



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΕΚ ΤΩΝ ΥΣΤΕΡΩΝ ΕΚΤΙΜΗΣΕΙΣ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ ΓΙΑ ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

ΧΡΗΣΤΟΣ ΠΕΡΒΟΛΙΑΝΑΚΗΣ

Επιβλέπων Καθηγητής:
ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ ΧΑΤΖΗΠΑΝΤΕΛΙΔΗΣ

Ηράκλειο Κρήτης
Μάιος 2017

*Στους γονείς μου,
και στην Σοφία!*

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Παναγιώτη Χατζηπαντελίδη, για την πολύτιμη καθοδήγηση καθ' όλη την διάρκεια της μελέτης και της συγγραφής της παρούσας μεταπτυχιακής εργασίας.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους τους καθηγητές του τμήματος Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών, και ιδιαίτερα τους κ. Χαράλαμπο Μακριδάκη και κ. Μιχάλη Πλεξουσάκη, οι οποίοι μαζί με τον κ. Παναγιώτη Χατζηπαντελίδη αποτέλεσαν την εξεταστική επιτροπή.

Ευχαριστώ τους φίλους μου, που μου δίνουν κουράγιο καθ' όλη την διάρκεια των σπουδών μου. Ιδιαίτερα, θα ήθελα να ευχαριστήσω την Σοφία.

Ευχαριστώ θερμά τους γονείς μου, Νίκο και Αμαλία, που βοηθούν και στηρίζουν τις προσπάθειες μου, όλα αυτά τα χρόνια.

Περίληψη

Όταν χρησιμοποιούμε την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, στις εφαρμογές, μπορεί να υπάρξουν συγκεκριμένες περιοχές στο χωρίο, που η αριθμητική προσέγγιση είναι κακή. Μια φυσική επιλογή, για να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα, είναι να εκλεπτύνουμε την διαμέριση, στα στοιχεία όπου η συνεισφορά του σφάλματος είναι μεγάλη. Όμως, προκύπτει η παρακάτω ερώτηση. Πως θα προσδιορισθούν αυτές οι περιοχές;

Μια απάντηση στην ερώτηση, είναι να κατασκευάσουμε τοπικούς εκτιμητές για το σφάλμα των πεπερασμένων στοιχείων, σε κάθε στοιχείο, προκειμένου να προσδιορίσουμε που βρίσκεται η μεγαλύτερη συνεισφορά στο σφάλμα. Οι εκ των προτέρων εκτιμήσεις σφάλματος, που είναι γνωστές από την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, δεν είναι πρακτικές, αφού γενικά εξαρτώνται από την άγνωστη λύση του προβλήματος, αλλά όμως βοηθούν στον θεωρητικό προσδιορισμό του ρυθμού σύγκλισης του σφάλματος. Είναι δυνατόν, να κατασκευάσουμε *εκ των υστέρων εκτιμητές*, οι οποίοι θα είναι υπολογίσιμοι και εξαρτώνται από την λύση των πεπερασμένων στοιχείων και τα δεδομένα του προβλήματος.

Οι εκ των υστέρων εκτιμητές είναι ένα πάρα πολύ χρήσιμο εργαλείο για την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, αφού ελέγχουν το ολικό σφάλμα και την ίδια στιγμή δίνουν πληροφορίες σχετικά με την κατανομή του σφάλματος στα επιμέρους στοιχεία.

Μια βασική ιδιότητα ενός εκ των υστέρων εκτιμητή είναι ότι θα πρέπει να έχει μικρό υπολογιστικό κόστος σε σχέση με την λύση του ολικού προβλήματος. Συνεπώς, οι εκτιμητές, θα πρέπει, είτε να επιλύονται άμεσα από τα δεδομένα του προβλήματος και την λύση των πεπερασμένων στοιχείων, είτε επιλύοντας μικρά βοηθητικά προβλήματα σε κάποια κατάλληλα υποχωρία.

Σε αυτήν την εργασία θα γίνει μια εκτενής παρουσίαση των πλέων συχνών εκ των υστέρων εκτιμητών για την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, βασιζόμενοι κυρίως στο βιβλίο *A Posteriori Error Estimation in Finite Element Analysis* των *M.Ainsworth, J.T.Oden* [2] και στο βιβλίο *A Review of A Posteriori Error Estimation and Adaptive Mesh-Refinement Techniques* του *R.Verfürth* [15].

Abstract

When using the finite element method, in the applications, there may be specific areas in the domain where the numerical approximation is poor. A natural choice, to tackle this problem, is to refine the discretisation in the elements where the error contribution is relative large. However, the following question arises. How can these areas be defined?

An answer to the question is to develop local estimators for the error of the finite element method in each element to indicate the magnitude of the local error. A priori error estimates known from the finite element method, are not practical, as they generally depend on the unknown solution of the problem, but they help in the theoretical determination of the error convergence rate. It is possible to construct *a posteriori error estimators*, which will be measurable and depend on the finite element solution and problem's data.

The a posteriori error estimators are a very useful tool for the finite element method, once they check the total error and at the same time give information about the distribution of the error in the individual elements.

A key attribute of an a posteriori error estimator is that it should have little computational cost compared to solving the overall problem. Therefore, the estimators should either be solved directly by the problem data and the finite element solution, or by solving small auxiliary problems in some suitable subdomains.

In this thesis we will have an extensive presentation of the frequent a posteriori estimators for the finite element method, based on the book *A posteriori Error Estimation in Finite Element Analysis* by M.Ainsworth, JTOden [2] and on the book *A Review of A Posteriori Error Estimation and Adaptive Mesh-Refinement Techniques* by R.Verfürth [15].

Περιεχόμενα

| | |
|---|-----------|
| Κατάλογος σχημάτων | 1 |
| 1 Βασικά Αποτελέσματα Θεωρίας Χώρων Hilbert | 2 |
| 1.1 Συμβολισμοί και προκαταρκτικά | 2 |
| 1.2 Διανυσματικοί χώροι | 3 |
| 1.3 Εσωτερικό γινόμενο | 4 |
| 1.4 Χώροι Hilbert | 4 |
| 1.5 Φραγμένα γραμμικά συναρτησιακά | 5 |
| 1.6 Φραγμένοι γραμμικοί τελεστές | 7 |
| 1.7 Βασικά αποτελέσματα σε αφηρημένη μορφή | 7 |
| 1.8 Τα θεωρήματα <i>Lax-Milgram</i> και <i>Galerkin</i> | 9 |
| 2 Χώροι Sobolev | 14 |
| 2.1 Συμβολισμοί και προκαταρκτικά | 14 |
| 2.2 Χώροι Sobolev | 15 |
| 2.3 Ολοκλήρωση κατά παράγοντες | 19 |
| 2.4 Ασθενής μορφή ελλειπτικών συνοριακών προβλημάτων | 20 |
| 2.4.1 Ομογενείς συνοριακές συνθήκες <i>Dirichlet</i> | 20 |
| 2.4.2 Ομογενείς συνοριακές συνθήκες <i>Neumann</i> | 22 |
| 3 Η Μέθοδος Πεπερασμένων Στοιχείων Για Ελλειπτικές Εξισώσεις | 24 |
| 3.1 Διακριτοποίηση με πεπερασμένα στοιχεία | 24 |
| 3.2 Κατά τμήματα γραμμικές συναρτήσεις στον τριγωνισμό | 26 |
| 3.3 Υλοποίηση μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων | 32 |
| 3.3.1 Το συνεχές πρόβλημα | 32 |
| 3.3.2 Το διακριτό πρόβλημα | 33 |
| 3.3.3 Υπολογισμός Πινάκων | 35 |
| 4 Εκ Των Υστέρων Εκτιμητές Για Ελλειπτικές Εξισώσεις | 42 |
| 4.1 Εισαγωγή | 42 |
| 4.1.1 Ελλειπτικό πρόβλημα | 43 |
| 4.2 Άμεσοι Εκτιμητές | 44 |
| 4.2.1 Εκτιμητής υπολοίπου | 44 |
| 4.2.2 Εκτιμητής ελαχίστων τετραγώνων | 54 |
| 4.3 Ιεραρχικός εκτιμητής | 55 |
| 4.4 Έμμεσοι Εκτιμητές | 61 |
| 4.4.1 Μέθοδος υπολοίπου σε υποχωρίο | 61 |
| 4.4.2 Μέθοδος υπολοίπου σε κάθε τρίγωνο | 67 |
| 4.5 Τεχνική μέσου όρου | 70 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 5 | Υλοποίηση των Εκ των Υστέρων Εκτιμητών | 74 |
| 5.1 | Ελλειπτικό πρόβλημα | 74 |
| 5.2 | Εκτιμητής υπολοίπου | 75 |
| 5.3 | Ιεραρχικός εκτιμητής | 77 |
| 5.4 | Μέθοδος υπολοίπου σε τρίγωνο | 79 |
| 5.5 | Τεχνική μέσου όρου | 81 |
| 5.6 | Αριθμητική ολοκλήρωση | 82 |
| 5.6.1 | Σφάλματα L_2 και H^1 | 86 |
| 5.7 | Προσαρμοζόμενος τριγωνισμός | 88 |
| 5.7.1 | Προσαρμοζόμενος αλγόριθμος | 90 |
| 5.8 | Μη-κυρτά χωρία | 94 |
| 6 | Αριθμητικά Αποτελέσματα | 96 |
| 6.1 | Κυρτά χωρία | 96 |
| 6.1.1 | Παράδειγμα 6.1.1 | 96 |
| 6.1.2 | Παράδειγμα 6.1.2 | 100 |
| 6.2 | Μη κυρτά χωρία | 104 |
| 6.2.1 | Παράδειγμα 6.2.1 | 105 |
| | Βιβλιογραφία | 109 |

Κατάλογος σχημάτων

| | | |
|------|--|----|
| 2.1 | Η ομαλότητα του συνόρου. | 17 |
| 2.2 | Ομαλό χωρίο. | 17 |
| 3.1 | Αποδεκτός τριγωνισμός του Ω | 26 |
| 3.2 | Παραβίαση του όρου (4). | 27 |
| 3.3 | Περιπτώσεις που απαγορεύονται κατά τον τριγωνισμό. Αριστερά παραβιάζεται η (3) και δεξιά η (5). | 27 |
| 3.4 | Τρίγωνο K με τις τρεις κορυφές του. | 27 |
| 3.5 | Δυο τρίγωνα με κοινή πλευρά. | 28 |
| 3.6 | Το γράφημα των συναρτήσεων βάσης. | 29 |
| 3.7 | Με κόκκινο η στήριξη των συναρτήσεων βάσης ανάλογα αν ο κόμβος είναι εσωτερικός ή συνοριακός. | 29 |
| 3.8 | Η διάμετρος h_K και η μέγιστη ακτίνα r_K , ενός εγγεγραμμένου κύκλου στο $K \in \mathcal{P}_h$ | 31 |
| 3.9 | Το χωρίο Ω | 33 |
| 3.10 | Η τοπική αρίθμηση σε ένα τυχαίο τρίγωνο K , γίνεται πάντα με φορά αντίθετη του ρολογιού. | 35 |
| 3.11 | Μια τυπική αρίθμηση του Ω . Με μαύρο η αρίθμηση των κόμβων και με κόκκινο των τριγώνων. | 36 |
| 3.12 | Μια τυπική αντιστοίχιση των αριθμήσεων. | 36 |
| 3.13 | Το τρίγωνο αναφοράς. | 38 |
| 3.14 | Η γραμμική απεικόνιση ανάμεσα στο K και το \hat{K} | 39 |
| 4.1 | Η πλευρά $E \in \mathcal{E}(K) \cap \mathcal{E}(K')$ | 45 |
| 4.2 | Το υποχωρίο $\tilde{\omega}_K$ | 47 |
| 4.3 | Το υποχωρίο ω_E | 48 |
| 4.4 | Το υποχωρίο ω_K | 53 |
| 4.5 | Αριστερά το αρχικό τρίγωνο και δεξιά η διάσπαση του σε τέσσερα μικρότερα τρίγωνα. | 56 |
| 4.6 | Αριστερά το αρχικό τρίγωνο και δεξιά η διάσπαση του σε έξι τρίγωνα. | 56 |
| 4.7 | Αριστερά το αρχικό τρίγωνο και δεξιά η δυο φορές ομοιόμορφη εκλέπτυνση του. | 57 |
| 4.8 | Το υποχωρίο ω_z | 61 |
| 4.9 | Το κομμάτι του τριγωνισμού ω_{p_i} | 71 |
| 5.1 | Τα $n_K, n_{K'}$ | 75 |
| 5.2 | Αρίθμηση των πλευρών. | 76 |
| 5.3 | Το τρίγωνο αναφοράς. | 83 |
| 5.4 | Τα σημεία ολοκλήρωσης ανάλογα με τον βαθμό του πολυωνύμου. | 85 |
| 5.5 | Τυχαίο τρίγωνο K | 85 |
| 5.6 | Τα σημεία του κανόνα αριθμητικής ολοκλήρωσης τάξης 5. | 86 |
| 5.7 | Αριστερά το τρίγωνο χωρίζεται σε τέσσερα όμοια τρίγωνα, στην μέση έχουμε την μπλε εκλέπτυνση και δεξιά η πράσινη εκλέπτυνση. | 89 |
| 5.8 | Εκλέπτυνση του τριγώνου με τις διακεκομμένες γραμμές με την <i>Red-Blue-Green Refinement</i> | 89 |

| | | |
|------|--|-----|
| 5.9 | Η πλευρά αναφοράς συμβολίζεται με διπλή γραμμή. Αριστερά, η περίπτωση με όλες τις πλευρές μαρκαρισμένες, στην μέση η μπλε εκλέπτυνση και δεξιά η πράσινη εκλέπτυνση. | 90 |
| 5.10 | Εκλέπτυνση του τριγώνου με τις διακεκομμένες γραμμές, με την <i>Newest Vertex Bisection</i> | 90 |
| 5.11 | Μη-κυρτό χωρίο Ω με μια εσωτερική γωνία μεγαλύτερη των 180° | 94 |
| 6.1 | Το χωρίο Ω | 96 |
| 6.2 | Η ακριβής λύση του παραδείγματος 6.1.1. | 97 |
| 6.3 | Σχετικό σφάλμα και εκτιμητές σφάλματος για ομοιόμορφη εκλέπτυνση. | 97 |
| 6.4 | Δείκτης αποτελεσματικότητας εκ των υστέρων εκτιμητών για ομοιόμορφη εκλέπτυνση. | 98 |
| 6.5 | Σχετικό σφάλμα και εκτιμητές σφάλματος για τον Αλγόριθμο $A_{1/2}$ | 98 |
| 6.6 | Δείκτης αποτελεσματικότητας εκ των υστέρων εκτιμητών για τον Αλγόριθμο $A_{1/2}$ | 99 |
| 6.7 | Σύγκριση σχετικού σφάλματος ως προς την νόρμα ενέργειας, ανάμεσα στον ομοιόμορφο και προσαρμοζόμενο τριγωνισμό. | 99 |
| 6.8 | Σύγκριση σχετικού σφάλματος ως προς την L_2 νόρμα, ανάμεσα στον ομοιόμορφο και προσαρμοζόμενο τριγωνισμό. | 100 |
| 6.9 | Η ακριβής λύση του παραδείγματος 6.1.2. | 101 |
| 6.10 | Σχετικό σφάλμα και εκτιμητές σφάλματος για ομοιόμορφη εκλέπτυνση. | 101 |
| 6.11 | Δείκτης αποτελεσματικότητας εκ των υστέρων εκτιμητών για ομοιόμορφη εκλέπτυνση. | 102 |
| 6.12 | Σχετικό σφάλμα και εκτιμητές σφάλματος για τον Αλγόριθμο $A_{1/2}$ | 102 |
| 6.13 | Δείκτης αποτελεσματικότητας εκ των υστέρων εκτιμητών για τον Αλγόριθμο $A_{1/2}$ | 103 |
| 6.14 | Σύγκριση σχετικού σφάλματος ως προς την νόρμα ενέργειας, ανάμεσα στον ομοιόμορφο και προσαρμοζόμενο τριγωνισμό. | 103 |
| 6.15 | Σύγκριση σχετικού σφάλματος ως προς την L_2 νόρμα, ανάμεσα στον ομοιόμορφο και προσαρμοζόμενο τριγωνισμό. | 104 |
| 6.16 | Γ -διαμορφωμένος τομέας. | 104 |
| 6.17 | Σχετικό σφάλμα και εκ των υστέρων εκτιμητές για μια ακολουθία ομοιόμορφων τριγωνισμών, για το παράδειγμα 6.2.1. | 105 |
| 6.18 | Δείκτες αποτελεσματικότητας για μια ακολουθία ομοιόμορφων τριγωνισμών. | 106 |
| 6.19 | Σχετικό σφάλμα και εκτιμητές σφάλματος για τον Αλγόριθμο $A_{1/2}$ | 106 |
| 6.20 | Δείκτης αποτελεσματικότητας εκ των υστέρων εκτιμητών για τον Αλγόριθμο $A_{1/2}$ | 107 |
| 6.21 | Σύγκριση σχετικού σφάλματος ως προς την νόρμα ενέργειας, ανάμεσα στον ομοιόμορφο και προσαρμοζόμενο τριγωνισμό. | 107 |
| 6.22 | Σύγκριση σχετικού σφάλματος ως προς την L_2 νόρμα, ανάμεσα στον ομοιόμορφο και προσαρμοζόμενο τριγωνισμό. | 108 |

Κεφάλαιο 1

Βασικά Αποτελέσματα Θεωρίας Χώρων *Hilbert*

Σε αυτό το εισαγωγικό κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε βασικά αποτελέσματα της θεωρίας των χώρων *Hilbert*, τα οποία θα μας χρειασθούν στην συνέχεια. Η παρουσίαση θα γίνει σε αφηρημένη μορφή. Πριν ξεκινήσουμε την παρουσίαση, θα δούμε ορισμένα προκαταρκτικά αποτελέσματα και συμβολισμούς.

1.1 Συμβολισμοί και προκαταρκτικά

Τα προβλήματα συνοριακών τιμών για διαφορικές εξισώσεις διατυπώνονται συνήθως σε ανοικτά, συνεκτικά, μη κενά υποσύνολα του \mathbb{R}^n . Τέτοια υποσύνολα ονομάζονται *χωρία* και συμβολίζονται με Ω .

Ένα τυπικό σημείο στον \mathbb{R}^n συμβολίζεται με $x = (x_1, \dots, x_n)$ και η νόρμα του δίδεται από $|x|^2 = \left(\sum_{j=1}^n x_j^2\right)$. Το εσωτερικό γινόμενο δυο σημείων x, y στον \mathbb{R}^n θα δηλώνεται ως $x \cdot y = \sum_{j=1}^n x_j y_j$.

Αν $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ είναι μια n -οστή πλειάδα μη αρνητικών ακεραίων α_j , όπου καλούμε τον α ως *πολυδείκτη* και δηλώνουμε με x^α το μονώνυμο $x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$, το οποίο έχει βαθμό $|\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j$. Όμοια, αν συμβολίσουμε με $D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$, τότε η παράσταση,

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n}, \quad (1.1.1)$$

δηλώνει τον διαφορικό τελεστή τάξης $|\alpha|$. Προφανώς, $D^{(0, \dots, 0)} u = u$. Δοσμένης μιας συνάρτησης $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ορίζουμε τις μερικές παραγώγους της, τάξης $|\alpha|$, ως,

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}. \quad (1.1.2)$$

Σύμφωνα με την (1.1.2), μια γραμμική διαφορική εξίσωση τάξης k στο Ω μπορεί να γραφεί ως,

$$\sum_{|\alpha| \leq k} \vartheta_\alpha(x) D^\alpha u = f(x), \quad (1.1.3)$$

όπου οι συντελεστές $\vartheta_\alpha(x)$ και $f(x)$ είναι συναρτήσεις του x στο Ω .

Ορισμός 1.1 (Φορέας συνάρτησης) Αν $G \subset \mathbb{R}^n$ μη κενό, όπου με \bar{G} συμβολίζουμε τα εσωτερικά του σημεία μαζί με τα συνοριακά του σημεία του G στον \mathbb{R}^n . Θα συμβολίζουμε με $G \Subset \Omega$

αν $\bar{G} \subset \Omega$ και \bar{G} είναι συμπαγές, δηλαδή κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του \mathbb{R}^n . Αν μια συνάρτηση u ορίζεται στο G , ορίζουμε τον φορέα της u να είναι το σύνολο,

$$\text{supp}(u) = \overline{\{x \in G : u(x) \neq 0\}}. \quad (1.1.4)$$

Θα λέμε ότι η u έχει συμπαγή φορέα στο Ω αν $\text{supp}(u) \Subset \Omega$.

Ορισμός 1.2 (Απόσταση σημείου από χώρο) Αν $x \in \mathbb{R}^n$ και $G \subset \mathbb{R}^n$, θα συμβολίζουμε με $\text{dist}(x, G)$ την απόσταση του σημείου x από το G , και αυτός ο αριθμός θα είναι ο $\inf_{y \in G} |x - y|$. Ομοια, αν $F, G \subset \mathbb{R}^n$ και τα δυο μη κενά, τότε ορίζουμε την μεταξύ τους απόσταση, ως,

$$\text{dist}(F, G) = \inf_{y \in F} \text{dist}(y, G) = \inf_{\substack{x \in G \\ y \in F}} |x - y|.$$

1.2 Διανυσματικοί χώροι

Ένα σύνολο V στοιχείων u, v, w, \dots καλείται διανυσματικός χώρος αν,

1. Για κάθε ζεύγος στοιχείων $u, v \in V$ ορίζουμε το νέο στοιχείο $w \in V$ το οποίο είναι το άθροισμα τους και το συμβολίζουμε ως $w = u + v$.
2. Για κάθε μιγαδικό αριθμό λ και για κάθε $u \in V$ ορίζουμε το νέο στοιχείο $w = \lambda u \in V$ ως το γινόμενο των λ και u .
3. Το άθροισμα και γινόμενο που ορίσαμε παραπάνω έχουν τις παρακάτω ιδιότητες:
 - $\forall u, v \in V : u + v = v + u$.
 - $\forall u, v, w \in V : (u + v) + w = u + (v + w)$.
 - $\exists 0 \in V$ τέτοιο ώστε $u + 0 = u, \forall u \in V$.
 - $\forall u \in V, \exists (-u) \in V$ τέτοιο ώστε $u + (-u) = 0$.
 - $1 \cdot u = u, \forall u \in V$.
 - $\lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u, \forall u \in V$ και μιγαδικά λ, μ .
 - $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$ για κάθε $u \in V$ και μιγαδικά λ, μ .
 - $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$ για κάθε $u, v \in V$ και μιγαδικό λ .

Τα στοιχεία $u, v, w, \dots \in V$ καλούνται διανύσματα. Η έκφραση

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n,$$

με λ_i μιγαδικοί αριθμοί και $u_i \in V$ για κάθε $i = 1, \dots, n$ καλείται γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων u_i για $i = 1, \dots, n$. Τα διανύσματα u_1, \dots, u_n καλούνται γραμμικά εξαρτημένα αν υπάρχουν αριθμοί $\lambda_i, i = 1, \dots, n$ για τους οποίους θα ισχύει,

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n = 0.$$

Καλούνται γραμμικώς ανεξάρτητα αν δεν είναι γραμμικώς εξαρτημένα, δηλαδή αν $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n = 0$ τότε,

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0.$$

Ο διανυσματικός χώρος V καλείται πεπερασμένης διάστασης (πχ διάστασης n), αν V περιέχει n γραμμικώς ανεξάρτητα στοιχεία και αν τα $n + 1$ διανύσματα στον V είναι γραμμικώς εξαρτημένα. Ως συνέπεια, το σύνολο των n ανεξάρτητων διανυσμάτων αποτελούν μια βάση του V , δηλαδή το σύνολο των γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων θα παράγει τον V , κάτι που σημαίνει ότι κάθε $u \in V$ μπορεί να γραφεί σαν μοναδικός γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων βάσης.

1.3 Εσωτερικό γινόμενο

Ένας διανυσματικός χώρος V καλείται *χώρος εσωτερικού γινομένου* αν για κάθε ζεύγος διανυσμάτων $u, v \in V$ μπορούμε να ορίσουμε έναν μιγαδικό αριθμό, τον οποίο δηλώνουμε ως (u, v) και τον ονομάζουμε *εσωτερικό γινόμενο των u, v* , με τις παρακάτω ιδιότητες.

1. $\forall u \in V : (u, u) \geq 0$. Αν $(u, u) = 0$ τότε $u = 0$.
2. $(u, v) = \overline{(v, u)}$ για κάθε $u, v \in V$ όπου με \bar{z} συμβολίζουμε το συζυγές μέρος του μιγαδικού αριθμού z .
3. $(\lambda u + \mu v, w) = \lambda(u, w) + \mu(v, w)$ για κάθε $u, v, w \in V$ και λ, μ μιγαδικά.

Ως συνέπεια θα έχουμε ότι $(u, \lambda u) = \bar{\lambda}(u, v)$, $\forall u, v \in V$ και μιγαδικό λ . Τα διανύσματα u, v καλούνται *ορθογώνια* αν $(u, v) = 0$.

Για κάθε $u \in V$ ορίζουμε τον μη αρνητικό αριθμό $\|u\|$ ως εξής.

$$\|u\|^2 = (u, u),$$

η οποία καλείται *νόρμα* του $u \in V$, με τις παρακάτω ιδιότητες.

1. $\|u\| \geq 0$ και αν $\|u\| = 0$ τότε $u = 0$.
2. Για κάθε μιγαδικό λ και $u \in V$ θα ισχύει, $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$.
3. $\forall u, v \in V : \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

Για να αποδείξουμε την 3. θα πρέπει να ορίσουμε την ανισότητα των *Cauchy-Schwarz*.

Πρόταση 1.1 (Ανισότητα Cauchy-Schwarz) Για κάθε $u, v \in V$ ισχύει ότι,

$$|(u, v)| \leq \|u\| \|v\|. \tag{1.3.1}$$

Για την ιδιότητα (3) η οποία ονομάζεται *τριγωνική ανισότητα* θα έχουμε,

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= (u + v, u + v) = (u, v) + (v, v) + (u, v) + (v, u) \\ &= \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2|(u, v)| \leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\| \|v\| \\ &= (\|u\| + \|v\|)^2 \end{aligned}$$

Αν ο διανυσματικός χώρος V είναι εφοδιασμένος μόνο με τις ιδιότητες (1) – (3), τότε καλείται *διανυσματικός χώρος με νόρμα*.

1.4 Χώροι Hilbert

Πριν ορίσουμε τους χώρους *Hilbert* θα παρουσιάσουμε μερικές έννοιες που θα είναι χρήσιμες στην συνέχεια.

Στον χώρο V ορίζουμε την *απόσταση* μεταξύ δυο διανυσμάτων $u, v \in V$. Ορίζουμε την απόσταση τους να είναι $\|u - v\|$ και θα την συμβολίζουμε με ρ . Πιο συγκεκριμένα η απόσταση $u \in V$ από το $v \in V$ ή αντίστροφα θα είναι $\rho(u, v) = \|u - v\|$. Αν u_0 είναι ένα σταθεροποιημένο διάνυσμα του V και $\delta > 0$ τότε το σύνολο των στοιχείων $v \in V$ τα οποία ικανοποιούν την $\|v - u_0\| < \delta$, καλείται *ανοιχτή μπάλα με κέντρο το u_0 και ακτίνα δ* . Ανάλογα, το σύνολο των στοιχείων $v \in V$ που ικανοποιούν την $\|v - u_0\| \leq \delta$, καλείται *κλειστή μπάλα με κέντρο το u_0 και ακτίνα δ* .

Λέμε ότι η ακολουθία διανυσμάτων u_1, u_2, u_3, \dots στον V λέγεται *συγκλίνουσα* αν υπάρχει διάνυσμα $u \in V$ τέτοια ώστε για δοσμένο $\epsilon > 0$ υπάρχει θετικός ακέραιος $N = N(\epsilon)$ για τον οποίο ισχύει ότι,

$$\|u_n - u\| < \epsilon, \quad \forall n \geq N.$$

Ονομάζουμε το u ως *όριο* της ακολουθίας $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ και γράφουμε $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = u$ ή $u_n \rightarrow u$, $n \rightarrow +\infty$ στον V . Είναι εύκολο να δούμε ότι κάθε συγκλίνουσα ακολουθία θα έχει μοναδικό όριο. Επίσης $u_n \rightarrow u \in V$ αν και μόνο αν $\|u_n - u\| \rightarrow 0$, $n \rightarrow +\infty$.

Μια ακολουθία ονομάζεται ακολουθία *Cauchy* αν και μόνο αν υπάρχει $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε να υπάρχει $N = N(\epsilon)$ για το οποίο ισχύει,

$$\|u_n - u_m\| < \epsilon, \quad \forall m, n \geq N.$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι κάθε συγκλίνουσα ακολουθία *Cauchy*, ενώ το αντίθετο δεν είναι πάντοτε αληθές. Θα λέμε τον V *πλήρη* αν κάθε ακολουθία *Cauchy* στον V είναι συγκλίνουσα. Ένα υποσύνολο A του V καλείται *πυκνό* υποσύνολο του V αν για κάθε $u \in V$ υπάρχει ακολουθία $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ τέτοια ώστε $u_n \rightarrow u$, $n \rightarrow +\infty$.

Ορισμός 1.3 Ένας πλήρης χώρος με εσωτερικό γινόμενο V καλείται *χώρος Hilbert*. Πιο συγκεκριμένα, *χώρος Hilbert* είναι ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο όπου κάθε ακολουθία *Cauchy* είναι πάντα συγκλίνουσα. Θα συμβολίζουμε τον χώρο Hilbert με το γράμμα H .

Ένα υποσύνολο S του H θα καλείται *υπόχωρος* του H αν $u, v \in S$ συνεπάγεται ότι $\lambda u + \mu v \in S$ για κάθε μιγαδικό λ, μ . Ο υπόχωρος S του H καλείται *πυκνός υπόχωρος* του H αν ο S είναι πυκνό υποσύνολο του H και υπόχωρος του H . Ο υπόχωρος S ονομάζεται *κλειστός υπόχωρος* του H αν S είναι υπόχωρος του H και ισχύει η παρακάτω ιδιότητα. Δοσμένης μιας τυχαιάς συγκλίνουσας ακολουθίας στον H τέτοιας ώστε $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in S$ το όριο της u ανήκει στον S , $u \in S$.

1.5 Φραγμένα γραμμικά συναρτησιακά

Έστω H ένας χώρος Hilbert. Ορίζουμε το *συναρτησιακό* \mathcal{F} στον H ως μια απεικόνιση από τον χώρο H στους μιγαδικούς αριθμούς. Πιο συγκεκριμένα, $\mathcal{F} : H \rightarrow \mathbb{C}$ όπου $H \ni \phi \mapsto \mathcal{F}(\phi) \in \mathbb{C}$. Το συναρτησιακό \mathcal{F} στον H καλείται *γραμμικό συναρτησιακό* αν για κάθε $\phi, \psi \in H$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ ισχύει ότι,

$$\mathcal{F}(\lambda\phi + \mu\psi) = \lambda\mathcal{F}(\phi) + \mu\mathcal{F}(\psi). \quad (1.5.1)$$

Το συναρτησιακό \mathcal{F} στον H καλείται *φραγμένο* αν,

$$\sup_{0 \neq \phi \in H} \frac{|\mathcal{F}(\phi)|}{\|\phi\|} < \infty. \quad (1.5.2)$$

Αν το συναρτησιακό \mathcal{F} είναι φραγμένο, τότε ορίζουμε την νόρμα του ως,

$$\|\mathcal{F}\| := \sup_{0 \neq \phi \in H} \frac{|\mathcal{F}(\phi)|}{\|\phi\|}. \quad (1.5.3)$$

Πρόταση 1.2 Έστω \mathcal{F} γραμμικό συναρτησιακό στον H . Τότε το συναρτησιακό \mathcal{F} είναι συνεχές αν και μόνο αν είναι φραγμένο.

Απόδειξη Έστω \mathcal{F} φραγμένο συναρτησιακό. Έστω συγκλίνουσα ακολουθία $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ στον H τέτοια ώστε $\phi_n \rightarrow \phi$, $n \rightarrow +\infty$. Τότε,

$$|\mathcal{F}(\phi_n) - \mathcal{F}(\phi)| = |\mathcal{F}(\phi_n - \phi)| \leq \|\mathcal{F}\| \|\phi_n - \phi\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty.$$

Συνεπώς, $\mathcal{F}(\phi_n) \rightarrow \mathcal{F}(\phi)$ στον \mathbb{C} , άρα \mathcal{F} συνεχής. Η ανισότητα $|\mathcal{F}(\phi)| \leq \|\mathcal{F}\| \|\phi\|$ προκύπτει εύκολα από τον ορισμό της νόρμας (1.5.3). Αντίστροφα, αν το \mathcal{F} είναι συνεχές συναρτησιακό, θα αποδείξουμε ότι είναι και φραγμένο. Έστω $\phi_0 \in H$, όπου \mathcal{F} είναι συνεχές, τότε από τον ορισμό της συνέχειας, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $|\mathcal{F}(\phi_0) - \mathcal{F}(h)| < \epsilon$ αν $\|h - \phi_0\| \leq \delta$. Έστω $\phi \neq 0$ ένα τυχαίο στοιχείο του χώρου H , τότε

$$\mathcal{F}(\phi) = \mathcal{F}\left(\frac{\delta\phi\|\phi\|}{\delta\|\phi\|}\right) = \frac{\|\phi\|}{\delta} \mathcal{F}\left(\frac{\delta\phi}{\|\phi\|}\right) = \frac{\|\phi\|}{\delta} \left\{ \mathcal{F}\left(\frac{\delta\phi}{\|\phi\|} + \phi_0\right) - \mathcal{F}(\phi_0) \right\}.$$

Αν $h = \phi_0 + \frac{\delta\phi}{\|\phi\|}$ τότε $\|h - \phi_0\| \leq \delta$ και

$$\mathcal{F}(\phi) = \frac{\|\phi\|}{\delta} \{ \mathcal{F}(h) - \mathcal{F}(\phi_0) \},$$

συνεπώς,

$$|\mathcal{F}(\phi)| = \frac{\|\phi\|}{\delta} |\mathcal{F}(h) - \mathcal{F}(\phi_0)| \leq \frac{\epsilon}{\delta} \|\phi\|,$$

ή ισοδύναμα,

$$\frac{|\mathcal{F}(\phi)|}{\|\phi\|} < \frac{\epsilon}{\delta}.$$

Σταθεροποιούμε το $\epsilon = \epsilon_0 > 0$. Τότε $\delta = \delta(\epsilon_0) = \delta_0$ και ϵ_0, δ_0 ανεξάρτητα του ϕ , άρα,

$$\|\mathcal{F}\| = \sup_{0 \neq \phi \in H} \frac{|\mathcal{F}(\phi)|}{\|\phi\|} \leq \frac{\epsilon_0}{\delta_0} < \infty.$$

□

Έστω \mathcal{F}, \mathcal{G} δυο φραγμένα, γραμμικά συναρτησιακά στον H . Ορίζουμε το άθροισμα τους ως $\mathcal{F} + \mathcal{G} = \mathcal{L}$ με $\mathcal{L}(\phi) = \mathcal{F}(\phi) + \mathcal{G}(\phi)$ για κάθε $\phi \in H$. Επίσης το βαθμωτό γινόμενο τους με $\lambda \in \mathbb{C}$ ως $\lambda\mathcal{F} = \mathcal{G}$ όπου $\mathcal{G}(\phi) = \lambda\mathcal{F}(\phi)$ για κάθε $\phi \in H$.

Ορισμός 1.4 (Δυϊκός χώρος) Έστω $\mathcal{F} : H \rightarrow \mathbb{C}$ ένα φραγμένο, γραμμικό συναρτησιακό. Ορίζουμε τον H' ως τον χώρο όλων των γραμμικών και φραγμένων συναρτησιακών του H , δηλαδή $\mathcal{F} \in H'$ και τον ονομάζουμε δυϊκό του H . Ο H' αποτελεί γραμμικό χώρο. Η νόρμα $\|\cdot\|$ όπως ορίστηκε στην (1.5.3) αποτελεί νόρμα στον H' , συνεπώς H' είναι χώρος με νόρμα. Τέλος ο H' μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι είναι πλήρης, δηλαδή κάθε ακολουθία Cauchy στον H' συγκλίνει σε στοιχείο του H' .

Ένα παράδειγμα ενός φραγμένου, γραμμικού συναρτησιακού στον H μπορεί να κατασκευασθεί από το εσωτερικό γινόμενο στον H με τα στοιχεία του H και με ένα σταθεροποιημένο στοιχείο $f \in H$. Πιο συγκεκριμένα, δοσμένου ενός $f \in H$, ορίζουμε για κάθε $\phi \in H$ τον αριθμό $\mathcal{F}(\phi)$, ως,

$$\mathcal{F}(\phi) = (\phi, f). \quad (1.5.4)$$

Το παραπάνω συναρτησιακό είναι γραμμικό και φραγμένο. Θα δούμε παρακάτω ότι και το αντίστροφο ισχύει, δηλαδή κάθε φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό στον H θα έχει την μορφή (ϕ, f) για κάποιο $f \in H$.

1.6 Φραγμένοι γραμμικοί τελεστές

Έστω H χώρος Hilbert και M υπόχωρος του H . Ως *τελεστή* ορίζουμε την απεικόνιση $T : M \rightarrow H$. Ο τελεστής T ορίζεται στον υπόχωρο M του H και απεικονίζει κάθε διάνυσμα $u \in M$ με μοναδικό τρόπο στον H και πιο συγκεκριμένα στο στοιχείο $Tu \in H$. Είναι γραμμικός αν για κάθε $u, v \in V$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ ισχύει,

$$T(\lambda u + \mu v) = \lambda T(u) + \mu T(v).$$

Ο υπόχωρος M του H στον οποίο ορίζεται ο τελεστής T καλείται *χωρίο* του T και συμβολίζεται με $D(T)$. Η *εικόνα* του T είναι το σύνολο των διανυσμάτων $u \in H$ για τα οποία αντιστοιχεί τουλάχιστον ένα $v \in D(T)$ τέτοιο ώστε $Tv = u$, δηλαδή,

$$R(T) = \{u \in H : \exists v \in D(T) \text{ τέτοιο ώστε } Tv = u\}. \quad (1.6.1)$$

Ορίζουμε επίσης τον *πυρήνα* του τελεστή T ως,

$$\ker(T) = \{u \in D(T) : Tu = 0\}. \quad (1.6.2)$$

Ο τελεστής T καλείται *ένα προς ένα* αν για $u_1 \neq u_2 \rightarrow Tu_1 \neq Tu_2$, και *επί* αν για κάθε $u \in H$ μπορεί να βρεθεί $v \in D(T)$ τέτοιο ώστε $Tv = u$. Ισοδύναμα βάση της (1.6.1) θα πρέπει $R(T) = H$. Οι $R(T)$ και $\ker(T)$ είναι υπόχωροι του H . Ένα γραμμικός τελεστής που ορίζεται σε όλον τον χώρο H , δηλαδή $D(T) = H$, θα λέγεται *γραμμικός τελεστής στον H* .

Ο γραμμικός τελεστής T στον H είναι *φραγμένος* αν,

$$\sup_{0 \neq \phi \in H} \frac{\|T\phi\|}{\|\phi\|} < \infty. \quad (1.6.3)$$

Έστω γραμμικός και φραγμένος τελεστής T στο \cdot . Ορίζουμε την *νόρμα* του ως,

$$\|T\| = \sup_{0 \neq \phi \in H} \frac{\|T\phi\|}{\|\phi\|}, \quad (1.6.4)$$

και ως συνέπεια $\|T\phi\| \leq \|T\|\|\phi\|$, $\forall \phi \in H$.

Ο γραμμικός τελεστής T στον H είναι *συνεχής* αν για $f_n \rightarrow f$, $n \rightarrow \infty$ στον H ισχύει ότι $\|Tf_n - Tf\| \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Ανάλογα με τα φραγμένα γραμμικά συναρτησιακά μπορεί να αποδειχθεί ότι ο *τελεστής T στο H είναι φραγμένος αν και μόνο αν είναι συνεχής*.

Έστω T, S, \dots φραγμένοι γραμμικοί τελεστές στον H . Ορίζουμε το *άθροισμα* $T+S$ ως γραμμικό τελεστή W στον H , δηλαδή $T+S = W$ με $W(\phi) = T(\phi) + S(\phi)$, $\forall \phi \in H$. Όμοια το *γινόμενο* με έναν $\lambda \in \mathbb{C}$ ως $\lambda T = S$ με $S(\phi) = \lambda T(\phi)$, $\forall \phi \in H$.

1.7 Βασικά αποτελέσματα σε αφηρημένη μορφή

Βασικό αντικείμενο αυτής της ενότητας είναι η παρουσίαση δυο χρήσιμων αποτελεσμάτων της Συναρτησιακής Ανάλυσης. Το πρώτο αφορά τις βέλτιστες προσεγγίσεις από κλειστούς υπόχωρους χώρων Hilbert και το δεύτερο είναι το Θεώρημα αναπαράστασης του Riesz.

Πολλές φορές στις εφαρμογές θα προσεγγίζουμε στοιχεία ενός χώρου με στοιχεία υπόχωρων του χώρου. Υπάρχουν πολλές προσεγγίσεις, αλλά συνήθως μας ενδιαφέρει κάποια "βέλτιστη".

Ορισμός 1.5 (Βέλτιστη προσέγγιση) Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα, G ένας υπόχωρος του και $x \in X$. Ένα στοιχείο $y \in Y$ αν υπάρχει θα ονομάζεται *βέλτιστη προσέγγιση του x από τον G* , αν ισχύει ότι,

$$\|x - y\| = \inf_{z \in G} \|x - z\|. \quad (1.7.1)$$

Πρόταση 1.3 Έστω G κλειστός υπόχωρος ενός χώρου Hilbert H . Τότε, δοσμένου ενός $x \in H$ υπάρχει μοναδικό στοιχείο $y \in G$ τέτοιο ώστε,

$$\|x - y\| = \inf_{z \in G} \|x - z\| \quad (1.7.2)$$

$$(x - y, z) = 0 \text{ για κάθε } x \in G. \quad (1.7.3)$$

Συνοψίζοντας, δοσμένου ενός $x \in H$ θα ονομάζουμε την y ως *ορθογώνια προβολή* του x στον κλειστό υπόχωρο G ή την *βέλτιστη προσέγγιση* του x από τον G . Η ύπαρξη και η μοναδικότητα της είναι άμεση συνέπεια της παραπάνω πρότασης.

Αν $f = x - y$ τότε $x = f + y$ με $y \in G$ και $(f, z) = 0, \forall z \in G$. Συνεπώς f είναι ορθογώνια σε όλα τα διανύσματα του κλειστού υπόχωρου G . Αν G^\perp είναι το σύνολο όλων αυτών των διανυσμάτων,

$$G^\perp = \{u \in H : (u, z) = 0, \forall z \in G\}. \quad (1.7.4)$$

Το σύνολο G^\perp καλείται *ορθογώνιο συμπλήρωμα* του G και αποτελεί κλειστό υπόχωρο του H . Πράγματι, έστω μια ακολουθία $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ στον G^\perp τέτοια ώστε $u_n \rightarrow u, n \rightarrow \infty$. Αφού $u_n \in G^\perp$ τότε $(u_n, z) = 0, \forall z \in G$. Ισοδύναμα,

$$(u, z) = (u, z) - (u_n, z), \forall z \in G.$$

Συνεπώς, για κάθε $z \in G$,

$$|(u, z)| = |(u - u_n, z)| \leq \|u - u_n\| \|z\|,$$

όπου $\|u - u_n\| \rightarrow 0$ καθώς $n \rightarrow \infty$. Ως συνέπεια, $(u, z) = 0, \forall z \in G$, και τότε $u \in G^\perp$. Κατ'επέκταση G^\perp κλειστός υπόχωρος του H . Από τον ορισμό του G^\perp προκύπτει ότι $G \cap G^\perp = \{0\}$, και τότε μπορούμε να γράψουμε τον H σαν ευθύ άθροισμα των G και G^\perp ,

$$H = G \oplus G^\perp,$$

που σημαίνει ότι κάθε στοιχείο $x \in H$ μπορεί να γραφεί μοναδικά ως άθροισμα των $y \in G$ και $f \in G^\perp$, δηλαδή $x = y + f$.

Ένα βασικότατο και ιδιαίτερα χρήσιμο αποτέλεσμα για τους χώρους Hilbert αποτελεί το λεγόμενο Θεώρημα αναπαράστασης του Riesz. Όπως διαπιστώσαμε σε προηγούμενη ενότητα για $z \in H$ το συναρτησιακό $\mathcal{F} : H \rightarrow \mathbb{C}$ με τύπο $\mathcal{F}(\phi) := (\phi, z)$ με $z \in H$ σταθεροποιημένο είναι γραμμικό και φραγμένο. Το Θεώρημα αναπαράστασης του Riesz είναι το αντίστροφο αυτού το αποτελέσματος, δηλαδή λέει ότι κάθε φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό μπορεί να παρασταθεί ως εσωτερικό γινόμενο με ένα κατάλληλο στοιχείο του χώρου. Πιο συγκεκριμένα έχουμε το παρακάτω Θεώρημα.

Θεώρημα 1.1 (Θεώρημα Αναπαράστασης του Riesz) Κάθε γραμμικό και φραγμένο συναρτησιακό \mathcal{F} στον χώρο Hilbert H , μπορεί να αναπαρασταθεί στην μορφή $\mathcal{F}(\phi) = (\phi, f)$ για κάθε $\phi \in H$ με $f \in H$ σταθεροποιημένο, το οποίο στοιχείο είναι μοναδικό. Επιπλέον, $\|\mathcal{F}\| = \|f\|$.

Απόδειξη Δηλώνουμε με G το σύνολο των στοιχείων $g \in H$ τέτοιων ώστε $\mathcal{F}(g) = 0$, δηλαδή $G = \ker \mathcal{F}$. Ο G ως εκ τούτου είναι κλειστός υπόχωρος του H . Πράγματι, έστω $g_n \rightarrow g, n \rightarrow \infty$ με $g_n \in G$. Τότε, $\mathcal{F}(g_n) = 0$ αφού $g_n \in G$. Χρησιμοποιώντας την τελευταία ιδιότητα, προκύπτει ότι,

$$\mathcal{F}(g) - \mathcal{F}(g_n) = \mathcal{F}(g),$$

ή ισοδύναμα,

$$\mathcal{F}(g - g_n) = \mathcal{F}(g).$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα *Cauchy-Schartz*, λαμβάνουμε,

$$|\mathcal{F}(g)| \leq \|\mathcal{F}\| \|g - g_n\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Συνεπώς, $\mathcal{F}(g) = 0$ αν και μόνο αν $g \in G$. Υπάρχουν δυο πιθανότητες τώρα. Είτε $G = H$ ή $G \subsetneq H$. Στην πρώτη περίπτωση \mathcal{F} είναι το μηδενικό συναρτησιακό στον H και το Θεώρημα ισχύει για $f = 0$. Μεγαλύτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η δεύτερη περίπτωση όπου $G \subsetneq H$. Τότε ο G^\perp περιέχει μη μηδενικά στοιχεία. Έστω $f_0 \in G^\perp$ με $f_0 \neq 0$. Για κάθε $\phi \in H$ ορίζουμε το διάνυσμα $\mathcal{F}(\phi)f_0 - \mathcal{F}(f_0)\phi$, το οποίο ανήκει στον G . Πράγματι,

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}(\phi)f_0 - \mathcal{F}(f_0)\phi) = \mathcal{F}(\phi)\mathcal{F}(f_0) - \mathcal{F}(f_0)\mathcal{F}(\phi) = 0.$$

Αφού $f_0 \in G^\perp$ τότε για κάθε $\phi \in H$,

$$(\mathcal{F}(\phi)f_0 - \mathcal{F}(f_0)\phi, f_0) = 0.$$

Ισοδύναμα,

$$\mathcal{F}(\phi)\|f_0\|^2 = \mathcal{F}(f_0)(\phi, f_0),$$

από την οποία χρησιμοποιώντας την γραμμικότητα του συναρτησιακού \mathcal{F} , προκύπτει ότι,

$$\mathcal{F}(\phi) = \left(\phi, \frac{\mathcal{F}(f_0)}{\|f_0\|^2} f_0 \right), \quad \forall \phi \in H.$$

Θέτοντας $f = \frac{\mathcal{F}(f_0)}{\|f_0\|^2} f_0$ η παραπάνω ισότητα γίνεται, $\mathcal{F}(\phi) = (\phi, f)$, $\forall \phi \in H$ με f κατάλληλο σταθεροποιημένο στοιχείο του H . Συνεπώς, μέχρι στιγμής έχουμε αποδείξει την *ύπαρξη* της f .

Για την *μοναδικότητα* της f υποθέτουμε ότι υπάρχουν f_1 και f_2 με $f_1 \neq f_2$ για κάθε $\phi \in H$ για τα οποία το συναρτησιακό \mathcal{F} μπορεί να γραφεί ως $\mathcal{F}(\phi) = (f_1, \phi) = (f_2, \phi)$, $\forall \phi \in H$. Τότε, $(f_1 - f_2, \phi) = 0$, $\forall \phi \in H$ και ως εκ τούτου $f_1 = f_2$.

Επιπλέον,

$$|\mathcal{F}(\phi)| = |(\phi, f)| \leq \|\phi\| \|f\|,$$

ή ισοδύναμα,

$$\|\mathcal{F}\| = \sup_{0 \neq \phi \in H} \frac{|\mathcal{F}(\phi)|}{\|\phi\|} \leq \|f\|.$$

Από την άλλη μεριά, για $\phi = f$, λαμβάνουμε $\mathcal{F}(f) = (f, f) = \|f\|^2$ και τότε,

$$\|f\|^2 \leq \|\mathcal{F}\| \|f\| \Rightarrow \|f\| \leq \|\mathcal{F}\|.$$

Συνολικά $\|\mathcal{F}\| = \|f\|$. □

1.8 Τα θεωρήματα *Lax-Milgram* και *Galerkin*

Έστω H ένα πραγματικός χώρος *Hilbert*, δηλαδή πλήρης χώρος με εσωτερικό γινόμενο στους πραγματικούς αριθμούς. Θεωρούμε την διγραμμική μορφή $B(\cdot, \cdot) : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι μια γραμμική συνάρτηση ως προς καθένα από τα στοιχεία ξεχωριστά, δηλαδή για κάθε $u, v, w \in H$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} B(\lambda u + \mu v, w) = \lambda B(u, w) + \mu B(v, w) \\ B(w, \lambda u + \mu v) = \lambda B(w, u) + \mu B(w, v). \end{cases} \quad (1.8.1)$$

Η διγραμμική μορφή $B(\cdot, \cdot)$ ονομάζεται *συμμετρική αν*,

$$B(w, v) = B(v, w), \quad \forall w, v \in H, \quad (1.8.2)$$

θεικά ορισμένη αν,

$$B(v, v) > 0, \forall v \in H, v \neq 0. \quad (1.8.3)$$

Επίσης η διγραμμική μορφή ονομάζεται *φραγμένη* στον H αν υπάρχει σταθερά $C \in \mathbb{R}$ για κάθε $u, v \in H$ ώστε,

$$|B(u, v)| \leq C\|u\|\|v\|, \quad (1.8.4)$$

και *ελλειπτική* αν σε έναν κλειστό υπόχωρο G του H , υπάρχει $a > 0$ για κάθε $v \in G$ ώστε,

$$B(v, v) \geq a\|v\|^2. \quad (1.8.5)$$

Υποθέτουμε ότι η διγραμμική μορφή $B(\cdot, \cdot) : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ **δεν** είναι συμμετρική, εκτός και αν διευκρινίζεται το αντίθετο. Ορίζουμε το φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό $\mathcal{F} : H \rightarrow \mathbb{R}$. Θεωρούμε το ακόλουθο μεταβολικό πρόβλημα. Ζητείται $u \in H$ τέτοιο ώστε,

$$B(u, v) = \mathcal{F}(v), \quad \forall v \in H. \quad (1.8.6)$$

Στην συνέχεια θα ασχοληθούμε με θέματα *ύπαρξης* και *μοναδικότητας* της λύσης u καθώς και της προσέγγισής της.

Θεώρημα 1.2 (Θεώρημα Lax-Milgram) Έστω H ένας πραγματικός χώρος Hilbert και $B(\cdot, \cdot) : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ η μη συμμετρική διγραμμική μορφή που ορίστηκε παραπάνω. Έστω $\mathcal{F} : H \rightarrow \mathbb{R}$ ένα δοσμένο, πραγματικό, φραγμένο, γραμμικό συναρτησιακό στον H . Τότε υπάρχει μοναδικό $u \in H$ για το οποίο ισχύει ότι,

$$B(u, v) = \mathcal{F}(v), \quad \forall v \in H. \quad (1.8.7)$$

Επιπλέον, $\|u\| \leq \frac{1}{a}\|\mathcal{F}\|$.

