ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΧΠΟΥΔΩΝ

«ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥΣ»

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Η ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΤΩΝ ΑΡΝΗΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΑΠΟ ΜΑΘΗΤΕΣ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ-ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΠΕΙΡΜΑΤΙΚΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΔΥΟ ΜΟΝΤΕΛΩΝ

Αικατερίνη Καρατζίνα

Επιβλέπων καθηγητής: Χρήστος Κουρουνιώτης

Ηράκλειο, 2017

UNIVERSITY OF CRETE

SCHOOL OF SCIENCE

INTER-DEPARTMENTAL GRADUATE PROGRAM IN

“MATHEMATICS AND ITS APPLICATIONS”

MASTER OF SCIENCE

UNDERSTANDING NEGATIVE INTEGERS

EXPERIMENTAL TEACHING USING TWO MODELS

Aikaterini Karatzina

Supervisor: Christos Kourouniotis

Heraklion, 2017

Η μεταπτυχιακή αυτή εργασία πραγματοποιήθηκε στο Μαθηματικό Τμήμα του Πανεπιστημίου Κρήτης, στα πλαίσια του Διατμηματικού Μεταπτυχιακού Προγράμματος «Μαθηματικά και Εφαρμογές τους» στην κατεύθυνση «Μαθηματικά για την Εκπαίδευση» με επιβλέποντα καθηγητή τον κ. Χρήστο Κουρουνιώτη.

Την τριμελή επιτροπή αξιολόγησης αποτέλεσαν οι:

Χρήστος Κουρουνιώτης

Μιχάλης Κούρκουλος

Μαρία Λουκάκη

Ευχαριστίες

Ευχαριστώ θερμά τον κ. Χρήστο Κουρουνιώτη για τη βοήθειά του και την υπομονή του στην ολοκλήρωση αυτής της εργασίας, καθώς και τα μέλη της επιτροπής κ. Μιχάλη Κούρκουλο και κ. Μαρία Λουκάκη για τον χρόνο που διέθεσαν και την τιμή που μου έκαναν να την αξιολογήσουν.

Επίσης, ευχαριστώ τους γονείς μου για την αγάπη τους και την υποστήριξή τους όλα τα χρόνια των σπουδών μου. Ιδιαίτερα θα ήθελα να ευχαριστήσω τη θεία μου Άννα Αθανασοπούλου, η οποία υπήρξε υποστηρικτής και συμπαραστάτης στην προσπάθειά μου.

Τέλος, ένα μεγάλο ευχαριστώ στους διευθυντές και στους συναδέλφους του σχολείου με το οποίο συνεργάστηκα για τη διεκπεραίωση της έρευνας.

Περίληψη

Στην παρούσα εργασία θα μελετηθεί η δυσκολία των μαθητών στην κατανόηση της έννοιας των ακέραιων αριθμών καθώς επίσης και στην πρόσθεση και στην αφαίρεση θετικών και αρνητικών ακεραίων. Για την κατανόηση των ακεραίων θα χρησιμοποιηθεί το μοντέλο της αριθμογραμμής και το μοντέλο της εξουδετέρωσης, ενώ για την καλύτερη κατανόηση της πρόσθεσης και της αφαίρεσης, θα χρησιμοποιηθεί το συνδυαστικό μοντέλο, δηλαδή ο συνδυασμός των δύο παραπάνω μοντέλων (Steiner, 2009).

Abstract

The present study will examine the ability of students to understand how integers are defined as well as their additive and subtractive properties. The number line and the neutralization models will be used in order to provide a clear understanding of integers. The novel model (Steiner, 2009), a combination of the two above mentioned models, will be used to further enhance the understanding of addition and subtraction of integers.

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΕΙΣΑΓΩΓΗ 13

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ 15

2.1 Οι αρνητικοί αριθμοί 15

2.1.1 Εισαγωγή 15

2.1.2 Ιστορία των αρνητικών αριθμών 16

2.2 Τα δύο μοντέλα διδασκαλίας των ακεραίων 18

1.1 2.2.1 Το μοντέλο της αριθμογραμμής 18

1.2 2.2.2 Το μοντέλο της εξουδετέρωσης 21

2.2.3 Οι διαφορές των δύο μοντέλων 25

2.3 Το συνδυαστικό μοντέλο: Ο συνδυασμός των δύο προηγούμενων μοντέλων 28

2.4 Δυσκολίες και λάθη των μαθητών 29

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 32

3.1 Εισαγωγή 32

3.2 Συμμετέχοντες 32

3.3 Χρονοδιάγραμμα 33

3.4 Πρωτόκολλο 34

3.5 Μέσα και Συλλογή Δεδομένων 34

3.5.1 Πρώτη φάση – Pre-test 35

3.5.2 Δεύτερη φάση – Διδασκαλία 35

3.5.3 Τρίτη φάση – Post-test 41

3.5.4 Τέταρτη φάση – Συζήτηση 42

3.6 Ανάλυση Δεδομένων 43
3.6.1 Pre-test 43
3.6.2 Post-test 46
3.6.2.1 Φυλλάδιο 1 46
3.6.2.2 Φυλλάδιο 2 49
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ 51
4.1 Εισαγωγή 51
4.2 Το pre-test 52
4.3 Η διδασκαλία 57
4.3.1 Μαθήματα 1 και 2: 57
4.3.2 Μαθήματα 3 και 4: 61
4.3.3 Μαθήματα 5, 6 και 7: 65
4.4 Το post-test 70
4.4.1 Φύλλο εργασίας 1 70
4.4.2 Φύλλο εργασίας 2 75
4.5 Η συζήτηση 83
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ 87
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α 92
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β 93
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ 95

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι περισσότεροι καθηγητές μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση συμφωνούν ότι οι ακέραιοι αριθμοί, καθώς και οι πράξεις με ακεραίους είναι δύσκολες μαθηματικές έννοιες για τους μαθητές. Προσωπικά, έχοντας εμπειρία επτά χρόνων διδασκαλίας μαθηματικών σε μαθητές Γυμνασίου και Λυκείου, έχω επίσης παρατηρήσει ότι πολλοί μαθητές δυσκολεύονται να κατανοήσουν τους ακέραιους αριθμούς και ιδιαιτέρως τη διεξαγωγή των πράξεων με ακεραίους. Σύμφωνα με την έρευνα των Prather & Alibali (2006), μία από τις δυσκολίες κατανόησης κυρίως των αρνητικών ακεραίων είναι το ότι δεν μπορούμε να αντιστοιχήσουμε αντικείμενα χειροπιαστά σε αυτούς τους αριθμούς, αντικείμενα που να παριστάνουν στην πραγματικότητα αρνητικούς αριθμούς και όχι απλά να συμβολίζουν αρνητικούς αριθμούς. Όπως, μπορούμε να φανταστούμε τον αριθμό «3» να παριστάνει τρία αντικείμενα, αλλά είναι δύσκολο να φανταστούμε τι παριστάνει ο αριθμός «-3» σε σχέση με πραγματικά αντικείμενα.

Για αρκετές δεκαετίες, λοιπόν, οι δυσκολίες κατανόησης των ακέραιων αριθμών, καθώς και των πράξεων με ακεραίους από μαθητές του Γυμνασίου, είναι αντικείμενο πολλών ερευνητικών μελετών. Στις έρευνες αυτές έχουν ελεγχθεί διάφορες μέθοδοι και μοντέλα διδασκαλίας των ακεραίων με σκοπό όχι μόνο την κατανόηση της έννοιας των ακεραίων, αλλά και των πράξεων με ακεραίους. Μερικοί ερευνητές χρησιμοποίησαν το μοντέλο της εξουδετέρωσης και μερικοί άλλοι το μοντέλο της αριθμογραμμής. Στο μοντέλο της εξουδετέρωσης, άλλοι χρησιμοποίησαν δίσκους ή άλλα αντικείμενα με δύο διαφορετικά χρώματα και άλλοι την έννοια του έχω-χρωστάω χρήματα. Στο μοντέλο της αριθμογραμμής, άλλοι χρησιμοποίησαν την κίνηση πάνω σε οριζόντια αριθμογραμμή, άλλοι τις ενδείξεις θερμοκρασιών, και άλλοι το να βρισκόμαστε πάνω ή κάτω από την επιφάνεια του νερού. Ο συνδυασμός των δύο μοντέλων ~~βρέθηκε ότι~~ χρησιμοποιήθηκε στην έρευνα που έκανε η Steiner (2009) με pre-service δασκάλους.

Στην παρούσα εργασία θα μελετήσουμε το βαθμό κατανόησης της έννοιας των ακεραίων καθώς και το βαθμό κατανόησης πρόσθεσης και αφαίρεσης ακεραίων με τη χρήση του συνδυαστικού μοντέλου, δηλαδή του συνδυασμού του μοντέλου της αριθμογραμμής και του μοντέλου της εξουδετέρωσης. Η έρευνα έγινε με μαθητές της έκτης τάξης (6th grade), ηλικίας 11-12 χρονών,

σε ελληνοαμερικάνικο δημόσιο charter σχολείο της Βόρειας Καρολίνας των Ηνωμένων Πολιτειών Αμερικής. Η επιλογή των μαθητών της έκτης έγινε επειδή οι μαθητές αυτής της ηλικίας δεν έχουν διδαχθεί αρνητικούς ακεραίους αριθμούς ακόμα, σύμφωνα με το αναλυτικό πρόγραμμα διδασκαλίας.

Στην έρευνα, για την κατανόηση των αρνητικών ακεραίων αριθμών, χρησιμοποιήθηκαν και τα τρία μοντέλα - το μοντέλο της αριθμογραμμής, το μοντέλο της εξουδετέρωσης, και το συνδυαστικό μοντέλο. Για την κατανόηση της πρόσθεσης και της αφαίρεσης χρησιμοποιήθηκε μόνο το συνδυαστικό μοντέλο. Οι μαθητές με τη χρήση του συνδυαστικού μοντέλου ανακάλυψαν μόνοι τους τους κανόνες που ισχύουν για την πρόσθεση και την αφαίρεση των ακεραίων.

Για την αξιολόγηση του βαθμού κατανόησης των εννοιών των ακεραίων από τους μαθητές, τους δόθηκαν δύο διαφορετικά φύλλα εργασίας. Το πρώτο φύλλο εργασίας περιείχε 6 ερωτήσεις για να διαπιστωθεί η κατανόηση των ακεραίων αριθμών και το δεύτερο φύλλο εργασίας περιείχε 5 διαφορετικούς τύπους προβλημάτων ακεραίων για να διαπιστωθεί η κατανόηση της πρόσθεσης και της αφαίρεσης των ακέραιων αριθμών μέσα από τη χρήση του συνδυαστικού μοντέλου. Το πρώτο φύλλο εργασίας δόθηκε στους μαθητές δύο φορές. Δόθηκε για πρώτη φορά πριν τη διδασκαλία των ακεραίων (pre-test) και για δεύτερη φορά ένα μήνα μετά την ολοκλήρωση της διδασκαλίας των ακεραίων με τη χρήση του συνδυαστικού μοντέλου (post-test). Το δεύτερο φύλλο εργασίας δόθηκε μόνο μία φορά, ένα μήνα μετά τη διδασκαλία των ακεραίων (post-test).

Στο δεύτερο κεφάλαιο αυτής της εργασίας παρουσιάζουμε τη βιβλιογραφική επισκόπηση, όπου περιλαμβάνουμε την ιστορική ανασκόπηση των ακέραιων αριθμών, την περιγραφή του μοντέλου της αριθμογραμμής καθώς και τα αποτελέσματα ερευνών που το χρησιμοποίησαν, την περιγραφή του μοντέλου της εξουδετέρωσης καθώς και τα αποτελέσματα ερευνών που το χρησιμοποίησαν, τις διαφορές των δύο μοντέλων, την περιγραφή του συνδυαστικού μοντέλου καθώς και τα ερευνητικά αποτελέσματα της χρήσης του, και έρευνες που αναφέρουν δυσκολίες και λάθη των μαθητών όταν κάνουν πράξεις με ακέραιους αριθμούς.

Στο τρίτο κεφάλαιο περιγράφουμε τη μεθοδολογία που χρησιμοποιήθηκε στην παρούσα έρευνα.

Στο τέταρτο κεφάλαιο περιγράφουμε τα αποτελέσματα της έρευνας, αναλύοντας το pre-test, τις επτά διδακτικές ώρες διδασκαλίας και το post-test.

Στο πέμπτο και τελευταίο κεφάλαιο παρουσιάζουμε τα συμπεράσματα της έρευνας καθώς επίσης προτάσεις για μελλοντικές έρευνες και χρήσιμες συμβουλές για όσους επιχειρήσουν την εφαρμογή της.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ

2.1 Οι αρνητικοί αριθμοί

2.1.1 Εισαγωγή

Αρνητικός αριθμός είναι ένας πραγματικός αριθμός μικρότερος του μηδενός. Οι αρνητικοί αριθμοί αντιπροσωπεύουν τον αντίθετο ενός θετικού, δηλαδή εάν ένας θετικός αντιπροσωπεύει την κίνηση προς τα δεξιά, τότε ένας αρνητικός θα αντιπροσωπεύει την κίνηση προς τα αριστερά, όταν κινούμαστε πάνω στην αριθμογραμμή, ή εάν ένας θετικός αντιπροσωπεύει το επίπεδο πάνω από τη θάλασσα, τότε ένας αρνητικός θα αντιπροσωπεύει το επίπεδο κάτω από τη θάλασσα.

Οι αρνητικοί αριθμοί επίσης μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την αναπαράσταση κάποιου μεγέθους που δηλώνει απώλεια, όπως για παράδειγμα ένα χρέος. Οι αρνητικοί αριθμοί μπορούν να χρησιμοποιηθούν και για να περιγράψουν τιμές σε κλίμακες θερμοκρασίας όπου μπορούμε να έχουμε και αρνητικές τιμές θερμοκρασίας, τιμές κάτω από το μηδέν, όπως για παράδειγμα οι κλίμακες Κελσίου ή Φαρενάιτ.

Οι αρνητικοί αριθμοί γράφονται με το σύμβολο μείον (-) στην αρχή, σαν πρόσημο. Για παράδειγμα το -5 παρουσιάζει την αρνητική ποσότητα του ακέραιου αριθμού πέντε και

προφέρεται ως «μείον πέντε» ή «πλην πέντε». Στην Αμερικάνικη βιβλιογραφία, για να γίνει διαχωρισμός μεταξύ της αφαίρεσης και του πρόσημου συνήθως το σύμβολο του αρνητικού πρόσημου μπαίνει λίγο πιο ψηλά από το σύμβολο της αφαίρεσης (παράδειγμα $9 - {}^{-}5$).

2.1.2 Ιστορία των αρνητικών αριθμών

Οι αρνητικοί αριθμοί εμφανίστηκαν για πρώτη φορά στην ιστορία των «Εννέα Κεφαλαίων σχετικά με την Μαθηματική Τέχνη (Nine Chapters on the Mathematical Art)», αλλά μπορεί να υπάρχει και παλαιότερο υλικό (Struik, 1987; Gardner, 1989). Οι Κινέζοι ήταν σε θέση να λύνουν εξισώσεις οι οποίες περιλάμβαναν αρνητικούς αριθμούς. Ο Liu Hui, κατά τον 3^{ο} αιώνα π.Χ., θέσπισε κανόνες για την πρόσθεση και την αφαίρεση των αρνητικών αριθμών (Hodgkin, 2005). Ο ίδιος αναφέρει στα «Εννέα Κεφάλαια» ότι χρησιμοποιούνταν κόκκινες και μαύροι ράβδοι καταμέτρησης. «Τώρα υπάρχουν δύο αντίθετοι ράβδοι καταμέτρησης για τα κέρδη και τις ζημίες» (Hodgkin, 2005; Musser, Burger & Peterson, 2008). Το κινέζικο σύστημα ράβδων χρησιμοποιούσε το μαύρο χρώμα για να αναπαραστήσει τους αρνητικούς αριθμούς και το κόκκινο χρώμα για να αναπαραστήσει τους θετικούς αριθμούς. Το σύστημα αυτό χρησιμοποιούνταν στο εμπόριο και στη φορολογία. Οι κόκκινες ράβδοι εξουδετέρωναν τις μαύρες ράβδους. Το ποσό που πουλούσαν θεωρούνταν θετικό, καθώς εισέπρατταν χρήματα ενώ το ποσό που ξόδευαν για αγορές θεωρούταν αρνητικό, καθώς πλήρωναν/έχαναν χρήματα.

Κατά τον 3^{ο} αιώνα μ.Χ., ο Αλεξανδρινός μαθηματικός Διόφαντος έγραψε την «Αριθμητική» η οποία περιέχει γραμμικές και δευτεροβάθμιες εξισώσεις, όπως θα τις ονομάζαμε σήμερα. Ένα πρόβλημα μέσα στην «Αριθμητική» είναι ισοδύναμο με το 4χ+20=4, το οποίο έχει αρνητική λύση. Ο Διόφαντος θεώρησε τις αρνητικές λύσεις στα προβλήματα ως ψευδείς, ενώ οι εξισώσεις που είχαν ως αποτέλεσμα αρνητικές λύσεις περιγράφονταν ως «άτοπες» (Musser, Burger & Peterson, 2008). Επίσης χρησιμοποιούσε τους αρνητικούς αριθμούς ως «αυτό που υπολείπεται».

Κατά τον 7^{ο} αιώνα μ.Χ., εμφανίστηκαν οι αρνητικοί αριθμοί στην Ινδία. Ο Ινδός μαθηματικός Brahmagupta ονόμασε τους θετικούς αριθμούς ως «περιουσίες», το μηδέν ως «μηδενικό» και τους αρνητικούς αριθμούς ως «χρέη» (Yan & Shiran, 1987; Schubring, 2005).

Ο Brahmagupta περιγράφει τις αρνητικές ποσότητες με τον παρακάτω τρόπο (Rogers, 2011):

I. Ένα χρέος μείον το μηδενικό είναι χρέος
II. Μία περιουσία μείον το μηδενικό είναι περιουσία
III. Μηδενικό μείον το μηδενικό είναι μηδενικό
IV. Χρέος αφαιρούμενο από μηδενικό είναι περιουσία
V. Περιουσία αφαιρούμενη από μηδενικό είναι χρέος

Τον 12^{ο} αιώνα μ.Χ. στην Ινδία, ο BhaskaraII, έδωσε αρνητικές ρίζες για τις δευτεροβάθμιες εξισώσεις, όμως τις απέρριψε επειδή ήταν ακατάλληλες για το πρόβλημα. Σύμφωνα με τον ίδιο «οι άνθρωποι δεν εγκρίνουν τις αρνητικές ρίζες».

Στην Ευρώπη οι αρνητικοί αριθμοί εμφανίστηκαν τον 15^{ο} αιώνα μ.Χ. Τότε ο Γάλλος Nicolas Chuquet στο τρίτο μέρος του χειρόγραφού του “Triparty en la science des nombres” το οποίο σημαίνει «Τρία μέρη στην επιστήμη των αριθμών» έκανε εισαγωγή της εκθετικής μορφής, χρησιμοποιώντας σαν εκθέτες αρνητικούς αριθμούς και το μηδέν. (Flegg, Hay & Moss, 1985) και αναφέρεται σε αυτούς ως «παράλογους αριθμούς». Τον 16^{ο} αιώνα μ.Χ., εμφανίστηκαν αρνητικοί αριθμοί ως υπόριζα και ονομάστηκαν «μυθικοί αριθμοί» από τον Cardano , ενώ προς το τέλος του αιώνα, ο Bombelli έδωσε κανόνες για τους φανταστικούς αριθμούς (Rogers, 2011). Επίσης, οι αρνητικοί αριθμοί σταμάτησαν να θεωρούνται «λιγότερο από το τίποτα» (infra 0, id est infra nihil) το 16^{ο} αιώνα από τον Stifel (Beery, Cochell, Dolezal, Sauk & Shuey, 2004;Schubring, 2005).

Τον 17ο αιώνα μ.Χ., ο Άγγλος μαθηματικός Wallis έδωσε κάποιο νόημα στους αρνητικούς αριθμούς με την εφεύρεση της αριθμογραμμήçja. Τον 18ο αιώνα μ.Χ. στην Ευρώπη, οι αρνητικοί αριθμοί αναφέρονταν σαν «λιγότερο από το μηδέν». Τον ίδιο αιώνα, αγνοούσαν ακόμα τυχόν αρνητικά αποτελέσματα τα οποία προκύπταν από τις εξισώσεις (Johnson, 1999). Ο Γάλλος μαθηματικός d' Alembert δίνει σαν ορισμό για τους αρνητικούς αριθμούς ότι «είναι οι αριθμοί που επηρεάζονται από το σύμβολο πλην». Θεωρεί ότι οι αρνητικές λύσεις των εξισώσεων μέσω των οποίων έγινε η εισαγωγή των αρνητικών αριθμών, δηλώνουν ένα κακώς διατυπωμένο πρόβλημα. Ο Ελβετός μαθηματικός Euler φαίνεται ότι δεν είχε πρόβλημα με τους αρνητικούς αριθμούς, καθώς στο βιβλίο Άλγεβρας που έγραψε, τους αναφέρει σαν αριθμούς λιγότερο από το τίποτα και τους απαριθμεί ξεκινώντας από το μηδέν και αφαιρώντας διαρκώς τη μονάδα.

2.2 Τα δύο μοντέλα διδασκαλίας των ακεραίων

1.1 2.2.1 Το μοντέλο της αριθμογραμμής

Για το μοντέλο της αριθμογραμμής δε γίνεται κάποια σαφής αναφορά στα κείμενα που αναφέρονται στην ιστορία των μαθηματικών (Smith, 1923; Smith, 1925; Heath, 1981).

Ο Wallis μάλλον ήταν ο πρώτος που εισήγαγε μια αριθμογραμμή με αρνητικούς αριθμούς στο "A Treatise of Algebra both Historical and Practical" (Thomaidis, 1993). Χρησιμοποίησε την αριθμογραμμή αυτή για να δείξει την πρόσθεση και την αφαίρεση αρνητικών αριθμών βάζοντας έναν άνθρωπο να προχωρήσει πρώτα 5 γιάρδες μπροστά και μετά να περπατήσει πίσω 8 γιάρδες, καταλήγοντας έτσι 3 γιάρδες πίσω από το αρχικό σημείο. Παρότι τον 17ο αιώνα εξαπλωνόταν η ιδέα των αριθμών σαν σημεία πάνω σε μια αριθμογραμμή, οι αρνητικοί αριθμοί αποφεύγονταν. Ακόμα και οι θερμοκρασίες δε χρησιμοποιούσαν αριθμούς κάτω από το 0. Ο Fahrenheit έθεσε το 0 πολύ χαμηλά ενώ ο Celsius αρχικά είχε θέσει τους 0 βαθμούς σαν σημείο

βρασμού του νερού και τους 100 βαθμούς σαν σημείο ψύξης. Αργότερα αντιστράφηκαν και έγινε το 0 σημείο ψύξης. (Johansson, 2004).

Το μοντέλο της αριθμογραμμής μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να καταλάβουν τη διατακτικότητα των αριθμών. Τα πιο συνηθισμένα μοντέλα αριθμογραμμής είναι αυτό της θερμοκρασίας ή αυτό του επιπέδου της θάλασσας. Στις αριθμογραμμές αυτές, ο αριθμός μηδέν είναι ένα τυχαίο σημείο το οποίο χωρίζει τους αρνητικούς από τους θετικούς. Για παράδειγμα το 0 στην κλίμακα Celsius είναι διαφορετικό από το 0 στην κλίμακα Fahrenheit. Επίσης στο μοντέλο αυτό, το μηδέν δεν αντιπροσωπεύει το «τίποτα».

Σε μια οριζόντια αριθμογραμμή οι αρνητικοί αριθμοί βρίσκονται αριστερά από το μηδέν και οι θετικοί αριθμοί δεξιά από το μηδέν, ενώ σε μια κατακόρυφη αριθμογραμμή οι αρνητικοί αριθμοί βρίσκονται κάτω από το μηδέν και οι θετικοί αριθμοί πάνω από αυτό. Η κατακόρυφη αριθμογραμμή δείχνει στους μαθητές ότι οι μικρότεροι αριθμοί βρίσκονται «χαμηλότερα» από τους μεγαλύτερους. Η οριζόντια αριθμογραμμή είναι πιο κοντά στην προϋπάρχουσα γνώση των μαθητών, γιατί οι μαθητές μαθαίνουν από τις πρώτες τάξεις του Δημοτικού να τοποθετούν τους θετικούς αριθμούς και το μηδέν πάνω σε μία γραμμή. Έτσι είναι πιο εύκολο μετά να τοποθετήσουν και τους αρνητικούς αριθμούς αριστερά από το μηδέν. Επίσης αντιλαμβάνονται και τη διάταξη των αριθμών, συνεχίζοντας την ίδια διάταξη των θετικών και για τους αρνητικούς, δηλαδή οι αριθμοί στα αριστερά είναι μικρότεροι από αυτούς στα δεξιά.

Ο οριζόντιος και ο κατακόρυφος άξονας, όταν ενωθούν, σχηματίζουν τους καρτεσιανούς άξονες συντεταγμένων, κάτι που διαδραματίζει σημαντικό ρόλο σε όλη την πρωτοβάθμια και δευτεροβάθμια εκπαίδευση, όσον αφορά στα μαθηματικά.

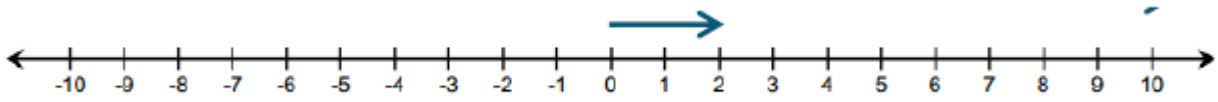
Στη βιβλιογραφία υπάρχουν διαφορετικές παραλλαγές του μοντέλου της αριθμογραμμής σαν μέθοδο διδασκαλίας. Μια πρώτη παραλλαγή περιλαμβάνει κάποια κίνηση πάνω στην αριθμογραμμή, είτε οι μαθητές να περπατούν πάνω σε αυτήν (Nurnberger-Haag & Sherard, 2007), είτε να κινούν αντικείμενα πάνω σε αυτήν, όπως τρενάκια (Streefland, 1996). Η θέση των μαθητών ή των αντικειμένων πάνω στην αριθμογραμμή γίνεται τοποθετώντας τους να

κοιτάζουν προς μια συγκεκριμένη κατεύθυνση, τη «θετική». Ένας θετικός αριθμός ή η πρόσθεση πραγματοποιούνται κοιτώντας ή περπατώντας προς τα «μπροστά» ενώ ένας αρνητικός αριθμός ή η αφαίρεση αντιπροσωπεύονται αλλάζοντας κατεύθυνση ή περπατώντας προς τα «πίσω». Οπότε η αφαίρεση ενός αρνητικού μπορεί να αντιπροσωπευτεί με την αλλαγή κατεύθυνσης και το περπάτημα προς τα «πίσω», κάτι που δίνει σαν αποτέλεσμα το περπάτημα «μπροστά».

Μια δεύτερη παραλλαγή του μοντέλου είναι η έκφραση των αριθμών με χρήση διανυσμάτων τα οποία ξεκινούν από το μηδέν, αρχή του διανύσματος, και τελειώνουν στον αριθμό πάνω στην αριθμογραμμή, τέλος του διανύσματος. Στο τέλος του διανύσματος χρησιμοποιείται το σύμβολο του βέλους. Για παράδειγμα στην πρόσθεση, το πρώτο βέλος τοποθετείται στο μηδέν κατευθυνόμενο προς τον αριθμό του πρώτου προσθετέου, δηλαδή προς τα αριστερά αν είναι αρνητικός και προς τα δεξιά αν είναι θετικός και από το τέλος του βέλους του πρώτου προσθετέου τοποθετείται το βέλος του δεύτερου προσθετέου ανάλογα με την κατεύθυνσή του.

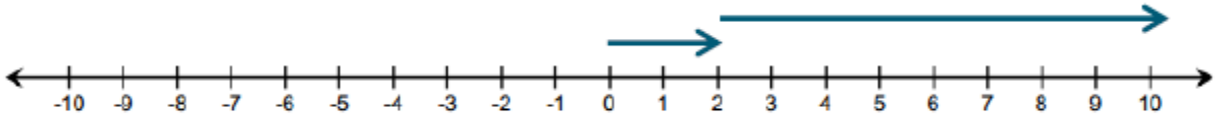
Παρακάτω θα δοθούν παραδείγματα πρόσθεσης και αφαίρεσης ακεραίων χρησιμοποιώντας τη δεύτερη παραλλαγή του μοντέλου της αριθμογραμμής.

