περιλαμβάνονται δύο αποδείξεις του τύπου του Leibniz

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots,$$

ως ειδική περίπτωση του τύπου

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots .$$

Στο δεύτερο μέρος συναντάμε τύπους που αφορούν στους λογαρίθμους, όπως

$$\ln\frac{1}{1-\alpha} = \frac{\alpha}{1} + \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^3}{3} + \ldots,$$

ο οποίος για $\alpha = \frac{1}{2}$, μας δίνει $\ln 2 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 8} + \ldots$.

Μια σειρά η οποία μέχρι τότε είχε προκαλέσει πολλές συζητήσεις[108] μεταξύ των μαθηματικών, ήταν η εναλλασσόμενη

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots . \qquad (1)$$

Είχαν παρατηρήσει ότι αν την έγραφαν στη μορφή

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots,$$

το αποτέλεσμα θα ήταν 0. Αν την έγραφαν στη μορφή

$$1-(1-1)-(1-1)-\ldots,$$

το αποτέλεσμα θα ήταν 1.

---

106 G. Loria, ένθ. ανωτ,, Τόμος Γ΄, σελ. 98.
107 G. Loria, ένθ. ανωτ,, Τόμος Γ΄, σελ. 53-54.
108 Morris Kline, *Euler and Infinite Series,* Mathematics Magazine, Vol. 56, No 5, November 1983, σελ. 307-314.

Μια άλλη άποψη ήταν ότι, γράφοντάς τη στη μορφή

$$S = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + \ldots) = 1 - S,$$

το αποτέλεσμα, προφανώς, θα ήταν $\frac{1}{2}$. Στο ίδιο αποτέλεσμα, επίσης, κατέληγαν θεωρώντας τη ως άπειρη γεωμετρική πρόοδο με λόγο -1.
Ο Grandi έφθασε στο ίδιο αποτέλεσμα, το οποίο αναφέρεται στο παραπάνω έργο του, μέσω όμως άλλης οδού. Θεώρησε το διωνυμικό ανάπτυγμα του $\frac{1}{1+x}$, δηλαδή

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots, \quad (2)$$

στη θέση $x = 1$, οπότε η (1) ισούται με $\frac{1}{2}$. Στην αλληλογραφία[109] του με τον Leibniz , σχετικά με τη σειρά αυτή, συμφώνησαν ότι το $\frac{1}{2}$ ήταν σωστό, καθώς ήταν και ο μέσος όρος των δύο διαφορετικών αποτελεσμάτων των μερικών αθροισμάτων.
Ο Leibniz, σε επιστολή του στον Christian Wolf, που δημοσιεύθηκε στο Acta Ereditorum του 1713, υποστήριξε ότι τα διαδοχικά αθροίσματα 1, 0, 1, 0, 1, … είναι ισοπίθανα. Ο Grandi συμπεραίνει ότι βρισκόμαστε στο ίδιο παράδοξο με τη δημιουργία του κόσμου κατά τη χριστιανική θρησκεία. Το σύμπαν προέκυψε από το τίποτα. Βέβαια, σήμερα γνωρίζουμε ότι όλα αυτά τα παράδοξα προέκυπταν καθώς δεν είχε απλώς λάβει υπόψη του ότι η (2) ίσχυε για $|x| < 1$.

VINCENZO RICCATI[110]

Γιος του Jacopo Francesco Riccati, γεννήθηκε στις 11.1.1707 στο Treviso και πέθανε το 1775. Ήταν ο πρώτος που ανέπτυξε τις υπερβολικές συναρτήσεις σε σειρές και επεσήμανε τη χρησιμότητά τους στην ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων.

1.7.5. ΓΑΛΛΙΑ

THOMAS FANTER DE LAGNY[111]

Γεννήθηκε στη Λυών στις 7.11.1660. Όπως και ο Leibniz, ανακάλυψε για το π τη σειρά

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots,$$

κατόπιν, όμως, την αντικατέστησε με άλλες με γρηγορότερη σύγκλιση.

---

[109] C. Boyer - U. Merzbach, ένθ. ανωτ., σελ. 487.
[110] G. Loria, ένθ. ανωτ,, Τόμος Γ΄, σελ. 65.
[111] G. Loria, ένθ. ανωτ,, Τόμος Γ΄, σελ. 74.

PIERRE VARIGNON[112]

Γεννήθηκε στο Caen το 1654 και πέθανε στις 22.12.1722. Σ' ένα υπόμνημά του με τίτλο *Précautions à prendre dans l' usage des suites infinies,* (Mém. De Paris, 1715), (*Προφυλάξεις που πρέπει να ληφθούν κατά τη χρήση των απείρων σειρών),* προσπαθεί να αποδείξει το άτοπο στον συλλογισμό του Grandi, όπως είδαμε παραπάνω, ότι δηλαδή

$$\frac{1}{2}=1-1+1-1+\ldots=0+0+0+\ldots \ .$$

Ο συλλογισμός του στηρίζεται στο ότι, για να έχουμε

$$\frac{1}{a\pm b}=\frac{1}{a}\mp\frac{b}{a^2}+\frac{b^2}{a^3}\mp\ldots \ ,$$

θα πρέπει $a>b$. Και προσθέτει ότι το ίδιο θα πρέπει να ισχύει και στη γενική περίπτωση του αναπτύγματος σε σειρά του $\frac{1}{\left(a\pm b\right)^n}$. Βλέπουμε, δηλαδή εδώ, για πρώτη φορά, την ανάγκη ελέγχου της σειράς ως προς τη σύγκλιση, πριν από την οποιαδήποτε περαιτέρω χρήση της.

1.7.6. LEONHARD EULER[113]

Γεννήθηκε στα περίχωρα της Βασιλείας στις 15.4.1707 και πέθανε στην Αγία Πετρούπολη στις 7.9.1783. Θεωρείτο ο μεγαλύτερος μαθηματικός του κόσμου. Το έργο του *Introductio in Analysin Infinitorum,*[114] μια δίτομη μελέτη του 1748, μπορεί να θεωρηθεί το κλειδί της ανάλυσης. Στο έργο του αυτό δίνει μεγάλη βαρύτητα στην παρουσίαση μιας συνάρτησης σε μορφή σειράς και ιδιαίτερα σε αναδρομική σειρά. Στο *Introductio* ασχολείται ακόμη με απειρογινόμενα και με συνεχή κλάσματα, με αποτέλεσμα να πάρει αθροίσματα καινούργιων αριθμητικών σειρών[115].

Ο Euler έχει μεγάλη εξοικείωση στον χειρισμό των σειρών, οπότε, λόγω της μεγάλης του εμπιστοσύνης, προκειμένου να φθάσει σε κάποια αποτελέσματα, τις χρησιμοποιεί, αδιάκριτα, αν είναι συγκλίνουσες ή αποκλίνουσες. Χαρακτηριστικός είναι ο ορισμός που περιέχεται σε μια επιστολή του προς τον Goldbach στις 7.8.1745

Summa cujusque seriei est valor expressionis illius finitae, ex cuyus evolutione illa series oritur, που σημαίνει

«Άθροισμα οποιασδήποτε σειράς είναι η πεπερασμένη τιμή της έκφρασης εκείνης με ανάπτυξη της οποίας παράγεται η σειρά»[116].

Εδώ όμως να προσθέσουμε ότι έχει ήδη δώσει ένα κριτήριο σύγκλισης (C.A.P., T. VII, 1734).

Σχετικά με την εναλλασσόμενη σειρά που είδαμε ότι είχε ασχοληθεί και ο Grandi με τον Leibniz, και ο Euler έβαλε το λιθαράκι του. Χρησιμοποιώντας παρόμοιο τρόπο με αυτόν του Grandi, θεώρησε το ανάπτυγμα

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots \quad (3)$$

---

[112] G. Loria, ένθ. ανωτ,, Τόμος Γ΄, σελ. 80-81.
[113] G. Loria, ένθ. ανωτ,, Τόμος Γ΄, σελ. 102-138.
[114] C. Boyer - U. Merzbach, ένθ. ανωτ., σελ. 495.
[115] G. Loria, ένθ. ανωτ,, Τόμος Γ΄, σελ. 122-123.
[116] G. Loria, ένθ. ανωτ,, Τόμος Γ΄, σελ. 298, σημ. μεταφραστή.

και για $x=-1$, πήρε

$$\frac{1}{2}=1-1+1-1+\ldots .$$

Κατόπιν, από το ανάπτυγμα

$$\frac{1}{(1+x)^2}=1-2x+3x^2-4x^3+\ldots,$$

για $x=-1$, πήρε την ισότητα

$$\infty=1+2+3+4+\ldots . \quad (4)$$

Δηλαδή, χρησιμοποίησε το ανάπτυγμα συναρτήσεων στον υπολογισμό αποκλινουσών σειρών και χειρίστηκε το άπειρο ως αριθμό.

Στη σχέση (3), έθεσε όπου x το 2 και πήρε τη σχέση

$$-1=1+2+4+8+\ldots . \quad (5)$$

Αλλά, το δεξιό μέλος της (5) είναι μεγαλύτερο από το δεξιό μέλος της (4), οπότε ο Euler συμπέρανε ότι $\infty<-1$. Αν και κάποιοι μαθηματικοί της εποχής δικαιολόγησαν το συμπέρασμα με το να υποστηρίξουν ότι υπήρχαν αρνητικοί αριθμοί μικρότεροι του μηδενός και αρνητικοί αριθμοί μεγαλύτεροι του απείρου, εντούτοις ο Euler αντέτεινε ότι απλώς το άπειρο χωρίζει τους θετικούς από τους αρνητικούς, όπως κάνει και το 0.

Ο Euler, ασχολούμενος με την επίλυση εξισώσεων βαθμού μεγαλύτερου του τρία (είχε ήδη δώσει νέες μεθόδους για την επίλυση εξισώσεων βαθμού μέχρι τρία), έφθασε σε αθροίσματα της μορφής

$$\sqrt[n]{v_1}+\sqrt[n]{v_2}+\ldots+\sqrt[n]{v_{n-1}}$$

και

$$a+a_1\sqrt[n]{p}+a_2\sqrt[n]{p^2}+\ldots+a_{n-1}\sqrt[n]{p^{n-1}},$$

με τα γράμματα να είναι ρητές συναρτήσεις των συντελεστών. Δηλαδή και για την επίλυση των εξισώσεων έκανε χρήση σειρών.

Στην ίδια ιδέα στηρίζεται και η γενίκευση που έκανε στην εξίσωση $x^m+px^n=q$, (N.A.P., T. IV, 1786) της οποίας μια πραγματική ρίζα είχε προσδιορίσει ο Lambert, (A.A.P., T. VII, 1779) όπως θα δούμε στη σχετική παράγραφο. Βρήκε , δηλαδή, μια ρίζα της εξίσωσης

$$x^m+ax^n+bx^p+c=0 .$$

Όπως θα δούμε στο Κεφάλαιο 4, στα πλαίσια του προσδιορισμού των ριζών πολυωνύμου, γενικεύοντας την παραγοντοποίηση πολυωνύμου, ασχολήθηκε με τη σειρά $\zeta(2k)$. Τα αποτελέσματα στα οποία είχε φθάσει, τα ανακοίνωσε με επιστολή του στον Daniel Bernoulli, η οποία όμως, δυστυχώς, δεν σώζεται. Ευτυχώς, υπάρχει η απάντηση του Bernoulli που επαινεί τα αποτελέσματα, αλλά ζητά να δει τη λύση.

Σε ένα άρθρο του, του 1734-1735 με τίτλο *De summis serierum reciprocarum,* ο Euler ξεκινά[117] με τη σειρά του ημιτόνου

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots . \quad (6)$$

Κατόπιν[118], θεωρεί τη συνάρτηση f με τύπο

$$f(x)=1-\frac{\sin x}{\sin\alpha}=1-\frac{x}{\sin\alpha}+\frac{x^3}{3!\sin\alpha}-\frac{x^5}{5!\sin\alpha}+\frac{x^7}{7!\sin\alpha}-\ldots, \quad (7)$$

---

[117] M. Kline, *Euler and Infinite Series,* Mathematics Magazine, Vol.56, No. 5, November 1983, σελ. 307-314.

[118] R. Ayoub*, Euler and the Zeta Function,* American Mathematical Monthly, Vol. 81, 1974, σελ. 1067-1086.

όπου α μια σταθερά, όχι πολλαπλάσιο του π.
Το δεξιό μέλος της (7) το θεωρεί ως ένα πολυώνυμο "απείρου βαθμού." Εάν

$$f(x)=P(x)=1-\alpha_1 x+\alpha_2 x^2-\alpha_3 x^3+\ldots+(-1)^n \alpha_n x^n+\ldots,$$

τότε το άθροισμα των αντιστρόφων των ριζών του $P(x)=0$ θα ισούται με α_1, το άθροισμα των τετραγώνων των αντιστρόφων των ριζών του θα ισούται με $\alpha_1^2-2\alpha_2$ και λοιπά. Ας είναι A_1, A_2, A_3, … οι ρίζες του "πολυωνύμου" της (7). Τότε, το "πολυώνυμο" θα ισούται με το άπειρο γινόμενο

$$f(x)=\left(1-\frac{x}{A_1}\right)\left(1-\frac{x}{A_2}\right)\left(1-\frac{x}{A_3}\right)\ldots=\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x}{A_K}\right) .$$

Ο Euler θεώρησε ότι αν η μικρότερη τιμή του x είναι η A_1, τότε οι ρίζες της $f(x)=0$ θα είναι της μορφής

$$x=\begin{cases}2n\pi+A_1\\ 2n\pi+\pi-A_1\end{cases},\ \text{με } n\in\mathbb{Z}.$$

Συνεπώς,

$$f(x)=\prod_{n=-\infty}^{+\infty}\left(1-\frac{x}{2n\pi+A_1}\right)\left(1-\frac{x}{2n\pi+\pi-A_1}\right)= \qquad \text{(F)}$$

$$=\left(1-\frac{x}{A_1}\right)\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x}{(2n-1)\pi-A_1}\right)\left(1+\frac{x}{(2n-1)\pi+A_1}\right)\left(1-\frac{x}{2n\pi+A_1}\right)\left(1+\frac{x}{2n\pi-A_1}\right).$$

Κατόπιν, με ανάπτυξη του δεξιού μέλους της προηγούμενης μορφής της f σε σειρά και εξισώνοντας τους συντελεστές της μορφής αυτής με τους συντελεστές της (7), μιμούμενος τον ανάλογο τύπο του Newton, καταλήγει

Αν $\sigma_m=\sum_{k_1,\ldots,k_m} A_{k_1}\ldots A_{k_m}$ και $S_m=\sum_{k=1}^{+\infty} A_k{}^m$, τότε

$$S_1=\sigma_1,\ S_2=\sigma_1^2-2\sigma_2,\ S_3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3,\ \ldots .$$

Αλλά αφού $\sigma_2=0$, έχουμε

$$\frac{1}{A_1}+\frac{1}{\pi-A_1}+\frac{1}{2\pi+A_1}+\frac{1}{3\pi+A_1}+\ldots-\frac{1}{\pi+A_1}-\frac{1}{2\pi-A_1}-\frac{1}{3\pi+A_1}-\ldots=\frac{1}{\sin\alpha}, \qquad (8)$$

$$\frac{1}{A_1^2}+\frac{1}{(\pi-A_1)^2}+\frac{1}{(2\pi+A_1)^2}+\frac{1}{(3\pi+A_1)^2}+\ldots+\frac{1}{(\pi+A_1)^2}+\frac{1}{(2\pi-A_1)^2}+\frac{1}{(3\pi+A_1)^2}+\ldots=$$

$$=\frac{1}{\sin^2\alpha}, \qquad (9)$$

$$\frac{1}{A_1^3}+\frac{1}{(\pi-A_1)^3}+\frac{1}{(2\pi+A_1)^3}+\frac{1}{(3\pi+A_1)^3}+\ldots+\frac{1}{(\pi+A_1)^3}+\frac{1}{(2\pi-A_1)^3}+\frac{1}{(3\pi+A_1)^3}+\ldots=$$

$$=\frac{1}{\sin^3\alpha}-\frac{1}{2\sin\alpha}, \qquad (10)$$

κ.λπ.

Για $\alpha=\frac{\pi}{2}$, έχουμε $A_1=\frac{\pi}{2}$, οπότε η (8) μας δίνει

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots=\frac{\pi}{4}.$$

Επίσης, από την (9), παίρνουμε

$$\frac{8}{\pi^2}\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots\right)=1$$

οπότε

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{8}. \qquad (11)$$

Τη $\zeta(2)$ την υπολόγισε ως εξής

$$\zeta(2)-\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots\right)=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\ldots=\frac{1}{2^2}\zeta(2),$$

οπότε, κάνοντας χρήση της (11), παίρνει

$$\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}.$$

Εργαζόμενος με τον ίδιο τρόπο παίρνει τα αθροίσματα

$$\frac{1}{1^3}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\ldots=\frac{\pi^3}{32},$$

$$\frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\ldots=\frac{\pi^4}{96},$$

οπότε συμπεραίνει ότι $\zeta(4)=\frac{\pi^4}{90}$.

Ακόμη

$$\frac{1}{1^5}-\frac{1}{3^5}+\frac{1}{5^5}-\frac{1}{7^5}+\ldots=\frac{5\pi^5}{1536},$$

$$\frac{1}{1^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{5^6}+\frac{1}{7^6}+\ldots=\frac{\pi^6}{960},$$

και συνεχίζει μέχρι εκθέτη 8.

Για $A_1=\frac{\pi}{4}$, η (8) μας δίνει

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\ldots=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}, \qquad (12)$$

ένα αποτέλεσμα που αποδίδει στον Newton.

Σ' αυτό το άρθρο, ο Euler, ως υποσημείωση συμπληρώνει

$$\frac{\sin x}{x}=\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{(n\pi)^2}\right) \qquad (13)$$

και εφαρμόζοντάς τη, παίρνει την τιμή της $\zeta(2n)$ για $n=1,2,\ldots,6$. Όπως σημειώνει ο Ayoub, με τον τρόπο αυτό δεν μπορεί να έχει αποτέλεσμα για την περίπτωση $\zeta(2n+1)$, όπως επίσης ότι κάποιος θα μπορούσε να εικάσει ότι πρώτα απέδειξε τη σχέση (13) και μετά το πιο γενικό αποτέλεσμα (F).

Οι ενστάσεις του Bernoulli είναι δύο. Πρώτον, ότι δεν μπορούμε να χειριζόμαστε τις άπειρες σειρές όπως τα πολυώνυμα και δεύτερον, ότι δεν είναι προφανές ότι όλες οι ρίζες του $\sin x = \sin \alpha$ είναι πραγματικές.

Ο Euler ασχολήθηκε ακόμη με τις «αρμονικές σειρές»

$$\frac{c}{a} + \frac{c}{a+b} + \frac{c}{a+2b} + \dots .$$

Υπολόγισε την αρμονική σειρά

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{x} = \ln(x+1) + C,$$

όπου C η σταθερά του Euler και κατόπιν βρήκε το αποτέλεσμα

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{x} - \ln x = C + \frac{1}{2x} - \frac{B_1}{2x^2} + \frac{B_2}{4x^4} - \dots ,$$

όπου B_i οι **αριθμοί Bernoulli** τους οποίους ονόμασε έτσι ο ίδιος για πρώτη φορά.

Ακόμη, ήταν ο πρώτος που θεώρησε την υπεργεωμετρική σειρά

$$1 + \frac{a \cdot b}{1!c} x + \frac{a(a+1)b(b+1)}{2!c(c+1)} x^2 + \dots ,$$

ορμώμενος από την υπεργεωμετρική σειρά του Wallis στην οποία έδωσε την γενικευμένη μορφή

$$\sum_n a(a+b)(a+2b)\dots[a+(n-1)b].$$

Επίσης, έδωσε το ανάπτυγμα της τέμνουσας

$$\sec x = 1 - E_2 \frac{x^2}{2!} + E_4 \frac{x^4}{4!} - \dots ,$$

όπου E_i οι «**αριθμοί Euler**».

Κατάφερε ακόμη να βρει σημαντικές εκφράσεις για το π, με το ανάπτυγμα σε σειρές ή απειρογινόμενα κυκλικών συναρτήσεων ή των αντιστρόφων τους. Έτσι, στο κριτικό υπόμνημά του[119] (δημοσιεύθηκε μετά τον θάνατό του στο Novi Comment. Petrop. Τόμος VIII, 1760-1766) για ένα χειρόγραφο του Descartes σχετικό με μια γεωμετρική κατασκευή που δίνει προσεγγιστική τιμή του π, αφού τόνισε τη σημασία της μεθόδου, δίνει τους τύπους

$$\frac{4}{\pi} = \tan\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\tan\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\tan\frac{\pi}{16} + \dots ,$$

$$\frac{1}{\varphi} - 2\cot 2\varphi = \tan\varphi + \frac{1}{2}\tan\frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{4}\tan\frac{1}{4}\varphi + \dots$$

$$\frac{\sin 2\varphi}{2\varphi} = \cos\varphi \cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{4}\cdots ,$$

όπου ο τελευταίος τύπος, για $\varphi = \frac{\pi}{4}$, είναι ο τύπος που βρήκε ο Viète για το π, όπως είδαμε στην αντίστοιχη παράγραφο για τον Viète.

[119] G. Loria, ένθ. ανωτ,, Τόμος Β΄, σελ. 248.

1.7.7. ΣΥΓΧΡΟΝΟΙ ΤΟΥ EULER

JEAN BAPTISTE LE ROND D' ALEMBER[120] (1717-1783)

«Η εξοχότερη μαθηματική προσωπικότητα που παρήγαγε η Γαλλία κατά τη διάρκεια του πρώτου μισού του 18ου αιώνα», όπως αναφέρει ο Loria. Το «μαθηματική» βέβαια με την ευρεία έννοια. O D'Alembert βρέθηκε νεογέννητο στις 17.11.1717 στα σκαλιά της εκκλησίας του Saint – Jean le Rond στο Παρίσι.
Στην απόδειξη του τύπου του Taylor δίδαξε μια εφαρμογή του ολοκληρωτικού λογισμού. Εξ αιτίας αυτού, ο Condorcet ονόμασε *Θεώρημα του D'Alembert* τον τύπο του Taylor (Encyclopédie méthodique, στο άρθρο Séries). Ο ίδιος όμως ο D'Alembert στο άρθρο του Approximation (Προσέγγιση) του έδωσε τη σημερινή του ονομασία.
Ο D'Alembert θεωρούσε «ύποπτη» (1768) τη χρήση από τον Euler των αποκλινουσών σειρών[121], παρά την απήχηση που είχε.

JEAN HENRI LAMBERT[122] (1728-1777)

Γερμανοελβετός, είναι για δύο χρόνια συνεργάτης του Euler στην Ακαδημία του Βερολίνου. Σε μια σειρά τόμων με τίτλο *Beiträge zum Gebrauche der Mathematik* (*Συμβολές στη χρήση των μαθηματικών*) έχει συγκεντρώσει ένα μεγάλο μέρος από το έργο του. Στον πρώτο τόμο του έργου αυτού κάνει χρήση των συνεχών κλασμάτων προκειμένου να εκφράσει με διαφορετικό τρόπο συναρτήσεις μιας μεταβλητής, όπως π.χ. των σχετικών με $\ln(1+x)$ και $\arctan x$. Στον ίδιο τόμο, σε άρθρο που αφορά στον υπολογισμό του π, και όπου αποδεικνύει ότι είναι άρρητος, παραθέτει εφαρμογές των αναπτυγμάτων που προέκυψαν με τον τρόπο αυτό. Το άρθρο αυτό του 1770[123] έχει τίτλο *Vorläufige Kenntnise für die, die Quadratur und die Rectification des Circuls suchen,* (*Προκαταρκτικές γνώσεις για εκείνους που ζητούν τον τετραγωνισμό και την ευθειοποίηση του κύκλου)* και του οποίου υπάρχει αναδημοσίευση σ' ένα έργο του F. Rudio, με τίτλο *Archimedes, Huygens, Lambert, Legendre* (Leipsig, 1892). Από το ανάπτυγμα της $\tan x$ σε συνεχές κλάσμα συμπεραίνει ότι, αν ο x είναι ρητός, η $\tan x$ είναι άρρητος και αντιστρόφως, οπότε για $x=\frac{\pi}{4}$, έχουμε ότι ο π είναι άρρητος.
Ο Lambert σε δύο υπομνήματά του στο Acta Helvetica, T.III,1758 και στο Nouv. Mémoires de Berlin, 1770, αναφέρεται στη λύση της εξίσωσης

$$x^m + px = q\,, \quad (1)$$

με χρήση σειρών και δίνει ότι ο τύπος μιας ρίζας της είναι

$$x=\frac{p}{q}-\frac{q^m}{p^{m+1}}+m\frac{q^{2m-1}}{p^{2m-1}}-m\frac{3m-1}{2}\frac{q^{3m-2}}{p^{3m-1}}+m\frac{4m-1}{2}\frac{4m-2}{3}\frac{q^{4m-3}}{p^{4m-1}}-\ldots\,.$$

Αλλά, επειδή και η εξίσωση

$$ax^\lambda + bx^\mu = c\,, \quad (2)$$

μπορεί να αναχθεί στη μορφή (1), δίνει ένα αντίστοιχο τύπο σε σειρά και για τη μορφή αυτή. Τότε, όπως είδαμε, ο Euler δίνει τις ρίζες στη γενική περίπτωση

$$x^m + ax^n + bx^p + c = 0\,.$$

120 G. Loria, ένθ. ανωτ,, Τόμος Γ΄, σελ. 143-146.
121 C Boyer – U. Merzbach, ένθ. ανωτ., σελ. 502.
122 G. Loria, ένθ. ανωτ,, Τόμος Γ΄, σελ. 160-161, 164-165.
123 C. Boyer - U.Merzbach, ένθ. ανωτ., σελ. 639.

Μετά απ’ όλα αυτά, όπως θα δούμε, ο Lagrange βρήκε τη σειρά για τη λύση της

$$\alpha - x + \varphi(x) = 0 .$$

Ο Lambert, παίρνοντας πάλι τη σκυτάλη, έδωσε τη λύση της

$$x = q + x^m, \text{ για } m \text{ θετικό ακέραιο,}$$

σε μορφή σειράς.

Επίσης, η σειρά

$$\frac{x}{1-x} + \frac{x^2}{1-x^2} + \frac{x^3}{1-x^3} + \ldots$$

φέρει το όνομα του Lambert. Μετά από μετατροπή των παραπάνω κλασμάτων σε δυναμοσειρές, καταλήγουμε στην έκφραση

$$x + 2x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 2x^5 + 4x^6 + 2x^7 + \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n x^n \quad .$$

Η έκφραση αυτή έχει την ιδιότητα κάθε συντελεστής α_n να ισούται με το πλήθος των διαιρετών του αντίστοιχου εκθέτη n του x. Παρατηρούμε δηλαδή ότι όπου υπάρχει 2, ο αντίστοιχος εκθέτης είναι πρώτος κι έτσι παίρνουμε διαδοχικά όλους τους πρώτους αριθμούς.

GABRIEL CRAMMER [124]

Κατάγεται από τη γαλλική Ελβετία. Γεννήθηκε στη Γενεύη στις 31.7.1704 και πέθανε το 1752. Στο Κεφ.VII του έργου του *Introduction,* προκειμένου να εντοπίσει τα ανώμαλα σημεία καμπύλων ή να μελετήσει τους κλάδους καμπύλων “που βυθίζονται στο άπειρο”, μέσω του παραλληλογράμμου του Newton ή του αναλυτικού τριγώνου του de Gua μας δίνει αναπτύγματα σε σειρές.

JOHN LANDEN[125]

Γεννήθηκε στις 23.1.1719 στο Peakirk της Αγγλίας και πέθανε στο Milton στις 15.1.1790. Δημοσίευσε μερικά αξιόλογα υπομνήματα σχετικά με την άθροιση και τον μετασχηματισμό των σειρών, τα οποία δημοσιεύθηκαν στα Philosophical Transactions του 1760.

1.7.8. ΑΠΟ ΤΟΝ LAGRANGE ΕΩΣ ΤΟΝ CÉBYCEFF

JOSEPH LOUIS LAGRANGE[126]

Γαλλικής καταγωγής, αλλά πολιτογραφημένος Ιταλός, γεννήθηκε στο Τορίνο το 1736 και πέθανε το 1813. Δημοσίευσε πέντε τόμους με το όνομα *Miscellanea Taurinensia* (M.T.). Ο πλήρης τίτλος είναι *Miscellanea Philosophica Mathematica Societatis privatae Taurinensia,* όνομα που δόθηκε στον πρώτο τόμο. Στον τόμο αυτό περιλαμβάνεται, πλην των άλλων, η θεωρία των αναδρομικών σειρών, η οποία συνέβαλε στη λύση θεμάτων πιθανοθεωρίας.

---

[124] G. Loria, ένθ. ανωτ,, Τόμος Γ΄, σελ. 168.
[125] G. Loria, ένθ. ανωτ,, Τόμος Γ΄, σελ. 169-173.
[126] G. Loria, ένθ. ανωτ,, Τόμος Γ΄, σελ. 177-181, 186, 188, 189, 193, 194.

Σε ανακοίνωσή του στην Ακαδημία του Βερολίνου στις αρχές του 1770, και η οποία περιλήφθηκε στα Mémoires της Ακαδημίας του ίδιου έτους, μας δίνει τη γνωστή “σειρά του Lagrange” η οποία είναι λύση εξισώσεων της μορφής

$$\alpha - x + \varphi(x) = 0,$$

όπως είδαμε στην παράγραφο για τον Lambert. Η σειρά αυτή προκάλεσε πολλές συζητήσεις για τη διευκρίνιση του σε ποια ρίζα αναφερόταν.

Στα Mémoires Acad. Turin, T. II, 1874, διδάσκει πώς αναλύονται τυπικά ολοκληρώματα σε σειρές. Έτσι, μας δίνει σπουδαία αναπτύγματα σε σειρές, ενός τόξου μιας κωνικής με κέντρο.

Στις 23.7.1754 σε μια επιστολή του προς τον κόμητα Fagnano, στην ιταλική γλώσσα, δημοσιεύει το πρώτο του επιστημονικό κείμενο που αναφέρεται στην αναλογική σχέση που υπάρχει μεταξύ εκθετικών δυνάμεων και παραγώγων. Με μεγάλη του απογοήτευση πληροφορείται ότι στο αποτέλεσμα αυτό έχει φθάσει πρώτος ο Leibniz του οποίου το έργο είχε μελετήσει. Το 1772 επανέρχεται στο θέμα (Mém. de Berlin) και θέτει τα θεμέλια ενός νέου λογισμού. Έτσι φθάνει στον τύπο του Taylor οποιουδήποτε αριθμού μεταβλητών. Στο ίδιο κείμενο, καταργώντας την μέχρι τότε έννοια του απείρου στην ανάλυση, κάνει για πρώτη φορά νύξη για τη χρήση σειρών στον ορισμό συναρτήσεων και των παραγώγων τους.

Το βασικό σκεπτικό του[127] ήταν να κάνει τη διαίρεση στη συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + 1x + 1x^2 + 1x^3 + \ldots + 1x^n + \ldots .$$

Κατόπιν, πολλαπλασιάζοντας τον συντελεστή του x^n με $n!$, προκύπτει ένα αποτέλεσμα το οποίο ο Lagrange ονόμασε **τιμή** της n-οστής παραγομένης συνάρτησης της f στη θέση $x = 0$. Για άλλες θέσεις του x έκανε κατάλληλη τροποποίηση των αναπτυγμάτων των συναρτήσεων.

Σημαντικότατα έργα του το *Théorie des Fonctions analytiques (Θεωρία των αναλυτικών συναρτήσεων)* και το *Leçons sur le calcul des Fonctions (Μαθήματα επί του λογισμού των συναρτήσεων)*. Δημοσιεύθηκαν και τα δύο, αλλά χωριστά, για πρώτη φορά, στα πρακτικά των συνεδριάσεων της École Normale. Πρώτα δημοσιεύθηκε το *Leçons* το 1806 και κατόπιν το *Théorie* το 1813. Εκεί βρίσκουμε την προσπάθειά του να αποδείξει ότι κάθε συνάρτηση μιας μεταβλητής μπορεί να γραφεί ως ανάπτυγμα στη μορφή

$$f(x+i) = f(x) + pi + qi^2 + ri^3 + \ldots,$$ όπου p, q, r, οι παράγωγοι της f.