Απόδειξη Έστω $\phi \in H$ σταθεροποιημένο. Ορίζουμε το συναρτησιακό $\Phi : H \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $\Phi(v) = B(\phi, v)$ το οποίο είναι συνεχές γραμμικό συναρτησιακό στον H . Πράγματι το συναρτησιακό Φ είναι γραμμικό αφού η $B(\cdot, \cdot)$ είναι γραμμική και ως προς τις δυο μεταβλητές. Επίσης είναι φραγμένο, αφού,

$$|\Phi(v)| = |B(\phi, v)| \leq C\|\phi\|\|v\| \Rightarrow \|\Phi\| \leq C\|\phi\| < \infty.$$

Το γραμμικό και φραγμένο συναρτησιακό που ορίσαμε πληροί όλες τις απαραίτητες προϋποθέσεις του θεωρήματος αναπαράστασης του *Riesz*, συνεπώς υπάρχει μοναδικό στοιχείο $\tilde{\phi} \in H$ για το οποίο το συναρτησιακό Φ μπορεί να παρασταθεί ως εσωτερικό γινόμενο. Πιο συγκεκριμένα, υπάρχει μοναδικό $\tilde{\phi} \in H$ τέτοιο ώστε,

$$\Phi(v) = B(\phi, v) = (v, \tilde{\phi}), \quad \forall v \in H.$$

Για κάθε $\phi \in H$ ορίζουμε το $\tilde{\phi} \in H$ από την παραπάνω σχέση και την αντίστοιχη απεικόνιση $\phi \mapsto \tilde{\phi}$ με $\tilde{\phi} = A\phi$, δηλαδή,

$$B(\phi, v) = (v, A\phi), \quad \forall \phi \in H, \forall v \in H. \quad (1.8.8)$$

Ο τελεστής $A : H \rightarrow H$ που ορίσαμε παραπάνω είναι γραμμικός τελεστής. Πράγματι αν $\phi, \psi \in H$ για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $v \in H$ έχουμε,

$$\begin{aligned} (v, A(\lambda\phi + \mu\psi)) &= B(v, \lambda\phi + \mu\psi) = \lambda B(v, \phi) + \mu B(v, \psi) \\ &= \lambda(v, A\phi) + \mu(v, A\psi) = (v, \lambda A\phi + \mu A\psi), \quad \forall v \in H. \end{aligned}$$

Αφού ισχύει για κάθε $v \in H$, τότε $A(\lambda\phi + \mu\psi) = \lambda A\phi + \mu A\psi$, και κατ'επέκταση A γραμμικός τελεστής. Ισχυριζόμαστε ότι ο γραμμικός τελεστής A , ο οποίος ορίζεται ως $B(v, \phi) = (v, A\phi)$, $\forall v, \phi \in H$ έχει εικόνα $R(A)$ η οποία είναι κλειστός υπόχωρος του H . Πράγματι, έστω

$\hat{\phi}_n = A\phi_n$ μια συγκλίνουσα ακολουθία τέτοια ώστε $\hat{\phi}_n \rightarrow \hat{\phi}$ καθώς $n \rightarrow \infty$. Θα πρέπει να δείξουμε ότι $\hat{\phi} \in R(A)$. Αφού $\phi_n \in H$, τότε,

$$B(\phi_n, v) = (v, A\phi_n), \quad \forall v \in H,$$

ή ισοδύναμα,

$$B(\phi_n - \phi_m, v) = (A\phi_n - A\phi_m, v), \quad \forall v \in H, \forall m, n \in \mathbb{N}_0.$$

Επιλέγοντας $v = \phi_n - \phi_m$, και από την συνθήκη ελλειπτικότητας προκύπτει ότι,

$$\|\phi_n - \phi_m\| \leq \frac{1}{a} \|A\phi_n - A\phi_m\| < \epsilon.$$

Από υπόθεση η $\{\hat{\phi}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα άρα είναι ακολουθία *Cauchy*. Βάση της παραπάνω σχέσης και η $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ είναι ακολουθία *Cauchy* στον H . Ο H είναι πλήρης χώρος, άρα κάθε ακολουθία *Cauchy* είναι και συγκλίνουσα, συνεπώς υπάρχει $\phi \in H$ τέτοιο ώστε $\phi_n \rightarrow \phi$ καθώς $n \rightarrow \infty$. Ισχύει ότι,

$$|B(\phi_n, v) - B(\phi, v)| \leq C \|\phi_n - \phi\| \|v\| \rightarrow 0, \quad \forall v \in H,$$

συνεπώς,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B(\phi_n, v) = B(\phi, v), \quad \forall v \in H.$$

Επίσης $|(A\phi_n, v) - (A\phi, v)| \leq \|A\phi_n - A\phi\| \|v\|$ και τότε $(A\phi_n, v) = (\hat{\phi}_n, v) \rightarrow (\hat{\phi}, v)$. Μέχρι στιγμής, έχουμε

$$\begin{cases} B(\phi_n, v) \rightarrow B(\phi, v), & n \rightarrow \infty, \forall v \in H, \\ (A\phi_n, v) \rightarrow (\hat{\phi}, v), & n \rightarrow \infty, \forall v \in H. \end{cases}$$

Λόγω της $B(\phi_n, v) = (A\phi_n, v)$, $\forall v \in H$ και των παραπάνω σχέσεων, προκύπτει ότι $B(\phi, v) = (\hat{\phi}, v)$, $\forall v \in H$ και κατ'επέκταση $\hat{\phi} = A\phi$. Οπότε $R(A)$ κλειστός.

Ισχυριζόμαστε ότι ο τελεστής είναι επί ή ισοδύναμα ότι $R(A) = H$. Για να το δείξουμε, υποθέτουμε ότι δεν ισχύει, δηλαδή $R(A) \subsetneq H$. Τότε υπάρχει $z \neq 0$ με $z \in R(A)^\perp$ δηλαδή $\forall v \in R(A)$ θα ισχύει $(v, z) = 0$. Πιο συγκεκριμένα, $\forall \phi \in H$ ισχύει ότι $B(\phi, z) = (A\phi, z) = 0$ λόγω της υπόθεσης μας. Για $\phi = z$ λαμβάνουμε,

$$0 = B(z, z) \geq a \|z\|^2 \Rightarrow z = 0,$$

το οποίο είναι αδύνατο λόγω υπόθεσης, άρα $R(A) = H$.

Έστω $\mathcal{F} : H \rightarrow \mathbb{R}$ ένα φραγμένο, γραμμικό συναρτησιακό στον H . Από Θεώρημα αναπαράστασης του *Riesz* υπάρχει μοναδικό $\chi \in H$ τέτοιο ώστε $\mathcal{F}(v) = (\chi, v)$, $\forall v \in H$. Αφού $R(A) = H$ τότε υπάρχει μοναδικό $u \in H$ τέτοιο ώστε $Au = \chi$. Συνεπώς υπάρχει μοναδικό u τέτοιο ώστε,

$$\mathcal{F}(v) = (Au, v) = B(u, v), \quad \forall v \in H,$$

και έπεται η ύπαρξη του u . Για την μοναδικότητα, έστω ότι υπάρχουν $u_1 \neq u_2$ τέτοια ώστε $B(u_1, v) = \mathcal{F}(v) = B(u_2, v)$ για κάθε $v \in H$. Από την συνθήκη ελλειπτικότητας προκύπτει ότι $u_1 = u_2$.

Τέλος αφού $B(u, v) = \mathcal{F}(v)$ για $u \neq 0$ και χρησιμοποιώντας την συνθήκη ελλειπτικότητας, προκύπτει ότι $\|u\| \leq \frac{1}{a} \|\mathcal{F}\|$. \square

Τέλος, παρουσιάζουμε το βασικό Θεώρημα για την προσέγγιση *Galerkin* u_h της ακριβούς λύσης u του μεταβολικού προβλήματος της οποίας η ύπαρξη και η μοναδικότητα εξασφαλίζεται από το Θεώρημα *Lax-Milgram*.

Θεώρημα 1.3 (Θεώρημα Galerkin) Έστω H ένας πραγματικός χώρος Hilbert και $B(\cdot, \cdot) : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ η μη συμμετρική διγραμμική μορφή. Τότε για δοσμένο φραγμένο, γραμμικό συναρτησιακό $\mathcal{F} : H \rightarrow \mathbb{R}$, υπάρχει μοναδικό $u \in H$ τέτοιο ώστε $B(u, v) = \mathcal{F}(v)$, $\forall v \in H$, του οποίου η ύπαρξη εξασφαλίζεται από το Θεώρημα Lax-Milgram. Έστω $\{X_h\}$ με $0 < h < 1$ μια οικογένεια υπόχωρων πεπερασμένης διάστασης του H . Για κάθε h υπάρχει μοναδικό $u_h \in X_h$ τέτοιο ώστε,

$$B(u_h, v_h) = \mathcal{F}(v_h), \quad \forall v_h \in X_h.$$

Ονομάζουμε την u_h προσέγγιση Galerkin της u , στον X_h .

Απόδειξη Η ύπαρξη και η μοναδικότητα της $u_h \in X_h$ εξασφαλίζεται από το Θεώρημα Lax-Milgram όταν εφαρμοσθεί στον χώρο Hilbert $(X_h, \|\cdot\|)$. \square

Επιπλέον μπορούμε να εκτιμήσουμε το σφάλμα $u - u_h$ στην νόρμα του H . Αυτό παρουσιάζεται στο παρακάτω αποτέλεσμα.

Θεώρημα 1.4 (Λήμμα του Céa) Έστω X_h ένας χώρος πεπερασμένης διάστασης του H με u λύση του μεταβολικού πρόβληματος και u_h προσέγγιση της. Τότε ισχύει η εκτίμηση,

$$\|u - u_h\| \leq \frac{C}{a} \min_{\chi \in X_h} \|u - \chi\|, \quad (1.8.9)$$

με τις σταθερές C και a να οφείλονται στην συνέχεια και την ελλειπτικότητα της διγραμμικής μορφής B στον H .

Απόδειξη Αφού X_h είναι υπόχωρος του H έπεται ότι $B(u - u_h, \chi) = 0$ για κάθε $\chi \in X_h$. Επίσης από την ελλειπτικότητα της διγραμμικής μορφής έπεται $a\|u - u_h\|^2 \leq B(u - u_h, u - u_h)$. Όμως,

$$B(u - u_h, u - u_h) = B(u - u_h, u) - B(u - u_h, u_h) = B(u - u_h, u),$$

λόγω του ότι $B(u_h, \chi) = 0$, $\forall \chi \in X_h$ και τότε $B(u - u_h, u_h) = 0$. Συνεπώς,

$$B(u - u_h, u) = B(u - u_h, u - \chi) \leq C\|u - u_h\|\|u - \chi\|.$$

Από την τελευταία σχέση έπεται αμέσως η ζητούμενη εκτίμηση (1.8.9). \square

Συνέπεια 1.4.1 Με τον συμβολισμό των παραπάνω θεωρημάτων αν X_h είναι μια οικογένεια υπόχωρων που ικανοποιούν την

$$\liminf_{h \rightarrow 0} \inf_{\chi \in X_h} \|u - \chi\| = 0,$$

έπεται ότι

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\| = 0.$$

Τέλος υποθέτουμε ότι η διγραμμική μορφή $B(\cdot, \cdot) : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συμμετρική, τότε θεωρούμε το συμμετρικό μεταβολικό πρόβλημα εύρεσης $u \in H$ τέτοιας ώστε

$$B(u, v) = \mathcal{F}(v), \quad \forall v \in H,$$

με \mathcal{F} φραγμένο, γραμμικό συναρτησιακό στον H . Υποθέτουμε για $v \in H$ το μη γραμμικό συναρτησιακό $J : H \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο,

$$J(v) := \frac{1}{2}B(v, v) - \mathcal{F}(v), \quad (1.8.10)$$

και το αντίστοιχο πρόβλημα εύρεσης $z \in H$ τέτοιου ώστε,

$$J(z) = \min_{v \in H} J(v). \quad (1.8.11)$$

Τότε λαμβάνουμε το παρακάτω αποτέλεσμα.

Θεώρημα 1.5 Έστω η διγραμμική μορφή $B(\cdot, \cdot) : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι επιπλέον συμμετρική. Τότε το πρόβλημα ελαχιστοποίησης (1.8.11) στον H του J έχει μοναδική λύση η οποία συμπίπτει με την u με την ύπαρξη και την μοναδικότητα να εξασφαλίζονται από το Θεώρημα Lax-Milgram.

Απόδειξη Έστω u η μοναδική λύση του συμμετρικού μεταβολικού προβλήματος. Τότε για κάθε $w \in H$,

$$\begin{aligned} J(u+w) &= \frac{1}{2}B(u+w, u+w) - \mathcal{F}(u+w) \\ &= \left[\frac{1}{2}B(u, u) - \mathcal{F}(u) \right] + \frac{1}{2}B(w, w) + [B(u, w) - \mathcal{F}(w)] \\ &= J(u) + \frac{1}{2}B(w, w). \end{aligned}$$

Οπότε,

$$J(u+w) = J(u) + \frac{1}{2}B(w, w) \geq J(u) + \frac{a}{2}\|w\|^2,$$

χρησιμοποιώντας την συνθήκη ελλειπτικότητας της διγραμμικής μορφής $B(\cdot, \cdot)$. Συνεπώς, $\forall w \in H, w \neq 0 : J(u+w) > J(u)$, δηλαδή,

$$J(u) = \min_{v \in H} J(v), \text{ και } J(v) > J(u), \text{ αν } v \neq u.$$

□

Η ακόλουθη συνέπεια θα είναι ανάλογη του θεωρήματος Galerkin.

Συνέπεια 1.5.1 Με τον συμβολισμό του θεωρήματος Galerkin και την επιπλέον προϋπόθεση της συμμετρικότητας της διγραμμικής μορφής $B(\cdot, \cdot) : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$, το πρόβλημα ελαχιστοποίησης του συναρτησιακού J στον X_h έχει μοναδική λύση u_h η οποία συμπίπτει με την προσέγγιση Galerkin στον X_h της u , η οποία κατασκευάζεται στο Θεώρημα Galerkin.

Κεφάλαιο 2

Χώροι Sobolev

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε βασικά αποτελέσματα για χώρους Sobolev σε πολλές διαστάσεις.

2.1 Συμβολισμοί και προκαταρκτικά

Σε αυτήν την ενότητα θα εισάγουμε τον απαραίτητο συμβολισμό, που θα φανεί χρήσιμος στην συνέχεια.

Με Ω συμβολίζουμε ένα ανοιχτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n . Για λόγους απλότητας θεωρούμε μόνο πραγματικές συναρτήσεις ορισμένες στο Ω ή το $\bar{\Omega}$. Ορίζουμε,

1. $C(\Omega)$: Ο χώρος των συνεχών συναρτήσεων στο Ω .
2. $C^k(\Omega)$: Ο χώρος των k -φορές συνεχών συναρτήσεων στο Ω . Κάθε συνάρτηση $f(x)$, $x \in \Omega$ θα έχει την ιδιότητα ότι οι $D^\alpha f(x)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις στο Ω για κάθε ακέραιο $0 \leq \alpha_i \leq k$, $1 \leq i \leq k$, όπου $C^0(\Omega) = C(\Omega)$.
3. $C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k \geq 0} C^k(\Omega)$.
4. $C_0^k(\Omega)$: Ο χώρος των συναρτήσεων $C(\Omega)$ των οποίων ο φορέας είναι συμπαγής και περιέχεται στο Ω .
5. $C_0^k(\Omega) := C^k(\Omega) \cap C_0(\Omega)$.
6. $C_0^\infty(\Omega) := C^\infty(\Omega) \cap C_0(\Omega)$. Είναι το σύνολο των συναρτήσεων, που ορίζονται στο Ω , είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμες και έχουν συμπαγή φορέα που περιέχεται στο Ω . Τέλος, ονομάζονται *χώροι δοκιμής* ή *χώροι ελέγχου* και τα στοιχεία τους *συναρτήσεις δοκιμής*.

Στην συνέχεια θα παρουσιάσουμε βασικά αποτελέσματα για τους χώρους $L_p(\Omega)$. Με dx συμβολίζουμε το μέτρο Lebesgue στον \mathbb{R} . Ο χώρος $L_1(\Omega)$ αποτελείται από τις ολοκληρώσιμες συναρτήσεις f , κατά Lebesgue, στο Ω , δηλαδή συναρτήσεις τέτοιες ώστε,

$$\|f\|_{L_1(\Omega)} = \int_{\Omega} |f(x)| dx < \infty.$$

Πιο γενικά, έστω $1 \leq p < \infty$, ορίζουμε τους χώρους $L_p(\Omega)$ ως,

$$L_p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, : |f|^p \in L_1(\Omega)\}, \quad (2.1.1)$$

και

$$\|f\|_{L_p(\Omega)}^p = \int_{\Omega} |f(x)|^p dx. \quad (2.1.2)$$

Οι $\|f\|_{L_p}$, $1 \leq p < \infty$ είναι νόρμες στους αντίστοιχους χώρους L_p . Θα εστιάσουμε στον χώρο L_2 . Οι συναρτήσεις $f(x) \in L_2(\Omega)$ δεν είναι συναρτήσεις με την κλασική έννοια, αλλά είναι κλάσεις ισοδυναμίας συναρτήσεων, όπου η ισοδυναμία $f \sim g$ ισχύει αν και μόνο αν $f(x) = g(x)$ σχεδόν παντού στο Ω . Για παράδειγμα, λέμε ότι η $f = 0$ είναι στοιχείο του $L_2(\Omega)$ και εννοούμε ότι $f(x) = 0$ για κάθε x έξω από τα σύνολα μέτρου μηδέν του Ω . Ισοδύναμα, $f(x) = 0$ σχεδόν παντού στο Ω .

Θεωρούμε τον συμβολισμό $L_{loc}^1(\Omega)$ για να περιγράψουμε τις συναρτήσεις f στο Ω για τις οποίες ισχύει ότι $\int_K |f(x)| dx < \infty$ για κάθε συμπαγές υποσύνολο $K \subset \Omega$.

2.2 Χώροι Sobolev

Ουσιαστικό ρόλο στους χώρους Sobolev παίζουν οι γενικευμένες παράγωγοι.

Ορισμός 2.1 (Γενικευμένες παράγωγοι) Έστω $u, v \in L_{loc}^1(\Omega)$ και $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ ένα πολυδείκτης. Λέμε ότι η v είναι γενικευμένη ή ασθενής μερική παράγωγος $D^\alpha u$ της u αν

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \phi dx, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega). \quad (2.2.1)$$

Η γενικευμένη παράγωγος μιας συνάρτησης $L_{loc}^1(\Omega)$ είναι δυνατόν είτε να υπάρχει είτε να μην υπάρχει. Αν υπάρχει τότε θα είναι και μοναδική. Πράγματι, έστω $v_1, v_2 \in L_2(\Omega)$. Τότε θα ισχύουν τα ακόλουθα,

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v_1 \phi dx, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega),$$

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v_2 \phi dx, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Συνεπώς,

$$\int_{\Omega} (v_1 - v_2) \phi dx = 0, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Ο χώρος δοκιμής $C_0^\infty(\Omega)$ είναι πυκνός στον $L_2(\Omega)$ οπότε $v_1 - v_2 = 0$ στον $L_2(\Omega)$. Πιο γενικά μπορεί να αποδειχθεί ότι αν H χώρος Hilbert με $D \subset H$ πυκνό υποσύνολο στον H , τότε αν $(g, \phi) = 0, \forall \phi \in D \Rightarrow g = 0$ αφού υπάρχει ακολουθία $\phi_i \in D$ η οποία συγκλίνει στην g , δηλαδή $\phi_i \rightarrow g, i \rightarrow \infty$ στον H . Συνεπώς $(g, \phi_i) \rightarrow (g, g) \Rightarrow g = 0$.

Αν μια συνάρτηση $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ είναι k φορές παραγωγίσιμη, τότε υπάρχουν οι γενικευμένες παράγωγοι της $D^\alpha u$, για κάθε πολυδείκτη $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, τάξεως το πολύ k , και μάλιστα αυτές συμπίπτουν με τις αντίστοιχες κλασικές παραγωγούς της u . Επίσης η ασθενής παράγωγος για κάποιον πολυδείκτη α ορίζεται απευθείας για αυτόν τον πολυδείκτη, και είναι δυνατόν να μην υπάρχουν οι ασθενείς παράγωγοι για πολυδείκτες μικρότερης τάξης. Είναι φανερό ότι οι κλασικές παράγωγοι δεν έχουν αυτήν την ιδιότητα.

Έστω Ω ανοιχτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n και $1 \leq p < \infty$ με $k \in \mathbb{N}$.

Ορισμός 2.2 (Χώροι Sobolev ακέραιας τάξης) Ο χώρος Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ αποτελείται από τις συναρτήσεις $u \in L_p(\Omega)$ που έχουν ασθενείς παραγωγούς $D^\alpha u, \alpha \in \mathbb{N}_0^n$, τάξης έως και $|\alpha| \leq k$, και όλες αυτές οι μερικές παράγωγοι ανήκουν στον $L_p(\Omega)$.

Στον $W^{k,p}$ ορίζουμε την νόρμα $\|\cdot\|_{k,p}$ ως,

$$\|u\|_{k,p}^p := \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)}^p, \quad 1 \leq p < \infty. \quad (2.2.2)$$

Στα επόμενα κεφάλαια θα ασχοληθούμε μόνο με την περίπτωση όπου $p = 2$. Για $p = 2$ συνήθως συμβολίζουμε τον $W^{k,2}$ ως H^k . Αυτό συμβαίνει αφού οι χώροι H^k , είναι χώροι *Hilbert*. Συνεπώς, βάση της (2.2.2), θα ορίζουμε την νόρμα του H^k . Ορίζουμε,

$$\|u\|_{H^k(\Omega)}^2 := \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L_2(\Omega)}^2. \quad (2.2.3)$$

Το αντίστοιχο εσωτερικό γινόμενο στους χώρους *Sobolev* H^k , θα δίδεται από,

$$(u, v)_k := \sum_{|\alpha| \leq k} (D^\alpha u, D^\alpha v), \quad \forall u, v \in H^k(\Omega), \quad (2.2.4)$$

με (\cdot, \cdot) το εσωτερικό γινόμενο στον $L_2(\Omega)$,

$$(u, v) := \int_{\Omega} uv \, dx, \quad \forall u, v \in L_2(\Omega). \quad (2.2.5)$$

Θεώρημα 2.1 *Εστω Ω ανοιχτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n . Οι χώροι *Sobolev* $W^{k,p}$ για $k \in \mathbb{N}$ και $1 \leq p < \infty$ είναι πλήρεις.*

Απόδειξη *L.C.Evans [12].* □

Σε όλα τα υπόλοιπα κεφάλαια θα ασχοληθούμε μόνο με τους χώρους $H^1(\Omega)$ και $H^2(\Omega)$. Συνεπώς θα ορίσουμε τον καθένα ξεχωριστά.

Ορισμός 2.3 *Ο χώρος *Sobolev* $H^1(\Omega)$ ορίζεται ως,*

$$H^1(\Omega) = \{u \in L_2(\Omega) : \exists v_1, v_2, \dots, v_n \in L_2(\Omega), : \int_{\Omega} u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = - \int_{\Omega} v_i \phi \, dx, \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega), \forall 1 \leq i \leq n\} \quad (2.2.6)$$

Για $u \in H^1(\Omega)$ καλούμε την $v_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ ως γενικευμένη μερική παράγωγο της u ως προς x_i .

Είναι φανερό βάση του τελευταίου ορισμού ότι ο $H^1(\Omega)$ είναι υπόχωρος του $L_2(\Omega)$. Επίσης βάση της (2.2.4), το εσωτερικό γινόμενο ορίζεται ως,

$$(u, v)_1 = (u, v) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right), \quad u, v \in H^1(\Omega). \quad (2.2.7)$$

Επίσης η νόρμα στον $H^1(\Omega)$, ορίζεται,

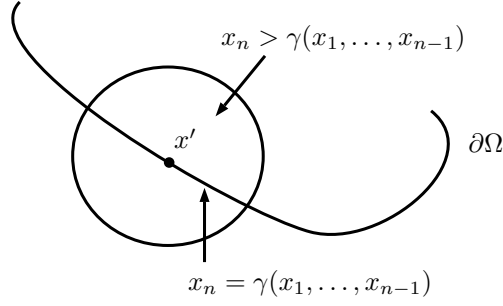
$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L_2(\Omega)}^2, \quad u \in H^1(\Omega). \quad (2.2.8)$$

Στην περίπτωση της μιας διάστασης αποδεικνύεται ότι ο χώρος δοκιμής $C_0^\infty(\mathbb{R})$ είναι πυκνό υποσύνολο του $H^1(I)$, με I είναι διάστημα στον \mathbb{R} . Στις περισσότερες διαστάσεις, όμως, δεν ισχύει για τυχαίο χωρίο Ω .

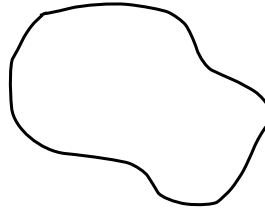
Ορισμός 2.4 (Ομαλότητα συνόρου χωρίων) *Εστω Ω φραγμένο υποσύνολο του \mathbb{R}^n και V χώρος συναρτήσεων στον \mathbb{R}^{n-1} . Λέμε ότι το $\partial\Omega$ είναι κλάσης V αν για κάθε $x' \in \partial\Omega$, υπάρχει $r > 0$ και συνάρτηση $\gamma \in V$ για την οποία ισχύει ότι,*

$$\Omega \cap B(x', r) = \{x \in B(x', r) : x_n > \gamma(x_1, \dots, x_{n-1})\}, \quad (2.2.9)$$

όπου $B(x', r)$ η μπάλα με κέντρο το x' και ακτίνα r . Πιο συγκεκριμένα, όταν V αποτελείται από *Lipschitz* συνεχείς συναρτήσεις, τότε λέμε ότι το Ω είναι χωρίο *Lipschitz*. Όταν V αποτελείται από C^k συναρτήσεις, τότε λέμε ότι το Ω είναι C^k χωρίο. Τέλος, όταν V αποτελείται από $C^{k,\alpha}$, $\alpha \in (0, 1)$ συναρτήσεις, τότε λέμε ότι το $\partial\Omega$ είναι σύνορο *Hölder* κλάσης $C^{k,\alpha}$.



Σχήμα 2.1: Η ομαλότητα του συνόρου.



Σχήμα 2.2: Ομαλό χωρίο.

Θεώρημα 2.2 (Πυκνότητα ομαλών συναρτήσεων στον $H^1(\Omega)$) Αν Ω κλάσης C^1 και $u \in H^1(\Omega)$, τότε υπάρχει ακολουθία $u_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ τέτοια ώστε $u_n|_\Omega \rightarrow u$ στον $H^1(\Omega)$. Με άλλα λόγια, οι περιορισμοί στο Ω των συναρτήσεων του $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ αποτελούν πυκνό υπόχωρο του $H^1(\Omega)$.

Απόδειξη L.C.Evans [12]. □

Ο χώρος Sobolev H_0^1

Ο χώρος $H_0^1(\Omega)$ είναι πλήρης υπόχωρος του $H^1(\Omega)$ και θα παίζει σημαντικό ρόλο στις επόμενες ενότητες, όπου θα μελετήσουμε προβλήματα συνοριακών τιμών.

Ορισμός 2.5 Έστω Ω υποσύνολο του \mathbb{R}^n . Ο χώρος $H_0^1(\Omega)$ αποτελείται από στοιχεία του $H^1(\Omega)$ που είναι όρια στην νόρμα $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ ακολουθιών συναρτήσεων δοκιμής, δηλαδή στοιχείων του $C_0^\infty(\Omega)$.

Ο χώρος $(H_0^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1(\Omega)})$ είναι χώρος Hilbert ως κλειστός υπόχωρος του $H^1(\Omega)$. Επίσης αν $\Omega = \mathbb{R}^n$ τότε ο χώρος $H_0^1(\Omega)$ συμπίπτει με τον $H^1(\Omega)$. Διαφορετικά, αν $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, γενικά ο $H_0^1(\Omega)$ είναι γνήσιος υπόχωρος του $H^1(\Omega)$. Συνολικά θα έχουμε τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 2.6 Έστω Ω υποσύνολο του \mathbb{R}^n κλάσης C^1 . Τότε,

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\partial\Omega} = 0\}. \quad (2.2.10)$$

Πρόταση 2.1 (Ανισότητα Poincaré-Friedrichs) Έστω Ω φραγμένο χωρίου του \mathbb{R}^n . Τότε υπάρχει σταθερά C που εξαρτάται μόνο από το χωρίο Ω , τέτοια ώστε,

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L_2(\Omega)}, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega). \quad (2.2.11)$$

Απόδειξη *L.C.Evans* [12]. □

Κατά αναλογία με τον $H_0^1(\Omega)$ ορίζονται και οι χώροι $H_0^k(\Omega)$ για $k \geq 2$. Ο $H_0^k(\Omega)$, $k \geq 2$ αποτελείται από τα στοιχεία του $H^k(\Omega)$ που είναι όρια, στην νόρμα του $H^k(\Omega)$, ακολουθιών συναρτήσεων δοκιμής, δηλαδή στοιχείων του $C_0^\infty(\Omega)$. Αν το χωρίο Ω του \mathbb{R}^n είναι κλάσης C^k , μπορεί να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $u \in H^k(\Omega)$ ανήκει στον $H_0^k(\Omega)$ αν και μόνο αν $(D^\alpha u)|_{\partial\Omega} = 0$ για τον πολυδείκτη $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ τάξης $0 \leq |\alpha| \leq k-1$. Τέλος ορίζουμε τους παρακάτω χώρους τους οποίους θα χρειαστούμε στην συνέχεια.

$$H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) = \{u \in H^2(\Omega) : u|_{\partial\Omega} = 0\} \quad (2.2.12)$$

$$H^2(\Omega) = \{u \in H^2(\Omega) : u|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0, 1 \leq i \leq n\} \quad (2.2.13)$$

Είναι δυνατόν να επεκτείνουμε τον ορισμό των χώρων *Sobolev* από μη αρνητική ακέραια τάξη σε πραγματική τάξη. Αρχικά θα ορίσουμε τους χώρους *Sobolev* θετικής πραγματικής τάξης με $1 \leq p < \infty$.

Ορισμός 2.7 (Χώροι Sobolev θετικής πραγματικής τάξης) Έστω $s = k + \sigma$ με $k \geq 0$ ακέραιο και $\sigma \in (0, 1)$. Ορίζουμε τον χώρο *Sobolev*,

$$W^{s,p}(\Omega) = \left\{ v \in W^{k,p} : \frac{|D^\alpha v(\vec{x}) - D^\alpha v(\vec{y})|}{\|\vec{x} - \vec{y}\|^{\sigma+n/p}} \in L_p(\Omega \times \Omega), \forall \alpha : |\alpha| = k \right\}, \quad (2.2.14)$$

με νόρμα

$$\|v\|_{W^{s,p}(\Omega)}^p = \|v\|_{W^{k,p}(\Omega)}^p + \sum_{|\alpha|=k} \int_{\Omega \times \Omega} \frac{|D^\alpha v(\vec{x}) - D^\alpha v(\vec{y})|^p}{\|\vec{x} - \vec{y}\|^{\sigma p+n}} dx dy \quad (2.2.15)$$

Μπορεί να αποδειχθεί [1] ότι ο $W^{s,p}(\Omega)$ είναι πλήρης χώρος. Επίσης είναι διαχωρίσιμος αν και μόνο αν $1 < p < \infty$. Για $p = 2$ ο $W^{s,2}(\Omega) = H^s(\Omega)$ είναι χώρος *Hilbert* με εσωτερικό γινόμενο,

$$(u, v)_s = (u, v)_k + \sum_{|\alpha|=k} \int_{\Omega \times \Omega} \frac{(D^\alpha u(\vec{x}) - D^\alpha u(\vec{y}))(D^\alpha(D^\alpha u(\vec{x}) - D^\alpha u(\vec{y}))v(\vec{x}) - D^\alpha v(\vec{y}))}{\|\vec{x} - \vec{y}\|^{2\sigma+n}} dx dy. \quad (2.2.16)$$

Οι περισσότερες ιδιότητες των χώρων *Sobolev* ακέραιας τάξης, όπως η πυκνότητα των ομαλών συναρτήσεων ισχύουν και στους χώρους *Sobolev* θετικής πραγματικής τάξης.

Ορισμός 2.8 Έστω $s \geq 0$. Τότε ορίζουμε τον $W_0^{s,p}(\Omega)$ να είναι η κλειστότητα του $C_0^\infty(\Omega)$ στον $W^{s,p}(\Omega)$. Με άλλα λόγια, ο χώρος $W_0^{s,p}(\Omega)$ αποτελείται από στοιχεία του $W^{s,p}(\Omega)$ που είναι όρια στην νόρμα $\|\cdot\|_{W^{s,p}(\Omega)}$ ακολουθιών συναρτήσεων δοκιμής, δηλαδή συναρτήσεων του $C_0^\infty(\Omega)$. Αν $p = 2$ τότε ο $H_0^s(\Omega) = W_0^{s,2}(\Omega)$ είναι χώρος *Hilbert*.

Με τους χώρους $W_0^{s,p}(\Omega)$ μπορούμε να ορίσουμε τους χώρους *Sobolev* με αρνητική τάξη.

Ορισμός 2.9 Έστω $s \geq 0$ να είναι ακέραιος ή πραγματικός αριθμός. Για $1 \leq p < \infty$ ορίζουμε τον συζυγή p' ο οποίος ορίζεται από την σχέση $1/p + 1/p' = 1$. Ορίζουμε τον χώρο $W^{-s,p'}(\Omega)$ να είναι ο δυϊκός του $W_0^{s,p}(\Omega)$. Πιο συγκεκριμένα, $H^{-s}(\Omega) = W^{-s,2}(\Omega)$.

Σε επόμενο κεφάλαιο θα χρειαστούμε τον χώρο *Sobolev* $H^{-1}(\Omega)$ ο οποίος αποτελεί τον δυϊκό χώρο του $H_0^1(\Omega)$. Οπότε, κάθε γραμμικό και φραγμένο συναρτησιακό του $H_0^1(\Omega)$ θα ανήκει στον $H^{-1}(\Omega)$. Έστω το γραμμικό και φραγμένο συναρτησιακό \mathcal{F} στον $H_0^1(\Omega)$ τότε $\mathcal{F} \in H^{-1}(\Omega)$. Αφού \mathcal{F} φραγμένο, τότε υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε,

$$|\mathcal{F}(v)| \leq M\|v\|, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Η νόρμα του συναρτησιακού \mathcal{F} θα είναι,

$$\|\mathcal{F}\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{\substack{v \in H_0^1(\Omega) \\ v \neq 0}} \frac{\mathcal{F}(v)}{\|v\|_{H^1(\Omega)}}. \quad (2.2.17)$$

Στην μελέτη προβλημάτων συνοριακών τιμών είναι σημαντική η μελέτη του χαρακτήρα των συναρτήσεων που ανήκουν στον $H^1(\Omega)$ στο σύνορο $\partial\Omega$ του Ω . Οι χώροι *Sobolev* είναι γνωστό ότι ορίζονται μέσω των χώρων $L_p(\Omega)$. Οπότε οι συναρτήσεις *Sobolev* θα είναι μοναδικά ορισμένες σχεδόν παντού στο Ω . Όμως, το σύνορο του Ω , το $\partial\Omega$ θα είναι μέτρου μηδέν στον \mathbb{R}^n και τότε η συνοριακή τιμή για μια συνάρτηση *Sobolev* δεν θα είναι καλά ορισμένη. Είναι δυνατόν να ορίσουμε το *ίχνος* μιας συνάρτησης *Sobolev* στο $\partial\Omega$ με τέτοιο τρόπο, ώστε η συνάρτηση αυτή να είναι συνεχής μέχρι και το σύνορο και το *ίχνος* να συμπίπτει με την συνοριακή τιμή.

Θεώρημα 2.3 Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ανοιχτό και φραγμένο χωρίο, κλάσης \mathcal{C}^1 . Έστω $1 \leq p < \infty$. Υπάρχει ένας γραμμικός, φραγμένος τελεστής $Tr : W^{1,p} \rightarrow L_p(\Omega)$, τέτοιος ώστε,

1. $Tr u = u|_{\partial\Omega}$ για κάθε $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega})$,
2. Υπάρχει σταθερά $C > 0$ η οποία εξαρτάται από το p και το Ω , τέτοια ώστε,

$$\|Tr u\|_{L_p(\partial\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}, \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega). \quad (2.2.18)$$

Απόδειξη L.C.Evans [12]. □

Ο τελεστής Tr καλείται *τελεστής ίχνους* και η $Tr u$ καλείται *γενικευμένη συνοριακή τιμή* της u . Η εικόνα του τελεστή Tr ($W^{1,p}(\Omega)$) είναι χώρος μικρότερος του $L_p(\partial\Omega)$, ο $W^{1-1/p,p}(\partial\Omega)$. Στην επόμενη ενότητα, θα χρειαστούμε το *ίχνος* συναρτήσεων $H^1(\Omega)$ με $H^{1/2}(\partial\Omega) = Tr(H^1(\Omega))$. Τέλος, ορίζουμε την νόρμα στον $H^{1/2}(\partial\Omega)$ ως,

$$\|g\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} = \inf_{\substack{u \in H^1(\Omega) \\ Tr u = g}} \|u\|_{H^1(\Omega)}. \quad (2.2.19)$$

2.3 Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

Έστω Ω φραγμένο χωρίο του \mathbb{R}^n κλάσης \mathcal{C}^1 . Συμβολίζουμε με $n = (n_1, \dots, n_n)^T$ το μοναδιαίο εξωτερικό κάθετο διάνυσμα στο σύνορο $\partial\Omega$. Είναι γνωστό ότι για κάθε $u, v \in C^1(\Omega)$ θα έχουμε το παρακάτω αποτέλεσμα,

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v \, dx = - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx + \int_{\partial\Omega} u v n_i \, dS. \quad (2.3.1)$$

Η (2.3.1) μπορεί να επεκταθεί για συναρτήσεις από συγκεκριμένους χώρους *Sobolev*, τέτοιους ώστε η ομαλότητα των συναρτήσεων να είναι αρκετή ώστε τα παραπάνω ολοκληρώματα να είναι καλώς ορισμένα.

Πρόταση 2.2 Έστω Ω φραγμένο χωρίο του \mathbb{R}^n κλάσης \mathcal{C}^1 . Τότε,

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v \, dx = - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx + \int_{\partial\Omega} u v n_i \, dS, \quad \forall u, v \in H^1(\Omega). \quad (2.3.2)$$

Απόδειξη K.Atkinson and W.Han [3]. □

Από την παραπάνω πρόταση προκύπτει και η παρακάτω ταυτότητα.

$$\int_{\Omega} v \Delta u \, dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \, dS - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx, \quad \forall u \in H^2(\Omega), v \in H^1(\Omega). \quad (2.3.3)$$

2.4 Ασθενής μορφή ελλειπτικών συνοριακών προβλημάτων

Σε αυτήν την ενότητα θα εισάγουμε την ασθενή (μεταβολική) μορφή μερικών ελλειπτικών συνοριακών προβλημάτων και θα μελετήσουμε την ύπαρξη και την μοναδικότητα της ασθενούς λύσης.

2.4.1 Ομογενείς συνοριακές συνθήκες Dirichlet

Έστω Ω χωρίο του \mathbb{R}^n κλάσης C^1 . Ζητείται συνάρτηση $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι κλασική λύση του παρακάτω ελλειπτικού προβλήματος.

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f, & \text{στο } \Omega, \\ u = 0, & \text{στο } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.4.1)$$

με f δοσμένη εκ των προτέρων συνάρτηση στο Ω .

Ορισμός 2.10 (Κλασική λύση) Έστω $f \in C(\bar{\Omega})$. Η κλασική λύση του προβλήματος (2.4.1) είναι μια συνάρτηση $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ η οποία ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση αλλά και την συνοριακή συνθήκη του προβλήματος.

Ορισμός 2.11 (Ασθενής λύση) Έστω $f \in L_2(\Omega)$. Η ασθενής λύση του προβλήματος (2.4.1) είναι μια συνάρτηση $u \in H_0^1(\Omega)$ η οποία ικανοποιεί την μεταβολική (ασθενή) μορφή του προβλήματος (2.4.1), την

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} uv \, dx = \int_{\Omega} fv \, dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad (2.4.2)$$

με $\nabla u \cdot \nabla v = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i}$.

Η κλασική λύση του (2.4.1) είναι και ασθενής λύση.

Έστω $f \in C(\bar{\Omega})$ και $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ κλασική λύση του (2.4.1). Τότε $u \in H^1(\Omega)$ και από την συνοριακή συνθήκη $u = 0$ στο $\partial\Omega$ οπότε $u \in H_0^1(\Omega)$. Πολλαπλασιάζοντας την διαφορική εξίσωση του προβλήματος (2.4.1) με μια συνάρτηση δοκιμής $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, ολοκληρώνοντας στο Ω και χρησιμοποιώντας τον τύπο του Green (2.3.3), προκύπτει ότι,

$$\int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla \phi + u\phi) \, dx = \int_{\Omega} f\phi \, dx, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega). \quad (2.4.3)$$

Ο χώρος δοκιμής $C_0^\infty(\Omega)$ είναι πυκνός στον $(H_0^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1(\Omega)})$ για χωρία κλάσης C^1 , οπότε κάθε συνάρτηση $v \in H_0^1(\Omega)$, μπορεί να προσεγγισθεί από μια ακολουθία συναρτήσεων $\phi_i \in C_0^\infty(\Omega)$, οπότε u ασθενής λύση.

Ύπαρξη και μοναδικότητα ασθενούς λύσης.

Έστω $f \in L_2(\Omega)$ και έστω η διγραμμική μορφή $B(\cdot, \cdot) : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο,

$$B(v, w) = \int_{\Omega} (\nabla v \cdot \nabla w + vw) \, dx. \quad (2.4.4)$$

Είναι εύκολο να παρατηρήσουμε ότι η διγραμμική μορφή είναι συμμετρική. Επίσης, για κάθε $v, w \in H_0^1(\Omega)$, λαμβάνουμε,

$$\begin{aligned} |B(v, w)| &\leq \int_{\Omega} |\nabla v \cdot \nabla w| \, dx + \int_{\Omega} |vw| \, dx \\ &\leq \|\nabla v\|_{L_2(\Omega)} \|\nabla w\|_{L_2(\Omega)} + \|v\|_{H^1(\Omega)} \|w\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq 2\|v\|_{H^1(\Omega)} \|w\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

Η (2.4.5) εξασφαλίζει ότι η διγραμμική μορφή είναι συνεχής και και επέκταση φραγμένη στον $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$. Επιπλέον,

$$\begin{aligned} B(v, v) &= \int_{\Omega} (|\nabla v|^2 + v^2) dx \geq \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \\ &\geq C \|v\|_{H^1(\Omega)}^2, \quad C = C(\Omega), \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

από την ανισότητα *Poincaré-Friedrichs*. Η (2.4.6) εξασφαλίζει την ελλειπτικότητα της διγραμμικής μορφής στον $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$. Συνεπώς, η $B(\cdot, \cdot)$ ικανοποιεί όλες τις υποθέσεις του θεωρήματος *Lax-Milgram* στον χώρο *Hilbert* H_0^1 . Τέλος το γραμμικό συναρτησιακό $\mathcal{F} : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο,

$$\mathcal{F}(v) = \int_{\Omega} f v dx,$$

είναι φραγμένο και ως εκ τούτου η μεταβολική μορφή (2.4.2) έχει μοναδική λύση $u \in H_0^1(\Omega)$ για την οποία μάλιστα ισχύει η παρακάτω εκτίμηση,

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|f\|_{L_2(\Omega)}. \quad (2.4.7)$$

Ομαλότητα ασθενούς λύσης.

Είναι γνωστό ότι αν $f \in H^m(\Omega)$ και το χωρίο Ω του \mathbb{R}^n είναι κλάσης C^m , τότε η ασθενής λύση u του προβλήματος (2.4.1) είναι στοιχείο του $H^{m+2}(\Omega)$ και ισχύει η εκτίμηση,

$$\|u\|_{H^{m+2}(\Omega)} \leq C_m \|f\|_{H^m(\Omega)}, \quad (2.4.8)$$

με μια σταθερά C_m ανεξάρτητη της f . Η ανισότητα (2.4.8) αναφέρεται ως *ελλειπτική ομαλότητα*.

Αν η ασθενής λύση είναι $C^2(\bar{\Omega})$, τότε είναι κλασική.

Έστω u ασθενής λύση του (2.4.1), δηλαδή λύση του (2.4.2) με την επιπλέον προϋπόθεση ότι $u \in C^2(\bar{\Omega})$. Συνολικά υποθέτουμε ότι η ασθενής λύση $u \in H_0^1(\Omega) \cap C^2(\bar{\Omega})$ και $f \in C(\bar{\Omega})$. Για να είναι κλασική λύση του (2.4.1) θα πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση αλλά και την συνοριακή συνθήκη. Εύκολα γίνεται αντιληπτό, ότι $u = 0$ στον $\partial\Omega$. Ο χώρος δοκιμής $C_0^\infty(\Omega)$ είναι πυκνός για χωρία κλάσης C^1 στον $H_0^1(\Omega)$, οπότε πολλαπλασιάζουμε με μια συνάρτηση δοκιμής την εξίσωση του (2.4.1), ολοκληρώνουμε στο Ω και χρησιμοποιούμε τον τύπο *Green*. Τότε,

$$\int_{\Omega} (-\Delta u + u)v dx = \int_{\Omega} f v dx, \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega). \quad (2.4.9)$$

Ο χώρος δοκιμής $C_0^\infty(\Omega)$ είναι πυκνός στον χώρο $L_2(\Omega)$, οπότε $-\Delta u + u = f$ σχεδόν παντού στο Ω . Στην πραγματικότητα $-\Delta u + u = f$, $\forall x \in \Omega$ διότι $u \in C^2(\bar{\Omega})$. Συνεπώς u κλασική λύση του (2.4.1). Προκειμένου να εξαχθεί το αναμενόμενο αποτέλεσμα από την (2.4.9), χρησιμοποιήσαμε την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 2.3 Έστω Ω ανοιχτό χωρίο του \mathbb{R}^n και $u \in L_{loc}^1(\Omega)$ τέτοια ώστε

$$\int_{\Omega} u \phi dx = 0, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Τότε $u = 0$ σχεδόν παντού στον Ω .

Απόδειξη *R.A.Adams and J.J.Fournier [1]* □

2.4.2 Ομογενείς συνοριακές συνθήκες Neumann

Έστω Ω χωρίο του \mathbb{R}^n κλάσης C^1 . Ζητείται συνάρτηση $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι κλασική λύση του παρακάτω ελλειπτικού προβλήματος.

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f, & \text{στο } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0, & \text{στο } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.4.10)$$

με f δοσμένη εκ των προτέρων συνάρτηση στο Ω και $\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot \bar{n}$ το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο $\partial\Omega$. Σε αυτό το πρόβλημα, σε αντιδιαστολή με το προηγούμενο η ασθενής λύση είναι στοιχείο του $H^1(\Omega)$ και είναι λύση του παρακάτω μεταβολικού προβλήματος,

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} uv \, dx = \int_{\Omega} fv \, dx, \quad \forall v \in H^1(\Omega). \quad (2.4.11)$$

Ανάλογα με πριν θα έχουμε όμοια αποτελέσματα.

Η κλασική λύση του (2.4.10) είναι και ασθενής λύση.

Έστω $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ κλασική λύση του (2.4.10). Για να είναι η κλασική λύση u και ασθενής λύση θα πρέπει να επαληθεύει το μεταβολικό πρόβλημα (2.4.11). Πράγματι, εφαρμόζοντας τον τύπο του Green για συναρτήσεις δοκιμής, λαμβάνουμε,

$$\int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + uv) \, dx = \int_{\Omega} fv \, dx, \quad \forall v \in C_0^\infty(\bar{\Omega}). \quad (2.4.12)$$

Η (2.4.12) προέκυψε από το γεγονός ότι στον τύπο του Green το ολοκλήρωμα $\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v$ μηδενίζεται λόγω της συνοριακής συνθήκης. Αφού ο $C_0^\infty(\bar{\Omega})$ είναι πυκνός στον $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1(\Omega)})$ για χωρία κλάσης C^1 , τότε κάθε κάθε στοιχείο $v \in H^1(\Omega)$ μπορεί να προσεγγισθεί από ακολουθία συναρτήσεων $\phi_i \in C_0^\infty(\bar{\Omega})$. Συνειπώς $u \in C(\bar{\Omega})$ είναι ασθενής λύση.

Ύπαρξη και μοναδικότητα ασθενούς λύσης.

Έστω $f \in L_2(\Omega)$ και έστω η διγραμμική μορφή $B(\cdot, \cdot) : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο,

$$B(v, w) = \int_{\Omega} (\nabla v \cdot \nabla w + vw) \, dx. \quad (2.4.13)$$

Έστω το γραμμικό και φραγμένο συναρτησιακό $\mathcal{F} : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$\mathcal{F}(v) = \int_{\Omega} fv \, dx.$$

Ανάλογα με την περίπτωση συνοριακών συνθηκών *Dirichlet* έπεται η ύπαρξη και η μοναδικότητα της μεταβολικής μορφής (2.4.11).

Ομαλότητα ασθενούς λύσης.

Όσο αφορά την ομαλότητα της ασθενούς λύσης, ισχύουν τα ίδια αποτελέσματα, όπως και στην περίπτωση των συνοριακών συνθηκών *Dirichlet*.

Αν η ασθενής λύση είναι $C^2(\bar{\Omega})$, τότε είναι κλασική.

Έστω $u \in C^2(\bar{\Omega})$ και $f \in C(\bar{\Omega})$, τότε από τον τύπο του Green,

$$\int_{\Omega} (-\Delta u + u)v \, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \, dS = \int_{\Omega} fv \, dx, \quad \forall v \in C^1(\bar{\Omega}). \quad (2.4.14)$$

Επιλέγοντας $v \in C_0^1(\Omega)$ στην (2.4.14), προκύπτει σύμφωνα με την πρόταση 2.2 ότι,

$$-\Delta u + u = f, \text{ στο } \Omega.$$

Επιλέγοντας $v \in C^1(\bar{\Omega})$ προκύπτει,

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v dS = 0, \quad \forall v \in C^1(\bar{\Omega}),$$

και κατ επέκταση $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ στο $\partial\Omega$.

Κεφάλαιο 3

Η Μέθοδος Πεπερασμένων Στοιχείων Για Ελλειπτικές Εξισώσεις

3.1 Διακριτοποίηση με πεπερασμένα στοιχεία

Έστω Ω φραγμένο χωρίο του \mathbb{R}^n . Θεωρούμε το ακόλουθο πρόβλημα συνοριακών τιμών. Ζητάμε συνάρτηση $u = u(x)$, $x \in \Omega$ τέτοια ώστε να είναι λύση του,

$$\begin{cases} Lu = f, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.1.1)$$

Ορίζουμε τον τελεστή L ως,

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - c(x)u, \quad (3.1.2)$$

Ο L είναι ελλειπτικός τελεστής, δηλαδή για κάθε $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ισχύει,

$$\sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \lambda(x) |\xi|^2 > \lambda_0 |\xi|^2, \quad \lambda_0 > 0.$$

Οι συναρτήσεις α_{ij} και c είναι κατάλληλα ομαλές και ισχύει επιπλέον ότι $\alpha_{ij}(x) = \alpha_{ji}(x)$, $\forall x \in \bar{\Omega}$ και $c(x) \geq 0$, $\forall x \in \bar{\Omega}$. Υπό αυτές τις προϋποθέσεις με $f \in L_2(\Omega)$ έχουμε αποδείξει την ύπαρξη και την μοναδικότητα της ασθενούς λύσης $u \in H_0^1(\Omega)$ η οποία είναι λύση του συμμετρικού (σε αυτήν την περίπτωση) μεταβολικού προβλήματος,

$$B(u, v) = \mathcal{F}(v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad (3.1.3)$$

με την διγραμμική μορφή $B(\cdot, \cdot) : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο,

$$B(u, v) = \int_{\Omega} \alpha_{ij}(x) \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} c(x) uv \, dx, \quad (3.1.4)$$

και το φραγμένου, γραμμικού συναρτησιακού $\mathcal{F} : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο,

$$\mathcal{F}(v) := \int_{\Omega} f v \, dx. \quad (3.1.5)$$

Ισχυριζόμαστε ότι τα δεδομένα του προβλήματος (3.1.1) είναι τέτοια ώστε η μοναδική λύση u του προβλήματος (3.1.3) να ανήκει στον $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ και να ισχύει η εκτίμηση ελλειπτικής ομαλότητας,

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|f\|_{L_2(\Omega)}, \quad (3.1.6)$$

με C ανεξάρτητη της f . Όπως έχουμε δει στα προηγούμενα κεφάλαια, προσέγγιση *Galerkin* της ακριβούς λύσης u κατασκευάζεται σε υπόχωρους πεπερασμένης διάστασης X_h του $H_0^1(\Omega)$, για $0 < h < 1$. Συνεπώς, αναζητάμε $u_h \in X_h$ η οποία είναι λύση του γραμμικού συστήματος,

$$B(u_h, v_h) = \mathcal{F}(v_h), \quad \forall v_h \in X_h. \quad (3.1.7)$$

Γνωρίζουμε ήδη ότι η $u_h \in X_h$ υπάρχει και είναι μοναδική. Επίσης ισχύει η εκτίμηση,

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C \inf_{\chi \in X_h} \|u - \chi\|_{H^1(\Omega)}. \quad (3.1.8)$$

Στην συνέχεια θα αναζητήσουμε βέλτιστες εκτιμήσεις σφάλματος στην $H^1(\Omega)$ και $L_2(\Omega)$ νόρμα. Έστω ότι μας δίδεται μια οικογένεια $\{X_h\}_{0 < h < 1}$ υπόχωρων πεπερασμένης διάστασης του $H_0^1(\Omega)$ με την ιδιότητα,

$$\inf_{\chi \in X_h} (\|v - \chi\|_{L_2(\Omega)} + h\|v - \chi\|_{H^1(\Omega)}) \leq Ch^2\|v\|_{H^2(\Omega)}, \quad \forall v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega). \quad (3.1.9)$$

Τότε μπορούμε να εξάγουμε από τις (3.1.8), (3.1.9) την βέλτιστη τάξη του σφάλματος ως προς την $H^1(\Omega)$ νόρμα

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch\|u\|_{H^2(\Omega)}. \quad (3.1.10)$$

Έστω $e = u - u_h$ και έστω $w \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ να είναι λύση του προβλήματος

$$B(w, v) = (e, v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (3.1.11)$$

Παρατηρώντας ότι $e = u - u_h \in H_0^1(\Omega)$, ορίζουμε $v = e$ και τότε το πρόβλημα (3.1.11) έχει την μορφή,

$$B(w, e) = (e, e) = \|e\|_{L_2(\Omega)}^2. \quad (3.1.12)$$

Όμως, το σφάλμα των πεπερασμένων στοιχείων είναι κάθετο στον υπόχωρο πεπερασμένης διάστασης X_h , οπότε $B(e, \chi) = 0$, $\forall \chi \in X_h$. Συνεπώς η (3.1.12) γίνεται ισοδύναμα,

$$\|e\|_{L_2(\Omega)}^2 = B(e, w - \chi), \quad \forall \chi \in X_h. \quad (3.1.13)$$

Η διγραμμική μορφή $B(\cdot, \cdot)$ είναι φραγμένη και ως εκ τούτου,

$$|B(e, w - \chi)| \leq C\|e\|_{H^1(\Omega)}\|w - \chi\|_{H^1(\Omega)}. \quad (3.1.14)$$

Και επέκταση από τις (3.1.13) και (3.1.14), λαμβάνουμε,

$$\|e\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq C\|e\|_{H^1(\Omega)}\|w - \chi\|_{H^1(\Omega)}. \quad (3.1.15)$$

Η εκτίμηση του σφάλματος στην $H^1(\Omega)$ νόρμα (3.1.10), $\|w - \chi\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch\|w\|_{H^2(\Omega)}$, $\forall \chi \in X_h$. Μέχρι στιγμής,

$$\|e\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq Ch\|e\|_{H^1(\Omega)}\|w\|_{H^2(\Omega)}. \quad (3.1.16)$$

Το τελικό αποτέλεσμα θα εξαχθεί από την συνθήκη ελλειπτικής ομαλότητας για το πρόβλημα (3.1.11). Πιο συγκεκριμένα ισχύει ότι,

$$\|w\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|e\|_{L_2(\Omega)}. \quad (3.1.17)$$

Από τις (3.1.16), (3.1.17) και (3.1.10) προκύπτει η εκτίμηση βέλτιστης τάξης στην $L_2(\Omega)$ νόρμα η οποία θα είναι,

$$\|u - u_h\|_{L_2(\Omega)} \leq Ch^2\|u\|_{H^2(\Omega)}. \quad (3.1.18)$$

Οι εκτιμήσεις (3.1.10) και (3.1.18) είναι εκτιμήσεις εκ των προτέρων. Συνοψίζοντας, υποθέτουμε ότι η ισχύει η ιδιότητα (3.1.9) προκύπτουν βέλτιστες τάξεις όσο αφορά το σφάλμα των πεπερασμένων στοιχείων στις $H^1(\Omega)$, $L_2(\Omega)$ νόρμες, και κατ'επέκταση προσπαθούμε να κατασκευάσουμε υπόχωρους πεπερασμένης διάστασης οι οποίοι θα έχουν την ιδιότητα (3.1.9).