Για να βρεθεί το άθροισμα «2+8» πρώτα σχεδιάζεται ένα βέλος από τον αριθμό 0 κατευθυνόμενο προς τον αριθμό 2. (Εικόνα 1)



Εικόνα 1. Σχεδίαση ενός θετικού αριθμού στο μοντέλο αριθμογραμμής

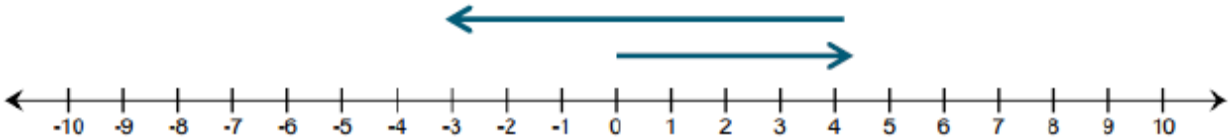
Στη συνέχεια, η πρόσθεση δύο αριθμών πραγματοποιείται με την τοποθέτηση ενός δεύτερου βέλους στο τέλος του πρώτου βέλους. Έτσι, το άθροισμα «2 + 8 = 10» προκύπτει μετά την «ένωση» των δύο βελών (Εικόνα 2).



Εικόνα 2. Σχεδίαση αθροίσματος δύο θετικών αριθμών στο μοντέλο αριθμογραμμής

Αν ένα αριθμός είναι αρνητικός, τότε το βέλος αυτού του αριθμού, θα έχει κατεύθυνση προς τα αριστερά. Για παράδειγμα, για να βρεθεί η λύση του « 4 + (-7) = - 3», θα πρέπει αρχικά να βρεθεί το σημείο 4 τοποθετώντας το βέλος με κατεύθυνση προς τα δεξιά πάνω στην αριθμογραμμή, ενώ το βέλος που αντιπροσωπεύει το -7, θα έχει κατεύθυνση προς τα αριστερά.

Τοποθετώντας το βέλος που αντιστοιχεί στο -7 στο τέλος του βέλους που αντιστοιχεί στο 4, δίνει ως αποτέλεσμα το άθροισμα των δύο αριθμών (Εικόνα 3).



Εικόνα 3. Σχεδίαση αθροίσματος ενός θετικού και ενός αρνητικού αριθμού στο μοντέλο αριθμογραμμής

Τέλος, το μοντέλο της αριθμογραμμής είναι πολύ κατανοητό για τους μαθητές, όταν χρειαστεί να κάνουν σύγκριση αριθμών. Χρησιμοποιώντας αυτό το μοντέλο, είναι εύκολο να αναγνωρίσουν ποιος αριθμός είναι μικρότερος, αφού ο αριθμός που είναι πιο αριστερά σε μια οριζόντια αριθμογραμμή είναι μικρότερος, ενώ ο αριθμός που είναι πιο χαμηλά σε μια κατακόρυφη αριθμογραμμή είναι μικρότερος.

1.2 2.2.2 Το μοντέλο της εξουδετέρωσης

Το μοντέλο της εξουδετέρωσης μπορεί να βοηθήσει του μαθητές να κατανοήσουν την πληθικότητα των αριθμών. Η βασική ιδέα αυτού του μοντέλου είναι ότι οι θετικοί και οι αρνητικοί αριθμοί είναι αντίθετοι μεταξύ τους και ότι η ίδια ποσότητα από θετικούς και αρνητικούς αριθμούς εξουδετερώνεται (Vlassis,2008) και το αποτέλεσμα που προκύπτει είναι το μηδέν (0). (Bossé,Lynch-Davis,Adu-Gyamfi,Chandler, 2016)

Τα πιο συνηθισμένα μοντέλα εξουδετέρωσης είναι αυτό των «χρεών και περιουσιών» ή των «αλγεβρικών τετραγώνων». Στο μοντέλο αυτό, ο αριθμός μηδέν αντιπροσωπεύει την απουσία κάποιας ποσότητας, το «τίποτα», ή την ίδια ποσότητα θετικών και αρνητικών ποσοτήτων. Οποιοσδήποτε ακέραιος μπορεί να παρουσιάζεται με διαφορετικούς τρόπους και αυτό συμβαίνει μέσω της δημιουργίας του ουδέτερου στοιχείου, του μηδενός, το οποίο μπορεί να εκφράζεται με άπειρους τρόπους.

Στο μοντέλο των «χρεών και περιουσιών» οι θετικοί αριθμοί αντιπροσωπεύουν το ποσό των χρημάτων που έχουμε και οι αρνητικοί αριθμοί αντιπροσωπεύουν το ποσό των χρημάτων που χρωστάμε. Οι μαθητές είναι εξοικειωμένοι με την ιδέα της οφειλής χρημάτων, κάτι που κάνει αυτό το μοντέλο πιο χειροπιαστό. Σύμφωνα με την έρευνα των Mukhopadhyay, Resnick και Schauble (1990), οι μαθητές αποδίδουν καλύτερα όταν χρησιμοποιούν παραδείγματα με «χρέη και περιουσίες». Ο Janvier (1985) χαρακτηρίζει αυτό το μοντέλο ως το πρώτο μοντέλο που βασίζεται σε αντίθετες ποσότητες και είναι η πρώτη εφαρμογή των αρνητικών αριθμών σε καθημερινές καταστάσεις στην ιστορία των μαθηματικών.

Στο μοντέλο των «αλγεβρικών τετραγώνων» χρησιμοποιούνται τετράγωνα δύο διαφορετικών χρωμάτων. Συνήθως το άσπρο χρώμα (□) αντιπροσωπεύει τους θετικούς αριθμούς, ενώ το μαύρο χρώμα (■) τους αρνητικούς. Όπως έχει αναφερθεί και παραπάνω, ήδη από το 200 π.Χ. γίνεται η χρήση διαφορετικών χρωμάτων για την αναπαράσταση των θετικών και των αρνητικών αριθμών, όταν οι Κινέζοι συμβόλιζαν τους θετικούς αριθμούς με κόκκινες ράβδους και τους αρνητικούς αριθμούς με μαύρες ράβδους.

Για την πρόσθεση των ακεραίων διακρίνονται δύο περιπτώσεις. Στην πρώτη περίπτωση προστίθενται ομόσημοι ακέραιοι και στη δεύτερη περίπτωση προστίθενται ετερόσημοι

ακέραιοι. Όσον αφορά στην πρώτη περίπτωση, αρχικά τοποθετούμε τον αριθμό των τετραγώνων που δείχνει ο πρώτος προσθετέος. Στην συνέχεια τοποθετείται και ο αριθμός των τετραγώνων του δεύτερου προσθετέου. Το αποτέλεσμα προκύπτει από την πρόσθεση όλων των ίδιου χρώματος τετραγώνων.

Παρακάτω φαίνονται δύο παραδείγματα πρόσθεσης ομόσημων ακεραίων:

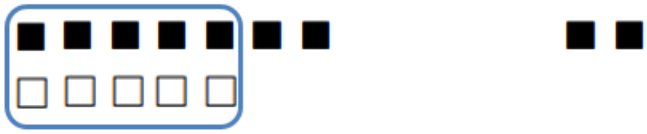
1) (2) + (3) = (5)

2) (-2) + (-3) = (-5)

Για την πρόσθεση δύο ετερόσημων αριθμών χρησιμοποιούνται ζευγάρια, τα οποία αλληλοεξουδετερώνονται. Αφού τοποθετηθούν όλα τα τετράγωνα διαφορετικού χρώματος, αφαιρούνται οι ίδιες ποσότητες άσπρων και μαύρων τετραγώνων, προκειμένου να σχηματιστεί το μηδέν. Στην συνέχεια γίνεται καταμέτρηση των υπόλοιπων τετραγώνων.

Παρακάτω φαίνονται δύο παραδείγματα πρόσθεσης ετερόσημων ακεραίων:

1) (-7) + (+5) = (-2)



2) (+6) +(-2) = (+4)

Για την αφαίρεση των ακεραίων διακρίνονται επίσης δύο περιπτώσεις. Στην πρώτη περίπτωση η απόλυτη τιμή του αφαιρετέου είναι μικρότερη από την απόλυτη τιμή του μειωτέου, ενώ στη δεύτερη περίπτωση η απόλυτη τιμή του αφαιρετέου είναι μεγαλύτερη από του μειωτέου.

Στην πρώτη περίπτωση, αρχικά τοποθετούμε τον αριθμό των τετραγώνων που δείχνει ο μειωτέος. Στην συνέχεια αφαιρείται ο αριθμός των τετραγώνων του αφαιρετέου. Το αποτέλεσμα προκύπτει από τη διαφορά των τετραγώνων.

Παρακάτω φαίνεται ένα παράδειγμα αφαίρεσης «επαρκούντων» τετραγώνων:

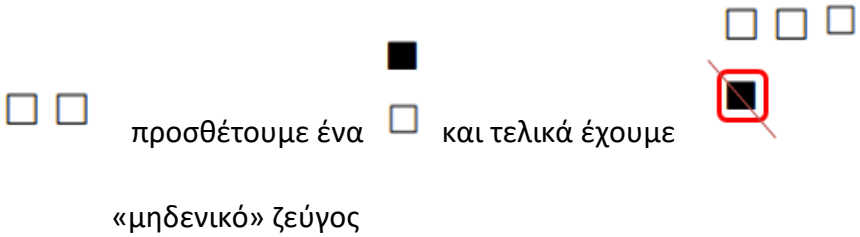
(-5) – (-2) = (-3)

Για την αφαίρεση στη δεύτερη περίπτωση χρησιμοποιείται πρόσθεση «μηδενικών» ζευγαριών. Πρώτα τοποθετείται ο αριθμός τετραγώνων του μειωτέου. Επειδή όμως ο αριθμός του αφαιρετέου είναι μεγαλύτερος ή διαφορετικού πρόσημου, πρέπει να τοποθετηθεί ο κατάλληλος αριθμός ίδιας ποσότητας τετραγώνων διαφορετικού χρώματος για να είναι τελικά δυνατή η αφαίρεση τετραγώνων. Αφού τοποθετηθούν όλα τα τετράγωνα των διαφορετικών χρωμάτων, αφαιρούνται τα τετράγωνα που υποδεικνύει ο αφαιρετέος. Στην συνέχεια γίνεται καταμέτρηση των τετραγώνων που έμειναν.

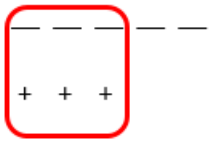
Παρακάτω φαίνονται δύο παραδείγματα αφαίρεσης «μη επαρκούντων» τετραγώνων:

1) (+1) – (+3) = (-2)

2) (+2) – (- 1) = (+3)



Οι Cotter (1969), Sherzer (1969), Kohn (1978), Whimbey και Lochhead (1981) και Battista (1983), υποστηρίζουν την αλλαγή του τρόπου απεικόνισης των τετραγώνων για την απεικόνισή τους στο χαρτί. Για την συγκεκριμένη απεικόνιση αναφέρουν την καταγραφή των συμβόλων συν (+) και πλην (-), τα οποία θα αντιπροσωπεύουν τους δύο τύπους ακεραίων. Έτσι το (-5) + (+3) θα απεικονιστεί όπως παρακάτω.



2.2.3 Οι διαφορές των δύο μοντέλων

Διάφοροι ερευνητές έχουν συζητήσει τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα σε καθένα από τα δύο μοντέλα για τους ακέραιους. Το μοντέλο της αριθμογραμμής απαιτεί από τους μαθητές να συμβολίζουν τους ακέραιους με ένα σημείο και ένα διάνυσμα. Αυτός ο συμβολισμός μπερδεύει κάποιους μαθητές επειδή πρέπει να δίνουν σημασία στο μέγεθος και στην κατεύθυνση, ενώ με τους ακέραιους είχαν μόνο να δίνουν σημασία στο μέγεθος. Για παράδειγμα το +4 παριστάνεται στην αριθμογραμμή με ένα σημείο το οποίο βρίσκεται 4 μονάδες προς τα δεξιά του μηδενός και με ένα διάνυσμα το οποίο είναι και αυτό δεξιά του μηδενός και έχει 4 μονάδες μήκος. Η αριθμογραμμή είναι ένα συνεχές μοντέλο κατά το οποίο οι μεγαλύτεροι ακέραιοι βρίσκονται τοποθετημένοι στα δεξιά και οι μικρότεροι ακέραιοι

βρίσκονται τοποθετημένοι στα αριστερά. Ένα από τα πλεονεκτήματα της αριθμογραμμής είναι πως οι μαθητές μπορούν εύκολα να επιβεβαιώσουν πως το +4 είναι μεγαλύτερο από το -2 αφού το +4 είναι στα δεξιά από το -2 (Hart, 1981).

Στην έρευνα των Lytle & Avraam (1990), όπως αναφέρει η Steiner (2009), οι μαθητές χρησιμοποίησαν επιτυχώς το μοντέλο της αριθμογραμμής για την πρόσθεση των ακέραιων. Ενώ αυτοί οι οποίοι ήταν επιτυχείς με την αφαίρεση των ακέραιων, χρησιμοποίησαν τον κανόνα της πρόσθεσης των αντιθέτων. Οι μαθητές οι οποίοι δεν μπορούσαν να θυμηθούν τον κανόνα, δεν είχαν κάποιο φυσικό μοντέλο για να τους βοηθήσει να αντιληφθούν την κατάσταση. Μερικοί συγγραφείς πιστεύουν πως η αριθμογραμμή δεν πρέπει να χρησιμοποιείται όταν γίνεται εισαγωγή της έννοιας των ακεραίων καθώς σύμφωνα με τον Davidson (1987) η κατανόηση της διατακτικότητας των αριθμών γίνεται μετά την κατανόηση της πληθικότητας των αριθμών και σύμφωνα με τους Carr & Katterns (1984) και Ernest (1985) οι μαθητές δεν κατανοούν πραγματικά την αρχή πάνω στην οποία βασίζεται η αριθμογραμμή.

Ο Dirks (1984) θεωρεί οτι το μοντέλο της εξουδετέρωσης είναι πιο εύκολο στην εξήγηση και είναι πιο απλό για τους μαθητές. Επιπλέον, το μοντέλο αυτό είναι πιο χειροπιαστό (Cotter, 1969; Haner, 1947).

Το μοντέλο της εξουδετέρωσης επιτρέπει τις πολλαπλές αναπαραστάσεις των ακεραίων, το οποίο μπορεί να μπερδέψει τους μαθητές. Για παράδειγμα το -3 μπορεί να παρουσιαστεί χρησιμοποιώντας τρία αρνητικά ή πέντε αρνητικά και 2 θετικά. Τέλος, στο μοντέλο δεν δίνεται έμφαση στην κατεύθυνση και δεν υπάρχει κάποια διαφορά στον αριθμό των αντικειμένων. Η μόνη διαφορά είναι στο χρώμα των αντικειμένων (Fischbein, 1987).

Παρά το γεγονός ότι η αριθμογραμμή αποτελεί το μοντέλο το οποίο οι περισσότεροι μαθητές χρησιμοποιούν όταν ασχολούνται για πρώτη φορά με τους ακέραιους, καθώς αυτό το μοντέλο διδάσκεται από πολλούς καθηγητές, σύμφωνα με τον Davidson (1987), το μοντέλο της εξουδετέρωσης ταιριάζει καλύτερα για την κατανόηση και για τις πράξεις των ακέραιων.

Στους παρακάτω πίνακες παρουσιάζονται κάποια από τα σημαντικότερα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα των δύο μοντέλων, του μοντέλου της αριθμογραμμής (Πίνακας 1) και του μοντέλου της εξουδετέρωσης (Πίνακας 2).

Πλεονεκτήματα	Μειονεκτήματα
✓ Πολύ εύκολη σύγκριση αριθμών παρατηρώντας είτε αν ο αριθμός είναι πιο αριστερά ή πιο δεξιά είτε αν είναι πιο κάτω ή πιο πάνω. ✓ Οι μαθητές είναι συνηθισμένοι στις «θετικές» αριθμογραμμές και στις πράξεις πάνω σε αυτές από μικρή ηλικία. ✓ Το μοντέλο αυτό μπορεί να σχεδιαστεί σε οποιαδήποτε κλίμακα, για μεγαλύτερους αριθμούς. ✓ Το μοντέλο αυτό προσφέρει μια καλή αναπαράσταση της πρόσθεσης.	✓ Η χρήση των προσήμων δεν έχει νόημα για τους μαθητές. ✓ Οι μαθητές μπορούν να μπερδέψουν το «προχωράω προς τα πίσω» ή το «αλλάζω κατεύθυνση» για την αφαίρεση, καθώς είχαν μάθει στις μικρότερες τάξεις ότι η αφαίρεση σημαίνει «βγάζω» και σε αυτό το μοντέλο δεν υπάρχει τίποτα να «βγάλουν». ✓ Οι μαθητές πρέπει να ανησυχούν για τη σειρά των αριθμών πάνω στην αριθμογραμμή, την απόστασή τους από το μηδέν και την κατεύθυνσή τους. ✓ Οι μαθητές μπορεί να μην έχουν καθαρή εικόνα για το τι υπολογίζουν πάνω στην αριθμογραμμή.

Πίνακας 1. Πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα της αριθμογραμμής

Πλεονεκτήματα	Μειονεκτήματα
✓ Η σύγκριση είναι πιο χειροπιαστή, καθώς με τη χρήση των δύο χρωμάτων οι μαθητές βλέπουν σε ποιο χρώμα ανήκουν τα περισσότερα τετράγωνα.	✓ Οι μαθητές έχουν την τάση να αγνοούν τα «χρέη» ή να τα μπερδεύουν με το μηδέν. ✓ Δεν είναι άμεσα εμφανής η σύγκριση αριθμών, καθώς πρέπει να

✓ Οι μαθητές κατανοούν διαισθητικά το μοντέλο αυτό. ✓ Τα προβλήματα συσχετίζονται άμεσα με την καθημερινή ζωή. ✓ Οι μαθητές επικεντρώνονται στην πρόσθεση και την αφαίρεση αντικειμένων χωρίς να ανησυχούν για τη σειρά των αριθμών.	καταμετρηθούν πρώτα τα δύο χρώματα τετραγώνων για να καταλήξουν οι μαθητές στο συμπέρασμα σε ποιο χρώμα ανήκουν τα περισσότερα τετράγωνα. ✓ Η σύνδεση του μοντέλου με το αριθμητικό σύστημα μπορεί να μην είναι άμεσα εμφανής. ✓ Οι πολλαπλοί τρόποι αναπαράστασης του μηδενός μπορεί να μπερδέψει τους μαθητές.

Πίνακας 2. Πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα της εξουδετέρωσης

2.3 Το συνδυαστικό μοντέλο: Ο συνδυασμός των δύο προηγούμενων μοντέλων

Το συνδυαστικό μοντέλο για τη διδασκαλία των ακέραιων αριθμών αποτελεί το συνδυασμό των δύο προηγούμενων μοντέλων που αναλύθηκαν παραπάνω, δηλαδή της αριθμογραμμής και της εξουδετέρωσης,. Το μοντέλο της αριθμογραμμής δίνει έμφαση στη διατακτικότητα των αριθμών, ενώ το μοντέλο της εξουδετέρωσης στην πληθικότητα των αριθμών. Πιο συγκεκριμένα, η αριθμογραμμή απεικονίζει τους αριθμούς με μία σειρά (-2, -1, 0, 1, 2, 3 κλπ), ενώ στην εξουδετέρωση οι αριθμοί απεικονίζονται σαν πλήθος (5, δηλαδή έχω 5 αντικείμενα ή -3, δηλαδή χρωστάω 3 αντικείμενα),

Μέχρι το 2009, δεν υπήρχαν διαθέσιμες μελέτες οι οποίες να συνδυάζουν τους δύο παραπάνω τύπους μοντέλων (Steiner, 2009). Όμως, αρκετές μελέτες έχουν πραγματοποιηθεί για την χρήση του μοντέλου της αριθμογραμμής ή του μοντέλου της εξουδετέρωσης. Σε κάθε περίπτωση

υπήρχε ο ενθουσιασμός για ένα συγκεκριμένο μοντέλο για την ικανότητά του να διευκολύνει την εννοιολογική κατανόηση των ακέραιων. Όμως δεν υπήρχε κάποιο μοντέλο το οποίο να περιέχει τόσο τη διατακτικότητα όσο και την πληθικότητα των ακεραίων (Steiner, 2009). Το 2009, η Steiner συνδύασε για πρώτη φορά τα δύο αυτά μοντέλα και δημιούργησε το «νέο μοντέλο» (novel model), όπως το ονομάζει η ίδια. Η Steiner χρησιμοποίησε το συνδυασμό των δύο μοντέλων σε έρευνα με pre-service δασκάλους και πρότεινε την εφαρμογή του μοντέλου αυτού για έρευνα σε μαθητές που δεν είχαν προηγούμενη γνώση των αρνητικών αριθμών.

2.4 Δυσκολίες και λάθη των μαθητών

Οι μαθητές πρέπει να κατανοήσουν πλήρως τα μαθηματικά τα οποία μαθαίνουν. Σε οποιοδήποτε επίπεδο γνώσεων των μαθηματικών κι αν πρέπει να φτάσουν οι μαθητές, δεν μπορούν να το φτάνουν αμέσως (Brownell, 2004). Συχνά οι μαθητές αναγκάζονται να απομνημονεύσουν κανόνες για τις πράξεις με τους ακέραιους, και να κάνουν πράξεις σύμφωνα με αυτούς τους κανόνες. Συχνά οι μαθητές μπερδεύονται σχετικά με ποιον κανόνα πρέπει να ακολουθήσουν και καταφεύγουν στη διαίσθησή τους προκειμένου να λύσουν κάποιο πρόβλημα με ακέραιους αριθμούς (Bolyard, 2005; Ferguson, 1993).

Πολλές φορές, οι ακέραιοι αριθμοί καθώς επίσης και οι διαδικασίες της πρόσθεσης και της αφαίρεσης παρουσιάζονται στους μαθητές, χωρίς προηγουμένως να διδαχτούν τι πραγματικά είναι οι ακέραιοι αριθμοί. Κάποιοι καθηγητές δε συσχετίζουν τους ακέραιους με τις γνώσεις που έχουν ήδη μάθει οι μαθητές όπως η θερμοκρασία ή ακόμα και πάνω ή κάτω από το επίπεδο της θάλασσας. Οι μαθητές ακόμα και αν μπορούν να συσχετίσουν την εμπειρική γνώση των ακεραίων με το τι πραγματικά είναι οι ακέραιοι, δεν μπορούν πάντα να κατανοήσουν γιατί μια κατάσταση είναι «θετική» ή «αρνητική»(Bell, 1983; Hackbarth, 2000). Επίσης οι μαθητές μπορεί να μπερδευτούν καθώς τα ίδια σύμβολα συν και πλην («+» και «-») χρησιμοποιούνται για να δείχνουν τις πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης (Shawyer, 1985). Για παράδειγμα το σύμβολο «πλην» έχει δύο λειτουργίες, να συμβολίζει την πράξη της αφαίρεσης και να συμβολίζει έναν αρνητικό αριθμό. Όμως αυτές οι δύο λειτουργίες δεν ήταν πάντα διακριτές. Οι

Κινέζοι θεωρούσαν έναν αρνητικό αριθμό, έναν αριθμό ο οποίος πρέπει να αφαιρεθεί από μία ποσότητα ή μία ποσότητα η οποία πρέπει να πληρωθεί (Beery et al., 2004). Η αναπαράσταση της αφαίρεσης «1 – 3 = - 2» γινόταν τοποθετώντας μία κόκκινη ράβδο και τρεις μαύρες ράβδους, εξουδετερώνοντας μία από το κάθε χρώμα, δίνοντας έτσι αποτέλεσμα δύο μαύρες ράβδους, δηλαδή δύο ράβδους οι οποίες έπρεπε ακόμα να αφαιρεθούν. Οπότε οι δύο λειτουργίες του «πλην» είχαν την ίδια σημασία για τους Κινέζους.

Παρότι η εφαρμογή αυτών των κανόνων της πρόσθεσης και της αφαίρεσης των ακέραιων αριθμών επιτρέπει στους μαθητές να βρίσκουν τις σωστές απαντήσεις, δεν μπορούν πάντα να κατανοήσουν γιατί λειτουργούν αυτοί οι κανόνες. Ύστερα από έρευνες οι οποίες έχουν πραγματοποιηθεί, έχει διαπιστωθεί πως οι μαθητές μερικές φορές παρουσιάζουν δυσκολίες στο να θυμηθούν τους κανόνες, ειδικά όσον αφορά την διαδικασία της αφαίρεσης (Bolyard, 2005; Wilkins, 1996). Εάν στους μαθητές δίνεται ένα συγκεκριμένο μοντέλο για ένα πρόβλημα το οποίο αποδίδει μια συγκεκριμένη λύση, τότε πολύ πιθανό είναι να συσχετίσουν το μοντέλο αυτό με την διαδικασία.

Με την αριθμογραμμή υπάρχει επίσης σύγχυση σε σχέση με το πρόσημο το οποίο συνδέεται με έναν ακέραιο αριθμό (για να υποδείξει αν είναι θετικός ή αρνητικός) και τις πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης (Baily, C. A. R., Barton, A., Blakey, J. C., Brighton, D. R., Bromby, H., & Davey, P. C., 1974). Για παράδειγμα, μερικοί μαθητές συγχέουν τον ακέραιο αριθμό -3 με την πράξη της αφαίρεσης. Σε άλλη έρευνα, η κατανόηση των μαθητών για την πράξη της αφαίρεσης, είναι περιορισμένη και η αριθμογραμμή μπορεί να συμβάλει σε αυτή την έλλειψη της κατανόησης. Η αφαίρεση ενός αρνητικού αριθμού, απαιτεί μετακινήσεις οι οποίες είναι πιο περίπλοκες.

Οι μαθητές έχουν ευχέρεια στους θετικούς ακεραίους καθώς από μικρή ηλικία μετράνε αντικείμενα. Όταν ασχολούνται με τους αρνητικούς αριθμούς με την μορφή συμβόλων, αναγκάζονται να απελευθερωθούν από την συγκεκριμένη έννοια των λέξεων οι οποίες

περιέχονται στην καθημερινή ζωή τους (Gallardo, 2002) και να πάνε σε μια πιο αφηρημένη, μη χειροπιαστή έννοια. Οι μαθητές μπορούν να φανταστούν δέκα μέτρα κάτω από την επιφάνεια της θάλασσας ή δέκα βήματα προς τα πίσω, όμως το -10 δεν έχει καμία σημασία για αυτούς. Οι θετικοί ακέραιοι και το μηδέν δεν δημιουργούν τέτοιου είδους προβλήματα, καθώς οι μαθητές βλέπουν τους θετικούς ως αριθμούς οι οποίοι μετρούνται και το μηδέν σαν απουσία κάποιας ποσότητας. Για αυτούς το μηδέν, πριν κατανοήσουν την έννοια των ακεραίων, σημαίνει πως δεν υπάρχει «τίποτα» (Lytle, 1992; Levenson, Tsamir & Tirosh, 2007; Steiner, 2009).

Για την έρευνά της η Lytle (1992) πραγματοποίησε συνεντεύξεις με 7 μαθητές από το σχολείο της προκειμένου να διαπιστωθούν οι αιτίες για τη δυσκολία που αντιμετώπισαν στην αφαίρεση. Όλοι οι μαθητές έλυσαν σωστά τα προβλήματα πρόσθεσης ακεραίων, τέσσερις από αυτούς έλυσαν σωστά και τα προβλήματα αφαίρεσης ακεραίων, ενώ τρεις δεν έλυσαν σωστά τα προβλήματα της αφαίρεσης ακεραίων. Διαπιστώθηκε πως οι μαθητές, στην πρόσθεση ακεραίων, χρησιμοποίησαν την αριθμογραμμή για να επιβεβαιώσουν τις στρατηγικές που ακολούθησαν. Ωστόσο, για την πράξη της αφαίρεσης, οι μαθητές οι οποίοι είχαν πετύχει στην πράξη αυτή, βασίζονταν στον κανόνα της «πρόσθεσης του αντιθέτου» ή στην «αλλαγή του πρόσημου». Δεν μπορούσαν να κατανοήσουν γιατί οι κανόνες αυτοί λειτουργούν και δεν ήταν σε θέση να αναφέρουν ένα φυσικό μοντέλο για να βασίσουν τα αποτελέσματά τους. . Όσοι μαθητές είχαν αποτύχει στην αφαίρεση, δεν ήταν σε θέση να θυμηθούν τον κανόνα καθώς επίσης δεν είχαν και κανένα φυσικό μοντέλο για να βασιστούν. Επίσης ο Bell (1983) πραγματοποίησε συνεντεύξεις από 25 μαθητές 15 ετών και διαπιστώθηκε πως οι 20 από αυτούς έδωσαν σωστές λύσεις σε όλες τις πράξεις της πρόσθεσης. Για την πρόσθεση χρησιμοποίησαν είτε το μοντέλο της αριθμογραμμής είτε το μοντέλο της εξουδετέρωσης. Μόνο 10 από τους 25 μαθητές έδωσαν σωστές λύσεις σε όλες τις πράξεις της αφαίρεσης και η επιτυχία τους εξαρτιόταν από την ορθή ή την λανθασμένη εφαρμογή των κανόνων που είχαν διδαχτεί. Οι παραπάνω δύο μελέτες δείχνουν πως για τους μαθητές, η πρόσθεση έχει σημασιολογική αναφορά, ενώ στην αφαίρεση γίνεται αναφορά σε κάποιον κανόνα.

