Μαθηματική Αναλογία: Μια Ιστορική Αναδρομή Με Διδακτικές Προεκτάσεις

Μαριάννα Ψιστάκη

Επιβλέπων Καθηγητής:

Χρήστος Κουρουνιώτης

Μεταπτυχιακή Εργασία

Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Μαθηματικά και Εφαρμογές τους

Κατεύθυνση: Μαθηματικά για την Εκπαίδευση

Πανεπιστήμιο Κρήτης

Οκτώβριος, 2017

Στους γονείς μου,
Γιώργο & Ουρανία και
στον αδελφό μου Αντώνη

«Η Γεωμετρία θα οδηγήσει την ψυχή μου στην αλήθεια…»

Πλάτωνας (Πολιτεία VII)

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Χρήστο Κουρουνιώτη, τόσο για την αμέριστη βοήθεια του προς την συγγραφή της παρούσας εργασίας όσο και για την στήριξη και ενθάρυνση καθόλη την διάρκεια της εργασίας. Ευχαριστώ επίσης τους καθηγητές κ. Πάρη Πάμφιλο και κ. Γιάννη Πλατή τόσο για τις συμβουλές τους, όσο και γιατί με τίμησαν με την συμμετοχή τους στην τριμελή επιτροπή αξιολόγησης της εργασίας μου. Τέλος αισθάνομαι ιδιαίτερη ανάγκη να ευχαριστήσω τους γονείς μου Γιώργο και Ουρανία, καθώς και τον αγαπημένο μου αδελφό Αντώνη για την βοήθεια, την κατανόηση αλλά κυρίως την διαρκή στήριξη που μου έδωσαν σε όλο αυτό το χρονικό διάστημα.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Εισαγωγή **6**

1. Προ-ευκλείδεια Εποχή-Ευκλείδης **8**

2. Ιστορική αναδρομή **15**

2.1 Η έννοια της αναλογίας

2.2 Η ιστορική εξέλιξη της έννοιας

2.2α΄ Βιβλία V, VI (Ευκλείδη Στοιχεία)

2.2β΄ Μεσαίωνας 500-1400-Μελέτη λόγων

2.2γ΄ Σύγχρονη Εποχή

3.Θεωρητικό πλαίσιο **42**

4. Σχεδιασμός και Μεθοδολογία της Έρευνας **51**

5.Παρουσίαση και ανάλυση των αποτελεσμάτων **61**

6.Συμπεράσματα **89**

7.Προτάσεις για μελλοντική έρευνα **92**

8.Βιβλιογραφία **94**

Εισαγωγή

Η εισαγωγή των μαθητών στην έννοια της μαθηματικής αναλογίας ξεκινάει πλέον ήδη από την Στ' Δημοτικού μέχρι και τις τελευταίες τάξεις του Λυκείου. Στην Β' Λυκείου στο μάθημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας οι μαθητές έρχονται σε επαφή με τις γεωμετρικές εφαρμογές της έννοιας, όπως για παράδειγμα το Θεώρημα του Θαλή. Πάνω σε αυτή την προσπάθεια της εισαγωγής των μαθητών στην γεωμετρική σκοπιά της μαθηματικής αναλογίας εγείρονται διάφορα ερωτήματα. Σε τι βαθμό κατανοούν οι μαθητές της Β' Λυκείου την έννοια της μαθηματικής αναλογίας και των εφαρμογών της στα πλαίσια του μαθήματος της Ευκλείδειας Γεωμετρίας; Είναι σε θέση να εφαρμόσουν για παράδειγμα το Θεώρημα του Θαλή σε προβλήματα όπου δεν αναφέρεται το όνομα του Θεωρήματος ή απλώς εφαρμόζουν από συνήθεια ή αποστήθιση κάποιο τρόπο επίλυσης τέτοιων γεωμετρικών προβλημάτων; Διαχωρίζουν τις έννοιες του λόγου τμημάτων και της αναλογίας τμημάτων;

Στην παρούσα εργασία επιχειρείται, αρχικά, μια ιστορική αναδρομή της θεμελίωσης της έννοιας της μαθηματικής αναλογίας από γεωμετρική σκοπιά καθώς και της εξέλιξης της έννοιας μέχρι την σύγχρονη εποχή. Ουσιαστικά η ιστορική αναδρομή ξεκινάει από τον Ευκλείδη (γνωστός και ως Θεμελιωτής ή αλλιώς Στοιχειωτής της Γεωμετρίας), στο έργο του «Στοιχεία» στο οποίο περιέχεται και ο ορισμός της θεμελίωσης της έννοιας που δόθηκε από τον Εύδοξο τον Κνίδιο.

Στην πρώτη ενότητα παρουσιάζεται συνοπτικά η γεωμετρική αντίληψη των ανθρώπων πριν τον Ευκλείδη, καθώς και τα στοιχεία που έχουν διασωθεί για την ζωή του.

Στην δεύτερη ενότητα, ορίζονται οι έννοιες λόγος και αναλογία τμημάτων, οι οποίες όπως θα δούμε και παρακάτω συγχέονται από τους μαθητές. Επιπλέον, επιχειρείται όπως αναφέρθηκε και παραπάνω μια ιστορική αναδρομή της έννοιας από την αρχαία μέχρι την σύγχρονη εποχή (τομές Dedekind).

Στην τρίτη ενότητα, επιχειρείται περιγραφή τριών από τις θεωρίες που έχουν αναπτυχθεί και σχετίζονται με την μάθηση και διδασκαλία μαθηματικών εννοιών. Οι θεωρίες αυτές βοηθούν τόσο στην ερμηνεία

της σκέψης των μαθητών πάνω στις μαθηματικές έννοιες, όσο και στον σχεδιασμό διδακτικών δραστηριοτήτων για την αντιμετώπιση προβλημάτων κατανόησης των μαθηματικών εννοιών.

Στις τελευταίες ενότητες περιγράφεται η ποιοτική έρευνα που έγινε σε μαθητές Β' Λυκείου, στα πλαίσια του μαθήματος «Ευκλείδεια Γεωμετρία» στο 7^{ο} κεφάλαιο με αντικείμενο την κατανόηση της έννοιας της μαθηματικής αναλογίας. Το ουσιαστικότερο μέρος της έρευνας αποτελεί η διεξαγωγή προσωπικών συνεντεύξεων που έγιναν σε δύο μαθητές, αφού μελετήθηκαν οι απαντήσεις ορισμένων μαθητών οι οποίοι συμπλήρωσαν ένα φύλλο δραστηριοτήτων. Επιχειρείται αναλυτική περιγραφή των συνεντεύξεων προς την εξαγωγή συμπερασμάτων της έρευνας.

Τέλος παρουσιάζονται προτάσεις προς μελλοντική διερεύνηση του θέματος.

1.Προευκλείδεια Εποχή-Ευκλείδης

Η Γεωμετρία πριν τον Ευκλείδη

Στην καθημερινότητά μας παρατηρούμε μια πληθώρα μορφών, που εδώ και αιώνες τις αποκαλούμε γεωμετρικές, αντιλαμβανόμενοι ένα είδος γεωμετρικής φύσης που μας περιβάλλει. Αυτή μας η αντίληψη ενισχύεται σήμερα και από την επιστήμη, η οποία μας αποκαλύπτει ότι παντού μέσα στην φύση υπάρχει μία "Γεωμετρία", η τάξη της οποίας περιέχεται στη δομή όλων των πραγμάτων, από τα μόρια και τους κρυστάλλους μέχρι τους γαλαξίες, δηλαδή από τον μικρόκοσμο μέχρι τον μακρόκοσμο.

Σύμφωνα με τον Katz (2013), στους αρχαιότερους χρόνους, τότε που η επιστήμη ήταν ένα με την θρησκεία και τη μαγεία, η βασική γνώση ήταν συγκεντρωμένη στα χέρια των ιερέων. Τα μαθηματικά (αριθμητική και γεωμετρία) εκείνης της εποχής ήταν βασικό μέρος της μυστικής γνώσης και συχνά συνδεόταν με τον μυστικισμό. Αργότερα, η αρμονία των γεωμετρικών δομών θεωρήθηκε έκφραση ενός "θεϊκού σχεδίου" που διέπει τον κόσμο (σύμφωνα με την γνωστή ρήση των Πυθαγορείων "Αεί ο Θεός ο Μέγας γεωμετρεί").

Βέβαια για να μπορέσει ο άνθρωπος να διαχειριστεί και να μελετήσει αυτές τις μορφές, απαραίτητη είναι η ιδεατή αναπαράστασή τους. Για παράδειγμα, ο κύκλος (ένα από τα αρχαιότερα σύμβολα που χάραξε ο άνθρωπος) μπορεί να θεωρηθεί ως ιδεατή αποτύπωση του ηλιακού δίσκου. Η (μαθηματική) σφαίρα παραπέμπει στον ουράνιο θόλο. Στην αρχαία Αίγυπτο η γεωμετρία χρησιμοποιήθηκε στην οριοθέτηση και μέτρηση των γαιών, από όπου και ο όρος "γεωμετρία". Αυτό αποτελούσε απαραίτητο στοιχείο μετά τις ετήσιες πλημμύρες του ποταμού Νείλου, ώστε να αποδοθούν και πάλι οι ιδιοκτησίες στους

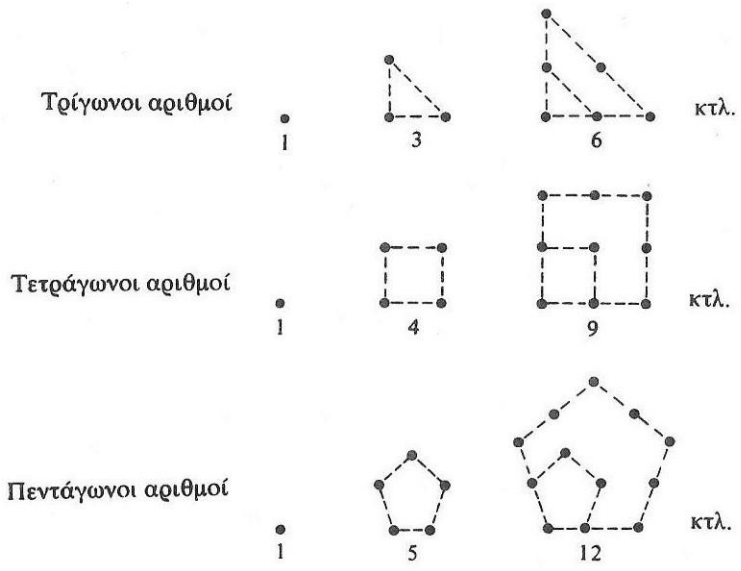
κατόχους τους και να μετρηθούν οι φορολογικές υποχρεώσεις τους στους Φαραώ. Στην συνέχεια πιο προχωρημένοι υπολογισμοί (εμπειρικοί και πρακτικοί) χρησιμοποιήθηκαν στην οικοδόμηση των πυραμίδων. Η γεωμετρία κάλυπτε ανάλογες πρακτικές και σε άλλους λαούς (Βαβυλωνίους, Κινέζους), όπως μαρτυρούν σύγχρονες αρχαιολογικές ανακαλύψεις.

Σε κάθε περίπτωση, αυτή η κατασκευή πυραμίδων και άλλων τεχνικών έργων φανερώνει μια αδιαμφισβήτητη πρόοδο, η οποία όμως παρέμεινε εμπειρική. Για παράδειγμα, τα διάφορα εμβαδά υπολογίζονταν εντελώς πρακτικά, χωρίς κάποιο συγκεκριμένο τύπο ή αλγόριθμο στο κάθε είδος. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι οι πολιτισμοί της Αιγύπτου και της Βαβυλωνίας, δεν έδωσαν στους Έλληνες, με τους οποίους ήρθαν σε επαφή, καμία θεωρητική θεμελίωση, από ότι μια τεράστια συλλογή συγκεκριμένων μαθηματικών δεδομένων σε μορφή υπολογισμών ή απλών καταγραφών.

Από την άλλη μεριά, σύμφωνα με τον Katz, η μελέτη της γεωμετρίας και των μαθηματικών γενικότερα, πέρα από τις πρακτικές της ανάγκες, ως μια πνευματική αναζήτηση, ως θεωρητικό πρόβλημα, αποτελεί κατάκτηση του αρχαίου ελληνικού πνεύματος. Οι αρχαίοι Έλληνες ήταν εκείνοι που άρχισαν να αναζητούν το “γιατί” και το “πώς” των φαινομένων. Ο Θαλής, φιλόσοφος και γεωμέτρης, ήταν εκείνος που αναζήτησε την θεωρητική επεξήγηση των εμπειρικών δεδομένων των Αιγυπτίων. Φαίνεται να ήταν ο πρώτος που συνέλαβε και εφάρμοσε την ιδέα της απόδειξης. Με την χρήση όμοιων τριγώνων κατάφερε να υπολογίσει με ακρίβεια το ύψος των πυραμίδων που μέχρι τότε όπως είπαμε γινόταν εμπειρικά. Χάρη στην πρόβλεψη της έκλειψης του ηλίου το 585 π.Χ κατέκτησε πρόσωπο μυθικό.

Ο Θαλής αναμφισβήτητα ενέπνευσε τους Πυθαγορείους και απέδειξε πολλά θεωρήματα, τα οποία ο Ευκλείδης συμπεριέλαβε στο έργο του “Στοιχεία”.

Μετά τον Θαλή, σταθμός στην εξέλιξη της φιλοσοφικής και μαθηματικής σκέψης, αποτελεί το έργο του Πυθαγόρα και της σχολής του. Ο Πυθαγόρας έδωσε στην αριθμητική την μορφή θεωρητικής επιστήμης στην οποία στηρίχθηκε και η φιλοσοφική του διδασκαλία. Οι αριθμοί μπορούν να χωριστούν σε τριγωνικούς και τετραγωνικούς και άλλους, των οποίων οι συνδυασμοί προσφέρουν αξιόλογα συμπεράσματα. Αν λοιπόν φανταστούμε τους αριθμούς σαν τελείες ή πετραδάκια και τους τοποθετήσουμε σε κατάλληλους σχηματισμούς τότε μπορούμε να πάρουμε μερικές μορφές όπως οι παρακάτω:



Σχήμα 1

Στην ίδια σχολή μαζί με τη φιλοσοφία, την αριθμητική καλλιεργήθηκε και η γεωμετρία, η απόδειξη του Πυθαγόρειου Θεωρήματος, η μελέτη κανονικών σχημάτων και στερεών, είναι ορισμένες από τις γεωμετρικές ενασχολήσεις της.

Τα Μαθηματικά, όρος που οφείλεται στους Πυθαγόρειους, σχετίζονται με τις φιλοσοφικές τους αναζητήσεις. Οι ίδιοι αναζητώντας την συμμετρία και *αρμονία του κόσμου* (Πυθαγορικός όρος), αναγνώρισαν την γεωμετρική δομή μέσα σε αυτόν. Η δομή αυτή συνδέθηκε όμως με το *άρρητο* στοιχείο που δεν κατάφερε να γίνει τότε αντιληπτό από τους ανθρώπους.

Η Γεωμετρία εξελίσσεται σημαντικά και στην Ακαδημία του Πλάτωνα. Την σημασία που είχε η Γεωμετρία για τον ίδιο τον Πλάτωνα και τους μαθητές του περιγράφει με τρόπο απόλυτο η επιγραφή, η οποία κοσμούσε την είσοδο της Ακαδημίας, το περίφημο "Μηδείς αγεωμέτρητος εισίτω". Στην Ακαδημία του Πλάτωνα έδρασαν διάσημοι μαθηματικοί όπως ο Εύδοξος ο Κνίδιος, ο Θεαίτητος ο Αθηναίος και πολλοί άλλοι, ενώ δεν φαίνεται να είχε ιδιαίτερη συμβολή ο ίδιος ο Πλάτων.

Λίγα λόγια για τον Ευκλείδη

Οι T.L. Heath (1956) και V.J Katz (2013) αναφέρουν ότι Ευκλείδης θεωρείται ο διασημότερος μαθηματικός όλων των εποχών και το όνομά του έχει ταυτιστεί με την Γεωμετρία. Στην αρχαιότητα ήταν γνωστός ως Γεωμέτρης ή αλλιώς Στοιχειωτής. Τα στοιχεία που διαθέτουμε για τη ζωή και την δράση του είναι περιορισμένα. Ο ακριβής χρόνος γέννησης και θανάτου του καθώς και ο τόπος γέννησής του παραμένουν άγνωστα.

Ο Ευκλείδης φαίνεται να φοίτησε στην Ακαδημία του Πλάτωνα ως μαθητής των μαθητών του και μεγαλύτερος από τον Αρχιμήδη και τον Ερατοσθένη τον Κυρρηναίο. Έζησε στη Αλεξάνδρεια όπου συνέθεσε και το πιο διάσημο από τα έργα του, *τα Στοιχεία*. Η ακμή του Ευκλείδη χρονολογείται περί το 300 π.Χ.

Τα Στοιχεία του Ευκλείδη και η δομή τους

Σύμφωνα με τους T.L. Heath (1956), V.J Katz (2013), Ε.Σ. Σταμάτη κ.ά τα Στοιχεία αποτελούν το σπουδαιότερο έργο του Ευκλείδη και διαχωρίζονται σε 13 βιβλία[1]. Αξίζει να σημειωθεί ότι υπήρξαν έργα με τίτλο "Στοιχεία" τα οποία γράφτηκαν από άλλους μαθηματικούς πολύ πριν τον Ευκλείδη. Για παράδειγμα, ο Ιπποκράτης ο Χίος (470-410 π.Χ) είχε γράψει βιβλίο με τίτλο "Στοιχεία" σύμφωνα με τον Εύδημο στο έργο του "Ιστορία της Γεωμετρίας» και πολλοί άλλοι.

Το μοναδικό μαθηματικό βιβλίο το οποίο έχει γραφεί πριν από τον Ευκλείδη και έχει διασωθεί ολόκληρο είναι εκείνο του Αυτόλυκου του Πιτάνη, το οποίο έχει γραφεί κατά το τέλος του 4^{ου} π.Χ. αιώνα. Ο Αυτόλυκος ήταν σύγχρονος και γνωστός του Ευκλείδη. Ο Ευκλείδης είχε πολύ καλή γνώση του έργου του Αυτόλυκου, παρόλα αυτά η δομή και ο τρόπος διεξαγωγής των αποδείξεων των προτάσεων ήταν πολύ διαφορετικός, από εκείνον που χρησιμοποίησε στα "Στοιχεία" ο Ευκλείδης.

Σύμφωνα με τον Πρόκλο, ο Ευκλείδης ήταν ο τελευταίος που έγραψε βιβλίο με τίτλο "Στοιχεία". Σχεδόν όλοι οι ιστορικοί των επιστημών θεωρούν ότι ο λόγος της μη διάσωσης των υπόλοιπων έργων με το ίδιο όνομα, είναι ότι κανένα από εκείνα τα έργα δεν μπορούσε να πλησιάσει το μεγαλείο και την μοναδικότητα των "Στοιχείων" του Ευκλείδη.

Σύμφωνα με τον Πλάτωνα, η μαθηματική γνώση αποκτιέται μόνο με συλλογισμούς. Δηλαδή δεν υπάρχουν ιδιότητες που μπορούμε να τις μάθουμε από τα σχήματα. Θα πρέπει να αποδεικνύουμε με ακρίβεια.

[1] Ορισμένοι υποστηρίζουν ότι τα Στοιχεία διαχωρίζονται σε 15 βιβλία, συμπεριλαμβανομένων δύο ακόμη έργων, τα οποία γράφτηκαν πολύ αργότερα. Ως βιβλίο XVI αναφέρεται ένα έργο του Υψικλή που γράφτηκε το 2^{ο} αιώνα μ.Χ. Το βιβλίο XV έχει γραφτεί τον 6^{ο} αιώνα μ.Χ από κάποιο μαθητή του Ισήδωρου του Μιλήσιου.

Συνεπώς οι αποδείξεις μας θα πρέπει να είναι ανεξάρτητες από τα σχήματα που σχεδιάζουμε. Την άποψη του Πλάτωνα συμμερίστηκε και ο Ευκλείδης.

Τα 13 βιβλία των Στοιχείων περιέχουν 121 ορισμούς, 5 αιτήματα, 9 κοινές έννοιες (αξιώματα) και 465 προτάσεις (θεωρήματα). Τα πρώτα έξι βιβλία αναφέρονται στην επίπεδη γεωμετρία. Τα επόμενα τρία πραγματεύονται την αριθμοθεωρία. Το δέκατο παρουσιάζει την έννοια των ασύμμετρων λόγων. Και τέλος, τα τρία τελευταία αφορούν την στερεομετρία. Οι ορισμοί, τα αιτήματα και οι κοινές έννοιες αποτελούν τη γλώσσα της θεωρίας και είναι τα θεμέλια ολόκληρου του έργου του.

Οι ορισμοί είναι αρκετά περιορισμένοι σε αριθμό. Ο Ευκλείδης δεν θεώρησε αναγκαίο να ορίσει βασικά γεωμετρικά αντικείμενα ή ακόμη και έννοιες. Για παράδειγμα, δεν υπάρχει ορισμός για το παραλληλόγραμμο, το τραπέζιο, το πεντάγωνο, τον λόγο μεγεθών κλπ., ακόμη δεν ορίζεται η ισότητα αν και αναφέρεται στη πρόταση 4 του βιβλίου Ι.

Οι ορισμοί είναι είτε επεξηγήσεις κάποιων εννοιών, είτε υποθέσεις, είτε παραδοχές, προτάσεις που τις θεωρούμε αληθείς. Ένα βασικό χαρακτηριστικό των ορισμών είναι ότι ο Ευκλείδης δίνει ορισμούς στα γεωμετρικά αντικείμενα προϋποθέτοντας την ύπαρξή τους.

Πλεονέκτημα αποτελεί για πολλούς μαθηματικούς, ότι ο Ευκλείδης ορίζει τα γεωμετρικά αντικείμενα χωρίς προηγουμένως να έχει ορίσει τις αρχικές τους έννοιες. Αρκετοί ορισμοί που δίνει αποτελούν οι ίδιοι αρχικές έννοιες, όπως η έννοια του σημείου, της γραμμής κ. λπ.

Εφόσον ορίσει το σημείο, τη γραμμή, το κύκλο κλπ. ο Ευκλείδης παραθέτει *τα πέντε αιτήματα*, με στόχο να αποδείξει την ύπαρξη των γεωμετρικών μεγεθών καθώς και να διατυπώσει τις ιδιότητές τους,

όπως επίσης και τις σχέσεις που έχουν μεταξύ τους. Την έννοια του αιτήματος την συναντάμε και στα έργα του Αριστοτέλη και του Πλάτωνα, κανένας όμως ιστορικός των επιστημών δεν αμφισβήτησε την μοναδική χρήση και ύπαρξη των αιτημάτων στο έργο του Ευκλείδη. Όλα τα παραπάνω ονομάζονται *αρχές*, πράγμα το οποίο φαίνεται να ακολούθησαν όλοι οι μαθηματικοί πριν τον Ευκλείδη.

Το αίτημα δεν είναι μια απλή παραδοχή, αλλά μια κοινή αλήθεια, η οποία συνεπάγεται την αλήθεια άλλων προτάσεων που προκύπτουν ως λογική συνέπεια από το αίτημα. Αυτές τις προτάσεις ο Ευκλείδης τις χρησιμοποιεί χωρίς απόδειξη. Για παράδειγμα, το πρώτο αίτημα λέει: *"από δύο σημεία μόνο μία ευθεία γραμμή διέρχεται"*. Αυτό σημαίνει ότι δύο ευθείες που έχουν τα ίδια άκρα ή δύο κοινά σημεία ταυτίζονται και το σπουδαιότερο ότι δύο ευθείες δεν μπορούν να περικλείουν κάποια επιφάνεια.