Από τα βιβλία αυτά και μετά, οι σειρές Taylor βρίσκονται πια μόνιμα σ’ όλα τα έργα που αναφέρονται σε απειροστική ανάλυση.

JOSEPH MARIA HOENE WRONSKI[128]

Αντίπαλος του Lagrange ο Πολωνός Wronski, γεννήθηκε στις 24.8.1778 στο Posman και πέθανε στις 9.8.1853 στο Παρίσι. Στο έργο του *Réfutation de la Théorie des fonctions analytiques (Ανασκευή της Θεωρίας των αναλυτικών συναρτήσεων)* εντοπίζονται τα αδύνατα σημεία του συλλογισμού του Lagrange για την εφαρμογή της σειράς Taylor σε κάθε εξίσωση. Η ατέλεια βέβαια στον συλλογισμό του Lagrange

[127] C. Boyer – U. Merzbach, ένθ. ανωτ., σελ. 546.
[128] G. Loria, ένθ. ανωτ,, Τόμος Γ΄, σελ. 200.

είχε επισημανθεί και από τον Poisson, του οποίου όμως η διόρθωση απερρίφθη και αυτή ως λανθασμένη από τον Wronski στο ίδιο έργο του.
Ο Lagrange, με αφορμή την έννοια της πιθανότητας, είχε διατυπώσει τον παρακάτω ορισμό

"Εάν y_x είναι τυχούσα συνάρτηση του x και σχηματισθεί η σειρά $\sum_0^\infty y_x t^x$, μπορούμε πάντα να φανταστούμε μια συνάρτηση του t, η οποία αναπτυσσόμενη σε σειρά να αναπαράγει τη δοθείσα."
Είναι αυτή που ονομάστηκε **παράγουσα** ή **γενέτειρα** της y_x. Η αδυναμία της πρότασης αυτής και βέβαια δεν πέρασε απαρατήρητη από τον Wronski.
Χρησιμοποιεί τον όρο "legge suprema", δηλαδή "υπέρτατος νόμος" για ένα γενικό ανάπτυγμα σε σειρά, το οποίο, όπως διαπίστωσαν οι Lagrange και Lacroix (βλ. παρακάτω), κατάφερε να συμπεριλάβει όλα τα μέχρι τότε γνωστά αναπτύγματα.

LOUIS FRANÇOIS ARBOGAST[129]

Γεννήθηκε στις 4.10.1759 στο Mutzig της Αλσατίας και πέθανε στις 8.4.1803 στο Στρασβούργο. Στο έργο του *Calcul des Dérivations* του 1800, διδάσκει ένα αλγόριθμο με τη χρήση του οποίου μπορεί να μετατρέψει σε δυναμοσειρές εκφράσεις της μορφής

$$\varphi\left(\alpha + bx + cx^2 + ...\right),$$

ή της μορφής

$$\varphi\left(\alpha + bx + cx^2 + ...\right) \cdot \psi\left(A + Bx + Cx^2 + ...\right)$$

και λοιπών μορφών. Τα αποτελέσματα που προκύπτουν μπορούν να θεωρηθούν ως γενίκευση του τύπου του Taylor.

CHRISTIAN KRAMP[130]

Γεννήθηκε στις 10.7.1760 στο Στρασβούργο και πέθανε στις 13.5.1826. Στα έργα του *Fractionum Wallisianarum Analysis,* δημοσιευμένο στο *Nova Acta* της Ακαδημίας του Μονάχου, 1797-1799, και *Analyse de Réfractions astronomiques et terrestres,* δημοσιευμένο το 1798 στη Λειψία, βρίσκουμε μελέτη των γινομένων της μορφής

$$\alpha\left(\alpha + r\right)\left(\alpha + 2r\right)...\left(\alpha + \left(n-1\right)r\right).$$

SYLVESTRE FRANÇOIS LACROIX[131]

Γεννήθηκε στο Παρίσι το 1765 και πέθανε στις 25.5.1843. Έργο του το τρίτομο *Traité de Calcul Différentiel et Intégral*, *(Paris 1797-1800)*. Επανεκδόθηκε το 1818-1819 και ο τρίτος τόμος αναφέρεται αποκλειστικά στις διαφορές και στις σειρές.

---
[129] G. Loria, ένθ. ανωτ,, Τόμος Γ΄, σελ. 211-212.
[130] G. Loria, ένθ. ανωτ,, Τόμος Γ΄, σελ. 212.
[131] G. Loria, ένθ. ανωτ,, Τόμος Γ΄, σελ. 212-213.

PAOLO RUFFINI[132]
Ιταλός, γεννήθηκε στο Valentano στις 23.9.1765 και πέθανε στη Φλωρεντία στις 5.3.1834. Απέδειξε ότι εξισώσεις βαθμού ανώτερου του τετάρτου δεν λύνονται δι’ εφαρμογής κλειστού τύπου. Στην εργασία του *Riflessioni intorno alla Rettificazione e alla Quadratura del Circolo, (Σκέψεις γύρω από την ευθειοποίηση και τον τετραγωνισμό του κύκλου)*[133], δημοσιευμένη στα υπομνήματα της Ιταλικής Εταιρείας των Επιστημών, εν συντομία, M.S.I., στον Τ. IX, 1802, συναντάμε σημαντικές θεωρίες για τη σύγκλιση των σειρών.

SIMON –ANTOINE – JEAN LHUILLER[134]
Γεννήθηκε στη Γενεύη στις 24.4.1750 και πέθανε στις 23.3.1840. Στο βραβευμένο του υπόμνημα στο Βερολίνο, με τίτλο *Exposition Élémentaire des Principes des Calculs Superieurs (Στοιχειώδης ανάπτυξη των αρχών του απειροστικού λογισμού)* που δημοσιεύθηκε το 1786 και βελτιωμένο το 1795 στα λατινικά, χωρίς να αναφέρεται στην έννοια του απείρου, αποδεικνύει τον τύπο του Taylor.

JOHANN FRIEDRICH PFAFF[135]
Γερμανός, γεννήθηκε στη Στουτγάρδη στις 22.12.1765 και πέθανε στη Λειψία στις 17.3.1808. Τελειοποίησε τα γραπτά του Euler στο N. C. P., T. IX, του 1764, τα σχετικά με τις σειρές των οποίων οι όροι είναι τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Ο Pfaff επίσης, διέκρινε δύο είδη πολυωνύμων, ακόμη και με άπειρους όρους. Το ένα είναι το

$$\alpha + b + c + \ldots$$

και το άλλο είναι το

$$\alpha + bx + cx^2 + \ldots .$$

Με το θέμα αυτό είχαν ασχοληθεί ο Leibniz, Jean Bernoulli, Moivre και λοιποί. Τη σκυτάλη παρέλαβε ο Pfaff για να αποδείξει τη σχέση που είχαν τα παραπάνω με τη σειρά Lagrange.

KARL FRIEDRICH GAUSS[136]
Γεννήθηκε στις 30.4.1777 στο Baunschweig και πέθανε το 1855. Όπως θα δούμε στο σχετικό κεφάλαιο, με απίστευτη ευκολία, σε ηλικία δέκα ετών υπολόγισε το άθροισμα των αριθμών από το 1 έως το 100.
Ο Gauss εισήγαγε νέες συναρτήσεις όπως η γνωστή ως “*σειρά του Gauss*”

$$\sum_{i=0}^{i=n-1} \left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n} \right) q^{i^2}$$

την οποία κατάφερε να υπολογίσει για n περιττό, μετασχηματίζοντας το άθροισμα σε γινόμενο.

---
[132] G. Loria, ένθ. ανωτ,, Τόμος Γ΄, σελ. 219-221.
[133] G. Loria, ένθ. ανωτ,, Τόμος Γ΄, σελ.301, σημ. μεταφραστή.
[134] G. Loria, ένθ. ανωτ,, Τόμος Γ΄, σελ.234-235.
[135] G. Loria, ένθ. ανωτ,, Τόμος Γ΄, σελ. 274-275.
[136] G. Loria, ένθ. ανωτ,, Τόμος Γ΄, σελ. 275-287.

Το 1791 αρχίζει να ασχολείται με τον υπολογισμό του αριθμητικού και γεωμετρικού μέσου και συνεχίζει για τα επόμενα πενήντα περίπου χρόνια, αν και όχι συνεχόμενα, με τη μελέτη διαφόρων ειδών συναρτήσεων. Για χρόνια δεν δημοσιεύει τις μελέτες του, παρά αφού φθάσουν και άλλοι στα δικά του αποτελέσματα. Τον Νοέμβρη του 1811 παρουσιάζει στην Εταιρεία του Göttingen μια εργασία του με τίτλο *Disquisitiones Generales circa Seriem Infinitam,* (*Γενικές διερευνήσεις επί της απείρου σειράς),* όπου εμφανίζεται η συνάρτηση F με τύπο

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x)=1+\frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\cdot2\cdot\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3+\ldots,$$

δηλαδή η **υπεργεωμετρική σειρά**, όπως είδαμε στον Euler.

Η συνάρτηση αυτή είναι η γενική περίπτωση είκοσι τριών , ήδη γνωστών, συναρτήσεων όπως π.χ. $(1+x)^m$, $\ln(1+x)$, $\ln\frac{1+x}{1-x}$, e^x και άλλων. Περιλαμβάνει επίσης και τους συντελεστές του αναπτύγματος $\left(a^2+b^2-2ab\cos\varphi\right)^n$.

Ακόμη προσδιόρισε τις γραμμικές σχέσεις μεταξύ των

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x),\ F(\alpha+\lambda,\beta+\mu,\gamma+\nu,x),\ F(\alpha+\lambda',\beta+\mu',\gamma+\nu',x),$$

όπου τα λ, μ, ν, λ΄, μ΄, ν΄, παίρνουν τιμές από το σύνολο $\{0,1,-1\}$.
Επίσης, ανέπτυξε σε συνεχή κλάσματα τα πηλίκα της $F(\alpha,\beta+1,\gamma+1,x)$ δια

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x),\ F(\alpha,\beta+1,\gamma,x),\ F(\alpha-1,\beta-1,\gamma,x).$$

Επιπλέον, αποδεικνύει ότι

$$F(\alpha,\beta,\gamma,1)=\frac{\pi(\gamma-1)\pi(\gamma-\alpha-\beta-1)}{\pi(\gamma-\alpha-1)\pi(\gamma-\beta-1)},$$

όπου $\pi(z+1)=(z+1)\pi(z)$, ενώ μερικές φορές έχει αντικατασταθεί το $\pi(z)$ με το $\pi(z+1)$ ή και με $z!$[137].
Η εργασία αυτή είναι πολύ σημαντική γιατί, με τα κριτήρια σύγκλισης που περιέχει, εγκαινιάζει μια νέα περίοδο αυστηρότητας για την ανάλυση. Αυτό όμως δεν αποθάρρυνε τον Gauss από το να χρησιμοποιεί αποκλίνουσες σειρές, όπου "θεωρούσε" ότι μπορούσε να το κάνει.[138]

BERNARD BOLZANO[139]

Ιταλός, γεννήθηκε στην Πράγα στις 5.10.1791 όπου και πέθανε στις 18.12.1848. Ήταν ο πρώτος που έδωσε ασφαλές κριτήριο για τη σύγκλιση σειράς (βλ. Cauchy) και ασχολήθηκε με τη διαφόριση δυναμοσειράς.

---

[137] J. Dutka, *The Early History of the Hypergeometric Function,* Archive for History of Exact Sciences No 31, (1984) σελ. 15-34.
[138] C. Boyer – U. Merzbach, ένθ. ανωτ., σελ. 565.
[139] G. Loria, ένθ. ανωτ,, Τόμος Γ΄, σελ. 307.

AUGUSTIN LOUIS CAUCHY[140]
Γεννήθηκε στο Παρίσι στις 21.8.1789 και πέθανε το 1857. Γονιμότατος και με ποικίλα επιστημονικά ενδιαφέροντα, μπορεί να συγκριθεί μόνο με τον Euler. Από τα 789 έργα του, στις σειρές αναφέρονται τα 73.

Ο Cauchy παρατηρεί ότι, αφού η $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$ έχει στο 0, ίσες με το μηδέν όλες τις παραγώγους, το ίδιο θα πρέπει να συμβαίνει και στην εφαρμογή της σειράς MacLauren σε μια οποιαδήποτε συνάρτηση f, όπως επίσης και στο άθροισμα

$$y = f(x) + e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

Ακόμη, οι συνθήκες σύγκλισης μιας δυναμοσειράς, όπως και της σειράς του Lagrange, οφείλονται σ' αυτόν.

Στο έργο του *Cours d' Analyse,* μεταξύ των άλλων αναφέρεται η πρόταση[141]
«Εάν μια δυναμοσειρά συγκλίνει για κάποια τιμή της μεταβλητής, θα συγκλίνει επίσης και για κάθε τιμή μικρότερη αυτής, το δε άθροισμα θα είναι συνεχής συνάρτηση». Η έννοια του «δίσκου σύγκλισης» βρίσκεται κάτω από αυτόν τον συλλογισμό, στον οποίο έφθασε ο Cauchy μέσω γεωμετρικής παράστασης.

Το *κριτήριο του λόγου* για τη σύγκλιση των απειροσειρών, συνήθως, φέρει το όνομά του, παρά του ότι το αναφέρει ο **Edward Waring** (Άγγλος,1734-1798) ήδη από το 1776. Κάποιες φορές το συναντάμε με το όνομα του D' Alembert.

Πολλά κριτήρια σύγκλισης έχουν το όνομά του. Θεωρώντας ότι μια σειρά είναι συγκλίνουσα αν το άθροισμα S_n των n πρώτων όρων της τείνει σ' ένα όριο S το οποίο ονομάζει άθροισμα της σειράς Cauchy, απέδειξε ότι ικανή και αναγκαία συνθήκη για να συγκλίνει η σειρά είναι ότι για δοσμένο p, $S_{n+p} - S_n \to 0$, για $n \to +\infty$. Αυτό είναι το ονομαζόμενο *κριτήριο του Cauchy.* Το κριτήριο αυτό είναι αυτό που ήδη αναφέραμε στον Bolzano.

Το όνομα του Cauchy είναι συνδεδεμένο με τις απειροσειρές και αυτό οφείλεται στο ότι ήταν αυτός που έπεισε τη μαθηματική κοινότητα για την ανάγκη ελέγχου της σύγκλισης των σειρών. Η περίοδος της αυστηρότητας στα μαθηματικά είχε ξεκινήσει. Λένε[142] ότι όταν ο Cauchy διάβασε στην Académie το πρώτο του άρθρο που αφορούσε στη σύγκλιση, ο Laplace έτρεξε γρήγορα στο σπίτι για να εξακριβώσει αν είχε χρησιμοποιήσει κάποια αποκλίνουσα σειρά στη Μηχανική του (*Méchanique céleste*).

Προς το τέλος της ζωής του ο Cauchy αντελήφθη τη σπουδαιότητα της *ομοιόμορφης σύγκλισης,* την οποία πρώτος είχε μελετήσει ο φυσικός G. G. Stokes (1819-1903), (βλ. παρακάτω).

[140] G. Loria, ένθ. ανωτ,, Τόμος Γ΄, σελ. 308-317.
[141] G. Loria, ένθ. ανωτ,, Τόμος Γ΄, σελ. 322.
[142] C. Boyer - U. Merzbach, ένθ. ανωτ., σελ. 578.

NIELS HENRIK ABEL[143]

Γεννήθηκε στο Findö της Νορβηγίας το 1802 και πέθανε το 1829. Θεωρεί ότι «οι αποκλίνουσες σειρές είναι στο σύνολό τους μια διαβολική επινόηση και θα ήταν αίσχος να ζητά κανείς να στηρίξει σ' αυτές οποιαδήποτε απόδειξη. Με τη βοήθειά τους μπορεί να αποδείξει ό,τι φανταστεί… . Εάν εξαιρέσουμε απλές περιπτώσεις, όπως είναι οι γεωμετρικές σειρές, δεν υπάρχει σε ολόκληρη τη μαθηματική επιστήμη καμιά σειρά άπειρη της οποίας το άθροισμα να είναι αυστηρά καθορισμένο…».
«Στην παραπάνω ανάλυση δεν υπάρχουν παρά λίγες προτάσεις των οποίων η απόδειξη να έχει δοθεί κατά τρόπο αδιαφιλονίκητα αυστηρό. Παντού απαντάται η αξιοθρήνητη συνήθεια της εξαγωγής συμπερασμάτων από το μερικό στο γενικό και είναι κατ' εξοχήν αξιοθαύμαστο το ότι, με ένα τέτοιο τρόπο του σκέπτεσθαι, δεν καταλήγουν παρά σπανιότατα σε παράδοξο».

Ο Abel, σε αντίθεση με τον Cauchy, απέφευγε συστηματικά τη γεωμετρική παράσταση.

Ασχολήθηκε με τις ατέλειες της ανάλυσης και στο *Περιοδικό του Crelle*, Τόμος Ι του 1826, δημοσιεύει ένα άρθρο με τίτλο *Έρευνες επί της σειράς*

$$1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\dots\ .$$

Ο Abel, επηρεασμένος από το *Cours d' Analyse* του Cauchy, προσπαθεί να προσδιορίσει το άθροισμα της διωνυμικής σειράς στις περιπτώσεις που αυτή συγκλίνει. Εφαρμογές είναι ο υπολογισμός των σειρών

$$\sum_k (-1)^k \frac{\alpha^k}{k}\cos k\varphi, \qquad \sum_k (-1)^k \frac{\alpha^k}{k}\sin k\varphi,$$

καθώς και τα αναπτύγματα σε σειρά των $\cos^n x$ και $\sin^n x$.
Σ' ένα υπόμνημα του L. Olivier διαβάζει

«η σειρά $\sum_k u_n$ είναι πάντοτε συγκλίνουσα όταν $\lim_{n\to+\infty}(nu_n)=0$».

Ο Abel αποδεικνύει το λάθος του συλλογισμού στο *Περιοδικό του Crelle*, Τόμος ΙΙΙ, του 1828, θεωρώντας την

$$u_n=\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$$

Από τότε, το παράδειγμα αυτό χρησιμοποιείται σε πολλά άρθρα ανάλυσης.

JEAN-BAPTISTE-JOSEPH DE FOURIER[144]

Γάλλος, γεννήθηκε στις 21.3.1768 στην Auxerre και πέθανε το 1830. Έργο του (1822) το *Théorie analytique de la Chaleur (Αναλυτική θεωρία της θερμότητας)*[145], ένα έργο που ο Kelvin το ονόμασε «μέγα μαθηματικό ποίημα», όπου η χρήση των τριγωνομετρικών σειρών στην ανάλυση, αν και μέχρι τότε είναι συμπτωματική, τώρα πια καθιερώνεται με το όνομα **σειρές Fourier.** Έτσι, μετατόπισε το μέχρι τότε πρόβλημα της έκφρασης μιας οποιασδήποτε συνάρτησης f σε τριγωνομετρική σειρά

---

[143] G. Loria, ένθ. ανωτ,, Τόμος Γ΄, σελ. 319-323.
[144] C. Boyer - U. Merzbach, ένθ. ανωτ., σελ. 570-571.
[145] G. Loria, ένθ. ανωτ,, Τόμος Γ΄, σελ. 335-337.

(την ιδέα είχε πρώτος ο Daniel Bernoulli), στην επίλυση ενός συστήματος γραμμικών εξισώσεων με άπειρους αγνώστους. Δηλαδή, κάθε συνάρτηση f της μορφής

$$f(x)=\frac{1}{2}\alpha_0+\alpha_1\cos x+\alpha_2\cos 2x+...+\alpha_n\cos nx+...+b_1\sin x+b_2\sin 2x+...+b_n\sin nx+...,$$

ονομάζεται **σειρά Fourier,** αν για τους συντελεστές $\alpha_0,\alpha_1,...,\alpha_n,...,b_1,...,b_n,...$, ισχύουν οι σχέσεις

$$\alpha_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx\,,\quad \alpha_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx\,,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx\,.$$

Η σειρά αυτή έχει το πλεονέκτημα, έναντι της σειράς Taylor, ότι δίνει τη δυνατότητα να μελετηθούν συναρτήσεις ακόμα κι αν έχουν σημεία ασυνέχειας ή ακόμα κι αν έχουν σημεία όπου δεν υπάρχει παράγωγος.

Ο Fourier, αφού για $f(x)=x$, με $-\pi<x<\pi$, πήρε το ανάπτυγμα

$$\frac{f(x)}{2}=\frac{x}{2}=\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x-...-\frac{1}{n}\cos n\pi\,,$$

(βλ. αναλυτικά Κεφ. 4, Απόδειξη 15), απ' όπου, για $x=\frac{\pi}{2}$, πήρε τη σειρά

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+...\,,$$

η οποία, όπως είδαμε, οφείλεται στον Leibniz.

GEORGE GABRIEL STOKES[146]

Γεννήθηκε στο Skreen της Ιρλανδίας στις 13.8.1819 και πέθανε στο Cambridge στις 1.2.1903 (βλ.Cauchy). Αν και οι δραστηριότητές του σχετίζονται κυρίως με τη φυσική, εντούτοις και στα μαθηματικά έχει να επιδείξει σοβαρό έργο. Με τις σειρές ασχολείται στο υπόμνημά του με τίτλο *On the Discontinuity of arbitrary constants that appear as multipliers of semi-convergent series, (Επί της Ασυνέχειας των αυθαιρέτων σταθερών που παρουσιάζονται ως πολλαπλασιαστές των ημισυγκλινουσών σειρών)* που δημοσιεύθηκε στο Acta mathematica (1902). Στο έργο του αυτό οδηγήθηκε, κατά τη διάρκεια των μελετών του στην οπτική το 1850, από ένα ολοκλήρωμα που είχε χρησιμοποιήσει ο τότε Βασιλικός Αστρονόμος της Αγγλίας **G.B. Airy**[147] (1801-1892). Η συνεισφορά του είναι μεγάλη στην έρευνα επί των σειρών. Ο Stokes βρήκε μια διαφορική εξίσωση της οποίας μια ειδική λύση ήταν το *ολοκλήρωμα του Airy*. Η γενικότερη θεωρία των ημισυγκλινουσών σειρών οφείλεται στον **T.J. Stieltjes** (1856-1894).

NIKOLAI IVANOVITCH LOBATCHEVSKI[148]

Γεννήθηκε το 1793 στο αργότερα ονομαζόμενο Gorki και πέθανε το 1856. Γνωστός για την Γεωμετρία του, εντούτοις ασχολήθηκε και με τις σειρές και είχε αξιόλογα αποτελέσματα, σύμφωνα με τις δημοσιεύσεις του στις *Επιστημονικές εργασίες του Πανεπιστημίου του Καζάν, 1834-1835.*

---

[146] G. Loria, ένθ. ανωτ,, Τόμος Γ΄, σελ. 344.

[147] C. Boyer - U. Merzbach, ένθ. ανωτ., σελ. 624.

[148] G. Loria, ένθ. ανωτ,, Τόμος Γ΄, σελ. 401.

GIUSTO BELLAVITIS[149]
Ιταλός, γεννήθηκε στο Bassano (Vicenza) στις 22.11.1803. Ασχολήθηκε σχεδόν με όλες τις μαθηματικές θεωρίες της εποχής και βέβαια με αναπτύγματα συναρτήσεων σε σειρές.

PETTER GUSTAV LEJEUNE-DIRICHLET[150]
Γεννήθηκε στις 13.2.1805 στο Düren και αφού διαδέχθηκε τον Gauss στο Πανεπιστήμιο του Göttingen, πέθανε στις 5.5.1859. Εκτός των άλλων, ασχολήθηκε με τις τριγωνομετρικές σειρές. Κατάφερε να διορθώσει αρκετά από τα λάθη που υπήρχαν μέχρι τότε, όπως και να υποδείξει τρόπους αντιμετώπισής τους. Άρθρα του σχετικά δημοσιεύονται στο *Περιοδικό του Crelle* (Τ. IV, 1829 και Τ. XVII, 1837). Είναι αυτός που εισήγαγε την έννοια της *απόλυτα συγκλίνουσας σειράς*. Ακόμη[151], το όνομά του συνδέεται με το *κριτήριο Dirichlet* για την ομοιόμορφη σύγκλιση μιας σειράς.
Είναι ο πρώτος που δίνει αυστηρή απόδειξη για τη σύγκλιση της σειράς Fourier μιας συνάρτησης που πληροί κάποιες προϋποθέσεις, οπότε προκύπτουν οι λεγόμενες *συνθήκες Dirichlet.*
Έχουμε ακόμη τη σειρά Dirichlet $\sum \alpha_n e^{-\lambda_n z}$, όπου $\alpha_n \in \mathbb{C}$, $\lambda_n \in \mathbb{R}$, μονότονα αυξανόμενοι και z μιγαδική μεταβλητή.

FERDINAND GOTTHOLD MAX EISENSTEIN[152]
Μαθητής του Dirichlet, γεννήθηκε στο Βερολίνο στις 16.4.1823 και πέθανε στις 11.10.1852. Από τις 46 εργασίες του που δημοσιεύθηκαν στο *Περιοδικό του Crelle* (Τ. XXVII - XLIV) κάποιες αναφέρονται στη θεωρία των σειρών.

ERNST EDUARD KUMMER[153]
Διάδοχος του Dirichlet στην Ακαδημία του Βερολίνου, γεννήθηκε στο Sorau στις 29.1.1810 και πέθανε στο Βερολίνο στις 14.5.1893. Από τα πρώτα σημαντικά του έργα, ήταν το έργο το αναφερόμενο στις σειρές. Ένα από τα σχετικά θέματα που διαπραγματεύτηκε ήταν για τις υπεργεωμετρικές σειρές για τις οποίες δημοσίευσε ένα υπόμνημα στο *Περιοδικό του Crelle* (Τ.XV, 1836). Το συγκεκριμένο υπόμνημα θεωρείται ένα σοβαρό συμπλήρωμα σε μια εργασία του Gauss, ο οποίος όπως είδαμε στην αντίστοιχη παράγραφο, είχε ασχοληθεί κι αυτός με την υπεργεωμετρική σειρά.

---

[149] G. Loria, ένθ. ανωτ,, Τόμος Γ΄, σελ. 410-412.
[150] G. Loria, ένθ. ανωτ,, Τόμος Γ΄, σελ. 430-431.
[151] C. Boyer – U. Merzbach, ένθ. ανωτ., σελ. 563, 571-572.
[152] G. Loria, ένθ. ανωτ,, Τόμος Γ΄, σελ. 432.
[153] G. Loria, ένθ. ανωτ,, Τόμος Γ΄, σελ. 432-433.

KARL WEIERSTRASS[154]
Γεννήθηκε στο Ostenfeld της Βεστφαλίας στις 31.10.1815 και πέθανε στις 19.2.1897. Προκειμένου να αποδείξει το θεμελιώδες θεώρημα των αλγεβρικών εξισώσεων, αναπτύσσει όλες τις ρίζες σε σειρές.

Η «Θεωρία των Αναλυτικών συναρτήσεων» του Lagrange δεν τον άφησε αδιάφορο. Ο Weierstrass, αρχικά[155], είχε αποδείξει ότι το ανάπτυγμα σε σειρά μιας συνάρτησης f σε δίσκο C_1 κέντρου P_1, συγκλίνει σε όλα τα σημεία τα εσωτερικά του δίσκου αυτού, ο οποίος διέρχεται από το πλησιέστερο σημείο ανωμαλίας. Κατόπιν, αν αναπτύξουμε την ίδια συνάρτηση σε δίσκο C_2 κέντρου P_2, με P_2 διαφορετικό του P_1, αλλά εσωτερικό του δίσκου C_1, τότε η σειρά θα συγκλίνει μέσα στον δίσκο C_2 ο οποίος θα περνά από το πλησιέστερο στο P_2 σημείο ανωμαλίας. Αυτός ο κύκλος είναι πιθανό να περιέχει σημεία εξωτερικά του C_1, οπότε έχουμε επεκτείνει την περιοχή του επιπέδου μέσα στο οποίο η f ορίζεται αναλυτικά ως δυναμοσειρά. Οπότε, αυτή τη διαδικασία μπορούμε να τη συνεχίσουμε και με άλλους κύκλους. Τώρα, αν η συγκεκριμένη σειρά είναι συγκλίνουσα σε όλο το επίπεδο, ο Weierstrass μας λέει ότι έχουμε μια «ακέραια υπερβατική συνάρτηση». Γενικεύοντας τον τύπο του Cauchy, η ζητούμενη έκφραση είναι ένα άπειρο γινόμενο.

Μ' αυτόν τον τρόπο, ο Weierstrass όρισε μια αναλυτική συνάρτηση ως μια απειροσειρά μαζί με όλες εκείνες που θα προκύψουν από αναλυτική συνέχιση. Αυτό είναι το λεγόμενο ***Θεώρημα του Weierstrass***. Το συγκεκριμένο θεώρημα είναι πολύ σημαντικό για τη Θεωρητική Φυσική, καθώς οι λύσεις των διαφορικών εξισώσεων έχουν, συνήθως, τη μορφή απειροσειρών.

Μέχρι τα μέσα του 19^{ου} αιώνα πίστευαν ότι αν έχουμε μια σειρά η οποία συγκλίνει για κάποιο διάστημα σε μια συνεχή και παραγωγίσιμη συνάρτηση f, τότε, η νέα σειρά που προκύπτει από την παραγώγιση της πρώτης σειράς όρο προς όρο, θα συγκλίνει κι αυτή, για το ίδιο διάστημα, στην f΄. Αυτή η άποψη όμως διορθώθηκε από την ομοιόμορφη σύγκλιση. Δηλαδή, για να έχουμε αυτό το αποτέλεσμα, απαραίτητη προϋπόθεση είναι η σειρά να συγκλίνει ομοιόμορφα στο διάστημα αυτό. Η συμβολή του Weierstrass στο συγκεκριμένο θέμα είναι στην απόδειξη του ότι αν μια σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα, η όρο προς όρο ολοκλήρωση είναι επιτρεπτή. Εδώ πρέπει να πούμε ότι στην έννοια της ομοιόμορφης σύγκλισης έφθασαν σχεδόν ταυτόχρονα, και δουλεύοντας ανεξάρτητα, στη Γαλλία ο Cauchy, ίσως το 1853, στο Cambridge ο G.G. Stokes το 1847, και στη Γερμανία ο P.L.V. Seidel (1821-1896) το 1848.

GEORG FRIEDRRICH BERNHARD RIEMANN[156] **(1826-1866)**
Γεννήθηκε στο Breselenz (Βασίλειο του Αννόβερου) στις 17.9.1826. Μετά το διδακτορικό του από το Πανεπιστήμιο του Göttingen, κατέκτησε τον τίτλο της υφηγεσίας με το έργο του *Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine*

---
[154] G. Loria, ένθ. ανωτ,, Τόμος Γ΄, σελ. 436-438.
[155] C. Boyer – U. Merzbach, ένθ. ανωτ., σελ. 625.
[156] G. Loria, ένθ. ανωτ,, Τόμος Γ΄, σελ. 443-445.

trigonometrische Reihe (Περί της δυνατότητας παράστασης μιας συνάρτησης με τριγωνομετρική σειρά), το οποίο όμως δημοσιεύθηκε μετά τον θάνατό του. Ανάμεσα στα υπομνήματά του είναι και αυτό για την υπεργεωμετρική σειρά, δημοσιευμένο στο *Götting. Abhandl.,* του 1857.
Εκτός των άλλων, ασχολήθηκε και με την υπεργεωμετρική συνάρτηση. Ακόμη, μελέτησε τη σειρά[157]

$$\frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\ldots+\frac{1}{n^s}+\ldots,$$

όπου s μιγαδικός αριθμός, την οποία ονόμασε $\zeta(s)$, η γνωστή ως «η ζ συνάρτηση του Riemann», της οποίας ειδική περίπτωση είναι η $\zeta(2k)$, με την οποία, όπως είδαμε, ασχολήθηκε ο Euler. Ακόμη να πούμε ότι η $\zeta(s)$ είναι ειδική περίπτωση της σειράς Dirichlet (βλ. Dirichlet).