Τα μοντέλα από μόνα τους δεν θα διδάξουν την έννοια των ακέραιων και τις ιδιότητές τους. Τα μοντέλα πρέπει να επιλεγούν με τέτοιο τρόπο, ώστε να επιτρέπουν στον μαθητή να παρουσιάζει

μια κατάσταση σύμφωνα με τον τρόπο που κατανοεί ο ίδιος. Γενικά η αναπαράσταση μιας μαθηματικής έννοιας είναι κάτι θεμελιώδες για τη μελέτη των μαθηματικών (NCTM, 2000).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

3.1 Εισαγωγή

Η παρούσα έρευνα έχει δύο σκοπούς, πρώτον να μελετήσει το βαθμό κατανόησης της έννοιας των ακεραίων αριθμών από μαθητές της έκτης τάξης (6th grade) και δεύτερον να μελετήσει το βαθμό κατανόησης της πρόσθεσης και της αφαίρεσης ακεραίων αριθμών από αυτούς τους μαθητές, μέσα από τη χρήση του συνδυαστικού μοντέλου, δηλαδή του συνδυασμού του μοντέλου της αριθμογραμμής και του μοντέλου της εξουδετέρωσης.

Πιο αναλυτικά, για να απαντηθούν τα ερευνητικά μας ερωτήματα δόθηκε στους μαθητές ένα pre-test με 6 ερωτήσεις, ακολούθησαν επτά ώρες διδασκαλίας των παραπάνω εννοιών, κατόπιν δόθηκε στους μαθητές ένα post-test με τις 6 ερωτήσεις του pre-test και 5 επιπλέον ερωτήσεις και τέλος σε μία διδακτική ώρα έγινε συζήτηση των λύσεων μερικών προβλημάτων του post-test με τους μαθητές.

3.2 Συμμετέχοντες

Στην παρούσα έρευνα συμμετείχαν μαθητές από δύο τμήματα της έκτης τάξης (6th grade) σε ένα δημόσιο ελληνοαμερικάνικο charter school στη Βόρεια Καρολίνα, ΗΠΑ. Οι μαθητές στο σχολείο αυτό προέρχονται από οικογένειες διαφορετικών κοινωνικών επιπέδων και εθνικοτήτων, κάτι που καθιστά το δείγμα πιο διαφοροποιημένο. Το δείγμα για την έρευνα ήταν

όλοι οι μαθητές ηλικίας 11-12 ετών από αυτά τα δύο τμήματα. Το πρώτο τμήμα είχε 17 μαθητές από τους οποίους 9 ήταν κορίτσια και 8 αγόρια και το δεύτερο τμήμα είχε 18 μαθητές από τους οποίους 10 ήταν κορίτσια και 8 ήταν αγόρια. Συνολικά συμμετείχαν 35 μαθητές, 19 κορίτσια και 16 αγόρια. Για τις ανάγκες της έρευνας οι μαθητές των δύο τμημάτων ενώθηκαν και αποτέλεσαν ένα τμήμα 35 μαθητών.

Η επιλογή των τμημάτων έγινε μετά από συνεννόηση με τη διευθύντρια του σχολείου και τη δασκάλα των μαθητών ώστε να μην παρακωλυθεί το ωρολόγιο πρόγραμμα του σχολείου.

3.3 Χρονοδιάγραμμα

Η έρευνα αποτελείται από τέσσερις φάσεις. Στην πρώτη φάση δόθηκε στους μαθητές ένα φύλλο εργασίας (pre-test). Τη δεύτερη φάση αποτέλεσαν επτά ώρες διδασκαλίας στους ακεραίους. Στην τρίτη φάση δόθηκε στους μαθητές ένα φύλλο εργασίας (post-test). Την τέταρτη φάση αποτέλεσαν οι συζητήσεις με όλους τους μαθητές πάνω στις λύσεις μερικών προβλημάτων πρόσθεσης και αφαίρεσης ακεραίων από το post-test.

Το pre-test δόθηκε στους μαθητές της έκτης τάξης (6th grade) την τρίτη εβδομάδα του Απριλίου 2016 στο ελληνοαμερικάνικο charter school της Βόρειας Καρολίνας. Οι μαθητές δεν είχαν προηγούμενη γνώση των ακεραίων. Μετά ακολούθησαν επτά ώρες διδασκαλίας πάνω στην έννοια των ακεραίων καθώς και πάνω στην πρόσθεση και στην αφαίρεση των ακεραίων, μέχρι το τέλος του Απριλίου. Ένα μήνα μετά από τη διδασκαλία, δηλαδή την τελευταία εβδομάδα του Μαΐου 2016, δόθηκε στους μαθητές το post-test. Το πρώτο μέρος του post-test δόθηκε τη μία ημέρα (Πέμπτη) και το δεύτερο μέρος διάρκειας 45 λεπτών δόθηκε την επομένη (Παρασκευή). Το post-test διορθώθηκε το Σαββατοκύριακο και τη Δευτέρα έγινε η συζήτηση με τους μαθητές πάνω στις απαντήσεις που έδωσαν.

Η διδασκαλία καθώς και η εξέταση έγιναν μέσα στο σχολικό ωράριο των μαθητών. Η βασική διδάσκουσα των μαθητών αυτών συνέχισε τη διδασκαλία της έννοιας των ακεραίων αριθμών στο διάστημα που μεσολάβησε μέχρι το post-test. Δεν έγινε όμως διδασκαλία πρόσθεσης και

αφαίρεσης ακεραίων καθώς δεν περιλαμβάνεται στο αναλυτικό πρόγραμμα (curriculum) της έκτης τάξης (6th grade).

3.4 Πρωτόκολλο

Πριν την έναρξη της έρευνας οι μαθητές ενημερώθηκαν για την έρευνα στην οποία θα συμμετείχαν, καθώς και για τη διατήρηση της ανωνυμίας τους. Για το λόγο αυτό χρησιμοποιήθηκαν κωδικοί για τον κάθε μαθητή και όχι το όνομά τους. Το πρώτο τμήμα είχε κωδικούς 101 - 117 ενώ το δεύτερο τμήμα είχε κωδικούς 201 - 218.

Η βασική διδάσκουσα των μαθητών ήταν πάντα παρούσα στο τμήμα των 35 μαθητών κατά τη διάρκεια του pre-test, της διδασκαλίας, του post-test και στα δύο τμήματα των μαθητών κατά τη διάρκεια των συζητήσεων με τους μαθητές. Οι μαθητές ενθαρρύνθηκαν να απαντήσουν με ειλικρίνεια στις ερωτήσεις και διαβεβαιώθηκαν ότι οι απαντήσεις τους θα χρησιμοποιηθούν μόνο για την έρευνα αυτή και σε καμία περίπτωση δε θα επηρεαστεί ο βαθμός τους. Η διαβεβαίωση αυτή διατυπώθηκε και γραπτώς στο pre-test και το post-test.

3.5 Μέσα και Συλλογή Δεδομένων

Στην παρούσα έρευνα χρησιμοποιήθηκε ο συνδυασμός δύο μοντέλων για την κατανόηση των ακεραίων αριθμών καθώς και των πράξεων της πρόσθεσης και της αφαίρεσης των ακεραίων, χρησιμοποιώντας ισοδύναμα και τα δύο μοντέλα. Το πρώτο μοντέλο είναι το μοντέλο της αριθμογραμμής, το οποίο δίνει έμφαση στην διατακτικότητα των αριθμών ενώ το δεύτερο μοντέλο είναι το μοντέλο της εξουδετέρωσης, το οποίο δίνει έμφαση στην πληθικότητα των αριθμών. Ο συνδυασμός των δύο μοντέλων, το συνδυαστικό μοντέλο, δίνει έμφαση εξίσου στη διατακτικότητα και την πληθικότητα των αριθμών. Δόθηκαν παραδείγματα και προβλήματα κατάλληλα για την ηλικία και τα ενδιαφέροντα των συμμετεχόντων.

Οι ερωτήσεις που τέθηκαν για μελέτη είναι:

1. Είναι δυνατή η κατανόηση των ακεραίων από μαθητές της έκτης τάξης (6th grade) καθώς και η χρήση τους στην καθημερινή μας ζωή;

2. Πώς βοηθάει η χρήση του συνδυαστικού μοντέλου, του συνδυασμού των δύο μοντέλων της αριθμογραμμής και της εξουδετέρωσης, στην κατανόηση της πρόσθεσης και της αφαίρεσης των ακεραίων;

Για να απαντηθούν αυτές οι ερωτήσεις χρησιμοποιήθηκαν ένα pre-test, επτά ώρες διδασκαλίας στους ακεραίους, ένα post-test και οι συζητήσεις των λύσεων μερικών προβλημάτων πρόσθεσης και αφαίρεσης ακεραίων από το post-test με όλους τους μαθητές.

3.5.1 Πρώτη φάση – Pre-test

Στην πρώτη φάση της έρευνας δόθηκε στους μαθητές ένα φύλλο εργασίας, το οποίο χρησιμοποιήθηκε σαν pre-test και περιείχε 6 ερωτήσεις (Παράρτημα Α). Οι ερωτήσεις είχαν σαν στόχο να ελέγξουν κατά πόσο οι μαθητές είχαν γνώση των ακεραίων αριθμών καθώς επίσης αν γνώριζαν πού και πώς χρησιμοποιούνται οι ακέραιοι αριθμοί στην καθημερινή μας ζωή. Ο χρόνος ολοκλήρωσης του pre-test ήταν 30 λεπτά.

3.5.2 Δεύτερη φάση – Διδασκαλία

Στη δεύτερη φάση της έρευνας πραγματοποιήθηκε η διδασκαλία των ακεραίων. Η διδασκαλία είχε διάρκεια επτά ημερών, από μία διδακτική ώρα κάθε ημέρα, και χωρίστηκε σε τρία μέρη. Το πρώτο μέρος είχε διάρκεια δύο διδακτικών ωρών και έγινε η εισαγωγή των ακεραίων με τη χρήση της αριθμογραμμής. Το δεύτερο μέρος είχε διάρκεια δύο διδακτικών ωρών και έγινε η εισαγωγή στη μέθοδο της εξουδετέρωσης. Το τρίτο μέρος είχε διάρκεια τριών διδακτικών ωρών και έγινε ο συνδυασμός των δύο μοντέλων, δηλαδή χρησιμοποιήθηκε το συνδυαστικό μοντέλο για τη διδασκαλία της πρόσθεσης και της αφαίρεσης ακεραίων, μέσω του οποίου οι μαθητές ανακάλυψαν τους κανόνες των δύο πράξεων.

3.5.2.1 Πρώτο Μέρος - Μαθήματα 1 και 2

Τα δύο πρώτα μαθήματα βασίστηκαν στο άρθρο των Nurnberger-Haag και Sherard (2007), το οποίο προτείνει οι μαθητές να ζωγραφίσουν με κιμωλία μια αριθμογραμμή στο πάτωμα και να περπατήσουν πάνω σε αυτή.

Για τη διεξαγωγή αυτών των μαθημάτων κατασκευάστηκαν και εκτυπώθηκαν χρωματιστοί αριθμοί από το -10 έως το 10. Οι αρνητικοί αριθμοί είχαν χρώμα κόκκινο, οι θετικοί είχαν χρώμα πράσινο και το μηδέν είχε χρώμα κίτρινο. Ο κάθε αριθμός είχε εκτυπωθεί σε μία σελίδα και είχε πλαστικοποιηθεί, ώστε οι μαθητές να έχουν τη δυνατότητα να πατούν πάνω του. Οι αριθμοί βρίσκονταν μέσα σε κύκλο και δύο ίσα ευθύγραμμα τμήματα είχαν χαραχθεί έξω από τον κύκλο, στην επέκταση της διαμέτρου που διέρχεται κατά μήκος του αριθμού όπως τον διαβάζουμε (Εικόνα 4). Όταν τα ευθύγραμμα τμήματα δύο διαδοχικών αριθμών ενωθούν, τότε σχηματίζουν μια αριθμογραμμή όπου οι αριθμοί βρίσκονται σε ίσες αποστάσεις και οι μαθητές μπορούν να περπατήσουν πάνω της (Εικόνα 5).

Εικόνα 4. Αριθμός

Εικόνα 5. Αριθμογραμμή

Η διδασκαλία της πρώτης ημέρας πραγματοποιήθηκε στον προαύλιο χώρο του σχολείου. Οι μαθητές, μετά από πολλές προσπάθειες, κατάφεραν να τοποθετήσουν τους θετικούς αριθμούς έτσι ώστε να σχηματιστεί μια αριθμογραμμή. Επίσης περπάτησαν προς τα εμπρός και προς τα πίσω πάνω στην αριθμογραμμή των θετικών αριθμών.

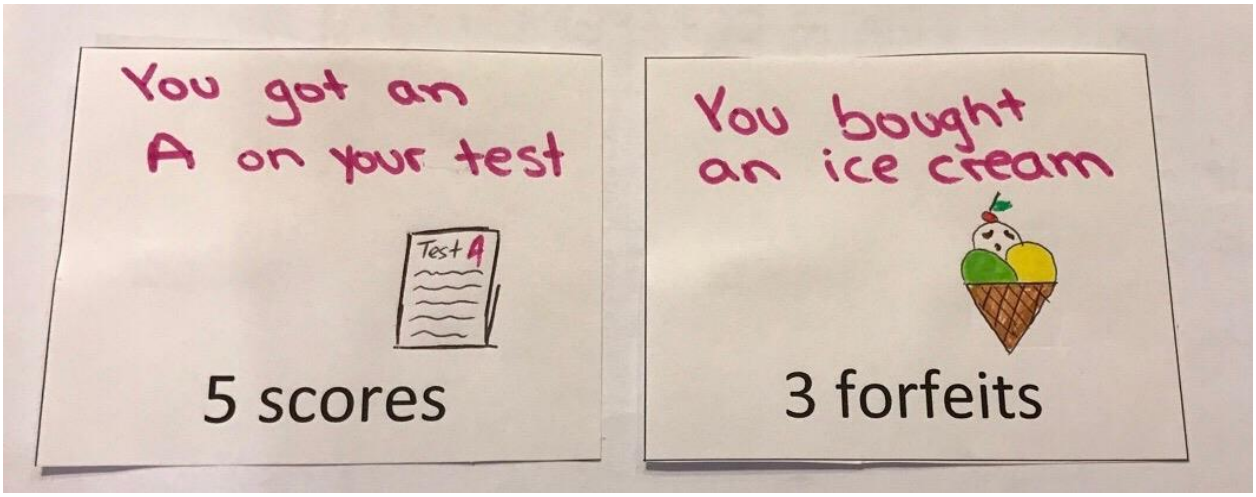
Τη δεύτερη ημέρα οι μαθητές πρόσθεσαν το μηδέν και τους αρνητικούς αριθμούς στην αριθμογραμμή που είχαν κατασκευάσει την προηγούμενη ημέρα και έτσι ολοκλήρωσαν την αριθμογραμμή από το -10 έως το 10. Κατόπιν περπάτησαν πάνω στην αριθμογραμμή πηγαίνοντας εμπρός, πίσω και αλλάζοντας κατεύθυνση ακολουθώντας τις οδηγίες που τους δίνονταν και βρίσκοντας την τελική τους θέση πάνω στην αριθμογραμμή.

3.5.2.2 Δεύτερο Μέρος - Μαθήματα 3 και 4:

Τα δύο μαθήματα που ακολούθησαν βασίστηκαν στο άρθρο της Liebeck (1990), το οποίο προτείνει τη δημιουργία ενός παιχνιδιού "Scores and Forfeits" με σκοπό η έννοια της εξουδετέρωσης να γίνει πιο χειροπιαστή στους μαθητές, δηλαδή ότι "οι θετικοί" εξουδετερώνουν "τους αρνητικούς". Οι μαθητές λαμβάνουν μαύρους και λευκούς δίσκους (counters) για να καταγράφουν την πρόοδό τους στο παιχνίδι και ανάλογα με το πόσους λευκούς δίσκους έχουν, λαμβάνουν τα αντίστοιχα φανταστικά χρήματα ή με το πόσους μαύρους δίσκους έχουν, χρωστάνε τα αντίστοιχα φανταστικά χρήματα.

Για τη διεξαγωγή των μαθημάτων εκτυπώθηκαν πράσινα και κόκκινα δολάρια τα οποία είχαν αντίστοιχη χρήση των λευκών και μαύρων δίσκων (counters), με τη διαφορά ότι οι μαθητές έβλεπαν τα χρήματα τα οποία κέρδιζαν/λάμβαναν ή έχαναν/χρωστούσαν.

Επίσης κατασκευάστηκαν κάρτες στις οποίες αναγράφονταν καταστάσεις κέρδους ή οφειλής χρημάτων, όπως για παράδειγμα "Πήρες Α στο τεστ: 5 scores", το οποίο σήμαινε ότι ο μαθητής θα λάμβανε 5 πράσινα δολάρια ή "Αγόρασες ένα παγωτό: 3 forfeits", το οποίο αντίστοιχα σήμαινε ότι ο μαθητής χρωστούσε 3 δολάρια, δηλαδή θα λάμβανε 3 κόκκινα δολάρια (Εικόνα 6).



Εικόνα 6. Κάρτες παιχνιδιού Scores and Forfeits

Στην αρχή του μαθήματος της πρώτης διδακτικής ώρας δόθηκαν στους μαθητές από ένας μικρός πίνακας και ένας μαρκαδόρος για να καταγράφουν τα δεδομένα τους καθώς και από 10 πράσινα και 10 κόκκινα δολάρια. Ρωτήθηκαν αν είχαν ξαναδεί τέτοια δολάρια και αφού η απάντηση ήταν αρνητική ρωτήθηκαν τι μπορεί να σημαίνει το διαφορετικό χρώμα των δολαρίων. Οι μαθητές δεν μπόρεσαν να δώσουν απάντηση παρά μόνο όταν τους είπαμε ότι θα τα χρησιμοποιήσουμε για κάποιο παιχνίδι. Τότε μία από τις απαντήσεις που δόθηκαν ήταν ότι τα κόκκινα δολάρια θα συμβόλιζαν κάποια οφειλή που ήταν και η σωστή απάντηση.

Κατόπιν δόθηκαν στους μαθητές οι οδηγίες για το πώς παίζεται το παιχνίδι. Ο κάθε παίκτης τραβάει μία κάρτα και ανάλογα με την περιγραφή στην κάρτα λαμβάνει πράσινα ή κόκκινα δολάρια από τα δολάρια που του έχουν δοθεί. Το παιχνίδι τελειώνει όταν οι παίκτες έχουν είτε κέρδος 10 δολαρίων (10 πράσινα δολάρια) είτε οφειλή 10 δολαρίων (10 κόκκινα δολάρια).

Κατά την πρώτη διδακτική ώρα παίξαμε όλοι μαζί το παιχνίδι για να καταλάβουν οι μαθητές πώς παίζεται στην πράξη. Αυτό το παιχνίδι ήταν έτσι κατασκευασμένο ώστε να τελειώσει σε 5 γύρους με κέρδος 10 δολάρια.

Τα τελευταία δέκα λεπτά της πρώτης διδακτικής ώρας δόθηκαν στους μαθητές τουλάχιστον από δύο κάρτες, όπου σε καθεμία ήταν γραμμένος ένας αριθμός και η λέξη score ή forfeit, και ζητήθηκε από τους μαθητές να γράψουν τις δικές τους προτάσεις για να δημιουργήσουν τις κάρτες για το επόμενο παιχνίδι (Εικόνα 7).

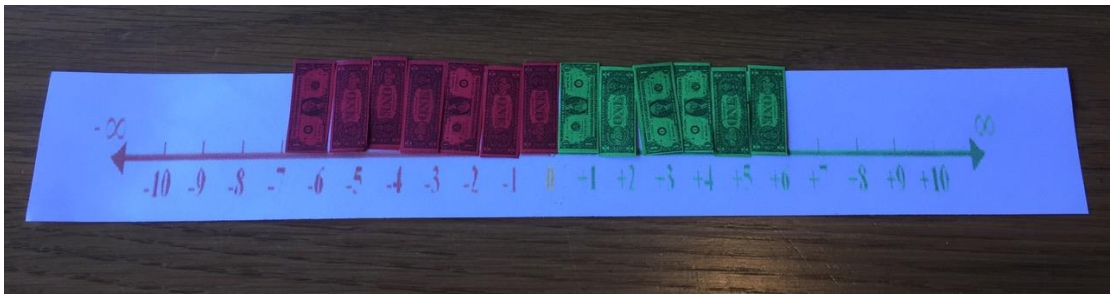
Εικόνα 7. Κάρτες παιχνιδιού κατασκευασμένες από τους μαθητές

Κατά τη δεύτερη διδακτική ώρα οι μαθητές μπήκαν σε οκτώ ομάδες των τεσσάρων και μία ομάδα των τριών και έπαιξαν το παιχνίδι “Scores and Forfeits” χρησιμοποιώντας τις 8 κάρτες που είχαν φτιάξει. Τους ζητήθηκε επίσης να καταγράφουν την πρόοδό τους μέσα στο παιχνίδι έτσι ώστε απλά βλέποντας τις σημειώσεις τους, να μπορούμε να καταλάβουμε τι κάρτες τράβηξαν.

3.5.2.3 Τρίτο Μέρος - Μαθήματα 5, 6 και 7:

Τα τελευταία τρία μαθήματα βασίστηκαν στο συνδυασμό των προηγούμενων μαθημάτων και έγινε η εισαγωγή του συνδυαστικού μοντέλου για την πρόσθεση και την αφαίρεση των ακεραίων. Το συνδυαστικό μοντέλο βασίστηκε πάνω στη διδακτορική διατριβή της Steiner (2009) όπου χρησιμοποίησε το «Novel model”, όπως το ονομάζει η ίδια, για την έρευνά της με pre-service δασκάλους. Το συνδυαστικό μοντέλο δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές να αντιληφθούν ταυτόχρονα τη διατακτικότητα των ακεραίων λόγω της χρήσης της αριθμογραμμής μαζί με την πληθικότητά τους λόγω της χρήσης των δολαρίων των δύο χρωμάτων, στη θέση των δίχρωμων δίσκων (counters).

Για τη διεξαγωγή των επόμενων μαθημάτων κατασκευάστηκε για κάθε μαθητή μια ατομική αριθμογραμμή από το -10 έως το 10, με κόκκινους τους αρνητικούς αριθμούς, πράσινους τους θετικούς και κίτρινο το μηδέν. Επίσης κατασκευάστηκαν μικρότερα πράσινα και κόκκινα δολάρια ώστε το κάθε δολάριο να χωράει 1 δολάριο ανάμεσα σε δύο διαδοχικούς αριθμούς της ατομικής αριθμογραμμής. Σε κάθε μαθητή δόθηκε ένας μικρός ατομικός πίνακας, ένας μαρκαδόρος για να καταγράφει τις απαντήσεις του στον πίνακα, μία ατομική αριθμογραμμή, 10 πράσινα και 10 κόκκινα δολάρια (Εικόνα 8).



Εικόνα 8. Ατομική αριθμογραμμή και μικρά δολάρια

Οι μαθητές είχαν πλέον κάποια μαθηματική επαφή με τους αρνητικούς αριθμούς και με τα δύο μοντέλα, οπότε μπορούσε να γίνει η εισαγωγή της πρόσθεσης και της αφαίρεσης των ακεραίων με τη χρήση του συνδυαστικού μοντέλου.

Την πρώτη διδακτική ώρα του τρίτου μέρους, οι μαθητές κατάφεραν αρχικά να συσχετίσουν τα πράσινα και τα κόκκινα δολάρια με τους θετικούς και αρνητικούς αριθμούς αντίστοιχα. Επίσης κατάφεραν με ευκολία να αναπαριστούν έναν αριθμό με διαφορετικούς τρόπους προσθέτοντας έναν αριθμό και τον αντίθετό του, δηλαδή τοποθετώντας τον ίδιο αριθμό πράσινων και κόκκινων δολαρίων πάνω στην αριθμογραμμή. Στο τέλος της διδακτικής ώρας, οι μαθητές πρόσθεταν με επιτυχία ομόσημους ακεραίους αριθμούς με τη χρήση του συνδυαστικού μοντέλου.

Τη δεύτερη διδακτική ώρα του τρίτου μέρους, οι μαθητές αρχικά έκαναν επανάληψη δύο προβλημάτων πρόσθεσης ομόσημων ακεραίων και μετά έλυσαν προβλήματα πρόσθεσης ετερόσημων ακεραίων, χρησιμοποιώντας το συνδυαστικό μοντέλο. Κατόπιν κατάλληλων ερωτήσεων οι μαθητές κατάφεραν να συμπεράνουν το γενικό κανόνα για την πρόσθεση των ακεραίων αριθμών που χρησιμοποιεί την έννοια της απόλυτης τιμής. Μετά από την ανακάλυψη του κανόνα, δόθηκαν στους μαθητές προβλήματα πρόσθεσης μεγαλύτερων ακεραίων που δεν μπορούσαν να αναπαρασταθούν με την αριθμογραμμή και τα δολάρια του συνδυαστικού μοντέλου που διέθεταν. Πριν την ολοκλήρωση της δεύτερης διδακτικής ώρας δόθηκαν στους μαθητές δύο προβλήματα αφαίρεσης ομόσημων ακεραίων, με τον μειωτέο μεγαλύτερο από τον αφαιρετέο, και αναπαραστάθηκαν από τους μαθητές με τη χρήση του συνδυαστικού μοντέλου τοποθετώντας ή αφαιρώντας τα κατάλληλα δολάρια πάνω στην αριθμογραμμή.

Την τρίτη και τελευταία διδακτική ώρα του τρίτου μέρους, οι μαθητές κατάφεραν αρχικά να αφαιρούν ομόσημους ακεραίους με τον μειωτέο μικρότερο από τον αφαιρετέο και στη συνέχεια να αφαιρούν ετερόσημους ακεραίους με τη χρήση του συνδυαστικού μοντέλου. Οι μαθητές χρησιμοποίησαν με επιτυχία τη διαδικασία πρόσθεσης και αφαίρεσης του ίδιου αριθμού, δηλαδή την τοποθέτηση ίσου αριθμού κόκκινων και πράσινων δολαρίων, με σκοπό να καταλήξουν στον κανόνα αφαίρεσης ακεραίων που βασίζεται στη χρήση της έννοιας της πρόσθεσης του αντιθέτου ενός αριθμού. Μετά από την ανακάλυψη του κανόνα, δόθηκαν στους

μαθητές προβλήματα αφαίρεσης μεγαλύτερων ακεραίων που δεν μπορούσαν να αναπαρασταθούν με την αριθμογραμμή και τα δολάρια του συνδυαστικού μοντέλου που διέθεταν.

Μετά την ολοκλήρωση των επτά διδακτικών ωρών, την επόμενη ημέρα, οι μαθητές δημιούργησαν ένα poster με όλους τους κανόνες πρόσθεσης και αφαίρεσης ακεραίων με παραδείγματα και το κρέμασαν στην τάξη τους.

3.5.3 Τρίτη φάση – Post-test

Στην τρίτη φάση της έρευνας δόθηκαν στους μαθητές δύο φύλλα εργασίας, τα οποία αποτέλεσαν το post-test. Το πρώτο φύλλο εργασίας ήταν το ίδιο με το pre-test με 6 ερωτήσεις (Παράρτημα Α) ενώ το δεύτερο φύλλο εργασίας περιείχε 5 διαφορετικούς τύπους προβλημάτων (Παράρτημα Β). Ο συνολικός χρόνος ολοκλήρωσης των δύο φύλλων εργασίας ήταν μία ώρα και 15 λεπτά. Το πρώτο φύλλο διάρκειας 30 λεπτών δόθηκε σε μία διδακτική ώρα και το δεύτερο διάρκειας 45 λεπτών σε άλλη διδακτική ώρα την επόμενη ημέρα.