3.2 Κατά τμήματα γραμμικές συναρτήσεις στον τριγωνισμό

Υποθέτουμε ότι το χωρίο Ω του \mathbb{R}^n είναι κυρτό. Ένας τριγωνισμός \mathcal{P}_h του Ω είναι μια συλλογή από τρίγωνα K_i , $i = 1, \dots, M = M(h)$ από τα οποία αποτελείται ο $\mathcal{P}_h = \{K_i\}$. Υποθέτουμε ότι $\max_i(\text{diam } K_i) \leq h$, $0 < h < 1$. Ο τριγωνισμός \mathcal{P}_h θα πρέπει να πληροί τις παρακάτω προϋποθέσεις.

1. Η \mathcal{P}_h να είναι ένα πεπερασμένο σύνολο από τρίγωνα K , με εμβαδόν $|K| > 0$.
2. Η ένωση όλων των τριγώνων K της \mathcal{P}_h , καλύπτει το $\bar{\Omega}$, δηλαδή,

$$\bigcup_{i=1}^n \bar{K}_i = \bar{\Omega}$$

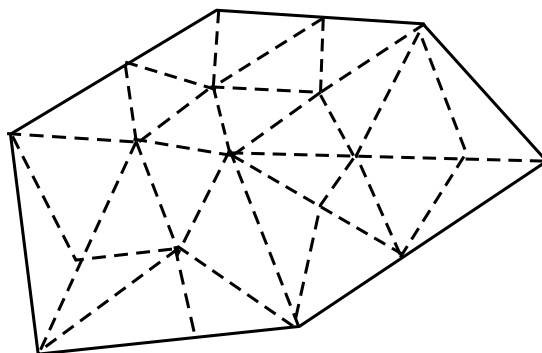
με $K_i \in \mathcal{P}_h$, $i = 1, \dots, M$

3. Η τομή δυο διαφορετικών τριγώνων είναι είτε κενή, είτε μια πλευρά ή κοινή κορυφή, δηλαδή,

$$K_i \cap K_j = \begin{cases} E, & \text{E πλευρά των } K_i \text{ και } K_j \\ p, & \text{p κορυφή των } K_i \text{ και } K_j \\ \emptyset & \end{cases}$$

4. Μια πλευρά ενός τριγώνου όπου ανήκει στο Γ δεν τέμνει ταυτόχρονα Γ_D και Γ_N .
5. Δεν υπάρχουν κορυφές που είναι στο εσωτερικό πλευράς γειτονικών τριγώνων.

Ένας αποδεκτός τριγωνισμός παρουσιάζεται στο παρακάτω σχήμα,

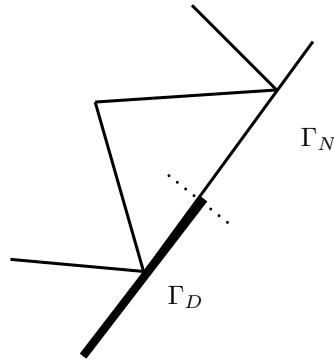


Σχήμα 3.1: Αποδεκτός τριγωνισμός του Ω .

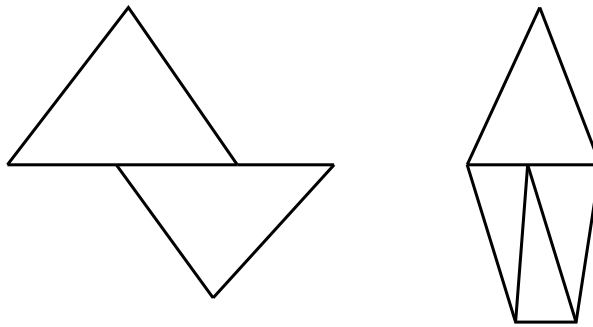
Χωρίζουμε τους κόμβους του τριγωνισμού σε τρία σύνολα ξένα μεταξύ τους. Συμβολίζουμε με \mathcal{I} το σύνολο που θα περιέχει τους εσωτερικούς κόμβους, με \mathcal{D} , το σύνολο που θα περιέχει τους συνοριακούς κόμβους που είναι τύπου *Dirichlet* και με \mathcal{N} , το σύνολο που θα περιέχει τους συνοριακούς κόμβους τύπου *Neumann*. Συνολικά, αν με p_i συμβολίζουμε τον i -οστό κόμβο του τριγωνισμού, με συνολικούς κόμβους N , τότε,

$$\begin{cases} p_i \in \mathcal{I}, & \text{αν } p_i \notin \Gamma, i = 1, \dots, N \\ p_i \in \mathcal{D}, & \text{αν } p_i \in \Gamma_D, i = 1, \dots, N \\ p_i \in \mathcal{N}, & \text{αν } p_i \in \Gamma_G, i = 1, \dots, N \end{cases} \quad (3.2.1)$$

Στα επόμενα δυο σχήματα απεικονίζονται οι περιπτώσεις οι οποίες απαγορεύονται κατά τον τριγωνισμό.



Σχήμα 3.2: Παραβίαση του όρου (4).



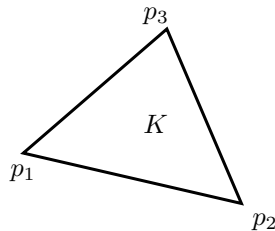
Σχήμα 3.3: Περιπτώσεις που απαγορεύονται κατά τον τριγωνισμό. Αριστερά παραβιάζεται η (3) και δεξιά η (5).

Γραμμικές συναρτήσεις στο τρίγωνο

Ο χώρος των γραμμικών πολυωνύμων \mathbb{P}_1 στις δυο διαστάσεις ορίζεται ως το σύνολο των συναρτήσεων,

$$\phi(x_1, x_2) = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}. \quad (3.2.2)$$

Το σύνολο όλων αυτών των συναρτήσεων δηλώνεται από το \mathbb{P}_1 . Είναι εύκολο να δούμε ότι ένα γραμμικό πολυώνυμο (3.2.2) είναι μοναδικά ορισμένο από τις τιμές στις κορυφές του τριγώνου. Έστω ένα τυχαίο τρίγωνο K με κορυφές p_1, p_2, p_3 .



Σχήμα 3.4: Τρίγωνο K με τις τρεις κορυφές του.

Μια συνάρτηση,

$$\phi \in \mathbb{P}_1 = \{\alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, : \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\} \quad (3.2.3)$$

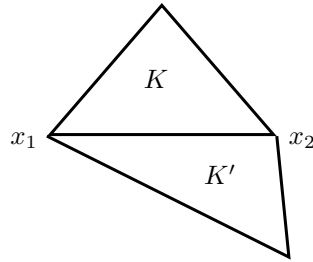
είναι μοναδικά ορισμένη από τις τιμές της σε αυτά τα σημεία. Δηλαδή υπάρχει μόνο μια συνάρτηση με τις δοσμένες τιμές πάνω στις κορυφές. Οπότε, η συνάρτηση $\phi \in \mathbb{P}_1$ μπορεί να καθορισθεί,

1. είτε από τις $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$
2. ή από τις τιμές στις τρεις πλευρές του K .

Και οι δύο παραπάνω περιπτώσεις δηλώνουν ότι ο \mathbb{P}_1 είναι ένας διανυσματικός χώρος διάστασης τρία. Οι τρεις τιμές της συνάρτησης πάνω στις κορυφές του τριγώνου K θα καλούνται τοπικοί βαθμοί ελευθερίας. Μια άλλη σημαντική ιδιότητα είναι ότι η τιμή της $\phi \in \mathbb{P}_1$ σε μια πλευρά του K , η οποία ενώνει δυο κορυφές του, εξαρτάται μόνο από τις τιμές της p πάνω στις αντίστοιχες κορυφές. Ισοδύναμα η τιμή της $\phi \in \mathbb{P}_1$ ορίζεται μοναδικά σε κάθε πλευρά του τριγώνου και εξαρτάται μόνο από τις κορυφές που ανήκουν πάνω σε αυτήν την πλευρά.

Κατά τμήματα γραμμικές συναρτήσεις στον τριγωνισμό

Έστω δυο τρίγωνα K και K' , τα οποία μοιράζονται την πλευρά (x_1, x_2) , όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 3.5: Δυο τρίγωνα με κοινή πλευρά.

Θέτοντας τιμές στις κορυφές ενός τριγώνου K μπορούμε να ορίσουμε μια μοναδική γραμμική συνάρτηση στο K . Χρησιμοποιώντας τις ίδιες τιμές στις κοινές κορυφές των γειτονικών τριγώνων K και K' , μπορούμε να ορίσουμε μια συνεχή συνάρτηση στην ένωση των δυο τριγώνων, η οποία θα είναι γραμμική σε κάθε τρίγωνο. Αυτό μπορούμε να το επαναλάβουμε σε όλο τον τριγωνισμό \mathcal{P}_h του Ω , οπότε θα έχουμε ορίσει μια συνεχή συνάρτηση στο Ω , η οποία είναι γραμμική σε κάθε $K \in \mathcal{P}_h$. Ορίζουμε,

$$V := \{u_h \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}) : u_h|_K \in \mathbb{P}_1, \forall K \in \mathcal{P}_h\}, \quad (3.2.4)$$

να είναι ο χώρος των συνεχών συναρτήσεων στο $\bar{\Omega}$ οι οποίες σε κάθε τρίγωνο είναι γραμμικές συναρτήσεις. Αν ένα στοιχείο ανήκει στον V , τότε αυτό είναι μοναδικά ορισμένο από τις τιμές που λαμβάνει στις κορυφές των τριγώνων.

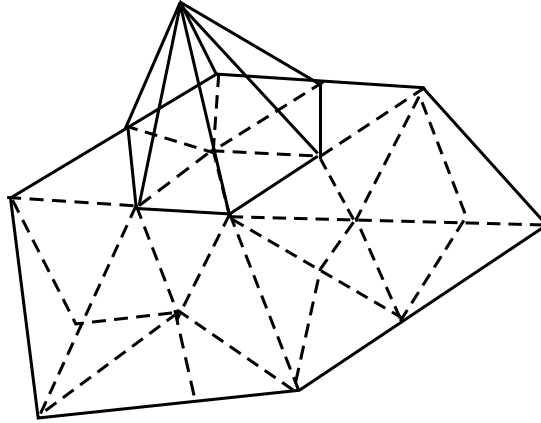
Επιπλέον, θεωρούμε τον χώρο πεπερασμένης διάστασης X_h ως εξής,

$$X_h := \{v_h \in V : v_h|_{\partial\Omega} = 0\}. \quad (3.2.5)$$

Θα λέμε τις κορυφές του τριγωνισμού κόμβους. Οι κόμβοι γενικά θα δηλώνονται με p_i με το i να κυμαίνεται μεταξύ του ένα και του πλήθους των συνολικών κόμβων του τριγωνισμού, έστω $N = N(h)$. Αν σταθεροποιήσουμε έναν τυχαίο κόμβο και αντιστοιχίσουμε σε αυτόν την

τιμή ένα και μηδέν στους άλλους, τότε υπάρχει μοναδική συνάρτηση $\phi_i \in V$ για την οποία ισχύει,

$$\phi_i(p_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (3.2.6)$$

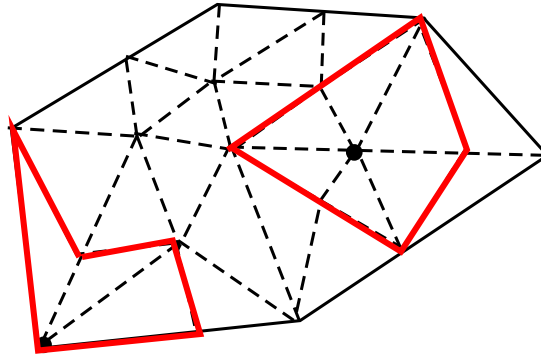


Σχήμα 3.6: Το γράφημα των συναρτήσεων βάσης.

Είναι εύκολο να δούμε ότι αν ένα τρίγωνο K δεν έχει σαν κορυφή την p_i , τότε η ϕ_i είναι μηδέν πάνω σε αυτό το τρίγωνο. Συνεπώς η στήριξη της συνάρτησης ϕ_i , περιλαμβάνει τα τρίγωνα τα οποία έχουν την p_i ως μια από τις κορυφές τους.

$$\text{supp}(\phi_i) = \bigcup_{p_i \in K_j} \bar{K}_j. \quad (3.2.7)$$

Στο παρακάτω γράφημα παρουσιάζονται οι δυο περιπτώσεις που υπάρχουν, αν ο κόμβος είναι συνοριακός ή αν ο κόμβος είναι εσωτερικός.



Σχήμα 3.7: Με κόκκινο η στήριξη των συναρτήσεων βάσης ανάλογα αν ο κόμβος είναι εσωτερικός ή συνοριακός.

Έστω $u_h \in V$. Είναι εύκολο να δούμε ότι,

$$u_h = \sum_{j=1}^N u_h(p_j) \phi_j. \quad (3.2.8)$$

Πράγματι θεωρούμε την συνάρτηση $\sum_{j=1}^N u_h(p_j)\phi_j$, την οποία αν την υπολογίσουμε στον p_i , τότε,

$$\sum_{j=1}^N u_h(p_j)\phi_j(p_i) = \sum_{i=1}^N u_h(p_j)\delta_{ji} = u_h(p_i).$$

Συνεπώς, δυο συναρτήσεις έχουν τις ίδιες τιμές πάνω στον τυχαίο κόμβο p_i , τότε θα είναι ίσες.

Οι συναρτήσεις ϕ_i , $i = 1, \dots, N$ με την ιδιότητα (3.2.6), αποτελούν βάση του V . Αρχικά θα δείξουμε ότι είναι γραμμικώς ανεξάρτητες. Πράγματι, αν $\sum_{i=1}^N c_i\phi_i = 0$, τότε, $\sum_{i=1}^N c_i\phi_i(p_j) = 0$, δηλαδή $c_j = 0$, $j = 1, \dots, N$. Επιπλέον οι ϕ_i , $i = 1, \dots, N$, παράγουν τον V . Πράγματι, για κάθε $u_h \in V$, το u_h , μπορεί να γραφεί ως (3.2.8), όπως είδαμε παραπάνω. Οπότε, αποτελούν βάση του V και κατ'επέκταση κάθε συνάρτηση στον V , μπορεί να γραφεί σαν γραμμικώς μετασχηματισμός τους, δηλαδή,

$$u_h = \sum_{j=1}^N u_h(p_j)\phi_j. \quad (3.2.9)$$

Στην συνέχεια θα αποδείξουμε ότι ο χώρος πεπερασμένης διάστασης X_h είναι υπόχωρος του $H_0^1(\Omega)$. Πράγματι $X_h \subset L_2(\Omega)$ και τα στοιχεία του X_h μηδενίζουν στο $\partial\Omega$. Απομένει να αποδείξουμε ότι υπάρχουν συναρτήσεις $g_1, g_2 \in L_2(\Omega)$ τέτοιες ώστε

$$\int_{\Omega} v \frac{\partial\phi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} g_i \phi dx, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega), \quad i = 1, 2. \quad (3.2.10)$$

Αν ισχύει η (3.2.10), τότε οι g_1, g_2 θα είναι οι γενικευμένες παράγωγοι v_{x_1}, v_{x_2} , αντίστοιχα. Έστω $v^K = v|_K$ ο περιορισμός της συνάρτησης v στο τρίγωνο K του τριγωνισμού. Ισχυριζόμαστε ότι οι συναρτήσεις g_1 και g_2 που ορίζονται σε κάθε τρίγωνο $K \in \mathcal{P}_h$ ως

$$g_i := v_{x_i}^K, \quad i = 1, 2, \quad K \in \mathcal{P}_h, \quad (3.2.11)$$

ικανοποιούν την (3.2.10), δηλαδή αποτελούν τις γενικευμένες παράγωγους v_{x_i} , $i = 1, 2$ του v . Κάθε g_i , $i = 1, 2$ είναι σταθερή σε κάθε τρίγωνο, αφού ο υπόχωρος στον οποίο βρίσκουμε αποτελείται από πολυώνυμα βαθμού το πολύ ένα σε κάθε τρίγωνο. Συνεπώς για κάθε συνάρτηση δοκιμής, από τον τύπου του *Green*,

$$\int_K v^K \frac{\partial\phi}{\partial x_i} dx = - \int_K g_i \phi dx + \int_{\partial K} v^K \phi n_i^K dS, \quad \forall K \in \mathcal{P}_h, \quad i = 1, 2, \quad (3.2.12)$$

με n^K το μοναδιαίο εξωτερικό κάθετο διάνυσμα στο σύνορο ∂K του K . Αθροίζοντας τις (3.2.12) για όλα τα τρίγωνα,

$$\sum_{K \in \mathcal{P}_h} \int_K v^K \frac{\partial\phi}{\partial x_i} dx = - \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \int_K g_i \phi dx + \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \int_{\partial K} v^K \phi n_i^K dS, \quad i = 1, 2, \quad (3.2.13)$$

ή ισοδύναμα,

$$\int_{\Omega} v^K \frac{\partial\phi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} g_i \phi dx + \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \int_{\partial K} v^K \phi n_i^K dS, \quad i = 1, 2. \quad (3.2.14)$$

Στόχος πλέον είναι να αποδείξουμε ότι το άθροισμα στην (3.2.14) μηδενίζεται και ως εκ τούτου θα ισχύει η (3.2.10). Οι όροι του αθροίσματος διασπώνται σε ολοκληρώματα της μορφής,

$$\int_E v^K \phi n_i^K dS, \quad (3.2.15)$$

με E πλευρά του τριγωνισμού. Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις. Η πρώτη περίπτωση είναι όταν η πλευρά βρίσκεται στο σύνολο και η δεύτερη περίπτωση όταν η πλευρά βρίσκεται στο εσωτερικό

στου Ω . Στην πρώτη περίπτωση το ολοκλήρωμα μηδενίζεται αφού $\phi = 0$ στο σύνορο. Πιο ενδιαφέρουσα είναι η δεύτερη περίπτωση. Έστω E είναι μια τυχαία εσωτερική πλευρά. Η E θα είναι ταυτόχρονα πλευρά δυο τριγώνων, έστω των K και K' . Συνεπώς οι συνεισφορές της πλευράς E στο άθροισμα θα είναι,

$$\int_E v^K \phi n_i^K dS, \text{ και } \int_E v^{K'} \phi n_i^{K'} dS. \quad (3.2.16)$$

Λόγω συνέχειας, $v^K = v^{K'}$ στην E . Επιπλέον, $n_i^K = -n_i^{K'}$ και συνεπώς τα ολοκληρώματα αλληλοαναιρούνται. Επομένως, το άθροισμα στην (3.2.14) έχει μηδενική συνεισφορά.

Στην υπόλοιπη ενότητα στόχος μας είναι να αποδείξουμε ότι οι χώροι πεπερασμένης διάστασης X_h , έχουν, υπό κατάλληλες συνθήκες την ιδιότητα (3.1.9).

Δοσμένης συνάρτησης $v \in C(\bar{\Omega})$ με $v = 0$ στο $\partial\Omega$ ορίζουμε την παρεμβάλουσα $I_h v$ της v στον X_h , ως το μοναδικό στοιχείο $I_h v \in X_h$ που συμπίπτει με την v στους εσωτερικούς κόμβους $p_i \in \mathcal{I}$ του τριγωνισμού ως,

$$(I_h v)(x) = \sum_{i=1}^N v(p_i) \phi_i(x), \quad x \in \bar{\Omega}. \quad (3.2.17)$$

Επιπλέον ορίζουμε την ημινόρμα στους χώρους $H^k(\omega)$, $k \geq 0$ με ω υποχωρίο του Ω , ως

$$|v|_{H^k(\omega)}^2 = \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha v\|_{L_2(\omega)}^2. \quad (3.2.18)$$

Η απόδειξη ότι οι χώροι X_h έχουν την ιδιότητα (3.1.9) θα είναι άμεση συνέπεια των δυο παρακάτω αποτελεσμάτων.

Τοπικός εκτιμητής σφάλματος για την παρεμβάλουσα στην L_2 και H^1 νόρμα.

Έστω συνάρτηση $v \in C(\bar{K})$ με το τρίγωνο K να έχει κορυφές p_1, p_2, p_3 . Ορίζουμε την παρεμβάλουσα στο K ως $I_K v \in \mathbb{P}_1$ η οποία ορίζεται σαν γραμμικός συνδυασμός των x_1, x_2 στο K με τύπο,

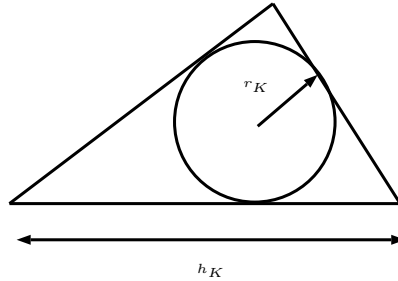
$$(I_K v)(p_i) = v(p_i), \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.2.19)$$

Ορισμός 3.1 Δοσμένου ενός τριγώνου $K \in \mathcal{P}_h$, ορίζουμε την διάμετρο,

$$h_K := \sup \{|x - y|, x, y \in K \in \mathcal{P}_h\}, \quad (3.2.20)$$

και την μέγιστη ακτίνα ενός εγγεγραμμένου κύκλου στο K , ως,

$$r_K := \sup \{r > 0 : \exists x \in K : |x - y| < r \Rightarrow y \in K\} \quad (3.2.21)$$



Σχήμα 3.8: Η διάμετρος h_K και η μέγιστη ακτίνα r_K , ενός εγγεγραμμένου κύκλου στο $K \in \mathcal{P}_h$.

Τότε αποδεικνύεται η παρακάτω εκτίμηση.

Πρόταση 3.1 Θεωρούμε τον συμβολισμό που έχουμε εισάγει παραπάνω. Υπάρχει σταθερά C ανεξάρτητη του $K \in \mathcal{P}_h$, τέτοια ώστε για κάθε $v \in H^2(K)$, $K \in \mathcal{P}_h$,

$$|v - I_K v|_{H^m(K)} \leq C \frac{h_K^2}{\rho_K^m} |v|_{H^2(K)}, \quad m = 0, 1. \quad (3.2.22)$$

Απόδειξη V.A.Dougalis [11]. □

Συνθήκη κανονικότητας του τριγωνισμού (Shape Regularity).

Ορισμός 3.2 (Συνθήκη Κανονικότητας) Μια οικογένεια τριγωνισμών $\{\mathcal{P}_h\}$ καλείται κανονική αν υπάρχει αριθμός $\kappa > 0$, ανεξάρτητος του $K \in \mathcal{P}_h$, τέτοιος ώστε,

$$\frac{h_K}{\rho_K} \leq \kappa, \quad \forall K \in \mathcal{P}_h. \quad (3.2.23)$$

Αν ισχύουν οι (3.2.22) και (3.2.23) τότε,

$$\frac{1}{\rho_K} \leq \frac{\kappa}{h_K} \Rightarrow \frac{1}{\rho_K^m} \leq \frac{\kappa^m}{h_K^m}, \quad m = 0, 1. \quad (3.2.24)$$

Βάση της (3.2.24) η (3.2.22) γράφεται,

$$|v - I_K v|_{H^m(K)} \leq C h_K^{2-m} |v|_{H^2(K)}, \quad m = 1, 0, \quad \forall v \in H^2(K), \quad (3.2.25)$$

με σταθερές C_m , $m = 0, 1$ ανεξάρτητες του τριγωνισμού. Καταλήγοντας, για $v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ προκύπτει,

$$\begin{aligned} \|v - I_h v\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \sum_{K \in \mathcal{P}_h} |v - I_h v|_{H^0(K)}^2 \leq C_0^2 \sum_{K \in \mathcal{P}_h} h_K^4 |v|_{H^2(K)}^2 \\ &\leq C_0^2 h^4 \sum_{K \in \mathcal{P}_h} |v|_{H^2(K)}^2 = C_0^2 h^4 |v|_{H^2(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (3.2.26)$$

Επιπλέον, για την εκτίμηση στην $H^1(\Omega)$ νόρμα,

$$\begin{aligned} |v - I_h v|_{H^1(\Omega)}^2 &= \sum_{K \in \mathcal{P}_h} |v - I_h v|_{H^1(K)}^2 \leq C_1^2 \sum_{K \in \mathcal{P}_h} h_K^2 |v|_{H^2(K)}^2 \\ &\leq C_1^2 h^2 \sum_{K \in \mathcal{P}_h} |v|_{H^2(K)}^2 = C_1^2 h^2 |v|_{H^2(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (3.2.27)$$

Από τις (3.2.26), (3.2.27) προκύπτουν οι εκτιμήσεις (3.1.18) και (3.1.10), αντίστοιχα. Οι εκτιμήσεις (3.2.26), (3.2.27) εξασφαλίζουν την ισχύ της (3.1.9).

3.3 Υλοποίηση μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων

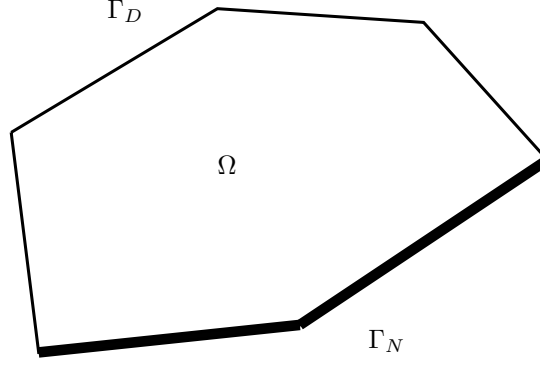
Σε αυτήν την ενότητα θα παρουσιάσουμε λεπτομέρειες σχετικά με την υλοποίηση της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων για ένα ελλειπτικό συνοριακό πρόβλημα σε πολυγωνικό χωρίο.

3.3.1 Το συνεχές πρόβλημα

Αναζητάμε $u(x) = u(x_1, x_2)$ η οποία ορίζεται στο $\bar{\Omega}$ με Ω κυρτό, πολυγωνικό χωρίο του \mathbb{R}^2 , και ικανοποιεί,

$$\begin{cases} -\Delta u + cu = f, & \text{στο } \Omega, \\ u = u_D, & \text{στο } \Gamma_D, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g, & \text{στο } \Gamma_N. \end{cases} \quad (3.3.1)$$

Το σύνορο του Ω το συμβολίζουμε με $\Gamma := \partial\Omega$, και το χωρίζουμε στο κομμάτι Γ_D , το οποίο θα έχει θετικό μέτρο, και το $\Gamma_N := \Gamma \setminus \Gamma_D$. Συνεπώς $\Gamma = \overline{\Gamma_D} \cup \overline{\Gamma_N}$ και $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$. Στο Γ_D θα έχουμε συνοριακές τύπου *Dirichlet*, και στο Γ_N συνοριακές τύπου *Neumann*. Επίσης οι συναρτήσεις f, g, u_D και η μη-αρνητική σταθερά c είναι δοσμένες εκ των προτέρων. Παρακάτω θα ορίσουμε πιο αυστηρά σε ποιους χώρους ανήκουν οι εκ των προτέρων συναρτήσεις του (3.3.1).



Σχήμα 3.9: Το χωρίο Ω .

3.3.2 Το διακριτό πρόβλημα

Θεωρούμε τον υπόχωρο πεπερασμένης διάστασης,

$$X_h := V \cap H_D^1(\Omega) = \{v \in V, : v = 0 \text{ στο } \Gamma_D\}. \quad (3.3.2)$$

Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων αποτελείται από την εύρεση $u_h \in V$ τέτοιο ώστε,

$$\int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v_h \, dx + c \int_{\Omega} u_h v_h \, dx = \int_{\Omega} f v_h \, dx + \int_{\Gamma_N} g v_h \, dS, \quad \forall v_h \in X_h, \quad (3.3.3)$$

με $u_h(p_i) = u_D(p_i)$ για κάθε *Dirichlet* κόμβο p_i .

Αναζητάμε την προσέγγιση της u στον υπόχωρο πεπερασμένης διάστασης X_h , αντί του $H^1(\Omega)$. Αυτό σημαίνει ότι έχουμε περιορίσει το πρόβλημα του υπολογισμού της u_h στους κόμβους του τριγωνισμού. Η (3.3.3) ισχύει για κάθε $v_h \in X_h$, οπότε $v_h = \phi_i \in X_h$. Συνεπώς, ζητάμε $u_h \in V$ τέτοιο ώστε αρχικά να έχουμε $u_h(p_i) = u_D(p_i)$, $\forall i \in \mathcal{D}$ και επιπλέον,

$$\int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla \phi_i \, dx + c \int_{\Omega} u_h \phi_i \, dx = \int_{\Omega} f \phi_i \, dx + \int_{\Gamma_N} g \phi_i \, dS, \quad \forall i \in \mathcal{I} \cup \mathcal{N}. \quad (3.3.4)$$

Προκειμένου να αναχθούμε σε ένα γραμμικό σύστημα, θα θυμηθούμε ότι είχαμε ορίσει την u_h ως γραμμικό συνδυασμό των συναρτήσεων βάσης,

$$u_h = \sum_{j=1}^N u_h(p_j) \phi_j. \quad (3.3.5)$$

Εύκολα παρατηρούμε ότι μπορούμε να αποσυνθέσουμε την (3.3.5) ως εξής,

$$u_h = \sum_{j \in \mathcal{I} \cup \mathcal{N}} u_j \phi_j + \sum_{j \in \mathcal{D}} u_j \phi_j, \quad (3.3.6)$$

με $u_j = u_h(p_j)$. Ισοδύναμα, αφού $u_h(p_i) = u_D(p_i)$

$$u_h = \sum_{j \in \mathcal{I} \cup \mathcal{N}} u_j \phi_j + \sum_{j \in \mathcal{D}} u_D(p_j) \phi_j. \quad (3.3.7)$$

Χρειαζόμαστε την κλίση της λύσης των πεπερασμένων στοιχείων, ∇u_h , η οποία θα ισούται με,

$$\nabla u_h = \sum_{j \in \mathcal{I} \cup \mathcal{N}} u_j \nabla \phi_j + \sum_{j \in \mathcal{D}} u_D(p_j) \nabla \phi_j. \quad (3.3.8)$$

Η εξίσωση (3.3.4) μπορεί να γραφεί πλέον για $i \in \mathcal{I} \cup \mathcal{N}$,

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathcal{I} \cup \mathcal{N}} \left(\int_{\Omega} \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j dx + c \int_{\Omega} \phi_i \phi_j dx \right) u_j &= \int_{\Omega} f \phi_i dx + \int_{\Gamma_N} g \phi_i dS \\ &- \sum_{j \in \mathcal{D}} \left(\int_{\Omega} \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j dx \right) u_D(p_j). \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

Το σύστημα (3.3.9) αποτελείται από $\dim X_h = \#\mathcal{I} \cup \mathcal{N}$ εξισώσεις και αγνώστους. Πιο απλά, το πλήθος των εξισώσεων και των αγνώστων θα είναι ίσο με το πλήθος των κόμβων οι οποίοι δεν είναι κόμβοι στο σύνορο με συνθήκες τύπου *Dirichlet*.

Απομένει για να κατασκευάσουμε το γραμμικό σύστημα, να υπολογίσουμε με κάποιον τρόπο τα παραπάνω ολοκληρώματα. Αρχικά θα ξεκινήσουμε με το αποκαλούμενο ως πίνακα ακαμψίας W (*stiffness matrix*), τα στοιχεία του οποίου ορίζονται ως,

$$w_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \phi_j \cdot \nabla \phi_i dx, \quad (3.3.10)$$

και έπειτα θα ασχοληθούμε με τον πίνακα μάζας M (*mass matrix*), τα στοιχεία του οποίου ορίζονται ως,

$$m_{ij} = \int_{\Omega} \phi_j \phi_i dx. \quad (3.3.11)$$

Οι δυο πίνακες στις συνθήκες (3.3.10),(3.3.11) ορίζονται για $i, j = 1, \dots, N$. και είναι συμμετρικοί και θετικά ορισμένοι.

Πράγματι, για τον πίνακα ακαμψίας ισχύει ότι $W_{ij} = W_{ji}$. Έστω το διάνυσμα $\xi \in \mathbb{R}^N$ που αντιστοιχεί στην συνάρτηση $v_h = \sum_{j=1}^N \xi_j \phi_j \in X_h$ τότε,

$$\begin{aligned} \xi^T W v &= \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \xi_j w_{ij} \xi_i \\ &= \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \xi_j \left(\int_{\Omega} \nabla \phi_j \cdot \nabla \phi_i dx \right) \xi_i \\ &= \int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^N \xi_j \nabla \phi_j \right) \cdot \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^N \xi_i \nabla \phi_i \right) \\ &= \int_{\Omega} \nabla v_h \cdot \nabla v_h dx \geq 0. \end{aligned}$$

Μέχρι στιγμής έχουμε αποδείξει ότι ο W είναι θετικά ήμι-ορισμένος. Εύκολα παρατηρούμε ότι $\xi^T W \xi = 0$ αν και μόνο αν $\nabla v_h = 0$ και κατ'επέκταση v_h είναι σταθερή στο Ω . Αφού $v_h \in X_h$ συνεπάγεται ότι στο σύνορο $\partial\Omega$ η v_h είναι μηδέν, και ως εκ τούτου $v_h = 0$ στο Ω . Συνολικά $\xi = 0$. Όμοια για τον πίνακα μάζας M προκύπτει ότι είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος.

Συνεπώς τόσο ο πίνακας ακαμψίας όσο και ο πίνακας μάζας είναι συμμετρικοί και θετικά ορισμένοι. Το δεξιό μέλος της (3.3.9) θα είναι ένα διάνυσμα και το ορίζουμε ως,

$$b_i = \int_{\Omega} f \phi_i dx + \int_{\Gamma_N} g \phi_i dS, \quad i \in \mathcal{I} \cup \mathcal{N}, \quad (3.3.12)$$

τότε, η (3.3.9), γράφεται ισοδύναμα,

$$\sum_{j \in \mathcal{I} \cup \mathcal{N}} (w_{ij} + cm_{ij})u_j = b_i - \sum_{j \in \mathcal{D}} (w_{ij} + cm_{ij})u_D(p_i), \quad \forall i \in \mathcal{I} \cup \mathcal{N}. \quad (3.3.13)$$

Πριν υπολογίσουμε τους πίνακες, θα κάνουμε κάποιες παρατηρήσεις.

1. Παρατηρώντας προσεκτικά το σχήμα 3.7 που απεικονίζει τον φορέα των ϕ_i , θα δούμε ότι αν

$$\text{supp}(\phi_i) \cap \text{supp}(\phi_j) = \emptyset$$

τότε η συνεισφορά τους στην (3.3.11) θα είναι μηδέν. Καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι

$$m_{ij} = 0 \Leftrightarrow \text{supp}(\phi_i) \cap \text{supp}(\phi_j) = \emptyset$$

Εξ ορισμού ο φορέας μιας συνάρτησης περιλαμβάνει και το σύνορο, οπότε υπάρχει περίπτωση η τομή τους να είναι μια πλευρά. Πάλι σε αυτήν την περίπτωση $m_{ij} = 0$. Όλα τα παραπάνω μπορούν να συμπυκνωθούν στο ότι αν p_i και p_j δεν είναι ταυτόχρονα κορυφές του ίδιου τριγώνου, τότε $m_{ij} = 0$.

2. Ανάλογα αποτελέσματα έχουμε και για τον πίνακα ακαμψίας.

3.3.3 Υπολογισμός Πινάκων

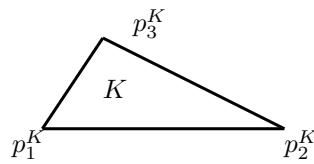
Θα επικεντρωθούμε στην αποτελεσματική κατασκευή των (3.3.10),(3.3.11). Τα ολοκληρώματα ως προς το χωρίο Ω μπορούν να αποσυνθεθούν σε άθροισμα ολοκληρωμάτων ως προς όλα τα τρίγωνα του τριγωνισμού. Πιο συγκεκριμένα,

$$w_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \phi_j \cdot \nabla \phi_i \, dx = \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \int_K \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j \, dx = \sum_{K \in \mathcal{P}_h} w_{ij}^K, \quad (3.3.14)$$

με $w_{ij}^K = \int_K \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j \, dx$. Σε κάθε τρίγωνο θα ορίζουμε τρεις τοπικές βασικές συναρτήσεις. Αρχικά θα ορίσουμε ένα αριθμό σε κάθε μια από τις κορυφές του τριγώνου K ,

$$p_1^K, p_2^K, p_3^K, \quad (3.3.15)$$

όπου ο παραπάνω συμβολισμός σημαίνει για παράδειγμα η p_1^K είναι η πρώτη κορυφή του τριγώνου K , η p_2^K η δεύτερη κορυφή του K , και p_3^K η τρίτη κορυφή του K .



Σχήμα 3.10: Η τοπική αρίθμηση σε ένα τυχαίο τρίγωνο K , γίνεται πάντα με φορά αντίθετη του ρολογιού.

Για κάθε ένα από τις παραπάνω κορυφές, ορίζουμε τις συναρτήσεις,

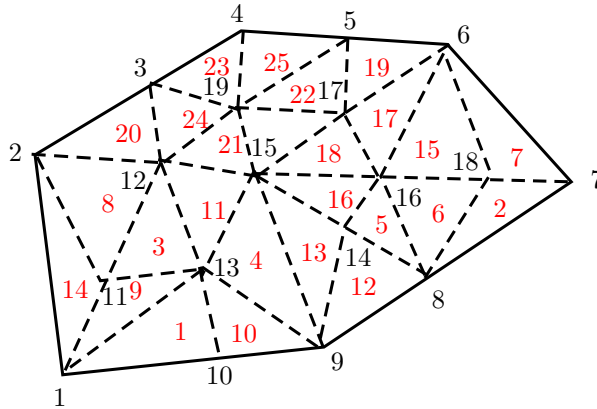
$$\lambda_1^K, \lambda_2^K, \lambda_3^K \in \mathbb{P}_1, \quad (3.3.16)$$

για τις οποίες θα ισχύει ότι,

$$\lambda_\alpha^K(p_\beta^K) = \delta_{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3. \quad (3.3.17)$$

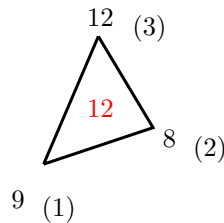
Οι συναρτήσεις τις (3.3.16) ονομάζονται τοπικές συναρτήσεις βάσης (*local basis functions*) στο τρίγωνο K του τριγωνισμού.

Έστω ότι ο τριγωνισμός \mathcal{P}_h αποτελείται από N κόμβους (ή κορυφές) τους οποίους όπως παραπάνω τους συμβολίζουμε ως p_i , $i = 1, \dots, N$. Η αρίθμηση $i = 1, \dots, N$ είναι μια καθολική αρίθμηση. Δηλαδή κάθε κόμβος έχει δυο αριθμήσεις, την καθολική και την τοπική. Στην (3.3.15) ορίσαμε την τοπική αρίθμηση ενός τυχαίου τριγώνου K . Αυτές οι δυο αριθμήσεις συνδέονται, και θα πρέπει να βρούμε έναν αποτελεσματικό τρόπο για να γίνεται κάθε φορά αυτή η σύνδεση. Για παράδειγμα, οι κορυφές του K , οι οποίες είναι οι p_1^K, p_2^K, p_3^K αντιστοιχούν στους $p_{i_1}, p_{i_2}, p_{i_3}$ κόμβους στην καθολική αρίθμηση.



Σχήμα 3.11: Μια τυπική αρίθμηση του Ω . Με μαύρο η αρίθμηση των κόμβων και με κόκκινο των τριγώνων.

Μια αντιστοίχιση της καθολικής αρίθμησης των κόμβων με την τοπική παρουσιάζεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 3.12: Μια τυπική αντιστοίχιση των αριθμήσεων.

Στα παραπάνω σχήματα παρουσιάζεται ένας τυχαίος τριγωνισμός ενός τυχαίου χωρίου, και η αρίθμηση των κόμβων και των τριγώνων. Με βάση αυτήν την αρίθμηση παρατηρούμε ότι οι κόμβοι p_i με $i = 1, \dots, 10$ ανήκουν στο σύνορο, και οι p_i με $i = 11, \dots, 19$ ανήκουν στο εσωτερικό του χωρίου. Οπότε,

$$\mathcal{I} = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19\},$$

$$\mathcal{D} = \{2, 3, 4, 5, 6\},$$

και

$$\mathcal{N} = \{1, 10, 9, 8, 7\}.$$

Το τελευταίο σχήμα απεικονίζει μια αντιστοιχία που μπορεί να υπάρξει μεταξύ της ολικής αρίθμησης με την τοπική αρίθμηση των κόμβων. Δεν είναι η μοναδική, αρκεί να πληροί τις

κατάλληλες προϋποθέσεις, δηλαδή να γίνεται αντίθετα με την φορά του ρολογιού. Με βάση την συγκεκριμένη, το $K = 12$ σε ολική αρίθμηση ορίζεται από τους p_9, p_8, p_{12} κόμβους του τριγωνισμού. Αυτοί οι κόμβοι συμπίπτουν με τους $p_1^{12}, p_2^{12}, p_3^{12}$, αντίστοιχα.

Πιο γενικά, αν \mathcal{P}_h ένας τριγωνισμός ο οποίος αποτελείται από M τρίγωνα και N κόμβους, τότε για κάθε τρίγωνο K ορίζουμε,

$$i = z(K, j) \quad (3.3.18)$$

να είναι μια απεικόνιση η οποία αντιστοιχίζει τον τοπικό δείκτη j , $j = 1, 2, 3$ των κόμβων p_j^T με τον ολικό δείκτη i , $i = 1, \dots, N$ των κόμβων p_i . Η h θα λαμβάνει τιμές από το σύνολο $\{1, 2, \dots, M\} \times \{1, 2, 3\}$ και θα τις απεικονίζει στο $\{1, 2, \dots, N\}$. Στο παράδειγμα μας θα έχουμε,

$$z(12, 1) = 9, \quad z(12, 2) = 8, \quad z(12, 3) = 12.$$

Σύμφωνα με την (3.2.6), αν περιορίσουμε την ϕ_i σε κάποια κορυφή του τριγώνου K , τότε είτε θα είναι μηδέν είτε θα είναι διάφορη του μηδενός. Πιο συγκεκριμένα θα είναι μηδέν αν ο κόμβος p_i δεν είναι κάποιος από τις κορυφές του K . Στην αντίθετη περίπτωση, θα είναι μια από τις (3.3.16),

$$\lambda_\alpha^K = \phi_{z(K, \alpha)}, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad (3.3.19)$$

με $z(K, \alpha)$ να είναι ο ολικός δείκτης του κόμβου p_i , ο οποίος είναι μια από τις κορυφές του K .

Ας δούμε τον λόγο που ορίσαμε τα παραπάνω. Στόχος μας είναι να υπολογίσουμε τα ολοκληρώματα (3.3.10), (3.3.11). Λόγω της (3.3.14), αρκεί να υπολογίζουμε τα ολοκληρώματα

$$w_{ij}^K = \int_K \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j \, dx.$$

Για κάθε τρίγωνο K , θα πρέπει να υπολογίσουμε τις παρακάτω ποσότητες,

$$k_{\alpha\beta}^K = \int_K \nabla \lambda_\beta^K \cdot \nabla \lambda_\alpha^K \, dx, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3, \quad (3.3.20)$$

και τότε βάση της (3.3.19),

$$k_{\alpha\beta}^K = w_{z(K, \alpha)z(K, \beta)}^K, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3. \quad (3.3.21)$$

Συνεπώς για να υπολογίσουμε τον W^K , του οποίου τα στοιχεία θα είναι τα $w_{\alpha, \beta}^K$, $\alpha, \beta = 1, 2, 3$, θα πρέπει να υπολογίσουμε τις ποσότητες (3.3.20) για $\alpha, \beta = 1, 2, 3$. Όλα τα άλλα στοιχεία του πίνακα W^T θα είναι μηδέν. Προσοχή, ο πίνακας W^K θα είναι διάστασης $N \times N$. Τέλος,

$$W = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} W^K.$$

Ας δούμε τον υπολογισμό των,

$$\int_K \nabla \lambda_\beta^K \cdot \nabla \lambda_\alpha^K \, dx, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3, \quad (3.3.22)$$

και,

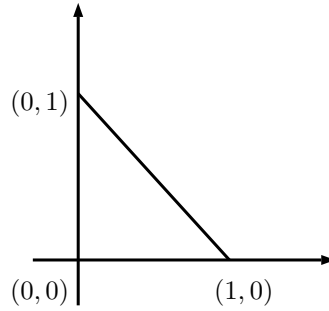
$$\int_K \lambda_\beta^K \lambda_\alpha^K \, dx, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3. \quad (3.3.23)$$

Για τον υπολογισμό τους θα πρέπει να εργασθούμε στο τρίγωνο αναφοράς. Ως τρίγωνο αναφοράς (βλ. σχήμα 3.13) ορίζουμε το τρίγωνο με κορυφές τις,

$$\hat{p}_1 = (0, 0), \quad \hat{p}_2 = (1, 0), \quad \hat{p}_3 = (0, 1), \quad (3.3.24)$$

όπου,

$$\hat{K} = \{(\hat{x}_1, \hat{x}_2) : 0 \leq \hat{x}_1 \leq 1, 0 \leq \hat{x}_2 \leq 1 - \hat{x}_1\}, \quad (3.3.25)$$



Σχήμα 3.13: Το τρίγωνο αναφοράς.

και το φυσικό τρίγωνο, ορίζουμε να είναι το τρίγωνο το οποίο μελετάμε και ανήκει στον τριγωνισμό του χωρίου Ω . Χρησιμοποιούμε τις μεταβλητές $\hat{x} = (\hat{x}_1^j, \hat{x}_2^j)$, $j = 1, 2, 3$, για το τρίγωνο αναφοράς και τις $x = (x_1^j, x_2^j)$, $j = 1, 2, 3$, για το φυσικό τρίγωνο. Επίσης το φυσικό τρίγωνο θα το αναφέρουμε ως K και το τρίγωνο αναφοράς, ως, \hat{K} .

Αντίστοιχα με την (3.3.16) ορίζουμε τις τοπικές συναρτήσεις βάσης για το τρίγωνο αναφοράς οι οποίες θα ανήκουν στον \mathbb{P}_1 και καλούνται *βαρυκεντρικές συναρτήσεις*,

$$\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3, \quad (3.3.26)$$

όπου,

$$\hat{\lambda}_\alpha(\hat{p}_\beta) = \delta_{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3, \quad (3.3.27)$$

και οι τοπικές συναρτήσεις βάσεις να είναι οι εξής.

$$\begin{cases} \hat{\lambda}_1(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = 1 - \hat{x}_1 - \hat{x}_2, \\ \hat{\lambda}_2(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \hat{x}_1, \\ \hat{\lambda}_3(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \hat{x}_2. \end{cases} \quad (3.3.28)$$

Επίσης οι τρεις κορυφές του τριγώνου K , θα έχουν συντεταγμένες,

$$p_1^K = (x_1^1, x_2^1), \quad p_2^K = (x_1^2, x_2^2), \quad p_3^K = (x_1^3, x_2^3).$$

Θεωρούμε τον αντιστρέψιμο, γραμμικό μετασχηματισμό $F_K : \hat{K} \mapsto K$ του τριγώνου αναφοράς \hat{K} στο K , του τριγωνισμού \mathcal{P}_h ,

$$K \ni x = F_K(\hat{x}) = B_K \hat{x} + c_K, \quad \hat{x} \in \hat{K}, \quad (3.3.29)$$

όπου B_K είναι 2×2 αντιστρέψιμος πίνακας,

$$B_K = \begin{pmatrix} x_1^2 - x_1^1 & x_1^3 - x_1^1 \\ x_2^2 - x_2^1 & x_2^3 - x_2^1 \end{pmatrix}, \quad (3.3.30)$$

και $c_K = (x_1^1, x_2^1)^T$. Δεδομένων των \hat{p}_α , $\alpha = 1, 2, 3$ μπορούμε να βρούμε τις συντεταγμένες των κορυφών του φυσικού τριγώνου,

$$p_\alpha^K = F_K(\hat{p}_\alpha), \quad \alpha = 1, 2, 3. \quad (3.3.31)$$

Οι συναρτήσεις στο \hat{K} μετασχηματίζονται στις αντίστοιχες συναρτήσεις στο K από την

$$\hat{v}(\hat{x}) = v(x), \quad x = F_K(\hat{x}).$$

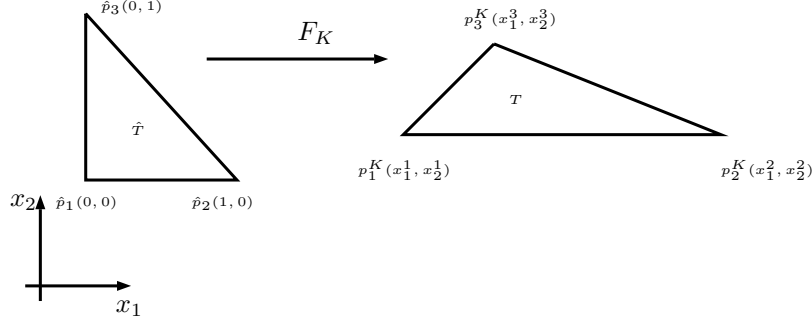
Δηλαδή,

$$\hat{v}(\hat{x}) = v(F_K(\hat{x})),$$

και,

$$v(x) = \hat{v}(F_K^{-1}(x)),$$

με τον όρο να είναι αντιστρέψιμος ο B_K και η απεικόνιση F_K , με $\hat{x} = F_K^{-1}(x) = B_K^{-1}x - B_K^{-1}c_K$.



Σχήμα 3.14: Η γραμμική απεικόνιση ανάμεσα στο K και το \hat{K} .

Σύμφωνα με τον μετασχηματισμό F_K , κάθε ολοκλήρωμα στο τρίγωνο K μπορεί να υπολογισθεί ως,

$$\int_K v(x)dx = \int_{\hat{K}} \hat{v}(F_K(\hat{x})) |\det B_K| d\hat{x}, \quad (3.3.32)$$

με $|\det B_K| = 2|K|$, όπου $|K|$ το εμβαδόν του K . Με βάση τα παραπάνω, για κάθε $x \in K$,

$$\hat{\lambda}_\alpha(\hat{x}) := \lambda_\alpha^K(x), \quad x \in K, \alpha = 1, 2, 3, \quad (3.3.33)$$

ή ισοδύναμα,

$$\lambda_\alpha^K(x) = \hat{\lambda}_\alpha(B_K^{-1}x - B_K^{-1}c_K), \quad x \in K, \alpha = 1, 2, 3. \quad (3.3.34)$$

Ισοδύναμα με την (3.3.34),

$$\lambda_\alpha^K(x) = \hat{\lambda}_\alpha(F_K^{-1}(x)), \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad (3.3.35)$$

για $x_1^j, x_2^j \in K$, $j = 1, 2, 3$. Μπορούμε να υπολογίσουμε άμεσα την \mathcal{F}_K^{-1} , τότε από την (3.3.35) μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε τις λ_α^K για κάθε $K \in \mathcal{P}_h$. Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος (3.3.20), χρειαζόμαστε τις $\nabla \lambda_\alpha^K$, τις οποίες μπορούμε να τις υπολογίσουμε από την (3.3.35). Έστω,

$$\nabla = \begin{bmatrix} \partial_{x_1} \\ \partial_{x_2} \end{bmatrix}, \quad \hat{\nabla} = \begin{bmatrix} \partial_{\hat{x}_1} \\ \partial_{\hat{x}_2} \end{bmatrix}, \quad (3.3.36)$$

θα εφαρμόσουμε κανόνα αλυσίδας για να συσχετίσουμε τους παραπάνω τελεστές. Από την (3.3.29) και αν συμβολίσουμε με β_{ij}^{-1} τα στοιχεία του B_K^{-1} , τότε,

$$\hat{x}_i = \beta_{i1}^{-1}(x_1 - x_1^1) + \beta_{i2}^{-1}(x_2 - x_2^1), \quad i = 1, 2. \quad (3.3.37)$$

Συνεπώς,

$$\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial x_j} = \beta_{ij}^{-1}, \quad i, j = 1, 2. \quad (3.3.38)$$

Παραγωγίζοντας την (3.3.34),

$$\frac{\partial \lambda_\alpha^K(x)}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^2 \beta_{ij}^{-1} \frac{\partial \hat{\lambda}_j}{\partial \hat{x}_i}, \quad j = 1, 2, \alpha = 1, 2, 3. \quad (3.3.39)$$

Λόγο της (3.3.38), η (3.3.39), μπορεί να γραφεί ισοδύναμα,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \lambda_\alpha^K(x)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \lambda_\alpha^K(x)}{\partial x_2} \end{pmatrix} = B_K^{-T} \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{\lambda}_\alpha(\hat{x})}{\partial \hat{x}_1} \\ \frac{\partial \hat{\lambda}_\alpha(\hat{x})}{\partial \hat{x}_2} \end{pmatrix}, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad (3.3.40)$$

ή πιο απλά,

$$B_K^T (\nabla \lambda_\alpha^K \circ F_K) = \hat{\nabla}(\hat{\lambda}_\alpha \circ F_K^{-1}), \quad \alpha = 1, 2, 3. \quad (3.3.41)$$

Τελικά,

$$\nabla \lambda_\alpha^K = B_K^{-T} \left(\hat{\nabla}(\hat{\lambda}_\alpha \circ F_K^{-1}) \right). \quad (3.3.42)$$

Προκειμένου να υπολογίσουμε την κλίση της λ_α^K στο $x = (x_1, x_2) \in K$, αρχικά θα υπολογίσουμε τα αντίστοιχα σημεία στο τρίγωνο αναφοράς, δηλαδή, $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2) = F_K^{-1}(x_1, x_2)$. Έπειτα μπορούμε να υπολογίσουμε την $\hat{\nabla} \hat{\lambda}_\alpha$ σε αυτό το σημείο και τέλος πολλαπλασιάζουμε με τον B_K^{-T} .