Ο Riemann λαμβάνοντας μέρος στον προβληματισμό για τις σειρές Fourier, ανέπτυξε τον ορισμό του ολοκληρώματος Riemann, αποδεικνύοντας ότι μια συνάρτηση f μπορεί να είναι ολοκληρώσιμη σε ένα διάστημα, χωρίς απαραίτητα να αναπτύσσεται σε σειρά Fourier.

GEORG CANTOR[158]
Γεννήθηκε στην Αγία Πετρούπολη στις 19.2 ή 3.3.1845 και πέθανε στις 6.1.1918 στο Halle. Στο Περιοδικό του Crelle (Τ. LXXII, 1870), δημοσίευσε δύο υπομνήματα σχετικά με τις τριγωνομετρικές σειρές. Στο δεύτερο, αποδεικνύει ότι δύο τριγωνομετρικές σειρές δεν μπορούν να παριστάνουν την ίδια συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής.
Η μελέτη των τριγωνομετρικών σειρών ήταν αυτή που τον οδήγησε στη θεωρία των συνόλων.

FELICE CHIÒ[159]
Ιταλός, γεννήθηκε στο Crescentino στις 29.4.1813 και πέθανε στις 4.6.1870. Ασχολήθηκε με τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις και τις σειρές του Lagrange επί των οποίων εφάρμοσε τις μεθόδους του Cauchy. Το έργο του *Recherches sur la série de Lagrange (Έρευνες επί της σειράς του Lagrange),* το οποίο υπεβλήθη στην Ακαδημία των Παρισίων και είχε ευνοϊκότατη κριτική από τον Cauchy, συμπεριελήφθη στη συλλογή των Sav. Étran. (Τ. XII, 1853). Ήταν σημαντικό γιατί τελειοποιούσε και συμπλήρωνε τη μελέτη του Lagrange σχετικά με τη σύγκλιση της σειράς του.

[157] C. Boyer - U. Merzbach, ένθ. ανωτ., σελ. 620.
[158] G. Loria, ένθ. ανωτ,, Τόμος Γ΄, σελ. 446-447.
[159] G. Loria, ένθ. ανωτ,, Τόμος Γ΄, σελ. 449-450.

ANGELO GENOCCHI[160]

Ιταλός, γεννήθηκε στο Piacenza στις 5.3.1817 και πέθανε στις 7.2.1889. Ασχολήθηκε, μεταξύ των άλλων με τις σειρές και τα άπειρα γινόμενα.

ULISSE DINI[161]

Γεννήθηκε στην Πίζα στις 14.11.1845 όπου και πέθανε στις 28.10.1918. Τις εργασίες του Weierstrass και άλλων γερμανών μαθηματικών τις γνώριζε, αλλά αγνοούσε τις λεπτομέρειες, οπότε, δουλεύοντας μόνος του, ανέπτυξε ικανοποιητικά, μεταξύ των άλλων, και τη θεωρία των σειρών. Οι μελέτες του αυτές δημοσιεύθηκαν στο έργο του *Fondamenti per la Teorica delle Funzioni di variabili reali, Pisa 1878, (Θεμέλια για τη Θεωρητική ανάπτυξη των Συναρτήσεων πραγματικών μεταβλητών).* Το συγκεκριμένο έργο μεταφράστηκε το 1892 στα γερμανικά, για να μελετηθεί στην πατρίδα του Weierstrass.

Επίσης, στο έργο του *Serie di Fourier e altre Rappresentazioni analitiche delle Funzioni di variabili reali, Pisa 1880, (Σειρές του Fourier και άλλες αναλυτικές παραστάσεις των συναρτήσεων με πραγματικές μεταβλητές),* ασχολείται με αναπτύγματα σε σειρές ειδικών συναρτήσεων. Ως συμπλήρωμα του έργου αυτού είναι δύο σειρές μαθημάτων στο Πανεπιστήμιο της Πίζας (όπου και δίδασκε μέχρι τον θάνατό του) του 1911 και του 1912, , τα οποία υπάρχουν σε λιθογραφημένη έκδοση.

P. L. CÉBYCEFF (TCHEBYCHEFF)[162]

Γεννήθηκε στη Ρωσία στις 14 ή 26.5.1821 και πέθανε στις 26.11 ή 8.12.1894. Δύο υπομνήματά του, του 1843, το ένα σχετικό με τις σειρές Taylor, βρίσκονται στα *Περιοδικά του Crelle* και *του Liouville*. Ακόμη ασχολήθηκε και με τη σειρά του Lagrange.

---

[160] G. Loria, ένθ. ανωτ,, Τόμος Γ΄, σελ. 450-451.
[161] G. Loria, ένθ. ανωτ,, Τόμος Γ΄, σελ. 457-458.
[162] G. Loria, ένθ. ανωτ,, Τόμος Γ΄, σελ. 459-460.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2.
ΜΕΘΟΔΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΣΕΙΡΩΝ

2.1. ΤΗΛΕΣΚΟΠΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ

2.1.1. Η τηλεσκοπική μέθοδος για την εύρεση ενός αθροίσματος $\sum_{k=1}^{n} u_k$, συνίσταται στο να γραφεί το u_k στη μορφή $u_k = \alpha_k - \alpha_{k-1}$. Είναι τότε $\sum_{k=1}^{n} u_k = \alpha_n - \alpha_0$ και, αν υπάρχει το όριο $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = \alpha$, τότε $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \alpha - \alpha_0$.

Παραδείγματος χάριν,

α) από το γεγονός ότι $k(k+1) = \frac{1}{3}\{k(k+1)(k+2) - (k-1)k(k+1)\}$, έχουμε

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2).$$

β) Όμοια, από το γεγονός ότι

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right), \text{ έχουμε}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right) = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$$

Άρα

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4}.$$

γ) Επίσης, από το γεγονός[163] ότι

$$\arctan\frac{2}{n^2} = \arctan(n+1) - \arctan(n-1),$$

έχουμε

$$\sum_{k=1}^{m} \arctan\frac{2}{(2k)^2} = \arctan(2m+1) - \arctan 1,$$

οπότε και

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \arctan\frac{1}{2k^2} = \lim_{m\to+\infty}\left(\arctan(2m+1) - \arctan 1\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Επίσης,

$$\sum_{k=0}^{m} \arctan\frac{2}{(2k+1)^2} = \arctan(2m+2) - \arctan 0 = \arctan(2m+2), \text{ οπότε}$$

---

[163] Problem 10292, American Mathematical Monthly, 1996, Vol. 103, No. 3, σελ. 270 - 272.

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\arctan\frac{2}{(2k+1)^2}=\lim_{m\to+\infty}\left(\arctan(2m+2)\right)=\frac{\pi}{2}.$$

δ) Όμοια, από το γεγονός ότι

$$\arctan\frac{8n}{n^4-2n^2+5}=\arctan\frac{(n+1)^2}{2}-\arctan\frac{(n-1)^2}{2},$$

έχουμε

$$\sum_{k=1}^{m}\arctan\frac{8(2k)}{(2k)^4-2(2k)^2+5}=\arctan\frac{(2m+1)^2}{2}-\arctan\frac{1}{2},$$

οπότε

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\arctan\frac{8(2k)}{(2k)^4-2(2k)^2+5}=\lim_{m\to+\infty}\left(\arctan\frac{(2m+1)^2}{2}-\arctan\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{1}{2}.$$

Επίσης,

$$\sum_{k=0}^{m}\arctan\frac{8(2k+1)}{(2k+1)^4-2(2k+1)^2+5}=\arctan\frac{(2m+2)^2}{2}-\arctan 0$$

$$=\arctan\frac{(2m+2)^2}{2},$$

οπότε, $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\arctan\frac{8(2k+1)}{(2k+1)^4-2(2k+1)^2+5}=\lim_{m\to+\infty}\left(\arctan\frac{(2m+2)^2}{2}\right)=\frac{\pi}{2}.$

2.1.2. Αθροίσματα όπως

$1\cdot2\cdot3\cdot4+2\cdot3\cdot4\cdot5+...+n(n+1)(n+2)(n+3)$,

$\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\dfrac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5}+...+\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$

ή γενικότερα, αθροίσματα με k-στό όρο της μορφής

(α) $u_k=(a+kb)(a+(k+1)b)...(a+(k+m-1)b)$,

(β) $u_k=\dfrac{1}{(a+kb)(a+(k+1)b)...(a+(k+m-1)b)}$, $m>1$ και

(γ) $u_k=\dfrac{a(a+c)(a+2c)...(a+(k-1)c)}{b(b+c)(b+2c)...(b+(k-1)c)}$, όπου a, b, c, m είναι σταθερές ανεξάρτητες του k με $b\neq a+c$,

αντιμετωπίζονται ως εξής

(α) Αν θέσω $\alpha_k = u_k\left(a+(k+m)b\right)$, τότε $u_k = \frac{1}{(m+1)b}(\alpha_k - \alpha_{k-1})$ και άρα

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{1}{(m+1)b}(\alpha_n - \alpha_0).$$

(β) Όμοια, αν $\alpha_k = u_k(a+kb)$, τότε $u_k = -\frac{1}{(m-1)b}(\alpha_k - \alpha_{k-1})$ και άρα

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = -\frac{1}{(m-1)b}(\alpha_n - \alpha_0).$$

(γ) Όμοια, αν $\alpha_k = \frac{a(a+c)(a+2c)...(a+kc)}{b(b+c)(b+2c)...(b+(k-1)c)}$, με $k \geq 1$, τότε

$$u_k = \frac{\alpha_k - \alpha_{k-1}}{a-b+c} \text{ με } \alpha_0 = a, \text{ συνεπώς } \sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{\alpha_n - \alpha_0}{a-b+c}.$$

Εφαρμογή του (α)

Βρείτε το άθροισμα

$$1\cdot 2\cdot n + 2\cdot 3\cdot(n-1) + 3\cdot 4\cdot(n-2) + ... + n\cdot(n+1)\cdot 1$$

Λύση

Εδώ, ο γενικός όρος της σειράς είναι

$$u_k = k(k+1)(n-k+1) = nk(k+1) - (k-1)k(k+1),$$

οπότε

$$S_n = n\sum_{k=1}^{n} k(k+1) - \sum_{k=1}^{n}(k-1)k(k+1) =$$

$$= n\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k+1)(k+2)-(k-1)k(k+1)}{3} - \sum_{k=1}^{n}\frac{(k-1)k(k+1)(k+2)-(k-2)(k-1)k(k+1)}{4} =$$

$$= \frac{1}{3}n^2(n+1)(n+2) - \frac{1}{4}(n-1)n(n+1)(n+2) = \frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

2.1.3. Υπάρχει μια παραλλαγή της μεθόδου όπου η τηλεσκοπική διαδικασία εφαρμόζεται σε κάθε δεύτερο όρο ή με ακόμη πιο γενικό τρόπο. Τα ακόλουθα παραδείγματα δείχνουν την εν λόγω τεχνική.

1) Από την $\frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right)$, έχουμε

$$
\begin{aligned}
2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)} &= 1-\cancel{\frac{1}{3}}\\
&\ \frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{4}}\\
&\ \cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{5}}\\
&\ \vdots\\
&\ \cancel{\frac{1}{n-1}}-\frac{1}{n+1}\\
&\ \cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+2}\\
\hline
&\ 1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}=\frac{3n^2+5n}{2(n+1)(n+2)}.
\end{aligned}
$$

Συνεπώς, $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k(k+2)}=\frac{3}{4}$.

2) Από το ότι

$$\frac{k}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)}=\frac{1}{16}\left(\frac{1}{2k-1}+\frac{2}{2k+1}-\frac{3}{2k+3}\right),$$

έχουμε

$$
\begin{aligned}
16\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)} &= 1+\frac{2}{3}-\cancel{\frac{3}{5}}\\
&\ \frac{1}{3}+\cancel{\frac{2}{5}}-\frac{3}{7}\\
&\ \cancel{\frac{1}{5}}+\frac{2}{7}-\frac{3}{9}\\
&\ \vdots\\
&\ \frac{1}{2n-1}+\frac{2}{2n+1}-\frac{3}{2n+3}\\
\hline
&=1+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}-\frac{3}{2n+1}+\frac{2}{2n+1}-\frac{3}{2n+3}=\frac{8n(n+1)}{(2n+1)(2n+3)},
\end{aligned}
$$

άρα, $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)}=\frac{1}{8}$.

3) Όπως είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο,

$$\arctan\frac{2}{n^2}=\arctan(n+1)-\arctan(n-1),\text{ συνεπώς}$$

$$\sum_{n=1}^{m}\arctan\frac{2}{n^2}=\arctan(m+1)+\arctan m-\arctan 1-\arctan 0=\arctan(m+1)+\arctan m-\frac{\pi}{4}.$$

Οπότε, $\sum_{n=1}^{+\infty}\arctan\frac{2}{n^2}=\lim_{m\to+\infty}\left(\arctan(m+1)+\arctan m-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$.

4) Επίσης, $\arctan\frac{8n}{n^4-2n^2+5}=\arctan\frac{(n+1)^2}{2}-\arctan\frac{(n-1)^2}{2}$, συνεπώς

$$\sum_{n=1}^{m}\arctan\frac{8n}{n^4-2n^2+5}=\arctan\frac{m^2}{2}+\arctan\frac{(m+1)^2}{2}-\arctan 0-\arctan\frac{1}{2}.$$

Οπότε, $\sum_{n=1}^{+\infty}\arctan\frac{8n}{n^4-2n^2+5}=\lim_{m\to+\infty}\left(\arctan\frac{m^2}{2}+\arctan\frac{(m+1)^2}{2}-\arctan\frac{1}{2}\right)=$

$$=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{1}{2}=\pi-\arctan\frac{1}{2}.$$

5) Για να υπολογίσουμε το άθροισμα[164] $\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\frac{\binom{4n}{2k}}{\binom{2n}{k}}$, όπου n θετικός ακέραιος και

$k\in\mathbb{N}$, θέτουμε $\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}=\frac{\binom{2n}{2k}}{\binom{n}{k}}$. Για $1\le k\le n$, έχουμε

$$\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}n\\k-1\end{bmatrix}=\frac{\prod_{i=1}^{k}(2n-2i+1)}{\prod_{i=1}^{k}(2i-1)}+\frac{\prod_{i=1}^{k-1}(2n-2i+1)}{\prod_{i=1}^{k-1}(2i-1)}=\frac{2n}{2k-1}\begin{bmatrix}n\\k-1\end{bmatrix}=\frac{2n}{2n+1}\begin{bmatrix}n+1\\k\end{bmatrix}.$$

Οπότε, το παραπάνω άθροισμα καταλήγει

$$\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\begin{bmatrix}2n\\k\end{bmatrix}=1+1+\frac{4n-1}{4n-2}\sum_{k=1}^{2n-1}(-1)^k\left(\begin{bmatrix}2n-1\\k-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2n-1\\k\end{bmatrix}\right)=2-2\frac{4n-1}{4n-2}=\frac{1}{1-2n}.$$

(Το συγκεκριμένο παράδειγμα θα το ξανασυναντήσουμε στο έκτο κεφάλαιο ως Παράδειγμα 11 που αντιμετωπίζεται με χρήση αλγόριθμου Gosper).

2.1.4. Διάφορες τεχνικές

Ας δούμε εφαρμογές στα διπλά αθροίσματα.

---

[164] Problem 10494, American Mathematical Monthly, 1997, Vol. 104, No. 4, σελ. 371 – 372.

1) Δείξτε ότι[165]

$$\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{m!n!}{(m+n+2)!}=\frac{\pi^2}{6}.$$

Λύση
Αφού

$$\frac{n!}{(m+n+2)!}=\frac{1}{m+1}\left(\frac{n!}{(m+n+1)!}-\frac{(n+1)!}{(m+n+2)!}\right),$$

έχουμε

$$\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{m!n!}{(m+n+2)!}=\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{m!}{m+1}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{n!}{(m+n+1)!}-\frac{(n+1)!}{(m+n+2)!}\right)=$$

$$=\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{m!}{m+1}\lim_{N\to+\infty}\left(\frac{0!}{(m+1)!}-\frac{(N+1)!}{(m+N+2)!}\right)=\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{m!}{m+1}\frac{0!}{(m+1)!}=\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{(m+1)^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

2) [166] Δείξτε ότι $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n^3}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}\right)=\frac{\pi^4}{72}$**.**

Λύση
Έστω S το ζητούμενο άθροισμα. Τότε

$$S=\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{mn^3}=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{m(n+m)^3}. \qquad (1)$$

Αυτό συμβαίνει διότι

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{mn^3}=\begin{array}{llll}\frac{1}{1\cdot1^3}+ & & & \\ \frac{1}{1\cdot2^3}+ & \frac{1}{2\cdot2^3}+ & & \\ \frac{1}{1\cdot3^3}+ & \frac{1}{2\cdot3^3}+ & \frac{1}{3\cdot3^3}+ & \\ \frac{1}{1\cdot4^3}+ & \frac{1}{2\cdot4^3}+ & \frac{1}{3\cdot4^3}+ & \frac{1}{4\cdot4^3}+ \\ \cdots\cdots\cdots & & & \end{array}$$

Επειδή οι όροι της παραπάνω σειράς είναι θετικοί, θα έχουμε το ίδιο αποτέλεσμα αν προσθέσουμε τα στοιχεία διαγωνίως. Έχουμε

---

165 Problem 4693, American Mathematical Monthly, 1957, Vol. 64, No. 4, σελ. 281.

166 Problem 4564, American Mathematical Monthly, 1955, Vol. 62, No. 2, σελ. 129.

$$S=\left(\frac{1}{1\cdot 1^3}+\frac{1}{2\cdot 2^3}+\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{4\cdot 4^3}+\dots\right)+\left(\frac{1}{1\cdot 2^3}+\frac{1}{2\cdot 3^3}+\frac{1}{3\cdot 4^3}+\dots\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{1\cdot 3^3}+\frac{1}{2\cdot 4^3}+\dots\right)+\dots=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{m(n+m)^3}.$$

Κατόπιν, θέτουμε

$$x=\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2(n+m)^2},$$

($x\in\mathbb{R}$, καθώς η $\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2(n+m)^2}$ συγκλίνει.)

Έχουμε

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{m-1}\frac{1}{m^2n^2}\overset{(1)}{=}\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=n+1}^{+\infty}\frac{1}{m^2n^2}\overset{(2)}{=}\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=m+1}^{+\infty}\frac{1}{m^2n^2},$$

όπου την ισότητα (1) την παίρνουμε με εναλλαγή σειράς.
Άρα,

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{m^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{m^2n^2}=\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{m-1}\frac{1}{m^2n^2}+\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}+\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=m+1}^{+\infty}\frac{1}{m^2n^2},$$

Οπότε,

$$\left[\zeta(2)\right]^2=2\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=m+1}^{+\infty}\frac{1}{m^2n^2}+\zeta(4).$$

Άρα,

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{m^2(m+n)^2}=\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=m+1}^{+\infty}\frac{1}{m^2n^2}\overset{(*)}{=}\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\pi^2}{6}\right)^2-\frac{\pi^4}{90}\right]=\frac{\pi^4}{120}.$$

Η ισότητα $(*)$ ισχύει αφού $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ και $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}$ είναι πεπερασμένα, άρα μπορούμε να τα αφαιρέσουμε.

Όμως, για n σταθερό, έχουμε

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{m(n+m)^3}=\sum_{m=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n^3m}-\frac{1}{n^3(n+m)}-\frac{1}{n^2(n+m)^2}-\frac{1}{n(n+m)^3}\right)=$$
$$=\sum_{m=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n^3m}-\frac{1}{n^3(n+m)}\right)-\sum_{m=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n^2(n+m)^2}+\frac{1}{n(n+m)^3}\right)=$$
$$=\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{n^3m}-\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2(n+m)^2}-\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+m)^3}.$$

Αθροίζουμε τώρα ως προς n, από 1 έως $+\infty$, και παίρνουμε

$$S-\frac{\pi^4}{90}=S-\frac{\pi^4}{120}-\left(S-\frac{\pi^4}{90}\right),\text{ απ' όπου προκύπτει ότι } S=\frac{\pi^4}{72}.$$

Τη μέθοδο που χρησιμοποιήσαμε για τον προσδιορισμό του S, θα τη δούμε αναλυτικότερα παρακάτω στην παράγραφο 2.1.5.

3) (Γενική αντιμετώπιση των παραδειγμάτων 3 και 4 της 2.1.3., χωρίς χρήση της τηλεσκοπικής μεθόδου.)
Να υπολογισθούν τα αθροίσματα
A) $\sum_{n=1}^{+\infty}\arctan\frac{2}{n^2}$ και B) $\sum_{n=1}^{+\infty}\arctan\frac{8n}{n^4-2n^2+5}$.

Λύση[167]
Για $z\in\mathbb{C}$, έχουμε τη γνωστή σχέση

$$\arctan z=\frac{1}{2i}\ln\frac{1+iz}{1-iz}, \tag{1}$$

Ειδικά, για $z=\frac{P(n)}{Q(n)}$, (2), έχουμε

$$\arctan\frac{P(n)}{Q(n)}=\frac{1}{2i}\ln\frac{1+i\frac{P(n)}{Q(n)}}{1-i\frac{P(n)}{Q(n)}}=\frac{1}{2i}\ln\frac{Q(n)+iP(n)}{Q(n)-iP(n)}. \tag{3}$$

Θα εφαρμόσουμε τον τύπο αυτό στην περίπτωση όπου P και Q πολυώνυμα με πραγματικούς συντελεστές και ο βαθμός του Q είναι τουλάχιστον κατά δύο μονάδες μεγαλύτερος του βαθμού του P. Για ευκολία, θεωρούμε ότι ο συντελεστής του μεγιστοβαθμίου όρου του Q είναι 1. Κατόπιν, αθροίζουμε τη σχέση (3) από $n=1$ έως $+\infty$ και έχουμε

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\arctan\frac{P(n)}{Q(n)}=\frac{1}{2i}\sum_{n=1}^{+\infty}\ln\frac{Q(n)+iP(n)}{Q(n)-iP(n)}=\frac{1}{2i}\ln\prod_{n=1}^{+\infty}\frac{Q(n)+iP(n)}{Q(n)-iP(n)}. \tag{4}$$

Αν $\rho_1,\rho_2,...,\rho_k$ είναι οι ρίζες του $Q(x)-iP(x)$, τότε οι ρίζες του $Q(x)+iP(x)$ είναι οι συζυγείς των $\rho_1,\rho_2,...,\rho_k$, οπότε η (4) γίνεται

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\arctan\frac{P(n)}{Q(n)}=\frac{1}{2i}\ln\underbrace{\prod_{n=1}^{+\infty}\frac{(n-\overline{\rho_1})(n-\overline{\rho_2})\cdot...\cdot(n-\overline{\rho_k})}{(n-\rho_1)(n-\rho_2)\cdot...\cdot(n-\rho_k)}}_{A} \tag{5}$$

Από τις σχέσεις Viete στο $Q(x)-iP(x)$ προκύπτει ότι

$\rho_1+\rho_2+...+\rho_k$ είναι πραγματικός,

οπότε,

$$\overline{\rho_1}+\overline{\rho_2}+...+\overline{\rho_k}=\rho_1+\rho_2+...+\rho_k, \tag{6}$$

οπότε,

$$e^{n^{-1}\left(\overline{\rho_1}+\overline{\rho_2}+...+\overline{\rho_k}-\rho_1-\rho_2-...-\rho_k\right)}=1.$$

Άρα,

[167] Problem 10292, American Mathematical Monthly, 1996, Vol. 103, No. 3, σελ. 270 - 272.

$$A=\prod_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(1-\frac{\overline{\rho_1}}{n}\right)e^{\frac{\overline{\rho_1}}{n}}\left(1-\frac{\overline{\rho_2}}{n}\right)e^{\frac{\overline{\rho_2}}{n}}\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{\overline{\rho_k}}{n}\right)e^{\frac{\overline{\rho_k}}{n}}}{\left(1-\frac{\rho_1}{n}\right)e^{\frac{\rho_1}{n}}\left(1-\frac{\rho_2}{n}\right)e^{\frac{\rho_2}{n}}\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{\rho_k}{n}\right)e^{\frac{\rho_k}{n}}}. \qquad (7)$$

Ο ορισμός της Γ-συνάρτησης από τον Weierstrass, θέτοντας όπου z το $-z$, μας δίνει

$$\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{z}{n}\right)e^{\frac{z}{n}}=\frac{1}{-z\Gamma(-z)e^{-\gamma z}}, \qquad (8)$$

όπου $\gamma=\lim_{m\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{m}-\ln m\right)=0,5772157\ldots$, γνωστή ως σταθερά Euler ή σταθερά Mascheroni.(ή C).

Συνεπώς, η (7) μέσω της (8), μας δίνει

$$A=\frac{\rho_1\Gamma(-\rho_1)\rho_2\Gamma(-\rho_2)\ldots\Gamma(-\rho_k)}{\overline{\rho_1}\Gamma\left(-\overline{\rho_1}\right)\overline{\rho_2}\Gamma\left(-\overline{\rho_2}\right)\ldots\overline{\rho_k}\Gamma\left(-\overline{\rho_k}\right)}=\prod_{m=1}^{k}\frac{\Gamma(1-\rho_m)}{\Gamma\left(1-\overline{\rho_m}\right)}, \qquad (9)$$

οπότε η (5) καταλήγει

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\arctan\frac{P(n)}{Q(n)}=\frac{1}{2i}\ln\frac{\Gamma(1-\rho_1)\Gamma(1-\rho_2)\ldots\Gamma(1-\rho_k)}{\Gamma\left(1-\overline{\rho_1}\right)\Gamma\left(1-\overline{\rho_2}\right)\ldots\Gamma\left(1-\overline{\rho_k}\right)}=$$

$$=\sum_{m=1}^{k}\frac{1}{2i}\ln\frac{\Gamma(1-\rho_m)}{\Gamma\left(1-\overline{\rho_m}\right)}=\sum_{m=1}^{k}\arg\,\Gamma(1-\rho_m), \qquad (10)$$

άρα το ζητούμενο άθροισμα ισούται με $\sum_{m=1}^{k}\arg\Gamma(1-\rho_m)\bmod 2\pi$.

Ειδικά,

A) $P(x)=2,\ Q(x)=x^2$, οπότε οι ρίζες του $Q(x)-iP(x)=x^2-2i$ είναι $\pm(1+i)$, που ικανοποιούν τη σχέση (6). Τότε το β΄ μέλος της (10) ισούται με

$$\arg\Gamma(-i)+\arg\Gamma(2+i) \qquad (11)$$

Αλλά, από τον τύπο $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$ και τον $\Gamma(z)\Gamma(-z)=\frac{-\pi}{z\sin\pi z}$, έχουμε

$$\Gamma(-i)\Gamma(2+i)=(1+i)\Gamma(-i)\Gamma(1+i)=(1+i)i\Gamma(-i)\Gamma(i)=$$

$$=i(1+i)\frac{-\pi}{i\sin(\pi i)}=\frac{(-1-i)\pi}{\sin(\pi i)}.$$

Οπότε,

$$\arg\Gamma(-i)+\arg\Gamma(2+i)=\arg\frac{(-1-i)\pi}{\sin(\pi i)}=\frac{3\pi}{4}.$$ [168]

B) $P(x)=8x,\ Q(x)=x^4-2x^2+5$, οπότε οι ρίζες του

$$Q(x)-iP(x)=x^4-2x^2-8ix+5=(x^2+1)^2-4(x+i)^2$$

---

[168] Από τον τύπο του Euler, έχουμε $\sin(\pi i)=\frac{e^{i(\pi i)}-e^{-i(\pi i)}}{2i}=\frac{(e^{\pi}-e^{-\pi})i}{2}$.

είναι $-2+i,\ 2+i$, και $-i$ (με πολλαπλότητα 2), που ικανοποιεί τη σχέση (6). Το δεξί μέλος της (10) μας δίνει
$$\arg\Gamma(1+i)+\arg\Gamma(1+i)+\arg\Gamma(3-i)+\arg\Gamma(-1-i). \tag{12}$$
Αλλά
$$\Gamma(1+i)=i\Gamma(i)$$
$$\Gamma(3-i)=(2-i)\Gamma(2-i)=(2-i)(1-i)\Gamma(1-i)=(2-i)(1-i)i\Gamma(-i)$$
$$\Gamma(-1-i)=\frac{\Gamma(-i)}{-1-i},$$
οπότε,
$$\{\Gamma(1+i)\}^2\Gamma(3-i)\Gamma(-1-i)=\{i\Gamma(i)\}^2(2-i)(1-i)i\Gamma(-i)\frac{\Gamma(-i)}{-1-i}=$$
$$=(2-i)\{\Gamma(i)\Gamma(-i)\}^2 \tag{13}$$
Από τη σχέση $\Gamma(z)\Gamma(-z)=\dfrac{-\pi}{z\sin\pi z}$, η (13) μας δίνει
$$\{\Gamma(1+i)\}^2\Gamma(3-i)\Gamma(-1-i)=(2-i)\frac{\pi^2}{-\sin^2\pi i}=(2-i)\frac{4\pi^2}{e^{2\pi}+e^{-2\pi}-2}.$$

Συνεπώς,
$$\arg\Gamma(1+i)+\arg\Gamma(1+i)+\arg\Gamma(3-i)+\arg\Gamma(-1-i)=$$
$$=\arg(2-i)+\arg\frac{4\pi^2}{e^{2\pi}+e^{-2\pi}-2}=-\arctan\frac{1}{2}.$$

Παρατήρηση
Θα παραθέσουμε τώρα ένα άλλο παράδειγμα[169], σχετικό με το παραπάνω 3^A, αλλά με άλλη αντιμετώπιση.

Παράδειγμα 8
Να βρεθεί το άθροισμα
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\arctan\frac{1}{n^2}.$$

Λύση

Από τον τύπο του Euler για το $\sin z$ ως απειρογινομένου, έχουμε
$$\sin z=z\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{z^2}{\pi^2n^2}\right)\ \text{οπότε}\ \sinh z=z\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right).$$
Τώρα, από τον ορισμό του Arg (πρωτεύον όρισμα) ενός μιγαδικού αριθμού, έχουμε
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\arctan\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}\operatorname{Arg}\left(1+\frac{i}{n^2}\right)=\operatorname{Arg}\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{i}{n^2}\right). \tag{10}$$

[169] E 3387, American Mathematical Monthly, 1991, Vol. 98, No. 7, σελ. 652 - 653.