Ο σκοπός του πρώτου φύλλου εργασίας ήταν να βοηθήσει να απαντηθεί το πρώτο ερώτημα της έρευνας κατόπιν σύγκρισης με τις απαντήσεις των μαθητών στο pre-test. Ο σκοπός του δεύτερου φύλλου εργασίας σε συνδυασμό με τη συζήτηση που ακολούθησε κατά την τέταρτη φάση της έρευνας, ήταν να απαντηθεί το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα.

Στις δύο πρώτες ερωτήσεις του δεύτερου φύλλου εργασίας οι μαθητές κλήθηκαν να συγκρίνουν δύο ακεραίους. Ο στόχος της πρώτης ερώτησης ήταν να ελεγχθεί κατά πόσο οι μαθητές κατανοούν τη διατακτικότητα και την πληθικότητα των ακεραίων. Ο στόχος της δεύτερης ερώτησης ήταν να ελεγχθεί αν οι μαθητές μπορούν να χρησιμοποιήσουν κατάλληλες πράξεις για να λύσουν προβλήματα σύγκρισης ακεραίων. Στην τρίτη και τέταρτη ερώτηση οι μαθητές κλήθηκαν να λύσουν προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης ακεραίων γράφοντας αναλυτικά τη λύση τους. Ο στόχος αυτών των προβλημάτων ήταν να διαπιστωθεί η ικανότητα των μαθητών να εφαρμόσουν τις μεθόδους πρόσθεσης και αφαίρεσης ακεραίων, που έμαθαν κατά τη διδασκαλία, και να επεκτείνουν αυτή τη γνώση σε πολυπλοκότερα προβλήματα. Το πέμπτο και τελευταίο ερώτημα έδινε στους μαθητές τέσσερα προβλήματα όπου στο καθένα υπήρχε

πρόσθεση ή αφαίρεση δύο ακεραίων αριθμών και ζητούσε από τους μαθητές να δημιουργήσουν αντίστοιχα τέσσερα λεκτικά προβλήματα, ένα για κάθε πράξη. Επίσης οι μαθητές έπρεπε να βρουν την λύση του κάθε λεκτικού προβλήματος. Ο στόχος ήταν να ελεγχθεί η ικανότητα των μαθητών να εφαρμόσουν την έννοια των ακεραίων σε λεκτικά προβλήματα καθώς και η ικανότητά τους να προσθέτουν και να αφαιρούν ακεραίους για να λύσουν αυτά τα προβλήματα.

3.5.4 Τέταρτη φάση – Συζήτηση

Στην τέταρτη φάση της έρευνας έγινε συζήτηση με τους μαθητές του κάθε τμήματος ξεχωριστά εντός του σχολικού ωραρίου, την ώρα των μαθηματικών, μέσα στην αίθουσα της δασκάλας των μαθηματικών της έκτης τάξης (6th grade). Η διδάσκουσα των μαθητών ήταν παρούσα και στα δύο τμήματα κατά τη διάρκεια των συζητήσεων. Ζητήθηκε από τους μαθητές να απαντούν ειλικρινά και όσο το δυνατόν περισσότερο επεξηγηματικά κατά τη συζήτηση, υπενθυμίζοντάς τους ότι οι απαντήσεις τους θα χρησιμοποιηθούν μόνο για τους σκοπούς της παρούσας έρευνας.

Η συζήτηση που ακολούθησε αφορούσε στις λύσεις που έδωσαν οι μαθητές στο τρίτο και τέταρτο ερώτημα του δεύτερου φύλλου εργασίας (Παράρτημα Β). Στους μαθητές δόθηκε φωτοτυπία των απαντήσεών τους για να αποφευχθεί η αλλοίωση των αρχικών λύσεων. Επίσης δόθηκαν σε κάθε μαθητή μία ατομική αριθμογραμμή από το -10 έως το 10, 10 πράσινα και 10 κόκκινα χαρτονομίσματα του ενός δολαρίου καθώς επίσης ένας μικρός πίνακας και ένας μαρκαδόρος.

Σε κάθε τμήμα, οι μαθητές χωρίστηκαν σε πέντε ομάδες των τριών ή τεσσάρων ατόμων. Ζητήθηκε από τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν το συνδυαστικό μοντέλο, που είχαν διδαχθεί, για να επιβεβαιώσουν αν η λύση που είχαν δώσει ήταν σωστή ή όχι. Κατόπιν οι μαθητές ενθαρρύνθηκαν να συζητήσουν τις λύσεις τους μέσα στις ομάδες και να αποφασίσουν τελικά ποια λύση είναι σωστή. Αυτό έγινε για να ελέγξουμε αν οι μαθητές είναι ικανοί να διορθώσουν τα τυχόν λάθη τους ή αν μπορούν να υποστηρίξουν ότι η αρχική λύση τους είναι σωστή. Από τις συζητήσεις μέσα στις ομάδες δόθηκε η δυνατότητα να κατανοήσουμε τον τρόπο σκέψης τους, καθώς μπορούμε να μάθουμε πολλά ακούγοντας κάποιον να σκέφτεται (Ball, 1988).

Η συζήτηση έκλεισε με την αναγραφή όλων των σωστών λύσεων που έδωσαν οι μαθητές στον πίνακα της τάξης.

3.6 Ανάλυση Δεδομένων

Παρακάτω εξηγείται ο τρόπος ανάλυσης των δεδομένων πάνω στο pre- test και το post-test.

3.6.1 Pre-test

Ερώτηση 1: Τι είναι ένας ακέραιος;

Οι απαντήσεις για αυτή την ερώτηση κατατάχθηκαν στις παρακάτω κατηγορίες:

1.1 Σωστή απάντηση με περιγραφή του συνόλου των ακεραίων
(Στο Pre-test δεν υπήρχε καμία απάντηση σε αυτή την κατηγορία)

1.2 Σωστή απάντηση με τον ορισμό των ακεραίων
(Στο Pre-test δεν υπήρχε καμία απάντηση σε αυτή την κατηγορία)

1.3 Μερικώς σωστή απάντηση όπου ο μαθητής απάντησε ότι οι ακέραιοι είναι αριθμοί.

1.4 Μερικώς σωστή απάντηση όπου ο μαθητής απάντησε ότι οι ακέραιοι είναι φυσικοί αριθμοί.

1.5 Λανθασμένη απάντηση, όπου ο μαθητής απάντησε ότι οι ακέραιοι περιλαμβάνουν κλάσματα ή δεκαδικούς ή είναι όλοι οι αριθμοί.

1.6 Λανθασμένη απάντηση, όπου ο μαθητής απάντησε κάτι άλλο, όπως δεν ξέρω.

Ερώτηση 2: Δώστε μερικά αντιπροσωπευτικά παραδείγματα ακέραιων αριθμών.

Οι απαντήσεις για αυτή την ερώτηση κατατάχθηκαν στις παρακάτω κατηγορίες:

2.1 Σωστή απάντηση που περιλαμβάνει θετικούς και αρνητικούς ακεραίους.
(Στο Pre-test δεν υπήρχε καμία απάντηση σε αυτή την κατηγορία.)

2.2 Μερικώς σωστή απάντηση που περιλαμβάνει μόνο θετικούς ακεραίους.

2.3 Λανθασμένη απάντηση που περιλαμβάνει κλάσματα ή δεκαδικούς.

2.4 Λανθασμένη απάντηση, όπου ο μαθητής απάντησε κάτι άλλο, όπως δεν ξέρω.

Ερώτηση 3: Πού έχεις χρησιμοποιήσει ακέραιους αριθμούς στην καθημερινή σου ζωή; Δώσε μερικά παραδείγματα.

Οι απαντήσεις για αυτή την ερώτηση κατατάχθηκαν στις παρακάτω κατηγορίες:

3.1 Σωστή απάντηση που περιλαμβάνει θετικούς και αρνητικούς ακεραίους.

3.1.1 Απαντήσεις όπως θερμοκρασία

3.1.2 Απαντήσεις όπως πόντοι σε παιχνίδια

3.1.3 Απαντήσεις όπως οφειλή χρημάτων

(Στο Pre-test δεν υπήρχε καμία απάντηση σε αυτή την κατηγορία.)

3.2 Μερικώς σωστή απάντηση, χωρίς να αναφέρονται ξεκάθαρα θετικοί ή αρνητικοί αριθμοί

3.2.1 Απαντήσεις όπως στο σχολείο, στα μαθηματικά

3.2.2 Απαντήσεις όπως παντού

3.2.3 Απαντήσεις όπως στα ψώνια

3.3 Λανθασμένη απάντηση όπου ο μαθητής απάντησε κάτι άλλο, όπως δεν ξέρω ή δεν τους έχω χρησιμοποιήσει.

Ερώτηση 4: Δημιούργησε μία άσκηση πρόσθεσης ακεραίων και λύσε την.

Οι απαντήσεις για αυτή την ερώτηση κατατάχθηκαν στις παρακάτω κατηγορίες:

4.1 Σωστή απάντηση που περιλαμβάνει πρόσθεση θετικών και αρνητικών ακεραίων, με σωστή λύση.

(Στο Pre-test δεν υπήρχε καμία απάντηση σε αυτή την κατηγορία.)

4.2 Σωστή απάντηση που περιλαμβάνει πρόσθεση μόνο θετικών ακεραίων, με σωστή λύση.

4.3 Μερικώς σωστή απάντηση που περιλαμβάνει πρόσθεση θετικών και αρνητικών ακεραίων, χωρίς σωστή λύση.

(Στο Pre-test δεν υπήρχε καμία απάντηση σε αυτή την κατηγορία.)

4.4 Μερικώς σωστή απάντηση που περιλαμβάνει πρόσθεση ακεραίων χωρίς να δοθεί λύση

4.5 Λανθασμένη απάντηση που περιλαμβάνει κλάσματα ή δεκαδικούς.

Ερώτηση 5: Δημιούργησε μία άσκηση αφαίρεσης ακεραίων και λύσε την.

Οι απαντήσεις για αυτή την ερώτηση κατατάχθηκαν στις παρακάτω κατηγορίες:

5.1 Σωστή απάντηση που περιλαμβάνει αφαίρεση θετικών και αρνητικών ακεραίων, με σωστή λύση.

(Στο Pre-test δεν υπήρχε καμία απάντηση σε αυτή την κατηγορία.)

5.2 Σωστή απάντηση που περιλαμβάνει αφαίρεση μόνο θετικών ακεραίων, με σωστή λύση.

5.3 Μερικώς σωστή απάντηση που περιλαμβάνει αφαίρεση θετικών και αρνητικών ακεραίων, χωρίς σωστή λύση.

(Στο Pre-test δεν υπήρχε καμία απάντηση σε αυτή την κατηγορία.)

5.4 Μερικώς σωστή απάντηση που περιλαμβάνει αφαίρεση ακεραίων, χωρίς να δοθεί λύση

5.5 Λανθασμένη απάντηση που περιλαμβάνει κλάσματα ή δεκαδικούς.

Ερώτηση 6: Δημιούργησε ένα λεκτικό πρόβλημα ώστε στη λύση του να χρησιμοποιήσεις πρόσθεση ή αφαίρεση ακεραίων και λύσε το.

Οι απαντήσεις για αυτή την ερώτηση κατατάχθηκαν στις παρακάτω κατηγορίες:

6.1 Σωστή απάντηση που περιλαμβάνει πρόσθεση ή αφαίρεση θετικών και αρνητικών ακεραίων, με σωστή λύση.

(Στο Pre-test δεν υπήρχε καμία απάντηση σε αυτή την κατηγορία.)

6.2 Σωστή απάντηση που περιλαμβάνει πρόσθεση ή αφαίρεση μόνο θετικών ακεραίων, με σωστή λύση.

6.3 Μερικώς σωστή απάντηση που περιλαμβάνει πρόσθεση ή αφαίρεση θετικών και αρνητικών ακεραίων, χωρίς σωστή λύση.

(Στο Pre-test δεν υπήρχε καμία απάντηση σε αυτή την κατηγορία.)

6.4 Μερικώς σωστή απάντηση που περιλαμβάνει πρόσθεση ή αφαίρεση ακεραίων χωρίς να δοθεί λύση

6.5 Λανθασμένη απάντηση όπου ο μαθητής έγραψε κάτι άλλο, όπως δεν ξέρω ή δεν έγραψε λεκτικό πρόβλημα

3.6.2 Post-test

3.6.2.1 Φυλλάδιο 1

Ερώτηση 1: : Τι είναι ένας ακέραιος;

Οι απαντήσεις για αυτή την ερώτηση κατατάχθηκαν στις παρακάτω κατηγορίες:

1.1 Σωστή απάντηση με περιγραφή του συνόλου των ακεραίων

1.2 Σωστή απάντηση με τον ορισμό των ακεραίων

1.3 Μερικώς σωστή απάντηση όπου ο μαθητής απάντησε ότι οι ακέραιοι είναι αριθμοί.

1.4 Μερικώς σωστή απάντηση όπου ο μαθητής απάντησε ότι οι ακέραιοι είναι φυσικοί αριθμοί.

1.5 Λανθασμένη απάντηση, όπου ο μαθητής απάντησε ότι οι ακέραιοι περιλαμβάνουν κλάσματα ή δεκαδικούς ή είναι όλοι οι αριθμοί.

1.6 Λανθασμένη απάντηση, όπου ο μαθητής απάντησε κάτι άλλο, όπως δεν ξέρω.

Ερώτηση 2: Δώστε μερικά αντιπροσωπευτικά παραδείγματα ακέραιων αριθμών.

Οι απαντήσεις για αυτή την ερώτηση κατατάχθηκαν στις παρακάτω κατηγορίες:

2.1 Σωστή απάντηση που περιλαμβάνει θετικούς και αρνητικούς ακεραίους.

2.2 Μερικώς σωστή απάντηση που περιλαμβάνει μόνο θετικούς ακεραίους.

2.3 Λανθασμένη απάντηση που περιλαμβάνει κλάσματα ή δεκαδικούς.

2.4 Λανθασμένη απάντηση, όπου ο μαθητής απάντησε κάτι άλλο, όπως δεν ξέρω.

(Στο post-test δεν υπήρχε καμία απάντηση σε αυτή την κατηγορία)

Ερώτηση 3: Πού έχεις χρησιμοποιήσει ακέραιους αριθμούς στην καθημερινή σου ζωή; Δώσε μερικά παραδείγματα.

Οι απαντήσεις για αυτή την ερώτηση κατατάχθηκαν στις παρακάτω κατηγορίες:

3.1 Σωστή απάντηση που περιλαμβάνει θετικούς και αρνητικούς ακεραίους.

3.1.1 Απαντήσεις όπως θερμοκρασία

3.1.2 Απαντήσεις όπως πόντοι σε παιχνίδια

3.1.3 Απαντήσεις όπως οφειλή χρημάτων

3.2 Μερικώς σωστή απάντηση, χωρίς να αναφέρονται ξεκάθαρα θετικοί ή αρνητικοί αριθμοί

3.2.1 Απαντήσεις όπως στο σχολείο, στα μαθηματικά

3.2.2 Απαντήσεις όπως παντού

3.2.3 Απαντήσεις όπως στα ψώνια

3.3 Λανθασμένη απάντηση όπου ο μαθητής απάντησε κάτι άλλο, όπως δεν ξέρω ή δεν τους έχω χρησιμοποιήσει.

Ερώτηση 4: Δημιούργησε μία άσκηση πρόσθεσης ακεραίων και λύσε την.

Οι απαντήσεις για αυτή την ερώτηση κατατάχθηκαν στις παρακάτω κατηγορίες:

4.1 Σωστή απάντηση που περιλαμβάνει πρόσθεση θετικών και αρνητικών ακεραίων, με σωστή λύση.

4.2 Σωστή απάντηση που περιλαμβάνει πρόσθεση μόνο θετικών ακεραίων, με σωστή λύση.

4.3 Μερικώς σωστή απάντηση που περιλαμβάνει πρόσθεση θετικών και αρνητικών ακεραίων, χωρίς σωστή λύση.

4.4 Μερικώς σωστή απάντηση που περιλαμβάνει πρόσθεση ακεραίων χωρίς να δοθεί λύση

4.5 Λανθασμένη απάντηση που περιλαμβάνει κλάσματα ή δεκαδικούς.

Ερώτηση 5: Δημιούργησε μία άσκηση αφαίρεσης ακεραίων και λύσε την.

Οι απαντήσεις για αυτή την ερώτηση κατατάχθηκαν στις παρακάτω κατηγορίες:

5.1 Σωστή απάντηση που περιλαμβάνει αφαίρεση θετικών και αρνητικών ακεραίων, με σωστή λύση.

5.2 Σωστή απάντηση που περιλαμβάνει αφαίρεση μόνο θετικών ακεραίων, με σωστή λύση.

5.3 Μερικώς σωστή απάντηση που περιλαμβάνει αφαίρεση θετικών και αρνητικών ακεραίων, χωρίς σωστή λύση.

5.4 Μερικώς σωστή απάντηση που περιλαμβάνει αφαίρεση ακεραίων, χωρίς να δοθεί λύση

(Στο post-test δεν υπήρχε καμία απάντηση σε αυτή την κατηγορία)

5.5 Λανθασμένη απάντηση που περιλαμβάνει κλάσματα ή δεκαδικούς.

Ερώτηση 6: Δημιούργησε ένα λεκτικό πρόβλημα ώστε στη λύση του να χρησιμοποιήσεις πρόσθεση ή αφαίρεση ακεραίων και λύσε το.

Οι απαντήσεις για αυτή την ερώτηση κατατάχθηκαν στις παρακάτω κατηγορίες:

6.1 Σωστή απάντηση που περιλαμβάνει πρόσθεση ή αφαίρεση θετικών και αρνητικών ακεραίων, με σωστή λύση.

6.2 Σωστή απάντηση που περιλαμβάνει πρόσθεση ή αφαίρεση μόνο θετικών ακεραίων, με σωστή λύση.

6.3 Μερικώς σωστή απάντηση που περιλαμβάνει πρόσθεση ή αφαίρεση θετικών και αρνητικών ακεραίων, χωρίς σωστή λύση.

6.4 Μερικώς σωστή απάντηση που περιλαμβάνει πρόσθεση ή αφαίρεση ακεραίων χωρίς να δοθεί λύση

(Στο post-test δεν υπήρχε καμία απάντηση σε αυτή την κατηγορία)

6.5 Λανθασμένη απάντηση όπου ο μαθητής έγραψε κάτι άλλο, όπως δεν ξέρω ή δεν έγραψε λεκτικό πρόβλημα

3.6.2.2 Φυλλάδιο 2

Ερώτηση 1: Ποιος ακέραιος είναι μεγαλύτερος; Το 1 ή το -3. Εξήγησε την απάντησή σου.

Οι απαντήσεις για αυτή την ερώτηση κατατάχθηκαν στις παρακάτω κατηγορίες:

1.1 Σωστή απάντηση, με εξήγηση

1.1.1 Το 1 είναι θετικός αριθμός, ενώ το -3 είναι αρνητικός

1.1.2 Το 1 είναι πιο δεξιά από το -3

1.1.3 Καλύτερα να έχω 1 από το να χρωστάω 3

1.2 Σωστή απάντηση, χωρίς εξήγηση ή λανθασμένη εξήγηση

1.3 Λάθος απάντηση, λόγω απροσεξίας, με εξήγηση

1.4 Λάθος απάντηση, με εξήγηση ότι το 1 είναι πιο κοντά στο 0

Ερώτηση 2: Πόσο μεγαλύτερο είναι το 6 από το -2; Εξήγησε την απάντησή σου.

Οι απαντήσεις για αυτή την ερώτηση κατατάχθηκαν στις παρακάτω κατηγορίες:

2.1 Σωστή απάντηση, με εξήγηση

2.1.1 Ο μαθητής χρησιμοποίησε αφαίρεση

2.1.2 Ο μαθητής χρησιμοποίησε την αριθμογραμμή

2.2 Σωστή απάντηση, χωρίς εξήγηση ή λανθασμένη εξήγηση

2.3 Λανθασμένη απάντηση

2.3.1 Η απάντηση είναι 9

2.3.2 Η απάντηση είναι 3

2.3.3 Η απάντηση είναι 4

2.3.4 Η απάντηση είναι -4

2.3.5 Καθόλου απάντηση

Ερώτηση 3: Λύσε τις παρακάτω προσθέσεις. Δείξε τη λύση σου.

Οι απαντήσεις για αυτή την ερώτηση κατατάχθηκαν στις παρακάτω κατηγορίες:

3.1 Σωστή απάντηση, με εξήγηση

3.2 Σωστή απάντηση, χωρίς εξήγηση

3.3 Λανθασμένη απάντηση

Ερώτηση 4: Λύσε τις παρακάτω αφαιρέσεις. Δείξε τη λύση σου.

Οι απαντήσεις για αυτή την ερώτηση κατατάχθηκαν στις παρακάτω κατηγορίες:

4.1 Σωστή απάντηση, με εξήγηση

4.2 Σωστή απάντηση, χωρίς εξήγηση

4.3 Λανθασμένη απάντηση

Ερώτηση 5: Δημιούργησε λεκτικά προβλήματα ώστε οι απαντήσεις να είναι:

(α) 7+(-2), (β) -5-4, (γ) -3+(-3), (δ) 8-(-2)

Οι απαντήσεις για αυτή την ερώτηση κατατάχθηκαν στις παρακάτω κατηγορίες:

5.1 Σωστή απάντηση, όπου ο μαθητής έγραψε σωστό λεκτικό πρόβλημα και έδωσε σωστά τη λύση

5.2 Μερικώς σωστή απάντηση

5.2.1 Ο μαθητής δεν έγραψε λεκτικό πρόβλημα αλλά έδωσε σωστά τη λύση

5.2.2 Ο μαθητής έγραψε σωστό λεκτικό πρόβλημα αλλά δεν έδωσε λύση

5.2.3 Ο μαθητής έγραψε λανθασμένο λεκτικό πρόβλημα αλλά έδωσε σωστά τη λύση

5.3 Λανθασμένη απάντηση, όπου ο μαθητής έγραψε λεκτικό πρόβλημα με διαφορετική πράξη από τη ζητούμενη ή λανθασμένη λύση

5.4 Λανθασμένη απάντηση, όπου ο μαθητής δεν έγραψε κάποιο πρόβλημα ή έγραψε «δεν ξέρω»

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

4.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιαστούν τα αποτελέσματα των απαντήσεων των μαθητών κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας των ακεραίων, οι απαντήσεις τους πάνω στα δύο φύλλα εργασιών (Παραρτήματα Α και Β) που τους δόθηκαν καθώς επίσης και γενικές παρατηρήσεις πάνω στη συζήτηση με τους μαθητές μετά την ολοκλήρωση των φύλλων εργασίας. Θα παρουσιαστούν επίσης τα ποσοστά των μαθητών που έδωσαν την κάθε απάντηση καθώς και κάποιες ενδεικτικές απαντήσεις των μαθητών.

4.2 Το pre-test

Οι απαντήσεις στο pre-test συλλέχτηκαν από 35 μαθητές και αναλύθηκαν.

Ερώτηση 1: Τι είναι ακέραιος;

Οι μαθητές κλήθηκαν να απαντήσουν στην ερώτηση τι είναι ένας ακέραιος αριθμός. Σκοπός αυτής της ερώτησης ήταν να εξετάσουμε αν και κατά πόσο οι μαθητές γνωρίζουν την ύπαρξη των αρνητικών αριθμών. Έξι (6) απαντήσεις ανήκουν στην κατηγορία 1.3, δηλαδή ότι οι ακέραιοι είναι απλά αριθμοί. Μία (1) απάντηση ανήκει στην κατηγορία 1.4, δηλαδή ότι οι ακέραιοι είναι φυσικοί αριθμοί. Επτά (7) απαντήσεις ανήκουν στην κατηγορία 1.5, δηλαδή ότι οι ακέραιοι είναι ρητοί αριθμοί. Είκοσι μία (21) απαντήσεις ανήκουν στην κατηγορία 1.6, δηλαδή η απάντηση ήταν κενή ή «δεν ξέρω». Παρατηρούμε εδώ ότι το 100% των μαθητών δεν ανέφερε καθόλου αρνητικούς αριθμούς στην απάντησή τους.

	Out of 35	Percent
1.1	0	0%
1.2	0	0%
1.3	6	17%
1.4	1	3%
1.5	7	20%
1.6	21	60%

Ερώτηση 2: Δώστε μερικά αντιπροσωπευτικά παραδείγματα ακεραίων αριθμών.

Οι μαθητές κλήθηκαν να δώσουν δικά τους παραδείγματα ακεραίων αριθμών. Σκοπός αυτής της ερώτησης ήταν να εξεταστεί αν οι μαθητές θα περιλάβουν τους αρνητικούς ακεραίους στην απάντησή τους. Στο pre-testδεν υπάρχει κανένα (0) παράδειγμα αρνητικών ακεραίων. Επτά (7) απαντήσεις ανήκουν στην κατηγορία 2.2, απαντήσεις δηλαδή που περιλαμβάνουν μόνο θετικούς ακεραίους . Επτά (7) απαντήσεις ανήκουν στην κατηγορία 2.3, απαντήσεις δηλαδή που περιλαμβάνουν ρητούς αριθμούς. Στο pre-test οι απαντήσεις περιλάμβαναν μόνο θετικούς ρητούς. Είκοσι μία (21) απαντήσεις ανήκουν στην κατηγορία 2.4, που η απάντηση είναι κενή ή «δεν ξέρω».

	Out of 35	Percent
2.1	0	0%
2.2	7	20%
2.3	7	20%
2.4	21	60%

Ερώτηση 3: Πού έχεις χρησιμοποιήσει ακέραιους αριθμούς στην καθημερινή σου ζωή; Δώσε μερικά παραδείγματα.

Οι μαθητές κλήθηκαν να δώσουν παραδείγματα χρήσης των ακεραίων στην καθημερινή τους ζωή. Σκοπός αυτής της ερώτησης ήταν να εξεταστεί κατά πόσο οι μαθητές έχουν πρακτική αντίληψη των ακεραίων αριθμών. Δεν υπάρχουν απαντήσεις που να ανήκουν στην κατηγορία 3.1, δηλαδή παραδείγματα που να περιλαμβάνουν θετικούς και αρνητικούς ακεραίους.

Συνολικά έξι (6) απαντήσεις ανήκουν στην κατηγορία 3.2, απαντήσεις δηλαδή που δεν περιλαμβάνουν ξεκάθαρα θετικούς ή αρνητικούς ακεραίους. Από τις απαντήσεις αυτές δύο (2) απαντήσεις ανήκουν στην κατηγορία 3.2.1, απαντήσεις δηλαδή που σχετίζονται με το σχολείο,

μία (1) απάντηση ανήκει στην κατηγορία 3.2.2, όπου η απάντηση είναι «οι ακέραιοι είναι παντού» και τρεις (3) απαντήσεις ανήκουν στην κατηγορία 3.2.3, που η απάντηση περικλείει ψώνια και συναλλαγές.

Οι υπόλοιπες είκοσι εννέα (29) απαντήσεις ανήκουν στην κατηγορία 3.3 που η απάντηση είναι κενή, «δεν τους έχω χρησιμοποιήσει» ή «δεν ξέρω».

	Out of 35	Percent
3.1	0	0%
3.1.1	0	0%
3.1.2	0	0%
3.1.3	0	0%
3.2	6	17%
3.2.1	2	6%
3.2.2	1	3%
3.2.3	3	9%
3.3	29	83%

Ερώτηση 4: Δημιούργησε μία άσκηση πρόσθεσης ακεραίων και λύσε την.

Οι μαθητές κλήθηκαν να δημιουργήσουν μία άσκηση πρόσθεσης ακεραίων. Σκοπός αυτής της ερώτησης ήταν να εξεταστεί αν οι μαθητές θα περιλάβουν και αρνητικούς ακεραίους στην άσκηση που θα δημιουργούσαν και θα έλυναν. Εννέα (9) απαντήσεις ανήκουν στην κατηγορία 4.2, όπου οι μαθητές δημιούργησαν και έλυσαν σωστά μία άσκηση πρόσθεσης θετικών ακεραίων. Είκοσι μία (21) απαντήσεις ανήκουν στην κατηγορία 4.4, απαντήσεις δηλαδή που περιλαμβάνουν σωστή δημιουργία πρόσθεσης θετικών ακεραίων, χωρίς όμως να δοθεί η λύση

ενώ πέντε (5) απαντήσεις ανήκουν στην κατηγορία 4.5, απαντήσεις δηλαδή που περιλαμβάνουν ρητούς αριθμούς.