Οι *κοινές έννοιες* από την άλλη μεριά έχουν ευρεία εφαρμογή, όχι μόνο στην Γεωμετρία αλλά και σε άλλες επιστήμες. Για παράδειγμα, "όταν σε ίσα προσθέσουμε ίσα, προκύπτουν ίσα" κλπ. Στις διάφορες εκδόσεις και μεταφράσεις των Στοιχείων ο αριθμός των κοινών εννοιών διαφέρει. Για παράδειγμα, στην μετάφραση του Barocius περιέχονται 10 αξιώματα, ενώ στο έργο του Heiberg συναντάμε 9 αξιώματα, τα οποία ονομάζει κοινές έννοιες. Ο Heiberg θεωρεί ως γνήσια αξιώματα του Ευκλείδη τα πέντε από τα εννέα που περιέχονται στο βιβλίο του Πρόκλου.

Τέλος, οι Προτάσεις έχουν κατανεμηθεί σε όλα τα βιβλία ανάλογα με το περιεχόμενό τους.

Εμείς θα ασχοληθούμε με το μεγαλύτερο μέρος του πέμπτου βιβλίου των Στοιχείων όπου αναπτύσσεται η θεωρία των λόγων και τμήματα

των άλλων βιβλίων όπου χρησιμοποιείται η έννοια του λόγου παρουσιάζοντας την ιστορική εξέλιξη της έννοιας αυτής μέσα από αξιοσημείωτους ορισμούς και προτάσεις.

2. Ιστορική αναδρομή

2.1 Η έννοια της αναλογίας

Ένας *λόγος* παριστάνει μια ποσοτική σύγκριση δύο διαφορετικών μεγεθών, ποσοτήτων ή πραγμάτων, για παράδειγμα α, β και εκφράζεται από τον τύπο α : β. Επομένως ο *λόγος* εκφράζει μια διαφορά την οποία εύκολα μπορούμε να αντιληφθούμε.

Σύμφωνα με τον D.H. Fowler (1979) ο λόγος αριθμών δεν ορίζεται τυπικά από τον Ευκλείδη, αλλά εμφανίζεται για παράδειγμα μέσα από τη έννοια της αναλογίας στο βιβλίο VII-Ορισμός 21 («Ανάλογοι αριθμοί είναι αυτοί που ο πρώτος αποτελεί για τον δεύτερο το ίδιο πολλαπλάσιο ή το ίδιο μέρος ή τα ίδια μέρη, όπως αποτελεί ο τρίτος για τον τέταρτο»). Επιπλέον ακριβή ορισμό για τον λόγο μεγεθών δεν συναντάμε στα Στοιχεία του Ευκλείδη αν και η ερμηνεία του λόγου χρησιμοποιείται συχνά.

Ο ορισμός 3 του βιβλίου V των Στοιχείων ορίζει την έννοια της αναλογίας μέσω του λόγου ομοειδών μεγεθών, και φαίνεται να είναι απαραίτητος για την ύπαρξη των προτάσεων που ακολουθούν όπως θα δούμε και παρακάτω.

Μια *αναλογία* είναι πιο σύνθετη διότι εκφράζει μια ισοδυναμία μεταξύ δύο *λόγων*, δηλαδή ένα στοιχείο α είναι ως προς ένα στοιχείο β, όπως είναι ένα στοιχείο γ προς ένα στοιχείο δ (συμβολικά α : β :: γ : δ). Οι Πυθαγόρειοι ονόμαζαν την σχέση αυτή *ασυνεχή αναλογία τεσσάρων*

στοιχείων. Στα Στοιχεία του Ευκλείδη θα συναντήσουμε την έννοια της αναλογίας με εκφράσεις όπως «έχουν ή είναι ο ένας για τον άλλο». Για παράδειγμα στην Πρόταση VI-1: «Τα τρίγωνα και τα παραλληλόγραμμα τα οποία έχουν το ίδιο ύψος, έχουν λόγο εμβαδών ίσο προς τον λόγο των βάσεων».

Ο D.H. Fowler (1979) αναφέρει επιπλέον ότι ο συμβολισμός «:» για τον λόγο δύο τέτοιων ποσοτήτων δόθηκε τον 17^{ο} αιώνα από τον Άγγλο αστρονόμο Vincent Wing. Την ίδια εποχή ακολουθώντας τον Wing, ο William Oughtred έδωσε τον συμβολισμό «::» για την ισότητα. Ο Ευκλείδης απέφευγε να χρησιμοποιεί την λέξη «ίσος» όταν αναφερόταν σε λόγους, πράγμα το οποίο φανερώνει ότι είναι πιθανό να τους θεωρούσε ως ένα τρίτο είδος ποσότητας ξεχωριστό από τα μεγέθη και τους αριθμούς.

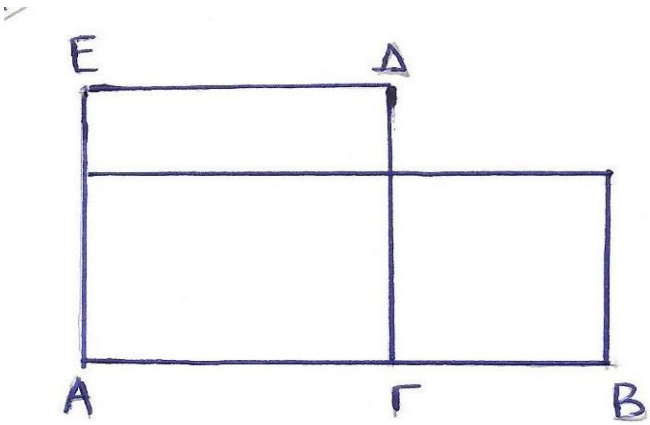
Όταν περιοριστούμε σε τρεις όρους, δηλαδή ένα στοιχείο α είναι ως προς ένα στοιχείο β, όπως είναι ένα στοιχείο β ως προς ένα στοιχείο γ (συμβολικά α : β :: β : γ) τότε τα *άκρα* (α και γ) συνδέονται μεταξύ τους όπως λέμε μέσω ενός *μέσου όρου* του β. Οι Έλληνες έδωσαν σε αυτή την σχέση την ονομασία *συνεχή αναλογία τριών όρων*. Σύμφωνα με τον Νικόμαχο και άλλους Έλληνες φιλόσοφους η σχέση αυτή είναι η μοναδική που θα μπορούσε να θεωρηθεί αυστηρά ως *ανάλογος*. Ένα εύλογο ερώτημα εδώ είναι αν μια αναλογία τριών όρων αποτελεί την πιο κοντινή προσέγγιση με την αναλογική σκέψη. Η απάντηση εδώ είναι όχι, διότι υπάρχει μία μοναδική αναλογική διαίρεση η οποία ορίζεται με δύο όρους, δύο στοιχεία. Σε αυτή την περίπτωση, ο μικρότερος όρος είναι ως προς τον μεγαλύτερο, όπως ο μεγαλύτερος όρος ως προς τον μικρότερο συν τον μεγαλύτερο [συμβολικά: α : β :: β : (α+β)]. Η γεωμετρική αυτή αναλογία ιστορικά φέρει το όνομα «Χρυσή Αναλογία»

και παίρνει τον συμβολισμό του 21^{ου} γράμματος του ελληνικού αλφάβητου «φ», παρότι ήταν γνωστή και σε άλλους πολιτισμούς (Ε.Σ.Σταμάτης κ. ά).

2.2 Ιστορική εξέλιξη της έννοιας της αναλογίας

Ο Ευκλείδης εισάγει την έννοια της αναλογίας ήδη από το δεύτερο βιβλίο των Στοιχείων, το οποίο περιέχει μια σειρά από προτάσεις για τετράγωνα, ορθογώνια και τρίγωνα. Στο Θεώρημα ΙΙ-11 συναντάμε μια κατασκευή με όρους εμβαδών η οποία στην ουσία ορίζει την διαίρεση της ευθείας σε μέσο και άκρο λόγο.

Πρόταση ΙΙ-11: «Να αποκοπεί δοθείσα ευθεία γραμμή έτσι ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου που περιέχεται από όλη την ευθεία και ένα από τα τμήματα, να είναι ίσο με το εμβαδόν στο εναπομένον τμήμα»



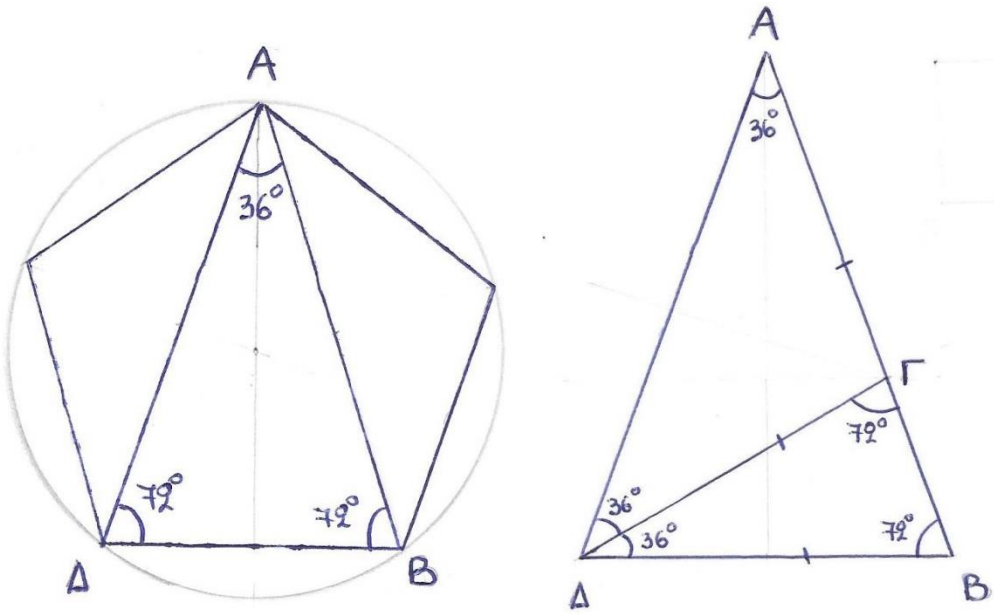
Σχήμα 2

Σύμφωνα με το Σχήμα 2, στο Θεώρημα ΙΙ-11 ζητείται το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΓΔΕ με ίσες πλευρές ΑΓ να έχει ίσο εμβαδόν με το ορθογώνιο με πλευρές ΑΒ, ΓΒ. Η απαίτηση αυτή της Πρότασης με σύγχρονο συμβολισμό έχει ως εξής: ΑΓ • ΑΓ=ΑΒ • ΓΒ.

Ισοδύναμα $\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{A\Gamma}{\Gamma B}$ ή ΑΒ : ΑΓ :: ΑΓ : ΓΒ (ο ορισμός της διαίρεσης ευθείας σε μέσο και άκρο λόγο (ΔΜΑΛ).

Ένα εύλογο ερώτημα εδώ γιατί η έννοια της διαίρεσης ευθείας σε μέσο και άκρο λόγο εισέρχεται για πρώτη φορά στα Στοιχεία του Ευκλείδη.

Η έννοια της ΔΕΜΑΛ εισέρχεται για πρώτη φορά στα Στοιχεία του Ευκλείδη στο Βιβλίο IV, στον ορισμό 3 («Λέμε ότι ένα ευθύγραμμο σχήμα είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο, όταν κάθε κορυφή του είναι σημείο του κύκλου»), ο οποίος έχει ως θέμα την κατασκευή κανονικών πολυγώνων. Συγκεκριμένα στη Πρόταση IV-11 (κατασκευή κανονικού πενταγώνου), το κανονικό πεντάγωνο, όπως μπορούμε να δούμε και στο σχήμα 2 παρακάτω μπορεί να καθοριστεί από το τρίγωνο ▲ΑΔΒ που σχηματίζεται από τις δύο παρακείμενες διαγώνιους. Διχοτομώντας μία από τις γωνίες της βάσης (▲ΑΔΒ)**,** παρατηρούμε ότι το μικρό τρίγωνο που σχηματίζεται (▲ΔΓΒ), θα είναι επίσης ένα τρίγωνο με γωνίες βάσης 72°. Θα παρουσιάσουμε σύντομα που εισέρχεται η ΔΕΜΑΛ στην κατασκευή κανονικού πενταγώνου γι’ αυτό τον λόγο χρησιμοποιούμε πραγματικές γωνίες και όμοια τρίγωνα, σε αντίθεση με τον Ευκλείδη, όπου δεν γίνεται ποτέ αναφορά στα πραγματικά μεγέθη των γωνιών και η θεωρία των όμοιων τριγώνων αναπτύσσεται στο Βιβλίο VI.



Σχήμα 3

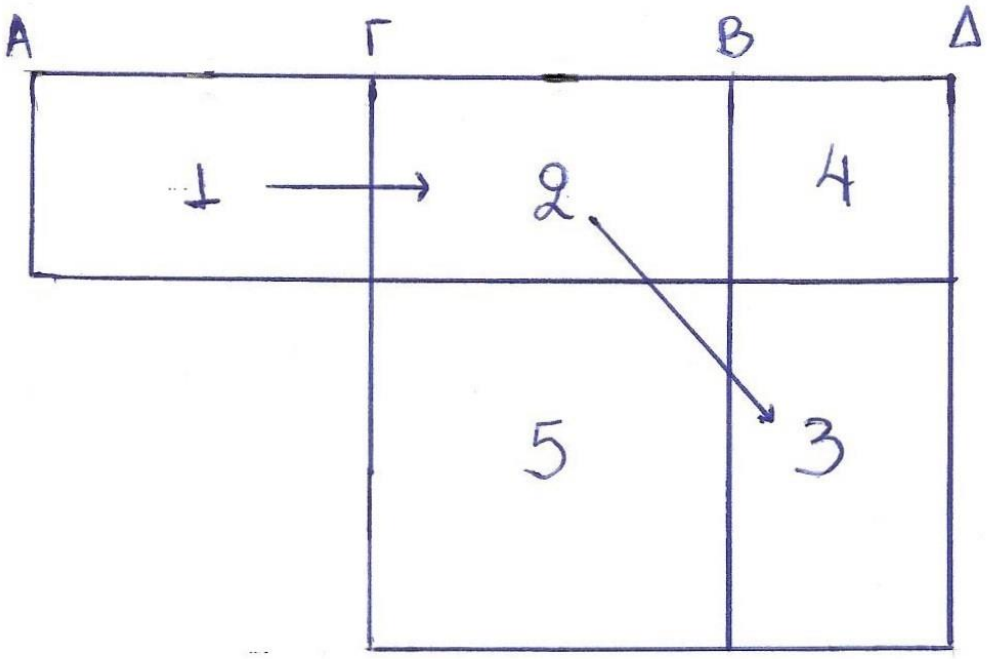
Επομένως, τα τρίγωνα (▲ΑΔΒ, ▲ΔΓΒ) είναι όμοια (έχοντας τις γωνίες τους ίσες μία προς μία) που σημαίνει ότι $\frac{AB}{\Delta B} = \frac{\Delta B}{B\Gamma}$ και αφού τα τρίγωνα είναι ισοσκελή (ΔΒ=ΔΓ=ΑΓ), τότε η αναλογία παίρνει την μορφή $\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{A\Gamma}{B\Gamma}$ που είναι ακριβώς η απαίτηση ώστε να διαιρεθεί η ευθεία ΑΒ σε μέσο και άκρο λόγο στο σημείο Γ.

Εν συντομία, παρατηρούμε ότι η έννοια της ΔΕΜΑΛ συνδέεται άμεσα με την κατασκευή κανονικού πενταγώνου, χωρίς να αναφέρεται πότε παρουσιάστηκε αρχικά. Έτσι η δυσκολία που φαίνεται να υπάρχει στη Πρόταση 11 του βιβλίου ΙΙ δικαιολογεί το παραπάνω. Τελικά για την απόδειξη της Πρότασης ΙΙ-11, χρησιμοποιείται η Πρόταση ΙΙ-6 και το Πυθαγόρειο Θεώρημα.

<u>Σκιαγράφηση Απόδειξης Πρότασης ΙΙ-11</u>

Προεκτείνουμε το μέσο της δοθείσας ευθείας ΑΒ σε ένα τυχαίο σημείο Δ. Σχεδιάζουμε τα τετράγωνα 4 και 5 με πλευρές ΓΒ και ΒΔ αντίστοιχα. Αυτά καθορίζουν αντίστοιχα τις πλευρές των ορθογωνίων 1, 2, 3. Έστω

ότι κόβουμε αυτά τα κομμάτια, τότε παρατηρούμε ότι το μεγάλο ορθογώνιο στο πάνω μέρος φτιάχνεται από τα 1, 2 και 4. Εάν μετακινήσουμε το 2 ώστε να καλύψει το 3, και στην συνέχεια μετακινήσουμε το 1 ώστε να αντικαταστήσει το 2, αφήνοντας το 5 στην θέση του, τότε το μεγάλο ορθογώνιο με πλευρές ΑΔ, ΒΔ έχει μετασχηματιστεί σε μεγάλο τετράγωνο πλευράς ΓΔ (το τετράγωνο 4 παρέμεινε σταθερό).

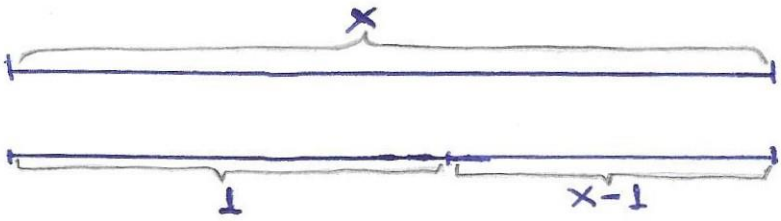


Σχήμα 4

Σε αυτό το σημείο είναι εύλογο να αναρωτηθεί κανείς αν υπάρχει και κάτι παραπάνω από το προφανές αυτό επιχείρημα. Η ιστορία όμως της ΔΕΜΑΛ δεν σταματάει στα Στοιχεία. Μια πολύ σημαντική εξέλιξη της έννοιας αποτελεί η αριθμητική τιμή που σχετίζεται μαζί της.

Ας υποθέσουμε ότι παίρνουμε μια τυχαία ευθεία και την διαιρούμε σε μέσο και άκρο λόγο, όπου στο μεγαλύτερο τμήμα της δίνουμε την τιμή 1 και θέτουμε ολόκληρη την ευθεία ως χ. Βάσει του ορισμού της ΔΕΜΑΛ

προκύπτει η αναλογία: $\frac{\chi}{1} = \frac{1}{\chi-1}$, ισοδύναμα $\chi^2 - \chi - 1 = 0$. Η θετική ρίζα της εξίσωσης είναι $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.



Σχήμα 5

<u>Οι θεωρίες των αναλογιών κατά την Προ-ευκλείδεια περίοδο</u>

Σύμφωνα με τον Γ. Χριστιανίδη (2003), κατά τον 5^{ο} αιώνα και το μισό του 4^{ου} αιώνα π.Χ αναπτύχθηκαν τρεις θεωρίες αναλογιών στην ιστορία των ελληνικών μαθηματικών.

Η πρώτη θεωρία αναλογιών και αρχαιότερη ίσχυε για την περίπτωση των αριθμών (των φυσικών αριθμών 2,3,...) και των συμμέτρων μεγεθών (μεγέθη με κοινό μέτρο) και αποδίδεται στους Πυθαγορείους οι οποίοι πίστευαν ότι «all is a number» (J.L. Berggren,1984) Ο ορισμός που αποδίδεται στην θεωρία αυτή είναι ο ακόλουθος.

<u>Ορισμός:</u> Έστω Α και Β δύο σύμμετρα μεγέθη και Γ, Δ δύο άλλα σύμμετρα μεγέθη, όχι κατ' ανάγκη ομοειδή προς τα Α, Β. Τότε $\frac{A}{B} = \frac{\Gamma}{\Delta}$ αν και μόνο αν το Α είναι το ίδιο μέρος ή τα ίδια μέρη του Β όπως το Γ είναι του Δ.

Στην ουσία τον ορισμό αυτό τον χρησιμοποιούσαν με μια ισοδύναμη μορφή λαμβάνοντας υπόψη την Πρόταση Χ-5 [«Τα σύμμετρα μεγέθη έχουν μεταξύ τους λόγο ίσο με τον λόγο δύο αριθμών (εννοείται φυσικών)»] των Στοιχείων του Ευκλείδη. Σύμφωνα με τον ορισμό αυτό ο

λόγος μεταξύ δύο συμμέτρων αγαθών μπορεί πάντα να εκφρασθεί με τον λόγο αριθμού προς αριθμό.

Από την υπόθεση τα μεγέθη Α, Β είναι σύμμετρα, συνεπώς έχουν κοινό μέτρο έστω Ε και αν α, β θετικοί ακέραιοι αριθμοί τότε Α = αΕ και Β =βΕ που σημαίνει $\frac{A}{B} = \frac{\alpha}{\beta}$.

Άρα ο λόγος δύο μεγεθών στην περίπτωση που αυτά είναι σύμμετρα ανάγεται σε λόγο δύο θετικών ακέραιων αριθμών.

Όμοια θεωρούμε γ, δ θετικούς ακέραιους αριθμούς όπου $\frac{\Gamma}{\Delta} = \frac{\gamma}{\delta}$.

Τελικά η αναλογία $\frac{A}{B} = \frac{\Gamma}{\Delta}$ μεγεθών Α, Β, Γ, Δ ανάγεται στην αναλογία αριθμών $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$.

Η δεύτερη θεωρία αναλογιών (αποδίδεται μάλλον στον Θεαίτητο) είναι η ανθυφαιρετική θεωρία λόγων, η οποία μπορούσε να εφαρμοσθεί και σε ομογενή ασύμμετρα μεγέθη.

<u>Ορισμός:</u> Έστω Α, Β ένα ζεύγος ομογενών μεγεθών με Α > Β και Γ, Δ ένα άλλο ζεύγος ομογενών μεγεθών με Γ > Δ. Τότε $\frac{A}{B} = \frac{\Gamma}{\Delta}$ αν και μόνο αν Ανθ(Α,Β)=Ανθ(Γ,Δ).

Ο παραπάνω ορισμός αποτελεί αποκάλυψη των ιστορικών των μαθηματικών, όπως των G.Zeuthen, E.Dijksterhuis και O.Becker. Οι παραπάνω ιστορικοί βασισμένοι σε ένα χωρίο από τα «Τοπικά» (158b, 29-35) του Αριστοτέλη διατύπωσαν τον ορισμό αυτό.

Αυτό αναφέρει: « άλλων των ορισμού δεδομένων, εοικε δε και εν τις μαθήμασιν ένια δι’ορισμού έλλειψιν ου ραδίως γράφεσθαι, οίον ότι παρά την πλευράν τέμνουσα το επίπεδον ομοίως διαιρεί την τε γραμμήν και το χωρίον. του δε ορισμού ρηθέντος ευθέως φανερόν το

λεγόμενον την γαρ αυτήν ανταναίρεσιν εχει τα χωρία και αι γραμμαί έστι δ’ορισμός του αυτού λόγου ούτος».

Είναι γεγονός ότι στα μαθηματικά μερικά πράγματα δεν είναι τόσο εύκολο να αποδειχθούν λόγω έλλειψης ορισμού. Για παράδειγμα, όπως ειπώθηκε παραπάνω μια ευθεία η οποία τέμνει ένα επίπεδο (χωρίο) και είναι παράλληλη προς τη πλευρά, διαιρεί ομοίως και την πλευρά και το χωρίο. Με την διατύπωση του ολοκληρωμένου όμως ορισμού γίνεται εύκολα αντιληπτή η απόδειξη, αφού χωρία και γραμμές έχουν την ίδια ανταναίρεση και αυτός είναι ο ορισμός του αυτού λόγου όπως λέγεται.

Ο Αλέξανδρος ο Αφροδισιέας στα σχόλιά του στα «Τοπικά» αναφέρει: «ανταναίρεση σημαίνει ανθυφαίρεση και μεγέθη είναι ανάλογα όταν έχουν την ίδια ανθυφαίρεση».

Ο συνδυασμός του χωρίου αυτού με το χωρίο από τα «Αναλυτικά Ύστερα» του Αριστοτέλη (Α5, 74a 18-25) αποκτά ιστορική σημασία.