Εξ ορισμού των συναρτήσεων βάσης του τριγώνου αναφοράς, (3.3.28), η κλίση στο τρίγωνο αναφοράς θα είναι σταθερά και μπορεί να υπολογισθεί εύκολα.

$$\hat{\nabla} \hat{\lambda}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \hat{\nabla} \hat{\lambda}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\nabla} \hat{\lambda}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (3.3.43)$$

και αφού είναι σταθερές δεν χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε τον F_K^{-1} . Μετά από όλα αυτά ο υπολογισμός του (3.3.22),

$$\int_K \nabla \lambda_\beta^K \cdot \nabla \lambda_\alpha^K dx = |K| \nabla \lambda_\beta^K \cdot \nabla \lambda_\alpha^K, \quad (3.3.44)$$

αφού τα $\nabla \lambda_\alpha^K, \nabla \lambda_\beta^K$, $\alpha, \beta = 1, 2, 3$, είναι σταθερές, λόγω των (3.3.43).

Για τον πίνακα μάζας, (3.3.23),

$$\int_K \lambda_\alpha^K \lambda_\beta^K dx = 2|K| \int_{\hat{K}} \hat{\lambda}_\alpha \hat{\lambda}_\beta d\hat{x}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3. \quad (3.3.45)$$

Εύκολα παρατηρούμε ότι,

$$\left[\int_{\hat{K}} \hat{\lambda}_\alpha \hat{\lambda}_\beta d\hat{x} \right]_{\alpha, \beta} = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3. \quad (3.3.46)$$

Αν $\alpha = \beta = 1$, τότε,

$$\int_{\hat{K}} \hat{\lambda}_\alpha \hat{\lambda}_\beta d\hat{x} = \int_{\hat{K}} \hat{\lambda}_1^2 d\hat{x} = \int_0^1 \int_0^{1-\hat{x}_1} (1 - \hat{x}_1 - \hat{x}_2)^2 d\hat{x}_2 d\hat{x}_1 = \frac{1}{12}. \quad (3.3.47)$$

Όμοια και για $\alpha = \beta = 2, 3$. Αν $\alpha \neq \beta$, με $\alpha = 1, \beta = 2$,

$$\int_{\hat{K}} \hat{\lambda}_\alpha \hat{\lambda}_\beta d\hat{x} = \int_{\hat{K}} \hat{\lambda}_1 \hat{\lambda}_2 d\hat{x} = \int_0^1 \int_0^{1-\hat{x}_1} \hat{x}_1 \hat{x}_2 d\hat{x}_1 d\hat{x}_2 = \frac{1}{24}. \quad (3.3.48)$$

Όμοια για όλες τις περιπτώσεις όπου $\alpha \neq \beta$, $\alpha, \beta = 1, 2, 3$. Συνεπώς, για $\alpha, \beta = 1, 2, 3$,

$$\int_K \lambda_\alpha^K \lambda_\beta^K dx = \begin{cases} \frac{|K|}{6}, & \text{αν } \alpha = \beta, \\ \frac{|K|}{12}, & \text{αν } \alpha \neq \beta. \end{cases} \quad (3.3.49)$$

Για το ολοκλήρωμα (3.3.12). Έχουμε να υπολογίσουμε δυο ολοκληρώματα, τα

$$\int_{\Omega} f \phi_i dx, \quad \int_{\Gamma_N} g \phi_i dS, \quad (3.3.50)$$

όπου $f \in L_2(\Omega)$ και $g \in L_2(\Gamma_N)$. Για το πρώτο ολοκλήρωμα, αρχικά, μπορούμε να το αποσυνθέσουμε ως,

$$\int_{\Omega} f \phi_i dx = \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \int_K f \phi_i dx. \quad (3.3.51)$$

Για κάθε τρίγωνο K , υπολογίζουμε το διάνυσμα,

$$\int_K f \lambda_{\alpha}^K dx, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad (3.3.52)$$

και τα στοιχεία αυτού του διανύσματος κατά γραμμή τα προσθέτουμε στις θέσεις $z(K, 1)$, $z(K, 2)$ και $z(K, 3)$, οι οποίες ποσότητες αναφέρονται στην καθολική αρίθμηση της κορυφής με τοπική αρίθμηση ένα, δύο, και τρία, αντίστοιχα.

$$\int_K f \lambda_{\alpha}^K dx \approx \frac{1}{3} \sum_{\beta=1}^3 f(p_{\beta}^K) \int_K \lambda_{\alpha}^K dx = \frac{|det B_K|}{3} \sum_{\beta=1}^3 f(p_{\beta}^K) \int_{\hat{K}} \hat{\lambda}_{\alpha} d\hat{x} = \frac{|det B_K|}{18} \sum_{\beta=1}^3 f(p_{\beta}^K). \quad (3.3.53)$$

Το ολοκλήρωμα (3.3.52) μπορεί να προσεγγισθεί και ως εξής,

$$\int_K f \lambda_{\alpha}^K dx \approx f(b^K) \int_K \lambda_{\alpha}^K dx = f(b^K) \frac{|det B_K|}{6}, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad (3.3.54)$$

με,

$$b^K = \frac{1}{3}(p_1^K + p_2^K + p_3^K), \quad (3.3.55)$$

το βαρύκεντρο του τριγώνου K . Στην πραγματικότητα προσεγγίσαμε την f από μια συνάρτηση η οποία είναι σταθερή στο τρίγωνο K , και η σταθερή τιμή της είναι είτε το άθροισμα των τιμών της στις κορυφές του K , είτε η τιμή της στο βαρύκεντρο του K .

Τέλος θα δείξουμε πως θα υπολογίζουμε κάθε φορά το δεύτερο ολοκλήρωμα της (3.3.50). Έχουμε το,

$$\int_{\Gamma_N} g \phi_i dS, \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.3.56)$$

Είναι προφανές ότι αν ο κόμβος p_i είτε δεν είναι συνοριακός, είτε είναι συνοριακός αλλά είναι τύπου *Dirichlet*, τότε η συνεισφορά του (3.3.56), θα είναι μηδέν. Αρχικά, όπως και στα άλλα ολοκληρώματα, η ιδέα είναι να το αποσυνθέσουμε σε μικρότερα κομμάτια.

$$\int_{\Gamma_N} g \phi_i dS = \sum_{E \in \Gamma_N} \int_E g \phi_i dS, \quad (3.3.57)$$

με E να είναι πλευρά του συνόρου όπου έχει κόμβους *Neumann*. Έστω, p_1^E και p_2^E να είναι οι δυο κόμβοι που προκύπτουν στην πλευρά E , με,

$$p_1^E = (x_1^1, x_2^1), \quad p_2^E = (x_1^2, x_2^2). \quad (3.3.58)$$

Μια απλή προσέγγιση για το κάθε $\int_E g \phi_i dS$, θα είναι η εξής,

$$\int_E g \phi_{z(K,\alpha)} dS \approx g(m_1^E) \int_E \phi_{z(K,\alpha)} dS = \frac{h_E}{2} g(m^E), \quad \alpha = 1, 2, \quad (3.3.59)$$

όπου $m^E = \frac{p_1^E + p_2^E}{2}$, το μέσον της πλευράς E , και h_E το μήκος της.

Κεφάλαιο 4

Εκ Των Υστέρων Εκτιμητές Για Ελλειπτικές Εξισώσεις

4.1 Εισαγωγή

Έστω ότι έχουμε ένα ελλειπτικό πρόβλημα που θα ορίσουμε παρακάτω και έστω ότι έχουμε την προσέγγιση των πεπερασμένων στοιχείων γνωστή, την u_h . Το κεντρικό ζήτημα στην εκ των υστέρων εκτίμηση, είναι ότι δεδομένης της προσέγγισης του προβλήματος u_h , και των δεδομένων, όπως f, g , ψάχνουμε μια ποσοτική εκτίμηση για το σφάλμα $e = u - u_h$.

Γενικός κανόνας για την εύρεση εκ των υστέρων εκτίμησης για το σφάλμα είναι στο ότι το υπολογιστικό κόστος δεν θα πρέπει είναι ίδιας τάξης με την εύρεση μιας πιο ακριβούς λύσης για το αρχικό πρόβλημα.

Έστω u_h η προσέγγιση των πεπερασμένων στοιχείων για την ακριβή λύση του προβλήματος u και μια νόρμα $\|\cdot\|$, τότε μια εκτίμηση εκ των υστέρων θα είναι της παρακάτω μορφής,

$$\eta := \eta(u_h, data), \quad (4.1.1)$$

για την οποία θα υπάρχουν σταθερές c_1, c_2 , που εξαρτώνται μόνο από την συνθήκη κανονικότητας του τριγωνισμού (βλ. Ορισμός 3.2), τέτοιες ώστε,

$$c_1 \eta \leq \|u - u_h\| \leq c_2 \eta. \quad (4.1.2)$$

Το πιο σημαντικό είναι το άνω φράγμα της (4.1.2), αφού μας εξασφαλίζει την αξιοπιστία του εκ των υστέρων εκτιμητή. Επίσης το κάτω φράγμα μας εξασφαλίζει την αποτελεσματικότητα του, δηλαδή εκφράζει ότι ο εκτιμητής δεν θα απορρίψει κάποια καλή ενδεχομένως λύση του προβλήματος. Μια επιθυμητή ιδιότητα για έναν καλό εκ των υστέρων εκτιμητή, είναι οι σταθερές c_1, c_2 κοντά στην μονάδα.

Μερικές φορές η αξιοπιστία ενός εκτιμητή, δεν θα είναι της μορφής (4.1.2), αλλά,

$$\|u - u_h\| \leq c_2 \eta + h.o.t., \quad (4.1.3)$$

με $h.o.t.$, να δηλώνει όρους μεγαλύτερης τάξης, οι οποίοι εξαρτώνται από τα δεδομένα του προβλήματος και από τον τριγωνισμό.

4.1.1 Ελλειπτικό πρόβλημα

Έστω το ακόλουθο πρόβλημα,

$$\begin{cases} -\Delta u + cu = f, & \text{στο } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ u = 0, & \text{στο } \Gamma_D, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g, & \text{στο } \Gamma_N, \end{cases} \quad (4.1.4)$$

όπου υποθέτουμε ότι $f \in L_2(\Omega), g \in L_2(\Gamma_N)$ και $c \geq 0$ σταθερά. Επίσης για το σύνορο του χωρίου Ω , ισχύει $\partial\Omega = \overline{\Gamma_N} \cup \overline{\Gamma_D}$. Η ασθενής μορφή του προβλήματος (4.1.4) είναι η ακόλουθη: Ζητάμε $u \in V$ τέτοιο ώστε,

$$B(u, v) = \mathcal{F}(v), \quad \forall v \in V, \quad (4.1.5)$$

όπου ο χώρος V ορίζεται ως,

$$V = \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ στο } \Gamma_D\}, \quad (4.1.6)$$

η διγραμμική μορφή $B(\cdot, \cdot) : V \times V \mapsto \mathbb{R}$,

$$B(u, v) = \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + cuv) dx, \quad (4.1.7)$$

και ο τελεστής $\mathcal{F} : V \rightarrow \mathbb{R}$ ως,

$$\mathcal{F}(v) = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Gamma_N} g v dS. \quad (4.1.8)$$

Αν θεωρήσουμε X_h , έναν πεπερασμένης διάστασης υπόχωρο του V ,

$$X_h = \left\{ v \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) : \forall K \in \mathcal{P}_h, v|_K \in \mathbb{P}_1, v|_{\Gamma_D} = 0 \right\}, \quad (4.1.9)$$

τότε η προσέγγιση των πεπερασμένων στοιχείων είναι να βρούμε $u_h \in X_h$ τέτοιο ώστε

$$B(u_h, v_h) = \mathcal{F}(v_h) \quad \forall v_h \in X_h. \quad (4.1.10)$$

Στην αναζήτηση ενός υπολογίσιμου εκτιμητή για το σφάλμα, θα χρησιμοποιήσουμε δυο πολύ απλές παρατηρήσεις. Με βάση αυτές τις παρατηρήσεις θα κατασκευάσουμε τον εκτιμητή μας.

1. Αρχικά θα αναζητήσουμε την ασθενή μορφή που ορίζει το πραγματικό σφάλμα. Γνωρίζουμε ότι η ασθενής μορφή που ορίζει το ελλειπτικό πρόβλημα (4.1.4) είναι να βρούμε $u \in V$, τέτοιο ώστε,

$$B(u, v) = \mathcal{F}(v), \quad \forall v \in V.$$

Το σφάλμα $e = u - u_h$ ανήκει στο χώρο V , διότι $u \in V$ και $u_h \in X_h \subset V$. Οπότε αν αφαιρέσουμε και από τα δύο μέλη της παραπάνω ισότητας το $B(u_h, v_h)$, θα έχουμε,

$$B(u, v) - B(u_h, v) = \mathcal{F}(v) - B(u_h, v),$$

ή ισοδύναμα

$$B(e, v) = \mathcal{F}(v) - B(u_h, v), \quad \forall v \in V. \quad (4.1.11)$$

Συνεπώς το πραγματικό σφάλμα $e \in V$, χαρακτηρίζεται από την μοναδική λύση του ασθενούς προβλήματος (4.1.11). Το δεξί μέλος της (4.1.11), ονομάζεται υπόλοιπο.

2. Αφού η (4.1.11) ισχύει για κάθε $v \in V$ θα ισχύει και για $v_h \in X_h$, οπότε,

$$B(e, v_h) = 0, \quad \forall v_h \in X_h. \quad (4.1.12)$$

Δηλαδή το σφάλμα θα είναι κάθετο στον X_h .

Στην συνέχεια, θα δούμε ότι αυτές οι δυο ιδιότητες είναι ικανές για να παράγουμε ακριβείς εκτιμήσεις για το σφάλμα e στη νόρμα ενέργειας, $\|e\|$, η οποία παράγεται από τη διγραμμική μορφή B ως εξής,

$$\|v\|^2 := B(v, v), \quad \forall v \in V. \quad (4.1.13)$$

Αν η_K περιγράφει τον εκτιμητή σφάλματος στο τρίγωνο $K \in \mathcal{P}_h$, τότε ο ολικός εκτιμητής θα συμβολίζεται με η , και ορίζεται,

$$\eta^2 = \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \eta_K^2. \quad (4.1.14)$$

Ορίζουμε τον ολικό δείκτη αποτελεσματικότητας,

$$\theta = \frac{\eta}{\|e\|}, \quad (4.1.15)$$

και τον τοπικό δείκτη αποτελεσματικότητας,

$$\theta_K = \frac{\eta_K}{\|e\|_K}, \quad (4.1.16)$$

οι οποίοι καθώς $h \rightarrow 0$, θα πρέπει να συγκλίνουν στο ένα, με h να είναι η μέγιστη διάμετρος όλων των τριγώνων σε ολόκληρο τον τριγωνισμό.

Πριν προχωρήσουμε στους εκτιμητές, θα εισάγουμε τον απαραίτητο συμβολισμό για τον τριγωνισμό. Δοσμένου τριγώνου $K \in \mathcal{P}_h$, ορίζουμε τα σύνολα,

1. $\mathcal{E}(K)$, περιέχει τις πλευρές του K ,
2. $\mathcal{V}(K)$, περιέχει τις κορυφές του K .

Επιπλέον, ως προς όλα τα τρίγωνα, ορίζουμε,

1. \mathcal{E}_h , περιέχει όλες τις πλευρές του τριγωνισμού, τις οποίες μπορούμε να τις χωρίσουμε σε

$$\mathcal{E}_h^o \cup \mathcal{E}_h^D \cup \mathcal{E}_h^N,$$

δηλαδή σε εσωτερικές, *Dirichlet* και *Neumann*.

2. \mathcal{V}_h , περιέχει όλους τους κόμβους του τριγωνισμού, τις οποίες μπορούμε να τις χωρίσουμε σε,

$$\mathcal{V}_h^o \cup \mathcal{V}_h^D \cup \mathcal{V}_h^N,$$

δηλαδή σε εσωτερικές, *Dirichlet* και *Neumann*.

Τέλος, δοσμένης μιας πλευράς $E \in \mathcal{E}_h$, θεωρούμε το σύνολο $\mathcal{V}(E)$, το οποίο περιέχει τις κορυφές τις πλευράς E .

4.2 Άμεσοι Εκτιμητές

4.2.1 Εκτιμητής υπολοίπου

Το αρχικό βήμα είναι να αποσυνθέσουμε το ασθενές πρόβλημα (4.1.11) για το σφάλμα, από όλο το χωρίο σε συνεισφορές από κάθε τρίγωνο ξεχωριστά. Αυτό το βήμα είναι το βήμα κλειδί για να βρούμε τον εκτιμητή.

Έστω $v \in V$ τυχαίο. Τότε η ασθενής μορφή για το σφάλμα μπορεί να γραφεί ως εξής,

$$B(e, v) = \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \left\{ \int_K f v \, dx + \int_{\partial K \cap \Gamma_N} g v \, dS - \int_K (\nabla u_h \cdot \nabla v + c u_h v) \, dx \right\}. \quad (4.2.1)$$

Στο τελευταίο ολοκλήρωμα της δεξιάς πλευράς της (4.2.1) θα εφαρμόσουμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες. Δηλαδή θα έχουμε σε κάθε τρίγωνο $K \in \mathcal{P}_h$,

$$-\int_K \nabla u_h \cdot \nabla v \, dx = \int_K v \Delta u_h \, dx - \int_{\partial K} \frac{\partial u_h}{\partial n_K} v \, dS.$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω σχέση στην (4.2.1) θα έχουμε,

$$B(e, v) = \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \left\{ \int_K r v \, dx + \int_{\partial K \cap \Gamma_N} R v \, dS - \int_{\partial K \setminus \Gamma_N} \frac{\partial u_h}{\partial n_K} v \, dS \right\}, \quad (4.2.2)$$

με

$$r = f + \Delta u_h - c u_h, \text{ στο } K, \quad (4.2.3)$$

$$R = g - \frac{\partial u_h}{\partial n_K}, \text{ στο } \partial K \cap \Gamma_N, \quad (4.2.4)$$

όπου r είναι το εσωτερικό υπόλοιπο και R το συνοριακό υπόλοιπο. Εδώ n_K είναι το εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο σύνορο του τριγώνου $K \in \mathcal{P}_h$, το ∂K . Κάθε μια από τις παραπάνω ποσότητες είναι καλά ορισμένη χάρη στην ομαλότητα των δεδομένων αλλά και της ομαλότητας της προσέγγισης u_h σε κάθε τρίγωνο.

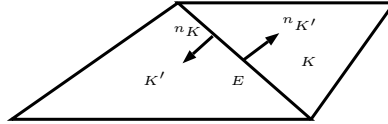
Συνεχίζουμε να απλοποιούμε την σχέση (4.2.1) ώσπου να καταλήξουμε σε μια απλή μορφή. Η (4.2.2) μπορεί να γραφεί ισοδύναμα,

$$B(e, v) = \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \left\{ \int_K r v \, dx + \int_{\partial K \cap \Gamma_N} R v \, dS \right\} - \sum_{E \in \mathcal{E}_h^i} \int_E \left[\frac{\partial u_h}{\partial n} \right] v \, dS, \quad (4.2.5)$$

όπου,

$$\left[\frac{\partial u_h}{\partial n_E} \right] = n_K \cdot \nabla u_h \Big|_K + n_{K'} \cdot \nabla u_h \Big|_{K'}, \quad (4.2.6)$$

ορίζεται στην πλευρά E η οποία είναι κοινή πλευρά για τα τρίγωνα K και K' , και είναι η προσέγγιση της ροής στην επαφή αυτών των δυο τριγώνων.



Σχήμα 4.1: Η πλευρά $E \in \mathcal{E}(K) \cap \mathcal{E}(K')$.

Από το σχήμα παρατηρούμε ότι $n_K = -n_{K'}$. Λόγω της (4.2.6), ο τελευταίος όρος της (4.2.5), μπορεί να γραφεί ως,

$$\sum_{K \in \mathcal{P}_h} \int_{\partial K \setminus \Gamma_N} \frac{\partial u_h}{\partial n_K} v \, dS = \sum_{E \in \mathcal{E}_h^i} \int_E \left[\frac{\partial u_h}{\partial n_E} \right] v \, dS.$$

Αν επιπλέον ορίσουμε την,

$$R = \begin{cases} g - \frac{\partial u_h}{\partial n_E}, & \text{για } E = \partial K \cap \Gamma_N, \\ - \left[\frac{\partial u_h}{\partial n_E} \right] & \text{για } E = \partial K \setminus \Gamma_N, \end{cases} \quad (4.2.7)$$

τότε,

$$B(e, v) = \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \int_K r v \, dx + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \int_E R v \, dS, \quad \forall v \in V. \quad (4.2.8)$$

Για το επόμενο βήμα, θα χρειαστούμε μια κατά τμήματα γραμμική προσέγγιση μιας τυχαίας $v \in V$. Αν η $v \in H^2(\Omega)$ τότε γνωρίζουμε ήδη μια κατά τμήματα γραμμική παρεμβάουσα της v , όπου όμως σύμφωνα με τις εκτιμήσεις σφάλματος (3.2.26), το σφάλμα στην L_2 νόρμα, ελέγχεται από όρους $|v|_{H^2(\Omega)}$. Χρειαζόμαστε να κατασκευάσουμε εκτιμητή, ο οποίος θα κάνει χρήση της ελάχιστης δυνατής ομαλότητας της λύσης u . Συνεπώς, ορίζουμε τον τελεστή παρεμβολής

$$I_h : L_1(\Omega) \rightarrow X_h,$$

με τύπο

$$I_h v = \sum_{p \in \mathcal{V}_h^o \cap \mathcal{V}_h^N} \phi_p \frac{1}{|\omega_p|} \int_{\omega_p} v dx.$$

Οπότε αφού $I_h v \in X_h$ και $X_h \subset V$ τότε επιλέγοντας $I_h v$ στην (4.2.8) θα έχουμε λόγω της (4.1.12) ότι,

$$B(e, I_h v) = \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \int_K r I_h v dx + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \int_E R I_h v dS = 0. \quad (4.2.9)$$

Συνδυάζοντας την (4.2.9) με την (4.2.8) έχουμε,

$$B(e, v) = B(e, v) - B(e, I_h v), \quad \forall v \in V.$$

και τότε,

$$B(e, v) = \sum_{K \in \mathcal{P}} \int_K r(v - I_h v) dx + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \int_E R(v - I_h v) dS, \quad \forall v \in V \quad (4.2.10)$$

Στην συνέχεια, εφαρμόζουμε στην (4.2.10) την ανισότητα *Cauchy-Schwartz* και λαμβάνουμε,

$$B(e, v) \leq \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \|r\|_{L_2(K)} \|v - I_h v\|_{L_2(K)} + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \|R\|_{L_2(E)} \|v - I_h v\|_{L_2(E)} \quad (4.2.11)$$

Για να απλοποιήσουμε περαιτέρω την (4.2.11), θα βασιστούμε στο παρακάτω Θεώρημα το οποίο μας δίνει εκτιμήσεις ως προς το σφάλμα του τελεστή παρεμβολής I_h , τον οποίο ορίσαμε παραπάνω, στην L_2 νόρμα.

Θεώρημα 4.1 Έστω $r \in [1, +\infty)$ και για $p \geq 0$ έστω X_h να είναι ο υπόχωρος πεπερασμένης διάστασης από τον οποίο κατασκευάζεται η διαμέριση \mathcal{P}_h του πολυγωνικού χωρίου Ω σε στοιχεία. Έστω $s \in [0, 1]$ με $s \leq t \leq p + 1$. Τότε υπάρχει γραμμικός, φραγμένος τελεστής

$$I_h : W^{t,r}(\Omega) \rightarrow X_h$$

και μια σταθερά C η οποία εξαρτάται μόνο από την συνθήκη (3.2.23) του τριγωνισμού, τέτοιος ώστε για όλα τα $u \in W^{t,r}(\Omega)$ και για όλα τα στοιχεία $K \in \mathcal{P}_h$ να έχουμε,

$$\|u - I_h u\|_{W^{s,r}(K)} \leq C h_K^{t-s} \|u\|_{W^{t,r}(\tilde{\omega}_K)} \quad (4.2.12)$$

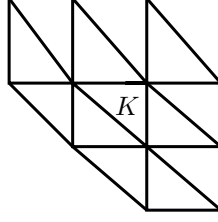
και

$$\|u - I_h u\|_{W^{s,r}(E)} \leq C h_K^{t-s-1/r} \|u\|_{W^{t,r}(\tilde{\omega}_K)} \quad (4.2.13)$$

Απόδειξη Brenner and Scott [7]. □

Το υποχωρίο $\tilde{\omega}_K$ να αποτελείται από τα τρίγωνα $K' \in \mathcal{P}_h$, που έχουν είτε μια κοινή πλευρά, είτε μια κοινή κορυφή με το K .

$$\tilde{\omega}_K := \bigcup \{K' \in \mathcal{P} : K' \cap K \neq \emptyset\}. \quad (4.2.14)$$



Σχήμα 4.2: Το υποχωρίο $\tilde{\omega}_K$.

Επιλέγοντας $s = 0, r = 2, t = 1$ στις (4.2.12), (4.2.13), προκύπτουν οι παρακάτω εκτιμήσεις,

$$\|v - I_h v\|_{L_2(K)} \leq C h_K \|v\|_{H^1(\tilde{\omega}_K)} \quad (4.2.15)$$

$$\|v - I_h v\|_{L_2(E)} \leq C h_K^{1/2} \|v\|_{H^1(\tilde{\omega}_K)}. \quad (4.2.16)$$

Τότε, η σχέση (4.2.11) γίνεται,

$$\begin{aligned} B(e, v) &\leq C \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \|r\|_{L_2(K)} h_K \|v\|_{H^1(\tilde{\omega}_K)} + C \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \|R\|_{L_2(E)} h_K^{1/2} \|v\|_{H^1(\tilde{\omega}_K)} \quad (4.2.17) \\ &\leq C \left\{ \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \|r\|_{L_2(K)} h_K \|v\|_{H^1(\tilde{\omega}_K)} + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \|R\|_{L_2(E)} h_K^{1/2} \|v\|_{H^1(\tilde{\omega}_K)} \right\} \\ &= C \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \left\{ \|v\|_{H^1(\tilde{\omega}_K)} \left(\|r\|_{L_2(K)} h_K + \|R\|_{L_2(\partial K)} h_K^{1/2} \right) \right\} \\ &\leq C \left(\sum_{K \in \mathcal{P}_h} \|v\|_{H^1(\tilde{\omega}_K)}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{K \in \mathcal{P}_h} \left(\|r\|_{L_2(K)} h_K + \|R\|_{L_2(\partial K)} h_K^{1/2} \right)^2 \right)^{1/2} \\ &\leq C \|v\|_{H^1(\Omega)} \left\{ \sum_{K \in \mathcal{P}_h} h_K^2 \|r\|_{L_2(K)}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_E \|R\|_{L_2(E)}^2 \right\}^{1/2}, \quad \forall v \in V, \end{aligned}$$

όπου στο τελευταίο βήμα κάνουμε την χρήση της ανισότητας $2\alpha\beta \leq \alpha^2 + \beta^2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα της ελλειπτικότητας της διγραμμικής μορφής B . Δηλαδή,

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|v\|. \quad (4.2.18)$$

Τέλος, χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι κάθε K' ανήκει σε πεπερασμένου πλήθους υποχωρία $\tilde{\omega}_K$, οπότε,

$$\sum_{K \in \mathcal{P}_h} \|v\|_{H^1(\tilde{\omega}_K)}^2 \leq C \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \|v\|_{H^2(K)}^2 = C \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Αφού $e \in V$, θέτοντας $v = e$ στην παραπάνω ανισότητα θα έχουμε τον εκ των υστέρων εκτιμητή για το ελλειπτικό πρόβλημα (4.1.4),

$$\|e\|^2 \leq C \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \left\{ h_K^2 \|r\|_{L_2(K)}^2 + h_K \|R\|_{L_2(\partial K)}^2 \right\}. \quad (4.2.19)$$

Η σχέση (4.2.19) αποτελεί μια εκτίμηση εκ των υστέρων για το πραγματικό σφάλμα. Αν παρατηρήσουμε οι όροι στο δεξιό μέλος είναι υπολογίσιμοι εκτός από την σταθερά C . Εύκολα, παρατηρούμε ότι είναι της μορφής,

$$\|e\| \leq C \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \eta_K^2, \quad (4.2.20)$$

με,

$$\eta_{R,K}^2 = h_K^2 \|r\|_{L_2(K)}^2 + h_K \|R\|_{L_2(\partial K)}^2, \quad (4.2.21)$$

όπου κάθε $\eta_{R,K}$ είναι η συνεισφορά του τριγώνου K στο ολικό σφάλμα $\|e\|$.

Αν θέλουμε ο εκτιμητής μας να χρησιμοποιείται σαν κριτήριο τερματισμού ενός προσαρμοζόμενου αλγορίθμου για εκλέπτυνση, τότε ο εκτιμητής θα πρέπει να είναι *αποτελεσματικός* με την έννοια ότι θα πρέπει να υπάρχει μια σταθερά C η οποία δεν εξαρτάται από το μέγεθος της διαμέρισης, τέτοια ώστε,

$$\sum_{K \in \mathcal{P}_h} \eta_{R,K}^2 \leq C \|e\|^2. \quad (4.2.22)$$

Ο παραπάνω τύπος του εκτιμητή μαζί με τον (4.2.20) είναι πολύ σημαντικός διότι δείχνει ότι ο ρυθμός μεταβολής του εκτιμητή όσο η διαμέριση εκλεπτύνεται αντικατοπτρίζεται στον χαρακτηριστικό του πραγματικού σφάλματος.

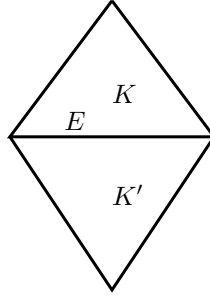
Προκειμένου να αποδείξουμε την *αποτελεσματικότητα* που παραπάνω εκτιμητή, θα ορίσουμε βοηθητικές συναρτήσεις οι οποίες έχουν ορισμένες χρήσιμες ιδιότητες. Οι συναρτήσεις αυτές ονομάζονται συχνά συναρτήσεις *bubble*, είναι μη αρνητικές συναρτήσεις και έχουν μη-μηδενικό τοπικό φορέα. Θα χρησιμοποιήσουμε δυο ειδών συναρτήσεις *bubble*, τις *εσωτερικές* και τις *πλευρικές*.

Πλευρικές συναρτήσεις *Bubble*

Έστω $E \in \mathcal{E}_h$ να είναι μια τυχαία πλευρά του τριγωνισμού. Ορίζουμε τις συνεχείς συναρτήσεις $\chi_E : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει ότι $\chi_E|_K \in \mathbb{P}_2(K)$ για όλα τα $K \in \mathcal{P}_h$. Επιπλέον για κάθε $K \in \mathcal{P}_h$, ισχύει ότι $\chi_E(m_E) = 1$, με m_E , το μέσον της πλευράς E και $\chi_E = 0$ στις άλλες πλευρές του τριγωνισμού. Η χ_E έχει μη μηδενικό τοπικό φορέα στο ω_E , τέτοιο ώστε,

$$\omega_E = \bigcup \{K \in \mathcal{P}_h : E \in \mathcal{E}(K)\}. \quad (4.2.23)$$

Το υποχωρίο ω_E αποτελείται από δυο τρίγωνα αν η $E \in \mathcal{E}_h^o$, και από ένα, αν $E \in \mathcal{E}_h^D$ ή $E \in \mathcal{E}_h^N$.



Σχήμα 4.3: Το υποχωρίο ω_E .

Συνοψίζοντας, οι πλευρικές συναρτήσεις *bubble*, θα έχουν τις παρακάτω ιδιότητες.

1. Θα έχει μη-μηδενικό τοπικό φορέα, τον ω_E .
2. Λαμβάνουν τις τιμές,

$$0 \leq \chi_E \leq 1. \quad (4.2.24)$$

3. Το ολοκλήρωμα της χ_E θα είναι ίδιας τάξης με το μήκος της πλευράς E ,

$$Ch_E \leq \int_E \chi_E \leq h_E. \quad (4.2.25)$$

Εσωτερικές συναρτήσεις *Bubble*

Έστω $K \in \mathcal{P}_h$ και έστω b^K το βαρύκεντρο του K . Ορίζουμε $\psi_K \in \mathbb{P}_3$, τέτοιο ώστε $\psi_K(b^K) = 1$ και $\phi_K = 0$ στο ∂K .

Ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

1. Ο φορέας των ψ_K περιέχεται στο K .
2. Η συνάρτηση ψ_K λαμβάνει τιμές,

$$0 \leq \psi_K \leq 1 \quad (4.2.26)$$

3. Για το ολοκλήρωμα των ψ_K , θα ισχύει,

$$C|K| \leq \int_K \psi_K \leq |K|, \quad (4.2.27)$$

με $|K|$ να είναι το εμβαδόν του K .

Πριν συνεχίσουμε θα δούμε κάποια βοηθητικά αποτελέσματα τα οποία ορίζονται για το φυσικό τρίγωνο και έχουν προκύψει από το τρίγωνο αναφοράς.

Θεώρημα 4.2 Έστω $\hat{P} \subset H^1(\hat{K})$ υπόχωρος πεπερασμένης διάστασης, των συναρτήσεων που ορίζονται στο τρίγωνο αναφοράς και $F_K : \hat{K} \rightarrow K$ μια απεικόνιση. Ορίζουμε $P = \{\hat{v} \circ F_K^{-1} : \hat{v} \in \hat{P}\}$. Τότε, υπάρχει μια σταθερά C για κάθε $v \in P$, ανεξάρτητη του v και h , τέτοια ώστε,

$$C^{-1} \|v\|_{L_2(K)}^2 \leq \int_K \psi v^2 dx \leq C \|v\|_{L_2(K)}, \quad (4.2.28)$$

και

$$C^{-1} \|v\|_{L_2(K)} \leq \|\psi v\|_{L_2(K)} + h_K |\psi v|_{H^1(K)} \leq C \|v\|_{L_2(K)}. \quad (4.2.29)$$

Απόδειξη *Mark Ainsworth and J. Tinsley Oden [2]*. □

Τα αντίστοιχα αποτελέσματα θα έχουμε και για τις πλευρικές συναρτήσεις *bubble*.

Θεώρημα 4.3 Έστω $E \subset \partial K$ και χ_E η συνάρτηση *bubble* που αντιστοιχεί στην πλευρά E . Έστω $P(E)$ να είναι ένας πεπερασμένης διάστασης χώρος των συναρτήσεων που ορίζονται στην E , και προέρχονται από την απεικόνιση του $\hat{P} \subset H^1(\hat{K})$ στην E . Τότε υπάρχει μια σταθερά C ανεξάρτητη του $K \in \mathcal{P}_h$, τέτοια ώστε

$$C^{-1} \|v\|_{L_2(E)}^2 \leq \int_E \chi_E v^2 dS \leq C \|v\|_{L_2(E)}, \quad (4.2.30)$$

και

$$h_K^{-\frac{1}{2}} \|\chi_E v\|_{L_2(K)} + h_K^{\frac{1}{2}} |\chi_E v|_{H^1(K)} \leq C \|v\|_{L_2(E)}. \quad (4.2.31)$$

Απόδειξη *Mark Ainsworth and J. Tinsley Oden [2]*. □

Με βάση τα παραπάνω αποτελέσματα προσπαθούμε να αποδείξουμε ότι για τον εκτιμητή (4.2.21) θα ισχύει η (4.2.22). Αρχικά από την σχέση (4.2.21) έχουμε ότι

$$\eta_{R,K}^2 = h_K^2 \|r\|_{L_2(K)}^2 + h_K \|R\|_{L_2(\partial K)}^2,$$

οπότε για να βρούμε μια εκτίμηση στην μορφή (4.2.22), πρέπει να βρούμε άνω φράγματα για τους όρους $\|r\|_{L_2(K)}$ και $\|R\|_{L_2(\partial K)}$. Η κεντρική ιδέα είναι να χρησιμοποιήσουμε ειδικές συναρτήσεις, και αυτές οι ειδικές συναρτήσεις θα στηρίζονται στις συναρτήσεις *bubble* και τα

παραπάνω θεωρήματα.

Αρχικά θα προσπαθήσουμε να βρούμε ένα φράγμα για την ποσότητα $\|r\|_{L_2(K)}$, το οποίο θα εξαρτάται από την νόρμα του πραγματικού σφάλματος, η οποία θα είναι υπολογισμένη σε μια γειτονιά του τριγώνου K . Έστω \bar{r} να είναι μια κατά τμήματα συνεχής προσέγγιση για τον εκτιμητή του εσωτερικού υπολοίπου r στο K . Αυτή η προσέγγιση θα πρέπει να είναι κατάλληλη, δηλαδή να γίνεται από έναν κατάλληλο υπόχωρο πεπερασμένης διάστασης. Για παράδειγμα αν η προσέγγιση *Galerkin* u_h αποτελείται από κατά τμήματα γραμμικές συναρτήσεις πάνω στα τρίγωνα, τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε την \bar{r} από κατά τμήματα γραμμικές συναρτήσεις πάνω στα τρίγωνα. Σε αυτήν την περίπτωση δεν είναι αναγκαίο να είναι συνεχής στο σύνορο κάθε τριγώνου.

Επιλέγοντας $v = \psi_K \bar{r}$ η αριστερή σχέση της (4.2.28), την αριστερή της σχέση, δίνει,

$$\|\bar{r}\|_{L_2(K)}^2 \leq C \int_K \psi_K \bar{r}^2 dx. \quad (4.2.32)$$

Όπως είπαμε και πιο πριν η συνάρτηση $v = \bar{r} \psi_K$ είναι μηδέν στο σύνορο του τριγώνου K και τότε μπορεί να επεκταθεί ως μηδέν στα υπόλοιπα τρίγωνα του τριγωνισμού \mathcal{P}_h , του Ω . Η συνάρτηση v μετά από αυτήν την επέκταση θα ανήκει στον χώρο V .

Εμείς γνωρίζουμε ότι η ασθενής μορφή για το σφάλμα (4.1.11) ισχύει για κάθε $v \in V$. Οπότε υπολογίζουμε την (4.1.11) για $v = \psi_K \bar{r}$,

$$B(e, \bar{r} \psi_K) = \int_K \psi_K r \bar{r} dx, \quad (4.2.33)$$

όπου το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μηδενίζεται αφού $\text{supp}(v) = K$. Στο επόμενο βήμα θα πρέπει να παρατηρήσουμε το πως θα συνδυάσουμε τις σχέσεις (4.2.32), (4.2.33). Η (4.2.33) μπορεί να γραφεί ισοδύναμα,

$$B(e, \bar{r} \psi_K) = \int_K \psi_K \bar{r}^2 dx - \int_K \psi_K \bar{r} (\bar{r} - r) dx,$$

ή ισοδύναμα,

$$\int_K \psi_K \bar{r}^2 dx = \int_K \psi_K \bar{r} (\bar{r} - r) dx + B(e, \bar{r} \psi_K). \quad (4.2.34)$$

Οπότε εφαρμόζοντας *Cauchy-Schwartz* στο δεξί μέλος, πάντα αυτό που θα έχουμε θα είναι μεγαλύτερο ή ίσο της (4.2.32). Συνεπώς εφαρμόζοντας την *Cauchy-Schwartz* αρχικά στον πρώτο όρο του δεξιού μέλους θα έχουμε,

$$\int_K \psi_K \bar{r} (\bar{r} - r) dx \leq \|\psi_K \bar{r}\|_{L_2(K)} \|\bar{r} - r\|_{L_2(K)} \leq C \|\bar{r}\|_{L_2(K)} \|\bar{r} - r\|_{L_2(K)}, \quad (4.2.35)$$

όπου η δεύτερη ανισότητα, προκύπτει λόγω της (4.2.29) με

$$\|\psi_K \bar{r}\|_{L_2(K)} \leq C \|\bar{r}\|_{L_2(K)}.$$

Επίσης για τον τελευταίο όρο της (4.2.34),

$$B(e, \bar{r} \psi_K) \leq \|e\|_K \|\psi_K \bar{r}\|_{H^1(K)} \leq Ch_K^{-1} \|e\|_K \|\bar{r}\|_{L_2(K)}, \quad (4.2.36)$$

όπου και πάλι η δεύτερη ανισότητα προέκυψε από την (4.2.29) του Θεωρήματος 4.2. Πράγματι, επιλέγοντας $v = \bar{r}$ στην (4.2.29),

$$\frac{1}{h_K} \|\psi_K \bar{r}\|_{L_2(K)} + |\psi_K \bar{r}|_{H^1(K)} \leq Ch_K^{-1} \|\bar{r}\|_{L_2(K)}.$$

Αρκεί να δείξουμε ότι $\frac{1}{h_K} \|\psi \bar{r}\|_{L_2(K)} + |\psi_K \bar{r}|_{H^1(K)} \geq \|\psi_K \bar{r}\|_{H^1(K)}$. Λόγω του $0 < h_K < 1$ προκύπτει ότι,

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_K} \|\psi_K \bar{r}\|_{L_2(K)} + |\psi_K \bar{r}|_{H^1(K)} &\geq \|\psi_K \bar{r}\|_{L_2(K)} + |\psi_K \bar{r}|_{H^1(K)} \\ &\geq \sqrt{\|\psi \bar{r}\|_{L_2(K)}^2 + |\psi_K \bar{r}|_{H^1(K)}^2} = \|\psi_K \bar{r}\|_{H^1(K)}. \end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τις (4.2.34) - (4.2.36), έχουμε,

$$\int_K \psi_K \bar{r}^2 dx \leq C \|\bar{r}\|_{L_2(K)} \|\bar{r} - r\|_{L_2(K)} + Ch_K^{-1} \|e\|_K \|\bar{r}\|_{L_2(K)}, \quad (4.2.37)$$

και από την (4.2.32),

$$\|\bar{r}\|_{L_2(K)} \leq C \{h_K^{-1} \|e\|_K + \|\bar{r} - r\|_{L_2(K)}\}. \quad (4.2.38)$$

Στην συνέχεια, εφαρμόζοντας την τριγωνική ανισότητα θα έχουμε,

$$\|r\|_{L_2(K)} = \|\bar{r} + r - \bar{r}\|_{L_2(K)} \leq \|\bar{r} - r\|_{L_2(K)} + \|\bar{r}\|_{L_2(K)}.$$

Συμπεπώς,

$$\|r\|_{L_2(K)} \leq C \{h_K^{-1} \|e\|_K + \|\bar{r} - r\|_{L_2(K)}\}. \quad (4.2.39)$$

Οπότε βρήκαμε ένα άνω φράγμα για την $\|r\|_{L_2(K)}$. Απομένει με ανάλογη διαδικασία να βρούμε ένα άνω φράγμα για την $\|R\|_{L_2(E)}$. Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση το άνω φράγμα που θα πρέπει να βρούμε για την $\|R\|_{L_2(E)}$ θα πρέπει να εξαρτάται από όρους του πραγματικού σφάλματος, υπολογισμένο στο ω_E . Με το ίδιο σκεπτικό θεωρούμε \bar{R} να είναι μια προσέγγιση του υπολοίπου στο σύνορο ή των αλμάτων στις εσωτερικές πλευρές, σε κάποιον βολικό χώρο πεπερασμένης διάστασης. Για παράδειγμα, αν η προσέγγιση *Galerkin* κατασκευάζεται από κατά τμήματα γραμμικές συναρτήσεις πάνω στα τρίγωνα, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε την \bar{R} να είναι ο μέσος όρος της R στην πλευρά E . Πλέον η προσέγγιση θα πρέπει να είναι συνεχής μεταξύ διαφορετικών πλευρών.

Από την (4.2.30) για $v = \chi_E \bar{R}$,

$$\|\bar{R}\|_{L_2(E)} \leq C \int_E \chi_E \bar{R}^2 dS. \quad (4.2.40)$$

Πάλι η συνάρτηση $v = \chi_E \bar{R}$ μηδενίζεται στο σύνορο του ω_E , οπότε μπορούμε να την επεκτείνουμε με μηδέν στα υπόλοιπα τρίγωνα του τριγωνισμού \mathcal{P}_h , του Ω . Επίσης στο ω_E είναι συνεχής. Τότε $v \in V$ και αφού η ασθενής μορφή του σφάλματος (4.1.11) ισχύει για κάθε $v \in V$, τότε για αυτήν την επιλογή θα έχουμε,

$$B(e, \bar{R} \chi_E) = \int_E \chi_E r \bar{R} dx + \int_E \chi_E R \bar{R} dS. \quad (4.2.41)$$

Με το ίδιο σκεπτικό, προσπαθούμε να ταιριάζουμε τις (4.2.40), (4.2.41), παρατηρώντας ότι,

$$\int_E \chi_E \bar{R}^2 dS = \int_E \chi_E \bar{R} (\bar{R} - R) dS + B(e, \chi_E \bar{R}) - \int_{\omega_E} \chi_E r \bar{R} dS, \quad (4.2.42)$$

η οποία (4.2.42) προκύπτει με την ίδια λογική με την (4.2.34). Κάθε έναν από τους παραπάνω όρους τους αντιμετωπίζουμε με την ανισότητα των *Cauchy-Schwartz* και της σχέσης (4.2.31) του Θεωρήματος 4.3. Τότε,

$$\int \chi_E \bar{R} (\bar{R} - R) dS \leq \|\chi_E \bar{R}\|_{L_2(E)} \|\bar{R} - R\|_{L_2(E)} \leq C \|\bar{R}\|_{L_2(E)} \|\bar{R} - R\|_{L_2(E)}. \quad (4.2.43)$$

Επίσης,

$$B(e, \chi_E \bar{R}) \leq \|e\|_{\omega_E} \|\chi_E \bar{R}\|_{H^1(\omega_E)} \leq Ch_E^{-1/2} \|e\|_{\omega_E} \|\bar{R}\|_{L_2(E)}, \quad (4.2.44)$$

και ο τελευταίος όρος,

$$\int_{\omega_E} \chi_E r \bar{R} \leq C h_E^{1/2} \|r\|_{L_2(\omega_E)} \|\bar{R}\|_{L_2(E)}. \quad (4.2.45)$$

Από τις (4.2.39), (4.2.43), (4.2.44), (4.2.45) στην (4.2.40) αλλά και από την τριγωνική ανισότητα λαμβάνουμε,

$$\|R\|_{L_2(E)} \leq C \left\{ h_E^{-1/2} \|e\|_{\omega_E} + h_E^{1/2} \|\bar{r} - r\|_{L_2(\omega_E)} + \|\bar{R} - R\|_{L_2(E)} \right\}. \quad (4.2.46)$$

Οπότε μέχρι τώρα έχουμε αποδείξει το παρακάτω Θεώρημα,

Θεώρημα 4.4 Έστω r και R να είναι το εσωτερικό και το συνοριακό υπόλοιπο σε σχέση με την προσέγγιση των πεπερασμένων στοιχείων η οποία κατασκευάζεται στον υπόχωρο X_h . Θεωρούμε \bar{r} και \bar{R} να είναι κατά τμήματα συνεχείς προσεγγίσεις του εσωτερικού και συνοριακού υπολοίπου, οι οποίες κατασκευάζονται σε υπόχωρους πεπερασμένης διάστασης. Τότε,

$$\|r\|_{L_2(K)} \leq C \left\{ h_K^{-1} \|e\|_K + \|\bar{r} - r\|_{L_2(K)} \right\},$$

και

$$\|R\|_{L_2(E)} \leq C \left\{ h_E^{-1/2} \|e\|_{\omega_E} + h_E^{1/2} \|\bar{r} - r\|_{L_2(\omega_E)} + \|\bar{R} - R\|_{L_2(E)} \right\},$$

με C να είναι δευτική σταθερά η οποία εξαρτάται μόνο από την συνθήκη (3.2.23) του τριγωνισμού και από την επιλογή των υπόχωρων πεπερασμένης διάστασης που χρησιμοποιούνται για να υπολογισθούν οι προσεγγίσεις των r, R .

Τώρα θα δούμε ποιοι είναι αυτοί οι υπόχωροι πεπερασμένης διάστασης που χρησιμοποιούνται για να υπολογισθούν οι \bar{r}, \bar{R} . Γνωρίζουμε ότι η προσέγγιση u_h κατασκευάζεται από έναν υπόχωρο που περιέχεται από πολυώνυμα πάνω σε κάθε τρίγωνο του τριγωνισμού. Οπότε η προσέγγιση του \bar{r} στο K μπορεί να κατασκευασθεί από έναν υπόχωρο πεπερασμένης διάστασης ο οποίος παράγεται από τις $u_h|_K$ και $\Delta u_h|_K$ με $u_h \in X_h$. Όπως είδαμε στην (4.2.11),

$$r = f + \Delta u_h - c u_h, \text{ στο } K$$

Με την παραπάνω προσέγγιση του r , θα έχουμε

$$\bar{r} = \bar{f} + \Delta u_h - c u_h \text{ στο } K,$$

και ως εκ τούτου,

$$r - \bar{r} = f - \bar{f},$$

και αντίστοιχα η διαφορά $R - \bar{R}$ θα γίνει,

$$R - \bar{R} = \begin{cases} g - \bar{g}, & \text{για } \partial K \cap \Gamma_N, \\ 0, & \text{για } \partial K \setminus \Gamma_N. \end{cases}$$

Οπότε οι σχέσεις (4.2.39), (4.2.46), γίνονται,

$$\|r\|_{L_2(K)} \leq C \left\{ h_K^{-1} \|e\|_K + \|\bar{f} - f\|_{L_2(K)} \right\}, \quad (4.2.47)$$

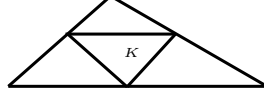
$$\|R\|_{L_2(E)} \leq C \left\{ h_E^{-1/2} \|e\|_{\omega_E} + h_E^{1/2} \|\bar{f} - f\|_{L_2(\omega_E)} + \|\bar{g} - g\|_{L_2(E)} \right\}. \quad (4.2.48)$$

Τότε αν τετραγωνίσουμε τις (4.2.47), (4.2.48) και χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα $2\alpha\beta \leq \alpha^2 + \beta^2$ λαμβάνουμε την παρακάτω εκτίμηση για τον τοπικό εκτιμητή $\eta_{R,K}$ ο οποίος ορίζεται στην (4.2.21),

$$\eta_{R,K}^2 \leq C \left\{ \|e\|_{\omega_K}^2 + h_K^2 \|f - \bar{f}\|_{L_2(\omega_K)}^2 + \sum_{E \subset \partial K \cap \Gamma_N} h_K \|g - \bar{g}\|_{L_2(E)}^2 \right\}. \quad (4.2.49)$$

Η σταθερά C να εξαρτάται μόνο από την συνθήκη (3.2.23) του τριγωνισμού. Παρατηρούμε ότι βρήκαμε ένα φράγμα για τον εκτιμητή του σφάλματος στο τρίγωνο K , αφού στο δεξι μέλος οι ποσότητες οι οποίες υπολογίζονται αναφέρονται σε γειτονιά του K . Το υποχωρίο ω_K να αποτελείται από τα τρίγωνα $K' \in \mathcal{P}_h$, που έχουν μια κοινή πλευρά με το K .

$$\omega_K := \bigcup_{\mathcal{E}(K) \cap \mathcal{E}(K') \neq \emptyset} K'. \quad (4.2.50)$$



Σχήμα 4.4: Το υποχωρίο ω_K .

Αν αθροίσουμε την (4.2.49) ως προς όλα τα τρίγωνα του τριγωνισμού,

$$\eta_R^2 \leq C \left\{ \|e\|^2 + \sum_{K \in \mathcal{P}_h} h_K^2 \|f - \bar{f}\|_{L_2(K)}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_h^N} h_K \|g - \bar{g}\|_{L_2(K)}^2 \right\}, \quad (4.2.51)$$

με

$$\eta_R^2 = \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \eta_{R,K}^2.$$

Παρατήρηση 4.1 Κάθε τρίγωνο K περιέχεται σε πεπερασμένου πλήθους υποχωρία $\tilde{\omega}_K$, συνεπώς υπάρχει σταθερά C ανεξάρτητη των $K \in \mathcal{P}_h$, τέτοια ώστε,

$$\sum_{K \in \mathcal{P}_h} \|e\|_{\tilde{\omega}_K}^2 \leq C \|e\|^2$$

Τότε η (4.2.51) παριστάνει ένα φράγμα της μορφής (4.2.22). Με όλα τα παραπάνω έχουμε αποδείξει το παρακάτω Θεώρημα,

Θεώρημα 4.5¹ Έστω $\eta_{R,K}$ να είναι ο εκτιμητής για το σφάλμα στο στοιχείο K , τέτοιος ώστε,

$$\eta_{R,K}^2 = h_K^2 \|r\|_{L_2(K)}^2 + \frac{1}{2} h_K \|R\|_{L_2(\partial K)}^2, \quad (4.2.52)$$

με r, R να είναι το εσωτερικό και συνοριακό υπόλοιπο, αντίστοιχα. Τότε υπάρχει μια σταθερά C η οποία εξαρτάται μόνο από την συνθήκη (3.2.23) του τριγωνισμού, τέτοια ώστε να ισχύει η

$$\|e\|^2 \leq C \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \eta_{R,K}^2,$$

και

$$\eta_R^2 \leq C \left\{ \|e\|^2 + \sum_{K \in \mathcal{P}_h} h_K^2 \|f - \bar{f}\|_{L_2(K)}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_h^N} h_K \|g - \bar{g}\|_{L_2(K)}^2 \right\},$$

και τέλος το φράγμα για τον τοπικό εκτιμητή στο στοιχείο K ,

$$\eta_{R,K}^2 \leq C \left\{ \|e\|_{\tilde{\omega}_K}^2 + h_K^2 \|f - \bar{f}\|_{L_2(\omega_K)}^2 + \sum_{E \subset \partial K \cap \Gamma_N} h_K \|g - \bar{g}\|_{L_2(E)}^2 \right\}.$$

Ο εκτιμητής η_K είναι ιδιαίτερα σημαντικός αφού αν είναι μεγάλος σε κάποιο τρίγωνο, τότε και το πραγματικό σφάλμα θα είναι μεγάλο σε αυτό το τρίγωνο. Οπότε μπορούμε να εκλεπτύνουμε τα τρίγωνα στα οποία ο τοπικός εκτιμητής η_K είναι μεγάλος, σε σχέση με την ανοχή του σφάλματος που έχουμε εκ των προτέρων καθορίσει.