	Out of 35	Percent
4.1	0	0%
4.2	9	26%
4.3	0	0%
4.4	21	60%
4.5	5	14%

Ερώτηση 5: Δημιούργησε μία άσκηση αφαίρεσης ακεραίων και λύσε την.

Οι μαθητές κλήθηκαν να δημιουργήσουν μία άσκηση αφαίρεσης ακεραίων. Σκοπός αυτής της ερώτησης ήταν και πάλι να εξεταστεί αν οι μαθητές θα περιλάβουν και αρνητικούς ακεραίους στην άσκηση που θα δημιουργούσαν και θα έλυναν. Δέκα (10) απαντήσεις ανήκουν στην κατηγορία 5.2, όπου οι μαθητές δημιούργησαν και έλυσαν σωστά μία άσκηση αφαίρεσης θετικών ακεραίων με αποτέλεσμα θετικό ακέραιο. Είκοσι δύο (22) απαντήσεις ανήκουν στην κατηγορία 5.4, απαντήσεις δηλαδή που περιλαμβάνουν σωστή δημιουργία αφαίρεσης θετικών ακεραίων, χωρίς όμως να δοθεί η λύση ενώ τρεις (3) απαντήσεις ανήκουν στην κατηγορία 5.5, απαντήσεις δηλαδή που περιλαμβάνουν ρητούς αριθμούς.

	Out of 35	Percent
5.1	0	0%
5.2	10	29%

5.3	0	0%
5.4	22	62%
5.5	3	9%

Ερώτηση 6: Δημιούργησε ένα λεκτικό πρόβλημα ώστε στη λύση του να χρησιμοποιήσεις πρόσθεση ή αφαίρεση ακεραίων και λύσε το.

Στην τελευταία ερώτηση του πρώτου φύλλου εργασίας οι μαθητές κλήθηκαν να δημιουργήσουν ένα λεκτικό πρόβλημα είτε πρόσθεσης είτε αφαίρεσης ακεραίων. Σκοπός αυτής της ερώτησης ήταν πρώτον να εξεταστεί ο βαθμός συσχέτισης των ακεραίων με την καθημερινή ζωή και δεύτερον να εξεταστεί κατά πόσο οι μαθητές θα χρησιμοποιήσουν αρνητικούς ακεραίους μέσα στο πρόβλημα. Έντεκα (11) απαντήσεις ανήκουν στην κατηγορία 6.2, όπου οι μαθητές δημιούργησαν και έλυσαν σωστά ένα λεκτικό πρόβλημα πρόσθεσης ή αφαίρεσης μόνο θετικών ακεραίων. Δύο (2) απαντήσεις ανήκουν στην κατηγορία 6.4, απαντήσεις δηλαδή που περιλαμβάνουν σωστή δημιουργία λεκτικού προβλήματος πρόσθεσης ή αφαίρεσης θετικών ακεραίων, χωρίς όμως να δοθεί η λύση ενώ είκοσι δύο (22) απαντήσεις ανήκουν στην κατηγορία 6.5, απαντήσεις δηλαδή που δεν περιλαμβάνουν λεκτικό πρόβλημα.

	Out of 35	Percent
6.1	0	0%
6.2	11	31%
6.3	0	0%
6.4	2	6%

6.5	22	63%

4.3 Η διδασκαλία

Η διδασκαλία των ακεραίων είχε διάρκεια επτά ημερών και χωρίστηκε σε τρία μέρη. Στο πρώτο μέρος διάρκειας δύο ημερών, έγινε η εισαγωγή των ακεραίων με τη χρήση της αριθμογραμμής. Στο δεύτερο μέρος διάρκειας δύο ημερών, έγινε η εισαγωγή στη μέθοδο της εξουδετέρωσης. Στο τρίτο μέρος διάρκειας τριών ημερών, έγινε ο συνδυασμός των δύο μοντέλων και χρησιμοποιήθηκε το συνδυαστικό μοντέλο για τη διδασκαλία της πρόσθεσης και της αφαίρεσης ακεραίων. Με τη βοήθεια του συνδυαστικού μοντέλου οι μαθητές ανακάλυψαν τους κανόνες για τις δύο αυτές πράξεις.

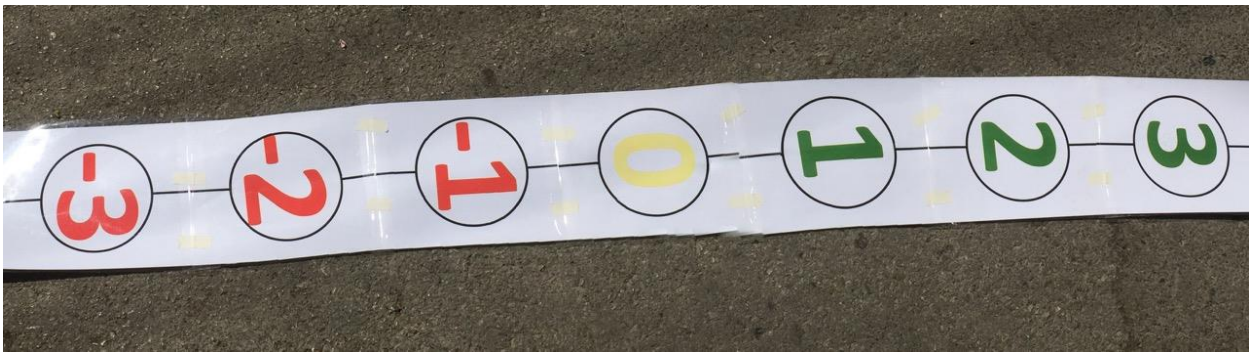
4.3.1 Μαθήματα 1 και 2:

Όπως αναφέρθηκε και στη μεθοδολογία, τα δύο πρώτα μαθήματα βασίστηκαν στο άρθρο των Nurnberger-Haag και Sherard (2007), το οποίο προτείνει οι μαθητές να ζωγραφίσουν με κιμωλία μια αριθμογραμμή στο πάτωμα και να περπατήσουν πάνω σε αυτή.

Η πρώτη ώρα διδασκαλίας (μάθημα 1) πραγματοποιήθηκε στον προαύλιο χώρο του σχολείου. Δόθηκαν στους μαθητές οι πλαστικοποιημένοι θετικοί (πράσινοι) αριθμοί 1-10. Τους ζητήθηκε να τοποθετήσουν τους αριθμούς στο πάτωμα με κάποιον τρόπο που θα διαλέξουν και να εξηγήσουν την επιλογή τους. Υπήρξαν διαφορετικοί συνδυασμοί τοποθέτησης των αριθμών στο πάτωμα είτε τυχαία τοποθέτηση, είτε ο ένας δίπλα στον επόμενο όπως τους διαβάζουμε με τα ίσα ευθύγραμμα τμήματα επάνω και κάτω από το αριθμό, είτε χωρισμένοι σε μονούς και ζυγούς.

Μετά από αυτές τις προσπάθειες μια μαθήτρια παρατήρησε ότι οι αριθμοί θα μπορούσαν να ενωθούν αν τοποθετούνταν με συγκεκριμένο τρόπο, οπότε η ίδια με μια συμμαθήτριά της τοποθέτησαν τους αριθμούς σε αύξουσα σειρά ώστε να ενώνεται το ένα ευθύγραμμο τμήμα του ενός αριθμού με το ευθύγραμμο τμήμα του επόμενου αριθμού σε ευθεία γραμμή. Τότε οι μαθητές ρωτήθηκαν αν έχουν ξαναδεί αριθμούς γραμμένους με αυτόν τον τρόπο και η απάντηση ήταν ότι τους έχουν δει πάνω σε χάρακες και σε αριθμογραμμές. Ρωτήθηκαν επίσης τι νομίζουν ότι σημαίνει ο κύκλος μέσα στον οποίο βρίσκεται ο αριθμός. Οι μαθητές δεν μπόρεσαν να απαντήσουν με ευκολία σε αυτό το ερώτημα, εκτός από μια μαθήτρια και έναν μαθητή οι οποίοι διστακτικά υπέθεσαν ότι συμβολίζουν τα σημεία πάνω στην αριθμογραμμή. Οι υπόλοιποι μαθητές ρωτήθηκαν αν συμφωνούν και είπαν ότι τους φαίνεται λογική απάντηση, οπότε συμφώνησαν όλοι ότι οι αριθμοί βρίσκονταν πάνω σε σημεία στην αριθμογραμμή που είχε σχηματιστεί.

Η ερώτηση που ακολούθησε ήταν επίσης αν οι αποστάσεις είναι ίσες ή όχι ή αν δεν έχει σημασία και όλοι οι μαθητές συμφώνησαν ότι οι αποστάσεις μεταξύ των αριθμών πρέπει να είναι ίσες. Το επιβεβαίωσαν χρησιμοποιώντας τις παλάμες τους για να ελέγξουν τις αποστάσεις μεταξύ των αριθμών. Τους ζητήθηκε τότε να κολλήσουν τους αριθμούς με χαρτοταινία ώστε να εξασφαλισθεί η ίση απόσταση στη σχηματισμένη αριθμογραμμή. (Εικόνα 9) Οι μαθητές κάθονταν κάτω κατά μήκος της αριθμογραμμής. Κάποιοι μαθητές δηλαδή βρίσκονταν πιο κοντά στους θετικούς αριθμούς και κάποιοι βρίσκονταν πιο κοντά στους μελλοντικούς αρνητικούς αριθμούς.



Εικόνα 9. Μέρος της αριθμογραμμής

Μετά ζητήθηκε από τους μαθητές να περπατήσουν πάνω στην αριθμογραμμή ακολουθώντας οδηγίες. Η πρώτη οδηγία που δόθηκε ήταν ότι οι μαθητές έπρεπε να κοιτάνε «μπροστά» δηλαδή να βλέπουν τους αριθμούς από τους μικρότερους προς τους μεγαλύτερους. Μετά δόθηκαν οδηγίες "Πήγαινε στον αριθμό 3 και κάνε δύο βήματα μπροστά. Πού βρίσκεσαι;" ή "πήγαινε στον αριθμό 5 άλλαξε κατεύθυνση και πήγαινε πίσω 4 βήματα. Πού βρίσκεσαι;". Οι μαθητές πήγαιναν στον πρώτο αριθμό που άκουγαν. Χρειάστηκαν αρκετές προσπάθειες μέχρι οι μαθητές πηγαίνοντας πρώτη φορά στον αριθμό να κοιτάνε μόνο «μπροστά», παρόλο που είχε διευκρινιστεί τι σημαίνει «μπροστά». Αυτό που παρατηρήθηκε ήταν ότι οι μαθητές που βρίσκονταν πιο κοντά στους μελλοντικούς αρνητικούς αριθμούς ή κοντά στους πρώτους θετικούς αριθμούς είχαν την τάση να κοιτάνε σωστά «μπροστά», ενώ οι μαθητές που έρχονταν από τη μεριά των μεγαλύτερων θετικών αριθμών είχαν την τάση να κοιτάνε προς τα πίσω, προς τους μικρότερους θετικούς. Μετά από αρκετές δοκιμές κατάφεραν όλοι οι μαθητές να κοιτάνε «μπροστά» αφού πήγαιναν στον πρώτο αριθμό και μετά να ακολουθούν την οδηγία που τους δινόταν. Στη συνέχεια δόθηκε η οδηγία να σηκωθούν τρεις μαθητές, να πάνε στον ίδιο αριθμό και να κοιτάνε «μπροστά». Μετά δόθηκε η οδηγία ο ένας μαθητής να πάει μπροστά 3 βήματα, ο δεύτερος να αλλάξει κατεύθυνση και να πάει προς τα πίσω 3 βήματα και ο τρίτος να αλλάξει δύο φορές κατεύθυνση και να προχωρήσει 3 βήματα «μπροστά». Η τελευταία μετακίνηση επαναλήφθηκε με αρκετές τριάδες μαθητών. Έτσι οι μαθητές άρχισαν να συνειδητοποιούν ότι σε όλες τις περιπτώσεις κατέληγαν και οι τρεις στον ίδιο αριθμό - είτε προχώραγαν μπροστά, είτε άλλαζαν κατεύθυνση και προχώραγαν πίσω, είτε άλλαζαν δύο φορές κατεύθυνση και προχώραγαν μπροστά κάνοντας όλοι τον ίδιο αριθμό βημάτων. Αυτές οι μετακινήσεις δε συνδέθηκαν με αρνητικούς αριθμούς ή με αφαίρεση ακεραίων.

Τη δεύτερη ημέρα (μάθημα 2) οι μαθητές τοποθέτησαν την αριθμογραμμή από το 1-10 στο διάδρομο, έξω από την αίθουσα διδασκαλίας. Κατόπιν ζητήθηκε από ένα μαθητή να ακολουθήσει την οδηγία «πήγαινε στο 3 και κάνε 3 βήματα πίσω. Πού βρίσκεσαι;». Ο μαθητής που περπατούσε στην αριθμογραμμή απάντησε ότι βρίσκεται στο «πουθενά», αφού δεν υπήρχε αριθμός για να πατήσει. Οι συμμαθητές του όμως είπαν ότι βρίσκεται στο μηδέν και όταν

ρωτήθηκαν πού το βλέπουν είπαν ότι έπρεπε να τους είχε δοθεί μαζί με τους άλλους αριθμούς την προηγούμενη ημέρα. Αφού τους δόθηκε ο αριθμός 0 (κίτρινο) και τον κόλλησαν στην αριθμογραμμή, δόθηκε σε μια μαθήτρια η οδηγία «πήγαινε στο 1 και κάνε 2 βήματα πίσω. Πού βρίσκεσαι;». Παρότι δεν υπήρχε κάποιος αριθμός για να πατήσει η μαθήτρια, προς έκπληξή μας, η απάντησή της ήταν ότι βρίσκεται στο μείον 1 (minus 1). Οι μαθητές συμφώνησαν ότι η συμμαθήτριά τους βρισκόταν στο μείον 1.

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω οι μαθητές της έκτης τάξης (6th grade) δεν έχουν διδαχθεί ακεραίους, κάτι το οποίο έδειξε και η ανάλυση του pre-test, καθώς καμία από τις απαντήσεις των μαθητών δεν περιείχε αρνητικούς αριθμούς. Η απάντηση όμως της μαθήτριας και των συμμαθητών της έδειξε ότι οι μαθητές είχαν γνώση της ύπαρξης των αρνητικών αριθμών. Τους ζητήθηκε να ανακαλέσουν στη μνήμη τους πού έχουν συναντήσει «τέτοιους αριθμούς», χωρίς να χρησιμοποιηθεί η ονομασία «αρνητικοί αριθμοί», και πώς γνωρίζουν την ύπαρξή τους. Οι μαθητές έδωσαν τρεις διαφορετικές απαντήσεις: (α) «δε θυμάμαι, απλά τους ξέρω» (β) «από την αριθμογραμμή που είναι πάνω από τον πίνακα στην τάξη μας» και (γ) «στο θερμόμετρο». Οι περισσότεροι μαθητές έδωσαν την πρώτη απάντηση, μερικοί έδωσαν τη δεύτερη, ενώ την τρίτη απάντηση την έδωσαν τρεις μαθητές που κατάγονται από Ευρωπαϊκή χώρα. Οι μαθητές ρωτήθηκαν αν έχουν διδαχτεί σε μικρότερη τάξη αυτούς τους αριθμούς και η απάντηση ήταν αρνητική. Εδώ αξίζει να σημειωθεί ότι οι μαθητές είχαν οπτική επαφή με αρνητικούς αριθμούς από τις πρώτες τάξεις του Δημοτικού, χωρίς να ξέρουν την ονομασία τους. Οι δασκάλες που διδάσκουν μαθηματικά στο Δημοτικό τοποθετούν στον τοίχο πάνω από τον πίνακα της τάξης τους την αριθμογραμμή, συνήθως από το -20 έως το 100.

Τότε, δόθηκαν στους μαθητές και οι πλαστικοποιημένοι αρνητικοί (κόκκινοι) αριθμοί και τους κόλλησαν μαζί με τους υπόλοιπους. Δίπλα από το μηδέν κόλλησαν πρώτα το -1, στη συνέχεια το -2 κ.ο.κ. Η επόμενη ερώτηση ήταν γιατί τους τοποθετούν με αυτόν τον τρόπο και δεν έβαλαν το -10 κοντά στο μηδέν και μετά το -9 κ.ο.κ. Οι απαντήσεις ήταν δύο: (α) γιατί έτσι είναι πάνω στις αριθμογραμμές και (β) για να είναι συμμετρικοί με τους άλλους αριθμούς. Οι μαθητές ρωτήθηκαν αν παρατηρούν κάτι ανάμεσα σε όλους τους αριθμούς που έβλεπαν από το -10 έως το 10. Το συμπέρασμα των μαθητών ήταν ότι οι αριθμοί πάνω από το μηδέν είναι πράσινοι και

οι αριθμοί κάτω από το μηδέν είναι κόκκινοι. Σε αυτό το σημείο ονομάσαμε τους πράσινους αριθμούς θετικούς και τους κόκκινους αριθμούς αρνητικούς και τους αρνητικούς τους διαβάσαμε negative 1, negative 2 και όχι minus 1, minus 2 όπως ανέφεραν προηγουμένως. Τότε ρωτήθηκαν γιατί πιστεύουν ότι το 0 είχε διαφορετικό χρώμα και η απάντηση που επικράτησε ήταν επειδή το μηδέν δεν είναι ούτε θετικός ούτε αρνητικός και συμπληρώσαμε ότι είναι ο αριθμός που χωρίζει τους θετικούς από τους αρνητικούς. Χρησιμοποιώντας τους αριθμούς από το -10 έως το 10 και γενικεύοντας τη σχέση τους δώσαμε τον ορισμό των ακεραίων ότι είναι όλοι οι φυσικοί αριθμοί με τους αντίθετούς τους συν το 0 (σύμφωνα με τον ορισμό των φυσικών αριθμών στις ΗΠΑ).

Έχοντας τους αριθμούς από το -10 έως το 10 στην αριθμογραμμή, ζητήθηκε από τους μαθητές να ξεκινούν πάντα από το μηδέν και να κοιτάνε προς τους θετικούς αριθμούς κατά τις επόμενες μετακινήσεις τους . Ζητήθηκε αρχικά από δύο μαθητές να ξεκινήσουν από το μηδέν και ο ένας μαθητής να πάει στον αριθμό 4 και η άλλη μαθήτρια να πάει στον αριθμό -4. Τότε ρωτήθηκαν πού βρίσκονται και πόσα βήματα έκανε ο καθένας. Η ίδια διαδικασία επαναλήφθηκε ακόμα δύο φορές πριν δώσουμε την έννοια της απόλυτης τιμής, δηλαδή οι αριθμοί στην αριθμογραμμή που απέχουν ίση απόσταση από το μηδέν.

Οι μαθητές συνέχισαν να περπατούν πάνω στην αριθμογραμμή ακολουθώντας τις οδηγίες, αρχικά μόνο στους αρνητικούς και στη συνέχεια συνδυάζοντας θετικούς με αρνητικούς, μπροστά, πίσω και αλλάζοντας κατεύθυνση. Αυτές οι μετακινήσεις δε συνδέθηκαν με πρόσθεση ή αφαίρεση ακεραίων.

4.3.2 Μαθήματα 3 και 4:

Τα μαθήματα του δεύτερου μέρους, όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, βασίστηκαν στο άρθρο της Liebeck (1990), το οποίο προτείνει τη δημιουργία ενός παιχνιδιού "Scores and Forfeits" με σκοπό η έννοια της εξουδετέρωσης να γίνει πιο χειροπιαστή στους μαθητές, δηλαδή ότι «οι θετικοί» εξουδετερώνουν «τους αρνητικούς».

Την πρώτη ημέρα (μάθημα 3) δόθηκαν στους μαθητές από ένας μικρός πίνακας και ένας μαρκαδόρος για να καταγράφουν τα δεδομένα τους καθώς και από 10 πράσινα και 10 κόκκινα δολάρια. Ρωτήθηκαν αν είχαν ξαναδεί τέτοια δολάρια. Η απάντηση ήταν αρνητική και τότε ρωτήθηκαν τι νομίζουν ότι σημαίνει το διαφορετικό χρώμα των δολαρίων. Οι μαθητές δεν μπόρεσαν να δώσουν αμέσως μία απάντηση και τους είπαμε ότι θα τα χρησιμοποιήσουμε για κάποιο παιχνίδι. Τότε μία από τις απαντήσεις που δόθηκαν ήταν ότι τα κόκκινα δολάρια θα συμβόλιζαν κάποια οφειλή, η οποία ήταν και η σωστή απάντηση.

Οι οδηγίες που δόθηκαν στους μαθητές για το πώς παίζεται το παιχνίδι ήταν ότι ανάλογα με την κάρτα που θα τραβούσαμε και την κατάσταση που θα περιέγραφε η κάρτα, θα λάμβανε ο καθένας πράσινα ή κόκκινα δολάρια. Το παιχνίδι θα τελείωνε όταν είχαμε είτε κέρδος (πράσινα δολάρια) είτε οφειλή (κόκκινα δολάρια) 10 δολαρίων. Το πρώτο παιχνίδι ήταν κατασκευασμένο έτσι ώστε χρησιμοποιώντας τις 5 πρώτες κάρτες να καταλήξουμε με 10 δολάρια κέρδος (10 πράσινα δολάρια).

Την πρώτη ημέρα παίξαμε όλοι μαζί το παιχνίδι για να καταλάβουν οι μαθητές πώς παίζεται και στην πράξη. Οι μαθητές είχαν μπροστά τους 10 κόκκινα και 10 πράσινα δολάρια και μπορούσαν να χρησιμοποιήσουν μόνο αυτά τα δολάρια κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού. Δεν μπορούσαν να ζητήσουν παραπάνω ή να δανειστούν από κάποιον. Μια μαθήτρια τράβηξε την πρώτη κάρτα η οποία είχε 5 scores, οπότε ο καθένας έλαβε τα 5 πρώτα πράσινα δολάρια από αυτά που είχε μπροστά του. Στον πίνακα της τάξης φτιάξαμε τρεις στήλες όπου καταγράφαμε την πρόοδό μας στο παιχνίδι. Στην πρώτη στήλη καταγράφαμε με πράσινο μαρκαδόρο τα scores ή με κόκκινο μαρκαδόρο τα forfeits που έλεγε η κάθε κάρτα. Στη δεύτερη στήλη καταγράφαμε τα συνολικά scores και forfeits από την αρχή του παιχνιδιού μέχρι τον γύρο που ήμασταν. Στην τρίτη στήλη γράφαμε είτε πόσα scores (πράσινα δολάρια) είχαμε, είτε πόσα forfeits (κόκκινα δολάρια) είχαμε στο τέλος κάθε γύρου, μετά τη διαδικασία κέρδος-οφειλή. Ζητήθηκε από τους μαθητές να κάνουν το ίδιο με μονόχρωμους μαρκαδόρους στους ατομικούς τους πίνακες. (Εικόνα 10)

Η δεύτερη κάρτα είχε 3 forfeits, οπότε ο καθένας έλαβε από 3 κόκκινα δολάρια. Πριν γράψουμε στον πίνακα της τάξης το αποτέλεσμα του δεύτερου γύρου, ζητήθηκε από τους μαθητές να μας δείξουν τι κατέγραψαν στον δικό τους πίνακα στη δεύτερη και τρίτη στήλη. Οι απαντήσεις στη

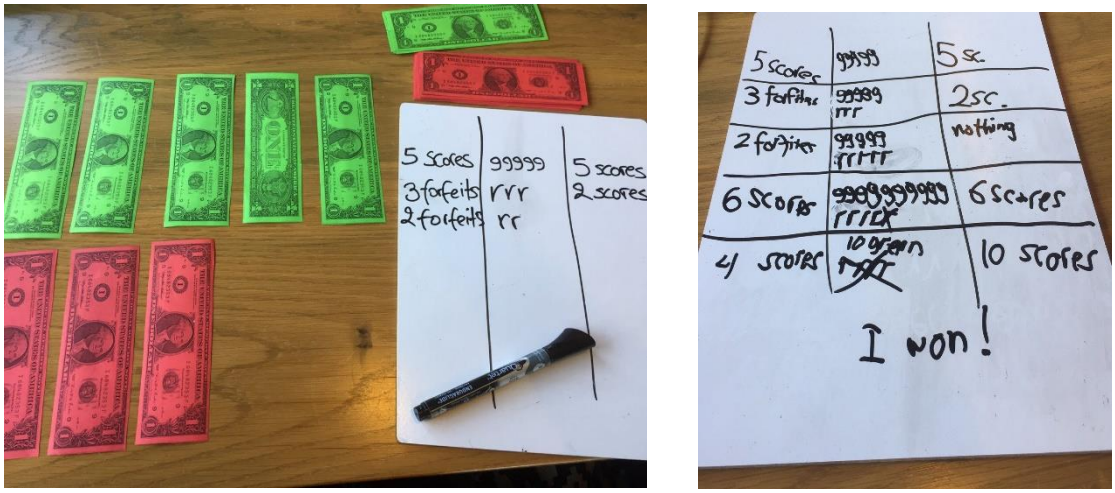
δεύτερη στήλη περιλάμβαναν «5 scores και 3 forfeits», ή «5 πράσινα και 3 κόκκινα», ή «2 πράσινα», ή «5 και 3», ενώ στην τρίτη στήλη όλοι οι μαθητές είχαν γράψει «2 δολάρια» εκτός από μία μαθήτρια που είχε γράψει «8 δολάρια». Ζητήθηκε από τη μαθήτρια που είχε δώσει την τελευταία απάντηση να μας εξηγήσει πώς βρήκε αυτή την απάντηση. Η μαθήτρια εξήγησε ότι πρόσθεσε των αριθμό των δολαρίων που είχε στα χέρια της, χωρίς να τα ξεχωρίσει αν είχαν διαφορετικό χρώμα και αν συμβόλιζαν κάτι διαφορετικό. Όταν ρωτήθηκε γιατί τα χαρτονομίσματα έχουν διαφορετικό χρώμα, απάντησε σωστά για το συμβολισμό του κάθε χρώματος και συνειδητοποίησε ότι δεν έπρεπε να τα προσθέσει, αλλά να τα αφαιρέσει. Έτσι η μαθήτρια διόρθωσε την απάντησή της από μόνη της. Τότε ζητήθηκε από έναν μαθητή που είχε δώσει την απάντηση "2 πράσινα" να μας εξηγήσει την επιλογή του. Ο μαθητής περιέγραψε ότι αν έχει 5 δολάρια και χρωστάει 3 δολάρια, ουσιαστικά μπορεί να «επιστρέψει στην τράπεζά του», 3 κόκκινα και 3 πράσινα και να του μείνουν μόνο τα δύο πράσινα. Οι μαθητές συμφώνησαν ότι ο συμμαθητής τους είχε δίκιο. Τότε γράψαμε στον πίνακα της τάξης στην τρίτη στήλη 2 δολάρια με πράσινο μαρκαδόρο, που σήμαινε 2 δολάρια κέρδος.

Η τρίτη κάρτα είχε 2 forfeits. Ο καθένας έλαβε από ακόμα 2 κόκκινα δολάρια και οι μαθητές κατέληξαν γρήγορα στο συμπέρασμα ότι είναι το ίδιο σαν να μην έχουμε καθόλου χρήματα, αφού είχαμε 5 πράσινα και 5 κόκκινα δολάρια, δηλαδή είχαμε 5 δολάρια και χρωστούσαμε 5 δολάρια. Στο τέλος του τρίτου γύρου στη δεύτερη στήλη κάποιοι μαθητές είχαν γράψει «5 πράσινα και 5 κόκκινα», ενώ κάποιοι άλλοι είχαν γράψει «5 scores και 5 forfeits». Στην τρίτη στήλη είχαν γράψει τον αριθμό «0» ή τη λέξη «τίποτα» (nothing).