Σύμφωνα με το χωρίο αυτό, το θεώρημα εναλλαγής των όρων σε μια αναλογία το αποδείκνυαν ξεχωριστά για αριθμούς για γραμμές για στερεά και για χρόνους, ενώ πλέον είναι δυνατό να αποδειχθεί για όλα με την θεωρία του Ευδόξου. Επομένως αφού το Θεώρημα της εναλλαγής αποδεικνύεται με τον ορισμό του Ευδόξου για όλα τα μεγέθη, σημαίνει ότι πραγματικά πρέπει να υπήρχε κάποια άλλη θεωρία αναλογιών για ασύμμετρα μεγέθη. Αυτή δεν είναι άλλη από την ανθυφαιρετική θεωρία λόγων που βασίζεται στον ανθυφαιρετικό ορισμό (Θεαίτητος, βιβλίο VII & X Στοιχείων Ευκλείδη).

Η ανθυφαίρεση είναι ο γενικευμένος αλγόριθμος για την εύρεση του κοινού μέτρου δύο μεγεθών, αν υπάρχει (όπως φυσικών αριθμών, ευθυγράμμων τμημάτων, εμβαδών). Πρόκειται για μια μέθοδο που ήταν γνωστή από τους Πυθαγορείους, πολύ πριν τον Ευκλείδη ο οποίος

την αναφέρει στο βιβλίο VII των Στοιχείων του (πεπερασμένη ανθυφαίρεση μεγεθών) και στο βιβλίο Χ (άπειρη ανθυφαίρεση μεγεθών). Η μέθοδος αυτή πρέπει να αποτέλεσε το ουσιαστικό βήμα μετάβασης από την (εμπειρική) θεωρία λόγων στη μετέπειτα εξελιγμένη μορφή τους όπως υπάρχει στον Ευκλείδη.

Η έννοια της ανθυφαίρεσης είναι θεμελιώδης για τον Πλάτωνα. Ολόκληρη η κοσμοθεωρία του είναι ανθυφαιρετική και θεωρεί πως οτιδήποτε στην φύση δημιουργείται και εξελίσσεται με την ανθυφαιρετική διαδικασία.

Η αλγοριθμική διαδικασία για την ανθυφαίρεση δύο ευθυγράμμων τμημάτων α, β με α < β είναι η εξής:

Σχήμα 6

1) βγάζουμε όσα α υπάρχουν στο β και βρίσκουμε τι περισσεύει, αν περισσεύει, έστω γ

2) βγάζουμε όσα γ υπάρχουν στο α και γράφουμε τι περισσεύει, έστω δ

3)βγάζουμε όσα δ υπάρχουν στο γ και

i) αν καταλήξουμε να μην περισσεύει τίποτα, τότε λέμε ότι τα α, β έχουν κοινό μέτρο, ή με άλλα λόγια είναι σύμμετρα και ο λόγος β/α εκφράζει ρητό αριθμό

ii) αν η διαδικασία δεν τερματίζει ποτέ, τότε τα α, β δεν έχουν κοινό μέτρο, είναι όπως λέμε ασύμμετρα

Η τρίτη θεωρία αναλογιών είναι εκείνη του Ευδόξου και περιέχεται στο βιβλίο V των Στοιχείων του Ευκλείδη.

2.2α΄ Βιβλία V, VI (Ευκλείδη Στοιχεία)

Βιβλίο V

Στο βιβλίο αυτό περιγράφονται οι έννοιες του λόγου, της αναλογίας και των μεγεθών. Πρόκειται για την λεγόμενη Θεωρία Λόγων-Μεγεθών, η οποία αποδίδεται στον Εύδοξο. Μέγεθος καλείται το μήκος ευθυγράμμου τμήματος ή τόξου ή κύκλου ή επιφάνεια, αλλά όχι οι αριθμοί (όπου οι αριθμοί αναφέρονται στους φυσικούς αριθμούς 2,3,..). Ο Ευκλείδης δεν ορίζει ρητά την έννοια του μεγέθους με αποτέλεσμα να υπάρχει ασάφεια στην έννοια του λόγου και της αναλογίας, γεγονός που αποτέλεσε θέμα συζήτησης και διαφοράς απόψεων [Mueller, 1981 & Fowler 1979], όπως θα δούμε και παρακάτω. Το βιβλίο αυτό περιλαμβάνει 18 ορισμούς και 25 προτάσεις. Θα αναφερθούμε σε μερικούς αξιοσημείωτους για τον λόγο και την αναλογία Ορισμούς και Προτάσεις στο βιβλίο αυτό όπως αναφέρουν στα βιβλία τους οι Σταμάτης & Heath.

Ορισμός 3: «Λόγος εστί δύο μεγεθών η κατά πηλικότητα ποια σχέσις»

Ο τρίτος ορισμός μας πληροφορεί για δύο πράγματα:

α) Υπάρχει ο λόγος μεγεθών του ίδιου είδους.

β) Ο λόγος δύο μεγεθών είναι μια σχέση ποσοτική.

Οι αρχαίοι θεωρούσαν δύο μη-ομογενή μεγέθη ως *άλογα*, δηλαδή μεγέθη που δεν έχουν λόγο. Γι’ αυτό στα Στοιχεία, όπου αναφέρεται ότι δύο μεγέθη έχουν λόγο, εννοείται ότι αυτά είναι ομοειδή.

Ορισμός 4: «Δύο μεγέθη λέγεται ότι έχουν λόγο μεταξύ τους, όταν πολλαπλασιαζόμενα κατάλληλα μπορούμε να πετύχουμε ώστε το ένα να υπερέχει του άλλου».

Με άλλα λόγια το γνωστό σήμερα Αξίωμα του Αρχιμήδη:

«Δοθέντων των α και β υπάρχει πάντα φυσικός αριθμός n, τέτοιος ώστε nα > β».

Αξίζει να σημειωθεί ότι ο ορισμός 4 είναι απαραίτητος για την απόδειξη όλων των προτάσεων του βιβλίου V.

Ορισμός 5: «Τέσσερα μεγέθη λέμε ότι έχουν τον ίδιο λόγο το πρώτο προς το δεύτερο και το τρίτο προς το τέταρτο, όταν ίσες φορές πολλαπλάσια του πρώτου και του τρίτου σε σχέση με τα ίσες φορές πολλαπλάσια του δεύτερου και του τέταρτου, με οποιονδήποτε πολλαπλασιασμό, είναι μεγαλύτερα ή ίσα ή μικρότερα, όταν αυτά ληφθούν σε αντίστοιχη τάξη».

Ο ορισμός 5 αφορά τον ορισμό αναλογίας κατά Εύδοξο σε σύγχρονη ορολογία συμβολικά λέει ότι:

Αν α, β, γ, δ είναι τέσσερα μεγέθη, τότε $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, αν και μόνο αν για οποιουσδήποτε φυσικούς αριθμούς μ και ν, ισχύει μία από τις παρακάτω σχέσεις:

- μα > νβ και συγχρόνως μγ > νδ
- μα = νβ και συγχρόνως μγ = νδ
- μα < νβ και συγχρόνως μγ < νδ

Το μέγεθος του ορισμού μας φανερώνει ότι ο Ευκλείδης κατέβαλε προσπάθεια για να κατασκευάσει ένα αυστηρό ορισμό για την ισότητα λόγων.

Ο P.Tannery (1987) κάνει τις εξής διαπιστώσεις:

(α) Μία αναλογία έχει τουλάχιστον τρεις όρους

(β) Ο αριθμός των όρων μιας αναλογίας μπορεί να είναι άπειρος

(γ) Η αναλογία στην οποία αναφέρεται ο ορισμός 5 έχει τέσσερις όρους.

Ο ορισμός 5 αποτελεί ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε αυτά τα μεγέθη να έχουν ίδιο λόγο και έγιναν πολλές προσπάθειες για την ερμηνεία του.

Ο ορισμός αυτός κρίθηκε αρνητικά από πολλούς. Συγκεκριμένα ο Γαλιλαίος τον χαρακτήρισε ως τον χειρότερο ορισμό που γνώριζε. Οι προσπάθειες που καταβλήθηκαν ήταν πολλές ώστε να οδηγηθούμε σε μια αποδεκτή ερμηνεία του Άγγλου ιστορικού των μαθηματικών T.L. Heath το 1906 που αναπτύσσουμε παρακάτω.

Στις μεσότητες (αναλογίες με κοινό όρο-τον λεγόμενο μέσο όρο) όπως είδαμε έχουμε τρεις όρους, πράγμα που επισημαίνει ο Νικόμαχος, καθώς και ο Πάππος. Ο έβδομος ορισμός περιέχει την συνθήκη ο ένας λόγος να είναι μεγαλύτερος του άλλου. Ο Ευκλείδης χαρακτηριστικά αναφέρεται σε τέσσερα μεγέθη, όπως και στον ορισμό 5, όμως όταν δύο από τα μεγέθη αυτά μπορούν να ταυτιστούν, τότε έχουμε την *ελάχιστη αναλογία*, όπως αναφέρει ο ορισμός 8.

<u>Ορισμός 6:</u> «Ανάλογα λέγονται τα μεγέθη τα οποία έχουν τον ίδιο λόγο».

<u>Ορισμός 7:</u> «Αν δοθούν τέσσερα μεγέθη και τα ίσες φορές πολλαπλάσια του πρώτου με το τρίτο, καθώς και του δεύτερου με το τέταρτο, έτσι ώστε: το μεν πρώτο να υπερέχει του πολλαπλασίου του δεύτερου, το δε τρίτο να μην υπερέχει του πολλαπλασίου του τέταρτου, τότε το πρώτο μέγεθος προς το δεύτερο έχει λόγο μεγαλύτερο από το λόγο που έχει το τρίτο μέγεθος προς το τέταρτο».

Ορισμός 8: «Η αναλογία που έχει τρεις όρους λέγεται ελάχιστη».

Πρόταση V-14: «Αν ένα πρώτο μέγεθος προς ένα δεύτερο μέγεθος έχει τον ίδιο λόγο που έχει ένα τρίτο προς ένα τέταρτο και το πρώτο μέγεθος είναι μεγαλύτερο από το τρίτο, τότε και το δεύτερο θα είναι μεγαλύτερο από το τέταρτο. Αν το πρώτο είναι ίσο με τον τρίτο, τότε και το δεύτερο θα είναι ίσο με το τέταρτο. Αν το πρώτο είναι ίσο με το τρίτο, τότε και το δεύτερο θα είναι ίσο με το τέταρτο και αν το πρώτο είναι μικρότερο από το τρίτο, τότε και το δεύτερο θα είναι μικρότερο από το τέταρτο».

Σύγχρονη ορολογία: Εάν α, β, γ, δ μεγέθη με $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, τότε θα ισχύει:

- Αν α = γ, τότε και β = δ
- Αν α > γ, τότε β > δ
- Αν α < γ, τότε β < δ

Στην απόδειξη της Πρότασης V-14 θα χρειαστούμε της Προτάσεις 8 & 10 του βιβλίου V.

Πρόταση V-8: Αν δύο μεγέθη είναι άνισα τότε:

α) Ο λόγος του μεγαλύτερου προς ένα τρίτο μέγεθος είναι μεγαλύτερος από το λόγο του μικρότερου προς το τρίτο αυτό μέγεθος.

β) Ο λόγος του τρίτου μεγέθους προς το μικρότερο είναι μεγαλύτερος από το λόγο του τρίτου μεγέθους προς το μεγαλύτερο.

Σχόλια:

Η Πρόταση αυτή μας λέει τα εξής:

Αν α, β δύο μεγέθη όπου έστω α > β, τότε για κάθε άλλο μέγεθος γ, ισχύουν οι σχέσεις: $\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$ και $\frac{\gamma}{\beta} > \frac{\gamma}{\alpha}$.

Πρόταση V-10:

α) Αν οι λόγοι δύο μεγεθών προς ένα τρίτο μέγεθος είναι άνισοι, τότε από τα δύο μεγέθη μεγαλύτερο είναι εκείνο που έχει το μεγαλύτερο λόγο.

β) Αν οι λόγοι ενός μεγέθους προς άλλα δύο μεγέθη είναι άνισοι, τότε από τα δύο μεγέθη μικρότερο είναι αυτό που βρίσκεται στο μεγαλύτερο λόγο.

Σχόλια:

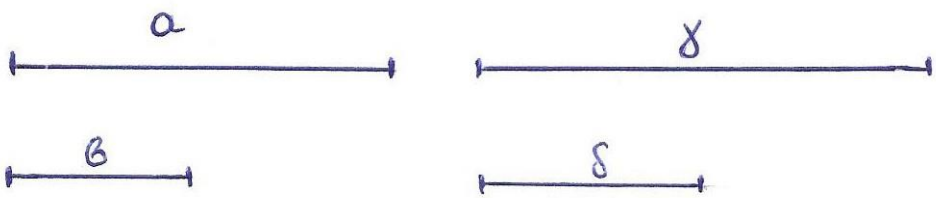
Η Πρόταση αυτή μας λέει:

Έστω α, β, γ τρία μεγέθη, Τότε ισχύουν τα εξής:

α) Αν $\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$, τότε α > β

β) Αν $\frac{\gamma}{\beta} > \frac{\gamma}{\alpha}$, τότε β < α

Απόδειξη Πρότασης 14



Σχήμα 7

Έστω τα μεγέθη α, β, γ, δ για τα οποία ισχύει $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ και ακόμη

α < γ. Θα αποδείξουμε ότι β < δ.

Θα χρησιμοποιήσουμε την Πρόταση 8, τότε θα ισχύει $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\gamma}{\beta}$.

Όμως από υπόθεση $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, άρα και $\frac{\gamma}{\delta} < \frac{\gamma}{\beta}$.

Συνεπώς, σύμφωνα με την Πρόταση 10, θα είναι β < δ.

Όμοια αποδεικνύονται και οι δύο άλλες περιπτώσεις.

(ο. ε. δ)

Βιβλίο VI

Βιβλίο με εξίσου σημαντικό περιεχόμενο, περιλαμβάνει 5 ορισμούς και 33 προτάσεις. Μερικές από τις προτάσεις είναι σπουδαίες μιας και αποτελούν βάση για την μελέτη κωνικών τομών. Η πρόταση 1 αναδεικνύει την χρησιμότητα του ορισμού 5 του βιβλίου V. Στην ουσία στο βιβλίο αυτό γίνεται εφαρμογή της θεωρίας των λόγων του βιβλίου V, στην Επίπεδη Γεωμετρία. Η Επίπεδη Γεωμετρία περιλαμβάνει κυρίως τις γνωστές ομοιότητες σχημάτων και περιγράφει την θεωρία δευτεροβάθμιων εξισώσεων. Με την χρήση αναλογιών, ο Ευκλείδης περιγράφει σε αυτό το βιβλίο τις ομοιότητες σχημάτων.

Παρακάτω περιγράφονται τα αξιοσημείωτα για την έννοια της αναλογίας και του λόγου σημεία στο βιβλίο αυτό.

Ορισμός 3: «Ένα ευθύγραμμο τμήμα έχει χωριστεί σε μέσο και άκρο λόγο, όταν από ένα σημείο του έχει χωρισθεί σε δύο τμήματα, έτσι ώστε ο λόγος του τμήματος προς το μεγαλύτερο από τα τμήματα είναι ίσος με το λόγο του μεγαλύτερου προς το μικρότερο ευθύγραμμο τμήμα».

Σχήμα 8

Το σημείο Μ του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ (Σχήμα 6) υποδιαιρεί το τμήμα ΑΒ σε μέσο και άκρο λόγο, αν ισχύει η ισότητα:

$$\frac{AB}{AM} = \frac{AM}{MB}$$

Πρόταση VI-1 (η βασική πρόταση): «Τα τρίγωνα και τα παραλληλόγραμμα τα οποία έχουν το ίδιο ύψος, έχουν λόγο εμβαδών ίσο προς τον λόγο των βάσεων».

Για την απόδειξη θα χρειαστούμε τις παρακάτω Προτάσεις I-34, I-38 και V-11, τις οποίες παραθέτουμε χωρίς απόδειξη.

Πρόταση I-34: «Οι απέναντι πλευρές και γωνίες των παραλληλογράμμων είναι ίσες και οι διαγώνιες το διαιρούν σε ίσα μέρη»

Σχόλια: Ο Ευκλείδης αναφέρεται στα παραλληλόγραμμα, χωρίς προηγουμένως να έχει ορίσει την έννοια «παραλληλόγραμμο».

Πρόταση I-38: «Τρίγωνα με ίσες βάσεις που βρίσκονται μεταξύ των ίδιων παραλλήλων έχουν εμβαδά ίσα».

Σχόλια: Οι Προτάσεις I-35 μέχρι και II-14, αποτελούν την λεγόμενη «Θεωρία των εμβαδών». Στην Πρόταση I-35 περιγράφεται η έννοια του περιεχομένου του σχήματος, δηλαδή αυτού που εμείς αποκαλούμε εμβαδό. Ο Ευκλείδης, ωστόσο δεν ορίζει την έννοια του εμβαδού ή της ισότητας εμβαδών, ίσως επειδή ήταν έννοιες που ήταν γνωστές μέχρι την εποχή του.

Πρόταση I-35: «Τα παραλληλόγραμμα που έχουν την ίδια βάση και περιέχονται μεταξύ των ίδιων παραλλήλων, έχουν περιεχόμενα ίσα».

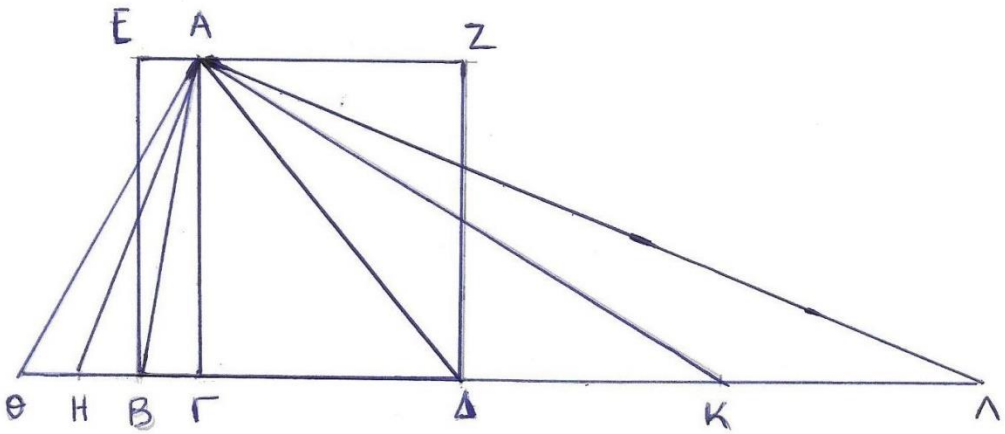
Πρόταση V-11: Οι λόγοι οι οποίοι είναι ίσοι προς τον ίδιο λόγο είναι και μεταξύ τους ίσοι.

Δηλαδή αν α, β, γ, δ, ε, ζ συγκεκριμένα μεγέθη με $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ και $\frac{\gamma}{\delta} = \frac{\varepsilon}{\zeta}$, τότε $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\varepsilon}{\zeta}$.

Εδώ ορίζεται η μεταβατικότητα της ισότητας των λόγων, η οποία εξαρτάται από τον ορισμό V-5. Από αυτή την Πρόταση παίρνουμε την πληροφορία ότι οι λόγοι δεν είναι αριθμοί, γιατί αν ήταν, δεν θα είχε νόημα η ύπαρξη της αφού θα ήταν η κοινή έννοια (αξίωμα) 1 [«Τα μεγέθη που είναι ίσα προς τρίτο μέγεθος είναι και μεταξύ τους ίσα»].

<u>Απόδειξη</u>

Έστω τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΓΔ και τα παραλληλόγραμμα ΑΓΒΕ και ΑΓΔΖ, τα οποία έχουν όλα το ίδιο ύψος (έννοια που επίσης δεν ορίζεται αλλά χρησιμοποιείται στα Στοιχεία) ΑΓ (Σχήμα 7). Θα δείξουμε ότι ο λόγος της βάσης ΒΓ προς τη βάση ΓΔ ισούται με το λόγο του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ προς το εμβαδό του τριγώνου ΑΓΔ, όπως επίσης και με το λόγο του εμβαδού του παραλληλογράμμου ΑΓΒΕ προς το εμβαδό του παραλληλογράμμου ΑΓΔΖ.



Σχήμα 9

Προεκτείνουμε το τμήμα ΒΔ προς τα δύο μέρη του παίρνοντας τα τμήματα ΒΗ, ΗΘ ίσα με το τμήμα ΒΓ και τα τμήματα ΔΚ, ΚΛ ίσα με το τμήμα ΓΔ. Στη συνέχεια φέρνουμε τα ΑΘ, ΑΗ, ΑΚ και ΑΛ. Επειδή ΓΒ=ΒΗ=ΗΘ, θα είναι και τα αντίστοιχα εμβαδά των τριγώνων ίσα, άρα (ΑΘΗ)=(ΑΗΒ)=(ΑΒΓ) (Πρόταση Ι-38).

Επομένως $\frac{\Theta\Gamma}{B\Gamma} = \frac{(A\Theta\Gamma)}{(AB\Gamma)}$. Με παρόμοιο τρόπο δείχνουμε ότι

$\frac{\Gamma\Lambda}{\Gamma\Delta} = \frac{(A\Gamma\Lambda)}{(A\Gamma\Delta)}$.

Αν ΘΓ=ΓΛ, τότε θα είναι και τα αντίστοιχα εμβαδά τριγώνων ίσα, δηλαδή (ΑΘΓ)=(ΑΓΛ).

Αν ΘΓ > ΓΛ, τότε (ΑΘΓ) > (ΑΓΛ) και αν ΘΓ < ΓΛ, τότε (ΑΘΓ) < (ΑΓΛ).

Θεωρήσαμε τα τμήματα ΘΓ και ΓΛ ίσες φορές πολλαπλάσια των βάσεων ΒΓ και ΓΔ, επομένως έπεται σύμφωνα με την Πρόταση V-11 ότι:

$$\frac{B\Gamma}{\Gamma\Delta} = \frac{(AB\Gamma)}{(A\Gamma\Delta)} \quad (1)$$

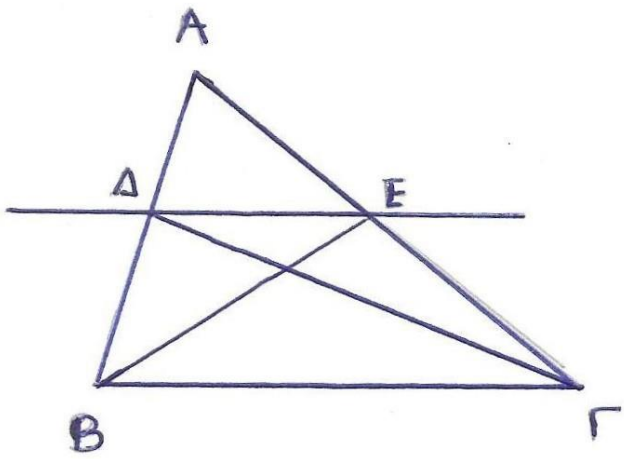
Και σύμφωνα με την Πρόταση Ι-34, αφού τα παραλληλόγραμμα ΑΓΒΕ, ΑΓΔΖ αντίστοιχα έχουν διπλάσιο εμβαδό από τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΓΔ αντίστοιχα, τότε:

$$\frac{(A\Gamma BE)}{(A\Gamma\Delta Z)} = \frac{(AB\Gamma)}{(A\Gamma\Delta)} \quad (2)$$

Τελικά το ζητούμενο προκύπτει από την Πρόταση V-11 και τις σχέσεις (1) και (2).

ο. ε. δ □

Πρόταση 2: «Αν σε τρίγωνο φέρουμε ευθεία παράλληλη προς μια από τις πλευρές του, αυτή θα τέμνει τις άλλες δύο πλευρές σε μέρη ανάλογα. Αντίστροφα, αν οι δύο πλευρές τριγώνου τμηθούν σε μέρη ανάλογα, τότε η ευθεία που περνάει από σημεία τομών θα είναι παράλληλη προς την τρίτη πλευρά του τριγώνου».



Σχήμα 10

Πρόταση Ι-30: «Αν ευθείες είναι παράλληλες στην ίδια ευθεία είναι και μεταξύ τους παράλληλες».