Αλλά αφού $1+\frac{i}{n^2}=1+\frac{\left(\frac{\pi(1+i)}{\sqrt{2}}\right)^2}{n^2\pi^2}$ και $\sinh z = z\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)$,

τότε η (10) ισούται με

$$\operatorname{Arg}\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{\left(\frac{\pi(1+i)}{\sqrt{2}}\right)^2}{n^2\pi^2}\right)=\operatorname{Arg}\frac{\sin h\left(\frac{\pi(1+i)}{\sqrt{2}}\right)}{\frac{\pi(1+i)}{\sqrt{2}}}\overset{(*)}{=}$$

$$=\arctan\frac{\tan\frac{\pi}{\sqrt{2}}-\tanh\frac{\pi}{\sqrt{2}}}{\tan\frac{\pi}{\sqrt{2}}+\tanh\frac{\pi}{\sqrt{2}}}\simeq\arctan(6.798002813)\simeq 1.424741779.$$

Να σημειώσουμε εδώ ότι η ισότητα (*) προκύπτει ως εξής

$$\frac{\sinh\frac{\pi(1+i)}{\sqrt{2}}}{\frac{\pi(1+i)}{\sqrt{2}}}=\frac{\sinh\frac{\pi}{\sqrt{2}}\cosh i\frac{\pi}{\sqrt{2}}+\cosh\frac{\pi}{\sqrt{2}}\sinh i\frac{\pi}{\sqrt{2}}}{\frac{\pi(1+i)}{\sqrt{2}}}=$$

$$=\frac{1-i}{\pi\sqrt{2}}\left(\sinh\frac{\pi}{\sqrt{2}}\cos\frac{\pi}{\sqrt{2}}+i\sin\frac{\pi}{\sqrt{2}}\cosh\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi\sqrt{2}}\left(\sin\frac{\pi}{\sqrt{2}}\cosh\frac{\pi}{\sqrt{2}}+\sinh\frac{\pi}{\sqrt{2}}\cos\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)+\frac{i}{\pi\sqrt{2}}\left(\sin\frac{\pi}{\sqrt{2}}\cosh\frac{\pi}{\sqrt{2}}-\sinh\frac{\pi}{\sqrt{2}}\cos\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right).$$

Δηλαδή, φθάσαμε στη μορφή α+iβ, οπότε, το πρωτεύον όρισμα του μιγαδικού αυτού αριθμού, θα είναι

$$\arctan\frac{\sin\frac{\pi}{\sqrt{2}}\cosh\frac{\pi}{\sqrt{2}}-\sinh\frac{\pi}{\sqrt{2}}\cos\frac{\pi}{\sqrt{2}}}{\sin\frac{\pi}{\sqrt{2}}\cosh\frac{\pi}{\sqrt{2}}+\sinh\frac{\pi}{\sqrt{2}}\cos\frac{\pi}{\sqrt{2}}}=\arctan\frac{\tan\frac{\pi}{\sqrt{2}}-\tanh\frac{\pi}{\sqrt{2}}}{\tan\frac{\pi}{\sqrt{2}}+\tanh\frac{\pi}{\sqrt{2}}}.$$

2.1.5. Η τεχνική που εφαρμόσαμε στην προηγούμενη παράγραφο στην εφαρμογή 2 , είναι η εξής: Μετά από κατάλληλη επεξεργασία επανεμφανίσαμε το ζητούμενο άθροισμα, οπότε καταλήξαμε στην επίλυση μιας εξίσωσης. Δηλαδή έχουμε ανάλογη αντιμετώπιση με μια από αυτές που εφαρμόζουμε στον υπολογισμό ολοκληρωμάτων. Όλα αυτά βέβαια υπό την προϋπόθεση ότι ισχύουν οι σχετικές συνθήκες σύγκλισης. Στο παρακάτω παράδειγμα έχουμε πεπερασμένα αθροίσματα.

Παράδειγμα
Για τον υπολογισμό του παρακάτω αθροίσματος, έχουμε

$$\sum_{k=1}^{n}\sin^2 kx=\sum_{k=1}^{n}\sin kx\sin kx=\sum_{k=1}^{n}\sin kx\frac{\cos(k+1)x-\cos(k-1)x}{-2\sin x}=$$

$$=-\frac{1}{2\text{sinx}}\begin{Bmatrix}\sin x(\cos 2x-1)+\sin 2x(\cos 3x-\cos x)+\\+\sin 3x(\cos 4x-\cos 2x)+...+\sin nx(\cos(n+1)x-\cos(n-1)x)\end{Bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2\text{sinx}}\left\{2\sin x\left(\cos^2 x+\cos^2 2x+...+\cos^2(n-1)+1\right)\right\}-\frac{2\sin nx\cos nx\cos x}{2\text{sinx}}=$$

$$=n-\sum_{k=1}^{n}\sin^2 kx+\sin^2 nx-\frac{\sin nx\cos nx\cos x}{\text{sinx}}.$$

Άρα,

$$\sum_{k=1}^{n}\sin^2 kx=\frac{n+\sin^2 nx}{2}-\frac{\sin nx\cos nx\cos x}{2\text{sinx}}=\frac{n+\sin^2 nx}{2}-\frac{\sin 2nx\cot x}{4}.$$

2.1.6. Άλλα Παραδείγματα

1. Να υπολογισθούν τα αθροίσματα

Α) $\sum_{k=1}^{n}k$, **Β)** $\sum_{k=1}^{n}k^2$, **Γ)** $\sum_{k=1}^{n}k^3$, **Δ)** $\sum_{k=1}^{n}k^4$, **Ε)** $\sum_{k=1}^{n}k^m$.

<u>Λύση</u>

Α) Έχουμε $k(k+1)-(k-1)k=2k$, άρα $n(n+1)=2\sum_{k=1}^{n}k$, δηλαδή $\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$.

<u>Διαφορετική αντιμετώπιση</u>

Έχουμε $\left(k+\frac{1}{2}\right)^2-\left(k-\frac{1}{2}\right)^2=2k$, άρα $\left(n+\frac{1}{2}\right)^2-\left(1-\frac{1}{2}\right)^2=2\sum_{k=1}^{n}k$, δηλαδή

$$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Β) Έχουμε $k(k+1)(k+2)-(k-1)k(k+1)=3k(k+1)=3k^2+3k$, οπότε

$$n(n+1)(n+2)=\sum_{k=1}^{n}3k(k+1)=3\sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k,$$

άρα,

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

<u>Διαφορετική αντιμετώπιση</u>

Αφού $k^2=k(k+1)-k$, έχουμε

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\sum_{k=1}^{n}k(k+1)-\sum_{k=1}^{n}k$$

και από την παράγραφο 5.1.2.(α), έχουμε

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) - \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Διαφορετική αντιμετώπιση

Αφού $24k^2 + 2 = (2k+1)^3 - (2k-1)^3$, παίρνοντας το άθροισμα για τις διάφορες τιμές του k, από 1 έως n, έχουμε

$24\sum_{k=1}^{n} k^2 + 2n = (2n+1)^3 - 1$, δηλαδή $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Γ) Έχουμε $k(k+1)(k+2)(k+3) - (k-1)k(k+1)(k+2) = 4k^3 + 12k^2 + 8k$, οπότε

$$k^3 = \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4} - \frac{(k-1)k(k+1)(k+2)}{4} - 3k^2 - 2k,$$

άρα,

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} - 3\sum_{k=1}^{n} k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} k,$$

δηλαδή,

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2.$$

Διαφορετική αντιμετώπιση

Αφού $4k^3 = \{k(k+1)\}^2 - \{k(k-1)\}^2$, παίρνοντας το άθροισμα για τις διάφορες τιμές του k, από 1 έως n, έχουμε

$4\sum_{k=1}^{n} k^3 = \{n(n+1)\}^2$, δηλαδή $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$.

Διαφορετική αντιμετώπιση

Αφού $k^3 = k(k+1)(k+2) - 3k(k+1) + k$, έχουμε

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) - 3\sum_{k=1}^{n} k(k+1) + \sum_{k=1}^{n} k$$

και από την παράγραφο 2.1.2.(α), έχουμε

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2.$$

Δ) Έχουμε

$k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4) - (k-1)k(k+1)(k+2)(k+3) = 5k^4 + 30k^3 + 55k^2 + 30k,$

οπότε

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5} - 6\sum_{k=1}^{n} k^3 - 11\sum_{k=1}^{n} k^2 - 6\sum_{k=1}^{n} k$$

δηλαδή $\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$.

Διαφορετική αντιμετώπιση

Αφού $k^4 = k(k+1)(k+2)(k+3) - 6k(k+1)(k+2) + 7k(k+1) - k$, έχουμε

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)(k+3) - 6\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) + 7\sum_{k=1}^{n} k(k+1) - \sum_{k=1}^{n} k$$

και από την παράγραφο 2.1.2.(α), έχουμε

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}.$$

Ε) Αθροίσματα δυνάμεων μεγαλύτερων του 4 αντιμετωπίζονται όπως παραπάνω, δηλαδή

$$k^n = \frac{k(k+1)(k+2)\ldots(k+n) - (k-1)k(k+1)\ldots(k+n-1)}{n+1} + P_{n-1}(k),$$

όπου $P_{n-1}(k)$ είναι ένα πολυώνυμο του k βαθμού το πολύ $n-1$.

2. $1^2 + 2^2x + 3^2x^2 + \ldots + n^2x^{n-1} =$;

Λύση

Από τον τύπο του αθροίσματος των n πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου, με λόγο διάφορο του 1, έχουμε

$$x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n = \frac{x(1-x^n)}{1-x}.$$

Τη σχέση αυτή παραγωγίζουμε ως προς x και κατόπιν πολλαπλασιάζουμε επί x, οπότε παίρνουμε

$$x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + nx^n = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2}. \quad (1)$$

Στη συνέχεια,, παραγωγίζοντας τη σχέση (1), παίρνουμε

$$1^2 + 2^2x + 3^2x^2 + \ldots + n^2x^{n-1} = \frac{(-n^2)x^{n+2} + (2n^2+2n-1)x^{n+1} - (n+1)^2x^n + x + 1}{(1-x)^3}. \quad (2)$$

Παρατηρήσεις

1. Στη σχέση (1), επειδή το δεξί μέλος για $x = 1$ μας δίνει $\frac{0}{0}$, παίρνουμε το όριο της παραπάνω σχέσης με $x \to 1$, οπότε με κανόνα L' Hospital, καταλήγουμε

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2. Στη σχέση (2), επειδή το δεξί μέλος για $x = 1$ μας δίνει $\frac{0}{0}$, παίρνουμε το όριο της παραπάνω σχέσης με $x \to 1$, οπότε με κανόνα L' Hospital, καταλήγουμε

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2.2. ΜΕΘΟΔΟΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ

2.2.1. Τελεστές Δ και E.

Έστω S ο απειροδιάστατος διανυσματικός χώρος όλων των ακολουθιών. Ορίζουμε δύο απεικονίσεις $\Delta : S \to S$, $E : S \to S$ ως εξής

$$\Delta(u_1, u_2, ...) = (u_2 - u_1, u_3 - u_2, ...),$$
$$E(u_1, u_2, ...) = (u_2, u_3, ...).$$

Αν $I : S \to S$ η ταυτοτική απεικόνιση, τότε

$$E = I + \Delta .$$

Αποδεικνύεται εύκολα ότι οι παραπάνω απεικονίσεις είναι γραμμικές. Επίσης,

α) $\Delta^k \Delta^n = \Delta^{k+n}$ (1), με $k, n \in \mathbb{N}$,

β) $(I + E)^2 = I + 2E + E^2$.

Παρατήρηση

Σε αρκετά κείμενα βρίσκουμε τον συμβολισμό Δu_i. Αυτό συμβαίνει γιατί, αν θεωρήσουμε ότι

$$\Delta(u_1, u_2, ...) = (\Delta u_1, \Delta u_2, ...) = (u_2 - u_1, u_3 - u_2, ...),$$

τότε $\Delta u_1 = u_2 - u_1$, $\Delta u_2 = u_3 - u_2$, … και γενικά $\Delta u_k = u_{k+1} - u_k$, με $k = 1, 2, 3, ...$.

2.2.2. Δ^{-1}

Για την εύρεση της αντίστροφης απεικόνισης της Δ που τη συμβολίζουμε με Δ^{-1}, έχουμε πάντα πολλαπλότητα επιλογής «συν μια σταθερά».

Εάν συμβολίσουμε

$$\Delta^{-1}(v_1, v_2, ...) = (u_1, u_2, ...),$$

θα έχουμε

$$\begin{aligned} v_1 &= u_2 - u_1 \\ v_2 &= u_3 - u_2 \\ &\vdots \\ v_{n-1} &= u_n - u_{n-1}. \end{aligned}$$

Επομένως, $\quad v_1 + v_2 + ... + v_{n-1} = u_n - u_1$.

Άρα το $u_1 = c$ είναι μια αυθαίρετη σταθερά και $u_n = v_1 + v_2 + ... + v_{n-1} + c$.

Αυτό συνεπάγεται ότι το πρόβλημα εύρεσης του αθροίσματος μιας σειράς $v_1 + v_2 + v_3 + ...$, μετατίθεται στην εύρεση του γενικού όρου της Δ^{-1}.

Παραδείγματος χάριν, για $v_k = (2k+1)(2k+3)$, έχουμε

$$v_1 + v_2 + ... + v_{n-1} = \frac{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}{6} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{6},$$

οπότε

$$\Delta^{-1} v_n = u_n = \frac{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}{6} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{6} + c .$$

Συμπληρωματικά

α) Έστω για $x=(u_1,u_2,...)$ η σειρά των ακολουθιών

$$x+Ex+\frac{E^2}{2!}x+\frac{E^3}{3!}x+\dots .$$

Αν αυτή η σειρά συγκλίνει, τότε ορίζουμε τον τελεστή

$$e^E=I+E+\frac{E^2}{2!}+\frac{E^3}{3!}+...$$

του οποίου η τιμή στο x ισούται με

$$e^E x=\left(I+E+\frac{E^2}{2!}+\frac{E^3}{3!}+...\right)x=x+Ex+\frac{1}{2!}E^2x+\frac{1}{3!}E^3x+... \ .$$

Αναλυτικά, έχουμε

$$e^E x=x+\frac{E}{1!}x+\frac{E^2}{2!}x+\frac{E^3}{3!}x+...=$$

$$=(u_1,u_2,u_3,...)+\frac{1}{1!}(u_2,u_3,...)+\frac{1}{2!}(u_3,u_4,...)+\frac{1}{3!}(u_4,u_5,...)+...=$$

$$=\left(u_1+\frac{1}{1!}u_2+\frac{1}{2!}u_3+\frac{1}{3!}u_4+...,\ u_2+\frac{1}{1!}u_3+\frac{1}{2!}u_4+\frac{1}{3!}u_5+...,\ ...\right).$$

β) Ομοίως, ορίζουμε τον τελεστή

$$e^\Delta=I+\frac{\Delta}{1!}+\frac{\Delta^2}{2!}+\frac{\Delta^3}{3!}+...$$

με τον τύπο

$$e^\Delta x=\left(I+\frac{\Delta}{1!}+\frac{\Delta^2}{2!}+\frac{\Delta^3}{3!}+...\right)x=x+\Delta x+\frac{1}{2!}\Delta^2x+\frac{1}{3!}\Delta^3x+\dots .$$

Θεώρημα 1

Έστω $u_k=P(k)$, όπου το P είναι πολυώνυμο βαθμού n ως προς k. Τότε το $\Delta^n u_k$ είναι σταθερό (ανεξάρτητο του k), διάφορο του μηδενός και $\Delta^{n+1}u_k=0$.

Αντιστρόφως

Εάν $\Delta^{n+1}u_k=0$ για κάθε k, τότε υπάρχει πολυώνυμο P βαθμού το πολύ n, ώστε $u_k=P(k)$ για κάθε k.

Αφού $E=I+\Delta$, έχουμε το παρακάτω Θεώρημα

Θεώρημα 2

$$\Delta^n x=(E-I)^n x=\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}E^{n-k}\right)x=\left(E^n-nE^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}E^{n-2}-...+(-1)^n I\right)x .$$

Ακόμη $E^n x=(\Delta+I)^n x=\left(\Delta^n+n\Delta^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}\Delta^{n-2}+...+I\right)x$.

Το Θεώρημα 2 μας χρησιμεύει να αποδείξουμε ειδικούς τύπους όπως

$$\Delta^n u_k=u_{k+n}-nu_{k+n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}u_{k+n-2}-...+(-1)^n u_k ,$$

όπου u_k η k-στη συντεταγμένη του διανύσματος u.

Παράδειγμα[170]
Έστω το άπειρο άθροισμα

$$S(t)=u_0+u_1\frac{t}{1!}+u_2\frac{t^2}{2!}+\dots\ . \qquad (1)$$

Θέτουμε $S(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{u_k t^k}{k!}$ (2) με $t\in\mathbb{R}$ και έχουμε

$$S(t)\overset{(*)}{=}e^{tE}u_0=e^{t(1+\Delta)}u_0=e^t e^{t\Delta}u_0=e^t\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^k}{k!}\Delta^k u_0. \qquad (3)$$

Η ισότητα $(*)$ προκύπτει από το

$$e^{tE}u_0=u_0+\frac{t}{1!}Eu_0+\frac{t^2}{2!}E^2u_0+\frac{t^3}{3!}E^3u_0+\dots=u_0+\frac{t}{1!}u_1+\frac{t^2}{2!}u_2+\frac{t^3}{3!}u_3+\dots=S(t). \quad (2)$$

Τώρα, εάν u_k είναι πολυωνυμική συνάρτηση του k βαθμού n, τότε για $j>n$, από το Θεώρημα 1, έχουμε $\Delta^j u_0=0$, οπότε η σχέση (3) παίρνει τη μορφή

$$S(t)=e^t\sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!}\Delta^k u_0. \qquad (4)$$

Εφαρμογή
Αν $u_k=1+k^3$, με $k\in\mathbb{N}$, έχουμε $u_0=1, u_1=2, u_2=9, u_3=28, u_4=65, u_5=126,\dots$. Ακόμη $\Delta u_0=1$, $\Delta^2u_0=6$, $\Delta^3u_0=6$ και $\Delta^j u_0=0$, για $j\geq 4$. Τότε το ζητούμενο άθροισμα S καταλήγει στη μορφή

$$S(t)=1+\frac{2t}{1!}+\frac{9t^2}{2!}+\frac{28t^3}{3!}+\frac{65t^4}{4!}+\frac{126t^5}{5!}+\dots. \qquad (5)$$

Έτσι, η (3) μας δίνει ότι το άθροισμα (5) ισούται με

$$S(t)=e^t\left(1+t+3t^2+t^3\right).$$

Παρατήρηση
Υπάρχει και η παραλλαγή του S, όπου εμφανίζονται στην (1) μόνον οι όροι που αντιστοιχούν στα πολλαπλάσια ενός φυσικού $p\geq 2$. Δηλαδή

$$S_p(t)=u_0+u_p\frac{t^p}{p!}+u_{2p}\frac{t^{2p}}{(2p)!}+\dots\ .$$

Ειδικότερα, αν ο p είναι πρώτος, χρησιμοποιούμε τον γενικό τύπο (6).
Έστω θ μια ρίζα της εξίσωσης $x^p-1=0$, διάφορη της μονάδας. Τότε

$$S_p(x)=\frac{1}{p}\sum_{j=0}^{p-1}S\left(\theta^j x\right). \qquad (6)$$

Ειδικά, για $p=2$ έχουμε $\theta=-1$, οπότε ο τύπος (6) μας δίνει

$$S_2(x)=\frac{1}{2}\left(S(x)+S(-x)\right).$$

Ακόμη, για $p=3$ έχουμε $\theta=\omega$, όπου ω η κυβική ρίζα της μονάδας, διαφορετική του 1, οπότε ο (6) μας δίνει

$$S_3(x)=\frac{1}{3}\left(S(x)+S(\omega x)+S\left(\omega^2 x\right)\right).$$

[170] Problem 2991, American Mathematical Monthly, 1924, Vol. 31, No. 1, σελ. 52.

2.2.3. Σειρές Dirichlet.

Για την επίλυση γραμμικών εξισώσεων διαφορών με σταθερούς συντελεστές θα χρησιμοποιήσουμε τον μετασχηματισμό της *Σειράς Dirichlet*.[171]
Θεωρούμε τον γραμμικό μετασχηματισμό[172]

$$D\{\alpha_n\}=\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha_n x^{-ns}=f_s(x),\quad x>1,\ s>1. \qquad (1)$$

Η (1) είναι σειρά Dirichlet. Από τον τύπο άθροισης του Abel, έχουμε

$$\sum_{n=0}^{N-1}\alpha_n\beta_n=\sum_{n=0}^{N-1}A_n\left(\beta_n-\beta_{n+1}\right)+A_{N-1}\beta_N,$$

όπου $N\geq 1$ και $A_n=\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n$, με $\alpha_0,\alpha_1,...$ και $\beta_0,\beta_1,...$ πραγματικούς αριθμούς.
Τη σχέση αυτή μπορώ να τη γράψω

$$\sum_{n=0}^{N-1}\alpha_n\left(\beta_{n+1}-\beta_n\right)=\alpha_N\beta_N-\alpha_0\beta_0-\sum_{n=0}^{N-1}\beta_{n+1}\left(\alpha_{n+1}-\alpha_n\right). \quad (2)$$

Πράγματι, έχουμε

$$\sum_{n=0}^{N-1}A_n\left(\beta_n-\beta_{n+1}\right)+A_{N-1}\beta_N=\sum_{n=0}^{N-1}\alpha_n\beta_n=\alpha_0\beta_0+\sum_{n=1}^{N-1}\left(A_n-A_{n-1}\right)\beta_n=\alpha_0\beta_0+\sum_{n=0}^{N-2}\left(A_{n+1}-A_n\right)\beta_{n+1}=$$

$$=A_0\beta_0+\sum_{n=0}^{N-1}\left(A_{n+1}-A_n\right)\beta_{n+1}-\left(A_N-A_{N-1}\right)\beta_N.$$

Άρα

$$\sum_{n=0}^{N-1}A_n\left(\beta_{n+1}-\beta_n\right)=A_N\beta_n-A_0\beta_0-\sum_{n=0}^{N-1}\beta_{n+1}\left(A_{n+1}-A_n\right)$$

και παίρνουμε τη (2) θέτοντας α_n στη θέση του A_n.
Στην άπειρη μορφή της, έχουμε

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha_n\left(\beta_{n+1}-\beta_n\right)=\lim_{N\to+\infty}\alpha_N\beta_N-\alpha_0\beta_0-\sum_{n=0}^{+\infty}\beta_{n+1}\left(\alpha_{n+1}-\alpha_n\right). \quad (3)$$

Θέτοντας $\beta_n=\dfrac{x^{-ns}}{x^{-s}-1}$, έχουμε $\beta_{n+1}-\beta_n=x^{-ns}$. $\qquad$ (4)

Τότε, η (1) μέσω της (3) και αφού $\{\Delta\alpha_n=\alpha_{n+1}-\alpha_n\}$, μας δίνει

$$f_s(x)=\lim_{N\to+\infty}\alpha_N\frac{x^{-Ns}}{x^{-s}-1}-\alpha_0\frac{1}{x^{-s}-1}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{-(n+1)s}}{x^{-s}-1}\Delta\alpha_n, \qquad (5)$$

οπότε καταλήγουμε στην

$$f_s(x)=-\alpha_0\frac{x^s}{1-x^s}-\frac{1}{1-x^s}\sum_{n=0}^{+\infty}x^{-ns}\Delta\alpha_n, \qquad (6)$$

αρκεί να ισχύει $\lim_{N\to+\infty}\alpha_N x^{-Ns}=0$.

---

171 Είναι η σειρά της μορφής $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\alpha_n}{n^z}$. Γενικότερα, $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\alpha_n}{p_n^{\ z}}$, ή $\sum_{n=1}^{+\infty}\alpha_n e^{-\lambda_n z}$, όπου p_n είναι θετικοί αριθμοί και λ_n πραγματικοί αριθμοί που αυξάνουν μονότονα στο $+\infty$.

172 Tomlinson Fort, *Linear Difference Equations and the Dirichlet Series Transform* , American Mathematical Monthly, 1955, Vol. 62, No. 9, σελ. 641-645.

Την προηγούμενη διαδικασία μπορούμε να τη συνεχίσουμε θέτοντας όπου α_n το $\Delta\alpha_n$. Κατόπιν, όπου $\Delta\alpha_n$ το $\Delta^2\alpha_n$ και ούτω καθεξής. Έτσι έχουμε

$$f_s(x) = -\frac{x^s}{1-x^s}\alpha_0 + \frac{x^s}{(1-x^s)^2}\Delta\alpha_0 - \frac{x^s}{(1-x^s)^3}\Delta^2\alpha_0 + \ldots +$$

$$+(-1)^k \frac{x^s}{(1-x^s)^k}\Delta^{k-1}\alpha_0 + (-1)^k \frac{1}{(1-x^s)^k}\sum_{n=0}^{+\infty} x^{-ns}\Delta^k\alpha_n. \qquad (7)$$

Εφαρμογές

Αν $D\{\alpha_n\} = f_s(x)$, τότε

1. $D\{\Delta\alpha_n\} = -x^s\alpha_0 - (1-x^s)f_s(x)$**.**

Απόδειξη

Από τη σχέση (1) και τη σχέση (6), έχουμε

$$f_s(x) = -\alpha_0\frac{x^s}{1-x^s} - \frac{1}{1-x^s}\sum_{n=0}^{+\infty} x^{-ns}\Delta\alpha_n = -\alpha_0\frac{x^s}{1-x^s} - \frac{1}{1-x^s}D\{\Delta\alpha_n\}.$$

Οπότε, λύνοντας ως προς $D\{\Delta\alpha_n\}$, έχουμε

$$D\{\Delta\alpha_n\} = -x^s\alpha_0 - (1-x^s)f_s(x).$$

2. $D\{\Delta^2\alpha_n\} = -x^s\Delta\alpha_0 + x^s(1-x^s)\alpha_0 + (1-x^s)^2 f_s(x)$**.**

Απόδειξη

Προκύπτει από τη σχέση (7) για $k=2$, ή κατευθείαν από την προηγούμενη, αφού $\Delta^2\alpha_n = \Delta(\Delta\alpha_n)$.

3. $D\{\Delta^k\alpha_n\} = -x^s\Delta^{k-1}\alpha_0 + x^s(1-x^s)\Delta^{k-2}\alpha_0 + \ldots +$

$$+(-1)^{k-2}x^s(1-x^s)^{k-3}\Delta^2\alpha_0 + (-1)^{k-1}x^s(1-x^s)^{k-2}\Delta\alpha_0 +$$

$$+(-1)^k x^s(1-x^s)^{k-1}\alpha_0 + (-1)^k(1-x^s)^k f_s(x).$$

Απόδειξη

Από τη γενική μορφή της σχέσης (7) και λύνοντας ως προς $\sum_{n=0}^{+\infty} x^{-ns}\Delta^k\alpha_n = D\{\Delta^k\alpha_n\}$, έχουμε το ζητούμενο.

4. Έστω j θετικός ακέραιος. Τότε

$$D\{\alpha_{n+j}\} = x^{js}D\{\alpha_n\} - x^{js}\sum_{n=0}^{j-1} x^{-ns}\alpha_n.$$

Απόδειξη
Έχουμε

$$D\{\alpha_{n+j}\}=\sum_{n=0}^{+\infty}x^{-ns}\alpha_{n+j}=x^{js}\sum_{n=0}^{+\infty}x^{-(n+j)s}\alpha_{n+j}=$$

$$=x^{js}\sum_{n=j}^{+\infty}x^{-ns}\alpha_n=x^{js}\sum_{n=0}^{+\infty}x^{-ns}\alpha_n-x^{js}\sum_{n=0}^{j-1}x^{-ns}\alpha_n=x^{js}D\{\alpha_n\}-x^{js}\sum_{n=0}^{j-1}x^{-ns}\alpha_n.$$

2.2.4. Η χρήση του παραπάνω μετασχηματισμού για τις διάφορες τιμές του α_n, μας δίνει τα παρακάτω αθροίσματα

1. Για $\alpha_n=1$, η σχέση (1) είναι τώρα το άθροισμα απείρων όρων γεωμετρικής προόδου με λόγο μικρότερο του 1, οπότε

$$\sum_{n=0}^{+\infty}x^{-ns}=\frac{x^s}{x^s-1}.$$

2. Για $\alpha_n=n$, η σχέση (6) μας δίνει

$$\sum_{n=0}^{+\infty}nx^{-ns}=-\alpha_0\frac{x^s}{1-x^s}-\frac{1}{1-x^s}\sum_{n=0}^{+\infty}x^{-ns}\Delta\alpha_n=\frac{1}{x^s-1}\sum_{n=0}^{+\infty}x^{-ns}=\frac{x^s}{\left(x^s-1\right)^2}.$$

3. Για $\alpha_n=n\left(n-1\right)=n^{(2)}$, με $n\geq 1$, η σχέση (6) μας δίνει

$$\sum_{n=0}^{+\infty}n\left(n-1\right)x^{-ns}=\frac{1}{x^s-1}\sum_{n=0}^{+\infty}2nx^{-ns}=\frac{2}{x^s-1}\sum_{n=0}^{+\infty}nx^{-ns}\overset{2}{=}\frac{2}{x^s-1}\frac{x^s}{\left(x^s-1\right)^2}=\frac{2x^s}{\left(x^s-1\right)^3}.$$

4. Για $\alpha_n=n\left(n-1\right)...\left(n-k+1\right)=n^{(k)}$, με $n\geq k$, αφού

$$\Delta\alpha_n=n\left(n-1\right)...\left(n-k+2\right)k,$$

τότε

$$\sum_{n=0}^{+\infty}n\left(n-1\right)...\left(n-k+1\right)x^{-ns}=\frac{1}{x^s-1}\sum_{n=0}^{+\infty}x^{-ns}n\left(n-1\right)...\left(n-k+2\right)k=$$

$$=\frac{k}{x^s-1}D\left\{n^{(k-1)}\right\}=...=\frac{k\left(k-1\right)...2\cdot 1}{\underbrace{\left(x^s-1\right)...\left(x^s-1\right)}_{k-\text{φορές}}}\sum_{n=0}^{+\infty}x^{-ns}=\frac{k!x^s}{\left(x^s-1\right)^{k+1}}.$$

5. Για $\alpha_n=n^k$, όπου k θετικός ακέραιος, θα εκφράσουμε το α_n συναρτήσει των $n^{(k)}$, $n^{(k-1)}$, …, n και κατόπιν θα κάνουμε χρήση της Περίπτωσης 4.

Παραδείγματος χάριν,

$$n^2=n\left(n-1\right)+n=n^{(2)}+n$$

$$n^3=n\left(n-1\right)\left(n-2\right)+3n\left(n-1\right)+n=n^{(3)}+3n^{(2)}+n$$

$$n^4=n\left(n-1\right)\left(n-2\right)\left(n-3\right)+6n\left(n-1\right)\left(n-2\right)+7n\left(n-1\right)+n=n^{(4)}+6n^{(3)}+7n^{(2)}+n.$$

6. Για $\alpha_n = c^n$, με $|c| < x^s$, η σχέση (6), καθώς $\Delta\alpha_n = (c-1)c^n$, μας δίνει

$$D\{\alpha_n\} = \frac{x^s}{x^s-1} + \frac{c-1}{x^s-1}\sum_{n=0}^{+\infty} x^{-ns}c^n = \frac{x^s}{x^s-1} + \frac{c-1}{x^s-1}D\{\alpha_n\}.$$

Λύνοντας ως προς $D\{\alpha_n\}$, έχουμε

$$D\{\alpha_n\} = \frac{x^s}{x^s-c}.$$

7. Για $\alpha_n = n^{(k)}c^n$, η σχέση (6) μας δίνει

$$D\{\alpha_n\} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{-ns}n^{(k)}c^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(x^{-s}c\right)^n n^{(k)}.$$

Παρατηρούμε ότι έχουμε καταλήξει στη μορφή που έχει το άθροισμα της 4. Έτσι, θέτοντας όπου x^{-s} το $x^{-s}c$, θα έχουμε $D\{\alpha_n\} = \dfrac{k!x^sc^k}{\left(x^s-c\right)^{k+1}}$.

Παράδειγμα

Να βρεθεί η α_n όταν έχουμε $\Delta\alpha_n - \alpha_n + 1 = n^2$. (1)

Ο μετασχηματισμός της (1) σε σειρά Dirichlet μας δίνει

$$D\{\Delta\alpha_n\} - D\{\alpha_n\} + D\{1\} = D\left\{n^2\right\} = D\left\{n^{(2)} + n\right\},$$

δηλαδή

$$-x^s\alpha_0 - \left(1-x^s\right)f_s(x) - f_s(x) + \frac{x^s}{x^s-1} = \frac{2x^s}{\left(x^s-1\right)^3} + \frac{x^s}{\left(x^s-1\right)^2}.$$

Λύνοντας την παραπάνω ως προς $f_s(x)$, παίρνουμε

$$f_s(x) = 2\frac{x^s}{\left(x^s-1\right)^3\left(x^s-2\right)} + \frac{x^s}{\left(x^s-1\right)^2\left(x^s-2\right)} - \frac{x^s}{\left(x^s-1\right)\left(x^s-2\right)} + \alpha_0\frac{x^s}{x^s-2} =$$

$$= -2\frac{x^s}{x^s-1} - 3\frac{x^s}{\left(x^s-1\right)^2} + \left(2+\alpha_0\right)\frac{x^s}{x^s-2}.$$

Από την Παράγραφο 5.2.3. συμπεραίνουμε ότι η α_n που αντιστοιχεί στην $f_s(x)$ δίνεται από τη σχέση

$$\alpha_n = -2 - 3n + \left(2+\alpha_0\right)2^n.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3.