Η τέταρτη κάρτα είχε 6 scores, οπότε ο καθένας έπρεπε να λάβει 6 πράσινα δολάρια. Όμως είχαμε ήδη 5 πράσινα δολάρια το οποίο σήμαινε ότι ο καθένας μπορούσε να πάρει μόνο 5 ακόμα, αφού συνολικά είχαν δοθεί στους μαθητές από 10 πράσινα και 10 κόκκινα στην αρχή του παιχνιδιού. Οι αντιδράσεις των μαθητών ήταν δύο: (α) είτε ζήτησαν να τους δοθούν παραπάνω δολάρια, (β) είτε είπαν ότι το παιχνίδι τελείωσε αφού δεν έχουν άλλα χρήματα. Τότε ζητήθηκε από τους μαθητές να βρουν κάποιον τρόπο να συνεχιστεί το παιχνίδι, καθώς δεν μπορούσε να τελειώσει σύμφωνα με τους κανόνες, ούτε μπορούσαν να τους δοθούν επιπλέον χρήματα. Κάποιοι μαθητές βρήκαν πολύ γρήγορα τη λύση να προσθέσουν τα 5 πράσινα δολάρια

που τους είχαν μείνει και να επιστρέψουν/αφαιρέσουν ένα κόκκινο δολάριο. Κάποιοι άργησαν λίγο περισσότερο, αλλά τελικά όλοι βρήκαν τον τρόπο να προσθέσουν αυτά τα 6 δολάρια που κέρδισαν. Ο μαθητής, ο οποίος στον γύρο 2 είχε δώσει την απάντηση ότι του είχαν μείνει 2 πράσινα αφού είχε 5 πράσινα και 3 κόκκινα, έδωσε μια διαφορετική λύση. Επέστρεψε όλα τα πράσινα και όλα τα κόκκινα δολάρια, αφού στο τέλος του τρίτου γύρου είχε 5 πράσινα και 5 κόκκινα, άρα ήταν σαν να μην είχε τίποτα, και πήρε πίσω τα 6 πράσινα δολάρια αυτού του γύρου. Χρησιμοποιώντας και τους δύο τρόπους που παρουσιάστηκαν καταλήξαμε ότι το αποτέλεσμα του τέταρτου γύρου ήταν ότι είχαμε 6 πράσινα δολάρια, δηλαδή 6 δολάρια κέρδος. Είτε είχαμε 10 πράσινα και 4 κόκκινα, είτε είχαμε 6 πράσινα μόνο.

Η πέμπτη κάρτα είχε 4 scores. Όλοι οι μαθητές, εκτός του ενός που προαναφέραμε, είχαν χρησιμοποιήσει και τα δέκα πράσινα δολάρια που τους είχαν δοθεί. Η αντίδρασή τους αυτή τη φορά ήταν άμεση. Αφού δεν είχαν να προσθέσουν 4 πράσινα δολάρια, αφαίρεσαν 4 κόκκινα. Το αποτέλεσμα ήταν να καταλήξουν μόνο με 10 πράσινα δολάρια. Ο μαθητής που είχε 6 πράσινα πρόσθεσε και άλλα 4 πράσινα δολάρια και κατέληξε και εκείνος με 10 πράσινα δολάρια. Έτσι όλοι οι μαθητές είχαν 10 πράσινα δολάρια, δηλαδή κέρδος 10 δολαρίων, και το παιχνίδι τελείωσε.



Εικόνα 10. Καταγραφή αποτελεσμάτων παιχνιδιού Scores and Forfeits

Στο τέλος της πρώτης ώρας δόθηκαν στους μαθητές από δύο κάρτες καθεμία από τις οποίες είχε γραμμένο πάνω έναν αριθμό και τη λέξη score ή forfeit ώστε οι μαθητές να δημιουργήσουν τις δικές τους κάρτες για το επόμενο παιχνίδι.

Τη δεύτερη ημέρα (μάθημα 4) οι μαθητές έπαιξαν μόνοι τους το παιχνίδι "Scores and Forfeits" χρησιμοποιώντας τις κάρτες που είχαν δημιουργήσει οι ίδιοι την προηγούμενη ημέρα. Οι μαθητές χωρίστηκαν σε οκτώ ομάδες των τεσσάρων και μία ομάδα των τριών. Τους ζητήθηκε να καταγράφουν την πρόοδό τους μέσα στο παιχνίδι, έτσι ώστε απλά βλέποντας τις σημειώσεις τους να μπορούμε να καταλάβουμε τι κάρτες τράβηξαν. Μετά την ολοκλήρωση δύο παιχνιδιών, παρατηρήθηκε ότι οι πέντε από τις εννέα ομάδες χρησιμοποίησαν τη μέθοδο της εξουδετέρωσης πράσινων και κόκκινων δολαρίων, δηλαδή την «επιστροφή» του ίδιου αριθμού πράσινων και κόκκινων δολαρίων, μέθοδο που είχε χρησιμοποιήσει και περιγράψει ένας μαθητής την προηγούμενη ημέρα.

Δεν αναφερθήκαμε σε θετικούς ή αρνητικούς αριθμούς, αλλά παρατηρήσαμε πώς το κέρδος εξουδετερώνει την οφειλή και το αντίθετο. Στο τέλος της ώρας οι μαθητές ρωτήθηκαν γιατί πιστεύουν ότι χρησιμοποιήθηκαν τα συγκεκριμένα χρώματα στα δολάρια και αν έχουμε χρησιμοποιήσει ξανά αυτά τα δύο χρώματα μαζί. Οι μαθητές δεν άργησαν να καταλάβουν ότι ήταν τα ίδια χρώματα που χρησιμοποιήθηκαν και στην αριθμογραμμή τις προηγούμενες ημέρες και ότι τα πράσινα χαρτονομίσματα, τα χαρτονομίσματα του κέρδους, συμβόλιζαν θετικούς αριθμούς και τα κόκκινα χαρτονομίσματα, τα χαρτονομίσματα της οφειλής, συμβόλιζαν αρνητικούς αριθμούς.

4.3.3 Μαθήματα 5, 6 και 7:

Τα μαθήματα του τρίτου μέρους βασίστηκαν στο συνδυαστικό μοντέλο το οποίο παρουσιάστηκε μέσα στη διδακτορική διατριβή της Steiner (2009). Η ίδια το ονομάζει «Novel model" και το χρησιμοποιεί για την έρευνά της με pre-service δασκάλους.

Για την πραγματοποίηση του τρίτου μέρους της διδασκαλίας δόθηκε σε κάθε μαθητή ένας μικρός ατομικός πίνακας, ένας μαρκαδόρος για να καταγράφει τις απαντήσεις του στον πίνακα, μία ατομική αριθμογραμμή, 10 πράσινα και 10 κόκκινα δολάρια.

Την πρώτη μέρα (μάθημα 5) οι μαθητές ρωτήθηκαν αν μπορούν να συσχετίσουν πώς θα χρησιμοποιηθούν μαζί η αριθμογραμμή και τα χαρτονομίσματα που τους δόθηκαν. Η απάντηση που πήραμε ήταν ότι τα πράσινα δολάρια θα συμβολίζουν τους θετικούς αριθμούς ενώ τα κόκκινα δολάρια θα συμβολίζουν τους αρνητικούς αριθμούς. Επίσης τα πράσινα δολάρια θα είναι τα χρήματα που έχουμε και μπορούμε να ξοδέψουμε, ενώ τα κόκκινα είναι αυτά που χρωστάμε.

Στην συνέχεια ζητήθηκε από τους μαθητές να τοποθετήσουν 3 πράσινα δολάρια και 4 κόκκινα δολάρια πάνω στην αριθμογραμμή και να βρουν πόσα χρήματα είχαν. Οι απαντήσεις ήταν «ένα κόκκινο», ή «χρωστάω 1», ή «-$1». Στο σημείο αυτό έγινε η σύνδεση στο μυαλό κάποιων μαθητών ότι η κατάσταση του «δεν έχω 1 δολάριο» ή ότι «χρωστάω ένα δολάριο» είναι το ίδιο με το να έχω «-$1». Ζητήθηκε από τους μαθητές να αναπαραστήσουν με διαφορετικό τρόπο την απάντηση -$1. Αυτό που έκαναν όλοι οι μαθητές ήταν να βγάλουν από την αριθμογραμμή 3 πράσινα και 3 κόκκινα δολάρια, αφήνοντας μόνο το 1 κόκκινο πάνω στην αριθμογραμμή. Τους ζητήθηκε να βρουν και άλλους τρόπους με τους οποίους μπορούν να αναπαραστήσουν το -$1. Χρειάστηκαν λίγο χρόνο μέχρι να καταλάβουν ότι μπορούσαν να προσθέτουν τον ίδιο αριθμό πράσινων και κόκκινων δολαρίων και η απάντησή τους να παραμένει η ίδια. Κάναμε αρκετή πρακτική πάνω σε αυτό γιατί ήταν μία μέθοδος που θα χρησιμοποιούσαν στην πρόσθεση και στην αφαίρεση των ακεραίων με αυτό το μοντέλο. Ονομάσαμε αυτή τη μέθοδο «πρόσθεση του μηδενός». Οι μαθητές στο τέλος αυτής της πρακτικής μπορούσαν με ευκολία να αναπαριστούν έναν αριθμό με διαφορετικούς τρόπους προσθέτοντας έναν αριθμό και τον αντίθετό του.

Στη συνέχεια ζητήθηκε από τους μαθητές να αναπαραστήσουν με το συνδυαστικό μοντέλο την πράξη 2 + 3. Οι μαθητές τοποθέτησαν πρώτα δύο πράσινα και μετά 3 ακόμα πράσινα δολάρια. Η απάντηση ήταν 5 πράσινα δολάρια οπότε έγραψαν στον ατομικό πίνακα 2 + 3 = 5. Για τον έλεγχο των απαντήσεών τους σήκωσαν τον ατομικό πίνακα ψηλά. Επαναλήφθηκε αντίστοιχη πρόσθεση με δύο αρνητικούς αριθμούς (-1) + (-2) όπου τοποθέτησαν συνολικά 3 κόκκινα

δολάρια, οπότε η απάντηση που έγραψαν στον ατομικό πίνακα ήταν (-1) + (-2) = -3. Πριν το τέλος της ώρας, δόθηκαν επιπλέον δύο παραδείγματα πρόσθεσης μόνο θετικών αριθμών και δύο παραδείγματα πρόσθεσης μόνο αρνητικών αριθμών.

Τη δεύτερη μέρα (μάθημα 6) πρώτα δόθηκαν δύο προβλήματα πρόσθεσης ομόσημων αριθμών για επανάληψη και στη συνέχεια δόθηκαν στους μαθητές προβλήματα πρόσθεσης ετερόσημων αριθμών, όπως 3+(-7) ή (-2)+5. Οι μαθητές έπρεπε να τοποθετήσουν τα πράσινα και τα κόκκινα δολάρια με τη σειρά που έβλεπαν την πράξη. Στο τέλος κάθε πράξης οι μαθητές έγραφαν την απάντησή τους στον ατομικό πίνακα και μετά τον σήκωναν ψηλά για τον έλεγχο της απάντησης. Επίσης τους ζητήθηκε να δείχνουν πάνω στην αριθμογραμμή την τελική τους απάντηση, αφήνοντας μόνο ένα χρώμα πάνω στην αριθμογραμμή.

Στη συνέχεια, αφού έγιναν αρκετά παραδείγματα πρόσθεσης ακεραίων είτε ομόσημων είτε ετερόσημων, ζητήθηκε από τους μαθητές να βγάλουν ένα γενικό κανόνα για το τι ισχύει όταν προσθέτουμε ακέραιους αριθμούς. Η απάντηση που δόθηκε ήταν ότι, όταν προσθέτουμε ένα θετικό και έναν αρνητικό αριθμό, αφαιρούμε τους αριθμούς. Εδώ έγινε η διευκρίνιση ότι δεν αφαιρούμε τους ίδιους τους αριθμούς αλλά τις απόλυτες τιμές τους. Η συνέχεια της απάντησης ήταν ότι, όταν έχουμε δύο θετικούς αριθμούς προσθέτουμε τις απόλυτες τιμές τους και όταν έχουμε δύο αρνητικούς προσθέτουμε και πάλι τις απόλυτες τιμές τους. Μετά από αυτή την απάντηση ζητήθηκε από τους μαθητές να συνοψίσουν πότε κάνουμε πρόσθεση και πότε αφαίρεση των απόλυτων τιμών ανάλογα με το πρόσημο των αριθμών. Οι μαθητές κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι όταν έχουμε ομόσημους αριθμούς προσθέτουμε τις απόλυτες τιμές τους ενώ όταν έχουμε ετερόσημους αφαιρούμε τις απόλυτες τιμές τους.

Η επόμενη ερώτηση ήταν «Τι πρόσημο έχει το τελικό αποτέλεσμα;». Οι μαθητές εύκολα συμπέραναν ότι έχει θετικό πρόσημο όταν και οι δύο αριθμοί είναι θετικοί και αρνητικό πρόσημο όταν και οι δυο αριθμοί είναι αρνητικοί. Στην περίπτωση όμως που τα πρόσημα είναι διαφορετικά, οι μαθητές δυσκολεύτηκαν να βρουν το πρόσημο της απάντησης. Κάποιοι είπαν ότι η απάντηση θα πάρει το πρόσημο του πρώτου αριθμού και κάποιοι άλλοι ότι δεν παίζει ρόλο ποιος αριθμός είναι πρώτος ή δεύτερος. Τότε παροτρύνθηκαν να χρησιμοποιήσουν και πάλι το συνδυαστικό μοντέλο για τις πράξεις (-1) + 4 και 2 + (-6). Σύντομα η απάντηση που ακούστηκε

από αρκετούς μαθητές ήταν «αυτός που έχει τα περισσότερα». Τους ζητήθηκε να διατυπωθεί πιο σωστά η απάντηση χρησιμοποιώντας και τις λέξεις «απόλυτη τιμή». Τελικά κατέληξαν στο σωστό συμπέρασμα ότι το πρόσημο του αποτελέσματος εξαρτάται από το πρόσημο του αριθμού με τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή. Το επιβεβαιώσαμε και με τέσσερα παραδείγματα χρησιμοποιώντας πάντα το συνδυαστικό μοντέλο.

Για να εμβαθύνουμε όμως περισσότερο στην κατανόηση της πρόσθεσης των ακεραίων, δόθηκε στους μαθητές να λύσουν το 20 + (-50), κάτι το οποίο δεν μπορούσαν να αναπαραστήσουν με το μοντέλο καθώς η αριθμογραμμή και τα χρήματα που είχαν δεν επαρκούσαν για αυτούς τους αριθμούς. Όμως δεν τους δυσκόλεψε ιδιαίτερα το συγκεκριμένο πρόβλημα αυτών των «στρογγυλών» αριθμών. Όταν όμως τους δόθηκαν πιο «δύσκολοι» αριθμοί όπως -14 + (42) χρειάστηκαν περισσότερη σκέψη και χρόνο ώστε αρκετοί μαθητές να απαντήσουν σωστά. Υπήρξαν μαθητές που δεν κατάφεραν να λύσουν τέτοιου είδους «πιο αφηρημένα» προβλήματα.

Η τελευταία φάση των μαθημάτων ήταν η διδασκαλία της αφαίρεσης των ακέραιων αριθμών με τη χρήση του συνδυαστικού μοντέλου. Το ρήμα που χρησιμοποιήσαμε για την αφαίρεση ήταν το ρήμα «βγάζω». Το ρήμα αυτό το χρησιμοποιούν οι μαθητές από τις πρώτες τάξεις του δημοτικού για την αφαίρεση φυσικών αριθμών, οπότε μπορούσαν να το συσχετίσουν άμεσα με την αφαίρεση που ήδη γνωρίζουν.

Στο τέλος της δεύτερης ώρας δόθηκαν στους μαθητές δύο προβλήματα αφαίρεσης ομόσημων ακεραίων, με τον αφαιρετέο να είναι μικρότερος από το μειωτέο, ώστε να μπορεί να αναπαρασταθεί η αφαίρεση των δολαρίων με τη χρήση του συνδυαστικού μοντέλου, απλώς αφαιρώντας δολάρια που υπάρχουν ήδη πάνω στην αριθμογραμμή.

Το πρώτο πρόβλημα που δόθηκε στους μαθητές ήταν 7 – 2 (7 βγάζω 2). Για την αναπαράσταση αυτού του προβλήματος οι μαθητές αρχικά τοποθέτησαν 7 πράσινα χαρτονομίσματα και μετά έβγαλαν τα 2, οπότε έμειναν 5 πράσινα δολάρια, άρα η απάντηση ήταν 5. Μετά τους ζητήθηκε να χρησιμοποιήσουν την προ υπάρχουσα γνώση που είχαν για την πρόσθεση ακεραίων και να σχημάτισαν το άθροισμα 7 + (-2), δηλαδή 7 πράσινα και 2 κόκκινα δολάρια, όπου παρατήρησαν ότι η τελική απάντηση ήταν η ίδια.

Το επόμενο πρόβλημα ήταν (-7) – (-2), στο οποίο οι μαθητές τοποθέτησαν 7 κόκκινα δολάρια πάνω στην αριθμογραμμή και αφαίρεσαν τα 2 από αυτά. Η απάντησή τους ήταν -5 αφού έμειναν με 5 κόκκινα δολάρια. Τους ζητήθηκε μετά να αναπαραστήσουν την πράξη -7 + 2. Παρατήρησαν ότι βρήκαν την ίδια απάντηση χωρίς όμως να κάνουν κάποια σύνδεση με το πρόβλημα που μόλις είχαν λύσει.

Την τρίτη ημέρα (μάθημα 7) το πρώτο πρόβλημα που δόθηκε στους μαθητές ήταν 3-4, όπου οι μαθητές τοποθέτησαν 3 πράσινα δολάρια και έπρεπε να αφαιρέσουν 4, κάτι που ήταν αδύνατο έχοντας μόνο 3 δολάρια πάνω στην αριθμογραμμή. Οι περισσότεροι μαθητές θυμήθηκαν ότι μπορούν να χρησιμοποιήσουν τη μέθοδο της «πρόσθεσης του μηδενός», κάτι το οποίο και έκαναν. Πρόσθεσαν δηλαδή πάνω στην αριθμογραμμή ένα ακόμα πράσινο δολάριο και ένα ακόμα κόκκινο δολάριο και πλέον ήταν σε θέση να αφαιρέσουν τα 4 πράσινα δολάρια που υπήρχαν πάνω στην αριθμογραμμή. Στους μαθητές που δυσκολεύτηκαν και δε θυμόντουσαν τι να κάνουν, τους υπενθυμίσαμε τη διαδικασία και μετά ολοκλήρωσαν την αφαίρεση με επιτυχία.

Δόθηκε ακόμα ένα παρόμοιο πρόβλημα αφαίρεσης ομόσημων ακεραίων για εξάσκηση, -2-(-5), και στη συνέχεια δόθηκε ένα πρόβλημα αφαίρεσης ετερόσημων ακεραίων. Το πρόβλημα που δόθηκε ήταν 7 – (-2). Κάποιοι μαθητές τοποθέτησαν 7 πράσινα και 2 κόκκινα δολάρια πάνω στην αριθμογραμμή, περίπτωση (α). Κάποιοι άλλοι τοποθέτησαν τα 7 πράσινα και μετά έβγαλαν τα 2 πράσινα, περίπτωση (β). Ενώ κάποιοι άλλοι έβαλαν τα 7 πράσινα δολάρια πάνω στην αριθμογραμμή και χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της «πρόσθεσης του μηδενός» τοποθέτησαν επιπλέον 2 πράσινα και 2 κόκκινα δολάρια, περίπτωση (γ). Μετά από σύντομη συζήτηση μέσα στην τάξη για το τι συμβόλιζε η κάθε κίνηση που έκαναν (βάζω-βγάζω κόκκινα ή πράσινα δολάρια) στις περιπτώσεις (α) και (β), οι μαθητές συνειδητοποίησαν γιατί αυτές οι δύο περιπτώσεις είχαν λάθος στρατηγική. Έτσι καταλήξαμε ότι η τρίτη περίπτωση ήταν ο σωστός τρόπος λύσης. Ζητήθηκε από όλους τους μαθητές να αναπαραστήσουν αυτή την πράξη με το συνδυαστικό μοντέλο και να καταγράψουν την απάντησή τους στον πίνακά τους. Η απάντηση που έγραψαν ήταν «9». Ζητήθηκε από τους μαθητές να περιγράψουν ξανά πώς αφαιρώντας 2 κόκκινα από 7 πράσινα δολάρια καταλήξαμε να έχουμε περισσότερα πράσινα δολάρια. Η

απάντηση μιας μαθήτριας ήταν «αφού προσθέσαμε 2 πράσινα». Μετά από αυτή την απάντηση καταλήξαμε ότι μπορούμε να γράψουμε με συμβολικό τρόπο αυτό που περιγράψαμε προφορικά 7 – (-2) = 7 +2 = 9.

Χρησιμοποιήθηκαν πολλά ακόμα παραδείγματα μέχρι οι μαθητές να δουν τη σύνδεση ότι, κάθε φορά που αφαιρούσαν έναν αριθμό, τελικά πρόσθεταν τον αντίθετό του. Στο τέλος όμως μπορούσαν όλοι να αναπαραστήσουν και να λύσουν οποιοδήποτε πρόβλημα μέσα στα όρια της αριθμογραμμής από -10 έως 10.

Στο τέλος της τελευταίας ώρας, δόθηκαν στους μαθητές προβλήματα αφαίρεσης με μεγαλύτερους αριθμούς, έξω από τα όρια της αριθμογραμμής. Οι μαθητές δυσκολεύτηκαν πολύ και λίγοι ήταν εκείνοι που μπόρεσαν να λύσουν σωστά αυτού του είδους τα προβλήματα, γενικεύοντας τον κανόνα για όλους τους ακεραίους αριθμούς.

Μετά την ολοκλήρωση των επτά διδακτικών ωρών, οι μαθητές υπό την επίβλεψη της δασκάλας τους, έφτιαξαν ένα poster με όλους τους κανόνες πρόσθεσης και αφαίρεσης ακεραίων αριθμών που έμαθαν, συμπεριλαμβάνοντας και ένα παράδειγμα σε κάθε κανόνα. Το poster αυτό το κρέμασαν μέσα στην αίθουσα διδασκαλίας.

4.4 Το post-test

Το post-test αποτελείται από δύο φύλλα εργασίας τα οποία συλλέχτηκαν από 35 μαθητές και αναλύθηκαν.

4.4.1 Φύλλο εργασίας 1

Το πρώτο φύλλο εργασίας είναι το ίδιο αυτό που δόθηκε στους μαθητές και σαν pre-test.

Ερώτηση 1: Τι είναι ακέραιος;

Μία (1) απάντηση ανήκει στην κατηγορία 1.1, δηλαδή απάντηση με περιγραφή του συνόλου των ακεραίων και δεκατρείς (13) απαντήσεις ανήκουν στην κατηγορία 1.2, δηλαδή απαντήσεις που δίνουν τον ορισμό των ακεραίων. Συνολικά δεκατέσσερις (14) απαντήσεις, δηλαδή σε ποσοστό 40% σε σύγκριση με τις μηδέν (0) απαντήσεις που δόθηκαν στο pre-test, περιλαμβάνουν ξεκάθαρα και αρνητικούς ακεραίους. Έντεκα (11) απαντήσεις ανήκουν στην κατηγορία 1.3, δηλαδή ότι οι ακέραιοι είναι απλώς αριθμοί και τρεις (3) απαντήσεις ανήκουν στην κατηγορία 1.4, δηλαδή ότι οι ακέραιοι είναι φυσικοί αριθμοί. Έξι (6) απαντήσεις ανήκουν στην κατηγορία 1.5, δηλαδή ότι οι ακέραιοι περιλαμβάνουν κλάσματα και μία (1) απάντηση ανήκει στην κατηγορία 1.6, όπου ο μαθητής έγραψε «δεν ξέρω». Οι είκοσι οχτώ (28) λανθασμένες απαντήσεις του pre-test μειώθηκαν στις επτά (7) στο post-test.

	Out of 35	Percent
1.1	1	3%
1.2	13	37%
1.3	11	31%
1.4	3	9%
1.5	6	17%
1.6	1	3%

Ερώτηση 2: Δώστε μερικά αντιπροσωπευτικά παραδείγματα ακεραίων αριθμών.

Είκοσι τέσσερις (24) απαντήσεις ανήκουν στην κατηγορία 2.1, δηλαδή απαντήσεις που περιλαμβάνουν θετικούς και αρνητικούς ακεραίους, δηλαδή σε ποσοστό 69% σε σύγκριση με τις μηδέν (0) απαντήσεις που δόθηκαν στο pre-test σε αυτή την κατηγορία. Τέσσερις (4) απαντήσεις ανήκουν στην κατηγορία 2.2, δηλαδή απαντήσεις που περιλαμβάνουν μόνο θετικούς ακεραίους και επτά (7) απαντήσεις ανήκουν στην κατηγορία 2.3, δηλαδή απαντήσεις που περιλαμβάνουν κλάσματα. Δεν υπήρξαν σωστές απαντήσεις στην κατηγορία 2.4, δηλαδή απάντηση «δεν ξέρω». Συγκριτικά με τις είκοσι οχτώ (28) λανθασμένες απαντήσεις σε ποσοστό

80% στο pre-test, οι λανθασμένες απαντήσεις στο post-test μειώθηκαν στις επτά (7) σε ποσοστό 20%.

	Out of 35	Percent
2.1	24	69%
2.2	4	11%
2.3	7	20%
2.4	0	0%

Ερώτηση 3: Πού έχεις χρησιμοποιήσει ακέραιους αριθμούς στην καθημερινή σου ζωή; Δώσε μερικά παραδείγματα.

Συνολικά δεκατέσσερις (14) απαντήσεις, σε ποσοστό 40%, ανήκουν στην κατηγορία 3.1, απαντήσεις δηλαδή που περιλαμβάνουν και αρνητικούς ακεραίους, σε σύγκριση με τις μηδέν (0) απαντήσεις σε αυτή την κατηγορία στο pre-test. Από αυτές τις δεκατέσσερις (14) απαντήσεις, μία (1) απάντηση ανήκει στην κατηγορία 3.1.1, όπου η μαθήτρια έδωσε σαν παράδειγμα τη θερμοκρασία, τέσσερις (4) σωστές απαντήσεις ανήκουν στην κατηγορία 3.1.2, όπου οι μαθητές έδωσαν σαν παράδειγμα αρνητικούς πόντους σε παιχνίδια και εννέα (9) σωστές απαντήσεις ανήκουν στην κατηγορία 3.1.3, όπου οι μαθητές έδωσαν σαν παράδειγμα οφειλή χρημάτων.

Συνολικά είκοσι (20) σωστές απαντήσεις, σε ποσοστό 57%, ανήκουν στην κατηγορία 3.2, δηλαδή απαντήσεις που δεν περιλαμβάνουν ξεκάθαρα αρνητικούς ακεραίους. Από τις απαντήσεις αυτές δέκα (10) σωστές απαντήσεις ανήκουν στην κατηγορία 3.2.1, απαντήσεις δηλαδή που σχετίζονται με το σχολείο, τέσσερις (4) απαντήσεις ανήκουν στην κατηγορία 3.2.2, όπου η απάντηση είναι «οι ακέραιοι είναι παντού» και εννέα (9) απαντήσεις ανήκουν στην κατηγορία 3.2.3, που η απάντηση περικλείει ψώνια και συναλλαγές.

Μία (1) απάντηση ανήκει στην κατηγορία 3.3, δηλαδή σε ποσοστό 3%, όπου ο μαθητής έγραψε «δεν ξέρω» συγκριτικά με τις είκοσι εννέα (29) απαντήσεις, δηλαδή το 83% στην κατηγορία αυτή στο pre-test.

	Out of 35	Percent
3.1	14	40%
3.1.1	1	3%
3.1.2	4	11%
3.1.3	9	26%
3.2	20	57%
3.2.1	10	29%
3.2.2	4	11%
3.2.3	6	17%
3.3	1	3%

Ερώτηση 4: Δημιούργησε μία άσκηση πρόσθεσης ακεραίων και λύσε την.

Δεκατέσσερις (14) σωστές απαντήσεις, σε ποσοστό 40%, ανήκουν στην κατηγορία 4.1, απαντήσεις δηλαδή που περιλαμβάνουν πρόσθεση θετικών και αρνητικών ακεραίων με σωστή λύση, σε σύγκριση με τις μηδέν (0) σωστές απαντήσεις σε αυτή την κατηγορία στο pre-test. Δεκαπέντε (15) σωστές απαντήσεις, σε ποσοστό 43%, ανήκουν στην κατηγορία 4.2, απαντήσεις δηλαδή που περιλαμβάνουν πρόσθεση μόνο θετικών ακεραίων με σωστή λύση, σε σύγκριση με το 26% στην ίδια κατηγορία στο pre-test. Συνολικά εμφανίζονται είκοσι εννέα (29) σωστές απαντήσεις πρόσθεσης ακεραίων, σε ποσοστό 83% σε σύγκριση με το 26% στο pre-test.

Μία (1) απάντηση ανήκει στην κατηγορία 4.3, όπου ο μαθητής έδωσε λανθασμένη λύση στο πρόβλημα ακεραίων που έφτιαξε, δύο (2) απαντήσεις ανήκουν στην κατηγορία 4.4, όπου οι

μαθητές δεν έγραψαν τη λύση στο πρόβλημα που έφτιαξαν και τρεις (3) απαντήσεις ανήκουν στην κατηγορία 4.5, όπου οι μαθητές δημιούργησαν πρόβλημα που συμπεριλάμβανε κλάσματα.