Σχόλια: Στην Πρόταση αυτή εκφράζεται η μεταβατική ιδιότητα της παραλληλίας.

Πρόταση V-9: «Τα μεγέθη που έχουν τον ίδιο λόγο προς ένα άλλο μέγεθος είναι ίσα μεταξύ τους και εκείνα τα μεγέθη προς τα οποία ένα άλλο μέγεθος έχει τον ίδιο λόγο, είναι και πάλι ίσα μεταξύ τους»

Σχόλια: Αν α, β μεγέθη με $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\gamma}$, τότε α = β. Και αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{\gamma}$, τότε β = γ.

Απόδειξη

Έστω ότι η ΔΕ είναι παράλληλη προς την βάση του τριγώνου ΑΒΓ (Σχήμα 10). Θα δείξουμε ότι $\frac{B\Delta}{\Delta A} = \frac{\Gamma E}{EA}$.

Φέρνουμε τις ΒΕ και ΓΔ. Τότε (ΒΔΕ)=(ΓΕΔ), επειδή τα τρίγωνα ΒΔΕ και ΓΕΔ έχουν κοινή βάση και βρίσκονται μεταξύ παραλλήλων (Πρόταση Ι-38).

Επομένως $\frac{(B\Delta E)}{(A\Delta E)} = \frac{(\Gamma E\Delta)}{(A\Delta E)}$ και από την Πρόταση VI-1, θα έχουμε $\frac{(B\Delta E)}{(A\Delta E)} = \frac{B\Delta}{\Delta A}$ και $\frac{(\Gamma E\Delta)}{(A\Delta E)} = \frac{\Gamma E}{EA}$,

Άρα $\frac{B\Delta}{\Delta A} = \frac{\Gamma E}{EA}$ (Πρόταση V-11).

Αντίστροφα, έστω οι πλευρές ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ και τα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα ώστε $\frac{B\Delta}{\Delta A} = \frac{\Gamma E}{EA}$. Θα δείξουμε ότι η ΔΕ είναι παράλληλη προς την βάση του τριγώνου ΑΒΓ, δηλαδή την πλευρά ΒΓ.

Από την Πρόταση VI-1 έχουμε:

$$\frac{B\Delta}{\Delta A} = \frac{(B\Delta E)}{(A\Delta E)} \text{ και } \frac{\Gamma E}{EA} = \frac{(\Gamma E\Delta)}{(A\Delta E)},$$

Και από υπόθεση, παίρνουμε $\frac{(B\Delta E)}{(A\Delta E)} = \frac{(\Gamma E\Delta)}{(A\Delta E)}$, συνεπώς (ΒΔΕ)=(ΓΔΕ) (Πρόταση V-9) και ακόμη τα τρίγωνα ΒΔΕ, ΓΔΕ έχουν την ίδια βάση ΔΕ και βρίσκονται μεταξύ της πλευράς ΒΓ (Πρόταση Ι-30). Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η ΔΕ είναι παράλληλη προς τη ΒΓ.

ο. ε. δ □

Σχόλια:

Ο T. L. Heath παρατήρησε ότι στην Πρόταση αυτή δεν διατυπώνεται αν τα σημεία τομής των πλευρών του τριγώνου βρίσκονται πάνω στην περίμετρο του τριγώνου ή στις προεκτάσεις του.

Στα σύγχρονα εγχειρίδια Γεωμετρίας η Πρόταση VI-2 αναφέρεται ως «Θεώρημα διαίρεσης πλευρών», ενώ στην Ελλάδα φέρει το όνομα «Θεώρημα του Θαλή» ή «σχηματισμός Θαλή». Ο P.Tannery αποδίδει αυτή την ονομασία στο γεγονός ότι ο Θαλής γνώριζε τις βασικές ιδιότητες της ομοιότητας και χάρη σε αυτές κατάφερε να υπολογίσει το ύψος της πυραμίδας από το μήκος της σκιάς της.

Ο Ευκλείδης στο βιβλίο του «Δεδομένα» εξετάζει και την περίπτωση όπου το Α βρίσκεται μεταξύ των παραλλήλων ΔΕ και ΒΓ, όπου προφανώς ισχύει.

Πρόταση VI-30 (ΔΜΑΛ-κατασκευή): «Να τμηθεί δοθέν τμήμα σε μέσο και άκρο λόγο».

2.2β΄ Μεσαίωνας 500-1400- Μελέτη των λόγων

Στο μεσαίωνα μια από τις νέες μαθηματικές προσπάθειες ήταν να βρουν μια σχέση μεταξύ της δύναμης F που εφαρμόζεται σε ένα αντικείμενο, της αντίστασης R και της ταχύτητας V. Το βασικό αίτημα εκείνης της εποχής ήταν ότι για να παραχθεί κίνηση θα έπρεπε η F να είναι μεγαλύτερη από τη R. Ο Αριστοτέλης είχε εκφράσει την παραπάνω σχέση με την πρόταση ότι ο λόγος F/R είναι ανάλογος της V. Όμως αυτός ο ισχυρισμός ήρθε σε αντίθεση με το βασικό αίτημα, διότι αν κρατήσουμε την δύναμη F σταθερή και διπλασιάζουμε για παράδειγμα συνεχώς την R, τότε αυτό ισοδυναμεί σε συνεχή υποδιπλασιασμό της V. Αυτός όμως ο συνεχής διπλασιασμός της θετικής ποσότητας R θα έχει ως αποτέλεσμα να γίνει η R μεγαλύτερη από τη F, το οποίο έρχεται σε αντίθεση με το βασικό αίτημα. Το 1328, ο Thomas Bradwardine (1295-1349) του Merton college της Οξφόρδης πρότεινε μια λύση στο παραπάνω δίλημμα. Σύμφωνα με τον κανόνα αυτό, αν F1, F2 δύο δυνάμεις και R1, R2 δύο αντιστάσεις και οι δύο ταχύτητες V1, V2 ικανοποιούν την σχέση:

F2/R2=V2/V1FI/R1.

Ο ίδιος πρότεινε η σχέση αυτή να αντικατασταθεί από μια εκθετική, όπου όντως η λύση αυτή σεβόταν το αίτημα F>R. Παρόλα αυτά κανένας δεν είχε επιχειρήσει να εξετάσει εκείνη την εποχή, ούτε και ο ίδιος ο Bradwardine την εκθετική σχέση πειραματικά. Τελικά έως τα μέσα του αιώνα η ιδέα του απορρίφθηκε ως φυσική αρχή όμως τα μαθηματικά που την συνόδευαν άφησαν σπουδαίες και καινούργιες ιδέες. Συγκεκριμένα η μελέτη τους απαιτούσε συστηματική μελέτη των λόγων και ιδιαίτερα της σύνθεσης, δηλαδή του πολλαπλασιασμού των λόγων.

Έως τον 14^{ο} αιώνα η σύνθεση των λόγων γινόταν με τον εξής ελληνικό τρόπο:

Για να υπολογίσει κάποιος τον λόγο που συνθέτουν οι α : b και c : d, έπρεπε να βρει ένα μέγεθος e ώστε c : d = b : e όπου τότε ο λόγος που προκύπτει ως σύνθεση των δύο άλλων είναι ο a : e. Στην συνέχεια όμως ξεκίνησε να χρησιμοποιείται η άμεση έννοια του πολλαπλασιασμού των λόγων.

Ο Ριχάρδος του Wallingford, σύγχρονος του Bradwardine όρισε τους λόγους, όπως επίσης και την σύνθεσή τους και διαίρεσή τους ως εξής:

1. Λόγος είναι μια αμοιβαία σχέση μεταξύ ομοειδών ποσοτήτων.
2. Όταν η μια από τις 2 ομοειδείς ποσότητες διαιρεί την άλλη, το αποτέλεσμα της διαίρεσής τους καλείται ονομασία του λόγου του διαιρετέου προς τον διαιρέτη.
3. (Λέμε ότι) ένας λόγος σύγκειται από λόγους όταν από τ γινόμενο των αξιών του προκύπτει κάποια ονομασία.
4. (Λέμε ότι) ένας λόγος διαιρείται δια ενός άλλου λόγου όταν από το πηλίκον των ονομασιών προκύπτει κάποια αξία.

2.2γ΄ Σύγχρονη Εποχή

Σύμφωνα με όσα αναφέραμε παραπάνω το νήμα που συνδέει την έννοια της αναλογίας στην αρχαιότητα με τα Σύγχρονα Μαθηματικά είναι η ερμηνεία του T.L. Heath το 1906.

Ο T.L Heath έδειξε ότι ο ορισμός V-5 των Στοιχείων του Ευκλείδη οδηγεί στο διαμερισμό των αριθμών σε κλάσεις (σύγχρονη ορολογία), που είναι ίδιες με τις τομές Dedekind.

Κατά την διατύπωση αυτή το κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ χωρίζει το πλήθος των θετικών αριθμών $\frac{\nu}{\mu}$ τέτοιους ώστε μα > νβ και μα ≤ νβ. Η τομή Dedekind όπως ονομάστηκε, προσδιορίζει τον ρητό (σύμμετρο) ή τον ασύμμετρο αριθμό $\frac{\alpha}{\beta}$.

Το κλάσμα $\frac{\gamma}{\delta}$, ομοίως χωρίζει το πλήθος των θετικών αριθμών $\frac{\nu}{\mu}$ τέτοιους ώστε μγ > νδ και μγ ≤ νδ. Η τομή αυτή προσδιορίζει τον ρητό (σύμμετρο) ή τον ασύμμετρο αριθμό $\frac{\gamma}{\delta}$. Αν οι παραπάνω τομές συμπίπτουν τότε $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$.

Αν η πρώτη είναι μεγαλύτερη της δεύτερης τότε $\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\gamma}{\delta}$ (Ορισμός 7).

Ο A.Pringsheim στο άρθρο του στην «Εγκυκλοπαίδεια» σημειώνει ότι «λείπει εν τούτοις από του Ευδόξου ορισμού η νεωτέρα αντίληψις ότι εκάστη τομή παριστά πραγματικόν αριθμόν ή ευθύγραμμον τμήμα ή ευθύγραμμον γωνίαν». Σύμφωνα με τον Ε. Σταμάτη η διατύπωση του ορισμού από τον Dedekind δεν επηρεάζει την Θεωρία του Ευδόξου, οποίος δεν χρησιμοποίησε την λέξη «τομή», που σημαίνει ότι η τομή παριστάνει αριθμό. Επομένως είναι φανερό ότι η θεωρία του Dedekind για τα ασύμμετρα μεγέθη είναι ταυτόσημη με τη θεωρία του Ευδόξου, εκείνη που περιγράφεται στο βιβλίο V των Στοιχείων του Ευκλείδη.

Εκείνο που λείπει από τον ορισμό του Ευδόξου είναι να ορίσει το αντίστροφο, δηλαδή ότι κάθε τέτοια τομή παράγει ένα πραγματικό (σύμμετρο ή ασύμμετρο) αριθμό και σε αυτό το σημείο ακριβώς ο Dedekind εισάγει την απαραίτητη προσθήκη προς την πλήρη θεμελίωση των πραγματικών αριθμών. Όμως ο ορισμός του Ευδόξου σίγουρα

περιλαμβάνει και τις δύο περιπτώσεις του σύμμετρου και του ασύμμετρου λόγου.

Ο M. Zacharias στο έργο του «Elementargeometrie der Ebene und des Raumes» (Goeschen B. 16, 1930) αναφέρει: «Εις το V βιβλίον των Στοιχείων του Ευκλείδου, το οποίον αναπτύσσει την θεωρίαν των αναλογιών και την έννοια του ασύμμετρου αγαθού.....». Ο M. Zacharias παραδέχεται δηλαδή ότι οι Αρχαίοι Έλληνες είχαν γνώση των ασύμμετρων αριθμών, δίχως να τους έχουν ορίσει.

Από τα παραπάνω, ο Ε. Σταμάτης συμπεραίνει ότι οι αρχαίοι Έλληνες εν γνώση τους απέφυγαν τον ορισμό των ασύμμετρων αριθμών, όπως επίσης και τον ορισμό του μηδέν ως αριθμό, διότι οι έννοιες της «συνέχειας» και του «απείρου» όπως ερμηνεύτηκαν από τους ίδιους, από την μία ήταν αποδεκτές στην σύγχρονη επιστήμη, όμως από την άλλη πλευρά δεν ήταν και δεν είναι απόλυτα ξεκάθαρες για το ανθρώπινο πνεύμα. Η αποφυγή του ορισμού του αριθμού μηδέν φαίνεται να προέρχεται από το γεγονός ότι δεν μπορούσαν να δεχθούν ένα αριθμό υπό περιορισμό (όπως γίνεται στην διαίρεση).

Ο J.L.Berggren (1984) αναφέρει ότι το 1978 ο Knorr υποστήριξε ότι παρόλο που ο Εύδοξος επινόησε μια θεωρία για την αναλογία, η θεωρία αυτή δεν περιέχεται στο Βιβλίο V των Στοιχείων του Ευκλείδη αλλά στο παρακάτω ισχυρισμό: «Αν A, B και c,d είναι δύο ζεύγη ομοειδών μεγεθών και αν A, B και c,d έχουν κοινά μέτρα E και f, συμβολικά A=nE και c=nf, ενώ B=mE και d=mf, όπου n,m φυσικοί αριθμοί, τότε A : B :: c : d. Ο Knorr για την απόδειξη του ισχυρισμού αυτού βασίστηκε στην απόδειξη του Αρχιμήδη για τον νόμο του μοχλού που παρουσιάζεται στο Equilibrium of Planes, Βιβλίο I (Προτάσεις 6&7) και στη θεωρία για το εμβαδόν κυκλικού τομέα το οποίο αποδίδεται

στον Ήρωνα και τον Πάππο. Η περίπτωση των μη ομογενών μεγεθών για την θεωρία αυτή παρουσιάζεται σε ένα λήμμα που βρέθηκε σε ένα σχόλιο του Θεοδόσιου στα Σφαιρικά III, 9.

Λίγο αργότερα το 1979, ο Fowler αναδιαμόρφωσε την ανθυφαιρετική θεωρία της αναλογίας και υποστήριξε ότι αναφέρεται στην θεωρητική λογιστική του Πλάτωνα, η οποία αφορά τη θεωρία λόγου (ratio) και όχι της αναλογίας (proportion). Τα κύρια επιχειρήματα της άποψης του Fowler πάνω σε αυτή την θεωρία είναι:

(α) Η θεωρία αυτή δίνει ένα πεδίο μαθηματικής έρευνας που θα μπορούσε να ονομαστεί θεωρητική λογιστική και παρέχει μια λογική ερμηνεία του έργου του Πλάτωνα που διαφορετικά θα ήταν ασαφής.

(β) Εξηγεί γιατί πολλές προ-Ευκλείδιες προσπάθειες μιλάνε για «λόγο» αντί για «αναλογία» και γιατί η έννοια του «λόγου» παρουσιάζεται από τον Ευκλείδη, παρότι «τα Στοιχεία δεν περιέχουν ένα ακριβή ορισμό για τον λόγο.

Τέλος, σύμφωνα με τον Fowler, το βιβλίο V των Στοιχείων περιέχει ορισμό για τον λόγο ακόμα και αν ο σύγχρονος αναγνώστης τον θεωρεί ακριβή ή όχι, είναι λιγότερο σημαντικό από το αν ο Ευκλείδης έκρινε σημαντικό να το ορίσει. Αξίζει να σημειωθεί ότι ο Ευκλείδης στα Στοιχεία χρησιμοποιεί έννοιες που δεν έχει ορίσει, γνωρίζοντας όμως την ύπαρξή τους .

3. Θεωρητικό πλαίσιο

«Η κατανόηση του χώρου αποτελεί μια θεμελιώδη ανάγκη, γιατί το άτομο βρίσκεται από τη γέννησή του και λειτουργεί μέσα σε αυτόν. Ο χώρος αποτελεί αιτία, συνθήκη αλλά και μέσο ανάπτυξης για πολλές και διαφορετικές, τόσο καθημερινές όσο και μαθηματικές ή άλλες επιστημονικές έννοιες. Μέσα από ένα πλήθος εμπειριών και ανακαλύψεων στο χώρο, δομούνται, οργανώνονται και μορφοποιούνται άτυπες και αργότερα τυπικές έννοιες που οδηγούν τη δράση του παιδιού αρχικά πάνω στα αντικείμενα και τις σχέσεις τους κι αργότερα στον σχηματισμό μοντέλων όπως είναι τα σχήματα ή οι αναπαραστάσεις του χώρου» (Γερμανός, 2002).

Τα Μαθηματικά είναι μια εξειδικευμένη γλώσσα με το δικό της πλαίσιο, μεταφορές, συστήματα συμβόλων και σκοπούς της (Pimm, 1995). Πολυάριθμες μελέτες σχετικά με τη χρήση της αναπαράστασης έχουν προσπαθήσει να εξηγήσουν τη συμβολή της στις έννοιες της μάθησης και την αποτελεσματικότητα της στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων. Ανάμεσα στις πολλές στρατηγικές που έχουν προταθεί για τη βελτίωση της αποτελεσματικότητας στην επίλυση των μαθηματικών προβλημάτων, χρησιμοποιώντας διαγράμματα και γενικότερα τις εξωτερικές αναπαραστάσεις, χαρακτηρίζεται ως μία από τις πιο αποτελεσματικές (Uesaka, Manalo & Ichikawa, 2007). Η γεωμετρία είναι τα μαθηματικά του χώρου (Bishop, 1983) και η μελέτη της γεωμετρίας βοηθά τους μαθητές να αναπαριστούν και να δίνουν νόημα τόσο στον κόσμο στον οποίο ζούμε και όσο και στον κόσμο των μαθηματικών. Μέσα από τη μελέτη της γεωμετρίας, οι μαθητές αναμένεται να μάθουν για γεωμετρικά σχήματα και δομές και πώς να αναλύουν τα χαρακτηριστικά και τις σχέσεις τους (NCTM, 2000), να

βελτιώσουν την κατανόηση από τον άτυπο στον πιο τυπικό τρόπο σκέψης ώστε να περάσουν από την αναγνώριση διαφόρων γεωμετρικών σχημάτων στο γεωμετρικό συλλογισμό και τη γεωμετρία επίλυσης προβλήματος.

Ο Duval (1999) διακρίνει τέσσερις πτυχές για το «γεωμετρικό σχήμα»: την αντιληπτική, την διαδοχική, του λόγου και τη λειτουργική, όπως αναφέραμε παραπάνω. Για να λειτουργήσει ως γεωμετρικό σχήμα ένα σχέδιο πρέπει να προκαλείται η αντιληπτική σύλληψη και τουλάχιστον ένα από τα άλλα τρία. Ιδιαίτερα, η αντιληπτική σύλληψη, αναφέρεται στην αναγνώριση ενός σχήματος σε ένα επίπεδο ή σε βάθος. Η αντιληπτική σύλληψη δείχνει την ικανότητα να αναφέρουμε αριθμούς και την ικανότητα να αναγνωρίζει κάποιος στην αντιληπτή εικόνα, πολλά υπο-στοιχεία. Η διαδοχική αντίληψη απαιτείται κάθε φορά που κάποιος πρέπει να κατασκευάσει ένα σχήμα ή να περιγράψει την κατασκευή του. Η οργάνωση των στοιχειωδών σχηματικών μονάδων δεν εξαρτάται από την αντιληπτική σύλληψη, τους νόμους και τα συνθήματα, αλλά από τους τεχνικούς περιορισμούς και τις μαθηματικές ιδιότητες. Η λεκτική σύλληψη σχετίζεται με το γεγονός ότι οι μαθηματικές ιδιότητες που εκπροσωπούνται σε ένα σχέδιο δεν μπορούν να προσδιοριστούν μέσω της αντιληπτικής σύλληψης. Σε κάθε γεωμετρική αναπαράσταση η αντιληπτική αναγνώριση των γεωμετρικών ιδιοτήτων πρέπει να παραμείνει υπό τον έλεγχο των καταστάσεων (π.χ. ονομασία, τον ορισμό). Ωστόσο, είναι μέσω της λειτουργικής προσέγγισης που μπορούμε να πάρουμε μια εικόνα για την λύση ενός προβλήματος, όταν κοιτάζουμε μια εικόνα.

Ο χώρος που μας περιβάλλει αποτελεί ίσως την κυριότερη πηγή ανάπτυξης των περισσότερων εννοιών στα μαθηματικά. Ο μαθητής

χτίζει τις χωρικές έννοιες μέσα από τις δράσεις του και την εκπαίδευσή του (Bishop, 1983). Σημαντική συνεισφορά για την ανάπτυξη της αντιληπτικής ικανότητας του χώρου αποτέλεσε η θεωρία των Van Hiele (1986). Αφού μελέτησαν τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην εκμάθηση της γεωμετρίας, ανέπτυξαν ένα μοντέλο που αναφέρεται στα στάδια της γεωμετρικής σκέψης των μαθητών, έως ότου να είναι ικανοί να αναπτύξουν την επίσημη γραφή μιας γεωμετρικής απόδειξης (Crowley,1987). Το μοντέλο αυτό αποτελείται από πέντε επίπεδα. Πιο συγκεκριμένα, υπάρχει μία εξέλιξη της σκέψης από ένα οπτικό επίπεδο, σε πιο σύνθετα όπως το περιγραφικό-αναλυτικό, το αφηρημένο και το τυπικό-παραγωγικό για να φτάσει στο τελικό επίπεδο μαθηματικής αυστηρότητας το τυπικό-αυστηρό. Στην ουσία τα επίπεδα των Van Hiele αντιπροσωπεύουν και την μαθηματική ωριμότητα του μαθητή.

Επίπεδο 0 : Οπτικοποίηση (Visualization)

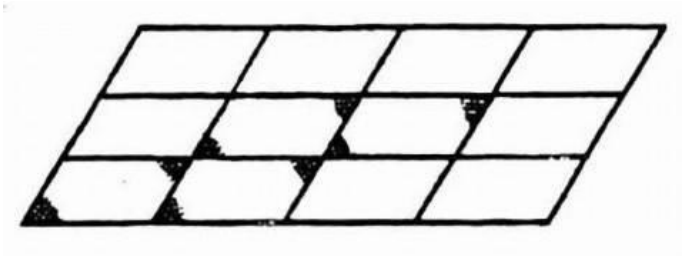
Σε αυτό το αρχικό στάδιο, οι μαθητές έχουν επίγνωση του χώρου μόνο ως το περιβάλλον που υπάρχει γύρω τους. Οι γεωμετρικές έννοιες θεωρούνται συνολικές οντότητες και όχι έννοιες με επιμέρους σύσταση ή χαρακτηριστικά. Τα γεωμετρικά σχήματα, για παράδειγμα, αναγνωρίζονται από το σχήμα τους ως σύνολο, το οποίο είναι η φυσική τους εμφάνιση, και όχι από τις ιδιότητες τους. Ένας μαθητής που λειτουργεί σε αυτό το επίπεδο μπορεί να μάθει το γεωμετρικό λεξιλόγιο, μπορεί να αναγνωρίσει καθορισμένα σχήματα, και όταν του δίνεται μια εικόνα, μπορεί να την αναπαράγει. Για παράδειγμα, δίνονται τα διαγράμματα στο παρακάτω σχήμα και ένας μαθητής σε αυτό το επίπεδο θα είναι σε θέση να αναγνωρίσει ότι υπάρχουν τετράγωνα στην (α) εικόνα και ορθογώνια στην (β) γιατί αυτά έχουν

παρόμοιο σχήμα με προηγούμενα τετράγωνα και ορθογώνια, οποία πρέπει να έχει ξανά δει. Επιπλέον, δίνοντας ένα χαρτί στον μαθητή, θα είναι σε θέση να αντιγράψει τα σχήματα. Ένας μαθητής σε αυτό το στάδιο, ωστόσο, δεν θα αναγνωρίσει ότι τα σχήματα αυτά έχουν ορθές γωνίες ή ότι οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες.