Η ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΣΕΙΡΑ.

Ο Γάλλος μελετητής Nicole Oresme (1323;-1382), στο βιβλίο του *De proportionibus proportionum* και *Ad pauca respicientes* (1360)[173], απέδειξε ότι η αρμονική σειρά $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$ αποκλίνει. Η απόδειξή του είναι η πρώτη απόδειξη απόκλισης σειράς με όρους που τείνουν στο 0 που συναντάμε στην ιστορία των μαθηματικών. Το ενδιαφέρον είναι ότι πρόκειται για τη γνωστή απόδειξη που περιέχουν συνήθως τα βιβλία του Απειροστικού Λογισμού.

Απόδειξη 1 (Oresme)

$$1+\frac{1}{2}+\left(\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}_{2}\right)+\left(\underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}_{4}\right)+\left(\underbrace{\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{16}}_{8}\right)+\left(\underbrace{\frac{1}{17}+\ldots+\frac{1}{32}}_{16}\right)+\ldots$$

$$+\left(\underbrace{\frac{1}{2^{n-1}+1}+\ldots+\frac{1}{2^{n}}}_{2^{n-1}}\right)\geq 1+\frac{1}{2}+2\frac{1}{4}+4\frac{1}{8}+8\frac{1}{16}+16\frac{1}{32}+\ldots+2^{n-1}\frac{1}{2^{n}}=1+\frac{n}{2}\to+\infty.$$

Το 1672 ο Ιταλός Pietro Mengoli (1625-1686) (βλ. Κεφ.1), στο βιβλίο του *Il problema della quadratura del circolo,* σχετικό με τον τετραγωνισμό του κύκλου, απέδειξε την απόκλιση της αρμονικής σειράς, ξαναανακαλύπτοντας την παραπάνω μέθοδο του Oresme[174].

Απόδειξη 2 (της ίδιας εποχής)

Εξετάζουμε τον πίνακα:

$$\begin{array}{l} \frac{1}{1\cdot 2} \\ \frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3} \\ \frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4} \\ \\ \qquad\vdots \end{array}$$

Η πρώτη στήλη μας δίνει

[173] Carl B. Boyer - Uta C. Merzbach, *A History of Mathematics,* Wiley, 1988, Second Edition, σελ. 300.
[174] Carl B. Boyer, *A History of Mathematics,* Wiley, 1968, σελ. 406.

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\ldots \;=1$$

Όμοια, η δεύτερη στήλη δίνει άθροισμα $\frac{1}{2}$, η τρίτη $\frac{1}{3}$ κ.ο.κ. Όλες μαζί δίνουν $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots$. Το άθροισμα κατά γραμμές δίνει $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots$, δηλαδή διαφορετικό αποτέλεσμα. Αν τώρα η αρμονική σειρά συνέκλινε, θα έπρεπε να είχαμε ισότητα των δύο μεθόδων άθροισης. Άρα η αρμονική σειρά αποκλίνει.

<u>Απόδειξη 3</u>[175]

Έστω ότι η αρμονική σειρά συγκλίνει σε ένα S. Χωρίζοντας τους παρονομαστές σε άρτιους και περιττούς, έχουμε

$$S=S_1+S_2=\left(\underbrace{\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\ldots}_{S_1}\right)+\left(\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{2n}+\ldots}_{S_2}\right).$$

Παρατηρούμε ότι i) $S_2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots\right)=\frac{1}{2}S$ και ii) αφού $1>\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}>\frac{1}{4},\ldots$ και γενικά $\frac{1}{2n-1}>\frac{1}{2n}$, έχουμε $S_1\geq S_2$. Θα αποδείξουμε ότι $S_1>S_2$.

Πράγματι, $S_1-1=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots\geq\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\ldots=S_2-\frac{1}{2}$, άρα $S_1\geq S_2+\frac{1}{2}>S_2$.

Τότε όμως, $S=S_1+S_2>2S_2=S$, δηλαδή $S>S$, άτοπο. Άρα η αρμονική σειρά αποκλίνει.

<u>Απόδειξη 4</u>

Έστω $S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$. Θα αποδείξουμε ότι η (S_n) δεν είναι ακολουθία Cauchy. Πράγματι

$$S_{2n}-S_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\geq n\cdot\frac{1}{2n}=\frac{1}{2},$$ ὃ. ἔ. δ.

<u>Παρεμφερής Απόδειξη</u>

Η $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots$ είναι αποκλίνουσα $\Leftrightarrow$ υπάρχει τουλάχιστον μία ακολουθία τμημάτων της σειράς που να μην είναι μηδενική. Πράγματι

[175] College Mathematics Journal, Vol. 28, No 3, σελ. 210.

$S_n' = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$, δηλαδή βρήκαμε μια ακολουθία τμημάτων της σειράς η οποία δεν είναι μηδενική, άρα η σειρά αποκλίνει.

<u>Απόδειξη 5</u>

Από το Θεώρημα Ενδιαμέσου Τιμής στη συνάρτηση $\ln x$, υπάρχει $\xi \in (n, n+1)$ με $\ln(n+1) - \ln n = \frac{1}{\xi}$. Άρα $\ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}$. Προσθέτοντας κατά μέλη τις ανισώσεις αυτές για $n = 1, ..., N$, συμπεραίνουμε ότι

$$\ln(N+1) - \ln 1 < \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}.$$

Επειδή, $\ln(N+1) \to +\infty$, έπεται το ζητούμενο.

<u>Απόδειξη 6</u>

Από την ανίσωση $e^a \geq a+1$, για κάθε $a > 0$, έχουμε:

$$e^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}} = e^1 \cdot e^{\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{1}{3}} \cdot ... \cdot e^{\frac{1}{n}} \geq (1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right) \cdot ... \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) =$$

$$= 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot ... \cdot \frac{n+1}{n} = n+1.$$

Λογαριθμίζοντας, έχουμε

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} \geq \ln(n+1)$, δηλαδή καταλήγουμε στην ανισότητα της προηγούμενης απόδειξης, και άρα η αρμονική σειρά αποκλίνει.

<u>Απόδειξη 7 (Γεωμετρική με σύγκριση εμβαδών)</u>

Η μέθοδος αυτή είναι ουσιαστικά το κριτήριο ολοκλήρωσης για σύγκλιση σειρών. Στη συγκεκριμένη περίπτωση θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, \text{ με τύπο } f(x) = \frac{1}{x}.$$

Παρατηρούμε ότι το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων που σχηματίζονται με βάσεις τα τμήματα $[k, k+1]$, $1 \leq k \leq n$ και ύψος $\frac{1}{k}$, είναι μεγαλύτερο από το εμβαδόν μεταξύ των Ox, $x = 1$, $x = n+1$ και του γραφήματος της f. Δηλαδή

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} > \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx = \ln(n+1) \to +\infty.$$

Απόδειξη 8

Έστω ότι η σειρά $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$ συγκλίνει στο S. Τότε

$$S=\frac{2}{2}+\frac{2}{4}+\frac{2}{6}+\ldots<\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)+\ldots=S,\ \text{άτοπο.}$$

Άρα, η σειρά $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$, αποκλίνει.

Απόδειξη 9

Από τη σχέση $A\geq G$, όπου A μέσος αριθμητικός και G μέσος γεωμετρικός n θετικών όρων, έχουμε

$$\frac{(1+1)+\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(1+\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n}\geq\sqrt[n]{2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{n+1}{n}}=\sqrt[n]{n+1},$$

άρα

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\geq n\left(\sqrt[n]{n+1}-1\right).$$

Αλλά

$$n\left(\sqrt[n]{n+1}-1\right)=n\left((n+1)^{\frac{1}{n}}-1\right)=n\left(e^{\frac{\ln(n+1)}{n}}-1\right)\geq n\frac{\ln(n+1)}{n}=\ln(n+1).$$

Συνεπώς,

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\geq\ln(n+1),$$

άρα, η αρμονική σειρά αποκλίνει.

Απόδειξη 10

Θα εφαρμόσουμε το **Κριτήριο Συμπύκνωσης του Cauchy**.

Εάν $\sum_{n=1}^{+\infty}\alpha_n$ είναι μια σειρά της οποίας οι όροι σχηματίζουν θετική, μονότονα φθίνουσα ακολουθία (α_n), τότε αυτή συγκλίνει ή αποκλίνει αν και μόνο αν το ίδιο συμβαίνει με τη σειρά $\sum_{\kappa=0}^{+\infty}2^{\kappa}\alpha_{2^{\kappa}}$.

Στην περίπτωση της αρμονικής σειράς, συμπεραίνουμε ότι αποκλίνει, αφού αποκλίνει η σειρά $\sum_{\kappa=1}^{+\infty}\frac{2^{\kappa}}{2^{\kappa}}=\sum_{\kappa=1}^{+\infty}1=+\infty$.

Απόδειξη 11

Ο Jacques Bernoulli για να αποδείξει ότι η αρμονική σειρά αποκλίνει, θεώρησε την $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{n^2}$ με πλήθος όρων n^2-n. Προφανώς ο κάθε όρος της είναι μεγαλύτερος του $\frac{1}{n^2}$, οπότε, αφού $\left(n^2-n\right)\frac{1}{n^2}=1-\frac{1}{n}$, έχουμε ότι $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{n^2}>1-\frac{1}{n}$, άρα $\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{n^2}\geq 1$.

Οπότε $\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_1+1}+\frac{1}{n_1+2}+...+\frac{1}{{n_1}^2}\geq 1$,

$\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_2+1}+\frac{1}{n_2+2}+...+\frac{1}{{n_2}^2}\geq 1$,

$\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_3+1}+\frac{1}{n_3+2}+...+\frac{1}{{n_3}^2}\geq 1$,

…………………………………

Προσθέτοντας κατά μέλη, παίρνουμε

$$1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n^2}=\underbrace{1}_{\geq 1}+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}_{\geq 1}+\underbrace{\frac{1}{5}+...+\frac{1}{25}}_{\geq 1}+\underbrace{\frac{1}{26}+...+\frac{1}{26^2}}_{\geq 1}+...+\frac{1}{n^2}.$$

Συνεπώς, μπορούμε να έχουμε αποτέλεσμα όσο μεγάλο θέλουμε. Άρα η αρμονική σειρά αποκλίνει.

Απόδειξη 12 (Άλλη απόδειξη του Jacques Bernoulli)

Ισχύει $\frac{1}{3n-1}+\frac{1}{3n}+\frac{1}{3n+1}>\frac{1}{n}$, με $n\in\mathbb{N}-\{0\}$.

Έστω $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...=S$, δηλ. $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{1}^{n}\frac{1}{k}=S$, με $S<+\infty$.

Τότε, για $n=1$, έχουμε: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>1$

για $n=2$, $\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}>\frac{1}{2}$

για $n=3$, $\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}>\frac{1}{3}$

$\vdots$

$$\frac{1}{3n-1}+\frac{1}{3n}+\frac{1}{3n+1}>\frac{1}{n}.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις παραπάνω ανισότητες, παίρνουμε

$$\sum_{k=2}^{3n+1}\frac{1}{k}>\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$S\text{-}1 \;\geq\; S, \quad \text{άτοπο.}$$

Ο Jacques Bernoulli και η αρμονική σειρά

Η οικογένεια Bernoulli ασχολήθηκε πολύ με τις άπειρες σειρές. Ειδικά ο Jacques Bernoulli[176], μεταξύ 1689 και 1704, έγραψε πέντε εργασίες – που δημοσιεύθηκαν το 1713 από τον ανιψιό του Νικόλαο, γιο του αδελφού του Ιωάννη – ως συμπλήρωμα στο *Ars Conjectandi*, με τίτλο *Tractatus de Seriebus Infinitis.* Το αντικείμενο μελέτης των εργασιών αυτών ήταν η παραγώγιση και η ολοκλήρωση συναρτήσεων για τον υπολογισμό α) εμβαδών κάτω από καμπύλες και β) μηκών καμπύλων. Στις εργασίες αυτές οι συναρτήσεις εκφράζονται με τη βοήθεια σειρών.
Στην πρώτη εργασία με τίτλο *Proportiones arithmeticae de seriebus infinite earmgue summa finite* (Basel 1689, Opera I, 375-402), ένα τμήμα αφορά την αρμονική σειρά. Ο Jacques ξεκινά με τη σειρά :

$$N = \frac{\alpha}{c}+\frac{\alpha}{2c}+\frac{\alpha}{3c}+\frac{\alpha}{4c}+\frac{\alpha}{5c}+\ldots \text{ . Θέτει } P = N - \frac{\alpha}{c} = \frac{\alpha}{2c}+\frac{\alpha}{3c}+\frac{\alpha}{4c}+\frac{\alpha}{5c}+\ldots \text{ .}$$

Αντικαθιστώντας το N από την παραπάνω σχέση, παίρνει:

$$\frac{\alpha}{c} = N - P = \left(\frac{\alpha}{c}-\frac{\alpha}{2c}\right)+\left(\frac{\alpha}{2c}-\frac{\alpha}{3c}\right)+\left(\frac{\alpha}{3c}-\frac{\alpha}{4c}\right)+\ldots = \frac{\alpha}{2c}+\frac{\alpha}{6c}+\frac{\alpha}{12c}+\frac{\alpha}{20c}+\ldots \text{ (I)}$$

Για $\alpha = c$, συμπεραίνουμε ότι :

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\ldots = 1.$$

Το αποτέλεσμα είναι σωστό, αλλά ο τρόπος δεν είναι, αφού χρειάστηκε να αφαιρέσει δύο αποκλίνουσες σειρές. Αντιλαμβάνεται ότι υπάρχει πρόβλημα και συστήνει η παραπάνω μέθοδος να ακολουθείται με μεγάλη προσοχή. Για να το τεκμηριώσει, αναφέρει

$$\text{Έστω } S = \frac{2\alpha}{c}+\frac{3\alpha}{2c}+\frac{4\alpha}{3c}+\ldots \text{ . Τότε } T = S-\frac{2\alpha}{c} = \frac{3\alpha}{2c}+\frac{4\alpha}{3c}+\frac{5\alpha}{4c}+\ldots \text{ , οπότε}$$

$$\frac{2\alpha}{c} = S - T = \frac{\alpha}{2c}+\frac{\alpha}{6c}+\frac{\alpha}{12c}+\frac{\alpha}{20c}+\ldots \text{, δηλαδή}$$

$$2 = \left(2-\frac{3}{2}\right)+\left(\frac{3}{2}-\frac{4}{3}\right)+\left(\frac{4}{3}-\frac{5}{4}\right)+\ldots = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots =$$

$$= \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots = 1$$

Ο Jacques Bernoulli αντιμετώπισε την αντίφαση ως εξής

Η σχέση (I) ισχύει αν ο τελευταίος όρος της N, δηλαδή ο $\frac{\alpha}{nc} \to 0$, όταν $n \to +\infty$, ενώ ο τελευταίος όρος της S, δηλαδή ο $\frac{(n+1)\alpha}{nc} = \frac{\alpha}{c} \neq 0$, όταν $n \to +\infty$. Δηλαδή, σωστά είχε διαπιστώσει ότι, ανεξάρτητα από το αν μια σειρά $\sum_{\kappa=1}^{+\infty} x_\kappa$ συγκλίνει ή

---

[176] Morris Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times,* Oxford University Press, New York, 1990, σελ. 442-444.

αποκλίνει, η σειρά $\sum_{\kappa=1}^{+\infty}\left(x_\kappa - x_{\kappa+1}\right)$, που προκύπτει από την αρχική, συγκλίνει στο x_1 αν $\lim_{\kappa\to+\infty} x_\kappa = 0$.

Ο Jean Bernoulli και η αρμονική σειρά.[177]

Ο Jean Bernoulli (1667-1748), όπως αναφέρει ο Jacques στο *Tractatus,*, Κεφ.XVI, παρατήρησε ότι:

Αν $A=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+...$ και $B=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{2}{2\cdot 3}+\frac{3}{3\cdot 4}+\frac{4}{4\cdot 5}+...$, τότε A = B.

Αλλά αν $C = \frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+...$,

$D = \frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+...$,

$E = \frac{1}{12}+\frac{1}{20}+...$,

$F = \frac{1}{20}+...$,

…………………………

αφού προηγούμενα έχει αποδείξει ότι

$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{n+1}=\frac{1}{2}+\frac{2}{6}+\frac{3}{12}+...+\frac{n}{n(n+1)}$ και αφού $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$, έπεται

ότι C = 1, $D = C-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, $E = D-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$, $F = E-\frac{1}{12}=\frac{1}{4}$,… . Τότε C+D+E+F+…=

$$=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}\right)+\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{20}+\frac{1}{20}+\frac{1}{20}\right)+...=\frac{1}{2}+\frac{2}{6}+\frac{3}{12}+\frac{4}{20}+...=B=A.$$

Κατόπιν, αφού προσθέσει τα δεξιά μέλη των ισοτήτων των C, D, E, F, …, παίρνει

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...=1+A.$$

Δηλαδή, τελικά A = 1 + A, που σημαίνει ότι ένα "μέρος" ισούται με το "όλο", όπως αναφέρει χαρακτηριστικά ο Jacques Bernoulli, που είναι άτοπο, αν τα μεγέθη είναι πεπερασμένα. Άρα 1+A είναι άπειρο.

Προέλευση ονομασίας αρμονικής σειράς[178].

Από πού όμως πήρε το όνομά της η αρμονική σειρά;

Το πρώτο πράγμα που μας έρχεται στο μυαλό είναι ότι, κάθε όρος της, εκτός του πρώτου, είναι ο μέσος αρμονικός των όρων στους οποίους βρίσκεται ανάμεσα.

[177] W. Dunham, *The Bernoullis and the Harmonic Series,* Two Year College Math. Magazine, Vol. 18, No 1, 1987, σελ. 18-23.

[178] David Kullman, *What's Harmonic about the Harmonic Series?,* The College Mathematics Journal, Vol. 32, No 3, May 2001, σελ. 201-203.

Δηλαδή, $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, ο $\frac{1}{n}$ είναι ο μέσος αρμονικός των $\frac{1}{n-1}$, $\frac{1}{n+1}$. Τον μέσο αρμονικό όμως τον ονόμαζαν *υποαντίθετου (υπενάντιο).* Σύμφωνα με τον Πρόκλο , η θεωρία των αναλογιών αποδίδεται στον Πυθαγόρα. Όπως αναφέρει ο Ιάμβλιχος στο έργο του *Περί της Νικομάχου Αριθμητικής Εισαγωγής,* ο μέσος αριθμητικός, ο μέσος γεωμετρικός και ο υποαντίθετος (υπενάντιος) – ο Αρχύτας (στο *Περί μουσικής*) και ο Ίππασος τον μετονόμασαν σε *αρμονικό* – γνωστοί αρχικά στους Βαβυλώνιους, έγιναν γνωστοί και στον Πυθαγόρα ($6^{ος}$ αιώνας π.Χ.) κατά την επίσκεψή του στη Μεσοποταμία.. Εκεί έμαθε επίσης και την περίφημη αναλογία που ονόμαζαν «μουσική» και η οποία συνέδεε δύο αριθμούς, ως εξής.:

$$\frac{\alpha}{\frac{\alpha+b}{2}} = \frac{\frac{2\alpha b}{\alpha+b}}{b},$$

όπου $\frac{\alpha+b}{2}$ ο μέσος αριθμητικός των α, b και $\frac{2\alpha b}{\alpha+b}$ ο μέσος αρμονικός τους. Την παραπάνω αναλογία, μετά τον Πυθαγόρα, χρησιμοποιούν και άλλοι Πυθαγόρειοι, όπως επίσης και ο Πλάτων στον Τίμαιο (36 Α), όταν αναφέρεται στην *Αρμονική διαίρεση της Ψυχής*[179] (βλ. παρακάτω). Με σημερινή ορολογία, αυτό ισοδυναμεί με τη σχέση $H = \frac{G^2}{A}$, όπου Η ο μέσος αρμονικός, G ο μέσος γεωμετρικός και Α ο μέσος αριθμητικός.

Στον ορισμό όμως χρησιμοποιήσαμε πάλι τον όρο τον οποίο πρέπει να προσδιορίσουμε.

Στη γεωμετρία, λέμε ότι τα συγγραμμικά και διαδοχικά σημεία Α, Γ, Β, Δ, αποτελούν *αρμονική τετράδα,* που τη συμβολίζουμε με (Α, Β, Γ, Δ), εάν ικανοποιείται η σχέση $(A,B,\Gamma,\Delta) = \frac{\overline{A\Gamma}}{\overline{\Gamma B}} \cdot \frac{\overline{\Delta B}}{\overline{A\Delta}} = -1$, η οποία, όπως αποδεικνύεται, ισοδυναμεί με τη σχέση

$$\frac{2}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{A\Gamma}} + \frac{1}{\overline{A\Delta}}.$$

Μήπως όμως η λέξη *αρμονικός* προέρχεται από τη μουσική;

Σύμφωνα με τον Heath[180], σε σωζόμενο απόσπασμα εργασίας που αποδίδεται στον Πυθαγόρειο Αρχύτα, τα Μαθηματικά χωρίζονταν σε τέσσερις κλάδους: Γεωμετρία, Αριθμητική, Σφαιρική (δηλ. Αστρονομία) και Μουσική. Επομένως, βλέπουμε τη μεγάλη σημασία που είχε για τους Πυθαγόρειους η μουσική.

Ο Πυθαγόρας ήταν ο πρώτος που παρατήρησε τη σχέση που υπήρχε μεταξύ μουσικών διαστημάτων και των αναλογιών, με αποτέλεσμα να αναπτύξει τη θεωρία της αρμονίας.

Μια άλλη εκδοχή, σχετική με την ονομασία του *αρμονικού μέσου,* είναι, αυτή που επισημαίνει ο Νικόμαχος, κατ' αναλογία με τη *γεωμετρική αρμονία,* (Φιλόλαος). Η ονομασία αυτή αφορούσε τον κύβο -12 ακμές, 8 γωνίες, 6 έδρες, όπου το 8 είναι ο μέσος αρμονικός των 6 και 12 – (Νικόμαχος, ii, 26.2).

---

[179] Πλάτων Τίμαιος, Εισαγωγή – Μετάφραση - Σχόλια Β. Κάλφας, εκδόσεις Πόλις, 1997, σελ. 208-209.

[180] Thomas L.Heath, *A History of Greek Mathematics*, Vol. I , Dover reprint 1981, σελ. 85.

ΠΛΑΤΩΝ – Τίμαιος 36 A έως 36 B στίχος 6

μετὰ δὲ ταῦτα συνεπληροῦτο τά τε διπλάσια καὶ τριπλάσια διαστήματα, μοίρας ἔτι ἐκεῖθεν ἀποτέμνων καὶ τιθεὶς εἰς τὸ μεταξὺ τούτων, ὥστε ἐν ἑκάστῳ διαστήματι δύο εἶναι μεσότητας, τὴν μὲν ταὐτῷ μέρει τῶν ἄκρων αὐτῶν ὑπερέχουσαν καὶ ὑπερεχομένην, τὴν δὲ ἴσῳ μὲν κατ϶ ἀριθμὸν ὑπερέχουσαν, ἴσῳ δὲ ὑπερεχομένην. ἡμιολίων δὲ διαστάσεων καὶ ἐπιτρίτων καὶ ἐπογδόων γενομένων ἐκ τούτων τῶν δεσμῶν ἐν ταῖς πρόσθεν διαστάσεσιν, τῷ τοῦ ἐπογδόου διαστήματι τὰ ἐπίτριτα πάντα συνεπληροῦτο, λείπων αὐτῶν ἑκάστου μόριον, τῆς τοῦ μορίου ταύτης διαστάσεως λειφθείσης ἀριθμοῦ πρὸς ἀριθμὸν ἐχούσης τοὺς ὅρους □ξ καὶ πεντήκοντα καὶ διακοσίων πρὸς τρία καὶ τετταράκοντα καὶ διακόσια. καὶ δὴ καὶ τὸ μειχθέν, ἐξ οὗ ταῦτα κατέτεμνεν, οὕτως ἤδη πᾶν κατανηλώκει.

Μετάφραση Βασίλη Κάλφα

Έπειτα συμπλήρωσε τα ενδιάμεσα διαστήματα στη σειρά του 2 και στη σειρά του 3, κόβοντας και άλλα κομμάτια από το αρχικό μείγμα και τοποθετώντας τα ανάμεσα στα κομμάτια της πρώτης διαίρεσης, με τέτοιο τρόπο ώστε να υπάρχουν δύο μέσοι σε κάθε διάστημα. Ο πρώτος [αρμονικός] χωρίζει το διάστημα σε δύο μέρη που έχουν ίδιο λόγο με τον λόγο των δύο ακραίων αριθμών του διαστήματος, και ο δεύτερος [αριθμητικός] απέχει εξίσου από τους δύο ακραίους αριθμούς. Αυτοί οι δεσμοί δημιούργησαν τμήματα 3/2, 4/3 και 9/8 στα αρχικά διαστήματα. Αντικατέστησε όλα τα διαστήματα των 4/3 με διαστήματα των 9/8, αφήνοντας υπόλοιπο ένα τμήμα που μπορεί να αναπαρασταθεί με το κλάσμα 256/243. Έτσι εξαντλήθηκε όλο το αρχικό μείγμα, από το οποίο είχε αρχίσει να κόβει όλα τα κομμάτια αυτά.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4.

Η ΣΕΙΡΑ $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\zeta(2)$

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με την σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\zeta(2)$ η οποία είναι ειδική περίπτωση της σειράς $\zeta(2k)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{2k}}$.

Θα αποδείξουμε με πολλούς, ουσιαστικά διαφορετικούς, τρόπους ότι $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ ή, ισοδύναμα $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

Η σειρά αυτή, όπως είδαμε στο δεύτερο κεφάλαιο, έχει μακρά ιστορία (οικογένεια Bernoulli, Euler, Riemann κ.λπ.).

Οι μέθοδοι άθροισης της $\zeta(2)$ που ακολουθούν είναι πολλών ειδών. Προτάσσουμε τις στοιχειώδεις μεθόδους οι οποίες βασίζονται σε σχολική ύλη και κλασική Τριγωνομετρία. Ακολουθούν οι μέθοδοι με χρήση ολοκληρωμάτων, με πυρήνα του Dirichlet, με μιγαδική ανάλυση, με χρήση σειρών Fourier, με πυρήνα του Fejér, με τύπους Euler, MacLauren. Τέλος έχουμε μεθόδους για τη γενική περίπτωση της $\zeta(2k)$.

Μερικές από τις αποδείξεις προσαρμόζονται ώστε να αποδειχθούν και παρεμφερή αποτελέσματα όπως της $\zeta(4)=\frac{\pi^4}{90}$. Περιέχονται οι ενότητες

Α. Στοιχειώδεις μέθοδοι: Απόδειξη 1 και 2.

Β. Με χρήση Ολοκληρωμάτων: Απόδειξη 3, 4, 5, 6 και 7.

Γ. Με χρήση πυρήνα του Dirichlet: Απόδειξη 8.

Δ. Με Μιγαδική Ανάλυση: Απόδειξη 9, 10 και 11.

Ε. Με χρήση Σειρών Fourier: Απόδειξη 12, 13, 14, 15, 16, 17 και 18.

ΣΤ. Με χρήση πυρήνα του Fejér: Απόδειξη 19.

Ζ. Με χρήση τύπων Euler, MacLauren: Απόδειξη 20 και 21.

Η. Γενική Περίπτωση $\zeta(2k)$**:** Απόδειξη 22 και 23.

Α. Στοιχειώδεις μέθοδοι

Απόδειξη 1[181]

Θα μας χρειαστεί η ταυτότητα $\cot^2\frac{\pi}{2n+1}+\ldots+\cot^2\frac{n\pi}{2n+1}=\frac{n(2n-1)}{3}$ (1), η οποία αποδεικνύεται ως εξής:

Από τον τύπο του De Moivre έχουμε

$$\begin{aligned}\sin(2n+1)\alpha &= \operatorname{Im}(\cos\alpha+i\sin\alpha)^{2n+1}\\ &=\operatorname{Im}\left[\sin^{2n+1}\alpha(\cot\alpha+i)^{2n+1}\right]\\ &=\operatorname{Im}\left[\sin^{2n+1}\alpha\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}i^k\cot^{2n+1-k}\alpha\right]\\ &=\sin^{2n+1}\alpha\left[\binom{2n+1}{1}\cot^{2n}\alpha-\binom{2n+1}{3}\cot^{2n-2}\alpha+\binom{2n+1}{5}\cot^{2n-4}\alpha-\ldots\right].\end{aligned}$$

Συμπεραίνουμε ότι εξίσωση

$$\binom{2n+1}{1}x^n-\binom{2n+1}{3}x^{n-1}+\binom{2n+1}{5}x^{n-2}-\ldots=0,$$

έχει ρίζες τις

$$\cot^2\frac{\pi}{2n+1},\ \cot^2\frac{2\pi}{2n+1},\ \ldots,\ \cot^2\frac{n\pi}{2n+1}. \qquad (2)$$

Άρα, από τις σχέσεις Viete, έχουμε τη ζητούμενη

$$\cot^2\frac{\pi}{2n+1}+\ldots+\cot^2\frac{n\pi}{2n+1}=\frac{\binom{2n+1}{3}}{\binom{2n+1}{1}}=\frac{n(2n-1)}{3}. \qquad (3)$$

Επίσης, επειδή $1+\cot^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}=\operatorname{cosec}^2\alpha$, συμπεραίνουμε ακόμη ότι

$$\operatorname{cosec}^2\frac{\pi}{2n+1}+\ldots+\operatorname{cosec}^2\frac{n\pi}{2n+1}=n+\cot^2\frac{\pi}{2n+1}+\ldots+\cot^2\frac{n\pi}{2n+1}=\frac{2n(n+1)}{3}. \qquad (4)$$

Τώρα, επειδή για γωνίες ω με $0<\omega<\frac{\pi}{2}$ έχουμε $0<\cot\omega<\frac{1}{\omega}<\operatorname{cosec}\omega$, προκύπτουν οι

$$\cot^2\frac{\pi}{2n+1}<\left(\frac{2n+1}{\pi}\right)^2<\operatorname{cosec}^2\frac{\pi}{2n+1}$$

$$\vdots$$

[181] I. Papadimitriou, American Mathematical Monthly, Vol. 80, 1973, σελ. 424-425.

$$\cot^2\frac{n\pi}{2n+1}<\left(\frac{2n+1}{n\pi}\right)^2<\operatorname{cosec}^2\frac{n\pi}{2n+1}.$$

Αθροίζοντας κατά μέλη τις παραπάνω ανισότητες και με χρήση της (1) και της (4), έχουμε

$$\frac{\pi^2}{3}\frac{n(2n-1)}{(2n+1)^2}<1+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{n^2}<\frac{\pi^2}{3}\frac{n(2n+2)}{(2n+1)^2}. \qquad (5)$$

Παίρνοντας τώρα όριο του n τείνοντος στο $+\infty$, καταλήγουμε στο

$$1+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{n^2}+...=\frac{\pi^2}{6}.$$

Ας σημειώσουμε εδώ ότι αφού $\frac{n(2n-1)}{(2n+1)^2}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)\left(1-\frac{2}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}+O\left(\frac{1}{n}\right)$ και $\frac{n(2n+2)}{(2n+1)^2}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, η (3) δίνει την εκτίμηση $\frac{\pi^2}{6}-\left(1+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{n^2}\right)=O\left(\frac{1}{n}\right)$.