	Out of 35	Percent
4.1	14	40%
4.2	15	43%
4.3	1	3%
4.4	2	6%
4.5	3	9%

Ερώτηση 5: Δημιούργησε μία άσκηση αφαίρεση ακεραίων και λύσε την.

Δεκατρείς (13) σωστές απαντήσεις, σε ποσοστό 37%, ανήκουν στην κατηγορία 5.1, απαντήσεις δηλαδή που περιλαμβάνουν αφαίρεση θετικών και αρνητικών ακεραίων με σωστή λύση, σε σύγκριση με τις μηδέν (0) σωστές απαντήσεις σε αυτή την κατηγορία στο pre-test. Δεκαεπτά (17) σωστές απαντήσεις, σε ποσοστό 48%, ανήκουν στην κατηγορία 5.2, απαντήσεις δηλαδή που περιλαμβάνουν αφαίρεση μόνο θετικών ακεραίων με σωστή λύση, σε σύγκριση με το 29% στην ίδια κατηγορία στο pre-test. Συνολικά εμφανίζονται τριάντα (30) σωστές απαντήσεις αφαίρεσης ακεραίων, σε ποσοστό 85% σε σύγκριση με το 29% στο pre-test.

Δύο (2) απαντήσεις ανήκουν στην κατηγορία 5.3, όπου οι μαθητές δεν έδωσαν λύση στο πρόβλημα ακεραίων που έφτιαξαν και τρεις (3) απαντήσεις ανήκουν στην κατηγορία 4.5, όπου οι μαθητές δημιούργησαν πρόβλημα που συμπεριλάμβανε κλάσματα.

	Out of 35	Percent
5.1	13	37%
5.2	17	48%
5.3	2	6%
5.4	0	0%
5.5	3	9%

Ερώτηση 6: Δημιούργησε ένα λεκτικό πρόβλημα ώστε στη λύση του να χρησιμοποιήσεις πρόσθεση ή αφαίρεση ακεραίων και λύσε το.

Μία (1) σωστή απάντηση ανήκει στην κατηγορία 6.1, όπου ο μαθητής έγραψε λεκτικό πρόβλημα με σωστή λύση αφαίρεσης ακεραίων. Ο μαθητής έγραψε ένα πρόβλημα για ένα υποβρύχιο το οποίο βρίσκεται κάτω από τη στάθμη της θάλασσας και πηγαίνει πιο βαθιά. Είκοσι έξι (26) σωστές απαντήσεις, σε ποσοστό 74% , ανήκουν στην κατηγορία 6.2, όπου οι μαθητές δημιούργησαν και έλυσαν σωστά ένα λεκτικό πρόβλημα πρόσθεσης ή αφαίρεσης μόνο θετικών ακεραίων σε σύγκριση με το ποσοστό επιτυχίας 31% στο pre-test . Μία (1) σωστή απάντηση ανήκει στην κατηγορία 6.3, δηλαδή απάντηση με σωστή δημιουργία λεκτικού προβλήματος χωρίς να δοθεί λύση. Τέλος, επτά (7) απαντήσεις, σε ποσοστό 20%, ανήκουν στην κατηγορία 6.5, απαντήσεις δηλαδή που δεν περιλαμβάνουν λεκτικό πρόβλημα, σε σύγκριση με το 63% στο pre-test.

	Out of 35	Percent
6.1	1	3%
6.2	26	74%
6.3	1	3%
6.4	0	0%
6.5	7	20%

4.4.2 Φύλλο εργασίας 2

Ερώτηση 1: Ποιος ακέραιος είναι μεγαλύτερος; Το 1 ή το -3. Εξήγησε την απάντησή σου.

Οι μαθητές κλήθηκαν να συγκρίνουν ένα θετικό με έναν αρνητικό αριθμό και να εξηγήσουν την επιλογή τους. Σκοπός της ερώτησης αυτής ήταν να εξετάσουμε κατά πόσο οι μαθητές καταλαβαίνουν πραγματικά τη διάταξη των ακεραίων.

Συνολικά τριάντα μία (31) απαντήσεις ήταν σωστές, από τις οποίες είκοσι μία (21) ανήκουν στην κατηγορία 1.1, δηλαδή σωστές απαντήσεις με εξήγηση και δέκα (10) στην κατηγορία 1.2, δηλαδή σωστές απαντήσεις χωρίς εξήγηση ή λανθασμένη εξήγηση. Μία (1) απάντηση ανήκει στην κατηγορία 1.3, δηλαδή λανθασμένη απάντηση, πιθανόν λόγω απροσεξίας, με εξήγηση και τρεις (3) απαντήσεις ανήκουν στην κατηγορία 1.4, δηλαδή λανθασμένες απαντήσεις με την εξήγηση ότι το 1 είναι πιο κοντά στο 0.

	Out of 35	Percent
1.1	21	60%
1.1.1	17	49%
1.1.2	1	3%
1.1.3	3	9%
1.2	10	29%
1.3	1	3%
1.4	3	9%

Ερώτηση 2: Πόσο μεγαλύτερο είναι το 6 από το -2; Εξήγησε την απάντησή σου.

Οι μαθητές κλήθηκαν να συγκρίνουν κατά πόσο ένας θετικός αριθμός είναι μεγαλύτερος από έναν αρνητικό. Σκοπός της ερώτησης ήταν να παρατηρήσουμε τον τρόπο λύσης μιας τέτοιας ερώτησης. Αυτό που παρατηρήθηκε είναι ότι πολλοί μαθητές που απάντησαν σωστά με εξήγηση, χρησιμοποίησαν το μοντέλο της αριθμογραμμής, σαν μέτρημα βημάτων, για να εξηγήσουν τη λύση τους.

Συνολικά είκοσι δύο (22) απαντήσεις ήταν σωστές, από τις οποίες δεκαεννέα (19) ανήκουν στην κατηγορία 2.1 δηλαδή σωστές απαντήσεις με εξήγηση και τρεις (3) στην κατηγορία 2.2, δηλαδή σωστές απαντήσεις χωρίς εξήγηση ή λανθασμένη εξήγηση. Στις δεκατέσσερις (14) από τις

δεκαεννέα (19) σωστές απαντήσεις με εξήγηση, δηλαδή στο 74% των απαντήσεων αυτών, χρησιμοποιήθηκε το μοντέλο της αριθμογραμμής. Δεκατρείς (13) απαντήσεις ανήκουν στην κατηγορία 2.3, δηλαδή λανθασμένες απαντήσεις, ή καθόλου απάντηση. Από τις δεκατρείς (13) λανθασμένες απαντήσεις, εννέα (9) από αυτές, δηλαδή σε ποσοστό 64%, έδιναν σαν απάντηση τον αριθμό 4. Οι μαθητές δηλαδή έκαναν την αφαίρεση 6-2=4.

	Out of 35	Percent
2.1	19	54%
2.1.1	5	14%
2.1.2	14	40%
2.2	3	9%
2.3	13	37%
2.3.1	1	3%
2.3.2	1	3%
2.3.3	9	26%
2.3.4	1	3%
2.3.5	1	3%

Ερώτηση 3: Λύσε τις παρακάτω προσθέσεις. Δείξε τη λύση σου.

Οι μαθητές κλήθηκαν να λύσουν εννέα προβλήματα πρόσθεσης ομόσημων και ετερόσημων ακεραίων. Η πρόσθεση μπορεί να πραγματοποιηθεί χρησιμοποιώντας έναν αλγόριθμο (Wilkins, 1996) ή ενώνοντας σύνολα, ο αριθμός των οποίων καθορίζει τον αριθμό των προσθετέων (Musser, Burger & Peterson, 2008).

Πέντε (5) από τα εννέα (9) προβλήματα μπορούσαν να αναπαρασταθούν ακριβώς με τον τρόπο που είχαν διδαχτεί με το συνδυαστικό μοντέλο από το -10 έως το 10, όπως -4+1. Ένα (1)

πρόβλημα περιείχε παραπάνω από μία προσθέσεις αλλά μπορούσε να αναπαρασταθεί με το συνδυαστικό μοντέλο από -10 έως 10, ενώ τα υπόλοιπα τρία (3) προβλήματα έδιναν αριθμούς με απόλυτη τιμή μεγαλύτερη του 10. Σκοπός αυτών των προβλημάτων ήταν να διερευνηθεί η ικανότητα των μαθητών να προσθέτουν σωστά ακεραίους όταν αυτοί δίνονται με τη συμβολική τους μορφή. Τα προβλήματα με τις περισσότερες πράξεις ή με διψήφιους αριθμούς δόθηκαν ώστε να εξεταστεί αν οι μαθητές θα μπορούσαν να εφαρμόσουν τις ίδιες μεθόδους και σε αυτές τις περιπτώσεις ή αν θα δυσκολευόντουσαν.

Οι περισσότεροι μαθητές κατάφεραν να λύσουν σωστά τα προβλήματα της πρόσθεσης που είχαν μόνο μία πρόσθεση, ακόμα και αυτά που περιλάμβαναν διψήφιους αριθμούς ενώ περίπου το ένα τρίτο των μαθητών δεν κατάφεραν να λύσουν σωστά τα προβλήματα που περιείχαν παραπάνω από μια πρόσθεση, είτε με μονοψήφιους είτε με διψήφιους αριθμούς. Συνολικά οι μαθητές κατάφεραν να λύσουν σωστά προβλήματα πρόσθεσης ακεραίων με ποσοστό επιτυχίας 78%, δηλαδή διακόσιες σαράντα πέντε (245) από τις συνολικά τριακόσιες δεκαπέντε (315) απαντήσεις.

Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται πόσες σωστές απαντήσεις έδωσαν οι μαθητές σε κάθε πρόβλημα πρόσθεσης. Σωστές απαντήσεις θεωρήθηκαν οι απαντήσεις που ανήκουν στην κατηγορία 3.1, δηλαδή σωστές απαντήσεις με εξήγηση καθώς και στην κατηγορία 3.2, δηλαδή σωστές απαντήσεις χωρίς εξήγηση. Εδώ αξίζει να σημειωθεί ότι οι περισσότεροι μαθητές χρησιμοποιούσαν το μοντέλο της αριθμογραμμής σαν εξήγηση. Λανθασμένες θεωρήθηκαν οι απαντήσεις που ανήκουν στην κατηγορία 3.3, δηλαδή λανθασμένη απάντηση ή χωρίς απάντηση.

	Correct Answers out of 35 Answers	Percent
3a	28	80%
3b	30	86%

3c	33	94%
3d	28	80%
3e	26	74%
3f	20	57%
3g	22	63%
3h	24	69%
3i	34	97%

Ερώτηση 4: Λύσε τις παρακάτω αφαιρέσεις. Δείξε τη λύση σου.

Οι μαθητές κλήθηκαν να λύσουν εννέα (9) προβλήματα, διαφορετικής δυσκολίας, αφαίρεσης ομόσημων και ετερόσημων ακεραίων. Η αφαίρεση μπορεί να οριστεί σαν «βγάζω» αντικείμενα από κάποια δεδομένα αντικείμενα (Musser, Burger & Peterson, 2008) ή σαν σύγκριση συνόλων, δηλαδή πόσα περισσότερα στοιχεία έχει το ένα σύνολο από το άλλο. Ο πρώτος ορισμός βασίζεται στην εξουδετέρωση και στην πληθικότητα των αριθμών, ενώ ο δεύτερος ορισμός βασίζεται στην αριθμογραμμή και τη διατακτικότητα των αριθμών.

Τέσσερα (4) από τα εννέα (9) προβλήματα μπορούσαν να αναπαρασταθούν ακριβώς με τον τρόπο που είχαν διδαχτεί με το συνδυαστικό μοντέλο από το -10 έως το 10, όπως 4-(-4). Ένα (1) πρόβλημα περιείχε παραπάνω από μία αφαιρέσεις, ενώ τα υπόλοιπα πέντε (5) προβλήματα έδιναν αριθμούς με απόλυτη τιμή μεγαλύτερη του 10. Σκοπός αυτών των προβλημάτων ήταν να διερευνηθεί η ικανότητα των μαθητών να αφαιρούν σωστά ακεραίους όταν αυτοί δίνονται με τη συμβολική τους μορφή.

Οι περισσότεροι μαθητές κατάφεραν να λύσουν σωστά τα περισσότερα προβλήματα της αφαίρεσης με μικρότερους αριθμούς, ενώ περίπου το ένα τρίτο δυσκολεύτηκαν στα προβλήματα αφαίρεσης με διψήφιους αριθμούς. Επίσης σχεδόν οι μισοί μαθητές δεν έλυσαν

σωστά το πρόβλημα που περιείχε παραπάνω από μία αφαιρέσεις. Συνολικά οι μαθητές κατάφεραν να λύσουν σωστά προβλήματα αφαίρεσης ακεραίων με ποσοστό επιτυχίας 71%, δηλαδή διακόσιες είκοσι τέσσερις (224) από τις συνολικά τριακόσιες δεκαπέντε (315) απαντήσεις.

Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται πόσες σωστές απαντήσεις έδωσαν οι μαθητές σε κάθε πρόβλημα αφαίρεσης. Σωστές απαντήσεις θεωρήθηκαν οι απαντήσεις που ανήκουν στην κατηγορία 4.1, δηλαδή σωστές απαντήσεις με εξήγηση καθώς και στην κατηγορία 4.2, δηλαδή σωστές απαντήσεις χωρίς εξήγηση. Λανθασμένες θεωρήθηκαν οι απαντήσεις που ανήκουν στην κατηγορία 3.3, δηλαδή λανθασμένη απάντηση ή χωρίς απάντηση.

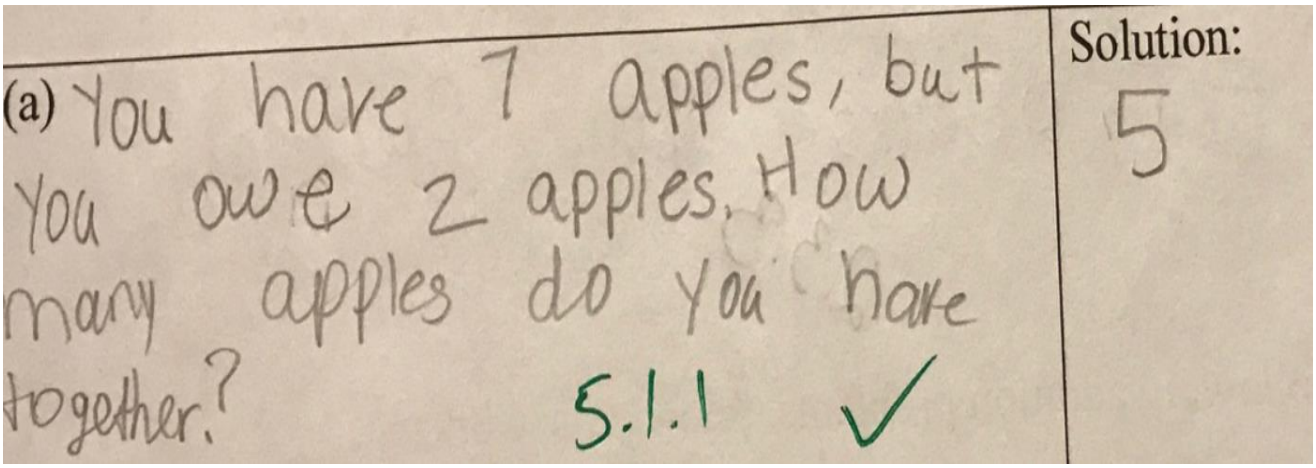
	Correct Answers out of 35 Answers	Percent
4a	30	86%
4b	28	80%
4c	27	77%
4d	24	69%
4e	29	83%
4f	20	57%
4g	23	66%
4h	26	74%
4i	17	49%

<u>Ερώτηση 5</u>: Δημιούργησε λεκτικά προβλήματα ώστε οι απαντήσεις να είναι:

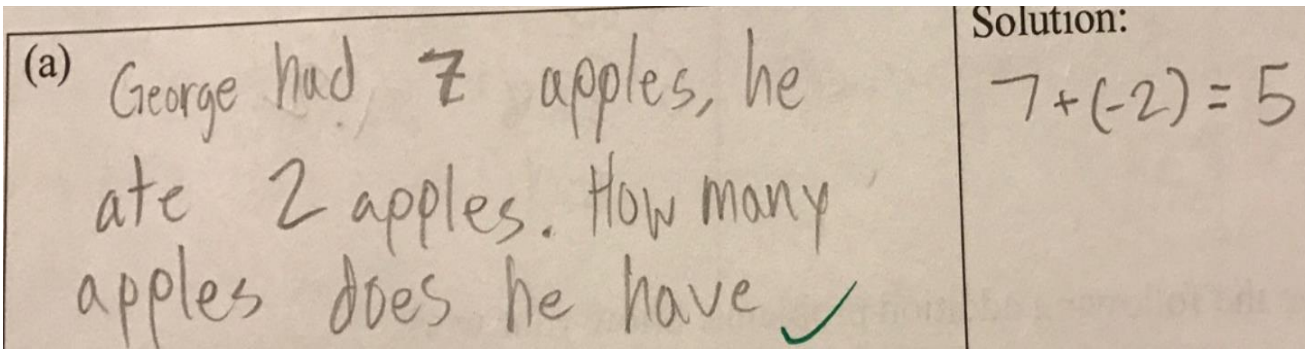
(α) 7+(-2), (β) -5-4, (γ) -3+(-3), (δ) 8-(-2)

Οι μαθητές κλήθηκαν να δημιουργήσουν λεκτικά προβλήματα, χρησιμοποιώντας συγκεκριμένους ακέραιους αριθμούς και συγκεκριμένες πράξεις.

Στο ερώτημα (α) θεωρήσαμε σωστά τα λεκτικά προβλήματα που οδηγούσαν στην πράξη 7+(-2) (Εικόνα 11) καθώς και τα προβλήματα που οδηγούσαν στην πράξη 7-2 (Εικόνα 12). Ένας (1) μαθητής, σε ποσοστό 3%, ανήκει στην πρώτη κατηγορία ενώ δώδεκα (12) μαθητές, σε ποσοστό 34%, στη δεύτερη. Συνολικά δεκατρείς (13) μαθητές κατάφεραν να γράψουν σωστό λεκτικό πρόβλημα για αυτό το ερώτημα.

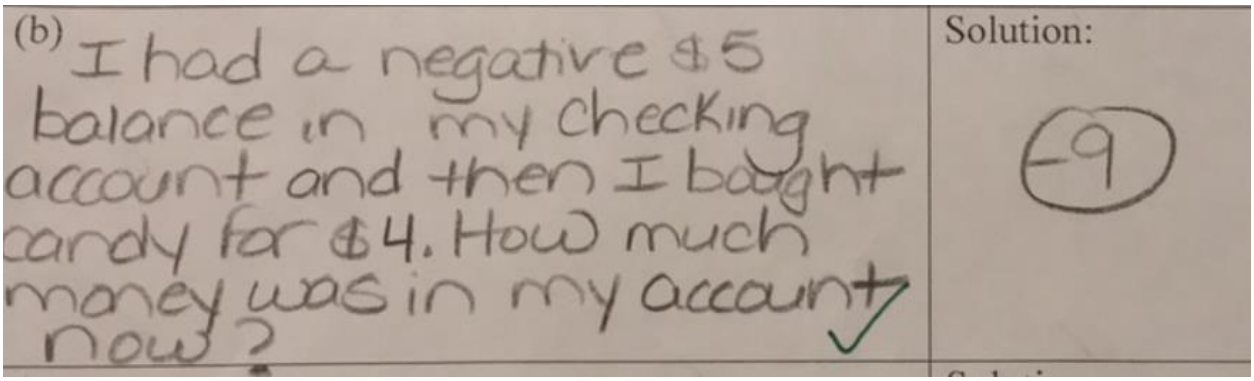


Εικόνα 11. Δείγμα λεκτικού προβλήματος μαθήτριας για την πράξη 7+(-2)



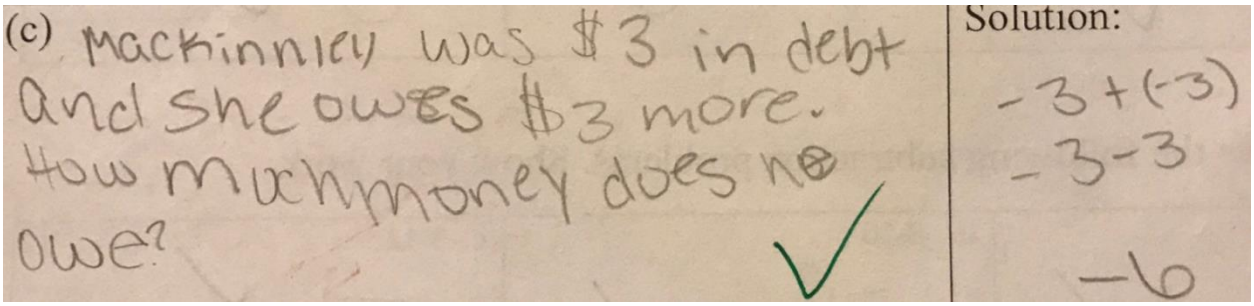
Εικόνα 12. Δείγμα λεκτικού προβλήματος μαθητή για την πράξη 7-2

Στο ερώτημα (β), μόνο τρεις (3) μαθητές, σε ποσοστό 9%, κατάφεραν να διατυπώσουν και να λύσουν σωστά ένα λεκτικό πρόβλημα που να οδηγεί στην πράξη -5-4 (Εικόνα 13).



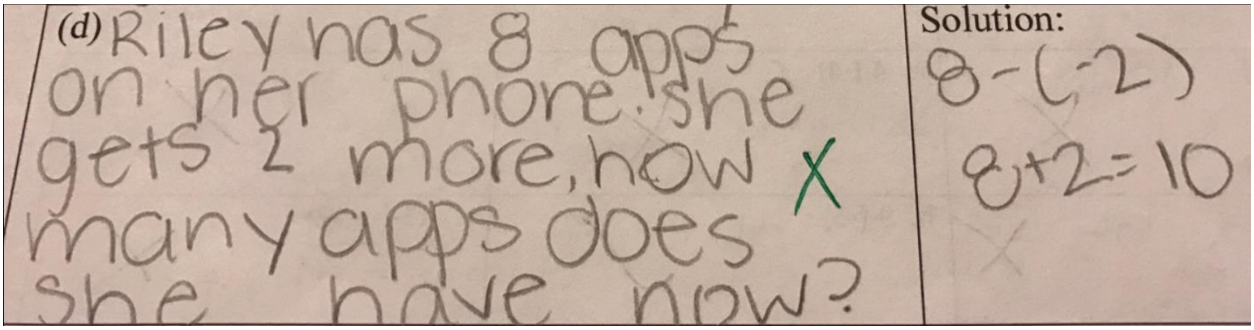
Εικόνα 13. Δείγμα λεκτικού προβλήματος μαθήτριας για την πράξη -5-4

Στο ερώτημα (γ), επτά (7) μαθητές, σε ποσοστό 20%, διατύπωσαν και έλυσαν σωστά ένα λεκτικό πρόβλημα που οδηγούσε στην πράξη (-3)+(-3) (Εικόνα 14). Παρότι στα ερωτήματα (β) και (γ) θα θεωρούσαμε σωστά τα λεκτικά προβλήματα που θα οδηγούσαν ουσιαστικά στην πρόσθεση δύο αρνητικών ακεραίων, παρατηρούμε ότι οι μαθητές πιο εύκολα διατύπωσαν ένα λεκτικό πρόβλημα όταν ήταν υπαρκτό το σύμβολο της πρόσθεσης, παρά όταν έπρεπε να αφαιρέσουν ένα θετικό ακέραιο από έναν αρνητικό.



Εικόνα 14. Δείγμα λεκτικού προβλήματος μαθήτριας για την πράξη (-3)+(-3)

Στο τελευταίο ερώτημα (δ), κανένας (0) μαθητής δεν κατάφερε να διατυπώσει σωστό λεκτικό πρόβλημα που να οδηγεί στην πράξη 8-(-2). Όμως, επτά (7) μαθητές, σε ποσοστό 20%, διατύπωσαν λεκτικό πρόβλημα, το οποίο οδηγούσε στο σωστό αποτέλεσμα, αλλά χρησιμοποιώντας την πράξη 8+2, αντί για 8-(-2) (Εικόνα 15). Αυτές οι διατυπώσεις προβλημάτων δε θεωρήθηκαν σωστές, αλλά κατατάχθηκαν στην κατηγορία 5.2 μερικώς σωστές, ως προς τη λύση.



Εικόνα 15. Δείγμα λανθασμένου λεκτικού προβλήματος μαθήτριας για την πράξη 8-(-2)

Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται πόσα σωστά λεκτικά προβλήματα δημιούργησαν και έλυσαν οι μαθητές. Σωστές απαντήσεις θεωρήθηκαν οι απαντήσεις που ανήκουν στην κατηγορία 5.1, δηλαδή σωστά λεκτικά προβλήματα με σωστές λύσεις. Λανθασμένες θεωρήθηκαν οι απαντήσεις που ανήκουν στις κατηγορίες 5.3 και 5.4, δηλαδή λανθασμένη λύση ή χωρίς καθόλου απάντηση.

	Correct Answers out of 35 Answers	Percent
5a	13	37%
5b	3	9%
5c	7	20%
5d	0	0%

4.4 Η συζήτηση

Η συζήτηση με τους μαθητές που ακολούθησε μετά την ανάλυση του post-test βασίστηκε στις απαντήσεις τους πάνω στο δεύτερο φύλλο εργασίας. Αναλύοντας τις απαντήσεις των μαθητών πάνω στην πρόσθεση και στην αφαίρεση ακεραίων, στην τρίτη και τέταρτη ερώτηση του δεύτερου φύλλου εργασίας (Παράρτημα Β), κρίθηκε σκόπιμο να ζητηθεί από τους μαθητές να

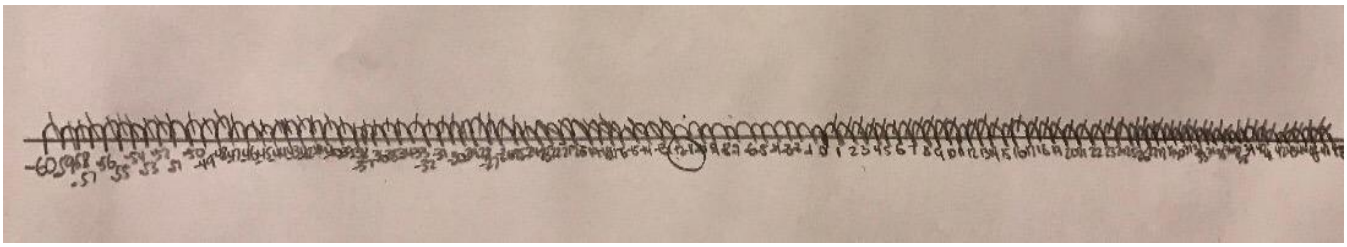
αναπαραστήσουν αυτές τις πράξεις με το συνδυαστικό μοντέλο, όπου ήταν δυνατό, και να συζητήσουν μεταξύ τους άλλους τρόπους λύσης, στις περιπτώσεις που δεν επαρκούσαν τα χαρτονομίσματα και οι ακέραιοι στην αριθμογραμμή. Οι μαθητές είχαν στη διάθεσή τους ατομικές αριθμογραμμές από το -10 έως το 10 καθώς και δέκα πράσινα και δέκα κόκκινα χαρτονομίσματα για να αναπαραστήσουν την πρόσθεση και την αφαίρεση με το συνδυαστικό μοντέλο.

Οι μαθητές τοποθετήθηκαν σε ομάδες των τριών ή τεσσάρων ατόμων και ζητήθηκε από αυτούς να χρησιμοποιήσουν το συνδυαστικό μοντέλο για να επιβεβαιώσουν αν η λύση που είχαν ήταν σωστή ή όχι.