Σχήμα 11

<u>Επίπεδο 1: Ανάλυση (Analysis)</u>

Στο επίπεδο 1, αρχίζει η ανάλυση των γεωμετρικών εννοιών. Για παράδειγμα, μέσω της παρατήρησης και του πειραματισμού οι μαθητές αρχίζουν να διακρίνουν τα χαρακτηριστικά στοιχεία των σχημάτων. Αυτές οι αναδυόμενες ιδιότητες, χρησιμοποιούνται για να αντιληφθούν τις κατηγορίες των σχημάτων. Λαμβάνοντας υπόψη ένα πλέγμα παραλληλόγραμμων όπως εκείνο στο παρακάτω σχήμα , οι μαθητές θα μπορούσαν, από το "χρωματισμό" των ίσων γωνιών, να «διαπιστώσουν» ότι οι απέναντι γωνίες του παραλληλογράμμου είναι ίσες. Μετά τη χρήση αρκετών τέτοιων παραδειγμάτων, οι μαθητές μπορούν να κάνουν γενικεύσεις για την κατηγορία των παραλληλογράμμων. Οι σχέσεις μεταξύ των ιδιοτήτων, ωστόσο, δεν μπορούν ακόμη να εξηγηθούν από τους μαθητές σε αυτό το επίπεδο.



Σχήμα 12 (Crowley,1987)

Επίπεδο 2: Άτυπη Παραγωγική Σκέψη (Informal Deduction)

Σε αυτό το επίπεδο, οι μαθητές μπορούν να δημιουργήσουν τις αλληλεξαρτήσεις των ιδιοτήτων τόσο εντός των σχημάτων (π.χ., σε ένα τετράπλευρο, απέναντι πλευρές είναι παράλληλες απαιτεί απέναντι γωνίες είναι ίσες) όσο και μεταξύ των σχημάτων (ένα τετράγωνο είναι ένα παραλληλόγραμμο επειδή έχει όλες τις ιδιότητες ενός ορθογωνίου). Έτσι μπορούν να συμπεράνουν ιδιότητες ενός σχήματος και να αναγνωρίσουν τις κατηγορίες των στοιχείων του. Οι ορισμοί σχημάτων έχουν πια νόημα. Ο μαθητής σε αυτό το επίπεδο όμως δεν κατανοεί εξ ολοκλήρου τον γεωμετρικό συλλογισμό ή τον ρόλο των αξιωμάτων. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα οι μαθητές να μην είναι σε θέση να κατασκευάσουν μια απόδειξη ξεκινώντας από άγνωστα στοιχεία.

Επίπεδο 3: Παραγωγική Σκέψη (Deduction)

Σε αυτό το επίπεδο, η σημασία της παραγωγικής σκέψης ως τρόπος καθορισμού της γεωμετρικής θεωρίας μέσα σε ένα αξιωματικό σύστημα είναι κατανοητή. Η αλληλεξάρτηση και ο ρόλος των απροσδιόριστων ορισμών, αξιωμάτων, θεωρημάτων, αποδείξεων έχουν ειπωθεί. Ένα άτομο σε αυτό το επίπεδο μπορεί να κατασκευάσει αποδείξεις και όχι απλά να τις απομνημονεύσει. Υπάρχει η δυνατότητα ανάπτυξης μιας

απόδειξης σε περισσότερους από έναν τρόπους και η ικανότητα επιχειρηματολογίας πάνω σε μία απόδειξη.

Επίπεδο 4: Αυστηρό επίπεδο (Rigor)

Σε αυτό το στάδιο ο μαθητής μπορεί να εργασθεί πάνω σε μια ποικιλία αξιωματικών συστημάτων, δηλαδή, μπορεί να μελετήσει μη Ευκλείδεια γεωμετρία, και τα διαφορετικά συστήματα γεωμετρίας και είναι σε θέση να μπορεί να τα συγκρίνει. Η Γεωμετρία φαίνεται εδώ αφηρημένη. Αυτό το τελευταίο επίπεδο είναι το λιγότερο ανεπτυγμένο στα πρωτότυπα έργα και έχει λάβει λίγη προσοχή από τους ερευνητές. Ο P.M Van Hiele είχε αναγνωρίσει ότι ενδιαφέρεται για τα τρία πρώτα επίπεδα κυρίως. Δεδομένου ότι η πλειοψηφία των μαθητών στο γυμνάσιο διδάσκονται γεωμετρία στο επίπεδο 3, δεν αποτελεί έκπληξη το γεγονός ότι οι περισσότερες έρευνες έχουν επίσης επικεντρωθεί στη μελέτη των χαμηλότερων επιπέδων. Ίσως το μοντέλο Van Hiele επεκτείνεται και σε άλλες περιοχές (που εφαρμόζεται για την οικονομία και τη χημεία στην Ολλανδία), όπου σε αυτό το τελευταίο επίπεδο θα έχει δοθεί μεγαλύτερη έμφαση.

Ένα γεωμετρικό σχήμα είναι μια διανοητική αφηρημένη, ιδανική οντότητα, της οποίας η σημασία διέπεται από έναν ορισμό. Ταυτόχρονα, είναι μια εικόνα η οποία κατέχει extensiveness (χωρικότητα), σχήμα και μέγεθος. Γνωρίζουμε από τη διδακτική μας εμπειρία ότι οι μαθητές πολύ συχνά δυσκολεύονται στην αντιμετώπιση γεωμετρικών προβλημάτων περισσότερο από ότι όταν προσπαθούν να λύσουν ένα αλγεβρικό πρόβλημα. Ένας από τους λόγους είναι, κατά πάσα πιθανότητα, ότι ενώ στην άλγεβρα μπορεί κανείς τις περισσότερες φορές να βασιστεί σε ορισμένες συνήθεις λειτουργικούς κανόνες, στη συνθετική γεωμετρία καλείται να επινοήσει

συγκεκριμένες, προσαρμοσμένες στρατηγικές. Ένας δεύτερος λόγος αφορά τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των εννοιών και των εικόνων στους γεωμετρικούς συλλογισμούς.

Το αυξημένο ερευνητικό ενδιαφέρον για τις αναπαραστάσεις προκύπτει ως απόρροια της ανάγκης να αντιμετωπιστούν προβλήματα πρακτικής και θεωρητικής υφής (Kaput, 1987a): αφενός προβλήματα που αφορούν στις δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές όταν «μεταφράζουν» από τη μια αναπαράσταση σε άλλη (για παράδειγμα τη μετατροπή της διατύπωσης ενός γεωμετρικού προβλήματος σε σχήμα ή τη μετατροπή του αλγεβρικού τύπου μιας συνάρτησης σε γραφική παράσταση) και αφετέρου προβλήματα που προκύπτουν στην πορεία οικοδόμησης ενός θεωρητικού μοντέλου για τον τρόπο αξιοποίησης και χρήσης των αναπαραστάσεων.

Σύμφωνα με τους Tall & Vinner (1981), το ανθρώπινο μυαλό δεν είναι μια καθαρά λογική οντότητα, και παρόλο που οι μαθηματικές έννοιες ορίζονται με ακρίβεια ο νους κατασκευάζει εικόνες και έννοιες από τη εμπειρία του και σταδιακά τις εμπλουτίζει συνδυάζοντας με άλλες. Μέσω συμβόλων πραγματοποιείται μία επικοινωνία μεταξύ τις έννοιας και της αντίληψης του ανθρώπου, χωρίς όμως το σύμβολο αυτό να περιλαμβάνει ολόκληρο το περιεχόμενο της έννοιας. Διακρίνουμε τις μαθηματικές έννοιες όπως ορίζονται τυπικά και τις γνωστικές διαδικασίες μέσω των οποίων τις αντιλαμβανόμαστε. Έτσι ο όρος εννοιακή εικόνα περιγράφει τη συνολική γνωστική δομή της έννοιας, περιλαμβάνοντας όλες τις νοερές εικόνες και αντίστοιχες διαδικασίες και ιδιότητες. Και ο όρος εννοιακός ορισμός αναφέρεται στην διατύπωση του ορισμού της έννοιας. Η εννοιακή εικόνα χτίζεται σταδιακά και διαμορφώνεται από τις εμπειρίες που έχει ένα άτομο.

Επομένως, κάθε άτομο μπορεί να δημιουργήσει μια διαφορετική εννοιακή εικόνα για μια μαθηματική έννοια, όπως για παράδειγμα για την έννοια της αναλογίας, σε σχέση με τον τυπικό εννοιακό ορισμό της έννοιας και με το πέρασμα του χρόνου να τροποποιεί την εικόνα αυτή. Εάν το άτομο σχηματίσει μια εικόνα για μια έννοια που δεν σχετίζεται με τον ορισμό, θα χρειαστεί να αντιληφθεί αρχικά την διαφορά της έννοιας που έχει κατανοήσει ίσως διαφορετικά από την πραγματική της ερμηνεία για να αρχίσει να χτίζει από την αρχή στο νου του την έννοια αυτή.

Από την άλλη μεριά ο εννοιακός ορισμός μπορεί εύκολα να αποστηθιστεί και έτσι να χαθεί η ουσία της έννοιας με αποτέλεσμα να γίνουν λάθη αν αλλάξουν λίγο τα δεδομένα και εφαρμοστεί η αποστήθιση. Τον διαχωρίζουμε σε προσωπικό εννοιακό ορισμό που τον διατυπώνει το άτομο και μπορεί να μεταβάλλεται με τον χρόνο και στον τυπικό εννοιακό ορισμό που είναι αποδεχτός από τη μαθηματική κοινότητα.

Για κάθε άτομο ο εννοιακός ορισμός παράγει την δική του εννοιακή εικόνα (η οποία ίσως αποτελεί προϊόν φαντασίας και ονομάζεται «concept definition image»). Αυτό σε κάθε άτομο ίσως να σχετίζεται ή όχι λογικά με άλλα μέρη της εννοιακής εικόνας. Για παράδειγμα, ο εννοιακός ορισμός της έννοιας της αναλογίας «τέσσερα τμήματα είναι ανάλογα αν οι λόγοι των μηκών τους είναι ίσοι» μπορεί να δημιουργήσει διαφορετική εννοιακή εικόνα σε κάθε μαθητή λογική ή μη ανάλογα για παράδειγμα αν μπορεί να την συνδέσει με τον εννοιακό ορισμό της έννοιας του λόγου τμημάτων. Το βάθος της αντίληψης του ορισμού του λόγου σχετίζεται με την αντίστοιχη εννοιακή εικόνα στον κάθε μαθητή. Εμείς πολύ συχνά μπορεί να χρειαζόμαστε καθώς

σκεφτόμαστε ένα μέρος από τα οποία αποτελείται εννοιακή εικόνα ή ο εννοιακός ορισμός το οποίο μπορεί να συγκρούεται με κάποιο άλλο μέρος της εννοιακής εικόνας ή ορισμού. Στο παραπάνω παράδειγμα, το άτομο θα χρειαστεί να ανακαλέσει από την μνήμη του τι εκφράζει ο λόγος τμημάτων το οποίο μπορεί να συγκρουστεί για παράδειγμα με έννοιες όπως το μήκος τμημάτων. Η πιο σοβαρή «σύγκρουση» που μπορεί να συμβεί σε ένα άτομο είναι εκείνη της εννοιακής εικόνας που έχει σχηματίσει σε σχέση με τον τυπικό εννοιακό ορισμό. Είναι φανερό ότι μια τέτοιου είδους «σύγκρουση» μπορεί να εμποδίσει την γνώση του τυπικού ορισμού της έννοιας καθώς και οποιαδήποτε έννοια σχετίζεται με τον ορισμό αυτό.

Τέλος, στη διδασκαλία η εισαγωγή της έννοιας σταδιακά με αυξανόμενα απαιτητικά παραδείγματα και την εισαγωγή του τυπικού ορισμού στο τέλος της διδασκαλίας, θα δημιουργήσει λανθασμένη εντύπωση του εννοιακού ορισμού τελικά. Για παράδειγμα, όπως θα δούμε και παρακάτω, κάποιοι μαθητές έχουν λανθασμένη εντύπωση του εννοιακού ορισμού του λόγου δύο τμημάτων, συγκεκριμένα θεωρούν ότι ο λόγος εκφράζει τα μήκη των τμημάτων που έρχεται σε αντίθεση με τον ορισμό.

4.Σχεδιασμός και Μεθοδολογία της Έρευνας

Ερευνητικά ερωτήματα

Τα ερευνητικά ερωτήματα τα οποία προέκυψαν τόσο από την μελέτη του θεωρητικού πλαισίου που παρουσιάστηκε όσο και από τους προσωπικούς προβληματισμούς της ίδιας της ερευνήτριας είναι τα εξής:

- Ποιος είναι ο βαθμός κατανόησης της μαθηματικής αναλογίας από τους μαθητές της Β' Λυκείου;
- Υπάρχει διαχωρισμός στις έννοιες λόγος και αναλογία τμημάτων;
- Είναι σε θέση να αντιληφθούν και εφαρμόσουν το Θεώρημα του Θαλή σε προβλήματα ύστερα από ένα ορισμένο χρονικό διάστημα που έχει περάσει από τότε που το διδάχθηκαν;

Σχεδιασμός της έρευνας

Η έρευνα που παρουσιάζεται στην συγκεκριμένη διπλωματική εργασία επιλέχθηκε να γίνει στο πλαίσιο πολλαπλής μελέτης περίπτωσης (multiple case study) και αναλύθηκε με όρους ποιοτικής μεθοδολογίας. Επιλέχθηκε η στρατηγική αυτή καθώς προσφέρει στον ερευνητή εννοιολογική οργάνωση μέσω κατάλληλου σχεδιασμού. Παρέχει με άλλα λόγια ιδέες σχετικά με το πώς να οργανωθεί η μελέτη, τι θέλει να μάθει και πώς να το μάθει, τι γνωρίζουν τα υποκείμενα της έρευνας και τι ερμηνείες δίνουν, και τέλος με ποιους τρόπους μπορούν οι ερμηνείες αυτές να εμπλουτιστούν. Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι να διερευνήσει το βαθμό κατανόησης της μαθηματικής αναλογίας από την γεωμετρική σκοπιά των μαθητών της Β' Λυκείου έχοντας περάσει πέντε μήνες από την στιγμή που διδάχθηκαν την αντίστοιχη έννοια στο μάθημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Προσπαθήσαμε να θέσουμε

ερωτήματα στα οποία προσδοκούσαμε για παράδειγμα την ανάκληση του θεωρήματος του Θαλή, χωρίς να τους ζητάμε να το εφαρμόσουν. Στην ουσία θέλαμε να δούμε αν έχουν κατανοήσει τις έννοιες που διδάχθηκαν συγκεκριμένα στο $7^{ο}$ κεφάλαιο του σχολικού τους εγχειρίδιου.

Οι Συμμετέχοντες

Στην διεξαγωγή της έρευνας συμμετείχαν οκτώ (8) μαθητές της Β' Λυκείου (5 αγόρια και 3 κορίτσια) από από Γενικό Λύκειο του νομού Ηρακλείου, στο οποίο υπήρξα και μαθήτρια. Θελήσαμε να απευθυνθούμε σε μαθητές οι οποίοι εκδήλωσαν ενδιαφέρον συμμετοχής στα πλαίσια της ποιοτικής μας έρευνας με στόχο την ουσιαστικότερη συλλογή δεδομένων. Από τους οκτώ (8) συμμετέχοντες επιλέξαμε στην συνέχεια δύο (2) από αυτούς, οι οποίοι έλαβαν μέρος σε προσωπική βιντεοσκοπημένη συνέντευξη που πραγματοποιήσαμε ώστε να μπορέσουμε να αναλύσουμε τον τρόπο σκέψης τους στα ερωτήματα που τους δόθηκαν και εμβαθύνοντας να αξιολογήσουμε την αντιληπτική τους ικανότητα πάνω στην μαθηματική αναλογία.

Ερευνητικά εργαλεία-Συλλογή δεδομένων

Στους συμμετέχοντες δόθηκαν τέσσερις (4) ερωτήσεις-ασκήσεις εκ των οποίων οι τρεις (3) περιείχαν σχήμα. Οι ασκήσεις αυτές απαντήθηκαν στην αίθουσα πληροφορικής του σχολείου τους όπου τους επιτηρούσε η ίδια η ερευνήτρια. Οι ερωτήσεις-ασκήσεις που χρησιμοποιούνται, περιλαμβάνονται είτε στο αντίστοιχο σχολικό εγχειρίδιο είτε είναι ανάλογου επιπέδου. Επειδή η έρευνα είναι καθαρά διερευνητική για εξαγωγή συμπερασμάτων σχετικά με την κατανόηση της μαθηματικής αναλογίας στα πλαίσια του μαθήματος της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, οι

ερωτήσεις και η μορφή τους προσπαθούν να ανταποκριθούν στα διαφορετικά αυτά επίπεδα κατανόησης.

Η συνέντευξη της παρούσας εργασίας έλαβε χώρα σε χώρο της ερευνήτριας, όπου κάλεσε ξεχωριστά τους συμμετέχοντες και σε διαφορετικές μέρες για την διεξαγωγή της. Συνολικά έγιναν δύο συναντήσεις με τους μαθητές διάρκειας 45 λεπτών. Σε κάθε συνάντηση οι μαθητές απαντούσαν αρχικά ορισμένα ερωτήματα αυτο-εκτίμησης και αυτο-αντίληψης τους για τα μαθηματικά γενικά και στην συνέχεια με την βοήθεια της ερευνήτριας ανέλυσαν βήμα-βήμα την σκέψη τους στις ασκήσεις που τους δυσκόλεψαν, ώστε να οδηγηθούν στην λύση. Η ερευνήτρια έθετε παράλληλα και επιμέρους ερωτήματα για περισσότερη εμβάθυνση στα ερωτήματα. Οι απαιτούμενες μαθηματικές γνώσεις για τις απαντήσεις των ερωτήσεων, είτε έχουν αποκτηθεί από τους μαθητές σε προηγούμενες σχολικές χρονιές, είτε κατά την τρέχουσα σχολική χρονιά. Επιπλέον σε κάποιες ερωτήσεις πρέπει να λειτουργήσει η συνδυαστική σκέψη των μαθητών προκειμένου να καταφέρουν να τις απαντήσουν. Παρακάτω περιγράφονται αναλυτικά οι ερωτήσεις-ασκήσεις, επισημαίνοντας τους επιμέρους στόχους για κάθε μια από αυτές:

<u>Ερώτημα 1:</u> Αν οι πλευρές τριγώνου είναι ανάλογες προς τους αριθμούς 6, 3, 4 και η περίμετρος του τριγώνου είναι 65cm, να βρείτε τα μήκη των πλευρών του.

Στόχος είναι οι μαθητές να ξεκινήσουν απαντώντας μια βασική άσκηση στη διδασκαλία της μαθηματικής αναλογίας, όπου τους ζητείται να υπολογίσουν τα μήκη των πλευρών τριγώνου δοσμένης της αναλογίας των πλευρών του και της περιμέτρου του. Στόχος είναι οι μαθητές να αποσαφηνίσουν την έννοια πλευρά ανάλογη προς αριθμό και ύστερα να συσχετίσουν αυτό το δεδομένο με τη δοσμένη περίμετρο. Η συγκεκριμένη άσκηση θα μπορούσε να δοθεί και σε μαθητές Γυμνασίου μιας και εξετάζει ακριβώς την κατανόηση της έννοιας όπως τη διδάσκονται στο Γυμνάσιο.

Ερώτημα 2:

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ και σημείο Β τέτοιο ώστε

$$\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{1}{3}.$$

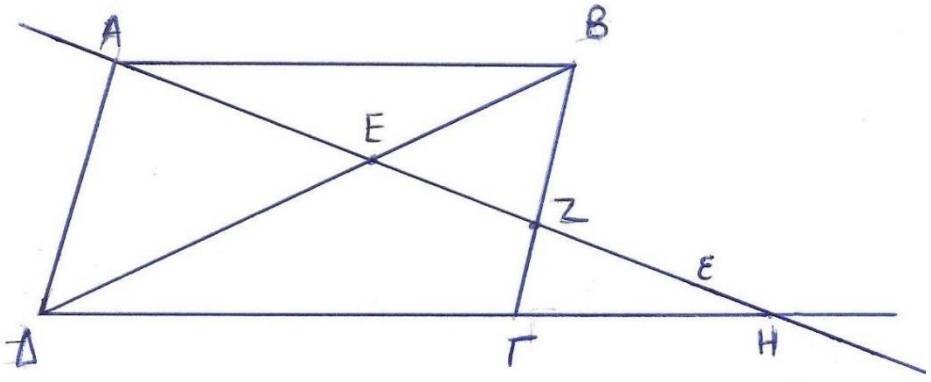
Τότε να υπολογίσετε τους λόγους :

1) $\frac{B\Gamma}{AB}$ 2) $\frac{B\Gamma}{A\Gamma}$

Στόχος αυτής της άσκησης είναι δοσμένου λόγου τμημάτων να σκεφτούν οι μαθητές πώς θα υπολογίσουν τους λόγους των επιμέρους τμημάτων. Για ευκολία τους δόθηκε σχήμα ώστε να έχουν εικόνα για την θέση των σημείων Α, Β και Γ βάσει του δοσμένου λόγου. Υπάρχει περίπτωση σύγχυσης της εννοιακής εικόνας και του εννοιακού ορισμού του λόγου δύο τμημάτων, πράγμα το οποίο εξετάσαμε αναλυτικά κατά την διάρκεια της συνέντευξης. Επομένως αναμένουμε να δούμε πώς συσχετίζουν οι μαθητές τα δεδομένα της άσκησης για να υπολογίσουν τους ζητούμενους λόγους τμημάτων.

Ερώτημα 3:

Αν από την κορυφή Α παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ φέρουμε ευθεία ε, η οποία τέμνει την διαγώνιο ΒΔ στο Ε, την πλευρά ΒΓ στο Ζ και την προέκτασή της ΔΓ στο Η, να δείξετε ότι $AE^2 = EZ \bullet EH$.

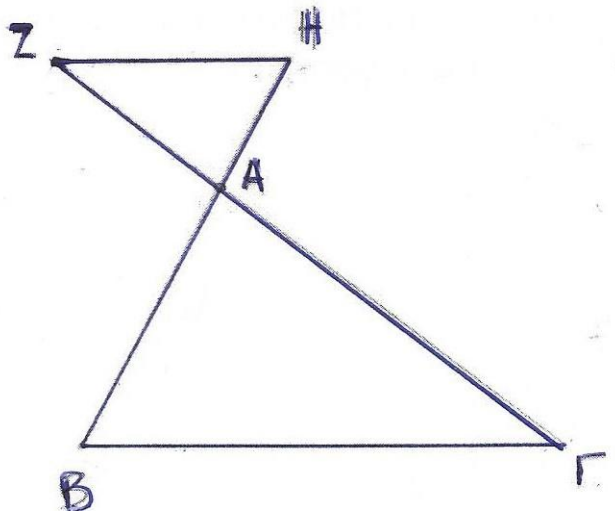


Η άσκηση αυτή είναι κάπως πιο σύνθετη και μάλιστα αποδεικτική. Ο βασικότερος στόχος είναι να εξετάσουμε αν οι μαθητές μπορούν να διακρίνουν το θεώρημα του Θαλή και να το εφαρμόσουν κατάλληλα. Όπως έχουμε αναφέρει δεν επιζητάμε να θυμούνται το θεώρημα αυτό καθ' εαυτό, αλλά περισσότερο μας ενδιαφέρει η διαισθητική τους ικανότητα πάνω στο σχήμα και κατ' επέκταση πάνω στα δεδομένα που τους δίνονται. Δεδομένης της δυσκολίας της άσκησης κρίναμε απαραίτητο να δώσουμε το σχήμα στους μαθητές ώστε βάσει εκείνου να διακρίνουμε τα συμπεράσματα που θα βγάλουν. Αρχικά λοιπόν τους

δίνεται ένα παραλληλόγραμμο και το ζητούμενο είναι αν θα αντλήσουν την απαιτούμενη πληροφορία από αυτό. Τους δίνεται επιπλέον ευθεία ε η οποία τέμνει την διαγώνιο του παραλληλογράμμου στο Ε και την προέκταση της ΔΓ στο Η. Κομβικό σημείο αποτελεί να διακρίνουν οι συμμετέχοντες την παραλληλία του τμήματος ΑΒ με το ΔΗ και στην συνέχεια να εξετάσουν αν υπάρχουν όμοια τρίγωνα στο δοσμένο σχήμα με πλευρές αυτές που βρίσκονται στη ζητούμενη προς απόδειξη σχέση.