¹Ο όρος $1/2$ στον τοπικό εκτιμητή προέλθει διότι κάθε εσωτερική πλευρά προσμετρήθηκε δυο φορές.

4.2.2 Εκτιμητής ελαχίστων τετραγώνων

Θα εργαστούμε ανάλογα, όπως με την εύρεση του εκτιμητή υπολοίπου. Θεωρούμε το πρόβλημα: Ζητείται

$$\Phi_F \in V : B(v, \Phi_F) = (F, v), \quad \forall v \in V, \quad (4.2.53)$$

με $F \in L_2(\Omega)$ να είναι κατάλληλα ομαλή. Υποθέτουμε ότι το πρόβλημα είναι ομαλό με την έννοια ότι η λύση του (4.2.53) ικανοποιεί την $\Phi_F \in H^2(\Omega) \cap V$ και υπάρχει μια σταθερά για την οποία C θα έχουμε ότι,

$$\|\Phi_F\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|F\|_{L_2(\Omega)}. \quad (4.2.54)$$

Η παραπάνω συνθήκη ονομάζεται συνθήκη ελλειπτικής ομαλότητας, η οποία ισχύει σίγουρα για κυρτά χωρία [13]. Για μια συγκεκριμένη επιλογή στην (4.2.53), για $F = e$,

$$\|e\|_{L_2(\Omega)}^2 = B(e, \Phi_e). \quad (4.2.55)$$

Η κύρια ιδέα για να συνεχίσουμε είναι να εφαρμόσουμε τον τελεστή παρεμβολής που ορίσαμε στο Θεώρημα 4.1. Έστω $v = \Phi_e \in V$, τότε

$$B(e, I_h \Phi_e) = 0,$$

ή ισοδύναμα,

$$B(e, I_h \Phi_e) = \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \int_K r I_h \Phi_e dx + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \int_E R I_h \Phi_e dS = 0. \quad (4.2.56)$$

Συνεπώς,

$$B(e, \Phi_e) = B(e, \Phi_e) - B(e, I_h \Phi_e),$$

ή ισοδύναμα,

$$B(e, \Phi_e) = \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \int_K r (\Phi_e - I_h \Phi_e) dx + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \int_E R (\Phi_e - I_h \Phi_e) dS. \quad (4.2.57)$$

Στο σημείο αυτό εφαρμόζουμε την ανισότητα *Cauchy-Schwartz*,

$$B(e, \Phi_e) \leq \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \|r\|_{L_2(K)} \|\Phi_e - I_h \Phi_e\|_{L_2(K)} + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \|R\|_{L_2(E)} \|\Phi_e - I_h \Phi_e\|_{L_2(E)}. \quad (4.2.58)$$

Από το Θεώρημα 4.2 λαμβάνουμε τις παρακάτω εκτιμήσεις,

$$\|\Phi_e - I_h \Phi_e\|_{L_2(K)} \leq Ch_K^2 \|\Phi_e\|_{H^2(\tilde{\omega}_K)}, \quad (4.2.59)$$

$$\|\Phi_e - I_h \Phi_e\|_{L_2(\partial K)} \leq Ch_K^{3/2} \|\Phi_e\|_{H^2(\tilde{\omega}_K)}. \quad (4.2.60)$$

Εδώ, η επιπλέον ομαλότητα της Φ_e μας δίνει την ευκαιρία να έχουμε μεγαλύτερο εκθέτη στο h_K . Με τις παραπάνω εκτιμήσεις λοιπόν, λαμβάνουμε,

$$\begin{aligned} B(e, \Phi_e) &\leq \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \|r\|_{L_2(K)} \|\Phi_e - I_h \Phi_e\|_{L_2(K)} + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \|R\|_{L_2(E)} \|\Phi_e - I_h \Phi_e\|_{L_2(E)} \\ &\leq C \left\{ \sum_{K \in \mathcal{P}_h} h_K^2 \|r\|_{L_2(K)} \|\Phi_e\|_{H^2(\tilde{\omega}_K)} + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} h_K^{3/2} \|R\|_{L_2(\partial K)} \|\Phi_e\|_{H^2(\tilde{\omega}_K)} \right\} \\ &= C \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \left\{ \|\Phi_e\|_{H^2(\tilde{\omega}_K)} \left(h_K^2 \|r\|_{L_2(K)} + h_K^{3/2} \|R\|_{L_2(\partial K)} \right) \right\} \\ &\leq C \left(\sum_{K \in \mathcal{P}_h} \|\Phi_e\|_{H^2(\tilde{\omega}_K)}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{K \in \mathcal{P}_h} \left\{ h_K^4 \|r\|_{L_2(K)} + h_K^3 \|R\|_{L_2(\partial K)}^2 \right\} \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

όπου τελικά,

$$B(e, \Phi_e) \leq C \|\Phi_e\|_{H^2(\Omega)} \left\{ \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \left(h_K^4 \|r\|_{L_2(K)} + h_K^3 \|R\|_{L_2(\partial K)}^2 \right) \right\}^{1/2}. \quad (4.2.61)$$

Αν $e = \Phi_e$, τότε,

$$\|e\|_{L_2(\Omega)} \leq C \left\{ \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \left(h_K^4 \|r\|_{L_2(K)} + h_K^3 \|R\|_{L_2(\partial K)}^2 \right) \right\}^{1/2}. \quad (4.2.62)$$

Συνεπώς, αποδείξαμε το παρακάτω Θεώρημα,

Θεώρημα 4.6 Έστω ότι το χωρίο Ω είναι κυρτό και ότι $\Gamma_D = \partial\Omega$. Έστω $\eta_{L_2(K)}$ να είναι η τοπική ένδειξη του σφάλματος, που ορίζεται ως,

$$\eta_{L_2(K)}^2 = h_K^4 \|r\|_{L_2(K)}^2 + h_K^3 \|R\|_{L_2(\partial K)}, \quad (4.2.63)$$

όπου r, R είναι το εσωτερικό και συνοριακό υπόλοιπο. Τότε υπάρχει μια σταθερά C η οποία εξαρτάται από το Ω και την συνθήκη (3.2.23) του τριγωνισμού, τέτοια ώστε,

$$\|e\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq C \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \eta_{L_2(K)}^2. \quad (4.2.64)$$

4.3 Ιεραρχικός εκτιμητής

Οι ιεραρχικοί εκτιμητές σφάλματος προσπαθούν να βρουν άνω και κάτω φράγμα για το σφάλμα $u - u_h$ υπολογίζοντας το υπόλοιπο της λύσης των πεπερασμένων στοιχείων u_h , με τις ίδιες συναρτήσεις βάσης, σε έναν άλλο χώρο πεπερασμένης διάστασης \bar{X}_h , για τον οποίο ισχύει ότι $X_h \subset \bar{X}_h \subset V$, ο οποίος είτε αποτελείται από μεγαλύτερης τάξης πεπερασμένα στοιχεία είτε αντιστοιχεί σε μια εκκλέπτιση της ήδη υπάρχουσας διαμέρισης \mathcal{P}_h .

Παράδειγμα 1

Έστω $\{\phi_1, \dots, \phi_N\}$ να είναι οι συναρτήσεις βάσης του υπόχωρου πεπερασμένης διάστασης X_h στον οποίο υπολογίζουμε την λύση των πεπερασμένων στοιχείων u_h . Θεωρούμε σε όλες τις πλευρές τις διαμέρισης \mathcal{P}_h , εκτός από τις πλευρές που αντιστοιχούν σε συνοριακές συνθήκες *Dirichlet*, τις πλευρικές συναρτήσεις *bubble*,

$$\{\chi_E : E \in \mathcal{E}_h^o \cup \mathcal{E}_h^N\}. \quad (4.3.1)$$

Τότε,

$$\{\phi_i, i = 1, \dots, N\} \cup \{\chi_E : E \in \mathcal{E}_h\}, \quad (4.3.2)$$

θα είναι μια βάση \mathbb{P}_2 , για τον ίδιο τριγωνισμό \mathcal{P}_h . Δηλαδή, ξεκινάμε από μία βάση \mathbb{P}_1 του υπόχωρου πεπερασμένης διάστασης X_h , προσθέτουμε τις πλευρικές συναρτήσεις *bubble*, και βρίσκουμε μία βάση \mathbb{P}_2 για τον ίδιο τριγωνισμό.

Παράδειγμα 2

Έστω \mathcal{P}_h ο αρχικός τριγωνισμός του Ω . Η $\mathcal{P}_{h/2}$ προκύπτει αν σε κάθε τρίγωνο της \mathcal{P}_h , ενώσουμε τα μέσα των πλευρών. Δηλαδή κάθε τρίγωνο διασπάται σε τέσσερα μικρότερα τρίγωνα, όπως στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 4.5: Αριστερά το αρχικό τρίγωνο και δεξιά η διάσπαση του σε τέσσερα μικρότερα τρίγωνα.

Έστω X_h είναι ο υπόχωρος πεπερασμένης διάστασης (3.3.2) που αντιστοιχεί με τον τριγωνισμό \mathcal{P}_h , και $X_{h/2}$ που αντιστοιχεί με τον τριγωνισμό $\mathcal{P}_{h/2}$. Έστω $\{\phi_1, \dots, \phi_N\}$ είναι οι συναρτήσεις βάσης που αντιστοιχούν στον τριγωνισμό \mathcal{P}_h . Για κάθε πλευρά $E \in \mathcal{E}_h$ υποθέτουμε την συνάρτηση χ_E , τέτοια ώστε $\chi_E(m_E) = 1$ και $\chi_E = 0$ στις υπόλοιπες πλευρές της \mathcal{P}_h . Εδώ m_E είναι το μέσο της πλευράς $E \in \mathcal{E}_h$. Εύκολα, παρατηρούμε ότι η

$$\{\phi_i, : i = 1, \dots, N\} \cup \{\chi_E : E \in \mathcal{E}_h\}, \quad (4.3.3)$$

αποτελεί βάση του $X_{h/2}$.

Παράδειγμα 3

Έστω X_h είναι ο υπόχωρος πεπερασμένης διάστασης (3.3.2) που αντιστοιχεί στον τριγωνισμό \mathcal{P}_h , και $X_{h/6}$ είναι υπόχωρος που αντιστοιχεί στον τριγωνισμό $\mathcal{P}_{h/6}$. Ο τριγωνισμός $\mathcal{P}_{h/6}$, προκύπτει αν δημιουργήσουμε νέο κόμβο στο μέσο κάθε πλευράς και τον ενώσουμε με την απέναντι κορυφή, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 4.6: Αριστερά το αρχικό τρίγωνο και δεξιά η διάσπαση του σε έξι τρίγωνα.

Για κάθε πλευρά $E \in \mathcal{E}_h$ θεωρούμε την συνάρτηση χ_E , τέτοια ώστε $\chi_E(m_E) = 1$ και $\chi_E = 0$ στις υπόλοιπες πλευρές της \mathcal{P}_h . Επίσης θεωρούμε και την συνάρτηση ψ_K , τέτοια ώστε $\psi_K(b^K) = 1$ και $\psi_K = 0$ αλλού. Εδώ m_E είναι το μέσον της πλευράς E και b^K το βαρύκεντρο του αρχικού τριγώνου K . Τότε, η

$$\{\phi_i, : i = 1, \dots, N\} \cup \{\chi_E : E \in \mathcal{E}_h\} \cup \{\psi_K, K \in \mathcal{P}_h\}, \quad (4.3.4)$$

αποτελεί βάση του $X_{h/6}$.

Παράδειγμα 4

Έστω $X_{h/4}$ ο χώρος των συνεχών, κατά τμήματα γραμμικών συναρτήσεων που αντιστοιχούν στην διαμέριση $\mathcal{P}_{h/4}$, η οποία προκύπτει αν εκλεπτύνουμε ομοιόμορφα την αρχική \mathcal{P}_h , δύο φορές.



Σχήμα 4.7: Αριστερά το αρχικό τρίγωνο και δεξιά η δυο φορές ομοιόμορφη εκλέπτυνση του.

Μπορούμε να θεωρήσουμε την $\psi_K \in X_{h/4}$, τέτοια ώστε $b_K = 1$ στους τρεις εσωτερικούς του κόμβους και $\psi_K = 0$ στους υπόλοιπους. Η ψ_K , που ορίσαμε έχει ακριβώς τις ίδιες ιδιότητες με αυτήν που ορίσαμε παραπάνω. Αν επιπλέον θεωρήσουμε την χ_E , $E \in \mathcal{E}_h^o \cup \mathcal{E}_h^N$, όπως το παράδειγμα 2, τότε λαμβάνουμε μια βάση για τον $X_{h/4}$.

Αν επιλύσουμε το πρόβλημα των πεπερασμένων στοιχείων σε έναν χώρο πεπερασμένης διάστασης \mathcal{X}_h , ο οποίος αποτελείται από πολυώνυμα βαθμού το πολύ p σε κάθε τρίγωνο, τότε μπορούμε να αυξήσουμε τον βαθμό των πολυωνύμων, έστω $p+1$ προσθέτοντας κατάλληλες συναρτήσεις βάσης στον \mathcal{X}_h . Ο νέος χώρος $\bar{\mathcal{X}}_h$ θα μπορεί να γραφεί ως,

$$\bar{\mathcal{X}}_h = \mathcal{X}_h \oplus \mathcal{W}_h,$$

με τον \mathcal{W}_h να αντιστοιχεί στον υπόχωρο των επιπλέον συναρτήσεων βάσης.

Αν λύσουμε το πρόβλημα των πεπερασμένων στοιχείων στον $\bar{\mathcal{X}}_h$, όπου ορίζεται παραπάνω, θα περιμένουμε το στοιχείο της νέας λύσης που θα ανήκει στον \mathcal{X}_h να διαφέρει ελάχιστα από τον προηγούμενο υπολογισμό. Συνεπώς, το στοιχείο της λύσης που θα ανήκει στον \mathcal{W}_h θα είναι μια καλή προσέγγιση για το σφάλμα των πεπερασμένων στοιχείων στον \mathcal{X}_h .

Στην πραγματικότητα, για την εκτίμηση μας, λύνουμε το πρόβλημα των πεπερασμένων στοιχείων στον \mathcal{W}_h , αντί του $\bar{\mathcal{X}}_h$ για να εκτιμήσουμε το σφάλμα. Ο \mathcal{W}_h συχνά αποτελείται από συναρτήσεις με τοπικό φορέα, οπότε, προκειμένου να μειώσουμε επιπλέον το υπολογιστικό κόστος, προσεγγίζουμε τον πίνακα ακαμψίας από έναν πίνακα ο οποίος αντιστρέφεται εύκολα. Στην συνέχεια θα αναζητήσουμε εκτιμήσεις τις μορφής,

$$C_1 \|u - u_h\| \leq \|w_h\| \leq C_2 \|u - u_h\|, \quad (4.3.5)$$

με $\|\cdot\|$ η νόρμα ενέργειας, u η ακριβής λύση, $u_h \in \mathcal{X}_h$ και $w_h \in \mathcal{W}_h$.

Θεωρούμε την μεταβολική μορφή του προβλήματος (4.1.4) η οποία ορίζεται στην (4.1.5): Ζητείται $u \in V$ τέτοιο ώστε

$$B(u, v) = \mathcal{F}(v), \quad \forall v \in V,$$

με V να ορίζεται στην (4.1.6), την διγραμμική μορφή B στην (4.1.7) και το φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό στην (4.1.8). Έστω \mathcal{X}_h ένας υπόχωρος πεπερασμένης διάστασης του V , τότε, ζητείται $u_h \in \mathcal{X}_h$ τέτοιο ώστε,

$$B(u_h, v_h) = \mathcal{F}(v_h), \quad \forall v_h \in \mathcal{X}_h. \quad (4.3.6)$$

Η λύση u_h ικανοποιεί την βέλτιστη προσέγγιση από τον υπόχωρο πεπερασμένης διάστασης \mathcal{X}_h στην νόρμα ενέργειας,

$$\|u - u_h\| = \inf_{\chi \in \mathcal{X}_h} \|u - \chi\|. \quad (4.3.7)$$

Έστω υπόχωρος $\bar{\mathcal{X}}_h$ του V για τον οποίο ισχύει ότι $\mathcal{X}_h \subset \bar{\mathcal{X}}_h \subset V$. Ζητάμε $\bar{u}_h \in \bar{\mathcal{X}}_h$ τέτοιο ώστε,

$$B(\bar{u}_h, v_h) = \mathcal{F}(v_h), \quad \forall v_h \in \bar{\mathcal{X}}_h. \quad (4.3.8)$$

Η λύση \bar{u}_h ικανοποιεί την βέλτιστη προσέγγιση από τον υπόχωρο πεπερασμένης διάστασης $\bar{\mathcal{X}}_h$ στην νόρμα ενέργειας,

$$\|u - \bar{u}_h\| = \inf_{\chi \in \bar{\mathcal{X}}_h} \|u - \chi\|. \quad (4.3.9)$$

Από τις (4.3.7),(4.3.9) ισχύει ότι

$$\|u - \bar{u}_h\| \leq \beta \|u - u_h\|, \quad \beta \leq 1, \quad (4.3.10)$$

αφού $\mathcal{X}_h \subset \bar{\mathcal{X}}_h$. Υποθέτουμε ότι $0 \leq \beta < 1$. Για κάθε $v \in \mathcal{X}_h$ και $w \in \mathcal{W}_h$,

$$|B(v, w)| \leq \gamma \|v\| \|w\|, \quad \gamma < 1, \quad \gamma \neq \gamma(h). \quad (4.3.11)$$

Επίσης, υποθέτουμε ότι,

$$\bar{\mathcal{X}}_h = \mathcal{X}_h \oplus \mathcal{W}_h, \quad (4.3.12)$$

τότε κάθε συνάρτηση $z \in \bar{\mathcal{X}}_h$ θα μπορεί να γραφεί μοναδικά ως $z = x + y$ με $x \in \mathcal{X}_h$ και $y \in \mathcal{W}_h$.

Στόχος είναι να προσεγγίσουμε το σφάλμα των πεπερασμένων στοιχείων στον χώρο \mathcal{W}_h . Συνεπώς, ζητάμε $w_h \in \mathcal{W}_h$ τέτοιο ώστε

$$B(w_h, v_h) = \mathcal{F}(v_h) - B(u_h, v_h), \quad \forall v_h \in \mathcal{W}_h. \quad (4.3.13)$$

Σύμφωνα με τους *Bank and Smith* [5], έχουμε το παρακάτω Θεώρημα.

Θεώρημα 4.7 *Εστω $\bar{\mathcal{X}}_h$ όπως στη (4.3.12) και υποθέτουμε ότι οι (4.3.10) και (4.3.11) ισχύουν, τότε,*

$$(1 - \beta^2)(1 - \gamma^2) \|u - u_h\|^2 \leq \|w_h\|^2 \leq \|u - u_h\|^2. \quad (4.3.14)$$

Απόδειξη *Bank and Smith* [5], *Verfürth* [15]. □

Στην συνέχεια προσεγγίζουμε την διγραμμική μορφή $B(\cdot, \cdot)$ στο δεξί μέλος της (4.3.13), με μια διγραμμική μορφή η οποία μπορεί εύκολα να αντιστραφεί. Τότε, τροποποιημένη μορφή της (4.3.13). Πλέον, ζητάμε $\tilde{w}_h \in \mathcal{W}_h$ τέτοιο ώστε,

$$\tilde{B}(\tilde{w}_h, v_h) = \mathcal{F}(v_h) - B(u_h, v_h), \quad \forall v_h \in \mathcal{W}_h. \quad (4.3.15)$$

Θεώρημα 4.8 *Εστω $B(\cdot, \cdot)$ και $\tilde{B}(\cdot, \cdot)$ συμμετρικές, δετικά ορισμένες διγραμμικές μορφές και $C_0, C_1 > 0$ σταθερές, τέτοιες ώστε,*

$$C_0 B(w, w) \leq \tilde{B}(w, w) \leq C_1 B(w, w), \quad \forall w \in \mathcal{W}_h, w \neq 0. \quad (4.3.16)$$

Αν w_h και \tilde{w}_h ορίζονται στις (4.3.13) και (4.3.15), αντίστοιχα, τότε,

$$C_0 \|\tilde{w}_h\| \leq \|w_h\| \leq C_1 \|\tilde{w}_h\|. \quad (4.3.17)$$

Απόδειξη *Bank and Smith* [5], *Verfürth* [15]. □

Από τις (4.3.14) και (4.3.17)

$$C_1^2 (1 - \beta^2)(1 - \gamma^2) \|u - u_h\|^2 \leq \|\tilde{w}_h\|^2 \leq C_0^2 \|u - u_h\|^2, \quad (4.3.18)$$

και κατ επέκταση ορίζουμε σαν εκ των υστέρων εκτιμητή,

$$\eta_H := \tilde{B}(\tilde{w}_h, \tilde{w}_h)^{1/2}. \quad (4.3.19)$$

Στην συνέχεια θα παρουσιάσουμε τον εκ των υστέρων εκτιμητή για συγκεκριμένες επιλογές υπόχωρων πεπερασμένης διάστασης.

Ο εκ των υστέρων εκτιμητής

Έστω χ_E να είναι οι εσωτερικές συναρτήσεις *bubble*. Τότε, ορίζουμε την r_E , να είναι,

$$r_E := B(u - u_h, \chi_E) = \int_{\Omega} (\nabla(u - u_h) \cdot \nabla \chi_E + c(u - u_h)\chi_E) dx. \quad (4.3.20)$$

Γνωρίζουμε ότι η χ_E έχει μη-μηδενικό τοπικό φορέα το ω_E . Συνεπώς,

$$r_E = \int_{\omega_E} (\nabla(u - u_h) \cdot \nabla \chi_E + c(u - u_h)\chi_E) dx. \quad (4.3.21)$$

Αν $e = u - u_h$,

$$B(e, \chi_E) = \mathcal{F}(\chi_E) - B(u_h, \chi_E), \quad (4.3.22)$$

με το \mathcal{F} όπως ορίζεται στην (4.1.8). Τότε,

$$r_E = \int_{\omega_E} f\chi_E dx + \int_{\Gamma_N \cap \partial\omega_E} g\chi_E dS - \int_{\omega_E} (\nabla u_h \cdot \nabla \chi_E dx + cu_h\chi_E) dx. \quad (4.3.23)$$

Εφαρμόζουμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες στο δεύτερο ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους της (4.3.23),

$$\int_{\omega_E} \nabla u_h \cdot \nabla \chi_E dx = - \int_{\omega_E} \chi_E \Delta u_h dx + \int_{\partial\omega_E} \frac{\partial u_h}{\partial n_E} \chi_E dS. \quad (4.3.24)$$

Αντικαθιστώντας την (4.3.24) στην (4.3.23),

$$r_E = \int_{\omega_E} r\chi_E dx + \int_{\Gamma_N \cap \partial\omega_E} g\chi_E dS - \int_{\partial\omega_E} \frac{\partial u_h}{\partial n_E} \chi_E dS, \quad (4.3.25)$$

με $r = f + \Delta u_h - cu_h$, να είναι το εσωτερικό υπόλοιπο, όπως στην (4.2.3). Τότε,

$$r_E = \begin{cases} \int_{\omega_E} r\chi_E dx - \int_E \left[\frac{\partial u_h}{\partial n_E} \right] \chi_E dS, & \text{αν } E \in \mathcal{E}_h^o \\ \int_{\omega_E} r\chi_E dx + \int_E \left(g - \frac{\partial u_h}{\partial n_E} \right) \chi_E dS, & \text{αν } E \in \mathcal{E}_h^N, \end{cases} \quad (4.3.26)$$

με την $\left[\frac{\partial u_h}{\partial n_E} \right]$ να ορίζεται στην (4.2.6). Ο ολικός εκτιμητής βασισμένος στις πλευρές του τριγωνισμού θα είναι ο

$$\eta_E^2 := \sum_{E \in \mathcal{E}_h^o \cup \mathcal{E}_h^N} r_E^2. \quad (4.3.27)$$

Έστω οι εσωτερικές συναρτήσεις *bubble*, ψ_K , $\forall K \in \mathcal{P}_h$. Ορίζουμε το υπόλοιπο ως εξής,

$$r_K := B(u_h - u, \psi_K) = \int_{\Omega} (\nabla(u - u_h) \cdot \nabla \psi_K + c(u - u_h)\psi_K) dx, \quad (4.3.28)$$

ή ισοδύναμα,

$$r_K := B(e, \psi_K) = \int_{\Omega} (\nabla e \cdot \nabla \psi_K + ce\psi_K) dx. \quad (4.3.29)$$

Από την (4.1.11), $B(e, \psi_K) = \mathcal{F}(\psi_K) - B(u_h, \psi_K)$, με \mathcal{F} να ορίζεται στην (4.1.8). Συνεπώς,

$$r_K = \int_K f\psi_K dx + \int_{\Gamma_N \cap \partial K} g\psi_K dS - \int_K (\nabla u_h \cdot \nabla \psi_K dx + cu_h\psi_K) dx. \quad (4.3.30)$$

Εφαρμόζοντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες, (4.3.23), και θέτοντας ως r το εσωτερικό υπόλοιπο, όπως παραπάνω,

$$r_K = \int_K r\psi_K dx + \int_{\Gamma_N \cap \partial K} g\psi_K dS - \int_{\partial K} \frac{\partial u_h}{\partial n} \psi_K dS = \int_K r\psi_K dx, \quad (4.3.31)$$

αφού η ψ_K θα είναι ίση με μηδέν στο σύνορο του τριγώνου K . Συνεπώς ο ολικός εκτιμητής θα είναι,

$$\eta_H^2 = \sum_{E \in \mathcal{E}_h^o \cup \mathcal{E}_h^N} r_E^2 + \sum_{K \in \mathcal{P}_h} r_K^2. \quad (4.3.32)$$

Στην συνέχεια θα παρουσιάσουμε δυο προτάσεις στις οποίες θα αποδεικνύεται η αποτελεσματικότητα και η αξιοπιστία του ιεραρχικού εκτιμητή (4.3.32).

Πρόταση 4.1 Έστω u και u_h η μοναδική λύση των προβλημάτων (4.1.5),(4.1.10), αντίστοιχα. Έστω W_h ο χώρος πεπερασμένης διάστασης που αντιστοιχεί στην \mathcal{P}_h με $X_h \subset W_h \subset V$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $E \in \mathcal{E}_h^o \cup \mathcal{E}_h^N$ αντιστοιχεί μια συνάρτηση $\chi_E \in W_h \cap \mathcal{C}_0(\omega_E, \mathbb{R})$ με τις παρακάτω ιδιότητες,

1. $0 \leq \chi_E \leq 1$,
2. $C_1 h_E \leq \int_E \chi_E$,
3. $\|\chi_E\|_{H^1(\omega_E)} \leq C_2 h_E^{-1} \|\chi_E\|_{L_2(\omega_E)}$.

Έστω,

$$r_E = \int_{\omega_E} f \chi_E dx + \int_{\Gamma_N \cap \partial \omega_E} g \chi_E dS - \int_{\omega_E} (\nabla u_h \cdot \nabla \chi_E + c u_h \chi_E) dx, \quad (4.3.33)$$

όπου r_E είναι το υπόλοιπο της u_h ως προς την πλευρική συνάρτηση bubble χ_E , $E \in \mathcal{E}_h^o \cup \mathcal{E}_h^N$. Τότε, υπάρχουν σταθερές C_i , $i = 1, \dots, 4$, οι οποίες εξαρτώνται μόνο από την συνθήκη (3.2.23) του τριγωνισμού, τέτοιες ώστε,

$$|r_E| \leq C_3 \|e\|_{\omega_E}, \quad \forall E \in \mathcal{E}_h^o \cup \mathcal{E}_h^N. \quad (4.3.34)$$

$$\|e\|^2 \leq C_4 \left\{ \sum_{E \in \mathcal{E}_h^o \cup \mathcal{E}_h^N} r_E^2 + \sum_{K \in \mathcal{P}_h} h_K^2 \|r\|_{L_2(K)}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_h^N} h_E \|g - \bar{g}\|_{L_2(E)}^2 \right\}. \quad (4.3.35)$$

Απόδειξη R.Verfürth [15]. □

Πρόταση 4.2 Έστω u και u_h η μοναδική λύση των προβλημάτων (4.1.5),(4.1.10), αντίστοιχα. Έστω W_h ο χώρος πεπερασμένης διάστασης που αντιστοιχεί στην \mathcal{P}_h με $X_h \subset W_h \subset V$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $K \in \mathcal{P}_h$ αντιστοιχεί μια συνάρτηση $\psi_K \in W_h \cap \mathcal{C}_0(K, \mathbb{R})$ με τις παρακάτω ιδιότητες,

1. $0 \leq \psi_K \leq 1$,
2. $C_5 h_K^2 \leq \int_K \psi_K dx$,
3. $\|\psi_K\|_{H^1(K)} \leq C_6 h_K^{-1} \|\psi_K\|_{L_2(K)}$.

Τότε, για το υπόλοιπο r_K ,

$$r_K = \int_K f \psi_K dx + \int_{\Gamma_N \cap \partial K} g \psi_K dS - \int_K (\nabla u_h \cdot \nabla \psi_K + c u_h \psi_K) dx,$$

όπου r_K είναι το υπόλοιπο της u_h ως προς την εσωτερική συνάρτηση bubble ψ_K , $K \in \mathcal{P}_h$. Τότε, υπάρχουν σταθερές C_i , $i = 5, \dots, 8$, οι οποίες εξαρτώνται μόνο από την συνθήκη (3.2.23) του τριγωνισμού, τέτοιες ώστε,

$$|r_K| \leq C_7 \|e\|_K, \quad \forall K \in \mathcal{P}_h. \quad (4.3.36)$$

$$\|e\|^2 \leq C_8 \left\{ \sum_{E \in \mathcal{E}_h^o \cup \mathcal{E}_h^N} r_E^2 + \sum_{K \in \mathcal{P}_h} r_K^2 + \sum_{K \in \mathcal{P}_h} h_K^2 \|f - \bar{f}\|_{L_2(K)}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_h^N} h_E \|g - \bar{g}\|_{L_2(E)}^2 \right\}. \quad (4.3.37)$$

4.4 Έμμεσοι Εκτιμητές

Οι εκτιμητές του σφάλματος μπορούν να υπολογισθούν όπως είδαμε παραπάνω άμεσα από την λύση των πεπερασμένων στοιχείων και από τα δεδομένα του προβλήματος που ενδιαφερόμαστε να επιλύσουμε. Τέτοιοι εκτιμητές ονομάζονται άμεσοι εκτιμητές. Σε αυτήν την ενότητα θα παρουσιάσουμε μια άλλη κατηγορία εκτιμητών, τους έμμεσους, οι οποίοι χρειάζονται την επίλυση μικρών βοηθητικών συνοριακών προβλημάτων, των οποίων η λύση είναι στην ουσία η προσέγγιση του πραγματικού σφάλματος.

Όπως είχαμε δει και στο προηγούμενη ενότητα, το πραγματικό σφάλμα ικανοποιεί την παρακάτω εξίσωση υπολοίπου.

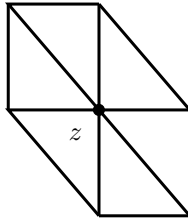
$$B(e, v) = \mathcal{F}(v) - B(u_h, v), \quad \forall v \in V. \quad (4.4.1)$$

Αρχικά θα μπορούσαμε να προσεγγίσουμε το πρόβλημα (4.4.1) και να βρούμε μια προσέγγιση \bar{e} για την λύση του, η οποία είναι το πραγματικό σφάλμα. Όμως το να ξαναχρησιμοποιηθεί ο υπόχωρος πεπερασμένης διάστασης X_h , θα σημαίνει ότι αυτή η προσέγγιση θα είναι η μηδενική, δηλαδή, $\bar{e} = 0$. Συνεπώς θα χρειαστεί να χρησιμοποιήσουμε έναν μεγαλύτερο υπόχωρο από τον X_h , κάτι που σημαίνει ότι αυτό θα ήταν υπολογιστικά ακριβό από το να βρούμε την u_h .

Η βασική ιδέα με την οποία θα ασχοληθούμε είναι να αντικαταστήσουμε το συνολικά πρόβλημα μας, από μια ακολουθία μη επικαλυπτόμενων τοπικών προβλημάτων των οποίων προσεγγίζουμε την λύση τους και με την σειρά τους αυτές οι λύσεις προσεγγίζουν την συνολική λύση του (4.4.1).

4.4.1 Μέθοδος υπολοίπου σε υποχωρίο

Η μέθοδος υπολοίπου σε υποχωρίο αποτελείται από την αποσύνθεση του ολικού προβλήματος σε μια ακολουθία από τοπικά προβλήματα με ομογενής συνοριακά δεδομένα *Dirichlet*, πάνω σε μικρά υποχωρία του Ω .



Σχήμα 4.8: Το υποχωρίο ω_z .

Θεωρούμε την ασθενή μορφή (4.4.1) η οποία χαρακτηρίζει το πραγματικό σφάλμα. Θα αντικαταστήσουμε το ολικό πρόβλημα με μια ακολουθία από ανεξάρτητα μεταξύ τους προβλήματα σε μικρά υποχωρία της διαμέρισης \mathcal{P}_h . Για κάθε $z \in \mathcal{V}_h$ ζητάμε $\phi_z \in H_0^1(\omega_z)$ τέτοιο ώστε,

$$B_{\omega_z}(\phi_z, v) = \mathcal{F}_{\omega_z}(v) - B_{\omega_z}(u_h, v), \quad \forall v \in H_0^1(\omega_z), \quad (4.4.2)$$

με την διγραμμική μορφή $B_{\omega_z} : H_0^1(\omega_z) \times H_0^1(\omega_z) \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο

$$B_{\omega_z}(v, w) := \int_{\omega_z} \nabla v \cdot \nabla w \, dx. \quad (4.4.3)$$

Επίσης το γραμμικό και φραγμένο συναρτησιακό $\mathcal{F}_{\omega_z} : H_0^1(\omega_z) \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο

$$\mathcal{F}_{\omega_z} := \int_{\omega_z} f v \, dx + \int_{\partial\omega_z \cap \Gamma_N} g v \, dS, \quad \forall v \in H_0^1(\omega_z). \quad (4.4.4)$$

Ο τοπικός εκτιμητής $\eta_{S,z}$ στο υποχωρίο ω_z θα είναι,

$$\eta_{S,z}^2 := \|\phi_z\|_{\omega_z}^2 = B_{\omega_z}(\phi_z, \phi_z), \quad (4.4.5)$$

και ο ολικός εκτιμητής ορίζεται ως

$$\eta_S = \left\{ \sum_{z \in \mathcal{V}_h} \eta_{S,z}^2 \right\}^{1/2}. \quad (4.4.6)$$

Στην πραγματικότητα θα χρησιμοποιήσουμε έναν πεπερασμένης διάστασης υπόχωρο του $H_0^1(\omega_z)$ για να προσδιορίσουμε την προσεγγιστική λύση. Ο εκτιμητής, σε αντίθεση με τους υπόλοιπους εκτιμητές που θα παρουσιάσουμε, αντιστοιχεί σε κόμβους και όχι σε τρίγωνα.

Ισοδυναμία του εκτιμητή

Ανάλογα με όλους τους εκτιμητές, θα αποδείξουμε την ισοδυναμία του εκτιμητή με το σφάλμα στην νόρμα ενέργειας. Πριν την απόδειξη, θα δούμε μερικούς χρήσιμους ορισμούς. Έστω θ_z η συνεχής κατά τμήματα συνάρτηση που ορίζεται στο Ω με τις ιδιότητες,

$$\theta_z(x_z) = 1 \quad \text{και} \quad \theta_z = 0, \quad \text{στο} \quad \Omega \setminus \omega_z.$$

Έστω $\mathcal{V}_h^1, \mathcal{V}_h^2, \dots$ υποσύνολα του \mathcal{V}_h με τους κόμβους στο \mathcal{V}_h^i να επιλέγονται τέτοιοι ώστε,

$$\text{αν} \quad m, n \in \mathcal{V}_h^i \quad m \neq n \quad \text{τότε} \quad \omega_m \cap \omega_n = \emptyset.$$

Ο μικρότερος αριθμός υποσυνόλων \mathcal{V}_h^i που χρειάζονται για να καλύψουν το \mathcal{V}_h δηλώνεται με ν .

Λήμμα 4.9 Για κάθε $v \in H^1(\Omega)$ υπάρχει σταθερά C και ο τελεστής παρεμβολής $I_h v$ από τον χώρο πεπερασμένης διάστασης, που ορίζεται στο Θεώρημα 4.1, τέτοια ώστε,

$$\sum_{z \in \mathcal{V}_h} \|\theta_z(v - I_h v)\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C |v|_{H^1(\Omega)}^2. \quad (4.4.7)$$

Απόδειξη *Mark Ainsworth and J. Tinsley Oden [2].* □

Το ακόλουθο Θεώρημα δηλώνει την ισοδυναμία το εκτιμητή ο οποίος προέρχεται από την μέθοδο υπολοίπου σε υποχωρίο.

Θεώρημα 4.10 Έστω ο εκ των υστέρων εκτιμητής η_S που δηλώνεται στην (4.4.6). Υπάρχει σταθερά C η οποία εξαρτάται μόνο από την συνθήκη κανονικότητας του τριγωνισμού (βλ. Ορισμός 3.2), τέτοια ώστε

$$\frac{\eta_S}{\sqrt{\nu}} \leq \|e\| \leq C \eta_S. \quad (4.4.8)$$

Απόδειξη Αρχικά θα αποδείξουμε ότι το σφάλμα e στην νόρμα ενέργειας, ελέγχεται από $C\eta$. Από την (4.1.12) θα έχουμε ότι,

$$B(e, v) = B(e, v - I_h v). \quad (4.4.9)$$

Λόγω του ότι $\sum_{z \in \mathcal{V}_h} \theta_z = 1$,

$$B(e, v) = B(e, v - I_h v) \sum_{z \in \mathcal{V}_h} \theta_z = \sum_{z \in \mathcal{V}_h} B(e, \theta_z(v - I_h v)). \quad (4.4.10)$$

Από (4.4.1) και (4.4.2),

$$B_{\omega_z}(e, v) = B_{\omega_z}(\phi_z, v), \quad \forall v \in H_0^1(\omega_z). \quad (4.4.11)$$

Τότε, αφού $\theta_z(v - I_h v) \in H_0^1(\omega_z)$

$$B(e, v) = \sum_{v \in \mathcal{V}_h} B_{\omega_z}(\phi_z, \theta_z(v - I_h v)), \quad (4.4.12)$$

και από την ανισότητα *Cauchy-Schwarz* και τον ορισμό του $\eta_{S,z}$,

$$|B(e, v)| \leq \sum_{z \in \mathcal{V}_h} \eta_{S,z} \|\theta_z(v - I_h v)\|. \quad (4.4.13)$$

Εφαρμόζοντας ξανά την ανισότητα *Cauchy-Schwarz*,

$$\begin{aligned} B(e, v) &\leq \left\{ \sum_{z \in \mathcal{V}_h} \eta_{S,z}^2 \right\} \left\{ \sum_{z \in \mathcal{V}_h} \|\theta_z(v - I_h v)\|_{H^1(\Omega)}^2 \right\}^{1/2} \\ &\leq C \eta_S \|v\| \end{aligned} \quad (4.4.14)$$

Επιλέγοντας, $v = e$ λαμβάνουμε,

$$\|e\| \leq C \eta_S. \quad (4.4.15)$$

Προκειμένου να βρούμε κάτω φράγμα για την $\|e\|$, σύμφωνα με την (4.4.11) την συνάρτηση δοκιμής v μπορεί να επιλεγεί ως ϕ_z και τότε,

$$B_{\omega_z}(e, \phi_z) = B_{\omega_z}(\phi_z, \phi_z). \quad (4.4.16)$$

Επεκτείνοντας την ϕ_z ως μηδέν σε όλο το Ω ,

$$\begin{aligned} \eta_S^2 &= \sum_{z \in \mathcal{V}_h} \eta_{S,z}^2 = \sum_{z \in \mathcal{V}_h} B_{\omega_z}(\phi_z, \phi_z) = \sum_{z \in \mathcal{V}_h} B_{\omega_z}(e, \phi_z) = \sum_{z \in \mathcal{V}_h} B(e, \phi_z) \\ &= B\left(e, \sum_{z \in \mathcal{V}_h} \phi_z\right). \end{aligned} \quad (4.4.17)$$

Επιπλέον, από την ανισότητα *Cauchy-Schwarz*,

$$\eta_S^2 \leq \|e\| \left\| \sum_{z \in \mathcal{V}_h} \phi_z \right\|. \quad (4.4.18)$$

Πριν συνεχίσουμε την απλοποίηση της (4.4.18), θα κάνουμε μια παρατήρηση.

Έστω $\alpha \in \mathbb{R}^n$ τότε,

$$\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^n 1 \cdot \alpha_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n 1^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \right) = n \sum_{i=1}^n \alpha_i^2,$$

τέτοιο ώστε αν

$$\left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i \right\|^2 = \int \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \right)^2 dx,$$

και

$$\sum_{i=1}^n \|\alpha_i\|^2 = \sum_{i=1}^N \alpha_i^2 dx,$$

τότε,

$$\left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i \right\|^2 \leq n \sum_{i=1}^n \|\alpha_i\|^2.$$

Προκειμένου να φράξουμε το δεξί μέλος της (4.4.18), αποσυνθέτουμε του κόμβους της \mathcal{V}_h όπως περιγράψαμε παραπάνω. Τότε,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{z \in \mathcal{V}_h} \phi_z \right\|^2 &= \left\| \sum_{\mathcal{V}_h^i} \sum_{z \in \mathcal{V}_h^i} \phi_z \right\|^2 \\ &\leq \nu \sum_{\mathcal{V}_h^i} \left\| \sum_{z \in \mathcal{V}_h^i} \phi_z \right\|^2 \\ &= \nu \sum_{\mathcal{V}_h^i} \sum_{z \in \mathcal{V}_h^i} \|\phi_z\|^2. \end{aligned} \quad (4.4.19)$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει λόγω του γεγονότος ότι οι συναρτήσεις ϕ_z , οι οποίοι αντιστοιχούν στους κόμβους στην \mathcal{V}_h^i , που είναι μη επικαλυπτόμενοι. Τότε, από (4.4.19)

$$\left\| \sum_{z \in \mathcal{V}_h^i} \phi_z \right\|^2 \leq \nu \eta_S^2. \quad (4.4.20)$$

Αντικαθιστώντας την (4.4.20), στην (4.4.18),

$$\eta_S^2 \leq \|e\| \sqrt{\nu} \eta_S, \quad (4.4.21)$$

το οποίο μαζί με την (4.4.15) αποδεικνύει την (4.4.8). \square

Μπορεί να αποδειχθεί ότι ο εκτιμητής που περιγράφεται σε αυτήν την ενότητα, είναι ισοδύναμος με τον άμεσο εκτιμητή υπολοίπου η_R (4.2.52).

Ισοδυναμία με τον εκτιμητή υπολοίπου

Η βασική ιδέα για την απόδειξη της ισοδυναμίας με τον άμεσο εκτιμητή υπολοίπου, θυμίζει αυτή των άμεσων εκτιμητών που είδαμε σε προηγούμενη ενότητα. Κάθε τοπικό πρόβλημα (4.4.2), προσπαθούμε να το φέρουμε σε μορφή όπου θα κάθε τρίγωνο θα συνεισφέρει ξεχωριστά. Έστω τυχαίο $v \in H_0^1(\omega_z)$, τότε η τοπική ασθενής μορφή μπορεί να γραφεί,

$$B_{\omega_z}(\phi_z, v) = \sum_{K \in \omega_z} \left\{ \int_K f v \, dx - \int_{\partial K \cap \Gamma_N} g v \, dS - \int_K (\nabla u_h \cdot \nabla v + c u_h v) \, dx \right\}. \quad (4.4.22)$$

Στο τελευταίο ολοκλήρωμα της (4.4.22), εφαρμόζουμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες,

$$\int_K \nabla u_h \cdot \nabla v \, dx = - \int_K v \Delta u_h \, dx + \int_{\partial K} \frac{\partial u_h}{\partial n_K} v \, dS. \quad (4.4.23)$$

Αντικαθιστώντας την (4.4.23) στην (4.4.22),

$$B_{\omega_z}(\phi_z, v) = \sum_{K \in \omega_z} \left\{ \int_K r v \, dx + \int_{\partial K \cap \Gamma_N} R v \, dS - \int_{\partial K \setminus \Gamma_N} \frac{\partial u_h}{\partial n_K} v \, dS \right\}, \quad (4.4.24)$$

με,

$$\begin{cases} r = f + \Delta u_h - c u_h & \text{στο } K \in \omega_z \\ R = g - \frac{\partial u_h}{\partial n_E} & \text{στο } E = \partial K \setminus \Gamma_N, K \in \omega_z \end{cases}, \quad (4.4.25)$$

με r και R να είναι το σύνθητες εσωτερικό και συνοριακό υπόλοιπο, αντίστοιχα. Όπως και στον άμεσο εκτιμητή, η (4.4.24) μπορεί να απλοποιηθεί περαιτέρω. Η (4.4.24) μπορεί να γραφεί ισοδύναμα,

$$B_{\omega_z}(\phi_z, v) = \sum_{K \in \omega_z} \left\{ \int_K r v dx + \int_{\partial K \cap \Gamma_N} R v dS \right\} - \sum_{E \in \mathcal{E}_{\omega_z}^o} \int_E \left[\frac{\partial u_h}{\partial n} \right] v dS, \quad (4.4.26)$$

με $\mathcal{E}_{\omega_z}^o$ θα συμβολίζουμε στο σύνολο όλων των εσωτερικών πλευρών του υποχωρίου ω_z , με $\mathcal{E}_{\omega_z}^N$ το σύνολο των συνοριακών πλευρών του ω_z που είναι και σύνορο *Neumann*. Αντίστοιχα, με $\mathcal{E}_{\omega_z}^D$ το σύνολο των συνοριακών πλευρών του ω_z που είναι και σύνορο *Dirichlet*. Τότε, το σύνολο όλων των πλευρών του ω_z θα είναι το $\mathcal{E}_{\omega_z}^o$. Συνεπώς,

$$\sum_{K \in \omega_z} \int_{\partial K \cap \Gamma_N} \frac{\partial u_h}{\partial n_K} v dS = \sum_{E \in \mathcal{E}_{\omega_z}^o} \int_E \left[\frac{\partial u_h}{\partial n} \right] v dS,$$

με την ποσότητα,

$$\left[\frac{\partial u_h}{\partial n_E} \right] = n_K \cdot \nabla u_h \Big|_K + n_{K'} \cdot \nabla u_h \Big|_{K'}, \quad (4.4.27)$$

να ορίζεται στην πλευρά E η οποία είναι κοινή για τα στοιχεία K και K' . Η παραπάνω ποσότητα είναι η προσέγγιση της ροής στην επαφή αυτών των δυο στοιχείων. Αν επιπλέον ορίσουμε,

$$R = \begin{cases} g - \frac{\partial u_h}{\partial n_E}, & \text{για } E \in \mathcal{E}_{\omega_z}^N, \\ - \left[\frac{\partial u_h}{\partial n_E} \right] & \text{για } E \in \mathcal{E}_{\omega_z}^o \cup \mathcal{E}_{\omega_z}^D, \end{cases}, \quad (4.4.28)$$

τότε,

$$B_{\omega_z}(\phi_z, v) = \sum_{K \in \omega_z} \left\{ \int_K r v dx + \sum_{E \in \mathcal{E}_{\omega_z}} \int_E R v dS \right\}, \quad \forall v \in H_0^1(\omega_z). \quad (4.4.29)$$

Η (4.4.29) ισχύει για κάθε $v \in H_0^1(\omega_z)$, άρα για $v = \phi_z \in H_0^1(\omega_z)$,

$$\eta_{S,z}^2 = \sum_{K \in \omega_z} \left\{ \int_K r \phi_z dx + \sum_{E \in \mathcal{E}_{\omega_z}} \int_E R \phi_z dS \right\}. \quad (4.4.30)$$

Από *Cauchy-Schwartz* στην (4.4.30),

$$\begin{aligned} \eta_{S,z}^2 &= \sum_{K \in \omega_z} \int_K r \phi_z dx + \sum_{E \in \mathcal{E}_{\omega_z}} \int_E R \phi_z dS \\ &\leq \sum_{K \in \omega_z} \|r\|_{L_2(K)} \|\phi_z\|_{L_2(K)} + \sum_{E \in \mathcal{E}_{\omega_z}} \|R\|_{L_2(E)} \|\phi_z\|_{L_2(E)} \\ &\leq C \left\{ \sum_{K \in \omega_z} h_K \|r\|_{L_2(K)} |\phi_z|_{H^1(K)} + \sum_{E \in \mathcal{E}_{\omega_z}} h_K^{1/2} \|R\|_{L_2(E)} |\phi_z|_{H^1(K)} \right\}, \end{aligned}$$

αφού [15],

$$\|\phi_z\|_{L_2(K)} \leq C h_K \|\nabla \phi_z\|_{L_2(K)}, \quad (4.4.31)$$

$$\|\phi_z\|_{L_2(E)} \leq C h_K^{1/2} \|\nabla \phi_z\|_{L_2(K)}. \quad (4.4.32)$$

Οπότε εφαρμόζοντας ξανά την *Cauchy-Schwartz*,

$$\eta_{S,z} \leq C \left\{ \sum_{K \in \omega_z} h_K^2 \|r\|_{L_2(K)}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_{\omega_z}} h_K \|R\|_{L_2(E)}^2 \right\}^{1/2}. \quad (4.4.33)$$

Συνεπώς αθροίζοντας όλους του τοπικούς εκτιμητές ως προς όλους τους κόμβους του τριγωνισμού,

$$\begin{aligned} \sum_{z \in \mathcal{V}_h} \eta_{S,z}^2 &\leq C \sum_{z \in \mathcal{V}_h} \left\{ \sum_{K \in \omega_z} h_K^2 \|r\|_{L_2(K)}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_{\omega_z}} h_K \|R\|_{L_2(E)}^2 \right\} \\ &\leq C \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \eta_{R,K}^2, \end{aligned} \quad (4.4.34)$$

με,

$$\eta_{R,K}^2 = h_K^2 \|r\|_{L_2(K)}^2 + \sum_{E \subset \partial K} h_K \|R\|_{L_2(E)}^2. \quad (4.4.35)$$

Η (4.4.34) αποτελεί μια σχέση ανάμεσα στον έμμεσο εκτιμητή $\eta_{S,z}$ και τον άμεσο εκτιμητή υπολοίπου (4.4.35). Επίσης είναι δυνατόν αν δείξουμε ότι,

$$\sum_{K \subset \omega_z} h_K \|r\|_{L_2(K)} + \sum_{E \subset \omega_z} h_K^{1/2} \|R\|_{L_2(E)} \leq C(\eta_{S,z} + \epsilon), \quad (4.4.36)$$

με,

$$\epsilon = \sum_{K \subset \omega_z} h_K \|r - \bar{r}\|_{L_2(K)} + \sum_{E \subset \omega_z} h_K^{1/2} \|R - \bar{R}_E\|_{L_2(E)}, \quad (4.4.37)$$

με \bar{r}, \bar{R}_E να είναι προσεγγίσεις των υπολοίπων r, R , αντίστοιχα.

Απόδειξη Έστω οι εσωτερικές και οι πλευρικές συναρτήσεις *bubble*, όπως τις έχουμε ήδη ορίσει. Εργαζόμαστε ανάλογα με την εύρεση του κάτω φράγματος για τους άμεσους εκτιμητές. Η σχέση (4.4.29) ισχύει για κάθε $v \in H_0^1(\omega_z)$, οπότε αν $v = \bar{r}\psi_K \in H_0^1(\omega_z)$ αφού μπορεί να επεκταθεί ως μηδέν πέρα από την στήριξη της, το ω_z . Τότε,

$$B_{\omega_z}(\phi_z, \bar{r}\psi_K) = \int_K r \bar{r} \psi_K dx, \quad (4.4.38)$$

όπου μπορούμε να έχουμε,

$$\int_K \psi_K \bar{r}^2 dx = \int_K \psi_K \bar{r}(\bar{r} - r) dx + B_{\omega_z}(\phi_z, \bar{r}\psi_K). \quad (4.4.39)$$

Εφαρμόζουμε την *Cauchy-Schwartz* στους δυο όρους της (4.4.39) του δεξιού μέλους.

$$B_{\omega_z}(\phi_z, \bar{r}\psi_K) \leq \|\phi_z\|_K \|\psi_K \bar{r}\|_{H^1(K)}, \quad (4.4.40)$$

με,

$$\|\psi_K \bar{r}\|_{H^1(K)} \leq Ch_K^{-1} \|\bar{r}\|_{L_2(K)}, \quad (4.4.41)$$

από την (4.2.29). Επίσης,

$$\int_K \psi_K \bar{r}(\bar{r} - r) dx \leq \|\psi_K \bar{r}\|_{L_2(K)} \|\bar{r} - r\|_{L_2(K)}, \quad (4.4.42)$$

με

$$\|\psi_K \bar{r}\|_{L_2(K)} \leq C \|\bar{r}\|_{L_2(K)},$$

από την (4.2.29). Η (4.4.39) γίνεται,

$$\int_K \psi_K \bar{r}^2 dx \leq C \|\bar{r} - r\|_{L_2(K)} \|\bar{r}\|_{L_2(K)} + Ch_K^{-1} \|\phi_n\|_K \|\bar{r}\|_{L_2(K)}. \quad (4.4.43)$$

Συνεπώς,

$$\|\bar{r}\|_{L_2(K)} \leq C \{h_K^{-1} \|\phi_n\|_K + \|\bar{r} - r\|_{L_2(K)}\}, \quad (4.4.44)$$

και από τριγωνική ανισότητα,

$$\|r\|_{L_2(K)} \leq C \{h_K^{-1} \|\phi_z\|_K + \|\bar{r} - r\|_{L_2(K)}\}. \quad (4.4.45)$$

Απομένει να βρούμε φράγμα για την $\|R\|_{L_2(E)}$. Με την λογική της (4.2.46), θα έχουμε,

$$\|R\|_{L_2(E)} \leq C \left\{ h_E^{-1/2} \|\phi_z\|_{\omega_E} + h_E^{1/2} \|\bar{r} - r\|_{L_2(\omega_E)} + \|\bar{R}_E - R\|_{L_2(E)} \right\}. \quad (4.4.46)$$

Από αριστερό μέλος της (4.4.36), τις (4.4.45), (4.4.46) έχουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα. \square

4.4.2 Μέθοδος υπολοίπου σε κάθε τρίγωνο

Ένα από τα κύρια μειονεκτήματα της προηγούμενης μεθόδου είναι ότι τα τοπικά προβλήματα έχουν αρκετό υπολογιστικό κόστος για να προσεγγισθούν με ακρίβεια. Στην πραγματικότητα κάθε τρίγωνο αντιμετωπίζεται αρκετές φορές ανάλογα με τον αριθμό των υποχωρίων με τα οποία περιέχεται. Μια φυσική επιλογή για να μειώσουμε το υπολογιστικό κόστος είναι να λύσουμε τα τοπικά προβλήματα σε κάθε ένα τρίγωνο ξεχωριστά. Δηλαδή, κάθε τρίγωνο θα το αντιμετωπίζουμε σαν ένα ξεχωριστό υποχωρίο.