Αρχικά, στην τρίτη άσκηση, όλοι οι μαθητές κατάφεραν να αναπαραστήσουν τα τρία πρώτα ερωτήματα, το πέμπτο και ένατο ερώτημα, ακόμα και οι μαθητές που είχαν βρει λάθος αποτέλεσμα στο post-test. Όλες αυτές οι ασκήσεις είχαν ακεραίους ανάμεσα στο -10 και το 10. Το ερώτημα 4, το οποίο περιλάμβανε αριθμούς με απόλυτη τιμή μεγαλύτερη του 10 και δεν μπορούσαν να αναπαρασταθούν με τα εκπαιδευτικά υλικά του συνδυαστικού μοντέλου, οι μαθητές χρειάστηκαν περισσότερο χρόνο για να καταφέρουν να εξηγήσουν πώς θα εύρισκαν τη σωστή απάντηση. Τρεις ομάδες, οι οποίες έδωσαν σωστή λύση, είπαν ότι δε χρειάζεται να χρησιμοποιήσουν τα εκπαιδευτικά υλικά που είχαν για να το λύσουν, αλλά ότι μπορούσαν να ακολουθήσουν τον ίδιο κανόνα που χρησιμοποίησαν για να λύσουν το δεύτερο ερώτημα της τρίτης ερώτησης. Μία άλλη ομάδα τεσσάρων μαθητών, μέσα στην οποία υπήρχαν δύο μαθητές που δεν είχαν λύσει σωστά το πρόβλημα, είπε ότι προσπαθούσαν να φανταστούν τα πράσινα και τα κόκκινα χαρτονομίσματα που θα έμεναν μετά την πράξη της πρόσθεσης. Τελικά κατάφεραν, μέσα από τις διορθώσεις των άλλων δύο συμμαθητών τους, να βρουν τη σωστή απάντηση. Δύο ομάδες «συμβόλιζαν» το κάθε χαρτονόμισμα σαν δέκα δολάρια και την κάθε μονάδα στην αριθμογραμμή σαν δεκάδα και τοποθετούσαν τις δεκάδες πάνω στην αριθμογραμμή και φαντάζονταν πόσες μονάδες έμεναν. Παρότι φαινόταν πιο σύνθετη διαδικασία, οι μαθητές κατάφεραν να βρουν τη σωστή απάντηση χρησιμοποιώντας διαφορετικές αναπαραστάσεις. Μία άλλη ομάδα, τεσσάρων μαθητών, προσπάθησε να συνδυάσει όλα τα χαρτονομίσματα μαζί (40 πράσινα και 40 κόκκινα) και να βάλουν τη μία

αριθμογραμμή δίπλα στην άλλη, κάτι το οποίο όμως δεν τους βοήθησε στη λύση γιατί όλες οι αριθμογραμμές είχαν ακεραίους από το -10 έως το 10 και όχι τη συνέχεια των ακεραίων. Τελικά, κατέληξαν να τοποθετούν πάνω από την αριθμογραμμή χαρτονομίσματα, τα οποία ονόμασαν «20 δολάρια» και κάτω από την αριθμογραμμή χαρτονομίσματα, τα οποία ονόμασαν «2 δολάρια» (Εικόνα 11). Με αυτόν τον τρόπο βρήκαν τη σωστή απάντηση, καθώς οι αριθμοί σε αυτό το ερώτημα ήταν ζυγοί αριθμοί και μπορούσαν να αναπαρασταθούν με τα χαρτονομίσματα τω 20 και των 2 δολαρίων. Η τελευταία ομάδα, τριών ατόμων, ζωγράφισε μία αριθμογραμμή από το -60 έως το 60 και τοποθέτησαν όλους τους ακέραιους αριθμούς. Ένωσαν με καμπυλωτά τόξα δύο διαδοχικούς ακεραίους, αντιπροσωπεύοντας έτσι το κάθε χαρτονόμισμα. Τοποθέτησαν 48 τόξα από το 0 μέχρι το 48 και 60 τόξα από το 0 μέχρι το -60. Στη συνέχεια διέγραψαν από τα άκρα τα 48 «αριστερά» τόξα και τα 48 «δεξιά» τόξα, καταφέρνοντας έτσι να βρουν τη σωστή απάντηση (Εικόνα 12). Οι μαθητές τελικά κατάφεραν να δώσουν τη σωστή απάντηση δουλεύοντας μέσα στις ομάδες τους.

Εικόνα 11. Αναπαράσταση 20 δολαρίων πάνω από την αριθμογραμμή και 2 δολαρίων κάτω από την αριθμογραμμή.



Εικόνα 12. Αναπαράσταση των δολαρίων με τόξα πάνω στην αριθμογραμμή.

Για τις απαντήσεις στα υπόλοιπα ερωτήματα, τα οποία περιλάμβαναν περισσότερους από δύο ακεραίους, παρατηρήθηκε ότι η κυρίως δυσκολία ήταν στην προτεραιότητα των πράξεων ή στη χρήση κάποιου λανθασμένου κανόνα και όχι στην εύρεση της τελικής απάντησης. Για παράδειγμα, δύο μαθητές από μία ομάδα τεσσάρων μαθητών, θεώρησαν ότι στο ερώτημα 3f. 25+(-15+5) μπορούν να «ανταλλάξουν» το «+» πριν την παρένθεση και το «-» μετά από αυτήν και να υπολογίσουν 15+5=20, και 25-20=5. Για να αναπαραστήσουν οι μαθητές την πράξη 25-20 με τα εκπαιδευτικά υλικά που είχαν στη διάθεσή τους, ονόμασαν το κάθε χαρτονόμισμα σαν «5 δολάρια». Έτσι τοποθέτησαν 5 πράσινα χαρτονομίσματα για να αναπαραστήσουν τα 25 δολάρια και στη συνέχεια αφαίρεσαν τα 4 από αυτά για να αναπαραστήσουν την αφαίρεση των 20 δολαρίων. Οι δύο αυτοί μαθητές βρήκαν τη λάθος απάντηση 5 δολάρια, καθώς χρησιμοποίησαν λάθος κανόνα. Οι άλλοι δύο μαθητές της ομάδας, που είχαν λύσει το πρόβλημα σωστά, τους εξήγησαν ότι δεν μπορούν να ανταλλάξουν το «+» και το «-», αλλά πρώτα πρέπει να κάνουν την πράξη που είναι μέσα στην παρένθεση και μετά την πράξη έξω από την παρένθεση. Έτσι οι μαθητές που έδωσαν τη σωστή λύση έπεισαν και εξήγησαν στους άλλους δύο μαθητές το λάθος τους. Τελικά η ομάδα συμφώνησε στη σωστή λύση. Με τη συζήτηση μέσα στις ομάδες λύθηκαν και αναπαραστάθηκαν σωστά και τα υπόλοιπα ερωτήματα 3g και 3h.

Στην τέταρτη ερώτηση, παρατηρήθηκε ότι οι ομάδες ακολούθησαν τον ίδιο τρόπο σκέψης επιβεβαίωσης ή μη της απάντησής τους στα προβλήματα της αφαίρεσης όπως με αυτά της πρόσθεσης. Οι μαθητές, παρότι είχαν περισσότερες λανθασμένες απαντήσεις στα ερωτήματα αφαίρεσης ακεραίων όταν τα απάντησαν μόνοι τους, όταν δούλεψαν στις ομάδες κατάφεραν να γίνει γρηγορότερα ο έλεγχος των απαντήσεών τους με το συνδυαστικό μοντέλο από ότι έγινε στην πρόσθεση και να καταλήξουν στις σωστές απαντήσεις. Αυτό δείχνει ότι η συζήτηση που προηγήθηκε στα προβλήματα της πρόσθεσης, βοήθησε τους μαθητές να λύσουν πιο γρήγορα τα προβλήματα της αφαίρεσης. Οι μαθητές δεν αντιμετώπισαν μεγάλη δυσκολία στα ερωτήματα που είχαν παρενθέσεις, καθώς εύκολα απέρριψαν και διόρθωσαν τις απαντήσεις τους, όταν δεν είχαν απαντήσει σωστά. Η μεγαλύτερη δυσκολία επιβεβαίωσης-απόρριψης αντιμετωπίστηκε στο πρόβλημα 4f. 58-76, όπου κάποιοι μαθητές δε θέλησαν να προσπαθήσουν να βρουν αν η αρχική λύση τους είναι σωστή ή όχι, καθώς όπως είπαν «είναι δύσκολοι αριθμοί». Οι περισσότεροι μαθητές είχαν λύσει αυτό το πρόβλημα χρησιμοποιώντας την ανάλυση των

αριθμών, δηλαδή ο αριθμός 58 σαν 50+8 και ο αριθμός 76 σαν 70+6. Ενώ υπολόγισαν σωστά τις διαφορές 50-70= -20 και 8-6= 2, στη συνέχεια αντί να κάνουν την πράξη -20 +2 συνδυάζοντας τα δύο αποτελέσματα, έκαναν – (20+2) δίνοντας σαν απάντηση - 22. Μία ομάδα, τεσσάρων μαθητών, κατάφερε να δώσει τη σωστή λύση και αναπαράσταση της λύσης, χρησιμοποιώντας την ίδια μέθοδο με τα «20 δολάρια» και τα «2 δολάρια» που χρησιμοποίησαν στην πρόσθεση. Αυτή η ομάδα παρουσίασε τη λύση της σε όλη την τάξη.

Τελικά, μέσα από τη συζήτηση που έκαναν οι μαθητές μέσα στις ομάδες, κατάφεραν να καταλήξουν σε σωστές απαντήσεις. Παρατηρήθηκε ότι κάποιοι μαθητές μέσα στις ομάδες δεν μπόρεσαν να διορθώσουν τις λάθος λύσεις τους από μόνοι τους, στα πιο δύσκολα προβλήματα, αλλά πείστηκαν από τους άλλους μαθητές της ομάδας τους για τη σωστή λύση.

Τέλος, όλοι οι μαθητές έγραψαν μία απάντηση από τα ερωτήματα της τρίτης και της τέταρτης ερώτησης στον πίνακα, ώστε να όλες οι σωστές απαντήσεις να είναι γραμμένες στον πίνακα της τάξης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Από τη διδασκαλία της έννοιας των ακέραιων αριθμών καθώς και της πρόσθεσης και της αφαίρεσης ακέραιων αριθμών σε μαθητές της έκτης τάξης (6th grade), βγάλαμε χρήσιμα συμπεράσματα για τις ικανότητες αυτών των μαθητών να κατανοήσουν και να διαχειριστούν ακέραιους αριθμούς.

Η ανάλυση του πρώτου φύλλου εργασίας, που δόθηκε σαν pre-test και σαν post-test, έδειξε ότι δεν προ υπήρχε γνώση των μαθητών πάνω στους ακεραίους πριν τη δεύτερη φάση της έρευνας, τη διδασκαλία. Στην ερώτηση τι είναι ακέραιοι αριθμοί στο pre-test, οι απαντήσεις που πήραμε περιλάμβαναν κλάσματα σε ποσοστό 20%. Σε καμία απάντηση δεν υπήρχε αναφορά σε αρνητικούς αριθμούς. Στο post-test στην ίδια ερώτηση, υπήρχαν απαντήσεις που περιλάμβαναν αρνητικούς ακεραίους σε ποσοστό 40%, ενώ παρέμειναν απαντήσεις που περιλάμβαναν

κλάσματα σε ποσοστό 17%. Στην ερώτηση όμως που ζητούσε από τους μαθητές να δοθούν αντιπροσωπευτικά παραδείγματα ακεραίων, παρότι στο pre-test δεν υπήρχε κανένα παράδειγμα αρνητικών ακεραίων, στο post-test οι μαθητές έδωσαν παραδείγματα με αρνητικούς ακεραίους, σε ποσοστό 69%. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα του post-test, ενώ μόνο οι 14 μαθητές κατάφεραν να δώσουν σωστά τον ορισμό ή την περιγραφή των ακεραίων, οι 24 μαθητές μπόρεσαν να δώσουν σωστά αντιπροσωπευτικά παραδείγματα ακεραίων. Αυτό ίσως να δείχνει ότι οι μαθητές δεν μπορούν σε αυτή την ηλικία να εκφράσουν την έννοια των ακέραιων αριθμών με μαθηματικούς όρους, αλλά μπορούν να τους εκφράσουν συμβολικά, χρησιμοποιώντας θετικά και αρνητικά πρόσημα.

Στην ερώτηση πού χρησιμοποιούν τους ακέραιους αριθμούς στην καθημερινή ζωή, στο pre-test, οι μαθητές σε ποσοστό 83% απάντησαν ότι δε γνωρίζουν πού υπάρχει χρήση των ακεραίων στην καθημερινότητα, ενώ στο post-test οι μαθητές έδωσαν απαντήσεις που περιλάμβαναν ξεκάθαρη χρήση αρνητικών αριθμών σε ποσοστό 40% και μη ξεκάθαρη χρήση αρνητικών αριθμών σε ποσοστό 57%. Η μη ξεκάθαρη χρήση ακεραίων, περιλάμβανε απαντήσεις όπως στις συναλλαγές, στο σχολείο και πιο συγκεκριμένα στα μαθηματικά ή παντού. Με αυτές τις απαντήσεις δεν μπορούμε να συμπεράνουμε αν αυτοί οι μαθητές έχουν καταλάβει την έννοια των ακεραίων, καθώς οι απαντήσεις που έδωσαν δεν περιλάμβαναν μόνο ακεραίους, αλλά θα μπορούσαν να περιλάβουν και ρητούς αριθμούς.

Στις επόμενες ερωτήσεις, ζητήθηκε επίσης από τους μαθητές να δημιουργήσουν μία άσκηση πρόσθεσης και μία άσκηση αφαίρεσης ακεραίων. Παρότι στο pre-test δεν υπήρχε καμία απάντηση που περιλάμβανε αρνητικούς αριθμούς, στο post-test το 40% των μαθητών χρησιμοποίησαν αρνητικούς αριθμούς για να φτιάξουν μία άσκηση πρόσθεσης ακεραίων και το 37% χρησιμοποίησαν αρνητικούς αριθμούς για να φτιάξουν μία άσκηση αφαίρεσης ακεραίων.

Η ανάλυση των απαντήσεων των μαθητών στις ερωτήσεις του πρώτου φύλλου εργασίας που δόθηκε και στο pre-test και στο post-test, έδειξε ότι περίπου το 40% των μαθητών της έκτης τάξης (6th grade) μπόρεσαν να κατανοήσουν την έννοια των ακεραίων, να φτιάξουν ασκήσεις και προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης ακεραίων συμπεριλαμβάνοντας και αρνητικούς

ακεραίους, όπως επίσης μπόρεσαν να δώσουν παραδείγματα ξεκάθαρης χρήσης των ακεραίων στην καθημερινή ζωή. Έτσι απαντήθηκε το πρώτο ερώτημα της έρευνας.

Η ανάλυση του δεύτερου φύλλου εργασίας, που δόθηκε σαν post-test, έδειξε ότι οι μαθητές απέκτησαν γνώση και κατανόηση των ακεραίων, σε μεγαλύτερο ποσοστό από ότι έδειξε το πρώτο φύλλο εργασίας. Στην πρώτη ερώτηση που ζητούσε να γίνει σύγκριση ακεραίων, οι απαντήσεις που πήραμε ήταν σωστές σε ποσοστό 89%. Στη δεύτερη ερώτηση όμως, που ζητούσε από τους μαθητές να βρουν κατά πόσο μεγαλύτερος είναι ένας θετικός από έναν αρνητικό αριθμό, οι μαθητές έδωσαν τη σωστή απάντηση σε ποσοστό 63%.

Παρατηρούμε ότι στο πρώτο φύλλο εργασίας, οι μαθητές είχαν επιτυχία περίπου 40%, ενώ στο δεύτερο φύλλο εργασίας, είχαν επιτυχία μεγαλύτερη από 60%. Σύμφωνα με τις ερωτήσεις του πρώτου φύλλου εργασίας, περιμέναμε οι μαθητές στις απαντήσεις τους να περιλάβουν και αρνητικούς ακεραίους από μόνοι τους, ενώ στο δεύτερο φύλλο εργασίας, οι μαθητές κλήθηκαν να διαχειριστούν αρνητικούς ακεραίους που τους είχαν δοθεί. Οι μαθητές έχουν ασχοληθεί με τους θετικούς ακεραίους όλα τα χρόνια της μαθητικής τους ζωής, ενώ με τους αρνητικούς ακεραίους ασχολήθηκαν μόνο για ένα μήνα, στο τέλος της έκτης τάξης (6th grade). Έτσι λοιπόν έχουν μεγάλη εξοικείωση με τους θετικούς ακεραίους και μικρή εξοικείωση με τους αρνητικούς. Είναι πιθανόν λοιπόν, ότι ο μικρός χρόνος (ένας μήνας) ενασχόλησης με τους αρνητικούς ακεραίους, να είναι ο παράγοντας που έδωσε το χαμηλότερο ποσοστό επιτυχίας, περίπου 40%, στο πρώτο φύλλο εργασίας του post-test.

Στις επόμενες δύο ερωτήσεις του post-test, οι οποίες ζητούσαν από τους μαθητές να λύσουν ασκήσεις πρόσθεσης και αφαίρεσης ακεραίων, οι μαθητές παρουσίασαν συνολικά 78% επιτυχία στην πρόσθεση ακεραίων και 71% επιτυχία στην αφαίρεση ακεραίων. Όπως παρατηρούμε, το ποσοστό επιτυχίας στην αφαίρεση δεν είχε μεγάλη διαφορά από το ποσοστό επιτυχίας στην πρόσθεση, καθώς η διαφορά ήταν 7%. Η έρευνα της Steiner (2009), η οποία χρησιμοποίησε το συνδυαστικό μοντέλο σε pre-service δασκάλους, έδειξε σχεδόν την ίδια διαφορά ποσοστού επιτυχίας (περίπου 8%) ανάμεσα στην πρόσθεση (περίπου 97%) και στην αφαίρεση (περίπου 89%).

Κατά τη διάρκεια της συζήτησης πάνω στο δεύτερο φύλλο εργασίας του post-test, όλοι οι μαθητές ήταν σε θέση να εξηγήσουν τις απαντήσεις τους, να τις επιβεβαιώσουν ή να τις απορρίψουν, χρησιμοποιώντας το συνδυαστικό μοντέλο.

Η ανάλυση των απαντήσεων των μαθητών στις ερωτήσεις του δεύτερου φύλλου εργασίας που δόθηκε στο post-test καθώς και η συζήτηση που ακολούθησε πάνω σε αυτό, έδειξαν ότι πάνω από το 70% των μαθητών της έκτης τάξης (6th grade) μπόρεσαν να λύσουν σωστά τα προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης ακεραίων και να εξηγήσουν τις λύσεις τους με τη χρήση του συνδυαστικού μοντέλου. Έτσι απαντήθηκε το δεύτερο ερώτημα της έρευνας.

Τέλος, προτείνεται για περαιτέρω διερεύνηση της κατανόησης των ακεραίων, να γίνει έρευνα με τη χρήση του συνδυαστικού μοντέλου, όπου θα συμμετέχουν περισσότεροι μαθητές της έκτης τάξης (6th grade) και ίσως ακόμα και μαθητές της πέμπτης τάξης (5th grade). Για όσους θέλουν να επιχειρήσουν την επανάληψη αυτής της έρευνας, θα θέλαμε να τονίσουμε ότι οι μαθητές αυτής της ηλικίας χρειάζονται περισσότερο χρονικό διάστημα να δουλέψουν με τους αρνητικούς ακεραίους, ώστε να εξοικειωθούν με αυτούς, καθώς έχουν εμπειρία πολλών χρόνων της χρήσης θετικών ακεραίων.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

Your answers will be used for a research project only. None of the following answers will influence your course grade. Your answers will remain anonymous. Do not put your name on the paper. Use the code provided.

Worksheet #1 Your Code: _____

1. What is an integer?

2. Give some representative examples of numbers that are integers.

3. Where have you personally used integers in real life? Give some examples.

4. Make up an *addition of integers* problem. Then solve it.

5. Make up a *subtraction of integers* problem. Then solve it.

6. Make up a **word** problem that uses *addition(s) or subtraction(s) of integers or both* . Then solve it.

	Solution:

1

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

Your answers will be used for a research project only. None of the following answers will influence your course grade. Your answers will remain anonymous. Do not put your name on the paper. Use the code provided.

Worksheet #2 Your Code: _____

1. Which integer is greater? 1 or -3. Explain your answer.

2. How much greater is 6 than -2? Explain your answer.

3. Solve the following addition problems. Show your work.

a. -4+1	b. 9+(-3)	c. 0+(-7)
d. 48+(-60)	e. -2+(-5)	f. 25+(-15+5)
g. 4+(-5-1)+(-2)	h. 3+(7-15)	i. 9+(-9)

4. Solve the following subtraction problems. Show your work.

a. 9-5	b. -8-10	c. 3-12
d. -8-(-10)	e. 4-(-4)	f. 58-76
g. -45-100	h. 9-(-5)	i. -15-(-3-12)

2

Your answers will be used for a research project only. None of the following answers will influence your course grade. Your answers will remain anonymous. Do not put your name on the paper. Use the code provided.

5. Make up a **word** problem so the solution is

(a) 7 + (- 2)

(b) - 5 - 4

(c) - 3 + (- 3)

(d) 8 – (- 2)

(a)	Solution:
(b)	Solution:
(c)	Solution:
(d)	Solution:

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Johnson, A. (1999). *Famous Problems and Their Mathematicians*, Greenwood Publishing Group, 56, Teachers Ideas Press.

Baily, C. A. R., Barton, A., Blakey, J. C., Brighton, D. R., Bromby, H., & Davey, P. C. (1974). *Mathematics Eleven to Sixteen* (Prepared for the Mathematical Association). England.

Ball, D. L. (1988). Knowledge and reasoning in mathematical pedagogy: Examining what prospective teachers bring to teacher education. Dissertation, Michigan State University, Lansing, MI.

Battista, M. T. (1983). A complete model for operations on integers. Arithmetic Teacher, 30(9), 26 - 31.

Bell, A. (1983). Directed numbers and the bottom up curriculum. *Mathematics Teaching, 102*, 28 - 32.

Beery, J., Cochell, G., Dolezal, C., Sauk, A., & Shuey, L. (2004). Negative numbers. In V. Katz, J. & K. D. Michalowics (Eds.), Historical Modules Project (CD-ROM). Mathematical Association of America

Bolyard, J. (2005). *A comparison of the impact of two virtual manipulatives on student achievement and conceptual understanding of integer addition and subtraction.* George Mason University, Fairfax, VA.

Bossé,M. ,Lynch-Davis,K., Adu-Gyamfi,K. & Chandler,K. (2016). Using Integer Manipulatives: Representational Determinism. *Imternational Journal for Mathematics teaching and learning,17(3).*

Brownell, W. A. (2004). The places of meaning in the teaching of arithmetic. Classics in mathematics education, 8-15. Reston, VA: NCTM (Reprinted from *Elementary School Journal (1947) ,47, 256 –265).*

Carr, K., & Katterns, B. (1984). Does the number line help? Mathematics in School, 13(4), 30 - 34.

Carraher, T., Carraher, D., & Schliemann, A. (1985). Mathematics in the streets and in schools. *British Journal of Developmental Psychology, 3*, 21 - 29.

Cotter, S. (1969). Charged particles: A model for teaching operations with directed numbers. *Arithmetic Teacher*, 16(5), 349-353.

Davidson, P. M. (1987). *Precursors of non-positive integer concepts.* Paper presented at the Biennial meeting of the Society for Research in Child Development, Baltimore, MD.

Dirks, M. K. (1984). The integer abacus. *Arithmetic Teacher*, 31(7), 50 - 54.

Ernest, P. (1985). The number line as a teaching aid. *Educational Studies in Mathematics*, 16, 411 - 424.

Ferguson, V. L. (1993). *Developing mathematical conceptions. A study of conceptual, skill, and pedagogical differences in integer conceptions of preservice teachers: An expository approach vs. a constructivist approach.* University of Oklahoma.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in Science and Mathematics: An Educational Approach.* Boston, MA: D. Reidel Publishing Company.

Flegg, G.; Hay, C.; Moss, B. (1985), *Nicolas Chuquet, Renaissance Mathematician: a study with extensive translations of Chuquet's mathematical manuscript completed in 1484*, D. Reidel Publishing Co., 354.

Gallardo, A. (2002). The extension of the natural-number domain to the integers in the transition from arithmetic to algebra. *Educational Studies in Mathematics, 49*(2), 171 - 192.

Gardner, M. (1989). *Penrose tiles to trapdoor ciphers*. New York, NY: W. H. Freeman and Company.

Hackbarth, M. C. (2000). *A comparison of the effectiveness in teaching the addition and subtraction of integers using manipulatives versus rules to seventh grade students.* California State University, Dominguez Hills, CA.

Haner, W. W. (1947). Teaching the subtraction of signed numbers. *School Science and Mathematics*, 47, 656 - 658.

Hart, K. (1981). Positive and negative numbers. In K. Hart (Ed.), *Children's Understanding of Mathematics*: 11 – 16, 82 - 87. London: John Murray.

Heath, T. (1981). A History of Greek Mathematics. (1). New York: Dover Publications, Inc.

Hodgkin, L. (2005), *A History of Mathematics: From Mesopotamia to Modernity: From Mesopotamia to Modernity.* Oxford University Press, 88.

Janvier, C. (1985). Comparison of models aimed at teaching signed integers. Proceedings of the 9th Annual Conference of the International Group for the PME, The Netherlands (1) 135–140

Johansson, B. G. (2004). Matematikens historia. Lund, Sweden: Studentlitteratur, 411

Kohn, J. B. (1978). A physical model for operations with integers. Mathematics Teacher, 71(9), 734 - 736.

Levenson, E., Tsamir, P., & Tirosh, D. (2007). First and second graders use of mathematically-based and practically-based explanations for multiplication with zero. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 29*(2), 21 - 40.

Liebeck, P. (1990). Scores and Forfeits: An Intuitive Model for Integer Arithmetic. *Educational Studies in Mathematics,* 21(3), 221-239

Lytle, P. A. (1992). *"Use of a neutralization model to develop understanding of integers and of the operations of integer addition and subtraction".* Concordia University, Montreal, Quebec.

Mack, N. (1990). Learning fractions with understanding: Building on informal knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*(1), 16 - 32.

Mukhopadhyay, Resnick & Schauble (1990). Social sensemaking in mathematics: children's ideas of negative numbers. Proceedings of the Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education with the North American Chapter 12th PME-NA Conference, 281–288

Musser, G. L., Burger, W. F., & Peterson, B. E. (2008). *Mathematics for Elementary Teachers: A contemporary approach* (8th ed.). Hoboken, NJ: John Wiley & Sons.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM

Nurnberger-Haag & Sherard (2007). Mathematics Teaching in the Middle School, 13(2), 118-121, Reston, VA: NCTM

Peled, I., Mukhopadhyay, S., & Resnick, L. B. (1988). *Formal and informal sources of mental modes for negative numbers.* Paper presented at the Twenty-ninth meeting of the Psychonomics Society, Chicago, IL.

Prather R. W., Alibali M. W. (2007). Understanding and Using Principles of Arithmetic: Operations Involving Negative Numbers. Department of Psychology, University of Wisconsin–Madison.

Rogers, L. (2011, February). The History of Negative Numbers. University of Cambridge. Retrieved from http://nrich.maths.org/

Schubring, G. (2005). Conflicts between generalization, rigor, and intuition: Number concepts underlying the development of analysis in 17-19th century France and Germany. Heidelberg: Springer.

Sherzer, L. (1969). Adding integers using only the concepts of one-to-one correspondence and counting. The Arithmetic Teacher, 16(5), 360 – 362.

Shawyer, R. (1985). Positive, Negative, Plus, Minus, Add, Subtract. *Ontario Mathematics Gazette, 23*(3), 34 - 35.

Smith, D. E. (1923). History of Mathematics: General Survey of the History of Elementary Mathematics (1), USA: Ginn and Company.

Smith, D. E. (1925). *History of Mathematics Volume 2. Ginn & Brothers,* Boston U.S.A., 257

Smith, D. E. (1925). History of Mathematics: Special Topics of Elementary Mathematics (2), USA: Ginn and Company.

Streefland, L (1996). Negative numbers: Reflections of a learning researcher. The Journal of Mathematical Behavior, 15(1),57 – 77

Steiner, Carol J. (2009). *"A study of pre-service elementary teachers' conceptual understanding of integers",* Kent State University and Graduate School of Education, Health and Human Services.

Struik Dirk J. (1987), A Concise History of Mathematics. New York: Dover Publications, 32–33.

Thomaidis, Y. (1993). Aspects of negative numbers in the early 17th century: An approach for didactic reasons. Science and Education, 2(1), 69-86.

Vlassis, J. (2008). The role of mathematical symbols in the development of number conceptualization: The case of the minus sign. Philosophical Psychology, 21, 555–570

Whimbey, A. L., & Lochhead, J. (1981). Boxes of charged particles for teaching signed number rules. Focus on Learning Problems in Mathematics, 3(4), 1 - 4.

Wilkins, J. R. (1996). *"Students' use of informal strategies and representation in solving addition and subtraction integer problems".* University of California at Los Angeles, Los Angeles.

Yan, L., & Shiran, D. U. (1987). *Chinese Mathematics: A Concise History* (J. Crossley & A. W.-C. Lun, Trans.). Oxford: Clarendon Press.