Ερώτημα 4:

Το ευθύγραμμο τμήμα ΖΗ είναι παράλληλο με το ΒΓ (ΖΗ//ΒΓ) και τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων ΑΒ, ΑΓ και ΖΓ αντίστοιχα ίσα με ΑΒ=2cm, ΑΓ=6cm και ΖΓ=9cm. Να βρεθεί το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΗΒ = χ.



Στην συγκεκριμένη άσκηση στόχος είναι η εφαρμογή του Θεωρήματος του Θαλή στο σχήμα «πεταλούδα» όπως αναφέρεται στη βιβλιογραφία (Θωμαΐδης - Πούλος, 2000). Δίνεται το τμήμα ΖΗ // ΒΓ καθώς και τα μήκη ΑΒ, ΑΓ και ΖΓ και βάσει αυτών ζητείται να υπολογισθεί το τμήμα ΗΒ. Το σχήμα αυτό φαίνεται να δυσκολεύει γενικά την πλειοψηφία των μαθητών, όπως προκύπτει από έρευνες στην διδακτική των μαθηματικών (Θωμαΐδης - Πούλος, 2000) μιας και δεν αποτελεί απευθείας εφαρμογή του θεωρήματος στο κλασικό σχήμα των τριών παράλληλων ευθειών με τις δύο τέμνουσες. Αναμένεται να δούμε το

κατά πόσο έχουν κατανοήσει οι μαθητές το θεώρημα και αν το χρησιμοποιούν σωστά.

Μέθοδος ανάλυσης δεδομένων

Αρχικά η ερευνήτρια συγκέντρωσε τις απαντήσεις των μαθητών και αφού τις επεξεργάστηκε αναλυτικά, κατηγοριοποίησε τις απαντήσεις με βάση τα ερευνητικά ερωτήματα. Κατά την διάρκεια της επεξεργασίας παρουσιάστηκαν και κάποια επιπλέον σημεία τα οποία φάνηκαν ενδιαφέροντα για την μελέτη. Στην αρχική αυτή φάση της ανάλυσης διαμορφώθηκαν οι βασικοί άξονες ανάλυσης που σχετίζονται με τα ερευνητικά ερωτήματα.

1. Αντίληψη αναλογίας τμημάτων
2. Αντίληψη λόγου τμημάτων
3. Αντίληψη ομοιότητας τριγώνων
4. Αντίληψη Θεωρήματος Θαλή
5. Σωστή εφαρμογή του Θεωρήματος Θαλή
6. Αντίληψη σχήματος

Οι έξι παραπάνω άξονες έπαιξαν καθοριστικό ρόλο για την επιλογή των δύο (2) από τους οκτώ (8) συμμετέχοντες προς συνέντευξη. Κατά τη διάρκεια της συνέντευξης η διαδικασία ανάλυσης των δεδομένων ήταν συνεχής υπό την έννοια ότι η ερευνήτρια κρατούσε τις δικές της σημειώσεις κατά την διάρκεια των συναντήσεων με τους μαθητές. Τα ερωτήματα της κάθε συνέντευξης ήταν κατάλληλα διαμορφωμένα ώστε να καλύπτουν την κάθε περίπτωση μαθητή μεμονωμένα. Επιπλέον όπου κρίθηκε αναγκαίο η ερευνήτρια πρόσθεσε επιπλέον παραδείγματα για περισσότερη εμβάθυνση.

Σύμφωνα με τους Maher (2002), και Maher και Martino (2000) μετά την καταγραφή του περιεχομένου των απομαγνητοφωνήσεων ακολουθεί ο προσδιορισμός των κρίσιμων σημείων. Ένα συμβάν καλείται κρίσιμο όταν καταδεικνύει μια σημαντική αλλαγή, ή ένα εννοιολογικό άλμα σε σχέση με προηγούμενη γνώση. Αρχικά έγινε η απομαγνητοφώνηση των συνομιλιών στις δύο συναντήσεις και στην συνέχεια η ερευνήτρια μελέτησε σχολαστικά τις απαντήσεις που δόθηκαν βάση των ερευνητικών ερωτημάτων που είχε θέσει. Ακολουθώντας το πλαίσιο της θεωρίας των κρίσιμων σημείων ταξινόμησε τις απαντήσεις των μαθητών. Στο μέρος της επεξεργασίας των δεδομένων χρησιμοποιούνται για ευκολία οι εξής συντομογραφίες:

M1, M2, M3, M4, M5, M6, M7, M8 για τους οκτώ συμμετέχοντες και ΕΡ για την παρέμβαση της ερευνήτριας.

5. Παρουσίαση και ανάλυση των αποτελεσμάτων

Στο παρόν κεφάλαιο θα παρουσιαστούν τα αποτελέσματα της έρευνας από τους μαθητές που επιλέχθηκαν από την ερευνήτρια καθώς και ο τρόπος επιλογής των δύο συμμετεχόντων στις προσωπικές συνεντεύξεις. Η παρουσίαση έχει χωριστεί ανά μαθητή και σε κάθε κομμάτι της ανάλυσης γίνεται αναφορά στο θεωρητικό πλαίσιο που σχετίζεται με την απάντηση. Συνολικά έγιναν δύο συναντήσεις με τους μαθητές σε χώρο εκτός του σχολικού τους περιβάλλοντος ώστε να είναι περισσότερος οικείος και φιλικός από εκείνο της σχολικής τους τάξης.

Για τη διεξαγωγή της αρχικής φάσης της έρευνας οι μαθητές συγκεντρώθηκαν όλοι μαζί στο σύνολό τους με την ερευνήτρια σε κάποια διδακτική ώρα που είχαν κενό στην αίθουσα πληροφορικής του σχολείου τους. Υπήρχε έντονος ενθουσιασμός σχεδόν από όλους και λίγο άγχος από μερικούς. Η ερευνήτρια τους μοίρασε το φυλλάδιο με τα 4 ερωτήματα και κάθισε μαζί τους στα 45 λεπτά που είχαν στην διάθεσή τους για να απαντήσουν τα ερωτήματα. Η ερευνήτρια έδωσε απάντηση μόνο στις διευκρινιστικές ερωτήσεις των μαθητών πάνω στα ερωτήματα, ενώ απέφυγε την ανάλυση πάνω σε αυτά, διότι στόχος ήταν να μελετήσει την πορεία της σκέψης των μαθητών δίχως κάποια επιμέρους βοήθεια σε αυτή την φάση. Από τα γραπτά αυτά, θα διάλεγε εξάλλου εκείνα που θα παρουσίαζαν ενδιαφέρον για περαιτέρω ανάλυση.

<u>Ερώτημα 1:</u> Αν οι πλευρές τριγώνου είναι ανάλογες προς τους αριθμούς 6, 3, 4 και η περίμετρος του τριγώνου είναι 65cm, να βρείτε τα μήκη των πλευρών του.

Μ1	Α+Β+Γ=65 και 6x+3x+4x=65 => 13x=65 => x=5, άρα ΑΒ/ΑΓ=5, ΑΒ/ΒΓ=5 ΚΑΙ ΑΓ/ΒΓ=5.
Μ2	Α+Β+Γ=65 και 6x+3x+4x=65 => 13x=65 => x=5, ΑΒ/ΒΓ=6, ΒΓ/ΓΑ=3, ΓΑ/ΑΒ=4.
Μ3	Α+Β+Γ=65 και 6x+3x+4x=65 => 13x=65 => x=5.
Μ4	Α+Β+Γ=65 και 6x+3x+4x=65 => 13x=65 => x=5, άρα το τρίγωνο είναι ισόπλευρο με πλευρά x=5.
Μ5	Καμία απάντηση.
Μ6	Αν x1, x2, x3 οι ζητούμενες πλευρές και ανάλογες προς τους αριθμούς 6, 3 και 4, τότε 6x1/6=65/6 => x1=65/6 3x2/3=65/3 => x2=65/3 4x3/4=65/4 => x3=65/4.
Μ7	Α+Β+Γ=65 και 6x+3x+4x=65 => 13x=65 => x=5.
Μ8	Καμία απάντηση.

Στο ερώτημα αυτό οι μαθητές φανέρωσαν μεγάλη δυσκολία. Φαίνεται να μην κατανοούν την έννοια “πλευρά τριγώνου ανάλογη προς αριθμό”, με αποτέλεσμα να υπάρχει ασάφεια στις απαντήσεις που δίνουν. Όλοι οι μαθητές εκτός από τους Μ5 και Μ8 έβγαλαν την σχέση 6x+3x+4x=65 => 13x=65 => x=5, όπου το x το ερμήνευσε ο καθένας διαφορετικά όπως φαίνεται. Στο ερώτημα αυτό λοιπόν παρατηρούμε

ότι η εννοιακή εικόνα της έννοιας της αναλογίας τμημάτων δεν ταιριάζει με τον εννοιακό ορισμό.

<u>Ερώτημα 2:</u>

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ και σημείο Β τέτοιο ώστε

$$\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{1}{3}.$$

Τότε να υπολογίσετε τους λόγους :

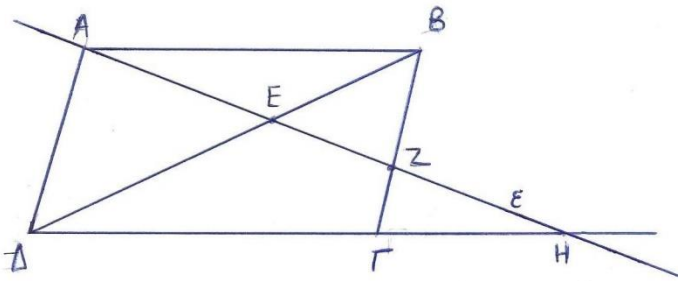
2) $\frac{B\Gamma}{AB}$ 2) $\frac{B\Gamma}{A\Gamma}$

Μ1	ΒΓ/ΑΒ=3ΑΒ/ΑΒ => ΒΓ/ΑΒ=3 ΒΓ/ΑΓ=3ΑΒ/ΑΒ+ΒΓ=3ΑΒ/4ΑΒ=3/4.
Μ2	ΒΓ/ΑΒ=3/1=3 ΒΓ/ΑΓ=3/4.
Μ3	Όμοια με Μ1.
Μ4	Όμοια με Μ1.
Μ5	Όμοια με Μ2.
Μ6	Αφού ΑΒ/ΒΓ=1/3, τότε ΑΒ=1 και ΒΓ=3, έπειτα απάντησε όπως ο Μ1.
Μ7	Όμοια με Μ2.
Μ8	Όμοια με Μ2.

Το ερώτημα αυτό δόθηκε από την ερευνήτρια όπως αναφέρθηκε για την διερεύνηση της αντίληψης των μαθητών πάνω στην μαθηματική αναλογία και περιελάμβανε σχήμα στην προκειμένη περίπτωση για δύο λόγους. Ο πρώτος αφορούσε την αξιολόγηση της κατανόησης του σχήματος, διακρίνοντας από τις απαντήσεις σε ποια από τις 4 πτυχές του Duval (1999) κατατάσσεται η ικανότητα των μαθητών. Ο δεύτερος λόγος ήταν περισσότερο διερευνητικός, διότι ένας από τους άξονες των ερευνητικών ερωτημάτων αφορούσε εδώ πώς αντιλαμβάνονται οι μαθητές την αναλογία τμημάτων αν τους δίνεται γνωστή μια δεύτερη αναλογία. Με άλλα λόγια πόσο καλά έχουν αντιληφθεί την έννοια αυτή με βάση το δοσμένο σχήμα. Παρατηρήθηκε ότι σε αυτό το ερώτημα παρουσιάστηκαν δύο τρόποι προσέγγισης. Ο ένας αφορά την απάντηση του μαθητή Μ1, όπου με αντικατάσταση υπολογίζει τους ζητούμενους λόγους, και ο άλλος αφορά τον απευθείας υπολογισμό των λόγων ενδεχομένως βάσει σχήματος. Από την άλλη μεριά φαίνεται ότι η μαθήτρια Μ6 ενώ υπολογίζει σωστά τους ζητούμενους λόγους έχει σχηματίσει εσφαλμένη εννοιακή εικόνα για τον λόγο τμημάτων σε σύγκριση με τον εννοιακό ορισμό του λόγου δύο τμημάτων. Στο σημείο αυτό η ερευνήτρια εντοπίζει μια περίπτωση ενδιαφέρουσα προς επιπλέον ανάλυση μιας και οι υπόλοιποι μαθητές έχουν κοινά σημεία στις απαντήσεις τους.

Ερώτημα 3:

Αν από την κορυφή Α παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ φέρουμε ευθεία ε, η οποία τέμνει την διαγώνιο ΒΔ στο Ε, την πλευρά ΒΓ στο Ζ και την προέκτασή της ΔΓ στο Η, να δείξετε ότι $AE^2 = EZ \bullet EH$.



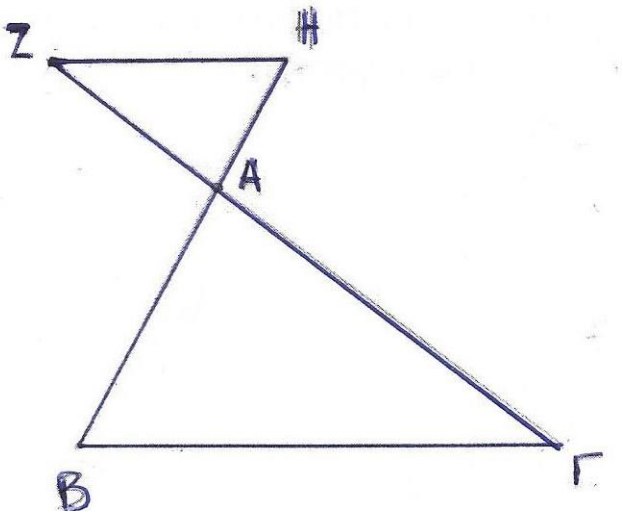
Μ1	Καμία απάντηση.
Μ2	Καμία απάντηση.
Μ3	Τα τρίγωνα ΑΒΕ, ΑΒΖ είναι ίσα.
Μ4	Καμία απάντηση.
Μ5	ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο. Άρα ΑΒ//ΔΓ και αφού προεκτείνω την ΔΓ έως το Η, ΑΒ//ΔΗ και ΔΑ//ΒΓ. Άρα DE/EB=AE/EZ=HE/EA.
Μ6	ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο. Από θεώρημα Θαλή θα πρέπει EH/AE=AE/EZ (δεν το απέδειξε).
Μ7	Ύψωσε στο τετράγωνο την σχέση ΑΕ=ΑΗ-ΕΗ....
Μ8	Έδειξε ότι τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΔΕΗ είναι όμοια.

Στο ερώτημα αυτό μόνο η μαθήτρια Μ5 έδωσε μια πλήρη απόδειξη, σωστά τεκμηριωμένη, ενώ ο Μ6 βάσει του σχήματος φάνηκε να αντιλήφθηκε ότι θα πρέπει να κάνει χρήση του Θεωρήματος του Θαλή, πράγμα που αποτελούσε άξονα των ερευνητικών ερωτημάτων της μελέτης. Στο σημείο αυτό η ερευνήτρια θεώρησε αρκετά ενδιαφέρουσα

την απάντηση της μαθήτριας Μ5, η οποία αξίζει να σημειωθεί ότι ήταν η μοναδική από την θεωρητική κατεύθυνση, η οποία έλαβε μέρος στην έρευνα.

<u>Ερώτημα 4:</u>

Το ευθύγραμμο τμήμα ΖΗ είναι παράλληλο με το ΒΓ (ΖΗ//ΒΓ) και τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων ΑΒ, ΑΓ και ΖΓ αντίστοιχα ίσα με ΑΒ=2cm, ΑΓ=6cm και ΖΓ=9cm. Να βρεθεί το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΗΒ = χ.



Μ1	ΑΒ/ΑΓ=2/6=1/3=ΗΒ/ΖΓ => ΗΒ=3, ΖΑ=9-6=3.
Μ2	ΖΑ=3, ΑΒ/ΑΓ=2/6=1/3.
Μ3	AZ=3, AG/ZG=AB/HA => 6/3=2/HA => HA=1, HB=HA+AB=1+2=3.
Μ4	Όμοια με Μ2.
Μ5	ΗΒ=ΒΑ+ΑΗ, ΖΑ/ΑΒ=ΗΑ/ΑΓ, ΗΒ=ΗΑ+ΑΒ.
Μ6	Όμοια με Μ2, δεν υπολόγισε το ΗΒ.
Μ7	Όμοια με Μ2.
Μ8	Όμοια με Μ2.

Στο ερώτημα αυτό σχεδόν όλοι οι μαθητές φαίνεται να αντιλαμβάνονται σε πολύ καλό βαθμό το Θεώρημα του Θαλή και παρά το γεγονός ότι το σχήμα αυτό αποτελεί σύμφωνα με την βιβλιογραφία (Θωμαΐδης - Πούλος, 2000) εμπόδιο στην εφαρμογή του Θεωρήματος, οι συγκεκριμένοι μαθητές φαίνεται να το διαχειρίζονται με ευκολία. Μόνο η μαθήτρια Μ5 φάνηκε να χρησιμοποιεί εσφαλμένα το Θεώρημα, όμως θα δούμε και παρακάτω την αιτία για αυτό το φαινόμενο.

Ανάλυση των αποτελεσμάτων της πρώτης συνέντευξης:

Παρακάτω αναφερόμαστε στην συνέντευξη που έγινε με την μαθήτρια Μ5. Αρχικά η ερευνήτρια έθεσε κάποια εισαγωγικά ερωτήματα στην μαθήτρια ώστε να αντιληφθεί ποιά είναι η γνώμη που έχει η ίδια για την επίδοσή της στα μαθηματικά, αλλά και ποιά είναι η σχέση της μαθήτριας με το συγκεκριμένο μάθημα, πόσο σημαντικά τα θεωρεί ή όχι.

Ερωτήσεις για εξέταση αυτο-αντίληψης και αυτο-αποτελεσματικότητας

Απάντησε στις παρακάτω ερωτήσεις ανάλογα με αυτό που σε εκφράζει περισσότερο από το 1 έως το 4 (διαφωνώ απόλυτα, διαφωνώ, συμφωνώ, συμφωνώ απόλυτα).

1. Μελετώ τα μαθηματικά γιατί αναγνωρίζω την χρησιμότητά τους.
2. Αισθάνομαι ικανή να λύσω μαθηματικά προβλήματα που απαιτούν πολύ χρόνο.
3. Πάντα ήμουν καλή στα μαθηματικά.
4. Η σκληρή μελέτη μπορεί να βελτιώσει κάποιον στα μαθηματικά.
5. Αν δεν μπορέσω να λύσω ένα μαθηματικό πρόβλημα μέσα σε λίγα λεπτά, ίσως να μην καταφέρω να το λύσω ποτέ.

6. Μαθαίνω γρήγορα αυτά που διδάσκομαι στα μαθηματικά.
7. Είμαι καλός στα μαθηματικά σε σύγκριση με τους υπόλοιπους συμμαθητές μου.
8. Οι εργασίες στα μαθηματικά είναι εύκολες για εμένα.
9. Είναι σημαντικό για εμένα να έχω καλή επίδοση στα μαθηματικά.
10. Νιώθω ικανοποιημένη από την επίδοσή μου στα μαθηματικά.

Ερωτήματα	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Απαντήσεις	2	3	2	4	1	1	2	3	2	3

Οι πέντε πρώτες ερωτήσεις αφορούν την αυτο-αντίληψη του μαθητή. Η μαθήτρια Μ5 όπως έχει αναφερθεί και παραπάνω έχει επιλέξει την θεωρητική κατεύθυνση στο σχολείο. Η ερευνήτρια διέκρινε ότι παρόλα αυτά η Μ5 έχει ισχυρή αυτο-αντίληψη για την ικανότητά της στα μαθηματικά. Όσο αφορά την αυτο-αποτελεσματικότητα φαίνεται να την διακρίνει μια μέτρια αντίληψη για τον εαυτό της.

Ερώτημα 1

Αν οι πλευρές τριγώνου είναι ανάλογες προς τους αριθμούς 6, 3, 4 και η περίμετρος του τριγώνου είναι 65cm, να βρείτε τα μήκη των πλευρών του.

Απάντηση στο φυλλάδιο δραστηριοτήτων: Καμία απάντηση

ΕΡ: Τι σε δυσκόλεψε;

Μ5: Δεν κατάλαβα τα δεδομένα και επίσης πώς να ξεκινήσω την άσκηση δεν ξέρω…

ΕΡ: Ωραία πάμε να την δούμε μαζί. Αν ΑΒ=3cm και ΓΔ=6cm, τότε $\frac{AB}{\Gamma\Delta} =$;

Μ5: Δεν ξέρω πόσο είναι...

(αγχώθηκε…)

Έγραψε: λόγος ΑΒ-ΓΔ=3/6 (1)

Η Μ5 από το άγχος της, έγραψε περιγραφικά αυτό που της ζητήθηκε από την ερευνήτρια. Επιπλέον δήλωσε απευθείας ότι δεν κατάλαβε τα δεδομένα της άσκησης και γι' αυτό το λόγο δεν έδωσε κάποια απάντηση στο συγκεκριμένο ερώτημα. Εδώ η ερευνήτρια έκρινε σκόπιμη την παρέμβαση της ώστε να κατευθύνει την σκέψη της μαθήτριας. Έτσι, ξεκινάει εξηγώντας τον ορισμό αναλογίας τμημάτων. Στόχος της είναι να της δώσει κατεύθυνση προς την λύση και όχι απευθείας την λύση.

ΕΡ: Επιπλέον έστω ΕΖ=2cm και ΗΘ=4cm, τότε ο λόγος ΕΖ προς ΗΘ με τί ισούται;

Έγραψε ΕΖ προς ΗΘ=2/4 (2)

ΕΡ: Τι παρατηρείς για τους δύο λόγους που υπολόγισες;

(σκέφτεται...)

ΕΡ: Δηλαδή αν απλοποιήσεις τα κλάσματα, τί προκύπτει?

Έκανε απλοποίηση στην σχέση (1) 3/6=1/2

Και στην σχέση (2) 2/4=1/2

ΕΡ: Οι δύο λόγοι ισούνται. Αυτό σημαίνει ότι ΑΒ/ΓΔ=ΕΖ/ΗΘ και τότε λέμε ότι τα τμήματα ΑΒ, ΕΖ είναι ανάλογα τμήματα προς τα ΓΔ, ΗΘ.

Μ5: Ναι…

Βάσει αυτού ο ερευνητής ζήτησε να ξανά σκεφτεί, αυτό που την δυσκόλευε.

Η Μ5 άρχισε να γράφει ΑΒ/6=ΒΓ/3=ΓΑ/4…

Μ5 : Νομίζω το κάνω λάθος…

Η Μ5 φαίνεται να μπήκε στο πνεύμα της άσκησης.

ΕΡ: Όχι σωστά το κάνεις...

ΕΡ: Άρα τι σημαίνει οι πλευρές τριγώνου είναι ανάλογες προς αριθμούς...το καταλάβαμε…

Μ5: Ναι…

ΕΡ. Σου δίνει και την περίμετρο…

Μ5. Ναι…

ΕΡ: Τα δεδομένα σου λοιπόν είναι η σχέση που βρήκες και η περίμετρος.