Έστω το σφάλμα σε ένα τυχαίο τρίγωνο K του τριγωνισμού \mathcal{P}_h , του Ω , να ορίζεται ως $e = u - u_h$. Τότε χάρη της ομαλότητας της προσέγγισης των πεπερασμένων στοιχείων στα εσωτερικά του τριγώνου, το σφάλμα θα ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση,

$$-\Delta e + ce = f + \Delta u_h - cu_h, \text{ στο } K. \quad (4.4.47)$$

Η κύρια δυσκολία έγκειται στον προσδιορισμό των συνοριακών συνθηκών για το πρόβλημα (4.4.47). Δηλαδή ανάλογα αν κάποια πλευρά του τριγώνου K είναι ταυτόχρονα και *Dirichlet* σύνορο, *Neumann*, ή απλά είναι *εσωτερική πλευρά*. Στην συνέχεια, θα διακρίνουμε περιπτώσεις, προκειμένου να προσδιορίσουμε τις κατάλληλες συνοριακές συνθήκες για την εκάστοτε περίπτωση.

1. Αρχικά υποθέτουμε ότι $\partial K \cap \Gamma_D$. Τότε υποθέτουμε ότι η προσέγγιση των πεπερασμένων στοιχείων ικανοποιεί την συνοριακή συνθήκη ακριβώς. Δηλαδή,

$$e = 0, \quad \partial K \cap \Gamma_D. \quad (4.4.48)$$

2. Έστω $\partial K \cap \Gamma_N$. Τότε,

$$\frac{\partial e}{\partial n_E} = g - \frac{\partial u_h}{\partial n_E}, \quad E = \partial K \cap \Gamma_N. \quad (4.4.49)$$

3. Τέλος η περίπτωση όπου κάποια πλευρά του K δεν είναι συνοριακή πλευρά, δηλαδή, $\partial K \in \mathcal{E}_h^o$. Αν έχουμε ομογενείς συνοριακές για το τρίγωνο K , τότε όλο το σύνολο των τοπικών λύσεων θα μηδενιστεί στις εσωτερικές πλευρές της διαμέρισης, οπότε θα ορίσουμε μη ομογενείς.

$$\frac{\partial e}{\partial n_E} = \frac{\partial u}{\partial n_E} - \frac{\partial u_h}{\partial n_E} \Big|_K, \quad (4.4.50)$$

στην πλευρά E η οποία είναι κοινή για τα τρίγωνα K, J . Η ποσότητα $\frac{\partial u}{\partial n_E}$ είναι γενικά άγνωστη, οπότε θα χρειαστεί να την προσεγγίσουμε. Με

$$\frac{\partial u}{\partial n_E} \approx \left\langle \frac{\partial u_h}{\partial n_E} \right\rangle, \quad (4.4.51)$$

συμβολίζουμε την προσέγγιση της. Μια προσέγγιση μπορεί να είναι η

$$\left\langle \frac{\partial u_h}{\partial n_E} \right\rangle = \frac{1}{2} n_E \cdot \left\{ \nabla u_h \Big|_K + \nabla u_h \Big|_J \right\}. \quad (4.4.52)$$

Στην συνέχεια, θα αναζητήσουμε την ασθενή μορφή του προβλήματος (4.4.47) σε ένα τυχαίο $K \in \mathcal{P}_h$ με τις συνοριακές συνθήκες που περιγράψαμε παραπάνω. Αρχικά ορίζουμε τον υπόχωρο V_K του V ως,

$$V_K = \{v \in H^1(K) : v = 0 \text{ στο } \partial K \cap \Gamma_D\}, \quad (4.4.53)$$

την διγραμμική μορφή $B_K : V_K \times V_K \mapsto \mathbb{R}$, τέτοια ώστε,

$$B_K(u, v) = \int_K (\nabla u \cdot \nabla v + cuv) dx, \quad (4.4.54)$$

και το γραμμικό, φραγμένο συναρτησιακό $\mathcal{F}_K : V_K \mapsto \mathbb{R}$ με τύπο,

$$\mathcal{F}_K(v) = \int_K f v dx. \quad (4.4.55)$$

Παρατηρούμε ότι το πραγματικό σφάλμα της προσέγγισης των πεπερασμένων στοιχείων χαρακτηρίζεται από την ακόλουθη ιδιότητα, $e = u - u_h \in V$, τέτοιο ώστε,

$$B_K(e, v) = \mathcal{F}_K(v) - B_K(u_h, v) + \int_{\partial K \cap \Gamma_N} g v dS, \quad \forall v \in V. \quad (4.4.56)$$

Χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες εργαζόμαστε ανάλογα με την (4.2.1),

$$\int_K \nabla u_h \cdot \nabla v dx = - \int_K v \Delta u_h dx + \int_{\partial K} \frac{\partial u_h}{\partial n_K} v dS. \quad (4.4.57)$$

Αφού $u_h \in \mathbb{P}_1$, τότε $\Delta u_h = 0$. Παρατηρούμε επίσης ότι,

$$\int_{\partial K} \frac{\partial u_h}{\partial n_K} v dS = \int_{\partial K \cap \Gamma_N} \frac{\partial u_h}{\partial n_K} v dS + \int_{\partial K \setminus \Gamma_N} \frac{\partial u_h}{\partial n_K} v dS, \quad (4.4.58)$$

και κατά συνέπεια η (4.4.56), γράφεται ισοδύναμα,

$$B_K(e, v) = \int_K r v dx + \int_{\partial K \cap \Gamma_N} \left(g - \frac{\partial u_h}{\partial n_K} \right) v dS - \int_{\partial K \setminus \Gamma_N} \frac{\partial u_h}{\partial n_K} v dS, \quad (4.4.59)$$

με $r = f + \Delta u_h - cuv$ το εσωτερικό υπόλοιπο. Εισάγουμε τον συμβολισμό,

$$R_E := \begin{cases} - \left\langle \frac{\partial u_h}{\partial n_E} \right\rangle, & \text{αν } E \in \mathcal{E}(K) \cap \mathcal{E}_h^o, \\ g - \frac{\partial u_h}{\partial n_E}, & \text{αν } E \in \mathcal{E}(K) \cap \mathcal{E}_h^N, \end{cases} \quad (4.4.60)$$

και λαμβάνουμε ότι,

$$B_K(e, v) = \int_K r v dx + \sum_{E \in \mathcal{E}(K)} \int_E R_E v dS. \quad (4.4.61)$$

Συμβολίζοντας ως ϕ_K την προσέγγιση του πραγματικού σφάλματος στο κάθε τρίγωνο $K \in \mathcal{P}_h$, ζητάμε $\phi_K \in V_K$ για κάθε $K \in \mathcal{P}_h$, τέτοιο ώστε,

$$B_K(\phi_K, v) = \int_K r v dx + \sum_{E \in \mathcal{E}(K)} \int_E R_E v dS, \quad \forall v \in V_K. \quad (4.4.62)$$

Η μέθοδος υπολοίπου σε κάθε τρίγωνο, προκύπτει επιλέγοντας έναν βολικό υπόχωρο πεπερασμένης διάστασης του V_K . Μια δυσκολία δημιουργείται από το γεγονός ότι η διγραμμική μορφή μηδενίζει για μη τετριμμένες συναρτήσεις δοκιμής, οπότε θα πρέπει να σιγουρευτούμε ότι ο υπόχωρος πεπερασμένης διάστασης είναι κατάλληλος. Μια πιθανή επιλογή είναι να επιλέξουμε μόνο συναρτήσεις όπου η διγραμμική μορφή είναι ελλειπτική.

Έστω ο χώρος Y_K να αποτελείται από τις πλευρικές συναρτήσεις *bubble*,

$$Y_K = \text{span}\{\chi_E : E \in \mathcal{E}(K) \cap (\mathcal{E}_h^o \cup \mathcal{E}_h^N)\}, \quad (4.4.63)$$

Οι συναρτήσεις του Y_K μηδενίζουν στους κόμβους, οπότε το πρόβλημα *Neumann* θα έχει μοναδική λύση.

Αφού επιλέξαμε έναν βολικό υπόχωρο πεπερασμένης διάστασης Y_K , τότε η μέθοδος προσέγγισης του υπολοίπου σε κάθε τρίγωνο, για τον υπολογισμό εκ των υστέρων εκτιμήσεων για το σφάλμα, ισοδυναμεί με την επίλυση των παρακάτω τοπικών προβλημάτων,

$$\phi_K \in Y_K : B_K(\phi_K, v) = \int_K rv \, dx + \sum_{E \in \mathcal{E}(K)} \int_E R_E v \, dS, \quad \forall v \in Y_K. \quad (4.4.64)$$

Οπότε για να συνθέσουμε μια ολική εκτίμηση εκ των υστέρων για το σφάλμα, θα πρέπει να γνωρίζουμε τις ϕ_K . Συνεπώς ορίζουμε σαν τοπικό εκτιμητή του σφάλματος σε κάθε τρίγωνο $K \in \mathcal{P}_h$, τον

$$\eta_{N,K} = \|\phi_K\|_K, \quad (4.4.65)$$

και ως εκ τούτου ο ολικός εκτιμητής θα είναι

$$\|e\|^2 \approx \eta_N^2 = \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \eta_{N,K}^2. \quad (4.4.66)$$

Συνεπώς, για να προσδιορίσουμε τον εκάστοτε εκτιμητή για κάθε τρίγωνο του τριγωνισμού, καλούμαστε να λύσουμε σε κάθε τρίγωνο τα παρακάτω τοπικά προβλήματα,

$$\begin{cases} -\Delta \phi_K = f, & \text{στο } K, \\ \phi_K = 0, & \text{στο } \partial K \cap \Gamma_D, \\ \frac{\partial \phi_K}{\partial n_E} = R_E, & \text{στο } E = \partial K \setminus \Gamma_D. \end{cases} \quad (4.4.67)$$

Στην συνέχεια θα αποδείξουμε την *αξιοπιστία* και την *αποτελεσματικότητα* του εκτιμητή (4.4.65), συγκρίνοντας τον με τον άμεσο εκτιμητή υπολοίπου (4.2.52). Η ιδέα πίσω από την παρακάτω απόδειξη είναι ίδια με αυτήν που πραγματοποιήσαμε στην (4.4.22). Η (4.4.64) ισχύει για κάθε $v \in Y_K$, οπότε επιλέγοντας $v = \phi_K$,

$$\eta_{N,K}^2 = \int_K r \phi_K \, dx + \sum_{E \subset \partial K} R_E \phi_K \, dS. \quad (4.4.68)$$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα *Cauchy-Schwartz* και τις εκτιμήσεις (4.4.31), (4.4.32) θα έχουμε,

$$\eta_{N,K}^2 \leq C \left\{ h_K \|r\|_{L_2(K)} + \sum_{E \subset \partial K} h_K^{1/2} \|R_E\|_{L_2(E)} \right\} |\phi_K|_{H^1(K)}, \quad (4.4.69)$$

ή ισοδύναμα,

$$\eta_{N,K} \leq C \left\{ h_K^2 \|r\|_{L_2(K)}^2 + \frac{1}{2} \sum_{E \subset \partial K} h_K \|R_E\|_{L_2(E)}^2 \right\}^{1/2} = C \eta_{R,K}, \quad (4.4.70)$$

όπου η (4.4.70) αποτελεί μια σχέση ανάμεσα στο εκτιμητή υπολοίπου στο τρίγωνο (4.4.65) και τον άμεσο εκτιμητή υπολοίπου (4.2.52). Η (4.4.70) είναι χρήσιμη, διότι σύμφωνα με αυτή θα αποδείξουμε παρακάτω την *αξιοπιστία* και την *αποτελεσματικότητα* του η_N . Έστω ότι ο χώρος Y_K ο οποίος χρησιμοποιείται για την προσέγγιση στο πρόβλημα υπολοίπου, είναι εφοδιασμένος και με την εσωτερική συνάρτηση *bubble* σύμφωνα με το Θεώρημα 4.2. Τότε θα έχουμε το παρακάτω Λήμμα.

Λήμμα 4.11 Έστω r και R να είναι το εσωτερικό και συνοριακό υπόλοιπο, αντίστοιχα, το οποίο σχετίζεται με την λύση των πεπερασμένων στοιχείων η οποία κατασκευάζεται από τον υπόχωρο X_h . Έστω ότι \bar{r}_K και \bar{R}_E οι προσεγγίσεις πεπερασμένης διάστασης για τα υπόλοιπα στο τρίγωνο K και την πλευρά $E \subset \partial K$, αντίστοιχα. Έστω $\eta_{N,K}$ να δηλώνει τον εκτιμητή στο τρίγωνο K , του σφάλματος του υπολοίπου. Τότε υπάρχει μια σταθερά C η οποία εξαρτάται μόνο από την συνθήκη (3.2.23) του τριγωνισμού,

$$\|r\|_{L_2(K)} \leq C \{h_K^{-1}\eta_{N,K} + \|\bar{r}_K - r\|_{L_2(K)}\}, \quad (4.4.71)$$

και

$$\|R_E\|_{L_2(E)} \leq C \left\{ h_K^{-1/2}\eta_{N,K} + h_K^{1/2}\|\bar{r}_K - r\|_{L_2(\omega_E)} + \|\bar{R}_E - R_E\|_{L_2(E)} \right\}. \quad (4.4.72)$$

Απόδειξη Αρχικά θα δούμε την (4.4.71) η οποία αποδεικνύεται εντελώς ανάλογα με αυτήν στον άμεσο εκτιμητή. Δηλαδή όμοια με τις (4.2.32)-(4.2.38), για την συνάρτηση $v = \bar{r}_K \psi_K$. Τότε, αντικαθιστώντας την v στην ασθενή μορφή του υπολοίπου (4.4.64), θα έχουμε,

$$B_K(\phi_K, \bar{r}_K \psi_K) = \int_K \psi_K r \bar{r}_K dx, \quad (4.4.73)$$

την οποία χρησιμοποιούμε αντί της (4.2.33). Για την (4.4.72) θα χρησιμοποιήσουμε τις (4.2.42)-(4.2.46), με $v = \bar{R}_E \chi_E$ και τότε αντί της (4.2.41), θα έχουμε την

$$B_K(\phi_K, \bar{R}_E \chi_E) = \int_K r \bar{R}_E \chi_E dx + \int_E \chi_E R_E \bar{R}_E dS. \quad (4.4.74)$$

□

Λόγω της σχέσης (4.4.70) μεταξύ του άμεσου και του έμμεσου εκτιμητή, θα έχουμε από το Θεώρημα 4.5, ότι,

Θεώρημα 4.12 Έστω $\eta_{N,K}$ να είναι ο τοπικός εκτιμητής σφάλματος, οποίος προκύπτει από την μέθοδο υπολοίπου σε τρίγωνο. Τότε υπάρχει μια σταθερά C η οποία εξαρτάται από την συνθήκη (3.2.23) του τριγωνισμού, τέτοια ώστε

$$\|e\|^2 \leq C \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \left\{ \eta_{N,K}^2 + h_K^2 \|f - \bar{f}\|_{L_2(K)}^2 + \sum_{E \subset \partial K \cap \Gamma_N} h_K \|g - \bar{g}\|_{L_2(E)}^2 \right\}, \quad (4.4.75)$$

και

$$\eta_{N,K}^2 \leq C \left\{ \|e\|_{\omega_K}^2 + h_K^2 \|f - \bar{f}\|_{L_2(\omega_K)}^2 + \sum_{E \subset \partial K \cap \Gamma_N} h_K \|g - \bar{g}\|_{L_2(E)}^2 \right\}, \quad (4.4.76)$$

για κάθε $K \in \mathcal{P}_h$.

Απόδειξη Η (4.4.75) προέκυψε αντικαθιστώντας στην (4.4.66) τις (4.4.71),(4.4.72). Τέλος, για την απόδειξη της (4.4.76) εκμεταλλευόμαστε την σχέση (4.4.70) που υπάρχει μεταξύ του εκτιμητή $\eta_{N,K}$ με αυτήν του $\eta_{R,K}$ και από την (4.2.49) προκύπτει το ζητούμενο. □

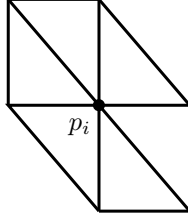
4.5 Τεχνική μέσου όρου

Μια συνήθης τακτική για την εκτίμηση του εκ του υτέρων σφάλματος της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων, προκύπτει από την κατασκευή μίας βελτιωμένης προσέγγισης τις κλίσης, της λύσης των πεπερασμένων στοιχείων, χρησιμοποιώντας τοπικές τεχνικές μέσου όρου (*local averaging techniques*) και έπειτα την σύγκριση αυτών των προσεγγίσεων με την πρωτότυπη διακριτή κλίση, ως έναν εκτιμητή σφάλματος. Έστω $\{p_i, : i = 1, \dots, N\}$ να είναι

μια ολική αρίθμηση των συνολικών κόμβων του τριγωνισμού. Για κάθε κόμβο p_i , $i = 1, \dots, N$, ορίζουμε το κομμάτι του χωρίου το οποίο αποτελείται από τα παρακάτω τρίγωνα,

$$\omega_{p_i} := \cup\{K \in \mathcal{P}_h : p_i \in \mathcal{V}(K)\}. \quad (4.5.1)$$

Δηλαδή τα κομμάτια ω_{p_i} αποτελούνται από τα τρίγωνα τα οποία έχουν ως κορυφή τον κόμβο p_i , όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 4.9: Το κομμάτι του τριγωνισμού ω_{p_i} .

Υποθέτουμε το ελλειπτικό πρόβλημα (4.1.4), με $c = 0$, $\Gamma_N = \emptyset$ και $\partial\Omega = \Gamma_D$. Στόχος είναι να υπολογίσουμε την νόρμα ενέργειας του σφάλματος,

$$\|e\| = |e|_{H^1(\Omega)} = \|\nabla u - \nabla u_h\|_{L_2(\Omega)}. \quad (4.5.2)$$

Ο εκτιμητής που αναζητάμε βασίζεται στην ομαλοποίηση με κάποιο τρόπο της ασυνεχούς ∇u_h , με στόχο την εύρεση μία συνεχούς κλίσης $G u_h \in X_h \times X_h$. Η ελπίδα η οποία βρίσκεται πίσω από αυτήν την ιδέα, είναι ότι μία ομαλή κλίση, θα είναι καλύτερη προσέγγιση για το ∇u , παρά το ∇u_h , δηλαδή,

$$\|\nabla u - G u_h\|_{L_2(\Omega)} \leq \beta \|\nabla u - \nabla u_h\|_{L_2(\Omega)}, \quad 0 \leq \beta < 1. \quad (4.5.3)$$

Σε αυτήν την περίπτωση το ∇u θα μπορεί να αντικατασταθεί στην (4.5.2), από το $G u_h$. Τότε ο εκ των υστέρων εκτιμητής θα είναι,

$$\eta_Z = \|\nabla u_h - G u_h\|_{L_2(\Omega)}. \quad (4.5.4)$$

Η ιδέα για την κατασκευή του $G u_h$ είναι να χρησιμοποιήσουμε την $L_2(\Omega)$ -προβολή στον $X_h \times X_h$, και να έχουμε σαν "θεραπευμένη" κλίση την $G^* u_h$. Τότε $G^* u_h \in X_h \times X_h$ και θα είναι λύση του,

$$\int_{\Omega} G^* u_h \cdot v \, dx = \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot v \, dx, \quad \forall v \in X_h \times X_h. \quad (4.5.5)$$

Όμως ο υπολογισμός της $G^* u_h$ θα είναι υπολογιστικά ακριβός συγκριτικά με την προσέγγιση της u . Πιο συγκεκριμένα, αφού $G^* u_h \in X_h \times X_h$, τότε μπορεί να γραφεί σαν γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων της βάσης του X_h ,

$$G^* u_h = \sum_{j=1}^N \phi_j G^* u_h(p_j). \quad (4.5.6)$$

Αντικαθιστώντας την (4.5.6) στην (4.5.5),

$$\sum_{p_i \in \mathcal{V}_h} \left(\int_{\Omega} \phi_i \phi_j \right) G^* u_h(p_i) \, dx = \int_{\Omega} \phi_j \nabla u_h \, dx, \quad \forall p_j \in \mathcal{V}_h. \quad (4.5.7)$$

Ο πίνακας μάζας του συστήματος (4.5.7), θα είναι ο ίδιος με αυτόν του (4.1.10).

Η ιδέα είναι να χρησιμοποιήσουμε μια συσσωρευμένη μορφή του πίνακα μάζας της (4.5.7), η οποία προκύπτει χρησιμοποιώντας τον παρακάτω κανόνα αριθμητικής ολοκλήρωσης για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων,

$$\int_{\Omega} \phi_i \phi_j dx. \quad (4.5.8)$$

Πιο συγκεκριμένα, για τον πίνακα μάζας, χρησιμοποιούμε την

$$\int_K \phi dx \approx \frac{|K|}{3} \sum_{p \in \mathcal{V}(K)} \phi(p), \quad (4.5.9)$$

η οποία ολοκληρώνει ακριβώς πολυώνυμα βαθμού ένα. Συνεπώς,

$$\int_{\Omega} \phi_j \nabla u_h dx = \sum_{p_j \in K} \frac{|K|}{3} \nabla (u_h|_K), \quad (4.5.10)$$

όπου η (4.5.10), προκύπτει αν εφαρμόσουμε την (4.5.9) στο δεξί μέλος της (4.5.7). Η συσσωρευμένη μορφή του πίνακα μάζας θα είναι ένας διαγώνιος πίνακας, και τότε οι τιμές της $G u_h$ πάνω στους κόμβους της διαμέρισης θα δίδονται από [14],

$$G u_h(p_i) = \sum_{K \subset \omega_{p_i}} \frac{|K|}{|\omega_{p_i}|} \nabla u_h|_K, \quad \forall p_i \in \mathcal{V}_h. \quad (4.5.11)$$

Ορίζουμε τον τοπικό εκτιμητή σε κάθε $K \in \mathcal{P}_h$ για την τεχνική του μέσου όρου να ορίζεται ως,

$$\eta_{Z,K}^2 := \int_K |G u_h - \nabla u_h|^2 dx, \quad (4.5.12)$$

να προσεγγίζει το σφάλμα $\|\nabla u - \nabla u_h\|_{L_2(K)}$, και

$$\eta_Z^2 := \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \eta_K^2, \quad (4.5.13)$$

το ολικό εκτιμητή ο οποίος προσεγγίζει το σφάλμα $\|\nabla u - \nabla u_h\|_{L_2(\Omega)}$. Στην συνέχεια θα αποδείξουμε ότι ο εκτιμητής η_Z είναι ισοδύναμος με το σφάλμα $\|\nabla u - \nabla u_h\|_{L_2(\Omega)}$. Πριν ξεκινήσουμε θα ορίσουμε τι σημαίνει η ισοδυναμία. Έστω ποσότητες \mathcal{A} και \mathcal{B} θα λέμε ότι η \mathcal{A} είναι ισοδύναμη με την \mathcal{B} και θα το συμβολίζουμε με $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$, αν υπάρχουν σταθερές $c_1, c_2 > 0$ τέτοιες ώστε,

$$c_1 \mathcal{A} \leq \mathcal{B} \leq c_2 \mathcal{A}. \quad (4.5.14)$$

Η απόδειξη θα γίνει ως εξής. Ορίζουμε τον τοπικό εκτιμητή,

$$\tilde{\eta}_K^2 := \frac{1}{2} \sum_{E \in \mathcal{E}(K) \cap \mathcal{E}_h^o} h_E \left\| \left[\frac{\partial u_h}{\partial n_E} \right] \right\|_{L_2(E)}^2, \quad (4.5.15)$$

με την $\left[\frac{\partial u_h}{\partial n_E} \right]$ όπως έχει ορισθεί στην (4.2.6). Τότε για το εκτιμητή $\tilde{\eta}_Z$ μπορούμε να ορίσουμε τον ολικό εκτιμητή ως,

$$\tilde{\eta}_Z^2 := \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \tilde{\eta}_K^2. \quad (4.5.16)$$

Για τον εκτιμητή $\tilde{\eta}_Z^2$ ισχύει το παρακάτω Θεώρημα.

Θεώρημα 4.13 Έστω u λύση του ελλειπτικού προβλήματος (4.1.4) με $\Gamma_N = \emptyset$ και $c = 0$, και u_h είναι λύση των πεπερασμένων στοιχείων για την u . Για τον ολικό εκτιμητή $\tilde{\eta}_Z$ υπάρχουν σταθερές C_1, C_2 οι οποίες εξαρτώνται από την συνθήκη (3.2.23) του τριγωνισμού, τέτοιες ώστε,

1. $\|e\|^2 \leq C_1 \left\{ \tilde{\eta}_Z^2 + \sum_{K \in \mathcal{P}_h} h_K^2 \|f\|_{L_2(K)}^2 \right\}$,
2. $\tilde{\eta}_K^2 \leq C_2 \left\{ \|e\|_{L_2(\omega_K)}^2 + \sum_{K' \subset \omega_K} h_{K'}^2 \|f\|_{L_2(K')}^2 \right\}$,

με το υποχωρίο ω_K να ορίζεται στο σχήμα (4.2). Με άλλα λόγια $\tilde{\eta}_Z \sim \|e\|$.

Απόδειξη R.Verfürth [15].

□

Θεώρημα 4.14 Έστω u λύση του ελλειπτικού προβλήματος (4.1.4) με $\Gamma_N = \emptyset$ και $c = 0$, και u_h είναι λύση των πεπερασμένων στοιχείων για την u . Αν η_Z και $\tilde{\eta}_Z$ είναι οι ολικοί εκτιμητές που ορίζονται στις (4.5.13), (4.5.16), αντίστοιχα. Τότε,

$$\eta_Z \sim \tilde{\eta}_Z.$$

Απόδειξη R.Rodriguez [14]

□

Κεφάλαιο 5

Υλοποίηση των Εκ των Υστέρων Εκτιμητών

Ενδιαφερόμαστε να κατασκευάσουμε τριγωνισμό \mathcal{P}_h , τέτοιον ώστε ο αριθμός των στοιχείων $\#K \leq M_{max}$ παραμένει φραγμένος, δια του οποίου το σφάλμα $\|u - u_h\|$ είναι μικρό, με $\|\cdot\|$ να είναι η νόρμα ενέργειας.

Τέτοιος τριγωνισμός \mathcal{P}_h , προκύπτει από μια επαναληπτική διαδικασία: Για κάθε τρίγωνο $K \in \mathcal{P}_h$, έστω η_K να είναι ο δείκτης εκλέπτυνσης, για τον οποίο θα ισχύει,

$$\eta_K \approx \|u - u_h\|_K, \quad \forall K \in \mathcal{P}_h. \quad (5.0.1)$$

Πιο συγκεκριμένα, ο εκτιμητής σφάλματος,

$$\eta = \left(\sum_{K \in \mathcal{P}_h} \eta_K^2 \right)^{1/2}, \quad (5.0.2)$$

θα είναι μια προσέγγιση του πραγματικού σφάλματος, $\eta \approx \|u - u_h\|$. Στην προηγούμενη ενότητα, υπολογίσαμε διάφορους εκτιμητές της μορφής (5.0.2).

5.1 Ελλειπτικό πρόβλημα

Έστω Ω φραγμένο χωρίο του \mathbb{R}^2 κλάσης \mathcal{C}^1 . Θεωρούμε το πρόβλημα *Dirichlet* για την εξίσωση *Poisson* για μια συνάρτηση $f \in L_2(\Omega)$ γνωστή εκ των προτέρων. Ζητάμε συνάρτηση $u(x) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$, τέτοια ώστε,

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{στο } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ u = 0, & \text{στο } \partial\Omega. \end{cases} \quad (5.1.1)$$

Θεωρούμε ανάλογα με τα προηγούμενα κεφάλαια, την συμμετρική διγραμμική μορφή $B(\cdot, \cdot) : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο,

$$B(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx. \quad (5.1.2)$$

Επιπλέον, θεωρούμε το φραγμένο και γραμμικό συναρτησιακό $\mathcal{F} : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο,

$$\mathcal{F}(v) = \int_{\Omega} f v \, dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (5.1.3)$$

Η ασθενής μορφή του προβλήματος (5.1.1) είναι η ακόλουθη: Ζητάμε $u \in H_0^1(\Omega)$ τέτοιο ώστε,

$$B(u, v) = \mathcal{F}(v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (5.1.4)$$

Αν θεωρήσουμε X_h έναν πεπερασμένης διάστασης υπόχωρο του $H_0^1(\Omega)$,

$$X_h = \{v \in C(\bar{\Omega}) : \forall K \in \mathcal{P}_h, v|_K \in \mathbb{P}_1, v|_{\partial\Omega} = 0\}, \quad (5.1.5)$$

τότε η προσέγγιση των πεπερασμένων στοιχείων είναι να βρούμε $u_h \in X_h$ τέτοιο ώστε

$$B(u_h, v_h) = \mathcal{F}(v_h) \quad \forall v_h \in X_h. \quad (5.1.6)$$

Όπως είδαμε στην Ενότητα 2.4.1, το Λήμμα *Lax-Milgram* εγγυάται την ύπαρξη και την μοναδικότητα των προβλημάτων (5.1.4) και (5.1.6). Στις ακόλουθες ενότητες θα γίνει η παρουσίαση της υλοποίησης των εκ των υστέρων εκτιμητών για το πρόβλημα (5.1.1).

5.2 Εκτιμητής υπολοίπου

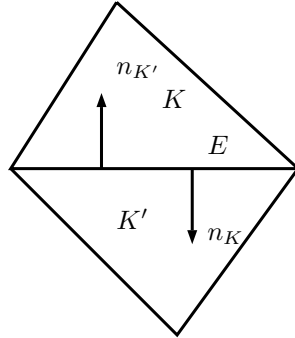
Θεωρούμε τον εκτιμητή βασισμένο στο υπόλοιπο (4.2.21),

$$\eta_{R,K}^2 = h_K^2 \|r\|_{L_2(K)}^2 + \frac{1}{2} h_K \|R\|_{L_2(\partial K)}^2, \quad (5.2.1)$$

ή ισοδύναμα,

$$\eta_{R,K}^2 = h_K^2 \|r\|_{L_2(K)}^2 + \frac{1}{2} h_E \|J_h u_h\|_{L_2(\partial K \cap \Omega)}^2 + h_E \|g - \partial_n u_h\|_{L_2(\partial K \cap \Gamma_N)}^2, \quad (5.2.2)$$

με $J_h(\cdot)$ να δηλώνει το άλμα σε μια εσωτερική πλευρά, $E \in \mathcal{E}_h^o$, $E \notin \partial\Omega$. Έστω $K, K' \in \mathcal{P}$ γειτονικά τρίγωνα, τα οποία μοιράζονται την πλευρά $E \in \mathcal{E}_h^o$ και $n_K, n_{K'}$, τα εξωτερικά μοναδιαία κάθετα διανύσματα.



Σχήμα 5.1: Τα $n_K, n_{K'}$.

Το άλμα της ∇u_h , η οποία είναι μία κατά τμήματα σταθερή συνάρτηση στην κοινή πλευρά $E \in K \cap K' \in \mathcal{E}_h^o$, ορίζεται ως,

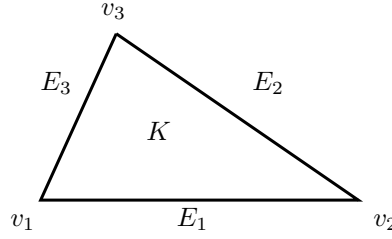
$$J_h u_h|_E := \nabla u_h|_K \cdot n_K + \nabla u_h|_{K'} \cdot n_{K'}, \quad (5.2.3)$$

και στην πραγματικότητα $n_K = -n_{K'}$. Αντικαθιστώντας την συνάρτηση g , με μία κατά τμήματα σταθερή συνάρτηση υπολογισμένη στο μέσο της πλευράς E , δηλαδή, $g|_E \approx g(m^E)$, με m^E , το μέσο της E , τότε,

$$\tilde{\eta}_{R,K}^2 := h_K^2 \int_K r^2 dx + \frac{1}{2} \sum_{E \in \partial K \cap \Omega} h_E^2 (J_h u_h|_E)^2 + \sum_{E \in \partial K \cap \Gamma_N} h_E^2 (g(m^E) - \partial_n u_h|_E)^2. \quad (5.2.4)$$

Για τον $\tilde{\eta}_{R,K}^2$, που ορίζεται στην (5.2.4), ισχύει, $\tilde{\eta}_{R,K}^2 \approx \eta_{R,K}^2$. Για τον υπολογισμό του πρώτου όρου της (5.2.4), χρησιμοποιούμε αριθμητική ολοκλήρωση στο εκάστοτε τρίγωνο K .

Για όλες τις $E \in \mathcal{E}_h$, υπολογίζουμε $h_E J_h u_h|_E$, αν $E \in \mathcal{E}_h^o$ και $h_E(\partial_n u_h)|_E$, αν $E \in \mathcal{E}_h^N$. Έστω $K \in \mathcal{P}_h$, με κορυφές v_1, v_2, v_3 , με φορά αντίστροφη του ρολογιού. Επίσης E_1, E_2, E_3 , οι τρεις πλευρές του K , οι οποίες βρίσκονται ανάμεσα στις κορυφές $v_1 - v_2, v_2 - v_3$, και $v_3 - v_1$, αντίστοιχα, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 5.2: Αρίθμηση των πλευρών.

Έστω $v_i = (x_1^i, x_2^i)$. Γνωρίζουμε ότι

$$\phi_i = \alpha_i + \beta_i x_1 + \gamma_i x_2, \quad (5.2.5)$$

με τους συντελεστές $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$, $i = 1, 2, 3$, να τους προσδιορίζουμε από,

$$\phi_i(p_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad (5.2.6)$$

με $p_j \in \mathcal{V}_h$. Οπότε,

$$\alpha_i = \frac{x_1^j x_2^k - x_1^k x_2^j}{2|K|}, \quad \beta_i = \frac{x_2^j - x_2^k}{2|K|}, \quad \gamma_i = \frac{x_1^k - x_1^j}{2|K|}, \quad (5.2.7)$$

με τους δείκτες $\{i, j, k\}$ να λαμβάνουν κυκλικά τις τιμές από το σύνολο $\{1, 2, 3\}$. Αν $v_1 = v_4$, και $v_2 = v_5$, τότε τα β_i, γ_i , μπορούν να γραφούν ισοδύναμα,

$$\beta_i = \frac{x_2^{i+1} - x_2^{i+2}}{2|K|}, \quad \gamma_i = \frac{x_1^{i+2} - x_1^{i+1}}{2|K|}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (5.2.8)$$

Η κλίση των κατά τμήματα γραμμικών συναρτήσεων ϕ_i , $i = 1, 2, 3$, είναι,

$$\nabla \phi_i|_K = (\beta_i, \gamma_i) = \frac{1}{2|K|} (x_2^{i+1} - x_2^{i+2}, x_1^{i+2} - x_1^{i+1}), \quad i = 1, 2, 3. \quad (5.2.9)$$

Παρατηρούμε ότι,

$$\nabla \lambda_i^K = \nabla \phi_i|_K, \quad i = 1, 2, 3.$$

Συνεπώς, στο τρίγωνο K , η u_h , μπορεί να γραφεί σαν γραμμικός συνδυασμός των τοπικών συναρτήσεων βάσης,

$$u_h|_K = \sum_{i=1}^3 u_i \lambda_i^K, \quad (5.2.10)$$

τότε,

$$\nabla u_h|_K = \sum_{i=1}^3 u_i \nabla \lambda_i^K. \quad (5.2.11)$$

Σύμφωνα με την (5.2.11) και την (5.2.9),

$$\nabla u_h|_K = \left(\frac{\partial u_h}{\partial x_1}, \frac{\partial u_h}{\partial x_2} \right) = \left(\sum_{i=1}^3 u_i \frac{\partial \lambda_i^K}{\partial x_1}, \sum_{i=1}^3 u_i \frac{\partial \lambda_i^K}{\partial x_2} \right) = \left(\sum_{i=1}^3 u_i \beta_i, \sum_{i=1}^3 u_i \gamma_i \right). \quad (5.2.12)$$

Εύκολα παρατηρούμε ότι,

$$(curl u_h)|_K = \begin{pmatrix} -\frac{\partial u_h}{\partial x_2}, \frac{\partial u_h}{\partial x_1} \end{pmatrix}. \quad (5.2.13)$$

Βάση των (5.2.13), (5.2.12),

$$(curl u_h)|_K = \frac{1}{2|K|} (u_1(v_2 - v_3) + u_2(v_3 - v_1) + u_3(v_1 - v_2)). \quad (5.2.14)$$

Ισοδύναμα, το $curl u_h|_K$ είναι η ορθογώνια περιστροφή της κλίσης $\nabla u_h|_K$,

$$\nabla u_h|_K = curl u_h|_K \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.2.15)$$

με τα $curl u_h|_K, \nabla u_h|_K$ να είναι διανύσματα γραμμής. Έστω $n_{K,E_i}, i = 1, 2, 3$, το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα που αντιστοιχεί στην πλευρά $E_i, i = 1, 2, 3$, του K , αν επιπλέον ως $d_i, i = 1, 2, 3$, συμβολίσουμε το εφαπτόμενο μοναδιαίο διάνυσμα στην πλευρά $E_i \in \mathcal{E}(K)$, ως,

$$d_i = \frac{v_{i+1} - v_i}{|v_{i+1} - v_i|}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (5.2.16)$$

τότε λόγω της (5.2.15),

$$h_{E_i} \left(\frac{\partial u_h}{\partial n_{K,E_i}} \right) = h_{E_i} (\nabla u_h \cdot n_{K,E_i}) = -h_{E_i} (curl u_h \cdot d_i). \quad (5.2.17)$$

Μετά από όλα αυτά, μπορούμε να υπολογίσουμε τον εκτιμητή $\tilde{\eta}_{R,K}^2$.

5.3 Ιεραρχικός εκτιμητής

Θεωρούμε τον ιεραρχικό εκτιμητή (4.3.32),

$$\eta_H^2 = \sum_{E \in \mathcal{E}_h^o \cup \mathcal{E}_h^N} r_E^2 + \sum_{K \in \mathcal{P}_h} r_K^2. \quad (5.3.1)$$

Ισοδύναμα,

$$\eta_H^2 = \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \left(r_K^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}(K) \setminus \Gamma_D} r_E^2 \right), \quad (5.3.2)$$

ή ισοδύναμα,

$$\eta_H^2 = \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \eta_{H,K}^2, \quad (5.3.3)$$

με,

$$\eta_{H,K}^2 = r_K^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}(K) \setminus \Gamma_D} r_E^2, \quad (5.3.4)$$

να είναι ο τοπικός εκτιμητής σε κάθε τρίγωνο $K \in \mathcal{P}_h$. Από τις (4.3.31) και (4.3.23), προκύπτει ότι η (5.3.4) γράφεται για $\forall K \in \mathcal{P}_h$ ισοδύναμα,

$$\eta_{H,K}^2 = \left(\int_K f \psi_K dx \right)^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_h \setminus \Gamma_D} \left(\int_{\omega_E} (f \chi_E - \nabla u_h \cdot \nabla \chi_E) dx + \int_{\partial \omega_E \cap \Gamma_N} g \chi_E dS \right)^2, \quad (5.3.5)$$

με ψ_K η εσωτερική συνάρτηση *bubble* και η χ_E , η πλευρική συνάρτηση *bubble*, οι οποίες ορίζονται ως,

$$\psi_K = \prod_{p_i \in \mathcal{V}_h \cap K} \phi_i, \quad \chi_E = \prod_{p_i \in \mathcal{V}_h \cap E} \phi_i. \quad (5.3.6)$$

Προκειμένου να υπολογισθεί η (5.3.5), αρχικά θα υπολογίσουμε το $\int_K f \psi_K dx$ με αριθμητική ολοκλήρωση. Παρατηρούμε ότι,

$$\int_K \psi_K dx = \frac{|K|}{60}. \quad (5.3.7)$$

Πράγματι,

$$\int_K \psi_K dx = 2|K| \int_{\hat{K}} \hat{\psi}_{\hat{K}} d\hat{x}, \quad (5.3.8)$$

με,

$$\hat{\psi}_{\hat{K}} = \hat{\lambda}_1 \hat{\lambda}_2 \hat{\lambda}_3 = \hat{x}_1 \hat{x}_2 (1 - \hat{x}_1 - \hat{x}_2). \quad (5.3.9)$$

Τότε, η (5.3.8),

$$\int_{\hat{K}} \hat{\psi}_{\hat{K}} d\hat{x} = \int_0^1 \int_0^{1-\hat{x}_1} \hat{x}_1 \hat{x}_2 (1 - \hat{x}_1 - \hat{x}_2) d\hat{x}_2 d\hat{x}_1 = \frac{1}{120}. \quad (5.3.10)$$

Αντικαθιστώντας την (5.3.10), στην (5.3.8), προκύπτει η (5.3.7). Συνεπώς,

$$\int_K f \psi_K dx \approx f(b^K) \int_K \psi_K dx = \frac{|K|}{60} f(b^K), \quad (5.3.11)$$

με b^K , είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου $K \in \mathcal{P}_h$. Για το ολοκλήρωμα $\int_T f \chi_E dx$, εφαρμόζουμε την ίδια διαδικασία. Αν $\hat{\chi}_{\hat{E}} = \hat{x}_1 \hat{x}_2$, -το αποτέλεσμα θα είναι ακριβώς το ίδιο για $\hat{\chi}_{\hat{E}} = \hat{x}_1(1 - \hat{x}_1 - \hat{x}_2)$ ή $\hat{\chi}_{\hat{E}} = \hat{x}_2(1 - \hat{x}_1 - \hat{x}_2)$, τότε,

$$\int_K \chi_E dx = \frac{|K|}{12}. \quad (5.3.12)$$

Πράγματι,

$$\int_K \chi_E dx = 2|K| \int_{\hat{K}} \hat{\chi}_{\hat{E}} d\hat{x}. \quad (5.3.13)$$

Όμως,

$$\int_0^1 \int_0^{1-\hat{x}_1} \hat{x}_1 \hat{x}_2 d\hat{x}_2 d\hat{x}_1 = \frac{1}{24}. \quad (5.3.14)$$

Αντικαθιστώντας την (5.3.14), στην (5.3.13), προκύπτει η (5.3.12). Συνεπώς,

$$\int_K f \chi_E dx \approx f(b^K) \int_K \chi_E dx = \frac{|K|}{12} f(b^K). \quad (5.3.15)$$

Το ολοκλήρωμα (5.3.15) είναι ανεξάρτητο της πλευράς $E \in \mathcal{E}(K)$. Έστω το ολοκλήρωμα,

$$\int_K \nabla u_h \cdot \nabla \chi_{E_j} dx, \quad (5.3.16)$$

με v_1, v_2, v_3 να είναι οι κορυφές του $K \in \mathcal{P}_h$ και E_i , $i = 1, 2, 3$, ανάλογα με την προηγούμενη περίπτωση και το σχήμα 5.2. Έστω η E_i , η i -οστή πλευρά του $K \in \mathcal{P}_h$, στην οποία αντιστοιχεί η,

$$\chi_{E_i} = \lambda_i^K \lambda_{i+1}^K. \quad (5.3.17)$$

Τότε,

$$\nabla \chi_{E_i} = \lambda_i^K \nabla \lambda_{i+1}^K + \lambda_{i+1}^K \nabla \lambda_i^K. \quad (5.3.18)$$

Αντικαθιστώντας την (5.3.18) στην (5.3.16), και παρατηρώντας ότι το $\nabla u_h|_K$ είναι σταθερό, τότε,

$$\int_K \nabla u_h \cdot \nabla \chi_{E_i} dx = \nabla u_h \cdot \int_K (\lambda_i^K \nabla \lambda_{i+1}^K + \lambda_{i+1}^K \nabla \lambda_i^K) dx. \quad (5.3.19)$$

Η $\nabla \lambda_i^K$, $i = 1, 2, 3$, είναι σταθερή σε κάθε τρίγωνο, οπότε,

$$\int_K (\lambda_i^K \nabla \lambda_{i+1}^K + \lambda_{i+1}^K \nabla \lambda_i^K) dx = \nabla \lambda_{i+1}^K \int_K \lambda_i^K dx + \nabla \lambda_i^K \int_K \lambda_{i+1}^K dx. \quad (5.3.20)$$

Όμως,

$$\int_K \lambda_i^K dx = \frac{|K|}{3}, \quad (5.3.21)$$

και τότε,

$$\int_K \nabla u_h \cdot \nabla \chi_{E_i} dx = \frac{|K|}{3} \nabla u_h|_K \cdot (\nabla \lambda_i^K + \nabla \lambda_{i+1}^K). \quad (5.3.22)$$

Συνολικά,

$$\int_{\omega_E} (f \chi_E - \nabla u_h \cdot \nabla \chi_E) dx = \sum_{\substack{K \in \mathcal{P}_h \\ E \subset \partial K}} \int_K (f \chi_E - \nabla u_h \cdot \nabla \chi_E) dx. \quad (5.3.23)$$

Τέλος, θα υπολογίσουμε το,

$$\int_{\partial \omega_E \cap \Gamma_N} g \chi_E dS. \quad (5.3.24)$$

Αντίστοιχα με τα παραπάνω, αρχικά θα παρατηρήσουμε ότι για $E \in \mathcal{E}_h$,

$$\int_E \chi_E dS = \frac{h_E}{6}. \quad (5.3.25)$$

Για να γίνει, θα ορίσουμε έναν μετασχηματισμό, αντίστοιχο με τον \mathcal{F}_K , ο οποίος απεικονίζει μια τυχαία πλευρά του τριγωνισμού $E \in \mathcal{E}_h$, στον πλευρά $[0, 1]$. Πιο συγκεκριμένα, θα ονομάζουμε ως φυσική πλευρά την $E \in \mathcal{E}_h$, και ως πλευρά αναφορά, την $[0, 1]$, την οποία θα την συμβολίζουμε ως \hat{E} . Αν οι συνταγμένες της φυσικής πλευράς δίνονται από,

$$p_1^E = (x_1^1, x_2^1), \quad p_2^E = (x_1^2, x_2^2), \quad (5.3.26)$$

ορίζουμε την συνάρτηση,

$$[0, 1] \ni t \mapsto \varphi_E(t) = (1-t) \begin{bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{bmatrix}, \quad (5.3.27)$$

που είναι μια παραμετροποίηση της πλευράς E . Θεωρούμε τις συναρτήσεις,

$$\vartheta_1(t) = 1-t, \quad \vartheta_2(t) = t. \quad (5.3.28)$$

Οι (5.3.28), είναι οι συναρτήσεις βάσης της $[0, 1]$, για τον χώρο των \mathbb{P}_1 . Έστω η i -οστή πλευρά E_i , τότε, από (5.3.6), $\chi_{E_i} = \lambda_i^K \lambda_{i+1}^K$.

$$\begin{aligned} \int_{E_i} \chi_{E_i} dS &= \int_{E_i} \lambda_i^K \lambda_{i+1}^K dS = h_{E_i} \int_0^1 \lambda_i^K(\varphi_E(t)) \lambda_{i+1}^K(\varphi_E(t)) dS \\ &= h_{E_i} \int_0^1 \vartheta_1(t) \vartheta_2(t) dt = \frac{h_{E_i}}{6}. \end{aligned} \quad (5.3.29)$$

Το ολοκλήρωμα, (5.3.24), με $E \in \partial \omega_E \cap \Gamma_N$,

$$\int_E g \chi_E dS \approx g(m^E) \int_E \chi_E dS = g(m^E) \frac{h_E}{6}, \quad (5.3.30)$$

με m^E , το μέσον της πλευράς E .

5.4 Μέθοδος υπολοίπου σε τρίγωνο

Η μέθοδος υπολοίπου σε τρίγωνο αποτελείται από την αναζήτηση $\phi_K \in Y_K$ τέτοιου ώστε,

$$B_K(\phi_K, v) = \int_K r v dx + \sum_{E \in \mathcal{E}(K)} \int_E R_E v dS \quad \forall v \in Y_K. \quad (5.4.1)$$

Ορίζουμε τις πλευρικές συναρτήσεις *bubble* σε κάθε πλευρά του τριγώνου, οι οποίες είναι μονάδα στην αντίστοιχη πλευρά και μηδέν στις υπόλοιπες.

$$\chi_{E_i} = 4\lambda_i^K \lambda_{i+1}^K, \quad i = 1, 2, 3, \quad (5.4.2)$$

με $\lambda_4^K = \lambda_1^K$. Αν $v = \chi_{E_i}$, $i = 1, 2, 3$, με $c = 0$, αναζητάμε $\phi_K \in Y_K$ τέτοιο ώστε,

$$\int_K \nabla \phi_K \cdot \nabla \chi_{E_i} dx = \int_K f \chi_{E_i} dx + \int_{E_i} R_{E_i} \chi_{E_i} dS, \quad i = 1, 2, 3. \quad (5.4.3)$$

Αφού, $\phi_K \in Y_K$ τότε μπορεί να γραφεί σαν γραμμικός συνδυασμός των συναρτήσεων βάσης του Y_K , εν προκειμένω,

$$\phi_K = \sum_{j=1}^3 \hat{\phi}_j \chi_{E_j}. \quad (5.4.4)$$

Αντικαθιστώντας την (5.4.4) στην (5.4.3), λαμβάνουμε,

$$\sum_{j=1}^3 \left(\int_K \nabla \chi_{E_j} \cdot \nabla \chi_{E_i} dx \right) \hat{\phi}_j = \int_K f \chi_{E_i} dx + \int_{E_i} R_{E_i} \chi_{E_i} dS, \quad i = 1, 2, 3. \quad (5.4.5)$$

Θα πρέπει, λοιπόν να κατασκευάσουμε τον πίνακα $A = [\alpha_{ij}]_{i,j=1,2,3}$ με κάθε στοιχείο του πίνακα να ορίζεται,

$$\alpha_{ij} = \int_K \nabla \chi_{E_j} \cdot \nabla \chi_{E_i} dx, \quad (5.4.6)$$

με τον πίνακα A να είναι συμμετρικά και θετικά ορισμένους. Πράγματι, ο πίνακας A εξαρτάται άμεσα από το κάθε τοπικό πίνακα ακαμψίας (3.3.44). Παρατηρούμε ότι,

$$\nabla \chi_{E_i} = 4(\lambda_i^K \nabla \lambda_{i+1}^K + \lambda_{i+1}^K \nabla \lambda_i^K), \quad i = 1, 2, 3. \quad (5.4.7)$$

Τότε, η (5.4.6), γράφεται ισοδύναμα,

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} &= 4 \int_K (\lambda_j^K \lambda_i^K (\nabla \lambda_{j+1}^K \cdot \lambda_{i+1}^K) dx + 4 \int_K \lambda_j^K \lambda_{i+1}^K (\nabla \lambda_{j+1}^K \cdot \lambda_i^K) dx + \\ &+ 4 \int_K \lambda_{j+1}^K \lambda_i^K (\nabla \lambda_j^K \cdot \lambda_{i+1}^K) dx + 4 \int_K \lambda_{j+1}^K \lambda_{i+1}^K (\nabla \lambda_j^K \cdot \lambda_i^K) dx, \quad i, j = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (5.4.8)$$

όπου κάθε $\nabla \lambda_i^K \cdot \nabla \lambda_j^K$, $i, j = 1, 2, 3$, είναι σταθερή σε κάθε τρίγωνο $K \in \mathcal{P}_h$, και μπορεί να υπολογισθεί ως εξής,

$$\nabla \lambda_i^K \cdot \nabla \lambda_j^K = \frac{1}{|K|} \int_K \nabla \lambda_i^K \cdot \nabla \lambda_j^K dx = \frac{1}{|K|} w_{ij}^K, \quad (5.4.9)$$

με w_{ij}^K ο πίνακας ακαμψίας της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων, ο οποίος έχει ήδη υπολογισθεί. Πλέον το μόνο που πρέπει να υπολογισθεί είναι τα ολοκληρώματα της μορφής,

$$\int_K \lambda_i^K \lambda_j^K dx = \begin{cases} \frac{|K|}{6}, & \text{αν } i = j, \\ \frac{|K|}{12}, & \text{αν } i \neq j. \end{cases} \quad (5.4.10)$$

Συνεπώς αφού κάθε w_{ij}^K , $\forall K \in \mathcal{P}_h$ είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος, τότε και επέκταση θα ισχύει και για τον A .