<u>Παρατήρηση</u>

Με παραλλαγή της παραπάνω απόδειξης μπορούμε να βρούμε και το άθροισμα

$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+... .$$

Η κεντρική ιδέα είναι

$$\cot^4\frac{\pi}{2n+1}+...+\cot^4\frac{n\pi}{2n+1}<\left(\frac{2n+1}{\pi}\right)^4+...+\left(\frac{2n+1}{n\pi}\right)^4<\operatorname{cosec}^4\frac{\pi}{2n+1}+...+\operatorname{cosec}^4\frac{n\pi}{2n+1},$$

η οποία αποδεικνύεται από τη σχέση $\cot\omega<\frac{1}{\omega}<\operatorname{cosec}\omega$,

οπότε

$$\cot^4\omega<\frac{1}{\omega^4}<\operatorname{cosec}^4\omega.$$

Από την ταυτότητα

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+...+\alpha_n^2=\left(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+...+\alpha_n\right)^2-2\left(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_1\alpha_4+...+\alpha_{n-1}\alpha_n\right)$$

εφαρμοσμένη στις ρίζες $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ldots,\ \alpha_n$ της (1), οι σχέσεις Viete δίνουν

$$\sum_{n=1}^{k}\cot^4\frac{k\pi}{2n+1}=\alpha_1^2+\alpha_2^2+...+\alpha_n^2=\left[\frac{n(2n-1)}{3}\right]^2-2\frac{\binom{2n+1}{5}}{\binom{2n+1}{1}}=\frac{n(2n-1)}{45}\left(4n^2+10n-9\right).$$

Επίσης από την $\operatorname{cosec}^4\omega=\left(\cot^2\omega+1\right)^2=\cot^4\omega+2\cot^2\omega+1$, παίρνουμε

$$\operatorname{cosec}^4\frac{\pi}{2n+1}+\ldots+\operatorname{cosec}^4\frac{n\pi}{2n+1}=\cot^4\frac{\pi}{2n+1}+\ldots+\cot^4\frac{n\pi}{2n+1}+2\left(\cot^2\frac{\pi}{2k+1}+\ldots+\cot^2\frac{n\pi}{2n+1}\right)+n=$$
$$=\frac{n(2n-1)}{45}\left(4n^2+10n-9\right)+\frac{2n(2n-1)}{3}+n=\frac{8n(n+1)\left(n^2+n+3\right)}{45}$$

οπότε

$$\frac{\pi^4 n}{45}\frac{(2n-1)\left(4n^2+10n-9\right)}{(2n+1)^4}<1+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{n^4}<\frac{\pi^4 8n}{45}\frac{(n+1)\left(n^2+n+3\right)}{(2n+1)^4}.$$

Παίρνοντας όριο για $n\to+\infty$, καταλήγουμε στο

$$1+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{k^4}+\ldots=\frac{\pi^4}{90}.$$

Με ανάλογο τρόπο μπορούμε να βρούμε αθροίσματα $6^{\omega\nu}$, $8^{\omega\nu}$,… δυνάμεων, δηλαδή

$$1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\ldots=\frac{\pi^6}{945}$$
$$1+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\ldots=\frac{\pi^8}{9450},$$
$$1+\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{3^{10}}+\ldots=\frac{\pi^{10}}{93555},$$
$$1+\frac{1}{2^{12}}+\frac{1}{3^{12}}+\ldots=\frac{691\,\pi^{12}}{638\,512\,875}$$

κ.λπ.

<u>Απόδειξη 2[182] (Παραλλαγή της Απόδειξης 1)</u>

Από τη σχέση (1) της Απόδειξης (2)

$$\sum_{k=1}^{m}\cot^2\frac{k\pi}{2m+1}=\frac{1}{3}m(2m-1),$$

έχουμε

$$\left|\frac{1}{6}-\frac{1}{(2m+1)^2}\sum_{k=1}^{N}\cot^2\frac{k\pi}{2m+1}\right|=\left|\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{(2m+1)^2}\sum_{k=1}^{m}\cot^2\frac{k\pi}{2m+1}\right)+\frac{1}{(2m+1)^2}\sum_{k=N+1}^{m}\cot^2\frac{k\pi}{2m+1}\right|=$$
$$=\frac{1}{6}\frac{6m+1}{(2m+1)^2}+\frac{1}{(2m+1)^2}\sum_{k=N+1}^{m}\cot^2\frac{k\pi}{2m+1}. \qquad (1)$$

Επειδή, $\cot\theta<\dfrac{1}{\theta}$ στο $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, έχουμε

$$(1)\le\frac{1}{6}\frac{6m+1}{(2m+1)^2}+\frac{1}{\pi^2}\sum_{k=N+1}^{m}\frac{1}{k^2}.$$

---

182 T. Apostol, *Another Elementary Proof of Euler's Formula for* $\zeta(2n)$, American Mathematical Monthly, Vol. 80, 1973, σελ. 425-431.

Τώρα, από $\theta\cot\theta \to 1$, καθώς $\theta \to 0$, έχουμε (για $m \to +\infty$)

$$\left|\frac{1}{6}-\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k^2\pi^2}\right| \le \frac{1}{\pi^2}\sum_{k=N+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2},$$

το οποίο $\to 0$, καθώς το $N \to +\infty$.

B. Με χρήση Ολοκληρωμάτων

Απόδειξη 3[183]

Από τον τύπο του Euler $e^{ix}=\cos x+i\sin x$, έχουμε $2\cos x=e^{ix}\left(1+e^{-2ix}\right)$. Τότε, στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ έχουμε την ισότητα των ολοκληρωμάτων

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(2\cos x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left[e^{ix}\left(1+e^{-2ix}\right)\right]dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[ix-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{n}e^{-2nix}\right]dx=$$

$$=i\frac{\pi^2}{8}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-2nix}dx=i\left[\frac{\pi^2}{8}-\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{\left(2k+1\right)^2}\right].$$

Δηλαδή, ένας πραγματικός αριθμός ισούται με ένα φανταστικό, άρα και οι δύο είναι ίσοι με το μηδέν. Οπότε, $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{\left(2k+1\right)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

Απόδειξη 4[184]

Γνωρίζουμε ότι το ανάπτυγμα Taylor του arcsinx είναι

$$\arcsin x = x+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot\left(2k-1\right)}{2^k k!\left(2k+1\right)}x^{2k+1},\ (1).$$

Έτσι,

$$\frac{\pi^2}{6}=\frac{2}{3}\left(\arcsin x\right)^2\Big|_0^1=\frac{4}{3}\int_0^1\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\overset{(1)}{=}\frac{4}{3}\int_0^1\frac{x+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot\left(2k-1\right)}{2^k k!\left(2k+1\right)}x^{2k+1}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx= \qquad (2)$$

$$=\frac{4}{3}\underbrace{\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx}_{I_1}+\frac{4}{3}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot\left(2k-1\right)}{2^k k!\left(2k+1\right)}\underbrace{\int_0^1 x^{2k}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx}_{I_{2k+1}}\ , \qquad (3)$$

αφού η σειρά στο ολοκλήρωμα της (2) συγκλίνει στο $x=1$, σύμφωνα με το κριτήριο του Raabe, οπότε συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\left[-1,1\right]$, σύμφωνα με το κριτήριο του Weierstrass. Όμως

$$I_1=\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=-\sqrt{1-x^2}\ \Big|_0^1=1, \qquad (4)$$

[183] D. Russel, *Another Eulerian-Type Proof,* Mathematics Magazine, Vol. 64, 1991, σελ. 349.

[184] R. Chapman, *Evaluating* $\zeta\left(2\right)$*, http://*www.secsm.ex.ac.uk / ~rjc/etc/zeta2.pdf, Απόδ. 3, σελ. 3.

$$I_{2k+1}=\int_0^1 x^{2k}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=-x^{2k}\sqrt{1-x^2}\Big|_0^1+2k\int_0^1 x^{2k-1}\sqrt{1-x^2}\,dx=$$

$$=2k\int_0^1\frac{x^{2k-1}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx-2k\int_0^1\frac{x^{2k+1}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=2kI_{2k-1}-2kI_{2k+1}, \qquad (5)$$

οπότε, $I_{2k+1}=\dfrac{2k}{2k+1}I_{2k-1}$.

Συνεπώς, $I_{2k+1}=\dfrac{2k}{2k+1}\dfrac{2k-2}{2k-1}\dfrac{2k-4}{2k-3}\cdots\dfrac{4}{5}\dfrac{2}{3}I_1=\dfrac{2k(2k-2)(2k-4)\cdots 2}{(2k+1)(2k-1)(2k-3)\cdots 3}$. $\qquad$ (6)

Τότε, η (3), μέσω των (4) και (6), μας δίνει

$$\frac{\pi^2}{6}=\frac{4}{3}+\frac{4}{3}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{4}{3}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2},$$

δηλαδή,

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}. \qquad (7)$$

Παρατήρηση

Το I_{2k+1} είναι το ολοκλήρωμα που συναντάμε στον τύπο του Wallis

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2k+1}x\,dx=\frac{2k(2k-2)(2k-4)\cdots 2}{(2k+1)(2k-1)(2k-3)\cdots 3}\quad \text{για } k=1,2,3,\ldots .$$

Απόδειξη 5[185]

Θέτουμε $I_{2n}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}t^2\cos^{2n}t\,dt$. Η ολοκλήρωση κατά μέρη μας δίνει

$$-2n^2I_{2n}+n(2n-1)I_{2n-2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}t\,dt=\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2n)}\cdot\frac{\pi}{2},$$

άρα,

$$\frac{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2n)}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}I_{2n}-\frac{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2n-2)}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-3)}I_{2n-2}=-\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{n^2}.$$

Αθροίζουμε κατά μέλη από $n=1$ έως N. Το αριστερό μέλος είναι τηλεσκοπικό, οπότε θα βρούμε

$$\underbrace{\frac{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2N)}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2N-1)}I_{2N}}_{(*)}-\frac{\pi^3}{24}=-\frac{\pi}{4}\cdot\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{N^2}\right).$$

Όμως, το $(*)$ τείνει στο 0 καθώς το $N\to+\infty$.

(Η απόδειξη της πρότασης αυτής είναι απλή, καθώς

[185] Y. Matsuoka, American Mathematical Monthly, Vol. 68, 1961, σελ. 485-487.

$$I_{2n} \le \frac{\pi^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^{2n} t\, dt = \frac{\pi^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\cos^2 t\right)\cos^{2n} t\, dt = \frac{\pi^3}{8}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n+2)},$$

δηλαδή, $0 < (*) \le \frac{\pi^3}{8}\cdot\frac{1}{2n+2}$).

Απόδειξη 6[186]
Παίρνουμε τη σειρά

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^1\int_0^1 x^{2k}y^{2k}dxdy = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\int_0^1 x^{2k}dx\right)\left(\int_0^1 y^{2k}dy\right) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}, \qquad (1)$$

Όμως, από το θεώρημα της μονότονης σύγκλισης,

$$\text{αριστερό μέλος} = \int_0^1\int_0^1\left(\sum_{k=0}^{+\infty}x^{2k}y^{2k}\right)dxdy = \int_0^1\int_0^1\frac{dxdy}{1-x^2y^2} \underset{y=\frac{\sin v}{\cos u}}{\overset{x=\frac{\sin u}{\cos v}}{=}} \iint_A 1\cdot dudv = \frac{\pi^2}{8}, \quad (2)$$

όπου $A = \left\{(u,v): u>0, v>0, u+v<\frac{\pi}{2}\right\}$. Από (1) και (2) έπεται το ζητούμενο.

Απόδειξη 7[187] (Παραλλαγή της Απόδειξης 6)
Αντί τη σειρά (1), παίρνουμε τη σειρά

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\int_0^1\int_0^1 x^{k-1}y^{k-1}dxdy = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\int_0^1 x^{k-1}dx\right)\left(\int_0^1 y^{k-1}dy\right) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}. \qquad (3)$$

Όμως, από το θεώρημα της μονότονης σύγκλισης,

$$\text{αριστερό μέλος} = \int_0^1\int_0^1\left(\sum_{k=1}^{+\infty}x^{k-1}y^{k-1}\right)dxdy = \int_0^1\int_0^1\frac{dxdy}{1-xy} \underset{y=u+v}{\overset{x=u-v}{=}} 2\iint_T \frac{1}{1-u^2+v^2}dudv, \quad (4)$$

όπου T τετράγωνο με κορυφές $O(0,0)$, $A\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, $B(1,0)$, $\Gamma\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$. Μετά από απλό υπολογισμό, καταλήγουμε στο ότι $(4) = \frac{\pi^2}{6}$. (5)

Από (3) και (5), έπεται το ζητούμενο.

Γ. Με χρήση πυρήνα του Dirichlet.

Απόδειξη 8[188]
Από την ταυτότητα

[186] R. Chapman, *Evaluating* $\zeta(2)$, ενθ. ανωτ., Απόδ. 2, σελ. 2.

[187] R. Chapman, *Evaluating* $\zeta(2)$, ενθ. ανωτ., Απόδ. 1, σελ. 1-2.

[188] D. Giesy, Mathematics Magazine, Vol. 45, 1972, σελ. 148-149 και E.I. Stark, American Mathematical Monthly, Vol. 76, 1968, σελ. 552-553.

$$\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx=\frac{\sin\frac{(2n+1)x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}},$$

παίρνουμε

$$\int_0^{\pi} x\left(\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx\right)dx=\int_0^{\pi}\frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\sin\frac{(2n+1)x}{2}\,dx\,. \qquad (1)$$

Ολοκληρώνοντας κατά μέρη, βλέπουμε ότι το αριστερό μέλος της (1) ισούται με

$$\int_0^{\pi} x\left(\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx\right)dx=\frac{\pi^2}{4}+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{(-1)^k}{k^2}-\frac{1}{k^2}\right).$$

Το δεξί μέλος τείνει στο 0 διότι, ολοκληρώνοντας κατά μέρη, ισούται με

$$\left[\frac{-x}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\frac{\cos\frac{(2n+1)x}{2}}{2n+1}\right]_0^{\pi}+\frac{1}{2n+1}\int_0^{\pi}\left(\frac{x}{\sin\frac{x}{2}}\right)'\cos\frac{(2n+1)x}{2}=$$

$$=\frac{2}{2n+1}+\frac{1}{2n+1}\int_0^{\pi}\left(\frac{x}{\sin\frac{x}{2}}\right)'\cos\frac{(2n+1)x}{2}\,dx\to 0,\ \text{για}\ n\to+\infty,$$

διότι, αν $f(x)=\dfrac{x}{\sin\frac{x}{2}}$, τότε (βλέπε παρακάτω Παρατήρηση) οι f, f' είναι φραγμένες στο $[0,\pi]$), (2).

Επομένως η (1) μας δίνει ότι

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\pi^2}{4}+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{(-1)^k}{k^2}-\frac{1}{k^2}\right)\right)=0\,,\ \text{δηλαδή}\ \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^k}{k^2}-\frac{1}{k^2}\right)=-\frac{\pi^2}{4}\ \text{και άρα}$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

<u>Παρατήρηση</u>

Στη σχέση (2), το ότι η f είναι φραγμένη είναι προφανές. Θα αποδείξουμε τώρα ότι και η f' είναι φραγμένη. Πράγματι

$$f'(x)=\frac{\sin\frac{x}{2}-\frac{1}{2}x\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{\frac{x}{2}+O(x^3)-\frac{x}{2}\left(1+O(x^2)\right)}{\left(x+O(x^3)\right)^2}=\frac{O(x^3)}{x^2+O(x^4)}=O(x),$$

άρα η f' είναι φραγμένη.

Δ. Με Μιγαδική Ανάλυση

Απόδειξη 9[189]

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ με τύπο $f(z)=\dfrac{\cot\pi z}{z^2}$ και το ολοκλήρωμα $I_n=\oint_T f(z)\,dz$, όπου T το περίγραμμα του ορθογωνίου με κορυφές τα σημεία $\left(\pm\left(n+\dfrac{1}{2}\right),\ \pm ni\right)$, $n\in\mathbb{N}$. Πάνω στην T έχουμε $\left|\dfrac{\cot\pi z}{z^2}\right|\le\dfrac{2}{|z|^2}\le\dfrac{2}{n^2}$. Η f έχει απλούς πόλους στα σημεία $z=k$, $\left(k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\right)$ με residues της πf τα $\dfrac{1}{\pi k^2}$ και στο σημείο $z=0$ με residue το $-\dfrac{\pi}{3}$.

(Διότι π.χ.

$$\frac{\cot\pi z}{z^2}=\frac{\cos\pi z}{z^2\sin\pi z}=\frac{1-\dfrac{\pi^2z^2}{2!}+\dfrac{\pi^4z^4}{4!}-\dfrac{\pi^6z^6}{6!}+\ldots}{\pi z^3\left(1-\dfrac{\pi^2z^2}{3!}+\dfrac{\pi^4z^4}{5!}-\dfrac{\pi^6z^6}{7!}+\ldots\right)}=$$

$$=\frac{1}{\pi z^3}\left(1-\frac{\pi^2z^2}{2!}+\frac{\pi^4z^4}{4!}-\ldots\right)\left(1+\frac{\pi^2z^2}{3!}+\frac{\pi^4z^4}{5!}-\ldots\right)=\frac{1}{\pi z^3}\left(1-\frac{\pi^2z^2}{3}+\ldots\right),$$

οπότε το residue στο $z=0$ ισούται με $-\dfrac{\pi}{3}$).

Όμως $I_n\to 0$, αφού $|I_n|\le\dfrac{2}{n^2}(8n+2)$, καθώς $8n+2$ είναι το μήκος της T, άρα

$$2\pi i\left[-\frac{\pi}{3}+\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{1^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}\right)\right]=I_n\to 0,$$

οπότε, έχουμε το ζητούμενο.

Απόδειξη 10 (Παραλλαγή της Απόδειξης 9)

Θεωρούμε τη συνάρτηση f με τύπο $f(z)=\dfrac{1}{z^2+\alpha^2}$, με $\alpha>0$. Η f έχει απλούς πόλους στα σημεία $z=\pm\alpha i$. Τότε, το residue της συνάρτησης F με τύπο $F(z)=\dfrac{\pi\cot\pi z}{z^2+\alpha^2}$ στο σημείο $z=\alpha i$, είναι

$$\lim_{z\to\alpha i}(z-\alpha i)\frac{\pi\cot\pi z}{(z-\alpha i)(z+\alpha i)}=-\frac{\pi}{2\alpha}\coth\pi\alpha.$$

Όμοια, το residue της συνάρτησης F στο σημείο $z=-\alpha i$ είναι

[189] R. Chapman, *Evaluating* $\zeta(2)$, ενθ. ανωτ., Απόδ. 8, σελ. 6.

$$\lim_{z\to-\alpha i}(z+\alpha i)\frac{\pi\cot\pi z}{(z-\alpha i)(z+\alpha i)}=-\frac{\pi}{2\alpha}\coth\pi\alpha\,.$$

Οι υπόλοιποι πόλοι της F είναι στα σημεία $z=n\in\mathbb{Z}$ και σ' αυτά το residue της F είναι $\frac{1}{n^2+\alpha^2}$. Ολοκληρώνοντας την F στον T της Απόδειξης 9 και αφήνοντας το n να $\to+\infty$, βρίσκουμε

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{n^2+\alpha^2}=\frac{\pi}{\alpha}\coth\pi\alpha\,.$$

Τώρα παίρνουμε το όριο της σχέσης αυτής για $\alpha\to0$ και εφαρμόζοντας L' Hospital, καταλήγουμε στο

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\lim_{\alpha\to0}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+\alpha^2}=\lim_{\alpha\to0}\frac{\pi\alpha\coth\pi\alpha-1}{2\alpha^2}=\frac{\pi^2}{6}\,.$$

Απόδειξη 11[190]

Ως γνωστόν,

$$\sum_{n=1}^{N}\sin nt=\frac{\left(1-e^{iNt}\right)\left(e^{it+iNt}-1\right)}{2i\left(1-e^{it}\right)}\,.$$

Άρα, $\left|\sum_{n=1}^{N}\sin nt\right|\le\frac{4}{2\left|1-e^{it}\right|}\le\frac{1}{\sin\frac{\varepsilon}{2}}$, $t\in(\varepsilon,2\pi-\varepsilon)$, δηλαδή τα αθροίσματα είναι ομοιόμορφα φραγμένα ανεξάρτητα από το N στο διάστημα $(\varepsilon,\ 2\pi-\varepsilon)$. Συνεπώς, εφαρμόζοντας το κριτήριο του Dirichlet στη σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nt}{n}$, παρατηρούμε ότι αυτή συγκλίνει ομοιόμορφα στο $(\varepsilon,2\pi-\varepsilon)$, $\forall\varepsilon>0$. Αλλά, αν θέσουμε $f(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos nt}{n^2}$, τότε

$$f'(t)=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nt}{n}=-\operatorname{Im}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{int}}{n}\right)=\operatorname{Im}\left(\ln\left(1-e^{it}\right)\right)=\arg\left(1-e^{it}\right)=\frac{t-\pi}{2},\qquad(1)$$

αφού $\ln(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\ldots$, με $|z|\le1$, $z\ne-1$ και $\ln z\underset{\text{ορσ}}{=}\ln|z|+i\arg z$.
Κατόπιν, εφαρμόζοντας το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού στο $[0,\pi]$, παίρνουμε

$$f(\pi)-f(0)=\int_0^{\pi}\frac{t-\pi}{2}\,dt=-\frac{\pi^2}{4}\,.\ (2)$$

Αλλά, $f(0)=\zeta(2)$, (3)

και

[190] R. Chapman, *Evaluating* $\zeta(2)$, ενθ. ανωτ., Απόδ. 6, σελ..5.

$$f(\pi)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=-1+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}-\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}-...=$$

$$=-1-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}-...+2\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+...\right)=$$

$$=-\zeta(2)+\frac{2}{4}\zeta(2)=-\frac{1}{2}\zeta(2). \qquad (4)$$

Άρα, αντικαθιστώντας τις (3) και (4) στη (2), καταλήγουμε στη ζητούμενη σχέση

$$\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}.$$

Ε. Με χρήση Σειρών Fourier

Απόδειξη 12[191]

Θεωρούμε τη συνάρτηση f με τύπο $f(x)=x+x^2$, με $-\pi<x<\pi$.

Τότε οι συντελεστές Fourier της f είναι

$$\alpha_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(x+x^2\right)dx=\frac{\pi^2}{3},\ \ \alpha_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(x+x^2\right)\cos nx dx=\frac{4}{n^2}(-1)^n,\ (n\neq 0)$$

$$\text{και } \beta_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(x+x^2\right)\sin nx dx=(-1)^{n-1}\frac{2}{n}.$$

Συνεπώς, η σειρά Fourier της f έχει τύπο

$$\frac{\pi^2}{3}+4\left(-\cos x+\frac{1}{2}\sin x\right)+4\left(\frac{1}{2^2}\cos 2x-\frac{1}{4}\sin 2x\right)-4\left(\frac{1}{3^2}\cos 3x-\frac{1}{6}\sin 3x\right)+... .$$

Από ένα βασικό θεώρημα για σειρές Fourier, ισχύει ότι η τιμή της σειράς Fourier στο $x=\pm\pi$ ισούται με το

$$\frac{1}{2}\left[f(-\pi+0)+f(\pi-0)\right]=\pi^2.$$

Επομένως,

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...=\frac{\pi^2}{6}.$$

Απόδειξη 13[192]

Θεωρούμε τη συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\begin{cases}0, & \text{με } -\pi<x\leq 0\\ \frac{1}{4}\pi x, & \text{με } 0<x<\pi.\end{cases}$

Τότε οι συντελεστές Fourier της f είναι

[191] H.S. Carslaw, *An Introduction to the Theory of Fourier's Series and Integrals,* Third Edition, Dover Publications, Inc.,1930, Παράδειγμα 3, σελ. 234.

[192] H.S. Carslaw, ενθ. ανωτ., Παράδειγμα 2, σελ. 234.

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{4}\pi x dx = \frac{\pi^2}{16}, \quad \alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{4}\pi x\cos nx dx = \frac{1}{4n^2}(\cos n\pi - 1), \ (n \neq 0) \text{ και}$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{4}\pi x\sin nx dx = -\frac{\pi}{4n}\cos n\pi, \ (n \neq 0).$$

Συνεπώς, η σειρά Fourier που μας δίνει την f στο $(-\pi,\pi)$ έχει τύπο

$$\frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2\cdot 1^2}\cos x + \frac{\pi}{4}\sin x - \frac{\pi}{4\cdot 2}\sin 2x - \frac{1}{2\cdot 3^2}\cos 3x + \frac{\pi}{4\cdot 3}\sin 3x + \ldots . \quad (1)$$

Επειδή

$$\frac{1}{2}\left[f(-\pi+0) + f(\pi-0)\right] = \frac{1}{8}\pi^2,$$

αν θέσουμε $x = \pi$ στη σειρά Fourier, παίρνουμε

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{8} .$$

Απόδειξη 14

Θεωρούμε τη συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \begin{cases} x, & \text{με } 0 < x \leq \pi \\ 2\pi - x, & \text{με } \pi < x < 2\pi. \end{cases}$

Τότε οι συντελεστές Fourier της f είναι

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\, dx = \frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi - 1) \text{ και}$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\, dx = 0 .$$

Συνεπώς, η σειρά Fourier που μας δίνει την f έχει τύπο

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \ldots\right)$$

και, λόγω συνέχειας της f, συνεπάγεται ότι

$$\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \ldots = \begin{cases} \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi x}{4}, & 0 \leq x \leq \pi \\ \frac{\pi x}{4} - \frac{3\pi^2}{8}, & \pi < x < 2\pi. \end{cases}$$

Αν θέσουμε $x = 0$, παίρνουμε

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{8} .$$

Να παρατηρήσουμε εδώ ότι θα είχαμε το ίδιο αποτέλεσμα αν, στη θέση της f, είχαμε τον γενικό τύπο[193]

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x, & \text{με } 0 < x \leq \pi \\ \alpha(2\pi - x), & \text{με } \pi < x < 2\pi \end{cases}, \text{ όπου } \alpha \neq 0.$$

[193] K. Knopp, *Theory and Application of Infinite Series,* Dover Publications, 1990, σελ. 375.

Επίσης, από την ταυτότητα Parseval, έχουμε

$$\frac{\pi^2}{2}+\frac{16}{\pi^2}\left(1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+...\right)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(f(x)\right)^2 dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2dx=\frac{2\pi^2}{3},$$

οπότε

$$1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+...=\frac{\pi^4}{96}.$$

<u>Απόδειξη 15[194]</u>

Θεωρούμε τη συνάρτηση f με τύπο $f(x)=x$, με $-\pi<x<\pi$.

Τότε έχουμε

$$f(x)=\alpha_0+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx\right),$$

με

$$\alpha_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\ dx=0,\ \alpha_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\cos nx\ dx=0,\ (n\neq 0)\ \text{και}$$

$$\beta_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin nx\ dx=-\frac{2}{n}\cos n\pi=\pm\frac{2}{n},$$

οπότε, από Parseval, παίρνουμε $\sum_{n=1}^{+\infty}|\beta_n|^2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x)\right)^2 dx=\frac{2\pi^2}{3}$, δηλαδή

$$\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}.$$

<u>Απόδειξη 16</u>

Θεωρούμε τη συνάρτηση f με τύπο

$$f(x)=x^2,\ \text{με}\ 0<x<2\pi.$$

Τότε οι συντελεστές Fourier της f είναι

$$\alpha_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2dx=\frac{8\pi^2}{3},\quad \alpha_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2\cos nxdx=\frac{4}{n^2},\ n\neq 0\ \text{και}$$

$$\beta_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2\sin nxdx=\frac{-4\pi}{n},\ n\neq 0.$$

Συνεπώς, η σειρά Fourier που μας δίνει την f στο $(0,2\pi)$, έχει τύπο

$$\frac{4\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\cos nx}{n^2}-\frac{\pi\sin nx}{n}\right).$$

Για $x=0$, η παραπάνω σειρά γίνεται $\frac{4\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$, όμως στο $x=0$ η σειρά συγκλίνει στο $\frac{f(2\pi-0)+f(0+0)}{2}=2\pi^2$, οπότε παίρνουμε $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...=\frac{\pi^2}{6}$.

---

194 R. Chapman, *Evaluating* $\zeta(2)$, ενθ. ανωτ., Απόδ. 4, σελ. 4.

Απόδειξη 17[195]

Θεωρούμε τη συνάρτηση f με τύπο

$$f(x)=x(1-x),\ x\in[0,1].$$

Οι συντελεστές Fourier της f είναι

$$\alpha_0=\int_0^1 f(x)dx\,,\quad \alpha_n=2\int_0^1 f(x)\cos(2\pi nx)dx\,,\quad \beta_n=2\int_0^1 f(x)\sin(2\pi nx)dx\,,$$

οπότε η σειρά Fourier είναι η

$$\frac{1}{6}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos 2\pi nx}{\pi^2 n^2}.$$

Αν θέσουμε $x=0$, καταλήγουμε στη ζητούμενη $\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$. Ξαναβρίσκουμε το ίδιο αποτέλεσμα και για $x=\frac{1}{2}$, που δίνει

$$\frac{\pi^2}{12}=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\text{, δηλαδή } \zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}.$$

Απόδειξη 18

Θεωρούμε τη συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<\pi\\ 0, & -\pi<x<0\end{cases}$.

Τότε οι συντελεστές Fourier της f είναι

$$\alpha_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{2},\quad \alpha_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=0,\ n\neq 0 \text{ και}$$

$$\beta_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=-\frac{1}{n\pi}(\cos n\pi-1)=\frac{1-(-1)^n}{n\pi},\ n\neq 0.$$

Συνεπώς, η σειρά Fourier που μας δίνει την f στο $(-\pi,\pi)$, έχει τύπο

$$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1-(-1)^n}{n\pi}\sin nx.$$

Εφαρμόζοντας Parseval στην f, παίρνουμε

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x))^2\ dx=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1-(-1)^n}{n\pi}\right)^2\text{, δηλαδή } 1=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(1-(-1)^n\right)^2}{n^2},$$

οπότε

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{8}.$$

Παρατήρηση

Στη σειρά Fourier που βρήκαμε για την f, θέτουμε όπου $x=\frac{\pi}{2}$ και έχουμε

[195] R. Chapman, *Evaluating* $\zeta(2)$, ενθ. ανωτ., Απόδ. 5, σελ. 4.

$$1=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1-(-1)^n}{n\pi}\sin n\frac{\pi}{2}.$$

Συνεπώς,

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-...=\frac{\pi}{4}.$$

ΣΤ. Με χρήση πυρήνα του Fejér

Απόδειξη 19[196] (Πυρήνας του Fejér ή Ολοκλήρωμα του Fejér)

Από την ταυτότητα

$$\left(\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2=\sum_{k=-n}^{n}\left(n-|k|\right)e^{ikx}=n+2\sum_{k=1}^{n}\left(n-k\right)\cos kx,$$

που αποδεικνύεται εύκολα με μαθηματική επαγωγή, ολοκληρώνοντας από 0 έως π, παίρνουμε

$$\int_0^\pi x\left(\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2 dx=\int_0^\pi x\left(n+2\sum_{k=1}^{n}\left(n-k\right)\cos kx\right)dx=\frac{n\pi^2}{2}-4n\sum_{1\le k\le n,2\nmid k}\frac{1}{k^2}+4\sum_{1\le k\le n,2\nmid k}\frac{1}{k}.$$

Για $n=2N,\ N\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, έχουμε

$$\int_0^\pi \frac{x}{8N}\left(\frac{\sin Nx}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2 dx=\frac{\pi^2}{8}-\sum_{r=0}^{N-1}\frac{1}{(2r+1)^2}+O\left(\frac{\ln N}{N}\right). \qquad (1)$$

Αλλά $0<x<\pi$, δηλαδή $0<\frac{x}{2}<\frac{\pi}{2}$, οπότε η συνάρτηση f με τύπο $f\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}$

είναι γνησίως φθίνουσα, συνεπώς $\frac{x}{\pi}<\sin\frac{x}{2}$. Τότε

$$\int_0^\pi \frac{x}{8N}\left(\frac{\sin Nx}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2 dx<\frac{\pi^2}{8N}\int_0^\pi \sin^2 Nx\frac{dx}{x}=\frac{\pi^2}{8N}\int_0^{N\pi}\sin^2 y\frac{dy}{y}=O\left(\frac{\ln N}{N}\right). \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2), και αφού πάρουμε όρια για $N\to+\infty$, έχουμε

$$\sum_{r=0}^{+\infty}\frac{1}{(2r+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

---

[196] R. Chapman, *Evaluating,* ένθ. ανωτ., Απόδ. 12, σελ. 10.

Ζ. Με χρήση τύπων Euler, MacLauren

Απόδειξη 20[197]

Από τη γνωστή μας παράσταση του ημιτόνου ενός πραγματικού αριθμού, από τον Euler το 1748, ως απειρογινόμενο

$$\sin \pi x = \pi x \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right), \qquad (1)$$

και αφού αναπτύξουμε το $\sin \pi x$ στη σειρά MacLaurin, θα έχουμε

$$\sin \pi x = \pi x - \frac{(\pi x)^3}{3!} + \frac{(\pi x)^5}{5!} - \ldots = \pi x - \pi x^3\left(1+\frac{1}{2^2}+\ldots\right)+\ldots \ . \qquad (2)$$

Προφανώς, αφού έχουμε ισότητα, οι συντελεστές του x^3 στο αριστερό και δεξιό μέλος θα είναι ίσοι, οπότε παίρνουμε αμέσως τη ζητούμενη σχέση

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Απόδειξη 21[198] (Ισοδύναμη της Απόδειξης 20)

Λογαριθμίζοντας τη σχέση (1) της Απόδειξης 20, και αφού παραγωγίσουμε, καταλήγουμε στη σχέση

$$\pi \cot \pi x = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2x}{x^2-k^2}, \text{ με } |x|<1 \text{ και } x \neq 0. \quad (1)$$

Αναπτύσσοντας, όπως προηγουμένως, παίρνουμε

$$\frac{1}{x} - \frac{\pi^2 x}{3} - \frac{\pi^4 x^3}{45} - \ldots = \frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2-1^2} + \frac{2x}{x^2-2^2} + \ldots \ .$$

Τώρα, εξισώνοντας τους συντελεστές του x του αριστερού και δεξιού μέλους, έχουμε τη ζητούμενη σχέση

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Αριθμοί Bernoulli

Αν η $\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots$ συγκλίνει σε έναν δίσκο κέντρου Ο, θεωρούμε τη συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \frac{1}{\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots}.$$

Για να πάρει η f τη μορφή

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots,$$

θα πρέπει η f να ορίζεται σε έναν δίσκο $|x| < r$ για κατάλληλο r. Αυτό ισχύει αν $\alpha_0 \neq 0$ και πάρουμε το μέγιστο r, ώστε να ισχύει $\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots \neq 0$ για $|x| < r$. Με την προϋπόθεση αυτή, τα $c_0, c_1, c_2, \ldots$ προσδιορίζονται από τις σχέσεις

---

[197] R. Chapman, *Evaluating* $\zeta(2)$, ενθ. ανωτ., Απόδ. 7, σελ. 6.

[198] W. Walter, *Old and New Approaches to Euler's Trigonometric Expansions,* American Mathematical Monthly, Vol. 89, 1982, σελ. 225-230.

$$\alpha_0 c_0 = 1,$$
$$\alpha_0 c_1 + \alpha_1 c_0 = 0,$$
$$\alpha_0 c_2 + \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_0 = 0,$$
$$\alpha_0 c_3 + \alpha_1 c_2 + \alpha_2 c_1 + \alpha_3 c_0 = 0,$$
$$\alpha_0 c_4 + \alpha_1 c_3 + \alpha_2 c_2 + \alpha_3 c_1 + \alpha_4 c_0 = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ .$$

Δηλαδή, έχουμε

$$c_0 = \frac{1}{\alpha_0}, \qquad c_1 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_0^{\ 2}}, \qquad c_2 = \frac{\alpha_1^{\ 2}}{\alpha_0^{\ 3}} - \frac{\alpha_2}{\alpha_0^{\ 2}}, \qquad c_3 = -\frac{\alpha_1^{\ 3}}{\alpha_0^{\ 4}} + \frac{2\alpha_1\alpha_2}{\alpha_0^{\ 3}} - \frac{\alpha_3}{\alpha_0^{\ 2}},$$
$$c_4 = \frac{\alpha_1^{\ 4}}{\alpha_0^{\ 5}} - \frac{3\alpha_1^{\ 2}\alpha_2}{\alpha_0^{\ 4}} + \frac{2\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2^{\ 2}}{\alpha_0^{\ 3}} - \frac{\alpha_4}{\alpha_0^{\ 2}}, \ \ldots\ . \qquad (1)$$

Τώρα, προκειμένου να αναπτύξουμε το κλάσμα

$$\frac{1}{1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \ldots} = \frac{x}{\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\right) - 1} = \frac{x}{e^x - 1} \qquad (2)$$

σε μια δυναμοσειρά του x για $|x| < 2\pi$, αφού θέσουμε $\alpha_k = \frac{1}{(k+1)!}$, θα έχουμε

$$c_0 = 1,\ c_1 = -\frac{1}{2},\ c_2 = \frac{1}{12},\ c_3 = 0,\ c_4 = -\frac{1}{720},\ \ldots\ .$$

Συνεπώς,

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{720}x^4 + \ldots = 1 - \frac{1}{1\cdot 2!}x + \frac{1}{2\cdot 3!}x^2 - \frac{1}{30\cdot 4!}x^4 + \ldots,$$

οπότε, αν θέσουμε

$$B_0 = 1,\ B_1 = -\frac{1}{2},\ B_2 = \frac{1}{6},\ B_3 = 0,\ B_4 = -\frac{1}{30},\ B_5 = 0,\ \ldots\ ,$$

θα έχουμε

$$\frac{x}{e^x - 1} = \frac{B_0}{0!} + \frac{B_1 x}{1!} + \frac{B_2 x^2}{2!} + \frac{B_3 x^3}{3!} + \frac{B_4 x^4}{4!} + \frac{B_5 x^5}{5!} + \ldots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{B_k}{k!} x^k\ . \quad (3)$$

Για k περιττό, μεγαλύτερο του 1 θα έχουμε $B_k = 0$, διότι η συνάρτηση $\frac{x}{e^x - 1} - 1 + \frac{1}{2}x$ είναι άρτια.

Οι αριθμοί B_k, με $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$, ονομάζονται **Αριθμοί Bernoulli**.

Επίσης, χωρίς τη χρήση Λογισμού, και με το πλεονέκτημα του μη περιορισμού στο δίσκο σύγκλισης της άπειρης σειράς που χρειαζόμαστε στον ορισμό που μόλις δώσαμε, οι Αριθμοί Bernoulli προσδιορίζονται από τον αναδρομικό τύπο[199]

$$B_k = -\frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k+1}{i}B_i,\ \ k = 1, 2, 3, \ldots,\ \text{και}\ \ B_0 = 1,$$

[199] Kenneth S. Williams, *Bernoulli's Identity Without Calculus,* Mathematics Magazine, Vol. 70, No 1, (Feb., 1997), σελ. 47-50.

ή ισοδύναμα

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{k+1}{i}B_i=0,\ \ k=1,2,3,...,\ \text{και}\ \ B_0=1.$$

Αυτό αποδεικνύεται από την (3), αν την γράψουμε

$$1=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(k+1)!}x^k\cdot\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{B_k}{k!}x^k.$$

Η. Γενική Περίπτωση $\zeta(2k)$

Απόδειξη 22[200]

Θα αποδείξουμε με μαθηματική επαγωγή ότι

$$\zeta(2n)=(-1)^{n+1}\frac{(2\pi)^{2n}B_{2n}}{2(2n)!}. \qquad (1)$$

Στην Απόδειξη 17 είδαμε ότι για $f(x)=x(1-x),\ x\in[0,1]$, προκύπτει η σειρά Fourier

$$x(1-x)=\frac{1}{6}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos 2\pi nx}{\pi^2 n^2}.$$

Αν θέσουμε $x=\dfrac{t}{2\pi}$, θα έχουμε τη σειρά

$$\frac{1}{4}t^2-\frac{\pi}{2}t+\frac{\pi^2}{6}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\cos kt}{k^2},\ \ x\in[0,2\pi]. \qquad (2)$$

Για $t=0$, όπως είδαμε στην Απόδειξη 17, παίρνουμε τη σχέση (1) για $n=1$.
Θα υποθέσουμε ότι η σχέση (1) ισχύει για $1\le n<k$ και θα την αποδείξουμε για $n=k$, δηλαδή

$$\zeta(2k)=(-1)^{k+1}\frac{(2\pi)^{2k}B_{2k}}{2(2k)!}.$$

Πράγματι, ολοκληρώνοντας τη σχέση (2) (καθώς είναι ολοκληρώσιμη) $2k-1$ φορές από 0 έως x, και τέλος από 0 έως 2π, παίρνουμε

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2k-1}...\int_0^{x_2}\int_0^{x_1}\left(\frac{1}{4}t^2-\frac{\pi}{2}t+\frac{\pi^2}{6}\right)dtdx_1...dx_{2k-1}=\int_0^{2\pi}\int_0^{2k-1}...\int_0^{x_2}\int_0^{x_1}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos nt}{n^2}\right)dtdx_1...dx_{2k-1}.$$

Η πρώτη ολοκλήρωση μας δίνει

$$\frac{1}{4}\frac{x_1^3}{3}-\frac{\pi}{2}\frac{x_1^2}{2}+\frac{\pi^2}{6}x_1=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n^3}. \qquad (3)$$

Η δεύτερη ολοκλήρωση μας δίνει

$$\frac{1}{2\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x_2^4-\frac{\pi}{2\cdot 2\cdot 3}x_2^3+\frac{\pi^2}{6\cdot 2}x_2^2=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1-\cos nx_2}{n^4}. \qquad (4)$$

Εδώ πρέπει να πούμε ότι μπορούμε να εναλλάξουμε το ολοκλήρωμα με το άθροισμα στις συναρτήσεις $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\cos nx}{n^q}$ και $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\sin nx}{n^q}$, για $q\ge 2$,

[200] J.I. Chungang Chen Yonggao, *Euler's Formula for ζ(2k), Proved by Induction on k,* Mathematics Magazine, Vol. 73, No 2, April 2000, σελ. 154-155.

καθώς συγκλίνουν ομοιόμορφα στο $\left[0,2\pi\right]$. Αυτό προκύπτει από το κριτήριο του Weierstrass, διότι $\left|\frac{\cos nx}{n^q}\right| \le \frac{1}{n^q}$, $\left|\frac{\sin nx}{n^q}\right| \le \frac{1}{n^q}$ και $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^q} < +\infty$ για $q \ge 2$.

Τελικά, οι 2k διαδοχικές ολοκληρώσεις του α΄ μέλους μας δίνουν

$$\frac{\left(2\pi\right)^{2k+2}}{2\left(2k+2\right)!} - \frac{\pi\left(2\pi\right)^{2k+1}}{2\left(2k+1\right)!} + \frac{\pi^2\left(2\pi\right)^{2k}}{6\left(2k\right)!}. \qquad (5)$$

Όμοια, οι 2k διαδοχικές ολοκληρώσεις του β΄ μέλους μας δίνουν

$$\left(-1\right)^{k+2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos 2n\pi}{n^{2k+2}} + \sum_{i=2}^{k+1}\frac{\left(-1\right)^i \zeta\left(2i\right)}{\left(2k+2-2i\right)!}\left(2\pi\right)^{2k+2-2i}. \qquad (6)$$

Άρα,

$$\zeta\left(2k\right) = \frac{\left(-1\right)^{k+1}k}{\left(2k+2\right)!}\left(2\pi\right)^{2k} - \sum_{i=1}^{k-1}\frac{\left(-1\right)^{k-i}\zeta\left(2i\right)}{\left(2k+2-2i\right)!}2\left(2\pi\right)^{2k-2i}.$$

Αλλά το $\zeta\left(2i\right)$ θα το πάρουμε από την υπόθεση που έχουμε κάνει για $2 \le n < k$, οπότε θα έχουμε

$$\zeta\left(2k\right) = \frac{\left(-1\right)^{k+1}k}{\left(2k+2\right)!}\left(2\pi\right)^{2k} - \left(-1\right)^{k+1}\left(2\pi\right)^{2k}\sum_{i=1}^{k-1}\frac{B_{2i}}{\left(2k+2-2i\right)!\left(2i\right)!},$$

δηλαδή

$$\zeta\left(2k\right) = \frac{\left(-1\right)^{k+1}\left(2\pi\right)^{2k}}{2\left(2k\right)!}\frac{1}{\left(k+1\right)\left(2k+1\right)}\left(k - \sum_{i=1}^{k-1}\binom{2k+2}{2i}B_{2i}\right). \quad (7)$$

Όμως, από τον αναδρομικό τύπο που ορίσαμε τους Αριθμούς Bernoulli

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{k+1}{i}B_i = 0, \text{ με } k = 1,2,3,\ldots, \text{ και } B_0 = 1,$$

αν στη θέση του k θέσουμε $2k+1$, θα έχουμε

$$\binom{2k+2}{0}B_0 + \binom{2k+2}{1}B_1 + \sum_{i=1}^{k-1}\binom{2k+2}{2i}B_{2i} + \binom{2k+2}{2k}B_{2k} = 0,$$

δηλαδή

$$k = \left(k+1\right)\left(2k+1\right)B_{2k} + \sum_{i=1}^{k-1}\binom{2k+2}{2i}B_{2i},$$

άρα

$$B_{2k} = \frac{1}{\left(k+1\right)\left(2k+1\right)}\left[k - \sum_{i=1}^{k-1}\binom{2k+2}{2i}B_{2i}\right]. \qquad (8)$$

Αντικαθιστώντας την (8) στην (7), παίρνουμε το ζητούμενο, δηλαδή

$$\zeta\left(2k\right) = \frac{\left(-1\right)^{k+1}\left(2\pi\right)^{2k}}{2\left(2k\right)!}B_{2k}.$$

Παρατήρηση
Το ότι η σχέση (5) ισούται με τη σχέση (6), θα το αποδείξουμε με μαθηματική επαγωγή, στη γενική περίπτωση που και το τελευταίο διάστημα ολοκλήρωσης είναι το $[0,x]$, δηλαδή θα αποδείξουμε τη σχέση

$$\frac{x^{2k+2}}{2(2k+2)!}-\frac{\pi x^{2k+1}}{2(2k+1)!}+\frac{\pi^2 x^{2k}}{6(2k)!}=(-1)^{k+2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos nx}{n^{2k+2}}+\sum_{i=2}^{k+1}\frac{(-1)^i\zeta(2i)}{(2k+2-2i)!}x^{2k+2-2i}. \quad (10)$$

Πράγματι, για $k=1$, έχουμε τη σχέση (4). Τώρα, δεχόμαστε ότι η (10) ισχύει για $k=m$ και θα την αποδείξουμε για $k=m+1$.
Υποθέτουμε, λοιπόν, ότι

$$\frac{x^{2m+2}}{2(2m+2)!}-\frac{\pi x^{2m+1}}{2(2m+1)!}+\frac{\pi^2 x^{2m}}{6(2m)!}=(-1)^{m+2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos nx}{n^{2m+2}}+\sum_{i=2}^{k+1}\frac{(-1)^i\zeta(2i)}{(2m+2-2i)!}x^{2m+2-2i}.(11)$$

Ολοκληρώνοντας τώρα διαδοχικά δύο φορές τη σχέση (11), θα πάρουμε

$$\frac{x^{2m+4}}{2(2m+4)!}-\frac{\pi x^{2m+3}}{2(2m+3)!}+\frac{\pi^2 x^{2m+2}}{6(2m+2)!}=$$

$$=(-1)^{m+3}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos nx-1}{n^{2m+4}}+\sum_{i=2}^{m+1}\frac{(-1)^i\zeta(2i)}{(2m+4-2i)!}x^{2m+4-2i}=$$

$$=(-1)^{m+3}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos nx}{n^{2m+4}}+\frac{(-1)^{m+4}}{n^{2m+4}}+\sum_{i=2}^{m+1}\frac{(-1)^i\zeta(2i)}{(2m+4-2i)!}x^{2m+4-2i}=$$

$$=(-1)^{m+3}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos nx}{n^{2m+4}}+\sum_{i=2}^{m+2}\frac{(-1)^i\zeta(2i)}{(2m+4-2i)!}x^{2m+4-2i}.$$

Αποδείξαμε δηλαδή ότι η πρόταση αληθεύει για $k=m+1$. Εδώ πρέπει πάλι να πούμε ότι το ολοκλήρωμα εναλλάσσεται με το άθροισμα γιατί έχουμε ομοιόμορφη σύγκλιση για $x\in\mathbb{R}$.

<u>Απόδειξη 23 (Βασισμένη στην πρωτότυπη απόδειξη του Euler) [201]</u>
Από τη σχέση (4) στον ορισμό των Αριθμών Bernoulli, έχουμε

$$\frac{x}{e^x-1}+\frac{x}{2}=1+\frac{B_2x^2}{2!}+\frac{B_4x^4}{4!}+\ldots \ . \quad (1)$$

Το πρώτο μέλος της σχέσης (1) γράφεται

$$\frac{x}{2}\left(\frac{2}{e^x-1}+1\right)=\frac{x}{2}\frac{e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}} \ . \quad (2)$$

Αλλά $e^{\frac{x}{2}}=1+\frac{x}{2}+\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2!}+\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^3}{3!}+\ldots$, $e^{-\frac{x}{2}}=1-\frac{x}{2}+\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2!}-\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^3}{3!}+\ldots$.

[201] Tom M. Apostol, *Another Elementary Proof of Euler's Formula for* $\zeta(2n)$, American Mathematical Monthly, Vol. 80, 1973, σελ. 425-431.

Μέσα στον δίσκο σύγκλισης $(|x|<2\pi)$ μπορούμε να προσθέσουμε τα δύο αναπτύγματα, οπότε, τελικά, το πρώτο μέλος της (1) μας δίνει

$$\frac{x}{2}\frac{1+\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2!}+\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{4!}+\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{6!}+\ldots}{\frac{x}{2}+\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^3}{3!}+\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^5}{5!}+\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^7}{7!}+\ldots}=y\frac{1+\frac{y^2}{2!}+\frac{y^4}{4!}+\frac{y^6}{6!}+\ldots}{y+\frac{y^3}{3!}+\frac{y^5}{5!}+\frac{y^7}{7!}+\ldots} \quad (3)$$

για $\frac{x}{2}=y$, το οποίο θα ισούται με το δεύτερο μέλος της (1), κάνοντας την ίδια αντικατάσταση, οπότε θα έχουμε

$$\frac{1+\frac{y^2}{2!}+\frac{y^4}{4!}+\frac{y^6}{6!}+\ldots}{1+\frac{y^2}{3!}+\frac{y^4}{5!}+\frac{y^6}{7!}+\ldots}=1+\frac{B_2}{2!}(2y)^2+\frac{B_4}{4!}(2y)^4+\frac{B_6}{6!}(2y)^6+\ldots . \quad (4)$$

Τώρα, η παράσταση $y\cot y$ μπορεί να γραφεί ως εξής

$$y\cot y=y\frac{\cos y}{\sin y}=y\frac{1-\frac{y^2}{2!}+\frac{y^4}{4!}-\frac{y^6}{6!}+\ldots}{y-\frac{y^3}{3!}+\frac{y^5}{5!}-\frac{y^7}{7!}+\ldots}=\frac{1-\frac{y^2}{2!}+\frac{y^4}{4!}-\frac{y^6}{6!}+\ldots}{1-\frac{y^2}{3!}+\frac{y^4}{5!}-\frac{y^6}{7!}+\ldots}. \quad (5)$$

Αν στην (4) αντικαταστήσουμε το y με το iy, θα έχουμε, πάλι μέσα στον δίσκο σύγκλισης $(|y|<\pi)$

$$y\cot y=1-\frac{B_2}{2!}(2y)^2+\frac{B_4}{4!}(2y)^4-\frac{B_6}{6!}(2y)^6+\ldots . \quad (6)$$

Θέτοντας $y=\pi z$, για $|z|<1$, η (6) καταλήγει στη σχέση

$$\pi z\cot\pi z=1+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{(2\pi z)^{2n}B_{2n}}{(2n)!}. \quad (7)$$

Από τη σχέση (1) της Απόδειξης 21, έχουμε

$$\pi z\cot\pi z=1-2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{z^2}{k^2-z^2}=1-2\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{z^2}{k^2}\right)^n=1-2\sum_{n=1}^{+\infty}\zeta(2n)z^{2n}, \quad (8)$$

με $|z|<1$ και $z\neq 0$.

Οι σχέσεις (7) και (8) έχουν ίσα πρώτα μέλη, οπότε η εξίσωση των δεύτερων μελών τους θα μας δώσει ισότητα των συντελεστών των z^{2n}, δηλαδή τη ζητούμενη σχέση

$$\zeta(2n)=(-1)^{n+1}\frac{(2\pi)^{2n}B_{2n}}{2(2n)!}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5.

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με τα αθροίσματα

$$S_k(n) = \sum_{i=1}^{n} i^k = 1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k, \text{ όπου } k, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Και αυτά τα αθροίσματα έχουν μακρά ιστορία, όπως είδαμε στο πρώτο κεφάλαιο. Εδώ θα παραθέσουμε μερικές αποδείξεις για τις διάφορες τιμές του k.

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ</u>

1. Για $k = 1$, έχουμε τον γνωστό μας τύπο $S_1(n) = \frac{n(n+1)}{2}$, ο οποίος αποδεικνύεται εύκολα με μαθηματική επαγωγή.

<u>Διαφορετικά</u>

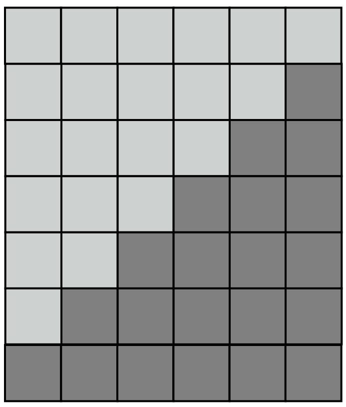
$$\begin{aligned} S_1(n) &= 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n \\ S_1(n) &= n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 2 + 1 \\ \hline 2S_1(n) &= \underbrace{(n+1) + (n+1) + (n+1) + \ldots (n+1) + (n+1)}_{n-\text{φορές}} \end{aligned}$$

Οπότε αμέσως προκύπτει το ζητούμενο.

Μέθοδο όπως αυτή, με μια μικρή διαφορά, χρησιμοποίησε ο Gauss (βλ. Κεφ.1) το 1787, σε ηλικία δέκα ετών, για να βρει το άθροισμα των 100 πρώτων αριθμών. Η διαφορά ήταν ότι στην πρώτη σειρά πήρε το $S_1(50)$, ενώ στη δεύτερη άρχισε από το 100 και σταμάτησε στο 51, οπότε τα τελικά ζευγάρια ήταν 50.

Γεωμετρική παράσταση

Για να υπολογίσουμε το άθροισμα π.χ. $S_1(6) = 1+2+3+4+5+6$, σχηματίζουμε ένα ορθογώνιο 6×7, οπότε παρατηρούμε ότι δύο φορές το ζητούμενο άθροισμα, μας δίνει το ορθογώνιο, δηλαδή $S_1(6) = \frac{6(6+1)}{2} = 21$.



2. Για $k=2$, έχουμε βρει με την τηλεσκοπική μέθοδο ότι $S_2(n)=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Χρησιμοποιώντας την ίδια μέθοδο και αφού $n^3-(n-1)^3=3n^2-3n+1$, έχουμε

$$n^3=3S_2(n)-3S_1(n)+n,$$

οπότε καταλήγουμε στο ίδιο αποτέλεσμα.

3. Για $k=3$, έχουμε βρει με την τηλεσκοπική μέθοδο ότι $S_3(n)=\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

Χρησιμοποιώντας την ίδια μέθοδο και αφού $n^4-(n-1)^4=4n^3-6n^2+4n-1$, έχουμε

$$n^4=4S_3(n)-6S_2(n)+4S_1(n)-n,$$

οπότε καταλήγουμε στο ίδιο αποτέλεσμα.

4. Θα αποδείξουμε [202] τον τύπο του Jacques Bernoulli

$$S_k(n)=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}B_i\frac{(n+1)^{k+1-i}}{k+1-i},\ \text{ με } k=1,2,\ldots \text{ και } B_i \text{ οι αριθμοί Bernoulli.}$$

Από την ισότητα

$$1+e^x+e^{2x}+\ldots+e^{nx}=\frac{e^{(n+1)x}-1}{x}\cdot\frac{x}{e^x-1},\qquad x\neq 0\quad (1)$$

αναπτύσσοντας κάθε όρο του αριστερού μέλους της (1) σε δυναμοσειρά του x, έχουμε

$$1+\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\right)+\left(1+2x+\frac{2^2x^2}{2!}+\frac{2^3x^3}{3!}+\ldots\right)+\ldots+\left(1+nx+\frac{n^2x^2}{2!}+\frac{n^3x^3}{3!}+\ldots\right)=$$

$$=(n+1)+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{S_k(n)}{k!}x^k.\qquad (2)$$

Η συνάρτηση f με τιμή $f(z)=\dfrac{e^{(n+1)z}-1}{z}$ είναι αναλυτική στο $\mathbb{C}$ και γράφεται ως δυναμοσειρά

$$f(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(n+1)^{k+1}}{(k+1)!}z^k$$

η οποία συγκλίνει απολύτως για κάθε $z\in\mathbb{C}$. Η συνάρτηση g με τιμή $g(z)=\dfrac{z}{e^z-1}$ είναι αναλυτική στο $\mathbb{C}$ εκτός από τα σημεία $2\pi i,-2\pi i,4\pi i,-4\pi i,\ldots$. Αυτό σημαίνει ότι η g γράφεται ως δυναμοσειρά (η οποία συγκλίνει απολύτως) στον δίσκο $|z|<2\pi$. Η δυναμοσειρά της g συμβολίζεται

$$g(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{B_k}{k!}z^k,\quad |z|<2\pi.$$

[202] J. Nunemacher, R. Young, *On the Sum of Consecutive Kth Powers,* Mathematics Magazine, Vol. 60, No 4, October 1987, σελ. 237-238.

όπου B_k είναι οι **αριθμοί Bernoulli**. (Βλ. σχετικά Κεφ.4/Ζ).
Στη συνέχεια, το δεξί μέλος της (1) θα μας δώσει

$$f(x)g(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(n+1)^{k+1}}{(k+1)!}x^k\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{B_k}{k!}x^k . \quad (3)$$

Λόγω απόλυτης σύγκλισης, το γινόμενο $f\cdot g$ γράφεται ως δυναμοσειρά

$$f(x)\cdot g(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}c_k x^k, \text{ με } |x|<2\pi, \quad (4)$$

όπου $c_k=\frac{(n+1)^{k+1}}{(k+1)!}\frac{B_0}{0!}+\frac{(n+1)^k}{k!}\frac{B_1}{1!}+...+\frac{(n+1)^2}{2!}\frac{B_{k-1}}{(k-1)!}+\frac{n+1}{1!}\frac{B_k}{k!}$.

Έτσι,

$$c_0=\frac{n+1}{1!}\frac{B_0}{0!},\ c_1=\frac{(n+1)^2}{2!}\frac{B_0}{0!}+\frac{n+1}{1!}\frac{B_1}{1!},\ c_2=\frac{(n+1)^3}{3!}\frac{B_0}{0!}+\frac{(n+1)^2}{2!}\frac{B_1}{1!}+\frac{(n+1)}{1!}\frac{B_2}{2!},$$

$$\dots .$$

Τώρα μπορούμε να εξισώσουμε τους συντελεστές των αντίστοιχων δυνάμεων του x στις σχέσεις (2) και (4), αφού έχουμε εκ ταυτότητας ισότητα δύο σειρών στο ίδιο διάστημα σύγκλισης ($|x|<2\pi$). Έτσι καταλήγουμε στο ζητούμενο.

Να υπενθυμίσουμε εδώ ότι οι εννέα πρώτοι αριθμοί Bernoulli είναι

$$B_0=1,\ B_1=-\frac{1}{2},\ B_2=\frac{1}{6}, B_3=0, B_4=-\frac{1}{30},\ B_5=0, B_6=\frac{1}{42},\ B_7=0, B_8=-\frac{1}{30}$$

και ότι οι περιττής τάξης, ισούνται με το 0.

Άλλη αντιμετώπιση[203]

Από την ταυτότητα

$$\sum_{i=1}^{n}(n-i)^k=S_k(n)-n^k, \qquad (1)$$

για $k=1$, παίρνουμε $\sum_{i=1}^{n}(n-i)=S_1(n)-n$. (2)

Επίσης, από την ταυτότητα

$$n^k+\sum_{i=1}^{n}(n-i)^k=\sum_{i=1}^{n}\left[(n-i)+1\right]^k, \quad (3)$$

για $k=2$, παίρνουμε $n^2=2\sum_{i=1}^{n}(n-i)+n$. (4)

Από τις σχέσεις (2), (3) και (4), παίρνουμε

$$S_1(n)=\frac{n^2+n}{2}=\frac{n(n+1)}{2}. \quad (5)$$

203 M.Tepper, *Sums of Powers,* Mathematics Magazine, Vol. 38, 1965, No 1, σελ. 17-19.

Η (3) για $k=3$, μέσω της (1), μας δίνει

$$n^3 = 3S_2(n) - 3n^2 + 3S_1(n) - 2n$$

και κατόπιν μέσω της (5), καταλήγει στην

$$S_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \quad (6)$$

Με τον ίδιο τρόπο συνεχίζοντας, παίρνουμε $S_3(n) = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$ και λοιπά.

Άλλη αντιμετώπιση

Η παραπάνω σχέση (3), γράφεται

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = \sum_{i=1}^{n} \left[(n+1) - i\right]^k. \quad (7)$$

Η (7) για $k=3$, μας δίνει

$$4\sum_{i=1}^{n} i^3 - 6(n+1)\sum_{i=1}^{n} i^2 = -n^4 - 3n^3 - 3n^2 - n. \quad (8)$$

Επίσης, από την ταυτότητα

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = \sum_{i=0}^{n-1} (n-i)^k, \quad (9)$$

την οποία μπορούμε να γράψουμε

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = n^k + \sum_{i=1}^{n} (n-i)^k \quad (10)$$

για $k=3$, παίρνουμε

$$4\sum_{i=1}^{n} i^3 - 6n\sum_{i=1}^{n} i^2 = -n^4 - n^3. \quad (11)$$

Από τις σχέσεις (10) και (11), παίρνουμε

$$S_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

οπότε η (11) μας δίνει $S_3(n) = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

Παρατήρηση 1

Η παραπάνω μέθοδος είναι μια μικρή παραλλαγή της μεθόδου που εφάρμοσε ο Pascal το 1654 και η οποία στηριζόταν στην ανάπτυξη της ταυτότητας

$$\sum_{i=1}^{n} \left[(i+1)^k - i^k\right],$$

προκειμένου να υπολογίσει το άθροισμα των $(k-1)$ δυνάμεων.

Άλλη αντιμετώπιση

Τον όρο $i(i+1)(i+2)$ τον εκφράζουμε συναρτήσει της διαφοράς

$$i(i+1)(i+2)(i+3) - (i-1)i(i+1)(i+2),$$

οπότε, αφού εφαρμόσουμε την τηλεσκοπική μέθοδο, το άθροισμα των n πρώτων όρων θα ισούται

$$\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$$

Το αριστερό μέλος μας δίνει $\sum_{i=1}^{n} i^3 + 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} i$, οπότε το άθροισμα των n πρώτων κύβων εκφράζεται συναρτήσει των αθροισμάτων των δύο μικρότερων δυνάμεων.

Παρατήρηση 2
Την παραπάνω μέθοδο χρησιμοποίησε ο Fermat το 1636, προκειμένου να υπολογίσει αθροίσματα αυτής της μορφής.

Συμπλήρωμα
Μέθοδος Αρχιμήδη από την Πρόταση i στο *Περί Ελίκων* για $1^2+2^2+...+n^2$

Θα δείξουμε ότι $n^3+n^2+(1+2+...+n)=3(1^2+2^2+...+n^2)$

Έχουμε

$$\begin{aligned}
n^2 &= n^2\\
n^2 &= (n-1+1)^2 = (n-1)^2+1^2+2(n-1)\cdot 1\\
n^2 &= (n-2+2)^2 = (n-2)^2+2^2+2(n-2)\cdot 2\\
&\vdots\\
n^2 &= (2+n-2)^2 = 2^2+(n-2)^2+2\cdot 2\cdot(n-2)\\
n^2 &= (1+n-1)^2 = 1^2+(n-1)^2+2\cdot 1\cdot(n-1)\\
n^2 &= n^2 \qquad \text{Προσθέτουμε κατά μέλη}
\end{aligned}$$

$$n\cdot n^2+n^2 = 2\left(1^2+2^2+...+n^2\right)+2\left[(n-1)\cdot 1+(n-2)\cdot 2+...+2(n-2)+1(n-1)\right]$$

Άρα αρκεί να δείξουμε

$$(1+2+...+n)+2\left[(n-1)\cdot 1+(n-2)\cdot 2+...+2(n-2)+1(n-1)\right]=1^2+2^2+...+n^2$$

Πράγματι

<u>αριστερό μέλος</u>

$$\begin{aligned}
&=(1+2+...+n)+\left[(n-1)\cdot 2+(n-2)\cdot 4+(n-3)\cdot 6+...+1(2n-2)\right]=\\
&=n+3(n-1)+5(n-2)+...+(2n-1)\cdot 1
\end{aligned}$$

<u>δεξιό μέλος</u>

Αφού $n^2 = n\cdot n = n+\underbrace{n+...+n}_{n-1} = n+\left[(n-1)+1\right]+\left[(n-2)+2\right]+...+\left[1+(n-1)\right]=$

$$=n+2\left[1+2+3+...+(n-1)\right],$$

έχουμε

$$\begin{aligned}
n^2 &= n+2\left[1+2+...+(n-1)\right]\\
(n-1)^2 &= n-1+2\left[1+2+...+(n-2)\right]\\
&\vdots\\
2^2 &= 2+2\cdot 1\\
1^2 &= 1 \qquad \text{Προσθέτουμε κατά μέλη}
\end{aligned}$$

$1^2+2^2+...+n^2 = n+3(n-1)+5(n-2)+...+(2n-1)\cdot 1$ = αριστερό μέλος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6.

6.1. ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ[204]

Θα περιγράψουμε εδώ πέντε μεθόδους υπολογισμού αθροισμάτων, αλγοριθμικά, όταν τα αθροίσματά μας έχουν μορφή διωνυμική ή με την αντίστοιχη q-μορφή τους. Ο υπολογισμός γίνεται στον προσωπικό μας υπολογιστή και το μεγάλο πλεονέκτημα των μεθόδων αυτών είναι ότι μας δίνουν το άθροισμα, αν υπάρχει, ενώ στην περίπτωση που δεν υπάρχει, μας αποδεικνύουν το γιατί. Τα προγράμματα που χρησιμοποιούνται μπορεί να τα βρει κανείς, δωρεάν, στην ηλεκτρονική διεύθυνση

http://www.cis.upenn.edu/ ~wilf/AeqB.html.

6.1.1. Μέθοδος της Sister Celine

Η μέθοδος αυτή δεν είναι η συντομότερη αλλά είναι πολύ σημαντική εξ αιτίας της πρωτοτυπίας των ιδεών της. Στηρίζεται στην εύρεση μιας αναδρομικής σχέσης μεταξύ υπεργεωμετρικών προσθετέων.
Έστω λοιπόν ότι μας δίδεται ένα άθροισμα της μορφής

$$f(n) = \sum_k F(n,k),$$

όπου η συνάρτηση F είναι διπλά υπεργεωμετρική, δηλαδή τα πηλίκα

$$\frac{F(n+1,k)}{F(n,k)}, \quad \frac{F(n,k+1)}{F(n,k)}$$

είναι ρητές συναρτήσεις των n και k. Σκοπός μας είναι να βρούμε ένα αναδρομικό τύπο για την f, που σημαίνει ότι πρέπει να βρούμε ένα αναδρομικό τύπο για την F (τον προσθετέο), έτσι ώστε να ικανοποιείται η σχέση

$$\sum_{i=0}^{I}\sum_{j=0}^{J}\alpha_{i,j}(n)F(n-j,k-i) = 0. \qquad (1)$$

Η διαδικασία είναι η εξής

Α) Σταθεροποιούμε τα I και J για μικρές τιμές, π.χ. $I=1$, $J=1$ και κάνουμε δοκιμές γι' αυτές τις τιμές.

Β) Έστω ότι προσδιορίζονται οι συντελεστές στον τύπο (1).

Γ) Διαιρούμε κάθε όρο της (1) δια $F(n,k)$ και κάνουμε τις απαραίτητες απλοποιήσεις, έτσι ώστε να παραμένουν συναρτήσεις των n και k.

Δ) Κάνουμε όλα τα κλάσματα ομώνυμα και διατάσσουμε τον αριθμητή ως προς τις κατιούσες δυνάμεις του k.

Ε) Εξισώνουμε τους συντελεστές των δυνάμεων του k με το 0, αφού έχουμε εκ ταυτότητας ισότητα με το 0. Αν το σύστημα που προκύπτει δεν έχει λύση, τότε ξεκινάμε πάλι την ίδια διαδικασία με μεγαλύτερες τιμές για το I μόνο, ή για το J μόνο, ή και για τα δύο μαζί.

Ο αλγόριθμος αυτός είναι αποτελεσματικός ακόμα και για μεγάλες τιμές των I και J. Στο πρόγραμμα Maple στο EKHAD για να τον χρησιμοποιήσουμε, καλούμε την ένδειξη Celine (f, ii, jj);.

---

[204] M. Petkovšek, H. Wilf, D. Zeilberger, *A=B,* A.K. Peters, Wellesley, Massachusetts, 1996 και I.Nemes, M.Petkovšek, H.Wilf, D.Zeilberger, *How to do Monthly Problems With Your Computer,* American Mathematical Monthly, Vol. 104, No 6, 1997, σελ. 505-519.

6.1.2. Αλγόριθμος Gosper

Ο αλγόριθμος αυτός λύνει το πρόβλημα αθροίσματος απείρων υπεργεωμετρικών όρων.

Έστω ότι $F(k)$ είναι ένας υπεργεωμετρικός όρος ως προς k, δηλαδή $\frac{F(k+1)}{F(k)}$ είναι ρητή συνάρτηση του k. Τότε, με τη μέθοδο αυτή βρίσκουμε ένα υπεργεωμετρικό όρο $G(k)$, αν υπάρχει, τέτοιο ώστε

$$F(k)=G(k+1)-G(k). \quad (2)$$

Αν δεν υπάρχει, μας το αποδεικνύει.

6.1.3. Αλγόριθμος Zeilberger ή ct

Μας δίνει μια αναδρομική σχέση για έναν υπεργεωμετρικό προσθετέο $F(n,k)$. Ο αλγόριθμος αυτός λύνει τα ίδια προβλήματα με αυτά που λύνει και ο αλγόριθμος Celine, αλλά είναι της μορφής

$$\sum_{j=0}^{d} \alpha_j(n) F(n+j,k) = G(n,k+1) - G(n,k) , \quad (3)$$

όπου $\frac{G}{F}$ είναι μια ρητή συνάρτηση.

Κατόπιν, παίρνοντας τα αθροίσματα και των δύο μελών της (3) ως προς κάποιο k, το άθροισμα δεξιά είναι τηλεσκοπικό, οπότε προκύπτει ο ζητούμενος αναδρομικός τύπος για το αρχικό μας άθροισμα.

6.1.4. Αλγόριθμος των Wilf και Zeilberger WZ

Ο αλγόριθμος αυτός είναι άμεσα μια ειδική περίπτωση και μια γενίκευση της μεθόδου ct. Εδώ, για το άθροισμα $\sum_k F(n,k)=1$, ο αναδρομικός τύπος που βρίσκουμε είναι

$$F(n+1,k)-F(n,k)=G(n,k+1)-G(n,k), \quad (4)$$

όπου $\frac{G}{F}$ ρητή συνάρτηση και το όνομά της είναι «το πιστοποιητικό απόδειξης της ταυτότητας».

Η (4) είναι ειδική περίπτωση της (3).

Ο αλγόριθμος αυτός μας δίνει λακωνικές αποδείξεις γνωστών ταυτοτήτων, όπως επίσης και νέες ταυτότητες κατά τη διαδικασία της απόδειξης.

6.1.5. Αλγόριθμος Petkovšek Hyper

Ο αλγόριθμος αυτός βρίσκει κλειστό τύπο για τη λύση $f(n)$ της εξίσωσης διαφορών με πολυωνυμικούς συντελεστές

$$\sum_{j=0}^{d} \alpha_j(n) f(n+j) = 0, \quad (5)$$

όπου υπάρχει λύση, ή αποδεικνύει ότι δεν υπάρχει, αν πράγματι δεν υπάρχει λύση. Το πλεονέκτημα της μεθόδου αυτής έναντι των προηγουμένων είναι ότι εγγυάται να μας δώσει τον μικρότερης τάξης αναδρομικό τύπο, πράγμα που δεν μας το εξασφαλίζουν οι προηγούμενες μέθοδοι.

6.1.6. Η *κατάλληλη υπεργεωμετρική* μορφή του προσθετέου $F(n,k)$, ο οποίος συμμετέχει στο άθροισμα $f(n) = \sum_{k=a(n)}^{b(n)} F(n,k)$, με το οποίο ασχολούμαστε, προκειμένου να ικανοποιείται κάποια συγκεκριμένη αναδρομική σχέση, πρέπει να έχει τη μορφή

$$F(n,k) = P(n,k) \frac{\prod_{i=1}^{I} (a_i n + b_i k + c_i)}{\prod_{j=1}^{J} (u_j n + v_j k + w_j)} x^n y^n,$$

όπου $P(n,k)$ είναι ένα πολυώνυμο του n και του k συγκεκριμένου βαθμού, τα όρια I και J είναι συγκεκριμένοι φυσικοί αριθμοί, τα a_i, b_i, u_j, v_j είναι συγκεκριμένοι ακέραιοι και τα c_i, w_j, x, y μπορούν να εξαρτώνται από παραμέτρους.

Για τον *κατάλληλο υπεργεωμετρικό προσθετέο,* έχουμε τα παρακάτω θεωρήματα

Θεώρημα 1
Εάν ο $F(n,k)$ είναι κατάλληλος υπεργεωμετρικός προσθετέος, τότε υπάρχει ένα φυσικός d, μια ρητή συνάρτηση $R(n,k)$ και πολυώνυμα $\{p_j(n)\}_{j=0}^{d}$, ανεξάρτητα του k, έτσι ώστε ο $F(n,k)$ να ικανοποιεί τη σχέση

$$\sum_{j=0}^{d} p_j(n) F(n+j,k) = G(n,k+1) - G(n,k),$$

όπου $G(n,k) = R(n,k) F(n,k)$, δηλαδή η $\frac{G}{F}$ είναι ρητή συνάρτηση των n, k.

Θεώρημα 2
Καμιά από τις παρακάτω διάσημες ακολουθίες δεν μπορούν να εκφρασθούν σε κλειστή υπεργεωμετρική μορφή

A) Το άθροισμα των κύβων, όπως και των τέταρτων και πέμπτων δυνάμεων, των διωνυμικών συντελεστών τάξης n.
B) Ο αριθμός των $3 \times n$ Λατινικών ορθογωνίων.

Γ) Ο αριθμός των προβολικών μετασχηματισμών (number of involutions) μεταξύ n γραμμάτων (δίνεται από τον τύπο $y=\frac{ax+b}{cx-a}$, όπου $a^2+bc\neq 0$).
Δ) Οι αριθμοί derangement.
Ε) Το άθροισμα των πρώτων από τους n διωνυμικούς συντελεστές τάξης pn, για $p>2$.

6.2. Θα παραθέσουμε παραδείγματα, παρμένα από άρθρα που έχουν εμφανισθεί κατά καιρούς στο περιοδικό The American Mathematical Monthly, των οποίων η αντιμετώπιση είναι συντομότερη και ασφαλέστερη με τη χρήση των παραπάνω αλγορίθμων.

Παράδειγμα 1
(Πρόβλημα 6407 του 1982, σελ. 703 και λύση στο Vol. 91, No 5, 1984, σελ.315-316).
Έστω το πολυώνυμο του Gauss $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}=\frac{F_{n,k}}{F_{k,k}}$, όπου $F_{n,k}=\left(q^n-1\right)\left(q^{n-1}-1\right)...\left(q^{n-k+1}-1\right)$.
Να αποδειχθεί η ταυτότητα

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{q^k}{1-q^k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(-1\right)^{k-1}}{1-q^k}q^{\frac{k(k+1)}{2}}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Λύση

Αν θέσουμε $F_{n,k}=\frac{\left(-1\right)^{k-1}}{1-q^k}q^{\frac{k(k+1)}{2}}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$, τότε $F_{n,k}$ είναι ένας υπεργεωμετρικός όρος και ως προς n και ως προς k, δηλαδή $\frac{F\left(n+1,k\right)}{F\left(n,k\right)}$ και $\frac{F\left(n,k+1\right)}{F\left(n,k\right)}$ είναι ρητές συναρτήσεις ως προς n και k. Συνεπώς, μπορούμε να εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο του Zeilberger ή ct. Αν ονομάσουμε $S\left(n\right)$ το δεξιό μέλος της (1), ο αλγόριθμος ct μας δίνει

$$S\left(n\right)-S\left(n-1\right)=\frac{q^n}{1-q^n}. \quad (2)$$

Παρατηρούμε ότι και το αριστερό μέλος της (1) συμφωνεί με τη (2) για κάθε n, οπότε αποδείξαμε την ταυτότητα.

Παράδειγμα 2
(Πρόβλημα Ε 3088 του 1985, σελ. 359 και λύση στο Vol. 94, No7, 1987, σελ. 685-687).
Δείξτε ότι για κάθε θετικό ακέραιο n

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k\cdot k!}{n^k}\binom{n}{k}=n.$$

Λύση

Αν θέσουμε $F(n,k)=\frac{k\cdot k!}{n^k}\binom{n}{k}$, τότε $F(n,k)=\frac{kn!}{n^k(n-k)!}$.

Επίσης

$$F(n,k+1)=\frac{(k+1)n!}{n^{k+1}(n-k-1)!}=\frac{(n-k)F(n,k)}{n}+\frac{(n-k)F(n,k)}{nk},$$

οπότε $F(n,k)=-\frac{nF(n,k+1)}{k+1}+\frac{nF(n,k)}{k}$, όπου $-\frac{nF(n,k)}{k}=G(n,k)$ και το οποίο μας δίνει αμέσως ο αλγόριθμος Gosper. Ο αλγόριθμος αυτός μπορεί να εφαρμοσθεί καθώς ο $F(n,k)$ είναι υπεργεωμετρικός όρος, αφού

$$\frac{F(n,k+1)}{F(n,k)}=\frac{(k+1)(n-k)}{kn},$$

είναι δηλαδή μια ρητή συνάρτηση του k. Συνεπώς $F(n,k)=G(n,k+1)-G(n,k)$ και αθροίζοντας από $k=1$ έως n, παίρνουμε το αποτέλεσμα

$$\sum_{k=1}^{n}F(n,k)=\sum_{k=1}^{n-1}F(n,k)+F(n,n)=G(n,n)-G(n,1)+F(n,n)=n.$$

Παράδειγμα 3

(Πρόβλημα Ε 3065 του 1984, σελ. 649 και λύση στο Vol. 94, No 4, 1987, σελ. 378-380).

Αν $n,k\in\mathbb{N}$ και $k\geq n+1$, να υπολογισθεί το άθροισμα

$$\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^j}{j+1}\binom{k}{j}\binom{k-1-j}{n-j}.$$

Λύση

Έστω $S(n)$ το ζητούμενο άθροισμα. Εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο ct, παίρνουμε

$$S(n)+S(n+1)=\frac{\binom{k}{n+1}}{n+2}.$$

Ο αναδρομικός αυτός τύπος, διαδοχικά, μας δίνει

$$S(n)=\frac{\binom{k}{n}}{n+1}-\frac{\binom{k}{n-1}}{n}+\frac{\binom{k}{n-2}}{n-1}-\ldots+(-1)^n S(0)=$$

$$=(-1)^n\left[\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^j}{j+1}\binom{k}{j}+S(0)\right]=(-1)^n\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^j}{j+1}\binom{k}{j}. \quad (1)$$

Τώρα μένει να υπολογίσουμε το άθροισμα της (1). Ο γενικός όρος $F(n,k)$ του αθροίσματος (1) είναι υπεργεωμετρικός, οπότε μπορούμε να εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο Gosper. Θα έχουμε

$$\sum_{j=0}^{n}F(n,j)=G(n,j+1)-G(n,0).$$

Τελικά, ο αλγόριθμος Gosper θα μας δώσει
$$S(n)=\frac{1}{k+1}\left[\binom{k}{n+1}+(-1)^n\right].$$

Παράδειγμα 4
(Πρόβλημα Ε 3352 του 1989, σελ. 838 και λύση στο Vol. 98, No 4, 1991, σελ. 369-370).
Δείξτε ότι $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!\left(n^4+n^2+1\right)}=\frac{e}{2}$.

Λύση
Επειδή $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots$, για $x=1$, έχουμε
$$\frac{e}{2}=\frac{1}{2}\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots\right)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}.$$
Άρα, αρκεί να αποδείξουμε ότι $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{n!\left(n^4+n^2+1\right)}-\frac{1}{2n!}\right)=0$.
Αν θέσουμε
$$F(n)=\frac{1}{n!\left(n^4+n^2+1\right)}-\frac{1}{2n!},$$
τότε ο αλγόριθμος Gosper μας δίνει
$$(1)\qquad F(n)=S_{n+1}-S_n \quad \text{με} \quad S_n=\frac{n^2}{2n!\left(n^2-n+1\right)}.$$
Συνεπώς, αν αθροίσουμε τη σχέση (1) ως προς n, από 0 έως $+\infty$, παίρνουμε
$$S_n-S_0=0.$$

Παράδειγμα 5
(Πρόβλημα 10332 του 1993, σελ. 796 και λύση στο Vol. 103, No 8, 1996, σελ. 702-703).
Εάν n, k, ακέραιοι με $0\le k\le n$, δείξτε ότι
$$\binom{2n}{n+k}=\sum_j 2^{n-k-2j}\binom{n}{j}\binom{n-j}{j+k}.$$

Λύση
Αρκεί να αποδείξουμε ότι
$$\sum_j 2^{n-k-2j}\frac{\binom{n}{j}\binom{n-j}{j+k}}{\binom{2n}{n+k}}=1.$$

Προφανώς, θα χρησιμοποιήσουμε τη WZ μέθοδο. Δηλαδή, αν $\sum_j F(n,j)=1$, αρκεί να βρούμε τη σχέση

$$F(n+1,k,j)-F(n,k,j)=G(n,k,j+1)-G(n,k,j).$$

Το «πιστοποιητικό απόδειξης» που μας παρέχει η μέθοδος αυτή είναι

$$\frac{G}{F}(n,k,j)=\frac{4j(j+k)}{(2j+k-n-1)(2n+1)}.$$

Παράδειγμα 6
(Πρόβλημα 3258 του 1988, σελ. 259 και λύση στο Vol. 96, No 7, 1989, σελ.651-652).
Δείξτε ότι

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}2^{n-j}\binom{j}{\left\lfloor \frac{j}{2}\right\rfloor}=\binom{2n+1}{n}, \quad (1)$$

όπου $\lfloor x \rfloor$ είναι το ακέραιο μέρος του x.

Λύση

Ονομάζουμε τον γενικό όρο του αθροίσματος της (1), $F\left(n,j,\left\lfloor \frac{j}{2}\right\rfloor\right)$. Αρχικά θα χρειαστεί ο μετασχηματισμός

$$\sum_j F\left(n,j,\left\lfloor \frac{j}{2}\right\rfloor\right)=\sum_j \{F(n,2k,k)+F(n,2k+1,k)\}. \quad (2)$$

Αν $F(n,k,m)$ είναι υπεργεωμετρικός όρος, τότε ο όρος $F\left(n,j,\left\lfloor \frac{j}{2}\right\rfloor\right)$ δεν είναι υπεργεωμετρικός. Θα είναι όμως ένας από τους $F(n,2k,k)$ και $F(n,2k+1,k)$.
Τότε, η (1) μετατρέπεται στην ισοδύναμή της

$$\sum_{j=0}^{n}\frac{n+2}{2j+1}\binom{n}{2j}2^{n-2j-1}\binom{2j+1}{j}=\binom{2n+1}{n}. \quad (3)$$

Τώρα, μπορούμε να εφαρμόσουμε τη WZ μέθοδο, αφού πρώτα διαιρέσουμε την (3) με τον όρο $\binom{2n+1}{n}$. Το «πιστοποιητικό απόδειξης» που μας παρέχει η μέθοδος αυτή είναι

$$\frac{G}{F}(n,j)=\frac{4j(j+1)}{(2n+3)(2j-n-1)}.$$

Παράδειγμα 7
(Πρόβλημα 10388 του 1994, σελ. 474 και λύση στο Vol. 104, No 5, 1997, σελ. 459-460).
Να υπολογισθεί το άθροισμα

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{\frac{n-3}{4}-\frac{k}{2}+p}{2p},\ (1)$$

αν n και p είναι θετικοί ακέραιοι.

Λύση

Έστω $F(n,k,p)$ ο γενικός όρος του αθροίσματος.. Παρατηρούμε ότι ο $F(n,k,p)$ δεν είναι υπεργεωμετρικός όρος, καθώς ο συντελεστής του k δεν είναι ακέραιος. Άρα χρειάζεται να τον μετασχηματίσουμε. Έστω $S(n,p)$ το ζητούμενο άθροισμα. Θέτουμε

$$S_1(n,p)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{2k}\binom{\frac{n-3}{4}-k+p}{2p} \text{ και } S_2(n,p)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{2k+1}\binom{\frac{n-3}{4}-k-\frac{1}{2}+p}{2p},\ (2)$$

έτσι ώστε $S(n,p)=S_1(n,p)+S_2(n,p)$. Τώρα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον αλγόριθμο του Zeilberger ή ct. O αλγόριθμος αυτός μας δίνει τον αναδρομικό τύπο

$$\begin{aligned}&(n-4p-7)(n-4p-5)(n-4p-3)(n-4p-1)S_i(n,p)-\\&-16(n-4p-7)(n-4p-5)(5n+4np-8p^2-20p-14)S_i(n,p+1)+\\&+512(n-2p-3)(n-2p-4)(2p+3)(p+2)S_i(n,p+2)=0, \qquad (3)\end{aligned}$$

όπου $i\in\{1,2\}$, τον ίδιο δηλαδή και για τα δύο αθροίσματα της (2).

O (3) όμως ικανοποιεί και το $S(n,p)$, οπότε ο Αλγόριθμος Hyper μας δίνει

$$S(n,p)=C_1(n)\frac{\binom{\frac{n-3}{4}}{p}\binom{\frac{n-1}{4}}{p}}{(-4)^p\binom{\frac{-1}{2}}{p}\binom{\frac{n-2}{2}}{p}}+C_2(n)\frac{\binom{\frac{n-3}{4}}{p}\binom{\frac{n-1}{4}}{p}}{4^p\binom{\frac{n-1}{2}}{p}}.\ (4)$$

Χρειαζόμαστε τις αρχικές συνθήκες $S(n,0)$ και $S(n,1)$ για να υπολογίσουμε τα $C_1(n)$ και $C_2(n)$. Εφαρμόζοντας πάλι τον αλγόριθμο ct, παίρνουμε

$$S(n,0)=2^n \text{ και } S(n,1)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{\frac{n-3}{4}-\frac{k}{2}+1}{2}=\frac{n-3}{32}2^n,$$

οπότε $C_1(n)=0$ και $C_2(n)=2^n$,

συνεπώς

$$S(n,p)=\frac{2^n}{4^p}\frac{\binom{\frac{n-3}{4}}{p}\binom{\frac{n-1}{4}}{p}}{\binom{\frac{n-1}{2}}{p}}.$$

Παράδειγμα 8
(Πρόβλημα 10403 του 1994, σελ. 792 και λύση στο Vol. 104, No 4, 1997, σελ. 368).
Να ορίσετε ακολουθία (y_n) η οποία δίνεται από τον αναδρομικό τύπο

$$y_{n+1} = (2n+3)y_n - 2ny_{n-1} + 8n, \text{ για } n \ge 1 \text{ και } y_0 = 1, \; y_1 = 3.$$

Κατόπιν, βρείτε ένα ασυμπτωτικό τύπο για την y_n.

Λύση
Ο Αλγόριθμος Hyper μας δίνει

$$y_n = 2^n n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1 + 8\sum_{m=1}^{k-1} m}{2^k k!} = 2^n n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1+4k(k-1)}{2^k k!} = 2^{n+1} n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k k!} - 2n - 1.$$

Συνεπώς, η y_n είναι ασυμπτωτική στο $2^{n+1} n! \sqrt{e}$.

Παράδειγμα 9
(Πρόβλημα 3439 του 1991, σελ.437 και λύση στο Vol. 100, No 2, 1993, σελ.188).
Εάν M και N είναι φυσικοί αριθμοί, δείξτε ότι

$$\binom{M+N}{M} = \sum_{0 \le \alpha \le \frac{M-1}{2}} \binom{M-\alpha-1}{\alpha}\binom{N+\alpha}{2\alpha+1} + \sum_{0 \le \alpha \le \frac{M}{2}} \binom{M-\alpha}{\alpha}\binom{N+\alpha}{2\alpha}. \quad (1)$$

Λύση
Εάν $M = 0$ ισχύει η ισότητα αφού $1 = 1$. Εάν $M > 0$, το δεξιό μέλος της (1) μετατρέπεται στο υπεργεωμετρικό άθροισμα

$$S(N) = \sum_{\alpha=0}^{M-1} \frac{MN - 2\alpha N + \alpha M + M - \alpha}{(2\alpha+1)(M-\alpha)} \binom{M-\alpha}{\alpha}\binom{N+\alpha}{2\alpha}.$$

Ο αλγόριθμος ct μας δίνει τον αναδρομικό τύπο

$$(N+1)S(N+1) - (M+N+1)S(N) = 0,$$

ο οποίος μας δίνει $S(N) = \binom{M+N}{M}$.

Αφού η (1) αληθεύει για $N = 0$, η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Παράδειγμα 10
(Πρόβλημα 10223 του 1992, σελ. 462 και λύση στο Vol. 104, No 1, 1997, σελ. 70-71).
Για $p \in \mathbb{R}$, $q = 1 - p$ και n θετικός ακέραιος, δείξτε ότι

$$\sum_{k=n}^{2n-1} \binom{k-1}{n-1}\left(p^n q^{k-n} + p^{k-n} q^n\right) = 1. \quad (1)$$

Λύση

Θέτουμε $S_n(p)=\sum_{k=n}^{2n-1}\binom{k-1}{n-1}p^n(1-p)^{k-n}$. Τότε, το άθροισμα της (1) ισούται με $S_n(p)+S_n(1-p)$. Εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο ct, παίρνουμε

$$S_{n+1}(p)-S_n(p)=\frac{2p-1}{2}\left[p(1-p)\right]^n\binom{2n}{n}. \quad (2)$$

Αν στη θέση του p θέσουμε $p-1$, η (2) γίνεται

$$S_{n+1}(1-p)-S_n(1-p)=\frac{1-2p}{2}\left[p(1-p)\right]^n\binom{2n}{n}. \quad (3)$$

Οι σχέσεις (2) και (3) μας δίνουν άθροισμα 0, που σημαίνει ότι

$$S_{n+1}(p)+S_{n+1}(1-p)=S_n(p)+S_n(1-p), \quad (4)$$

δηλαδή το άθροισμα (4) είναι σταθερό, ανεξάρτητο του n. Συνεπώς, για $n=1$, προκύπτει η (1).

Παράδειγμα 11

(Πρόβλημα 10494 του 1996, σελ. 74 και λύση στο Vol. 104, No 4, 1984, σελ. 371-372. Το αντιμετωπίσαμε στο Κεφάλαιο 2, παράγραφο 2.1.3 ως Παράδειγμα 5).

Για κάθε θετικό ακέραιο n, υπολογίστε το άθροισμα

$$\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\frac{\binom{4n}{2k}}{\binom{2n}{k}}. \quad (1)$$

Λύση

Εάν $F(n,k)$ είναι ο γενικός όρος του αθροίσματος, ο αλγόριθμος Gosper μας δίνει

$$(2)\quad F(n,k)=S_{k+1}-S_k,\ \text{με}\ S_k=\frac{(2k-1)F(n,k)}{2(1-2n)}.$$

Αθροίζοντας τη σχέση (2) από $k=0$ έως $k=2n-1$, το άθροισμα (1) ισούται με

$$S_{2n}-S_0+F(n,2n)=\frac{1}{1-2n}.$$

Παράδειγμα 12

(Πρόβλημα 10466 του 1995, σελ. 654 και λύση στο Vol. 104, No 6, 1984, σελ. 575-576).

Αν $x\in\mathbb{C}$ και $n\in\mathbb{N}$, δείξτε την ταυτότητα

$$(-4)^n\sum_{j=0}^{n}\binom{x+\frac{1}{2}}{j}\binom{n-1-x}{2n-j}=\binom{2n}{n}\sum_{j=0}^{n}\binom{x+j}{2j}\binom{x-j}{2n-2j}. \quad (1)$$

Λύση

Έστω $S(n)$ το αριστερό μέλος της (1) και $T(n)$ το δεξιό μέλος της. Τότε ο αλγόριθμος ct μας δίνει τους αναδρομικούς τύπους για τα $S(n)$ και $T(n)$, αντίστοιχα,

$$(1+2n)S(n)-2(1+n)S(n+1)=\frac{(1+3n-2x)}{1+n}\binom{2x}{2n}\binom{2n}{n} \quad (2)$$

και

$$\begin{aligned}&2(1+n)(2+n)^2(1+3n-2x)T(n+2)-\\&-(1+n)\left[6+41n+67n^2+30n^3-x\left(28+98n+68n^2-40x-56nx+16x^2\right)\right]T(n+1)+\\&+2(1+n)(4+3n-2x)(x-n)(2x-2n-1)T(n)=0 \qquad (3)\end{aligned}$$

Στη σχέση (3), αν αντικαταστήσουμε το $T(n+2)$ με το ίσον του από την (1), καταλήγουμε στον ίδιο αναδρομικό τύπο με εκείνο του $S(n)$, τάξης 2. Άρα, αρκεί για $n=0$ και για $n=1$ να έχουμε ισότητα, πράγμα που συμβαίνει, συνεπώς ισχύει η (1). Επίσης, από την (1) παίρνουμε το άθροισμα

$$S(n)=\frac{\binom{2n}{n}}{4^n}\left[1-(2x+1)\sum_{k=0}^{n-1}4^k\frac{3k+1-2x}{(k+1)(2k+1)}\binom{2x}{2k}\right].$$

ΓΕΝΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. T.J.I'A. Bromwich, *An Introduction to the Theory of Infinite Series,* Third Edition, Chelsea Publishing Company, New York, N.Y., 1991.
2. G. Chrystal, *Algebra, An Elementary Text-book, Part I, II*, Seventh Edition, Chelsea Publishing Company, New York, N.Y.,1964.
3. C. Durell and A. Robson, *Advanced Algebra,* G. Bell and Sons, LTD, London, 1958.
4. C.H. Edwards Jr, *The Historical Development of the Calculus,* Second Printing, Springer-Verlag, New York, 1982.
5. W.L. Ferrar, *Higher Algebra,* Oxford at the Clarendon Press, 1958
6. H.S. Hall and S.R. Knight, *Higher Algebra,* S. Chand & Company LTD, New Delhi, 1991.
7. T.L. Heath, *A History of Greek Mathematics,* Oxford University Press, 1921.Vol. I, II.
8. E.T. Whittaker and G.N. Watson, *A Course of Modern Analysis, Fourth Edition,* Cambridge, at the University Press, 1927.