Η ερευνήτρια της έδειξε την ιδιότητα των αναλογιών

Αν α/β = γ/δ = ε/ζ, τότε α/β = γ/δ = ε/ζ = (α+γ+ε)/(β+δ+ζ) (3)

Η ιδιότητα αυτή της θύμιζε κάτι αλλά αμυδρά, είπε ότι είχαν κάνει πολλές ασκήσεις και τότε κάτι είχε καταλάβει αλλά φαίνεται να εννοούσε κάτι αντίστοιχο με το παρακάτω:

α/β = χ/γ, βρείτε το χ (όπου θα το υπολόγιζε με χιαστί όπως είπε)

Σύμφωνα με τους Tall & Vinner (1981) ο εννοιακός ορισμός μπορεί εύκολα να αποστηθιστεί και έτσι να χαθεί η ουσία της έννοιας με αποτέλεσμα να γίνουν λάθη αν αλλάξουν λίγο τα δεδομένα και εφαρμοστεί η αποστήθιση. Όπως είδαμε και παραπάνω ο προσωπικός εννοιακός ορισμός, όπου φαίνεται και στην μαθήτρια Μ5, μπορεί να μεταβάλλεται και να τροποποιείται με τον καιρό από το ίδιο το άτομο.

Βάσει της (3) έβγαλε ΑΒ+ΒΓ+ΓΑ/3+6+4=ΑΒ/6+ΒΓ/3+ΓΑ/4 (4)

Μ5. Άρα δεν μπορώ να πω ότι η σχέση (4) ισούται με 5?

ΕΡ. Ναι μπορείς...

Μ5. Άρα ΑΒ/6=5, ΒΓ/3=5, ΓΑ/4=5

Η ΕΡ για να βεβαιώσει και την ίδια της ζήτησε να κάνει επαλήθευση.
Την έκανε αμέσως.

ΕΡ. Έχεις κάποια απορία?

Μ5. Όχι...

ΕΡ. Σίγουρα?

Μ5.Ναι..

Η ερευνήτρια στην συνέχεια θέλοντας να διερευνήσει τον τρόπο σκέψης της μαθήτριας στο ερώτημα 2, το οποίο είχε απαντήσει σωστά , μάλιστα υπολόγισε τους λόγους απευθείας, χωρίς αντικατάσταση, της έθεσε κάποια επιπλέον υποερωτήματα.

<u>Υποερώτημα 1</u>

Βλέποντας την αναλογία ΑΒ/ΓΔ=1/4, η Γεωργία ισχυρίζεται ότι ΑΒ=1 και ΓΔ=4, ενώ η Μαρία ότι το ΓΔ είναι τετραπλάσιο του ΑΒ. Ποιά από τα δύο κορίτσια έχει δίκιο κατά την γνώμη σου και γιατί;

Μ5. Η Γεωργία έχει δίκιο, διότι έτσι απάντησα και την άσκηση 2.

Λογική που ακολούθησε στην άσκηση 2:

ΑΒ/ΓΔ=1/3, άρα αφού βάλαμε στο ΑΒ το 1, στην θέση του ΑΒ βάλαμε το 1, τότε το μήκος θα είναι 1, το ίδιο σκέφτηκα και για το ΒΓ, αφού στο ΒΓ βάλαμε 3, το μήκος ΒΓ θα είναι 3.

ΕΡ. Έτσι λοιπόν απάντησες και ότι ΒΓ/ΑΓ=3/4. ΑΓ=ΑΒ+ΒΓ=1+3=4;

Η ερευνήτρια εντυπωσιάστηκε διότι προέκυψε ένα νέο δεδομένο για ανάλυση το οποίο δεν είχε σκεφτεί για την περίπτωση της μαθήτριας Μ5. Προσπάθησε να κρατήσει ουδέτερη στάση και να κατευθύνει την σκέψη της Μ5, ώστε να καταλάβει την εσφαλμένη εννοιακή εικόνα που έχει για την αναλογία τμημάτων με ένα αντιπαράδειγμα. Στην προκειμένη περίπτωση η Μ5 θεωρεί ακριβώς αυτό που περιγράφει το οποίο έρχεται σε αντίθεση με τον εννοιακό ορισμό του λόγου δύο τμημάτων, μέσω του οποίου περιγράφεται η σχέση που έχουν τα ευθύγραμμα τμήματα μεταξύ τους και όχι το μήκος του κάθε τμήματος (η εννοιακή εικόνα που έχει η Μ5).

Μ5.Ναι

ΕΡ. Αν τώρα ΑΒ=30cm και ΓΔ=120cm, τότε ο λόγος ΑΒ/ΓΔ=?

Μ5. ΑΒ/ΓΔ=30/120

ΕΡ. Ποιος είναι ο λόγος τους?

ΕΡ. Με τι ισούται ύστερα από απλοποίηση;

Μ5.Μετά από απλοποίηση...

(σκέφτεται..)

ΑΒ/ΓΔ=30/120=1/40

ΕΡ. Ξανά σκέψου το.

30/120=1/4.

ΕΡ. Ωραία εδώ λοιπόν το μήκος του ΑΒ=30, του ΓΔ=120, αλλά ο λόγος είναι ίδιος με αυτόν που υπολόγισε Γεωργία και 1 ≠30, 4≠120.

Άρα ο λόγος είναι ένας αριθμός που μου δείχνει την σχέση μεταξύ τμημάτων και όχι ποιο είναι το μήκος τους.

Μ5. Αααα...

(ενθουσιασμός...)

ΕΡ. Άρα η Μαρία έχει δίκιο.

<u>Υποερώτημα 2</u>

ΑΒ/ΓΔ=2/5, ποιο από τα δύο τμήματα είναι μεγαλύτερο;

Μ5. Το ΓΔ είναι μεγαλύτερο.

ΕΡ. Γιατί?

Η ερευνήτρια εδώ προσπαθεί να αντιληφθεί πως σκέφτεται η Μ5...

Μ5.Με ότι και να πολλαπλασιάσω τα 2 τμήματα πάντα το ΓΔ θα' ναι μεγαλύτερο...

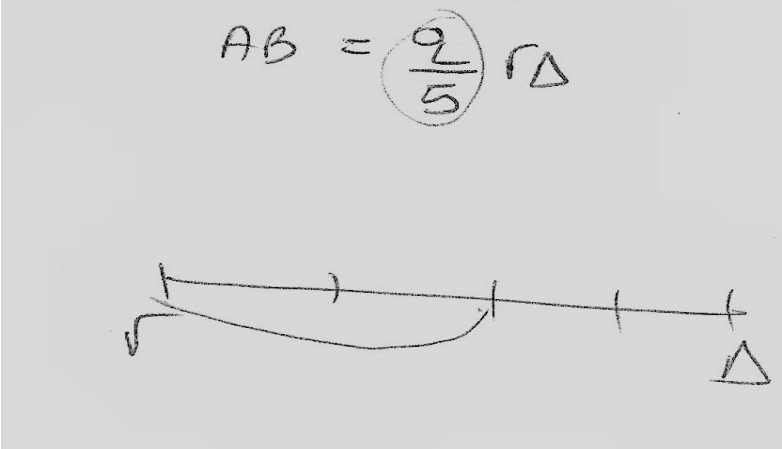
ΕΡ. ΑΒ/ΓΔ<1 ή ΑΒ/ΓΔ>1;

(σκέφτεται....)

Η Μ5 ενώ απαντάει σωστά και γρήγορα την ερώτηση, δείχνει να δυσκολεύεται να κατανοήσει αυτό που την ρωτάει ο ερευνητής.

Η ερευνήτρια πήρε την σχέση ΑΒ/ΓΔ=2/5, ισοδύναμα 5ΑΒ=2ΓΔ, ισοδύναμα, ΑΒ=2/5ΓΔ και της ζήτησε να το σχεδιάσει.

Άρα καταλήξαμε ότι 2/5<1, δηλαδή ΓΔ>ΑΒ.



Οι Fischbein & Nachlieli (1998) αναφέρουν ότι, στην γνωστική ψυχολογία υπάρχει μία σαφής διάκριση μεταξύ εννοιών και εικόνων. Θεωρούνται δύο διαφορετικές νοητικές κατηγορίες, αν και οι σχέσεις μεταξύ τους στον τρόπο σκέψης και την απομνημόνευση είναι καλά τεκμηριωμένες. Μια γεωμετρική έννοια συνήθως ορίζεται ως μια αφηρημένη, γενική εκπροσώπηση (μια ιδέας) της κατηγορίας των αντικειμένων ή γεγονότων. Από την άλλη πλευρά, μια εικόνα (ιδιαίτερα μια οπτική εικόνα) είναι μια αισθητήρια αναπαράσταση ενός αντικειμένου ή εκδήλωση. Οι οπτικές εικόνες μερικές φορές περιγράφονται ως «εικόνες του μυαλού» επειδή διαθέτουν χωρικές

ιδιότητες, όπως η έκταση, το σχήμα, η θέση, το μέγεθος. Η αναπαράσταση και η οπτικοποίηση (χρήση οπτικών-οπτικοακουστικών μέσων) αποτελούν τον πυρήνα της κατανόησης στα μαθηματικά. Ήδη από το 1961, ο Piaget αναγνώρισε τη δυσκολία κατανόησης αυτού που οι μαθηματικοί αποκαλούν "διαίσθηση", ένας τρόπος κατανόησης που έχει στενούς δεσμούς με την αναπαράσταση και την οπτικοποίηση (Duval, 1999).

Η Μ5 φαίνεται να κατέχει την διαδοχική αντίληψη του γεωμετρικού σχήματος με βάση τις τέσσερις πτυχές που διακρίνει ο Duval (1999) για το γεωμετρικό σχήμα, η οποία απαιτείται κάθε φορά που το άτομο πρέπει να κατασκευάσει ή να περιγράψει ένα γεωμετρικό σχήμα. Η κατασκευή του σχήματος δεν εξαρτάται από την αντιληπτική σύλληψη, αλλά από τους τεχνικούς περιορισμούς και τις μαθηματικές ιδιότητες.

Σκόπιμα ζητείται από την Μ5 να σχεδιάσει τα τμήματα ώστε να αντιληφθεί και η ίδια τι παριστάνει η σχέση που της δίνεται να σχεδιάσει.

<u>Υποερώτημα 3</u>

Αν το τμήμα ΑΒ=10α και ΑΓ=2α, να βρεθεί ο λόγος ΒΓ/ΑΒ.

Μ5. ΑΒ/ΑΓ=10α/2α=5α/α=5

ΕΡ. ΑΒ=5ΑΓ?

Μ5.ναι..

Ψάχνω ΒΓ/ΑΒ, αφού ΑΒ=10α και ΑΓ=2α

ΑΒ=ΑΓ+ΓΒ, άρα ΓΒ=8α

Άρα ΒΓ/ΑΒ=8α/10α =4/5 (4)

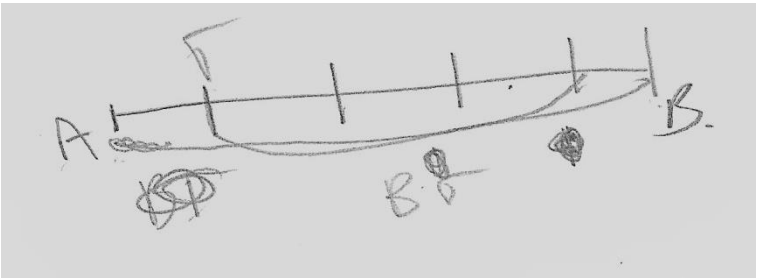
ΕΡ. ΑΒ>ΒΓ? Από την σχέση 4?

Η ΕΡ περίμενε να απαντηθεί απευθείας αυτό το ερώτημα, όμως φαίνεται να υπάρχει δυσκολία από την Μ5 σε αυτό το ερώτημα. Έτσι η ΕΡ θέλησε να την αφήσει να λειτουργήσει μόνη της για να απαντήσει. Η Μ5 απάντησε:

(κόλλησε λίγο...)

έγραψε 4ΑΒ=5ΑΓ, ισοδύναμα ΑΒ=5/4 ΒΓ

Στην συνέχεια η ΕΡ της ζήτησε ξανά να σχεδιάζει τα εν λόγω τμήματα βάσει της παραπάνω σχέσης.



ΕΡ. 5/4>1 ή 5/4<1?

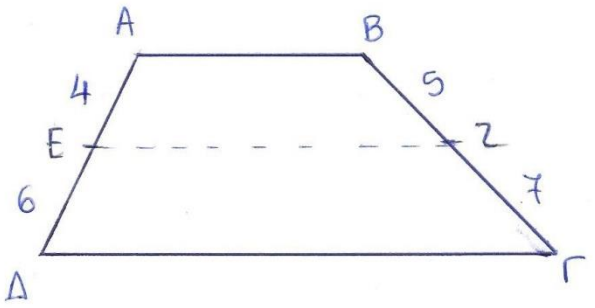
Μ5. 5/4>1

Άρα ΑΒ>ΒΓ.

Η Μ5 σε αυτή το στάδιο φαίνεται να έχει κατανοήσει τι αντιπροσωπεύει ο λόγος δύο τμημάτων, καθώς και πώς αναπαριστούνται τα αντίστοιχα τμήματα βάσει δοσμένου λόγου. Κατάφερε λοιπόν να φτάσει στο στάδιο της παραγωγικής σκέψης (deduction) που αντιστοιχεί στο επίπεδο 3, κατά την θεωρία των Van Hiele. Σε αυτό το στάδιο, το άτομο είναι σε θέση να αναπτύξει μια απόδειξη, καθώς και να επιχειρηματολογήσει πάνω σε αυτή.

Υποερώτημα 4

Ένας μαθητής ισχυρίσθηκε ότι στο διπλανό τραπέζιο ΑΒΓΔ η ΕΖ είναι παράλληλη στις βάσεις του. Είχε δίκιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



Μ5. ΑΒ//ΔΓ, για να είναι παράλληλες θα σημαίνει ότι

ΒΖ/ΖΓ=5/7=ΑΕ/ΕΔ=4/6=2/3,

Αλλά 5/7≠2/3, άρα δεν είναι παράλληλες.

ΕΡ. Στο θεώρημα του Θαλή έχουμε ως δεδομένο την παραλληλία ευθειών και παίρνουμε ισότητα λόγων.

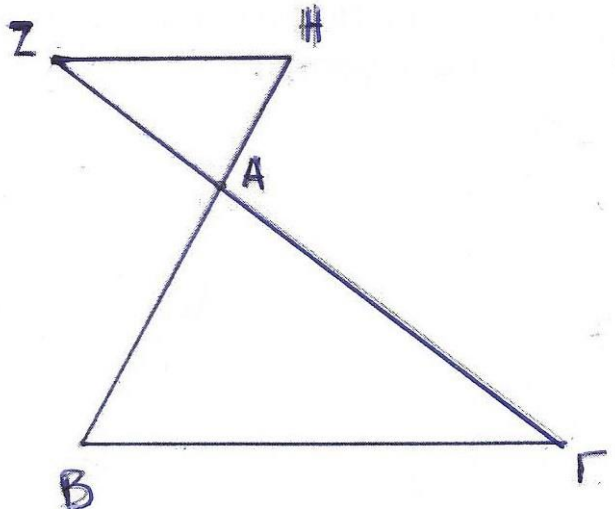
Εδώ υποθέσαμε ισότητα λόγων και πήραμε παραλληλία, άρα έχω το αντίστροφο του θεωρήματος του Θαλή.

Μ5. Ωραία, κατάλαβα...

Η Μ5 φαίνεται πως είχε πλήρη αντίληψη του σχήματος, η οποία την βοήθησε να φτάσει στην λύση, άρα εδώ χρησιμοποίησε την λειτουργική αντίληψη του σχήματος κατά τον Duval (1999), όπου μέσω του σχήματος το άτομο μπορεί να φτάσει στην λύση, απλά κοιτάζοντας την εικόνα.

Ερώτημα 4

Το ευθύγραμμο τμήμα ΖΗ είναι παράλληλο με το ΒΓ (ΖΗ//ΒΓ) και τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων ΑΒ, ΑΓ και ΖΓ αντίστοιχα ίσα με ΑΒ=2cm, ΑΓ=6cm και ΖΓ=9cm. Να βρεθεί το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΗΒ = χ.



Απάντηση στο φυλλάδιο δραστηριοτήτων :

ΗΒ=ΒΑ+ΑΗ, ΖΑ/ΑΒ=ΗΑ/ΑΓ, ΗΒ=ΗΑ+ΑΒ

ΕΡ. Ο λόγος των πλευρών που διαλέγουμε δεν είναι τυχαίος...

Μ5.αααα...

Φάνηκε να έχει καταλάβει αμέσως το λάθος της...

ΕΡ. Ποιες γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους?

Τις βρήκε εύκολα, δεν θυμόταν πως λέγονταν...

Μ5. Άρα ΖΑ είναι απέναντι από τη γωνία Η=Β

Μ5. Άρα ΖΑ/ΑΓ=ΗΑ/ΑΓ.

Παρατηρούμε ότι η Μ5 είναι σε θέση να εφαρμόσει το θεώρημα ακόμα και αν δεν της δίνεται το κλασσικό γεωμετρικό σχήμα του θεωρήματος

αλλά μια παραλλαγή εκείνου. Με άλλα λόγια η Μ5 είναι σε θέση να αντιληφθεί πλήρως τις ιδιότητες του σχήματος και βάση αυτών να απαντήσει στο αντίστοιχο ερώτημα. Η Μ5 και σε αυτό το ερώτημα φαίνεται να βρίσκεται στο επίπεδο 3, της παραγωγικής σκέψης κατά van Hiele, αφού με ευκολία διαχειρίζεται το γεωμετρικό σχήμα, χτίζοντας μια ορθή γεωμετρική απόδειξη από την αρχή, παρά την εσφαλμένη απάντηση που είχε δώσει σε αυτό το ερώτημα στην πρώτη φάση.

Ανάλυση αποτελεσμάτων δεύτερης συνέντευξης

Παρακάτω αναφερόμαστε στην συνέντευξη που έγινε με την μαθήτρια Μ6. Αρχικά η ερευνήτρια έθεσε κάποια εισαγωγικά ερωτήματα στην μαθήτρια ώστε να αντιληφθεί ποιά είναι η γνώμη που έχει η ίδια για την επίδοσή της στα μαθηματικά, αλλά και ποιά είναι η σχέση της μαθήτριας με το συγκεκριμένο μάθημα, πόσο σημαντικά τα θεωρεί ή όχι. Ο ερευνητής μετά το τέλος της συνέντευξης θα συγκρίνει την γνώμη της μαθήτριας για τον εαυτό της με τις απαντήσεις που δίνει. Η Μ6 φαίνεται να διαθέτει τόσο ισχυρή αυτο-αντίληψη όσο και αυτο-αποτελεσματικότητα. Παρακάτω θα δούμε ότι σε ορισμένα ζητήματα δεν είναι τόσο αποτελεσματική όσο πιστεύει.

Οι απαντήσεις της μαθήτριας Μ6 βρίσκονται παρακάτω πίνακα:

Ερωτήματα	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Απαντήσεις	3	3	3	4	1	4	3	3	3	3

<u>Ερώτημα 1</u>

Αν οι πλευρές τριγώνου είναι ανάλογες προς τους αριθμούς 6, 3, 4 και η περίμετρος του τριγώνου είναι 65cm, να βρείτε τα μήκη των πλευρών του.

<u>Απάντηση στο φυλλάδιο δραστηριοτήτων:</u> Αν x1, x2, x3 οι ζητούμενες πλευρές και ανάλογες προς τους αριθμούς 6, 3 και 4, τότε

- 6x1/6=65/6 => x1=65/6
- 3x2/3=65/3 => x2=65/3
- 4x3/4=65/4 => x3=65/4

ΕΡ. Σου ζητάει να βρεις το μήκος του ΑΒ, ΒΓ και ΓΑ...

(Παύση...)

Μ6. Για πες τί κάνουμε?

ΕΡ. Αφού το έχεις μπροστά σου...

Μ6. Κάτσε λίγο να το σκεφτώ..δεν ξέρω, δεν μου κάνει το κλικ...

Η Μ6 φαίνεται να μην είναι απόλυτα συγκεντρωμένη ίσως από το άγχος της.

ΕΡ. Στο κάνει απλά αγχώνεσαι...

(γέλια...)

ΕΡ. Ωραία μπορείς να γράψεις αυτή την σχέση με τον αριθμό που βρήκαμε να το δεις...

Έγραψε: ΑΒ/6=ΒΓ/3=ΓΑ/4=5/1

Μ6. Τώρα μου έγινε το κλικ....

(γέλια…)

Η ερευνήτρια στην συνέχεια θέλοντας να διερευνήσει τον τρόπο σκέψης της μαθήτριας στο ερώτημα 2, στο οποίο είχε δώσει σωστό αποτέλεσμα, αλλά φαίνεται μην έχει αντιληφθεί τί παρουσιάζει ο λόγος τμημάτων, της έθεσε τα εξής υποερωτήματα:

Αξίζει να υπενθυμίσουμε ότι η μαθήτρια είχε γράψει:

$$\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow AB = 1 \text{ κι } B\Gamma = 3$$

Άρα 1) $\frac{B\Gamma}{AB} = \frac{3}{1} = 3$

2) $AB + B\Gamma = A\Gamma$

$A\Gamma = 1 + 3 = 4$

Άρα $\frac{B\Gamma}{A\Gamma} = \frac{3}{4}$

<u>Υποερώτημα 1</u>

Βλέποντας την αναλογία ΑΒ/ΓΔ=1/4, η Γεωργία ισχυρίζεται ότι ΑΒ=1 και ΓΔ=4, ενώ η Μαρία ότι το ΓΔ είναι τετραπλάσιο του ΑΒ. Ποιά από τα δύο κορίτσια έχει δίκιο κατά την γνώμη σου και γιατί;

(σκέφτεται..)

Γράφει: *ΑΒ/ΓΔ=1/4=4/16*

Η Μ6 ενώ στον παραπάνω λόγο βρίσκει ένα ανάλογο τρόπο να τον εκφράσει, ως 4/16, εντυπωσιάζει τον ερευνητή διότι το γράφει απευθείας, δείχνοντας να καταλαβαίνει το ζητούμενο της ερώτησης.

Μ6. Η Γεωργία

Στην πραγματικότητα φαίνεται να μην έχει αντιληφθεί ακριβώς την ερώτηση και απαντάει με τον ίδιο τρόπο που απάντησε στο 2^{ο} ερώτημα της αρχικής φάσης. Εδώ παρουσιάζεται το ίδιο φαινόμενο που παρουσιάστηκε και στην μαθήτρια Μ5. Και οι δύο μαθήτριες έχουν εσφαλμένη εννοιακή εικόνα για την αναλογία, από τον εννοιακό ορισμό της. Επομένως δεν προκαλεί έκπληξη εν τέλει η όμοια απάντηση της Μ5 σε αντίστοιχο ερώτημα.

ΕΡ. Αν η Γεωργία έχει δίκιο, τότε το ΑΒ δεν θα μπορούσε να είναι 4 και το ΓΔ 16?

(σκέφτεται..)

Η Μ6 φαίνεται να έχει «κολλήσει», αδυνατώντας να δώσει απάντηση, έτσι η ερευνήτρια παίρνει την πρωτοβουλία να της εξηγήσει αναλυτικά την ερώτησή του.

Η ερευνήτρια εξηγεί:

ΕΡ. Η Γεωργία λέει ότι ΑΒ=1, κάτι σταθερό, και ΓΔ=4, ενώ αν πεις ΓΔ=4ΑΒ, στην ουσία βρίσκεις μια σχέση μεταξύ του ΑΒ και ΓΔ. Ο λόγος στην ουσία είναι ένας σταθερός αριθμός και δείχνει πια η σχέση μεταξύ του ΑΒ με το ΓΔ. Αυτό δεν σημαίνει ότι ΑΒ=1 και ΓΔ=4, γιατί όπως έγραψες θα μπορούσε ΑΒ=4 και ΓΔ=16. Το σωστό είναι το 2.

Μ6. Αα κατάλαβα...

Υποερώτημα 2

Αν ΑΒ/ΓΔ=2/5, ποιο από τα δύο τμήματα είναι μεγαλύτερο;

Η ερευνήτρια θέτει ένα ανάλογο ερώτημα για να εξετάσει τον βαθμό κατανόησης του προηγούμενου ερωτήματος.

Μ6. ΑΒ<ΓΔ γιατί όσο και να πολλαπλασιάσουμε με αριθμούς πάντα το ΑΒ θα είναι μικρότερο (όμοια απάντηση με Μ5).