Για το δεξί μέλος της (5.4.5), χρησιμοποιούμε κανόνα αριθμητικής ολοκλήρωσης. Αν η συνάρτηση f είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ ένα, τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα του βαρύκεντρου,

$$\int_K f \chi_{E_i} dx \approx f(b^K) \int_K \chi_{E_i} dx = f(b^K) \frac{|K|}{3}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (5.4.11)$$

Επίσης,

$$\int_{E_i} R_{E_i} \chi_i^K dS = R_{E_i} \int_{E_i} \chi_{E_i} dS = R_{E_i} \frac{2}{3} h_{E_i}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (5.4.12)$$

Λύνοντας τα τρία γραμμικά συστήματα (5.4.5), προσδιορίζουμε τους συντελεστές $\hat{\phi}_j$, $j = 1, 2, 3$. Ο εκτιμητής σε κάθε $K \in \mathcal{P}_h$ σύμφωνα με την (4.4.65), είναι,

$$\eta_K^2 = \|\phi_K\|_K^2 = \int_K \nabla \phi_K \cdot \nabla \phi_K dx, \quad (5.4.13)$$

και κατ' επέκταση γνωρίζοντας πλέον τους συντελεστές $\hat{\phi}_j$, $j = 1, 2, 3$, θα εφαρμόσουμε αριθμητική ολοκλήρωση για να υπολογίσουμε τον (5.4.13). Παρατηρούμε ότι,

$$\int_K \nabla \phi_K \cdot \nabla \phi_K dx = \int_K \left| \frac{\partial \phi_K}{\partial x_1} \right|^2 dx + \int_K \left| \frac{\partial \phi_K}{\partial x_2} \right|^2 dx, \quad (5.4.14)$$

με,

$$\frac{\partial \phi_K}{\partial x_i} = \hat{\phi}_1 \frac{\partial \chi_{E_1}}{\partial x_i} + \hat{\phi}_2 \frac{\partial \chi_{E_2}}{\partial x_i} + \hat{\phi}_3 \frac{\partial \chi_{E_3}}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2. \quad (5.4.15)$$

Κάθε συνάρτηση $\frac{\partial \chi_{E_j}}{\partial x_i}$, $i = 1, 2$, $j = 1, 2, 3$, είναι γνωστή και κατ' επέκταση δύναται να υπολογισθεί ακριβώς κάθε τοπικός εκτιμητής η_K .

5.5 Τεχνική μέσου όρου

Η ιδέα σε αυτόν τον εκτιμητή, όπως έχουμε πει παραπάνω, είναι να προσπαθήσουμε να ομαλοποιήσουμε το ∇u_h , με τέτοιο τρόπο, ώστε να έχουμε καλύτερη προσέγγιση για το ∇u . Σύμφωνα με την (4.5.4), ο ολικός εκτιμητής θα είναι,

$$\eta_Z = \|\nabla u_h - Gu_h\|_{L_2(\Omega)}. \quad (5.5.1)$$

Η (5.5.1), μπορεί να αποσυντεθεί σε συνεισφορές από κάθε τρίγωνο ξεχωριστά, δηλαδή,

$$\eta_Z = \|\nabla u_h - Gu_h\|_{L_2(\Omega)} = \left(\sum_{K \in \mathcal{P}_h} \eta_{K,Z}^2 \right)^{1/2}, \quad (5.5.2)$$

με

$$\eta_{Z,K}^2 = \|\nabla u_h - Gu_h\|_{L_2(K)}^2. \quad (5.5.3)$$

Όπως έχει ήδη ειπωθεί, παρουσιάζουμε την περίπτωση του εκτιμητή για $\Gamma = \Gamma_D$, $\Gamma_N = \emptyset$. Προκειμένου να είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε την (5.5.3), θα πρέπει να προσδιορίσουμε τους συντελεστές Gu_h για κάθε κόμβο του τριγωνισμού. Από την (4.5.11),

$$Gu_h(p_i) = \sum_{K \subset \omega_{p_i}} \frac{|K|}{|\omega_{p_i}|} \nabla u_h|_K, \quad \forall p_i \in \mathcal{V}_h. \quad (5.5.4)$$

Το χωρίο ω_{p_i} , αποτελείται από τα τρίγωνα που έχουν ως κορυφή τον κόμβο p_i . Η (5.5.4), γράφεται ισοδύναμα,

$$Gu_h(p_i) = \sum_{K \ni p_i} \frac{|K|}{|\omega_{p_i}|} \nabla u_h|_K, \quad \forall p_i \in \mathcal{V}_h. \quad (5.5.5)$$

Έστω τρίγωνο $K \in \mathcal{P}_h$, με κορυφές p_1^K, p_2^K, p_3^K με φορά αντίστροφη του ρολογιού. Αν $q_{K,j}$, $j = 1, 2, 3$, είναι οι $Gu_h(p_1^K), Gu_h(p_2^K), Gu_h(p_3^K)$, αντίστοιχα, τότε,

$$\|\nabla u_h - Gu_h\|_{L_2(K)}^2 = \left\| \nabla u_h|_K - \sum_{j=1}^3 q_{K,j} \lambda_j^K \right\|_{L_2(K)}^2 = \left\| \sum_{j=1}^3 (\nabla u_h|_K - q_{K,j}) \lambda_j^K \right\|_{L_2(K)}^2. \quad (5.5.6)$$

Αν $s_{K,j} = \nabla u_h|_K - q_{K,j}$, $j = 1, 2, 3$, τότε,

$$\|\nabla u_h - Gu_h\|_{L_2(K)}^2 = \left\| \sum_{j=1}^3 s_{K,j} \lambda_j^K \right\|_{L_2(K)}^2 = \int_K \left(\sum_{j=1}^3 s_{K,j} \lambda_j^K \right)^2 dx. \quad (5.5.7)$$

Η (5.5.7),

$$\int_K \left(\sum_{j=1}^3 s_{K,j} \lambda_j^K \right)^2 dx = \int_K (s_{K,1} \lambda_1^K + s_{K,2} \lambda_2^K + s_{K,3} \lambda_3^K)^2 dx. \quad (5.5.8)$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα,

$$(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\gamma\alpha, \quad (5.5.9)$$

η (5.5.6),

$$\|\nabla u_h - Gu_h\|_{L_2(K)}^2 = \int_K \sum_{j=1}^3 (s_{K,j} \lambda_j^K)^2 dx + 2 \sum_{i=1}^3 \left(\int_K \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 s_{K,j} \lambda_j^K dx \right). \quad (5.5.10)$$

Για να υπολογίσουμε την (5.5.10), έχοντας υπολογίσει τους $s_{K,j}$, $j = 1, 2, 3$, μένει να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα,

$$\int_K \lambda_i^K \lambda_j^K dx, \quad (5.5.11)$$

στην περίπτωση $i = j$ και $i \neq j$. Σύμφωνα με την (3.3.49),

$$\int_K \lambda_i^K \lambda_j^K dx = \begin{cases} \frac{|K|}{6}, & \text{αν } i = j, \\ \frac{|K|}{12}, & \text{αν } i \neq j. \end{cases} \quad (5.5.12)$$

Οπότε,

$$\|\nabla u_h - Gu_h\|_{L_2(K)}^2 = \frac{|K|}{6} (|s_{K,1}|^2 + |s_{K,2}|^2 + |s_{K,3}|^2 + s_{K,1} \cdot s_{K,2} + s_{K,1} \cdot s_{K,3} + s_{K,2} \cdot s_{K,3}). \quad (5.5.13)$$

5.6 Αριθμητική ολοκλήρωση

Όταν εφαρμόζουμε την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων έχουμε να υπολογίσουμε ολοκληρώματα της μορφής,

$$I = \iint_K F(x, y) dx dy. \quad (5.6.1)$$

Ολοκληρώματα της παραπάνω μορφής καλούμαστε να αντιμετωπίσουμε όταν ερχόμαστε αντιμέτωποι με τους εκ των υστέρων εκτιμητές. Αρχικά θα δούμε τι γίνεται στην μια διάσταση.

Αριθμητική ολοκλήρωση Gauss στο $[-1, 1]$ τάξης N

$$\int_{-1}^1 g(\xi) d\xi \approx \sum_{i=1}^N w_i g(\xi_i), \quad (5.6.2)$$

με ξ_i και w_i να είναι τα σημεία ολοκλήρωσης και τα βάρη, αντίστοιχα. Η αριθμητική ολοκλήρωση *Gauss* που χρησιμοποιεί N σημεία, μπορεί να παρέχει το ακριβές ολοκλήρωμα, αν η $g(\xi)$ είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ $2N - 1$.

1. Αριθμητική ολοκλήρωση Gauss στο $[-1, 1]$ τάξης 1

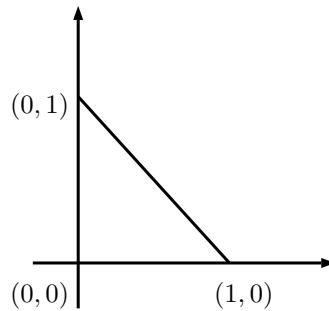
$$\int_{-1}^1 g(\xi) d\xi \approx 2g(0), \quad (5.6.3)$$

2. Αριθμητική ολοκλήρωση Gauss στο $[-1, 1]$ τάξης 2

$$\int_{-1}^1 g(\xi) d\xi \approx g\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right). \quad (5.6.4)$$

Αριθμητική ολοκλήρωση Gauss στο τρίγωνο τάξης N

Θεωρούμε το τρίγωνο αναφοράς $\hat{K} = \{(\hat{x}_1, \hat{x}_2) : 0 \leq \hat{x}_1, \hat{x}_2 \leq 1, \hat{x}_1 + \hat{x}_2 \leq 1\}$,



Σχήμα 5.3: Το τρίγωνο αναφοράς.

Τότε, όπως έχουμε ήδη δει,

$$I = \iint_{\hat{K}} g(\hat{x}_1, \hat{x}_2) d\hat{x}_1 d\hat{x}_2 = \int_0^1 \int_0^{1-\hat{x}_1} g(\hat{x}_1, \hat{x}_2) d\hat{x}_2 d\hat{x}_1. \quad (5.6.5)$$

Στόχος είναι να κατασκευάσουμε κανόνα αριθμητικής ολοκλήρωσης της μορφής,

$$\iint_{\hat{K}} g(\hat{x}_1, \hat{x}_2) d\hat{x}_2 d\hat{x}_1 \approx \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_q} w_i g(\hat{x}_1^i, \hat{x}_2^i), \quad (5.6.6)$$

με N_q ο αριθμός των σημείων ολοκλήρωσης, $(\hat{x}_1^i, \hat{x}_2^i)$ οι συντεταγμένες τους, οι οποίες βρίσκονται μέσα στο τρίγωνο αναφοράς και w_i τα βάρη, τα οποία είναι κανονικοποιημένα σε σχέση με το εμβαδόν του τριγώνου. Θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε όσο το δυνατόν λιγότερα σημεία $(\hat{x}_1^i, \hat{x}_2^i)$, και να έχουμε όσο το δυνατόν μεγαλύτερη ακρίβεια. Τέλος, θέλουμε τα σημεία ολοκλήρωσης να έχουν κάποιο είδος συμμετρίας.

Η βασική ιδέα είναι η ίδια με αυτήν που χρησιμοποιήσαμε στο διάστημα $[-1, 1]$. Θέλουμε να επιλέξουμε σημεία $(\hat{x}_1^i, \hat{x}_2^i)$ και βάρη w_i , για την (5.6.6), τέτοια ώστε η (5.6.6) να είναι όσο το δυνατόν πιο ακριβής. Η αριθμητική ολοκλήρωση Gauss βαθμού N για τα τρίγωνα, ορίζεται από την σχέση (5.6.6), και είναι ακριβής για τυχαία πολυώνυμα βαθμού N ,

$$\iint_{\hat{K}} g(\hat{x}_1, \hat{x}_2) d\hat{x}_2 d\hat{x}_1 \approx \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_q} w_i g(\hat{x}_1^i, \hat{x}_2^i), \quad \forall g(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \in \mathbb{P}_N(\hat{x}_1, \hat{x}_2), \quad (5.6.7)$$

με $\mathbb{P}_N(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$, να είναι ο χώρος των πολυωνύμων βαθμού το πολύ N , στις δυο διαστάσεις,

$$\mathbb{P}_N(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \text{span} \left\{ \hat{x}_1^i \hat{x}_2^j, \quad 0 \leq i, j, i + j \leq N \right\}. \quad (5.6.8)$$

Για παράδειγμα,

$$\mathbb{P}_1(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \text{span} \{1, \hat{x}_1, \hat{x}_2\}, \quad (5.6.9)$$

ή

$$\mathbb{P}_2(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \text{span} \{1, \hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_1^2, \hat{x}_2^2, \hat{x}_1 \hat{x}_2\}. \quad (5.6.10)$$

Παρατηρούμε ότι,

$$\dim \mathbb{P}_N = \frac{(N+1)(N+2)}{2}. \quad (5.6.11)$$

Αριθμητική ολοκλήρωση Gauss στο τρίγωνο τάξης 1

Εδώ $g(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \in \mathbb{P}_1(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$, άρα $g(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = 1, \hat{x}_1$ ή \hat{x}_2 . Θέλουμε να βρούμε τα σημεία $(\hat{x}_1^i, \hat{x}_2^i)$, $i = 1, \dots, N_q$, και w_i , $i = 1, \dots, N_q$, για τα οποία η (5.6.6), ολοκληρώνει ακριβώς πολυώνυμα βαθμού το πολύ ένα.

$$\begin{aligned} g(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = 1 &\Rightarrow \iint_{\hat{K}} d\hat{x}_1 d\hat{x}_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_q} w_i \\ &\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_q} w_i. \end{aligned} \quad (5.6.12)$$

Επίσης,

$$\begin{aligned} g(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \hat{x}_1 &\Rightarrow \iint_{\hat{K}} \hat{x}_1 d\hat{x}_1 d\hat{x}_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_q} w_i \hat{x}_1^i \\ &\Rightarrow \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_q} w_i \hat{x}_1^i. \end{aligned} \quad (5.6.13)$$

Τέλος,

$$\begin{aligned} g(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \hat{x}_2 &\Rightarrow \iint_{\hat{K}} \hat{x}_2 d\hat{x}_1 d\hat{x}_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_q} w_i \hat{x}_2^i \\ &\Rightarrow \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_q} w_i \hat{x}_2^i. \end{aligned} \quad (5.6.14)$$

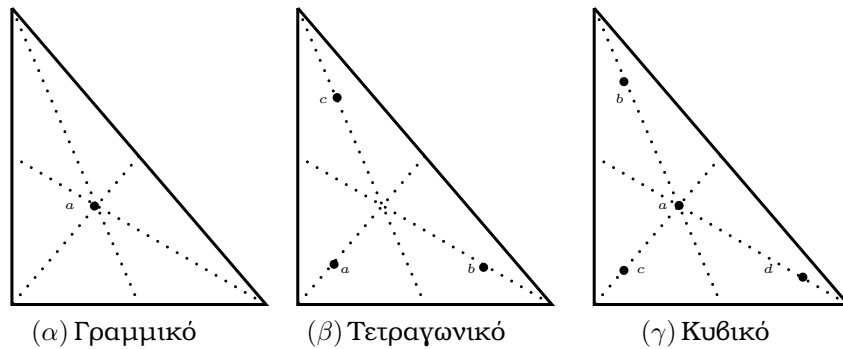
Το πλήθος των σημείων θέλουμε να είναι όσο το δυνατόν μικρότερο. Αν $N_q = 1$, τότε $w_1 = 1$ και $\hat{x}_1 = \hat{x}_2 = \frac{1}{3}$. Τελικά,

$$\iint_{\hat{K}} g(\hat{x}_1, \hat{x}_2) d\hat{x}_1 d\hat{x}_2 = \frac{1}{2} g\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right). \quad (5.6.15)$$

Αριθμητική ολοκλήρωση Gauss στο τρίγωνο τάξης 2

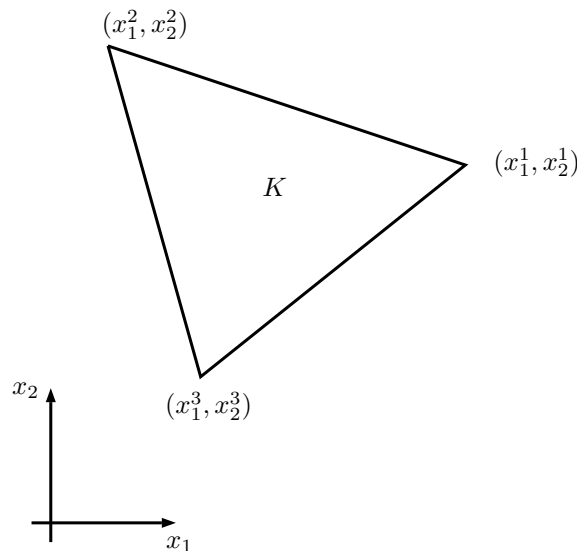
Εδώ $g(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \in \mathbb{P}_2(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$, άρα $g(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = 1, \hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_1^2, \hat{x}_2^2$ ή $\hat{x}_1 \hat{x}_2$. Θέλουμε να βρούμε τα σημεία $(\hat{x}_1^i, \hat{x}_2^i)$, $i = 1, \dots, N_q$, και w_i , $i = 1, \dots, N_q$, για τα οποία η (5.6.6), ολοκληρώνει ακριβώς πολυώνυμα βαθμού το πολύ δυο. Εργαζόμαστε ανάλογα με την προηγούμενη περίπτωση. Εδώ αν επιλέξουμε $N_q = 1$, τότε θα έχουμε έξι αγνώστους, τους $(\hat{x}_1^1, \hat{x}_2^1, \hat{x}_1^2, \hat{x}_2^2, w_1, w_2)$. Όμως σε αυτήν την περίπτωση τα σημεία του κανόνα ολοκλήρωσης δεν θα είναι συμμετρικά, άρα

επιλέγουμε $N_q = 3$, και τότε έχουμε εννιά αγνώστους, όπου σε αυτήν την περίπτωση είναι συμμετρικά τα σημεία $(\hat{x}_1^i, \hat{x}_2^i)$, $i = 1, 2, 3$. Τέλος η επιλογή αυτών των συμμετρικών σημείων δεν είναι αναγκαίο να είναι μοναδική.



Σχήμα 5.4: Τα σημεία ολοκλήρωσης ανάλογα με τον βαθμό του πολωνύμου.

Στην πραγματικότητα τα ολοκληρώματα που θα αντιμετωπίσουμε συνήθως δεν θα αφορούν το τρίγωνο αναφοράς, αλλά ένα τυχαίο τρίγωνο στον τριγωνισμό. Έστω το παρακάτω τυχαίο τρίγωνο.



Σχήμα 5.5: Τυχαίο τρίγωνο K .

Θέλουμε να υπολογίσουμε το,

$$I = \iint_K F(x_1, x_2) dx_1 dx_2, \quad (5.6.16)$$

για μια δοσμένη συνάρτηση $F(x_1, x_2)$. Η ιδέα για τον υπολογισμό του (5.6.16) είναι να απεικονίσουμε το τρίγωνο K , στο τρίγωνο αναφοράς \hat{K} , στο οποίο μπορούμε εύκολα να εφαρμόσουμε αριθμητική ολοκλήρωση. Ορίζουμε την απεικόνιση F_K , για την οποία ισχύει ότι (3.3.29),

$$x = F_K(\hat{x}) = B_K \hat{x} + c_K. \quad (5.6.17)$$

Τότε όπως έχουμε ήδη διαπιστώσει,

$$\iint_K F(x) dx = \iint_{\hat{K}} F(F_K(\hat{x})) |\det B_K| d\hat{x}, \quad (5.6.18)$$

με $|\det B_K| = 2|K|$, όπου $|K|$ το εμβαδόν του K . Οπότε,

$$\iint_K F(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \approx |K| \sum_{i=1}^{N_q} w_i F(F_K(\hat{x}^i)), \quad (5.6.19)$$

με $\hat{x}^i = (\hat{x}_1^i, \hat{x}_2^i)$, $i = 1, \dots, N_q$, τα σημεία του κανόνα αριθμητικής ολοκλήρωσης στο τρίγωνο αναφοράς.

5.6.1 Σφάλματα L_2 και H^1

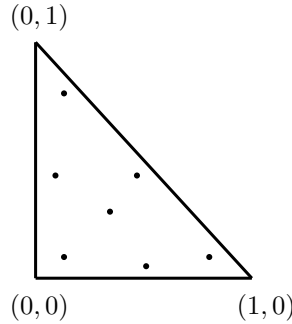
Στόχος είναι να υπολογισθούν τα παρακάτω ολοκληρώματα,

$$\|u - u_h\|_{L_2(K)} = \left(\int_K |u_h - u|^2 dx \right)^{1/2}, \quad (5.6.20)$$

και

$$\|u - u_h\|_{H^1(K)} = \left(\int_K (|\nabla u - \nabla u_h|^2 + |u - u_h|^2) dx \right)^{1/2}, \quad (5.6.21)$$

με u_h να είναι η λύση των πεπερασμένων στοιχείων στον τριγωνισμό \mathcal{P}_h , και u η ακριβής λύση του προβλήματος. Προκειμένου να υπολογίσουμε τα (5.6.20), (5.6.21) θα εφαρμόσουμε αριθμητική ολοκλήρωση επτά σημείων τάξης πέντε στο τρίγωνο $K \in \mathcal{P}_h$. Ο κανόνας αριθμητικής ολοκλήρωσης που θα κατασκευάσουμε θα ολοκληρώνει ακριβώς πολυώνυμα βαθμού το πολύ πέντε. Για να βρούμε τα επτά σημεία και βάρη $(\hat{x}_1^i, \hat{x}_2^i)$, w_i , $i = 1, \dots, N_q = 7$, εργαζόμαστε ανάλογα με την (5.6.15), τότε τα σημεία παρουσιάζονται στο παρακάτω γράφημα.



Σχήμα 5.6: Τα σημεία του κανόνα αριθμητικής ολοκλήρωσης τάξης 5.

| i | \hat{x}_1^i | \hat{x}_2^i | w_i |
|-----|---------------|---------------|-------|
| 1 | 0.333 | 0.333 | 0.225 |
| 2 | 0.470 | 0.470 | 0.132 |
| 3 | 0.470 | 0.059 | 0.132 |
| 4 | 0.059 | 0.470 | 0.132 |
| 5 | 0.101 | 0.101 | 0.125 |
| 6 | 0.101 | 0.797 | 0.125 |
| 7 | 0.797 | 0.101 | 0.125 |

Πίνακας 5.1: Σημεία και βάρη κανόνα αριθμητικής ολοκλήρωσης.

Σύμφωνα με την (5.6.19),

$$\iint_K u(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \approx |K| \sum_{i=1}^{N_q} w_i u(\underbrace{F_K(\hat{x}_1^i, \hat{x}_2^i)}_{:=(x_1^i, x_2^i)}). \quad (5.6.22)$$

Μέχρι στιγμής γνωρίζουμε τα σημεία $(\hat{x}_1^i, \hat{x}_2^i)$, $i = 1, \dots, 7$, τα οποία είναι εσωτερικά σημεία του τριγώνου αναφοράς. Σύμφωνα με την (3.3.30) η (3.3.29), μπορεί να γραφεί ισοδύναμα,¹

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_1^2 - x_1^1 & x_1^3 - x_1^1 \\ x_2^2 - x_2^1 & x_2^3 - x_2^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{bmatrix} (1 - \hat{x}_1 - \hat{x}_2) + \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{bmatrix} \hat{x}_1 + \begin{bmatrix} x_1^3 \\ x_2^3 \end{bmatrix} \hat{x}_2 \\ &= \begin{bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{bmatrix} \hat{\lambda}_1 + \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{bmatrix} \hat{\lambda}_2 + \begin{bmatrix} x_1^3 \\ x_2^3 \end{bmatrix} \hat{\lambda}_3, \end{aligned} \quad (5.6.23)$$

δηλαδή κάθε σημείο του φυσικού στοιχείου μπορεί να γραφεί σαν γραμμικός συνδυασμός των συναρτήσεων βάσης του τριγώνου αναφοράς. Θεωρούμε τις,

$$\begin{cases} \hat{\lambda}_1(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = 1 - \hat{x}_1 - \hat{x}_2, \\ \hat{\lambda}_2(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \hat{x}_1, \\ \hat{\lambda}_3(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = \hat{x}_2. \end{cases} \quad (5.6.24)$$

τις τοπικές συναρτήσεις βάσης στο τρίγωνο αναφοράς. Τότε,

$$\begin{cases} x_1^i = x_1^1 \hat{\lambda}_1(\hat{x}_1^i, \hat{x}_2^i) + x_1^2 \hat{\lambda}_2(\hat{x}_1^i, \hat{x}_2^i) + x_1^3 \hat{\lambda}_3(\hat{x}_1^i, \hat{x}_2^i), \\ x_2^i = x_2^1 \hat{\lambda}_1(\hat{x}_1^i, \hat{x}_2^i) + x_2^2 \hat{\lambda}_2(\hat{x}_1^i, \hat{x}_2^i) + x_2^3 \hat{\lambda}_3(\hat{x}_1^i, \hat{x}_2^i), \end{cases} \quad i = 1, \dots, N_q. \quad (5.6.25)$$

Έχοντας προσδιορίσει τα (x_1^i, x_2^i) , $i = 1, \dots, N_q$, το ολοκλήρωμα (5.6.20) υπολογίζεται ως,

$$\|u - u_h\|_{L_2(K)}^2 \approx |K| \sum_{i=1}^{N_q} w_i |u(x_1^i, x_2^i) - u_h(x_1^i, x_2^i)|^2, \quad (5.6.26)$$

με τον υπολογισμό της u_h στα σημεία ολοκλήρωσης να είναι,

$$u_h(x_1^i, x_2^i) = u_1 \lambda_1(x_1^i, x_2^i) + u_2 \lambda_2(x_1^i, x_2^i) + u_3 \lambda_3(x_1^i, x_2^i). \quad (5.6.27)$$

Η (5.6.27), προκύπτει από το γεγονός ότι η λύση των γραμμικών πεπερασμένων στοιχείων μπορεί να γραφεί στο τρίγωνο K , σαν γραμμικός συνδυασμός των συναρτήσεων βάσης. Σύμφωνα με την (3.3.33), η (5.6.27) γράφεται ισοδύναμα²,

$$u_h(x_1^i, x_2^i) = u_1 \hat{\lambda}_1(\hat{x}_1^i, \hat{x}_2^i) + u_2 \hat{\lambda}_2(\hat{x}_1^i, \hat{x}_2^i) + u_3 \hat{\lambda}_3(\hat{x}_1^i, \hat{x}_2^i). \quad (5.6.28)$$

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος (5.6.21), παρατηρούμε ότι,

$$\|u - u_h\|_{H^1(K)}^2 = \|u - u_h\|_{L_2(K)}^2 + \|\nabla u - \nabla u_h\|_{L_2(K)}^2, \quad (5.6.29)$$

απομένει να υπολογίσουμε τα ολοκληρώματα,

$$\|\nabla u - \nabla u_h\|_{L_2(K)}^2 = \int_K \left| \frac{\partial u}{\partial x_1} - \frac{\partial u_h}{\partial x_1} \right|^2 dx + \int_K \left| \frac{\partial u}{\partial x_2} - \frac{\partial u_h}{\partial x_2} \right|^2 dx. \quad (5.6.30)$$

Η κλίση $\nabla u_h = \left(\frac{\partial u_h}{\partial x_1}, \frac{\partial u_h}{\partial x_2} \right)$ είναι σταθερή στο $K \in \mathcal{P}_h$ και μπορούμε να την υπολογίσουμε από την (5.2.12). Ανάλογα με την (5.6.26), υπολογίζονται και τα ολοκληρώματα της (5.6.30).

¹ Συμβολίζουμε γενικά κάθε σημείο που ανήκει στο φυσικό τρίγωνο ως (x_1, x_2) .

² u_i , $i = 1, 2, 3$ είναι η τιμή της u_h στις κορυφές του $K \in \mathcal{P}_h$.

5.7 Προσαρμοζόμενος τριγωνισμός

Σε αυτό το σημείο έχουμε ορίσει διάφορες στρατηγικές για το πως θα αποφασίζουμε ποια τρίγωνα (ή πλευρές) του τριγωνισμού θα πρέπει να εκλεπτύνουμε. Ορίζουμε σαν *μαρκαρισμένα τρίγωνα*, τα τρίγωνα τα οποία σύμφωνα με τον εκτιμητή θα πρέπει να εκλεπτυνθούν, ως *μαρκαρισμένες πλευρές*, τις πλευρές των μαρκαρισμένων τριγώνων και ως *πλευρά αναφοράς*, την μέγιστη πλευρά του τριγώνου.

Έχοντας, λοιπόν, έναν τέτοιο εκτιμητή, θα ορίσουμε δυο επαναληπτικές διαδικασίες οι οποίες από τον υπάρχοντα τριγωνισμό \mathcal{P}^i θα κατασκευάζουν την \mathcal{P}^{i+1} . Στόχος είναι να βρούμε έναν πιο λεπτό τριγωνισμό από τον ήδη υπάρχοντα, όπου,

1. όλα τα μαρκαρισμένα τρίγωνα θα εκλεπτυνθούν, σε τουλάχιστον δυο τρίγωνα,
2. όλες οι μαρκαρισμένες πλευρές θα εκλεπτυνθούν, σε τουλάχιστον δυο κομμάτια,
3. ο τριγωνισμός δεν θα παράγει τρίγωνα τα οποία δεν πληρούν τις απαραίτητες προϋποθέσεις, δηλαδή δεν θα πρέπει τα τρίγωνα που παράγονται να έχουν μεγάλες οξείες γωνίες.

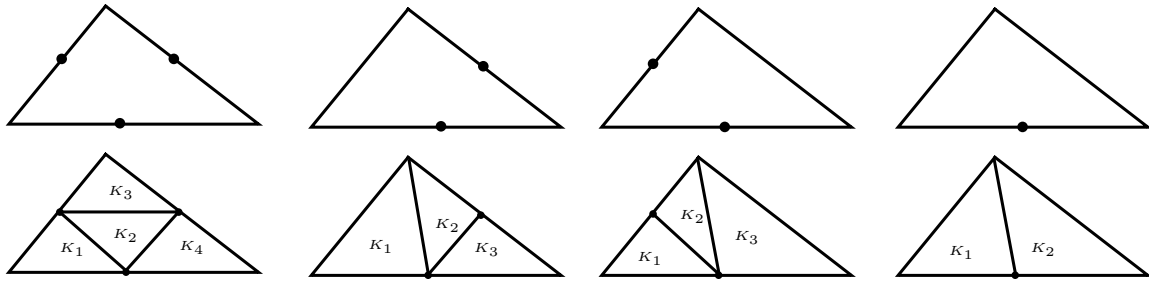
Red - Blue - Green Refinement

Έστω \mathcal{P}^0 ο αρχικός τριγωνισμός και η \mathcal{P}^l , έχει προέλθει από την μέθοδο *Red-Blue-Green*. Υποθέσουμε ότι υπάρχουν τρίγωνα της \mathcal{P}^l , τα οποία χρειάζονται περαιτέρω εκλέπτυνση, και μέσω της εκλέπτυνσης τους θα κατασκευασθεί η \mathcal{P}^{l+1} . Αντί να μαρκάρουμε τρίγωνα, μαρκάρουμε πλευρές. Δηλαδή, αν μαρκαριστεί ένα τρίγωνο, τότε αυτομάτως μαρκάρουμε όλες τις πλευρές του. Πιο συγκεκριμένα:

1. Αν ένα τρίγωνο $K \in \mathcal{P}^l$ μαρκαριστεί για εκλέπτυνση, τότε μαρκάρουμε όλες τις πλευρές του για εκλέπτυνση.
2. Αν μια πλευρά του $K \in \mathcal{P}^l$, μαρκαριστεί για εκλέπτυνση, τότε θα πρέπει τουλάχιστον να μαρκαριστεί και η πλευρά αναφοράς του $K \in \mathcal{P}^l$.

Έχοντας μαρκάρει τις πλευρές της \mathcal{P}^l , η διαδικασία προχωράει επαναληπτικά, ως ότου δεν υπάρχουν κόμβοι στα εσωτερικά των πλευρών, ως εξής:

1. Το μέσον μίας μαρκαρισμένης πλευράς θα γίνει καινούργιος κόμβος.
2. Αν όλες οι πλευρές του $K \in \mathcal{P}^l$, έχουν μαρκαριστεί, τότε το τρίγωνο $K \in \mathcal{P}^l$, χωρίζεται σε τέσσερα τρίγωνα, *κόκκινη εκλέπτυνση*.
3. Αν δύο πλευρές του $K \in \mathcal{P}^l$ έχουν μαρκαριστεί, τότε το $K \in \mathcal{P}^l$ χωρίζεται σε τρία τρίγωνα, *μπλε εκλέπτυνση*. Δηλαδή, αν μια από τις δύο μαρκαρισμένες πλευρές είναι και η πλευρά αναφοράς, τότε ο κόμβος που δημιουργείται στον μέσον της, θα ενωθεί με την απέναντι κορυφή και έπειτα ο δεύτερος κόμβος που βρίσκεται στην άλλη μαρκαρισμένη πλευρά, θα ενωθεί με τον καινούργιο κόμβος της πλευράς αναφοράς.
4. Αν μόνο μια πλευρά έχει μαρκαριστεί, τότε κατασκευάζουμε νέο κόμβο στο μέσο της, και τον συνδέουμε με την απέναντι κορυφή, *πράσινη εκλέπτυνση*.

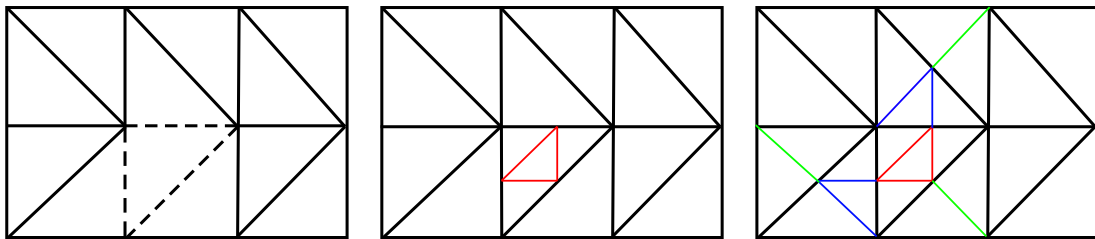


Σχήμα 5.7: Αριστερά το τρίγωνο χωρίζεται σε τέσσερα όμοια τρίγωνα, στην μέση έχουμε την μπλε εκλέπτυνση και δεξιά η πράσινη εκλέπτυνση.

Αλγόριθμος 1 (Εκλέπτυνση Red-Blue-Green) Έστω $\mathcal{M}_k \subset \mathcal{P}^{(k)}$ το σύνολο με τα μαρκαρισμένα τρίγωνα για εκλέπτυνση.

1. Μαρκάρει όλες τις πλευρές $E \in \mathcal{E}^{(k)}$ οι οποίες είναι ταυτόχρονα πλευρές κάποιου ή κάποιων εκ των $K \in \mathcal{M}_k$.
2. Για κάθε $K \in \mathcal{E}^{(k)}$, με τουλάχιστον μια μαρκαρισμένη πλευρά $E \in \mathcal{E}(K)$, η οποία δεν είναι η μέγιστη, μαρκάρει την μέγιστη πλευρά του σε μήκος.
3. Εκλεπτύνει κάθε $K \in \mathcal{P}^{(k)}$ το οποίο έχει τουλάχιστον μια πλευρά μαρκαρισμένη, είτε με κόκκινη εκλέπτυνση, είτε με μπλε εκλέπτυνση είτε με πράσινη εκλέπτυνση, ανάλογα με τους κανόνες που έχουν προαναφερθεί παραπάνω.

Στο παρακάτω σχήμα κάθε ένα από τα τρίγωνα του τριγωνισμού, η διαγώνιος του κάθε μικρού τετραγώνου, θα είναι πάντα η μεγαλύτερη σε μήκος πλευρά του εκάστοτε τριγώνου.



Σχήμα 5.8: Εκλέπτυνση του τριγώνου με τις διακεκομμένες γραμμές με την Red-Blue-Green Refinement.

Newest Vertex Bisection

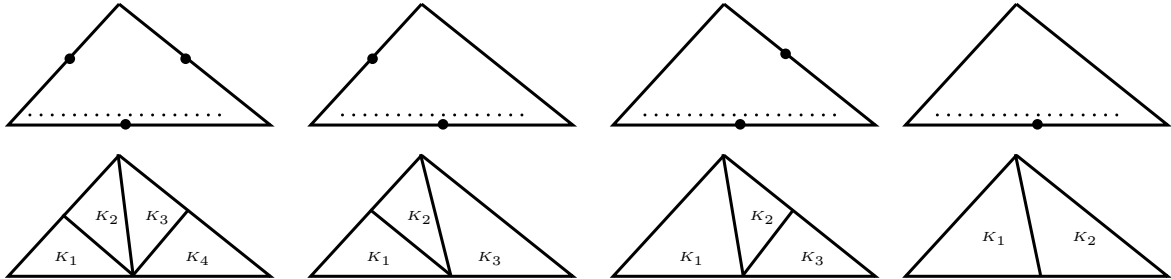
Έστω \mathcal{P}^0 ο αρχικός τριγωνισμός και η \mathcal{P}^l , έχει προέλθει από την μέθοδο Newest Vertex Bisection. Όμοια με πριν, αντί να μαρκάρουμε τρίγωνα, μαρκάρουμε πλευρές. Η γενική ιδέα της μεθόδου είναι,

αν μια πλευρά ενός τριγώνου θα πρέπει να διχοτομηθεί, τότε θα πρέπει να διχοτομηθεί και η πλευρά αναφοράς.

Δεδομένης, λοιπόν της \mathcal{P}^l , και των πλευρών που θα πρέπει να διχοτομηθούν, για να κατασκευασθεί η \mathcal{P}^{l+1} , η παρακάτω διαδικασία θα προχωράει επαναληπτικά, έως ότου δεν υπάρχουν κόμβοι στα εσωτερικά των πλευρών, ως εξής:

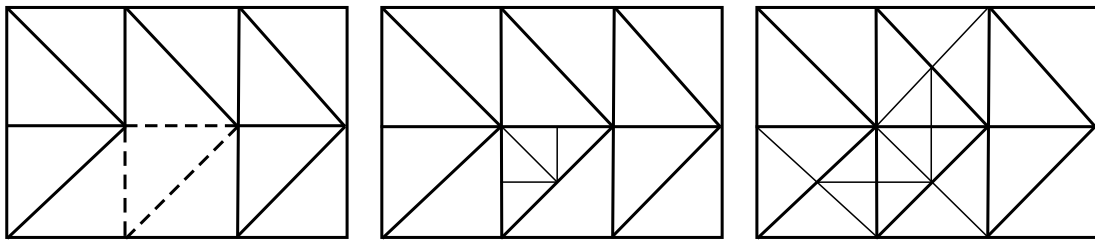
1. Αν όλες οι πλευρές του $K \in \mathcal{P}^l$ έχουν μαρκαριστεί, τότε αρχικά δημιουργείται νέος κόμβος στο μέσον της πλευράς αναφοράς και έπειτα συνδέεται με την απέναντι κορυφή. Στην συνέχεια δημιουργούνται δυο νέοι κόμβοι στα μέσα των υπολοίπων πλευρών και έπειτα οι κόμβοι αυτοί, συνδέονται με τον κόμβο στην πλευρά αναφοράς.

2. Αν δυο πλευρές του $K \in \mathcal{P}^l$ έχουν μαρκαριστεί, τότε, δημιουργείται νέος κόμβος στο μέσον της πλευράς αναφοράς ο οποίος συνδέεται με την απέναντι κορυφή. Έπειτα, στον μέσον της δεύτερης πλευράς ο κόμβος που δημιουργείται ενώνεται με τον νέο κόμβο της πλευράς αναφοράς. Στην πραγματικότητα, εφαρμόζουμε μπλε εκλέπτυνση.
3. Αν μόνο μία πλευρά έχει μαρκαριστεί, τότε εφαρμόζουμε πράσινη εκλέπτυνση.



Σχήμα 5.9: Η πλευρά αναφοράς συμβολίζεται με διπλή γραμμή. Αριστερά, η περίπτωση με όλες τις πλευρές μαρκαρισμένες, στην μέση η μπλε εκλέπτυνση και δεξιά η πράσινη εκλέπτυνση.

Πάλι, στο παρακάτω σχήμα κάθε ένα από τα τρίγωνα του τριγωνισμού, η διαγώνιος του κάθε μικρού τετραγώνου, θα είναι πάντα η μεγαλύτερη σε μήκος πλευρά του εκάστοτε τριγώνου.



Σχήμα 5.10: Εκλέπτυνση του τριγώνου με τις διακεκομμένες γραμμές, με την *Newest Vertex Bisection*.

5.7.1 Προσαρμοζόμενος αλγόριθμος

Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων είναι ένα πάρα πολύ καλό εργαλείο για την αριθμητική επίλυση συνοριακών προβλημάτων. Ο προσαρμοζόμενος τριγωνισμός επιτρέπει συχνά μια πολύ πιο αποδοτική χρήση της μεθόδου. Ένας πολύ δημοφιλής βρόγχος του προσαρμοζόμενου τριγωνισμού είναι,

$$SOLVE \rightarrow ESTIMATE \rightarrow MARK \rightarrow REFINE, \quad (5.7.1)$$

δηλαδή, αρχικά *επιλύουμε* το συνοριακό πρόβλημα με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, *υπολογίζουμε* τον εκ των υστέρων εκτιμητή του πραγματικού σφάλματος, *μαρκάρουμε* τα τρίγωνα τα οποία θα πρέπει να εκλεπυνθούν, και *εκλεπτύνουμε* τον υπάρχοντα τριγωνισμό.

Έχοντας στην κατοχή μας διάφορους εκτιμητές για το σφάλμα σε κάθε τρίγωνο $K \in \mathcal{P}_h$, τέτοιοι ώστε,

$$\eta_K \approx \|u - u_h\|, \quad (5.7.2)$$

αναζητάμε κριτήριο με το οποίο θα αποφασίζουμε αν το η_K είναι "μεγάλο" και ως εκ τούτου το τρίγωνο $K \in \mathcal{P}_h$, χρειάζεται εκλέπτυνση. Ένας τυπικός αλγόριθμος έχει δεδομένη μια εκ των προτέρων τιμή $L > 0$, και μαρκάρει τα τρίγωνα αν,

$$\text{μαρκάρει } K \in \mathcal{P}_h \text{ αν } L \leq \eta_K. \quad (5.7.3)$$

Για αυτόν τον λόγο πολλές φορές ο η_K , αναφέρεται και ως δείκτης εκλέπτυνσης. Συνεπώς αναζητάμε ένα σύνολο από τρίγωνα $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}$, τέτοιο ώστε,

$$\mathcal{M} := \{K \in \mathcal{P}_h : L \leq \eta_K\}. \quad (5.7.4)$$

Δυο πολύ γνωστά κριτήρια της παραπάνω μορφής, είναι το *κριτήριο μεγίστου* και το *κριτήριο Dörfler*.

Κριτήριο Dörfler

Αναζητάμε το ελάχιστο σύνολο $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}$, για το οποίο ισχύει ότι,

$$\theta \sum_{K \in \mathcal{P}_h} \eta_K^2 \leq \sum_{K \in \mathcal{M}} \eta_K^2, \quad \theta \in (0, 1). \quad (5.7.5)$$

Η \mathcal{P}' κατασκευάζεται από την \mathcal{P} , εκλεπτύνοντας αρχικά τα τρίγωνα που περιέχει το σύνολο \mathcal{M} , και έπειτα οποιαδήποτε άλλα τρίγωνα τα οποία κρίνει αναγκαίο ο αλγόριθμος εκλέπτυνσης, για τον τριγωνισμό. Στην πραγματικότητα, μετά το πέρας της εκλέπτυνσης των $K \in \mathcal{M}$, ο αλγόριθμος εκλέπτυνσης, εκλεπτύνει και τα τρίγωνα που περιέχουν κόμβους στα εσωτερικά των πλευρών. Αν $\theta \rightarrow 0$, τότε το κριτήριο (5.7.2) οδηγεί σε πολύ υψηλού βαθμού προσαρμοζόμενες εκλεπτύνσεις, ενώ αν $\theta \rightarrow 1$ οδηγεί σε σχεδόν ομοιόμορφη εκλέπτυνση.

Κριτήριο Μεγίστου

Αναζητάμε το ελάχιστο σύνολο $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}$, τέτοιο ώστε,

$$\eta_K \geq \theta \max_{K' \in \mathcal{P}} \eta_{K'}, \quad \theta \in (0, 1). \quad (5.7.6)$$

Το κριτήριο του μεγίστου είναι υπολογιστικά φθηνότερο από το κριτήριο Dörfler. Αν $\theta \rightarrow 1$, τότε λίγα τρίγωνα θα μαρκαριστούν για εκλέπτυνση, ενώ για $\theta \rightarrow 0$ οδηγεί σε ομοιόμορφη εκλέπτυνση της \mathcal{P}_h . Συχνά μια κοινή επιλογή και για τα δυο κριτήρια είναι $\theta \approx 0.5$.

Ο παρακάτω προσαρμοζόμενος αλγόριθμος παράγει μια ακολουθία τριγωνισμών $\mathcal{P}_h^{(0)}, \mathcal{P}_h^{(1)}, \mathcal{P}_h^{(2)}, \dots$ μαρκάροντας και εκλεπτύνοντας τα τρίγωνα ανάλογα με τα κριτήρια (5.7.5), (5.7.6).

Αλγόριθμος 2 (Προσαρμοζόμενος αλγόριθμος A_θ) Δοσμένου αρχικού τριγωνισμού $\mathcal{P}^{(0)}$, ο οποίος πληροί την συνθήκη κανονικότητας (βλ. Ορισμός 3.2) και παραμέτρου $0 \leq \theta \leq 1$, ορίζουμε $k := 0$. Επαναλαμβάνουμε τα επόμενα στάδια έως ότου ο τριγωνισμός $\mathcal{P}^{(k)}$ ξεπεράσει ένα προκαθορισμένο πλήθος τριγώνων N ή μια ένα το συνολικό σφάλμα ξεπεράσει μια εκ των προτέρων γνωστή ανοχή η_{tol} .

1. Υπολογίζουμε την λύση των πεπερασμένων στοιχείων $u_h^{(k)} \in X^{(k)}$, στον τριγωνισμό $\mathcal{P}^{(k)}$.
2. Υπολογίζουμε τον εκ των υστέρων εκτιμητή $\eta_K^{(k)}, \forall K \in \mathcal{P}^{(k)}$.
3. Μαρκάρουμε τα τρίγωνα για τα οποία ισχύει η (5.7.5) αν χρησιμοποιούμε το κριτήριο Dörfler, ή την (5.7.6) αν χρησιμοποιούμε το κριτήριο μεγίστου, και τα εκχωρούμε στο σύνολο $\mathcal{M}^{(k)}$.
4. Για κάθε $K \in \mathcal{M}^{(k)}$, εφαρμόζουμε είτε το κριτήριο Red-Blue-Green Refinement ή το Newest Vertex Bisection.

Συνοπτικά, ξεκινώντας από έναν τριγωνισμό $\mathcal{P}^{(0)}$ ο οποίος πληροί την συνθήκη κανονικότητας (βλ. Ορισμός 3.2), για να πάρουμε τον τριγωνισμό $\mathcal{P}^{(k+1)}$ από τον $\mathcal{P}^{(k)}$ θα επιλύσουμε το ελλειπτικό πρόβλημα με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων στον τριγωνισμό $\mathcal{P}^{(k)}$ όπου θα συμβολίζουμε με $u^{(k)}$ την αντίστοιχη λύση. Το σφάλμα θα υπολογισθεί χρησιμοποιώντας την $u^{(k)}$ και με βάση αυτό το σφάλμα θα προκύψει, με κάποιο κριτήριο όπως είδαμε παραπάνω, ένα σύνολο από τρίγωνα τα οποία θα χρειασθεί να εκλεπτυνθούν, προκειμένου χρησιμοποιώντας κατάλληλο αλγόριθμο εκλέπτυνσης να προκύψει ο τριγωνισμός $\mathcal{P}^{(k+1)}$, ο οποίος θα ικανοποιεί με την σειρά του, την συνθήκη κανονικότητας.

Στην συνέχεια, θα αποδείξουμε την σύγκλιση του αλγορίθμου (5.7.1), δείχνοντας ότι το σφάλμα ανάμεσα σε δυο βήματα $k, k + 1$ του προσαρμοζόμενου αλγορίθμου, ελαττώνεται, δηλαδή ισχύει η παρακάτω ανισότητα,

$$\|u - u^{(k+1)}\|^2 + \alpha\eta^2(u^{(k+1)}, \mathcal{P}^{(k+1)}) \leq \delta \left[\|u - u^{(k)}\|^2 + \alpha\eta^2(u^{(k)}, \mathcal{P}^{(k)}) \right], \quad (5.7.7)$$

με η να είναι ο άμεσος εκτιμητής υπολοίπου (4.2.52). Προκειμένου να αποδείξουμε την (5.7.7) θα παρουσιάσουμε αρχικά ένα βοηθητικό Λήμμα.

Λήμμα 5.1 Δοσμένου $\theta \in (0, 1)$, έστω $\mathcal{P}^{(k+1)}$ ένας τριγωνισμός που ικανοποιεί την συνθήκη (3.2.23) και έχει προκύψει από την εκλέπτυνση ενός τριγωνισμού που ικανοποιεί την (3.2.23), $\mathcal{P}^{(k)}$, χρησιμοποιώντας το κριτήριο Dörfler (5.7.5). Έστω $u^{(k+1)}, u^{(k)}$ να είναι οι λύσεις των πεπερασμένων στοιχείων στους υπόχωρους πεπερασμένης διάστασης $X^{(k+1)}$ και $X^{(k)}$, αντίστοιχα. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα.

1. Η ιδιότητα της ορθογωνιότητας των προσεγγίσεων, σε δυο διαδοχικά βήματα του προσαρμοζόμενου αλγορίθμου.

$$\|u - u^{(k+1)}\|^2 = \|u - u^{(k)}\|^2 - \|u^{(k)} - u^{(k+1)}\|^2. \quad (5.7.8)$$

2. Άνω φράγμα για τον εκ των υστέρων εκτιμητή. Υπάρχει σταθερά C η οποία εξαρτάται μόνο από την συνθήκη κανονικότητας (βλ. Ορισμός 3.2) του τριγωνισμού $\mathcal{P}^{(k)}$, τέτοια ώστε,

$$\|u - u^{(k)}\|^2 \leq C\eta_k^2(u^{(k)}, \mathcal{P}^{(k)}). \quad (5.7.9)$$

3. Συνέχεια του εκ των υστέρων εκτιμητή. Για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει σταθερά $C_\epsilon = C(\epsilon)$ τέτοια ώστε,

$$\eta^2(u^{(k+1)}, \mathcal{P}^{(k+1)}) \leq (1 + \epsilon)\eta^2(u^{(k)}, \mathcal{P}^{(k+1)}) + C_\epsilon \|u^{(k+1)} - u^{(k)}\|^2. \quad (5.7.10)$$

4. Συστολή του εκ των υστέρων εκτιμητή,

$$\eta^2(u^{(k)}, \mathcal{P}^{(k+1)}) \leq \rho\eta^2(u^{(k)}, \mathcal{P}^{(k)}), \quad 0 < \rho < 1, \quad (5.7.11)$$

όπου το ρ εξαρτάται μόνο από την συνθήκη κανονικότητας (βλ. Ορισμός 3.2) του τριγωνισμού $\mathcal{P}^{(k)}$ και την παράμετρο θ η οποία χρησιμοποιείται στο κριτήριο Dörfler (5.7.5).

Απόδειξη Cascón et al [9] □

Πλέον είμαστε σε θέση να διατυπώσουμε και να αποδείξουμε το βασικό Θεώρημα, Cascón et al [9].

Θεώρημα 5.2 Δοσμένου $\theta \in (0, 1)$ έστω $\mathcal{P}^{(k+1)}$ τριγωνισμός που ικανοποιεί την συνθήκη κανονικότητας (βλ. Ορισμός 3.2) και έχει προκύψει από τον τριγωνισμό $\mathcal{P}^{(k)}$, ο οποίος ικανοποιεί την συνθήκη κανονικότητας, χρησιμοποιώντας το κριτήριο Dörfler (5.7.5). Έστω $u^{(k+1)}, u^{(k)}$ να είναι οι λύσεις των πεπερασμένων στοιχείων στους υπόχωρους πεπερασμένης διάστασης $X^{(k+1)}$ και $X^{(k)}$, αντίστοιχα. Τότε, υπάρχουν σταθερές $\delta \in (0, 1)$ και α που εξαρτώνται μόνο από το θ και την συνθήκη κανονικότητας του τριγωνισμού $\mathcal{P}^{(k)}$, τέτοιες ώστε,

$$\|u - u_h^{(k+1)}\|^2 + \alpha\eta^2(u^{(k+1)}, \mathcal{P}^{(k+1)}) \leq \delta \left[\|u - u^{(k)}\|^2 + \alpha\eta^2(u^{(k)}, \mathcal{P}^{(k)}) \right]. \quad (5.7.12)$$

Απόδειξη Έστω $\rho \in (0, 1)$ να είναι η σταθερά της (5.7.11), δηλαδή $\rho \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε,

$$\eta^2 \left(u^{(k)}, \mathcal{P}^{(k+1)} \right) \leq \rho \eta^2 \left(u^{(k)}, \mathcal{P}^{(k)} \right). \quad (5.7.13)$$

Μπορούμε να επιλέξουμε $\epsilon \in (0, 1)$ κατάλληλα μικρό, τέτοιο ώστε $\rho(\epsilon+1) < 1$ και έστω $\alpha = C_\epsilon^{-1}$. Τότε,

$$\|u - u_h^{(k+1)}\|^2 + \alpha \eta^2 \left(u^{(k+1)}, \mathcal{P}^{(k+1)} \right) = \|u - u_h^{(k)}\|^2 - \|u^{(k+1)} - u_h^{(k)}\|^2 + \alpha \eta^2 \left(u^{(k+1)}, \mathcal{P}^{(k+1)} \right), \quad (5.7.14)$$

από την (5.7.8). Μπορούμε να γράψουμε τον πρώτο όρο του δεξιού μέλους της (5.7.13) ως,

$$\|u - u_h^{(k)}\|^2 = (1 - \delta) \|u - u_h^{(k)}\|^2 + \delta \|u - u_h^{(k)}\|^2. \quad (5.7.15)$$

Χρησιμοποιούμε την (5.7.11) για τον τελευταίο όρο του δεξιού μέλους της (5.7.14) και τότε,

$$\begin{aligned} & \|u - u_h^{(k+1)}\|^2 + \alpha \eta^2 \left(u^{(k+1)}, \mathcal{P}^{(k+1)} \right) \\ & \leq (1 - \delta) \|u - u_h^{(k)}\|^2 + \delta \|u - u_h^{(k)}\|^2 + \alpha(1 + \epsilon) \eta^2 \left(u^{(k)}, \mathcal{P}^{(k+1)} \right). \end{aligned} \quad (5.7.16)$$

Έπειτα εφαρμόζουμε στην (5.7.16) την (5.7.9), την οποία την πολλαπλασιάζουμε με την θετική ποσότητα $(1 - \delta)$. Τότε,

$$\begin{aligned} & \|u - u_h^{(k+1)}\|^2 + \alpha \eta^2 \left(u^{(k+1)}, \mathcal{P}^{(k+1)} \right) \\ & \leq (1 - \delta) C \eta^2 \left(u^{(k)}, \mathcal{P}^{(k)} \right) + \delta \|u - u_h^{(k)}\|^2 + \alpha \rho(1 + \epsilon) \eta^2 \left(u^{(k)}, \mathcal{P}^{(k+1)} \right) \\ & \leq \delta \left[\|u - u_h^{(k)}\|^2 + \frac{(1 - \delta)C + \alpha \rho(1 + \epsilon)}{\delta} \eta^2 \left(u^{(k)}, \mathcal{P}^{(k)} \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.7.17)$$

$$\leq \delta \left[\|u - u_h^{(k)}\|^2 + \frac{(1 - \delta)C + \alpha \rho(1 + \epsilon)}{\delta} \eta^2 \left(u^{(k)}, \mathcal{P}^{(k)} \right) \right]. \quad (5.7.18)$$

Επιλέγουμε δ τέτοιο ώστε

$$\alpha = \frac{(1 - \delta)C + \alpha \rho(1 + \epsilon)}{\delta}, \quad (5.7.19)$$

και τότε

$$\delta = \frac{C + \alpha \rho(1 + \epsilon)}{C + \alpha}. \quad (5.7.20)$$

Αφού επιλέξαμε $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε $\rho(1 + \epsilon) < 1$ τότε από την (5.7.20) προκύπτει ότι $\delta \in (0, 1)$. \square

Ως άμεσο αποτέλεσμα του Θεωρήματος 5.2, μπορούμε να αποδείξουμε ότι ο προσαρμοζόμενος αλγόριθμος των πεπερασμένων στοιχείων, θα σταματήσει σε *πεπερασμένα βήματα* για μια εκ των προτέρων γνωστή ανοχή (*tolerance*) και η διαδικασία θα συγκλίνει στην προσέγγιση $u^{(J)}$ για τον τριγωνισμό $\mathcal{P}^{(J)}$. Πιο συγκεκριμένα, σύμφωνα με [9] έχουμε το παρακάτω Θεώρημα.

Θεώρημα 5.3 Έστω $u^{(k)}$ η λύση των πεπερασμένων στοιχείων στον τριγωνισμό $\mathcal{P}^{(k)}$, ο οποίος ικανοποιεί την συνθήκη κανονικότητας (βλ. Ορισμός 3.2), στην k -οστή επανάληψη του προσαρμοζόμενου αλγορίθμου. Έστω $\theta \in (0, 1)$ η παράμετρος του κριτηρίου Dörfler (5.7.5). Τότε, υπάρχουν σταθερές $\delta \in (0, 1)$ και α που εξαρτώνται μόνο από την παράμετρο θ και την συνθήκη κανονικότητας του αρχικού τριγωνισμού $\mathcal{P}^{(0)}$, τέτοιες ώστε

$$\|u - u_k\|^2 + \alpha \eta^2 \left(u^{(k)}, \mathcal{P}^{(k)} \right) \leq C_0 \delta^k, \quad (5.7.21)$$

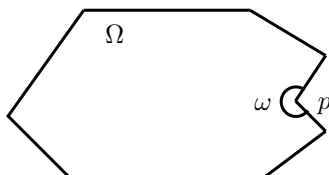
και ο προσαρμοζόμενος αλγόριθμος θα τερματίσει σε πεπερασμένου πλήθους βήματα.

5.8 Μη-κυρτά χωρία

Θεωρούμε το πρόβλημα *Dirichlet* για την εξίσωση του *Poisson*. Δοσμένης μιας συνάρτησης $f \in L_2(\Omega)$, ζητάμε συνάρτηση $u(x) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ τέτοια ώστε,

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{στο } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ u = 0, & \text{στο } \partial\Omega, \end{cases} \quad (5.8.1)$$

με Ω φραγμένο, μη-κυρτό πολυγωνικό χωρίο του \mathbb{R}^2 , με *τουλάχιστον* μια εσωτερική γωνία μεγαλύτερη των 180° (Σχήμα 5.11).



Σχήμα 5.11: Μη-κυρτό χωρίο Ω με μια εσωτερική γωνία μεγαλύτερη των 180° .

Έστω $\omega_1, \dots, \omega_J$ εσωτερικές γωνίες του Ω τέτοιες ώστε $\pi < \omega_j < 2\pi$, $i = 1, \dots, J$ και p_j , $j = 1, \dots, J$, η αντίστοιχη κορυφή. Είναι γνωστό [13] ότι για την μοναδική λύση του (5.8.1), θα ισχύει ότι $u \in H_0^1(\Omega)$. Επίσης η u θα έχει μια αναπαράσταση της μορφής,

$$u = \sum_{j=1}^J \kappa_j s_j + w, \quad w \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \quad (5.8.2)$$

όπου s_j , $j = 1, \dots, J$ είναι ιδιάζουσες συναρτήσεις οι οποίες ορίζονται ως εξής. Έστω οι πολικές συντεταγμένες (r_j, θ_j) στην κορυφή p_j , $j = 1, \dots, J$. Υποθέτουμε ότι η κάθε εσωτερική γωνία ω_j θα κατασκευάζεται από τις πλευρές $\theta_j = 0$ και $\theta_j = \omega_j$. Τότε,

$$s_j(r_j, \theta_j) = \phi_j(r_j) r_j^{\pi/\omega_j} \sin\left(\frac{\pi}{\omega_j} \theta_j\right), \quad j = 1, \dots, J, \quad (5.8.3)$$

όπου ϕ_j , $j = 1, \dots, J$ είναι ομαλές συναρτήσεις, οι οποίες ισούται με ένα σε μια γειτονιά της κορυφής p_j , $j = 1, \dots, J$, και μηδέν μακριά της p_j , $j = 1, \dots, J$. Επιπλέον ισχύει η ακόλουθη εκτίμηση ελλειπτικής ομαλότητας, [6],

$$\|w\|_{H^2(\Omega)} + \sum_{j=1}^J |\kappa_j| \leq C \|f\|_{L_2(\Omega)}, \quad (5.8.4)$$

με την σταθερά C να είναι ανεξάρτητη του τριγωνισμού \mathcal{P}_h . Είναι γνωστό [13] ότι οι ιδιάζουσες συναρτήσεις $s_j \in H^r(\Omega)$ για κάθε $r < 1 + \frac{\pi}{\omega_j}$, $j = 1, \dots, J$ και $s_j \notin H^{1+\pi/\omega_j}(\Omega)$, $j = 1, \dots, J$. Τότε, από (5.8.2) θα έχουμε ότι

$$u \in H^r, \quad \forall r < 1 + \frac{\pi}{\omega}, \quad \omega = \max(\omega_1, \dots, \omega_J). \quad (5.8.5)$$

Θεωρούμε υπόχωρο πεπερασμένης διάστασης $X_h \subset H_0^1(\Omega)$ όπως ορίστηκε στην (3.3.2), τότε η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων για το πρόβλημα (5.8.1) είναι: Ζητείται $u_h \in X_h$ τέτοιο ώστε,

$$\int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v_h \, dx = \int_{\Omega} f v_h \, dx, \quad \forall v_h \in X_h. \quad (5.8.6)$$

Τότε, από την (5.8.5) για κάθε $\epsilon > 0$ θα έχουμε τις εκ των προτέρων εκτιμήσεις για το πραγματικό σφάλμα της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων στην $L_2(\Omega)$ νόρμα και την νόρμα ενέργειας.

$$\|u - u_h\| \leq C_\epsilon h^{\pi/\omega - \epsilon} \|f\|_{L_2(\Omega)}, \quad (5.8.7)$$

$$\|u - u_h\|_{L_2(\Omega)} \leq C_\epsilon h^{2\pi/\omega - \epsilon} \|f\|_{L_2(\Omega)}, \quad (5.8.8)$$

με τις παραπάνω σταθερές να εξαρτώνται από το ϵ .

Όταν $u \in H^{1+\epsilon}(\Omega)$ με $\epsilon \in [0, 1]$ δεν μπορούμε να αναμένουμε ο ρυθμός σύγκλισης της $\|u - u_h\|$ να είναι καλύτερος από h^ϵ αν οι τριγωνισμοί είναι οϊωνεί-ομοιόμορφοι. Για να βελτιώσουμε τον ρυθμό σύγκλισης για μικρό ϵ , θα πρέπει να προσαρμόσουμε κατάλληλα τον τριγωνισμό. Η διάμετρος των τριγώνων στις περιοχές όπου η λύση θα είναι ομαλή μπορεί να μείνει ομοιόμορφα φραγμένη μακριά από το μηδέν, εν αντιθέσει με τις περιοχές όπου η λύση δεν έχει την απαιτούμενη ομαλότητα, όπου η διάμετρος των τριγώνων θα γίνεται οσοδήποτε μικρή. Σε αυτές τις περιπτώσεις, όταν έχουμε προσαρμοζόμενο τριγωνισμό, το μήκος h του τριγωνισμού \mathcal{P}_h , δεν θα είναι καλό μέτρο για την εκτίμηση του ρυθμού σύγκλισης. Τότε, θα χρησιμοποιήσουμε τους βαθμούς ελευθερίας του τριγωνισμού $N = \dim(X_h)$.

Κεφάλαιο 6

Αριθμητικά Αποτελέσματα

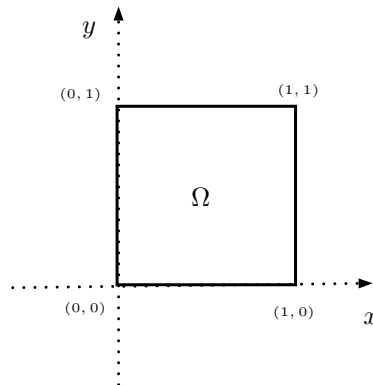
Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε αριθμητικά αποτελέσματα για τους εκ των υστέρων εκτιμητές που παρουσιάστηκαν στο Κεφάλαιο 4.

6.1 Κυρτά χωρία

Θεωρούμε το πρόβλημα *Dirichlet* για την εξίσωση του *Poisson* στο $\Omega = (0, 1)^2$, (βλ. Σχήμα 6.1). Αναζητάμε την λύση $u(x) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία ικανοποιεί το πρόβλημα,

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{στο } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ u = 0, & \text{στο } \partial\Omega, \end{cases} \quad (6.1.1)$$

για δοσμένη εκ των προτέρων $f \in L_2(\Omega)$. Για την λύση u του προβλήματος (6.1.1) γνωρίζουμε ότι $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, συνεπώς θα ισχύουν οι εκ των προτέρων εκτιμήσεις σφάλματος (3.1.10) και (3.1.18) για την λύση u_h των γραμμικών τριγωνικών πεπερασμένων στοιχείων.



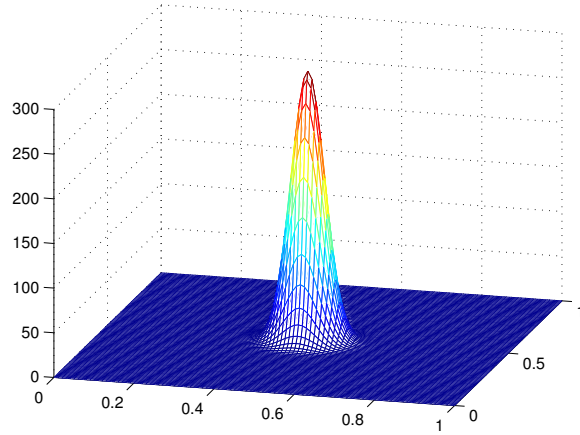
Σχήμα 6.1: Το χωρίο Ω .

6.1.1 Παράδειγμα 6.1.1

Έστω $f =: -\Delta u$ τέτοια ώστε η λύση του προβλήματος (6.1.1) να είναι η

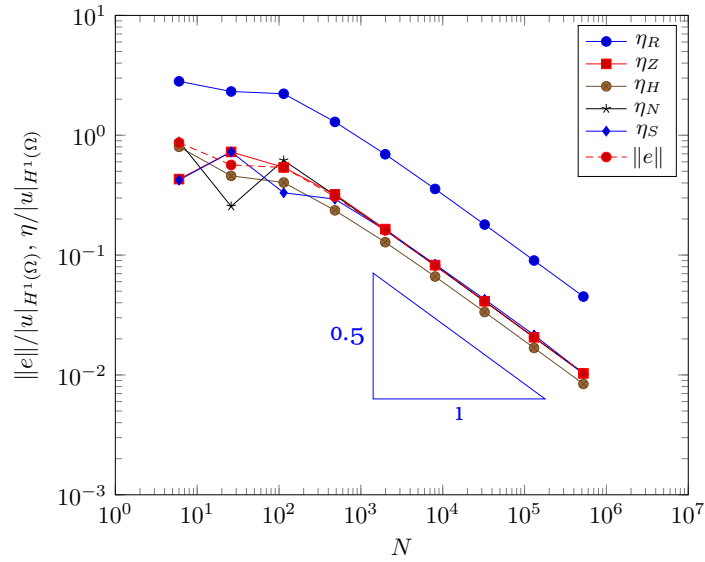
$$u(x, y) = \alpha e^{-\alpha r^2}, \quad x, y \in \Omega, \quad \alpha = 300. \quad (6.1.2)$$

Είναι εύκολο να παρατηρήσουμε ότι για την u , η οποία δίδεται από την (6.1.2), θα ισχύει ότι $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.



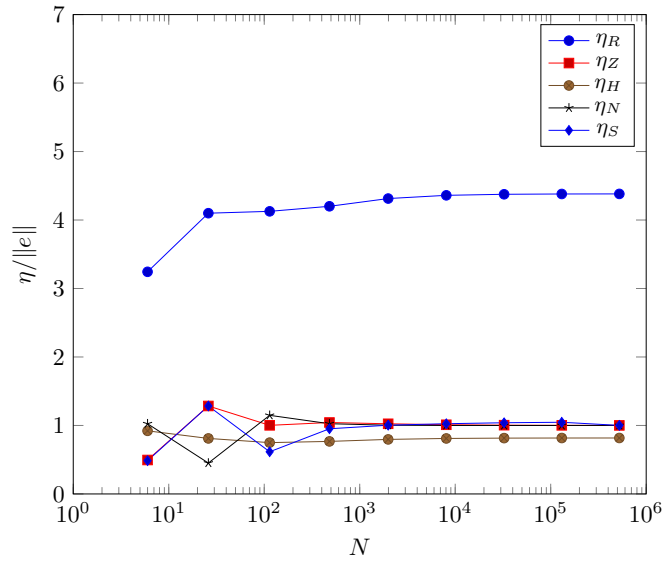
Σχήμα 6.2: Η ακριβής λύση του παραδείγματος 6.1.1.

Έστω μια ακολουθία ήμι-ομοιόμορφων τριγωνισμών $\{\mathcal{P}^{(k)}\}$, $k = 0, 1, 2, \dots$ του Ω . Για κάθε τρίγωνο $K \in \mathcal{P}^{(k)}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, υπολογίζουμε τους εκ των υστέρων εκτιμητές $\eta_{R,K}^{(k)}, \eta_{H,K}^{(k)}, \eta_{N,K}^{(k)}, \eta_{Z,K}^{(k)}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, όπως ορίζονται στις (4.2.52), (4.3.32), (4.4.65) και (4.5.12), αντίστοιχα, για τον αντίστοιχο τριγωνισμό. Επίσης υπολογίζουμε και τον εκτιμητή $\eta_{S,z}^{(k)}$ που ορίζεται στην (4.4.5), για κάθε $z \in \mathcal{V}_h$. Επιπλέον, σε κάθε τρίγωνο $K \in \mathcal{P}^{(k)}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, υπολογίζουμε την νόρμα ενέργειας του πραγματικού σφάλματος της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων $e_k = u - u^{(k)}$, $k = 0, 1, 2, \dots$ για τον αντίστοιχο τριγωνισμό, την $\|e\| := |e|_{H^1(K)} = \|\nabla e\|_{L_2(K)}$.



Σχήμα 6.3: Σχετικό σφάλμα και εκτιμητές σφάλματος για ομοιόμορφη εκλέπτυνση.

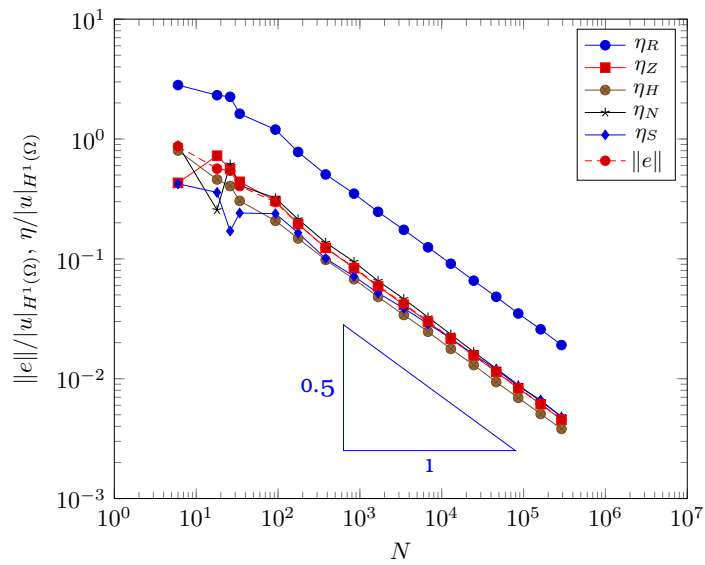
Γνωρίζουμε ότι μια δεδομένη κλίση $-a/2$ στις δυο διαστάσεις, αντιστοιχεί στην πειραματική τάξη σύγκλισης a , δηλαδή $h^a \propto N^{-a/2}$. Συνεπώς, στο Σχήμα 6.3, παρατηρούμε μια σταθερή κλίση περίπου $-1/2$ η οποία αντιστοιχεί στην πειραματική τάξη σύγκλισης $\alpha = 1$. Επίσης, αυτό μπορεί να φανεί και από το Σχήμα 6.4, στο οποίο παρουσιάζεται ο δείκτης



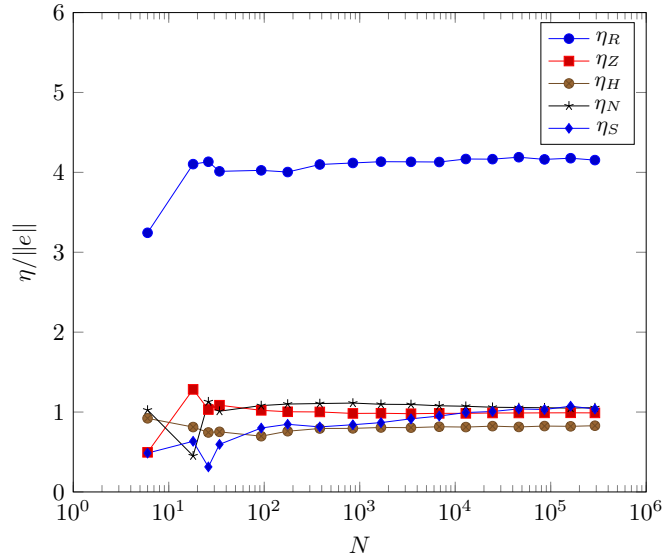
Σχήμα 6.4: Δείκτης αποτελεσματικότητας εκ των υστέρων εκτιμητών για ομοιόμορφη εκλέπτιση.

αποτελεσματικότητας του κάθε εκ των υστέρων εκτιμητή.

Στην συνέχεια, θεωρούμε τον Αλγόριθμο $A_{1/2}$, όπου το μαρκάρισμα των τριγώνων γίνεται με τον εκτιμητή η_Z , ο οποίος, ορίζεται στην (4.5.12).

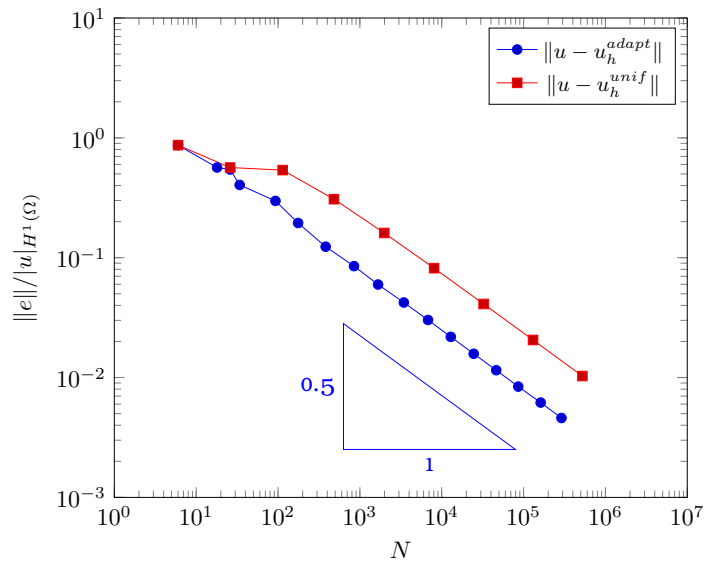


Σχήμα 6.5: Σχετικό σφάλμα και εκτιμητές σφάλματος για τον Αλγόριθμο $A_{1/2}$.

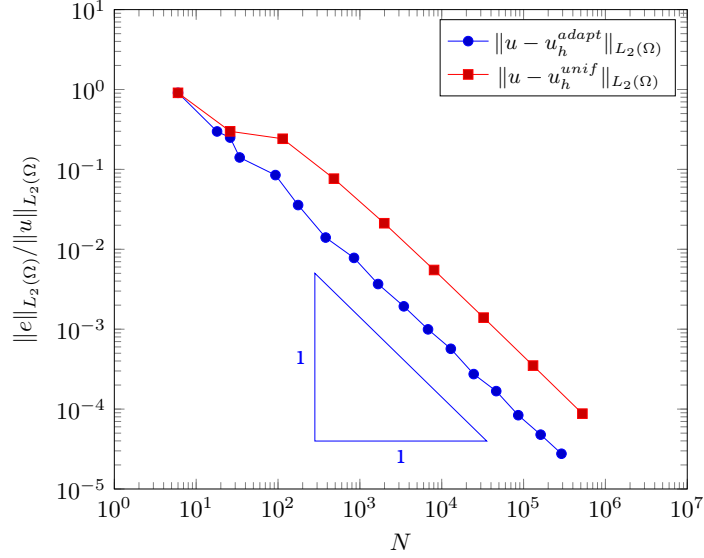


Σχήμα 6.6: Δείκτης αποτελεσματικότητας εκ των υστέρων εκτιμητών για τον Αλγόριθμο $A_{1/2}$.

Αφού η λύση $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, και στην προηγούμενη περίπτωση, αλλά και σε αυτήν, ο ρυθμός σύγκλισης ως προς την νόρμα ενέργειας ήταν, ένα. Βέβαια, μπορεί ο προσαρμοζόμενος αλγόριθμος, να μην οδήγησε σε περαιτέρω βελτίωση του ρυθμού σύγκλισης, αλλά όπως θα φαίνεται και από τα παρακάτω γραφήματα, οδήγησε σε μείωση του σχετικού σφάλματος ως προς την νόρμα ενέργειας, αλλά και ως προς την L_2 νόρμα.



Σχήμα 6.7: Σύγκριση σχετικού σφάλματος ως προς την νόρμα ενέργειας, ανάμεσα στον ομοιόμορφο και προσαρμοζόμενο τριγωνισμό.



Σχήμα 6.8: Σύγκριση σχετικού σφάλματος ως προς την L_2 νόρμα, ανάμεσα στον ομοιόμορφο και προσαρμοζόμενο τριγωνισμό.

6.1.2 Παράδειγμα 6.1.2

Θεωρούμε το ελλειπτικό πρόβλημα για την εξίσωση του *Poisson* στο $\Omega = (0, 1)^2$, (βλ. Σχήμα 6.1). Αναζητάμε την λύση $u(x) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία ικανοποιεί το πρόβλημα,

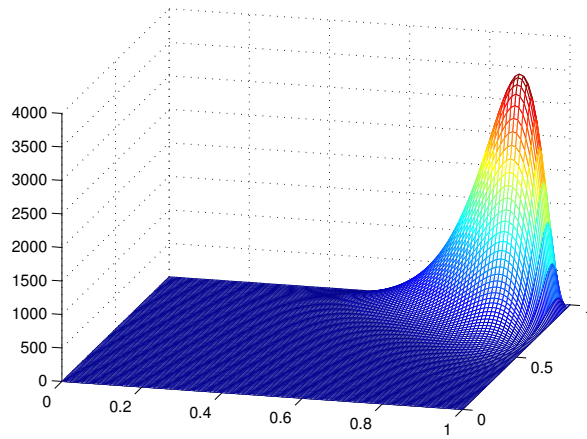
$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{στο } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ u = 0, & \text{στο } \Gamma_D, \\ \nabla n \cdot u = 0, & \text{στο } \Gamma_N. \end{cases} \quad (6.1.3)$$

για δοσμένη εκ των προτέρων $f \in L_2(\Omega)$ και $\Gamma_D = \{(x, y) : 0 < x < 1, y = 0\}$. Έστω $f =: -\Delta u$ τέτοια ώστε η λύση του προβλήματος (6.1.1) να είναι η

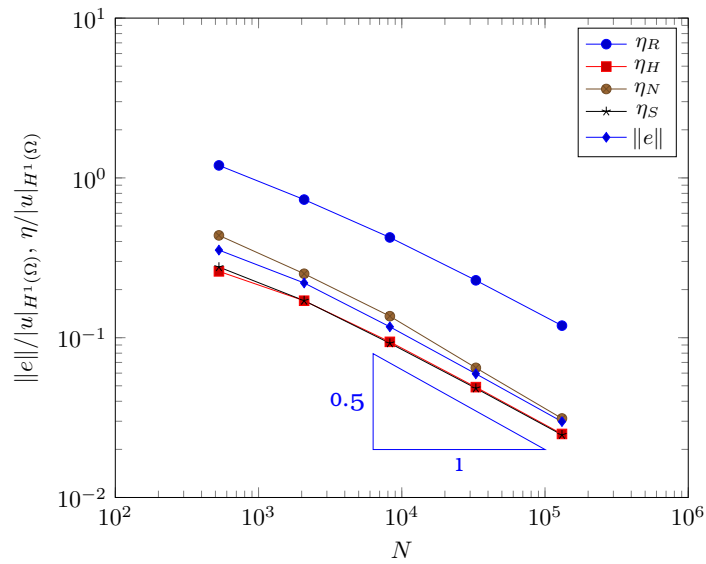
$$u(x, y) = 5x^2(1-x)^2(e^{10x^2} - 1)y^2(1-y)^2(e^{10y^2} - 1), \quad x, y \in \Omega, \quad (6.1.4)$$

Είναι εύκολο να παρατηρήσουμε ότι για την u , η οποία δίδεται από την (6.1.4), θα ισχύει ότι $u \in H^2(\Omega) \cap H_D^1(\Omega)$, με $H_D^1 = \{v \in H^1, v = 0 \text{ στο } \Gamma_D\}$.

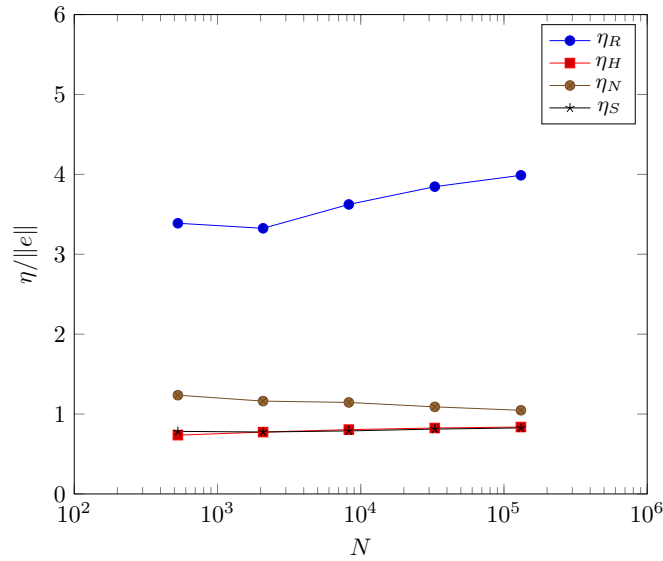
Έστω μια ακολουθία ήμι-ομοιόμορφων τριγωνισμών $\{\mathcal{P}^{(k)}\}$, $k = 0, 1, 2, \dots$ του Ω . Για κάθε τρίγωνο $K \in \mathcal{P}^{(k)}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, υπολογίζουμε τους εκ των υστέρων εκτιμητές $\eta_{R,K}^{(k)}, \eta_{H,K}^{(k)}, \eta_{N,K}^{(k)}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, όπως ορίζονται στις (4.2.52), (4.3.32), και (4.4.65), αντίστοιχα, για τον αντίστοιχο τριγωνισμό. Επίσης υπολογίζουμε και τον εκτιμητή $\eta_{S,z}^{(k)}$ που ορίζεται στην (4.4.5), για κάθε $z \in \mathcal{V}_h$. Επιπλέον, σε κάθε τρίγωνο $K \in \mathcal{P}^{(k)}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, υπολογίζουμε την νόρμα ενέργειας του πραγματικού σφάλματος της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων $e_k = u - u^{(k)}$, $k = 0, 1, 2, \dots$ για τον αντίστοιχο τριγωνισμό, την $\|e\| := |e|_{H^1(K)} = \|\nabla e\|_{L_2(K)}$.



Σχήμα 6.9: Η ακριβής λύση του παραδείγματος 6.1.2.



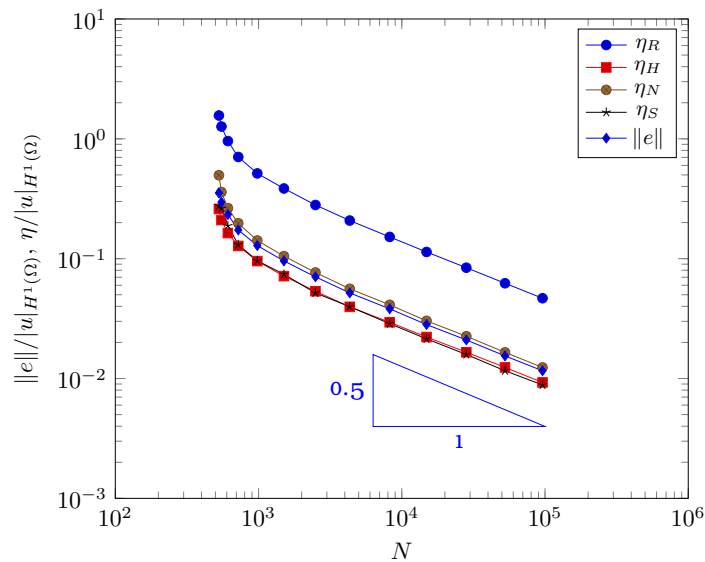
Σχήμα 6.10: Σχετικό σφάλμα και εκτιμητές σφάλματος για ομοιόμορφη εκλέπτυνση.



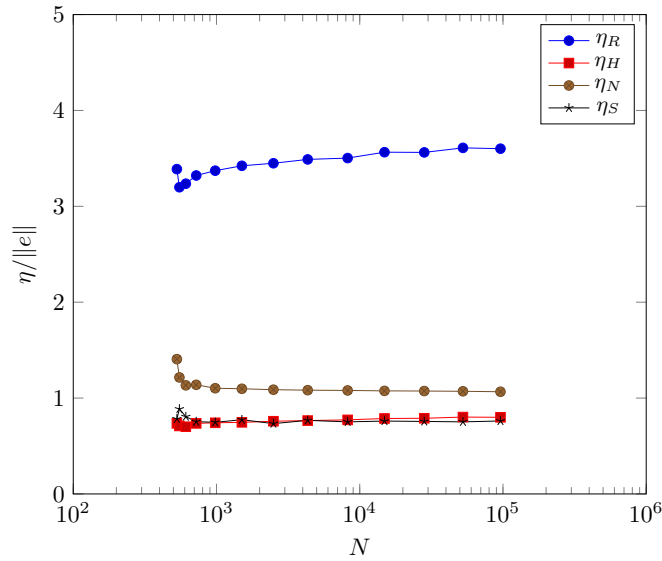
Σχήμα 6.11: Δείκτης αποτελεσματικότητας εκ των υστέρων εκτιμητών για ομοιόμορφη εκλέπτυνση.

Στο Σχήμα 6.10, παρατηρούμε μια σταθερή κλίση περίπου $-1/2$ η οποία αντιστοιχεί στην πειραματική τάξη σύγκλισης $\alpha = 1$. Επίσης, αυτό μπορεί να φανεί και από το Σχήμα 6.11, στο οποίο παρουσιάζεται ο δείκτης αποτελεσματικότητας του κάθε εκ των υστέρων εκτιμητή.

Στην συνέχεια, θεωρούμε τον Αλγόριθμο $A_{1/2}$, όπου το μαρκάρισμα των τριγώνων γίνεται με τον εκτιμητή η_N , ο οποίος, ορίζεται στην (4.4.65).

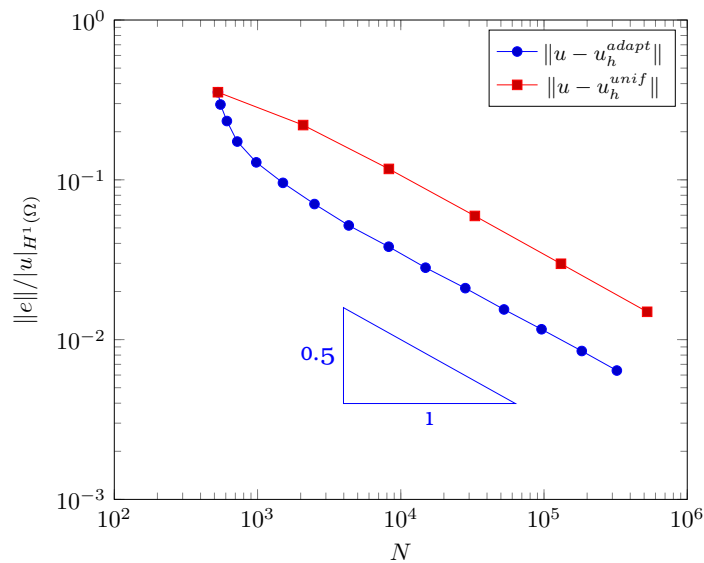


Σχήμα 6.12: Σχετικό σφάλμα και εκτιμητές σφάλματος για τον Αλγόριθμο $A_{1/2}$.

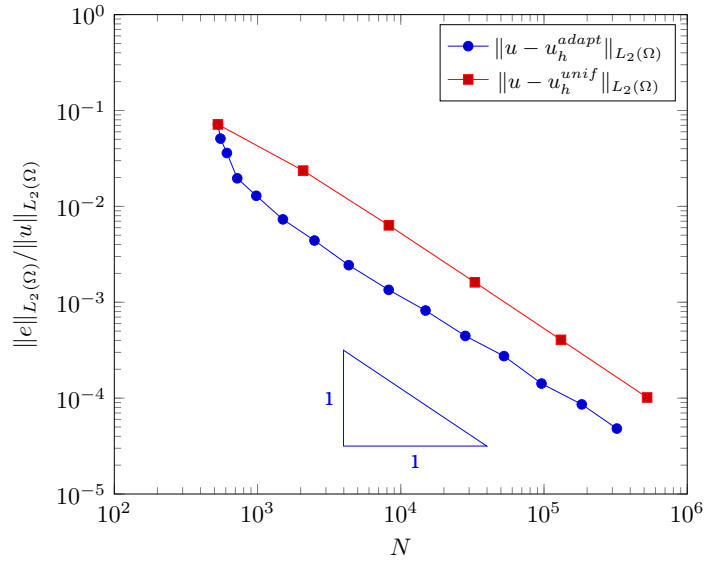


Σχήμα 6.13: Δείκτης αποτελεσματικότητας εκ των υστέρων εκτιμητών για τον Αλγόριθμο $A_{1/2}$.

Αφού η λύση $u \in H^2(\Omega) \cap H_D^1(\Omega)$, και στην προηγούμενη περίπτωση, αλλά και σε αυτήν, ο ρυθμός σύγκλισης ως προς την νόρμα ενέργειας ήταν, ένα. Βέβαια, μπορεί ο προσαρμοζόμενος αλγόριθμος, να μην οδήγησε σε περαιτέρω βελτίωση του ρυθμού σύγκλισης, αλλά όπως θα φαίνεται και από τα παρακάτω γραφήματα, οδήγησε σε μείωση του σχετικού σφάλματος ως προς την νόρμα ενέργειας, αλλά και ως προς την L_2 νόρμα.



Σχήμα 6.14: Σύγκριση σχετικού σφάλματος ως προς την νόρμα ενέργειας, ανάμεσα στον ομοιόμορφο και προσαρμοζόμενο τριγωνισμό.



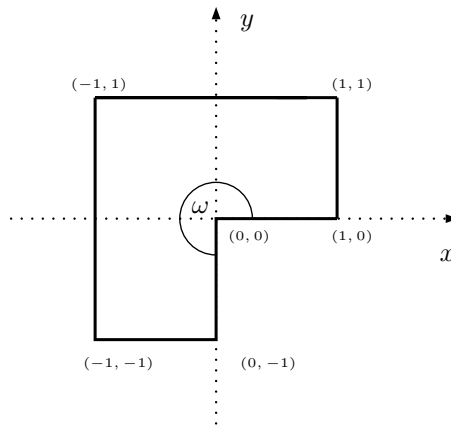
Σχήμα 6.15: Σύγκριση σχετικού σφάλματος ως προς την L_2 νόρμα, ανάμεσα στον ομοιόμορφο και προσαρμοζόμενο τριγωνισμό.

6.2 Μη κυρτά χωρία

Θεωρούμε το πρόβλημα *Dirichlet* για την εξίσωση *Poisson* στον Γ -διαμορφωμένο τομέα (βλ. Σχήμα 6.16), $\Omega = (-1, 1)^2 \setminus ([0, 1] \times [-1, 0])$. Αναζητάμε την λύση $u(x) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία ικανοποιεί το παρακάτω πρόβλημα συνοριακών τιμών στο Ω ,

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{στο } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ u = 0, & \text{στο } \partial\Omega, \end{cases} \quad (6.2.1)$$

για δοσμένη εκ των προτέρων $f \in L_2(\Omega)$.



Σχήμα 6.16: Γ -διαμορφωμένος τομέας.

Το χωρίο Ω έχει την εσωτερική γωνία $\omega = 3\pi/2$, τότε η λύση u του (6.2.1) θα είναι ιδιόμορφη σε μια περιοχή κοντά στην εσωτερική γωνία ω και $u \notin H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Συνεπώς, δεν θα ισχύουν οι εκ των προτέρων εκτιμήσεις σφάλματος (3.1.10) και (3.1.18) για την λύση u_h των γραμμικών

τριγωνικών πεπερασμένων στοιχείων η οποία αντιστοιχεί σε ήμι-ομοιόμορφο τριγωνισμό \mathcal{P}_h μήκους h . Σύμφωνα με την ενότητα 5.8, και τις εκτιμήσεις (5.8.7), (5.8.8), θα έχουμε,

$$\|u - u_h\| \leq C_\epsilon h^{2/3-\epsilon} \|f\|_{L_2(\Omega)}, \quad (6.2.2)$$

$$\|u - u_h\|_{L_2(\Omega)} \leq C_\epsilon h^{4/3-\epsilon} \|f\|_{L_2(\Omega)}, \quad (6.2.3)$$

με τις παραπάνω σταθερές να εξαρτώνται από το ϵ , για μια ακολουθία ομοιόμορφων τριγωνισμών $\{\mathcal{P}^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$, ξεκινώντας από τον $\mathcal{P}^{(0)}$ ο οποίος ικανοποιεί την συνθήκη κανονικότητας (βλ. Ορισμός 3.2).

6.2.1 Παράδειγμα 6.2.1

Θεωρούμε το πρόβλημα *Dirichlet* για την εξίσωση *Laplace* στον Γ - διαμορφωμένο τομέα (βλ. Σχήμα 6.16), $\Omega = (-1, 1)^2 \setminus ([0, 1] \times [-1, 0])$. Αναζητάμε την λύση $u(x) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία ικανοποιεί το παρακάτω πρόβλημα συνοριακών τιμών στο Ω ,

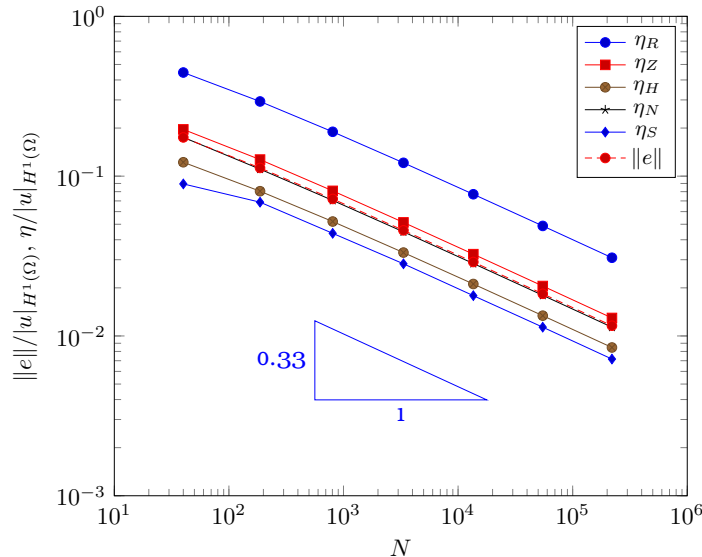
$$\begin{cases} -\Delta u = 0, & \text{στο } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ u = g, & \text{στο } \partial\Omega, \end{cases} \quad (6.2.4)$$

με την συνάρτηση g να είναι τέτοια ώστε η ακριβής λύση του (6.2.4) να δίδεται σε πολικές συντεταγμένες ως,

$$u(r, \theta) = r^{2/3} \sin(2\theta/3), \quad (6.2.5)$$

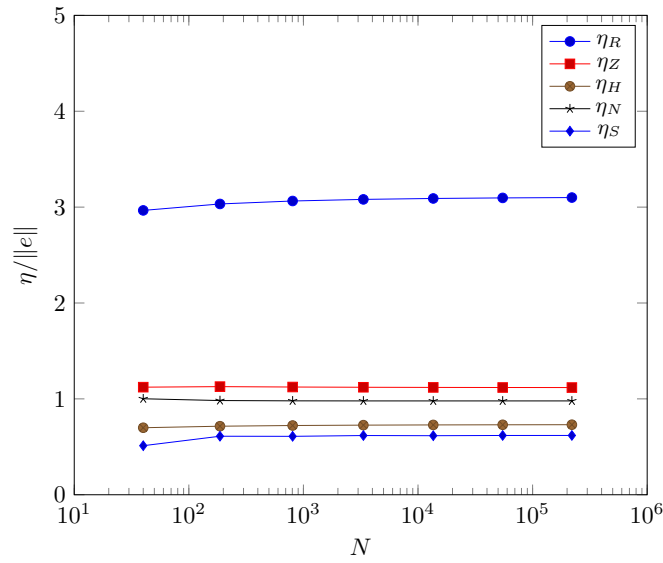
όπου $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ και $\theta = \arctan(y/x)$. Ανάλογα με την εξίσωση (6.2.1) στον Γ - διαμορφωμένο τομέα, μπορούμε να αποδείξουμε ότι η λύση u της (6.2.4) δεν θα ανήκει στον $H^2(\Omega)$, δηλαδή $u \notin H^2(\Omega)$, και ως εκ τούτου δεν θα ισχύουν οι εκτιμήσεις σφάλματος (3.1.10), (3.1.18).

Για να εκτιμήσουμε τον ρυθμό σύγκλισης του σφάλματος της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων ως προς την νόρμα ενέργειας, αρχικά θεωρούμε μια ακολουθία $\mathcal{P}^{(k)}$, $k = 0, 1, \dots$ ομοιόμορφων τριγωνισμών του Ω , που ικανοποιούν την συνθήκη κανονικότητας (βλ. Ορισμός 3.2) με αρχικό τριγωνισμό $\mathcal{P}^{(0)}$. Έστω $u^{(k)}$, $k = 0, 1, \dots$ οι λύσεις των πεπερασμένων στοιχείων στους αντίστοιχους υπόχωρους πεπερασμένης διάστασης $X^{(k)}$, $k = 0, 1, \dots$ που αντιστοιχούν στους τριγωνισμούς $\mathcal{P}^{(k)}$, $k = 0, 1, \dots$.



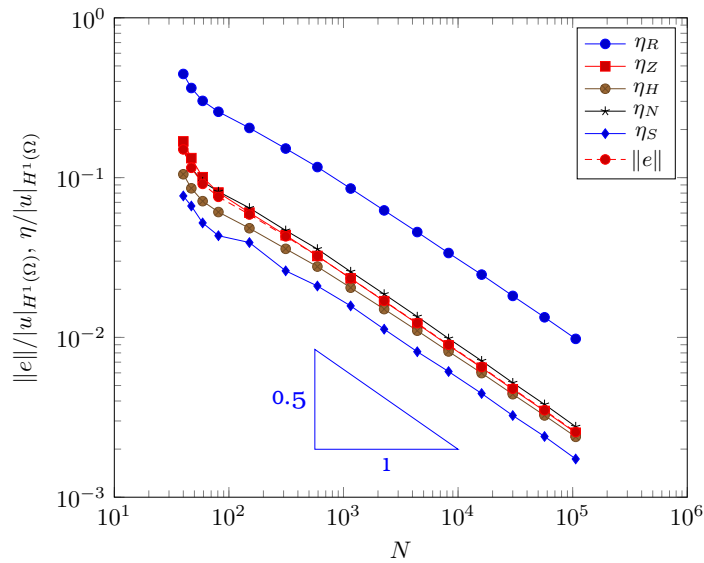
Σχήμα 6.17: Σχετικό σφάλμα και εκ των υστέρων εκτιμητές για μια ακολουθία ομοιόμορφων τριγωνισμών, για το παράδειγμα 6.2.1.

Αφού το χωρίο Ω έχει εσωτερική γωνία $\omega = 3\pi/2$, τότε η θεωρητική εκτίμηση $2/3$ από την (6.2.2), κάτι το οποίο επαληθεύεται στο Σχήμα 6.17.

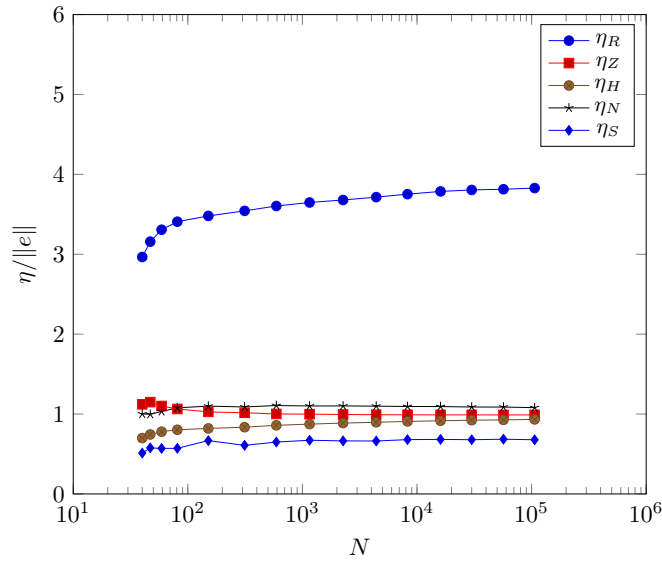


Σχήμα 6.18: Δείκτες αποτελεσματικότητας για μια ακολουθία ομοιόμορφων τριγωνισμών.

Στην συνέχεια, θεωρούμε τον Αλγόριθμο $A_{1/2}$, όπου το μαρκάρισμα των τριγώνων γίνεται με τον εκτιμητή η_Z , ο οποίος, ορίζεται στην (4.5.12).

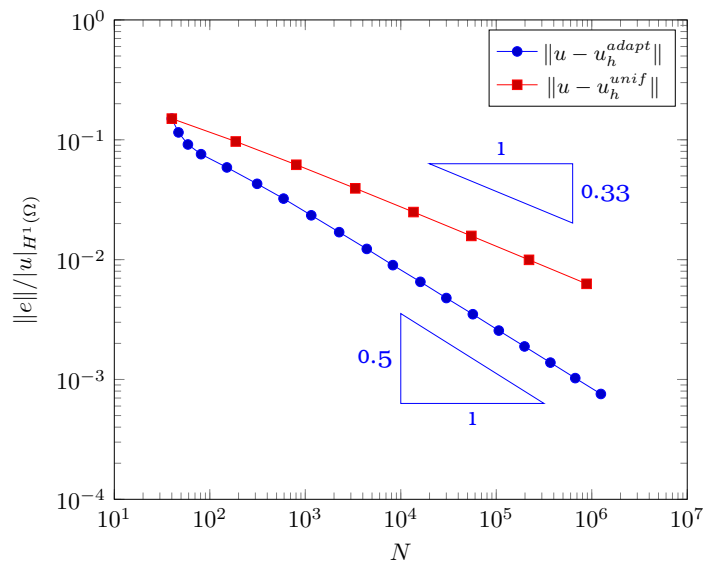


Σχήμα 6.19: Σχετικό σφάλμα και εκτιμητές σφάλματος για τον Αλγόριθμο $A_{1/2}$.

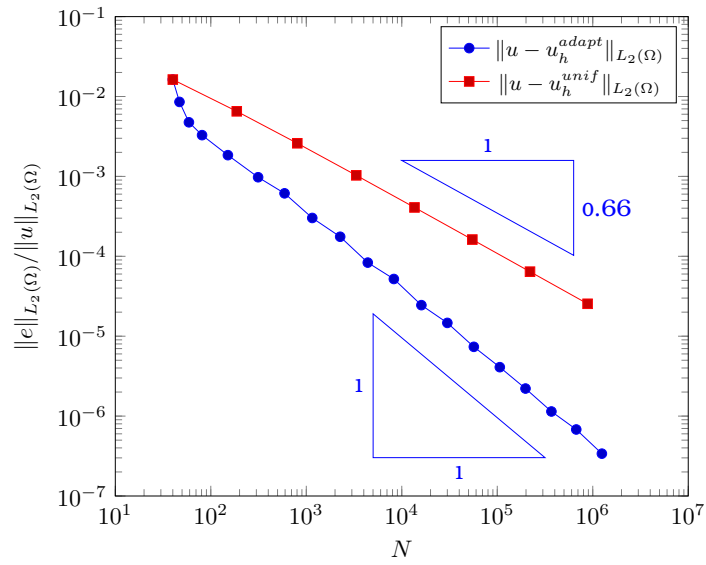


Σχήμα 6.20: Δείκτης αποτελεσματικότητας εκ των υστέρων εκτιμητών για τον Αλγόριθμο $A_{1/2}$.

Από το Σχήμα 6.19, παρατηρούμε ότι ο Αλγόριθμος $A_{1/2}$ βελτίωσε τον ρυθμό σύγκλισης σε ένα από $2/3$. Αυτή η βελτίωση του ρυθμού σύγκλισης ως προς την νόρμα ενέργειας, αλλά και ως προς την L_2 νόρμα - παρότι ο προσαρμοζόμενος αλγόριθμος, δεν εκτιμά το σφάλμα στην L_2 νόρμα-, αντικατοπτρίζεται στα παρακάτω σχήματα.



Σχήμα 6.21: Σύγκριση σχετικού σφάλματος ως προς την νόρμα ενέργειας, ανάμεσα στον ομοιόμορφο και προσαρμοζόμενο τριγωνισμό.



Σχήμα 6.22: Σύγκριση σχετικού σφάλματος ως προς την L_2 νόρμα, ανάμεσα στον ομοιόμορφο και προσαρμοζόμενο τριγωνισμό.

Βιβλιογραφία

- [1] R.A.Adams, J.J.Fournier *Sobolev Spaces*, 2nd edition, Academic Press, New York 2003.
- [2] M.Ainsworth, J.T.Oden, *A Posteriori Error Estimation in Finite Element Analysis*, Wiley, New York, 2000.
- [3] K. Atkinson, W. Han, *Theoretical Numerical Analysis, A Functional Analysis Framework*, Springer, 2001.
- [4] Γ.Δ.Ακριβής *Μέθοδοι Πεπερασμένων Στοιχείων*, Πανεπιστημιακές Σημειώσεις, Λευκωσία 2005.
- [5] R.E.Bank, R.K.Smith *A Posteriori Error Estimates Based On Hierarchical Bases*, SIAM J. Numer. Anal, 28 (1991), pp. 591-623.
- [6] S. C. Brenner *Multigrid Method for the Computation of Singular Solutions and Stress Intensity Factors I: Corner Singularities*, Math. Comp., 68 (1999), pp. 559-583.
- [7] S. C. Brenner, L. R. Scott *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*, 2nd edition, Springer, 2002.
- [8] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2011.
- [9] J. M. Cascón, C. Kreuzer, R. H. Nochetto, and K. G. Siebert, *Quasi-optimal convergence rate for an adaptive finite element method*, SIAM J. Numer. Anal., 46(5):2524-2550, 2008.
- [10] P.G. Ciarlet, *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North-Holland, 1978.
- [11] V.A.Dougalis, *Finite Element Methods For The Numerical Solution Of Partial Differential Equations*, Athens, 2013.
- [12] L.C.Evans, *Partial Differential Equations*, volume 19 of Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
- [13] P.Grisvard, *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*, Pitman, Boston, 1985.
- [14] R.Rodriguez, *Some Remarks on Zienkiewicz-Zhu Estimator*, Int. J. Numer. Meth. in PDE, 1994.
- [15] R.Verfürth, *A Review of A Posteriori Error Estimation and Adaptive Mesh-Refinement Techniques*, Wiley-Teubner Series Advances in Numerical Mathematics. John Wiley and Sons, B. G. Teubner, Chichester, Stuttgart, 1996.