ΕΡ. Σωστά, αλλά τι σε έκανε να οδηγηθείς σε αυτό?

Μου είπες σωστά ΑΒ<ΓΔ, αυτό πως το συμπέρανες?

Η ερευνήτρια ζητάει να δει τον τρόπο σκέψης της μαθήτριας.

Μ6. ΑΒ=2, ΓΔ=5

(γέλια…)

Η Μ6 φαίνεται να μην έχει κατανοήσει το προηγούμενο υποερώτημα. Παρατηρούμε ακόμη ότι παρόλο που στις ερωτήσεις αυτο-αντίληψης, συγκεκριμένα στον ερώτημα "μαθαίνω εύκολα αυτό που διδάσκομαι στα μαθηματικά" πιστεύει ότι μαθαίνει πολύ εύκολα ότι διδάσκεται, όμως η αντίληψη αυτή που έχει για τον εαυτό της δεν συμβαδίζει στην προκειμένη περίπτωση με το συγκεκριμένο πρόβλημα. Φαίνεται δηλαδή να έχει υπερεκτιμημένη πεποίθηση για τον εαυτό της.

ΕΡ. Τι είπαμε πριν? Πώς θα συγκρίνεις τα 2 τμήματα?

Να βοηθήσω λίγο..

2/5<1 ή 2/5>1?

Μ6. 2/5<1, ωραία να το γράψω και αυτό. Δηλαδή αφού 2/5<1 => ΑΒ/ΓΔ>2/5?

Λειτουργεί το άγχος της εδώ...

ΕΡ. όχι, όχι μην μπερδεύεσαι τα πας καλά.

Γράφει ΑΒ/ΓΔ...

ΑΒ/ΓΔ <1...

Μ6. και βγαίνει ΑΒ<ΓΔ, εντάξει εύκολο ήταν.

<u>Υποερώτημα 3</u>

Αν το τμήμα ΑΒ=10α και ΑΓ=2α, να βρεθεί ο λόγος ΒΓ/ΑΒ.

Μ6. θα υπολογίσω το λόγο ΑΒ/ΑΓ=10α/2α=5α(απροσεξία)=5.

Λογικά ΑΒ/ΑΓ=ΒΓ/ΑΒ

(ΕΡ. γιατί? Το έσβησε..)

ΕΡ. Προσπάθησε να σχεδιάσεις τα Α, Β και Γ πάνω σε μια ευθεία.

Οι εξωτερικές αναπαραστάσεις αφορούν την εξωτερική οργάνωση συμβόλων που αναπαριστούν μια συγκεκριμένη μαθηματική πραγματικότητα (Dufour – Janvier et al, 1987). Επιπλέον είναι οι "παρατηρήσιμες ενσωματώσεις του τρόπου, με τον οποίο κατανοούν τις έννοιες εσωτερικά οι μαθητές (Lesh et al,, 1987a, σ.33), με άλλα λόγια είναι οι εκδηλώσεις του τρόπου με τον οποίο έχουν κατανοήσει τις έννοιες οι μαθητές.

(σκέφτεται..)

ΕΡ. Θα ήθελα βάσει του λόγου ΑΒ/ΑΓ=5 που σου δίνω να βρεις που βρίσκονται.

Μ6. ΑΒ 5 φορές μεγαλύτερο από το ΑΓ.

Μ6. ΑΒ=ΑΓ+ΓΒ

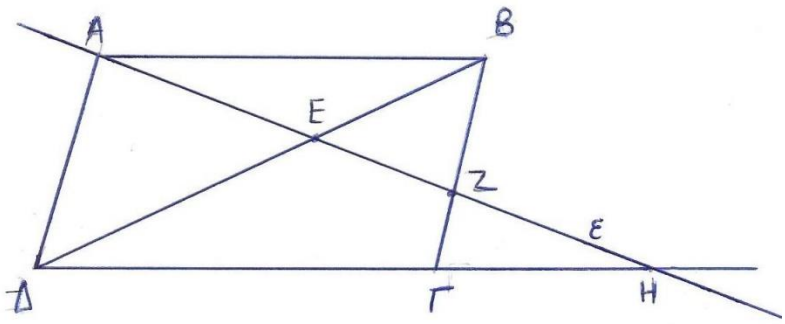
ΑΒ-ΑΓ=ΓΒ

10α-2α=8α

Άρα ΒΓ/ΑΒ=8α/10α =4/5<1

Ερώτημα 3

Αν από την κορυφή Α παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ φέρουμε ευθεία ε, η οποία τέμνει την διαγώνιο ΒΔ στο Ε, την πλευρά ΒΓ στο Ζ και την προέκτασή της ΔΓ στο Η, να δείξετε ότι $AE^2 = EZ \bullet EH$.



Απάντηση στο φυλλάδιο δραστηριοτήτων:

ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο. Από θεώρημα Θαλή θα πρέπει ΕΗ/ΑΕ=ΑΕ/ΕΖ (δεν το απέδειξε).

ΕΡ. ΑΒ//ΔΓ ως παραλληλόγραμμο. Σε ποιο άλλο τμήμα είναι παράλληλο το ΑΒ;

Μ6. ΑΒ//ΔΗ

ΕΡ. Μπορείς να βρεις όμοια τρίγωνα στο σχήμα?

Μ6. ΑΕΒ, ΔΕΗ

Και ΑΕ/ΕΗ=ΒΕ/ΕΔ

ΕΡ. Με ποιο τρόπο έφτιαξες την αναλογία;

Μ6. Βάζω από πάνω τα μεγάλα, από κάτω τα μικρά.

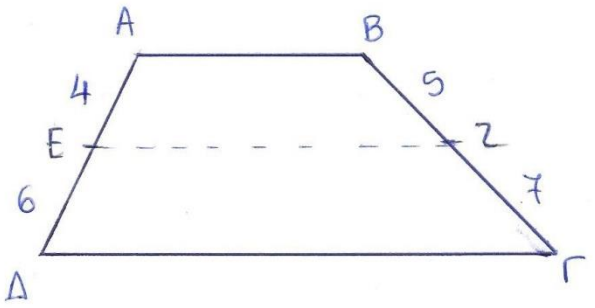
ΕΡ. Ποιά εννοείς ως μεγάλα και ποιά ως μικρά?

Η Μ6 προσπάθησε να το περιγράψει, αλλά σύμφωνα με τα λεγόμενά της ήταν μια φράση που της είχε αποτυπωθεί στο μυαλό από κάποιο δάσκαλό της ίσως. Συναντάμε ξανά την θεωρία των Tall & Viner (1981) για την εννοιακή εικόνα με την οποία υπάρχει κίνδυνος αποστήθισης. Η ερευνήτρια της εξήγησε ότι συνηθίζουμε να βάζουμε ως αριθμητές τις πλευρές του ενός τριγώνου και ως παρονομαστές τις πλευρές του άλλου τριγώνου οι οποίες βρίσκονται απέναντι από ίσες γωνίες. Η Μ6 είναι σε θέση να αναγνωρίσει όμοια τρίγωνα στο σχήμα, με άλλα λόγια να «διαβάσει» το σχήμα με τα επιμέρους στοιχεία του. Σύμφωνα με την θεωρία Van Hiele, η Μ6 βρίσκεται στο τρίτο επίπεδο, εκείνο της παραγωγικής σκέψης μιας και είναι σε θέση όχι μόνο να αναγνωρίσει όμοια τρίγωνα στο σχήμα αλλά ταυτόχρονα να επιχειρηματολογήσει για την ύπαρξή τους. Έτσι στην συνέχεια σε συνεργασία με την ερευνήτρια έδειξαν ότι:

ΑΕ/ΕΖ=ΕΔ/ΒΕ => ΕΖ/ΑΕ=ΒΕ/ΕΔ (ΑΕΔ όμοιο με ΕΖΒ, ΑΔ//ΒΓ, ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο).

Υποερώτημα 4

Ένας μαθητής ισχυρίσθηκε ότι στο διπλανό τραπέζιο ΑΒΓΔ η ΕΖ είναι παράλληλη στις βάσεις του. Είχε δίκιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



ΕΡ. Θα σε βοηθήσει το μήκος που δίνω στα τμήματα για να το βρεις...

Μ6. Κάτι με λόγο πρέπει να είναι προφανώς…

(γέλια...)

Για να είναι παράλληλα κάτι πρέπει να ισχύει..

ΑΒΓΔ τραπέζιο άρα ΑΒ//ΓΔ, πάμε πίσω στο λόγο

ΑΕ/ΕΔ=ΒΖ/ΖΓ => 4/6=5/7 => 28=30 που δεν ισχύει

(σκέφτεται...)

Μ6. Κάνω χιαστί αν βρω το ίδιο ισχύει...

Η ερευνήτρια εξήγησε και στην Μ6 ότι χρησιμοποίησε το αντίστροφο θεώρημα Θαλή.

Η Μ6 επίσης φαίνεται πως είχε πλήρη αντίληψη του σχήματος, η οποία την βοήθησε να φτάσει στην λύση. Και σε αυτή την περίπτωση χρησιμοποιήθηκε η λειτουργική αντίληψη του σχήματος κατά τον Duval

(1999), όπου μέσω του σχήματος το άτομο μπορεί να φτάσει στην λύση, απλά κοιτάζοντας την εικόνα.

6. Συμπεράσματα

Στην παράγραφο αυτή γίνεται μια γενική σύνοψη συμπερασμάτων που περιγράφονται αναλυτικά παραπάνω. Επιπλέον τίθενται μερικά σημεία προς μελλοντική έρευνα-αναζήτηση.

Η παρούσα μελέτη είχε ως στόχο να μελετήσει κατά πόσο οι μαθητές της Β' Λυκείου αντιλαμβάνονται την έννοια της μαθηματικής αναλογίας, κυρίως από την γεωμετρική σκοπιά.

Η έρευνα όπως είχε επισημανθεί και στην αρχή υλοποιήθηκε σε έξι άξονες, θα εξετάσουμε τα αποτελέσματα ξεχωριστά σε κάθε ένα από αυτούς.

Η πρώτη φάση περιελάμβανε τέσσερις (4) ασκήσεις-δραστηριότητες, ενώ η δεύτερη, εκείνη της προσωπικής συνέντευξης μελέτησε σε βάθος τον τρόπο σκέψης επιλεγμένων μαθητών στα παραπάνω ερωτήματα, προσθέτοντας όπου κρίθηκε απαραίτητο επιπλέον ερωτήσεις.

Στο πρώτο ερώτημα (αν οι πλευρές τριγώνου είναι ανάλογες προς τους αριθμούς 6, 3, 4 και η περίμετρος του τριγώνου είναι 65cm, να βρείτε τα μήκη των πλευρών του) οι μαθητές κατά κύριο λόγο φαίνεται να αντιμετωπίζουν δυσκολία στην κατανόηση της έννοιας «πλευρά τριγώνου ανάλογη προς αριθμό». Αυτό είχε ως αποτέλεσμα το ερώτημα αυτό να μην απαντηθεί από πολλούς και από άλλους να δοθεί μια ημιτελής ή εσφαλμένη απάντηση. Στο στάδιο της συνέντευξης των δύο μαθητριών ήταν εμφανές ότι η δυσκολία της κατανόησης της εκφώνησης προερχόταν από την έλλειψη κατανόησης της αναλογίας τμημάτων. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι οι συγκεκριμένοι μαθητές δεν

έχουν κατανοήσει της έννοια της αναλογίας τμημάτων, σημείο που αφορά τον πρώτο άξονα υλοποίησης της έρευνας.

Στο δεύτερο ερώτημα (δοσμένου λόγου ΑΒ/ΒΓ τους ζητήθηκε να υπολογίσουν τους λόγους ΒΓ/ΑΒ και ΒΓ/ΑΓ) όλοι οι μαθητές απάντησαν σωστά, όμως υπήρξε μία μαθήτρια, συγκεκριμένα η Μ6, όπου φάνηκε να έχει σχηματίσει διαφορετική εννοιακή εικόνα σε σχέση με το εννοιακό ορισμό της αναλογίας τμημάτων. Στην συνέντευξη και οι δύο μαθήτριες (Μ5, Μ6) έδειξαν ότι είχαν σχηματίσει την ίδια εσφαλμένη εννοιακή εικόνα για τον λόγο τμημάτων σε σχέση με τον εννοιακό ορισμό του. Αφού η ερευνήτρια τους παρουσίασε τι εκφράζει ο λόγος τμημάτων και η αναλογία τμημάτων, τους έδωσε κάποιες δραστηριότητες προς εφαρμογή. Παρατηρήθηκε ότι υπήρξε δυσκολία στην κατανόηση της έννοιας. Για παράδειγμα, στο υποερώτημα 2 που δόθηκε στην μαθήτρια Μ5, ζητείται δοσμένου λόγου τμημάτων, να βρεθεί το μεγαλύτερο από αυτά. Τελικά το αποτέλεσμα είναι ότι και στον δεύτερο άξονα της έρευνας, αντίληψη λόγου τμημάτων, υπάρχει αδυναμία κατανόησης της έννοιας και εφαρμογής της.

Στο τρίτο ερώτημα, η πλειοψηφία των μαθητών δυσκολεύτηκε. Πρόκειται για αποδεικτική άσκηση, όπου στόχο είχε να εξετάσει το Θεώρημα του Θαλή, χωρίς να τους δίνεται ως δεδομένο να το εφαρμόσουν. Μόνο μια μαθήτρια έδωσε πλήρη απόδειξη σε αυτή την άσκηση, η Μ5, μία από τις δύο συμμετέχουσες στις προσωπικές συνεντεύξεις. Στην προσωπική συνέντευξη με την Μ6 προσπαθήσαμε να αναλύσουμε την άσκηση βήμα προς βήμα για να δούμε τί ακριβώς δυσκόλεψε την μαθήτρια αυτή. Από την μία πλευρά η Μ6 ήταν σε θέση να «διαβάσει» όπως αναφέραμε και παραπάνω ένα σύνθετο σχήμα, όπως επίσης και να αντιληφθεί ότι χρειάζεται να αναζητήσει όμοια

τρίγωνα για να αποδείξει την ζητούμενη σχέση, όμως δυσκολεύεται να αναζητήσει τα κατάλληλα τρίγωνα που θα την οδηγήσουν στην απόδειξη της σχέσης. Στην περίπτωση αυτή επιτυγχάνεται ο άξονας που αφορά την αντίληψη της ομοιότητας τριγώνων καθώς και του Θεωρήματος του Θαλή ώστε να φτάσει η Μ6 στην λύση, όμως υπήρξε αδυναμία στην εφαρμογή. Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι η μαθήτρια αυτή μπορεί να αντιληφθεί την ύπαρξη του Θεωρήματος Θαλή μέσα από δοσμένο σχήμα, πράγμα που αποτελεί τον κομβικό άξονα υλοποίησης της συγκεκριμένης μελέτης.

Το τέταρτο ερώτημα (περιελάμβανε το σχήμα «πεταλούδα»), φάνηκε να ήταν εύκολο σχεδόν για όλους τους μαθητές. Εδώ οι μαθητές κλήθηκαν να εφαρμόσουν το Θεώρημα του Θαλή σε ένα σχήμα διαφορετικό από το τετριμμένο του σχολικού τους εγχειριδίου όπου χωρίς ιδιαίτερη δυσκολία το εφάρμοσαν σωστά. Το σχήμα στο τρίτο ερώτημα δεν έμοιαζε με κάποιο από αυτά που ενδεχομένως είχαν συνηθίσει να εφαρμόζουν το Θεώρημα.

Στο σημείο αυτό μπορούμε να εξαγάγουμε ως γενικότερο συμπέρασμα ότι από την μία πλευρά οι μαθητές της μελέτης αυτής μπορούν να ανταποκριθούν ικανοποιητικά σε εφαρμογές του Θεωρήματος του Θαλή που απαιτούν εφαρμογή συγκεκριμένης μεθοδολογίας. Από την άλλη πλευρά όμως, είναι φανερό ότι δεν έχουν αντιληφθεί τί εκφράζουν οι βασικές έννοιες της αναλογίας καθώς και του λόγου τμημάτων.

7. Προτάσεις για μελλοντική έρευνα

Κλείνοντας την εργασία όπως έχει διαφανεί από την μελέτη μας υπάρχει η αναγκαιότητα αναθεώρησης του τρόπου διδασκαλίας της έννοιας της αναλογίας στα σχολεία.

Ο αναλογικός συλλογισμός αποτελεί έναν από του σημαντικότερους μηχανισμούς της γνωστικής ανάπτυξης του ατόμου. Ως επαγωγικός μηχανισμός σχετίζεται άμεσα με την δημιουργία και τροποποίηση γνωστικών δομών του ατόμου, μέσω της αναθεώρησης των υπαρχόντων κανόνων και της δημιουργίας νέων (Holland, Holyoak, Nissbett, Thagart, 1989).

Ένας μαθητής, ο οποίος μπορεί να αντιληφθεί την έννοια της μαθηματικής αναλογίας θα πρέπει να είναι σε θέσει να αναγνωρίζει περιπτώσεις όπου η χρήση της είναι απαραίτητη ή όχι και όχι απλά να είναι σε θέση να εφαρμόζει ένα αλγόριθμο, δηλαδή μια τυποποιημένη διαδικασία επίλυσης προβλημάτων.

Όπως είναι γνωστό και επιβεβαιώθηκε και στην μελέτη μας, υπάρχει χαμηλό επίπεδο γεωμετρικής αντίληψης των μαθητών από τα γυμνασιακά τους χρόνια. Το μάθημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας που διδάσκεται τόσο στο Γυμνάσιο όσο και στο Λύκειο δεν αποτελεί μάθημα βαρύτητας για τους μαθητές με αποτέλεσμα να μην δίνουν την απαραίτητη προσοχή την ώρα που διδάσκονται. Αφενός οι διδακτικές ώρες που καλύπτουν το μάθημα είναι λιγότερες σε σχέση με εκείνες των μαθημάτων για παράδειγμα για την εισαγωγή στην Τριτοβάθμια Εκπαίδευση και αφετέρου υπάρχει έλλειψη σε εποπτικά μέσα.

Συνεπώς, κρίνεται αναγκαίο τόσο να βρεθούν μέθοδοι διδασκαλίας οι οποίοι θα προσελκύσουν τους μαθητές να εμβαθύνουν στις έννοιες της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και όσο αφορά το θέμα μας στην έννοια της

μαθηματικής αναλογίας όσο και να προστεθούν ώρες διδασκαλίας στο συγκεκριμένο μάθημα.

Ζούμε στην λεγόμενη ψηφιακή εποχή όπου τα παιδιά από πολύ μικρή ηλικία χειρίζονται τα ηλεκτρονικά μέσα με πολύ μεγάλη άνεση. Επομένως ένας τρόπος προσέγγισης των παιδιών της γενιάς αυτής είναι η ψηφιακή. Με άλλα λόγια θα ήταν ωφέλιμο να παρουσιάζαμε μέσω διαδραστικών πινάκων την έννοια της μαθηματικής αναλογίας και να αφήναμε τον μαθητή μέσω δραστηριοτήτων που θα του βάζαμε στον πίνακα να ανακαλύψει μόνος του τον ορισμό της έννοιας. Στόχος θα είναι ο μαθητής να κατανοήσει με την δική του προσπάθεια τι εκφράζει για παράδειγμα ο λόγος τμημάτων και όχι να προσπαθήσει να απομνημονεύσει ή συνηθίσει να εφαρμόζει τον ορισμό που του έδωσε ο δάσκαλος για την έννοια αυτή ή κάποια μέθοδο επίλυσης προβλημάτων αναλογίας.

Πλέον υπάρχει μεγάλη ποικιλία σε εκπαιδευτικό λογισμικό που μπορούν να χρησιμοποιούν οι εκπαιδευτικοί μαθηματικοί. Από την άλλη πλευρά υπάρχει πάντα και ο προβληματισμός αν είναι εφικτή η χρήση των μέσων αυτών στα πλαίσια του προγράμματος σπουδών των Μαθηματικών για το Λύκειο. Ταυτόχρονα υπάρχει έλλειψη αιθουσών Η/Υ καθώς επίσης και διαδραστικών πινάκων στις αίθουσες των μαθητών.

Βιβλιογραφία

- Berggren, G.L. (1984): «History of Greek Mathematics: A Survey of Recent Research», Historia Mathematica 11
- Boyer, C.B. (1968): «A history of Mathematics», John Willey & Sons
- Bunt, L.N.H., Jones, P.S., Bedient, J.D. : «Οι ιστορικές ρίζες των Στοιχειωδών Μαθηματικών», Εκδόσεις Πνευματικού
- Crowley, Mary L. (1987) "The van Hiele Model of the Development of Geometric Thought." In Learning and Teaching Geometry, K-12, 1987 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, edited by Mary Montgomery Lindquist, pp.1-16. Reston, Va.: National Council at Teachers at Mathematics

- Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. In C.Mammana & V. Villani (Eds.), Perspectives on the teaching of geometry for 21st century (pp.37-52). Dordrecht: Kluwer Academic.
- Duval, R. (1999). Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for learning. Retrieved from ERIC ED 466 379
- Elia, I. & Gagatsis, A. & Kyriakidis (2003). Young children's understanding of geometric shapes: The role of Geometric Models. European Early Childhood , 11 (2), 43-65.
- Fischbein, E. (1993). The Theory of Figural Concepts. Educational Studies in Mathematics, 24 (2), 139-162.

- Fischbein, E., & Nachlieli, T. (1998) Concepts and figures in geometrical reasoning, International Journal of Science Education, 20 (10), 1193-1211.
- Fowler, D.H. (November 1979): «Ratio in Early Greek Mathematics», Bulletin (New Series) of the American mathematical society, Volume 1, Number 6
- Guinness, I.G. (1996): «Numbers, Magnitudes, Ratios and Proportions in Euclid's Elements: How did he handle them?», Historia Mathematica 23
- Heath, T.L. (1956): «The Thirteen books of Euclid's Elements», Vol.1-2-3 (Books I-XIII), Dover Publications, New York
- Holland, H. J., Holyoak, J. K, Nisbett, E., & R., Thagard, R. P. (1989). Induction: Processes of inference learning and discovery. Cambridge, Massachusetts: The MIT Press.
- Kaput, J.J (1987a). Representation system in mathematics, in Janvier, C.(ed) Problems of representation in the teaching and learning mathematics, Erlbaum.
- Katz, V.J. (2013): «Ιστορία των Μαθηματικών, Μια εισαγωγή», Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης
- Mesquita, A.L. (1998). On conceptual obstacles linked with external representation in geometry. Journal of Mathematical Behavior, 17(2), 183-195.
- NCTM (2000). Principles and Standards for School Mathematics. Reston, Va: NCTM.
- Panaoura, A., Michael, P. (2010). Students' self-concept beliefs about the use of geometrical shapes on mathematical problem

solving. Acta Didactica Universitatis Comenianae – Mathematics, 10, 87 – 102.

- Pimm, D. (1995). Symbols and meanings in school mathematics. New York: Routledge.
- Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition with particular reference to limits and continuity. Educational Studies in Mathematics 12, 151-169.
- Uesaka, Y., Manalo, E., & Ichikawa S. (2007). What kinds of perceptions and daily learning behaviors promote students' use of diagrams in mathematics problem solving? Learning and Instruction, 17, 322-335.
- Van Hiele, P. (1986). Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education. Orlando, FL: Academic Press.
    - «What kinds of perceptions and daily learning behaviors promote students' use of diagrams in mathematics problem solving?» Learning and Instruction, 17, 322-335.
- Κ. Ε. ΕΠ. Εκ.: «Ευκλείδη Στοιχεία», Τόμος Ι-ΙΙ-ΙΙΙ
- Θωμαΐδης, Α., Πούλος. Γ. (2000), «Διδακτική της Ευκλείδειας Γεωμετρίας», Εκδόσεις Ζήτη
- Σταμάτη, Ε.Σ. (Τόμος Ι-1952, Τόμος ΙΙ-1953): «Ευκλείδου Γεωμετρία»
- Χριστιανίδης, Γ. (2003): «Θέματα από την Ιστορία των Μαθηματικών», Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο